

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

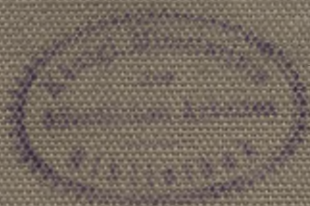


2118

L. inw.

CHNER

BALKENBRÜCKEN ALS RÄUMLICHE GEBILDE



Gr. 20/11 13.

9-

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297228



G. 58.
104

x
1277

Balkenbrücken als räumliche Gebilde

Beitrag
mit besonderer Berücksichtigung
der Förderbrücken

Von

Dr.-Ing. Siegmund Löschner
Saarbrücken

F.N. 30716



A. Ziemschen Verlag
Wittenberg (Bz. Halle)

1913

G. 58

104

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

II 2118

Akc. Nr. 908/49

Vorrede.

Die vorliegende Arbeit entstand aus der Beschäftigung des Verfassers mit der Konstruktion von fahrbaren Brücken für Verladezwecke, Laufkrane und dergleichen. Die Untersuchungen sind hauptsächlich auf diese Fälle zugeschnitten, wenn der Verfasser auch bestrebt war, den allgemeinen Gesichtspunkt zu wahren.

Der geneigte Leser wird aus dem Inhalt ohne weiteres erkennen, welche Untersuchungen neu sind, und was in der Arbeit längst bekannt ist. Trotzdem sei es dem Verfasser gestattet, auf einige Kapitel aufmerksam zu machen.

Der Absatz 3 β enthält den Aufsatz: Über die Berechnung von Balkenbrücken mit gebogenem oder gebrochenem Windverbände bei Wirkung von parallelen, in der Fläche des Verbandes wirkenden Kräften. In diesem Aufsatz glaubt Verfasser eine neue, von bisher Üblichem abweichende Theorie dieses nicht unwichtigen interessanten Falles gegeben zu haben.

Auf den § 23, der mit diesem Thema in enger Beziehung steht, wird aufmerksam gemacht.

Der Absatz 4 enthält die Berechnung der Brücke unter der Wirkung der Längskräfte. Diese Berechnung wird selten durchgeführt, da es sich um sekundäre Kräfte handelt, und da sie in dem behandelten allgemeinen Falle nicht einfach ist. Gewisse Dienste leistet hier ein Satz, der im § 25 ausgesprochen wurde. Wenn der Satz auch etwas Selbstverständliches und allgemein Bekanntes ausdrückt, so ist doch seine Formulierung wichtig und nötig, um sich seiner bedienen zu können. Das Beispiel in § 26 zeigt, wie umständlich die Berechnung von Brücken in Hinsicht auf die Längskräfte werden kann.

Bei der Untersuchung der Wirkung von Längskräften und ähnlichen sekundären Einflüssen zeigt es sich oft, daß die Brücken statisch unbestimmt sind. Da es zu weit führen würde, überall die

Rechnung genau durchzuführen, so muß von Näherungstheorien weitgehender Gebrauch gemacht werden. In den §§ 28, 30 sind solche Näherungsverfahren angegeben und durch Beispiele nachgeprüft worden.

Die §§ 31—36 behandeln den seltener vorkommenden Fall von Brücken, die nur eine vertikale und dafür zwei horizontale Tragwände besitzen.

In den §§ 37—41 sind Betrachtungen über die elastischen Verschiebungen eines Brückenquerschnittes enthalten, ein Kapitel, das sonst ganz vernachlässigt wird.

In der Zweiten Abteilung (§§ 42—46) sind einige Untersuchungen über die einfach statisch unbestimmten Brücken, die aus vier Tragwänden und zwei steifen Endrahmen bestehen, enthalten. Es wurde der Nachweis erbracht, daß die Balkenträgerbrücken dieser Bauart, sofern sie parallelepipedische Form haben, sich genau so verhalten, wie statisch bestimmte Brücken, als welche sie gewöhnlich gerechnet werden. Voraussetzung ist: genaue Höhe der Auflagerpunkte.

Der Einfluß der statischen Unbestimmtheit bei einer Parabelbrücke und der Einfluß der Ungenauigkeit der Auflagerpunkte einer parallelepipedischen Brücke wurde durch Beispiele gezeigt.

In der Dritten Abteilung (§§ 47—51) wurde der mehrfach statisch unbestimmte Fall behandelt, indem eine parallelepipedische Brücke außer den vier Tragwänden und zwei steifen Endrahmen noch mehrere steife Zwischenquerrahmen besitzt. Für diesen oft vorkommenden Fall wurde eine Näherungstheorie entwickelt, die es ermöglicht, diese Brücken in überaus einfacher Weise zu berechnen. Gleichzeitig wurde gezeigt, daß sich diese Brücken in bezug auf Eisengewicht überaus günstig verhalten. Im Verlaufe der Entwicklung ergab sich die Gelegenheit, die Verschiebung eines Querrahmens infolge der Belastung zu untersuchen. Die Einführung des Begriffes: statischer Mittelpunkt des Brückenquerschnittes, sowie die Untersuchung seiner Eigenschaften sei hervorgehoben.

