Geisteswelt

verständlicher Darstellungen

R. Neuendorff

Praktische Mathematik

I

Graphisches und numerisches Rechnen

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Die Sammlung
„Aus Natur und Geisteswelt"

verdankt ihr Entstehen dem Wunsche, an der Erfüllung einer bedeutsamen sozialen Aufgabe mitzuwirken. Sie soll an ihrem Teil der unserer Kultur aus der Scheidung in Kasten drohenden Gefahr begegnen helfen, soll dem Gelehrten es ermöglichen, sich an weitere Kreise zu wenden, und dem materiell arbeitenden Menschen Gelegenheit bieten, mit den geistigen Errungenschaften in Fühlung zu bleiben. Der Gefahr, der Halbbildung zu dienen, begegnet sie, indem sie nicht in der Vorführung einer Fülle von Lehrstoff und Lehrsätzen oder etwa gar unerwiesenen Hypothesen ihre Aufgabe sucht, sondern darin, dem Leser Verständnis dafür zu vermitteln, wie die moderne Wissenschaft es erreicht hat, über wichtige Fragen von allgemeinstem Interesse Licht zu verbreiten, und ihn dadurch zu einem selbständigen Urteil über den Grad der Zuverlässigkeit jener Antworten zu befähigen.

Es ist gewiß durchaus unmöglich und unnötig, daß alle Welt sich mit geschichtlichen, naturwissenschaftlichen und philosophischen Studien befasse. Es kommt nur darauf an, daß jeder an einem Punkte die Freiheit und Selbständigkeit des geistigen Lebens gewinnt. In diesem Sinne bieten die einzelnen, in sich abgeschlossenen Schriften eine Einführung in die einzelnen Gebiete in voller Anschaulichkeit und lebendiger Frische.

In den Dienst dieser mit der Sammlung verfolgten Aufgaben haben sich denn auch in dankenswertester Weise von Anfang an die besten Namen gestellt. Andererseits hat dem der Erfolg entsprochen (Absatz bis 1. I. 1914 ca. 2 Millionen Exemplare), so daß viele (ca. 150) der Bändchen bereits in 2.—6. Auflage vorliegen. Damit sie stets auf die Höhe der Forschung gebracht werden können, sind die Bändchen nicht, wie die anderer Sammlungen, stereotypiert, sondern werden — was freilich die Aufwendungen sehr wesentlich erhöht — bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet und völlig neu gesetzt.

So sind denn die schmucken, gehaltvollen Bände durchaus geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen kleinen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden. Durch den billigen Preis ermöglichen sie es tatsächlich jedem, auch dem wenig Begüterten, sich eine kleine Bibliothek zu schaffen, die das für ihn Wertvollste „Aus Natur und Geisteswelt" vereinigt.

Die meist reich illustrierten Bändchen sind

... lich

Werke, die ... nem Band geb.

Jedes Bänd... unden M. 1.25

Leipzig ... . Teubner

Mathematik. Astronomie.

Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. 2 Bde. Mit zahlr. Fig. (Bd. 120, 205, auch in 1 Bd. geb.)
I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 2. Aufl. Mit 9 Fig. (Bd. 120.)
II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 3. Aufl. Mit 23 Fig. (Bd. 205.)

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 99 Fig. (Bd. 340.)

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 50 Fig. (Bd. 431.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 2. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 197.)

Differential- u. Integralrechnung. Von Dr. M. Lindow. (Bd. 387.)

Die graphische Darstellung. Von Dr. F. Auerbach. Mit 100 Fig. (Bd. 437.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

Praktische Mathematik. Von Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graphisches u. numerisches Rechnen. Mit 62 Fig. u. 1 Tafel. (Bd. 341.)

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl. Mit 70 Fig. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildnissen E. Laskers und P. Morphys, 1 Schachbrettafel u. 43 Darst. von Übungsbeispielen. (Bd. 281.)

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 4. Aufl. Mit 26 Fig. (Bd. 24.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 110.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)

Probleme der modernen Astronomie. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. (Bd. 355.)

Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)

Die Sonne. Von Dr. A. Krause. Mit zahlr. Abb. (Bd. 357.)

Der Mond. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 31 Abb. (Bd. 90.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 18 Fig. (Bd. 240.)

Der Kalender. Von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)

Sprachkunde. Literaturgeschichte.

Die Sprachstämme des Erdkreises. Von weil. Prof. Dr. F. N. Finck. (Bd. 267.)
Die Haupttypen des menschlichen Sprachbaues. Von weil. Prof. Dr. F. N. Finck. (Bd. 268.)
Wie wir sprechen. Von Dr. E. Richter. (Bd. 354.)
Rhetorik. Von Dr. E. Geißler. 2 Bde.
Bd. I: Richtlinien für die Kunst des Sprechens. 2. Aufl. (Bd. 455.)
Bd. II: Anweisungen zur Kunst der Rede. (Bd. 456.)
Poetik. Von Dr. R. Müller-Freienfels. (Bd. 460.)
Die deutschen Personennamen. Von Direkt. A. Bähnisch. (Bd. 296.)

Germanische Mythologie. Von Prof. Dr. J. v. Negelein. (Bd. 95.)
Die deutsche Volkssage. Von Dr. O. Böckel. (Bd. 262.)
Das deutsche Volkslied. Über Wesen und Werden des deutschen Volksgesanges. Von Dr. J. W. Bruinier. 5. Aufl. (Bd. 7.)
Minnesang. Die Liebe im Liede des deutschen Mittelalters. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd. 404.)
Geschichte der deutschen Lyrik seit Claudius. Von Dr. H. Spiero. (Bd. 254.)
Das Drama. Von Dr. B. Busse. Mit Abb. 2 Bde. (auch in 1 Bd. geb.)
Bd. I: Von der Antike zum französischen Klassizismus. (Bd. 287.)
Bd. II: Von Versailles bis Weimar. (Bd. 288.)
Shakespeare und seine Zeit. Von Prof. Dr. E. Sieper. Mit 3 Abb. 2. Aufl. (Bd. 185.)
Lessing. Von Dr. Ch. Schrempf. Mit 1 Bildnis Lessings. (Bd. 403.)
Schiller. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. Mit 1 Bildnis Schillers. 2. Aufl. (Bd. 74.)
Das deutsche Drama des 19. Jahrhunderts. In seiner Entwicklung dargestellt von Prof. Dr. G. Witkowski. 4. Aufl. Mit 1 Bildnis Hebbels. (Bd. 51.)
Friedrich Hebbel. Von Prof. Dr. O. Walzel. Mit 1 Bildnis Hebbels. (Bd. 408.)
Ibsen, Björnson u. ihre Zeitgenossen. Von weil. Prof. Dr. B. Kahle. 2. Aufl. besorgt von Dr. G. Morgenstern. Mit 7 Bildn. (Bd. 193.)
Gerhart Hauptmann. Von Prof. Dr. E. Sulger-Gebing. Mit 1 Bildnis Gerhart Hauptmanns. (Bd. 283.)
Deutsche Romantik. Von Prof. Dr. O. Walzel. 2. Aufl. (Bd. 232.)
Geschichte der deutschen Frauendichtung seit 1800. Von Dr. H. Spiero. (Bd. 300.)
Der französische Roman und die Novelle. Von O. Flake. (Bd. 377.)
Die französische Prosa (ausschl. des Romans). Von Prof. Dr. A. Becker. 2 Bde. (Bd. 438, 439, auch in 1 Bd. geb.)
Das Theater. Schauspielhaus und Schauspielkunst vom griechischen Altertum bis auf die Gegenwart. Von Dr. Chr. Gaehde. Mit 18 Abb. 2. Aufl. (Bd. 230.)

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen
341. Bändchen

Praktische Mathematik

I. Teil
Graphisches und numerisches Rechnen

Von
Dr. R. Neuendorff

Mit 69 Figuren im Text und einer Tafel

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig 1911

Vorwort.

Die Anforderungen, die in den verschiedensten Berufen an das mathematische Wissen eines jeden gestellt werden, wachsen von Jahr zu Jahr. Unsere Schulen sind, altüberlieferte Methoden sorgfältig bis zu hoher Vollkommenheit ausbildend und weiterbildend, an diesen neuen Forderungen lange achtlos vorübergegangen. Noch heute stehen viele draußen in das praktische Leben eintretend jenen Aufgaben hilflos gegenüber, weil sie nicht einmal das Rüstzeug zu ihrer Lösung mitbekommen haben. Die Erkenntnis von der weltfremden Richtung unseres mathematischen Unterrichts hat sich Bahn gebrochen; überall regen sich die Kräfte, um den Unterricht dem wirklichen Leben anzupassen.

Im folgenden Büchlein sind Volkshochschulkurse, die ich hier in Kiel gehalten habe, abgedruckt. Der Zweck der Vorträge war, die zur Lösung wichtiger praktischer Aufgaben vorhandenen mathematischen Hilfsmittel und ihre Verwendung zu erklären. Dabei habe ich abgesehen von Dingen, die nur in einzelnen Wissenszweigen eine Rolle spielen, zumal wenn zu ihrem Verständnis höhere mathematische Kenntnisse erforderlich sind. Ich bin mir wohl bewußt, daß man über die Auswahl des Vorzutragenden sehr verschiedener Meinung sein kann, und hoffe nur, im ganzen das Richtige getroffen zu haben.

Hervorheben möchte ich, daß mein Buch kein Lehrbuch sein soll, das über jede Einzelheit genaue Auskunft gibt. Die Darstellung ist zumeist nur so beabsichtigt, daß soviel vorgetragen wird, um zu zeigen, was ein Apparat und eine Methode zu leisten vermögen, und wie sie es leisten.

Alle Darstellungen sind durchaus elementar gehalten, erfordern daher keinerlei mathematische Vorkenntnisse.

Von Literaturangaben glaubte ich absehen zu können, da ich nichts Neues vortrage, das nicht schon an den verschiedensten Orten verstreut zu finden wäre. Umso eher konnte ich davon absehen, als eine vollständige Literaturangabe über fast alle Teile meiner Vorträge zu finden ist in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften I. 2. R. Mehmke, Numerisches Rechnen.

Von Büchern, die ein ähnliches Ziel verfolgen, wie das meinige, ist mir eins bekannt geworden: J. Perry, Praktische Mathematik. Deutsch von Lenke. Wien 1903.

Das Buch berücksichtigt einseitig die Bedürfnisse des Technikers. In der Hand des Lehrenden kann es bei der prächtigen Fülle anregender, neuer Gedanken viel Gutes wirken. Aber dem Anfänger, namentlich wenn er keine mathematischen Vorkenntnisse mitbringt, dürfte es arg den Kopf verwirren. Zudem ist die Darstellung nicht immer einwandsfrei, so daß das Buch nicht ohne kritische Sichtung gebraucht werden darf.

Möge mein Büchlein zur Benutzung der vorgeführten Methoden und Apparate anregen und damit der Mathematik neue Freunde gewinnen.

Ein zweiter Teil soll hauptsächlich Anwendungen geometrischer Methoden im praktischen Leben bringen.

Kiel, März 1910.

R. Neuendorff
Oberlehrer a. d. Kgl. höh. Schiff- und Maschinenbauschule.
Privatdozent a. d. Universität.

Inhaltsverzeichnis.

I. Vortrag.

Graphische Darstellungen.

Ein deutlich wahrnehmbarer Zug moderner Entwicklung ist das unaufhaltsame Vordringen der Mathematik ins tägliche Leben hinein. Immer mehr mathematische Theorien werden dem allgemeinen Gebrauch nutzbar gemacht; ich erinnere an Rechenschieber, Rechenmaschinen, das Zeichnen von Diagrammen u. s. f. Während dadurch die Mathematik dauernd neue Freunde gewinnt, wächst bei andern das Mißtrauen gegenüber diesen unverständlichen Apparaten, Worten und Gedankengängen. Ich will daher in den folgenden Vorträgen versuchen, Ihnen die einfachen Grundlagen einer Reihe mathematischer Anwendungen, die Ihnen im täglichen oder beruflichen Leben nützlich werden können, zu vermitteln.

1. Der Begriff der Funktion. Ich beginne mit einem Begriff, der schon in den allgemeinen Sprachgebrauch übergegangen ist: mit dem Funktionsbegriff.

Denken Sie sich einmal, Sie hätten an einem Sommermorgen um acht Uhr beginnend stündlich die Temperatur an Ihrem Thermometer abgelesen und sorgfältig, wie in nebenstehender Tabelle, aufgeschrieben.

Zeit	Temperatur
8 Uhr	13°
9 „	16°
10 „	18°
11 „	19°
12 „	20°
1 „	21½°
2 „	22½°
3 „	22°
4 „	21½°
5 „	21°
6 „	19°
7 „	16°
8 „	15½°

Sie bemerken, daß sich die Temperatur zugleich mit der Zeit geändert hat. Es besteht also zwischen der Temperatur und der Tagesstunde ein Zusammenhang. Das drückt man in der Mathematik kurz mit den Worten aus: die Temperatur ist eine Funktion der Zeit oder ganz kurz in der mathematischen Formelsprache

$$T = F(Z),$$

wo die drei Buchstaben T, F, Z statt der Worte Temperatur, Funktion, Zeit gesetzt sind.

Also nichts anderes will man damit sagen, wenn man eine Größe die Funktion einer andern nennt, als: beide Größen stehen in einer gewissen Abhängigkeit voneinander. Ändert sich die eine, so ändert sich zugleich auch die andere.

Ein weiteres Beispiel wird Ihnen sogleich die sehr allgemeine Bedeutung des Wortes Funktion zeigen: der Eisenbahnverkehr ist eine Funktion der Jahreszeit. Gewiß! Beachten Sie doch nur, wieviel stärker der Personenverkehr im Sommer ist, als im Winter. Wie einerseits im Sommer die großen Ferien, aber andrerseits auch im Winter die Weihnachtstage hervortreten. Dagegen ist der Güterverkehr im Winter weitaus größer als im Sommer; er erreicht seinen Höhepunkt gegen Weihnachten u. s. f.

In beiden Beispielen sind die Temperatur bezw. der Eisenbahnverkehr abhängig von der Zeit, aber natürlich nicht umgekehrt. Es ist vollständig sinnlos zu erwarten, daß folglich auch die Jahreszeit eine andere werden müßte, sobald nur einmal der Eisenbahnverkehr zu- oder abnimmt.

Man nennt daher nur die Temperatur bezw. den Eisenbahnverkehr die abhängige veränderliche Größe, dahingegen die Zeit in unsern Beispielen die unabhängige veränderliche Größe.

Doch es gibt auch viele Funktionen, bei denen eine wechselseitige Abhängigkeit besteht. Ein Beispiel dafür ist das folgende: der Verbrauch eines Genußmittels ist eine Funktion des Preises, aber auch der Preis eine Funktion des Verbrauches. Je mehr nämlich von einer Ware gekauft wird, umso billiger kann sie geliefert werden; und umgekehrt je billiger eine Ware ist, umso mehr wird sie gekauft.

Bei allen Funktionen ist es zunächst ganz gleichgültig, ob man imstande ist, in jedem Falle wirklich den Wert der abhängigen Veränderlichen auszurechnen, d. h. also zugleich eine mathematische Formel aufzustellen, nach der die Berechnung möglich ist. Alle Ursachen, die z. B. die Tagestemperatur bestimmen, kann man nicht angeben und daher auch keine Formel, die die Tagestemperatur vorher zu berechnen gestattete.

In manchen Fällen kennt man sehr wohl die mathematische Form der Funktion. Ich erinnere Sie an das sogenannte Mariottesche Gesetz, das aussagt: hat man in einer Röhre ein Gas, z. B. Luft, eingeschlossen, so ändern sich Druck und Volumen des Gases in umgekehrtem Verhältnis zueinander. D. h. wird der Raum, den das Gas einnimmt, also sein Volumen, vermindert etwa auf die Hälfte, so nimmt der Druck in gleichem Maße zu, wächst folglich auf das Doppelte. Soll umgekehrt der Druck kleiner werden, so muß man das Volumen in gleichem Maße vergrößern.

Hier lautet die mathematische Formel

$$p = \frac{a}{v},$$

wo p den Druck, v das Volumen und a eine gewisse Zahl bedeutet, die bei jedem gewählten Gase und seinem Anfangszustande leicht zu berechnen ist.

Soll das Gesetz erfüllt sein, so muß während des ganzen Vorganges die Temperatur des Gases unverändert gleich bleiben.

Wenn auch unser Streben immer dahin gerichtet sein muß, die mathematische Formel zu gewinnen, die eine Funktion darstellt, so behält doch auch die Erkenntnis, daß überhaupt zwischen zwei Größen eine funktionale Beziehung besteht, ihren Wert. Es fragt sich nur, wie kann man diese Erkenntnis im praktischen Leben verwerten?

Wir haben vorhin eine Tabelle gesehen, in der die Tagestemperaturen von Stunde zu Stunde aufgeschrieben waren. Setzt man die Beobachtungen Monate und Jahre hindurch fort, so ist man imstande, tägliche, monatliche und jährliche Durchschnittszahlen für die Temperatur anzugeben. Durch Vergleich während langer Jahre kann man mit einiger Sicherheit auf die zu erwartende Temperatur im Laufe eines Monats u. s. f. schließen. Beachtet man weiter, welche Einflüsse hier und da besondere Temperaturschwankungen hervorgerufen haben, und wie groß diese Abweichungen waren, so kann man durch jahrelange Vergleiche den Wert jener Einflüsse richtig einschätzen lernen, und sobald sie wieder eintreten, im voraus auf besondere Temperaturschwankungen und ihre Größe hinweisen.

Für alle Funktionen lehrt so die Erfahrung durch geduldige, oft jahrelange Beobachtung Zahlenwerte gewinnen, die uns gestatten, Ergebnisse vorauszusagen. Der Eisenbahnbeamte wird den Eisenbahnverkehr, der Kaufmann seinen Geschäftsgewinn, der Landwirt die Größe seiner Ernte u. s. f. aus mancherlei Anzeichen im voraus annähernd richtig einschätzen können.

2. Über Tabellen von Funktionswerten. Freilich sind Tabellen nach Art der oben angegebenen unübersichtlich. Sie haben ihren unbestrittenen Wert, solange man genaue Zahlenangaben braucht. Sehr häufig interessiert nur der Vergleich der Zahlen untereinander. Man will wissen, ob die Zunahme im einen Monat größer war als im andern, ob dieselben Durchschnittswerte erreicht sind, wie im vorhergehenden Jahre und anderes. Sobald Sie aber in einer Tabelle die Ergebnisse mehrerer Jahre nebeneinander schreiben, womöglich mehrziffrige Zahlen, so werden Sie sich nicht ohne große Mühe und Übung darin zurechtfinden.

Ich gebe Ihnen hier eine interessante dreijährige Übersicht: die Anzahl der Stellungsuchenden, die auf je hundert offene Stellen kamen.

Auf je 100 offene Stellen kamen Arbeitsuchende:	1907	1908	1909
Januar	127,9	158,9	184,9
Februar	120,7	151,7	198,9
März	95,5	120,5	165,4
April	92,8	141,8	147,4
Mai	103,7	161,5	151,1
Juni.	109,5	147,2	154,4
Juli	119,7	157,6	161,0
August	107,1	153,3	146,0
September	100,5	142,6	124,1
Oktober	122,7	165,8	142,9
November	152,5	210,6	169,6
Dezember	162,6	195,2	168,9

Sie erkennen wieder, daß die Zahl der Arbeitsuchenden eine Funktion der Jahreszeit ist, aber schwerlich werden Sie aus dieser Tabelle ein klares Bild des Arbeitsmarktes in den drei Jahren gewinnen können. Gewiß lassen sich bequem einzelne Ergebnisse ablesen. Man sieht z. B. sofort, daß der April 1907 der günstigste und der November 1908 der schlimmste Monat waren. Aber eine allgemeine Übersicht erhalten Sie nicht.

Deshalb muß unser Streben darauf gerichtet sein, ein Bild, und zwar ganz wörtlich genommen, ein Bild der Funktion zu zeichnen. Man nennt das, die Funktion *graphisch darstellen*; das Bild selbst heißt ein *Diagramm* der Funktion.

3. Der Grundgedanke der graphischen Darstellung. Ich erinnere zunächst an eine allgemein bekannte Art der graphischen Darstellung von Zahlenwerten, die nicht gerade mit Funktionen zusammenzuhängen brauchen. In einer Tabelle sehen Sie die sogenannte Bevölkerungsdichte der preußischen Provinzen angegeben[1]), d. h. die Anzahl der Einwohner, die im Durchschnitt in der Provinz ein Quadrat-

1) Entnommen dem statistischen Jahrbuch für den preußischen Staat. Berlin 1908.

kilometer bewohnen. Daneben stehen zum Vergleich die Zahlen, die aussagen, wieviel Meter Eisenbahnstrecke im Durchschnitt auf jenen Flächenteil kommen.

Auf 1 qkm kommen in:	Bewohner	Eisenbahnen
1. Ostpreußen	54,9	64,4 m
2. Westpreußen	64,3	78,4 =
3. Brandenburg (ohne Berlin) . . .	88,6	97,0 =
4. Pommern	55,9	68,3 =
5. Posen	68,5	76,7 =
6. Schlesien	122,6	103,6 =
7. Sachsen	117,9	111,1 =
8. Schleswig-Holstein	79,2	76,6 =
9. Hannover	71,7	75,5 =
10. Westfalen	179,0	150,4 =
11. Hessen-Nassau	131,8	114,1 =
12. Rheinland	238,4	152,7 =
13. Hohenzollern	59,8	79,4 =

Diese Zahlen sind in Fig. 1 und Fig. 2 aufgezeichnet. Zu dem Zwecke hat man einfach nebeneinander lauter rechteckige Streifen, sämtlich von gleicher Breite, gezeichnet. Die Höhen dagegen sind in irgendeinem Maßstabe gemessen gleich den in der Tabelle gegebenen Zahlen. Vergleichen wir daher die Größen der Rechtecke, so vergleichen wir auch unmittelbar die Angaben unserer Tabelle. Jeder Streifen enthält die Nummer der ihm entsprechenden Provinz. Wir sehen in Fig. 1, daß zwei Provinzen, Nr. 12 und Nr. 10, Rheinland und Westfalen, alle übrigen weit überragen, dann zeichnen sich noch die drei nächsten erheblich aus; die noch verbleibenden unterscheiden sich verhältnismäßig wenig. In derselben Gruppierung finden wir auch die Dichte des Eisenbahnnetzes

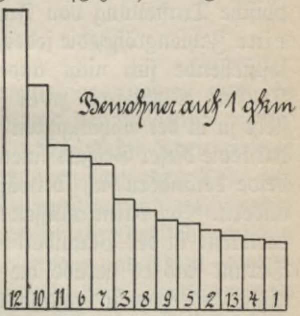


Fig. 1.

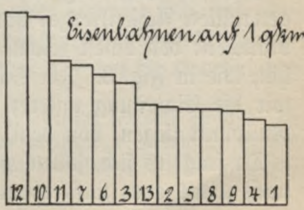


Fig. 2.

angeordnet. Erhebliche Verschiebungen in der Reihenfolge der Provinzen treten nur innerhalb der letzten Gruppe auf. Man kann daraus schließen, daß dieselben Ursachen, die eine größere Bevölkerungsdichte hervorrufen, auch den Verkehr günstig beeinflussen. Beachtenswert ist, daß die Dichte des Eisenbahnnetzes lange nicht so große Unterschiede aufweist, wie die Bevölkerungsdichte.

Umgekehrt könnte man nach dem Bilde auch die Tabelle herstellen. Man brauchte nur den Maßstab der Zeichnung zu kennen, d. h. zu wissen, welche Längeneinheit immer einen Bewohner bezw. einen Meter Eisenbahn bedeutet. Dann wären einfach die Höhen der Rechtecke abzumessen, um die gewünschte Tabelle zu erhalten. Bei einer praktischen Durchführung der Zeichnung würde man für 1 Einwohner oder 1 m Eisenbahn als Längeneinheit z. B. 1 mm abtragen.

Der wesentliche Grundgedanke dieser Darstellungsform ist der: durch Abtragen bezw. Abmessen von Strecken mit einem Längenmaßstabe bestimmt man Zahlengrößen, die im allgemeinen mit Längen garnichts zu tun haben. Hier legt man ja im einen Beispiele der Längeneinheit die Bedeutung von „1 Bewohner auf je 1 qkm" bei! Dieser Grundgedanke ist auch die Grundlage der graphischen Darstellung von Funktionen.

4. Das Achsenkreuz. Freilich etwas Neues muß uns die graphische Darstellung von Funktionen bringen. Soeben war es nur eine Zahlengröße, die jedesmal abzutragen war, und noch dazu eine feststehende sich nicht ändernde. Ganz anders bei Funktionen. Da sind es zunächst zwei Zahlengrößen; denn eine Funktion besteht ja in der Abhängigkeit zweier Dinge voneinander. Und weiter hat keine dieser Größen einen beständig festbleibenden Wert, vielmehr beide verändern sich fortwährend, immer die eine zugleich mit der andern. Ja darin müssen wir gerade das Wesen der Funktion erblicken: in der Veränderlichkeit der darin vorkommenden Größen. Darum sind es gerade die Funktionen, die zur Beschreibung des täglichen Lebens so brauchbar sind, wo ja beständiger Wechsel herrscht!

Über die Schwierigkeit kommen wir mit der Benutzung des sogenannten Achsenkreuzes hinweg. Zwei Maßstäbe sind es, die wir brauchen: den einen zeichnen wir horizontal, den anderen vertikal hin, wie in Fig. 3. Im Schnittpunkt der beiden Geraden, auf die wir die Einteilung unserer Maßstäbe übertragen wollen, soll der Nullpunkt liegen, von dem ab zu messen ist.

Da fragt es sich, sollen wir den Maßstab nach oben oder unten, nach rechts oder links abtragen? Wir wollen keine Richtung bevorzugen, bedecken also alle vier mit einer Teilung; freilich gilt es nun, rechts von links und oben von unten zu unterscheiden.

Der Fall, daß der Nullpunkt mitten auf einer Teilung liegt, ist Ihnen ja nicht fremd. Er ist Ihnen allen beim Thermometer bekannt. Da heißt der Nullpunkt auch Gefrierpunkt; nach oben hin haben wir die Wärmegrade und nach unten, wie man wohl sagt, die Kältegrade oder besser die weniger warmen Temperaturen, d. h. die negativen Grade: -1^0, -2^0 u. s. f. Denn an sich bezeichnen die Kältegrade nichts anderes als die Wärmegrade auch, nämlich die Temperatur an irgend einem Orte, und nur aus praktischen Gründen hat man den Nullpunkt gerade auf den Gefrierpunkt des Wassers gelegt.[1])

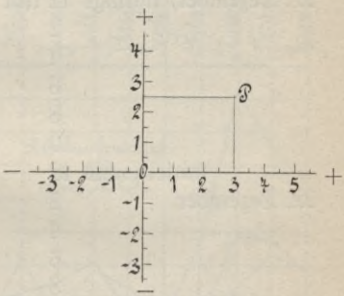


Fig. 3.

In der Tat haben wir in der Einteilung der Zahlen in positive und negative eine sehr geeignete Zweiteilung des ganzen Zahlenvorrats, deren Verwendung hier fast selbstverständlich erscheint. Bitte beachten Sie: nicht verschiedenartige Gegenstände sollen durch das positive und negative Vorzeichen voneinander getrennt werden. Vielmehr stellen alle Zahlen in diesem Falle dieselbe Art Dinge dar. Nur da man doch irgendwo anfangen muß, so nennt man das Vorhergehende negativ und das Folgende positiv.

Kehren wir zum Achsenkreuz zurück. Wie beim Thermometer nennen wir die Strecken auf dem nach oben liegenden Teile der Achse positiv, nach unten negativ; ganz entsprechend nach rechts positiv und nach links hin negativ. Durch unsere Maßstäbe auf den Achsen gelingt es, jedem Punkt ein Zahlenpaar und jedem Zahlenpaar einen Punkt eindeutig zuzuordnen. Zu dem Zwecke errichtet man auf den Achsen Lote; dann gehört der Schnittpunkt P der Lote zu den Zahlen 3 und 2,5, in denen die Lote errichtet sind, und umgekehrt. Die beiden Zahlen nennt man die Koordinaten des Punktes P und schreibt abkürzend P (3; 2,5), d. h. P hat die Koordinaten

1) Die Wahl des Nullpunktes ist nicht einmal überall gleich. In der nach Fahrenheit benannten Skala besitzt der Gefrierpunkt die Zahl 32^0. Geht man vom sogenannten absoluten Nullpunkt aus, so liegt der Gefrierpunkt gar bei 273^0.

3 und 2,5. Man nennt stets zuerst die auf der horizontalen Achse abgelesene Zahl, die Abszisse, dann die auf der vertikalen Achse abgelesene Zahl, die Ordinate.

Jetzt haben wir erreicht, was wir wollten. Ein Punkt auf unserem Zeichenblatt ist das Bild eines Zahlenpaares. Eine Funktion, die ja nichts weiter ist als die Zusammenfassung von lauter Zahlenpaaren, erhält als Bild eine Folge von Punkten.

5. Die graphische Darstellung von Funktionen. Ähnlich wie im ersten Beispiel ist alle zwei Stunden vom einen Mittag bis zum nächsten die Temperatur am Thermometer abgelesen und in einer Tabelle aufgeschrieben worden. Hier aber zeigt Fig. 4 ein Bild des Vorganges. Punkt für Punkt sind die zusammengehörigen Zahlenpaare aufgezeichnet. Verbindet man noch die gefundenen Punkte geradlinig miteinander, so gibt die gebrochene Linie ein Bild vom Temperaturverlauf in der angegebenen Zeit. Deutlich sieht man das schnelle Anwachsen der Temperatur zur Mittagszeit; die höchste Temperatur ist gegen 2 Uhr erreicht, die tiefste in den Morgenstunden zwischen 4 Uhr und 6 Uhr. Ein Blick auf die Zeichnung belehrt uns, daß nach dem nächtlichen Frost wieder in den Nachmittagsstunden wenig erfreuliches Tauwetter eintreten wird. Wollen wir wissen, welche Temperatur wohl um 1 Uhr morgens gewesen sein mag,

Zeit		Temperatur
21. Dezember, mittags	12 Uhr	0^0
	2 "	$+2^0$
	4 "	$+1^0$
	6 "	0^0
	8 "	$-0{,}5^0$
	10 "	$-0{,}5^0$
mitternachts	12 "	-1^0
22. Dezember	2 "	$-1{,}5^0$
	4 "	-3^0
	6 "	-3^0
	8 "	-2^0
	10 "	-1^0
mittags	12 "	0^0

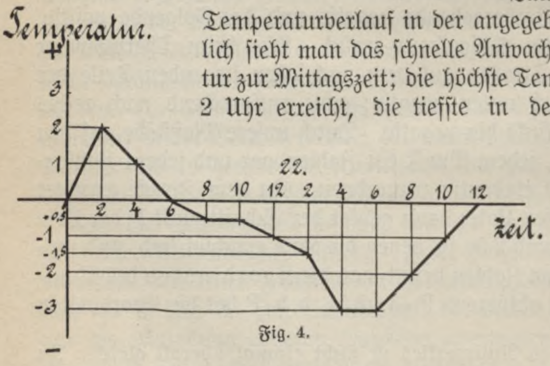


Fig. 4.

so brauchen wir nur auf der horizontalen Achse in der Mitte zwischen 12 und 2 das Lot zu errichten bis zur gebrochenen Linie und seine Länge auf die vertikale Achse zu übertragen. Wir werden dann die Temperatur — 1,25° ablesen.

Ganz gleichgültig ist dabei, welche Längeneinheit auf den Achsen abgetragen wird. Im Beispiel bedeutet die Längeneinheit der Abszissen stets zwei Stunden, die der Ordinaten immer einen Grad. Ja man könnte auf den Achsen auch ganz verschiedene Maßstäbe abtragen, wenn man nur die Bedeutung der Einheit für jede Achse kennt.

Um Ihnen einerseits wenigstens annähernd die außerordentlich zahlreichen Möglichkeiten vorzuführen, in denen unsere Methode angewendet werden kann, um andrerseits aber auch den großen Nutzen derselben recht deutlich hervortreten zu lassen, mögen noch einige Beispiele aus den verschiedensten Gebieten folgen.

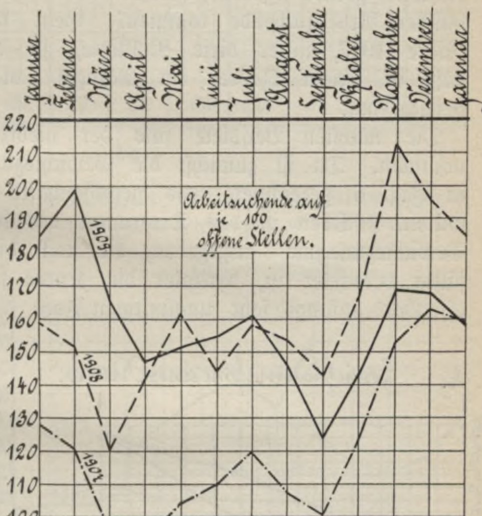


Fig. 5.

Zuerst greife ich auf die Tabelle der „Arbeitsuchenden auf je hundert offene Stellen“ zurück. Viel besser als vorher in der Tabelle übersehen Sie jetzt in Fig. 5 den Wechsel der Vorgänge. Vor allem tritt hervor, wie schlecht das Jahr 1908 gewesen ist. Das Jahr 1909 fängt noch wesentlich schlechter an, bietet aber später bessere Aussichten. Beachten Sie, wie gleichartig in den einzelnen Jahren das Steigen und Sinken einander folgen. Doch auch Abweichungen von dieser Gleichartigkeit fallen uns auf: so ist der April 1908 im Gegensatz zu den anderen Jahren ungünstiger als der März. Infolge ungünstiger Witterung und anderer Schwierigkeiten hat damals z. B. die Bautätigkeit nicht hinreichend einsetzen können. Auch den Segen der sogenannten Notstandsarbeiten der großen Städte können Sie aus den Diagrammen herauslesen; denn auf diese ist es wesentlich mit zurückzuführen, wenn in der Regel im Winter eine weitere Verschlechterung nicht mehr eintritt.

Noch auf eins möchte ich Sie besonders hinweisen: die horizontale Achse liegt hier gewissermaßen bei 100. Denn in der Tat ist Angebot gleich Nachfrage, also der Bedarf an Arbeitskräften gerade gedeckt, wenn auf hundert offene Stellen hundert Arbeitsuchende kommen. Geht die Kurve, wie im Jahre 1907, unter diese Nulllinie, so heißt das natürlich, daß in jenem Jahre ein Mangel an Arbeitskräften geherrscht hat.

Die nächsten Beispiele sind der medizinischen Praxis entnommen. Da ist zunächst die Gewichtszunahme eines Kindes in Fig. 6 gezeichnet, was gewissenhafte Eltern immer tun sollten. Oben ist das Diagramm der sogenannten normalen Gewichtszunahme angegeben, die nach vieler Erfahrung sorgfältig berechnet ist, darunter die Kurve für einen bestimmten offenbar anfangs sehr ungünstigen Fall. Erst nach 20 Wochen hat man sich hier entschlossen, den Arzt zu Hilfe zu rufen, dessen erfolgreichem Eingreifen es zu danken ist, daß endlich nach 52 Wochen der normale Stand erreicht ist.

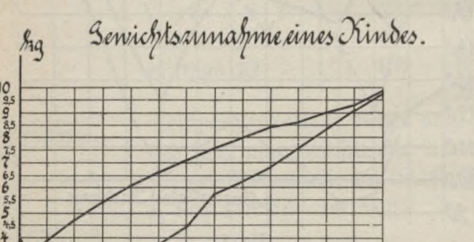


Fig. 6.

Fig. 7 zeigt eine sogenannte Fieberkurve, wie Sie sie wohl an manchem Krankenbett gesehen haben. Auf ein fertig vorgedrucktes Formular sind die Messungen der Fiebertemperatur täglich viermal eingezeichnet. Man erkennt deutlich die gesamten Schwankungen des Fiebers, für den Arzt zur Beurteilung des Krankheitsverlaufes ein unschätzbares Hilfsmittel.

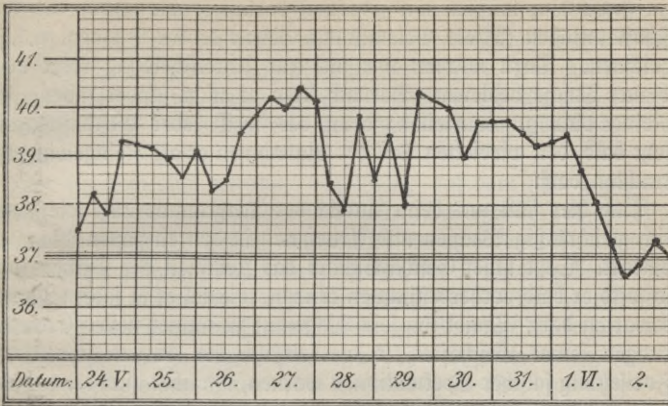


Fig. 7.

Im April 1907 ist das Geschäft, dessen Umsatz die Kurven Fig. 8 zeigen, gegründet worden. Am Jahresende gab es freilich nur unzufriedene Gesichter. Der Umsatz war herzlich wenig gestiegen, nicht einmal zur Weihnachtszeit hatte sich ein merkbarer Fortschritt eingestellt. Der Anblick der Kurve ließ von der Zukunft nichts Gutes erwarten. Da entschloß sich der Geschäftsinhaber zu einer Verlegung und Vergrößerung; das alte Geschäft blieb daneben als Filiale bestehen. Jetzt bemerken Sie ein erfreuliches regelmäßiges Anwachsen vom Umsatz. Freilich, um einen vollständigen Einblick

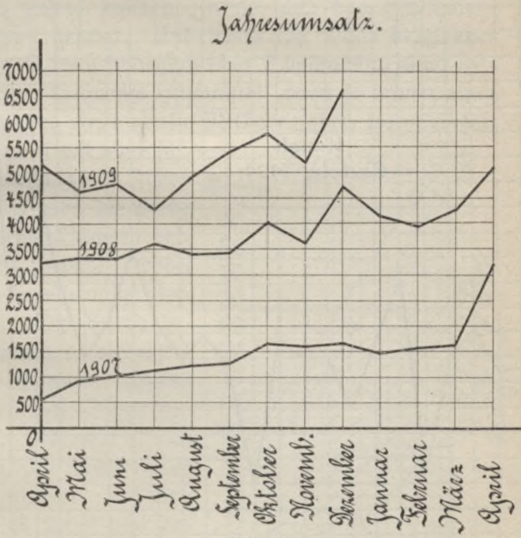


Fig. 8.

zu gewinnen, müßten wir jedesmal darunter eine Kurve der Geschäftsunkosten (Miete, Beleuchtung, Gehalt an das Personal u. s. f.) zeichnen. Dazu würden wir uns zur Unterscheidung roter oder blauer Tusche bedienen. Darnach kann es nicht schwer fallen, den Reingewinn zu beurteilen; denn das weiß jeder Geschäftsmann sehr bald, den wievielten Teil der Einnahmen er als Reingewinn betrachten darf.

Auch hier fällt uns beim Anblick der Diagramme auf, wie ziemlich gleichmäßig Wachsen und Abnehmen in den einzelnen Monaten eintritt. Setzt unser Geschäftsmann das Zeichnen der Kurven fort, so wird er bald vorherbestimmen können, wieviel er in jedem Monat erwarten darf. Treibt ihn sein Wagemut zu immer neuen Erweiterungen seines Geschäftes, so werden ihn die Kurven schnell vor Fortsetzung falscher Spekulationen warnen, ihn aber auch ermutigen, auf einem richtigen Wege, den er einschlägt, fortzuschreiten.

