Das Ferrolsche neue Rechnungsverfahren

(8 Briefe).

V. Brief.

Die Teilbarkeit der Zahlen, Kontrolle, Fehlersuchen; interessante Zahlen.

Verlag von

Dr. J. Schmitt, Berlin W. 30.

Albert Walther, Dresden, Amalienstr. 21.

Inhalt der Briefe.

I. Brief: Multiplikation kleiner Zahlen.

II. Brief: Kürzungen derselben.

III. Brief: Multiplikation großer Zahlen.

IV. Brief: Kürzungen derselben.

V. Brief: Die Teilbarkeit der Zahlen, Kontrolle, Fehlersuchen; interessante Zahlen.

VI. Brief: Division.

VII. Brief: Kürzungen derselben; Wurzeln und Potenzen u. s. f.

VIII. Brief: Anwendungsformen, kombiniertes Rechnen; Verbindung von Multiplikation und Subtraktion, Addition, Zinszahlen, Bruchrechnung, fremde Währungen, Rechenschieber u. s. f.

Verehrter Leser!

Kennen Sie die „Neunerprobe"? Wenn nicht, so ist sie leicht erklärt:

Eine Zahl gibt durch 9 geteilt denselben Rest wie ihre „Quersumme", d. i. wie die Summe ihrer Ziffern.

Warum wohl?

Die Zahlen 10, 100, 1000, 10000 usw. geben, durch 9 geteilt, sämtliche den Rest = 1; demnach geben die Zahlen 20, 200, 2000 usw. den Rest = 2, die Zahlen 80, 8000, 80000 usw. den Rest = 8 u. s. f.

Prüfen wir demnach in diesem Sinne die Zahl

2411

so erhalten wir aus	2000	den	Rest	2
„	400	„	„	4
„	10	„	„	1
„	1	„	„	1

und aus der Summe 2411 den Rest 8.

Für

748395

erhalten wir also den Rest:

$7 + 4 + 8 + 3 + 0$*) $+ 5 = 18$ bezw. $= 0$

Für

362847544 (mit *) über der 6 und der ersten 4)

den Rest:

$2 + 8 + 4 + 7 + 4 = 25$ bezw. $= 7$.

Durch 3 geteilt würde 7 und damit natürlich auch die ganze Zahl 362847544 den Rest = 1 geben, so daß die Neunerprobe erweitert — auch für den Divisor = 3 gilt.

Man benützt diese Neunerprobe häufig zur Kontrolle, namentlich von Multiplikationen. Angenommen, der eine Faktor, zum Beispiel 353, gäbe bei der Neunerprobe den Rest = 2, der andere, zum Beispiel 103, den Rest = 4, so muß das Produkt

$$\begin{array}{r} 353 \\ 103 \times \\ \hline \text{also } 36359 \end{array}$$

den Rest 2×4 geben, was auch durch $3 + 5 = 8$ der Fall ist.

*) Es ist selbstredend überflüssig, eine 9 mitzuzählen, ebenso wenn zwei benachbarte Ziffern zusammen 9 geben, zum Beispiel 63, 18 usw.

Ist auch das „Warum“ unschwer einzusehen, so möchte ich doch für algebrakundige Leser den algebraïschen Beweis anführen:

Wir können jede Zahl durch $9a + r$ ausdrücken, wo a und r jeden beliebigen Wert haben können; bei „6“ zum Beispiel wäre $a = 0$, $r = 6$, bei 3614 wäre $a = 401$, $r = 5$, denn $9 \times 401 + 5 = 3614$. Bezeichnen wir nun den einen Faktor mit $9a + r_1$, den andern mit $9b + r_2$, so ist das Produkt $= (9a + r_1)(9b + r_2)$ oder wenn wir auch diese Faktoren übereinanderstellen:

$$\begin{array}{c} (9a + r_1) \times \\ \underline{(9b + r_2)} \\ 81ab + 9ar_2 + 9br_1 + r_1 r_2 \\ = 9(9ab + ar_2 + br_1) + r_1 r_2. \end{array}$$

Es ist leicht einzusehen, daß der den Faktor 9 enthaltende Ausdruck $9(9ab + ar_2 + br_1)$ ohne Rest durch 9 teilbar ist, so daß als Rest nur das Produkt

$$r_1 \times r_2$$

bleiben, dieses aber allerdings, zum Beispiel in

$$\begin{array}{rl} 141 \times & \text{Rest} = 6 \\ \underline{51} & \text{Rest} = 6 \\ 7191 & \text{Rest} = 0 \end{array}$$

seinerseits wieder durch 9 teilbar sein kann.

