...s ...eisteswelt

J. Bojko

Lehrbuch der Rechenvorteile

Schnellrechnen und Rechenkunst

Zweite Auflage

B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

Die Sammlung
„Aus Natur und Geisteswelt“

nunmehr über **800 Bände** umfassend, bietet wirkliche „Einführungen“ in abgeschlossene Wissensgebiete für den Unterricht oder Selbstunterricht des Laien nach den heutigen methodischen Anforderungen und erfüllen so ein Bedürfnis, dem weder umfangreiche Enzyklopädien noch skizzenhafte Abrisse entsprechen können. Die Bände wollen jedem geistig Mündigen die Möglichkeit schaffen, sich ohne besondere Vorkenntnisse an sicherster Quelle, wie sie die Darstellung durch berufene Vertreter der Wissenschaft bietet, über jedes Gebiet der Wissenschaft, Kunst und Technik zu unterrichten. Sie wollen ihn dabei zugleich unmittelbar im Beruf fördern, den Gesichtskreis erweiternd, die Einsicht in die Bedingungen der Berufsarbeit vertiefend.

Die Sammlung bietet aber auch dem Fachmann eine rasche zuverlässige Übersicht über die sich heute von Tag zu Tag weitenden Gebiete des geistigen Lebens in weitestem Umfang und vermag so vor allem auch dem immer stärker werdenden Bedürfnis des Forschers zu dienen, sich auf den Nachbargebieten auf dem laufenden zu erhalten. In den Dienst dieser Aufgaben haben sich darum auch in dankenswerter Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, gern die Gelegenheit benutzend, sich an weiteste Kreise zu wenden.

Seit Herbst 1925 ist eine Neuerung insofern eingetreten, als neben den Bänden im bisherigen Umfange solche in erweitertem, etwa anderthalbfachem zu $1\frac{1}{2}$fachem Preise ausgegeben werden, weil abgeschlossene Darstellungen größerer Gebiete auf beschränkterem Raume heute schwer möglich sind. Diese Bände, die die Nummern von 1001 ab tragen, erscheinen, um die Einheitlichkeit der Sammlung zu wahren, in der gleichen Ausstattung wie die übrigen Bände. Sie sind nur auf dem Rückentitel durch je ein Sternchen über und unter der Nummer besonders gekennzeichnet.

Alles in allem sind die schmucken, gehaltvollen Bände besonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden.

e

h

Leipzig, im ... . Teubner

Ein vollständiges nach Wissenschaftsgebieten geordnetes Verzeichnis versendet auf Wunsch der Verlag, Leipzig C 1, Poststraße 3/5

Zur Mathematik und Astronomie

sind bisher erschienen:

Arithmetik, Algebra und Analysis.

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat P. Crantz. 2 Bde. I. Teil: Die 7 Rechnungsarten. Gleichungen und Funktionen ersten und zweiten Grades. 9. Aufl. Neubearb. von Studienrat Dr. M. Hauptmann. Mit 20 Fig. u. 1 Logarithmentaf. (Bd. 120.) II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 6. Aufl. Mit 21 Textfig. (Bd. 205.)

Lehrbuch der Rechenvorteile. Schnellrechnen und Rechenkunst. Mit zahlr. Übungsbeispielen. Von Ing. Dr. phil. J. Bojko. 2. Aufl. (Bd. 739.)

Kaufmännisches Rechnen zum Selbstunterricht. Von Studienrat K. Dröll. (Bd. 724.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 4. Aufl. Mit 21 Fig. i. T. u. einem Anhang über die Zahl *e* u. die natürlichen Logarithmen. (Bd. 197.)

Differentialrechnung unter Berücksichtigung der prakt. Anwendung in der Technik, mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen. Von Prof. Studienrat Dr. M. Lindow. 5. Aufl. Mit 50 Fig. u. 161 Aufgaben. (Bd. 387.)

Integralrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen. Von Prof. Studienrat Dr. M. Lindow. 3. Aufl. Mit 43 Fig. i. T. u. 200 Aufgaben. (Bd. 673.)

Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik, mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen. Von Prof. Studienrat Dr. M. Lindow. Mit 38 Fig. i. T. u. 160 Aufgaben. (Bd. 589.)

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Geh. Reg.-Rat Prof. E. Hegemann. Mit 11 Fig. i. T. (Bd. 609.)

Geometrie.

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 4. Aufl. durchges. von Studienrat Dr. M. Hauptmann. Mit 96 Fig. i. T. (Bd. 340.)

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 4. Aufl. Mit 50 Fig. i. T. (Bd. 431.)

Sphärische Trigonometrie nebst Anwendungen zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 2. Aufl. Neubearb. von Studienrat Dr. M. Hauptmann. Mit 114 gelösten Aufgaben, 67 Fig. u. einem Nomogramm des allgemeinen Kugeldreiecks. (Bd. 605.)

Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 4. Aufl., durchges. von Studienrat Dr. M. Hauptmann. Mit 55 Fig. i. T. (Bd. 504.)

Einführung in die darstellende Geometrie. Von Prof. P. B. Fischer. Mit 59 Fig. i. T. (Bd. 541.)

Angewandte Mathematik.

Praktische Mathematik. Von Prof. Dr. R. Neuendorff. 2 Bd. I. Teil: Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufm. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3. Aufl. Mit 29 Fig. i. T. u. 1 Taf. (Bd. 341.) II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 133 Fig. (Bd. 526.)

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Von Regierungsrat Dipl.-Ing. K. Lenz. [2. Aufl. erschien außerhalb der Sammlung.]

Angewandte Mathematik.

Geometrisches Zeichnen. Von Oberschullehrer A. Schudeisky. Mit 172 Abb. i. T. u. auf 12 Taf. (Bd. 568.)

Projektionslehre. Die rechtwinklige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst einem Anhang über die schiefwinklige Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstellung für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von Oberschullehrer A. Schudeisky. 2. Aufl. Mit 165 Abb. i. T. (Bd. 564.)

Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Doehlemann. 3., durchges. Aufl. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bd. 510.)

Graphisches Rechnen. Von Studienrat O. Prölß. Mit 164 Fig. i. T. (Bd. 708.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

Die Landmessung. Von Geh. Finanzrat F. Suckow. Mit 69 Zeichnungen i. T. (Bd. 608.)

Photogrammetrie (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie). Von Dr.-Ing. H. Lüscher. Mit 78 Fig. i. T. u. auf 2 Taf. (Bd. 612.)

Kartenkunde. Von Finanzrat Dr. A. Egerer. I. Einführung in das Kartenverständnis. Mit 49 Abb. i. T. (Bd. 610.)

Nautik. Von Dir. Dr. J. Möller. 2. Aufl. Mit 64 Fig. i. T. u. 1 Seekarte. (Bd. 255.)

Mathematische Spiele.

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 5. Aufl. Mit 1 Titelbild u. 78 Fig. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. 4. Aufl. Mit einer Schachbrett-Taf. u. 43 Diagrammen. (Bd. 281.)

Geschichte.

Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. 2. Aufl. Mit 2 Fig. (Bd. 370.)

Astronomie und Astrologie.

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 5. Aufl. Bearb. von Prof. Dr. P. Guthnick. Mit 28 Fig. i. T. (Bd. 24.)

Weltentstehung in Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. K. Ziegler u. Prof. Dr. S. Oppenheim. Mit 4 Fig. i. T.. (Bd. 719.)

Weltuntergang in Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. K. Ziegler. u. Prof. Dr. S. Oppenheim. (Bd. 720.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. I. Teil: Vom Altertum bis zur Neuzeit. 3. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 444.) II. Teil: Moderne Astronomie 2. Aufl. Mit 9 Fig. i. T. u. 1 Taf. (Bd. 445.)

Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Prof. Dr. A. Marcuse. 2. Aufl. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 16 Fig. 2. Aufl. von Obserw. Dr. H. Naumann. (Bd. 240.)

Meteorologie.

Einführung in die Wetterkunde. Von Prof. Dr. L. Weber. 3. Aufl. von „Wind u. Wetter". Mit 28 Abb. i. T. u. 3 Taf. (Bd. 55.)

Unser Wetter. Einführung in die Klimatologie Deutschlands an der Hand von Wetterkarten. Von Dr. R. Hennig. 2. Aufl. Mit 48 Abb. i. T. (Bd. 349.)

Weitere Bände befinden sich in Vorbereitung.

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

739. Bändchen

Lehrbuch der Rechenvorteile

Schnellrechnen und Rechenkunst

Mit zahlreichen Übungsbeispielen

von

Ingenieur Dr. phil. J. Bojko

Zweite Auflage

Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1926

Vorwort.

Alle praktischen Rechnungen und die meisten wissenschaftlichen Aufgaben in Mathematik, Naturwissenschaft und Technik erfordern numerisches d. h. zahlenmäßiges Rechnen. Es ist daher fraglos für jedermann von Vorteil, Rechenverfahren zu kennen, die vorteilhafter und schneller zum Ziele führen als die in den Schulen gelernten Verfahren. Da nur geringe Vorkenntnisse zum Verständnis des vorliegenden Buches vorausgesetzt werden, dürfte es sicherlich weiten Kreisen zugänglich und wegen der vielen Übungsbeispiele auch zum Selbstunterricht geeignet sein. Die dargelegten Rechenvorteile habe ich selbst viele Jahre hindurch erprobt und mit bestem Erfolge im mathematischen und elektrotechnischen Unterricht mit meinen Schülern eingeübt.

An dieser Stelle möchte ich noch meinem verehrten Fachkollegen Oberlehrer Dr. E. Freund in Oppeln aufrichtigen Dank für seine bereitwillige Unterstützung bei der Redaktion dieses Buches aussprechen, ebenso allen denen, die freundliche Anregungen für Verbesserungen oder Ergänzungen gegeben haben. Sie sind in der nun vorliegenden neuen Auflage, soweit sie angebracht und in dem durch Zwecke und Umfang der Sammlungsbände gegebenen Rahmen erfüllbar erschienen, auch berücksichtigt worden.

Juni, 1926. **J. Bojko.**

Inhaltsverzeichnis.

II. Dritte Potenz.

Zweiter Teil.

E. Die Neuner- und Elferprobe.

F. Das Radizieren.

I. Hilfsmittel.

II. Ungerade Wurzelexponenten.

III. Gerade Wurzelexponenten.

Dritter Teil.

G. Anwendungen.

Einleitung.

Zu beachten:

1. Da das Schnellrechnen bzw. die mannigfachsten Rechenvorteile in den Schulen nicht genügend gelehrt werden, so muß das vorliegende Buch — soll es seinen Zweck erfüllen — nicht nur Regeln angeben und Fingerzeige bieten, sondern häufig auch den Lehrer ersetzen, daher die zahlreichen Beispiele und ausführliche Behandlung des Stoffes. Sollte sich jedoch der Mathematiklehrer einer Mittel-, technischen oder Handelsschule, den Wert des Schnellrechnens erkennend, entschließen, dieses oder jenes Kapitel den Schülern vorzutragen und vor allem dessen Inhalt *einzuüben*, so kann dies natürlich nur erwünscht sein und zum Vorteil der Schüler gereichen.
2. Für wen ist dieses Buch geschrieben?
   Eigentlich für *jeden*, der mehr oder weniger häufig, sei es in der Schule, sei es beim Fachunterricht oder im praktischen Leben, zahlenmäßig zu rechnen hat. Der Studierende der Mittelschule, der Fach- und Hochschüler, der Kaufmann sowie der Techniker, der Chemiker sowie der Baumeister usw., jeder wird das Gelernte mit Nutzen anwenden können. Besonders aber dürfte dieses Buch für den Techniker und den Kaufmann während deren Studienzeit und in ihrer Praxis eine willkommene Hilfsquelle sein.
3. Die *schriftliche* Darlegung bringt es mit sich, daß manche Rechenvorteile nicht genügend zur Geltung kommen; häufig hat es gar den Anschein, als ob keine Zeit- und Raumersparnis erzielt wäre. Das ist aber, wie gesagt, nur Schein und ist durch die ausführliche Beschreibung erklärlich; beim *mündlichen* Unterricht fällt dieser Nachteil weg.
4. Wer Stenographie lernt, wird, solange er noch nicht genügende Übung besitzt, in bezug auf Schnelligkeit kaum mit der gewöhnlichen Schrift in Wettbewerb treten können; der *Anfänger* im Rechnen mit dem Rechenschieber wird sich zufrieden geben, wenn er die

Schnelligkeit und Sicherheit, die er beim Rechnen ohne dieses Hilfsmittel besitzt, erreichen kann. Wer wollte jedoch die Vorteile der soeben erwähnten Hilfsmittel leugnen? Aber alles will gelernt und geübt sein; die Stenographie wird in den Handelsschulen u. dgl., die Handhabung des Rechenschiebers auf den technischen Lehranstalten gelehrt, es wird hierfür etwa während eines Semesters eine Stunde wöchentlich angesetzt. Man wundere sich nach diesem durchaus nicht, wenn nach dem flüchtigen „Lesen" der mannigfachen Rechenvorteile dieses Buches sich bei der ersten Anwendung keine wesentliche Zeitersparnis oder Vereinfachung bei den zu lösenden Aufgaben zeigen sollte. Man setze aber einmal in einer Schule dafür eine Stunde wöchentlich mit systematischen Übungen an, der Erfolg wird gewiß schon nach einigen Wochen nicht ausbleiben und sich in allen Fächern, wo es eben zahlenmäßig zu rechnen gibt (und das sind namentlich beim technischen Unterricht die meisten), zeigen. Die Fassung dieses Buches wird aber dem Leser ermöglichen, auch durch Selbstunterricht den Stoff zu erlernen, und er wird bereits nach kurzer Übung den Vorteil unbedingt merken. „Eh' du in der Tafel oder im Kalender nachschlägst, habe ich die Quadratzahl bereits hingeschrieben", so weit konnte ich stets meine Schüler nach wenigen Unterrichtsstunden bringen, abgesehen von den Vorteilen bei der abgekürzten Multiplikation, Division usw. usw. Freilich liegt es mir fern, den Wert der Tafeln und deren Benutzung irgendwie herabzusetzen. Der geübte Rechner soll über viele Hilfsmittel verfügen, er wird sie stets an der richtigen Stelle anzuwenden wissen.

5. Es ist nicht jedermanns Sache, Rechenkünstler zu sein, daher bleibt es jedem, je nach den Fähigkeiten usw., überlassen, inwieweit Nebenrechnungen im Kopfe oder schriftlich durchzuführen sind. Also wird der eine beispielsweise (vgl. S. 53) rechnen dürfen:

$38^2 = 13\frown 144 = 1444$, d. h. zunächst 13 und 144 hinschreiben und dann 1444, der andere hingegen denkt sich im Kopfe 13 und 144 und schreibt das Ergebnis 1444 ohne jegliche Hilfszahlen hin.

Erster Teil.

A. Addition und Subtraktion.

1. Addition. Diese Rechnungsarten sind ja bereits die einfachsten und lassen sich daher im allgemeinen nicht noch weiter vereinfachen, wie wir beispielsweise durch Logarithmieren eine Multiplikation, eine Division usw. auf die einfacheren Rechenoperationen Addition, Subtraktion usw. zurückführen.

Genau wie wir zwei einstellige Zahlen addieren, lassen sich auch oft zwei zweistellige Zahlen in einem Überblick addieren. Man kann, wie etwa folgende Fälle zeigen, das Resultat ohne weiteres hinschreiben: $12 + 16 = 28$, $15 + 33 = 48$, $24 + 52 = 76$, $41 + 53 = 94$ usw.

Sind die Summanden etwas unbequeme Zahlen, so addiere man zu einem Summand zunächst die Einer des anderen und dann die Zehner desselben.

Z. B. $66 + 38 = 74\ (66 + 8) + 30 = 104$

$49 + 73 = 52 + 70 = 122$ usw.

Hiernach sind folgende Aufgaben leicht zu behandeln. $524 + 22 = 546$; $842 + 14 = 856$; $4526 + 13 = 4539$ usw. Ebenso $274 + 67 = 281 + 60 = 341$; $658 + 38 = 666 + 30 = 696$; $533 + 324 = 557 + 300 = 857$; $3624 + 512 = 3636 + 500 = 4136$; $764 + 478 = 772 + 470 = 842 + 400 = 1242$.

Wenn die Summanden oder deren letzte Stellen in der Nähe von 10, 100, 1000, 10000 usw. liegen, so rechne man zweckmäßig mit Ergänzungen: es wird also statt des Summanden eine passende runde Zahl addiert und dann die Ergänzung subtrahiert. Freilich darf das nur dann geschehen, wenn die Ergänzung sofort überblickt und die Subtraktion rasch mit genügender Sicherheit ausgeführt werden kann. Überhaupt sei an dieser Stelle bemerkt, daß jeder Vorteil seinen Wert verliert oder gar in einen „Nachteil" ausartet, sobald man erst nachdenken muß oder neue Fehlerquellen sich öffnen. Demgegenüber ist nicht zu vergessen, daß die meisten brauchbaren Rechenvorteile erst eingeübt werden müssen, um bei praktischen Aufgaben zur Geltung zu gelangen.

Beispiele. $92 + 66 = 166 - 8 = 158$; $89 + 74 = 174 - 11 = 163$.

Es kann auch zuerst die Ergänzung vom zweiten Summanden abgezogen und dann 100 hinzugezählt werden, also: 89, 11; 74 ab 11 = 63, 163; 89 + 97; 97 — 11 = 86, 186. Oder 89 — 3 = 86; 186. 97 + 96 = 200 — (3 + 4) = 193 oder = 196 — 3 = 193. Weitere Beispiele: 979 + 443 = 1443 — 21 = 1422. 587 + 256 = 600 + (256 — 13) 243 = 843. 3498 + 6503 = 3500 + 6501 = 4001 + 6000 = 10001.

Sind mehrere Summanden zu addieren, so wird man, wenn möglich 2 bis 3, selten 4 Ziffern (der gleichen Vertikalreihe) zusammenfassen, deren Summe = 10, 20, evtl. 30 ist.

Man kann zu diesem Zwecke gelegentlich eine Ziffer überspringen und diese hinterher berücksichtigen. Es empfiehlt sich auswendig zu merken, daß folgende Zahlentripel 20 ergeben:

2, 9, 9; 3, 8, 9; 4, 7, 9; 4, 8, 8; 5, 6, 9; 5, 7, 8; 6, 6, 8; 6, 7, 7.

48		87	
72	(8 + 2) + 6 + (9 + 1)	48	
56	+ 3 + (5 + 5) + 4 = 10	65	
29	und 6 ist 16 und 10 ist 26	43	(7 + 8 + 5) + 3 + (9
81	und 3 ist 29 und 10 ist 39	29	+ 9 + 2) + (4 + 5)
23	und 4 ist **43**; 4 + 4 ist 8	69	= 20 + 3 + 20 + 9
45	und 7 ist 15 und 5 ist 20	82	= **52**; 5 + 8 + (4 + 6)
55	und 10 (8 + 2) ist 30	84	+ 4 + 2 + 6 + (8 + 8
14	und 2 ist 32 und 10 (4 + 5	45	+ 4) = **55**.
423	+ 1) = **42**.	552	

Auch hier ist Bedingung, daß man die Summanden, deren Summe = 10, 20 oder 30 ist, nicht erst lange suchen muß; ferner dürfen diese Summanden nicht ausgesprochen werden, auch nicht im Gedanken „mitgesprochen" werden, wie etwa 9 + 9 + 2 = 20; vielmehr muß das bloße Ansehen der Ziffern, deren Addition sozusagen im Unterbewußtsein erfolgt, genügen, um die Summe 10, 20 usw. anzugeben. Würde ich hingegen im Gedanken addieren: 9 und 9 ist 18 und 2 = 20, dann könnte man natürlich durchaus nicht von einem „Vorteil" reden.

Ob es vorteilhaft ist, gelegentlich im Gedanken auch zwei oder drei Zahlen zusammenzufassen, deren Summe keine runde Zahl ist, muß dem Rechner selbst überlassen bleiben.

Im letzten Beispiel tat ich es für $4 + 5 = 9$.

Sind Ziffern derselben Vertikalreihe einander gleich oder bestehen sie aus einigen Gruppen gleicher Ziffern, so ersetze man die Summation durch eine oder mehrere einfache Multiplikationen.

68
88
28
48
98
78
408

$6 \cdot 8 = \mathbf{48}$; 4 und 6 $= 10$ und 10 $(8 + 2) = 20$ und 20 $(4 + 9 + 7) = \mathbf{40}$; 408.

312
346
328
327
364
343
2020

Die ersten zwei Vertikalreihen werden wie gewöhnlich addiert, während die dritte Reihe gefunden wird: $6 \cdot 3$ ist 18 und 2 $= \mathbf{20}$; 2020.

3,05	ℳ
6,15	„
7,40	„
4,35	„
2,05	„
5,60	„
8,15	„
9,75	„
2,65	„
49,15	ℳ

Gerade bei kaufmännischen Rechnungen können diese Fälle häufig vorkommen. In nebenstehendem Beispiele rechne man: $7 \cdot 5 = \mathbf{35}$ usw.

14,25	ℳ
12,50	„
24,75	„
13,25	„
4,50	„
6,25	„
45,25	„
16,50	„
17,00	„
24,25	„
178,50	ℳ

00, 25, 50 und 75 können durch lauter Viertel (von Hundert) ausgedrückt werden; $00 = 0$, $25 = {}^1/_4$, $50 = {}^2/_4$, $75 = {}^3/_4$ vom Hundert. Also in unserem Beispiele: 1 und 2 ist 3 und 3 ist 6 und 1 ist 7 und 2 ist 9 und 1 ist 10 und 1 ist 11 und 2 ist 13 und 1 ist 14; ${}^{14}/_4 = 3\,{}^1/_2$ Hunderter $= \mathbf{50}$, 3 im Sinne; die weitere Addition geht wie gewöhnlich und liefert in der nächsten Reihe **48** und dann **17**. Daß man ebenso mit den Zahlen 20, 40, 60, 80 als Fünftel von Hundert, oder beispielsweise mit $12\,{}^1/_2$, 25, $37\,{}^1/_2$, 50 usw. als Achtel von Hundert rechnen kann, und wie weit man mit diesen Vereinfachungen zu gehen hat, wird wohl der Leser selbst in jedem Einzelfalle entscheiden können.

Bei technischen und kaufmännischen Rechnungen hat man häufig Gelegenheit, mehrere annähernd gleiche Zahlen zu summieren.

Es ist dann zweckmäßig, eine passende runde Zahl (am besten eine etwas kleinere als jeder einzelne Summand) als **Mittelwert** zu wählen, diesen mit der **Anzahl** der Summanden zu multiplizieren und die Summe der **Abweichungen** vom gewählten Mittel — die auch negativ sein können — hinzuzählen.

Beispiele.

$$\begin{aligned} 43 &= 40 + 3 \\ 38 &= 40 - 2 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 45 &= 40 + 5 \\ 41 &= 40 + 1 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 42 &= 40 + 2 \\ \hline 287 &= 7 \cdot 40 + 7. \end{aligned}$$

Die positiven bzw. negativen Abweichungen vom gewählten Mittelwert braucht man natürlich **nicht** auszuschreiben, wie hier der Deutlichkeit wegen geschehen ist.

508	752
503	753
502	746
497	754
499	745
504	751
3013	4501

$8 + 3 + 2 - 3 - 1 + 4 = 13$ und $6 \cdot 500 = 3013$.
$2 + 3 - 4 + 4 - 5 + 1 = 1$ und $6 \cdot 750 = 4501$.

2. Das arithmetische Mittel, darunter versteht man die Summe zweier oder mehrerer Zahlen, dividiert durch die **Anzahl** derselben. Also: 42 und 36, arithmetisches Mittel $(42 + 36) : 2 = 78 : 2 = 39$; $12{,}5 + 16{,}4 + 19{,}7 = 48{,}6$; arithmetisches Mittel: $48{,}6 : 3 = 16{,}2$.

Z. B.	
	1,75
	1,73
	1,78
	1,70
	1,71
	1,74
	1,73
	1,74
	1,75
	1,72
Mittelwert	1,735

Häufig haben die Glieder, von denen der Mittelwert gebildet werden soll, nur geringe Abweichungen voneinander. In diesem Falle nehme man schätzungsweise eine passende runde Zahl als Mittelwert, am besten kleiner als der zu erwartende Mittelwert, an und bilde hierauf das arithmetische Mittel der **Abweichungen**, welches letztere zu der angenommenen Zahl addiert wird.

In nebenstehendem Beispiele liegen sämtliche Werte zwischen 1,70 und 1,80; wir berücksichtigen zunächst nur die Abweichungen von 1,70, das sind die Einer.

$5 + 3 + 8 + 0 + 1 + 4 + 3 + 4 + 5 + 2 = 35$; $35 : 10 = 3{,}5$; arithmetisches Mittel der zehn Werte: 1,735.

4,65 ℳ
4,73 „
4,75 „
4,67 „
4,78 „
4,74 „
4,68 „
4,72 „

Mittelwert 4,715 ≅ 4,71 ℳ.

Abweichungen von 4,70 abgesehen vom Komma: $-5 + 3 + 5 - 3 + 8 + 4 - 2 + 2 = 12$, durch $8 = 1{,}5$. Mittelwert: 4,715 ℳ rund 4,71 ℳ.

2,99
2,97
2,98
2,93
2,96
2,94
2,99
2,96
2,93
2,90

29,55

In nebenstehendem Beispiele ist es vorteilhaft, die Abweichungen in bezug auf 3,00 zu bilden; und da sie sämtlich negativ sind, deren Mittelwert von 3,00 abzuziehen. Man erhält, abgesehen vom Komma: $1 + 3 + 2 + 7 + 4 + 6 + 1 + 4 + 7 + 10 = 45$; $45 : 10 = 4{,}5$; $300 - 4{,}5 = 295{,}5$; arithmetisches Mittel: 2,955 [1]).

Unter allen Umständen ist die Summe sämtlicher Glieder gleich dem arithmetischen Mittel mal Anzahl der Glieder.

Dies läßt sich bei Aufgaben folgender Art verwerten: $25 + 30 + 35 + 40 + 45 + 50 + 55 + 60 + 65 = ?$

Eine Reihe von Zahlen, bei denen die Gesetzmäßigkeit besteht, daß die Differenz zweier aufeinander folgenden Zahlen konstant (unveränderlich) ist, wird als arithmetische Reihe bezeichnet. In unserem Beispiel $30 - 25 = 35 - 30 = 40 - 35 = \ldots = 5$; ist die Anzahl der Glieder ungerade, so bilde man das arithmetische Mittel und multipliziere mit der Anzahl der Glieder, $\frac{25 + 65}{2} = 45$, $9 \cdot 45 = 405$.

1) Wenn aus **10** Werten das arithmetische Mittel zu bilden ist, so addiere man diese (evtl. unter Beachtung der gleichen Ziffern) und verschiebe das Komma um eine Stelle nach links. Im letzten Beispiele ist die Summe 29,55, Mittelwert: 2,955.

Nun ist in diesem Falle das mittlere (hier das 5. Glied) = 45, gleich dem arithmetischen Mittel der Endglieder. Die Regel wird demnach noch einfacher: Die Summe einer arithmetischen Reihe mit einer ungeraden Anzahl von Gliedern ist gleich dem mittleren Gliede mal Anzahl der Glieder.

Bei einer geraden Anzahl von Gliedern ist die Summe der arithmetischen Reihe gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes mal der halben Anzahl der Glieder.

$36 + 40 + 44 + 48 + 52 + 56 = (36 + 56) \cdot 3 = 3 \cdot 92 = 276.$

Beispiele. Berechne die Summe aller Zahlen von 1–99; $\frac{1+99}{2} = 50$; $50 \cdot 99 = \mathbf{4950}$. Die Summe aller ungeraden Zahlen bis 20?

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = ?$$

$1 + 19 = 20$; Anzahl der Glieder durch $2 = 10 : 2 = 5$; $5 \cdot 20 = \mathbf{100}$

3. Subtraktion. Vielfach addiert man statt zu subtrahieren.

$$\begin{array}{r} 8965 \\ -\,3674 \\ \hline 5291 \end{array}$$

In nebenstehendem Beispiele: Von rechts angefangen 4 und **1** = 5, 7 und **9** = 16, 1 im Sinne; 1 und 6 = 7 und **2** = 9; 3 und **5** = 8.

So zählen die meisten Kaufleute beim Herausgeben von dem zu zahlenden Betrag weiter, bis der tatsächlich gezahlte — größere als der zu zahlende — Betrag erreicht ist, was eine Subtraktion ersetzen soll. Z. B. Gekauft Ware für 3,64 ℳ, herauszugeben sei auf 20,— ℳ; hier müßte man naturgemäß den zu zahlenden Betrag von 20,— ℳ subtrahieren. Statt dessen zählt der Kaufmann beispielsweise: 3,64 ℳ und 6 ₰ ist 3,70 ℳ und 30 ₰ ist 4 ℳ und 6 ℳ ist 10 ℳ und 10 ℳ ist 20 ℳ, d. h. er addiert zu 3,64 ℳ solange, bis der gezahlte Betrag von 20 ℳ erreicht ist.

$$\begin{array}{r} 6484 \\ \hline -\left\{\begin{array}{r} 572 \\ 484 \\ 566 \\ 321 \\ 248 \\ 36 \\ 175 \\ 849 \end{array}\right. \\ \hline 3233 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100{,}00 \text{ ℳ} \\ \hline -\left\{\begin{array}{r} 8{,}35 \text{ „} \\ 14{,}55 \text{ „} \\ 7{,}50 \text{ „} \\ 26{,}45 \text{ „} \\ 9{,}70 \text{ „} \\ 18{,}85 \text{ „} \\ 2{,}15 \text{ „} \end{array}\right. \\ \hline 12{,}45 \text{ ℳ} \end{array}$$

Das Ersetzen der Subtraktion durch Addition ist besonders vorteilhaft, wenn mehrere Zahlen von einer Zahl zu subtrahieren sind. Die Subtrahenden werden addiert und Ziffer für Ziffer auf den Minuenden ergänzt (s. nebenstehendes Beispiel).

Man rechne also: $9 + 5 + 6 + 8 + 1 + 6 + 4 + 2 = 41$ und $\mathbf{3} = 44$,
4 gemerkt; $4 + 4 + 7 + 3 + 4 + 2 + 6 + 8 + 7 = 45$ „ $\mathbf{3} = 48$
4 „ ; $4 + 8 + 1 + 2 + 3 + 5 + 4 + 5 = 32$ „ $\mathbf{2} = 34$,
3 „ ; $3 + \mathbf{3} = 6$.

Ebenso verfährt man im zweiten Beispiel, wo von 100 ℳ sieben einzelne Posten abzuziehen sind. Man erhält unmittelbar die Differenz 12,45 ℳ, ohne die Summe der einzelnen Subtrahenden = 87,55 ℳ zu kennen.

Liegt der Subtrahend in der Nähe einer passenden runden Zahl, so kann man diese subtrahieren und die Ergänzung addieren.

Z. B. $\begin{array}{r} 6457 \\ -\,2988 \\ \hline 3469 \end{array}$ Ergänzung auf 3000, $3000 = 2988 + 12$;
$6457 = 3000 + 3457$; $3457 + 12 = 3469$.
$15876 - 4946 = 10876 + 54 = 10930$.

Allgemein: zu berechnen sei die Differenz zweier Zahlen a und b, wobei b in der Nähe einer passenden runden Zahl c liegt; man setze $b = c - d$ und erhält: $a - b = a - (c - d) = a - c + d$.

Auch im Kopfe kann man zweckmäßig addieren statt subtrahieren; also 264—82 wäre zu rechnen 82 und **2** = 84, 84 und 180 = 264; $264 - 82 = 182$.

$324 - 168$; 168 und **6** ist 174 und $150 = 324$; $324 - 168 = 156$.

$$2463 - 997 = \mathbf{1}463 + 3 = 1466.$$

Wenn sich zwei oder mehrere Endziffern im Minuend und Subtrahend decken, wird man die Rechnung wesentlich vereinfachen können.

$$4563 - 1363 = 4500 - 1300 = 3200.$$

(Sprich: 45 Hunderter — 13 Hunderter = 32 Hunderter = 3200).

$$19468 - 3668 = 19400 - 3600 = 15800.$$

$37684 - 11684$; 37 tausend — 11 tausend = 26 tausend = 26000.

Bei mehreren Addenden und Subtrahenden wird man suchen, je nach deren Beschaffenheit, von den bisher dargelegten Rechenvorteilen Gebrauch zu machen. Die Beschaffenheit der Einzelglieder entscheidet auch darüber, ob es vorteilhafter ist, jeden Subtrahenden der Reihe nach oder sämtliche Subtrahenden zusammenzuzählen und dann von den mit dem Pluszeichen versehenen Gliedern zu subtrahieren.

Z. B. $2442 - 120 - 240 - 120 - 120 = 2442 - 600$
$(= 5 \cdot 120) = 1842$.

$327 + 248 + 664 - 148 - 307 - 364 = 20 + 100 + 300 = 420$.

Häufig hat man von einer Zahl, die aus einer 1 und einigen Nullen besteht, eine andere Zahl zu subtrahieren,

z. B. $1000 - 346 = 654$.

Man denke sich jede Ziffer von links nach rechts von **9** subtrahiert (oder auf 9 ergänzt) und füge zur letzten so erhaltenen Ziffer noch 1 hinzu, also:

3 und $\mathbf{6} = 9$; 4 und $\mathbf{5} = 9$; 6 und $\mathbf{3} = 9$; $3 + 1 = \mathbf{4}$.

Ebenso findet man $10000 - 4388 = 5612$.

Diese Aufgaben kommen vor beim Herausgeben auf 10,— ℳ = 1000 Pf., 100,— ℳ = 10000 Pf. usw. (Vgl. S. 12).

Die Probe kann bei der Addition vorgenommen werden, indem man einmal von oben nach unten und dann von unten nach oben addiert. Besteht eine Addition, wie dies in Kontobüchern vorzukommen pflegt, aus einer so großen Reihe von Summanden, daß die Rechnung unübersichtlich wird, wodurch die Sicherheit verloren geht, so unterteilt man am besten die ganze Reihe in einige Gruppen, summiert jede Gruppe für sich und bildet dann die Summe der letzteren.

B. Multiplikation.

Diese Rechnungsart bildet den Angelpunkt im bürgerlichen, kaufmännischen und technischen Rechnen. Wenn man von Schnellrechnern spricht — um nicht Rechenkünstler zu sagen — meint man auch in der Regel, daß diese rasch im Kopfe oder vereinfacht auf Papier multiplizieren können.

Der Grund hierfür ist leicht einzusehen; denn abgesehen von den zwei ersten Rechnungsarten, die eben die einfachsten sind, nimmt die Multiplikation als solche infolge ihrer häufigen Anwendung in Schule und Praxis einen sehr wichtigen Platz ein. Ferner ist das Potenzieren ja nur ein Spezialfall der Multiplikation; endlich kehrt letztere als Bestandteil beim Dividieren und Wurzelziehen wieder.

4. Die erste Ziffer sei bei beiden Faktoren die gleiche. 10 · 10 bis 20 · 20.

Beispiele.

$12 \cdot 13 = \ ?$

$12 + 3 = 15$ Zehner

$2 \cdot 3 = 6$ Einer

$12 \cdot 13 = 156$

oder $12 \cdot 13 = \overset{12+3\ \ 2\cdot 3}{156}$

$13 \cdot 17 = \ ?$

$13 + 7 = 20$ Zehner

$3 \cdot 7 = 21$ Einer

$13 \cdot 17 = 221$

Ebenso

$12 \cdot 16 = 18\frown12 = 192$

Der Rechnungsvorgang spielt sich rasch im Kopfe etwa folgendermaßen ab:

18; 180 und 12 = 192.

