

TEKNISKT BIBLIOTEK X

ÜBER DIE BERECHNUNG VON EISENBETONKONSTRUKTIONEN

ENTWURF ZU EINER EINHEITLICHEN
ELEMENTAREN THEORIE

VON

R. EKWALL

PREISGEKRÖNT VON DEM SCHWEDISCHEN
INGENIEUR- UND ARCHITEKTENVEREIN,
SVENSKA TEKNOLOGFÖRENINGEN, SOWIE
HERAUSGEGEBEN MIT UNTERSTÜTZUNG
DIESES VEREINS



SVENSKA TEKNOLOGFÖRENINGENS FÖRLAG
STOCKHOLM

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

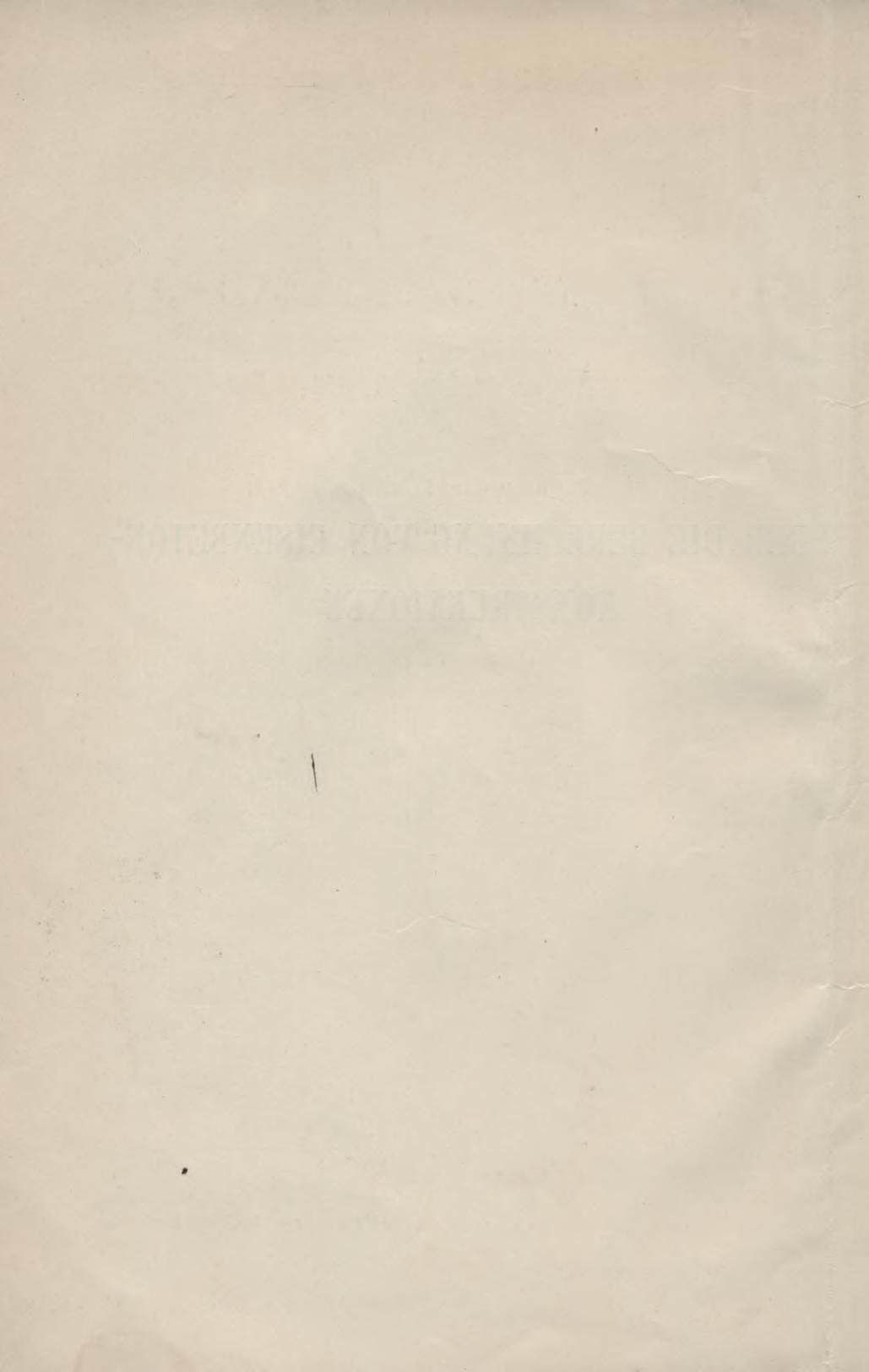


100000297165

ÜBER DIE BERECHNUNG VON EISENBETON-
KONSTRUKTIONEN

xxx

1182



ÜBER DIE BERECHNUNG VON EISEN- BETONKONSTRUKTIONEN

ENTWURF ZU EINER EINHEITLICHEN ELEMENTAREN
THEORIE

VON

R. EKWALL

Ingenieur der Kgl. Schwed. Weg-
und Wasserbaudirektion

PREISGEKRÖNT VON DEM SCHWEDISCHEN INGENIEUR- UND
ARCHITEKTENVEREIN, SVENSKA TEKNOLOGFÖRENINGEN,
SOWIE HERAUSGEGEBEN MIT UNTERSTÜTZUNG
DIESES VEREINS



Uppsala 1916

SVENSKA TEKNOLOGFÖRENINGENS FÖRLAG

xxx
1183

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

1838

UPPSALA 1916

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

Akc. Nr.

429/49

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. Allgemeine Sätze der Festigkeitslehre, ausgedehnt auf Material mit beliebigen Elastizitätseigenschaften	8
II. Allgemeines Verfahren für Biegungsberechnungen bei elastisch ungleichförmigem Material	30
III. Die physischen Eigenschaften des Betons	38
IV. Anwendung auf Platten und Balken	51
V. Anwendung auf Gewölbe	75

Die Berechnungsmethoden für Eisenbetonkonstruktionen sind immer noch in vielen Punkten unaufgeklärt, obwohl dieses Material Jahr für Jahr ein immer grösseres Anwendungsgebiet zu umfassen scheint. Die Unsicherheit glaubt der Verfasser darauf zurückführen zu müssen, dass der Begriff Sicherheitsgrad für diese Art von Konstruktionen nicht fixiert ist. Dass dies geschieht ist jedoch erforderlich, um zuverlässige Vergleiche anstellen zu können, sowohl mit Konstruktionen aus gewöhnlichen Materialien, als auch zwischen verschiedenartigen Eisenbetonkonstruktionen untereinander.

Ein schwach armerter Balken von gewissen Dimensionen, nach den üblichen Formeln berechnet, kann beispielsweise unter gewöhnlicher Belastung eine geringere Beanspruchung zeigen, als ein stärker armerter, aber dünnerer Balken. Steigert man dagegen die Belastung bis zum Bruch, so zeigen sowohl Theorie als auch Versuche, dass der stärker armierte Balken eine bedeutend höhere Bruchbelastung erträgt als der Andere. Trotz der berechneten geringeren Beanspruchungen muss nach den gewöhnlichen Begriffen Letzterer als schwächer angesehen werden.

Die allgemein übliche und richtige Definition des Sicherheitsgrades scheint die Folgende zu sein:

Eine Konstruktion hat eine m-faltige Sicherheit, wenn für die Bruchbelastung derselben wenigstens m-mal so grosse Belastung erforderlich ist als die in Wirklichkeit vorkommende ungünstigste Belastung.

Diese Definition wird beispielsweise in der gewöhnlichen Festigkeitslehre für Knicken angewandt. Ein Spezialfall dagegen ist der, dass bei einem Material, bei welchem Spannung und Dehnung innerhalb gewisser Grenzen proportional sind, das Verhältnis zwischen der am wenigsten schädlichen und der grössten wirklichen Beanspruchung als Sicherheitsgrad angesehen werden kann. Eisenbeton kann man zu diesem Spezialfall nicht rechnen.

Der Zweck der folgenden Abhandlung ist zu untersuchen, inwieweit man bei Anwendung der allgemeinen Definitionen eine

praktische Berechnungsmethode erreichen kann und inwieweit Einheitlichkeit auf diesem Wege zu erhoffen ist.

Sicher ist jedenfalls, dass infolge der verschiedenen Werte der Betonzugspannungen eine Berechnung für hohe Belastungen mehr mit der Wirklichkeit übereinstimmt und auch leichter experimentell kontrolliert werden kann, als eine Berechnung für die gewöhnlichen schwächeren Belastungen.

Es ist notwendig, die allgemeinen Theorien über Formänderungsarbeit, statische Unbestimmtheit, Bieungsdeformation, Arbeitsgleichungen u. s. w. kurz durchzugehen, da eine kritiklose Anwendung dieser Theorien auf armierten Beton sowohl im Allgemeinen, als auch besonders bei hohen Beanspruchungen zu ganz falschen Resultaten führen kann.

Diejenigen Leser, welche für die zunächst folgenden, rein theoretischen Entwicklungen ein besonderes Interesse nicht hegen, können direkt zu Kap. III übergehen.

I. Allgemeine Sätze der Festigkeitslehre, auf Material mit beliebigen Elastizitätseigenschaften angewandt.

Der Kürze wegen sollen die Ausführungen von Prof. Müller-Breslau, »Die graphische Statik der Baukonstruktion« sowie seine Bezeichnungen in derselben dem Folgenden zugrunde gelegt werden, ebenso im Bedarfsfalle Castigliano, »Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques« (Turin 1879). Ferner werden diejenigen Beweise, die mit den entsprechenden Schlussfolgerungen der obigen Abhandlungen analog sind, hier nicht besonders entwickelt, sondern nur in wichtigeren Fällen beschrieben werden.

Ein homogenes Material von solcher Beschaffenheit, dass die Dehnungen proportional mit den Spannungen wachsen, wie dies innerhalb weiter Grenzen bei Eisen, Stahl u. s. w. der Fall ist, werden wir im Folgenden als Material *mit elastischer Gleichförmigkeit* bezeichnen. Andere Materialien, unter diesen Beton und Eisenbeton, bezeichnen wir als *elastisch ungleichförmig*.

Die Clapeyron'sche Definition der Formänderungsarbeit eines Stabes:

$$A = \frac{1}{2} P \lambda$$

kann bei elastischer Ungleichförmigkeit nicht angewandt werden.

Wir nehmen an, dass ein Stab gedehnt wird durch eine sukzessive von O wachsende Kraft P_x , deren Endwert $= P$ (Fig. 1). Jedem P_x entspricht eine gewisse Verlängerung λ_x mit dem Endwert λ , wo $\lambda_x = \varphi(P_x)$, eine beliebige kontinuierliche Funktion, oder umgekehrt $P_x = \psi(\lambda_x)$. Wenn

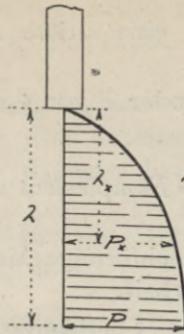


Fig. 1.



Fig. 2.

man nun die Werte von λ_x auf einer Linie und die Werte P_x senkrecht hierzu abträgt, so entsteht ein Diagramm, die Deformationskurve. Die Formänderungsarbeit A wird durch die schraffierte Fläche dargestellt und $A = \int_0^{\lambda} P_x d\lambda$. Ist $P_x = k\lambda_x$, d. h. das Material elastisch gleichförmig, so erhält das Diagramm eine Form wie in Fig. 2 und die Formänderungsarbeit A wird $= \frac{1}{2} P\lambda$. Betrachten wir wiederum das erste allgemeine Diagramm, so bemerken wir zuerst, dass es bei Anwendung des Prinzipes der virtuellen Verschiebung in Frage kommen kann, ebenso gut das Produkt $P\lambda$ der Endwerte zu verwenden, als P mit einer anderen beliebigen, gegen die geometrischen Bedingungen nicht verstossenden Verschiebung zu multiplizieren. $P\lambda$ kann man ja ebenfalls als eine

Fläche dargestellt und $A = \int_0^{\lambda} P_x d\lambda$. Ist $P_x = k\lambda_x$, d. h. das Material elastisch gleichförmig, so erhält das Diagramm eine Form wie in Fig. 2 und die Formänderungsarbeit A wird $= \frac{1}{2} P\lambda$. Betrachten wir wiederum das erste allgemeine Diagramm, so bemerken wir zuerst, dass es bei Anwendung des Prinzipes der virtuellen Verschiebung in Frage kommen kann, ebenso gut das Produkt $P\lambda$ der Endwerte zu verwenden, als P mit einer anderen beliebigen, gegen die geometrischen Bedingungen nicht verstossenden Verschiebung zu multiplizieren. $P\lambda$ kann man ja ebenfalls als eine

Fläche dargestellt und $A = \int_0^{\lambda} P_x d\lambda$. Ist $P_x = k\lambda_x$, d. h. das Material elastisch gleichförmig, so erhält das Diagramm eine Form wie in Fig. 2 und die Formänderungsarbeit A wird $= \frac{1}{2} P\lambda$. Betrachten wir wiederum das erste allgemeine Diagramm, so bemerken wir zuerst, dass es bei Anwendung des Prinzipes der virtuellen Verschiebung in Frage kommen kann, ebenso gut das Produkt $P\lambda$ der Endwerte zu verwenden, als P mit einer anderen beliebigen, gegen die geometrischen Bedingungen nicht verstossenden Verschiebung zu multiplizieren. $P\lambda$ kann man ja ebenfalls als eine

Fläche dargestellt und $A = \int_0^{\lambda} P_x d\lambda$. Ist $P_x = k\lambda_x$, d. h. das Material elastisch gleichförmig, so erhält das Diagramm eine Form wie in Fig. 2 und die Formänderungsarbeit A wird $= \frac{1}{2} P\lambda$. Betrachten wir wiederum das erste allgemeine Diagramm, so bemerken wir zuerst, dass es bei Anwendung des Prinzipes der virtuellen Verschiebung in Frage kommen kann, ebenso gut das Produkt $P\lambda$ der Endwerte zu verwenden, als P mit einer anderen beliebigen, gegen die geometrischen Bedingungen nicht verstossenden Verschiebung zu multiplizieren. $P\lambda$ kann man ja ebenfalls als eine

Fläche dargestellt und $A = \int_0^{\lambda} P_x d\lambda$. Ist $P_x = k\lambda_x$, d. h. das Material elastisch gleichförmig, so erhält das Diagramm eine Form wie in Fig. 2 und die Formänderungsarbeit A wird $= \frac{1}{2} P\lambda$. Betrachten wir wiederum das erste allgemeine Diagramm, so bemerken wir zuerst, dass es bei Anwendung des Prinzipes der virtuellen Verschiebung in Frage kommen kann, ebenso gut das Produkt $P\lambda$ der Endwerte zu verwenden, als P mit einer anderen beliebigen, gegen die geometrischen Bedingungen nicht verstossenden Verschiebung zu multiplizieren. $P\lambda$ kann man ja ebenfalls als eine

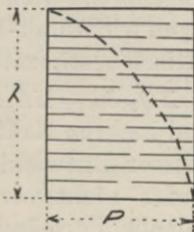


Fig. 3.

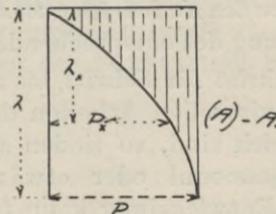


Fig. 4.

Arbeit betrachten. Um eine Bezeichnung hierfür zu erhalten, wollen wir hierfür $/A/$ schreiben, oder die virtuelle Formänderungsarbeit. (Siehe Fig. 3).

Wie es sich zeigen wird, erhält man fast die meiste An-

wendung für noch eine dritte Arbeitsfunktion $\int_0^P \lambda_x dP$, deren Fläche in obenstehender Figur 4 schraffiert ist. Wir bezeichnen:

$$\int_0^P \lambda_x dP = |A| - A = \text{Komplement der Formänderungsarbeit.}$$

Für elastisch gleichförmige Materialien ist das Komplement = der Formänderungsarbeit.

Schon eine erste Überlegung ergibt, dass der Satz von der Addition oder Zusammensetzung der Wirkungen für besondere Fälle äusserst genau untersucht werden muss. Der Satz gilt natürlich unbedingt bei einem statisch bestimmten System für die Kräfte und Spannungen untereinander. Derselbe hat aber keine Gültigkeit, auch nicht in statisch bestimmten Fällen, bei Kräften und Biegungen oder bei Spannungen und Dehnungen untereinander, wenn nicht die Dehnungen rechtwinkelige Funktionen der Spannungen sind.

In statisch unbestimmten Fällen, wo Dehnungen in die Berechnung eingeführt werden, um die Spannungen zu erhalten, gilt derselbe natürlich nicht für äussere Kräfte und Spannungen untereinander.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebung, welches für beliebige, geometrisch mögliche Verschiebung gilt, kann man natürlich zu allererst auf die virtuelle Formänderungsarbeit für ein Fachwerk anwenden, *aber ebenfalls auf die beiden anderen Funktionen, wenn man sich sowohl die äusseren Kräfte und Biegungen, als auch die Spannungen und Dehnungen sukzessive mit ungestörtem Gleichgewicht von Obis zu den Endwerten wachsend denkt*. Folgen wir Müller-Breslaus Entwicklung des entsprechenden Prinzips statisch bestimmter Fachwerke Schritt für Schritt bis zum Resultat: $\Sigma \bar{Q}_m \delta_m = \Sigma \bar{S} \Delta s$, oder dass die virtuellen Arbeiten der äusseren und inneren Kräfte summiert gleich sind, so finden wir, dass in dieser Entwicklung ein Elastizitätsmodul oder etwas Entsprechendes nicht vorkommt, und die Entwicklung kann für virtuelle, ideelle Formänderungsarbeiten für beliebige Materialien gelten.

Die Biegungen in einem statisch bestimmten System kann man folglich in der gewöhnlichen Weise berechnen dadurch, dass man in der Richtung und in dem Punkte, wo man die Biegungen sucht, eine Kraft = 1 setzt, wobei $\delta_m = \Sigma \bar{S}_m \Delta s$; hier bedeutet Δs die Dehnung, welche den wirklichen Stabspannungen entspricht, da-

gegen bedeutet \bar{S}_m die Stabspannung, welche durch eine Kraft = 1 entsteht, allein wirkend auf das Fachwerk in den Punkten m , und mit der Richtung von $+\delta_m$.

Das Korollarium, dass die äusseren und inneren Arbeiten gleich sind, gilt natürlich auch für alle drei Arbeitsfunktionen.

Maxwells und Bettis Sätze dagegen haben keine allgemeine Giltigkeit.

Als notwendige Bedingung für die Giltigkeit dieser beiden Sätze kann man leicht herleiten, dass

$$\varphi(S) = kS,$$

d. h. dass die Materialien elastisch gleichförmig sein müssen.

Daraus folgt natürlich nicht, dass der Elastizitätsmodul derselbe für alle Stäbe sein muss.

Es ist jedoch einleuchtend, dass ein grosser Teil der auf diesen Sätzen gegründeten Spezialmethoden, welche man anwendet, um Spannungen oder Biegungen in statisch unbestimmten Balken und Bogenkonstruktionen zu suchen, nicht ohne genauere Untersuchung auf Fachwerke aus Stäben von beliebigen Materialien angewendet werden kann, also, streng genommen, beispielsweise nicht für eine statisch unbestimmte Konstruktion, in welcher Gusseisenstäbe enthalten sind.

Die Sätze von den Ableitungen der Formänderungsarbeit.

In ihrer für die elastische Gleichförmigkeit giltigen Form sind folgende 2 Sätze bewiesen:

1) Wenn man die Formänderungsarbeit A in einem Stabsystem als Funktion der äusseren Kräfte ausdrückt, so erhält man die Durchbiegung unter einer gewissen Kraft P_n dadurch, dass man die partiellen Ableitungen der Funktion in Bezug auf P_n sucht.

$$\frac{\partial A}{\partial P_n} = \delta_n.$$

2) Wenn man die Formänderungsarbeit A als Funktion der Verschiebung der Knotenpunkte ausdrückt, so erhält man dadurch die mit einer gewissen Verschiebung von δ_n 's Richtungslinie zusammenfallende Kraftkomponente, welche im Verein mit den übrigen im System angebrachten Kräften die Verschiebung δ_n hervorruft, dass man die partielle Ableitung der Funktion in Bezug auf δ_n sucht.

$$\frac{\partial A}{\partial \delta_n} = P_n.$$

Vorläufig nehmen wir einen statisch bestimmten Fall an.

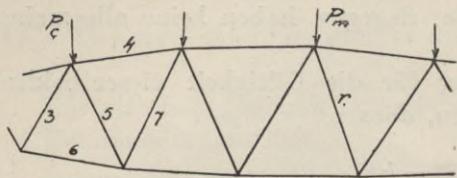


Fig. 5.

Die gegebenen äusseren Kräfte: $P_a P_b \dots P_m \dots P_n$. Die Nummern der Stäbe: 1, 2, 3...r...t. Die respektiven Stabspannungen: $S_1 S_2 S_3 \dots S_r \dots S_t$. Die speziell von der Kraft P_m herührende Spannung im Stabe r bezeichnen wir mit: S_{rm} .

Wir erhalten auf gewöhnliche Weise:

$$S_r = \Sigma S_{rm} = S_{ra} + S_{rb} + \dots S_{rm} + \dots S_{rn}.$$

Alle diese Spannungen, sowohl S_r als auch S_{rm} , können direkt aus den statischen Gleichungen als Funktionen der äusseren Kräfte berechnet werden.

Die Verlängerung eines gewissen Stabes r nennen wir λ_r , und wie oben schreiben wir:

$$\lambda_r = \varphi(S_r)$$

$$S_r = \psi(\lambda_r)$$

Die virtuelle Formänderungsarbeit für den Stab $r = |a|_r = S_r \lambda_r$.

Die Formänderungsarbeit... $a_r = \int_0^{\lambda_r} \psi(\lambda) d\lambda$.

Das Komplement der Formänderungsarbeit... $|a|_r - a_r = \int_0^{S_r} \varphi(S) dS$.

Wir gehen der Entwicklung etwas im Voraus und schreiben zwei besondere Ableitungen der Arbeitsfunktionen dieser einzelnen Stäbe. Aus der Definition eines finiten Integrals erhalten wir:

$$\frac{da_r}{d\lambda_r} = \psi(\lambda_r) = S_r; \text{ sowie}$$

$$\frac{d(|a|_r - a_r)}{dS_r} = \varphi(S_r) = \lambda_r.$$

Hiervon ist nur ein kurzer Schritt zur Erkenntnis, dass der erste Satz von den Ableitungen in dem Falle, wo eine elastische Gleichförmigkeit nicht vorkommt, auf das *Komplement der Formänderungsarbeit*, nicht auf die Formänderungsarbeit selbst, angewandt werden muss.

Der Beweis hierfür ergibt sich wie folgt:

$$|A| - A = \Sigma(|a/r - a_r) = (|a/1 - a_1) + (|a/2 - a_2) + \text{etc.}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial P_m} (|A| - A) = \frac{\partial}{\partial P_m} (|a/1 - a_1) + \frac{\partial}{\partial P_m} (|a/2 - a_2) + \text{etc.} \dots$$

l Stück Ausdrücke,

$$\text{aber: } \frac{\partial}{\partial P_m} (|a/r - a_r) = \frac{d}{dS_r} (|a/r - a_r) \frac{\partial S_r}{\partial P_m} = \lambda_r \frac{\partial S_r}{\partial P_m}.$$

Während wiederum S_r in einem statisch bestimmten System auf gewöhnliche Weise als eine Funktion ersten Grades der äusseren Kräfte bewiesen werden kann:

$$\therefore S_r = k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 + \dots + k_n P_n,$$

so wird $\frac{\partial S_r}{\partial P_m} = k_m$. Dieses k_m ist wiederum, wie gewöhnlich, der Wert, welchen die Spannung im Stabe r erhält, wenn die Kraft $P_m = 1$, oder $k_m = \frac{S_{rm}}{P_m}$; folglich erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial P_m} (|A| - A) = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + k_3 \lambda_3 + \text{etc.}$$

Oben wurde bewiesen, dass man für ein statisch bestimmtes System die Durchbiegungen nach der gewöhnlichen Methode mit der virtuellen Arbeit finden kann, und also:

$$\delta_m = \Sigma \bar{S}_m \lambda_m,$$

wo δ_m = der Durchbiegung unter P_m ; \bar{S}_m bezeichnet die in den einzelnen Stäben infolge der in P_m 's Angriffspunkt wirkenden Kraft = 1 entstehenden Spannungen, sowie λ_m die wirklichen Stabdehnungen.

Die Werte \bar{S}_m werden also, in Nummerfolge geschrieben:

$$\frac{S_{1m}}{P_m}, \frac{S_{2m}}{P_m}, \dots, \frac{S_{tm}}{P_m}; \text{ oder also } k_1 k_2 \dots k_t;$$

und folglich:

$$\delta_m = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + k_3 \lambda_3 + \text{etc.} = \frac{\partial}{\partial P_m} (|A| - A);$$

Der erste Satz von den Ableitungen der Arbeitsfunktionen muss also für die allgemeine Anwendung auf folgende Form umgewandelt werden:

Wenn man das Komplement der Formänderungsarbeit $|A| - A$ in einem Stabsystem als Funktion der äusseren Kräfte ausdrückt, so erhält man die Durchbiegung unter einer gewissen Kraft P_m dadurch, dass man die partielle Ableitung der Funktion in Bezug auf P_m sucht.

$$\therefore \frac{\partial}{\partial P_m} (|A| - A) = \delta_m.$$

Der reziproke Satz betreffend Aufsuchen der äusseren Kräfte, wenn die Knotenpunktverschiebungen als gegeben angenommen werden, bedarf dagegen keiner neuen Form und wird vollkommen analog bewiesen:

$$\frac{\partial A}{\partial \delta_n} = \lambda_{1n} S_1 + \lambda_{2n} S_2 + \lambda_{3n} S_3 + \text{etc.} = P_n.$$

Diese Sätze, deren Bedeutung bei Anwendung auf ein statisch bestimmtes System ausschliesslich theoretischer Art ist, gelten in unveränderter Form auch bei statischer Unbestimmtheit aller Art und haben hierbei, im Verein mit dem hergeleiteten Schlussatz betreffend Arbeitsminimum, auf Grund ihrer Allgemeingiltigkeit die praktische Bedeutung, dass sie bei mehr verwickelten Berechnungen als Schemas dienen können.

Um die Ausdehnung der Sätze auch betreffend die statisch unbestimmten Systeme zu beweisen, kann man auf gewöhnliche Art überzählige Stäbe oder Reaktionen mit Spannungen $X_1 X_2 X_3 \dots$ etc. entfernt denken. Wenn man an deren Stelle äussere Kräfte mit derselben Richtung wie die ausgeschiedenen Spannungen einführt, so bleibt ein statisch bestimmtes System übrig, in welchem alle Knotenpunkte dieselbe Verschiebung erhalten und folglich alle Stabspannungen dieselben bleiben wie in dem ursprünglichen System.

Wenn man festhält, dass das Fachwerk in ein statisch bestimmtes übergegangen ist, so kann man also die Abstandsveränderungen zwischen den Endpunkten der überzähligen Stäbe, oder mit anderen Worten die Dehnungen schreiben:

$$\lambda_{X_1} = -\frac{\partial}{\partial X_1} (/A/ - A);$$

$$\lambda_{X_2} = -\frac{\partial}{\partial X_2} (/A/ - A);$$

.....

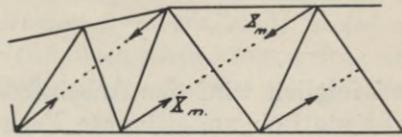


Fig. 6.

Das Minuszeichen, welches bezeichnet, dass Dehnung und Kraft entgegengesetzte Richtungen haben, wenn ein überzähliger Stab oder eine Reaktion durch eine äussere Kraft ersetzt worden ist, möge man besonders beachten, da dies für gewisse Anwendungen von Wichtigkeit ist.

$/A/ - A$ ist für das statisch bestimmte Hauptnetz giltig und ist eine Funktion der gegebenen äusseren Kräfte P und der Grössen X , als äussere Kräfte betrachtet; alle diese Quantitäten sind beim Differenzieren als unabhängig von einander zu betrachten.

Wir bezeichnen nun, wie oben, die elastischen Eigenschaften der Materialien mit:

$$\lambda = \varphi(S);$$

$$S = \psi(\lambda).$$

Angewandt auf die überzähligen Stäbe ergibt dies

$$\lambda_{X_1} = \varphi_1(X_1); \lambda_{X_2} = \varphi_2(X_2); \text{ etc. etc.}$$

Die beiden so gefundenen Ausdrücke für λ_{X_n} müssen gleich sein; und hieraus erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial X_1} (/A/ - A) + \varphi_1(X_1) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial X_2} (/A/ - A) + \varphi_2(X_2) = 0;$$

.....

Das Komplement der Formänderungsarbeit für das statisch bestimmte Hauptnetz haben wir mit $/A/ - A$ bezeichnet.

Das Arbeitskomplement für die überzähligen Stäbe wird:

$$\int_0^{X_1} \varphi_1(X_1) dX_1 + \int_0^{X_2} \varphi_2(X_2) dX_2 + \int_0^{X_3} \varphi_3(X_3) dX_3 + \text{etc.}$$

und folglich wird das Arbeitskomplement für das *ganze*, ursprüngliche statisch unbestimmte Fachwerk:

$$= (lA - A) + \sum \int_0^{X_n} \varphi_n(X_n) dX_n.$$

Differenziert man diesen jetzt gefundenen Ausdruck nach einer äusseren Kraft P , so wird die Ableitung des letzteren Teils $= 0$, da ja die Grössen X ebenfalls als äussere, von P unabhängige Kräfte zu betrachten sind. Hieraus ist zu erkennen, dass die Giltigkeit der oben, für statisch bestimmte Systeme bewiesenen Sätze über die Ableitungen in unveränderter Form auch auf statisch unbestimmte Konstruktionen ausgedehnt werden kann.

Differenziert man nun denselben Ausdruck nach einer gewissen überzähligen Spannung X_n , so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial X_n} (lA - A) + \varphi_n(X_n).$$

Nach Obigem ist dieser Ausdruck $= 0$.

Das ganze Gleichungssystem, welches ebenso viele Gleichungen als die Anzahl überzähliger Stäbe und Reaktionen enthält, kann man also dadurch erhalten, dass man die partiellen Ableitungen eines Ausdrucks für das ganze Arbeitskomplement des statisch unbestimmten Fachwerkes nach den Quantitäten X_n aufschreibt und diese Ableitungen $= 0$ setzt.

Man hat auf diese Weise ein System von Nullwerten für die partiellen Ableitungen erhalten, welches ein relatives Maximum oder Minimum der differenzierten Funktion andeutet.

Der ausführliche Beweis hierfür ist unter Beachtung des oben Angeführten vollständig analog mit Castiglianos Beweis in der »Théorie de l'équilibre« Kap. I. 14.

Der Kürze halber auf denselben verweisend, wollen wir nur

anführen, dass, wie aus dem Obigen hervorgeht, das Resultat bei Verwendung beliebigen Materials das Folgende wird:

Die Stabspannungen in einem statisch unbestimmten System erhält man, wenn man das Komplement der Formänderungsarbeit als Funktion der Stabspannungen ausdrückt, und die Werte derselben, welche die Funktion zu einem Minimum macht, sucht, wobei als Bedingungsgleichungen diejenigen Gleichungen gelten sollen, welche man aus den allgemeinen statischen Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems herleitet.

Ebenfalls ist einleuchtend, dass, wenn man von der Betrachtung ausgeht, dass

$$S = \psi(\lambda),$$

so kann man in analoger Weise einen reziproken Satz in folgender Form herleiten, nämlich:

Die Stabdehnungen in einem statisch unbestimmten System kann man erhalten, wenn man die Formänderungsarbeit als Funktion dieser Dehnungen ausdrückt, und die Werte der Dehnungen sucht, welche unter den gegebenen, äusseren, geometrischen Bedingungen die Funktion zu einem Minimum machen.