In der ganzen Arbeit wurde versucht, den Untersuchungen einen allgemeinen Wert dadurch zu leihen, daß erstens die Brückenform und die Lage der Auflagerpunkte durch Koordinaten festgelegt wurde, so daß auf die einfachste Weise zu den speziellen Fällen der Praxis übergangen werden kann (selbst die Angriffspunkte der einzelnen der 7 bis 8 Auflagerreaktionen wurden voneinander getrennt gewählt, um den allgemeinsten Fall zu erreichen); zweitens wurden

die Untersuchungen jeweils durch Einflußwerte geführt, so daß zum speziellen Fall einer stetigen Belastung leicht übergangen werden kann.

Indem Verfasser hofft, daß sein Beitrag dem einen oder anderen seiner in der praktischen Tätigkeit stehenden Fachgenossen von Nutzen sein werde, übergibt er ihn dem Leserkreise mit der Bitte um ein wohlwollendes Urteil.

Saarbrücken, im Juli 1912.

Dr.-Ing. Siegmund Löschner.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorrede	III
Literaturangaben	IX
Einleitung	1
§ 1. Allgemeines	1
§ 2. Auflager der Brücke	2
§ 3. Zur Zahl der Stäbe	3

Erste Abteilung.

Statisch bestimmte Brücken.

§ 4. Allgemeines	6
----------------------------	---

I. Abschnitt.

Balkenbrücken mit zwei Hauptträgern und einem Horizontalverband.

1. Bauart der Brücke. § 5. Festsetzungen	9
2. Einfluß der lotrechten Kräfte:	
a) § 6. Berechnungsvorgang	12
b) § 7. Größe der Auflagerdrucke	13
c) § 8. Einflußflächen	14
§ 9. Einflußflächen für eine statische Größe U der Hauptträger	14
§ 10. Einflußflächen für die Auflagerdrucke	15
3. Einfluß der wagerechten Kräfte der y -Richtung (Querkräfte der Brücken):	
α) Die Horizontalverspannung ist eben	15
a) § 11. Berechnungsvorgang	15
b) § 12. Auflagerdrucke	16
c) § 13. Einflußflächen	16
β) Die Horizontalverspannung ist eine gebogene oder gebrochene Fläche	17
§ 14. Allgemeines	17
§§ 15–24. Über die Berechnung von Balkenbrücken mit gebogenem oder gebrochenem Windverbände bei Wirkung von parallelen in der Fläche des Verbandes wirkenden Kräften. (Zusatzkräfte in den Hauptträgern infolge der gebogenen oder gebrochenen Form des Windverbandes.) Anwendung auf gegliederte Balkenconträger:	
I. § 15. Festsetzungen	18
§ 16. Fortsetzung	19
§ 17. Fortsetzung	20

	Seite
II. Einflußlinien der Auflagerdrucke der Hauptträger	22
§ 18. Entwicklung	22
§ 19. Konstruktion	25
III. Einflußlinien der Biegemomente des Hauptträgers infolge der Zusatzkräfte ΔV . § 20	29
IV. Einflußlinien der Scherkräfte des Hauptträgers der Balkenbrücke infolge der Zusatzkräfte ΔV . § 21	31
V. Direkte Bestimmung der Zusatzkräfte ΔV . § 22.	34
VI. Anwendung auf Bogenträger. § 23	35
VII. Balkenträger. § 24	40
4. Einfluß der wagerechten Kräfte der x -Richtung (Längskräfte der Brücke):	
a) Die Horizontalverspannung ist eben	41
§ 25. a) Berechnungsvorgang	41
b) Beanspruchung der einzelnen Tragwände	48
§ 26. c) Bestimmung des Wertes α	51
β) Der Windverband ist gebogen. § 27	54
γ) Statisch unbestimmter Fall. § 28	59
5. Brücken mit zwei wagerechten Auflagern der x -Richtung und einem wagerechten Auflager der y -Richtung; § 29	64
a) Bauart	65
b) Einfluß der wagerechten Kräfte der y -Richtung (Querkräfte)	65
c) Längskräfte der Brücke (wagerechte Kräfte der x -Richtung)	68
6. Brücken mit vier wagerechten Auflagern:	
Statisch unbestimmter Fall. § 30	70
a) Querkräfte (Kräfte parallel zur y -Achse)	70
b) Längskräfte (Kräfte parallel zur x -Achse)	76

II. Abschnitt.

Brücken mit zwei horizontalen und einem vertikalen Hauptträger.

1. Allgemeines. § 31	78
2. Einfluß der lotrechten Kräfte:	
§ 32. α) Die Verspannungen sind eben	79
β) Die Horizontalverspannung ist gebogen	80
3. Querkräfte (Kräfte der y -Richtung). § 33	80
4. Längskräfte (Kräfte der x -Richtung). § 34	81
5. Brücken mit zwei wagerechten Auflagern der x -Richtung und einem Auflager der y -Richtung. § 35	84
6. Brücken mit vier wagerechten Auflagern. § 36	87
Bemerkung 1	87
Bemerkung 2	88

III. Abschnitt.

Durchbiegung von Brücken.

