...s
...Geisteswelt

E. Hegemann

Ausgleichungs-rechnung

B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

Die Sammlung
„Aus Natur und Geiſteswelt“

nunmehr über 800 Bände umfaſſend, bietet wirkliche „Einführungen“ in abgeſchloſſene Wiſſensgebiete für den Unterricht oder Selbſtunterricht des Laien nach den heutigen methodiſchen Anforderungen und erfüllen ſo ein Bedürfnis, dem weder umfangreiche Enzyklopädien noch ſkizzenhafte Abriſſe entſprechen können. Die Bände wollen jedem geiſtig Mündigen die Möglichkeit ſchaffen, ſich ohne beſondere Vorkenntniſſe an ſicherſter Quelle, wie ſie die Darſtellung durch berufene Vertreter der Wiſſenſchaft bietet, über jedes Gebiet der Wiſſenſchaft, Kunſt und Technik zu unterrichten. Sie wollen ihn dabei zugleich unmittelbar im Beruf fördern, den Geſichtskreis erweiternd, die Einſicht in die Bedingungen der Berufsarbeit vertiefend.

Die Sammlung bietet aber auch dem Fachmann eine raſche zuverläſſige Überſicht über die ſich heute von Tag zu Tag weitenden Gebiete des geiſtigen Lebens in weiteſtem Umfang und vermag ſo vor allem auch dem immer ſtärker werdenden Bedürfnis des Forſchers zu dienen, ſich auf den Nachbargebieten auf dem laufenden zu erhalten. In den Dienſt dieſer Aufgaben haben ſich darum auch in dankenswerter Weiſe von Anfang an die beſten Namen geſtellt, gern die Gelegenheit benutzend, ſich an weiteſte Kreiſe zu wenden.

Seit Herbſt 1925 iſt eine Neuerung inſofern eingetreten, als neben den Bänden im bisherigen Umfange ſolche in erweitertem, etwa anderthalbfachem zu 1 1/2 fachem Preiſe ausgegeben werden, weil abgeſchloſſene Darſtellungen größerer Gebiete auf beſchränkterem Raume heute ſchwer möglich ſind. Dieſe Bände, die die Nummern von 1001 ab tragen, erſcheinen, um die Einheitlichkeit der Sammlung zu wahren, in der gleichen Ausſtattung wie die übrigen Bände. Sie ſind nur auf dem Rückentitel durch je ein Sternchen über und unter der Nummer beſonders gekennzeichnet.

Alles in allem ſind die ſchmucken, gehaltvollen Bände beſonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfniſſe nicht anzuſehen pflegt, auch für die Befriedigung geiſtiger anzuwenden.

... meiſt reich illuſtrierten Bände

... ch

Leipzig, ... G. Teubner

Bisher sind erschienen
zur Erd- u. Völkerkunde, Geologie, Meteorologie:

Allgemeine Geographie.

Geomorphologie. Von Prof. Dr. F. Machatschek. Mit 33 Abbildungen. (Bd. 627.)

Physiogeographie des Süßwassers. Von Prof. Dr. F. Machatschek. Mit 24 Abbildungen. (Bd. 628.)

Das Meer, seine Erforschung und sein Leben. Von Professor Dr. O. Janson. 3. Aufl. Mit 40 Abbildungen. (Bd. 30.)

Geographie der Vorwelt. (Paläogeographie. Von Prof. Dr. E. Dacqué. Mit 18 Figuren im Text. (Bd. 619.)

Die Verbreitung des Menschen auf der Erdoberfläche (Anthropogeographie). Von Prof. Dr. N. Krebs. Mit 12 Abbildungen im Text (Bd. 632.)

Natur und Mensch. Von Oberstudiendirektor Prof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abbildungen. (Bd. 458.)

Politische Geographie. Von Prof. Dr. W. Vogel. Mit 12 Abb. im Text. (Bd. 634.)

Das Zeitalter der Entdeckungen. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. S. Günther. 4. Auflage. Mit einer Weltkarte. (Bd. 26.)

Geographisches Wörterbuch. Von Professor Dr. O. Kende. Allgemeine Erdkunde. 2., vielfach verb. Aufl. Mit 81 Abbildungen im Text. (Teubners kleine Fachwörterbücher Bd. VIII.)

Länderkunden.

Die deutschen Volksstämme u. Landschaften. Von Geh. Studienrat Prof. Dr. F. O. Weise. 5., völlig umgearb. Aufl. Mit 30 Abbildungen im Text und auf 20 Tafeln und 1 Dialektkarte Deutschlands. (Bd. 16.)

Belgien. Von Archivrat Dr. P. Oßwald. 3. Aufl. Mit 4 Karten im Text. (Bd. 501.)

Böhmen. Zur Einführung in die böhmische Frage. Von Prof. Dr. R. F. Kaindl. Mit 1 Karte. (Bd. 701.)

Die Baltischen Provinzen. Von Dr. V. Tornius. 3. Auflage. Mit 8 Abbildungen und 2 Kartenskizzen. (Bd. 542.)

Polen. Mit einem geschichtlichen Überblick über die polnisch-ruthenische Frage. Von Prof. Dr. R. F. Kaindl. 2., verbesserte Auflage. Mit 6 Karten. (Bd. 547.)

Rußland. Geschichte, Staat, Kultur. Von Dr. A. Luther. (Bd. 563.)

Die Slawen. Von Prof. Dr. P. Diels. (Bd. 740.)

Island, das Land und das Volk. Von Prof. Dr. P. Herrmann. Mit 9 Abb. (Bd. 461.)

Neugriechenland. Von Geheimrat Prof. Dr. A. Heisenberg. (Bd. 613.)

Die Türkei. Von Reg.-Rat P. R. Krause. Mit 2 Karten i. T. u. auf 1 Tafel. 2. Afl. (Bd. 469.)

Palästina u. seine Geschichte. Sechs volkstüml. Vorträge. Von Prof. Dr. Freiherr v. Soden. 4. Aufl. Mit 1 Plan von Jerusalem und 3 Ansichten des Heiligen Landes. (Bd. 6.)

***Palästina und seine Kultur in fünf Jahrtausenden.** Nach den neuesten Ausgrabungen und Forschungen dargestellt von Oberstudienrat Prof. Dr. P. Thomsen. 3. Aufl. Mit zahlr. Abbildungen. (Bd. 260.)

Indien. Von Professor Dr. S. Konow. (Bd. 614.)

Australien und Neuseeland. Land, Leute u. Wirtschaft. Von Prof. Dr. R. Schachner. Mit 23 Abbildungen. (Bd. 366.)

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

609. Bändchen

Die Ausgleichungsrechnung
nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von

Ernst Hegemann

Mit 11 Figuren im Text

Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1919

Vorwort.

Die Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner hat es unternommen, in ihrer Sammlung wissenschaftlicher Darstellungen „Aus Natur und Geisteswelt" die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate erscheinen zu lassen. Sie wurde 1795 von dem Göttinger Mathematiker Gauß gefunden. Seitdem hat sie sich alle diejenigen Wissenschaften erobert, wo es darauf ankommt, aus fehlerhaften Messungen eine oder mehrere Unbekannten zu gewinnen. Durch zahlreiche Beispiele sind die entwickelten Formeln erläutert worden. Daß die Beispiele zumeist der Geodäsie entlehnt sind, kann nicht wundernehmen, da der Verfasser Lehrer dieser Wissenschaft ist. Sie sind beinahe allesamt seinem Übungsbuch der Ausgleichung entnommen.

Berlin, im Juni 1919.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

V. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

VI. Fehlergesetz und Ableitung der Methode der kleinsten Quadrate.

Einleitung.

Die Aufgabe, aus n überschüssigen Beobachtungen, die Funktionen von m Unbekannten sind, diese Unbekannten abzuleiten, wird seit einem Jahrhundert nach der Methode der kleinsten Quadrate gelöst; genauer gesprochen, nach der Methode, welche, gleich genaue Messungen vorausgesetzt, die Summe der Quadrate ihrer Verbesserungen zu einem Minimum macht. Dieses Rechnungsverfahren wird dort angewendet, wo man es mit Beobachtungsergebnissen zu tun hat und nachträglich die Messungsresultate ausgewertet werden sollen, also z. B. in der Astronomie, Chemie, Physik, Geodäsie usw. Der Entdecker dieser Methode der kleinsten Quadrate ist der große Göttinger Mathematiker Gauß gewesen. Er fand sie 1795 während seiner Göttinger Studentenzeit. Zum ersten Male wurde die Methode der kleinsten Quadrate von Gauß im großen angewendet bei der Bestimmung der Ceresbahn. Damit hatte es folgende Bewandtnis:

Im Jahre 1801 entdeckte der Astronom Piazzi in Palmerno den Planeten Ceres, das ist einer der kleinen Asteroiden, die zwischen Mars und Jupiter kreisen. Er konnte den Stern nur 40 Tage lang beobachten und seine Bahn durch Messungen festlegen. Dann wurde er durch trübes Wetter und später durch Krankheit an der weiteren Beobachtung verhindert. Er machte seine Entdeckung erst bekannt, als das Gestirn mit der Annäherung an die Sonnenstrahlen sich der weiteren Beobachtung entzogen hatte. Die Messungen erstreckten sich nur auf 9^0 seiner Bahn.

Alle namhaften Astronomen machten sich sogleich daran, die Bahn der Ceres zu berechnen, insbesondere den Ort festzulegen, wo der Planet wieder aus den Strahlen der Sonne hervortreten und sich der Beobachtung zugänglich zeigen möge. Es schien aber, als ob sich dieser Planet den bisher angewandten Rechnungsregeln nicht fügen wolle. Da gelang die Wiederauffindung des Sternes auf Grund der Gaußschen Berechnung. Neben anderen Rechnungsarten war es hauptsächlich die Methode der kleinsten Quadrate, die bei der Bestimmung der Planetenbahn hier ihre ersten Triumphe feierte. Jedoch Gauß veröffentlichte sie erst 14 Jahre später im Jahre 1809, da er die Methode erst noch mehr ausfeilen wollte. Er legte seiner Untersuchung das Fehlergesetz zugrunde und entwickelte hieraus die Methode der kleinsten Quadrate. Das Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz hat bei ihm die Form

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \varepsilon^2}.$$

Einige Jahre später wurde die Methode auch von dem Franzosen Legendre aufgefunden und 1806 veröffentlicht unter dem Titel „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes", appendice „sur la méthode des moindres carrés". Der Name „Methode der kleinsten Quadrate" rührt sonach von Legendre her. Er begründet seine Methode damit, daß sie leicht und allgemein anzuwenden sei, auch enthalte sie das in der Praxis übliche und bewährte arithmetische Mittel in sich.

Laplace beschäftigte sich ebenfalls mit der Ausgleichung von Beobachtungen, als er die Erdachsen a und b aus mehr als zwei Gradmessungen ermitteln wollte. Dies sind Messungen von Meridianbögen und Bestimmungen der geographischen Breiten ihrer Endpunkte. Er stellte zu dem Zwecke die Bedingungen auf, daß 1. die algebraische Summe der Fehler gleich Null, und 2. die Summe der Fehler absolut genommen ein Minimum werde. Er druckte seine Methode im Jahre 1802 ab in dem Werke: „Traité mécanique céleste", Bd. 2. Einige Jahre später kommt er nochmals auf diese Rechnung zurück. Man findet seine Ergebnisse veröffentlicht im Jahre 1812 in seiner „Théorie analytique des probabilités", Kap. IV, und zwar wurde folgende Aufgabe von ihm gelöst. Er gibt die Bestimmung von zwei Unbekannten und setzt voraus, daß die Anzahl der Beobachtungen unendlich groß sei. In der Tat führt seine Rechnung ebenfalls auf die Methode der kleinsten Quadrate. Für eine endliche Zahl von Messungen gibt Laplace keine Lösung, er sagt nur, daß man die Methode der kleinsten Quadrate auch hier anwenden möge, weil sie eine bequeme und einfache Rechnung ergebe. Er hat ebenso die Verallgemeinerung von zwei Unbekannten auf jede beliebige Anzahl derselben nicht überzeugend bewiesen.

Obgleich Legendre die Methode der kleinsten Quadrate drei Jahre früher als Gauß veröffentlichte, ist doch letzterer als der Vater dieser Rechnungsart anzusehen, denn er hat sie früher als Legendre gekannt, sodann hat er den größten Teil desjenigen geschaffen, was man gegenwärtig Methode der kleinsten Quadrate nennt.

Wie Gauß über diesen Punkt dachte, geht aus dem Briefwechsel mit Schuhmacher vom Jahre 1831 hervor. Dieser hatte Gauß' Vorlesungen in Göttingen gehört und war dann als Geodät in dänische Dienste getreten. Schuhmacher schrieb unter anderem folgendes:

Altona, den 30. November 1831.

Ich glaube Ihnen schon einmal gesagt zu haben, daß Zach in den Geographischen Ephemeriden (1799. Oktober p. 378) einen Brief von Ihnen hat abdrucken lassen, in dem Sie offenbar die Methode der kleinsten Quadrate erwähnen, die Sie also damals schon Zach mitgetheilt haben. Sie sprechen von der französischen Gradmessung:

„Ich entdeckte diesen Fehler, indem ich meine Methode, von der ich Ihnen eine Probe gegeben habe, anwandte“ usw.

Zach bemerkt dabei: „Hiervon ein andermal“, das andere Mal ist aber nie gekommen. Da Sie die Resultate Ihrer Rechnung geben, so scheint es mir, ist es leicht zu zeigen, daß diese durch die Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet sind. Zach lebt zudem noch und hat gewiß Ihren Brief aufgehoben. Finden Sie es nicht der Mühe wert, endlich die Sache einmal selbst gegen die mir vor allem widerlichen höflichen Zweifel der Franzosen unwidersprechlich abzumachen?

Leben Sie wohl, mein theuerster und vielverehrter Freund!

Ihr

H. C. Schuhmacher.

Gauß beantwortete diesen Brief sogleich, indem er sich folgendermaßen ausließ:

Göttingen, den 3. Dezember 1831.

Die von Ihnen erwähnte Stelle in Zachs Allgemeinen Geographischen Ephemeriden ist mir wohlbekannt; die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, deren dort Erwähnung geschieht, betrifft einen früher in derselben Zeitschrift abgedruckten Auszug aus Ugh Beighs Zeitgleichungs-Tafel, die zu manchen ganz curiosen Resultaten geführt hatte. Diese Resultate hatte ich Zach mitgetheilt mit der Bemerkung, daß ich dabei eine mir eigenthümliche, seit Jahren gebrauchte Methode benutzt habe, Größen, die zufällige Fehler involviren, auf eine willkürfreie consequente Art zu combiniren, ohne ihm jedoch das Wesen der Methode selbst mitzuteilen. Ich glaube Ihnen schon einmal geschrieben zu haben, daß ich auf keinen Fall diese Stelle, worin die Methode zum erstenmale öffentlich angedeutet ist, releviren werde, auch nicht wünsche, daß einer meiner Freunde mit meiner Zustimmung es thue. Dies hieße anerkennen, als bedürfe meine Anzeige (Theoria Motus Corporum Coelestium), daß ich seit 1794 diese

Methode vielfach gebraucht habe, eine Rechtfertigung, und dazu werde ich mich nie verstehen. Als Olbers attestirte[1]), daß ich ihm 1802 die ganze Methode mitgetheilt habe, war dies zwar gut gemeint; hätte er mich aber vorher gefragt, so würde ich es hautement gemißbilligt haben.

Stets von Herzen der Ihrige
C. F. Gauß.

Gauß hat seine Schriften über Ausgleichungsrechnung in sechs Abschnitten teils der Königlichen Sozietät der Wissenschaften zu Göttingen überreicht, teils finden sie sich in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften abgedruckt oder bilden den dritten Abschnitt des zweiten Buches von seinem Werk „Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Erde umlaufen." Sie sind bis auf eine in lateinischer Sprache verfaßt. 1887 ist eine Übersetzung in deutscher Sprache durch die damaligen Assistenten an dem preußischen geodätischen Institut A. Börsch und P. Simon herausgegeben. Sie sind betitelt: „Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Karl Friedrich Gauß".

Erstes Kapitel.

Fehlertheorie.

1. Beobachtungsfehler und deren Arten.

Eine Größe beobachten, heißt sie in Einheiten des Maßes messen, welches bei ihrer Bestimmung zugrundezulegen ist. Vollständig fehlerfrei zu beobachten, ist, weil unseren Sinnen eine Grenze gezogen, nicht möglich, wir begnügen uns deshalb mit Messungen, welche der Wahrheit mehr oder minder nahekommen. Handelt es sich darum, eine Größe zu beobachten, so mißt man sie mehrere Male. Oder man ermittelt, wenn es sich um die Bestimmung von mehreren Größen handelt, diese und führt dann noch eine oder mehrere überschüssige Beobachtungen aus. Zwischen sämtlichen Messungen muß eine mathematische Beziehung bestehen, z. B. in einem Dreieck werden nicht bloß zwei, sondern sämtliche Winkel beobachtet. Es besteht dann die Beziehung, daß die

1) In seiner Abhandlung: Über den veränderlichen Stern im Halse des Schwanes; von Lindenau und Bohnenberger, Zeitschrift für Astronomie. Bd. II. S. 192. September-Oktober 1816.

Summe der drei Winkel in einem Dreieck 180^0 betragen muß, falls das Dreieck eine Seitenlänge von 1 — 2 km hat.

Die Beobachtungsfehler sind ihrer Natur nach verschieden, teils vermeidliche, teils unvermeidliche. Man unterscheidet

I. Regelmäßige oder konstante Fehler. So nennen wir alle Fehler, deren Ursachen so genau zu erkennen sind, daß wir aus diesen jene nach ihrem Betrage feststellen können. Sobald wir demnach die Ursachen eines solchen Fehlers erkannt haben, ist dieser vermeidbar. Die Ursachen können folgende sein: Fehler der verwendeten Instrumente und Mängel des bei der Beobachtung eingeschlagenen Verfahrens. Diese Fehler lassen sich von den Messungsergebnissen fernhalten oder aus diesen beseitigen: durch Justieren der Instrumente vor der Beobachtung, durch besondere Anordnung der Messungen während der Beobachtung und schließlich durch entsprechende Verbesserungen des Beobachtungsergebnisses nach der Beobachtung, so daß schließlich ein Ergebnis erzielt werden kann, als ob keine der ebengenannten Fehlerursachen vorhanden sei.

II. Grobe Fehler. Die durch Unachtsamkeit oder Nachlässigkeit des Beobachters entstehenden Fehler werden „grobe" genannt. Hierzu gehören falsche Ablesungen an den verwendeten Instrumenten, die deutlich unterschieden und praktisch nicht vernachlässigt werden können; ferner Meter- oder Dezimeterfehler bei den Meßlatten, Fehler von Graden und Minuten bei den zur Winkelmessung benutzten Theodoliten. Sie können jedes Vorzeichen und jede beliebige Größe annehmen; weil es bei einiger Sorgfalt der Beobachtung gelingt, die groben Fehler zu unterdrücken, so scheiden sie bei unseren Betrachtungen aus.

III. Die unregelmäßigen oder zufälligen Fehler. Diesen Namen führen diejenigen Fehler, die infolge der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne, aus Witterungseinflüssen oder durch unsicheres Zielen, verursacht durch Wallungen der Luft oder durch ungünstige Beleuchtung und viele andere nicht zu beseitigende Ursachen, die von uns nur zum Teil erkannt werden, entstehen. Die Einwirkung auf die Größe dieser Fehler liegt teilweise nicht in unserer Macht, z. B. die Unsicherheit des Anvisierens, die durch das Wallen der Luft entsteht usw. Den Bemühungen, die Fehler zu verkleinern, ist deshalb eine Grenze gezogen. Aus dem Gesagten erhellt, daß eine Beobachtung stets mit einem Fehler, er mag noch so klein sein, behaftet sein muß.

2. Die Mittelwerte der Beobachtungsfehler als Wertmesser der Güte der Messungen.

Führen wir für eine Größe mehrere voneinander unabhängige Beobachtungen aus, so werden wir diese als gleich genau ansehen können, wenn sie unter denselben äußeren Umständen, mit derselben Sorgfalt, derselben Methode und mit demselben Instrument ausgeführt worden sind. Es leuchtet ein, daß der Mittelwert der Fehler sich einem Grenzwert nähern muß. Dieser Grenzwert ist abhängig von der Güte der bei der Messung verwendeten Instrumente, von der Sorgfalt, die bei der Beobachtung angewandt wurde, ferner von der Schärfe der menschlichen Sinne usw.

Wir werden jetzt versuchen, mehrere Mittelwerte der Fehler abzuleiten.

Als ersten Ausdruck für die Genauigkeit von Beobachtungen einer Größe, welche mit derselben Sorgfalt, mit demselben Instrumente ausgeführt werden, haben wir den **mittleren Fehler** μ anzusehen. Dieser wird gebildet, indem man die wahren Fehler ε einzeln quadriert, die Quadrate addiert, die Summen durch die Zahl der vorhandenen Fehler dividiert und dann die Wurzel zieht, folglich bildet:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}. \qquad (1)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß n, die Anzahl der wahren Fehler, möglichst groß sei. Unter ε kann man auch die wahren Fehler von Beobachtungen verschiedener Größen verstehen, nur müssen die Fehler von gleicher Genauigkeit sein.

Als zweiter Mittelwert ist der **durchschnittliche Fehler** ϑ anzusehen. Dieser wird gebildet, indem man alle ε, absolut genommen, das heißt also, ohne aufs Vorzeichen Rücksicht zu nehmen, addiert und alsdann die Summe durch die Anzahl der ε dividiert, also bildet:

$$\vartheta = \frac{[\varepsilon]}{n}; \; \varepsilon \text{ absolut genommen.}$$

Wir haben noch eines dritten Mittelwerts der wahren Fehler, nämlich des **wahrscheinlichen Fehlers** ϱ zu gedenken Dieser ist diejenige Verbesserung, die ebenso häufig überschritten als nicht erreicht wird. Man ordnet die Fehler der Größe nach, ohne dabei auf das Vorzeichen Rücksicht zu nehmen; der wahrscheinliche Fehler liegt alsdann in der Mitte der Reihe.

Zumeist rechnen wir mit dem mittleren Fehler. Dieser hat das Vorteilhafte, daß er einen großen Durchschnittswert liefert, denn die Quadrate der großen Fehler wirken sehr gewichtig.

Wie am Ende dieses Buches abgeleitet wird, ist

$$\mu = 1{,}25\,\vartheta = 1{,}48\,\varrho.$$

Obgleich wir es selten mit wahren Fehlern zu tun haben, denn es ist uns meist nicht möglich, den wahren Wert einer Größe zu ermitteln, so treten doch Fälle auf, wo uns die wahren Fehler gegeben sind, z. B. die Widersprüche bei Dreiecksabschlüssen einer Triangulation, denn die wahre Winkelsumme ist jedesmal $180^0 +$ Exzeß. Der Exzeß, d. h. der Überschuß der Summe der Winkel über 180^0, kann scharf ermittelt werden. Als wahre Fehler sind auch die Differenzen von Doppelmessungen anzusehen, denn der wahre Wert der Differenz ist gleich Null.

Streng genommen soll die Anzahl der zur Berechnung der Durchschnittsfehler dienenden Beobachtungen unendlich groß sein, doch liefert auch eine endliche Zahl, wenn sie nicht zu klein ist, noch hinreichend gute Mittelwerte der Fehler.

Im Anschluß hieran wollen wir noch ein Beispiel vornehmen. Bei einer Triangulation[1]) wurden folgende Dreieckswidersprüche erhalten:

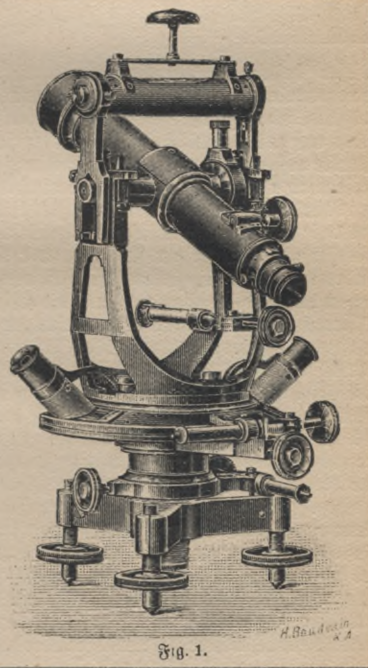


Fig. 1.

1) Eine Triangulation ist eine Winkelmessung mit einem Theodolit (s. u.) in einer Dreieckskette oder einem Dreiecksnetz, welches über ein Land behufs Vermessung ausgebreitet ist. Eine oder mehrere Seiten sind durch direkte Längenmessung ermittelt. Die Längen der übrigen Seiten können alsdann nach Ausgleichung der gemessenen Winkel berechnet werden. Das wichtigste Instrument für die Winkelmessung ist gegenwärtig der Theodolit (Fig. 1).

$$+2{,}0'', -0{,}8'', +4{,}0'', +3{,}1'', +2{,}0'', +0{,}4'', +0{,}6'',$$
$$-0{,}8'', +1{,}5'', +4{,}2'', -3{,}4''.$$

Wie groß ist alsdann der mittlere Fehler der Winkelmessung in einem Dreiecke?

Es ist $[\varepsilon\varepsilon] = 66{,}86$, folglich $\mu = \pm \sqrt{\frac{66{,}86}{11}} = \pm 2{,}5''$.

3. Fehleranhäufungsgesetze.

I. x sei das Vielfache einer Beobachtungsgröße L, die den mittleren Fehler μ hat, also $x = aL$, es ist alsdann der mittlere Fehler μ_x in x zu berechnen.

Der wahre Wert von aL, den wir mit X bezeichnen wollen, ergibt sich durch Einführung des um den wahren Fehler ε verbesserten Beobachtungswertes L: $$X = a(L + \varepsilon), \tag{1}$$

Dieser besteht in der Hauptsache aus dem Teilkreise, der Vertikal- und Horizontalachse, welch letztere das Fernrohr trägt. Bei dieser Anordnung ist es möglich, jedes Ziel einzustellen, d. h. den im Okularkopfe befindlichen Vertikalfaden auf das anzuvisierende Objekt zu richten. Das Instrument wird über dem Punkte aufgestellt, wo die Winkelmessung ausgeführt werden soll. Die Vertikalachse wird alsdann lotrecht gestellt mit Hilfe der auf der Horizontalachse aufsitzenden Reitlibelle. Hierauf wird das Ziel links eingestellt und an zwei Zeigern, die um 180° voneinander abstehen, abgelesen. Dann erfolgt das Mitteln der beiden Ablesungen. Die Zeiger sind entweder Nonien oder bei feinen Instrumenten Mikroskope. Nach Einstellung des Zielfernrohres auf das rechte Objekt wird wieder an den Zeigern abgelesen, und die Ablesungen werden gemittelt. Jetzt ist die Differenz der Mittel aus den Ablesungen rechts minus Ablesungen links der zu messenden Horizontalwinkel. Das Instrument gilt als berichtigt, wenn die Vertikalachse normal zur Kippachse und die Visierachse senkrecht zur letzteren steht. Die Visierachse ist bestimmt durch die gerade Verbindungslinie vom optischen Mittelpunkte des Objektivs und durch den Schnittpunkt des horizontalen und des vertikalen Fadens, denn das Fadenkreuz besteht aus zwei sich rechtwinklig kreuzenden Spinnfäden. Um die Drehung des Fernrohrs, welche um die vertikale Achse erfolgt, zu hemmen, ist rechts unten eine Klemmschraube vorhanden. Zur scharfen Einstellung der Visierachse des Fernrohrs auf den Zielpunkt dient eine Feinbewegung, welche über jener Klemmschraube sitzt. Um gewisse Instrumentfehler zu tilgen, werden die Winkel mindestens zwei- oder viermal, bei der zweiten Messung mit durchgeschlagenem Fernrohre beobachtet. Ferner ist eine Klemmschraube unten links angebracht, um der Drehung des Horizontalkreises Einhalt zu tun. Für seine Feinbewegung dient eine zweite Mikrometerschraube, welche sich ihr gegenüber befindet. Während man den Horizontalkreis Limbus nennt, führt der Teil mit den beiden Nonien den Namen Alhidade.

womit der wahre Fehler in x, d. h. ε_x, sich berechnet zu:

$$(X-x)=\varepsilon_x=a(L+\varepsilon)-aL=a\varepsilon.$$

Um den mittleren Fehler von x zu erhalten, bilden wir zunächst das Quadrat von ε_x:

$$\varepsilon_x^2=a^2\varepsilon^2. \tag{2}$$

Denkt man sich nun für n Beobachtungen L ε_x^2 gebildet und aus allen das Mittel genommen, so erhält man links μ_x^2 und rechts a^2, multipliziert mit dem durchschnittlichen Werte von ε^2, also:

$$\mu_x^2=\alpha^2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{3}$$

Der zweite Faktor rechts ist aber μ^2, das Quadrat des mittleren Fehlers von L. Folglich:

$$\mu_x=\pm a\mu. \tag{4}$$

II. $$x=L_1\pm L_2\pm L_3\pm\cdots\pm L_m, \tag{5}$$

wo die L voneinander unabhängige Beobachtungsgrößen sind, mit dem mittleren Fehler μ_1 bzw. $\mu_2\ldots$ bzw. μ_m; gefragt ist nach dem mittleren Fehler μ_x von x.

Um die Fehler in x zu erhalten, also um ε_x zu bestimmen, haben wir folgendes:

Es ist $$X=(L_1+\varepsilon_1)\pm(L_2+\varepsilon_2)\pm\cdots\pm(L_m+\varepsilon_m). \tag{6}$$

Subtrahieren wir x von X, also Gleichung (5) von (6), so erhalten wir ε_x:

$$\left.\begin{aligned}(X-x)=\varepsilon_x=(L_1+\varepsilon_1)\pm(L_2+\varepsilon_2)\pm\cdots\pm(L_m+\varepsilon_m)\\ -\{L_1\pm L_2\pm\cdots\pm L_m\},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder $$\varepsilon_x=\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\cdots\pm\varepsilon_m \tag{7a}$$

Jetzt nach Formel (7a) die n Beobachtungsreihen gebildet, dann die Gleichungen quadriert, addiert und endlich durch n dividiert, bringt:

$$\frac{[\varepsilon_x\varepsilon_x]}{n}=\mu_x^2=\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{n}+\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{n}+\cdots+\frac{[\varepsilon_m\varepsilon_m]}{n}\pm2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_2]}{n} \tag{8}$$

$$\pm2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_3]}{n}\pm\cdots\pm2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_m]}{n}\pm2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_3]}{n}\pm2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_4]}{n}\pm\cdots\pm2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_m]}{n}$$

$$\pm\cdots\pm2\frac{[\varepsilon_{m-1}\varepsilon_m]}{n}.$$

Nun ist aber $\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{n}=\mu_1^2$ gleich dem Quadrate des mittleren Fehlers von L_1, ebenso ist $\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{n}=\mu_2^2$ und $\frac{\varepsilon_m\varepsilon_m}{n}=\mu_m^2$. Der durchschnittliche

Wert von den doppelten Produkten ist aber gleich Null; denn $2[\varepsilon_i \varepsilon_{i+k}]$ ist eine endliche, zumeist kleine Zahl, weil die einzelnen Produkte, aus denen sich $[\varepsilon_i \varepsilon_{i+k}]$ zusammensetzt, teils positiv, teils negativ sind; n ist nach der Erklärung des mittleren Fehlers unendlich groß, folglich verschwindet $2\frac{[\varepsilon_i \varepsilon_{i+k}]}{n}$. Man kann also setzen:

$$\mu_x^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_m^2 \tag{9}$$

oder

$$\mu_n = \pm \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_m^2}. \tag{10}$$

Sind die m Beobachtungen gleich genau, ist folglich:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m,$$

so ist

$$\mu_x = \pm \mu \sqrt{m}. \tag{11}$$

Zu den beiden bis jetzt behandelten Fällen wollen wir zwei Beispiele wählen. Es seien 6 cm auf einem Zeichenbrett aufzutragen, und zwar derart, daß man auf einem Transversalmaßstabe, dessen Teilung als fehlerfrei angesehen werden kann, die Länge von 1 cm abgreift und nun absetzt, und zwar zum ersten Male durch Zirkelschlag, indem man die Länge geradlinig abträgt. Es ist folglich:

(12) $x = 6L$, mithin: $\mu_x = \pm 6\mu$. (13)

Bei dem zweiten Male aber wird nach dem Absetzen des ersten Zentimeters der Zirkel verstellt und nun auf dem Maßstabe abermals 1 cm abgegriffen und an die schon abgesetzte Länge von 1 cm angetragen; jetzt wird der Zirkel wiederum verstellt und abermals 1 cm abgegriffen usw., bis diese 6 cm geradlinig abgetragen worden sind.

Jetzt ist aber

$$x = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6, \tag{14}$$

folglich, da $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_6 = \mu$ ist, nach II:

$$\mu_x = \pm \mu \sqrt{6}. \tag{15}$$

Dasselbe findet statt, bei der Höhenmessung durch das Nivellement[1]). Denn beim Nivellement ist:

$$x = L_1 \pm L_2 \pm L_3 \pm L_4 \pm \cdots \pm L_{n-1} \pm L_n, \tag{16}$$

1) Zur Ausführung eines Nivellements ist eine Nivellierlatte und ein Nivellierinstrument erforderlich. Die Nivellierlatte ist ein in Zentimeter oder halbe Zentimeter geteilter Maßstab, der senkrecht auf den Kopf eines in den Boden getriebenen Pfahls oder auf den Knopf einer Unterlagsplatte gesetzt wird. Das Nivellierinstrument ist eine Verbindung von Zielfernrohr und

wo die L die Ablesungen an der Nivellierlatte bedeuten, mithin ist:

$$\mu_x = \pm \mu \sqrt{n}, \tag{17}$$

d. h. mittlerer Fehler einer Sicht multipliziert mit der Wurzel aus der Anzahl der Ablesungen; dabei ist vorausgesetzt, daß man stets mit gleichen Sichten arbeitet, und zwar wählt man zumeist solche von 50, allgemein r Metern: Es ist alsdann

$$\mu_x = \pm \mu \sqrt{\frac{E}{r}}, \tag{18}$$

wo E die Länge der Höhenwägung bedeutet.

Hierfür können wir setzen:

$$\mu_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{r}} \sqrt{E}. \tag{19}$$

Röhrenlibelle (Fig. 2). Das Instrument gilt als berichtigt, wenn die Visierachse, d. i. die gerade Verbindungslinie vom optischen Mittelpunkt des Objektivs mit dem Schnittpunkt der Fäden im Okular, parallel ist der Libellenachse. Falls alsdann die Libelle einspielt, ist die Visierachse horizontal. Bei dem Aufstellen des Nivellierinstruments muß seine Stehachse annähernd lotrecht gestellt werden. Dieses geschieht mit Hilfe der Röhrenlibelle oder einer besonders angebrachten Dosenlibelle. Es wird jetzt an dem horizontalen Faden abgelesen, indem man den vertikalen Faden auf die Mitte der Latte bringt, vorher aber durch Verstellen der Fußschraube dafür sorgt, daß die Röhrenlibelle scharf einspielt.

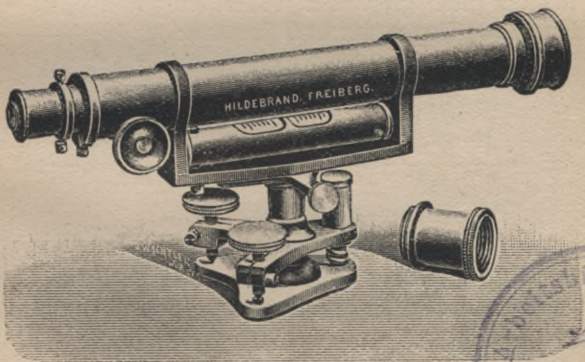


Fig. 2.

Nun $\frac{\mu}{\sqrt{r}} = \mu_1$ eingeführt, ergibt:

$$\mu_x = \pm \mu_1 \sqrt{E}, \tag{20}$$

d. h. der mittlere Fehler einer Nivellementsstrecke nimmt zu mit der Wurzel aus der Entfernung. Gleiches findet statt bei Längenmessungen.

III. Ferner ist $x = a_1 L_1 \pm a_2 L_2 \pm \cdots \pm a_m L_m,$

wo die L Größen sind, die durch Beobachtung gefunden werden, ihre mittleren Fehler sind μ_1 bzw. $\mu_2, \ldots$ bzw. μ_m; wie groß ist alsdann der mittlere Fehler μ_x von x?

$$\mu_x = \pm \sqrt{a_1^2 \mu_1^2 + a_2^2 \mu_2^2 + \cdots + a_m^2 \mu_m^2} = \pm \sqrt{[a^2 \mu^2]}. \tag{21}$$

Die Beweisführung ist in II nachzusehen. Ist für den speziellen Fall $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$, so ist

$$\mu_x^2 = \pm \mu \sqrt{[a a]}. \tag{22}$$

Dies soll durch ein Beispiel erläutert werden. x sei gleich dem arithmetischen Mittel, also:

$$x = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n}{n}. \tag{23}$$

Weil die Genauigkeit der L dieselbe ist, deshalb sind ihre mittleren Fehler sämtlich gleich groß. Wir wollen den Fehler gleich μ setzen.

Gleichung (23) können wir auch schreiben:

$$x = \frac{L_1}{n} + \frac{L_2}{n} + \frac{L_3}{n} + \cdots + \frac{L_n}{n}, \tag{24}$$

folglich ist:

$$\mu_x^2 = \frac{\mu^2}{n^2} + \frac{\mu^2}{n^2} + \frac{\mu^2}{n^2} + \cdots + \frac{\mu^2}{n^2} = \frac{n \mu^2}{n^2} = \frac{\mu^2}{n}, \tag{25}$$

mithin:

$$\mu_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}} \tag{26}$$

in Worten: Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels nimmt mit der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl ab.

IV. Es sei endlich allgemein:

$$x = f(L_1, L_2, \ldots, L_m), \tag{27}$$

so läßt sich die Berechnung des mittleren Fehlers auf III zurückführen.

Es ist nämlich der wahre Wert X von x:

$$X = x + \varepsilon_x = f(L_1 + \varepsilon_1, L_2 + \varepsilon_2, \ldots, L_m + \varepsilon_m). \quad (28)$$

Nun rechts in eine Reihe nach Taylor entwickelt, ergibt:

$$\left.\begin{aligned} X = x + \varepsilon_x = f(L_1 + L_2 + \ldots + L_m) \\ + \frac{\partial f}{\partial L_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial L_m}\varepsilon_m. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Weil die ε kleine Größen sind, genügen die ersten Potenzen. Falls man Gleichung (27) von (29) subtrahiert, erhält man ε_x:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial f}{\partial L_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial L_m}\varepsilon_m, \quad (29)$$

wofür man zur Abkürzung auch schreiben kann:

$$\varepsilon_x = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m. \quad (30)$$

Folglich:

$$\left.\begin{aligned} \mu_x = \pm\sqrt{[a^2\mu^2]} \\ = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\mu_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\mu_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_m}\mu_m\right)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Wir haben hier noch zu erwähnen, daß, wenn Winkelmaß vorliegt, dieses im analytischen Maße zu verstehen ist, weil der Taylorsche Satz Anwendung gefunden hat.

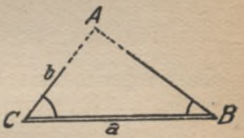


Fig 3.

Beispiel. Die Lage eines Punktes A wird gegen eine feste Basis a durch Messen der Winkel B und C festgelegt (Fig. 3). $BC = a = 514{,}18$ läßt einen mittleren Fehler von $\pm$ 0,05 m erwarten, die mittleren Fehler der Winkel sind zu $\pm 7''$ bestimmt; man fand $B = 57^0\, 8'\, 16''$ und $C = 75^0\, 28'\, 30''$. Es wird die Frage nach dem mittleren Fehler der Seite b gestellt.

$$b = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)}, \qquad \text{mithin}$$

$$\mu_b = \pm\sqrt{\left(\frac{\sin B}{\sin(B+C)}\mu_a\right)^2 + \left(a \cdot \frac{\sin(B+C)\cos B - \sin B \cos(B+C)}{\sin(B+C)^2}\frac{\mu_B}{\varrho''}\right)^2 + \left(\frac{a \sin B \cos(B+C)}{\sin(B+C)^2}\frac{\mu_C}{\varrho''}\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\mu_a\right)^2 + \left(\frac{a \sin C}{\sin(B+C)^2}\frac{\mu_B}{\varrho''}\right)^2 + \left(b \operatorname{ctg}(B+C)\frac{\mu_C}{\varrho''}\right)^2},$$

ϱ'' hat die Bedeutung 206 265″.

B war bestimmt worden	$57^0\ 8'16''$	
C fand sich durch Messung	$75^0\,28'30''$	
mithin ist $B+C$	$= 132^0\,36'46''$	A also $47^0\,23'14''$.

Das erste Glied rechts unter der Wurzel ist folglich	0,003258
das folgende Glied beträgt	0,000973
das letzte Glied ist endlich	0,000336
Die Summe ergibt	0,004567.