Regel: Man addiere die Einer des zweiten Faktors zu dem ersten und hänge eine Null an, zu der so gebildeten Zahl addiere man das Produkt der Einer beider Faktoren.

Allgemein läßt sich diese Regel so fassen:

Man addiere die Einer des zweiten Faktors zum ersten Faktor, multipliziere mit den Zehnern und hänge eine Null an; zu der so gebildeten Zahl addiere man das Produkt der Einer beider Faktoren.

Beispiele.

$24 \cdot 21 = ?$
$24 + 1 = 25$
$25 \cdot 2 = 50;$ 500
$4 \cdot 1 = \ldots\ldots$ 4

$24 \cdot 21 = \ldots\ldots 504$
$23 \cdot 22 = 506$
$[(23 + 2)\ 2 = 50,\ 2 \cdot 3 = 6]$

$32 \cdot 36 = ?$
$38 \cdot 3 = 114;$ 1140
$2 \cdot 6 = \ldots\ldots$ 12

1152

Kürzer gefaßt:
$32 \cdot 36 = 114\frown 12 = 1152$

$34 \cdot 38 = ?$ $42 \cdot 3 = 126$.; 1260 und 32 = 1292.

$52 \cdot 56 = ?$ $58 \cdot 5 = 290$.; 2900 und 12 = 2912,

oder 58 : 2 = 29 Hunderter, $2 \cdot 6 = 12$ Einer, $52 \cdot 56 = 2912$.

$$\text{Ebenso } 54 \cdot 58 = \overset{62:2}{31}\ \overset{4\cdot 8}{32}$$

Es seien $m = 10a + b$ und $n = 10a + c$ 2 zweistellige Zahlen, bei denen die erste Ziffer die gleiche ist, dann ist:

$$m \cdot n = (10a + b) \cdot (10a + c) = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc$$
$$= 10a\,[(10a + b) + c] + bc = 10a\,(m + c) + bc.$$

Da $m + c$ gleich ist dem 1. Faktor, vermehrt um die Einer des zweiten und bc gleich ist dem Produkt der Einer beider Faktoren, findet man leicht die Übereinstimmung mit der oben angegebenen Regel.

Sind die Endziffern beider Faktoren größer als 5, so kann es von Vorteil sein, die Rechnung durch Ergänzung auf die nächst höhere Zehnerzahl durchzuführen.

Z. B. $17 \cdot 19$ rechne man so: an 20 fehlen bei beiden Faktoren bezüglich 3 und 1; diese Zahlen werden miteinander multipliziert,

$$3 \cdot 1 = 3.$$

Vom ersten Faktor subtrahiere man das beim zweiten Faktor an 20 Fehlende und multipliziere mit 2 (nächst höhere Zehnerzahl), hänge eine Null an und addiere das obige Produkt.

$$17 - 1 = 16;\ 2 \cdot 16 = 32\,.\,.;\quad 320,$$

$$17 \cdot 19 = 323. \text{ Kürzer: } 17 \cdot 19 = \overset{2\cdot 16\ 1\cdot 3}{323}.$$

Auch hier ist wiederum die wirkliche Durchführung der Rechnung bedeutend einfacher, als es in Worten ausgesprochen erscheinen mag.

$$17 \cdot 18 = \overset{(17-2)\cdot 2\ 3\cdot 2}{306}, \qquad 37 \cdot 38 = \overset{4\cdot 35\ 3\cdot 2}{1406},$$

$$46 \cdot 48 = \overset{44\cdot 5\ 4\cdot 2}{2208}.$$

Die Multiplikation wird nach den bisherigen Regeln unbequem, sobald die Faktoren etwa größer als 60 sind, namentlich aber, wenn einer oder beide Faktoren in die Nähe von 100 rücken. Man rechne daher in diesen Fällen nach den im folgenden entwickelten Regeln.

5. Ergänzungen und Überschüsse.

Ergänzung ist eine Zahl, die man zu einer gegebenen Zahl hinzufügen muß, um eine für die Rechnung geeignete runde Zahl zu erhalten. Z. B. 88, Ergänzung 12 (bezogen auf 100),
491, „ 9 („ „ 500).

Überschuß ist ein Betrag, um den eine gegebene Zahl größer ist, als eine für die Rechnung geeignete runde Zahl,
z. B. 106, Überschuß 6 (bezogen auf 100),
513, „ 13 („ „ 500).

91 · 97 =	?
91, Ergänzung	9
97, „	3
91 − 3 =	88
99 · 3 =	27
91 · 97 =	8827

Regel: Man subtrahiere von dem ersten Faktor die Ergänzung des zweiten, hänge zwei Nullen an und addiere hierzu das Produkt der Ergänzungen.

Das Anhängen von zwei Nullen kann naturgemäß erfolgen, indem man eine zu addierende zweistellige Zahl „ansetzt":

$$8800 + 27 = 8827.$$

Beispiele. $93 \cdot 98 = 9\,114 (93 - 2 = 91,\ 2 \cdot 7 = 14)$; $87 \cdot 89 = ?$
$87 - 11 = 76,\quad 11 \cdot 13 = 143,\quad 87 \cdot 89 = 76\frown 143 = 7743.$

Hier brauchen die Zehner beider Faktoren nicht übereinzustimmen. Vielmehr ist obige Regel stets anwendbar, sobald die Ergänzungen so beschaffen sind, daß ihr Produkt leicht zu bilden ist.

Z. B. $86 \cdot 97 = \overset{86-3\ \ 3\cdot 14}{8342}$

$77 \cdot 96 = \overset{77-4\ \ 4\cdot 23}{7392}$

$87 \cdot 94 = 8178$
$(87 - 6 = 81,\ 13 \cdot 6 = 78)$
$83 \cdot 92 = 75^\frown 136 = 7636$
$86 \cdot 88 = 74^\frown 168 = 7568$

Beweis zu der oben angegebenen Regel. Es seien $m = 100 - b$ und $n = 100 - c$ 2 zweistellige Zahlen, dann ist:

$$m \cdot n = (100 - b) \cdot (100 - c) = 100 \cdot 100 - 100b - 100c + bc$$
$$= 100\ [(100 - b) - c] + bc = 100\ (m - c) + bc.$$

Da $m - c$ gleich ist dem 1. Faktor, vermindert um die Einer des zweiten und bc gleich ist dem Produkt der Einer beider Faktoren, findet man leicht die Übereinstimmung mit der früher angegebenen Regel.

Wir gehen nun über zu Faktoren, die größer sind als 100.

Z. B. $107 \cdot 109 = ?$

$107 + 9 = 116;\quad 11600$
$7 \cdot 9 = \quad 63$
$107 \cdot 109 = \ldots 11663$

Regel: Man addiere zum ersten Faktor den Überschuß des zweiten, hänge zwei Nullen an und addiere zu der so erhaltenen Zahl das Produkt der Überschüsse.

Beispiele. $104 \cdot 123 = 12792\ (104 + 23 = 127,\ 4 \cdot 23 = 92)$
$111 \cdot 113 = ?\quad 124 \ldots;\ 12400,\ 11 \cdot 13 = 143$ (Vgl. S. 14);

$$111 \cdot 113 = 12543.$$

$106 \cdot 123 = 129^\frown 138 = 13038$
$112 \cdot 118 = 130^\frown 216 = 13216$

$103 \cdot 142 = 145^\frown 126 = 14626$
$102 \cdot 137 = \overset{102+37\ \ 2\cdot 37}{13974}$

Der Beweis zu dieser Regel ist analog dem Beweis auf Seite 15, wenn man $a = 10$, demnach $10a = 100$ setzt.

In entsprechender Weise rechne man:

$$88 \cdot 107 = 9500 - 84 = 9416 \quad 93 \cdot 106 = 9900 - 42 = 9858$$
$$89 \cdot 115 = 10400 - 165 = 10235$$

Bei den letzten Beispielen sei $m = 100 - b$ und $n = 100 + c$; man erhält dann nach entsprechender Zwischenrechnung:

$$mn = 100\ (m + c) - bc, \text{ oder: } mn = 100\ (n - b) - bc.$$

Auch für Zahlen in der Nähe von Tausend gelten sinngemäß dieselben Regeln.

Beispiele. $976 \cdot 997 = \overset{976-3\ 3\cdot 24}{973072}$; $988 \cdot 993 = 981084$;

$966 \cdot 995 = 961\,170$; $825 \cdot 996 = \overset{825-4\ 4\cdot 175}{821\,700}$.

$1004 \cdot 1027 = 1031108$ ($1004 + 27 = 1031$, $4 \cdot 27 = 108$!)
$1007 \cdot 1034 = 1041238$ ($1007 + 34$, $7 \cdot 34$).
$1012 \cdot 1025 = 1037300$
$1031 \cdot 1032 = 1063992$ ($31 \cdot 32$ vgl. S. 15).

Liegen die Faktoren in der Nähe der Zahlen 50, 500 usw., so läßt sich ebenfalls mit Ergänzungen rechnen, sobald nur das Produkt dieser Ergänzungen bequem zu bilden ist; dies ist aber sicher der Fall für Ergänzungen, die kleiner sind als 20 (vgl. S. 14).

Z. B. $44 \cdot 48 = ?$ $44 - 2 = 42$, $42 \cdot 5 = 210 \ldots 2100$,

(Hier würde es einfacher sein, 42 durch 2 zu dividieren und mit 100 zu multiplizieren, $\frac{42}{2} = 21$ Hunderter), $6 \cdot 2 = 12$, mithin $44 \cdot 48 = 2112$.

Beispiele.
$38 \cdot 46 = 1748$ ($38 - 4 = 34$;
$34 : 2 = 17$; $12 \cdot 4 = 48$);
$39 \cdot 48 = \overset{37:2}{1850} + 22 = 1872$;
$54 \cdot 58 = 3132$;
$54 + 8$; 62; 31; $4 \cdot 8 = 32$;
$56 \cdot 63 = \overset{69:2}{3450} + \overset{6\cdot 13}{78} = 3528$;
$54 \cdot 74 = 3996$
($78 : 2 = 39$, $4 \cdot 24 = 96$);
$61 \cdot 63 = 37\frown 143 = 3843$;
(Auch: $60 \cdot 63 = 3780$,
$3780 + 63 = 3843$);
$492 \cdot 496 = ?$
$\frac{488}{2} = 244$; $8 \cdot 4 = 32$;
$492 \cdot 496 = 244032$;
$491 \cdot 498 = 244518$
($489 : 2 = 244{,}5$; $9 \cdot 2 = 18$!)

$478 \cdot 496 = \overset{474:2\ 4\cdot 22}{237088}$;
$479 \cdot 495 = 237105$;
$483 \cdot 488 = 2355\frown 204$
$= 235704$;
$466 \cdot 494 = 230204$.

Ebenso:
$507 \cdot 509 = 258063$
($\frac{516}{2} = 258$, $7 \cdot 9 = 63$);
$502 \cdot 513 = 257526$
($515 : 2 = 257{,}5$; $2 \cdot 13 = 26$!)
$509 \cdot 511 = 260099$;
$512 \cdot 513 = 2625\frown 156$
$= 262656$;
$503 \cdot 531 = 267093$;
$508 \cdot 535 = 2715\frown 280$
$= 271780$ usw.

Nunmehr stelle ich die Regeln zusammen, nach denen wir auf den letzten Seiten gerechnet haben.

I. Regel. Für Zahlenfaktoren, die in der Nähe von 50 liegen und kleiner als diese sind. Subtrahiere vom ersten Faktor die Ergänzung des zweiten, dividiere durch 2, hänge 2 Nullen an und addiere zu dieser Zahl das Produkt der Ergänzungen.

II. Regel. Für Zahlenfaktoren, die in der Nähe von 50 liegen und größer als diese Zahl sind. Addiere zum ersten Faktor den Überschuß des zweiten, dividiere die Summe durch 2, hänge 2 Nullen an und addiere zu dieser Zahl das Produkt der Überschüsse.

Ia. Regel. Für Zahlen, die in der Nähe von 500 liegen, verfahre man genau wie bei I. bzw. II., nur sind **3** Nullen anstatt 2 Nullen anzuhängen.

Anmerkung. Für die Vorstellung ist es mitunter einfacher, anstatt an eine Zahl 1, 2 oder 3 Nullen anzuhängen, die Zahl als Zehner, Hunderter, Tausender usw. aufzufassen.

Die bisherigen Regeln lassen sich folgerichtig auch auf Faktoren in der Nähe von 5000, 50000 usw., ebenso entsprechend auf Faktoren in der Nähe von 10000, 100000 ... anwenden, wenn nur die Ergänzungen, bzw. die Überschüsse, so beschaffen sind, daß ihre Produkte sich leicht bilden lassen.

Die Anzahl der anzuhängenden Nullen vergrößert sich entsprechend auf 4, 5 usw.

Beispiele.

$4968 \cdot 4994 = ?$

$\frac{4962}{2} = 2481, \; 32 \cdot 6 = 192$

$4968 \cdot 4994 = 24810192$

$4976 \cdot 4979 = 24775504$

$\frac{4955}{2} = 2477{,}5; \;\; 24 \cdot 21 = 504$

(Vgl. S. 15)

$4982 \cdot 4988 = \overset{4970:2 \;\; 18\cdot 12}{24850216}$

$4893 \cdot 4994 = 24435642$

$(4887 : 2 = 2443{,}5; \; 6 \cdot 107 = 642)$

$4777 \cdot 4997 = \overset{4774:2 \;\; 223\cdot 3}{23870669}$

$4188 \cdot 4996 = \overset{4184:2 \;\; 4\cdot 812}{20923248}$

$5012 \cdot 5008 = \overset{5020:2 \;\; 8\cdot 12}{25100096}$

$5014 \cdot 5018 = 25160252$

$5009 \cdot 5112 = 2505\frown 1008 = 25606008$

$5026 \cdot 5029 = 25275754$

$(5055 : 2 = 2527{,}5; \; 26 \cdot 29 = 754)$

$5004 \cdot 5336 = 26701344$

$5006 \cdot 5225 = 26155\frown 1350 = 26156350$

Ebenso rechne man:

$9946 \cdot 9992 = \overset{9946-8 \;\; 8\cdot 54}{99380432}$

$9976 \cdot 9972 = 99480672 \qquad 24 \cdot 28 = 672$

$9954 \cdot 9958 = 99121932 \qquad 46 \cdot 42 = 1932$

Selbst wenn man etwa bei den letzten Beispielen die Produkte der Ergänzungen $24 \cdot 28 = 672$ und $46 \cdot 42 = 1932$ nicht im Kopfe, sondern als kleine Nebenrechnung, rechnen würde, wäre dieses Verfahren noch empfehlenswert.

Ebenso:

$$10006 \cdot 10009 = \overset{10006+9}{10015}\,\overset{6\cdot 9}{0054}$$

$$10013 \cdot 10019 = 100320247$$

$$10022 \cdot 10027 = 100490594 \quad (22 \cdot 27 \text{ vgl. S. } 15)$$

$$10087 \cdot 10093 = 101808091$$

$$\scriptstyle 87 \quad 7 \quad 7\cdot 13$$

$$10087 + 93 = 10180; \; 87 \cdot 93 = 8091 \quad (\text{vgl. S. } 16)$$

$$10012 \cdot 10225 = 102372700$$

$$10011 \cdot 10064 = 10075\,\overset{11\cdot 64}{0704}$$

$$10075 \cdot 10150 = 10225 \frown 11250 \qquad 150 \cdot 75 = \begin{cases} 7500 \\ 3750 \end{cases}$$

$$= 102261250 \qquad\qquad \overline{11250}$$

Es erübrigt sich wohl, Beispiele für noch größere Zahlen anzuführen.

Übung. Berechne folgende Produkte: $11 \cdot 18$, $12 \cdot 15$, $34 \cdot 27$, $33 \cdot 37$, $107 \cdot 108$, $109 \cdot 115$, $1008 \cdot 1012$, $1013 \cdot 1019$, $83 \cdot 88$, $86 \cdot 97$, $79 \cdot 98$, $76 \cdot 98$, $69 \cdot 99$, $83 \cdot 95$, $988 \cdot 993$, $982 \cdot 983$, $9978 \cdot 9989$, $9906 \cdot 9993$; $507 \cdot 508$, $467 \cdot 497$, $491 \cdot 498$, $506 \cdot 512$, $505 \cdot 567$, $5007 \cdot 5034$, $5006 \cdot 5086$, $10009 \cdot 10824$, $10025 \cdot 10225$.

6. Ein Zahlenfaktor sei 25 oder dessen Vielfaches. Es sei erinnert, daß die Multiplikation einer Zahl mit 100, 1000, 10000 usw. durch Anhängen von 2, 3, 4 usw. Nullen erfolgt und daß überhaupt die Multiplikation wesentlich vereinfacht wird, sobald ein Faktor mit einer oder mehreren Nullen endet, indem bei der wirklichen Multiplikation weniger Stellen in Frage kommen als der Faktor insgesamt enthält. Soll beispielsweise das Produkt $18000 \cdot 486$ ermittelt werden, so bilden wir bekanntlich das Produkt $18 \cdot 486$ und hängen hieran 3 Nullen an.

Bedenkt man, daß $25 = \frac{1}{4} \cdot 100$, $50 = \frac{1}{2} \cdot 100$, $75 = \frac{3}{4} \cdot 100$, $125 = \frac{1}{8} \cdot 1000$, $250 = \frac{1}{4} \cdot 1000$ usw., so lassen sich Multiplikationen, bei denen etwa der Multiplikator ein passendes Vielfaches von 25 ist, bequem ausführen.

Beispiele.

$25 \cdot 88 = 2200 \left[\frac{88}{4} = 22;\ 25 \cdot 88 = 22 \text{ mal Hundert} = 2200.\right]$

$25 \,.\, 96 = 2400;\ 25 \cdot 84 = 2100.$

Ebenso: $25 \cdot 73 = 1825;\ 73 : 4 = 18$ Rest 1,

folglich: $25 \cdot 73 = 1800 + 25 = 1825.$

$$25 \cdot 147 = 3675.$$

Man dividiere 147 durch 4 und erhält zunächst 36, Rest **3**; durch Anhängen von Nullen wird jedoch die Division fortgesetzt, bis der Rest gleich Null wird. Man kann demnach das Produkt 3 6 7 5 Ziffer für Ziffer von links nach rechts hinschreiben.

Weitere Beispiele.

$25 \cdot 256 = 6400$

$25 \cdot 763 = 19075 \quad (763 : 4 = 190{,}75!)$

$25 \cdot 2341 = 58\,525$

$25 \cdot 5338 = 133\,450$

$25 \cdot 14\,764 = 369\,100$

$25 \cdot 68\,225 = 1\,705\,625$ usw

$125 \cdot 232 = 29\,000 \ (232 : 8 = 29!)$

$125 \cdot 393 = 49\,125$

$125 \cdot 864 = 108\,000$

$125 \cdot 971 = 121\,375$

Falls die Division nicht restlos aufgeht, wird sie auch bei der Multiplikation mit 125 durch sukzessives Anhängen von Nullen an den Rest solange fortgesetzt, bis der Rest gleich Null wird. Im letzten Beispiele erhält man zunächst $\frac{971}{8} = 121$, Rest 3.

Die weitere Division ergibt sich wie bei der Verwandlung von $^3/_8$ in einen Dezimalbruch, so daß $\frac{971}{8} = 121{,}375$. Das Anhängen von 3 Nullen kann hier offenbar erfolgen durch Fortlassung des Kommas, — demnach $125 \cdot 971 = 121\,375$.

Wer es bequemer findet, wird sich merken, daß jedem Rest ganz bestimmte Endziffern entsprechen, und zwar 125, multipliziert mit dem Rest, der höchstens 7 betragen kann. — Die Division wird dann nur bis zum Komma fortgesetzt.

Den Resten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 entsprechen beziehungsweise die Endziffern 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875.

Weitere Beispiele.

$125 \cdot 1465 = 183\,125 \ [1465 : 8 = 183,$ Rest **1**]

$125 \cdot 3227 = 403\,375 \ [3227 : 8 = 403,$ Rest **3**!]

Ebenso: $125 \cdot 645 = 80\,625$

$125 \cdot 4527 = 565\,875$; $125 \cdot 14\,624 = 1\,828\,000$

$125 \cdot 15\,243 = 1\,905\,375$; $125 \cdot 56\,727 = 7\,090\,875$

Ist der eine Faktor = 50, 500 usw., so dividiere man den zweiten durch 2 und hänge 2, 3 usw. Nullen an.

Auch mit 5 wird man mitunter multiplizieren, indem man durch 2 dividiert und eine Null anhängt.

Beispiele.

$5 \cdot 362 = 1810$ $[362 : 2 = 181]$

$5 \cdot 743 = 3715$; $5 \cdot 1264 = 6320$;

$5 \cdot 8649 = 43\,245$; $5 \cdot 13\,564 = 67\,820$ usw.

$50 \cdot 68 = \overset{68\,:\,2}{3400}$; $50 \cdot 83 = 4150$;

$50 \cdot 1564 = 78\,200$; $50 \cdot 33\,713 = 1\,685\,650$.

$500 \cdot 42 = \overset{42\,:\,2}{21\,000}$; $500 \cdot 663 = 331\,500$;

$500 \cdot 7\,426 = 3\,713\,000$; $500 \cdot 14721 = 7\,360\,500$.

Geht die Division durch 2 nicht auf, so dividiere man wie bei Dezimalbrüchen weiter und beachte, daß die Endziffer — da der Rest = 1 — eine 5 ist. Es wird in diesem Falle eine Null weniger angehängt, also statt 1, 2, 3 usw. Nullen keine, 1, 2 usw. Nullen.

Die Multiplikation mit $75 = \frac{3}{4} \cdot 100$ kann erfolgen ähnlich wie die Multiplikation mit 25, d. h. man dividiere durch 4 und multipliziere mit 100; zuerst muß jedoch der Multiplikandus mit 3 multipliziert werden.

Beispiele.

$75 \cdot 78 = 25 \cdot 234 = \mathbf{5850}$

$75 \cdot 64 = 4800$ (vgl. Anm.)

$75 \cdot 96 = \overset{3\cdot 24}{7200}$ (vgl. Anm.)

$75 \cdot 121 = 9075$

$\left(\frac{363}{4} = 90{,}75!\right)$

$75 \cdot 362 = 27\,150$

$[1086 : 4 = 271{,}5!]$

$75 \cdot 4924 = 369\,300$

$[3 \cdot 1231 = 3693!]$

Anmerkung. Falls der Multiplikandus durch 4 teilbar, ist es bequemer, zuerst die Division durch 4 und dann die Multiplikation mit 3 auszuführen. Vgl. letztes Beispiel.

Ähnlich findet man die Multiplikation mit $150 = \frac{3}{2} \cdot 100$ durch Multiplikation mit 3, Division durch 2 und Anhängen von 2 Nullen, oder man dividiere zuerst durch 2 und multipliziere dann mit 3.

Die Multiplikation mit 250, 2500 erfolgt genau wie diejenige mit 25, nur werden statt 2 Nullen 3 bzw. 4 Nullen usw. angehängt.

Die Multiplikation mit $375 = \frac{3}{8} \cdot 1000$ kann offenbar erfolgen durch Multiplikation mit 3, Division durch 8 und Anhängen von 3 Nullen. Geht die Division durch 8 auf, so dividiere man zuerst durch 8, multipliziere dann mit 3 und hänge 3 Nullen an.

$375 \cdot 84 = ?\quad 252 : 8 = 31{,}5;\quad 375 \cdot 84 = 31\,500.$

$375 \cdot 728 = 273\,000\ (728 : 8 = 91;\ 91 \cdot 3 = 273).$

$\mathbf{375 \cdot 4564 = 1\,711\,500}\ (13\,692 : 8 = 1711{,}5).$

Der Multiplikator **625** wird aufgefaßt als $\frac{1}{16} \cdot 10\,000$.

Regel: Um eine Zahl mit 625 zu multiplizieren, dividiere man durch 16 und hänge 4 Nullen an oder verschiebe das Komma um 4 Stellen nach rechts.

Beispiele: $625 \cdot 41 = ?\quad 41 : 16 = 2{,}5625;$
$625 \cdot 41 = 25\,625.$

Diese Multiplikation läßt sich offenbar ohne jegliche Nebenrechnung durchführen, indem man ungeachtet des Kommas immer weiter dividiert, bis sich der Rest 0 ergibt.

$625 \cdot 84 = 52\,500;\quad 625 \cdot 117 = \mathbf{73\,125};$

$625 \cdot 448 = 280\,000\ (448 : 16 = 28!);$

$625 \cdot 5461 = 3\,413\,125.$

Bis 1000 sind demnach folgende Faktoren hervorgehoben:

5, 25, 50, 75, 125, 150, 250, 375, 500, 625.

Übung. Berechne folgende Produkte: $25 \cdot 764$, $25 \cdot 6426$; $125 \cdot 864$, $125 \cdot 2771$; $5 \cdot 2327$, $5 \cdot 87\,624$; $50 \cdot 83$, $50 \cdot 3276$; $75 \cdot 213$; $625 \cdot 746$, $625 \cdot 1467$.

Der Leser hat bisher viele Regeln zur Vereinfachung bzw. zur schnelleren Ausführung der Multiplikation kennen gelernt, die aber trotzdem nicht für beliebige Faktoren (wenn auch deren Stellenzahl beschränkt wird) ausreichen. Es fragt sich, gibt es vielleicht eine Regel, die allgemein anwendbar wäre? Eine solche Regel (die schon lange bekannt ist und auf die ich später zurückkomme) ist vorhanden; aber hier möchte ich auf den Unterschied zwischen „halb" und „ganz" im Kopfe rechnen zurückkommen, oder auf den Unterschied zwischen Rechenkunst und Rechenvorteil.

Die echten Rechenkünstler (namentlich Kinder bis zu einem gewissen Alter, die eben dazu besonders veranlagt sind) werden eine Multiplikation zweier 4—5 stelliger Zahlen vollständig im Kopfe ausführen, etwa so, daß man die Faktoren ansagt und der Betreffende nach einer gewissen, nicht allzu langen Pause das Produkt hinschreibt, ohne vorher auch nur eine Ziffer hingeschrieben zu haben, oder die Faktoren während des Rechnens anzusehen. Was das bedeutet, davon hat nur der einen Begriff, der einmal im Kopfe solche Rechnungen durchgeführt hat.[1]) Der Leser versuche einmal, eine beliebige 4- und eine 5 stellige Zahl sich zu merken und im Kopfe das Produkt zu bilden und zwar, wie oben angedeutet. Das kann im allgemeinen nur derjenige leisten, der besonders dafür veranlagt ist. Andern hingegen wird es schon eine gewisse Schwierigkeit bereiten, sich die Faktoren zu merken. Aufgaben, die so gelöst werden, zähle ich zu den „vollständig im Kopfe gerechneten". Handelt es sich hier um eine Rechenkunst, so wird hingegen in den meisten Fällen die Einhaltung dieser Bedingung nicht verlangt. Vielmehr wird es dem Rechnenden frei bleiben, die Faktoren hinzuschreiben, resp. die bereits hingeschriebenen während des Rechnens anzusehen; auch kommt es nicht darauf an, ob das Produkt auf einmal oder Ziffer für Ziffer, diese wiederum von rechts nach links oder umgekehrt oder sonst in irgend einer Reihenfolge geschrieben werden. Als einzige Bedingung soll immerhin bleiben: außer den Faktoren und dem eigentlichen Produkte sollen keine Ziffern, die etwa zu einer Nebenrechnung gehören, schriftlich fixiert werden. Das wäre eben kein vollständiges, sondern ein „bedingtes im Kopfe rechnen", und wie wir sehen werden, wird die Aufgabe auch für den von Natur aus weniger Begabten lösbar. Soll das Kopfrechnen nicht als Kunststück, sondern als praktischer Behelf angewendet werden, so wäre es richtiger, dasselbe als Rechenvorteil zu bezeichnen. Man wird einen Rechenvorteil überall da anwenden, wo er gegenüber dem gewöhnlichen Rechnen eben einen Vorteil bietet. Ein Rechenvorteil kann also auch dann angewandt werden, wenn bei dessen Anwendung Nebenrechnungen auszuführen sind, die evtl. auch hingeschrieben werden können oder müssen (vgl. Seite 19 das Beispiel $9954 \cdot 9958$; hier kommt man, selbst wenn das Produkt der Ergänzungen $46 \cdot 42$ in der gewöhnlichen Weise berechnet werden soll, doch noch schneller zum Ziele als bei der Bildung des Produktes $9954 \cdot 9958$ in der üblichen Weise). In

1) Das hat der Verfasser zwischen seinem 12. und 19. Lebensjahre ausgeführt. Mit zunehmendem Alter nimmt diese Fähigkeit in der Regel ab.

manchen Fällen, wo ein Produkt bereits gebildet ist, möchte man zur Kontrolle noch auf eine andere Art das Produkt bilden und da wird man naturgemäß gerne Rechenvorteile benutzen. Auch derjenige, der zum Kopfrechnen veranlagt ist, wird besondere Rechenvorteile gern benutzen und dadurch in der Lage sein, die vorgelegte Aufgabe rascher zu lösen.

Auch ein geübter Kopfrechner wird beispielsweise bei der soeben erwähnten Aufgabe bedeutend rascher zum Ziele kommen, wenn er anstatt 9954 mit 9958 zu multiplizieren, in Wirklichkeit nur das Ergänzungsprodukt **46 · 42** bilden und das andere durch Subtraktion usw. finden würde.

Die Ausführung der Rechnungsarten, nämlich der Addition, Subtraktion, Multiplikation, des Potenzierens und, mit einer gewissen Einschränkung, der Division und des Radizierens (letzteres, soweit es ohne Logarithmen ausführbar ist), läßt sich im wesentlichen zurückführen auf die Ausführung namentlich der ersten drei Rechenoperationen mit einstelligen Zahlen.

Die Addition, Subtraktion, bzw. die Multiplikation zweier einstelliger Zahlen bilden die Elemente alles zahlenmäßigen Rechnens und werden teilweise durch Erlernen, teilweise durch die Erfahrung als bekannt vorausgesetzt.

Wie addieren wir denn eigentlich?

$$\begin{array}{r} 68472 \\ 5327 \\ \hline 73799 \end{array}$$

Von rechts nach links werden je zwei einstellige Zahlen addiert und sofern ihre Summe größer als 10 ist, wird die Einheit zur nächsten Summe hinzugezählt.

Bei der Subtraktion ist der Vorgang bekanntlich ähnlich, hier wird ebenfalls von rechts nach links jede Ziffer des Subtrahenden von der entsprechenden Ziffer des Minuenden subtrahiert (also Erfahrungssache) und, falls eine Ziffer des Subtrahenden größer als die entsprechende des Minuenden, von der nächsten Ziffer des Minuenden nach links 1 entliehen.

Soll beispielsweise eine fünfstellige Zahl mit einer dreistelligen multipliziert werden, so bilden wir durch Multiplikation je einer Ziffer des Multiplikators mit sämtlichen Ziffern des Multiplikanden 3 Reihen und addieren sie in bekannter Weise. Im vorliegenden Falle führen wir also nicht weniger als **15** Multiplikationen und eine Addition aus 3 Reihen (die wiederum als mehrere Additionen einstelliger Zahlen aufgefaßt werden kann) aus. Es wird demnach 15 mal das kleine Einmaleins angewendet, ferner mehrmals die Addition einstelliger Zahlen und auf diese Weise das Produkt der fünf- in die dreistellige Zahl gefunden. — Wem das Einmaleins nicht ganz geläufig ist, der wird öfters Fehler machen, oder die Bildung des Produktes wird verhältnismäßig viel Zeit in Anspruch nehmen.

Hätten wir ein anderes Zahlensystem, beispielsweise ein Zwölfersystem, so würde den Kindern in der Schule das Einmaleins etwas schwerer fallen, dies würde statt $1 \cdot 1$ bis $10 \cdot 10$ alle möglichen Produkte von $1 \cdot 1$ bis $12 \cdot 12$ umfassen. Bei der Lösung zahlenmäßiger Aufgaben, hätten wir es aber etwas bequemer, denn es wären auch die Zahlen 10 und 11 einstellige; die Zahlen von 12 bis 143 zweistellige, von 144 bis 1727 dreistellige usw.

Aber auch bei unserem dekadischen Zahlensystem würden die Rechenoperationen bei gegebenen Zahlen bedeutend weniger Zeit in Anspruch nehmen, wenn wir das größere Einmaleins $1 \cdot 1$ bis $100 \cdot 100$ ebenso beherrschen würden, wie das kleine Einmaleins. Wir würden in diesem Falle **2** Ziffern so handhaben, wie jetzt eine Ziffer. Multiplikationen mit dem Multiplikator 1—100 würden wir in einer Reihe ausführen; sollte eine vierstellige Zahl mit einer vierstelligen multipliziert werden, so würden wir 4 Multiplikationen statt 16 auszuführen und **2** Reihen statt 4 zu addieren haben. Diese Vereinfachungen ließen sich dann naturgemäß auf alle Rechenoperationen übertragen. Leider aber ist unser Geist nicht so beschaffen — wenigstens könnte man das nicht allgemein voraussetzen —, daß wir zweiziffrige Zahlen ebenso beherrschen wie die einziffrigen, $36 \cdot 78$ ist uns eben nicht so geläufig wie etwa $4 \cdot 7$, ebenso $36 + 78$ nicht so geläufig wie $4 + 7$, $78 - 36$ nicht so geläufig wie $7 - 4$ usw.

7. Die Zahlen 11, 12, 13, 14 und 15 werden als einstellige aufgefaßt. Wenn wir auch das Einmaleins, welches sämtliche zweistellige Zahlen umfaßt, nicht beherrschen, so kann es doch mitunter von Nutzen sein, wenn wir das kleine Einmaleins nur ein wenig erweitern. Nehmen wir einmal an, wir behandeln alle Zahlen bis 15 einschließlich als einstellige Zahlen; oder zunächst sogar nur nach einer Richtung hin, d. h. 1 bis 15 als Multiplikator und 1 bis 9 als Multiplikand oder umgekehrt. Beispielsweise soll $14 \cdot 1, 2, 3, 4, \ldots 8, 9$ unmittelbar angegeben werden; also $8 \cdot 14 = 112$, wie etwa $3 \cdot 7 = 21$, soll nicht wie üblich, d. h. $8 \cdot 4 = 32 \ldots 2, 3$ gemerkt usw., gerechnet werden.

Diese Fertigkeit kann man wohl von einem nur einigermaßen geübten Rechner verlangen. Es soll im folgenden gezeigt werden, wie viele Vereinfachungen schon mit dieser geringen Erweiterung des Einmaleins sich erzielen lassen. Sollte der Leser sich mehr zutrauen, also eine Beherrschung[1]) des Einmaleins etwa bis $20 \cdot 20$, so würde der hier gemachte Fingerzeig genügen, um eine Anwendung des Beherrschten zu gestatten.

Zunächst werden alle Multiplikationen, deren Multiplikator $\leqq 15$ in einer Reihe ausgeführt werden können, d. h. die Zahlen 11, 12, 13, 14, 15 so gehandhabt, als ob es einstellige Zahlen wären.

Beispiele.