Weiter zeige ich Ihnen noch in Fig. 9 das Bild vom Umsatz desselben Geschäftsmannes im Dezember 1909. Ein wechselvolles

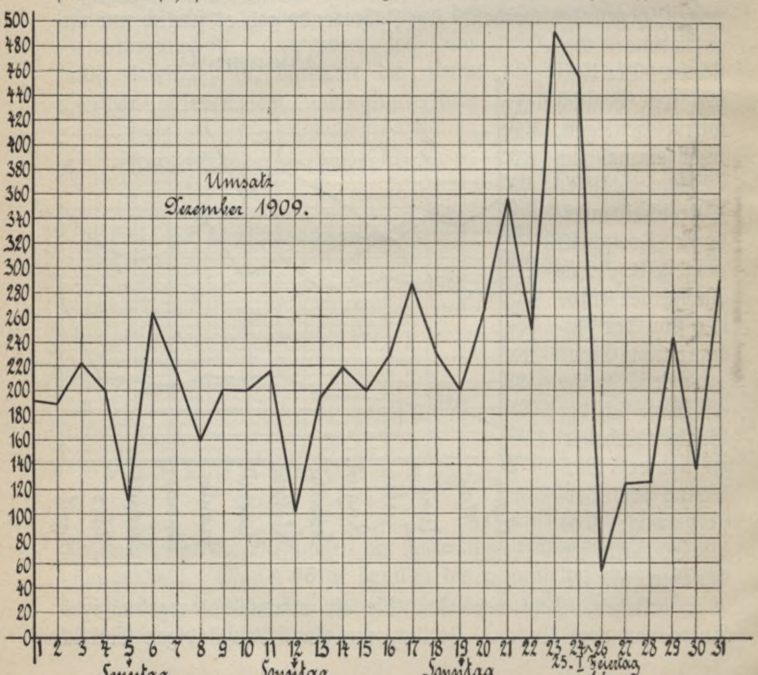


Fig. 9.

Bild; tief hinab steigen die Sonntage und hoch hinauf die Tage vor Weihnachten. Im nächsten Jahre wird auch auf dieses Blatt mit roter Farbe der Umsatz eingetragen werden, um einen Vergleich anstellen und wenn möglich feststellen zu können, welche Einflüsse (z. B. das Wetter) den Geschäftsgang günstig beeinflussen.

Hier sei noch eins erwähnt: das Blatt, auf dem wir gezeichnet haben, ist mit kleinen Quadraten bedeckt. Das gibt im allgemeinen eine recht mühselige Arbeit, namentlich wenn es darauf ankommt, so genau zu zeichnen, daß man hinterher der Zeichnung Maße entnehmen kann. Man wird daher vorteilhaft diese Arbeit zu ersparen suchen. In der Tat ist im Handel für wenige Pfennige das sogenannte Millimeterpapier zu haben, Papier, auf dem in feinen roten, blauen oder andersfarbigen Linien eine Einteilung in Quadratmillimeter gegeben ist. Die Quadratzentimeter sind für sich und dann auch noch zu je fünf zur besseren Übersicht durch stärkeren Druck hervorgehoben. Solch ein Papier läßt sich außerordentlich bequem verwenden und gibt recht genaue Resultate. Wir wollen aber nicht vergessen, daß für unsere meisten Zwecke auch das gewöhnliche karierte Schreibpapier genügt. Und wenn wir nichts dergleichen zur Hand haben, so ist auch schließlich eine Quadrateinteilung leidlich schnell hergestellt. Bequeme Hilfsmittel bieten ja immer einen Anreiz zur Verwendung einer neuen Methode; aber, wenn es sein muß, geht es auch ganz gut ohne sie.

Als letztes Beispiel zeige ich Ihnen eine Preisliste. Ich habe die Preise für das Einbinden von Büchern verschiedener Formate gewählt, wobei die Bogenzahl die unabhängige Veränderliche darstellt. Die Preise beginnen bei 30 Pfennigen, da niedrigere nicht in Betracht kommen. Jedes einzelne Format liefert als Diagramm eine gerade Linie. Es wird Ihnen nicht schwer fallen, sich sofort in der Zeichnung zurechtzufinden. Als Beispiel nenne ich: es kostet also das Einbinden eines Buches vom Format 15 × 21 mit der Bogenzahl 45 nach unserer Liste 85 Pfennige.

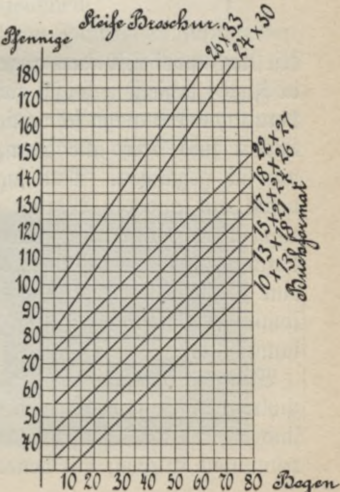


Fig. 10.

Ich glaube wohl, daß der Wert graphischer Darstellungen von Ihnen nicht mehr bezweifelt werden wird. Tabellen neben Diagrammen, jedes an seinem Platze. Jene, wenn es gilt, genaue Ausrechnungen herzustellen, wenn der Geschäftsmann z. B. seinen Steuerzettel auszufüllen hat. Diagramme aber, wenn Sie vergleichen und die Geschäftslage o. dgl. überschauen wollen. Daneben noch, wenn einfach und schnell durch Abmessen Zwischenwerte, die in der Tabelle gar nicht enthalten sind, bestimmt werden sollen.

6. Diagramme stetiger Funktionen. Aufzeichnen solcher durch Apparate. Noch einmal kehren wir zu unserem Ausgangspunkte zurück: zur Tabelle der Temperaturen im Laufe eines Tages. Sie werden es selbst als Mangel empfunden haben, daß man immer

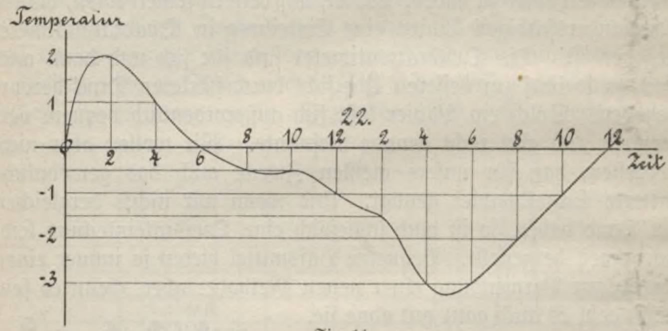


Fig. 11.

erst nach zwei Stunden abgelesen hat. Das Bild, welches wir so in Fig. 4 erhielten, zeigte einen so sprunghaften Verlauf der Temperatur, wie wir ihn schwerlich für richtig halten können. In Wirklichkeit sind doch alle Temperaturschwankungen ganz allmählich vor sich gegangen. Man sagt: die Temperatur ändert sich stetig, besitzt mit anderen Worten als Bild eine gleichmäßig gekrümmte Linie ohne Kanten und Ecken. Man kann sich helfen, indem man durch die gefundenen Punkte, den stetigen Schwankungen entsprechend, eine stetige Kurve legt, wie es in Fig. 11 geschehen ist. Die Kurve kommt der Wirklichkeit umso näher, je mehr Punkte von ihr bekannt sind.

Während im täglichen Leben die gebrochenen Linien, wie Sie in zahlreichen Beispielen gesehen haben, die wichtigste Rolle spielen, sind es in der Wissenschaft und Technik hauptsächlich die stetig gekrümmten Kurven, mit denen man es dort zu tun hat. Die Diagramme von Naturgesetzen sind Kurven. Kennt man das Naturgesetz, so kann man das zugehörige Diagramm zeichnen und ihm beliebig viele Einzelwerte entnehmen. Hat man umgekehrt zahlreiche Einzelbeobachtungen, so zeichnet man die gefundenen Werte und versucht sie möglichst genau durch eine stetige Kurve zu verbinden. Einerseits kann man jetzt der Kurve beliebig viele auch nicht beobachtete Werte entnehmen, andrerseits gestattet die Form der Kurve auf die Form des Naturgesetzes zu schließen.

Die oben gezeichnete Temperaturkurve kann uns aber auch so nicht völlig befriedigen. Die Kurve kann noch zu willkürlich gezeichnet werden. Ganz abgesehen davon, daß regelmäßiges Ablesen der Temperatur immer lästig bleibt. Viel sicherer und bequemer verfährt ein Apparat, dessen Bild Ihnen Fig. 12 zeigt. Man nennt ihn Thermograph, d. i. ein Instrument, welches die Temperatur aufschreibt. In der Röhre rechts befindet sich Alkohol, der sich auszudehnen strebt, wenn es wärmer wird. Dann muß sich die Röhre stärker krümmen, so daß der Schreibstift, den Sie links sehen, durch Hebelübertragung gehoben wird. Getreulich schreibt der Stift auf der sich drehenden Trommel in jedem Augenblick die Temperatur auf. Die Trommel wird von einem Uhrwerk getrieben; ein Streifen reicht in der Regel für eine Woche. Darnach muß wieder ein neuer Streifen eingelegt werden. Ähnliche Apparate sehen Sie in Wettersäulen und dergl., um den Barometerstand oder die Luftfeuchtigkeit aufzuzeichnen.

Instrumente, die unmittelbar Bilder von Funktionen aufschreiben, werden noch zu vielen Zwecken verwendet. Erwähnen will ich die Seismographen; das sind gewaltig schwere Pendel, die aber so fein aufgehängt sind, daß sie die leisesten Schwankungen des Erdbodens aufzeichnen. Findet irgendwo ein Erdbeben statt,

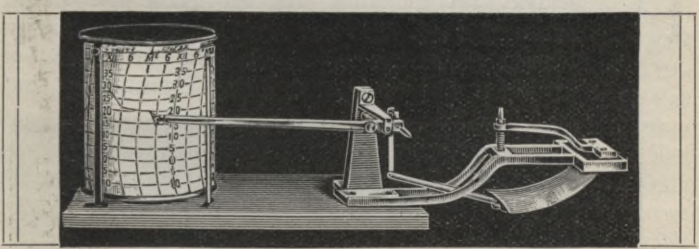


Fig. 12.

so gelangen zuerst quer durch den Erdkern hindurch zwei Arten von Wellen zum Apparat, die sogenannten Vorläufer; dann erst nach einiger Zeit treffen die Hauptwellen ein, die sich längs der Erdrinde ausgebreitet haben. In dem Seismogramm der Fig. 13 erkennen Sie sehr schön diese Vorläufer und die Hauptwellen. Aus dem Zeitunterschied beider ist man imstande, auf die Entfernung zu schließen, in welcher der Herd des Erdbebens zu suchen ist.

Noch ein Beispiel: Der Techniker muß für manche Zwecke wissen, wie groß der Dampfdruck im Zylinder einer Dampfmaschine in jedem Augenblick gewesen ist. Dazu bohrt er den Zylinder an einer höchsten oder tiefsten Stelle an und leitet den Dampf in einem engen Rohre nach einer Art Manometer, Indikator genannt. Dies Manometer (Druckmesser) liefert das sogenannte Dampfdruckdiagramm, indem es den Druck unmittelbar auf einem Streifen aufschreibt, der in verkleinertem Maßstab die Bewegung des Kolbens im Dampfzylinder mitmacht.

Ein sehr hübsches Verfahren hat uns das Bild Fig. 14 geliefert. Da sitzt auf dem Manometer ein kleiner Spiegel auf, der sich bei der Druckänderung im Dampfzylinder ein wenig dreht. Ein Lichtstrahl, den ich auf den Spiegel fallen lasse, wird vom Spiegel zurückgeworfen, und bei der Drehung des Spiegels wird der zurückgeworfene Lichtstrahl mitgedreht. Fällt er auf eine photographische Platte, die ich wieder so bewege, daß sie im verkleinerten Maßstabe genau die Bewegung des Kolbens im Dampfzylinder mitmacht, so zeichnet der Lichtstrahl auf der Platte die Druckänderungen auf. Um mit dem Diagramm rechnen zu können, müssen wir wissen, wie stark der Kolbenweg verkleinert worden ist, und welche Druckzunahme ein

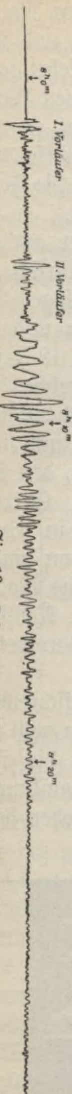


Fig. 13. *Beben vom 19. März 1906; Herd unbekannt.*

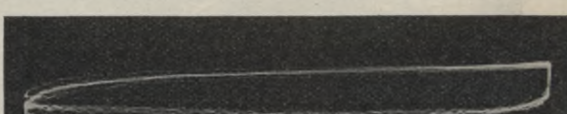


Fig. 14.

Millimeter Hebung des Lichtpunktes auf der Platte bedeutet. Das photographische Verfahren empfiehlt sich namentlich bei schnelllaufenden Maschinen.

7. Diagramme der einfachsten Bewegungsformen. Etwas eingehender will ich die graphische Darstellung von Bewegungsvorgängen behandeln. Die wichtigsten einfachen Bewegungsarten sind die gleichförmige und die gleichförmig beschleunigte. Wenn ein Schnellzug, wie vorgeschrieben, stündlich stets 80 km zurücklegt, so sagen wir: er bewegt sich gleichförmig. Streng genommen müßte er freilich, was nie der Fall ist, in jedem Augenblick genau gleich schnell gefahren sein. Praktisch genügt es durchaus, wenn die Gleichförmigkeit nur durchschnittlich erreicht wird. Jene 80 km heißen die Geschwindigkeit des Zuges pro Stunde.

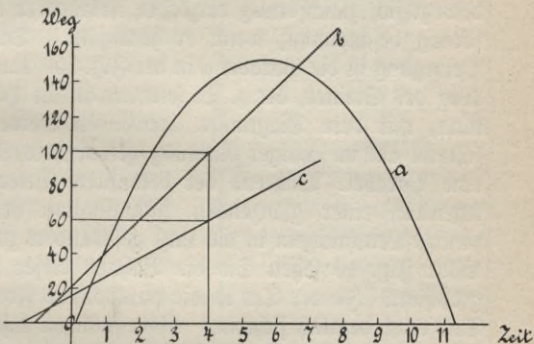


Fig. 15.

Wir wollen den Vorgang graphisch darstellen; die Achsen nennen wir daher Zeit- und Wegachse. Wieder ist die Zeit die unabhängige veränderliche Größe und der Weg die abhängige. Wie meist, so ist auch hier die unabhängige Veränderliche auf der horizontalen Achse abgetragen. Wenn der Eisenbahnzug gleichförmig dahinfährt, so wachsen Zeit und Weg proportional, d. h. in der doppelten Zeit ist auch der doppelte Weg, in der dreifachen Zeit der dreifache Weg zurückgelegt, u. s. f. Allgemein kann man sagen: um den Weg nach irgend einer Zeit zu bekommen, hat man die Zahl der Stunden mit 80 zu multiplizieren. Solch ein proportionales Anwachsen gibt aber als Diagramm eine gerade Linie. In Fig. 15 sind b und c solche Diagramme. Man beachte aber wohl, daß die geraden Linien nicht mit den Wegen, die die Züge gefahren sind, verwechselt werden dürfen. Die Eisenbahnstrecke kann vielmehr beliebig krumm sein. Unser Diagramm sagt einfach aus, daß z. B. der Weg nach 4 Sekunden beim Zuge b 100 m, dagegen beim Zuge c 60 m beträgt, also gleich den Loten in den Zeitpunkten ist. In beiden Fällen sind die Züge schon vor der Zeit 0 abgefahren, also auch bevor wir zu beobachten anfingen. Wie uns aber die Figur zeigt, ist b später als c abgefahren, trotzdem hat schon zur Zeit 0 Zug b eine größere Strecke zurückgelegt als Zug c (b schneidet auf der vertikalen Achse ein größeres Stück ab als c). Die Gerade b besitzt eine größere Steigung als c, d. h. sie steigt steiler an als c, gleichzeitig ist offenbar die Geschwindigkeit des Zuges b größer als die des Zuges c. Es stellt uns b einen Schnellzug, c dagegen einen Personenzug dar. Also gilt beim Diagramm der gleichförmigen Bewegung: je größer die Steigung, umso größer die Geschwindigkeit.

Wir kommen zur gleichförmig beschleunigten Bewegung. Werfen Sie einen Stein in die Luft, so sucht ihn die Anziehung der Erde fortwährend mit derselben Kraft herunterzuziehen. Der Stein bewegt sich gleichförmig verzögert, solange er aufsteigt, und gleichförmig beschleunigt, wenn er herabfällt. Das Diagramm dieser Bewegung ist die Parabel a in der Fig. 15. Auch hier darf nicht der Weg des Steines, der z. B. senkrecht in die Höhe geschleudert sein kann, mit dem Diagramm verwechselt werden. Tatsächlich beschreibt ein in schräger Richtung geworfener Stein auch als Bahn eine Parabel. Während der bekannten Kieler Woche pflegen gelegentlich einer glänzenden Illumination der Kriegsschiffe unzählige Leuchtkugeln in die Luft geschleudert zu werden. Auf dem Bilde Fig. 16 sehen Sie die Bahnen dieser Leuchtkugeln photographiert. In der Tat ist die parabolische Form der Kurven zum Teil recht deutlich sichtbar. Abweichungen infolge des Luftwiderstandes lassen sich ebenfalls sofort erkennen.

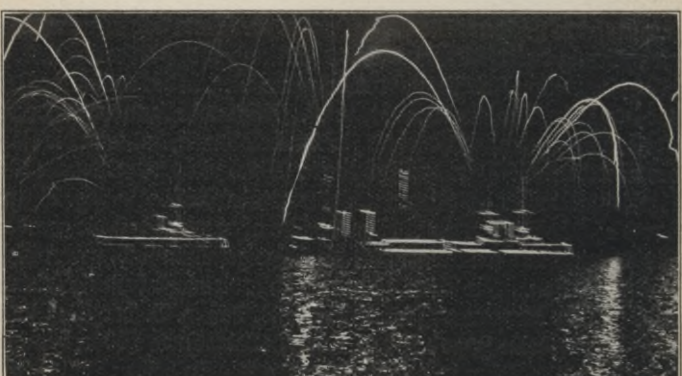


Fig. 16.

Gerade Linien sowohl wie Parabeln findet man auch unabhängig von Bewegungsvorgängen sehr häufig als Diagramme.

8. Graphische Fahrpläne. Die Herstellung graphischer Fahrpläne ist eine schöne und recht wichtige Anwendung der Diagramme gleichförmiger Bewegungen. Entstehen doch unsere Fahrpläne tatsächlich zuerst graphisch und erst darnach werden sie in die gebräuchlichere Form des Kursbuches gebracht.

Aus praktischen Gründen ist hier einmal die Wegachse horizontal gelegt und die Zeitachse zwar vertikal, aber so, daß der positive Teil nach unten zeigt. In Fig. 17 ist Ihnen das Schema solch eines Fahrplanes aufgezeichnet. Oben stehen die Wege: Altona, Neumünster, Kiel, vertikal abwärts die Zeiten, mit 12 Uhr mitternachts beginnend. Der erste eingezeichnete Zug fährt gegen 6 Uhr in Altona ab und ist gegen 7 Uhr 30 Min. in Neumünster. Hier hat er Aufenthalt. Das erkennt man sofort, da ja die gerade Linie unterbrochen ist. Es ist also Zeit vergangen, ohne daß der Zug sich bewegt hat. Bald nach 8 Uhr trifft der Zug in Kiel ein. Der nächste bald nach 9 Uhr in Altona

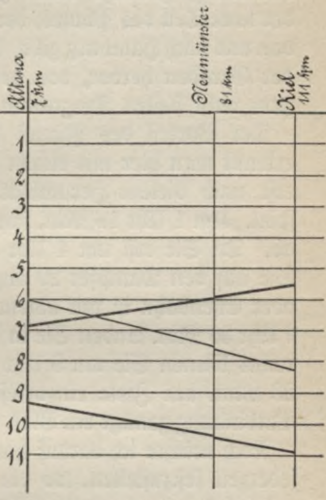


Fig. 17.

abfahrende Zug ist weniger steil eingezeichnet. Daraus folgt hier, daß er schneller fährt. In der Tat vergeht ja weniger Zeit, bis er zum Ziele gelangt. Das stimmt auch mit unseren obigen Betrachtungen durchaus überein; denn es hieß ja dort, daß die Geschwindigkeit umso größer ist, je steiler die Gerade zur Zeitachse liegt, also hier je flacher sie verläuft. Wirklich ist der stärker gezeichnete Zug ein Schnellzug, der schwächer gezeichnete ein Personenzug. Aber auch die in umgekehrter Richtung verkehrenden Züge enthält unser Plan. Ihre Diagramme sind Geraden, die rechts beginnen und nach links hin abwärts geneigt gezeichnet sind. Als Beispiel ist der zwischen 5 und 6 Uhr morgens in Kiel abfahrende und kurz vor 7 Uhr in Altona eintreffende Schnellzug gezeichnet. Beim Entwerfen des Planes ist darauf zu achten, daß überall dort, wo zwei Geraden sich kreuzen, Doppelgeleise oder Weichen vorhanden sein müssen.

Das Bild eines fertigen Fahrplanes gibt Fig. 18. Der Plan ist dem Buche auf einer besonderen Tafel beigegeben. Ich habe eine Kleinbahn aus dem hohen Norden gewählt; wollte man den Plan einer Hauptstrecke herausgreifen, so wäre dieser schon an sich nicht ganz leicht zu überblicken; sicherlich würde man sich in der Verkleinerung garnicht darin zurechtfinden. Namentlich lehrreich ist der linke Teil des Planes, der in allgemeiner Übersicht die Anschlüsse von und nach Hamburg gibt. Sehr schön tritt die verschiedene Neigung der Geraden hervor, von den flachen Bildern der Schnellzüge bis zum recht steilen Diagramm der Dampfschiffe.

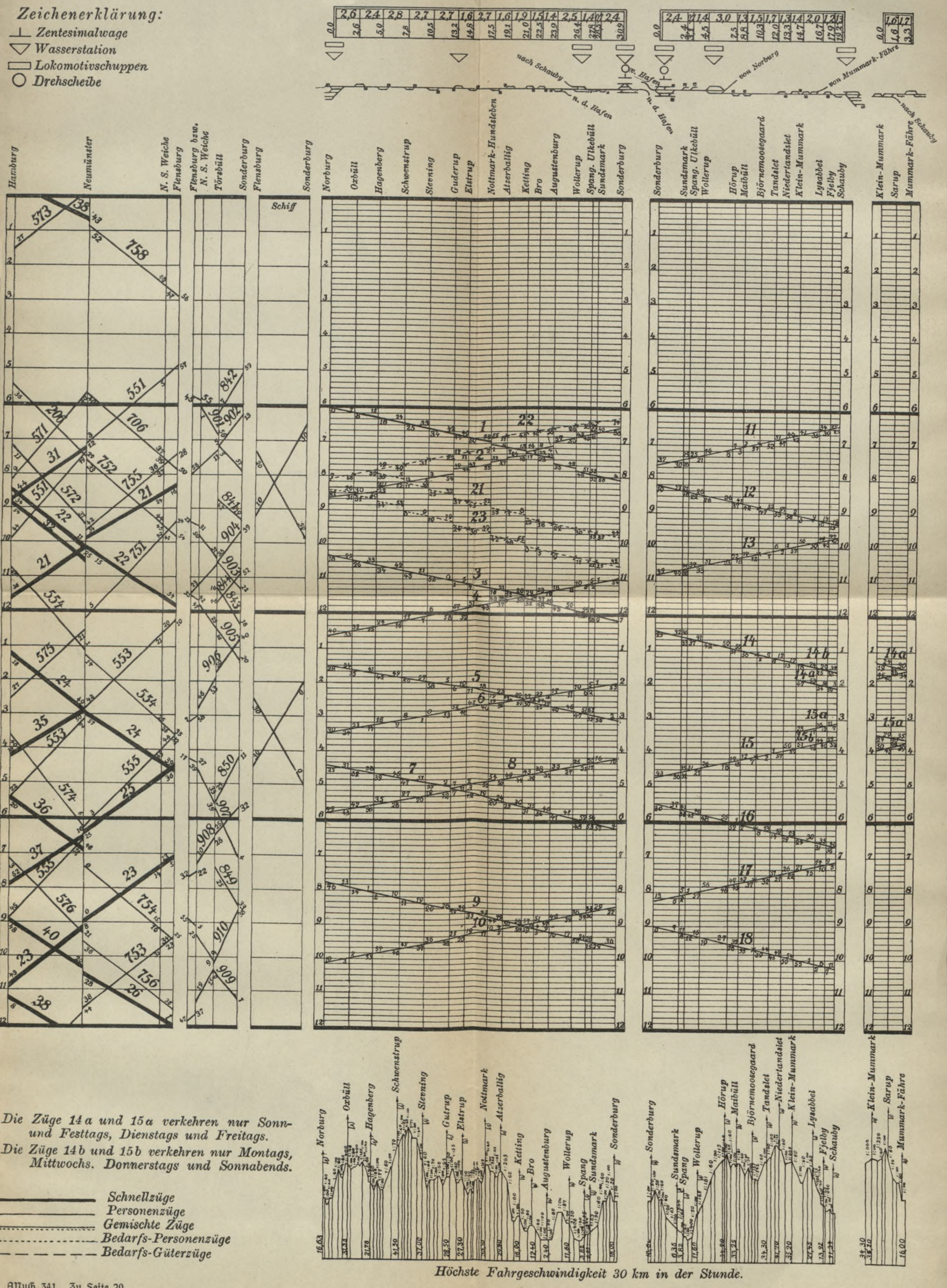
Der Vorteil des Planes ist die große Übersichtlichkeit. Sicher erkennt man hier mit einem Blick, was man im Kursbuch mühselig erst nach vielem Herumblättern feststellt. Nehmen Sie ein Beispiel. Um 1 Uhr 18 Min. fahren Sie in Hamburg mit dem Zuge 24 ab. Da Sie erst um 4 Uhr 39 Min. in Flensburg eintreffen, sind Sie auf den Dampfer 29 angewiesen. (Die Frage, ob Dampfschiff oder Eisenbahn ist mit einem Blick auf den Plan entschieden.) Um 7 Uhr 30 Min. landen Sie in Sonderburg. Mit dem Zuge 22 drüben rechts können Sie um 9 Uhr 15 Min. weiterfahren, um um 10 Uhr 23 Min. am Ziele einzutreffen. Trotz der gewiß nicht einfachen Verbindung genügt ein Blick, um die ganzen Anschlüsse zu übersehen.

Noch möchte ich darauf hinweisen, wie leicht es den Beamten ist, jederzeit festzustellen, wo ein jeder Zug sich gerade befindet. Wie gefahrlos und bequem lassen weiter sich mit Hilfe dieser Pläne Extrazüge einlegen!

Oben enthält unser Fahrplan noch die Entfernungen und einige bahntechnische Einzelheiten, Weichen u. dgl. eingetragen. Unten ist ein Bild von den Steigungen der Strecke gegeben.

Leider ist eine weite Verbreitung graphischer Fahrpläne ausgeschlossen. Ein vollständiges Kursbuch können sie nun einmal nicht ersetzen; denn dazu gehörten einige tausend Blätter. Anders, wenn es sich um ständigen Verkehr auf einer bestimmten Strecke handelt, da sollte man den Kursbüchern die graphischen Pläne vorziehen. Zweifellos sehr praktisch wäre die Verwendung dieser Pläne für Reiseführer durch begrenzte, von Fremden häufig besuchte Gegenden.

In den Durchgangswagen der schwedischen Eisenbahnen hängt schon heute ein graphischer Plan der ganzen Strecke, die der Zug



Die Züge 14a und 15a verkehren nur Sonn- und Festtags, Dienstags und Freitags.
Die Züge 14b und 15b verkehren nur Montags, Mittwochs. Donnerstags und Sonnabends.

Schnellzüge
Personenzüge
Gemischte Züge
Bedarfs-Personenzüge
Bedarfs-Güterzüge

ANuG. 341. Zu Seite 20.

befährt, aus. Sollte sich diese Methode nicht auch bei uns empfehlen?

Zum Schlusse möchte ich nur jedem von Ihnen, der ein Interesse an der Sache gewonnen hat, empfehlen, sich irgendeinen graphischen Fahrplan aus Ihrem eigenen Wohnort zu verschaffen (namentlich ältere dürften nicht schwierig von der Eisenbahn zu erhalten sein), um sich durch eigenen Augenschein von der Nützlichkeit derselben zu überzeugen. Vielleicht daß Sie dadurch noch mehr zur Verwendung graphischer Methoden ganz allgemein angeregt werden.

9. Rechentafeln oder Nomogramme. In neuester Zeit beginnen graphische Methoden sich ein neues wichtiges Gebiet zu erobern. Namentlich von dem französischen Mathematiker M. d'Ocange ausgehend, verbreitet sich immer mehr ein neuer Zweig der mathematischen Wissenschaft: die Nomographie, die sich damit beschäftigt, möglichst einfache und leicht verwendbare Rechentafeln herzustellen. Ich will versuchen, Ihnen an einfachen Beispielen den Sinn der Nomographie klarzumachen.

Während in den graphischen Darstellungen von Funktionen, wie wir sie oben kennenlernten, für jeden bestimmten Fall neue Kurven gezeichnet werden mußten, also z. B. für jeden neuen Tag auch eine andere Temperaturkurve, so sollen die Rechentafeln oder Nomogramme alle möglichen Fälle irgendeines funktionalen Zusammenhanges zugleich darstellen. Nehmen Sie sogleich ein ganz einfaches Beispiel: In Fig. 19 ist eine Tabelle der Wurzeln aller Zahlen aufgezeichnet, oder auch, was ja auf dasselbe herauskommt, der Quadrate aller Zahlen. Dabei sind auf der horizontalen Achse gleiche Strecken abgetragen und mit 1, 2, 3 . . . bezeichnet. Auf der vertikalen Achse sind zwar auch gleiche Strecken abgetragen, aber sogleich mit den Quadraten der abgetragenen Strecken bezeichnet, also 1^2, 2^2, 3^2 . . ., d. h. 1, 4, 9 . . . Dadurch erhalten Sie als Kurve der Funktion eine unter 45^0 aufsteigende gerade Linie. Zum Ablesen könnten Sie Lote errichten, oder besser benutzen Sie, wie es in der Figur angedeutet ist, eine Platte aus Zelloloid, auf welcher zwei senkrechte Geraden und eine durch den Schnittpunkt

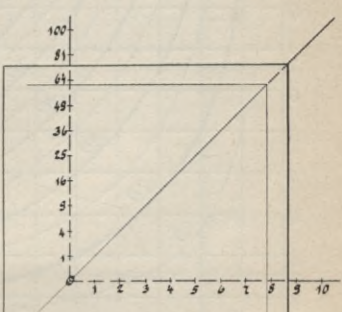


Fig. 19.

gehende unter 45° geneigte Gerade eingeritzt sind. Die von der Platte verdeckten Teile der Tabelle sind, um dies anzudeuten, gestrichelt gezeichnet. Die Platte legen Sie so auf, daß die geneigte Gerade der Platte und der Tabelle zusammenfallen, während die senkrechten Geraden durch die gesuchten Skalenpunkte gehen. In der Figur lesen Sie z. B. ab $\sqrt{61} = 7,8$ oder auch $7,8^2 = 61$.

Wichtig an unserem Beispiel ist der Gedanke, der auf der vertikalen Achse verwirklicht ist, wo die Zahlen nicht die abgetragenen Längen bedeuten; sondern statt 8 z. B. steht 64, d. h. die Zahl, aus der die Wurzel den Wert 8 ergibt. Mit anderen Worten: es sind Funktionswerte abgetragen, aber die Werte der Variabeln angeschrieben. Hier ist $8 = \sqrt{64}$, allgemein $y = \sqrt{b}$; y ist abgetragen, aber b angeschrieben. Zu beachten ist auch die Art des Ablesens.

Ein anderes Beispiel gibt Fig. 20. Das ist eine Multiplikations- und Divisionstabelle. Wieder sind auf zwei zueinander senkrechten Achsen die Zahlen 0 bis 10 abgetragen. Außerdem sehen Sie eine Reihe von Kurven eingezeichnet, an die je eine Zahl, die sogenannte Cote, angeschrieben ist. Dabei liegen z. B. auf der mit der Cote 30 versehenen Kurve sämtliche Punkte, deren Koordinaten das Produkt 30 besitzen, usw. (Da $x \cdot y = 30$ sein soll, so ist die Kurve, wie sich zeigen läßt, eine gleichseitige Hyperbel.) Wollen Sie etwa 8×6 ablesen, so suchen Sie den Schnittpunkt der in 8 und 6 errichteten Lote und finden durch Schätzung sofort, daß durch den Schnittpunkt eine Kurve mit der Cote 48 gehen würde. Um bessere Ergebnisse, als dies hier möglich ist, zu erhalten, müßte man die Tafel in größerem Maßstabe zeichnen und dementsprechend mehr Kurven.

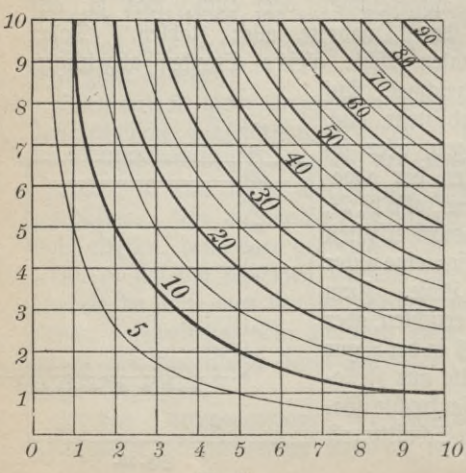


Fig. 20.

Die Konstruktion brauchbarer Tafeln ist zuweilen recht schwierig. Darauf kommt es aber ja gar nicht an, vielmehr ist entscheidend nur die bequeme Verwendbarkeit der Tafeln. Sie finden schon jetzt in Tabellenwerken statt der weitläufigen Zahlenangaben solche Nomogramme; in Zukunft wird es zweifellos noch weit mehr der Fall sein. Ebenso wie es dem praktischen Rechner ganz gleichgültig ist, wie etwa seine Logarithmentafel berechnet ist, so interessiert ihn auch nicht die Herstellung einer nomographischen Figur; wenn er nur weiß, wie er damit zu rechnen hat. So will ich Ihnen zum Schluß noch eine Tafel zur Auflösung von quadratischen Gleichungen zeigen. Die Form der Gleichung sei $x^2 + a x + b = 0$.

Auf der linken Geraden liest man die Werte von a, auf der rechten die von b ab. In Fig. 21 ist als Beispiel die Lösung der Gleichung

$$x^2 - 3{,}5\,x + 1{,}5 = 0$$

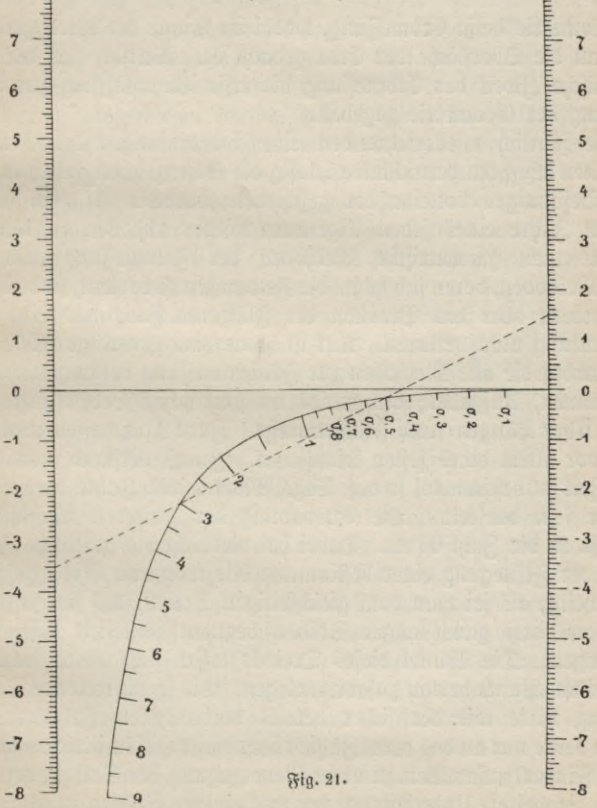


Fig. 21.

gewählt. Sie suchen auf der Geraden links — 3,5, also a, auf der Geraden rechts + 1,5, also b, auf. Beide Punkte verbinden Sie durch eine Gerade (in der Figur gestrichelt gezeichnet). Die Schnittpunkte mit der gezeichneten Kurve 3 und 0,5 sind die gesuchten Werte für x, die der Gleichung genügen.

Das Verfahren der Nomographie hat bereits so wertvolle Ergebnisse gezeitigt, daß man von ihm die besten Erfolge in der Zukunft erwarten darf.

II. Vortrag.

Flächenmessung.

Geometrie heißt Erdmessung, wobei im Sinne der Alten zunächst nur an die Oberfläche der Erde gedacht ist. Wirklich hat der rein praktische Zweck der Erdmessung die erste Veranlassung zur Ausbildung der Geometrie gegeben.

Die jährlich wiederkehrenden Überschwemmungen des Niltales im alten Ägypten vernichteten häufig die Grenzzeichen, durch welche die Besitzungen voneinander geschieden wurden. Um in jedem neuen Jahre eines jeden Eigentum wieder abstecken zu können, mußte man geometrische Methoden der Feldmessung ersinnen. Die Methoden, deren sich heute die Feldmeßkunst bedient, sind andere geworden; aber das Problem der Flächenmessung hat seine alte Bedeutung nicht verloren. Nur ist heute eine gewaltige Fülle von Aufgaben, die alle Methoden zur Flächenmessung verlangen, hinzugekommen, Aufgaben, die gerade im praktischen Leben auftreten.

1. Über Längen- und Flächenmaße. Zum Nachmessen bedürfen wir vor allem eines festen Maßstabes. Zuerst verstand man wohl die Zeit zu bestimmen, so daß Tage, Monate und Jahre die ältesten Maße sein dürften. Die Ausbildung der weiteren Maßsysteme knüpft an die Zahl 60 an. Dabei hat vielleicht die praktische Frage nach der Festlegung einer bestimmten Richtung eine Rolle gespielt. Es scheint, als sei man vom gleichseitigen Dreieck, das sich ja jederzeit aus drei gleich langen Stäben bequem herstellen läßt, ausgegangen. Die Winkel dieses Dreiecks lassen sich gerade sechsmal um einen Punkt herum zusammenlegen. Die so auftretende Sechsteilung hätte mit der sicher bereits vorhandenen Zehnerteilung (man denke nur an das beim Zählen bequemste Hilfsmittel: an unsere zehn Finger) zusammen zu einer Bevorzugung der Sechzig geführt, sodaß die weitere Unterteilung, um zu kleineren Stücken zu gelangen, in 60 Teile ausgeführt wurde. So hat sich bei einem entlegenen Völkchen bis heute die Teilung des Tages in 60 Stunden erhalten. Die 60 Minuten einer Stunde und die 60 Sekunden einer Minute sind noch Zeugen jener alten babylonischen Vergangenheit. Man muß gestehen, daß 60 sehr geschickt gewählt war; beachten Sie nur, welche Zahlen alle in 60 teilbar sind!

Auch die ältesten Meßinstrumente dürften zur Zeitbestimmung gedient haben. Man kannte Sonnen-, Wasser- und Sanduhren. Anschließend daran hätte man die bei Gefäßen bestimmter Form verwendete Sandmenge als Gewichts- und die Kante des Gefäßes als Längeneinheit gewählt. Dieses erste grundlegende Längenmaß war wohl die Elle der Babylonier.

Am Ende des 16. Jahrhunderts trat ein wichtiger Wechsel ein: es wurden die Dezimalzahlen erfunden. Mit diesen trat die 10 in ihre uralten Rechte wieder ein an die Stelle der 60. Wenn auch sofort darauf hingewiesen wurde, daß gleichwie im Zahlensystem auch im Maßsystem die Teilung in sechs und drei Unterteile, die sich allmählich eingebürgert hatte, durch die Teilung in Zehntel ersetzt werden müsse, so sollten doch noch zwei Jahrhunderte vergehen, ehe jene immer wiederholte Forderung verwirklicht wurde. Erst die so vieles Alte vernichtende französische Revolution beseitigte am Ende des 18. Jahrhunderts das alte Maßsystem und setzte an seine Stelle als Grundmaß das Meter, damals bestimmt als der zehnmillionste Teil eines Erdquadranten. Nach abermals fast 100 Jahren folgten die meisten übrigen Länder Europas nach, so Deutschland im Jahre 1872. Nur England, die englisch sprechenden Länder und Rußland haben sich bis heute ausgeschlossen; in jenen ist die Verwendung des Metermaßes wenigstens gesetzlich erlaubt.

Doch die alte Messung des Meters hatte sich nicht als genau richtig erwiesen. Ja Neumessungen, die vermutlich immer besser würden, müßten jedesmal zu einer neuen Festlegung des Meters führen. Um dem zu entgehen, hat man sich entschlossen, das in Paris aus dem sehr kostbaren und haltbaren Metall Platin hergestellte ursprüngliche Metermaß ein für allemal als maßgebend anzuerkennen. Nach diesem ist für jedes Land ein Normalmaßstab angefertigt worden, der aus einer noch dauerhafteren Legierung von Platin mit Iridium besteht. So lautet denn heute die Antwort auf die Frage: was ist ein Meter? in Deutschland einfach so:

Ein Meter ist die Länge des von der Normal-Eichungskommission in Berlin aufbewahrten Normal-Meterstabes.