§ 37. Allgemeines	88
§ 38. Ebenes Parallelfachwerk	89

	Seite
§ 39. Brücke mit drei selbständigen Tragwänden	90
§ 40. Brücke normaler Bauart	93
§ 41. Erweiterung	96

Zweite Abteilung.

Einfach statisch unbestimmte Brücken.

Brücken mit vier Außentragwänden	98
§ 42. Bauart	98
Fortsetzung	98
a) Parallelepipetische Brücken. § 43	101
β) Brücken mit gebogenen Verbänden. § 44	103
§ 45. Einfluß der Ungenauigkeit der Widerlager	108
§ 46. Berechnungsvorgang. Günstige Anordnung der Querrahmen	110

Dritte Abteilung.

Brücken mit vier Tragwänden und steifen Zwischenquerrahmen.

§ 47. Entwicklung	113
§ 48. Lage des statischen Mittelpunktes	121
§ 49. Berechnungsvorgang	125
§ 50. Verschiebung des belasteten Querrahmens	127
§ 51. Übergang auf Brücken mit mehreren steifen Querrahmen	132

Anhang.

I. Spezialfälle zur ersten Abteilung, I. Abschnitt 3β:	
§ 52. 1. Spezialfall: Trapezgurtung	137
§ 53. 2. Spezialfall: Parabelgurtung	139
§ 54. Einflußlinien hierzu	140
§ 55. 3. Spezialfall: Halbkreisgurtung $H = w \cdot l$; $w = \text{konstant}$	142
§ 56. 4. Spezialfall: Halbkreisgurtung $H = wl$; $w = w \frac{ds}{dx}$; $w = \text{konstant}$	144
§ 57. 5. Spezialfall: Halbkreisgurtung $H = wl$; $w = w \cdot z$; $w = \text{konstant}$	147
§ 58. 6. Spezialfall: Halbkreisgurtung. Einflußlinien	151
II. § 59. Rechnungsbeispiel zur ersten Abteilung, I. Abschnitt 3β	154
III. § 60. Beispiel eines Balkenträgers (Fahrbahnträger einer Drehbrücke) zur ersten Abteilung, I. Abschnitt 3β, § 24	158
IV. § 61. Radreibungskraft bei beweglichen Brücken und ähnliche Beanspruchungen. Spezialfall zur ersten Abteilung, I. Abschnitt 5, § 29b	167
§ 62. Desgleichen. Spezialfall zur ersten Abteilung, II. Abschnitt 5	169
V. § 63. Bemerkung über die Belastungskräfte bei Brücken	170
VI. § 64. Beispiel zur dritten Abteilung	171

Literaturangaben.

1. Fr. Engesser: Über den Horizontalverband bei Bogenbrücken. Erschienen in Zeitschrift für Bauwesen 1881.

Die Berechnung des gebogenen Windverbandes erfolgt auf die Weise, daß zunächst die Füllungsstäbe berechnet werden und dann die Stabkräfte dieser Stäbe (eigentlich die zur Tragwand parallelen Komponenten dieser Kräfte) als Angriffskräfte des Bogens eingeführt werden. Diese Angriffskräfte werden in wagerechte und lotrechte Komponenten zerlegt und der Einfluß dieser Lastarten gesondert untersucht.

Die Untersuchung gebogener Windverbände ist in vorliegender Arbeit ganz abweichend hiervon geführt. Siehe die Bemerkungen in § 16. Ein Hinweis auf diese Arbeit von Engesser befindet sich im § 23.

2. Fr. Engesser: Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken. Berlin 1892.

Mit diesem Werke hat vorliegender Beitrag gegenständlich viele Berührungspunkte, jedoch ist die Art der Untersuchung eine andere. Das sehr wertvolle Buch beschränkt sich auf normale Balkenbrücken, bei denen die Auflagerpunkte in den Ebenen der Hauptträger liegen. Die Untersuchung der gebogenen Windverbände ist wesentlich die gleiche, wie in der unter 1. genannten Arbeit. Die statisch unbestimmten Brücken mit mehreren steifen Querrahmen sind in diesem Werke ganz anders behandelt. Die dort entwickelte Näherungstheorie berücksichtigt nur eine gleichmäßig verteilte Belastung.

Auf dieses Buch wird in vorliegender Arbeit öfters hingewiesen.

3. Dr. August Föppl: Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892.

In den §§ 71, 72, 73 dieses Buches wird das Thema des Absatzes 3 β der ersten Abteilung meiner Arbeit prinzipiell behandelt und erledigt. Auf eine Abhandlung von Winkler im Zivilingenieur 1884 ist Bezug genommen. Die Berechnung einer gebogenen Verspannung läuft gemäß diesem Buche auf die Untersuchung eines zweidimensionalen zylindrischen Fachwerkes aus, das, um statisch bestimmt zu sein, an jedem Knotenpunkte eine Auflagerbedingung zugeschrieben bekommt, die den Knotenpunkt zwingt, im Zylindermantel zu verbleiben.