384	4587	5798	7654
12	13	15	11
4608	59631	86970	84194

Die Zahl 11 bietet an und für sich noch besondere Vorteile, die in manchen Büchern erwähnt sind. Soll eine Zahl mit 11 multipliziert werden, so braucht man nur unter der gegebenen Zahl dieselbe Zahl um eine Stelle nach links verschoben hinzuschreiben und beide Reihen zu addieren,

z. B. $11 \cdot 836 = ?$

$$\begin{array}{r} 836 \\ 836 \\ \hline 9196 \end{array} \quad \text{oder einfacher} \quad \begin{array}{r} 11 \cdot 836 \\ 836 \\ \hline 9196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \cdot 4576 \\ 4576 \\ \hline 50336 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \cdot 8723 \\ 8723 \\ \hline 95953 \end{array}$$

Man kann auch zu jeder Ziffer des Multiplikanden stets die nächste Ziffer rechts hinzu addieren. Also beispielsweise

$$11 \cdot 784 = ?$$

Von rechts angefangen ist die erste Ziffer des Produktes **4**, die zweite $4 + 8 = 12 \ldots \mathbf{2}$, 1 gemerkt, die dritte $1 + 8 + 7 = 16 \ldots \mathbf{6}$, 1 gemerkt und schließlich die vierte Ziffer $7 + 1 = \mathbf{8}$, $11 \cdot 784 = 8624$.

Ebenso: $11 \cdot 5926 = 65186$.

[1]) Darunter soll verstanden werden eine glatte, sofortige Angabe des Produktes fast ohne Zeitaufwand und Geistesanstrengung (wie das eben beim üblichen Einmaleins der Fall ist).

(Hier ist natürlich die Beschreibung wesentlich komplizierter als die Ausführung.) Immerhin ist es noch bequemer, wenn mit der 11 so gerechnet wird, als wenn es eine einstellige Zahl wäre.

Kehren wir also zu den früher angeführten Beispielen zurück und erweitern diese.

```
   5856
   1213
-------
  76128
70272
-------
7103328
```

Hier wurde zunächst der Multiplikand mit 13 (als einstellige Zahl aufgefaßt) multipliziert, darauf das Produkt mit 12 gebildet und, um 2 Stellen nach links versetzt, zum obigen addiert. Die weiteren Beispiele kann sich der Leser wohl selbst erläutern.

```
   3546          7924
  614           138
-------       -------
  49644         63392
21276         103012
-------       -------
2177244       1093512
```

```
                   6426          51745
  8112         51213             12611
  1514         ----------      ---------
--------            83538         569195
  113568         77112          310470
121680         32130           620940
--------       ----------      ---------
12281568       329094738       652556195
```

Übung. Berechne: 14 · 86427, 11 · 7654, 1312 · 4562, 128 · 7263.

8. Allgemeines. Bei der Multiplikation in der üblichen Weise multiplizieren wir den Multiplikanden mit jeder Ziffer des Multiplikators und addieren die so entstehenden richtig untereinander geschriebenen Reihen. Da eben nur das Produkt der gegebenen Faktoren verlangt wird, empfinden wir das Aufschreiben der einzelnen Zwischenreihen als überflüssig oder richtiger als notwendiges Übel. Sind wir jedoch in der Lage, die Multiplikation mit den einzelnen Ziffern des Multiplikators und die entsprechenden Additionen in der unten erläuterten Weise im Kopfe durchzuführen, so können wir das Produkt Ziffer für Ziffer von rechts nach links hinschreiben, und die Zwischenreihen verschwinden. (Vgl. a. a. O.: „Bedingtes im Kopfe rechnen".) — Wir haben also ein allgemeines Mittel, die Nebenrechnungen (Zwischenreihen), soweit sie auf dem Papier sichtbar sind, auszuschalten. Aber mit zunehmender Ziffernzahl wird die Rechnung in progressiver Weise komplizierter (was allerdings in Bezug auf Zeitaufwand auch nach der allgemein üblichen Rechenmethode der Fall ist), wodurch von selbst die *Grenze der Anwendbarkeit* gegeben ist. Während mancher noch bei fünfstelligen Faktoren nach dem unten entwickelten Verfahren rechnen kann, wird ein Anderer, um Rechenfehler zu vermeiden, schon bei dreistelligen Zahlen aufhören müssen.

9. Zweistellige Faktoren mal zweistellige.

Beispiele. $34 \cdot 52 = ?$

$$\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ \hline 17 & 68 \end{array}$$

Man erhält die Ziffern des Produktes von rechts nach links, indem man multipliziert, wie die Striche andeuten und entsprechend addiert. Einer mit Einer: $4 \cdot 2 = \mathbf{8}$, Einer des Produktes

Einer mit Zehner und umgekehrt $\Big\}$ $4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 26$ Zehner des Produktes **6** geschrieben, 2 gemerkt. Zehner mit Zehner $3 \cdot 5 + 2 = 17$ Hunderte des Produktes, mithin $52 \cdot 34 = 1768$.

$$\begin{array}{r} 86 \\ |\!\times\!| \\ 47 \\ \hline 4042 \end{array}$$

Kürzer gefaßt:
$7 \cdot 6 = \mathbf{42} \ldots 2$ geschrieben, 4 gemerkt,
$7 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 4 = 84 \ldots 4$ geschrieben, 8 gemerkt.

$$\begin{array}{l} 4 \cdot \;\; 8 + 8 = \mathbf{40} \\ \hline 47 \cdot 86 \qquad = 4042 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ |\!\times\!| \\ 36 \\ \hline 3348 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \\ 31 \\ \hline 992 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \\ 24 \\ \hline 768 \end{array}$$

Es mögen noch einige Beispiele angeführt werden, wo die End- oder Anfangsziffern beider Faktoren übereinstimmen.

$$\begin{array}{r} 46 \\ |\!\times\!| \\ 43 \\ \hline 1978 \end{array}$$

$3 \cdot 6 = \mathbf{18} \ldots 8$ geschrieben, 1 gemerkt,
$3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 1 = (3 + 6)\,4 + 1 = \mathbf{37}$,
$4 \cdot 4 + 3 = \mathbf{19}$; $46 \cdot 43 = 1978$.

Bei der kreuzweisen Bildung der Summe der Produkte ist hier zu beachten:

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = (3 + 6) \cdot 4 = 36,$$

d. h. man multipliziere die *Summe* der Endziffern (ungleiche) mit der Anfangsziffer (also mit derjenigen, die bei beiden Faktoren die *gleiche* ist).

$$\begin{array}{r} 72 \\ |\times| \\ 76 \\ \hline 5472 \end{array}$$

Das kreuzweise Produkt ist hier $8 \cdot 7 = 56$.

Ebenso: $$\begin{array}{r} 78 \\ 48 \\ \hline 3744 \end{array}$$

Das kreuzweise Produkt ist hier $8 \cdot 11 = 88$.

Ganz besonders vereinfacht sich die Rechnung, wenn zufällig die Summe der End- oder Anfangsziffern gleich 10 und die Anfangs- resp. die Endziffern einander gleich sind.

$$\begin{array}{r} 34 \\ 36 \\ \hline 1224 \end{array}$$

Endziffern $6 \cdot 4 = 24$,
Anfangsziffern $3 + 3 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 12$

$$\begin{array}{r} 83 \\ 87 \\ \hline 7221 \end{array}$$

$(3 \cdot 7 = 21,\ 8 \cdot 9 = 72!)$

10. Zweistellige Faktoren mal dreistellige. Ist der Multiplikand drei-, vier- oder fünfstellig usw., der Multiplikator jedoch zweistellig, so bleibt das Prinzip wie bisher und die Rechnung wird nicht wesentlich komplizierter.

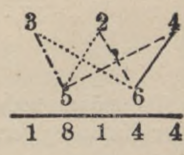
$56 \cdot 324 = ?$

$6 \cdot 4 = \mathbf{24}$ (4 geschrieben, 2 gemerkt)

$6 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 2 = 3\mathbf{4}$
(4 geschrieben, 3 gemerkt)

$6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 = 3\mathbf{1}$
(1 geschrieben, 3 gemerkt)

$5 \cdot 3 + 3 = \mathbf{18}$.



$56 \cdot 324 = \mathbf{18144}$.

Die sich kreuzenden Linien, die gleich ausgezogen sind, deuten an, welche Produkte jeweilig zu bilden sind.

Entsprechend findet man:

$$\begin{array}{r} 564 \\ 42 \\ \hline 23688 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 867 \\ 74 \\ \hline 64158 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 245 \\ 98 \\ \hline 24010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 508 \\ 43 \\ \hline 21844 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 707 \\ 64 \\ \hline 45248 \end{array}$$

11. Zweistellige Faktoren mal vierstellige.

	$3 \cdot 4$	$= \mathbf{12}$	(2 geschrieben, 1 gemerkt)
3564	$3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1$	$= \mathbf{27}$	(7 " 2 ")
23	$3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2$	$= \mathbf{29}$	(9 " 2 ")
81972	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2$	$= \mathbf{21}$	(1 " 2 ")
	$2 \cdot 3 + 2$	$= \mathbf{8}$	

Ebenso:

7624	4056
68	83
518432	336648

12. Zweistellige Faktoren mal fünfstellige.

13289	24605	76458	30409
34	66	87	26
451826	1623930	6651846	790634

Der Rechnungsgang ist der gleiche wie im letzten Paragraphen.

13. Beide Faktoren seien dreistellig. Ist der Multiplikator dreistellig, der Multiplikand drei-, vier-, fünf- usw. stellig, so wird die Multiplikation komplizierter, da man hier auch die Summe dreier Produkte zu bilden und außerdem noch die etwa vorhandene gemerkte Zahl hinzuzuzählen hat.

Beispiele.

```
          247        2 4 7      2 4 7
 247       |           ×         \|/
 153      153        1 5 3       /|\
                                1 5 3
37791     1(2)       91(4)     7 91(3)

   2 4 7             2 4 7
     ×                 |
   1 5 3             1 5 3
   7791(1)           37791
```

Obiges Schema zeigt, wie die Ziffern des Produktes der Reihe nach gefunden werden; die eingeklammerten Ziffern bedeuten die zu merkende Zahl, welche zur nächsten Produktensumme addiert wird.

Ebenso findet man:

724	486	805	9 0 4
609	253	726	3 0 8
440916	122958	584430	278432

14. Dreistellige Faktoren mal vierstellige.

4623
584
2699832

4623
584
2 (1)

2 6 2 3
5 8 4
32 (3)

4 6 2 3
5 8 4
8 3 2 (5)

4 6 2 3
5 8 4
9 8 3 2 (7)

4 6 2 3
5 8 4
9 9 8 3 2 (6)

4 6 2 3
5 8 4
2699832

Ist der Multiplikand vierstellig, so ist der Vorgang ähnlich wie bisher. In obenstehendem Beispiel ist das Produkt 584 · 4623 angegeben und im Schema gezeigt, wie die einzelnen Ziffern entstanden sind.

Beispiele.

2364
783
1851012

2408
846
2037168

5796
408
2364768

7528
433
3259624

7004
914
6401656

9008
707
6368656

15. Dreistellige Faktoren mal fünfstellige. Ist der Multiplikand fünf-, sechsstellig usw., so bleibt das Verfahren das gleiche wie bisher. Es soll immerhin ein Schema für einen fünfstelligen Multiplikand gegeben werden.

5 3 8 2 7
4 9 6
26698192

5 3 8 2 7
4 9 6
2 (4)

5 3 8 2 7
4 9 6
9 2 (7)

5 3 8 2 7
4 9 6
1 9 2 (10)

5 3 8 2 7
4 9 6
8 1 9 2 (10)

5 3 8 2 7
4 9 6
9 8 1 9 2(9)

5 3 8 2 7
4 9 6
6 9 8 1 9 2 (6)

5 3 8 2 7
4 9 6
2 6 6 9 8 1 9 2

Beispiele.

30 509	61 478	85 643
744	326	701
22 698 696	20 041 828	60 035 743

80 704	95 008
609	654
49 148 736	62 135 232

Wenn die Faktoren eine oder mehrere Nullen enthalten, müßte — so sollte man meinen — die Multiplikation leichter fallen; in Wirklichkeit aber muß man, wie der Leser wohl gemerkt haben wird, die Rechnung viel aufmerksamer durchführen, um Rechenfehler zu vermeiden.

Ebenso rechne man:

235 643	760 804	657 004
487	563	809
114 758 141	428 332 652	531 516 236

16. Vier- und fünfstellige Faktoren. Obwohl das Prinzip sich nicht ändert, soll zur Erleichterung auch hier ein Schema gegeben werden. Vierstellige mal drei-, bzw. zweistellige Zahlen lassen sich durch Vertauschen von Multiplikator mit Multiplikand auf die früheren Fälle zurückführen.

Bei der Multiplikation zweier vierstelliger Zahlen dürfte wohl für viele die Grenze liegen, wo bei Anwendung der bisherigen allgemeinen Methode die Aufgabe fehlerfrei in angemessener Zeitspanne nicht mehr gelöst werden kann.

2364
5813
13741932

2 3 6 4
5 8 1 3
2 (1)

2 3 6 4
5 8 1 3
3 2 (2)

2 3 6 4
5 8 1 3
9 3 2 (4)

2 3 6 4
5 8 1 3
1 9 3 2 (8)

2 3 6 4
5 8 1 3
41932 (6)

2 3 6 4
5 8 1 3
741932 (3)

2 3 6 4
5 8 1 3
13741932

Es ist zweckmäßig, am Rande oder unter dem Produkt die zu merkende Zahl — wie im folgenden Beispiel geschehen — jeweilig hinzuschreiben.

Beispiele.

8 226	9 345	6 014	9 006
7 144	6 083	4 007	4 008
58 766 544	56 845 635	24 098 098	36 096 048
258 232			

46 743	59 073	70 806
3 126	4 602	5 078
146 118 618	271 853 946	359 552 868
	547 1	96 9

47 413	675 83	80 407
32 562	70 419	20 564
1 543 862 106	4 759 127 277	1 653 489 548
5 785		

Übung: Berechne folgende Produkte: $27 \cdot 36$, $978 \cdot 52$, $46 \cdot 246583$; $495 \cdot 873$, $246 \cdot 328$, $823 \cdot 5407$; $947 \cdot 9225$; $336 \cdot 456782$, $603 \cdot 745683$, $4785 \cdot 1645$, $23008 \cdot 42076$.

17. Angenäherte Multiplikation. Bisher wurde die Multiplikation ganzer Zahlen behandelt. Bei Dezimalbrüchen verfährt man bekanntlich genau so wie bei ganzen Zahlen und braucht nur beim Produkt das Komma an richtiger Stelle zu setzen (um soviel Stellen von rechts nach links, als beide Faktoren zusammen Dezimalstellen haben).

Abgesehen vom Komma liefern beispielsweise $89 \cdot 96$; $8{,}9 \cdot 96$; $0{,}89 \cdot 9{,}6$; $0{,}089 \cdot 96$; $0{,}89 \cdot 0{,}096$ usw. die gleichen Produkte.

Ebenso $374 \cdot 2635$; $3{,}74 \cdot 26{,}35$; $0{,}374 \cdot 2635$; $0{,}374 \cdot 0{,}2635$ usw.

Es genügt also in dieser Beziehung, auf die bisherigen Regeln zu verweisen.

Mitunter soll das Produkt zweier Zahlen nicht exakt, sondern nur näherungsweise angegeben werden. Hierbei wird häufig die Genauigkeit nicht vorgeschrieben, vielmehr wird nur eine rohe Annäherung gefordert, das Ergebnis wird nur überschlägig verlangt (über näherungsweises Rechnen mit vorgeschriebener Genauigkeit siehe später).

In diesem Sinne kann man sagen, daß fast jede Zahl eine Eigenschaft besitzt, welche die näherungsweise Multiplikation in mehr oder weniger einfacher Weise ermöglicht.

Einige Winke mögen das Gesagte näher erläutern. $11 \approx \frac{1}{9} \cdot 100$; $12 \approx \frac{1}{8} \cdot 100$; $13 \approx \frac{1}{8} \cdot 100$; $14 \approx \frac{1}{7} \cdot 100$; $15 \approx \frac{1}{7} \cdot 100$; 16 u. $17 \approx \frac{1}{6} \cdot 100$; $25 = \frac{1}{4} \cdot 100$; 33, $34 \approx \frac{1}{3} \cdot 100$; ebenso $111 \approx \frac{1}{9} \cdot 1000$; $112 \approx \frac{1}{9} \cdot 1000$; 124, 125, $126 \approx \frac{1}{8} \cdot 1000$; 132, 133, 134, $135 = \frac{4}{3} \cdot 100$; 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, $337 \approx \frac{1}{3} \cdot 1000$; zur ersten Annäherung kann man noch eine Korrektur anbringen, z. B. $33 = \frac{1}{3} \cdot 100 - \frac{1}{3}$ d. h.: man dividiere die Zahl durch 3, hänge 2 Nullen an und subtrahiere $\frac{1}{3}$ der vorgelegten Zahl.

$$33 \cdot 746 \approx 24800 - 250 = 24550 \text{ (genau 24618)}$$

$$17 \cdot 268 \approx 4500 \text{ (genau 4556)}$$

Da 17 etwas größer ist als $\frac{1}{6} \cdot 100$, rundet man bei der Division $268 : 6$ nach oben auf; im umgekehrten Falle würde man naturgemäß nach unten abrunden und so den Fehler auf ein Minimum reduzieren. $168 \cdot 4{,}56 \approx \underset{480:8}{\mathbf{765{,}00}}$; $3{,}37 \cdot 872 \approx 2910$; $99 \cdot 56{,}4 \approx 5600$; $372 \cdot 486 \approx 3 \cdot 60 \cdot 1000 = 180000$.

Da 372 etwas kleiner ist als $375 = \frac{3}{8} \cdot 1000$, wird bei der Division $486 : 8 \approx 60$ abgerundet nach unten.

Es hätte keinen Zweck, noch mehr Beispiele anzuführen, da in jedem Falle der Rechner selbst beurteilen muß, mit welcher Annäherung gerechnet werden soll, ob und wie Korrekturen vorzunehmen sind.

Es wird sich nach der Art der Aufgabe richten, ob meinetwegen die Genauigkeit $16 \approx \frac{1}{6} \cdot 100$, $17 \approx \frac{1}{6} \cdot 100$; $163 \approx \frac{1}{6} \cdot 1000$, $378 \approx \frac{3}{8} \cdot 1000$, $39 \approx 40$, $99 \approx 100$ usw. genügt und ob evtl. auch $35 \approx \frac{1}{3} \cdot 100$ u. dgl. zugelassen werden kann. In den meisten Fällen kann man durch passendes Auf- bzw. Abrunden die Genauigkeit erhöhen, wie früher bereits angedeutet. Das kann mitunter zu einem vollständig genauen Resultat führen. Ersetzen wir beispielsweise 98 durch 100 und ziehen dann das doppelte des Produktes des Multiplikators ab, so ist das Produkt genau; nehmen wir hingegen nur annähernd das doppelte Produkt, so ist auch das Produkt nur annähernd richtig.

Z. B. $98 \cdot 72 = 7200 - 144 = 7056$ (vgl. auch S. 17)

$$98 \cdot 481 \approx 47100 \; (48100 - 2 \cdot 500)$$

$$102 \cdot 1264 \approx 126400 + 2500 \approx 128900$$

$$126 \cdot 875 \approx 110000$$

Es sei noch auf die in vielen Schulbüchern angewendete Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ hingewiesen, die in gewissen Fällen bequem ist. Natürlich ist dabei Voraussetzung, daß die Faktoren so beschaffen sind, daß man sofort das a und b überblickt und sich a^2 und b^2, also auch ihre Differenz, bequem bilden läßt.

Beispiele.

$27 \cdot 33 = ?\quad 30^2 - 3^2 = 891$
$48\ \ 52 = 2500 - 4 = 2496$
$65 \cdot 75 = 4900 - 25 = 4875$
$83 \cdot 97 = 8100 - 49 = 8051$ (vgl. auch S. 17)
$88 \cdot 112 = 10000 - 144 = 9856$
$117 \cdot 123 = 14400 - 9 = 14391$
$237 \cdot 263 = 62500 - 169 = 62331$
$584 \cdot 616 = 360000 - 256 = 359744$
$685 \cdot 715 = 490000 - 225 = 489775$
$746 \cdot 754 = \overset{750^2}{562500} - 16 = 562484$
$979 \cdot 1021 = 1000000 - 441 = 999559$

Wenn man das Quadrieren beherrscht (vgl. S. 53 Kap. D), so kann man von dieser Regel weitgehenden Gebrauch machen und sie für große Zahlen anwenden.

z. B. $923 \cdot 937 = 930^2 - 7^2 = 864900 - 49 = 864851$;
$464 \cdot 496 = 480^2 - 16^2 = 230400 - 256 = 230144$
$4871 \cdot 4889 = 4880^2 - 9^2 = 23814400 - 81 = 23814319$;
$9864 \cdot 9876 = 97416900 - 36 = 97416864$ (vgl. S. 62);
$9864 \cdot 9896 = \overset{988^2}{97614400} - 256 = 97614144$;
$10982 \cdot 11018 = \overset{11000^2}{121000000} - \overset{18^2}{324} = 120999676$;
$10116 \cdot 10124 = 102414400 - 16 = \mathbf{102414384}$.

Übung. Berechne: $95 \cdot 105$, $144 \cdot 156$, $492 \cdot 508$, $887 \cdot 913$; $9858 \cdot 9882$.

18. Abgekürzte Multiplikation von Dezimalbrüchen. Haben wir etwa das Produkt einer fünfstelligen mit einer vierstelligen Zahl zu bilden, so wird das Produkt acht- oder neunstellig; sind beide Faktoren Dezimalbrüche, die, abgesehen vom Komma, die erwähnte Stellenzahl haben mögen, so wird das gebildete Produkt, abgesehen vom Komma, ebenfalls acht- oder neunstellig. In der Regel braucht man aber nicht eine so weitgehende Genauigkeit, sondern man wird sich mit 5—6 Stellen (mitunter auch mit 4) begnügen. Die Logarithmentafeln, die gewöhnlich in höheren Schulen und technischen Lehranstalten Verwendung finden, sind fünfstellig, gestatten also auch nur eine solche Genauigkeit. In unserem Falle würden wir von dem erhaltenen Produkt 3—4 Stellen abstreichen und evtl. die erste Ziffer links nach den gestrichenen um 1 erhöhen. Die Arbeit zur Berechnung der gestrichenen Ziffern wäre an und für sich unnötig. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie wir das Produkt mit der gewünschten Genauigkeit erhalten können, ohne hinterher Ziffern streichen zu müssen. Es werden hierbei nur so viele Stellen ermittelt (oder um eine mehr), als nachher behalten werden sollen.

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 3{,}3256 \\ 0{,}2753 \\ \hline 0{,}66512 \\ 23279 \\ 1663 \\ 100 \\ \hline 0{,}91554 \end{array}$$

Angenommen, wir wollen das vorliegende Produkt auf 5 Dezimalstellen bilden, d. h. mit einer Genauigkeit bis Hunderttausendstel, wobei die letzte Stelle wegen den Abrundungen ungenau ausfallen darf. Nachdem Multiplikator und Multiplikand untereinander geschrieben sind, multiplizieren wir letzteren mit der ersten Ziffer links des Multiplikators, in unserem Beispiele also mit 2 und erhalten die Reihe 66512. Das Komma kann in dieser Reihe gleich festgelegt werden, und zwar denken wir uns zunächst, es sei nur das Produkt $3{,}3256 \cdot 0{,}2$ zu bilden, dann müßten rechts vom Komma 5 Stellen vorhanden sein, d. h. die oberste Reihe lautet 0,66512. Die erste Stelle rechts des Multiplikanden bedeutet in unserem Beispiele 6 Zehntausenstel, hingegen die erste Stelle links des Multiplikators $\frac{2}{10}$, das Produkt dieser liefert (12) Hunderttausendstel, die wir eben noch berücksichtigen wollen. Die zweite Stelle von links des Multiplikators bedeutet $\frac{7}{100}$ und liefert mit $\frac{6}{10000}$ multipliziert Millionte l. Diese wollen wir aber nur insofern berücksichtigen, als sie nach entsprechender Aufrundung Hunderttausendstel liefern, und als Korrektur zu den Hunderttausendsteln hinzuzählen. In unserem Falle hätten wir $\frac{7}{100} \cdot \frac{6}{10000} = \frac{42}{1000000} \approx 4$ Hunderttausendstel zu dem Produkt $\frac{7}{100} \cdot \frac{5}{1000} \approx \frac{35}{100000}$ hinzuzufügen und erhalten $\frac{39}{100000}$; die zweite Reihe beginnt daher von rechts mit der Ziffer 9, die genau unter der ersten Ziffer rechts der ersten Reihe zu setzen ist. Um das Komma braucht man sich weiter nicht zu kümmern, da es in der ersten Reihe bereits festgesetzt ist

I. 3,3256	II. 3,3256	III. 3,3256	IV. 3,3256
0,2753	0,2753	0,2753	0,2753
0,66512	0,66512	0,66512	0,66512
	23279	23279	23279
		1663	1663
			100
			0,91554

Die dritte Ziffer des Multiplikators von links bedeutet Tausendstel, ebenso die zweite Ziffer des Multiplikanden von rechts; das Produkt dieser Stellen liefert Milliontel und ist deshalb ebenfalls nur als Korrektur zu berücksichtigen. Um daher die dritte Reihe zu erhalten, streiche man die zweite Ziffer rechts des Multiplikanden (in unserem Beispiel 5) und verfahre ähnlich wie bei Reihe 1, indem man jetzt mit der dritten Ziffer von links des Multiplikators multipliziert (vgl. III).

$5 \cdot 5 = 25$, Korrektur 3 (oder 2)

$5 \cdot 2 = 10$; $10 + 3 = 13 \ldots 3$ geschrieben, 1 gemerkt;

die dritte Reihe beginnt daher von rechts mit Ziffer 3.

Ähnlich verfährt man bei der Bildung der vierten Reihe, indem nunmehr beim Multiplikanden die Ziffer 2 (dritte von rechts) gestrichen und mit der vierten Ziffer von links des Multiplikators multipliziert wird. Hier erhält man als Korrektur eine 1, da $\frac{3}{10\,000} \cdot \frac{2}{100} = \frac{6}{1\,000\,000} \approx \frac{1}{100000}$ (vgl. IV).

Wir erhalten schließlich $3{,}3256 \cdot 0{,}2753 \approx 0{,}91554$; durch Bildung des vollständigen Produktes findet man 0,91553768 und bei Aufrundung auf fünf Dezimalstellen **0,91554**, mit unserem Ergebnis übereinstimmend. Die genaue Übereinstimmung der Ergebnisse erklärt sich dadurch, daß die bei den Abrundungen gemachten Fehler im allgemeinen ebenso oft positiv wie negativ sind. Immerhin kann es vorkommen, daß die letzte Ziffer um eine oder zwei Einheiten vom wirklichen Produkt abweicht; aber das hat keine Bedeutung, da man in Zweifelsfällen eine Stelle mehr berechnen kann, als man in Wirklichkeit zu haben wünscht: also etwa statt 3 mit 4, statt 4 mit 5, statt 5 mit 6 Stellen rechnen.

Die weiteren Beispiele soll der Leser selbst nachrechnen, was nach dem ausführlich durchgerechneten Beispiele wohl ohne weiteres möglich sein dürfte.

62,34	0,74382	0,84325	4826,3	2,3564
4,573	0,4695	4,6432	0,0227	0,38952
249,36	0,297528	3,37300	96,526	0,70692
31,17	44629	50595	9,653	18851
4,36	6694	3373	3,378	2120
19	372	253	109,557 = 109,56	118
285,08	0,349223	17		5
		3,91538		0,91786

In den bisherigen Beispielen wurden gerade soviele Stellen berücksichtigt, als die Multiplikation der ersten von Null verschiedenen Ziffer des Multiplikators in den Multiplikanden ergab (die 1. Reihe). Dieses Verfahren ist am bequemsten. Nachdem die erste Reihe gebildet ist, wird bei den weiteren Reihen immer eine Ziffer des Multiplikanden gestrichen und diese nur zur Korrektur berücksichtigt. Haben die Faktoren abgesehen vom Komma eine verschiedene Stellenzahl, so erhält man im allgemeinen beim Produkt mehr Stellen, wenn der Faktor mit der größeren Stellenzahl als Multiplikand (wie bei den bisherigen Beispielen geschehen) aufgefaßt wird und weniger Stellen im umgekehrten Falle. Dies kann mitunter gewissermaßen zur Regulierung der Stellenzahl des Produktes dienen.

Beispiele.

0,8476	hingegen	0,432
0,432		0,8476
0,33904		0,3456
2543		173
169		30
0,36616		2
		0,3661

0,56432	hingegen	0,394
0,394		0,56432
0,169296		0,1970
50789		236
2257		16
0,222342		1
		0,2223

Wir erhielten je nach Anordnung beim 1. Beispiel 5 bzw. 4 Stellen und beim 2. Beispiel 6 bzw. 4 Stellen des Produktes. Genügt diese

Umstellung nicht, oder möchte man sie aus irgendeinem Grunde vermeiden, oder haben beide Faktoren die gleiche Stellenzahl, so kann man eine größere Stellenzahl erreichen durch Anhängen von einer oder mehreren Nullen an den Multiplikanden; eine kleinere Stellenzahl, indem gleich bei Beginn der Multiplikation eine oder mehrere Stellen des Multiplikators rechts gestrichen werden, und die von diesen am weitesten links befindliche Ziffer in bekannter Weise zur Korrektur benutzt wird.

Beispiele. 4,166 · 0,2386. Würden wir in der bisherigen Weise rechnen, erhielten wir im ganzen 4 Stellen, sollen jedoch etwa 5 erhalten werden, so rechne man wie folgt.

```
4,1660
0,2386
------
0,83320
  12498
   3333
    250
-------
0,99401
```

0,6548 · 78,43 soll auf 6 Dezimalstellen berechnet werden.

```
78,430
 0,6548
-------
47,0580
 3,9215
  3137
   627
-------
51,3559
```

Soll umgekehrt das Produkt 0,8653 · 0,7482 nur auf 4 Stellen berechnet werden, dann streiche man gleich bei Beginn der Rechnung die Ziffer 3 des Multiplikanden und berücksichtige sie nur zur Korrektur.

```
0,8653
0,7482
------
0,6057
   346
    69
     2
------
0,6474
```

0,64324 · 0,0563 soll auf 5 Dezimalstellen berechnet werden. Beim Produkt 0,05 · 0,64325 müßte man 7 Stellen abschneiden, es werden daher bei Beginn der Multiplikation 2 Stellen des Multiplikanden gestrichen und in bekannter Weise weiter gerechnet. Auch das Vertauschen der Faktoren würde in diesem Falle genügen.

Zum Schlusse seien noch einige charakteristische Beispiele angeführt.

```
0,0594      5,682      3,2649      0,5074
0,7843      0,8043     2,0803      0,0809
-------     ------     ------     -------
0,04158     4,5456     6,5298     0,04059
    475        227       2611          45
     24         17         10     -------
      2     ------     ------     0,04104 (0,04104866)
-------     4,5700     6,7919
0,04659
```

Übung. Berechne: 4,6432 · 0,84325, 4,4076 · 0,7235, ferner 0,34 753 · 0,1946 auf 6 Dezimalstellen.

C. Division.

Die umgekehrten Rechnungsarten: Subtraktion, Division, Wurzelziehen (ebenso Logarithmieren) lassen sich im allgemeinen unbequemer durchführen als die unmittelbaren: Addition, Multiplikation und Potenzieren. Während die unmittelbaren Operationen stets ausführbar sind, und z. B. ganzzahlige Faktoren wieder ganzzahlige Produkte liefern, gibt z. B. die Division zweier ganzer Zahlen nicht immer ganzzahlige Quotienten, was diese Rechnungsart wesentlich unbequemer macht.

Zunächst betrachten wir Divisionen, bei denen der Divisor von bestimmter Beschaffenheit ist.

Der Divisor sei eine der Zahlen:

$$5, 25, 50, 75, 125, 150, 250, 375, 500, 625, \ldots.$$

$$5 = {}^{10}/_{2};\ 25 = {}^{1}/_{4} \cdot 100;\ 50 = {}^{1}/_{2} \cdot 100;\ 75 = {}^{3}/_{4} \cdot 100;\ 125 = {}^{1}/_{8} \cdot 1000 \text{ (Vgl. § 6)};$$

oder: ${}^{1}/_{5} = {}^{2}/_{10}; {}^{1}/_{25} = {}^{4}/_{100}; {}^{1}/_{50} = {}^{2}/_{100}; {}^{1}/_{75} = {}^{4}/_{3} : 100; {}^{1}/_{125} = {}^{8}/_{1000}$ usw.

19. Divisor 5; Divisor 25; Divisor 50 und 500. Anstatt eine Zahl durch 5 zu dividieren, multipliziere man den Dividenden mit 2 und dividiere durch 10.

Beispiele. $835 : 5 = \mathbf{167}$; $6470 : 5 = 1294\ (2 \cdot 647)$.

Hat der Dividend eine Null an Stelle der Einer, so lasse man diese fort und multipliziere die übrigbleibende Zahl mit 2.

$$7430 : 5 = 1486\ (2 \cdot 743);\quad 8665 : 5 = 1733;$$
$$42485 : 5 = 8497;\quad 92340 : 5 = 18468 \text{ usw.}$$

Auch wenn die Division nicht aufgeht, d. h. die letzte Ziffer rechts sei keine 5 oder 0, bleibt die Regel bestehen. Man wird am besten zuerst mit 2 multiplizieren und dann eine Stelle rechts abschneiden (allgemein das Komma um eine Stelle weiter links als beim Dividenden setzen).

$$673 : 5 = 134{,}6\ [2 \cdot 673 = 1346;\ {}^{1346}/_{10} = 134{,}6]$$
$$8546 : 5 = 1709{,}2;\ 936{,}48 : 5 = 187{,}296;\ 0{,}1374 : 5 = \mathbf{0{,}02748}.$$

Divisor 25. Man dividiert eine Zahl durch 25, indem man zuerst den Dividenden mit 4 multipliziert und dann 2 Nullen abschneidet.

Wenn die Division aufgeht, so sind offenbar die 2 letzten Ziffern des Dividenden 00, 25, 50 oder 75. Dies entspricht aber beim Divisor 25 den Quotienten 0, 1, 2 oder 3. Die Division wird in diesen

Fällen äußerst einfach, indem man beim Dividieren 2 Stellen rechts abschneidet, die übrigbleibende Zahl mit 4 multipliziert und (je nach Beschaffenheit der 2 letzten Ziffern des Dividenden) hierzu 0, 1, 2 oder 3 addiert.

Beispiele. $675 : 25 = \overset{4 \cdot 6 + 3}{27}$

$925 : 25 = 37\ (4 \cdot 9 + 1)$

$2450 : 25 = 98\ (4 \cdot 24 + 2)$

$124300 : 25 = \overset{4 \cdot 1243}{4972}$

$472150 : 25 = 18886.$

[Der Quotient wird hingeschrieben von rechts nach links:
$4 \cdot 1 + 2 = \mathbf{6}$, $4 \cdot 2 = \mathbf{8}$,
$4 \cdot 7 = \mathbf{28}$, $4 \cdot 4 + 2 = \mathbf{18}$].

Wenn die Division nicht aufgeht, multipliziere man zuerst den Dividenden mit 4 und verschiebe beim Produkt das Komma um **2** Stellen nach links.

$87 : 25 = 3{,}48$
$(4 \cdot 87 = 348)$
$326 \cdot 25 = 13{,}04$
$8970 : 25 = 358{,}80$
$43721 : 25 = \mathbf{1748{,}84}$

Ebenso: $6{,}45 : 25 = 0{,}2580$
$(4 \cdot 645 = 2580)$
$0{,}925 : 25 = 0{,}03700 = 0{,}037$
$0{,}064 : 25 = 0{,}00256$
$534{,}14 : 25 = \mathbf{21{,}3656}$.

Divisor 50, 500 usw. Bei diesen verfährt man ähnlich wie beim Divisor 5; man multipliziere den Dividenden mit 2 und verschiebe das Komma von links um 2, bzw. um 3 usw. Stellen.