Die Wurzel aus 0,004567 ist μ_b:

$$\mu_b = \pm\, 0{,}068 \text{ m}$$

Weil die Formel für b von logarithmischem Bau ist, deshalb können wir noch einen zweiten Weg zur Bestimmung von μ_b verwenden, nämlich die Anwendung logarithmischer Differenzen.

Es sei:

$$x = \frac{L_1\, L_2}{L_3}. \tag{32}$$

Der wahre Wert von x ist demnach:

$$x + \varepsilon_x = \frac{(L_1 + \varepsilon_1)\,(L_2 + \varepsilon_2)}{(L_3 + \varepsilon_3)}. \tag{33}$$

Oder logarithmiert, lautet die Gleichung:

$$\log(x + \varepsilon_x) = \log(L_1 + \varepsilon_1) + \log(L_2 + \varepsilon_2) - \log(L_3 + \varepsilon_3). \tag{34}$$

Nun ist $\log(L_1 + \varepsilon_1) = \log L_1 + c_1 \varepsilon_1$, wo c_1 die unmittelbar der Logarithmentafel zu entnehmende Differenz von $\log(L_1 + 1)$ und $\log L_1$ bedeutet. Durch Bilden der algebraischen Summe von $\log L_1 + \log L_2 - \log L_3$ wird $\log x$ gefunden. An derselben Stelle der Tafel, wo $\log x$ steht, findet man auch d, das ist der Koeffizient von ε_x. Es ist nämlich wie früher d die Differenz von $\log(x+1)$ und $\log x$. Jetzt $\log x$ gegen $\log L_1 + \log L_2 - \log L_3$ tilgend, ergibt sich:

$$d\,\varepsilon_x = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 - c_3 \varepsilon_3. \tag{35}$$

Oder links und rechts durch d dividiert, folgt:

$$\varepsilon_x = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 - a_3 \varepsilon_3, \tag{36}$$

indem für $\frac{c_1}{d} = a_1$, für $\frac{c_2}{d} = a_2$ und für $\frac{c_3}{d} = a_3$ gesetzt wurde.

Geht man nun zu Mittelwerten über, so erhält man:

$$\mu_x = \pm \sqrt{(a_1 \mu_1)^2 + (a_2 \mu_2)^2 + (a_3 \mu_3)^2}. \tag{37}$$

Gehen wir nun zu unserem obigen Beispiel über, so wird erhalten:

$$\log(a+\varepsilon_a) \quad = 2{,}711115 + 844 \quad \varepsilon_a$$
$$\log\sin(B+\varepsilon_B B) = 9{,}924268 + \quad 1{,}3\,\varepsilon_B$$

Die Summe ergibt $2{,}635383 + 844\,\varepsilon_a + 1{,}3\,\varepsilon_B$.

Alsdann ist $\log\sin(B+C+\varepsilon_B+\varepsilon_C) = 9{,}866846 - 2{,}0\ (\varepsilon_B+\varepsilon_C)$. Die letzte logarithmische Differenz ist deshalb hier negativ, weil der Winkel im zweiten Quadrant liegt, der sin infolgedessen mit wachsendem Winkel abnimmt. Durch Subtraktion dieser beiden Ausdrücke erhalten wir: $\log(b+\varepsilon b) = 2{,}768537 + 844\,\varepsilon_a + 1{,}3\,\varepsilon_B + 2{,}0\,\varepsilon_B + 2{,}0\,\varepsilon_C$. Sehen wir in der Tafel nach, so findet man:

$$b = 586{,}86 \quad \text{und} \quad d = 739.$$

Oder $\varepsilon_b = 1{,}14\,\varepsilon_a + 0{,}0045\,\varepsilon_B + 0{,}0027\,\varepsilon_C$. Woraus für den mittleren Fehler folgt:

$$\mu_b = \pm\sqrt{0{,}004598} = \pm\,0{,}068 \text{ m}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem vorigen überein.

4. Mittlerer Fehler einer Größe, welcher sich aus mehreren Fehlerursachen zusammensetzt.

Setzt sich ein Fehler in einer Beobachtung L aus mehreren, voneinander unabhängigen Fehlerursachen zusammen, haben wir folglich die Gleichung: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_m$,
wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_m$ die m unterscheidbaren Fehlerursachen in L sind, so ist, falls $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ deren Mittelwerte darstellen, der mittlere Fehler μ von ε: $\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \cdots + \mu_m^2$.

Ist ferner: $\varepsilon = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m$,

so ist: $\mu^2 = a_1^2\mu_1^2 + a_2^2\mu_2^2 + \cdots + a_m^2\mu_m^2$.

Beispiel. Bei einem Theodolit sei der mittlere Visier- oder Einstellfehler des Fernrohrs μ_v und der mittlere Ablesefehler an jedem der beiden Nonien μ_a. Es ist der mittlere Fehler eines Winkels zu berechnen, der hervorgegangen ist a) aus $n$facher Winkelmessung und Winkelbildung, b) aus $n$facher Repetition des Winkels, nach der Vorda'schen Methode.[1])

1) Die Vordasche Winkelrepetition besteht darin, daß man Ziel links einstellt, an den beiden Zeigern abliest und die Ablesungen mittelt; darauf wird

Lösung. a) Der wahre Fehler eines gemessenen Winkels setzt sich wie folgt zusammen:

$$\varepsilon_{\measuredangle} = \varepsilon_v + \frac{\varepsilon_a''' + \varepsilon_a''''}{2} - \left(\varepsilon_v + \frac{\varepsilon_a' + \varepsilon_a''}{2}\right),$$

woraus der mittlere Fehler hervorgeht:

$$\mu_{\measuredangle} = \pm\sqrt{2\left(\mu_v^2 + \frac{\mu_a^2}{2}\right)}.$$

Beobachtet man n mal den Winkel und nimmt von ihm das Mittel, so ist:

$$\mu_w = \pm\sqrt{\frac{2}{n}\left(\mu_v^2 + \frac{\mu_a^2}{2}\right)}.$$

b) Es ist der wahre Fehler eines durch $n$fache Repetition ermittelten Winkels:

---

die Alhidadenklemme unten rechts (Fig. 1) gelöst und das rechte Ziel eingestellt. Dies wird durch folgende Handhabungen erreicht. Nachdem man das Ziel im Fernrohr sichtbar gemacht hat, schließt man die Klemme, und man benutzt die nebenliegende Feinbewegung zur scharfen Einstellung des Zieles, wobei auch noch die Feinbewegung, welche sich in der Zeichnung gleich neben dem Okular befindet, verwendet wird, um das Fernrohr auf und ab zu bewegen; d. h. das Ziel muß an den Schnittpunkt der beiden Fäden gebracht werden. Durch Ablesung an einem Zeiger kann der Winkel roh gebildet werden.

Jetzt wird der Limbus gelüftet, indem man die Klemmschraube unten links benutzt, das Ziel links im Fernrohr sichtbar macht, dann die Klemmschraube anzieht und zur scharfen Einstellung die Limbusmikrometerschraube verwendet. Man stellt hierauf, nachdem die Alhidade gelöst ist, das Fernrohr zum zweiten Male auf das rechte Ziel ein, dann wird wieder durch Drehen von Limbus und Alhidade das Ziel links eingestellt usw. Dieser Vorgang wird $^n/_2$ mal wiederholt.

Hierauf wird das Fernrohr durchgeschlagen, der Limbus gelöst und Ziel links eingestellt; jetzt wird die Klemme der Alhidade gelüftet und Ziel rechts anvisiert usw., bis der Winkel n mal abgetragen ist. Alsdann wird an den zwei Zeigern abgelesen und die Ablesung gemittelt. Jetzt ist der $n$fache Winkel $nx = A_e - A_a$, wo A_e und A_a die Mittel aus der End- und Anfangsablesung bedeuten. Der einfache Winkel ist folglich:

$$x = \frac{A_e - A_a}{n}.$$

Die Zwischenablesung an einem Zeiger bei der ersten Einstellung auf das rechte Ziel wird ausgeführt, um eine rohe Probe für die ganze Messung zu haben, und damit man nicht im Zweifel ist, ob während der Repetition von den Nonien der ganze Kreis durchlaufen, ob infolgedessen am Schlusse 0°, 360°, 720° ... zu addieren ist. Früher war die Repetitionszahl eine sehr hohe, so hat z. B. Gauß bei der hannöverschen Gradmessung einige Winkel 80 mal repetiert.

$$\varepsilon_w' = \frac{1}{n}\left\{-\frac{\varepsilon_a' + \varepsilon_a''}{2} - \varepsilon_v' + \varepsilon_v'' - \varepsilon_v''' + \varepsilon_v'''' + \cdots - \varepsilon^{(2n-1)} + \varepsilon^{(2n)} + \frac{\varepsilon_a''' + \varepsilon_a''''}{2}\right\}.$$

Geht man zu Mittelwerten über, so ist:

$$\mu_w' = \pm\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(2n\mu_v^2 + \mu_a^2\right)} = \pm\sqrt{\frac{2}{n}\left(\mu_v^2 + \frac{\mu_a^2}{2n}\right)}.$$

Das Repetitionsverfahren wird angewendet, falls ein Theodolit mit schlechter Ablesung vorliegt und man trotzdem gute Resultate mit ihm erzielen will; denn der Einstellfehler des Fernrohrs ist immer gering, er beträgt $1 - 2''$.

5. Einteilung der Ausgleichungsaufgaben, welche von uns behandelt werden.

Wir nehmen folgende Ausgleichungsaufgaben vor:

I. Ausgleichung direkter Beobachtungen,

II. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen und

III. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

Unter direkten Beobachtungen versteht man solche Messungen, welche sich auf die Größe beziehen, welche zu bestimmen ist.

Vermittelnde Beobachtungen sind solche, welche verschiedene Größen umfassen. Diese müssen aber Funktionen von den Unbekannten sein, welche wir durch die ausgeführten Beobachtungen haben ermitteln wollen.

Wir haben es mit bedingten Beobachtungen zu tun, wenn zwischen den wahren Beobachtungswerten Bedingungsgleichungen bestehen, welche auch von den günstigsten Werten streng zu erfüllen sind.

Denn die wahren Werte durch Ausgleichung zu bestimmen, ist nicht möglich, wir müssen uns daher mit den günstigsten begnügen.

Zweites Kapitel.

Bestimmung einer Größe durch mehrfache Messung.

1. Ausgleichung direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

Liegen zur Bestimmung einer Größe n Beobachtungen für sie vor: $L_1, L_2, \ldots, L_n$ so muß der wahrscheinlichste Wert das arithmetische Mittel ergeben. Das ist so in unser Fleisch und Blut übergegangen, daß wir die Methode der Ausgleichung für fehlerhaft ansehen würden, die ein anderes Resultat ergäbe. Wir bilden zunächst die sogenannten Fehlergleichungen:

$$\lambda_1 = -L_1 + x, \quad \lambda_2 = -L_2 + x, \ldots, \quad \lambda_n = -L_n + x, \tag{1}$$

denn es ist uns, wie oben bereits gesagt, unmöglich, den wahren Wert X und infolgedessen auch die wahren Fehler ε zu ermitteln.

Nun führen wir für x einen Näherungswert x_0 + einer Verbesserung ξ ein. Wenn man dann $-L_i + x_0 = -l_i$ setzt, erhält man die Gleichungen:

$$\lambda_1 = -l_i + \xi, \quad \lambda_2 = -l_2 + \xi, \ldots, \quad \lambda_n = -l_n + \xi. \tag{2}$$

Die Einführung wird deshalb ausgeführt, um mit kleinen Zahlwerten rechnen zu können.

Jetzt ist ξ derart zu bestimmen, daß $[\lambda\lambda]$ ein Minimum wird. Der Grund, weshalb dies geschieht, ist in Kap. 6 angegeben. Dies auf die Gleichungen (2) angewendet, bringt:

$$[\lambda\lambda] = (-l_1 + \xi)^2 + (-l_2 + \xi)^2 + \cdots + (-l_n + \xi)^2 \tag{3}$$

ein Minimum. Oder:

$$0 = 2(-l_1 + \xi) + 2(-l_2 + \xi) + \cdots + 2(l_n + \xi), \tag{4}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(5) \qquad 0 = -[l] + n\xi, \quad \text{d. h.} \quad \xi = \frac{[l]}{n}. \tag{6}$$

Oder ξ ist gleich dem arithmetischen Mittel.

Nun bilden wir x: $$x = x_0 + \xi. \tag{7}$$

Durch Einführung der Unbekannten ξ in die Gleichungen (2) werden die λ berechnet.

Als Rechenprobe hat man: $$[\lambda] = 0. \tag{8}$$

Falls man nämlich die Gleichungen (2) addiert, folgt:

$$[\lambda] = [-l] + n\xi. \tag{9}$$

Demnach nach (5) $$[\lambda] = 0.$$

Die für die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung dienende Quadratsumme der λ kann direkt aus den einzelnen λ berechnet werden, und zur Probe nach der Formel:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [l]\,\xi. \tag{10}$$

denn, falls wir die Gleichungen (2) mit ihren λ multiplizieren und die erhaltenen alsdann addieren, folgt:

$$[\lambda\lambda] = -[l\lambda] + [\lambda]\,\xi. \tag{11}$$

Nun ist $[\lambda] = 0$, mithin: $[\lambda\lambda] = -[l\lambda]$. (12)

Multiplizieren wir jetzt, zur Elimination von $-[l\lambda]$, jede der Gleichungen (2) mit ihren $-l$, so ergibt sich, wenn wir diese addieren:

$$-[\lambda l] = [ll] - [l]\,\xi. \tag{13}$$

Dies zur Gleichung addiert, läßt $-[l\lambda]$ verschwinden, und wir erhalten Gleichung (10):

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [l]\,\xi. \tag{14}$$

Aus dieser Gleichung kann man ersehen, daß es sehr vorteilhaft war, $x = x_0 + \xi$ zu setzen. Denn wenn das nicht geschah, wäre unter $[ll]$ $[LL]$ zu verstehen; wir müßten also, falls L in Winkelmaß gegeben, dieses in Sekunden verwandeln und alsdann quadrieren, eine Rechnung, die ziemlich umfangreich ausfallen dürfte, da wir die vorhandenen Quadrattafeln meist nicht mehr benutzen können, weil sie nur bis 1000 reichen.

Formel (14) gibt eine Probe für die Rechnung bis zur Aufstellung der Fehlergleichungen (2).

Aus den Verbesserungen λ kann man den mittleren Fehler der einzelnen Beobachtung wie folgt bestimmen: Wir greifen die i. Fehlergleichung aus der Reihe heraus. Den wahren Fehler erreichen wir, falls wir den wahren Wert X kennen:

$$\varepsilon_i = -L_i + X. \tag{15}$$

Es ist ferner: $\lambda_i = -L_i + x$, (16)

wo x den günstigsten Wert der Unbekannten bedeutet, oder es ist:

$$\varepsilon_i - \lambda_i = X - x, \tag{17}$$

woraus folgt: $[\varepsilon] - [\lambda] = n(X - x)$. (18)

Nun ist nach (8):

$$[\lambda] = 0, \quad \text{mithin} \quad [\varepsilon] = n(X - x). \tag{19}$$

Es ist ferner, wenn wir Gleichung (17) mit ε_i multiplizieren:

$$\varepsilon_i\varepsilon_i - \varepsilon_i\lambda_i = \varepsilon_i(X - x). \tag{20}$$

Wenn wir zur Summe übergehen, ergibt sich:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\varepsilon\lambda] = [\varepsilon](X - x). \tag{21}$$

Zur Entfernung von $[\varepsilon\lambda]$ multiplizieren wir Gleichung (17) mit λ_i und gehen dann zur Summe über. Wir erhalten:

$$[\varepsilon\lambda] - [\lambda\lambda] = [\lambda](X - x) \tag{22}$$

oder, weil $[\lambda] = 0$ ist: $\quad [\varepsilon\lambda] - [\lambda\lambda] = 0. \qquad (23)$

Jetzt Gleichung (23) zu (21) addiert, ergibt:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda] = [\varepsilon](X - x) = [\varepsilon] \cdot \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{24}$$

falls wir für $(X - x)$ den Wert von (19) einführen.

Alsdann zu Mittelwerten übergehend, erhält man:

$$n\mu^2 - [\lambda\lambda] = \sqrt{\mu}\,n \cdot \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \mu^2, \tag{25}$$

indem wir rechts Gleichung (11) und (26) S. 14 bzw. 16 anwenden. Rechts ist nur das positive Vorzeichen zu benutzen. Mithin ist der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}. \tag{26}$$

Ein Vergleich mit $\mu = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$ zeigt, daß $[\lambda\lambda]$ kleiner ist als $[\varepsilon\varepsilon]$, wie es auch sein muß, da wir $[\lambda\lambda]$ und nicht $[\varepsilon\varepsilon]$ zu einem Minimum gemacht haben. Daß wir nur das positive Vorzeichen rechts von (25) gebrauchten, ist daher zu Recht geschehen. Zur Prüfung der Formel (26) wenden wir sie für $n = 1$ an, μ wird alsdann $= \frac{0}{0}$, d. h. wir können über die erlangte Genauigkeit nichts aussagen.

Da $\xi = \frac{[l]}{n}$, so ist nach (26) S. 16 der mittlere Fehler von ξ oder x:

$$\mu_x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{n}},$$

denn $x = x_0 + \xi$, wo x_0 eine konstante Größe ist, folglich:

$$\mu_x = \mu_\xi.$$

Endlich ist noch, um die ganze Ausgleichung zu prüfen, zu bilden $L_1 + \lambda_1$, $L_2 + \lambda_2, \ldots, L_n + \lambda_n$. Diese Werte müssen sämtlich gleich x sein.

Wir wählen hierzu ein Beispiel. Im 4. Bande der Hauptdreiecke der preußischen Landestriangulation finden wir für den Winkel Höhbeck-Redemoissel auf Station Glienitz 12 unabhängige Messungen. Es soll hieraus der günstigste Wert des Winkels, sodann der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung sowie des Mittels bestimmt werden. Die Beobachtungen sind:

$68^0\,23'\,0{,}5''$	$68^0\,23'\,0{,}5''$	$68^0\,23'\;0{,}8''$	$68^0\,22'\,58{,}2''$
$0{,}9''$	$0{,}2''$	$22'\,59{,}8''$	$58{,}8''$
$0{,}4''$	$1{,}0''$	$58{,}7''$	$58{,}8''$

Führen wir $x_0 = 68^0\,22'\,55''$ ein, so lauten die Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{llll}
\lambda_1 = -5{,}5 + \xi & \lambda_4 = -5{,}5 + \xi & \lambda_7 = -5{,}8 + \xi & \lambda_{10} = -3{,}2 + \xi \\
\lambda_2 = -5{,}9 + \xi & \lambda_5 = -5{,}2 + \xi & \lambda_8 = -4{,}8 + \xi & \lambda_{11} = -3{,}8 + \xi \\
\lambda_3 = -5{,}4 + \xi & \lambda_6 = -6{,}0 + \xi & \lambda_9 = -3{,}7 + \xi & \lambda_{12} = -3{,}8 + \xi
\end{array}$$

$$\xi = \frac{58{,}6}{12} = 4{,}88'', \quad \text{mithin} \quad x = 68^0\,22'\,59{,}88''.$$

Alsdann ξ in die Fehlergleichungen eingefügt, ergibt:

$$\begin{array}{llll}
\lambda_1 = -0{,}62'' & \lambda_4 = -0{,}62'' & \lambda_7 = -0{,}92'' & \lambda_{10} = +1{,}68'' \\
\lambda_2 = -1{,}02'' & \lambda_5 = -0{,}32'' & \lambda_8 = +0{,}08'' & \lambda_{11} = +1{,}08'' \\
\underline{\lambda_3 = -0{,}52''} & \underline{\lambda_6 = -1{,}12''} & \underline{\lambda_9 = +1{,}18''} & \underline{\lambda_{12} = +1{,}08''} \\
\quad -2{,}16'' & \quad -2{,}06'' & \quad +0{,}34'' & \quad +3{,}84''
\end{array}$$

$[\lambda]$ folgt $= -0{,}04$. Es müßte Null ergeben. Der Fehler ist der Kürzung von ξ zuzuschreiben.

Es ist ferner $[\lambda\lambda] = 10{,}8368$. Die Kontrollformel $[\lambda\lambda] = [ll] - [l]\,\xi = 297{,}00 - 285{,}968 = 11{,}032$ bestätigt die Richtigkeit der Rechnung.

Nun zur Berechnung von μ übergehend, erhält man:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{10{,}84}{12-1}} = \pm\sqrt{0{,}99} = \pm\,1{,}00''.$$

Alsdann ist: $\mu_x = \pm\,\dfrac{1{,}00}{\sqrt{12}} = \pm\,0{,}29''$.

Folglich ist das Resultat der Ausgleichung:

$$x = 68^0\,22'\,59{,}88' \pm 0{,}29''$$

und der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung $\mu = \pm\,1{,}00''$.

2. Das Gewicht.

Wurden g gleich genaue Beobachtungen, die sich auf dieselbe Größe beziehen, zu einem Mittel vereinigt, so sagt man, dieses habe das Gewicht g, weil es eben g ursprüngliche Messungen ersetzt, während die

L nur je das Gewicht 1 haben. Nach früherem ist daher der mittlere Fehler des Mittels

$$\mu_g = \pm \frac{\mu}{\sqrt{g}}, \tag{1}$$

wo μ der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 ist.

Wurden also Mittel aus g_1, g_2, g_3 gleichwertigen Messungen gebildet, haben diese also das Gewicht g_1, g_2, g_3, so ist der mittlere Fehler dieser Mittel:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{g_1}}, \quad \mu_2 = \frac{\mu}{\sqrt{g_2}}, \quad \mu_3 = \frac{\mu}{\sqrt{g_3}}, \tag{2}$$

d. h. es ist: $$\mu_1^2 : \mu_2^2 : \mu_3^2 = \frac{\mu^2}{g_1} : \frac{\mu^2}{g_2} : \frac{\mu^2}{g_3} = \frac{1}{g_1} : \frac{1}{g_2} : \frac{1}{g_3} \tag{3}$$

oder auch: $$g_1 : g_2 : g_2 = \frac{1}{\mu_1^2} = \frac{1}{\mu_2^2} = \frac{1}{\mu_3^2}. \tag{4}$$

Wir haben also den Satz: Die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler.

Dieser Satz kann auf unmittelbare Messungen L_1, L_2, L_3 von verschiedener Genauigkeit übertragen werden; haben diese Beobachtungen den mittleren Fehler μ_1, μ_2, μ_3, so ist das Verhältnis ihrer Gewichte:

$$g_1 : g_2 : g_3 = \frac{\mu^2}{\mu_1^2} : \frac{\mu^2}{\mu_1^2} : \frac{\mu^2}{\mu_3^2} \tag{5}$$

oder: $$g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} : \frac{1}{\mu_3^2}. \tag{6}$$

Dieses Verhältnis bleibt dasselbe, wenn man rechts mit der Konstanten k multipliziert, nur die absoluten Werte der Gewichte nehmen andere Werte an.

Dies läßt sich dadurch erklären, daß wir jeden Augenblick die einzelne Messung L als das Mittel aus einer Anzahl Beobachtungen von anderer Genauigkeit ansehen können. Jede dieser fingierten Beobachtungen hat immer das Gewicht 1. Durch die Wahl von μ hat man es in der Hand, für g ganze Zahlen zu erhalten. Zum Beispiel: Es liegen Winkel mit dem mittleren Fehler $^1/_2{}''$ und $^1/_3{}''$ vor. Diese können aufgefaßt werden als Mittel aus 4 bzw. 9 Messungen vom Gewichte 1 mit dem mittleren Fehler $\mu = \pm 1''$. Sie können aber auch angesehen werden als Mittel aus 36 und 81 Beobachtungen, denen je der mittlere Fehler $\mu = \pm 3''$ zukommt usw. Es können hiernach die Gewichtszahlen auch Brüche sein. Nur auf ihr Verhältnis kommt es an, und μ gehört immer zum Gewicht 1. Die Gleichungen

$$g_1 = \frac{\mu^2}{\mu_1^2}, \quad g_2 = \frac{\mu^2}{\mu_2^2} \tag{7}$$

können daher, da μ jeden Wert annehmen kann, auch geschrieben werden:

$$g_1 = \frac{\text{Konst.}}{\mu_1^2}, \quad g_2 = \frac{\text{Konst.}}{\mu_2^2} \text{ usw.} \tag{8}$$

Erstes Beispiel. Es soll das Gewicht eines Nivellements von 2, 5, ..., n km abgeleitet werden.

Nach S. 14 ist der mittlere Fehler eines Nivellements von 2, 5, ..., n km $\mu_{x1} = \pm \mu\sqrt{2000}$, $\mu_{x2} = \pm \mu\sqrt{5000}$, $\mu_{x3} = \pm \mu\sqrt{1000\,n}$, oder das Gewicht dieser Züge ist $g_1 = \frac{\mu^2}{\mu^2 2000} = \frac{1}{2000}$, $g_2 = \frac{1}{5000}$, $g_3 = \frac{1}{1000\,n}$ oder $g_1 = \frac{1}{2}$, $g_2 = \frac{1}{5}$, $g_3 = \frac{1}{n}$, falls wir μ gleich dem mittleren Fehler von 1 km wählen. Im ersteren Falle bezieht sich das Gewicht 1 auf 1 m.

Als zweites Beispiel geben wir das folgende: Es ist das Gewicht von $L_1\sqrt{g_1}$ zu ermitteln, wenn L_1 den mittleren Fehler μ_1 oder das Gewicht g_1 hat. Der mittlere Fehler μ_1 von $L_1\sqrt{g_1}$ ist:

$$\mu_x^2 = g_1\mu_1^2 = g_1\frac{\mu^2}{g_1} = \mu^2.$$

Folglich ist das Gewicht der Größe $L_1\sqrt{g_1}$: $g = \frac{\mu^2}{\mu^2} = 1$.

Als drittes Beispiel wollen wir noch nachfolgendes wählen: Bei einer Triangulation sind drei Theodolite verwendet worden, deren Gewichtsverhältnis zu bestimmen ist.

Instrument I ist ein Schraubenmikroskoptheodolit mit direkter Angabe von 5″.

Theodolit II hat Schätzmikroskope und besitzt ein Fernrohr, von dem bekannt ist, daß es dieselbe Genauigkeit und Güte wie das des vorigen Instrumentes besitzt.

Der dritte der verwendeten Theodolite hat Nonienablesung. Die beiden Nonien geben unmittelbar 10″ an.

Zur Feststellung der Gewichtsverhältnisse sind folgende Beobachtungsreihen ausgeführt worden:

Bei Theodolit I: 10malige Einstellung ein und desselben Teilstrichs an einem Mikroskop und Ablesung an der Trommel; ferner 12malige Messung derselben Richtung bei feststehendem Limbus unter Ablesung und Mitteln beider Mikroskope. Die Messungen wurden in einer Lage des Fernrohrs ausgeführt.

Bei Theodolit II: 10malige Bestimmung des scheinbaren Abstandes der beiden Zeiger bei wenig verstellter Alhidade.

Bei Theodolit III: Messung des doppelten Visierachsenfehlers durch Einstellen des Fernrohrs auf ein Ziel in beiden Lagen und Ablesen und Mitteln beider Nonien. Die Bestimmung wurde an 11 verschiedenen Kreisstellungen wiederholt.

Beobachtungen.

Für Theodolit I.

Durch Einstellung eines Mikroskops auf denselben Teilstrich ergab sich:		Messung einer Richtung. Die Mittel beider Mikroskope brachten:	
16° 11′ 16,5″	16° 11′ 15,5″	96° 21′ 13,5″	96° 21′ 14,0″
14,5″	14,5″	15,5″	16,0″
12,0″	18,0″	16,0″	15,5″
16,0″	14,0″	9,0″	11,0″
12,0″	17,0″	16,5″	16,0″
		11,0″	14,0″.

Für den Schätzmikroskoptheodolit II.

Abstand der Mikroskope bei wenig veränderter Alhidadenstellung:

180° 0,30′	180° 0,05′	180° 0,10′
0,25′	0,30′	0,25′
0,10′	0,20′	0,30′.
0,15′		

Für den Nonientheodolit III.

Bei der Bestimmung des doppelten Visierachsenfehlers durch Anvisieren eines Zieles in zwei Fernrohrlagen mit Ablesen und Mitteln beider Nonien wurde erhalten:

0° 4′ 30″	0° 4′ 25″	0° 4′ 30″
20″	35″	30″
18″	20″	35″.
40″	25″	

Wir haben zunächst die zweite Messung für Theodolit I zu behandeln. Hier müssen wir vorerst den mittleren Fehler einer Richtungsmessung bestimmen, dann zu dem Mittelwert der Fehler der Winkelmessung übergehen und aus dem letzteren das Gewicht ableiten. Die $[l]$ ergibt, falls wir $x_0 = 96^0\,21'\,10''$ annehmen, 48,0, demnach ist $\xi = \frac{48{,}0}{12} = 4{,}0$. Die Fehler werden daher $+ 0{,}5 - 1{,}5, - 2{,}0, + 5{,}0, - 2{,}5, + 3{,}0, \pm 0{,}0, - 2{,}0, - 1{,}5, + 3{,}0, - 2{,}0, \pm 0{,}0$. Wir haben $[\lambda]$ zu bilden und erhalten, wie es sein muß, 0. Quadrieren und addieren wir die λ, so ergibt sich 66,00 (s. die Tabelle). Eine Probe erhalten wir durch die Ausrechnung der Formel:

$\lambda\lambda$
0,25
2,25
4,00
25 00
6,25
9,00
0,00
4,00
2,25
9,00
4,00
0,00
66,00

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [l]\,x \qquad \begin{aligned} [ll] &= 258{,}00 \\ -48 \cdot 4{,}0 &= \underline{-192{,}00} \\ [\lambda\lambda] &= 66{,}00. \end{aligned}$$

Mithin ist das Quadrat des mittleren Fehlers einer Richtung:

$$\mu_R^2 = \frac{66{,}00}{11} = 6{,}00.$$

Nun ist der Winkel x gleich der Differenz zweier Richtungen, folglich:

$$x_{\measuredangle} = L_1 - L_2,$$

folglich:

$$\mu_{\measuredangle}^2 = \mu_R^2 + \mu_R^2 = 2\,\mu_R^2.$$

Wir können daher setzen:

$$\mu_{\measuredangle}^2 = 2 \cdot 6{,}00 = 12{,}00.$$

Es wird daher das Gewicht der Messung eines Winkels beim ersten Instrumente $g_{\mathrm{I}} = \frac{\mu^2}{\mu_{\measuredangle}^2} = \frac{1}{12}$, falls wir $\mu^2 = 1$ setzen.

Wir müssen nun für Theodolit II die Güte des Fernrohrs bestimmen. Es ist uns von ihm bekannt, daß es dieselbe Genauigkeit besitzt wie das des ersten Instrumentes. Die Beobachtungen an ihm sind derart ausgeführt, daß wir die Genauigkeit und Güte seines Fernrohrs bestimmen können. Zunächst benutzen wir die erste Versuchsreihe bei Instrument I, um den mittleren Einstellfehler an einem Mikroskop abzuleiten. Für x_0, den Näherungswert, $16^0\,11'\,10''$ gesetzt, ergibt als $[l] = 50$. Mithin ist $\xi = \frac{50}{10} = 5$. Durch Einführung der ξ in die Fehlergleichungen werden die λ bestimmt. Es folgt $- 1{,}5, + 0{,}5, + 3{,}0, - 1{,}0, + 3{,}0, - 0{,}5, + 0{,}5, - 3{,}0, + 1{,}0, - 2{,}0$. $[\lambda]$ ist gleich Null. Nun $[\lambda\lambda]$ bildend, ergibt sich 36,00 (s. die linke Tabelle).

$\lambda\lambda$
2,25
0,25
9,00
1,00
9,00
0,25
0,25
9,00
1,00
4,00
36,00

Die Kontrollformel $[\lambda\lambda] = [ll] - [l]x$ bringt (s. die rechte Tabelle):

$$[\lambda\lambda] = 286{,}00 - 50 \cdot 5 = 36{,}00.$$

ll
42,25
20,25
4,00
36,00
4,00
30,25
20,25
64,00
16,00
49,00
286,00

Es ist demnach der mittlere Einstell- und Ablesefehler an einem Mikroskop:

$$\mu^2_{E\,\mathrm{in}} = \frac{36}{9} = 4.$$

Um jetzt den mittleren Visierfehler des Fernrohrs bei Theodolit I zu bestimmen, hat man folgende Betrachtung anzustellen: Der wahre Fehler ε einer Richtungsmessung ist:

$$\varepsilon_{\mathrm{Rich}} = \varepsilon_{\mathrm{Vis}} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2},$$

wo ε_1 und ε_2 den Einstell- und Ablesefehler an Zeiger 1 bzw. Zeiger 2 bedeuten. Nun können wir annehmen, daß die mittleren Einstellfehler an den beiden Mikroskopen gleich sind, folglich:

$$\mu^2_R = \mu_V + \frac{\mu^2_E}{2},$$

woraus sich ergibt: $$\mu^2_V = \mu^2_R - \frac{\mu^2_E}{2}.$$

Setzen wir die oben berechneten Werte ein, so ergibt sich:

$$\mu^2_V = 6 - \frac{4}{2} = 4$$

Die Beobachtungen an Theodolit II dienen dazu, den mittleren Ablesefehler an einem Mikroskop zu berechnen. Der Abstand der Zeiger bei wenig veränderter Alhidadenstellung (dieses ist deshalb geschehen, damit die Exzentrizität von Limbus und Alhidade nicht mitspricht) ergab:

180° 0′ 18″	180° 0′ 03″	180° 0′ 06″
15″	18″	15″
06″	12″	18″.
09″		

Setzen wir $x_0 = 180^0\ 0'\ 00''$, so folgt $\xi = 12$, ferner $[\lambda\lambda] = 288$. Deshalb ist das Quadrat des mittleren Fehlers einer Abstandsbestimmung $\mu^2_{\mathrm{Abs}} = \frac{288}{9} = 32$.

Von diesem können wir übergehen zu den mittleren Ablesefehler an einem Mikroskop. Es ist nämlich:

$$\varepsilon_{\mathrm{Abs}} = \varepsilon_3 - \varepsilon_4 ,$$

wo ε_3 bzw. ε_4 die Bedeutung der wahren Ablesefehler an Schützmikroskop 1 und 2 haben. Unter der Annahme, daß die Ablesegenauigkeit an den Zeigern gleich sei, folgt:

$$\mu^2_{\mathrm{Abs}} = 2\,\mu^2_{\mathrm{Abl}} \quad \text{oder} \quad \mu^2_{\mathrm{Abl}} = \frac{\mu^2_{\mathrm{Abs}}}{2}.$$

Oder in unserem Beispiele ist $\mu^2_{\mathrm{Abl}} = \frac{32}{2} = 16$.

Nun ist:
$$\mu^2_{\chi} = 2\left(\mu^2_V + \frac{\mu^2_{\mathrm{Abl}}}{2}\right),$$

in Zahlen ausgedrückt: $\mu^2_{\chi} = 2 \cdot (4 + \frac{16}{2}) = 24$, demnach $g_{\mathrm{II}} = \frac{1}{24}$, indem wieder, wie es sein muß, $\mu^2 = 1$ gesetzt wurde.

Behandeln wir die Reihe, die für den dritten Theodolit erhalten wurde, so ist die Bestimmung des doppelten Visierachsenfehlers einer ausgeführten Winkelmessung gleichzuachten. Es ist das arithmetische Mittel aus der vorliegenden Reihe gleich $0^0\,4'\,28''$, und $[\lambda\lambda]$ wird demzufolge 500, folglich: $\mu^2_{\chi} = \frac{500}{10} = 50$.

Also wird:
$$g_{\mathrm{III}} \pm \frac{1}{50}.$$

Demnach: $g_{\mathrm{I}} : g_{\mathrm{II}} : g_{\mathrm{III}} = \frac{1}{12} : \frac{1}{24} : \frac{1}{50}$ oder $50 : 25 : 12$,

falls wir $\mu = \pm\sqrt{600}$ setzen.

3. Ausgleichung direkter Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

Falls für eine Größe $x\,n$ Beobachtungen $L_1, L_2, \cdots, L_n$ mit den Gewichten $g_1\; g_2, \cdots$ bzw. g_n vorliegen, so gestaltet sich deren Ausgleichung folgendermaßen. Wir haben in dem zweiten Beispiele, welches wir für die Berechnung der Gewichte gegeben haben, gesehen, daß, wenn eine Beobachtung L_1 mit dem Gewichte g_1 behaftet ist, alsdann dem Produkte $L_1\sqrt{g_1}$ das Gewicht 1 zukommt. Was für die Beobachtung gilt, hat auch Geltung für ihren Fehler λ_1, also hat $\lambda_1\sqrt{g_1}$ das Gewicht 1. Mithin haben wir für die Bedingung „$[\lambda\lambda]$ ein Minimum", falls die Beobachtungen von gleicher Genauigkeit sind, die Bedingung „$[\lambda\lambda g]$ ein Minimum" zu wählen, wenn Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit vorliegen.

Die Fehlergleichungen heißen:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1 = -L_1 + x \text{ (Gewicht } g_1), \quad \lambda_2 = -L_2 + x \text{ (Gewicht } g_2), \cdots, \\ \lambda_n = L_n + x \text{ (Gewicht } g_n).\end{array}\right\} \quad (1)$$

Man setzt alsdann $x - x_0 + \xi$, wo x_0 ein Näherungswert von x bedeutet. Die Fehlergleichungen werden daher:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1 = -L_1 + x_0 + \xi, \quad \lambda_2 = -L_2 + x_0 + \xi, \cdots, \\ \lambda_n = -L_n + x_0 + \xi.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Nun $-L_i$ und x_0 in jeder Gleichung zusammengefaßt und gleich $-l_i$ gesetzt, läßt die Gleichungen entstehen:

$$\lambda_1 = -l_1 + \xi, \quad \lambda_2 = -l_2 + \xi, \cdots, \quad \lambda_n = -l_n + \xi, \quad (3)$$

deren Gewichte $g_1, g_2 \cdots$ bzw. g_n sind.

Um ξ zu bestimmen, haben wir die oben aufgestellte Bedingung zu erfüllen: $[\lambda\lambda g]$ ein Minimum, d. h. es muß sein:

$$(-l_1 + \xi)^2 g_1 + (-l_2 + \xi)^2 g_2 + \cdots + (-l_n + \xi)^2 g_n$$

ein Minimum.

Oder: falls wir nach ξ differenzieren und den Differentialquotienten gleich Null setzen, folgt

$$2(-l_1 + \xi) g_1 + 2(-l_2 + \xi) g_2 + \cdots + 2(l_n + \xi) g_n = 0, \quad (4)$$

mithin:

$$\xi = \frac{[lg]}{[g]}. \quad (5)$$

Die Fehler λ sind wie beim arithmetischen Mittel:

$$\lambda_1 = -l_1 + \xi, \quad \lambda_2 = -l_2 + \xi, \cdots, \quad \lambda_n = -l_n + \xi. \quad (6)$$

Wenn nun $[\lambda g]$ gebildet wird, so ist dieses gleich Null. Denn

$$[\lambda g] = -[lg] + [g]\,\xi,$$

nach (5) ist diese Summe gleich Null, was als Probe gelten kann.

Die zur Bestimmung der mittleren Fehler erforderliche Summe $[\lambda\lambda g]$ kann einmal direkt aus dem λ abgeleitet werden, zum anderen nach der Kontrollformel

$$[\lambda\lambda g] = [llg] - [lg]\,\xi. \quad (7)$$

Um die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen, multipliziert man die erste der Gleichungen (6) mit $\lambda_1 g_1$, die zweite mit $\lambda_2 g_2 \cdots$ und die letzte mit $\lambda_n g_n$ und addiert die so gefundenen Gleichungen, dann folgt:

$$[\lambda\lambda g] = -[l\lambda g] + [\lambda g]\,\xi = -[l\lambda g]. \quad (8)$$

Alsdann multipliziert man die Gleichungen (6) mit $-lg$, d. h. die erste mit $-l_1 g_1$ usw., und addiert sie. Es folgt:

$$-[l\lambda g] = [llg] - [lg]\,\xi, \tag{9}$$

worauf sich durch Addition von (8) und (9) Gleichung (7) ergibt.

Da wir durch Multiplizieren der λ_i mit der Wurzel aus dem zugehörigen Gewichte, also $\sqrt{g_i}$, wie oben gezeigt wurde, auf die Gewichtseinheit reduzieren können, so folgt für μ, den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1:

$$\mu = \pm \frac{[\lambda\lambda g]}{n-1}. \tag{10}$$

Falls man den mittleren Fehler von x oder ξ ableiten will, hat man die Formel für ξ in folgende Form zu bringen:

$$\xi = \frac{g_1}{[g]} l_1 + \frac{g_2}{[g]} l_2 + \cdots + \frac{g_n}{[g]} l_n, \tag{11}$$

aus welcher Gleichung folgt:

$$x_\xi^2 = \mu_x^2 = \left(\frac{g_1}{[g]}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{g_2}{[g]}\right)^2 \mu_2^2 + \cdots + \frac{g_n^2}{[g]} \mu_n^2. \tag{12}$$

Nun ist allgemein $\qquad \mu_i^2 = \dfrac{\mu^2}{g_i}$; folglich

$$\mu_x^2 = \mu^2 \left\{\frac{g_1}{[g]^2} + \frac{g_2}{[g]^2} + \cdots + \frac{g_n}{[g]^2}\right\} = \mu^2 \frac{[g]}{[g]^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\mu^2}{[g]}, \tag{13}$$

mithin ist

$$\mu_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{[g]}}. \tag{14}$$

Die endgültige Unbekannte ist zu bestimmen aus $x = x_0 + \xi$.