Derselbe Weg wurde im Absatz 3 β der ersten Abteilung der vorliegenden Arbeit eingeschlagen.

Über die Art der Kräfte, die diese Auflagerbedingung erfüllen und dann die Hauptträger belasten, über deren unmittelbare Ermittlung aus der geometrischen Form der Leitlinien des Zylinders und aus dem System der in der Mantelfläche desselben wirkenden Lasten ist, dem Zweck des genannten Buches entsprechend, in diesem grundlegenden Werke Föppls keine Rede.

4. A. Zschetzsche: Berechnung von Bogenbrücken bei Wirkung seitlicher Kräfte. Erschienen in Zeitschrift für Architektur- und Ingenieurwesen. Hannover, Jahrg. 1897, Heft 4.

Diese Arbeit enthält eine sehr ausführliche Berechnung von Bogenbrücken bei Wirkung seitlicher Kräfte. Der allgemeine Fall eines gelenklosen Bogens ist vierfach statisch unbestimmt. Die Grundidee bei der Berechnung der Hauptträger ist, genau wie bei den unter 1. und 2. zitierten Quellen, daß nach Bestimmung der Spannkkräfte der Füllungsstäbe der gebogenen Verspannung die zum Hauptträger parallelen Komponenten dieser Stabkräfte als Angriffskräfte des Hauptträgers eingeführt werden.

Siehe die Bemerkungen im § 16 und § 23.

5. H. Müller-Breslau: Beiträge zur Theorie der Windverbände eiserner Brücken, Teil I. Zeitschrift für Bauwesen 1904, S. 115. Desgl. Teil II. Zeitschrift für Bauwesen 1905.

Ausführliche Behandlung des Einflusses des Windes auf die Bogen und des Einflusses der vertikalen Kräfte auf die Windverbände.

Die vorliegende Arbeit hat mit obigen Beiträgen keine Berührungspunkte.

6. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. II. Band. Der Brückenbau.

Über die Unterschiede in der Betrachtungsweise der gemeinsamen Abschnitte dieses Buches und der vorliegenden Arbeit gilt ziemlich das Gleiche, wie das bei den unter 1. und 2. zitierten Quellen Gesagte.

Einleitung.

§ 1. Allgemeines. Eine Brücke ist in statischer Beziehung ein System von mehreren verspannten Wänden zur Übertragung von Kräften auf die Auflager. Für gewöhnlich erfolgt diese Übertragung so übersichtlich und einfach, daß es genügt, die einzelnen Wände für sich zu betrachten und zu berechnen.

Bei vielen Brücken jedoch, insbesondere bei den immer häufiger zur Ausführung kommenden Kran- und Verladebrücken, deren Behandlung den ersten Anlaß zu dieser Arbeit gab, bei Brücken auf hohen Stützen, bei denen sich die Lagerpunkte tief unterhalb des Brückenrumpfes befinden und dergleichen mehr, genügt oft die einfache Zerlegung der Brücke in die ebenen Tragwände nicht. Es muß vielmehr die Brücke als räumliches Gebilde im ganzen angesehen werden, um die Wirkung und Belastung der einzelnen Tragwände festzustellen. Es sollen im folgenden einige der üblichen Brückentypen unter diesem Gesichtspunkte behandelt werden. Es ist unvermeidlich, daß dabei viel Selbstverständliches und allgemein Bekanntes gesagt wird. Da es aber im Interesse der Geschlossenheit der Arbeit geschieht, möge es entschuldigt werden.

Bei einer Brücke unterscheiden wir Längswände, das sind die Hauptträger und Windverbände, und Querrahmen, und Querrahmen. Die letzteren dienen zur Übertragung der zur Brückenachse rechtwinklig wirkenden Lasten auf die Längswände. Die Querrahmen sind scheibenartige Gebilde, deren Auflagerlinien durch die Schnittgeraden der Querrahmenebene mit den Längswänden gebildet werden. Sind die Querrahmen so beschaffen, daß zwischen der Anzahl k ihrer Knotenpunkte und der Anzahl s ihrer Stäbe die Beziehung besteht

$$s \geq 2 \cdot k - 3,$$

so nennt man die Querrahmen steif. Obige Bedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend, da auch der innere Aufbau von

Bedeutung ist. Es muß nämlich die Nennerdeterminante des Gleichungssystems, die das Gleichgewicht in allen Knotenpunkten ausdrücken, ungleich Null sein.¹⁾ Natürlich können Teile des Querrahmens durch vollwandige Scheiben (Biegungsträger) ersetzt werden.

Es ist noch zu bemerken, daß die erwähnte Determinante nur von der Struktur und den Koordinaten der Knotenpunkte abhängig ist, von den angreifenden Kräften dagegen unabhängig.