$900 : 50 = 2 \cdot 9 = 18$
$64750 : 50 = 1295{,}0$
$(2 \cdot 647 + 1)$
$3465900 : 50 = \mathbf{69318}$

$68 : 50 = 1{,}36\ (2 \cdot 68 = 136)$
$493 : 50 = 9{,}86$
$9545 : 50 = 190{,}90$
$34230 : 50 = 684{,}6$

Hier kürzt man zweckmäßig die Null im Dividenden und Divisor und verschiebt beim Produkt das Komma nur um eine Stelle nach links.

$23{,}46 : 50 = 0{,}4692$
$0{,}0496 : 50 = 0{,}000992$
$6247{,}2 : 50 = 124{,}944$
$8{,}435 : 50 = 0{,}16870$

Ebenso: $3250 : 500 = 6{,}500$
$74245 : 500 = 148{,}490$
$624{,}24 : 500 = 1{,}24848$
$1946{,}8 : 500 = 3{,}8936$
$0{,}643 : 500 = 0{,}001286$ usw

20. Divisor 125; Divisor 250.

$$a : 125 = a : \frac{1000}{8} = \frac{8a}{1000},$$

d. h. eine Zahl wird durch 125 dividiert, indem man diese mit 8 **multipliziert** und durch **1000 dividiert**. Endet die Zahl mit einer oder mehreren Nullen, so können von diesen bis 3 weggelassen werden und das Produkt anstatt durch 1000 nur durch 100, bzw. 10, bzw. 1 dividiert werden.

Ist eine Zahl durch 125 teilbar, so ist dies kenntlich an den letzten 3 Stellen, welche 000 oder ein Vielfaches von 125 sein müssen. Man braucht in diesem Falle nicht die ganze Zahl mit 8 zu multiplizieren, sondern dividiere die 3 letzten Ziffern als Zahl für sich durch 125 und addiere diesen Quotienten zum achtfachen Produkt der unter Weglassung der 3 letzten Ziffern des Dividenden erhaltenen Zahl.

Beispiele. $9250 : 125 = 74$
$(250 : 125 = 2; 9 \cdot 8 + 2 = 74)$
$3375 : 125 = 27$
$(8 \cdot 3 + 3 = 27!)$
$7625 : 125 = 61 \ (56 + 5)$
$24000 : 125 = 192 \ (8 \cdot 24)$

$368875 : 125 = 2951$
[rechne von rechts nach links:
$8 \cdot 8 + 7 = 71$
$8 \cdot 6 + 7 = 55$ usw.]

Ebenso: $91{,}125 : 125 = 0{,}729$
$(8 \cdot 91 + 1)$
$213{,}75 : 125 = 1{,}71$

Es wird verfahren wie oben, indem man das Komma zunächst unbeachtet läßt.

Also: $8 \cdot 21 + 3 = 171$
$2{,}875 : 125 = \overset{8 \cdot 2 + 7}{\mathbf{0{,}023}}$
Ebenso:
$83 : 125 = 0{,}664 \ (8 \cdot 83 = 664)$

$43{,}66 : 125 = 0{,}34928$
$742685 : 125 = 5941{,}480$
$3{,}92 : 125 = 0{,}03136$
$0{,}81 : 125 = \mathbf{0{,}00648}$ usw.

Divisor 250. $a : 250 = \dfrac{4a}{1000}$

Hier ist das Verfahren offenbar genau wie beim Divisor 25, es muß nur das Komma anstatt um 2, um 3 Stellen nach rechts verschoben werden.

Geht die Division auf, so kann man durch Streichen einer Null im Divisor und Dividenden sofort die Aufgabe auf die Division mit 25 zurückführen.

Beispiele.
$86750 : 250 = 8675 : 25$
$= 347{,}00 \ (4 \cdot 86 + 3!)$
$614250 : 250 = 61425 : 25$
$= \mathbf{2457}$

$41562 : 250 = 166{,}248$
$[4 \cdot 41562 = 166248]$
$784376 : 250 = 3137{,}504$
$6{,}32 : 250 = 0{,}\mathbf{02528}$
$0{,}941 : 250 = 0{,}003764$ usw.

21. Divisor 75, Divisor 15. Auch hier wird häufig die Division bequemer durchzuführen sein, wenn berücksichtigt wird: $\frac{a}{75} = \frac{4a}{3} : 100$.

Man dividiere den Dividenden durch 3, multipliziere mit 4 und verschiebe das Komma um 2 Stellen nach links.

$$24150 : 75 = 8050 : 25 = \mathbf{322},$$
$$6486 : 75 = 2162 : 25 = 86{,}48,$$
$$2{,}743 : 75;\ 0{,}91433;\ 0{,}0365732,$$

$\mathbf{2{,}743 : 75 = 0{,}0365732}$ oder: $0{,}10972 : 3 = 0{,}036573$.

Divisor 15; $a : 15 = \frac{2a}{3} : 10$.

Auch hier ist die Division bequem, wenn der Dividend durch 3 teilbar ist,

z. B. $1695 : 15 = 113\ (1695 : 3 = 565;\ 565 \cdot 2 = 1130!)$
$$2184 : 150 = 14{,}56\ (728 \cdot 2 = 1456!)$$

22. Divisor 375; Divisor 625. $375 = 3 \cdot 125 = \frac{3}{8} \cdot 1000$.

$$a : 375 = \frac{8 \cdot a}{3} : 1000.$$

Das Verfahren ist also ähnlich wie bei der Division durch 125, nur muß man den Dividenden zuerst durch 3 dividieren.

$$2745 : 375 = q,\ 915 \cdot 8 = 7320;\ \mathbf{q = 7{,}320}.$$
$$724{,}2 : 375 = q;\ 241{,}4;\ q = 1{,}9312.$$

Divisor 625. $625 = \frac{1}{16} \cdot 10000$; $\mathbf{a : 625 = \frac{16a}{10000}}$.

Um eine Zahl durch 625 zu dividieren, multipliziere man diese mit 16 und dividiere durch 10000 (das Komma um 4 Stellen nach links verschieben). Dabei wird man die Multiplikation mit 16 so ausführen, als ob 16 eine einstellige Zahl wäre (vgl. S. 27).

Beispiele.

$4264 : 625 = q,$
$4264 \cdot 16 = 68224;$
$\mathbf{q = 6{,}8224};$
$54624 : 625 = \mathbf{87{,}3984}$
$92{,}25 : 625 = 0{,}147600$
$= 0{,}1476$

$384{,}2 : 62{,}5 = \mathbf{6{,}1472}$
$645 : 6{,}25 = \mathbf{103{,}20}$
$0{,}8432 : 0{,}625 = 843{,}2 : 625$
$= q;\ \mathbf{q = 1{,}34912};$
$4{,}76 : 62{,}5 = 47{,}6 : 625 = q;$
$q = 0{,}07616.$

Übung. Berechne: 12460 : 5; 748,25 : 5; 63425 : 25; 981 : 25; 386400 : 25; 82,36 : 25; 4550 : 50; 680250 : 125; 7,45 : 125; 4365 : 625; 1478,3 : 625;

23. Divisor 11—15 als einstellige Zahl aufgefaßt. Ähnlich wie bei der Multiplikation wird man auch bei der Division, Divisoren etwa bis 15 als einstellige Zahlen behandeln. Merkt man sich jeweilig die Reste im Kopfe, so kann man den Quotienten von links nach rechts Ziffer für Ziffer hinschreiben. Dies dürfte im allgemeinen nicht schwerer fallen, als im entsprechenden Falle bei der Multiplikation.

Beispiele. 385 : 11 = 35, 868 : 14 = 62, | 2748 : 12 = 229, 24675 : 15 = 1645.

Geht die Division nicht auf, so berechne man eben den Quotienten auf soviel Dezimalen als erwünscht, indem man erforderlichenfalls Nullen anhängt (wie bei der Verwandlung eines echten Bruches in einen Dezimalbruch).

46,25 : 13 = 3,5577; 0,843 : 11 = 0,07664
12467 : 14 = 890,5; 78,425 : 15 = 5,2283
675,9 : 12 = **56,325** usw.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß man — ähnlich wie bei der Multiplikation — Divisoren, die in der Nähe von 100, 1000, 10000 sowie 50, 500, 5000 usw. liegen und kleiner als diese Zahlen sind, auf die nächst passende runde Zahl erhöht und dies bei der weiteren Rechnung entsprechend berücksichtigt.

Beispiele. 7896 : 94 = 84
376

789 . . : 94 = 8, im Kopfe rechnet man: 8 · 94 = 800 — **48**, da aber von 789 bis 800 **11** fehlen, ist der erste Rest 48 — 11 = **37**; weiter findet man 4 · 94 = 400 — 24 = 376, Rest 0.

4362579 : 97 = 44975

482	1. Rest	4 · 3 + 36 = 48
945	2. „	4 · 3 + 82 = 94
727	3. „	9 · 3 + 45 = 72
489	4. „	7 · 3 + 27 = 48
4	5. „	15 — 11 = 4

$74625903 : 493 = \underline{151371}$		
2532	1. Rest	$246 + 7 = 253$
675	2. „	$32 + 35 = 67$
1829	3. „	$175 + 7 = 182$
3500	4. „	$329 + 21 = 350$
493	5. „	$7 \cdot 7 = 49$

24. Angenäherte Division. Soll der Quotient nur näherungsweise ermittelt werden, so kann man (vgl. S. 35 u. fort) den Divisor durch einen passenden Bruch ersetzen. Hier wird es darauf ankommen, mit welcher Annäherung der Quotient bestimmt werden soll. $12 \approx \frac{1}{8} \cdot 100$; $13 \approx \frac{1}{8} \cdot 100$; 16 u. $17 \approx \frac{1}{6} \cdot 100$; 32, 33, $34 \approx \frac{1}{3} \cdot 100$; $15 \approx \frac{1}{7} \cdot 100$; 37 u. $38 \approx \frac{3}{8} \cdot 100$; 110, 111, 112, ... $\approx \frac{1}{9} \cdot 1000$; 124, 125, $126 \approx \frac{1}{8} \cdot 1000$; 132, 133, 134, 135 $\approx \frac{4}{3} \cdot 100$; etwa 330, 331, 332, 333, 334 .. 337 .. $= \frac{1}{3} \cdot 1000$ usw. (Vgl. S. 35.) Nach der ersten Annäherung kann man auch eine Korrektur anbringen (und erhält auf diese Weise mitunter ein vollständig genaues Resultat).

Beispiele.

$3468 : 13 \approx \frac{3468 \cdot 8}{100} = 277{,}44 \approx 270$

$6458 : 124 \approx 51{,}664 \approx 52$

$74523 : 335 \approx \overset{3 \cdot 74523}{223{,}569} = \mathbf{223}$; $6325 : 334 \approx 18{,}975 \approx 18{,}9$;

$5485 : 112 \approx \overset{9 \cdot 5485}{49{,}365} \approx 49.$

25. Abgekürzte Division von Dezimalbrüchen. Bei dieser wird die abgekürzte Multiplikation angewandt. Führt man schon ein Produkt mehrstelliger Zahlen ungern aus, so trifft dies für die Division zweier Dezimalbrüche, bei denen der Divisor etwa vier- bis sechsstellig sein möge, erst recht zu.

Allgemein wird ja bei der Division eine Zahl gesucht (der Quotient), die mit dem Divisor multipliziert, den Dividenden ergibt. Die abgekürzte Division besteht eben darin, daß eine Zahl gesucht wird, die nach den Regeln der abgekürzten Multiplikation mit dem Divisor multipliziert, den Dividenden ergibt.

Das Komma wird festgestellt wie bei der gewöhnlichen Division. Nehmen wir das Beispiel S. 39, 62,34 · 4,573 = 285,08; es muß umgekehrt nach der abgekürzten Division 285,08 : 62,34 den Quotienten 4,573 ergeben. Da hier im Dividenden und Divisor die gleiche Stellenzahl vom Komma rechts vorhanden ist, kann dasselbe unbeachtet bleiben. Es soll beim ersten Beispiel die Division wiederum stufenweise durchgeführt werden, um zu zeigen, wie jede Ziffer des Quotienten entsteht.

```
I. 285,08 : 62,34          II. 285,08 : 62,34
   249,36   4,                 249,36   4,5
    35,72                       35 72
                                31 17
                                 4 55

III. 285,08 : 62,34        IV. 285,08 : 62,34
     249,36   4,57                  .   4,573
       3572                         .
       3117                         .
        455                         .
        436                        19
         19                        19
                                    0
```

Die erste Ziffer 4 des Quotienten entsteht wie bei der gewöhnlichen Division (vgl. I.). Der erste Rest ist, abgesehen vom Komma, 3572; anstatt nun wie sonst an diesen eine Null anzuhängen, streiche man beim Divisor die erste Ziffer rechts, bestimme die zweite Ziffer des Quotienten und bilde in bekannter Weise das Produkt 5 · 6234 = 3117 (vgl. II.). Der zweite Rest ist 455; nunmehr wird die zweite Ziffer rechts des Divisors gestrichen, die dritte Ziffer des Quotienten bestimmt und das Produkt 7 · 623 = 436 vom zweiten Rest abgezogen (vgl. III.). Man erhält den dritten Rest = 19 und findet schließlich in analoger Weise die letzte Ziffer des Quotienten (vgl. IV.). Dieser ist, wie nach dem gewählten Beispiel zu erwarten war, gleich 4,573.

```
0,86436 : 0,34326
  68652   2,5181
  17784
  17163
    621
    343
    278
    274
      4
      3
Rest: 1
```

Beispiele. Nebenstehend sind die Ziffern des Divisors nach und nach gestrichen, d. h. bei jeder neuen Ziffer des Quotienten, wie dies im vorigen Beispiele in I bis IV gezeigt wurde.

```
 5,743 : 0,8934 = ?
57 430 : 8934
53 604   6,4282
 3 826
 3 574
   252
   179
    73
    71
     2
     2
     0
```

Hier kann man an den Dividenden eine Null anhängen und beim Dividenden und Divisor das Komma fortlassen.

Im folgenden soll der Leser das Komma selbst feststellen; in den Nebenrechnungen wird es außer acht gelassen.

Bei einiger Übung kann man die Multiplikation und Subtraktion gleichzeitig ausführen und braucht nur die Reste hinzuschreiben, wie im folgenden Beispiele gezeigt wird.

```
40,724 : 7,4423
37 212   5,472
  3512
  2977
   535
   521
    14
    15
Rest:-1
```

```
40724 : 7,4423
 3512   5,472
  535
   14
  — 1
```

In nebenstehendem Beispiel wurde die 3 beim Divisor gleich bei Beginn der Rechnung gestrichen.

6287 : 0,8532
5972 | 7370
315
256
59
59
Rest: 0

oder: $6287 : 0{,}8532 = 62870 : \mathbf{8{,}532}$.

62870 : 8,532
59724 | 7369
3146
2560
586
512
74
76
Rest: — 2

Das Produkt 76 und der Rest — 2 brauchen nicht hingeschrieben, vielmehr braucht die letzte Ziffer des Quotienten nur abgeschätzt zu werden. In unserem Falle könnte diese 8 oder 9 sein, jedoch näher an 9.

31,245 : 346,27
31 164 | 0,09024
81
69
12
14
Rest: — 2

5,732 : 0,0673
5 384 | 85,17
348
337
11
7
4

0,9643 : 28,33
8499 | 0,03404
1144
1133
11
11
Rest: 0

7,4681 : 0,0592
592 | 126,15
1548
1184
3641
3552
89
59
30
30
Rest: 0

$0{,}4652 : \mathbf{0{,}00074} = 46520 : 74$
444 | 628,66
212
148
640
592
48
44
4
4
Rest: 0

Will man mehr Stellen, als sich nach Bisherigem ergeben würden, erzielen, so hänge man an den Dividenden eine oder mehrere Nullen an.

3,84 : 2,563 soll beispielsweise auf **6** Stellen berechnet werden.

```
3,8400 : 2,563
 2563     1,49825
 12770
 10252
  2518
  2307
   211
   205
     6
     5
     1
     1
Rest: 0
```

```
0,963 : 0,48037 = 0,96300 : 0,48037
                   96074    2,0047
                     226
                     192
                      34
                      34
                 Rest: 0
```

Übung. 5,732 : 0,0673, berechne ferner 0,374 : 40,923 auf 6 Dezimalstellen.

D. Potenzieren.

I. Quadrieren.

26. Allgemeines. Das Potenzieren ist bekanntlich ein Sonderfall der Multiplikation, und man erhält die n-te Potenz einer Größe a, indem man diese $n$mal mit sich selbst multipliziert.

Abgesehen von der praktischen Bedeutung dieses Abschnittes tritt hier infolge der Gleichheit der Faktoren eine Reihe von Vorteilen besonders hervor.

Von den Potenzen im allgemeinen werden die Quadrate und Kuben wohl am häufigsten gebraucht.

Z. B. bei der Berechnung von Kreisflächen πr^2, Quadratflächen a^2, Kugelmantel (Oberfläche) $4\pi r^2$, bei vielen Formeln in der Mechanik z. B. $\frac{mv^2}{2}$, schließlich bei vielen physikalischen Gesetzen kommt das Quadrat der Entfernung vor.

Wenn in den Schulen das Kopfrechnen im allgemeinen wenig gepflegt wird, wird dagegen das Quadrieren häufiger geübt. Dies geschieht auch mitunter, um die bekannten algebraischen Formeln $(a \pm b)^2$ einzuüben und zahlenmäßig zu bestätigen. So kommen wir auch auf die gebräuchlichen Methoden, die beim Quadrieren Anwendung finden.

Die zu quadrierende Zahl wird in Zehner und Einer zerlegt und nach der Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ quadriert. So hätten wir beispielsweise $36^2 = 900 + 2 \cdot 30 \cdot 6 + 6^2 = 1296$.

$$43^2 = 1600 + 240 + 9 = \mathbf{1849}.$$

Auch die Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ wird angewendet, und zwar, wenn die Endziffer der zu quadrierenden Zahl etwa eine 8 oder eine 9 ist.

Z. B. $39^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 + 1 = 1601 - 80 = 1521$

$$48^2 = 2500 - 2 \cdot 2 \cdot 50 + 4 = \mathbf{2304}.$$

Die Ausdrücke $a^2 + 2ab + b^2$ und $a^2 - 2ab + b^2$ lassen sich auch etwas anders schreiben, nämlich $[(a+b)+b)\,a + b^2$ bzw. $[(a-b) - b]\,a + b^2$; man kommt so auf die Regel, die bei der Multiplikation erwähnt war (vgl. S. 15), wenn man bedenkt, daß beim Quadrieren die Zehner beider Faktoren übereinstimmen.

Z. B. $36^2 = ?$

$$\begin{array}{rr} (36+6)\cdot 3 = & 126 \\ 6^2 = & 36 \\ \hline & 1296 \end{array}$$

22^2;

$$\begin{array}{rr} 24 \cdot 2 = & 48 \\ 2^2 = & 4 \\ \hline & 484 \end{array}$$

$23^2 = 529\ (2 \cdot 26 = \mathbf{52},\ 3^2 = \mathbf{9})$

$43^2 = ?\ \ 46 \cdot 4 = 184;\ 1840 + 3^2 = 1849,\ 43^2 = 1849.$

Die soeben erwähnten Regeln sind bequem anwendbar hauptsächlich bei zweistelligen Zahlen und auch bei diesen nur, solange die erste Ziffer etwa kleiner als 6 ist, weil von da an die Multiplikation im Kopfe mehr oder weniger unbequem wird. — Soll z. B. 86^2 gebildet werden, so hätten wir $80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 6 + 6^2 = 6400 + 960 + 36 = 7396$,

oder:

$$\begin{array}{rr} 92 \cdot 8 = & 736 \\ 6^2 = & 36 \\ \hline 86^2 = & 7396 \end{array}$$

Etwas kürzer: $84^2 = \overset{88 \cdot 8}{704 \frown 16} = 7056$

Bei dreistelligen Zahlen wird die Multiplikation im allgemeinen noch unbequemer, z. B. bei 184^2 müßte man das Produkt $188 \cdot 18$ bilden.

27. Quadratbildung von Zahlen mit Endziffer 5. Auf eine sehr bequeme Regel sei noch hingewiesen, die zur Quadratbildung von Zahlen dient, deren Endziffer gleich 5 ist.

Die erste Ziffer der vorgelegten Zahl sei a', so daß $a = 10a'$, dann ist für $b = 5$, $(a + b) + b = a + 10 = (a' + 1) \cdot 10$.

$$a\,[(a + b) + b] = 10a' \cdot (a' + 1)\,10 = \mathbf{100\,a' \cdot (a' + 1)}$$

$$\mathbf{(a + b)^2 = 100\,a' \cdot (a' + 1) + 25.}$$

Die Endziffern sind somit stets **25**. Man multipliziere demnach die erste Ziffer (a') mit einer um **1** größeren Zahl und setze rechts an das Produkt die Zahl 25.

Beispiele.

$35^2 = ?\quad 3 \cdot 4 = 12$

$35^2 = 1225!$

$55^2 = \overset{5 \cdot 6}{3025}$

$75^2 = \overset{7 \cdot 8}{5625}$; $45^2 = \overset{4 \cdot 5}{2025}$

Ebenso:

$125^2 = \overset{12 \cdot 13}{15625}$ (vgl. Regel S. 14)

$145^2 = \overset{14 \cdot 15}{21025}$

$235^2 = 55225$ $(23 \cdot 24 = 552)$

Das 25er System.

Wie früher erwähnt, wird in den Schulen im allgemeinen die zu quadrierende Zahl in ihre Zehner und Einer zerlegt und so als Summe, oder auf die nächste mit Null endigende Zahl ergänzt und als Differenz aufgefaßt. Diese Methode wollen wir „Zehner-System" nennen. Im Gegensatz hierzu wird im folgenden mein „25er System" dargestellt.[1])

Hier wird die zu quadrierende Zahl je nach ihrer Größe auf 50, 100, 150, 200 usw. bezogen, wobei in Wirklichkeit stets nur eine Zahl $\leqq 25$ quadriert und zu einer, nach einer jeweilig angegebenen Regel zu bildenden Zahl, addiert wird.

Weil aber bei diesem System immer wieder die Quadrate der Zahlen **1—25** vorkommen, empfiehlt es sich im Interesse einer Zeitersparnis diese Quadrate auswendig zu lernen.

---

1) Neues System zum Technischen Kopfrechnen von J. Bojko und E. Wendling. E. Speidel, Zürich 1907.

$11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, $19^2 = 361$, $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, $24^2 = 576$, $25^2 = 625$. Man wird aber ohnehin etwa die Quadrate der Zahlen 1—13, ferner der Zahlen 15, 20, 25 auswendig wissen, so daß nur noch wenige hinzuzulernen wären. Zur Übung kann man auch die Regel Seite 15 benutzen.

Hauptsache ist, daß der Leser die Quadrate 1—25 auswendig so beherrscht, wie etwa das kleine Einmaleins, also in der Lage ist, jedes Quadrat in diesem Bereiche sofort — sozusagen automatisch — anzugeben. Dies vorausgeschickt, sei noch an dieser Stelle erwähnt, daß jeder, dem ich mündlich die nächstfolgenden Regeln vorgetragen habe und der sich bis dahin mit Quadrieren im Kopfe nie befaßt hatte, innerhalb $\frac{1}{2}$—1 Stunde jede Zahl zwischen 1 und 125 verhältnismäßig rasch im Kopfe quadrieren konnte.

28. Quadrate der Zahlen 25 bis 75. Regel. Um eine Zahl die zwischen 25 und 75 liegt, zu quadrieren, subtrahiere man von dieser 25, hänge an die Differenz zwei Nullen an und addiere hierzu das Quadrat der Ergänzung bzw. des Überschusses bezogen auf 50.

Ist z. B. 38^2 zu berechnen, so verfährt man folgendermaßen: $38 - 25 = 13$, hänge 2 Nullen an — 1300; die Ergänzung auf 50 ist $50 - 38 = 12$ oder 38 und $\mathbf{12} = 50$, das Quadrat der Ergänzung ist $12^2 = 144$, demnach:

$$38^2 = 1300 + 144 = \mathbf{1444}$$

Ebenso:

$$\begin{array}{rl} & 33^2;\ 33 - 25 = 8;\ 800 \\ 33 \text{ und } \mathbf{17}; & 17^2 = \quad 289 \\ \hline & 33^2 = \quad 1089 \end{array}$$

Abgekürzt: 39^2; 14; $11^2 = 121$; $39^2 = 14\frown 121 = 1521$.

Ist die Ergänzung bzw. der Überschuß einstellig, was für die Zahlen 40 bis 60 zutrifft, also deren Quadrat höchstens zweistellig, so kann das Anhängen von 2 Nullen und die Addition des Quadrates einfach durch Anhängen des letzteren erfolgen. Die Rechnung wird außerordentlich einfach, da die Hunderter und Einer unabhängig voneinander berechnet werden können. Zu beachten ist, daß das anzuhängende Quadrat stets zweistellig zu schreiben ist.

Also: $3^2 = 09$; $2^2 = 04$; $1^2 = 01$.

$$\begin{array}{rl} & 43^2;\ 43 - 25 = 18 \quad \text{Hunderter} \\ 43 \text{ und } \mathbf{7} = 50; & 7^2 = \quad 49 \ \text{Einer} \\ \hline & 43^2 = 1849 \end{array}$$

$45^2 = 2025\ (45 - 25,\ 5^2);\quad 42^2 = \overset{42-25\;\;8^2}{1764};$

$48^2 = \overset{48-25}{2304}$ (rechne: 25 **und** 23 = 48 usw.)

$53^2 = \overset{53-25\;\;3^2}{2809}$

Anmerkung. Hier bietet sich ein Vorteil; es ist nämlich $53 - 25 = 25 + \mathbf{3}$, d. h. anstatt von der gegebenen Zahl 25 zu subtrahieren, addiere man zum Überschuß die Zahl 25. Es sei jedoch dem Rechner überlassen, auf die eine oder andere Art zu rechnen.

Beispiele. $57^2 = \overset{25+7\;\;7^2}{3249};\quad 58^2 = 3364$

In Worten: 8 und 25 = 33, $8^2 = 64;\quad 58^2 = 3364$.

63^2; Überschuß 13; $13 + 25 = 38$ Hunderter, $13^2 = 169$, $63^2 = 38^\frown 169 = 3969$.

$65^2; 15+25=40; 15^2=225, 65^2=4225; 73^2=48^\frown 529=5329$.

Gemischte Beispiele. $36^2 = 11^\frown 196 = 1296;\ 46^2 = 2116$

$59^2 = \overset{25+9\;\;9^2}{3481};\quad 74^2 = 49^\frown 576 = 5476.$

29. Quadrate der Zahlen 75 bis 125. Regel. Um eine Zahl, die zwischen

75 und 100 liegt, zu quadrieren, vermindere man die gegebene Zahl um ihre Ergänzung auf 100, hänge zwei Nullen an und addiere hierzu das Quadrat der Ergänzung.	100 und 125 liegt, zu quadrieren vermehre man diese um ihren Überschuß bezogen auf 100, hänge 2 Nullen an und addiere hierzu das Quadrat des Überschusses.

Bei der Bildung von 83^2 verfährt man also wie folgt: Man bestimme die Ergänzung auf 100; $100 - 83 = 17$ oder 83 und $\mathbf{17} = 100$; subtrahiere diese von der gegebenen Zahl $83 - 17 = 66$, Quadrat der Ergänzung: $17^2 = 289$, demnach:

$83^2 = 6600 + 289 = 6889$; oder kürzer: $83 - 17 = 66$ Hunderter und $17^2\ (= 289) = 6889$.

Beispiele. 86^2; $86 - 14 = 72$; $14^2 = 196$;

$86^2 = 72^\frown 196 = 7396;\quad 89^2 = \overset{89-11\;\;11^2}{78^\frown 121} = 7921;$

$85^2 = 70^\frown 225 = 7225;\quad 79^2 = 58^\frown 441 = 6241.$

Bei den Quadraten der Zahlen **90** bis **110** lassen sich — ähnlich wie bei den Zahlen 40 bis 60 — die Hunderter und Einer vollständig unabhängig voneinander berechnen, und das Quadrat fast mühelos hinschreiben.

$$92^2;\ \text{Ergänzung } 8$$

$$\begin{array}{rl} 92 - 8 = 84 & \text{Hunderter} \\ 8^2 = 64 & \text{Einer} \\ \hline 92^2 = 8464 & \end{array}$$

$$93^2 = \overset{93-7\ 7^2}{8649};\quad 98^2 = \overset{98-2\ 2^2}{9604};\quad 102^2 = \overset{102+2\ 2^2}{10404};\quad 109^2 = 11881.$$

Einige weitere Beispiele.

$111^2 = 122^\frown 121 = 12321$. In Worten: 111 und 11 = 122; 12200 hierzu $11^2 = 121$; $111^2 = 12321$;

$114^2 = 128^\frown 196 = 12996$.

In Wirklichkeit braucht man nicht im vorletzten Beispiele $128^\frown 196$ und dann erst 12996 hinzuschreiben, vielmehr nimmt man die Addition im Kopfe vor „128 und **1**96 = 12**9**96" oder man schreibt die Zahl 128 und korrigiert die 8 auf eine 9 also 12**9**96.

$122^2 = 144^\frown 484 = 14884$; $\quad 125^2 = 150^\frown 625 = 15\,625$

30. Die Quadrate der Zahlen 125 bis 175. Regel. Man addiere zu den zwei letzten Ziffern der zu quadrierenden Zahl 25, multipliziere mit 3, hänge 2 Nullen an und addiere schließlich hierzu das Quadrat der Ergänzung bzw. des Überschusses bezogen auf 150.

137^2 würde man also wie folgt berechnen: $37 + 25 = 62$, mal 3 = 186; 18 600, Ergänzung = 13, zum Quadrat = 169.

$137^2 = 18\,600 + 169 = 18\,769$; $\quad 135^2 = 180^\frown 225 = 18\,225$.

Für die Zahlen 140 bis 160 tritt wiederum die bekannte Vereinfachung ein.

$$142^2 = \overset{67\cdot 3\ 8^2}{20164};\quad 145^2 = \overset{3\cdot 70\ 5^2}{21025};\quad 148^2 = \overset{73\cdot 3\ 2^2}{21904};$$
$$151^2 = 22\,801\ (3 \cdot 76 = 228).$$

Man wird $3 \cdot 76$ auch „von hinten" rechnen können und sich damit auch die kleine Multiplikation erleichtern, also 228 von rechts nach links aufschreiben. $\quad 154^2 = 23\,716$.

Einige weitere Beispiele.

163^2; $63 + 25 = 88$, mal $3 = 264$ und $13^2 = 169$; $163^2 = 26\,569$;

$$165^2 = \overset{3\cdot 90\ 15^2}{270^\frown 225} = 27\,225;\qquad 168^2 = \overset{3\cdot 93\ 18^2}{279^\frown 324} = 28\,224;$$
$$173^2 = 294^\frown 529 = 29\,929.$$

Beachte $98 \cdot 3 = 300 - 6 = 294$, oder „von hinten" rechnen: $3 \cdot 8$ usw.

31. Die Quadrate der Zahlen 175 bis 225. Regel. Man bilde die Zahl, die angibt, um wieviel die gegebene Zahl größer ist als 100, multipliziere diese mit **4** und hänge 2 Nullen an; hierzu addiere man schließlich das Quadrat der Ergänzung bzw. des Überschusses bezogen auf 200.

Anmerkung. Die Zahl, die angibt, um wieviel die gegebene Zahl größer ist als 100, ist für die Zahlengruppe 175 bis 200 gleich den zwei letzten Stellen und entsteht für die Gruppe 200 bis 225, wenn man sich bei der zu quadrierenden Zahl anstatt der Anfangsziffer 2 eine 1 denkt.

Beispiele. $182^2 = \overset{4\cdot 82}{328}\frown\overset{18^2}{324} = 33124$; $82 \cdot 4 = 328$ Hunderter, 182 und **18** = 200 oder $200 - 182 = \mathbf{18}$ = Ergänzung; $18^2 = 324$.

$185^2 = 340\frown 225 = 34225$ $(4 \cdot 85 = 340)$; $193^2 = \overset{4\cdot 93}{372}\overset{7^2}{49}$.

Bei der Quadratbildung der Zahlen 190 bis 210 werden wiederum die Hunderter von den Einern nicht beeinflußt.

$199^2 = 39601$, $4 \cdot 99 = 4 \cdot 100 - 4$ oder rechne „von hinten"
$4 \cdot 9 = \mathbf{36}$, $4 \cdot 9 + 3 = \mathbf{39}$.

$202^2 = \overset{4\cdot 102}{408}\overset{2^2}{04}$; $209^2 = 43681$;

$214^2 = \overset{4\cdot 114}{456}\frown\overset{14^2}{196} = 45796$ $225^2 = 500\frown 625 = 50625$.

32. Die Quadrate der Zahlen 225 bis 275. Für diese Gruppe gilt folgende Regel:

Man bilde die Zahl, die angibt, um wieviel die gegebene Zahl größer ist als 125, multipliziere diese mit **5** und hänge 2 Nullen an; hierzu addiere man das Quadrat der Ergänzung bzw. des Überschusses bezogen auf 250.

228^2; 228 ist um 103 größer als 125 (sprich: 125 und **103** = 228 anstatt $228 - 125 = 103$).

$$\begin{array}{rl} 5 \cdot 103 & = 515 \text{ Hunderter} \\ 22^2 & = 484 \\ \hline 228^2 & = 51984 \end{array}$$

$$233^2 = 540\frown 289 = 54289.$$

Hier fällt sofort auf, daß die Quadratbildung der ungeraden Zahlen dieses Intervalles sich besonders einfach gestaltet. Subtrahiert man nämlich 125, so ist in diesem Falle die Differenz eine gerade Zahl;

bei der Multiplikation dieser mit 5 wird die letzte Ziffer des Produktes stets eine Null, die man fortlassen kann und das zu addierende Quadrat dreistellig anschreiben. Die Multiplikation mit 5 kann hier ferner nach S. 22 als Division durch 2 erfolgen, wobei man ohne weiteres die Tausende des zu bildenden Quadrates erhält.

Also im letzten Beispiele:

$233^2 = \overset{108:2}{542}\overset{17^2}{89}.$ Ebenso: $237^2 = \overset{112:2}{561}\overset{13^2}{69};$

$238^2 = 565{}^\frown 144 = 56644;$ $245^2 = 60025;$

$248^2 = 61504;$ $254^2 = \overset{5\cdot 129}{645}\overset{4^2}{16}.$

Rechne anstatt $254 - 125 = 129$, Überschuß $+ 125 = \mathbf{4} + 125 = 129$!

Nach den bisherigen Regeln sind also von den Quadraten der Zahlen 1 bis 275 nicht weniger als bei **40%** der zu quadrierenden Zahlen die Hunderter unabhängig von den Einern, wodurch das Quadrat fast mühelos hingeschrieben werden kann.

Zwischen 100 und 200 sind es die Zahlen: 100 bis 110, 140 bis 160 und 190 bis 200.

Weitere Beispiele. $263^2 = \overset{138:2}{691}\overset{13^2}{69}$; $268^2 = \overset{5\cdot 143}{715}{}^\frown\overset{18^2}{324} = 71824.$

Übung. Berechne: 272^2, 255^2, 241^2, 259^2, 236^2, 258^2, 267^2, 239^2.

Bevor man die Quadratbildung fortsetzt, ist es unerläßlich, die bisherigen Regeln gründlich einzuüben, da die weiteren sich auf diese stützen.