Die obenstehende oder eine andere, entsprechende Herleitung wird in der einen oder anderen Form unumgänglich, wenn man Arbeitsgleichungen auf massive Körper von elastisch ungleichförmigem Material anwenden will. Natürlich braucht man nicht mehr als den einen der beiden Minimisätze, beliebig welchen, anzuwenden, aber der, welcher angewendet wird, muss mit den richtigen Bedingungsgleichungen verbunden werden, und diese dürfen nicht verwechselt werden.

Zur näheren Erläuterung und zur Kontrolle der Richtigkeit der Sätze wollen wir, bevor wir zu massiven Körpern übergehen, folgendes Beispiel durchrechnen, welches das denkbar einfachste, aber gerade deswegen auffallend klar ist.

Beispiel: Ein starrer, gerader Stab liegt auf 3 elastischen Stützen, von welchen zwei sich proportional den Spannungen dehnen, der dritte dagegen proportional dem Quadrate der Spannungen. Gesucht: die Spannungen in den Stützen bei einer gegebenen Belastung Q .

Wir gehen zuerst von den Spannungen aus und schreiben:

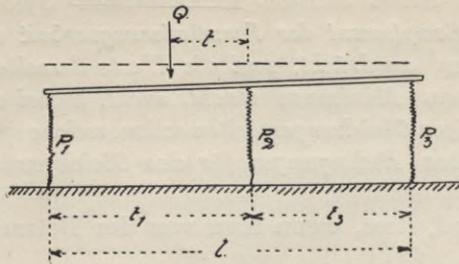


Fig. 7.

$$\lambda_1 = a p_1^2; \quad \therefore \int_0^{p_1} \lambda \, d p = \frac{1}{3} a p_1^3;$$

$$\lambda_2 = b p_2; \quad \therefore \int_0^{p_2} \lambda \, d p = \frac{1}{2} b p_2^2;$$

$$\lambda_3 = c p_3; \quad \therefore \int_0^{p_3} \lambda \, d p = \frac{1}{2} c p_3^2;$$

Die drei Arbeitsfunktionen werden:

$$|A| = a p_1^3 + b p_2^2 + c p_3^2;$$

$$A = \frac{2}{3} a p_1^3 + \frac{1}{2} b p_2^2 + \frac{1}{2} c p_3^2$$

und endlich das Arbeitskomplement:

$$|A| - A = \frac{1}{3} a p_1^3 + \frac{1}{2} b p_2^2 + \frac{1}{2} c p_3^2,$$

welch' letzteres nun angewandt werden soll.

Die *statischen* Bedingungsgleichungen werden am einfachsten geschrieben (aus den Momenten in Bezug auf p_3 und p_1):

$$p_1 = \frac{Q(t_3 + t) - p_2 t_3}{l};$$

$$p_3 = \frac{Q(t_1 - t) - p_2 t_1}{l}.$$

Das Minimum der Arbeitsfunktion findet man dadurch, dass man schreibt:

$$\frac{d(|A| - A)}{d p_2} = a p_1^2 \frac{d p_1}{d p_2} + b p_2 + c p_3 \frac{d p_3}{d p_2},$$

wobei aus den Bedingungsgleichungen folgt:

$$\frac{d p_1}{d p_2} = -\frac{t_3}{l};$$

$$\frac{d p_3}{d p_2} = -\frac{t_1}{l};$$

und daraus erhält man eine Gleichung:

$$-\frac{at_3}{l} p_1^2 + b p_2 - \frac{ct_1}{l} p_3 = 0, \quad (\text{a})$$

welche im Verein mit den Bedingungsgleichungen die gesuchten Spannungen ergibt.

Gleichzeitig wollen wir das reziproke Problem näher betrachten:

Auf demselben Stabe erhält ein gewisser Punkt eine senkrechte Verschiebung

(δ). Gesucht: die Dehnungen der Stützen.

Zuerst wird abgeleitet:

$$p_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{a}} \therefore \int_0^{\lambda_1} p_1 d\lambda = \frac{2}{3\sqrt{a}} \lambda_1^{\frac{3}{2}};$$

$$p_2 = \frac{\lambda_2}{b} \therefore \int_0^{\lambda_2} p_2 d\lambda = \frac{\lambda_2^2}{2b};$$

$$p_3 = \frac{\lambda_3}{c} \therefore \int_0^{\lambda_3} p_3 d\lambda = \frac{\lambda_3^2}{2c}.$$

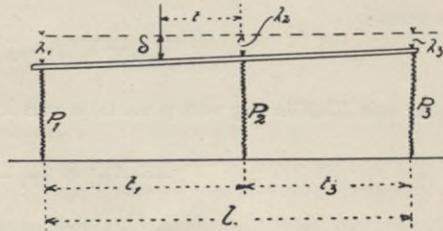


Fig. 8.

Folglich wird die Formänderungsarbeit (ausgedrückt in λ :

$$A = \frac{2}{3\sqrt{a}} \lambda_1^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2b} \lambda_2^2 + \frac{1}{2c} \lambda_3^2.$$

Die geometrischen Bedingungsgleichungen werden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{t_1}{t} (\delta - \lambda_2) = \lambda_2 \left(1 - \frac{t_1}{t}\right) + \frac{t_1}{t} \delta;$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 - \frac{t_3}{t} (\delta - \lambda_2) = \lambda_2 \left(1 + \frac{t_3}{t}\right) - \frac{t_3}{t} \delta.$$

Weiter erhält man das Minimum, wenn:

$$\frac{dA}{d\lambda_2} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{a}} \cdot \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} + \frac{1}{b} \lambda_2 + \frac{1}{c} \lambda_3 \frac{d\lambda_3}{d\lambda_2} = 0,$$

wobei aus den Bedingungsgleichungen hervorgeht:

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = 1 - \frac{t_1}{t};$$

$$\frac{d\lambda_3}{d\lambda_2} = 1 + \frac{t_3}{t};$$

und die gesuchte Gleichung, welche im Verein mit den Bedingungen die Dehnungen ergibt, wird:

$$\sqrt{\frac{\lambda_1}{a}} \left(1 - \frac{t_1}{t}\right) + \frac{1}{b} \lambda_2 + \frac{1}{c} \left(1 + \frac{t_3}{t}\right) \lambda_3 = 0. \quad (b)$$

In einem so einfachen Fall wie dem vorhergehenden kann die erforderliche dritte Gleichung auf viel leichtere Weise erhalten werden, beispielsweise, wenn die beiden ersten und statischen Bedingungsgleichungen komplettiert werden mit der geometrischen Bedingung:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{t_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{t_3},$$

woraus:

$$\lambda_1 t_3 - \lambda_2 (t_1 + t_3) + \lambda_3 t_1 = 0;$$

oder mit Einführung von p anstelle von λ sowie Division mit $-(t_1 + t_3) = -l$

$$-\frac{at_3}{l} p_1^2 + b p_2 - \frac{c t_1}{l} p_3 = 0,$$

d. h. dieselbe Gleichung wie Gleichung (a).

Oder wenn die zwei geometrischen Bedingungsgleichungen komplettiert werden mit der statischen Gleichung (die Momentengleichung um den Angriffspunkt der Kraft Q):

$$p_1 (t_1 - t) = p_2 t + p_3 (t_3 + t)$$

$$\therefore p_1 \left(1 - \frac{t_1}{t}\right) + p_2 + p_3 \left(1 + \frac{t_3}{t}\right) = 0;$$

sowie mit Einführung der λ -Werte:

$$\left(1 - \frac{t_1}{t}\right) \sqrt{\frac{\lambda_1}{a}} + \frac{\lambda_2}{b} + \left(1 + \frac{t_3}{t}\right) \frac{\lambda_3}{c} = 0,$$

oder dieselbe Gleichung wie Gleichung (b), wodurch also auch festgestellt wird, dass die beiden aus den reziproken Arbeitsgleichungen hergeleiteten Resultate mit einander übereinstimmen, insoweit als δ gerade die Q entsprechende Durchbiegung ist, sowie, bei näherem Nachsehen, dass die beiden paarweisen Bedingungsgleichungen mit einander nicht vertauscht werden können.

Halten wir uns endlich etwas bei der virtuellen Formänderungsarbeit auf:

$$|A| = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + p_3 \lambda_3 = a p_1^2 + b p_2^2 + c p_3^2;$$

$$\therefore \frac{1}{2} |A| = \frac{a}{2} p_1^2 + \frac{b}{2} p_2^2 + \frac{c}{2} p_3^2,$$

so können wir leicht feststellen, dass, wenn $^{1/2}|A|$ nach p_2 differenziert wird

$$\frac{1}{2} \frac{d|A|}{dp_2} = \frac{3}{2} a p_1^2 \cdot \frac{dp_1}{dp_2} + b p_2 + c p_3 \frac{dp_3}{dp_2},$$

die so erhaltene Gleichung nicht ein richtiges Resultat ergibt.

Wenn ein massiver Gewölbequerschnitt aus Beton als geradlinig deformiert angesehen wird, und als Arbeitsfunktion für die Berechnung der *Bruchbelastung* der Ausdruck $\frac{1}{2E} \left(\frac{P_2}{F} + \frac{M_2}{I} \right)$ angewandt wird, wofür Beispiele in der Literatur angeführt werden können (Zeitschr. d. Oesterr. Ing.- u. Arch. Ver. 1896), so enthält dies denselben Fehler.

Nebenbei ist jedoch zu bemerken, dass wenn, wie hier, es sich nur um *eine* Kraft handelt, man direkt aus der Anwendung des Prinzipes der virtuellen Verschiebung $\Sigma Q \delta = \Sigma p \lambda$, (d. h. die äusseren und inneren virtuellen Formänderungsarbeiten sind gleich) ableiten kann:

$$\delta = \frac{p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + p_3 \lambda_3}{Q}; \text{ u. s. w.}$$

Die Biegungsprobleme.

Wenn es sich um Stabsysteme handelt, leitet die Anwendung der Minimisätze auf einen Umweg in der Rechnung und hat, wie oben erwähnt, hauptsächlich schematische Bedeutung. Beim Biegungsproblem kann das Verhältnis in gewisser Weise umgekehrt sein, d. h. die Minimisätze können, wenn man so will, mit Vorteil als Prinzip für die Berechnung von elastischen Linien, Spannungen in komplizierten Fällen u. dgl. angewandt werden. Jeden festen Körper kann man als ein Stabsystem mit unendlich vielen Knotenpunkten und unendlich kleinen Stablängen betrachten. Wie leicht einzusehen ist, müssen die fraglichen Sätze, sowohl die über die Ableitungen als auch die über Minima, unveränderte Giltigkeit haben für angreifende Kräfte und deren Verschiebungen, für Spannungen und Dehnungen, auch innerhalb eines solchen unendlich zerteilten Systems, und gleichfalls für dessen Kombinationen mit einfachen Versteifungen und Streben, z. B. armierte Holzbalken, Spannerwerke u. a. m., für welch' letztere kombinierte Fälle die Berechnung mit Arbeitsfunktionen leichter als andere Methoden zum Ziele führt.

Eine notwendige Voraussetzung für das praktische Resultat der Anwendung der Arbeitsfunktionen ist, dass nach der Teilung in Axial- und Transversalspannungen sowie Schubspannungen innerhalb des gebogenen Körpers die beiden letzten Gruppen als klein gegenüber den Axialspannungen betrachtet werden können, wobei auch der Einfluss der Aussenkonturen auf die Spannungen u. dgl. wegfällt.

In einem langgestreckten Körper, auf welchen Axial- und Biegungsbelastungen, nicht aber Drehungen, wirken, findet ja

ein solches Verhältnis über gewisse Strecken statt, doch nicht in der Nähe der Angriffspunkte, konzentrierter Kräfte, Auflagerpunkte u. s. w. Je mehr überwiegend die Längsdimension ist, desto mehr überwiegend werden genannte Strecken und am allermeisten wird die Bedingung in der Nähe der Stellen erfüllt, wo das Momentendiagramm unter verteilter Belastung Maxima zeigt. Wenn also die vereinfachten elementaren Formänderungsarbeiten in den meisten Querschnitten genügend genaue Werte erhalten, so folgt, dass *die Summation der Sektionsarbeiten über die Längsachse ein gutes Resultat geben kann, obgleich die Summation auch über die Ausnahmestellen ausgedehnt wird.*

Die hier berührte Annäherung markiert eine Grenzlinie zwischen der Festigkeitslehre und der reinen, streng mathematischen Elastizitätstheorie.

Es ist nicht die Absicht, mit vorstehender Untersuchung in irgend einer Weise über den Rahmen der gewöhnlichen Festigkeitslehre hinauszugehen, weshalb u. a. die sogenannten lokalen Perturbationen, d. h. besondere Spannungsverteilungen in der Nähe der Angriffspunkte konzentrierter Kräfte und der Nullpunkte der Angriffsmomente, ganz weggelassen werden. In diesem Zusammenhang wollen wir jedoch hervorheben, dass bei Eisenbetonkonstruktionen die Nebenspannungen und Unregelmässigkeiten bei den Auflagern weit grössere Bedeutung haben können, als in anderen Fällen und eine ganz andere Aufmerksamkeit seitens der Konstrukteure erfordern.

Im Allgemeinen wird bekanntlich die Festigkeitslehre betr. die Biegungsprobleme aus Naviers Annahme hergeleitet, dass ein ebener Querschnitt eines Balkens nach der Biegung eben bleibt. Ein zuverlässiger experimenteller Beweis dieser Annahme wird, wie leicht einzusehen ist, immer schwer zu erbringen sein, da auch eine unmerkliche Krümmung auf einem beobachteten Querschnitt wesentlichen Variationen in den Spannungen entsprechen kann. Castigliano hat einen theoretischen Beweis für die ebene Deformation geliefert, wobei er von folgender, einfacher Annahme ausgeht:

Wenn ein langgestreckter Körper an den Enden von äusseren Kräften angegriffen wird, wird die Spannungsverteilung in den Querschnitten, welche nicht in der Nähe der Endflächen liegen, annäherungsweise unabhängig von der Art, in welcher die Belastungen auf die Endflächen sich verteilen, wenn nur die Schnittresultanten und das Moment unverändert bleiben.

Wie allgemein vor Prof. Bach, hat er jedoch isotrope Materialien und Proportionalität zwischen den Spannungen und Dehnungen vorausgesetzt.

Inwieweit eine ebene Deformation vorkommt oder nicht, auch bei elastisch ungleichförmigen Materialien, ist nicht bewiesen (vergleiche Bach: Elast.- u. Fest.). Die Frage ist jedoch von fundamentaler Bedeutung für die vorliegende Untersuchung, bei welcher es gilt, die Spannungsverteilung nicht in den niederen Stadien, sondern in den oberen, in der Nähe der Bruchgrenzen zu untersuchen. Dieselbe soll daher so eingehend wie möglich behandelt werden, ohne andere Hilfe als die oben hergeleiteten allgemeinen Sätze über die Arbeitsfunktionen.

Castiglianos soeben genannter Ausgangspunkt dürfte ohne weiteres als für alle Arten von Materialien gültig angenommen werden können, auch für zusammengesetzte, wenn nur eine der Schubfestigkeit entsprechende Adhäsion zwischen den verschiedenen Bestandteilen vorkommt.

Der Satz kann durch Folgendes veranschaulicht werden:

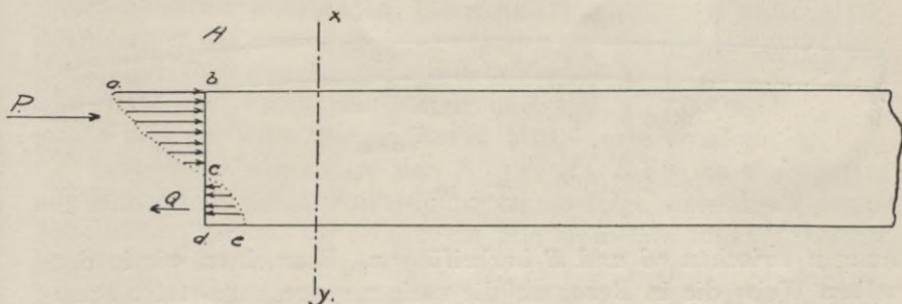


Fig. 9.

Auf die eine Endfläche A eines langgestreckten Körpers wirkt die auf vorstehender Zeichnung mit kleinen Pfeilen angegebene, nach einer gewissen Kurve $a-c-e$ verteilte Belastung.

Ersetzt man diese Belastung auf die Endflächen mit einer anderen, welche dieselbe Schnittresultanten und Momente ergibt, beispielsweise mit 2 konzentrierten Kräften P , Q , welche nach Lage und Grösse den Resultanten für die beiden Diagramme abc und cde entsprechen, lässt aber alle übrige äussere Belastung unverändert, so kann die Spannungsverteilung angenähert unverändert angesehen werden und in diesem Sinne unabhängig in allen Schnitten rechts von einem Querschnitt xy , welcher in der Nähe von A liegt.

Kommt ferner eine so grosse Veränderung nicht in Frage, sondern nur eine kleine Variation der Form der ersten Belastungskurve, so wird die Annäherung sehr scharf und xy verschiebt sich verhältnismässig immer näher nach A .

Weiter wird angenommen, dass ein langgestreckter Körper ACB beliebig belastet ist, und ausgewählt auf diesem ein kurzes Stück Δx , so gelegen, dass der Einfluss der auf Δx angebrachten äusseren Belastung gegenüber den auf den Endflächen db und cd angreifenden Spannungsmomenten und Axialkräften vernachlässigt werden kann. Bedingung hierfür ist nur, dass ACB lang und die äussere Belastung verteilt (nicht konzentriert) ist.

Nehmen wir nun an, dass das Stück AC weggenommen ist und dass die links von einem Mittelschnitt yz angreifenden Spannungen dazu übergegangen sind, äussere Kräfte zu werden. Nach oben genanntem Satze würde eine beliebige kleine Änderung der Angriffsweise dieser Spannungen, unter Voraussetzung, dass sie weiterhin das Stück CB im Gleichgewicht halten, keine Änderung der Span-

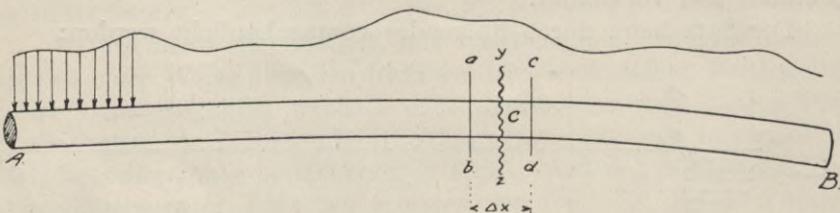


Fig. 10.

nungen zwischen cd und B herbeiführen. Betrachten wir in derselben Weise die in Bezug auf die vorigen entgegengesetzten Spannungen rechts vom Querschnitt yz , so wird der Schlusssatz derselbe für die Länge zwischen ab und A .

Hiernach kann man sich den ganzen Balken in derartige Stücke Δx eingeteilt denken, für welche man als also berechtigt ist, die Spannungsverteilungen der betr. Mittelquerschnitten *von einander vollständig unabhängig* zu betrachten, d. h. nur mit den einschränkenden Bedingungen, dass die Schnittresultanten und Momente gegeben und über die ganze Länge des Balkens unverändert sind.

Castigliano behandelt jedes derartige kurze Stück nach dem Problem von Saint-Venants und beweist elastizitätstheoretisch, dass die Deformation eben wird insoweit, als man von den von den Transversal- und Schubspannungen herrührenden Formänderungen absehen kann, und zeigt schliesslich, dass diese letzteren Formänderungsarbeiten im Allgemeinen wirklich klein sind im Vergleich mit den axialen Dehnungen.

Hier unten muss die Entwicklung auf Folgendes beschränkt werden:

Untenstehende Fig. zeigt ein Stück Δx mit zugehörigem Mo-

mentendiagramm, dessen Zunahme verhältnismässig unbedeutend ist, wie sich die Verhältnisse auf dem grössten Teil eines langen biegungsbelasteten Körpers gestalten. Mit anderen Worten, Schnittresultante und Moment können ohne nennenswerten Fehler als konstant auf der kurzen Strecke Δx angesehen werden.

Aus der konstanten Schnittresultante und dem Momente für ein Prisma folgt ohne weiteres, dass auch die Spannungen Schnitt für Schnitt innerhalb des Stückes Δx als konstant angesehen werden können. Hiernach folgt:

Der Balken ACB kann ohne nennenswerten Fehler als aus kürzeren Prismen Δx zusammengesetzt angesehen werden, mit für jedes derselben konstanten, sowie von den Spannungen der nebenliegenden Prismen unabhängigen Spannungen, nur mit dem Vorbehalt, dass die Schnittresultanten und Momente ihre für jedes Δx gegebenen Mittelwerte erhalten.

Betrachten wir weiter den Körper ACB als ein Stabsystem mit unendlich vielen Knotenpunkten, so folgt, dass das gesamte Arbeitskomplement für ACB ein Minimum sein muss. Dies ist nur möglich unter der Voraussetzung, dass die elementaren Arbeitskomplemente für die Prismen Δx jedes für sich Minima sind, während sie unter einander unabhängig sind. Für ein Prisma Δx wiederum, über welches die Spannungen konstant sind, wird das Minimum der Arbeitsfunktion durch das entsprechende Arbeitsminimum des konstanten Querschnittes bestimmt, und damit dürfte Folgendes bewiesen sein:

Man erhält einen Ausdruck für die wirkliche Verteilung der Normalspannungen in den meisten Querschnitten eines langen Balkens aus beliebigem Material dadurch, dass man diejenige Spannungsverteilung sucht, welche unter den gegebenen äusseren statischen Bedingungen das Arbeitskomplement des Querschnitts zu einem Minimum macht.¹

¹ Es ist von gewissem Interesse zu sehen, wie nahe man auf diese Weise den richtigen Werten kommen kann auch in solchen Fällen, wo die Spannungsverteilung zwischen den Schnitten *nicht* unabhängig ist und folglich die notwendigen Voraussetzungen *nicht* erfüllt sind, wenn nur die Konstruktion langgestreckt ist. Schreibt man das Gleichungssystem für die Lösung der Spannungen, beispielsweise in einem Fachwerkbalken mit 10-Fächern und doppelt steifen Diagonalen, so ist ja die Lösung dieses 10-fach statisch unbestimmten Falles eine sehr unbequeme Prozedur. Schreibt man weiter daneben die einfachen Gleichungen,

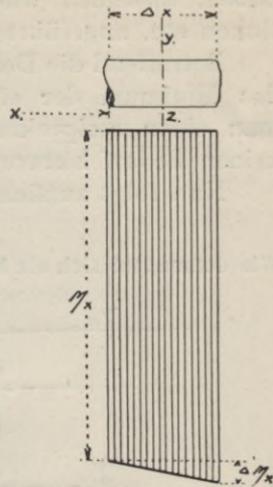


Fig. 11.

Die Einschränkungen werden, unbeachtet des Umstandes, dass wir uns mit den Arbeiten der Tangentialspannungen nicht befasst haben, dieselben wie die oben betreffend die lokalen Perturbationen etc. angeführt.

Betreffend die Dehnungen, die geometrischen Bedingungen und das Minimum der eigentlichen Formänderungsarbeit, so könnte man einen reziproken Satz aufstellen. Im Folgenden haben wir keinen Bedarf hiervon.

Nun folgt zunächst die Frage:

Wie deformiert sich ein beliebig zusammengesetzter, elastischer Querschnitt?

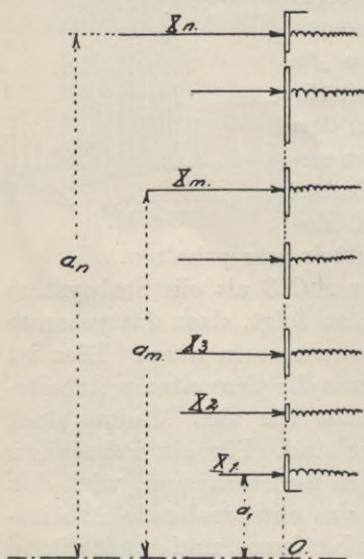


Fig. 12.

Angenommen eine Serie von n Stück parallelen Kräften X_1, X_2, \dots, X_n , beliebig wirkend, aber mit gegebenem Abstand $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ von einer gewissen Koordinatenachse, mit den Angriffspunkten über eine gegen die Krafrichtung senkrechte Linie und gegen elastische Stützen, welche auf untereinander ungleiche, beliebige, aber bekannte Weisen reagieren. Wie gross werden diese Kräfte, wenn sie den Bedingungen unterworfen sind, dass deren Summe einen gegebenen Wert P hat, dass deren Momentensumme einen gegebenen Wert M hat, sowie dass die Summe der Komplementen der Formänderungsarbeiten nach der Deformation ein Minimum sein soll?

Nehmen wir die Verschiebungen

welche man durch Anwendung obenstehenden Satzes für einen Schnitt durch jedes Fach erhalten kann, so scheinen bei einem Vergleich diese Gleichungen eine annähernd richtige Lösung zu geben, sobald die Vertikalkraft im Vergleich mit den Spannungen der Rahmstücke als klein betrachtet werden kann und exakt richtig in der Mitte, wo die Vertikalkraft = 0. Die meisten Spannungen im Fachwerk kann man auf diese Weise annähernd sehr einfach erhalten. Nimmt man einen der von Castiglione behandelten armierten Holzbalken, beispielsweise Nr. 2, wo natürlich die Spannungen in den respektiven Schnitten auch nicht als unabhängig von einander betrachtet werden dürfen, aber wendet trotzdem die Methode für den Mittelquerschnitt allein an, so erhält man als Eisenspannung 2080 Kg., während der nach Integration der Formänderungsarbeit über die ganze Länge der Konstruktion berechnete Wert 2122 Kg. ist; also beträgt der Fehler nicht ganz 2%.

in den respektiven Stützen $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$. Weiter kennen wir nach den Voraussetzungen, dass:

$$\lambda_1 = \varphi_1(X_1)$$

$$\lambda_2 = \varphi_2(X_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lambda_n = \varphi_n(X_n)$$

wo $\varphi_1 \varphi_2 \dots$ u. s. w.

ungleiche, aber bekannte Funktionsformen bezeichnen.

Die Arbeitskomplemente werden:

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^{X_1} \varphi_1(X_1) dX_1 \\ \int_0^{X_2} \varphi_2(X) dX \\ \dots \dots \dots \\ \int_0^{X_n} \varphi_n(X) dX \end{array} \right\} \text{ wo jedes besondere Integral folglich ebenfalls eine bekannte Funktion ist.}$$

Das Problem kann man nun mit folgenden 3 Gleichungen aufstellen:

$$\sum_1^n X_m - P = O, \quad \text{in welcher wir das linke Glied } A \text{ nennen wollen}$$

$$\sum_1^n X_m a_m - M = O_1 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad B \quad \gg \quad \gg$$

$$\sum_1^n \int_0^{X_m} \varphi_m(X) dX = \text{min.} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad C \quad \gg \quad \gg$$

von welchen die beiden ersteren den gewöhnlichen äusseren statischen Gleichungen für einen Schnitt entsprechen und die letzte die Arbeitsgleichung ist.

Weiter schreibt man mit Anwendung von 2 Hilfsgrößen μ und ν allgemein n Stück Gleichungen:

$$\frac{\partial C}{\partial X_m} = \mu \frac{\partial B}{\partial X_m} + \nu \frac{\partial A}{\partial X_m};$$

sowie die Bedingungsgleichungen:

$$\sum^n X_m - P = 0,$$

$$\sum^n X_m a_m - M = 0; \quad \text{Summe } n + 2 \text{ Gleichungen mit } n + 2 \text{ Unbekannten, nämlich } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sowie } \mu \text{ und } \nu.$$

Indem wir festhalten, dass X_1, X_2, \dots etc. als von einander unabhängig zu behandeln sind, werden:

$$\frac{\partial C}{\partial X_m} = \frac{\partial}{\partial X_m} \sum^n \int_0^{X_m} q_m(X) dX = \frac{\partial}{\partial X_m} \int_0^{X_m} q_m(X) dX = q_m(X) = \lambda_m;$$

$$\frac{\partial B}{\partial X_m} = a_m;$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_m} = 1;$$

und zum Schluss erhalten wir also

$$n \text{ Stück Gleichungen } \lambda_m = \mu a_m + \nu;$$

$$1 \quad \gg \quad \gg \quad \sum^n X_m - P = 0;$$

$$1 \quad \gg \quad \gg \quad \sum^n X_m a_m - M = 0;$$

Summe $n + 2$ Stück Gleichungen, wo μ und ν sowie X_1, X_2, \dots, X_n gelöst werden können, durch die bekannten Größen P , M und a_1, a_2, \dots, a_n ausgedrückt.

Da μ und ν in sämtlichen Gleichungen $\lambda_m = \mu a_m + \nu$ dieselben bleiben, so lässt sich erkennen, dass die Angriffspunkte der Kräfte

X nach der Deformation immer noch auf einer geraden Linie liegen, deren Gleichung in dem angenommenen Koordinatensystem geschrieben werden kann $\lambda = \mu a + \nu$;

Führen wir nun anstelle a_m die Bezeichnung z ,

$$\begin{array}{llll} \gg X_m \gg & \gg & \sigma_z y dz, \\ \gg \lambda_m \gg & \gg & \lambda_z \text{ (siehe die Fig.)}, \\ \gg a_1 \gg & \gg & e_1, \\ \gg a_2 \gg & \gg & e_2 \end{array}$$

ein und betrachten wir $n = \infty$,

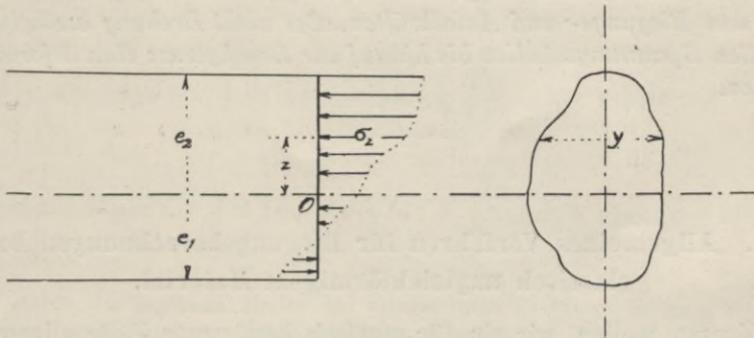


Fig. 13.

so geht beim Vergleich mit obenstehender Figur hervor, dass für einen Querschnitt von beliebiger Form, aus einem oder mehreren, elastisch gleichförmigen oder ungleichförmigen Materialien bestehend, unter den gemachten Voraussetzungen gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_z = \mu z + \nu; \\ \int_{e_1}^{e_2} \sigma_z y dz - P = 0; \\ \int_{e_1}^{e_2} \sigma_z z y dz - M = 0; \end{array} \right\} \text{ wo } \lambda_z \text{ für jede besondere Höhe eine beliebige, aber bekannte kontinuierliche Funktion } \sigma_z \text{ sein kann.}$$

Da μ und ν nur aus den äusseren, gegebenen Bedingungen berechnet werden, und also im Verhältnis zu z und λ konstant sind, so sind diese Gleichungen die allgemeinen Gleichungen, welche man für einen ebenen deformierten Querschnitt eines gebogenen

Balkens aufstellen kann. Die erste Gleichung gibt, nachdem μ und ν gelöst sind, die Koordinaten für die deformierte Lage des Schnittes, bezogen auf die unbelastete.

Obenstehender Beweis gilt, wie es scheint, eigentlich nur für den Fall, dass die Schnittresultante in einer Symmetrieebene angreift, kann jedoch unbehindert dahin verallgemeinert werden, dass er auch für eine Ebene durch die Hauptträgheitsachse gilt.¹

Mit Obenstehendem dürfte also folgender Satz als bewiesen angesehen werden können:

Unter den eingeführten Einschränkungen und Voraussetzungen kann man mit guter Annäherung davon ausgehen, dass die meisten Querschnitten in einem langgestreckten Körper von beliebigem Material, und von Biegungs- und Axialkräften, aber nicht Drehung beeinflusst, in allen Spannungsstadien bis hinauf zur Bruchgrenze eben deformiert werden.

