

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

~~369~~

547

steswelt

B. B. Fischer
Darstellende
Geometrie



B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

Die Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“

nummehr über 800 Bände umfassend, bietet wirkliche „Einführungen“ in die Hauptwissensgebiete für den Unterricht oder Selbstunterricht des Laien nach den heutigen methodischen Anforderungen, seit ihrem Entstehen (1898) den Gedanken dienend, auf denen die heute so mächtig entwickelte Volkshochschulbewegung beruht. Sie will jedem geistig Mündigen die Möglichkeit schaffen, sich ohne besondere Vorkenntnisse an sicherster Quelle, wie sie die Darstellung durch berufene Vertreter der Wissenschaft bietet, über jedes Gebiet der Wissenschaft, Kunst und Technik zu unterrichten. Sie will ihn dabei zugleich unmittelbar im Beruf fördern, den Gesichtskreis erweiternd, die Einsicht in die Bedingungen der Berufsarbeit vertiefend. Diesem Bedürfnis können Skizzen im Charakter von „Auszügen“ aus großen Lehrbüchern nie entsprechen, denn solche sehen eine Vertrautheit mit dem Stoffe schon voraus.

Die Sammlung bietet aber auch dem Fachmann eine rasche zuverlässige Übersicht über die sich heute von Tag zu Tag weitenden Gebiete des geistigen Lebens in weitestem Umfang und vermag so vor allem auch dem immer stärker werdenden Bedürfnis des Forschers zu dienen, sich auf den Nachbargebieten auf dem laufenden zu erhalten.

In den Dienst dieser Aufgabe haben sich darum auch in dankenswerter Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, gern die Gelegenheit benutzend, sich an weiteste Kreise zu wenden.

So konnte der Sammlung auch der Erfolg nicht fehlen. Mehr als die Hälfte der Bände liegen, bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet, bereits in 2. bis 8. Auflage vor, insgesamt hat die Sammlung bis jetzt eine Verbreitung von fast 5 Millionen Exemplaren gefunden.

Alles in allem sind die schmucken, gehaltvollen Bände besonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden.

Wenn eine Verteuerung der Sammlung infolge der durch die wirtschaftliche Lage bedingten außerordentlichen Steigerung der Herstellungskosten auch unvermeidbar gewesen ist, so ist der Preis doch entfernt nicht in dem gleichen Verhältnis gestiegen, und auch jetzt ist ein Band „Aus Natur und Geisteswelt“ für den Preis von ... Bänden und insbesondere

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296024

Leipzig, in

. Teubner

Zur Mathematik und Astronomie

sind bisher erschienen:

Einführung in die Mathematik.

Einführung in die Mathematik. Von Studienrat W. Mendelssohn. Mit 42 Figuren im Text. (Bd. 503.)

Arithmetik, Algebra und Analysis.

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat P. Cranh. 2 Bände. I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 7. Aufl. Mit 9 Figuren im Text. (Bd. 120.)

II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 5. Aufl. Mit 21 Textfiguren. (Bd. 205.)
Lehrbuch der Rechenvorlesse. Schnellrechnen und Rechenkunst. Mit zahlreichen Abzugsbeispielen. Von Ing. Dr. phil. J. Vojsa. (Bd. 739.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von Prof. Dr. S. Kowalewski. 3., verbesserte Aufl. Mit 18 Figuren. (Bd. 197.)

Differentialrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studentat Dr. M. Lindow. 4. Aufl. Mit 50 Figuren und 161 Aufgaben. (Bd. 387.)

Integralrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studentat Dr. M. Lindow. 3. Aufl. Mit 43 Figuren im Text und 200 Aufgaben. (Bd. 673.)

Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studentat Dr. M. Lindow. Mit 38 Figuren im Text und 160 Aufgaben. (Bd. 589.)

***Einführung in die Vektorrechnung.** Von Prof. Dr. J. Jung. (Bd. 668.)

Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Geh. Reg.-Mat Prof. E. Heymann. Mit 11 Fig. i. Text. (Bd. 609.)

Kaufmännisches Rechnen zum Selbstunterricht. Von Studentat K. Dröll. (Bd. 724.)

Geometrie.

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat Prof. P. Cranh. 3. Aufl. Mit 94 Figuren im Text. (Bd. 340.)

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat Prof. P. Cranh. 3. Aufl. Mit 50 Figuren im Text. (Bd. 431.)

Sphärische Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat Prof. P. Cranh. Mit 27 Figuren im Text. (Bd. 605.)

Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat Prof. P. Cranh. 3. Aufl. Mit 55 Figuren im Text. (Bd. 504.)

Einführung in die darstellende Geometrie. Von Prof. P. D. Fischer. Mit 59 Fig. im Text. (Bd. 541.)

Angewandte Mathematik.

Praktische Mathematik. Von Prof. Dr. A. Neuendorff. 2 Bde. I. Teil: Graphische Darstellungen. Vertühtes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufm. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verbesserte Auflage. Mit 29 Figuren und 1 Tafel. (Bd. 341.) II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 193 Figuren. (Bd. 526.)

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Von Regierungsrat Dipl.-Ing. A. Leuz. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 490.)

Geometrisches Zeichnen. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeistky. Mit 172 Abb. im Text und auf 12 Tafeln. (Bd. 508.)

Projektionslehre. Die rechtwinklige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinklige Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstellung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeistky. Mit 208 Abbildungen im Text. (Bd. 564.)

Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Prof. Dr. A. Doeblmann. 2. Aufl. Mit 91 Figuren und 11 Abbildungen. (Bd. 510.)

Angewandte Mathematik.

Graphisches Rechnen. Von Prof. D. Bröhl. Mit 164 Fig. im Text. (Bd. 708.)

Die graphische Darstellung. Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn und Gebrauch der Methode. Von Hofrat Prof. Dr. S. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Fig. im Text. (Bd. 437.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abbildungen. (Bd. 385.)

Nautik. Von Direktor Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit 64 Figuren im Text und 1 Secarte. (Bd. 255.)

Die Landmessung. Von Geh. Finanzrat S. Suckow. Mit 69 Zeichnungen im Text. (Bd. 608.)

Photogrammetrie (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie). Von Dipl.-Ing. Hermann Lüscher. Mit 78 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. (Bd. 612.)

Kartenskunde. Von Finanzrat Dr. Ing. A. Egerer. I. Einführung in das Kartenverständnis. Mit 49 Abbildungen im Text. (Bd. 610.)

Mathematische Spiele.

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 4., verbesserte Aufl. Mit 1 Titelbild und 78 Figuren. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildn. C. Laslets u. P. Morphy's, 1 Schachbrettafel u. 49 Diagrammen. 3. Aufl. (Bd. 281.)

Geschichte.

Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Job. L. Heiberg. 2. Aufl. Mit 2 Figuren. (Bd. 370.)

Astronomie und Astrologie.

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 5. Aufl. Bearbeitet von Prof. Dr. P. Guthnick. Mit 28 Figuren im Text. (Bd. 24.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Geh. Regierungsrat Prof. Dr. M. V. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)

Weltuntergang in Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. K. Ziegler und Prof. Dr. S. Oppenheim. (Bd. 720.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. I. Teil: Vom Altertum bis zur Neuzeit. 3. Auflage. Mit 16 Abbildungen. (Bd. 444.)

II. Teil. Moderne Astronomie. 2. Auflage. Mit 9 Figuren im Text und 1 Tafel. (Bd. 445.)

Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Professor Dr. A. Marcuse. 2. Aufl. Mit 26 Abbildungen. (Bd. 378.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 16 Figuren. 2. Aufl. von Observ. Dr. H. Naumann. (Bd. 240.)

Der Kalender. Von Prof. Dr. W. J. Wislizenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)

Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte und das Wesen der Astrologie. Unter Mitwirkung von Geh. Rat Prof. Dr. C. Bezold dargestellt von Geh. Hofrat Prof. Dr. Franz Voll. 2. Aufl. Mit 1 Sternkarte und 20 Abbildungen. (Bd. 638.)

Meteorologie.

Einführung in die Wetterkunde. Von Prof. Dr. L. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. (Bd. 55.)

Unser Wetter. Einführung in die Klimatologie Deutschlands an der Hand von Wetterkarten. Von Dr. A. Hennig. 2. Aufl. Mit 48 Abb. im Text. (Bd. 349.)

Die mit * bezeichneten u. weitere Bände befinden sich in Vorb.

369
Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

541. Band

Einführung
in die
Darstellende Geometrie

Von

Prof. B. B. Fischer

in Berlin-Lichterfelde

Mit 59 Figuren im Text



A decorative, stylized monogram logo consisting of intertwined letters, likely representing the publisher or author's initials.

W h 18.

Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1921

Bz/2
b7.

I 369

Der vorliegende Band der Sammlung will vom mathematischen Standpunkt aus in die Grundlehren der darstellenden Geometrie einführen und hofft, auch für Schüler der technischen und höheren Lehranstalten ein brauchbares Hilfsbüchlein zu werden. Eingehendere Studien in größeren Werken will es vorbereiten und wird so auch Studierenden an technischen Hochschulen ein Wegweiser sein können. Besonders zugeschnitten ist das Bändchen seiner Anlage nach für das Selbststudium, indem der gebotene Stoff an der Hand von Aufgaben behandelt wird. Der leider nur in geringem Maß zur Verfügung stehende Raum brachte es mit sich, daß die Darstellung etwas knapp gehalten wurde. Wenn das für den Anfänger ein bloßes Durchlesen ausschließt, so ist das hoffentlich kein Schade, ebensowenig, wie wenn er die oder jene fehlende Figur sich an der Hand der Entwicklung wird selbst herstellen müssen. Überhaupt kann dem Anfänger nur dringend geraten werden, alles nachzuzeichnen, auch einmal in anderen Lageverhältnissen wie vielleicht angegeben. Für die praktische Ausführung der Zeichnungen wird der Abschnitt in der Einleitung willkommen sein. Der Ausbildung der Raumanschauung wird es zweifellos förderlich sein, wenn in einem ersten Teil zunächst die Projektionen auf nur eine Ebene behandelt werden; außerdem bereitet diese Behandlung der Grundaufgaben in bester Weise auf das Mongesche Zweitafelverfahren vor, das dann im zweiten Teil behandelt wird. Ein sorgfältig ausgewähltes Literaturverzeichnis beschließt das Buch. Berlin-Lichterfelde, Ostern 1921.

P. B. Gischer.

KD 515 (023)

I 301549

Schutzformel für die Vereinigten Staaten von Amerika:
Copyright 1921 by B. G. Teubner in Leipzig

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten

BPK - B - 89/2017
Akc. Nr. 173/50

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

	Seite
Die geometrischen Konstruktionsaufgaben	5
Die darstellende Geometrie und ihre geschichtliche Entwicklung	6
Die Projektion, das Grundprinzip der darstellenden Geometrie.	8
Zeichenhilfsmittel und Zeichenpraxis	10
1. Darstellende Geometrie bei Verwendung nur einer Projektionstafel.	
1. Der Punkt und die Gerade	14
Punkt, Strecke, Gerade, sich schneidende und windschiefe Geraden (Regelflächen 2. O.), Graduierung der Geraden. (Aufg. 1—21.)	
2. Ebene Vielecke.	20
Haupt- und Falllinien einer Ebene, orthogonale Winkelprojektionen, das Dreieck, affine Lage von Dreiecken, Affinität und Perspektivität ebener Figuren, ebene Schnitte von Prismen, Pyramiden, Zylindern und Kegeln, Kegelschnitte. (Aufg. 22—34.)	
3. Aufgaben über die Ebene	28
Darstellung der Ebene, die Ebene und in ihr liegende Punkte und Geraden, Neigungen von Ebenen und in ihnen liegenden Geraden gegen die Horizontalebene, besondere Lagen von Ebenen, Aufgaben über Ebenen und sie schneidende Geraden, Lote auf Ebenen, rechtwinklige Achsentreuzen in senkrechter Projektion, mehrere Ebenen, Neigungswinkel zweier Ebenen, kürzester Abstand zweier windschiefen Geraden. (Aufg. 35—58.)	
4. Dreikantkonstruktionen	36
Die verschiedenen Fälle, die drei Grundaufgaben, Anwendung auf die Nautik. (Aufg. 59—62.)	
5. Körperdarstellungen mit einem Ausblick auf Durchdringungen, Schattenskonstruktionen und schiefe Parallelprojektion	41
Würfel und Quader, Körper, die sich aus dem Würfel ableiten lassen, rechtwinklige Axonometrie, Durchdringungen, Schattenskonstruktionen, schiefe Parallelprojektion und allgemeine Axonometrie (Pohlkescher Satz). (Aufg. 63—75.)	
6. Zentralprojektion.	46
Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene, Grundaufgaben (ohne Auge), Maßaufgaben (mit Auge). (Aufg. 76—85.)	

II. Die Mongesche Zweitafelmethode.		Seite
7.	Der Punkt und die Gerade	52
	Erklärung der Zweitafelmethode, der Punkt, die Strecke, die Gerade, besondere Lagen der Geraden, Lote auf Geraden, Neigungen von Geraden gegen die Tafelebenen, sich schneidende Geraden, Durchdringungen, parallele und windschiefe Geraden. (Aufg. 86—108.)	
8.	Die Ebene, bestimmt durch Haupt- und Falllinien	62
	Darstellung der Ebene durch diese Linien, Grundaufgaben über die Ebene, mehrere Ebenen. (Aufg. 109—130.)	
9.	Die Ebene, bestimmt durch ihre Spurgeraden	67
	Horizontal- und Vertikalspur einer Ebene, ebene Figuren, Neigungen einer Ebene gegen die Tafelebenen, mehrere Ebenen, Gerade und Ebene. (Aufg. 131—147.)	
10.	Projektionshilfsebenen	71
	Erklärung des Umprojizierens, Anwendung auf die Bestimmung des kürzesten Abstands zweier windschiefen Geraden, Bestimmung der Projektionsstrahlen, Umprojizieren auf eine gegebene Ebene. (Aufg. 148—152.)	
11.	Schiefwinklige Parallelprojektion, Aronometrie	75
	Erklärung und mehrfache Darstellung eines hausähnlichen Gebildes.	
12.	Ebene Schnitte	78
	Prismen-, Zylinder-, Pyramiden- und Kegelschnitte. (Aufg. 153 bis 158c.)	
13.	Durchdringungen und Schatten	81
	Schnitte von Geraden mit Körpern, Durchdringungen von Körpern, Rotationsflächen, Schattenaufgaben. (Aufg. 159—182.)	
Anhang: Literaturangaben		91

Einleitung.

Die geometrischen Konstruktionsaufgaben. Von grundlegender Bedeutung für die ganze Geometrie sind die Konstruktionsaufgaben, im besonderen erst recht für die darstellende Geometrie, die körperliche (geometrische) Dinge zeichnerisch darstellen will. Sehen wir zunächst von der darstellenden Geometrie ab, so besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den planimetrischen und stereometrischen Konstruktionsaufgaben hinsichtlich ihrer Ausführung. In der Planimetrie führt man die Konstruktionsaufgabe mit Hilfe von Lineal und Zirkel wirklich aus; man verbindet Punkte miteinander durch Geraden, bringt Geraden zum Schnitt, schlägt Kreise usw. Es wird also tatsächlich konstruiert, man bleibt (bei endlicher Anzahl der Einzelkonstruktionen!) stets im Bereich des wirklich Ausführbaren. In der Stereometrie dagegen stößt man sofort auf die größten Schwierigkeiten, wollte man da ebenso vorgehen. Wohl könnte man sich irgendwie Punkte im Raum sichtbar darstellen und sie vielleicht auch noch durch Geraden (straffe Fäden) verbinden, aber schon deren beliebige Verlängerung würde auf Schwierigkeiten stoßen. Auch eine Darstellung der Ebenen ist noch angängig (Papier- oder Pappblätter), aber solche miteinander oder mit Geraden zum Schnitt zu bringen, führt wieder zu Schwierigkeiten; ähnlich wird es, wenn wir beliebige Kugelflächen schlagen sollen usw. Man kann eben dem direkten Zeichnen in der Ebene nichts Entsprechendes im Raum an die Seite setzen, mit anderen Worten: Man kann nicht räumlich zeichnen.

Und doch spricht man von stereometrischen Konstruktionsaufgaben, und doch sind sie gerade von der größten Bedeutung für die Ausbildung der geometrischen Raumvorstellung. Wie hilft man sich nun, um die genannten Schwierigkeiten einer tatsächlichen Konstruktion im Raum zu umgehen? Auf die einfachste Weise! Man konstruiert im Geist! Man nimmt an, daß die stereometrischen Grundaufgaben ausführbar sind, daß man also durch drei Punkte (oder durch einen

Punkt und eine Gerade, durch zwei sich schneidende Geraden oder zwei Parallelen) eine Ebene legen kann, daß sich eine Ebene mit einer andern zum Schnitt bringen läßt, ebenso eine Gerade mit einer Ebene, daß sich ferner um einen Punkt eine Kugelfläche schlagen läßt. Eine stereometrische Konstruktionsaufgabe gilt dann als gelöst, wenn man mit Hilfe dieser stereometrischen Grundaufgaben die Gesamtkonstruktion auf solche in Ebenen, also auf ausführbare Konstruktionen zurückgeführt hat.

Um dies näher zu erläutern, sei die Lösung einer einfachen stereometrischen Konstruktionsaufgabe angeführt, das Fällen eines Lotes von einem Punkt P auf eine Ebene E : Man lege durch P eine beliebige Ebene E_1 , die E in einer Geraden g_1 schneidet; in E_1 falle man von P auf g_1 das Lot l_1 , der Fußpunkt heiße F_1 , in F_1 errichte man auf g_1 in E das Lot l_2 und falle in der durch P und l_2 bestimmten Ebene E_2 das Lot l von P auf l_2 , das dann das gesuchte Lot ist.

Die darstellende Geometrie. Mit den eben entwickelten rein theoretischen Lösungen stereometrischer Konstruktionsaufgaben kann sich der Mathematiker zufrieden geben, aber dem einfachen Handwerker, dem Baumeister oder Ingenieur ist damit nicht geholfen. Diese mußten die Schwierigkeiten des räumlichen Zeichnens überwinden. Ihnen steht die Ebene ihres Reißbretts als einzige Zeichenebene zur Verfügung, in der alles Notwendige ausgeführt werden muß. Und das leistet die darstellende Geometrie. Die fertige Zeichnung muß dann folgender Forderung Genüge leisten: sie hat für die Herstellung des zu konstruierenden Gegenstandes (Tisch, Maschine, Gebäude, Kanalanlage usw.) alle nötigen Maße zu liefern. Eine andere Forderung wäre noch, von dem herzustellenden Gegenstand eine bildliche Darstellung (Schaubild) zu geben, denn das wünscht gegebenenfalls der Auftraggeber, und das ist einem teuren Modell vorzuziehen. Durch die so gekennzeichneten Anforderungen an eine technische Konstruktionszeichnung ist zugleich mit den obigen Darlegungen die Aufgabe der darstellenden Geometrie klargestellt, die wir jetzt — dem technischen Gewand entkleidet — rein mathematisch fassen können: die darstellende Geometrie lehrt, räumliche Konstruktionsaufgaben (Darstellung räumlicher Gebilde und Aufgaben über diese) in einer einzigen Ebene, der Zeichenebene, auszuführen; sie führt also stereometrische Konstruktionen auf planimetrische zurück.

Die anzufertigende Zeichnung muß den Beschauer in die Lage versetzen, sich im Geist (und damit natürlich erst recht in Wirklichkeit) ein zum dargestellten Gebilde vollständig kongruentes konstruieren zu können.

Wenn wir hier die darstellende Geometrie rein mathematisch definiert haben, trotzdem praktische Forderungen sie entstehen ließen, so mag das noch ein wenig näher erläutert werden. Es ist — um ein einfaches Beispiel zu wählen — einleuchtend, daß jemand, der ein Prisma mit einer Ebene oder zwei Prismen miteinander zum Schnitt bringen kann, auch die Aufgabe des Zimmermanns zu lösen vermag, zwei oder mehrere prismatische Balken in einer Ecke zu vereinigen, also ihre Formen an der Vereinigungsstelle anzugeben. Ähnlich steht es mit der Darstellung krummer Flächen einerseits und der von Maschinenteilen andererseits. Die Darstellung der einfachsten geometrischen Gebilde ist eben die Grundlage für all das, was die Praxis in ihren Aufgaben von uns fordert. Wer sich genügend Übung in der darstellenden Geometrie angeeignet hat, wird sich unschwer in die Darstellungsweise der Techniker finden und die technischen Zeichnungen verstehen können. In diesem Sinne spricht man auch von der darstellenden Geometrie als der Weltsprache der Ingenieure.

Die geschichtliche Entwicklung der darstellenden Geometrie. In ihren einfachsten Methoden ist die darstellende Geometrie schon sehr alt, denn die oben angedeuteten praktischen Aufgaben forderten eben stets eine Lösung. So sind manche Dokumente vorhanden, die zeigen, daß die alten Kulturvölker ihren mächtigen Bauten sorgfältige Pläne zugrunde gelegt haben. Aber immer blieben diese Fertigkeiten je nach der Art der Aufgabe Einzelkünste; sie wurden nur für die besonderen Zwecke ausgebildet und meist geheimgehalten, wie zum Beispiel in den Kunsttraditionen der „Bauhütten“. Der Meister übermittelte seine Kenntnisse dem Lehrling, der Lehrer dem Schüler und nur gerade so viel, wie eben gebraucht wurde. Dem deutschen Maler Albrecht Dürer¹⁾ verdanken wir die erste Sammlung solcher Methoden der darstellenden Geometrie in seiner „Unterweisung“.

Die erste wissenschaftliche Behandlung (unter Ausschluß der Perspektive) der darstellenden Geometrie, also eine methodische Zusammen-

1) Siehe bei diesen fortlaufenden Nummern die Literaturangaben im Anhang.

stellung ihrer Lösungsverfahren, rührt von Gaspard Monge her. Seine Schrift „Géométrie descriptive“ gehört heute noch zu den lesenswertesten Büchern²⁾ über darstellende Geometrie wegen ihrer großen Klarheit in der Darstellung und der Einfachheit der Beweise. Auch Monge durfte als Lehrer an einer französischen militärischen Genieschule (1765—1783 in Mézières) die Ergebnisse seiner Studien zunächst nicht veröffentlichen, und erst die Französische Revolution brachte es mit sich, daß Monge 1795 seine darstellende Geometrie veröffentlichen konnte. Die Methoden von Monge werden in der Hauptsache heute noch verwendet, außer daß vielleicht die gerade zu Monges Zeiten erst entstehende Geometrie der Lage im Laufe des 19. Jahrhunderts Vereinfachungen brachte.

Heute geht der Anwendungsbereich der darstellenden Geometrie weit über das hinaus, was wir oben andeuteten und was zu Monges Zeiten damit geleistet wurde. Das ist auch gar nicht verwunderlich, wenn wir den ungeheuren Aufschwung der technischen Wissenschaften seit jener Zeit bedenken. Wir wollen hier nur auf eines hinweisen, worin gerade in der letzten Zeit gewaltige Fortschritte gemacht wurden; wir meinen die Photogrammetrie, die aus photographischen (Flieger-)Aufnahmen des Erdbodens dessen wahre Gestalt zu rekonstruieren gestattet.

Die Projektion, das Grundprinzip der darstellenden Geometrie. In Handwerkerkreisen weiß man nichts von darstellender Geometrie, und doch wird sie dort in ihren einfachsten Methoden sehr gebraucht. Man findet sie da unter dem Namen „Projektionszeichnen“. Darin offenbart sich schon das Grundprinzip unserer Wissenschaft.

Unter der Projektion eines Punktes auf eine Ebene versteht man den Durchstichspunkt des durch diesen Punkt verlaufenden Projektionsstrahls mit dieser Ebene, die dann Projektionsebene heißt.

Soll ein geometrisches Gebilde auf eine Ebene projiziert werden, so muß zunächst irgendwie bestimmt werden, in welcher Weise der zu jedem Punkt notwendige Projektionsstrahl gefunden wird. Das führt zu den verschiedenen Projektionsarten. Gehen alle Projektionsstrahlen von einem bestimmten Punkt, dem Zentrum, aus (Lichtstrahlen einer punktförmigen Lichtquelle), so ist zu jedem Punkt im Raum der zugehörige Projektionsstrahl eindeutig bestimmt. Das ist die sogenannte Zentralprojektion. Unter Parallelprojektion wird man dann

sinngemäß den Fall verstehen, wenn die Projektionsstrahlen alle zu einander parallel sind; damit zu jedem Punkt der Projektionsstrahl gefunden werden kann, muß natürlich die Richtung gegeben sein. Unter senkrechter oder rechtwinkliger Projektion im besonderen versteht man den Fall, daß die Projektionsstrahlen senkrecht auf der Projektionsebene stehen; man spricht in diesem Fall auch von normaler oder orthogonaler Projektion.

Hat man vielleicht das Drahtmodell eines Würfels, das ja leicht herzustellen ist, so kann man sich mit dessen Hilfe die eben beschriebenen drei Arten von Projektionen leicht klarmachen. Bringt man ein solches Drahtmodell in den Lichtkegel einer Taschenlampe, so ist das Schattenbild auf irgendeiner hellen ebenen Fläche eine Zentralprojektion des Würfels (die Lichtstrahlen als von einem Punkt ausgehend angenommen!). Um eine Parallelprojektion desselben Würfels zu erhalten, bringen wir den Würfel in die Strahlen der Sonne (diese aber punktförmig gedacht!). Das Schattenbild unseres Würfels auf eine zu den Sonnenstrahlen schiefstehende ebene helle Fläche ist dann eine schiefe Parallelprojektion des Würfels, während sie zur rechtwinkligen wird, sobald die Sonnenstrahlen jene Projektionsebene senkrecht treffen. Wir empfehlen dem Anfänger, sich wirklich solche Drahtmodelle herzustellen, und zwar nicht nur von einfachen Körpern, sondern auch von einfachen geometrischen Gebilden (Gerade, Winkel, Dreiecke, Kreis usw.), um deren Projektionen, also deren Schattenbilder, im Lichtkegel und Sonnenlicht bei den verschiedensten Lagen und in der Bewegung entstehen zu sehen. Das klärt mehr auf als hundert der besten Abbildungen in Büchern.

Bei dieser eben erwähnten Projektionsart durch Schattenbilder — auch die Lichtbildervorführungen sind nichts anderes — liegt der zu projizierende Gegenstand zwischen Projektionszentrum und Projektionsbild. Bei der Camera obscura liegt das Projektionszentrum zwischen Gegenstand und Bild, ebenso beim Photographenapparat und beim Auge, wo ein Bild auf die Netzhaut projiziert wird. Betrachten wir jedoch von unserm Zimmer aus durch ein Fenster ein Gebäude im Freien oder einen Baum, so projizieren wir von unserm Auge aus jenen Gegenstand im Freien auf die Fensterscheibe. Wir könnten unter Umständen mit einem Stift die Linien des Gebäudes oder Baumes auf dem Glase nachziehen, um ein Bild des Gegenstandes im Freien zu erhalten, wie wir es vom Zimmer aus sehen.

Solche Projektionen herzustellen, ist die Aufgabe des Malers. Würde man um sich herum einen großen Glaszylinder gestellt denken, so stellt dann die Projektion der Außenwelt vom Auge aus auf diese Zylinderfläche die Aufgabe des Panoramenmalers dar. In der Projektion räumlicher Gebilde auf krumme Flächen würde man die all-gemeinste Art einer Projektion zu erblicken haben, wie sie in der Bemalung von Deckengewölben, Kuppeln stattfindet. Hier haben wir es schon mit einer schwierigeren Anwendung der darstellenden Geometrie zu tun.

Wir werden in diesem Bändchen in der Hauptsache die rechtwinklige (Parallel-) Projektion verwenden, und zwar im ersten Teil eine solche auf nur eine Ebene, die kotierte Projektion, und im zweiten Teile die der Mongeschen Methode, die zwei aufeinander senkrechte Projektionsebenen (= Tafeln) benutzt.

Zeichenhilfsmittel und Zeichenpraxis. Ehe wir uns den Methoden der darstellenden Geometrie selbst zuwenden, sei noch der Praxis des Zeichnens gedacht, denn ebenso wichtig wie das Verständnis der Methoden ist das Zeichnen selbst. Die darstellende Geometrie ist eben eine praktische Wissenschaft, und Zeichenfertigkeit muß mit der Theorie Hand in Hand gehen.

Die notwendigen technischen Hilfsmittel sind: Reißbrett, Zeichenpapier, Reißschiene, Zeichendreiecke, Kurvenlineale, Reißzeug, Bleistift, Tusche, Gummi.

Das Reißbrett sei nicht zu unhandlich, vielleicht so, daß es einen Zeichenbogen von 50 cm \times 70 cm fassen kann. Das Holz soll weich sein, damit die Reißstifte oder Reißnägeln sich leicht eindrücken lassen. Das Zeichenpapier wähle man leicht körnig und nicht zu dick. Der Einfachheit halber befestigt man den Zeichenbogen meist mit Reißstiften; man lasse aber dabei vom Bogen nichts über den Brettrand herausragen (Schnittwunden beim Entlanggleiten mit der Hand!). Die Nachteile solcher Befestigung zeigen sich einmal im Lockern der Stifte und damit des Bogens, was ein genaues Zeichnen ausschließt; dann aber stören die Reißstifte beim Gebrauche der Reißschiene und der Zeichendreiecke. Man klebt daher besser den Zeichenbogen auf, indem man die eine Seite gleichmäßig mit einem Schwamm anfeuchtet, auf der andern Seite einen knapp 1 cm breiten Rand mit Syndetikon bestreicht und den so behandelten Bogen aufklebt.

Die Reißschiene (Hartholz!) muß so lang sein, daß sie beim An-

heben zu können. Oft empfiehlt sich auch ein Einsatzstück für den Zirkel, um den Schenkel verlängern zu können. Auf weitere Stücke kann man verzichten. Es braucht wohl nicht noch besonders hervorgehoben zu werden, daß peinlichste Sorgfalt im Gebrauch des Reißzeugs anzuraten ist. Um die Spitzen zu schonen, stecke man auf sie ein Stückchen Kork; die Reißfedern reinige man stets nach Gebrauch und bewahre sie entspannt auf.

Die Tusche sei tiefschwarz und leichtflüchtig; der fertig ausgezogene Bogen muß unter Umständen eine kräftige Wäsche zwecks Säuberung vertragen! Man probiere stets erst die gefüllte Reißfeder auf einem Stück Papier von derselben Art des Zeichenbogens; man setze sorgfältig am Zeichendreieck an und führe die Reißfeder in einer senkrechten Ebene zum Reißbrett etwa unter einem Winkel von 80° gegen die Ziehrichtung. Hilfslinien werden kurz und dünn gestrichelt, nicht punktiert, denn das erfordert zuviel Übung. Gleichartige Linien müssen durchweg von derselben Stärke sein. Die Hilfslinien dürfen nie besonders hervortreten; deswegen deutet man oft nur ihre Schnittpunkte an. Sind mehrere Einzelkonstruktionen derselben Art ausgeführt, so deutet man nur eine davon durch die Hilfslinien an. Will man bei einer Geraden sichtbare und unsichtbare Teile unterscheiden, so zieht man erstere aus, während man die nicht sichtbaren Stücke in derselben Stärke strichelt, aber mit längeren Strichen wie bei den Hilfslinien.

Das Ausziehen von Kurven mit Hilfe von Kurvenlinealen will sehr geübt sein. Für den Anfang zeichne man die Kurve sehr genau und sauber zunächst mit Bleistift, ehe man sie am Kurvenlineal mit Tusche nachzieht. Erst wenn man größere Übung hat, genügen einige wichtige Punkte der Kurven bereits zum Zeichnen mit der Reißfeder am Kurvenlineal.

Schließlich noch ein paar Worte zu Bleistift und Gummi! Man wähle nicht zu weiche Stifte, weil da die Linien leicht zu stark werden, was die Zeichnung verschmiert. Zu harte Stifte geben zu dünne Linien und bei stärkerem Aufdrücken zu starke Eindrücke ins Papier (also wirkliche „Risse“). Für den Anfang nehme man Stifte in der Stärke von Faber Nr. 3. Auf eine gute Spitze des Stiftes ist natürlich großer Wert zu legen; Techniker lieben es, der Spitze eine Keilform zu geben, aber das Gewöhnliche ist wohl die Kegelform. Beim Anspitzen lege man den Kegel der Bleistiftspitze mit einer feiner Man-

tellinien auf die Tischebene; dadurch erreicht man ein weniger oft eintretendes Abbrechen während des Anspitzens. Auch der Gummi ist nicht ganz Nebensache, besonders wenn es sich um Radierungen von Tusche handelt. Da empfiehlt sich ein sogenannter Tuschgummi neben dem gewöhnlichen Gummi. Ausgezogene Linien mit dem Messer zu radieren erfordert die größte Sorgfalt!

Wegen der Beschriftung der Zeichnungen gewöhne man sich eine der Druckschrift ähnliche an und bezeichne Geraden durch kleine lateinische Buchstaben, Punkte durch große lateinische Buchstaben, Winkel durch kleine griechische Buchstaben und Ebenen durch große griechische Buchstaben.

Von großer Wichtigkeit für das praktische Zeichnen ist noch die Genauigkeit des Zeichnens. Zunächst darf eine mit Bleistift gezogene Gerade kein Parallelstreifen sein, d. h. der Strich muß so dünn wie möglich sein, denn zwei solcher Parallelstreifen schneiden sich nicht in einem Punkt, sondern in einem Parallelogramm; Ähnliches gilt von krummen Linien. Ferner benutze man zur Festlegung eines Punktes nie Geraden, die sich unter einem sehr spitzen Winkel schneiden; jenes „Fehlerparallelogramm“ wird dann recht lang, selbst bei sehr dünnen Linien.

Zuweilen kommt es vor, daß der Schnittpunkt zweier Geraden gebraucht wird, die sich außerhalb des Zeichenbrettes schneiden. Da muß man gewisse Kniffe anwenden, die sich aus einfachen geometrischen Sätzen ergeben. Wir deuten nur einen solchen Fall an. Zwei Geraden a und b sind gegeben, und es wird durch einen gegebenen Punkt P eine dritte Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkt von a und b gesucht. Man richtet es so ein, daß P Höhendurchschnittspunkt in einem Dreieck wird, von dem a und b Seiten sind; zu dem Zweck fällt man von P auf a und b Lote h_a und h_b und verbindet den Schnittpunkt von a und h_b mit dem von b mit h_a durch c . Dann ist das Lot von P auf c die gesuchte Gerade. Solcher Konstruktionen gibt es sehr viele, und man muß sie je nach den vorhandenen Lageverhältnissen zu verwenden wissen. Wir verweisen da auf die außerordentlich lesenswerte Schrift von P. Zühlke³⁾.