Zur vollständigen Durchsicht der Ausgleichung sind noch die Gleichungen nachzusehen:

$$L_1 + \lambda_1 = x, \quad L_2 + \lambda_2 = x, \cdots, \quad L_n + \lambda_n = x. \tag{15}$$

Nimmt man eine Änderung der Gewichtseinheit vor, indem man sie wieder als Mittel von n Beobachtungen entstanden denkt, so bleibt doch ξ und μ_ξ, wie es auch sein muß, unverändert, da bei beiden nur eine Erweiterung des Bruches, aus welchem diese Unbekannten zu bestimmen sind, stattfindet; beim ersten mit n, beim anderen mit $\sqrt{n}$. μ, der mittlere Fehler der neuen Gewichtseinheit, wird nämlich dann $\sqrt{n}$ mal größer, da ihre Genauigkeit minder groß als die der ursprünglichen Gewichtseinheit ist.

Drittes Kapitel.

Die vorliegenden Fehler rühren von Messungsdifferenzen her.

Bestimmung des mittleren Fehlers aus Beobachtungsdifferenzen.

Werden die Beobachtungen von n Größen in gleichartiger Weise wiederholt und dabei die Differenzen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ erhalten, so können diese zur Berechnung des mittleren Fehlers dienen.

Haben sämtliche Beobachtungen gleiches Gewicht, so ist der mittlere zu befürchtende Fehler μ der einzelnen Messung:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}. \tag{1}$$

Um diesen Satz zu beweisen, kann man folgendermaßen verfahren: Es ist

$$d_1 = L_1 - L_2, \tag{2}$$

wo L_1 bzw. L_2 die Beobachtung derselben Größe bedeutet, folglich:

$$\mu_d^2 = \mu^2 + \mu^2 = 2\mu^2. \tag{3}$$

Nun sind die Beobachtungen d die wahren Fehler einer Größe, deren wahrer Wert gleich Null ist. Wir können daher nach der Erklärung des mittleren Fehlers setzen:

$$\mu_d^2 = \frac{[dd]}{n}, \tag{4}$$

mithin ist:

$$\frac{[dd]}{n} = 2\mu^2 \tag{5}$$

oder:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}. \tag{6}$$

Hierzu gehört folgendes Beispiel. Um festzustellen, wie scharf man ein Maß aus einem Plane mittels eines in Millimeter geteilten prismatischen Maßstabes entnehmen kann, indem man links den Nullstrich anlegt und rechts abliest, werden verschiedene Entfernungen von Zirkelstichen durch zwei gleich sorgfältige Beobachter je wie folgt bestimmt:

Messung I.	Messung II.	Messung I.	Messung II.
20,45 mm	20,55 mm	111,95 mm	112,00 mm
44,00 „	44,05 „	21,90 „	22,00 „
65,95 „	66,00 „	55,45 „	55,45 „
99,55 „	99,50 „	88,40 „	88,40 „
132,45 ,	132,60 „	33,65 „	33,60 „
23,55 „	23,60 „	66,45 „	66,45 „
45,45 „	45,45 „	32,90 „	32,95 „
79,05 „	79,05 „		

Bildet man die Differenzen Messung I — Messung II, so wird erhalten: $d = -0{,}10, -0{,}05, -0{,}05, +0{,}05, -0{,}15, -0{,}05, +0{,}00, +0{,}00, -0{,}05, = -0{,}10, +0{,}00, +0{,}00, +0{,}05, +0{,}00, -0{,}05$ mm. Nun $[dd]$ berechnet, ergibt $[dd] = 0{,}0600$,

mithin $$\mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}0600}{2 \cdot 15}} = \pm\, 0{,}045 \text{ mm}.$$

Gehören dagegen zu den Doppelmessungen verschiedene Gewichte $g_1, g_2, \ldots, g_n$, so hat man folgende Betrachtung anzustellen. Man führt die vorliegenden Differenzen, welche von verschiedener Genauigkeit sind, auf die Gewichtseinheit zurück, indem man mit $\sqrt{g_i}$ multipliziert, bildet also $d_i\sqrt{g_i}$. Wir betrachten diese Größe als wahren Fehler einer Beobachtung, deren wahrer Wert Null ist. Mithin ist die mittlere Differenz für das Gewicht 1 gleich $\frac{[ddg]}{n}$ und daraus der mittlere Fehler μ einer Beobachtung vom Gewichte 1:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[ddg]}{2n}}. \tag{7}$$

Hierzu wollen wir noch ein Beispiel bringen. Die Braakerbasis für die Triangulation von Schleswig-Holstein wurde in sieben Abschnitten hin und zurück mit folgenden Ergebnissen gemessen:

	Messung I.		Messung II.
	815,3365 m		815,3405 m
	846,9594 „		846,9591 „
	925,9406 „		925,9401 „
	873,7033 „		873,7038 „
	932,8154 „		932,8176 „
	842,3548 „		842,3520 „
	638,1323 „		638,1328 „
Gesamtlänge:	5875,2423 m	Gesamtlänge:	5875,2459 m

Wie groß ist der mittlere Fehler, in mm ausgedrückt,

α) einer einfachen Messung von 1 km Länge,

β) der Gesamtlänge als Mittel aus zwei Messungen unter Benutzung des Resultats von α)?

Eine Basis ist eine Seite in einem Dreiecksnetz, welche mikroskopisch scharf mit einem Basismeßapparat direkt gemessen wird.

Bilden wir die Differenzen, so erhalten wir folgendes: $-4{,}0$, $+0{,}3$, $+0{,}5$, $-0{,}5$, $-2{,}2$ $+2{,}8$ $-0{,}5$ mm. Die Gewichte sind nach Kap. 2 (S. 27): $\frac{1}{0{,}82}$, $\frac{1}{0{,}85}$, $\frac{1}{0{,}93}$, $\frac{1}{0{,}87}$, $\frac{1}{0{,}93}$, $\frac{1}{0{,}84}$ und $\frac{1}{0{,}64}$, falls wir die Messung von 1 km als Gewichtseinheit wählen.

Für $[ddg]$ haben wir folglich den Wert:

$$[ddg] = 35{,}10,$$

demnach
$$\mu_{1\,\mathrm{km}} = \pm \sqrt{\frac{35{,}10}{2.7}} = \pm 1{,}6 \text{ mm},$$

und μ_β wird, weil die Strecke zweimal gemessen und 5,87 km lang ist:

$$\mu_\beta = \pm \frac{1{,}6\sqrt{5{,}87}}{\sqrt{2}} = \pm 2{,}7 \text{ mm}.$$

Viertes Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

1. Vermittelnde Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

Man versteht unter vermittelnden Beobachtungen solche Messungen, welche sich auf verschiedene Größen beziehen, sie müssen aber sämtlich Funktionen desjenigen Systems von Unbekannten sein, welche wir durch die Beobachtungen haben bestimmen wollen, und zwar ist die Anzahl der Beobachtungen, falls wir es mit einer Aufgabe der Ausgleichungsrechnung zu tun haben, stets größer als die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten. Falls wir die Koordinaten eines Punktes in der Geodäsie ermitteln wollen, können wir Winkelmessungen nach Festpunkten auf ihm ausführen. Die Festpunkte sind von der Landesaufnahme bestimmt und bestehen aus Fahnenstangen, Kirchturmspitzen oder aus im Gelände versteinten Punkten. Die Winkelmessungen vermitteln alsdann die Bestimmung der Koordinaten des Standpunktes. Sie sind infolgedessen als vermittelnde Beobachtungen anzusprechen. Die $i$te Fehlergleichung ist demnach für die verbesserte Beobachtung L_i:

$$L_i + \lambda_i = f_i(x, y, z). \tag{1}$$

Um die Normalgleichungen, aus denen die Unbekannten bestimmt werden, linear zu erhalten, um sie überhaupt praktisch bestimmbar zu machen, müssen wir x in $x_0 + \xi$, y in $y_0 + \eta$ bzw. z in $z_0 + \zeta$ zerlegen, wo die x_0, y_0 und z_0 Näherungswerte der Unbekannten bedeuten. x_0, y_0, z_0 werden aus drei günstig zueinander gelegenen Fehlergleichungen (1) ermittelt, indem wir die λ gleich Null setzen, für x x_0, für y y_0 und für z z_0 einführen und nun die Gleichungen auflösen. Theoretisch ist dieser Weg in allen Fällen gangbar, doch häufig nicht ausführbar. Wie in diesem Falle zu verfahren, werden wir beim Rückwärtseinschneiden zeigen (S. 67). Führen wir die Näherungswerte und Verbesserungen statt x, y, z in Gleichung (1) ein, so wird erhalten:

$$L_i + \lambda_i = f_i(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta). \tag{2}$$

Jetzt rechts nach Taylor entwickelt, bringt:

$$\left.\begin{aligned} L_i + \lambda_i = f_i(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial f_i}{\delta x}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial f_i}{\delta y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial f_i}{\delta z}\right)_0 \zeta \\ + \text{Gliedern zweiter und höherer Ordnung,} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

welche zumeist vernachlässigt werden können. Geben diese Glieder zweiter Ordnung noch einen angebbaren Betrag, so ist ξ zu x_0, η zu y_0 und ζ zu z_0 zu fügen und mit den so erhaltenen neuen Näherungswerten die Rechnung zu wiederholen. Ob diese genügend genau sind, geht aus der Schlußprobe hervor. Nun L_i von der linken auf die rechte Seite von (3) gebracht, läßt die Gleichung entstehen:

$$\lambda_i = f_i(x_0, y_0, z_0) - L_i + \left(\frac{\partial f_i}{\delta x}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial f_i}{\delta y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial f_i}{\delta z}\right)_0 \zeta. \tag{4}$$

Oder gekürzt geschrieben

$$\lambda_i = -l_i + a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta, \tag{5}$$

wo $f_i(x_0, y_0, z_0) - L_i = -l_i$, $\left(\frac{\partial f_i}{\delta x}\right)_0 = a_i$, $\left(\frac{\partial f_i}{\delta y}\right)_0 = b_i$ und $\left(\frac{\partial f_i}{\delta z}\right)_0 = c_i$ gesetzt wurde.

Die Zahl der Unbekannten beträgt hier drei, allgemein m, und die Anzahl der Beobachtungen oder der Fehlergleichungen soll n sein. Es ist $n > m$. Die sämtlichen linearen Fehlergleichungen heißen demnach:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1 = -l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta, \quad \lambda_2 = -l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta, \ldots, \\ \lambda_n = -l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta.\end{array}\right\} \quad (6)$$

Nun erhalten wir aus diesen Gleichungen die günstigsten Werte der Unbekannten, falls $[\lambda\lambda]$ ein Minimum wird. Dies wird ein Minimum, wenn wir $\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\xi} = 0$, $\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\eta} = 0$ und $\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial\zeta} = 0$ setzen.

Es ist nun:

$$\left.\begin{array}{c}[\lambda\lambda] = (-l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta)^2 + (-l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta)^2 + \cdots \\ + (-l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta)^2.\end{array}\right\} \quad (7)$$

Folglich muß werden, wenn man den Faktor 2 wegläßt:

$$\left.\begin{array}{l}0 = [a\lambda] = [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta - [al] \\ 0 = [b\lambda] = [ab]\xi + [bb]\eta + [bc]\zeta - [bl] \\ 0 = [c\lambda] = [ac]\xi + [bc]\eta + [cc]\zeta - [cl].\end{array}\right\} \quad (7\,a)$$

Diese Gleichungen werden die **Normalgleichungen** genannt. Es sind in dieser $[aa]$, $[bb]$ und $[cc]$ stets positive Größen, ferner findet sich $[ab]$ in der ersten und zweiten Gleichung, ac in der ersten und dritten usw. Um eine Probe für die Aufstellung der Normalgleichungen zu haben, führt man s ein. Es ist nämlich:

$$s_1 = a_1 + b_1 + c_1, \quad s_2 = a_2 + b_2 + c_2, \ldots, \quad s_n = a_n + b_n + c_n, \quad (8)$$

und hieraus $[s\lambda] = 0 = [as]\xi + [bs]\eta + [cs]\zeta - [ls]$,

indem man die Gleichungen (6) mit den bezüglichen s multipliziert und alsdann addiert. Zum anderen wird diese Summengleichung durch Addition der Normalgleichungen gewonnen.

2. Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gaußschen Verfahren.

Jetzt gilt es, die Unbekannten aus den Normalgleichungen (7 a) (S. 38) zu bestimmen. Wie diese zu berechnen sind, ist an und für sich gleichgültig, doch wir wählen zum Auflösen das Gaußsche Verfahren, weil einmal bei diesem die Symmetrie gewahrt bleibt, zum anderen die Koeffizienten, die zur Bestimmung des mittleren Fehlers der Unbekannten dienen, leicht gewonnen werden können; überhaupt, weil man auf Schritt und Tritt Proben gewinnt.

Die Normalgleichungen mit Probe durch die Summengleichung lauten:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta - [al] = 0\\ [ab]\xi + [bb]\eta + [bc]\zeta - [bl] = 0\\ [ac]\xi + [bc]\eta + [cc]\zeta - [cl] = 0\end{array}\right\} \quad (1)$$
$$\overline{[as]\xi + [bs]\eta + [cs]\zeta - [ls] = 0.}$$

Um die Unbekannte ξ zu eliminieren, multipliziert Gauß der Reihe nach die erste der Gleichungen mit $-\frac{[ab]}{[aa]}$, $-\frac{[ac]}{[aa]}$ und $-\frac{[as]}{[aa]}$ und addiert sie zur zweiten bzw. dritten und Summengleichung, wodurch sich ergibt:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right\}\eta+\left\{[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}\zeta-\left\{[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\right\}=0\\ \left\{[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}\eta+\left\{[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right\}\zeta-\left\{[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}\right\}=0\end{array}\right\} (2)$$
$$\overline{\left\{[bs]-\frac{[ab][as]}{[aa]}\right\}\eta+\left\{[cs]-\frac{[ac][as]}{[aa]}\right\}\zeta-\left\{[ls]-\frac{[al][as]}{[aa]}\right\}=0.}$$

Oder die Gaußsche Schreibweise angewendet:

$$\left.\begin{array}{l}[bb\cdot 1]\eta + [bc\cdot 1]\zeta - [bl\cdot 1] = 0\\ [bc\cdot 1]\eta + [cc\cdot 1]\zeta - [cl\cdot 1] = 0\end{array}\right\} \quad (3)$$
$$\overline{[bs\cdot 1]\eta + [cs\cdot 1]\zeta - [ls\cdot 1] = 0.}$$

Dabei ist $[bs\cdot 1]$ gleich der Summe der darüber stehenden Ausdrücke usw. Zum Beweise, daß dieser Satz richtig ist, addieren wir zur Summe von $[bb\cdot 1]$ und $[bc\cdot 1]$ 0, d. i.:

$$\left\{[ab]-\frac{[ab][aa]}{[aa]}\right\}$$
$$+\left\{[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right\}$$
$$+\left\{[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}.$$

Wir erhalten alsdann: $\left\{[bs]-\frac{[ab][as]}{[aa]}\right\} = [bs\cdot 1].$

Jetzt zur Elimination von η schreitend, erhält man, wenn man die erste der Gleichungen (3) mit $-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$ bzw. $-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$ multipliziert und alsdann zur zweiten bzw. zur Summengleichung addiert:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{[cc\cdot 1]-\dfrac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right\}\zeta-\left\{[cl\cdot 1]-\dfrac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right\}=0\\ \hline \left\{[cs\cdot 1]-\dfrac{[bc\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right\}\zeta-\left\{[ls\cdot 1]-\dfrac{[bl\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right\}=0,\end{array}\right\}\qquad(4)$$

wofür wir auch setzen können:

$$\left.\begin{array}{l}[cc\cdot 2]\zeta-[cl\cdot 2]=0\\ \hline [cs\cdot 2]\zeta-[ls\cdot 2]=0.\end{array}\right\}\qquad(5)$$

Zur Einprägung des Baues der Normalgleichungskoeffizienten haben wir nach Jordan folgendes:

1. Wenn 1, 2, 3 in der Klammer steht, ist dies einem Ausdruck gleich, der aus der Differenz zweier Größen besteht, wovon der Subtrahend den Nenner $[aa]$, $[bb\cdot 1]$, $[cc\cdot 2]$, ... besitzt.

2. Es wird jeder Koeffizient gleich Null, wenn die symbolischen Zeichen als algebraische aufgefaßt werden. Z. B.:

$$[cc\cdot 2]=[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\ \text{bzw.}\ cc\cdot 1-\frac{bc\cdot 1\cdot bc\cdot 1}{bb\cdot 1}=0.$$

Alsdann machen wir den vorher beschrittenen Weg rückwärts. Aus Gleichung (5) ermitteln wir ζ, η aus der ersten der Gleichungen (3) und ξ aus der Gleichung $[a\lambda]=0=[aa]\xi+[ab]\eta+[ac]\zeta-[al]$. Zur Probe werden die Unbekannten in die Summengleichung eingefügt; wird diese erfüllt, so kann man im allgemeinen sicher sein, daß die ganze Rechnung, von der Aufstellung der Fehlergleichungen aus, richtig ausgeführt ist. Falls die Zahl der Normalgleichungen eine größere ist, so kann man jede etwa zweite Summengleichung benutzen, um die bis dahin berechneten Unbekannten zu prüfen. Durch Einfügung der Unbekannten in die Fehlergleichungen (6) (S. 38) lassen sich die λ ermitteln. $[\lambda]$ ist 0, falls in den Fehlergleichungen eine Unbekannte auftritt, die überall den Koeffizient $+1$ oder überall -1 hat. Dann bestimmen wir $[\lambda\lambda]$, was zur Berechnung des mittleren Fehlers nötig ist. Zum zweiten Male ermitteln wir diese Quadratsumme aus der Gleichung:

$$[\lambda\lambda]=[ll]-[al]\xi-[bl]\eta-[cl]\zeta.\qquad(6)$$

Zum Beweise dieses Satzes hat man folgendes: Man multipliziert jede der Gleichungen (6) (S. 38) mit ihrem λ, mithin die erste mit λ_1, die zweite mit λ_2, und endlich die $n$te mit λ_n, und addieren sie. Man erhält alsdann:

$$[\lambda\lambda]=-[l\lambda]+[a\lambda]\xi+[b\lambda]\eta+[c\lambda]\zeta.\qquad(7)$$

Nun ist nach (7a) (S. 38) $[a\lambda]=[b\lambda]=[c\lambda]=0.$

Demnach $$[\lambda\lambda] = -[l\lambda]. \tag{8}$$

Zur Elimination von $-[l\lambda]$ multipliziert man die linearen Fehlergleichungen (6) (S. 38) je mit dem entsprechenden $-l$ und addiert die erhaltenen Gleichungen, wodurch die obige Gleichung (6) erhalten wird:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [al]\xi - [bl]\eta - [cl]\zeta. \tag{8a}$$

Es sei noch eine andere Form der Gleichung für $[\lambda\lambda]$ gegeben:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al][al]}{[aa]} - \frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \frac{[cl\cdot 2]\cdot[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}. \tag{9}$$

Um die Richtigkeit zu beweisen, hat man: Es ist:

$$\xi = \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\eta - \frac{[ac]}{[aa]}\zeta.$$

Dies in (8a) eingeführt, bringt:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al][al]}{[aa]} - [bl\cdot 1]\eta - [cl\cdot 1]\zeta. \tag{10}$$

Ferner ist $\eta = \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\zeta$. Wenn wir dies in (10) setzen, folgt: $$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al][al]}{[aa]} - \frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - [cl\cdot 2]\zeta.$$

Nun endlich ζ durch seinen Wert:

$$\zeta = \frac{[cl\cdot 2]}{[cl\cdot 2]}$$

ersetzt, ergibt die endgültige Gleichung (9).

3. Ableitung des mittleren Fehlers in x, y und z.

Wir folgen hier einer Ableitung, die von Hansen herrührt.

Falls aus den Normalgleichungen die Unbekannten als lineare Funktionen der l entwickelt werden, kann man, da die mittleren Fehler der l gleich denen der ursprünglichen Beobachtungen L sind, die mittleren Fehler der Unbekannten nach (21) (S. 16) bestimmen. Daß es möglich ist, die Unbekannten als lineare Funktionen der l zu bestimmen, soll an einem kleinen Beispiele gezeigt werden. Die Fehlergleichungen mögen lauten:

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1\xi + b_1\eta$$
$$\lambda_2 = -l_2 + a_2\xi + b_2\eta \ldots$$
$$\lambda_n = -l_n + a_n\xi + b_n\eta.$$

Aus diesen gehen die Bestimmungsgleichungen hervor:

$$[aa]\xi + [ab]\eta - a_1 l_1 - a_2 l_2 - \ldots - a_n l_n = 0$$
$$[ab]\xi + [bb]\eta - b_1 l_1 - b_2 l_2 - \ldots - b_n l_n = 0.$$

Jetzt zur Elimination von ξ schreitend, bekommt man, wenn man die erste Gleichung mit $-\frac{[ab]}{[aa]}$ multipliziert und den so erhaltenen Betrag zur zweiten addiert:

$$[bb\cdot 1]\eta = \left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)l_1 + \left(b_2 - \frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)l_2 + \ldots + \left(b_n - \frac{[ab]}{[aa]}a_n\right)l_n.$$

Folglich $$\eta = \frac{1}{[bb\cdot 1]}\left\{\left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)l_1 + \left(b_2 - \frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)l_2 + \ldots + \left(b_n - \frac{[ab]}{[aa]}a_n\right)l_n\right\}$$

usw. Wir können folglich setzen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots + \alpha_n l_n \\ \eta &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \ldots + \beta_n l_n \\ \zeta &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \ldots + \gamma_n l_n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

woraus sich nach (22) (S. 16) ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \mu_\xi^2 &= \mu_x^2 = \mu^2[\alpha\alpha] \\ \mu_\eta^2 &= \mu_y^2 = \mu^2[\beta\beta] \\ \mu_\zeta^2 &= \mu_z^2 = \mu^2[\gamma\gamma]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Um nun z. B. die Koeffizienten α der ersten Unbekannten ξ zu finden, multipliziert man die Normalgleichungen, welche lauten:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta - [al] &= 0 \\ [ab]\xi + [bb]\eta + [bc]\zeta - [bl] &= 0 \\ [ac]\xi + [bc]\eta + [cc]\zeta - [cl] &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Größen $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$ und $Q_{1,3}$ und addiert die so erhaltenen Gleichungen. Bestimmt man nun die Q derart, daß der Koeffizient von $\xi = 1$, der von $\eta = 0$ und der von $\zeta = 0$ wird, so bekommt man:

$$\xi = [al]Q_{1,1} + [bl]Q_{1,2} + [cl]Q_{1,3} \tag{4}$$

mit der Bedingung, daß

$$\left.\begin{aligned}
[aa]Q_{1,1} + [ab]Q_{1,2} + [ac]Q_{1,3} &= 1 \\
[ab]Q_{1,1} + [bb]Q_{1,2} + [bc]Q_{1,3} &= 0 \\
[ac]Q_{1,1} + [bc]Q_{1,2} + [cc]Q_{1,3} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wird. Der Vergleich der Gleichung (4) mit (1) ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1 Q_{1,1} + b_1 Q_{1,2} + c_1 Q_{1,3} \\
\alpha_2 &= a_2 Q_{1,1} + b_2 Q_{1,2} + c_2 Q_{1,3}, \ldots \\
\alpha_n &= a_n Q_{1,1} + b_n Q_{1,2} + c_n Q_{1,3},
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

d. h. es ist: $[\alpha\alpha] = [a\alpha]Q_{1,1} + [b\alpha]Q_{1,2} + [c\alpha]Q_{1,3}$. (7)

Um $[a\alpha]$ zu eliminieren, multipliziert man die erste der Gleichungen für α mit a_1, die zweite mit a_2 usw. und die letzte mit α_n und addiert diese Gleichungen. Es folgt:

$$[a\alpha] = [aa]Q_{1,1} + [ab]Q_{1,2} + [ac]Q_{1,3}. \tag{8}$$

Dies ist nach (5) aber gleich 1.

Zur Elimination von $[b\alpha]$ bzw. $[c\alpha]$ multipliziert man die Gleichungen (6) je mit dem entsprechenden b bzw. c und addiert sie; dann erhält man nach (5):

$$[b\alpha] = [ab]Q_{1,1} + [bb]Q_{1,2} + [bc]Q_{1,3} = 0 \tag{9}$$

und $$[c\alpha] = [ac]Q_{1,1} + [bc]Q_{1,2} + [cc]Q_{1,3} = 0. \tag{10}$$

Es folgt demnach: $$[\alpha\alpha] = Q_{1,1}. \tag{11}$$

oder: $$\mu_\xi = \pm\,\mu\sqrt{Q_{1,1}}. \tag{12}$$

$Q_{1,1}$ ist aus den Bestimmungsgleichungen (5) zu ermitteln.

Für die Berechnung von $\mu_\eta = \pm\,\mu\sqrt{[\beta\beta]}$ hat man folgendes: Multipliziert man die erste der Normalgleichungen mit $Q_{2,1}$, die zweite mit $Q_{2,2}$ und die letzte mit $Q_{2,3}$ und addiert diese Gleichungen, so folgt:

$$\eta = [al]Q_{2,1} + [bl]Q_{2,2} + [cl]Q_{2,3}, \tag{13}$$

sobald $$\left.\begin{aligned}
[aa]Q_{2,1} + [ab]Q_{2,2} + [ac]Q_{2,3} &= 0 \\
[ab]Q_{2,1} + [bb]Q_{2,2} + [bc]Q_{2,3} &= 1 \\
[ac]Q_{2,1} + [bc]Q_{2,2} + [cc]Q_{2,3} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wird. Es ist folglich:

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 &= a_1 Q_{2,1} + b_1 Q_{2,2} + c_1 Q_{2,3}\\ \beta_2 &= a_2 Q_{2,1} + b_2 Q_{2,2} + c_2 Q_{2,3}, \dots\\ \beta_n &= a_n Q_{2,1} + b_n Q_{2,2} + c_n Q_{2,3},\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

d. h. es ist: $[\beta\beta] = [a\beta] Q_{2,1} + [b\beta] Q_{2,2} + [c\beta] Q_{2,3}$.

Nun ist:
$$\left.\begin{aligned}[a\beta] &= [aa] Q_{2,1} + [ab] Q_{2,2} + [ac] Q_{2,3}\\ [b\beta] &= [ab] Q_{2,1} + [bb] Q_{2,2} + [bc] Q_{2,3}\\ [c\beta] &= [ac] Q_{2,1} + [bc] Q_{2,2} + [cc] Q_{2,3}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Oder nach (14) ist:

$$[a\beta] = 0, \quad [b\beta] = 1 \quad \text{und} \quad [c\beta] = 0.$$

Es ist demnach: $$\mu_\eta = \pm \mu \sqrt{Q_{2,2}}. \tag{17}$$

Für die Bestimmung von $Q_{2,2}$ hat man die Gleichungen (14) zu verwenden.

Ähnlich ist $\mu_\zeta = \pm \mu \sqrt{Q_{3,3}}$. $Q_{3,3}$ ist aus den Gleichungen bestimmbar:

$$\left.\begin{aligned}[aa] Q_{3,1} + [ab] Q_{3,2} + [ac] Q_{3,3} &= 0\\ [ab] Q_{3,1} + [bb] Q_{3,2} + [bc] Q_{3,3} &= 0\\ [ac] Q_{3,1} + [bc] Q_{3,2} + [cc] Q_{3,3} &= 1.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die Gesamtzahl dieser Hilfsgrößen Q ist 3^2, allgemein m^2, doch sind sie sämtlich nicht voneinander verschieden. Es ist z. B. $Q_{1,2} = Q_{2,1}$, $Q_{2,3} = Q_{3,2}$ usw.

Allgemein gilt: $$Q_{c,e} = Q_{e,c}. \tag{19}$$

Zum Beweise, daß $Q_{1,3} = Q_{3,1}$ ist, multipliziert man die erste der Gleichungen (18) mit $Q_{1,1}$, die zweite mit $Q_{1,2}$ und die letzte mit $Q_{1,3}$ und addiert sie. Man bekommt alsdann:

$$\begin{aligned}&\{[aa] Q_{1,1} + [ab] Q_{1,2} + [ac] Q_{1,3}\} Q_{3\cdot1}\\ +&\{[ab] Q_{1,1} + [bb] Q_{1,2} + [bc] Q_{1,3}\} Q_{3\cdot2}\\ +&\{[ac] Q_{1,1} + [bc] Q_{1,2} + [cc] Q_{1,3}\} Q_{3\cdot3} = Q_{1,3}.\end{aligned}$$

Falls man jetzt die Gleichungen (5) berücksichtigt, folgt, was zu beweisen war:
$$Q_{3,1} = Q_{1,3}.$$

Wie gezeigt wurde, hat man, um die mittleren Fehler der Unbekannten zu erhalten, den mittleren Fehler einer Messung mit der Wurzel aus einer Hilfsgröße $Q_{1,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{3,3}$ zu multiplizieren. Man hat, um die Q zu bestimmen, ein System von Gleichungen aufzulösen, deren Koeffizienten links gleich denen der Normalgleichungen sind, nur die

Absolutglieder sind andere. Man hat demnach nur für jedes System gewissermaßen neue Werte $[bl \cdot 1]$, $[cl \cdot 1]$ und $[cl \cdot 2]$ zu bilden.

Damit geht das letzte System:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]Q_{3,1} + [ab]Q_{3,2} + [ac]Q_{3,3} = 0 \\ [ab]Q_{3,1} + [bb]Q_{3,2} + [bc]Q_{3,3} = 0 \\ [ac]Q_{3,1} + [bc]Q_{3,2} + [cc]Q_{3,3} = 1\end{array}\right\} \qquad (20)$$

in:

$$[cc \cdot 2]Q_{3,3} = 1 \qquad (20\,a)$$

über, das vorhergehende in:

$$\left.\begin{array}{l}[bb \cdot 1]Q_{2,2} + [bc \cdot 1]Q_{2,3} = 1 \\ [bc \cdot 1]Q_{2,2} + [cc \cdot 1]Q_{3,3} = 0.\end{array}\right\} \qquad (21)$$

Das erste System bleibt wie früher:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]Q_{1,1} + [ab]Q_{1,2} + [ac]Q_{1,3} = 1 \\ [ab]Q_{1,1} + [bb]Q_{1,2} + [bc]Q_{1,3} = 0 \\ [ac]Q_{1,1} + [bc]Q_{1,2} + [cc]Q_{1,3} = 0.\end{array}\right\} \qquad (22)$$

Da nach Gleichung (19) $Q_{c,e} = Q_{e,c}$ ist, so sind mit Gleichungen (20a), (21) und (22) sämtliche Hilfsgrößen Q bestimmt.

Natürlich wird man bei dieser Rechnung auch wieder die Summengleichung benutzen, welche zur Probe der Absolutglieder sowie zur Einsetzung der errechneten Q dient. Das Absolutglied ist für jedes System gleich 1.

Um die richtige Bestimmung der Q zu prüfen, dient auch folgendes: Man addiert die Summengleichungen, welche für die drei Systeme der Q gelten. Es muß alsdann sein:

$$\begin{array}{l}[as](Q_{1,1} + Q_{2,1} + Q_{3,1}) \\ + [bs](Q_{1,2} + Q_{2,2} + Q_{3,2}) \\ + [cs](Q_{1,3} + Q_{2,3} + Q_{3,3}) = 3.\end{array}$$

4. Beispiel zur Auflösung der Normalgleichungen.

Aus nachstehenden Normalgleichungen sind die Unbekannten sowie die Q zu ermitteln.

$$\begin{array}{rr|l} & & Q_1. \\ & 982\xi + 162\eta - 139\zeta - 98{,}2 = 0 & = 1 \\ & + 162\xi + 785\eta - 69\zeta + 168{,}5 = 0 & = 0 \\ & - 139\xi - 69\eta + 851\zeta + 241{,}2 = 0 & = 0 \\ \hline \text{Summengleichung:} & + 1005\xi + 878\eta + 643\zeta + 311{,}5 = 0 & = 1.\end{array}$$

Es kommen für die Ausrechnung des mittleren Fehlers der Unbekannten vorläufig nur $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$ und $Q_{1,3}$ in Betracht. Wir fügen zu dem Zwecke die Absolutglieder ihrer Gleichungen 1, 0 und 0 zu denen der Normalgleichungen, denken uns aber die Unbekannten ξ, η, ζ durch die Größen $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$ und $Q_{1,3}$ ersetzt. Die Summengleichung lautet hier:

$$1005\, Q_{1,1} + 878\, Q_{1,2} + 643\, Q_{1,3} = 1.$$

Die Ausrechnung der Größen $\frac{[ab][ab]}{[aa]}$, $\frac{[ab][ac]}{[aa]}$, $\frac{[al][al]}{[aa]}$ usw. kann mit Logarithmen, der Rechenmaschine, dem Rechenschieber oder mit der Produktentafel erfolgen. Bei einer größeren Zahl von Normalgleichungen wird wohl nur die Logarithmentafel oder Rechenmaschine angewandt. Mit der Rechenmaschine kann man mit leichter Mühe sechs- oder achtstellige Zahlen miteinander multiplizieren oder dividieren, außerdem gestattet sie eine Addition oder Subtraktion dieser Produkte. Um jetzt die Vorzeichen jener Größen zu bestimmen, hat man sich folgende Regeln zu merken:

1. Die Vorzeichen der Produkte $\frac{[ab][ab]}{[aa]}$, $\frac{[ab][ac]}{[aa]}$ usw., welche zu den Koeffizienten der zweiten, dritten Normal- bzw. Summengleichung zu addieren sind, haben dieselbe Folge wie die Vorzeichen der ersten Normalgleichung.

2. Das Vorzeichen desjenigen Produktes, welches zu $[bb]$, $[cc]$, $[dd]$ zu addieren ist, ist stets negativ.

Wir wollen die Anwendung dieser Regeln an einem Beispiel zeigen. Es seien die Vorzeichen der ersten Gleichung:

$$\begin{array}{llllll} 1. & + & - & + & + & -, \end{array}$$

die der zweiten, dritten, vierten und Summengleichung:

$$\begin{array}{ll}
2. & \left.\begin{array}{ccccc} - & + & + & - & + \\ & (-) & (+) & (+) & (-) \end{array}\right\} \\
3. & \left.\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \\ & & (-) & (-) & (+) \end{array}\right\} \\
4. & \left.\begin{array}{ccccc} + & - & - & + & - \\ & & & (-) & (+) \end{array}\right\} \\
\hline
s. & \left.\begin{array}{ccccc} + & - & + & + & - \\ (-) & (+) & (-) & (-) & (+) \end{array}\right\}.
\end{array}$$

Das Produkt $-\frac{[ab][ab]}{[aa]}$ ist negativ. Folglich sind die Vorzeichen derjenigen Subtrahenden, welche hier nur wegen der Symmetrie in Betracht kommen: $\quad - \quad + \quad + \quad -.$

Die Vorzeichen der dritten Gleichung, welche hier zu berücksichtigen sind, lauten: $\quad - \quad - \quad +,$

die der vierten: $\quad - \quad +,$

und endlich der Summengleichung:

$$- \quad + \quad - \quad - \quad +.$$

Wir fügen diese Vorzeichen nach dem oben Gesagten in das Schema.

Nun zu der Auflösung unserer Normalgleichungen zurückkehrend, hat man für ihre Reduktion folgendes:

$$\left.\begin{array}{rrrrr|l}
 & & & & & Q_{1,} \\
982\xi & +162\eta & -139\zeta & -98{,}2 & =0 & =1 \\
1\xi & +0{,}166\eta & -0{,}142\zeta & -0{,}100 & =0 & +0{,}00102 \\
+162\xi & +785\eta & -69\zeta & +168{,}5 & =0 & =0 \\
 & -27 & +23 & +16{,}2 & & -0{,}166 \\
-139\xi & -69\eta & +851\zeta & +241{,}2 & =0 & =0 \\
 & & -20 & -13{,}9 & & +0{,}142 \\
\hline
+1005\xi & +878\eta & +643\zeta & +311{,}5 & =0 & =1 \\
-1005 & -166 & +142 & +100{,}5 & & -1{,}023
\end{array}\right\}(1)$$

so daß die einmal reduzierten Normalgleichungen lauten:

$$\begin{array}{rrrr|r|r}
 & & & & Q_{1,} & Q_{2,} \\
758\eta & -46\zeta & +184{,}7 & =0 & -0{,}166 & +1 \\
-46\eta & +831\zeta & +227{,}3 & =0 & +0{,}142 & 0 \\
\hline
+712\eta & +785\zeta & +412{,}0 & & -0{,}023 & +1
\end{array} \qquad (2)$$

Hier sind nun die Absolutglieder der Gewichtsgleichungen für $Q_{2,2}$ und $Q_{2,3}$ 1 bzw. 0 hinzufügen. Falls wir weiter reduzieren, wird erhalten:

$$\left.\begin{array}{rrrr|l|l}
 & & & & Q_{1,} & Q_{2,} \\
758\eta & -46\zeta & +184{,}7 & =0 & -0{,}166 & +1 \\
1\eta & -0{,}061\zeta & +0{,}246 & =0 & -0{,}000216 & +0{,}00132 \\
-46\eta & +831\zeta & +227{,}3 & =0 & +0{,}142 & 0 \\
 & -3 & +11{,}2 & & -0{,}010 & +0{,}061 \\
\hline
+712\eta & +785\zeta & +412{,}0 & =0 & -0{,}023 & 1 \\
-712 & +43 & -174{,}0 & & +0{,}154 & -0{,}940.
\end{array}\right\}(3)$$

Für die zweimal reduzierte Normalgleichung erhält man demnach mit Probe:

		$Q_1,$	$Q_2,$	$Q_3,$	
$828\zeta + 238{,}5$	$= 0$	$+0{,}132$	$+0{,}061$	$+1$	(4)
$1\zeta + \quad 0{,}288$		$+0{,}000161$	$+0{,}000074$	$+0{,}00121$	
$+828\zeta + 238{,}0$	$= 0$	$+0{,}131$	$+0{,}060$	1	

Jetzt können wir zur Berechnung der Unbekannten schreiten. Es folgt aus der letzten Gleichung: $\zeta = -0{,}288$, $Q_{1,3} = +0{,}000161$, $Q_{2,3} = +0{,}000074$ und $Q_{3,3} = +0{,}00121$. Aus der ersten der Gleichungen (3) folgt sodann: $\eta = -0{,}260$, $Q_{1,2} = -0{,}000208$ und $Q_{2,2} = +0{,}00134$. Es folgt endlich aus der ersten der Gleichungen (1): $\xi = +0{,}102$, $Q_{1,1} = +0{,}00107$.

Um die ganze Rechnung zu prüfen, hat man die Summengleichung von (1) zu benützen. Es ist nämlich:

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
+1005\,\xi = & +102{,}5 & +1005\,Q_{1,1} = & +1{,}08 \\
+878\,\eta = & -228{,}3 & +878\,Q_{1,2} = & -0{,}183 \\
+643\,\zeta = & \underline{-185{,}2} & +643\,Q_{1,3} = & \underline{+0{,}103} \\
 & -311{,}0 & & +1{,}000 \\
\text{Soll} & -311{,}5 & \text{Soll} & +1{,}000
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
+1005\,Q_{2,1} = & -0{,}217 & +1005\,Q_{3,1} = & +0{,}162 \\
+878\,Q_{2,2} = & +1{,}18 & +878\,Q_{3,2} = & +0{,}065 \\
+643\,Q_{2,3} = & \underline{+0{,}048} & +643\,Q_{3,3} = & \underline{+0{,}776} \\
 & +1{,}001 & & +1{,}003 \\
\text{Soll} & +1{,}000 & \text{Soll} & +1{,}000
\end{array}$$

Wir haben hier die Aufgabe mit einem Rechenstab gelöst, welcher gestattet, die Produkte $\frac{[ab][ab]}{[aa]}$, $\frac{[ab][ac]}{[aa]}$ mit geringer Mühe zu bestimmen. Die erreichte Genauigkeit genügt vollkommen.

Jetzt soll noch die Verwendung der vierstelligen Logarithmen gezeigt werden, und zwar wollen wir das vorige Beispiel noch einmal behandeln.