Wie schon erwähnt, haben sich Reste der alten Teilungen noch in unsere Zeit hinübergerettet. Mathematisch am fühlbarsten ist die Teilung des Kreises in 360 Grade und die weitere Unterteilung in Minuten und Sekunden.[1]) Es wäre sehr zu wünschen, daß bald diese und auch einige andere Reste verschwinden. Vor allem ist aber der Ausschluß der oben genannten Länder bedauerlich.

Heute also gilt für uns das Meter, abgekürzt m, mit seinen 10 dm (Dezimetern), 100 cm (Zentimetern) und 1000 mm (Millimetern). Die übrigen Maße werden aus ihm abgeleitet. Zunächst die Flächenmaße. Zu dem Zwecke zeichnet man ein Quadrat, dessen Seiten je ein Meter lang sind. Diese Fläche heißt ein Quadratmeter, wieder abgekürzt 1 qm. Teilt man jede Seite des Quadratmeters in zehn gleiche Abschnitte und zieht, wie in Fig. 22, Parallelen zu den Seiten, so wird das ganze Quadrat, wovon man sich durch Abzählen unmittelbar überzeugen kann, in 100 gleiche Teile zerlegt. Die neuen kleinen Quadrate haben als Seite ein Dezimeter und heißen deshalb Quadratdezimeter (qdm). Wie wir sehen, hat ein Quadratmeter 100 Quadratdezimeter. Ebenso läßt sich ein Quadratdezimeter in 100 Quadratzentimeter (100 qcm) und ein Quadratzentimeter in 100 Quadratmillimeter (100 qmm) zerteilen.

Ganz allgemein kann man sagen: zerlegt man jede Quadratseite in drei Teile und zieht Parallelen zu den Seiten, so erhält man 3×3, also 9 neue Quadrate; zerlegt man in 7 Teile, so erhält man 7×7, also 49 neue Quadrate, u. s. f.

2. Der Begriff der Flächenmessung. Den Inhalt einer beliebigen Fläche ausmessen, heißt angeben, wie viele Quadrate von der gewählten Einheit in die Fläche hineingelegt werden können. In Fig. 23 ist irgendeine Fläche auf quadratisch geteiltes Papier

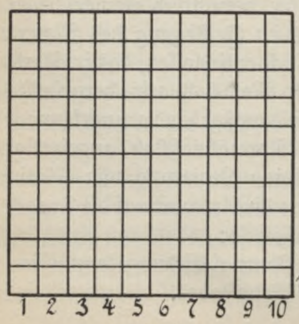


Fig. 22.

1) Die Zeichen für Grade °, Minuten ′ und Sekunden ″ sind nichts anderes als 0, I und II; sie bedeuten das 0.te, das I.te und das II.te Sechzigstel. Man schritt eben immer um den sechzigsten Teil fort, die Zahlen einfach nebeneinander schreibend, genau wie heute bei den Dezimalzahlen die folgende Zahl die Zehntel der vorhergehenden bedeutet.

gezeichnet. Zählen Sie nach, wie viele Quadrate in der Fläche liegen, und nehmen dabei die zum größeren Teile bedeckten Quadrate ganz, die zum kleineren Teile bedeckten dagegen garnicht mit, so werden Sie in guter Annäherung den Inhalt der Fläche erhalten. Die schraffierten Quadrate ergeben als Resultat: 77 qcm, wenn in der nicht verkleinerten Zeichnung die Quadratseite 1 cm lang war.

Vollständig ließ sich aber unsere Fläche nicht mit Quadraten bedecken; ja das gelingt genau nur in wenigen Fällen. Bei manchen geometrischen Figuren läßt sich wenigstens noch mit Zirkel und Lineal die Verwandlung ausführen in solche, die genau mit Quadraten bedeckt werden können. In allen diesen Fällen sagt man: die Quadratur, d. h. also das Bedecken mit Quadraten der Figur selbst oder einer genau gleich großen, aber wirklich gezeichneten, ist ausführbar. Meist muß man sich mit Annäherungen begnügen. Es sei aber ausdrücklich schon hier bemerkt, daß die ganze Frage praktisch ohne Bedeutung ist. Denn einerseits können wir, solange wir messen, immer nur mit gewisser Annäherung genau messen; andrerseits gibt es für jede irgendwie begrenzte Figur immer Mittel und Wege, um ihre Fläche, so genau es die Praxis verlangt, auch wirklich zu ermitteln.

3. Die geradlinig begrenzten Flächen. Wenn die Quadratur ausführbar ist, so pflegt die rechnerische Ermittlung des Flächeninhalts verhältnismäßig recht einfach zu sein. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit diesen Figuren und beginnen mit dem Rechteck. In Fig. 24 ist ein Rechteck gezeichnet. Haben Sie auf der einen Seite 9 cm, auf der

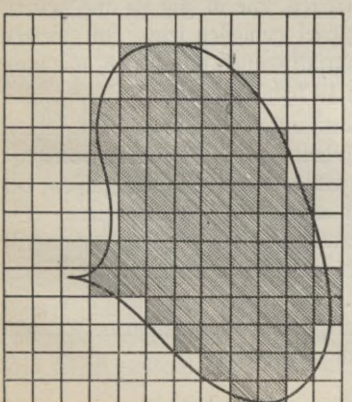


Fig. 23.

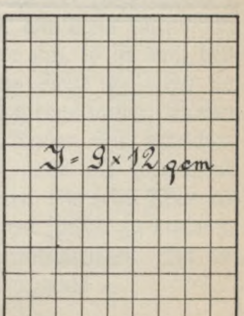


Fig. 24.

anderen 12 cm gemessen, so können Sie genau, wie oben beim Quadrat, unser Rechteck in $9 \times 12 = 108$ Quadratzentimeter zerlegen. Also haben wir den Inhalt des Rechtecks zu 108 qcm ermittelt. Meist wird freilich die Messung der Seiten nicht so einfache Ergebnisse liefern, wie oben. Auf der genauesten Zeichnung kann man mit bloßem Auge noch $\frac{1}{10}$ mm ablesen. Ist das Rechteck der Fig. 25 so genau gezeichnet gewesen, so werden Sie ablesen können 9,76 cm und 12,59 cm. Jetzt bedecken wir die Fläche mit Quadraten, indem wir nach jedem $\frac{1}{10}$ mm Parallelen ziehen. Wie oben gezeigt wurde, ist das Flächenmaß jetzt $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ qmm. Da Sie 976×1259 Quadrate gezeichnet dachten, so ist der Flächeninhalt

$$976 \times 1259 \times \tfrac{1}{10} \times \tfrac{1}{10} \text{ qmm oder}$$

$$97{,}6 \times 125{,}9 \text{ qmm oder auch}$$

$$9{,}76 \times 12{,}59 \text{ qcm.}$$

Schon hier will ich auf eins hinweisen: rechnet man nach dem gewöhnlichen Multiplikationsverfahren den Flächeninhalt genau aus, so gibt man viel zu genaue Resultate an. Nach unserer Messung können wir doch nur sagen, daß die Grundseite z. B. sicher größer als 9,75 cm und kleiner als 9,77 cm ist. Entsprechend ist die andere Seite sicher größer als 12,58 cm und kleiner als 12,60 cm. Darnach läßt sich über den ganzen Inhalt nur sagen, daß er sicher

größer als $9{,}75 \times 12{,}58$ qcm

und kleiner als $9{,}77 \times 12{,}60$ qcm

ist. D. h. es kann ein schmaler Streifen, wie in Fig. 25 angedeutet, sowohl hinzukommen als auch zuviel gemessen sein. Im vierten Vortrag werde ich auf die Frage zurückkommen und zeigen, wie sachgemäß zu rechnen ist.

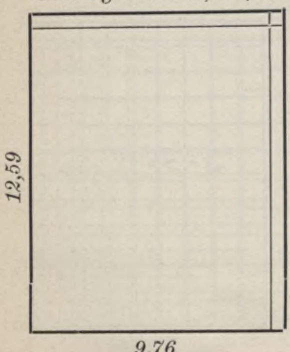


Fig. 25.

Zusammenfassend können wir sagen: den Inhalt eines Rechtecks berechnet man, indem man die Maßzahlen der Seiten miteinander multipliziert. Die Benennung ist gleich der Quadrateinheit, die der gewählten Längeneinheit entspricht.

In allgemeinen algebraischen Formeln hat man zu schreiben

$$J = a \cdot b,$$

wenn a und b die Maßzahlen der Seiten, beide in derselben Längeneinheit gemessen, bedeuten.

Unmittelbar wie das Rechteck läßt sich das Parallelogramm, ein Viereck mit parallelen Gegenseiten, berechnen. Fig. 26 zeigt Ihnen, wie man aus dem Parallelogramm ein Rechteck macht, indem man das Dreieck 1 links abschneidet und dafür rechts als Dreieck 2 wieder anlegt. Die Grundlinien des Rechtecks und des Parallelogramms sind gleich lang; dagegen führt die zweite Rechtecksseite im Parallelogramm den Namen Höhe. Darnach erhält man den Inhalt des Parallelogramms, wenn man die Maßzahlen von

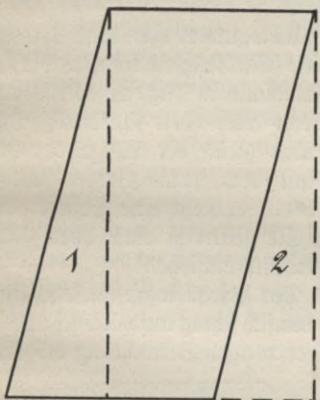


Fig. 26.

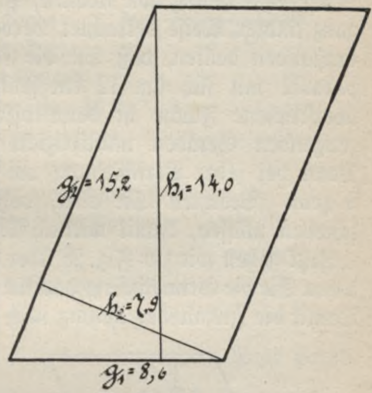


Fig. 27.

Grundlinie und Höhe miteinander multipliziert. Also ist $J = g \cdot h$, wenn g die Maßzahl der Grundlinie und h die der Höhe bedeutet.

Wir fragen uns hier, welche Seite sollen wir denn Grundlinie nennen? Halten Sie das Buch senkrecht vor sich, so ist nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch in Fig. 27 die Seite $g_1 = 8{,}6$ cm die Grundseite zu nennen, denn sie befindet sich eben unten. Drehen Sie dagegen das Buch seitlich herum, so können Sie erreichen, daß sich jetzt $g_2 = 15{,}2$ cm unten befindet, also als Grundlinie zu bezeichnen ist. Mit andern Worten können Sie jede Seite als Grundlinie wählen, müssen dann aber, um den Inhalt zu erhalten, mit der Maßzahl der zugehörigen Höhe multiplizieren. In der Fig. 27 ist deshalb der Inhalt des Parallelogramms

$$J = 8{,}6 \times 14{,}0 = 15{,}2 \times 7{,}9 = 120 \text{ qcm}.$$

In Formeln ausgedrückt:

$$J = g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2.$$

Wieder ist angenommen, daß ein Zentimeter die Maßeinheit der ursprünglichen Figur war. In einem andern Falle könnte auch ein Dezimeter oder ein Meter u. s. f. gewählt sein. Nur, und das ist sehr wichtig, alle Längen müssen mit demselben Einheitsmaße gemessen sein. Sonst würde man ja bei der Zerlegung auch garnicht Quadrate bekommen. Man darf also niemals eine Seite gemessen in Dezimetern und die andere gemessen in Millimetern miteinander multiplizieren. Wie sollte da wohl auch die Benennung lauten?

Die Berechnung von Rechteck, Parallelogramm usw. kann noch in ganz andrer Weise betrachtet werden. Ein Rechteck können Sie so entstanden denken, daß Sie die Grundlinie in Fig. 24 von 9 cm parallel mit sich um 12 cm senkrecht nach oben schieben. Die überstrichene Fläche ist dann offenbar gleich der Länge der erzeugenden Geraden multipliziert mit dem zurückgelegten Weg. Denn bei jeder Verschiebung um 1 cm entsteht eine Schicht von 9 qcm. Beachten Sie aber, daß Sie senkrecht nach oben verschieben müssen, damit wirklich Quadrate entstehen!

Jetzt gehen wir zur Fig. 28 über. Das Parallelogramm entsteht, wenn Sie die Grundlinie g parallel mit sich schräg aufwärts schieben. Damit die Inhaltsberechnung nach der vorigen Betrachtung möglich

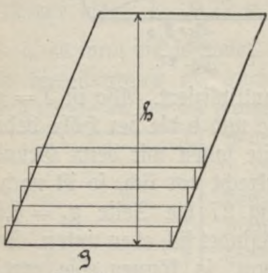


Fig. 28.

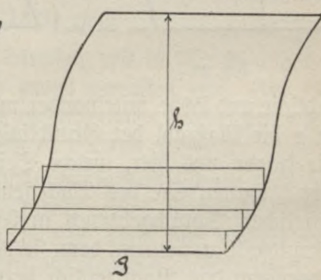


Fig. 29.

ist, müssen Sie die Verschiebung stufenweise ausgeführt denken, indem Sie zunächst senkrecht nach oben und dann seitlich schieben. Zur Fläche kommt immer nur etwas hinzu, wenn Sie senkrecht aufwärts schieben. Deshalb ist auch hier der Inhalt gleich dem Produkt aus der erzeugenden Geraden und dem in senkrechter Richtung zurückgelegten Weg. Ja diese Beziehung gilt überhaupt, wenn Sie eine gerade Linie parallel mit sich in irgendwelcher Richtung verschieben. In Fig. 29 habe ich Ihnen auch dafür noch ein Beispiel angedeutet. Natürlich braucht die Messung der erzeugenden Geraden nicht ganze Zentimeter zu ergeben, da Sie ebensogut z. B. immer um 1 Millimeter aufwärts schieben können, wenn die Länge in Millimetern gemessen war. Die Schichten bestehen dann eben aus Quadratmillimetern u. s. f.

Ein Dreieck ist immer die Hälfte eines Parallelogramms. Ja die Ergänzung zum Parallelogramm ist sogar in dreifacher Weise möglich, da das Dreieck, nach dem oben Gesagten, drei Grundlinien und drei Höhen hat. In Fig. 30 sind alle drei Ergänzungen mitgezeichnet. Den Inhalt berechnen wir genau wie beim Parallelogramm, nur müssen wir noch durch 2 dividieren, um die Hälfte zu erhalten. In Formeln heißt dies, es ist $J = \frac{1}{2} g \cdot h$.

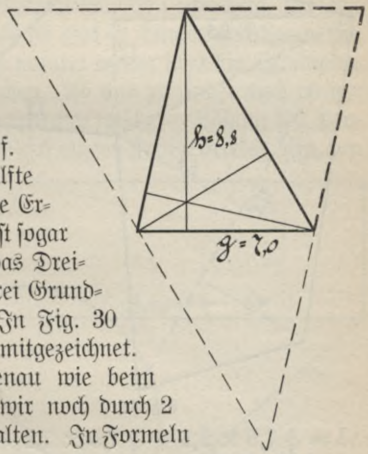


Fig. 30.

Das oben gezeichnete Dreieck besitzt den Inhalt

$$J = \tfrac{1}{2}\, 7{,}0 \times 8{,}8 = 31 \text{ qcm}.$$

Wie das Parallelogramm hat auch das Trapez ein Paar paralleler Seiten, doch haben die beiden andern Seiten eine beliebige Neigung gegen die Parallelen. In Fig. 31 ist ein Trapez gezeichnet und auch gleich in zwei Dreiecke zerlegt. Der Inhalt ist einfach gleich der Summe dieser beiden Dreiecke.

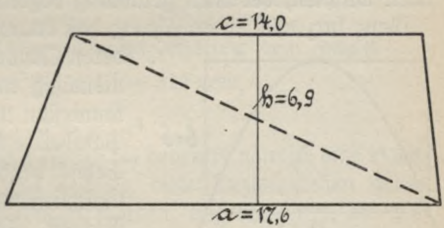


Fig. 31.

$$J = \tfrac{1}{2}\, 17{,}6 \times 6{,}9 + \tfrac{1}{2}\, 14{,}0 \times 6{,}9 = \frac{17{,}6 + 14{,}0}{2} \times 6{,}9 = 109 \text{ qcm}.$$

Hier multipliziert man also die halbe Summe der parallelen Seiten mit ihrem Abstand, in Formeln

$$J = \frac{a + c}{2} \cdot h.$$

Man beachte wohl, daß die parallelen Seiten zu nehmen sind; das andere Seitenpaar würde eine ganz andere Regel ergeben.

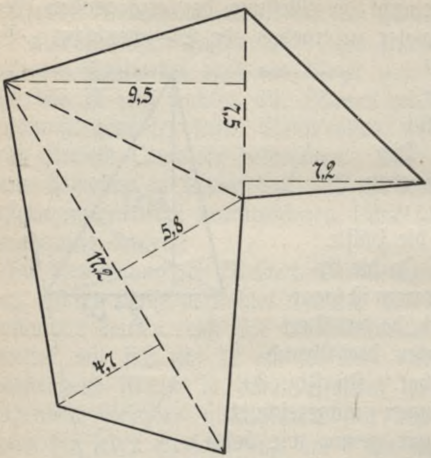


Fig. 32.

Hat man ein ganz beliebiges nur geradlinig begrenztes Vieleck, wie in Fig. 32, so zerlegt man es in Dreiecke, berechnet den Inhalt eines jeden Dreiecks und addiert die Einzelergebnisse. Diese Summe ist dann der gesuchte Inhalt des ganzen Vielecks. Durch geschickte Zerlegung und Ausmessung läßt sich manche Vereinfachung erzielen. So kann man hier z. B. wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} J &= \tfrac{1}{2}\,7{,}5 \times 9{,}5 + \tfrac{1}{2}\,7{,}5 \times 7{,}2 + \tfrac{1}{2}\,17{,}2 \times 5{,}8 + \tfrac{1}{2}\,17{,}2 \times 4{,}7 \\ &= \frac{9{,}5 + 7{,}2}{2} \times 7{,}5 + \frac{5{,}8 + 4{,}7}{2} \times 17{,}2 \\ &= 153 \text{ qcm.} \end{aligned}$$

Im ganzen haben Sie erkannt, daß die Quadratur, wie wir es oben nannten, bei allen geradlinig begrenzten Flächen möglich ist.

Ganz kurz will ich erwähnen, daß krummlinig begrenzte Flächen, deren Quadratur möglich ist, verhältnismäßig nur selten sind. Am bekanntesten unter ihnen ist wohl die Parabel. Da ist jeder von einer Sehne begrenzte Abschnitt $^2/_3$ vom umschließenden Parallelogramm oder Rechteck. So liefert unsere Figur 33 das Resultat:

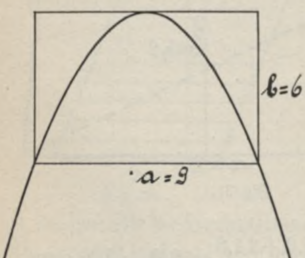


Fig. 33.

$$J = \tfrac{2}{3}\,9 \times 6 = 36 \text{ qcm},$$

oder in Formeln

$$J = \tfrac{2}{3}\,a \cdot b.$$

4. Der Kreis. Jahrhunderte hindurch ist es ein Lieblingsthema der Mathematiker gewesen, die Quadratur des Kreises zu suchen.

Heute wissen wir, daß alles Mühen vergeblich bleiben mußte, weil eben die Quadratur des Kreises unmöglich ist. Man kann den Kreis nicht, wie die oben genannten Figuren, mit Zirkel und Lineal in ein gleich großes Quadrat verwandeln. Freilich ist der Beweis dieser Unmöglichkeit für den Mathematiker schon schwierig, für den Laien gar nicht verständlich. Deshalb gibt es immer noch Laien, die nicht an ihn glauben wollen, und munter weiter über die Quadratur des Kreises sich den Kopf zerbrechen. Ab und zu findet auch immer wieder einer von ihnen eine — natürlich falsche — Lösung des Problems, die er dann für teures Geld auf eigene Kosten drucken läßt, um zum Schluß ausgelacht zu werden. Es sind häufig nicht die schlechtesten Köpfe, die sich an diese Arbeit heranmachen. Schade um die Zeit, die sie darauf verwenden. Würde ihre Arbeitskraft auf vernünftige Fragen gelenkt, so könnte manch einer Tüchtiges leisten.

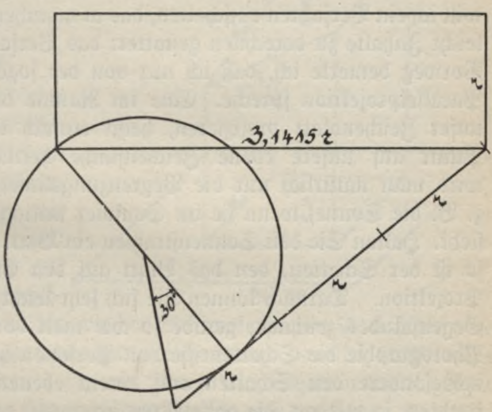


Fig. 34.

Ist der Radius eines Kreises z. B. 10 cm lang, so besitzt der Kreis den Inhalt

$$J = \pi \times 10 \times 10 = 314 \text{ qcm},$$

in Formeln

$$J = \pi \cdot r^2.$$

Jener griechische Buchstabe π (sprich pi) bedeutet nämlich eine eigenartige Zahl, die man auf beliebig viele Dezimalstellen genau (dreihundert sind schon berechnet worden) angeben kann, die aber deren unendlich viele besitzt. Es ist

$$\pi = 3{,}1416 \text{ oder kurz annähernd } \pi = \frac{22}{7}.$$

Um die ganze Fruchtlosigkeit der Bemühungen, die Quadratur des Kreises zu finden, noch besonders hervorzuheben, will ich nur erwähnen, daß es näherungsweise sehr wohl gelingt, den Kreis in ein Rechteck und dann weiter in ein Quadrat zu verwandeln. Fig. 34 zeigt eine solche Lösung, die wohl nach der Figur selbst unmittelbar verständlich ist. Wie die Ausrechnung zeigt, erhalten Sie hier statt 3,1416 die Zahl 3,1415. Darnach ist der Fehler so klein, daß er auch bei der genauesten Zeichnung keine Rolle mehr spielt. Würde also die Quadratur selbst ausführbar sein (was, wie ich ausdrücklich nochmals betone, als unmöglich bewiesen ist), so könnte man doch nicht mehr erreichen, als mit jener Zeichnung schon jetzt erreicht ist. Vielleicht schreckt diese Erkenntnis manchen von weiteren Versuchen ab. Die Praxis hat nicht einmal an solchen Näherungskonstruktionen erhebliches Interesse.

5. Über Projizieren und die Ausmessung der Ellipse. Hier will ich ein Verfahren einschalten, das in manchen Fällen bequem und leicht Inhalte zu berechnen gestattet: das Verfahren der Projektion. Vorweg bemerke ich, daß ich nur von der sogenannten senkrechten Parallelprojektion spreche. Eine im Raume befindliche Figur auf unser Zeichenblatt projizieren, heißt einfach die Figur Punkt für Punkt auf unsere ebene Zeichenfläche herunterloten. Praktisch wird man natürlich nur die Begrenzungslinien zeichnen. Das tut z. B. die Sonne, wenn sie im Sommer mittags senkrecht über uns steht. Halten Sie den Sonnenstrahlen ein Blatt Papier in den Weg, so ist der Schatten, den das Blatt auf den Erdboden wirft, seine Projektion. Darnach können Sie sich sehr leicht die Projektion eines Gegenstandes zeichnen, gerade so wie man vor der Erfindung der Photographie die Schattenrisse von Personen herstellte. Wenn Sie insbesondere den Schatten von einem ebenen Blatt Papier betrachten, so werden Sie ohne Mühe erkennen, daß der Flächeninhalt der Projektion, also des Schattens, meist kleiner und höchstens, bei paralleler Lage, gleich der Größe Ihres Papierblattes ist. Je mehr Sie das Blatt aus der parallelen Lage herausdrehen, um so kleiner wird seine Projektion. Bei senkrechter Lage zur Erde schrumpft der Schatten zu einer geraden Linie zusammen.

Jetzt wollen wir ein rechteckiges Stück Papier nehmen und, wie in Fig. 35 gezeichnet, so halten, daß die eine Seite des Rechtecks ihrer Projektion parallel bleibt. Die andere 5,5 cm lange Seite wird verkürzt und schrumpft zur Länge 5,0 cm zusammen. Die Flächeninhalte F des ursprünglichen Rechteckes und J seines Schattens sind:

$$F = 6 \times 5{,}5 \text{ qcm und } J = 6 \times 5{,}0 \text{ qcm}.$$

Die geneigten Seiten sind im Verhältnis $\frac{5{,}0}{5{,}5} = \frac{10}{11}$ verkürzt, aber genau so auch die Inhalte, denn es ist ja

$$\frac{J}{F} = \frac{6 \times 5{,}0}{6 \times 5{,}5} = \frac{5{,}0}{5{,}5} = \frac{10}{11}.$$

Man beachte aber, daß zwei Rechtecksseiten parallel geblieben sind. Jedenfalls ist die Größe der Projektion

$$J = \frac{10}{11} F.$$

Mit Benutzung des Winkels α, unter dem das Rechteck gegen die Zeichenebene geneigt ist, lautet die Beziehung, da $\cos\alpha = \frac{5{,}0}{5{,}5}$ ist,

$$J = F \cdot \cos\alpha.$$

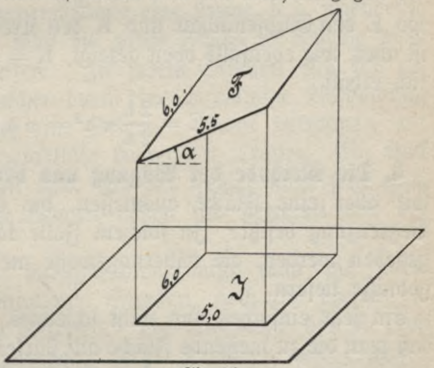


Fig. 35.

Eine Anwendung dieses Verfahrens führt zur Berechnung des Flächeninhalts von der Ellipse. Diesmal projizieren wir wie in Fig. 36 einen Kreis, den wir uns auf Millimeterpapier gezeichnet denken. Dabei halten wir das Millimeterpapier so, daß die eine Schar der Teilungsgeraden zur Zeichenebene parallel bleibt. Die Projektion eines Kreises ist, wie Ihnen sein Schatten sofort zeigen würde, eine Ellipse. Ein Kreisdurchmesser von der Länge 2 a bleibt auch der Ellipse als große Achse erhalten. Es ist das der Durchmesser, der mit einer Teilungsgeraden jener Parallelenschar zusammenfällt. Der dazu senkrechte Durchmesser, der auch in der Projektion senkrecht bleibt, wird am stärksten verkürzt und wird so zur kleinen Achse 2 b der Ellipse. Bei der von uns gewählten Lage, die sich ja immer durch Drehen des Kreises erreichen läßt,

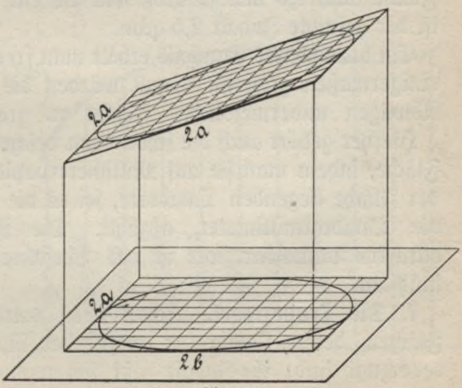


Fig. 36.

wird jedes Quadrat im gleichen Maße verkleinert. Darnach aber erfährt auch die ganze Kreisfläche, die wir beliebig genau mit kleinen Quadraten bedecken könnten (man könnte die Quadratmillimeter des Papiers natürlich noch weiter teilen), dieselbe Verkleinerung. Also ist hier, ganz entsprechend dem oben gefundenen Ergebnis

$$E = \frac{2\,b}{2\,a} K,$$

wo E den Ellipseninhalt und K den Kreisinhalt bedeuten. Dieser ist aber, wie ebenfalls oben gezeigt, $K = \pi a^2$, so daß man schließlich erhält

$$E = \frac{2\,b}{2\,a} \pi a^2 = \pi a b.$$

6. Die Methode der Wägung und der Abzählung. Wie sollen wir aber eine Fläche ausmessen, die irgendeine unregelmäßige Begrenzung besitzt? In solchem Falle können nur Methoden angegeben werden, die näherungsweise mehr oder minder gute Ergebnisse liefern.

Ein sehr einfaches und nicht schlechtes Verfahren besteht darin, daß man die zu messende Fläche auf starken Pappkarton aufzeichnet, ausschneidet und dann abwägt. Bei der Wägung mögen Sie z. B. das Gewicht 45 g ermittelt haben. Darauf schneiden Sie aus demselben Pappkarton 1 qdm heraus und stellen sein Gewicht z. B. zu 18 g fest. Sie wissen jetzt, daß die gesuchte Fläche $45 : 18 = 2{,}5$ mal so schwer ist als ein Quadratdezimeter. Da aber beide Flächen aus demselben Karton ausgeschnitten wurden, so muß die gesuchte Fläche auch 2,5 mal so groß sein als ein Quadratdezimeter. Also ist der gesuchte Inhalt 2,5 qdm.

Ein brauchbares Ergebnis erhält man freilich nur, wenn die Fläche einigermaßen groß ist. Sonst würden die beim Ausschneiden und Abwägen unvermeidlichen Fehler zu großen Einfluß gewinnen.

Hierher gehört auch die schon oben beschriebene Ausmessung einer Fläche, indem man sie auf Millimeterpapier aufzeichnet und die in der Fläche liegenden Quadrate, sei es die Quadratzentimeter oder die Quadratmillimeter, abzählt. Die Resultate sind ebenfalls durchaus brauchbar, nur ist das Verfahren im allgemeinen recht mühsam.

7. Die Trapezregel. Schon oben hatte ich erwähnt, daß die Flächen, deren Quadratur ausführbar ist, in gewisser Beziehung bevorzugt sind: ihr Inhalt läßt sich rechnerisch einfach ermitteln.

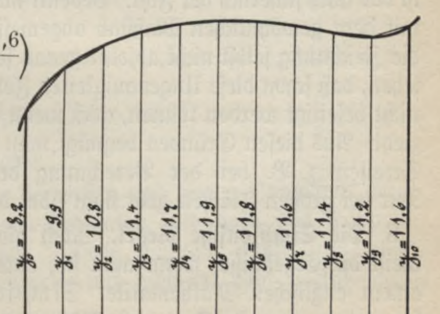
In erster Linie konnten wir die geradlinig begrenzten Flächen hervorheben, in zweiter die Parabel. Das legt uns den Gedanken nahe, die Ausmessung der Flächen zu versuchen, indem wir sie möglichst gut durch geradlinig begrenzte ersetzen oder durch solche, deren Begrenzung von Parabelbögen gebildet wird. Darnach erhalten wir wirklich zwei Regeln zur Inhaltsbestimmung beliebiger Flächenstücke: die Trapezregel und die Simpsonsche Regel.

Zuerst will ich Ihnen die Trapezregel darstellen. Hat die Fläche der Fig. 37 als eine Begrenzungslinie eine Kurve, d. h. irgendeine krumme Linie, so zerlegt man die ganze Fläche in beliebig viele überall gleich breite Streifen. In jedem Streifen für sich ersetzen wir das Kurvenstückchen durch eine geradlinige Verbindung der Endpunkte, also durch eine Sehne. Dann betrachten wir jeden Streifen als ein geradlinig begrenztes Trapez. Ein Blick auf die Zeichnung belehrt uns, daß der Fehler nicht sehr groß werden kann: nur wenige Sehnen ließen sich getrennt von der Kurve zeichnen.

Um die Ausrechnung durchzuführen, mißt man die sämtlichen Ordinaten, die parallelen Strecken, nach und ebenso die überall gleiche Breite der Streifen. Die Ergebnisse der Messung sind in die Figur eingetragen. Jetzt berechnen wir Streifen für Streifen, wie wir es oben beim Trapez gelernt haben; d. h. wir multiplizieren die halbe Summe der parallelen Seiten mit ihrem Abstand. Dabei brauchen wir mit dem Abstand, da er bei allen Trapezen der gleiche ist, nur einmal zu multiplizieren. Das gibt:

$$J = 1{,}5\left(\frac{8{,}2+9{,}9}{2} + \frac{9{,}9+10{,}8}{2} + \frac{10{,}8+11{,}4}{2} + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. + \frac{11{,}4+11{,}2}{2} + \frac{11{,}2+11{,}6}{2}\right)$$



$h = 1{,}5$ Fig. 37.

Jede Ordinate kommt zweimal vor, nur nicht die erste und die letzte. Fassen wir deshalb die beiden halben Ordinaten jedesmal zu einer ganzen zusammen, so bleibt:

$$J = 1{,}5\left(\frac{8{,}2+11{,}6}{2} + 9{,}9 + 10{,}8 + 11{,}4 + \ldots\ldots + 11{,}4 + 11{,}2\right)$$

Das ganze Verfahren ist zusammengefaßt dies:

Man addiert sämtliche Ordinaten außer der ersten und der letzten, zur Summe fügt man die Hälfte der ersten und die Hälfte der letzten Ordinate hinzu und multipliziert zum Schluß mit der Breite der Streifen.

In unserem Beispiel sieht die Berechnung dann so aus:

$$\begin{array}{rr}
 & 9{,}9 \\
 & +\ 10{,}8 \\
 & +\ 11{,}4 \\
 & +\ 11{,}7 \\
 & +\ 11{,}9 \\
 & +\ 11{,}8 \\
 & +\ 11{,}6 \\
 & +\ 11{,}4 \\
 & +\ 11{,}2 \\
+\frac{1}{2}\ 8{,}2 = & +\ \ 4{,}1 \\
+\frac{1}{2}\ 11{,}6 = & +\ \ 5{,}8 \\
\hline
 & 111{,}6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
111{,}6 \\
\times\ 1{,}5 \\
\hline
1116 \\
5580 \\
\hline
167{,}40
\end{array}$$

Ergebnis: J = 167 qcm.

Bezeichnet man die Ordinaten der Reihe nach mit y_0, y_1, y_2 u. s. f. und die Streifenbreite mit h, so lautet die allgemeine Formel:

$$J = h\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_8 + y_9\right)$$

Man könnte meinen, das Ergebnis würde immer genauer werden, je enger man nur die Streifen wählt. Bis zu einem gewissen Grade ist das auch sicherlich der Fall. Bedenkt man aber, daß die Ordinaten mit dem gewöhnlichen Maßstab abgemessen werden, und daß auch die Zeichnung selbst nicht absolut genau sein kann, so wird man einsehen, daß schon diese Ungenauigkeiten Fehler bedingen, die natürlich nicht beseitigt werden können, auch wenn man noch so viele Streifen zieht. Aus diesen Gründen begnügt man sich in der Regel mit zehn Streifen z. B. bei der Berechnung des Dampfdruckdiagramms. Nur bei großen Flächen geht man über diese Zahl hinaus.

8. Die Simpsonsche Regel. Noch günstiger als soeben werden meist die Ergebnisse, wenn man sich einer Regel bedient, die nach einem englischen Mathematiker Simpson, der sie zuerst angab, benannt worden ist. Die ganze Fläche teilt man geradeso wie vorher in Streifen ein, aber man faßt je zwei Streifen, wie Sie es in der Figur 38 durch Schraffierung angedeutet sehen, zusammen. Jeder Doppelstreifen enthält drei Ordinatenendpunkte, durch die man sich je eine Parabel gelegt denkt, deren Achse zu den Ordinaten parallel ist. Wenn Sie jeden Doppelstreifen aus einem Trapez und einem Parabelabschnitt, der wie oben angegeben zu berechnen ist, zusammensetzen, so können Sie leicht mathematisch genau die folgende Rechenregel bestätigen. Es wird nämlich

$$J = 2 \times 1{,}9 \left(\frac{2{,}0 + 4 \times 5{,}2 + 7{,}4}{6} + \frac{7{,}4 + 4 \times 8{,}5 + 9{,}2}{6} + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \frac{12{,}1 + 4 \times 12{,}0 + 11{,}7}{6}\right)$$

Statt jeden Bruch in der Klammer durch 6 zu dividieren, dividiert man jeden in der Regel nur durch 2 und nimmt dafür 3 einmal vor die Klammer in den Nenner. Man sieht, daß die erste und letzte Ordinate nur je einmal, die zweite, vierte, sechste u. s. f. Ordinate auch nur je einmal aber mit 4 multipliziert und die dritte, fünfte, siebente u. s. f. Ordinate je zweimal vorkommen. Deshalb kann man so zusammenfassen, wenn man noch den Nenner 2 nicht vergißt:

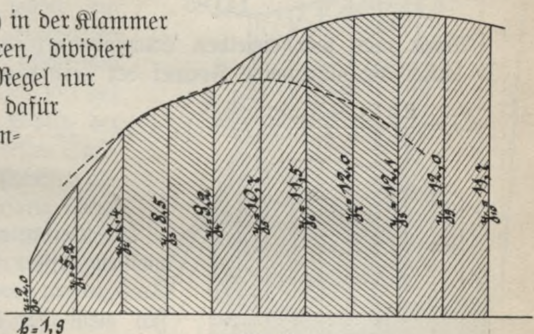


Fig. 38.

$$J = \frac{2 \times 1{,}9}{3} \left(\frac{2{,}0 + 11{,}7}{2} + 7{,}4 + 9{,}2 + 11{,}5 + 12{,}1 + 2\,[5{,}2 + 8{,}5 \right.$$
$$\left. + 10{,}7 + 12{,}0 + 12{,}0]\right)$$

Also lautet hier die Regel:

Man addiert die Hälften der ersten und letzten Ordinaten, dazu alle übrigen ungeradzahligen Ordinaten und dazu das Doppelte der geradzahligen Ordinaten. Diese Summe multipliziert man mit der doppelten Streifenbreite und dividiert zum Schluß durch drei.

Darnach sieht in unserem Beispiel die Ausrechnung so aus:

$$\begin{array}{rrrr} & \frac{1}{2} & 2{,}0 = & 1{,}0 \\ + & \frac{1}{2} & 11{,}7 = & +\ 5{,}85 \\ & & & +\ 7{,}4 \\ & & & +\ 9{,}2 \\ & & & +\ 11{,}5 \\ & & & +\ 12{,}1 \\ + & 2 \times & 5{,}2 = & +\ 10{,}4 \\ + & 2 \times & 8{,}5 = & +\ 17{,}0 \\ + & 2 \times & 10{,}7 = & +\ 21{,}4 \\ + & 2 \times & 12{,}0 = & +\ 24{,}0 \\ + & 2 \times & 12{,}0 = & +\ 24{,}0 \\ \hline & & & 143{,}85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 143{,}85 \\ \times\ 3{,}8 \\ \hline 43155 \\ 115080 \\ \hline 546{,}630 : 3 = 182{,}21 \end{array}$$

Ergebnis: $J = 182$ qcm

Wählt man hier dieselben Buchstabenbezeichnungen wie oben, so lautet die allgemeine Formel der Simpsonschen Regel:

$$J = \frac{2h}{3}\left[\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + 2\,(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)\right].$$

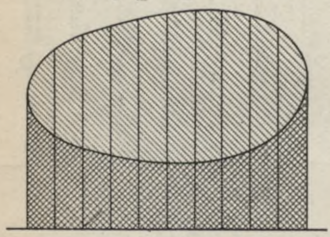


Fig. 39.

Das Verfahren liefert im allgemeinen bessere Ergebnisse als die Trapezregel, weil die Parabeln sich meist der Kurve noch mehr anschmiegen, als die Sehnen. Eine solche Parabel ist, damit sie deutlich sichtbar wird, an sehr ungünstiger Stelle in der Fig. 38 gezeichnet. Über die Anzahl der Streifen gilt genau das bei der Trapezregel Gesagte. Zu beachten ist nur, daß hier immer eine gerade Anzahl von Streifen gewählt werden muß.