Es darf auch ein Stab im Querrahmen fehlen, ohne daß der Rahmen dadurch unsteif wird, wenn der fehlende Stab zwei Knotenpunkte derselben Längswand verbindet, die durch den Umstand, daß die Längswand ein kinematisch bestimmtes Fachwerk ist, eine unveränderliche Entfernung voneinander besitzen. Aus diesem Grunde dürfen auch diejenigen Stäbe eines Querrahmens, die in den Längswänden liegen, zu den Längswänden gezählt werden. Um die Berechnung eines Rahmens durchzuführen, empfiehlt es sich, die fehlenden Stäbe einzusetzen und die Längswände dann mit je zwei gleichen, entgegengesetzt gerichteten Kräften von der Größe der errechneten Stabkraft zu belasten, welche in den Knotenpunkten angreifen, die der gedachte Stab verbindet. Druckkräfte in den Stäben sind hierbei von den Knotenpunkten weggerichtet zu denken, Zugkräfte umgekehrt. Läßt man die Stäbe des Rahmens, die in die Tragwände (Längs-) der Brücke fallen, bei der Zählung weg, dann ist die Bedingung für einen steifen Rahmen: $s \geq 2k - 3 - w$, wobei w die Anzahl der anschließenden Längswände bedeutet.

Außer den Querrahmen gibt es noch gewöhnlich Zwischenkonstruktionen zur Übertragung der Längskräfte auf die Hauptwände.

§ 2. Auflager der Brücke. Unter Auflager wird im allgemeinen ein Punkt der Brücke verstanden, an dem äußere Lagerkräfte (Auflagerdrucke, Auflagerwiderstände, Auflagerreaktionen) übertragen werden. Im engeren Sinne kann unter Auflager die Richtungslinie einer Lagerkraft verstanden werden (Lagerstab). In der Regel werden an einem Lagerpunkte mehrere Auflager (Lagerstäbe) vereinigt, jedoch höchstens drei, die nicht in einer Ebene liegen. Ferner dürfen zwei in einem Punkte vereinigte Auflager (Lagerstäbe) nicht in eine Gerade fallen. Wenn nichts erwähnt wird, soll jedes Lager ein sogenanntes freies Lager sein, d. h. nur eine Auflagerkraft übertragen. Dies wird bekannterweise durch einen Lagerstab oder

¹⁾ Die Bedingung Nennerdeterminante D ungleich Null gilt bei statisch unbestimmten Fachwerken für den statisch bestimmten Grundfall. Über die Auszählung der Systeme findet man in allen Lehrbüchern Näheres.

dadurch erreicht, daß der Lagerpunkt in einer zur Lagerkraft winkelrechten Ebene frei (reibungslös) beweglich geführt wird. Überträgt ein Lagerpunkt mehrere Auflagerkräfte, so kann aus den allgemeinen Betrachtungen und Formeln zu dem speziellen Falle leicht übergegangen werden, indem man die Koordinaten der sonst getrennten Lagerpunkte gleichsetzt.

Fast alle Balkenbrücken haben vier vertikale Auflager (im Sinne von Lagerstäben). Die Anzahl der wagerecht gerichteten Auflager muß mindestens drei sein, die nicht durch einen Punkt durchgehen, also auch nicht parallel sein dürfen. Jede Brücke besitzt somit sieben Auflager. Mit diesen Brücken, die sieben Auflager haben, von denen vier lotrecht gerichtet sind, wollen wir uns in der Folge hauptsächlich beschäftigen.

Auf Tragwerke, die keine Balkenbrücken sind, insbesondere auf Bogenbrücken, lassen sich nachstehende Betrachtungen zum großen Teile ebenfalls anwenden. Die Bogenbrücken besitzen überzählige wagerechte Auflager, die auch infolge lotrechter Angriffslasten der Brücke beansprucht werden.

§ 3. Zur Zahl der Stäbe. Die Anzahl der Knotenpunkte der Brücke, in denen Stäbe, wozu auch Auflagerstäbe zu zählen sind, zusammenkommen, die nicht in einer Ebene liegen, sei n_3 (räumliche Knotenpunkte); die Anzahl der Knotenpunkte, in denen bloß Stäbe vereinigt sind, die zwar in einer Ebene liegen, aber nicht in eine Gerade fallen, sei n_2 (ebene Knotenpunkte), und schließlich sei die Anzahl aller Knotenpunkte, in denen bloß Stäbe einer Richtung auf-treten, n_1 (lineare Knotenpunkte). „ s “ sei die Anzahl aller Stäbe, die Auflagerstäbe ausgenommen.

Es muß dann die Beziehung bestehen:

$$1) \quad 3n_3 + 2n_2 + n_1 - s \geq 7,$$

damit eine mit sieben Auflagern versehene Brücke für alle Angriffe standfest ist.

Ist $3n_3 + 2n_2 + n_1 - s = 7$, dann ist die Brücke statisch bestimmt.

Ist $3n_3 + 2n_2 + n_1 - s < 7$, dann ist sie statisch unbestimmt.

