

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw. ~~369~~

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

708

teswelt
Graphisches
Rechnen

BG

B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

**Dieses Buch ist dem Schutze des
Publikums empfohlen.**

Volkssbibliothek Schweidnitz.

Das **Entleihen der Bücher** geschieht an
Wochentagen von 5^{1/2} bis 7^{1/2} Uhr nachmittags,
~~Sonntags von 11 bis 12^{1/2} Uhr mittags.~~

Beim **Umtausch der Bücher** ist regel-
mäßig die Tauschkarte vorzuzeigen. — Entliehene
Bücher sind innerhalb 14 Tagen umzutauschen,
für jeden weiteren Tag sind 2 Pfg. Strafe zu
zahlen.

Wünscht der **Entleiher** ein Buch länger
als 14 Tage zu behalten, so muß er die Lese-
frist auf weitere 14 Tage verlängern lassen.

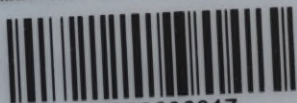
**Das Weiterleihen der Bücher ist nicht
gestattet.**

Die **Bücher müssen vom Entleiher
stets in Papier gehüllt werden**; Be-
schmutzung oder Beschädigung derselben kann die
Entziehung der Tauschkarte zur Folge haben.

Der **Entleiher hat**, falls in seinem Hause
oder seiner Wohnung eine ansteckende Krankheit
vorkommt, solches sofort anzuzeigen und das
Buch zurückzustellen.

Jedes der meist reich illustrierten Bändchen

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296017

Jed
Bie

Leipzig, in

M. 1.90
handlungen

S. Teubner

Bisher sind erschienen

N 154

zur Mathematik und Astronomie:

Einführung in die Mathematik.

Einführung in die Mathematik. Von Oberlehrer W. Mendelssohn. Mit 42 Figuren im Text. (Bd. 503.)

***Mathematische Formelsammlung.** Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik. Von Prof. Dr. S. Jatobi. (Bd. 507.)

Arithmetik, Algebra und Analysis.

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat P. Cranh. 2 Bände. (Bd. 120, 205, auch in 1 Band gebunden.) I. Teil: Die Rechnungsarten, Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Gleichungen zweiten Grades. 6. Aufl. Mit 9 Figuren im Text. (Bd. 120.) II. Teil: Gleichungen, Arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Komplexe Zahlen, Binomischer Lehrsatz. 5. Aufl. Mit 21 Textfiguren. (Bd. 205.)

***Einführung in die Vektorrechnung.** Von Prof. Dr. J. Jung. (Bd. 668.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 3., verbesserte Aufl. Mit 18 Figuren. (Bd. 197.)

Differentialrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studentat Dr. M. Lindow. 3. Aufl. Mit 45 Figuren und 161 Aufgaben. (Bd. 387.)

Integralrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Von Studentat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit 43 Figuren im Text und 200 Aufgaben. (Bd. 673.)

***Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Von Prof. Dr. A. Suppant-Schitsch. (Bd. 580.)

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Geh. Rechnungsrat Prof. E. Hegemann. Mit 11 Figuren im Text. (Bd. 609.)

Geometrie.

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat P. Cranh. 2. Aufl. Mit 94 Figuren im Text. (Bd. 340.)

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat P. Cranh. 2. Aufl. Mit 50 Figuren im Text. (Bd. 431.)

***Sphärische Trigonometrie.** Von Geh. Studentat P. Cranh. (Bd. 605.)

Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. Von Geh. Studentat P. Cranh. 2. Aufl. Mit 55 Figuren im Text. (Bd. 504.)

***Analytische Geometrie des Raumes.** Von Geh. Studentat P. Cranh. (Bd. 549.)

Angewandte Mathematik.

Praktische Mathematik. Von Prof. Dr. A. Neuendorff. 2 Bde. I. Teil: Graphische Darstellungen, Vertühtes Rechnen, Das Rechnen mit Tabellen, Mechanische Rechenhilfsmittel, Kaufm. Rechnen im tägl. Leben, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verbesserte Auflage. Mit 29 Figuren und 1 Tafel. (Bd. 341.) II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 133 Figuren. (Bd. 526.)

***Lehrbuch der Rechenvorleile.** Von Ing. Dr. G. Vojtko. (Bd. 739.)

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Von Regierungsrat Dipl.-Ing. R. Lenz. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 400.)

Geometrisches Zeichnen. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisth. Mit 172 Abb. im Text und auf 12 Tafeln. (Bd. 568.)

Projektionslehre. Die rechtwinklige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinklige Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstellung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeisth. Mit 208 Abbildungen im Text. (Bd. 564.)

Jedes Bändchen kartoniert M. 1.60, gebunden M. 1.90

Hierzu Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen

Angewandte Mathematik.

Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Doeblermann. 2. Aufl. Mit 91 Figuren und 11 Abbildungen. (Bd. 510.)

* **Graphisches Rechnen.** Von Oberlehrer Prof. D. Bröhl. (Bd. 708.)

Die graphische Darstellung. Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn und Gebrauch der Methode. Von Hofrat Prof. Dr. J. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Fig. im Text. (Bd. 437.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Bloß. Mit 34 Abbildungen. (Bd. 385.)

Mathematische Spiele.

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 4., verbesserte Aufl. Mit 1 Titelfeld und 78 Figuren. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildn. C. Easters u. P. Morphy's, 1 Schachbrettafel u. 43 Diagrammen. 3. Aufl. (Bd. 281.)

* **Die Hauptvertreter der Schachspielkunst und die Eigenarten ihrer Spielführung.** Von Dr. M. Lange. (Bd. 531.)

Geschichte.

Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. E. Heiberg. Mit 2 Figuren. (Bd. 370.)

* **Die Naturwissenschaften im Mittelalter und im Zeitalter des Wiedererwachens der Wissenschaften.** Von Direktor Dr. J. Dannemann. (Bd. 695.)

* **Die Naturwissenschaften in der Neuzeit.** Von Direktor Dr. J. Dannemann. (Bd. 696.)

Astronomie und Astrologie.

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 4. Aufl. Mit 26 Figuren. (Bd. 24.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Geh. Regierungsrat Prof. Dr. M. B. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)

Untergang der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Geh. Regierungsrat Prof. Dr. M. B. Weinstein. (Bd. 470.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 19 Abbildungen. (Bd. 110.)

Probleme der modernen Astronomie. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit Figuren. (Bd. 355.)

Die Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Prof. Dr. A. Maruse. Mit 26 Abbildungen. (Bd. 378.)

Die Sonne. Von Dr. A. Krause. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 357.)

Der Mond. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 34 Abbildungen. 2. Aufl. (Bd. 90.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit Figuren. 2. Aufl. von Dr. H. Naumann. (Bd. 240.)

* **Die Systerne.** Von Dr. Aug. Köhl. Mit Abbildungen. (Bd. 677.)

Der Kalender. Von Prof. Dr. W. J. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)

Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte und das Wesen der Astrologie. Unter Mitwirkung von Geh. Rat Prof. Dr. C. Bezold dargestellt von Geh. Hofrat Prof. Dr. Franz Voll. 2. Aufl. Mit 1 Sternkarte und 20 Abbildungen. (Bd. 638.)

Meteorologie.

Einführung in die Wetterkunde. Von Prof. Dr. E. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. (Bd. 55.)

Unser Wetter. Einführung in die Klimatologie Deutschlands an der Hand von Wetterkarten. Von Dr. K. Hennig. 2. Aufl. Mit 48 Abb. im Text (Bd. 349.)

Die mit * bezeichneten u. weitere Bände befinden sich in Vorb.

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

708. Bändchen

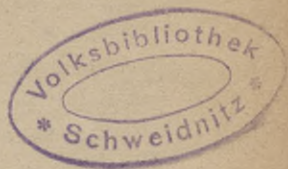
Graphisches Rechnen

Von

Otto Pröls

Oberlehrer an der Hansa-Schule in Hamburg-Vergedorf

Mit 164 Figuren im Text



Verlag und Druck von V. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1920

W 1/3
270/b.



~~1369~~ 1-301541

Schutzformel für die Vereinigten Staaten von Amerika:
Copyright 1920 by B. G. Teubner in Leipzig

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten

Akc. Nr.

~~250451~~
3PU-B 88/2017

Vorwort.

Während sich die graphische Darstellung in den letzten Jahrzehnten als ein Hilfsmittel von unübertrefflicher Übersichtlichkeit gewaltige Gebiete, wie die der Naturwissenschaften, der Technik, der Statistik, erobert hat, ist die rechnerische Auswertung der Zeichnung, das graphische Rechnen, noch wenig in Anwendung. Und doch läßt sich jede Rechenaufgabe, von der einfachen Addition bis zur kompliziertesten Gleichung, graphisch lösen, und meist ist diese Lösung einfacher zu verstehen und schneller auszuführen, als die rechnerische. Das vorliegende Bändchen soll dem praktischen Rechner Gelegenheit geben, die wichtigsten Methoden des graphischen Rechnens sich bei geringen Vorkenntnissen anzueignen. Von der Behandlung einer größeren Zahl von Beispielen aus der Praxis mußte abgesehen werden, da die notwendigen Erläuterungen zu viel Raum beanspruchen und anderseits diese Beispiele meist nicht so gut zur Erlernung der Methode geeignet sind, wie die zu Übungszwecken konstruierten.

Die Figuren sind — mit verschwindenden Ausnahmen — in der für die betreffende Aufgabe günstigsten Größe konstruiert; die Reproduktion mußte mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum in kleinerem Maßstab erfolgen (im allgemeinen in 1:2 oder 1:3 linear).

Wer das Büchlein zur Hand nimmt, um das graphische Rechnen zu erlernen, vergesse nicht, daß er zur Erlernung des Zahlenrechnens viele Jahre gebraucht hat. Er erwarte also nicht, vom bloßen Durchlesen ein flotter graphischer Rechner zu werden. Dazu gehört viel Übung; jede Aufgabe des Buches muß in geeignetem Maßstabe nachkonstruiert, und möglichst viele Beispiele müssen dazu genommen werden. Millimeter- und Logarithmenpapier sind dabei unentbehrlich. Mit der Übung wird sich die Überzeugung von den Vorteilen der graphischen Methoden einstellen. Möge das Buch diesem wichtigen Zweige des praktischen Rechnens recht viele Freunde und Anhänger gewinnen!

Bergedorf-Hamburg, im Oktober 1919.

Otto Pröfl.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung: Das Gebiet des graphischen Rechnens	7
I. Die Rechenoperationen in graphischer Behandlung	9
A. Addition und Subtraktion	9
1. Graphische Addition	9
2. Graphische Subtraktion	10
3. Mechanische Addition und Subtraktion	10
4. Mechanische Addition und Subtraktion von Logarithmen: der Rechenstab	11
B. Multiplikation und Division	12
1. $a \cdot b$	12
2. Σab	13
3. $\frac{\Sigma ab}{\Sigma a}$	14
4. $\frac{ab}{c}$	15
5. Graphische Flächenberechnung	15
a) Fläche des Rechtecks. Kurventrapez	15
b) Fläche des Dreiecks	16
c) Vielecksfläche	17
C. Potenzieren und Radizieren	18
1. Graphisches Potenzieren	18
a) $y = ax$	18
b) $y = ax^2, y = ax^3, \dots, y = ax^n$	19
c) $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ (Segner'sche Konstruktion).	22
2. Graphisches Radizieren	22
a) \sqrt{a}	23
b) $\sqrt{a^2 + b^2}$	23
D. Graphisches Tabellenrechnen	23
Allgemeine Zahlentabellen	25
Kreistabellen	26
Trigonometrische Tabellen	27
Die logarithmische Additionskurve	28
Nomogramme	34

	Seite
E. Die geometrische Addition	33
1. Addition von 2 Vektoren	35
2. Zerlegung eines Vektors in Komponenten	36
3. Addition beliebig vieler Vektoren	37
II. Graphische Lösung von Gleichungen	37
A. Aufgaben ohne Gleichungsansatz	37
B. Gleichungen mit einer Unbekannten	45
1. Lösung mittels der Fehlerkurve	45
2. Das Lillische Verfahren	53
3. Lösung durch zwei Kurven	59
4. Homographisches Verfahren für quadratische Gleichungen	62
C. Auflösung von Gleichungssystemen mit mehreren Unbekannten	65
1. Auflösung von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten	65
a) Lösung durch 2 Kurven	65
b) Die Vektorenmethode	67
2. Gleichungen ersten Grades mit 3 Unbekannten nach dem Vektorverfahren	68
3. Auflösung einer Gleichungstreppe ersten Grades mit n Unbekannten	71
4. Auflösung eines vollständigen Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Graphische Elimination	74
III. Vereinfachung graphischer Berechnungen durch Abbildung auf eine neue Koordinatenebene	78
Die logarithmische Abbildung	80
Koordinatenachsen mit Funktionsstufen	81
Auflösung von Gleichungen mit Hilfe der Abbildung	85
IV. Graphische Infinitesimalrechnung	92
A. Graphische Integration	92
1. Das Sehnenverfahren	93
2. Das Tangentenverfahren	96
3. Integralkurve einer geschlossenen Kurve	99
4. Veränderung des Maßstabs der Integralkurve	99
B. Graphische Differentiation	99
1. Das Tangentenverfahren	99
a) Graphische Bestimmung des Differentialquotienten (Verfahren von Melchior).	100
b) Konstruktion der Differentialkurve unter Benutzung des Pols.	100
2. Das Sehnenverfahren	101
a) Umkehrung des Integrationsverfahrens	102
b) Das Stabysche Verfahren	102

Literaturverzeichnis.

- Ludew, P., Einführung in die Nomographie. Mathematisch-physikalische Bibliothek. Bd. 28. Leipzig, Teubner 1918.
- Mehmke, R., Leitfaden zum graphischen Rechnen. Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher. Bd. 19. Teubner 1917.
- Neuendorff, R., Praktische Mathematik. MNuG. Bd. 341. 1917. 2. Aufl. Bd. 526. 1918. Teubner.
- d'Ocagne, M., Calcul graphique et nomographie. Paris 1908.
- Perry, J., Höhere Analysis für Ingenieure. Deutsche Bearbeitung von R. Friede und J. Süchting. 2. Aufl. Teubner 1910.
- Runge, C., Graphische Methoden. Sammlung math.-physj. Lehrbücher. Bd. 18. Teubner 1915.
- Scheffers, G., Lehrbuch der Mathematik. 3. Aufl. Leipzig 1916.
- Schilling, F., Über die Nomographie v. M. d'Ocagne. 1. Aufl. Teubner 1900.

Einleitung.

Das Gebiet des graphischen Rechnens.

Bei der Lösung mathematischer Aufgaben müssen wir unterscheiden zwischen einer allgemeinen Aufgabe, die alle besonderen eines ganzen Gebietes enthält, und einem ganz bestimmten Problem. Im ersten Falle sind die bekannten Größen durch allgemeine Zahlen, d. h. Buchstaben ausgedrückt; auch die Lösung enthält diese Buchstaben; sie ist eine Formel, die durch Einsetzen bestimmter Zahlenwerte anstelle der Buchstaben alle Einzelaufgaben zu lösen gestattet. Solche Aufgaben bilden das Gebiet der Buchstabenrechnung. So enthält die Formel

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$
 die Lösungen sämtlicher quadratischer Gleichungen der Normalform $x^2 + ax + b = 0$. Im zweiten Falle handelt es sich darum, eine ganz bestimmte Aufgabe mit gegebenen Zahlen zu lösen, z. B. die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$. Hierbei ist es nicht immer nötig, die allgemeine Methode anzuwenden. Im vorliegenden Beispiel findet man durch Zerlegung der linken Seite in das Produkt $(x - 2)(x - 3)$ oder auch durch Probieren die Lösungen $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Nur mit solchen bestimmten Aufgaben haben wir es im Folgenden zu tun. Sie bilden das Gebiet des „numerischen Rechnens“.

Bei der Wahl des Lösungsweges müssen wir uns klar machen, welcher Grad der Genauigkeit erreicht werden soll. Hier besteht ein Unterschied zwischen den Aufgaben der Übungsbücher und denen der Praxis, wie sie auf dem Gebiete der angewandten Mathematik, der Physik und der Ingenieurwissenschaften sich bieten. Erstere haben meist einfache Zahlenwerte und liefern genaue Lösungen schon mit Rücksicht auf die vorzunehmenden Proben. Kommen irrationale oder transzendente Zahlen (wie Wurzeln, trigonometrische Funktionen, Logarithmen) vor, so wird diejenige Genauigkeit verlangt, die sich

mit den benutzten Tabellen erreichen läßt. Anders bei den Aufgaben der angewandten Mathematik. Hier handelt es sich nie um absolute Genauigkeit, selten um eine größere Zahl von genauen Dezimalstellen. Denn die Rücksicht auf die Abmessungen der Handelsfabrikate (z. B. Querschnitte elektrischer Leitungen, Rohrdurchmesser), auf vorhandene Modelle und endlich die vielfach notwendige Anwendung von Sicherheitskoeffizienten bedingt erhebliche Abweichungen von dem berechneten Werte. Dagegen wird man bei solchen technischen Rechnungen, eben weil die Rechnung nicht Selbstzweck ist, größten Wert auf Schnelligkeit und Bequemlichkeit legen. Das Ideal ist, Rechnungen auf mechanischem Wege zu erledigen, wie es bei den elementaren Rechenoperationen durch die Rechenmaschinen geschieht. Man wird deshalb einer langwierigen genauen Methode eine bequeme, wenn auch minder genaue vorziehen, wenn die bei ihr erreichte Genauigkeit den Anforderungen der Praxis genügt.

Diesen Anforderungen wird in vielen Fällen die „**graphische Methode**“ gerecht, d. h. die Lösung einer Aufgabe ohne Rechnung auf zeichnerischem Wege. Es handelt sich darum, aus den gegebenen Größen eine Unbekannte mittels Lineal, Reißdreieck und Zirkel zu konstruieren und zu messen. Da die erreichte Genauigkeit nicht nur von der Leistungsfähigkeit der gewählten Methode, sondern auch von der Fertigkeit im Zeichnen abhängt, wird der graphische Weg hauptsächlich für die geeignet sein, die — wie der Ingenieur — durch ihren Beruf an genaues Zeichnen gewöhnt sind. So sind auf vielen Einzelgebieten der Technik für häufig wiederkehrende Probleme graphische Methoden ausgebildet worden, z. B. die graphische Statik.

Mit Vorliebe wird man den graphischen Weg wählen, wenn solche Größen weiteren Rechnungen zu unterwerfen sind, die selbst durch Konstruktion gefunden sind; denn der Übergang von der konstruierten Größe zur Zahl ist wegen der jeder Messung anhaftenden Ungenauigkeiten mit kleinen Fehlern verbunden. Schließlich gibt es Fälle, in denen der rechnerische Weg überhaupt ausgeschlossen ist, z. B. bei Kurven, die — durch Registrierapparate oder durch Versuchsreihen — empirisch gegeben sind, deren analytischer Ausdruck also nicht bekannt ist. So lassen sich Differential- und Integralkurven, Flächenberechnungen für empirisch gegebene Kurven nur graphisch bestimmen.

Im Folgenden sollen zunächst graphische Methoden für die elementaren Rechenoperationen entwickelt werden; der Hauptabschnitt be-

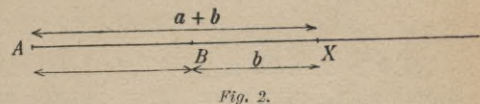
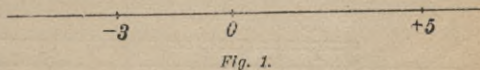
schäftigt sich mit der zeichnerischen Lösung von Gleichungen, und endlich sollen einige Gebiete der Differential- und Integralrechnung graphisch behandelt werden.¹⁾

I. Die Rechenoperationen in graphischer Behandlung.

A. Addition und Subtraktion.

Eine Zahl wird geometrisch dargestellt durch eine Strecke, deren Länge so viele Einheiten beträgt, wie die Zahl angibt. Auch das Vorzeichen der Zahl läßt sich berücksichtigen, wenn eine bestimmte Richtung der Strecke als positiv gewählt wird. Ein Fortschreiten in positiver Richtung vom Anfangspunkt aus führt zu den positiven, in entgegengesetzter Richtung zu den negativen Zahlen. Als Einheit kann eine beliebige Strecke gewählt werden, doch erweist es sich bei allen graphischen Rechnungen als praktisch, metrische Einheiten (dm, cm, mm) zu wählen. Die Wahl der Einheit erfolgt mit Rücksicht auf den für die Zeichnung zur Verfügung stehenden Raum, aber möglichst groß: bei zu großer Einheit wird die Zeichnung nicht Platz finden; bei zu kleiner Einheit kann das Ergebnis der Rechnung nicht genau genug abgelesen werden. Die Wahl der Einheit spielt bei allen graphischen Rechnungen eine wesentliche Rolle; sie erfordert für jeden Fall eine besondere Überlegung. Liegen keine Gründe für die Wahl einer andern Einheit vor, so nehmen wir als solche das Zentimeter. In Fig. 1 sind die Zahlen -3 und $+5$ dargestellt.

1. Die graphische Addition von Zahlen besteht in der Addition der diese Zahlen darstellenden Strecken. Ist $AB = a$, $CD = b$, so ist $a + b$ zu finden, indem man CD auf der Verlängerung von AB



über B hinaus von B bis X abträgt: $a + b = AX$ (Fig. 2).

1) Über die Anfangsgründe der Algebra, Planimetrie und Trigonometrie siehe *AMG* Bd. 120. 205. 340. 431.

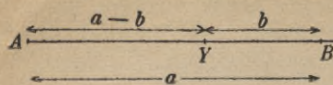


Fig. 3.

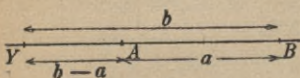


Fig. 4.

2. Die graphische Subtraktion $a - b$

wird ausgeführt, indem man CD von B aus in der Richtung BA abträgt; Y sei der Endpunkt. Dann ist $AY = a - b$ (Fig. 3).

Ist $b > a$, also $a - b$ negativ, so ist die Richtung von AY ent-

gegengesetzt der von AB (Fig. 4).

3. Mechanische Addition und Subtraktion mit Hilfe zweier Maßstäbe. Die Maßstäbe haben die gleiche Teilung, z. B. in cm; der eine, der als festliegend zu betrachten ist, trägt die Teilung auf der oberen Seite, der andere, der am festen Lineal verschoben werden kann, an der unteren Seite. Zur Ausführung der Addition $3 + 4$ wird Teilpunkt O des Schiebers über Punkt 3 des festen Lineals geschoben; das Ergebnis wird unter Punkt 4 des Schiebers auf dem festen Lineal abgelesen: $3 + 4 = 7$ (Fig. 5).

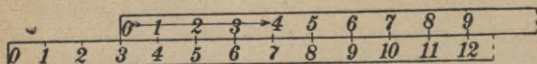


Fig. 5.

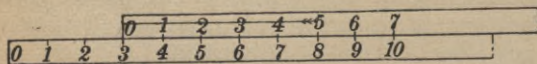


Fig. 6.

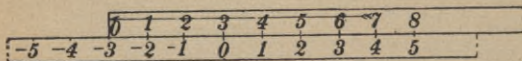


Fig. 7.

Ist $b > a$, z. B. in $4 - 7$, so kann das Ergebnis -3 auf dem Lineal abgelesen werden, wenn letzteres auch die negativen Zahlen (links vom Nullpunkt) enthält. Andernfalls nehme man die über O des Lineals liegende Zahl des Schiebers mit dem Minuszeichen: $4 - 7 = -3$ (Fig. 7).

Übungen: $2 + 3$; $5 - 3$; $-3 + 5$; $-2 + (-3)$; $-3 - (-5)$ graphisch zu berechnen.

Zur Ausführung der Subtraktion $8 - 5$ wird Punkt 5 des Schiebers über Punkt 8 des Lineals gestellt; das Ergebnis wird unter Punkt 0 des Schiebers auf dem Lineal abgelesen: $8 - 5 = 3$ (Fig. 6).

4. Mechanische Addition und Subtraktion von Logarithmen. Der Rechenstab. Beide Lineale erhalten eine logarithmische Teilung

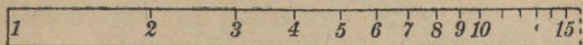


Fig. 8.

lung auf folgende Weise: in einer großen Einheit, z. B. 25 cm (Fig. 8 im Maßstab 1:4) werden Logarithmen aufgetragen: $\log 1 = 0$, $\log 2 = 0,301$, $\log 3 = 0,477$, ..., $\log 10 = 1$. Die erhaltenen Punkte werden mit den Werten der numeri bezeichnet: 1, 2, 3, ..., 10, Legt man Punkt 1 des Schiebers über Punkt 3 des Lineals, so zeigt der unter 2 des ersteren liegende Punkt des letzteren das Ergebnis der Rechnung $\log 3 + \log 2$, also nach dem bekannten Logarithmengesetz $\log(2 \cdot 3) = \log 6$ an. Der Punkt trägt aber die Bezeichnung des numerus, also „6“. Wir können demnach mit einer aus zwei logarithmischen Teilungen bestehenden Vorrichtung, die unter dem Namen „Rechenstab“ bekannt ist, mechanisch multiplizieren. Zur Ausführung der Rechnung $2,3 \cdot 3,4$ stelle man den Punkt 1 des Schiebers über Punkt 2,3 des Lineals. Das Ergebnis wird auf letzterem unter Punkt 3,4 abgelesen: $2,3 \cdot 3,4 = 7,82$ (Fig. 9).

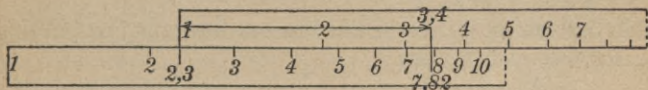


Fig. 9.

Stellt man Punkt 4 des Schiebers über Punkt 8 des Lineals, so findet man das Ergebnis der Subtraktion $\log 8 - \log 4$ unter dem Nullpunkt des Schiebers. Da $\log 8 - \log 4 = \log(8:4) = \log 2$ ist, finden wir an dieser Stelle des Lineals „2“. Wir haben also die

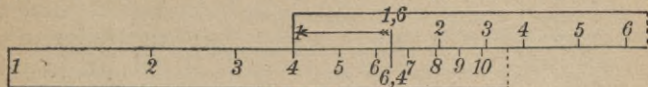


Fig. 10.

Division $8:4 = 2$ mechanisch ausgeführt. Fig. 10 zeigt die Stellung des Rechenstabs für die Division $6,4:1,6 = 4$.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung des mechanischen Rechnens mit Hilfe des Rechenstabes seien dieser Vorrichtung noch einige Zeilen

gewidmet. Außer der bisher benutzten unteren Teilung enthält Lineal und Schieber noch eine zweite im halben Maßstabe, also mit der Einheit 12,5. Die aufgetragenen Zahlen gehen hier bis 100, da $2 \cdot \log 10 = \log(10^2) = \log 100$ ist. Diese Teilung wird vorzugsweise für Rechnungen im Zahlenkreise 1—100 benutzt. Über einem $\log a$ darstellenden Punkt der unteren findet sich auf der oberen Teilung der Punkt $2 \log a$ oder $\log a^2$. Diese Punkte sind aber mit a bzw. a^2 bezeichnet. Man kann daher mechanisch quadrieren, z. B. $2,4^2$, indem man die Basis 2,4 auf der unteren Teilung und den genau darüber liegenden Punkt der oberen auffucht: 5,76 (Fig. 11). Ein Läufer, aus einer verschiebbaren Glasplatte mit feinem Strich bestehend, ermöglicht das genaue Auffinden der an gleicher Stelle stehenden Zahlen beider Teilungen. Umgekehrt findet sich zu jeder Zahl der oberen Teilung an gleicher Stelle der unteren die Quadratwurzel.¹⁾

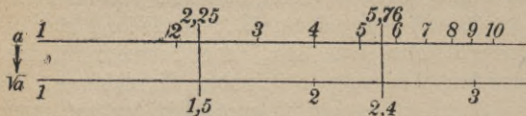


Fig. 11.

Fig. 11 zeigt das Beispiel:

$$\sqrt{2,25} = 1,5.$$

Übungen: $3,4 \cdot 2,1$; $8,6 : 3,2$; $19,3 \cdot 4,5$; $81,6 : 27,2$; $5,3^2$; $1,13^2$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{30,2}$.

Wir werden an späterer Stelle von den logarithmischen Maßstäben weiteren Gebrauch machen.

B. Multiplikation und Division.

1. $a \cdot b$. Der Ausdruck $x = a \cdot b$ läßt sich als Strecke konstruieren nach der Proportion: $1 : b = a : x$; es ist also x die „vierte Proportionale“ zu 1, b und a . Man gibt der Zeichnung zweckmäßig

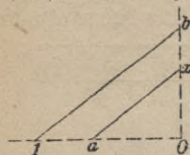


Fig. 12.

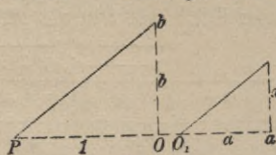


Fig. 13.

die Anordnung der Fig. 12. Sind mehrere Aufgaben gleicher Art zu erledigen, so empfiehlt sich die Zerlegung in zwei gesonderte Teile

1) Näheres siehe mathem.-physik. Bibliothek Bd. 23. Rohrberg, Theorie u. Praxis des Rechenschiebers.

(Fig. 13). Es ist $\overline{Ob} = b$, $\overline{O_1a} = a$, $\overline{O_1x} = x$. Den um die Einheit links von O liegenden Punkt P bezeichnet man als „Pol“. O und O_1 können auch in einen Punkt zusammenfallen.

2. Σab . Die vorstehend angegebene Konstruktion gestattet die Darstellung einer Summe von Produkten:

$$x = \Sigma ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Man konstruiert zunächst Strecke $\overline{a_1 x_1} = a_1 \cdot b_1$; Punkt x_1 wird als Ausgangspunkt einer zweiten Konstruktion genommen, die $a_2 \cdot b_2$ liefert. Die Strecke bis zur Achse der a ist dann: $\overline{x_2 a_2} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Indem man mit der Konstruktion von x_2 aus fortfährt, gelangt man zu $\overline{x_3 a_3} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ und schließlich zu $\overline{x_n a_n} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = x$. Unter Fortlassung überflüssiger Konstruktionslinien ergibt sich folgende Konstruktion (Fig. 14): es sei $OP = 1$; $\overline{Ob_1} = b_1$, $\overline{Ob_2} = b_2$, $\overline{Ob_3} = b_3 \dots \overline{Ob_n} = b_n$; $\overline{O_1 a_1} = a_1$,

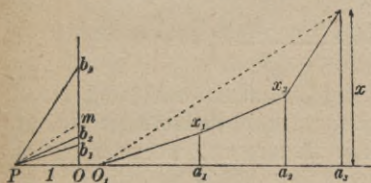


Fig. 14.

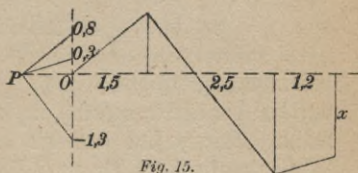


Fig. 15.

$\overline{a_1 a_2} = a_2$, $\overline{a_2 a_3} = a_3$, \dots , $\overline{a_{n-1} a_n} = a_n$. Man ziehe $\overline{O_1 x_1} \parallel \overline{Pb_1}$ bis zur Senkrechten in a_1 , $\overline{x_1 x_2} \parallel \overline{Pb_2}$ bis zur Senkrechten in a_2 , \dots , $\overline{x_{n-1} x_n} \parallel \overline{Pb_n}$ bis zur Senkrechten in a_n ; dann ist $\overline{a_n x_n} = x = \Sigma ab$.

Ist ein Teilprodukt negativ, also einer der Faktoren desselben negativ, so ist es gleichgültig, welchen der beiden Faktoren wir negativ rechnen. Wir wollen das Minuszeichen in diesem Falle stets dem b -Faktor zuerteilen. Die negativen b sind dann unterhalb OP auf der b -Achse abzutragen. Fig. 15 löst die Aufgabe: $x = a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3$. Der Zeichnung ist das Zahlenbeispiel $x = 1,5 \cdot 0,8 - 2,5 \cdot 1,3 + 1,2 \cdot 0,3$ zugrunde gelegt. Es ergibt sich: $x = -1,69$.

3. $\frac{\Sigma ab}{\Sigma a}$. Zieht man in Fig. 14 die Schlußstrecke $\overline{O_1 x_n}$ und den dazu parallelen Polstrahl \overline{Pm} , so ist

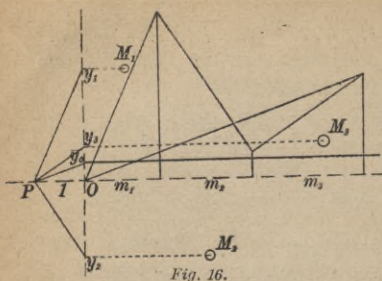


Fig. 16.

bzw. mit den Faktoren b_1, b_2, \dots, b_n multipliziert sind. In der Mechanik treten derartige Ausdrücke mehrfach auf, z. B. bei der Lehre vom Schwerpunkt.¹⁾ Sind M_1, M_2, \dots, M_n Punkte mit den Massen m_1, m_2, \dots, m_n , die von einer beliebigen Achse AX die Abstände y_1, y_2, \dots, y_n haben, so ist der Abstand des Massenmittelpunktes („Schwerpunktes“) von derselben Achse durch die Gleichung

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

bestimmt. In Fig. 16 ist y_0 graphisch bestimmt. Als Achse der a , auf der die Werte m_1, m_2, m_3 abgetragen sind, ist die Achse OX gewählt. Die y sind auf die b -Achse übertragen, indem durch die Massenpunkte Parallele zu OX gezogen sind, welche die b -Achse in y_1, y_2, y_3 schneiden. Der zur Schlusslinie parallele Polstrahl ergibt auf der b -Achse Punkt y_0 . Der Schwerpunkt liegt dann auf der Parallelen durch y_0 zu OX . Sind x_1, x_2, \dots, x_n die Abstände von einer zweiten Achse (z. B. der auf OX senkrechten Achse OY), so wird dieselbe Konstruktion mit OY als Achse der m und einer zu OX parallelen Achse der x ausgeführt. Man erhält so eine Parallele zu OY im Abstände $x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$; der Schnittpunkt der beiden konstruierten Parallelen ist der Schwerpunkt des Massensystems. Der Figur 16 liegen die Zahlenwerte zu Grunde:

$$m_1 = 1,5; m_2 = 1,8; m_3 = 2,2; y_1 = 2,2; y_2 = -1,5; y_3 = 0,65.$$

Es ergibt sich in Übereinstimmung mit der Rechnung

$$y_0 = 0,4.$$

1) Siehe Hamel, Mechanik (MKG Bd. 684).

$$\begin{aligned} \overline{Om} &= \frac{a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\ &= \frac{x}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\ \overline{Om} &= \frac{\Sigma ab}{\Sigma a}. \end{aligned}$$

Es ist also \overline{Om} der Mittelwert von n Größen a_1, a_2, \dots, a_n , die

4. $\frac{a^b}{c}$. Der Ausdruck $x = \frac{ab}{c}$ läßt sich wie der unter 1. behandelte ab oder $\frac{ab}{1}$ konstruieren, wenn c an Stelle von 1 tritt:

$$c : b = a : x.$$

Der Pol ist hierbei um c Einheiten links von O zu wählen. Fig. 17.

Für $b = 1$ erhält man die reine Division $x = \frac{a}{c}$.

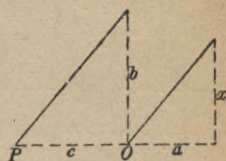


Fig. 17.

Übungen: $2,1 \cdot 1,8$; $2 \cdot 1,5 + 3 \cdot 1,2 - 4 \cdot 0,8$; $\frac{2,5 \cdot 3,5}{4,5}$.

Graphische Schwerpunktbestimmung für $m_1 = 2$, $m_2 = 3$; $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; $x_0 = ?$

5. Graphische Flächenberechnung. Häufig liegt die Aufgabe vor, die Größe einer Fläche durch eine einzige Messung zu finden. Diese Bestimmung ist namentlich dann von Wichtigkeit, wenn der Flächeninhalt zu weiteren graphischen Rechnungen verwendet wird, so daß seine Maßzahl doch durch eine einzige Strecke dargestellt werden muß. Hierzu sind Konstruktionen erforderlich, die in der Planimetrie als „Flächenverwandlungen“ behandelt werden. Die wichtigsten dieser Umformungen sollen im Folgenden ausgeführt werden.

a) Fläche des Rechtecks. Bezeichnet g die Grundlinie, h die Höhe des Rechtecks, so ist

$$f = g \cdot h.$$

seine Fläche. Soll diese durch eine einzige Strecke dargestellt werden, so ist das Rechteck in ein flächengleiches mit der neuen Grundlinie $g' = 1$ zu verwandeln. Es sei $ABCD$ (Fig. 18) das Rechteck, $AE = 1$. Das Lot in E auf AB schneidet DC in F ; AF schneidet BC in G .

Dann ist $f = h' = BG$.

Beweis: Es folgt aus dem „Proportionalssatz“:

$$h : 1 = h' : g$$

$$g \cdot h = 1 \cdot h'$$

$$f = h'.$$

Beispiel: $g = 3,2$ cm; $h = 1,4$ cm. Die Messung ergibt: $h' = 4,48$ cm; also ist $f = 4,48$ cm².

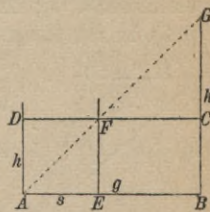


Fig. 18.

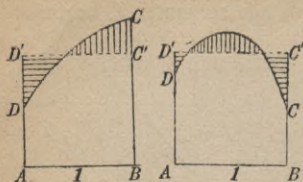


Fig. 19.

Sind die Flächen mehrerer Rechtecke mit den Grundlinien 1 zu addieren, so genügt es, ihre Höhen nach S. 9 zu addieren. Dies Verfahren kommt in Betracht bei der annähernden Bestimmung einer Fläche, die von einer Geraden, zwei zu ihr senkrechten Geraden und einer Kurve begrenzt wird. Wir betrachten zunächst ein „Kurventrepez“ $ABCD$ mit der Grundlinie $g = 1$ (Fig. 19). Die Fläche wird schätzungsweise in ein Rechteck $ABC'D'$ verwandelt, indem $C'D' \parallel AB$ so gezogen wird, daß die horizontal und die vertikal schraffierten Flächenstücke ungefähr gleich werden. Dann ist $f = AD'$. Die „mittlere Höhe“ des Kurventrepezes von der Grundlinie 1, gibt also annähernd dessen Flächeninhalt an. Eine größere Fläche dieser Art wird zunächst in Streifen von den Grundlinien 1 zerlegt; jeder Streifen wird annähernd in ein Rechteck verwandelt. Dann ist der Flächeninhalt gleich der Summe der mittleren Höhen. Die Addition erfolgt graphisch nach S. 9 oder mechanisch mit Hilfe eines Lineals, das einen verschiebbaren Zeiger besitzt. Wird die Grundlinie z. B. in halbe cm geteilt, so ist die Summe der mittleren Höhen noch zu halbieren.

b) Fläche des Dreiecks. Da Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich sind, wählen wir das für die Messung vorteilhafteste: das Dreieck mit einem rechten Winkel an der Grundlinie. Ein beliebiges Dreieck ABC wird in ein solches verwandelt, indem man als neue Spitze A' den Schnittpunkt der Parallelen durch A zu BC mit der in B auf BC errichteten Senkrechten wählt. (Fig. 20).

Um nun den Dreiecksinhalt durch eine einzige Strecke darzustellen, verwandeln wir $\triangle ABC$ (das bei B schon den rechten Winkel haben soll), in ein flächengleiches mit der neuen Grundlinie $BC' = g' = 2$; dann gibt die neue Höhe $A'B = h'$ den Flächeninhalt von $\triangle ABC$ an. Denn es ist: $f = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{g' \cdot h'}{2}$

$$= \frac{2 \cdot h'}{2} = h'.$$

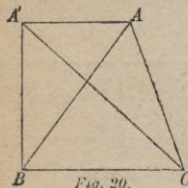


Fig. 20.

Die Umwandlung geschieht, wie aus der Planimetrie bekannt ist, so: man mache $BC' = 2$, ziehe

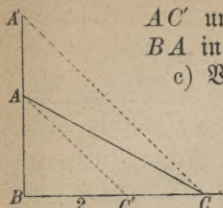


Fig. 21.

AC' und durch C die Parallele dazu. Diese schneidet BA in A' ; dann ist $A'B = h' = f$ (Fig. 21).

c) Vielecksfläche. Um den Inhalt eines Vielecks graphisch zu bestimmen, zerlegt man es durch die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen in Dreiecke, die nach S. 16 b) berechnet werden. Für je zwei zusammenstoßende Dreiecke kann man die gemeinsame Seite als Grundlinie nehmen.

Dann ist die aus ihnen zusammengesetzte Vierecksfläche durch eine einzige Messung zu bestimmen. Fig. 22 zeigt die graphische Berechnung einer Vierecksfläche. Es ist $f = h_1 + h_2$.

Beispiel: Schwerpunkt einer Vierecksfläche. S_1 und S_2 seien die Schwerpunkte der beiden Teildreiecke, die auf den Mittellinien in den Abständen $\frac{1}{3}h_1$ und $\frac{1}{3}h_2$ von der gemeinsamen Grundlinie liegen, h_1 und h_2 sind die Höhen der unveränderten Dreiecke. Der Schwerpunkt S des Vierecks liegt auf S_1S_2 im Abstände y_0 von der Diagonale, wobei $y_0 = \frac{f_1 \frac{h_1}{3} + f_2 \frac{h_2}{3}}{f_1 + f_2}$ ist. Durch die Konstruktion b) wird $f_1 = h_1'$, $f_2 = h_2'$, $f = h_1' + h_2'$ gefunden, also ist:

$$y_0 = \frac{h_1' \cdot \frac{h_1}{3} + h_2' \cdot \frac{h_2}{3}}{h_1' + h_2'}$$

Wir führen nun die Konstruktion S. 14 aus, wobei h_1' und h_2' auf der a -Achse, $\frac{h_1}{3}$ und $\frac{h_2}{3}$ auf der b -Achse abzutragen sind. Zieht man mit dem gefundenen y_0 eine Parallele zur Diagonale, so schneidet diese S_1S_2 in S .

Übungen: Graphische Messung einer Rechtecks-, Dreiecks- und Fünfecksfläche. Vergleich der gemessenen Werte mit den berechneten. Schwerpunkt einer Fünfecksfläche.

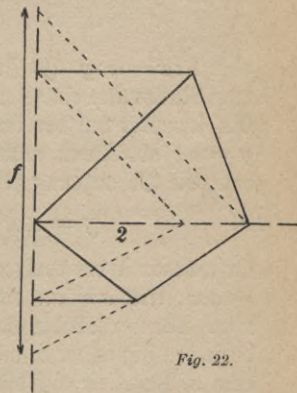


Fig. 22.

C. Potenzieren und Radizieren.

1. Graphisches Potenzieren. Die Darstellung von Potenzen durch Strecken ist für die Konstruktion von Kurven nach gegebener Gleichung und für die graphische Auflösung von Gleichungen von Wichtigkeit. Mit Rücksicht auf die spätere Verwendung wollen wir die Aufgabe wie folgt stellen:

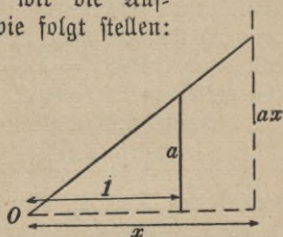


Fig. 23.

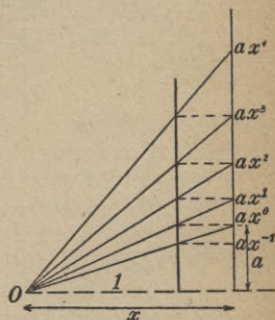


Fig. 24.

Ausdrücke der Form $y = ax^n$, wobei n eine positive ganze Zahl ist, sind graphisch zu berechnen.

a)
$$y = ax$$

oder $1 : x = a : y$. In Fig. 23 ist auf der x -Achse in der Entfernung 1 vom Nullpunkte eine Senkrechte von der Länge a errichtet. Der Strahl OA schneidet auf der im Punkte x errichteten Senkrechten die Strecke $y = ax$ ab. Denn nach dem Proportionalssatz ist $y : a = x : 1$, woraus die Behauptung folgt.

b)
$$y = ax^2, y = ax^3 \dots, y = ax^n.$$

Ersetzt man in der vorigen Konstruktion a durch ax , so wird $y = (ax) \cdot x = ax^2$; tritt ax^2 an die Stelle von a , so wird $y = (ax^2)x = ax^3$ usw. Man erhält die Strecken $ax, ax^2, ax^3, \dots, ax^n$ nacheinander an derselben Figur, wenn man jedesmal den für y gefundenen Wert durch eine x -Parallele auf die Senkrechte in 1 überträgt (Fig. 24).

Für $a = 1$ erhält man so die Potenzen einer beliebigen Zahl x .

Die Konstruktion läßt sich nach unten fortsetzen und liefert so die Werte: $a \cdot x^0 = a, ax^{-1} = \frac{a}{x}, ax^{-2}, ax^{-3}$ usw. Das erste Er-

gebnis ist klar; für die an zweiter Stelle erhaltene Strecke z besteht die Proportion: $a : z = x : 1$, also: $z = \frac{a}{x} = ax^{-1}$. Entsprechend sind die übrigen Beweise zu führen.

$$c) \quad y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Es handelt sich hier um Summen von Ausdrücken der oben betrachteten Form mit demselben Wert von x , aber verschiedenen Werten von a und n . Solche Ausdrücke sind für die Konstruktion von Kurven mit algebraischen Gleichungen von größter Wichtigkeit. Wir beginnen mit $n = 1$, also mit

$$y = a_0 x + a_1$$

$a_0 x$ wird konstruiert wie unter a); um a_1 hinzuzufügen, verschieben wir die X -Achse um die Strecke a_1 nach unten in die Lage $O_2 X$. In Fig. 25 ist $y = 0,5x + 0,8$ für $x = 1,4$ im Maßstab 2:1 konstruiert. Es ergibt sich: $y = 1,5$.

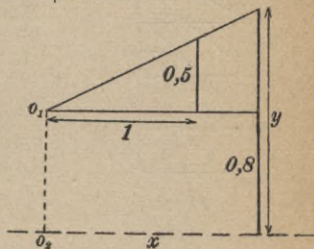


Fig. 25.

$$\text{Um} \quad y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

zu konstruieren, setzen wir die rechte Seite in die Form:

$$y = (a_0 x + a_1)x + a_2.$$

Man erkennt dann, daß die Konstruktion Fig. 25 angewendet werden kann, wenn man $a_0 x + a_1$ an die Stelle von a_0 , a_2 an die Stelle von a_1 setzt. Die Ausführung erfolgt so, daß zunächst die nach Fig. 25 konstruierte Strecke $a_0 x + a_1$ durch eine X -Parallele auf die 1-Ordnate übertragen wird. Der erhaltene Punkt wird durch einen vom bisherigen Nullpunkt O_2 ausgehenden Strahl auf die x -Ordnate übertragen und schließlich die X -Achse um a_2 in die Lage $O_3 x$ abwärts verschoben. Fig. 26 zeigt die Konstruktion von $y = 0,4x^2 + 0,6x + 0,5$ für $x = 1,3$. Die Messung ergibt: $y = 1,96$ (berechnet 1,956). Um $y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = (a_0 x^2 + a_1 x + a_2)x + a_3$ zu konstruieren, wird das y der vorigen Konstruktion ($a_0 x^2 + a_1 x + a_2$) durch eine X -Parallele auf die 1-Ordnate übertragen, der erhaltene Punkt von O_2 aus auf die x -Ordnate projiziert

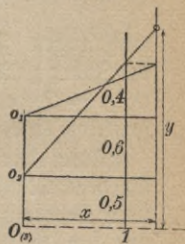


Fig. 26.

und schließlich die X -Achse um a_3 nach abwärts in die Lage O_4x verschoben (Fig. 27).

So fortfahrend gelangt man schließlich zur Konstruktion von

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

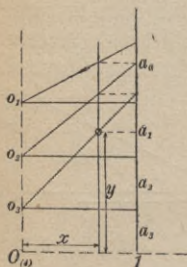


Fig. 27.

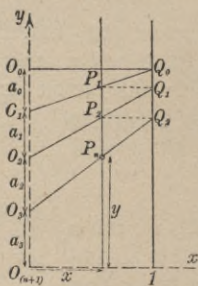


Fig. 28.

Unter Fortlassung der nur für die Überlegung nötigen Linien gestaltet sich die Konstruktion wie folgt: auf der y -Achse werden von $O(O_{n+1})$ aus hintereinander nach oben die Strecken a_n bis O_n , a_{n-1} bis O_{n-1} , \dots , a_2 bis O_2 , a_1 bis O_1 , a_0 bis O_0 abgetragen (Fig. 28). O_0 wird durch eine X -Parallele auf die 1 -Ordinate übertragen in

Q_0 . Strahl O_1Q_0 schneidet die x -Ordinate in P_1 . Die x -Parallele durch P_1 schneidet die 1 -Ordinate in Q_1 . Strahl O_2Q_1 schneidet die x -Ordinate in P_2 , die x -Parallele durch P_2 trifft die 1 -Ordinate in Q_2 . Weiter ergibt Strahl O_3Q_2 den Punkt P_3 usw. Der von O_n ausgehende Strahl liefert auf der x -Ordinate den Punkt P , dessen Abstand von der x -Achse das gesuchte y ist. Es sind also die a von der X -Achse aus in der Reihenfolge a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 in der umgekehrten Reihenfolge der Normalform

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

aufgetragen. Die Punkte O_1, O_2, \dots, O_n werden in der Reihenfolge des Index zu Ausgangspunkten der Strahlen O_1Q_0, O_2Q_1, \dots gemacht; $O_{n+1} = O$, der Nullpunkt des Achsenkreuzes, wird nicht mehr zur Konstruktion eines Strahles verwendet.

Häufig wird es sich empfehlen, für die x - und die y -Werte verschiedene Maßstäbe zu wählen, um die Figur nicht zu groß oder zu klein werden zu lassen. Handelt es sich, wie in unseren Beispielen, nur um den Wert von y , so wird man auf der Y -Achse, also als Maßstab der a , das Zentimeter als Einheit nehmen; das gefundene y ist dann ebenfalls in cm anzugeben. In mehreren der folgenden Figuren ist der Deutlichkeit halber (und da für x nur kleine Werte

vorkommen) für die x ein größerer Maßstab gewählt, z. B. 2 oder 4 cm als Einheit. Da die Konstruktion auf der Proportion $x:1 = y:a$ beruht, ergibt sich y im Maßstab von a unabhängig von der für x gewählten Einheit.

Die Konstruktion ist als „Segnersche Konstruktion“ bekannt. Ist $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots a_n$ eine algebraische Funktion, so findet man durch das angegebene Verfahren den zu beliebigem x gehörigen Funktionswert auf rein zeichnerischem Wege.