Die Rechnung beginnt mit dem Hinschreiben der Logarithmen der in der ersten Zeile stehenden Koeffizienten, d. i. $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$, $-[al]$ und 1. Die Logarithmen werden unter die betreffenden Zahlen gesetzt. Ferner wird $\log [as]$ unter $[as]$ geschrieben. Durch Addieren von $\log \frac{1}{[aa]}$ zu den Logarithmen der ersten Zeile wird die zweite logarithmische Zeile erhalten. Zur Ausführung dieser Rechnung bedient man sich mit Vorteil eines sog. Schiebezettels. Auf diesen überträgt man $\log \frac{1}{[aa]}$ und bringt ihn durch Verschieben von links nach rechts nach und nach über $\log [ab]$, $\log [ac]$, $\log - [al]$ und $\log 1$. Hierdurch wird die Addition erleichtert. Diese so gewonnenen Zahlen befinden sich in der dritten Zeile von oben. Hierauf schreibt man $\log \frac{[ab]}{[aa]}$, hier 9,2174, auf den Schiebezetttel, hält ihn unter die Logarithmen der ersten Zeile außer $\log [aa]$ und gewinnt so die Logarithmen der Produkte $\frac{[ab][ab]}{[aa]}$, $\frac{[ab][ac]}{[aa]}$ usw, die entweder auf den Zettel selbst oder seitwärts zu schreiben sind. Die Produkte selbst, deren Vorzeichen nach der auf S. 46 gegebenen Regel vor Beginn der eigentlichen Zahlenrechnung zu bestimmen und hinzusetzen sind, unter die Koeffizienten der zweiten Normalgleichung gesetzt, lassen durch Addition die erste der einmal reduzierten Normalgleichungen mit dem Anfangsglied $[bb \cdot 1]\eta$ entstehen. Hierauf wird $\log \frac{[ac]}{[aa]}$ auf den Schiebezettel geschrieben und nun $\log \frac{[ac][ac]}{[aa]}$, $- \log \frac{[ac][al]}{[aa]}$ usw. gebildet, so daß leicht $[cc \cdot 1] - [cl \cdot 1]$ usw. berechnet werden können. Endlich $\log [as]$ zu den Logarithmen der zweiten Zeile addiert, dient zur Ausrechnung der Kontrollgleichung.

Die einmal reduzierten Normalgleichungen sind nun ähnlich weiter zu behandeln.

Nun zu dem Zahlenbeispiel übergehend, erhält man folgendes (siehe zunächst die Tabelle S. 50).

$Q_{1,3} = + 0{,}000159 \quad Q_{2,3} = + 0{,}000073 \quad Q_{3,3} = + 0{,}001207$
$Q_{1,2} = - 0{,}000208 \quad Q_{2,2} = + 0{,}001323$
$Q_{1,1} = + 0{,}001074.$

Probe durch die Summengleichungen:

$$\begin{array}{ccc} 3{,}0022 & 2{,}9435 & 2{,}8082 \\ \underline{9{,}0103} & \underline{9{,}4168\,n} & \underline{9{,}4592\,n} \\ 2{,}0125 & 2{,}3603\,n & 2{,}2674\,n \\ 102{,}9 & -229{,}3 & -185{,}1 \end{array}$$

$$+ 311{,}5 = + 0{,}0$$

Soll 0,0

						Q_1'	Q_2'	Q_3'
	982 ξ	+ 162 η	− 139 ζ	− 98,2	= 0	1		
+ 0,1000	2,9921	2,2095	2,1430 n	1,9921 n		0,0000		
− 0,0407		9,2174	9,1509 n	9,0000 n		7,0079		
+ 0,0431	+ 162 ξ	+ 785 η	− 69 ζ	+ 168,5	= 0	0		
$\xi = + 0{,}1024$		− 26,7	+ 22,9	+ 16,2		− 0,1650		
$\log \xi = 9{,}0103$	− 139 ξ	− 69 η	+ 851 ζ	+ 241,2	= 0	0		
			− 19,7	− 13,9		+ 0,1416		
	+ 1005 ξ	+ 878 η	+ 643 ζ	+ 311,5	= 0	1		
− 0,2436	3,0022	− 165,8	+ 142,3	+ 100,5		− 1,0236		
− 0,0175		+ 758,3 η	− 46,1 ζ	+ 184,7	= 0	− 0,1650	1	
		2,8799	1,6637 n	2,2665		9,2175 n	0,0000	
$\eta = - 0{,}2611$			8,7838 n	9,3866		6,3376 n	7,1201	
$\log \eta = 9{,}4168\, n$		− 46,1 η	+ 831,3 ζ	+ 227,3	= 0	+ 0,1416	0	
			− 2,8	+ 11,2		− 0,010	+ 0,0608	
		+ 712,2 η	+ 785,3 ζ	+ 412,0	= 0	− 0,0236	1	
		2,8526	+ 43,3	− 173,5		+ 0,1550	− 0,9390	
$\zeta = - 0{,}2879$			+ 828,5 ζ	+ 238,5	= 0	+ 0,1316	+ 0,0608	1
$\log \zeta = 9{,}4592\, n$			2,9183	2,3775		9,1193	8,7839	0,0000
				9,4592		6,2010	5,8656	7,0817
			+ 828,6 ζ	+ 238,5	= 0	+ 0,1314	+ 0,0610	1

$Q_{1,1} + Q_{2,1} + Q_{3,1}$	$Q_{1,2} + Q_{2,2} + Q_{3,2}$	$Q_{1,3} + Q_{2,3} + Q_{3,3}$
$= + 0{,}001025$	$= + 0{,}001188$	$= + 0{,}001439$
3,0022	2,9435	2,8082
7,0107	7,0748	7,1581
0,0129	0,0183	9,9663
+ 1,030	+ 1,043	+ 0,925

$= 2{,}998$, Soll 3,000.

5. Bestimmung des mittleren Fehlers der Beobachtungen.

Wir wollen μ, den mittleren Fehler einer Messung, ermitteln. Falls wir die wahren Werte X, Y, Z kennten, würde es für uns ein leichtes sein, μ zu bestimmen; wir hätten dann nur nötig, die wahren Fehler ε aus den Fehlergleichungen, von denen die $i$te lautet:

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i X + b_i Y + c_i Z, \tag{1}$$

zu berechnen. μ wäre alsdann:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}.$$

Doch die wahren Werte der Unbekannten sind für uns nicht bestimmbar, wir können nur die wahrscheinlichsten ermitteln. Eine Folge hiervon ist, daß wir nur die wahrscheinlichen Fehler berechnen können, dies erfolgt aus den Gleichungen von der Form:

$$\lambda_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z. \tag{2}$$

Wir führen bei dieser Untersuchung x, y und z für die Unbekannten ξ, η, ζ ein. Zu Verwechselungen kann dieses wohl nicht Veranlassung geben.

Um eine Beziehung zwischen dem wahren und wahrscheinlichsten Fehler zu erhalten, subtrahieren wir Gleichung (2) von (1). Es ergibt sich:

$$\varepsilon_i - \lambda_i = a_i(X - x) + b_i(Y - y) + c_i(Z - z). \tag{3}$$

Dies für $i = 1, \ldots, n$ hingeschrieben und dann die Gleichungen mit ihrem ε multipliziert und addiert, bringt:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\varepsilon\lambda] = [a\varepsilon](X - x) + [b\varepsilon](Y - y) + [c\varepsilon](Z - z). \tag{4}$$

Darauf wird $[\varepsilon\lambda]$ eliminiert. Man multipliziert zu dem Ende die Gleichungen von der Form (3) je mit ihrem λ: die erste mit λ_1, die zweite mit λ_2 usw., und addiert sie, woraus folgt:

$$[\varepsilon\lambda] - [\lambda\lambda] = [a\lambda](X-x) + [b\lambda](Y-y) + [c\lambda](Z-z). \quad (5)$$

Jetzt ist nach Gleichung (7a) (S. 38), welche besagt, daß die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt:

$$[a\lambda] = 0, \quad [b\lambda] = 0 \text{ und } [c\lambda] = 0, \quad (6)$$

folglich ist:

$$[\varepsilon\lambda] - [\lambda\lambda] = 0. \quad (7)$$

Nun wird dieser Wert in Gleichung (4) eingeführt, es folgt:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + [a\varepsilon](X-x) + [b\varepsilon](Y-y) + [c\varepsilon](Z-z). \quad (8)$$

Die Elimination von $(X-x)$, $(Y-y)$ und $(Z-z)$ geschieht auf folgende Weise. Es war nach Gleichung (1) (S. 42):

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots \alpha_n l_n.$$

X wird dagegen erhalten, wenn wir die fehlerreinen l einführen:

$$X = \alpha_1(l_1 + \varepsilon_1) + \alpha_2(l_2 + \varepsilon_2) + \cdots + \alpha_n(l_n + \varepsilon_n). \quad (9)$$

Falls wir die beiden Gleichungen voneinander subtrahieren, folgt:

$$(X - x) = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n\varepsilon_n = [\alpha\varepsilon]. \quad (10)$$

Ebenso ergibt sich $Y - y = [\beta\varepsilon]$ usw.

Falls wir diese Werte in Gleichung (8) einsetzen, ergibt sich:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + [a\varepsilon][\alpha\varepsilon] + [b\varepsilon][\beta\varepsilon] + [c\varepsilon][\gamma\varepsilon]. \quad (11)$$

Jetzt zu Mittelwerten übergehend, folgt: $n\mu^2 = [\lambda\lambda] + 3$ Gliedern, deren durchschnittliche Werte noch zu ermitteln sind.

Betrachten wir zunächst $[a\varepsilon][\alpha\varepsilon]$. Das Produkt umfaßt zunächst

$$a_1\alpha_1\varepsilon_1^2 + a_2\alpha_2\varepsilon_2^2 + a_3\alpha_3\varepsilon_3^2 + \cdots$$

und Glieder von ungleichem Index

$$a_1\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + a_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \cdots + a_2\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_2 + a_2\alpha_3\varepsilon_2\varepsilon_3 + \cdots$$

Der durchschnittliche Wert der letzteren ist gleich Null, während der der ersteren gleich $a_1\alpha_1\mu^2 + a_2\alpha_2\mu^2 + a_3\alpha_3\mu^2 + \cdots$

oder gleich $[a\alpha]\mu^2$. Da $[a\alpha] = 1$ ist, so ist $[a\alpha]\mu^2 = \mu^2$. Ebenso ist der Durchschnittswert des vorletzten und letzten Gliedes μ^2.

Wir haben also: $$n\mu^2 = [\lambda\lambda] + 3\,\mu^2. \tag{12}$$

Oder: $$(n-3)\,\mu^2 = [\lambda\lambda]. \tag{13}$$

Folglich: $$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-3}. \tag{14}$$

Allgemein bei m Unbekannten:

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-m}.\text{[1]} \tag{15}$$

Falls n gleich m gleich der Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten wird, ist

$$\mu = \pm\sqrt{\tfrac{0}{0}},$$

also unbestimmt. $n - m$ ist die Anzahl der überschüssigen Messung. μ, der mittlere Fehler der einzelnen Messung, ist um so genauer, je größer $n - m$ ist.

6. Mittlerer Fehler einer Funktion von Unbekannten, die durch vermittelnde Beobachtungen gefunden worden sind.

In manchen Fällen ist noch nach dem mittleren Fehler μ_F einer Funktion der Unbekannten $F(x, y, z)$ gefragt. Wir zerlegen wieder x in $x_0 + \xi$, y in $y_0 + \eta$ und z in $z_0 + \zeta$ und entwickeln nach dem Taylorschen Lehrsatze:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta) = F(x_0, y_0, z_0) \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \zeta + \text{Gliedern zweiter und höherer Ordnung.} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Indem wir die Glieder zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen, setzen wir: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = F_1$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = F_2$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = F_3$

und führen für die Unbekannten die linearen Funktionen der Beobachtungen ein, die wir S. 42 Gleichung (1) gefunden haben. Dies ausführend, erhält man:

$$F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta = F_1[\alpha l] + F_2[\beta l] + F_3[\gamma l]. \tag{2}$$

---

[1] Siehe Helmerts Ausgleichungsrechnung. 2. Aufl.

Nun hierauf den Hauptsatz der Fehlertheorie angewendet, ergibt:

$$\mu_F^2 = \left\{ \begin{array}{c} (F_1\alpha_1 + F_2\beta_1 + F_3\gamma_1)^2 + (F_1\alpha_2 + F_2\beta_2 + F_3\gamma_2)^2 + \cdots \\ + (F_1\alpha_n + F_2\beta_n + F_3\gamma_n) \end{array} \right\} \mu^2, \quad (3)$$

wofür wir auch setzen können:

$$\mu_F^2 = \left\{ \begin{array}{l} [\alpha\alpha]\,F_1^2 + 2[\alpha\beta]F_1F_2 + 2[\alpha\gamma]F_1F_3 \\ + [\beta\beta]F_2^2 + 2[\beta\gamma]F_2F_3 + [\gamma\gamma]F_3^2 \end{array} \right\} \mu^2, \quad (4)$$

Falls wir Gleichung (11) (S. 43) benutzen, folgt weiter nach leichter Reduktion:

$$\mu_F^2 = \left\{ \begin{array}{l} Q_{1,1}F_1^2 + 2\,Q_{1,2}F_1F_2 + 2\,Q_{1,3}F_1F_3 \\ + Q_{2,2}F_2^2 + 2\,Q_{2,3}F_2F_3 + Q_{3,3}F_3^2 \end{array} \right\} \mu^2. \quad (5)$$

Letztere Formel ist brauchbar. Doch man gibt ihr besser eine andere Form. Wir haben gefunden:

$$\left. \begin{array}{ll} & [aa]\,Q_{1,1} + [ab]\,Q_{1,2} + [ac]\,Q_{1,3} = 1 \\ & \quad [bb\cdot 1]\,Q_{1,2} + [bc\cdot 1]\,Q_{1,3} = -\frac{[ab]}{[aa]} \\ & \qquad [cc\cdot 2]\,Q_{1,3} = -\frac{[ac]}{[aa]} + \frac{[ab]\,[bc\cdot 1]}{[aa]\,[bb\cdot 1]}, \\ \text{ferner:} & [bb\cdot 1]\,Q_{2,2} + [bc\cdot 1]\,Q_{2,3} = 1 \\ & \qquad [cc\cdot 2]\,Q_{2,3} = -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}, \\ \text{endlich:} & \qquad [cc\cdot 2]\,Q_{3,3} = 1. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Entwickeln wir hieraus die Unbekannten, so findet man mit abgekürzten Symbolen:

$$\left. \begin{array}{l} Q_{1,1} = \frac{1}{[aa]} - \alpha_2'\,Q_{1,2} - \alpha_3'\,Q_{1,3} \\ Q_{1,2} = \qquad - \frac{\alpha_2'}{[bb\cdot 1]} - \beta_3''\,Q_{1,3} \\ Q_{1,3} = \qquad\qquad - \frac{\alpha_3'}{[cc\cdot 2]} + \frac{\alpha_2'\,\beta_3''}{[cc\cdot 2]} \\ Q_{2,2} = \qquad \frac{1}{[bb\cdot 1]} - \beta_3''\,Q_{2,3} \\ Q_{2,3} = \qquad\qquad - \frac{\beta_3''}{[cc\cdot 2]} \\ Q_{3,3} = \qquad\qquad\qquad \frac{1}{[cc\cdot 2]}, \end{array} \right\} \quad (7)$$

und zwar ist gesetzt worden: $\frac{[ab]}{[aa]} = \alpha_2'$, $\frac{[ac]}{[aa]} = \alpha_3'$ und $\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = \beta_3''$.

Wir reduzieren jetzt weiter und finden:

$$\left.\begin{aligned}
Q_{1,1} &= \frac{1}{[aa]} + \frac{\alpha_2'\,\alpha_2'}{[bb\cdot 1]} + \frac{\alpha_3''\alpha_3''}{[cc\cdot 2]}\\
Q_{1,2} &= \qquad\quad - \frac{\alpha_2'}{[bb\cdot 1]} + \frac{\alpha_3''\beta_3''}{[cc\cdot 2]}\\
Q_{1,3} &= \qquad\qquad\qquad\quad - \frac{\alpha_3''}{[cc\cdot 2]}\\
Q_{2,2} &= \qquad\qquad \frac{1}{[bb\cdot 1]} + \frac{\beta_3''\beta_3''}{[cc\cdot 2]}\\
Q_{2,3} &= \qquad\qquad\qquad\quad - \frac{\beta_3''}{[cc\cdot 2]}\\
Q_{3,3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{[cc\cdot 2]},
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

indem wir wieder zur Abkürzung $+\alpha_3' - \alpha_2'\beta_3'' = \alpha_3''$ eingeführt haben.

Nun wird die erste Gleichung von (8) mit F_1^2, die zweite mit $2F_1F_2, \ldots$, die letzte mit F_3^2 multipliziert und die dann erhaltenen addiert, um nach Gleichung (5) μ_F^2 zu bekommen:

$$\mu_F^2 = \frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{(F_2 - \alpha_2' F_1)^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{(F_3 - \beta_3'' F_2 - \alpha_3'' F_1)^2}{[cc\cdot 2]}, \tag{9}$$

wofür wir schreiben können:

$$\mu_F^2 = \frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{[F_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{[F_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}. \tag{10}$$

Man hängt F_1, F_2, F_3 an die Normalgleichungen und löst sie mit auf, so erhält man leicht $[F_2\cdot 1]$ und $[F_3\cdot 2]$

7. Schluß der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.

Nachdem man den mittleren Fehler einer Beobachtung berechnet hat, welches nach der Formel geschieht:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-m}},$$

bestimmt man den mittleren Fehler der Unbekannten $\mu_x = \pm\mu\sqrt{Q_{1,1}}$, $\mu_y = \pm\mu\sqrt{Q_{2,2}}$, $\mu_z = \pm\mu\sqrt{Q_{3,3}}$. $Q_{1,1}$, $Q_{2,2}$ und $Q_{3,3}$ gehen aus der Auflösung der S. 43—45 behandelten Gleichungen hervor. Es ist unter Umständen nach F_1, $[F_2\cdot 1]$, $[F_3\cdot 2]$ zu berechnen, um μ_F bestimmen zu können. Sodann sind $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$ und $z = z_0 + \zeta$ zu bilden. Zum Schluß ist noch die Probe durchzuführen, welche lautet:

$$L_i + \lambda_i = f_i(x, y, z),$$

wofür man auch setzen kann:

$$L_i + (-l_i + a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta) = f_i(x, y, z).$$

Durch diese Probe wird sowohl die richtige Linearmachung der Fehlergleichung als auch die Richtigkeit von $-l$, a, b und c nachgewiesen. Dann wird auch geprüft, ob die Näherungswerte x_0, y_0 und z_0 für die Rechnung genügten, was in den meisten Fällen zutreffen wird.

8. Beispiel: Maßstabvergleichung.

Aufgabe. Für die Festlegung des rheinischen Zolls in Millimeter wurde längs des Zollmaßstabs ein Millimeterstab (Fig. 4) gelegt und unter Zuhilfenahme einer Lupe für eine Anzahl von Strichen des Zollmaßstabes die entsprechenden Maße am Millimetermaßstab abgelesen. Die n Ablesungen an der Millimeterskala, welche als die eigentlichen Beobachtungen anzusehen sind, werden folglich mit L, die zugehörigen Zahlen am Zollmaßstab mit b bezeichnet.

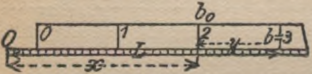


Fig. 4.

Um eine Beziehung zwischen y, der Länge eines Zolles in Millimetern, und den Ablesungen L zu erhalten, ist man genötigt, noch eine zweite Unbekannte x einzuführen, wie die nachstehende Überlegung zeigt. Zur rohen Bestimmung von y gehören mindestens zwei Messungen. Will man daher einen Näherungswert für y gewinnen, so hat man von den n Fehlergleichungen, welche für die n Beobachtungen aufzustellen sind, zwei beliebige auszuwählen, in ihnen die λ gleich Null zu setzen und alsdann aufzulösen. Zwei Gleichungen sind aber nur auflösbar, wenn sie zwei Unbekannte, hier außer y noch x, enthalten. Als zweite Unbekannte x nimmt man die Länge am Millimetermaßstab an, welche einer beliebig zu wählenden Zahl b_0 am Zollmaßstabe entspricht. Die Fehlergleichungen nehmen daher die Form an:

$$L + \lambda = x + (b - b_0)y.$$

Bei den Aufstellungen der Normalgleichungen tritt eine wesentliche Vereinfachung ein — denn die Hauptarbeit ist beim Ausgleichen meist die Auflösung der Normalgleichungen, — falls man für b_0 das arithmetische Mittel aus den sämtlichen b einführt und durch Anordnen der Messungen dafür sorgt, daß b_0 als ganze Zahl erhalten wird. Es wird alsdann $\Sigma(b - b_0)$, d. h. das zweite Glied der ersten Normalgleichung, ebenso das erste Glied der zweiten gleich Null, es reduziert sich folglich die Auflösung der Normalgleichungen auf Ermittelung der ξ und η aus Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Ferner wird, wenn $(b - b_0)$ eine ganze Zahl wird, die Ausgleichungsaufgabe wesentlich vereinfacht.

Ablesungen

Zollmaßstab	Millimetermaßstab
$b = 1$	$L =$ 83,50 mm
2	109,55
4	161,80
6	213,85
7	239,90

Unter Beachtung des Gesagten hat man zunächst b_0 zu bestimmen. $b_0 = \frac{20}{5} = 4$. Folglich lauten die Fehlergleichungen;

$$L_1 + \lambda_1 = x - 3y \qquad L_4 + \lambda_4 = x + 2y$$
$$L_2 + \lambda_2 = x - 2y \qquad L_5 + \lambda_5 = x + 3y.$$
$$L_3 + \lambda_3 - x$$

Hierin $x_0 = L_3$ und $6y_0 = L_5 - L_1$, folglich $y_0 = \frac{L_5 - L_1}{6}$ gesetzt, ergibt $x_0 + \xi = 161{,}8 + \xi$ und $y = 26{,}1 + \eta$. Es sind demnach die Fehlergleichungen, falls wir noch s beifügen:

$$\begin{array}{lllll|r}
\lambda_1 = & & 0 & + \xi & - 3\eta & s = -2 \\
\lambda_2 = & + & 0{,}05 & + \xi & - 2\eta & -1 \\
\lambda_3 = & & 0 & + \xi & & +1 \\
\lambda_4 = & + & 0{,}15 & + \xi & + 2\eta & +3 \\
\lambda_5 = & + & 0{,}20 & + \xi & + 3\eta & +4.
\end{array}$$

Die Normalgleichungen mit Probe, welche hieraus entspringen, lauten daher:

$$\begin{array}{r|c|c|}
 & Q_1, & Q_2, \\
5\xi + \qquad + 0{,}40 = 0 & 1 & 0 \\
+ 26\eta + 0{,}80 = 0 & 0 & 1 \\
\hline
5\xi + 26\eta + 1{,}20 = 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Nun die Normalgleichungen aufgelöst, ergibt:

$\xi = -0{,}08, \quad \eta = -0{,}031, \quad$ ferner $\quad Q_{1,1} = 0{,}2, \quad Q_{2,2} = {}^1/_{26}.$

Die Probe ξ und η in die Summengleichungen einzuführen, kann hier schlecht angewendet werden, weil die Koeffizienten der Normalgleichung dieselben sind wie in der Summengleichung.

Nun zur Bildung der Fehler λ übergehend, erhält man:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = +0{,}013 & \lambda_4 = +0{,}008 \\ \lambda_2 = +0{,}032 & \lambda_5 = +0{,}027 \\ \hline \lambda_3 = -0{,}080 & [\lambda] = +0{,}000, \end{array}$$

aus welchen Fehlern $[\lambda\lambda]$ berechnet wird. $[\lambda\lambda] = 0{,}008386$. Zur Probe wird $[\lambda\lambda] = [ll] - [al]\xi - [bl]\eta$ berechnet. Es folgt $[\lambda\lambda] = 0{,}0650 - 0{,}032 - 0{,}0248 = +0{,}0082$. Das stimmt mit dem oben berechneten $[\lambda\lambda]$ überein, falls wir die Kürzungen, die wir vorgenommen, berücksichtigen. Wir können demzufolge setzen:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{0{,}0082}{5-2}} = \pm\, 0{,}052 \text{ mm.}$$

$\mu_y = \pm\, 0{,}052\sqrt{Q_{2\,2}} = \pm\, 0{,}010$. μ_x zu berechnen ist ohne Interesse. Es ist demnach:

$$y = 26{,}069 \pm 0{,}010 \quad \text{und} \quad x = 161{,}720.$$

Nun die Schlußprobe, welche, es wird nochmals erwähnt, niemals fehlen darf, ausgeführt, ergibt:

$$\begin{aligned} 83{,}50 + 0{,}013 &= 161{,}720 - 78{,}207 \\ 109{,}55 + 0{,}032 &= 161{,}720 - 52{,}138 \\ 161{,}80 - 0{,}080 &= 161{,}720 \\ 213{,}85 + 0{,}008 &= 161{,}720 + 52{,}138 \\ 239{,}90 + 0{,}027 &= 161{,}720 + 78{,}207. \end{aligned}$$

9. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

Liegen n Messungen L_1 bis L_n vor, die aber verschiedene Genauigkeit, nämlich das Gewicht $g_1, g_2, \cdots, g_n$ haben, und sollen sie nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen ausgeglichen werden, so hat man zunächst die Fehlergleichungen von der Form:

$$L_i + \lambda_i = f_i(x, y, z) \qquad \text{aufzusuchen.}$$

Ihre Linearmachung geschieht, wie S. 37 angegeben, so daß die Gleichung nunmehr heißt:

$$\lambda_i = -l_i + a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta, \text{ Gewicht } g_i. \tag{1}$$

Jetzt sind die Unbekannten derart zu bestimmen, daß $[\lambda\lambda g]$ ein Minimum wird.

Falls wir dieses ausführen, ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}[\lambda\lambda g] = \{-l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta\}^2 g_1 \\ + \{-l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta\}^2 g_2 \\ + \cdots + \{-l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta\}^2 g_n\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ein Minimum.

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn

$$\frac{\partial[\lambda\lambda g]}{\partial\xi} = 0, \quad \text{ferner} \quad \frac{\partial[\lambda\lambda g]}{\partial\eta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial[\lambda\lambda g]}{\partial\zeta} = 0 \tag{3}$$

wird.

Wenn wir die erste Gleichung ausführen, ergibt sich:

$$0 = 2\lambda_1 g_1 a_1 + 2\lambda_2 g_2 a_2 + \cdots + 2\lambda_n g_n a_n \tag{4}$$

oder $0 = [a\lambda g]$. Es ist ferner $0 = [b\lambda g]$ und $0 = [c\lambda g]$. (5)

Nun setzen wir die Werte von λ nach Formel (1) in diese Gleichungen ein; es folgt alsdann:

$$\begin{aligned}[a\lambda g] &= 0 = [aag]\xi + [abg]\eta + [acg]\zeta - [alg]\\ [b\lambda g] &= 0 = [abg]\xi + [bbg]\eta + [bcg]\zeta - [blg]\\ [c\lambda g] &= 0 = [acg]\xi + [bcg]\eta + [ccg]\zeta - [clg].\end{aligned}$$

Man kann die Ableitung dieser Formeln noch auf folgende Weise ausführen: Durch Multiplizieren von Gleichung (1) mit $\sqrt{g_i}$ wird diese auf die Gewichtseinheit reduziert. Siehe S. 27.

Falls man dieses ausführt, ergibt sich:

$$\lambda_i\sqrt{g_i} = -l_i\sqrt{g_i} + a_i\sqrt{g_i}\,\xi + b_i\sqrt{g_i}\,\eta + c_i\sqrt{g_i}\,\zeta.$$

Nun können sämtliche Formeln der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen auf diesen Fall angewendet werden, nur ist

$$\lambda_1 \text{ durch } \lambda_1\sqrt{g_1} \quad \lambda_2 \text{ durch } \lambda_2\sqrt{g_2}, \ldots \quad \text{und} \quad \lambda_n \text{ durch } \lambda_n\sqrt{\lambda_n}$$

zu ersetzen. Wir erhalten $[\lambda\lambda g]$ statt $[\lambda\lambda]$.

Die Normalgleichungen werden alsdann:

$$\begin{aligned}[a\lambda g] &= 0 = [aag]\xi + [abg]\eta + [acg]\zeta - [alg]\\ [b\lambda g] &= 0 = [abg]\xi + [bbg]\eta + [bcg]\zeta - [blg]\\ [c\lambda g] &= 0 = [acg]\xi + [bcg]\eta + [ccg]\zeta - [clg].\end{aligned}$$

Führt man $s_i \sqrt{g_i}$ ein, so besteht die Probegleichung:

$$[s\lambda g] = 0 = [asg]\xi + [bsg]\eta + [csg]\zeta - [slg].$$

Die Auflösung dieser Normalgleichungen mit fortlaufenden Rechenproben, im Anschluß hieran die Berechnung der Größen Q, ferner $F_2 \cdot 1$, $F_3 \cdot 2$ ist ganz wie bei gleichen Gewichten.

Durch Einführung der Unbekannten in die Fehlergleichungen (1) werden die λ bestimmt, hierauf $[\lambda\lambda g]$ berechnet. Zur Probe hat man:

$$[\lambda\lambda g] = [llg] - [alg]\xi - [blg]\eta - [clg]\zeta.$$

Die Berechnung des mittleren Fehlers μ vom Gewichte 1 hat nach der Formel zu geschehen:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n-3}}, \text{ allgemein } = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n-m}}.$$

Ferner ist:

$$\mu_x = \pm\,\mu\sqrt{Q_{1,1}}, \quad \mu_y = \pm\,\mu\sqrt{Q_{2,2}} \quad \text{und} \quad \mu_z = \pm\,\mu\sqrt{Q_{3,3}},$$

und endlich der mittlere Fehler μ_F der Funktion $F(x, y, z)$, wie S. 55 Formel (10) angegeben.

Auch hier besteht die Schlußprobe wieder in der Berechnung der Gleichungen:

$$L_1 + \lambda_1 = f_1(x, y, z), \quad L_2 + \lambda_2 = f_2(x, y, z), \cdots,$$
$$L_n + \lambda_n = f_n(x, y, z),$$

nachdem man vorher $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$ und $z = z_0 + \zeta$ gebildet hat.

Beispiel: Es ist ein Nivellementnetz, welches sich über die Punkte A, B, C, D und E erstreckt, auszugleichen. Sodann ist anzugeben, wie groß hiernach der mittlere Fehler für 1 km ist, und endlich sind die mittleren Fehler der Unbekannten und einer Funktion derselben zu bestimmen. Die Beobachtungen sind die folgenden:

$\binom{B}{A}$ $L_1 = 189{,}404$,	Länge	des	Zuges	3,1 km
$\binom{C}{A}$ $L_2 = 736{,}977$	„	„	„	9,3 „
$\binom{E}{A}$ $L_3 = 376{,}607$	„	„	„	59,7 „
$\binom{C}{B}$ $L_4 = 547{,}576$	„	„	„	6,2 „

$\binom{D}{B}\ L_5 = 273{,}528$ Länge des Zuges 16,1 km

$\binom{E}{B}\ L_6 = 187{,}274$ " " " 35,1 "

$\binom{C}{D}\ L_7 = 274{,}082$ " " " 12,1 "

$\binom{D}{E}\ L_8 = 86{,}261$ " " " 9,3 "

Wir legen (Fig. 5) durch den niedrigsten Punkt, hier A, eine horizontale Ebene und bezeichnen die kürzeste Entfernung der Punkte C, B, D und E über jene Ebene mit x, y, z und t, so lassen sich folgende Fehlergleichungen aufstellen:

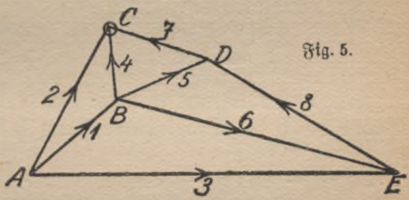


Fig. 5.

$$
\begin{aligned}
L_1 + \lambda_1 &= \quad y \\
L_2 + \lambda_2 &= x \\
L_3 + \lambda_3 &= \qquad\qquad t \\
L_4 + \lambda_4 &= x - y \\
L_5 + \lambda_5 &= \quad - y + z \\
L_6 + \lambda_6 &= \quad - y \qquad + t \\
L_7 + \lambda_7 &= x \qquad - z \\
L_8 + \lambda_8 &= \qquad\quad z - t
\end{aligned}
$$

Die Gewichte dieser Gleichungen werden wie folgt berechnet. Wir nehmen das Gewicht gleich $\frac{1}{\text{Entfern. i. km}}$, folglich gehört zum Gewicht 1 eine Strecke von 1 km. Um mit ganzen Zahlen zu arbeiten, multiplizieren wir diesen Ausdruck mit 1000, alsdann ist die Gewichtseinheit für die Entfernung 1000 km zu verstehen. Denn es ist $1 = \frac{\mu^2}{1000\,\text{km}}$, folglich $\mu^2 = 1000$ km. Nun setzen wir noch:

$$x = 736{,}977 + \xi, \quad y = 189{,}404 + \eta,$$
$$z = 462{,}932 + \zeta \quad \text{und} \quad t = 376{,}607 + \tau.$$

Alsdann lassen sich die Fehlergleichungen auch schreiben:

	s	g
$\lambda_1 = \quad 0 \quad + \eta$	$+1$	323
$\lambda_2 = \quad 0 + \xi$	$+1$	108
$\lambda_3 = \quad 0 \quad + \tau$	$+1$	17
$\lambda_4 = -\ 3 + \xi - \eta$	0	161
$\lambda_5 = \quad 0 \quad - \eta + \zeta$	0	62
$\lambda_6 = -\ 71 \quad - \eta \quad + \tau$	0	28
$\lambda_7 = -\ 37 + \xi \quad - \zeta$	0	83
$\lambda_8 = +\ 64 \quad + \zeta - \tau$	0	108

Aus diesen können wir die Normalgleichungen bilden, welche mit Probe durch die Summengleichung heißen:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	F
$352\xi - 161\eta - 83\zeta \qquad - 3554 = 0$	1	0	0	0	1
$-161\xi + 574\eta - 62\zeta - 28\tau + 2471 = 0$	0	1	0	0	0
$-\ 83\xi - 62\eta + 253\zeta - 108\tau + 9983 = 0$	0	0	1	0	0
$-\ 28\eta - 108\zeta + 153\tau - 8900 = 0$	0	0	0	1	-1
$+\ 108\xi + 323\eta + 0\zeta + 17\tau + 0 = 0$	1	1	1	1	0

Hieraus sind die Unbekannten zu ermitteln und im Anschluß daran die sämtlichen Q sowie der mittlere Fehler μ_F vom Unterschiede $x - t$ zu berechnen.

Auflösung der Normalgleichungen usw.: Die einmal reduzierten Normalgleichungen lauten:

	$Q_{1'}$	$Q_{2'}$	F
$500\,\eta - 100\,\zeta - 28\,\tau + 845 = 0$	$+0{,}4574$	1	$+0{,}4574$
$-100\,\eta + 233\,\zeta - 108\,\tau + 9145 = 0$	$+0{,}2358$	0	$+0{,}2358$
$-\ 28\,\eta - 108\,\zeta + 153\,\tau - 8900 = 0$	$+0$	0	$-1{,}000$
$+372\eta + 25\,\zeta + 17\,\tau + 1090 = 0$	$+0{,}6932$	1	$-0{,}3068$

Die zweimal reduzierten sind:

	$Q_{1'}$	$Q_{2'}$	$Q_{3'}$	F
$213\zeta - 114\tau + 9314 = 0$	$+0{,}3273$	$+0{,}2001$	$+1$	$+0{,}3273$
$-114\zeta + 151\tau - 8853 = 0$	$+0{,}0256$	$+0{,}0560$	0	$-0{,}9744$
$+\ 99\zeta + 38\tau + 461 = 0$	$+0{,}3529$	$+0{,}2561$	$+1$	$-0{,}6471$

und die dritte reduzierte Normal- mit Summengleichung heißt:

	$Q_{1,4}$	$Q_{2,4}$	$Q_{3,4}$	$Q_{4,4}$	F
$90\tau - 3869 = 0$	$+0,2007$	$+0,1630$	$+0,5352$	1	$-0,7992$
$91\tau - 3869 = 0$	$+0,2008$	$+0,1632$	$+0,5352$	1	$-0,7992$

Wir erhalten aus diesen Gleichungen:

$\xi = +3{,}659, \quad \eta = -3{,}424, \quad \zeta = -20{,}71$ und $\tau = +42{,}99.$

Ferner ist: $Q_{1,1} = +0{,}004209, \quad Q_{2,2} = +0{,}002483$

$Q_{3,3} = +0{,}007878, \quad Q_{4,4} = +0{,}01111$

$Q_{1,2} = +0{,}001515, \quad Q_{2,3} = +0{,}001908, \quad Q_{3,4} = +0{,}005947$

$Q_{1,3} = +0{,}002727, \quad Q_{2,4} = +0{,}001811, \quad Q_{1,4} = +0{,}002230$

Die Probe durch die Summengleichung zeigt befriedigende Übereinstimmung.

Es erfolgt jetzt die Berechnung der λ durch Einführung der Unbekannten in die Fehlergleichungen. Es ergibt sich:

$$\lambda_1 = -\ 3{,}4, \quad \lambda_4 = +\ 4{,}1, \quad \lambda_7 = -12{,}6,$$
$$\lambda_2 = +\ 3{,}6, \quad \lambda_5 = -17{,}3, \quad \lambda_8 = +\ 0{,}3,$$
$$\lambda_3 = +43{,}0, \quad \lambda_6 = -24{,}6,$$

woraus folgt: $[\lambda\lambda g] = 87960{,}23.$

Hierfür gilt die Probe:

$$[\lambda\lambda g] = [llg] - [alg]\,\xi - [blg]\,\eta - [clg]\,\zeta - [dlg]\,\tau.$$

Es ist nun: $[llg] = 698592, \ -[alg]\,\xi = -12964{,}99,$

$-[blg]\,\eta = -8460{,}74, \ -[clg]\,\zeta = -206747{,}93$

und $-[dlg]\,\tau = -382611{,}00.$

Falls wir diese Werte zusammenfassen, folgt: $[\lambda\lambda g] = 87807$, in guter Übereinstimmung mit dem oben berechneten Werte.

Nun haben wir μ für 1000 km zu berechnen:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{87960}{8-4}}\ \pm = 148{,}3 \text{ mm},$$

demnach μ für 1 km:

$$\mu_{1\,\text{km}} = \pm\frac{148{,}3}{\sqrt{1000}} = \pm\,4{,}7 \text{ mm}.$$

Ferner ist: $\mu_x = \pm \mu \sqrt{Q_{1,1}} = \pm 9{,}6$ mm,

$$\mu_y = \pm 7{,}4 \text{ mm}, \quad \mu_z = \pm 13{,}1 \text{ mm}, \quad \mu_t = \pm 15{,}6 \text{ mm}.$$

Folglich können wir setzen:

$$x = 736{,}981 \text{ m} \pm 9{,}6 \text{ mm}, \quad z = 462{,}911 \text{ m} \pm 13{,}1 \text{ mm},$$
$$y = 189{,}401 \text{ m} \pm 7{,}4 \text{ mm}, \quad t = 376{,}650 \text{ m} \pm 15{,}6 \text{ mm}.$$

Was schließlich die Berechnung des mittleren Fehlers von $x - z$ anbetrifft, so hat man:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \frac{F_1^2}{[aag]} + \frac{(F_2 \cdot 1)^2}{[bbg \cdot 1]} + \frac{(F_3 \cdot 2)^2}{[ccg \cdot 2]} + \frac{(F_4 \cdot 3)^2}{[ddg \cdot 3]} \right\}$$

Zur Probe muß sein:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \begin{array}{rrrr} F_1^2 Q_{1,1} + & 2 F_1 F_2 Q_{1,2} + & 2 F_1 F_3 Q_{1,3} + & 2 F_1 F_4 Q_{1,4} \\ + & F_2^2 Q_{2,2} + & 2 F_2 F_3 Q_{2,3} + & 2 F_2 F_4 Q_{2,4} \\ & + & F_3^2 Q_{3,3} + & 2 F_3 F_4 Q_{3,4} \\ & & + & F_4^2 Q_{4,4} \end{array} \right\}$$

Dies ausgeführt ergibt:

$$\mu_F^2 = 21\,990 \cdot (0{,}002841 + 0{,}000418 + 0{,}000515 + 0{,}007099).$$

Oder es ist: $\mu_F = \pm 15{,}4$ mm,

in guter Übereinstimmung mit

$$\mu_F^2 = 21\,990 \cdot (1 \cdot 0{,}004209 - 2 \cdot 0{,}002230 + 1 \cdot 0{,}01111),$$

welches auch $\mu_F = \pm 15{,}4$ mm ergibt.

Die Schlußprobe zeigt befriedigende Ergebnisse:

$L_1 + \lambda_1 = y$ soll sein: $189{,}401 = 189{,}401$
$L_2 + \lambda_2 = x$ „ „ $736{,}981 = 736{,}981$
$L_3 + \lambda_3 = t$ „ „ $376{,}650 = 376{,}650$
$L_4 + \lambda_4 = x - y$ „ „ $547{,}580 = 547{,}580$ usw.