Die Gleichung 1) ist ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kennzeichen der Unbeweglichkeit des Brückensystems, da der sonstige Aufbau auch eine wichtige Rolle spielt. Im besonderen darf an den Knotenpunkten, in denen Stäbe vereinigt sind, die in einer Ebene liegen, keine äußere (auch Lager-)Kraft angreifen, die nicht in der-

selben Ebene liegt. Ebenso müssen in den linearen Knotenpunkten die äußeren Kräfte in der Stabachse liegen. Natürlich muß die Nennerdeterminante des Gleichungssystems, die das Gleichgewicht in allen Knotenpunkten ausdrücken, ungleich Null sein.¹⁾

Eine statisch bestimmte Brücke mit sieben Auflagern (im Sinne von Lagerstäben) ist ein sogenanntes gestütztes räumliches Fachwerk im Gegensatz zum freien Raumbachwerk. Als freies Fachwerk müßte die Brücke einen Stab mehr haben und könnte durch sechs Auflager vollständig gestützt sein. Durch den Ersatz eines Stabes durch ein Auflager entsteht dann das gestützte Brückenfachwerk.

Eine kurze prinzipielle Bemerkung sei noch zu der Auszählung der Stäbe und Knotenpunkte gestattet. August Föppl, der den Begriff Raumbachwerk eigentlich einführte, verstand darunter einen Verein von Stäben und Knotenpunkten, der für alle Kräfte stabil ist, die auf die Knotenpunkte wirken und ein Gleichgewichtssystem bilden. Unter diesem Gesichtspunkte betrachtet, ist das oben erwähnte Brückenfachwerk kein statisch bestimmtes, da es n_2 Knotenpunkte enthält, in denen Stäbe vereinigt sind, die in einer Ebene liegen und n_1 Knotenpunkte, in denen Stäbe vereinigt sind, die in eine Gerade fallen. Dieses Fachwerk ist gegen Kräfte, die auf die erwähnten Knotenpunkte wirken und nicht in der Ebene bzw. in der Geraden der Stäbe gelegen sind, nicht standfest. (Es mußten tatsächlich auch solche Kräfte ausgeschlossen werden; aber der Ausschluß gewisser Kräfte ist im Föpplschen Sinne ein Zeichen, daß das Fachwerk nicht statisch bestimmt ist.) Zu einem standfesten, statisch bestimmten Fachwerk im Sinne von Föppl wird die Brücke entweder durch Unterdrückung der Knotenpunkte n_2 und n_1 oder, falls das Fachwerk nicht abgeändert werden soll, dadurch, daß man diesen Knotenpunkten bestimmte Bedingungen vorschreibt. Die Bedingungen lauten: Die n_2 Knotenpunkte werden in der Ebene der Stäbe, die in ihnen vereinigt sind, geführt, am besten durch je einen Auflagerstab, der nicht in diese Ebene fallen darf. Die n_1 Knotenpunkte werden in der Geraden der Stäbe geführt, am besten durch je zwei Auflagerstäbe, die nicht in diese Gerade fallen. Die Anzahl der Auflager wird dadurch um $n_2 + 2n_1$ vergrößert, und es ist

$$3n_3 + 3n_2 + 3n_1 - s \leq 7 + n_2 + 2n_1.$$

¹⁾ Die Bedingung: Nennerdeterminante D ungleich Null gilt bei statisch unbestimmten Fachwerken für den statisch bestimmten Grundfall. Über die Auszählung der Systeme findet man in allen Lehrbüchern Näheres.

Das so entstandene gestützte Fachwerk ist nun gegen alle Kräfte widerstandsfähig. Treten die oben ausgeschlossenen Kräfte nicht auf, so sind die hinzugefügten Lagerstäbe spannungslos. In dem System der Gleichgewichtsbedingungen, die das Gleichgewicht in allen Knotenpunkten nach den drei Koordinaten des Raumes ausdrücken, gibt es bei geschickter Wahl der Koordinatenachsen $n_2 + 2n_1$ voneinander ganz unabhängige Gleichungen, die nur je eine Unbekannte, und zwar die Spannkraft des entsprechenden Lagerstabes, haben. Treten die oben ausgeschlossenen Kräfte nicht auf, dann sind die rechten Seiten dieser Gleichungen gleich Null und somit auch die unbekanntes Spannkraften. Streicht man die Gleichungen weg, dann bleibt ein System von $3n_3 + 2n_2 + n_1$ Gleichungen zurück, deren Nennerdeterminante ungleich Null sein muß und die zur Ausrechnung der s Stabkräfte und der sieben Auflagerkräfte genügen.

Mit der stillschweigenden Annahme der $n_2 + 2n_1$ Auflagerstäbe, die bei Ausschluß der bewußten Kräfte spannungslos werden und die das Fachwerk erst zu einem bestimmten im Föppl'schen Sinne machen, wollen wir von statisch bestimmten Raumbauwerken sprechen, bei denen es ebene und lineare Knotenpunkte gibt. Das Gleichgewicht in diesen Knotenpunkten ist entsprechend ein ebenes (je zwei Gleichungen) oder ein lineares (je eine Gleichung).

Diese Abweichung von der Föppl'schen Festsetzung soll deswegen beibehalten werden, weil es tatsächlich viele Brückenbauwerke mit ebenen Knotenpunkten gibt. Man denke an das K-System für Horizontalverspannungen oder an Systeme mit Hilfsdiagonalen. Die in diesen Knotenpunkten auftretenden geringen Kräfte, die nicht in der Ebene der Stäbe wirken, wie das Eigengewicht (bei Horizontalverspannungen), die Windkraft usw. werden lediglich durch die Biegesteifigkeit der Stäbe und Nichtgelenkigkeit der Knotenpunkte übertragen.