33. Wiederholungsbeispiele. 1. Gib die Regel an, nach der gebildet ist:

$96^2 = 9216;$	$209^2 = 43681;$	$37^2 = 1369;$
$111^2 = 12321;$	$89^2 = 7921;$	$62^2 = 3844;$
$44^2 = 1936;$	$243^2 = 59049;$	$82^2 = 6724;$
$188^2 = 35344;$	$246^2 = 60516;$	$218^2 = 47524.$

2. Bilde im Kopfe folgende Quadrate:

198^2, 142^2, 39^2, 62^2, 209^2, 93^2, 86^2, 242^2, 271^2, 57^2, 185^2, 96^2 114^2.

Wir hatten bis jetzt für die Quadratbildung der Zahlen 25 bis 275 fünf Regeln, die mehr oder weniger miteinander zusammenhängen.

Jede Gruppe umfaßt je 50 Zahlen und hat ein „Zentrum"; solche sind: 50, 100, 150, 200, 250. Allen Regeln ist gemeinsam, daß jeweilig der Überschuß bzw. die Ergänzung der gegebenen Zahl bezogen auf das „Zentrum" (d. h. allemal das nächstliegende Vielfache von 50 nach oben oder nach unten) quadriert und addiert wird. Diese Ergänzungen bzw. Überschüsse sind in allen Fällen kleiner oder höchstens gleich **25**.

Bei jeder Regel, namentlich bei den drei letzten, wird noch eine bestimmte Zahl mit einem gewissen Zahlenfaktor nämlich mit 3, 4 bzw. 5 multipliziert. Auch hier ist ein gesetzmäßiger Zusammenhang vorhanden. Der Zahlenfaktor ist nämlich jedesmal genau so groß, wie oft das „Zentrum" die Zahl 50 enthält. In der Tat finden wir: „Zentrum" 150 — Zahlenfaktor 3, „Zentrum 200 — Zahlenfaktor 4, „Zentrum" 250 — Zahlenfaktor 5.

Die zu multiplizierende Zahl könnte man allgemein durch Subtraktion der Hälfte des „Zentrums" von der zu quadrierenden Zahl bilden. Z. B. 137 = ? Nach § 30 S. 55 bilde man 37 + 25 = 62; aber 137 — 75 ist ebenfalls 62, 75 = 150 : 2. Ebenso muß in der Gruppe 175 bis 225 von der zu quadrierenden Zahl 100 = 200 : 2 subtrahiert werden; schließlich wird bei der nächsten Gruppppe 225 bis 275 125 = 250 : 2 subtrahiert.

Allen erwähnten Regeln ist endlich gemeinsam, daß zu dem in bestimmter Weise zu bildenden Produkt zwei Nullen anzuhängen sind.

Wenn also auf den ersten Blick die Regeln etwas kompliziert und voneinander verschieden erscheinen mögen, lassen sie sich doch infolge ihres inneren Zusammenhanges nach einiger Übung merken.

Es gibt also sozusagen eine höhere Regel, die sich diesen 5 Regeln „überlagert" und diese umfaßt. Will man aber das Quadrieren auf größere Zahlen ausdehnen, so muß man vorerst die bisherigen Regeln vollkommen beherrschen; denn diese wiederholen sich.

So lassen sich die Zahlen 250 bis 750 nach Regel § 28, 750 bis 1250 nach Regel § 29, 1250 bis 1750 nach Regel § 30, 1750 bis 2250 nach Regel § 31 usw. quadrieren, wenn man in den entsprechenden Regeln die Zahlen 25, 50, 75, 100, 125 usw. durch 250, 500, 750, 1000, 1250 usw. ersetzt und statt 2 Nullen jeweilig 3 Nullen anhängt.

Wir haben demnach im folgenden, mögen wir das Gebiet der zu quadrierenden Zahlen beträchtlich erweitern, keine wesentlich neuen Regeln hinzuzulernen.

Den Beweis zu den in diesem Kapitel angeführten Regeln lasse ich hier folgen.

Zu § 28. Die zu quadrierende Zahl stellen wir dar in der Form $50 \mp b$;

$$\begin{aligned}(50 \mp b)^2 &= 2500 \mp 100\, b + b^2 \\ &= (25 \mp b)\, 100 + b^2 \\ &= \underline{[(50 \mp b) - 25] \cdot 100 + b^2}\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet:

$(50 \mp b) - 25 - \ldots$	„Um eine Zahl, die zwischen 25 und 75 liegt, zu quadrieren, subtrahiere man von dieser 25",
$[(50 \mp b) - 25] \cdot 100 \ldots$	„hänge an die Differenz zwei Nullen an"
$[(50 \mp b) - 25] \cdot 100 + b^2 \ldots$	„und addiere hierzu das Quadrat der Ergänzung bzw. des Überschusses bezogen auf 50".

Zu § 29 bis 32.

Der eben angeführte Beweis läßt sich verallgemeinern, wenn wir die zu quadrierende Zahl in der Form $(50n \mp b)$ darstellen, wobei n eine der Zahlen 1 bis 5 und b 1 bis 25 bedeuten mögen.

$$\begin{aligned}(50n \mp b)^2 &= 2500n^2 \mp 100\,nb + b^2 \\ &= (25n \mp b)\, 100n + b^2 \\ &= \underline{\{[(50n \mp b) - 25n]\, n\} \cdot 100 + b^2}.\end{aligned}$$

Der Leser möge selbst — unter der Beachtung der Ausführungen auf der vorigen Seite — dieses Ergebnis mit den Regeln § 29 bis § 32 vergleichen.

Die zu quadrierende Zahl sei z. B. 242,

woraus $n = 5,\ b = 8,$

so ist: $$\begin{aligned}242^2 &= (242 - 5 \cdot \overset{125}{25}) \cdot 5 \cdot 100 + 64 \\ &= 117 \cdot 5 \cdot 100 + 64 = 58564,\end{aligned}$$

wobei die wirkliche Rechnung, wie früher gezeigt, bedeutend kürzer ausfällt und im Kopfe leicht ausführbar ist.

34. Die Quadrate der Zahlen 250 bis 750. Regel. Um eine Zahl, die zwischen 250 und 750 liegt, zu quadrieren, subtrahiere man von dieser 250, hänge 3 Nullen an und addiere hierzu das Quadrat der Ergänzung bzw. des Überschusses bezogen auf 500 (vgl. S. 53).

Anmerkung. Diese Ergänzung bzw. dieser Überschuß ist offenbar kleiner oder höchstens gleich 250.

Beispiele.

$$289^2;\ 289 - 250 = 39; \qquad 39000$$
$$\underline{289 \text{ und } \mathbf{211} = 500;\ 211^2 = 44521} \text{ (nach § 31)}$$
$$289^2 = 83521$$

$$294^2 = \overline{\overset{294-250}{44}\ \overset{206^2}{42}}436 = 86436$$
$$343^2 = 93\frown\overset{157^2}{24649} = 117649$$
$$391^2 = \overline{141\ 11}881 = 152881$$

$$407^2 = 157\frown 8649 = 165649$$
(vgl. § 29)
$$418^2 = 168\frown 6724 = 174724$$
$$443^2 = 193\frown 3249 = 196249$$

Rechne: $443 - 250 = (450 - 250) - 7 = 200 - 7 = 193.$
$$465^2 = 215\frown 1225 = 216225.$$

Eine wesentliche Vereinfachung tritt ein für die Zahlen 469 bis 531; hierbei sind nämlich die Ergänzungen bzw. die Überschüsse kleiner als 32 und ihre Quadrate kleiner als 1000, also höchstens dreistellig; sie können demnach die ersten drei Stellen des sechsstelligen Resultats nicht beeinflussen. Beide Teile werden getrennt berechnet und nebeneinander hingeschrieben.

$$477^2 = \overset{477-250}{227}\ \ \overset{23^2}{529}$$
$$485^2 = 235225$$
$$496^2 = 246016$$
Beachte: 250 und 246 = 496

$$507^2 = \overset{250+7}{257}\overset{7^2}{049}$$
(vgl. Anm. S. 54)
$$518^2 = 268324$$
$$531^2 = 281961$$

Weitere Beispiele.

$$543^2 = \overset{250+43}{293}\frown\overset{43^2}{1849} = 294849$$
$$596^2 = 346\frown 9216 = 355216$$

$$641^2 = \overline{391\ 19}881 = 410881$$
$$708^2 = \overline{458\ 432}64 = 501264$$
$$743^2 = \overline{493\ 59}049 = 552049$$

Übungen. Bilde nach obiger Regel: 294^2, 335^2, 411^2, 448^2, 457^2, 486^2, 514^2, 523^2, 555^2, 596^2, 608^2, 689^2.

In dieser Gruppe dürfte die Bildung der Quadratzahlen in der Nähe von 300, 400, 600 und evtl. in der Nähe von 700 bequemer sein durch Kombination der Regel (S. 53) und der üblichen Formel $(a \pm b)^2$, wie diese auf S. 15 modifiziert ist, wobei 300 bzw. 600 und 700 als a und der jeweilige Überschuß als b aufgefaßt wird.

Z. B. $\qquad 314^2;\quad 328 \cdot 3 = 984$
$$14^2 = \quad 196$$
$$314^2 = 98596$$

$$307^2 = \overset{3\cdot 314}{942}49 \qquad 312^2 = \overset{3\cdot 324}{972}\frown\overset{12^2}{144} = 97344$$

$$\begin{array}{rr} 358^2; & 1248 \\ & 3364 \\ \hline 358^2 = & 128164 \end{array}$$

$$592^2 = \overset{6\cdot 584}{350}\;\overset{8^2}{464}$$

$$608^2 = \overset{6\cdot 616}{369}\overset{8^2}{664}$$

$$617^2 = \overset{6\cdot 634}{3804}\frown 289 = 380689$$

$$691^2 = \overset{7\cdot 682}{477}\overset{9^2}{481}$$

$$704^2 = \overset{7\cdot 708}{495}\overset{4^2}{616}$$

$$722^2 = 5208\frown 484 = 521284$$

Man denke sich die zu multiplizierende Zahl im Kopfe, in unserem letzten Beispiele 744 (722 + 22) und multipliziere diese Zahl ebenfalls im Kopfe mit 7, so daß das Produkt 5208 von rechts geschrieben Ziffer für Ziffer entsteht.

35. Die Quadrate der Zahlen 750 bis 1250. Regel. Um eine Zahl, die zwischen

750 und 1000 liegt, zu quadrieren, vermindere man die gegebene Zahl um ihre Ergänzung auf 1000, hänge 3 Nullen an und addiere hierzu das Quadrat der Ergänzung.

1000 und 1250 liegt, zu quadrieren, vermehre man die gegebene Zahl um ihren Überschuß bezogen auf 1000, hänge 3 Nullen an und addiere hierzu das Quadrat des Überschusses.

$$\begin{array}{l} 889^2;\ \text{Ergänzung } 111 \\ 889 - 111 = 778 \text{ Tausender} \\ \underline{111^2 = \;\; 12321 (122\frown 121)} \\ 889^2 = 790321 \end{array}$$

$$844^2 = \overset{844-156}{688}\frown\overset{156^2}{24336} = 712336$$

$$792^2 = \overset{792-208}{584}\frown\overset{208^2}{43264} = 627264$$

$$959^2 = \overset{959-41}{918}\frown\overset{41^2}{1681} = 919681$$

$$963^2 = \overset{963-37}{926}\frown 1369 = 927369$$

Aus einem früher dargelegten Grunde tritt bei den Zahlen 969 bis 1031 eine wesentliche Vereinfachung ein; das Quadrat läßt sich fast mühelos hinschreiben, während nach der üblichen Rechnungsweise gerade die Zahlen 969 bis 1000 nicht zu den bequemsten zählen.

$$977^2 = \overset{977-23}{954}\ \overset{23^2}{529}$$
$$985^2 = 970225$$
$$994^2 = 988036$$
$$999^2 = \overset{999-1}{998}\overset{1^2}{001}$$

$$1007^2 = \overset{1007+7}{1014}\ \overset{7^2}{049}$$
$$1014^2 = 1028196$$
$$1031^2 = 1062961$$

Weitere Beispiele.

$$1044^2 = \overset{1044+44}{1088} \frown \overset{44^2}{1936} = 1089936$$
$$1098^2 = 1196 \frown 9604 = 1205604$$

(Rechne: $1098 + 98 = 1200 - 4 = 1196$)

$$1107^2 = \overset{1107+107}{1214} \frown \overset{107^2}{11449} = 1225449$$
$$1145^2 = 1290\ \ 21025 = 1311025$$
$$1164^2 = 1328 \frown 26896 = 1354896$$
$$1193^2 = 1386\ \ 37249 = 1423249$$
$$1208^2 = \overset{1208+208}{1416} \frown \overset{4\cdot 108\ \ 8^2}{43264} = 1459264$$
$$1223^2 = 1446\ \ 49729 = 1495729$$

Übung. Berechne die Quadrate: 818^2, 792^2, 1023^2, 956^2, 1214^2, 988^2, 715^2, 1124^2, 1029^2, 1203^2, 991^2, 825^2, 789^2, 917^2, 1048^2, 1062^2, 1214^2.

Auch in dieser Gruppe dürfte es bequemer sein, die Quadratzahlen in der Nähe von 800 und in der Nähe von 900 anstatt nach der Regel S. 61 durch Kombination der Regel § 28 und der Formel $(a \pm b)^2 = a\,(a \pm 2b) + b^2$ zu bilden.

Beispiele. 784^2;

$$768 \cdot 8 = 6144$$
$$16^2 = 256$$
$$784^2 = 614656$$

$$793^2 = \overset{8\cdot 786}{6288}\ \overset{7^2}{49};$$
$$806^2 = \overset{8\cdot 812}{6496}\ \overset{6^2}{36};$$
$$825^2 = \overset{8\cdot 850}{680}\ \overset{25^2}{625};$$
$$836^2 = \overset{8\cdot 872}{6976}\ 1296 = 698896.$$

Ebenso:

$$894^2 = \overset{9\cdot 888}{7992}\ \overset{6^2}{36};$$
$$909^2 = \overset{9\cdot 918}{8262}\ \overset{9^2}{81};$$
$$917^2 = 8406 \frown 289 = 840889$$

36. Übungen und Wiederholungsbeispiele. Berechne folgende Quadrate und gib die Regel an, nach der sie gebildet sind: 1036^2, 139^2, 924^2, 43^2, 1211^2, 188^2, 58^2, 478^2, 207^2, 239^2, 722^2, 96^2, 517^2

In den meisten Fällen, namentlich in der Technik, wird man mit den Quadraten dreistelliger Zahlen auskommen und wird Zahlen, die etwa mehr Stellen aufweisen, auf dreistellige aufrunden. Deshalb sind auch in den gebräuchlichen technischen Taschenbüchern nur die Quadrate der Zahlen 1 bis 1000 angeführt.

Wir sind jedoch bereits über 1000 hinaus und wollen das Quadrieren für größere Zahlen fortsetzen. Im allgemeinen wird die Aufgabe mit Zunahme der Zahlen komplizierter, d. h. sie erfordert mehr Zeit und Zwischenrechnungen. Aber gerade weil bei 1000 die Tafeln in der Regel aufhören und die gewöhnliche Rechnung auch verhältnismäßig viel Zeit erfordert, wird es von Interesse sein, unsere bisherigen Regeln auf größere Zahlen anzuwenden.

Wir haben früher bemerkt, daß bei Beherrschung der Quadratzahlen 1 bis 25 die Quadrate der Zahlen bis 250 (in Wirklichkeit bis 275) in einfacher Weise sich bilden lassen. Ebenso benötigt man zur Quadratbildung der Zahlen 250 bis 2500 die Quadrate 1 bis 250, schließlich zur Quadratbildung der Zahlen 2500 bis 25000 die Quadrate 1 bis 2500.

In den bisherigen Paragraphen haben wir angenommen, die Quadratbildung der Zahlen 1 bis 250 werde ebenfalls — und damit die ganze Rechnung — im Kopfe durchgeführt. Für größere Zahlen würde es sich lohnen, die Quadrate 1 bis 250 und evtl. 1 bis 2500 einer Tafel zu entnehmen.

37. Die Quadrate der Zahlen 1250 bis 1750. Regel. Man addiere zu den letzten 3 Ziffern, als Zahl aufgefaßt, die Zahl 250, multipliziere mit 3, hänge 3 Nullen an und addiere hierzu das Quadrat der Ergänzung bzw. des Überschusses bezogen auf 1500 (vgl. § 30).

Anmerkung. Hier und bei den folgenden Beispielen wird es dem Leser überlassen, ob er die Quadrate 1 bis 250, die immer wieder vorkommen, im Kopfe berechnen, oder einer Tafel entnehmen will. Bei genügender Übung dürfte (vielleicht mit Ausnahme der Gruppe 125 bis 175) die Rechnung im Kopfe nicht mehr Zeit in Anspruch nehmen als die Benutzung einer Tafel. Verfasser hat sämtliche Beispiele bis 2500 (resp. 2750) ohne Benutzung einer Quadrattafel berechnet.

Beispiele. 1319^2; $319 + 250 = 569$, $569 \cdot 3 = 1707$

Ergänzung: 181, $181^2 \qquad = \quad 32761$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1739761$

oder kürzer gefaßt:

$$1319^2 = \overset{3\cdot 569}{1707}\ \overset{181^2}{32761} = 1739761;$$

$$1394^2 = \overset{644\cdot 3}{1932}\ \overset{106^2}{11236} = 1943236;$$

$$1413^2 = 1989\ 7569 = 1996569.$$

Man denke sich die Zahl $(413 + 250) = 663$ im Kopfe und multipliziere mit 3 von rückwärts. Diese Aufgabe kann offenbar auch so gelöst werden:

$\overset{1413+13}{1426} \cdot 14 = 19964$ Hunderter $+ \overset{13^2}{169} = 1996569$; Voraussetzung ist hierbei jedoch, daß 14 als eine einziffrige Zahl (vgl. S. 27) aufgefaßt wird.

$$1471^2 = \overset{3\cdot 721}{2163}\overset{29^2}{841};\quad 1488^2 = 2214144;\quad 1509^2 = \overset{3\cdot 759}{2277}\overset{9^2}{081}$$

$$(509 + 250 = 759);\quad 1531^2 = 2343961.$$

(Oder: $15 \cdot 1562 = 23430$, $2343000 + 961 = 2343\,961$.)

$$1592^2 = \overset{3\cdot 842}{\overline{2526}}\frown 8464 = 2534464;$$

$$1614^2 = \overline{2592\ 12}996 = 2604996;$$

$$1665^2 = \overline{\overset{915\cdot 3}{2745}\ 27}\overset{165^2}{225} = 2772225;$$

$$1708^2 = \overline{2874\ 43}264 = 2917264;$$

$$1734^2 = \overline{2952\ 54}756 = 3006756.$$

38. Quadrate der Zahlen 1750 bis 2250. Regel. Man subtrahiere von der gegebenen Zahl 1000, multipliziere die Differenz mit 4 und hänge 3 Nullen an; hierzu addiere man schließlich das Quadrat der Ergänzung bzw. des Überschusses bezogen auf 2000 (vgl. § 31).

Für die Zahlen 1750 bis 2000 erfolgt offenbar die Subtraktion von 1000, indem man einfach die 3 letzten Ziffern der zu quadrierenden Zahlen hinschreibt oder sich denkt.

Für die Zahlen 2000 bis 2250 hingegen denke man sich die Anfangsziffer 2 durch 1 ersetzt.

Beispiele. $1808^2 = \overline{\overset{4\cdot 808}{3232}\ \overset{4\ 92}{36}}\overset{8^2}{864} = 3268864$ $(192^2 = \overset{4\cdot 92\ \ 8^2}{36864}!)$;

$$1843^2 = \overline{\overset{4\cdot 843}{3372}\ 24}\overset{157^2}{649} = 3396649;$$

$1889^2 = \overline{3556\ 12}321 = 3568321$, $889 \cdot 4$ schreibe man von rechts nach links, indem man die 4 im Sinne hat, also $4 \cdot 9 =$ **36**, $4 \cdot 8$ und $3 =$ **35** usw.

$$1921^2 = 3684\frown 6241 = 3690241;$$

$$1955^2 = 3820\frown 2025 = 3822025;$$

$$1972^2 = \overset{4\cdot 972}{3888}\overset{28^2}{784} \text{ (vgl. S. 56)};\quad 1981^2 = 3924361;$$

$$1994^2 = 3976036;\quad 2007^2 = \overset{4\cdot 1007}{4028}\overset{7^2}{049},$$

oder $2\cdot 2014 = 4028$ Tausender und $7^2 = 49$; $2007^2 = 4028049$.

$$2023^3 = 4092\ 529;\quad 2029^2 = 4116841;$$

$$2056^2 = \overset{4\cdot 1056}{4224}\frown\overset{56^2}{3136} = 4227136;$$

$$2083^2 = 4332\frown 6889 = 4338889;$$

$$2109^2 = \overline{4436\ 11}881 = 4447881;$$

$$2175^2 = \overline{4700\ 30}625 = 4730625;$$

$$2194^2 = \overset{4\cdot 1194}{\overline{4776\ 37}}\overset{4\cdot 94\quad 6^2=194^2}{636} = 4813636;$$

$$2212^2 = \overline{4848\ 44}944 = 4892944.$$

39. Quadrate der Zahlen 2250 bis 2500. Regel. Um eine Zahl, die zwischen 2250 und 2500 liegt, zu quadrieren, bilde man die Zahl, die angibt, um wieviel die gegebene Zahl größer ist als 1250, multipliziere diese mit 5 und hänge 3 Nullen an; hierzu addiere man das Quadrat der Ergänzung bezogen auf 2500 (vgl. § 32).

Beispiele. $2257^2 = ?$

$$\begin{array}{r} 2257 - 1250 = 1007,\ \text{mal } 5 = 5035 \\ \text{Ergänzung } 243;\ 243^2 = 59049 \\ \hline 5094049 \end{array}$$

$$2306^2 = \overset{5\cdot 1056}{5280}\ \overset{194^2}{37636} = 5317636;$$

$$2335^2 = \overline{5425\ 27}225 = 5452225;$$

$$2388^2 = \overline{5690\ 12}544 = 5702544;$$

$$2464^2 = 6070\frown 1296 = 6071296;$$

$$2474^2 = \overset{5\cdot 1224}{6120}\overset{26^2}{676} \text{ (vgl. S. 22)};\quad 2487^2 = 6185169;$$

$$2496^2 = 6230016.$$

Bei sinngemäßer Anwendung der bisherigen Regeln lassen sich selbstredend auch manche Zahlen, die größer sind als 2500, bequem quadrieren. Inwieweit dies geschehen kann, wird der Leser selbst von Fall zu Fall zu entscheiden haben. Hier nur einige Beispiele.

$$\begin{array}{r} 4476^2;\qquad 524^2 = 274576 \text{ (vgl. § 34)} \\ 4476 - 2500 = 1976\phantom{\text{ (vgl. § 34)}} \\ \hline 20034576\phantom{\text{ (vgl. § 34)}} \end{array}$$

$$5094^2 = \overset{2500+94}{25948}\,\overset{94^2}{836}; \quad 9984^2 = \overset{9984-16}{99680256}$$

$$10212^2 = \overset{10212+212}{10424}\frown\overset{212^2}{44944} = 104284944$$

$$19964^2 = \overset{4\cdot 9964}{39856}\;\overset{36^2}{1296};$$

$$24889^2 = \overset{5\cdot 12389}{61945}\frown\overset{111^2}{12321} = 619462321$$

$$\begin{array}{lr} 52074^2; \qquad 2074^2 = & 4301476 \\ 25000 + 2074 = 27074 & \\ \hline & 2711701476 \end{array}$$

60543^2; nach Formel $(a+b)^2$;

$$\begin{array}{rr} 61086\cdot 6 = & 366516 \\ 543^2 = & 294849 \\ \hline & 3665454849 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} 98155^2; \qquad 1845^2 = & 3404025 \\ 98155 - 1845 = 96310 & \\ \hline & 9634404025 \end{array}$$

$$199878^2 = \overset{4\cdot 99878}{399512}\;\overset{122^2}{14884}$$

$$\begin{array}{lr} 497864^2; \qquad 2136^2 = & 4562496 \\ 497864 - 250000 = 247864 & \\ \hline & 247868562496 \end{array}$$

$$999064^2 = \overset{999064-936}{998128}\;\overset{936^2}{876096}; \qquad 999879^2 = \overset{999879-121}{999758}\,\overset{121^2}{014641}.$$

40. Übung. Berechne: 1476^2, 1811^2, 1886^2, 1979^2, 2028^2, 2391^2, 4966^2, 5115^2, 5476^2, 7014^2, 9526^2, 9983^2, 10092^2, 10475^2, 11065^2, 14688^2, 14933^2, 15111^2, 16455^2, 19516^2, 19892^2, 20057^2, 21065^2, 24387^2, 49954^2, 98924^2, 99878^2, 99947^2.

Es empfiehlt sich, die Zahlenbeispiele zuerst in der hier angegebenen und dann in beliebiger Reihenfolge zu berechnen.

41. Dezimalbrüche. Angenähertes Quadrieren. Im vorigen Abschnitte wurde nur die Quadratbildung g a n z e r Zahlen behandelt. Soll ein D e z i m a l b r u c h quadriert werden, so lasse man das Komma zunächst unbeachtet, quadriere diese Zahl und schneide dann d o p p e l t soviel Stellen von rechts ab, als bei der zu quadrierenden Zahl bis zum Komma von rechts vorhanden sind. Hierfür würde ein Beispiel genügen.

$$116^2 = 13456;$$

sollte gebildet werden $11{,}6^2$; $1{,}16^2$; $0{,}116^2$; $0{,}0116^2$ usw., so bleiben offenbar die Ziffern dieselben, nur müssen entsprechend 2, 4, 6, 8 Stellen von rechts abgeschnitten werden, man erhält dann:

$$134{,}56;\ 1{,}3456;\ 0.013456;\ 0{,}00013456.$$

Auch beim Quadrieren wird mitunter nur ein angenäherter Wert verlangt. Hierüber dürfte das in den Abschnitten S. 35 — 37 gesagte genügen. Je ein Beispiel soll jedoch angeführt werden: $333^2 = ?$ $333^2 = \frac{1}{9} \cdot 1000000 = 111000$ (genau 110889;).

$$
8{,}4672^2; \qquad
\begin{array}{r}
8{,}4\ 6\ 7\ 2 \\
8{,}4\ 6\ 7\ 2 \\
\hline
67{,}7376 \\
3{,}3869 \\
5080 \\
592 \\
17 \\
\hline
71{,}6934
\end{array}
$$

Auch die im Abschnitt B S. 28 ff. dargelegte „Kreuzmultiplikation" läßt sich selbstverständlich auf das Quadrieren anwenden. Der Leser versuche dies bei folgenden Beispielen:

$$
\begin{array}{r}
64 \\
64 \\
\hline
4096
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
74 \\
74 \\
\hline
5476
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
436 \\
436 \\
\hline
190096
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
374{,}4 \\
374{,}4 \\
\hline
140\ 175{,}36
\end{array}
$$

Betrachten wir das erste dieser Beispiele, so werden doch die Ziffern des Produktes von rechts nach links wie folgt gebildet: $4 \cdot 4 = \mathbf{16}$, 6 geschrieben 1 gemerkt, $4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 48 + 1 = \mathbf{49}$, 9 geschrieben 4 gemerkt usw.; hier wird es dem Leser ohne weiteres auffallen, daß er statt $4 \cdot 6 + 6 \cdot 4$ einfacher $\mathbf{2 \cdot 24}$ rechnen kann (vgl. S. 30). Sinngemäß läßt sich dies auf die weiteren Beispiele übertragen, wo öfters doppelte Produkte zu bilden sind. Ferrol behandelt diese Methode des Quadrierens ausführlicher.

II. Dritte Potenz.

42. Allgemeines. Für die Bildung der dritten Potenz einer Zahl lassen sich im allgemeinen keine besonderen Rechenvorteile angeben, die unmittelbar zum Ziele führen. Vielmehr muß zuerst das Quadrat (vollständig oder näherungsweise) nach einer der in diesem Kapitel angegebenen Methoden gebildet werden und hierauf in gewöhnlicher Weise oder unter Beachtung der § 28—33 mit der Basis multipliziert werden. Wenn eine Tafel der Kubikzahlen nicht vorausgesetzt wird, werden freilich die Rechenvorteile des Quadrierens von besonderem Nutzen sein.

Beispiele. $56^3 = ?$

$$\begin{array}{rl} 3136 & \text{(nach S. 54)} \\ \cdot\, 56 & \text{(nach S. 31)} \\ \hline 175616 & \end{array}$$

ebenso: $114^3 = ?$ $114^2 =$

$$\begin{array}{rr} & 12996 \\ & 114 \\ \hline 114^3 = & 1481544 \end{array}$$

218^3; $218^2 = 47524$ (vgl. S. 56)

$$\begin{array}{rrl} & 47524 & \\ & 218 & (\text{,, ,, } 32) \\ \hline 218^3 = & 10360232 & \end{array}$$

$531^3 = ?$

$$\begin{array}{r} 281961 \\ 531 \\ \hline 281961 \\ 845883 \\ 1409805 \\ \hline 149721291 \end{array}$$

Mit dem letzten Beispiele soll gezeigt werden, daß gegenüber der gewöhnlichen Rechnungsweise auch dann noch ein Vorteil besteht, wenn 531^2 nach unserer Methode (Seite 60) berechnet und $281961 \cdot 531$ in der üblichen Weise multipliziert wird.

1063^3;

$$\begin{array}{r} 1129969 \\ 1063 \\ \hline 1201157047 \end{array}$$

$0{,}6425^3 = ?$

$$\begin{array}{r} 0{,}6425 \\ 0{,}6425 \\ \hline 0{,}38550 \\ 2570 \\ 128 \\ 32 \\ \hline 0{,}41280 \\ 0{,}6425 \\ \hline 0{,}24768 \\ 1651 \\ 82 \\ 21 \\ \hline 0{,}26522 \end{array}$$

Einfacher gestaltet sich mitunter das Kubieren, wenn die Basis selbst ein vollständiges Quadrat ist, z. B. $36^3 = ?$

$$36^3 = 216^2 = 46656 \text{ (nach Regel S. 56)};$$
$$[36^3 = (6^2)^3 = (6^3)^2 = 216^2!].$$

Man zerlege in diesem Falle die Basis in zwei gleiche Faktoren, bilde die **3.** Potenz dieses Faktors und quadriere.

$25^3 = 125^2 = 15625$; $64^3 = 512^2 = 262144$ (vgl. S. 60).

43. Zahlen mit Endziffer 5. Zum Schlusse sei noch auf eine Vereinfachung hingewiesen, die für nicht zu große Zahlen, deren Endziffer **5**, bequem anwendbar ist. Das ist ein Analogon zur Quadrierung von Zahlen mit der Endziffer 5.

Denken wir uns die gegebene Zahl in der Form $10a + 5$, so bedeutet offenbar a diejenige Zahl, die man nach Fortlassung der Endziffer 5 erhält. Man nehme 125 sooft, als die gegebene Zahl 5 enthält (oder multipliziere die gegebene Zahl mit 25); die letzten **3** Ziffern des so gebildeten Produktes sind gleichzeitig die letzten drei Ziffern des gesuchten Kubus.

Die Tausende des Kubus liefert der Ausdruck $\frac{a(a+1)(2a+1)}{2}$, zu dem noch die etwa vorhandenen Tausende der oben erwähnten Multiplikation mit 125 zu addieren sind. Es ist bei dieser Regel noch folgendes zu beachten: 1. sooft a die Zahl 4 enthält, so viele Tausende erhält man bei der Bildung des Vielfachen von 125; zur Bestimmung der 3 letzten Ziffern, die nur eine der Zahlen 125, 375, 625, 875 sein können, genügt es, den Rest der vorgelegten Zahl in bezug auf den Divisor 40 zu bilden, und sooft dieser Rest die Zahl 5 enthält (also ein-, drei-, fünf- oder siebenmal), sooft mal 125 bilden die drei letzten Ziffern.

2. Der Ausdruck $$\frac{a(a+1)(2a+1)}{2}$$

ist stets ganzzahlig, indem entweder a oder $a + 1$ durch 2 teilbar. Ist a einstellig (also $10a + 5$ zweistellig), so wird man diesen Ausdruck ohne weiteres im Kopfe berechnen können. Ist a zweistellig, so wird man eventuell das Produkt $\frac{a(a+1)}{2}$ oder $\frac{a(2a+1)}{2}$ oder $\frac{(a+1)(2a+1)}{2}$ im Kopfe bilden und dieses mit dem noch fehlenden Faktor unter evtl. Beachtung der über Multiplikation angegebenen Rechenvorteile multiplizieren.

Beispiele. $25^3 = ?$

Da 25 fünfmal 5 enthält, so sind die Endziffern des gesuchten Kubus $5 \cdot 125 = 625$ (oder auch $25 \cdot 25 = 625$). Die Anfangsziffern erhält man: $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2} = 15$; $25^3 = 15625$. Ebenso: $15^3 = ?$ Endziffern $3 \cdot 125 = 375$,

Anfangsziffern: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 3$. $15^3 = 3375$; $\overset{3 \cdot 4 \cdot 7 : 2 \; 7 \cdot 125}{35^3 = 42\,875}$

$$65^3 = ?$$

Die Endziffern sind hier dieselben wie bei $25 = 65 - 40$, nämlich $= 625$; da in 65 einmal 40 enthalten, muß zu den Anfangsziffern 1 (eintausend) zugezählt werden.

Anfangsziffern $\frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{2} + 1 = 7 \cdot 39 + 1 = 274$;

$$65^3 = 274625$$

Ebenso: $85^3 = ?$

Endziffern 125

Anfangsziffern $\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{2} + 2 = 9 \cdot 68 + 2 = 614$

$$85^3 = 614125; \quad 115^3 = ? \quad \text{Endziffern } 875$$

(da $115 = 2 \cdot 40 + 35$). $\frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{2} + 2 = 11 \cdot 138 + 2 = 1520$

$$115^3 = 1520875$$

$245^3 = ?$ $(245 = 6 \cdot 40 + 5)$, Endziffern 125;

$\frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{2} + 6 = 300 \cdot 49 + 6 = 14706$; $\mathbf{245^3 = 14\,706125}$.

44. Höhere Potenzen. Bei Bildung der vierten oder noch höherer Potenzen können immer wieder die bisherigen Regeln über Multiplikation und Quadrieren Anwendung finden, je nachdem, ob ein genaues oder angenähertes Ergebnis verlangt wird.

Einige Beispiele über 4. Potenz mögen folgen:

$$8^4 = ? \quad 8^4 = 64^2 = 4096$$

$$23^4 = ? \quad 23^4 = 529^2 = 279841 \text{ (vgl. S. 60)}$$

$$47^4 = ? \quad 2209^2 = 4836\frown 43681 = \mathbf{4879681}$$

$$98^4; \quad 98^2 = 9604; \quad 98^4 = 9604^2 = \mathbf{92236816}.$$

$$\begin{aligned}105^4 &= 11025^2\\ &= 12050\\ &\ \ \ 1050625\\ &\ \overline{121550625}\end{aligned}$$

$0{,}3624^4$;

$$\begin{array}{r}0{,}3624\\ 0{,}3624\\ \hline 10872\\ 2174\\ 72\\ 14\\ \hline 0{,}13132\end{array} \qquad \begin{array}{r}0{,}13132\\ 0{,}13132\\ \hline 0{,}01313\\ 394\\ 13\\ 4\\ \hline 0{,}01724\end{array}$$

Während im allgemeinen mit ganzen Zahlen und mit Dezimalbrüchen bequemer zu rechnen ist als mit gemeinen Brüchen, ist beim Potenzieren häufig der Fall umgekehrt. Einige Beispiele sollen dies erläutern:

$$0{,}25^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} = 0{,}00390625$$

$$333{,}33^2 = \left(\frac{1000}{3}\right)^2 = \frac{1000000}{9} = \mathbf{111111}$$

$$0{,}75^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}421875$$

$$13{,}33^4 = \left(10 \cdot \frac{4}{3}\right)^4 = \frac{2560000}{81} \approx \mathbf{31605}$$

$$0{,}16667^2 = \frac{1}{36} = 0{,}027778.$$

Zahlen, die sehr nahe an 1 liegen, lassen sich nach dem binomischen Lehrsatz potenzieren, indem die vorgelegte Zahl als $1 \pm x$ aufgefaßt wird und höhere Potenzen von x (evtl. schon von der zweiten ab) vernächlässigt werden.