Nebenbei sei bemerkt, daß der mittlere Fehler pro Kilometer bei diesem Nivellement außergewöhnlich groß ausgefallen ist, nämlich $\mu_{1\,\text{km}} = \pm 4{,}7$ mm. Gegenwärtig erreicht man bei der Preußischen Landesaufnahme für die einmalige Messung:

$$\mu_{1\,\text{km}} = \pm 0{,}6 \text{ mm}.$$

10. Elimination einer Unbekannten aus den Fehlergleichungen.

Wir können auch eine Unbekannte unmittelbar aus den Fehlergleichungen eliminieren. Es sei die zu eliminierende Unbekannte ξ. Die ursprünglichen Fehlergleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta, \ldots, \\ \lambda_n &= -l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Jetzt benutzen wir zur Elimination von ξ die Normalgleichung $[a\lambda] = 0$. Es ist nämlich in den Fehlergleichungen ξ ebenfalls mit a verbunden. Wenn es sich um die Elimination von ζ aus den Fehlergleichungen handelt, werden wir folglich die Normalgleichung $[c\lambda] = 0$ verwenden. Die Normalgleichung $[a\lambda] = 0$ lautet auch in der hier zu benutzenden Form:

$$[aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta - [al] = 0. \quad (2)$$

Aus welcher Gleichung folgt:

$$0 = \xi + \frac{[ab]}{[aa]}\eta + \frac{[ac]}{[aa]}\zeta - \frac{[al]}{[aa]}. \quad (3)$$

Nun diese Gleichung mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ multipliziert und von der 1. bzw. 2. oder endlich der $n$ten Fehlergleichung subtrahiert, läßt ξ dort verschwinden. Wir erhalten alsdann:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\left\{l_1 - a_1\frac{[al]}{[aa]}\right\} + \left\{b_1 - a_1\frac{[ab]}{[aa]}\right\}\eta + \left\{c_1 - a_1\frac{[ac]}{[aa]}\right\}\zeta \\ \lambda_2 &= -\left\{l_2 - a_2\frac{[al]}{[aa]}\right\} + \left\{b_2 - a_2\frac{[ab]}{[aa]}\right\}\eta + \left\{c_2 - a_2\frac{[ac]}{[aa]}\right\}\zeta \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n &= -\left\{l_n - a_n\frac{[al]}{[aa]}\right\} + \left\{b_n - a_n\frac{[ab]}{[aa]}\right\}\eta + \left\{c_n - a_n\frac{[ac]}{[aa]}\right\}\zeta \end{aligned}\right\} (4)$$

Diese Reihe von Gleichungen nennt man die **reduzierten** Fehlergleichungen. Entwickelt man hieraus die Normalgleichungen, so erhält man die einmal reduzierten Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [bb\cdot 1]\eta + [bc\cdot 1]\zeta - [bl\cdot 1] &= 0 \\ [bc\cdot 1]\eta + [cc\cdot 1]\zeta - [cl\cdot 1] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Wir haben deshalb ξ aus den Fehlergleichungen eliminiert, weil die einmal reduzierten Normalgleichungen für η und ζ uns bekannt sind.

Wie man leicht sieht, ist z. B. die Quadratsumme der Koeffizienten von η der reduzierten Fehlergleichungen gleich:

$$[bb] - \frac{2[ab][ab]}{[aa]} + \frac{[ab][ab][aa]}{[aa][aa]} = [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} = [bb \cdot 1].$$

Ebenso ist das Absolutglied der ersten einmal reduzierten Normalgleichung:

$$[bl] - \frac{[al][ab]}{[aa]} - \frac{[ab][al]}{[aa]} + \frac{[aa][al][ab]}{[aa][aa]} = [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} = [bl \cdot 1]$$

usw.

Es ist demnach $[bb \cdot 1]$ und $[cc \cdot 1]$ eine Summe von Quadraten, also stets positiv.

Man könnte nun die Fehlergleichungen (4) nochmals reduzieren, indem man zur Elimination von η aus ihnen die Normalgleichung:

$$[bb \cdot 1]\eta + [bc \cdot 1]\zeta - [bl \cdot 1] = 0 \tag{6}$$

bildete und hieraus η bestimmte. Aus den zweimal reduzierten Fehlergleichungen ginge alsdann die Normalgleichung hervor:

$$[cc \cdot 2]\zeta - [cl \cdot 2] = 0.$$

Dies Verfahren, aus den Fehlergleichungen eine der Unbekannten mittels ihrer Normalgleichung zu eliminieren, ist nur dann vorteilhaft, wenn diese Unbekannte in sämtlichen Fehlergleichungen gleiche Koeffizienten hat, insbesondere $+1$ oder -1.

Handelt es sich um die Elimination der Unbekannten ζ aus den Fehlergleichungen:

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1\xi + b_1\eta - \zeta$$
$$\lambda_2 = -l_2 + a_2\xi + b_2\eta - \zeta, \ldots,$$
$$\lambda_n = -l_n + a_n\xi + b_n\eta - \zeta,$$

so stellen wir die negative Normalgleichung für ζ, d. h. die Summengleichung, auf, folglich:

$$0 = -[l] + [a]\xi + [b]\eta - n\zeta$$

und eliminieren mit dieser Gleichung ζ. Die Elimination von ζ geschieht dadurch, daß wir die letzte Gleichung durch $-n$ dividieren und diesen Betrag zu jeder der Fehlergleichungen addieren. Die Gleichung durch $-n$ dividiert, ergibt:

$$0 = \frac{[l]}{n} - \frac{[a]}{n}\xi - \frac{[b]}{n}\eta + \zeta.$$

Nun addiert, bringt:

$$\lambda_1 = -\left\{l_1 - \frac{[l]}{n}\right\} + \left\{a_1 - \frac{[a]}{n}\right\}\xi + \left\{b_1 - \frac{[b]}{n}\right\}\eta$$

$$\lambda_2 = -\left\{l_2 - \frac{[l]}{n}\right\} + \left\{a_2 - \frac{[a]}{n}\right\}\xi + \left\{b_2 - \frac{[b]}{n}\right\}\eta, \ldots,$$

$$\lambda_n = -\left\{l_n - \frac{[l]}{n}\right\} + \left\{a_n - \frac{[a]}{n}\right\}\xi + \left\{b_n - \frac{[b]}{n}\right\}\eta.$$

Die Probe besteht: $[\lambda] = 0 + 0\xi + 0\eta$.

Stellen wir aus diesen Fehlergleichungen die Normalgleichungen her, so erhalten wir, wie eben bewiesen wurde, die einmal reduzierten Normalgleichungen, d. h. diejenigen Normalgleichungen, welche von ζ befreit sind.

11. Beispiel: Rückwärtseinschneiden.

Ein Punkt N wurde durch Rückwärtseinschneiden nach mehr als drei Festpunkten durch Satzbeobachtungen festgelegt. Satzbeobachtungen werden mit einem Theodolit oder Winkelmeßinstrument ausgeführt. Nachdem die Stehachse des Instruments lotrecht gestellt ist, werden die Ziele von links nach rechts mit dem Fernrohr eingestellt unter jedesmaligem Ablesen beider Nonien. Nachdem das letzte Ziel eingestellt und also Satz 1 vollendet ist, wird das Fernrohr durchgeschlagen, der Teilkreis um $\frac{180^0}{n}$ verstellt (hierbei bedeutet n eine gerade Zahl, die Anzahl der auszuführenden Sätze) und die Ziele in umgekehrter Reihenfolge angezielt. Hierbei wird an beiden Zeigern abgelesen. Der 1. Doppelsatz ist vollendet. Jetzt wird das Fernrohr durchgeschlagen, der Kreis um $\frac{180^0}{n}$ fortbewegt, sodann das erste Ziel wieder eingestellt usw. Die Ausrechnung der Sätze geschieht nun wie folgt: Nachdem aus den Ablesungen an Zeiger I und II das Mittel genommen, reduziert man diese Messungen derart, daß die Anfangsrichtung, das ist die Richtung für Ziel links, in sämtlichen Sätzen $0^0\ 0'\ 0''$ wird. Darauf wird das Gesamtmittel gebildet.

Bei Festlegung von Dreieckspunkten in der niederen Geodäsie werden 4—8 Sätze ausgeführt, in der höheren wählt man deren bis zu 24. Man verwendet hier Teilkreise bis zu 35 cm Durchmesser. Die Zeiger sind Mikroskope.

Durch Messen der Richtungen L der Visierstrahlen nach den Festpunkten F von dem Neupunkt N aus sollen die Koordinaten des letzteren, die x_N, y_N sein mögen, bestimmt werden. Um eine Beziehung zwischen den verbesserten Richtungen $L + \lambda$ und den gesuchten Koordinaten x_N, y_N des Nennpunktes N zu erhalten (Fig. 6), muß noch eine dritte Unbekannte z in die Rechnung eingeführt werden, nämlich das Azimut der Nullrichtung NO des in N gedachten Teilkreises, von welcher aus die Beobachtungen L gezählt sind. Alsdann besteht für jede der gleich genauen Richtungsmessungen die unmittelbar der Figur zu entnehmende Fehlergleichung:

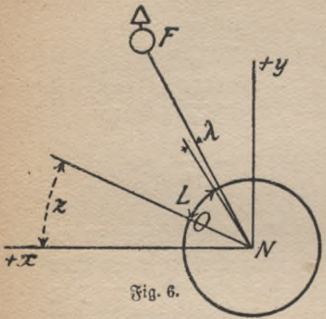


Fig. 6.

$$z + L + \lambda = \operatorname{arctg} \frac{y_F - y_N}{x_F - x_N},$$

oder z nach rechts gebracht:

$$L + \lambda = \operatorname{arctg} \frac{y_F - y_N}{x_F - x_N} - z. \tag{1}$$

In diese Gleichung $x_N = x_0 + \xi$, $y_N = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$ gesetzt, wo x_0, y_0, z_0 Näherungswerte der Unbekannten darstellen, und nach Taylor entwickelt, ergibt genau genug:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{y_F - y_0}{x_F - x_0} - L - z_0 + \frac{1}{1 + \left(\frac{y_F - y_0}{x_F - x_0}\right)^2} \cdot \frac{y_F - y_0}{(x_F - x_0)^2}\, \xi$$

$$+ \frac{1}{1 + \left(\frac{y_F - y_0}{x_F - x_0}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x_F - x_0}\, \eta - \zeta.$$

Das auf Grund der Näherungskoordinaten x_0, y_0 des Punktes N berechnete Azimut (NF) mit φ bezeichnet, also $\operatorname{arctg} \frac{y_F - y_0}{x_F - x_0} = \varphi$ gesetzt, ergibt für die letzte Gleichung nach leichter Reduktion:

$$\lambda = \varphi - L - z_0 + \frac{\sin^2 \varphi}{y_F - y_0}\, \xi - \frac{\cos^2 \varphi}{x_F - x_0}\, \eta - \zeta$$

oder $\lambda'' = (\varphi - L - z_0)'' + \frac{\sin^2 \varphi \varrho''}{y_F - y_0} \xi - \frac{\cos^2 \varphi \varrho''}{x_F - x_0} \eta - \zeta''$, (2)

wo ϱ'' die Bedeutung 206265″ hat.

Diese Gleichung abgekürzt geschrieben lautet also:

$$\lambda = -l + a\xi + b\eta - \zeta.$$

Eine Probe für die Berechnung der a und b besteht darin, daß man zusieht, ob $\frac{a_i}{-b_i} = tg\varphi_i$ ist.

Für die beobachteten Richtungen sind demzufolge die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1\xi + b_1\eta - \zeta \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2\xi + b_2\eta - \zeta \ldots, \\ \lambda_n &= -l_n + a_n\xi + b_n\eta - \zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Was die Berechnung der Näherungswerte der Unbekannten anbetrifft, so kann man nicht drei Gleichungen (1) benutzen, in welchen man die λ gleich Null gesetzt hat, sondern man muß zunächst die vorläufigen Koordinaten x_0, y_0 von N aus den Richtungsmessungen dreier günstig zueinander gelegenen Strahlen bestimmen, indem man die Aufgabe löst: Gegeben sind die Koordinaten von drei Festpunkten, gesucht sind die Koordinaten des Neupunktes, wenn dort die Winkel α und β nach den drei Festpunkten vorliegen. Die Lösung ist zuerst von Pothenot gegeben. Die Werte φ sind sodann mit sechsstelligen Logarithmen zu berechnen, wenn es sich um Entfernungen von N nach F bis zu 10 km handelt, wir es demnach mit einer Kleintringulation zu tun haben. z_0 bildet man aus den $\varphi - L$ und der Einfachheit halber direkt als Mittel aus den sämtlichen $\varphi - L$, also nach der Gleichung:

$$z_0 = \frac{\Sigma(\varphi - L)}{n}, \qquad (4)$$

wobei dann als Rechenprobe gilt, daß

$$-[l] = 0 \text{ ist.} \qquad (5)$$

Zumeist wird ζ aus den Fehlergleichungen (3) mittels der Normalgleichung $-[\lambda] = 0$ eliminiert. Diese Gleichung, negativ genommen, wird durch Addition der Fehlergleichungen gewonnen, sie lautet:

$$0 = 0 + [a]\xi + [b]\eta - n\zeta. \qquad (6)$$

Jetzt durch $-n$ dividiert:

$$0 = 0 - \frac{[a]}{n}\xi - \frac{[b]}{n}\eta + \zeta, \qquad (7)$$

und zu den einzelnen Fehlergleichungen (3) gefügt, läßt ζ aus der Rechnung verschwinden.

Die neuen Gleichungen, die reduzierten, erhalten nun die Form:

$$\lambda_1=-l_1+a'_1\xi+b'_1\eta, \lambda_2=-l_2+a'_2\xi+b'_2\eta, \ldots, \lambda_n=-l_n+a'_n\xi+b'_n\eta, \quad (8)$$

wobei
$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= a_1-\frac{[a]}{n},\ a'_2=a_2-\frac{[a]}{n},\ldots,\ a'_n=a_n-\frac{[a]}{n},\\ b'_1 &= b_1-\frac{[b]}{n},\ b'_2=b_2-\frac{[b]}{n},\ldots,\ b'_n=b_n-\frac{[b]}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Zur Probe hat man $[a']=0$, $[b']=0$. Wir fügen noch s' den Fehlergleichungen (8) bei: $s'_i=a'_i+b'_i$. Aus den Gleichungen (8) ergeben sich die Normalgleichungen mit Summenprobe:

$$\left.\begin{aligned} [a'a']\xi+[a'b']\eta-[a'l] &= 0\\ [a'b']\xi+[b'b']\eta-[b'l] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$
$$\overline{[a's']\xi+[b's']\eta-[l's]=0,}$$

die nach dem Gaußschen Verfahren mit gleichzeitiger Bestimmung der Q aufzulösen sind. Die Erfüllung der Summengleichung in (10) durch die berechneten Unbekannten bestätigt die Richtigkeit der Auflösung.

Aus der Summengleichung (6) oder (7) ist endlich ζ zu bestimmen.

Alsdann sind die λ, deren Summe gleich Null sein muß, aus den Fehlergleichungen (8) bzw. (3) zu ermitteln; sodann sind die einzelnen λ zu quadrieren und zu addieren, also $[\lambda\lambda]$ zu bilden. Diese Größe ist alsdann mit einem Werte zu vergleichen, der gemäß der Gleichung:

$$[\lambda\lambda]=[ll]-[a'l]\xi-[b'l]\eta \quad (11)$$

zu bilden ist.

Nun wird x durch Hinzufügung von ξ zu dem Näherungswerte x_0, ferner y und z gebildet.

μ, der mittlere Fehler der gemessenen Richtung, ist:

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-3}}, \quad (12)$$

und die mittleren Fehler μ_x und μ_y der Koordinaten x, y:

$$\mu_x=\pm\,\mu\sqrt{Q_{1,1}},\quad \mu_y=\pm\,\mu\sqrt{Q_{2,2}}. \quad (13)$$

Die Schlußprobe besteht in der doppelten Berechnung der endgültigen Azimute der Visierstrahlen. Es muß sein:

$$z+L+\lambda=\operatorname{arctg}\frac{y_F-y_N}{x_F-x_N}. \quad (14)$$

Hierzu wollen wir ein Zahlenbeispiel geben: Der Punkt Moabit in Berlin wurde mittels sechs Richtungen nach Festpunkten auf Grund von Satzbeobachtungen rückwärts eingeschnitten. Es wurde ein Mikroskoptheodolit verwandt und in vier einfachen Sätzen beobachtet.

Die Koordinaten der anvisierten Festpunkte und die vorläufigen des Neupunktes Moabit sind:

	y	x
Joachimsthalsches Gymn.	— 113,350	— 22250,453
Charlottenburger Schloß	— 2435,726	— 19851,281
Spandau, Nicolaikirche	— 8587,760	— 17903,755
Plötzensee	— 554,652	— 17651,213
Dankeskirche	+ 2576,849	— 17621,093
Kreuzberg	+ 3387,987	— 23549,155
Moabit	$y_0 =$ + 488,900	$x_0 =$ — 20066,900

Die Satzbeobachtungen sowie die genäherten Azimute finden sich in folgendem Schema, in welchem wir zunächst die Absolutglieder berechnen.

Angeschnitten	Vorl. Azimute φ	Satzbeobacht. L	$\varphi - L$	$-l$
Joachimsthalsches Gymn. . .	195° 25′ 10,1″	0° 0′ 0,0″	195° 25′ 10,1″	+ 3,2
Charlottenburger Schloß	274° 12′ 59,5″	78° 47′ 54,8″	25′ 4,7″	— 2,2
Spandau, Nicolaikirche	283° 24′ 16,8″	87° 59′ 12,9″	25′ 3,9″	— 3,0
Plötzensee	336° 38′ 10,2″	141° 13′ 3,9″	25′ 6,3″	— 0,6
Dankeskirche . . .	40° 29′ 12,9″	205° 4′ 5,4″	25′ 7,5″	+ 0,6
Kreuzberg	140° 13′ 17,7″	304° 48′ 8,9″	25′ 8,8″	+ 1,9
	23′ 07,2″	52′ 25,9″	30′ 41,3″	+ 5,7
	— 52′ 25,9″			— 5,8
	30′ 41,3″	$z = 195° 25″ 6,9″$		

so daß die Fehlergleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +\,3,2 - 24\xi + 88\eta - \zeta \\
\lambda_2 &= -\,2,2 - 70\xi - 5\eta - \zeta \\
\lambda_3 &= -\,3,0 - 22\xi - 5\eta - \zeta \\
\lambda_4 &= -\,0,6 - 31\xi - 72\eta - \zeta \\
\lambda_5 &= +\,0,6 + 42\xi - 49\eta - \zeta \\
\lambda_6 &= +\,1,9 + 29\xi + 35\eta - \zeta \\
\hline
0 = [\lambda] &= -\,0,1 - 76\xi - 8\eta - 6\zeta.
\end{aligned}$$

Die Summengleichung durch — 6 dividiert, ergibt:

$$0 = 0 + 13\xi + 1\eta + \zeta.$$

Nun diese Gleichung zu jeder Fehlergleichung addiert, bringt:

$$\begin{array}{rl|r}
 & & s \\
\lambda_1 = & + 3{,}2 - 11\xi + 89\eta & + 78 \\
\lambda_2 = & - 2{,}2 - 57\xi - 4\eta & - 61 \\
\lambda_3 = & - 3{,}0 - 9\xi - 4\eta & - 13 \\
\lambda_4 = & - 0{,}6 - 18\xi - 71\eta & - 89 \\
\lambda_5 = & + 0{,}6 + 55\xi - 48\eta & + 7 \\
\lambda_6 = & + 1{,}9 + 42\xi + 36\eta & + 78 \\
\hline
0 = [\lambda] = & - 0{,}1 + 2\xi - 2\eta & + 0
\end{array}$$

Die hieraus entstehenden Normalgleichungen lauten:

$$\begin{array}{lr}
 & 8564\xi - 565\eta + 240{,}8 = 0 \\
 & - 565\xi + 16594\eta + 387{,}8 = 0 \\
\hline
\text{Summengleichung:} & + 7999\xi + 16029\eta + 628{,}6 = 0
\end{array}$$

Aus den Normalgleichungen folgt:

$$\xi = - 0{,}02973, \quad \eta = - 0{,}02438,$$

ferner $Q_{1,1} = + 0{,}0001167$, $Q_{2,2} = 0{,}0000604$ und $\zeta = + 0{,}4''$.

Diese Werte erfüllen die Summengleichung.

ξ und η in die reduzierten Fehlergleichungen eingesetzt, ergibt die λ, nämlich:

$$\lambda_1 = + 1{,}4'', \quad \lambda_2 = - 0{,}4'', \quad \lambda_3 = - 2{,}6'',$$
$$\lambda_4 = + 1{,}7, \quad \lambda_5 = + 0{,}1, \quad \lambda_6 = - 0{,}2.$$

$[\lambda]$ ist, wie es sein soll, $= 0$.

Hieraus folgt $[\lambda\lambda] = 11{,}82$, während die Probe

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [a'l]\xi - [b'l]\eta,$$
$$[\lambda\lambda] = 28{,}41 - 7{,}16 - 9{,}45 = 11{,}80 \quad \text{ergibt.}$$

Berechnet man jetzt den mittleren Fehler einer Richtungsmessung, so folgt:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{11{,}82}{6-3}} = \pm\sqrt{\frac{11{,}82}{3}} = \pm\, 2{,}0''.$$

Für die Bestimmung von μ_x und μ_y ergibt sich sodann:

$$\mu_x = \pm\,\mu\sqrt{Q_{1,1}} = \pm\, 0{,}022, \quad \mu_y = \pm\,\mu\sqrt{Q_{2,2}} = \pm\, 0{,}015.$$

Die endgültigen Werte sind sonach:

$$y = +\,488{,}876 \pm 0{,}015, \quad x = -\,20066{,}930 \pm 0{,}022,$$
$$z = 195^0\,25'\,7{,}3''.$$

Die Azimute, aus den Koordinaten berechnet, ergeben, mit denen aus $z + L + \lambda$ zusammengestellt, folgendes:

		$z + L + \lambda$
(Moabit—Joachimsthalsches Gymn.) . .	$195^0\,25'\;8{,}7''$	$195^0\,25'\;8{,}7''$
(Moabit—Charlottenburger Schloß) . .	$274^0\,13'\;1{,}6''$	$274^0\,13'\;1{,}7''$
(Moabit—Nicolaikirche Spandau) . . .	$283^0\,24'\,17{,}6''$	$283^0\,24'\,17{,}6''$
(Moabit—Plötzensee)	$336^0\,38'\,12{,}8''$	$336^0\,38'\,12{,}9''$
(Moabit—Dankeskirche)	$40^0\,29'\,12{,}6''$	$40^0\,29'\,12{,}8''$
(Moabit—Kreuzberg)	$140^0\,13'\,16{,}0''$	$140^0\,13'\,16{,}0''$

12. Allgemeinste Form der Fehlergleichungen.

Man kann die auf S. 37 unter (1) gegebene Form noch erweitern, indem man mehrere Beobachtungen L in die Fehlergleichung einführt. Diese heißt nach Helmert in der allgemeinsten Form:

$$f_i(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, L_3 + \lambda_3, \ldots, x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Jetzt $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$ gesetzt, ergibt:

$$f_i(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, L_3 + \lambda_3, \ldots, x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta) = 0. \tag{2}$$

Nach Taylor entwickelt und die Annahme gemacht, daß ξ, η und ζ so klein sind, daß man die höheren Potenzen vernachlässigen darf, ergibt:

$$\left.\begin{aligned} f_i(L_1, L_2, L_3, \ldots, x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f_i}{\partial L_1}\lambda_1 + \frac{\partial f_i}{\partial L_2}\lambda_2 + \frac{\partial f_i}{\partial L_3}\lambda_3 + \cdots \\ + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_0 \zeta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Da die mit λ verbundenen Glieder nicht getrennt werden können, setzt man:

$$\frac{\partial f_i}{\partial L_1}\lambda_1 + \frac{\partial f_i}{\partial L_2}\lambda_2 + \frac{\partial f_i}{\partial L_2}\lambda_3 + \cdots = -\,v_i, \tag{4}$$

so daß die Fehlergleichung (3), gekürzt geschrieben, heißt:

$$v_i = -\,l_i + a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta. \tag{5}$$

Für die Bestimmung des Gewichts dieser Gleichung folgt aus (4), wenn man zu Mittelwerten übergeht:

$$\mu_{v_i}^2 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial L_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial L_2}\right)^2 \mu_2^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial L_3}\right)^2 \mu_3^2 + \cdots,$$

wo $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ die mittleren Fehler der Beobachtungen darstellen, d. h. es ist das Gewicht der linearen Fehlergleichung (5):

$$g_i = \frac{\text{Konstante}}{\mu_{v_i}^2}.$$

Die mittleren Fehler $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ der Beobachtungen sind entweder sämtlich gleich μ, gleich dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit, oder sie müssen durch besondere Messungen noch bestimmt werden.

Als einfaches **Beispiel** hierfür soll uns die Maßstabvergleichung dienen.

Wir können die in S. 56 behandelte Bestimmung, wieviel Millimeter auf einen Zoll gehen, noch in folgender Weise ausführen. Durch Aneinanderlegen des zu untersuchenden Zollmaßstabes mit dem Millimetermaßstab und Ablesung an zwei Stellen des letzteren, nämlich dort, wo zwei zu merkende Striche des Zollmaßstabes liegen, gewinnt man L_1 und L_2. Jetzt werden die Maßstäbe gegeneinander verschoben und wieder an zwei Orten des Millimetermaßstabes abgelesen usw. Die erste Fehlergleichung, die sich hieraus ergibt, lautet:

$$L_2 - L_1 + \lambda_2 - \lambda_1 = ny.$$

n bedeutet hier die Anzahl der Zolle.

Oder: $$v_1 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Falls wir den mittleren Fehler von v berechnen, folgt:

$$\mu_v^2 = \mu^2 + \mu^2 = 2\mu^2, \quad \text{oder es ist:} \quad g = \tfrac{1}{2},$$

wenn wir dem mittleren Fehler pro Ablesung das Gewicht 1 geben.

Die Fehlergleichungen können auch folgende Form annehmen:

$$\frac{L_2 - L_1}{n} + v_1' = y,$$

und zwar haben wir $v_1' = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{n}$ gesetzt. Oder es ist:

$$\mu_{v_1'}^2 = \frac{\mu^2}{n^2} + \frac{\mu^2}{n^2} = \frac{2\mu^2}{n^2}.$$

Folglich das Gewicht $g = \frac{n^2}{2}$, und zwar kommt des Gewicht 1 wieder der einzelnen Beobachtung zu.

Für die Ausgleichung von Beobachtungen in der allgemeinsten Form soll noch ein Zahlenbeispiel gegeben werden, und zwar wird ein Vorwärtsabschnitt gewählt, welcher in der Geodäsie häufig auftritt, um die Koordinaten eines Dreieckspunktes zu ermitteln. Man stellt sich mit dem Theodolite auf mehreren Festpunkten auf, visiert verschiedene Fest- und den Neupunkt an und macht die Ablesungen. So wurde der Neupunkt „Katholische Kirche" in Potsdam von vier Festpunkten aus durch gleich genaue Richtungsmessungen vorwärts abgeschnitten.

Gegebene Koordinaten:

	y	x
Observatorium	+ 22951,186	— 6068,080
Pfingstberg	+ 22549,909	— 1836,327
Babelsberg, Flatowturm	+ 24460,727	— 3583,487
Garnisonkirche	+ 22234,057	— 4441,630
Ruinberg	+ 21200,734	— 2820,628
Katholische Kirche vorläufig	+ 22616,200	— 3826,800

Es wurde beobachtet auf:

Station Observatorium.

Babelsberg . . .	0° 0′ 0,0″
Garnisonkirche . .	304° 55′ 30,0″
Katholische Kirche .	320° 13′ 5,0″

Station Pfingstberg.

Babelsberg. . .	0° 0′ 0,0″
Katholische Kirche .	45° 39′ 10,9″
Garnisonkirche . .	54° 28′ 26,7″
Ruinberg . . .	101° 26′ 55,9″

Station Babelsberg.

Observatorium . .	0° 0′ 0,0″
Katholische Kirche .	51° 12′ 10,5″
Pfingstberg . . .	101° 9′ 24,8″

Station Ruinberg.

Pfingstberg . . .	0° 0′ 0,0″
Katholische Kirche .	71° 31′ 13,3″
Garnisonkirche . .	93° 35′ 48,6″

Zumeist wird für die Ausgleichung folgende Rechnungsart angewandt: Wir wollen annehmen, von einem Standpunkte aus sind $n-1$ Festpunkte und ein Neupunkt angeschnitten worden. Die Azimute der Visuren nach den Festpunkten sind $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, dementsprechend die gemessenen Richtungen $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$, folglich läßt sich das Azimut des auf F stehenden Teilkreises $(n-1)$ mal ableiten. Sein günstiger Wert ist daher:

$$z_0 = \Sigma \frac{(\Phi - L)}{n-1}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Koordinaten des Neupunktes mit x_N, y_N, die des Festpunktes F mit x_F, y_F, so läßt sich für die Messungen auf diesem Punkte folgende Fehlergleichung aufstellen:

$$\frac{\Phi_1 - L_1 + \Phi_2 - L_2 + \cdots + \Phi_{n-1} - L_{n-1}}{n-1} + L_n + v = \operatorname{arctg} \frac{y_N - y_F}{x_N - x_F},$$

und zwar bezeichnet L_n die beobachtete Richtung nach dem Neupunkte.

Jetzt $x_N = x_0 + \xi$, $y_N = y_0 + \eta$ gesetzt, bringt daher genau genug:

$$v = \operatorname{arctg}\frac{y_0 - y_F}{x_0 - x_F} - L_n - \frac{\Phi_1 - L_1 + \Phi_2 - L_2 + \cdots + \Phi_{n-1} - L_{n-1}}{n-1}$$

$$+ \frac{1}{1 + \left(\frac{y_0 - y_F}{x_0 - x_F}\right)^2} \cdot \frac{-(y_0 - y_F)}{(x_0 - x_F)^2}\xi + \frac{1}{1 + \left(\frac{y_0 - y_F}{x_0 - x_F}\right)^2} \cdot \frac{1}{x_0 - x_F}\eta.$$

Falls wir sodann $\operatorname{arctg}\frac{y_0 - y_F}{x_0 - x_F} = \varphi$ setzen, woraus folgt $\frac{y_0 - y_F}{x_0 - x_F} = \operatorname{tg}\varphi$, und wenn wir v in Sekunden verstehen wollen, ist nach leichter Reduktion:

$$v = \varphi - L_n - \frac{\Phi_1 - L_1 + \Phi_2 - L_2 + \cdots + \Phi_{n-1} - L_{n-1}}{n-1}$$

$$- \frac{\sin^2\varphi\,\varrho}{y_0 - y_F}\xi + \frac{\cos^2\varphi\,\varrho}{x_0 - x_F}\eta.$$

Sodann folgt noch die Bestimmung des Gewichtes von v.

Nach dem Hauptsatze der Fehlertheorie ist nun, die Richtungsmessungen, wie es in der Tat ist, als gleich genau vorausgesetzt, ein Mittelwert von $v = \mu_v^2 = \frac{n-1}{(n-1)^2}\mu^2 + \mu^2 = \frac{n}{n-1}\mu^2$, oder das Gewicht der Fehlergleichung ist gleich $\frac{n-1}{n}$, für die beobachtete Richtungsmessung L das Gewicht 1 angenommen.

Die Fehlergleichung gekürzt geschrieben, lautet demnach:

$v = -l + a\xi + b\eta$, Gewicht $\frac{n-1}{n} = g$. Als Probe gilt: $\frac{-a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$.

Kehren wir jetzt zu unserem Zahlenbeispiele zurück. Zunächst muß für den Standpunkt Observatorium die Berechnung des $-l$ erfolgen.

Standpunkt Observatorium.

Anvisiert	Azimute Φ bzw. φ	Beob. L	Φ bzw. $\varphi - L$	$-l$
Babelsberg	31° 16′ 52,5″	0° 0′ 0,0″	31° 16′ 52,5″	
Garnisonkirche	336° 12′ 23,5″	304° 55′ 30,0″	16′ 53,5″	
Kath. Kirche	351° 29′ 57,8″	320° 13′ 5,0″	16′ 52,8″	−0,2″
			33′ 46,0″	
			$z_0' = 31°\,16'\,53{,}0''$	

so daß die erste Fehlergleichung lautet:

$$v_1 = -0{,}2 + 13\xi + 90\eta,\ \text{Gewicht} = {}^2/_3,\ s = +103.$$

Für den zweiten Standpunkt gestaltet sich die Aufstellung der Fehlergleichung folgendermaßen:

Standpunkt Pfingstberg.

Anvisiert	Azimute Φ bzw. φ	Beob. L	Φ bzw. $\varphi - L$	$-l$
Babelsberg	132° 26′ 18,1″	0° 0′ 0,0″	132° 26′ 18,1″	
Kath. Kirche	178° 5′ 33,0″	45° 39′ 10,9″	26′ 22,1″	+4,2″
Garnisonkirche	186° 54′ 44,9″	54° 28′ 26,7″	26′ 18,2″	
Ruinberg	233° 53′ 13,4″	101° 26′ 55,9″	26′ 17,5″	
			18′ 53,8″	
			$z_0'' =$ 132° 26′ 17,9″	

Folglich lautet die Fehlergleichung:

$$v_2 = +4{,}2 - 3\xi - 104\eta,\ \text{Gewicht}\ {}^3/_4,\ s = -107.$$

Für den dritten und vierten Standpunkt endlich haben wir folgende Berechnung auszuführen:

Standpunkt Babelsberg.

Anvisiert	Azimute Φ bzw. φ	Beob. L	Φ bzw. $\varphi - L$	$-l$
Observatorium	211° 16′ 52,5″	0° 0′ 0,0″	211° 16′ 52,5″	
Kath. Kirche	262° 29′ 7,7″	51° 12′ 10,5″	16′ 57,2″	+4,3″
Pfingstberg	312° 26′ 18,1″	101° 9′ 24,8″	16′ 53,3″	
			33′ 45,8″	
			$z_0''' =$ 211° 16′ 52,9″	

Die dritte Fehlergleichung lautet:

$$v_3 = +4{,}3 + 110\xi - 15\eta,\ \text{Gewicht}\ {}^2/_3,\ s = +95.$$

Standpunkt Ruinberg.

Anvisiert	Azimute Φ bzw. φ	Beob. L	Φ bzw. $\varphi - L$	$-l$
Pfingstberg	53° 53′ 13,4″	0° 0′ 0,0″	53° 53′ 13,4″	
Kath. Kirche	125° 24′ 24,5″	71° 31′ 13,3″	53′ 11,2″	−2,7″
Garnisonkirche	147° 29′ 3,0″	93° 35′ 48,6″	53′ 14,4″	
			46′ 27,8″	
			$z_0'''' =$ 53° 53′ 13,9″	

so daß wir die Fehlergleichung aufstellen können:

$$v_4 = -2{,}7 - 97\xi - 69\eta, \text{ Gewicht } {}^2/_3,\ s = -166.$$

Diese zusammengestellt, heißen:

$$\begin{array}{l|rl}
v_1 = -0{,}2 + 13\xi + 90\eta & s = +103, & \text{Gewicht } {}^2/_3 \\
v_2 = +4{,}2 - 3\xi - 104\eta & -107, & \text{"} \quad {}^3/_4 \\
v_3 = +4{,}3 + 110\xi - 15\eta & +95, & \text{"} \quad {}^2/_3 \\
v_4 = -2{,}7 - 97\xi - 69\eta & -166, & \text{"} \quad {}^2/_3.
\end{array}$$

Die Normalgleichungen lauten mithin, mit Probe durch die Summengleichung:

$$\begin{array}{r}
+14459\xi + 4376\eta + 478{,}7 = 0 \\
4376\xi + 16836\eta - 258{,}6 = 0 \\
\hline
+18835\xi + 21212\eta + 220{,}2 = 0.
\end{array}$$

Ihre Auflösung, welche mit vierstelligen Logarithmen ausgeführt wurde, ergab: $\eta = +0{,}02601$, $\xi = -0{,}04098$,

ferner $Q_{1,1} = +0{,}00007506$, $Q_{2,2} = +0{,}00006447$.

Setzen wir ξ und η in die Summengleichung ein, so folgt:

$$18835\xi + 21212\eta = -220{,}1. \quad \text{Soll } -220{,}2,.$$

Berechnen wir die Fehler v, so folgt:

$$v_1 = +1{,}6'', \quad v_3 = -0{,}6'',$$
$$v_2 = +1{,}6'', \quad v_4 = -0{,}5''.$$

$[vvg]$ ergibt 4,04.

Diesen Wert prüfen wir durch die Gleichung:

$$[vvg] = [llg] - [alg]\xi - [blg]\eta$$

oder

$$[vvg] = 30{,}69 - 19{,}63 - 6{,}73 = 4{,}33.$$

Da beide Werte genau genug übereinstimmen, können wir weiterrechnen:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{4{,}04}{4-2}} = \pm 1{,}4'',$$ ferner ist:

$$\mu_x = \pm\mu\sqrt{Q_{1,1}} = \pm 0{,}013 \quad \text{und} \quad \mu_\eta = \pm\mu\sqrt{Q_{2,2}} = \pm 0{,}012,$$

so daß man erhält:

$$\text{Katholische Kirche}\begin{cases} y = +22616{,}226 \pm 0{,}012 \\ x = -3826{,}841 \pm 0{,}013. \end{cases}$$

Die Schlußprobe zeigt befriedigende Übereinstimmung. Es ist

	$z_0 + L + v$	aus den Koordinaten
(Observatorium—Kath. Kirche)	351° 29′ 59,6″	351° 29′ 59,6″
(Pfingstberg—Kath. Kirche)	178° 5′ 30,6″	178° 5′ 30,4″
(Babelsberg—Kath. Kirche)	262° 29′ 2,8″	262° 29′ 2,8″
(Ruinberg—Kath. Kirche).	125° 24′ 26,6″	125° 24′ 26,6″.

Die kleine Differenz in dem Azimut (Pfingstberg—Kath. Kirche) von 0,2″ ist unerheblich, da 1″ auf 1 km Entfernung eine seitliche Verschiebung von 5 mm erzeugt, also 0,2″ 0,2 · 5 mm = 1 mm. Nun ist die Entfernung Pfingstberg—Kath. Kirche etwa 2 km, also 0,2″ entspricht auf 2 km Distanz 2 mm, folglich ist die Differenz belanglos.

13. Elimination einer Unbekannten mittels des Schreiberschen Verfahrens.

Nach einem von dem Generalleutnant Schreiber, ehemals Leiter der Preußischen Landesaufnahme, angegebenen Verfahren kann die Elimination einer Unbekannten, z. B. von ξ, auch dadurch erreicht werden, daß man zu den n Fehlergleichungen von der Form:

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta$$
$$\lambda_2 = -l_2 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta, \ldots,$$
$$\lambda_n = -l_n + a_n\xi + b_n\eta + c_n\zeta$$

als fingierte Fehlergleichung die Normalgleichung:

$$o = -[al] + [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta$$

mit dem Gewichte $-\frac{1}{[aa]}$ hinzufügt, bei der Bildung der Normalgleichungen aber verfährt, als ob die Koeffizienten von $\xi = 0$ seien. Man erhält alsdann die einmal reduzierten Normalgleichungen:

$$\left\{[bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}\right\}\eta + \left\{[bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}\zeta - \left\{[bl] - \frac{[ab][bl]}{[aa]}\right\} = 0$$

$$\left\{[bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}\eta + \left\{[cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]}\right\}\zeta - \left\{[cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]}\right\} = 0.$$

Oder gekürzt geschrieben:

$$[bb \cdot 1]\eta + [bc \cdot 1]\zeta - [bl \cdot 1] = 0$$
$$[bc \cdot 1]\eta + [cc \cdot 1]\zeta - [cl \cdot 1] = 0.$$

Für den besonderen Fall, daß die Fehlergleichungen heißen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 - \xi + b_1\eta + c_1\zeta \quad \text{Gewicht } 1, \\ \lambda_2 &= -l_2 - \xi + b_2\eta + c_2\zeta \quad \quad ,, \quad 1, \ldots, \\ \lambda_n &= -l_n - \xi + b_n\eta + c_n\zeta \quad \quad ,, \quad 1, \end{aligned}$$

wo $-[l] = 0$ ist, lauten die Rechengleichungen, aus denen die von ξ befreiten Normalgleichungen aufzustellen sind:

$$\begin{aligned} v_1 &= -l_1 + b_1\eta + c_1\zeta \quad \text{Gewicht } 1 \\ v_2 &= -l_2 + b_2\eta + c_2\zeta \quad \quad ,, \quad 1 \\ v_n &= -l_n + b_n\eta + c_n\zeta \quad \quad ,, \quad 1 \\ v_{n+1} &= 0 - [b]\eta - [c]\zeta \quad \quad ,, \quad -1/n. \end{aligned}$$

Da das Resultat keine Änderung erfährt, falls man bei negativem ξ statt der ihm zugehörigen Normalgleichung $-[\lambda] = 0$ die Summengleichung mit dem Gewichte $-1/n$ benutzt, wird diese meist verwendet.