Hat man eine Fläche zu berechnen, die allseitig krummlinig begrenzt ist, so kann man auch noch unsere Regeln benutzen. Man zieht zu dem Zwecke irgendeine Hilfsachse und zwei Grenzordinaten, wie Fig. 39 zeigt, und berechnet zuerst die von ihnen und dem oberen Kurventeil eingeschlossene Fläche. Davon zieht man die durch dieselben Ordinaten, durch die Achse und durch den unteren Teil der Kurve begrenzte Fläche ab. Als Rest erhält man wirklich den nur von der Kurve eingeschlossenen Teil. In der Figur sind die zu berechnenden Flächenteile durch verschiedene Schraffierung angedeutet.

9. Das Polarplanimeter. Nach allen bisherigen Verfahren kamen wir auf rechnerischem Wege zum Ziel. Viel einfacher und schneller arbeitet man, wenn man einen Apparat benutzt, der rein mechanisch den Flächeninhalt ermittelt. Für diesen Zweck am gebräuchlichsten ist das sogenannte Polarplanimeter, das im Jahre 1854 von einem Mechaniker Amsler konstruiert wurde. Die Theorie dieses Instrumentes will ich Ihnen an der Fig. 40 erklären. Wir haben dort einen Flächenteil, der von einer Kurve rings umschlossen ist, und einen Kreisbogen. Statt des Kreisbogens könnte irgendein beliebiges Kurvenstück gewählt sein; bei der praktischen Ausführung des Planimeters läßt sich jedoch ein Kreisbogen am einfachsten verwirklichen. Einen Punkt des Kreisbogens verbinden wir mit einem beliebigen Punkt der Kurve durch einen festen Stab, den wir in diesen Punkten abschneiden. Zu Anfang möge etwa der Stab die Lage des stärker gezeichneten Strahles haben, der den Körper R, über den wir später sprechen werden, trägt. Jetzt bewegen Sie diesen Stab so zunächst nach rechts, daß seine Endpunkte ständig auf ihren Kurven bleiben.

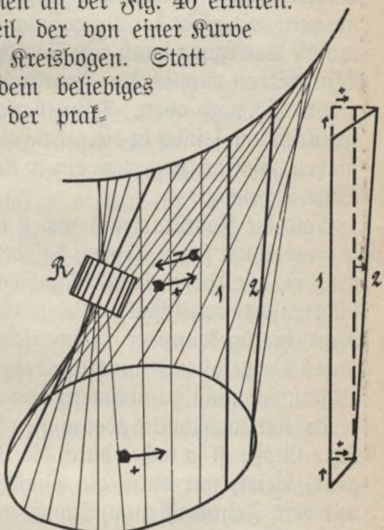


Fig. 40.

Zum vollen Verständnis ist es nötig, daß Sie die Bewegung an der Figur wirklich einmal ausführen. Haben Sie den unteren Teil durchlaufen, so kommt nunmehr der obere an die Reihe. Jetzt aber bewegen Sie den Stab nach links hin, bis er zur Anfangslage zurückkehrt. Dieser Stab, Fahrstrahl genannt, ist in der Figur in einer ganzen Reihe aufeinanderfolgender Lagen eingezeichnet.

Jetzt wollen wir die Verabredung treffen: bewegt sich der Fahrstrahl nach rechts, so soll die überstrichene Fläche positiv, bewegt er sich dagegen nach links, so soll die Fläche negativ gerechnet werden.[1])

1) Hier ist rechts und links natürlich nur in bezug auf unsere Figur aufzufassen. Hat die Figur irgendeine beliebige Lage, so muß man sagen: bei der Bewegung in einer Richtung positiv und in der entgegengesetzten negativ.

Dieser Verabredung gemäß sind Pfeilrichtungen in die Figur eingezeichnet. Sie sehen, daß die von der Kurve eingeschlossene Fläche nur positiv, der andere überstrichene Flächenteil dagegen positiv und negativ überfahren wird; er fällt daher ganz fort.

Sehen wir einmal genauer zu, wie sich der Fahrstrahl bewegt, wenn er z. B. aus der stärker gezeichneten Lage 1 in die ebenfalls hervorgehobene benachbarte Lage 2 übergeht. Das können wir so machen, wie es in der Nebenfigur gezeichnet ist. Darnach ersetzen wir die Bewegung durch eine Parallelverschiebung und eine Drehung. Wir schieben nämlich den Fahrstrahl 1 zunächst in der Pfeilrichtung ein wenig nach oben. Dann verschieben wir ihn ebenfalls in der Pfeilrichtung seitlich in die gestrichelte, parallele Lage hinein. Endlich drehen wir ihn noch um einen kleinen Winkel, so daß er in die Lage 2 gelangt.

Sind die Fahrstrahlen 1 und 2 nahe genug beieinander gewählt, so werden wir sagen können, daß der überstrichene Flächenteil ebenso groß ist, wie das Rechteck zusammen mit dem durch die Drehung gebildeten Kreisausschnitt. Bei wirklich benachbarter Lage wird das oben hinzugekommene Flächenstückchen sich so wenig von dem unten weggefallenen unterscheiden, daß wir uns um diesen kleinen Unterschied nicht zu kümmern brauchen.

Die Kreisausschnitte aber müssen im ganzen auch wieder wegfallen. Ihre Größe ist ja außer durch die Länge des Fahrstrahls, die immer gleich bleibt, nur durch die Winkelgrößen bestimmt. Da Sie aber mit dem Fahrstrahl zum Schluß wieder in die Anfangslage zurückkehren, so müssen Sie ihn doch genau so weit wieder nach links zurückdrehen, wie Sie ihn anfangs nach rechts herausdrehen. In Übereinstimmung mit unserer oben festgelegten Verabredung müssen wir aber Rechtsdrehung positiv, Linksdrehung negativ rechnen. Also heben sich die Drehungen tatsächlich gegenseitig auf.

Es bleiben nur die Rechtecke übrig. Ihre Größe ist gleich dem Produkt aus der Länge des Fahrstrahls multipliziert mit all den seitlichen Verschiebungen zusammengenommen. Wieder ist eine Verschiebung nach rechts dabei positiv, eine nach links negativ zu rechnen.

Zusammengefaßt ist also das Ergebnis: wenn wir nur imstande sind, die seitlichen Verschiebungen zu messen, dann können wir auch die gesuchte Flächengröße angeben.

Das leistet aber die am Fahrstrahl befestigte Rolle R. Auf dieser ist einfach eine Teilung angebracht, auf der Sie ablesen, welcher Weg von ihr bei der ganzen Bewegung des Fahrstrahles zurückgelegt ist. Wirklich wird auch bei der Verschiebung und Drehung nach links der Weg negativ gerechnet, denn die Rolle wird ja notwendig im entgegengesetzten Sinne gedreht, wie vorher, läuft also einfach das entsprechende Stück wieder zurück.

In Fig. 41 sehen Sie ein Bild des Amslerschen Polarplanimeters selbst. Links trägt der Fahrstrahl die Rolle, rechts einen Stift, den man auf der Kurve entlang führen muß. Damit das andere Ende des Fahrstrahls einen Kreisbogen beschreibt, ist es drehbar an einer Stange befestigt. Diese Stange trägt am Ende eine Spitze, die durch ein Gewicht beschwert ist, und deshalb während der ganzen Messung festliegt. Der Rollenumfang ist in hundert gleiche Abschnitte geteilt. Zur Berechnung des zurückgelegten Weges müßte man noch den Durchmesser der Rolle kennen. Bei gewöhnlichen Apparaten, die nur eine bestimmte Stangenlänge besitzen, sind aber Rollendurchmesser und Stangenlänge so gewählt, daß die auf der Rolle abgelesene Zahl unmittelbar den Flächeninhalt in Quadratzentimetern angibt. Bei besseren Apparaten, wie z. B. bei dem hier abgebildeten, läßt sich die Stangenlänge verändern. Dann hat man Marken auf der Stange angegeben, bis zu denen einzustellen ist; gleichzeitig steht daneben die Konstante, mit der die abgelesene Zahl zu multiplizieren ist, um den Flächeninhalt zu erhalten. Die ganzen Umdrehungen der Rolle werden an einem besonderen Zählwerk abgelesen.

Unser Apparat findet vielfache Verwendung. In der Geographie bestimmt man mit ihm Ländergrößen, in der Technik die Inhalte von Dampfdruckdiagrammen und vieles andere u.s.f. Leider ist der

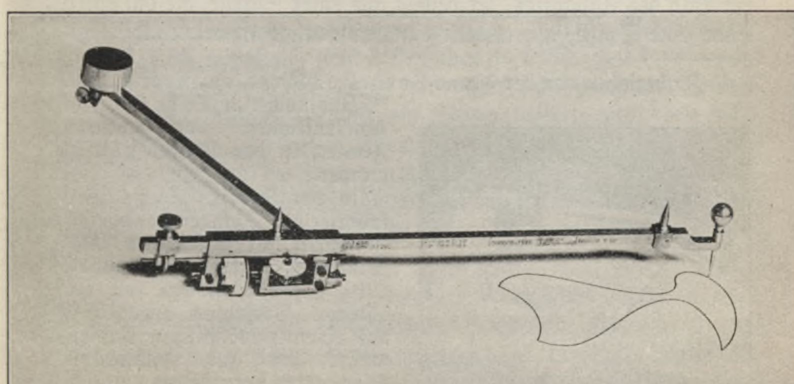


Fig. 41.

Apparat recht teuer. In einfachster Ausführung kostet er ungefähr 30 M., in besserer doch mindestens ungefähr 60 M. Seinen Namen Polarplanimeter erhielt er von jenem Gewichtsteil, um den er sich dreht, und der Pol des Planimeters genannt wird. Wollen Sie seine Theorie und Handhabung recht verstehen, so müssen Sie ihn vor allem einmal selbst in die Hand nehmen und mit ihm arbeiten.

Es sei hier noch folgendes erwähnt. Bei der Berechnung des Dampfdruckdiagramms braucht man hauptsächlich die sogenannte mittlere Höhe desselben, also den mittleren Dampfdruck im Zylinder. Zeichnet man über der Breite des Diagramms ein Rechteck, dessen Höhe gleich der mittleren Höhe ist, so besitzt das Rechteck gleichen Inhalt mit dem Diagramm. Praktisch ermittelt man die mittlere Höhe, indem man die Länge des Fahrstrahls gleich der Breite des Diagramms macht. An dem Planimeter sehen Sie zwei Spitzen auf dem Fahrstrahl angebracht, deren Abstand immer genau gleich der Länge des Fahrstrahls ist. Da ganz allgemein der Flächeninhalt gleich dem Produkt aus Fahrstrahllänge mal Verschiebung ist, so muß bei unserer Wahl die Verschiebung gleich der mittleren Höhe sein. Also braucht man nach dem Umfahren des Diagramms wieder nur auf der Rolle abzulesen und diesmal mit einer nur vom Rollendurchmesser abhängigen Zahl z. B. 0,6 oder dergl., die jedem Apparat beigegeben ist, zu multiplizieren, um unmittelbar den mittleren Dampfdruck zu erhalten.

10. Das Stangenplanimeter von Prytz. Wesentlich einfacher und billiger — es kostet ungefähr 12 M. — ist ein Planimeter, das von H. Prytz in Kopenhagen[1]) erfunden wurde. Fig. 42 zeigt ein Bild des Apparates. Er besteht aus einer Stange, die am einen Ende eine Spitze, am andern eine keilförmige Erweiterung trägt.

1) Zu beziehen von der Firma Cornelius Knudsen, Kopenhagen. Es sind noch eine Reihe ähnlicher Konstruktionen von anderen Firmen in den Handel gebracht worden.

In der Arbeit: Sachs. Ein kalibriertes Stangenplanimeter. Zeitschrift für praktischen Maschinenbau (American Machinist) 1910 S. 1152, findet sich ein hübsches Verfahren angegeben, aus einem gewöhnlichen Radiermesser ein gut brauchbares Planimeter herzustellen.

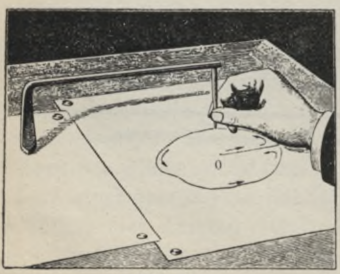


Fig. 42.

Der Abstand von Mitte Keil bis zur Spitze ist 25 cm lang. Die auszumessende Figur darf auf keinen Fall einen größeren Durchmesser als die halbe Länge des Planimeters besitzen. Die Messung geschieht in folgender Weise: man schätzt die Lage des Schwerpunktes ab und setzt die Spitze in ihm ein. Durch leichten Druck markiert man die Anfangslage des Keils. Dann umfährt man, wie in der Figur angedeutet ist, die Fläche, bis man wieder zum Ausgangspunkte zurückkommt, und markiert wieder die Stellung des Keils, der beim Umfahren der Fläche sich vollständig selbst überlassen blieb. Das Produkt aus dem Abstand der Marken multipliziert mit der Länge des Planimeters ist der gesuchte Flächeninhalt.

Die Theorie dieses Stangenplanimeters ist wesentlich schwieriger als die des Polarplanimeters und muß hier weggelassen werden. Die gefundenen Werte sind überdies nur Näherungswerte, so daß die Ergebnisse höchstens auf ein Prozent genau werden. Das Ergebnis wird verbessert, indem man die Zeichenebene um 180° dreht und die Fläche in umgekehrter Richtung umfahrend das Verfahren wiederholt. Der Mittelwert aus beiden Messungen liefert ein genaueres Resultat. Der Vorzug dieses Planimeters besteht in seiner großen Billigkeit, dafür kann er aber auch nur gebraucht werden, wenn geringe Genauigkeit verlangt wird.

III. Vortrag.

Körpermessung.

Die Körpermessung findet zwar weniger zahlreiche Verwendung als die Flächenmessung, steht dieser aber an Wichtigkeit kaum nach. In den weitaus meisten Fällen handelt es sich darum, im voraus zu ermitteln, welches Gewicht ein Körper besitzen wird, den man herzustellen hat. Zu diesem Zwecke finden Sie zunächst in Tabellen für jedes Material das sogenannte spezifische Gewicht angegeben, d. i. das Gewicht einer Volumeneinheit des betreffenden Materials. So besitzt z. B. Kupfer das spezifische Gewicht 8,9, das soll heißen

1 Kubikmeter Kupfer wiegt 8,9 Tonnen (t);
1 Kubikdezimeter wiegt 8,9 Kilogramm (kg);
1 Kubikzentimeter wiegt 8,9 Gramm (g).

Ermittelt man durch Rechnung, daß eine kupferne Platte 55 Kubikdezimeter Inhalt haben wird, so weiß man, daß ihr Gewicht

55 mal so groß sein wird, als das Gewicht von einem Kubikdezimeter, also 55 × 8,9 Kilogramm. In Formeln schreibt man

$$G = V \cdot s,$$

wo G das Gewicht, V den Körperinhalt oder das Volumen und s das spezifische Gewicht bedeuten.

1. Die Körpermaße. Ich habe vorhin schon vorgegriffen, indem ich Ihnen die Namen der Körpermaße nannte. Auch hier benutzte man ursprünglich Maße, die dem Sexagesimalsystem angepaßt waren. Scheffel, Metze, Lot sind alte Beispiele solcher. Jetzt ist das Grundmaß ein Würfel, dessen Kantenlänge ein Meter ist, dies Maß heißt ein Kubikmeter, 1 cbm. Zerlegt man alle Seitenflächen in Quadratdezimeter und baut darauf Würfel auf mit der neuen Kantenlänge von einem Dezimeter, bis das Kubikmeter ganz erfüllt ist, so erhält man in jeder Schicht hundert und da, wie Ihnen Fig. 43 zeigt, zehn Schichten übereinander liegen, im ganzen tausend der neuen Körpermaße, die man Kubikdezimeter (cdm) oder Liter (l) nennt. (Hundert Liter heißen auch ein Hektoliter (hl), so daß ein Kubikmeter zehn Hektoliter enthält.) Dies Maß läßt sich genau entsprechend in tausend Kubikzentimeter (ccm), und dieses wieder in tausend Kubikmillimeter (cmm) zerlegen. Ein Stecknadelknopf hat etwa die Größe von einem Kubikmillimeter.

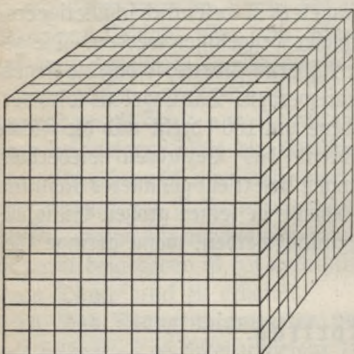


Fig. 43.

2. Der Begriff der Körpermessung. Den Inhalt oder das Volumen eines beliebigen Körpers ausmessen, heißt angeben, wieviele Würfel von der gewählten Einheit in den Körper hineingelegt werden können.

Das wird praktisch selten genug möglich sein. Es genügt, wenn man nur weiß, wie viele Einheitswürfel zusammen dasselbe Volumen ausmachen, wie es der beliebige Körper besitzt. Dabei können Sie die Würfel aus demselben Material wie den Körper hergestellt denken, um durch Abwägen, so genau es eben die Wage gestattet, festzustellen, wann das gleiche Volumen vorhanden ist.

3. Quader, Prisma, Umdrehungskörper. Wirklich ausmessen durch Hineinpacken von Würfeln können Sie den Quader. Das ist ein auf einem Rechteck aufgebauter Körper, dessen Seiten sämtlich wieder Rechtecke sind. Ein Ziegelstein hat z. B. diese Gestalt. In Fig. 44 ergab die Messung der drei Seiten 4 cm, 3 cm und 7 cm. Daher kann ich jede horizontale Schicht mit $3 \times 4 = 12$ Würfeln bedecken, und, da sieben Schichten vorhanden sind, so enthält der ganze Körper $3 \times 4 \times 7 = 84$ ccm. Die Messung der Seiten wird nur selten so einfach aufgehen. Im allgemeinen muß man so genau wie möglich etwa bis auf $^1/_{10}$ mm nachmessen und dementsprechend kleine Würfel wählen. Haben Sie auf diese Weise in einem andern Beispiel die Seitenlängen 4,282 dm, 5,793 dm und 7,945 dm erhalten, so ist eben der Inhalt

$$V = 4{,}282 \times 5{,}793 \times 7{,}945 \text{ cdm.}$$

Wieder beachten Sie, daß nicht etwa alle berechneten Dezimalstellen wirklich brauchbar sind. Vielmehr kann man auch hier nur sagen, daß der Inhalt sicher größer als

$$4{,}281 \times 5{,}792 \times 7{,}944 \text{ cdm}$$

aber auch sicher kleiner als

$$4{,}283 \times 5{,}794 \times 7{,}946 \text{ cdm}$$

sein wird. Im vierten Vortrage werde ich Ihnen zeigen, wie man deshalb praktisch zu rechnen hat.

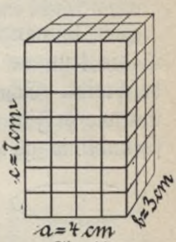


Fig. 44.

Das Ergebnis wäre also dies: man berechnet den Inhalt des Quaders, indem man die Maßzahlen der drei Kanten, Länge, Breite und Höhe, ermittelt und miteinander multipliziert. In Formeln:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Alle drei Kanten müssen mit derselben Längeneinheit gemessen sein, durch welche die Benennung des Volumens gleichzeitig bestimmt ist.

Zu unserm Ergebnis können wir noch auf einem anderen Wege gelangen, der nachher nützlich sein wird. Sie können nämlich den Quader der Fig. 44 auch so entstanden denken, daß Sie die rechteckige Grundfläche um 7 cm senkrecht nach oben schieben. Dann ist aber der Inhalt sofort gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche mal dem zurückgelegten Weg. Denn wenn der Weg von 1 cm zurückgelegt ist, dann ist eine Würfelschicht erzeugt, also nach 7 cm Weg auch 7 Würfelschichten. Beachten Sie aber, daß wir senkrecht nach oben verschieben müssen, damit Würfel auch wirklich entstehen.

Auf Grund dieser Überlegung können Sie die Inhalte aller sogenannten geraden Prismen finden, d. h. von Körpern, die dadurch entstehen, daß man irgendeine Fläche senkrecht zu sich selbst verschiebt. Jedesmal ist der Inhalt gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt multipliziert mit dem zurückgelegten Weg. Dieser zurückgelegte Weg wird auch Höhe des Körpers genannt. In Formeln schreibt man

$$V = G \cdot h,$$

wo G die Grundfläche und h die Höhe bedeutet.

In Fig. 45 ist ein gerader Kreiszylinder gezeichnet, der offenbar zu den genannten Körpern gehört. Die Grundfläche ist ein Kreis, dessen Inhalt bekanntlich πr^2 ist. Deshalb ist das Volumen des geraden Kreiszylinders:

$$V = \pi r^2 h.$$

Hier können Sie leicht den Mantel des Körpers berechnen, das ist die krumme Seitenfläche, die die Kreislinie bei der Bewegung beschreibt. Schneidet man diesen Mantel senkrecht auf und breitet ihn wie in Fig. 46 in der Ebene aus, so bildet er ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Kreisumfang also $2\pi r$ und dessen Höhe

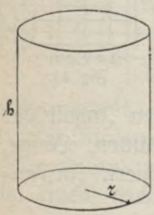


Fig. 45.

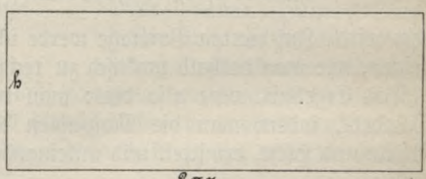


Fig. 46.

zugleich die Zylinderhöhe ist. Nach der Inhaltsformel des Rechtecks erhält man so

$$V = 2\pi r h.$$

Wie aber, wenn die Grundfläche zwar auch noch parallel aber schräg aufwärts verschoben wird? Dann helfen wir uns, indem wir stufenweise zunächst senkrecht aufwärts, dann aber jedesmal wieder seitlich in die richtige Lage hinein schieben, wie es in Fig. 47 gezeigt ist. Zum Körperinhalt kommt immer nur etwas hinzu, wenn wir senkrecht aufwärts bewegen, so daß auch jetzt der Körperinhalt gleich dem

Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche mal der Höhe, d. h. also mal dem senkrechten Abstand der Grund- und Deckfläche, wird. Freilich haben wir bei der stufenweisen Bewegung den Körper ja nicht genau erzeugt. Wählen Sie aber die Stufen niedrig genug, indem Sie den Körper z. B. aus Papierblättern aufschichten, dann wird der Fehler so klein, daß er nicht mehr in Betracht kommt.

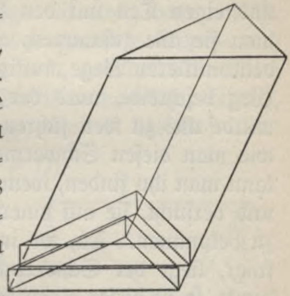


Fig. 47.

Auch hier braucht die Grundfläche nicht längs gerader Linien verschoben zu werden. Vielmehr kann die Parallelverschiebung, ganz entsprechend wie es Fig. 29 des vorigen Vortrages zeigt, willkürlich in irgendwelcher wechselnden Richtung geschehen.

Ganz ähnlich wie soeben können wir die Umdrehungskörper behandeln. In Fig. 48 ist ein Schnitt durch einen solchen gezeichnet, der durch Umdrehung des schraffierten Rechtecks um die Mittelachse entstanden ist. Wenn Sie das Rechteck durch die senkrechte Linie a—b in zwei kongruente Teile zerlegen, so erkennen Sie, daß der äußere Teil einen wesentlich größeren Teil des Körpers erzeugt, als der innere. Würden Sie das außen mehr Erzeugte innen zulegen, dann bekämen Sie gerade ein Prisma, d. h. einen Körper, als hätten Sie das Rechteck senkrecht zu sich selbst um das Stück verschoben, das die Linie a—b bei der Umdrehung zurückgelegt hat. Die Linie a—b, oder auch der Mittelpunkt des Rechtecks, hat einen Kreis beschrieben. Daher ist der Inhalt des Umdrehungskörpers gleich dem Produkt aus dem Inhalt des Rechtecks multipliziert mit dem Weg des Mittelpunktes (offenbar braucht man das Rechteck nicht einmal ganz herumzudrehen, unsere Betrachtung gilt auch, wenn nur ein Teil der Kreisbahn zurückgelegt ist). Wählen Sie statt des Rechtecks eine beliebige andere Fläche, die einen Mittelpunkt besitzt, z. B. einen Kreis oder eine Ellipse, so ändert sich nichts an unserer Überlegung.

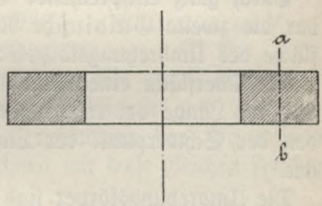


Fig. 48.

Ist die erzeugende Fläche von beliebiger Gestalt, so können Sie sie auf Millimeterpapier gezeichnet denken. Dann beschreibt jedes der bedeckten Quadrate einen Körper, dessen Inhalt, wie oben gezeigt, berechnet werden kann. Aber die Mittelpunkte der außen liegenden Quadrate beschreiben größere, die der innen liegenden kleinere Wege. Statt einen Teil der Quadrate mit den größeren und einen Teil mit den kleineren Wegen zu multiplizieren, kann man sie alle zusammen, also auch den ganzen Flächeninhalt, mit dem mittleren Wege multiplizieren. Der Punkt, der diesen mittleren Weg beschreibt, wird der Schwerpunkt der Fläche genannt. Es würde uns zu weit führen, wenn wir hier davon sprechen wollten, wie man diesen Schwerpunkt mathematisch ermittelt. Annähernd kann man ihn finden, wenn man die Fläche aus Pappe ausschneidet und versucht, sie auf einer Nadelspitze schwebend ins Gleichgewicht zu bekommen. Da, wo in diesem Falle die Nadelspitze die Fläche trägt, liegt der Schwerpunkt. Besitzt eine Fläche einen Mittelpunkt, so ist dieser gleichzeitig der Schwerpunkt.

Die geschilderte Methode zur Berechnung vom Volumen der Umdrehungskörper heißt die Guldinsche Regel. Sie läßt sich kurz so aussprechen:

Der Inhalt eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche multipliziert mit dem Weg, den der Schwerpunkt der Fläche bei der Umdrehung zurückgelegt hat.

Durch ganz entsprechende Betrachtungen erhält man unmittelbar die zweite Guldinsche Regel für die Berechnung der Oberfläche des Umdrehungskörpers:

Die Oberfläche eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Linie multipliziert mit dem Weg, den der Schwerpunkt der Linie bei der Umdrehung zurückgelegt hat.[1])

Die Umdrehungskörper sind in der Praxis von größter Wichtigkeit, so daß die Guldinschen Regeln außerordentlich oft verwendet werden.

4. Die Simpsonsche Regel. Da es uns mehr darauf ankommt, allgemeine Regeln zur Körperberechnung kennen zu lernen, während uns die Herleitung jeder einzelnen Formel weit weniger interessiert, so will ich an die Spitze der weiteren Betrachtungen eine

1) Die Schwerpunkte der erzeugenden Fläche bezw. Linie fallen im allgemeinen nicht zusammen. Bei den Flächen, die einen Mittelpunkt besitzen, ist es immer der Fall.

solche Regel stellen, die nicht nur zur Berechnung der fünf einfachen Körper: Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel, hinreicht, sondern noch in sehr vielen anderen Fällen herangezogen werden darf. Es ist die Simpsonsche Regel, die uns in ihrer Anwendung auf die Ebene schon im vorigen Vortrag begegnet ist. Im Raume heißt sie so: ein Körper möge parallele Grund- und Deckfläche, G und D, besitzen, seine Höhe sei h, und durch die Mitte dieser Höhe werde ein zur Grund- und Deckfläche paralleler Schnitt, der Mittelschnitt von der Fläche M gelegt, dann ist das Volumen:

$$V = \frac{h}{6}(G + 4\,M + D).$$

Jedoch gilt diese einfache Regel nicht für alle Körper. Wichtige Beispiele sind zunächst die oben genannten fünf einfachen Körper. Ferner gilt sie immer dann, wenn Grund- und Deckfläche irgendwelche Vielecke sind, während die Seiten des Körpers aus Dreiecken oder Vierecken gebildet sind. Ein solcher Körper wird wohl ein Prismatoid genannt; in Fig. 49 ist ein einfaches Beispiel gezeichnet. Diese wenigen Beispiele mögen genügen.[1])

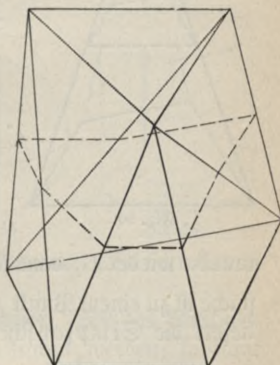


Fig. 49.

5. Pyramide, Kegel, Kugel. Wie diese Simpsonsche Regel anzuwenden ist, will ich Ihnen jetzt zeigen. Wählen Sie zuerst einmal ein Prisma. Bei ihm sind Grundfläche, Mittelschnitt und Deckfläche nach der Art, wie es durch Verschiebung der Grundfläche erzeugt wurde, gleich groß. Bezeichnen wir diese gleichen Flächen mit G, so liefert die obige Regel

$$V = \frac{h}{6}(G + 4\,G + G) = \frac{h}{6}\,6\,G = G\,h.$$

Das ist aber die schon oben gefundene Formel.

1) Ob ein Körper nach der Simpsonschen Regel berechnet werden darf oder nicht, erkennt man so: Man drückt einen beliebigen parallel zur Grundfläche gelegten Querschnitt Q in der Höhe y als Funktion von y aus. Dann muß der Querschnittsinhalt die Form haben

$$Q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

wo a, b, c, d Konstanten sind und y nur mit positiven ganzen Exponenten bis 3 vorkommt.

Verbindet man die Punkte des Umfangs von irgendeinem ebenen Vieleck mit einem außerhalb der Ebene liegenden Punkte, so entsteht eine Pyramide. In Fig. 50 ist eine solche gezeichnet. Die zur Grundfläche parallelen Querschnitte sind alle untereinander ähnlich. Ihre Inhalte nehmen regelmäßig mit der Höhe ab. In halber Höhe sind die Seiten des Querschnittes nur noch halb so lang wie die entsprechenden der Grundfläche, dann aber ist der Inhalt nur der vierte Teil der Grundfläche. Darauf habe ich schon im vorigen Vortrage hingewiesen. Fig. 51 mag es noch einmal erläutern. Sie sehen dort unmittelbar, daß das Rechteck mit halber Seitenlänge viermal in das ganze Rechteck hineingelegt werden kann. Nennen wir die Grundfläche der Pyramide wieder G, dann ist also der Mittelschnitt $\frac{1}{4}$ G. Die Deckfläche ist zu einem Punkt zusammengeschrumpft, also 0. Deswegen liefert die Simpsonsche Regel:

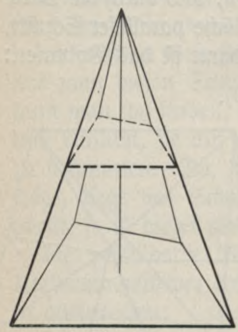


Fig. 50.

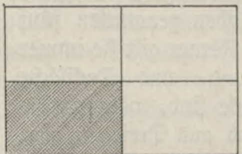


Fig. 51.

$$V = \frac{h}{6}\left(G + 4 \cdot \frac{1}{4} G + 0\right) = \frac{2}{6} G h = \frac{1}{3} G h.$$

Ist die Grundfläche, wie in Fig. 52, ein Kreis, so entsteht der Kreiskegel mit der Grundfläche πr^2 und dem Inhalt

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

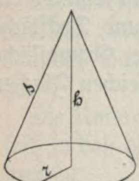


Fig. 52.

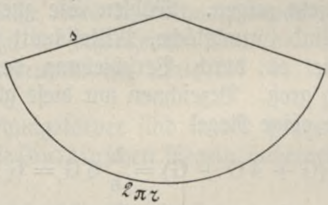


Fig. 55.

Endlich soll noch die Ihnen allen wohlbekannte Kugel berechnet werden. Da sind, wie Fig. 53 zeigt, sowohl die Grund- als auch die Deckfläche zu einem Punkt zusammengeschrumpft, also 0. Der Mittelschnitt ist ein Kreis, dessen Radius zugleich der Kugelradius ist, und die Höhe ist der Durchmesser der Kugel. Also ist der Inhalt

$$V = \frac{2r}{6}(0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Zum Schluß will ich noch erwähnen, daß die Oberfläche der Kugel genau so groß ist, wie der Mantel des umbeschriebenen Zylinders, wie er in Fig. 54 gezeichnet ist; also nach dem schon oben Gesagten

$$F = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2,$$

da die Höhe des Zylinders 2 r ist. Ferner kann auch noch in einfacher Weise der Mantel des geraden Kreiskegels, also eines solchen, dessen Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises liegt, berechnet werden. Schneidet man diesen Mantel auf und breitet ihn in einer Ebene aus, so erhält man den in Fig. 55 gezeichneten Kreisausschnitt. Dessen Inhalt ist aber

$$M = \frac{1}{2} 2\pi r s = \pi r s.$$

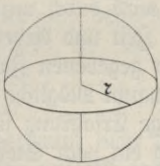


Fig. 53.

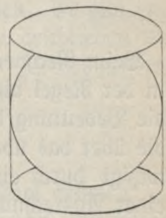


Fig. 54.

Denn der Inhalt eines Kreisausschnitts wird wie der eines Dreiecks berechnet.[1]) Die Grundlinie ist der Kreisbogen, der hier gleich dem Umfang des Grundkreises von unserem Kegel ist, und die Höhe ist der Radius des Kreisbogens, also in unserem Fall die Seitenlinie s des Kegels.

6. Das Volumen beliebig geformter Körper. Soll das Volumen eines Körpers ganz beliebiger Gestalt bestimmt werden, so kann man annähernd zum Ziele kommen, wenn man ihn möglichst genau aus Körpern der oben besprochenen Art zusammengesetzt denkt. Damit kommt man in vielen Fällen aus, wo es sich nur um überschlägliche Berechnung handelt. Liegt ein fertiger Körper vor, so bleibt uns jene alte Methode, die schon Archimedes verwendete, als er die Krone des Hiero von Syrakus untersuchen sollte. Wir füllen ein Gefäß genau bis zum Rande mit Wasser und tauchen dann den Körper hinein. Der Körper verdrängt eine Wassermenge, die genau gleich seinem eigenen Volumen ist. Die übergeflossene Wassermenge wird deshalb abgemessen oder abgewogen, dann ist uns auch das gesuchte Volumen bekannt. Bestimmen wir nämlich das Gewicht in Kilogramm, dann erhalten wir sofort das Volumen in Kubikdezimetern, denn 1 cdm Wasser wiegt ja 1 kg; haben wir in Gramm gewogen, so ist das Volumen in Kubikzentimetern be-

1) Man kann den Kreisausschnitt in lauter schmale Dreiecke von gleicher Höhe zerlegt denken, die man addiert.

kannt, weil 1 ccm Wasser 1 g wiegt. So besitzen wir auch für die Körperberechnung eine Methode, die auf jeden noch so komplizierten Körper anwendbar ist. Bei der Herstellung des Körpers muß freilich ein Material verwendet werden, das nicht im Wasser löslich ist. Andernfalls bliebe immer noch die Möglichkeit eine andere geeignete Flüssigkeit statt Wasser zu wählen, von der man dann wissen muß, wieviel mal so schwer oder leicht sie als Wasser ist.

IV. Vortrag.

Verkürztes Rechnen.

Beim Rechnen wird durch unzureichende Kenntnis dieser Kunst in der Regel viel Zeit und Arbeit vergeudet. Ohne Rücksicht auf die Bedeutung der gegebenen Zahlen rechnet man Ergebnisse aus, die über das überhaupt Mögliche weit hinausgehen. Oder gar gewitzigt durch einige Erfahrung streicht man ab und zu im Laufe einer Ausrechnung ein paar Stellen weg, sobald die Rechnung zu umständlich zu werden scheint. Dabei verliert man dann jede Möglichkeit, zum Schluß angeben zu können, was wohl am Ergebnis richtig und was als unsicher zu streichen ist. Solche Willkür ist natürlich erst recht nicht zulässig.

1. Das Abkürzen von Zahlen. Beim praktischen Rechnen kommt man fortwährend in die Lage, Zahlenwerte abzukürzen. Sie werden an einfachen Beispielen diese Notwendigkeit sofort einsehen. Es mag 1 m Band 25 Pfennig kosten; wieviel habe ich für ½ m vom selben Band zu bezahlen? Natürlich die Hälfte von 25 Pfennigen. Da wir aber halbe Pfennige als Münze nicht besitzen, so werden wir in der Regel statt 12½ Pfennige 13 geben müssen, indem 12½ auf 13 abgerundet wird.

Wie wollen wir weiterhin wohl messen, wenn von 1 m gerade der dritte Teil gebraucht wird? Rechnen wir aus, so bekommen wir $^1/_3$ m = 0,3333 . . . . m, d. h. 3 dm 3 cm 3 mm $^3/_{10}$ mm u.s.f. Sie erkennen auch hier, daß wir abrunden müssen. Wenn wir etwa recht genau verfahren und noch Millimeter abmessen, so haben wir 0,333 m zu nehmen.

Im einen Falle ist nach oben, im anderen nach unten abgerundet worden, d. h. zuerst hat man mehr als berechnet und nachher weniger als berechnet genommen. Man pflegt meist so zu verfahren, daß man beim Abkürzen von Zahlenwerten 0, 1, 2, 3, 4 einfach fort-läßt, dagegen die vorletzte Ziffer um 1 erhöht, wenn 5, 6, 7, 8, 9 weggelassen ist. Also hat man zu schreiben:

statt	7,3	abgekürzt	7
„	5,4	„	5
„	6,5	„	7
„	8,9	„	9
„	9,7	„	10.

Also ist mit Recht dieser allgemeinen Gewohnheit entsprechend $12\frac{1}{2} = 12{,}5$ auf 13 zu erhöhen, dagegen 0,3333 . . . . auf 0,333 zu erniedrigen.

2. Addition und Subtraktion abgekürzter Zahlen. Es gibt eine große Menge von Zahlen, die als Dezimalzahlen geschrieben unzählig viele Stellen hinter dem Komma besitzen. Hierher gehören z. B. die Logarithmen, die Wurzeln, π. So ist

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562 \ldots\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159265 \ldots\ldots$$

Mit solchen Zahlen läßt sich überhaupt nicht anders rechnen, als daß man sie abkürzt. Wir wollen zunächst annehmen, wir hätten es nur mit diesen Zahlen zu tun, die also jederzeit auf beliebig viele Dezimalstellen genau berechnet und angegeben werden könnten.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Reihe solcher Zahlen zu addieren, indem wir annehmen, daß weder nach oben noch nach unten mehr als eine halbe Einheit der letzten Stelle falsch ist. Ein Beispiel mag lauten:

$$\begin{array}{r@{\,}l} 7{,}38 & -5 \\ +\,4{,}39 & -5 \\ +\,5{,}21 & -5 \\ +\,7{,}48 & -5 \\ \hline 24{,}46 & \;20. \end{array}$$

Der größte mögliche Fehler beträgt, da wie angedeutet im ungünstigsten Falle fünf Einheiten in der nächsten Stelle mehr oder weniger zu rechnen sind, 20 Einheiten der nächsten oder 2 Einheiten der letzten berechneten Stelle. Also ist die Summe:

$$\text{höchstens}\ \begin{array}{r} 24{,}46 \\ +\ \ 0{,}02 \\ \hline 24{,}48 \end{array} \qquad \text{aber mindestens}\ \begin{array}{r} 24{,}46 \\ -\ \ 0{,}02 \\ \hline 24{,}44. \end{array}$$

Jetzt aber ist 48 auf 50, dagegen 44 auf 40 abzukürzen. Unsere Aufgabe gibt darüber keine Entscheidung, so daß wir als sicheres

Ergebnis nur 24 angeben können; ob die erste Dezimalstelle 4 oder 5 ist, wissen wir eben nicht.

Wenn man den angedeuteten Gedankengang weiter verfolgt, so erkennt man schließlich, daß bis zu einer Summe von zwanzig Summanden immer zwei Stellen mehr zu nehmen sind, als das Endergebnis besitzen soll. Dann aber ist der Fehler in der Regel nicht größer als eine halbe Einheit der letzten Stelle, nur in wenigen ganz ungünstigen Fällen kann er bis zu 0,6 Einheiten groß werden.