Wir haben bisher angenommen, daß alle Koeffizienten a positiv seien. Ist einer derselben negativ, so ist er vom Endpunkt der den vorhergehenden Koeffizienten darstellenden Strecke nach oben abzutragen. In Fig. 29 sind die Y -Achsen für folgende Ausdrücke dargestellt:

$$y = 5x^2 - 3x + 4$$

$$y = 2x^2 + 5x - 3$$

$$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 2.$$

Fig. 30 zeigt die Konstruktion von $y = 2,5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ für $x = 0,5$. Es ergibt sich: $y = 2,3$.

Ist einer der Koeffizienten gleich 0, z. B. a_2 , so fallen O_2 und O_3 in einen Punkt zusammen; O_3 ist dann auch mit O_2 zu bezeichnen und ist zweimal als Ausgangspunkt eines Strahles zu benutzen. Fig. 31 zeigt die Y -Achsen für die Ausdrücke:

$$y = 5x^2 - 1 \quad (a_1 = 0, O_2 = O_1)$$

$$y = -5x^4 + 3x^2 - 2 \quad (a_3 = 0, a_1 = 0; O_4 = O_3, O_2 = O_1)$$

$$y = 3x^3 - 5x + 2 \quad (a_1 = 0; O_2 = O_1, O_0 = O_4).$$

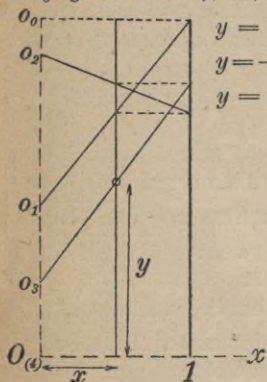


Fig. 30.

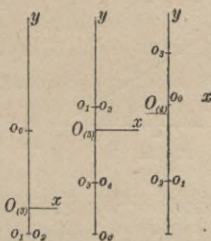


Fig. 31.

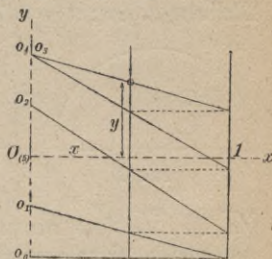


Fig. 32.

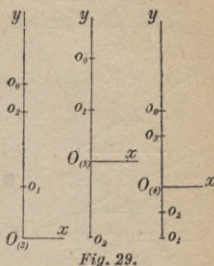


Fig. 29.

Fig. 32 zeigt das Beispiel: $-x^4 - 2x^3 - x^2 + 2$ für $x = 0,5$; es ergibt sich: $y = 1,44$.

Ist schließlich x negativ, so ist der entsprechende Punkt links vom Nullpunkt des Achsenkreuzes zu zeichnen. Fig. 33 zeigt die graphische Berechnung von $y = -0,5x^2 - 1,4x + 2,3$ für $x = -1,5$. Es ergibt sich: $y = 3,3$ (genau: 3,275).

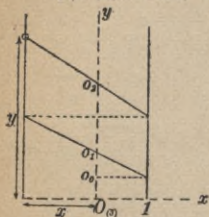


Fig. 33.

Das Auftragen der Koeffizienten und das Messen der konstruierten Strecke wird durch Anwendung des käuflichen Millimeterpapiers erleichtert, dessen Benutzung sich bei den meisten graphischen Rechnungen empfiehlt.

Übungen: graphisch zu berechnen:

$$y = -2x + 3 \quad \text{für } x = 2$$

$$y = 2x^2 - 3x - 1 \quad \text{„ } x = 2$$

$$y = x^3 - 2,3x^2 - 2,6x + 4,7 \quad \text{für } x = 2$$

$$y = -x^2 + 4,5 \quad \text{„ } x = 1,5$$

$$y = x^3 - 1,5x + 2 \quad \text{„ } x = -1,5.$$

2. Graphisches Radizieren. a) \sqrt{a} . Aus $x = \sqrt{a}$ folgt: $x^2 = a$ oder $x \cdot x = a \cdot 1$, $1 : x = x : a$. Es ist also x die „mittlere Proportionale“ zu 1 und a . Zur Konstruktion des Ausdrucks benutzen wir den Satz, daß die Höhe eines R. W.-Dreiecks mittlere Proportionale zu den Hypotenusenabschnitten ist. Fig. 34 zeigt die aus der Planimetrie bekannte Konstruktion. Es ist $a = 3$ gewählt; die Messung ergibt: $x = 1,73$.

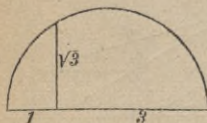


Fig. 34.

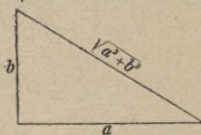


Fig. 35.

Ersetzt man 1 durch b , so erhält man durch dieselbe Konstruktion $x = \sqrt{a \cdot b}$. Beispiel: $\sqrt{3,6 \cdot 4,3} = 3,93$.

Bei der Bestimmung von $\sqrt[3]{a}$, ... $\sqrt[n]{a}$ sind wir zunächst auf die Berechnung oder auf Tabellen angewiesen. Eine graphische Methode wird in dem Abschnitt „graphisches Tabellenrechnen“ behandelt werden.

b) $\sqrt{a^2 + b^2}$. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ läßt sich in die Form setzen: $x^2 = a^2 + b^2$. Man erkennt hierin den durch den Pythagoras-Satz gegebenen Zusammenhang zwischen dem Hypotenusen- und den Kathetenquadraten eines R. W.-Dreiecks. Daraus folgt, daß x die Hypothenuse ist, wenn a und b zu Katheten genommen werden. Fig. 35 gibt die graphische Berechnung von $x = \sqrt{3,7^2 + 2,3^2}$ wieder. Es ergibt sich: $x = 4,36$.

Um $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ zu konstruieren, macht man a zur Hypotenuse, b zu einer Kathete; dann ist $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ die andere Kathete. Beispiel: $x = \sqrt{5,7^2 - 3,9^2} = 4,16$.

Das graphische Radizieren ist praktisch nur dann lohnend, wenn der Radikand eine durch Konstruktion gefundene Strecke ist, also nicht zahlenmäßig gegeben ist. Um aus gegebenen Zahlen die Quadrat- oder Kubikwurzel zu ziehen, benutzt man natürlich bequemer die entsprechenden Tabellen, die in jedem technischen Taschenkalender zu finden sind. Dagegen ist bei den Ausdrücken $\sqrt{a \cdot b}$ und $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ die graphische Methode der rechnerischen überlegen, sobald die Zahlen nicht so einfach sind, daß man die Radikanden im Kopf ausrechnen kann.

D. Graphisches Tabellenrechnen.

Sind zwei veränderliche Größen durch ein Gesetz derartig miteinander verbunden, z. B. Dampfdruck p und Temperatur t , daß zu jedem Werte der einen — unabhängigen Veränderlichen, p , — ein ganz bestimmter Wert der anderen — abhängigen Veränderlichen, t , — sich ergibt, so kann man sich über die Gesamtheit aller zusammengehörigen Wertepaare — den „Verlauf der Funktion“ — bekanntlich in zweifacher Weise eine Übersicht verschaffen. Die erste Methode ist die „Tabellendarstellung“: man ordnet die Ergebnisse der bei verschiedenen Drucken ($p = 1, 2, 3 \dots$ Atmosphären) ausgeführten Versuche übersichtlich in eine Tabelle ein:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Atm.
t	100	120	133	143	151	158	164	169	174	Grad

Die zweite Darstellungsweise, die für uns hauptsächlich in Betracht kommt, ist die graphische: man nehme einen Wert der Unabhängigen

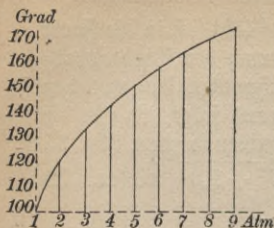


Fig. 36. 1 : 3

in irgendeinem Maßstab (in Fig. 36: 1 Atm. = 1 cm) als Abszisse, den zugehörigen Wert der Abhängigen als Ordinate eines Punktes (in Fig. 36: $10^0 = 1$ mm). Jedes Wertepaar ergibt so einen Punkt. Je dichter man die Werte von p wählt, um so dichter folgen die Punkte aufeinander, sodaß sie schließlich sich zu einem Kurvenzug zusammenschließen. Diese Kurve nennt man „die Bildkurve, das Diagramm oder die Schaulinie“ des be-

trachteten Funktionszusammenhangs. Praktisch genügen im allgemeinen wenige Punkte, um die Schaulinie nach dem Auge ausziehen zu können. In Fig. 36 sind nur die Wertepaare der Tabelle benutzt¹⁾.

Rein mathematisch ist der Zusammenhang zwischen zwei Veränderlichen durch eine Gleichung zwischen diesen gegeben, wobei die Unabhängige mit x , die Abhängige mit y bezeichnet wird.

Nach solchen Funktionsgleichungen können wir Tabellen berechnen und in der angegebenen Weise Schaulinien konstruieren. So ist nach der Gleichung

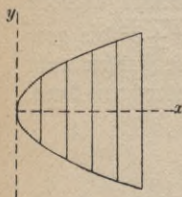


Fig. 37.

$y = \sqrt{2x}$ die Tabelle

x	0	1	2	3	4	5
y	0	$\pm 1,41$	± 2	$\pm 2,45$	$\pm 2,82$	$\pm 3,16$

berechnet und hiernach in Fig. 37 die Schaulinie gezeichnet.

Sei nun das Diagramm nach einer Reihe von Beobachtungen für ein Gesetz mit unbekanntem mathematischen („analytischen“) Ausdruck, oder nach einer aus gegebener Gleichung berechneten Tabelle gezeichnet, so ist klar, daß es weit umfassender ist, als die Tabelle. Letztere kann naturgemäß nur für eine beschränkte Anzahl von Wertepaaren berechnet werden. Die Kurve hingegen liefert alle Wertepaare, auch die nicht berechneten. Aus Fig. 36 folgt z. B. für $p = 2,5$ $t = 127^0$, indem man die zur Abszisse 2,5 gehörige Ordinate in dem bei der Konstruktion verwendeten Ordinatenmaßstab mißt. Um den Dampfdruck bei $t = 140^0$ zu bestimmen, messe man die zu

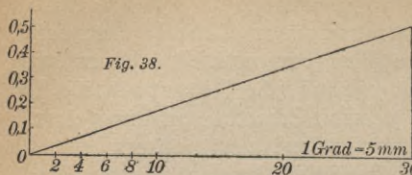
1) Weitere Beispiele siehe Auerbach, Die graphische Darstellung (MNB 437).

$t = 140$ gehörige Abszisse (im Abszissenmaßstab): $p = 3,7$ Atm. Die Kurve stellt also eine Erweiterung der Tabelle dar; das Verfahren, aus der Kurve solche Wertepaare abzulesen, die in der Tabelle nicht enthalten sind, heißt „graphische Interpolation“. Sie ist von besonderer Wichtigkeit, wenn die Schaulinie nicht nach einer Gleichung oder nach einer Versuchsreihe konstruiert, sondern „empirisch“ gegeben ist, z. B. durch ein Registrierinstrument wie den Indikator, der den Druck im Dampfsylinder als Funktion des Kolbenweges aufzeichnet.

Erwähnt sei noch die wichtige Rolle, die das Diagramm bei der Ermittlung von Versuchsfehlern spielt. Fällt ein Beobachtungspunkt wesentlich aus der durch die übrigen bestimmten Kurve heraus, so ist anzunehmen, daß ein Fehler vorliegt. Durch Wiederholung dieses zweifelhaften Einzelversuchs wird man den Fehler meist berichtigen können.

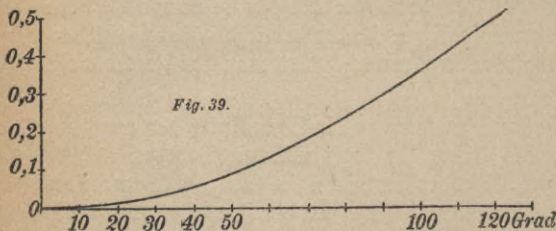
Für das graphische Rechnen kommen die Schaulinien der meist gebräuchtesten Funktionen als Ersatz der sonst üblichen Tabellen in Betracht. Die technischen Kalender enthalten in den „allgemeinen Zahlentabellen“ die Tabellendarstellungen der Funktionen: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \log x$, $y = \pi x$, $y = \frac{\pi x^2}{4}$.

Für die meisten Anwendungszwecke würden die entsprechenden Kurven hinreichend genaue Ergebnisse liefern. Es wäre zu wünschen, daß sie Eingang in die Tabellenwerke fänden. Da dies zurzeit noch nicht der Fall ist, sind wir gezwungen, die Kurven uns nach den Tabellen zu konstruieren. Hierbei ist, wie bei allen graphischen Rechnungen, der Maßstab für die Abszissen und Ordinaten zweckmäßig zu wählen, sodaß die Figur einerseits nicht den zur Verfügung stehenden Raum überschreitet, andererseits aber die Ableesungen möglichst genau erfolgen können. Der Leser möge die Konstruktionen selbst auf Millimeterpapier ausführen. Der Maßstab ist, um Irrtümer auszuschließen, für beide Achsen besonders anzugeben: Für $y = x^2$ nehme man z. B. für die x : cm, für die y : mm. Die abgelesenen Ordinaten sind dann in mm anzugeben. Für $y = x^3$ sind die Ordinaten in $\frac{1}{10}$ mm aufzutragen, die in mm gemessenen also mit 10 zu multiplizieren. Diese Kurven sind auch entsprechend statt der Tabellen der Quadrat- und Kubikwurzeln zu brauchen. Bei $y = \frac{1}{x}$ und $y = \log x$ trage man



die Ordinaten im 10fachen Maßstab der Abszissen auf; bei $y = \pi x$ nehme man für die Ordinaten $\frac{1}{3}$ und bei $y = \frac{\pi x^2}{4}$ $\frac{1}{10}$ des Abszissenmaß-

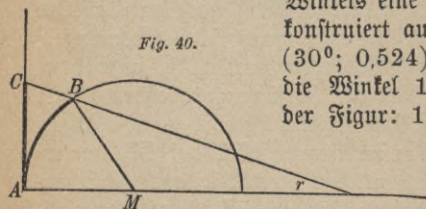
stabes. Die erhaltenen Kurven bedecken für $x = 0$ bis $x = 10$ (in cm) je etwa 1 dm^2 und gestatten hinreichend genaue Ablesungen. Sie sind bequemer als die Tabellen, wenn die entnommenen Werte ohne Ablesung bei weiteren graphischen Rechnungen Verwendung



finden sollen. Die Wertewerden dann mit dem Zirkel abgegriffen und nach entsprechender Kürzung oder Streckung benutzt.

Aus der Tabelle der „Größen im Einheitskreise“ seien erwähnt die zu gegebenem $\sphericalangle \alpha$ gehörigen Bögen und Pfeilhöhen. Die Schaulinie der Kreisbögen ist besonders einfach zu konstruieren, da wegen der Proportionalität von Winkel und Bogen die graphische Darstellung des Bogens als Funktion des

Winkels eine Gerade ist. Sie ist in Fig. 38 konstruiert aus den Punkten $(0^\circ; 0)$ und $(30^\circ; 0,524)$; als Einheit ist 1 dem, für die Winkel $1^\circ = 5 \text{ mm}$ gewählt (Maßstab der Figur: 1 : 3). Die Schaulinie der Pfeilhöhen Fig. 39 ist mit den Einheiten: $1^\circ = 1 \text{ mm}$ und $1 = 1 \text{ dem}$ nach der Ta-



belle konstruiert (Maßstab der Figur 1 : 2).

Es sei an dieser Stelle eine Näherungskonstruktion zur Rektifikation des Kreisbogens erwähnt, die praktisch gut zu brauchen ist (Fig. 40). \widehat{AB} sei der Kreisbogen, M der Mittelpunkt des Kreises. Man verlängere den Durchmesser um den Radius, sodaß also $AC = 3r$ ist, ziehe CB bis zum Schnitt D mit der Tangente in A . Dann ist

$\widehat{AD} = \widehat{AB}$. Die mathematische Begründung dieser von Nicolaus v. Cusa¹⁾ angegebenen Konstruktion muß hier übergangen werden.

Der Fehler beträgt bei Winkeln bis 60° unter 1% . Größere Winkel können durch die Mittellinie geteilt werden, sodaß die angegebene Genauigkeit bis zu Bögen von der Größe eines Kreisbogens bestehen bleibt. Besonders wichtig ist die Übertragung eines Bogens auf einen Kreis von anderem Radius. Fig. 41 zeigt die Ausführung für einen großen Winkel.

Von weiteren Funktionen, deren Schaulinien statt der Tabellen vorteilhaft benutzt werden, seien noch die trigonometrischen Funktionen erwähnt.

Aus der Trigonometrie ist bekannt, wie man die trigonometrischen Funktionen aus einem „Vektordiagramm“ entnehmen kann. Ist der Radius eines Kreises 1 (z. B. 1 dm), und mißt man die Winkel, die ein beweglicher Radius mit einem festen bildet, so ist $\sin \alpha$ durch das Lot vom Endpunkt des beweglichen auf den festen Radius bestimmt, $\cos \alpha$ durch die Projektion des beweglichen auf den festen Radius. Häufig ist nun der Winkel nicht im Gradmaß, sondern durch den Kreisbogen zwischen den Schenkeln bestimmt („Bogenmaß“). Um $\sin \alpha$ als Funktion des Bogens darzustellen, teile man den Einheitskreis in eine Anzahl gleicher Teile, z. B. 12; der Kreisumfang wird nun rektifiziert, d. h. in eine gerade Strecke verwandelt. Dies geschieht mit großer Annäherung durch folgende Konstruktion (Fig. 42): im unteren Endpunkt des vertikalen Durchmessers wird eine Senkrechte gezogen, die von einem unter 30° gegen den vertikalen Durchmesser geneigten Radius in z geschnitten wird. Von z aus wird auf der Senkrechten in Richtung zy die Strecke $3r$ abgetragen bis u ; dann ist xu der halbe Umfang des Kreises (Fig. 42 ist mit $r = 1$ cm ausgeführt). Wird nun

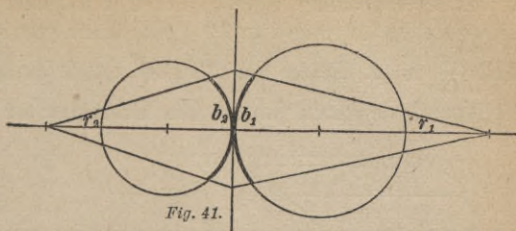


Fig. 41.

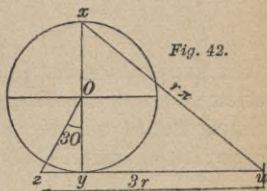


Fig. 42.

1) Kardinal Nicolaus Cusanus 1401—1464.

im Vektordiagramm (Fig. 43) der feste Schenkel um 2π verlängert und diese Verlängerung in 12 gleiche Teile geteilt, so entspricht jeder Teil $\frac{2\pi}{12}$ einem Winkel von 30° . Parallele durch die entsprechenden Kreispunkte schneiden sich mit den Ordinaten der Teilpunkte von 2π

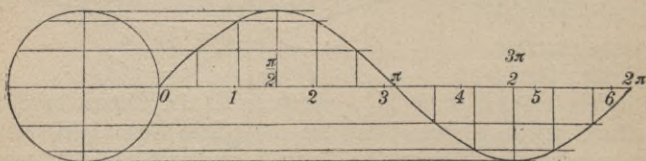


Fig. 43.

in Punkten der „Sinuskurve“, die den Zusammenhang zwischen Bogenlänge und Sinus darstellt (Fig. 43). Da $\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$ ist, stellt dieselbe Kurve, von $\frac{\pi}{2}$ aus gerechnet, die Kosinuslinie dar.

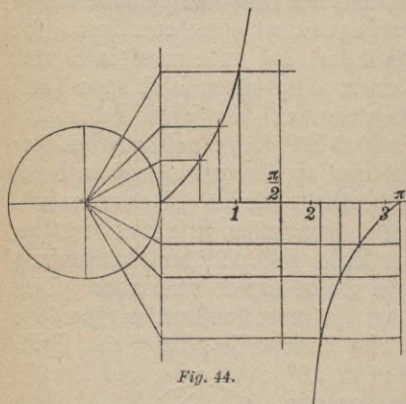


Fig. 44.

Die Tangenzlinie wird entsprechend konstruiert, wenn man beachtet, daß die Tangenzwerte vom beweglichen Radius auf der Senkrechten abgeschnitten werden, die im Endpunkt des festen Radius errichtet ist.

Beispiele:

$$\sin 2,3 = 0,75$$

$$-0,81 = \sin 4,1.$$

Fig. 44 stellt die Tangenzlinie von 0 bis π dar.

Die Konstruktion der Schaulinie lohnt sich für jede in irgend einem Gebiete zu graphischen Rechnungen häufiger gebrauchte Funktion. Als Beispiel wollen wir die in einem späteren Abschnitt zu benutzende „logarithmische Additionskurve“ behandeln.

Aufgabe: Aus den bekannten Logarithmen zweier Zahlen u und v ist der Logarithmus der Summe ($u + v$) zu finden ($v > u$).

Es ist

$$\begin{aligned}\log(u+v) &= \log\left(\frac{u+v}{v} \cdot v\right) \\ &= \log\frac{u+v}{v} + \log v \\ &= \log\left(1 + \frac{u}{v}\right) + \log v \\ &= \log\left(1 + \frac{1}{v/u}\right) + \log v.\end{aligned}$$

Bezeichnet man $\log \frac{v}{u}$ mit s , $\log\left(1 + \frac{1}{v/u}\right)$ mit t , so gehört zu jedem Wert von $\frac{v}{u}$ ein bestimmtes s und ein solcher von t ; z. B. für $\frac{v}{u} = 1$ ist $s = \log 1 = 0$; $t = \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \log 2 = 0,301$. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über zusammengehörige Werte von s und t :

s	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
t	0,301	0,254	0,212	0,176	0,146	0,119	0,097	0,079
s	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
t	0,064	0,052	0,041	0,033	0,027	0,021	0,017	0,014

Diese Tabelle ersetzen wir nun zur Benutzung bei graphischen Rechnungen durch die entsprechende Kurve, die wir als „logarithmische Additionskurve“ bezeichnen wollen. In Fig. 45 a ist sie mit 1 dm als Einheit konstruiert. Als Abszissen

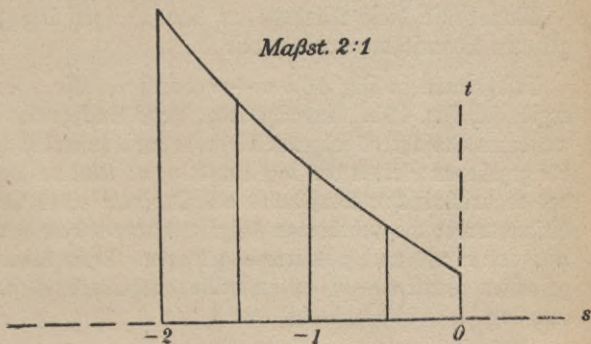


Fig. 45 b.

sind die s , als Ordinaten die entsprechenden, d. h. zu gleichem u/v gehörigen t genommen. Für die vorliegende Aufgabe kommt nun diese Kurve nach der folgenden Überlegung in Betracht: es seien u , v , $u + v$ die den Werten $\log u$, $\log v$, $\log(u + v)$ entsprechenden Punkte eines logarithmischen Maßstabes (Fig. 46 a). Dann ist die

Strecke $\overline{uv} = \log v - \log u = \log \frac{v}{u} = s$; nach der

Gleichung $\log(u + v) = \log v + \log\left(1 + \frac{1}{v/u}\right) = \log v + t$ ist Punkt $(u + v)$ des logarithmischen Maßstabes von Punkt v um die Strecke t entfernt.

Zusammengehörige s und t sind aber die Koordinaten eines Punktes der Additionskurve; zu jedem Werte von s können wir das zugehörige t an dieser Kurve ab-

lesen. Folglich können wir den gesuchten Punkt $(u + v)$ des logarithmischen Maßstabes wie folgt finden: man nehme die gegebene Strecke \overline{uv} in den Zirkel und trage sie als Abszisse in die Additionskurve ein. Die zugehörige Ordinate wird abgegriffen und an den Punkt v nach oben angetragen.

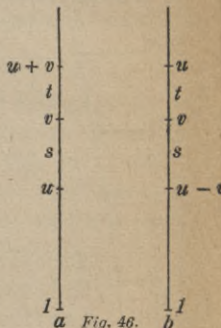


Fig. 46. a b

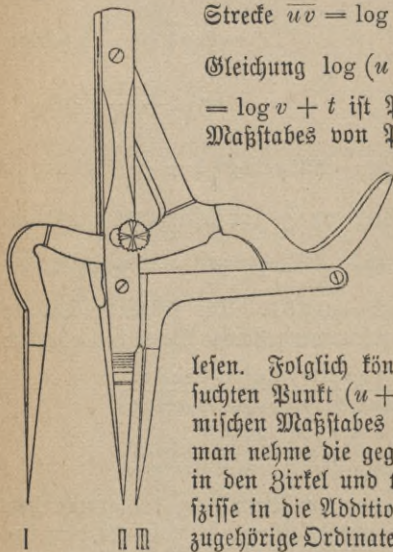


Fig. 47.

Man prüfe diese Methode an dem Beispiel $\log(2 + 3)$ bei gegebenen Logarithmen von 2 und 3.

Ersetzt man in Fig. 46 a $u + v$ durch u , also u durch $u - v$, so ergibt sich Fig. 46 b. Aus ihr folgt durch Umkehrung des oben angewendeten Verfahrens folgende Methode zur Konstruktion von $\log(u - v)$ bei gegebenen Werten von $\log u$ und $\log v$: man nehme die Strecke \overline{uv} des logarithmischen Maßstabes als Ordinate eines Punktes der Additionskurve; die zugehörige Abszisse wird mit dem Zirkel abgegriffen und von v aus nach abwärts abgetragen. Dann kommt man auf den gesuchten Punkt $u - v$. Man prüfe das Ergebnis für $\log 7$, $\log 5$ und $\log(7 - 5)$.

Noch bequemer als die Additionskurve ist der „logarithmische Zirkel“ von Prof. E. A. Bräuer, bei dessen Konstruktion diese Kurve verwendet ist (Fig. 47). Setzt man Spitze I auf Punkt u , Spitze II auf v , so gibt Spitze III den Punkt $(u + v)$ des logarithmischen Maßstabs. Für die Subtraktion setze man III auf u , II auf v , dann ergibt I den Punkt $(u - v)$.

Es ist selbstverständlich, daß bei allen Konstruktionen mit Hilfe der Additionskurve entweder der Maßstab der letzteren (in Fig. 45 a: 1 dm) auch der Hauptzeichnung zu Grunde gelegt werden muß, oder daß die benutzten Abszissen und Ordinaten dieser Kurve dem Maßstab der Hauptzeichnung angepaßt werden müssen. Ist die Einheit für letztere 1 cm, so ist das s der Hauptfigur zu verzehnfachen, das zugehörige t dann in $\frac{1}{10}$ Größe zu verwenden.

Von Eigenschaften der Additionskurve sei hier erwähnt, daß die positive s -Achse und die Halbierungslinie des Winkels zwischen der negativen s -Achse und der positiven t -Achse Asymptoten der Kurve sind, d. h. daß die Kurve in diese Geraden ausläuft. Die Annäherung erfolgt sehr schnell, sodaß selbst im Maßstabe 10:1 der Abstand der Kurve bei $s = 2,5$ cm nur $\frac{1}{10}$ mm beträgt. In Fig. 45 b ist auch der zu negativen s gehörige Teil der Kurve gezeichnet; ist $s = \log \frac{v}{u}$ negativ, so ist $\frac{v}{u} < 1$, $\frac{1}{v/u} + 1$ und damit $t = \log \left(\frac{1}{v/u} + 1 \right)$ wird mit wachsendem negativen s immer größer, die Kurve also nach links immer höher. Z. B. ist für $\frac{v}{u} = \frac{1}{10}$

$$s = \log \frac{v}{u} = -1$$

$$t = \log \frac{1}{v/u} + 1 = \log 11 = 1,041.$$

$$\text{Für } \frac{v}{u} = \frac{1}{100} \text{ ist } s = \log \frac{v}{u} = -2$$

$$t = \log 101 = 2,004.$$

Man benutzt diesen Teil der Kurve, wenn s sehr groß, also t sehr klein und deshalb nur ungenau abzugreifen ist. In diesem Falle nimmt man s negativ und trägt die zugehörige (große) Ordinate t von u (dem kleineren Werte) aus nach oben ab, um zu $u + v$ zu gelangen. (Fig. 45 b ist mit 2 cm als Einheit gezeichnet.)

Übungen: $\log(3 + 4)$ aus $\log 3$ und $\log 4$; $\log 5$ aus $\log 7$ und $\log 2$; $\log 10$ aus $\log 1$ und $\log 9$ zu konstruieren.

Nach dem bisher benutzten Verfahren kann man jeden Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Größen durch eine Zeichnung darstellen. Die Darstellung durch eine Kurve in einem — meist rechtwinkligen — Achsenkreuz vermag eine Tabelle „mit zwei Eingängen“ in gewissen Grenzen ersetzen und hat jedenfalls den Vorzug der Übersichtlichkeit.

Die Ausdehnung dieser Methode auf drei Veränderliche, die auf eine räumliche Konstruktion führen würde, ist wegen der zeichnerischen Schwierigkeiten praktisch nicht ausführbar. Man hat in neuerer Zeit wegen der Häufigkeit der Zusammenhänge zwischen drei und mehr Veränderlichen in Physik und Technik eine neue Art von graphischen Tabellen entworfen, die „**Nomogramme**“ genannt werden. Die Tafeln für drei Veränderliche sind leicht verständlich. Es sei z. B. $z = x \cdot y$, so zeichne man ein Koordinatennetz aus den verschiedenen x - und y -Werten; für einen bestimmten z -Wert, z. B. $z = 30$, erhält man in diesem Netz eine gleichseitige Hyperbel von der Gleichung $x \cdot y = 30$, für alle möglichen z -Werte $z = 1, 2, 3, \dots$ eine das Netz durchsetzende Schar solcher Kurven. Die so entstandene Zeichnung stellt eine graphische Multiplikations- und Divisionstabelle dar. Um z. B. $6 \cdot 8$ zu finden, suche man den Schnittpunkt der Netzgeraden $x = 6$, $y = 8$. Diese liegt auf der mit „48“ bezeichneten Hyperbel. Die Division $40 : 5$ wird ausgeführt, indem man den Schnittpunkt der Hyperbel 40 mit der Geraden $x = 5$ aufsucht. Die zugehörige Ordinate $y = 8$ ist der gesuchte Quotient. Diese Art von Nomogrammen, bestehend aus einem Koordinatennetz und einer Kurvenschar, heißt „**Netztafeln**“. In dem Nomogramm für $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ besteht die Kurvenschar aus allen Geraden, die Punkte der x -Achse mit denen der y -Achse verbinden. (Siehe S. 16.) Man zeichnet diese nicht aus, sondern benutzt als „**Weiser**“ eine auf Zelluloid gerichtete Gerade, welche die gleiche Teilung wie die Achse besitzt. Durch diese Gerade wird der x - und y -Wert verbunden und die dazwischen liegende Länge abgelesen.¹⁾

Eine andere Methode, die auf Zusammenhänge zwischen beliebig vielen Veränderlichen anwendbar ist, benutzt Gerade mit Funktions-

1) Siehe Neundorff, Praktische Mathematik (MnG 341).

teilungen. Eine solche „**Funktionsleiter**“ wird dadurch hergestellt, daß die Werte einer Funktion in bestimmtem Maßstab auf einer Geraden aufgetragen werden, wobei jeder Punkt mit dem Wert der Unabhängigen bezeichnet wird. (Siehe S. 11: Logarithmischer Maßstab.) Solcher Leitern werden so viele gezeichnet, wie Veränderliche vorhanden sind. Alle Ablesungen erfolgen auf einfachste Art durch geradlinige Weiser. Auf die Herstellung der Nomogramme dieser Art nach dem „Prinzip der fluchtrechten Punkte“ kann hier nicht eingegangen werden, da jeder Zusammenhang besondere Überlegungen erfordert. Im einfachsten Falle mit zwei Veränderlichen werden die beiden „Leitern“ nebeneinander gesetzt, z. B. bei $y = x^2$ eine Leiter mit natürlicher Teilung und eine für mit Quadrattteilung (d. h. Punkt 4 mit 2, 9 mit 3 . . . n^2 mit n bezeichnet).

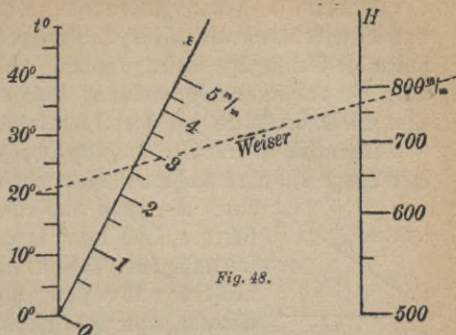


Fig. 48.

Als Beispiel eines komplizierteren Nomogramms diene Fig. 48 für die Reduktion des Barometerstandes nach der Formel $\varepsilon = 0,00016 \cdot t \cdot H$. Für $t = 22^\circ$, $H = 770$ mm ergibt sich $\varepsilon = \sim 2,7$ mm Abzug.

Wenn auch die Herstellung des Nomogramms häufig recht mühsam ist, so ist die Anwendung so bequem, daß diese Form der Rechen- tafeln vom praktischen Rechner immer mehr bevorzugt wird. Für zahlreiche Probleme der Physik und Ingenieurwissenschaften sind bereits Nomogramme konstruiert worden.¹⁾

E. Die geometrische Addition.

E. Die geometrische Addition.

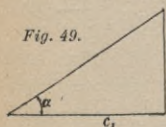
1. Addition von zwei Vektoren. Die am häufigsten für die graphische Berechnung unbekannter Größen angewendete Konstruktion ist die bekannte Parallelogrammkonstruktion, bei der es sich darum handelt, aus zwei Seiten eines Parallelogramms und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die Diagonale zu finden (Parallelogramm

¹⁾ Siehe Luchey, Einführung in die Nomographie, Mathematisch-physikalische Bibliothek, Bd. 28; Schilling, Über die Nomographie von M. d'Ocagne.



der Kräfte, Geschwindigkeiten usw. in der Mechanik). Bei der Wichtigkeit dieser Konstruktion für alle Zweige der angewandten Mathematik sollen die Grundzüge dieser graphischen Methode, deren Überlegenheit über die rechnerische Behandlung ihr auf allen Anwendungsgebieten zum Siege verholfen hat, hier kurz behandelt werden.

Bekanntlich ist eine Strecke durch zwei Größen charakterisiert: durch ihre Länge und ihre Richtung. Jede physikalische Größe, die ebenfalls durch eine Zahl und eine Richtung bestimmt ist, läßt sich graphisch durch eine Strecke darstellen, z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft. Solche „gerichteten Größen“ heißen (als rein mathematische Gebilde, ohne Rücksicht auf ihre wirkliche Bedeutung)



„Vektoren“. Für gerichtete Größen gilt nun allgemein das Gesetz der „Superposition“, wonach die gleichzeitige Verwendung zweier Vektoren dasselbe Ergebnis liefert, wie die Verwendung der einzelnen Vektoren nacheinander. Hat z. B. ein Fluß $c_1 = 3$ m Geschwindigkeit und wird einem Boote senkrecht zur Stromrichtung durch Rudern eine Geschwindigkeit $c_2 = 2$ m erteilt, so ist das Ergebnis dasselbe, als ob zunächst nur die Stromgeschwindigkeit auf das Boot wirkt, z. B. 1'' lang, dann aber, ebenfalls 1'', nur die Rudergeschwindigkeit, die das Boot senkrecht zum Strom bewegt (Fig. 49). Tatsächlich ist das Boot dann nach 1'' zum Punkte P gelangt, seine wirkliche Geschwindigkeit ist durch OP dargestellt und zwar nach Größe und Richtung.

In Fig. 49 ist der Geschwindigkeitsmaßstab $1 \text{ cm} = 1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; in diesem

Maßstab ist die „resultierende Geschwindigkeit“ $r = 3,6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, ihre Abweichung von der Stromrichtung (von c_1) ist $\alpha = 34^\circ$. Die rechnerische Behandlung ergibt (nach dem Pythagoras):

$$r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 3,6056 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Zur Berechnung von α müssen wir die Trigonometrie zu Hilfe nehmen:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{3} = 0,666; \quad \alpha = 33^\circ 40'.$$

Es ist klar, daß die Messung von r und α viel bequemer ist als die Rechnung; das Ergebnis ersterer ist bei sorgfältiger Zeichnung für alle Anwendungszwecke ausreichend.

Noch umständlicher gestaltet sich die Berechnung, wenn die zu addierenden Vektoren einen von 90° verschiedenen $\sphericalangle \alpha$ einschließen.

Beispiel: 2 Kräfte $P_1 = 2,7 t$ und $P_2 = 2,3 t$ wirken unter dem Winkel 35° an demselben Angriffspunkt. Wie groß ist die Ersatzkraft (Resultierende) R (Fig. 50)?

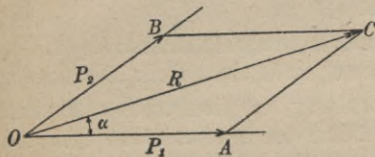


Fig. 50.

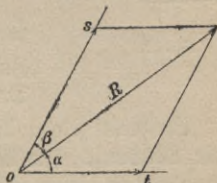


Fig. 51.

Es sei $OA = P_1$, $OB = P_2$. Durch Ergänzung des Dreiecks AOB zum Parallelogramm ergibt sich C ; dann ist die Ersatzkraft nach Größe und Richtung durch OC bestimmt. Die Messung ergibt (bei dem Kräftemaßstab $1 \text{ cm} = 1 t$) $R = 4,8 t$

$$\sphericalangle(P_1, R) = 15\frac{1}{2}^\circ.$$

Die rechnerische Auflösung verlangt Anwendung des Kosinussatzes:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos(180 - \alpha)} = 4,77$$

und zur Bestimmung von $\sphericalangle(P_1, P_2)$ Anwendung des Sinussatzes. Diese äußerst mühsamen Rechnungen lassen sich also vermeiden, wenn das Parallelogramm in bestimmtem Maßstab (z. B. $1 \text{ cm} = 1 t$) und unter Benutzung des gegebenen Winkels genau konstruiert wird.

Diese Konstruktion, die allgemein für die Addition zweier Vektoren gilt, heißt geometrische Addition.

2. Zerlegung eines Vektors in Komponenten von gegebener Richtung. Sind von dem Parallelogramm (Fig. 50) R und die Richtungen OA und OB gegeben, so ergeben Parallele durch den Endpunkt von R zu OA und OB die Punkte A und B als Schnittpunkte mit den gegebenen Richtungen. OA und OB sind die gesuchten Komponenten P_1 und P_2 .

Beispiel 3: Eine Kraft $R = 5000 \text{ kg}$ ist in 2 Komponenten P_1 und P_2 zu zerlegen, die mit R die Winkel $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 25^\circ$ einschließen (Fig. 51). Kräftemaßstab: $1 \text{ cm} = 1000 \text{ kg}$. Die Messung ergibt

$$P_1 = OA = 2400 \text{ kg}$$

$$P_2 = OB = 3300 \text{ kg}.$$

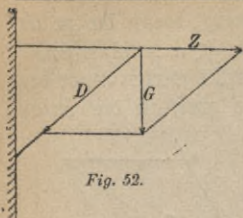


Fig. 52.

Beispiel 4: Die Zug- und Druckspannungen in den Konstruktionsteilen des skizzierten Kranes (Fig. 52) sind graphisch zu berechnen. ($G = 350 \text{ kg}$, $\alpha = 50^\circ$).

Kräftemaßstab $1 \text{ cm} = 100 \text{ kg}$. Die Messung ergibt als

Zugspannung im horizontalen Teil: $Z = 400 \text{ kg}$

Druckspannung im schrägen Teil: $D = 525 \text{ kg}$.

Die Beispiele zeigen die Anwendung der geometrischen Addition auf die Mechanik. In der Tat bildet die Mechanik das Hauptanwendungsgebiet dieser graphischen Methode (Graphische Statik).

3. Addition beliebig vieler Vektoren. Sind mehrere Vektoren v_1, v_2, v_3, \dots zu addieren, so wird zunächst aus v_1 und v_2 durch die Parallelogrammkonstruktion die Resultierende r_{12} gefunden; diese ergibt mit v_3 nach derselben Methode, die Resultierende r_{123} und so fort. (Fig. 53.) Unter Fortlassung der, wie Fig. 53 zeigt, überflüssigen Linien r_{12}, r_{123}, \dots ergibt sich folgende Methode: Im Endpunkt von v_1 wird v_2 nach Größe und Richtung angetragen; im neuen Endpunkt desgleichen v_3 und so fort. Die Strecke vom Angriffspunkt O bis zum letzterhaltenen Punkt P_n gibt nach Größe und Richtung die Resultierende von v_1, v_2, \dots, v_n .

Das bei dieser Konstruktion erhaltene Vieleck heißt: „Vektorpolygon“. In der Mechanik tritt es hauptsächlich als „Kräftepolygon“ auf.

Die Konstruktion zeigt auch, unter welchen Umständen die an einem Angriffspunkt wirkenden Kräfte sich aufheben. Dann ist nämlich $R = OP_n = O$, P_n muß mit O zusammenfallen. Das Kräftepolygon ist geschlossen (Fig. 54).

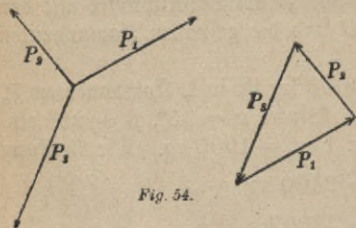


Fig. 54.

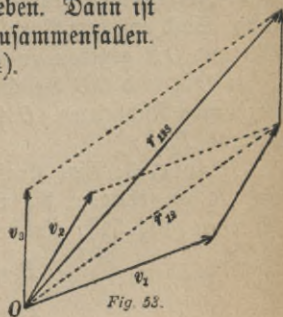


Fig. 53.

II. Graphische Lösung von Gleichungen.

A. Aufgaben ohne Gleichungsansatz.

Häufig lassen sich Aufgaben, deren rechnerische Behandlung die Aufstellung und Lösung einer Gleichung mit einer Unbekannten erfordert, auf rein graphischem Wege unter Umgehung der Gleichung lösen. Hierher gehören alle Aufgaben die sonst mit Hilfe des „Dreisatzes“ oder einer Proportion gelöst werden. Es gibt zwei Fälle solcher Aufgaben, je nachdem die gegebenen Größen des Vorderatzes a und b direkt oder umgekehrt proportional sind.

Beispiel 1: $a = 3$ kg kosten $b = 5$ M; wieviel erhält man für $x = 7$ M? Die gesuchte Größe y ergibt sich aus der Proportion: $a : b = y : x$. Macht man die M zu Abszissen, die kg zu Ordinaten (oder umgekehrt), so wird das Gewicht als Funktion des Preises durch eine Gerade dargestellt, die aus zwei Punkten (0 M, 0 kg) und (5 M, 3 kg) konstruiert wird (Fig. 55). Dann ist y die zu 7 M gehörige Ordinate: $y = 4,2$ kg. Ist bei gegebenem Gewicht nach dem Preise gefragt, z. B. wieviel M kosten 5 kg? — so beantwortet die zur Ordinate 5 kg gehörige Abszisse die Frage: $x = 8,33$ M.

Beispiel 2: $a = 5$ Pferde reichen mit einem Futtervorrat $b = 3$ Tage; $x = 4$ Pferde reichen damit wieviel Tage? Hier sind die Zahlen für die Tage umgekehrt proportional denen für die Pferde. Die gesuchte Tageszahl y ergibt sich aus der Proportion $a : x = y : b$ $y = \frac{a \cdot b}{x}$, die

nach S. 15 konstruiert werden kann. Eine zweite Methode ist die folgende: es muß $a \cdot b = y \cdot x$ sein. Das Produkt stellt die Größe des Futtervorrats dar: $a \cdot b = 5 \cdot 3$ Futtertage für 1 Pferd. Graphisch bedeutet $a \cdot b$

die Fläche eines Rechtecks; $x \cdot y$ muß dieser Fläche gleich sein. Es ist also das Rechteck $a \cdot b$ in ein flächengleiches mit der neuen Grundlinie c zu verwandeln; dessen Höhe gibt y an: $y = 3 \frac{3}{4}$ Tage. Fig. 56 zeigt die Konstruktion.

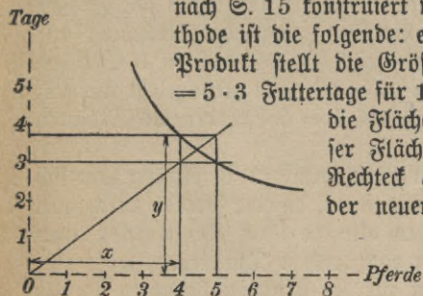
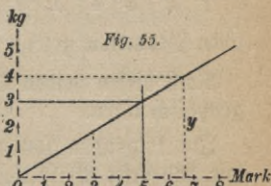
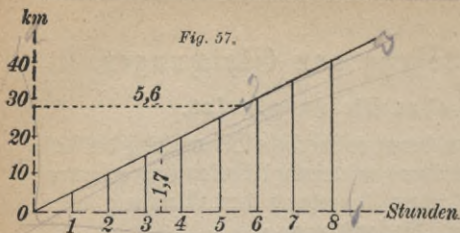


Fig. 56.





Konstruiert man die zu verschiedenen Abscissenwerten gehörigen Ordinaten, so liegen die erhaltenen Punkte nicht auf einer Geraden, sondern auf einer „gleichseitigen Hyperbel“; denn wie in der analyti-

schen Geometrie gezeigt wird, ist deren Gleichung $y = \frac{c}{x}$ oder $xy = c$.

Nach diesen beiden Typen lassen sich sämtliche Regelbetrie-Aufgaben graphisch lösen.

Im folgenden sollen nur solche Aufgaben behandelt werden, die, wie das erste Beispiel, auf gerade Linien führen. Als weitere Beispiele wählen wir zunächst Bewegungsaufgaben. In der angewandten Mathematik ist zur Veranschaulichung einer Bewegung das „Zeit-Weg-Diagramm“ allgemein in Benutzung, bei dem der Weg als Funktion der Zeit dargestellt wird. Als unabhängige Veränderliche werden die Zeiten als Abszissen, als abhängige die vom Beginn der Bewegung bis zu der betreffenden Zeit zurückgelegten Wege als Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgetragen. Fig. 57 zeigt das Zeit-Weg-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung $s = c \cdot t$ mit der Geschwindigkeit $c = 5$ km pro Stunde; die Zeiten sind im Maßstab $1 \text{ cm} = 1 \text{ Std.}$, die Wege im Maßstab $1 \text{ mm} = 1 \text{ km}$ dargestellt. Die Kurve ist eine Gerade durch den Koordinatenanfang. Das Diagramm jeder gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade, da die Wege proportional der Zeit wachsen. Nach dem S. 24 über die Benutzung der Schaulinien Gesagten lassen sich alle Fragen über die in der Fig. 57 dargestellte Bewegung ohne Rechnung aus dem Diagramm beantworten. So zeigt Fig. 57, daß in 3 Stunden 24 Minuten ($t = 3,4 \text{ cm}$) 17 km ($s = 17 \text{ mm}$) zurückgelegt werden; daß ferner 28 km ($s = 28 \text{ mm}$) 5,6 = 5 Stunden 36 Minuten ($t = 5,6 \text{ cm}$) erfordern.

Das Zeit-Weg-Diagramm der gleichförmigen Bewegung läßt sich als Gerade besonders einfach konstruieren, da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist. Es genügen also zu ihrer Konstruktion zwei Paare zusammengehöriger Werte von t und s . Die Gerade wird umso genauer, je weiter die beiden zur Konstruktion benutzten Punkte

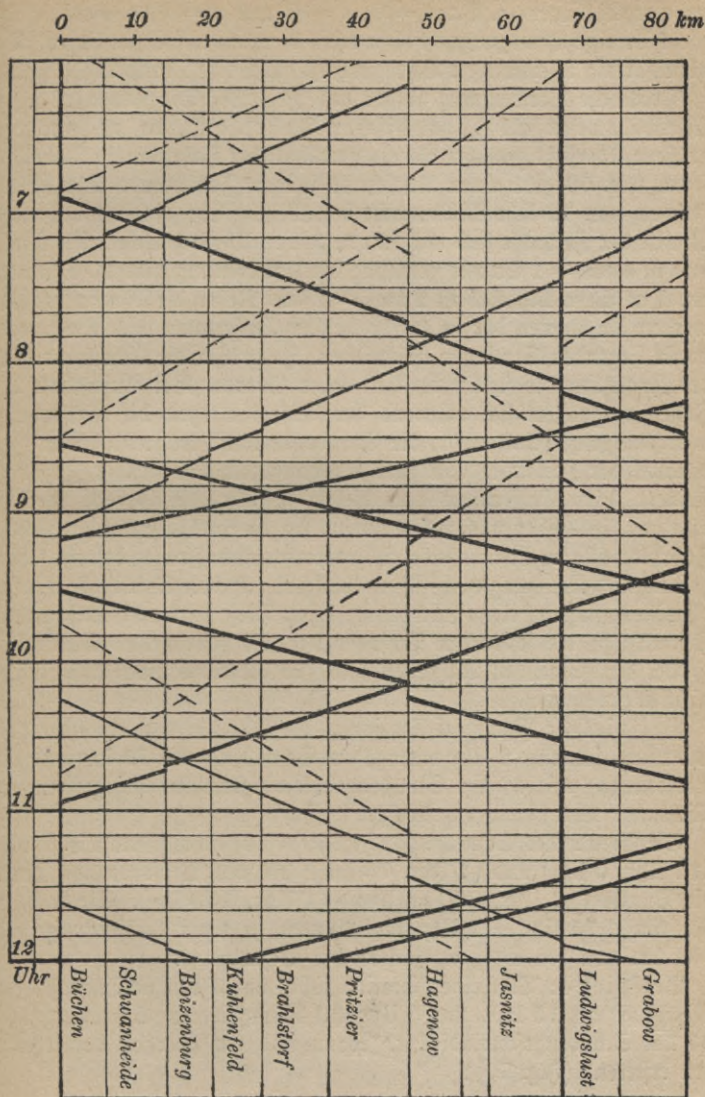


Fig. 58.

auseinanderliegen, z. B.: $t = 0$; $s = 0$ und $t = 5$, $s = 25$. (Ungleichförmige Bewegungen haben keine Geraden als Schaulinien. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung ist durch eine Parabel dargestellt.)