I. Darstellende Geometrie bei Verwendung nur einer Projektionstafel.

1. Der Punkt und die Gerade.

Alle Punkte eines Projektionsstrahls haben als Projektion auf eine Projektionsebene ein und denselben Punkt, nämlich den Durchstichpunkt des Strahls mit jener Ebene. Daraus folgt, daß man wohl zu jedem Punkt im Raum seine Projektion finden kann, aber nicht rückwärts zur Projektion den projizierten Punkt. Es muß also, um das zu ermöglichen, noch eine Bestimmung hinzutreten. Da wir uns hier zunächst nur mit der senkrechten Projektion beschäftigen, geschieht diese Zusatzbestimmung am besten durch Hinzufügung der Entfernung des Punktes von der Projektionsebene. $P'(p)$ in der Projektionsebene soll nun die Projektion eines Punktes P im Raum darstellen, der um die Strecke p von der Projektionsebene — die wir im folgenden immer mit Π bezeichnen — entfernt ist und senkrecht über P' zu Π liegt. Will man noch die beiden Raumteile zu jeder Seite von Π unterscheiden, so rechnet man die Entfernung p (auch Höhe oder Kote*) genannt, wenn Π horizontal gedacht wird) positiv oder negativ, je nachdem der Beschauer sich mit P auf derselben Seite von Π befindet oder nicht. Damit ist jedem Punkt P im Raum ein bestimmtes $P'(p)$ zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jedem $P'(p)$ in Π ein bestimmter Punkt P im Raum. Wir sagen absichtlich nicht, zu dem Punkt P im Raum ist ein bestimmter Punkt P' in Π zugeordnet, sondern ein Etwas, das aus dem Punkt P' im Verein mit der näheren Bezeichnung p besteht, also eben ein bestimmtes $P'(p)$. Man sagt, die Punkte P im Raum sind den Begriffen $P'(p)$ in Π eindeutig umkehrbar oder eindeutig zugeordnet, mit andern Worten, der ganze Raum der P ist auf die Ebene der $P'(p)$ abgebildet worden. Das erst ermöglicht uns, jeder Punktmenge im Raum etwas Entsprechendes in Π an die Seite zu setzen und umgekehrt aus der Projektion heraus das räumliche Gebilde vollkommen eindeutig zu rekonstruieren. Inwiefern uns diese Überlegung gestattet, räumliche Konstruktionen durch solche in der einen Projektionsebene Π zu

*) Daher auch der Name „Kotierte Projektion“, wenn es sich wie hier um rechtwinklige Projektion auf nur eine Ebene handelt.

ersehen, wollen wir im folgenden sehen; das war ja die Hauptaufgabe der darstellenden Geometrie. Eine solche ebene Darstellung von räumlichen Punktgebilden verwendet man bei der Geländeaufnahme⁴⁾. Man denkt sich alle Punkte von derselben Höhe (etwa über dem Meerespiegel) durch eine Linie verbunden. Das ist dann, wenn man von der Kugelgestalt der Erde abieht, eine ebene Kurve, deren Projektion auf die Horizontalebene eine dazu kongruente Kurve liefert. Denkt man sich jetzt im Gelände etwa alle jene Höhenkurven von fünf zu fünf Metern gezeichnet, so gibt die Projektion aller Höhenkurven ein gutes Bild von der räumlichen Beschaffenheit des Geländes. Dort, wo sie eng aneinander liegen, hat man ein starkes Gefälle und dort, wo sie weiter auseinander liegen, ein weniger starkes Gefälle. Jetzt könnte man vielleicht in der so entstandenen Geländeaufnahme einen Weg einzeichnen, der immer dieselbe Steigung hat, indem man von einem bestimmten Ausgangspunkt aus immer dieselbe Strecke bis zur nächsten Höhenlinie einträgt. Man überlege sich, wie man einen solchen Weg (natürlich nur als eine Linie) von bestimmter konstanter Steigung konstruiert!

Die Strecke. Denken wir uns in der obigen Weise zwei Punkte P_1 und P_2 im Raum durch ihre $P_1'(p_1')$ und $P_2'(p_2')$ in Π dargestellt, so haben wir in $P_1P_2P_1'P_2'$ ein Trapez, das durch die Strecken $P_1P_1' = p_1$, $P_2P_2' = p_2$ und $P_1'P_2'$, außerdem durch die rechten Winkel bei P_1' und P_2' vollständig bestimmt ist, also um $P_1'P_2'$ in Π umgelegt konstruiert werden kann. Zugleich mit dem Trapez hat man auch die wahre Länge von P_1P_2 gefunden; ebenso gibt dann die Umliegung in der Neigung von P_1P_2 gegen $P_1'P_2'$ die Neigung der dargestellten Strecke gegen Π . Bei großen Längen von p_1 und p_2 wird man sich damit begnügen, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen eine Kathete $P_1'P_2'$ ist, während die andere Kathete durch $p_1 - p_2$ dargestellt wird, falls $p_1 > p_2$. Die Hypotenuse ist dann die wahre Länge von P_1P_2 . Man übe auch den Fall, wo P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten von Π liegen. Damit hat man die Aufgabe erledigt, [1] die wahre Länge einer Strecke zu finden und deren Neigung gegen Π . Eine zweite Aufgabe, die man jetzt sofort lösen könnte, wäre: [2] Man soll die wahre Größe eines Dreiecks $P_1P_2P_3$ konstruieren, von dem $P_1'(p_1)$, $P_2'(p_2)$, $P_3'(p_3)$ gegeben ist.

Die Gerade. Bei der Darstellung der Strecke haben wir ohne weiteres vorausgesetzt, daß die Projektion einer Geraden wieder eine

Gerade ist. Man erkennt dies so: Projiziert man jeden einzelnen Punkt einer Geraden auf Π , so liegen alle Projektionsstrahlen in einer Ebene, deren Schnitt mit Π wieder eine Gerade ist. Kennt man zwei Punkte der zu projizierenden Geraden, so würde ihre Darstellung auf [1] zurückgeführt sein. Wir wollen im folgenden immer nur den Teil der Geraden (bezeichnet durch g) darstellen, der mit dem Beschauer auf derselben Seite von Π liegt und kurz reden von dem Teil von g , der oberhalb Π liegt; die Projektion von g auf Π sei g' , ihren Schnittpunkt mit g nennen wir den Spurpunkt oder auch nur die Spur von g . Die Umlegung in Π von $\sphericalangle gg'$ (Neigungswinkel von g gegen Π) um g' bezeichnen wir durch $\sphericalangle (g)g'$. Überhaupt werden wir in Zukunft immer die Umlegung eines Punktes P oder einer Geraden g um die zugehörige Projektion hinein in Π durch Einklammern ausdrücken: (P) , (g) . Eine Gerade g im Raum ist stets bestimmt durch g' und (g) , ihre Spur durch deren Schnittpunkt: $g' | (g)$. Eine parallele Gerade g zu Π wird dann dargestellt durch zwei parallele Geraden g' und (g) in Π , während eine Senkrechte g zu Π nur durch einen Punkt in Π mit der Bezeichnung g' gekennzeichnet wird.*) Jetzt sind wir imstande folgende Aufgaben zu lösen:

[3] Gegeben ist eine Gerade g durch g' und (g) , gesucht wird der Punkt P auf g , dessen Höhe gleich einer gegebenen Entfernung p ist. Man sucht auf (g) den Punkt (P) , der von g' die Entfernung p hat. Damit ist zugleich die Frage gelöst, wann ein Punkt P auf einer Geraden g liegt, oder wie man sich auch ausdrückt, wann P mit g vereinigt (inzident) liegt.

[4] Auf einer Geraden g soll von einem gegebenen Punkt P aus eine gegebene Strecke s abgetragen werden. Die Abtragung geschieht in Π auf (g) von (P) aus. (Zwei Lösungen!)

[5] Durch einen gegebenen Punkt P soll zu einer gegebenen Geraden g die Parallele gezogen werden. Man sucht zunächst den Punkt Q auf g , der mit P dieselbe Höhe p hat; dann zeichnet man zu dem von g' , (g) und p gebildeten Dreieck ein kongruentes, das mit dem Scheitel des rechten Winkels bei P' liegt, und dessen Seiten zu denen des ersteren parallel und gleichgerichtet sind. Damit hat man auch

*) Sind in einer Aufgabe mehrere Punkte gegeben und ebenso mehrere Geraden, so wird man die Höhen und Neigungswinkel besser in einer Nebenfigur durch einen Höhenmaßstab und ein Winkelfeld angeben.

die Aufgabe gelöst, [6] durch einen Punkt P eine Gerade g zu legen von gegebener Neigung α gegen Π , so daß g' parallel zu einer in Π gelegenen Geraden l ist. (Zwei Lösungen!)

[7] Von einem Punkt P soll auf eine Gerade g das Lot gefällt werden. Denkt man sich von P auf die durch g und g' bestimmte und zu Π senkrechte Ebene, sie sei durch (gg') bezeichnet, das Lot gefällt (Fußpunkt F) und von F in (gg') wieder das Lot auf g (Fußpunkt G), so ist PG das gesuchte Lot l . Hierbei ist F' (Fig. 1) der Fußpunkt des Lotes von P' auf g' ; (F) findet man durch die gegebene Höhe p von P . Das Lot von F auf g wird in der Umlegung gezeichnet. Die wahre Länge von l findet man dann als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $P'F'$ und $(F)(G)$. Diese Aufgabe gestattet dann die Lösung der folgenden:

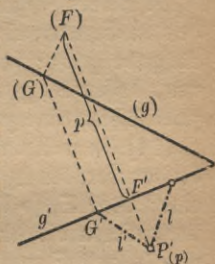


Fig. 1.

[8] Durch einen Punkt P ist eine Gerade zu legen, die eine gegebene Gerade g unter einem gegebenen Winkel α schneidet. Sei X der gesuchte Schnittpunkt und G der Fußpunkt des Lotes von P auf g , so ist von dem rechtwinkligen Dreieck $PGX \sphericalangle PXG$ gegeben; die Seite PG findet man nach [7], so daß GX konstruiert werden kann und [8] auf [4] zurückgeführt ist. (Zwei Lösungen!)

Sich schneidende und windschiefe Geraden. Sollen sich zwei Geraden g und h im Raum schneiden, so müssen sie einen Punkt, ihren Schnittpunkt S , gemein haben, das heißt der Schnittpunkt S' von g' und h' muß für beide Geraden dieselbe Höhe aufweisen. Errichtet man also in S' auf g' und auf h' Lote, so müssen diese (g) und (h) in Punkten schneiden, die von S' gleichweit entfernt sind. Ist das nicht der Fall, so stellen die beiden Geraden windschiefe oder sich kreuzende Geraden dar. Damit sind die beiden Aufgaben, [9] sich schneidende Geraden und [10] windschiefe Geraden darzustellen, erledigt.

[11] Es soll der Winkel zweier sich in S schneidenden Geraden g und h bestimmt werden. Bezeichnet man die Spur von g mit Π durch G , die von h mit Π durch H , so ist $\sphericalangle GSH$ der zu bestimmende Winkel; da aber SG und SH aus den Umlegungen leicht zu finden sind, ferner GH gegeben ist, kann man $\triangle GSH$ und damit den gesuchten Winkel konstruieren.

Unter dem Winkel zweier windschiefen Geraden versteht man den, welchen man erhält, wenn man durch einen Punkt der einen Geraden eine Parallele zur andern zieht. Demnach kann man [12] den Winkel zweier windschiefen Geraden durch [11] unter Benutzung von [5] finden.

Besonders einfach gestaltet sich [11], wenn die beiden sich schneidenden Geraden eine Ebene $\perp \Pi$ bilden. Damit ist zugleich folgende Aufgabe gelöst: [13] Man soll ein rechtwinkliges Achsenkreuz zeichnen, dessen Spitze in einem gegebenen Punkt P liegt und von dem zwei Achsen eine zu Π senkrechte Ebene bilden.

[14] In welchem Punkt trifft eine Gerade g die von zwei sich schneidenden Geraden h_1 und h_2 gebildete Ebene H ? Legt man durch $g \perp \Pi$ eine Ebene E , so kann man in E die Schnittgerade l von H mit E konstruieren als die Gerade, welche die beiden Schnittpunkte von h_1 und h_2 mit E verbindet. In der Umlegung ist dann (1) leicht zu finden; ihr Schnittpunkt mit (g) liefert den gesuchten Punkt. Wie ist die Lösung, wenn $g_1 \parallel g_2$?

Damit hat man die Grundaufgabe der Durchdringungen gelöst, und folgende Aufgaben sind nur noch Anwendungen:

[15] Ein Dreieck oder [16] ein Parallelogramm soll mit einer Geraden zum Schnitt gebracht werden.

[17] Zwei Ebenen sind durch zwei Paare sich schneidender Geraden gegeben; man soll die Schnittgerade der Ebenen finden. Man bestimmt erst den Schnittpunkt der ersten Ebene mit der einen Geraden der zweiten Ebene und dann ebenso mit der andern Geraden der zweiten Ebene. Die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte ist die gesuchte.*)

Eine andere Sorte von Aufgaben, die wir jetzt auch lösen können, ist: [18] Durch einen Punkt P ist eine Gerade e zu legen, die zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 schneidet. Man greift auf g_1 einen beliebigen Punkt Q heraus und legt die Hilfsgerade $h = PQ$. Nach [14] bestimmt man den Schnittpunkt X von g_2 mit der Ebene ($g_1 h$). Dann ist PX die gesuchte Gerade. Man löse diese Aufgabe auch da-

*) Bei diesen Aufgaben muß beachtet werden, daß gegebenenfalls beide Raumteile benötigt werden; dann müssen die Projektionen der Geraden über ihre Spur hinaus verlängert und vielleicht dadurch gekennzeichnet werden, daß man die Projektionen der Geradenteile vom andern Raumteil zur Unterscheidung strichelt.

durch, daß man die Hilfsgerade $h \parallel g_1$ legt. Eine andere Fassung dieser Aufgabe wäre: Man soll von einem Punkt P aus nach dem scheinbaren Schnittpunkt zweier windschiefen Geraden einen Sehstrahl legen.

[19] Zu einer Geraden m ist eine Parallele l zu ziehen, die zwei zueinander windschiefe Geraden g_1 und g_2 schneidet oder, was auf dasselbe hinauskommt, welche beiden Punkte zweier windschiefen Geraden kommen zur Deckung, wenn man parallel zu einer gegebenen Richtung projiziert? Bei der Lösung dieser Aufgabe muß man beachten, daß jetzt der Punkt P von Aufgabe [18] ins Unendliche gerückt ist; sonst ist die Lösung dieselbe. Man legt also durch einen beliebigen Punkt Q auf g_1 eine Parallele h zu m und sucht den Schnittpunkt X der Geraden g_2 mit der durch g_1 und h bestimmten Ebene. Die durch X gelegte Parallele zu m ist die gesuchte.

[20] Gesucht wird eine Gerade l , die drei zueinander windschiefe Geraden g_1, g_2, g_3 schneidet. Man wählt auf g_3 einen beliebigen Punkt Q und legt durch ihn die Gerade l , die g_1 und g_2 schneidet, also Aufg. [18]. Es gibt somit unendlich viele solche Geraden m , die auch alle zueinander windschief sind; sie bilden in ihrer Gesamtheit eine sogenannte Regelfläche 2. Ordnung. Bewegt man sich irgendwie auf dieser Regelfläche, so scheinen sich stets die drei Geraden g in der Richtung der jeweiligen Geraden l der Regelschar in einem Punkt zu schneiden. Eine solche Fläche der l hat auch noch eine zweite Schar unendlich vieler Geraden, die ganz in ihr liegen. Man findet sie, wenn man zu irgend drei der Geraden l die Geraden g konstruiert, die diese drei schneiden; zu ihnen gehören natürlich die drei gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3 . Längs jeder Geraden der einen Schar scheinen sich alle anderen in einem Punkt zu schneiden. Man kann eine solche Fläche auch so definieren: sie ist die Gesamtheit aller Punkte, von denen aus sich drei beliebige zueinander windschiefe Geraden in einem Punkt zu schneiden scheinen. Daß eine solche Fläche eine Regelfläche ist (also eine solche, die unendlich viele Geraden enthält), geht aus der Definition hervor, denn wenn von einem Punkt aus die drei Geraden sich zu schneiden scheinen, ist das auch von allen anderen Punkten der Blickrichtung der Fall.

Die Graduierung einer Geraden. Um von der Umklappung (g) einer Geraden g in Π unabhängig zu sein und damit von $\angle (gg')$, versteht man g auch mit einer Maßeinteilung unter Zugrundelegung

einer bestimmten Maßeinheit, etwa 1 cm. Die Spur von g mit Π bekommt dann die Marke Null, ein auf der Seite des Beschauers liegender Punkt auf g , der 1 cm vom Nullpunkt entfernt ist, die Marke + 1, ein 7 cm vom Nullpunkt entfernter Punkt auf g in dem vom Beschauer abgewandten Teil des Raumes die Marke - 7 usw. Diese Graduierung der Geraden denkt man sich mit projiziert. Aus der Verkürzung der Maßeinheit ergibt sich ohne weiteres der Neigungswinkel der Geraden gegen Π . Man löse folgende Aufgaben: [21] Unter welchem Winkel ist eine Gerade gegen Π geneigt, wenn bei Zugrundelegung von 1 cm als Einheitsmaß ihre Projektion eine Graduierung von $\frac{3}{4}$ cm zu $\frac{9}{4}$ cm aufweist? Welche Höhe hat ein Punkt dieser Geraden, dessen Projektion die Marke + 7,2 hat? Beide Fragen sollen konstruktiv beantwortet werden.

Man versuche ferner die bisherigen Aufgaben über Punkte oder Geraden mit dieser Darstellungsweise einer Geraden zu lösen. Diese Methode wird besonders mit Nutzen in der darstellenden Geometrie des Geländes benutzt.⁴⁾

2. Ebene Vielecke.

Haupt- und Falllinien einer Ebene. Wir verwendeten bisher schon Ebenen und bestimmten sie durch zwei in ihr liegende Geraden. Das soll auch weiterhin so geschehen, nur wählen wir jetzt besondere Geraden, einmal die Schnittgerade der Ebene mit Π , also ihre Spur mit Π oder eine Parallele dazu, also eine Spurparallele, dann eine auf diesen Geraden senkrechte Gerade der Ebene. Erstere bezeichnet man auch als Hauptlinien; es sind die Linien aller Punkte gleicher Höhen der Ebene, sie werden aus diesem Grunde auch Höhen- oder Schichtlinien der Ebene genannt. Die zu den Hauptlinien senkrechten Geraden der Ebene sind solche, die unter dem größtmöglichen Winkel gegen Π , also unter dem Neigungswinkel der Ebene gegen Π verlaufen; sie haben von allen Geraden der Ebene den stärksten Fall gegen Π , daher heißen sie Falllinien oder Böschungslinien.

Orthogonale Winkelprojektionen. Zwei derartige aufeinander senkrechte Geraden einer Ebene haben den Vorteil, daß sie sich wieder als aufeinander senkrechte Geraden in Π projizieren, denn ein rechter Winkel projiziert sich stets wieder als ein rechter, wenn einer seiner Schenkel zu Π parallel verläuft. Außerdem projizieren sich Hauptlinien als Parallelen zu Π ohne Verkürzung. Hier sei noch der Pro-

jektion von beliebigen Winkeln gedacht. Ein spitzer (stumpfer) Winkel projiziert sich gleichgroß oder kleiner (größer), wenn einer seiner Schenkel $\parallel \Pi$ liegt. Dann gilt von einem beliebigen Winkel noch der Satz, daß man ihn stets in solche Lage bringen kann, daß er in jeden anderen Winkel orthogonal projiziert werden kann.

Das Dreieck. In [2] wurde bereits vom Dreieck gesprochen. Jetzt soll diese Aufgabe noch einmal dadurch gelöst werden, daß man die ganze Ebene eines Dreiecks um die Spur der Dreiecksebene mit Π in die Projektionsebene hineindreht. Die Spur dieser Dreiecksebene erhält man durch zwei ihrer Punkte, also z. B. durch die Spuren zweier ihrer Seiten. Eine derartige Umlegung haben wir schon in [11] vorgenommen. Die weitere Durchführung ist ohne Schwierigkeiten. Wir wollen aber diese Aufgabe noch auf eine dritte Art lösen. Es kann sehr wohl vorkommen, daß die Spur der Dreiecksebene sehr weit weg fällt, dann führt folgender Weg besser zum Ziel.

[22] = [2] Wir ziehen eine solche Hauptlinie der Dreiecksebene, die durch eine Ecke und innerhalb des Dreiecks verläuft; das ist besonders leicht, wenn die Dreiecksseiten graduiert sind, denn dann braucht man nur die Gerade zu ziehen, die die in Frage kommende Ecke mit dem Punkt H der Gegenseite verbindet, die mit der Ecke dieselbe Höhe hat. Sonst müßte man auf der Gegenseite den Punkt H suchen, der mit jener Ecke dieselbe Höhe hat; vgl. [3]. Ein Lot in der Dreiecksebene von einer der anderen Ecken auf diese Hauptlinie stellt dann eine Falllinie dar. Um nun die wahre Größe des Dreiecks ABC zu finden, denken wir uns das Dreieck so um die gezeichnete Hauptlinie gedreht, bis seine Ebene parallel zu Π wird, dann ist die Projektion kongruent mit dem Dreieck selbst; wir zeichnen zwar in Π , denken uns aber alles in der zu Π parallelen Ebene gelegen. Verläuft die Hauptlinie durch A , die Falllinie durch C , so mögen sich beide in D schneiden. Dann ist $DC'C$ ein rechtwinkliges Dreieck, in dem $C'D$ schon konstruiert ist und CC' gleich der Differenz der Höhen von A und C ist. Die Hypotenuse fällt dann bei der Drehung über C' hinaus bis (C) . Ziehen wir jetzt $(C)H$ und bringen es mit der Falllinie durch B' zum Schnitt in (B) , so ist $\triangle A(C)(B)$ das gesuchte.

[23] Man bestimme den Neigungswinkel eines Dreiecks gegen Π . Die Falllinie eines Dreieckspunktes gibt in der Umlegung um ihre Projektion gegen diese den Neigungswinkel der Ebene gegen Π an.

Affine Lage von Dreiecken. Ein Dreieck ABC werde um eine

Hauptlinie als Drehgerade in eine zu Π parallele Ebene Π_1 gedreht und heiße dann $A_1B_1C_1$. $A'B'C'$ sei ferner die Projektion von ABC auf Π_1 . Denken wir uns die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ verlängert bis zur Drehgeraden und ebenso die Seiten des Projektionsdreiecks $A'B'C'$, so müssen sich entsprechende Seiten je im nämlichen Punkt der Drehgeraden schneiden; außerdem liegen entsprechende Punkte auf Parallelen, nämlich auf Senkrechten zu jener Drehgeraden (die ja eine Hauptlinie ist). Der Grund des ersten Teiles unserer Behauptung liegt darin, daß sich die Schnittpunkte auf der Drehgeraden in sich selbst projizieren; daß ferner z. B. A_1A' senkrecht zur Drehgeraden liegt, folgt daraus, daß bei solchen Drehungen um eine Hauptgerade die Falllinien sich in Ebenen senkrecht zur Drehgeraden bewegen, also auf ihre Projektion zu liegen kommen. Eine solche Lagenbeziehung wie die der beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A'B'C'$ ist ein besonderer Fall von Affinität.

Affinität und Perspektivität ebener Figuren. Die letzten Betrachtungen führten auf Lagenbeziehungen von affinen Dreiecken, die wir noch von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus betrachten müssen, um uns dann weiter ebenen Schnitten von Prismen, Pyramiden, Zylindern und Kegeln zuwenden zu können. Da nun die Affinität nur ein besonderer Fall der Perspektivität ist, wenden wir uns gleich dieser zu und betrachten zwei ebene Schnitte ein und derselben Pyramide. Der Einfachheit halber wählen wir zunächst eine dreiseitige Pyramide $ABCO$, die von einer beliebigen Ebene entsprechend im Dreieck $A'B'C'$ geschnitten werden mag. Das Dreieck $A'B'C'$ kann dann von O aus durch Zentralprojektion aus ABC entstanden gedacht werden oder umgekehrt; solche Dreiecke nennt man perspektive Dreiecke; für sie gilt folgender Satz:

Liegen zwei Dreiecke perspektiv, also derart, daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt O gehen, so schneiden sich entsprechende Seiten oder deren Verlängerungen in Punkten, die auf einer Geraden liegen. Da sich die Verbindungsgeraden AA' , BB' , CC' in einem Punkt O schneiden, müssen sie zu zweit je in einer Ebene liegen; folglich sind die in diesen Ebenen liegenden Seitenpaare AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ nicht windschief, sondern schneiden sich in drei Punkten, die sowohl in der Ebene ABC als auch in der von $A'B'C'$, also in der den beiden Dreiecksebenen gemeinsamen Schnittgeraden liegen.

Aber auch die Umkehrung des obigen Satzes gilt, daß nämlich zwei Dreiecke, deren entsprechende Seiten sich in Punkten einer Geraden schneiden, perspektiv sind, d. h. daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken sich in einem Punkt schneiden.

Denn zwei entsprechende Seiten der Dreiecke liegen in einer Ebene, und zwei solcher Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die zwei entsprechende Ecken miteinander verbindet; die drei Ebenen der drei Seitenpaare schneiden sich dann in drei Geraden, die natürlich als Schnitte dreier Ebenen sich in einem Punkt, also O , schneiden müssen. Dieser letzte Punkt O heißt Perspektivitätszentrum, die von O ausgehenden Strahlen nach den Ecken der Dreiecke heißen Perspektivitätsstrahlen, und die Schnittgerade der Dreiecksebenen heißt Perspektivitätsachse.

Nachdem auf diese Weise der Satz von perspektiven Dreiecken mit seiner Umkehrung im Raum bewiesen ist, gilt er für perspektive Dreiecke in derselben Ebene natürlich auch; wir können sie zwar nicht mehr als ebene Schnitte von einer dreiseitigen Pyramide auffassen, aber sie haben immer noch dieselbe Eigenschaft wie oben, daß die Verbindungsstrahlen entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen. Der Beweis dafür, daß auch dann noch die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen, beruht darauf, daß die jetzt ebene Konfiguration $(O, ABC, A'B'C')$ als Zentralprojektion der obigen räumlichen auf eine Ebene aufgefaßt werden kann; entsprechendes gilt von der Umkehrung. Diesen Sonderfall des Doppelsatzes über perspektive Dreiecke bezeichnet man als Desargueschen Satz.

Dieser Satz ist ein schönes Beispiel für das Prinzip der Dualität in der Geometrie der Lage. Jedem Satz, der reine Lagenbeziehungen von Geraden und Punkten behandelt, kann sofort ein anderer an die Seite gestellt werden (wir nannten das oben Umkehrung), der von Punkten und Geraden handelt; so z. B. wird einmal von drei Strahlen gesprochen, die sich in einem Punkt schneiden, auf der anderen Seite von drei Punkten, die in einer Geraden liegen.

Rückt das Perspektivitätszentrum ins Unendliche, so daß die Perspektivitätsstrahlen zueinander parallel werden, so spricht man von einer Affinität der Dreiecke, die parallelen Geraden sind dann Affinitätsstrahlen, und die Perspektivitätsachse wird zur Affinitätsachse. Liegen die Affinitätsstrahlen senkrecht zur Affinitätsachse, wie oben, so spricht man von senkrechter Affinität. Welche besonde-

24 I. Darst. Geometrie bei Verwendung nur einer Projektionstafel
 ren Lagen der Dreiecke ergeben sich, wenn statt des Perspektivitäts-
 zentrums die Perspektivitätsachse ins Unendliche rückt, oder wenn
 beide ins Unendliche rücken?

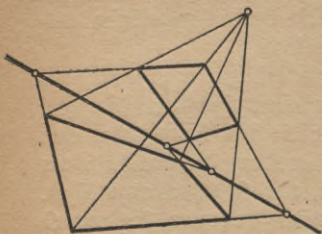


Fig. 2.

Sind zwei perspektive Dreiecke in derselben Ebene gegeben, gehen also die Verbindungsstrahlen entsprechender Ecken durch einen Punkt, so ist die Perspektivitätsachse konstruierbar. Andererseits kann man zu einem gegebenen Dreieck das perspektive konstruieren, wenn Perspektivitätsachse und -zentrum und ein Punkt des Dreiecks gegeben ist. Man überlege

sich das Entsprechende bei der Affinität!

Durch drei Punkte läßt sich stets eine Ebene legen, d. h. das Dreieck ist von selbst eine ebene Figur; das gilt nicht mehr von vier beliebigen Punkten im Raum. Daher kann man nicht von einem Desargues'schen Satz von perspektiven Vierecken reden. Zeichnet man sich also in der Ebene zwei Vierecke, deren entsprechende Ecken auf Strahlen von einem Punkt aus liegen, so brauchen entsprechende Seiten sich nicht mehr in Punkten einer Geraden zu schneiden. Erst wenn sie das tun, spricht man von perspektiven Vierecken in der Ebene; entsprechendes gilt auch von n -Ecken. Geht man im besonderen zu affinen Vielecken in der Ebene über, so kann man sagen, wenn zwei n -Ecke in derselben Ebene liegen, so daß die Verbindungsgeraden zueinander parallel sind und daß außerdem entsprechende Seiten sich in Punkten derselben Geraden schneiden, so sind sie affin.

[24] Man zeichne zwei zueinander perspektive Vierecke. Die Konstruktion ergibt sich aus der beigegebenen Figur 2. Man übe selbst weitere Konstruktionen, auch wenn die beiden Vielecke nicht auf verschiedenen Seiten der Achse liegen, oder wenn sie dieselbe schneiden.

[25] Man zeichne zwei zueinander affine Fünfecke.

[26] Man zeichne die zum Kreis affine Figur. Zu beachten ist, daß der Kreis als Vieleck mit unendlich vielen Ecken angesehen werden kann, und daß zur Konstruktion affiner Vielecke auch die Diagonalen benutzt werden können.

Ebene Schnitte von Prismen, Pyramiden, Zylindern und Kegeln.
 Ein schiefes n -seitiges, oben vorläufig unbegrenztes Prisma mag mit der Grundfläche in Π liegen; dann ist die Projektion völlig bestimmt,

wenn noch irgendein Punkt A einer Seitenkante in der früheren Weise gegeben ist. Soll das Prisma mit einer Ebene geschnitten werden, deren Spur s mit Π gegeben ist und die durch A verläuft, so sind vier n -Ecke zu betrachten: erstens die Grundfläche $A_1 B_1 C_1 D_1 \dots$, dann die Schnittfigur $ABCD \dots$, deren Projektion $A'B'C'D' \dots$ auf Π und schließlich die Umlegung $(A)(B)(C)(D) \dots$ von $ABCD \dots$ um s in Π . Nach unseren letzten Betrachtungen sind nun $A_1 B_1 C_1 D_1 \dots$ und $A'B'C'D' \dots$ affin mit s als Affinitätsachse. Da A' gegeben ist, so kann $A'B'C'D' \dots$ konstruiert werden. Nun können wir nach [11] die Schnittebene mit dem Punkt A um s in Π drehen, wobei A nach (A) fällt. Da s Affinitätsachse ist, kann $(A)(B)(C)(D) \dots$ affin zu $A'B'C'D' \dots$ konstruiert werden, und man hat die wahre Größe von der Schnittfigur erhalten.

Einfacher wird natürlich alles, wenn ein zu Π senkrecht Prisma gegeben ist, denn da fällt $A_1 B_1 C_1 D_1 \dots$ mit $A'B'C'D' \dots$ zusammen, und es muß nur die wahre Größe gesucht werden. Jetzt können folgende Aufgaben gelöst werden.

[27] Man soll ein gerades quadratisches Prisma, das mit der Grundfläche in Π steht, mit einer Ebene zum Schnitt bringen, deren Spur mit Π und deren Neigungswinkel gegen Π gegeben ist. Wie sieht die Schnittfigur aus?

[28] Bestimme das Schnittdreieck, in dem ein schiefes dreiseitiges Prisma von einer Ebene E geschnitten wird, deren Spur mit Π gegeben ist und die durch einen auf einer Prismenkante gegebenen Punkt A hindurchgeht. Man führe die Lösung auch durch für den Sonderfall $E \perp \Pi$!

[29] Löse die entsprechende Aufgabe für ein schiefes regelmäßiges fünfseitiges Prisma.

[30] und [31] Löse die entsprechenden Aufgaben zu [27] und [29], wenn einmal ein gerader oder das andere Mal ein schiefer Kreiszyylinder gegeben ist.

Bisher kamen wir mit der Affinität aus; das ist nicht der Fall, wenn es sich um ebene Schnitte von Pyramiden handelt:

[32] Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide $A_1 B_1 C_1 S$, die mit $A_1 B_1 C_1$ in Π liegt; sie soll mit einer Ebene zum Schnitt gebracht werden, deren Spur s mit Π gegeben ist und die $A_1 S$ in A schneidet. Wenn S wie früher durch seine Projektion und Höhe gegeben ist, so ist A bestimmt, wenn seine Projektion A' gegeben ist. Jetzt

ist wieder, wenn ABC die Schnittfigur darstellt, $A_1B_1C_1$ perspektiv zu $A'B'C'$ (s Perspektivitätsachse); also kann B' und C' nach [24] gefunden werden. Will man auch noch die wahre Größe von ABC konstruieren, so wird man die Umlegung $(A)(B)(C)$ von ABC um s in Π konstruieren. (A) findet man nach [11], und (B) und (C) sind dann mit Hilfe der Affinität zu erlangen, denn $A'B'C'$ und $(A)(B)(C)$ sind affin.

[33] Man übe die entsprechende Aufgabe auch für eine fünfseitige Pyramide und schließlich noch

[34] für einen Kreiskegel; zunächst achte man aber darauf, daß die schneidende Ebene alle Erzeugenden des Kegels im Endlichen schneidet.

Kegelschnitte. Die letzte Aufgabe führt uns bereits zu den Kegelschnitten, d. h. zu den ebenen Schnitten eines Kreiskegels. Da sind drei Fälle zu unterscheiden: 1. daß die schneidende Ebene E alle Erzeugenden des Kegels im Endlichen schneidet, das gibt die Ellipse; 2. daß E einer Erzeugenden parallel läuft, das gibt die Parabel, und 3. daß E zwei Erzeugenden parallel läuft, das gibt die Hyperbel. Man beachte, daß E im 3. Fall die Erzeugenden des Kegels zum Teil jenseits der Spitze, also den anderen Teil des Doppelkegels schneidet; die Hyperbel besteht also aus zwei Ästen.