Wollen Sie also vier Dezimalstellen genau erhalten, so müssen Sie von jedem Summanden sechs Dezimalstellen hinschreiben, diese addieren und zum Schluß in der Summe die zwei letzten Stellen weglassen, indem Sie abkürzen, wie es oben gezeigt wurde.

Allerdings ist zu beachten, daß die Wahrscheinlichkeit, den größten möglichen Fehler zu begehen, sehr gering ist. In der Regel wird der Fehler viel geringer sein. Ich will drei Logarithmen, einmal dreistellig, einmal fünfstellig, addieren. Sie sind, wie es der Zufall gerade lieferte, der Tabelle entnommen.

$$\begin{array}{r} 2{,}760 \\ +\ 1{,}841 \\ +\ 0{,}446 \\ \hline 5{,}047 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2{,}76042 \\ +\ 1{,}84136 \\ +\ 0{,}44560 \\ \hline 5{,}04738. \end{array}$$

Da sehen Sie, daß bei der dreistelligen Rechnung der günstigste Fall eingetreten ist: nicht eine Stelle braucht gestrichen zu werden. Dagegen weiß man von dem fünfstelligen Ergebnis nur, daß mit Sicherheit 5,047 richtig ist. Wie weit die Ziffern 38 brauchbar sind, ließe sich nur bei Benutzung von mindestens siebenstelligen Logarithmen ermitteln.

Die soeben hergeleitete Regel gilt in genau gleicher Weise für die Subtraktion, so lange nicht mehr als 19 Subtrahenden vorhanden sind.

Hier sei eine Bemerkung über das Subtrahieren im allgemeinen eingeschaltet. Im geschäftlichen Leben hat sich wohl überall eingebürgert, nicht mehr zu subtrahieren, sondern statt dessen in geeigneter Weise zu addieren. Hat man z. B. einen Gegenstand für 12 Mark 50 Pfennige gekauft, und reicht man dem Verkäufer zur Bezahlung 20 Mark, so rechnet man nicht aus:

$$20 - 12{,}50 = 7{,}50 \text{ Mark},$$

vielmehr addiert der Verkäufer die einzelnen Geldstücke auszahlend so lange zu 12,50 Mark, bis die Summe von 20 Mark erreicht ist. Offenbar sind bei diesem Verfahren auch gerade 7,50 Mark zurückgezahlt worden. Diese Art der Abrechnung ist der alten entschieden vorzuziehen, da Irrtümer wirklich seltener auftreten.

Ganz entsprechend, wie mir scheint mit größerer Sicherheit, läßt sich überhaupt subtrahieren. Man rechnet dann z. B. 7 weniger 3, indem man sagt: 3 und 4 ist 7. Der zweite Summand 4 ist zugleich das Ergebnis der Subtraktion. Eine ausgedehnte Rechnung wäre so auszuführen:

$$\begin{array}{r} 7{,}34 \\ -\,3{,}82 \\ \hline 3{,}52. \end{array}$$

2 und **2** ist 4, 8 und **5** ist 13. Da die Zehner aufgetreten sind, so nimmt man die 1 mit zur nächsten Stelle und sagt: 3 und 1 ist 4 und **3** ist 7. Jedesmal ist der letzte fettgedruckte Summand hinzuschreiben. Also auch beim Überschreiten der Zehn „borgt" man nicht eine Einheit von der nächsten Stelle und subtrahiert diese Eins, sondern man addiert vielmehr im Subtrahenden zuerst diese Eins und fügt dann erst das Fehlende hinzu.

Besonders treten die Vorzüge der Methode hervor, wenn von einer Zahl mehrere zugleich subtrahiert werden sollen. So hätte man im nachstehenden Beispiel wie folgt zu rechnen:

$$\begin{array}{r} 5{,}218 \\ -\,3{,}192 \\ -\,0{,}279 \\ -\,0{,}815 \\ \hline 0{,}932. \end{array}$$

5 und 9 ist 14, und 2 ist 16, und **2** ist 18;
1 und 1 ist 2, und 7 ist 9, und 9 ist 18, und **3** ist 21;
2 und 8 ist 10, und 2 ist 12, und 1 ist 13, und **9** ist 22;
2 und 3 ist 5, und **0** ist 5.

Auch hier wird der fettgedruckte letzte Summand jedesmal hingeschrieben.

3. Gemessene Größen. Bei der Besprechung des Rechnens mit abgekürzten Zahlen gingen wir von dem Gedanken aus, daß von jeder Dezimalzahl so viele Stellen angegeben werden könnten, wie wir nur gebrauchen wollen. Das ist wirklich der Fall, wenn wir es verstehen, Logarithmen, Wurzeln u. s. f. selbst auszurechnen. In Wirklichkeit liegt doch die Sache so, daß jene Werte Tabellen entnommen werden, die nur eine beschränkte Anzahl von Ziffern liefern. Mit Rücksicht darauf kann man wohl sagen, daß es bei gewöhnlichen Ausrechnungen genügt, die letzte Stelle, diese aber sicher, zu streichen, da die Wahrscheinlichkeit, daß auch die nächste vorletzte Stelle wesentlich falsch wird, zu gering ist. Doch hüte man sich vor falschen Schlüssen, die etwa darauf aufgebaut sind, daß die vorletzte Stelle nun genau richtig sein müsse.

Noch mehr tritt die Notwendigkeit, Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen heranzuziehen, hervor, wenn man es nicht mit berechneten, sondern mit gemessenen Größen zu tun hat. Bei jeder Messung gibt es ein kleinstes Maß, das sich noch feststellen läßt, und jede Messung bringt außerdem Fehler mit sich, die in der Methode und den Maßstäben begründet sind. Habe ich möglichst sorgfältig auf ein Blatt Papier ein Rechteck aufgezeichnet, so werde ich höchstens bis Zehntelmillimeter genau die Seitenlängen nachmessen können. Will jemand in einem anderen Fall die Länge und Breite eines Zimmers ermitteln, so wird er höchstens noch die Zentimeter bestimmen können. In beiden Fällen denken wir so genau gemessen, daß der Fehler nicht größer als eine halbe Einheit der letzten angegebenen Stelle beträgt; also im ersten Falle nicht mehr als die Hälfte von $^1/_{10}$ mm, im zweiten nicht mehr als $\frac{1}{2}$ cm oder 5 mm.

Soll das Ergebnis recht zuverlässig sein, so messen wir dieselbe Größe mehrmals hintereinander nach, addieren alle Werte und dividieren durch die Anzahl der Messungen. So mögen vier Messungen der Seitenlänge eines Zimmers ergeben haben:

$$\begin{array}{r} 7{,}37 \text{ m} \\ 7{,}35 \text{ m} \\ 7{,}39 \text{ m} \\ 7{,}38 \text{ m} \\ \hline 29{,}49 \phantom{\text{ m}} \end{array}$$

Die Summe 29,49 dividiert man durch die Anzahl der Werte 4 und erhält als Mittelwert 7,37 m. Diesen mittleren Wert lassen wir als richtig gelten und rechnen mit ihm allein weiter. Natürlich darf man die Division durch 4 nicht noch fortsetzen, um noch mehr Dezimalstellen zu erhalten, als die ursprünglichen Messungen besaßen. Auch die Zahl 7,37 m kann doch nur als wahrscheinlich richtig bezeichnet werden.

Bequemer verfährt man, wenn man den mittleren Wert abschätzt, hier z. B. 7,38, und nun den Überschuß der letzten Stelle positiv, das daran Fehlende negativ gerechnet dahinterschreibt. Die Summe dieser Werte durch 4 dividiert, ist zu dem abgeschätzten Wert 7,38 hinzuzufügen. Also ein Beispiel:

$$\begin{array}{lr} 7{,}37 & -1 \\ 7{,}35 & -3 \\ 7{,}39 & +1 \\ 7{,}38 & 0 \\ \hline & -3 : 4 = -\,{}^3/_4 \sim -1 \end{array}$$

(das Zeichen ∼ heißt „abgerundet gleich")

$$7{,}38 - 0{,}01 = 7{,}37 \text{ m.}$$

Sollen verschiedene nachgemessene Größen addiert werden, so genügt es auch hier, die letzte Stelle der Summe als ganz unsicher zu streichen; wohingegen die vorletzte Stelle bestehen bleiben kann, weil die Wahrscheinlichkeit sehr groß ist, daß sich wenigstens ein Teil der Fehler gegenseitig aufheben wird.

4. Multiplikation abgekürzter Zahlen. Damit sollen Addition und Subtraktion erledigt sein, statt dessen wird uns zunächst die Multiplikation beschäftigen. Wir wollen an ein schon oben genanntes Beispiel anknüpfen, indem wir uns die einfache Aufgabe stellen, den Flächenraum eines Zimmers zu berechnen. Zu dem Zwecke messen wir, so wie es soeben gezeigt wurde, Länge und Breite des Zimmers bis auf Zentimeter genau nach. Die Maße mögen sein: Länge 7,34 m und Breite 4,68 m. Beide Zahlen miteinander multipliziert, liefern den Flächenraum des Zimmers:

$$\begin{array}{r} 7{,}34 \\ \times\, 5{,}68 \\ \hline 3670 \\ 4404 \\ 5872 \\ \hline 41{,}6912 \text{ qm.} \end{array}$$

Beim Multiplizieren haben wir im Multiplikator mit der ersten links stehenden Ziffer begonnen, dementsprechend mußten wir nach rechts hin je eine Stelle ausrücken. Das bitte ich für das Folgende zu beachten.

Wir nehmen von vornherein an, daß unsere Messungen höchstens mit einem Fehler von 5 mm ausgeführt sein sollen. Darnach könnte die Größe des Zimmers höchstens 7,345 × 5,685 qm betragen, mindestens aber muß sie 7,335 × 5,675 qm sein. Das gibt

7,345	7,335
× 5,685	× 5,675
36725	36 675
44070	4 4010
58760	51345
36725	36675
41,756325 qm	41,626125 qm

Die drei Ergebnisse wollen wir noch einmal zum Vergleich untereinander schreiben. Sie lauten:

41,756 325 qm
41,691 2 qm
41,626 125 qm.

Wie groß ist denn nun aber unser Zimmer? Kommt noch, wie es in der untenstehenden Fig. 56 angedeutet ist, der schmale schraffierte Streifen zu der ausgemessenen Fläche hinzu, oder ist um ebenso einen Streifen zuviel gemessen? Offenbar gibt es darüber nach unserem Verfahren keine Entscheidung. Wir können als wahrscheinlich richtigen Flächeninhalt nur 41,7 qm angeben, mehr Dezimalstellen gewiß nicht. Ja sogar die 7 ist nicht sicher.

Darnach ist das überraschende Ergebnis: obwohl die Messung noch Zentimeter genau angab, so können wir im Ergebnis nur noch die Zehner der Quadratdezimeter mit einiger Sicherheit finden.

Blicken wir zurück auf unsere Rechnung, so müssen wir doch sagen, daß wir zuviel Arbeit geleistet hatten — die letzten Stellen 1 und 2 waren sicherlich ganz überflüssig, die drittletzte Stelle 9 kann man wohl dazu nehmen, um zu erkennen, daß 6 auf 7 zu erhöhen ist.

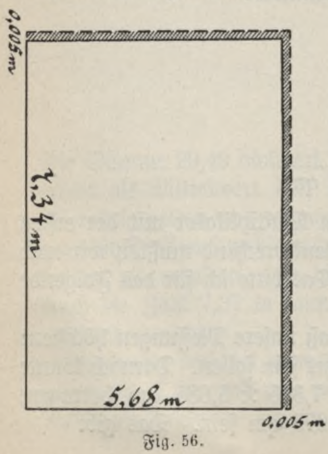


Fig. 56.

Wir fragen uns, ob nicht auch die Ausrechnung selbst von vornherein erkennen läßt, daß so große Unzuverlässigkeit auftreten muß. Denken wir dabei an folgendes: die wahre Länge des Zimmers ist doch 7,34 . . . . m und die Breite 5, 68 . . . . . m, wo die Punkte darauf hindeuten, daß dort noch irgendwelche Ziffern stehen, die wir nur nicht nachzumessen vermögen. Multiplizieren wir jetzt, indem wir wieder durch Punkte andeuten, wo noch alles Zahlen zu setzen wären, wenn an Stelle obiger Punkte Zahlen ständen, so ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{array}{r|l}
7{,}34 & \ldots\ldots \\
\times\ 5{,}68 & \ldots\ldots \\
\hline
367 & 0\ldots\ldots \\
44 & 04\ldots\ldots \\
5 & 872\ldots \\
 & \ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots \\
{}^{1} & \ldots\ldots \\
\hline
41{,}7 & \ldots\ldots
\end{array}$$

Da wir die Ziffern, die statt der Punkte zu setzen sind, nicht kennen, so konnten wir an jenen Stellen auch die Addition nicht ausführen. Nur ist sicher, daß die erste geltende Ziffer, da doch mindestens eine 8 fortfällt, auf 7 zu erhöhen ist. Alles, was rechts vom vertikalen Strich steht, ist unbrauchbar. Man wird daher mit Recht fragen: wozu soll es dann überhaupt noch berechnet werden? Die Arbeit und Mühe ist wirklich überflüssig.

Es sind verschiedene Regeln zum verkürzten Multiplizieren ausgearbeitet worden, ohne daß bisher ein Verfahren allgemeine Zustimmung gefunden hätte. Der eine bevorzugt diesen, der andere jenen Weg. Die Sache liegt eben so, daß man von vornherein weiß: die Praxis fordert häufig mit Notwendigkeit Ergebnisse mit mehr Dezimalstellen, als völlig sicher berechnet werden können, d. h. also Dezimalstellen, für deren Richtigkeit nur eine mehr oder minder große Wahrscheinlichkeit spricht. Dann aber ist es wirklich nicht schwierig, für eine jede Methode Beispiele herauszuprobieren, in denen sie ein sehr ungünstiges, und andere, in denen sie ein sehr günstiges Ergebnis liefert. Die Frage nach demjenigen Verfahren, welches die größte Wahrscheinlichkeit auf ein richtiges Resultat besitzt, ist noch nicht entschieden.

Hat man es freilich mit berechneten Größen, Wurzeln, Logarithmen u. s. f. zu tun, bei denen man wieder beliebig viele Dezimalstellen bestimmen kann, dann ist es sehr wohl möglich, bestimmte Forderungen für die Genauigkeit vom Ergebnis aufzustellen und durch geeignete verkürzte Rechnung zu erfüllen.[1]) Wir wollen uns jedoch sogleich mit gemessenen Größen oder allgemein mit solchen Größen, von denen uns nur eine beschränkte Zahl von Dezimalstellen bekannt ist, beschäftigen, denn diese interessieren uns praktisch fast ausschließlich.

Unser Verfahren geht von dem Gedanken aus, daß überflüssige Stellen auch gar nicht erst berechnet werden sollen. Deswegen verfährt man so:

$$\begin{array}{r l}
7{,}3\cancel{4} & \\
\times\ \cancel{5}{,}\cancel{6}8 & \\
\hline
36\,70 & \\
4\,40 & \\
58 & \\
\hline
41{,}68 & \text{Ergebnis: } 41{,}7.
\end{array}$$

Man beginnt die Multiplikation mit der ersten links stehenden Ziffer 5 des Multiplikators und erhält das erste Teilprodukt 3670; dann streicht man diese 5, weil erledigt, durch. In der nächsten Zeile soll nicht nach rechts ausgerückt werden; deswegen streicht man auch die letzte Ziffer 4 des Multiplikandus durch und berücksichtigt sie nur noch zur Bestimmung der übergreifenden Zehner. Also multipliziert man weiter 6 mit 4; das gibt 24, so daß noch eine 2 mit herüberzunehmen ist. Dadurch wird $6 \times 3 = 18$ zu 20. Man sagt wohl: 6 mal einer gestrichenen 4 gibt noch 2. So fährt man fort, indem man jedesmal eine Ziffer des Multiplikators und gleichzeitig eine Ziffer des Multiplikandus wegstreicht. Im Schlußergebnis

---

1) Die Regeln hierfür, die, wenn nicht schon hier, sicherlich nach den folgenden Entwicklungen unmittelbar verständlich sein werden, lauten:

Dem Multiplikandus gibt man drei Stellen mehr, als für das Ergebnis gefordert sind; dem Multiplikator gibt man ebensoviel Ziffern, wie der Multiplikandus von seiner ersten geltenden Ziffer an hat.

Für das erste Teilprodukt wird die letzte Ziffer des Multiplikandus nur durch Überzählen der Zehner berücksichtigt.

Bei jedem weiteren Teilprodukt streicht man eine Stelle des Multiplikandus weg und berücksichtigt sie nur durch Überzählen der Zehner. Die sämtlichen Teilprodukte schreibt man untereinander, ohne nach rechts oder links auszurücken.

Die Summe der Teilprodukte ist, um das Endergebnis zu erhalten, um zwei Stellen zu kürzen.

Der Fehler kann in wenigen Fällen höchstens 0,6, meist höchstens 0,5 Einheiten der letzten Stelle betragen.

41,68 läßt man noch die letzte Ziffer fort und erhöht folglich im Beispiel auf 41,7.

Zur Bestimmung der übergreifenden Zehner berücksichtigt man immer nur die zuletzt durchgestrichene Zahl.

Wählen wir ein anderes Beispiel:

$$\begin{array}{r}
27{,}3\cancel{9}\cancel{4} \\
\times\ \cancel{2},\cancel{2}5\ldots \\
\hline
54\,788 \\
5\,479 \\
1\,370 \\
\cdot\,\cdot \\
{}^{2}\ \ \cdot \\
\hline
61{,}6
\end{array}\quad \text{Ergebnis: } 62.$$

Man sieht sofort, daß, wie die Punkte andeuten, die wieder an Stelle unbekannter Ziffern gesetzt sind, noch zu viel gerechnet worden ist. Wir hätten vielmehr Multiplikator und Multiplikandus vertauschen müssen, um überflüssige Stellen zu vermeiden. Als Multiplikandus ist folglich immer diejenige Zahl zu wählen, welche die geringste Anzahl geltender Ziffern besitzt. (Also nicht mitgezählt werden Nullen am Anfang der Zahl, wie etwa 0,03; wohl aber Nullen am Ende einer Zahl, die als richtig bekannt sind, wenn man z. B. auf Zentimeter genau gemessen gerade 3,40 m erhält.)

Das Fortstreichen von Stellen macht es unmöglich, im Endergebnis das Komma in derselben Weise zu bestimmen, wie Sie es von der gewöhnlichen Multiplikation her gewöhnt sind. Als Ersatz haben Sie hier die folgende Regel: man verschiebt das Komma im Multiplikator so viele Stellen nach links oder rechts, bis nur eine geltende Ziffer vor dem Komma bleibt. Im Multiplikandus ist dann das Komma genau so viele Stellen aber in umgekehrter Richtung, also nach rechts oder links, zu verschieben. Dann bestimmt man die Stellung des Kommas unmittelbar im ersten Teilprodukt und nimmt das Komma ins Endergebnis einfach herunter.[1])

1) Eine andere Regel lautet so: Man zählt wie gewöhnlich die Anzahl sämtlicher Ziffern hinter jedem Komma. Dann aber zählt man nach, wie oft je zwei Ziffern gestrichen worden sind. Diese beiden Zahlen subtrahiert man voneinander; dann gibt die Differenz an, wieviele Stellen hinter dem Komma das Endergebnis besitzt. Ist die Differenz negativ, so würde das heißen, daß im Endergebnis ebensoviele Nullen anzuhängen sind.

Doch kehren wir zu unserem Beispiel zurück. Es war zu multiplizieren: 27,394 × 2,25. Also haben wir erstens umzukehren 2,25 × 27,394; und zweitens das Komma zu verschieben 22,5 × 2,7394. Darnach lautet jetzt die Rechnung:

$$\begin{array}{r} 22{,}5 \\ \times\ 2{,}739(4) \\ \hline 45{,}0 \\ 15{,}8 \\ 7 \\ 2 \\ \hline 61{,}7 \end{array} \qquad \text{Ergebnis: } 62.$$

Man erkennt hier noch, daß die 4 gänzlich überflüssig ist, daß also der Multiplikator nur eine Stelle mehr haben soll, als der Multiplikandus.

Noch einmal mögen die Multiplikationsregeln zusammengefaßt werden:

1. Man wähle als Multiplikator die Zahl, welche die größere Anzahl geltender Ziffern besitzt und streiche davon so viele weg, bis nur eine Überstelle bleibt.

2. Das Komma des Multiplikators verschiebe man so, daß nur eine geltende Ziffer vor dem Komma bleibt. Im Multiplikandus ist es dann um genau so viele Stellen zu verschieben, aber in entgegengesetzter Richtung.

3. Man beginne die Multiplikation mit der ersten links stehenden Ziffer des Multiplikators und bilde das erste Teilprodukt wie gewöhnlich, indem man zugleich die Stellung des Kommas festlegt.

4. Dann streicht man die erste Ziffer des Multiplikators und zugleich die letzte des Multiplikandus. Weiter multipliziert man mit der zweiten Ziffer des Multiplikators, benutzt aber die gestrichene Ziffer nur noch zur Berechnung der übergreifenden Zehner. Das neue Teilprodukt wird unmittelbar unter das erste geschrieben, ohne nach rechts oder links auszurücken u. s. f.

5. Im Endergebnis ist das Komma herunterzunehmen und die letzte Stelle zu streichen.

Zur Erläuterung mögen noch zwei Beispiele folgen:

$$\begin{array}{r}
346{,}85 \times 7\,369 \\
\cancel{7}\cancel{3}\cancel{6}\,\cancel{9}00 \\
\times\ \cancel{3},\cancel{4}\cancel{6}\cancel{8}\,5 \\
\hline
2\,210\,700 \\
2\,948 \\
442 \\
58 \\
4 \\
\hline
2\,555\,900
\end{array}
\quad \text{Ergebnis: } 2\,556\,000.$$

Die zur Bestimmung des Kommas angehängten Nullen dürfen bei der weiteren Rechnung, also insbesondere beim Streichen gegeneinander, nicht benutzt werden.

$$\begin{array}{r}
0{,}072\,538 \times 0{,}008\,26 \\
0{,}000\,0\cancel{8}\cancel{2}\,\cancel{6} \\
\times\ \cancel{7},\cancel{2}\cancel{5}4 \\
\hline
0{,}000\,578\,2 \\
16\,5 \\
4\,1 \\
3 \\
\hline
0{,}000\,599\,1
\end{array}
\quad \text{Ergebnis: } 0{,}000\,599.$$

Der Multiplikator ist auf 7,254 zu erhöhen, da er nur eine Überstelle besitzen soll.

5. Division abgekürzter Zahlen. Dem bisher Vorgetragenen schließt sich die Division eng an.[1]) Hier verschiebt man das Komma des Divisors, bis eine geltende Ziffer allein vor dem Komma bleibt. Das Komma des Dividendus ist um genau so viele Stellen zu ver-

1) Hat man es wieder mit berechneten Zahlen zu tun, von denen beliebig viele Dezimalstellen bekannt sind, so kann man im Endergebnis dieselbe Genauigkeit fordern, wie bei den übrigen Rechnungsarten. Die Division ist dann so einzurichten:

Dem Dividendus gibt man zwei Überstellen. Der Divisor erhält ebensoviele Stellen oder eine mehr, je nachdem seine ersten Ziffern kleiner oder größer als die des Dividendus sind. Bei der Bildung des ersten Teilproduktes wird die letzte Stelle des Divisors nur zur Berechnung der übergreifenden Zehner benutzt. Es werden keine Nullen heruntergenommen, sondern statt dessen wird je eine Stelle des Divisors gestrichen. Es werden zwei Stellen mehr berechnet, als die Aufgabe erfordert. Der letzte Rest entscheidet, ob zu erhöhen ist oder nicht. Die beiden letzten Stellen vom Schlußergebnis werden gekürzt.

schieben, diesmal aber nach derselben Seite wie im Divisor. Dann bestimmt man die Stellung des Kommas im Ergebnis so, als hätte man nur durch die Einer zu dividieren.

Die Anzahl der Stellen ist so zu wählen, daß bei der Bildung des ersten Teilproduktes unter jeder Ziffer des Dividendus eine Ziffer steht. Alle übrigen Stellen sind zu kürzen.

Statt Nullen herunterzunehmen, wird jedesmal eine Stelle des Divisors gestrichen. Die zuletzt gestrichene Stelle benutzt man zur Berechnung der übergreifenden Zehner.

Der letzte Rest zeigt, ob zu erhöhen ist oder nicht.

Am besten werden Ihnen auch hier Beispiele zeigen, was zu tun ist. Diese mögen jetzt folgen:

229,67 : 75,842 =	
22,967 : 7,584 = 3,028	
22,752	
215	Ergebnis: 3,028.
152	Der Rest 3 ist weniger
63	als die Hälfte von 7;
60	deswegen ist 8 nicht
3	zu erhöhen

428,39 : 5,76 =	
428,4 : 5,76 = 74,3	
403 2	
25,2	Ergebnis: 74,4.
23,0	Der Rest 5 ist größer
22	als die Hälfte von 5,
17	so daß die 3 zu erhöhen
5	ist.

87,92 : 578,36 =	
0,8792 : 5,784 = 0,1520	
5784	
3008	Ergebnis: 0,1520.
2892	
116	Die letzte 0 ist als richtig
116	berechnet mitanzu-
0	geben.

488,1 : 3,756 = 129,9	
3756	
112,5	
75,1	Ergebnis: 130,0.
37,4	Der Rest zeigt, daß die
33,8	9 zu erhöhen ist. Die
36	0 nach dem Komma ist
33	als richtig berechnet mit-
3	anzugeben.

Weitere Beispiele mögen Sie sich selbst bilden; wie Sie überhaupt nicht vergessen dürfen, daß Sie Neues nur durch viele Übung zu Ihrem geistigen Besitze machen können.

Immer war oben nur eine Rechenoperation ausgeführt worden. Im allgemeinen werden mehrere Multiplikationen, Additionen u. s. f. in einer Rechnung einander folgen. Dann tut man gut, in den Zwischenergebnissen die letzte Stelle nicht zu kürzen; dies geschieht vielmehr dann nur im endgültigen Resultat. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit, der Wahrheit nahe zu kommen, noch erhöht.

6. Zur Geschichte des verkürzten Rechnens. Historisch interessant ist, daß zugleich mit der Erfindung der Dezimalbruchrechnung das verkürzte Rechnen mit Dezimalzahlen einsetzt. Bürgi, der eine Erfinder der Logarithmen, der an der Einführung der Dezimalzahlen wesentlich beteiligt ist, hat schon um das Jahr 1592 verkürzt gerechnet. Kurz nach ihm, zu Beginn des 17. Jahrhunderts, benutzte Kepler in ausgedehntestem Maße diese Rechnungsart. Durch die Jahrhunderte hindurch sind die Verfahren weitergebildet und kritisch[1]) untersucht worden, ohne daß, wie ich bereits bemerkte, völlige Übereinstimmung erzielt wurde.

7. Verkürztes Wurzelziehen. Für diejenigen von Ihnen, die schon einige Kenntnisse in der Mathematik besitzen, will ich noch ein paar Bemerkungen über Quadrieren und Wurzelziehen hinzufügen. Eine der bekanntesten Formeln der Algebra lautet:

$$(a + b)\,(a + b) = a^2 + a\,b + a\,b + b^2$$

oder kürzer

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

Die Richtigkeit der Formel können Sie unmittelbar der untenstehenden Fig. 57 entnehmen. a und b bedeuten dabei irgendwelche Zahlen, die wir uns als Maßzahlen von Strecken gedacht und aufgezeichnet haben.

Diese Formel läßt sich zunächst beim Quadrieren zweistelliger Zahlen sehr hübsch verwenden. Es soll z. B. 37^2 berechnet werden. Dazu setzen wir:

$$37^2 = (30 + 7)^2.$$

Hier ist, verglichen mit der Formel, $a = 30$ und $b = 7$ zu setzen. Somit hat man zu addieren

$$\begin{array}{rrcc} 37^2 = & 900 & 30^2 & a^2 \\ & +\ 420 & 2 \times 30 \times 7 & 2\,a\,b \\ & +\ \ 49 & 7^2 & b^2 \\ \hline & 1369 & & \end{array}$$

In der ersten Zeile stehen am Ende immer zwei Nullen, in der zweiten immer eine Null. Läßt man diese Nullen fort, so erhält man ein Bild, das ganz an die gewöhnliche Multipli-

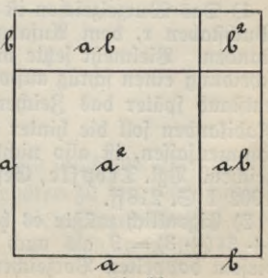


Fig. 57.

1) Vgl. E. Kullrich. Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Programm. Schöneberg 1898.

kation erinnert; vielleicht wird es den meisten von Ihnen noch vertrauter sein, wenn ich die Addition in umgekehrter Reihenfolge ausführe. Es ist also

$$37^2 = \begin{array}{r} 9 \\ +\ 42 \\ +\ 49 \\ \hline 1369 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 49 \\ +\ 42 \\ +\ 9 \\ \hline 1369 \end{array}$$

Genau wie man einfache Multiplikationen sofort im Kopfe ausführt, läßt sich auch in einfachen Fällen quadrieren. So erhält man $58^2 = 3364$ in folgender Weise:

8×8 ist 64, 4 hingeschrieben, 6 im Sinn;

2×5 ist 10, $\times\ 8$ ist 80, $+\ 6$ ist 86, 6 hingeschrieben links von der 4 und 8 im Sinn;

5×5 ist 25, $+\ 8$ ist 33, 33 hingeschrieben links von 64.

Die Umkehrung vom Quadrieren ist das Wurzelziehen oder Radizieren. Die Wurzel aus 9, zur Abkürzung[1]) geschrieben $\sqrt{9}$, ist diejenige Zahl, welche mit sich selbst multipliziert 9 ergibt, also 3 [2]). In Formeln

$$\sqrt{9} = 3$$

Will man ein Verfahren suchen, um Wurzeln aus mehrstelligen Zahlen auszuziehen, so wird man die genaue Umkehrung der oben gegebenen Methode des Quadrierens zu wählen haben. Als Beispiel nehmen wir $\sqrt{5476}$. Zwei Stellen hat man oben nach rechts ausrücken müssen; diese Stellen sind abzutrennen. Was davor steht, muß a^2 enthalten. Die Ausrechnung sieht dann so aus:

1) Das Wurzelzeichen ist nicht, wie man früher annahm, aus dem Buchstaben r, dem Anfangsbuchstaben von radix die Wurzel, entstanden. Vielmehr setzte man anfangs einen Punkt, der zur Unterscheidung einen schräg aufwärtsgehenden Strich erhielt ▪—. Daraus entstand später das Zeichen $\surd$. Der horizontale Strich über dem Radikanden soll die hinter dem Wurzelzeichen stehenden Zahlen zusammenfassen, ist also nichts anderes als unser heutiges Klammerzeichen. Vgl. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik. Leipzig 1902 I S. 218ff.

2) Eigentlich müßte es heißen $+ 3$ oder $- 3$, denn es ist sowohl $(+3)(+3) = 9$ als auch $(-3)(-3) = 9$. Doch soll hier von diesem doppelten Vorzeichen abgesehen werden.

$$\begin{array}{lll}
\sqrt{54'76} = 74 & & \\
\;49 & = 7^2 & = a^2 \\
\;\;57 & :2 \times 7 \;\; (14) : 2\,a & \\
\;\;56 & = 2 \times 7 \times 4 & = 2\,a\,b \\
\;\;\;16 & & \\
\;\;\;16 & = 4^2 & = b^2
\end{array}$$

Ist der Wurzelwert eine mehrziffrige Zahl, so wiederholt man das Verfahren immer wieder von neuem. Man stellt sich etwa vor, daß man im Beispiel statt mit 7^2 sogleich mit dem Quadrat einer zweistelligen Zahl 74^2 begonnen hätte. Dann müßte man, falls die Aufgabe sich fortsetzen ließe, mit 74 genau so rechnen, wie vorher mit 7. Ein Beispiel wird Ihnen auch hier sogleich zeigen, wie zu verfahren ist.

$$\begin{array}{lll}
\sqrt{90'82'09} = 953 & & \\
\left.\begin{array}{lll}
\;81 & = 9^2 & = a^2 \\
\;\;98 & :\; 2 \times 9 \;(18) & :\; 2\,a \\
\;\;90 & = 2 \times 9 \times 5 & = 2\,a\,b \\
\;\;\;82 & & \\
\;\;\;25 & = 5^2 & = b^2
\end{array}\right\} (a+b)^2 & & \\
\;\;\;570 \;\; :\; 2 \times 95 \;(190) \;:\; 2\;(a+b) & & \\
\;\;\;570 \;\; = 2 \times 95 \times 3 \;=\; 2\;(a+b)\,c & & \\
\;\;\;\;\;09 & & \\
\;\;\;\;\;\;9 \;\; = 3^2 \;\; = c^2 & &
\end{array}$$

Gewöhnlich zieht man das doppelte Produkt und das zweite Quadrat auf einmal ab und schreibt dann etwas einfacher so:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{90\,82'09} = 953 \\
\;\;81 \\
18/98'2 \\
\;\;\;\;925 \\
190/570'9 \\
\;\;\;\;\;\;5709
\end{array}$$

In den meisten Fällen werden die Wurzeln nicht, wie oben in den Beispielen, aufgehen. Solche Wurzeln gehören zu den sogenannten irrationalen Zahlen, die sich auf beliebig viele Dezimalstellen ausrechnen lassen, ohne daß sie jemals aufhörten. Sobald freilich etwas mehr Dezimalstellen verlangt werden, so wird die Berechnung nach dem bisherigen Verfahren recht unbequem. Da hilft uns das verkürzte Rechnen. Hat man nämlich auf dem normalen Wege erst einige Ziffern berechnet, so wird das doppelte Produkt soviel größer als das zu subtrahierende zweite Quadrat, daß man dies unbedenklich fortlassen kann. Freilich dürfen dann keine weiteren Stellen heruntergenommen werden. Das Wurzelziehen schrumpft zu einer einfachen verkürzten Division zusammen.

Sobald man mit der verkürzten Division beginnt, nimmt man nur noch eine Null herunter statt zwei und läßt das Quadrat ganz fort. Diese Stelle ist im folgenden Beispiel durch das Zeichen $\vee$ kenntlich gemacht. Wo man zu beginnen hat, läßt sich nach der einfachen Regel bestimmen: man erhält von der Stelle an, wo man verkürzt zu rechnen anfängt, genau nochmals soviele Ziffern, wie man bis dahin bereits gewonnen hatte.

Als Beispiel gebe ich Ihnen die sehr häufig vorkommende Wurzel aus 2.

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{2} = 1{,}414 \vee 2135 & \\
1 & \\
\hline
2/10'0 & \\
96 & \\
\hline
28/40'0 & \\
281 & \qquad \text{Ergebnis: } 1{,}414\,213\,6 \\
\hline
282/1190'0 & \\
11296 & \\
\hline
2\cancel{8}\cancel{2}\cancel{8}/6040 & \\
5656 & \\
\hline
384 & \\
283 & \\
\hline
101 & \\
85 & \\
\hline
16 & \\
14 & \\
\hline
2 &
\end{array}
$$

Auch hier kann ich zum Schluß nur darauf hinweisen, daß man selbst Aufgaben durchrechnen muß, wenn man die Methode erlernen will.

V. Vortrag.

Das Rechnen mit Tabellen.

Drei Forderungen erhebt der moderne Rechner in erster Linie: er will Mittel besitzen, um schnell, sicher und mit möglichst geringer geistiger Tätigkeit rechnen zu können. Dazu zwingen die hohen Anforderungen, die von der Gegenwart an die gesamte geistige Arbeitskraft des Menschen gestellt werden. In vollkommenster Weise können diese drei Forderungen sicherlich nur durch Rechenmaschinen erfüllt werden. Da einer allgemeinen Verbreitung und Anwendung derselben in manchen Fällen ihre Unvollkommenheit immer aber der hohe Preis hindernd im Wege stehen, so hat man sich nach andern Hilfsmitteln umzusehen.

Einen solchen Ersatz liefern Ihnen die verschiedenartigsten Tabellen. Man kann zwei vielfach ineinander greifende Gruppen unterscheiden: solche Tabellen, in denen die geforderte Rechnung ganz oder zum Teil ausgerechnet vorliegt und das Ergebnis fertig abgelesen werden kann, und solche Tabellen, die Rechenoperationen auf einfachere zurückzuführen gestatten. Zur ersten Gruppe gehören Zinstabellen, Lohntabellen, Multiplikationstabellen u. s. f., zur zweiten vor allem die Logarithmentafeln.

1. Lohntabellen, Multiplikationstabellen u. s. f. Zuerst soll uns die erste Gruppe beschäftigen. Aus der großen Fülle der für die verschiedensten speziellen Zwecke berechneten Tafeln zeige ich Ihnen hier als Beispiel eine Seite einer Lohntabelle. Jede Doppelseite enthält die Angaben für eine der Lohnstufen zwischen 6 und 60 Pfennigen für die Stunde. Berechnet ist der Lohn für eine Arbeitszeit bis zu 300 Stunden. Auf der Seite, die Sie hier sehen, lesen Sie z. B. ab, daß ein Arbeiter, der pro Stunde 48 Pfennige verdient, für 254 Arbeitsstunden 121,92 Mark erhält.

Um das Aufschlagen der gewünschten Lohnstufe zu erleichtern, ist auf jeder Seite je ein Zettelchen angehängt. Diese Zettelchen enthalten untereinander angeordnet die Lohnstufe der betreffenden Doppelseite aufgedruckt.

Jeder von Ihnen wird leicht in seiner eigenen Tätigkeit Beispiele finden, wo ihm der Gebrauch ähnlicher Tabellen von großem Nutzen ist. Seiner Tabellen bedient sich der Postbeamte, um ohne zu rechnen, die Beträge für größere Mengen von Postwertzeichen oder Versicherungsmarken abzulesen, der Sparkassenbeamte zur Zinsberechnung u. s. f.

Lohnsatz 48 Pfennige.

Stundenlohn.

Stunden	ℳ		Stunden	ℳ		Stunden	ℳ		Stunden	ℳ		Stunden	ℳ	
151	72	48	**181**	86	88	**211**	101	28	**241**	115	68	**271**	130	08
152	72	96	**182**	87	36	**212**	101	76	**242**	116	16	**272**	130	56
153	73	44	**183**	87	84	**213**	102	24	**243**	116	64	**273**	131	04
154	73	92	**184**	88	32	**214**	102	72	**244**	117	12	**274**	131	52
155	74	40	**185**	88	80	**215**	103	20	**245**	117	60	**275**	132	00
156	74	88	**186**	89	28	**216**	103	68	**246**	118	08	**276**	132	48
157	75	36	**187**	89	76	**217**	104	16	**247**	118	56	**277**	132	96
158	75	84	**188**	90	24	**218**	104	64	**248**	119	04	**278**	133	44
159	76	32	**189**	90	72	**219**	105	12	**249**	119	52	**279**	133	92
160	76	80	**190**	91	20	**220**	105	60	**250**	120	00	**280**	134	40
161	77	28	**191**	91	68	**221**	106	08	**251**	120	48	**281**	134	88
162	77	76	**192**	92	16	**222**	106	56	**252**	120	96	**282**	135	36
163	78	24	**193**	92	64	**223**	107	04	**253**	121	44	**283**	135	84
164	78	72	**194**	93	12	**224**	107	52	**254**	121	92	**284**	136	32
165	79	20	**195**	93	60	**225**	108	00	**255**	122	40	**285**	136	80
166	79	68	**196**	94	08	**226**	108	48	**256**	122	88	**286**	137	28
167	80	16	**197**	94	56	**227**	108	96	**257**	123	36	**287**	137	76
168	80	64	**198**	95	04	**228**	109	44	**258**	123	84	**288**	138	24
169	81	12	**199**	95	52	**229**	109	92	**259**	124	32	**289**	138	72
170	81	60	**200**	96	00	**230**	110	40	**260**	124	80	**290**	139	20
171	82	08	**201**	96	48	**231**	110	88	**261**	125	28	**291**	139	68
172	82	56	**202**	96	96	**232**	111	36	**262**	125	76	**292**	140	16
173	83	04	**203**	97	44	**233**	111	84	**263**	126	24	**293**	140	64
174	83	52	**204**	97	92	**234**	112	32	**264**	126	72	**294**	141	12
175	84	00	**205**	98	40	**235**	112	80	**265**	127	20	**295**	141	60
176	84	48	**206**	98	88	**236**	113	28	**266**	127	68	**296**	142	08
177	84	96	**207**	99	36	**237**	113	76	**267**	128	16	**297**	142	56
178	85	44	**208**	99	84	**238**	114	24	**268**	128	64	**298**	143	04
179	85	92	**209**	100	32	**239**	114	72	**269**	129	12	**299**	143	52
180	86	40	**210**	100	80	**240**	115	20	**270**	129	60	**300**	144	00

Neben diesen Spezialtabellen finden allgemeine Rechentafeln ausgedehnte Verwendung. Zuerst wären da wohl die Multiplikationstabellen zu nennen und unter diesen ganz besonders die große Crellesche „Rechentafel“, welche die Produkte aller Zahlen bis 1000×1000 enthält.