Praktische Verwendung findet das Zeit-Weg-Diagramm u. a. im Eisenbahnwesen als „graphischer Fahrplan“, da es eine viel größere Übersicht gewährt als ein gewöhnlicher Fahrplan in Tabellenform. Fig. 58 gibt einen Ausschnitt solchen Fahrplans. Die Zeiten rechnen von 12 Uhr Mitternacht bez. Mittag ab; die entsprechenden Punkte der Zeitachse sind mit 12, 1, 2, . . . Uhr bezeichnet. Als Maßstab ist 4 cm = 1 Stunde gewählt; die Unterteilung gibt 10 Minuten an. Der Wege-Maßstab ist 2 mm = 1 km. Neben die Kilometerzahlen werden die Namen der in entsprechender Entfernung vom Ausgangspunkt liegenden Stationen geschrieben. Je größer die Geschwindigkeit des Zuges, um so steiler verläuft seine Gerade. Bei Aufenthalt des Zuges vergrößert sich während der Aufenthaltszeit die Entfernung vom Ausgangspunkt nicht, die Gerade verläuft während dieser Zeit parallel der Zeitachse. Ein zum Ausgangspunkt fahrender Zug verkleinert seine Entfernung von diesem Punkte, die Gerade verläuft also von links oben nach rechts unten. Es ist klar, daß der graphische Fahrplan alle im Eisenbahnbetrieb vorkommenden Fragen betreffs Überholung und Kreuzung von Zügen, Einschaltung von Sonderzügen usw. ohne Rechnung auf einen Blick beantwortet. Diese starken Linien bedeuten Schnellzüge, die schwachen Personenzüge, die gestrichelten Güterzüge.

Bei den folgenden Aufgaben sind zur Vereinfachung Aufenthalte nicht angenommen.

Beispiel 3: Von zwei Stationen, die 200 km von einander entfernt sind, fahren 12 Uhr mittags ein Schnellzug mit 75 km und ein Personenzug mit 40 km Stundengeschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung. Wann und wo kreuzen sie sich?

Die Gerade des Schnellzugs (Fig. 59) ist bestimmt durch die Punkte (12 Uhr, 0 km) und (1 Uhr, 75 km); die des Personenzugs durch die Punkte (12 Uhr, 200 km) und (1 Uhr, 160 km). Sie kreuzen sich um 1,75 Uhr = 1 Uhr 45 Minuten in einer Entfernung von 131 km von der Ausgangsstation des Schnellzugs.

Beispiel 4: Von einer Station fährt um 3 Uhr nachmittags ein Güterzug mit 15 km, um 5 Uhr 30 Minuten ein Schnellzug mit 65 km Stundengeschwindigkeit. Wann und wo überholt der letztere den ersteren (Fig. 60)?

Punkte der Güterzuggeraden: (3 Uhr, 0 km) und (4 Uhr, 15 km);
 " " Schnellzuggeraden: (5³⁰ Uhr, 0 km) " (6³⁰ Uhr, 65 km).

Die Überholung findet um 6,25 = 6 Uhr 15 Minuten, 49 km vom Ausgangspunkt statt.

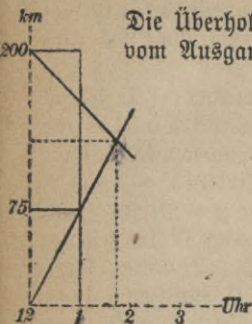


Fig. 59.

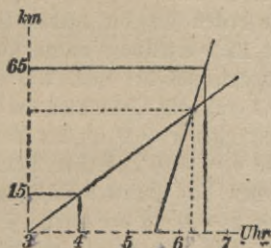


Fig. 60.

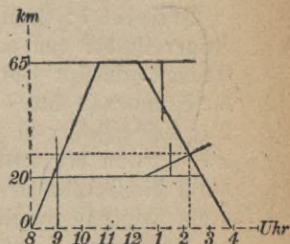


Fig. 61.

Beispiel 5: Ein Auto fährt um 8 Uhr morgens von A nach B — 65 km — mit 25 km Geschwindigkeit und nach 1½ stündigem Aufenthalt mit 18 km Geschwindigkeit zurück. Ein Fußgänger mit 5 km Geschwindigkeit verläßt einen 20 km von A aus auf AB liegenden Ort um 12 Uhr 30 Minuten. Wann und wo trifft er das Auto?

Fig. 61 gibt die Lösung. Die Gerade des Autos, eine gebrochene Linie, ist bestimmt durch die Punkte (8 Uhr, 0 km) und (9 Uhr, 25 km); vom Schnittpunkt der Geraden mit der X-Parallelen durch 65 km bleibt die Linie des Autos für 1½ Stunden parallel der Zeitachse, die Gerade der Rückfahrt ist bestimmt durch den Endpunkt des parallelen Teils und einen zweiten Punkt, der um 1 Stunde weiter rechts und um 18 km unterhalb der Parallelen liegt. Die Gerade des Fußgängers ist bestimmt durch die Punkte (12³⁰ Uhr, 20 km) und (1³⁰ Uhr, 25 km). Treffpunkt 29 km vom Ausgangspunkt des Autos, Treffzeit 2,1 = 2 Uhr 6 Minuten.

Beispiel 6: Vom Punkte A fährt um 1 Uhr ein Zug mit 60 km Geschwindigkeit in der Richtung nach dem 300 km entfernten B; er trifft einen von B um 2 Uhr 30 Minuten abgegangenen Zug in einer Entfernung von 210 km von A. Welche Geschwindigkeit hat letzterer (Fig. 62)?

Die Gerade des A-Zuges ist durch die Punkte

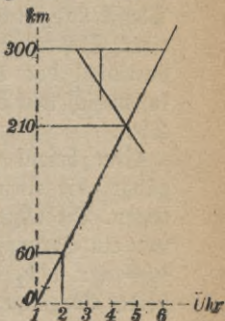


Fig. 62.

(1 Uhr, 0 km) und (2 Uhr, 60 km) bestimmt; die des B -Zuges durch (2,5 Uhr, 300 km) und den Schnittpunkt der A -Geraden mit der X -Parallelen durch 210 km. Die gesuchte Geschwindigkeit ist die Länge der durch (3,5 Uhr, 300 km) gezogenen Y -Parallele bis zur B -Geraden. Antwort: 45 km.

Beispiel 7: Wann decken sich die beiden Uhrzeiger? Für jeden Zeiger ist der von der 12^h -Stellung an zurückgelegte Winkel — in Graden gemessen — proportional der Zeit. Als Abszissen nehmen wir die Stunden (1 Stde = 1 cm), als Ordinaten die Winkel ($1^\circ = 1$ mm). Der kleine Zeiger ist zur Zeit $x = 0$ an der Stelle $y = 0$, zur Zeit $x = 12^h$ an der Stelle $y = 360^\circ$. Seine Bewegung ist dargestellt durch die Gerade zwischen den Punkten (0,0) und (12; 360). Der große Zeiger ist zur Zeit $x = 0$ an der Stelle $y = 0$, zur Zeit $x = 1$ an der Stelle $y = 360$, zur Zeit $x = 2$ an der Stelle $y = 0$, zur Zeit $x = 3$ an der Stelle $y = 360$ usw. Seine Bewegung wird durch 12 parallele Gerade dargestellt. Die Schnittpunkte der ersten Geraden mit den 12 letzteren geben durch ihre Abszissen die Zeiten an, zu denen sich beide Zeiger decken: $1^h 6^m$; $2^h 10^m$ (genau $1\frac{1}{11}^h$, $2\frac{2}{11}$) usw. Die Ordinaten der Schnittpunkte geben den Winkel der sich deckenden Zeiger mit der 12 -Uhr-Stellung an (z. B. um $2^h 10^m$ ungefähr 65° (genau $65\frac{5}{11}^\circ$). Die Figur ist vom Leser zu entwerfen.

Die Darstellung durch Gerade ist bei allen Vorgängen zutreffend, bei denen die Änderungen der zwei beteiligten Größen proportional sind. So wird die durch ein Rohr von 5 l Minutenleistung fließende Wassermenge in ihrer Abhängigkeit von der Zeit, eine Arbeitsleistung, deren Größe in der Zeiteinheit gegeben ist, (z. B. 10 m^3 Mauerwerk an einem Tage) als Funktion der Zeit durch eine Gerade dargestellt. Physik und Technik bieten Beispiele in großer Fülle. Die Ausdehnung eines Stabes ist proportional der Temperatur, die Stromstärke proportional der Spannung usw. Alle Aufgaben aus diesen Gebieten lassen sich wie Bewegungsaufgaben mit Hilfe von Geraden graphisch lösen.

Eine besondere Betrachtung erfordert der Fall, daß mehrere Vorgänge, die einzeln durch Gerade dargestellt werden, gleichzeitig eintreten. Die allgemeine Gleichung der Geraden ist: $y = ax + b$. Sei nun ein Vorgang durch die Gerade: $y_1 = a_1x + b_1$, ein anderer durch $y_2 = a_2x + b_2$ dargestellt, dann ist für das gleichzeitige Eintreten beider Vorgänge im gleichen Sinne (also bei Addition der Wirkungen):

$$y = y_1 + y_2 = (a_1 x + b_1) + (a_2 x + b_2) = (a_1 + a_2) x + (b_1 + b_2),$$

bei Subtraktion der Wirkungen:

$$y = y_1 - y_2 = (a_1 x + b_1) - (a_2 x + b_2) = (a_1 - a_2) x + (b_1 - b_2).$$

Die Schaulinien der zusammengesetzten Vorgänge sind ebenfalls Gerade, lassen sich also aus 2 Punkten konstruieren. Bei Leistungsaufgaben läßt sich also aus den Leistungsgeraden der Einzelvorgänge die „gemeinsame Leistungsgerade“ leicht finden.

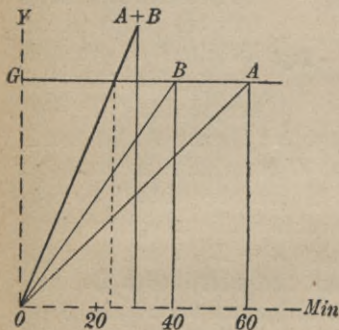


Fig. 63.

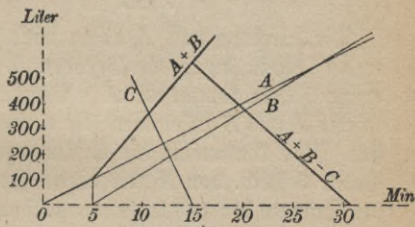


Fig. 64.

Beispiel 8: Ein Behälter kann durch eine Röhre *A* in 60 Min., durch eine andere *B* in 40 Min. gefüllt werden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet sind (Fig. 63)?

Horizontalmaßstab: 1 Min. = 1 mm; Vertikalmaßstab: 1 cm.

Da der Behälterinhalt nicht gegeben ist, können wir ihn beliebig wählen; in Fig. 64 ist er gleich 3 (Einheiten, z. B. m³) angenommen. Die *X*-Parallele *G* durch 3 nennen wir die „Inhaltslinie“. Wir konstruieren die Leistungsgeraden *A* und *B*, indem wir den Nullpunkt mit dem Punkte 60 Min. bzw. 40 Min. der Inhaltslinie verbinden. Die gemeinsame Leistungsline wird konstruiert, indem wir zu irgend einer Zeit, z. B. 30 Min., die Einzelleistungen (*DC* und *DE*) addieren und den erhaltenen Punkt mit dem Nullpunkt verbinden; Gerade (*A + B*). Der Schnittpunkt *S* dieser Geraden mit der Inhaltslinie hat die Abszisse *OF* = 24. Also wird der Behälter in 24 Minuten gefüllt.

Beispiel 9: Ein Behälter hat zwei Zuflußröhren *A* und *B* mit

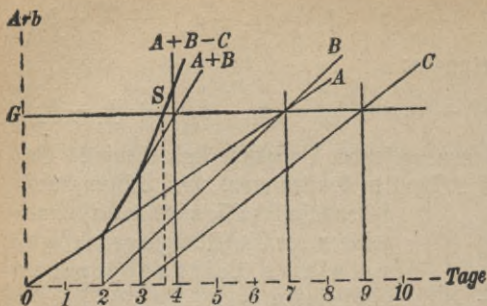


Fig. 65.

den Minutenleistungen 20 l und 25 l, eine Abflußröhre C mit der Minutenleistung 80 l. Zunächst sei nur A geöffnet, nach 5 Minuten auch B , nach weiteren 10 Minuten C . Der Inhalt des (zuerst leeren) Behälters ist graphisch als Funktion der Zeit darzustellen (Fig. 64).

Die Wirkung von A allein wird durch die Gerade A , die von B und C allein durch die Geraden B und C dargestellt. Während der ersten 5 Min. kommt nur A in Betracht. Während der nächsten 10 Min. wirken A und B zusammen; die einströmenden Wassermengen addieren sich. Man konstruiere die Summengerade $(A + B)$, indem man den Punkt 5 Min. von A mit einem zweiten verbindet, dessen Ordinate als Summe der zu gleichem x gehörigen Ordinaten von A und B gefunden ist. Von der Zeit $x = 15$ an wirken alle 3 Öffnungen, die dritte negativ; man konstruiere die gemeinsame Leistungsgerade $(A + B - C)$ aus Punkt 15 Min. von $(A + B)$ und einem zweiten Punkte, der durch Subtraktion einer C -Ordinate von der zu gleichem x gehörigen $(A + B)$ -Ordinate erhalten wird. Die starke gebrochene Linie gibt zu jeder Zeit x (in Min.) den Behälterinhalt (in l) an. Man sieht, daß der Behälter in etwa 31 Min. wieder geleert ist.

Beispiel 10: A leistet eine gewisse Arbeit allein in 7, B in 5, C in 6 Tagen. B fängt 2 Tage, C 3 Tage später an als A . In welcher Zeit, vom Arbeitsbeginn des A an gerechnet, leisten sie gemeinsam die Arbeit (Fig. 65)?

G sei die „Arbeitslinie“; A ist bestimmt durch $(0, 0)$ und $(7, G)$; B durch $(2, 0)$ und $(7, G)$; C durch $(3, 0)$ und $(9, G)$. Die gemeinsame Leistungslinie ist durch den Linienzug $A \cdots (A + B) \cdots (A + B + C)$ dargestellt. Sie schneidet G in S . Die Abszisse von S ist 3,7. Also wird die Arbeit gemeinschaftlich in 3,7 Tagen erledigt.

B. Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. Lösung mittels der „Fehlerkurve“. Jede Gleichung läßt sich so umformen, daß die rechte Seite den Wert „Null“ hat. Diese Form wollen wir als die „Normalform“ der Gleichung bezeichnen; $x^2 - 8x + 15 = 0$; $x^3 - 5x^2 + 6x - 7 = 0$; $x - 3 \sin x = 0$; $x + \log x = 0$ sind Beispiele für Gleichungen in Normalform. Allgemein ist

$$f(x) = 0$$

die Normalform einer Gleichung mit einer Unbekannten.

Setzen wir in die Gleichung für x irgend einen Wert ein, so wird im allgemeinen die linke Seite nicht gleich 0 werden, sondern einen bestimmten Wert y annehmen. Wir wollen diesen Wert als den „Fehler“ bezeichnen. Dieser Fehler hat für jeden Wert von x einen bestimmten Wert, ist also eine „Funktion“ von x . Die Schaulinie dieser Funktion wollen wir die „Fehlerkurve“ der gegebenen Gleichung nennen. So ergibt sich für die Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$ die Fehlertabelle

x	0	1	2	3	4	5	6
y	+15	8	3	0	-1	0	3

Nach dieser Tabelle wird die Fehlerkurve konstruiert.

Ist das gewählte x gerade eine Lösung der Gleichung, so ist der Fehler gleich 0. Das Auflösen der Gleichung besteht also im Aufsuchen der x -Werte, für die der Fehler 0 wird. Bei der Fehlerkurve sind das diejenigen x -Werte, bei denen sie die X -Achse schneidet.

Um die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ zu finden, konstruiere man die der Gleichung $y = f(x)$ entsprechende Fehlerkurve; die Abszissen ihrer Schnittpunkte mit der X -Achse sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Wir haben hiermit also ein Verfahren, um durch Zeichnung und Messung, d. h. graphisch, eine gegebene Gleichung zu lösen (Fig. 66).

Beispiel 1: $2x + 5 = 0$.

Wir konstruieren die Fehlerkurve $y = 2x + 5$. Nach der analytischen Geometrie ist dies eine Gerade.

z. B.

x	0	-3
y	5	-1

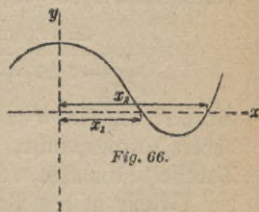


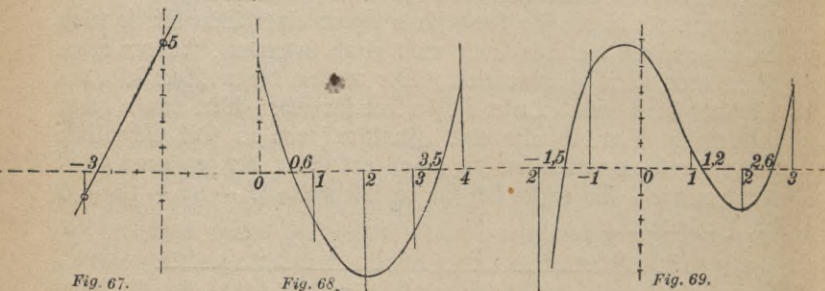
Fig. 66.

Die Gerade schneidet die X-Achse im Punkte $x = -2,5$ (Fig. 67). Also ist $x = -2,5$ die Lösung der Gleichung $2x + 5 = 0$.

Beispiel 2: $x^2 - 4,1x + 2,1 = 0$.

Die Kurve $y = x^2 - 4,1x + 2,1$ wird nach folgender Fehler-tabelle konstruiert, die zunächst zu berechnen ist:

x	0	1	2	3	4
y	2,1	-1	-2,1	-1,2	+1,7



Eine Fortsetzung der Tabelle nach rechts oder links ist nicht nötig, da man erkennt, daß mit wachsendem positiven oder negativen x der Fehler y immer größer wird, die Kurve also beiderseits immer höher geht (Fig. 68). Die Kurve schneidet die X-Achse in den Punkten

$$x_1 = 0,6; \quad x_2 = 3,5.$$

Diese Werte sind also die Lösungen der gegebenen Gleichung.

Beispiel 3: $x^3 - 2,3x^2 - 2,58x + 4,68 = 0$ (Fig. 69).

Zur Konstruktion der Fehlerkurve $y = x^3 - 2,3x^2 - 2,58x + 4,68$ berechnen wir die folgende Tabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-7,36	+3,96	+4,68	+0,80	-1,68	+3,24

Größere negative x ergeben immer tiefere, größere positive x immer höhere Kurvenpunkte, sodaß weitere Schnittpunkte als die durch die Tabelle bestimmten nicht vorhanden sein können. Die Kurve schneidet die X-Achse in den Punkten

$$x_1 = -1,5; \quad x_2 = 1,2; \quad x_3 = 2,6.$$

Diese Werte sind somit die Lösungen der gegebenen Gleichung.

Beispiel 4: $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 3,45.$

Wir stellen zunächst die Form $f(x) = 0$ her:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 3,45 = 0.$$

Die Fehlerkurve $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 3,45$ wird nach der Tabelle konstruiert:

x	1	2	3	4	5
y	-2,45	-1,036	-0,304	+0,282	+0,786

Kleinere Werte als $x = 1$ ergeben keine reellen Kurvenpunkte, da $\sqrt{x-1}$ hierfür „imaginär“ wird. Für größere Werte als $x = 5$ steigt die Kurve immer höher, sodaß weitere Schnittpunkte mit der X -Achse nicht vorhanden sind. Die Kurve schneidet letztere im Punkte $x = 3,5$; dieser Wert ist also die Lösung der gegebenen Gleichung (Fig. 70).

Beispiel 5: $x + \log x = 5$ (Fig. 71).

Die Fehlerkurve $y = x + \log x - 5$ wird konstruiert nach der Tabelle:

x	3	4	5	6
y	-1,52	-0,4	+0,7	1,78

Die Lösung ist: $x = 4,35.$

Die vorstehend behandelten Beispiele zeigen, daß sich die Fehlerkurve zur graphischen Auflösung von Gleichungen aller Art benutzen läßt, auch zu der von irrationalen und transzendenten Gleichungen.

Da es nur auf den Schnitt mit der X -Achse ankommt, ist es nicht nötig, für beide Veränderliche denselben Maßstab zu wählen. Sind die y sehr groß, so wird man sie, um die Figur auf den zur Verfügung stehenden Raum zu beschränken, entsprechend verkleinern; kleine Werte werden, um die Auftragung genauer bewirken zu können, mit einem passenden Faktor

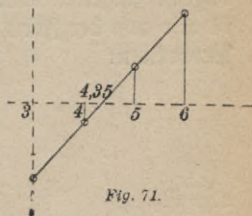


Fig. 71.

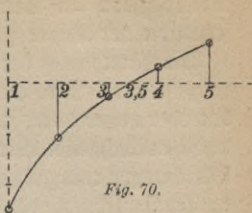


Fig. 70.

multipliziert. Die Benutzung von Millimeterpapier erleichtert die Konstruktion der Kurve ganz bedeutend.

Die Berechnung der Tabelle erfordert auch unter Benutzung von Potenz-, Wurzel- usw.-Tabellen meist erhebliche Arbeit. Diese einzuschränken oder besser durch Zeichnung zu ersetzen, ist das nächste Ziel des graphischen Rechnens. Wir werden später wenigstens für gewisse Klassen von Gleichungen rein graphische Methoden zur Gewinnung von Kurvenpunkten kennen lernen, sodaß dann die Auflösung ohne jede Rechnung erfolgt.

Eine Schwierigkeit liegt darin, daß man nicht weiß, für wieviele und für welche x die Fehler zu berechnen oder zu konstruieren sind. Da die Fehlerkurve nicht in ihrem ganzen Verlauf in Betracht kommt, sondern nur in der Nähe der Schnittpunkte mit der X -Achse, handelt es sich darum, ungefähr die Lage dieser Punkte zu ermitteln. Bei den meisten technischen Aufgaben sind die Grenzen, innerhalb deren die Lösung zu suchen ist, durch die Natur der Aufgabe festgelegt. Häufig ist sogar, durch Überlegung oder durch Erfahrung bei ähnlichen Aufgaben, der ungefähre Wert der Lösung bekannt. In Beispiel 5 kann die Lösung nur zwischen 4 und 5 liegen, denn $4 + \log 4 = 4, \dots$ ist kleiner, $5 + \log 5 = 5, \dots$ größer als 5. Allgemein hat der Fehler $y = f(x)$ vor und hinter einer Wurzel verschiedene Vorzeichen. Man wird deshalb die Lösung immer nur zwischen x -Werten suchen, zwischen denen der Fehler „das Zeichen wechselt“. Es genügen daher meist wenige x -Werte vor und hinter dieser Zeichenwechselstelle, um das Kurvenstück genau genug zu zeichnen; in Beispiel 5 die Werte $x = 3, 4, 5, 6$.

Bei wenig gekrümmten Kurven erhält man eine brauchbare Annäherung, wenn man die Kurve zwischen zwei möglichst dicht benachbarten x -Werten, zwischen denen die Fehlerfunktion das Zeichen wechselt, durch eine Gerade ersetzt. Es ist dies die Methode, die beim numerischen Rechnen unter dem Namen: „regula falsi (Fehlerregel)“ angewendet wird. In Beispiel 5 liegt x zwischen 4 und 5, ist also von der Form $x = 4 + h$. h ergibt sich rechnerisch aus der Proportion:

$$h : 0,4 = (1 - h) : 0,7$$

$$0,7h = 0,4(1 - h)$$

$$0,7h + 0,4h = 0,4$$

$$h = 0,4 : 1,1 = 0,36,$$

also ist

$$x = 4 + 0,36 = 4,36.$$

In Beispiel 4 ergibt sich $x = 3 + h$.

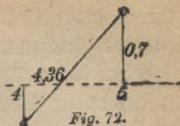
$$\frac{h}{0,304} = \frac{1-h}{0,282}$$

$$0,282h = 0,304(1-h) = 0,304 - 0,304h$$

$$0,282h + 0,304h = 0,304$$

$$h = 0,304 : 0,586 = 0,52$$

$$x = 3,52.$$



Bei der graphischen Methode fällt diese Berechnung fort; man braucht bei wenig gekrümmten Kurven nur zwei zu benachbarten x gehörige Punkte, die zu beiden Seiten der X -Achse liegen, geradlinig zu verbinden (Fig. 72). Die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der X -Achse gibt dann einen angenäherten Wert der Lösung. Man überzeugt sich durch Einsetzen des gefundenen Wertes für x in die Funktionsgleichung, ob eine beträchtliche Abweichung von 0 sich ergibt. In diesem Falle suche man zwei näher aneinanderliegende x -Werte, zwischen denen Zeichenwechsel stattfindet, und wende das gleiche Verfahren an.

Schneidet die Kurve an mehreren Stellen die X -Achse, so hat die Gleichung mehrere reelle Lösungen. Es ist bei den Gleichungen der angewandten Mathematik meist nicht nötig, alle Lösungen zu bestimmen. Oft liegt es in der Natur der Aufgabe, daß nur eine Lösung praktische Bedeutung hat. Man beschränkt sich auf die Bestimmung dieser Lösung, deren ungefähre Wert meist bekannt ist.

Beispiel. Wie tief taucht eine Holzugel ($r = 1$ dm) vom spez. Gewicht $\gamma = 0,3$ in Wasser ein?

Nach dem Archimedischen Gesetz ist Wasserverdrängung = Kugelgewicht. Ist x die Eintauchtiefe, so ist die Wasserverdrängung gleich dem Volumen eines Kugelabschnitts: $\frac{\pi x^2}{3}(3r - x)$, das Kugelgewicht ist: $\frac{4}{3}r^3\pi \cdot \gamma$, also für $r = 1$, $\gamma = 0,3$:

$$\frac{\pi x^2}{3}(3 - x) = \frac{4}{3}\pi \cdot 0,3$$

$$x^2(3 - x) = 4 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$3x^2 - x^3 = 1,2$$

$$x^3 - 3x^2 + 1,2 = 0.$$

Eine genaue Betrachtung der Fehlerfunktion $y = x^3 - 3x^2 + 1,2$ würde Zeichenwechsel zwischen -1 und 0 , 0 und 1 , 2 und 3 ergeben. Von den dadurch festgestellten Wurzeln kann aber nur die mittlere in Betracht kommen, da x weder negativ noch größer als 2 sein kann. Zur Bestimmung der brauchbaren Lösung wird die Tabelle berechnet:

x	0	1	2
y	+1,2	-0,8	-2,8

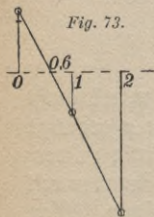


Fig. 73.

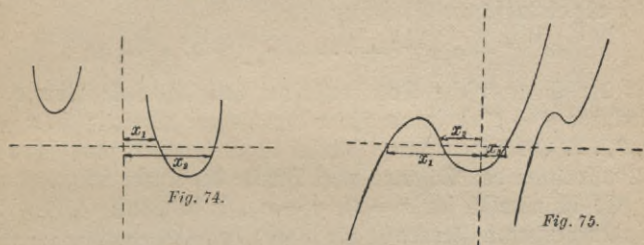
Da die Kurve (Fig. 73) nach dieser Tabelle wenig gekrümmt verläuft, verbinden wir die Kurvenpunkte für $x = 0$ und $x = 1$ geradlinig. Die Gerade schneidet die X -Achse in $x = 0,6$. Für $x = 0,6$ wird $y = +0,336$. Da die Abweichung von Null noch erheblich ist, suchen wir eine weitere Abzisse, für die y negativ wird. Wir müssen diese, der Tabelle nach, in der Richtung der wachsenden x suchen. Für $x = 0,7$ ergibt sich $y = +0,07$; erst $x = 0,8$ liefert ein negatives $y = -0,74$. Der Fehler ist viel größer als bei $x = 0,7$; also liegt die Lösung näher an $0,7$. Die Gerade zwischen den Punkten mit $x = 0,7$ und $x = 0,8$ schneidet die X -Achse in $x = 0,71$. Die Kugel taucht also $0,71 \text{ dm} = 7,1 \text{ cm}$ tief ein. Eine größere Genauigkeit kann nicht erreicht werden, da das spezifische Gewicht nur auf eine Dezimale genau gegeben ist.

Bei algebraischen Gleichungen, d. h. solchen, in denen nur positive ganze Potenzen der Unbekannten vorkommen, läßt sich ohne genaue Zeichnung der Kurve eine Angabe über die Anzahl der reellen Lösungen machen. Die höchste Potenz möge einen positiven Koeffizienten haben, was sich nötigenfalls durch Veränderung sämtlicher Zeichen erreichen läßt. Für große Zahlwerte von x ist dann das höchste Glied überwiegend, sodaß sein Vorzeichen das des Fehlers bestimmt. Setzt man $x = -\infty$, so hat bei ungeradem Grade die Funktion das Minuszeichen, bei $x = +\infty$ das Pluszeichen. Die Kurve kommt also aus $-\infty$ und verschwindet bei $+\infty$, muß somit notwendig die X -Achse schneiden: Gleichungen ungeraden Grades haben also stets mindestens eine reelle Wurzel. Bei geradem Grade ist für $x = -\infty$ wie für $x = +\infty$ das höchste Glied und damit der Fehler $+\infty$, die Kurve kommt aus $+\infty$ und verschwindet bei $+\infty$; das Schneiden der X -Achse tritt also gar nicht oder 2, 4, ... d. h. eine gerade Anzahl von Malen auf: Gleichungen geraden

Grades haben keine oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln. Die Zahl der reellen Wurzeln kann, wie aus der Algebra bekannt ist, höchstens dem Grade der Gleichung gleichkommen. Somit hat eine Gleichung

1. Grades 1 reelle Wurzel
2. „ 0 oder 2 reelle Wurzeln
3. „ 1 „ 3 „
4. „ 0, 2 oder 4 reelle Wurzeln usw.

Die Fehlerkurven für Gleichungen 2. und 3. Grades sind in den Figuren 74 und 75 gezeichnet.



Rein graphische Bestimmung der Kurvenpunkte. Besteht die rechte Seite der Gleichung aus einer Summe von einfachen Funktionen von x , deren Schaulinien gezeichnet vorliegen, so lassen sich die Kurvenpunkte ohne Rechnung finden.

Beispiel 1: $x + \log x = 5$; $y = x + \log x - 5 = \log x + (x - 5)$.

Um die zu einem gegebenen x gehörige Ordinate y zu finden, entnehmen wir den zu diesem x gehörigen Wert von $\log x$ aus der Logarithmenkurve und addieren dazu graphisch den um 5 Einheiten verkleinerten x -Wert. Die gefundene Länge wird im Punkte x aufgetragen und liefert den gesuchten Punkt. Da für $x = 4$ $x - 5 = -1$ negativ ist, muß $x - 5$ vom Endpunkt von $\log 4$ nach abwärts abgetragen werden. Für (-1) ist $x - 5 = 0$; der zur Abszisse $x = 5$ gehörige Punkt der Logarithmenkurve ist somit der zweite Punkt der Kurve $y = x + \log x - 5$. Die Lösung der Gleichung wird als Schnitt der Geraden zwischen beiden Punkten mit der X -Achse gefunden (Beispiel 5 S. 41).

Beispiel 2: $x = \operatorname{tg} x$; hier ist $y = x - \operatorname{tg} x$; da zwischen 0° und 90° die Tangenten größer als die Bögen, zwischen 90° und 180°

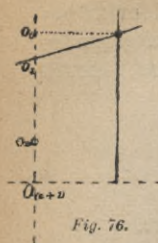


Fig. 76.

negativ sind, kann die Lösung von $x = \operatorname{tg} x$ erst hinter $x = \pi$ liegen, da mit diesem x -Werte die Tangenswerte von neuem mit 0 beginnen. Um den Kurvenpunkt für $x = 4$ zu finden, entnehmen wir $\operatorname{tg} 4$ aus der Tangenslinie S. 28 und subtrahieren die gefundene Länge von $x = 4$; diese Differenz wird als Ordinate zu $x = 4$ aufgetragen und liefert so den gesuchten Kurvenpunkt. Entsprechend wird für $x = 5$ $y = 5 - \operatorname{tg} 5$ konstruiert und als Ordinate zu $x = 5$ aufgetragen. Die Gerade zwischen den beiden konstruierten Punkten ergibt als Schnitt mit der X -Achse die Lösung der Gleichung $x = \operatorname{tg} x$: $x = 4,9$.

Bei algebraischen Gleichungen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

liefert die Segnersche Konstruktion beliebig viele Punkte der Fehlerkurve $y = f(x)$, indem für x verschiedene Werte, z. B. $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ gewählt werden. Hierbei ist zu beachten, daß schon bei der Konstruktion des Schemas zwei Punkte der Kurve festgelegt werden. Es ist nämlich für $x = 0, y = a_n$, d. h. Punkt O_n (Fig. 28) ist ein Kurvenpunkt. Ferner ist für $x = 1, y = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, d. h. die Übertragung von O_0 durch die X -Parallele auf die 1-Ordinate ergibt ebenfalls einen Kurvenpunkt, der in Fig. 28 mit Q_0 bezeichnet wurde. Wir wollen O_0 und Q_0 als die „Hauptpunkte“ der Kurve bezeichnen (Fig. 76). Aus der Lage der Hauptpunkte ist meist zu ersehen, in welcher Richtung wir weitergehen müssen, um zum Schnitt mit der X -Achse zu gelangen.

Beispiel 3: $x^2 - 4,1x + 1,8 = 0$ (Fig. 77).

Die Hauptpunkte von $y = x^2 - 4,1x + 1,8$ lassen eine Wurzel zwischen 0 und 1 erkennen: $x = 0,5$; eine zweite ist weiter rechts zu suchen. Die Konstruktion weiterer Punkte ist für $x = 2, 3, 4$ ausgeführt. Als zweite Wurzel ergibt sich $x = 3,6$.

Beispiel 4:

$$9x^2 + 25x - 12 = 0.$$

Die Hauptpunkte der Fehlerkurve $y = 9x^2 + 25x - 12$ (deren

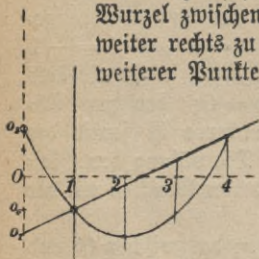


Fig. 77.

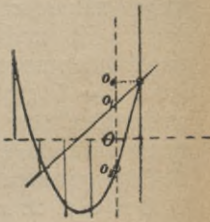
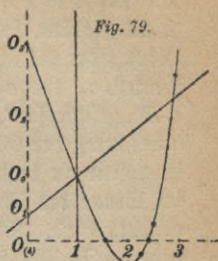


Fig. 78.

Ordnaten in mm aufgetragen sind), zeigen eine positive Wurzel zwischen 0 und 1; die zweite Wurzel ist negativ. Die Segnersche Konstruktion ist für $x = -1, -2, -3, -4$ durchgeführt. Als Lösungen der Gleichung lesen wir ab: $x_1 = +0,42$; $x_2 = -3,20$ (Fig. 78).

Beispiel 5: $0,8x^3 - 2x^2 - 1,4x + 3,9 = 0$. Außer den Hauptpunkten benutzen wir die Punkte $x = 2, x = 3, x = 1,5, x = 2,5, x = 2,3$. Als Lösungen der Gleichung ergeben sich: $x_1 = 1,5$; $x_2 = 2,4$ (x_3 ist nicht bestimmt, es muß negativ sein) (Fig. 79).



2. Das Villsche Verfahren. Im vorigen Abschnitt wurde zur graphischen Berechnung des zu beliebigem x gehörigen Wertes y einer algebraischen Funktion und damit zur Konstruktion des entsprechenden Kurvenpunktes das Segnersche Verfahren benutzt. Handelt es sich nur um einen einzelnen Wert von y , so ist das Verfahren jedenfalls bequemer als das rechnerische, wenn auch die Anzahl der bei der Konstruktion benutzten Linien bei höherem Grade der Funktion recht groß wird. Sind viele Werte derselben Funktion zu berechnen oder, was auf dasselbe herauskommt, viele Punkte der Kurve zu konstruieren, so gestaltet sich das Segnersche Verfahren zu langwierig, als daß es praktisch große Verbreitung finden könnte.

Ein Verfahren, das mit einem äußerst geringen Aufwand an Konstruktionsarbeit die zu gegebenem x gehörigen Wert einer algebraischen Funktion liefert und das in Verbindung mit einem systematischen Probieren auf bequemste Art die Auflösung einer algebraischen Gleichung bewirkt, ist das Villsche.

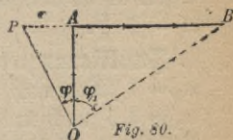
Funktionen ersten Grades. Beispiel 1: Es sei $y = a_0x + a_1$ ($= 2x + 3$) (Fig. 80). Von einem Anfangspunkt O aus wird $OA = a_0 = 2$ nach oben gezeichnet, im Endpunkt A nach rechts $AB = a_1 = 3$ rechtwinklig zu OA . Von O aus sei unter dem Winkel φ ein Strahl gezogen, der AB in P schneidet. Dann ist

$$PB = AP + a_1 = a_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi + a_1.$$

Setzt man $\operatorname{tg} \varphi = x$, so ist

$$PB = a_0x + a_1 = y.$$

PB ist also der Wert, den $y = a_0x + a_1$ für den Wert $x = \operatorname{tg} \varphi$ annimmt. In Fig. 80 ist $x = \operatorname{tg} \varphi = 1 : 2$, $y = 2x + 3 = 4$.



Die Messung ergibt: $PB = 4$. Wird φ_1 so gewählt, daß P mit B zusammenfällt, so ist für $x = \operatorname{tg} \varphi_1$ $y = 0$, d. h. $x_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ ist die Lösung der Gleichung $2x + 3 = 0$. Wird also der aus den Koeffizienten a_0 und a_1 gebildete „Rechtwinkeltzug“ OAB durch den Strahl OB „geschlossen“, so ist der tang des Winkels zwischen a_0 und OB die Lösung der Gleichung $y = a_0x + a_1$. Der Winkel (und damit x) ist positiv zu rechnen, wenn sein freier Schenkel durch eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers — positiver Drehungssinn — in a_0 übergeführt wird. Es werden nur Winkel von -90° bis $+90^\circ$ angegeben. In Fig. 80 ist φ_1 negativ. Da nur der tang, nicht φ selbst gebraucht wird, ist die Messung von φ überflüssig: es ist

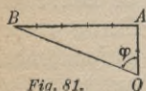


Fig. 81.

$$x = \operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{a_0} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$x_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{AB}{a_0} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

Ist a_0 negativ, so ist OA von O aus nach unten, ist a_1 negativ, so ist AB nach links abzutragen.

Beispiel 2: $2x - 5 = 0$ (Fig. 81). Hier ist $a_0 = 2$ nach oben, $a_1 = -5$ als negativ nach links anzutragen. Die Lösung der Gleichung ist: $x = \operatorname{tg} \varphi = +\frac{5}{2} = 2,5$.

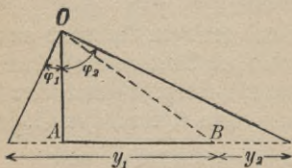


Fig. 82.

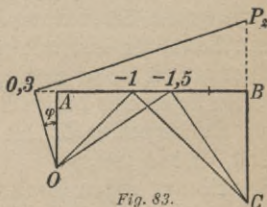


Fig. 83.

Beispiel 3: $y = -3x + 4$. Werte der Funktion für $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$. Lösung der Gleichung $-3x + 4 = 0$. Die Fig. 82 ergibt in Übereinstimmung mit der Rechnung: $y_1 = 5,5$; $y_2 = -2$; $x = +\frac{4}{3}$.

Funktionen zweiten Grades. Beispiel 4: $y = x^2 + 2,5x + 1,5$. $a_0 = 1$ wird nach oben von O bis A , $a_1 = 2,5$ nach rechts bis B , $a_2 = 1,5$ nach unten bis C gezeichnet. Der Rechtwinkeltzug $OABC$ heiße das „Schema“ der Funktion. Es sei $\sphericalangle AOP_1 = \varphi$ (positiv), dann ist, wenn $\operatorname{tg} \varphi = x$ gesetzt wird, nach dem vorigen Abschnitt

$P_1B = a_0x + a_1$. Errichtet man in P_1 auf OP_1 das Lot, das die Gerade CB in P_2 schneidet, so ist $\sphericalangle P_2P_1B = \varphi$, $P_2B : P_1B = \operatorname{tg} \varphi = x$,

$$P_2B = P_1B \cdot x = (a_0x + a_1)x = a_0x^2 + a_1x \quad y - \text{Skala}$$

$$P_2C = P_2B + a_2 = a_0x^2 + a_1x + a_2 = y,$$

d. h. P_2C gibt den Wert der Funktion $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$ für den Wert $x = \operatorname{tg} \varphi$ an. In Fig. 83 ist $x = \operatorname{tg} \varphi = 0,3$, $y = 2,34$.

Wird φ_1 so gewählt, daß P_2 mit C zusammenfällt, so ist $y = 0$, d. h. $x_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ ist eine Lösung der Gleichung $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$.

In unserem Beispiel ist $x_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{1}{1} = -1$; eine zweite Lösung ist $x_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{1,5}{1} = -1,5$.

Es ergibt sich somit zur Lösung einer quadratischen Gleichung folgende graphische Methode: Man zeichne das Schema der Funktion $y = f(x)$ und probiere einen Rechtwinkeldzug („Lösungszug“) von O unter Berührung von a_1 nach C . Der tangens des Winkels zwischen a_0 und dem Lösungszuge ist die Lösung der gegebenen Gleichung.

Beispiel 5: $y = 10x^2 + 25x + 15$ (Fig. 84). Sollen für eine größere Zahl von x die y -Werte bestimmt werden, so empfiehlt sich die Anbringung zweier Skalen, um an ihnen die zusammengehörigen Werte ablesen zu können. Die X -Skala liegt längs AB mit dem Nullpunkt über A , mit der positiven Richtung nach links. Ihre Teilpunkte entsprechen denen des Grundmaßstabes nach Multiplikation mit a_0 . Die Einheit dieser Skala ist also $a_0 \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10$ Grundeinheiten. Da der Nenner von $x = \operatorname{tg} \varphi a_0 = 10$ ist, gestattet diese Skala die Ableseung der x -Werte ohne weitere Rechnung. Die Y -Skala liegt längs CB mit dem Nullpunkt bei C ; die positive Richtung weist nach oben. Die Einheit entspricht der Konstruktionseinheit (Fig. 84 1 mm). Für $x = 0,5$ lesen wir ab: $y = 30$; für $x = -2$, $y = 5$. Eine Lösung der Gleichung $10x^2 + 25x + 15 = 0$ ist $x_1 = -1,5$.

Es empfiehlt sich, vor der Zeichnung des „Schemas“ ein „Richtungskreuz“ zu skizzieren, wie es in den folgenden Figuren geschehen ist.

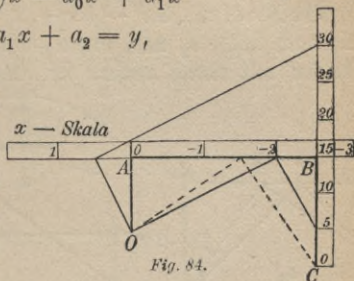


Fig. 84.

Dieses gibt die positiven Richtungen der aneinander zu reihenden Strecken $a_0 a_1 a_2$ an. Negative Koeffizienten sind in entgegengesetzter Richtung zu verwenden.

Beispiel 6: $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (Fig. 85). a_0 ist nach oben, a_1 nach links, a_2 nach unten zu zeichnen. Es ergeben sich durch Probieren mit einem rechten Winkel, dessen Schenkel durch O und C

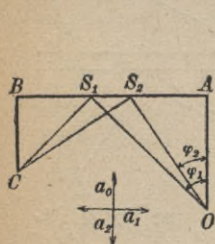


Fig. 85.

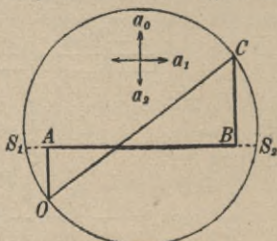


Fig. 86.

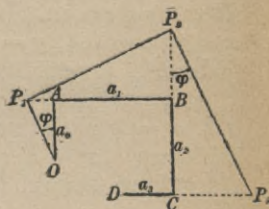


Fig. 87.

gehen, während der Scheitel auf AB bewegt wird, zwei Lösungszüge mit den Winkeln φ_1 und φ_2 . Da beide Winkel positiv sind, sind auch die Lösungen positiv. Es ergibt sich

$$x_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Vereinfachung bei quadratischen Gleichungen. Bei der graphischen Lösung quadratischer Gleichungen mit Hilfe des Lillschen Schemas kommt es darauf an, die Punkte S_1 und S_2 zu finden, in denen der Lösungszug die Gerade AB berührt. Nun sind die Dreiecke OS_1C und OS_2C rechtwinklig über der gemeinsamen Hypotenuse OC . Da alle rechtwinkligen Dreiecke über OC in einem Kreise mit dem Durchmesser OC liegen („Thaleskreis“), so sind S_1 und S_2 die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden AB (Fig. 86).

Beispiel 7: $7x^2 + 25x - 12 = 0$.

Es ist
$$x_1 = \frac{S_1 A}{OA} = + \frac{3}{7} = + 0,43$$

$$x_2 = \frac{S_2 O}{OA} = - \frac{28}{7} = - 4.$$

Funktionen dritten Grades. $y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$. Wir fahren in der Bildung des Schemas fort (Fig. 87), indem wir

a_3 rechtwinklig im Endpunkt von a_2 ansetzen und zwar so, daß bei nur positiven Koeffizienten der Rechtwinkelzug im Sinne des Uhrzeigers durchlaufen wird. Die positive Richtung von a_3 ist also die des vierten Arms des Richtungskreuzes. Ist D der Endpunkt von A_3 und wird auf P_1P_2 in P das Lot errichtet, so schließt dieses mit der Geraden BC wieder den $\sphericalangle \varphi$ ein. Der Schnittpunkt des freien Schenkels von φ mit der Geraden CD sei P_3 . Dann ist

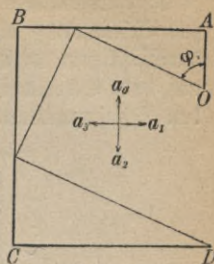


Fig. 88.

$$P_3C : P_2C = \operatorname{tg} \varphi; P_3C = P_2C \cdot \operatorname{tg} \varphi = (a_0x^2 + a_1x + a_2) \cdot x \\ = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x$$

$$DP_3 = P_3C + a_3 = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Es ist also $DP_3 = y$ der Wert der Funktion für $x = \operatorname{tg} \varphi$. Fällt P_3 mit D zusammen, so ist OP_1P_2D ein „Lösungszug“; $x_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ eine Lösung der Gleichung $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

Beispiel 8: $x^3 - 3,3x^2 + 3,8x - 3,45 = 0$ (Fig. 88). Es wird a_0 nach oben, a_1 nach links, a_2 nach unten, a_3 nach rechts gezeichnet. φ ist positiv; $x = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2,3}{1}$; $x = 2,3$.

Das Verfahren läßt sich ohne weiteres auf die Berechnung von Werten der Funktionen 4ten, 5ten . . . nten Grades sowie auf die Auflösung von Gleichungen entsprechenden Grades ausdehnen. Der Richtungssinn der weiter anzutragenden Strecken a_4, a_5, \dots ist so zu bestimmen, daß die positiven Richtungen einen Rechtwinkelzug ergeben, der von a_0 bis a_n im Sinne des Uhrzeigers durchlaufen wird. Es wird also a_4 dieselbe Richtung wie a_0, a_5 wie a_1 usw. haben. Ist ein Koeffizient negativ, so wird er in umgekehrter Richtung gezeichnet, als im Richtungskreuz angegeben. Den Koeffizienten der höchsten Potenz wählt man zweckmäßig positiv, was sich nötigenfalls durch Umkehrung aller Zeichen erreichen läßt.

Beispiel 9:

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 7x + 8 = 0 \text{ (Fig. 89);}$$

$$x = \operatorname{tg} \varphi = 1,1.$$

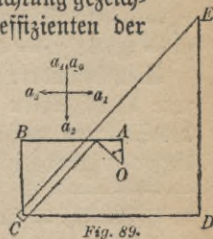


Fig. 89.

Eine wesentliche Erleichterung beim Zeichnen des Rechtwinkelszuges zur Bestimmung eines Funktionswertes bietet die Verwendung von durchsichtigem Millimeterpapier. Man steckt es mit einer Nadel so auf dem Schema in O fest, daß eine Hauptlinie durch O geht. In den Schnittpunkten mit den Geraden $AB, BC \dots$ geht man von

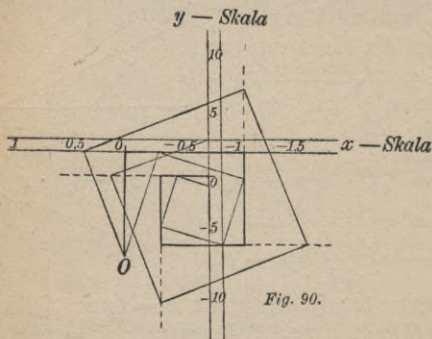


Fig. 90.

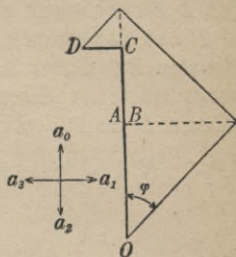


Fig. 91.

einer Linie des Netzes auf die dazu senkrechte über. Auch der Lösungszug einer Gleichung läßt sich durch Drehen des Millimeternetzes um die Nadel als Achse leicht ausprobieren. Wir haben unter Verwendung des Netzes im Lillischen Verfahren eine mechanische Methode zur Auflösung algebraischer Gleichungen von kaum zu übertreffender Einfachheit.

Beispiel 10: In Fig. 90 ist das Schema der Funktion 6ten Grades $y = 9x^6 + 10x^5 + 8x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 4x + 5$

gezeichnet mit den oben erwähnten Skalen für die Ableseung der x - und y -Werte. Die x -Skala hat als Einheit das Neunfache der Konstruktionseinheit — mm —, die y -Skala ist in mm zu teilen. Mit Hilfe des durchsichtigen Netzes sind die Rechtwinkelszüge für $x_1 = +0,4$ und $x_2 = -0,3$ festgelegt. Man liest ab: $y_1 = 8,3$, $y_2 = 4,2$ (berechnet: $y_1 = 8,26$; $y_2 = 4,22$).¹⁾

Eine besondere Erwähnung verlangt der Fall, daß ein oder mehrere Koeffizienten Null sind. Wenn auch die entsprechende Strecke des Schemas ausfällt, so läßt sich doch die Gerade, auf der die Strecke liegen würde, zeichnen, somit auch ihr Schnitt mit dem Rechtwinkel-

1) In Fig. 90 ist die y -Skala um 5 Einheiten nach unten zu verschieben.

bzw. Lösungszuge. Der Punkt, hinter dem die folgende Strecke ausfällt, ist auch mit dem folgenden Buchstaben zu bezeichnen.