Es ist bekanntlich

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}x^3 + \dots.$$

Für genügend kleine x und nicht zu große n reichen die ersten 2 bis 3 Glieder der rechten Seite obiger Gleichung aus, d. h.

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx \text{ oder } 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Beispiele. $1{,}00035^6 = ?$

$$\begin{array}{r} 1{,}00000 \\ 6 \cdot 0{,}00035 = 0{,}00210 \\ \hline 1{,}00035^6 = 1{,}00210 \end{array}$$

$\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}00035^2 = 0{,}0000018375$ beeinflußt die 5. Stelle nicht und kann vernachlässigt werden.

Obige Formel läßt sich auch schreiben:

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 = 1 + nx + \frac{(nx)^2}{2} - \frac{n}{2} x^2,$$

vernachlässigt man $-\frac{n}{2} x^2$, wodurch eine Korrektur für die noch fehlenden Glieder mit höheren Potenzen von x gegeben ist, so erhält man einen guten Näherungswert, der sich sehr rasch berechnen läßt:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \tfrac{1}{2} (nx)^2.$$

$$1{,}0002^{20} = 1{,}004008 \approx 1{,}00401;$$

$$20 \cdot 0{,}0002 = 0{,}004$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}004^2 = 0{,}000008$$

$$1{,}0008^{12} = 1{,}009646 \approx 1{,}00965.$$

Hat die zu potenzierende Zahl die Endziffer **5**, so läßt sich auch bei der 4. Potenz eine wesentliche Vereinfachung erzielen. Die 4 letzten Ziffern von rechts sind nämlich stets **0625**. Die ersten Ziffern findet man wie folgt: sei die vorgelegte Zahl $10a + 5$, so berechne man zunächst (vgl. Quadrieren S. 52) $A = a(a + 1)$ und dann $\frac{A(2A + 1)}{2}$. Dieser Ausdruck, bei dem A stets gerade, demnach $\frac{A}{2}$ eine ganze Zahl ist, liefert die noch fehlenden Ziffern.

Beispiele. $25^4 = ?$

$a = 2; \quad A = 6$

$\frac{6 \cdot 13}{2} = 39$

Endziffern 0625
Anfangsziffern 39

$25^4 = 390625$

$A = 20$

$45^4 = ?$

$\frac{20 \cdot 41}{2} = 410$

$$\mathbf{45^4 = 4100625}$$

$$\begin{array}{r} 265 \\ \times \\ 66 \\ \hline 1590 \\ 1590 \\ \hline 17490 \end{array}$$

$$115^4 = ?$$

$$\mathbf{115^4 = 174900625}$$

Zweiter Teil.

E. Die Neuner- und Elferprobe.

45. Allgemeines. Dies ist eine altbekannte und doch wenig verbreitete Methode, um zahlenmäßig ausgeführte Rechenoperationen, namentlich Multiplikation, Division usw. auf ihre Richtigkeit hin zu prüfen. Bekanntlich ist eine Zahl teilbar durch 9, wenn ihre Quersumme (d. i. die Summe der Ziffern) durch 9 teilbar ist. Es läßt sich aber noch weiter sagen:

Der Rest, den die Quersumme bei Division durch 9 liefert, ist gleichzeitig der Neunerrest der Zahl selbst. Z. B. 4783 hat die Quersumme 22, diese liefert den Neunerrest 4; dann hat die Zahl selbst ebenfalls den Neunerrest 4. $4783 : 9 = 531$ Rest 4.

Nun gilt die Regel: Der Neunerrest eines Produkts ist gleich dem Neunerrest des Produktes aus den Neunerresten der Faktoren. Dies soll an nebenstehendem Beispiel erläutert werden.

$$\begin{array}{rl} 4783 & \left.\begin{matrix}4\\7\end{matrix}\right\} 1 \\ 1645 & \\ \hline 7868035 & }\ 1 \end{array}$$

Der eine Faktor hat den Neunerrest 4, der andere den Neunerrest 7, das Produkt dieser Neunerreste den Neunerrest 1; das Produkt 7868035 hat ebenfalls den Neunerrest 1.

46. Anwendung der Neunerprobe auf Multiplikation. Die Neunerreste werden also wie folgt zur Probe einer Multiplikation benutzt: Man bilde die Neunerreste der einzelnen Faktoren, multipliziere erstere und bilde den Neunerrest ihres Produktes; hierauf überzeuge man sich, ob der Neunerrest des Produktes der gegebenen Faktoren der gleiche ist. Stimmt dies nicht, so ist die Rechnung sicher falsch; stimmt dies, so ist die Rechnung im allgemeinen richtig, jedoch nicht unbedingt. Beträgt nämlich der Fehler ein Vielfaches von 9, so kann die Neunerprobe diesen Fehler nicht anzeigen, denn der Neunerrest einer Zahl bleibt ja unverändert, wenn man ein Vielfaches von 9 hinzuzählt oder abzieht. Die Neunerprobe *kann* also unter Umständen *stimmen*, während das Ergebnis doch *nicht* stimmt. Dies ist wohl hauptsächlich der Grund, weshalb diese Probe selten angewendet wird. Aber mit Unrecht! Der Wahrscheinlichkeit nach würden von **100** falsch berechneten Aufgaben **89** auch als falsch angezeigt werden und nur 11 nicht, d. h. ca. $^1/_9$ aller fehlerhaften Aufgaben. Gewiß ist eine unmittelbare Probe, in diesem Falle eine Wiederholung der Multiplikation, sicherer (vorausgesetzt, daß man nicht, wie es gar häufig geschieht, just zweimal denselben Fehler macht!), aber diese Probe wird ja, weil zeitraubend und wegen der unbeliebten Wiederholung derselben Rechenoperation nur in seltenen Fällen wirklich durchgeführt. Da erhöht die Neunerprobe, die weniger Zeit beansprucht und Abwechslung bietet, wesentlich die Sicherheit der Rechnung. Angenommen, jemand rechne so, daß von 10 Aufgaben etwa 2 falsch sind, dann wäre die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eine Aufgabe, trotzdem die Neunerprobe stimmt, dennoch falsch sei ca. $^1/_5 \cdot {}^1/_9 = {}^1/_{45}$, rund 2%; während die Wahrscheinlichkeit für die *Richtigkeit* der Aufgabe, die ohne Probe nur 80% betragen würde, sich auf ca. 98%, also fast zur vollen Sicherheit erhöht.

Wir werden aber außerdem später sehen, daß die Einführung der Neunerprobe und somit des Begriffes der Neunerreste auch für andere Zwecke nützlich ist.

Die Probe läßt sich auch so anordnen, daß man die vier in Frage kommenden Neunerreste in die vier Felder eines Kreuzes einträgt. In unserem Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 4 & \times & 7 \\ & 1 & \end{array}$$

Ist das Kreuz so dargestellt wie ein X, so schreibe man in die Felder rechts und links die Neunerreste der Faktoren 4 und 7, in das Feld oben den Neunerrest (1) des Produktes dieser Neunerreste, hierauf bilde man den Neunerrest des berechneten Produktes, welcher in das untere noch freie Feld gesetzt wird. Die Zahlen in dem unteren und oberen Felde müssen *übereinstimmen*.

Beispiele. An jedem der folgenden Produkte, die zum Teil den Seiten 31ff. entnommen sind, befindet sich die Neunerprobe.

$$\begin{array}{r} 1529 \\ 848 \\ \hline 1296592 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 7 & \\ 8 & \times & 2 \\ & 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 486 \\ 253 \\ \hline 122958 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 9 & \\ 9 & \times & 1 \\ & 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7528 \\ 433 \\ \hline 3259624 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 4 & \times & 1 \\ & 4 & \end{array}$$

Anmerkung. Will man den Neunerrest einer Zahl, z. B. 534674 bilden, so braucht man nicht immer sämtliche Ziffern der Zahl zu addieren, sondern läßt Vielfache von 9 fort. Der Neunerrest von 619 ist beispielsweise $6 + 1 = 7$, während die 9 unbeachtet bleibt.

$$\begin{array}{r} 2364 \\ 783 \\ \hline 1851012 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 9 & \\ 6 & \times & 9 \\ & 9 & \end{array}$$

Der Neunerrest 9 ist offenbar gleichbedeutend mit dem Rest 0, Verfasser zog jedoch erstere Schreibweise vor.

$$\begin{array}{r} 564 \\ 42 \\ \hline 23688 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 9 & \\ 6 & \times & 6 \\ & 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6014 \\ 4007 \\ \hline 24098098 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 2 & \times & 2 \\ & 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1683 \\ 729 \\ \hline 1226907 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 9 & \\ 9 & \times & 9 \\ & 9 & \end{array}$$

47. Anwendung auf Division. Die Probe bei der Division besteht ja darin, daß man das Produkt aus Quotienten und Divisor bildet und mit dem Dividenden vergleicht. Anstatt nun wirklich das Produkt zu bilden, multipliziere man die Neunerreste (Endquersummen) des Divisors und des Quotienten und vergleiche dieses Produkt (bzw. dessen Neunerrest) mit dem Neunerrest des Dividenden. Dies gilt allerdings nur für den Fall, daß die ausgeführte Division ohne Rest aufgeht. Andernfalls addiere man zum Produkte der Neunerreste von Divisor und Quotienten noch den Neunerrest des Divisionsrestes. Diese Summe (bzw. deren Neunerrest) muß mit dem Neunerrest des Dividenden übereinstimmen.

Beispiele.

$$\underset{5}{359744} : \underset{4}{616} = \underset{8}{584} \quad \begin{array}{ccc} & 5 & \\ 4 & \times & 8 \\ & 5 & \end{array} \qquad 999559 : 979 = 1021 \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 7 & \times & 4 \\ & 1 & \end{array}$$

$$97614144 : 9864 = 9896 \quad \begin{array}{ccc} & 9 & \\ 9 & \times & 5 \\ & 9 & \end{array}$$

$$3579763 : 421 = 8503 \quad \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 7 & \times & 7 \\ & 4 & \end{array}$$

$$\underset{4}{13742311} : \underset{8}{5813} = \underset{6}{2364} \text{ Rest } \underset{1}{379}$$

$8 \cdot 6 + 1 = 49$, Quersumme 4, Quersumme des Dividenden ebenfalls 4.

$$239668 : 624 = 384 \text{ Rest } 52$$

Probe: $3 \cdot 6 + 7 = 25$, Quersumme 7
239668 „

48. Anwendung auf Potenzen. Es besteht offenbar kein wesentlicher Unterschied gegenüber der Multiplikation. Da aber sämtliche Faktoren einander gleich sind, können wir die Regel aussprechen: Die Potenz des Neunerrestes der Basis liefert denselben Neunerrest wie die vollständige Potenz.

Hat man demnach irgendeine Zahl potenziert und will hierauf die Neunerprobe anwenden, so bilde man den Neunerrest der Basis, erhebe diesen zur entsprechenden Potenz, bilde wiederum den Neunerrest und sehe zu, ob dieser mit dem Neunerrest der vollständigen Potenz übereinstimmt

Beispiele.

$887^2 = 786769$ 5 ✕ 7 / 7 $2184^2 = 4769856$ 6 ✕ 9 / 9

$218^3 = 10360232$
2^3 8

$35^3 = 42875$
8^3 liefert Quersumme 8
42875 „ „ 8

$23^4 = 279841$
5^4 Neunerrest 4
279841 „ 4

Bei höheren Potenzen braucht man selbst den Neunerrest nicht wirklich zu potenzieren, sondern kann immer wieder den Neunerrest bilden und mit dem Neunerrest der Basis (oder mit einer Potenz derselben) multiplizieren (natürlich im Kopfe), bis die höchste Potenz erreicht ist.

In unserem letzten Beispiele ist der Neunerrest der Basis 5; $5^2 = 25$, Neunerrest 7; $7 \cdot 5 = 35$, Neunerrest 8; $5 \cdot 8 = 40$, Neunerrest 4; oder $7^2 = 49$ Neunerrest 4.

Bei der Probe im letzten Beispiele würden demnach im Kopfe folgende Zahlen aufeinander folgen: 5; 25; 7; 49; 4.

Ist der Neunerrest der Basis einer Zahl beispielsweise gleich 4 und soll die Probe für die 5. Potenz erfolgen, so hätten wir folgende Zahlen: 4, 16, 7, 49, 4, 16, 7 oder 4, 64, 10, 1, 16, 7. Man wird immer den kürzeren Weg einzuschlagen suchen.

Die Anwendung der Neunerprobe auf Wurzeln ist genau die gleiche wie bei den Potenzen. Sei beispielsweise gefunden:

$$\sqrt[4]{279\,841} = 23,$$

so wird man die Probe machen, indem der Neunerrest von 23 = 5 zur vierten Potenz erhoben:

$$5^4, \text{ Neunerrest } 4$$

und mit dem Neunerrest der Basis verglichen wird: 279841, Neunerrest 4.

Im übrigen kommen wir später noch auf die Anwendung der Neunerprobe zurück.

49. Elferprobe. Alles, was bisher über den Neunerrest gesagt wurde, gilt auch sinngemäß in bezug auf jede andere Zahl, die wir anstatt 9 als Modul wählen würden. Speziell gilt auch für die Zahl 11 der Grundsatz: Der Elferrest eines Produktes ist gleich dem Elferreste des Produktes, welches aus den Elferresten der einzelnen Faktoren gebildet wird.

Es sei ferner daran erinnert, daß der Elferrest einer Zahl erhalten wird, indem man — von rechts nach links gezählt — die Summe der geraden Stellen (2., 4., 6. usw.) von der Summe der ungeraden Stellen (1., 3., 5. usw.) subtrahiert.

Im übrigen gilt auch bei der Elferprobe: stimmt die Probe nicht, so ist die Rechnung sicher falsch, stimmt sie, so kann immer noch ein Fehler sein, der ein Vielfaches von 11 beträgt.

F. Das Radizieren.

I. Hilfsmittel.

50. Allgemeine Vorbemerkungen. Schreiben wir uns einige Potenzen zweistelliger Zahlen auf, z. B.:

$$\begin{array}{ll}
10^3 = 1000 & \\
 & > 331 \\
11^3 = 1331 & \\
 & > 397 \\
12^3 = 1728 & \\
 & > 469 \\
13^3 = 2197 & \\
 & > 547 \\
14^3 = 2744 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
80^3 = 512000 & \\
 & > 19441 \\
81^3 = 531441 & \\
 & > 19927 \\
82^3 = 551368 & \\
 & > 20419 \\
83^3 = 571787 & \\
 & > 20917 \\
84^3 = 592704 &
\end{array}$$

ferner $82^5 = 3527\ 398\ 432$
$83^5 = 3939\ 040\ 643$
Differenz $411\,642\,211$

Die rechtsstehenden Zahlen bedeuten jeweilig die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Potenzen. Man sieht, daß diese Differenzen einerseits mit wachsender Basis und anderseits mit wachsendem Exponenten sehr schnell wachsen; so haben wir beispielsweise: $13^3 - 12^3 = 469$; bei dem gleichen Exponenten, jedoch größerer Basis, $83^3 - 82^3 = 20419$, und schließlich unter Beibehaltung der Basis bei einem höheren Exponenten: $83^5 - 82^5 = 411\,642\,211$.

Mit andern Worten: Zwischen den Zahlen 1728 und 2197 liegen 468 ganze Zahlen, zwischen 551368 und 571787 bereits 20418 ganze Zahlen, bei denen die dritte Wurzel irrational ist, oder wie man sagt, „nicht aufgeht". Da eben zwischen 12 und 13, ebenso zwischen 82 und 83 keine ganze Zahl sich befindet und die in Frage kommenden Zahlen zwischen 12^3 und 13^3 bzw. 82^3 und 83^3 liegen, ist dies begreiflich. Die gesuchten Wurzeln sind nicht einmal unechte Brüche, sondern eben irrationale Zahlen, auf deren nähere Betrachtung hier nicht eingegangen werden soll, mit deren Beschaffenheit aber der Leser vertraut sein dürfte.[1])

Mit wachsendem Exponenten werden die Lücken zwischen den rationalen Wurzeln sehr schnell größer, so liegen zwischen 3 527 398 432 und 3939040643, wie wir gesehen haben, nicht weniger als 411642210 ganze Zahlen, deren 5. Wurzel irrational ist, und zwischen 82 und 83 liegt. Ist demnach eine beliebig gewählte Zahl vorgelegt, aus der eine bestimmte Wurzel zu ziehen ist, so wird diese Wurzel im allgemeinen irrational und nur in seltenen Fällen rational sein. Je höher der Wurzelexponent, je größer die Basis bzw. die nächstliegende ganze Zahl, desto seltener, wie wir gesehen haben, sind die rationalen ganzzahligen Wurzeln. Da aber eine irrationale Zahl durch einen Dezimal- oder gemeinen Bruch nie vollständig genau angegeben werden kann, so begnügt man sich mit Näherungswerten.

Die Näherungswerte werden nun je nach dem Grade der gewünschten Genauigkeit durch verschiedene Hilfsmittel gefunden, als solche

1) Zum Studium der irrationalen Zahlen sei für Forgeschrittenere verwiesen auf das Buch von Dedekind: „Stetigkeit und irrationale Zahlen" Braunschweig 1905.

sind: das unmittelbare Wurzelausziehen, die Logarithmen, der Rechenschieber, Hilfstafeln u. dgl. Die Auffindung dieser Näherungswerte hat offenbar mehr praktische Bedeutung, als die Auffindung der rationalen Wurzeln, da eben nur in seltenen Fällen solche vorhanden sind. Dennoch hat man, wenn vom Wurzelziehen bei einem Rechenkünstler die Rede ist, gerade die rationalen Wurzeln im Auge. Das leuchtet psychologisch — dem Laien wenigstens — ein; denn wie soll man vom Rechenkünstler das Ausziehen einer Wurzel verlangen, die sich eben „nicht ausziehen läßt"; darunter ist natürlich gemeint, daß keine rationale Wurzel vorhanden ist. In diesem Falle denkt man weniger daran, einen Näherungswert zu verlangen; es würde dann auchdie Frage entstehen, welche Genauigkeit vom Rechenkünstler zu fordern wäre.

Wir unterscheiden demnach in diesem Abschnitte: 1. Das Ausziehen von Wurzeln vorwiegend als Rechenkunststück, wie es gewöhnlich von den Rechenkünstlern ausgeführt wird, und setzen dabei voraus, daß eine rationale Wurzel wirkich existiert, d. h. soll die n-te Wurzel aus einer vorgelegten Zahl b gezogen werden, so wird vorausgesetzt, daß eine ganze Zahl a existiert, die die Bedingung $a^n = b$ erfüllt. 2. Das Ausziehen von Wurzeln, auch wenn die Wurzel irrational wird, mit einer bestimmten Annäherung.

Im ersten Falle muß der Aufgabesteller die Aufgabe vorbereiten. Soll beispielsweise der Rechenkünstler die 17. Wurzel aus einer 18 bis 34 stelligen Zahl ziehen, so muß der Fragesteller zuerst eine beliebig gewählte zweistellige Zahl zur 17. Potenz erhöhen, aber natürlich vollständig, nicht etwa näherungsweise; soll ferner die 7. Wurzel einer Zahl dreistellig sein, so muß der Fragesteller vorerst eine dreistellige Zahl zur 7. Potenz erhöhen und erhält je nach Größe der gewählten Basis eine fünfzehn- bis einundzwanzigstellige Zahl usw. Es versteht sich, daß man wegen des damit verbundenen Zeitaufwandes nicht zu viele derartige Aufgaben mitbringen wird. Ja, der Rechenkünstler, der an einem fremden Orte einen Vortrag hält, wird sich sogar vorher umschauen müssen, daß ihm die erwünschte Anzahl von Aufgaben wirklich vorgelegt wird, um seine Rechenkunst von verschiedenen Seiten zeigen zu können. Dies vorausgeschickt, wollen wir einige Merkmale bzw. Hilfsmittel suchen, die von einer vorgelegten Potenz auf ihre Basis schließen lassen.

51. Die Ziffernzahl. Man dividiere die Ziffernzahl der vorgelegten Potenz durch den Wurzelexponenten; die erhaltene ganze

Zahl, und wenn die Division nicht aufgeht, die nächst größere ganze Zahl gibt die Stellenzahl der Basis an. Z. B. ist die 5. Wurzel einer elf- bis fünfzehnstelligen Zahl dreistellig; die 13. Wurzel einer vierzehn- bis sechsundzwanzigstelligen Zahl — zweistellig; die 29. Wurzel einer dreißig- bis einschließlich achtundfünfzigstelligen Zahl — zweistellig; die 73. Wurzel einer siebzigstelligen Zahl — einstellig usw. Anstatt die Ziffernzahl zu dividieren, teile man den Radikanden in Zifferngruppen von rechts nach links ein, wobei in jeder Gruppe so viel Ziffern vorhanden sind, als der Wurzelexponent angibt; die *Anzahl der Gruppen* — die kleinste links mitgerechnet — ergibt die Ziffernzahl der Basis.

Hat man die Ziffernzahl der Basis festgestellt, so betrachten wir jede Stelle als eine unbekannte und werden evtl. jede nach einer besonderen Regel auffinden.

52. Die Endziffer. Wird eine beliebig gewählte Zahl als Basis zwei oder mehrere Male mit sich selbst multipliziert, also zu einer bestimmten Potenz erhoben, so besteht zwischen der *Endziffer* der Potenz und *derjenigen* der Basis eine gewisse Beziehung, so daß man in vielen Fällen von der ersten auf die zweite rückschließen kann. Hat eine Zahl die Endziffer 0, 1, 5 oder 6, so sieht man leicht ein, daß *jede* ganze Potenz dieser Zahl *dieselbe Endziffer* aufweisen muß, denn diese Ziffern bleiben bei der Multiplikation mit sich selbst unverändert: $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $5 \cdot 5 = 2\mathbf{5}$, $6 \cdot 6 = 3\mathbf{6}$. Bei der dritten Potenz (und allgemein bei allen ungeraden Potenzen) bleiben auch die Endziffern 4 und 9 unverändert. Bei der **5.** Potenz kehrt schließlich *jede* Endziffer der Basis wieder.

Dies fassen wir in einer kleinen Tabelle, von der wir später öfters Gebrauch machen werden, zusammen.

Tabelle 1.

	Endziffern								
1. Potenz	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2. „	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3. „	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4. „	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5. „	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Endziffern nicht nur bei der 5., sondern auch bei der 9., 13. . . ., allgemein bei der $(4n + 1)$. Potenz wiederkehren.[1])

Ähnlich findet man, daß in bezug auf die Endziffern, die 7., 11. . . . allgemein $(4n + 3)$. Potenz mit der **3.** Potenz übereinstimmen.

1) Vgl. vom Verfasser: Beitrag zum Ausziehen höherer Wurzeln, „Zeitschrift für Mathematik und Physik", 1909, Band 57, S. 373.

Wir sehen aber aus der Tabelle, daß bei der 3. Potenz die Endziffern 1, 4, 5, 6, 9 mit denjenigen der Basis genau übereinstimmen, während 8 und 2 bzw. 7 und 3 ihre Plätze tauschen. Endziffer 2 gibt bei der 3. Potenz Endziffer 8 und umgekehrt, ebenso gibt Endziffer 3 Endziffer 7 und umgekehrt.

Beschränken wir uns zunächst auf ungerade Potenzen, so läßt sich behaupten: aus der Endziffer der Potenz ist die Endziffer der Basis eindeutig bestimmt.

Auch ist diese Bestimmung durchaus leicht. Wir teilen nämlich sämtliche ungeraden Potenzen in 2 große Gruppen.

Die erste Gruppe umfasse die Exponenten der Form $4n + 3$ (also 3., 7., 11. usw.) das sind solche, die bei der Division durch 4 den Rest 3 ergeben.

Hat nun die Potenz eine der Endziffern 0, 1, 4, 5, 6, 9, so hat die Basis die gleiche Endziffer; hat hingegen die Potenz die Endziffer 8, 7, 3, 2, so hat die Basis eine Endziffer, die letztere auf **10** ergänzt, also entsprechend 2, 3, 7 oder 8.

Die zweite Gruppe umfasse die Exponenten der Form $4n + 1$ (also 5., 9., 13. usw.), das sind solche, die bei der Division durch 4 den Rest 1 ergeben.

Bei dieser Gruppe ist die Endziffer der Potenz ohne Ausnahme genau die gleiche wie diejenige der Basis.

Wir sind nach dem bisherigen in der Lage, bei allen ungeraden Potenzen aus der Endziffer der Potenz, die Endziffer der Basis anzugeben.

53. Endquersumme oder Neunerrest. Denken wir uns irgendeine Zahl mit einer beliebigen „Endquersumme", die jedoch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sein muß, wobei die 9 durch 0 ersetzt werden kann, zur 2., 3., 4. usw. Potenz erhoben, so wird im allgemeinen die Endquersumme der Potenz eine andere sein als diejenige der Basis.

In folgender Tabelle ist zusammengestellt, wie und ob die Endquersumme einer Zahl bei den verschiedenen Potenzen sich ändert.

Dabei sind nicht die Potenzen wirklich ausgerechnet und dann erst die Endquersumme gebildet, sondern, wie bei der Neunerprobe auseinandergesetzt, auf kürzerem Wege erhalten.

Tabelle 2.

	Endquersumme								
1. Potenz	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2. „	1	4	9	7	7	9	4	1	9
3. „	1	8	9	1	8	9	1	8	9
4. „	1	7	9	4	4	9	7	1	9
5. „	1	5	9	7	2	9	4	8	9
6. „	1	1	9	1	1	9	1	1	9
7. „	1	2	9	4	5	9	7	8	9

Es dürfte genügen, wenn die Entstehung der Tabelle an einer Zahl gezeigt wird. Die erste Potenz, also die Basis, habe die Endquersumme $e = 5$; 2. Potenz $5^2 = 25$; $e = 7$; 3. Potenz $5 \cdot 7 = 35$; $e = \mathbf{8}$; 4. Potenz $5 \cdot 8 = 40$; $e = 4$; 5. Potenz $5 \cdot 4 = 20$; $e = 2$; 6. Potenz $5 \cdot 2 = 10$; $e = 1$; 7. Potenz $5 \cdot 1 = 5$; $e = \mathbf{5}$.

Betrachten wir Tabelle 2 näher, so finden wir, daß mit zwei Ausnahmen **die Endquersummen bei der 7. Potenz mit denen der 1. Potenz übereinstimmen.** Die Ausnahmen sind die Quersummen 3 und 6, die bei jeder Potenz die Endquersumme 9 liefern.

Anmerkung. Tabelle 2 lehrt ferner, daß bei *keiner* Potenz > 1 die Endquersummen **3, 6** vorkommen können. Sollte dies dennoch bei einer vorgelegten Potenz, aus der etwa die Wurzel gezogen werden soll, der Fall sein, so kann man auf einen *Rechenfehler* schließen.

Was für die 7. Potenz gilt, gilt auch, wie man sich leicht überzeugen kann, für die 13., 19., ..., $(6n + 1)$. Potenz, und wir erhalten für diese Gruppe die Regel: Hat die $(6n + 1)$. Potenz einer Zahl eine von 9 verschiedene Quersumme, so hat die Zahl selbst die *gleiche* Quersumme. Ist hingegen die Endquersumme der $(6n + 1)$. Potenz gleich **9**, wobei n selbstverständlich $\geqq 1$, so kann die Endquersumme der Basis **3, 6** oder **9**! sein. Man sagt in diesem Falle, die Endquersumme 9 habe **3** Wurzeln, während die übrigen Endquersummen je eine Wurzel haben.

Zu bemerken ist ferner, daß die 3 Wurzeln 3, 6, 9 der Endquersumme 9 um je **3** Einheiten auseinander liegen. Bei der 5., 11., 17., ... $(6n + 5)$. Potenz findet man ebenfalls, daß mit Ausnahme der 9, aus der Endquersumme der Potenz diejenige der Basis *eindeutig* bestimmt ist. In diesem Falle ist es aber etwas komplizierter nach der einen Endquersumme die andere anzugeben. Unverändert bleiben 1, 8; hingegen entspricht der

Endquersumme 5 der Potenz die Endquersumme 2 der Basis u. umgekehrt.
″ 7 ″ ″ ″ ″ 4 ″ ″ ″ ″
″ 9 ″ ″ ″ ″ 9, 6 oder 3 der Basis.

Man beachte als Gedächtnisregel: $5 - 2 = 3$; $7 - 4 = 3$; $9 - 6 = 3$; $6 - 3 = 3$.

Schließlich finden wir bei der 3., 9., 15., ... $(6n + 3)$. Potenz nur die Endquersummen 1, 8, 9, von denen jede **3** Wurzeln hat, die ihrerseits um je drei Einheiten auseinanderliegen.

54. Elferrest. Ähnlich wie beim Neunerrest, steht der Elferrest einer Potenz mit dem Elferrest der Basis in einem bestimmten Zusammenhang.

Tabelle 3.

	Elferrest										
1. Potenz	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2. "	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
3. "	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10
4. "	0	1	5	4	3	9	9	3	4	5	1
5. "	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10
6. "	0	1	9	3	4	5	5	4	3	9	1
7. "	0	1	7	9	5	3	8	6	2	4	10
8. "	0	1	3	5	9	4	4	9	5	3	1
9. "	0	1	6	4	3	9	2	8	7	5	10
10. "	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11. "	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aus der Tabelle der Elferreste sieht man zunächst, daß die Elferreste der **11.** Potenz mit denjenigen der **1.** Potenz genau übereinstimmen. Ferner bemerken wir, daß jede durch 11 nicht teilbare Zahl zur 10. Potenz erhoben den Elferrest 1 liefert. Aber auch die 20., 30., ... $10n$. Potenz einer durch 11 nicht teilbaren Zahl liefert den Elferrest 1. Die Multiplikation einer Zahl mit ihrer 10. Potenz ändert also den Elferrest nicht.

Was demnach früher über die 11. Potenz gesagt wurde, gilt auch für die 21., 31., $(10n + 1)$. Potenz, d. h. bei diesen Potenzen stimmen die Elferreste jeweilig mit denjenigen der Grundzahlen überein.

Beschränken wir uns auf ungerade Potenzen, so zeigt die Tabelle, daß mit Ausnahme der 5., 15., 25., ... aus den Elferresten der Potenzen die Elferreste der Grundzahlen eindeutig bestimmt sind, es wäre jedoch etwas kompliziert, die entsprechenden Zahlen auswendig zu lernen.

55. Logarithmen. Die bisherigen Hilfsmittel genügen im allgemeinen, wie wir sehen werden, um Wurzeln aus ungeraden Potenzen zu ziehen, sofern die Basis nur zweistellig ist (selbstverständlich darf sie auch einstellig sein!). Sollten jedoch auch Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten gezogen werden, soll ferner die Basis auch eine drei- bis vierstellige Zahl sein dürfen, soll endlich das Wurzelausziehen in manchen Fällen effektvoller oder „eleganter" erfolgen können, so wird man die Logarithmen als ein weiteres Hilfsmittel heranziehen. Darum dürfte Prof. Maennchen[1]) recht haben: Die Rechenkünstler bedienen

1) Maennchen, Geheimnisse des Rechenkünstlers, Verlag B. G. Teubner

sich in vielen Fällen der Logarithmen. Ob aber die Rechenkünstler die Logarithmen aller Zahlen bis **100**, wenn auch nur auf drei Dezimalen auswendig wissen, das möchte ich bezweifeln. Nicht als ob dies nicht möglich wäre! Aber der Rechenkünstler hat ja noch manch andere Zahl im Kopf, die zu seinem Rüstzeug gehört, außerdem ist es eben nicht unbedingt notwendig.

Die Benützung der Logarithmen, neben anderen Hilfsmitteln ist jedoch nicht ohne grundsätzliche Bedeutung. Am besten sehen wir das an einem bestimmten Beispiel. Es soll die 11. Wurzel aus einer 30stelligen Zahl gezogen werden. Der Rechenkünstler wird in diesem Falle besonders bewundert, weil beim Zuschauer die Vorstellung erweckt wird, ersterer ziehe wirklich die Wurzel (wie wir etwa die 2. oder 3. Wurzel ziehen), während wir die 11. Wurzel in diesem Sinne überhaupt nicht ziehen können. Der Effekt ist also ein doppelter: 1. Der Rechenkünstler löst eine Aufgabe, die wir überhaupt nicht lösen können, 2. vollführt er die Rechnung im Kopfe.

In Wirklichkeit verhält sich aber die Sache etwas anders. Mit Hilfe der Logarithmen können wir jede Wurzel ziehen, zunächst allerdings nur angenähert. Soll also die 11. Wurzel aus einer 30stelligen Zahl gezogen werden und wir haben eine 5stellige Logarithmentafel zur Hand, so lasse man sich die ersten 5—6 Stellen diktieren, diese seien 110993 . . . , der zugehörige Logarithmus ist 29,04528 (ohne Beachtung der 3), diesen dividiere man durch 11 und erhält 2,64048; der Numerus ist **437**.

Wenn der Numerus aber 436,99; 436,98 oder 437,01 lauten würde, wäre es wohl nicht schwierig zu erraten — da wir wissen, daß die Wurzel ganzzahlig sein soll — daß letztere eben 437 ist.

Wenn nun der Rechenkünstler zugeben würde, er benutze zum Wurzelausziehen Logarithmen, so fiele der erste Punkt (die Unlösbarkeit) weg. Es bliebe natürlich noch der zweite Punkt, der nicht zu unterschätzen ist. Denn, wenn auch der Rechenkünstler zugegebener- oder nichtzugegebenermaßen Logarithmen benutzt, so doch keine Logarithmentafel. Und so kommen wir zurück auf das Auswendigwissen der Logarithmen. M. E. genügt es, wenn man die Logarithmen bis etwa 25 auswendig kennt; dabei die ersten 12 auf fünf, die übrigen auf 3 Dezimalstellen. Weitere Logarithmen findet man mit Hilfe dieser durch Interpolation u. dgl. mit der für diesen Zweck ausreichenden Genauigkeit. Bei der Interpolation muß allerdings der Rechner eine gewisse Geschicklichkeit

zeigen, indem er „nach Gefühl" richtig abrundet. Der Logarithmus einer Zahl wächst nämlich absolut mit der Zahl, das Wachstum selbst, d. h. die Differenz zweier aufeinanderfolgender Logarithmen nimmt mit wachsenden Zahlen ab. (Erklärung: Differenz zweier Logarithmen = Logarithmus eines Bruches; der Wert eines Bruches $\frac{a}{b}$, bei dem Zähler und Nenner eine konstante Differenz haben, nähert sich mit wachsendem Zähler bzw. Nenner dem Wert 1 und dessen Logarithmus dem Wert 0). Wenn ich demnach durch Interpolation Logarithmus 43 gleich Logarithmus $40 + \frac{3}{10}(\lg 50 - \lg 40)$ setze, so ist der Wert etwas zu klein; durch entsprechendes Abrunden wird der Fehler ungefähr ausgeglichen, z. B. $\lg 50 = 1{,}69897$ $\lg 40 = 1{,}60206$
Differenz für 10 Einheiten ca 0,0**97**, pro Einheit rund 0,010, demnach Logarithmus **43 = 1,632**; in Wirklichkeit $\lg 43 = 1{,}63347 \approx 1{,}633$. Die Logarithmen der ersten 25 Zahlen seien hier zusammengestellt.