II. Allgemeines Verfahren für Biegungsberechnungen bei elastisch ungleichförmigem Material.

Zuerst wollen wir ein für statisch bestimmte Fälle allgemein erläuterndes Beispiel für die Berechnung der Spannungen in einem Querschnitt mit Hilfe der 3 zuletzt hergeleiteten Gleichungen anführen. Wir nehmen beispielsweise 3 ungleiche, aber mit einander genügend adhärierende Materialien an.

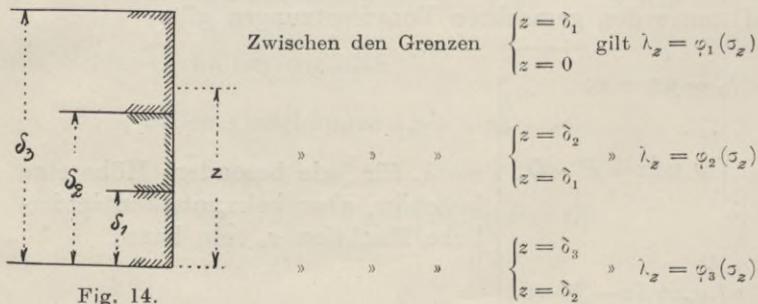


Fig. 14.

¹ Wenn man weiter die Aufgabe so verallgemeinert, dass man den Kräften X beliebige Richtungen mit ungleichen Winkeln a gegen die Horizontalachse gibt, sowie 3 Bedingungsgleichungen aufstellt, $\sum X \cos a = P$, $\sum X \sin a = V$, und $\sum X a \cos a = M$, sowie wie oben fortfährt, so geht daraus hervor, dass die Deformation nicht eben wird, wenn man nicht von den Tangentialspannungen absehen kann.

Folglich erhält man:

$$\begin{aligned} \text{zwischen } \begin{cases} z = \delta_1 \\ z = 0 \end{cases} & \varphi_1(\sigma_z) = \mu z + \nu \text{ oder invertiert } \sigma_z = \psi_1(\mu z + \nu) \\ \text{» } \begin{cases} z = \delta_2 \\ z = \delta_1 \end{cases} & \varphi_2(\sigma_z) = \mu z + \nu \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \sigma_z = \psi_2(\mu z + \nu) \\ \text{» } \begin{cases} z = \delta_3 \\ z = \delta_2 \end{cases} & \varphi_3(\sigma_z) = \mu z + \nu \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \sigma_z = \psi_3(\mu z + \nu) \end{aligned}$$

Man zerlegt nun die Integrale, setzt die zwischen den respektiven Grenzen geltenden Werte für σ_z ein, und erhält:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta_1} \psi_1(\mu z + \nu) y dz + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \psi_2(\mu z + \nu) y dz + \int_{\delta_2}^{\delta_3} \psi_3(\mu z + \nu) y dz - P = 0; \\ \int_0^{\delta_1} \psi_1(\mu z + \nu) y z dz + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \psi_2(\mu z + \nu) y z dz + \int_{\delta_2}^{\delta_3} \psi_3(\mu z + \nu) y z dz - M = 0; \end{aligned}$$

y ist durch die gegebene Breite des Querschnitts als Funktion von z bekannt und wird eingesetzt. Wir integrieren hierauf, setzen die Grenzen, und erhalten 2 Gleichungen zwischen μ , ν , P und M sowie die Dimensionen des Querschnitts, woraus μ und ν gelöst werden, worauf σ in jedem beliebigem Punkte des Querschnitts erhalten werden kann, durch Einsetzen des entsprechenden Wertes von z im respektiven Ausdruck:

$$\sigma = \psi(\mu z + \nu).$$

Wie auch ein bestimmter Querschnitt mit den Längskoordinaten x beschaffen oder zusammengesetzt ist, so entspricht jeder bestimmten Deformationslage und daraus folgender Spannungsverteilung innerhalb des Querschnitts teils eine bestimmte Achsen-
dehnung ν_x und Drehung μ_x , teils eine bestimmte resultierende Axialkraft P_x und d:o Moment M_x teils schliesslich auch bestimmte

Sektionsarbeitsfunktionen $\sum_0^{\delta} \int_0^{\sigma} \lambda d\sigma$ und $\sum_0^{\delta} \int_0^{\lambda} \sigma d\lambda$.

Vorbereitend möge nun festgestellt werden, dass neben jedem P alle möglichen M vorkommen können und umgekehrt, oder P und M sind gegenseitig unabhängig, ebenso ν und μ gegenseitig,

aber sobald ein gewisses Grössenpaar $\left. \begin{matrix} P \\ M \end{matrix} \right\}$ oder ein gewisses Grössenpaar $\left. \begin{matrix} \nu \\ \mu \end{matrix} \right\}$ gegeben ist, so folgen bestimmte Werte für die beiden übrigen genannten Quantitäten. Der Funktionszusammenhang zwischen den Quantitäten muss, wenn eine Berechnung möglich sein soll, auf die eine oder andere Weise bekannt sein, sei es durch mathematische Ausdrücke oder in Ermangelung dieser durch experimentell hergeleitete Tabellen.

Bei Berechnung von Durchbiegungen und statisch unbestimmten Fällen kann man die Anwendung der Arbeitsfunktionen vermeiden und die Rechnung nach folgender allgemeinen Ableitung vereinfachen.¹

Nebenstehende Figur zeigt schematisch einen ebenen deformierten Querschnitt mit der Axialkraft P , dem Moment M , der Dehnung in der Momentenachse $= \nu$ und der Dehnung im Abstand der Längeneinheit von der Achse als Mass der Dehnungen $= \mu$.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebung kann in folgender Weise ausgedrückt werden:

Wenn ein starres System, welches von gegebenen Kräften angegriffen wird, eine beliebige Verschiebung erfährt, so werden die Arbeiten der Resultante $=$ der Summe der Arbeiten der Komponenten. Ein deformierter Querschnitt, welcher unter Deformation nicht aufhört eben zu sein, kann als ein starres System betrachtet werden. Die Resultante für die Spannungen im Querschnitt ist auch die Resultante von P, M . Denkt man sich nun, dass die Deformation von 0 bis zur Lage auf der Figur wächst und dass gleichzeitig $\left. \begin{matrix} P \\ M \end{matrix} \right\}$ in entsprechender Weise wachsen, so erhält man nach dem angeführten Prinzip:

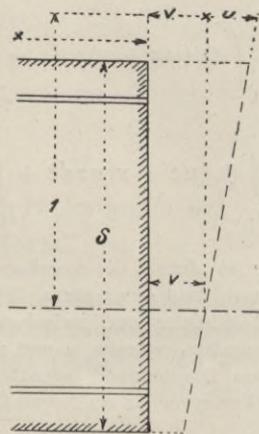


Fig. 15.

$$\sum_0^{\delta} \int_0^{\sigma} \lambda d\sigma = \int_0^P \nu dP + \int_0^M \mu dM;$$

$$\sum_0^{\lambda} \int_0^{\sigma} \sigma d\lambda = \int_0^{\nu} P d\nu + \int_0^{\mu} M d\mu,$$

¹ Hiervon sind solche Konstruktionen ausgenommen, bei welchen gebogene Körper mit einander oder mit Stäben kombiniert sind.

welche neugefundenen Ausdrücke für das Arbeitskomplement und die Arbeit eines Querschnitts wir resp. $F_x(P, M)$ und $G_x(\nu, \mu)$ benennen. Aus der Definition von finitem Integral folgt, da P und M von einander unabhängig sind:

$$\frac{\partial F_x}{\partial P} = \nu; \quad \frac{\partial F_x}{\partial M} = \mu;$$

sowie in derselben Weise:

$$\frac{\partial G_x}{\partial \nu} = P; \quad \frac{\partial G_x}{\partial \mu} = M.$$

Im Folgenden werden wir nur das Arbeitskomplement, F_x , behandeln, weil dieses am schnellsten für die meisten praktischen Probleme zum Ziele führen dürfte.

Wenn man das Arbeitskomplement der Querschnitte nach deren Längsachse summiert, sowie hierzu event. vorkommende Arbeitskomplemente in den Stützen L hinzufügt, so erhält man eine Summe $F = \int F_x(P, M) ds + L$, mit Integration über die Längsachse.

Um die Ableitung und das Minimum aus dieser Funktion zu erhalten, schreibt man dessen vollständiges Differential

$$\Delta F = \Delta \int F_x(P, M) ds + \Delta L, \quad \text{wo}$$

$$\Delta \int F_x(P, M) ds = \int \Delta F_x(P, M) ds = \int \left(\frac{\partial F_x}{\partial P} dP_x + \frac{\partial F_x}{\partial M_x} dM_x \right) ds;$$

und, nach dem was soeben gefunden ist, also

$$\Delta F = \int (\nu dP_x + \mu dM_x) ds + \Delta L.$$

Sucht man die Ableitung in Bezug auf irgend eine Kraft p_a unter der äusseren Belastung, so leitet man ab:

$$\frac{\partial F}{\partial p_a} = r_a = \int \left(\nu \frac{\partial P_x}{\partial p_a} + \mu \frac{\partial M_x}{\partial p_a} \right) ds + \frac{\partial L}{\partial p_a}. \quad (1)$$

Gleichung (1) ist ein für alle massiven langgestreckten Körper geltender Ausdruck für die Durchbiegung r_a in einem gewissen

Punkte, wo ein äusseres Belastungselement p_a gesetzt wird, oder mit anderen Worten, *die allgemeine Gleichung der elastischen Linien*. Die Integration $\int (\) ds$ ist über die ganze Länge der

Konstruktion ausgedehnt. $\frac{\partial P_x}{\partial p_a}$, $\frac{\partial M_x}{\partial p_a}$, $\frac{\partial L}{\partial p_a}$ sind wie gewöhnlich die Axialkräfte, Momente und Reaktionen, welche von einer gewissen Kraft = 1 entstehen, mit Angriffspunkt und Richtung von p_a .

Zur Erläuterung führen wir folgendes einfaches Beispiel an, welches der Übersichtlichkeit und Kontrolle halber, für gewöhnliches elastisch gleichförmiges Material gelten soll.

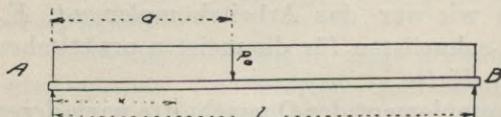


Fig. 16.

Ein elastisch gleichförmiger Balken A—B hat eine gleichmässig verteilte Belastung = p pro Längeneinheit zu tragen. Gesucht soll werden mit Hilfe der Gleichung (1) die Durchbiegung η im Abstand $x = a$.

Da Axialkräfte und Stützenreaktionen nicht vorkommen, geht der Ausdruck über in:

$$\eta_a = \int_{x=0}^{x=l} \mu_x \frac{\partial M_x}{\partial p_a} dx.$$

Das Moment aus einer Kraft = 1, angreifend bei a , wird:

$$\begin{aligned} \text{auf der Strecke } x=0 \text{ bis } x=a; & \quad \frac{l-a}{l} x = \frac{\partial M_x}{\partial p_a} \\ \text{» » » } x=a \text{ » } x=l; & \quad \frac{l-x}{l} a = \frac{\partial M_x}{\partial p_a}. \end{aligned}$$

μ_x findet man leicht (vergleiche das Folgende) bei elastischer Gleichförmigkeit gleich $\frac{M_x}{IE}$; M_x ist in diesem Biegungsfalle die ganze Strecke über: $M_x = \frac{p}{2} x(l-x)$; und erhalten wir, da das Integral bei a geteilt werden muss,

$$\eta_a = \frac{p}{2IE} \cdot \frac{l-a}{l} \cdot \int_{x=0}^{x=a} x^2(l-x) dx + \frac{p}{2IE} \cdot \frac{a}{l} \int_{x=a}^{x=l} x(l-x)^2 dx,$$

sowie nach der Integration:

$\eta_a = \frac{pl^4}{24IE} \left(\frac{a^4}{l^4} - 2 \frac{a^3}{l^3} + \frac{a}{l} \right)$, worin man, wenn a dazu übergeht, die Längskoordinate zu bedeuten, die Gleichung der elastischen Linie für diesen Biegungsfall wiedererkennt.

(Wie erkenntlich erfordert diese Methode etwas Übung, die zwei Längskordinaten x und a auseinander zu halten, aber aus schematischen Rücksichten und für die vorliegende Untersuchung ist sie ohne Zweifel vorzuziehen, anstatt zweimal zu integrieren $\frac{d^2 y}{dx^2} = \mu_x = \frac{M_x}{IE}$ oder 2 Seilpolygone zu zeichnen.)

Wenn überzählige Reaktionen und das Reaktionsmoment X_n vorkommen, setzt man:

$$P_x = f_1(X_1 X_2 X_3 \dots);$$

$$M_x = f_2(X_1 X_2 X_3 \dots);$$

$$L = f_3(X_1 X_2 X_3 \dots);$$

d. h. $X_1 X_2 X_3 \dots$ werden als äussere Kräfte betrachtet. Das übrigbleibende ist ein statisch bestimmtes System und also $f_1 f_2 f_3$ ein Ausdruck ersten Grades in Bezug auf $X_1 X_2 X_3 \dots$.

Hieraus erhält man:

$$dP_x = \frac{\partial f_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial f_1}{\partial X_3} dX_3 + \dots$$

$$dM_x = \frac{\partial f_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial f_2}{\partial X_3} dX_3 + \dots$$

sowie

$$dL = \frac{\partial f_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial f_3}{\partial X_3} dX_3 + \dots$$

Die Arbeitsfunktion F wird zum Minimum, wenn $\Delta F = 0$.

Der erste Teil von ΔF ist mit Obenstehendem klar; der andere Teil $\Delta L = \Sigma \Delta L_A + \Sigma \Delta L_X$, worin L_A die Arbeiten in den Stützen $A, B \dots C$, welche in dem statisch bestimmten System übrig bleiben, sowie L_X die Arbeiten der überzähligen Reaktionen darstellt. Sowohl L_A als auch L_X sind die oben angeführten Positiven und werden am einfachsten als Arbeiten innerhalb elastischer Stützen betrachtet, welche in einem unverschiebbaren Stützpunkt schliessen, sei es, dass es in der Tat so ist oder nicht (siehe die Figur). F ist das Arbeitskomplement innerhalb des ganzen so ausgedehnten Systems mit unverschiebbaren Stützen. Mit dieser Anschauungsweise kann, wenn das Zeichen für eine Stützenverschiebung η zweifelhaft scheint, die Frage entscheidet

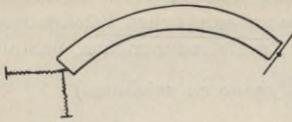


Fig. 17.

werden. Wenn man dagegen sowohl Reaktionen als auch Stützenverschiebungen positiv in derselben Richtung rechnet, welche für die äussere Belastung gewählt wurde, so muss man setzen (vergleiche Seite 15)

$$\frac{dL_A}{dA} = -\eta_A; \quad \frac{dL_B}{dB} = -\eta_B; \quad \frac{dL_{X_1}}{dX_1} = -\eta_1 \text{ u. s. w.} \text{ Man hat weiter}$$

$$\Delta L_A = \frac{\partial L_A}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial L_A}{\partial X_2} dX_2 + \dots \text{etc.},$$

$$\text{wo } \frac{\partial L_A}{\partial X_1} \text{ u. s. w.} = \frac{dL_A}{dA} \cdot \frac{\partial A}{\partial X_1} = -\eta_A \frac{\partial A}{\partial X_1} \text{ u. s. w.}$$

sowie

$$\Delta L_X = -\eta_1 dX_1 - \eta_2 dX_2 - \eta_3 dX_3 - \text{etc.}$$

Das Endresultat des Ganzen wird, wenn man alle mit dX_1 multiplizierten Ausdrücke für sich sammelt u. s. w.:

$$\begin{aligned} \Delta F = & \left[\int \left(\nu_x \frac{\partial P_x}{\partial X_1} + \mu_x \frac{\partial M_x}{\partial X_1} \right) ds - \sum \eta_A \frac{\partial A}{\partial X_1} - \eta_1 \right] dX_1 + \\ & + \left[\int \left(\nu_x \frac{\partial P_x}{\partial X_2} + \mu_x \frac{\partial M_x}{\partial X_2} \right) ds - \sum \eta_A \frac{\partial A}{\partial X_2} - \eta_2 \right] dX_2 + \\ & + \dots = 0. \end{aligned}$$

Und da in dieser Gleichung den Grössen dX_1, dX_2, \dots etc. beliebige, von einander unabhängige Werte gegeben werden können, so muss jeder Ausdruck für sich $= 0$ sein, und die Gleichung zerfällt in n Stück Gleichungen, oder ebensoviel wie die Anzahl der statisch unbestimmten Quantitäten:

$$\int \left(\nu_x \frac{\partial P_x}{\partial X_n} + \mu_x \frac{\partial M_x}{\partial X_n} \right) ds - \sum \eta_A \frac{\partial A}{\partial X_n} - \eta_n = 0 \quad (2)$$

(n Stück Gleichungen).

Die Integration $\int () ds$ bedeutet die Summierung Querschnitt auf Querschnitt über die ganze Länge der Konstruktion. $\frac{\partial P_x}{\partial X_n}$,

$\frac{\partial M_x}{\partial X_n}, \frac{\partial A}{\partial X_n}$ sind wie gewöhnlich die resp. Werte P_x, M_x, A für $X_n = 1$ allein wirkend.

Nach Gleichung (2) können die Spannungen bei statisch unbestimmter Auflage oder Einspannung in beliebiger Weise gelöst werden, sobald man aus der Zusammensetzung der Querschnitte weiss, welche Funktionen ν und μ von P und M sind.

Kann man aus den allgemeinen elastischen Eigenschaften der Materialien den analytischen Ausdruck aus der Form herleiten:

$$\nu = u(P, M);$$

$$\mu = w(P, M),$$

so kann die Integration in gewöhnlicher Weise geschehen. *Ist dagegen der Zusammenhang nur durch Tabellenwerte bekannt, so muss man das Integralzeichen mit Σ und ds gegen eine geeignete Anzahl ΔX vertauschen, d. h. den Körper in kurze Prismen teilen, für welche die Mittelquerschnittswerte berechnet und summiert werden.*

Bei den reinen Biegungsaufgaben verschwinden in (2) die Ausdrücke $\nu_x \frac{\partial P_x}{\partial X_n}$, weil die Axialkraft und folglich auch $\frac{\partial P_x}{\partial X_n}$ identisch = 0 ist.

Für den Fall, dass ein homogenes Material mit elastischer Proportionalität vorliegt, sowie ausserdem die Schwerpunktschse der Querschnitte als Momentenachse gewählt wird, nimmt vorstehende Ableitung folgende bekannte Form an:

$$F_x = \frac{1}{2E} \left(\frac{P_x^2}{F_x} + \frac{M_x^2}{I_x} \right);$$

und daraus, wenn man von Stützenverschiebungen absieht, die Gleichung (2)

$$\int \left(\frac{P_x}{EF_x} \cdot \frac{\partial P_x}{\partial X_n} + \frac{M_x}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X_n} \right) ds = 0,$$

(n Stück Gleichungen)

woraus, verglichen mit (2), hervorgeht, dass, wie leicht zu kontrollieren, für gewöhnliche, einfache Materialien mit konstantem E die spezifische Dehnung ν in der Schwerpunktschse = $\frac{P}{EF}$ und der Drehungswinkel pro Längeneinheit = $\frac{M}{EI}$.

Für Beton und Eisenbeton sind die Beziehungen zwischen einerseits ν , μ , anderseits P , M bei weitem nicht so einfach und allgemein gültig, sondern nur für gewisse Aufgaben und Gebiete kann man verhältnismässig einfache, angenäherte Ausdrücke für ν und μ erhalten, wobei jedoch im allgemeinen jeder von sowohl P wie auch M abhängig ist. Zuletzt bleibt immer noch die Teilung in Prismen übrig.

III. Die physischen Eigenschaften des Betons.

Die Verhältnisse zwischen Formänderung und Schnittresultante in einem rechteckigen Beton- oder Eisenbetonquerschnitt.

Im Folgenden wenden wir *cm. und kg. als Einheiten* an, sowie, wenn nicht anders angegeben, folgende Bezeichnungen:

δ = Höhe eines rechteckigen Querschnitts = Betonfläche pro Breitencentimeter.

F_e = Eisenhöhe, wenn man das Eisen ausgebreitet annimmt, oder Eisenfläche pro Breitencentimeter.

$\alpha = \frac{100 F_e}{\delta} = \% \text{ Eiseneinlage.}$

δ' = Abstand zwischen oberer und unterer Eiseneinlage in einem doppelt armierten Querschnitt.

x = Längskoordinate.

z = Höhenkoordinate, gerechnet von einer Momentenachse für den Querschnitt.

σ_b, σ_e = Beton-, resp. Eisenspannungen.

σ_1 = Betonspannung in der Unterkante eines Querschnitts.

σ_2 = Betonspannung in der Oberkante eines Querschnitts.

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ = resp. Dehnungen pro Längeneinheit.

$$P = \int_{-\delta}^{\delta} \sigma dz = \text{der aus der äusseren Belastung gegebenen Schnittresultante.}$$

$$M = \int_{-\delta}^{\delta} \sigma z dz = \text{dem aus der äusseren Belastung gegebenen Moment.}$$

ν = dem Wert ε bei der Momentenachse.

μ = der Winkelveränderung bei der Deformation von zwei in 1 cm. Abstand belegenden Querschnitten.

E = Elastizitätsmodul des Eisens = 2,000,000 kg./cm².

E_0 = Grösse $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ für Beton bei $\left. \begin{array}{l} \sigma = 0 \\ \varepsilon = 0 \end{array} \right\}$

$k = \frac{E_0}{250000}$, einem Koeffizient, welcher die Quantität des Betons angibt.

Die Betonspannungen und relativen Dehnungen haben, um überwiegend negative Ausdrücke zu vermeiden, positive Zeichen für Druck und negative für Zug. Auch die Zugspannungen in der Eiseneinlage bezeichnen wir als negativ.

Bei Elastizitätsproben eines Betonmaterials von einem gewissen Mischungsverhältnis erhält man, wie bekannt, aus den Proben ein Bündel Deformationskurven, d. h. Diagramme über den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen, mit nebenstehendem allgemeinem Aussehen auf der Druckseite.

Die Spannungen wachsen verhältnismässig geringer als die Dehnungen und streben nach einer asymptotisch absoluten Maximalspannung K , welche jedoch nicht erreicht wird, weil der Bruch früher eintrittt.

Man kann eine Mittelkurve einlegen, wie auf der Figur punktiert bezeichnet. Als solche Mittelkurve hat Prof. Ritter (Schweizer. Bauzeitung 1899) diejenige vorgeschlagen, welche durch den analytischen Ausdruck repräsentiert wird:

$$\sigma = K(1 - e^{-1000 \varepsilon}).$$

In der hier folgenden Darstellung wenden wir diese Kurve an, sind aber unverhindert, die abgeleiteten Methoden auf jede beliebige experimentell gefundene Mittelkurve anzuwenden. [Professor Bachs einfache Formel (Elasticität und Festigkeit) kann man aus dem Grunde nicht anwenden, weil sie nur für geringere Spannungen gilt.]

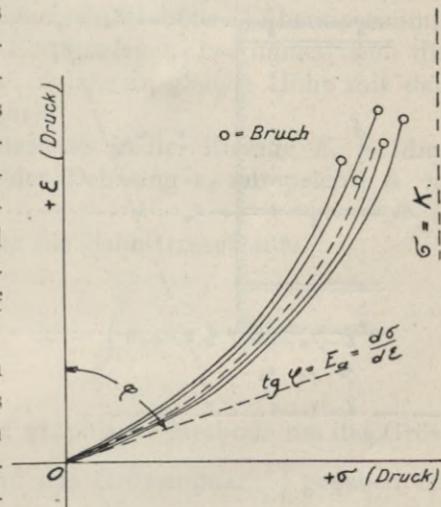


Fig. 18.

In der Zugseite ist, wie bekannt, die Spannungszunahme noch viel geringer. Der Bruch trifft schon bei $1000 \varepsilon = 0,1$ à $0,2$ mit $\delta = -8$ à 12 Atm. ein, wenn Eiseneinlagen fehlen. Sind jedoch geeignete Eiseneinlagen vorhanden, so wird der Beton auf der Zugseite gewissermassen plastisch (Considères Versuch) und folgt, ohne wesentliche Spannungszunahme die Dehnung des Eisens bis zur Proportionalitätsgrenze ($1000 \varepsilon = \sim -1,0$). Erst kurz vor dem Stadium, wo man bei Streckproben die bekannte Quetschung hört, kann man die erste haarfeine Rissbildung im Beton beobachten, wenn derselbe mit der nötigen Sorgfalt hergestellt ist.

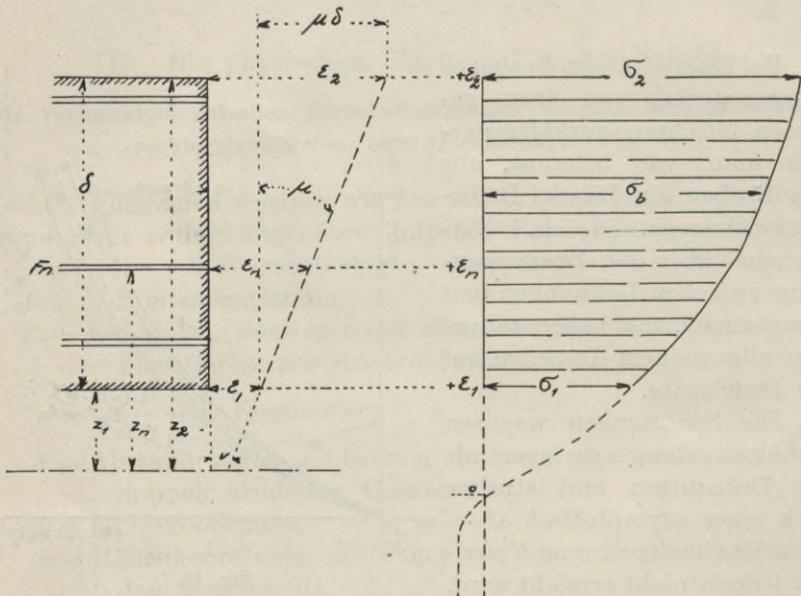


Fig. 19.

Auf Pl. 1 ist die hier gewählte, oben beschriebene Deformationskurve dargestellt. Die Druckbruchgrenze des Betons kann man bei $\begin{cases} 1000 \varepsilon = \sim 1,9 \\ \sigma_b = \sim 210 \end{cases}$ annehmen und den Bruch bei Zug ohne Eiseneinlage bei $\sigma_b = 10$ Atm. Diese 10 Atm. kann man, wenn Eiseneinlagen vorhanden sind, als mitarbeitend annehmen, dagegen rechnet man event. darüber hinaus wirksame Betonzugspannungen nicht mit. Letzterwähnte Verhältnisse müssen ja nach der Natur der Sache immer ungewiss bleiben. Die hier angewandte Betrachtungsweise repräsentiert eine Mittellage, und wenn sie auch in Wirklichkeit in dem einen oder anderen Falle etwas

variiert, so spielt dies in den folgenden Berechnungen für hohe Belastung praktisch genommen keine Rolle. Der Elastizitätsmodul, in oben angegebenem Sinne aufgefasst, wird $E_o = 250000$.

Ein Beton von oben beschriebener Beschaffenheit kann ungefähr aus 1 Teile Portlandzement und 4 Teilen Sand und Kies hergestellt werden. Der Kürze halber werden wir im Folgenden Beton von dieser Qualität mit $k = 1$ bezeichnen. Ein Mischungsverhältnis, dessen $E_o = 200000$ ist, hat k 0,8 u. s. w. proportional zu E_o .

In einem eben deformierten Querschnitt stellt, wie bekannt, die Spannungsverteilung denjenigen Teil der Deformationskurve dar, welcher zwischen den Dehnungen in der obersten und untersten Faser liegt. Die Skala über die ε -Achse der Deformationskurve muss man sich hierbei ausgedehnt oder zusammengedrückt denken, so dass der Abstand ε_1 bis ε_2 mit der Querschnittshöhe δ übereinstimmt. Für die im Beton verteilten Eiseneinlagen bestimmen sich die Spannungen durch die Werte ε , welche in gleiche Höhe mit den resp. Eisen kommen (vergl. Figur).

Die Eisenspannung beispielsweise in der Einlage F_n ist diejenige Eisenspannung, welche der Dehnung ε_n entspricht, d. h. $E \cdot \varepsilon_n \cdot F_n$, wobei $\sigma_e = E \varepsilon_n$.

Man erhält als Ausdruck für die Schnittresultante:

$$P = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_b dz + \sum \sigma_e F_e; \quad M = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_b z dz + \sum \sigma_e F_e z_e.$$

Das Vorhergehende ist also eine graphische Methode um das Grössenpaar $\left. \begin{matrix} P \\ M \end{matrix} \right\}$ zu bestimmen, wenn das Grössenpaar $\left. \begin{matrix} \nu \\ u \end{matrix} \right\}$ gegeben ist (vergl. Seite 32).

Der Einfachheit halber verschieben wir nun die Momentenachse nach der Querschnittsmitte, wohin wir sie überall im Folgenden verlegt denken, wenn nicht anders angegeben. Hierbei wird:

$$\left. \begin{array}{l} \nu = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2}; \\ u = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\delta}; \end{array} \right\} \text{ und } \left. \begin{array}{l} P = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_b dz + \sum \sigma_e F_e; \\ M = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_b z dz + \sum \sigma_e F_e z; \end{array} \right\}$$

Die Ausdrücke F_e können wir mit $\frac{\alpha_1 \delta}{100}$, $\frac{\alpha_2 \delta}{100}$ u. s. w. ersetzen, wo α die Prozentzahl der einzelnen Eiseneinlagen bedeutet.

Um die Variable z gegen die Variable ε zu vertauschen, schreiben wir weiter:

$$\varepsilon = \nu + \mu z; \quad \therefore z = \frac{\varepsilon - \nu}{\mu} \quad \text{oder} \quad \therefore z = \frac{\delta}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} \right);$$

$$\text{sowie} \quad \therefore dz = \frac{\delta}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot d\varepsilon,$$

woraus wir ableiten:

$$\frac{P}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_b d\varepsilon + \sum \frac{\alpha}{100} \sigma_e; \quad (3)$$

$$\frac{M}{\delta^2} = \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} \right) \sigma_b d\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \sum \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} \right) \frac{\alpha}{100} \sigma_e.$$

In diesen beiden Ausdrücken, welche für die praktische Anwendung nicht bestimmt sind, möge Folgendes beachtet werden: σ_b und σ_e sind Funktionen ausschliesslich von resp. ε . Alle ε sind Längsveränderungen pro Längeneinheit und also unbenannte Zahlen. Ebenso alle α .

δ kommt rechts vom Gleichheitszeichen nicht vor.

In den Ausdrücken $\nu = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2}$ und $\mu \delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ ist dasselbe zu bemerken. (4)

Eine Sammlung aller Querschnitte, die von derselben Sorte Beton ausgeführt sind und eine proportionale Grösse von Eiseneinlagen, also dieselben Werte α haben, welche proportional verlegt sind, mit anderen Worten wenn sie dieselben *relativen* Dimensionen haben, wollen wir als eine *Querschnittssorte* bezeichnen.

Wenn in Querschnitten von ungleicher Höhe δ , aber von derselben Querschnittssorte die Kantenspannungen ε_1 und ε_2 dieselben sind, wobei also zwischen diesen derselbe Teil der Deformationskurve gebildet wird, obwohl mit mehr oder weniger ausgedehnter Höhenskala, und wobei die Grösse der Eisenspannungen ebenfalls bestimmt werden, so nennen wir dies, dass die Querschnitte dieselbe *Spannungsverteilung* haben.