Erste Abteilung.

Statisch bestimmte Brücken.

§ 4. Allgemeines. Die statische Bestimmtheit möge sich vor allem auf die äußeren Verhältnisse, wie Anzahl der Wände, der Lager usw. beziehen. Ist irgendwo eine lokale statische Unbestimmtheit, wie steife Gegendiagonalen, vorhanden, oder ist eine Tragwand statisch unbestimmt, so gelten die nachfolgenden Betrachtungen trotzdem im vollen Maße. Ausgeschlossen seien lediglich Fälle, wo durch Hinzutreten eines weiteren Lagers, oder einer Tragwand die statische Bestimmtheit gestört wird. Man könnte demnach dieser Abteilung den Titel

äußerlich und räumlich statisch bestimmte Brücken geben.

Zu diesen gehören vor allem die Brücken mit drei Längswänden, also die oben oder unten offenen Brücken, ferner Brücken mit einem vertikalen und zwei wagerechten Hauptträgern.

Es soll nun nachgewiesen werden, daß ein Brückenfachwerk, das aus drei Längswänden und den nötigen steifen Querrahmen besteht und sieben Auflager besitzt, statisch bestimmt ist, d. h. daß es $3n_3 + 2n_2 + n_1 - 7$ Stäbe besitzt.

Um es zuerst auf einem einfachen Beispiel zu zeigen, sei ein parallelepipedisches geschlossenes Fachwerk angenommen. Die vier Längswände sind Parallelträger mit m -Feldern und einfachen Pfosten und Diagonalen. An den Enden ist in den Querrahmenebenen je eine Diagonale. Dieses Fachwerk ist ein Flechtwerk, somit ein freies, räumliches, statisch bestimmtes Fachwerk. Es erfordert zur Stützung sechs Auflager. Die Anzahl der Stäbe ist: 4 m Gurtstäbe, 4 m Diagonale, 4 $(m + 1)$ Riegel bzw. Pfosten und zwei Diagonalen in den Endquerrahmen, zusammen $s = 12m + 6$. Die Anzahl der Knotenpunkte ist $n_3 = 4(m + 1) = 4m + 4$, $n_2 = 0$, $n_1 = 0$. Zwischen

s und n besteht die Beziehung $3n_3 + 2n_2 + n_1 - s = 12m + 12 - (12m + 6) = 6$ das Kriterium eines freien räumlichen Systemes. Man entferne nun die m -Diagonale einer Längswand und setze $m-1$ Diagonale der Zwischenquerrahmen ein, die bisher unsteif waren. Das System besitzt nun $3n_3 + 2n_2 + n_1 - 7$ Stäbe, da ein Stab weniger eingesetzt, als weggenommen würde. Es ist somit in der Tat $3n_3 + 2n_2 + n_1 - s = 7$. Dieses Fachwerk erfordert auch um ein Auflager mehr als das Ausgangsfachwerk, also 7.

Dieselbe Auszählung soll nun gemacht werden bei einer ganz allgemeinen Beschaffenheit der Längswände.

Wir nehmen ein beliebiges ebenes Fachwerk als eine Längswand. Es besitze s_1 Stäbe und k_1 Knotenpunkte, und es sei $s_1 = 2k_1 - 3$ als Zeichen eines statisch bestimmten Fachwerkes. Nun wählen wir ein zweites ebenes Fachwerk als zweite Längswand und stellen es in einen gewissen Abstand von der ersten Wand. Die Lage braucht aber nicht parallel zu sein, auch braucht das System, Stab- und Knotenpunktanzahl nicht dieselbe zu sein, wie beim ersten Fachwerk. Auch bei diesem Fachwerk ist $s_2 = 2k_2 - 3$.

Von den k_1 bzw. k_2 Knotenpunkten werden f_1 bzw. f_2 ausgesucht, an welchen eine dritte Längswand an die zwei bestehenden angeschlossen wird. Damit die dritte Längswand statisch bestimmt ist, müßten die $f_1 + f_2$ Knotenpunkte durch $2(f_1 + f_2) - 3$ Stäbe verbunden werden. Nun sind aber zwischen den f_1 Knotenpunkten der einen Wand bzw. f_2 Knotenpunkten der zweiten Wand $f_1 - 1$ bzw. $f_2 - 1$ Beziehungen vorhanden, die bedingen, daß diese Punkte gegeneinander in ihrer Ebene unverrückbar sind. Es sind z. B. gewöhnlich zwischen diesen Punkten $f_1 - 1$ bzw. $f_2 - 1$ Gurtstäbe vorhanden. Man braucht also um $f_1 - 1 + f_2 - 1$ weniger Stäbe einzusetzen, um die $f_1 + f_2$ Punkte der neuen Längswand gegenseitig zu verbinden. Die Anzahl der neu einzusetzenden Stäbe ist daher