Ist der eine Faktor überhaupt durch 9, oder sind, wie eben angeführt, beide Faktoren durch 3 teilbar, so ist selbstredend das Produkt auch durch 9 teilbar.

Daß diese Probe nicht absolut zuverlässig ist, soll weiter unten gezeigt werden; zuvor aber möchte ich noch darauf hinweisen, daß sie auch — wenn auch seltener — mit der gleichen geringen Zuverlässigkeit für Addition, Subtraktion und Division Verwendung findet. —

Denn es ist einleuchtend, daß die Summe zweier oder mehrerer Zahlen wie auch die Differenz von solchen bei der Teilung durch irgend einen gleichbleibenden Divisor (also nicht bloß 9) denselben Rest geben muß wie die Summe bezw. die Differenz der Einzelreste.

Addieren wir zum Beispiel

	4613	mit	dem	Reste	5
+	821	„	„	„	2
+	1518	„	„	„	6
zu	6952	mit	dem	Reste	13 bezw. 4,

so dürfte eine Begründung hierfür kaum nötig sein.

Ähnlich wenn wir an

	7829	mit	dem	Reste	8
die Zahlen	415*)	„	„	„	1*)
ferner	274	„	„	„	4
und	182	„	„	„	2

abziehen und so die

Differenz 6958 mit dem Reste 19 bezw. 1

erhalten.

Ähnlich auch bei der Division. Die Zahl 6849 sei durch 42 zu teilen. Ergibt sich hier das Resultat 163 und der Rest 3, so ist mit anderen Worten

$$\begin{aligned} & \underbrace{163} \times \underbrace{42} + 3 = \underbrace{6849} \\ \text{und}\quad & (1 + 6 + 3) \times (4 + 2) + 3 = 6 + 8 + 4 \\ \text{bezw.}\quad & = 1 \times 6 + 3 = 18 \text{ bezw. } 9. \end{aligned}$$

Haben wir ähnlich 177200 durch 243 geteilt, dabei das Resultat 729 mit dem Reste 53 erhalten, so ist eben

$$\underbrace{729 \times 243}_{0} + \underbrace{53}_{+\,8} = 177200 \text{ mit dem „Neunerreste“} = 8$$

Die Untersuchung des Produktes 729 × 243 ist hier überflüssig, weil schon der Divisor 243 (übrigens auch die Zahl 729) durch 9 teilbar ist.

---

*) Über die Subtraktion derartiger Summen, sowie die darauf zu gründende Kontrolle vergl. Brief VIII.

Ähnlich wenn wir 3548 mit dem „Neunerreste“ = 2 durch 51 teilen, dabei das Resultat 69 und den Rest 29 erhalten; sowohl 69 als auch 51 sind durch 3, ihr Produkt ist also durch 9 teilbar. Demnach haben wir nur zu untersuchen, ob 29 denselben Neunerrest wie 3548 (das ist = 2) ergibt.

Der Fall, daß der Divisor überhaupt = 9 ist, deckt sich mit der allgemeinen Neunerprobe.

Leider krankt diese an sich so schöne Neunerprobe an dem Nachteile, daß wir im allgemeinen gewöhnt sind, senkrecht zu addieren, uns also bei Feststellung der Quersumme leicht irren, sowie namentlich daran, daß der Fehler unentdeckt bleibt, wenn er eine durch 9 teilbare Zahl darstellt, zum Beispiel Ziffern einfach vertauscht sind oder sonst zwei oder mehr Fehler sich zu 9 ergänzen.

Beide Nachteile verschwinden fast völlig, wenn wir die Neunerprobe als Ausgangspunkt zu einer allgemeinen Probe benützen, sie zweckentsprechend erweitern.

An sich ist es selbstredend gleichgültig, ob wir zum Beispiel bei der Multiplikation und umgekehrt bei der Division gerade die bei der Teilung durch

9 verbleibenden Reste bezw. ihr Produkt und bezw. Summe ins Auge fassen, oder aber einen anderen Divisor als Grundlage nehmen.