Um eine Anschauung der drei verschiedenen Kegelschnitte zu erhalten, wollen wir noch eine Methode anführen, die diese Kurve wirklich als Kegelschnitte vor unserem Auge erzeugt. Man lasse eine Taschenlampe im finstern, möglichst mit etwas Rauch angefüllten Zimmer aufleuchten, der Lichtkegel sei dann unser Kreiskegel (in der Regel wird es wohl ein gerader Kreiskegel sein). Hält man die Taschenlampe derart, daß die Kegelachse senkrecht auf eine Wand trifft, so ist die beleuchtete Fläche ein Kreis, der um so größer ist, je weiter die Lampe von der Wand weggehalten wird. Neigt man die Lampe ein klein wenig, so erscheint die Ellipse als Randkurve der beleuchteten Fläche; sie ähnelt um so weniger einem Kreis, je mehr die Kegelachse gegen die Wandfläche geneigt wird. Dabei rückt aber der äußerste Punkt der Ellipse immer weiter weg. Neigt man dann die Lampe noch weiter, so daß der Strahl nach jenem äußersten Punkt der Wandfläche parallel wird, so ist die Randkurve eine Parabel, die damit als eine Ellipse aufgefaßt werden kann, von der ein Punkt im Unendlichen liegt. Dreht man nunmehr die Lampe noch weiter herum, so erscheint ein Stück eines Hyperbelastes. Denkt man sich vielleicht vor der Lampe einen

Kreis aus Draht so befestigt, daß er gerade auf dem Lichtkegel liegt, so hat man in dieser einfachen Anordnung ein Modell vor sich, das zeigt, wie der Kreis durch Zentralprojektion in die verschiedenen Kegelschnitte übergeführt werden kann.

Auf eine genaue Theorie der Kegelschnitte, im besonderen auf ihre projektive Erzeugung kann hier nicht eingegangen werden; wir verweisen da auf die angeführte Literatur.⁵⁾ Aber von dem für die Praxis wichtigsten Kegelschnitt, von der Ellipse, mag wenigstens eine punktweise Konstruktion angegeben werden, die sie als Parallelprojektion des Kreises erkennen läßt.

Die Ellipse wurde oben als Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene definiert, die alle Erzeugenden des Kegels im Endlichen schneidet. Da ein Kreiszyylinder als Kegel mit unendlich fern liegender Spitze aufgefaßt werden kann, muß auch ein ebener Schnitt dieses Zylinders als Ellipse angesehen werden. Eine solche Ellipse kann dann als Parallelprojektion eines Kreischnittes des Zylinders gedeutet werden, wobei die Zylindererzeugenden als Projektionsstrahlen benutzt werden. Könnten wir für den zu projizierenden Kreis eine Konstruktion angeben, die projektionsfest ist, wobei also die einzelnen Schritte in der Projektion ebenso wie beim Kreis ausgeführt werden können, so hätten wir zugleich eine Konstruktion der Ellipse.

Um eine solche Konstruktion des Kreises zu erhalten, bei der die Gleichheit der Radien oder der Peripheriewinkel — denn diese Eigenschaften gehen durch die Projektion verloren — nicht benutzt wird, denken wir uns dem Kreis ein Quadrat $ABCD$ umbeschrieben und die Mittelparallelen EF , GH gezogen, die sich im Mittelpunkt M schneiden. Ziehen wir von E eine beliebige Gerade, die DG in J schneidet, und fällen wir von F auf EJ das Lot FP , so muß P ein Kreispunkt sein. PF mag GM in K schneiden, dann ist $\triangle DEJ \cong \triangle FMK$, was aus $ED = MF$ und der Gleichheit der Winkel folgt. Dann ist aber auch $DJ = KM$, also auch $JG = GK$, woraus folgt $JK \parallel DM$. Man hätte also folgende Konstruktion für P : Man zieht EJ beliebig, $JK \parallel DM$ und bringt die Verlängerung von KF mit EJ in P zum Schnitt. So findet man alle Punkte des Kreises in $EMGD$, die anderen Kreisviertel ergeben sich durch Symmetrie (Fig. 3).

In der Parallelprojektion wird das Quadrat zu einem Parallelogramm. Die Konstruktion bleibt dieselbe, liefert aber jetzt eine Ellipse, die dem Parallelogramm einbeschrieben ist und dessen Seiten in den

Mitten berührt. Einen beliebigen Ellipsenpunkt P erhält man, wenn man EJ beliebig zieht, von J parallel zu DM bis K auf GH geht, K mit F verbindet und FK mit EJ in P zum Schnitt bringt (Fig. 4).

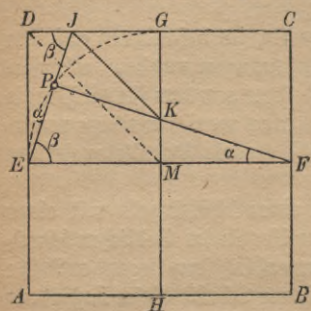


Fig. 3.

Mit Hilfe dieser Konstruktion kann man eine Ellipse stets konstruieren, sobald man ein ihr umbeschriebenes Parallelogramm hat. Darin liegt der

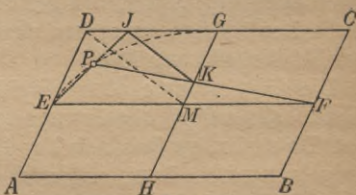


Fig. 4.

Wert der Konstruktion für die darstellende Geometrie. Denkt man sich zum Beispiel einen Kreiszylinder gegeben, der mit einer Ebene zum Schnitt gebracht werden soll (vgl. [30] und [31]), so kann man die frühere Lösung bedeutend vereinfachen, wenn man dem Kreiszylinder ein quadratisches Prisma umschreibt, so daß also den einzelnen Kreischnitten Quadrate umbeschrieben werden. Man braucht dann nur dieses quadratische Prisma mit jener Ebene zum Schnitt zu bringen und in das erhaltene Schnittparallelogramm die Ellipse einzuzeichnen.

3. Aufgaben über die Ebene.

Darstellung der Ebene. Zuerst hatten wir die Ebene dargestellt durch zwei in ihr liegende beliebige Geraden, dann durch ihre Spur s mit Π und ihrem Neigungswinkel gegen Π oder s und P , einem ihrer Punkte. Wir vereinigen jetzt beide Methoden. Wenn wir durch einen Punkt der Ebene die zugehörige Falllinie (vgl. S. 20) ziehen, so stellt sie im Verein mit der Spur zwei Geraden der Ebene dar, ganz wie im ersten Fall. Aber wir können uns auch auf die Falllinie allein beschränken, denn durch ihren Spurpunkt mit Π ist ja senkrecht zur Projektion der Falllinie die Ebenenspur s schon mit bestimmt. Durch eine einzige Gerade ist also eine Ebene bestimmt, wenn man weiß, daß sie Fallgerade dieser Ebene sein soll. Wir setzen an den Spurpunkt der Fallgeraden mit Π den Namen der Ebene, also z. B. $E(e)$. Mit dem entsprechenden

kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen wir die Falllinie. Sonst wird e genau so dargestellt wie früher (vgl. S. 17).

Die Ebene und in ihr liegende Punkte und Geraden. [35] Man soll einen Punkt P bestimmen, der in einer gegebenen Ebene $E(e)$ liegt. Offenbar kann jeder Punkt P' in Π als Projektion eines Punktes P in E angesehen werden. Es ist nur noch nötig,

seine Höhe p zu bestimmen.

Denken wir uns durch P in E die Hauptlinie h gelegt, so ist $h \perp e$ und treffe e in A , ferner ist $h' \perp e'$, und A muß dieselbe Höhe haben wie P . Also gibt $A'(A)$ die gesuchte Höhe an. Demnach muß man zu einem beliebigen Punkt P' eine

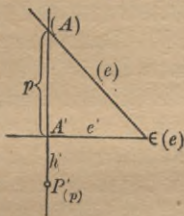


Fig. 5.

Höhe setzen, die gleich dem Stück ist, welches auf einer Geraden $\perp e'$ durch P' zwischen e' und (e) liegt (Fig. 5).

[36] Gegeben ist eine Ebene $E(e)$ und die Projektion g' einer in E liegenden Geraden g ; man soll den Neigungswinkel von g gegen Π finden. Die Spur von g mit Π ist der Schnitt von g' mit der Spur von E mit Π , also mit dem im Spurpunkt von e mit Π auf e' errichteten Lot. Zieht man nun eine beliebige Hauptlinie h in E , deren Projektion auf Π e' in Q' , (e) in (Q) schneidet, so mag sie g' in P' schneiden; zieht man ferner $P'(P) \perp g'$ und $= Q'Q'$, so ist (P) ein Punkt von (g) , womit aber die Gerade (g) , also auch g selbst und ihr Neigungswinkel α gegen Π gefunden ist (Fig. 6). Man beantworte nach [35] und [36] die Frage: Wann liegen eine Ebene E und ein Punkt P oder eine Ebene E und eine Gerade g vereinigt?

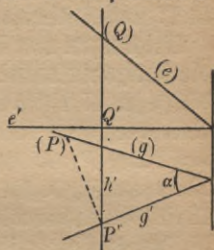


Fig. 6.

[37] Es soll durch eine Gerade g und einen nicht auf ihr liegenden Punkt P eine Ebene E gelegt werden. Man sucht zunächst auf g einen Punkt Q , der dieselbe Höhe wie P hat [3], dann ist $Q'P'$ eine Hauptlinie, und ihre Parallele durch die Spur von g mit Π ist die Spur von E . Da man außer der Spur von E mit Π noch den Punkt P kennt, ist die Darstellung von E durch die durch P gehende Falllinie gefunden.

[38] Durch zwei sich schneidende Geraden g und h ist eine Ebene zu legen. Die Spuren von g und h mit Π liefern die Spur s der gesuchten Ebene und der Schnittpunkt P von g und h die zu bestimmende Falllinie.

[39] Man soll die Winkelhalbierende zwischen zwei sich schneidenden Geraden bestimmen. Durch Umlegung des Dreiecks g, h, s in [38] um s in Π erhält man $\sphericalangle gh$, diesen halbiert man und dreht zurück.

[40] Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h ; man soll ihren Abstand ermitteln. Man legt die Ebene der beiden Parallelen um in Π und bestimmt da den gesuchten Abstand.

Neigungen von Ebenen und in ihnen liegenden Geraden gegen die Horizontalebene. [41] Durch einen Punkt P ist eine Ebene zu legen, die gegen Π unter einem Winkel α geneigt ist und die außerdem zu einer Geraden g parallel ist. Die Spurpunkte der Falllinien aller Ebenen durch P , die gegen Π unter $\sphericalangle \alpha$ geneigt sind, liegen auf einem Kreis um P' , dessen Radius r als Kathete aus einem rechtwinkligen Dreieck gefunden wird, dessen andere Kathete gleich der Höhe von P ist, der $\sphericalangle \alpha$ gegenüberliegt. Zieht man durch P eine Parallele zu g mit dem Spurpunkt S , so muß die Spur der gesuchten Ebene durch S gehen und Tangente an dem obigen Kreis sein. Die Lote von P auf die beiden möglichen Tangenten sind die Falllinien der gesuchten Ebenen.

[42] Durch eine Gerade g ist eine Ebene von gegebener Neigung α gegen Π zu legen. (Zu lösen wie [41].)

[43] Man soll durch einen Punkt P in einer Ebene E eine Gerade g von gegebener Neigung α gegen die Spur von E mit Π ziehen. Man zeichne in der Umlegung der Ebene E um die Spur in Π . Diese Aufgabe ist nicht zu verwechseln mit der folgenden:

[44] Man soll durch einen Punkt P in einer Ebene E eine Gerade g von gegebener Neigung α gegen Π ziehen. Man zeichne wie in [41] den Kreis um P' für α ; er schneidet die Spur von E in zwei Punkten, durch die die gesuchten Geraden g verlaufen müssen. (Anders ausgedrückt würde diese Aufgabe auch lauten: In einem Strahlenbüschel sollen diejenigen Strahlen gefunden werden, die eine gegebene Neigung gegen Π haben.) Wann hat die Aufgabe keine Lösung?

Besondere Lagen von Ebenen. Eine Darstellung der Ebene in der bisherigen Art ist unmöglich, wenn die Falllinien sich nicht darstellen lassen, also wenn die Ebene $\parallel \Pi$ oder $\perp \Pi$ ist. Im ersten Fall sind alle Projektionen von Figuren in der Ebene mit diesen kongruent; es muß nur der Abstand der Ebene von Π irgendwie angegeben werden. Im zweiten Fall ist die Projektion einer Falllinie ein einziger Punkt und die Ebene ist durch ihre Spur eindeutig gegeben. Man löse hier- nach die Aufgabe:

[45] Durch einen gegebenen Punkt P ist $\perp \Pi$ eine Ebene parallel zu einer gegebenen Geraden g zu ziehen.

Parallele Ebenen haben parallele Spuren und parallele Falllinien.

[46] Durch einen Punkt P ist eine zu einer gegebenen Ebene E parallele Ebene zu legen. Man sucht auf e den Punkt Q , der mit P die gleiche Höhe hat [3]; dann sind Haupt- und Falllinie der gesuchten Ebene durch P parallel zu den entsprechenden Linien der gegebenen Ebene durch Q .

Aufgaben über Ebenen und sie schneidende Geraden. [47] Eine Ebene E ist mit einer beliebigen Geraden g zum Schnitt zu bringen. Wir legen durch g eine Hilfsebene $\perp \Pi$, die E in h schneiden mag.

Kann man h konstruieren, so liefert in der Umlegung der Schnittpunkt (S) von (g) und (h) den gesuchten Schnittpunkt S von g mit E . Fig. 7 erläutert die hier angedeutete Konstruktion. Die Hilfsgerade h ist gefunden durch die beiden Punkte A und B . A ist der Spurpunkt von h und liegt als solcher auf der Spur von E , aber er muß auch auf g' liegen, das mit h' zusammenfällt. B ist der Punkt von h , also auch von der Ebene E , dessen Projektion mit dem Spurpunkt von g zusammenfällt; seine Höhe k erhält man wie in [3] durch ein Lot von B' auf e' . $(B)A$ ist dann (h) .

[47a] Ein Dreieck ist durch seine Eckpunkte gegeben; man soll es mit einer Geraden g zum Schnitt bringen. Man legt wieder eine Hilfsebene $\perp \Pi$ durch g , die die Dreiecksebene in h schneidet und konstruiert in der in Π um g' umgelegten Hilfsebene den Schnittpunkt von (g) und (h) .

Die Aufgabe [47] ist die Grundaufgabe für alle Parallelprojektionen irgendwelcher Figuren auf eine gegebene Ebene oder, was auf dasselbe hinauskommt, aller Schattenaufgaben bei parallelem Licht auf irgendeine Ebene. Man löse hiernach [48]: Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC , eine beliebige Ebene E und die Richtung paralleler Lichtstrahlen. Man soll den Schatten von ABC auf E ermitteln. Besonders einfach wird die Aufgabe, wenn E mit Π zusammenfällt.

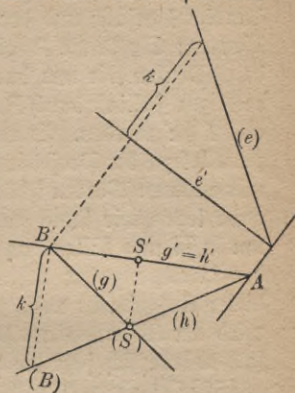


Fig. 7.

Lot auf Ebenen. [49] Von einem Punkt P soll auf eine Ebene E das Lot l gefällt und der Fußpunkt F ermittelt werden, mit anderen Worten: Ein Punkt P soll auf eine Ebene E senkrecht projiziert werden. Denken wir uns durch F in E die Hauptlinie gezogen, die senkrecht zur Falllinie durch F verläuft, so muß l auf beiden senkrecht stehen also $l \parallel e'$ werden. Es wird also stets ein Lot zu einer Ebene auf Π parallel zu der Projektion der Falllinien dieser Ebene projiziert oder mit anderen Worten senkrecht zur Spur dieser Ebene. In unserer Aufgabe legen wir somit durch P eine Ebene $A \perp \Pi$ und $\parallel e$, drehen A um in Π und fällen von (P) auf (e) ein Lot, dessen Schnittpunkt mit der Umlegung der Schnittgeraden von E mit A (F) liefert. Mit dieser Aufgabe ist auch zugleich die folgende gelöst: [49a] Gesucht wird der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E . Besonders einfach würde sich jetzt die Lösung folgender Aufgabe gestalten:

[50] In einem Punkt P soll auf einer Ebene E ein Lot errichtet werden. Man errichtet in der Umlegung in (P) auf (e) das Lot. Damit ist zugleich auch umgekehrt die Aufgabe gelöst [51]: Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr ein Punkt P , man soll durch $P \perp g$ eine Ebene legen.

Rechtwinklige Achsenkreuze in senkrechter Projektion. In einem besonderen Fall hatten wir schon in [13] die Projektion eines solchen Achsenkreuzes (drei von einem Punkt ausgehende aufeinander senkrechte Strahlen) konstruiert; jetzt soll [52] ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz auf Π projiziert werden. Ein Lot auf einer Ebene E können wir errichten; es fehlt also nur noch, daß man in E durch den Fußpunkt zwei sich senkrecht schneidende Geraden konstruiert, was in der Umlegung der Ebene E um ihre Spur in Π ausgeführt werden kann. Wir wollen aber diese Aufgabe von einer anderen Seite aus betrachten und folgende Aufgabe lösen:

[53] Ein beliebiges Tetraeder $ABCO$, dessen von O ausgehende Kanten ein dreiseitiges rechtwinkliges Achsenkreuz bilden, soll auf die Grundfläche ABC ($= \Pi$) projiziert werden. Ist O' die gesuchte Projektion von O auf ABC , so können die Seiten dieses Dreiecks als Spuren der Seitenflächen mit der Grundfläche ABC betrachtet werden. Nun ist z. B. $OA \perp OBC$, d. h. es muß auch $O'A \perp BC$ sein als Lot auf einer Ebene, deren Spur BC ist; dasselbe gilt von den anderen Seiten. Aber auch die Falllinien der Seitenflächen und ihre Projektion müssen senkrecht auf deren Spuren stehen; so muß z. B. die Projektion

der Höhe OA_1 von $\triangle OBC$, das ist $O'A_1 \perp BC$ sein. Mit anderen Worten: AO' und $O'A_1$ müssen auf einer Geraden liegen; dasselbe gilt von BO' und $O'B_1$, CO' und $O'C_1$. Das rechtwinklige dreiseitige Achsenkreuz projiziert sich also in die drei Höhen des Grunddreiecks ABC .

Um nun rückwärts aus der Projektion $ABCO'$ die Längen OA , OB , OC zu erhalten, denken wir uns das Dreieck AOB in die Ebene der Grundfläche (in Π) hineingedreht und müssen nur beachten, daß bei (O) dann ein rechter Winkel auftritt. In Fig. 8 liefert die Umlegung $AB(O)_1$ die Längen AO und BO . Um CO zu erhalten, legt man $\triangle COC_1$ um CC_1 um und erhält so die noch fehlende dritte Länge $CO = C(O)_2$.

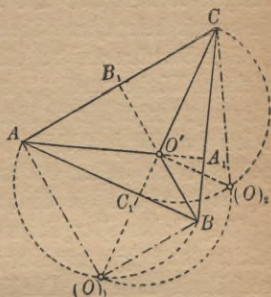


Fig. 8.

Ein dreiseitiges rechtwinkliges Achsenkreuz kann nun durch eine Ebene stets so geschnitten werden, daß das Dreieck aus den drei Achsen schnittpunkten — das Schnittdreieck — einem gegebenen spitzwinkligen Dreieck kongruent wird. Da aber die drei Höhen in einem solchen Dreieck stets stumpfe Winkel miteinander bilden (es sind die Supplementwinkel der Dreieckswinkel), so kann man auch sagen, daß unser Achsenkreuz stets so von einer Ebene geschnitten werden kann, daß die Höhen des Schnittdreiecks irgend drei Richtungen parallel laufen, die stumpfe Winkel miteinander bilden. Daraus folgt der wichtige Satz: Irgend drei von einem Punkt ausgehende Strahlen, die in einer Ebene liegen und miteinander stumpfe Winkel bilden, können stets als senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes auf jene Ebene angesehen werden.

Eigentlich bildet das Achsenkreuz acht einzelne Oktanten; wir haben bisher immer nur denjenigen betrachtet, dessen drei Achsen sämtlich die Projektionsebene schneiden. Ein solcher einzelner Oktant kann also auch so im Raum liegen, daß nur zwei oder nur ein oder gar kein Strahl die Projektionsebene schneidet. Wir können von einem Oktanten, dessen Achsenprojektionen dann nicht mehr alle stumpfe Winkel miteinander zu bilden brauchen, sofort zu demjenigen übergehen, dessen Achsen wieder alle die Projektionsebene schneiden, wenn

wir diejenigen Strahlen rückwärts über den Achsenschnittpunkt verlängern, die die Projektionsebene nicht schneiden. Nach diesen Betrachtungen können wir uns auf solche Oktanten beschränken, wie wir sie zuerst betrachtet haben.

Alle Strecken auf derselben Achse werden nun bei der Projektion im gleichen Maße verkürzt, aber für jede Achse kommt ein anderes Verkürzungsverhältnis in Betracht. Es bleibt also noch die Aufgabe zu erledigen, für jede Achse das Verkürzungsverhältnis anzugeben. Das geschieht am besten dadurch, daß man auf jeder Achse vom Achsenschnittpunkt aus die Einheitsstrecke abträgt.

[54] In der Projektionsebene Π ist ein Achsenkreuz durch die Projektion der Achsen gegeben; man soll für jede Achse das Verkürzungsverhältnis angeben. Die Projektion des Achsenschnittpunktes O sei wieder O' , die drei Achsen seien durch I, II, III bezeichnet; dann wähle man zwei Punkte A und B auf I und II derart, daß die Verbindungslinie $AB \perp III$ wird und ferner auf III den Punkt C , so daß $AC \perp II$ wird, von selbst wird dann $BC \perp I$. Die wahren Längen von OA , OB , OC konstruiert man dann wie in [52], auf denen man dann eine Einheitsstrecke $OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1$ annehmen kann, die rückwärts die Projektionen $O'A_1'$, $O'A_2'$, $O'A_3'$ liefert.

Mehrere Ebenen. [55] Man soll die Schnittgerade zweier Ebenen A und B bestimmen. Ist eine der beiden Ebenen $\perp \Pi$, so haben wir diese Aufgabe schon in [47] gelöst. Liegen die beiden Ebenen aber beliebig, so lösen wir die Aufgabe dadurch, daß wir eine Hauptlinie von A mit einer solchen von B zum Schnitt bringen, die denselben Abstand von Π hat. Ihr Schnittpunkt ist ein Punkt der Schnittgeraden, seine Verbindungsgerade mit dem Schnittpunkt der beiden Spuren von A und B mit Π ist die gesuchte Gerade. Wie findet man nun jene beiden Hauptlinien? Wir greifen auf a , die unsere Ebene A darstellende Falllinie, einen beliebigen Punkt P heraus und ziehen durch ihn die Hauptlinie in A . Dann suchen wir auf b nach [3] denjenigen Punkt Q , der dieselbe Höhe wie P hat und ziehen dadurch die Hauptlinie in B . Der Schnittpunkt X der beiden Hauptlinien ist ein Punkt der Schnittlinie von A und B und die Verbindungslinie von X mit dem Schnittpunkt Y der beiden Spuren von A und B ist die gesuchte Schnittlinie x . Da man die Höhe von X kennt, ist die Umlegung (x) sofort konstruierbar und damit auch der Neigungswinkel α von x gegen Π (Fig. 9).

Solche Aufgaben spielen eine Rolle bei der Konstruktion von Dächern

(Dachausmittlungen!), die in allen größeren Werken über darstellende Geometrie⁸⁾ behandelt werden.

[56] Gesucht wird der Schnittpunkt von drei Ebenen. Eine zweimalige Durchführung von [55] führt zum Ziel.

Neigungswinkel zweier Ebenen.

[57] Man soll den Neigungswinkel α zweier Ebenen A und B bestim-

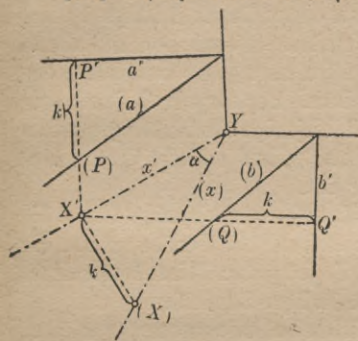


Fig. 9.

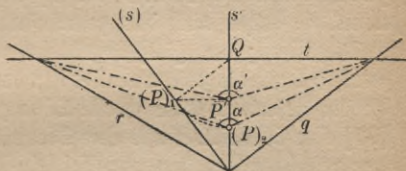


Fig. 10.

men. Zunächst könnte man von irgendeinem Punkt im Raum je ein Lot auf A und B fallen nach [49] und dann nach [11] den Winkel dieser beiden Lote bestimmen; er ist der Supplementwinkel des gesuchten. Will man aber die Aufgabe direkt lösen, so muß man zunächst nach [55] die Schnittgerade der beiden Ebenen bestimmen und zu ihr eine senkrechte Ebene E legen. Seien r und q die Spuren der Ebenen A und B und s die Schnittgerade, so möge t die Spur einer Ebene E sein, die $\perp s$ verläuft. Um den Schnittpunkt P von s mit E zu bestimmen, fallen wir von Q , dem Schnittpunkt von s' mit t , das Lot auf (s) , der Fußpunkt $(P)_1$ muß dann der in Π umgelegte Punkt P sein. Legen wir dagegen die Ebene E um t in Π um, so fällt P in der Umlegung nach $(P)_2$, und die Verbindungslinien von $(P)_2$ mit den Schnittpunkten von t mit r und q geben den gesuchten Winkel, während die entsprechenden Verbindungen mit P' die Projektion dieses Winkels bei P auf Π geben (Fig. 10).

Haben die beiden Ebenen A und B eine Schnittgerade $s \parallel \Pi$, so liegt der gesuchte Winkel in einer zu Π senkrechten Ebene, die dann auch zu s senkrecht ist; in dieser Ebene konstruiert man den gesuchten Winkel.

Kürzester Abstand zweier windschiefen Geraden. [58] Man soll zu zwei windschiefen Geraden a und b den kürzesten Abstand konstru-

ieren. Um zunächst festzustellen, was man darunter versteht, denken wir uns auf der Geraden a einen Punkt A wandern und jedesmal seinen Abstand von b gemessen. Einer dieser Abstände muß der kürzeste sein. Stellen wir uns daselbe mit einem Punkt B längs b vor, so muß B ebenfalls einmal einen kürzesten Abstand von a haben. Diese beiden ausgezeichneten Lagen müssen aber zusammenfallen, da sonst zwei kürzeste Abstände möglich wären. Der kürzeste Abstand der beiden windschiefen Geraden ist somit diejenige Verbindungsgerade zweier Punkte auf a und b , die zugleich auf beiden senkrecht steht; man nennt sie daher auch das gemeinsame Lot.

Die Lösung von [58] beruht darauf, daß man diejenige Ebene E durch b legt, die zu a parallel ist; der Abstand der Geraden a von E ist der gesuchte. Eine zweite Lösung ist folgende: Man konstruiert [51] eine Ebene $\perp a$ und eine Ebene $\perp b$. Ihre Schnittlinie s muß zu der gesuchten Geraden parallel sein. Man hat also nur noch $\parallel s$ eine Gerade zu legen, die a und b schneidet; vgl. [19].

Besonders einfach wird die Konstruktion von [58], wenn eine der beiden Geraden $a \perp \Pi$ gegeben ist. Dann muß das gemeinschaftliche Lot $l \parallel \Pi$ sein, also wird sich auch $\sphericalangle(l, b)$ wieder als Rechter projizieren. Man braucht also nur von dem Punkt, der die Projektion von a darstellt, auf die Projektion b' von b das Lot zu fällen. Liegen die beiden Geraden a und b derart, daß $a' \parallel b'$, so ist das gesuchte gemeinschaftliche Lot gleich dem Abstand der beiden Projektionen a' und b' , denn dieses ist dann $\parallel \Pi$. Man muß also in Π eine Gerade konstruieren, welche die zwei Punkte gleicher Höhen auf a' und b' verbindet.

4. Dreikantkonstruktionen.

Die verschiedenen Fälle. Drei von einem Punkt ausgehende Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, bilden eine dreiseitige Ecke oder ein Dreikant. Die von je zwei Kanten gebildeten Winkel heißen die Seiten- oder Flächenwinkel, kurz die Seiten der Ecke, während die Winkel, unter denen die Ebenen je zweier Kanten gegeneinander geneigt sind, die Kantenwinkel oder kurz die Winkel der Ecke heißen; erstere werden mit a, b, c bezeichnet, letztere mit α, β, γ^*). Aus je

*) Ausnahmsweise bezeichnen hier die kleinen lateinischen Buchstaben keine Geraden; diese Inkonsequenz in der Bezeichnung sei hier gestattet, weil diese Art der Bezeichnung bei den Dreikantkonstruktionen allgemein üblich ist und hier nicht zu Verwechslungen Anlaß bieten kann.

dreien dieser sechs Stücke können die übrigen durch Konstruktion gefunden werden. Es sind folgende Fälle der gegebenen Stücke möglich:

- | | | | |
|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| I. 1. a, b, c | 2. a, b, γ | 3. a, b, α | a, b, β |
| | b, c, α | b, c, β | b, c, γ |
| | c, a, β | c, a, γ | c, a, α |
| II. 1. α, β, γ | 2. α, β, c | 3. α, β, a | α, β, b |
| | β, γ, a | β, γ, b | β, γ, c |
| | γ, α, b | γ, α, c | γ, α, a |

Alle 20 Fälle lassen sich auf drei zurückführen. Zunächst die unter II auf die entsprechenden unter I mit Hilfe des Satzes über die Polarecke. Fällt man nämlich im Innern einer Ecke von einem beliebigen Punkt P auf die drei Seitenflächen der Ecke die Lote, so bilden diese eine Ecke, deren Seiten und Winkel entsprechend mit $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ bezeichnet werden mögen. Stellt man sich von einer Ecke mit ihrer Polarecke ein Modell her und fällt man außerdem von den Fußpunkten der drei Lote aus P auf die Seitenflächen in diesen die Lote auf die Kanten, so erkennt man ohne weiteres, daß je zwei dieser Lote in derselben Seitenfläche der Ecke die Winkel der Polarecke einschließen, während solche in zwei verschiedenen Seitenflächen die Winkel der Ecke einschließen. Je ein Winkel der Ecke liegt mit einer Seite der Polarecke in einem Vierecke, dessen beide anderen Winkel Rechte sind; dasselbe gilt von je einem Winkel der Polarecke und der entsprechenden Seite der Ecke. Hiernach gilt folgender Satz: Je ein Winkel einer Ecke ist der Supplementwinkel zur entsprechenden Seite der Polarecke, und umgekehrt je ein Winkel der Polarecke ist der Supplementwinkel zu der entsprechenden Seite der Ecke selbst. Kann man also die Aufgaben I lösen, so findet man die Lösungen der Aufgaben II dadurch, daß man z. B. bei II 1. aus den Supplementwinkeln zu α, β, γ , also aus a', b', c' die Ecke konstruiert, also α', β', γ' findet; die Supplemente zu α', β', γ' sind die gesuchten Seiten zu den gegebenen Winkeln α, β, γ .

Die drei Grundaufgaben. Die zehn verschiedenen Aufgaben I können nun auf die drei folgenden Aufgaben zurückgeführt werden, da sich die anderen durch zyklische Vertauschungen der Benennungen darauf zurückführen lassen:

1. a, b, c 2. a, b, γ 3. a, b, α .

Bei den Lösungen dieser drei Aufgaben denken wir uns stets eine Seite

in Π gelegt; es soll dann jedesmal die Projektion der dritten in den Raum ragenden Kante auf Π gefunden, sowie die fehlenden drei Stücke konstruiert werden.

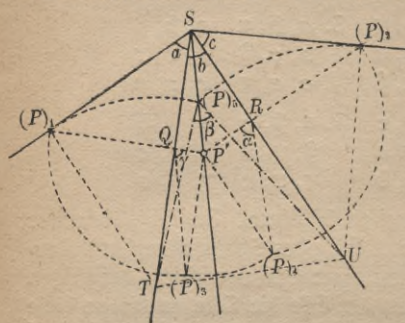


Fig. 11.

der Ecke vereinigen. Wir greifen auf den beiden freien Schenkeln zwei Punkte $(P)_1$ und $(P)_2$ heraus, so daß $S(P)_1 = S(P)_2$. Bei dem Herumdrehen wandern dann die Projektionen dieser Punkte auf Lote zu den gemeinsamen Schenkeln; ihre Fußpunkte heißen Q und R . Der Schnittpunkt der Lote muß P' sein, also die Projektion von P auf Π . SP' ist die Projektion der dritten Kante der Ecke auf Π . Die rechtwinkligen Dreiecke $QP'P$ und $RP'P$ können in der Umlegung um QP' und RP' konstruiert werden, weil man die eine Kathete QP' bzw. RP' und die Hypotenuse $QP = Q(P)_3 = Q(P)_1$ bzw. $RP = R(P)_4 = R(P)_2$ kennt. Die Winkel bei Q und R sind die gesuchten Neigungswinkel γ und α . Um β zu finden, denkt man sich in P zur Kante SP in den Seitenebenen der Seiten a und c Lote errichtet, die die beiden gemeinschaftlichen Schenkel SQ und SR in T und U schneiden. Schlägt man um T mit $T(P)_1$ und um U mit $U(P)_2$ Kreisbögen, so mögen sich diese in $(P)_5$ treffen. $\sphericalangle T(P)_5U$ ist der dritte Winkel β der Ecke. Vgl. hierzu auch [57].

[60] Ein Dreikant soll aus zwei Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ konstruiert werden. Legen wir a und b wieder wie oben hin, so kann daraus und mit Hilfe des Winkels γ die ganze Fig. 11 rekonstruiert werden. Man nimmt $(P)_1$ wieder beliebig an, zieht $(P)_1Q$, konstruiert $\triangle QP'(P)_3$, $P'R$, $\triangle P'R(P)_4$ (da $P'(P)_3 = P'(P)_4$), $R(P)_2 = R(P)_4$ usw.