Beispiel 11: Fig. 91 zeigt das Schema für $y = 3x^3 - 2x + 1$ und den Lösungszug der Gleichung $3x^3 - 2x + 1 = 0$. a_0 wird nach oben gezeichnet; B fällt mit A zusammen; BC ist nach oben, CD nach links gezeichnet. Die Lösung ist

$$x = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{3} = -1.$$

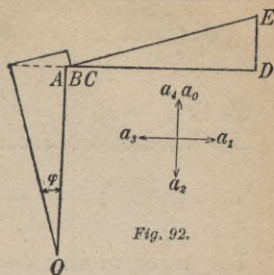


Fig. 92.

Beispiel 12: $10x^4 - 10x + 2,91 = 0$ (Fig. 92). a_0 wird nach oben gezeichnet; $a_1 = 0$ ergibt die Senkrechte in A zu OA ; $a_0 = 0$ bestimmt die Verlängerung von OA ; a_3 ist von A aus nach rechts, a_4 von D aus nach oben zu zeichnen. Der Lösungszug ergibt $x = \operatorname{tg} \varphi = +\frac{3}{10} = +0,3$.

3. Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten durch zwei Kurven. Es sei $f(x) = 0$ eine Gleichung, deren linke Seite sich leicht in zwei Teile zerlegen läßt, z. B. $x^3 + ax - b = 0$ oder $x^3 = -ax + b$; $x - \log x = 0$ oder $x = \log x$; allgemein:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0.$$

Ist $x = a$ eine Lösung dieser Gleichung, so ist

$$f_1(a) - f_2(a) = 0, \quad f_1(a) = f_2(a).$$

Ist nun $y_1 = f_1(x)$ die graphische Darstellung der einen, $y_2 = f_2(x)$ die der anderen Teilfunktion, so bedeutet $f_1(a) = f_2(a)$, daß beide Kurven für einen bestimmten Wert $x = a$ die gleiche Ordinate haben, also sich schneiden. Die Abszisse dieses Schnittpunkts erfüllt die Gleichung $f_1(x) = f_2(x)$ oder $f_1(x) - f_2(x) = 0$, ist also eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Wir erhalten so die folgende Methode der Gleichungsauflösung: Man konstruiere die Bildkurven der Funktionen der rechten und linken Seite und suche ihre Schnittpunkte. Die Abszissen dieser Schnittpunkte sind Lösungen der gegebenen Gleichung.

Diese Methode ist immer dann vorteilhaft, wenn sich die linke Seite der in Normalform $f(x) = 0$ gegebenen Gleichung in zwei Teilfunktionen zerlegen läßt, die bequemer zu konstruieren sind, als die unzerlegte Funktion.

Beispiel 1: $x^2 - 4,1x + 2,1 = 0$ oder
 $x^2 = 4,1x - 2,1$ (Fig. 93).

Es ist $y_1 = x^2$, $y_2 = 4,1x - 2,1$. Die erste Kurve, eine Parabel, läßt sich nach der Tabelle konstruieren:

x	0	1	2	3	4
y_1	0	1	4	9	16

Die zweite ist eine Gerade, aus zwei Punkten konstruierbar, z. B.

x	1	2
y_2	2	6,1

Die Kurven schneiden sich in zwei Punkten mit den Abszissen:

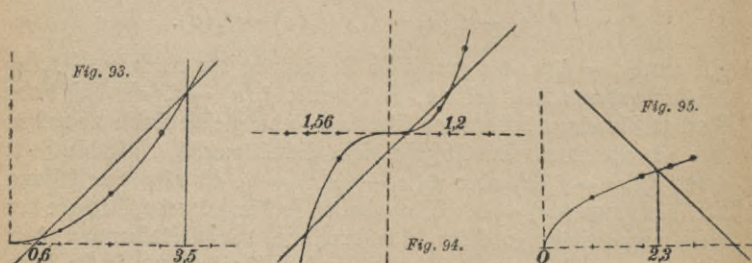
$$x_1 = 0,6, \quad x_2 = 3,5;$$

diese Werte sind also die Lösungen der gegebenen Gleichung.

Beispiel 2: $x^3 - 2x + 0,674 = 0$ oder $x^3 = 2x - 0,674$
 (Fig. 94).

$y_1 = x^3$ wird nach folgender Tabelle konstruiert:

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
y_1	-3,75	-1	-0,125	0	0,125	1	3,75



Die Gerade $y_2 = 2x - 0,674$ wird aus zwei Punkten konstruiert:

x	0	1
y_2	-0,674	1,326

Die Abszissen der drei Schnittpunkte, zugleich die Lösungen der Gleichung, sind:

$$x_1 = -1,56; \quad x_2 = 0,36; \quad x_3 = 1,2.$$

Beispiel 3:

$$\sqrt{x} + x - 3,82 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\sqrt{x} = -x + 3,82 \quad (\text{Fig. 95})$$

$$y_1 = \sqrt{x}, \quad y_2 = -x + 3,82.$$

Die Kurve von y_1 wird nach einer Wurzeltabelle oder Wurzelkurve konstruiert, die Gerade aus zwei Punkten. Schnittpunktsabszisse, also Lösung der Gleichung: $x = 2,3$.

Beispiel 4: $x - \log x = 3,4$ oder $\log x = x - 3,4$ (Fig. 96).

$y_1 = \log x$ wird nach einer Logarithmentafel oder -kurve konstruiert, die Gerade aus zwei Punkten. Lösung: $x = 4$.

Beispiel 5: $x = \operatorname{tg} x$.

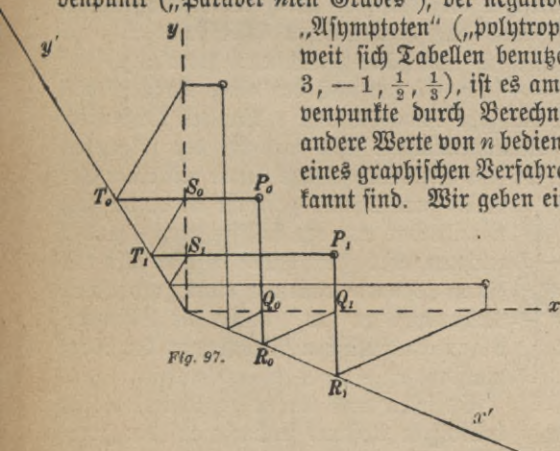
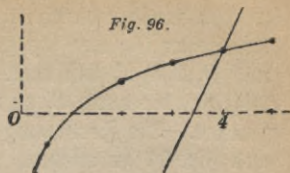
$y_1 = \operatorname{tg} x$ ist die „Tangenzlinie“ (S. 28), $y_2 = x$ eine Gerade mit dem Steigungswinkel 45° durch den Nullpunkt. Lösung: $x = 4,5$.

Das geschilderte Verfahren eignet sich besonders für Gleichungen der Form $x^n + ax + b = 0$ oder $x^n = -ax - b$.

Hierin kann n jeden positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Wert haben. Die Kurve $y_2 = -ax - b$ ist eine Gerade; $y_1 = x^n$ ist eine „Potenzkurve“. Diese Kurven lassen sich aus wenigen Punkten konstruieren: bei positivem n ist der Nullpunkt ein Kurvenpunkt („Parabel n ten Grades“), bei negativem n sind die Achsen

„Asymptoten“ („polytropische Kurven“). Soweit sich Tabellen benutzen lassen (für $n = 2, 3, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$), ist es am bequemsten, die Kurvenpunkte durch Berechnung zu finden. Für andere Werte von n bedient man sich zweckmäßig eines graphischen Verfahrens, deren mehrere bekannt sind. Wir geben ein solches an, bei dem aus 2 Punkten beliebig viele weitere gefunden werden.

Konstruktion der Potenzkurve aus 2 Punkten (Fig. 97). Die Punkte P_0 und P_1



werden zunächst berechnet. Ox' und Oy' seien unter beliebigen Winkeln gegen Ox und Oy gezogen. Durch P_0 und P_1 sind $Q_0R_0S_0T_0$ und $Q_1R_1S_1T_1$ bestimmt. Die Parallele durch R_1 zu R_0Q_1 gibt die Abszisse, die durch S_1 zu S_0T_1 die Ordinate eines weiteren Kurvenpunktes. Die Fortsetzung der Konstruktion nach links und rechts ist aus Fig. 97 zu ersehen.

Zeichnet man für die häufiger vorkommenden Werte von n die Kurven $y = x^n$ auf durchsichtiges Millimeterpapier, so kann man Gleichungen der Form $x^n + ax + b = 0$ auf folgende Weise mechanisch lösen. Die Gerade $y_2 = -ax - b$ wird (in dem für die Kurven $y = x^n$ benutzten Maßstabe) gezeichnet und darüber das durchsichtige Kurvenblatt gelegt, so daß die Koordinatenanfangspunkte und die entsprechenden Achsen aufeinander fallen. Die Abszissen der Schnittpunkte der Geraden und der Potenzkurve sind auf dem Millimeterpapier bequem abzulesen; sie sind die Lösungen der gegebenen Gleichung.

Übungen: $10x^4 - 10x + 2,91 = 0$ ($y_1 = x^4$, $y_2 = x - 0,291$)

$$\frac{1}{x} + x = 5,2 \quad (y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = 5,2 - x)$$

$$\sin \frac{2\pi x}{5} = \frac{1}{2}$$

$$x + 2,5^x = 11 \quad (y_1 = 2,5^x; y_2 = 11 - x).$$

Auflösung quadratischer Gleichungen durch ein Nomogramm.

Die mechanische Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ mit Hilfe einer für alle Fälle gezeichneten Parabel $y = x^2$ und einer Geraden $y = -ax - b$ hat noch den einen Nachteil, daß diese Gerade für jede Aufgabe besonders aus 2 Punkten konstruiert werden muß. Diese Unbequemlichkeit fällt fort bei der folgenden Methode, bei der eine für jede Gleichung gültige Kurve mit einer Geraden zum Schnitt gebracht wird, die sich

unmittelbar aus den Koeffizienten a und b zeichnen läßt. Wir haben es hier also mit einem „Nomogramm“, einer graphischen Rechentafel zu tun, welche die Lösungen aller quadratischen Gleichungen der Normalform $x^2 + ax + b = 0$ enthält.

Es seien zwei Achsen gezeichnet, die in beliebigem Abstand senkrecht auf der Hori-

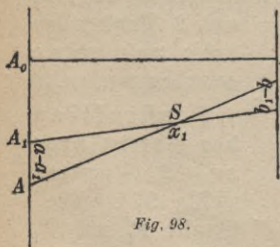


Fig. 98.

zontalen A_0B_0 stehen (Fig. 98). Auf der A -Achse seien die Werte der a , auf der B -Achse die der b in gleichen Einheiten aufgetragen; positive Werte nach oben, negative nach unten. Ist x_1 eine Lösung der Gleichung, so ist: $x_1^2 + ax_1 + b = 0$. Ist $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ eine zweite Gleichung mit derselben Wurzel x_1 , so ist auch $x_1^2 + a_1x + b_1 = 0$. Durch Subtraktion folgt:

$$x_1(a - a_1) + (b - b_1) = 0$$

$$x_1 = \frac{b_1 - b}{a - a_1} = \frac{BB_1}{AA_1}.$$

Dann ist nach Fig. 98 auch $\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{SB_1}{SA_1} = \frac{SB}{SA}$,

also
$$x_1 = \frac{SB_1}{SA_1} = \frac{SB}{SA},$$

d. h. x_1 ist das Teilverhältnis, in dem die Verbindungslinie der Koeffizienten a und b oder a_1 und b_1 oder überhaupt der zwei Koeffizienten jeder quadratischen Gleichung, die x_1 zur Lösung hat, durch S geteilt wird. Alle diese Verbindungsgeraden gehen durch S . Wir bezeichnen diesen Punkt mit x_1 . Wenn die Verbindungsgerade der Koeffizienten irgend einer quadratischen Gleichung durch Punkt x_1 geht, hat die Gleichung die Wurzel x_1 . Wir konstruieren nun die Punkte x_1 für die Wurzelwerte $0, 1, 2, 3 \dots$ und beliebige Zwischenwerte und bezeichnen die Punkte mit den entsprechenden Zahlen. Für jeden Punkt genügen 2 Gerade. Z. B. für Punkt 1 wählen wir die Gleichungen

$$x^2 - x = 0, \quad \text{d. h. } a = -1, b = 0 \quad \text{und}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad \text{d. h. } a = -2, b = 1,$$

die beide eine Wurzel $x = 1$ haben. Für Punkt 2 wählen wir z. B. die Gleichungen:

$$x(x - 2) = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 2x = 0, \quad \text{d. h. } a = -2, b = 0 \quad \text{und}$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 3x + 2 = 0, \quad \text{d. h. } a = -3, b = 2$$

usw. Der Schnittpunkt der Geraden $a = -1, b = 0$ und $a = -2, b = 1$ ist Punkt 1, der Geraden $a = -2, b = 0$ und $a = -3, b = 2$ ist Punkt 2 usw. Die Punkte und nötigenfalls Zwischenpunkte

0,1; 0,5 usw. ergeben eine Kurve, auf der weitere Zwischenpunkte leicht zu interpolieren sind. Um nun eine bestimmte Gleichung zu lösen, z. B. $x^2 - 3,5x + 1,5 = 0$, zeichne man die Gerade $a = -3,5$, $b = 1,5$

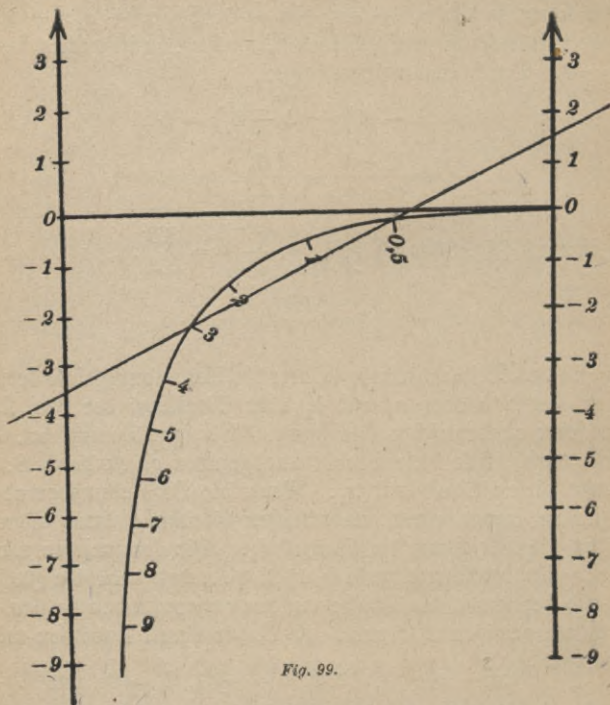


Fig. 99.

(oder lege einen Faden oder einen auf Celluloid geritzten „Weiser“ durch diese Punkte); diese schneidet die Kurve in den Punkten 3 und 0,5, dann sind $x_1 = 3$, $x_2 = 0,5$ die gesuchten Wurzeln (Fig. 99).

Um negative Wurzeln zu finden, ersetze man x durch $(-x)$, bestimme die positiven Wurzeln der so entstehenden Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ und erteile ihnen das Minuszeichen.

C. Auflösung von Gleichungssystemen mit mehreren Unbekannten.

1. Auflösung von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. a) Lösung durch 2 Kurven.

Beispiel 1: $5x + 3y = +15,7$

$$2x - 7y = -5,2.$$

Betrachtet man x und y in der ersten Gleichung nicht als Unbekannte, sondern als Veränderliche, so ist die Bildkurve der unentwickelten Funktion $5x + 3y = 15,7$ eine Gerade; zur Konstruktion genügen daher 2 Punkte, z. B.

x	0	5
y	5,233	-3,1

Die der 2ten Gleichung entsprechende Gerade $2x - 7y = -5,2$ wird ebenfalls aus 2 Punkten konstruiert:

x	0	5
y	0,743	2,17

Die beiden Geraden (Fig. 100) schneiden sich im Punkte $x = 2,3$, $y = 1,4$. Da dieser Punkt auf beiden Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichungen beider Geraden, d. h. beide gegebenen Gleichungen. Die Lösung des Gleichungssystems ist somit:

$$x = 2,3; y = 1,4.$$

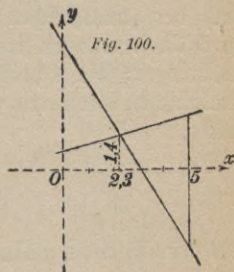
Am einfachsten konstruiert man eine Gerade aus ihren Abschnitten auf der X - bzw. Y -Achse, die man findet, indem man $y = 0$ bzw. $x = 0$ setzt. Die Tabellen werden dann

x	0	3,14	und	x	0	-2,6
y	5,233	0		y	0,743	0

Es seien allgemein die beiden gegebenen Gleichungen in die Form gebracht:

$$f_1(x, y) = 0; f_2(x, y) = 0.$$

Konstruiert man die diesen unentwickelten Funktionsgleichungen



chungen entsprechenden Bildkurven und sucht deren Schnittpunkte auf, so sind deren Koordinaten die Lösungen des gegebenen Gleichungssystems.

Die Schwierigkeit dieser Methode liegt in der Konstruktion der Kurven, wenn deren Gleichungen unentwickelt sind; nach dem Einsetzen beliebiger x -Werte würde jedesmal eine Gleichung für y zu lösen sein. Kommt in beiden Gleichungen eine der Unbekannten z. B. y nur im ersten Grade vor, so kann man sie auf die Form bringen: $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$. Dann ist die Methode gut zu verwenden.

Sind beide Gleichungen vom 2ten Grade, so sind die Bildkurven nach der „analytischen Geometrie“ Kegelschnitte. Es gelingt dann durch Umformungen sie auf eine der bekannten Kegelschnittsgleichungen zu bringen; die Kegelschnitte werden dann nach den Methoden der analytischen Geometrie gezeichnet und die Schnittpunktkoordinaten abgelesen.

$$\text{Beispiel 2: } 4x^2 + 9y^2 - 54y + 45 = 0$$

$$y^2 - 2x - 2 = 0.$$

Die erste Gleichung läßt sich auf die Form bringen:

$$4x^2 + 9(y - 3)^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y - 3)^2}{2^2} = 1.$$

Die Kurve ist eine Ellipse mit den Halbachsen 3 und 2, deren Mittelpunkt um 3 über dem Nullpunkt liegt.

Die zweite Gleichung ergibt durch Umformung

$$y^2 = 2(x + 1);$$

sie stellt eine Parabel dar, deren Scheitel um 1, deren Brennpunkt um $\frac{1}{2}$ links vom Nullpunkt liegt. Die Schnittpunkte beider Kurven haben die Koordinaten

$$x_1 = -0,45 \quad y_1 = 1,05$$

$$x_2 = 2,95 \quad y_2 = 2,80.$$

Diese Wertepaare sind somit die Lösungen des gegebenen Gleichungssystems.

Von einer allgemeinen Behandlung der Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten soll abgesehen werden.

b) Die Vektormethode. Gleichungen ersten Grades mit 2 Unbekannten. Bei der allgemeinen Methode mußten die beiden Geraden erst durch Berechnung von je 2 Punkten konstruiert werden. Eine Methode, bei der direkt die Koeffizienten der Unbekannten in der Normalform für die Zeichnung benutzt werden, soll im folgenden entwickelt werden.

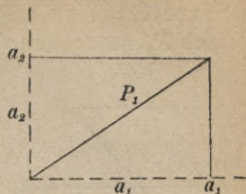


Fig. 101.

Eine Kraft P_1 habe die Komponenten a_1 und a_2 in Richtung der X - und Y -Achse. Aus a_1 und a_2 läßt sich dann P_1 konstruieren (Fig. 101). Eine zweite Kraft P_2 sei durch b_1 und b_2 bestimmt, eine dritte R durch c_1 und c_2 (Fig. 102). Vergrößert man a_1 und a_2 um den gleichen Faktor x , so vergrößert sich auch P_1 ohne Richtungsänderung um den Faktor x ; denn da

$$P_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{ ist } \sqrt{(a_1 x)^2 + (a_2 x)^2} = P_1 x.$$

Ebenso soll b_1 und b_2 um den Faktor y vergrößert werden, so daß P_2 sich auf $P_2 y$ vergrößert. x und y sollen nun so gewählt werden, daß P_1 und P_2 gerade die Komponenten von R werden, so daß also $P_1' = P_1 x$ und $P_2' = P_2 y$ ein Parallelogramm mit der Diagonale R ergeben. Aus $OP_1' = x \cdot OP_1$, $OP_2' = y \cdot OP_2$ ergibt sich:

$$x = \frac{OP_1'}{OP_1}, \quad y = \frac{OP_2'}{OP_2}.$$

P_1' ist der Schnittpunkt von OP_1 mit der Parallelen durch R zu OP_2 ; P_2' der von OP_2 mit der Parallelen durch R zu OP_1 . Da die Summe der X -Komponenten von P_1 und P_2 die X -Komponente von R , die Summe der Y -Komponenten von P_1 und P_2 die Y -Komponente von R ergibt, bestehen die Gleichungen:

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad a_2 x + b_2 y = c_2.$$

Dies ist aber das gegebene Gleichungssystem mit 2 Unbekannten. Wir finden also die Unbekannten, wenn wir

a_1	und	a_2	zu	Komponenten	einer	Kraft	P_1 ,
b_1	"	b_2	"	"	"	"	P_2 ,
c_1	"	c_2	"	"	"	"	R

machen und vom Endpunkt von R aus die

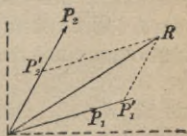


Fig. 102.

Parallelen zu OP_1 und OP_2 ziehen, die P_1 und P_2 in P_1' und P_2' schneiden; dann ist

$$x = \frac{OP_1'}{OP_1}, \quad y = \frac{OP_2'}{OP_2}.$$

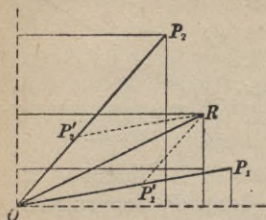


Fig. 103.

Beispiel 1:

$$8,6x + 6y = 7,5$$

$$1,5x + 6,8y = 3,7 \quad (\text{Fig. 103}).$$

Wir konstruieren

P_1	mit den Komponenten	8,6	und	1,5
P_2	" "	"	6	" 6,8
R	" "	"	7,5	" 3,7

Es ergibt sich:

$$x = \frac{OP_1'}{OP_1} = \frac{5,2}{8,8} = 0,6$$

$$y = \frac{OP_2'}{OP_2} = \frac{3,7}{9,0} = 0,4.$$

Es ist klar, daß eine der Parallelen durch R erspart werden kann, da $OP_1' = RP_2'$, $OP_2' = RP_1'$ ist.

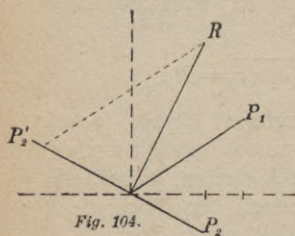


Fig. 104.

Beispiel 2:

$$3x + 2y = 2$$

$$2x - y = 4 \quad (\text{Fig. 104}).$$

Negative Komponenten sind in entgegengesetzter Richtung zu verwenden, also der Koeffizient von y in der zweiten Gleichung nach unten abzutragen. Es ergibt sich $x = \frac{5,1}{3,65} = 1,4$; $y = -\frac{2,6}{2,28} = -1,14$ (da P_2' auf der rückwärtigen Verlängerung von OP_2 liegt, ist OP_2' negativ zu rechnen; daher wird y negativ).

2. Gleichungen ersten Grades mit 3 Unbekannten. Die Betrachtungen des vorigen Abschnitts lassen sich in den Raum übertragen. Eine Kraft P_1 ist zerlegbar in 3 Komponenten nach den Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems: a_1, a_2, a_3 . 3 weitere Kräfte P_2, P_3, R haben die Komponenten b_1, b_2, b_3 ; c_1, c_2, c_3 und d_1, d_2, d_3 . Es sollen nun die Kräfte P_1, P_2, P_3 mit den Faktoren x, y, z multipliziert werden, die so gewählt sind, daß R die

Resultierende der veränderten Kräfte xP_1, yP_2, zP_3 ist. Dann bestehen die Gleichungen:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

d. h. die Faktoren, mit denen P_1, P_2, P_3 multipliziert werden müssen, um R zur Resultierenden zu haben, sind die Lösungen des vorstehenden Systems von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Zur Bestimmung von x ist folgende Konstruktion im Raume auszuführen (Fig. 105): Durch R wird die Parallele zu OP_1 bis zum Schnittpunkt S mit der Ebene P_2OP_3 gezogen; dann ist $x \cdot OP_1 = RS$; $x = \frac{RS}{OP_1}$. OS wird in der Ebene P_2OP_3 in zwei Komponenten in Richtung OP_2 und OP_3 zerlegt.

Diese seien ST und OT ; dann ist $y = \frac{ST}{OP_2}$;

$z = \frac{OT}{OP_3}$. Zur wirklichen Ausführung benutzen wir die in

der darstellenden Geometrie gebräuchliche Methode, eine Geraden im Raume durch zwei Projektionen z. B. auf die YX -Ebene und die YZ -Ebene darzustellen (Fig. 106).

Beispiel 1:

$$1,6x + 0,6y + 1,5z = 1,59 \quad x = \frac{2}{5}$$

$$1,1x + 1,8y + 2,3z = 2,19 \quad y = \frac{1}{3}$$

$$2,3x + 1,2y + 0,3z = 1,47 \quad z = \frac{1}{2}$$

(Fig. 107).

Die Projektionen der Kräfte $P_1P_2P_3R$ seien in der XY -Ebene mit $p_1p_2p_3p$, in der YZ -Ebene mit $q_1q_2q_3q$ bezeichnet. Die Endpunkte der Strecken tragen diese

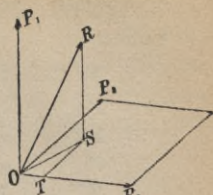


Fig. 105.

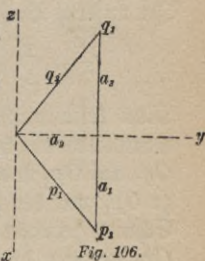
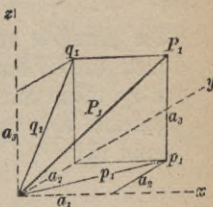


Fig. 106.

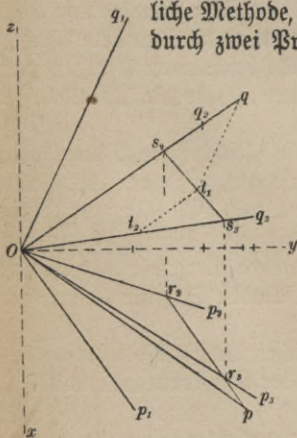


Fig. 107.

Buchstaben. Die Ausführung gestaltet sich wie folgt: es wird konstruiert

p_1	aus der	Y -Komponente	1,1,	der	X -Komponente	1,6
p_2	"	"	1,8,	"	"	0,6
p_3	"	"	2,3,	"	"	1,5
p	"	"	2,19,	"	"	1,59
q_1	"	"	1,1,	"	Z -	2,3
q_2	"	"	1,8,	"	"	1,2
q_3	"	"	2,3,	"	"	0,3
q	"	"	2,19,	"	"	1,47.

Die Parallele durch p zu Op_1 schneidet Op_2 in r_2 , Op_3 in r_3 ; Parallele zu OZ durch r_2 schneidet Oq_2 in s_2 , die durch r_3 schneidet Oq_3 in s_3 . Nun wird s_2 mit s_3 verbunden; die Parallele durch q zu Oq_1 schneidet s_2s_3 in t_1 , Parallele durch t_1 zu Oq_2 schneidet Oq_3 in t_2 ; dann ist

$$x = \frac{qt_1}{Oq_1}; \quad y = \frac{t_1 t_2}{Oq_2}; \quad z = \frac{t_2 O}{Oq_3}.$$

In unserm Beispiel ergibt sich:

$$x = \frac{2}{5} = 0,4; \quad y = \frac{1,45}{4,40} = 0,33; \quad z = \frac{2,35}{4,7} = 0,5.$$

Man kann natürlich die Konstruktion in der XZ -Ebene mit einer Parallelen durch q zu Oq_1 beginnen und die Schnittpunkte mit Oq_2 , Oq_3 auf Op_2 und Op_3 hinunterloten. Dann wird die Parallele durch p zu Op_1 mit der durch die genannten Punkte bestimmten Geraden zum Schnitt gebracht, durch den letztgefundenen Punkt die Parallele zu Op_2 gezogen bis zum Schnitt mit Op_3 .

Ferner ist es, da die Koeffizienten abc gleichberechtigt sind, also auch die Reihenfolge gleichgültig ist, ebenso gut, mit einer Parallelen durch $p(q)$ zu Op_2 (Oq_2) zu beginnen, die mit Op_1 (Oq_1) und Op_3 (Oq_3) zum Schnitt gebracht wird, oder mit einer Parallelen durch $p(q)$ zu Op_3 (Oq_3). Es ergibt sich oft, welche Parallele vorzuziehen ist, nämlich die, welche mit den beiden Geraden Schnitte liefert, die noch auf der Zeichnung sind.

Es ist, um bei den immerhin zahlreichen Linien die Übersicht zu behalten, dringend erforderlich, die bei der Konstruktion erhaltenen Punkte zu bezeichnen.

Negative Koeffizienten sind in entgegengesetzter Richtung aufzu-

tragen. Dadurch gelangt z. B. der Punkt p_1 , der aus $a_2 = 3, a_3 = -2$ zu konstruieren ist, in den oberhalb der Y -Achse gelegenen Teil der XY -Ebene, also scheinbar in die XZ -Ebene. Entsprechend tritt ein Punkt q , dessen Z -Komponente negativ ist, scheinbar in der XY -Ebene auf. Nur genaue Punktbezeichnung schließt hier Verwechslungen aus. Es können auch mehrere Punkte zusammenfallen, z. B. $p_2 = (2, 3)$ der XY -Ebene, und $q_3 = (3, -2)$ der YZ -Ebene; der Punkt ist dann doppelt zu bezeichnen und sowohl als p_2 wie als q_3 zu benutzen (Fig. 108).

Beispiel 2: $x + 2y + 2z = 3$

$x - y + 5z = 2$

$3x + 2y - z = 2.$

Hier ist die Parallele durch p zu Op_2 benutzt, entsprechend in der YZ -Ebene die Parallele durch q zu Oq_3 .

Die Konstruktion (Fig. 109) ergibt:

$$x = \frac{t_1 t_2}{Oq_1} = \frac{0,6}{1,4} = 0,4; \quad y = \frac{qt_1}{Oq_2} = \frac{3,6}{4,5} = 0,8;$$

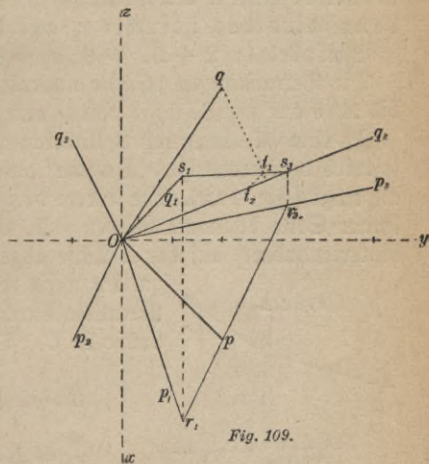
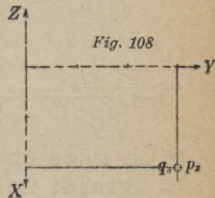
$$z = \frac{Ot_2}{Oq_3} = \frac{2,7}{5,4} = 0,5.$$

3. Auflösung einer Gleichungstreppe ersten Grades mit n Unbekannten. Eine von der im vorigen Abschnitt behandelten ganz verschiedene Methode der Auflösung linearer Gleichungen mit n Unbekannten gründet sich auf folgende Betrachtungen.

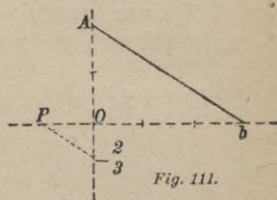
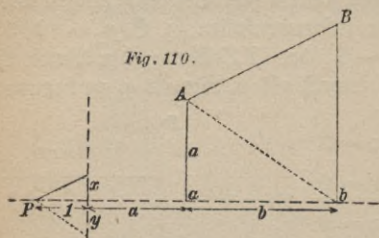
Es sei die Gleichung

$$a + bx = 0$$

aufzulösen; a und b seien zunächst positiv. Auf der X -Achse eines Koordinatenkreuzes



(Fig. 110) seien a und b hintereinander abgetragen bis a und b ; in a sei nochmals a nach oben aufgetragen bis A . P sei ein „Pol“, eine Einheit links von O gelegen. Es soll der Wert von $a + b \cdot x$ für einen gegebenen Wert x bestimmt werden. Man trage x auf der Y -Achse



ab bis x (positiv nach oben, negativ nach unten), und ziehe durch A die Parallele zu Px ; dann schneidet diese auf der Ordinate in b die gesuchte Strecke ab: $Bb = a + bx$. Denn es ist

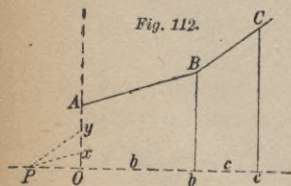
$$\frac{Bb - a}{b} = \frac{x}{1}, \text{ also } Bb = a + bx.$$

Ist x_1 eine Lösung der Gleichung $a + bx = 0$, so ist $Bb = 0$, $Px_1 \parallel Ab$. Um also die gegebene Gleichung graphisch zu lösen, verbinde man A mit b und ziehe durch P die Parallele zu Ab ; dann wird das gesuchte x_1 auf der Y -Achse abgelesen.

Beispiel 1: $2 + 3x = 0$; $x_2 = -2/3$ (Fig. 111).

Die Betrachtungen bleiben unverändert, wenn a auf der Y -Achse bis A , b auf der X -Achse von O aus bis b abgetragen wird.

Ist eine Gleichung mit 2 Unbekannten gegeben: $a + bx + cy = 0$, so wird dem bisherigen „Schema“ auf der X -Achse die Strecke $bc = c$ angefügt (Fig. 112). Die Werte von x und y , für die der Wert der linken Seite bestimmt werden soll, werden beide von O aus (nicht hintereinander!) auf der Y -Achse abgetragen. Die Parallele durch A zu Px trifft die Ordinate von b in B , die Parallele durch B zu Py trifft die Ordinate von c in C . Dann ist



$$Bb = a + bx, \quad \frac{Cc - Bb}{c} = \frac{y}{1};$$

$$Cc = Bb + cy = a + bx + cy.$$

Soll (x, y) ein Lösungspaar der gegebenen Gleichung sein, so muß $Cc = 0$ sein, der Linienzug ABC somit in c endigen. Bei beliebig gewähltem x findet man also das zugehörige y , indem man zur „Schlußlinie“ Bc die Parallele durch den Pol zieht, die auf der Y -Achse das gesuchte y abschneidet (Fig. 113).

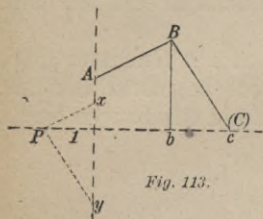


Fig. 113.

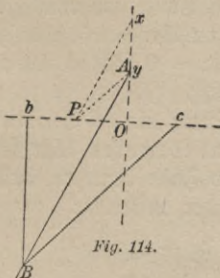


Fig. 114.

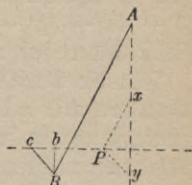


Fig. 115.

Beispiel 2: $1,25 + 2,25x + 1,25y = 0$. Für $x = 0,3$ $y = 0,75$ ergibt sich (Fig. 112) $Cc = 2,86$. Für $x = 0,5$ ergibt sich als Lösung von $1,25 + 2,25x + 1,25y = 0$, $y = -1,5$ (Fig. 113).

Beispiel 3: $1 - 2x + 3y = 0$ (Fig. 114); b muß, als negativ, von 0 aus nach links, c von b aus wiederum in positiver Richtung abgetragen werden. Für $x = 2$, $y = 1$ ist das Schema geschlossen, da dieses Wertepaar die Gleichung befriedigt.

Beispiel 4: $5 - 3x - y = 0$ (Fig. 115). Für $x = 2$ ergibt sich: $y = -1$.

In entsprechender Weise können wir nun aus den Koeffizienten jeder Gleichung n ten Grades mit n Unbekannten ein Schema konstruieren und für beliebige Werte der Veränderlichen den Wert der linken Seite finden. Ist n der Koeffizient der letzten Unbekannten, der letzte Punkt des Schemas also n , und schneidet die Parallele zum Polstrahl der letzten Veränderlichen die n -Ordnate in N , so gibt Nn den Wert der linken Seite für die gewählten Werte der Veränderlichen an. Sind $(n-1)$ Veränderliche beliebig gewählt, so schneidet der zur Schlußlinie Mn

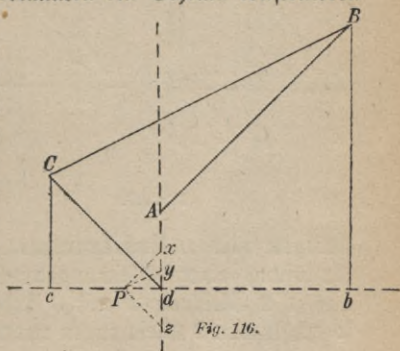


Fig. 116.

parallele Polstrahl auf der Y -Achse den Wert der fehlenden Veränderlichen ab.

Beispiel 5: $2 + 5x - 8y + 3z = 0$. Für $x = 1, y = 0,5$ folgt $z = -1$ (Fig. 116). Wird beim Auftragen der Koeffizienten a, b, c, \dots, n auf der X -Achse ein Punkt mehrmals erreicht, so ist er auch mehrfach zu bezeichnen; im Beispiel 5 fällt Punkt d mit 0 zusammen; in $3 + 4x + 3y - 3z = 0$ fällt d mit c zusammen. Das Verfahren selbst ändert sich nicht.

Für die Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten läßt sich das behandelte Verfahren zunächst nur in dem Falle benutzen, daß in den Gleichungen die Unbekannten nacheinander auftreten:

$$a_1 + b_1x = 0$$

$$a_2 + b_2x + c_2y = 0$$

$$a_3 + b_3x + c_3y + d_3z = 0$$

.....

Ein solches System wollen wir eine „Gleichungstreppe“ nennen. Hier liefert die Schlußlinie der ersten Gleichung x ; dieser Wert wird in das Schema der zweiten Gleichung aufgenommen; dessen Schlußlinie liefert y ; die Schlußlinie der dritten Gleichung, in welche die gefundenen Werte von x und y eingeführt werden, liefert z usw.

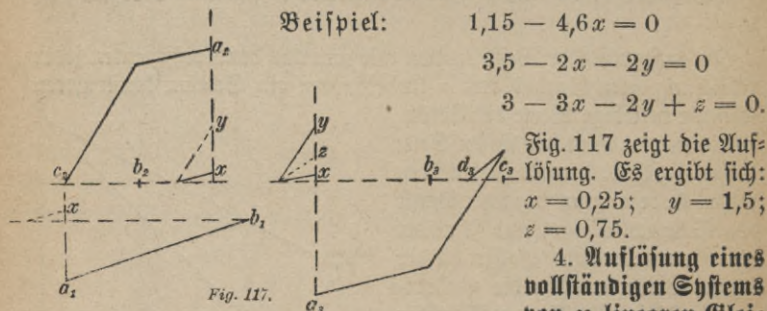


Fig. 117 zeigt die Auflösung. Es ergibt sich: $x = 0,25$; $y = 1,5$; $z = 0,75$.

4. Auflösung eines vollständigen Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten.

Diese Aufgabe läßt sich auf die Auflösung einer Gleichungstreppe zurückführen. Eliminiert man aus je 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten eine der letzteren, z. B. z , so erhält man 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten x und y ; aus letzteren

wird z. B. y eliminiert, sodaß eine Gleichung mit einer Unbekannten x sich ergibt. Diese Gleichung bildet mit einer der 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten und mit einer der 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten eine Gleichungstreppe.

Die Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen läßt sich graphisch nach einem sehr einfachen Verfahren ausführen.

Graphische Elimination.

Es soll aus 2 Gleichungen

$$a_1 + b_1x + c_1y + d_1z = 0$$

$$a_2 + b_2x + c_2y + d_2z = 0$$

eine neue Gleichung abgeleitet werden, die eine der Unbekannten, z. B. z , nicht mehr enthält. Das rechnerische Verfahren besteht darin, daß eine der Gleichungen mit einem zunächst unbestimmten Faktor λ multipliziert und zu der zweiten addiert wird:

$$a_1 + b_1x + c_1y + d_1z = 0$$

$$a_2\lambda + b_2\lambda x + c_2\lambda y + d_2\lambda z = 0$$

$$(a_1 + \lambda a_2) + x(b_1 + \lambda b_2) + y(c_1 + \lambda c_2) + z(d_1 + \lambda d_2) = 0.$$

Nun wird über λ so verfügt, daß der Koeffizient von z verschwindet.

$$d_1 + \lambda d_2 = 0; \lambda = -\frac{d_1}{d_2};$$

dann verbleibt eine Gleichung mit 2 Unbekannten:

$$\alpha + \beta x + \gamma y = 0.$$

Um die Elimination graphisch auszuführen, tragen wir auf 2 Parallelen (mit beliebigem Abstand) die Schemata der beiden Gleichungen nach S. 72 auf, indem wir die Koeffizienten unter Berücksichtigung der Vorzeichen von den Anfangspunkten O_1 und O_2 aus hintereinander abtragen (Fig. 118). Man verbinde nun entsprechende Punkte: O_1 mit O_2 , a_1 mit a_2 , b_1 mit b_2 , c_1 mit c_2 , d_1 mit d_2 . Soll z eliminiert werden,

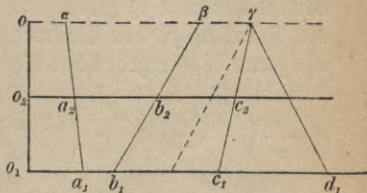


Fig. 118.

so ziehe man durch den Schnittpunkt von $c_1 c_2$ mit $d_1 d_2$ die Parallele zu den Schemaachsen. Auf dieser Parallelen schneiden die Verbindungsgeraden $O_1 O_2$, $a_1 a_2 \dots$ das Schema der Gleichung

$$\alpha + \beta x + \gamma y = 0$$

ab. (Konstruktion von van den Berg.)

Beweis: Es ist:

$\frac{c_1 \gamma}{c_2 \gamma} = \frac{d_1}{d_2} = -\lambda$. Zieht man durch γ die Parallele zu $b_1 b_2$, so ist

$$\frac{c_1 - \gamma}{c_2 - \gamma} = \frac{c_1 \gamma}{c_2 \gamma} = -\lambda, \text{ also}$$

$$c_1 - \gamma = -\lambda(c_2 - \gamma) = -\lambda c_2 + \lambda \gamma$$

$$c_1 + \lambda c_2 = \gamma + \lambda \gamma = \gamma(1 + \lambda)$$

Ebenso findet man $b_1 + \lambda b_2 = \beta(1 + \lambda)$, $a_1 + \lambda a_2 = \alpha(1 + \lambda)$; durch Einsetzen in die Gleichung $(a_1 + \lambda a_2) + (b_1 + \lambda b_2)x + (c_1 + \lambda c_2)y = 0$ und Division mit $1 + \lambda$ folgt:

$$\alpha + \beta x + \gamma y = 0.$$

Der Anfangspunkt $O_{1,2}$ des Schemas von $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$ liegt auf der Geraden $O_1 O_2$. Es ist: $\alpha = O_{1,2} a$, $\beta = \alpha \beta$, $\gamma = \beta \gamma$.

Läßt man $\gamma = 0$ werden, so ergibt sich eine Gleichung mit den Unbekannten x und z ; für $\beta = 0$ eine solche mit y und z . Ersteres tritt ein, wenn die Parallele durch den Schnittpunkt von $b_1 b_2$ und $c_1 c_2$, letzteres, wenn sie durch den Schnittpunkt von $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$ gezogen wird. Die Schnittpunkte liegen umso näher, je weniger Abstand die beiden Schemageraden haben, am nächsten, wenn die Mitten der Strecken, deren Endpunkte zu verbinden sind, senkrecht übereinander liegen.

Beispiel 1: $2 + 2x + 5y = 0$

$$4 + 5x - 3y = 0 \text{ (Fig. 119).}$$

Wir eliminieren y , indem wir durch den Schnitt von $b_1 b_2$ und $c_1 c_2$ die Parallele zu den Schemaachsen ziehen. Die Verbindungsgeraden $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$ ergeben das Schema der neuen Gleichung: $3,25 + 3,9x = 0$; hieraus folgt (rechnerisch oder graphisch): $x = -0,84$.

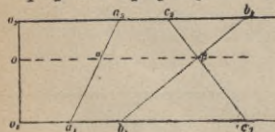


Fig. 119.

Beispiel 2: $2 + 5x + 3y = 0$

$$1 + 3x + 2y = 0.$$

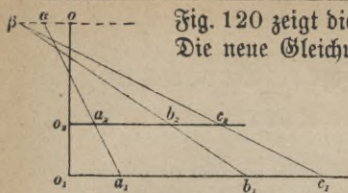


Fig. 120.

Fig. 120 zeigt die Elimination von z , es ist also $\gamma = 0$.
Die neue Gleichung ist: $1 - y = 0$; $y = 1$.

Beispiel 3:

$$4 - x - 2y - z = 0 \quad \text{I}$$

$$2 - 2x + y - 4z = 0 \quad \text{II}$$

$$3 - 3x - 2y + z = 0. \quad \text{III}$$

Aus I und II folgt durch graphische Elimination von z (Fig. 121 a)

$$\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y = 4,66 - 0,66x - 3y = 0. \quad \text{IV}$$

Aus II und III auf dieselbe Weise

$$\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y = 3,5 - 2x - 2y = 0. \quad \text{V}$$

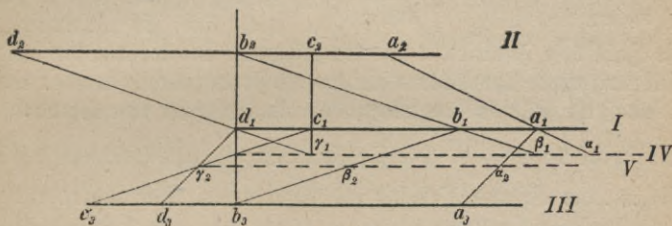


Fig. 121 a.

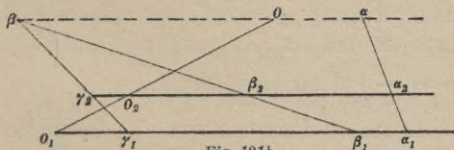


Fig. 121 b.

Die Elimination von y aus den letzten beiden Gleichungen ergibt
Fig. 121 b:

$$\alpha + \beta x = 1,15 - 4,6x = 0 \quad \text{VI}$$

Hieraus folgt:

$$x = 0,25.$$

Die Bestimmung von y und z kann graphisch durch Auflösung einer Gleichungstreppe erfolgen. Sie ist S. 74 an den Gleichungen VI, V, III durchgeführt.

III. Vereinfachung graphischer Berechnungen durch Abbildung auf eine neue Koordinatenebene.

Die Bildkurven von Funktionen müssen, wie in Teil II gezeigt ist, punktweise konstruiert werden. Ob nun die Punkte rechnerisch oder zeichnerisch ermittelt werden, bei komplizierteren Funktionen ist diese

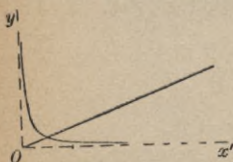


Fig. 122.

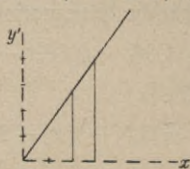


Fig. 123.

Ermittlung mühsam und zeitraubend. Nur diejenigen Funktionen sind bequem graphisch darzustellen, deren Bild eine Gerade ist, da zu ihrer Festlegung nur zwei Punkte nötig sind. Es gibt nun eine

große Zahl von Funktionen mit komplizierten Bildkurven, die durch Einführung neuer Koordinaten auf lineare Form gebracht werden können, sodass ihr Bild in dem neuen Koordinatensystem eine Gerade ist.

Beispiel 1: $y = \frac{a}{x}$. Die Originalkurve ist eine gleichseitige Hyperbel mit der X - und Y -Achse als Asymptoten. Wir führen für x eine neue Veränderliche ein durch die Substitution: $x' = \frac{1}{x}$; dann ist die neue Funktionsgleichung: $y = ax'$, ihr Bild eine Gerade durch den Koordinatenanfang mit der „Steigung“ a . Fig. 122 zeigt die „Abbildung“ von $y = \frac{0,4}{x}$ auf die $(x'y')$ -Ebene.

Aus dieser Bildgeraden kann man nun zu beliebigem x gehörige Werte der Originalfunktion und damit Punkte der Originalkurve wie folgt ablesen: für $x = \frac{1}{5}$ ist: $x' = \frac{1}{x} = 5$; aus der Bildgeraden ergibt sich die zugehörige Ordinate: $y = 0,4 \cdot x' = 0,4 \cdot 5 = 2$. Der gesuchte Punkt der Originalkurve ist also: $x = \frac{1}{5}$; $y = 2$.

Beispiel 2: $y^2 = 2px$; die Originalkurve ist eine Parabel mit der X -Achse als Symmetrieachse. Die Substitution $y' = y^2$ liefert bei unverändertem x als Bildkurve die Gerade $y' = 2px$ durch den Nullpunkt mit der Steigung $2p$. Fig. 123 zeigt die Abbildung von

$y^2 = 2 \cdot 0,7 \cdot x$ auf die (x, y) -Ebene. Für $x = 2$ folgt aus der Figur: $y' = 2,8$, damit $y^2 = 2,8$, $y = \sqrt{2,8} = \pm 1,67$.

Beispiel 3: $y = a + bx^2$. Substitution: $x' = x^2$; die Bildkurve in der (x', y) -Ebene hat die Gleichung: $y = a + bx'$, ist also eine Gerade durch den Punkt a der Y -Achse mit der Steigung b . Ist $y = 2 + 3x^2$, so ergibt sich für $x = 1,5$, also $x' = 1,5^2 = 2,25$: $y = 8,75$.

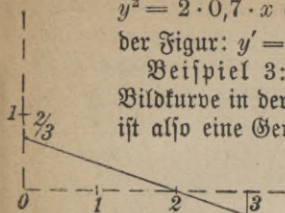


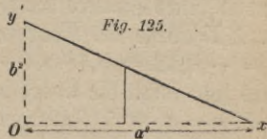
Fig. 124.