Nun geht aus dem Obigen hervor:

Bei jeder bestimmten Spannungsverteilung haben die Quantitäten $\frac{P}{\delta}$, $\frac{M}{\delta^2}$, ν und $\mu\delta$ Werte, welche für alle Querschnitte von derselben Querschnittsart konstant sind.

Jedem, innerhalb der Bruchgrenzen möglichen Größenpaar $\left. \begin{array}{l} \nu \\ \mu\delta \end{array} \right\}$ entspricht ein gewisses, bestimmtes Größenpaar $\left. \begin{array}{l} \frac{P}{\delta} \\ \frac{M}{\delta^2} \end{array} \right\}$.

Wenn die Momentenachse unter Beibehaltung von $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ in eine neue Lage im Abstand $a = \zeta\delta$ verschoben wird, lässt sich erkennen, dass $\frac{P}{\delta}$ und μ sich hierbei nicht ändern, während

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{\delta^2} &= \frac{M}{\delta^2} \pm \zeta \frac{P}{\delta}; \\ \nu^1 &= \nu \pm \zeta \mu \delta \end{aligned} \quad (5)$$

mit Zeichen, je nachdem der Momentenhebelarm sich vergrößert oder vermindert.

Hieraus folgt, dass der Satz für beliebige Momentenachsen gilt, sobald ζ sich innerhalb der Querschnittsarten konstant hält.

Die Quantitäten $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$, welche für das Folgende von grosser Bedeutung sind, werden beide mit der Einheit kg/cm^2 gemessen und können folglich als Spannungen betrachtet werden. Dieses lässt sich erkennen teils direkt, in Anbetracht dessen, dass sie für eine Querschnittsbreite von 1 cm. gelten, teils geht es aus den Ausdrücken (3) hervor, in welchen σ_b und σ_e als einzige benannte Zahlen enthalten sind. Sie werden im Folgenden als die *Mittelspannung* und das *spezifische Moment* benannt.

Die Quantitäten ν und $\mu\delta$, welche leicht wiederzuerkennen sind (siehe Fig. 19), nennen wir die *axiale Dehnung* und den *Dehnungsunterschied* (gerechnet für die Längeneinheit).

Bei Anwendung auf elastisch gleichförmige Materialien kommt man hiervon auf die sog. Trapezregeln, wobei man mit den hier angewandten Bezeichnungen erhält, als Modifikation von bekannten Formeln:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{array} \right\} = \frac{P}{\delta} \pm 6 \frac{M}{\delta^2} \text{ u. s. w.}$$

Die Beziehungen zwischen $\frac{P}{\delta}$, $\frac{M}{\delta^2}$, ν , $\mu\delta$ werden bei elastischer Gleichförmigkeit und rechteckigen Querschnitten äusserst einfach $\frac{P}{\delta} = E\nu$; $\frac{M}{\delta^2} = \frac{E}{12}\mu\delta$; dagegen sind für genanntes Material die äussere Form der Querschnitte von sehr wechselnder Beschaffenheit, welches zur Aufstellung von Tabellen über Trägheitsmomente, Querschnittsmodule u. s. w. geleitet hat. Die in der Praxis vorkommenden Eisenbetonkonstruktionen haben fast ohne Ausnahme äusserst einfache, äussere Form, nämlich eine rechteckige, oder eine solche, die man als Kombination von zwei Rechtecken betrachten kann, wie *T* oder *U*-Form. Dagegen ist der Zusammenhang zwischen der Schnittresultante und der Deformation umso mehr verwickelt. Von den vier Ausgangsbegriffen, zu welchen wir oben gekommen sind, ist einer, und zwar ein beliebiger, immer abhängig von 2 anderen, so dass $\frac{P}{\delta} = f(\nu, \mu)$ und nicht Funktion von nur ν , u. s. w. Die alten Begriffe *I* und *W* helfen hier nichts. Auch die Begriffe ideelle Area, Trägheitsmoment u. dgl., welche manchmal in der betr. Literatur versucht worden sind und welche für zusammengesetzte Materialien angewendet werden können, deren Bestandteile ungleiche, aber jedes für sich konstante Elastizitätsmodule E_1 , E_2 , E_3 u. s. w. haben, führen nicht weit, da ein Bestandteil, wie hier der Beton kein konstantes *E* hat. Die ideelle Area, das ideella Trägheitsmoment u. s. w. variieren nämlich mit wachsenden Spannungen und geben, wie aus Obenstehendem ersichtlich, im allgemeinen fehlerhafte Resultate, wenn man sie als konstant betrachtet. Dasselbe ist der Fall mit dem Relativmass $\zeta = \frac{M}{\delta^2} : \frac{P}{\delta}$ d. h. dem Abstand zum Schwerpunkte der Spannungen, von welchem man natürlich annehmen könnte, dass es $\frac{M}{\delta^2}$ als Ausgangsbegriff ersetzen könnte. Soweit der Verfasser bei praktisch ausgeführten Rechnungen finden konnte, würde dagegen dieses nur zu einem Umweg führen, während die systematische Aufstellung verschlechtert würde. Bei den meisten, aus der Wirklichkeit herrührenden, hierher gehörenden Problemen scheint man mit den hier vorgeschlagenen Ausgangsbegriffen am einfachsten und schnellsten zum Ziele zu kommen. Den Zusammenhang zwischen diesen kann man jedoch in praktisch anwendbarer Form nicht anders erhalten als durch Ziffertabellen oder graphische Tabellen.

Die Aufstellung solcher Tabellen ist eine Arbeit, entsprechend derjenigen, welche schon vor längerer Zeit für die *I*- und *W*-Werten

der gewälzten Eisenprofile ausgeführt wurde, und ist sicherlich unvermeidlich.

Das am meisten anschauliche Bild in diesem Zusammenhang dürfte man erhalten, wenn man sich ν und $\mu\delta$ als gewöhnliche Koordinaten in einer Ebene aufgetragen denkt, so dass sie ein von den Bruchgrenzen umgeschlossenes Gebiet bilden, das *Deformationsgebiet* der Querschnittsarten. Senkrecht gegen die Ebene können die Spannungen $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$ aufgetragen werden. Diese bilden dann zwei krumme Flächen. Auf jeder Normale zur Ebene schneiden die beiden Flächen ein Grössenpaar $\frac{P}{\delta}, \frac{M}{\delta^2}$ ab, welches den Koordinaten ν und $\mu\delta$ für das Ausgangspunkt der Normale entsprechen. Irgend welche Diskontinuitäten oder dgl. in den Flächen kommen nicht vor, und sind also die Grössenpaare $\frac{P}{\delta}, \frac{M}{\delta^2}$ für einige Punkte $\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\delta \end{matrix} \right.$ bestimmt, welche einigermaßen nahe zu einander liegen, so können die approximativen Werte für $\frac{P}{\delta}, \frac{M}{\delta^2}$ in der Nähe dieser Punkte durch Interpolieren erhalten werden.

Wenn man daher ein für allemal mit geeigneten Intervallen, jedoch mit Ausdehnung über das ganze Deformationsgebiet, die einander entsprechenden Grössenpaare berechnet hat, so sind faktisch alle beliebigen Aufgaben der betreffenden Querschnittsart auf Versuchsrechnung reduziert, falls es nicht andere Auswege gibt. Für die einzelnen Querschnittsarten wiederum müssen mit geeigneten Armierungsintervallen in gewissen Fällen besondere Tabellen aufgestellt werden.

Tabelle I zeigt eine solche Tabelle für Beton ohne Eiseneinlage, wo teils die numerischen Werte eingeschrieben sind, teils die $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$ -Flächen graphisch mit gewöhnlichen »Niveaukurven« veranschaulicht sind. Die Betonqualität ist hierbei $k=1$. Die Tabelle ist, wie sich zeigen wird, auch für andere Qualitäten geeignet und ebenso

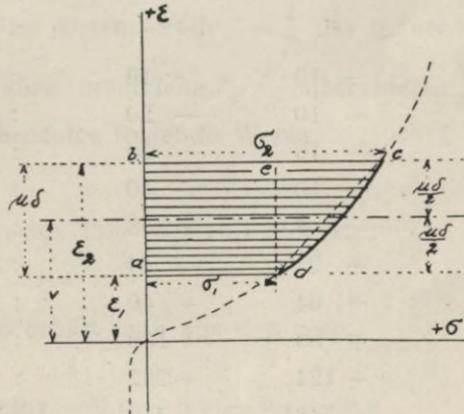


Fig. 20.

für alle Querschnitte mit einfacher Armierung von beliebigem Eisenprozent an der unteren Seite.

Die übrigen Tabellen gelten für Beton von derselben Qualität, aber mit doppelter Armierung.

Tabelle I oder dessen Gegenstück muss zuerst aufgestellt werden. Bei Berechnung der einzelnen Spannungsverteilungen $a b c d$ ist zu beachten, dass auf der Druckseite bei kleinem $\mu\delta$ angenähert ist

$$\frac{P}{\delta} = \sim \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}$$

und

$$\frac{M}{\delta^2} = \sim \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{12},$$

wovon der letztere approx. Ausdruck sogar innerhalb sehr weiter Grenzen angewandt werden kann. (Die Momente der Spannungen σ_b heben einander auf mit Ausnahme des Dreieckes cde .)

Im übrigen kann das Verfahren, allgemein genommen, folgendes sein:

Das Diagramm Pl. 1, oder eine Deformationskurve an beliebiger Stelle, wird in Elemente Δ von z. B. 1,0 cm. Höhe geteilt. Zuerst erhält man eine Serie $\frac{P}{\delta}$ dadurch, dass man die Werte σ_b schreibt und allmählich summiert, sowie darauf mit der entsprechenden Anzahl Δ in nachstehender Weise dividiert:

σ	$\Sigma\sigma\Delta$	$: n\Delta$	$= \frac{P}{\delta}$
— 10	— 10	: 1 =	— 10
— 10	— 20	: 2 =	— 10
— 10	— 30	: 3 =	— 10
— 10	— 40	: 4 =	— 10
— 8	— 48	: 5 =	— 9,6
+ 24	— 24	: 6 =	— 4,0
+ 64	+ 40	: 7 =	+ 5,7
+ 98	+ 138	: 8 =	+ 17,2
+ 124	+ 262	: 9 =	+ 29,2
+ 148	+ 410	: 10 =	+ 41,0
+ 166	+ 576	: 11 =	+ 52,3
+ 182	+ 758	: 12 =	+ 63,2
etc.	etc.	etc.	etc.

Hierauf wird am besten eine Serie entsprechender $\frac{M_1}{\delta^2}$ berechnet, wo die Momentenachse nach der Unterkante der Spannungsverteilungen verlegt wird:

σ	z	$\mathcal{A}M_1$	$\Sigma \mathcal{A}M_1$	$: (n\mathcal{A})^2$	$\frac{M_1}{\delta^2}$
— 10	0,5 =	— 5	— 5	: 1 =	— 5
— 10	1,5 =	— 15	— 20	: 4 =	— 5
— 10	2,5 =	— 25	— 45	: 9 =	— 5
— 10	3,5 =	— 35	— 80	: 16 =	— 5
— 8	4,4 =	— 35	— 115	: 25 =	— 4,6
+ 24	5,6 =	+ 134	+ 19	: 36 =	+ 0,53
64	6,6 =	422	441	: 49 =	9,0
98	7,5 =	736	1177	: 64 =	18,4
124	8,5 =	1055	2232	: 81 =	27,6
148	9,5 =	1410	3642	: 100 =	36,4
166	10,5 =	1745	5387	: 121 =	44,5
182	11,5 =	2000	7477	: 144 =	51,8
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Verschiebt man hiernach die Momentenachse nach der Mitte der Spannungsverteilungen, so erhält man nach oben abgeleiteten Formeln $\frac{M}{\delta^2} = \frac{M_1}{\delta^2} - \zeta \frac{P}{\delta}$ und in diesem Falle $\zeta = \frac{1}{2}$ das gesuchte $\frac{M}{\delta^2}$ dadurch, dass man das eben gefundene $\frac{1}{2} \frac{P}{\delta}$ subtrahiert. $\frac{M}{\delta^2}$ erhalten hierbei in ihrer Reihenfolge folgende Werte:

$$\frac{M}{\delta^2} = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,2 \ 2,5 \ 6,1 \ 9,8 \ 13,0 \ 15,9 \ 18,3 \ 20,2 \ \text{etc.}$$

Die entsprechenden ν und $\mu\delta$ erhält man aus den resp.

$$1000 \nu = -0,9 \ -0,8 \ -0,7 \ -0,6 \ -0,5 \ -0,4 \ -0,3 \\ -0,2 \ -0,1 \ -0,0 \ -0,1 \ -0,2 \ \text{etc.}$$

$$1000 \mu\delta = 0,2 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,8 \ 1,0 \ 1,2 \ 1,4 \ 1,6 \ 1,8 \ 2,0 \ 2,2 \ 2,4 \ \text{etc.}$$

Die auf diese Weise erhaltenen $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$ finden wir so auf Tabelle I auf der steigenden Diagonale wieder, welche von $1000\nu = -1$ ausgeht. In der Nähe der Lage $\left. \begin{matrix} \varepsilon \\ \sigma \end{matrix} \right\} = 0$ war es nötig, die Zifferwerte etwas zu verbessern, welches durch Anwendung von schmäleren \mathcal{A} oder in anderer Weise geschehen kann. Die übrigen Diagonalen können in entsprechender Weise berechnet werden.

Beim Durchsehen der Tabelle I findet man, dass $\left. \begin{matrix} \varepsilon_2 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$ auf jeder von der ν -Achse in 45° fallenden Diagonale konstante Werte hat und $\left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \sigma_1 \end{matrix} \right\}$ auf jeder steigenden.

Nimmt man an, dass die Zugbruchgrenze des Betons ohne Eiseneinlage bei $\left. \begin{matrix} 1000 \varepsilon = -0,12 \\ \sigma_b = -10 \end{matrix} \right\}$ liegt, sowie dass die Druckbruchgrenze z. B. bei $\left. \begin{matrix} 1000 \varepsilon = 1,9 \\ \sigma_b = 212 \end{matrix} \right\}$ liegt, so werden die Bruchgrenzen von den diesen Werten entsprechenden Diagonalen repräsentiert, welche auf Tabelle I ausgezogen sind.

Sind dagegen Eiseneinlagen vorhanden, so werden diese bestimmend und die kleinste schädliche Zugspannung entsteht ein wenig vor der Streckgrenze $\left. \begin{matrix} 1000 \varepsilon = 1,1 \\ \sigma_e = 2200 \end{matrix} \right\}$, man kann annehmen bei $\left. \begin{matrix} 1000 \varepsilon = -1 \\ \sigma_e = -2000 \end{matrix} \right\}$. Auf der Druckseite wiederum wird, wenn auch dort Eiseneinlagen vorhanden sind, die Flussgrenze des Eisens bestimmend und die am wenigsten schädliche Spannung dürfte je nach der Beschaffenheit des Eisens bei ungefähr $\left. \begin{matrix} 1000 \varepsilon = +1,0 \text{ à } 1,2 \\ \sigma_e = +2000 \text{ à } +2400 \end{matrix} \right\}$ angenommen werden können.

Die Tabellen zeigen nur das halbe Deformationsgebiet. Auf der anderen Seite der ν -Achse ist eine symmetrische Hälfte mit den negativen Momenten vorhanden.

Für die Berechnung von Tabelle II u. f., welche, wie gesagt, für Beton $k=1$ mit einer unteren und einer oberen gleichen Eiseneinlage im Abstände δ^1 und mit $\frac{\delta^1}{\delta} = \xi = 0,8$ gelten, wird das Verfahren folgendes:

$$F_e = \frac{\alpha}{100} \delta;$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_e'' \\ \sigma_e' \end{matrix} \right\} = E \left(\nu \pm \xi \frac{\mu \delta}{2} \right)$$

$$P_e = F_e (\sigma_e'' + \sigma_e'); \quad \therefore \frac{P_e}{\delta} = E \frac{\alpha}{100} \cdot 2\nu;$$

$$\text{in ders. Weise } M_e = F_e (\sigma_e'' - \sigma_e') \frac{\xi \delta}{2};$$

$$\therefore \frac{M_e}{\delta^2} = E \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{\xi^2}{2} \mu \delta;$$

Wenn man hier $E = 2000000$ einführt sowie der Kürze halber

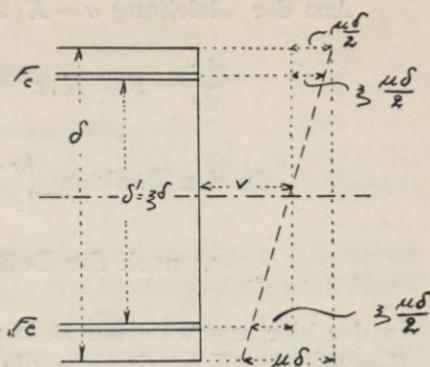


Fig. 21.

$$1000 \nu = n,$$

$$1000 \mu \delta = m,$$

$$\text{so erhält man } \frac{P_e}{\delta} = 40 \alpha n; \quad \frac{M_e}{\delta^2} = 10 \alpha \xi^2 m;$$

$$\text{sowie für } \xi = 0,8 \quad \frac{P_e}{\delta} = 40 \alpha n; \quad \frac{M_e}{\delta^2} = 6,4 \alpha m,$$

welche, nach Einsetzen der für die Tabellierung gewählten Werte von α , ausgerechnet und zu den entsprechenden $\frac{P_b}{\delta}$ und $\frac{M_b}{\delta^2}$ aus Tabelle I addiert werden. Tabelle II, III etc. sind für $\alpha = 0,25$ 0,50 0,75 1,00 1,25 1,50 und 2,00 ausgerechnet. Die mehr oder weniger grosse Dichtigkeit der »Niveaukurven« gibt ein Bild über die ungleiche Stärke der resp. Querschnittsorten.

Ungleiche Betonqualitäten und Deformationskurven.

Wenn man sich alle Spannungen in den hier angewandten Deformationskurven geändert mit einem gewissen Verhältnis $= k$ denkt, so dass $\sigma' = k\sigma$, so folgt:

$$\frac{P'}{\delta} = \int_{z_1}^{z_2} k \sigma dz = k \int_{z_1}^{z_2} \sigma dz = k \frac{P}{\delta} \quad \text{und in derselben Weise}$$

$$\frac{M'}{\delta^2} = k \frac{M}{\delta^2}.$$

Aus der Gleichung $\sigma = K(1 - e^{-1000\varepsilon})$ erhält man:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 1000 K \cdot e^{-1000\varepsilon} = 1000 K \left(1 - \frac{\sigma}{K}\right).$$

In den Punkten $\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 0 \\ \varepsilon = 0 \end{array} \right.$ wird $\therefore \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 1000 K$

\therefore nach der Definition $E_0 = 1000 K$.

In der hier angewandten Deformationskurve mit $K = 250$ ist also $E = 250000$. K ist dagegen die absolute Bruchspannung und muss also nach der Definition k auch $= \frac{K^1}{K}$ sein.

Als die den Umständen nach geeignetste Weise, den Wert k zu bestimmen, erhält man also

$$k = \frac{K'}{250} \text{ oder:}$$

$$k = \frac{E_0^1}{250000}.$$

Sobald eine experimentell gegebene Deformationskurve auf der Druckseite einigermassen sich unter die Rittersche Form bringen lässt, sowie unter der Voraussetzung, dass die Zugspannungen im Beton ebenfalls mit dem Verhältnis k geändert gedacht werden können, was auf alle Fälle von geringer Bedeutung ist, so ist Tab. I auch für entsprechendes Material anwendbar, wenn

alle Zifferwerte $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$ mit k multipliziert werden. Oder auch:

Tab. I enthält Grössen $\frac{P'}{k\delta}$ und $\frac{M'}{k\delta^2}$ für beliebige Betonmaterialien. In

derselben Weise geht hervor, dass in Tab. II u. f. $\frac{P'}{k\delta}$, $\frac{M'}{k\delta^2}$ und

$\frac{\alpha'}{k}$ für beliebige Materialien gelten.

IV. Anwendung auf Platten und Balken.

Statisch bestimmte Fälle.

Die Bezeichnungen siehe Seite 38, sodann der Kürze halber: $1000 \nu = n$; und $1000 \mu \delta = m$.

Die Quantitäten für die Bruchgrenze bezeichnen wir weiter M , σ_e , so dass M = Bruchmoment, σ_e = Bruchspannung für Eisen = -2000 kg./cm^2 u. s. w.

Wenn nur untere Eiseneinlagen vorhanden sind, soll δ den Abstand von der Eiseneinlage bis zur Oberkante bezeichnen, wobei von den Betonzugspannungen in dem schmalen Streifen unterhalb des Eisens abgesehen wird.

In den reinen Biegeungsproblemen ist die Summe der Axialspannungen eines Querschnittes 0, und also, wenn P = Resultante der Axialspannungen des Betons:

$$P + F_e \sigma_e = 0; \text{ woraus } \frac{P}{\delta} = -\frac{\alpha}{100} \cdot \sigma_e. \quad (6)$$

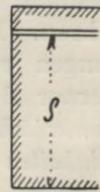


Fig. 22.

Halten wir fest, dass ein gewisses, bestimmtes α , beispielsweise $\alpha = 2$, letztgenanntem Ausdruck eine Beziehung zwischen $\frac{P}{\delta}$ und σ_e gibt, welche als eine Kurve im Deformationsgebiet Tab. I eingezeichnet werden kann. σ_e finden wir hierbei konstant auf derselben Diagonale wieder, wie die resp. Dehnungen, nach dem Schema: $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_e}{E}$; $\therefore 1000 \varepsilon_1 = \frac{1}{2000} \sigma_e$; die Spannung $\sigma_e = -800$ folglich auf der Diagonale $1000 \varepsilon_1 = -0,4$ u. s. w.

Auf Tab. I sind, wie ersichtlich, zwei solche α -Kurven eingezeichnet, nämlich $\alpha = 0,4$ und $\alpha = 2,5$; das zwischenliegende Gebiet, welches schraffiert ist, sowie ausserdem teils von der Bruchgrenze $\sigma_e = -2000$, teils von der Bedingung $\sigma_e = -500$ begrenzt wird, kann man als das Gebiet der ordinären, reinen Biegeungsprobleme bezeichnen, da dies die grösste Mehrzahl praktisch vorkommender Fälle enthält. Innerhalb des Gebietes kann ein Kurvenbündel α -Kurven mit ihren Spitzen gegen den Origo eingezeichnet werden.

Tabelle I ist aber nicht für direkte graphische Lösung einfacher Biegeungsprobleme anzuwenden, kann jedoch leicht für diesen

Zweck umgewandelt werden, wobei beispielsweise α und σ_e als Koordinaten genommen und die Kurven $\frac{M_1}{k\delta^2}$ eingezeichnet werden können. M_1 ist hierbei das Moment der Betonspannungen um die Eiseneinlage und gleich dem Moment der äusseren Kräfte. Aus Tab. I erhält man die Werte $\frac{M_1}{k\delta^2}$ durch die Beziehung:

$$\frac{M_1}{k\delta^2} = \frac{M}{k\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{P}{k\delta}.$$

Es gibt indessen eine einfachere Verfahrungsweise. Diese setzt jedoch voraus, ebenso wie im allgemeinen die ganze folgende Darstellung, dass man davon Abstand nimmt, allzu genau zu verfahren. Die Grenzen, innerhalb welcher die gemachten Annäherungen erlaubt sind, müssen immer deutlich angegeben werden. Ferner darf man natürlich nicht aus dem Auge lassen, dass *die numerischen Formeln, welche folgen, nur für die hier angewandten Einheiten kg. und cm. gelten.*

Betrachten wir auf Tab. I die $\frac{M}{k\delta^2}$ - und $\frac{P}{k\delta}$ -Kurven, so finden wir, dass innerhalb und nächst dem schraffierten Gebiet für die reinen Bieungsprobleme die $\frac{M}{k\delta^2}$ -Fläche nur schwach gebogen und die $\frac{P}{k\delta}$ -Fläche eher schwach gedreht ist. Die Flächen können innerhalb des fraglichen Gebietes durch ein Paar Ebenen ersetzt werden. Die Gleichungen:

$$\frac{P}{k\delta} = 82,5n + 20,75m; \quad \text{sowie} \quad \frac{M}{k\delta^2} = 20,8n + 6,6m + 3; \quad (7)$$

stellen zwei solche Ebenen dar, bei deren Bestimmung das Bestreben galt teils dass man im allgemeinen mit kleinen Fehlern die grösstmöglichen Flächen deckt, teils besonders dass man gute Übereinstimmung mit den höheren Spannungsstadien gewinnt.

Zur Kontrolle schreiben wir unten die durch die Gleichungen berechneten Werte $\frac{P}{k\delta}$ und $\frac{M}{k\delta^2}$ verglichen mit den in Tab. I enthaltenen, entsprechenden Werten innerhalb des Gebietes.

		Aus den Gleichungen		Aus den Tabellen	
		$\frac{P}{k\delta}$	$\frac{M}{k\delta^2}$	$\frac{P}{k\delta}$	$\frac{M}{k\delta^2}$
n	0	16,7	8,3	17,5	8,2
m	0,8				
n	0	25,2	10,3	26,3	11,1
m	1,2				
n	0	33,5	13,6	34,5	14,0
m	1,6				
n	0	41,6	16,2	41,0	15,9
m	2,0				
n	0,1	12,6	7,5	12,0	7,5
m	1,0				
n	0,2	8,7	6,7	8,3	6,7
m	1,2				
n	0,2	17,9	9,4	17,2	9,8
m	1,6				

Die Übereinstimmung ist hinreichend genau für die Anwendung. Bei Eisenspannungen zwischen 800 und 2000, sowie Einlagen zwischen $\alpha = 0,5$ und $\alpha = 2,0$ dürfte im allgemeinen der Fehler + oder -4 à 5% des Resultates nicht übersteigen. Auch innerhalb etwas weiterer Grenzen werden die Resultate voll anwendbar, ausser bei schwachen Armierungen mit niedrigen Spannungen.

Zuerst kann man einen Ausdruck für das spezifische Moment der Betonspannungen ableiten:

$$\frac{M_1}{k\delta^2} = \frac{M}{k\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{P}{\delta} = 20,8n + 6,6m + 3 + \frac{1}{2}(82,5n + 20,8m) \quad (8)$$

$$\therefore \frac{M_1}{k\delta^2} = 62n + 17m + 3.$$

Darnach aus (6) und (7)

$$\frac{-\alpha}{100k} \sigma_e = 82,5n + 20,75m$$

und endlich aus den Definitionen

$$\sigma_e = 2000 \left(n - \frac{m}{2} \right).$$

Aus den drei so gefundenen Gleichungen eliminieren wir m und n , wobei wir als allgemeinen Ausdruck für die Eisenspannungen erhalten:

$$\sigma_e = -1000 \cdot \frac{\frac{M_1}{\delta^2} - 3k}{7,75 \alpha + k} \quad (9)$$

M_1 ist das gegebene äussere Belastungsmoment.

Hiermit ist ein Biegeungsproblem gelöst. Wollen wir auch die Betonspannungen suchen, so erhalten wir teils direkt aus σ_e die untere Dehnung, teils den Wert $\frac{P}{\delta}$ nach Gleichung (6) und damit ist die Spannungsverteilung aus der Tabelle und der Deformationskurve bekannt.

Die Gültigkeitsgrenzen für (9) wurden mit den Tabellenwerten besonders kontrolliert und werden am besten ausgedrückt:

$$-500 > \sigma_e > -2000;$$

sowie

$$0,4 < \frac{\alpha}{k} < 2,4.$$

Werfen wir einen Blick auf das Gebiet der reinen Biegeungsprobleme in Tabelle I, so können wir feststellen, dass innerhalb dieses der Druckspannungsbruch im Beton $k=1$ nicht vorausgesetzt zu werden braucht. Für eine so starke Armierung wie $\alpha=2,5$ werden die Betondruckspannungen nicht höher als 174 Atm., wenn das Eisen an der Bruchgrenze angelangt ist. Die Bedingung dafür, dass der Druckspannungsbruch eintreffen kann, leiten wir, nebenbei gesagt, aus (6) und (7) her: $\alpha \geq k(2900/\varepsilon_2 - 0,9)$, wo ε_2 die Dehnung bezeichnet, welche der Bruchdruckspannung entspricht. Hierbei sind hohe Armierung und niedrige Betonqualität vorauszusetzen.

Gehen wir zum Zugspannungsbruch über, wobei $\sigma_e = -2000$, so kann man durch Einsetzen in (9) ableiten

$$\left| \frac{M_1}{\delta^2} \right| = 15,5 \alpha + 5k; \quad (10)$$

Gültigkeitsgrenzen = (9).

Damit bestimmen wir den Sicherheitsgrad für Rechteckquerschnitte. Die Formel kontrolliert man am besten, wenn man davon ausgeht, die Kurven $\frac{P}{k\delta}$ und $\frac{M}{k\delta^2}$ aufzuzeichnen, welche man aus

Tab. I auf der Bruchgrenze erhält. Diese Kurven sind angenähert gerade Linien, u. s. w. (Die Momentenachse verschiebt sich nach der Eiseneinlage.)

Beispiel I. Eine Platte aus Beton $k = 1,1$ mit einer Höhe über den Eisen $\delta = 14,0$ cm. ist mit 8 mm Rundeisen in 5,1 cm. Abstand armiert. Das Maximalmoment der äusseren Belastung ist = 1260 cmkg pr. Breiten-cm. Wie gross ist der Sicherheitsgrad?

Ein 8 mm. Rundeisen hat eine Fläche von $0,5 \text{ cm}^2$.

$$\therefore F_e = \frac{0,50}{5,1} = 0,098; \quad \therefore \alpha = 0,7; \quad \therefore \frac{M}{\delta^2} = 15,5 \cdot 0,7 + 5 \cdot 1,1 = 16,35;$$

$$\therefore M = 16,35 \cdot 14^2 = 3210 \text{ cmkg};$$

$$\therefore \text{der Sicherheitsgrad} = \frac{M}{M_{\max}} = \frac{3210}{1260} = 2,55.$$

Die Beanspruchung des Eisens bei $M = 1260$ wird nach den gewöhnlichen Koenenschen Formeln = 1000 Atm., wenn ein durchschnittlicher Elastizitätsmodul für die Betonspannungen von 225000 angenommen wird.

Beispiel II. Eine Platte von derselben Stärke und Armierung wird von Beton $k = 0,7$ ausgeführt und ist ungefähr demselben $M_{\max} = 1220$ cmkg. ausgesetzt. Wie gross ist der Sicherheitsgrad?

$$\frac{M}{\delta^2} = 15,5 \cdot 0,7 + 5 \cdot 0,7 = 14,35; \quad \therefore M = 2810 \text{ cmkg};$$

$$\therefore \text{der Sicherheitsgrad} = \frac{2810}{1220} = 2,3.$$

Nach den Koenenschen Formeln und mit einem Durchschnitts- $E_b = 150000$ wird die Eisenbeanspruchung auch in diesem Falle = 1000.

Aus den Beispielen geht hervor teils dass die Betonqualität keine grosse Rolle für die Bruchbelastung der Axialspannungen spielt (was die Schubspannungen und zuverlässige Adhäsion betrifft, wird natürlich das Verhältnis ganz anders), teils auch dass der Einfluss der Betonqualität durch Koenens Formeln noch weniger zum Vorschein kommt. Dies ist jedoch ein grosser Vorteil, verglichen mit den meisten anderen Niedrigspannungsformeln, wobei bei näherer Untersuchung der Sicherheitsgrad für ungleich angenommene Betonelastizitätsmodule ganz bedeutend variiert mit daraus folgender Unsicherheit und Absurdität bei der Anwendung. Koenens Formeln, welche mit derselben Methode, wie hier angewandt, für das Spannungsstadium $\sigma_e = -1000$ in den numerischen Aus-

druck $\frac{M}{\delta^2} \approx 8,2\alpha + 0,6 \frac{E_b}{200000}$ zusammengefasst werden können, ge-

ben wie hieraus hervorgeht, immer innerhalb der gewöhnlichen Armierungsgrenzen bei genannten Eisenspannungen einen Sicherheitsgrad zwischen 2,1 und 2,6. Wenn ein gewöhnlicher, gewalzter Eisenbalken 1000 Kg. berechnete Beanspruchung erhält, dürfte dies keine wirklich grössere Sicherheit enthalten, da auch hierbei die Streckgrenze ($\sigma_e = \sim 2000$) als schädlich angesehen werden dürfte. Die Frage hierüber scheint in jedem Falle den Kernpunkt für die Feststellung von Normalbestimmungen für Eisenbetonkonstruktionen auszumachen.