[59] Ein Dreikant soll aus den drei Seiten a, b, c konstruiert werden: Wir legen die drei gegebenen Größen a, b, c in die Ebene Π , so daß sie einen gemeinsamen Scheitel S und zwei gemeinsame Schenkel haben (Fig. 11). Die Aufgabe besteht nun darin, a und c je um den mit b gemeinsamen Schenkel herumzudrehen, daß sich ihre freien Schenkel zur dritten Kante

[61] Aufgabe: Ein Dreikant soll aus zwei Seiten a, b und dem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel α konstruiert werden.

Wir denken uns wieder a, b, c wie oben in Π ausgebreitet; jetzt soll aber die Seite c in Π festliegen, und es muß erst b herumdreht werden und auch noch a um die dann im Raum liegende Kante. Wir greifen auf der a und b gemeinsamen Kante einen beliebigen Punkt $(P)_1$ heraus, fällen das Lot $(P)_1 Q$, tragen in Q an der Verlängerung a an und machen den freien Schenkel

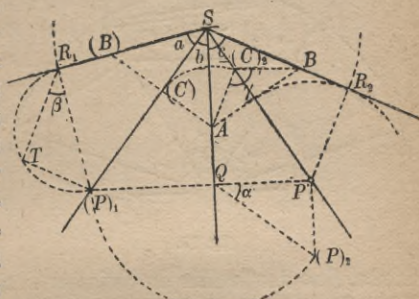


Fig. 12.

gleich $(P)_1 Q$ bis $(P)_2$, ziehen $(P)_2 P' \parallel SQ$. Die Lage des freien Schenkels von c kennen wir noch nicht, aber das Lot von P' auf diesen können wir bestimmen aus einem rechtwinkligen Dreieck, von dem die eine Kathete $PP' = (P)_2 P'$ ist. Die Hypotenuse in diesem rechtwinkligen Dreieck ist das von P in der Ebene von a auf jenen freien Schenkel gefällte Lot, das man erhält, wenn man von $(P)_1$ in dem schon gezeichneten Winkel a das Lot $(P)_1 R_1$ fällt. Innerhalb a ist diese andere Kathete als TR_1 konstruiert, wobei $(P)_1 T = P'(P)_2$ ist. Der gesuchte freie Schenkel für c von S aus muß jetzt Tangente an einen Kreis um P' mit TR_1 als Radius sein; R_2 sei Berührungspunkt, dann ist $\sphericalangle QSR_2 = \sphericalangle c$ und $\sphericalangle TR_1(P)_1 = \sphericalangle \beta$. Den Winkel γ findet man dadurch, daß man die a und b gemeinsame Kante in einem beliebigen Punkt C durch eine Ebene rechtwinklig schneidet, die die beiden anderen Kanten in A und B trifft. $\sphericalangle ACB$ ist dann der gesuchte. Die Konstruktion ergibt sich aus Fig. 12.

Vertauscht man in der eben behandelten Aufgabe a mit b und ersetzt man α durch β , so ist auch die erste der Aufgaben der zweiten Gruppe I. 3. gelöst. Auch die ersten drei Aufgaben von II. lassen sich direkt lösen, aber darauf gehen wir nicht ein.

Zu bemerken ist noch, daß für die Seiten und Winkel folgende Bestimmungen gelten müssen, falls die Konstruktionen möglich sein sollen: die Summe der Seiten (Σa) muß kleiner als 4 Rechte sein, während die Summe der Winkel ($\Sigma \alpha$) kleiner als 6 Rechte, aber größer als

2 Rechte sein muß. Die Aufgaben [59] und [60] sind dann stets möglich, dagegen muß bei Aufg. [61] $\sphericalangle a$ größer sein als $\sphericalangle PSP'$. (Weshalb?)

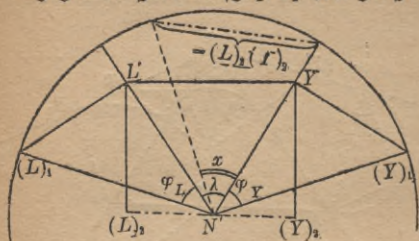


Fig. 13.

kunde, sind konstruktiv in einfacher Weise zu lösen^{6a)} und die erreichbare Genauigkeit ist für die Praxis wohl ebenso ausreichend wie andere graphische Methoden.^{6b)} Besonders interessante Aufgaben aus dem Gebiete der Astronomie, die mit Hilfe der darstellenden Geometrie gelöst werden können, sind solche über die Sonnenuhr; wir verweisen da auf Scheffers.⁸⁾

[62] Eine Aufgabe aus dem Gebiete der mathematischen Erd- und Himmelskunde werde im folgenden behandelt: Man soll die Länge des kürzesten Weges auf der Erdoberfläche von Lissabon nach Neu-York konstruieren, d. h. natürlich nur den Zentriwinkel zum zugehörigen Bogen im größten Erdkreis.

Die Äquatorebene sei unsere Zeichenebene Π ; der Mittelpunkt des den Äquator darstellenden Kreises, der Erdmittelpunkt, kann dann als Projektion N' des Nordpols N auf Π angesehen werden. L' sei die Projektion von L (Lissabon) auf Π und Y' die von Y (Neu-York). Dann ist $\varphi_L = \sphericalangle LN'L'$ die geographische Breite von L , $\varphi_Y = \sphericalangle YN'Y'$ die von Y ; ferner ist $\lambda_Y - \lambda_L = \lambda$ die Differenz der geographischen Längen der beiden Orte Y und L . Gesucht wird $\sphericalangle LNY = x$; er kommt vor in der vierseitigen Pyramide $N'(L'Y'LY)$, deren auf Π senkrechte Seitenflächen rechtwinklige Dreiecke sind, die sich konstruieren lassen; folglich kann auch $L'Y'$ und damit dann auch das Trapez $L'Y'LY$ in der Umlegung als $L'Y'(L)_2(Y)_2$ gefunden werden. Legt man schließlich LY irgendwie als Sehne in den Äquatorkreis, so ist der zugehörige Zentriwinkel x der gesuchte. Vgl. Fig. 13.

Auf diese Art hat man die Dreikantkonstruktionen nicht benutzt; will man das tun, so betrachtet man das sphärische Dreieck LYN

Anwendung auf die Nautik. Die Konstruktion kommt einfacher und schneller zum Ziel als die Rechnung mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie. Viele Aufgaben der sphärischen Trigonometrie, insbesondere solche aus der Nautik, der mathematischen Erd- und Himmels-

auf der Kugeloberfläche oder das Dreieck $N'(LYN)$, von dem man die beiden Seiten $90 - \varphi_L$, $90 - \varphi_N$ kennt und den Winkel $\lambda = \lambda_Y - \lambda_L$ bei N . Man konstruiere diese zweite Lösung tatsächlich durch und vergleiche das Ergebnis mit dem der Fig. 13, wo genommen wurde:

$$\varphi_L = 38\frac{3}{4}^{\circ}, \lambda_L = 9\frac{1}{2}^{\circ} \text{ w. und } \varphi_Y = 40\frac{1}{2}^{\circ}, \lambda_Y = 74^{\circ} \text{ w.}$$

Die Konstruktion der fehlenden Seite liefert den gesuchten Winkel für den kürzesten Weg von L nach Y , während die fehlenden Winkel den Abfahrts- und Ankunftswinkel gegen die Nordrichtung geben. Der Winkel, unter dem die Erdachse $N'N$ geneigt ist gegen die Ebene der gesuchten Seite, liefert die höchste nördliche Breite, die auf dem kürzesten Weg von Lissabon nach Newyork erreicht wird.

5. Körperdarstellungen mit einem Ausblick auf Durchdringungen, Schattenkonstruktionen und schiefe Parallelprojektion.

Würfel und Quader. [63] Man gebe die Darstellung eines Würfels in beliebiger Lage. Diese Aufgabe wurde eigentlich schon durch [52] und [54] gelöst. Man braucht nämlich nur in Π die Projektion eines rechtwinkligen dreiseitigen Achsenkreuzes zu zeichnen und auf dessen Achsen vom Schnittpunkt aus drei gleichgroße Strecken — die Würfelkanten —, abzutragen. In Fig. 14 wurde so das Achsenkreuz $A(BCD)$ in der Projektion gezeichnet. Dann muß man durch die Achsenden B, C, D jedesmal zu den beiden anderen Achsen Parallelen legen, die sich in den Würfelkanten E, F, G schneiden. Legt man schließlich noch durch diese so erhaltenen Ecken Parallelen zu den Achsen, so schneiden sie sich in H , der letzten Würfelcke. Diese Art des Aufbaus eines Würfels muß in der Projektion dieselbe sein, da Parallelen bei der Projektion als solche erhalten bleiben. In der Darstellung denkt man sich dann den Würfel von oben betrachtet, so daß man die von A ausgehenden Kanten nicht sieht, sie wurden daher gestrichelt gehalten, alle anderen Kanten sind sichtbar.

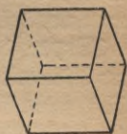


Fig. 14.

Etwas umständlicher kommt man auf folgende Art zur Lösung der Aufgabe [63]. Wir deuten sie trotzdem an, weil ihre Durchführung ein vielfach benutztes Verfahren enthält. Man denkt sich den Würfel

zunächst mit einer Seitenfläche in Π liegen und kippt ihn aus dieser Lage um eine Kante etwas auf, vielleicht um den Winkel α . Die

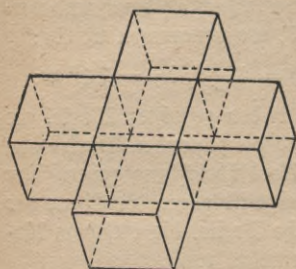


Fig. 15.

Verkürzung der dann nicht mehr zu Π parallelen Seitenkanten konstruieren wir in der Umlegung ihrer Seitenfläche in Π und zwar um eine Gerade, die sich als Schnittgerade jener Seitenfläche mit Π ergibt. Um jene selbe Schnittgerade kippen wir den ganzen Würfel abermals etwas auf, etwa um den Winkel β , so daß dann nur noch eine Ecke in Π liegt. Die neuen Verkürzungen der nach der ersten Drehung noch parallel ge-

bliebenen Kanten konstruieren wir durch Umlegungen der durch diese Kanten zu Π senkrecht verlaufenden Ebenen in Π . Auch bei dieser Lösung empfiehlt es sich zunächst die Konstruktion für drei von einer Ecke ausgehende Kanten zu zeichnen und dann wie oben durch Parallelen den Würfel zu vervollständigen.

[64] Man zeichne auf eine der beiden eben beschriebenen Arten die Projektion eines Quaders, dessen Kanten 2, 3 und 4 cm lang sind, falls man zuerst einmal um einen Winkel von 30° und dann um einen solchen von 45° aufstippt.

Körper, die sich aus dem Würfel ableiten lassen. [65] Man soll den Körper darstellen, der entsteht, wenn man auf vier solche Seitenflächen des Würfels, deren Schnittkanten zueinander parallel laufen, ebensolche Würfel aufsetzt. Man hat die in Betracht kommenden Kanten nach beiden Seiten um sich selbst zu verlängern und die Endpunkte zu verbinden, wie es in Fig. 15 geschah. Ferner konstruiere man

[66] den Körper, der aus dem Würfel entsteht, wenn man durch die Mittelpunkte je dreier in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten Ebenen legt und so die 8 Ecken des Würfels abschneidet.

[67] Darstellung des Rhombendodekaeders. Dieser Körper entsteht aus dem Würfel, wenn man auf die 8 Seitenflächen gerade Pyramiden aufsetzt, deren Höhe gleich einer halben Würfelkante ist. Benachbarte Seitenflächen je zweier benachbarter Pyramiden bilden dann eine ebene Figur (weshalb?), und zwar einen Rhombus, so daß 12 Rhomben den neuen Körper bilden. Die Spitzen der Pyramiden erhält man durch Verbindung der Mitten zweier zueinander parallelen

Quadrate und Verlängerung nach beiden Seiten um die halbe Würfelkante; ihre Verkürzung ist durch die zu ihnen parallelen Würfelkanten gegeben.

[68] Darstellung des regelmäßigen Oktaeders. Man erhält diesen Körper aus dem Würfel durch Verbindung der Mittelpunkte der Quadrate oder direkt durch Verbindung der Endpunkte eines dreiseitigen, rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen, die man auch über den Achsenschnittpunkt hinaus verlängert und ebenfalls den ursprünglichen Achsen gleich gemacht hat. So wurde es in Fig. 16 gezeichnet.

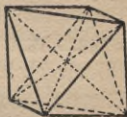


Fig. 16.

[69] Das regelmäßige Tetraeder erhält man aus dem Würfel, indem man in zwei parallelen Seitenflächen zwei zueinander windschiefe Flächendiagonalen zeichnet und deren Endpunkte miteinander verbindet.

[70] Darstellung des regulären Dodekaeders und Ikosaeders. Das Dodekaeder, ein aus 12 untereinander kongruenten Fünfecken bestehender Körper, entsteht aus dem Würfel, indem man auf die Würfelflächen dachförmige Körper aufsetzt, wobei der Dachfirst gleich der Seite desjenigen regelmäßigen Fünfecks ist, dessen Diagonale gleich der Würfelkante ist; die Höhe des Daches ist gleich dem halben Dachfirst. Die Projektion dieses Dachfirstes auf die jeweilige Würfelfläche muß in der Mitte parallel zu zwei Würfelkanten liegen; ferner laufen die Dachfirste, die man auf gegenüberliegenden Würfelflächen aufgesetzt hat, zueinander parallel, während solche von zwei benachbarten Dächern zueinander windschief, aber rechtwinklig sind. Man überlege sich, weshalb benachbarte Dachflächen aneinander angrenzender Dächer in ein ebenes, gleichseitiges Fünfeck übergehen.

[71] Das Ikosaeder erhält man aus dem Dodekaeder, wenn man die Mittelpunkte der Fünfecke des letzteren miteinander verbindet und umkehrt.

Rechtwinklige Axonometrie. Bei den bisher dargestellten Körpern legten wir stets einen Würfel zugrunde oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein dreiseitiges rechtwinkliges Achsenkreuz. Die Darstellung eines solchen mit Angabe der Verkürzungen ist schon die Grundaufgabe der rechtwinkligen Axonometrie, die bei axonometrischer Darstellung immer wiederkehrt. Denkt man sich irgendeinen Körper, vielleicht einen Maschinenteil, in einem solchen Achsenkreuz gelegen, so kann man von seinen markanten Punkten Lote auf die Ebenen des

Achsenkreuzes fällen, so daß jeder solche Punkt einen Quader bestimmt. Alle diese Quader kann man sich dann nach Aufgabe [64] axonometrisch dargestellt denken, wenn man die Abstände jener Punkte von den Achsenebenen oder die Projektionen dieser Abstände auf die Achsen kennt. Uns interessieren natürlich nur die Ecken der Quader, die mit den Punkten des darzustellenden Körpers zusammenfallen; kann man diese darstellen, so kann man den Körper selbst auch darstellen.



Fig. 17.

Es ist also bei einer axonometrischen Darstellung eines Körpers nur nötig, daß man ihn auf ein rechtwinkliges dreiseitiges Achsenkreuz beziehen kann, d. h. daß man die Entfernungen der Projektionen seiner Punkte auf die Achsen vom Achsenschnittpunkt kennt. Da mit der Konstruktion des Achsenkreuzes auch die Verkürzungen der Achsen bekannt sind, kann man durch Ziehen von Parallelen leicht zu den einzelnen Punkten gelangen. Die axonometrische Darstellung gibt von Körpern, wie man sich ausdrückt, eine plastische Darstellung, die durch Mitzeichnung der Achsen erhöht wird. Man wird natürlich besonders einfache axonometrische Darstellungen vorziehen, z. B. eine solche, bei der das Achsenkreuz mit den Achsen unter gleichen Winkeln gegen die Projektionsebene geneigt ist, weil dann das Verkürzungsverhältnis für alle Achsen dasselbe ist und diese unter 120° gegeneinander geneigt sind. In der beigegebenen Fig. 17 ist für den letzteren Fall ein Punkt dargestellt, dessen Entfernungen von den Achsenebenen sich wie 1 : 2 : 3 verhalten.

Durchdringungen. Hat man zwei Körper in senkrechter Projektion dargestellt, so kann es vorkommen, daß sie ineinander eindringen oder daß sie sich sogar ganz durchdringen. Um die Eindringungsfigur, die einteilig ist, oder die Durchdringungsfigur, die zweiteilig ist, zu finden, muß man die Kanten jedes der beiden Körper mit dem anderen Körper zum Schnitt bringen, sofern sie überhaupt in den anderen Körper eindringen. Die Grundaufgabe dafür besteht also darin, einen Körper mit einer Geraden zum Schnitt zu bringen. Diese Aufgabe wurde bereits in den Aufgaben [14] bis [16] besprochen. Auf diese Durchdringungsaufgaben kommen wir S. 81 ff. noch zu sprechen.

Schattenkonstruktionen. Ist paralleles Licht vorhanden (angenähert Sonnenlicht), so wirft jeder Punkt eines Dreiecks einen Schatten in die Projektionsebene, also das ganze Dreieck wieder ein Dreieck, das Schatten-dreieck. Will man diesen Schatten konstruieren, so muß man die Licht-

strahlen durch die Eckpunkte mit Π zum Schnitt bringen. Wir stehen also vor der Aufgabe, durch einen Punkt in gegebener Richtung eine Gerade zu legen, deren Spur mit Π bestimmt werden soll; vgl. Aufgabe [5] und [48]. Man löse hiernach folgende Aufgaben:

[72] In der Horizontalebene Π stehe ein Stuhl (schematische Zeichnung!); man soll bei gegebenem parallelem Licht den Schatten in Π bestimmen.

[73] Man bestimme die Schattenverhältnisse bei einer offenen in Π stehenden Kiste (auch im Innern!).

Ist die Lichtquelle punktförmig und im Endlichen gelegen, so besteht die Grundaufgabe der Bestimmung des Schattens in der Aufsuchung der Spur des durch zwei Punkte (Lichtquelle und Punkt des Körpers) bestimmten Strahls mit Π . [74] und [75] Man löse auch dafür die beiden letzten Aufgaben! Die Aufgabe, den Schatten eines Körpers auf einem anderen Körper festzustellen, wird gelöst als Durchdringungsaufgabe des Schattenprismas oder der Schattenpyramide mit dem anderen Körper.

Schiefe Parallelprojektion, allgemeine Axonometrie. Mit den Aufgaben [72] und [73] sind eigentlich auch schon die Grundaufgaben der schiefen Parallelprojektion erledigt. Denken wir uns das Drahtmodell eines Würfels, so ist sein Schatten eine Darstellung des Würfels in schiefer Parallelprojektion. Hier erscheint der Würfel um so verzerrter, je weniger die Projektionsstrahlen gegen Π geneigt sind. Sind zwei Würfel Flächen parallel zu Π , so werden diese in derselben Größe und wieder als Quadrat abgebildet. Es kann also bei der schiefen Parallelprojektion eines dreiseitigen Achsenkreuzes sehr wohl vorkommen, daß in der Projektion zwei Achsen aufeinander senkrecht stehen, was offenbar bei der rechtwinkligen Projektion nicht möglich ist, falls man den einen Fall ausschaltet, wo die dritte Achse $\perp \Pi$ ist. Im übrigen führt hier die Projektion unseres senkrechten Achsenkreuzes zur schiefwinkligen oder allgemeinen Axonometrie im Gegensatz zu den Betrachtungen von S. 43 f., wo die rechtwinklige Projektion eines senkrechten Achsenkreuzes zur rechtwinkligen Axonometrie führte.

Der Hauptsatz für die allgemeine Axonometrie ist von Pohlke um die Mitte des vorigen Jahrhunderts aufgestellt worden und lautet:

Drei beliebige in einer Ebene gelegene und von einem Punkt O' derselben ausgehende Strecken $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ — sofern O' , A' ,

B' , C' nicht in einer Geraden liegen — können stets als die schiefwinklige Parallelprojektion eines gleichseitigen, rechtwinkligen Achsenkreuzes $OABC$ angesehen werden.

Den Beweis dieses Satzes müssen wir uns aus Raummangel versagen. Alle größeren Lehrbücher⁸⁾ beschäftigen sich mit ihm (besonders Scheffers). Wir führen den Satz an, weil wir uns mit seinem Spezialfall der rechtwinkligen Axonometrie eingehender befaßt haben.

Nach diesem Satz ist es nicht schwer (genau wie früher S. 44), sich von irgendeinem Körper ein axonometrisches Bild zu entwerfen, wenn man die Abstände der markanten Punkte des Körpers von den drei Achsenebenen kennt. Wir werden auf solche Konstruktionen noch später (S. 77) zurückkommen. Natürlich geben nicht alle Lagenmöglichkeiten $O'A'B'C'$ günstige Bilder. Da zeigt sich eben die große Annehmlichkeit des obigen Satzes, nach dem man sich die günstigsten Lagenverhältnisse selbst herausuchen kann. Als beste Regel gilt da die folgende: Wähle eine derartige Projektion $O'A'B'C'$, daß die Ergänzung zum Würfel ein günstiges Bild gibt. Natürlich wird man auch solche Winkel und Verkürzungen wählen, die unschwer herzustellen sind, wie Winkel von 90° , 45° oder 30° und Verkürzungen von $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$.

Allgemein ist zu den Abbildungen in schiefwinkliger Parallelprojektion oder Axonometrie zu sagen, daß sie erst dann richtig wirken, wenn man sie in der Richtung (strenggenommen aus dem Unendlichen) der Projektionsstrahlen betrachtet. Für kleinere Objekte, wie z. B. Maschinenteile, genügt diese Darstellung immer. Erst wenn die Objekte größer werden (Häuser, Brücken), wird man störend empfinden, daß bei allen Parallelprojektionen gewisse perspektivische Wirkungen fehlen; das kann nur bei Darstellungen durch Zentralprojektion vermieden werden.

6. Zentralprojektion.

Die Aufgaben [74] und [75] führten bereits zur Zentralprojektion oder Perspektive; der Schatten eines Gegenstandes bei endlicher punktförmiger Quelle auf eine Ebene ist eben eine Zentralprojektion jenes Gegenstandes auf die Ebene. Im folgenden wollen wir zugleich als Abschluß der darstellenden Geometrie bei Verwendung nur einer Projektionsebene einige Grundaufgaben der Zentralprojektion erledigen. Auf die Hauptaufgabe der Zentralprojektion selbst, perspektivische

Bilder zu entwerfen, brauchen wir um so weniger einzugehen, als diesem Gegenstand bereits ein Bändchen dieser Sammlung gewidmet ist.⁷⁾

Darstellung des Punktes und der Geraden. Als Projektionszentrum (Auge) wählen wir einen Punkt Z und bezeichnen seine rechtwinklige Projektion auf die Bildebene Π mit Z' . Z ist dann bestimmt, wenn seine Höhe, die Länge ZZ' oder die Distanz, gegeben ist; wir denken uns um Z' mit ZZ' einen Kreis geschlagen und nennen ihn Distanzkreis. Der Punkt Z' wird gewöhnlich als Augenpunkt bezeichnet; er ist der einzige Punkt, in dem der Projektionsstrahl $\perp \Pi$ steht.

Um den Zusammenhang mit dem früheren zu behalten, denken wir uns jetzt genau wie auf S. 17 eine Gerade g gegeben durch g' und (g) ; ihr Spurpunkt mit Π werde mit G'_s bezeichnet. Auf g liege ein Punkt A . Wir wollen jetzt g und A von Z aus auf Π projizieren. Zu diesem Zweck legen wir das Trapez $A'Z'AZ$ um $A'Z'$ in die Ebene Π als $A'Z'(A)_2(Z)$. Die Verlängerung $(A)_2(Z)$ schneidet dann die von $A'Z'$ in A^0 , dem Bild von A . $A^0G'_s$ ist dann die Zentralprojektion von $g = AG'_s$ aus Z auf Π , wir sagen kurz die Abbildung oder das Bild von g und bezeichnen es durch einen oberen Index: g^0 . Da G'_s sein eigenes Bild ist, mag es ebenfalls durch G'_s bezeichnet sein. Von besonderer Bedeutung ist das Bild des unendlich fernen Punktes der Geraden g . Man findet es, wenn man durch Z eine Parallele zu g zieht und ihren Schnittpunkt mit Π bestimmt; er sei mit G_∞^0 bezeichnet. In Fig. 18 kommt es auf dasselbe hinaus, wenn wir durch Z' eine Parallele zu g' ziehen und sie mit g^0 zum Schnitt bringen.

Das Bild g^0 einer Geraden g ist hiernach vollständig bestimmt, wenn man G'_s und G_∞^0 kennt. Ist der Distanzkreis gegeben, so kann

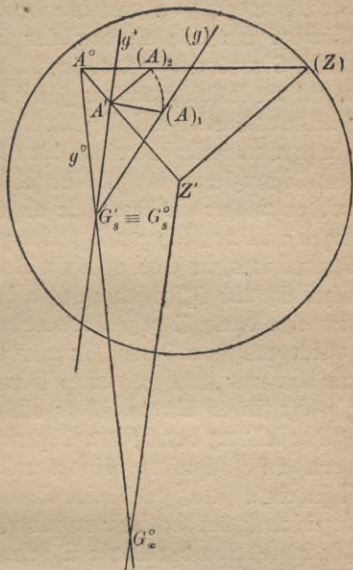


Fig. 18.

man g im Raum aus g^0 rekonstruieren. Aus der Konstruktion von G_∞^0 ergibt sich ferner, daß wir zu demselben Punkt kommen, wenn wir irgendeine zu g parallele Gerade verwendet hätten. Mit anderen Worten: Ein Bündel paralleler Geraden wird in der Abbildung zu einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt jener Punkt G_∞^0 ist. Man bezeichnet diesen Punkt als Fluchtpunkt. Hiernach wird z. B. Z' der Fluchtpunkt aller auf Π senkrechten Geraden sein, ferner werden die Fluchtpunkte aller Geraden, die unter 45° gegen Π geneigt sind, auf dem Distanzkreis liegen. Nur solche Geraden, die zu Π parallel sind, werden wieder als Parallele abgebildet (Fluchtpunkt und Spurpunkt liegen im Unendlichen und fallen zusammen); außer der Richtung des Spurpunktes muß da noch ein Punkt gegeben sein. Fallen im Endlichen G_s^0 und G_∞^0 zusammen, so haben wir einen Sehstrahl vor uns, also eine durch Z gehende Gerade.

Um auch den Punkt P aus P^0 rekonstruieren zu können, denken wir ihn uns stets auf einer Geraden $g^0 = G_s^0 G_\infty^0$ gegeben; da wir g selbst finden können, ist es auch für P möglich.

Darstellung der Ebene. Irgendeine Ebene E mag Π in der Spurgeraden e_s^0 schneiden. Eine parallele Ebene durch Z zu E wird dann Π in einer zu e_s^0 parallelen Geraden schneiden, die wir analog der Bezeichnung bei der Geraden durch e_∞^0 kennzeichnen und mit dem Namen Fluchtgerade der Ebene E belegen wollen. Dann ist wieder e_∞^0 zugleich die Fluchtgerade aller zu E parallelen Ebenen, mit anderen Worten: Parallele Ebenen haben dieselbe Fluchtgerade. Jede Ebene ist wieder durch ihre Spur- und Fluchtgerade bestimmt. Irgendeine Gerade der Ebene wird dann mit ihrem Spurpunkt auf e_s^0 und mit ihrem Fluchtpunkt auf e_∞^0 liegen. Ist eine Ebene parallel zu Π , so fallen e_s^0 und e_∞^0 in die unendlich ferne Gerade, und eine solche Ebene ist durch einen ihrer Punkte bestimmt. Aber auch bei Ebenen durch Z (Sehebene) fallen e_s^0 und e_∞^0 zusammen. Ebenen $\perp \Pi$ haben Fluchtgeraden, die durch den Augenpunkt Z' verlaufen. Ebenen, die gegen Π unter 45° geneigt sind, haben Fluchtgeraden, die Tangenten an den Distanzkreis sind. Diese Sätze sind alle durch die Definition der Fluchtgeraden einer Ebene bedingt und bedürfen weiter keiner Erläuterung. Die bisherigen Betrachtungen geben uns die Möglichkeit, sofort an die Behandlung einiger Grundaufgaben zu gehen.

Grundaufgaben. Soweit es sich nur um Aufgaben der reinen Geometrie der Lage handelt, sobald also von Maßbeziehungen (wahrer

Länge von Strecken und Winkeln, Abständen, Senkrechtstehen von Geraden usw.) nicht die Rede ist, werden wir den Distanzkreis nicht brauchen. Die Zeichnungen gelten dann gewissermaßen für jedes Auge. Aus diesem Grunde spricht man auch von einer Zentralprojektion oder Perspektive ohne Auge; man hat sie auch die Perspektive der Blinden genannt. Wir geben zunächst davon die wichtigsten Aufgaben.

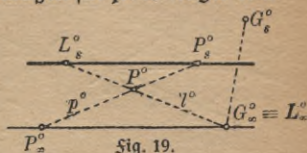


Fig. 19.

Die Darstellung [76] sich schneidender und [77] sich kreuzender Geraden beruht darauf, daß sich schneidende Geraden in derselben Ebene liegen, d. h. ihre Spurpunkte müssen auf der Spurlinie der Ebene und ihre Fluchtpunkte auf der Fluchtlinie der Ebene liegen. Sind also g und h die beiden Geraden, so muß $G_s^0 H_s^0 \parallel G_\infty^0 H_\infty^0$ sein, und der Schnittpunkt S^0 von g^0 und h^0 ist das Bild des Schnittpunktes S der gegebenen Geraden. Ist dagegen $G_s^0 H_s^0 \nparallel G_\infty^0 H_\infty^0$, so stellen g^0 und h^0 zwei windschiefe Geraden dar, der Schnitt von g^0 und h^0 hat jetzt keine Bedeutung, es sei denn, daß man ihn als den scheinbaren Schnittpunkt von g und h aus Z betrachtet.

[78] Man soll durch einen gegebenen Punkt P zu einer gegebenen Geraden g die Parallele l legen. g sei gegeben durch $g^0 = G_s^0 G_\infty^0$ und P durch P^0 , gelegen auf $p^0 = P_s^0 P_\infty^0$. Verbinden wir P^0 mit G_∞^0 , so ist das schon l^0 . Aber die Gerade l ist erst bestimmt, wenn ich nicht nur ihren Fluchtpunkt $L_\infty^0 \equiv G_\infty^0$ habe, sondern auch ihren Spurpunkt L_s^0 . Diesen findet man durch Kennzeichnung der Ebene ($p|l$), deren Fluchtgerade $P_\infty^0 L_\infty^0$ ist und deren Spurgerade durch P_s^0 dazu parallel verläuft; ihr Schnittpunkt mit l^0 gibt L_s^0 (Fig. 19). Damit ist aber die gesuchte Parallele l^0 vollständig bestimmt. Aber auch die folgende Aufgabe ist dadurch gelöst:

[79] Durch einen Punkt P und eine Gerade g soll eine Ebene gelegt werden. Die Ebene ist bestimmt durch g und ihre Parallele l durch P . Da aber in Fig. 19 die Spurgerade der gesuchten Ebene durch $G_s^0 L_s^0$ schon bestimmt ist, hat man nur noch dazu durch $G_\infty^0 \equiv L_\infty^0$ die Parallele zu legen, die die Fluchtgerade der gesuchten Ebene abgibt.

[80] Man soll die Schnittgerade g zweier Ebenen A und B finden. Die Ebenen sind gegeben durch ihre Spurgeraden a_s^0 und b_s^0 und ihre Fluchtgeraden a_∞^0 und b_∞^0 . Wie die beigegebene Fig. 20 zeigt, führt

50 I. Darft. Geometrie bei Verwendung nur einer Projektionstafel
 der Schnitt der Spurgeraden zum Spurpunkt und der Schnitt der Fluchtgeraden zum Fluchtpunkt der Schnittgeraden g^*).

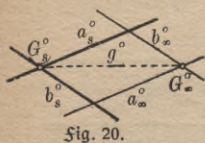


Fig. 20.

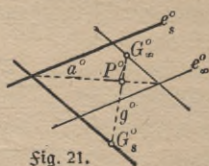


Fig. 21.

[81] Man soll eine Gerade g mit einer Ebene E zum Schnitt bringen. Legt man eine beliebige Hilfsebene H durch g , dann kann man die Schnittgerade a von E und H finden, und deren

Schnittpunkt P mit g liefert den gesuchten Punkt; vgl. Fig. 21.

[82] Man soll die Verbindungsgerade zweier Punkte A und B finden. A und B sind gegeben als Punkte je einer Geraden $a(A_s^0 A_\infty^0)$ und $b(B_s^0 B_\infty^0)$. Legt man nach [79] durch die Gerade a und den Punkt B eine Ebene E , so geben die Schnittpunkte von AB mit e_s^0 und e_∞^0 die gesuchten Spur- und Fluchtpunkte der Verbindungsgeraden c .

[82a] Wie findet man hiernach Spur- und Fluchtgerade einer durch 3 Punkte bestimmten Ebene?

[83] Man soll durch einen gegebenen Punkt P zu einer gegebenen Ebene E die Parallelebene konstruieren. Die gesuchte Ebene hat als Fluchtgerade dieselbe wie E . Man braucht also nur noch die Spurgerade zu suchen oder einfacher nur einen ihrer Punkte. Man legt durch P , gelegen auf $p(P_s^0 P_\infty^0)$, eine beliebige aber zu E parallele Gerade h ; ihr Fluchtpunkt muß auf e_∞^0 liegen. Durch Konstruktion der Spurgeraden der Ebene (p_1, h) findet man den Spurpunkt der Hilfsgeraden h und durch diesen muß die Spurgerade der gesuchten Ebene $\parallel e_s^0$ verlaufen.

Nach diesen Grundaufgaben versuche man die schwierigeren früheren Aufgaben [18] und [19] zu lösen.

[84] Auf einer Geraden $g(G_s^0 G_\infty^0)$ ist eine Strecke AB gegeben; sie soll in n gleiche Teile geteilt werden. Man legt durch g eine beliebige Ebene E und verbindet irgendeinen Punkt P auf e_∞^0 mit A^0 und B^0 , bringt PA^0 und PB^0 mit e_s^0 zum Schnitt in C und D und teilt CD in n gleiche Teile. Die Strahlen von den Teilpunkten nach P (in Wirklichkeit Parallelen in E , da P im Unendlichen liegt) geben dann auf $A^0 B^0$

*) Wir empfehlen zur besseren Unterscheidung in dieser Art von Aufgaben die Spur- und Fluchtgeraden einer Ebene auszuzeichnen (erstere stärker), dagegen Gerade zu stricheln.

die gesuchten Teilpunkte, weil sie ja die Spur e_s^0 in der gewünschten Weise teilen.