Beispiel 4: $y = \frac{ax}{1 + bx}$. Diese Gleichung läßt sich in die Form

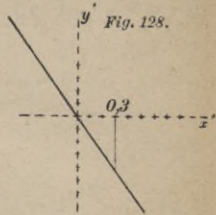
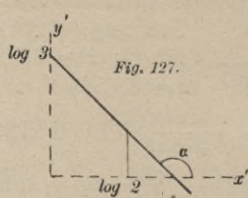
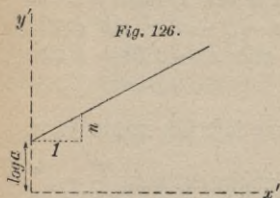
bringen: $\frac{y}{x}(1 + bx) = a$, $\frac{y}{x} + by = a$. Substituiert man $\frac{y}{x} = x'$, so hat die umgeformte Funktion $x' + by = a$ oder $\frac{x'}{a} + \frac{y}{a/b} = 1$ eine Gerade zum Bilde, deren Achsenschnitte a und a/b sind. Fig. 124 zeigt die Abbildung von $y = \frac{2x}{1 + 3x}$ auf die (x', y) -Ebene; die Gerade wird konstruiert aus den Achsenschnitten 2 auf der x' -Achse, $2/3$ auf der Y -Achse. Nimmt man z. B. das zu $x' = 3$ gehörige $y = -0,3$, so ist nach der Substitutionsgleichung $\frac{y}{x} = x'$, $x = \frac{y}{x'} = \frac{-0,3}{3} = -0,1$. Dann ist $x = -0,1$, $y = -0,3$ ein Punkt der Originalkurve.

Beispiel 5: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Der entwickelte Ausdruck dieser Funktion ist: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Die Bildkurve ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b . Substituiert man: $x' = x^2$, $y' = y^2$, so lautet die Gleichung: $\frac{x'}{a^2} + \frac{y'}{b^2} = 1$, die Bildkurve ist eine Gerade mit den Achsenabschnitten a^2 und b^2 . In Fig. 125 ist diese für die Gleichung $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ gezeichnet. Um den Funktionswert für $x = 2$ zu finden, suche man die zu $x' = 2^2 = 4$ gehörige Ordinate der Bildgeraden auf: $y' = 2,25$; dann ist $y = \sqrt{y'} = \sqrt{2,25} = \pm 1,5$.

Die Abbildung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ durch die Substitution $x' = x^2$, $y' = y^2$ ist ebenfalls eine Gerade: $\frac{x'}{a^2} + \frac{y'}{(-b^2)} = 1$ mit den Achsenabschnitten a^2 und $(-b^2)$.



Die logarithmische Abbildung. Einige Gruppen technisch wichtiger Kurven lassen sich dadurch als Gerade abbilden, daß man eine oder beide Veränderliche durch die Substitution $x' = \log x$ und $y' = \log y$ verändert. Es sind dies die Potenzkurven $y = ax^n$ (wobei



n jede Zahl sein kann), und die Exponentialkurven $y = a \cdot e^{bx}$ (mit beliebigem b).

1. $y = ax^n$. Durch Logarithmieren folgt hieraus: $\log y = \log a + n \cdot \log x$. Substituiert man $y' = \log y$, $x' = \log x$, so erhält man:

$$y' = \log a + n \cdot x'.$$

Dies ist eine lineare Funktion, deren Bild eine Gerade ist: Das logarithmische Bild der Potenzfunktion ist eine Gerade. Ihr Abschnitt auf der Y' -Achse ist $\log a$, ihre Steigung n . (Fig. 126).

Beispiel 6: $y = 3x^{-1}$ (Isotherme).

$\log y = \log 3 - \log x$, $y' = \log 3 - x'$. Die Gerade (Fig. 127) geht durch den Punkt $\log 3$ der Ordinatenaxe und bildet mit der X' -Achse den Winkel $\alpha = 135^\circ$ ($\operatorname{tg} \alpha = -1$). Für $x = 2$ ist $x' = \log 2 = 0,30$, die zu $x' = 0,3$ gehörige Ordinate ergibt sich zu $y' = 0,18$; $y = \operatorname{num} \log 0,18 = 1,5$.

Beispiel 7: $y = x^{-1,41}$ (Adiabate) (Fig. 128).

$\log y = -1,41 \log x$; $y' = -1,41 x'$. Die Bildgerade geht durch den Nullpunkt; ein zweiter Punkt ist: $x' = 1$, $y' = -1,41$. Um einen Punkt der Originalkurve zu konstruieren, lesen wir die Koordinaten eines Punktes der Bildgeraden ab und tragen deren Numeri in der XY -Ebene als Koordinaten auf. Z. B. für $x' = 0,3$ finden wir $y' = -0,42 = 0,58000 - 1$; die Numeri sind: $x = 2$, $y = 0,38$. Dies sind somit die Koordinaten eines Punktes der Kurve $y = x^{-1,41}$.

2. $y = a \cdot e^{bx}$ (Funktion des organischen Wachstums). Durch Lo-

arithmieren folgt: $\log y = \log a + bx \cdot \log e = \log a + (b \cdot \log e) \cdot x$.
Durch die Substitution $y' = \log y$ erhält man die lineare Form $y' = \log a + (b \log e)x$.

Die Abbildung der Exponentialfunktion auf die Ebene $(x, \log y)$ ist also eine Gerade mit dem Ordinatenabschnitt $\log a$, der Steigung $(b \cdot \log e)$.

Beispiel 8: $y = 2 \cdot e^{0,3x}$

$$\log y = \log 2 + (0,3 \cdot \log e)x$$

$$y' = \log 2 + (0,3 \cdot \log e)x$$

$$y' = 0,30 + 0,13x.$$

Hierin ist $e = 2,7183$, $\log e = 0,4343$,
 $\log 2 = 0,30$. Nach Fig. 129 gehört z. B. zu $x = 2$ die Ordinate der Geraden: $y' = 0,56$, daher $y = \text{num. log } 0,56 = 4,6$.

Koordinatenachsen mit Funktionsstaken. Die Abbildung einer Funktion durch Veränderung der Koordinaten gestaltet sich dann besonders einfach, wenn die Achsen nicht nach gewöhnlichen Einheiten geteilt sind, wie das Millimeterpapier, sondern nach Funktionsstaken (s. S. 33).

Für $y = \frac{0,5}{x}$ nehme man auf der X -Achse eine Skala $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 2, 3, 4 \dots$, bezeichne jedoch die Stakenpunkte mit den reziproken Werten, also mit: $1, 2, 3, 4, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Die Y -Skala erhält die gewöhnliche Teilung. Durch jeden Teilpunkt einer Achse ziehe man die Parallelen zur andern Achse (Fig. 130). Die Bildgerade von $y = \frac{0,5}{x}$ in der Ebene $(x' = \frac{1}{x}, y)$ wird dann konstruiert aus den

Punkten $(0, 0)$ und $(1, \frac{1}{2})$ der (x', y) Ebene. Die auf den Staken der Achsen abgelesenen Koordinaten x', y eines Geradenpunktes ergeben dann, in der (x, y) Ebene aufgetragen einen Punkt der Originalkurve, z. B. zu $x' = \frac{2}{3}$ gehört $y = 0,75$; dann ist $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{4}$ ein Punkt der letzteren.

Entsprechende Teilungen vereinfachen das Auffinden der Ori-

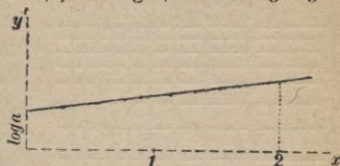


Fig. 129.

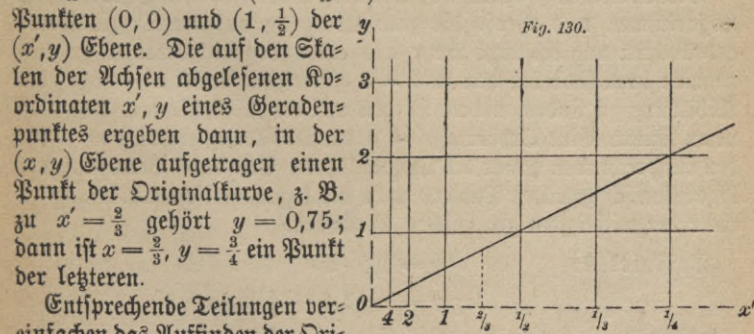
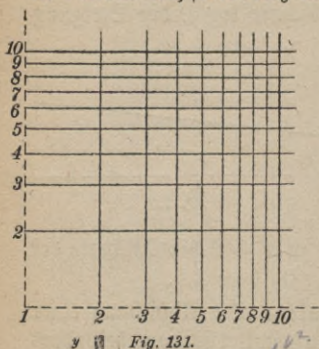


Fig. 130.

ginalkurve in jedem der oben behandelten Beispiele; man braucht nur die Koordinaten eines Punktes der Abbildung an den entsprechend geteilten Achsen abzulesen; dieselben Zahlen sind in einem Achsenkreuz mit gewöhnlicher Teilung die Koor-



dinaten eines Punktes der Originalkurve. In Beispiel 5 verwendet man auf beiden Achsen eine Teilung mit den Punkten $1^2, 2^2, 3^2, \dots$, bezeichnet die Punkte jedoch mit $1, 2, 3, \dots$. Die Gerade in der Abbildungsebene ist durch die Achsenpunkte 3 und 2 bestimmt. Für $x' = 2$ findet man: $y' = 1,5$; $x = 2, y = 1,5$ ist somit ein Punkt der Ellipse.

Besonders wichtig sind die Potenzkurven. Da ihre Abbildung als Gerade durch die Substitution $x' = \log x$,

$y' = \log y$ gewonnen wird, benutze man zur Teilung beider Achsen einen logarithmischen Maßstab, wie S. 11, und ziehe durch die Teilpunkte jeder Achse ($\log 1, \log 2, \log 3, \dots$, die aber mit $1, 2, 3, \dots$ bezeichnet sind) die Parallelen zur anderen Achse. Da die logarithmische Abbildung bei physikalischen und technischen Aufgaben viel gebraucht wird, ist „logarithmisch geteiltes Papier“ im Handel zu haben. Alle Figuren dieses Buches, bei denen diese Abbildung benutzt wird, sind auf solchem Papier konstruiert (Fig. 131).

Der Vorteil liegt darin, daß wir die bei der Abbildung gebrauchten Logarithmen und ebenso die zum Übergang auf die Originalkurve gebrauchten numeri nicht mehr aus einer Logarithmentafel zu entnehmen brauchen: um den zu $x = 3$ gehörigen Punkt $x' = \log 3$ der Abbildung zu finden, nehme ich den auf der X' -Achse mit 3 bezeichneten Punkt. Eine Ordinate $y' = 5$ der Abbildung ergibt $y = 5$ für den entsprechenden Punkt der Originalkurve. Erst durch Benutzung des logarithmisch geteilten Papiers wird die logarithmische Abbildung zu einer der wichtigsten graphischen Methoden.

Beispiel 9:
$$y = 1,5 \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

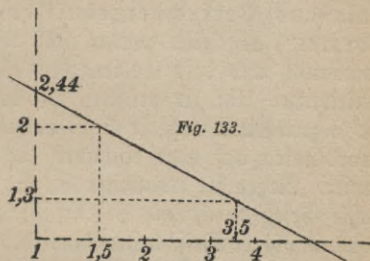
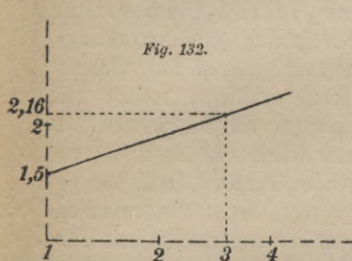
$$\log y = \log 1,5 + \frac{1}{3} \log x.$$

Die Abbildung hat in der $x'y'$ -Ebene die Gleichung:

$$y' = 1,5 + \frac{1}{3} x'$$

ist also eine Gerade durch Punkt 1,5 der y' -Achse mit der Steigung $\frac{1}{3}$ (Fig. 132); zu $x' = 3$ gehört $y' = 2,16$, somit ist $x = 3$, $y = 2,16$ ein Punkt der Originalkurve.

Ist von letzterer nicht die Gleichung, sondern sind 2 Punkte gegeben, so lassen sich unmittelbar auf dem logarithmisch geteilten Papier die entsprechenden Bildpunkte und damit die Abbildungsgerade finden,



aus ihr die Koordinaten beliebig vieler Punkte der Originalkurve. Es habe z. B. P_1 die Koordinaten $x_1 = 1,5$; $y_1 = 2$; P_2 : $x_2 = 3,5$; $y_2 = 1,3$. Aus der Bildgeraden (Fig. 133) ergeben sich als Punkte der Originalkurve:

x	2	2,5	3	4
y	1,73	1,54	1,41	1,22

Sind also 2 Punkte einer Potenzkurve gegeben, so kann man graphisch, ohne die Kurve zu zeichnen, allein unter Benutzung der äußerst bequem zu zeichnenden Abbildungsgeraden zu jedem x den Funktionswert bestimmen und umgekehrt. Die Gleichung dieser Potenzkurve ist ebenfalls sofort zu finden: geht die Gerade durch den Punkt a der Y' -Achse, und ist ihre Steigung gleich n , so ist die Gleichung:

$$y = a \cdot x^n$$

(um n zu finden, gehe man von irgend einem Geradenpunkt um 1 Einheit des Originalmaßstabes nach rechts und messe die vertikale Erhebung des zugehörigen Geradenpunktes im Originalmaßstab; diese ist n ; n ist positiv zu rechnen, wenn die Gerade mit wachsendem x steigt, negativ, wenn sie fällt). Für die durch die Punkte (1,5; 2)

und $(3,5; 1,3)$ bestimmte Potenzkurve ergibt Fig. 133 $a = 2,44$, $n = -0,5$, folglich ist ihre Gleichung

$$y = 2,44x^{-0,5}.$$

Es ist zu beachten, daß dieses praktisch wichtige Ergebnis ohne jede Rechnung gefunden ist.

Die letzte Aufgabe, aus dem logarithmischen Bilde einer Potenzfunktion deren mathematischen Ausdruck zu bestimmen, ist oft zu lösen, wenn aus Versuchsergebnissen eine Formel („empirische Formel“) abgeleitet werden soll. Viele technische Zusammenhänge, namentlich aus dem Gebiete der Wärmelehre, führen auf Potenzfunktionen. Um zu prüfen, ob eine solche vorliegt, tragen wir die Logarithmen von je 2 zusammengehörigen Versuchswerten als Koordinaten auf oder einfacher die Werte selbst auf Logarithmenpapier. Liegen die erhaltenen Punkte auf einer Geraden, so ist das gesuchte Gesetz durch eine Potenzfunktion gegeben, deren mathematische Form in obiger Weise bestimmt wird. Wegen der unvermeidlichen Versuchs- und Beobachtungsfehler werden die Punkte nicht genau auf einer Geraden liegen. Die richtige Lage der Geraden probiert man am besten nach der „Methode des gespannten Fadens“ aus, indem man einen Faden so spannt, daß die Punkte des logarithmischen Bildes sich möglichst gleichmäßig zu beiden Seiten desselben verteilen.

Beispiel 10: Zwischen dem Druck p (in kg pro qcm) und dem dem Volumen v (in cbm) eines kg gesättigten Wasserdampfes ist durch eine Versuchsreihe folgende Beziehung gefunden:

$y = p$	0,5	1,0	2,0	
$x = v$	3,297	1,717	0,8960	
p	4	7	11	15
v	0,4673	0,2763	0,1807	0,1351

Diese Werte werden auf logarithmisch geteiltem Papier aufgetragen (Fig. 134). Sie ergeben ungefähr eine Gerade, deren genaue Lage mit Hilfe des Fadens ermittelt wird. Die Gerade schneidet die Y -Achse im Punkt $a = 1,8$ ihre Steigung ist: $n = -\frac{13}{12} = 1,08$; folglich gilt zwischen p und q die Beziehung:

$$p = 1,8 \cdot v^{-1,08}.$$

Fig. 134.

Auflösung von Gleichungen mit Hilfe der Abbildung. Ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten läßt sich durch Abbildung bequem lösen, wenn es möglich ist, beide durch die gleiche Substitution auf lineare Form zu bringen. In diesem Falle handelt es sich um die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Geraden (s. S. 65).



Fig. 135.

Beispiel: $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2,5^2} = 1$ (Fig. 135)

Hier führt die Substitution $x' = x^2, y' = y^2$ auf die Gleichungen

$$\frac{x'}{2^2} + \frac{y'}{3^2} = 1, \frac{x'}{4^2} + \frac{y'}{2,5^2} = 1.$$

Diese Gleichungen stellen zwei Gerade mit den Achsenabschnitten 2^2 und 3^2 bzw. 4^2 und $2,5^2$ dar. Aus Fig. 135 ergeben sich die Schnittpunktkoordinaten

$$x' = 1,4 \quad y' = 5,8.$$

Somit sind $x = \sqrt{1,4} = \pm 1,2, y = \sqrt{5,8} = \pm 2,4$

die Lösungen der gegebenen Gleichungen.

Auch für die Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten bietet die Abbildung auf eine neue Ebene vielfach eine bedeutende Vereinfachung; besonders kommt hierfür die logarithmische Abbildung in Betracht. Die Lösung erfolgt nach S. 59 mit 2 Kurven. Es ist also zunächst die linke Seite der Normalform in zwei Teile zu zerlegen: $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0; f_1(x) = f_2(x)$. Voraussetzung ist natürlich, daß sich die logarithmischen Bilder von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ leichter konstruieren lassen, als die Originalkurven. Die Abzissen der Schnittpunkte der logarithmischen Bilder von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind die Logarithmen der gesuchten Wurzeln von $f(x) = 0$; bei Benutzung von Logarithmenpapier sind die Wurzeln selbst an der x' -Teilung abzulesen.

Beispiel 1: $2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 0,8x^{\frac{1}{2}}$.

Da es sich um Potenzfunktionen handelt, verwenden wir die Substitution $x' = \log x, y' = \log y$. Fig. 136 zeigt die auf Logarithmen-

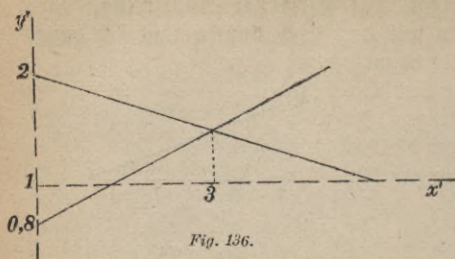


Fig. 136.

papier gezeichneten Bildgeraden: Die erste geht durch Punkt 2 der Y' -Achse und hat die Steigung $(-\frac{1}{3})$, die zweite geht durch Punkt 0,8 der Y' -Achse mit der Steigung $\frac{1}{2}$. Der Schnittpunkt der Geraden hat die Abszisse $x' = 3$, also ist $x = 3$ die Lösung der gegebenen Gleichung.

Beispiel 2: $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4$. Es ist $y_1 = x^2$, $y_2 = 4$.

Das logarithmische Bild von y_1 ist eine Gerade durch den Punkt 1 mit der Steigung 2, das von y_2 eine X -Parallele durch Punkt 4 der Y' -Achse. Als Lösung wird abgelesen: $x' = 2$, somit ist $x = 2$ eine Wurzel von $x^2 - 4 = 0$. (Fig. 137.)

Beispiel 2: $2x^{-1} - 1,6 = 0$, $2x^{-1} = 1,6$

$$y_1 = 2x^{-1}, \quad y_2 = 1,6 \quad (\text{Fig. 138}).$$

Das logarithmische Bild von y_1 ist eine Gerade durch Punkt 2 der y' -Achse mit der Neigung (-1) ; das von y_2 eine X -Parallele durch Punkt 1,6 der y' -Achse.

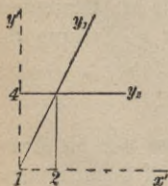
Lösung der Gleichung: $x = 1,25$.

Beispiel 3: $x^2 - 5x + 2 = 0$, $x^2 = 5x - 2$

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = 5x - 2 \quad (\text{Fig. 139}).$$

Logarithmisches Bild von y_1 wie in Beispiel 1; das von y_2 ist keine Gerade, sondern eine punktwweise zu konstruierende Kurve. Wir benutzen dazu die Tabelle:

Fig. 137.



x	1	2	3	4	5
y_2	3	8	13	18	23

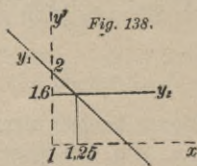
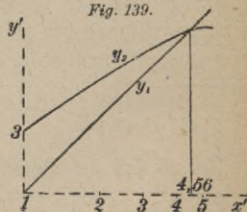


Fig. 138.

Fig. 139.



Nach dieser Tabelle wird auf Logarithmenpapier (das das Aufsuchen der Logarithmen überflüssig macht) die Bildkurve von $y_2 = 5x - 2$ konstruiert. Der Schnittpunkt beider Bildkurven hat die Abszisse $x' = 4,56$, also ist die Wurzel der gegebenen Gleichung $x = 4,56$.

Beispiel 4: $x^2 - 3x - 1,75 = 0$, $x^2 = 3x + 1,75$ (Fig. 140).

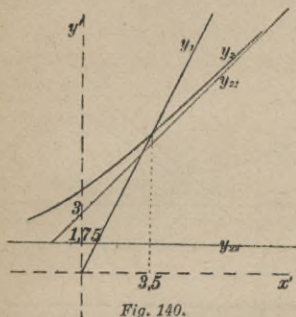


Fig. 140.

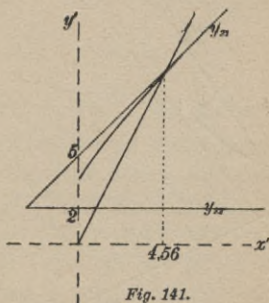


Fig. 141.

Das logarithmische Bild der rechten Seite $y_2 = 3x + 1,75$ können wir ohne Rechnung konstruieren unter Benutzung der S. 29 behandelten „Additionskurve“. Man zeichne zunächst die logarithmischen Bilder von $y_{21} = 3x$ (eine Gerade durch Punkt 3 der y' -Achse mit der Neigung 1) und von $y_{22} = 1,75$ (eine X -Parallele durch Punkt 1,75 dieser Achse). Es liegt dann die Aufgabe vor, aus den Logarithmen von $(3x)$ und von $1,75$ $\log(3x + 1,75)$ zu finden. Diese wird nach dem S. 30 gefagten so gelöst, daß man für irgend eine Ordinate den Abstand der logarithmischen Bilder von $3x$ und $1,75$ als „ u “ nimmt, aus der Additionskurve das zugehörige „ v “ entnimmt und an die höhere Ordinate anträgt. So erhält man einen Punkt des logarithmischen Bildes von $3x + 1,75$. Es genügen wenige Punkte, da die Summenkurve die beiden Teilkurven (Bilder von $3x$ und $1,75$) zu Asymptoten hat und sich diesen sehr schnell anschmiegt. Fig. 140 ist nach diesem Verfahren gezeichnet. Die Lösung der Gleichung, die bei Benutzung von Logarithmenpapier direkt als Schnittpunktabszisse der Bilder von x^2 und $3x + 1,75$ abgelesen werden kann, ist $x = 3,5$.

Fig. 141 zeigt die Konstruktion des logarithmischen Bildes von $5x - 2$ (Beispiel 3) nach diesem Verfahren. Der Unterschied der zu gleicher Abszisse gehörigen Ordinaten der Bilder von $5x$ und 2 wird als Ordinate v der Additionskurve genommen, die zugehörige

Abzisse der letzteren abgegriffen und an die kleinere Ordinate unter Berücksichtigung des Vorzeichens angetragen, positives v nach unten, negatives nach oben.

Das logarithmische Bild der rechten Seite der in die Form $f_1(x) = f_2(x)$ gebrachten Gleichung wurde in den letzten Beispielen

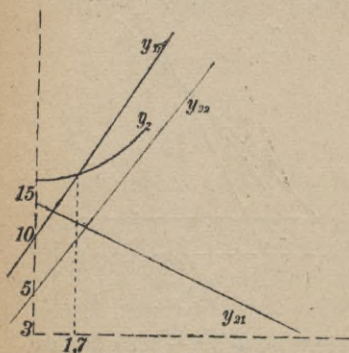


Fig. 142.

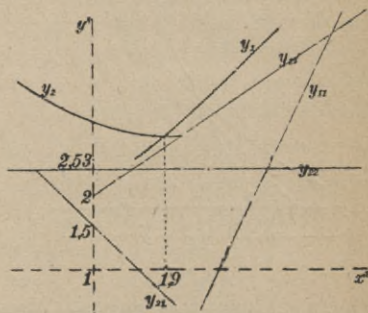


Fig. 143.

unter Benutzung der Additionskurve aus zwei Geraden konstruiert. Nun sind, wie früher gezeigt, die logarithmischen Bilder aller Ausdrücke der Form x^n (wobei n jede positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann) Gerade. Besteht die linke Seite der Normalform aus einer algebraischen Summe von vier Gliedern der Form x^n , so bringen wir zwei auf die rechte Seite; wir erhalten dann die Form $y_{11} + y_{12} = y_{21} + y_{22}$. Die Bilder aller y sind Gerade. Die zwei auf einer Seite stehenden werden mit Hilfe der Additionskurve zu je einer **Summenkurve** y_1 bzw. y_2 vereinigt. Die Abszissen des Schnittpunktes von y_1 und y_2 sind, an der logarithmischen Skala gemessen, die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

$$\text{Beispiel 5: } 10\sqrt{x^3} - \frac{15}{\sqrt{x}} - 5x\sqrt[3]{x} = 0 \quad (\text{Fig. 142})$$

$$10x^{\frac{3}{2}} = 15x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{4}{3}}$$

$$y_1 = 10x^{\frac{3}{2}}, \quad y_{21} = 15x^{-\frac{1}{2}}, \quad y_{22} = 5x^{\frac{4}{3}}.$$

Die Bildkurven beider Seiten (eine Gerade für $10x^{\frac{3}{2}}$ und die

Summenkurve von $15x^{-\frac{1}{2}}$ und $5x^{\frac{4}{3}}$ schneiden sich im Punkte mit der Abszisse 1,7 des logarithmischen Maßstabes. Somit ist $x = 1,7$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

$$\text{Beispiel 6: } 0,1x^2 + 2\sqrt[3]{x} - \frac{1,5}{x} = 2,53 \quad (\text{Fig. 143})$$

$$0,1x^2 + 2x^{\frac{2}{3}} = 1,5x^{-1} + 2,53$$

$$y_{11} = 0,1x^2; \quad y_{12} = 2x^{\frac{2}{3}}; \quad y_{21} = 1,5x^{-1}; \quad y_{22} = 2,53.$$

Das logarithmische Bild von y_{11} ist eine Gerade durch Punkt 0,1 der y' -Achse mit der Neigung 2; das log. Bild von y_{12} ist eine Gerade durch Punkt 2 der y' -Achse mit der Neigung $\frac{2}{3}$; das log. Bild von y_{21} ist eine Gerade durch Punkt 1,5 der y' -Achse mit der Neigung -1 ; das log. Bild von y_{22} ist eine Parallele zur x' -Achse durch Punkt 2,53 der y' -Achse.

Die Summenkurve von y_{11} und y_{12} ist mit y_1 , die von y_{21} und y_{22} mit y_2 bezeichnet. Der Schnittpunkt von y_1 und y_2 hat die logarithmische Abszisse $x' = 1,9$; also ist $x = 1,9$ eine Wurzel der Gleichung.

Die Konstruktion der Summenkurve aus zwei Bildgeraden gestaltet sich außerordentlich einfach, weil diese Kurve sich den beiden Geraden sehr schnell nähert. Es genügen deshalb meist drei Punkte, um ihren Verlauf genau genug festzulegen. Für den Schnittpunkt der Bildgeraden ist das u der Additionskurve gleich 0, daher das an die höhere Ordinate anzutragende Stück $v = \log 2 = 0,30$. Dieser Punkt der Summenkurve ist also stets sofort zu finden; für zwei weitere benutzt man die logarithmische Additionskurve. Da man schon aus der Lage der beiden zu einer Summenkurve zu vereinigenden Geraden den ungefähren Verlauf dieser Kurve ersehen kann, somit auch die Lage des gesuchten Schnittpunktes, so wird man die zu konstruierenden Punkte so wählen, daß die Summenkurven nur in der Nähe des Schnittpunktes genau gezeichnet werden.

Das logarithmische Verfahren bildet eine wichtige Ergänzung des Viësschen; letzteres ist nur auf Gleichungen anwendbar, die aus einer algebraischen Summe positiver ganzer Potenzen der Unbekannten bestehen, während bei ersterem auch negative und gebrochene Potenzen der Unbekannten zulässig sind.

Besteht die Gleichung aus mehr als vier Summanden der Form ax^n , so werden diese Glieder gleichmäßig auf beide Seiten verteilt, z. B. bei sechs Gliedern zu je drei. Es wird dann zunächst nach dem bisher benutzten Verfahren aus zwei Gliedern eine Summenkurve konstruiert und diese nach dem logarithmischen Additionsverfahren mit der Bildgeraden des dritten Gliedes zu einer neuen Summenkurve vereinigt. Für jede Seite erhält man dann eine Kurve; die Abszisse des Schnittpunktes beider Kurven ist die Wurzel der gegebenen Gleichung. Es ist einzusehen, wie das Verfahren auf Gleichungen mit beliebig vielen Gliedern ausgedehnt werden kann.

Sind die Exponenten einzelner Glieder groß, so verlaufen die Bildgeraden sehr steil, was für die weiteren Konstruktionen unvorteilhaft ist. In diesem Falle kann man durch eine Substitution eine günstigere Gleichung erhalten; ist m der höchste Exponent, so führt man durch die Gleichung $x^m = \xi$ eine neue Unbekannte ein. Z. B. geht die Gleichung

$$x^{10} + 5x^8 + 3x^2 - 8 = 0$$

durch die Substitution $x^{10} = \xi$, $x = \xi^{\frac{1}{10}}$ über in:

$$\xi + 5\xi^{\frac{8}{10}} + 3\xi^{\frac{2}{10}} - 8 = 0.$$

Die Bildgeraden der einzelnen Glieder sind dann wenig geneigt; von dem auf der logarithmischen Skala abgelesenen Wert von ξ ist dann der 10. Teil zu nehmen und für den so bestimmten Punkt der Abszissenachse die zugehörige Zahl der Logarithmenskala abzulesen.

Besonders günstig gestaltet sich dies Verfahren bei Gleichungen mit nur zwei Potenzgliedern:

$$ax^m + bx^n + c = 0.$$

Diese Gleichung geht durch die Substitution $\xi = x^m$ über in

$$a\xi + b\xi^{\frac{n}{m}} + c = 0$$

$$\text{oder} \quad b\xi^{\frac{n}{m}} = -a\xi - c,$$

deren Lösung nach Beispiel 3 S. 86 erfolgt.

Da bei hohen Potenzen die Kurven y_1 und y_2 sehr steil verlaufen und daher schlechte Schnitte liefern, ist es vorteilhaft, durch Division mit einer geeigneten Potenz von x den Grad zu ermäßigen; daß dafür eventuell negative Exponenten auftreten, ist nach dem früher

gesagten nicht störend. In dem Beispiel

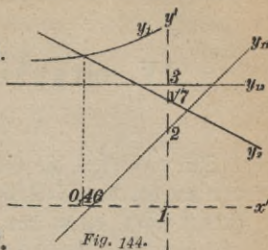
$$x^5 - 26x^4 + 124x^3 - 103x^2 + 12x - 0,2 = 0.$$

dividieren wir durch x^3 :

$$x^2 - 26x + 124 - 103x^{-1} + 12x^{-2} - 0,2x^{-3} = 0$$

und zerlegen

$$x^2 + 124 + 12x^{-2} = 26x + 103x^{-1} + 0,2x^{-3}.$$



Bei der Konstruktion der logarithmischen Bilder ist die Arbeit nur von der Zahl der Glieder, nicht vom Grade abhängig. Die Arbeit wird auch nicht größer, wenn irrationale Glieder vorkommen. Daher ist es häufig bequemer, die Gleichung auf irrationale Form zu bringen, wenn dabei die Gliederzahl sich verringert.

Beispiel 7: $x(2x + 3)^2 = 7$. Die Entwicklung der zweiten Potenz liefert vier Glieder; dagegen treten in der irrationalen Form $2x + 3 = \sqrt{7} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ nur drei Glieder auf, weshalb wir diese bevorzugen. Fig. 144 zeigt als Lösung: $x = 0,46$.

Da die logarithmische Teilung nur positive Zahlen enthält (die Zahlen links vom Punkte 1 sind die echten Brüche), liefert das logarithmische Abbildungsverfahren nur die positiven Wurzeln der Gleichungen. Sollen auch die negativen gefunden werden, so ist die Gleichung $f(-x) = 0$ aufzulösen und ihre Wurzeln negativ zu nehmen.

Beispiel 8: $x^2 + 3,8x + 3,45 = 0$. Um etwa vorhandene negative Wurzeln zu finden, betrachten wir die Gleichung:

$$(-x)^2 + 3,8(-x) + 3,45 = 0$$

$$x^2 - 3,8x + 3,45 = 0$$

$$x^2 = + 3,8x - 3,45$$

$$y_1 = x^2; \quad y_{21} = 3,8x; \quad y_{22} = 3,45$$

(y_2 ergibt sich durch log. Subtraktion).

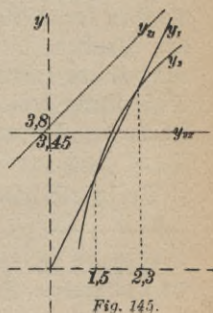


Fig. 145 ergibt als Lösungen dieser Gleichung: $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2,3$; folglich hat die ursprüngliche Gleichung die negativen Wurzeln: $x_1 = -1,5$, $x_2 = -2,3$.

IV. Graphische Infinitesimalrechnung.

A. Graphische Integration.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, so ist die Fläche, die von der Kurve, der X -Achse und zwei Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, durch den Ausdruck

$$J = \lim_{dx \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

dargestellt. Wird die „untere Grenze“ a festgehalten, die „obere Grenze“ b veränderlich gelassen, $b = x$, so ergibt sich zu jedem x -Wert ein ganz bestimmter Wert von J . Es ist also J selbst eine Funktion von x : $J = F(x)$, die „Integralfunktion“ zu der Urfunktion $y = f(x)$ (Fig. 146). Die „Integralrechnung“ lehrt, wie man bei gegebenem mathematischem Ausdruck von $f(x)$ auf rechnerischem Wege die Integralfunktion findet.¹⁾ Die Fläche des Kurventrapezes zwischen $x = a$ und x ist gleich der Differenz der Werte der Integralfunktion für a und b :

$$J = F(x) - F(a).$$

Berechnet man die Werte der Integralfunktion für eine Reihe von x -Werten und trägt diese Werte in den den gewählten x entsprechenden Punkten der X -Achse als Ordinaten auf, so erhält man eine Reihe von Punkten, die sich bei Verengerung der Abszissendifferenzen zu einer Kurve zusammenschließen, die Bildkurve der Integralfunktion. Diese Kurve heißt Integralkurve zu der Urkurve $y = f(x)$. Die Fläche des Trapezes, dessen obere Begrenzung die Kurve $y = f(x)$ ist, ist gleich der Differenz der Ordinaten der Integralkurve.

Beispiel: Fläche der Parabel $y = \sqrt{2px}$ für $p = \frac{2}{3}$ vom Scheitel

1) *Math. Bd. 197* Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung; *Bd. 673* Lindow, Integralrechnung.

$x = 0$ bis zur Abszisse $x = 3,5$ (Fig. 147). Wir berechnen die Werte von J für $x: 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ und konstruieren die Integralkurve; die Ordinate zu $x = 3,5$ ergibt sich durch Messung zu $J = 5,04$. (Die Berechnung der Fläche nach der bekannten Formel des Parabelsegments $J = \frac{2}{3}xy$ ergibt $J = 5,0405$ Flächeneinheiten.)

Ist die Integralkurve zu einer gegebenen Urkurve gezeichnet, so ist die Aufgabe der Flächenmessung von Kurventrapezen, die als obere Begrenzung die gegebene Kurve haben, zurückgeführt auf die Messung von Ordinatenunterschieden der Integralkurve. Es ist daher praktisch außerordentlich wichtig, Verfahren zu finden, zu jeder gegebenen Kurve, deren Gleichung nicht bekannt zu sein braucht, die Integralkurve zu finden: „Graphische Integration“.

Da für die Flächenberechnung nur die Differenz zweier Ordinaten in Betracht kommt, diese aber unverändert bleibt, wenn jede Ordinate um den gleichen Betrag vergrößert oder verkleinert wird, kann man zu einer Urkurve beliebig viele Integralkurven konstruieren, die untereinander kongruent sind und durch Parallelverschiebung in Richtung der Y -Achse ineinander übergehen. Praktisch wählt man zweckmäßig diejenige Integralkurve, deren Ordinate für die Anfangsordinate des Kurventrapezes den Wert 0 hat: $F(a) = 0$. Dann ist die Fläche durch die Endordinate angegeben (s. Beispiel).

1. Das Sehnungsverfahren. a) Integralkurve einer X -parallelen Geraden. Die Gleichung der X -Parallelen ist $y = c$. Die Fläche des Kurventrapezes zwischen den Ordinaten a und x ist $J = (x - a)c$, somit die Integralfunktion $J = xc - ac$; dies ist die Gleichung einer Geraden mit der Steigung c durch den Punkt $(-ac)$ der Abszissenachse (Fig. 148). Von den unendlich vielen parallelen Geraden, die zu der X -Parallelen als Urkurve Integralkurven sind, ist am bequemsten zu konstruieren diejenige, die durch den Punkt (-1) der Abszissenachse geht. Man erhält sie durch Verbindung des genannten Punktes P mit dem Schnittpunkt M der X -Parallelen auf der Y -Achse. Den Punkt (-1) nennen wir den „Pol“, PM den

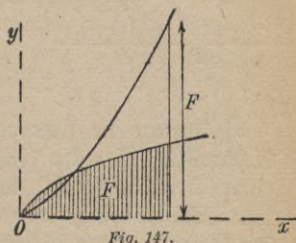


Fig. 147.

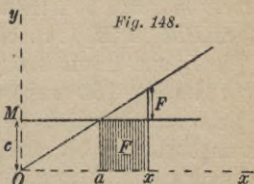


Fig. 148.

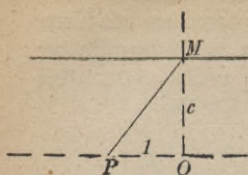


Fig. 149.

„Richtstrahl“ der X -Parallelen (Fig. 149). Alle zu einer X -Parallelen gehörige Integralgeraden sind dem Richtstrahl parallel. Um eine bestimmte Integralgerade zu erhalten, muß ein Punkt derselben gegeben sein. Die Parallele durch diesen Punkt zum Richtstrahl ist die verlangte Integralgerade.

b) Besteht die Urkurve aus treppenartig aneinandergesetzten X -parallelen Strecken (Fig. 150), so zeichne man zu jeder der Parallelen den Richtstrahl, indem man die Parallele mit der Y -Achse zum Schnitt bringt und den Schnittpunkt mit dem Pol verbindet. Die Gesamtheit der Richtstrahlen bildet das „Richtbüschel“ der Urkurve. M_1, M_2, \dots seien die Schnittpunkte auf der Y -Achse, dann bilden PM_1, PM_2, \dots das Richtbüschel.

Ist J_0 ein Punkt der Integralkurve zu der treppenförmigen Urkurve (in Fig. 150 auf der Anfangsordinate der letzteren gelegen), so ziehe man durch J_0 die Parallele zum Richtstrahl PM_1 , die die Anfangsordinate der zweiten Stufe in J_1 trifft. Die Differenz der Ordinaten von J_0 und J_1 ist dann gleich der Rechteckfläche, die von der ersten Stufe begrenzt wird. Die Parallele durch J_1 zum zweiten Richtstrahl schneidet die Anfangsordinate der dritten Stufe in J_2 . Die Differenz der Ordinaten von J_1 und J_2 gibt den Inhalt der zweiten Rechteckfläche an, die Differenz der Ordinaten von J_2 und J_0 die Summe der ersten beiden Rechteckflächen. Die Parallele durch J_1

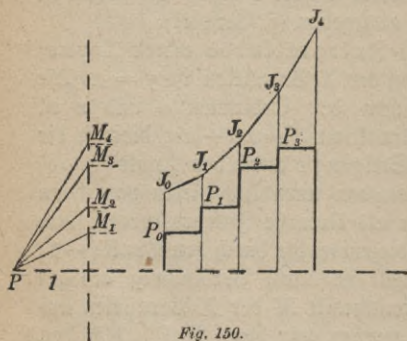
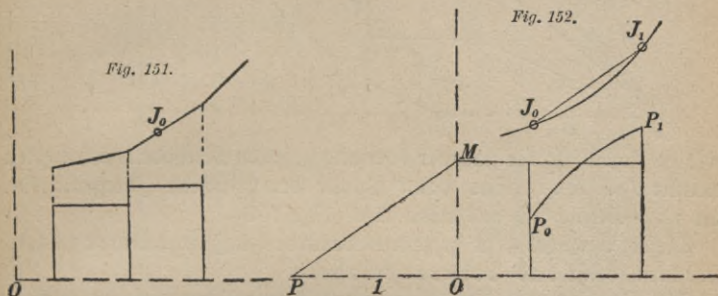


Fig. 150.

zu PM_2 ergibt mit der Anfangsordinate der dritten Stufe J_3 , die Ordinatendifferenz von J_3 und J_0 gibt den Flächeninhalt der ersten drei Rechtecke, der gebrochene Linienzug $J_0J_1J_2J_3$ ist die Integralkurve der treppenförmigen Urkurve für die ersten drei Stufen. Indem man in der gleichen Weise die Konstruktion fortsetzt, erhält man die Integralkurve bis zu einem beliebigen Punkte der Urkurve. Liegt

der gegebene Punkt auf der Anfangsordinate einer anderen Stufe, z. B. der dritten, so ist die Konstruktion nach rechts und links auszuführen; liegt J_0 zwischen den Begrenzungsordinaten einer Stufe, so zeichne man die Parallele durch J_0 zu dem Richtstrahl der Stufe, über der J_0 liegt, bis zum Schnitt mit den beiden benachbarten Ordinaten und setze die Konstruktion nach beiden Seiten fort (Fig. 151).



c) Nimmt man statt des Rechtecks ein Kurventrapez von gleicher Fläche, so wird die Integralkurve nicht mehr eine Gerade sein. Aber da die Ordinate der Integralkurve um soviel wächst, wie der Flächeninhalt der Urkurve angibt, dieser aber gleich ist für Rechteck und Kurventrapez, so muß die Integralkurve der Begrenzungskurve der letzteren durch die Punkte J_0 und J_1 hindurchgehen, die für die obere Begrenzungsgerade des Rechtecks gefunden war. Wie also auch die Integralkurve in Wirklichkeit verlaufen mag, die für das Rechteck bestimmte Gerade J_0J_1 muß eine Sehne sein. Umgekehrt: um die Sehne der Integralkurve zu finden für die Begrenzungskurve eines Kurventrapezes, verwandle man das letztere in ein flächengleiches Rechteck. Für dessen X -parallele obere Begrenzung bestimme man die Integralgerade mit Hilfe des Richtstrahls. Die Schnittpunkte der Integralgeraden mit den Ordinaten des Kurventrapezes sind Punkte der gesuchten Integralkurve (Fig. 152).

Es ist klar, daß diese Betrachtungen nur für verhältnismäßig schmale Kurventrapeze bzw. Rechtecke gelten. Größere Flächenstücke zerlegt man durch Y -Parallele in so schmale Streifen, daß man die obige Konstruktion mit hinreichender Genauigkeit anwenden kann. Dann erhalten wir statt der Urkurve einen treppenartigen Linienzug

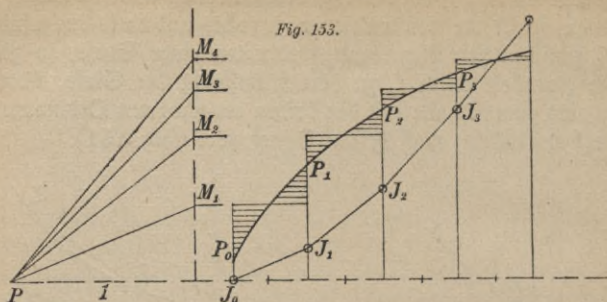


Fig. 153.

wie in Fig. 150; die nach der dort angegebenen Methode konstruierten Punkte $J_0 J_1 J_2 \dots$ sind dann Punkte der gesuchten Integralkurve, die nach Gefühl sich ausziehen läßt (Fig. 153).

Dieses Verfahren, zu gegebener Urkurve die Integralkurve zu konstruieren, heißt das Sehnungsverfahren.

Die Schwierigkeit liegt darin, das Kurventrapez in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln, wobei es sich natürlich nur um ein Näherungsverfahren handeln kann. Hierzu sind zwei Methoden brauchbar:

1. Die Konstruktion erfolgt schätzungsweise, indem man die obere Seite des Ersatzrechtecks — die x -parallele Mittellinie — so wählt, daß die schraffierten Flächenstücke möglichst gleich sind.

2. Man wählt als mittlere Ordinate diejenige, die in der Mitte zwischen den Ordinaten der Bogenendpunkte liegt. Man kann zeigen, daß diese Konstruktion mathematisch genau ist für eine Begrenzungskurve, deren Gleichung vom dritten oder niedrigeren Grade ist. Praktisch läßt sich jedes nicht zu ausgedehnte Kurvenstück mit großer Annäherung durch eine derartige Kurve ersetzen, sodaß diese Konstruktion weitgehende Genauigkeit bietet.

2. Das Tangentenverfahren. Ein zweites Verfahren liefert beliebig viele Tangenten der Integralkurve mit ihren Berührungspunkten. Betrachtet man ein sehr schmales Rechteck der Urkurve mit der Grundlinie dx , der Höhe y , so wird dessen Flächeninhalt durch den sehr kleinen Zuwachs dJ angegeben, den die Ordinate der Integralkurve zwischen den Abszissen x und $x + dx$ erfährt. Es ist also $y \cdot dx = dJ$, $\frac{dJ}{dx} = y$ (d. h. der Differentialquotient der In-

tegralfunktion ist gleich der Urfunktion). Da die Verbindungsgerade zwei unendlich benachbarte Punkte einer Kurve die Tangente der Kurve ergibt, ist J_0J_1 (Fig. 154) die Tangente der Integralkurve im Punkte J_0 und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dJ}{dx} = y$ die „Steigung“ dieser Tangente.

Denselben Winkel α ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{1} = y$) hat der Richtstrahl der X -Parallelen durch den Punkt $P(x, y)$ der Urkurve. Wir haben demnach den Satz: Der Richtstrahl der X -Par-

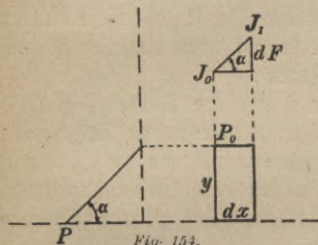


Fig. 154.

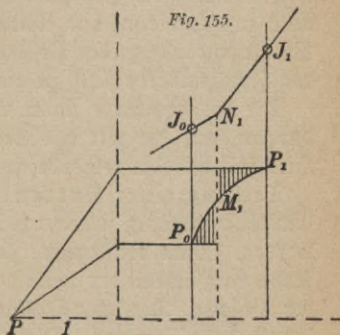


Fig. 155.

allelen eines Urkurvenpunktes gibt die Tangentenrichtung der Integralkurve für diesen Punkt an.

Zeichnet man die „ Y -parallele Mittellinie“ eines kleinen Kurventrapezes so, daß die schraffierten Flächen gleich sind (Fig. 155), so ist die Fläche des Trapezes ersetzt durch zwei Rechtecke; die diesen zugehörigen Integralkurven sind Parallele zu den Polstrahlen der X -Parallelen der Endpunkte des Kurvenstücks. Aus dem vorigen Satze ist bekannt, daß diese Geraden Tangenten der Integralkurve sind, deren Berührungspunkte J_0 und J_1 auf den Begrenzungsordinaten des Urkurvenbogens liegen. J_0 und J_1 sind also Punkte der Integralkurve.

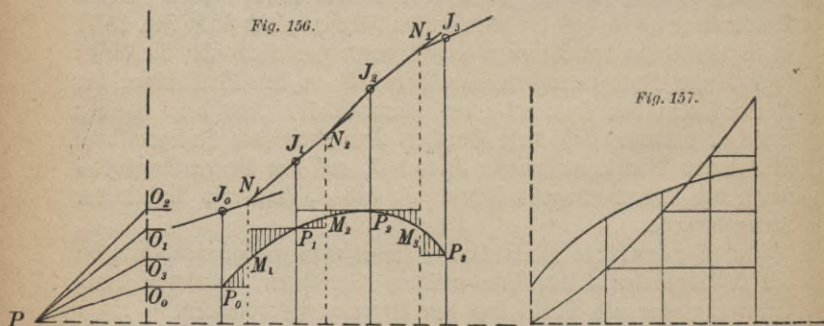
Die Y -parallele Mittellinie findet man, entsprechend dem bei der X -parallelen Mittellinie geübten Verfahren, entweder durch Schätzung oder als Mittel aus den Begrenzungsordinaten.

Um nach diesem „Tangentenverfahren“ die Integralkurve zu einer gegebenen Urkurve zu zeichnen, teile man die von letzterer begrenzte Fläche in Streifen und suche für jeden solchen die Y -parallele Mittellinie (Fig. 156). Durch die Teilpunkte der Kurve P_0, P_1, P_2, P_3 (nicht durch die auf den Mittellinien belegenen Kurvenpunkte $M_1,$

M_2, \dots) zeichne man die X -Parallelen bis zur Y -Achse und verbinde die Punkte $Q_0 Q_1 \dots$ mit dem Pol. Ist J_0 ein Punkt der Integralkurve (in Fig. 156 auf der Anfangsordinate), so ziehe man durch J_0 eine Parallele zu PQ_0 , welche die Mittellinie des ersten Streifens in N_1 schneidet, durch N_1 eine Parallele zu OQ_1 , die die Ordinate von P_1 in J_1 und die Mittellinie des zweiten Streifens in N_2 schneidet; die Parallele durch N_2 zu OQ_2 schneidet die P_2 -Ordinate in J_2 , die nächste Mittellinie in N_3 usw. Da J_0, J_1, J_2, \dots Punkte und alle zu den Polstrahlen gezeichneten Parallelen Tangenten der Integralkurve sind, ist diese leicht auszuzeichnen.

Die Integralkurve findet in Technik und Physik zahlreiche Anwendungen, auf die wir aus Mangel an Raum nicht eingehen können. Hier soll nur die folgende gegeben werden:

Teilung einer Kurvenfläche in n gleiche Teile (Fig. 157). Ein Kurventrapez soll durch Y -Parallele in vier gleiche Teile geteilt werden. Man konstruiert für die Begrenzungskurve die Integralkurve nach einem der beiden Verfahren mit dem Anfangspunkt auf der X -Achse. Die letzte Ordinate der Integralkurve gibt den Flächeninhalt des Trapezes. Diese wird in $n = 4$ gleiche Teile geteilt; X -Parallele durch die Teilpunkte schneiden die Integralkurve in Punkten, deren Ordinaten die gesuchten Teilungslinien des Trapezes sind.