Gegenüber den hier aufgestellten (9) und (10) haben dagegen Koenens Formeln den Nachteil, dass sie bei der Bruchgrenze nicht experimentell bewiesen werden können und dass sie von selbst auf falsche Wege führen, sobald Deformationen mit in Rechnung kommen, also sie können für Berechnung von Durchbiegungen und statisch unbestimmte Systeme nicht angewandt werden.

Beispiel III. Die vorteilhafteste Grösse der Eiseneinlagen.

Wenn die Kosten pro cbm Beton = b und cbm Eisen = p gegeben sind, so können die Dimensionen für δ und F_e , welche ein gewisses Bruchmoment M tragen und gleichzeitig den kleinstmöglichen Preis für den Querschnitt erfordern, berechnet werden.

Der Preis für einen Querschnitt von 1 cm. Länge und Breite wird

$$= b\delta + pF_e + A_1 = \left(b + \frac{p\alpha}{100}\right)\delta + A$$

wo die Konstante A die Kosten für die Schalung und für den Beton unterhalb der Eiseneinlage bedeutet. Nach (10) wird $\delta = \sqrt{\frac{M}{15,5a + 5k}}$ und also die Kosten

$$= \frac{\left(b + \frac{p\alpha}{100}\right)\sqrt{M}}{\sqrt{15,5a + 5k}} + A.$$

Dieser Ausdruck erhält, mit Rücksicht auf a abgeleitet, das Minimum für:

$$a = 100 \frac{b}{p} - 0,65k.$$

Beispielsweise wird für einen $\begin{cases} \text{Betonpreis} = 20 \text{ Mk/Cbm} \\ \text{Eisenpreis} = 100 \text{ Mk/t} = 780 \text{ Mk/Cbm} \end{cases} \therefore 100 \frac{b}{p} = 2,56;$

sowie für $k = 1$, das vorteilhafteste $a = 1,9\%$. Wenn dagegen der Eisenpreis 200 Mk/t, so ist $a = 0,65\%$.

Durchbiegungen.

Untenstehende Figur dürfte hinreichend deutlich beweisen, wie die Durchbiegung in der Mitte eines symmetrisch belasteten,

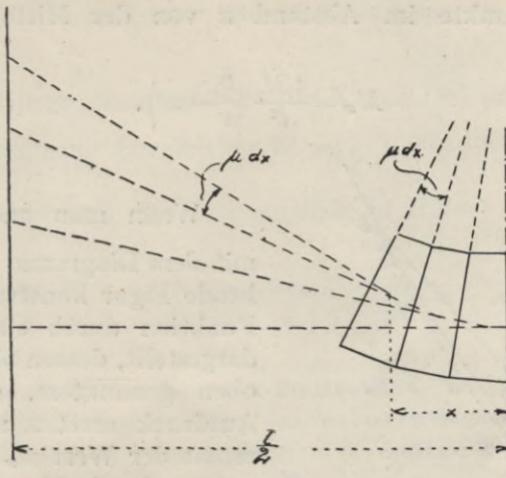


Fig. 23.

frei aufliegenden Balkens in der Form ausgedrückt werden kann:

$$\eta = \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \mu \left(\frac{l}{2} - x \right) dx,$$

welcher Ausdruck, wenn man so will, aus (1) kontrolliert werden kann. Da $m = 1000 \mu \delta$, geht die Formel über in:

$$1000 \eta = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{m}{\delta} \left(\frac{l}{2} - x \right) dx. \quad (11)$$

Aus den beiden unmittelbar nach (8) geschriebenen Gleichungen sowie aus (9) kann man σ_e und n eliminieren, worauf eine geradelinige Relation zwischen m und $\frac{M_1}{\delta^2}$ übrig bleibt, welche hier vernachlässigt und nur mit $m = f\left(\frac{M}{\delta^2}\right)$ bezeichnet werden kann. $f\left(\frac{M}{\delta^2}\right)$ in (11) einzusetzen und zu integrieren wird umständlich. Für

gleichmässig verteilte Belastungen kann hierfür folgendes abgeleitet werden:

Wenn für eine solche Belastung das Angriffsmoment in der Mitte $= \frac{pl^2}{8}$ mit M_0 bezeichnet wird, so kann das Angriffsmoment in einem Punkte im Abstand x von der Mitte ausgedrückt werden in:

$$M_x = \frac{4M_0}{l^2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right).$$

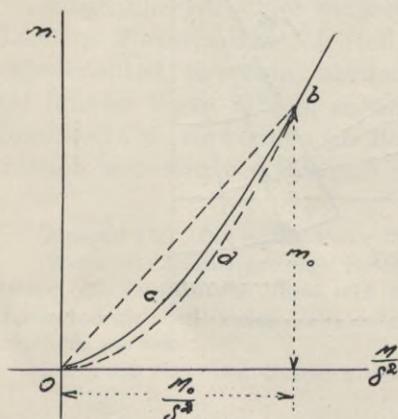


Fig. 24.

Wenn man andererseits $f\left(\frac{M}{\delta^2}\right)$ mit dem Diagramm wie nebenstehende Figur konstruiert, wird die Funktion durch eine Kurve Ocb dargestellt, dessen oberer Teil mit oben genanntem, geradelinigem Ausdruck ersetzt werden kann. m_0 ist der Wert m_x in der Mitte, entsprechend M_0 . Hierbei fällt die Kurve Ocb vollständig zwischen die gerade Linie Ob und die Parabel Odb , so lange man

sich an die praktisch vorkommenden, normalen Werte für α und k hält.

Dies ist nur eine einfache Tatsache, welche durch Versuchsrechnungen gefunden wurde und nur durch solche kontrolliert werden kann. Man hat also zwischen O und b

$$\frac{m_0}{\left(\frac{M_0}{\delta^2}\right)} \cdot \frac{M_x}{\delta^2} > m_x > \frac{m_0}{\left(\frac{M_0}{\delta^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{M_x}{\delta^2}\right)^2.$$

Aus oben angegebenem Ausdruck für das äussere Angriffsmoment M und (11) erhalten wir nun:

$$\frac{4m_0}{l^2\delta} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \left(\frac{l}{2} - x\right) dx > 1000\eta > \frac{16m_0}{l^4\delta} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)^2 \left(\frac{l}{2} - x\right) dx;$$

sowie nach vorgenommener Integration:

$$\frac{5}{48} \frac{l^2}{\delta} m_0 > 1000 \eta > \frac{11}{120} \cdot \frac{l^2}{\delta} \cdot m_0;$$

oder

$$0,104 \frac{l^2}{\delta} m_0 > 1000 \eta > 0,092 \frac{l^2}{\delta} m_0.$$

Bei gewöhnlichem Material fällt die Kurve *Ocb* mit der rechten Linie *Ob* zusammen. Desgleichen ist $m_0 = 1000 \mu \delta = 1000 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{E} = 1000 \frac{2k_b}{E}$. Aber (vergl. die Biegungsfälle in Hütte)

$$\eta = \frac{5}{24} \cdot \frac{k_b}{E} \cdot \frac{l^2}{\delta}; \quad \therefore \frac{5}{48} \left(1000 \frac{2k_b}{E} \right) \frac{l^2}{\delta} = \frac{5}{48} \cdot m_0 \frac{l^2}{\delta} = 1000 \eta.$$

Damit ist die obere der Grenzen kontrolliert.

Die beiden Grenzen liegen so nahe an einander, dass man die Zifferkoeffizienten ganz einfach = 0,1 setzen kann, wobei wir erhalten:

$$\frac{1000 \eta}{l} = 0,1 \frac{l}{\delta} \cdot m_0. \quad (12)$$

Die Durchbiegung in ‰ der Spannweite erhält man also bei gleichmässig verteilter Belastung, wenn man aus dem äusseren Angriffsmoment in der Mitte $M_0 = \frac{pl^2}{8}$ den entsprechenden Wert $m_0 = f \left(\frac{M_0}{\delta^2} \right)$ in oben angegebener Weise oder aus der Tabelle sucht und in (12) einsetzt.

Die Gleichung (12) kann zu Schlussätzen von sehr grossem Interesse Veranlassung geben. Als Beispiel nehmen wir $\frac{l}{\delta} = 10$ und $k = 1$ an. Untersucht man die beiden Fälle $\alpha = 0,4\%$ sowie $\alpha = 2,0\%$, so erhält man: Für $\alpha = 0,4\%$: $m_0 = 0,176 \left(\frac{M}{\delta^2} - 3 \right) \therefore \frac{1000 \eta}{l} = 0,1 \cdot 10 \cdot 0,176 \left(\frac{M}{\delta^2} - 3 \right)$, sowie hieraus für $\frac{1000 \eta}{l} = 1$; d. h. wenn η übergeht zu einem tausendstel der Spannweite $\frac{M}{\delta^2} = 8,7 =$ das spezifische Angriffsmoment im Mittelquerschnitte. Auf der anderen Seite ergibt die Gleichung (10), dass das spezifische Bruchmoment

$$\sqrt{\frac{M}{\delta^2}} = 15,5 a + 5 = 11,2.$$

Da also der Sicherheitsgrad $\frac{|M|}{M_{\max.}} = 1,3$, so lässt sich erkennen, dass für

$\frac{l}{\delta} = 10$, $k = 1$ und $a = 0,4$ nur ein unbedeutender Zuschuss von Sicherheit vorhanden ist, wenn η auf 1 0/00 der Spannweite hinaufgeht.

Für $a = 2\%$ erhält man

$$\frac{1000 \eta}{l} = 0,06 \left(\frac{M}{\delta^2} - 3 \right); \text{ und unter denselben Verhältnissen wie oben}$$

$$\frac{M}{\delta^2} = 19,4 \text{ sowie an der Bruchgrenze: } \sqrt{\frac{M}{\delta^2}} = 36.$$

Also in diesem Falle ein grösserer Sicherheitsgrad = 1,8, aber auch nicht mehr.

Schon aus diesen Beispielen und noch besser bei näherer Untersuchung mit Hilfe von (12) geht Folgendes hervor:

Eine einfache Vorschrift, beispielsweise über die grösste Durchbiegung im Verhältnis zur Spannweite, ist sinnlos ohne gleichzeitige Rücksicht auf $\frac{l}{\delta}$, sowie auf die Grösse der Eiseneinlagen

und die Beschaffenheit des Betons. Eine Probelastung kann also nur bei grösseren Konstruktionen und im Verein mit besonderen Berechnungen in Frage kommen.

Bei der gebräuchlichen Grösse der Eiseneinlagen ist im allgemeinen der beabsichtigte Sicherheitsgrad nicht vorhanden, wenn — bei $\frac{l}{\delta}$ ungefähr 10 — die Durchbiegung unter gewöhnlicher Belastung auf 1 0/00 steigen sollte.

Wenn gewisse erlaubte Grenzen für die Durchbiegung gegeben sind, kann die Konstruktionshöhe δ im Verhältnis zur Spannweite viel kleiner gehalten werden als bei Eisenkonstruktionen.

Bei statisch unbestimmter Auflage muss, wenn die Eiseneinlagen verhältnismässig klein, immer grössere Vorsicht beobachtet werden, als wenn die Armierung kräftiger ist; im ersteren Falle ist, wenn die Stützen etwas verschoben werden, die Rissgefahr viel grösser als im Letzteren.

Breite Plattenbalken.
(Deckenkonstruktionen.)

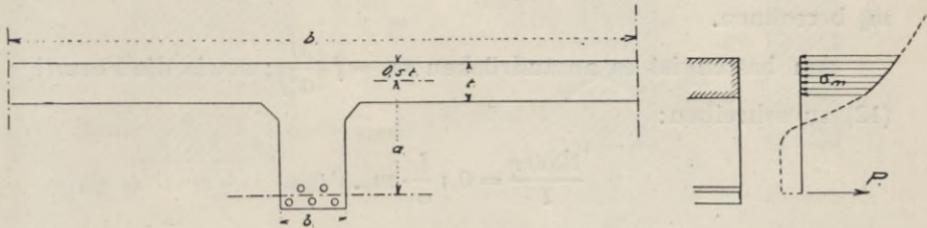


Fig. 25.

Die Bezeichnungen siehe auf der Figur, sowie:

M = Moment aus der Belastung über die ganze Breite des Plattenbalkens.

$|M|$ = Bruchmoment.

F = dem gesamten Eisenquerschnitt.

σ_e = Eisenspannung.

σ_m = Mittelspannung in dem breiten Teil des Betons.

Unter Vernachlässigung der Spannungen in dem schmäleren Teil des Betons schreibt man gewöhnlich:

$$M = -\sigma_e F a; \quad \sigma_m \cdot b t = -\sigma_e F.$$

Die Einführung der Bruchbelastung mit $|M| = S \cdot M_{\max}$ als Ausgangspunkt verursacht keine Änderung dieser Formeln, sondern für $\sigma_e = -2000$ erhalten wir mit kg. und cm. als Einheiten:

$$|M| = 2000 F a; \quad |\sigma_m| = 2000 \frac{F}{b t}. \quad (13)$$

Der Fehler, welcher dadurch entsteht, dass der Schwerpunkt der Betonspannungen oberhalb von Plattenmitte liegt, wird unbedeutend. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass dieser Fehler 10 % nicht übersteigen kann, sobald $a > 2,5 t$. Die grösste Betonspannung in der Oberkante kann aus σ_m durch einen Blick auf die Deformationskurve leicht geschätzt werden. In normalen Fällen dürfte eine Gefahr für einen Druckspannungsbruch niemals vorkommen.

Durchbiegungen.

Über die Durchbiegung der Plattenbalken gilt dasselbe, was oben über Rechteckquerschnitte angeführt wurde, und die Formel (12) ist auch in diesem Falle anwendbar. Man muss natürlich einen richtigen, für den fraglichen Plattenbalken geltenden Wert m_0 berechnen.

Am besten ist es auszudrücken $m_0 = f \left(\frac{M}{a^2} \right)$; sowie die Formel (12) zu schreiben:

$$\frac{1000 \eta}{l} = 0,1 \frac{l}{a} \cdot m_0.$$

Schmale T-Querschnitte sowie π -Querschnitte.

(Brückenquerschnitte.)

Wir nehmen an, dass der Querschnitt mit einem Gesamtmoment über die ganze Breite = N belastet ist, eine Gesamt-Eisen-
spannung = Q und einen gesamten Eisenquerschnitt = G hat, sowie dass er als Differenz zwischen 2 rechteckigen Querschnitten $b' \delta'$ und $b'' \delta''$ betrachtet werden kann. Für diese soll wie oben M, P u. s. w. pro Breitenem. gelten.

Wir haben alsdann:

$$N = M' b' - M'' b'';$$

$$Q = P' b' - P'' b''.$$

Die Eisendehnung ε_1 muss für beide gleich sein, ebenfalls die Winkel μ , und folglich: $\frac{m'}{\delta'} = \frac{m''}{\delta''}$.

Bezeichnen wir für diesen Fall $1000 \varepsilon_1 = e_1$, wobei nach den Definitionen $e_1 = n - \frac{m}{2}$, welches anstatt n in den Ausdruck (7) betreffend $\frac{P}{\delta}$ und in den Ausdruck (8) für $\frac{M_1}{\delta^2}$ (die untere Momentenachse) eingeführt werden, so erhalten wir:

$$\frac{P'}{k \delta'} = 62 m' + 82,5 e_1; \quad \frac{M_1'}{k \delta_1'^2} = 48 m' + 62 e_1 + 3;$$

$$\frac{P''}{k \delta''} = 62 m'' + 85,5 e_1; \quad \frac{M_1''}{k \delta_1''^2} = 48 m'' + 62 e_1 + 3;$$

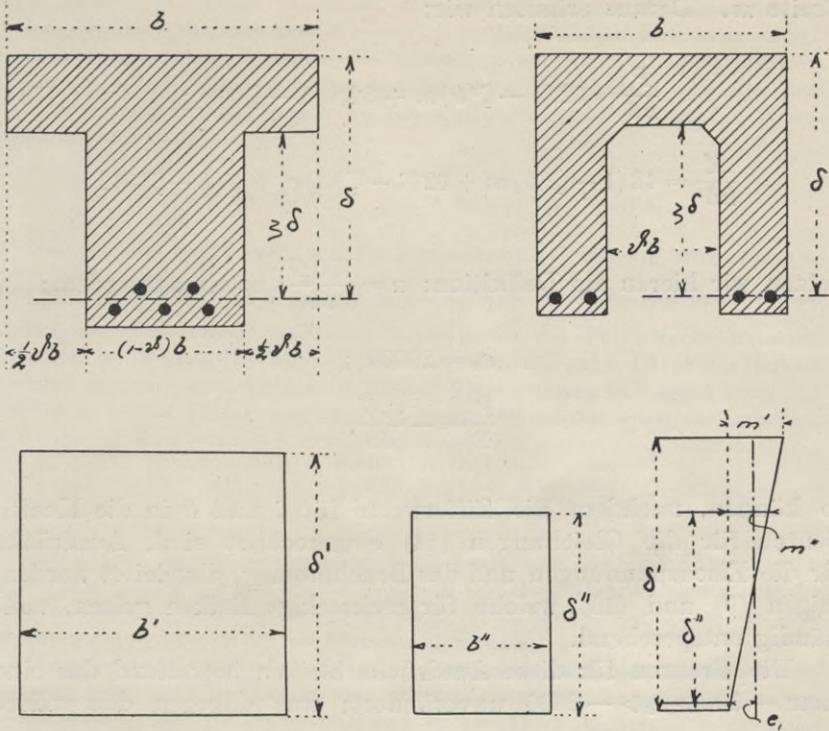


Fig. 26.

$$\therefore Q = 62 k (m' \delta' b' - m'' \delta'' b'') + 82,5 k e_1 (\delta' b' - \delta'' b'');$$

$$\text{und } N = 48 k (m' \delta'^2 b' - m'' \delta''^2 b'') + k (62 e_1 + 3) (\delta'^2 b' - \delta''^2 b'').$$

Setzen wir nun, wie die Figur zeigt:

$$\delta' = \delta; \quad b' = b;$$

$$\delta'' = \zeta \delta; \quad b'' = 9b \text{ sowie}$$

$$m' = m \text{ und also}$$

$$m'' = \zeta m,$$

so können die Ausdrücke für $\frac{Q}{k \delta b}$ und $\frac{N}{k \delta^2 b}$ abgeleitet werden.

Zur Übereinstimmung mit Obigem können wir setzen $\frac{Q}{b} = P$ und $\frac{N}{b} = M$, also Kräfte und Momente verteilt pro cm. der oberen

Breite m . Daraus erhalten wir:

$$\frac{P}{k\delta} = 62(1 - \zeta^2 \vartheta) m + 82,5(1 - \zeta \vartheta) e_1; \quad (14)$$

$$\frac{M}{k\delta^2} = 48(1 - \zeta^3 \vartheta) m + 62(1 - \zeta^2 \vartheta) e_1 + 3(1 - \zeta^2 \vartheta).$$

Setzen wir hierzu als Definition: $\alpha = \frac{100G}{\delta b}$; sowie ausserdem:

$$\sigma_e = 2000 e_1;$$

$$\frac{P}{\delta} = -\frac{\sigma_e G}{\delta b},$$

so können, nachdem die Zifferwerte für ζ und ϑ in die Koeffizienten für die Gleichungen (14) eingerechnet sind, Ausdrücke für die Eisenspannungen und das Bruchmoment abgeleitet werden, obigen (9) und (10), welche für rechteckige Balken gelten, vollständig entsprechend.

Die Grenzen für diese Ausdrücke bleiben betreffend das eine Paar $-500 > \sigma_e > -2000$ unverändert; was dagegen das andere Grenzenpaar $0,4 < \frac{\alpha}{k} < 2,4$ betrifft, so sollte man sich streng genommen die Eiseneinlage G als Differenz zwischen zwei $G' - G''$ denken, welche für die beiden Rechtecke gelten, sowie die daraus abgeleiteten α' und α'' jedes besonders prüfen.

Die Tangentialspannungen und sekundäre Armierung.

Die Frage über Schubspannungen haben wir weggelassen, da diese mit dem Grundthema dieser Darstellung nicht wesentlich zusammenhängt. Für eine vollständige Erläuterung dieser Frage müsste man u. a. eine vollständige, durch Experimente gewonnene Kenntnis über das Verhalten zwischen Tangentialspannungen und Schubdeformationen im Beton verlangen. Hierüber ist kaum mehr bekannt als gewisse, ziemlich unsichere Werte über die Bruchbeanspruchung τ_{\max} . Es ist als wahrscheinlich anzunehmen, dass eine Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung im Beton ebenso wenig bei Schub vorhanden ist, als bei Druck oder Zug. Und ferner, dass die Schubbruchbeanspruchung τ_{\max} nicht einmal bei ungleichen Normaldehnungen innerhalb desselben Materials einen konstanten Wert hat.

Ein Umstand, welcher mit der Frage über den Sicherheitsgrad und die Bruchbelastung zusammenhängt, kann jedoch hier vorübergehend berührt werden. Bezeichnen wir mit P, M, V Eisenzugkraft, Angriffsmoment und Vertikalkraft in einem bestimmten, beliebigen Querschnitt bei einer mit dem Sicherheitsgrad wach-

senden, äusseren Belastung. Wenn der Querschnitt n Stück untere Eiseneinlagen mit dem Radius r hat, und also $F = n\pi r^2$, und die Eisenspannung in dem fragl. Querschnitt mit einem Zuschuss dP wächst, so wird die Bedingung, dass die Adhäsion in dem Umfange der Eiseneinlagen nicht überschritten wird oder dass der Schubspannungsbruch in der den Eisenumfängen zunächst liegenden Betonperipherie nicht eintritt:

$$dP < n \cdot 2\pi r \tau_{\max} dx, \quad \text{d. h.} \quad \frac{r}{2F_e} \cdot \frac{dP}{dx} < \tau_{\max}.$$

Hieraus folgt der Vorteil, den Eisenquerschnitt auf mehrere kleine Eisen zu verteilen, und ferner: wenn $\frac{M}{P} = a$ innerhalb des Querschnittes den Abstand zwischen der Eiseneinlage und dem Schwerpunkt der Betondruckspannungen bezeichnet, wobei innerhalb aller Querschnitte über die ganze Länge des Balkens a kleiner, jedoch nur unbedeutend kleiner als die Querschnittshöhe δ ist, und daher ohne grosse Fehler als konstant betrachtet werden kann, so kann man die *Bedingung, dass sekundäre Armierung weggelassen werden kann, schreiben:*

$$\frac{r}{2F_e} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{r}{2F_e} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{r}{2a} \cdot \frac{V}{F_e} < \tau_{\max}. \quad (15)$$

Hierin tritt alsdann ausser anderen die Frage über die lokalen Perturbationen an den Auflagern auf, welche u. a. von der elastischen Beschaffenheit der Auflager und anderen Umständen abhängig sind, welche bei Beton grössere Bedeutung haben können als bei härteren Materialien.

Die sowohl experimentellen als auch theoretischen Kenntnisse über die Schubspannungsverhältnisse des Betons sind allerdings mangelhaft; jedoch ist dies von verhältnismässig geringer Bedeutung, weil die sekundäre Armierung in der Regel ohne grossen ökonomischen Nachteil überstark gemacht werden kann. Dass sekundäre Armierung in jedem Falle hilft, wenn dieselbe genügend dicht und stark gemacht wird, darf wohl durch ausgeführte Konstruktionen als bewiesen angesehen werden.

Statisch unbestimmte Fälle.

Platte auf unendlich vielen Stützen, mit gleichmässig verteilter Totalbelastung.

Dieser Fall wird derselbe, wie ein an beiden Enden horizontal eingespannter Balken. Geometrisch geht hervor, dass der Mittelquerschnitt und die Stützenquerschnitte nach der Deformation parallel bleiben müssen, woraus der kürzeste Weg zur Elastizitätsgleichung:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} u_x dx = 0;$$

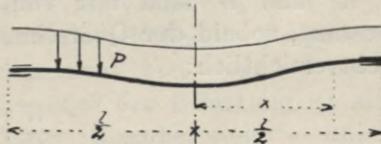


Fig. 27.

oder, wenn die Balkenhöhe konstant ist, nach der Multiplikation mit 1000δ

$$\int_0^{\frac{l}{2}} m_x dx = 0.$$

Die statische Gleichung ist:

$$M_x = M_0 - \frac{px^2}{2}.$$

Ist nun die Armierung der Platte wie auf nebenstehender Skizze angeordnet, so dass sie in den positiven Momenten in derselben Weise wirkt wie in den negativen (die Doppelarmierung in der Nähe der Nullpunkte der Momente, wo m klein wird, hat keinen besonderen Einfluss), so kann man die Ausdrücke, welche für einfach armierte Platten aufgestellt sind, anwenden. Die Gültigkeitsgrenzen werden dieselben. Aus den beiden nachfolgenden Gleichungen (8) kann man ebenso wie bei den Durchbiegungen ableiten:

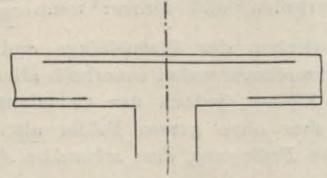


Fig. 28.

welches, verglichen mit Gleichung (9), ergibt, dass zwischen m und M ein Ausdruck von der Form gilt:

$$\sigma_e = -1000 \cdot \frac{6,2 m}{\frac{\alpha}{k} + 4,125},$$

welches, verglichen mit Gleichung (9), ergibt, dass zwischen m und M ein Ausdruck von der Form gilt:

$$m = U \cdot M - W.$$

Dieser Ausdruck ist zwar nicht korrekt in der Nähe der Nullpunkte der Momente, aber das entsprechende kleine m hat bei der Addition keine Bedeutung.

U und W sind nur von δ , α und k abhängig, und folglich konstant, sobald der Querschnitt konstant ist, und weiter ist, wie leicht ersichtlich:

$$\frac{W}{U} = 3k\delta^2;$$

$$\therefore \int_0^{\frac{l}{2}} (U \cdot M_x - W) dx = 0; \quad \therefore \int_0^{\frac{l}{2}} U \left(M_0 - \frac{px^2}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{l}{2}} W dx = 0;$$

$$\therefore M_0 \cdot \frac{l}{2} - \frac{pl^3}{48} - \frac{W}{U} \cdot \frac{l}{2} = 0; \quad \therefore M_0 = \frac{pl^2}{24} + 3k\delta^2.$$

Und schliesslich das Moment über den Stützen:

$$\frac{pl^2}{8} - M_0 = -M_s = \frac{pl^2}{12} - 3k\delta^2. \quad (16)$$

Von dem Resultate für elastische Proportionalität weicht also Obenstehendes in beiden Fällen mit der Quantität $3k\delta^2$ ab, welche für Eisenbeton den Unterschied zwischen Stützenmoment und Mittelmoment einigermassen ausgleicht.

Betreffend Platten mit doppelt armiertem Querschnitt kann man ohne weiteres die Schlussfolgerung ziehen, dass die Momente zwischen den soeben abgeleiteten und den für elastische Gleichförmigkeit geltenden liegen müssen, also derselbe Ausdruck wie (16), obwohl mit dem Term $3k\delta^2$ multipliziert mit einem Koeffizient zwischen 0 und 1. Wünscht man genauere Auskunft, so kann die Frage ohne Schwierigkeit mit Hilfe von Tab. II und folgender gelöst werden. Man sucht, nachdem α gegeben ist, in der passen-

den Tabelle die Kurve $\frac{P}{\delta} = 0$ und zeichnet ein Diagramm für die für diese Kurve einander entsprechenden Werte von m und $\frac{M}{\delta^2}$; nun ersetzt man den oberen, allein praktischen, wichtigen Teil dieser Kurve mit einer geraden Linie, deren Gleichung $m = f\left(\frac{M}{\delta^2}\right)$ geschrieben wird, und fährt alsdann fort wie oben.

Zuerst folgt aus dem Vorstehenden, dass eine Belastung, welche in der frei aufliegenden Platte Bruch verursacht, um mehr als 50 % gesteigert werden muss, wenn ein Bruch über den Stützen entstehen soll, wenn die Platte an beiden Enden horizontal eingespannt ist. Desgleichen geht bei einem Vergleich mit (10) hervor, dass es nur wenn der Koeffizient k im Verhältnis zu α ($k > \sim 4\alpha$) sehr gross ist, also kaum in praktischen Fällen in Frage kommen kann, dass das absolute Bruchmoment von den Stützen nach der Mitte sich verschiebt. Gegenüber der Belastung ist also die Kontinuität bei Auflagerung einer Eisenbetonplatte unbedingt günstiger als für gewöhnliche Materialien. Inwiefern dasselbe betreffend Auflagerverschiebungen gesagt werden kann, ist eine andere Frage, die einer besonderen Untersuchung wert wäre.

Plattenbalken auf drei oder mehreren Stützen.

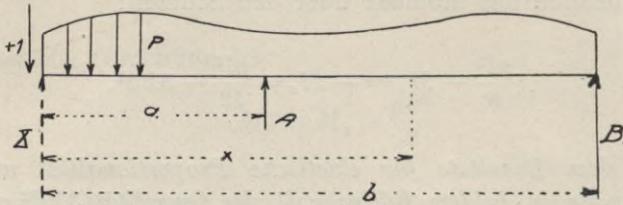


Fig. 29.

Wenn man X durch eine äussere Kraft $= 1$, als allein wirkende Belastung, ersetzt denkt, so erhält man unmittelbar:

$$\text{Für die Momente auf der Strecke } a: \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = x;$$

$$\text{» » » » » } b-a: \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = \frac{a(b-x)}{b-a};$$

$$\text{sowie } \frac{\partial A}{\partial X} = -\frac{b}{b-a};$$

$$\frac{\partial B}{\partial X} = \frac{a}{b-a}.$$

Beim Einsetzen dieser Ableitungen ins Gleichungssystem (2) und unter Beachtung dessen, dass P eine identische Null ist, erhält man, mit Umstellung der Reihenfolge der Terme, die Gleichung:

$$\int_0^a \mu_x x dx - \eta_0 + \frac{b}{b-a} \cdot \eta_a - \frac{a}{a-b} \cdot \eta_b + \frac{a}{b-a} \int_a^b \mu_x (b-x) dx = 0. \quad (17)$$

Eine geometrische Illustration der Gleichung (17) erhält man, wenn man durch den deformierten Querschnitt über der Mittelstütze A eine winkelrechte Linie, also eine Tangente zur elastischen Linie, einlegt. Diese Linie schneidet auf den übrigen Stützen die beiden Integrale ab. Für die übrige Figur sind $\eta_0 \eta_a \eta_b = 0$; in den unteren positiven:

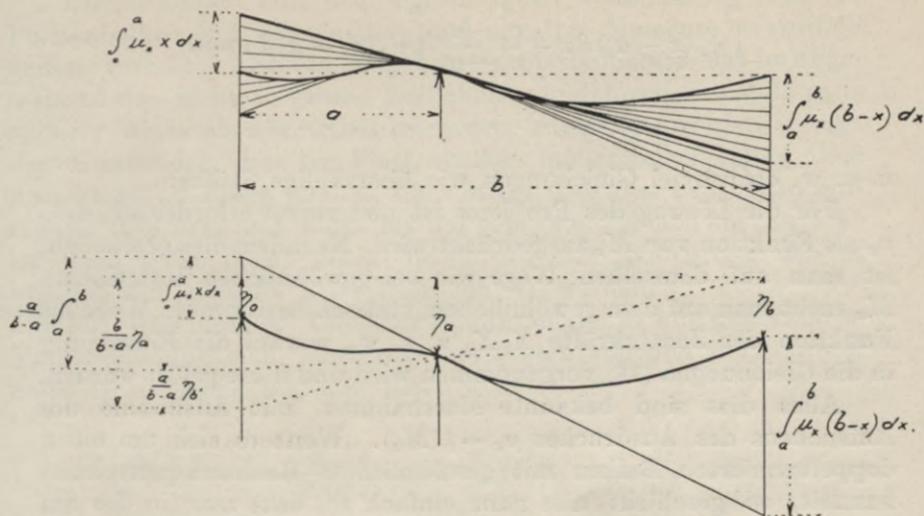


Fig. 30.