Die Anordnung ist geschickt und praktisch. Auf der als Beispiel verkleinert abgedruckten Viertelseite sehen Sie die Produkte von 282×0 bis 282×943 aufgeschrieben. Dick gedruckt ist der Multiplikandus. Links in der ersten vertikalen Spalte stehen die Zehner und Einer, oben darüber in der horizontalen Zeile die Hunderter des Multiplikators. Die in jeder Zeile ganz rechts stehenden zwei Ziffern sind die beiden letzten Stellen einer jeden in derselben Zeile stehenden Zahl. Doch mehr als viele Worte wird Ihnen ein Beispiel die Anordnung klar machen. Man würde hier abzulesen haben:

$$282 \times 824 = 232368$$

Umgekehrt kann natürlich die Rechentafel zur Division verwendet werden.

2. Mathematische Tabellen der technischen Kalender. Ich will von einer Besprechung der außerordentlich vielen Tafeln absehen, die einzeln Zerlegung in Faktoren ausführen, Quadrate und Kuben, Quadratwurzeln und Kubikwurzeln, die reziproken Werte der Zahlen abzulesen gestatten oder gemeine Brüche in Dezimalbrüche verwandeln u. s. f. Hier will ich sogleich eine Tabellenform besprechen, die Sie regelmäßig in technischen Kalendern zu finden pflegen, und die mindestens bei Technikern ganz allgemein in Gebrauch gekommen ist.

Solche Tabellen sollten weit mehr beachtet werden. Vor allem sollten unsere Schulen nicht mehr so einseitig, wie so häufig bisher, die Logarithmentafeln bevorzugen. Der bildende Wert ist bei Benutzung allgemeiner Tabellen größer und der praktische Nutzen, den die Kenntnis solcher und die Übung in ihrem Gebrauch mit sich bringt, sicher nicht geringer. Selbstverständlich kann die Logarithmentafel heute noch nicht ganz entbehrt werden.

Umseitig sehen Sie eine Seite dieser Art Tabellen abgedruckt. Vertikal unter n stehen die Zahlen, von denen Quadrate, Kuben u. s. f. angegeben werden sollen. Die zu einer Zahl n gehörigen Werte stehen horizontal daneben. Sie finden von jeder Zahl, wie Ihnen die Überschriften zeigen, das Quadrat, den Kubus (dritte Potenz), die Quadratwurzel, die Kubikwurzel (dritte Wurzel), den natür-

282	**0**	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**	**700**	**800**	**900**	
0	0	282	564	846	1128	1410	1692	1974	2256	2538	00
1	2·	284·	566·	848·	1130·	1412·	1694·	1976·	2258·	2540·	82
2	5·	287·	569·	851·	1133·	1415·	1697·	1979·	2261·	2543·	64
3	8	290	572	854	1136	1418	1700	1982	2264	2546	46
4	11	293	575	857	1139	1421	1703	1985	2267	2549	28
5	14	296	578	860	1142	1424	1706	1988	2270	2552	10
6	16·	298·	580·	862·	1144·	1426·	1708·	1990·	2272·	2554·	92
7	19·	301·	583·	865·	1147·	1429·	1711·	1993·	2275·	2557·	74
8	22·	304·	586·	868·	1150·	1432·	1714·	1996·	2278·	2560·	56
9	25	307	589	871	1153	1435	1717	1999	2281	2563	38
10	28	310	592	874	1156	1438	1720	2002	2284	2566	20
11	31	313	595	877	1159	1441	1723	2005	2287	2569	02
12	33·	315·	597·	879·	1161·	1443·	1725·	2007·	2289·	2571·	84
13	36·	318·	600·	882·	1164·	1446·	1728·	2010·	2292·	2574·	66
14	39	321	603	885	1167	1449	1731	2013	2295	2577	48
15	42	324	606	888	1170	1452	1734	2016	2298	2580	30
16	45	327	609	891	1173	1455	1737	2019	2301	2583	12
17	47·	329·	611·	893·	1175·	1457·	1739·	2021·	2303·	2585·	94
18	50·	332·	614·	896·	1178·	1460·	1742·	2024·	2306·	2588·	76
19	53·	335·	617·	899·	1181·	1463·	1745·	2027·	2309·	2591·	58
20	56	338	620	902	1184	1466	1748	2030	2312	2594	40
21	59	341	623	905	1187	1469	1751	2033	2315	2597	22
22	62	344	626	908	1190	1472	1754	2036	2318	2600	04
23	64·	346·	628·	910·	1192·	1474·	1756·	2038·	2320·	2602·	86
24	67·	349·	631·	913·	1195·	1477·	1759·	2041·	2323·	2605·	68
25	70•	352•	634•	916•	1198•	1480•	1762•	2044•	2326•	2608•	50
26	73	355	637	919	1201	1483	1765	2047	2329	2611	32
27	76	358	640	922	1204	1486	1768	2050	2332	2614	14
28	78·	360·	642·	924·	1206·	1488·	1770·	2052·	2334·	2616·	96
29	81·	363·	645·	927·	1209·	1491·	1773·	2055·	2337·	2619·	78
30	84·	366·	648·	930·	1212·	1494·	1776·	2058·	2340·	2622·	60
31	87	369	651	933	1215	1497	1779	2061	2343	2625	42
32	90	372	654	936	1218	1500	1782	2064	2346	2628	24
33	93	375	657	939	1221	1503	1785	2067	2349	2631	06
34	95·	377·	659·	941·	1223·	1505·	1787·	2069·	2351·	2633·	88
35	98·	380·	662·	944·	1226·	1508·	1790·	2072·	2354·	2636·	70
36	101·	383·	665·	947·	1229·	1511·	1793·	2075·	2357·	2639·	52
37	104	386	668	950	1232	1514	1796	2078	2360	2642	34
38	107	389	671	953	1235	1517	1799	2081	2363	2645	16
39	109·	391·	673·	955·	1237·	1519·	1801·	2083·	2365·	2647·	98
40	112·	394·	676·	958·	1240·	1522·	1804·	2086·	2368·	2650·	80
41	115·	397·	679·	961·	1243·	1525·	1807·	2089·	2371·	2653·	62
42	118	400	682	964	1246	1528	1810	2092	2374	2656	44
43	121	403	685	967	1249	1531	1813	2095	2377	2659	26

lichen Logarithmus (in andern Tafeln zuweilen auch die Mantisse des dekadischen Logarithmus), den reziproken Wert der Zahl aber, um den immer wiederkehrenden Anfang 0,0 . . . zu vermeiden, mit 1000 multipliziert. Es folgen zwei sehr brauchbare Spalten, welche Kreisumfang πn und Kreisinhalt $\frac{\pi n^2}{4}$ enthalten für einen Kreis mit dem Durchmesser n. Endlich ist rechts zur besseren Übersicht die Zahl n noch einmal abgedruckt.

Lassen Sie uns einige Beispiele ablesen. Es ist:

$$403^2 = 162409,$$
$$\sqrt[3]{423} = 7{,}5067,$$
$$1000 : 412 = 2{,}42718,$$
$$\text{also } 1 : 412 = 0{,}00242718$$

da ja durch 1000 zu dividieren, also das Komma drei Stellen nach links zu schieben ist. Weiter hat der Kreis mit dem Durchmesser 407 cm den Umfang 1278,6 cm und den Inhalt 130 100 qcm.

Damit ist die Verwendbarkeit der Tabellen noch nicht erschöpft. Zunächst kann man offenbar den Durchmesser jedes Kreises angeben, wenn man seinen Umfang oder Inhalt kennt. Denn wissen Sie z. B., daß der Inhalt eines Kreises 1 357,2 qcm beträgt, so haben Sie diesen Wert in der Kolonne unter $\frac{\pi n^2}{4}$ zu suchen, und finden unmittelbar daneben unter n den gesuchten Durchmesser 432 cm.

Man kann der Aufgabe: zu einem gegebenen Kreisumfang den Durchmesser zu suchen, noch eine andere Deutung geben. Ist z. B. der Kreisumfang 1262,9 cm, also

$$\pi n = 1262{,}9 \text{ cm},$$

so findet man doch n, indem man durch π dividiert. Deshalb kann man auch allgemeiner die Aufgabe so fassen: es soll 1262,9 durch π dividiert werden. Das Ergebnis dieser Division ist eben n, also in unserm Fall 402.

Darnach kann man mit unserer Tabelle jede Zahl durch π dividieren, eine gewiß wichtige und sonst recht unbequeme Aufgabe.

3. Die Verschiebung des Kommas. Bei jeder der Zahlen n müssen Sie sich ein Komma hinter der dritten Ziffer, also am Ende der Zahl denken. Wir wollen einmal überlegen, welchen Einfluß die Verschiebung des Kommas z. B. um eine Stelle nach links hervorruft. Das Komma eine Stelle nach links verschieben, heißt doch durch 10 dividieren. Also müssen Sie im Quadrat n^2 oder $n \times n$ jede

10 400—450 **Erster Abschnitt. — Mathematik.**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	**400**
401	16 08 01	64 481 201	20,0250	7,3742	5,99396	2,49377	1259,8	12 62 93	401
402	16 16 04	64 964 808	20,0499	7,3803	5,99645	2,48756	1262,9	12 69 23	402
403	16 24 09	65 450 827	20,0749	7,3864	5,99894	2,48139	1266,1	12 75 56	403
404	16 32 16	65 939 264	20,0998	7,3925	6,00141	2,47525	1269,2	12 81 90	404
405	16 40 25	66 430 125	20,1246	7,3986	6,00389	2,46914	1272,3	12 88 25	405
406	16 48 36	66 923 416	20,1494	7,4047	6,00635	2,46305	1275,5	12 94 62	406
407	16 56 49	67 419 143	20,1742	7,4108	6,00881	2,45700	1278,6	13 01 00	407
408	16 64 64	67 917 312	20,1990	7,4169	6,01127	2,45098	1281,8	13 07 41	408
409	16 72 81	68 417 929	20,2237	7,4229	6,01372	2,44499	1284,9	13 13 82	409
410	16 81 00	68 921 000	20,2485	7,4290	6,01616	2,43902	1288,1	13 20 25	**410**
411	16 89 21	69 426 531	20,2731	7,4350	6,01859	2,43309	1291,2	13 26 70	411
412	16 97 44	69 934 528	20,2978	7,4410	6,02102	2,42718	1294,3	13 33 17	412
413	17 05 69	70 444 997	20,3224	7,4470	6,02345	2,42131	1297,5	13 39 65	413
414	17 13 96	70 957 944	20,3470	7,4530	6,02587	2,41546	1300,6	13 46 14	414
415	17 22 25	71 473 375	20,3715	7,4590	6,02828	2,40964	1303,8	13 52 65	415
416	17 30 56	71 991 296	20,3961	7,4650	6,03069	2,40385	1306,9	13 59 18	416
417	17 38 89	72 511 713	20,4206	7,4710	6,03309	2,39808	1310,0	13 65 72	417
418	17 47 24	73 034 632	20,4450	7,4770	6,03548	2,39234	1313,2	13 72 28	418
419	17 55 61	73 560 059	20,4695	7,4829	6,03787	2,38663	1316,3	13 78 85	419
420	17 64 00	74 088 000	20,4939	7,4889	6,04025	2,38095	1319,5	13 85 44	**420**
421	17 72 41	74 618 461	20,5183	7,4948	6,04263	2,37530	1322,6	13 92 05	421
422	17 80 84	75 151 448	20,5426	7,5007	6,04501	2,36967	1325,8	13 98 67	422
423	17 89 29	75 686 967	20,5670	7,5067	6,04737	2,36407	1328,9	14 05 31	423
424	17 97 76	76 225 024	20,5913	7,5126	6,04973	2,35849	1332,0	14 11 96	424
425	18 06 25	76 765 625	20,6155	7,5185	6,05209	2,35294	1335,2	14 18 63	425
426	18 14 76	77 308 776	20,6398	7,5244	6,05444	2,34742	1338,3	14 25 31	426
427	18 23 29	77 854 483	20,6640	7,5302	6,05678	2,34192	1341,5	14 32 01	427
428	18 31 84	78 402 752	20,6882	7,5361	6,05912	2,33645	1344,6	14 38 72	428
429	18 40 41	78 953 589	20,7123	7,5420	6,06146	2,33100	1347,7	14 45 45	429
430	18 49 00	79 507 000	20,7364	7,5478	6,06379	2,32558	1350,9	14 52 20	**430**
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	7,5537	6,06611	2,32019	1354,0	14 58 96	431
432	18 66 24	80 621 568	20,7846	7,5595	6,06843	2,31481	1357,2	14 65 74	432
433	18 74 89	81 182 737	20,8087	7,5654	6,07074	2,30947	1360,3	14 72 54	433
434	18 83 56	81 746 504	20,8327	7,5712	6,07304	2,30415	1363,5	14 79 34	434
435	18 92 25	82 312 875	20,8567	7,5770	6,07535	2,29885	1366,6	14 86 17	435
436	19 00 96	82 881 856	20,8806	7,5828	6,07764	2,29358	1369,7	14 93 01	436
437	19 09 69	83 453 453	20,9045	7,5886	6,07993	2,28833	1372,9	14 99 87	437
438	19 18 44	84 027 672	20,9284	7,5944	6,08222	2,28311	1376,0	15 06 74	438
439	19 27 21	84 604 519	20,9523	7,6001	6,08450	2,27790	1379,2	15 13 63	439
440	19 36 00	85 184 000	20,9762	7,6059	6,08677	2,27273	1382,3	15 20 53	**440**
441	19 44 81	85 766 121	21,0000	7,6117	6,08904	2,26757	1385,4	15 27 45	441
442	19 53 64	86 350 888	21,0238	7,6174	6,09131	2,26244	1388,6	15 34 39	442
443	19 62 49	86 938 307	21,0476	7,6232	6,09357	2,25734	1391,7	15 41 34	443
444	19 71 36	87 528 384	21,0713	7,6289	6,09582	2,25225	1394,9	15 48 30	444
445	19 80 25	88 121 125	21,0950	7,6346	6,09807	2,24719	1398,0	15 55 28	445
446	19 89 16	88 716 536	21,1187	7,6403	6,10032	2,24215	1401,2	15 62 28	446
447	19 98 09	89 314 623	21,1424	7,6460	6,10256	2,23714	1404,3	15 69 30	447
448	20 07 04	89 915 392	21,1660	7,6517	6,10479	2,23214	1407,4	15 76 33	448
449	20 16 01	90 518 849	21,1896	7,6574	6,10702	2,22717	1410,6	15 83 37	449
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	**450**

der Zahlen n durch 10, d. h. im ganzen durch 100 dividieren. Darnach müssen Sie im Quadrat das Komma immer um zwei Stellen nach links verschieben, wenn Sie es in der Zahl selbst um eine Stelle nach links verschieben. Ein Beispiel hierfür ist.:

$$433^2 = 187489,$$
$$43{,}3^2 = 1874{,}89,$$
$$0{,}433^2 = 0{,}187489.$$

Das ist auch in der Tabelle durch den Druck angedeutet. Wie Sie sehen, sind in der Quadratspalte die Ziffern zu je zweien enger zusammengedruckt und von den andern durch eine kleine Lücke getrennt worden. Das soeben Hergeleitete gilt in genau gleicher Weise für die Kolonne $\frac{\pi n^2}{4}$, wo ja ebenfalls allein das Quadrat für die Kommaverschiebung maßgebend ist.

Durch ganz ähnliche Überlegungen werden Sie hiernach leicht selbst finden, daß in den Kubikzahlen ebenfalls in gleicher Richtung das Komma um je drei Stellen verschoben werden muß, wenn es in der Zahl um je eine Stelle verschoben wird.

Anders lautet die Regel für die reziproken Werte. Verschieben Sie in der Grundzahl wieder das Komma um eine Stelle nach links, dividieren also durch 10, so müssen Sie ja in $\frac{1000}{n}$ den Nenner durch 10 dividieren, also den Zähler mit 10 multiplizieren. Das ergibt aber die Verschiebung des Kommas um eine Stelle nach rechts. Allgemein muß also bei den reziproken Werten das Komma genau so viele Stellen nach rechts verschoben werden, wie es in der Zahl selbst nach links verschoben wurde; und umgekehrt.

In der Spalte unter πn ist die Kommaverschiebung genau dieselbe, wie bei n selbst.

Eine Schwierigkeit entsteht bei den Wurzeln. Ist z. B.

$$\sqrt{431} = 20{,}7605, \text{ so wird ja weiter}$$

$$\sqrt{43{,}1} = \sqrt{\frac{431}{10}} = \frac{\sqrt{431}}{\sqrt{10}} = \frac{20{,}7605}{\sqrt{10}}$$

Nun ist aber $\sqrt{10} = 3{,}1623$; man müßte daher 20,7605 durch 3,1623 dividieren. Mit andern Worten: es ist nicht möglich hier an dieser Stelle direkt $\sqrt{43{,}1}$ abzulesen. Soll dagegen $\sqrt{4{,}31}$ ermittelt werden, so ist ja

$$\sqrt{4{,}31} = \sqrt{\frac{431}{100}} = \frac{\sqrt{431}}{\sqrt{100}} = \frac{20{,}7605}{10} = 2{,}07605$$

Sie sehen, daß die Wurzeln nur abgelesen werden können, wenn das Komma von n um 2, 4, 6, . . . Stellen verschoben wird, dann muß es bei den Wurzeln selbst um 1, 2, 3 ,. . . . d. h. um genau halb so viele Stellen verschoben werden.

Wieder können Sie sich selbst leicht überlegen, daß in den Werten der Kubikwurzeln die Kommaverschiebung nur ein Drittel Stellen von der unter n ist. D. h. bei 3, 6, 9, ... Stellen Verschiebung unter n ergibt sich für die Kubikwurzeln eine Verschiebung des Kommas um 1, 2, 3, ... Stellen. Die übrigen Kubikwurzeln können ebenfalls nicht direkt abgelesen werden.

In der untenstehenden Tabelle sind die Regeln für die Kommaverschiebung unmittelbar unter den Überschriften schematisch durch Zahlen und Pfeilrichtung angedeutet und an Beispielen erläutert. Gleiche Pfeilrichtung bedeutet gleiche Richtung der Verschiebung und umgekehrt.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
← 1	← 2	← 3	← 1/2	← 1/3	1 →	← 1	← 2
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	7,5537	2,3202	1354,0	14 58 96
43,1	18 57,61	80 062,991	—	—	23,202	135,40	14 58,96
4,31	18,57 61	80,062 991	2,07605	—	232,02	13,540	14,58 96
0,431	0,18 57 61	0,080 062 991	—	0,75537	2320,2	1,3540	0,14 58 96
4310	18 57 61 00	80 062 991 000	—	—	0,23202	13540	14 58 96 00

Unsere Betrachtungen haben eine scheinbar wesentliche Lücke der Tabellen aufgedeckt: man findet bisher nur eine beschränkte Anzahl von Wurzelwerten. Da hilft uns eine Umkehrung, wie wir sie schon oben besprachen, als wir durch π dividieren lernten. In der Tat sind doch Quadrieren und Wurzelziehen Umkehrungen voneinander. Stehen deshalb in einer Spalte irgendwelche Zahlen und rechts daneben die Quadrate, so kann ich auch umgekehrt die rechts stehenden Zahlen zuerst gegeben denken, dann stehen aber links daneben ihre Wurzeln. Ist also

$$431^2 = 185\,761,$$

so ist doch auch umgekehrt unmittelbar

$$\sqrt{185\,761} = 431.$$

Hiernach können Sie das Wurzelziehen auch so ausführen, daß Sie den Radikanden (d. i. die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll) unter n^2 aufsuchen, dann finden Sie links daneben unter n die gesuchte Wurzel.

Ganz dasselbe gilt für die dritten Wurzeln.

Stellen wir uns einmal die Aufgabe $\sqrt[3]{70{,}783}$ zu bestimmen. Der Radikand 70,783 wird nicht genau so in der Tabelle vorkommen; wir begnügen uns damit, die ihm am nächsten liegende Zahl in der Spalte unter n^3 aufzusuchen. Da finden wir eine gleichartige Ziffernfolge an drei verschiedenen Stellen. Nämlich

n	n^3
192	7 077 888
193	7 189 057

n	n^3
413	70 444 997
414	70 957 944

n	n^3
891	707 347 971
892	709 732 288

Wo haben wir den richtigen Wert? Beachten wir, daß unter n^3 das Komma immer um je 3 Stellen zu verschieben ist, so erkennen wir sofort, daß wir nur im zweiten Falle durch Verschiebung um 2×3 Stellen nach links auf 70, . . . kommen. In den beiden andern Fällen kämen wir ja auf 7, . . . bezw. 707, . . . Darnach erhalten wir als richtigen Wert $\sqrt[3]{70{,}783} = 4{,}14$.

In den beiden andern Fällen würden wir erhalten:

$$\sqrt[3]{7{,}0783} = 1{,}92 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{707{,}83} = 8{,}91$$

So haben wir ein Mittel, um wirklich jede dritte Wurzel aus der Tafel zu bestimmen. Wie hiernach Quadratwurzeln zu ermitteln sind, und worauf bei der Berechnung des Durchmessers aus dem Kreisinhalt zu achten ist, können Sie wieder allein überlegen.

4. **Das Interpolieren**. Unsere Tabellen gestatten nur mit dreiziffrigen Zahlen zu rechnen; auch Wurzeln, Kreisdurchmesser und das Ergebnis der Division durch π werden nur dreiziffrig erhalten. Wenn auch diese Genauigkeit in recht vielen Fällen durchaus hinreichend ist, so braucht man doch gelegentlich genauere Zahlenwerte. Wirklich kann man mit sicherlich nur geringem Fehler eine vierte Ziffer berücksichtigen, indem man in folgender Weise interpoliert. Unsere Aufgabe sei $428{,}6^2$ zu berechnen. In der Tafel finden wir

$$428^2 = 183\,184$$
$$429^2 = 184\,041.$$

Subtrahieren wir die rechten Seiten voneinander, so finden wir, daß das Quadrat um 857 wächst, wenn die Grundzahl um 1 zunimmt. Teilen wir den Unterschied 857 in 10 gleiche Teile 85,7, so kommt beim Anwachsen von 280 auf 280,1 bezw. 280,2 u. s. f. jedesmal $1 \times 85{,}7$ bezw. $2 \times 85{,}7$ u. s. f. zum Quadrat hinzu. In unserm Beispiel ist $6 \times 85{,}7 = 514{,}2$ zu addieren.

$$\begin{array}{r} 183\,184 \\ +\ 514 \\ \hline 428{,}6^2 = 183\,698 \end{array}$$

Es ist auf eine ganze Zahl abgerundet worden; denn über die in der Tabelle gegebene Ziffernzahl soll man beim direkten Ablesen nicht hinausgehen. Das ist notwendig, weil erstens hier die Einteilung in 10 gleiche Abschnitte der Wahrheit nicht entspricht, da die Quadrate nicht proportional den Grundzahlen anwachsen. Man denke nur an die Reihe 1, 4, 9, 16, 25 u. s. f. der Quadratzahlen von 1, 2, 3, 4, 5 u. s. f. Man soll sich dessen bewußt bleiben, indem man vernünftig abrundet. (So hätte man oben 183 698,2 erhalten, während sich genau 183 697,96 ergeben würde. Es hat also gar keinen Sinn, die letzte 2 noch hinzuschreiben). Zweitens treten meist Zahlen auf, Wurzeln, πn, $\frac{\pi n^2}{4}$, die selbst schon abgerundet sind, deren nächste Stelle also garnicht bekannt ist. Bei ihnen über die gegebene Ziffernzahl hinauszugehen, ist entschieden unzulässig. Drittens soll man nicht vergessen, daß man es in der Praxis meist mit gemessenen Größen zu tun hat, deren Quadrate u. s. f. an sich schon stark abgerundet werden müssen.

Beim umgekehrten Aufschlagen soll man nie mehr als höchstens zwei Ziffern in der Regel nur eine Ziffer durch Interpolation ermitteln, da man für die Richtigkeit der weiteren Stellen keinerlei Sicherheit besitzt. Ein Beispiel möge auch das noch zeigen: es sei $\frac{\pi n^2}{4} = 142357$ qcm; wie groß ist n? In der Tabelle finden wir

$$\frac{\pi n^2}{4} = 141\,863 \ ; \ n = 425$$

$$\frac{\pi n^2}{4} = 142\,531 \ ; \ n = 426$$

Wenn also $\frac{\pi n^2}{4}$ um 668 wächst, so nimmt n um 1 zu. Damit wir auf unseren Wert 142 357 kommen, muß $\frac{\pi n^2}{4}$ um 494 wachsen. Also nimmt n im Verhältnis 494 : 668 zu, d. h. um 0,7. Der gesuchte Durchmesser hat die Länge 425,7 cm.

Sie haben wohl gesehen, wie man Tabellenwerte aufschlägt; wie aber hat man mit diesen sachgemäß weiterzurechnen? Da es sich praktisch fast ausnahmslos um gemessene Größen oder um Zahlen handelt, die nur bis zu einer beschränkten Ziffernzahl angegeben sind, so kann nur das verkürzte Rechnen in Frage kommen, wie Sie es im vorigen Vortrag kennenlernten. Benutzung dieser Tabellen ohne verkürztes Rechnen ist entschieden zu verwerfen.

5. Die Logarithmen. Jetzt hätte ich Ihnen weiterhin die Logarithmentafel zu erläutern. Zuvor will ich Ihnen erklären, was ein Logarithmus ist, und wie man mit ihm zu rechnen hat. Das sind gewiß wichtige Dinge; wer aber nur wissen will, wie man eine Logarithmentafel benutzt, der mag diesen Abschnitt hier ruhig überschlagen, da ihm die Kenntnis weniger Regeln genügt, die ich nachher besonders zusammenstellen will.

Wenn man dieselbe Zahl 10 fortlaufend addieren soll, so bedient man sich einer abkürzenden Schreibweise. Wie genugsam bekannt, ist

$$10 + 10 + 10 + 10 = 4 \times 10.$$

Man nennt diese Abkürzung ein Produkt. Das Produkt besteht aus zwei Zahlen, den Faktoren; die eine gibt an, wieviel Zahlen addiert sind, die andere, welche Zahl addiert ist.

Jetzt wollen wir fortlaufend mit derselben Zahl multiplizieren. Auch hier soll eine Abkürzung verwendet werden. Freilich muß sie anders aussehen, als die oben benutzte, damit man beide Abkürzungen, die ja ganz etwas anderes bedeuten, sofort voneinander unterscheiden kann. Man schreibt daher

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4.$$

Diese Abkürzung heißt eine Potenz und wird gesprochen: 10 hoch 4 oder die vierte Potenz von 10. 4 heißt der Exponent und 10 die Basis oder Grundzahl der Potenz. Auch hier gibt die Zahl 4 an, wieviele Zahlen zu multiplizieren sind, und die 10, welche Zahl zu multiplizieren ist[1]).

Die Art und Weise, wie Produkt und Potenz entstanden sind, ist so gleichartig, daß auch die Rechengesetze weitgehend übereinstimmen müssen. Nur ist zu beachten, daß Addition mit Multiplikation und ganz entsprechend Subtraktion mit Division zu vertauschen sind. Sie brauchen nur nachzuzählen, so finden Sie sofort die Richtigkeit der folgenden Beispiele:

$$2 \times 10 + 3 \times 10 = 5 \times 10; \qquad 10^2 \times 10^3 = 10^5$$
$$7 \times 10 - 4 \times 10 = 3 \times 10\ ; \qquad 10^7 : 10^4 = 10^3.$$

1) Während 10×4 und 4×10 genau dasselbe bedeuten, nämlich 40, sind 10^4 und 4^{10} voneinander sehr verschieden. Nur 4^2 ist gleich 2^4.

Was hier für die Exponenten 2 und 3 bezw. 7 und 4 gezeigt wurde, gilt gerade so für alle andern Zahlen auch.

Jetzt etwas anderes. Von unserm Produkt soll nur ein Faktor bekannt sein und das Ergebnis der Multiplikation; also z. B.

$$10 \times a = 50.$$

Dann sagen wir, es sei

$$a = \frac{50}{10}.$$

Der Ausdruck rechts heißt ein Bruch; Brüche erkennen wir stets an dem sogenannten Bruchstrich wieder. Eine leichte Überlegung zeigt uns, daß hier der Bruch den Wert 5 besitzt.

Dasselbe wollen wir mit den Potenzen machen. Es soll etwa sein

$$10^a = 100.$$

Hier schreiben wir dann kurz

$$a = \log 100,$$

und nennen die rechts stehende Zahl den Logarithmus von 100[1]). Als Zeichen benutzen wir die Abkürzung log. Man sieht sofort, daß der Logarithmus von 100 gleich 2 ist; denn es ist

$$100 = 10 \times 10 = 10^2.$$

Statt der Exponenten läßt sich demnach auch ein Logarithmus setzen. Also kann man statt

$$10^2 = 100$$

ebensogut schreiben

$$10^{\log 100} = 100.$$

Entsprechend

$$10^{\log 1000} = 1000; \ 10^{\log 3} = 3 \text{ u. s. f.}$$

Der Logarithmus irgendeiner Zahl 7 oder 9 ist nichts anderes als der Exponent derjenigen Potenz von 10, die gerade den Wert 7 oder 9 hat. Hier ist immer 10 als Grundzahl genommen. Man könnte natürlich auch jede andere Zahl wählen; doch sind die Logarithmen zur Grundzahl 10 zum praktischen Rechnen besonders geeignet. Sie werden daher hierbei allein benutzt.

Eine Anzahl von Logarithmen können Sie sofort herleiten:

---

1) Während die Umkehrung der Multiplikation nur zu den Brüchen führt, kann man von der Potenz aus sowohl zu den Logarithmen als auch zu den Wurzeln kommen. Aus $a^2 = 100$ folgt ja $a = \sqrt{100} = \pm 10$.

$$10^1 = 10 \quad ; \quad \log 10 \; = 1$$
$$10^2 = 100 \quad ; \quad \log 100 \; = 2$$
$$10^3 = 1000 \; ; \quad \log 1000 = 3 \text{ u. s. f.}$$

Wir sahen oben, daß man Potenzen gleicher Basis dividiert, indem man nur die Exponenten subtrahiert. Läßt man diese Regel auch noch gelten, wenn die Differenzen negativ werden, so erhält man mit ihrer Hilfe durch Umkehrung noch die folgenden Logarithmen:

$$10^0 = 10^{1-1} = \frac{10}{10} = 1; \quad \log \; 1 \; = 0$$
$$10^{-1} = 10^{1-2} = \frac{10}{10^2} = \frac{1}{10}; \quad \log \frac{1}{10} = -1$$
$$10^{-2} = 10^{1-3} = \frac{10}{10^3} = \frac{1}{100}; \; \log \frac{1}{100} = -2 \text{ u. s. f.}$$

Sehen Sie die berechneten Logarithmen noch einmal durch, so erkennen Sie leicht folgendes: Der Logarithmus von 1, 10, 100, 1000, ... $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ... ist immer gleich der Anzahl der Nullen; jedoch ist das Vorzeichen bei den Brüchen negativ.

Genau so, wie man für Brüche neue Rechenregeln anzuwenden hat, ganz andere als für ganze Zahlen (man denke z. B. an die Addition ungleichnamiger Brüche), so muß man auch für das Rechnen mit Logarithmen neue Regeln herleiten. Das ist nicht schwierig. Oben erkannten wir die Richtigkeit der Gleichungen

$$10^{\log 3} = 3 \text{ und } 10^{\log 2} = 2.$$

Multipliziert man beide miteinander und beachtet, daß dabei die Exponenten zu addieren sind, so erhält man

$$10^{\log 3 + \log 2} = 3 \times 2.$$

Das bedeutet ja aber

$$\log 3 + \log 2 = \log (3 \times 2) = \log 6.$$

Dies Resultat ist wichtig. Es heißt doch: soll man beliebig viele Zahlen miteinander multiplizieren, so kann man statt dessen mit Logarithmen rechnen, muß dann aber die Logarithmen der Zahlen addieren.

Da die Addition schneller und leichter ausgeführt ist, als die Multiplikation, so bedeutet die Verwendung der Logarithmen eine wesentliche Rechenerleichterung.

Ganz ähnlich wie oben leitet man die weiteren Regeln her[1])

$$\log 3 - \log 2 = \log (3 : 2);$$

$$\log 2^3 = 3 \times \log 2;$$

$$\log \sqrt[3]{2} = {}^1/_3 \log 2.$$

Durch die beiden letzten Formeln ist das Potenzieren und das Wurzelziehen durch die beiden sehr viel einfacheren Rechnungsarten, Multiplizieren und Dividieren, ersetzt. Ja in sehr vielen Fällen werden Sie gar nicht imstande sein, auf andere Weise als mit Hilfe der Logarithmen Potenzen und Wurzeln zu berechnen.

Natürlich hätten wir oben jedes beliebige andere Zahlenbeispiel ebensogut wählen können.

6. Die Logarithmentafeln. Lassen Sie uns wieder zum eigentlichen Thema zurückkehren. Die zweite Art Tabellen gestattet, wie erwähnt, Rechenoperationen auf einfachere zurückzuführen. Da Addition und Subtraktion die einfachsten Rechnungsarten sind, so wäre das Ziel zu verfolgen, möglichst alle andern Rechnungsoperationen auf diese zurückzuführen. Solcher Tabellen gibt es für verschiedene Zwecke mancherlei. Am wertvollsten unter ihnen sind die Logarithmentafeln. Allein in Betracht kommen die gemeinen oder dekadischen Logarithmen, deren Grundzahl 10 ist; denn nur diese werden beim praktischen Rechnen verwendet.

Die erste Tabelle dekadischer Logarithmen, nicht die erste Logarithmentafel überhaupt, ist im Jahre 1624 von dem Engländer Briggs veröffentlicht worden. Die Tafel, die jedoch unvollendet blieb, enthält die Logarithmen auf 14 Dezimalstellen berechnet. Bald danach gab Black in Holland die erste vollständige dekadische Logarithmentafel heraus, in der die Logarithmen noch mit 10 Dezimalstellen angegeben waren. Seitdem ist man im allgemeinen Gebrauch mit der Anzahl der Dezimalstellen erheblich heruntergegangen. Heute begnügt man sich, abgesehen von einigen Spezialgebieten, mit vierstelligen Tafeln.

Die in den Tafeln enthaltenen Logarithmen sind so oft nachgeprüft und nachgerechnet worden, daß sie jetzt als fehlerfrei gelten

---

1) Die zweite Regel folgt unmittelbar, da ja das Potenzieren eine fortlaufende Multiplikation ist, der eine fortlaufende Addition der Logarithmen entspricht. Die dritte erhält man so: es sei $\sqrt[3]{2} = a$, dann ist doch $2 = a^3$, also $\log 2 = 3 \times \log a$ und folglich $\log a$, d. h. also

$$\log \sqrt[3]{2} = {}^1/_3 \times \log 2.$$

können. Wir besitzen sogar eine siebenstellige Tafel von Wiberg, die mittels einer Rechenmaschine, einer sogenannten Differenzenmaschine, berechnet ist, die deswegen sicher fehlerfrei sein müßte.

Auf die Frage, was eigentlich Logarithmen sind, brauchen wir gar nicht einzugehen. Es genügt darüber Folgendes zu wissen. Jede Zahl besitzt einen ganz bestimmten Logarithmus (geradeso wie sie z. B. ein Quadrat besitzt u. s. f.). Ein Logarithmus ist auch eine Zahl, die man in Tabellen, den Logarithmentafeln, aufgeschrieben findet. Wie sie dort berechnet sind, kann uns ganz gleichgültig sein; sich damit zu beschäftigen, überlassen wir gern den Mathematikern.

Die Benutzung der Logarithmentafeln gewährt den ganz erheblichen Vorteil, daß an die Stelle der Multiplikation und Division die Addition und Subtraktion tritt; dazu hat man noch statt des Potenzierens und Wurzelziehens nur einfache Multiplikation und Division auszuführen. Statt viele Worte zu machen, zeige ich Ihnen das an ein paar Zahlenbeispielen:

$$\log (5{,}28 \times 3{,}76) = \log 5{,}28 + \log 3{,}76$$
$$\log (5{,}28 : 3{,}76) = \log 5{,}28 - \log 3{,}76$$
$$\log 27{,}2^5 = 5 \times \log 27{,}2$$
$$\log \sqrt[3]{182{,}5} = {}^1/_3 \log 182{,}5.$$

Man pflegt Logarithmen als Dezimalzahlen zu schreiben. Dann besteht jeder Logarithmus aus zwei Teilen. Die hinter dem Komma stehenden Ziffern sind nämlich nur von der Ziffernfolge des Numerus (so nennt man die Zahl, deren Logarithmus gesucht wird) abhängig und dadurch allein bestimmt. Dagegen erhält man die vor dem Komma stehenden ganzen Zahlen allein aus der Stellung des Kommas im Numerus. Die Ziffern hinter dem Komma heißen die Mantisse des Logarithmus, diese allein steht in den Tabellen. Vor dem Komma steht die Kennziffer. Man bestimmt sie, indem man beim Numerus die Anzahl der Stellen vor dem Komma abzählt; diese Anzahl um eins verkleinert ist die gesuchte Kennziffer. Einige Beispiele werden es Ihnen sofort verständlich machen:

$$\log 6{,}293 = 0{,}79886$$
$$\log 62{,}93 = 1{,}79886$$
$$\log 62930 = 4{,}79886$$

Hier sind die Ziffern 79 886 die Mantisse; da wir links immer dieselbe Ziffernfolge 6293 haben, so haben alle drei Logarithmen dieselbe Mantisse. Dagegen haben wir links verschiedene Kommastellungen und deshalb auch rechts verschiedene Kennziffern, nämlich 0, 1 und 4, die nach obiger Regel berechnet sind.

Die Logarithmen echter Brüche sind negative Zahlen. Jedoch zieht man für sie eine Schreibweise als Differenz vor, durch die auch hier Kennziffer und Mantisse getrennt bleiben. Zu dem Zwecke schreibt man die Mantisse wie gewöhnlich hin und setzt 0, . . . davor. Dahinter setzt man mit einem Minuszeichen die Kennziffer, deren Wert einfach gleich der Anzahl der Nullen vor der ersten geltenden Ziffer des Numerus ist. Darnach ist

$$\log 0{,}6293 \;= 0{,}79886 - 1$$
$$\log 0{,}06293 = 0{,}79886 - 2.$$

Eine andere Schreibweise, die in mancher Hinsicht vorzuziehen ist, erhält man dadurch, daß man statt zu subtrahieren die Ergänzung der Kennziffer zu 10 vor das Komma schreibt, und stillschweigend -10 hinter den Logarithmus geschrieben denkt. Unser letztes Beispiel würde dann so aussehen

$$\log 0{,}6293 \;= 9{,}79886$$
$$\log 0{,}06293 = 8{,}79886.$$

Doch möchte ich diese Schreibweise trotz mancher Vorzüge nicht unbedingt empfehlen. Jedenfalls merke man sich, daß die Logarithmen echter Brüche wirklich negative Zahlen sind.

Hier mag erwähnt werden, daß man vorgeschlagen hat, beim Logarithmus das Komma durch einen Punkt zu ersetzen, um jedem Dezimalbruch sofort ansehen zu können, ob er ein Logarithmus ist oder nicht[1]). Die Methode wird vielfach verwendet; doch scheint mir für den gewöhnlichen Gebrauch eine derartige Unterscheidung überflüssig.