Ist $n = 2$, so erhält man nach diesem Verfahren eine Teilungslinie; deren Länge innerhalb des Trapezes gibt die Höhe eines Rechtecks an, welches bei gleicher Grundlinie flächengleich dem Trapez ist. Diese Höhe ist die „mittlere Ordinate“ des Kurvenstückes zwischen den Begrenzungsortinaten, die bei den Anwendungen

eine wichtige Rolle spielt (z. B. mittlerer Dampfdruck beim Indikator diagramm)

3. **Integralkurve einer geschlossenen Kurve.** Ist f (Fig. 158) der Inhalt des zwischen den Begrenzungsordinaten gelegenen, von dem oberen Kurventeil begrenzten Trapezes, f' entsprechend das Trapez des unteren Kurventeils, so ist die gesuchte Fläche

$$F = f - f'.$$

Man konstruiere die Integralkurven für den oberen und unteren Kurventeil getrennt mit dem gemeinsamen Anfang auf der X -Achse. Dann ist F dargestellt durch die Differenz der Endordinaten der beiden Integralkurven.

4. **Veränderung des Maßstabes der Integralkurven.** Häufig ist es zweckmäßig, den Maßstab der Integralkurve abweichend von dem der Urkurve zu wählen, um ein Heraustreten letzterer aus dem zur Verfügung stehenden Raume zu vermeiden oder — was seltener vorkommt — die Kurve in vergrößertem Ordinatenmaßstab zu erhalten. Diese Änderungen lassen sich nun bequem durch Verlegung des Pols bewirken. Wählt man letzteren statt im Punkte (-1) im Punkte (-2) , so werden sämtliche Ordinaten der Integralkurve auf die Hälfte verkürzt; bei der Pollage (-3) auf ein Drittel usw. Verlegt man den Pol näher an die Y -Achse heran, so entsteht die Integralkurve mit vergrößerten Ordinaten.

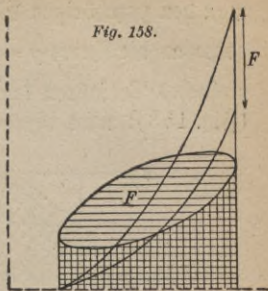


Fig. 158.

B. Graphische Differentiation.

Die Aufgabe, zu einer gegebenen Kurve die Differentialkurve zu finden, tritt in der Technik häufig auf, so bei der Entwicklung des Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsdiagramms aus dem Zeitwegdiagramm, bei der Darstellung der induzierten elektromotorischen Kraft aus der Feldkurve. Es handelt sich darum, zu jedem x -Wert der Kurve $y = f(x)$ den Wert der Ableitung (des Differentialquotienten) $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ zu bestimmen. Durch Auftragen dieser Werte erhält man die Differentialkurve zu der gegebenen Urkurve.

1. **Das Tangentenverfahren.** a) Graphische Bestimmung des Differentialquotienten. Zu einem bestimmten Punkt P erhält

man den zugehörigen Wert von $f'(x)$ als Richtungstangens der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkte P : $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$.¹⁾ Durch ein einfaches Verfahren kann man diesen Wert schnell und genau ablesen (Fig. 159): man läßt eine Kante des Lineals die Kurve berühren,

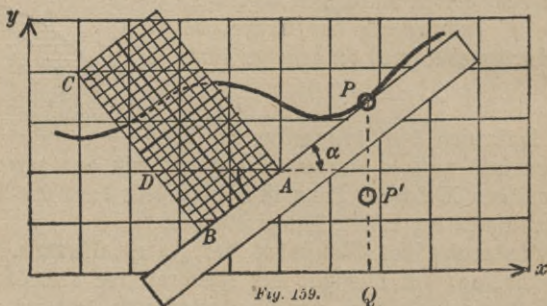


Fig. 159.

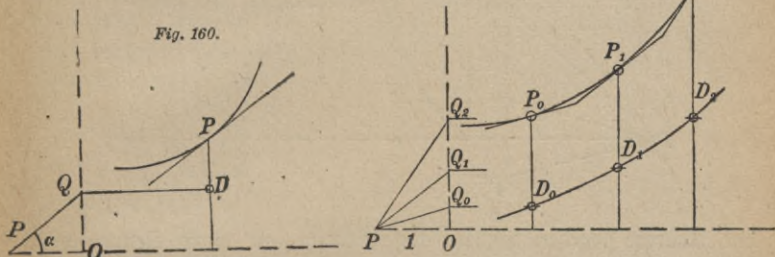
Q

zieht jedoch die Tangente nicht aus. Ein Stück durchsichtiges Millimeterpapier wird längs des Lineals so verschoben, daß die eine Ecke A auf die X -Achse oder eine Parallele zu dieser fällt (Fig. 159). Auf der Kante BC des Papiers kann dann $BD = AB \cdot \operatorname{tg} \varphi$ direkt abgelesen oder abgegriffen werden. Ist $AB = 1$, so ist $BD = \operatorname{tg} \varphi = f'(x)$. In Fig. 159 ist $\operatorname{tg} \varphi = 0,75$. Die abgelesene Länge wird im Endpunkt Q der Abszisse des Urkurvenpunktes P aufgetragen bis P' . P' ist der zu P gehörige Punkt der Differentialkurve. Man kann durch Wiederholung dieser Konstruktion für beliebig viele Punkte von $y = f(x)$ die Differentialkurve so genau erhalten, wie nötig ist (Verfahren von Melchior).

b) Konstruktion der Differentialkurve unter Benutzung des Pols. Unter Einführung eines im Punkte (-1) der Abszissenachse gelegenen Pols läßt sich zu jedem Punkte der Urkurve, dessen Tangente gezeichnet ist, der zugehörige Punkt der Differentialkurve wie folgt konstruieren: der zu dieser Tangente parallele Polstrahl PQ schneidet auf der Y -Achse die Strecke $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ ab ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{OQ}{1} = OQ$). Diese Strecke ist durch eine X -Parallele auf die Ordinate des Ur-

1) Siehe *MuG* Bd. 197 Kowalewski, *Infinitesimalrechnung*; Bd. 387 Bindow, *Differentialrechnung*.

kurvenpunktes zu übertragen; dann ist D der zu P gehörige Punkt der Differentialkurve (Fig. 160). Die Anwendung dieser Konstruktion auf eine genügend große Anzahl von Urkurvenpunkten ergibt entsprechend viele Punkte der Differentialkurve (Fig. 161). Es handelt sich also um eine Umkehrung des S. 97 gegebenen Tangentenverfahrens, die deshalb



sich einfacher gestaltet, weil zu jedem Kurvenpunkt nur ein Differentialkurvenpunkt gehört, während bei der Umkehrung wegen der dem Integral anhaftenden beliebigen Konstante nur die Richtung der Tangente der Integralkurve bestimmt ist. Zur Festlegung eines Punktes dieser Tangente war die Einführung der Y -parallelen Mittellinie notwendig.

Die Schwierigkeit dieser Konstruktionen liegt darin, daß die Tangente in einem Kurvenpunkte nur sehr schwer nach Augenmaß genau genug gezeichnet werden kann. Auch die Näherungskonstruktionen sind so mühsam, daß die Anwendung der graphischen Differentiation sich sehr langwierig gestalten würde. Eine einfache mechanische Konstruktion führt indessen bequem zum Ziel. Man benützt ein Lineal mit spiegelnder Kante (Fig. 162). Diese Kante wird ungefähr in Richtung der Kurvennormale des betr. Punktes aufgestellt und so um diesen Punkt gedreht, daß das Kurvenstück mit seinem Spiegelbild eine stetige Kurve, ohne Knick, bildet. Dann gibt die Kante des Lineals mit großer Genauigkeit die Normale der Kurve, die Senkrechte dazu somit die gesuchte Tangente.

2. Das Schuenerfahren. a) Umkehrung des Integrationsverfahrens (Fig. 163). Auf

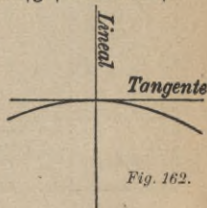


Fig. 162.

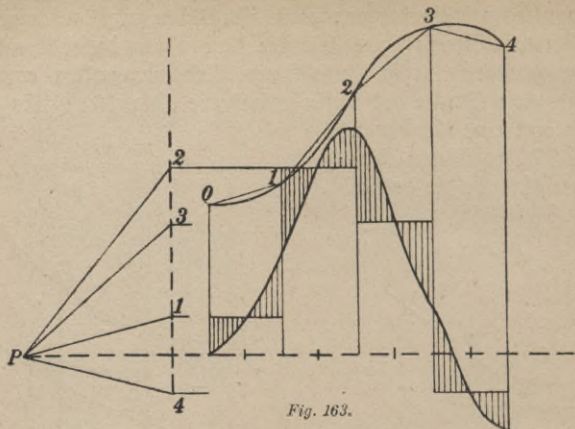


Fig. 163.

der Urkurve werden Punkte angenommen und durch Sehnen verbunden. Zu diesen werden die parallelen Richtstrahlen gezogen. Durch deren Schnitt mit der Y -Achse gezogene X -Parallele sind die X -parallelen Mittellinien der Differentialkurve. Ein Punkt derselben muß mittels einer Tangente der Urkurve bestimmt werden. Von diesem aus wird nach Augenmaß durch die Mitten der Stufen die Kurve so gezogen, daß Flächenausgleich stattfindet. Hierbei läßt sich freilich eine gewisse Willkür nicht vermeiden, da die Form der Ausgleichung vom mathematischen Blick des Zeichners abhängt. Wenn es sich um größere Genauigkeit handelt, z. B. wenn auch zweite und dritte Differentialquotienten graphisch dargestellt werden sollen, muß man auf das erst angeführte Verfahren zurückgreifen.

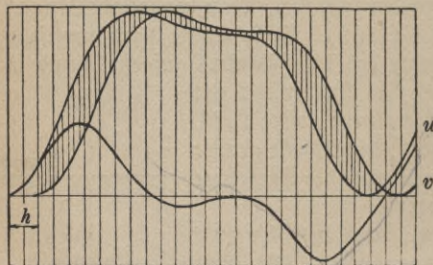


Fig. 164.

b) Das Verfahren von R. Slaby. Das Ziehen der den Sehnen parallelen Polstrahlen und der X -Parallelen vermeidet man nach dem Verfahren von R. Slaby, das im übrigen mit dem vorigen mathematisch übereinstimmt (Fig. 164).

Man verschiebt die Urkurve um eine kleine Strecke h parallel zur X -Achse, was mit Hilfe von Pauspapier bequem geschieht, und trägt die Differenzen aus den Ordinaten der ursprünglichen (u) und der verschobenen Kurve (v) als Ordinaten einer neuen Kurve auf. Diese entspricht fast genau der gesuchten Differentialkurve. Damit sie auch in der Lage der Urkurve entspricht, ist sie um die Strecke $\frac{h}{2}$ nach links zu verschieben (Fig. 164). Letzteres geschieht ebenfalls mit Hilfe von Pauspapier. Die Konstruktion ist um so genauer, je besser sich die Urkurve durch parabolische Kurven mit Achsen in Richtung der Ordinatenachse ersetzen läßt.

Sachregister.

- | | |
|--|--------------------------------------|
| Abbildung 78. 85 | Formel aus Versuchsergebnissen 8. 84 |
| — logarithmische 80 | Funktionsleiter 33. 81 |
| Addition 9 | Funktionsverlauf 23 |
| Additionskurve, logarithmische 28 | Gemeinsame Leistungsgerade 43 |
| Addition von Vektoren 33. 36 | Genauigkeitsgrad 7 |
| Adiabate 80 | Geometrische Addition 33 |
| Algebraische Gleichung 19. 52 | Gerichtete Größen 34 |
| Bergische Konstruktion 76 | Gespannter Faden 84 |
| Besondere Teilungen 81 | Gleichförmige Bewegung 38 |
| Bewegungsaufgaben 38 | Gleichungen mit 1 Unbekannten 45. 85 |
| Bildkurve 24 | — mit 2 Unbekannten 66. 67 |
| Bogenmaß 27 | Gleichungen mit n Unbekannten 71 |
| Cusische Konstruktion 27 | Gleichungstreppe 71 |
| Diagramm 24 38 | Graphische Bestimmung von Kur- |
| Differentialquotient (Melchior'sches
Verfahren) 100 | venpunkten 19. 51 |
| Differentiation 99 | Graphischer Fahrplan 39 |
| Division 15 | Graphische Methode 8 |
| Dreiecksfläche 16 | Hauptpunkte der Segner'schen Kon- |
| Dreiszaufgaben 37 | struktion 52 |
| Einheit, Wahl der 9 | Inhaltlinie 43 |
| Elimination, graphische 75 | Integration 92 |
| Empirische Formel 8. 84 | Integralfunktion 92 |
| Fehlerkurve 45 | Integralkurve 92 |
| Fehlerregel 48 | Interpolation 25 |
| Flächenberechnung 15. 92. 99 | Irrationale Gleichungsform 91 |
| Flächenverwandlung 15 | Isotherme 80 |
| | Komponenten 35 |

- Kräftepolygon 36
 Kurventrapez 16. 92. 95
 Leinungsaufgaben 34
 Lillichs Verfahren 53
 Lösung von Gleichungen durch 2
 Kurven 59. 85
 Logarithmische Abbildung 82
 — Additionskurve 28
 Logarithmisch geteiltes Papier 82
 Logarithmischer Birk 1 30
 Massenmittelpunkt 14
 Mechanische Addition und Subtra-
 tion 11
 — Lösung von $x^n + ax + b = 0$
 61. 90
 Melchiorisches Verfahren (Differen-
 tialquotient) 100
 Methode des gespannten Fadens 84
 Mittellinie 96 97
 Mittlere Ordinate 98
 Mittelwert von Produkten 14
 Multiplikation 12
 Nebstafeln 32
 Nomogramm 32 64
 Nomographische Lösung der quadra-
 tischen Gleichung 64
 Organisches Wachstum, Funktion
 des 80
 Parallelogramm der Kräfte 34
 Prinzip der fluchtrecten Punkte 33
 Pol 13. 93. 100
 Potenzfunktion 80
 Potenzen 18
 Potenzkurve 61. 80. 82. 83
 Quadratische Gleichung 54. 56. 64. 86
 Radizieren : 2. 23
 Rechenstab 11
 Rechteckfläche 15
 Rechtwinkeldzug 54
 Regula falsi 48
 Rektifikation des Kreisbogens 27
 Resultierende 34
 Richtbüchel 94
 Richtstrahl 94
 Schaulinie 24. 38
 Schma der algebraischen Funktion
 (Will) 54
 — der Gleichung mit mehreren Un-
 bekannten 72
 Schwerpunkt 14
 Segnersche Konstruktion 21
 Sehnenverfahren der Integration 93
 — der Differentiation 101
 Sinuslinie 28
 Siabichs Verfahren 102
 Spiegellineal 101
 Subtraktion 10
 Summenkurve 28. 88
 Summe von Produkten 13
 Tabellendarstellung einer Funktion
 23
 Tabellenrechnen 23
 Tangenslinie 28
 Tangentenverfahren der Integration
 96
 — der Differentiation 101
 Teilung einer Kurvenfläche 98
 Treppenartige Kurve 94
 Trigonometrische Funktionen 27
 Vector 34
 Vektordiagramm 27
 Vektormethode für Gleichungen mit
 2 und 3 Unbekannten 67. 69
 Vektorpolygon 36
 Veränderliche 23
 Veränderung des Maßstabes der
 Integralkurve 99
 Verlauf einer Funktion 23
 Versuchsfehler 25. 84
 Vierecksfläche 17
 Weg-Zeit-Diagramm 38



Leitfaden zum graphischen Rechnen. Von Dr. *R. Mehmke*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Stuttgart. Mit 121 Fig. und 1 Additions- und Subtraktionskurve als Beilage. [VIII u. 152 S.] 8. 1917. (SMPL 19.) Geh. M. 4.80, geb. M. 5.40.

Im ersten Abschnitt werden die gewöhnlichen Rechnungen und die Auflösung von Gleichungen und Gleichungssystemen behandelt, im zweiten das Differenzieren und Integrieren und die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Das logarithmographische Verfahren, das man hier zum ersten Male ausführlich dargestellt findet, ist auch bei der Integration berücksichtigt.

Graphische Methoden. Von Geh. Reg.-Rat Dr. *C. Runge*, Prof. a. d. Univ. Göttingen. 2. Aufl. Mit 94 Fig. i. T. [IV u. 130 S.] gr. 8. 1919. Kart. M. 4.80, geb. M. 5.50

Das Buch eignet sich durch die Anschaulichkeit und Leichtfaßlichkeit seiner Sprache namentlich als Einführung für Studierende Technischer Hochschulen, wird aber auch den Ingenieuren sowie den Dozenten und Studierenden der Mathematik an Universitäten willkommen sein.

Die graphische Darstellung. Von Hofrat Dr. *F. Auerbach*, Prof. an der Universität Jena. 2. Aufl. Mit 139 Figuren im Text. [118 S.] 8. 1919. (ANuG 437.) Kart. M. 1.75, geb. M. 2.15.

Das reichhaltige und allgemein verständlich geschriebene Büchlein zeigt die ausgedehnte Anwendbarkeit der graphischen Methode, die keineswegs nur auf Mathematik und Naturwissenschaften beschränkt ist, sondern überall da einsetzen kann, wo die quantitativen Beziehungen der Erscheinungen zu erfassen sind.

Einführung in die Nomographie. I. Teil: Die Funktionsleiter. Von Oberl. *P. Luckey* in Elberfeld. Mit 24 Fig. i. T. u. 1 Taf. [IV u. 43 S.] 8. 1918. II. Teil: Die Zeichnung als Rechenmaschine. M. 34 Abb. (MPhB 28 u. 37.) Kart. je M. 1.—

Behandelt in anschaulicher Form die verschiedenen Funktionsleitern oder Funktionsskalen, mit deren Hilfe man anstelle langwieriger rechnerischer Arbeiten die Lösungen mit der hinreichenden Genauigkeit aus graphischen Tafeln ablesen kann und stellt gleichzeitig eine durch Beispiele gut veranschaulichte Einführung in die Nomographie dar.

Theorie und Praxis des Rechenschiebers. Von Oberl. *A. Rohrberg* in Berlin. Mit 2 Abb. [IV u. 50 S.] 8. 1916. (MPhB 23.) Steif geh. M. 1.—

Eine außerordentlich anschaulich und durchaus allgemein verständlich geschriebene Anleitung zum Gebrauch des Rechenschiebers.

Praktische Mathematik. Von Dr. *R. Neuendorff*, Prof. a. d. Univ. Kiel. I. Teil: Graph. Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mech. Rechenhilfsmittel. Kaufm. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Aufl. Mit 29 Fig. u. 1 Taf. [IV u. 106 S.] 8. 1917. (ANuG 341.) II. Teil: Geometr. Zeichnen. Projektionslehre. Flächenmessung. Körpermessung. Mit 133 Fig. [IV u. 102 S.] 8. 1918. (ANuG 526.) Kart. je M. 1.75, geb. je M. 2.15.

Der Stoff ist nunmehr so verteilt, daß das erste Bändchen die Rechenmethoden des häuslichen und beruflichen Lebens, das zweite die praktischen Anwendungen der Geometrie behandelt. Die durch zahlreiche Abbildungen erläuterte allgemeinverständliche Darstellung will vor allem dem Nichtmathematiker über die wichtigsten praktischen Anwendungen der Mathematik Aufschluß geben.

Die mathematischen Instrumente. Von Geh. Reg.-Rat Dr. *A. Galle*, Prof. am Geodät. Inst. in Potsdam. Mit 86 Abb. u. Fig. [VI u. 187 S.] 8. 1912. (SMPL 15.) Steif geb. M. 4.40, geb. M. 4.80.

„Das Buch zeigt, mit welchem Scharfsinn, oft mit geringen Mitteln, der menschliche Geist sich Instrumente eronnen hat, die ihm dann die auf ihre Erfindung aufgewandte Mühe tausendfach vergelten. Es kann warm empfohlen werden.“ (Zeitschrift für Vermessungswesen.)

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Handbuch der angewandten Mathematik. Herausgegeben von Dr. *H. E. Timerding*, Prof. an der Techn. Hochschule Braunschweig. gr. 8. I. Bd.; Praktische Analysis. Von *H. von Sanden*. Mit 30 Figuren. [XIX u. 285 S.] 1916. Geh. M. 3.60, geb. M. 4.20. II. Bd.: Darstellende Geometrie. Von *Johannes Hjelmstev*. Mit 305 Figuren. [IX u. 320 S.] 1914. Geh. M. 5.40, geb. M. 6.— III. Bd.: Grundzüge der Geodäsie und Astronomie. Von *M. Nábauer*. Mit 277 Figuren. [XVI u. 420 S.] 1915. Geh. M. 9.— geb. M. 9.60. Weiter werden zunächst folgen: IV. Bd.: Die graphischen Methoden der technischen Mechanik. V. Bd.: Mathematische Statistik und Versicherungsrechnung. VI. Bd.: Grundzüge der Astronomie.

Höhere Mathematik für Ingenieure. Von Prof. Dr. *J. Perry*. Autor. dtsh. Bearb. v. Geh. Hofrat Dr. *R. Fricke*, Prof. a. d. Tech. Hochschule in Braunschweig, und *F. Süchting*, Prof. an d. Bergakademie in Clausthal. 3. Aufl. Mit 106 in d. Text gedr. Fig. [XVI u. 450 S.] gr. 8. 1919. Geh. M. 20.—, geb. M. 22.—

„Hier ist ein Lehrmittel entstanden, das bei der Reichhaltigkeit der in die mathematischen Aufgaben hineingearbeiteten Sammlung von Anwendungsbeispielen weit mehr bietet als ein gewöhnliches Lehrbuch der Integral- und Differentialrechnung.“ (Zentralbl. d. Bauverwaltg.)

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen herausg. von Hofrat Dr. *F. Auerbach*, Prof. in Jena, und Dr. *R. Rothe*, Prof. in Berlin. I. Jahrg. 1909. Mit Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S., unbedruckt 12 S.] 8. Geb. M. 6.— II. Jahrg. 1911. Mit Bildnis H. Minkowskis. [IX u. 567 S.] 8. Geb. M. 7.— III. Jahrg. 1913. Mit Bildnis Fr. Kohlrauschs. [X u. 463 S.] 8. Geb. M. 6.— IV. Jahrg. [In Vorb.]

Vorlesungen über numerisches Rechnen. Von Geh. Reg.-Rat Dr. *J. Lüroth*, weil. Prof. a. d. Univ. Freiburg i. B. Mit 14 Fig. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1900. Geh. M. 8.—

Der Verfasser versucht in dem vorliegenden Buche eine Auswahl der wichtigsten Methoden und Hilfsmittel für das numerische Rechnen unter Beschränkung auf die Mittel zur Erzielung großer Genauigkeit vorzuführen.

Lehrbuch der Differenzenrechnung. Von Dr. *D. Selivanoff*, Prof. a. d. Univ. St. Petersburg. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1904. (TS 13.) Geb. M. 4.—

„Die Darstellung ist klar und leicht faßlich und ist das Buch zum Studium dieses interessanten Kapitels der Mathematik angelegentlichst zu empfehlen.“ (Dr. Servus im Päd. Arch.)

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Ursprünglich Übersetzung des Lehrbuches von *J. A. Serret*, seit der 3. Aufl. gänzlich neu bearbeitet von Geh. Reg.-Rat Dr. *G. Scheffers*, Prof. an der Techn. Hochschule zu Berlin. gr. 8. I. Band: Differentialrechnung. 6. u. 7. Aufl. Mit 70 Fig. [XVI u. 670 S.] 1915. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.— II. Band: Integralrechnung. 4. u. 5. Aufl. Mit 108 Fig. [XIV u. 639 S.] 1911. Geb. M. 13.— III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnungen. 4. u. 5. Aufl. Mit 64 Fig. [XIV u. 735 S.] 1914. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.—

Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen Technischen Hochschulen. Von Geh.-Rat Dr. *P. Stäckel*, Professor an der Univ. Heidelberg. [XIII u. 198 S.] gr. 8. 1915. (IMUK B. IV. Band, Heft 9.) Steif geh. M. 6.80.

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Vierstellige Tafeln zum logarithmischen und Zahlenrechnen für Schule und Leben in neuer Anordnung zusammengestellt von Studienrat Dr. Ph. *Lötzbeier* in Berlin-Wilmersdorf. Mit 2 Abbildungen, 1 Proportionaltafel und einer Anzahl durch D. R. G. M. Nr. 683420 geschützten Tafeln. [IV u. XVII Tafeln.] gr. 8. 1918. Steif geh. M. 1.40.

In neuartiger, ein Höchstmaß von Übersicht und Kürze erreichender Anordnung zusammengestellte Logarithmen- und Zahlentafeln für die Schule und das praktische Leben mit Anweisung für ihren praktischen Gebrauch wie zur Verwendung des Rechenschiebers.

Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln für den Schulgebrauch. Von Studienrat Prof. Dr. H. *Hartenstein* in Dresden. 2., verb. u. erw. Aufl. [IV u. 136 S.] gr. 8. 1917. Geb. M. 1.20.

Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln sowie Hilfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen. Von Studienrat Dr. R. *Heger*, Prof. an der Technischen Hochschule Dresden. 2., verb. Auflage. [IV u. 124 S.] gr. 8. 1913. Geb. M. 2.40.

Mathematisch-physikalische Tafeln. Von Dir. Dr. E. *Kullrich* in Berlin-Tempelhof. 2. Auflage. [12 S.] 1909. Steif geh. M. —.60.

Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Von Geh. Bergrat Dr. E. *Jahnke*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin, u. Dr. F. *Emde*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Stuttgart. Mit 53 Fig. [XII u. 176 S.] gr. 8. 1909. (SMPL 5.) Geb. M. 6.—

Lehrbuch der Physik. Von Prof. E. *Grimsehl*, weil. Dir. an der Oberrealschule a. d. Uhlenhorst in Hamburg. Zum Gebrauch beim Unterr., bei akad. Vorles. und zum Selbststudium. 2 Bde. 4. Aufl. bearb. von Dr. W. *Hillers* in Hamburg u. Prof. Dr. H. *Starke* in Aachen. I. Band: Mechanik, Wärmelehre, Akustik u. Optik. Mit 1063 Fig. u. 2 farb. Tafeln. [ca. XII u. 970 S.] gr. 8. 1919. Geh. M. 16.50, geb. M. 18.— II. Band: Magnetismus u. Elektrizität. Mit ca. 520 Fig. [U. d. Pr. 1919.]

„Das sehr flüssig geschriebene Werk behandelt den Stoff in klarer, einfacher Weise, durch häufig eingeschriebene Beispiele die gegebenen Betrachtungen festigend, so daß auch beim Selbststudium wohl nirgends Schwierigkeiten auftreten werden. Es ist nicht nur die Materie als solche abgehandelt, sondern der Verfasser versucht es, indirekt den Leser zum Forschen und Experimentieren anzuregen, wozu ganz besonders die soweit als möglich vereinfachten, aber doch sehr zweckmäßigen Apparate, welche zur Selbsterstellung ermuntern, beitragen. Angenehm fällt es auf, daß zu den Abbildungen von Apparaten lediglich solche neuesten Typs verwendet sind.“
(Dinglers Polytechnisches Journal.)

Lehrbuch der praktischen Physik. Von Prof. Dr. Fr. *Kohlrausch*, weil. Präsident d. physikal.-techn. Reichsanstalt zu Berlin. 12., verm. Aufl. In Gemeinschaft mit H. *Geiger*, E. *Grüneisen*, L. *Holborn*, W. *Jaeger*, E. *Orlich*, K. *Scheel*, O. *Schönrock* herausgegeben von E. *Warburg*. Mit 389 Fig. [XXXI u. 742 S.] gr. 8. 1914. Geb. M. 11.—

Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Von Prof. Dr. Fr. *Kohlrausch*, weil. Präsident d. physikal.-techn. Reichsanstalt zu Berlin. 3. Aufl. bearb. von Dr. H. *Scholl*, Prof. an d. Univ. Leipzig. Mit 165 Abbild. im Text. [VI u. 325 S.] gr. 8. 1919. Geb. M. 10.—

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen

Verlag von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik u. Physik. Unter Mitwirkung von Fachgenossen hrsg. von

Dr. W. Lietzmann

und

Dr. A. Witting

Direktor der Oberrealschule zu Göttingen

Studienrat, Gymnasialprof. in Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. 1.—

Hierzu Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/19):

Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchgeseh. Aufl. (Bd. 2.)
Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., Neubearb. Aufl. I: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II: Die Z. im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 3.)
Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. (Bd. 7.)
Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. (Bd. 9.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Auflage. I: Grundlehren. (Bd. 4.) II: Anwendungen. (Bd. 33.)
Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. (Bd. 19.)
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)
Darstellende Geometrie des Geländes. Von R. Rothe. 2. Aufl. (Bd. 35/36.)
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. (Bd. 26.)
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. (Bd. 6.)
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühke. (Bd. 11.)
Nichteuklidische Geometrie in der Kugelfläche. Von W. Dieck. (Bd. 31.)
Einführung in die Nomographie. Von P. Luckey. I. Teil: Die Funktionsleiter. (Bd. 28.) II. Teil: Die Zeichnung als Rechenmaschine. (Bd. 37.)
Theorie und Praxis des logarithm. Rechenschiebers. V. A. Rohrberg. 2. Aufl. (Bd. 23.)

Die Anfertigung mathemat. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)
Karte und Krok. Von H. Wolff. (Bd. 27.)
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. (Bd. 29.)
Soldaten-Mathematik. Von A. Witting. 2. Aufl. (Bd. 22.)
Die mathemat. Grundlagen d. Variations- u. Vererbungslehre. Von P. Riebesell. (24.)
Mathematik und Malerei. 2 Teile in 1 Bande. Von G. Wolff. (Bd. 20 21.)
Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. (Bd. 32.)
Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhard. (Bd. 15.)
Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. (Bd. 18.)
Die Quadratur d. Kreises. V. E. Beutel. (12.)
Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 2. Aufl. (Bd. 10.)
Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)
Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)
Was ist Geld? Von W. Lietzmann. (Bd. 30.)
Die Fallgesetze. V. H. E. Timerding. (Bd. 5.)
Iontheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)
Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (Bd. 17.)
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. (Bd. 8.)
Beobachtung d. Himmels mit einfach. Instrumenten. Von Fr. Rusch. 2. Aufl. (Bd. 14.)
Mathem. Streifzüge durch die Geschichte der Astronomie. Von P. Kirchberger. (Bd. 40.)

In Vorbereitung:

Angersbach, Das Relativitätsprinzip. Doehlemann, Mathematik und Architektur. Müller, Der Gegenstand der Mathematik. Winkelmann, Der Kreis. Wolff, Einführung in die Photogrammetrie. Wolff, Feldmessen und Höhenmessen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher
Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band ist
einzeln käuflich



Kartoniert M. 1.60,*
gebunden M. 1.90*

Verlag B. G. Teubner

in Leipzig und Berlin

Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet
Werke, die mehrere Bände umfassen, auch in einem Band gebunden erhältlich

I. Religion, Philosophie und Psychologie.

Ästhetik. Von Prof. Dr. R. Hamann. 2. Aufl. (Bd. 345.)
— Einführung in die Geschichte der A. Von Dr. S. Mohl. (Bd. 602.)
Ätiologie siehe Sternglaube.
Aufgaben u. Ziele d. Menschenlebens. Von Prof. Dr. F. Unold. 5. Aufl. (Bd. 12.)
Verapredigt. Die. Von Prof. D. Dr. S. Weinel. (Bd. 710.)
Bergian, Henri, der Philosoph moderner Relia. Von Pfarrer Dr. E. Ott. (Bd. 480.)
Berkeley siehe Locke, Berkeley, Sume.
Buddha. Leben u. Lehre d. B. V. Prof. Dr. R. Fischer. 3. A., durchgef. v. Prof. Dr. S. Lüders. M. 1 T. u. 1 T. (109.)
Calvin, Johann. Von Pfarrer Dr. G. Sodebur. Mit 1 Bildnis. 2. Aufl. (Bd. 247.)
Christentum. Aus der Vorzeit des Chr. Studien u. Charakteristiken. V. Prof. Dr. F. Geiffen. 2. Aufl. (Bd. 54.)
— Die Religion des Urchristentums. Von Prof. D. Dr. S. Windisch. (Bd. 641.)
— Christentum und Weltgeschichte seit der Reformation. Von Prof. D. Dr. R. Sell. 2 Bde. (Bd. 297, 298.)
— siehe Jesus, Kirche, Mystik im Christent.
Ethik. Grundzüge d. E. M. bei Vernunft. d. päd. Probl. B. G. Bentischer. (397.)
— 1. a. Aufl. u. Ziele, Sernaethik, Sittl. Lebensanschauungen, Willensfreiheit.
Freimaurerei, Die. Eine Einführung in ihre Anschauungswelt u. ihre Geschichte. Von Geh. Rat Dr. S. Kellner. 2. Aufl. von Geh. Archivrat Dr. G. Schuster. (463.)
Griechische Religion siehe Religion.
Griechischchristenbeurteilung. Die. Eine Einführung in die Psychol. d. Handschrift. Von Prof. Dr. G. Schneidemühl. 2., durchgef. u. erw. Aufl. Mit 51 Handschriftennachbild. i. T. u. 1 Taf. (Bd. 14.)
Deidentum siehe Mystik.
Hellenistische Religion siehe Religion.
Orberts Lehren und Leben. Von Pastor D. Flügel. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis Herberts. (Bd. 164.)

Dume siehe Locke, Berkeley, Sume.
Dyppnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömmner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
Jesuiten. Die. Eine histor. Skizze. Von Prof. Dr. S. Boehmer. 4. Aufl. (Bd. 49.)
Jesus. Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu. Von Kirchenrat Pfarrer D. Dr. B. Mehlhorn. 2. Aufl. (Bd. 137.)
— Die Gleichnisse Jesu. Zugleich Anleitung zum quellenmäßigen Verständnis der Evangelien. Von Prof. D. Dr. S. Weinel. 4. Aufl. (Bd. 46.)
— f. auch Bergpredigt.
Judaistische Religion siehe Religion.
Kant, Immanuel. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Külpe. 4. Aufl. hrsg. v. Prof. Dr. A. Messer. Mit 1 Bildnis Kants. (Bd. 146.)
Kirche. Geschichte der christlichen Kirche. Von Prof. Dr. S. Fehr. v. Soden:
1. Die Entstehung der christlichen Kirche. (Bd. 690.) II. Vom Urchristentum zum Katholizismus. (Bd. 691.)
— siehe auch Staat und Kirche.
Kriminalpsychologie f. Psychologie b. Verbrechers, Handschriftenbeurteilung.
Kulturreligionen, f. Religion
Leben. Das L. nach dem Tode f. Glauben der Menschheit. Von Prof. Dr. E. Clemen. (Bd. 506.)
Lebensanschauungen siehe Sittliche L.
Leib und Seele. Von Dr. phil. et med. G. Sommer. (Bd. 702.)
Locke, Berkeley, Sume. Die großen engl. Philos. Von Oberlehrer Dr. P. Thormeyer. (Bd. 481.)
Logik. Grundriss d. L. Von Dr. F. F. Grau. (Bd. 637.)
Luther. Martin L. u. d. deutsche Reformation. Von Prof. Dr. W. Köhler. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis Luthers. (Bd. 515.)
— f. auch Von L. zu Bismarck Abt. IV.
Medanz d. Selbstelebens. Die. V. Geh. Medizinalrat Direktor Prof. Dr. M. Berworn. 4. A. M. 19 Abb. (Bd. 200.)

* Hierzu Feuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen.

Mission. Die evangelische. Geschichte. Arbeitsweise. Heutiger Stand. V. Pastor S. Baudert. (Bd. 406.)
Politik in Heidentum u. Christentum. V. Prof. Dr. E. v. Lehmann. 2. Aufl. V. Verf. durchgef. überseh. v. Anna Grundtvig geb. Quittenbaum. (Bd. 217.)
Anthologie. Germanische. Von Prof. Dr. J. von Negelein. 3. Aufl. (Bd. 95.)
Naturphilosophie. Die moderne. V. Priv.-Doz. Dr. F. M. Verweyen. 2. A. (191.)
Satäntina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Geh. v. Soden. 4. Aufl. Mit 1 Plan von Jerusalem und 3 Ansichten des Heiligen Landes. (Bd. 6.)
 — V. u. f. Kultur in 5 Jahrtausenden. Nach d. neuest. Ausgrabg. u. Forschng. dargestellt. von Prof. Dr. B. Thomesen. 2., neubearb. Aufl. M. 37 Abb. (260.)
Paulus. Der Apostel, u. sein Werk. Von Prof. Dr. E. Fischer. (Bd. 309.)
Philosophie. Die. Einführ. i. d. Wissensch., ihr Wes. u. ihre Probleme. Von Oberrealschuldir. H. Richter. 3. Aufl. (186.)
 — Einführung in die Ph. Von Prof. Dr. R. Richter. 4. Aufl. von Priv.-Doz. Dr. M. Brahn. (Bd. 155.)
 — Führende Denker. Geschichte. Einleit. in die Philosophie. Von Prof. Dr. F. Cohn. 4. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)
 — Die Phil. d. Gegenw. in Deutschland. V. Prof. Dr. O. Külpe. 6. Aufl. (41.)
Poetik. Von Dr. R. Müller-Freienfels. (Bd. 460.)
Psychologie. Einführ. i. d. Ph. V. Prof. Dr. E. von Aster. 2. Aufl. M. 4 Abb. (492.)
 — Psychologie d. Kindes. V. Prof. Dr. R. Gaupp. 4. Aufl. M. 17 Abb. (213 214.)
 — Psychologie d. Verbrechens. (Kriminalpsychol.) V. Strafanstaltsdir. Dr. med. B. Bollig. 2. Aufl. M. 5 Diagr. (Bd. 248.)
 — Einführung in die experiment. Psychologie. Von Prof. Dr. R. Braunshausen. 2. Aufl. M. 17 Abb. i. T. (484.)
 — f. auch Handschriftenbeurteilg., Hypnotismus u. Sugg., Mechanik d. Geistesleb., Poetik, Seele d. Menschen, Veranlag. u. Vererb., Willensfreiheit; Fäbag. Abt. II.
Reformation siehe Calvin, Luther.
Religion. Die Stellung der R. im Geistesleben. Von Konfistorialrat Lic. Dr. B. Palweit. 2. Aufl. (Bd. 225.)
 — Religi. u. Philosophie im alten Orient. Von Prof. Dr. E. von Aster. (Bd. 521.)
 — Einführung in die allg. R.-Geschichte. Von Prof. D. Dr. R. Beth. (Bd. 658.)
 — Die nichtchristlichen Kulturreligionen in ihrem gegenwärtigen Zustand. Von Prof. Dr. C. Clemen. (Bd. 533.)
 — Die Religion der Griechen. Von Prof. Dr. E. Samter. M. Bilderanb. (Bd. 457.)
 — Seltensittsch-röm. Religionsgesch. Von Hofpredig. Lic. A. Jacoby. (Bd. 584.)

Religion. D. Grundzög. d. israel. Religionsgesch. V. Prof. Dr. Fr. Giesebrecht. 3. A. V. Prof. D. A. Bertholet. (52.)
 — Religion u. Naturwissensch. in Kampf u. Fried. E. geschichtl. Rückbl. V. Pfarr. Dr. A. Pfannkuche. 2. A. Bd. (141.)
 — Die relig. Strömungen der Gegenwart. R. Sup. D. A. S. Braasch. 3. A. (66.)
 — i. a. Bergion, Budoba, Calvin, Christentum, Luther.
Rousseau. Von Prof. Dr. B. Senfel. 3. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 180.)
Schopenhauer. Seine Persönlichk., f. Lehre, f. Bedeutg. V. Oberrealschuldir. H. Richter. 3. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 81.)
Seele des Menschen. Die. Von Geh. Rat Prof. Dr. J. Rehmke. 4. Aufl. (Bd. 36.)
 — siehe Leib u. Seele, auch Psychologie.
Serualettil. Von Prof. Dr. S. E. Tiemerdig. (Bd. 592.)
Sinne d. Menschen. D. Sinnesorgane und Sinnesempfind. V. Hofr. Prof. Dr. F. R. Kreibitz. 3., orb. A. M. 30 Abb. (27.)
Sittl. Lebensanschauungen d. Gegenwart. V. Geh. Rathenr. Prof. D. O. Pirn. 3. A. V. Prof. D. Dr. O. Stephan. (177.)
 — i. a. Ethik, Serualettil.
Spencer, Herbert. Von Dr. R. Schwarze. Mit 1 Bildnis. (Bd. 245.)
Staat und Kirche in ihrem gegenseitigen Verhältnis seit der Reformation. Von Pfarr. Dr. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)
Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte u. d. Wes. d. Astrolog. Unt. Mitw. v. Geh. Rat Prof. Dr. R. Bezold dargestellt. v. Geh. Hofr. Prof. Dr. Fr. Boll. 2. Aufl. M. 1 Sternk. u. 20 Abb. (Bd. 638.)
Suggestion i. Hypnotismus.
Testament. Das Alte. Seine Gesch. u. Bedeutg. V. Prof. Dr. B. Thomesen. (609.)
 — Neues. Der Text d. N. T. nach i. geschichtl. Entwickl. V. Div.-Pfarr. Prof. Bis. A. Bött. 2. Aufl. M. Taf. (Bd. 134.)
Theologie. Einführung in die Theologie. Von Pastor M. Cornils. (Bd. 347.)
Veranlagung u. Vererbung. Geistige. V. Dr. phil. et med. G. Sommer. (Bd. 512.)
Urchristentum siehe Christentum.
Weltanschauung. Griechische. Von Prof. Dr. M. Wundt. 2. Aufl. (Bd. 329.)
Weltanschauungen. D., d. groß. Philosophen der Neuzeit. Von Prof. Dr. L. Busse. 6. Aufl., hrsg. v. Geh. Hofrat Prof. Dr. R. Falkenberg. (Bd. 56.)
Weltentstehung. Entsteh. d. W. u. d. Erde nach Sage u. Wissenschaft. Von Prof. Dr. M. B. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)
Weltuntergang. Untergang der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. V. Prof. Dr. M. B. Weinstein. (Bd. 470.)
Willensfreiheit. Das Problem der W. Von Prof. Dr. G. F. Sibbes. 2. Aufl. (Bd. 333.)
 — i. a. Ethik, Mechan. d. Geistesleb., Psychol.

II. Pädagogik und Bildungswesen.

- Berufswahl, Begabung u. Arbeitsleistung** in ihren gegenseitigen Beziehungen. Von W. J. Nuttmann. M. 7 Abb. (Bd. 522.)
- Bildungswesen, D. deutsche, in f. geschichtlichen Entwicklung.** Von Prof. Dr. Fr. Bauffen. 3. Aufl. Von Prof. Dr. W. Münch. M. Bildn. Bauffens. (Bd. 100.) — f. auch Volksbildungswesen.
- Erziehung, G. zur Arbeit.** Von Prof. Dr. Edv. Lehmann. (Bd. 459.)
- **Deutsche G. in Haus u. Schule.** Von J. Lews. 3. Aufl. (Bd. 159.) — siehe auch Großstadtpädagogik.
- Fortbildungsschulwesen, Das deutsche.** Von Dir. Dr. F. Schilling. (Bd. 256.)
- Fröbel, Friedrich.** Von Dr. Joh. Prüler. Mit 1 Tafel. (Bd. 82.)
- Großstadtpädagogik, B. J. Lews.** (327.) — siehe Erzieh., Schulkämpfe d. Gegenw.
- Herbarts Lehren und Leben.** Von Pastor O. Fißgel. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis Herbarts. (Bd. 164.)
- Hochschule f. Techn. Hochschulen u. Univ. Jugendpflege.** Von Fortbildungsschullehrer W. Wiemann. (Bd. 434.)
- Lehrpläne siehe Abt. V.
- Mittelschule f. Volks- u. Mittelschule.**
- Pädagogik, Allgemeine.** Von Prof. Dr. Th. Ziegler. 4. Aufl. (Bd. 33.)
- **Experimentelle G. mit bes. Rücksicht auf die Erzieh. durch die Tat.** Von Dr. W. A. Gay. 3. verb. u. M. 6 Abb. (Bd. 224.)
- **f. Erzieh., Großstadtpäd.; Handschriftenverteilung, Bishol., Beranlag. u. Bererb.** Abt. I.
- Destalozzi, Leben und Ideen.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. B. Ratorp. 3. Aufl. Mit Bildn. u. 1 Briefsamml. (Bd. 250.)
- Rousseau.** Von Prof. Dr. B. Denfel. 3. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 180.)
- Schule** siehe Fortbildungs-, Hilfsschulwes., Techn. Hoch-, Mädch., Volksschule, Univ. Schulhygiene. Von Prof. Dr. S. Burgerstein. 3. Aufl. M. 33 Fig. (Bd. 96.)
- Schulkämpfe d. Gegenw.** Von J. Lews. 2. Aufl. (Bd. 111.) — siehe Erziehung, Großstadtpäd.
- Student, Der Letzinger, von 1409 bis 1909.** Von Dr. B. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
- Studententum, Geschichte des deutschen St.** Von Dr. B. Bruchmüller. (Bd. 477.)
- Techn. Hochschulen in Nordamerika.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. S. Müller. M. zahlr. Abb., Karte u. Vagepl. (190.)
- Universitäten, über L. u. Universitätsstud. B. Prof. Dr. Th. Ziegler.** Mit 1 Bildn. Humboldts. (Bd. 411.)
- Unterrichtswesen, Das deutsche, der Gegenwart.** Von Geh. Studienrat Oberreal-Insultor Dr. R. Knabe. (Bd. 299.)
- Volksbildungswesen, Das mod. B. Stadtbbl.** Prof. Dr. G. Fris. M. 14 Abb. (266.)
- Volks- und Mittelschule, Die preussische, Entwicklung und Ziele.** Von Geh. Reg.- u. Schulrat Dr. A. Sachse. (Bd. 432.)
- Zerkerkunst, Der Weg zur B. Ein Vskh. f. theor. u. prakt. Selbstbd.** S. Dr. E. Weber. 2. u. M. 81 Abb. u. 1 Farbtl. (430.)

III. Sprache, Literatur, Bildende Kunst und Musik.

- Architektur** siehe Baukunst und Renaissancearchitektur.
- Ästhetik.** Von Prof. Dr. R. Hamann. 2. Aufl. (Bd. 345.)
- **Einführung i. d. Geschichte d. A.** Von Dr. S. Nohl. (Bd. 602.)
- Baukunst, Deutsche B.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. 4 Bb. I. Deutsche Baukunst im Mittelalter. B. d. Anf. b. z. Ausgang d. roman. Baukunst. 4. Aufl. Mit 35 Abb. (Bd. 8.) II. Gotik u. „Spätgotik“. 4. Aufl. Mit 67 Abb. (Bd. 9.) III. Deutsche Baukunst in d. Renaissance u. d. Barockzeit b. z. Ausg. d. 18. Jahrh. 2. Aufl. Mit 63 Abb. i. Text. (Bd. 326.) IV. Deutsche B. im 19. Jahrh. Mit 35 Abb. (Bd. 453.) — siehe auch Renaissancearchitektur.
- Beethoven** siehe Handn.
- Bildende Kunst, Bau und Leben der b. R.** Von Dir. Prof. Dr. Th. Holbehr. 2. Aufl. Mit 44 Abb. (Bd. 68.) — siehe auch Baukunst, Griech. Kunst, Impressionismus, Kunst, Maler, Malerei, Skulpt.
- Björnson** siehe Jbsen.
- Buch.** Wie ein Buch entsteht siehe Abt. VI. — f. auch Schrift- u. Buchwesen Abt. IV.
- Decorative Kunst d. Altertums, B. Dr. Fr. Poulsen** M. 112 Abb. (Bd. 454.)
- Deutsch** siehe Baukunst, Drama, Frauenbildung, Helldenkmal, Kunst, Literatur, Porzell., Maler, Malerei, Personennamen, Romanistik, Sprache, Volkslied, Volksfrage, Drama, Das. Von Dr. B. Busse. Mit 11 Abb. 3 Bde. I: Von d. Antike f. franz. Klassizismus. 2. u. Neub. v. Oberl. Dr. Riedlich. Prof. Dr. R. F. Meimann u. Prof. Dr. G. Lafert. M. 3 Abb. II: Von Versailles bis Weimar. 2. Aufl. III: Von d. Romantik f. Gegenwart. (287 289.)
- Drama, D. dtsch. D. d. 19. Jahrh. 3. f. Entwickl. dtsch. v. Prof. Dr. G. Wittkowski. 4. Aufl. M. Bildn. Hebbels (Bd. 51.)** — siehe auch Grillparzer, Hauptmann, Hebbel, Jbsen, Lessing, Literatur, Schüler, Shakespeare, Theater.
- Dürer, Albrecht, B. Prof. Dr. R. Buekmann. 2. Aufl. von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. Mit Titelb. u. zahlr. Abbildungen.** (Bd. 97.)