Wenn man als Zeichenregel beachtet, dass man die μ_x , welche die Biegungsmittelpunkte nach oben verlegen, als negativ rechnet, so zeigt die Figur, dass die Summe der positiven Terme in (58) ebenso gross ist wie die Summe der negativen.

Jetzt ist es keine Schwierigkeit, direkt auf geometrischem Wege die Elastizitätsgleichungen für einen Balken auf beliebiger Anzahl Stützen aufzustellen:

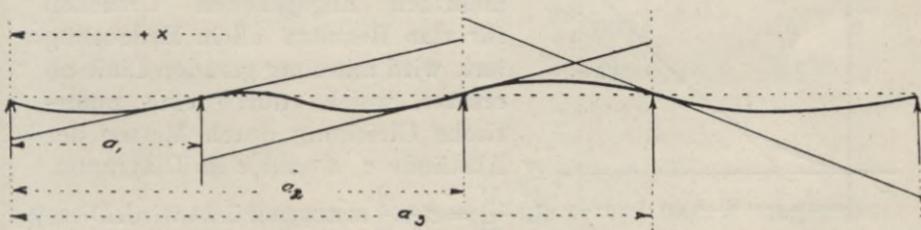


Fig. 31.

Für den Fall, dass die Stützen unverschiebbar sind, werden sie:

$$\int_0^a \mu_x x dx + \frac{a_1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} \mu_x (a_2 - x) dx = 0;$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \mu_x (x - a_1) dx + \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2} \int_{a_2}^{a_3} \mu_x (a_3 - x) dx = 0;$$

$$\int_{a_2}^{a_3} \mu_x (x - a_2) dx + \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_3} \int_{a_3}^{a_4} \mu_x (a_4 - x) dx = 0;$$

.

u. s. w. ebensoviel Gleichungen wie überzählige Stützen.

Für die Lösung des Problems ist nun zuerst erforderlich, dass μ_x als Funktion von M_x ausgedrückt wird. Nachdem dies geschehen, ist man auf demselben Wege wie bei gewöhnlichen Materialien. M_x sucht man auf dem gewöhnlichen, statisch bestimmten Wege als Funktion der Zusatzkräfte X_1, X_2 u. s. w., worauf die Einsetzung in die Gleichungen (18) vorgenommen wird und diese gelöst werden.

Alles dies sind bekannte Massnahmen, mit Ausnahme des Aufsuchens des Ausdruckes $\mu_x = f(M_x)$. Wenn es sich um einen doppeltarmierten Balken mit gewöhnlichem Rechteckquerschnitt handelt, so geschieht dies ganz einfach so, dass man in der am meisten passenden der Tabellen II—VIII die Kurve $\frac{P}{\delta} = 0$ verfolgt, und auf dieser die einander entsprechenden Werte von $\frac{M}{\delta^2}$ und $m = 1000\mu\delta$ schreibt und darauf zu einem Diagramm zusammenstellt.

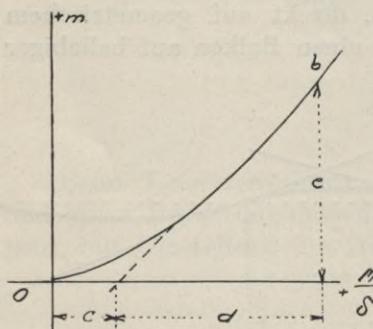


Fig. 32.

Die Kurve erhält immer eine Form wie ungefähr die auf der Figur. Der obere Teil, welcher aus oben mehrfach angegebenen Ursachen für das Resultat allein Bedeutung hat, wird mit einer geraden Linie ab ersetzt, welche durch eine numerische Gleichung durch Messen der Abstände c, d und e im Diagramm, $\frac{M}{\delta^2} = c + \frac{d}{e} m$ ausgedrückt wird. Diese Gleichung gibt nach Einsetzen des numerischen Wertes von δ^2 sowie von $m = 1000\mu\delta$ einen anwendbaren Ausdruck für $\mu = f(M)$.

Für Plattenbalken können die hier beigefügten Tabellen nicht angewendet werden. Demselben Weg zu folgen wie oben für Brückenquerschnitte wird nämlich zu schwer. Es werden besondere Tabellen aufgestellt, am besten ein für alle Male für alle gewählten Normaltypen, und diese können ohne Schwierigkeit, ebenso wie für die Rechteckquerschnitte, so angeordnet werden, dass sie für alle Querschnitte innerhalb derselben Querschnittsorte gültig sind.

Hierzu kommt eine neue Schwierigkeit, nämlich die, dass ein Plattenbalken sich für positive und negative Momente wesentlich anders verhält. Also ein umgekehrter Plattenbalken hat im allgemeinen eine nicht so grosse Festigkeit und deformiert sich in ganz anderer Weise als ein richtig liegender. Andererseits werden, infolge des Umstandes, dass für Plattenbalken immer nur Biegung ohne Axialkraft in Frage kommt, die nötigen Tabellen bedeutend einfacher. Sie brauchen nicht bis auf gebogene Flächen ausgestreckt zu werden, sondern, unter Beachtung der Bedeutung $P=0$, brauchen nur einfache Kurven gesucht zu werden.

Für die inneren Teile der Spannweiten, welche gewöhnliche Momente aufnehmen, kann man am besten von den Formeln auf Seite 61 ausgehen, und aus diesen ableiten:

$$1000\mu a = m = \frac{\sigma_m b t}{2000 F} + 1000 \varepsilon_m; \quad \text{und} \quad \frac{M}{a^2 b} = \frac{\sigma_m t}{a};$$

welche Ausdrücke u. a. die Bedingung $P=0$ enthalten (in diesem Falle damit dass $\sigma_m b t = -\sigma_e F$). Aus der Deformationskurve kann man schreiben:

$1000 \varepsilon_m = 0,1$	$\sigma_m = 24$	sowie hieraus $m = 24 \frac{bt}{2000 F} + 0,1$	$;$	$\frac{M}{a^2 b} = \frac{24 t}{a}$
$= 0,3$	$= 64$	$m = 64 \frac{bt}{2000 F} + 0,3$	$;$	$\frac{M}{a^2 b} = \frac{64 t}{a}$
$= 0,5$	$= 98$	$m = 98 \frac{bt}{2000 F} + 0,5$	$;$	$\frac{M}{a^2 b} = \frac{98 t}{a}$
$= 0,7$	$= 124$	etc.	$;$	etc.
$= 0,9$	$= 148$	\dots	$;$	\dots
etc.	etc.	\dots	$;$	\dots

Nachdem die vorliegenden Zahlwerte für a , b , t und F eingesetzt sind, erhält man eine Tabelle zwischen m und $\frac{M}{a^2 b}$. (Die Tabelle gilt nicht nur für den speziell vorliegenden Fall, sondern für alle Querschnitte mit denselben, relativen Dimensionen, d. h. proportionalen Werten für a , b , t und F . Dies ist die Ursache, weshalb $\frac{M}{a^2 b}$ gewählt wurde an Stelle von M allein oder $\frac{M}{a^2}$.) Die Tabelle wird wie oben in ein Diagramm $f\left(m, \frac{M}{a^2 b}\right)$ übersetzt und aus dem Diagramm leitet man wie oben einen geradelinigen Ausdruck zwi-

schen μ und M ab, welcher als das gesuchte $\mu = f(M)$ angewandt werden kann.

Für die Momente bei den Stützen muss man analog dem vorhergehenden sich dadurch eine Kurve schaffen, dass man allmählich den Plattenbalken mit dem Schwerpunkte der Eiseneinlagen gegen einige Punkte der Deformationskurve umwendet, darauf sieht man durch Dehnung der ε -Skale oder auf andere Weise, wie bei Rechteckquerschnitten, nach, dass die Summe der Eisenspannungen gleich der der Betonspannungen wird, $\therefore P = 0$, alsdann leitet man aus der Kurve das gesuchte $\mu = f(M)$ ab, welches auch jetzt mit genügender Annäherung geradelinig gemacht werden kann.

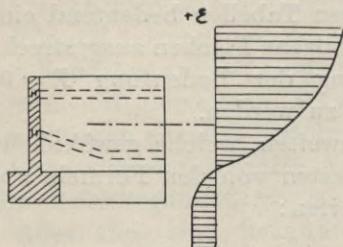


Fig. 33.

Nachdem darauf auch die gewöhnliche, statisch bestimmte Prozedur vorgenommen ist, soll die Einsetzung in Gleichung (18) geschehen. Dann müssen die Nullstellen für die Momente, welche man im voraus ungefähr als richtig ansehen kann, gewählt werden. Hierbei darf man ein gewöhnliches Momentendiagramm für elastisch gleichförmiges Material zu Hilfe nehmen. Ob die gewählten Punkte dann nicht genau stimmen, hat keine praktische Bedeutung für das Schlussresultat. Die kleinen Deformationen in der Nähe der Stellen, wo die Zeichen wechseln, haben nämlich keinen besonderen Einfluss, wie oben mehrfach hervorgehoben wurde. Hat man sich also für die Momentennullstellen $x = c_1, c_2, \dots, c_n$

bestimmt, so* müssen die Integrale geteilt werden; also $\int_{a_0}^{a_1}$ teilt

man in $\int_0^{c_1}$ und $\int_{c_1}^{a_1}$, weiter $\int_{a_1}^{a_2}$ in $\int_{a_1}^{c_2}$ und $\int_{c_2}^{a_2}$ sowie $\int_{c_3}^{a_2}$ u. s. w. in zwei oder drei geteilte Integrale, je nach der Anzahl Nullstellen zwischen den Stützen. Der zuerst gefundene Ausdruck für μ wird in

$\int_0^{c_1}$ und $\int_{c_2}^{c_3}$ u. s. w. eingesetzt, der andere Ausdruck in die anderen.

Darauf kann die Integration vorgenommen werden, und die Reaktionen und Momente über den Stützen werden bekannt.

So geht die explizite Lösung des Problems vor sich. Dagegen dürfte es in manchen Fällen einfacher sein, dass man, sobald die

beiden Kurven $f(m, M)$ konstruiert sind, gewöhnliche Vertikalkräfte und Momentendiagramme zeichnet, so als ob der Balken elastisch gleichförmig wäre. Darauf nimmt man die so erhaltenen Reaktionen und Momente, teilt den Balken in eine geeignete Anzahl endlicher Längenelemente Δx (nicht notgedrungen gleich viele), die Integrale ersetzt man mit Σ , aus den gegebenen Momentenwerten sucht man mit den Kurven die Mittelwerte von μ , setzt diese ein, nimmt die Summierung vor und so sieht man, ob die Gleichungen zufriedenstellend sind. Dies ist natürlich im allgemeinen nicht der vollständige Fall, aber wenn es sich nur um einen Balken mit zwei oder drei Feldern handelt, dürfte es ein gutes Resultat mit nur einer oder zwei Änderungen geben für die eine oder für die beiden überzähligen Reaktionen. Auf diese Weise wird das Problem durch Versuche gelöst.

Bei Bestimmung von $f(m, M)$ für die Momente über den Stützen, also mit umgekehrtem Balkenquerschnitt dürfen natürlich die Zugspannungen des Betons, welche innerhalb der breiten Fläche der Platte fallen, nicht vernachlässigt werden. Eine Übereinstimmung mit den wirklichen Deformationen und damit eine gültige Lösung des Problems wird nicht möglich, wenn diese Zugspannungen nicht mitgerechnet werden.

Das Schlussresultat stellt sich natürlich wesentlich ungleich, je nach dem die obere Armierung über den Stützen stark oder schwach ist. Sobald der ganze, breite Teil der Platte innerhalb der konstanten Zugspannungszone fällt (siehe Fig. 33), so entsteht, falls einigermassen starke Eiseneinlagen in oder in der Nähe der Platte fehlen, das Verhältnis, dass die Momente sich nur unbedeutend verändern, wenn m zu- oder abnimmt. Mit anderen Worten, die Kurve $f(m, M)$ erhält nebenstehende Form.

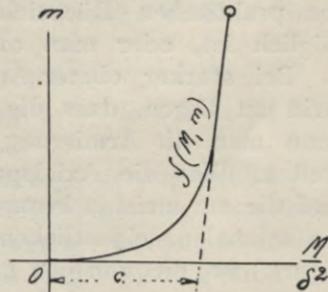


Fig. 34.

Dies ist vom Verfasser zwar nicht im Detail untersucht worden, aber es hat wenigstens den Anschein hierfür. Die Querschnitte können keine Vertikalkräfte $\frac{dM}{dx}$ aufnehmen, da M auf eine gewisse Strecke konstant ist. Daraus folgt der Schlussatz, dass eine derartige Spannungsverteilung nur in einem Punkte möglich ist, nämlich mitten über einer Stütze, und damit sind in solchen Fällen die Momente über den Stützen bekannt, und jedes Feld kann für sich als statisch bestimmt mit gegebenen Endmomenten behandelt werden.

Je mehr biegsam ein Plattenbalken für diese Momente in der Nähe der Stützen ist, verglichen mit dem anderen Gliede, desto mehr geht er dazu über, dass er so wirkt, als ob er in unabhängige

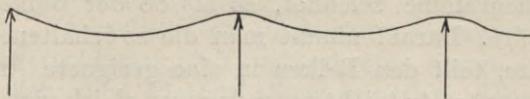


Fig. 35.

Felder geteilt wäre, und desto weniger Recht hat man, sich auf die Kontinuität zu verlassen.

Dies könnte an und für sich von geringerer Bedeutung sein, aber die Gefahr für Rissbildung mitten über den Stützen infolge sehr starker Deformationen daselbst wird dadurch vergrößert oder zeigt sich bei näherer Untersuchung vielleicht unvermeidlich. Diese Risse sind relativ unschädlich, man sieht sie jedoch nicht gern. Man kann vielleicht dieselben vermeiden dadurch, dass man entweder ein oder zwei Ausdehnungsfugen anordnet, wie nebenstehende Figur zeigt, wenn dies aus praktischen Rücksichten möglich ist, oder man ordnet eine starke, obere Armierung an.

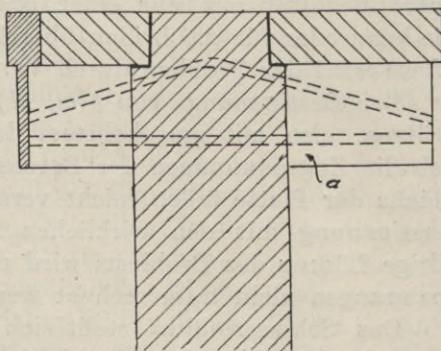


Fig. 36.

Bei starker oberer Armierung scheint wiederum eine Gefahr darin zu liegen, dass die Schubspannungen verwickelt werden, wenn man die Armierung über die ganze Breite der Platte ausbreitet. Was die Axialspannungen in diesem Falle betrifft, so wird die am meisten beanspruchte Stelle nach dem unteren Teile des schmalen, eigentlichen Balkens dort verlegt (bei a auf der Figur), wo die von den grossen Stützenmomenten herrührenden Druckspannungen sich konzentrieren.

V. Anwendung auf Gewölbe.

Statisch bestimmte Fälle (Dreigelenkbogen).

Zu diesem Zwecke wollen wir folgende Variante der Theorie für den Dreigelenkbogen vorausschicken, obwohl diese nicht ausschliesslich zur Eisenbetonfrage gehört, sondern eher zu der über Gewölbe im allgemeinen.

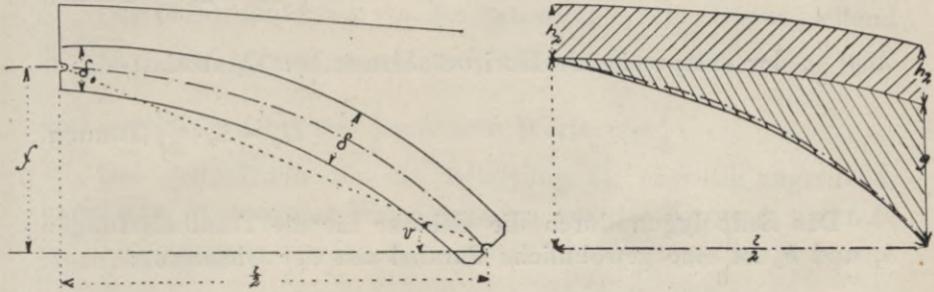


Fig. 37.

Bogenhöhe f und Spannweite l , gemessen in Meter.

Nutzlast pro Längmeter, gemessen in der Betonhöhe $= h_1$ Meter.

Das spezifische Gewicht des Betons $= \gamma$. Die ruhende Belastung denken wir uns in zwei Teile geteilt:

- 1) eine gleichmässig verteilte mit der Betonhöhe h_2 Meter;
- 2) eine kontinuierlich wachsende von 0 bei dem Scheitel bis zu Betonhöhe g an den Auflagern.

Sowohl h_2 als auch g können bei der Projektierung mit Leichtigkeit vorerst geschätzt werden. Die Mittellinie des Gewölbes kann im Detail auf verschiedene Weise verlegt werden, aber die möglichen Variationen der Lage werden doch unter allen Umständen nicht grösser, als dass in der Gewichtsberechnung (nicht im übrigen) das Wachsen von g ohne bedeutenden Fehler im Resultat als parabolisch angesehen werden kann.

Die Resultante von der g -Belastung auf die halbe Spannweite hat also die Grösse $\sim \frac{1}{3} \gamma g \frac{l}{2}$ Tonnen und liegt im Abstände vom

Auflager $= \sim \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2}$. Die von der g -Belastung herrührende Hori-

zontalkraft erhält also die Grösse: $H_3 = \sim \frac{1}{48} \gamma \frac{g}{f} l^2$;

Also:

$h_1 = \frac{p}{\gamma}$; der entsprechende Horizontaldruck bei Totalbelastung:

$$H_1 = h_1 \frac{\gamma l^2}{8f} \text{ Tonnen}$$

$h_2 = h_2$; der entsprechende Horizontaldruck bei Totalbelastung:

$$H_2 = h_2 \frac{\gamma l^2}{8f} \text{ Tonnen}$$

$h_3 = \frac{g}{6}$; der entsprechende Horizontaldruck bei Totalbelastung:

$$H_3 = h_3 \cdot \frac{\gamma l^2}{8f} \text{ Tonnen.}$$

Das Seilpolygon durch die Gelenke für die Totalbelastungen h_1 und h_2 ist eine gewöhnliche Parabel mit der Gleichung:

$$y_1 = 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \cdot f \quad (\text{Origio im Scheitel, } Y\text{-Achse vertikal, positiv nach unten.})$$

Das Seilpolygon für die Totalbelastung h_3 (berechnet in gewöhnlicher Weise: $H \cdot \frac{dy}{dx} = \int p_x dx$) ist eine Parabel 4. Grades mit den Ordinaten: $y_3 = 16 \left(\frac{x}{l} \right)^4 f$, welche ebenso leicht wie die vorhergehenden berechnet und konstruiert werden kann:

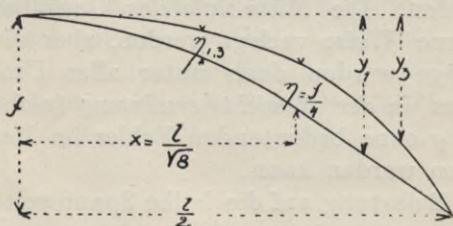


Fig. 38.

$y_1 - y_3$ wollen wir $\eta_{1,3}$ nennen. An den beiden Kurven können wir sehen, dass η sein Maximum bei $x = \frac{l}{\sqrt{8}}$ mit $\eta = \frac{f}{4}$ hat.

Das Seilpolygon für eine einseitig konstante Belastung auf einer Gewölbehälfte ist auf der unbelasteten Seite die gerade Linie AO und auf der belasteten eine Parabel mit den Ordinaten $y = 2y_1 - \frac{2x}{l} f$, welche man mit Hilfe von y und \overline{OB} , wie aus der Figur ersichtlich, konstruieren kann.

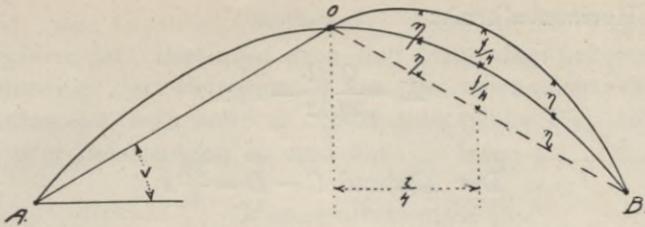


Fig. 39.

Der Horizontaldruck von der Belastung h_1 , einseitig angreifend $= \frac{1}{2} H_1$. Das Maximum aus dem Abstände η zwischen den Kurven ergibt sich bei $x = \frac{l}{4}$ mit dem Werte $\eta = \frac{f}{4}$.

Das Seilpolygon für die Belastung h_3 , einseitig angreifend, kann man in analoger Weise erhalten aus der Kurve y_3 und \overline{OB} . Horizontalkraft $= \frac{1}{2} H_3$.

Das oben beschriebene Seilpolygon zeigt folgende Form:

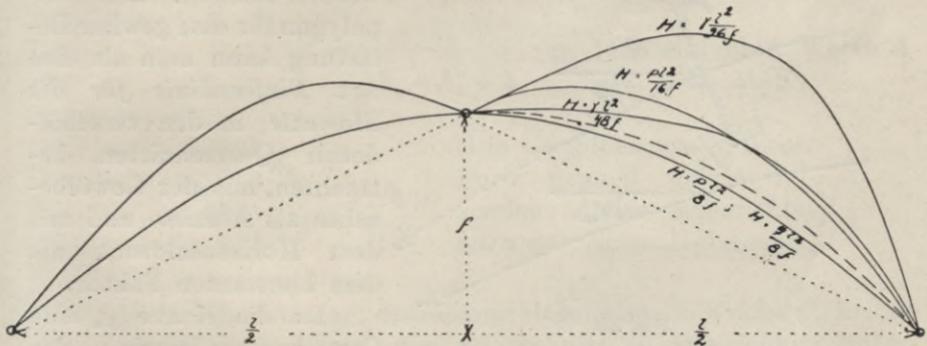


Fig. 40.

Das Seilpolygon für eine konzentrierte Kraft Q besteht aus den geraden Linien \overline{AOC} und \overline{CB} .

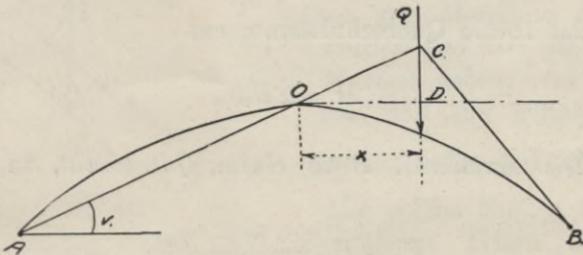


Fig. 41.

Die Horizontalkraft:

$$K = \frac{Q}{2f} \left(\frac{l}{2} - x \right);$$

$$\text{Der Abstand } C-D = \frac{2f}{l} x$$

$$\therefore r_{\max} = 2f \frac{x}{l} + y_1.$$

Sobald die Horizontalkräfte H berechnet oder bei der Projektierung geschätzt, sowie ferner die oben angegebenen Seilpolygone bekannt sind, so erhalten wir:

1:o. Das Moment für die Halbachse in einem beliebigen Querschnitt als Summe der Momente, welche von den einzelnen Belastungen entstehen, die als gleichzeitig auftretend angesehen

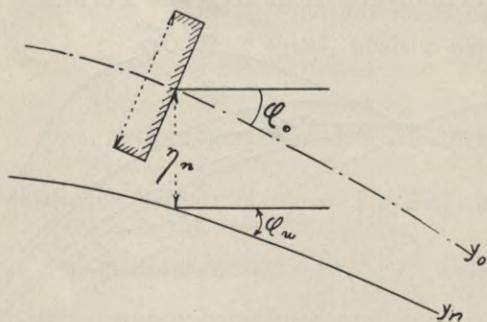


Fig. 42.

werden können. Das Seilpolygon für eine gewisse Belastung kann man als eine Art Einflusslinie für die Momente in den verschiedenen Querschnitten betrachten, mit der Gewölbeachse als Abszisse und mit dem Horizontaldruck als dem konstanten Faktor.

Ist die Kurve y_0 eine Gewölbeachse, sowie y_n das dem Horizontaldruck H_n entsprechende Seilpolygon, so wird, wie man leicht sehen kann:

$$M_n = H_n r_n$$

und also das totale Querschnittsmoment

$$M = \sum H_n r_n$$

2:o. Die Axialkraft P in einem Querschnitt, in derselben Weise:

$$P_n = H_n \frac{\cos(\varphi_0 - \varphi_n)}{\cos \varphi_n}.$$

3:o. Die Lage der Gewölbeachse, wenn die Kurve y_0 nicht vorher gegeben ist. Bestimmt man sich dafür, dass bei einer gewissen Kombination der Belastungen das zusammengesetzte Moment um die Achse = 0 sein soll, so erhält man (siehe Fig.) für beispielsweise zwei Belastungen h_m und h_n :

$$H_m r_m - H_n r_n = 0.$$

Aus den Kurven y_1 und y_3 kann also die gewöhnliche Tolkmitt'sche Lage für die Gewölbeachse (nach der permanenten Belastung + $\frac{1}{2}$ Totalnutzlast eingerichtet) gefunden werden (siehe Fig. 44):

$$r_1 = \frac{H_3}{\frac{1}{2}H_1 + H_2 + H_3} \cdot r_{1,3} =$$

$$= \frac{h_3}{\frac{1}{2}h_1 + h_2 + h_3} \cdot r_{1,3} \quad (\text{Die einfachen Werte } h_1 \text{ etc. siehe oben.})$$

$$r_3 = \frac{\frac{1}{2}h_1 + h_2}{\frac{1}{2}h_1 + h_2 + h_3} \cdot r_{1,3}; \quad (\text{Die Gewölbeachse in dieser Form nennen wir im folgenden: Achse, eingerichtet nach der Normalbelastung.})$$

Weiter findet man, dass überschlagsweise die Kräfte P_n keinen grossen Veränderungen von Querschnitt zu Querschnitt unterworfen sind, weshalb man die

am meisten beanspruchte Stelle für eine gewisse Belastung in der Nähe der Punkte suchen kann, wo die Momente am grössten werden und also die Werte η ihre Maxima haben. An solchen Stellen sind die y -Kurven parallel mit der Achse und also $P_n = \frac{H_n}{\cos \varphi_0}$.

Alle solche Stellen liegen in den mittleren Teilen der Gewölbe-

hälfte, weshalb man ohne grossen Fehler setzen kann:

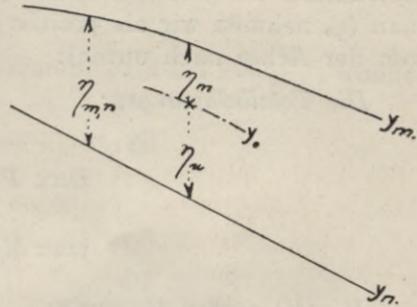


Fig. 43.

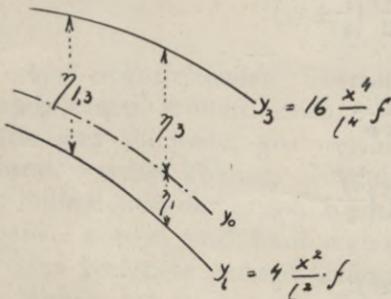


Fig. 44.

$$\varphi_0 = v \text{ und } \cos \varphi_0 = \cos v; = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4f^2}}.$$

Als erste Annahme bei der Projektierung, und bei mehr oberflächlichen Kontrollberechnungen kann man also für *die mittleren Querschnitte*, $x = \frac{l}{4}$ bis $x = \frac{l}{8}$, einen konstanten Mittelwert für η_1 annehmen, welchen man misst oder berechnet. Hierbei erhält man (η_n nehmen wir als positiv in derselben Richtung wie y , d. h. von der Achse nach unten):

Die Totalbelastungen:

$$\max P_1 \approx \frac{H_1}{\cos v};$$

$$\max M_1 \approx H_1 \eta_1.$$

Für H_2 analog H_1 sowie:

$$\max P_3 \approx \frac{H_3}{\cos v};$$

$$\max M_3 \approx -H_3 \left(\frac{f}{4} - \eta_1 \right).$$

Einseitige Belastungen:

$$\max P_1 \approx \frac{H_1}{2 \cos v}; \quad (19)$$

$$\max M_1 \approx \pm \frac{H_1}{2} \left(\frac{f}{4} \pm \eta_1 \right);$$

$$\max P_3 \approx \frac{H_3}{2 \cos v};$$

$$\max M_3 \approx -\frac{H_3}{2} \left(\frac{3f}{4} - \eta_1 \right).$$

Konzentrierte Kraft (Dampfwalze):

Nach obigem: $K = \frac{Q}{2f} \left(\frac{l}{2} - x \right)$; das Moment N unter $Q = -(\overline{CD} + y_0)K$

$$= - \left[2 \frac{x}{l} f + \left(4 \frac{x^2}{l^2} f - \eta_1 \right) \right] K,$$

worin von η_1 , welches im Vergleich mit den übrigen klein ist, abgesehen werden kann:

$$\therefore N = \sim - \frac{Qx}{2} \left(1 - 4 \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Hieraus resultiert, dass N Maximum wird bei $x = \frac{l}{\sqrt{12}}$, womit

$$N_{\max} = - \frac{Ql}{3\sqrt{12}} = \sim - 0,1 Ql,$$

sowie entsprechend:

$$K = \frac{Ql}{4f} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sim 0,1 \frac{Ql}{f}.$$

Da φ_0 hierbei appr. = v , so kann man setzen:

$$\begin{aligned} \max P_q &\approx K \cdot \frac{\cos 2v}{\cos v} + Q \sin v = \\ &= \sim \left(0,1 \frac{l}{f} + 1,5 \frac{f}{l} \right) Q \cos v \end{aligned}$$

oder vielleicht besser graphisch nach nebenstehender Figur.

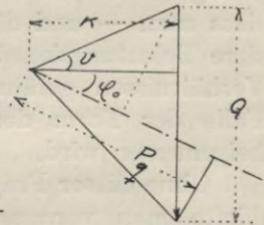


Fig. 45.

Aus obenstehenden Überschlagformeln erhält man bei der Projektierung schnell einen vorbereitenden Wert für die Axialkräfte und Momente, aus welchen die mittleren Querschnitte bestimmt werden können. Nachdem dies geschehen und nachdem mit Hilfe dessen der ganzen Konstruktion annehmbare Dimensionen gegeben worden sind, kann man eine genauere Kontrollberechnung für eine geeignete Anzahl Querschnitte nach 1) und 2) vornehmen.