Das Schreibersche Verfahren wird mit Vorteil dann angewendet, wenn in den Fehlergleichungen mehrere Unbekannte auftreten, die gruppenweise den Koeffizient -1 tragen. Lauten die Fehlergleichungen der ersten Gruppe:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1\xi + b_1\eta - \zeta \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2\xi + b_2\eta - \zeta \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3\xi + b_3\eta - \zeta, \ldots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n\xi + b_n\eta - \zeta, \end{aligned}$$

so erhält man nach der Schreiberschen Regel aus ihnen die Beiträge zu den Normalgleichungen der Gesamtausgleichung, wenn man ζ aus den Fehlergleichungen wegläßt, diesen aber noch als $(n + 1)$te fingierte Fehlergleichung die Summe aller mit dem Rechengewicht $-1/n$ beifügt.

Das Verfahren findet Anwendung bei der Preußischen Landesaufnahme, wenn es sich um die Einschaltung von Punkten in ein gegebenes Netz handelt. Dabei sind Richtungen gemessen worden. Es handelt sich um die Elimination des Azimuts der Nullrichtung des Theodolits für jede Station.

Fünftes Kapitel.

Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

1. Allgemeines.

Unter bedingten Beobachtungen verstehen wir solche Messungen, deren wahre Werte Bedingungen genügen, welche auch von den günstigsten streng zu erfüllen sind. So lautet die Bedingung für die Winkelmessungen in einem Dreieck: Die Summe der wahren Beobachtungsgrößen ist 180^0 oder, wenn das Dreieck von großer Seitenlänge ist, gleich $180^0 +$ Exzeß, wo der Exzeß sehr scharf aus der Formel:

$$\text{Exzeß} = \frac{\text{Inhalt des Dreiecks} \cdot \varrho''}{\text{Quadrat des mittleren Erdhalbmessers}}$$

ermittelt werden kann.

Der Exzeß ist bei einem gleichseitigen Dreieck von 15 km Seitenlänge gleich $cc \cdot 0{,}4''$.

Aber auch die günstigsten Messungen haben die Bedingung zu erfüllen, daß ihre Summe gleich 180^0 bzw. $180^0 +$ Exzeß sein muß. Lauten die Bedingungsgleichungen in transzendenter Form:

$$\varphi_i(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, L_3 + \lambda_3, \ldots, L_n + \lambda_n) = 0,$$

so macht man sie unter Zuhilfenahme des Taylorschen Lehrsatzes linear, man schreibt also:

$$\varphi_i(L_1, L_2, \ldots, L_n) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_1}\lambda_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_n}\lambda_n = 0,$$

wofür man auch setzen kann:

$$i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + i_3\lambda_3 + \cdots + i_n\lambda_n + w_i = 0,$$

indem für $\varphi_i(L_1, L_2, \ldots, L_n) = w_i$:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial L_1} = i_1, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_2} = i_2, \ldots, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_n} = i_n$$

angenommen wurde.

2. Umwandlung der bedingten in vermittelnde Beobachtungen.

Man kann die bedingten Beobachtungen zurückführen auf vermittelnde. Um das zu zeigen, hat man folgendes: Es seien die gegebenen Bedingungsgleichungen in linearer Form:

$$\left.\begin{aligned} p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + \cdots + p_n\lambda_n + w_1 = 0 \\ q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + \cdots + q_n\lambda_n + w_2 = 0 \\ r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + \cdots + r_n\lambda_n + w_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Diese müssen unabhängig voneinander sein.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen sei 3, allgemein s, die der Fehler n. Es muß $n > s$, falls man es überhaupt mit einer Aufgabe aus der Ausgleichungsrechnung zu tun hat.

Soll jetzt die Umwandlung stattfinden, so hat man zunächst aus den drei Bedingungsgleichungen dieselbe Anzahl Fehler durch die übrigen $n - 3$ auszudrücken. Wir setzen z. B.:

$$\lambda_4 = \xi_1 \quad \lambda_5 = \xi_2 \ldots, \quad \lambda_n = \xi_{n-3}, \qquad \text{alsdann folgt:}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 = -l_1 + \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + \cdots + \varepsilon_1\xi_{n-3} \\ \lambda_2 = -l_2 + \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \cdots + \varepsilon_2\xi_{n-3} \\ \lambda_3 = -l_3 + \alpha_3\xi_1 + \beta_3\xi_2 + \cdots + \varepsilon_3\xi_{n-3}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei die $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ und $-l$ von den Koeffizienten p, q, r bzw. von w abhängen.

Stellen wir aus diesen Gleichungen die Formel für den mittleren Fehler her, so ist dieser:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-(n-3)}} = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{3}}, \text{ allgemein } = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{s}}. \quad (3)$$

Folglich: der mittlere Fehler ist gleich der Quadratwurzel aus $[\lambda\lambda]$, dividiert durch die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen.

3. Bedingte Beobachtungen gleicher Genauigkeit mit Korrelaten.

Es lauten die drei streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen, bereits auf lineare Form gebracht:

$$\left.\begin{aligned} p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + \cdots + p_n\lambda_n + w_1 = 0 \\ q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + \cdots + q_n\lambda_n + w_2 = 0 \\ r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + \cdots + r_n\lambda_n + w_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ferner haben wir die zur Bestimmung der λ geltende Fundamentalgleichung: $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \cdots + \lambda_n^2$ ein Minimum. (2)

Wir bedienen uns zur Lösung dieser Aufgabe des Lagrangeschen Satzes. Es soll $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ein Minimum werden unter strenger Beachtung der Nebenbedingungen:

$$\psi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0 \quad \text{und} \quad \psi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0.$$

Der Lagrangesche Satz sagt nun aus: Man multipliziert die Bedingungsgleichungen mit den vorläufig noch unbestimmten Koeffizienten C_1 bzw. C_2 und addiert sie zur Minimumsgleichung. Man erhält alsdann:

$$\varphi + C_1\psi_1 + C_2\psi_2 \text{ soll ein Minimum werden.}$$

C_1 und C_2 werden die Korrelaten genannt. Jetzt sind die Unbekannten als voneinander unabhängig zu betrachten. Wird nun das Minimum der letzten Funktion bestimmt, so ist dies gleichbedeutend mit der Lösung der gestellten Aufgabe, d. h. die Gleichungen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1} + C_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\lambda_1} + C_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2} + C_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\lambda_2} + C_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\lambda_2} = 0, \ldots$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_n} + C_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\lambda_n} + C_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\lambda_n} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_1 = 0 \quad \text{und} \quad \psi_2 = 0$$

müssen erfüllt sein. Wir haben $n + 2$ Unbekannte, nämlich n λ und zwei C, und ebenso viele Gleichungen haben wir zwischen ihnen, folglich sind die Unbekannten bestimmbar.

Dies beachtend, erhält man:

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 - 2k_1(p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + \cdots + p_n\lambda_n + w_1)\\ - 2k_2(q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + \cdots + q_n\lambda_n + w_2),\\ - 2k_3(r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + \cdots + r_n\lambda_n + w_3)\end{aligned}$$

soll den kleinsten Wert erhalten.

Wenn wir nach den verschiedenen λ differenzieren und diese Gleichungen einzeln gleich Null setzen, folgt:

$$\left.\begin{aligned}2\lambda_1 - 2p_1k_1 - 2q_1k_2 - 2r_1k_3 &= 0\\ 2\lambda_2 - 2p_2k_1 - 2q_2k_2 - 2r_2k_3 &= 0, \ldots,\\ 2\lambda_n - 2p_nk_1 - 2q_nk_2 - 2r_nk_3 &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die 2 gestrichen, ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 = p_1k_1 + q_1k_2 + r_1k_3, \quad \lambda_2 = p_2k_1 + q_2k_2 + r_2k_3, \ldots,\\ \lambda_n = p_nk_1 + q_nk_2 + r_nk_3,\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Gleichungen, welche auch den Namen Korrelatengleichungen führen Um also die einzelnen λ zu berechnen, hat man die Koeffizienten zu benutzen, welche in den Vertikalkolumnen der Bedingungsgleichungen (1) stehen. Setzt man jene Ausdrücke für die λ in die Gleichungen (1) ein, so erhält man die Normalgleichungen, welche lauten:

$$\left.\begin{aligned}[pp]k_1 + [pq]k_2 + [pr]k_3 + w_1 = 0\\ [pq]k_1 + [qq]k_2 + [qr]k_3 + w_2 = 0\\ [pr]k_1 + [qr]k_2 + [rr]k_3 + w_3 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Man beachte die Symmetrie dieser Gleichungen. Um ihre richtige Aufstellung zu prüfen, hat man die Summengleichung mitzuführen, welche doppelt aufzustellen ist, einmal durch Addition der Gleichungen (5), zum andern, indem man $[ps]$, $[qs]$, $[rs]$ direkt bildet:

$$s_1 = p_1 + q_1 + r_1, \quad s_2 = p_2 + q_2 + r_2, \ldots, \quad s_n = p_n + q_n + r_n.$$

Die Summengleichung hat die Form:

$$[ps]k_1 + [qs]k_2 + [rs]k_3 + [w] = 0. \qquad (6)$$

Jetzt sind die Normalgleichungen nach dem Gaußschen Verfahren aufzulösen unter steter Mitführung der Summengleichung. Die k sind ferner zu prüfen, indem man sie in die Summengleichung einführt. Alsdann sind die Fehler λ zu bestimmen aus den Gleichungen (4), und $[\lambda\lambda]$ zu berechnen, indem man die einzelnen λ quadriert und dann die Quadrate addiert. Als Probe hat man:

$$[\lambda\lambda] = -[wk]. \qquad (7)$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt aus (4). Wenn man diese Gleichungen mit λ multipliziert, und zwar die erste mit λ_1, die zweite mit $\lambda_2, \ldots$ und die letzte mit λ_n, und sie alsdann addiert, folgt:

$$[\lambda\lambda] = [p\lambda]k_1 + [q\lambda]k_2 + [r\lambda]k_3,$$

wofür man unter Zuhilfenahme der Gleichungen (1) setzen kann:

$$[\lambda\lambda] = -[wk].$$

Durch diese Probe wird die fehlerfreie Lösung der Ausgleichung bestätigt, von der Aufstellung der linearen Bedingungsgleichungen (1) an.

Zur Berechnung des mittleren Fehlers der Beobachtungen hat man nach S. 82 Gleichung (3) die Gleichung aufzulösen:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{s}}. \qquad (8)$$

Alsdann werden durch Hinzufügung der λ zu ihren L die ausgeglichenen Werte bestimmt.

Um schließlich die Richtigkeit der Linearmachung der Bedingungsgleichungen zu prüfen, hat man zuzusehen, ob die ursprünglichen Bedingungsgleichungen durch die ausgeglichenen Messungen erfüllt werden:

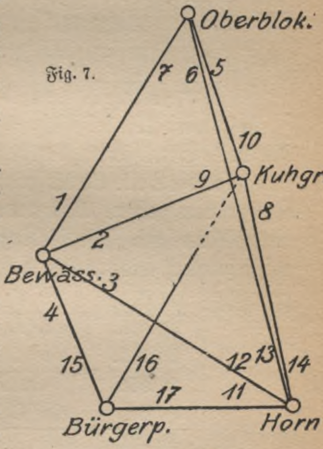
$$\varphi_1(L_1+\lambda_1,\ L_2+\lambda_2,\ L_3+\lambda_3,\ldots,\ L_n+\lambda_n)=0$$
$$\varphi_2(L_1+\lambda_1,\ L_2+\lambda_2,\ L_3+\lambda_3,\ldots,\ L_n+\lambda_n)=0$$
$$\varphi_3(L_1+\lambda_1,\ L_2+\lambda_2,\ L_3+\lambda_3,\ldots,\ L_n+\lambda_n)=0.$$

Diese Schlußprobe sollte niemals fehlen.

4. Beispiel zur Ausgleichung bedingter Beobachtungen gleicher Genauigkeit, betr. ein Fünfeck der Bremer Vermessung.

Als größeres Beispiel für die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes nach bedingten Beobachtungen nehmen wir einen Teil der Bremer Vermessung, welche im Anschluß an das Wesernetz der Preußischen Landesaufnahme ausgeführt wurde (Fig. 7). Die folgenden Richtungen sind als gleich genau und als das Resultat von 18 Sätzen anzusehen:

Fig. 7.



Maßstab 1:100000.

Station Bewässerungsanstalt.

1.	Oberblockland	0° 0′ 0,0″
2.	Kuhgraben	37° 24′ 28,8″
3.	Horn	91° 41′ 8,0″
4.	Bürgerpark	128° 7′ 32,1″

Station Oberblockland.

5.	Kuhgraben	0° 0′ 0,0″
6.	Horn	5° 16′ 50,3″
7.	Bewäss.-Anstalt	49° 52′ 4,8″

Station Kuhgraben.

8.	Horn	0° 0′ 0,0″
9.	Bewäss.-Anstalt	78° 11′ 8,8″
10.	Oberblockland	170° 54′ 35,9″

Station Horn.

11.	Bürgerpark	0° 0′ 0,0″
12.	Bewäss.-Anstalt	31° 50′ 12,1″
13.	Oberblockland	75° 33′ 50,5″
14.	Kuhgraben	79° 22′ 25,0″

Station Bürgerpark.

15.	Bewäss.-Anstalt	0° 0′ 0,0″
16.	Kuhgraben	52° 32′ 54,6″
17.	Horn	111° 43′ 24,5″

Jeder beobachteten Richtung ist ein λ beizulegen: der ersten λ_1, der zweiten λ_2 usw. und der letzten λ_{17}. Zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen in diesem Netze benutzen wir eine von dem Astronomen Bessel angegebene Regel. Er konstruiert das Netz. Geht man zum Beispiel von der Seite Bürgerpark-Horn aus, so werden durch Antragen von Winkel Richtung 17 bis 16 und 16—15 in dem Punkte Bürgerpark (Fig. 7) sowie der Winkel Richtung 12—11, 13—12 und Richtung 14—13 im Punkte Horn die Punkte Bewässerungsanstalt und Kuhgraben bestimmt.

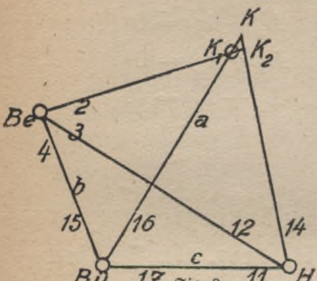


Fig. 8.

Durch Hinzutritt des Winkels 4 — 3 sind in dem Dreiecke Bewässerungsanstalt-Horn-Bürgerpark sämtliche Winkel gemessen worden, folglich lautet die erste Bedingungsgleichung:

$$111^0\,43'\,24{,}5'' + \lambda_{17} - \lambda_{15} + 36^0\,26'\,24{,}1'' + \lambda_4 - \lambda_3$$
$$+\, 31^0\,50'\,12{,}1'' + \lambda_{12} - \lambda_{11} - 180^0 = 0$$

oder, falls wir zusammenfassen, was sich zusammenfassen läßt:

$$-\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_{11} + \lambda_{12} - \lambda_{15} + \lambda_{17} + 0{,}7'' = 0. \qquad (1)$$

Jetzt wird Winkel Richtung 3 — 2 im Punkte Bewässerungsanstalt an die Seite Bewässerungsanstalt-Horn angetragen (Fig. 8). Im allgemeinen wird die Seite Bewässerungsanstalt-Kuhgraben nicht durch den Punkt Kuhgraben gehen. Mit anderen Worten, es wird Bü.-K. von Bü.-$K._1$ verschieden sein. Die Bedingungsgleichung, die wir aufzustellen haben, muß folglich ausdrücken, daß die beiden letzten Seiten gleich sein sollen.

Folglich:
$$\frac{\text{K. Bü.}}{\text{Be. Bü.}} = \frac{\sin(L_4 - L_2 + \lambda_4 - \lambda_2)}{\sin(L_4 - L_2 + L_{16} - L_{15} + \lambda_4 - \lambda_2 + \lambda_{16} - \lambda_{15})}$$
$$\frac{\text{Be. Bü.}}{\text{H. Bü.}} = \frac{\sin(L_{12} - L_{11} + \lambda_{12} - \lambda_{11})}{\sin(L_4 - L_3 + \lambda_4 - \lambda_3)}$$
$$\frac{\text{H. Bü.}}{\text{K. Bü.}} = \frac{\sin(L_{14} - L_{11} + L_{17} - L_{16} + \lambda_{14} - \lambda_{11} + \lambda_{17} - \lambda_{16})}{\sin(L_{14} - L_{11} + \lambda_{14} - \lambda_{11})}.$$

Diese drei Gleichungen miteinander multipliziert, bringt:

$$\left.\begin{aligned} 1 = {} & \frac{\sin(L_4 - L_2 + \lambda_4 - \lambda_2)\sin(L_{12} - L_4 + \lambda_{12} - \lambda_{11})}{\sin(L_4 - L_2 + L_{16} - L_{15} + \lambda_4 - \lambda_2 + \lambda_{16} - \lambda_{15})\sin(L_4 - L_3 + \lambda_4 - \lambda_3)} \\ & \cdot \frac{\sin(L_{14} - L_{11} + L_{17} - L_{16} + \lambda_{14} - \lambda_{11} + \lambda_{17} - \lambda_{16})}{\sin(L_{14} - L_{11} + \lambda_{14} - \lambda_{11})}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Während die Gleichungen dieser Art den Namen Seitenbedingungsgleichungen oder kurz Seitengleichungen führen, nennt man die Gleichungen von der Form (1) Winkel- oder Dreiecksgleichungen.

Die Aufstellung der Seitengleichung wird wesentlich dadurch erleichtert, daß man schreibt, in dem Viereck K. Be. Bü. H. muß werden:

$$\frac{\text{K.Bü.} \cdot \text{Be.Bü.} \cdot \text{H.Bü.}}{\text{Be.Bü.} \cdot \text{H.Bü.} \cdot \text{K.Bü.}} = 1$$

und nun das Verhältnis zweier Seiten durch das Sinusverhältnis der gegenüberliegenden Winkel ersetzt.

Die Seitengleichung ist mit Hilfe der drei im Bürgerpark zusammenstoßenden Seiten gebildet worden. Bürgerpark nennt man daher die Spitze eines Zentralsystems. Wählt man Bewässerungsanstalt als Spitze, indem man von der Gleichung:

$$\frac{\text{K.Be.} \cdot \text{H.Be.} \cdot \text{Bü.Be.}}{\text{H.Be.} \cdot \text{Bü.Be.} \cdot \text{K.Be.}} = 1$$

ausgeht, so wird dadurch ausgedrückt, daß Punkt $K_{.2}$ mit $K_{.1}$ zusammenfalle; wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so ist es auch die vorhergehende. Es leuchtet ein, daß man in einem Vierecke vier derartige Gleichungen aufstellen kann. Man kann auch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen als Spitze des Zentralsystems wählen.

Durch Antragen des Winkels Richtung 9 — 8 sind in dem Dreiecke H. Be. K. sämtliche Winkel beobachtet worden, folglich besteht die Bedingungsgleichung:

$$L_3 - L_2 + L_9 - L_8 + L_{14} - L_{12} + \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_9 - \lambda_8 + \lambda_{14} - \lambda_{12} - 180^0 = 0,$$

oder $$-\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_8 + \lambda_9 - \lambda_{12} + \lambda_{14} + 0{,}9'' = 0. \qquad (3)$$

Alsdann wird Winkel Richtung 10 — 9 im Punkte Kuhgraben an die Seite Be. K. angetragen, dadurch wird endlich Oberblockland festgelegt. Der Winkel Richtung 6 — 5 ist ferner beobachtet worden, folglich haben wir die vierte Bedingungsgleichung:

$$L_6 - L_5 + L_{10} - L_8 + L_{14} - L_{13} + \lambda_6 - \lambda_5 + \lambda_{10} - \lambda_8 + \lambda_{14} - \lambda_{13} - 180^0 = 0.$$

Falls man die Werte einsetzt und vereinigt, erhält man:

$$-\lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_8 + \lambda_{10} - \lambda_{13} + \lambda_{14} + 0{,}7'' = 0. \qquad (4)$$

Nun wird der Winkel Richtung 7 — 6 im Punkte Oberblockland an die Seite H. O. gelegt; die so entstehende Seitengleichung hat auszudrücken, daß die Linie O.Be. durch den Punkt Be. geht. Dies wird ausgesprochen durch die Gleichung:

$$\frac{\text{O.K.}\cdot\text{Be.K.}\cdot\text{H.K.}}{\text{Be.K.}\cdot\text{H.K.}\cdot\text{O.K.}} = 1 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\sin(L_2-L_1+\lambda_2-\lambda_1)\sin(L_{14}-L_{12}+\lambda_{14}-\lambda_{12})\sin(L_6-L_5+\lambda_6-\lambda_5)}{\sin(L_7-L_5+\lambda_7-\lambda_5)\sin(L_3-L_2+\lambda_3-\lambda_2)\sin(L_{14}-L_{13}+\lambda_{14}-\lambda_{13})}=1. \quad (5)$$

Nun ist endlich noch der Winkel Richtung 2 — 1 beobachtet worden, dieser liefert die sechste Bedingungsgleichung:

$$L_2-L_1+\lambda_2-\lambda_1+L_7-L_5+\lambda_7-\lambda_5+L_{10}-L_9+\lambda_{10}-\lambda_9-180^0=0$$

oder $$-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_5+\lambda_7-\lambda_9+\lambda_{10}+0{,}7''=0. \quad (6)$$

Damit ist gleichzeitig auch der Bedingungsgleichung Genüge geschehen:

$$L_3-L_1+L_7-L_6+L_{13}-L_{12}+\lambda_3-\lambda_1+\lambda_7-\lambda_6+\lambda_{13}-\lambda_{12}-180^0=0.$$

Denn durch Addition der Gleichungen (3) und (6) und Subtraktion der Gleichung (4) wird sie erhalten.

Wenn man die Bedingungsgleichungen nach der Besselschen Anweisung aufstellt, erhält man keine Bedingungsgleichung zu viel und keine zu wenig.

Ist eine Gleichung falsch angesetzt, unrichtig linear gemacht oder ganz fortgelassen, so ist die Folge, daß die Bedingung, welche sie ausdrücken soll, nicht erfüllt wird, während eine überschüssige Bedingungsgleichung für das letzte $k=\frac{0}{0}$ liefert, d. h. die Rechnung ist nicht weiter ausführbar.

Zur Linearmachung der beiden Seitengleichungen benutzt man entweder den Taylorschen Lehrsatz, oder einfacher, weil sie von logarithmischem Bau sind, wendet man logarithmische Differenzen an.

Linearmachung der ersten Seitengleichung.

$\sin(90^0 43'\ 3{,}3''+\lambda_4-\lambda_2)$	$9{,}999966+0\ (\lambda_4-\lambda_2)$
$\sin(31^0 50' 12{,}1''+\lambda_{12}-\lambda_{11})$	$9{,}722222+3{,}4(\lambda_{12}-\lambda_{11})$
$\sin(138^0 32' 54{,}9''+\lambda_{14}-\lambda_{11}+\lambda_{17}-\lambda_{16})$	$9{,}820848-2{,}4(\lambda_{14}-\lambda_{11}+\lambda_{17}-\lambda_{16})$
Zähler	$9{,}543036+3{,}4(\lambda_{12}-\lambda_{11})$ $-2{,}4(\lambda_{14}-\lambda_{11}+\lambda_{17}-\lambda_{16})$
$\sin(143^0 15' 57{,}9''+\lambda_4-\lambda_2+\lambda_{16}-\lambda_{15})$	$9{,}776774-2{,}8(\lambda_4-\lambda_2+\lambda_{16}-\lambda_{15})$
$\sin(36^0 26' 24{,}1''+\lambda_4-\lambda_3)$	$9{,}773772+2{,}8(\lambda_4-\lambda_3)$
$\sin(79^0 22' 25{,}0''+\lambda_{14}-\lambda_{11})$	$9{,}992487+0{,}4(\lambda_{14}-\lambda_{11})$
Nenner	$9{,}543033-2{,}8(\lambda_4-\lambda_2+\lambda_{16}-\lambda_{15})$ $+2{,}8(\lambda_4-\lambda_3)+0{,}4(\lambda_{14}-\lambda_{11})$.

Oder diese Gleichung, ausgedrückt in Einheiten der sechsten Dezimalstelle, bringt:

$$-3{,}4\lambda_{11}+3{,}4\lambda_{12}+2{,}4\lambda_{11}-2{,}4\lambda_{14}+2{,}4\lambda_{16}-2{,}4\lambda_{17}-2{,}8\lambda_2$$
$$+2{,}8\lambda_4-2{,}8\lambda_{15}+2{,}8\lambda_{16}+2{,}8\lambda_3-2{,}8\lambda_4+0{,}4\lambda_{11}-0{,}4\lambda_{14}+3=0.$$

Falls man die λ mit gleichem Index zusammenzieht, ergibt sich die Seitenbedingungsgleichung in linearer Form:

$$-2{,}8\lambda_2+2{,}8\lambda_3-0{,}6\lambda_{11}+3{,}4\lambda_{12}-2{,}8\lambda_{14}-2{,}8\lambda_{15}$$
$$+5{,}2\lambda_{16}-2{,}4\lambda_{17}+3=0.$$

Wird zur Linearmachung eine siebenstellige Logarithmentafel benutzt, so rechnet man doch in Einheiten der sechsten Dezimalstelle, damit die Koeffizienten der λ in der Seitengleichung nicht zu sehr von 1, das ist der Koeffizient der Winkelgleichung, abweichen, alsdann werden die Normalgleichungen gleichförmiger.

Gehen wir jetzt zur Linearmachung der zweiten Seitengleichung über.

$\sin(37^0\,24'\,28{,}8''+\lambda_2-\lambda_1)$	$9{,}783537+2{,}7(\lambda_2-\lambda_1)$
$\sin(47^0\,32'\,12{,}9''+\lambda_{14}-\lambda_{12})$	$9{,}867888+1{,}9(\lambda_{14}-\lambda_{12})$
$\sin(5^0\,16'\,50{,}3''+\lambda_6-\lambda_5)$	$8{,}963949+22{,}8(\lambda_6-\lambda_5)$
Zähler	$8{,}615374+2{,}7(\lambda_2-\lambda_1)$ $+1{,}9(\lambda_{14}-\lambda_{12})+22{,}8(\lambda_6-\lambda_5)$
$\sin(49^0\,52'\,4{,}8''+\lambda_7-\lambda_5)$	$9{,}883413+1{,}8(\lambda_7-\lambda_5)$
$\sin(54^0\,16'\,39{,}2''+\lambda_3-\lambda_2)$	$9{,}909479+1{,}6(\lambda_3-\lambda_2)$
$\sin(3^0\,48'\,34{,}5''+\lambda_{14}-\lambda_{13})$	$8{,}822435+31{,}7(\lambda_{14}-\lambda_{13})$
Nenner	$8{,}615327+1{,}8(\lambda_7-\lambda_5)$ $+1{,}6(\lambda_3-\lambda_2)+31{,}7(\lambda_{14}-\lambda_{13})$.

Sodann Nenner vom Zähler subtrahiert, ergibt:

$$+2{,}7(\lambda_2-\lambda_1)+1{,}9(\lambda_{14}-\lambda_{12})+22{,}8(\lambda_6-\lambda_5)-1{,}8(\lambda_7-\lambda_5)$$
$$-1{,}6(\lambda_3-\lambda_2)-31{,}7(\lambda_{14}-\lambda_{13})+47=0$$

oder: $-2{,}7\lambda_1+4{,}3\lambda_2-1{,}6\lambda_3-21{,}0\lambda_5+22{,}8\lambda_6-1{,}8\lambda_7$
$$-1{,}9\lambda_{12}+31{,}7\lambda_{13}-29{,}8\lambda_{14}+47=0.$$

Wir haben für die letzte Seitengleichung in dem Viereck Be. H. K. O. die Ecke *K*. als Spitze gewählt. Dies geschah aus dem Grunde, damit die spitzen Winkel, nämlich Richtung 6 — 5 und 14—13, berücksichtigt wurden, bei ihnen sind nämlich die logarithmischen Differenzen. bei uns 22,8 bzw. 31,7, beträchtlich, und infolgedessen erhalten wir die günstigste Seitengleichung.

Nun werden die Bedingungsgleichungen, wobei wir ihre Reihenfolge ändern wollen, in folgendes Schema (s. u.) gebracht. Die Änderung der Reihenfolge wird deshalb vorgenommen, damit zu Anfang der Normalgleichungen nur ganze Zahlen als Koeffizienten vorkommen. Alsdann wird die Auflösung der Gleichungen vereinfacht.

Hierzu ist noch eine Bemerkung zu machen. Es muß nämlich für jede Bedingungsgleichung die Summe der Koeffizienten der λ jeder Station Null ergeben, welches unmittelbar aus ihrer Entstehung hervorgeht. Die siebente Gleichung ist die Summengleichung, welche durch direktes Addieren der darüberstehenden Gleichungen gewonnen wird. Bilden wir hieraus die Normalgleichungen, so ergibt sich:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
6\,k_1 & -\,2\,k_2 & +\,0\,k_3 & +\,0\,k_4 & +\,1{,}6\,k_5 & -\,0{,}3\,k_6 & +0{,}7=0 \\
-2\,k_1 & +\,6\,k_2 & +\,2\,k_3 & -\,2\,k_4 & -\,0{,}6\,k_5 & -\,33{,}8\,k_6 & +0{,}9=0 \\
+0\,k_1 & +\,2\,k_2 & +\,6\,k_3 & +\,2\,k_4 & -\,2{,}8\,k_5 & -\,17{,}7\,k_6 & +0{,}7=0 \\
+0\,k_1 & -\,2\,k_2 & +\,2\,k_3 & +\,6\,k_4 & -\,2{,}8\,k_5 & +\,26{,}2\,k_6 & +0{,}7=0 \\
+1{,}6k_1 & -\,0{,}6k_2 & -\,2{,}8k_3 & -\,2{,}8k_4 & +\,76{,}08k_5 & +\,60{,}46k_6 & +\;3=0 \\
-0{,}3k_1 & -33{,}8k_2 & -17{,}7k_3 & +26{,}2k_4 & +\,60{,}46k_5 & +2888{,}96k_6 & +\,47=0 \\
\hline
+5{,}3k_1 & -30{,}4k_2 & -10{,}5k_3 & +29{,}4k_4 & +131{,}94k_5 & +2923{,}82k_6 & +53=0.
\end{array}
$$

Für die Bestimmung der k hat man:

$$
\begin{array}{lll}
k_1 = -\,0{,}2456 & k_3 = +\,0{,}0136 & k_5 = -\,0{,}0291 \\
k_2 = -\,0{,}4074 & k_4 = -\,0{,}1892 & k_6 = -\,0{,}0187.
\end{array}
$$

Bedingungungs-

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
		− 1	+ 1						
	− 1	+ 1					− 1	+ 1	
				− 1	+ 1		− 1		+ 1
− 1	+ 1			− 1		+ 1		− 1	+ 1
	− 2,8	+ 2,8							
− 2,7	+ 4,3	− 1,6		− 21,0	+ 22,8	− 1,8			
− 3,7	+ 1,5	+ 1,2	+ 1	− 23,0	+ 23,8	− 0,8	− 2		+ 2

Diese Werte in die Summengleichung eingeführt, liefert uns eine Probe für die richtige Auflösung der Normalgleichungen: $5{,}3\,k_1 - 30{,}4\,k_2 - 10{,}5\,k_3 + 29{,}4\,k_4 + 131{,}94\,k_5 + 2923{,}82\,k_6$ ergibt $-53{,}14$, während es -53 sein soll. Demnach ist genügende Übereinstimmung vorhanden.

Um die λ zu berechnen, folgt man den Vertikalkolumnen in den Bedingungsgleichungen: $\lambda_1 = -1k_4 - 2{,}7k_6$, $\lambda_2 = -1k_2 + 1k_4 - 2{,}8k_5 + 4{,}3k_6$ usw. Führen wir die Werte für k ein, so folgt:

$$\begin{array}{lll}
\lambda_1 = +0{,}24 & & \\
\lambda_2 = +0{,}22 & \lambda_5 = +0{,}57 & \lambda_8 = +0{,}40 \\
\lambda_3 = -0{,}21 & \lambda_6 = -0{,}42 & \lambda_9 = -0{,}22 \\
\lambda_4 = -0{,}25 & \lambda_7 = -0{,}16 & \lambda_{10} = -0{,}18 \\
\hline
[\lambda] = 0{,}00 & [\lambda] = -0{,}01 & [\lambda] = 0{,}00.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{11} = +0{,}27 & \\
\lambda_{12} = +0{,}10 & \lambda_{15} = +0{,}33 \\
\lambda_{13} = -0{,}60 & \lambda_{16} = -0{,}15 \\
\lambda_{14} = +0{,}24 & \lambda_{17} = -0{,}18 \\
\hline
[\lambda] = +0{,}01 & [\lambda] = 0{,}00.
\end{array}$$

Als Probe gilt: $[\lambda]$ muß stationsweise gleich Null sein; denn die Glieder, aus welchen die λ entstehen, heben sich gegenseitig in ihren Summen auf. Falls wir zur Berechnung des mittleren Fehlers einer Beobachtung schreiten, ist $[\lambda\lambda]$ zu berechnen: $[\lambda\lambda] = 1{,}65$. Zur Probe haben wir die Gleichung zu benutzen: $[\lambda\lambda] = -[wk]$. Sie ergibt

gleichungen.

λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{15}	λ_{16}	λ_{17}	$+w$	$=0$
-1	$+1$			-1		$+1$	$+0{,}7$	$=0$
	-1		$+1$				$+0{,}9$	$=0$
		-1	$+1$				$+0{,}7$	$=0$
							$+0{,}7$	$=0$
$-0{,}6$	$+3{,}4$		$-2{,}8$	$-2{,}8$	$+5{,}2$	$-2{,}4$	$+3$	$=0$
	$-1{,}9$	$+31{,}7$	$-29{,}8$				$+47$	$=0$
$-1{,}6$	$+1{,}5$	$+30{,}7$	$-30{,}6$	$-3{,}8$	$+5{,}2$	$-1{,}4$	$+53$	$=0$

1,63, welcher Wert mit den eben gefundenen ebenfalls genügend übereinstimmt. Es folgt alsdann:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{1,64}{6}} = \pm\,0,52''.$$

Fügen wir die λ zu den zugehörigen Beobachtungen, so erhält man die ausgeglichenen Werte, nämlich:

Station Bewässerungsanstalt.	Station Oberblockland.
1. $0^0\ 0'\ 0''$	
2. $37^0\ 24'\ 28,8''$	5. $0^0\ 0'\ 0''$
3. $91^0\ 41'\ 7,5''$	6. $5^0\ 16'\ 49,3''$
4. $128^0\ 7'\ 31,6''$	7. $49^0\ 52'\ 4,1''$

Station Kuhgraben.	Station Horn.	Station Bürgerpark.
8. $0^0\ 0'\ 0''$	11. $0^0\ 0'\ 0''$	15. $0^0\ 0'\ 0''$
9. $78^0\ 11'\ 8,2''$	12. $31^0\ 50'\ 11,9''$	16. $52^0\ 32'\ 54,1''$
10. $170^0\ 54'\ 35,3''$	13. $75^0\ 33'\ 49,6''$	17. $111^0\ 43'\ 24,0''$
	14. $79^0\ 22'\ 25,0''$.	

Schließlich ist die Schlußkontrolle durchzuführen, welche darin besteht, daß man die ausgeglichenen Beobachtungen in die Bedingungsgleichungen setzt. Diese müssen durch sie erfüllt werden:

Dreieck Be.H.Bü.	Dreieck Be.K.H.	Dreieck O.K.H.
$36^0\ 26'\ 24,1''$	$54^0\ 16'\ 38,7''$	$5^0\ 16'\ 49,3''$
$31^0\ 50'\ 11,9''$	$78^0\ 11'\ 8,2''$	$170^0\ 54'\ 35,3''$
$111^0\ 43'\ 24,0''$	$47^0\ 32'\ 13,1''$	$3^0\ 48'\ 35,4''$
$180^0\ 0'\ 0,0''$	$180^0\ 0'\ 0,0''$	$180^0\ 0'\ 0,0''$

Dreieck O.Be.K.
$49^0\ 52'\ 4,1''$
$92^0\ 43'\ 27,1''$
$37^0\ 24'\ 28,8''$
$180^0\ 0'\ 0,0''$.

Auch die Seitengleichungen stimmen genügend überein, denn es ist:

sin $90^0\ 43'\ 2,8''$	9,999966	sin $143^0\ 15'\ 56,9''$	9,776777
sin $31^0\ 50'\ 11,9''$	9,722221	sin $36^0\ 26'\ 24,1''$	9,773772
sin $138^0\ 32'\ 54,9''$	9,820848	sin $79^0\ 22'\ 25,0''$	9,992487
Zähler	9,543035	Nenner	9,543036

sin 37° 24′ 28,8″	9,783537	sin 49° 52′ 4,1″	9,883411
sin 47° 32′ 13,1″	9,867888	sin 54° 16′ 38,7″	9,909478
sin 5° 16′ 49,3″	8,963926	sin 3° 48′ 35,4″	8,822463
Zähler	8,615351	Nenner	8,615352.

Der kleine mittlere Fehler von $\pm 0{,}52''$ zeigt, daß die Kleintriangulation von Bremen ausgezeichnet ausgeführt ist.

Diese Art der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen wird von der Preußischen Landestriangulation bei den Hauptdreiecken angewendet.

5. Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit ungleichen Gewichten.

Haben die vorliegenden Messungen, welche nach bedingten Beobachtungen ausgeglichen werden sollen, ungleiche Gewichte, so gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen. Die Aufstellung und Linearmachung der Bedingungsgleichungen unterscheidet sich nicht von der gleicher Genauigkeit, so daß die drei Gleichungen heißen:

$$\left.\begin{aligned} p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + \dots + p_n\lambda_n + w_1 = 0 \\ q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + \dots + q_n\lambda_n + w_2 = 0 \\ r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + \dots + r_n\lambda_n + w_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt nun, daß $[\lambda\lambda g]$ ein Minimum werde, unter strenger Erfüllung der Bedingungsgleichungen (1). Dies ist der Fall, wenn:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 g_1 + \lambda_2^2 g_2 + \cdots + \lambda_n^2 g_n - 2k_1\,(p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n + w_1) \\ - 2k_2(q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \cdots + q_n\lambda_n + w_2) \\ - 2k_3\,(r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \cdots + r_n\lambda_n + w_3) \end{aligned}$$

den kleinsten Wert erhält. k_1, k_2, k_3 sind die Lagrangeschen Korrelaten.

Oder:
$$\begin{aligned} \lambda_1 g_1 &= p_1 k_1 + q_1 k_2 + r_1 k_3 \\ \lambda_2 g_2 &= p_2 k_1 + q_2 k_2 + r_2 k_3 \end{aligned} \qquad \text{usw.,}$$

d. h. es muß sein:
$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{p_1}{g_1}k_1 + \frac{q_1}{g_1}k_2 + \frac{r_1}{g_1}k_3 \\ \lambda_2 &= \frac{p_2}{g_2}k_1 + \frac{q_2}{g_2}k_2 + \frac{r_2}{g_2}k_3 \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \lambda_n &= \frac{p_n}{g_n}k_1 + \frac{q_n}{g_n}k_2 + \frac{r_n}{g_n}k_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Setzt man die so gefundenen Werte in die Bedingungsgleichungen (1) ein, so werden die Normalgleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{pp}{g}\right]k_1+\left[\frac{pq}{g}\right]k_2+\left[\frac{pr}{g}\right]k_3+w_1=0\\ \left[\frac{pq}{g}\right]k_1+\left[\frac{qq}{g}\right]k_2+\left[\frac{qr}{g}\right]k_3+w_2=0\\ \left[\frac{pr}{g}\right]k_1+\left[\frac{qr}{g}\right]k_2+\left[\frac{rr}{g}\right]k_3+w_3=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Eine Probe erhält man durch das Mitführen der Summengleichung:

$$\left[\frac{ps}{g}\right]k_1+\left[\frac{qs}{g}\right]k_2+\left[\frac{rs}{g}\right]k_3+[w]=0. \qquad (4)$$

welche in doppelter Weise auszurechnen ist. Das Nähere siehe Kap. 4, S. 38.

$[\lambda\lambda g]$ ist alsdann doppelt zu berechnen. Einmal aus den λ, indem man das Quadrat von λ mit dem jedesmaligen Gewicht multipliziert und die Glieder addiert, zum anderen, indem man bildet:

$$[\lambda\lambda g]=-[wk]. \qquad (5)$$

Die Beweisführung ist ähnlich wie bei gleichen Gewichten.

Für den mittleren Fehler von der Gewichtseinheit ergibt sich:

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{s}}. \qquad (6)$$

Endlich werden die ausgeglichenen Werte berechnet, also die λ zu ihren Beobachtungen gefügt und zugesehen, ob die ersteren die Bedingungsgleichungen $\varphi_1(L_1+\lambda_1, L_2+\lambda_2, L_n+\lambda_n)$ usw. erfüllen. Trifft dieses zu, so ist die Richtigkeit der Ausgleichung bestätigt.