Das Gesetz, daß ein Produkt von zwei oder mehr*) Faktoren bei der Teilung durch einen bestimmten Divisor denselben Rest gibt wie das Produkt der Reste dieser Faktoren selbst, gilt nicht nur für den Divisor 9, sondern für alle Divisoren**), und da wir am leichtesten durch 10 teilen, läge es eigentlich nahe, diesen Divisor zu allererst zu verwenden. Leider beruht aber die bequeme Teilung durch 10 (übrigens auch jene durch 9 und 11) darauf, daß 10 die Basis unseres Zahlensystems ist, könnte also nur Fehler in den Einern aufdecken. Würde man diese Probe mit einem Siebe vergleichen, so könnte man, den Vergleich weiterführend, sagen: Alle durch 10 teilbaren Fehler gehen durch die Maschen, und da jeder in den höheren Stellen gemachte Fehler durch 10 teilbar ist, würde er anstandslos passieren.

*) Hieraus folgt ein interessantes Gesetz zur Bestimmung höherer Wurzeln.

**) Beweis: Der Divisor sei allgemein d; dann ist $(a d + r_1)(b d + r_2) = a b d^2 + r_1 b d + r_2 a d + r_1 r_2 = d(a b d + r_1 b + r_2 a) + r_1 r_2$. Da $d(a b d + r_1 b + r_2 a)$ durch d teilbar ist, bleibt nur der Rest $r_1 r_2$.

Suchen wir ein besseres Sieb:

Bekanntlich gibt die Zahl 100 wie auch jede Potenz derselben sowohl durch 9 als auch durch 11*) geteilt den Rest 1; demnach geben z. B. 700 in beiden Fällen den Rest 7, 400 den Rest 4 u. s. f. Die Zahl 1904 würde also durch 9 und 11 geteilt den Rest $19 + 04 = 23$, mit anderen Worten: durch 9 geteilt den Rest = 5, durch 11 geteilt den Rest = 1 geben; die Zahl 142131012 gäbe ähnlich durch 9 und 11 geteilt den Rest

$$1 + 42 + 13 + 10 + 12 = 78,$$

also durch 9 geteilt den Rest = 6 und durch 11 geteilt den Rest = 1. Wenn hier ein Fehler durch die „Maschen" gehen sollte, so müßte er schon durch $9 \times 11 = 99$ teilbar, also aus mindestens 2 Fehlern

*) Ähnlich, aber umständlicher ist folgendes: die Zahlen 1, 100, 10000 — also alle geraden Potenzen von 10 — geben bei der Teilung durch 11 den Rest + 1; die Zahlen 10, 100, 100000 usw., also alle ungeraden Potenzen den Rest — 1. Demnach gibt 600 den Rest + 6, 4000 den Rest — 4 u. s. f., d. h. man addiert und subtrahiert abwechselnd, z. B. bei

$$82413 : 8 - 2 + 4 - 1 + 3 = 12 \text{ bezw. } 1$$

oder man nimmt zuerst

$$8 + 4 + 3 = 15 \text{ und subtrahiert } 2 + 1 = 3$$
$$\text{also } 15 - 3 = 12 \text{ bezw. } 1.$$

von zufällig derselben Ziffer und wahrscheinlich gleichzeitig umgekehrtem Vorzeichen entstanden sein.

Die Zahl 100 ist bekanntlich nicht durch 101 teilbar; eine einzige Einheit fehlt ihr dazu und wir können daher sagen:

100 gibt bei der Teilung durch 101 den Rest — 1, 400 geben den Rest — 4, 700 den Rest — 7. Untersuchen wir z. B. die Zahl 1653, so können wir diese 16 Hunderter demnach zweimal ins Auge fassen; einmal, um sie

$$\begin{array}{r} 53 \\ +16 \\ \hline 69 \end{array}$$

zu 53 zu addieren und dadurch den Elferrest = 3 und den Neunerrest = 6 zu erhalten und zum zweiten Male: um sie von 53 abzuziehen

$$\begin{array}{r} 53 \\ -16 \\ \hline 37 \end{array}$$

und so zu erfahren, daß 1653 außerdem durch 101 geteilt den Rest 37 gibt.

Gibt 100 durch 101 geteilt den Rest — 1, so gibt $100 \times 100 = 10000$ den Rest + 1, $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ den Rest — 1 u. s. f., d. h. alle geraden Potenzen*) von 100 geben den Rest + 1, alle ungeraden aber den Rest — 1.