Bisher haben wir die Frage über den Sicherheitsgrad und welche Belastungskombinationen angewendet werden sollen nicht berührt. Die gewöhnlich angewandten Kombinationen sind ja teils totale permanente Belastung im Verein mit totaler Nutzlast,

teils totale permanente im Verein mit einseitiger Nutzlast. Für Betongewölbe müssten diese Belastungskombinationen mit dem Sicherheitsgrade multipliziert werden, worauf die Untersuchung, dass die Bruchgrenze an keiner Stelle überschritten wird, gemacht werden muss. Wenn man die Achse nach der sog. Normalbelastung konstruiert (Tolkmitt) $\frac{1}{2} h_1 + h_2 + h_3$ so wird, wie leicht zu kontrollieren, das Moment für die Mitte der Gewölbehälfte bei einseitiger Nutzlast + totaler permanenter Belastung = $\pm \frac{1}{8} H_1 f$

oder $\pm \frac{pl^2}{64}$, mit Zeichen, je nachdem die Belastung rechts- oder linksseitig liegt. Dieser Wert ist aber an und für sich numerisch genommen ein *Minimum*, welches von einer der beiden Belastungen überschritten wird, sowohl wenn die Achse z. B. durch fehlerhafte Schätzung der permanenten Gewichte falsch angelegt worden ist, als auch wenn die Nutzlast und permanente Belastung nicht im selben Verhältnis gesteigert werden. Der Belastungsfall bietet daher gewisse Analogien mit einer labilen Gleichgewichtslage und mit Knickungsbelastungen auf einem geraden Stabe.

Man hat daher zu wählen, entweder dass man höhere Sicherheitsgrade als für die einfachen Biegungsfälle anwendet, oder aber dass man — und dieses dürfte das rationellere sein —, auch andere Belastungskombinationen untersucht, welche unter gewissen Verhältnissen gefährlicher sein können, und in welch' letzterem Falle der Form der Gewölbeachse keine übertriebene Bedeutung beigegeben wird.

Ohne dieser Frage eine weitgehende Untersuchung zu widmen, dürfte man voraussetzen können, dass die vergrößerten Spannungen, welche unter dem Einfluss von Vibrationen in einer Konstruktion auftreten, in gewissen Fällen denjenigen ähnlicher sein können, welche auftreten würden, wenn die Nutzlast in höherem Verhältnis gesteigert würde als die permanente, als wenn die ganze permanente Belastung und die Nutzlast auf einmal genau dieselbe Steigerung erhielten.

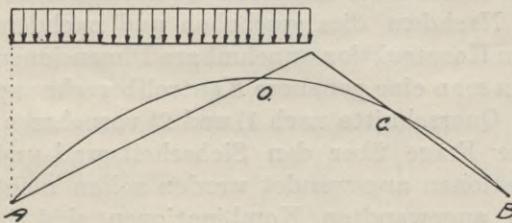


Fig. 46.

Von dem Umstande abgesehen, dass ein Querschnitt, beispielsweise bei C, eigentlich das grössere Moment für eine solche Belastung erhält, wie die Figur zeigt (vergleiche die Einflusslinie für das Mo-

ment in C für eine über die Spannweite laufende, konzentrierte Kraft; der Überschuss über das Moment für halbe, einseitige Belastung wird immer sehr klein) und vorausgesetzt, dass die Gewölbeachse normale Form hat, so werden folgende Belastungskombinationen zur Untersuchung eines Querschnitts zu empfehlen sein.

Die rechte Gewölbehälfte:

1:0 Totale Nutzlast und totale permanente Belastung, beide mit dem Sicherheitsgrade gesteigert.

2:0 Rechtseitige Nutzlast sowie Totalbelastung, beide mit dem Sicherheitsgrade gesteigert.

3:0 Linksseitige Nutzlast, gesteigert mit dem Sicherheitsgrad, und totale permanente Belastung *ohne* Steigerung.

4:0 Konzentrierte (Dampfwalzen-) Belastung im Verein mit gesteigerter oder ungesteigerter permanenter Belastung, je nachdem das eine oder andere ungünstiger ist.

Mit dem hier angegebenen Schema für die Untersuchungen ist es nicht schwer, alle diese Belastungsfälle zu untersuchen.

Eine solche, etwas strengere Auffassung würde verursachen, dass die dünnsten Gewölbe Konstruktionen aus Eisenbeton, welche für das praktische Gefühl wenig ansprechend sind, verworfen würden, was sicherlich kein Verlust wäre.

Um nachher zu untersuchen, dass kein Bruch eintritt, muss man durch Division mit δ resp. δ^2 die Größenpaare $\frac{P}{\delta}$, $\frac{M}{\delta^2}$ ausrechnen, darauf auf cm und kg als Einheiten übergehen, sowie (wobei $10 \text{ ton/m}^2 = 1 \text{ kg/cm}^2$) zuletzt in der passenden der hier beigefügten Tabellen nachsehen, dass die Schnittpunkte zwischen den beiden resp. Kurven innerhalb der auf der Tabelle eingezeichneten Bruchgrenzen fallen.

Liegen die Eisenprocente α zwischen zwei Werten, für welche Tabellen aufgestellt sind, so muss man diese beiden beiderseits liegenden Tabellen vergleichen.

Durchbiegungen.

Wenn man die Sehne C in einem symmetrisch und symmetrisch belasteten Dreigelenkbogen um das Stück λ_c verkürzt, so sinkt der Scheitel um das Stück:

$$r_i = \frac{\lambda_c}{\sin v}$$

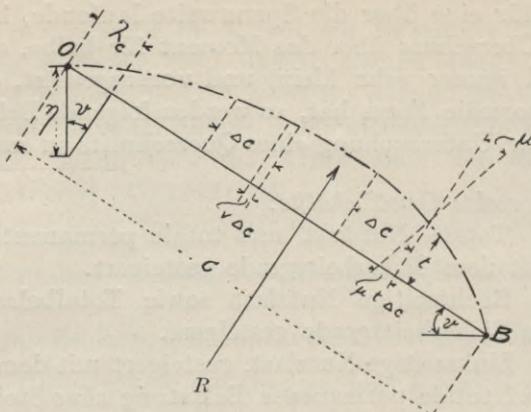


Fig. 47.

Hieraus erhält man (siehe Figur):

$$\eta = \frac{1}{\sin v} \int_0^c (v + \mu t) dc$$

(die Approximation: $dc = ds$)

oder, wenn man m und n einführt, sowie gleichzeitig c in endliche Elemente Δc eingeteilt:

$$1000 \eta = \frac{\Delta c}{\sin v} \Sigma \left(n + \frac{t}{\delta} \cdot m \right);$$

n und m erhält man aus den gegebenen $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$ mit Hilfe der Tabellen II bis VIII und so kann man die Berechnung vornehmen, wenn man grössere Genauigkeit als erforderlich ansieht. Um einen Überschlagswert für gleichmässig verteilte totale Nutzlast zu erhalten, ist es nach einer ähnlichen Überlegung wie für Formel (12) in gewöhnlichen Fällen genügend zu setzen;

$$1000 \eta = \sim \frac{C}{\sin v} \left(n_0 + 0,5 \frac{t_0}{\delta_0} m_0 \right) \quad (20)$$

wo n_0 , t_0 u. s. w. Werte in der Mitte der Gewölbehälfte sind.

Betreffend das Zeichen für m ist zu beachten, dass der Bogen mehr krumm wird, d. h. c verkürzt sich und η vergrößert sich, wenn die Axialkraft in einem Querschnitt unter der Achse liegt. Folglich sind die Momente und Werte m positiv, wenn die grös-

seren Druckspannungen im unteren Teile des Querschnittes vorkommen. Wenn die Drucklinie oberhalb der Achse fällt, wobei die m -Werte negativ werden, ist es leicht möglich, dass die Streckung des Bogens, welche hierbei vorkommt, die Axialzusammendrückung übersteigt, und dass also eine Überhöhung anstelle einer Durchbiegung im Scheitel eintritt.

Bei der Berechnung der Durchbiegung für Verkehrslast muss natürlich der Vorgang folgender werden:

Zuerst bestimmt man die P und M , welche aus der zufälligen + der permanenten Belastung entstehen und hieraus die Verschiebung η_1 des Scheitels aus dessen Lage, wenn die Konstruktion gewichtslos wäre. Danach bestimmt man die Durchbiegung η_0 , welche die permanente Belastung allein ausübt, wonach unter Beachtung dass die richtigen Zeichen eingeführt werden:

$$\eta = \eta_1 - \eta_0.$$

Auf Grund der speziellen Elastizitätsverhältnisse des Materials wird das Resultat nicht richtig, wenn nur die von der Fahrbelastung herrührenden P und M der Berechnung zu Grunde gelegt werden.

Die Durchbiegungen in einem Dreigelenkbogen werden, wie bekannt und wie eine nähere Untersuchung obigen Ausdruckes ergibt, verhältnismässig gross, und muss ihnen eine grosse Aufmerksamkeit geschenkt werden. Die Verschiebungen des Scheitels auch bei unsymmetrischer Belastung kann man leicht in analoger Weise aus der Längsveränderung der Sehnen c ableiten.

Statisch unbestimmte Fälle.

Die Tab. II—VIII, welche bisher nur in dem einen oder anderen Spezialfalle angewandt wurden, sind aufgestellt, um die Berechnung von Gewölben auch in statisch unbestimmten Fällen zu ermöglichen.

Auf Seite 44 haben wir angeführt, dass für gewöhnliches Material mit konstantem Elastizitätsmodul bei rechteckiger Querschnittsform die äusserst einfachen Bezeichnungen $\frac{P}{\delta} = E\nu$; $\frac{M}{\delta^2} = \frac{E}{12} \mu \delta$ gelten. Auf den angehefteten Tabellen dargestellt, würden, wie ersichtlich, die $\frac{P}{\delta}$ -Kurven für ein elastisch gleichförmiges Material von einer Serie horizontaler, gerader Linien im gleichen Abstand

vertreten werden, sowie die entsprechenden $\frac{M}{\delta^2}$ -Kurven durch vertikale gerade Linien im gleichen Abstand. Vergleicht man hiermit den charakteristischen, aber von der Geradelinigkeit ganz bedeutend abweichenden Verlauf innerhalb des Deformationsgebietes, welchen die Kurven haben, so ist es augenscheinlich, dass, wenn man einen Eisenbetonquerschnitt bei der Deformationsberechnung nach den gewöhnlichen Methoden behandelt, so ist dies von der Wirklichkeit stark abweichend. Die Annäherung dürfte nicht besser beurteilt werden können, als dass dieselbe gewagt, aber nicht zuverlässig ist.

Eine Verbesserung hat man mehrfach darin gesucht, dass anstelle des wirklichen Trägkeitsmoments des Querschnittes ein »ideelles« Trägkeitsmoment eingeführt wurde, obwohl, wie der Verfasser wenigstens finden konnte, mit mehr oder weniger zweifelhaftem Resultat. Sei es, dass man Reduktionen in der Höhe oder Breite innerhalb des Querschnitts vornimmt, so dürfte man wohl nichts anderes erreichen können, als dass die oben genannten geraden Linien für $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$ parallel verschoben werden, so lange man wenigstens das ideelle Trägkeitsmoment in allen Spannungsstadien als konstant betrachtet. Geht man so weit, dass man den Elastizitätsmodul und das Trägkeitsmoment variieren lässt je nach den verschiedenen, ungleichen Spannungen, so dürfte man damit z. B. die doppelte Abhängigkeit des Momentes von sowohl ν als μ nicht sicher erhalten. Würde trotzdem auch dieses gelingen, so wäre der Gewinn nur ein langer und beschwerlicher Umweg, um die Abhängigkeit zwischen Deformation und Schnittresultante auszudrücken, welches ja gleichwohl direkt geschehen kann, wenn auch mit der Umständlichkeit, dass man mehrere Tabellen aufstellen muss.

Um im Folgenden die Ungelegenheit mit negativen Achsenwinkeln, mit umgekehrten Integrationsrichtungen, mit einer zu grossen Anzahl negativer Ausdrücke u. s. w. zu vermeiden, ist folgendes System angewandt worden:

Zeichen- und Koordinatensystem.

Den Origo verlegt man in die Querschnittsmitte am Scheitel. Die Ordinaten y sind vertikal und positiv nach unten gerichtet. Die Abszissen sind positiv in der Richtung vom Origo, und sie werden rechts vom Origo x und links x' benannt.

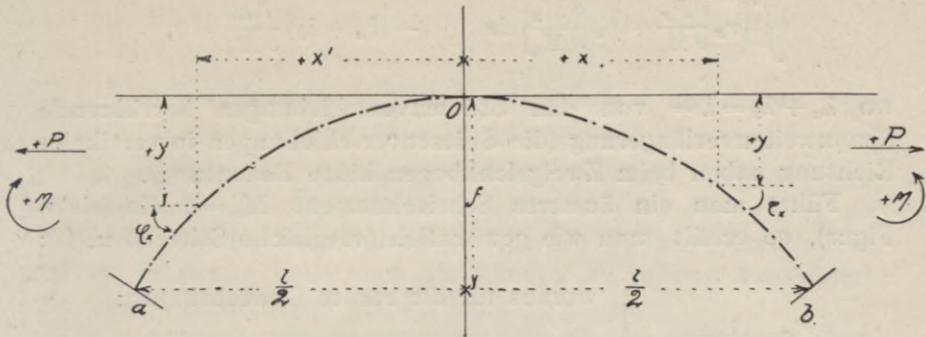


Fig. 48.

Die *positiven* Quantitäten sind:

Alle *inneren* Axialkräfte und ν bei Zusammendrückung. Alle inneren Momente und μ , welche bestrebt sind, die Krümmung des Bogens zu *vergrössern*.

Alle Komponenten aus der äusseren Belastung, die äusseren Reaktionen, Durchbiegungen und Stützenverschiebungen in derselben Richtung wie die resp. *positiven* Koordinatenrichtungen. Sowie schliesslich:

Für den Konstruktionsteil *rechts* vom Origo, das äussere Moment, das äussere Reaktionsmoment und die äusseren, gegebenen Deformationswinkel in den Stützen, wenn sie in trigonometrischer Richtung drehen, dagegen *links* vom Origo, wenn sie in der Richtung des Uhrzeigers drehen.

Zweigelenkbogen.

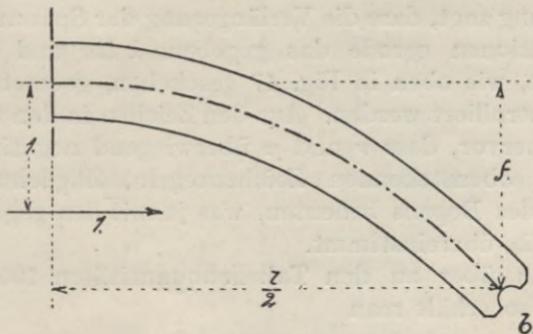


Fig. 49.

Es kommt nur eine statisch unbestimmte Quantität vor. Als solche kann man am besten das Scheitelmoment M_0 wählen, wobei man aus der Gleichung (2) erhält:

$$\int \left(\nu_x \frac{\partial P_x}{\partial M_0} + \mu_x \frac{\partial M_x}{\partial M_0} \right) ds - (\lambda_a + \lambda_b) \frac{\partial H}{\partial M_0} = 0,$$

wo $\lambda_a + \lambda_b = \lambda =$ von den Stützenverschiebungen herrührende Spannweitenverlängerung (die Stützenverschiebungen in vertikaler Richtung haben beim Zweigelenkbogen keine Bedeutung).

Führt man ein äusseres Scheitelmoment $M_0 = 1$ ein (siehe Figur), so erhält man wie gewöhnlich (vergleiche Seite 36 u. f.):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P_x}{\partial M_0} = \frac{1}{f} \cos \varphi_x \\ \frac{\partial M_x}{\partial M_0} = \frac{f-y}{f} \\ \frac{\partial H}{\partial M_0} = -\frac{1}{f} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{woraus für die rechte Gewölbehälfte:} \\ \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{f} \cos \varphi_x \nu_x + \frac{f-y}{f} \mu_x \right) ds + \frac{1}{f} \lambda_b = 0; \\ \text{und für die linke:} \\ \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{f} \cos \varphi_x \nu'_x + \frac{f-y}{f} \mu'_x \right) ds + \frac{1}{f} \lambda_a = 0; \end{array}$$

oder wenn das Gewölbe symmetrisch ist, zusammengelegt und multipliziert mit f

$$\int_0^{\frac{l}{2}} (\nu_x + \nu'_x) \cos \varphi_x ds + \int_0^{\frac{l}{2}} (\mu + \mu'_x) (f-y) ds + \lambda = 0.$$

Diese Gleichung sagt, dass die Verlängerung der Spannweite infolge von Deformationen gerade das gegebene λ ist und kann leicht in der Weise, wie oben in Fig. 47 geschehen, geometrisch dargestellt und kontrolliert werden. Aus den Zeichen in den Gleichungen geht weiter hervor, dass ν und μ überwiegend negativ sein müssen, \therefore nach obenstehenden Zeichenregeln, Zugdehnungen und Streckungen des Bogens bedeuten, was ja mit den gegebenen positiven λ_a und λ_b übereinstimmt.

Geht man über zu den Tabellenquantitäten $1000 \nu = n$ und $1000 \mu \delta = m$, so erhält man

$$\int_0^{\frac{l}{2}} (n + n') \cos \varphi ds + \int_0^{\frac{l}{2}} (m + m') \frac{f-y}{\delta} \cdot ds + 1000 \lambda = 0$$

oder mit Einteilung in Prismen e Stück pro Gewölbehälfte

$$\sum^e (n + n') \cos \varphi \mathcal{A}s + \sum^e (m + m') \frac{j - y}{\delta} \mathcal{A}s + 1000\lambda = 0. \quad (21)$$

In gewöhnlichen Fällen genügt es mit max. 5 à 6 Prismen pro Gewölbehälfte. Man kann entweder von $\mathcal{A}s$ oder gleich $\mathcal{A}x$ ausgehen, aber die Koordinaten für die Mittelpunkte der Prismen und im letzteren Falle auch die Längen $\mathcal{A}s$ müssen konstruiert oder besser *genau* berechnet werden.

Nun nehmen wir an, dass das Gewölbe im voraus als Dreigelenkbogen statisch gelöst ist, d. h. mit gewöhnlichen Drucklinien durch die Scheitelmittle für alle Belastungen, die man untersuchen will. Die für Dreigelenkbogen geltenden gefährlichsten Belastungskombinationen dürften auch in diesem Falle als annehmbar gelten können.

Für eine gewisse Belastung hat man also aus dem Dreigelenkbogen das gegebene Moment N , den Axialdruck Q und die Horizontalkraft K für jeden Querschnitt.

Als erste Annäherung wählt man einen von der elastischen Gleichförmigkeit geliehenen Versuchswert für M_0 , beispielsweise, wenn die Gewölbeachse nach der Normalbelastung geformt ist, und das Gewölbe im übrigen die gewöhnlichen Formen $M_0 \simeq -\frac{15}{16} K \frac{\delta_0^2}{f}$ hat (nach Winkler). δ_0 = Gewölbestärke im Scheitel.

Numeriert man die Prismen in der Reihenfolge von der Mitte 1, 2, 3 etc. so hat man auf der rechten Seite:

$$P_n = Q_n + \frac{1}{f} \cos \varphi_n M_0;$$

$$M_n = N_n + \frac{j - y_n}{f} M_0;$$

und in derselben Weise auf der linken Gewölbehälfte:

$$P'_n = Q'_n + \frac{1}{f} \cos \varphi_n M_0;$$

$$M'_n = N'_n + \frac{j - y_n}{f} M_0.$$

Für jedes Prisma muss man aus dem Querschnitte der Eisenlagen und der Stärke des Prismas δ resp. α berechnen. Hier auf sucht man für die resp. Prismen die Tabelle unter II bis VIII,

oder, wenn eine gewisse Tabelle nicht passt, zwei nebenliegende Tabellen und interpoliert zwischen diesen. Aus den soeben berechneten Quantitäten P_n und M_n schreibt man für jedes Prisma teils $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$, wobei man, wenn Tonnen und Meter vorher als Einheiten angewandt werden, zu kg. und cm. übergeht ($10 \text{ t/m}^3 = 1 \text{ kg/cm}^3$). Weiter entspricht der negativen $\frac{M}{\delta^2}$ die negative m von der symmetrischen, in der Tabelle nicht gezeichneten Hälfte des Deformationsgebietes. Die aus den Tabellen gefundenen, den resp. $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$ entsprechenden n und m werden für jedes Prisma behandelt, wie Gleichung (21) angibt, die Summation wird vorgenommen und die Summe muss = 0 sein.

Stimmt dies nicht, so war der Versuchswert für M_0 falsch. Derselbe wird geändert, eine andere Approximation vorgenommen, welches im allgemeinen sich als genügend erweisen dürfte, und das Problem ist gelöst.

In gewissen Fällen, wenn u. a. die Form der Gewölbeachse einen einfachen, elastischen Ausdruck hat, so kann man (21) direkt integrieren, an Stelle dass man das Gewölbe in Prismen teilt. Die Werte P_x variieren nicht sehr von den dem Dreigelenkbogen entsprechenden Werten Q_x , und diese wiederum, überschläglich genommen, nicht sehr untereinander. Mitunter kann man aus Q einen einigermaßen guten Mittelwert für $\frac{P}{\delta}$ für das ganze Gewölbe ableiten.

Wenn man hierbei findet, dass die $\frac{P}{\delta}$ -Kurven in den am meisten passenden Tabellen so sind, dass ziemlich einfache Ausdrücke n , n und $\frac{M}{\delta^2}$ genommen werden können, beispielsweise in der Querschnittssorte

$$\left. \begin{array}{l} k = 1 \\ 2 (\alpha = 0,75) \end{array} \right\} \text{Tab. IV.}$$

für die Kurve $\frac{P}{\delta} = 120$ (gesteigerte Belastungen vorausgesetzt)

$$n = \sim \frac{0,56 P}{120 \delta} \quad \text{und} \quad m = \sim \frac{1 M}{17 \delta^2},$$

so können diese im Verein mit geeigneten, analytischen Ausdrücken für N und Q in die Integrationsgleichung (21) eingesetzt wer-

den, worauf man die Integration vornimmt (mit M_0 natürlich konstant) und M_0 wird aus der integrierten Gleichung gelöst. Nachdem man das Resultat erhalten hat, kann man M_0 in (21) einsetzen und die Nachprüfung dieses Versuches vornehmen.

Volleingespannter Bogen.

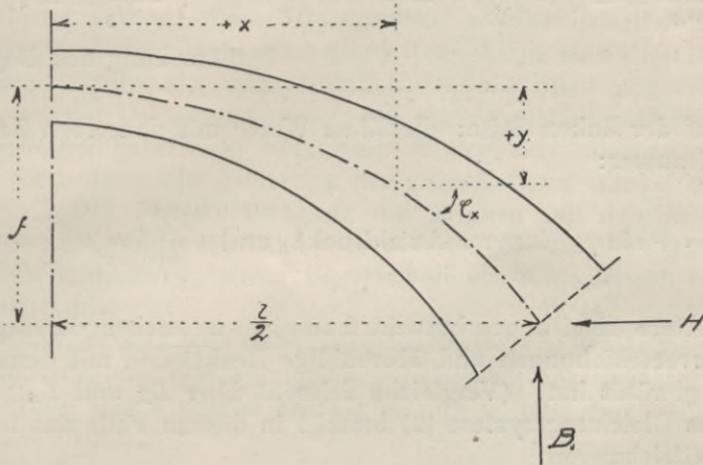


Fig. 50.

Das Gewölbe wird als symmetrisch in Form und Beschaffenheit vorausgesetzt.

Ein Dreigelenkbogen mit derselben Achse wird zuerst für die Belastung gelöst, welche man untersuchen will, wobei man einen Horizontaldruck H sowie die Vertikalreaktionen A und B erhält.

Als überzählige Reaktionen nimmt man die *Veränderungen* an, welchen h und b sowie die Grössen H und B durch die Einspannung unterworfen sind, sowie das Moment im rechten Widerlager $= M_b$.

Weiter setzt man voraus als äussere, gegebene, beliebige aber kleine Stützenverschiebungen eine Spannweitenverlängerung λ , eine ungleiche Vertikalsetzung η und einen Drehwinkel μ , welche sämtlich nach dem rechten Widerlager verlegt werden.

Die übrig bleibende, statisch bestimmte Konstruktion ist auf der linken Seite eingespannt und wird auf der rechten von äusseren Kräften getragen. In der gewöhnlichen Weise, dass in den Lagen der überzähligen Reaktionen Kräfte oder Mo-



Fig. 51.

mente = 1 eingeführt werden, erhält man (beachte die Zeichenregeln):

Auf der rechten Seite:

$$\frac{\partial P_x}{\partial h} = -\cos \varphi_x; \quad \frac{\partial P_x}{\partial b} = -\sin \varphi_x \quad \frac{\partial P_x}{\partial M_b} = 0;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial h} = -(f-y); \quad \frac{\partial M_x}{\partial b} = +\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \frac{\partial M_x}{\partial M_b} = -1;$$

(Streckung des Bogens).

Auf der linken Seite: dieselben Werte mit denselben Zeichen überall ausser:

$$\frac{\partial P_x}{\partial b} = +\sin \varphi_x \text{ (innerer Axialdruck) und } \frac{\partial M_x}{\partial b} = +\left(\frac{l}{2} + x\right)$$

Weitere Ableitungen braucht man nicht zu suchen, da man hier Stützenverschiebungen und überzählige Reaktionen mit denselben Lagen gewählt hat. (Vergleiche Seite 35 über L_X und L_A .)

Das Gleichungssystem (2) besteht in diesem Falle aus folgenden 3 Gleichungen:

$$\int \left(v_x \frac{\partial P_x}{\partial h} + u_x \frac{\partial M_x}{\partial h} \right) ds - \lambda = 0;$$

$$\int \left(v_x \frac{\partial P_x}{\partial b} + u_x \frac{\partial M_x}{\partial b} \right) ds - \gamma = 0;$$

$$\int \left(v_x \frac{\partial P_x}{\partial M_b} + u_x \frac{\partial M_x}{\partial M_b} \right) ds - \mu = 0.$$

Die Zeichen für die gesamten Formen können jetzt umgekehrt werden. Dass die Ableitungen überwiegend negativ werden, beruht darauf, dass die Koordinatenrichtungen für die Reaktionen unnatürlich sind. Um Verwechslung zu vermeiden ist, es dagegen unumgänglich, dass man von denselben positiven Richtungen für alle Quantitäten ausgeht.

Nach Einsetzen und Umkehrung der Zeichen erhält man also:

$$\int [v_x \cos \varphi_x + u_x (f-y)] ds + \lambda = 0;$$

$$\int \left[\pm \nu_x \sin \varphi_x - \mu_x \left(\frac{l}{2} \mp x \right) \right] ds + \eta = 0; \quad \begin{cases} \text{das obere Zeichen für die} \\ \text{rechte Gewölbehälfte;} \\ \text{das untere Zeichen für} \\ \text{die linke Gewölbehälfte;} \end{cases}$$

$$\int \mu_x ds + \mu = 0.$$

In der ersten dieser Gleichungen, welche dieselbe ist, wie die für den Zweigelenkbogen abgeleitete, kann man dieselbe geometrische Bedingung lesen, nämlich dass die Spannungsverlängerung nach der Deformation $= \lambda_x$. Die andere enthält entsprechende Bedingungen betreffend Setzungen in der Vertikalachse und die dritte betreffend die Änderung der gegenseitigen Winkel der Widerlager. Die Übereinstimmung der Zeichen mit den im voraus gewählten Regeln ist leicht zu kontrollieren. Die mittlere Gleichung hat nur Bedeutung, wenn das Gewölbe unsymmetrisch belastet oder deformiert ist.

Summiert man jede Gewölbehälfte für sich, so erhält man durch Zusammenlegung der symmetrisch belegenen Quantitäten, durch Einführung von n und m anstatt ν_x und μ_x und durch Übergang zu den Prismen:

$$\Sigma(n + n') \cos \varphi \mathcal{A} s + \Sigma(m + m') \frac{l - y}{\delta} \mathcal{A} s + 1000 \lambda = 0;$$

$$\Sigma(n - n') \sin \varphi \mathcal{A} s + \Sigma(m - m') \frac{x}{\delta} \mathcal{A} s + \frac{l}{2} 1000 \mu + 1000 \eta = 0; \quad (22)$$

$$\Sigma(m + m') \frac{1}{\delta} \mathcal{A} s + 1000 \mu = 0.$$

In dem einen oder anderen Ausnahmefall kann eine direkte Integration in derselben Weise wie beim Zweigelenkbogen beschrieben möglich sein:

Die allgemeine Methode wird indessen die folgende:

Man zeichnet oder berechnet eine Drucklinie in bekannter Weise unter Voraussetzung, dass das Gewölbe elastisch gleichförmig ist. Aus den hierbei erhaltenen $\frac{P}{\delta}$ und $\frac{M}{\delta^2}$ sucht man mit Hilfe der Tabellen die Werte n und m und führt sie in (22) ein. Werden die Gleichungen (22) nicht genügend genau, so muss man die Drucklinie durch versuchsweise angenommene Variation der Reaktionen ändern, bis man ein gutes Resultat erhält.

Die $\frac{P}{\delta}$ - und n -Werte haben im allgemeinen wenig Einfluss in Gleichung (22) und können wenigstens zu Anfang bei Seite gelassen werden.

Bezüglich der geeigneten Belastungsfälle, so dürfte das von dem Dreigelenkbogen Gesagte als massgebend angesehen werden.

Es dürfte nicht unmöglich sein, für die Projektierung passende Annäherungsformeln aufzustellen. Bis dahin ist wenigstens so viel gewonnen, dass die Drucklinie, welche ein Konstrukteur als richtig aufstellt, leicht mit Hilfe von (22) kontrolliert werden kann, und dass die Wirkung der Stützenverschiebungen in den Fällen, wo solche möglich sind, beurteilt werden kann.