6. Berechnung des mittleren Fehlers einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen.

Wenn es sich um die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Funktion der ausgeglichenen Messungen handelt, falls man nach bedingten Beobachtungen ausgleicht, so hat dieses folgendermaßen zu geschehen: Die Funktion sei $o=F(L_1+\lambda_1, L_2+\lambda_2, \cdots, L_n+\lambda_n)$. o sei z. B. eine Seite bei einer ausgeglichenen Triangulation. Die Funktion kann nicht sämtliche vorliegende Beobachtungen enthalten, sondern im günstigsten Falle nur die unabhängigen, es sind folglich die Koeffizienten vieler L gleich Null.

Gilt es, den mittleren Fehler einer Funktion der unverbesserten Beobachtung zu ermitteln, so ist nach dem Früheren:

$$\mu_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\right)^2 \mu_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\right)^2 \mu_n^2. \tag{1}$$

Setzt man: $\frac{\partial F}{\partial L_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial L_2} = f_2, \ldots, \frac{\partial F}{\partial L_n} = fn,$

so wird

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left[\frac{ff}{g}\right]. \tag{2}$$

Anders ist es jedoch, wenn die Funktion lautet:

$$o = F(L_1 + \lambda_1, \ L_2 + \lambda_2, \ldots, L_n + \lambda_n) \tag{3}$$

wo die $L_1 + \lambda_1, \quad L_2 + \lambda_2 \ldots L_n + \lambda_n$ die durch Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen gefundenen Werte der Messungen darstellen. Die λ sind gleichfalls Funktionen der L, wie sich aus den Korrelatengleichungen ergibt, wo die einzelnen λ von den Größen k abhängen. Diese sind Funktionen der L, weil die Absolutglieder der Normalgleichungen w sind, und $w_i = \varphi_i(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ ist.

Führen wir dies aus, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} o = F(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, \ldots, L_n + \lambda_n) = F(L_1, L_2, \ldots, L_n) \\ + \frac{\partial F}{\partial L_1}\lambda_1 + \frac{\partial F}{\partial L_2}\lambda_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial L_n}\lambda_n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die λ gehen aus den Korrelatengleichungen hervor. Diese lauten:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{p_1}{g_1} k_1 + \frac{q_1}{g_1} k_2 + \frac{r_1}{g_1} k_3 \\ \lambda_2 &= \frac{p_2}{g_2} k_1 + \frac{q_2}{g_2} k_2 + \frac{r_2}{g_2} k_3 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n &= \frac{p_n}{g_n} k_1 + \frac{p_n}{g_n} k_2 + \frac{r_n}{g_n} k_3, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und die k_1, k_2 und k_3 werden aus den Normalgleichungen gewonnen. Diese sind:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{pp}{g}\right] k_1 + \left[\frac{pq}{g}\right] k_2 + \left[\frac{pr}{g}\right] k_3 + w_1 = 0 \\ \left[\frac{pq}{g}\right] k_1 + \left[\frac{qq}{g}\right] k_2 + \left[\frac{qr}{g}\right] k_3 + w_2 = 0 \\ \left[\frac{pr}{g}\right] k_1 + \left[\frac{qr}{g}\right] k_2 + \left[\frac{rr}{g}\right] k_3 + w_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und zwar ist:

$$\left.\begin{array}{c} w_1 = \varphi_1(L_1, L_2, \ldots, L_n), \quad w_2 = \varphi_2(L_1, L_2, \ldots, L_n) \quad \text{und} \\ w_3 = \varphi_3(L_1, L_2, \ldots, L_n). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Um die Rechnung durchzuführen, hat man zunächst die erste der Gleichungen (5) mit $\frac{\partial F}{\partial L_1} = f_1$, die zweite mit f_2 und die $n$te mit f_n zu multiplizieren und die Summe zu $F(L_1, L_2, \ldots L_n)$ zu addieren, worauf man erhält:

$$\left.\begin{array}{c} F(L_1 + \lambda_1, L_2 + \lambda_2, \ldots, L_n + \lambda_n) = F(L_1, L_2, \ldots L_n) \\ + \left[\frac{pf}{g}\right] k_1 + \left[\frac{qf}{g}\right] k_2 + \left[\frac{rf}{g}\right] k_3. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Um nun k_1, k_2 und k_3 durch w oder gleich $\varphi(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ auszudrücken, können wir wie folgt verfahren. Es ist:

$$k_1 = -w_1 Q_{1,1} - w_2 Q_{1,2} - w_3 Q_{1,3}, \quad (9)$$

wenn wir setzen:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{pp}{g}\right] Q_{1,1} + \left[\frac{pq}{g}\right] Q_{1,2} + \left[\frac{pr}{g}\right] Q_{1,3} = 1 \\ \left[\frac{pq}{g}\right] Q_{1,1} + \left[\frac{qq}{g}\right] Q_{1,2} + \left[\frac{qr}{g}\right] Q_{1,3} = 0 \\ \left[\frac{pr}{g}\right] Q_{1,1} + \left[\frac{qr}{g}\right] Q_{1,2} + \left[\frac{rr}{g}\right] Q_{1,3} = 0; \end{array}\right\} \quad (10)$$

sodann ist: $\quad k_2 = -w_1 Q_{2,1} - w_2 Q_{2,2} - w_3 Q_{2,3}, \quad (11)$

falls $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$ und $Q_{2,3}$ aus den Gleichungen gewonnen wird:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{pp}{g}\right] Q_{2,1} + \left[\frac{pq}{g}\right] Q_{2,2} + \left[\frac{pr}{g}\right] Q_{2,3} = 0 \\ \left[\frac{pq}{g}\right] Q_{2,1} + \left[\frac{qq}{g}\right] Q_{2,2} + \left[\frac{qr}{g}\right] Q_{2,3} = 1 \\ \left[\frac{pr}{g}\right] Q_{2,1} + \left[\frac{qr}{g}\right] Q_{2,2} + \left[\frac{rr}{g}\right] Q_{2,3} = 0; \end{array}\right\} \quad (12)$$

und endlich: $\quad k_3 = -w_1 Q_{3,1} - w_2 Q_{3,2} - w Q_{3,3}, \quad (13)$

wo die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{pp}{g}\right] Q_{3,1} + \left[\frac{pq}{g}\right] Q_{3,2} + \left[\frac{pr}{g}\right] Q_{3,3} = 0 \\ \left[\frac{pq}{g}\right] Q_{3,1} + \left[\frac{qq}{g}\right] Q_{3,2} + \left[\frac{qr}{g}\right] Q_{3,3} = 0 \\ \left[\frac{pr}{g}\right] Q_{3,1} + \left[\frac{qr}{g}\right] Q_{3,2} + \left[\frac{rr}{g}\right] Q_{3,3} = 1 \end{array}\right\} \quad (14)$$

aufzulösen sind.

Fassen wir dies zusammen, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} o &= F(L_1, L_2, \ldots, L_n) \\ &- \varphi_1(L_1, L_2, \ldots, L_n)\left\{\left[\frac{pf}{g}\right] Q_{1,1} + \left[\frac{qf}{g}\right] Q_{2,1} + \left[\frac{rf}{g}\right] Q_{3,1}\right\} \\ &- \varphi_2(L_1, L_2, \ldots, L_n)\left\{\left[\frac{pf}{g}\right] Q_{1,2} + \left[\frac{qf}{g}\right] Q_{2,2} + \left[\frac{rf}{g}\right] Q_{3,2}\right\} \\ &- \varphi_3(L_1, L_2, \ldots, L_n)\left\{\left[\frac{pf}{g}\right] Q_{1,3} + \left[\frac{qf}{g}\right] Q_{2,3} + \left[\frac{rf}{g}\right] Q_{3,3}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Dieser Ausdruck wird vereinfacht durch Einführung der Größen t_1, t_2 und t_3, welche den Namen Übertragungsgrößen tragen. Die t sind aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{pp}{g}\right] t_1 + \left[\frac{pq}{g}\right] t_2 + \left[\frac{pr}{g}\right] t_3 &= \left[\frac{pf}{g}\right] \\ \left[\frac{pq}{g}\right] t_1 + \left[\frac{qq}{g}\right] t_2 + \left[\frac{qr}{g}\right] t_3 &= \left[\frac{qf}{g}\right] \\ \left[\frac{pr}{g}\right] t_1 + \left[\frac{qr}{g}\right] t_2 + \left[\frac{rr}{g}\right] t_3 &= \left[\frac{rf}{g}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Da die Koeffizienten links dieser Gleichungen dieselben sind, wie die der Normalgleichungen, so wird die Ermittlung der Übertragungsgrößen im Anschluß an die Auflösung der Normalgleichungen ausgeführt.

Durch Entwicklung der Größen t_1, t_2 und t_3 mittels der Q erhält man:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \left[\frac{pf}{g}\right] Q_{1,1} + \left[\frac{qf}{g}\right] Q_{1,2} + \left[\frac{rf}{g}\right] Q_{1,3} \\ t_2 &= \left[\frac{pf}{g}\right] Q_{2,1} + \left[\frac{qf}{g}\right] Q_{2,2} + \left[\frac{rf}{g}\right] Q_{2,3} \\ t_3 &= \left[\frac{pf}{g}\right] Q_{3,1} + \left[\frac{qf}{g}\right] Q_{3,2} + \left[\frac{rf}{g}\right] Q_{3,3}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Q sind dieselben Größen wie in den Gleichungen (10) bzw. (12) und (14) angegeben.

Wir erhalten also für Gleichung (15) unter Beachtung $Q_{h,i} = Q_{i,h}$

$$\left.\begin{aligned} o = F(L_1, L_2, \ldots, L_n) - \varphi_1(L_1, L_2, \ldots, L_n)\, t_1 \\ - \varphi_2(L_1, L_2, \ldots, L_n)\, t_2 - \varphi_3(L_1, L_2, \ldots, L_n)\, t_3. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Der Beweis, daß $Q_{h \cdot i} = Q_{i \cdot h}$ ist, ist S. 44. nachzulesen.

Wir können jetzt, nachdem wir 0 als Funktion von L dargestellt haben, zu dem mittleren Fehler übergehen. Dieser ist nach S. 17:

$$\left.\begin{aligned}\mu_o^2 = (f_1 - p_1 t_1 - q_1 t_2 - r_1 t_3)^2\, \mu_1^2 \\ + (f_2 - p_2 t_1 - q_2 t_2 - r_2 t_3)^2\, \mu_2^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (f_n - p_n t_1 - q_n t_2 - r_n t_3)^2\, \mu_3^2.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Oder falls wir anders gruppieren:

$$\left.\begin{aligned}\mu_o^2 = \mu^2 \Big\{\Big(\Big[\frac{ff}{g}\Big] - \Big[\frac{pf}{g}\Big] t_1 - \Big[\frac{qf}{g}\Big] t_2 - \Big[\frac{rf}{g}\Big] t_3\Big) \\ - \Big(\Big[\frac{pf}{g}\Big] - \Big[\frac{pp}{g}\Big] t_1 - \Big[\frac{pq}{g}\Big] t_2 - \Big[\frac{pr}{g}\Big] t_3\Big) t_1 \\ - \Big(\Big[\frac{qf}{g}\Big] - \Big[\frac{pq}{g}\Big] t_1 - \Big[\frac{qq}{g}\Big] t_2 - \Big[\frac{qr}{g}\Big] t_3\Big) t_2 \\ - \Big(\Big[\frac{rf}{g}\Big] - \Big[\frac{pr}{g}\Big] t_1 - \Big[\frac{qr}{g}\Big] t_2 - \Big[\frac{rr}{g}\Big] t_3\Big) t_3\Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Nun fällt die zweite, dritte und vierte Zeile dieser Formel nach Gleichung (16) aus der Rechnung heraus. Folglich wird:

$$\mu_o^2 = \mu^2\Big\{\Big[\frac{ff}{g}\Big] - \Big(\Big[\frac{pf}{g}\Big] t_1 + \Big[\frac{qf}{g}\Big] t_2 + \Big[\frac{rf}{g}\Big] t_3\Big)\Big\}. \tag{21}$$

Dies ist die endgültige Gleichung. Wir können ihr aber auch noch eine andere Form geben. Falls wir das Gleichungssystem (16) nach dem Gaußschen Verfahren auflösen, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} t_1 = \frac{\Big[\frac{pf}{g}\Big]}{\Big[\frac{pp}{g}\Big]} - \frac{\Big[\frac{pq}{g}\Big]}{\Big[\frac{pp}{g}\Big]} t_2 - \frac{\Big[\frac{pr}{g}\Big]}{\Big[\frac{pp}{g}\Big]} t_3 \\ t_2 = \frac{\Big[\frac{qf\cdot 1}{g}\Big]}{\Big[\frac{qq\cdot 1}{g}\Big]} - \frac{\Big[\frac{qr\cdot 1}{g}\Big]}{\Big[\frac{qq\cdot 1}{g}\Big]} t_3 \\ t_3 = \frac{\Big[\frac{rf\cdot 2}{g}\Big]}{\Big[\frac{rr\cdot 2}{g}\Big]}.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Oder Gleichung (21) erhält die Form:

$$\mu_o^2 = \mu^2\left\{\Big[\frac{ff}{g}\Big] - \left(\frac{\Big[\frac{pf}{g}\Big]^2}{\Big[\frac{pp}{g}\Big]} + \frac{\Big[\frac{qf\cdot 1}{g}\Big]^2}{\Big[\frac{qq\cdot 1}{g}\Big]} + \frac{\Big[\frac{rf\cdot 2}{g}\Big]^2}{\Big[\frac{rr\cdot 2}{g}\Big]}\right)\right\}, \tag{23}$$

wofür man auch mit leicht zu übersehender Beziehung hat:

$$\mu_0^2 = \mu^2 \{I - II\}.$$

Handelt es sich darum, den mittleren Fehler einer ausgeglichenen Beobachtung, zum Beispiel $L_2 + \lambda_2$, zu ermitteln, so ist $f_2 = 1$; die übrigen f sind sämtlich Null. Weiterhin ist nach den oben aufgestellten Regeln zu verfahren.

7. Beispiel zur Ausgleichung bedingter Beobachtungen ungleicher Genauigkeit: Ausgleichung eines Nivellementsnetzes.

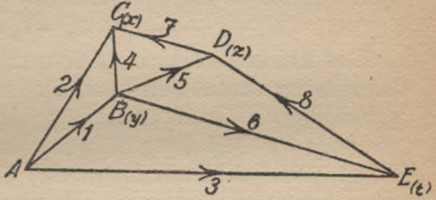


Fig. 9.

Die Ausgleichung desselben Beispiels, welche nach vermittelnden Beobachtungen erfolgte, soll jetzt nach bedingten geschehen. Das Beispiel hieß: Es sollen die folgenden Nivellementszüge, welche ein Netz bilden, ausgeglichen werden (Fig. 9):

$\left(\frac{B}{A}\right) = L_1 = 189{,}404,$	Länge des Zuges	3,1 km
$\left(\frac{C}{A}\right) = L_2 = 736{,}977$	„	9,3 „
$\left(\frac{E}{A}\right) = L_3 = 376{,}607$	„	59,7 „
$\left(\frac{C}{B}\right) = L_4 = 547{,}576$	„	6,2 „
$\left(\frac{D}{B}\right) = L_5 = 273{,}528$	„	16,1 „
$\left(\frac{E}{B}\right) = L_6 = 187{,}274$	„	35,1 „
$\left(\frac{C}{D}\right) = L_7 = 274{,}082$	„	12,1 „
$\left(\frac{D}{E}\right) = L_8 = 86{,}261$	„	9,3 „

Zunächst haben wir die Bedingungsgleichungen aufzustellen. Indem man A als Ausgangspunkt ansieht, sind die Höhen der vier anderen Punkte vollkommen bestimmt, falls fehlerfrei beobachtet wurde, durch die Messungen L_1, L_2, L_3 und L_5. Jede der vier überschüssigen Messungen liefert sonach eine Bedingungsgleichung.

Durch den Hinzutritt der Messung L_4 wird das Dreieck ACB geschlossen. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$-(L_1 + \lambda_1) + (L_2 + \lambda_2) - (L_4 + \lambda_4) = 0,$$

folglich, wenn wir für die Beobachtungen L ihre Werte einführen und sie dann zusammenziehen, lautet die Bedingungsgleichung in der Form, in der sie für uns brauchbar ist:

$$-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 3 = 0. \qquad (1)$$

Das Absolutglied ist in Millimetern verstanden. Hierbei ist es vorteilhaft, wenn man die Figuren, also im vorliegenden Falle das Dreieck, rechtsläufig umfährt, denn die Folge hiervon ist, daß man als Summengleichung die Bedingungsgleichung für das äußere Polygon $ACDE$ erhält Die Zwischenmessungen L_1, L_4, L_5 und L_6 fallen bei dieser Anordnung der Bedingungsgleichungen in der Summengleichung weg; denn $L_1 + \lambda_1$ ist positiv im Dreieck ABE, dagegen negativ im Dreieck ACB. Die Summengleichung kann daher doppelt aufgestellt werden, einmal direkt, zum anderen durch Addition der über ihr befindlichen Bedingungsgleichungen.

Die zweite, dritte und vierte Bedingungsgleichung lautet daher:

$$+\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_7 - 34 = 0, \quad +\lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_8 - 7 = 0,$$
$$+\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_6 + 71 = 0.$$

Um die Normalgleichungen bequem aufstellen zu können, bringen wir die Bedingungsgleichungen in ein Schema. Wir fügen noch $\frac{1}{g}$ = Entfernung der Nivellementsstrecke bei, ferner die Summengleichung, welche zeigt, daß die Gleichungen 1—4 richtig aufgestellt sind.

$^1/_g$	3,1	9,3	59,7	6,2	16,1	35,1	12,1	9,3		
Nr.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	w	$=0$
1	-1	$+1$		-1					-3	$=0$
2				$+1$	-1		-1		-34	$=0$
3					$+1$	-1		-1	-7	$=0$
4	$+1$		-1			$+1$			$+71$	$=0$
Se.		$+1$	-1				-1	-1	$+27$	$=0$
f			$+1$							
f'				$+1$		-1				

Schließlich haben wir noch f und f' angehängt, das heißt, wir wollen wissen, welches der mittlere Fehler von $L_3 + \lambda_3$ und von $L_4 + \lambda_4 - (L_6 + \lambda_6)$ ist; Fragen, welche wir schon mittels vermittelnder Beobachtungen beantwortet haben.

Die Normalgleichungen, welche auf Grund der obigen Bedingungsgleichungen und der Gewichte aufgestellt sind, lauten:

	f	f'
$18{,}6\,k_1 - 6{,}2\,k_2 + 0\;k_3 - 3{,}1\,k_4 - 3 = 0$	0	$-6{,}2$
$-6{,}2\,k_1 + 34{,}4\,k_2 - 16{,}1\,k_3 + 0\;k_4 - 34 = 0$	0	$+6{,}2$
$+0\;k_1 - 16{,}1\,k_2 + 60{,}5\,k_3 - 35{,}1\,k_4 - 7 = 0$	0	$+35{,}1$
$-3{,}1\,k_1 + 0\;k_2 - 35{,}1\,k_3 + 97{,}9\,k_4 + 71 = 0$	$-59{,}7$	$-35{,}1$
$+9{,}3\,k_1 + 12{,}1\,k_2 + 9{,}3\,k_3 + 59{,}7\,k_4 + 27 = 0$	$-59{,}7$	0

Wir haben auch die Summe für $[af] + [bf] + [cf] + [df]$, das heißt $[sf]$, ebenso $[sf']$ mitgenommen.

Die Bestimmung der Größen k erfolgt mittels der Rechenmaschine, eines Apparates, welcher gestattet, durch ein paar Kurbeldrehungen Multiplikationen und Divisionen auszuführen. Das Rechenschema ist wohl nach S. 46—48 klar.

	f	f'
$+18{,}6\,k_1 - 6{,}2\,k_2 + 0\;k_3 - 3{,}1\,k_4 - 3 = 0$	0	$-6{,}2$
$1\,k_1 - 0{,}33333\,k_2 - 0{,}16667\,k_4 - 0{,}16129 = 0$		$-0{,}33333$
$-6{,}2\,k_1 + 34{,}4\,k_2 - 16{,}1\,k_3 + 0\;k_4 - 34 = 0$	0	$+6{,}2$
$-2{,}0666\,k_2 - 1{,}0333\,k_4 - 1 = 0$		$-2{,}0667$
$0\,k_1 - 16{,}1\,k_2 + 60{,}5\,k_3 - 35{,}1\,k_4 - 7 = 0$	0	$+35{,}1$
$-3{,}1\,k_1 + 0\;k_2 - 35{,}1\,k_3 + 97{,}9\,k_4 + 71 = 0$	$-59{,}7$	$-35{,}1$
$-0{,}5167\,k_4 - 0{,}5$	0	$-1{,}0333$
$9{,}3\,k_1 + 12{,}1\,k_2 + 9{,}3\,k_3 + 59{,}7\,k_4 + 27 = 0$	$-59{,}7$	0
$-9{,}3 + 3{,}1000 + 1{,}5500 + 1{,}5 = 0$	0	$+3{,}1$

	f	f'
$+32{,}3334\,k_2 - 16{,}1\,k_3 - 1{,}0333\,k_4 - 35{,}0000 = 0$	0	$+4{,}1333$
$1\,k_2 - 0{,}49794\,k_3 - 0{,}03196\,k_4 - 1{,}08247 = 0$		$+0{,}12784$
$-16{,}1\,k_2 + 60{,}5\,k_3 - 35{,}1\,k_4 - 7 = 0$	0	$+35{,}1$
$-8{,}0168\,k_3 - 0{,}5145\,k_4 - 17{,}4278 = 0$		$+2{,}0582$
$-1{,}0333\,k_2 - 35{,}1\,k_3 + 97{,}3833\,k_4 + 70{,}5 = 0$	$-59{,}7$	$-36{,}1333$
$-0{,}0330\,k_4 - 1{,}1185$	0	$+0{,}1321$
$+15{,}2000\,k_2 + 9{,}3\,k_3 + 61{,}2500\,k_4 + 28{,}5 = 0$	$-59{,}7$	$+3{,}1$
$-15{,}2000\,k_2 + 7{,}5687\,k_3 + 0{,}4858\,k_4 + 16{,}4535 = 0$	0	$-1{,}9432$

	f	f'	
$+52{,}4832\,k_3 - 35{,}6145\,k_4 - 24{,}4278 = 0$	0	$+37{,}1582$	
$+\quad 1\,k_3 - 0{,}67859\,k_4 - 0{,}46544 = 0$	0	$+0{,}70802$	
$-35{,}6145\,k_3 + 97{,}3503\,k_4 + 69{,}3815 = 0$	$-59{,}7$	$-36{,}0012$	(3)
$-24{,}1676\,k_4 - 16{,}5764$	0	$+25{,}2150$	
$+16{,}8687\,k_3 + 61{,}7358\,k_4 + 44{,}9535 = 0$	$-59{,}7$	$+1{,}1568$	
$-16{,}8687 \quad +11{,}4469 \quad +7{,}8514 = 0$	0	$-11{,}9430$	

	f	f'	
$+73{,}1827\,k_4 + 52{,}8051 = 0$	$-59{,}7$	$-10{,}7862$	(4)
$+\quad 1\,k_4 + 0{,}7222 = 0$	$-0{,}81576$	$-0{,}14739$	
$+73{,}1827\,k_4 + 52{,}8049 = 0$	$-59{,}7$	$-10{,}7862$	

Die Auflösung dieser Gleichungen nach k liefert

$$k_1 = +0{,}3900, \qquad k_2 = +1{,}0471,$$
$$k_3 = -0{,}0246 \text{ und } k_4 = -0{,}7222.$$

Daß wir richtig aufgelöst haben, wird durch Einsetzen der k in die Summengleichung bestätigt:

$$9{,}3\,k_1 + 12{,}1\,k_2 + 9{,}3\,k_3 + 59{,}7\,k_4 = -27{,}05,$$

während es $-27{,}00$ sein muß. Hier ist genügend Übereinstimmung vorhanden.

Gehen wir sodann zur Berechnung der λ über, so wird erhalten:

$$\lambda_1 = 3{,}1\,(-k_1 + k_4) = -\ 3{,}45 \qquad \lambda_5 = -17{,}25$$
$$\lambda_2 = +9{,}3\,k_1 = +\ 3{,}63 \qquad \lambda_6 = -24{,}49$$
$$\lambda_3 = +43{,}12 \qquad \lambda_7 = -12{,}70$$
$$\lambda_4 = +\ 4{,}07 \qquad \lambda_8 = +\ 0{,}23.$$

Es bestimmt sich $\qquad [\lambda\lambda g] = 87{,}98,$

während die Gleichung $[\lambda\lambda g] = -[wk] = +87{,}88$ ergibt.

Die Probe paßt demnach!

$$\mu_{1\,\mathrm{km}} = \pm\sqrt{\frac{87{,}98}{4}} = \pm\sqrt{21{,}99} = \pm\ 4{,}7\ \mathrm{mm}.$$

Wir haben jetzt die λ zu den Beobachtungen zu fügen, um die ausgeglichenen Werte zu erhalten:

$$L_1 + \lambda_1 = 189{,}4005 \qquad L_5 + \lambda_5 = 273{,}5107$$
$$L_2 + \lambda_2 = 736{,}9806 \qquad L_6 + \lambda_6 = 187{,}2495$$
$$L_3 + \lambda_3 = 376{,}6501 \qquad L_7 + \lambda_7 = 274{,}0693$$
$$L_4 + \lambda_4 = 547{,}5801 \qquad L_8 + \lambda_8 = 86{,}2612.$$

Stellen wir endlich nochmal mit den ausgeglichenen Beobachtungen die obigen Bedingungsgleichungen auf, so müssen diese von jenen erfüllt werden. Also:

$- 189{,}4005 - 547{,}5801 + 736{,}9806 = \quad 0$

$+ 547{,}5801 - 273{,}5107 - 274{,}0693 = \quad 0{,}1$ mm. Soll 0,0 mm.

$+ 273{,}5107 - 187{,}2495 - 86{,}2612 = \quad 0{,}0$

$+ 189{,}4005 - 376{,}6501 + 187{,}2495 = - 0{,}1$ mm. Soll 0,0 mm.

Die kleinen Widersprüche von 0,1 mm in der zweiten und vierten Bedingungsgleichung sind auf Abrundungsfehler zurückzuführen.

Vergleichen wir die hier gewonnenen Resultate mit den Ergebnissen der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, so zeigt sich hinreichende Übereinstimmung.

Wenden wir uns der letzten gestellten Aufgabe zu, der Berechnung des mittleren Fehlers von $L_3 + \lambda_3$ sowie $L_4 + \lambda_4 - (L_6 + \lambda_6)$.

Im ersteren Falle ist:

$$I = \left[\frac{ff}{g}\right] = ((+1)\cdot(+1))\,59{,}7 = 59{,}7,$$

im zweiten: $\quad (+1)^2 \cdot 6{,}2 + (-1)^2 \cdot 35{,}1 = 41{,}3.$

Falls wir jetzt den Subtrahend II feststellen, so ist dieser bei der ersten Aufgabe $59{,}7 \cdot 0{,}81576$, bei der zweiten:

$$(6{,}2 \cdot 0{,}33333 + 4{,}1333 \cdot 0{,}12784 + 37{,}1582 \cdot 0{,}70802 \\ + 10{,}7862 \cdot 0{,}14739).$$

Oder wir haben: $\mu_f^2 = \mu^2\{59{,}7 - 48{,}7\} = \mu^2 \cdot 11.$

Nun für μ seinen Wert eingesetzt, ergibt:

$$\mu_f = \pm 4{,}7\sqrt{11} = \pm 15{,}6 \text{ mm}.$$

Es ist ferner: $\mu_{f'}^2 = \mu^2\{41{,}3 - 30{,}49\} = \mu^2 \cdot 10{,}81.$

Oder: $\quad \mu_{f'} = \pm 4{,}7\sqrt{10{,}81} = \pm 15{,}5$ mm,

Resultate, welche gut mit denjenigen Werten übereinstimmen, die bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen erhalten wurden. Dort waren die Ergebnisse $\mu_t = \pm 15{,}6$ bzw. $\mu_F = \pm 15{,}4$ mm.

Sechstes Kapitel.

Fehlergesetz und Ableitung der Methode der kleinsten Quadrate.

1. Wahrscheinlichkeitssätze.

Wir wollen zwei Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in unser Gedächtnis zurückrufen.

Die Wahrscheinlichkeitslehre ist die Lehre von den zufälligen Ereignissen. Solche Ereignisse sind das Fallen eines Würfels, bei den Versicherungen der Eintritt eines Todesfalles oder eines Brandes, in der Astronomie und Geodäsie das Vorkommen irgend eines Messungsfehlers usw.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist immer ein echter Bruch, denn z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel 1 zu werfen, ist $^1/_6$, weil er nach dem Fallen die Zahlen 1, 2, 3, ... 6, zeigen, während von den sechs Ereignissen nur einmal 1 sein kann; folglich ist das Verhältnis der Anzahl der eintretenden zu der Zahl der überhaupt möglichen Fälle die Wahrscheinlichkeit $= {}^1/_6$. Sie ist Null bei der Unmöglichkeit, bei der Gewißheit ist sie eins.

Die Lehre setzt voraus, daß die verschiedenen Fälle gleichmöglich sind.

2. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten.

Der erste Satz lautet: Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse, ist gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:
$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3.$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln zwei zu werfen, ist $^1/_{36}$, denn zwei erhält man, falls die beiden Würfel bei einem Wurfe oben je eins zeigen. Möglich sind 36 Würfe, denn eins kann sich kombinieren mit den Augen des anderen Würfels von eins bis sechs, oder zwei des ersten Würfels kann sich vereinigen mit eins bis sechs des anderen usw. bis 36, folglich ist die Wahrscheinlichkeit, zwei zu erhalten, $^1/_{36}$. $^1/_{36}$ ist gleich $^1/_6 \cdot {}^1/_6$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit derselben Anzahl Würfel drei zu werfen ist $^2/_{36}$. Folgende Kombinationen können eintreffen: Mit Würfel eins wird eins oder zwei geworfen, Würfel zwei muß alsdann zwei bzw. eins zeigen. $^2/_{36}$ ist gleich $^2/_6 \cdot {}^1/_6$.

Der zweite Satz heißt: Sind w_1 und w_2 die Wahrscheinlichkeiten zweier sich gegenseitig ausschließender Ereignisse, so ist sie für das Eintreffen des einen oder des anderen gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:
$$w = w_1 + w_2.$$

Hat man eine Urne mit a schwarzen, b roten und c weißen Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze zu ergreifen: $\frac{a}{a+b+c}$, dagegen eine rote: $\frac{b}{a+b+c}$. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze oder rote zu erfassen, ist daher $\frac{a+b}{a+b+c}$. Denn für diesen Fall sind die Zahlen $a+b$ die günstigsten, $a+b+c$ die möglichen, folglich die Wahrscheinlichkeit $\frac{a+b}{a+b+c}$.

3. Das Gaußsche Fehlergesetz.

C. F. Gauß hat das Gesetz, nach welchem die Fehler auftreten, in folgende Gleichung gebracht: $\frac{\text{Die Anzahl der Fehler } x}{\text{Gesamtanzahl}}$ oder relative Häufigkeit
$$y = ce^{-h^2x^2}, \tag{1}$$
wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, h und c konstante Größen sind, welche von der Genauigkeit der Beobachtungen abhängen.

Dieser Satz ist von Gauß aus der Erfahrung genommen, er wurde von ihm 1794 während seiner Göttinger Studienzeit gefunden. Er leitete ihn aus dem arithmetischen Mittel ab, indem er dieses als Axiom, als unbestrittenen Grundsatz, hinstellte.

Man kann die Gleichung auch schreiben: Relative Häufigkeit von x bis $x + dx$
$$y\,dx = ce^{-h^2x^2}dx. \tag{2}$$

Daher können wir die Integrationsgleichung auch anwenden:
$$c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}dx = 1. \tag{3}$$

Wir wählen die äußersten Grenzen $+\infty$ und $-\infty$, alsdann ist das Integral gleich der Gewißheit 1. Die äußersten Grenzen ∞ anzusetzen, ist deshalb gefahrlos, weil wir wissen, daß die relative Wahrscheinlichkeit außerhalb des Maximalfehlers Null ist, demnach vom Standpunkt der Praxis aus nichts gegen die Form der Gleichung (3) einzuwenden ist. Jetzt zur Integration schreitend, wird erhalten:

$$c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}dx = \frac{c}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds. \tag{4}$$

falls wir $hx = s$ setzen. Folglich ist $h\,dx = ds$, demnach:

$$dx = \frac{ds}{h}. \tag{5}$$

Die Grenzen bleiben dieselben weil h eine Konstante ist. Für die Integralgröße $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds$ kann gesetzt werden, indem wir die untere Grenze ändern:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-s^2}ds = 2J. \tag{6}$$

Multipliziert man die letzte Integralgröße mit einem anderen gleichen Integral, in welchem t statt s geschrieben wird, so folgt:

$$J^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+s^2)}ds, \tag{7}$$

Dies ist ein Doppelintegral. Sein Wesen besteht darin, daß man zuerst in Beziehung auf t bei konstant bleibendem s integriert und das Ergebnis dieser Integration einer neuen auf s bezüglichen Integration unterwirft. Mit der Einführung einer neuen Veränderlichen ε statt t, nämlich $\varepsilon = \frac{t}{s}$, ergibt sich:

$$t = s\varepsilon, \tag{8}$$

mithin:

$$dt = s\,d\varepsilon. \tag{9}$$

Dies in (7) eingefügt, bringt:

$$J^2 = \int_0^{\infty} d\varepsilon\int_0^{+\infty} e^{-(1+\varepsilon^2)s^2} s\,ds. \tag{10}$$

Für jeden Wert, welchen s innerhalb der Grenzen 0 und ∞ annehmen mag, werden den Werten für t von 0 bis ∞ gleichfalls solche von 0 bis ∞ für ε entsprechen. Führt man die Integration in bezug auf s aus, so erhält man:

$$\int_0^{\infty} d\varepsilon \cdot -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(1+\varepsilon^2)s^2}}{1+\varepsilon^2}\right]_0^{\infty} = \int_0^{\infty} d\varepsilon \cdot -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon^2)\,e^{(1+\varepsilon^2)s^2}}\right]_0^{\infty} \tag{11}$$

oder:
$$J^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon^2}. \tag{12}$$

Nun ist:
$$\int \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \operatorname{arctg} \varepsilon + \text{Konst.} \tag{13}$$

folglich:
$$\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Wir können also schreiben: $J^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ oder

$$(15) \qquad J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ somit } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = 2J = \sqrt{\pi}. \tag{16}$$

Dies in Gleichung (4) eingesetzt, ergibt:
$$c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{c}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{c\sqrt{\pi}}{h}. \tag{17}$$

Nun ist nach Gleichung (3) dieser Wert = 1, folglich:
$$1 = \frac{c\sqrt{\pi}}{h}, \tag{18}$$

demnach:
$$c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}. \tag{19}$$

Damit geht das Gaußsche Fehlergesetz über in:
$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}.$$

4. Graphische Darstellung des Gaußschen Fehlergesetzes.

Wollen wir das Gaußsche Fehlergesetz graphisch darstellen, so müssen wir zu dem Fehler x die zugehörige relative Häufigkeit berechnen. Wir werden $h = 1$ setzen und x wollen wir stetig um 0,1 wachsen lassen; dann können wir folgende Tabelle aufstellen, die wir mit der aus Hagens Wahrscheinlichkeitsrechnung verglichen haben. Es zeigen sich einige kleine Abweichungen von einer Einheit der fünften Dezimalstelle.

Fehler x	$y = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$	Fehler x	$y = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$	Fehler x	$y = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$
0,0	0,56420	$\pm$ 1,2	0,13367	$\pm$ 2,4	0,00178
$\pm$ 0,1	0,55859	$\pm$ 1,3	0,10411	$\pm$ 2,5	0,00109
$\pm$ 0,2	0,54207	$\pm$ 1,4	0,07947	$\pm$ 2,6	0,00065
$\pm$ 0,3	0,51563	$\pm$ 1,5	0,05947	$\pm$ 2,7	0,00039
$\pm$ 0,4	0,48078	$\pm$ 1,6	0,04362	$\pm$ 2,8	0,00022
$\pm$ 0,5	0,43940	$\pm$ 1,7	0,03136	$\pm$ 2,9	0,00012
$\pm$ 0,6	0,39363	$\pm$ 1,8	0,02210	$\pm$ 3,0	0,00007
$\pm$ 0,7	0,34565	$\pm$ 1,9	0,01526	$\pm$ 3,1	0,00004
$\pm$ 0,8	0,29749	$\pm$ 2,0	0,01033	$\pm$ 3,2	0,00002
$\pm$ 0,9	0,25099	$\pm$ 2,1	0,00686	$\pm$ 3,3	0,00001
$\pm$ 1,0	0,20756	$\pm$ 2,2	0,00446	$\pm$ 3,4	0,00001
$\pm$ 1,1	0,16824	$\pm$ 2,3	0,00284	$\pm$ 3,5	0,00000
				usw.	

Vorher können wir noch eine kleine Rechnung mit der Tabelle aufstellen. Wir benutzen nämlich die Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1,$$

indem wir dx entsprechend der Tabelle gleich 0,1 annehmen. Die Formel sagt: Der Flächeninhalt des von der Kurve $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ und von der Abszissenachse begrenzten Abschnitts ist gleich 1. Es ist in erster Annäherung der Inhalt der Fläche gleich:

$$\begin{aligned} & 2\Delta x \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) \\ & = 2\Delta x \left\{ \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right\} \\ & = 2 \cdot 0{,}1 \{ 0{,}28210 + 4{,}71798 + 0{,}00000 \} \\ & = 0{,}1 \cdot 10{,}00016 = 1{,}000016; \end{aligned}$$

soll 1 ergeben. Wir können daher den Schluß ziehen, die Tabelle ist wahrscheinlich richtig berechnet.

Mit den Werten der Tabelle ist die untenstehende Kurve (Fig. 10) aufgetragen. Für $x = 3{,}5$ ist, bis auf fünf Stellen nach dem Komma, y gleich Null. Die Kurve besteht aus zwei kongruenten Armen, welche, von dem Punkte A der Y-Achse ausgehend, sich asymptotisch der Achse der x nähern.

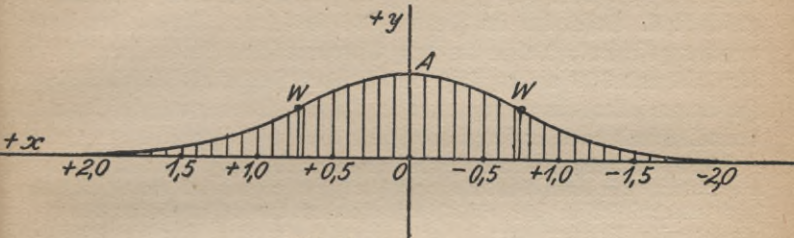


Fig 10.

Es ist noch folgendes zu sehen. Für den Fehler Null ist die relative Wahrscheinlichkeit ein Maximum $= \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Es ist das Vorkommen gleicher positiver wie negativer Fehler gleich häufig. Die Häufigkeit des Vorkommens nimmt ab mit ihrer Größe.

Wir sehen ferner, daß in jedem Zweig ein Wendepunkt W auftritt. Um die Abszisse des Wendepunktes zu finden, setzen wir den zweiten Differentialquotient gleich Null und entwickeln hieraus x. Falls wir $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ nach x differentiieren, folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot 2h^2 x e^{-h^2 x^2}. \tag{1}$$

Wenn wir den folgenden Differentialquotienten bilden und diesen gleich Null setzen, ergibt sich weiter:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{h}{\sqrt{\pi}} \left\{ 2h^2 e^{-h^2 x^2} - 2h^2 x e^{-h^2 x^2} \cdot 2h^2 x \right\} = 0, \tag{2}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(3) \qquad x^2 = \frac{1}{2h^2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{\pm 1}{h\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Für den speziellen Fall, daß $h = 1$ ist, hat man:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}70710, \tag{5}$$

für welchen W in unsere Zeichnung eingetragen ist.

5. Elementarfehler.

Die meisten zufälligen Beobachtungsfehler sind aus mehreren Fehlerursachen zusammengesetzt, die sich gegenseitig addieren bis herauf zum Maximalfehler oder sich gegenseitig aufheben. Ihr Wert ist alsdann gleich Null. Bessel hat im Jahre 1838 in seiner „Theorie der Beobachtungsfehler", welche in den Astronomischen Nachrichten XV, Nr. 358 und 359 niedergelegt wurde, jeden Fehler als Resultat des Zusammenfallens einer sehr großen Anzahl von „Elementarfehlern" betrachtet und darüber folgendes schöne Beispiel gegeben.