Französisch siehe Roman.
Frauendichtung. Geschichte der deutschen F.
seit 1800. Von Dr. H. Spiero. Mit
3 Bildnissen auf 1 Tafel. (Bd. 390.)
Grenzwortkunde. Von Dr. E. Richter.
Gartenkunst siehe Abt. VI. (Bd. 570.)
Griech. Komödie. Die. V. Geh.-Nat. Prof.
Dr. A. Korte. M. Titelv. u. 2 Taf. (400.)
Griechische Kunst. Die Blütezeit der g. K.
im Spiegel der Reliefsarkophage. Eine
Einf. i. d. griech. Plastik. V. Prof. Dr. S.
Wachtler. 2. A. M. zahlr. Abb. (272.)
— siehe auch Dekorative Kunst.
Griech. Tragödie. Die. V. Prof. Dr. J.
Geffken. M. 5 Abb. i. L. u. a. 1 Taf. (566.)
Griffparzer. Franz. Von Prof. Dr.
A. Kleinberg. M. Bildn. (Bd. 513.)
Harmonielehre. Von Dr. S. Scholz.
(Bd. 703/04.)
Harmonium f. Tasteninstrum.
Hauptmann, Gerhart. V. Prof. Dr. E. Sul-
ger-Gebing. Mit 1 Bildn. 2., verb.
u. verm. Aufl. (Bd. 283.)
Haudu, Mozart, Beethoven. Von Prof.
Dr. C. Krebs. 2. Aufl. M. 4 Bildn. (92.)
Hebel, Friedrich. V. Geh.-Dokt. Prof. Dr.
D. Walzel. 2. A. M. 1 Bildn. (408.)
Heldenjage. Die germanische. Von Dr. J.
W. Bruinier. (Bd. 486.)
— siehe auch Volksjage.
Homerische Dichtung. Die. Von Rektor
Dr. G. Finzler. (Bd. 496.)
Ibsen, Björnson u. i. Zeitgenossen. Von
Prof. Dr. H. Kahle. 2. Aufl. v. Dr. G.
Morawitz. M. 7 Bildn. (Bd. 193.)
Impressionismus. Die Maler des J. Von
Prof. Dr. H. Bazar. 2. A. M. 32 Abb.
u. 1 farb. Tafel. (Bd. 395.)
Instrumente f. Tasteninstrum., Orchester.
Klavier siehe Tasteninstrumente.
Komödie siehe Griech. Komödie.
Kunst. Das Wesen der deutschen bilden-
den K. Von Geh.-Nat. Prof. Dr. S.
Thode. (Bd. 585.)
— f. a. Bauk., Bild., Dekor., Griech. K.;
Bombast, Stile; Gartenk. Abt. VI.
Kunstpflege in Haus u. Heimat. 3. Aufl.
Mit Abb. (Bd. 77.)
Lessing. Von Dr. Ch. Schreyb. Mit
einem Bildnis. (Bd. 403.)
Literatur. Entwickl. der deutsch. L. seit
Goethes Tod. V. Dr. W. Brecht. (595.)
Luril. Geschichte d. deutsch. L. f. Claudius.
V. Dr. H. Spiero. 2. Aufl. (Bd. 254.)
— siehe auch Frauendichtung, Literatur,
Minnelang, Volkslied.
Maler. Die altdeutschen, in Süddeutsch-
land. Von S. Remig. Mit 1 Abb. i.
Text und Silberanhang. (Bd. 464.)
— f. Michelangelo, Impression. Rem-
brandt.
Maleret. Die deutsche, im 19. Jahrh. Von
Prof. Dr. R. Hamann. 2 Bde. Text,
2. Bde. m. 57 ganzseit. u. 200 halb. Abb.,
a. f. Geschausg. erhäftl. (Bd. 448—451.)

Maleret. Niederl. M. i. 17. Jahrh. V.
Prof. Dr. S. Janßen. Mit 37 Abb.
— siehe auch Rembrandt. (Bd. 373.)
Märchen f. Volksmärchen.
Michelangelo. Eine Einführung in das
Verständnis seiner Werke. V. Prof. Dr.
C. Hildebrandt. Mit 44 Abb. (392.)
Minnelang. D. Liebe i. Liebe d. dtsch. Mit-
telalt. V. Dr. J. W. Bruinier. (404.)
Mozart siehe Haydn.
Musik. Die Grundlagen d. Tonkunst. Ver-
such einer entwicklungsgech. Darstell. b.
allg. Musiklehre. Von Prof. Dr. S.
Rietich. 2. Aufl. (Bd. 178.)
— Musikalische Kompositionsformen. V.
S. G. Kallenberg. Band I: Die
elementar. Tonverbindungen als Grund-
lage d. Harmonielehre. Bd. II: Kontra-
punkt u. Formenlehre. (Bd. 412, 413.)
— Geschichte der Musik. Von Dr. A.
Einstein. (Bd. 438.)
— Beispielsammlung zur älteren Musik-
geschichte. V. Dr. A. Einstein. (439.)
— Musikal. Romantik. Die Blütezeit d. m.
K. in Deutschland. Von Dr. E. Fiel.
Mit 1 Silhouette (Bd. 239.)
— f. a. Haydn, Mozart, Beethoven, Oper,
Orchester, Tasteninstrumente, Wagner.
Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr.
J. v. Regelin. 3. Aufl. (Bd. 95.)
— siehe auch Volksjage, Deutsche.
Niederländische Malerei f. Malerei.
Novelle siehe Roman.
Oper. Die moderne. Vom Tode Wagners
bis zum Weltkrieg (1883—1914). Von
Dr. E. Fiel. Mit 3 Bildn. (Bd. 495.)
— siehe auch Haydn, Wagner.
Orchester. Das moderne Orchester. Von
Prof. Dr. Fr. Volbach. I. Die In-
strumente d. O. (Bd. 384.) II. D. mod.
O. i. f. Entwickl. 2. Aufl. (Bd. 308.)
Orgel siehe Tasteninstrumente.
Personennamen. D. deutsch. V. Geh.-Sta-
dienrat A. Bähnisch. 2. A. (Bd. 296.)
Perspektive, Grundzüge der B. nebst An-
wendungen. Von Prof. Dr. R. Doeble-
mann. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (310.)
Phonetik. Einführ. i. d. Ph. Wiss. spre-
chen. V. Dr. E. Richter. M. 20 A. (354.)
Photographie. D. künstl. Ihre Entwickl.,
ihre Probl., i. Bebeug. V. Dr. B. War-
stat. 2., verb. Aufl. M. Silberanh. (410.)
— f. auch Photographie Abt. VI.
Plastik f. Griech. Kunst, Michelangelo.
Poetik. Von Dr. R. Müller-Freien-
fels. (Bd. 460.)
Pompeii. Eine hellenist. Stadt in Ita-
lien. Von Prof. Dr. Fr. v. Duhn.
3. Aufl. M. 62 Abb. i. L. u. auf 1 Taf.,
sowie 1 Plan. (Bd. 114.)
Projektionslehre. In kurzer leichtfaßlicher
Darstellung f. Selbstunterricht und Schul-
gebrauch. V. Zeichenl. A. Schudeisckh.
Mit 164 Fig. (Bd. 564.)

Neubrandt. Von Prof. Dr. B. Schubring. 2. Aufl. Mit 48 Abb. auf 28 Taf. i. Anh. (Bd. 158.)
Renaissancearchitektur in Italien. Von Dr. P. Frankl. 2 Bde. I. M. 12 Taf. u. 27 Textabb. II. M. Abb. (Bd. 381/382.)
Rhetorik. Von Prof. Dr. E. Geißler. 2. Bde. 2. Aufl. I. Richtlinien für die Kunst des Sprechens. II. Deutsche Redekunst. (Bd. 455/456.)
Roman. Der französische Roman und die Novelle. Ihre Geschichte v. d. Anf. b. z. Gegenw. Von O. Flake. (Bd. 377.)
Romantik. Deutsche. V. Geh. Hofrat Prof. Dr. O. F. Walzel. 4. Aufl. I. Die Weltanschauung. II. Die Dichtung. (Bd. 232/233.)
 — Die Blütezeit der mus. K. in Deutschland. Von Dr. E. Fstel. (Bd. 239.)
Sage siehe Helden Sage, Mythol., Volks Sage.
Schauspieler. Der. Von Prof. Dr. Ferdinand Gregori. (Bd. 692.)
Schiller. Von Prof. Dr. Th. Biegler. Mit 1 Bildn. 3. Aufl. (Bd. 74.)
Schillers Dramen. Von Programmabdirektor E. Heusermann. (Bd. 493.)
Shakespeare und seine Zeit. Von Prof. Dr. E. Sieber. M. 3 Abb. 2. Aufl. (185.)
Sprache. Die Haupttypen des menschlich. Sprachbaus. Von Prof. Dr. F. R. F. Ind. 2. Aufl. v. Prof. Dr. E. Kiecker. (268.)
 — Die deutsche Sprache von heute. Von Dr. W. Fischer. (Bd. 475.)
 — Fremdwortkunde. Von Dr. Elise Richter. (Bd. 570.)
 — siehe auch Phonetik, Rhetorik; ebenso Sprache u. Stimme Abt. V.

Sprachstämme. Die, des Erdkreises. Von Prof. Dr. F. R. F. Ind. 2. Aufl. (Bd. 267.)
Sprachwissenschaft. Von Prof. Dr. R. Sandfeld-Jensen. (Bd. 472.)
Stile. Die Entwicklungsgesch. d. St. in der bild. Kunst. V. Dr. E. Cohn-Wiener. 2. Aufl. I.: V. Altertum b. z. Gotik. M. 66 Abb. II.: V. d. Renaissance b. z. Gegenwart. Mit 42 Abb. (Bd. 317/318.)
Tasteninstrumente. Klavier, Orgel, Harmonium. Das Wesen der Tasteninstrumente. V. Prof. Dr. O. Vie. (Bd. 325.)
Theater. Das. Schauspielhaus u. Kunst v. griech. Altert. bis auf d. Gegenwart. V. Prof. Dr. Chr. Gachbe. 2. Aufl. 1896. (Bd. 230.)
Tragödie s. Griech. Tragödie.
 — siehe auch Schauspieler.
Urheberecht siehe Abt. VI.
Volkslied. Das deutsche. Über Wesen und Werden d. deutschen Volksliedes. Von Dr. F. W. Bruhner. 5. Aufl. (Bd. 7.)
Volksmärchen. Das deutsche. V. von Parter R. Spieß. (Bd. 587.)
Volks Sage. Die deutsche. Übersicht dargestellt v. Dr. O. F. Ind. 2. Aufl. (Bd. 262.)
 — siehe auch Helden Sage, Mythologie.
Wagner. Das Kunstwerk Richard W. s. Von Dr. E. Fstel. M. 1 Bildn. 2. Aufl. (330.)
 — siehe auch Musikal. Romantik u. Oper.
Zeichenkunst. Der Weg z. B. Ein Büchlein für theoretische und praktische Selbstbildung. Von Dr. E. Weber. 2. Aufl. Mit 81 Abb. u. 1 Farbtafel. (Bd. 430.)
 — s. auch Perspektive, Projektionslehre; Geomtr. Zeichnen Abt. V, Techn. Abt. VI. Zeitungs Wesen. V. Dr. S. Diez. (Bd. 328.)

IV. Geschichte, Kulturgeschichte und Geographie.

Alpen. Die. Von S. Reishauer. 2., Neub. Aufl. von Dr. S. Stanar. Mit 26 Abb. und 2 Karten. (Bd. 276.)
Altertum. Das, im Leben der Gegenwart. V. Prof. Schul- u. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. B. Cauer. 2. Aufl. (Bd. 356.)
 — D. Altertum, seine staatliche u. geistige Entwicklung und deren Nachwirkungen. Von Oberlehr. S. Brellner. (Bd. 642.)
Amerika. Gesch. d. Verein. Staaten v. N. V. Prof. Dr. E. Daenell. 2. Aufl. (Bd. 147.)
Amerikaner. Die. V. N. M. Butler. Dsch. v. Prof. Dr. W. Paszkowski. (319.)
Antike Wirtschaftsgeschichte. V. Privatdoz. Dr. O. Neurath. 2. Auflage. (Bd. 258.)
Kritisches Leben nach den ägyptischen Papyri. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. Fr. Breiffagte. Mit 1 Tafel. (Bd. 565.)
Arbeiterbewegung s. Soziale Bewegungen.
Australien und Neuseeland. Land, Leute und Wirtschaft. Von Prof. Dr. R. Schachner. Mit 23 Abb. (Bd. 366.)

Babylonische Kultur. Die, i. Verbreit. u. i. Nachwirkungen auf d. Gegenwart. V. Prof. Dr. F. C. Lehmann-Haupt. (Bd. 579.)
Baltische Provinzen. V. Dr. B. Tornius. 3. Aufl. M. 8 Abb. u. 2 Kartenst. (Bd. 542.)
Bauernhaus. Kulturgeschichte des deutschen. V. von Baurat Dr.-Ing. Chr. R. Hand. 3. Aufl. Mit Abb. (Bd. 121.)
Bauernstand. Gesch. d. dtisch. V. B. Prof. Dr. S. Gerdes. 2., verb. Aufl. Mit 22 Abb. i. Text. (Bd. 320.)
Belgien. Von Dr. B. D. Kwald. 3. Aufl. Mit 4 Karten i. T. (Bd. 501.)
Bismarck und seine Zeit. Von Professor Dr. B. Valentin. Mit einem Titelbild. 4. durchgef. Aufl. (Bd. 500.)
Böhmen. Zur Einführung in die böhmische Frage. Von Prof. Dr. R. F. Handl. Mit 1 Karte. (Bd. 701.)
Brandenburg-preuss. Gesch. Von Archivar Dr. Fr. Israel. 2 Bde. I. Von d. ersten Anfängen b. z. Tode König Fr. Wilhelm's I. 1740. II. Von dem Regierungsantritt Friedrich's d. Gr. bis zur Gegenwart. (Bd. 440/441.)

Bürger im Mittelalter I. Städte.

Calvin. Johann. Von Biazar Dr. G. So-
deur. Mit 1 Bildn. 2 Aufl. (Bd. 247.)

China. V. Prof. Dr. A. Conrady (557.)

Christentum u. Weltgeschichte seit der Re-
formation. Von Prof. D. Dr. R. Sell.
2 Bde. (Bd. 297/298.)

Deutsch siehe Bauernhaus, Bauernstand,
Dorf, Feste, Frauenleben, Geschichte,
Handel, Handwerk, Reich, Staat, Städte,
Verfassung, Verfassungsrecht, Volks-
kunde, Volkstümme, Volkstrachten,
Wirtschaftsleben usw.

Deutschtum im Ausland, Das, vor dem
Weltkriege. Von Prof. Dr. R. Hoeniger
2 Aufl. (Bd. 402.)

Dorf. Das deutsche. V. Prof. R. Mielke.
2 Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 192.)

Eiszeit. Die, und der vorgeschichtliche
Mensch. Von Geh. Bergrat Prof. Dr.
G. Steinmann. 2. Aufl. M. 24 Ab-
bildungen. (Bd. 302.)

Englands Weltmacht in ihrer Entwickl. seit
b. 17. Jahrh. M. Bildn. V. Dir. Prof. Dr.
W. Langenbeck 2 Aufl. (Bd. 174.)

Entdeckungen. Das Zeitalter der G. Von
Prof. Dr. E. Günther. 3. Aufl. Mit
1 Weltkarte. (Bd. 26.)

Erde siehe Mensch u. G.

Erde. Allgemeine. 3 Bde. Mit Abb.

I. Die Erde, ihre Beweg. u. ihre Eigen-
schaften (math. Geogr. u. Geonomie). Von
Admiralitätsr. Prof. Dr. G. Kohlshütter.
(Bd. 625.) II. Die Atmosphäre der
Erde (Klimatologie, Meteorologie). Von
Prof. E. Paschin (Bd. 626.) III. Geo-
morphologie. Von Prof. F. Machatschke
M. 33 Abb. (Bd. 627.) IV. Phyo-
geographie d. Süßwassers. V. Prof. F.
Machatschke M. 24 Abb. (Bd. 628.)

V. Die Meere. Von Prof. Dr. A. Mez-
ger. (Bd. 629.) VI. Die Verbreitung der
Pflanzen. Von Dr. Brodmann-Ze-
rold. (Bd. 630.) VII. Die Verbreitung d.
Tiere. V. Dr. B. Knopff. (Bd. 631.)

VIII. Die Verbreitung d. Menschen auf d.
Erdoberfläche (Anthropogeographie). V.
Prof. Dr. R. Krebs. (Bd. 632.)

Europa. Vorgesichte G.'s. Von Prof. Dr.
S. Schmidt. (Bd. 571/572.)

Familienforschung. Von Dr. E. De-
briant. 2. Aufl. M. 6 Abb. i. T. (350.)

Feldherren, Große. Von Major F. G.
Endres. (Bd. 687/688.)

Feste. Deutsche, u. Volksbräuche. V. Briv-
dos. Dr. E. Febrle M. 30 Abb. (Bd. 518.)

Finnland. Von Rektor F. Obouitz. (700.)

Frankl. Geschichte. I. D. frz. Königtum.
V. Prof. Dr. R. Schwemer. (Bd. 574.)

— siehe auch Napoleon, Revolution

Frauenbewegung. Die mod. V. Dr. Ma-
rie Bernays. (Bd. 723.)

Frauenleben. Deutsch., I. Bandel d. Jahr-
hunderte. Von Geh. Schulrat Dr. E. D.
Otto. 3 Aufl. 12 Abb. i. T. (Bd. 45.)

Friedrich d. Gr. 6 Portr. V. Prof. Dr. L. H.
Bitterauf. 2. Aufl. M. 2 Bildn. (246.)

Gartenkunst. Gesch. d. G. V. Baurat Dr.
Ing. Chr. Rand. M. 41 Abb. (274.)

Geographie der Vorwelt (Paläogeogra-
phie) Von Briv.-Dos. Dr. E. Ducaque.
Mit 78 Abb. (Bd. 610.)

— Einführg. i. d. Studium der G. Von
Prof. Dr. G. Braun. (Bd. 693.)

Geologie siehe Abt. V.

German. Heldensage i. Heldensage.

Germanische Kultur in der Urzeit. Von
Bibliotheksdir. Prof. Dr. G. Stein-
hausen. 3. Aufl. Mit 13 Abb. (Bd. 75.)

Geschichte. Deutsche, im 19. Jahrh. b. z.
Reichseinheit. V. Prof. Dr. R. Schwem-
mer. 3 Bde. I.: Von 1800—1848.
Restauration und Revolution. 3. Aufl.
(Bd. 37.) II.: Von 1848—1862. Die
Reaktion und die neue Ara. 2. Aufl.
(Bd. 101.) III.: Von 1862—1871. 3.
Bund u. Reich. 2. Aufl. (Bd. 102.)

Gesellschaft u. Geselligkeit in Bergangenh.
u. Gegenwart. Von Oberin E. Traut-
wein. (Bd. 706.)

Griechentum. Das G. in seiner geschicht-
lichen Entwicklung. Von Prof. Dr. R.
v. Scala. Mit 46 Abb. (Bd. 471.)

Griechische Städte, Kulturbilder aus gr.
St. Von Professor Dr. E. Flebarth.
2. Aufl. M. 23 Abb. u. 2 Tafeln. (Bd. 131.)

Dandel. Geschichte d. Welthandels. Von
Realschul-Dir. Prof. Dr. M. G.
Schmidt. 3. Aufl. (Bd. 118.)

— Geschichte des deutschen Handels seit
d. Ausgang des Mittelalters. Von Dir.
Prof. Dr. W. Langenbeck. 2. Aufl.
Mit 16 Tabellen. (Bd. 237.)

Handwerk. Das deutsche, in seiner kultu-
rgeschichtl. Entwickl. Von Geh. Schulrat
Dr. E. Otto. 4. Aufl. Mit 33 Abb. auf
12 Tafeln. (Bd. 14.)

— siehe auch Dekorative Kunst Abt. III.

Haus. Kunstpflege in Haus und Heimat.
3. Aufl. Mit Abb. (Bd. 77.)

— siehe auch Bauernhaus, Dorf.

Heldensage. Die germanische. Von Dr. F.
W. Bruhnier. (Bd. 486.)

Hellenist.-röm. Religionsgeschichte. I. Abt. I.
Jesuiten. Die. Eine hist. Skizze. Von Prof.
Dr. S. Boehmer. 4. Aufl. (Bd. 49.)

Indien. Von Prof. Dr. Eten Konow.
(Bd. 614.)

Indogermanenfrage. Von Dir. Dr. R.
Ugahd. (Bd. 594.)

Island. d. Land u. d. Volk. V. Prof. Dr. B.
Herrmann. M. 9 Abb. (Bd. 461.)

Kaiserthum und Papsttum. Von Prof. Dr.
A. Hofmeister. (Bd. 576.)

Kartenkunde. Vermessungs- u. A. 6 Bde. Mit Abb. I. Geogr. Ortsbestimmung. Von Prof. Schnauber. (Bd. 606.) II. Erdmessung. Von Prof. Dr. C. Egger. (Bd. 607.) III. Landmess. V. Geh. Finanzrat Sudom. (Bd. 608.) IV. Ausgleichsrechnung. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. C. Hegemann. (Bd. 609.) V. Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie. Von Diplom.-Ing. S. Lischer. (Bd. 610.) VI. Kartenkunde. Von Finanzrat Dr.-Ing. A. Egger. I. Einführung. I. b. Kartenverständnis. 2. Kartenherstellung (Landesaufn.). (Bd. 611/612.) Kirche i. Staat u. A.; Kirche Abt. I.

Kolonien. Die deutschen. (Land u. Leute.) Von Dr. A. Heilborn. 3. Aufl. Mit 28. Abb. u. 8 Karten. (Bd. 98.)

Königstum. Französisches. Von Prof. Dr. R. Schwemer. (Bd. 574.)

Krieg. Kulturgeschichte d. Kr. Von Prof. Dr. R. Weule, Geh. Hofrat Prof. Dr. C. Weihe, Prof. Dr. B. Schmeidler, Prof. Dr. A. Doren, Prof. Dr. B. Herre. — Der Dreißigjährige Krieg. Von Dr. Fr. J. Endres. (Bd. 577.) — I. auch Feldherren.

Kriegsschiffe. Untere. Ihre Entstehung u. Verwendung. V. Geh. Mar.-Baur. a. D. C. Krieger. 2. Aufl. v. Geh. Mar.-Baur. Fr. Schärer. M. 62 Abb. (389.)

Luther, Martin u. d. dtische Reformation. Von Prof. Dr. B. Köhler. 2., verb. Aufl. M. 1. Bildn. Luthers. (Bd. 515.) — I. auch Von J. zu Bismarck.

Marr, Karl. Versuch einer Einföhrg. V. Prof. Dr. R. Wilbrandt. 2. A. (621.)

Mensch u. Erde. Skizzen v. den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von Geh. Rat Fr. J. Dr. A. Kirchhoff. 4. Aufl. — I. a. Eiszeit; Mensch Abt. V. (Bd. 31.)

Mittelalter. Mittelalterl. Kulturid. aie. V. Prof. Dr. B. Fedel. I.: Heldenleben. II.: Ritterromantik. (Bd. 292, 293.) — I. auch Städte u. Bürger i. M.

Moltke. Von Major F. C. Endres. Mit 1 Bildn. (Bd. 415.)

Münze. Grundriß d. Münzkunde. 2. Aufl. I. Die Münze nach Wesen, Gebrauch u. Bedeutung. V. Hofrat Dr. A. Luchin v. Ebengreuth. M. 56 Abb. II. Die Münze v. Altertum b. z. Gegenw. Von Prof. Dr. S. Buchenau. (Bd. 91, 657.) — I. a. Finanzwiss., Geldwesen Abt. VI.

Mykenische Kultur. Die. Von Prof. Dr. F. C. Lehmann-Haupt. (Bd. 581.)

Mythologie I. Abt. I.

Napoleon I. Von Prof. Dr. Th. Bitterau. 3. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 195.)

Rationalbewußtsein siehe Volk.

Natur u. Mensch. V. Dir. Prof. Dr. M. G. Schmidt. M. 19 Abb. (Bd. 458.)

Naturvölker. Die geistige Kultur der N. V. Prof. Dr. R. Th. Preuß. M. 9 Abb. — I. a. Völkertunde, allg. (Bd. 452.)

Neugriechenland. Von Prof. Dr. A. Geisenberg. (Bd. 613.)

Russland i. Australien.

Orient i. Indien, Palästina, Türkei.

Osten. Der Zug nach dem O. Die Großtat d. deutsch. Volkes i. Mittelalt. V. Geh. Hofrat Prof. Dr. Hampe. (Bd. 731.)

Östmark i. Abt. VI.

Österreich. O. s. innere Geschichte von 1848 bis 1895. V. R. Charabas. 3., veränd. Aufl. I. Die Vorherrschaft der Deutschen. II. Der Kampf der Nationen (651/652.) — Geschichte der auswärtigen Politik O. s. im 19. Jahrhundert. V. R. Charabas. 2., veränd. Aufl. I. Bis zum Sturze Metternichs. II. 1848—1895. (653/654.) — Österreichs innere u. äußere Politik von 1895—1914. V. R. Charabas. (655.)

Östseegebiet. Das. V. Prof. Dr. G. Braun. M. 21 Abb. u. 1 mehrf. Karte. (Bd. 367.) — I. auch Baltische Provinzen, Finnland.

Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. S. Frh. von Soden. 4. Aufl. Mit 1 Plan von Jerusalem u. 3 Anf. d. Heiligen Landes. (Bd. 6.) — V. u. i. Kultur in 5 Jahrtausenden. Nach d. neuest. Ausgrab. u. Forschungen dargestellt von Prof. Dr. B. Thomsen. 2., neubearb. Aufl. Mit 37 Abb. (260.)

Papsttum i. Kaiserium.

Papuri i. Antikes Leben.

Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- u. Südpol v. d. ältest. Zeiten bis zur Gegenwart. V. Prof. Dr. F. Hallert. 3. Aufl. M. 6 Kart. (Bd. 38.)

Polen. Mit einem geschichtl. Überblick ab. d. polnisch-ruthen. Frage. V. Prof. Dr. R. F. Kaindl. 2., verb. Aufl. M. 6 Kart. (547.)

Politik. V. Dr. A. Grabowski. (Bd. 537.) — Umrisse der Weltvolk. V. Prof. Dr. F. Gashagen. 3 Bde. I.: 1871—1907. 2. Aufl. II.: 1908—1914. 2. Aufl. III.: D. pol. Ereign. währ. d. Krieges. (Bd. 553/55.)

— **Politische Geographie.** Von Prof. Dr. B. Vogel. (Bd. 634.)

— **Politische Hauptströmungen** in Europa im 19. Jahrhundert. Von Prof. Dr. R. Th. v. Heigel. 4. Aufl. von Dr. Fr. Endres. (Bd. 129.)

Pompeji. eine hellenistische Stadt in Italien. Von Prof. Dr. Fr. v. Duhn. 3. Aufl. Mit 62 Abb. i. T. u. auf 1 Taf. sowie 1 Plan. (Bd. 114.)

Preussische Geschichte i. Brandenb.-pr. G. Reaktion und neue Ara i. Gesch., deutsche Reformation i. Calvin, Luther.

Reich. Das Deutsche N. von 1871 b. z. Weltkrieg. V. Archivrat Dr. F. Fraeul. (575.)

Religion i. Abt. I.

Restauration und **Revolution** siehe Geschichte, deutsche.

- Revolution. Geschichte der Französi. R. B. Prof. Dr. Th. Bitter auf. 2. Aufl. Mit 8 Bildn. (Bd. 346.)
— 1848. 6 Vorträge. Von Prof. Dr. O. Weber. 3. Aufl. (Bd. 53.)
Rom. Das alte Rom. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. O. Richter. Mit Bilderanhang u. 4 Plänen. (Bd. 386.)
— Die römische Republik. Von Privatdoz. Dr. A. Rosenberg. (Bd. 719.)
— Soziale Kämpfe i. alt. Rom. V. Privatdozent Dr. S. Bloch. 3. Aufl. (Bd. 22.)
— Roms Kampf um die Weltherrschaft. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. J. Promayer. (Bd. 368.)
Geschichte der Römer. Von Prof. Dr. R. v. Scafa. (Bd. 578.)
— siehe auch Hellenist.-röm. Religionsgeschichte Abt. I.; Pompeii Abt. III.
Rugland. Geschichte, Staat, Kultur. Von Dr. A. Luther. (Bd. 563.)
Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. D. Weise. 4. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 4.)
— s. a. Buch. Wie ein B. entsteht. Abt. VI.
Schweiz. Die. Land, Volk, Staat u. Wirtschaft. Von Reg.- u. Ständerat Prof. Dr. D. Wettstein. Mit 1 Karte. (Bd. 482.)
Seerriegel i. Kriegsschiff.
Sitten und Gebräuche in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. E. Samter. (682.)
Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von G. Moter. 6. Aufl. (Bd. 2.)
— s. a. Marx, Kom; Sozialismus. Abt. VI.
Staat. St. u. Kirche in ihr. gegenw. Verhältnis seit d. Reformation. V. Pfarrer Dr. phil. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)
— Dtsche. Städte u. Bürger i. Mittelalter. V. Prof. Dr. B. Heil. 3. Aufl. Mit zahlr. Abb. u. 1 Doppeltafel. (Bd. 43.)
— Verfassung u. Verwaltung d. deutschen Städte. V. Dr. M. Schmidt. (Bd. 466.)
— s. a. Griech. Städte, Pompei., Rom.
Sternglaube und Sternbedeutung. Die Geschichte u. b. Wesen d. Astrologie. Unt. Mitwirk. v. Geh. Rat Prof. Dr. E. Bezold dargestellt. v. Geh. Hofr. Prof. Dr. Fr. Volk. 2. Aufl. Sternl. u. 20 Abb. (638.)
Student. Der Leipziger. von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Studententum. Geschichte d. deutschen St. Von Dr. W. Bruchmüller. (Bd. 477.)
Türkel, Die. V. Reg.-Rat B. R. Kraus. Mit 2 Karten i. Text und auf 1 Tafel. 2. Aufl. (Bd. 469.)
Urzeit i. german. Kultur in der U.
Verfassung. Grundzüge der V. des Deutschen Reiches. Von Geheimrat Prof. Dr. E. Böning. 5. Aufl. (Bd. 34.)
Verfassungsrecht. Deutsches, in geschichtlicher Entwicklung. Von Prof. Dr. E. Hubrich. 2. Aufl. (Bd. 80.)
Vermessungs- u. Kartenkunde f. Kartent. Volk. Vom deutschen V. zum dt. Staat. Eine Gesch. d. dt. Nationalbewußtseins. V. Prof. Dr. B. Joachimsen. (Bd. 511.)
Völkerkunde, Allgemeine. I: Feuer, Nahrungserwerb, Wohnung, Schmutz und Kleidung. Von Dr. A. Heilborn. M. 54 Abb. (Bd. 487.) II: Waffen u. Werkzeuge, Industrie, Handel u. Geld, Verkehrsmittel. Von Dr. A. Heilborn. M. 51 Abb. (Bd. 488.) III: Die geistige Kultur der Naturvölker. Von Prof. Dr. R. Th. Breuß. M. 9 Abb. (Bd. 452.)
Vollsbräuche, deutsche, siehe Feste.
Vollkunde, Deutsche, im Grundr. Von Prof. Dr. E. Reuschel. I. Allgemeines, Sprache, Volksdichtung. (Bd. 644.)
— s. auch Bauernhaus, Feste, Sitten, Sterngläub., Volkstracht., Volksstämme.
Vollstämme, Die deutschen, und Vandschäften. Von Prof. Dr. D. Weise. 5., völlig umgearb. Aufl. Mit 30 Abb. i. Text u. auf 20 Taf. u. einer Dialektkarte Deutschlands. (Bd. 16.)
Volkstrachten, Deutsche. Von Pfarrer R. Spieß. Mit 11 Abb. (Bd. 342.)
Vom Bund zum Reich siehe Geschichte.
Von Jena bis zum Wiener Kongress. Von Prof. Dr. G. Koloff. (Bd. 465.)
Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbild. u. deutscher Gesch. V. Prof. Dr. O. Weber. 2 Bde. 2. Aufl. (Bd. 123/124.)
Vorgeschichte Europas. Von Prof. Dr. S. Schmidt. (Bd. 571/572.)
Weltgeschichte f. Christentum.
Welthandel f. Handel.
Weltpolitik f. Politik.
Wirtschaftsgeschichte, Antike. Von Privatdozent Dr. D. Neurath. 2., umgearbeitete Auflage. (Bd. 258.)
— s. a. Antikes Leben n. b. Ägypt. Pavari.
Wirtschaftsleben, Deutsches. Auf geogr. Grundl. gesch. V. Prof. Dr. Chr. Gruber. 4. Aufl. V. Dr. S. Reinlein. (42.)
— s. auch Abt. VI.

V. Mathematik, Naturwissenschaften und Medizin.

- Aberglaube, Der, in der Medizin u. s. Gefährliche. Von Dr. med. H. v. Hanemann. 2. Aufl. (Bd. 83.)
Abtammungs- und Vererbungslehre, Erperventuelle. Von Prof. Dr. E. Lehmann. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)
Abtammungslehre u. Darwinismus. V. Dr. R. Hesse. 5. Aufl. M. 40 Abb. (Bd. 39.)
Abwehrkräfte des Körpers. Die. Eine Einführung in die Immunitätslehre. Von Prof. Dr. med. H. Kämmerer. Mit 52 Abbildungen. (Bd. 479.)
Auktit, Einführung in die A. Von Prof. Dr. F. A. Schulze. (Bd. 622.)
Algebra siehe Arithmetik. [Bd. 601.]
Ameisen, Die. Von Dr. med. H. Brun.

- Anatomie d. Menschen, Die.** V. Prof. Dr. R. v. Bardeleben. 6 Bde. Jeder Bd. mit zahlr. Abb. (Bd. 418/423.) I. Zelle und Gewebe, Entwicklungsgeichte. Der ganze Körper. 3. Aufl. II. Das Skelett. 2. Aufl. III. Das Muskel- u. Gefäßsystem. 2. Aufl. IV. Die Eingeweide (Darm-, Atmungs-, Harn- und Geschlechtsorgane, Haut). 3. Aufl. V. Nervensystem und Sinnesorgane. VI. Mechanik (Statik u. Kinetik) d. menschl. Körpers (der Körper in Ruhe u. Bewegung). 2. Aufl. — siehe auch Wirbeltiere.
- Aquarium, Das.** Von E. W. Schmidt. Mit 15 Fig. (Bd. 335.)
- Arbeitsleistungen des Menschen, Die.** Einführung in d. Arbeitsphysiologie. V. Prof. Dr. S. Borutta u. M. 14 Fig. (Bd. 539.)
- **Verurteilung, Begabung u. Arbeitsleistung in t. gegens. Beziehungen.** Von W. S. Kuttann. Mit 7 Abb. (Bd. 522.)
- Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht.** Von Prof. B. Cranz 2 Bände. I.: Die Rechnungsarten. Gleichungen 1. Grades mit einer u. mehreren Unbekannten. Gleichungen 2. Grades. 6. Aufl. M. 9 Fig. i. Text. II.: Gleichungen, Arithmetik u. geometr. Reih. Binomials- u. Rentenrech. Kompl. Zahlen. Binom. Lehrsatz. 4. Aufl. M. 21 Fig. (Bd. 120, 205.)
- Arzaimittel und Genußmittel.** Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
- Arzt, Der.** Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenwart. Ein Leit-faden der sozialen Medizin. Von Dr. med. M. Fürst. 2. Aufl. (Bd. 265.)
- Astronomie. Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit.** 2. Aufl. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. I. Probleme der mod. Astronomie. Mit 11 Fig. (Bd. 355.) II. Mod. Astronomie. (Bd. 445.)
- **Die A. in ihrer Bedeutung für das praktische Leben.** Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)
- siehe auch Mond, Planeten, Sonne, Weltall, Weltbild; Stern Glaube. Abt. I. Atome f. Materie.
- Aug. Das, und die Brille.** Von Prof. Dr. M. v. Rohr. 2. Aufl. Mit 84 Abb. u. 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)
- Ausgleichsrechn. f. Kartenbe.** Abt. IV
- Bakterien, Die.** im Haushalt und der Natur des Menschen. Von Prof. Dr. E. Gutzzeit. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (242.)
- **Die krankheitserregenden Bakterien.** Grundtatsachen d. Entsch., Heilung u. Verhütung d. bakteriellen Infektionskrankheiten d. Menschen. V. Prof. Dr. M. Boehlein. 2. Aufl. M. 33 Abb. (Bd. 307.)
- **f. a. Abwehrkräfte, Desinfektion, Pilze, Schädlinge.**
- Bau u. Tätigkeit d. menschl. Körpers.** Einf. in die Physiologie d. Menschen. V. Prof. Dr. S. Sachs. 4. Aufl. M. 34 Abb. (Bd. 32.)
- Begabung f. Arbeitsleistung.**
- Befruchtung und Ferkung.** Von Dr. E. Reichmann. 2. Aufl. M. 9 Abb. u. 4 Doppeltafeln. (Bd. 70.)
- Bewegungslehre f. Mechan.,** Aufg. a. o. M. I.
- Steine, Die.** Von Prof. Dr. E. Sander. (Bd. 705.)
- Biochemie.** Einführung in die B. in elementarer Darstellung. Von Prof. Dr. W. Löb. Mit 12 Fig. 2. Aufl. v. Prof. Dr. S. Friedenthal. (Bd. 352.)
- Biologie, Allgemeine.** Einführ. i. d. Hauptprobleme d. organ. Natur. V. Prof. Dr. S. Liehe. 2. Aufl. 52 Fig. (Bd. 130.)
- **Experimentelle, Regeneration, Transplanat, und verwandte Gebiete.** Von Dr. E. Theising. Mit 1 Tafel und 69 Textabbildungen. (Bd. 337.)
- siehe a. Abstammungslehre, Bakterien, Befruchtung, Fortpflanzung, Lebewesen, Organismen, Schädlinge, Tiere, Urtiere.
- Blumen.** Unsere Bl. u. Pflanzen im Garten. Von Prof. Dr. A. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)
- **Uns. Bl. u. Pflanzen i. Zimmer.** V. Prof. Dr. A. Dammer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)
- Blut, Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen.** Von Prof. Dr. S. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
- Botanik. B. d. praktischen Lebens.** V. Prof. Dr. B. Gisevius. M. 24 Abb. (Bd. 173.)
- siehe Blumen, Lebewesen, Pflanzen, Pilze, Schädlinge, Wald; Kolonialbotanik, Tabak Abt. VI.
- Brille f. Auge u. d. Brille.**
- Chemie.** Einführung in die allg. Ch. B. Studienrat Dr. B. Davinl. 2. Aufl. Mit zahlr. Fig. (Bd. 382.)
- **Einführ. i. d. organ. Chemie: Natürl. u. künstl. Bilanz- u. Terzoi. B. Studienrat Dr. B. Davinl. 2. Aufl. 9 Abb. (187.)**
- **Einführung i. d. anorganische Chemie.** B. Studienrat Dr. B. Davinl. (598.)
- **Einführung i. d. analyt. Chemie.** B. Dr. F. Rüsberg. 2 Bde. (Bd. 524, 525.)
- **Die künstliche Herstellung von Naturstoffen.** B. Prof. Dr. E. Rüti. (Bd. 674.)
- **Ch. in Küche und Haus.** Von Dr. F. Klein. 4. Aufl. (Bd. 76.)
- siehe a. Biochemie, Elektrochemie, Luft, Phosphor; Agrilkultur, Sprengstoffe, Technik, Chem. Abt. VI.
- Chemikalienkunde.** Von Chemiker Emil Drechsler. (Bd. 728.)
- Chirurgie, Die.** unserer Zeit. Von Prof. Dr. F. Feßler. Mit 52 Abb. (Bd. 339.)
- Darwinismus, Abstammungslehre und D.** Von Prof. Dr. R. Hesse. 5. Aufl. Mit 40 Textabb. (Bd. 39.)
- Desinfektion, Sterilisation und Konservierung.** Von Reg. u. Med.-Rat Dr. D. Solbrig. M. 20 Abb. i. T. (Bd. 401.)

Differentialrechnung unter Berücksichtig. d. prakt. Anwendung in der Technik mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. M. 45 Fig. i. Text u. 161 Aufg. (387.)
 — siehe a. Integralrechnung.
 Drogenkunde. V. Chem. E. Drechsler. (727.)
 Dynamik i. Mechanik. Aufg. a. d. techn. M. 2. Bd., ebenso Thermodynamik.
 Eiszeit, Die. u. der vorgesch. Mensch. Von Geh. Bergr. Prof. Dr. G. Steinmann. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 302.)
 Elektrochemie u. ihre Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Arndt. 2. Aufl. Mit 37 Abb. i. T. (Bd. 234.)
 Elektrotechnik. Grundlagen der E. Von Oberingenieur A. Kottb. 2. Aufl. Mit 74 Abb. (Bd. 391.)
 Energie. D. Lehre v. d. E. G. Oberlehr. A. Stein. 2. Aufl. M. 13 Fig. (Bd. 257.)
 Entwicklungsgeschichte d. Menschen. V. Dr. A. Heilborn. M. 60 Abb. (Bd. 388.)
 Erde i. Weltentstehung u. -untergang
 Ernährung und Nahrungsmittel. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Funke. 3. Aufl. Mit 6 Abb. i. T. u. 2 Taf. (19.)
 Experimentalchemie f. Luft usw.
 Experimentalphysik f. Physik.
 Farben f. Licht u. F.: f. a. Farben Abt. VI. Festigkeitslehre f. Statik.
 Firkerne, Die. V. Dr. Aug. Kahl. (677.)
 Fortpflanzung. F. und Geschlechtsunterschiede d. Menschen. Eine Einführung in die Sexualbiologie. V. Prof. Dr. S. Bortuttan. 2. Aufl. M. 39 Abb. (Bd. 540.)
 Garten. Der Kleing. Von Redakteur Joh. Schneider. 2. Aufl. M. 80 Abb. (498.)
 — Der Hausgarten. Von Gartenarchitekt B. Schubert. Mit Abb. (Bd. 502.)
 — siehe auch Blumen, Pflanzen; Gartenkunst, Gartenstadtbewegung Abt. VI.
 Gebirg. Das menschl. f. Erkrank. u. Pflege. V. Zahnarzt Fr. Jäger. M. 24 Abb. (229.)
 Geisteskrankheiten. V. Geh. Med.-Rat Oberstaabsarzt Dr. G. Alberg. 2. Aufl. (151.)
 Genußmittel siehe Arzneimittel u. Genußmittel; Tabak Abt. VI.
 Geographie f. Abt. IV.
 — Math. G. f. Astronomie u. Erdkunde Abt. IV.
 Geologie. Allgemeine. V. Geh. Bergr. Prof. Dr. Fr. Frech. 6 Bde. (Bd. 207/211 u. Bd. 61.) I.: Kulkane einst und jetzt. 3. Aufl. M. Titelbild u. 78 Abb. II.: Gebirgsbau und Erdbeben. 3., wes. erw. Aufl. M. Titelbild u. 57 Abb. III.: Die Arbeit des fließenden Wassers. 3. Aufl. M. 56 Abb. IV.: Die Bodenbildung. Mittelgebirgsformen u. Arbeit des Ozeans. 3., wes. erw. Aufl. Mit 1 Titelbild u. 68 Abb. V.: Steintohle, Wästen u. Klima der Vorzeit. 3. Aufl. Mit 39 Abb. VI.: Gletscher einst u. jetzt. 3. Aufl. Mit 46 Abb. im Text.
 — f. a. Kohlen, Salzlagertstätten. Abt. VI.

Geometrie. Analyt. G. d. Ebene u. Selbstunterricht. Von Prof. B. Franke. 2. Aufl. Mit 55 Fig. (Bd. 504.)
 — Geometr. Zeichen. Von Zeichenlehrer A. Schudeis. (Bd. 568.)
 — f. a. Mathematik.
 Geomorphologie f. Allgem. Erdkunde.
 Geschlechtskrankheiten, Die. ihr Wesen, ihre Verbreitg., Bekämpfg. u. Verhütung. Für Gebildete aller Stände bearb. v. Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 4. Aufl. Mit 4 Abb. u. 1 mehrfarb. Taf. (251.)
 Geschlechtsunterschiede f. Fortpflanzung.
 Gesundheitslehre. Von Obermed.-Rat Prof. Dr. M. v. Gruber. 4. Aufl. Mit 26 Abbildungen. (Bd. 1.)
 — G. für Frauen. Von Dir. Prof. Dr. R. Baish. 2. Aufl. M. 11 Abb. (538.)
 — f. a. Abwehrkräfte, Bakterien, Peisesüb.
 Graph. Darstellung. Die. V. Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Figuren. (Bd. 437.)
 Haushalt siehe Bakterien, Chemie, Desinfektion, Naturwissenschaften, Hygien. Haustiere. Die Stammesgeschichte unserer D. Von Prof. Dr. C. Keller. 2. Aufl. Mit 29 Figuren. (Bd. 252.)
 — f. a. Kleintierzucht, Eierzucht. Abt. VI.
 Herz. Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. G. Kölin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
 Hygiene f. Schulhygiene, Stimme.
 Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. C. Trömmner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
 Immunitätslehre f. Abwehrkräfte d. Körper.
 Infinitesimalrechnung. Einführung in die F. Von Prof. Dr. G. Kowalewitsch. 3. Aufl. Mit 19 Fig. (Bd. 197.)
 Integralrechnung mit Aufgabensammlung. V. Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit Fig. (Bd. 678.)
 Kalender. Der. Von Prof. Dr. B. F. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)
 Kälte, Die. Wesen, Erzeug. u. Benwert. Von Dr. G. Alt. 45 Abb. (Bd. 311.)
 Kinematographie f. Abt. VI.
 Konfervierung siehe Desinfektion.
 Korallen u. and. Gesteinbild. Tiere. V. Prof. Dr. M. An. Mit 45 Abb. (Bd. 231.)
 Kosmetik. Ein kurzer Abriss der ärztlichen Verschönerungskunde. Von Dr. F. Sander. Mit 10 Abb. im Text. (Bd. 489.)
 Lebewesen. Die Beziehungen der Tiere und Pflanzen zueinander. Von Prof. Dr. K. Kraedelin. 2. Aufl. I. Der Tiere zueinander. M. 64 Abb. II. Der Pflanzen zueinander u. zu d. Tieren. Mit 68 Abb. (Bd. 426/427.)
 — f. a. Biologie, Organismen, Schädlinge, Leib und Seele. Von Dr. phil. et med. G. Sommer. (Bd. 702.)
 Peisesübungen. Die. und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Von Prof. Dr. R. Sander. 4. Aufl. M. 20 Abb. (13.)
 — f. auch Turnen.

- Licht, Das, u. d. Farben.** Einführung in die Optik. Von Prof. Dr. A. Graeb. 4. Aufl. Mit 100 Abb. (Bd. 17.)
- Luft, Wasser, Licht und Wärme.** Neun Vorträge aus d. Gebiete d. Experimentalkemie. V. Geh. Reg.-Rat Dr. R. Blochmann. 4. Aufl. M. 115 Abb. (Bd. 5.)
- Luftstickstoff, D., u. f. Verwertg.** V. Prof. Dr. R. Kaiser. 2. A. M. 13 Abb. (313.)
- Milch und Meisen.** Von Dr. B. Bloch. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)
- Materie, Das Wesen d. M. B.** Prof. Dr. G. Mie. I. Moleküle und Atome. 4. A. Mit 25 Abb. II. Weltäther und Materie. 4. Aufl. Mit Fig. (Bd. 58/59.)
- Mathematik. Einführung in die Mathematik.** Von Oberlehrer W. Mendelssohn. Mit 42 Fig. (Bd. 503.)
- **Math. Formelsammlung.** Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik. Von Prof. Dr. S. Jacobi. (Bd. 567.)
- **Naturwissensch. u. M. i. klass. Altertum.** Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. Mit 2 Fig. (Bd. 370.)
- **Praktische M.** Von Prof. Dr. A. Neuenborff. I. Graphische Darstellungen. Verfürgtes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufmännisches Rechnen i. ägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verb. A. M. 29 Fig. i. T. u. 1 Taf. II. Geom. Zeichnen. Projektionsl. Flächenmessung. Körpermessung. M. 133 Fig. (341, 526.)
- **Mathemat. Spiele.** V. Dr. W. Ahrens. 3. Aufl. M. Lueh. u. 77 Fig. (Bd. 170.)
- **I. a. Arithmetik, Differentialrechnung, Geometrie, Infinitesimalrechnung, Integralrechnung, Perspektiv, Planimetrie, Projektionslehre, Trigonometrie, Vektorrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung.**
- Mechanik.** Von Prof. Dr. H. Hamel. 3 Bde. I. Grundbegriffe der M. II. M. d. festen Körper. III. M. d. flüss. u. luftförm. Körper. (Bd. 684/686.)
- **Aufgaben aus d. techn. Mechanik für den Schul- u. Selbstunterricht.** V. Prof. R. Schmitt. I. Bewegungs- u. Statik. 156 Aufg. u. Bsp. II. Dynamik. 140 Aufg. u. Bsp. m. zahlr. Fig. i. T. (558/559.)
- **siehe auch Statik.**
- Meer.** Das M., i. Erforsch. u. f. Leben. Von Prof. Dr. O. Janson. 3. A. M. 408. (Bd. 30.)
- Mensch u. Erde.** Skizzen v. d. Wechselbezieh. zwischen beiden. Von Geh. Rat Prof. Dr. A. Kirchhoff. 4. Aufl. (Bd. 31.)
- **Die Rassen der Menschen.** Von Prof. Dr. E. Fischer. (Bd. 624.)
- **f. Eiszeit, Entwicklungsgesch. Urzeit.**
- **Natur u. Mensch** siehe Natur.
- Menschl. Körper.** Bau u. Tätigkeit d. menschl. K. Einführ. i. d. Physiol. d. M. V. Prof. Dr. H. Sachs. 4. Aufl. M. 34 Abb. (32.)
- **f. auch Anatomie, Arbeitsleistungen, Auge, Blut, Fortpflanzg., Gebh., Herz, Nervensystem, Physiol., Sinne, Verbild.**
- Mikroskop, Das.** B. Prof. Dr. B. Schefker. 2. Aufl. Mit 99 Abb. (Bd. 35.)
- Moleküle f. Materie.**
- Mond, Der.** Von Prof. Dr. J. Franz. 2. Aufl. Mit 34 Abb. (Bd. 90.)
- Nahrungsmittel f. Ernährung u. N.**
- Natur u. Mensch.** V. Direkt. Prof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abb. (Bd. 458.)
- Naturlehre.** Die Grundbegriffe der modernen N. Einführung in die Physiol. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 4. Aufl. Mit 71 Fig. (Bd. 40.)
- Naturphilosophie, Die mod. B. Privatdoz. Dr. J. M. Berwien.** 2. A. (Bd. 491.)
- Naturwissenschaft, Religion und N. in Kampf u. Frieden.** Ein geschichtl. Rückblick V. Farrer Dr. A. Pfannluche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
- **N. und Technik.** Am tausenden Wechsuhl d. Zeit. Übersicht üb. d. Wirkungen d. Naturw. u. Technik a. d. ges. Kulturleben. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. B. Saunhardt. 3. Aufl. M. 3 Abb. (23.)
- **N. u. Math. i. klass. Altert.** V. Prof. Dr. J. L. Heiberg. 2 Fig. (Bd. 370.)
- Nerven.** Vom Nervensystem. sein. Bau u. sein. Bedeutung für Leib u. Seele im gesund. u. krank. Zustande. V. Prof. Dr. R. Sander. 3. Aufl. M. 27 Abb. (Bd. 48.)
- **siehe auch Anatomie.**
- Optik.** Die opt. Instrumente. Lupe, Mikroskop, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen verwandte Instr. V. Prof. Dr. M. a. Rohr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (88.)
- **f. a. Auge, Brille, Kinemat., Licht u. Farbe, Mikrosk., Spektroskopie, Strahlen.**
- Organismen.** D. Welt d. D. In Entwickl. und Zusammenhang dargestellt. Von Oberstudienrat Prof. Dr. R. Lambert. Mit 52 Abb. (Bd. 236.)
- **siehe auch Lebewesen.**
- Paläozoologie** siehe Tiere der Vorwelt.
- Perspektive.** Die Grundzüge d. P. nebst Anmendg. V. Prof. Dr. R. Doehleman. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bd. 510.)
- Pflanzen.** Die fleischfress. Pfl. V. Prof. Dr. A. Wagner. Mit 82 Abb. (Bd. 344.)
- **Unf. Blumen u. Pfl. i. Garten.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 69 Abb. (Bd. 360.)
- **Unf. Blumen u. Pfl. i. Zimmer.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)
- **f. auch Botanik, Garten, Lebewesen, Pilze, Schädlinge.**
- Pflanzenphysiologie.** V. Prof. Dr. S. Mooslich. Mit 63 Fig. (Bd. 569.)
- Photochemie.** Von Prof. Dr. G. Rummell. 2. Aufl. Mit 23 Abb. i. Text u. a. 1 Taf. (Bd. 227.)
- Photographie** f. Abt. VI.
- Physiol.** Berdegang d. mod. Ph. V. Oberl. Dr. S. Keller. 2. Aufl. M. Fig. (343.)
- **Experimentalphysiol. Gleichgewicht u. Bewegung.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Bornstein. M. 90 Abb. (371.)