◆

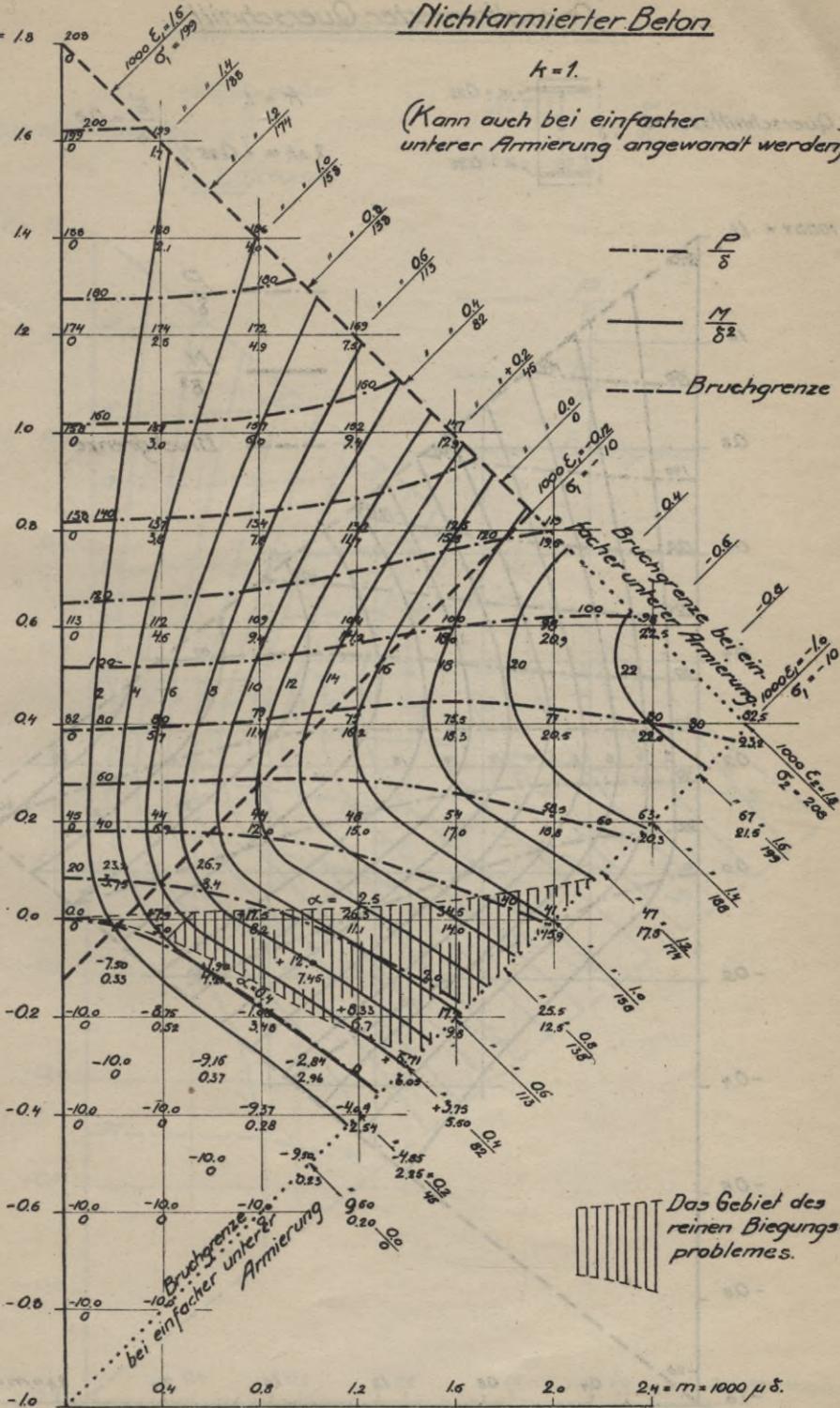
**BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW**

Nichtarmierter Beton

$k=1$

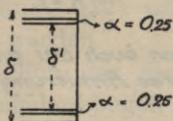
(Kann auch bei einfacher unterer Armierung angewandt werden)

$\eta = 1000 \nu = 1.8$



Doppeltarmierter Querschnitt

Querschnittsarte

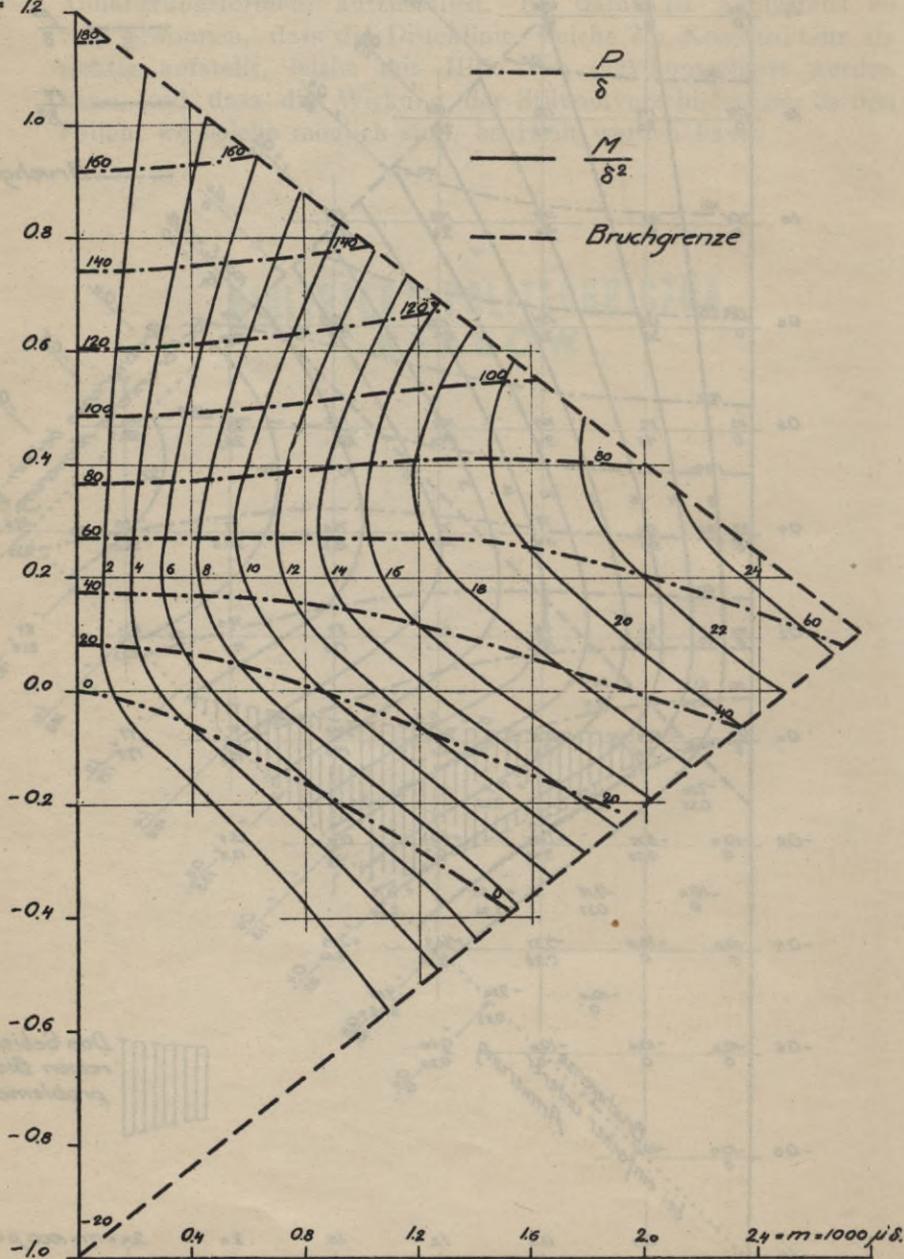


$k = 1.$

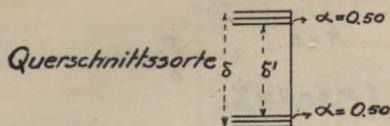
$\frac{\delta^1}{\delta} = 0.8$

2 st. $\alpha = 0.25\%$

$\eta = 1000v = 1.2$



Doppeltarmierter Querschnitt

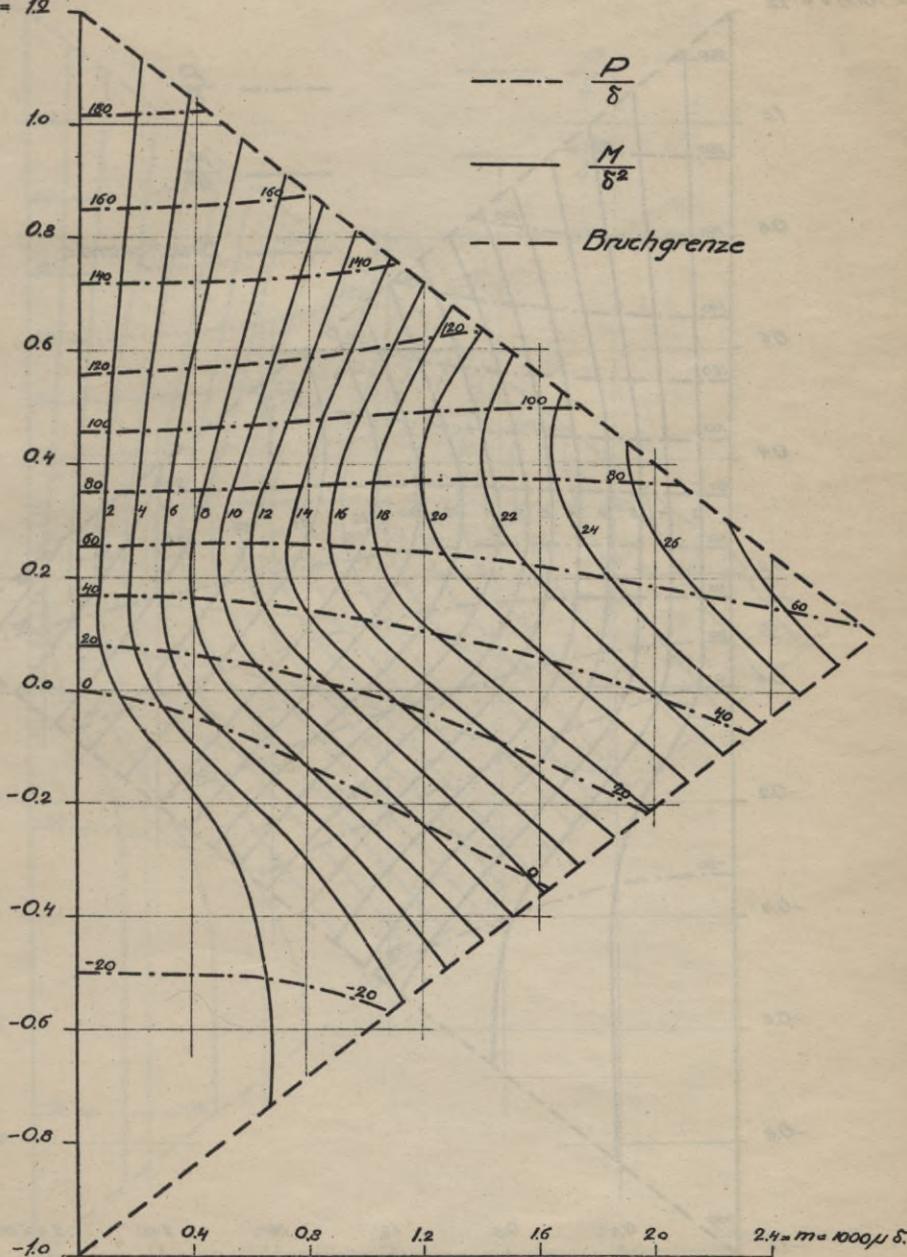


$k=1.$

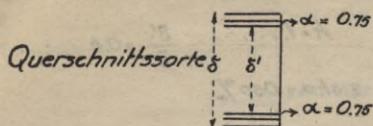
$\frac{\delta'}{\delta} = 0.8$

2 st. $\alpha = 0.50\%$

$n = 1000 \nu = 12$



Doppeltarmierter Querschnitt

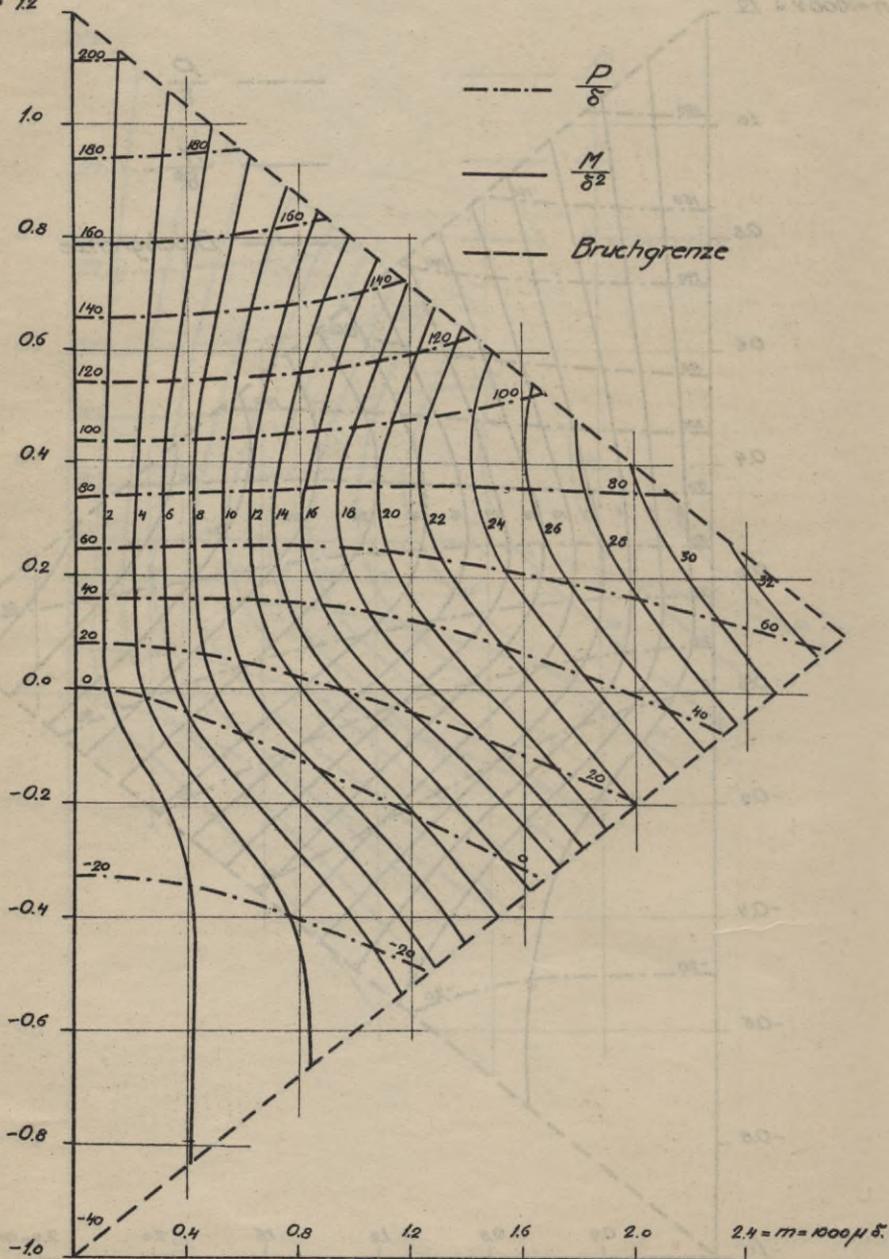


$k = 1$

$2.5\% \alpha = 0.75\%$

$\frac{\delta'}{\delta} = 0.8$

$n = 1000 V = 12$

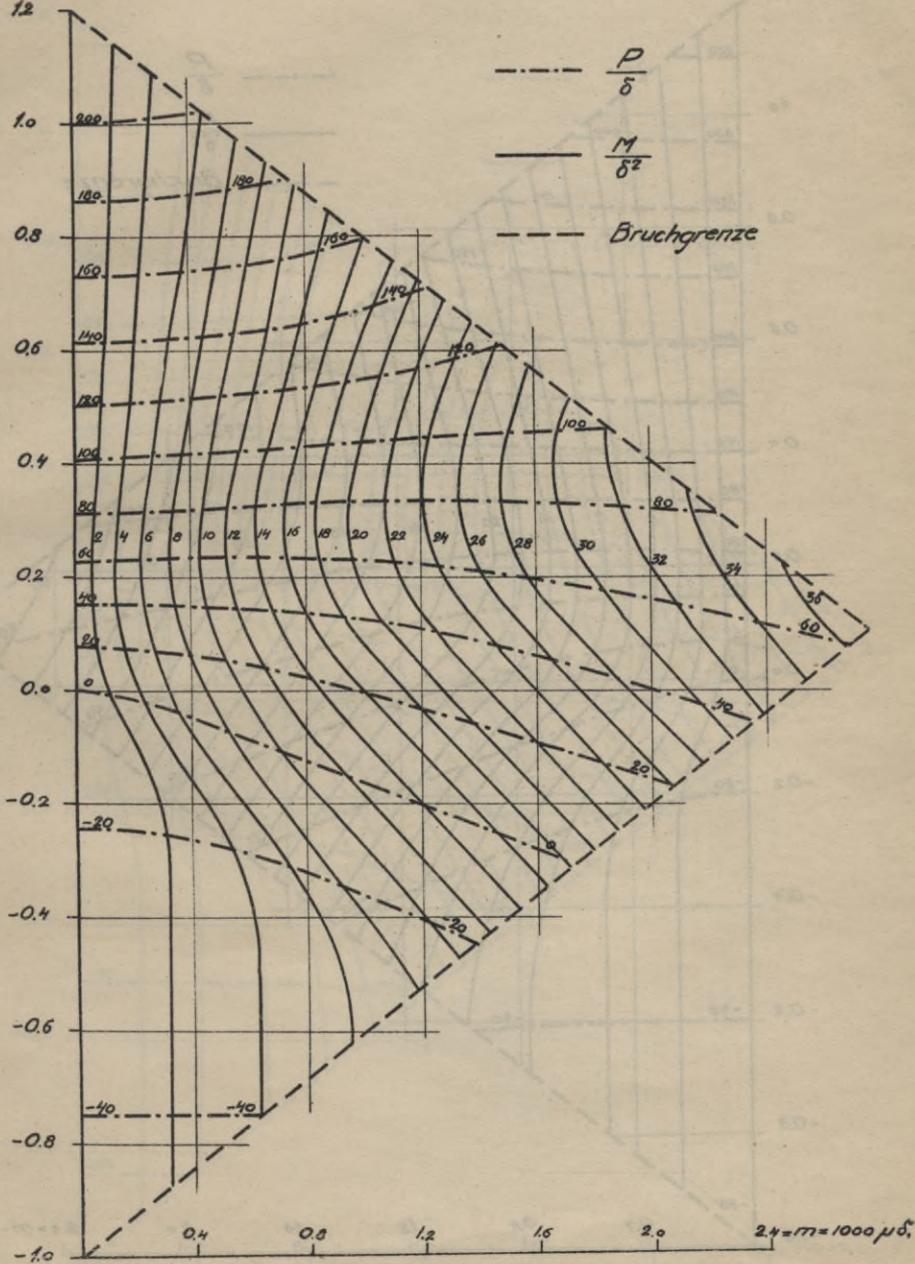


Doppeltarmierter Querschnitt

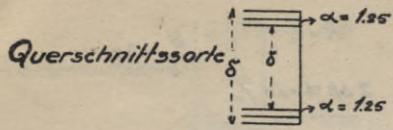


$k = 1$ $\frac{\delta'}{\delta} = 0.8$
 2 St. $\alpha = 1.0 \%$

$n = 1000 \quad V = 1.2$

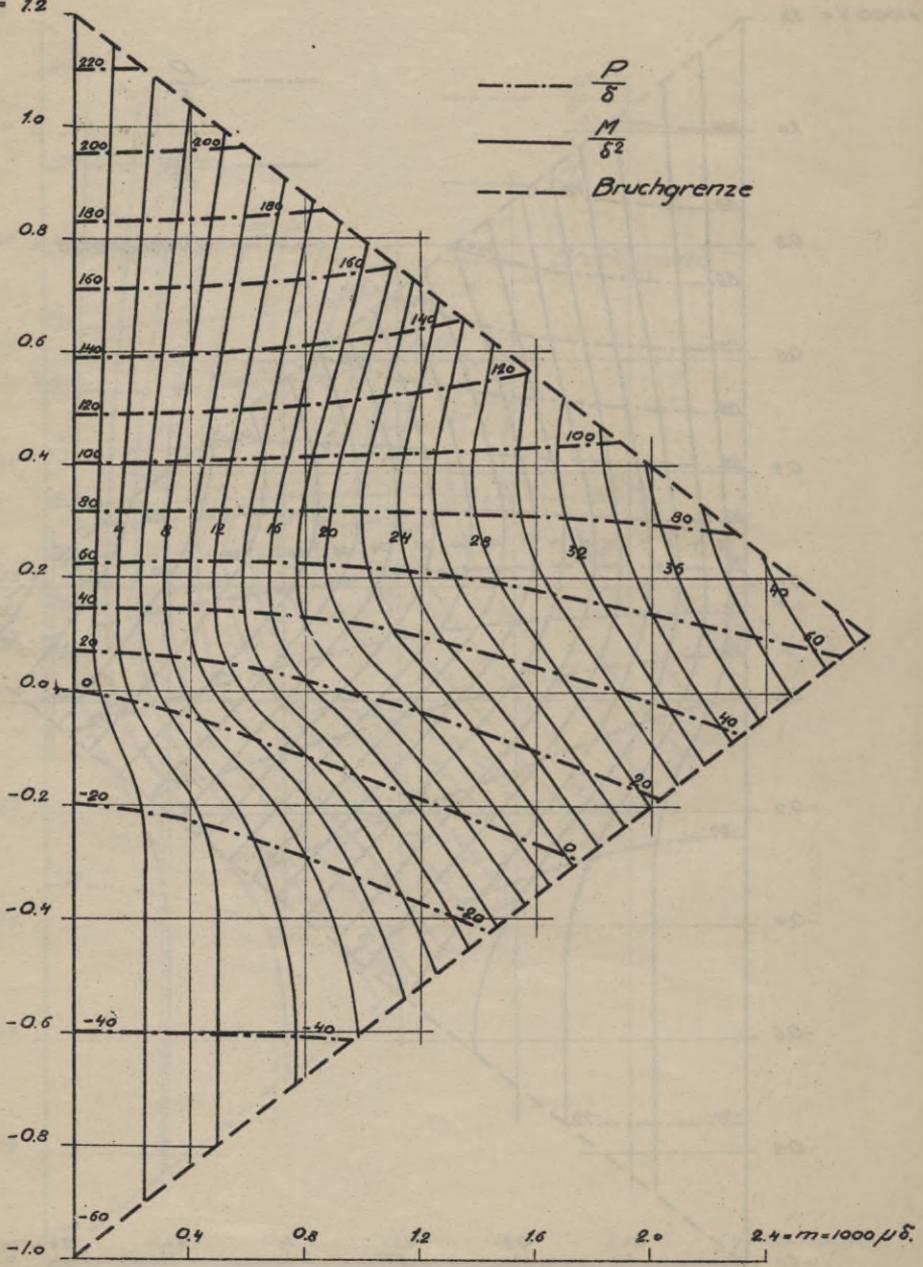


Doppeltarmierter Querschnitt

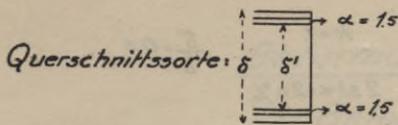


$k = 1,$
 $2.3k\alpha = 1.25\%$
 $\frac{\delta'}{\delta} = 0.8$

$\eta = 1000 \nu = 1.2$



Doppeltarmierter Querschnitt

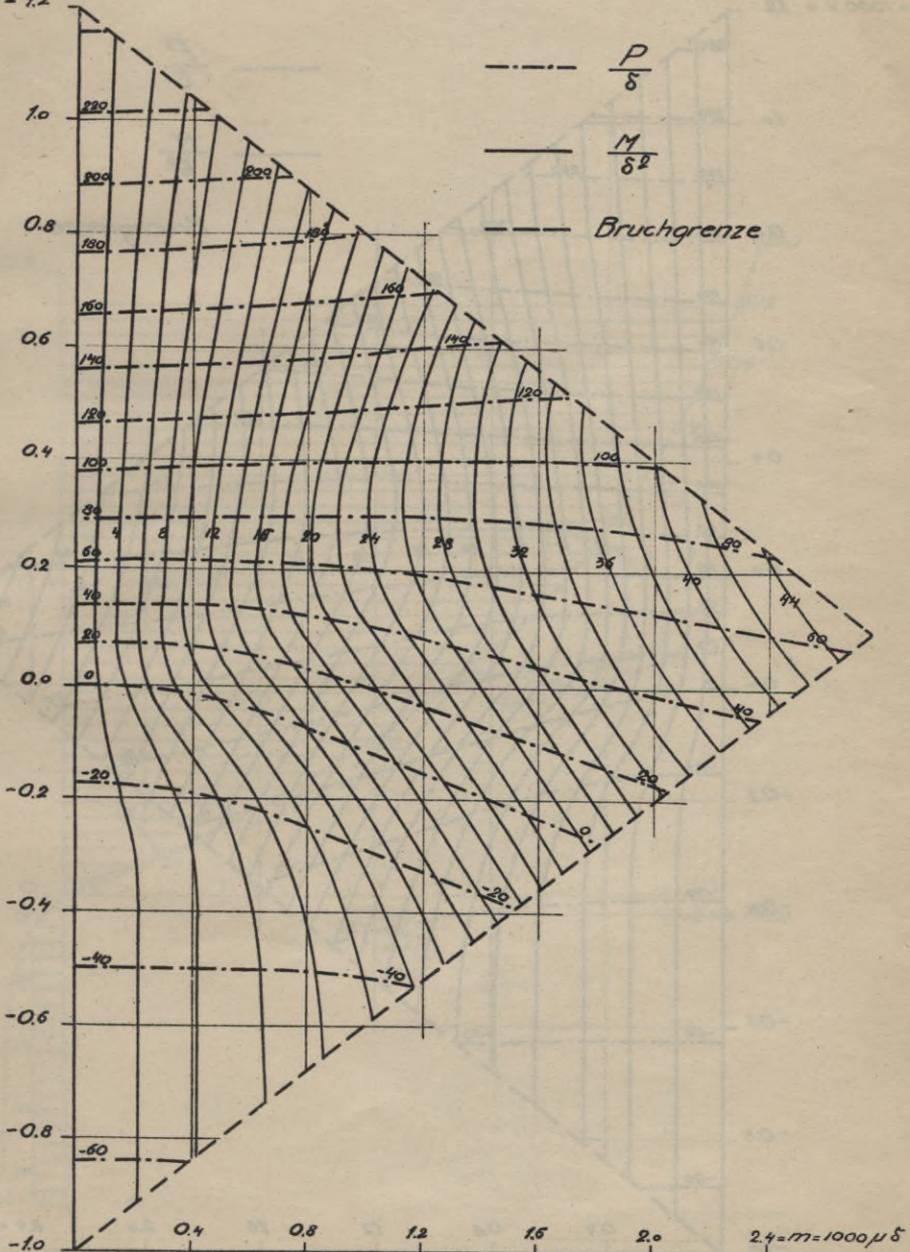


$k=1.$

$\frac{\delta'}{\delta} = 0.8$

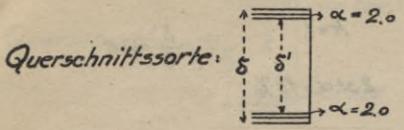
2 st. $\alpha = 1.5\%$

$n = 1000 \quad \nu = 1.2$



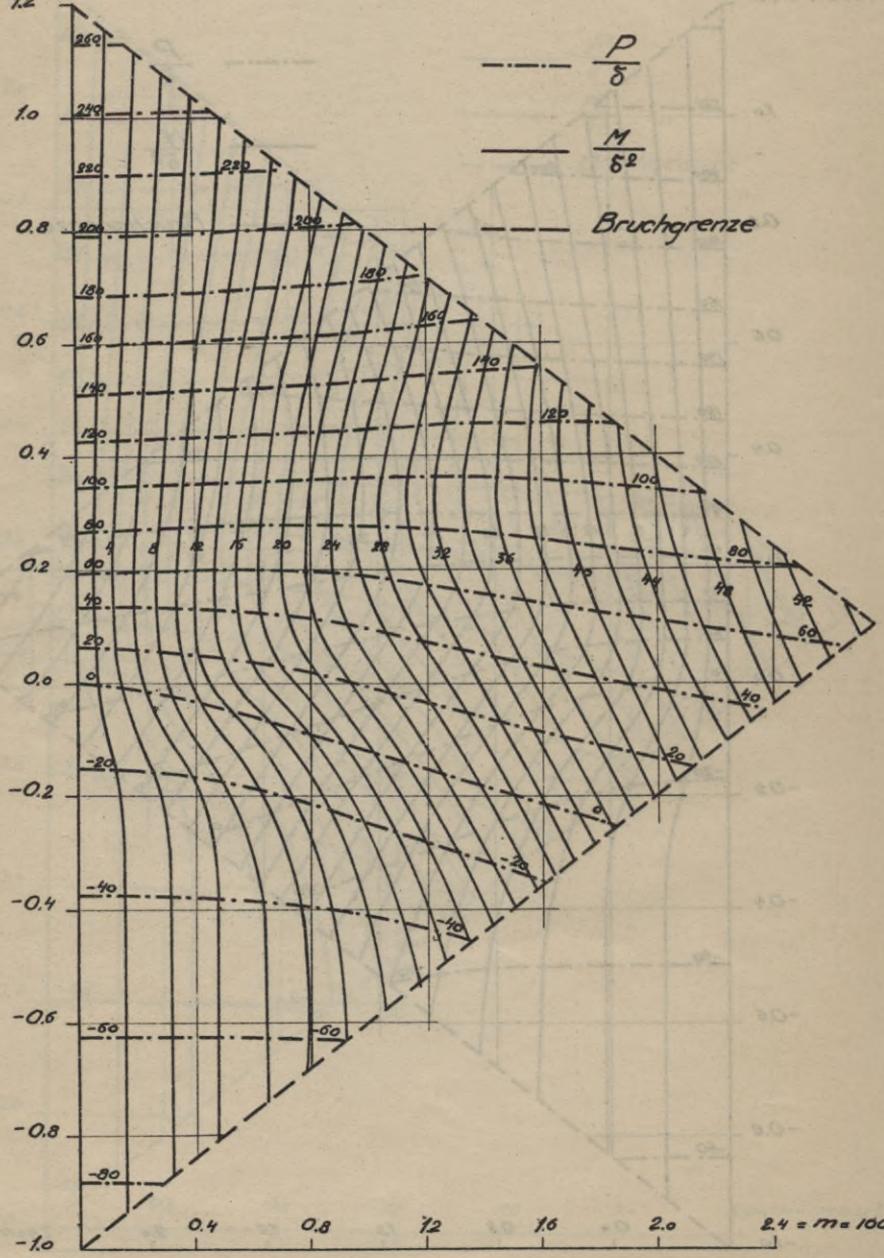
Tab: VIII.

Doppeltarmierter Querschnitt



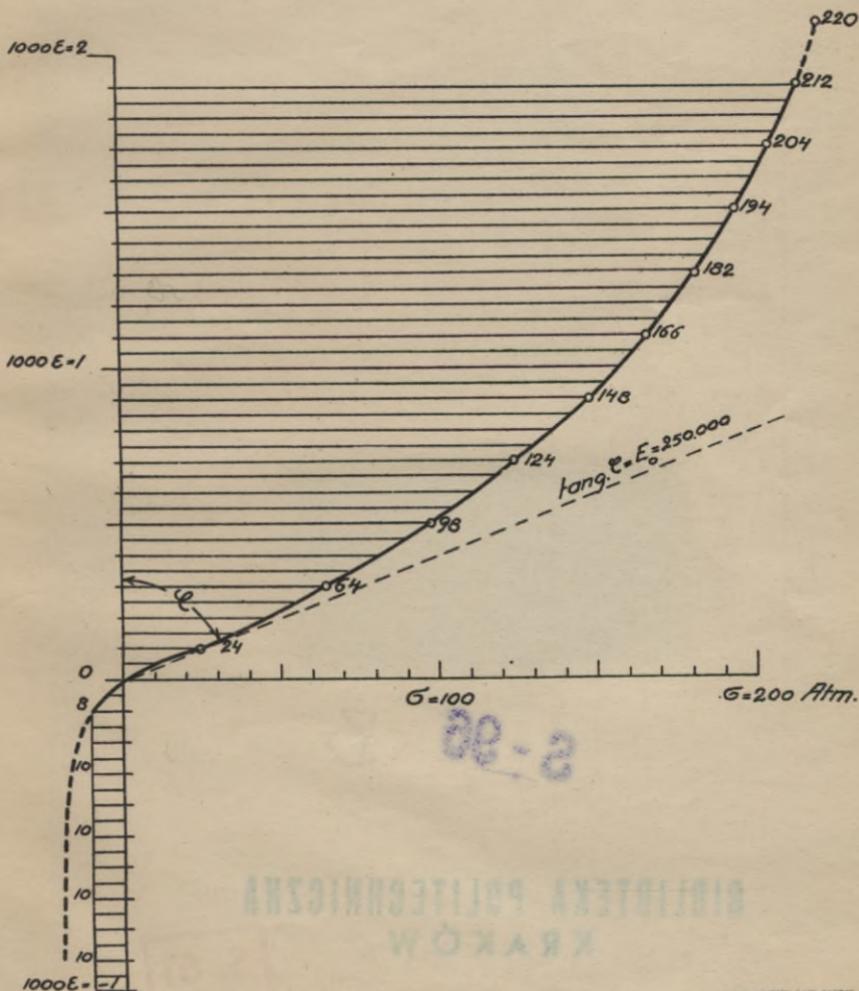
$k = 1$
 $2.5\% \alpha = 2.0\%$
 $\frac{\delta'}{\delta} = 0.8$

$n = 1000 v = 1.2$



$2.4 = m = 1000 \mu$

Deformationskurve
für Beton. $k=1$.



*Detonationskurve
für Beton*

B.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297165

S-96 B

1838

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

S. 61

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

1838

Kdn. 524. 13. IX. 54

PREIS KR. 5: -

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-1838

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297165