„Fälle, in welchen nicht viele voneinander unabhängige Ursachen zusammenwirkten, um einen Beobachtungsfehler zu erzeugen, sind wahrscheinlich sehr selten; selbst in sehr einfach erscheinenden Beobachtungsarten können oft zahlreiche Ursachen ihrer Fehler nachgewiesen werden. Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, werde ich annehmen, daß eine Reihe von Entfernungen eines Fixsternes von dem Scheitelpunkte oder Pole mit einem nach Reichenbachscher Art eingerichteten Meridiankreise beobachtet sei, und versuchen, die Ursachen der Fehler aufzuzählen, welche sich in der Zusammenstellung ihrer Resultate verraten. Das Instrument muß zuerst auf den Stern eingestellt werden, und diese Einstellung kann aus verschiedenen Ursachen fehlerhaft werden, nämlich 1. weil eine Grenze der Kraft des Fernrohrs vorhanden ist, innerhalb welcher seine Richtung willkürlich bleibt; 2. weil der Punkt des Bildes des Sternes, den man in die Absehenslinie zu bringen beabsichtigt, innerhalb gewisser Grenzen willkürlich sein kann, welche bei großen und hellen Sternen ohne Zweifel weiter auseinanderliegen als bei kleineren weniger hellen, und woraus hervorgehen kann, daß bei Nacht und bei Tage, oder bei hellerem oder weniger hellem Himmel verschiedene Punkte gewählt werden; 3. weil der Stern sich selten oder nie ruhig, sondern in zitternder, von dem Mangel des Gleichgewichtes der Luft herrührender Bewegung zeigt, und also eine, zwischen den äußersten Grenzen dieser Bewegung liegende Wahl getroffen werden muß. Hierzu gesellen sich Fehlerursachen, welche von der Einstellung des Instrumentes ganz unabhängig sind, zum Beispiel 4. ein Einfluß der Elastizität seines Metalles, welcher, zufälligen äußeren Umständen zufolge, bald diesen, bald jenen Wert erhalten, auch zur Folge haben kann, daß die Richtung des Fernrohres in dem Augenblicke des Ablesens der Beobachtung, nicht mehr dieselbe ist, welche sie bei seiner Einstellung war; 5. eine Unsicherheit der Angabe des Kreises, welche aus kleinen Ungleichheiten der Entfernungen seiner eigenen Teilstriche und der Teistriche der Nonien hervorgeht, und welcher sich als veränderlicher Fehler äußert, da gewöhnlich bei jeder Wiederholung der Beobachtung andere Teilstriche zur Koinzidenz gelangen; 6. die aus der begrenzten Schärfe des optischen Hilfsmittels, wodurch die Ablesungen erlangt werden, hervorgehende Unsicherheit; 7. die aus dem Umstande hervorgehenden Fehler, daß die Schätzung der Angaben der Nonien nur z. B. bis auf die Hälfte des kleinsten Zwischenraumes von 2″, welchen sie angeben, getrieben werden kann, wodurch alle an den vier Nonien dieser Instrumente abgelesenen Beobachtungen sich immer mit einer vollen, einer viertel, halben oder dreiviertel Sekunde, nie aber mit anderen Teilen derselben schließen. Ferner kommen dazu äußere Umstände, z. B. 8. der Einfluß der Körperwärme des Beobachters auf den Kreis oder andere Teile des Apparates; 9. der Einfluß einer im allgemeinen vorhandenen Verschiedenheit der Wärme zwischen dem unteren und oberen Rande des Kreises, welcher Spannungen in seinem Metalle und Veränderungen seiner Figur erzeugt. Auch veranlaßt 10. die Voraussetzung, daß die Wasserwage der Alhidade bei jeder Ablesung sich im nichtbeeinträchtigten Zustande des Gleichgewichts befinde, einen zufälligen Fehler, 11. geht ein solcher aus der Annahme hervor, daß das Instrument zwischen zwei miteinander zu vergleichenden Beobachtungen in vollkommen gleichem Zustande geblieben sei, während doch die Bemerkung von Änderungen, welche es in kürzerer oder längerer Zeit erfährt, nicht selten ist. Mit dem sog. Beobachtungsfehler vermischt sich auch 12. der Einfluß, welchen die fehlerhafte Annahme hat, daß der Zustand der Atmosphäre, so wie Barometer und Thermometer ihn angeben, genau der sei, wonach die Größe der jedesmaligen Strahlenbrechung sich richtet, und 13. der Einfluß kleiner Unvollkommenheiten der Reduktionselemente der Beobachtungen. Ich werde vermutlich in dieser Aufzählung von Ursachen, welche zur Erzeugung eines scheinbaren Beobachtungsfehlers zusammenwirken, mehrere übersehen haben, so wie ich der zufälligen Unachtsamkeit in der Ausführung einzelner Momente der Beobachtungen, nicht vorteilhafter oder unruhiger Beleuchtung der Fäden und der Teilstriche, der Einflüsse der Kälte auf das Instrument usw. nicht habe erwähnen wollen. Immer aber wird durch diese Aufzählung von Fehlerursachen der Zweck erreicht, bemerklich zu machen, daß selbst diese einfache Beobachtungsart einen Gesamtfehler zeigen muß, welcher aus zahlreichen Ursachen entsteht, deren jede von den übrigen unabhängig wirkt.“

Welche Elementarfehler bei der Zenitdistanzmessung mit einem Meridiankreise mitsprechen, hat uns hier Bessel angegeben. In welchem Maße die einzelnen Elementarfehler bei der Messung einer Zenitdistanz mitwirken, ist von uns jedoch nicht angebbar.

Hagen nimmt einfach die Elementarfehler alle gleich an, und zwar sind sie positiv wie negativ gleich möglich. Er entwickelt unter dieser Annahme das Gaußsche Fehlergesetz.

6. Entwicklung des Gaußschen Fehlergesetzes unter der Annahme Hagens für die Elementarfehler.

Wie bereits oben angegeben, leitete Gauß das Fehlergesetz aus dem arithmetischen Mittel ab, indem er dieses als unumstößliche Wahrheit hinstellte. Wir werden uns zur Ableitung der Hagenschen Entwicklung bedienen.[1]) Dieser nimmt an, jeder Beobachtungsfehler setzt sich aus

1) Siehe Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1867.

Elementarfehlern zusammen, und zwar sind diese sämtlich gleich und entweder positiv oder negativ.

Wir wollen annehmen, es liegen sechs Elementarfehler $\varDelta x$ vor, die positiv wie negativ sein können. Der Beobachtungsfehler kann sich alsdann zusammensetzen aus den sechs positiven oder sechs negativen Elementarfehlern, folglich ist die Häufigkeit des Auftretens von $\pm 6\varDelta x$ je gleich 1. Allgemein, wenn die Zahl der positiven und negativen $\varDelta x$ je m beträgt, ist die Häufigkeit des Vorkommens von $m \cdot \varDelta x$ gleich 1.

Jetzt vereinigen sich fünf positive mit einem negativen Fehler. Ihre Summe ist gleich $+ 4\varDelta x$, allgemein $(m - 2)\varDelta x$. Alsdann sind folgende verschiedene Fälle unterscheidbar: Der 1. Fehler ist negativ, die folgenden fünf positiv, der 2., 3., 4., 5. oder 6. Fehler sei negativ, alle übrigen positiv, folglich ist die Zahl der verschiedenen Kombinationen 6, allgemein gleich m.

Alsdann betrachten wir den Fall, daß die Summe der Elementarfehler $+2\varDelta x$ oder $(m-4)\varDelta x$ sein möge. Alsdann müssen von ihnen vier positiv und zwei negativ sein. Die Fehler können sich wie folgt kombinieren: Der 1. und 2. Fehler werde negativ, der 3., 4., 5., 6. positiv oder der 1. und 3. sind negativ, alle übrigen positiv, oder der 1. und 4., der 1. und 5. und der 1. und 6. Fehler negativ. Die Zahl dieser Fälle beträgt 5.

Jetzt kann der 2. und 3. Fehler den Wert $-\varDelta x$ annehmen, alle übrigen sind positiv. Ebenso kann der 2. und 4., 2. und 5. oder 2. und 6. negativ werden. Die Zahl dieser Kombinationen ist 4. Es kann aber auch der 3. und 4., der 3. und 5. oder der 3. und 6. Fehler negativ sein. Alsdann sind drei Fälle unterscheidbar usw.

Die Gesamtzahl der auftretenden Kombinationen ist folglich $5 + 4 + 3 + 2 + 1$. Da dieses eine arithmetische Reihe ist, so ist ihre Summe $\frac{6 \cdot 5}{2}$. Allgemein $\frac{m(m-1)}{2}$.

Der Gesamtfehler wird gleich 0, wenn von den auftretenden Elementarfehlern drei positiv und drei negativ werden. Diese können sich wie folgt kombinieren, und zwar soll diese Kombination der Einfachheit halber in einem Schema untergebracht werden:

$$\left.\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \\ - & - & + & - & + & + \\ - & - & + & + & - & + \\ - & - & + & + & + & - \end{matrix}\right\} \text{Anzahl } 4 \qquad \left.\begin{matrix} - & + & - & - & + & + \\ - & + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & + & - \end{matrix}\right\} \text{Anzahl } 3$$

$$\left.\begin{matrix}- + + - - + \\ - + + - + -\end{matrix}\right\}\text{Anzahl } 2 \qquad - + + + - - \text{ Anzahl } 1.$$

Die Kombination kann aber auch folgende sein:

$$\left.\begin{matrix}+ - - - + + \\ + - - + - + \\ + - - + + -\end{matrix}\right\}\text{Anzahl } 3 \qquad \left.\begin{matrix}+ - + - - + \\ + - + - + -\end{matrix}\right\}\text{Anzahl } 2$$

$$+ - + + - - \text{ Anzahl } 1.$$

Ferner können sich die Fehler wie folgt addieren:

$$\left.\begin{matrix}+ + - - - + \\ + + - - + -\end{matrix}\right\}\text{Anzahl } 2 \qquad + + - + - - \text{ Anzahl } 1.$$

Endlich kann noch folgender Fall eintreten:

$$+ + + - - - \text{ Anzahl } 1.$$

Folglich ist die Zahl der Kombinationen für den Gesamtfehler 0 gleich

$$(4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1.$$

Falls man jede Klammer auffaßt als die Summe einer arithmetischen Reihe, so ist die Gesamtsumme gleich:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{2}.$$

Wenn mit 3 erweitert wird, ergibt sich:

$$\text{Summe } s = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6(10 + 6 + 3 + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

oder

$$s = \frac{6 \cdot (10 + 10)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Allgemein ist $s = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Die Entwicklung wird dieselbe, wenn die negativen Vorzeichen überwiegen. Wie man sieht, sind die Häufigkeitszahlen die binomischen Koeffizienten.

Es tut nun der Allgemeinheit der Untersuchung keinen Abbruch, wenn man annimmt, daß m eine gerade Zahl ist. Wir erhalten alsdann ein mittelstes Glied in der Entwicklung der Binomial-Koeffizienten. Die Anzahl der Koeffizienten wird eine gerade Zahl, wenn wir $2m$ für m einführen. Der Einfachheit halber setzen wir $\varDelta x$ statt $2\varDelta x$. Alsdann können wir folgende Tabelle aufstellen:

Beobachtungsfehler	Möglichkeit seines Auftretens
$x = 0$	$y = \dfrac{2m(2m-1)(2m-2)\cdots(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)m}$
$x = \pm \Delta x$	$y = \dfrac{2m(2m-1)(2m-2)\cdots(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-2)(m-1)}$
$x = \pm 2\Delta x$	$y = \dfrac{2m(2m-1)(2m-2)\cdots(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-3)(m-2)}$
.....	.....
$x = \pm p\Delta x$	$y = \dfrac{2m(2m-1)(2m-2)\cdots(m+p+2)(m+p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-p-1)(m-p)}$
$x = \pm (p+1)\Delta x$	$y = \dfrac{2m(2m-1)(2m-2)\cdots(m+p+3)(m+p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-p-2)(m-p-1)}$
.....	.....
$x = \pm m\Delta x$	$y = 1$

Die Wahrscheinlichkeit nimmt ab mit der Zunahme des Fehlers x. Setzen wir $\Delta x = x_1 - x$ und ebenso $\Delta y = y_1 - y$, so ist, falls wir den Fall von $(p+1)\Delta x$ und $p\Delta x$ berücksichtigen:

$$y_1 - y = \Delta y = y\left(\frac{m-p}{m+p+1} - 1\right). \tag{1}$$

Hierfür kann man auch setzen:

$$\Delta y = -y\left(\frac{2p+1}{m+p+1}\right). \tag{2}$$

Falls wir nun p durch Δx ausdrücken, also setzen $p = \frac{x}{\Delta x}$ (siehe oben in der Tabelle), so ergibt sich:

$$\Delta y = -y\left(\frac{2x+\Delta x}{m\Delta x + x + \Delta x}\right). \tag{3}$$

Daraus wird endlich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -y\left(\frac{2x+\Delta x}{m\Delta x^2 + x\Delta x + \Delta x^2}\right) \tag{4}$$

Läßt man in diesem Ausdruck Δx und folglich auch Δy kleiner und kleiner werden, so erhält man links $\frac{dy}{dx}$. Auf der rechten Seite der Gleichung verwandelt sich der Zähler des Bruches in $2x$; im Nenner kann man die beiden letzten Ausdrücke $x\Delta x$ und Δx^2 vernachlässigen, das Glied $m\Delta x^2$ bedarf einer besonderen Überlegung.

Es bedeutet $m\Delta x$ den Maximalfehler, welcher bei den Beobachtungen überhaupt auftreten kann. Dieser ist bei der allgemeinen Untersuchung als unendlich groß anzunehmen. Das Produkt $m\varDelta x \cdot \varDelta x$ also, welches aus einer unendlich großen und einer unendlich kleinen Zahl besteht, ist gleich einer Konstante zu setzen, deren Wert vorläufig noch unbestimmt ist. m ist nämlich immer positiv, daher ist $m\varDelta x^2$ als eine positive Größe, als $\frac{1}{h^2}$ anzusprechen. Wir setzen folglich:

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot h^2 2x. \tag{5}$$

Falls wir die Unbekannten trennen, folgt:

$$\frac{dy}{y} = -h^2 \cdot 2x\,dx. \tag{6}$$

Jetzt beiderseits integriert, ergibt:

$$\lg y = -h^2 x^2 + \lg c. \tag{7}$$

Hieraus folgt endlich das Gaußsche Fehlergesetz:

$$y = c \cdot e^{-h^2 x^2}, \tag{8}$$

oder wenn wir den auf S. 107 entwickelten Wert c benutzen, kann man setzen:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}. \tag{9}$$

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir das Ergebnis, welches für eine kleine Zahl von Elementarfehlern gilt, einmal vergleichen mit dem Gaußschen Fehlergesetz. Es sei die Anzahl der Elementarfehler gleich 10 angenommen; 10 sind positiv oder 10 negativ, folglich ist die Häufigkeit der zusammengesetzten Fehler folgende: Die positiven Fehler addieren sich, demnach ist ihre Summe $+10\varDelta x$, die zugehörige Häufigkeit beträgt 1, oder ihre Summe kann $+8\varDelta x$, $+6\varDelta x$, $+4\varDelta x$, $+2\varDelta x$ oder 0 sein; alsdann beläuft sich die Häufigkeit ihres Vorkommens auf 10, 45, 120, 210 und 252. Dieselben Zahlen gelten für die negativen Fehler. Demnach ist die Gesamtzahl der Häufigkeiten gleich $2(1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252) = 1024$. Da nun c, die relative Häufigkeit für den Gesamtfehler Null, gleich $\frac{252}{1024} = 0{,}24609$ beträgt und $c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, so ist $h = 0{,}43619$.

Wenn wir diese Werte in das Fehlergesetz einführen ergibt sich:

$$y = 0{,}24609\, e^{-0{,}43619^2 x^2}. \tag{10}$$

Nun haben wir in Gleichung (8) das Fehlergesetz unter der Annahme entwickelt, daß $2\varDelta x$ gleich $\varDelta x$ gesetzt wurde. Unter Berücksich-

8*

tigung dieses berechnen wir y nach Formel (10) für den Fall, daß $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ und $x = 5$ ist, und zwar wollen wir die Ergebnisse in ein Schema bringen; daneben steht die Zahl der Anzahl der Fälle, dividiert durch die Anzahl aller möglichen Fälle, hier 1024, ferner bringen wir noch die relative Häufigkeit, multipliziert mit der Anzahl der Fälle, nach beiden Arten berechnet.

Gesamtfehler	y nach dem Fehlergesetz	Zahl der Fälle dividiert durch Gesamtzahl	$1024\,y$	Anzahl der Möglichkeiten
0	0,2461	0,2461	252	252
1	0,2035	0,2051	208,3	210
2	0,1150	0,1172	117,7	120
3	0,0444	0,0440	45,5	45
4	0,0117	0,0098	12,0	10
5	0,0021	0,0010	2	1

Wie man sieht, zeigt sich schon hier, bei der geringen Zahl der Elementarfehler, eine ziemliche Übereinstimmung.

7. Die Konstante h.

Liegen Fehlergesetze für zwei Beobachtungsreihen (1) und (2) vor und ist h_2 größer als h_1, so ist auch die Genauigkeit der zweiten Reihe größer als die der ersten. Da der Flächeninhalt des Teils, der von der Kurve und der Abszissenachse begrenzt wird (Fig. 11),

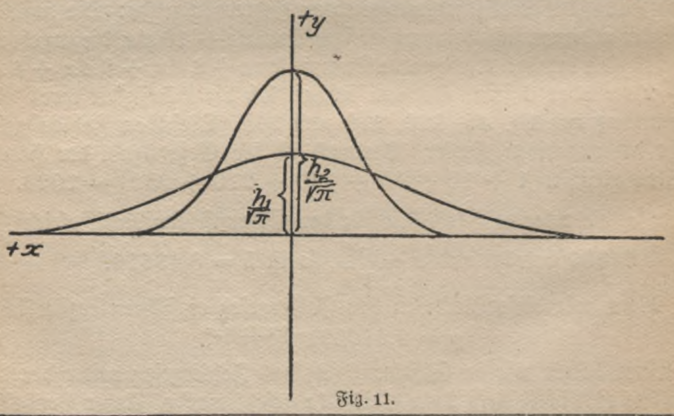


Fig. 11.

bei jeder Reihe gleich 1 sein muß, so muß die Kurve mit dem größeren h seitlich zusammenschrumpfen; für denselben Fehler x, solange x klein ist, wird bei ihr y größer sein als das der Reihe (1); bei einem gewissen x wird bei beiden Kurven y gleich sein und falls x weiter wächst, wird y kleiner sein als bei Reihe (1), es ist alsdann die Ordinate y für h_1 noch groß, während bei der zweiten Kurve y klein wird und bei wachsendem x als Null angesehen werden kann. Um den Fehler x_0 für die Gleichheit der Ordinaten in den zwei Kurven festzustellen, hat man:

$$y = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_1 x^2{}_0} = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_2 x^2{}_0}, \tag{1}$$

woraus folgt:

$$\frac{h_1}{h_2} = e^{-(h^2{}_2 - h^2{}_1) x^2{}_0}. \tag{2}$$

Falls wir beiderseits logarithmieren, ergibt sich:

$$x_0 = \sqrt{\frac{\lg h_1 - \lg h_2}{h_1^2 - h_2^2}}, \tag{3}$$

und zwar bedeutet lg den natürlichen Logarithmus.

Je größer deshalb h ist, um so besser ist die Beobachtungsreihe, man nennt daher h das Maß der Präzision.

8. Berechnung des mittleren, durchschnittlichen und wahrscheinlichen Fehlers als Funktion von h.

In der Praxis rechnet man gewöhnlich den mittleren zu befürchtenden Fehler μ aus. Dieser ist nach Gauß nach der Formel zu berechnen:

$$\mu^2 = \frac{[xx]}{n}. \tag{1}$$

Die Anzahl der Fehler von der Größe x ist gleich n, multipliziert mit seiner relativen Häufigkeit, und zwar bedeutet n die überhaupt auftretenden Fehler, in letzter Instanz unendlich. Zwischen x und $x + dx$ liegen demnach $n \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$ Fehler von der Größe x. Wir haben also:

$$\mu^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 n \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx, \tag{2}$$

wofür wir auch setzen können:

$$\mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx. \tag{3}$$

Das bestimmte Integral wird nun gefunden, indem man die neue Unbekannte $hx = t$ einführt, also setzt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt. \tag{4}$$

Um dieses Integral zu lösen, wendet man die partielle Integration an. Ihre Formel lautet:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Setzt man nämlich: $u = -\frac{t}{2}, \quad v = e^{-t^2},$ (5)

das heißt: $du = -\frac{1}{2} dt$ und $dv = -2te^{-t^2} dt,$ (6)

so wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \left[\frac{-t}{2} e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt. \tag{7}$$

Wir haben, um das erste Glied rechts festzustellen, folgendes. Es ist:

$$e^{t^2} = 1 + \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1 \cdot 2} + \frac{t^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{t^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \tag{8}$$

und daher:

$$te^{-t^2} = \frac{t}{e^{t^2}} = 1 : \left(t^{-1} + \frac{t}{1} + \frac{t^3}{1 \cdot 2} + \frac{t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right). \tag{9}$$

Der Wert dieser Gleichung wird Null für die Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$. Demnach kann man setzen:

$$\frac{1}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{h^3} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \text{ (Vgl. S. 107.)} \tag{10}$$

Man hat demnach die Gleichung:

$$\mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3} = \frac{1}{2h^2}, \tag{11}$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{,}7071}{h}, \tag{12}$$

oder es ist: $$h = \frac{0{,}7071}{\mu}. \tag{13}$$

In der graphischen Darstellung des Fehlergesetzes entspricht x für den Wendepunkt dem mittleren Fehler (S. 109).

Da μ ziemlich scharf berechnet werden kann, namentlich dann, wenn die Anzahl der Beobachtungen groß ist (eigentlich sollte sie gleich unendlich sein), so benutzt man Gleichung (13) zur Bestimmung von h. μ ist nach Formel (1) oder, da meist nur die plausibelsten Fehler λ vorliegen, nach der Gleichung $\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-m}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{s}}$ zu ermitteln (S. 53 und 82.)

Der Durchschnittsfehler ϑ als Funktion von h wird wie folgt abgeleitet:
$$\vartheta = \frac{[\text{Absol. Wert } x]}{n} = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} xn\,\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}\,dx, \tag{14}$$

oder es ist: $$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x e^{-h^2x^2}\,dx. \tag{15}$$

Die Integration kann direkt ausgeführt werden. Es ergibt sich:
$$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{-e^{-h^2x^2}}{2h^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{,}5642}{h}. \tag{16}$$

Auch hier läßt sich wieder h berechnen, falls ϑ gegeben. Doch da ϑ nur aus den wahren Fehlern ermittelt werden kann, so wird meist die Bestimmung aus u vorgezogen.

Wir haben jetzt noch den wahrscheinlichen Fehler ϱ zu behandeln. Er teilt die wahren Fehler, die, ohne auf das Vorzeichen Rücksicht zu nehmen, nach der Größe geordnet werden, in zwei Gruppen. Der wahrscheinliche Fehler liegt in der Mitte.

Man kann also die Gleichung aufstellen:
$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}; \tag{17}$$

hieraus folgt nämlich: $$h\varrho = 0{,}4769 \tag{18}$$

oder: $$\varrho = \frac{0{,}4769}{h}. \tag{19}$$

Dies Ergebnis wird auf folgende Weise erhalten. Das bestimmte Integral

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2x^2}\,dx, \tag{20}$$

welches die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß ein Fehler den Wert x nicht überschreitet, kann in endlicher Form nicht gegeben werden. Um sich zunächst von der Konstante h unabhängig zu machen, setzt man:

$$hx = t \tag{20a}$$

Es folgt $dx = \frac{dt}{h}$; die Grenzen sind 0 und ht. Für das obige Integral erhalten wir alsdann:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ht} e^{-t^2}\,dt. \tag{21}$$

Alsdann wird Reihenentwickeln angewendet; dies ergibt allgemein:

$$\int e^{-t^2}dt = \int 1 - \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1\cdot 2} - \frac{t^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{t^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots, \tag{22}$$

woraus durch Integration folgt:

$$\int e^{-t^2}dt = t - \frac{t^3}{1\cdot 3} + \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 5} - \frac{t^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7} + \frac{t^9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 9} - \cdots + C, \tag{23}$$

so daß wir schließlich setzen können:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ht} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{ht - \frac{(ht)^3}{3} + \frac{(ht)^5}{10} - \frac{(ht)^7}{42} + \frac{(ht)^9}{216} - \cdots\right\}. \tag{24}$$

Weil diese Gleichung ziemlich häufig angewendet wird, hat man ihre Ergebnisse in Tafeln gebracht, und zwar für $h = 1$. So rührt eine Tafel von Enke her. Sie befindet sich im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1834 S. 305—308, Tafel 1. Ferner ist noch eine ausführliche Tafel von Czuber in „Theorie der Beobachtungsfehler" gegeben. Sie schreitet in Intervallen von 0,01 fort und befindet sich im Anhang jenes Werkes. Wir bringen einen Auszug von der Enkeschen Tabelle:

Tafel II.

t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$	t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$	t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$
0,0	0,0000	0,9	0,7969	1,8	0,9891
0,1	0,1125	1,0	0,8427	1,9	0,9928
0,2	0,2227	1,1	0,8802	2,0	0,9953
0,3	0,3286	1,2	0,9103	2,1	0,9970
0,4	0,4284	1,3	0,9348	2,2	0,9981
0,5	0,5205	1,4	0,9523	2,3	0,9989
0,6	0,6039	1,5	0,9661	2,4	0,9993
0,7	0,6778	1,6	0,9763	2,5	0,9996
0,8	0,7421	1,7	0,9838	∞	1

Aus dieser Tabelle findet man durch Interpolation für den Tafelwert 0,5 den Eingang 0,4769, falls man die zweite Differenz anwendet.

Wenn h nicht gleich 1 ist, so hat man überall an Stelle von 0,1, 0,2 usw. $\frac{0,1}{h}$, $\frac{0,2}{h}$ usw. zu setzen; vgl. Gleichung (20a).

Jetzt können wir noch aus Formel (12), (16) und (18) den einen durch den anderen Mittelwert ausdrücken. Es ergibt sich nämlich aus Gleichung (12) und (16):

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \vartheta\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,2533\,\vartheta, \text{ genähert } = \tfrac{5}{4}\vartheta, \tag{25}$$

und umgekehrt: $\vartheta = \mu\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,7979\,\mu$, genähert $= \frac{4}{5}\mu$, (26)

ferner, falls wir Gleichung (12) und (18) anwenden:

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varrho}{0,4769} = 1,4826\,\varrho \overset{n}{=} 1,5\,\varrho \tag{27}$$

oder $\varrho = 0,4769\sqrt{2}\,\mu = 0,6745\,\mu \overset{n}{=} \frac{2}{3}\mu.$ (28)

Um ϑ durch ϱ auszudrücken und umgekehrt, hat man aus Gleichung (16) und (18) h zu eliminieren, dann folgt:

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\varrho}{0,4769} = 1,1830\,\varrho \overset{n}{=} \tfrac{6}{5}\,\varrho \tag{29}$$

und umgekehrt: $\varrho = \frac{0,4769}{h} = 0,8453\,\vartheta \overset{n}{=} \frac{5}{6}\vartheta.$ (30)

Da übrigens der wahrscheinliche Fehler direkt nur durch Abzählen bestimmt werden kann, so dürfte er ziemlich fehlerhaft ausfallen, er wird deshalb zur Bestimmung von h nicht benutzt. Gauß schrieb an Schuhmacher: „Die sogenannten wahrscheinlichen Fehler wünsche ich eigentlich, als von Hypothese abhängig, ganz proskribiert; man mag sie aber berechnen, indem man die mittleren mit 0,6744897 multipliziert.

9. Vergleichung des Fehlergesetzes mit einer Beobachtungsreihe.

Um die geodätischen Messungen bei der Untersuchung des Fehlergesetzes selber sprechen zu lassen, haben wir die Widersprüche der Messungsergebnisse der Winkel in den großen Dreiecken zusammengestellt, welche von der Preußischen Landesaufnahme im 8., 9., 10. und 11. Bande gegeben sind. Es betrifft dies die hannoversche Dreieckskette sowie die Festlegung Helgolands gegen das Festland. Dann folgt die rheinisch-hessische Dreieckskette sowie das niederrheinische Dreiecksnetz. Der 10. Band enthält den nördlichen und südlichen niederländischen sowie den belgischen Anschluß. Band 11 bringt endlich das pfälzische Dreiecksnetz, die elsaß-lothringische Dreieckskette sowie den französischen Anschluß. Wir haben die Widersprüche der Winkelmessung in einem Dreieck der Größe nach geordnet, ferner haben wir die positiven und die negativen Widersprüche unterschieden. Wir haben sodann Gruppen von 0,0″—0,19, von 0,2—0,39, 0,4—0,59 usw. bis herauf zu den größten Fehlern gebildet. Die Dreieckswidersprüche sind von der Landesaufnahme in den Ketten bis auf $\frac{1}{1000}$″ gegeben, es dürfte aber für unsere Untersuchung $\frac{1}{100}$″ genügen. Die Zusammenstellung ergibt folgendes:

I.		II.		III.	
$\omega = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$	$\omega = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$	ω	ω	ω	ω
+ 0,00	— 0,00	+ 0,20	— 0,24	+ 0,40	— 0,40
+ 0,02	— 0,01	+ 0,20	— 0,24	+ 0,41	— 0,41
+ 0,03	— 0,03	+ 0,21	— 0,24	+ 0,43	— 0,48
+ 0,04	— 0,04	+ 0,21	— 0,25	+ 0,45	— 0,49
+ 0,05	— 0,04	+ 0,22	— 0,25	+ 0,46	— 0,51
+ 0,06	— 0,05	+ 0,23	— 0,26	+ 0,46	— 0,52
+ 0,06	— 0,05	+ 0,24	— 0,27	+ 0,46	— 0,52
+ 0,06	— 0,05	+ 0,24	— 0,27	+ 0,48	— 0,54
+ 0,07	— 0,05	+ 0,25	— 0,28	+ 0,48	— 0,58
+ 0,07	— 0,10	+ 0,29	— 0,30	+ 0,50	
+ 0,10	— 0,10	+ 0,30	— 0,31	+ 0,50	

I.

$\omega = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$	$\omega = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
+ 0,10	— 0,12
+ 0,12	— 0,12
+ 0,12	— 0,13
+ 0,13	— 0,13
+ 0,13	— 0,14
+ 0,16	— 0,14
+ 0,17	— 0,15
+ 0,18	— 0,16
+ 0,19	— 0,18
+ 0,19	— 0,19
Anzahl d. Fehler 21	21

II.

ω	ω
+ 0,30	— 0,32
+ 0,30	— 0,32
+ 0,32	— 0,33
+ 0,35	— 0,34
+ 0,36	— 0,36
+ 0,37	— 0,37
+ 0,39	— 0,37
+ 0,39	— 0,39
A. d. F. 19	19

III.

ω	ω
+ 0,52	
+ 0,52	
+ 0,53	
+ 0,55	
+ 0,56	
+ 0,57	
+ 0,58	
A. d. F. 18	9

IV.

ω	ω
+ 0,60	— 0,61
+ 0,61	— 0,64
+ 0,61	— 0,65
+ 0,64	— 0,67
+ 0,64	— 0,72
+ 0,67	— 0,74
+ 0,67	— 0,77
+ 0,71	
+ 0,73	
+ 0,74	
+ 0,75	
+ 0,79	
+ 0,79	
A. d. F. 13	7

V.

ω	ω
+ 0,83	— 0,80
+ 0,83	— 0,84
+ 0,84	— 0,87
+ 0,87	— 0,89
+ 0,87	— 0,90
+ 0,88	— 0,91
+ 0,91	
+ 0,93	
+ 0,95	
+ 0,98	
+ 0,98	
A. d. F. 11	6

VI.

ω	ω
+ 1,00	— 1,00
+ 1,01	— 1,01
+ 1,09	— 1,01
+ 1,11	— 1,09
+ 1,15	— 1,10
	— 1,12
A. d. F. 5	6

VII.

+ 1,39	— 1,27
	— 1,37
	— 1,37
A. d. F. 1	3

VIII.

+ 1,52	— 1,49
	— 1,54
A. d. F. 1	2

Wenn wir die Gruppen überschauen, so gewahren wir, daß in den ersten beiden die Zahl der negativen wahren Fehler gleich der der positiven ist. In der 3., 4. und 5. Gruppe überwiegt die Zahl der positiven Fehler. Sie beträgt in Gruppe III 18, in Gruppe IV 13 und in Gruppe V 11, während die Zahl der negativen Fehler sich in den betreffenden Gruppen auf 9 bzw. 7 und 6 beläuft. In Gruppe VI, VII und VIII sind die Fehler ziemlich gesetzmäßig verteilt; die Zahl der positiven beträgt 5, 1, 1; die der negativen 6, 3 und 2.

Die Gesamtzahl der positiven Fehler ist 89, während die der negativen 73 ist.

Gehen wir jetzt zur Berechnung des mittleren Fehlers, so erhält man diesen aus den positiven Fehlern zu

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{31,3845}{89}} = \pm \sqrt{0,3526} = \pm 0,59'', \qquad (1)$$

und aus den negativen bekommt man

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{28,7364}{73}} = \pm \sqrt{0,3936} = \pm 0,63''. \qquad (2)$$

Aus der Gesamtzahl berechnet sich der mittlere Fehler zu

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{60,1209}{162}} = \pm \sqrt{0,371116} = \pm 0,609''. \qquad (3)$$

Hieran wollen wir gleich die Ermittlung von h^2 schließen. h bestimmen wir nach der Formel

$$h^2 = \frac{1}{2\mu^2} = \frac{1}{0,7422} = 1,347 \qquad (4)$$

und demnach $\qquad h = 1,161. \qquad (4a)$

Durch Abzählen wurde der wahrscheinliche Fehler ϱ bestimmt. Er fand sich

$$\varrho = 0,40. \qquad (5)$$

Dies muß nach Gleichung (28) (S. 121) gleich sein

$$\varrho = 0,674\,\mu. \qquad (6)$$

Es ist

$$\varrho = 0,657\,\mu. \qquad (7)$$

Demnächst wollen wir den durchschnittlichen aus den positiven Fehlern bestimmen. Er ist gleich

$$\vartheta = \pm \frac{43,37}{89} = \pm 0,487''. \qquad (8)$$

Dagegen aus den negativen Fehlern berechnet er sich

$$\vartheta = \pm \frac{35,52}{73} = \pm 0,487''. \qquad (9)$$

Falls wir den durchschnittlichen Fehler aus der Gesamtzahl berechnen, erhält man:

$$\vartheta = \pm \frac{78,89}{162} = \pm 0,487''. \qquad (10)$$

Der durchschnittliche Fehler muß nach Gleichung (26) (S. 121) gleich sein:

$$\vartheta = \pm 0,798\,\mu. \qquad (11)$$

Es ist $\vartheta = \pm 0{,}800\,\mu.$ (12)

Folglich ziemlich genaue Übereinstimmung.

Wir wollen sodann die Häufigkeit des Auftretens der Fehler von 0,0″—0,19, von 0,20—0,39 usw. untersuchen.

Grenzen	Positiver Widerspruch	Negativer Widerspruch	Gesamtzahl der Fehler	Nach dem Fehlergesetz
0,0″—0,195	21	21	42	41
0,195—0,395	19	19	38	38
0,395—0,595	18	9	27	30
0,595—0,795	13	7	20	22
0,795—0,995	11	6	17	15
0,995—1,195	5	6	11	8
1,195—1,395	1	3	4	5
1,395—1,595	1	2	3	2
1,595—1,795	0	0	0	1
1,795—1,995	0	0	0	0
		Summe:	162	162

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung des Fehlergesetzes mit der Praxis fehlerfrei nachgewiesen. Die letzte vertikale Spalte ist wie folgt erhalten. Als Eingang haben wir nicht t, sondern $\frac{t}{h}$. Sodann sind die Tabellenwerte II (S. 121) für 0,195, 0,395, 0,595 usw. durch zweifache Interpolation zu bestimmen und alsdann diese Differenzen mit 162 zu multiplizieren.

Um z. B. die erste Zahl 41, für welche $x = 0{,}195$ ist, zu finden, hat man zu x den zugehörigen Wert t zu suchen. $t = hx = 1{,}161 \cdot 0{,}195 = 0{,}2264$. Jetzt zu $t = 0{,}22$ und $0{,}23$ den Wert y der Czuberschen Tabelle entnommen, ergibt 0,2443 bzw. 0,2550 Nun ist mittelst einer Proportion der Wert

$$\frac{2}{\pi}\int_0^t c^{-t^2}\,dt$$

für $t = 0{,}2264$ zu ermitteln. Dieser ist gleich $0{,}2443 + 0{,}0107 \cdot \frac{64}{100} = 0{,}2511$. Diese Zahl mit der Anzahl der vorhandenen Fehler, hier 162, multipliziert, ergibt 40,7, rund 41.

10. Begründung der Methode der kleinsten Quadrate.

Wir wollen die Methode der kleinsten Quadrate für vermittelnde Beobachtungen begründen, alsdann gilt sie auch für bedingte Beobachtungen, indem wir S. 81 ff. gezeigt haben, daß sich bedingte jeden Augenblick auf vermittelnde zurückführen lassen.

Die vorliegenden Fehlergleichungen seien

$$\lambda_1 = -L_1 + f_1(x, y, z) \qquad \text{Gewicht } g_1$$
$$\lambda_2 = -L_2 + f_2(x, y, z), \ldots \qquad \text{,,} \quad g_2 \cdots$$
$$\lambda_n = -L_n + f_n(x, y, z), \qquad \text{,,} \quad g_n$$

so dient zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten x, y und z die Bedingung, daß ihre Wahrscheinlichkeit ein Maximum werde. Jedem System der x, y, z entspricht ein solches der λ; die Folge der obigen Forderung ist auch die, daß die Fehler die größte Wahrscheinlichkeit haben müssen. Wird für die Fehler die Gültigkeit des Gaußschen Fehlergesetzes vorausgesetzt, so sind die einzelnen Wahrscheinlichkeiten

$$w_1 = c_1 e^{-h_1^2 \lambda_1^2}, \quad w_2 = c_2 e^{-h_2^2 \lambda_2^2}, \ldots, \quad w_n = c_n e^{-h_n^2 \lambda_n^2}, \tag{1}$$

folglich nach dem ersten Satze des § 2 (S. 104) ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der einzelnen Wahrscheinlichkeiten gleich dem Produkt von $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Also
$$w = c_1 e^{-h_1^2 \lambda_1^2} c_2 e^{-h_2^2 \lambda_2^2} \cdots c_n e^{-h_n^2 \lambda_n^2}. \tag{2}$$

Dafür läßt sich auch schreiben:

$$w = c_1 c_2 \cdots c_n e^{-h_1^2 \lambda_1^2 - h_2^2 \lambda_2^2 - \cdots - h_n^2 \lambda_n^2}. \tag{3}$$

Oder, falls man den Exponent zusammenzieht:

$$w = c_1 c_2 \ldots c_n e^{-[h^2 \lambda^2]}. \tag{4}$$

Soll nun diese Größe ein Maximum werden, so ist $[h^2 \lambda^2]$ zu einem Minimum zu machen.

Es ist nun nach Gleichung (11) (S. 118)

$$h_1^2 = \frac{1}{2\mu_1^2}, \quad h_2^2 = \frac{1}{2\mu_2^2}, \quad \ldots, \quad h_n^2 = \frac{1}{2\mu_n^2},$$

folglich
$$h_1^2 : h_2^2 : \cdots : h_n^2 = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} : \cdots : \frac{1}{\mu_n^2}. \tag{5}$$

Jetzt verhält sich nach Gleichung (6) (S. 26)

$$\frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} : \cdots : \frac{1}{\mu_n^2} = g_1 : g_2 : \cdots : g_n,$$

folglich haben wir die Bedingung zu erfüllen:

$$[\lambda \lambda g] \text{ ein Minimum,} \tag{6}$$

falls den Unbekannten der kleinste Zwang angetan werden soll.

Sind die Beobachtungen gleich genau, ist also $g_1 = g_2 = \cdots = g_n = 1$, so ist die Gleichung zu erfüllen:

$$[\lambda \lambda] \text{ ein Minimum.} \tag{7}$$

Sobald also die Fehler dem Gaußschen Fehlergesetz folgen, so hat man die nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Unbekannten als die wahrscheinlichen zu betrachten. Falls die Fehler sich nicht dem Fehlergesetz fügen, so haben die Ergebnisse der Ausgleichungsrechnung nur den Wert zweckmäßiger Größen der Unbekannten. Es kann nicht auffallen, daß man in den Gleichungen (1) überall λ statt ε findet, da wir ja die wahrscheinlichen Werte x, y, z und nicht die wahren bestimmen wollen. Da aber die Konstanten für $\varphi(\lambda) = ce^{-h^2\lambda^2}$ und $\varphi(\varepsilon)$ dieselben sind, so hat man mit $\varphi(\lambda)$ zugleich der Entwicklung $\varphi(\varepsilon)$ zugrunde gelegt.[1])

1) Das Kapitel „Vermittelnde Beobachtungen zwischen deren ausgeglichenen Unbekannten Bedingungsgleichungen bestehen" haben wir wegen Mangels an Raum fortfallen lassen. Doch wir haben hier das Wesentliche der Ausgleichungsrechung angegeben. Wer sich noch weiter über diesen Gegenstand unterrichten will, dem sei Helmerts „Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate" empfohlen. Dieses Werk ist ebenfalls bei B. G. Teubner in Leipzig 1907 erschienen.