Für diejenigen von Ihnen, welche das vorhin von den Logarithmen Mitgeteilte verfolgt haben, will ich hier noch hinzufügen, wie sich die Bestimmung der Kennziffer ergibt. Wir sahen schon, daß

$$\log 1 \;\;\; = 0,$$
$$\log 10 \;\, = 1,$$
$$\log 100 = 2 \text{ u. s. f.}$$
$$\log \frac{1}{10} = -1,$$
$$\log \frac{1}{100} = -2 \text{ u. s. f.}$$

1) In Österreich wird das Dezimalkomma im allgemeinen durch einen Punkt ersetzt; dort ist die Unterscheidung jedenfalls nicht durchführbar.

ist. Liegt eine Zahl zwischen 1 und 10, so muß folglich ihr Logarithmus mit 0, . . . beginnen. Wirklich ist

$$\log 6{,}293 = 0{,}79886.$$

Verschiebt man das Komma, so ergibt sich folgendes Resultat:

$$\log 62{,}93 = \log (10 \times 6{,}293) = \log 10 + \log 6{,}293 = 1 + 0{,}79886 = 1{,}79886$$

$$\log 6293 = \log (1000 \times 6{,}293) = \log 1000 + \log 6{,}293 = 3 + 0{,}79886 = 3{,}79886$$

$$\log 0{,}6293 = \log (6{,}293 : 10) = \log 6{,}293 - \log 10 = 0{,}79886 - 1$$

u. s. f.

Sie sehen unsere Regeln zur Bestimmung der Kennziffer durch einfache Nachrechnung bestätigt.

Hierunter ist eine Doppelseite einer Logarithmentafel abgedruckt, auf der Sie die Logarithmen der Zahlen von 6000 bis 7000 finden. Obwohl für die meisten Zwecke vierstellige Logarithmen genügen, habe ich hier doch eine fünfstellige gewählt, da diese nun einmal noch sehr viel im Gebrauch sind. Was ich Ihnen mit Bezug auf diese Tabelle erkläre, gilt natürlich vereinfacht genau so für vierstellige. Die drei ersten Stellen des Numerus stehen in der ersten Vertikalspalte links, die vierte Stelle steht ganz oben in der ersten Horizontalreihe. So finden Sie z. B. den Logarithmus von 6795, indem Sie an der Stelle 679 nach rechts und gleichzeitig unter 5 abwärts gehen. Bei den Logarithmen sehen Sie vorgedruckt 83; das sind die beiden ersten Ziffern der Mantisse, die für alle dahinter gedruckten je drei Ziffern gelten. Der Raumersparnis wegen sind sie nur einmal gedruckt. Das Resultat wäre

$$\log 6795 = 3{,}83219$$

An einer andern Stelle würden Sie ablesen können:

$$\log 6768 = 3{,}83046.$$

Vor 046 steht eigentlich noch 82; der Stern deutet aber an, daß bereits die nächste Vorzahl 83 zu nehmen ist.

Die Tafeln gestatten durch Interpolation noch eine fünfte Ziffer des Numerus zu berücksichtigen. Dazu berechnet man die Differenz von einem Logarithmus zum nächsten bezogen auf die letzte Ziffer der Mantisse als Einheit. In den Interpolationstäfelchen rechts ist diese Differenz als Überschrift gewählt. In der Vertikalspalte steht die fünfte Stelle des Numerus, rechts daneben der Summand,

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77 815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952
602	960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025
603	78 032	039	046	053	061	068	075	082	089	097
604	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168
605	176	183	190	197	204	211	219	226	233	240
606	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312
607	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383
608	390	398	405	412	419	426	433	440	447	455
609	462	469	476	483	490	497	504	512	519	526
610	533	540	547	554	561	569	576	583	590	597
611	604	611	618	625	633	640	647	654	661	668
612	675	682	689	696	704	711	718	725	732	739
613	746	753	760	767	774	781	789	796	803	810
614	817	824	831	838	845	852	859	866	873	880
615	888	895	902	909	916	923	930	937	944	951
616	958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021
617	79 029	036	043	050	057	064	071	078	085	092
618	099	106	113	120	127	134	141	148	155	162
619	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232
620	239	246	253	260	267	274	281	288	295	302
621	309	316	323	330	337	344	351	358	365	372
622	379	386	393	400	407	414	421	428	435	442
623	449	456	463	470	477	484	491	498	505	511
624	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581
625	588	595	602	609	616	623	630	637	644	650
626	657	664	671	678	685	692	699	706	713	720
627	727	734	741	748	754	761	768	775	782	789
628	796	803	810	817	824	831	837	844	851	858
629	865	872	879	886	893	900	906	913	920	927
630	934	941	948	955	962	969	975	982	989	996
631	80 003	010	017	024	030	037	044	051	058	065
632	072	079	085	092	099	106	113	120	127	134
633	140	147	154	161	168	175	182	188	195	202
634	209	216	223	229	236	243	250	257	264	271
635	277	284	291	298	305	312	318	325	332	339
636	346	353	359	366	373	380	387	393	400	407
637	414	421	428	434	441	448	455	462	468	475
638	482	489	496	502	509	516	523	530	536	543
639	550	557	564	570	577	584	591	598	604	611
640	618	625	632	638	645	652	659	665	672	679
641	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747
642	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814
643	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882
644	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
645	956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017
646	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084
647	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
648	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
649	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285
650	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351

Interpolationstäfelchen:

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
651	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418
652	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
653	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551
654	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
655	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
656	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
657	757	763	770	776	783	790	796	803	809	816
658	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
659	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948
660	954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
661	82 020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
662	086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
663	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
664	217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
665	282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
666	347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
667	413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
668	478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
669	543	549	556	562	569	575	582	588	595	601
670	607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
671	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
672	737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
673	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
674	866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
675	930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
676	995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
677	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
678	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
679	187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
681	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
682	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
683	442	448	455	461	467	474	480	487	493	499
684	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
685	569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
686	632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
687	696	702	708	715	721	727	734	740	746	753
688	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
689	822	828	835	841	847	853	860	866	872	879
690	885	891	897	904	910	916	923	929	935	942
691	948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004
692	84 011	017	023	029	036	042	048	055	061	067
693	073	080	086	092	098	105	111	117	123	130
694	136	142	148	155	161	167	173	180	186	192
695	198	205	211	217	223	230	236	242	248	255
696	261	267	273	280	286	292	298	305	311	317
697	323	330	336	342	348	354	361	367	373	379
698	386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
699	448	454	460	466	473	479	485	491	497	504
700	510	516	522	528	535	541	547	553	559	566

Interpolationstäfelchen:

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

der noch zu den letzten Ziffern der Mantisse hinzuzufügen ist. So ist z. B.

$$\begin{array}{r} \log 63078 = 4{,}79982 \\ +\,6 \\ \hline 4{,}79988 \end{array}$$

Hier betrug die Differenz der Logarithmen 7. Also kommt bei 8, wie wir dem Täfelchen rechts entnehmen, noch 5,6 hinzu. Diese Zahl ist auf 6 abzurunden; denn da wir die sechste Stelle der Mantisse nicht kennen, können wir auch zu ihr nichts addieren. Man hüte sich umgekehrt bei der Bestimmung des Numerus, wenn der Logarithmus bekannt ist, mehr als fünf Ziffern zu bestimmen. Aus fünfstelligen Logarithmentafeln kann man richtig nur fünfstellige Zahlen gewinnen, das läßt sich mathematisch beweisen. Im übrigen findet man aus dem Logarithmus den Numerus, indem man das obige Verfahren, genau umkehrt. Ein Beispiel mag genügen. Es sei

$$\begin{array}{r} \log x = 1{,}82423 \\ 19 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$x = 6{,}6716$$

In der Tafel steht die Mantisse 82419; dort beträgt die Differenz 7, wir haben noch 4. In den Interpolationstafeln steht unten 7 am nächsten unserer 4 eine 4,2; dann gehört als fünfte Stelle zum Numerus eine 6.

Beim Rechnen mit Logarithmen, wie überhaupt bei allen ausgedehnteren Rechnungen, achte man sehr auf eine geschickte und übersichtliche Anordnung. Außerdem ist auf sorgfältiges Schreiben zur Vermeidung von Fehlern das größte Gewicht zu legen.

Ich will Ihnen hier ein Beispiel einer längeren Rechnung geben, das Sie selbst nachprüfen mögen. Die durch Interpolation gewonnene Verbesserung fügt man meist im Kopf rechnend sofort hinzu; das ist auch hier geschehen. Im übrigen kann ich auch hier nur wiederholen, daß zum Erlernen des Logarithmenrechnens viele selbständige Übung gehört, alle Erklärungen allein bleiben sonst nutzlos. Es sei zu berechnen:

$$x = \frac{67{,}597^2 \times 0{,}69731}{\sqrt{6587{,}4} \times 0{,}00648}$$

$\log 67{,}597 = 1{,}82993$	$\log 6587{,}4 = 3{,}81871$
$2 \log 67{,}597 = 3{,}65986$	$\frac{1}{2} \log 6587{,}4 = 1{,}90936$
$\log 0{,}69731 = 0{,}84343 - 1$	$\log 0{,}00648 = 0{,}81158 - 3$
$\log$ Zähler $= 3{,}50329$	$\log$ Nenner $= 0{,}72094 - 1$
$\log$ Nenner $= 0{,}72094 - 1$	
$\log x = 3{,}78235$	

Ergebnis: $x = \mathbf{6058{,}3}$.

Die Logarithmentafeln sind ein sehr wichtiges Rechenhilfsmittel. Sie besitzen indessen einen großen Mangel: vollständig logarithmisch läßt sich ein Ausdruck nur dann berechnen, wenn in ihm keinerlei Addition oder Subtraktion vorkommt. Diesen Mangel besitzt nicht die Rechenmaschine. Wenn diese erst einmal billiger geworden sein wird, dann wird sie die Logarithmentafel fast überall verdrängen. Schon heute ist aber vor einer einseitigen Bevorzugung der Logarithmentafel dringend zu warnen. Bei Schülern schon deswegen, weil die notwendige Geschicklichkeit im gewöhnlichen Rechnen sonst stark verloren geht. Mit Recht wird über die mangelhafte Fähigkeit, die gerade die Absolventen höherer Lehranstalten im Rechnen besitzen, geklagt. Außerdem sollte sich die Schule den modernen Bestrebungen, die dahin zielen, von der Logarithmentafel loszukommen, noch mehr anschließen. Neben der Rechenmaschine werden es andere Tabellen sein, die mit ihr zusammen Verwendung finden, z. B. die Tabelle der natürlichen Werte der Winkelfunktionen. Solche Tabellen sind im Unterricht heranzuziehen. Vor allem wird der Charakter der für die Ausrechnung geschicktesten Formeln ein anderer werden als bisher. Wenn auch für mechanische Rechenapparate noch mehr das gilt, was oben über die Herabminderung der Rechenfähigkeit gesagt wurde, so darf doch der Unterricht nicht achtlos an ihnen vorübergehen. Rechenschieber sowohl wie Rechenmaschine sollte jeder Schüler kennenlernen. Von diesen Apparaten und ähnlichem wird der nächste Vortrag handeln.

VI. Vortrag.

Mechanische Rechenhilfsmittel.

Im Handwerk hat es begonnen; da ist wohl zuerst gründlich die Arbeit unserer zwei Hände durch Maschinenkraft ersetzt worden. Wer kann sich wohl noch vorstellen, wie man ohne all die tausend Werkzeugmaschinen auskommen sollte! Büro- und Geschäftsbetrieb haben die Maschinen umgewandelt; Schreibmaschinen oder Zählkassen können wir heute garnicht mehr entbehren. Ist schon in jenen Gebieten das Ausschalten geistiger Tätigkeit keineswegs immer von Nutzen gewesen, so überwiegt der Schaden gar oft, wenn die Maschine geistige, namentlich künstlerische Betätigung ersetzen soll. Mit Recht werden wir uns trotzdem freuen können, wenn es in vernünftiger Weise möglich wird, geistige Arbeit, zumal wenn sie einförmig und immer gleichartig ist, durch mechanische Hilfsmittel zu leisten. Zu dieser Art Tätigkeit gehört z. B. das Rechnen. Hochwillkommen und bald unentbehrlich sind uns heute Rechenmaschinen. Aber schon hier muß vor Übertreibungen gewarnt werden. Die Rechenkunst soll nach wie vor sehr ernst gepflegt werden. Jene Techniker z. B., die ohne ihren Rechenschieber ganz hilflos sind, die mit ernstestem Gesicht auf ihm ablesen $2 \times 2 = 3{,}999$ also rund „4" und erstaunt um sich blicken, wenn sie ausgelacht werden, sind doch ein gar trauriger Anblick (übrigens kann man ähnliches nicht nur immer wieder beim Rechenschieber, sondern gerade so gut bei Verwendung der Logarithmentafel beobachten). Auch mit mechanischen Hilfsmitteln soll man nicht gedankenlos arbeiten; man vermeide sie, wo sie überflüssig sind, aber ebenso sicher ziehe man sie da zur berechtigten Erleichterung heran, wo sie von Nutzen sind. Hauptsächlich kommen für uns heute der Rechenschieber und die Rechenmaschinen in Betracht; diese sollen zum Schluß besprochen werden.

1. Graphische Logarithmentafeln. Im ersten Vortrage haben wir vom Nutzen graphischer Darstellungen gesprochen. Trotz mancher Vorteile sind graphische Tabellen als Rechenhilfsmittel wenig im Gebrauch[1]). Fig. 58 zeigt Ihnen eine vollständige Logarithmentafel, die sämtliche Logarithmen vierstelliger Zahlen auf vier Stellen genau liefert. Die Scheibe (von E. Leder, hergestellt von der Industriellen Handelsgesellschaft in Berlin. Preis 3 Mk.) hat einen Durchmesser von 21 cm, ist also sehr handlich. Man erspart bei ihrem Gebrauch das lästige Umblättern der gewöhnlichen Tabellen; das Ablesen erfordert bei einiger Übung kaum mehr Zeit. Da wo in dem inneren Kreise 00 steht, beginnt die Tafel. Man hat auf einer Geraden nach irgend einem Maßstab als Längen die Werte der Logarithmen abgetragen. Also da $\log 1 = 0$ ist, so heißt der erste Punkt,

1) Eine sehr einfache und hübsche Methode der Herstellung einer graphischen Logarithmentafel gibt Perry in seinem Buche: Praktische Mathematik. Deutsch von Lenke. Wien 1903. S. 43.

dessen Längenabstand ja 0 ist, 1; weiter ist z. B. log 2 = 0,3010; deswegen schreibt man im Längenabstand 0,3010 die Zahl 2 hin u. s. f. Aber freilich würde eine gerade Linie, auf der Logarithmen vierstellig abgetragen werden, meterlang sein müssen. Daher hat man hier von innen nach außen Strahlen gezogen, fängt bei irgend einem Strahl mit dem Abtragen an und geht fortlaufend immer wieder

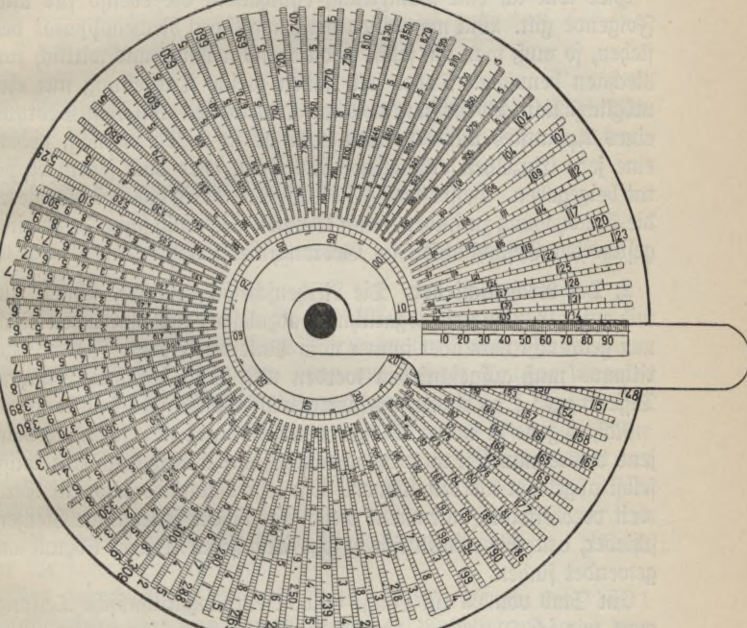


Fig. 58.

beginnend auf den nächsten über. Die vorher abgetragene Länge ist für jeden Strahl auf dem inneren Kreise aufgeschrieben. Auf dem beweglichen Zeiger in unserer Figur ist der Maßstab, nach dem gearbeitet wurde, aufgezeichnet. Will ich wissen, wie groß der Logarithmus einer Zahl ist, so messe ich nach, welche Länge bis zu dieser Zahl abgetragen wurde. Dazu drehe ich den Zeiger, bis an den Strahl, auf dem die Zahl steht. Auf dem Innenkreise stehen die beiden ersten Ziffern, auf der Teilung des Zeigers lese ich die beiden nächsten

Ziffern ab. Natürlich handelt es sich nur, genau wie bei der Logarithmentafel, um die Ablesung der Mantisse. In der Figur werden Sie wohl als Beispiel finden können:

$$\log 1335 = 3{,}1255$$

Das Bemerkenswerte ist, da wo die Zahl 700 steht, ist die abgetragene Länge gleich der Mantisse von log 700 u. s. f.

Hier will ich eine Bemerkung einschalten, die ebenso für alles Folgende gilt. Will man einen mathematischen Rechenapparat verstehen, so muß man ihn selbst in die Hand nehmen und wirklich zum Rechnen benutzen. Daher soll Ihnen meine Darstellung nur eine möglichst klare Vorstellung von der Konstruktion und dem Gebrauch eines Apparates und von dem, was er zu leisten vermag, geben; eine jede Einzelheit erläuternde Anleitung wird doch jedem Apparat beigegeben. Besser noch, Sie versuchen durch eigenes Probieren die Handhabung zu finden, dann kommen Sie umso schneller zu einer gesicherten Geschicklichkeit im Gebrauch desselben.

2. Der Rechenschieber. Die Rechenscheibe gestattet, schnell und mit guter Genauigkeit Logarithmen abzulesen; zum wirklichen Rechnen gebraucht man aber immer noch Tinte und Feder. Jeder Logarithmus muß aufgeschrieben werden und dann hat man Summe, Differenz u. s. f. zu bilden, um zum gewünschten Ergebnis zu kommen.

Naheliegend ist da der Wunsch, einen Apparat zu besitzen, an dem jene Ausrechnungen unmittelbar ausgeführt und sogleich Ergebnisse selbst abgelesen werden können. Ein sehr bekanntes und mit Recht weit verbreitetes Instrument dieser Art ist der sogenannte Rechenschieber, den Sie namentlich in der technischen Praxis überall angewendet finden.

Ein Stab von 25 cm Länge enthält eine logarithmische Teilung, ganz wie ich Ihnen bei der Rechenscheibe beschrieben habe. Nur verlangt man wenige Dezimalstellen genau, so daß man mit einer Länge von 25 cm auskommt. Fig. 59 enthält unten die gewöhnliche, darüber die logarithmische Teilung. Sie sehen, als Längeneinheit ist die Länge des ganzen Stabes gewählt. Über 0,6 steht z. B. in der logarithmischen Skala 4; in der Tat ist $\log 4 = 0{,}6$ u. s. f. Jetzt aber befindet sich über der einen Skala auf einem beweglichen Schieber noch eine zweite, genau gleichartige Teilung. Um uns bequem verständigen zu können, wollen wir etwa den unteren festen Teil des Apparates kurz den Stab und den beweglichen den Schieber nennen.

Damit ist das zum Rechnen notwendige Material bereits geliefert, wie ich Ihnen an ganz einfachen Beispielen zeigen will. Ich wähle so einfache Beispiele, obgleich kein vernünftiger Mensch dazu jemals den Rechenschieber verwenden wird, weil an ihnen die Methode, auf die es uns jetzt allein ankommt, deutlich hervortritt. Sie selbst werden, wenn Sie einmal vergessen haben, wie

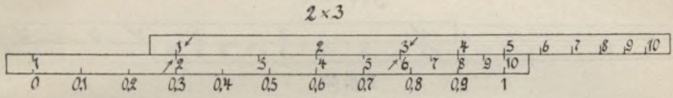


Fig. 59.

dies oder jenes zu machen ist, an einfachen selbstverständlichen Beispielen das gesuchte Verfahren schnell wieder herausprobieren können.

Wählen wir zuerst als Multiplikationsbeispiel

$$2 \times 3 = 6.$$

Da wir logarithmische Teilung haben, müssen wir die Gleichung umsetzen in

$$\log 2 + \log 3 = \log 6.$$

Wir haben darnach die mit 2 und 3 bezeichneten Strecken zu addieren, um das Produkt zu erhalten, denn auf unserer Teilung bedeutet ja die Strecke bis 2 die Größe des Logarithmus von 2 u. s. f. Das machen wir, wie es Fig. 59 zeigt, indem wir zur Länge des Stabes bis 2 die Länge des Schiebers bis 3 addieren, wobei der Anfangspunkt des Schiebers auf 2 des Stabes einzustellen ist. Unter der 3 des Schiebers lesen wir das Ergebnis 6 auf dem Stabe ab. In der Figur sind die zu beachtenden Zahlen durch Pfeile kenntlich gemacht. Also ist das Verfahren einfach dies:

Man berechnet ein Produkt (2,45 × 3,87), indem man die 1 des Schiebers über dem einen Faktor (2,45) einstellt, und unter dem auf dem Schieber aufgesuchten zweiten Faktor (3,87) das Ergebnis (9,48) auf dem Stabe abliest.

Anders sieht die Sache aus, wenn Sie z. B. 3 × 4 berechnen wollen, denn Sie erkennen in Fig. 60 sofort, daß die 4, unter der Sie ablesen wollen, über die Stabteilung hinausragt. Man müßte also diese Teilung fortsetzen, wollte man wie bisher ablesen.

Überlegen Sie einmal, wie wohl diese Fortsetzung aussehen müßte. Wo würde z. B. die Zahl 20 stehen? Nun, es ist ja 20 = 2 × 10 oder logarithmisch log 20 = log 10 + log 2. Der log 10 ist gerade gleich der Länge des Stabes, dazu käme noch log 2 oder 0,301. Wir müssen über die 10 hinaus genau das Stück vom Anfang des Stabes bis zur 2 abtragen. Mit anderen Worten: es würde genau dieselbe Teilung noch einmal kommen wie bis zur 10, nur stände überall statt 2, 3, 4 . . . . eine 20, 30, 40 . . . . — jede Zahl mit 10 multipliziert. In unserem Beispiel könnten wir das Stück bis zur 4, das

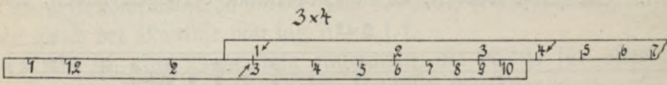


Fig. 60.

über den Stab von 10 ab hinausragt, in den Zirkel nehmen, und vorn auf der Skala nachmessen. Wir würden auf 1,2 kommen, was ja aber auf der verlängerten Skala 12 bedeutet. In der Tat ist $3 \times 4 = 12$.

Direkt mißt man das überragende Stück nach, wenn man einstellt, wie es Fig. 61 zeigt. Man verschiebt den Schieber so, daß seine 10 über der 3 einsteht, und liest unter der 4 zunächst 1,2 ab; dies Ergebnis ist noch mit 10 zu multiplizieren. Eine einfache Überlegung zeigt Ihnen, daß man wirklich so nachgemessen hat, um welches Stück die Länge bis 3 plus der Länge bis 4 größer ist als

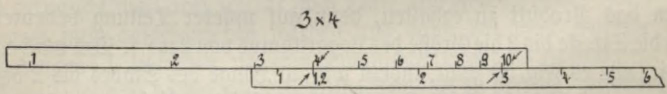


Fig. 61.

die ganze Länge diesmal des Schiebers.

Wie kann man wohl bei zusammengesetzten Zahlen einfach die Stellung des Kommas im Ergebnis ermitteln? Von den vielen Regeln, die es gibt, nenne ich hier folgende:

Man zählt nach, wieviele Ziffern die sämtlichen Faktoren zusammen vor dem Komma besitzen. Von dieser Zahl subtrahiert man jedesmal eins, wenn der Schieber bei der Multiplikation rechts herausragt, läßt sie dagegen ungeändert, wenn der Schieber links herausragt. Die verbleibende Zahl gibt die Anzahl der Stellen vor dem Komma, die das Ergebnis besitzt.

Vergleichen Sie unsere Beispiele, so werden Sie diese Regel bestätigt finden.

Jetzt zur Division. Da ist nicht viel Neues zu sagen, da nur statt wie oben zu addieren hier zu subtrahieren ist. Soll z. B. 6 : 3 berechnet werden, so ist von der Strecke bis 6 die Strecke bis 3 zu subtrahieren. Man stellt, wie in Fig. 62, die 3 des Schiebers über der 6 des Stabes ein und liest unter der 1 des Schiebers das Ergebnis 2 ab. Auf diese Weise ist die vorgeschriebene Subtraktion wirklich ausgeführt. Übrigens erkennen Sie in Fig. 62 die Fig. 59 wohl wieder.

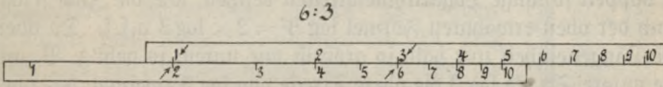


Fig. 62.

Ragt hierbei der Schieber links heraus, wie uns Fig. 63 für das Beispiel 2 : 5 zeigt, so ist nicht einmal eine neue Einstellung nötig. Genau wie oben erkennen wir nämlich, daß eine Fortsetzung der Teilung nach links hin genau so aussehen müßte wie die Stabteilung, nur stände statt 2, 3, 4 . . . . jetzt 0,2; 0,3; 0,4 . . . . — jede Zahl durch 10 dividiert. Offenbar ist bei unserer Einstellung der links überragende Teil des Schiebers genau so lang, wie der rechts herausragende Teil des Stabes, so daß unter der 10 bereits das gesuchte Ergebnis 4 steht, das nur noch durch 10 zu dividieren ist. Es ist ja auch 2 : 5 = 0,4.

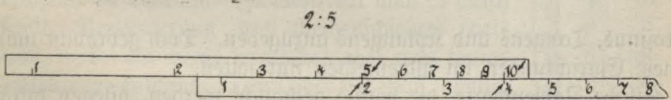


Fig. 63.

Die Kommaregel lautet ähnlich wie oben: man zählt die Anzahl der Stellen vor dem Komma der sämtlichen Zahlen des Zählers; davon subtrahiert man die Anzahl sämtlicher Stellen vor dem Komma der Zahlen des Nenners. Zu der Differenz addiert man jedesmal eins, wenn bei der Division der Schieber rechts herausragt, dagegen bleibt sie unverändert, wenn der Schieber links herausragt. Die übrigbleibende Zahl gibt an, wie viele Stellen das Ergebnis vor dem Komma besitzt. Bleibt eine negative Zahl, so folgen dem Komma zunächst so viele Nullen, wie diese Zahl angibt.

Der ausgeführte Rechenschieber enthält noch eine weitere Doppelteilung genau über der bisher beschriebenen. Auf der gleichen Strecke von 25 cm sind jedoch die Zahlen von 1 bis 100 logarithmisch abgetragen, so daß die gewählte Längeneinheit hier genau halb so lang ist, wie bei der unteren Teilung. Daraus folgt übrigens, daß man mit der unteren Teilung wesentlich genauer rechnet, als mit der oberen. Möglichst ist nur die untere Skala zu benutzen. Welchen Wert hat wohl diese Einrichtung? Dadurch erreicht man, daß über jeder unteren Zahl oben genau das Quadrat und umgekehrt unter jeder oberen Zahl unten genau die Wurzel steht. Den Grund hierfür werden Sie sofort einsehen. Das Quadrat einer Zahl muß ja doppelt so lange Logarithmenstrecken besitzen, wie die Zahl selbst, nach der oben erwähnten Formel $\log 3^2 = 2 \times \log 3$ u. s. f. Da oben die Längeneinheit nur halb so groß ist wie unten, so geht z. B. auf die untere Strecke log 3 die obere Strecke von log 3 zweimal, das aber gibt gerade das Quadrat von 3. In unserer Fig. 64 können Sie es an einigen Beispielen verfolgen.

Ähnlich wie hier beschrieben kann man auch die dritten Potenzen und allerdings umständlicher die dritten Wurzeln ermitteln. Endlich findet man auf der Rückseite noch Teilungen, die es ermöglichen, die Werte der Logarithmen und der vier Winkelfunktionen, Sinus,

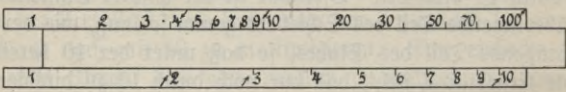


Fig. 64.

Kosinus, Tangens und Kotangens anzugeben. Doch gebraucht man diese Einrichtungen im allgemeinen nur selten.

Etliche Zahlenwerte, die häufig gebraucht werden, pflegen durch besondere Marken angegeben zu werden. So liegt mir ein Rechenschieber der Firma Dennert & Pape in Altona vor, auf dem π, $100\frac{\pi}{4}$, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ gekennzeichnet sind. In Fig. 65 sehen Sie das Bild eines solchen Rechenschiebers, wie er auch von verschiedenen anderen Firmen sehr brauchbar hergestellt wird.

Der Preis eines guten Rechenschiebers normaler Größe beträgt ungefähr 9 Mark. Wer zunächst nur einmal den Apparat probieren will, dem wird ein aus Kartonpapier verfertigter Rechenschieber gute Dienste leisten, der bereits für 75 Pfennige zu haben ist. Sehr hübsch ist der namentlich für Schulzwecke hergestellte kleine hölzerne Rechenschieber (Skalenlänge 12,5 cm) der schon genannten Firma Dennert & Pape in Altona, der nur 3 Mark kostet.

Ich kann Ihnen sehr raten, es einmal mit einem Rechenschieber zu versuchen. Bei einiger Übung werden Sie bald mit Freuden erkennen, welche Erleichterung er zu verschaffen vermag. Namentlich wenn Sie fortlaufend Multiplikationen und Divisionen auszuführen haben, wobei der sogenannte Läufer eine wichtige Rolle spielt, wird er Ihnen wertvoll sein. Leider teilt er mit den Logarithmentafeln den Nachteil, nicht bei der Addition und Subtraktion Verwendung finden zu können. Kommen diese Rechenoperationen vor, so muß jeder Teil für sich ausgerechnet und nebenbei addiert bzw. subtrahiert werden.

3. Rechenschieber mit verlängerter Skala. Die Teilung eines normalen Rechenschiebers ist, wie erwähnt, 25 cm lang. Auf so kurzer Strecke läßt sich natürlich nicht gar so große Genauigkeit der Einstellung und Ablesung erzielen. Im ungünstigsten Falle kann man zur ganzen Zahl noch zwei Dezimalstellen ablesen, so daß die Genauigkeit ungefähr 0,1 % beträgt. In vielen Fällen reicht das nicht aus. Zahlreich sind die Versuche, durch Verlängerung der Skala größere Genauigkeit zu erzielen. Zunächst hat man es durch direkte Verlängerung des Rechenschiebers versucht, wobei ein wenig handliches aber recht teures Instrument entstand. Dann aber hat man, ähnlich wie oben auf der Rechenscheibe, die Teilung in einer anderen Reihe fortgesetzt, sei es horizontal untereinander, sei es auf runden Scheiben in Kreisen, Spiralen oder radial angeordnet. In diesen Fällen braucht man fast immer eine zweite durchsichtige kongruente Tafel, die auf die erste beim Ablesen gelegt werden muß. Das ist alles zwar genauer, als beim gewöhnlichen Rechenschieber, aber weit weniger einfach bei der Handhabung. Die Benutzung der Apparate wird häufig geradezu umständlich durch die Sorgfalt, die man auf Einstellung und Ablesung verwenden muß. Erwähnen möchte ich noch die verhältnismäßig gut brauchbaren Rechenwalzen, bei denen die außerordentlich lange und deshalb genaue Teilung in horizontalen Streifen fortgesetzt und auf eine Walze aufgewickelt ist.

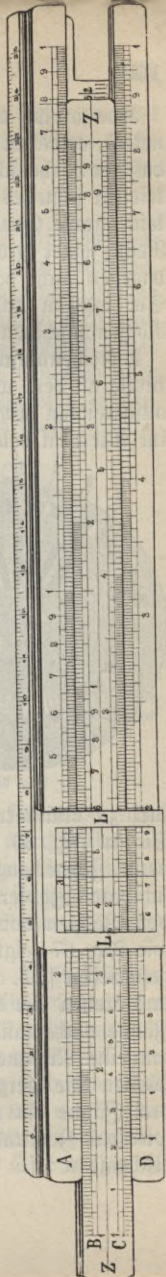


Fig. 65.

Was sich auf dem Wege, der durch den Rechenschieber vorgezeichnet ist, erreichen läßt, dürfte erreicht sein. Man kann wohl sagen, daß der Rechenschieber selbst vermöge seiner bequemen Verwendbarkeit für schnelles Rechnen seinen Zweck aufs beste erfüllt, solange keine große Genauigkeit verlangt wird. Daher erfreut er sich mit Recht seiner großen Beliebtheit. Alle weiteren Apparate haben dagegen nicht das geleistet, was man von ihnen verlangen muß. Sie werden daher vollständig verdrängt durch die eigentlichen Rechenmaschinen.

4. Rechenmaschinen. Wohl jeder von uns hat seine ersten Rechenkünste an dem wohlbekannten Rechenbrett mit seinen auf Drähten aufgereihten Kugeln ausgeübt. Dieser in ähnlicher Form bereits im Altertum bekannte Apparat wird noch heute z. B. in Rußland beim praktischen Rechnen in ausgedehntestem Maße verwendet. Ein weiter Schritt trennt jenes alte Instrument von unseren heutigen Maschinen.

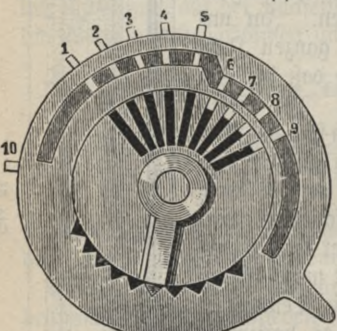


Fig. 66.

Es kann hier unmöglich als unsere Aufgabe betrachtet werden, alle Konstruktionsarten und alle Einzelteile der modernen Rechenmaschinen zu besprechen. Ich will mich damit begnügen, Ihnen das Prinzip einer allerdings sehr verbreiteten Übertragungsart kurz zu erläutern. Ich wähle das Schaltrad von Odhner, das Sie in Fig. 66 abgebildet sehen. Sie erkennen nebeneinander neun Zähne angeordnet. Durch Drehen mit dem rechts unten sichtbaren Zapfen kann man bewirken, daß eine gewünschte Anzahl von Zähnen hervorragen. Unter diesem Schaltrad befindet sich, wie Fig. 67 zeigt, ein Zahnrad, auf dem die Zahlen 0 bis 9 aufgeschrieben sind. Ragen etwa, wie in Fig. 66, fünf Zähne heraus, und drehen Sie das Schaltrad einmal herum, so greifen diese fünf Zähne nacheinander in das Zahnrad ein und drehen es jedesmal um eine Nummer weiter. An Stelle der 0 erscheint also die 5. Wollen Sie hierzu weiter 3 addieren, so stellen Sie am Schaltrad drei Zähne ein und drehen wieder einmal ganz herum; dadurch wird das Zahnrad um weitere drei Nummern gedreht, so daß die 8 erscheint u. s. f. Gleichzeitig können Sie Zehner, Hunderter u. s. f.

addieren, indem Sie, wie in Fig. 67 angedeutet, für diese jedesmal ein neues gleichartiges Schalt- und Zahnradpaar anordnen. Also addieren Sie z. B.

$$\begin{array}{r} 35622 \\ + \ 42375, \\ \hline \end{array}$$

indem Sie, von links beginnend, zuerst 3, 5, 6, 2 und 2 Zähne herausragen lassen und die Kurbel ganz herumdrehen, und dann zweitens, ebenfalls von links beginnend, 4, 2, 3, 7 und 5 Zähne herausragen lassen und wieder die Kurbel ganz herumdrehen. Wirklich wird dann da, wo jetzt die Nullen stehen, das Ergebnis 77 997 erscheinen. Wie nun aber, wenn 2 zu 9 addiert werden soll? Das Einerrad wird offenbar richtig bis zur 1 gedreht. Jetzt soll aber auch beim Zehnerrad die 1 erscheinen. Das wird auf sehr verschiedene Weise erreicht. Hier dient dazu das Zähnchen 10 in Fig. 66, das sie seitlich verschoben

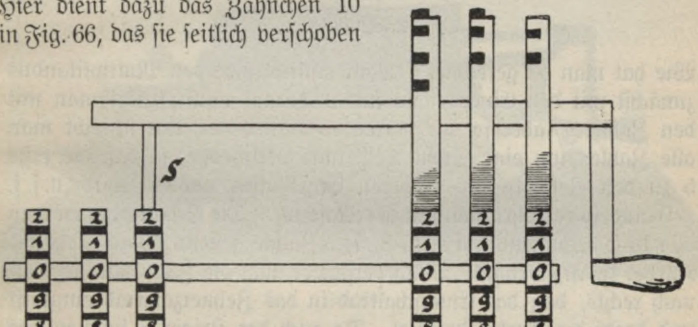


Fig. 67.

zu denken haben, so daß es im allgemeinen in die Zahnräder nicht eingreift. Wird jedoch die Null des Einerrades überschritten, so drückt ein besonderer in Fig. 67 nicht mitgezeichneter Mechanismus dieses Zähnchen beim Zehnerschaltrad nach links, so daß es zum Eingriff kommt und das Zehnerrad um eine Nummer weiter dreht.

Der beschriebene Mechanismus leistet auch die Multiplikation, die ja ursprünglich nichts als eine fortgesetzte Addition ist und hier geradeso behandelt wird. Sollen Sie z. B. 3 × 7 ausrechnen, so stellen Sie beim Schaltrad 7 Zähne ein und drehen die Kurbel dreimal herum. Dann wird in der Mittelstellung der Zahnräder das Ergebnis 21 erscheinen. Damit Sie sicher wissen, wie oft Sie die Kurbel herumgedreht, also mit welcher Zahl Sie multipliziert haben, ist die Kurbel mit einem Zählrad verbunden, das Sie in Fig. 67

links sehen. Der Zeiger S dreht bei jeder Kurbeldrehung das Zählrad, in das er eingreift, um eine Nummer weiter. Praktisch undurchführbar wird die Methode, wenn große Zahlen miteinander zu multiplizieren sind; denn einige hundert- oder gar tausendmal kann man nicht die Kurbel herumdrehen. Aber dann verfährt man geradeso, wie beim gewöhnlichen Multiplizieren. Sehen Sie sich die Aufgabe an:

```
     34875
  ×   6832
  --------
     69750
   104625
  279000
 209250
 ---------
 238266000
```

Wie hat man da gerechnet? Man multipliziert den Multiplikandus zunächst mit den Einern, also mit 2, darauf multipliziert man mit den Zehnern, aber so, als wären es auch Einer, nur schreibt man alle Zahlen um eine Stelle nach links verschoben, so daß die erste 5 zu den Zehnern des früheren Ergebnisses addiert wird u. s. f.

Geradeso verfährt man mit der Maschine. Die Schalträder werden von links beginnend auf 3, 4, 8, 7, 5 Zähne gestellt. Man dreht die Kurbel zuerst zweimal. Dann verschiebt man die Zahnräder so weit nach rechts, daß das Einerschaltrad in das Zehnerzahnrad eingreift und dreht die Kurbel dreimal. Da auch der Zeiger S links in das zweite Zählrad links eingreift, so erscheint auch dort richtig als Anzahl der Zehner, mit denen multipliziert wurde, die 3. Weiter müßte man wieder eine Stelle nach rechts verschieben und achtmal drehen, endlich nochmals verschieben und sechsmal drehen. Links unten würden wir als Anzahl der Drehungen 6832 und rechts unten bei genügender Anzahl von Zahnrädern das Produkt 238 266 000 ablesen.

Subtraktion und Division lassen sich nach der beschriebenen Methode weniger bequem ausführen. Gewöhnlich stellt man den Subtrahendus bzw. Dividendus bei den Zahnrädern ein und dreht die Kurbel rückwärts. Statt der Division wird die Multiplikation mit den reziproken Werten der Zahlen empfohlen; zu diesem Zwecke sind besondere Tabellen dieser reziproken Werte herausgegeben worden.