Wir kommen dadurch für die Zahl

9726428113

zu den Resten

$$+97 - 26 + 42 - 81 + 13 = 45,$$

können dies aber in der Weise ausführen, daß wir einerseits die positiven, anderseits die negativen Reste getrennt addieren:

97	und
42	— 26
13	— 81
+ 152	— 107**)

und dann die Differenz der beiden Summen =

$$\begin{array}{r} 152 \\ -107 \\ \hline 45 \end{array}$$

*) Potenz = Produkt aus gleichen Faktoren. Der Anzahl der Faktoren entspricht die Höhe der Potenz; so ist 49 = 7 × 7 die zweite Potenz von 7, 7 ist die erste Potenz von 7.

**) Ist der abzuziehende Rest größer als der andere, so erhöhen wir letzteren so oft als nötig um 101.

bestimmen. Addieren wir aber umgekehrt die beiden Summen

$$\begin{array}{r} 152 \\ +\ 107 \\ \hline \text{zu}\ 259 \\ {\scriptstyle 2\cdot} \\ \hline \text{bezw.}\ 61 \end{array}$$

so sehen wir weiter, daß die obengenannte große Zahl durch 9 geteilt den Rest: $6 + 1 = 7$, durch 11 geteilt den Rest 5 gibt.

Ein Fehler müßte also schon $9 \times 11 \times 101 = 9999$ oder ein Mehrfaches dieser Zahl betragen, um den Maschen dieses Netzes entwischen zu können

$$27 \times 37 = 100\underline{1}\,{}^{*)}$$
$$7 \times 11 \times 13 = 1001$$

mit anderen Worten:

Die Zahl 1000 gibt durch 27 und 37 geteilt den Rest $= + 1$, durch 7, 11 und 13 geteilt den Rest $= - 1$.

Untersuchen wir in diesem Sinne die Zahl

$$\begin{array}{r} 164 \\ +\ 113 \\ \hline \end{array}$$

so erhalten wir zunächst 277 und schließen, da 277

*) Vergl. Brief II.

durch 27 geteilt den Rest = 7, durch 37*) geteilt den Rest = 18 gibt, daß dieselben Reste bleiben, wenn wir

113164

durch 27 und 37 teilen.

Ziehen wir umgekehrt 113 an 164 ab =

$$\begin{array}{r} 164 \\ -\ 113 \\ \hline \end{array}$$

so bleibt der Rest = 51.

Dieser aber gibt durch 7**) geteilt den Rest = 2, durch 11***) geteilt den Rest = 7, durch 13†) geteilt den Rest = 12 und dieselben Reste muß auch die Zahl 113164 geben, wenn wir sie durch 7, 11, 13, teilen.

Ein nicht durch 999 × 1001 = 999999 teilbarer Fehler müßte also unbedingt entdeckt werden.

Es liegt auf der Hand, daß diese Untersuchungen sich ebensowohl auf die Basis von 10000 oder

*) 3 × 37 = 111; 6 × 37 = 222; 9 × 37 = 333 usw., die Quersumme des Produktes gibt also den anderen Faktor an; ähnlich 10 × 37, 11 × 37 u. s. f.

**) Vergl. ev. unten.

***) Vergl. ev. Seite 8.

†) Vergl. ev. Seite 13.

100000 usw. ausdehnen ließen, ohne daß aber darin noch ein besonderer Vorteil zu erblicken wäre. Wichtiger ist folgendes:

100 gibt durch 7, 14, 49 und 98 geteilt den Rest $+ 2$, durch 17, 34 usw. geteilt den Rest $- 2$, demnach geben 13×100 den Rest $+ 26$ bezw. $- 26$ und gibt 1339 durch 7, 14, 49 und 98 geteilt denselben Rest wie $39 + 26 = 65$, durch 17, 34 usw. geteilt denselben Rest wie $39 - 26 = 13$.

Den Rest $+ 3$ bezw. $- 3$ geben die Divisoren 97 und 103, den Rest

$+ 4$ die Divisoren 8, 12, 16, 24, 32, 48, den Rest
$- 4$ „ „ 8, 13, 26 usw., den Rest
$+ 5$ gibt der Divisor 19, den Rest
$- 5$ geben die Divisoren 21 bezw. 3, 7, 35 u. s. f.

Die Schlußfolgerungen hieraus ergeben sich unschwer.

Noch vermissen wir in unseren Betrachtungen die Divisoren 23, 29, 31 u. s. f.