- Physik.** Ph. I. Küche u. Haus. B. Student. D. Speittamp M. 51 Abb. (Bd. 478.)
— Große Physiker. Von Prof. Dr. F. A. Schulze 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (324.)
— f. auch Energie, Naturlehre, Optik, Relativitätstheorie, Wärme; ebenso Elektrotechnik Abt. VI.
- Physiologie.** Ph. d. Menschen. B. Privatdoz. Dr. A. Lipschütz. 4 Bde. I: Allgem. Physiologie. II: Physiologie d. Stoffwechsels. III: Ph. d. Atmung, d. Kreislaufs u. d. Ausscheidung. IV: Ph. der Bewegungen und der Empfindungen. (Bd. 527—530.)
— siehe auch Arbeitsleistungen, Menschl. Körper, Bilanzphysiologie.
- Pflanze.** Die. Von Dr. A. Eichinger. Mit 1. a. Batterien. (64 Abb. (Bd. 334.)
- Planeten.** Die. Von Prof. Dr. B. Vetter. 2. Aufl. Von Dr. S. Raumann u. Mit Figuren. (Bd. 240.)
- Planimetrie** z. Selbstunterricht. B. Prof. B. Cranz. 2. Aufl. M. 94 Fig. (340.)
- Praktische Mathematik** f. Mathematik.
- Projektionstheorie.** In kurzer leichtfaßlicher Darstellung f. Selbstunterricht. u. Schulgebr. Von Zeichenl. A. Schudeitsky. Mit 208 Fig. im Text. (Bd. 564.)
- Radium.** Das. u. d. Radioaktivität. B. Dr. M. Centner u. J. W. 2. Aufl. M. 33 Abb. Rassen f. Mensch. (Bd. 405.)
- Rechenmaschinen.** Die, und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. R. Lenz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
- Relativitätstheorie.** Einführung in die. M. 16 Fig. B. Dr. W. Bloch (Bd. 618.)
- Röntgenstrahlen.** D. R. u. ihre Anwendg. B. Dr. med. G. Buchy. M. 85 Abb. i. T. u. auf 4 Tafeln. (Bd. 556.)
- Säuglingspflege.** Von Dr. E. Kobrak. Mit 20 Abb. (Bd. 154.)
- Schachspiel.** Das, und seine strategischen Prinzipien. B. Dr. M. Lange. 3. Aufl. Mit 2 Bildn., 1 Schachbretttafel u. 43 Diagrammen. (Bd. 281.)
— Die Hauptvertreter der Schachvielfachheit u. d. Eigenart ihrer Spielführung. Von Dr. M. Lange. (Bd. 531.)
- Schädlinge.** Die, im Tier- u. Pflanzenreich u. i. Bekämpfung. B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Eßfeldt. 3. A. M. 36 Fig. (18.)
- Schulthgiene.** Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 43 Fig. (Bd. 96.)
- Serualbiologie** f. Fortpflanzung, Pflanzen. Serualtheil. B. Prof. Dr. S. E. Timplerding. (Bd. 592.)
- Sinne d. Mensch.** D. Sinnesorgane u. Sinneempfindungen. B. Hoirat Prof. Dr. J. Kreisbig. 3. Aufl. M. 30 Abb. (27.)
- Sonne.** Die. Von Dr. A. Krause. Mit 64 Abb. (Bd. 357.)
- Spektroskopie.** Von Dr. L. Grebe. 2. Aufl. Mit Abbild. (Bd. 284.)
- Spiele** siehe Mathem. Spiele, Schachspiel.
- Sprache.** Die menschliche Sprache. (Ihre Entwicklung beim Kinde, ihre Gebräuche und deren Heilung.) Von Lehrer R. Nidel. (Bd. 586.)
— siehe auch Rhetorik, Sprache Abt. III.
- Statik.** Mit Einschluß der Festigkeitslehre. B. Baugewerkschuldirektor Reg.-Baum. A. Schau. Mit 149 Fig. i. T. (Bd. 497.)
— siehe auch Mechanik.
- Sterilisation** siehe Desinfektion.
- Stickstoff** f. Luftstickstoff.
- Stimme.** Die menschliche St. und ihre Hygiene. Von Geh. Med.-Rat Prof. Dr. B. S. Gerber. 3., verb. Aufl. Mit 21 Abb. (Bd. 136.)
- Strahlen.** Sichtbare u. unsichtb. B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Börnstein u. Prof. Dr. W. Marckwald. 3. Aufl. v. Prof. Dr. E. Regener. M. zahlr. Abb. (Bd. 64.)
- Suggestion.** Hypnotismus und Suggestion. B. Dr. E. Trömmner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
- Süßwasser-Plankton.** Das. B. Prof. Dr. O. Zacharias. 2. A. 57 Abb. (Bd. 156.)
- Tabak.** Der. Von Prof. J. Wolf. 2. Aufl. Mit 17 Abb. i. T. (Bd. 416.)
- Thermodynamik** f. Abt. VI.
- Tiere.** I. der Vorwelt. Von Prof. Dr. D. Abel. Mit 31 Abb. (Bd. 399.)
— Die Fortpflanzung der I. B. Prof. Dr. R. Goldschmidt. Mit 77 Abb. (Bd. 253.)
— Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie. Von Privatdozent Dr. R. Hennings. Mit 34 Abb. (Bd. 142.)
— Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere. Von Prof. Dr. D. Maas. Mit 11 Karten und Abb. (Bd. 139.)
— Zweigelt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus). Von Dr. Fr. Rnauer. Mit 37 Fig. (Bd. 148.)
— f. auch Aquarium, Bakterien, Bienen, Haustiere, Korallen, Lebewesen, Schädlinge, Artiere, Vogelleben, Vogelzug, Wirbeltiere.
- Tierzucht** siehe Abt. VI: Kleintierzucht, Tierzüchtung.
- Trigonometrie.** Ebenz. z. Selbstunterricht. B. Student. B. Cranz. 2. A. M. 50 Fig. (Bd. 431.)
- Sphärische Tr. B. Student. B. Cranz. (Bd. 605.)
- Tuberkulose.** Die. Wesen, Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 3. Aufl. M. 1 Taf. u. 8 Fig. (Bd. 47.)
- Ursen.** Von Oberl. F. Eckardt. Mit 1 Bildnis Jahns. (Bd. 583.)
— f. auch Leibesübungen, Anatomie d. Menschen Bd. VI.
- Urtiere.** Die. Einführung i. d. Wissenschaft vom Leben. Von Prof. Dr. R. Goldschmidt. 2. A. M. 44 Abb. (Bd. 160.)

Arzeit. Der Mensch d. U. Vier Vorlesung. aus der Entwicklungsgeschichte des Menschengeschlechts. Von Dr. A. Heilborn. 3. Aufl. Mit 47 Abb. (Bd. 62.)
Beltorrechnung. Einführung in die B. V. Prof. Dr. F. Jung. (Bd. 668.)
Verbildungen. Körperliche, im Kindesalter u. ihre Verhütung. Von Dr. M. David. Mit 26 Abb. (Bd. 321.)
Vererbung. Erv. Abstammgs.- u. V. Lehre. Von Prof. Dr. E. Lehmann. Mit 20 Abbildungen. (Bd. 379.)
 — Geistige Veranlagung u. B. V. Dr. phil. et med. G. Sommer. 2. Aufl. (512.)
Vogelleben. Deutsches. Zugleich als Exkursionsbuch für Vogelfreunde. V. Prof. Dr. A. Voigt. 2. Aufl. (Bd. 221.)
Vogelzug und Vogelschau. Von Dr. W. R. Schardt. Mit 6 Abb. (Bd. 218.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einfuhr. in die. Von Prof. Dr. R. Süssmilch. (Bd. 580.)
Wald. Der dtische. V. Prof. Dr. G. Hausath. 2. Aufl. M. Bilderatb u. 2. Karten. — siehe auch Holz Abt. VI. (Bd. 153.)
Wärme. Die Lehre v. d. W. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Börnstein. Mit 166. 2. Aufl. v. Prof. Dr. A. Bigand. (172.)
 — I. a. Luft, Wärmestrahlung, Wärmelehre, techn. Thermodynamik Abt. VI.
Wasser. Das. Von Geh. Reg.-Rat Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)

Weidwerk. D. dtische. V. Forststr. G. Febr. v. Nordenflicht. M. Titelfb. (Bd. 436.)
Weltall. Der Bau des W. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 4. Aufl. M. 26 Fig. (Bd. 24.)
Weltäther s. Materie.
Weltbild. Das astronomische W. im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. E. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 19 Abb. (Bd. 110.)
 — siehe auch Astronomie.
Weltentstehung. Entstehung d. W. u. d. Erde nach Sage u. Wissen. V. Prof. Dr. M. B. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)
Weltuntergang. Untergang der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. V. Prof. Dr. M. B. Weinstein. (Bd. 470.)
Wetter. Unser W. Einfuhr. i. d. Klimatol. Deutschl. V. Dr. R. Sennig. 2. Aufl. Mit 14 Abb. (Bd. 349.)
 — Einfuhrung in die Wetterkunde. Von Prof. Dr. L. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abb. u. 3 Taf. (Bd. 55.)
Wirbeltiere. Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane der W. Von Prof. Dr. W. Lubowich. Mit 107 Abb. (Bd. 282.)
Zahnheilkunde siehe Gebiß.
Zellen- und Gewebelehre siehe Anatomie des Menschen, Biologie.
Zoologie s. AbstammungsL., Aquarium, Bienen, Biologie, Schädlinge, Tiere, Urtiere, Vogelleben, Vogelzug, Weidwerk, Wirbeltiere.

VI. Recht, Wirtschaft und Technik.

Agrikulturchemie. Von Dr. B. Fritsche. Mit 21 Abb. (Bd. 314.)
Angestellte siehe Kaufmännische V.
Antike Wirtschaftsgeschichte. V. Priv.-Doz. Dr. O. Neurath. 2., umgearb. A. (258.)
 — siehe auch Antikes Leben Abt. IV.
Arbeiterchutz und Arbeiterversicherung. V. Geh. Hofrat Prof. Dr. O. v. Zwiebined-Südenhorst. 2. Aufl. (78.)
Arbeitsleistungen des Menschen. Die Einfuhr in d. Arbeitsphysiologie. V. Prof. Dr. G. Boruttan. M. 14 Fig. (Bd. 539.)
 — Berufswahl, Vergabung u. A. in ihrem gegenseitigen Beziehungen. Von W. J. Ruttmann. Mit 7 Abb. (Bd. 522.)
Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. D. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
Agst. Dr. Seine Stellung und Ausgaben im Kulturleben der Gegenw. Von Dr. med. M. Fürst. 2. Aufl. (Bd. 265.)
Automobil. Das. Eine Einf. in d. Bau d. heut. Berionen-Kraftwagens. V. Dr.-Ing. R. Blau. 3., überarb. Aufl. M. 98 Abb. u. 1 Titelfb. (Bd. 166.)
Baukunde s. Eisenbetonbau.
Baukunst siehe Abt. III.
Beleuchtungsweisen. Das moderne. Von Ing. Dr. S. Lur. M. 54 Abb. (Bd. 433.)
Bergbau. Von Bergassessor F. B. Wedding. (Bd. 467.)

Bewegungslehre s. Mechan., Aufg. a. d. M.
Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Bilanz s. Buchhaltung u. B.
Blumen. Aufz. Bl. u. Pfl. i. Garten. Von Prof. Dr. R. Dammmer. M. 69 Abb. (360.)
 — Aufz. Bl. u. Pfl. i. Zimmer. V. Prof. Dr. U. Dammmer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)
 — siehe auch Garten.
Brauerei s. Bierbrauerei.
Buch. Wie ein B. entsteht. V. Prof. U. B. Unger. 4. Aufl. M. 7 Taf. u. 26 Abb. im Text. (Bd. 175.)
 — I. a. Schrift- u. Buchweisen Abt. IV.
Buchhaltung u. Bilanz. Kaufm., und ihre Beziehungen z. buchhalter. Organisation, Kontrolle u. Statistik. V. Dr. P. Gerstner. 2. Aufl. M. 4 schemat. Darst. (507.)
Chemie in Küche und Haus. Von Dr. J. Klein. 4. Aufl. (Bd. 76.)
 — I. auch Agrikulurchemie, Elektrochemie, Farben, Sprengstoffe, Technik; ferner Chemie Abt. V.
Dampfessel siehe Feuerungsanlagen.
Dampfmaschine. Die. Von Geh. Bergrat Prof. R. Patex. 2 Bde. I: Wirkungsweise des Dampfes im Kessel und in der Maschine. 4. Aufl. M. 37 Abb. (Bd. 393.)
 II: Ihre Gestaltung und Verwendung. 2. Aufl. Mit 105 Abb. (Bd. 394.)

Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- und Med.-Rat Dr. D. Solbrig. Mit 20 Abb. (Bd. 401.)
 Deutsch f. Handel, Handwerk, Landwirtschaft, Bekleidung, Webwerk, Wirtschaftsleben, Zivilprozessrecht; Reich. Abt. IV. Drähte u. Kabel, ihre Anfertigung u. Anwend. i. d. Elektrotech. 3. Teil.-Zus. S. Fried. 2. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 285.)
 Dynamik f. Mechanik, Aufg. a. d. M. 3. Bd., ebenso Thermodynamik.
 Eisenbahnwesen. Das. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinsp. a. D. Dr.-Ing. E. Stiebermann. 3. Aufl. M. 1. Jahr. 1895. (Bd. 144.)
 Eisenbahnbau, Der. B. Dipl.-Ing. E. Saimovici. 2. Aufl. Mit 82 Abb. i. T. sowie 6 Rechnungsbeisp. (Bd. 275.)
 Eisenhüttenwesen. Das. Von Geh. Bergz. Prof. Dr. S. Webbing. 5. Aufl. v. Bergass. F. W. Webbing. M. 22 Abb. (Bd. 20.)
 Elektrische Kraftübertragung. Die. B. Ing. B. Pöhn. Mit 137 Abb. (Bd. 424.)
 Elektrotechnik. Von Prof. Dr. R. Arndt. Mit 37 Abb. (Bd. 284.)
 Elektrotechnik. Grundlagen d. G. B. Obering. A. Kottb. 2. Aufl. M. 74 Abb. (391.)
 — f. auch Drähte u. Kabel, Telegraphie.
 Erbrecht. Testamentserrichtung und G. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)
 Ernährung u. Nahrungsmittel f. Abt. V. Farben u. Farbstoffe. F. Erzeug. u. Verwendung. S. Dr. A. Bart. 31 Abb. (Bd. 488.)
 — siehe auch Licht Abt. V.
 Fernsprechtechnik f. Telegraphie.
 Feuerungsanlagen, Industr. u. Dampfkessel. B. Ing. F. E. Mayer. 88 Abb. (Bd. 348.)
 — siehe auch Geldwesen.
 Funken Telegraphie siehe Telegraphie.
 Fürsorge f. Kinderl., Kriegsbeschädigten, Garten. Der Kleingarten. B. Redakt. Joh. Schneider. 2. Aufl. M. 80 Abb. (498.)
 — Der Hausgarten. Von Gartenarchitekt B. Schubert. Mit 15 Abb. (Bd. 502.)
 — siehe auch Blumen.
 Gartenkunst. Gesch. d. G. B. Baurat Dr.-Ing. Chr. R. and. M. 41 Abb. (Bd. 274.)
 Gartenkadbewegung. Die. Von Landeswohnungsinsp. Dr. S. Kampffmeyer. 2. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 259.)
 Gefängniswesen f. Verbrechen.
 Geldwesen, Zahlungsverkehr u. Vermögensverwaltung. Von G. Maier. 2. Aufl. (398.)
 — f. a. Finanzwissensch.; Münze Abt. IV.
 Genussmittel siehe Arzneimittel und Genussmittel, Tabak.
 Gewerblicher Rechtsschutz, Deutschland. B. Patentanw. B. Löffelsohl. (Bd. 138.)
 — siehe auch Urheberrecht.
 Graphische Darstellung. Die. B. Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. Aufl. M. 139 Abb. (437.)
 Handel. Geschichte d. Welt. Von Realschulgymnasialdirektor Prof. Dr. M. G. Schmidt. 3. Aufl. (Bd. 118.)

Handel. Geschichte d. deutsch. Handels seit d. Ausgang des Mittelalters. Von Dir. Prof. Dr. B. Langenbeck. 2. Aufl. Mit 16 Tabellen. (Bd. 237.)
 Handfeuerwaffen. Die. Entwickl. u. Techn. B. Major R. Weis. 69 Abb. (Bd. 364.)
 Handwerk, D. Deutsche, in f. Kulturgeschichtl. Entwickl. B. Geh. Schur. Dr. E. Otto. 4. Aufl. M. 33 Abb. auf 12 Taf. (Bd. 14.)
 Haushalt f. Chemie, Desinfekt., Physik; Nahrungs- u. Abt. IV; Bakter. Abt. V.
 Häuserbau siehe Baukunde, Beleuchtungsweisen, Heizung u. Lüftung, Wohnungs- u. Debeuge. Hilfsmittel zum Leben fester, flüssiger und gasf. Körper. Von Geh. Bergz. Prof. R. Vater. 2. Aufl. M. 67 Abb. (Bd. 196.)
 Heizung und Lüftung. Von Ingenieur F. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
 Holz. Das D., seine Bearbeitung u. seine Verwendung. B. Insp. F. Großmann. Mit 39 Originalabb. i. T. (Bd. 473.)
 Hotelwesen. Das. Von B. Damm- Etienne. Mit 30 Abb. (Bd. 331.)
 Hüttenwesen siehe Eisenhüttenwesen.
 Immunitätslehre i. Abwehrkräfte Abt. V.
 Ingenieurtechnik. Schöpfungen d. J. der Kreuzt. Von Geh. Regierungsrat Dr. Geitel. Mit 32 Abb. (Bd. 28.)
 Instrumente siehe Optische J.
 Kabel f. Drähte und R.
 Kälte, Die, ihr Wesen, i. Erzeug. u. Verwendung. B. Dr. S. Alt. M. 45 Abb. (311.)
 Kaufmann. Das Recht des R. Ein Leit- faden f. Kaufleute, Studier. u. Juristen. B. Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 409.)
 Kaufmännische Angestellte. D. Recht d. L. u. B. Justiz. Dr. M. Strauß. (361.)
 Kindersorge. Von Prof. Dr. Chr. J. Klumker. (Bd. 620.)
 Kinematographie. Von Dr. S. Behmann. 2. Aufl. B. Dr. B. Wert. Mit 15 Abb. (Bd. 358.)
 Klein-u. Straßenbahnen. Die. B. Obering. a. D. Oberlehrer A. Stiebermann. Mit 85 Abb. (Bd. 322.)
 Kleintierzucht. Die. Von Redakt. Joh. Schneider. M. 59 Fig. i. T. u. 6 Taf. — siehe auch Tierzucht. (Bd. 604.)
 Kohlen, Untere. B. Bergass. P. Kufel. Mit 60 Abb. i. Text u. 3 Taf. (Bd. 396.)
 Kolonialbotanik. Von Prof. Dr. F. Tober. Mit 21 Abb. (Bd. 184.)
 Kolonisation, Innere. Von A. Brenning. (Bd. 261.)
 Konservierung siehe Desinfektion.
 Konsumgenossenschaft. Die. Von Prof. Dr. F. Staubinger. (Bd. 222.)
 — f. auch Mittelstandsbevögl., Wirtschaftliche Organisationen.
 Kraftanlagen siehe Dampfmaschine, Feuerungsanlagen und Dampfkessel, Bärnkraftmaschine, Wasserkraftmaschine.

- Kraftübertragung, Die elekt.** V. Ing. B. Köhn. 2. Aufl. M. Abb. (Bd. 424.)
- Kriegs- Kulturgeschichte d. A. B.** Prof. Dr. E. Weule, Geh. Dirat Prof. Dr. E. Pethe, Prof. Dr. B. Schmeidler, Prof. Dr. A. Doren, Prof. D. B. Gerre. (Bd. 561.)
- Kriegsbeschädigtenfürsorge.** In Verbindung mit Med.-Rat, Oberstabsarzt u. Chefarzt Dr. Rebenitsch, Gewerbe- schuldtr. S. Bad, Direktor des Städt. Arbeitsamts Dr. B. Schlotter herg. v. Prof. Dr. S. Kraus, Leit. d. Städt. Fürsorgeamts für Kriegshinterblieb. in Frankfurt a. M. 2. Abbildg. (623.)
- Kriegsschiffe, Unsere.** Ihre Entstehg. u. Vermenda. V. Geh. Marinebau. a. D. E. Krieger. 2. Aufl. v. Marinebau. Fr. Schürer. Mit 62 Abb. (389.)
- Kriminalistik, Moderne.** Von Amtsrichter Dr. A. Hellwig. M. 18 Abb. (Bd. 476.) — s. a. Verbrechen, Verbrecher.
- Küche** siehe Chemie in Küche und Haus.
- Landwirtschaft, Die deutsche.** V. Dr. B. Claßen. 2. Aufl. Mit 15 Abb. u. 1 Karte. (Bd. 215.) — s. auch Agrilkulturchemie, Kleintier- zucht, Luftsäurestoff, Eierzüchtung; Haus- tiere, Tierkunde Abt. V.
- Landwirtschaftl. Maschinenkunde.** V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Fischer. 2. Aufl. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 316.)
- Luftfahrt, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Ent- wicklung.** Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. v. Dr. Fr. Guth. M. 60 Abb. (Bd. 300.)
- Luftschiffahrt, Der, u. i. Bern.** V. Prof. Dr. R. Kaiser. 2. A. M. 13 Abb. (313.)
- Lüftung, Heizung und L.** Von Ingenieur F. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
- Marr, Karl.** Versuch e. Einführung. V. Prof. Dr. R. Wilbrandt. 2. A. (621.) — s. auch Sozialismus.
- Maschinen f. Dampfmaschine, Sebezeuge.** Landwirtschaftl. Maschinenkunde, Wärme- kraftmasch., Wasserkraftmasch.
- Maschinenelemente.** Von Geh. Bergrat Prof. R. Bater. 3. A. M. 175 Abb. (Bd. 301.)
- Mäße und Messen.** Von Dr. B. Blos. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)
- Mechanik.** V. Prof. Dr. G. Hamel. 3 Bde. I. Grundbegriffe d. M. II. M. der festen Körper. III. M. d. Flüss. u. luftförm. Körper. (Bd. 684/686.) — Aufgaben aus der technischen M. f. d. Schul- u. Selbstunterr. V. Prof. R. Schmitt. M. zahlr. Fig. I. Bewe- gungs- u. Statik. 156 Aufg. u. Lösungen. II. Dynam. 140 A. u. 231. (Bd. 558/559.)
- Messen** siehe Maße und Messen.
- Miete, Die, nach d. BGB.** Ein Handbüch- lein f. Juristen, Mieter u. Vermieter. V. Justizrat Dr. M. Strauß. (194.)
- Mikroskop, Das.** V. Prof. Dr. B. Schef- fer. 2. Aufl. M. 99 Abb. (Bd. 35.)
- Milch, Die, und ihre Produkte.** Von Dr. A. Reiz. Mit 16 Abb. (Bd. 362.)
- Mittelstandsbewegung, Die moderne.** Von Dr. B. Müffelmann. (Bd. 417.) — siehe Konsumgenoss., Wirtschaftl. Org.
- Nahrungsmittel f. Abt. V.**
- Naturwissensch. u. Technik.** Am sauf. Wech- selt d. Zeit. überl. Ab. d. Wirklgen. d. Entw. d. N. u. L. a. d. ges. Kulturleb. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. B. Laun- hardt. 3. Aufl. Mit 3 Abb. (Bd. 23.)
- Nautik.** V. Dir. Dr. F. Möller. 2. Aufl. Mit vielen Abb. (Bd. 255.)
- Optischen Instrumente, Die.** Lupe, Mi- kroskop, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen verw. Instr. Von Prof. Dr. M. v. Rohr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (Bd. 88.)
- Organisationen, Die wirtschaftlichen.** Von Prof. Dr. E. Lederer. (Bd. 428.)
- Ötmark, Die.** Eine Einführ. t. d. Probleme ihrer Wirtschaftsgesch. Hrg. von Prof. Dr. B. Mittwerlich. (Bd. 351.)
- Patente u. Patentrecht f. Gewerbl. Rechtssch.**
- Perpetuum mobile, Das.** V. Dr. Fr. Schaf. Mit 38 Abb. (Bd. 462.)
- Photogenie.** Von Prof. Dr. G. Rüm- mell. 2. Aufl. Mit 23 Abb. i. Text u. auf 1 Tafel. (Bd. 227.)
- Photographie, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen u. i. Anwendung.** V. Dr. D. Prelinger. 2. Aufl. Mit Abb. (414.) — Die künstlerische Ph. Ihre Entwid- lung, ihre Probleme, ihre Bedeutung. Von Dr. B. Warstat. 2., verb. Aufl. Mit Bilderanhang. (Bd. 410.) — Angewandte Liebhaber-Photographie, ihre Technik und ihr Arbeitsfeld. Von Dr. B. Warstat. Mit Abb. (Bd. 535.)
- Physik in Küche und Haus.** Von Prof. Dr. S. Speittkamp. M. 51 Abb. (Bd. 478.) — siehe auch Physik in Abt. V.
- Postwesen, Das.** Von Oberpostrat D. Sieblitz. 2. Aufl. (Bd. 182.)
- Rechenmaschinen, Die, und das Maschin- rechnen.** Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. R. Benz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
- Recht** siehe Erbrecht, Gewerbl. Rechtssch., Kaufm. Angest., Kriminalistik, Urheber- recht, Verbrechen, Verfassungsrecht, Zivilprozessrecht.
- Rechtstragen des täglichen Lebens in Familie und Haushalt.** Von Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 219.)
- Rechtsprobleme, Moderne.** V. Geh. Justizr. Prof. Dr. F. Köhler. 2. Aufl. (Bd. 128.)
- Salzlagerstätten, Die deutschen.** Ihr Vor- kommen, ihre Entstehung und die Ver- wertung ihrer Produkte in Industrie und Landwirtschaft. Von Dr. E. Rie- mann. Mit 27 Abb. (Bd. 407.) — siehe auch Geologie Abt. V.
- Schiffbau** siehe Kriegsschiffe.
- Schmuck, Die, u. d. Schmucksteinindustr.** V. Dr. H. Cypier. M. 64 Abb. (Bd. 376.)

Soziale Bewegungen u. Theorien b. s. mod.
Arb. it. b. w. G. M. a. i. e. r. 6. A. (Bd. 2.)
— f. a. Arbeiterchuz u. Arbeiterversicher.
Sozialismus. Gesch. der sozialist. Ideen i.
19. Jrh. V. Privatdoz. Dr. Fr. M. u. d. l. e.
3. A. I. D. ration. Soz. II: Proudhon u. d.
entw. l. g. e. s. c. h. i. c. h. t. Soz. (Bd. 269, 270.)
— f. auch Marx; Rom, Soz. Kämpfe
i. alt. R. Abt. IV.
Spinnerei. Die. Von Dir. Prof. M. Leh-
mann. Mit 35 Abb. (Bd. 338.)
Sprengstoffe. Die, ihre Chemie u. Techno-
logie. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Ple-
dermann. 2. Aufl. M. 12 Fig. (286.)
Staat siehe Abt. IV.
Stahl. Mit Einschluß der Festigkeitslehre.
Von Reg.-Baum. Bauergewerkschuldirekt.
A. Schau. M. 149 Fig. i. T. (Bd. 497.)
— siehe auch Mechanik, Aufg. a. d. M. I
Statistik. V. Prof. Dr. S. Schott. (442.)
Strafe und Verbrechen. Geschichte u. Orga-
nisi. d. Gefängniswes. V. Strafanstalts-
dir. Dr. med. V. Kollig. (Bd. 323.)
Straßenbahnen. Die Klein- u. Strahrb.
Von Oberingenieur a. D. Oberer
V. Liebmann. M. 85 Abb. (Bd. 322.)
Tabak. Der. Anbau, Handel u. Verarbeit.
V. Jac. Wolf. 2., verb. u. ergänzte
Ausf. Mit 17 Abb. (Bd. 416.)
Technik. Die chemische. Von Dr. A. Mül-
ler. Mit 24 Abb. (Bd. 191.)
— Einführung in d. T. Von Geh. Reg.-
Rat Prof. Dr. S. Lorenz. (Bd. 729.)
Techn. Zeichen f. Zeichen.
Telegraph. D. Telegraph.- u. Fernschreib-
V. Oberpost. D. Sieb. I. T. 2. A. (183.)
— Telegraphen- und Fernsprechtechnik in
ihrer Entwicklung. V. Oberpost.-Inspr.
S. Frid. 2. A. Mit 65 Abb. (Bd. 235.)
— Die Funksenteleg. V. Telegr.-Inspr. S.
Thurn. 5. Aufl. M. 51 Abb. (Bd. 167.)
— siehe auch Drähte und Kabel.
Testamentserrichtung und Erbrecht. Von
Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)
Thermodynamik. Praktische. Aufgaben u.
Beispiele zur technischen Wärmelehre.
Von Geh. Bergrat Prof. Dr. R. Vater.
Mit 40 Abb. i. Text u. 3 Taf. (Bd. 596.)
— siehe auch Wärmelehre.
Tierzucht. Von Tierzuchtdirektor Dr.
G. Wiltsdorf. 2. Aufl. M. 23 Abb.
auf 12 Taf. u. 2. Fig. i. T. (Bd. 369.)
— siehe auch Kleintierzucht.
Uhr. Die. Grundsagen u. Technik d. Zeit-
messg. V. Prof. Dr.-Ing. S. Bod. 2.,
umgearb. Aufl. Mit 55 Abb. i. T. (216.)
Urheberrecht. D. Recht a. Schrift- u. Kunstw.
V. Rechtsanw. Dr. R. Mothes. (435.)
— siehe auch gewerblich. Rechtsschutz.
Verbrechen. Strafe und V. Geschichte u. Orga-
nisiati. d. Gefängniswesens. V. Strafan-
st.-Dir. Dr. med. V. Kollig. (Bd. 323.)
— Moderne Kriminalistik. V. Amtsrichter
Dr. A. Sellwig. M. 18 Abb. (Bd. 476.)

Verbrecher. Die Psychologie des V. (Kri-
minalpsych.) V. Strafanstaltsdir. Dr. med.
V. Kollig. 2. A. M. 5 Diag. (Bd. 248.)
— f. a. Handschriftenbeurt. Abt. I.
Verfassg. Grundz. d. V. d. Deutsch. Reiches.
V. Geheimrat Prof. Dr. E. Loening.
5. Aufl. (Bd. 34.)
Verf. u. Verwaltung der deutschen
Städte. Von Dr. M. Schmid. (466.)
— Deutsch. Verfassg. i. geschichtl. Ent-
w. d. V. Dr. E. Dubrich. 2. A. (Bd. 80.)
Verkehrs-Entwicklung i. Deutschl. 1800 bis
1900 (fortgef. b. s. Gegenw.). V. Prof.
Dr. W. P. o. s. 4., verb. Aufl. (Bd. 15.)
Versicherungswesen. Grundzüge des V.
(Privatversicher.). Von Prof. Dr. A.
Waness. 3., verb. Aufl. (Bd. 105.)
Waffentechnik siehe Handfeuerwaffen.
Wald. Der deutsche. V. Prof. Dr. Haus-
rath. 2. A. Hilberath. u. 2. Kart. (153.)
Wärmekraftmaschinen. Die neueren. Von
Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. Abt.
I: Einführung in die Theorie u. d. Bau
b. Gasmasch. 5. Aufl. M. 41 Abb. (Bd. 21.)
II: Gas- u. Wasserdampfmaschinen, Dampf-
u. Gasurb. 4. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 86.)
— siehe auch Kraftanlagen.
Wärmelehre. Einführ. i. d. techn. (Ther-
modynamik). Von Geh. Bergrat Prof.
R. Vater. M. 40 Abb. i. Text. (Bd. 516.)
— f. auch Thermodynamik.
Wasser. Das. Von Geh. Reg.-Rat Dr. D.
Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)
— f. a. Luft, Wass., Licht, Wärme Abt. V.
Wasserkraftmaschinen. Die, u. d. Ausnützung
d. Wasserkräfte. Von Geh. Reg.-Rat A.
v. Thering. 2. A. M. 57 Abb. (Bd. 228.)
Weidwerk. D. d. d. V. Forstmeister G. F. hr.
v. Nordenflicht. M. Titel. (436.)
Weinbau und Weinbereitung. Von Dr. F.
Schmittknecht. 34 Abb. (Bd. 332.)
Wohlhandel siehe Handel.
Wirtschaftlichen Organisationen. Die. Von
Prof. Dr. E. Lederer. (Bd. 428.)
— f. Konsumgenoss. Mittelstandsbeweg.
Wirtschaftsgeographie. Von Prof. Dr. F.
Heiderich. (Bd. 633.)
Wirtschaftsgesch. f. Antike W., Ostmark.
Wirtschaftsleben. Deutsch. Auf geograph.
Grundl. gesch. v. Prof. Dr. Chr. Gru-
ber. 4. A. v. Dr. S. Reinlein. (42.)
— Die Entwicklung des deutschen Wirt-
schaftslebens i. letzten Jahrh. V. Geh.
Reg.-Rat Prof. Dr. V. Bohle. 3. A. (57.)
— Deutschl. Stellung i. d. Weltwirtschaft.
V. Prof. Dr. B. Arndt. 3. A. (Bd. 179.)
Wohnungswesen. Das. Von Dir.-Ing.
Lehner. (Bd. 707.)
Zeichnen. Techn. Von Prof. Dr. Horst-
mann. (Bd. 548.)
Zeitungswesen. V. Dr. S. Diez. 2. Aufl.
(Bd. 328.)
Zivilprozessrecht. Das deutsche. Von Zu-
stizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 315.)

== Weitere Bände sind in Vorbereitung. ==

DIE KULTUR DER GEGENWART IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

III. Teil. Die mathematischen, naturwissenschaftlichen und medizinischen Kulturgebiete. [19 Bände.]

(* erschienen, † unter der Presse.) In Halbfranz geb. jeder Band 6 Mark mehr.

*I. Abt. Die math. Wissenschaften. (1 Bd.)

Abteilungsleiter u. Bandredakteur: F. Klein.
Bearb. v. P. Stäckel, H. E. Timerding, A. Voß,
H. G. Zeuthen. 5 Lfgn. *I. Lfg. (Zeuthen) geh.
M. 3.— *II. Lfg. (Voß u. Timerding) geh. M. 6.—
*III. Lfg. (Voß) geh. M. 5.—

II. Abt. Die Vorgeschichte der mod. Naturwissenschaften u. d. Medizin. (1 Bd.)

Bandredakteure: J. Ilberg u. K. Sudhoff.

III. Abt. Anorg. Naturwissenschaften.

Abteilungsleiter: E. Lecher.

*Bd. 1. Physik. Bandredakteur: E. Warburg.

Bearb. v. F. Auerbach, F. Braun, E. Dorn,
A. Einstein, J. Elster, F. Exner, R. Gans, E.
Gehrcke, H. Geitel, E. Gumlich, F. Hasenöhrl,
F. Henning, L. Holborn, W. Jäger, W. Kaufmann,
E. Lecher, H. A. Lorentz, O. Lummer,
St. Meyer, M. Plauack, O. Reichenheim, F. Richarz,
H. Rubens, E. v. Schweidler, H. Starke,
W. Voigt, E. Warburg, E. Wiechert, M. Wien,
W. Wien, O. Wiener, P. Zeeman. M. 22.—, M. 24.—

*Bd. 2. Chemie. Bandredakteur: † E. v. Meyer.

Allgem. Kristallographie u. Mineralogie.
Bandredakteur: Fr. Rinne. Bearb. v. K. Engler,
H. Immendorf, † O. Kellner, A. Kossel, M. Le
Blanc, R. Luther, † E. v. Meyer, W. Nerst, Fr.
Rinne, O. Wallach, † O. N. Witt, L. Wöhler. Mit
Abb. M. 18.—, M. 20.—

† Bd. 3. Astronomie. Bandred.: J. Hartmann.

Bearb. von L. Ambronn, F. Boll, A. v. Flotow,
F. K. Ginzler, K. Graff, J. Hartmann, J. v. Hep-
perger, H. Kobold, S. Oppenheim, E. Prings-
heim, † F. W. Ristenpart.

Bd. 4. Geonomie. Bandredakteure: † I. B.

Messerschmitt u. H. Benndorf.

Bd. 5. Geologie (einschl. Petrographie).

Bandredakteur: A. Rothpletz.

Bd. 6. Physiogeographie. Bandredakteur:

E. Brückner. 1. Hälfte: Allg. Physiogeographie.

2. Hälfte: Spez. Physiogeographie.

IV. Abt. Organ. Naturwissenschaften.

Abteilungsleiter: R. v. Wettstein.

*Bd. 1. Allgemeine Biologie. Bandredakteure:

† C. Chun u. W. Johannsen, u. Mitw. v. A. Günt-
hart. Bearbeitet v. E. Baur, P. Boysen-Jensen,

P. Claußen, A. Fischel, E. Godlewski, M. Hart-
mann, W. Johannsen, E. Laqueur, † B. Lidforß,
W. Ostwald, O. Porsch, H. Przibram, E. Rádl,
O. Rosenber, W. Roux, W. Schleip, G. Senn,
H. Spemann, O. zur Strassen. M. 21.—, M. 23.—

*Bd. 2. Zellen- und Gewebelehre, Morphologie
und Entwicklungsgeschichte. 1. Bot-
tan. Teil. Bandredakteur: † E. Strasburger.
Bearb. v. W. Benocke u. † E. Strasburger. Mit
Abb. M. 10.—, M. 12.— 2. Zoologischer Teil.
Bandredakteur: O. Hertwig. Bearb. v. E. Gaupp,
K. Heider, O. Hertwig, R. Hertwig, F. Keibel,
H. Poll. M. 16.—, M. 18.—

Bd. 3. Physiologie u. Ökologie. *1. Bot. T.
Bandred.: G. Haberlandt. Bearb. von E. Baur,
Fr. Czapek, H. v. Guttenberg. M. 11.—, M. 13.—
2. Zoologischer Teil. Bandredakteur und
Mitarbeiter noch unbestimmt.

*Bd. 4. Abstammungslehre, Systematik,
Paläontologie, Biogeographie. Bandredak-
teure: R. Hertwig u. R. v. Wettstein. Bearb. v.
O. Abel, I. E. V. Boas, A. Brauer, A. Engler,
K. Heider, R. Hertwig, W. J. Jongmans, L. Plate,
R. v. Wettstein. M. 20.—, M. 22.—

† V. Abt. Anthropologie. (1 Bd.)

Bandred.: † G. Schwalbe. Bearb. v. E. Fischer,
R. F. Graebner, M. Hoernes, Th. Mollison,
A. Floetz, † G. Schwalbe. ca. M. 22.—, M. 24.—

VI. Abt. Die medizin. Wissenschaften.

Abteilungsleiter: Fr. v. Müller.

Bd. 1. Die Geschichte der mod. Medizin.

Bandred.: K. Sudhoff. Die Lehre von den
Krankheiten. Bandred.: W. His.

Bd. 2. Die medizinischen Spezialfächer.

Bandred.: Fr. v. Müller.

Bd. 3. Beziehungen der Medizin z. Volks-

wohl. Bandredakteur: M. v. Gruber.

VII. Abt. Naturphilosoph. u. Psychol.

*Bd. 1. Naturphilosophie. Bandredakteur:

C. Stumpf. Bearb. v. E. Becher. M. 14.—, M. 16.—

Bd. 2. Psychologie. Bandredakteur und
Mitarbeiter noch unbestimmt.

VIII. Abt. Organisation der Forschung

und des Unterrichts. (1 Bd.)

Bandredakteur: A. Gutzmer.

IV. Teil. Die technischen Kulturgebiete. [15 Bände.]

Abteilungsleiter: W. v. Dyck und O. Kammerer.

Bisher erschien:

Technik des Kriegswesens. Bandredakteur M. Schwarte. Bearb. v. K. Becker, O. v. Eber-
hard, L. Glatzel, A. Kersting, O. Kretschmer, O. Poppenberg, J. Schroeter, M. Schwarte,
W. Schwiniang. Geheftet M. 24.—, gebunden M. 26.—. [Band 12.]

Teuerungszuschläge auf sämtliche Preise 30% einschließlich 10% Zuschlag der Buchhandlung

Probeheft mit Inhaltsübersicht des Gesamtwerkes, Probeabschnitten, Inhaltsverzeichnissen
und Besprechungen umsonst und postfrei durch B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3

Tierbau und Tierleben in ihrem Zusammenhang betrachtet

Dr. Richard Hesse

von

und

Dr. Franz Doflein

Professor der Zoologie an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin

Professor der Zoologie an der Universität Freiburg i. Br.

Mit über 1200 Abbild. sowie 40 Tafeln in Schwarz- u. Buntdruck nach Originalen bekannter Künstler

1. Band: Das Tier als selbständiger Organismus

2. Band: Das Tier als Glied des Naturganzen

Jeder Band in künstl. Original-Ganzleinenband M. 21,—, in eleg. Halbfranzband M. 24,—

„Es ist ein fundamentales Werk, das dem Sachmann als Wegweiser und Grundgebe, dem Laien als wünschenswerte Ergänzung zu seinem grossen oder kleinen Vreim dienen wird. Wissenschaftlich ganz auf der Höhe der Zeit stehend, spricht es eine so klare Sprache und berührt so fesselnde Fragen der Tierforschung, dass es für jeden Wert und Giltigkeit hat, der sich mit Zoologie beschäftigt.“
(Propäiden.)

Mathemat.-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementarmathematik und -physik für Schule und Leben. Unter Mitwirkung von Sachgenossen herausgegeben von Dir. Dr. W. Liehmann und Studienrat Dr. A. Witting.

Mit zahlreichen Figuren. kl. 8. Kart. je M. 1,—

Bisher erschienene Bändchen:

- Ziffern u. Ziffernsysteme. I. V. Zahlensysteme d. alt. Kulturvölker. V. C. E. Pöffler. 2. A. Bd. 1.
Der Begriff d. Zahl in seiner log. u. histor. Entwickl. Von H. Wieleitner. 2. A. Bd. 2.
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Liehmann. 2. Auflage. Bd. 3.
Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen. Von O. Reissner. Bd. 4.
Die Fallgesetze, ihre Geschichte u. ihre Bedeutung. Von H. E. Limerding. Bd. 5.
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. Bd. 6.
Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. Bd. 7.
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. Bd. 8.
Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. Bd. 9.
Wo steckt der Fehler? Von W. Liehmann und V. Frier. 2. Auflage. Bd. 10.
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Fehle. Bd. 11.
Quadratur d. Kreises. V. C. Deutel. Bd. 12.
Gehemnisse der Rechenkünster. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. Bd. 13.
Darstellende Geometrie des Geländes. Von A. Rothe. Bd. 14.
Beispiele z. Geschichte. Mathematik. Von A. Witting u. M. Gebhardt. Bd. 15.
Anfertigung mathematischer Modelle. Von R. Sieber. Bd. 16.
Feuerungszuschläge auf sämtliche Preise 30% einschliessl. 10% Zuschlag der Buchhandlung
- Dreht sich die Erde? V. W. Brunner. Bd. 17.
Mathematiker-Anekdoten. Von Wilhelm Ahrens. Bd. 18.
Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. Bd. 19.
Mathematik und Malerei. 2 Bde. in 1 Bd. Von G. Wolff. Bd. 20. 21.
Soldaten-Mathematik. Von Alexander Witting. Bd. 22.
Theorie und Praxis des Rechenstiebers. Von A. Rohrberg. Bd. 23.
Die mathem. Grundlagen der Variations- u. Ververbungslehre. V. P. Kiebesell. Bd. 24.
Kiesen und Zwerge im Zahlenteich. Von W. Liehmann. 2. Aufl. Bd. 25.
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. Bd. 26.
Karte und Kroti. Von H. Wolff. Bd. 27.
Einführung in die Nomographie. I. Die Funktionsleiter. Von P. Ludeß. Bd. 28.
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. Bd. 29.
Was ist Geld? V. W. Liehmann. Bd. 30.
Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Von W. Dieck. Bd. 31.
Der Goldene Schnitt. Von H. E. Limerding. Bd. 32.
In Vorber.: Doeblemann, Mathematik u. Architektur. Pfeifer, Photogrammetrie. Ludeß, Einführung in die Nomographie. II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. Müller, Der Gegenstand d. Mathematik.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Teubners Künstlersteinzeichnungen

Wohlfeile farbige Originalwerke erster deutscher Künstler fürs deutsche Haus
Die Sammlung enthält jetzt über 200 Bilder in den Größen 100×70 cm (M. 7.50), 75×55 cm (M. 6.—), 100×41 cm u. 60×50 cm (M. 5.—), 55×42 cm (M. 4.50), 41×30 cm (M. 3.—)
Rahmen aus eigener Werkstatt in den Bildern angepassten Ausführungen äußerst preiswürdig.

K. W. Diefenbachs Schattenbilder

„Per aspera ad astra“
Album, die 34 Teils. des vollst. Wandtefeschens
fortl. wiederg. (25 1/2×25 cm) M. 15.—
Teilsbilder als Wandtefesch (42×60 cm)
je M. 5.—, (35×18 cm) je M. 1.25
leichte u. Glas m. Elnwd. Einf. je M. 4.—

„Göttliche Jugend“
2 Mappen, 1. 2. Aufl., mit je 20 Blatt
(25 1/2×34 cm) je M. 8.—
Einzelbilder je M. —.75
unter Glas u. Elnwandelnf. je M. 3.—

Karl Bauers Federzeichnungen

Führer und Helden im Weltkrieg. Einzelne Blätter (28×36 cm) M.—.75,
Liebhäberausgabe M. 1.25, 2 Mappen, enthaltend je 12 Blätter, je . . M. 3.—

Charakterköpfe z. deutschen Geschichte. Mappe, 32 Bl. (28×36 cm) M. 6.35,
12 Bl. M. 3.50, Einzelblätter M.—.85. Liebhäberausgabe auf Karton geklebt M. 1.25

Aus Deutschlands großer Zeit 1813. In Mappe, 16 Bl. (28×36 cm) M. 4.50,
Einzelblätter M.—.85. Liebhäberausgabe auf Karton geklebt M. 1.25

Rahmen zu den Blättern passend von M. 4.— bis M. 7.—

Scherenschnitte von Rolf Winkler

1. Reihe: „Aus der Kriegszeit“. 6 Blätter, Scherenschnitte des Künstlers wiedergebend.
1. Abschied des Landwehmannes. 2. Auf der Wacht. 3. In Feuerstellung. 4. Schipatrouille.
5. Letzte Kameraden. 6. Am Grabe des Kameraden.

Auf Kart. m. verschiedenfarb. Tonunterdruck: Einz. M. 1.25, 6 Bl. in Mappe M. 5.—
Unter Glas in Elnwand-Einfassung: M. 4.—. In Mahagonirähmchen: M. 7.—

Deutsche Kriegsscheiben

Scheibenbilder erster Münchener Künstler wie v. Desregger, J. Diez, E. Grünher, H. v. Habermann, Th. Th. Heine, A. Jant, v. Jügel u. a. Sie bringen köstlich humorvolle, zumeist auf den Krieg bezügliche Darstellungen, wie den großmäuligen Engländer, die Entente, „Russen-Invasion“, u. 21 auf der Jagd, u. o. und sind zur Schießausbildung und als Zimmerschmuck gleich geeignet und wertvoll.

Preis je ca. M. 1.50. Auf Pappe mit grünem Kranz je ca. M. 1.80. Auf Holz mit grünem Kranz je ca. M. 5.50. — Bei größeren Bezügen ermäßigen sich die Preise.

Als 12 er Scheiben (Platten) Stück 15 Pf., 12 Stück M. 1.—

Postkartenausgaben

Jede Karte 15 Pf., Reihe von 12 Karten in Umschlag M. 1.50, jede Karte unter Glas mit schwarzer Einfassung und Schnur M. 1.—

Teubners Künstlersteinzeichnungen in 11 Reihen (davon 50 versch. Motive auch u. Glas in ovalem Rahmen je M. 2.—, in edigem Holzrähmch. je M. 2.25). Bauers Führer u. Helden in 2 Reihen. Winklers Scherenschnitte, 6 Kart. in Umschl. M.—.80. Kriegsscheiben-Karten in 2 Reihen (diese nicht mit Einfass. käusl.). Denkwürdige Stätten aus Nordfrankreich, 12 Karten nach Orig.-Ethograph. von K. Lohr. Diefenbachs Schattenbilder in 6 Reihen (diese auch in vierteligen oder ovalen Holzrähmchen zu je M. 2.25 bezw. M. 2.50). Aus dem Kinderleben, 6 Karten nach Bleistiftzeichn. von Hela Peters. 1. Der gute Dender. 2. Der böse Bruder. 3. Wo denkt der Schuh? 4. Schmeicheltähchen. 5. Püppchen, aufgepaßt!

6. Große Wäsche. 9. in Umschl. M.—.80. Schattenrisstarken von Gerda Luise Schmidt: 1. Reihe: Spiel u. Tanz, Fest im Garten, Blumenorakel, Die kleine Schäferin, Verlassener Dichter, Rattenfänger von Hameln. 2. Reihe: *Die Freunde, *Der Besuch, Im Grünen, *Reisenspiel, *Ein Frühlingsstrauß, *Der Liebesbrief. 3. Reihe: *Der Brief an „Ihn“, *Annäherungsversuch, *Am Spinnet, *Beim Wein, *Ein Märchen, *Der Geburtstag. Jede Reihe in Umschl. M.—.80

*Diese Schattenrisstarken von Gerda Luise Schmidt auch als Bilder im Format 20×15 cm je M.—.50. In Mahagonirähmchen m. Glas einschl. Bild je M. 5.50

Vollst. Kat. ü. künstler. Wandschm. m. farb. Wiederg. v. ü. 200 Bl. geg. Einsendg. v. 75 Pf. (Ausl. 85 Pf.) Ausf. Verz. d. Postkartenausg. umsonst. Beide v. Verlag in Leipzig, Poststr. 3.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301541



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296017