$\lg 1 = 0{,}00000$	$\lg 10 = 1{,}00000$	$\lg 19 = 1{,}279$
$\lg 2 = 0{,}30103$	$\lg 11 = 1{,}04139$	$\lg 20 = 1{,}301$
$\lg 3 = 0{,}47712$	$\lg 12 = 1{,}07918$	$\lg 21 = 1{,}322$
$\lg 4 = 0{,}60206$	$\lg 13 = 1{,}114$	$\lg 22 = 1{,}342$
$\lg 5 = 0{,}69897$	$\lg 14 = 1{,}146$	$\lg 23 = 1{,}362$
$\lg 6 = 0{,}77815$	$\lg 15 = 1{,}176$	$\lg 24 = 1{,}380$
$\lg 7 = 0{,}84510$	$\lg 16 = 1{,}204$	$\lg 25 = 1{,}398$
$\lg 8 = 0{,}90309$	$\lg 17 = 1{,}230$	
$\lg 9 = 0{,}95424$	$\lg 18 = 1{,}255$	

Die ersten 10 Logarithmen kennt man in der Regel auswendig; wenn die weiteren Schwierigkeiten machen sollten, so kann man sich diese mit Ausnahme derjenigen der Primzahlen in bekannter Weise aus der Summe zweier anderer bekannter Logarithmen zusammensetzen.
Z. B. $\lg 14 = \lg 2 + \lg 7$; $\lg 16 = 2 \lg 4 = \lg 4 + \lg 4 = \lg 2 + \lg 8$, $\lg 24 = \lg 3 + \lg 8$ usw. Dies ist auch bei größeren Zahlen statt der Interpolation zu empfehlen, aber man trachte mit der Summe zweier Logarithmen auszukommen. Z. B. $\lg 45 = \lg 9 + \lg 5$, $\lg 56 = \lg 8 + \lg 7$ usw. Man merke sich also für alle Fälle die Logarithmen von 11, 13, 17, 19 und 23, bzw. deren Mantissen.

II. Ungerade Wurzelexponenten.

Mit Basis kleiner als 100 (ein- und zweistellig).

56. 3. Wurzel.

Beispiel. $\sqrt[3]{54'872}$.

Schneidet man drei Ziffern von rechts ab, so findet man die Stellenzahl der Basis = 2; oder [5:3] = 2, wobei die Klammer bedeutet, daß die nächst größere ganze Zahl des unechten Bruches zu nehmen ist.

Endziffer **2** des Radikanden läßt schließen auf Endziffer **8** der Basis; $\sqrt[3]{54} > 3$ und < 4, die gesuchte Wurzel liegt zwischen 30 und 40 und lautet **38**.

$$\sqrt[3]{54872} = 38.$$

Beim Schnellrechner wird sich der Vorgang etwa so abspielen: zweistellig; 1. Ziffer **3**, Endziffer **8**; **38**.

Beispiel. $\sqrt[3]{9261}$, zweistellig; erste Stelle 2; Endziffer 1;

$$\sqrt[3]{9261} = 21.$$

Daß man die Kuben von 1 bis 10 auswendig kennt, wird als selbstverständlich vorausgesetzt, da diese Voraussetzung auch sonst beim Ausziehen 3. Wurzeln gilt.

$$\sqrt[3]{658503};$$

zweistellig; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$, Anfangsziffer 8;
Endziffer: $10 - 3 = 7$; $\sqrt[3]{658503} = 87$.
Ebenso: $\sqrt[3]{857375} = 95$. 1. Ziffer 9; Endziffer 5; 95.

Bei diesen und den folgenden Aufgaben kann unabsichtlich oder absichtlich der Radikand fehlerhaft sein; namentlich im ersten Falle kann es vorkommen, daß der Schnellrechner trotz des fehlerhaften Radikanden die richtige (also vom Fragesteller beabsichtigte) Wurzel angibt.

Wäre etwa im vorletzten Beispiele fälschlich $\sqrt[3]{65\mathbf{6}503}$ verlangt, so würde der Rechenkünstler trotzdem 87 angeben, und es könnte auch der Fehler dem Aufgabesteller und Rechner entgehen. Der Schnellrechner kann sich aber gegen unabsichtliche Fehler dadurch schützen, daß er das gefundene Resultat stets „prüft“. Es stehen ihm da verschiedene Hilfsmittel zur Verfügung, sozusagen je nach dem Grad des Fehlers. Am einfachsten wird man die Neunerprobe heranziehen.

In unserem Beispiele ist die Quersumme des fehlerhaften Radikanden 7, die Wurzel hat jedoch die Quersumme 6, wonach, wie leicht einzusehen ist, der Radikand die Quersumme 9 haben müßte. In solchen Fällen kann der Effekt des Rechenkünstlers noch beträchtlich gesteigert werden; er würde sich zum Aufgabesteller etwa äußern: „Wollten Sie 87 zur dritten Potenz erhöhen?" „Ja", lautet die Antwort, worauf der Rechenkünstler hinzufügt: „Das sehe ich, aber Sie haben sich verrechnet, beim Nochmalrechnen werden Sie den Fehler schon finden".

Sollte aber die Antwort „Nein" lauten, d. h. die beabsichtigte Wurzel ist nicht gefunden, dann wird auch der Fehler etwas anders liegen müssen, jedenfalls so, daß er (bei zweistelligen Grundzahlen) die erste oder zweite Stelle beeinflußt, wovon erstes wahrscheinlicher ist.

Es sei vorgelegt $\sqrt[3]{656533}$; der Fragesteller habe beabsichtigt $\sqrt[3]{\mathbf{4}56533} = 77$ vorzulegen, hat sich aber beim Abschreiben oder beim Rechnen versehen.

Der Schnellrechner müßte zunächst antworten 87, denn $656 > 8^3$ und $< 9^3$ und Endziffer 3 läßt auf Endziffer 7 schließen.

Die Neunerprobe würde hier einen Fehler anzeigen; nachdem nun dem Schnellrechner mitgeteilt wird, 87 sei nicht die richtige Wurzel, erwidert er am einfachsten: „Sie haben nämlich einen Rechenfehler, weshalb ich die richtige Wurzel nicht angeben kann."

Wie an anderer Stelle erwähnt, kann die Neunerprobe nicht immer Rechenfehler anzeigen; im besonderen ist dies der Fall, wenn eine oder mehrere Ziffern umgestellt sind, d. h. wenn sie ihre Plätze vertauschen.

Damit erledigen wir auch den Fall, der Fragesteller lege absichtlich einen falschen Radikanden vor, und, um den Schnellrechner „hineinzulegen", macht er den Fehler, so daß er nicht gleich auffällt und auch durch die Neunerprobe nicht angezeigt wird.

Z. B. Frage: $\sqrt[3]{\mathbf{4635}53}$.

Antwort: **77.** Sagt hierauf der Fragesteller, die Antwort stimme nicht, da der Radikand entschieden nicht gleich 77^3 sei, so erwidert der Schnellrechner am einfachsten: „Es tut mir leid, wenn das nicht stimmt, dann haben Sie mir einen falschen Radikanden vorgelegt, während ich behauptete, nur dann Wurzeln ziehen zu können, wenn Sie eine Zahl zu einer bestimmten Potenz fehlerfrei erheben." Der Schnellrechner wird sich auch in der Regel populär etwa äußern: man multipliziere irgendeine Zahl eine Anzahl mal — beispielsweise 15 mal mit sich selbst, lege ihm das Produkt (Radikand) vor, worauf er die Grundzahl angeben werde; fehlerfreie Rechnung ist hier selbstverständliche Bedingung. Stimmt die nach den dem Rechenkünstler zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln gefundene Wurzel auch bei etwa nochmaliger Rechnung nicht, so liegt der Rechenfehler im Radikanden, d. h. auf Seiten des Fragestellers und von einem „Hineinlegen" des Schnellrechners kann keine Rede sein.

Diese Frage ist deshalb etwas ausführlich behandelt, weil das Gesagte sinngemäß nicht nur für 3. Wurzeln, sondern für alle im folgenden behandelten Wurzeln mit ganzzahligen Grundzahlen gilt.

57. 5. Wurzel. $\sqrt[5]{20730'71\,593}$

Stellenzahl 10; $10:5=2$, folglich Basis zweistellig; Endziffer **3**, da wie früher auseinandergesetzt, bei der 5. Potenz Endziffer der Basis mit derjenigen der Potenz übereinstimmt. Die erste Stelle wird gefunden:

a) da 5 keine besonders hohe Potenz ist, durch Abschätzung der ersten Ziffer, indem man rechts eine Gruppe von 5 Stellen abschneidet und die übrigbleibenden Anfangsziffern, als Zahl für sich gelesen, mit der 5. Potenz der nächst größeren und nächst kleineren einstelligen Zahl verglichen werden. Im allgemeinen genügt hier eine ganz oberflächliche Bestimmung der 5. Potenz, wobei wiederum die Methode des Quadrierens aus Abschnitt D gute Dienste leistet.

In unserem Beispiel: $7^2=49\sim 50$, $50^2=2500$, $2500\cdot 7 = 17\,500 < 20\,730$; hingegen $8^2=64$; $64^2=4096\sim 4100$, $8\cdot 4100 = 32\,800 < 20\,730$. Die gesuchte Wurzel liegt zwischen 70 und 80 und lautet **73**,

$$\sqrt[5]{2073\ 071\ 593}=73.$$

Die angedeuteten Zwischenrechnungen kann der geübte Rechner schnell im Kopfe durchführen. Hierauf wird man gut tun, die Neunerprobe zu machen. 73 Quersumme 1, $1^5=1$, der Radikand weist die gleiche Quersumme auf.

b) Durch Logarithmen.

Die letzten 5 Stellen bleiben unbeachtet;

$\lg 20\,730 \approx 4{,}31$; $\lg 2 = 0{,}301$, $\lg 3 = 0{,}477$, durch Interpolation $\lg 2{,}07 \approx 0{,}31$ bis $0{,}32$, diese Genauigkeit genügt im vorliegenden Fall, daher $\lg 20\,730 \approx 4{,}31$ (genauer: 4,31 660),

$$4{,}31 : 5 = 0{,}862, \text{ nun ist } \lg 7 = 0{,}845 \ldots$$
$$\lg 8 = 0{,}903 \ldots,$$

folglich die erste Stelle 7, und die gesuchte Wurzel ist unter Beachtung der Endziffer **73.** Auch hier wird man zweckmäßig die Neunerprobe zur Kontrolle anwenden.

c) Schließlich kann man hier die Neunerprobe dazu verwenden, um die erste Stelle zu ermitteln.

Dazu müßte man sich die Tabelle 2, soweit sie sich auf ungerade Potenzen bezieht, auswendig merken. Man kann auch ohne Auswendiglernen auskommen; bildet man nämlich die Quersumme des Radikanden, erhöht diese zur 5. Potenz (vgl. § 48), so stimmt die neue Quersumme, die also von der 25. Potenz ist, mit derjenigen der Basis überein, abgesehen von den 2 Fällen, wo die Quersumme der Basis 3 oder 6 ist.

In unserem Beispiele ist die Quersumme des Radikanden 1 und läßt ohne weiteres darauf schließen, daß die Quersumme der Basis ebenfalls 1 (oder $1 + 9 = 10$) ist; die Endziffer ist 3, woraus folgt die erste Ziffer $10 - 3 = 7$. Hier wird man die Probe machen durch Abschätzen der 5. Potenz der ersten Stelle (a) oder durch Logarithmieren von $7^5 = 5 \lg 7$ und vergleichen mit lg 20730.

$$\sqrt[5]{1564\ 0'31\ 349}$$

zweistellig, Endziffer 9.

Quersumme des Radikanden 9, folglich Quersumme der Basis 3, 6 oder 9. Hieraus folgt, die erste Stelle müsse 3, 6 oder 9 sein. Nun ist 3^5 wesentlich kleiner, 9^5 wesentlich größer als 15640; die gesuchte Wurzel lautet demnach **69**,

$$\sqrt[5]{15640\ 31349} = 69.$$

Probe: $6^2 = 36;\ 36^2 = 1296 \approx 1300;\ 6 \cdot 1300 = 7800 < 15640$
$$7^5 \approx 17000 > 15640.$$

58. 7. Wurzel. $\sqrt[7]{803'1\ 810176} = ?$

Basis zweistellig, Endziffer **6**;
Quersumme des Radikanden 8, folglich Quersumme der Basis ebenfalls 8; erste Stelle $8 - 6 = \mathbf{2}$;

$$\sqrt[7]{803'18\ 10176} = \mathbf{26}$$

$$\sqrt[7]{744635\ 3252589}$$

Basis zweistellig, Endziffer 9; Quersumme des Radikanden 9, folglich Quersumme der Basis 3, 6 oder 9 und auch erste Stelle derselben 3, 6 oder 9. Durch einige Überlegung findet man, daß nur **6** als Anfangsziffer in Frage kommen kann, demnach $\sqrt[7]{\ldots\ldots\ldots} = 69$.

59. 11. Wurzel. $\sqrt[11]{7\,516\,865\,509\,350\,965\,248}$.

Basis zweistellig; Endziffer 8 läßt schließen auf Endziffer **2** der Basis (die 11. Potenz entspricht in bezug auf die Endziffer der **3.** Potenz, da $11 = 2 \cdot 4 + 3$ oder 11 geteilt durch 4 liefert den Rest 3).

Die erste Stelle findet man hier am einfachsten durch die Elferprobe; Elferrest des Radikanden ist: $40 - 54 = 62$ $(40 + 2 \cdot 11) - 54 = 8$; da es sich um die 11. Potenz handelt, ist dies zugleich der Elferrest der Basis. Anfangsziffer $13\ (2 + 11) - 8 = \mathbf{5}$.

Die gesuchte Wurzel ist **52**.

Mit Hilfe von Logarithmen kommt man hier ebenfalls schnell zum Ziele. Nachdem 11 Stellen von rechts abgetrennt sind, bleiben noch 8 Stellen 7516 ...., $\lg 75 \ldots \approx 7{,}88$; $7{,}88 : 11 \approx 0{,}71$. Nun ist $\lg 5 = 0{,}69897$, die erste Stelle ist demnach 5 und die gesuchte Wurzel 52.

60. 13. Wurzel. $\sqrt[13]{1718\,264\,124\,282\,290\,785\,243}$; wie wir wissen, wiederholen sich die Endziffern bei der $(4n + 1)$. Potenz, während die Quersumme, mit Ausnahme der Fälle wo die Basis durch 3 teilbar, bei der $(6n + 1)$. Potenz wiederkehrt.

Die Potenzen der Form $\mathbf{12n + 1}$ erfüllen beide Bedingungen gleichzeitig. Der Schnellrechner wird demnach, was dem Aufgabesteller etwas sonderbar erscheinen möge, 13., 25., 37., 49., ... Wurzeln mit besonderer Vorliebe und sehr rasch ziehen; denn ist die Basis zweistellig, und das ist bei hohen Potenzen, die eben erst berechnet werden müssen, in der Regel der Fall, so ist die Endziffer des Radikanden auch die Endziffer der gesuchten Basis, Quersumme des Radikanden = Quersumme der Basis.

Auf unser Beispiel angewendet: Basis zweistellig; Endziffer 3; Quersumme des Radikanden 7 = Quersumme der Basis, mithin erste Stelle $7 - 3 = \mathbf{4}$ und die gesuchte Wurzel ist **43**.

Sollte der Radikand die Quersumme 9 haben, dann könnte die erste Stelle drei verschiedene, um je 3 Einheiten auseinander liegende Werte annehmen. In den meisten Fällen wird aber bloß die Ziffernzahl des

Radikanden, bzw. eine ganz oberflächliche logarithmische Rechnung, genügen, um die richtige Stelle zu finden.

61. Höhere Wurzeln.

$$\sqrt[19]{1461\ 920\ 290\ 375\ 446\ 110\ 677} = b$$

19 gehört der Gruppe $4n + 3$; Basis zweistellig, Endziffer $10 - 7 = \mathbf{3}$; Quersumme des Radikanden = 4, da $19 = 3 \cdot 6 + 1$, hat die Basis die gleiche Quersumme; erste Stelle $4 - 3 = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{13}$.

$$\sqrt[29]{212\ 140\ 521\ 132\ 492\ 677\ 321\ 278\ 178\ 259\ 450\ 988\ 160\ 239\ 150\ 438\ 324\ 629} = b.$$

Basis zweistellig, da $\left[\frac{54}{29}\right] = 2$; Endziffer der Basis 9. Die erste Stelle finden wir hier am einfachsten durch Logarithmieren, wobei man 29 Stellen abgeschnitten denkt, es bleiben dann 25 Stellen, von denen wir nur einige Ziffern auszuschreiben brauchen; $\lg 212 \ldots \approx 24{,}32 \ldots$, $24{,}32 : 29 = 0{,}839 \approx 0{,}84$; die erste Stelle ist in der Nähe von 7; die Wurzel lautet **69**. Probe: Quersumme des Radikanden ist 9, Quersumme der Basis 6, diese gibt aber zu jeder Potenz erhoben die Quersumme 9.

Der Leser sieht wohl ein, daß es auf die *Höhe des Wurzelexponenten nicht* ankommt, und er ist nach dem Bisherigen in der Lage, Wurzeln mit zweistelligen Grundzahlen und ungeraden Exponenten, mögen sie noch so hoch sein, zu ziehen. Bei größeren Exponenten ist im Gegenteil in der Regel die Auswahl der Hilfsmittel eine größere.

Z. B. kann man bei der 31. Wurzel den Neuner- oder Elferrest bequem heranziehen, denn $31 = 5 \cdot 6 + 1$ und $3 \cdot 10 + 1$; bei der 61. Wurzel stimmen sogar Endziffer, Quersumme (diese mit der bekannten Einschränkung) und Elferrest bei der Grundzahl und dem Radikanden überein.

Auch bei Anwendung der Logarithmen genügt bei höheren Wurzeln, wie das letzte Beispiel zeigt, nur eine geringe Annäherung für den Logarithmus des Radikanden. So hätte $\lg 2 \ldots\ldots = 24{,}3 : 29$ ebenfalls zum Ziele geführt.

62. Wurzeln mit dreistelliger Basis. Wenn auch höhere Wurzeln mit drei- und vierstelligen Grundzahlen dem Schnellrechner seltener vorgelegt werden dürften, so wollen wir doch an einigen Beispielen zeigen, daß das bisherige Rüstzeug genügt, um auch solche Aufgaben zu lösen. Während wir jedoch bei den ein- bis zweistelligen Grundzahlen in den meisten Fällen die Logarithmen umgehen konnten, werden wir jetzt von diesen öfters Gebrauch machen; ja in manchen Fällen auch eine etwas weitgehendere Genauigkeit verlangen müssen.

Beispiele.
$$\sqrt[3]{45\ 882\ 712};$$

Basis dreistellig; Endziffer $10 - 2 = 8$.

$3^3 = 27$; $4^3 = 64$, die gesuchte Wurzel liegt ungefähr in der Mitte zwischen 300 und 400, hat Anfangsziffer **3** und Endziffer **8** $(10 - 2)$.

Quersumme des Radikanden ist **1**, wonach Quersumme der Grundzahl 1, 4 oder 7 sein muß; **358** hat die Quersumme 7 und ist die gesuchte Grundzahl.

$$\sqrt[3]{491\ 169\ 069};$$

Basis dreistellig; Endziffer **9**.

$7^3 = 343$; $8^3 = 512$, Differenz ≈ 170, pro Einheit ≈ 17; $512 - 491 = 21$, die ersten Stellen der Grundzahl liegen zwischen 78 und 79, die Wurzel zwischen 780 und 790 und lautet **789**, worauf zur Vorsicht die Probe mit Hilfe der Quersumme zu machen ist.

789 Quersumme 6; Radikand hat die Quersumme 9.

Freilich erfolgen die Zwischenrechnungen und Überlegungen rasch im Kopfe. Die Logarithmen konnte man bei diesen Beispielen entbehren.

$$\sqrt[13]{135\ 393\ 237\ 703\ 353\ 943\ 528\ 128\ 490047012864} = b$$

Stellenzahl der Basis $= \left[\frac{36}{13}\right] = 3$; Endziffer **4**; schneidet man 26 Stellen ab, so bleibt eine zehnstellige Zahl, deren Logarithmus $\lg 135\ldots \approx 9{,}13\ldots$ [durch Abschätzen zwischen $\lg 13 = 1{,}11\ldots$ und $\lg 14 = 1{,}14\ldots$, wobei ganz oberflächliche Schätzung genügt].

$$9{,}13 : 13 = 0{,}70\ldots, \text{ nun ist } \lg 5 = 0{,}69897.$$

Die Grundzahl liegt also ganz in der Nähe von 500 und ist etwas größer. Quersumme des Radikanden ist 9, demnach bei der Basis 3, 6 oder 9. **504** ist die richtige Basis (534 und erst recht 564 wären entschieden zu groß). $\boldsymbol{b = 504}$.

III. Gerade Wurzelexponenten.

63. Allgemeines. Der Rechenkünstler kann beinahe sicher sein, daß ihm gerade Wurzeln, d. h. solche mit geraden Wurzelexponenten nicht vorgelegt werden, ohne daß er dies zur Bedingung zu machen braucht. Der Fragesteller hält eben entschieden die 7., 13., 19. oder 37. Wurzel usw. für eine schwierigere Aufgabe als beispielsweise die 2., 4., 6., 12. Wurzel usw. Gar häufig wird sich der Fragesteller etwa sagen: „Lege ich dem Rechenkünstler die vierte Wurzel vor, so wird er zuerst die Quadratwurzel und dann wiederum die Quadratwurzel ziehen", und glaubt eben, dies wäre kein großes Kunststück. Ist aber der Wurzelexponent ungerade oder gar eine Primzahl, so dürfte der Rechenkünstler vor einer besonders schwierigen, vielleicht unlösbaren Aufgabe stehen. Das wäre richtig, wenn der Rechenkünstler nach den Regeln rechnen würde, die in den Schulbüchern angegeben sind.

In Wirklichkeit aber verhält sich die Sache, wie wir bereits wissen, ganz anders. Während nämlich bei allen Wurzeln mit ungeraden Wurzelexponenten die Endziffer der Basis eindeutig bestimmt und in den meisten Fällen auch die Quersumme oder der Elferrest mit Vorteil herangezogen werden können, trifft dies bei geraden Wurzelexponenten nicht zu. So sehen wir aus Tabelle 1, daß bei der Quadratwurzel und allgemein $(4n+2)$. Wurzel, abgesehen von der Endziffer 5, die letzte Stelle des Radikanden auf zwei verschiedene Endziffern der Basis hindeuten kann; bei der 4., 8., ... $4n$. Wurzel sind gar vier Möglichkeiten vorhanden, so kann beispielsweise die Endziffer 1 des Radikanden aus einer Basis mit den Endziffern 1, 3, 7 oder 9 herrühren. Ähnlich ist der Neuner- oder Elferrest der Basis aus demjenigen des Radikanden im allgemeinen mehrdeutig bestimmt (vgl. Tabelle 2, S. 81).

Dennoch wollen wir der Vollständigkeit halber die geraden Wurzelexponenten wegen ihrer praktischen Bedeutung nicht übergehen.

Bei den folgenden Beispielen bleibe die Voraussetzung bestehen, daß die Wurzeln aufgehen. Die Regel über die Bestimmung der Stellenzahl der Basis bleibt dieselbe: Man dividiere die Stellenzahl des Radikanden durch den Wurzelexponenten und falls die Division nicht aufgeht, nehme man die nächstgrößere ganze Zahl; letztere gibt die Stellenzahl der Basis an.

64. Zwei- und dreistellige Basis. Quadratwurzel.

Beispiele. $\sqrt{1444} = b.$

Stellenzahl der Basis 2; schneide man zwei Stellen von rechts ab, so bleibt die Zahl 14, $3^2 = 9$; $4^2 = 16$.

Die Grundzahl liegt zwischen 30 und 40, und zwar (da 14 wesentlich näher an 16 als an 9) näher an 40. Die Endziffer 4 des Radikanden läßt schließen auf Endziffer **2** oder **8**; 32 wäre aber näher an 30, die gesuchte Wurzel ist daher **38**. In der Tat $38^2 = 1444$ (nach Regel S. 53). Wer den Abschnitt über das Quadrieren gründlich beherrscht, dem wird auch das Quadratwurzelausziehen durch Umkehrung der dort gezeigten Methoden keine Schwierigkeiten bieten. Die Quadratwurzel wird abgeschätzt und dann durch rasches Quadrieren festgestellt, ob die Schätzung stimmt. Mitunter läßt sich auch die Quersumme, aber am besten erst nach erfolgter Abschätzung, heranziehen.

Im letzten Beispiele haben wir zunächst festgestellt, daß die gesuchte Grundzahl zwischen 30 und 40 liegt, da 14 zwischen 9 und 16 sich befindet. Die Basis gehört also entschieden in die Zahlengruppe 25 bis 75, und nach Regel § 28 bekommt man die Hunderte, wenn die Zahl 25 von der Basis subtrahiert wird; verfahren wir nun umgekehrt; wir addieren zu den Hunderten des Radikanden die Zahl 25 und bekommen ungefähr die Basis. Genau erhalten wir auf diese Weise im allgemeinen die Basis deshalb nicht, weil die Hunderte des Radikanden ja die etwaigen Hunderte des Quadrades der Ergänzung bzw. des Überschusses mit enthalten. Als solche kommen aber nur die Zahlen 1 bis 25 in Frage, deren Quadrat höchstens 6 Hunderte enthält. Um soviel ist die Basis zunächst unbestimmt, aber durch Berücksichtigung der Endziffer wird man in den meisten Fällen sofort das Richtige finden.

$14 + 25 = \mathbf{39}$, die Grundzahl ist gleich oder kleiner als 39 und lautet in Anbetracht der Endziffer — **38**.

$$\sqrt{1089} = b,$$

Wurzel zwischen 30 und 40; $10 + 25 = 35$; Endziffer kann nur 3 oder 7 sein, folglich $b = \mathbf{33}$.

$$\sqrt{3136} = b,$$

Wurzel zwischen 50 und 60 ($5^2 = 25 < 31 < 36$);

$$31 + 25 = 56;\ \boldsymbol{b = 56}.$$

$$\sqrt{4096} = b,$$

Wurzel zwischen 60 und 70, $40 + 25 = 65$, 6 deutet auf Endziffer 4 oder 6, folglich $\boldsymbol{b = 64}$. Kontrolle: $25 + 14 = 39$; $14^2 = \mathbf{1}96$, $64^2 = 4096$.

Freilich könnte man auch hier durch Abschätzen zum Ziele kommen, da 40 näher an 36 als an 49, liegt die gesuchte Wurzel näher an 60 als an 70 und lautet der Endziffer wegen 64.

$$\sqrt{7569} = b$$

a) Basis zweistellig; $8^2 = 64$, $9^2 = 81$; erste Ziffer **8**; Endziffer 3 oder 7, da 75 näher an 81, $\boldsymbol{b = 87}$; oder auch: der Radikand hat die Quersumme 9, 83 ist aber nicht durch 3 teilbar, folglich $b = 87$.
b) Analog der Regel S. 54 addiere man zu 75 die Hälfte der Differenz an 100. Es fehlen 25; $75 + 12 = 87$, b ist gleich oder kleiner als 87; in unserem Falle $\boldsymbol{b = 87}$.

$$\sqrt{7056} = b,$$

Basis zwischen 80 und 90; $100 - 70 = 30$; $\frac{30}{2} = 15$; $b \leqq 70 + 15 = 85$. Wegen der Endziffer $\boldsymbol{b = 84}$.

Probe durch Quadrieren oder Quersumme.

Dreistellige Basis.

Beispiele. $$\sqrt{12996} = b,$$

Basis dreistellig; schneidet man zwei Stellen rechts ab, so bleibt die Zahl 129; $11^2 = 121$; $12^2 = 144$; die Grundzahl liegt zwischen 110 und 120, näher an 110; aus der Endziffer 6 schließen wir $\boldsymbol{b = 114}$. Oder: $129 - 100 = 29$; $\frac{29}{2} \approx 14$,
folglich wegen der Endziffer $\boldsymbol{b = 114}$ (vgl. § 29, S. 55).

$$\sqrt{21609} = b;$$

$14^2 = 196$, $15^2 = 225$; die Basis liegt zwischen 140 und 150, näher an 150; ihre Endziffer kann 3 oder 7 sein, folglich $\boldsymbol{b = 147}$.

$$\sqrt{34225} = b;$$

$18^2 = 324$, $19^2 = 361$; die Basis liegt zwischen 180 und 190 und hat die Endziffer 5, folglich $\boldsymbol{b = 185}$.

$$\sqrt{118336} = b;$$

Basis dreistellig, man ziehe erst die Wurzel aus 1183, d. h. bestimme die nächst kleinere und nächst größere ganze Zahl; $\sqrt{11}$ liegt zwischen 3 und 4, $\sqrt{1183}$ zwischen 30 und 40; durch schnelles Quadrieren findet man weiter $35^2 = 1225$, $34^2 = 1156$; die Grundzahl liegt zwischen 340 und 350, und zwar etwas näher an erstere Zahl; mit Rücksicht auf die Endziffer: $\boldsymbol{b = 344}$.

$Q\,(344) = 2$ [lies: Quersumme von 344]; $Q\,(118\,336) = 4$.

$$\sqrt{330\,625} = b;$$

$\sqrt{3306}$ zwischen 50 und 60. $33 + 25 = 58$; $58^2 = 3364$; $57^2 = 3249$, wegen der Endziffer: $\boldsymbol{b = 575}$.

$$\sqrt{654481} = b;$$

$\sqrt{6544}$ in der Nähe von 80, $80^2 = 6400$, $81^2 = 6561$; man beachte, daß zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen sich voneinander um die Summe der Grundzahlen unterscheiden. Kennt man beispielsweise 80^2, so findet man 81^2 durch Hinzufügen von $80 + 81 = 161$; ebenso aus $81^2 = 6561$, $82^2 = 6561 + (81 + 82) = 6561 + 163$ usw.

Die Basis liegt zwischen 800 und 810, näher an letztere Zahl und lautet mit Rücksicht auf die Endziffer $\boldsymbol{b = 809}$.

Vierstellige Basis. Auch hierbei wird man am besten durch Auffinden der Grenzen, zwischen denen die Basis liegt, und Beachtung der Endziffer das Richtige finden.

Wenn man zwei- bis dreistellige Zahlen rasch quadrieren kann, bieten auch diese Aufgaben keine Schwierigkeiten.

$$\sqrt{356'07'69} = b.$$

Basis vierstellig; $\sqrt{356} \approx 18$, $18^2 = 324$, $19^2 = 361$, $\sqrt{35607}$ liegt zwischen 180 und 190 und zwar wesentlich näher an 190; $188^2 = 35344$, $189^2 = 35721$ (nach § 31, S. 56); b liegt näher an 1890 als 1880, Endziffer kann 3 oder 7 sein, mithin $\boldsymbol{b = 1887}$.

$$Q\,(1887) = 6,\ Q\,(3560769) = 9.$$

Die Quersumme muß bei Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten mit Vorsicht als Probe angewandt werden.

$$\sqrt{41\,152\,225} = b,$$

Endziffer **5**; $\sqrt{41}$ zwischen 6 und 7 etwas näher an 6. $65^2 = 4225$, $64^2 = 4096$, $4115 - 4096 = 19$; die Differenz pro Einheit der 3. Stelle beträgt rund $2 \cdot 6{,}4 \approx 13$, $19 : 13 \approx 1{,}5$ . . folglich liegt die Grundzahl zwischen 6410 und 6420 nnd lautet wegen der Endziffer $b = \mathbf{6415}$.

65. Vierte und höhere Wurzeln.

$$\sqrt[4]{28\,398\,241} = b.$$

Es wird dem Schnellrechner beileibe nicht einfallen, zuerst die $\sqrt{\ }$ und dann wiederum die $\sqrt{\ }$ zu ziehen. Basis zweistellig; hier deutet die Endziffer 1 nur darauf, daß die Endziffer der Basis ungerade, jedoch keine 5 ist.

Schneidet man 4 Stellen von rechts ab, so bleibt die vierstellige Zahl 2839, deren Logarithmus lg 28... $\approx$ 3,45...; 3,45 : 4 = 0,86.., lg 7 = 0,845, lg 8 = 0,903.., die Grundzahl liegt in der Nähe von 73,

$$\boldsymbol{b = 73}.$$

Man könnte auch durch Abschätzen, also ohne Logarithmen, zum Ziele kommen.

$7^2 = 49$, $7^4 \approx 2400$; $8^2 = 64$, $8^4 = 4096 \approx 4100$; $4100 - 2400 = 1700$; $2800 - 2400 = 400$, b liegt in der Nähe von 73 und ist ungerade, folglich $\boldsymbol{b = 73}$.

$$\sqrt[24]{135\,637\,000\,670\,178\,176\,410\,246\,734\,932\,581\,577\,148\,578\,721}$$

Basis zweistellig und ungerade; schneidet man 24 Stellen ab, so bleibt eine 21stellige Zahl, beginnend 1356..., deren Logarithmus $\approx$ 20,13.; 20,13 : 24 $\approx$ 0,839.., lg 7 = 0,84510, lg 6 = 0,778..., die Grundzahl liegt demnach sehr nahe an 70 und lautet $\boldsymbol{b = 69}$; auch hier wird man die zufällige Teilbarkeit durch neun gern zur Kontrolle benutzen.

Schließlich sei noch ein einfaches Beispiel angeführt.

$$\sqrt[64]{18\,446\,744\,073\,709\,551\,616} = b.$$

Die gesuchte Grundzahl ist einstellig und gerade. Der Radikand ist 20stellig und dessen Logarithmus ist lg 184... $\approx$ 19,26; 19,26 : 64 $\approx$ 0,30..., woraus $\boldsymbol{b = 2}$.

66. Effektvolle Lösungen. Die verschiedenen Methoden zum Wurzelausziehen gestatten mitunter dem Schnellrechner, die vorgelegte Aufgabe besonders effektvoll zu lösen, was in der Regel den Aufgabesteller und die sonstigen Anwesenden in Staunen versetzt. Wir benutzen hier einige der früher angeführten Beispiele. Im folgenden soll stets die Aufgabe angekündigt werden, etwa: „*n-te* Wurzel aus einer *m* stelligen Zahl", worauf der Schnellrechner sagt, was ihm vom Radikanden angegeben werden soll. Frst. = Fragesteller, Rechenk. = Rechenkünstler. Frst.:

7*

Die 5. Wurzel einer zehnstelligen Zahl. Rechenk.: Diktieren Sie bitte, die ersten zwei und letzten zwei Stellen. $\sqrt[5]{20\ldots\ 93} = b$. Basis zweistellig, Endziffer 3, $\lg 20\ldots = 9{,}30$; $9{,}30 : 5 = 1{,}86\ldots$, die erste Stelle ist eine 7, folglich $\boldsymbol{b = 73}$; vgl. S. 88.

Frst.: 19. Wurzel aus einer 22stelligen Zahl. a) Rechenk.: Bitte die drei letzten Stellen! Frst.: $\sqrt[19]{\ldots\ldots\ 677}$ Rechenk.: Die Grundzahl ist 13.

Erklärung: Der Logarithmus des Radikanden liegt unter Fortlassung der letzten 19 Stellen zwischen 2 und 3, durch 19 dividiert, gibt einen Quotienten zwischen 0,1 und 0,2; nun ist $\lg 2 = 0{,}3\ldots$, die Grundzahl liegt demnach zwischen 10 und 20 und ist in Anbetracht der Endziffer = **13**.

b) Dieselbe Aufgabe.