Mahaufgaben. [85] Gesucht wird die wahre Länge einer Strecke AB , deren Bild A^0B^0 auf der Geraden $g^0 \equiv G_s^0G_\infty^0$ gegeben ist.

Man denkt sich durch das Projektionszentrum Z und AB die projizierende Ebene E gelegt, deren Spurgerade dann mit g^0 zusammenfällt. Dreht man dann E um g^0 hinein in Π , so muß AB in der Umlegung $(A)(B)$ die gesuchte wahre Länge ergeben. Denkt man sich von Z auf g^0 das Lot ZF gefällt, so sei $(Z)_1F$ die wahre Länge desselben, so daß Z durch das Umlegen nach $(Z)_2$ gelangt. Die umgelegte Gerade g muß auch nach der Umlegung von G_s^0 ausgehen und auch dann noch parallel zu ZG_∞^0 , also zu $(Z)_2G_\infty^0$ sein, so daß man nur durch G_s^0 eine Parallele zu $G_\infty^0(Z)_2$ zu ziehen hat, um g in der Zeichnung (Fig. 22), also (g) , zu erhalten. Die Schnittpunkte von (g) mit $(Z)_2A^0$ und $(Z)_2B^0$ liefern die gesuchte Strecke $(A)(B)$.

In dieser Weise könnte man auch Seite für Seite von ebenen Figuren behandeln, um deren wahre Größe zu ermitteln, oder umgekehrt, um deren perspektive Bilder zu finden. Man kann nun frühere Sätze benutzen und die Konstruktion vereinfachen, wenn man bedenkt, daß die zu projizierende ebene Figur (der Gegenstand) zum Bild perspektiv liegt, wobei Z Perspektivitätszentrum und die Spurgerade der Ebene, in der die Figur liegt, Perspektivitätsachse ist. Gegenstand und Bild liegen auch nach der Umlegung noch perspektiv, wobei die Perspektivitätsachse dieselbe wie vorher ist. Nur das Perspektivitätszentrum ist ein anderes; es ist, worauf wir nicht näher eingehen, die Umlegung des Perspektivitätszentrums mit der Fluchtebene in Π .

Um die wahre Größe eines Winkels zu finden, muß man bedenken, daß die Fluchtgeraden der Schenkel denselben Winkel bilden, und dieser kann dann nach den bisherigen Betrachtungen unschwer gefunden werden.

Bezüglich des Senkrechtstehens von Geraden auf Ebenen oder umgekehrt sei kurz folgendes angedeutet. Alle Lote auf einer Ebene sind zueinander parallel, haben also denselben Fluchtpunkt. Man kon-

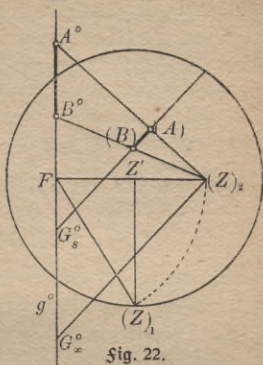


Fig. 22.

struiert also das Lot vom Projektionszentrum auf die Ebene und dessen Spurpunkt ist jener Fluchtpunkt. Hat man also auf irgendeinem Punkt der Ebene das Lot zu errichten, so braucht man nur dessen Bild mit jenem Fluchtpunkt zu verbinden. Analog ist es mit einer Ebene, die in einem bestimmten Punkt auf einer Geraden senkrecht steht.*)

II. Die Mongesche Zweitafelmethode.

7. Der Punkt und die Gerade.

Erklärung der Zweitafelmethode. Im ersten Teil wurden raumgeometrische Aufgaben durch Projektion auf eine Ebene (Π) gelöst. Monge projizierte außerdem noch auf eine zweite Ebene, die zu Π senkrecht steht. Dann ist der Abstand irgendeines Punktes von der ersten Ebene gegeben durch den Abstand seiner Projektion in der zweiten Ebene von der Schnittgeraden dieser Ebene mit der ersten Ebene. Wir bezeichnen die erste Ebene durch Π_1 und die zweite durch Π_2 , entsprechend die Projektionen eines Punktes P durch P_1 und P_2 .**) Solche zu Π_1 senkrechte Ebenen hatten wir bisher auch schon verwendet; um in diesen zeichnen zu können, drehten wir sie um ihre Schnittgerade mit Π hinein in Π . Dies tun wir jetzt auch wieder und nennen diese Schnittgerade Achse. Für gewöhnlich denken wir uns Π_1 horizontal gelegen und können sie als Horizontalebene bezeichnen, während Π_2 dann Vertikalebene genannt wird. P_1P_2 steht nach der Umlegung senkrecht zur Achse und soll Achsenlot heißen. Irgendwelche räumliche Aufgaben könnten nun genau wie früher gelöst werden, da man ja die Projektion eines räumlichen Gebildes in Π_1 kennt und die nötigen Abstände von der Projektionsebene Π_1 aus Π_2 abgreifen könnte. Aber die Zusammenfassung beider Projektionen nach der Umlegung gestattet meistens einfachere oder praktischere Lösungen, und darin liegt der Wert der Zweitafelmethode. Außerdem bieten die beiden Projektionen die Ansichten von „oben“ (Blickrichtung

*) Bezüglich eingehenderer Darstellung dieser letzten Betrachtungen verweisen wir wieder auf die Literaturangaben im Anhang unter 8), im besonderen auf Rohm-Papperitz.

**) In vielen Werken bezeichnet man die Tafelebenen auch durch Π' und Π'' und entsprechend die Projektionen eines Punktes P durch P' und P'' .

$\perp \Pi_1$) und von „vorn“ ($\perp \Pi_2$). Diese beiden Ansichten bezeichnet man auch als Grundriß und Aufriß oder entsprechend den Ebenen Π_1 und Π_2 als „erste und zweite Projektion“. ⁸⁾

Der Punkt. Die beiden Tafel Ebenen Π_1 und Π_2 teilen den ganzen Raum in vier Quadranten. Den Beschauer denkt man sich für gewöhnlich „oberhalb“ Π_1 und „vor“ Π_2 und nennt diesen Teil des Raumes den I. Quadranten; der hinter Π_2 gelegene obere Quadrant ist dann der II.,

der hintere untere Quadrant der III. und der vordere untere der IV. Quadrant. Wenn es irgend angeht, wird man alles in den I. Quadranten legen. Die Umlegung von Π_2 hinein in Π_1 um die Achse geschieht stets so, daß sich der I. Quadrant öffnet, so daß also der hintere Teil von Π_1 mit dem oberen von Π_2 zur Deckung kommt. Demnach wird ein Punkt P im I. Quadranten bestimmt durch seine Projektionen P_1 und P_2 , wovon nach der Umlegung P_1 unterhalb der Achse und P_2 oberhalb derselben liegen muß. Bewegt sich dieser Punkt P aus dem I. Quadranten nach dem II., so muß er dabei durch Π_2 hindurch; das drückt sich in der Projektion dadurch aus, daß sich dann P_1 der Achse nähert, während des Passierens von Π_2 auf der Achse liegt und schließlich oberhalb der Achse liegt, wenn P sich im II. Quadranten befindet. Wandert nun P weiter aus dem II. Quadranten nach dem III., so nähert sich jetzt in der Projektion P_2 der Achse, liegt im Fall des Passierens von Π_1 auf der Achse und liegt schließlich, wenn P im III. Quadranten liegt, unterhalb der Achse. Denkt man sich P ferner aus dem III. nach dem IV. Quadranten wandernd, so wird P Π_2 , also P_1 die Achse passieren usw. In Fig. 23 ist die Aufgabe gelöst:

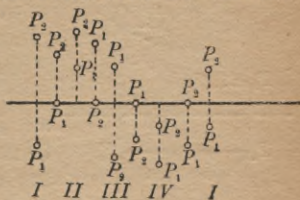


Fig. 23.

[86] Man soll die Projektionsbilder eines Punktes P zeichnen, falls P der Reihe nach sich in allen vier Quadranten befindet, im besondern auch wenn P gerade von einem in den anderen Quadranten übergeht.

Fallen P_1 und P_2 aufeinander, so liegt P entweder im II. oder im IV. Quadranten, je nachdem sich dieser Doppelpunkt oberhalb oder unterhalb der Achse befindet; außerdem liegt P von beiden Projektionsebenen gleichweit entfernt, d. h. auf der Halbierungsebene des

II. und IV. Quadranten. Liegt im besonderen jener Doppelpunkt auf der Achse, so liegt P selbst auf der Achse.

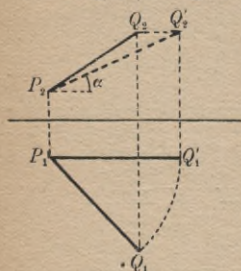


Fig. 24.

Die Strecke. [87] Man soll die Entfernung zweier durch ihre Projektion gegebenen Punkte P und Q ermitteln. Das war auch die frühere Aufgabe [1]. Wir können sie hier ebenso lösen wie dort und zwar einmal durch Umlegung des Trapezes PQP_1Q_1 in Π_1 und einmal durch das entsprechende von PQP_2Q_2 in Π_2 , wobei sich beidemal dieselbe Länge ergeben muß. Aber wir können hier noch eine andere Lösung angeben, wenn wir bedenken, daß eine Strecke, die z. B. $\parallel \Pi_2$ liegt, in wahrer Größe in Π_2

projiziert wird. Man dreht die durch $PQ \perp \Pi_1$ gehende Ebene um PP_1 , bis sie in der Lage $PQ' \parallel \Pi_2$ wird. Dabei beschreibt Q einen zu Π_1 parallelen Kreisbogen, der sich in wahrer Größe projiziert, dagegen bewegt sich Q_2 auf einer Parallelen zur Achse. Die Endlage P_2Q_2' der Strecke in der Projektion auf Π_2 gibt dann die wahre Länge an (Fig. 24). Man führe das Entsprechende auch so aus, daß man die durch $PQ \perp \Pi_2$ gehende Ebene um PP_2 dreht. In beiden Lösungen unserer Aufgabe ist folgende schon mit gelöst: [88] Man soll die Winkel konstruieren, unter denen eine Strecke gegen Π_1 und Π_2 geneigt ist. Inwiefern?

Die Gerade. Irgendeine Gerade g im Raum wird dargestellt durch ihre beiden Projektionen g_1 und g_2 , und umgekehrt bestimmen stets irgend zwei Geraden g_1 und g_2 in den Projektionsebenen eine und nur eine Gerade im Raum, denn je eine Ebene durch $g_1 \perp \Pi_1$ und $g_2 \perp \Pi_2$ schneiden sich in einer ganz bestimmten Geraden g im Raum. Die verschiedenen Lagen, die g einnehmen kann, ergeben sich daraus, daß das von Π_1 und Π_2 begrenzte Stück auf g (der Hauptteil) in allen vier Quadranten liegen kann. Wir stellen uns Π_1 und Π_2 immer als undurchsichtig vor und denken den Beschauer im I. Quadranten, dann kann immer nur ein Stück der Geraden sichtbar sein. Liegt der Hauptteil von g im I. Quadrant, so ist dieser sichtbar; wir ziehen ihn daher aus und stricheln die nicht sichtbaren Teile. Liegt der Hauptteil im II. Quadranten, so ist der durch Π_2 in den I. Quadranten ragende Teil sichtbar, während nichts sichtbar erscheint, wenn der Hauptteil im III. Quadranten liegt; schließlich wird der durch Π_1

nach dem I. Quadranten hindurchtretende Teil von g sichtbar, wenn der Hauptteil im IV. Quadranten liegt.

[89] Man stelle die beiden Projektionen einer Geraden dar, so daß ihr Hauptteil der Reihe nach in den vier Quadranten liegt. In Fig. 25 a und b liegt der Hauptteil einmal im I. und einmal im IV. Quadranten.

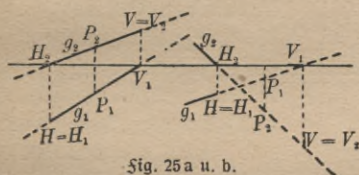


Fig. 25 a u. b.

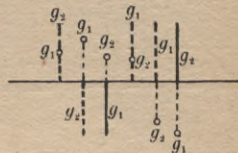


Fig. 26.

Die Zeichnungen werden nach den obigen Erläuterungen leicht verständlich sein; um anzudeuten, in welchem Quadranten der Hauptteil liegt, wurde auf diesem ein Punkt P markiert. Die Spurpunkte der Geraden mit Π_1 und Π_2 wurden durch H und V gekennzeichnet. Aus Fig. 25 geht auch hervor, wie man die Spurpunkte von g mit Π_1 und Π_2 findet. Man zeichne die beiden fehlenden Fälle selbst. Zur Übung lege man sich auch einmal g_1 und g_2 ganz beliebig hin, bestimme die Spuren mit Π_1 und Π_2 und hebe die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit von g hervor. Man löse hier zur Übung nochmals [4].

Besondere Lagen der Geraden. [90] Man zeichne die Projektionen einer Geraden a) $g \parallel \Pi_1$ und b) $g \parallel \Pi_2$. Ist $g \parallel \Pi_1$, so kann g_1 beliebig liegen, während g_2 parallel der Achse sein muß.

[91] Man zeichne eine Gerade parallel zur Achse (vier Fälle in den vier verschiedenen Quadranten!).

Geraden $\perp \Pi_1$ oder Π_2 projizieren sich auf die Ebenen, zu denen sie senkrecht stehen, als Punkte, während die anderen Projektionen senkrecht zur Achse stehen. [92] Man zeichne eine Halbgerade, also den Teil einer Geraden, der liegt a) im I. Quadranten $\perp \Pi_1$, ferner b) im III. Quadranten $\perp \Pi_2$ und c) ermittle die Halbgeraden, die durch Fig. 26 dargestellt sind.

[93] Darstellung von Geraden senkrecht und windschief zur Achse. Solche Geraden projizieren sich derart, daß nach der Umlegung g_1 mit g_2 zusammenfällt und diese Doppelgerade senkrecht zur Achse steht. Dann ist es nicht mehr möglich aus den Projektionen die Gerade im Raum zu rekonstruieren. Wir geben daher eine solche Gerade g durch

zwei ihrer Punkte A und B und können in einer zur Achse senkrechten Ebene durch g zeichnen, wenn wir sie um ihre Schnittgerade mit

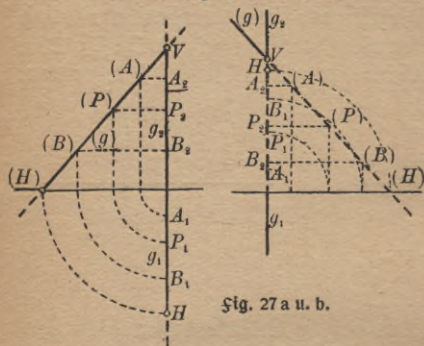


Fig. 27 a u. b.

Π_2 hinein in Π_2 drehen (im Sinne des Uhrzeigers!) und dann mit Π_2 in Π_1 umlegen. So ist es auch möglich, zu irgendeinem Punkt P_1 auf g_1 den entsprechenden Punkt P_2 auf g_2 zu finden. Vgl. Fig. 27, in der eine solche Gerade g mit dem Hauptteil a) im I. und b) im II. Quadranten dargestellt wurde; H und V sind wieder die Spuren mit Π_1 und Π_2 . Man überlege sich

diese Fälle praktisch mit Hilfe eines senkrecht aufgeklappten Buches und eines der zum Zeichnen nötigen rechtwinkligen Dreiecke; ebenso führe man die beiden nicht dargestellten Fälle vom III. und IV. Quadrant selbst durch.

Es gibt auch noch andere Fälle, in denen nach der Umlegung von Π_2 in Π_1 die beiden Projektionen zusammenfallen, nämlich dann, wenn sämtliche Punkte der Geraden zusammenfallende Projektionen haben (vgl. S. 68), also wenn die Gerade g in der Halbierungsebene des II. und IV. Quadranten liegt. In diesem Fall ist es aber trotzdem möglich, aus den Projektionen die Gerade g im Raum zu konstruieren, weil die Ebenen durch g und je durch g_1 und g_2 verschiedene Ebenen sind, also eine Schnittgerade haben müssen.

Lot auf Geraden. [94] oder [7] Der Abstand eines Punktes von einer Geraden soll bestimmt werden, oder: Von einem Punkt P soll auf eine Gerade g das Lot gefällt werden. Wir verfahren wie in [7], legen zunächst durch $g_1 \perp \Pi_1$ eine Hilfsebene E und projizieren P auf E , der Fußpunkt sei F ; dann drehen wir E hinein in Π_1 (die Abstände von Π_1 greifen wir wieder aus dem Aufriß ab) und fällen in der Umlegung von (F) auf (g) das Lot, der Fußpunkt sei (G) . G_1 und G_2 ist dann leicht zu finden, und damit kann auch PG selbst ermittelt werden. Liegt g parallel zu einer Projektionsebene, z. B. $g \parallel \Pi_1$, so wird die Lösung sehr vereinfacht, wenn man bedenkt, daß das Lot l mit g einen rechten Winkel bildet, von

dem ein Schenkel, nämlich g , $\parallel \Pi_1$ ist; dann projiziert sich der rechte Winkel wieder als Rechter (vgl. S. 20). Man hat also nur von P_1 auf g_1 das Lot l_1 zu fällen und vom Fußpunkt G_1 auf dem Achsenlot heraufzugehen nach g_2 , um G_2 zu finden (Fig. 28). Den Fall, daß $g \parallel \Pi_2$ ist, konstruiere man sich selbst durch! Überhaupt bevorzuge man nicht eine der beiden Projektionsebenen einseitig, sondern wähle immer diejenige, in der es sich bequemer zeichnen läßt.

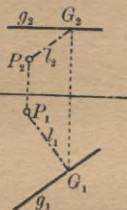


Fig. 28.

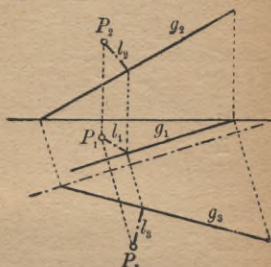


Fig. 29.

Ist nun g_1 und g_2 beliebig gegeben, so kann man diesen allgemeinen Fall auf den eben behandelten zurückführen durch Einführung einer Hilfsebene $\Pi_3 \perp \Pi_2$ und $\parallel g$. Die Projektion unserer räumlichen Figur in diese dritte Projektionsebene kann auch als eine zweite Vertikalprojektion aufgefaßt werden. Der Vorteil ist dann der, daß die Projektionen in Π_1 und in Π_3 dasselbe Bild ergeben wie in dem obigen Fall, den der Leser selbst behandeln sollte. Hat man aber jenen Sonderfall erledigt, so ist es nicht schwer aus G_1 auch G_2 zu finden. Man übe auch hier wieder den andern Weg, daß man eine dritte Projektionsebene Π_3' einführt $\perp \Pi_2$ und $\parallel g$. In Fig. 29 ist der Fall $\Pi_3 \perp \Pi_1$ und $\parallel g$ durchgeführt.

Mit den eben besprochenen Aufgaben sind im Prinzip auch folgende gelöst:

[95] Von einem Punkt P aus soll man nach einer Geraden g zwei Strahlen m und n ziehen, so daß g, m, n ein gleichseitiges Dreieck bilden. Hat man in [94] die Länge l des Lotes bestimmt, so ist in der Umlegung vom Fußpunkt (G) auf (g) nach beiden Seiten $\frac{l}{3}\sqrt{3}$ abzutragen. Die Endpunkte (Q) und (R) sind dann die beiden andern Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks, aber erst in der Umlegung. Man überlege sich hiernach selbst folgende Aufgabe:

[96] Von einem Punkt P aus sind zwei Geraden m und n so zu ziehen, daß sie eine gegebene Gerade g unter einem gegebenen Winkel α schneiden. Vgl. hierzu [8]!

Neigungen einer Geraden gegen die Tafelebenen. [97] Man soll die Neigungswinkel α_1 und α_2 einer Geraden g gegen Π_1 und

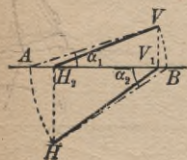
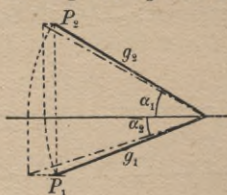


Fig. 30 a u. b.



Π_2 konstruieren. In Fig. 24 ist diese Aufgabe teilweise schon gelöst, wenn man PQ als die Gerade g ansieht. Wir benutzen hier statt der Punkte P und Q auf g die Spuren von g mit Π_1 und Π_2 . Entsprechend den beiden Lösungen von [87] können wir auch [97] in doppelter Weise lösen. Die zweite Art wird aus Fig. 30a klar. Fig. 30b stellt den besonderen Fall dar, wenn die Gerade g die Achse schneidet. Im zweiten Fall greift man auf der Geraden g einen beliebigen Punkt P heraus und konstruiert die rechtwinkligen Dreiecke, die durch das Stück auf g zwischen P und dem Achsenschnitt und durch dessen Projektionen bestimmt sind; $\sphericalangle(gg_1)$ und $\sphericalangle(gg_2)$ sind die gesuchten Winkel α_1 und α_2 .

Zwischen den beiden Winkeln α_1 und α_2 muß die Beziehung $\alpha_1 + \alpha_2 < 90^\circ$ gelten. In dem rechtwinkligen Dreieck in Fig. 30a, das aus g und g_1 gebildet wird, ist der eine spitze Winkel α_1 , der andere spitze Winkel $90 - \alpha_1$; letzterer ist aber zugleich ein Winkel, den g mit einer Geraden in Π_2 bildet; folglich muß der Neigungswinkel α_2 von g gegen Π_2 kleiner als $90 - \alpha_1$ sein. Dies ist wichtig für die umgekehrte Aufgabe:

[98] Man soll eine Gerade konstruieren, deren Neigungen α_1 und α_2 gegen Π_1 und Π_2 gegeben sind. Alle Geraden durch einen festen Punkt P , die gegen Π_1 unter dem gleichen Winkel α_1 geneigt sind, bilden einen geraden Kreiskegel, dessen Achse $\perp \Pi_1$ ist, ebenso bilden alle Geraden durch P , die gegen Π_2 unter α_2 geneigt sind, einen entsprechenden zweiten Kegel. Die gemeinsamen Erzeugenden dieser beiden Kegel, von denen wir uns jeden als Doppelkegel vorzustellen haben, sind dann Geraden, die gegen Π_1 unter α_1 und gegen Π_2 unter α_2 geneigt sind. Solcher Schnittgeraden gibt es vier, sie liegen zu je zwei bezüglich parallelen Ebenen durch P zu Π_1 und Π_2 symmetrisch. Die Lösungen ergeben sich ohne weiteres aus den Figuren 30. Konstruieren wir z. B. nach Fig. 30a von α_1 ausgehend zunächst ein rechtwinkliges Dreieck AVV_1 , das bei A den Winkel α_1 hat und das

wie in Fig. 30 a liegt, so muß dann noch ein zweites, $\triangle BHH_2$, konstruiert werden, wo $HB = AV$ ist, und das bei B den Winkel α_2 besitzt. Dieses Dreieck kann man sich irgendwo konstruieren und kennt so die Entfernung HH_2 . Schlägt man nun um V_1 mit AV_1 einen Kreisbogen, der eine Parallele von AV_1 im Abstand HH_2 in H trifft, so hat man auch H_2 der Lage nach, und man kennt folglich auch $HV_1 = g_1$ und $H_2V = g_2$. Die Symmetrie liefert die drei übrigen Lösungen. Verföhrt man ganz ähnlich nach Fig. 30 b, so kommt man ebenfalls zum Ziel. Zieht man jetzt durch einen beliebigen Punkt im Raum zu je einer der vier Lösungsgeraden eine Parallele, so bilden diese eine Pyramide, deren Grundfläche in Π_1 ein Rechteck ist; entsprechendes gilt auch von Π_2 .

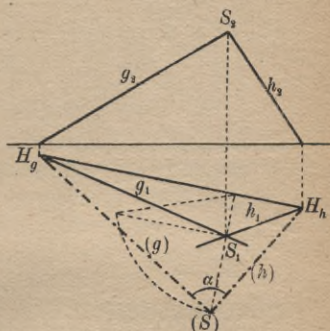


Fig. 31.

Man versuche eine Lösung von [98] auch direkt durch Auseinanderlegung des Tetraeders HH_2V_1V zu erhalten, das nur aus rechtwinkligen Dreiecken besteht. Auch als Dreikantkonstruktion läßt sich diese Aufgabe lösen, wenn man bedenkt, daß von dem in H zusammenstoßenden Dreikant $H(H_2VV_1)$ zwei Seiten α_1 und $90 - \alpha_2$ und ein Winkel von 90° gegeben sind.

Sich schneidende Geraden. Schneiden sich zwei Geraden, so haben sie einen Punkt gemein; also werden zwei sich schneidende Geraden g und h beim Zweitafelverfahren dargestellt durch je zwei Geraden g_1, h_1 und g_2, h_2 , die aber derart liegen müssen, daß ihre Schnittpunkte S_1 und S_2 sich auf demselben Achsenlot befinden. Ist das nicht der Fall, so liegen die Geraden g und h windschief zueinander.

[99] Man stelle einmal zwei sich schneidende und einmal zwei zueinander windschiefe Geraden dar.

[100] oder [11] Es soll der Winkel zweier sich schneidenden Geraden g und h bestimmt werden. Die Lösung geschieht wie in [11], nur daß jetzt die Entfernung des Schnittpunktes $S(g, h)$ aus dem Aufriß abgegriffen wird. Fig. 31 erläutert die Konstruktion.

Liegen die Spurpunkte G_1 und H_1 außerhalb der Zeichenebene, so benutzt man eine Hilfsebene $\Pi'_1 \parallel \Pi_1$, die dann g und h in G'_1 und

H'_1 schneiden möge. Die Konstruktion ist dann genau so; es wird also $\triangle G'_1 S H'_1$ um $G'_1 H'_1$ in Π'_1 gelegt. Natürlich kann man auch um die Verbindungslinie der Spurpunkte von g und h mit Π_2 hinein in Π_2 drehen. Überhaupt vernachlässige man, wie schon einmal erwähnt, Π_2 nicht; Π_2 ist mit Π_1 vollkommen gleichberechtigt und bietet manchmal günstigere Lagenverhältnisse wie Π_1 .

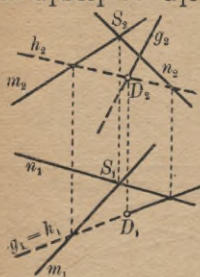


Fig. 32.

Durchdringungen. [101] oder [14] Eine Gerade g ist mit der durch zwei sich schneidende Geraden m und n bestimmten Ebene E zum Schnitt zu bringen.

Wir werden in Zukunft die Achse nicht mehr zeichnen, denn sie ist in ihrer Richtung durch die Achsenlote bestimmt; wir haben dann außerdem den Vorteil, daß nach den letzten Bemerkungen stets eine passende Ebene $\Pi'_1 \parallel \Pi_1$ gelegt werden kann. Die Lösung von [101] geschieht wieder wie früher bei [14]. Wir legen (s. Fig. 32) durch $g \perp \Pi_1$ eine Hilfsebene H , die E in einer Hilfsgeraden h schneiden möge. Im Grundriß fällt h_1 mit g_1 zusammen, im Aufriß nicht. Aber der Aufriß h_2 ist dadurch bestimmt, daß dessen Schnittpunkte M_2 und N_2 aus den entsprechenden Grundrißpunkten M_1 und N_1 durch Achsenlote heraufgeholt werden können, denn diese sind dort ja auch durch die Schnitte von g_1 mit m_1 und n_1 bestimmt. Der Schnittpunkt von g_2 mit h_2 ist die Vertikalprojektion D_2 des gesuchten Durchschnittpunktes D von g mit E ; damit ist aber auch D_1 festgelegt.

Denkt man sich in [101] die Ebene E undurchsichtig, so ist die Gerade g sowohl im Grundriß wie im Aufriß von D an entweder sichtbar oder nicht sichtbar. Wir denken uns den Beschauer für den Grundriß von „oben“ in der Richtung der Projektionsstrahlen $\perp \Pi_1$ blicken, für den Aufriß von „vorn“ analog in der Richtung $\perp \Pi_2$. Dann wird man beidemale dieselbe Seite von E sehen oder verschiedene Seiten, je nachdem die beiden Dreiecke $S_1 M_1 N_1$ und $S_2 M_2 N_2$ beidemale denselben Umlaufsinne haben oder entgegengesetzten. Im ersten Fall wird sowohl im Grundriß wie im Aufriß dasselbe Stück der Geraden g sichtbar, während im zweiten Fall zum sichtbaren Teil der Geraden im Grundriß ein entsprechendes nicht sichtbares Stück im Aufriß gehört, weil es ja auf der anderen Seite der Ebene E liegt.

Es braucht dann nur noch ermittelt zu werden, ob eins der Geradenstücke von D ab sichtbar ist oder nicht. Blickt man in unserer Fig. 32 von „oben“, also mit den Projektionsstrahlen $\perp \Pi_1$, so gibt der Aufriß darüber Auskunft, ob man zuerst auf die Gerade trifft und dann auf die Ebene oder umgekehrt. In unserem Fall treffen Achsenlote auf der rechten Seite von D_2 erst g und dann die Ebene, also muß dieser Teil der Geraden von „oben“, d. h. im Grundriß sichtbar sein; daher wurde g_1 rechts von D_1 ausgezogen. Links von D_1 treffen die Achsenlote zunächst h_2 , also die Ebene E , d. h. für den Beschauer von „oben“ ist dieser Teil nicht sichtbar; daher muß im Grundriß der links von D_1 gelegene Teil von g_1 gestrichelt gehalten werden. Da die beiden Dreiecke $S_1M_1N_1$ und $S_2M_2N_2$ gleichen Umlaufssinn haben, wird es im Aufriß ganz ebenso sein.

Man konstruiere selbst einen solchen Fall, wo verschiedene Stücke der schneidenden Geraden im Grund- und Aufriß sichtbar sind, d. h. wo die Dreiecke $S_1M_1N_1$ und $S_2M_2N_2$ verschiedenen Umlauf haben. Dann löse man Aufgabe

[102] Gegeben ist ein Dreieck ABC durch Grund- und Aufriß; man soll es mit einer Geraden g zum Schnitt bringen und die Sichtbarkeitsverhältnisse von g festlegen. In dieser Aufgabe, allerdings nur im ersten Teil, steckt auch folgende Aufgabe:

[103] Man soll parallel zu einer gegebenen Richtung r einen Punkt P auf die Ebene eines Dreiecks projizieren und feststellen, ob die Projektion innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fällt. Das ist zugleich die Grundaufgabe der Schattenaufgaben. Aber auch die Durchdringungsaufgaben stecken schon in [101] bis [103]. Man löse folgende Aufgaben:

[104] Zwei Dreiecke sind durch ihre Projektionen gegeben; man soll ihre Schnittgerade bestimmen. Man sucht hier die Durchstichpunkte der beiden schneidenden Seiten des einen Dreiecks mit der Fläche des anderen. Solche Aufgaben treten auf bei der Durchdringung zweier Pyramiden; der Schnitt zweier Parallelogramme (s. unten parallele Geraden) tritt auf bei der Durchdringung zweier Prismen und Dreieck mit Parallelogramm bei der Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma. Wir kommen später noch einmal auf diese Durchdringungsaufgaben zurück.

[105] Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind gegeben durch je zwei sich schneidende Geraden g, h und m, n ; gesucht wird ihre Schnittgerade.

Man bestimmt zunächst den Schnitt von $E_1(g, h)$ mit m und ebenso den von $E_1(g, h)$ mit n ; die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte ist die gesuchte. Zur Übung versuche man die Sichtbarkeitsverhältnisse darzustellen.

Parallele und windschiefe Geraden. Parallele Geraden projizieren sich sowohl in Π_1 wie in Π_2 wieder als Parallelen. Man löse folgende Aufgaben:

[106] Durch einen gegebenen Punkt P zu einer gegebenen Geraden g soll die Parallele gezogen werden, oder: [107] Man bringe einen ebenen Parallelstreifen mit einem anderen zum Schnitt. Es ist allein schon lehrreich, sich dazu passende Parallelen im Grund- und Aufriß herauszufinden.

[108] Man bestimme den Abstand zweier parallelen Geraden g und h . Entweder löst man diese Aufgabe durch die Bestimmung der Entfernung eines Punktes P auf g von h nach [94], oder man legt die Ebene der beiden Parallelen um ihre Spur mit Π_1 hinein in Π_1 , wo dann der Abstand direkt bestimmt werden kann.

Die früheren Aufgaben [18] bis [20] über windschiefe Geraden können jetzt ebenfalls nach dem Zweitafelverfahren gelöst werden; der Leser kann sie zur Übung wirklich durchführen; sie bieten weiter keine Schwierigkeiten.

8. Die Ebene, bestimmt durch Haupt- und Falllinien.

Darstellung der Ebene durch diese Linien. Zu Beginn von Nr. 2 hatten wir bereits diese Linien einer Ebene definiert. Da wir jetzt zwei Projektionsebenen haben, gehen durch jeden Punkt einer Ebene vier solcher Linien, diejenigen bezüglich Π_1 nennen wir Haupt- und Falllinien 1. Art, die bezüglich Π_2 solche 2. Art, kurz erste und zweite Haupt- und Falllinien. Da die Hauptlinien den Spuren der Ebene mit den Projektionsebenen parallel laufen, also auch ihre Projektionen, werden sie auch Spurparallelen genannt. Sie sind dann von Wichtigkeit, wenn die Spuren der Ebene mit Π_1 oder Π_2 außerhalb der Zeichenebene liegen.

Die Falllinien bilden mit den entsprechenden Hauptlinien rechte Winkel, und da die Hauptlinien parallel den entsprechenden Projektionsebenen laufen, werden sie in den entsprechenden Projektionsebenen wieder als rechte Winkel projiziert. Daraus folgt: Haupt-

und Falllinien projizieren sich auf den entsprechenden Projektionsebenen wieder als zueinander rechtwinklige Geraden. Es stehen also in Π_1 die Horizontalprojektionen der ersten Falllinien auf den Horizontalprojektionen der ersten Hauptlinien (Spurparallelen) senkrecht und in Π_2 stehen die Vertikalprojektionen der zweiten Falllinien auf den Vertikalprojektionen der zweiten Hauptlinien (Spurparallelen) senkrecht. Damit ist das Wichtigste klargestellt, und wir können uns folgenden Aufgaben zuwenden:



Fig. 33.