Erst im 7. Briefe wird der verehrte Leser lernen, auf einfachste Weise zu irgend einem Faktor (vor allem Primfaktor), jenen zweiten Faktor zu bestimmen, der mit ihm eine auf 99, 999, 9999 usw. oder umgekehrt auf 01, 001 usw. endigende Zahl ergibt.

Dort werden wir nochmals hierauf zurückkommen, möchten aber immerhin einige Beispiele hiervon herausgreifen:

$$23 \times 13 = 299,$$

demnach gibt 300 durch 23 und 13 geteilt den Rest + 1*); 1500 würde den Rest = 15 : 3 = 5 und demnach 1516 den Rest 5 + 16 = 21 ergeben, woraus für die Teilung durch 13 der Rest 8, für jene durch 23 der Rest 21 resultiert.

Ist nun bei 4914 die Zahl 49 nicht durch 3 teilbar, so können wir entweder statt dessen den dritten Teil von 48 = 16 zu 114 addieren und so die weiter zu untersuchende Zahl 130 (mit dem Rest 0 bei der Teilung durch 13 und dem Rest 15 bei der Teilung durch 23) erhalten, oder aber (wenn wir nur wissen wollen, ob die Zahl 4914 durch 13 bez. 23 teilbar ist) wir multiplizieren 14 mit 3 und addieren dieses Produkt = 42 zu 49. Ist die Summe = 91 durch 13 oder 23 teilbar, so ist auch die ganze Zahl durch den betreffenden Divisor teilbar. Umgekehrt ist 23 × 87 = 2001 = 3 × 23 × 29.

*) Und ähnlich durch 7 und 43 geteilt den Rest — 1.

$403 = 31 \times 13$, also gibt 400 durch 31 und 13 geteilt den Rest -3.

Wollten wir nun nur wissen, ob 1519 durch einen dieser Divisoren teilbar ist, so würden wir demnach anstatt $\frac{15}{4}$ von $\frac{19}{3}$ abzuziehen, 3×15 an 4×19 abziehen oder umgekehrt, und würden aus der Differenz $= 31$ erkennen, daß 1519 wohl durch 31, aber nicht durch 13 teilbar ist; zugleich aber sehen wir, wenn wir $15 \times 2 = 30$ zu 19 addieren und so 49 erhalten, daß 1519 auch durch 49 teilbar und somit das Produkt von 31×49 ist.

Diese letzteren Fälle mögen zur Zeit noch umständlich erscheinen, eben weil die oben erwähnte leichte Erkennbarkeit der Gegenfaktoren noch fehlt.*) Ohnehin muß ich zugeben, daß ich in diesem Briefe weit über das praktische Bedürfnis hinausgegangen bin, und zwar deshalb, weil die so behandelte Teilbarkeit der Zahlen außer für die Rechnungskontrolle noch in anderer Richtung von größerer Bedeutung ist: Einmal für die Reduktion von Zähler und Nenner, dann für die Bestimmung des gemeinschaftlichen Teilers bezw. Nenners, für die Ver-

*) Vergl. hierüber Brief VII, der hierfür ein allgemeines Gesetz entwickelt, sowie die Briefe II und IV.

wandlung periodischer Dezimalbrüche und endlich zur Lösung diophantischer Gleichungen u. s. f. Darüber mehr an anderer Stelle.

Vollen Nutzen hieraus wird allerdings nur der zu ziehen wissen, dem durch gründliches Studium der vorausgehenden 4 Briefe jene Anschauung in den Zahlenbeziehungen vermittelt wurde, durch die die in diesen Briefen entwickelten und angedeuteten Beziehungen sich als etwas Ungesuchtes, Selbstverständliches ergeben.

Einige auf den vorstehend entwickelten Beziehungen beruhende interessante rechnerische Gesellschaftsscherze mögen den Schluß dieses Briefes bilden:

Nehmen Sie an, Sie seien in der Lage, irgend Jemanden durch Bewirkung eines Einkaufs eine Gefälligkeit erweisen, z. B. ein gewisses Quantum Zucker zu — sagen wir — 36 Pf. pro kg besorgen zu sollen; denken Sie sich ferner hiervon ein beliebiges Quantum, auch halbe und Viertel-Kilo darunter, rechnen Sie aus, wieviel Sie demnach bei obigem Preise zu zahlen haben und nennen Sie mir die erhaltene Zahl unter Weglassung einer beliebigen

Ziffer, 0 ausgenommen, so werde ich Ihnen die fehlende Ziffer nennen, auch wenn Sie die mir zu nennenden Ziffern beliebig verstellen.