Das Problem, eine Additionsmaschine, die nur diese Rechenoperation leistet, herzustellen, ist aufs vorzüglichste gelöst. Die Einstellung der Schalträder geschieht sehr bequem und schnell durch Herabdrücken von Tasten, wie Sie es wohl alle von den Schreibmaschinen her kennen. Die besten Maschinen schreiben gleichzeitig Summanden und Summen auf einem Papierstreifen auf. Die erste Maschine, die gleichzeitig alle vier Rechenoperationen auszuführen gestattete, ist von **Leibniz** im Jahre 1671 ausgeführt worden. Noch heute ist uns eine solche Maschine, zwei sind damals sicher hergestellt worden, erhalten geblieben; sie wird im Kästner-Museum in Hannover aufbewahrt. In der langen Entwicklungsreihe, die diese Art Maschinen bis heute durchgemacht haben, sind wir noch nicht am Ende angelangt.

In den Figg. 68 und 69 zeige ich Ihnen als Beispiel eine Maschine,

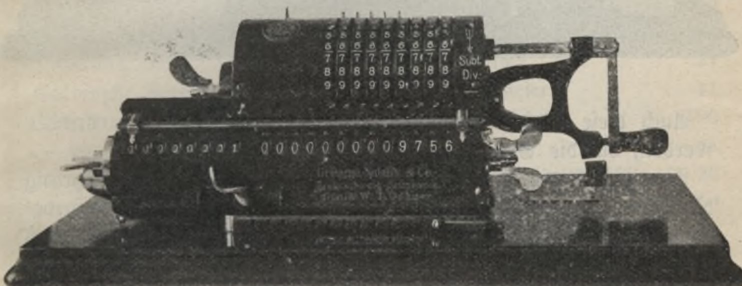


Fig. 68.

die nach dem oben beschriebenen Prinzip gebaut ist. Diese[1]) weitverbreitete Maschine hat zwar wesentliche Mängel, besitzt aber den Vorzug, nur kleinen Raum zu beanspruchen, so daß sie bequem auf dem Schreibtisch untergebracht werden kann. Auch ist der Preis, verglichen mit anderen Maschinen, nicht hoch (zirka 500 Mark). Fig. 68 zeigt die Einstellung von 1×9756. Damit die gewünschte Anzahl Zähne am Schaltrad herausragt, hat man den oben sichtbaren Zapfen bis zu dieser Zahl herunterzudrehen. Offenbar ein recht unvollkommenes Verfahren, dem die Tastatur der Additionsmaschinen weit vorzuziehen ist. Leider ist es bisher nur in ganz seltenen Fällen gelungen, diesen Mangel, den unsere Maschine mit fast allen gemeinsam hat, zu beseitigen. Der Pfeil links

1) **Brunsviga**-Rechenmaschine der Firma **Grimme, Natalis u. Co.** in **Braunschweig**. Zu höherem Preise fertigt die Firma verschiedene verbesserte Typen unter anderm mit Schreibvorrichtung.

deutet an, daß jetzt mit den Einern multipliziert wird. In Fig. 69 ist die Multiplikation 101 × 79 ausgeführt worden. Sie sehen das Ergebnis 7979. Dementsprechend zeigt der Pfeil links auf die Hunderter, denn mit diesen ist zuletzt multipliziert worden.

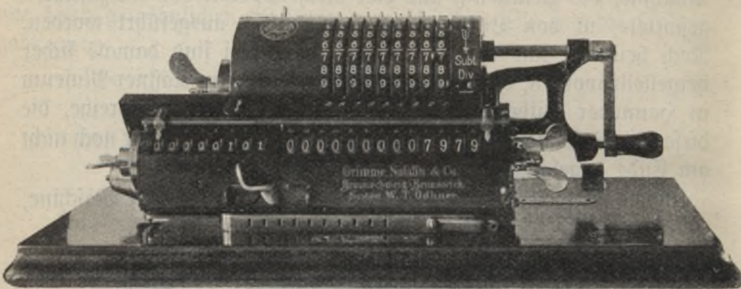


Fig. 69.

Auch diese Maschinen können mit einem Schreibwerk versehen werden, das die Ergebnisse unmittelbar gedruckt liefert.

Wenn auch die heute vorhandenen Maschinen zur Ausführung aller vier elementaren Rechenoperationen den höchsten Anforderungen noch nicht genügen, so ist doch ihre Konstruktion bereits soweit durchgebildet, daß sie zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden sind, dem Sie in vielen Büros schon heute begegnen, und dessen Verbreitung unaufhaltsam fortschreitet.

Sachregister.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Elemente der Mathematik.
Von Professor Dr. **E. Borel.** Deutsche Ausgabe von Professor Dr. **P. Stäckel.** In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb. I. Band: **Arithmetik und Algebra.** Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. *M* 8.60. II. Band: **Geometrie.** Mit 403 Figuren. *M* 6.40.

„. . . Das Erscheinen dieses Buches ist ein Ereignis für den mathematischen Unterricht unserer höheren Schulen. Die Namen des französischen Verfassers und des deutschen Bearbeiters sind bereits von programmatischer Bedeutung. Einer der wichtigsten Programmpunkte in der Bewegung für die Umgestaltung und Erweiterung des Mathematikunterrichts der höheren Schulen lautet: Pflege des auf zahlreichen Gebieten der Wissenschaft so wichtigen funktionalen Denkens schon auf der Schule.“ **(Frankfurter Zeitung.)**

„. . . Borel und Stäckel führen uns leicht und sicher zu einem klaren Verständnis der elementaren Arithmetik und Algebra, dabei häufig in vortrefflicher Weise von dem anschaulichen Hilfsmittel der graphischen Darstellung Gebrauch machend.“
(Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure.)

Elemente der Mathematik.
Von Professor **J. Tannery.** Mit einem geschichtlichen Anhang von **P. Tannery.** Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. **P. Klaeß.** Mit einem Einführungswort von **Felix Klein.** Geh. *M* 7.—, in Leinwand geb. *M* 8.—

„Das Buch bietet schon stofflich sehr viel, da es neben der Elementarmathematik auch die zur Lektüre naturwissenschaftlicher Bücher heute unerläßlichen Grundbegriffe der höheren Mathematik vermittelt; aber sein Hauptreiz liegt in der Darstellungsform. Selten ist wohl ein mathematisches Lehrbuch geschrieben worden, das so frei ist von leerem Formelwesen, das so mutig allen unnötigen Ballast preisgibt wie das vorliegende Werk.“ **(Naturwissenschaftliche Rundschau.)**

„. . . Die geistvolle, freie Methode Tannerys wie die eigenartige Auswahl des Stoffes, die er trifft, dürfte auch für neue deutsche Lehrbücher und für den Unterricht viele Anregungen bieten.“ **(Die Lehrerin.)**

Die Mechanik.
Eine Einführung mit einem metaphysischen Nachwort. Von Professor **L. Tesar.** Mit 111 Figuren. Geh. *M* 3.20, in Leinwand geb. *M* 4.—

„Das Buch ist anregend geschrieben, was bei der sonst recht trocknen Materie der Mechanik doppelt wertvoll ist. Der Verfasser trachtet stets darnach, die mechanischen Sätze so sehr wie möglich an wirklichen Vorgängen zu erläutern, und reizt dadurch den Leser, auch nach Weglegen des Buches andere alltägliche Vorgänge zu betrachten und vom Standpunkt der Mechanik aus zu beurteilen. Das Buch kann infolgedessen allen denen empfohlen werden, die, mit dem Werkzeug der elementaren Mathematik ausgerüstet, in die Tiefen der Mechanik eindringen wollen.“ **(Glückauf.)**

„Der Leser wird in dem Buche vielerlei interessante Hinweise und Beispiele finden, die in den üblichen Lehrbüchern nicht vorkommen. Beständig wird auf wirkliche, beobachtbare Erscheinungen, z. B. beim Fahrrad, der Eisenbahn usw., Bezug genommen und deshalb z. B. bei den einfachen Maschinen die Reibung mit in Rechnung gestellt. Auch die historische Entwicklung wird durchweg klar beleuchtet. . . .“
(Naturwissenschaftliche Wochenschrift.)

Lehrbuch der Physik.
Zum Gebrauch beimUnterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. Von Direktor **E. Grimsehl.** Mit 1091 Figuren, 2 farbigen Tafeln und Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. Geh. *M* 15.—, in Leinwand geb. *M* 16.—

„Dieses in jeder Beziehung zeitgemäße Werk des bekannten Verfassers, der durch zahlreiche praktische Apparatkonstruktionen und methodische Arbeiten geschätzt ist, vereinigt alle Eigenschaften, die es befähigen, ein unentbehrliches Lehr- und Lernmittel zu werden. Es fesselt durch die unmittelbare Verständlichkeit, durch die zahlreichen zum Teil eigenartigen vorzüglichen Abbildungen, und durch höchst angenehmen, übersichtlichen Druck; und die Meisterschaft, womit überall das richtige Verhältnis zwischen Induktion und Deduktion getroffen ist, wird schwer zu überbieten sein. Daß sehr vieles in dem Buche original ist, ist angesichts des Erfolges, mit dem der Verfasser alle Gebiete der Physik durchgearbeitet und zum Teil persönlich gestaltet hat, nicht verwunderlich. Das Buch hat aber noch andere wertvolle Eigenschaften. Es enthält in richtigem Maße eingestreute geschichtliche Bemerkungen. . . .“ **(Neue Jahrbücher für Pädagogik.)**

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich. — Werke, die mehrere Bände umfassen, sind auch in einem Band gebunden vorrätig.

Jeder Band geheftet M. 1.—, in Leinwand gebunden M. 1.25

Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet.

Theologie und Philosophie, Pädagogik und Bildungswesen.

Amerikanisches Bildungswesen siehe Techn. Hochschulen, Universitäten, Volksschule.

Ästhetik. Von Prof. Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)

Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. Von Dr. J. Unold. 3. Aufl. (Bd. 12.)
— siehe auch Ethik.

Bildungswesen, Das deutsche, in seiner geschichtlichen Entwicklung. Von weil. Prof. Dr. Fr. Paulsen. 3. Aufl. Von Prof. Dr. W. Münch. Mit Bildn. Paulsens. (Bd. 100.)

Buddhas Leben und Lehre. Von weil. Prof. Dr. R. Pischel. 2. Aufl. von Prof. Dr. H. Lüders. Mit 1 Taf. (Bd. 109.)

Calvin, Johann. Von Pfarrer Dr. G. Sodeur. Mit Bildn. (Bd. 247.)

Christentum. Aus der Werdezeit des Chr. Studien und Charakteristiken. Von Prof. Dr. J. Geffcken. 2. Aufl. (Bd. 54.)

Christentum und Weltgeschichte. Von Prof. D. Dr. K. Sell. 2 Bde. (Bd. 297, 298.)
— siehe auch Jesus, Mystik im Christentum.

Deutsches Ringen nach Kraft und Schönheit. Aus den literar. Zeugn. eines Jahrh. gesammelt Von Turninspektor K. Möller. 2 Bde Bd. II in Vorb. (Bd. 188, 189.)

Einführung in die Philosophie, Theologie siehe Philosophie, Theologie.

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage u. Wissenschaft. Von Prof. Dr. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)

Erziehung zur Arbeit. Von Prof. Dr. Edv. Lehmann. (Bd. 459.)

Erziehung, Moderne, in Haus und Schule. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 159.)
— siehe auch Großstadtpädagogik und Schulkämpfe der Gegenwart.

Ethik. Prinzipien der E. Von E. Wentscher. (Bd. 397.)
— siehe auch Aufgaben und Ziele des Menschenlebens, sittliche Lebensanschauungen, Willensfreiheit.

Fortbildungsschulwesen, Das deutsche. Von Dir. Dr. F. Schilling. (Bd. 256.)

Freimaurerei, Die. Anschauungswelt u. Geschichte. Von Geh. Archivrat Dr. L. Keller. (Bd. 463.)

Fröbel, Friedrich. Leben und Wirken. Von A. v. Portugall. Mit 5 Taf. (Bd 82.)

Großstadtpädagogik. Von J. Tews. (Bd. 327.)
— siehe auch Erziehung, Moderne, und Schulkämpfe der Gegenwart.

Heidentum siehe Mystik.

Herbarts Lehren und Leben. Von Pastor Dr. O. Flügel. Mit Bildn. (Bd. 164.)

Hilfsschulwesen. Von Rektor Dr. B. Maennel. (Bd. 73.)

Hochschulen siehe Techn. Hochschulen und Universitäten.

Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. 2. Aufl. (Bd. 199.)

Jesuiten, Die. Eine histor. Skizze Von Prof. D. H. Boehmer. 3. Aufl. (Bd. 49.)

Jesus und seine Zeitgenossen. Geschichtliches und Erbauliches. Von Pastor C. Bonhoff. (Bd. 89.)
— **Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu.** Von Pfarrer D. Dr. P. Mehlhorn. 2. Aufl. (Bd. 137.)
— **Die Gleichnisse Jesu.** Zugl. Anleitung zu quellenmäßigem Verständnis der Evangelien. Von Prof. D. Dr. Weinel. 3. Aufl. (Bd. 46.)

Israelit. Religion. Die Grundzüge der israel. Religionsgeschichte. V. weil. Prof. Dr. Fr. Giesebrecht. 2. Aufl. (Bd. 52.)

Jugendfürsorge. Von Waisenhausdirektor Dr. J. Petersen. 2 Bde. (Bd. 161, 162.)

Jugendpflege. Von Fortbildungsschullehrer W. Wiemann. (Bd. 434.)

Kant, Immanuel. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Külpe. 3. Aufl. Mit Bildn. (Bd. 146.)

Knabenhandarbeit, Die, in der heutigen Erziehung. Von Sem.-Dir. Dr. A. Pabst. Mit 21 Abb. u. Titelbild. (Bd. 140.)

Lehrerbildung siehe Volksschule und Lehrerbildung der Ver. Staaten.

Luther im Lichte der neueren Forschung. Ein krit. Bericht. Von Prof. D. H. Boehmer. 3. Aufl. Mit 2 Bildn. (Bd. 113.)
Mädchenschule, Die höhere, in Deutschland. Von Oberlehrerin M. Martin. (Bd. 65.)
Mechanik des Geisteslebens. Von Prof. Dr. M. Verworn. 3. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 200.)
— siehe auch Psychologie.
Mission, Die evangelische. Von Pastor G. Baudert. (Bd. 406.)
Mittelschule siehe Volks- u. Mittelschule.
Mystik im Heidentum und Christentum. Von Prof. Dr. Edv. Lehmann. (Bd. 217.)
Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. von Negelein. 2. Aufl. (Bd. 95.)
Pädagogik, Allgemeine. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. 4. Aufl. (Bd. 33.)
Pädagogik, Experimentelle, mit bes. Rücks. auf die Erzieh. durch die Tat. Von Dr. W. A. Lay. 2. Aufl. Mit 2 Abb. (Bd. 224.)
— siehe auch Erziehung, Großstadtpädagogik u. Psychologie des Kindes.
Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Frh. v. Soden. 3. Aufl. Mit 2 Karten, 1 Plan u. 6 Ansichten. (Bd. 6.)
Palästina und seine Kultur in fünf Jahrtausenden. Von Dr. P. Thomsen. Mit 36 Abb. (Bd. 260.)
Paulus, Der Apostel, u. sein Werk. Von Prof. Dr. E. Vischer. (Bd. 309.)
Pestalozzi. Leben und Ideen. Von Prof. Dr. P. Natorp. 2. Aufl. Mit Bildn. u. Brieffaks. (Bd. 250.)
Philosophie, Die. Einführung in die Wissenschaft, ihr Wesen und ihre Probleme. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. (Bd. 186.)
— **Einführung in die Philosophie.** Von Prof. Dr. R. Richter. 3. Aufl. von Dr. M. Brahn. (Bd. 155.)
— **Führende Denker.** Geschichtl. Einleitung in die Philosophie. Von Prof. Dr. J. Cohn. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)
— siehe auch Weltanschauung.
Philosophie der Gegenwart, Die, in Deutschland. Charakteristik ihrer Hauptrichtungen. Von Prof. Dr. O. Külpe. 6. Aufl. (Bd. 41.)
Psychologie siehe Seele des Menschen.
— siehe auch Mechanik des Geisteslebens.
Psychologie des Kindes. Von Prof. Dr. R. Gaupp. 3. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 213.)
— siehe auch Pädagogik.
Religion. Die Stellung der R. im Geistesleben. Von Lic. Dr. P. Kalweit. (Bd. 225.)
— **Die Religion der Griechen.** Von Prof. Dr. E. Samter. (Bd. 457.)
Religion. Religion und Naturwissenschaft in Kampf u. Frieden. Ein geschichtl. Rückblick. Von Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
— **Die relig. Strömungen der Gegenwart.** Von Superintend. D. A. H. Braasch. 2. Aufl. (Bd. 66.)
Rousseau. Von Prof. Dr. P. Hensel. 2. Aufl. Mit Bildnis. (Bd. 180.)
Schopenhauer. Persönlichkeit, Lehre, Bedeutung. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. Mit Bildn. (Bd. 81.)
Schule siehe Fortbildungsschulwesen, Hilfsschulwesen, Hochschule, Mädchenschule, Mittelschule, Volksschule und die folgenden Bände.
Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 33 Fig. (Bd. 96.)
Schulkämpfe der Gegenwart. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 111.)
— siehe auch Erziehung, Moderne, und Großstadtpädagogik.
Schulwesen. Geschichte des deutschen Sch. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 85.)
Seele des Menschen, Die. Von Prof. Dr. J. Rehmke. 4. Aufl. (Bd. 36.)
— siehe auch Psychologie.
Sittliche Lebensanschauungen der Gegenwart. Von weil. Prof. Dr. O. Kirn. 2. Aufl. (Bd. 177.)
— siehe auch Ethik.
Spencer, Herbert. Von Dr. K. Schwarze. Mit Bildnis. (Bd. 245.)
Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Technische Hochschulen in Nordamerika. Von Prof. S. Müller. Mit zahlr. Abb., Karte u. Lageplan. (Bd. 190.)
Testament, Neues. Der Text des N. T. nach seiner geschichtl. Entwicklung. Von Div.-Pfarrer A. Pott. Mit 8 Taf. (Bd. 134.)
— siehe auch Jesus.
Theologie. Einführung in die Theologie. Von Pastor M. Cornils. (Bd. 347.)
Über Universitäten und Universitätsstudium. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. (Bd. 411.)
Universität, Die amerikanische. Von PH. D. E. D. Perry. Mit 22 Abb. (Bd. 206.)
— siehe auch Student.
Unterrichtswesen, Das deutsche, der Gegenwart. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 299.)
Volksbildungswesen, Das moderne. Bücher- und Lesehallen, Volkshochschulen und verwandte Bildungseinrichtungen in den wichtigsten Kulturländern seit der Mitte des 19. Jahrhunderts. Von Stadtbibliothekar Dr. G. Fritz. Mit 14 Abb. (Bd. 266.)

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sprachkunde, Literaturgeschichte und Kunst.

*) Auch in Halbpergamentbänden zu M. 2.— vorrätig.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Kultur, Geschichte und Geographie, Recht und Wirtschaft.

*) Auch in Halbpergamentbänden zu M. 2.— vorrätig.

Wichtige Gebiete der Volkswirtschaft sind auch in der Abteilung Naturwissenschaft und Technik behandelt unter den Stichwörtern: **Automobil, Bierbrauerei, Bilder aus der chem. Technik, Eisenbahnwesen, Eisenhüttenwesen, Elektr. Kraftübertragung, Gartenstadtbewegung, Ingenieurtechnik, Kaffee, Kakao, Kinematographie, Kohlen, Landwirtschaftl. Maschinen, Metalle, Patente, Salz, Schmucksteine, Spinnerei, Straßenbahnen, Tabak, Tee, Wald, Wasserkraftmaschinen, Weinbau.**

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Mathematik, Naturwissenschaften, Medizin und Technik.

Automobil, Das. Eine Einführung in Bau und Betrieb des modernen Kraftwagens. Von Ingenieur K. Blau. 2. Aufl. Mit 86 Abb. u. 1 Titelbild. (Bd. 166.)
Bakterien, Die, im Kreislauf des Stoffes in der Natur und im Haushalt des Menschen. Von Prof. Dr. E. Gutzeit. Mit 13 Abb. (Bd. 233.)
— **Die krankheiterregenden Bakterien.** Von Privatdozent Dr. M. Loehlein. Mit 33 Abb. (Bd. 307.)
Bau und Tätigkeit des menschlichen Körpers. Von Prof. Dr. H. Sachs. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 32.)
Baukunde. Das Wohnhaus. Von Reg.-Baumeister a. D. G. Langen. 2 Bde. Mit Abb.
Bd. I: Sein technischer Aufbau. (Bd. 444.)
Bd. II: Seine Anlage und Ausgestaltung. (Bd. 445.)
— **Eisenbetonbau, Der.** Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. 81 Abb. (Bd. 275.)
Baukunst siehe Abtlg. Kunst.
Befruchtungsvorgang, Der, sein Wesen und seine Bedeutung. Von Dr. E. Teichmann. 2. Aufl. Mit 7 Abb. und 4 Doppeltafeln. (Bd. 70.)
Beleuchtungswesen, Das moderne. Von Dr. H. Lux. Mit 54 Abb. (Bd. 433.)
Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Biochemie. Einführung in die B. Von Prof. Dr. W. Löb. (Bd. 352.)
Biologie, Allgemeine. Von Prof. Dr. H. Miehe. 2. Aufl. Mit 140 Fig. (Bd. 130.)
— **Experimentelle.** Von Dr. C. Thesing. Mit Abb. 2 Bände.
Bd. I: Experim. Zellforschung. (Bd. 336.)
Band II: Regeneration, Transplantation und verwandte Gebiete. (Bd. 337.)
—, siehe auch Abstammungslehre und Befruchtungsvorgang, Erscheinungen des Lebens, Lebewesen, Organismen, Mensch und Tier, Urtiere.
Blumen. Unsere Bl. und Pflanzen im Garten. Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)
— **Unsere Bl. und Pflanzen im Zimmer.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 65 Abb. (Bd. 359.)
Blut. Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
Botanik siehe Kolonialbotanik, Blumen, Kulturpflanzen.
Brauerei. Die Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Brille. Das Auge und die Br. Von Dr. M. v. Rohr. Mit 84 Abb. und 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)
Buch. Wie ein Buch entsteht. Von Prof. A. W. Unger. 3. Aufl. Mit 7 Tafeln und 26 Abb. (Bd. 175.)
— siehe auch Abt. Kultur (Buchgewerbe, Schrift- u. Buchwesen).
Chemie. Einführung in die chemische Wissenschaft. Von Prof. Dr. W. Löb. Mit 16 Figuren. (Bd. 264.)
— **Einführung in die organ. Chemie:** Natürl. und künstl. Pflanzen- u. Tierstoffe. Von Dr. B. Bavink. 2. Aufl. Mit 7 Fig. (Bd. 187.)
— **Bilder aus der chemischen Technik.** Von Dr. A. Müller. Mit 24 Abb. (Bd. 191.)
Chemie in Küche und Haus. Von Dr. J. Klein. 3. Aufl. Mit 1 Doppeltafel. (Bd. 76.)
Chemie und Technologie der Sprengstoffe. Von Prof. Dr. R. Biedermann. Mit 15 Fig. (Bd. 286.)
Chirurgie, Die, unserer Zeit. Von Prof. Dr. Feßler. Mit 52 Abb. (Bd. 339.)
Dampfkessel siehe Dampfmaschine I und Feuerungsanlagen.
Dampfmaschine, Die. 2 Bde. I: Wirkungsweise des Dampfes in Kessel und Maschine. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. Aufl. Mit 45 Abb. (Bd. 393.)
— II: Ihre Gestaltung und ihre Verwendung. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. Mit 95 Abb. u. 1 Taf. (Bd. 394.)
Darwinismus. Abstammungslehre und D. Von Prof. Dr. R. Hesse. 4. Aufl. Mit 37 Fig. (Bd. 39.)
Differential- u. Integralrechnung. Von Dr. M. Lindow. (Bd. 387.)
Drähte und Kabel, ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik. Von Telegrapheninspektor H. Brick. Mit 43 Abb. (Bd. 285.)
Eisenbahnwesen, Das. Von Eisenbahnbau- und Betriebsinspektor a. D. E. Biedermann. 2. Aufl. M. zahlr. Abb. (Bd. 144.)
— siehe auch Klein- u. Straßenbahnen Verkehrsentwicklung.
Eisenbetonbau. Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. Mit 81 Abb. (Bd. 275.)
Eisenhüttenwesen. Von weil. Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 4. Aufl. von Bergreferendar F. W. Wedding. Mit 15 Fig. (Bd. 20.)
Eiszeit, Die, und der vorgeschichtliche Mensch. Von Prof. Dr. G. Steinmann. Mit 24 Abb. (Bd. 302.)
Elektrische Kraftübertragung. Von Ing. P. Köhn. Mit Abb. (Bd. 424.)
Elektrochemie. Von Prof. Dr. K. Arndt. Mit 38 Abb. (Bd. 234.)
Elektrotechnik. Grundlagen der E. Von Dr. A. Rotth. Mit 72 Abb. (Bd. 391.)
— siehe auch Drähte und Kabel, Telegraphie.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

DIE KULTUR DER GEGENWART

IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE

HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

Eine systematisch aufgebaute, geschichtlich begründete Gesamtdarstellung unserer heutigen Kultur, welche die Fundamentalergebnisse der einzelnen Kulturgebiete nach ihrer Bedeutung für die gesamte Kultur der Gegenwart und für deren Weiterentwicklung in großen Zügen zur Darstellung bringt. Das Werk vereinigt eine Zahl erster Namen aus Wissenschaft und Praxis und bietet Darstellungen der einzelnen Gebiete jeweils aus der Feder des dazu Berufensten in gemeinverständlicher, künstlerisch gewählter Sprache auf knappstem Raume. Jeder Band ist inhaltlich vollständig in sich abgeschlossen und einzeln erhältlich.

***) Jeder Band kostet in Leinw. geb. M. 2.—, in Halbfr. geb. M. 4.— mehr.**

TEIL I u. II: Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete.

Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart.

Geh.*) M. 18.—. [2. Aufl. 1912. Teil I, Abt. 1.]

Inhalt: Das Wesen der Kultur: W. Lexis. — Das moderne Bildungswesen: Fr. Paulsen †. — Die wichtigsten Bildungsmittel. A. Schulen und Hochschulen. Das Volksschulwesen: G. Schöppa. Das höhere Knabenschulwesen: A. Matthias. Das höhere Mädchenschulwesen: H. Gaudig. Das Fach- und Fortbildungsschulwesen: G. Kerschensteiner Die geisteswissenschaftliche Hochschulausbildung: Fr. Paulsen †. Die mathematische, naturwissenschaftliche Hochschulausbildung: W. v. Dyck. B. Museen. Kunst- und Kunstgewerbemuseen: L. Pallat. Naturwissenschaftliche Museen: K. Kraepelin. Technische Museen: W. v. Dyck. C. Ausstellungen. Kunst- u. Kunstgewerbeausstellungen: J. Lessing †. Naturwissenschaftl.-techn. Ausstellungen: O. N. Witt. D. Die Musik: G. Göhler. E. Das Theater: P. Schlenther. F. Das Zeitungswesen: K. Bücher. G. Das Buch: R. Pietschmann. H. Die Bibliotheken: F. Milkau. — Organisation der Wissenschaft: H. Diels

Die Religionen des Orients und die altgermanische Religion.

Geh.*) M. 8.—. [2. Aufl. 1913. Teil I, Abt. III, 1.]

Inhalt: Die Anfänge der Religion und die Religion der primitiven Völker: Edv. Lehmann. — Die ägyptische Religion: A. Erman. — Die asiatischen Religionen: Die babylonisch-assyrische Religion: C. Bezold. — Die indische Religion: H. Oldenberg. — Die iranische Religion: H. Oldenberg. — Die Religion des Islams: J. Goldziher. — Der Lamaismus: A. Grünwedel. — Die Religionen der Chinesen: J. J. M. de Groot. — Die Religionen der Japaner: a) Der Shintoismus: K. Florenz, b) Der Buddhismus: H. Haas. — Die orientalischen Religionen in ihrem Einfluß auf den Westen im Altertum: Fr. Cumont. — Altgermanische Religion: A. Heusler.

Geschichte der christl. Religion. M. 18.—*). [2. A. 1909. T. I, IV, 1.]

Inhalt: Die israelitisch-jüdische Religion: J. Wellhausen. — Die Religion Jesu und die Anfänge des Christentums bis zum Nicaenum (325): A. Jülicher. — Kirche und Staat bis zur Gründung der Staatskirche: A. Harnack. — Griechisch-orthodoxes Christentum und Kirche in Mittelalter und Neuzeit: N. Bonwetsch. — Christentum und Kirche Westeuropas im Mittelalter: K. Müller. — Katholisches Christentum und Kirche in der Neuzeit: A. Ehrhard. — Protestantisches Christentum und Kirche in der Neuzeit: E. Troeltsch.

Systemat. christl. Religion. M. 6.60*). [2. A. 1909. Teil I, IV, 2.]

Inhalt: Wesen der Religion u. der Religionswissenschaft: E. Troeltsch. — Christlich-katholische Dogmatik: J. Pohle. — Christlich-katholische Ethik: J. Mausbach. — Christlich-katholische praktische Theologie: C. Krieg. — Christlich-protestantische Dogmatik: W. Herrmann. — Christlich-protestantische Ethik: R. Seeberg. — Christlich-protestantische praktische Theologie: W. Faber. — Die Zukunftsaufgaben der Religion und der Religionswissenschaft: H. J. Holtzmann.

Allgemeine Geschichte der Philosophie. Geh.*) M. 14.—.

[2. Auflage 1913. Teil I, Abt. V.]

Inhalt. Einleitung. Die Anfänge der Philosophie und die Philosophie der primitiven Völker: W. Wundt. I. Die indische Philosophie: H. Oldenberg. II. Die islamische und jüdische Philosophie: J. Goldziher. III. Die chinesische Philosophie: W. Grube. IV. Die japanische Philosophie: T. Jnouye. V. Die europäische Philosophie des Altertums: H. v. Arnim. VI. Die patristische Philosophie: Cl. Bäumker. VII. Die europäische Philosophie des Mittelalters: Cl. Bäumker. VIII. Die neuere Philosophie: W. Windelband.

Systemat. Philosophie. Geh.*) M. 10.—. [2. Aufl. 1908. T. I, VI.]
Inhalt. Allgemeines. Das Wesen der Philosophie: W. Dilthey. — Die einzelnen Teilgebiete. I. Logik und Erkenntnistheorie: A. Riehl. II. Metaphysik: W. Wundt. III. Naturphilosophie: W. Ostwald. IV. Psychologie: H. Ebbinghaus. V. Philosophie der Geschichte: R. Eucken. VI. Ethik: Fr. Paulsen. VII. Pädagogik: W. Münch. VIII. Ästhetik: Th. Lipps. — Die Zukunftsaufgaben der Philosophie: Fr. Paulsen.

Die oriental. Literaturen. Geh.*) M. 10.—. [1906. Teil I, Abt. VII.]
Inhalt. Die Anfänge der Literatur und die Literatur der primitiven Völker: E. Schmidt. — Die ägyptische Literatur: A. Erman. — Die babylonisch-assyrische Literatur: C. Bezold. — Die israelitische Literatur: H. Gunkel. — Die aramäische Literatur: Th. Nöldeke. — Die äthiop. Literatur: Th. Nöldeke. — Die arab. Literatur: M. J. de Goeje. — Die ind. Literatur: R. Pischel. — Die altpers. Literatur: K. Geldner. — Die mittelpers. Literatur: P. Horn. — Die neupers. Literatur: P. Horn. — Die türkische Literatur: P. Horn. — Die armenische Literatur: F. N. Finck. — Die georg. Literatur: F. N. Finck. — Die chines. Literatur: W. Grube. — Die japan. Literatur: K. Florenz.

Die griechische und lateinische Literatur und Sprache. Geh.*) M. 12.—. [3. Auflage. 1912. Teil I, Abt. VIII.]
Inhalt: I. Die griechische Literatur und Sprache: Die griech. Literatur des Altertums: U. v. Wilamowitz-Moellendorff. — Die griech. Literatur des Mittelalters: K. Krumbacher. — Die griech. Sprache: J. Wackernagel. — II. Die lateinische Literatur und Sprache: Die römische Literatur des Altertums: Fr. Leo. — Die latein. Literatur im Übergang vom Altertum zum Mittelalter: E. Norden. — Die latein. Sprache: F. Skutsch.

Die osteuropäischen Literaturen u. die slawischen Sprachen. Geh.*) M. 10.—. [1908. Teil I, Abt. IX.]
Inhalt: Die slawischen Sprachen: V. v. Jagić. — Die slawischen Literaturen. I. Die russische Literatur: A. Wesselovsky. — II. Die poln. Literatur: A. Brückner. III. Die böhm. Literatur: J. Máchal. IV. Die südslaw. Literaturen: M. Murko. — Die neugriech. Literatur: A. Thumb. — Die finnisch-ugr. Literaturen. I. Die ungar. Literatur: F. Riedl. II. Die finn. Literatur: E. Setälä. III. Die estn. Literatur: G. Suits. — Die litauisch-lett. Literaturen. I. Die lit. Literatur: A. Bezzenberger. II. Die lett. Literatur: E. Wolter.

Die romanischen Literaturen und Sprachen. Mit Einschluß des Keltischen. Geh.*) M. 12.—. [1908. Teil I, Abt. II, 1.]
Inhalt: I. Die kelt. Literaturen. 1. Sprache u. Literatur im allgemeinen: H. Zimmer. 2. Die einzelnen kelt. Literaturen. a) Die ir.-gäl. Literatur: K. Meyer. b) Die schott.-gäl. u. die Manx-Literatur. c) Die kymr. (walis.) Literatur. d) Die korn. u. die breton. Literatur: L. Ch. Stern. II. Die roman. Literaturen: H. Morf. III. Die roman. Sprachen: W. Meyer-Lübke.

Allgemeine Verfassungs- und Verwaltungsgeschichte. I. Hälfte. Geh.*) M. 10.—. [1911. Teil II, Abt. II, 1.]
Inhalt: Einleitung. Die Anfänge der Verfassung und der Verwaltung und die Verfassung und Verwaltung der primitiven Völker: A. Vierkandt. A. Die orientalische Verfassung und Verwaltung: 1. des orientalischen Altertums: L. Wenger, 2. des Islams: M. Hartmann, 3. Chinas: O. Franke, 4. Japans: K. Rathgen. — B. Die europäische Verfassung und Verwaltung (1. Hälfte): 1. des europäischen Altertums: L. Wenger, 2. der Germanen und des Deutschen Reiches bis zum Jahre 1806: A. Luschin v. Ebengreuth.

Staat u. Gesellschaft d. Griechen u. Römer. M. 8.-*). [1910. II, IV, 1.]
Inhalt: I. Staat und Gesellschaft der Griechen: U. v. Wilamowitz-Moellendorff. — II. Staat und Gesellschaft der Römer: B. Niese.

Staat u. Gesellschaft d. neueren Zeit. M. 9.—*). [1908. Teil II, V, 1.]
Inhalt: I. Reformationszeitalter. a) Staatensystem und Machtverschiebungen. b) Der moderne Staat und die Reformation. c) Die gesellschaftlichen Wandlungen und die neue Geisteskultur: F. v. Bezold. — II. Zeitalter der Gegenreformation: E. Gothein. — III. Zur Höhezeit des Absolutismus. a) Tendenzen, Erfolge und Niederlagen des Absolutismus. b) Zustände der Gesellschaft. c) Abwandlungen des europäischen Staatensystems: R. Koser.

Allgem. Rechtsgeschichte. [1914. Teil II, Abt. VII, 1. Unt. d. Presse.]
Inhalt: Altertum: Die Anfänge des Rechts: J. Kohler — Orientalisches Recht im Altertum: L. Wenger. — Europäisches Recht im Altertum: L. Wenger.

Systematische Rechtswissenschaft. Geh.*) M. 14.—. [2. Auflage 1913. Teil II, Abt. VIII.]

Inhalt: I. Wesen des Rechtes und der Rechtswissenschaft: R. Stammler. II. Die Teilgebiete: A. Privatrecht. Bürgerliches Recht: R. Sohm. Handels- und Wechselrecht: K. Gareis. Internat. Privatrecht: L. v. Bar. B. Zivilprozeßrecht: L. v. Seuffert. C. Strafrecht u. Strafprozeßrecht: F. v. Liszt. D. Kirchenrecht: W. Kahl. E. Staatsrecht: P. Laband. F. Verwaltungsrecht. Justiz u. Verwaltung: G. Anschütz. Polizei- u. Kulturpflege: E. Bernatzik. G. Völkerrecht: F. v. Martitz. III. Zukunftsaufgaben: R. Stammler.

Allgemeine Volkswirtschaftslehre. Von W. Lexis. Geh.*) M. 7.—, [2. Auflage. 1913. Teil II, Abt. X, 1.]

TEIL III: Mathematik, Naturwissenschaft und Medizin.

Die mathematischen Wissenschaften. Bandred.: F. Klein. [Abt. I.]
Erschienen ist: Lfrg. I: Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter: H. G. Zeuthen. Geh. M. 3.—. — Lfrg. II: Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart: A. Voß: Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung: H. E. Timerding.

Chemie einschl. Kristallographie u. Mineralogie. Bandredakt.: E. v. Meyer u. F. Rinne. Geh.*) M. 18.—. [1913. Abt. III., 2.]

Inhalt: Entwickelung der Chemie von Robert Boyle bis Lavoisier [1660—1793]: E. v Meyer. — Die Entwicklung der Chemie im 19. Jahrhundert durch Begründung und Ausbau der Atomtheorie: E. v. Meyer. — Anorganische Chemie: C. Engler und L. Wöhler — Organische Chemie: O. Wallach. — Physikalische Chemie: R. Luther und W. Nernst. — Photochemie: R. Luther. — Elektrochemie: M. Le Blanc. — Beziehungen der Chemie zur Physiologie: A. Kossel. — Beziehungen der Chemie zum Ackerbau: †O. Kellner und R. Immendorf. — Wechselwirkungen zwischen der chemischen Technik: O. Witt. — Kristallographie und Mineralogie: Fr. Rinne.

Zellen- u. Gewebelehre, Morphologie u. Entwicklungsgesch. 1. Botan. Tl. M. 10.-.*) 2. Zoolog. Tl. M. 16.-.*) [1913. Abt. IV., Bd. 2, I u. II.]

Inhalt des botanischen Teils (Bandred. E. Strasburger): Pflanzl. Zellen- und Gewebelehre: E. Strasburger. — Morphologie und Entwicklungsgeschichte der Pflanzen: W. Benecke. **Inhalt des zoologischen Teils** (Bandred. O. Hertwig): Die einzelligen Organismen: R. Hertwig. — Zellen und Gewebe des Tierkörpers: H. Poll. — Allgemeine und experimentelle Morphologie und Entwicklungslehre der Tiere: O. Hertwig. — Entwicklungsgeschichte und Morphologie der Wirbellosen: K. Heider. — Entwicklungsgeschichte der Wirbeltiere: F. Keibel. — Morphologie der Wirbeltiere: E. Gaupp.

Abstammungslehre, Systematik, Paläontologie, Biogeographie. Bdred.: R. Hertwig u. R. v. Wettstein. M. 20.–.*) [1913. Abt. IV, Bd. 4.]

Inhalt: Die Abstammungslehre: R. Hertwig. — Prinzipien der Systematik mit besonderer Berücksichtigung des Systems der Tiere: L. Plate. — Das System der Pflanzen: R. v. Wettstein. — Biographie: A. Brauer. — Pflanzengeographie: A. Engler. — Tiergeographie: A. Brauer. — Paläontologie und Paläozoologie: O. Abel. — Paläobotanik: W. J. Jongmans. — Phylogenie der Pflanzen: R. v. Wettstein. — Phylogenie der Wirbellosen: K. Heider. — Phylogenie der Wirbeltiere: J. E. V. Boas.

TEIL IV: Die technischen Kulturgebiete.

Technik des Kriegswesens. Geh.*) M. 24.—. [1913. Bd. 12.]

Inhalt (Bandredakt. M. Schwarte): Kriegsvorbereitung, Kriegsführung: M. Schwarte. — Waffentechnik, a) in ihren Beziehungen zur Chemie: O. Poppenberg; b) in ihren Beziehungen z. Metallurgie: W. Schwinning; c) in ihren Bezieh. z. Konstruktionslehre: W. Schwinning: — d) in ihren Beziehungen zur optischen Technik: O. von Eberhard; e) in ihren Beziehungen zur Physik und Mathematik: O. Becker. — Technik des Befestigungswesens: J. Schröter. — Kriegsschiffbau: O. Kretschmer. — Vorbereitung für den Seekrieg u. Seekriegsführung: M. Glatzel. — Einfluß d. Kriegswesens auf die Gesamtkultur: A. Kersting.