[109] Eine Ebene E ist gegeben durch zwei sich in P schneidende Geraden m und n ; man soll die durch P gehende erste Haupt- und Falllinie dieser Ebene bestimmen. Legt man eine zu Π_1 parallele Ebene Π'_1 , die m in M und n in N schneidet, so ist MN eine erste Hauptlinie oder erste Spurparallele h von E . Fällt man dann von P_1 auf M_1N_1 das Lot f_1 , so ist f_1 die Horizontalprojektion der durch P gehenden Falllinie f ; ihre Vertikalprojektion f_2 ist auch sofort angebbar. Die zu h durch P gezogene Parallele ist dann die durch P gehende erste Hauptlinie (Fig. 33). Man konstruiere sich ebenso die zweite Haupt- und Falllinie durch P . Erste Hauptlinien bezeichnet man durch h' im Gegensatz zu den zweiten h'' , ähnlich f' und f'' . Eine Ebene ist genau wie früher (S. 28) schon durch eine Falllinie allein bestimmt, weil man sofort auch eine entsprechende Hauptlinie konstruieren kann. Man löse hiernach die Aufgabe:

[110] Von einer Ebene ist eine erste Falllinie f' (f'_1 und f'_2) gegeben; man soll eine zweite Falllinie f'' konstruieren. Durch einen beliebigen Punkt P_1 auf f'_1 legt man eine Senkrechte h'_1 zu f'_1 und durch P_2 eine Senkrechte h'_2 zum Achsenlot P_1P_2 . Legt man jetzt eine Hilfsebene $\Pi'_2 \parallel \Pi_2$, so schneidet sie h'_1 in H_1 und f'_1 in F_1 . Dadurch ist H_2 und F_2 bestimmt, und HF ist eine zweite Hauptlinie h'' ; dann ist eine Senkrechte von P_2 auf h''_2 die Vertikalprojektion f''_2 . Die Horizontalprojektion f''_1 bietet weiter keine Schwierigkeit. Es ist also gezeigt, daß im allgemeinen eine Ebene vollständig durch eine Falllinie bestimmt ist.

Wie schon S. 30 hervorgehoben wurde, gilt das nicht, wenn die Falllinie senkrecht zu einer Projektionsebene steht. Wir müssen dann eine Spurparallele hinzunehmen, die dann sogar allein für sich schon die Ebene bestimmt, während im allgemeinen eine solche Linie allein

eine Ebene nicht bestimmt. Ist dagegen die Ebene parallel zu einer Projektionsebene, so existieren überhaupt keine Falllinien; solche Ebenen sind z. B. gegeben durch ihre Vertikalspur, falls sie $\parallel \Pi_1$ sind.



Fig. 34.

[111] Man bestimme in einem durch seine Projektionen gegebenen Dreieck eine erste Falllinie.

[112] Durch den Mittelpunkt eines durch seine Projektionen gegebenen Parallelogramms soll man eine zweite Falllinie legen.

[113] oder [22] Man lege durch eine Ecke eines Dreiecks eine erste Hauptlinie und drehe es um diese in eine zu Π_1 parallele Lage, um damit die wahre Größe zu finden.

[114] Man führe das Entsprechende auch für ein Parallelogramm aus, indem man durch seinen Mittelpunkt eine solche Hauptlinie legt. Damit kann man auch den Abstand [108] zweier Parallelen ermitteln.

Die Grundaufgaben über die Ebene. Wir wenden uns denselben Aufgaben über die Ebene zu, die wir schon im I. Teil behandelt haben (S. 28 ff.), natürlich jetzt im Zweitafelverfahren.

[115] Man soll die Neigungswinkel einer durch eine Falllinie gegebenen Ebene gegen die Tafelebenen bestimmen. Ist wieder eine erste Falllinie f' gegeben, so gibt der Neigungswinkel von f' gegen Π_1 sofort den einen gesuchten Winkel an, während der einer zweiten Falllinie, die nach [110] bestimmt wird, gegen Π_2 den anderen gesuchten Winkel darstellt. Vgl. hierzu [137].

[116] Eine Ebene E ist durch eine erste Falllinie f' (f'_1, f'_2) gegeben; man soll zu gegebener Horizontalprojektion P_1 eines Punktes P die Vertikalprojektion P_2 bestimmen. Legt man durch P_1 die Horizontalprojektion einer ersten Hauptlinie h' , daß $h'_1 \perp f'_1$, so ist der Schnittpunkt Q_1 von f'_1 und h'_1 die Horizontalprojektion eines Punktes Q in E , der mit P dieselbe Höhe hat. Durch Q_2 geht die Vertikalprojektion von h' senkrecht zu den Achsenloten, so daß P_2 angegeben werden kann; s. Fig. 34. Wie ist die Konstruktion, wenn P_2 gegeben ist und P_1 gesucht? Würden wir dieselbe Konstruktion noch für einen anderen Punkt ausführen, so hätten wir die Aufgabe gelöst:

[117] Eine Ebene E ist durch eine erste Falllinie gegeben; wie findet man zu gegebener Horizontalprojektion g_1 einer Geraden g in E die Vertikalprojektion g_2 ?

[118] Man soll die Ebene E (also eine ihrer Falllinien) angeben,

wenn sie bestimmt ist durch einen Punkt P und eine nicht durch P gehende Gerade g . Wir legen durch P eine Hilfsebene $\Pi'_1 \parallel \Pi_1$, die g in Q schneidet; damit ist die Vertikalprojektion h'_2 einer ersten Hauptgeraden h' und damit auch h'_1 gegeben, woraus sich wiederum $f'_1 \perp h'_1$ und dann f'_2 finden läßt (Fig. 35). Löse hiernach:

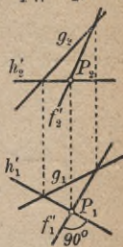


Fig. 35.

[119] Die durch zwei Parallelen festgelegte Ebene ist durch eine erste Falllinie zu bestimmen.

[120] Unter den Ebenen eines Ebenenbüschels durch eine gegebene Gerade g soll diejenige bestimmt werden, die zu einer gegebenen Geraden r parallel ist. Man lege durch einen beliebigen Punkt von g eine Parallele q zu r und bestimme die Ebene durch q und r . Von großer Wichtigkeit ist folgende Aufgabe:

[121] Auf eine Ebene E soll von einem außerhalb derselben gelegenen Punkt P das Lot l gefällt und der Fußpunkt F bestimmt werden. Ist E durch zwei sich schneidende Geraden gegeben, so hat man nur die Richtung von l zu bestimmen und parallel zu dieser Richtung durch P das gesuchte Lot zu legen. Um die Richtung von l zu finden, muß man sich überlegen, daß l mit einer ersten Hauptlinie h' durch F einen Rechten bildet, und auch $l_1 \perp h'_1$ (weil $h' \parallel \Pi_1$), also $l_1 \parallel f'_1$; dagegen wird $l_2 \perp h'_2$ oder $l_2 \parallel f'_2$. Je nachdem nun aus der Figur sich die h oder f konstruieren lassen oder gezeichnet vorliegen, wird man hiernach die Projektionen von l zeichnen können. Ist also eine Ebene durch die ersten

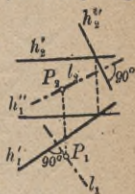


Fig. 36.

und zweiten Hauptlinien oder Spurparallelen gegeben, so zieht man l_1 von P_1 aus $\perp h'_1$ und l_2 von P_2 aus $\perp h'_2$. Vgl. Fig. 36. Den Fußpunkt F bestimme man nach [101]; das ist in der Figur nicht ausgeführt. Ist die Ebene E nur durch eine Falllinie, z. B. f' (f'_1 und f'_2) gegeben, so kann man nach [110] eine erste und eine zweite Hauptlinie konstruieren und dann l wie oben finden. Damit sind auch die Aufgaben gelöst:

[122] Den Abstand eines Punktes P von einer Ebene und

[123] Den Abstand zweier parallelen Ebenen zu finden.

[124] Zur Übung dieser Darlegungen errichte man im Schwerpunkt eines Dreiecks ein Lot auf der Dreiecksfläche von gegebener Länge.

[125] Gegeben ist eine Gerade g und außerhalb g ein Punkt P , gesucht wird die Ebene E , die durch P geht und g rechtwinklig schneidet. Man legt durch P eine erste und eine zweite Hauptlinie h' und h'' , und zwar $h'_1 \perp g_1$, $h'_2 \perp P_1P_2$, $h''_2 \perp g_2$ und $h''_1 \perp P_1P_2$. In Fig. 37 ist noch der Schnittpunkt D von g mit E nach [101] konstruiert. Damit ist auf andere Weise wie in [94] der Abstand des Punktes P von g gefunden.



Fig. 37.

[126] Gesucht wird der Neigungswinkel einer Geraden g gegen eine Ebene E . Von einem beliebigen Punkt P auf g fällt man auf E das Lot l und bestimmt $\sphericalangle(l, g)$, der dann das Komplement zu dem gesuchten ist.

[127] oder [58] Man konstruiere das gemeinsame Lot zweier windschiefen Geraden. Diese Aufgabe kann jetzt nach Behandlung der Ebene genau wie in [58] gelöst werden. Die dort angeführten Einzelkonstruktionen sind jetzt alle auch für das Zweitafelverfahren gelöst worden.

Mehrere Ebenen. [128] Gesucht wird die Schnittgerade zweier Ebenen A und B . Die beiden Ebenen mögen durch ihre ersten Fall-

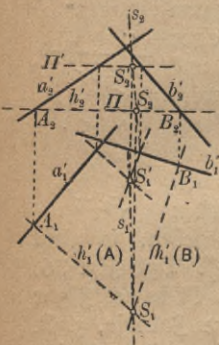


Fig. 38.

linien a' und b' gegeben sein; dann ist die Schnittgerade s der beiden Ebenen die Gesamtheit der Punkte, in denen sich die Hauptlinien gleicher Höhen über der betreffenden Projektionsebene schneiden. Legen wir also $\parallel \Pi_1$ eine Hilfsebene Π , so schneidet sie die Falllinien a und b in zwei Punkten A und B . A_2B_2 ist dann die Vertikalprojektion h'_2 sowohl einer ersten Hauptlinie in A wie in B ; die entsprechenden Horizontalprojektionen $h'_1(A)$ und $h'_1(B)$ dieser Hauptlinien sind in $A_1 \perp a_1$ und in $B_1 \perp b_1$; ihr Schnittpunkt S ist dann ein Punkt der Schnittgeraden s (Fig. 38). Durch eine andere Ebene $\Pi' \parallel \Pi_1$ bekäme man einen zweiten Schnittpunkt S' ; da

außer S_1 und S'_1 auch S_2 und S'_2 mit Hilfe der Achsenlote angegeben werden können, ist $s = SS'$ gefunden.

[129] Man bestimme den Schnittpunkt dreier Ebenen, indem man [128] zweimal ausführt.

[130] oder [57] Gesucht wird der Neigungswinkel zweier Ebenen. Man sucht nicht den Neigungswinkel direkt, sondern seinen Supple-

mentwinkel, indem man den Winkel zwischen den beiden Loten aufsucht, die man von einem beliebigen Punkt auf die Ebenen fällt. Wie gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe für den Fall, daß die beiden Ebenen durch je einen Punkt und die Schnittgerade gegeben sind?

Die Lösung von [130] ist auch möglich nach der Art, wie sie in [57] durchgenommen wurde; man nimmt eine Hilfsebene $\parallel \Pi_1$, so daß die früheren Geraden r und q Hauptgeraden werden. Wir kommen auf diese Lösung bei [147] zurück.

9. Die Ebene, bestimmt durch ihre Spurgeraden.

Horizontal- und Vertikalspur einer Ebene. [131] Von einer Ebene sind zwei sich schneidende Geraden g und h durch ihre Projektionen gegeben; gesucht werden die Spurgeraden, also die Horizontalspur s' und die Vertikalspur s'' . Man bestimmt von jeder Geraden sowohl ihren Horizontal- wie ihren Vertikalspurpunkt; die Verbindungslinie der beiden Horizontalspurpunkte liefert s' , die der beiden Vertikalspurpunkte s'' . s' und s'' müssen sich in einem Punkt der Achse schneiden. (Weshalb?)

Eine Ebene ist jetzt durch ihre beiden Spurgeraden s' und s'' eindeutig definiert, ebenso wie sie es früher durch zwei beliebig in ihr liegende Geraden war, oder wie sie im vorigen Paragraphen durch die Haupt- und Fallgeraden bestimmt war. Auch die Spurgeraden sind nur besondere Hauptgeraden. Im allgemeinen wird man die frühere Darstellung stets dann anwenden müssen, wenn die Spurgeraden außerhalb der Zeichenebene fallen. Wir wollen aber die Darstellung einer Ebene durch ihre Spurgeraden nicht ganz übergehen, weil sie doch oft von Nutzen ist und vor allem, weil sie in vielen Büchern sogar ausschließlich gegeben wird.

[132] Man soll die Spurgeraden einer Ebene finden, die durch eine Fallgerade f' gegeben ist. Man bestimmt zunächst den Horizontalspurpunkt (Fig. 39) H von f' ; das Lot in H auf f_1' ist s' . Zieht man jetzt durch einen beliebigen Punkt P von f' eine erste Hauptgerade oder Spurparallele h' , also h_1' durch $P_1 \parallel s'$ und h_2' durch P_2 parallel der Achse, so liefert der Vertikalspurpunkt V von h' einen Punkt von s'' ; s' muß sich mit s'' im selben Punkt der Achse schneiden. [133] Wie findet man s' und s'' , wenn je eine Spurparallele der ersten und zweiten Art gegeben ist?

[134] Von einer Ebene sind ihre Spurgeraden s' und s'' gegeben; man soll zu gegebener Horizontalprojektion P_1 die Vertikalprojektion P_2 bestimmen, so daß P in der Ebene liegt.

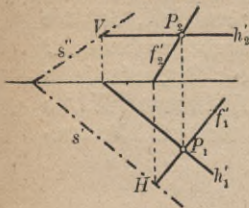


Fig. 39.

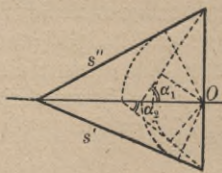


Fig. 40.

Die Lösung gibt Fig. 39. Man geht durch P_1 parallel zu s' bis zur Achse, von da senkrecht bis zum Schnitt mit s'' und weiter parallel zur Achse bis zum Schnittpunkt mit dem Achsenlot durch P_1 . Wäre

P_2 gegeben, so führt man die eben angeführte Konstruktion rückwärts aus. Aber man könnte auch von P_2 aus parallel zu s'' bis zur Achse gehen, von da senkrecht zur Achse bis zum Schnittpunkt mit s' und von da parallel zur Achse bis zum Schnitt mit dem Achsenlot durch P_2 . Die hierzu entsprechende Konstruktion hätte man auch im ersten Fall ausführen können. Diese Konstruktionen kommen immer wieder vor, und man führe sie wirklich alle durch!

Ebene Figuren in einer durch die Spurgeraden gegebenen Ebene. [135] Von einer durch s' und s'' gegebenen Ebene ist eine Gerade g durch g_1 gegeben; gesucht wird g_2 . Man beachte nach [131], daß die Spurpunkte von g mit Π_1 und Π_2 auf s' und s'' liegen müssen.

[136] Von einem ebenen Vieleck in der durch s' und s'' gegebenen Ebene ist die Horizontalprojektion gegeben; gesucht wird die Vertikalprojektion. Man kann hier für jeden Eckpunkt einzeln [134] anwenden. Die Genauigkeit der Zeichnung prüft man mit Hilfe der Affinität (S. 22 ff.). Unsere Ebene schneidet die Halbierungsebene des II. und IV. Quadranten in einer Geraden a ($a_1 \equiv a_2$), auf der sich alle entsprechenden Seiten der beiden Projektionen unseres Vielecks schneiden müssen; a ist Affinitätsachse für die beiden Projektionen, sie geht durch den Schnittpunkt von s' und s'' . Wie findet man a aus s' und s'' ?

Auf die Bestimmung der wahren Größe ebener Vielecke aus den Projektionen gehen wir hier nicht ein; wir verweisen da auf die früheren Darlegungen (S. 25).

Neigungen einer Ebene gegen die Tafelebenen. [137] oder [115] Gesucht werden die Neigungswinkel α_1 und α_2 einer durch s' und s'' gegebenen Ebene gegen Π_1 und Π_2 . Wir lösen die Aufgabe im Grunde

ebenso wie S. 64. Auf der Achse werde ein beliebiger Punkt O herausgegriffen, durch den wir je eine Hilfsebene $\perp s'$ und $\perp s''$ legen, diese schneiden die gegebene Ebene in den Fallgeraden, die in [115] betrachtet wurden, und dann werden hier wie dort die rechtwinkligen Dreiecke, die α_1 und α_2 enthalten, in die Tafel Ebene gedreht. Aber unsere Fig. 40 gestattet jetzt auch die umgekehrte Aufgabe zu lösen. [138] Gesucht werden die Richtungen der Spurgeraden der Ebenen, die Π_1 und Π_2 unter den gegebenen Winkeln α_1 und α_2 schneiden. Man hat da nur zu beachten, daß die beiden eben betrachteten rechtwinkligen Dreiecke sich in einer Strecke schneiden, die für beide die Höhe ist. Man zeichnet also eines der beiden Dreiecke (es braucht natürlich nur ein ähnliches zu sein) in der obigen Lage und kann dann von diesem aus Fig. 40 rückwärts zeichnen.

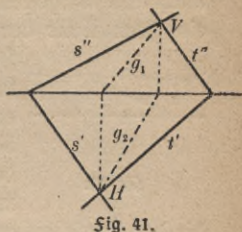


Fig. 41.

Alle Ebenen durch denselben Punkt mit gleicher Neigung gegen eine feste Ebene umhüllen einen geraden Kreiskegel. Für [137] würde demnach die Lösung darauf hinauskommen, an zwei gerade Kreiskegel mit gemeinsamer Spitze die gemeinsamen Tangentialebenen zu legen. Deren gibt es offenbar vier. Ob nun die obige Konstruktion zu allen vier Lösungen führt, mag der Leser selbst entscheiden. Wir wollen zu dieser Aufgabe nur noch hinzufügen, daß sie auch durch [98] gelöst werden kann, denn eine Senkrechte auf der gesuchten Ebene schneidet Π_1 und Π_2 unter den Winkeln $90 - \alpha_1$ und $90 - \alpha_2$. Daraus ergibt sich auch für α_1 und α_2 die Bedingung $\alpha_1 + \alpha_2 > 90^\circ$. Andererseits folgt diese Bedingung aus den Sätzen über die Winkelsumme einer dreiseitigen Ecke, die auch die Bedingung für die obere Grenze geben würde.

Mehrere Ebenen. Parallele Ebenen haben parallele Spuren in derselben Projektionsebene. Man löse hiernach Aufgabe [139]: Durch einen Punkt P ist eine zu einer gegebenen Ebene (s', s'') parallele Ebene zu legen. Durch P kann man sofort die Spurparallelen der Ebene angeben und damit auch die Spuren selbst.

[140] Die Schnittgerade zweier Ebenen ist zu konstruieren. Da man die Spurpunkte der Schnittgeraden g in den Schnittpunkten der entsprechenden Spuren H und V hat, kann man die Projektionen g_1 und g_2 sofort konstruieren, wie in Fig. 41 angegeben ist. Diese

Konstruktion ist äußerst wichtig; man übe sie in den verschiedensten Lageverhältnissen der beiden Ebenen wirklich durch und verfähre stets nach dem dargestellten Schema; man achte auch auf Sichtbarkeit der einzelnen Teile der Schnittgeraden, je nachdem welche Stücke derselben im I. Quadranten liegen. Um uns des beschränkten Raumes wegen recht kurz auszudrücken, erwähnen wir, daß s' und s'' nicht wie in Fig. 41 beide nach derselben Seite zu laufen brauchen, sondern nach verschiedenen; entsprechendes gilt von t' und t'' . Das gibt schon recht viele Möglichkeiten, die das Aussehen der Konstruktion ganz anders erscheinen lassen wie oben. Dann kann eine der beiden Ebenen besondere Lagen zu Π_1 oder Π_2 annehmen; z. B. kann die eine Ebene $\parallel \Pi_1$ laufen, dann fällt g_2 mit t'' zusammen und $g_1 \parallel s'$ (Fig. 42).

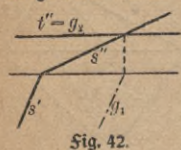


Fig. 42.

Liegt einer der Schnittpunkte der entsprechenden Spuren oder beide außerhalb der Zeichenebene, dann verwendet man zunächst eine Hilfsebene $\parallel \Pi_1$, die mit jeder der beiden gegebenen Ebenen eine Schnittgerade liefert, deren Schnittpunkt ein Punkt der gesuchten Geraden ist; eine zweite solche Hilfsebene, vielleicht diesmal $\parallel \Pi_2$, würde ebenso einen zweiten Punkt der gesuchten Geraden liefern, wodurch sie festgelegt ist. Man vergesse hier nicht, Kontrollkonstruktionen auszuführen, ob die gesuchten Punkte wirklich auf der Ebene liegen.

Andere Schwierigkeiten entstehen, wenn die Achsenschnittpunkte der Spuren so nahe aneinanderrücken, daß ein genaues Zeichnen nicht mehr möglich ist. Man vermeide überhaupt stets, eine Gerade durch zwei sehr nahe aneinandergelegene Punkte zu bestimmen. In diesem Fall verwendet man eine Hilfsebene parallel der einen der beiden Ebenen, so daß eine geeignetere Figur entsteht. Die erhaltene Schnittgerade ist dann zu der gesuchten parallel, so daß man jetzt durch die Schnittpunkte der Spuren Parallelen legen kann. Ebenso verfährt man, wenn die Achsenschnittpunkte der beiden gegebenen Ebenen ganz zusammenfallen. Zu einer beliebigen Hilfsebene, oder auch einer Ebene $\perp \Pi_1$ und $\perp \Pi_2$ (also zu einem Seitenriß) greift man, wenn die beiden gegebenen Ebenen parallel zur Achse liegen.

[141] Man soll den Schnittpunkt dreier Ebenen bestimmen. Hier bringt man die erste Ebene mit der zweiten, die zweite mit der dritten zum Schnitt; der Schnittpunkt der beiden Schnittgeraden ist der gesuchte.

Gerade und Ebene. [142] Der Schnittpunkt P einer Geraden g

mit einer Ebene E ist zu bestimmen. Wir legen durch die Gerade g eine Hilfsebene $\perp \Pi_1$, und bringen deren Schnittgerade mit E zum Schnitt mit g (Fig. 43). Damit ist auch folgende Aufgabe gelöst:

[143] Von einem Punkt P ist auf eine Ebene E das Lot zu fällen und der Fußpunkt zu bestimmen. Wir haben schon in [121] festgestellt, daß das Lot auf eine Ebene in der Projektion senkrecht auf den entsprechenden Hauptlinien steht. Da die Spurgeraden solche sind, hat man nur von P_1 auf s' und von P_2 auf s'' die Lote zu fällen und nach [142] den Fußpunkt zu bestimmen. Damit sind auch die Aufgaben über [144] den Abstand eines Punktes von einer Ebene, und über [145] den Abstand zweier parallelen Ebenen gelöst. Ferner kann man jetzt an die Konstruktion [146] des Neigungswinkels einer Geraden gegen eine Ebene gehen, indem man den Winkel dieser Geraden gegen ein Lot auf die Ebene sucht. Will man [147] den Neigungswinkel zweier Ebenen finden, so kann man ihn aus dem Neigungswinkel zweier Lote bestimmen, die man von einem beliebigen Punkt auf die beiden Ebenen fällt.

Wir können [147] auch genau so lösen wie früher bei [57]; wir drehen wie dort alles in Π_1 . Die nötigen Entfernungen der Punkte von Π_1 werden aus Π_2 abgegriffen. Man führe diese Aufgabe nach dem Zweitafelverfahren wirklich durch!

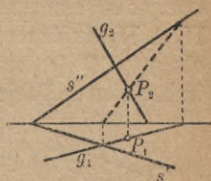


Fig. 43.

10. Projektionshilfsebenen.

Erklärung des Umprojizierens. Wir haben einigemal Hilfsebenen — meist $\perp \Pi_1$ — eingeführt, in die wir unsere räumlichen Figuren projizierten und erreichten dadurch günstigere Lageverhältnisse zur Bestimmung der wahren Größe von geometrischen Gebilden. Vgl. hierzu Fig. 44, wo durch Einführung einer zu Π_1 senkrechten und zur Strecke PQ parallelen Ebene Π_3 es ermöglicht wurde, daß die wahre Größe der Strecke $PQ = P_3Q_3$ direkt erscheint, ebenso der Neigungswinkel α_1 von PQ gegen Π_1 . Wir führen diese Aufgabe nur an, um das Wesen des Umprojizierens hervorzuheben. Die Spurgeraden von Π_3 sind in Fig. 44 wie bisher durch s' und s'' bezeichnet; für gewöhnlich lassen wir s'' weg und betrachten $s' = \alpha_{13}$ als neue Achse,

dementsprechend wurde die alte Achse durch $a_{1,2}$ bezeichnet. Nun könnte man P_1Q_1 und P_3Q_3 für sich als Grund- und Aufriß betrachten und abermals eine neue Hilfsebene $\Pi_4 \perp \Pi_3$ einführen, die in Fig. 44 als zu PQ senkrecht gedacht ist; in der vierten Projektionsebene Π_4

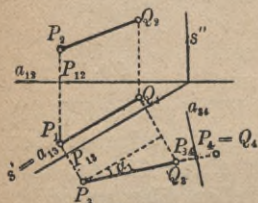


Fig. 44.

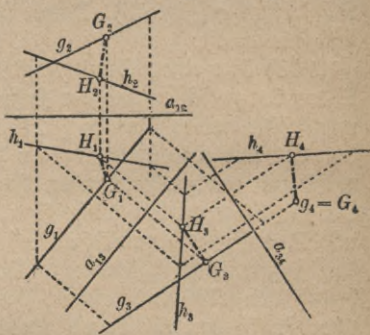


Fig. 45.

erscheint dann die Strecke PQ als ein einziger Punkt. Bezeichnet man allgemein den Schnittpunkt eines Achsenlotes P_iP_k durch P_{ik} , so ist $P_2P_{1,2} = P_3P_{1,3}$ und $P_1P_{1,3} = P_4P_{3,4}$. Dadurch ist rein mechanisch das Umprojizieren bestimmt.

Anwendung auf die Bestimmung des kürzesten Abstandes. Wie man durch Senkrechtufrichten von Π_2 um $a_{1,2}$ direkt zu der räumlichen Figur kommen kann, so ist dies natürlich auch möglich durch Senkrechtufrichten von Π_3 um $a_{1,3}$, und wenn man dann nochmals in der so aufgerichteten Ebene Π_3 die vierte Projektionsebene Π_4 senkrecht um $a_{3,4}$ herumdreht, hat man eine Vorstellung von der Lage der vierten Projektionsebene im Raum, die also im obigen Fall $\perp PQ$ liegt. Wir verwenden jetzt Fig. 44 zur Lösung folgender Aufgabe.

[148] Gesucht wird der kürzeste Abstand zweier windschiefen Geraden g und h . Liegen die Geraden so, daß eine von beiden (g) auf einer Projektionsebene (Π_2) senkrecht steht, so muß der kürzeste Abstand oder das gemeinsame Lot (l) von g und h parallel zu dieser Projektionsebene Π_2 sein. Dann projiziert es sich in wahrer Größe, und der rechte Winkel zwischen l und h muß sich wieder als rechter Winkel projizieren. Darauf beruht die folgende Lösung unter Zuhilfenahme zweier neuer Projektionsebenen $\Pi_3 \perp \Pi_1$ und $\Pi_4 \perp \Pi_3$. In Fig. 45 seien g und h zwei beliebige windschiefe Geraden. Wir legen $\Pi_3 \parallel g$ und zeichnen durch Umprojizieren je zweier Punkte auf g und h die dritten Projektionen g_3 und h_3 . Legen wir jetzt eine vierte

Projektionsebene $\perp g$, so erscheint g_4 in Π_4 als Punkt G_4 . Von G_4 aus fällen wir auf h_4 das Lot $l_4 = G_4 H_4$ und von H_4 gehen wir $\perp a_{34}$ bis zum Schnitt H_3 mit h_3 . Das Lot $H_3 G_3$ auf g_3 ist die dritte Projektion des gesuchten kürzesten Abstandes. Durch Rückprojizieren $\perp a_{13}$ erhält man dann $G_2 H_2$ und weiter $\perp a_{12}$ $G_1 H_1$. $G_4 H_4$ ist zugleich die wahre Länge von GH . Man prüfe das in der ersten und zweiten Projektion nach [87]!

[149] Gesucht wird der Winkel zwischen zwei Ebenen, die durch ihre Schnittgerade g und je einen Punkt A und B gegeben sind. Wir projizieren so um, daß $\Pi_4 \perp g$ wird; dann bilden die Verbindungslinien des Punktes, der als G_4 in Π_4 erscheint, mit A_4 und B_4 den gesuchten Winkel. Im Anschluß an diese Lösung stellen wir noch folgende Aufgabe:

[149a] Man soll auf dem kürzesten Weg von A über g nach B gelangen; in welchem Punkt P passiert man g ? (Man drehe in der 4. Projektion die Ebene (A, g) um g hinein in (B, g) und ziehe AB).

Liegen a_{13} und a_{34} beliebig, so liefert die vierte Projektion von irgendeinem geometrischen Gebilde, das durch Grundriß und Aufriß dargestellt ist, die rechtwinklige Projektion auf irgendeine im Raum gelegene Ebene. Wenn also ein Körper durch Grund- und Aufriß gegeben ist, so kann man durch punktwises Umprojizieren dessen Projektion auf eine beliebige Ebene erhalten. Man wird diese Methode anwenden, wenn man einen Körper in einer zu Π_1 und Π_2 besonderen Lage darstellen kann — was meistens der Fall ist —, um dann durch das Umprojizieren den Körper in einer beliebigen oder in einer bestimmten anderen Lage zur Projektionsebene zu erhalten.

Man übe selbst solche Konstruktionen an den Körpern durch, die in den Aufgaben [65] bis [71] behandelt wurden. Im besonderen empfehlen wir ein Umprojizieren, bei dem Π_4 senkrecht zu einer bestimmten Achse des Körpers steht. Auch die Grundaufgabe der Aronometrie kann hier wieder durchgenommen werden, also ein dreiseitiges rechtwinkliges Achsenkreuz mit gleichen Achsenlängen auf eine beliebige Ebene zu projizieren.

Bestimmung der Projektionsstrahlen. [150] Die Richtung der Projektionsstrahlen auf Π_4 ist in Π_1 und Π_2 zu bestimmen, wenn a_{13} und a_{34} festgelegt sind. Wir kehren zu Fig. 44 zurück und betrachten die Umprojektion von P . Denken wir uns die einzelnen Ebenen zurückgedreht, wie S. 72 angedeutet wurde, so wollen wir die horizontal-

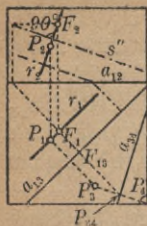


Fig. 46.

projektion F_1 des im Raum liegend gedachten Punktes P_4 auf Π_1 konstruieren. P_4P_{34} wird im Raum $\parallel \Pi_1$ liegen und zwar um die Entfernung des Punktes P_{34} von a_{13} über Π_1 . Füllen wir in Fig. 46 von P_{34} auf a_{13} das Lot (Fußpunkt F_{13}), so muß F_1 auf diesem Lote liegen und zwar ebensoweit von a_{13} wie P_1 , so daß $P_1F_1 \parallel a_{13}$ ist. Die Vertikalprojektion des im Raum liegenden Punktes P_4 auf Π_2 liegt dann auf dem Achsenlot durch F_1 zu a_{12} und zwar um $P_{34}F_{13}$ von a_{12} entfernt. P_1F_1 und P_2F_2

sind die Projektionsrichtungen r_1 und r_2 in Grund- und Aufsicht. Man stelle sich von dieser Konstruktion nach den Betrachtungen von S. 71 f. vielleicht aus einer Postkarte ein Modell her. Die Fig. 46 wurde gleich in Form einer Postkarte gezeichnet, wo die eine Ecke (die rechte untere) den Punkt P_4 darstellen soll. Man lasse den Teil der Kartenebene zwischen a_{12} und a_{13} in der horizontalen liegen und richte zunächst Π_2 hoch, dann Π_3 und drehe schließlich Π_4 um a_{34} .

Durch die Projektionsstrahlen in der Richtung PF ist aber auch die Richtung der Spurgeraden von Π_4 in Π_1 und Π_2 festgelegt. F_1F_{13} ist eine erste Spurparallele. Die Horizontalspur s' muß $\perp a_{13}$ liegen und die Vertikalspur $s'' \perp P_2F_2$; s' fällt in der Figur außerhalb der Karte. Die Spuren einer zu Π_4 parallelen Ebene sind in Fig. 46 eingezeichnet.

Umprojizieren auf eine gegebene Ebene. Auch die umgekehrte Aufgabe zu [150] ist möglich, [151] durch Umprojizieren ein räumliches Gebilde auf eine durch ihre Spuren s' und s'' gegebene Ebene zu projizieren. a_{13} kann man ohne weiteres $\perp s'$ legen; es gilt somit nur a_{34} zu finden. Wir greifen einen beliebigen Punkt $P(P_1P_2)$ heraus, ziehen durch ihn eine Gerade r senkrecht zur gegebenen Ebene, also $r_1 \perp s'$ und $r_2 \perp s''$, greifen darauf einen beliebigen Punkt $F(F_1F_2)$ heraus und projizieren dies alles zunächst einmal hinein in Π_3 . F_3 ist dann aber zugleich das frühere P_{34} in Fig. 46, und durch P_3 geht $\perp P_3P_{34}$ die gesuchte Achse. Damit ist das Umprojizieren ermöglicht. Hervorgehoben sei noch, daß man die Projektion eines räumlichen Gebildes auf eine durch ihre Spuren gegebene Ebene auch nach [143] finden kann, daß man von jedem Punkt auf die Ebene das Lot fällt und den Fußpunkt bestimmt. Das ist natürlich für viele Punkte zu

umständlich, außerdem würde man dann auch erst nur die Horizontal- und Vertikalprojektion von der gesuchten Projektion erhalten, die man dann in wahrer Größe noch besonders zu konstruieren hätte; das Umprojizieren liefert sie sofort. Man löse folgende Aufgabe mit Hilfe des Umprojizierens:

[152] Ein Dreieck ABC ist durch Grund- und Aufsicht gegeben; gesucht wird seine senkrechte Projektion auf einer durch ihre Spuren s' und s'' gegebenen Ebene.