Bitte die Ziffern in beliebiger Reihenfolge.

$$\sqrt[19]{000\ 1111\ 223\ 4445\ 666\ 777\ 99.}$$

Es wird zunächst wie unter a) festgestellt, daß b zwischen 10 und 20 liegt, also Anfangsstelle = 1 (wenn erforderlich, kann auch festgestellt werden, daß b zwischen 12 und 15 liegt!), hierauf Quersumme des Radikanden = Quersumme der Grundzahl = 4 festgestellt, woraus wiederum $\boldsymbol{b = 13}$ gefunden wird.

Frst.: 64. Wurzel aus einer 20stelligen Zahl.
Rechenk.: Die Zahl ist 2!

Der Fragesteller wird sehr erstaunt sein, daß der Rechenkünstler nach der mühsam berechneten 20stelligen Zahl gar nicht fragt. Die Sache erklärt sich aber ganz einfach! Die Basis ist einstellig; Logarithmus einer 20stelligen Zahl liegt zwischen 19 und 20.

$20 : 64 = 0{,}3\ldots$; $\lg 1 = 0$, $\lg 2 = 0{,}30\ldots$, $\lg 3 = 0{,}477\ldots$ es kann demnach nur $\boldsymbol{b = 2}$ sein.

Anmerkung. Der Rechenkünstler ließ sich in einigen Beispielen 2—3 End- oder Anfangsstellen oder beides zugleich angeben, obwohl er auch mit weniger (1—2 Stellen) auskommen könnte. Dies ist bloß, um nicht zu sehr die Aufmerksamkeit der Zuhörer auf die Endziffer zu lenken und einen Teil der Rechenkunst gleich zu verraten.

Hier wäre noch zu erwähnen, daß nach Maennchen[1]) aus der zweit- bzw. drittletzten Ziffer des Radikanden auf die zweitletzte Ziffer der Basis geschlossen werden kann.

1) Vgl. a. a. O.

67. Näherungsweises Wurzelausziehen. Ermittelung von 2 bis 5 Stellen im Kopfe.

Bei den Aufgaben, wo es sich nicht um allzuweitgehende Genauigkeit handelt, stehe ich auf dem Standpunkt, es sei das beste, man schließe die Wurzel durch Quadrieren der angenäherten Basis zwischen zwei Grenzen ein und bestimme durch Interpolation eine weitere Stelle. Diese Stelle darf selbstverständlich um eine Einheit vom richtigen Wert abweichen. Je nachdem, ob man geläufig zwei oder dreistellige Zahlen quadrieren kann, wird man eine Genauigkeit von mindestens drei bis vier Stellen erzielen, welche Genauigkeit für viele Rechnungen namentlich in der Technik hinreichend ist.

Das Kapitel über Quadrieren muß man also auch für diese Aufgaben beherrschen.

Beispiele. $\sqrt{6} = b$;

$$\sqrt{600} \approx 24;\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625.$$

600 liegt nahezu in der Mitte zwischen 625 und 576..

Die Grundzahl liegt mit weitgehender Genauigkeit zwischen 2,4 und 2,5;

$$b \approx 2{,}45 \text{ (genauerer Wert 2,4495).}$$

$$\sqrt{11} = b;$$

$$33^2 = 1089, \text{ Differenz } 11,\ 2 \cdot 3{,}3 = 6{,}6;\ 11 : 6{,}6 \approx 1{,}6;$$

$$\boldsymbol{b \approx 3{,}316} \text{ (genauerer Wert 3,3166).}$$

Die Differenz pro Einheit der nächsten Dezimalstelle ist ungefähr gleich dem doppelten Produkt des bereits vorhandenen Wertes, dividiert durch 10. Sind z. B. die ersten zwei Ziffern $= a$, abgesehen vom Komma, festgestellt, so schneide man eine Stelle ab und multipliziere mit 2, durch dieses Produkt wird die Differenz dividiert.

Bei den Quadratwurzeln ist folgende Regel zu beachten: Ist im Radikanden ein Komma vorhanden oder wird ein solches zur Vergrößerung der Genauigkeit gesetzt, so muß die Stellenzahl rechts vom Komma stets gerade sein. Trifft dies nicht zu, so hänge man eine Null an, also: $\sqrt{1{,}3} = \sqrt{1{,}30}$; $\sqrt{0{,}456} = \sqrt{0{,}4560}$; $\sqrt{0{,}083} = \sqrt{0{,}0830}$, ferner: $\sqrt{12} = \sqrt{12{,}00} = \sqrt{12{,}0000}$; $\sqrt{3} = \sqrt{3{,}00} = \sqrt{3{,}0000}$. Man sieht aus den letzten Beispielen, daß Nullen an ganzzahlige Radikanden stets paarweise anzuhängen sind

$$\sqrt{1,30} = b.$$

$\sqrt{130} \approx 11$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $114^2 = 12\,996$. Die Abweichung von 130 ist hier sehr gering, daher $b \approx \mathbf{1,140}$.

Eine weitere Stelle könnte man erhalten: $13000 - 12\,996 = 4$; $4:23 \approx {}^1/_5 = 0,2$; $\boldsymbol{b} = \mathbf{1,1402}$ (1,14018). In den Klammern ist zum Vergleich der genauere Wert angegeben.

$$\sqrt{0,87};$$

$93^2 = 8649$, Differenz 51; $51:18,6 \approx 2,7$; $\sqrt{0,87} \approx \mathbf{0,9327}$ (0,93274!); natürlich wäre es kein wesentlicher Fehler, wenn man $b \approx 0,9328$ schreiben würde. $\sqrt{4856} = b$.

$70^2 = 4900$, Differenz 44; $44:14 \approx 3,1$; $\boldsymbol{b} \approx \mathbf{69,69}$ (69,685).

$$\sqrt{0,0124} = b;$$

$11^2 = 121$; $3:2,2 \sim 1,..$; $111^2 = 12\,321$, Differenz 79; $79:22 \approx 3,5$; $b \approx 0,11135!$ (0,111355).

$$\sqrt{37} = b.$$

$6^2 = 36$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$; $21:12,2 \approx 1,7$; $\boldsymbol{b} \approx \mathbf{6,083}$ (6,0828).

Freilich gehört zu allen diesen Beispielen eine gewisse Geschicklichkeit.

Soll die 4. Wurzel näherungsweise gezogen werden, so hat man zweimal nacheinander die Quadratwurzel zu ziehen.

Beispiel. $\sqrt[4]{5} = b$; $\sqrt{5} = b_1$;

$$22^2 = 484, \quad 23^2 = 529, \quad 16:4,4 \approx 3,$$

$$b_1 = 2,23; \quad \sqrt{2,23} = b_2; \quad 15^2 = 225; \quad 2:3 \approx 0,6;$$

$\sqrt[4]{5} \approx 1,494!$ (genauer Wert logarithmisch: 1,4953).

Allgemein ist zu beachten: Hat man bei einer Quadratwurzel bereits n Ziffern genau berechnet, so kann man in einfacher Weise mit Hilfe der abgekürzten Division weitere $n - 1$ Stellen ermitteln. Soll beispielsweise $\sqrt{29}$ auf 7 Stellen ermittelt werden, so berechnen wir zunächst in bekannter Weise 4 Stellen nach nebenstehendem Schema.

$\sqrt{29} = 5{,}385$

25	
400	103
309	3
9100	1068
8544	8
55600	10765
53825	5
1775	10770

Weitere 3 Stellen werden mit Hilfe der abgekürzten Division gefunden.

$1775 : \mathbf{1077} = 165$
698
52
-1

$$\sqrt{29} = \mathbf{5{,}385\ 165}$$

Folgende Wurzel soll auf 5 Stellen berechnet werden.

$\sqrt{42{,}6086} = 6{,}5275$

36	
6,60	125
6,25	5
3586	1302
2604	2
982 : 130 (4)	1304
913	
69	
65	
4	

$6{,}5275^2 = 42{,}60825625 = 42{,}6083$, eine Abweichung gegenüber dem Radikanden zeigt sich demnach nur in der letzten Stelle.

Folgendes Schema zeigt die Berechnung von $\sqrt{37}$ auf 7 Dezimalstellen.

$$\sqrt{0{,}37} = \mathbf{0{,}6082763}$$

36	120
100	0
10000	1208
9664	8
33600	12162
24324	2
9276	12164 (Division vgl. S. 48).
8515	
761	
730	
31	

Auch in diesem Beispiele ist nur die letzte Stelle unsicher.

Falls der Radikand ein Komma enthält, ohne dieses aber eine ganzzahlige Wurzel haben würde, lasse man selbstverständlich das Komma beim Wurzelausziehen außer acht und setze es dann bei der Basis an die richtige Stelle. Ein paar Beispiele dürften genügen.

$$\sqrt{65{,}61} = b;\ \sqrt{6561} = 81;\ b = \mathbf{8{,}1}$$

$$\sqrt{0{,}011449} = 0{,}107;\ \sqrt{2{,}89} = 1{,}7 \text{ usf.}$$

Ist der Radikand sehr nahe an 1, so läßt sich die Wurzel in erster Annäherung nach dem binomischen Lehrsatz wie folgt finden, wobei für genügend **kleine** x die höheren Potenzen vernachlässigt wurden

$$\sqrt[n]{1 \pm nx} \approx 1 \pm x.$$

Schreibt man den Radikanden in der Form $1 \pm a$, so ist $x = \frac{a}{n}$

und $$\sqrt[n]{\mathbf{1 \pm a}} \approx \mathbf{1 \pm \frac{a}{n}}.$$

Beispiele. $$\sqrt{1{,}000026} = 1{,}000013$$

$$\sqrt{1{,}007} \approx 1{,}0035$$

$$\sqrt{0{,}9942} \approx 1 - \frac{0{,}0058}{2} \approx \mathbf{71909,}$$

$$\sqrt[5]{1{,}00322} \approx 1{,}00064;\quad \sqrt[4]{0{,}9981} \approx 0{,}9995;$$

$$\sqrt{1{,}08} \approx 1{,}04;\quad \sqrt[4]{0{,}992} = 0{,}998;\quad \sqrt[5]{0{,}99640} = 0{,}99928.$$

Unter Berücksichtigung der ersten drei Glieder und einfacher Umformung findet man nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\sqrt[n]{1 \pm a} = 1 \pm \left(\frac{a}{n}\right) - \frac{n-1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2;$$

z. B. erhält man besonders einfache Formeln:

für $n = 2$ $$\sqrt{\mathbf{1 \pm a}} = \mathbf{1 \pm \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

ebenso für $n = 3$, $\sqrt[3]{\mathbf{1 \pm a}} = \mathbf{1 \pm \left(\frac{a}{3}\right) - \left(\frac{a}{3}\right)^2}.$

Man erhält auch für verhältnismäßig große Werte von a noch gute Resultate:

z.B. $$\sqrt{1{,}06} = 1{,}03 - 0{,}00045 = 1{,}02955$$

$$\sqrt[3]{1{,}06} = 1{,}02 - 0{,}0004 = 1{,}0196.$$

Übung. Berechne: $\sqrt{7056}$, $\sqrt{43264}$, $\sqrt{49729}$, $\sqrt{170569}$, $\sqrt{506944}$, $\sqrt{5484964}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{14,2}$, $\sqrt{1,004}$, $\sqrt{0,9984}$, $\sqrt{16,0032} = 4\sqrt{1,0002}$.

Dritter Teil.

G. Anwendungen.

Wenn der Leser mir so weit gefolgt ist und den ganzen Stoff nicht nur gelesen, sondern auch gründlich durchgearbeitet hat, wird er mit Recht fragen, wo und in welchem Maße er das Gelernte anwenden kann. Nun, eigentlich fast bei jeder Aufgabe, wo es eben numerisch zu rechnen gibt. Wie ein geübter Turner jede Bewegung — bewußt oder unbewußt — geschickter, gelenkiger und rascher — so weit es darauf ankommt — ausführt, als einer der sich der Turnkunst nicht erfreut, wird auch derjenige, der die Rechenvorteile kennt und geübt hat, stets Gelegenheit finden, diese anzuwenden und dadurch seine Rechnung eleganter und mehr oder weniger kürzer gestalten.

68. Planimetrie. 1. Aufgabe. Der Inhalt eines rechtw. Dreieckes, dessen eine Kathete $b = 18,9$ cm, beträgt $F = 45,36\ \text{cm}^2$; man berechne die andere Kathete und die Hypotenuse.

$\frac{ab}{2} = F$; $a = \frac{2F}{b} = \frac{90,72}{18,9} = 4,8$ (durch Kürzen).

$a^2 = 23,04$ (Vgl. § 28); $c = \sqrt{380,25} = \mathbf{19,5\ cm.}$

$\underline{b^2 = 357,21}$ $19^2 = 361$; $20^2 = 400$, die Wurzel liegt in der
$c^2 = 380,25$; Mitte zwischen 19 und 20.

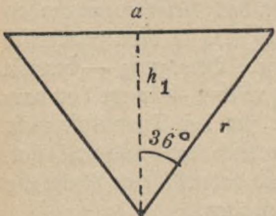
2. Aufgabe. Ein Kreis hat den Radius $r = 52,4$ cm; man berechne den Inhalt des eingeschriebenen regelmäßigen 6=Eckes.

Der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks ist $F = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, im vorliegenden Falle ist $r = a$ und $F = \frac{6r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$ = Inhalt des regelmäßigen 6=Eckes mit der Seite r.

$52,4^2 = 2745,76$ (vgl. S. 60), durch $2 = 1372,88$, mal $3 = 4118,64$

$$\begin{array}{rr}
\sqrt{3} = & 1{,}7321 \\
\hline
 & 4118{,}64 \\
 & 2883\,05 \\
 & 123\,56 \\
 & 8\,24 \\
 & 41 \\
\hline
 & 7133{,}90\,\text{cm}^2
\end{array}$$

69. Stereometrie. 1. Aufgabe. Von einer regulären 5-seitigen Pyramide sind gegeben der Radius des umbeschriebenen Kreises $r = 6{,}25$ dm und die Höhe $h = 31{,}6$ dm. Volumen V und Mantel M der Pyramide sind zu berechnen.



Der Mittelpunktswinkel ist $\frac{360^0}{5} = 72^0$,

$\frac{a}{2} = r \sin 36^0$;

$a = 2\,r \sin 36^0 = 12{,}5 \sin 36^0$.

Aus einer trigonometrischen Tafel entnehme man $\sin 36^0 = 0{,}58779$; $a = \mathbf{12{,}5 \cdot 0{,}58779 = 7{,}3474}$ (dividiere durch 8 und multipliziere mit Hundert; vgl. S. 21).

Aus einer trigonom. Tafel: $\cos 36^0 = 0{,}80902$; $h_1 = r \cos 36^0 = 6{,}25 \cdot 0{,}80902 = 5{,}0564$ (vgl. S. 23). Die Grundfläche ist:

$$G = \frac{5 \cdot a h_1}{2} = \frac{5 \cdot 7{,}3474 \cdot 5{,}0564}{2} = \frac{73{,}474 \cdot 5{,}0564}{4} = \mathbf{18{,}369 \cdot 5{,}0564};$$

$$\begin{array}{r}
5{,}0564 \\
18{,}369 \\
\hline
50{,}564 \\
40{,}451 \\
1{,}517 \\
303 \\
45 \\
\hline
G = 92{,}880\,\text{dm}^2
\end{array}
\qquad
V = \frac{Gh}{3} = \frac{92{,}88 \cdot 31{,}6}{3},$$

$$\begin{array}{r}
30{,}96 \\
31{,}6 \\
\hline
978{,}336
\end{array}$$

(vgl. S. 32 od. durch abgekürzte Multiplikation).

$$\mathbf{V = 978{,}34\,dm^3}.$$

Die Höhe der Pyramidenseite, die mit h_2 bezeichnet sei, ist

$h_2 = \sqrt{h^2 + h_1^2}$;

$31{,}6^2$	$= 998{,}56$	(vgl. S. 60).
$5{,}056^2$	$= 25{,}563136$	(vgl. S. 66; wenn die zu quadrierende Zahl unbequem ist, dann rechne nach abgekürzter oder Kreuzmultiplikation); $h_2 =$
	$1024{,}12$	

$\sqrt{1024{,}12} = \mathbf{32{,}00}$ ($32^2 = 1024$, $\sqrt{}$ liegt sehr nahe an 32, durch Zwischenwertbestimmung findet man 32,002).

$$M = \frac{5 \cdot ah_2}{2} = 18{,}369 \cdot 32 = \mathbf{587{,}808}$$

$$\boldsymbol{M = 587{,}81\ \mathrm{dm}^2}.$$

2. Aufgabe. Von einem Holzkegel sind gegeben: Kantenlänge $s = 76{,}5$ cm und Halbmesser $r = 32{,}1$ cm; zu berechnen sind: Mantelfläche und Gewicht des Kegels, wenn das spezifische Gewicht $\gamma = 0{,}84$ beträgt.

$M = \pi rs = \pi\, 32{,}1 \cdot 76{,}5;$

aus einer Tabelle entnehme man $76{,}5\,\pi = 240{,}33$

$$\begin{array}{r} 240{,}33 \\ \underline{32{,}1} \\ 72099 \\ 4807 \\ \underline{240} \\ 7714{,}6 \end{array} \qquad \boldsymbol{M = 7714{,}6}\ \mathrm{cm}^2.$$

Höhe des Kegels:

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(s+r)(s-r)} = \sqrt{108{,}6 \cdot 44{,}4}$$

(oder durch Quadrieren)

$$\frac{108{,}6.\ 44{,}4}{4821{,}84} \text{ (nach Seite 32)}, \sqrt{4821{,}84} \approx 69{,}44;$$

$$69^2 = 4761;\ 69{,}5^2 = 4830{,}25;\ 30{,}2 - 21{,}8 = 8{,}4;\ 8{,}4 : 14 \approx 0.6$$

$$\sqrt{4821{,}84} = 69{,}50 - 0{,}06 = 69{,}44.$$

Aus einer Tabelle entnehme man $F = \frac{\pi \cdot 64{,}2^2}{4} = 3237{,}13\ \mathrm{cm}^2$.

Gewicht: $G = \frac{0{,}84 \cdot Fh}{3} = 0{,}28 \cdot 3237{,}1 \cdot 69{,}44.$

```
3237,1
   0, 28
──────
647,42
258,97
──────
906,39
 69,44
──────
543 83
 81 57
  3 62
    36
──────
629 38
```

$G = 62\,938\text{ g} = \mathbf{62{,}94\text{ kg.}}$

70. Trigonometrie. 1. Aufgabe. Von einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben $c = 279$; $\alpha = 30^0 30{,}6'$; $\beta = 67^0 22{,}8'$;
gesucht γ, a, b und F.

$$\alpha + \beta = 97^0 53{,}4'; \; \gamma = 82^0 6{,}6'.$$

Aus einer trigonometrischen Tafel entnehme man: $\sin\alpha = 0{,}50769$, $\sin\beta = 0{,}92306$, $\sin\gamma = 0{,}99054$;

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma; \; a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

```
 0,50769
     279
────────
101 538
 35 538
  4 568
────────
141,644 : 0,99054   (vgl. S. 50)
 42 590   142,998
  2 968
    987
     96
      7
```

$a \approx \mathbf{143}$

$$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

```
0,92306
    279
───────
184,612
 64,614
  8,307
───────
257,533
```

$b \approx \mathbf{260}$

$$\begin{array}{rr} \underline{257{,}533:0{,}99054} & \\ 59\,425 & 259{,}99 \\ 9\,898 & \\ 983 & \\ 92 & \\ 3 & \end{array}$$

$$F = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha$$

$$= 130\cdot 141{,}64 = 13\cdot 1416{,}4 \text{ (vgl. S. 27)}$$

$$F = 18413{,}2$$

$$\approx \mathbf{18413}$$

2. Aufgabe. Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 52$ m, $b = 195$ m, $c = 205$ m; man berechne die Winkel α, β, γ und den Flächeninhalt F.

$$\begin{aligned} a^2 &= 52^2 = 2704 \text{ (vgl. S. 54)} \\ b^2 &= 195^2 = 38025 \text{ („ S. 52)} \\ c^2 &= 205^2 = 42025 \text{ („ S. 52)} \\ \hline b^2 + c^2 - a^2 &= 77346 \end{aligned}$$

$$2\,bc = 2\cdot 195\cdot 205 = 2\cdot 39975 = 79950 \text{ (Vgl. S. 36)}$$

$$\begin{array}{l} \cos\alpha = 77346 : 79950 = 0{,}96744 \\ \qquad\quad 5391 \\ \qquad\qquad 594 \\ \qquad\qquad\; 35 \\ \qquad\qquad\;\; 3 \end{array}$$

$$a^2 + (c^2 - b^2) = 2704 + 4000 = 6704$$

$$2\cdot 205\cdot 52 = 410\cdot 52 = 21320.$$

$$\begin{array}{rl} \cos\beta = 6704 : & 21320 \\ 308 & \overline{0{,}3145} \\ 95 & \\ 10 & \end{array}$$

$$a^2 + (b^2 - c^2) = 2704 - 4000 = -1296$$

$$2\cdot 195\cdot 52 = 390\cdot 52 = 20280 \text{ (vgl. S. 30).}$$

$$\begin{array}{rl} \cos\gamma = -1296 : & 20280 \\ 79 & \overline{-0{,}0639} \\ 18 & \end{array}$$

Nach einer trigonometrischen Tafel findet man:

$$\begin{aligned} \alpha &= 14^0 40' \\ \beta &= 71^0 40' \\ \gamma = 180^0 - 86^0 20' &= 93^0 40' \\ \hline \alpha + \beta + \gamma &= 180^0 00'. \end{aligned}$$

Den Flächeninhalt finden wir nach der Formel

$$F = \sqrt{\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2}-a\right)\left(\frac{u}{2}-b\right)\left(\frac{u}{2}-c\right)} \text{ oder } F = \frac{1}{2}ac\sin\beta,$$

wobei wir der Kürze halber die zweite Formel benutzen wollen.

$\frac{1}{2}\cdot 52\cdot 205 = 26\cdot 205 = 5330$, aus einer trigonometrischen Tafel entnehme man $\sin\beta = 0{,}94924$. Mit Hilfe der abgekürzten Multiplikation findet man $9{,}4924\cdot 533 = 5059{,}45$, somit $\boldsymbol{F = 5059\ \mathrm{m}^2}$.

71. Zinseszins-Rechnung. Aufgabe. Ein Kapital a = 14000 ℳ steht zu 3% auf Zinsen. Zu welcher Summe wächst es mit Zinsen und Zinseszinsen in 11 Jahren an?

$$q = \frac{100+p}{100} = 1{,}03; \text{ das Endkapital ist } b = aq^n.$$

$$\begin{array}{r} 1{,}0000 \\ 11\cdot 0{,}3 = \ .\ .\ .\ .\ .\ \ 0{,}3300 \\ \frac{1}{2}\cdot 0{,}33^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1089 = 0{,}0544 \\ \hline 1{,}03^{11} \approx 1{,}3844 \end{array} \text{ (vgl. S. 72)}$$

$14000\cdot 1{,}3844 = 14\cdot 1384{,}4 = 19381{,}6$ (vgl. S. 27), mithin:

$$\boldsymbol{b = 19382} \text{ ℳ}.$$

Mit Hilfe einer 5-stelligen Logarithmentafel findet man $b = 19380$ ℳ, womit also unser Ergebnis gut übereinstimmt.

72. Schnelligkeitsversuche. Das Wort Schnellrechnen soll ohne Zweifel andeuten, daß der Schnellrechner unter Entfaltung einer gewissen Geschicklichkeit und Anwendung der mannigfachen Rechenvorteile in der Lage ist, eine zahlenmäßige Aufgabe schneller — und dazu noch im Kopfe — zu lösen, als es durchschnittlich eine andere Person mit Hilfe der üblichen Rechnungsweise vermag. Am einfachsten ließe sich wohl mit der Taschenuhr ein Vergleich über die Schnelligkeit anstellen, indem beobachtet wird, innerhalb wieviel Minuten resp. Sekunden jeder der Beteiligten ein und dieselbe Aufgabe, die zweckmäßig von einer dritten Person gestellt werden soll, zu lösen imstande ist. Gebraucht beispielsweise der eine 25, der andere 60 Sekunden, so wäre die Rechengeschwindigkeit umgekehrt proportional der Zeit, im vorliegenden Falle $60:25 = 2{,}4$; d. h. der eine rechnet rund $2\frac{1}{2}$ mal schneller als der andere. Da es hier nur auf Durchschnittswerte ankommt, so kann man den Vergleich in bezug auf die Schnelligkeit ohne

Zeitbeobachtung und etwas unterhaltender wie folgt ausführen. Hat der Schnellrechner auf Grund der Rechenvorteile usw. eine besondere Fertigkeit beispielsweise im Quadrieren erlangt, so möge eine dritte Person auf 2 Blatt Papier die gleichen etwa je 5 zweistellige Zahlen aufschreiben und dem Schnellrechner sowie der Vergleichsperson gleichzeitig vorlegen. Der erstere rechnet im Kopfe und schreibt die Ergebnisse hin, während letztere die Aufgaben der Reihe nach in gewöhnlicher Weise rechnet. Wer zuerst mit sämtlichen Aufgaben fertig ist, meldet „fertig".

Hat nun der Schnellrechner sämtliche 5 Quadrate gebildet und hingeschrieben, während die Vergleichsperson in der gleichen Zeit ein Quadrat vollständig und das zweite etwa bis zur Hälfte berechnete, so ist die Rechengeschwindigkeit $5:1{,}5 = 3\,^1/_3$. Diese Geschwindigkeit ist sehr leicht zu erreichen.

Einen anderen Versuch, der sich in Gesellschaft ausführen läßt, führte Verfasser einige Male durch.

Jemand, der sich bei der Rechnung weiter nicht beteiligt, schreibt auf etwa 4 Blatt Papier die gleichen je 2 beliebige zweistellige Zahlen, etwa 88 und 53. Der Schnellrechner und noch 3 Personen etwa A, B und C erhalten je 1 Blatt Papier mit den betreffenden Zahlen. Mit diesen Zahlen sollen die verschiedensten Rechenoperationen vorgenommen werden. Die zwei Zahlen werden addiert, subtrahiert, miteinander multipliziert, mit einer gewissen Genauigkeit dividiert, jede Zahl wird quadriert, es werden ferner mit einer gewissen Genauigkeit die Wurzeln gezogen, und evtl. auch auf 2—3 Stellen logarithmiert.

Die Arbeit wird ungefähr so verteilt: Person A hat die Addition, Subtraktion und Multiplikation auszuführen, B die Division und das Quadrieren, wärend C die Wurzeln auszieht. Zur gleichen Zeit führt der Schnellrechner sämtliche Rechenoperationen durch, wobei die Nebenrechnungen im Kopfe zu erfolgen haben. Der Schnellrechner rechnet nur solange, als A, B oder C noch rechnen, und meldet, sobald er früher fertig ist. Sind beispielsweise währenddessen A und B ebenfalls fertig, hingegen habe C noch ein wenig zu rechnen, so läßt sich hierdurch ein Maßstab für die Schnelligkeit des Rechnens gewinnen. Denn der Schnellrechner kann sagen, er habe innerhalb einer bestimmten Zeit Rechnungen durchgeführt, mit denen 3 Personen, die gleichzeitig rechneten, kaum fertig wurden. Hierbei hat der Schnellrechner nur solche Zahlen hinzuschreiben, die nur als Ergebnis aufzufassen sind und nicht zu den Hilfsrechnungen gehören, das wäre bei den angenommenen Zahlen:

88	7744	1,66 Rest 2
53	2809	9,38; 7,28.
141		
35		
4664		

Zu beachten ist, daß man unter Umständen sogar verlangen muß, daß die Vergleichspersonen A, B, C in der gewöhnlichen Weise rechnen, also insbesondere keine Nebenrechnungen unterdrücken dürfen.

73. Einige bemerkenswerte Zahleneigenschaften. Als Beispiel dafür, wie in manchen Fällen Zahlen, mit denen auf den ersten Blick unbequem zu rechnen ist, bei näherer Betrachtung sich als für die Rechnung durchaus nicht umständlich erweisen, sei die Zahl **37** angeführt.

Man beachte $3 \cdot 37 = 111$.

Demnach
$$\begin{aligned} 27 \cdot 37 &= 9 \cdot 111 = 999 \\ 17 \cdot 37 &= 555 + 2 \cdot 37 = 629 \\ 46 \cdot 37 &= 1665 + 37 = 1702 \\ 135 \cdot 37 &= 45 \cdot 111 = 4995 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Ebenso beachte: $13 \cdot 77 = 1001$, was in vielen Fällen sich verwerten läßt.

Z. B.
$$\begin{aligned} 39 \cdot 77 &= 3 \cdot 1001 = 3003 \\ 66 \cdot 77 &= 5005 + 77 = 5082 \\ 129 \cdot 77 &= 10010 - 77 = 9933 \\ 54 \cdot 77 &= 4004 + 154 = 4158 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Beachte die Quadrate folgender Zahlen, die man vor- und rückwärts lesen kann.

$$\begin{array}{rlrl}
(11^2 = & 121) & & \\
12^2 = & 144, & 21^2 = & 441 \\
13^2 = & 169, & 31^2 = & 961 \\
102^2 = & 10404, & 201^2 = & 40401 \\
103^2 = & 10609, & 301^2 = & 90601 \\
112^2 = & 12544, & 211^2 = & 44521 \\
113^2 = & 12769, & 311^2 = & 96721 \\
122^2 = & 14884, & 221^2 = & 48841 \\
1002^2 = & 1004004, & 2001^2 = & 4004001 \\
1003^2 = & 1006009, & 3001^2 = & 9006001 \quad \text{usw.}
\end{array}$$

Hier fällt noch folgendes auf:

$$12^2 = 144$$
$$102^2 = 10404$$
$$1002^2 = 1004004,$$

ebenso

$$211^2 = 44521$$
$$20101^2 = 404050201,$$

d. h. wenn ich auf der linken Seite zwischen je 2 Ziffern eine Null einschiebe, muß ich dasselbe auf der rechten Seite tun.

Zwei Zahlenreihen mit „6-Eigenschaft".

Die Zahlen 1, 5 und 6 haben die allgemein bekannte Eigenschaft, daß das Produkt zweier oder mehrerer sonst beliebiger Faktoren, die sämtlich eine bestimmte dieser Zahlen als Endziffer aufweisen, wiederum die Endziffer 1, resp. 5, resp. 6 aufweist. Im besonderen hat das Quadrat bzw. jede beliebige ganzzahlige Potenz einer Zahl mit der Endziffer 6 offenbar wiederum die Endziffer 6. Es genügt aber vollständig, wenn das Quadrat einer Zahl — bleiben wir bei der 6 — die Zahl selbst als Endziffer ergibt, um hieraus das oben allgemeiner Gesagte zu folgern. Denn, setzen wir im dekadischen System der 6 einerseits eine beliebige ein- oder mehrstellige Zahl a, andererseits die Zahl b vor, so ist das Produkt dieser Zahlen:

$$(10a + 6)(10b + 6) = 100ab + 10 \cdot 6(a + b) + 6^2,$$

welcher Ausdruck dieselbe Endziffer wie 6^2 — also **6** — besitzt.

Der Kürze halber spreche ich in der Folge von der „6-Eigenschaft", und stelle gleich folgende Fragen, die später beantwortet werden.

1. Gibt es auch **2**-, **3**- und mehrstellige Zahlen mit der „6-Eigenschaft"?
2. Wenn ja, wieviel solcher Zahlen gibt es?
3. Wie lassen sich diese Zahlen auffinden?

Ich gebe gleich eine **2**stellige Zahl mit „6-Eigenschaft" an und zwar **76**, um einige Bemerkungen hieran zu knüpfen.

Es ist $76^2 = 57\mathbf{76}$, die Endziffern des Quadrates sind also gleich der Basis. Der Leser kann sich leicht überzeugen, daß beispielsweise $176^2 = 309\mathbf{76}$, $276^2 = 761\mathbf{76}$, $176^3 = 54517\mathbf{76}$, $2376 \cdot 476 = 1130976$ usw. Auch hier hätte es genügt festzustellen, daß $76^2 = 57\mathbf{76}$, um die „6-Eigenschaft" zu erkennen.

Infolge Raummangels seien die Zahlenreihen I, II und III ohne Beweis angeführt. Zahlenreihe III ergibt sich durch Addition von I und II.

I.

$$\begin{aligned}
5^2 &= \mathbf{25}\\
25^2 &= \mathbf{625}\\
625^2 &= 390\mathbf{625}\\
[0625^2 &= 0039\mathbf{0625}]\\
90625^2 &= 8212\mathbf{890625}\\
890625^2 &= 793212\mathbf{890625}\\
2890625^2 &= 835571\mathbf{2890625}\\
12890625^2 &= 1661682\mathbf{12890625}\\
212890625^2 &= 45322418\mathbf{212890625}\\
8212890625^2 &= \qquad \ldots\mathbf{8212890625}
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
6^2 &= \mathbf{36}\\
76^2 &= 57\mathbf{76}\\
376^2 &= 141\mathbf{376}\\
9376^2 &= 8790\mathbf{9376}\\
[09376^2 &= 00879\mathbf{09376}]\\
109376^2 &= 11963\mathbf{109376}\\
7109376^2 &= 5054322\mathbf{7109376}\\
87109376^2 &= 75880433\mathbf{87109376}\\
787109376^2 &= 619541169\mathbf{787109376}\\
1787109376^2 &= \qquad \ldots\mathbf{1787109376}
\end{aligned}$$

III.

$$\begin{array}{rclcccl}
5 &+& 6 &=& 11 &=& 10^1 + 1\\
25 &+& 76 &=& 101 &=& 10^2 + 1\\
625 &+& 376 &=& 1001 &=& 10^3 + 1\\
[0625] &+& 9376 &=& 10001 &=& 10^4 + 1\\
90625 &+& [09376] &=& 100001 &=& 10^5 + 1\\
890625 &+& 109376 &=& 1000001 &=& 10^6 + 1\\
2890625 &+& 7109376 &=& 10000001 &=& 10^7 + 1 \text{ usf.}
\end{array}$$

Zum Schluß noch eins: $\mathbf{90625^2 = 8212890625}$, welche Zahl merkwürdigerweise sich mit der 10. Zahl der Reihe I vollständig deckt!

Die Zahl 90625 bildet demnach den Schlüssel für die ersten 10 Zahlen beider Reihen d. h. aber für den Zahlenbereich bis 10000000000.

Man merke sich nämlich nur die Zahl **90625**, bilde deren Quadrat, dann ergeben die Ziffern von rechts nach links sukzessive die Reihe I, und hieraus erhält man leicht unter Beachtung, daß die Summe der entsprechenden Anfangsziffern der Reihen I und II stets gleich 9, die ersten 10 Zahlen der Reihe II, hat jedoch bei der ganzen Rechnung nur ein einziges Quadrat zu bilden.

Zusammenfassung.

1. Es gibt unendlich viele Zahlen mit der „6-Eigenschaft", die aber verhältnismäßig dünn ausgestreut sind; so sind für $n \geqq 2$ zwischen 10^{n-1} und 10^n, wie groß auch n sein mag, höchstens 2 derartige Zahlen vorhanden. Bis zu einer Million befinden sich nur 11, bis zu einer Milliarde 17 der fraglichen Zahlen, die 1 inbegriffen.

2. Die Anzahl der Zahlen mit „6-Eigenschaft" in einem bestimmten Zahlenbereiche ist ungefähr gleich dem doppelten Logarithmus der Grenzzahl, also bis 10^n ungefähr $= 2n$.

3. Das Auffinden der fraglichen Zahlen erfolgt nach einem einfachen Gesetz. Die Zahl 90625, respektive das Quadrat derselben bietet sozusagen den Schlüssel zu den Zahlen bis 10^{10}.