Lösung: Ist der eine Faktor = 36 ohne Rest durch 9 teilbar, so muß dies auch das Produkt und demnach die Quersumme sein. Wir haben also nur die Summe der uns genannten Ziffern von der nächst höheren durch 9 restlos teilbaren Zahl abzuziehen, um die fehlende Ziffer zu erhalten.

Nennt man uns z. B. 1, 4, 7, woraus wir die Summe 12 erhalten, so fehlt zur Teilbarkeit durch 9 und demnach an der Zahl selbst die Zahl 6, bei $9 + 1 + 2 + 6$ würde eine 9 fehlen, da 0 nicht weggelassen werden sollte.

Umgekehrt könnte eine beliebige Ziffer, 0 ausgenommen, dem Gesamtpreise addiert oder sonst beigefügt und die nun vorhandenen Ziffern in beliebiger Reihenfolge genannt werden; die Teilung der Ziffernsumme durch 9 gibt die hinzugefügte Ziffer.

Ähnlich interessant ist das folgende:

Schreiben Sie bitte eine Zahl von beliebig vielen Stellen an, bilden Sie dann aus genau denselben Ziffern — also durch beliebige Umstellungen eine andere Zahl und ziehen Sie die kleinere dieser mehrstelligen Zahlen von der größeren ab, so werde ich Ihnen wiederum die fehlende Ziffer angeben können, wenn Sie mir die anderen in beliebiger Reihenfolge nennen.

Lösung: Beide mehrstelligen Zahlen haben, da sie aus denselben Ziffern bestehen, dieselben Quersummen und dadurch auch denselben Neunerrest; ihre Differenz und damit auch die Quersumme derselben muß also wieder durch 9 ohne Rest teilbar sein. Die Bestimmung der fehlenden Ziffer ergibt sich hieraus ohne weiteres und deckt sich mit Vorigem.

Große Überraschung ruft oft folgender Zahlenscherz hervor:

Zu einem Geizhals kommen drei Kollekteure, um Beiträge zu einer Stiftung zu erbitten. Gerne ist dieser hierzu bereit, nur wünscht er, daß die Höhe seines Beitrages durch ein Orakel bestimmt werde, und die drei Herren, die wir A, B, C nennen wollen, hierbei dadurch mitwirken, daß jeder eine beliebige dreistellige Zahl anschreibe und daraus, indem er sie nochmals hinten anfügt, eine sechsstellige Zahl mache.

Und nun bittet der Geizhals: Herr A möge seine Zahl durch 7, Herr B die seine durch 11, Herr C die seine durch 13 teilen. Mit Vergnügen werde er die jeweils bleibenden Reste spenden. Da den erstaunten Kollekteuren aber kein Rest bleibt, fürchtet der heuchlerische Geizhals eine Verwechselung der Divisoren und bittet die Herren, sie mögen das Resultat ihrer Division nochmals teilen und zwar Herr A durch 13, Herr B durch 7, Herr C durch 11. Es bleibt wiederum kein Rest. — Dann müssen wir eben, meint der Geizhals, auch diesen Quotienten teilen, Herr A diesmal durch 11, Herr B durch 13, Herr C durch 7. Und da auch diesmal kein Rest bleibt, veranlaßt er endlich die Herren, „die nun doch wohl zur Division kein Vertrauen mehr haben dürften", am letzterhaltenen Quotienten die erstgeschriebene Zahl abzuziehen: Das Resultat ist wiederum = 0.

Hier die Berechnung:

A	B
314314	512512
: 7 = 44902, Rest = 0;	: 11 = 46592, Rest = 0;
: 13 = 3454, „ = 0;	: 7 = 6656, „ = 0;
: 11 = 314, „ = 0;	: 13 = 512, „ = 0;
— 314, „ = 0;	— 512, „ = 0;

C

783783

: 13 = 60291, Rest = 0;

: 11 = 5481, „ = 0;

: 7 = 783, „ = 0;

— 783, „ = 0.

Und die Ursache? Indem die drei Herren dieselbe Zahl nochmals hinten anfügten, haben sie dieselbe mit 1001 multipliziert; 1001 aber $=7 \times 11 \times 13$.

Ähnlich ist (mit vierstelligen Zahlen auszuführen) $73 \times 137 = 10001$.