11. Schiefwinklige Parallelprojektion, Axonometrie.

Erklärung und Darstellung eines hausähnlichen Gebildes. Wir kommen hier zu Betrachtungen, die wir schon früher S. 45 f. anstellten; diese wollen wir hier ergänzen. Der letzte Paragraph ließ erkennen, daß ebenflächige Körper, die in der Hauptsache nach zwei oder gar drei aufeinander senkrechten Richtungen orientiert sind — wie Quader, Häuser u. dgl. — im Grund- und Aufsichtverfahren erst dann günstige Darstellungen ergeben, wenn sie beliebig zu den Projektionsebenen liegen. Die einfachen Lagen solcher Körper zu Π_1 und Π_2 lassen sich leicht zeichnen, dagegen etwas umständlich daraus beliebige Lagen, die aber wieder den Vorteil haben, günstigere Ansichten zu gewähren. Hier greift die bereits S. 45 gestreifte schiefe Parallelprojektion, die Axonometrie, helfend ein. Wir haben damals gesagt, daß ein Gegenstand leicht in schiefer Parallelprojektion gesetzt werden kann, wenn man die Abstände seiner markanten Punkte von drei aufeinander senkrechten Ebenen kennt. Schalten wir also eine zu Π_1 und Π_2 senkrechte Ebene Π_3 ein, eine Seitenrißebene, so können wir jene drei Abstände leicht abgreifen (vgl. Fig. 47). Wir konnten früher auf diese Darstellung eines Körpers in schiefer Parallelprojektion nicht eingehen, weil wir das Grund- und Aufsichtverfahren noch nicht erläutert hatten.

Wir denken uns drei aufeinander senkrechte Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 , die sich in drei Achsen, der X, Y, Z -Achse schneiden. Denken wir uns ferner Π_1 und Π_2 wie früher im Raum gelegen, so beschränken wir uns auf den vorderen oberen, rechten Oktanten, in dem allein die darzustellenden Objekte sich befinden mögen. Den Scheitel dieser dreiseitigen, rechtwinkligen Ecke — deren Kanten ein dreiseitiges rechtwinkliges Achsenkreuz bilden — nennen wir O . Jeder Punkt P im

Raum dieser Ecke ist dann bestimmt, wenn man seine Entfernungen x, y, z von den drei Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 kennt. Wir bezeichnen die drei Achsen derart, daß sich Π_1 und Π_2 in der X -Achse, Π_1 und Π_3 in der Y -Achse und Π_2 und Π_3 in der Z -Achse schneiden. Von O aus gelangen wir zu P , wenn wir auf der X -Achse um x fortschreiten, von da parallel zur Y -Achse um y und von da wieder parallel zur Z -Achse um z .

Auf den drei Achsen denken wir uns ferner die drei Einheitspunkte E_x, E_y, E_z markiert, so daß $OE_x = OE_y = OE_z = 1$ ist. Nach dem Pohlkeschen Satz (S. 45) kann jedes ebene Viereck angesehen werden als ähnlich zu einer schiefen Parallelprojektion des Tetraeders $OE_xE_yE_z$, wobei wir weder im Viereck noch im Tetraeder alle Verbindungslinien der Ecken ausziehen, sondern nur die, welche auf den Achsen liegen. Haben wir also irgendein ebenes Viereck $O'E'_xE'_yE'_z$, so geben die Strecken $O'E'_x, O'E'_y$ oder $O'E'_z$ die Veränderungen der Einheitsstrecke e an, wenn sie parallel zur X -Achse, Y -Achse oder Z -Achse liegt. Die Veränderung s'_x irgendeiner anderen zur X -Achse parallelen Strecke s ergibt sich dann leicht aus der Proportion $s : s'_x = e : e'_x$; für die anderen Achsen ist es analog.

Beim praktischen Zeichnen wird es sich bei diesen Veränderungen nur um Verkürzungen handeln, denn wir haben früher empfohlen, nur solche Pohlkesche Vierecke zugrunde zu legen, die zu günstigen Bildern führen. Da man aber irgendeine Strecke im Raum nie größer sehen kann als sie selbst ist, empfiehlt es sich, die obigen Veränderungen der Einheitsstrecken durch die Parallelprojektion nur Verkürzungen sein zu lassen (höchstens 1 : 1).

Hat nun ein Punkt P von den drei Ebenen Π_3, Π_2, Π_1 entsprechend die Abstände (Koordinaten) x, y, z , so können wir auf dem oben angedeuteten Weg in drei Schritten von O nach P kommen, deren jeder einer Achse parallel ist, und die gleich x, y, z sind. Mit Hilfe der obigen Proportionen können wir die Verkürzungen x', y', z' finden und dann damit in der Parallelprojektion des Achsenkreuzes die entsprechenden drei Schritte parallel zu den Achsen $O'X', O'Y', O'Z'$ wiederholen, die jetzt natürlich alle in einer Ebene liegen. Der Endpunkt P ist dann die Parallelprojektion des Punktes P .

Wir wählen jetzt den einfachen Fall:

$$O'E'_x : O'E'_y : O'E'_z = 1 : \frac{1}{2} : 1$$

$$\text{und } \sphericalangle X'O'Z' = 90^\circ, \quad \sphericalangle X'O'Y' = \sphericalangle Y'O'Z' = 135^\circ.$$

Dann werden die beiden folgenden Figuren 47 und 48 von selbst verständlich sein.

Der Anblick des Hauses in Fig. 48 erscheint von vorn und etwas von oben. Dieser Eindruck wird noch verstärkt, wenn die X -Achse auch etwas nach unten geneigt wird, wie die Fig. 49 zeigt, wo wir das Verhältnis $1 : \frac{3}{4} : 1$ wählten.

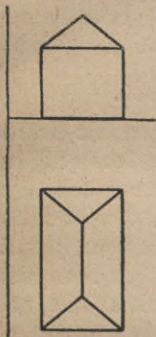


Fig. 47.

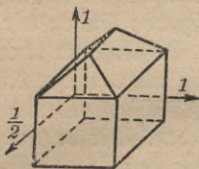


Fig. 48.

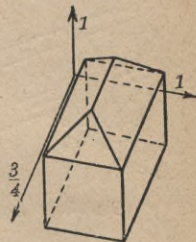


Fig. 49.

Dagegen erscheint das Haus von einem nicht so hoch gelegenen Punkt betrachtet, wenn die X -Achse wieder horizontal ist und die Y -Achse

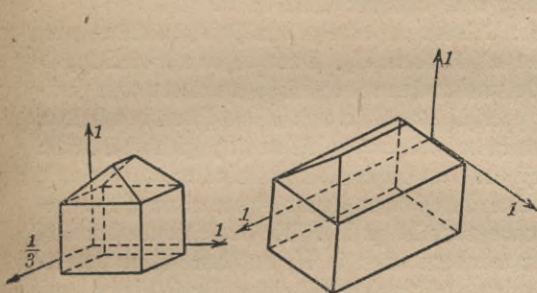


Fig. 50.

Fig. 51.

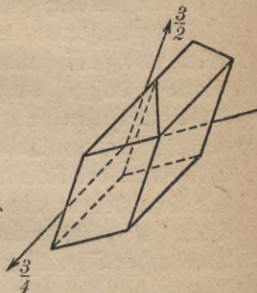


Fig. 52.

einen kleineren Winkel mit der verlängerten X -Achse bildet. Vgl. Fig. 50, wo das Verkürzungsverhältnis $1 : \frac{1}{3} : 1$ gewählt wurde.

Dann mag noch ein Beispiel gegeben werden, das im besonderen der rechtwinkligen Anometrie angehört; die drei Achsen sind in Fig. 51 alle unter 120° geneigt, und das Verhältnis ist $1 : 1 : 1$, also derselbe Fall wie in Fig. 17.

Zum Schluß in Fig. 52 noch eine beliebige Parallelprojektion ($1 : \frac{3}{4} : \frac{3}{2}$) wieder desselben Gebildes, die andeutet, wie ungünstig ein solches

Bild wirken kann, wenn man alles willkürlich festsetzt. Durch Probieren versuche man da die Richtung der Projektionsstrahlen im Raum festzustellen; in jener Richtung wird dann das Bild günstig wirken.

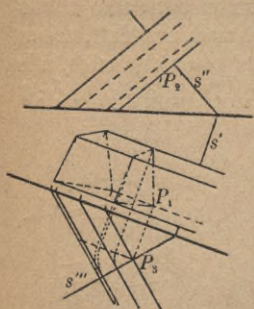


Fig. 53.

12. Ebene Schnitte.

Prismenschnitte. Hier knüpfen wir an die Betrachtungen in Nr. 2 an. Die dort gelösten Aufgaben können wir ohne weiteres mit Hilfe des Zweitafelverfahrens lösen, ohne daß es nötig wäre, näher darauf einzugehen, zumal in [136] solche ebenen Figuren schon betrachtet wurden. Wir besprechen nur solche Fälle, bei denen das Zweitafelverfahren besonders ein-

fache Konstruktionsmöglichkeiten bietet.

[153] Ein schiefes vierseitiges Prisma, das mit der Grundfläche in Π_1 liegt, soll durch eine Ebene senkrecht zu den Seitenkanten geschnitten werden; gesucht wird also der Querschnitt.

Wir projizieren unser Prisma auf eine zu den Prismenkanten parallele und zu Π_1 senkrechte Hilfsebene Π_3 . Dann legen wir die Schnittebene so, daß s''' die Prismenkanten rechtwinklig schneidet und s' senkrecht zur Hilfsachse a_{13} steht. Das Stück von s''' zwischen den beiden äußeren Prismenkanten in der dritten Projektion ist zugleich die dritte Projektion der Schnittfigur. Um diese selbst zu erhalten, drehen wir die Schnittebene um eine durch einen Punkt P der einen Prismenkante $\parallel s'$ gehende Gerade parallel zu Π_1 . Die Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur wandern dann in Π_1 auf den ersten Projektionen der Prismenkanten, während die dritten Projektionen auf Kreisbögen um P_3 wandern, bis sie in eine zu a_{13} parallele Lage kommen. Das umgelegte Schnittviereck ist dann leicht zu konstruieren (vgl. Fig. 53); es stellt die wahre Größe des gesuchten ebenen Schnittes dar. Wollte man noch Grund- und Aufriß der Schnittfigur haben, so müßte man die Schnittpunkte von s''' mit den dritten Projektionen der Prismenkanten nach der ersten Projektion ($\perp a_{13}$) herüberloteten und von da herauf ($\perp a_{12}$) nach der ersten Projektion.

Denkt man sich das Prisma $\parallel \Pi_1$ abgeschnitten, so könnte man noch die Aufgabe lösen [154], die Abwicklung des Prismas (Netz) zu kon-

struieren. Da hat man zu bedenken, daß Π_3 die wahren Längen der Seitenkanten enthält, während die Grundfläche schon die wahre Größe darbietet. Bei der Abwicklung geht die Schnittfigur in eine Gerade über, die dann senkrecht zu den Seitenkanten steht. Ganz ähnlich wird folgende Aufgabe gelöst: [155] Man wickle einen schiefen Kreiszylinder ab. Die Abwicklung der Schnittellipse geschehe dadurch, daß man kleine Bogenstrecken gleich der Sehne setzt.

[156] Ein schiefes Prisma, das mit der Grundfläche in Π_1 liegt, soll mit einer beliebigen Ebene (s', s'') zum Schnitt gebracht werden. Die nächstliegende Lösung wäre, daß man jede Kante einzeln mit der Ebene zum Schnitt brächte. Wir wollen anders vorgehen. Durch jede Kante legen wir eine Ebene parallel zu s'' ;

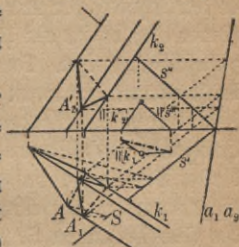


Fig. 54.

alle diese Ebenen haben dann Horizontalspuren, die zueinander parallel sind, und deren Richtung h' man leicht feststellen kann (vgl. die kleine Figur im Innern von Fig. 54, an deren Seiten steht: $\parallel k_1, \parallel k_2, \parallel s''$; die strichpunktierte Linie im Innern ist h'). Nehmen wir jetzt an, A' sei der Schnittpunkt der Prismenkante durch die Ecke A der Grundfläche mit der Schnittebene, so möge durch AA' eine solche Hilfsebene $\parallel s''$ gelegt sein. Dann kann man von A' in der Hilfsebene $\parallel s''$ heruntergehen bis zum Schnittpunkt S mit s' . In der Projektion auf Π_1 geschieht das parallel zur Achse durch A_1 bis S . Gehen wir dann von S längs der Horizontalspur h' in der Hilfsebene weiter, so kommen wir zu A und schließlich längs der Prismenkante zurück zu A' (in der Projektion zu A_1). Das gibt uns folgende Konstruktion von A_1 . Man geht von A parallel der konstruierten Hilfsrichtung h' bis zum Schnittpunkt S mit s' und von da parallel zur Achse bis zum Schnitt A_1 mit der Projektion der Prismenkante durch A ; das ist der gesuchte Schnittpunkt. Auf diese Weise kann man schnell durch bloßes Parallelenziehen den Grundriß der Schnittfigur ermitteln. Den Aufriß der Schnittfigur findet man entweder durch direktes Herausgehen längs der Achsenlote oder durch [134].

Kontrolle: Legt man durch einen Eckpunkt der Schnittfigur eine erste Hauptlinie in der Schnittebene, so müssen sich deren Projektionen auf der Affinitätsachse $a_1 a_2$ schneiden.

Zylinderschnitte. [157] Ein schiefer Kreiszylinder soll mit einer Ebene zum Schnitt gebracht werden. Man könnte ebenso wie in [155]

verfahren und Punkt für Punkt der Schnittellipse konstruieren. Schneller kommt man zum Ziel, wenn man dem Grundkreis ein Quadrat umbeschreibt, von dem zwei Seiten der Projektionsachse parallel laufen, und durch die Ecken Parallelen zu den Zylindererzeugenden legt. Dann hat man dem Zylinder ein schiefes quadratisches Prisma umbeschrieben, dessen Schnittfigur mit der schneidenden Ebene nach [156] leicht aufzufinden ist; es ist ein Parallelogramm, in das man eine Ellipse einzubeschreiben hat. In den Projektionen ist es ebenso. Besonders zu konstruieren hat man die Berührungspunkte dieser Ellipse mit dem scheinbaren Umriß des Zylinders, das sind die Erzeugenden, deren Horizontalprojektionen den Grundkreis berühren. Man konstruiert diesen Berührungspunkt als affinen Punkt zu dem entsprechenden Berührungspunkt derselben Erzeugenden mit dem Grundkreis. Vgl. hierzu die Ausführungen S. 28.

Pyramidenschnitte. [158] Man soll eine Pyramide, die mit der Grundfläche in Π_1 liegt, durch eine Ebene $E(s', s'')$ schneiden, Grund- und Aufriß der Schnittfigur angeben und den entstandenen Pyramidenstumpf abwickeln. Um die Schnittfigur zu ermitteln, wäre es das Nächstliegende, jede Kante einzeln mit E zum Schnitt zu bringen, aber besser führt folgende Konstruktion zum Ziel. Durch die Spitze P der Pyramide legt man eine Parallele zu s'' , die die Horizontalebene in P' schneidet. P' kann dann auch als die $\parallel s''$ in Π_1 projizierte Pyramidenspitze angesehen werden. Nun legt man durch jede einzelne Pyramidenkante eine Hilfsebene $\parallel s''$, deren Spuren sich alle in P' schneiden. In jeder solcher Hilfsebene vergegenwärtigen wir uns wieder ein analoges Dreieck wie in [156], A sei eine Ecke der Grundfläche, A' der Punkt der Schnittfigur auf der Prismenkante durch A und S der Schnittpunkt der Spur der Hilfsebene durch AA' mit s' . Die Punkte S entsprechend allen Eckpunkten der Grundfläche sind sofort angebar, folglich auch wieder die Parallelen durch diese Punkte S zur Achse, so daß die Punkte A' auch alle genau wie in [156] einfach zu konstruieren sind. Für die Ermittlung des Aufrisses gilt dasselbe wie am Schluß von [156].

Noch ein Wort zur Ermittlung des Netzes vom Pyramidenstumpf! Man wickelt zunächst die ganze Pyramide ab, bestimmt also zuerst die wahren Seitenlängen der Kanten (durch Drehung der rechtwinkligen Dreiecke bestehend aus der Pyramidenhöhe und der betreffenden Seitenkante um die Höhe in eine zu Π_2 parallele Lage). Zugleich mit

dieser Drehung läßt man auch die Eckpunkte der Schnittfigur mitwandern, so daß man auch sofort die wahren Längen der Kanten des Pyramidenstumpfes hat. Dann kann man in die Abwicklung der ganzen Pyramide die der Schnittfigur hineinzeichnen. Es wird sich empfehlen, diese Feststellung der wahren Seitenlängen besonders zu zeichnen, etwa derart, daß man sich Grund- und Aufsicht der Pyramide noch einmal links neben der Fig. 55, also parallel der Achse verschoben, zeichnet und da jene Drehungen zur Ermittlung der wahren Längen ausführt.

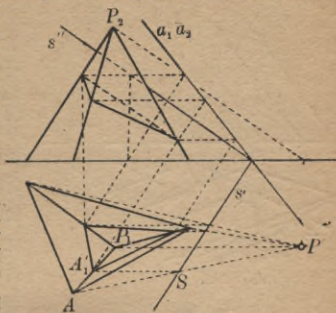


Fig. 55.

Kegelschnitte. Wegen der ebenen Schnitte von beliebigen Kreiskegeln (Grundfläche in Π) verweisen wir auf die Ausführungen S. 26 f.; die Lösungsmethode ist dieselbe wie für die Pyramiden. Man führe [158 a, b, c] die drei Fälle: Ellipse, Parabel, Hyperbel mit Hilfe von Grund- und Aufsicht durch. Auf andere Weise kommt man zum Ziel, wenn man Hilfeebenen parallel zu Π_1 legt.

13. Durchdringungen und Schatten.

Schnitte von Geraden mit Körpern. Einfache Durchdringungen (also Schnitte) von Geraden mit ebenen Stücken (Dreiecken usw.) haben wir schon S. 60 f. besprochen. Damit wären eigentlich auch schon die Durchdringungen von Geraden mit ebenflächigen Körpern erledigt, wenn man feststellen könnte, welche Seitenflächen von der Geraden getroffen werden. Es werden offenbar solche Seitenflächen durchschnitten, bei denen der Schnittpunkt der Geraden mit der betreffenden Ebene innerhalb der Seitenfläche liegt; das zu ermitteln ist natürlich nicht schwer, wenn auch manchmal umständlich. *) Wir wenden

*) Einfacher kommt man zum Ziel, wenn man den Körper so umprojiziert, daß man als Projektionsebene eine solche nimmt, die zur schneidenden Geraden senkrecht verläuft, dann gibt in der vierten Projektion die als Punkt erscheinende Schnittgerade zugleich den Durchdringungspunkt an.

uns hier nur den Körpern zu, wo diese Ermittlung besonders einfach ist, den Prismen und Pyramiden, und lösen folgende Aufgaben:

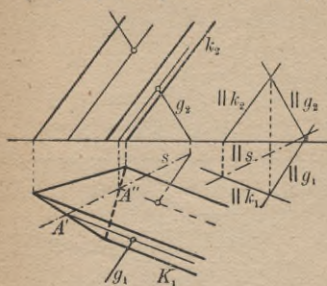


Fig. 56.

[159] Gesucht werden die Durchdringungspunkte einer Geraden mit einem Prisma, dessen Grundfläche in Π_1 liegt. Der Grundgedanke der Konstruktion ist folgender. Man legt durch die schneidende Gerade g eine Ebene parallel mit den Prismenkanten und bestimmt ihre Horizontalspur s . Durch die beiden Schnittpunkte A' und A'' von s mit den Seitenkanten in der Grundfläche legt man in den Seitenflächen Parallelen zu den

Prismenkanten, das sind zugleich die Schnittgeraden der Hilfsebene mit dem Prisma. Die gesuchten Schnittpunkte liegen einmal auf diesen Schnittgeraden durch A' und A'' , dann aber auf g selbst, so daß also die Horizontalprojektionen der gesuchten Durchdringungspunkte damit gefunden sind. Man denkt sich das im Innern des Körpers liegende Stück von g gar nicht vorhanden und zieht dementsprechend dieses Stück auch nicht aus (Fig. 56). Trifft die Horizontalspur der Hilfsebene die Seitengrundfläche nicht selbst, so schneidet g das Prisma gar nicht.

[160] Man soll den Ein- und Austrittspunkt einer Geraden mit einer Pyramide bestimmen. Die Lösung ist ähnlich wie bei [159]. Man legt die Hilfsebene durch g und durch die Spitze der Pyramide; um die Horizontalspur s dieser Hilfsebene zu ermitteln, legt man noch eine Gerade $g' \parallel g$ durch die Pyramidenspitze und bestimmt sowohl den Horizontalspurpunkt H von g wie H' von g' . $HH' = s$ bringt man zum Schnitt mit den Seiten der Pyramidengrundfläche in A' und A'' , legt durch A' und A'' die Geraden nach der Spitze und bringt diese Geraden zum Schnitt mit g .

[161] Die Durchdringungspunkte einer Geraden g mit einem Zylinder sollen ermittelt werden. Vgl. [159].

[162] Die entsprechende Aufgabe für einen Kegel wird nach [160] gelöst und ist in Fig. 57 dargestellt. Zur Erklärung dieser Figur sei auf [160] verwiesen.

[163] Man soll die Durchdringungspunkte einer Geraden g mit

einer Kugel bestimmen. Denkt man sich durch $g \perp \Pi_1$ eine Hilfsebene E gelegt und diese mit der Kugel zum Schnitt gebracht, so kann man diese Hilfsebene mit dem Schnittkreis und der Geraden g in Π_1 umlegen und da die Schnittpunkte konstruieren (Fig. 58).

Durchdringungen von Körpern. [164] Um die Durchdringung eines Prisma

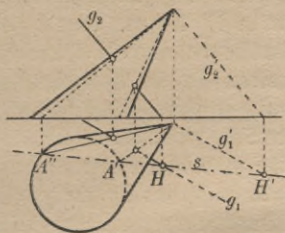


Fig. 57.

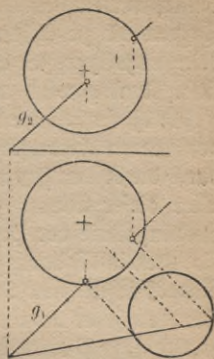


Fig. 58.

mas mit einem beliebigen ebenflächigen Körper zu erhalten, empfiehlt es sich die schon S. 81 in der Anmerkung gegebene Methode anzuwenden, nämlich die ganze räumliche Figur auf eine Ebene senkrecht zu den Prismenkanten zu projizieren; damit hat man dann in der vierten Projektion schon alles Gewünschte und man hat nur zurückzuloten. Man löse hiernach:

[165] Man soll durch ein Dodekaeder ein quadratisches prismatisches Loch bohren.

Bei den Durchdringungen von Körpern hat man zu unterscheiden zwischen wirklichen Durchdringungen, wobei zwei Durchdringungslinienzüge vorhanden sind, und Eindringungen, wobei nur ein Linienzug vorhanden ist.

Besonders einfache Methoden ergeben sich wieder, wenn man Prismen und Pyramiden hat, deren Grundflächen in Π_1 liegen.

[166] Zwei Prismen mit den Grundflächen in Π_1 sollen zum Schnitt gebracht werden. Man bestimmt zunächst die Horizontalspur einer Ebene, die sowohl zu den Kanten des einen wie zu den Kanten des anderen Prismas parallel ist. Dann legt man zu dieser Hilfsebene parallele Ebenen und bringt sie mit den Prismen zum Schnitt. Von den dabei entstandenen Geraden sind die Schnittpunkte festzustellen, die dann Punkte der gesuchten Durchdrigungsfigur sind. Es genügt natürlich, die Durchstichpunkte der Kanten des einen Prismas mit dem anderen Prisma zu ermitteln und umgekehrt. Von Wichtigkeit ist bei diesen Aufgaben die Bestimmung der Sichtbarkeit und

Unsichtbarkeit des Durchdringungslinienzugs. Darauf ist besonderes Augenmerk zu richten. Sichtbar sind nur solche Strecken der Durchdringungsfigur, die als Schnitte zweier sichtbarer Flächen entstanden sind. Analog wird auch folgende Aufgabe gelöst:

[167] Es soll die Durchdringung zweier Pyramiden ermittelt werden, deren Grundflächen in Π_1 liegen. Hier legen wir Hilfsebenen durch die beiden Pyramidenspitzen, also ein Ebenenbüschel. Die Spuren aller dieser Ebenen schneiden sich im Horizontalspurpunkt der Verbindungslinie der Pyramidenspitzen. Man hat also nur die nötigen Geraden in Π_1 durch jenen Spurhilfspunkt zu betrachten, sie mit beiden Grundflächen zum Schnitt zu bringen und in den Seitenflächen die Geraden jener Schnittpunkte nach den Spitzen zu ziehen; ihre Schnittpunkte sind Punkte der Durchdringungsfigur. Man wird auch hier nur wieder die Durchdringungspunkte der Kanten jedesmal mit der anderen Pyramide bestimmen.

[168] Liegen dagegen ein Prisma und eine Pyramide vor, deren Grundflächen in Π_1 liegen, so wird man Hilfsebenen legen, die sich alle in einer Geraden schneiden, die durch die Pyramidenspitze geht und zu den Prismenkanten parallel ist.

Wie schon erwähnt wurde, bieten die Durchdringungen von ebenflächigen Körpern im Grunde genommen keine Schwierigkeiten, da die nötigen Einzelkonstruktionen alle behandelt sind. Die Schwierigkeit beginnt erst, wenn man die gefundenen Durchdringungspunkte richtig verbinden will, um den Durchdringungslinienzug darzustellen. Um dies deutlich erkennen zu lassen, bringen wir [169] ein vierseitiges gerades Prisma mit der Grundfläche in Π_1 zum Schnitt mit einer beliebig im Raum liegenden dreiseitigen Pyramide (Fig. 59), und zwar nicht nach der Methode der Hilfsebenen, denn dann müßten wir erst die schneidenden Kanten der Pyramide mit Π_1 zum Schnitt bringen, sondern nach der S. 61 erwähnten direkten Methode. Die Schnittpunkte der Pyramidenkanten mit den Prismenseitenflächen sind direkt aus dem Grundriß zu entnehmen und in den Aufriß nach den Pyramidenkanten heraufzuloten. So wurden die Punkte F'_2, F''_2, G'_2, G''_2 auf den Kanten P_2F_2 und P_2G_2 gefunden. Daß die Kante PE das Prisma gar nicht schneidet, geht aus dem Grundriß hervor. Es handelt sich nun noch um die Durchdringungspunkte der Prismenkanten mit den Pyramidenflächen. Zu diesem Zweck legen wir je eine beliebige Hilfsebene $\perp \Pi_1$ durch die schneidenden Prismenkanten, die als solche ebenfalls sofort aus

dem Grundriß erkennbar sind. Wir bezeichnen im folgenden die Prismenkanten nur durch ihre oberen Endpunkte A, B, C, D . Die Hilfsebene durch die Kante C schneide die Pyramidenkanten PG und PE in den beiden Punkten X' und X'' , deren Grundrisse sofort angebar sind, und deren Aufrisse durch Herausloten gefunden werden. Der Schnittpunkt C_2'' von $X_2'X_2''$ mit der Prismenkante C_2 ist bereits der eine Durchdringungspunkt der Kante C mit der Pyramidenfläche PEG im Aufriß. Durch Herausloten des Schnittpunktes X_1''' der Hilfsebene mit der Pyramidenkante PF im Grundriß bekommt man auf P_2F_2 den Punkt X_2''' , und der Schnittpunkt C_2' von $X_2'X_2'''$ mit der Prismenkante C_2 ist der zweite Durchdringungspunkt der Kante C mit der Pyramide. Ebenso wurden noch die Punkte D_2' und D_2'' gefunden. Nun gilt es, die richtigen Verbindungstrecken zu

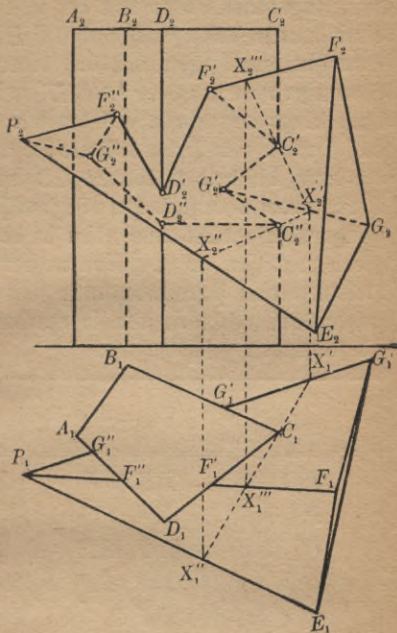


Fig. 59.

ziehen. Jeder Durchdringungspunkt ist der Schnittpunkt dreier Ebenen. Geht man von einem solchen Punkt, z. B. von F_2' , aus auf dem zu konstruierenden Durchdringungslinienzug vorwärts, so verläßt man eine der drei Ebenen und bewegt sich auf der Schnittgeraden der beiden anderen weiter bis zum nächsten Eckpunkt des Schnittvierecks (das natürlich kein ebenes ist). Man legt sich am besten ein Verzeichnis aller konstruierten Durchdringungspunkte an und schreibt zu jedem die drei Ebenen, in denen dieser Punkt liegt. Dann ist es ganz klar, daß der nächste Punkt beim Entlangwandern auf dem Durchdringungsviereck derjenige ist, der auch noch in den beiden Ebenen liegt, in deren Schnittgeraden man sich eben befand. Wir gingen oben von F' aus und wollen annehmen, daß wir die Pyramidenfläche PF (wir lassen

in Zukunft P weg) verlassen und auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen EF und CD weiterwandern. Unter allen Punkten des Durchdringungsvielecks kann nur der in Betracht kommen, der außer auf einer dritten Fläche auch noch auf EF und CD liegt, das ist aber D' . Von hier aus gehen wir auf einer der drei in D' sich treffenden Schnittgeraden der drei durch D' gehenden Ebenen weiter, natürlich nicht längs derjenigen, auf der wir eben gekommen sind, auch nicht auf der, die eine Prismenkante ist, also auf der dritten d. h. auf der, die durch die beiden Ebenen AD und EF gebildet wird. In dieser Weise findet man stets den nächsten Punkt, bis man wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Um in der Zusammenstellung der Punkte gleich zu wissen, ob zwei Ebenen der drei durch jeden Punkt zu einer Prismen- oder Pyramidenkante führen, auf der man ja nicht weitergehen darf, schreiben wir sie geordnet in einem Schema auf, wie es im folgenden geschehen ist:

	Pyramide	Prisma	Punkt- reihenfolge
F'	EF, \underline{FG}	\underline{CD}	1
F''	$\underline{EF}, \underline{FG}$	\underline{AD}	3
G'	$\underline{EG}, \underline{GF}$	\underline{CB}	7
G''	$\underline{EG}, \underline{GF}$	\underline{AD}	4
C'	\underline{FG}	$\underline{DC}, \underline{CB}$	8
C''	\underline{EG}	$\underline{DC}, \underline{CB}$	6
D'	\underline{EF}	$\underline{AD}, \underline{DC}$	2
D''	\underline{EG}	$\underline{AD}, \underline{DC}$	5

Auf der Schnittgeraden zweier Ebenen in derselben Rubrik darf man nicht weitergehen, ebensowenig auf der von zwei unterstrichenen — das sollen die Ebenen sein, auf deren Schnittgeraden man angekommen ist. Wenn wir also oben von F' aus auf der Schnittgeraden von CD und EF weitergehen, so müssen wir auf der von CD und FG angekommen sein; daher wurden im Schema diese unterstrichen. Derjenige Punkt im Schema, der auch noch CD und EF aufweist, ist D' , daher wurden diese bei D' unterstrichen. EF und AD bezeichnen dann die Ebenen, auf denen wir weitergehen müssen, sie

kommen wieder bei F'' vor (also ist dies der nächste Punkt) und müssen dort unterstrichen werden. Auf der Schnittgeraden von FG und AD geht es weiter, diese Ebenen treten bei G'' auf, also wurden sie unterstrichen. Nun geht es auf EG und AD weiter, also zum Punkt D'' , wo sie unterstrichen werden. Weiter wandern wir auf EG und DC und kommen zu C'' , von da zu G' , C' und zurück zu F' .

Diese Methode hat den Vorteil, daß sie selbsttätig Fehler korrigiert; denn ungenaues Zeichnen kann sehr wohl mal eine Durchdringung vortäuschen, wo vielleicht die Kante nur sehr nahe vorbeigeht; da würden die fälschlich konstruierten Punkte von unserer Methode gar nicht berührt werden. Wegen Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit des Durchdringungsvielecks verweisen wir auf die obigen Bemerkungen S. 84.

[170] Man führe die entsprechende Aufgabe für zwei Pyramiden durch, achte aber darauf, daß deren Grundflächen wirklich ebene Figuren sind.

Die Aufgaben [166] bis [168] führen ohne weiteres zu den Durchdringungen von Zylindern und Kegeln, deren Grundflächen in Π_1 liegen: [171] Man soll bestimmen die Durchdringung zweier Zylinder, [172] zweier Kegel und [173] eines Zylinders mit einem Kegel.

Zu [171] ist zu bemerken, daß man gut tun wird, die Richtung der Aufrichterzeugenden so zu wählen, daß die Horizontalspurrichtung der Hilfsebenen parallel der Achse gehe. Natürlich hat man nur solche Horizontalspuren zu ziehen, die beide Grundflächen schneiden. Die Umrißpunkte sind besonders sorgfältig zu konstruieren. Die Sichtbarkeit regelt sich danach, ob eine sichtbare Erzeugende mit einer eben solchen zum Schnitt gebracht wurde; alle anderen Erzeugenden bringen einen unsichtbaren Durchdringungspunkt hervor. Hervorzuheben ist noch, daß der Fall eintreten kann, wo eine der beiden äußersten Horizontalspuren gemeinsame Tangente an beide Grundkreise ist. In diesem Fall schneidet sich die Durchdringungskurve selbst; man sagt, sie hat einen Doppelpunkt. Die beiden Zylinder oder Kegel haben dann eine gemeinschaftliche Tangentialebene.

Die angegebene Methode hat den Vorteil, daß sie auch zur Anwendung kommen kann, wenn die Grundflächen keine Kreise sind, sondern beliebige Kurven. Sind es aber Kreise oder liegen solche krumme Flächen vor, die von allen Ebenen $\parallel \Pi_1$ in Kreisen geschnitten werden, so kann man die Durchdringungspunkte auch als Schnittpunkte jener Kreise finden, z. B. bei Rotationsflächen, deren Achsen

$\perp \Pi_1$ sind. Als solche Fläche kann auch die Kugel aufgefaßt werden, und man kann hiernach folgende Aufgaben lösen.

[174] und [175] Eine Kugel ist mit einem schiefen Kreiszylinder oder mit einem schiefen Kreiskegel zum Schnitt zu bringen.

[176] Ein Rotationskörper, dessen Achse $\perp \Pi_1$, soll mit einer Kugel zum Schnitt gebracht werden.

[177 a u. b] Ein Rotationskörper soll einmal parallel und einmal senkrecht zur Achse zylindrisch durchbohrt werden.

Rotationsflächen. Die allgemeine Behandlung dieser Flächen müssen wir uns leider wegen Raummangel versagen; hier mögen nur einige kurze Bemerkungen folgen. Alle Ebenen senkrecht zur Rotationsachse schneiden solche Körper in Kreisen, die man Breiten- oder Parallelkreise nennt, Ebenen durch die Rotationsachse schneiden diese Körper in kongruenten Meridiankurven. Für gewöhnlich wählt man eine Darstellung derart, daß die Rotationsachse senkrecht zu Π_1 steht; dann bezeichnet man den Meridianschnitt $\parallel \Pi_2$ als Hauptmeridian. Zu einem Punkt der Oberfläche in der Horizontalprojektion können mehrere Punkte in der Vertikalprojektion gehören, dagegen zu einem Punkt in der Vertikalprojektion zwei Punkte in der Horizontalprojektion. Die Grundaufgaben über solche Rotationsflächen sind folgende:

[178] In einem Punkt P einer Rotationsfläche soll die Tangentialebene konstruiert werden. Man denkt sich den durch P gehenden Parallelkreis und die zugehörige Meridiankurve gelegt. Die Tangentialebene in P ist dann bestimmt durch die Tangenten an diese Kurven in P . Die Tangente t' an den Breitenkreis durch P ist im Aufsicht parallel zur Achse, während sie im Grundriß als Tangente direkt konstruiert werden kann. Die Tangente t'' an die Meridiankurve ist im Grundriß dadurch bestimmt, daß sie durch die in Π_1 als Punkt erscheinende Rotationsachse verlaufen muß; für die Konstruktion von t'' ist zu bemerken, daß die Tangenten in sämtlichen Punkten eines Breitenkreises an die Meridiankurven einen Kreiskegel bilden, dessen Spitze auf der Rotationsachse liegt und daß diese Spitze gefunden werden kann durch die Tangente an den Hauptmeridian. t' und t'' sind für die Tangentialebene Haupt- und Fallgerade.

[179] Ist der Rotationskörper im besonderen eine Kugel, so legt man einfacher durch den gegebenen Punkt je eine Ebene $\parallel \Pi_1$ und $\parallel \Pi_2$ und bestimmt an die Schnittkreise die Tangenten t' und t'' , die

dann die Tangentialebene bestimmen. Im übrigen müssen die Spuren (Hauptlinien) der Tangentialebene an die Kugel senkrecht auf den Projektionen des Radius nach dem Berührungspunkt stehen.

Eine weitere Grundaufgabe für Rotationsflächen wäre noch,

[180] sie mit einer beliebigen Geraden g zum Schnitt zu bringen. Man legt durch g eine Hilfsebene $\perp \Pi_2$, bestimmt die Schnittkurve und bringt diese mit g zum Schnitt. Im Aufsriß fällt die Schnittkurve mit g_2 zusammen; man braucht also nur die Punkte der Rotationsfläche im Grundriß zu bestimmen, die im Aufsriß auf g_2 liegen. Der Schnitt von g_1 mit dieser so erhaltenen Hilfskurve gibt die Horizontalprojektion der gesuchten Durchdringungspunkte. Eine dritte Grundaufgabe:

[181] Man soll die Schnittkurve einer beliebigen Ebene E mit einer Rotationsfläche bestimmen. Entweder dreht man den Körper mit der Ebene E so, daß $E \perp \Pi_2$, dann hat man die Aufgabe schon in [180] gelöst und muß nur zurückdrehen in die alte Lage; oder man bringt die einzelnen Hauptlinien erster Art mit den einzelnen Breitenkreisen zum Schnitt, die mit diesen Kreisen in einer Ebene liegen. Besonders sind da der höchste und tiefste Punkt der Schnittkurve genau zu bestimmen. Man löse hiernach folgende Aufgabe:

[182] Eine Kreisringfläche, deren Rotationsachse $\perp \Pi_1$ ist, soll mit einer Ebene zum Schnitt gebracht werden.

Zu den Aufgaben über Durchdringungen mit Rotationsflächen haben wir dem oben bei [174] bis [177] Gesagten weiter nichts hinzuzusetzen, höchstens daß man in Fällen, wo sich die Achsen zweier solcher Körper schneiden, Hilfskugeln um den Schnittpunkt der Achsen verwendet.

Die Schattenaufgaben. Soll der Schatten irgendeines Körpers auf Π_1 bestimmt werden, so denkt man sich den Körper undurchsichtig, so daß bei parallelem Licht ein Schattenprisma oder Schattenzylinder, bei zentralem Licht eine Schattenpyramide oder ein Schattengegel entsteht. Die Schnittfläche dieses Schattenraumes mit Π_1 stellt den (Schlag-) Schatten in Π_1 dar. Fällt ein Teil des Schattens auf Π_2 , so hat man entsprechend den Schattenraum mit Π_2 zum Schnitt zu bringen. Hervorzuheben ist, daß dann der Schattenumriß in Π_1 die Projektionsachse in denselben beiden Punkten schneiden muß wie der Schattenumriß in Π_2 . Für Schattenkonstruktionen bei parallelem Licht wählt man für gewöhnlich Lichtstrahlen, deren Projektionen die Projektionsachse

unter 45° schneiden. Wirft ein Körper (Schlag-)Schatten auf einen anderen Körper, so hat man die Durchdringung des Schattenraumes mit dem zweiten Körper zu bestimmen. Entsprechendes gilt natürlich auch, wenn irgendein Teil eines Gebildes Schatten auf andere Teile desselben Gebildes wirft. Von den nicht beleuchteten Flächen teilen eines einzigen Körpers sagt man, daß sie im Eigenschatten liegen.

Wegen all der in diesem letzten Paragraphen meist nur angedeuteten Aufgaben empfehlen wir eingehendere Studien in den unter 8) angeführten Lehrbüchern. Das war ja die Aufgabe dieses Bändchens, für diese größeren Werke vorzubereiten.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Im Verlag von B. G. Teubner, Leipzig-Berlin ist erschienen:

Elemente der darstellenden Geometrie

Von E. Prix

weil. Oberlehrer am Realgymnasium zu Annaberg

2 Teile. Mit Figuren im Text. gr. 8.

- I. Teil. Darstellung von Raumgebilden durch orthogonale Projektionen. Mit Figuren im Text. [VII u. 72 S.] 1883. Geh. M. 3.—, geb. M. 4.50
- II. Teil. Schnitte von ebenen und krummen Flächen. Schiefwinkliger und axonometrische Projektionen. Zentralprojektion. Mit Figuren im Text. [IV u. 120 S.] 1883. Geh. M. 5.—, geb. M. 6.50

Anhang.

Literaturangaben.

1. Albrecht Dürer, Ueberweisung der Messung mit dem Zirkel und richtscheit in Linien Ebenen un ganzen Corporen, Nürnberg 1525 und 1538. — 2. G. Monge, Géométrie descriptive, leçons données aux écoles normales, Paris 1798. 7. Aufl. 1847. Deutsche Übersetzung von R. Hausner, Leipzig 1900, in Ostwalds Klassiker Nr. 117. — 3. P. Zühlke, Konstruktionen in begrenzter Ebene. Leipzig 1913, B. G. Teubner. Bd. 11 der math.-physik. Bibliothek von Liehmann u. Witting. — 4. R. Rothe, Darstellende Geometrie des Geländes. Leipzig 1913, B. G. Teubner. Bd. 14 der math.-phys. Bibl. von Liehmann u. Witting. — Ph. Löbner, Grundlehren der darstellenden Geometrie des Geländes. Dresden 1918, Ehlermann. Beide Bücher behandeln auch die Grundaufgaben der kotierten Projektion. — 5. K. Doehlemann, Projektive Geometrie in synthet. Behandlung. Sammlung Götschen Nr. 72. — R. Hausner, Darstellende Geometrie. II. Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Sammlung Götschen Nr. 143. — Th. Reye, Die Geometrie der Lage. I. Abteilung. Leipzig, A. Kröner. — P. Schafheitlin, Synthetische Geometrie d. Kegelschnitte. Leipzig 1907, B. G. Teubner. — 6^a. C. Schön, Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronom. Aufgaben. Leipzig, B. G. Teubner. — 6^b. W. Leick, Astronomische Ortsbestimmungen. Leipzig 1912, Quelle & Meyer. — 7. K. Doehlemann, Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Leipzig, B. G. Teubner. ANuG. Bd. 510. — 8. Allgemeine Werke über darstellende Geometrie: A. Schudeisck, Projektionslehre. ANuG. Bd. 564; kann zum Vorstudium für unser Bändchen gewählt werden. — R. Hausner, Darstellende Geometrie in drei Bändchen der Sammlung Götschen. Bd. 143 ff. — M. Großmann, Elemente der darstell. Geometrie. Leipzig 1917. 84 Seiten; Ders., Darst. Geom. Leipzig 1915. 138 S. Beide Bändchen aus dem Teubnerschen Verlag bilden ein Ganzes und sind Studierenden der Technik sehr zu empfehlen. — J. Hjelmslev, Darstellende Geometrie. Leipzig 1914, B. G. Teubner; 320 S.; für angehende Mathematiker zu empfehlen. Ebenso: G. Loria, Vorlesungen über darst. Geometrie. Dtsch. v. Schütte u. Rohrberg. I. Bd.: Darstellungsmethoden. II. Anwendungen a. ebenfläch. Gebilde, Kurven u. Flächen. III. Geschichte. Ist sehr theoretisch gehalten. — S. v. Dalwigk, Vorlesungen über darst. Geom. Leipzig 1911, B. G. Teubner. I. Bd.: Die Methoden d. Parallelprojektion. II.: Perspektive, Zentralprojektion u. Photogrammetrie. — E. Müller, Lehrbuch der darst. Geom. für techn. Hochschulen. Leipzig 1918, B. G. Teubner; besonders für Bauingenieure. — Rohn u. Papperitz, Lehrbuch d. darst. Geom. Leipzig 1906, 1. Bd. Orthogonalproj. 2. Bd. Aronometrie, Perspektive, Beleuchtung. 3. Bd. Kegelschnitte, Fl. 2. Gr. usw. — G. Scheffers, Lehrb. d. darst. Geom. 2 Bde. Berlin 1919, J. Springer. Für Studierende jeder Art sehr zu empfehlen. — Für einzelne Fragen kommt der Artikel von E. Papperitz in Betracht in d. Enzyklopädie d. mathemat. Wissenschaften, Bd. III 1, Heft 4. Leipzig 1910, B. G. Teubner.

Unter Mitarbeit von Professor P. B. Fischer erschien innerhalb des

Mathematischen Unterrichtswerks

Herausgegeben von Lietzmann-Fischer-Zühlke:

Geometrische Aufgabensammlung. Ausg. A für Gymnasien. Unterstufe: Mit 266 Fig. [VIII u. 173 S.] M. 13.50. Oberstufe: Mit 51 Fig. [VI u. 150 S.] M. 11.70. Ausg. B für Realanstalten. Unterstufe: Mit 288 Fig. [VIII u. 239 S.] M. 18.45. Oberstufe: Mit 36 Fig. [VIII u. 169 S.] M. 13.05

Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. Ausg. A. für Gymnasien: Unterstufe. Mit 320 Fig. [VII u. 212 S.] M. 17.55. Oberstufe: Mit 106 Fig. [VI, 150 u. 65 S.] M. 17.55. Ausg. B für Realanstalten. Unterstufe: 2. Aufl. Mit 359 Fig. [VII, 241 u. 64 S.] M. 24.75. Oberstufe: Mit 144 Fig. [VIII, 170 u. 108 S.] M. 20.70

„Man muß dem Verfasser Bewunderung zollen; er hat es verstanden ins volle Leben hineinzugreifen und alles heranzuziehen, was das Interesse und die Wißbegierde der Jugend zu erwecken geeignet ist. Es ist erstaunlich, welch ein Wissensstoff in den Aufgaben zusammengetragen ist.“
(Zeitschr. für das Realschulwesen.)

Ferner erschien von Prof. P. B. Fischer als Vorstufe zu demselb. Unterrichtswerk:

Rechenbuch für höhere Knabenschulen. Ausg. in 1 Band: Mit 36 Fig. M. 9.— Ausg. in 3 Heften: I. Sexta. M. 4.50. II. Quinta. M. 3.60. III. Quarta. M. 3.60

Elemente der darstellend. Geometrie. Von Geh. Reg.-Rat Dr. R. Sturm, Prof. a. d. Univ. Breslau. 2., umg. und erw. Aufl. Mit 61 Fig. u. 7 lith. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. Geb. M. 14.—

Das Buch, dessen 2. Aufl. in erster Linie für die Studierenden an den Universitäten bestimmt ist, behandelt insbes. die Gegenstände, die für das weitere geometrische Studium von Bedeutung sind.

Darstellende Geometrie. I. Von Dr. M. Großmann, Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochsch. Zürich. Mit 134 Fig. [IV u. 84 S.] 8. 1921. (TL 2.) Kart. M. 10.—

Darstellende Geometrie. II. Von Dr. M. Großmann, Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochsch. Zürich. 2. erw. Aufl. Mit 144 Fig. [VI u. 154 S.] 8. 1921. (TL 3.) Kart. M. 20.—

Die beiden Bändchen bilden ein Ganzes. Das erste kann auch zum Selbststudium der elementaren Teile der darstellenden Geometrie dienen; im zweiten werden zuerst die Darstellungsmethoden vollständig dargelegt, hierauf die Kurven und Flächen behandelt.

Darstellende Geometrie. Von Dr. J. Hjelmlev, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Kopenhagen. Mit 305 Abb. [IX u. 320 S.] 8. 1914. (Handb. der ang. Math. Bd. 2.) Geh. M. 15.—, geb. M. 22.50.

„Von ganz hervorragendem mathematischen Wert ist die geradezu meisterhafte Behandlung der ebenen Kurven und der Raumkurven. Jeder, der das Buch zur Hand nimmt, wird Gewinn davon haben: der Student, der mathematische Forscher, der Mathematiklehrer — kurz, ein vortreffliches Buch.“
(Zeitschr. f. d. math. u. naturw. Unterricht.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Die in diesen Anzeigen angegebenen Preise sind die ab 1. VII. 1921 gültigen als freibleibend zu betrachtenden Ladenpreise, zu denen die meinen Verlag vorzugsweise führenden Sortimentsbuchhandlungen sie zu liefern in der Lage und verpflichtet sind, und die ich selbst berechne. Sollten betreffs der Berechnung eines Buches meines Verlages irgendwelche Zweifel bestehen, so erbitte ich direkte Mitteilung an mich.
Preise freibleibend.

Vorlesungen über darstellende Geometrie. Von Dr. *F. v. Dalwigk*, Prof. a. d. Univ. Marburg. In 2 Bänden. I. Bd.: Die Methoden der Parallelprojektion. Mit 184 Fig. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1911. Geh. M. 32.50 II. Bd.: Perspektive, Zentralkollineation und Grundzüge der Photogrammetrie. Mit über 130 Fig. [XI u. 322 S.] gr. 8. 1914. Geh. M. 25.—, geb. . . M. 27.50

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen. Von Hofrat Dr. *E. Müller*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. I. Bd. 3. Aufl. Mit 289 Fig. u. 3 Taf. [XIV u. 370 S.] gr. 8. 1920. Geh. M. 52.50, geb. M. 60.— II. Bd. Mit 328 Fig. [X u. 361 S.] 1919. Geh. M. 52.50, geb. M. 60.— II. Band auch in 2 Hefen erhältlich: 1. Heft. 2. Aufl. Mit 140 Fig. [VII u. 129 S.] 1919. Geh. M. 17.50 2. Heft. 2. Aufl. Mit 188 Fig. [VII u. 233 S.] 1920. Geh. M. 35.—

Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie (Vermessungskunde). Feldmessen u. Nivellieren. Band I d. Lehrbuchs f. Vermessungskunde bes. f. Bauingenieure. Von Dr. *E. v. Hammer*, Prof. an d. Techn. Hochsch. zu Stuttgart. Mit 500 Figuren. [XX u. 766 S.] gr. 8. 1911. M. 55.—, geb. M. 60.—

Feldmessen und Nivellieren. Anleit. f. d. Prüfung u. d. Gebrauch d. Meßgeräte bei einf. Längen- u. Höhenmessen f. Hochbau- u. Tiefbautechniker, bearb. von Prof. *G. Volquards*, Dir. d. staatl. Baugewerksch. in Magdeburg. 4., verb. u. verm. Aufl. Mit 56 Abb. i. T. [IV u. 31 S.] gr. 8. 1920. Geh. M. 6.—

Das Feldmessen d. Tiefbautechnikers. Reine Flächenaufnahmen, Flächen- u. Höhenaufn. V. Dipl.-Ing. *H. Friedrichs*, weibl. Oberlehr. a. d. Baugewerksch. i. Frankfurt. 2. Aufl. bearb. v. Prof. *G. Reinecke*, Oberl. a. d. staatl. Baugewerksch. in Cassel. [U. d. Pr. 21.]

Feldbuch für geodätische Praktika. Nebst Zusammenstellung der wicht. Methoden u. Regeln sowie ausgef. Musterbeisp. Von Dr.-Ing. *O. Israel*, Dresden. Mit 46 Fig. [IV u. 160 S.] 1920. Kart. M. 20.—

Der Hohennersche Präzisionsdistanzmesser u. seine Verbindung mit einem Theodolit. (D. R. P. Nr. 277 000.) Einrichtung und Gebrauch des Instrumentes f. d. verschiedenen Zwecke d. Tachymetrie; mit Zahlenbeisp. sowie Genauigkeitsversuchen. Von Dr.-Ing. *H. Hohenner*, Prof. an der Techn. Hochsch., Darmstadt. Mit 7 Abb. i. T. u. 1 Taf. [V u. 59 S.] 8. 1919. (Abhandl. u. Vorträge a. d. Gebiete d. Math., Naturw. u. Techn. H. 4.) Geh. M. 8.—

Praktische Astronomie. Geographische Orts- und Zeitbestimmung. Von *V. Theimer*, Adjunkt a. d. Montanist. Hochschule zu Leoben. Mit 62 Fig. [IV u. 127 S.] gr. 8. 1921. (Teubners techn. Leitfäden Bd. 13.) Kart. M. 20.—

Geodäsie. Eine Anleitung zu geodät. Messungen für Anfänger mit Grundzügen der direkten Zeit- und Ortsbestimmung. Von Dr. *H. Hohenner*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt. Mit 216 Abb. [XII u. 347 S.] gr. 8. 1910. Geh. M. 30.—

Einführung in die Geodäsie. Von Dr. *O. Eggert*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Danzig. Mit 237 Fig. [X u. 437 S.] gr. 8. 1907. Geh. M. 40.—

Grundzüge der Geodäsie mit Einschluß der Ausgleichsrechnung. Von Dr.-Ing. *M. Näbauer*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Karlsruhe i. B. Mit 277 Fig. [XVI u. 420 S.] 8. 1915. (Handb. d. ang. Math. Bd. 3.) Geh. M. 22.50, geb. M. 30.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preise freibleibend

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik u. Physik. Unter Mitwirkung von Fachgenossen hrsg. von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. A. Witting**

Direktor der Oberrealschule zu Göttingen

Oberstudienr., Gymnasialpr. i. Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. 5.—

Die Sammlung bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/21)

- Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung.** Von H. Wieleitner. 2., durchgeseh. Aufl. (Bd. 2.)
Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II: Die Z. im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 34.)
Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. 2. Aufl. (Bd. 7.)
Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. I: Die Differential-, II: Die Integralrechnung. (Bd. 9 u. 41.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Auflage. I: Grundlehren. (Bd. 4.) II: Anwendungen. (Bd. 33.)
Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. (Bd. 19.)
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)
Darstellende Geometrie d. Geländes u. verw. Anwend. d. Methode d. kotiert. Projektionen. Von R. Rothe. 2., verb. Aufl. (Bd. 35/36.)
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. (Bd. 26.)
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. (Bd. 6.)
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zählke. (Bd. 11.)
Nichteuklidische Geometrie in der Kugelfläche. Von W. Dieck. (Bd. 31.)
Einführung in die Trigonometrie. Von A. Witting. (Bd. 43.)
Einführung in d. Nomographie. V. P. Luckey. I. Die Funktionsleiter. (28.) II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. (37.)
Abgekürzte Rechnung nebst einer Einführ. i. d. Rechnung m. Funktionsstaf. insb. i. d. Rechn. mit Logarithmen. Von A. Witting. (Bd. 42.)
In Vorbereitung: Doehlemann, Mathem. u. Architektur. Schips, Mathem. u. Biologie. Winkelmann, Der Kreis. Wolff, Feldmessen u. Höhenmessen.
- Theorie und Praxis des logarithm. Rechenschiebers.** Von A. Rohrberg. 2. Aufl. (Bd. 23.)
Die Anfertigung mathemat. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)
Karte und Krok. Von H. Wolff. (Bd. 27.)
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. (Bd. 29.)
Die mathemat. Grundlagen d. Variations- u. Vererbungslehre. Von P. Riebesell. (24.)
Mathematik und Malerei. 2 Teile in 1 Bande. Von G. Wolff. (Bd. 20/21.)
Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. (Bd. 32.)
Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhard. (Bd. 15.)
Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. 2. Aufl. (Bd. 18.)
Die Quadratur d. Kreises. Von E. Beutel. 2. Aufl. (Bd. 12.)
Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 2. Aufl. (Bd. 10.)
Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)
Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)
Was ist Geld? Von W. Lietzmann. (Bd. 30.)
Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. 2. Aufl. (Bd. 5.)
Ionentheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)
Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich entwickelt von A. Angersbach. (Bd. 39.)
Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (17.)
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. (Bd. 8.)
Beobachtung d. Himmels mit einfach. Instrumenten. Von Fr. Ruch. 2. Aufl. (Bd. 14.)
Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Preise freibleibend

Teubners kleine Fachwörterbücher

geben rasch und zuverlässig Auskunft auf jedem Spezialgebiete und lassen sich je nach den Interessen und den Mitteln des einzelnen nach und nach zu einer Enzyklopädie aller Wissenszweige erweitern.

„Mit diesen kleinen Fachwörterbüchern hat der Verlag Teubner wieder einen sehr glücklichen Griff getan. Sie ersehen tatsächlich für ihre Sondergebiete ein Konversationslexikon und werden gewiß großen Anklang finden.“ (Deutsche Warte.)

„Wer ist jetzt in der Lage, teure Nachschlagebücher zu kaufen? Wie viele aus den Reihen der Volkshochschulbesucher verlangen nach Handreichungen, die das Studium der Natur- und Geisteswissenschaften ermöglichen. Die Erklärungen sind sachlich zutreffend und so kurz als möglich gegeben, das Sprachliche ist gründlich erfasst, das Wesentliche berücksichtigt. Die Bücher sind eine glückliche Ergänzung der Bändchen „Aus Natur und Geisteswelt“ des gleichen Verlags. Selbstverständlich ist dem neuesten Stande der Wissenschaft Rechnung getragen.“ (Sächsische Schulzeitung.)

„Diese handlichen Nachschlagebücher bieten nach Form und Inhalt Vorzügliches und werden sich, wie zu erwarten steht, in unseren Volksbüchereien schnell einbürgern.“ (Blätter für Volksbibliotheken.)

Bisher erschienen:

Jeder Band gebunden M. 5.—

Philosophisches Wörterbuch. 3. Aufl. Von Studienrat Dr. P. Thormeyer. (Bd. 4.)

Psychologisches Wörterbuch von Dr. Fritz Stefe. Mit 60 Fig. (Bd. 7.)

Wörterbuch zur deutschen Literatur von Studienrat Dr. H. Köhl. (Bd. 14.)

* **Musikalisches Wörterbuch** von Privatdoz. Dr. H. J. Moser. (Bd. 12.)

* **Wörterbuch zur Kunstgeschichte** von Dr. H. Vollmer.

Physikalisches Wörterbuch von Prof. Dr. G. Berndt. Mit 81 Fig. (Bd. 5.)

* **Chemisches Wörterbuch** von Prof. Dr. H. Remig. (Bd. 10.)

* **Astronomisches Wörterbuch** v. Observator Dr. H. Naumann. (Bd. 11.)

Geologisch-mineralogisches Wörterbuch von Dr. C. W. Schmidt. Mit 211 Abb. (Bd. 6.)

Geographisches Wörterbuch von Prof. Dr. O. Kende. I. Allgem. Erdkunde. Mit 81 Abb. (Bd. 8.) *II. Wörterbuch der Länder- und Wirtschaftskunde. (Bd. 13.)

Zoologisches Wörterbuch von Direktor Dr. Th. Knottnerus-Meder. (Bd. 2.)

Botanisches Wörterbuch von Dr. O. Gerke. Mit 103 Abb. (Bd. 1.)

Wörterbuch der Warenkunde von Prof. Dr. M. Pietsch. (Bd. 3.)

Handelswörterbuch von Handelschuldirektor Dr. V. Sittel und Justizrat Dr. M. Strauß. Zugleich fünf-sprachiges Wörterbuch, zusammengestellt von V. Armhaus, veröf. Dolmetscher. (Bd. 9.)

* in Vorbereitung bzw. unter der Presse (1923)

Verlag von V. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Die angegeben. als unverbindlich anzusehenden Preise sind Grundpreise.
Die Ladenpreise ergeben sich aus halbiertem Grundpreis \times Schlüsselzahl des
Börsenvereins (März 1923: 2000).

Europa

Grundzüge der Länderkunde. Band I

Von A. Hettner. 2., gänzl. umg. Aufl. Mit 4 Tafeln u. 197 Rärtchen.
Geb. M. 8.60, geb. M. 12.—, in Halbleder mit Goldoberschnitt M. 62.—

Der vorliegende I. Band der „Grundzüge der Länderkunde“ bietet eine zusammenfassende Darstellung der Länder Europas in ihrer neuen Gestaltung auf wissenschaftlicher, aber gemeinverständlicher Grundlage. — II. Band: Außereuropäische Erdteile. (In Vorb. 23.)

Astronomie

Unter Redaktion von J. Hartmann bearbeitet von zahlreichen Fachgelehrten.
(Die Kultur der Gegenwart. Teil III, Abt. III, Bd. 9.) M. 20.—, geb. M. 25.—

„Ein wahrhaft großartiges Werk, das durch Zusammenarbeit einer Anzahl Spezialforscher entstanden ist.“
(Naturwissenschaftliche Wochenschrift.)

Astrophysik

3., neubearb. Aufl. von Scheiners Populärer Astrophysik. Von K. Graff.
Mit 254 Tafeln und 17 Figuren. Geb. M. 12.—, geb. M. 15.60

Das Werk bietet in der Neuauflage eine auch dem gebildeten Laien zugängliche Einführung in die neuesten außerordentlichen Fortschritte der astrophysikalischen Forschung.

Anthropologie

Unter Redakt. v. G. Schwalbe u. E. Fischer bearb. von zahlr. Fachgelehrten.
(Die Kultur der Gegenwart. Teil III, Abt. V.) Geb. M. 34.—, geb. M. 42.—,
in Halbleder mit Goldoberschnitt M. 57.—

In dem Werk wird erstmalig ein abgerundetes Bild der Gesamtgebiete der Anthropologie, Völkertunde und Urgeschichte in streng wissenschaftlicher und zugleich gemeinverständlicher Darstellung aus der Feder besser Kenner geboten.

Führer durch unsere Vogelwelt

Von B. Hoffmann. 2., verm. u. verb. Aufl. Mit über 300 Notenbildern,
Vogelrufen u. -gefangen i. L. sowie einer system. Ordnung d. behand. Arten,
einer Auswahl von 42 Vogelliedern u. Bildschm. nach Zeichn. v. K. Soffel.
Geb. M. 6.80. II. Teil: Vom Bau und Leben des Vogels. Mit Bildschm.
nach Zeichn. von M. Semmer. Geb. M. 6.80

Teubners Naturwissenschaftliche Bibliothek

„Die Bände dieser vorzüglich geleiteten Sammlung stehen wissenschaftlich so hoch und sind in der Form so gelegt und so ansprechend, daß sie mit zum Besten gerechnet werden dürfen, was in vollstümlicher Naturkunde veröffentlicht worden ist.“ (Natur.)

Verzeichnis vom Verlag, Leipzig, Poststraße 3, erhältlich.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Hrsg. von W. Liehmann und A. Witting. Jeder Band M. 1.40

Neu erschienen: Wie man einstens rechnete. Von E. Fetzweis. (Bd. 49)
Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. Von H. Onnen. (Bd. 51)
Abgekürzte Rechnung. Von A. Witting. (Bd. 47.) Funktionen, Schaubilder,
Funktionstabellen. Von A. Witting. (Bd. 48.) Die mathematischen Grundlagen
der Lebensversicherung. Von H. Schühe. (Bd. 46.) Atom- und Quantentheorie. Von
P. Kirchberger. (Bd. 44.) Unter der Presse März 1923: Herold, Zinseszins-, Renten-
und Anleiherechnung. Kerst, Ebene Geometrie. Liehmann, Truofchlüsse. Liehmann-Trier,
Wo steht der Fehler. 3. Aufl. Wicke, Konforme Abbildungen. Winkelmann, Der Kreis.
Wolff, Feldmessen und Höhenmessen

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Die angegebenen als unverbindlich anzusehenden Preise sind Grundpreise, die 3. St. (März 1923) mit der Teuerungsziffer 1000 zu vervielfältigen sind.

Teubners Künstlersteinzeichnungen

Wohlfelle farbige Originalwerke erster deutscher Künstler fürs deutsche Haus
Die Sammlung enthält jetzt über 200 Bilder in den Größen 100×70 cm (M. 10.-), 75×55 cm (M. 7.50), 103×41 cm bzw. 91×41 (M. 5.-), 60×50 cm (M. 6.-), 55×42 cm (M. 4.-), 41×30 cm (M. 2.50). Geschmackvolle Rahmung aus eigener Werkstatt.

Neu: Kleine Kunstblätter

18×24 cm je M. 1.-. Liebermann, Im Parc. Prentzel, Am Wehr. Feder, Unter der alten Kastanie und Weihnachtsabend. Treuter, Bei Mondenschein. Weber, Apfelblüte.

Schattenbilder

R. W. Diefenbach „Per aspera ad astra“. Album, die 34 Teils. des vollst. Wandstiebes fortlaufend wiederh. (20¹/₄×25 cm) M. 12.-. Teilsbilder als Wandstiefe (42×30 cm) je M. 4.-, (35×18 cm) je M. 1.-, auch gerahmt in versch. Ausfüh. erhältlich.

„Göttliche Jugend“. 2 Mappen, mit je 20 Blatt (25¹/₂×34 cm) je M. 7.50. Einzelbilder je M. -.60, auch gerahmt in versch. Ausfüh. erhältlich.

Kindermusik. 12 Blätter (25¹/₂×34 cm) in Mappe M. 7.-, Einzelblatt M. -.60.

Gerda Luise Schmidt (20×15 cm) je M. -.50. Auch gerahmt in verschiedener Ausfüh. erhältlich. Blumenoratel. Reissenspiel. Der Besuch. Der Liebesbrief. Ein Frühlingsstrauch. Die Freunde. Der Brief an „Ihn“. Annäherungsversuch. Am Spinett. Beim Wein. Ein Märchen. Der Geburtstag.

Teubners Künstlerpostkarten

(Ausf. Verzeichnis v. Verlag in Leipzig.) Jede Karte M. -.10. Reihe von 12 Karten in Umschlag M. 1.-, jede Karte unter Glas mit schwarzer Einfassung u. Schnur edig oder oval.

Die mit * bezeichneten Reihen auch in feinen ovalen Holzrähmchen edig oder oval. Teubners Künstlersteinzeichnungen in 12 Reihen. Teubners Künstlerpostkarten nach Gemälden neuerer Meister. 1. Macco, Maienzeit. 2. Köhler, Sonnensbild. 3. Buttersack, Sommer im Moor. 4. Hartmann, Sommerwilde. 5. Kühn jr., Im weissen Zimmer. In Umschlag M. -.50.

*Diefenbachs Schattenbilder in 7 Reihen. Aus dem Kinderleben, 6 Karten nach Bleistiftzeichn. von Hela Peters. 1. Der gute Bruder. 2. Der böse Bruder. 3. Wo drückt der Schuh? 4. Schmeckeltischen. 5. Püppchen, aufgepafft! 6. Große Wäsche. In Umschlag M. -.50.

*Schattenbilder von Gerda Luise Schmidt: 1. Reihe: Spiel und Tanz, fest im Garten, Blumenoratel, Die kleine Schäferin, Delauschter Dichter, Kartenspieler von Hameln. 2. Reihe: Die Freunde, Der Besuch, Im Grünen, Reissenspiel, Ein Frühlingsstrauch, Der Liebesbrief. 3. Reihe: Der Brief an „Ihn“, Annäherungsversuch, Am Spinett, Beim Wein, Ein Märchen, Der Geburtstag. Jede Reihe in Umschlag M. -.50

Rudolf Schäfers Bilder nach der Heiligen Schrift

Der barmherzige Samariter, Jesus der Kinderfreund, Das Abendmahl, Hochzeit zu Kana, Weihnachten, Die Bergpredigt (75×55 bzw. 60×50 cm). M. 7.50 bzw. M. 6.-.

Diese 6 Blätter in Format **Biblische Bilder** in Mappe M. 4.50, als 28×36 unter dem Titel Einzelblatt je M. -.75 (Auch als „Kirchliche Gedenkblätter“ und als „Glückwunsch- u. Einladungskarten“ erhältlich.)

Karl Bauers Federzeichnungen

Charakterköpfe zur deutschen Geschichte. Mappe, 32 Bl. (28×36 cm) M. 5.-
12 Bl. M. 2.-

Aus Deutschlands großer Zeit 1813. In Mappe, 16 Bl. (28×36 cm) M. 2.50
Führer und Helden im Weltkrieg. Einzelne Blätter (28×36 cm) M. -.30
2 Mappen, enthaltend je 12 Blätter, je M. 1.-

Katalog über künstlerischen Wandschmuck gegen Voreinsendung des Betrages (Höhe ist gegen Rückporto zu erfragen) oder gegen Nachnahme vom Verlag in Leipzig, Poststraße 3, erhältlich

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Anfragen ist Rückporto beizufügen

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301549



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296024