$$2(f_1 + f_2) - 3 - (f_1 - 1) - (f_2 - 1) = f_1 + f_2 - 1.$$

Außer den $f_1 + f_2$ Knotenpunkten der dritten Längswand, die noch den ersten zwei Wänden mit angehören, seien in dieser Wand f_3 Knotenpunkte gebildet. Dann erhöht sich die Anzahl der notwendigen Stäbe um $2f_3$, und es ist die Gesamtzahl der neuen Stäbe

$$\mathfrak{S} = f_1 + f_2 + 2f_3 - 1.$$

Es sollen nun Querrahmen gebildet werden. Man wähle l_1 Knotenpunkte der ersten, l_2 Knotenpunkte der zweiten und l_3 Knoten-

punkte der dritten Wand, die alle in einem Querschnitt der Brücke liegen mögen. Der Querschnitt braucht keineswegs ein senkrechter zu sein. Unter den l_1 bzw. l_2 Knotenpunkten seien jedesmal diejenigen mitgerechnet, die in der Schnittgerade der dritten Tragwand mit der ersten bzw. der zweiten liegen. Sollte an dieser Stelle ursprünglich kein Knotenpunkt vorhanden sein, so ist der Knotenpunkt durch Ziehen je eines Stabes in jeder der Längswände zu bilden. Nun verbinde man die $l_1 + l_2 + l_3$ Knotenpunkte durch Stäbe so, daß ein steifer Querrahmen entsteht. Dazu braucht man allgemein $2(l_1 + l_2 + l_3) - 3$ Stäbe, von denen jedoch $l_1 + l_2 + l_3 - 1$ hier überflüssig sind, weil die Entfernungen der zugehörigen Punkte in ihren Ebenen wegen der Steifigkeit der Längswände konstant sein müssen. Wurden bei der Ausbildung der Querrahmen l_4 neue Knotenpunkte gebildet, die in keiner der drei Wände liegen, dann erhöht sich die Zahl der Stäbe um $2l_4$. Die Anzahl t der Stäbe in einem steifen Querrahmen ist daher $t = 2(l_1 + l_2 + l_3) - 3 - (l_1 + l_2 + l_3 - 1) + 2l_4 = l_1 + l_2 + l_3 + 2l_4 - 2$.

Man denke sich m Querrahmen eingeschaltet, die durch die Zeiger $a b c \dots m$ gekennzeichnet werden.

Die Gesamtzahl der Stäbe in der so gebildeten Brücke beträgt:

$$S = s_1 + s_2 + \textcircled{c} + t_a + t_b + t_c + \dots + t_m = 2k_1 - 3 + 2k_2 - 3 + \textcircled{f}_1 + \textcircled{f}_2 + 2\textcircled{f}_3 - 1 + [l_1^a + l_2^a + l_3^a + 2l_4^a - 2] + [l_1^b + l_2^b + l_3^b + 2l_4^b - 2] + \dots + [l_1^m + l_2^m + l_3^m + 2l_4^m - 2]$$

$$S = 2k_1 + \textcircled{f}_1 + \Sigma l_1 + 2k_2 + \textcircled{f}_2 + \Sigma l_2 + 2\textcircled{f}_3 + \Sigma l_3 - 7 - 2m + 2\Sigma l_4.$$

Die Anzahl der sämtlichen Knotenpunkte beträgt:

$$k_1 + k_2 + \textcircled{f}_3 + \Sigma l_4.$$

Hiervon ist räumlich die Anzahl:

$$N_3 = \textcircled{f}_1 + \textcircled{f}_2 + \Sigma l_1 + \Sigma l_2 + \Sigma l_3 - 2m.$$

Das letzte negative Glied rührt daher, daß in jedem der m -Querrahmen zwei Punkte vorhanden sind, die sowohl unter \textcircled{f}_1 bzw. \textcircled{f}_2 als auch unter l_1 bzw. l_2 mitgezählt wurden und somit je einmal abgezogen werden müssen. Es sind dies die Knotenpunkte, die zwei Tragwänden gemeinsam sind.

Die Anzahl N_2 der ebenen Knotenpunkte ist gleich dem Unterschiede der Anzahl sämtlicher Punkte und der der räumlichen, somit ist:

$$N_2 = k_1 + k_2 + \textcircled{f}_3 + \Sigma l_4 - (\textcircled{f}_1 + \textcircled{f}_2 + \Sigma l_1 + \Sigma l_2 + \Sigma l_3 - 2m).$$

vorn gerichtet. Die z -Achse sei lotrecht und werde nach oben positiv bezeichnet.¹⁾

Die Punkte 1, 2, 3, 4 haben die Koordinaten:

$$\begin{array}{l} x\text{-Richtung: } 0, 0, +l, +l, \\ y\text{-} \quad \quad \quad -t_1, t+t_2, -t_3, t+t_4, \\ z\text{-} \quad \quad \quad \text{belanglos;} \end{array}$$

siehe Fig. 1. (l als Maß heißt Brückenlänge, als Zeiger und Bezeichnung: links.)

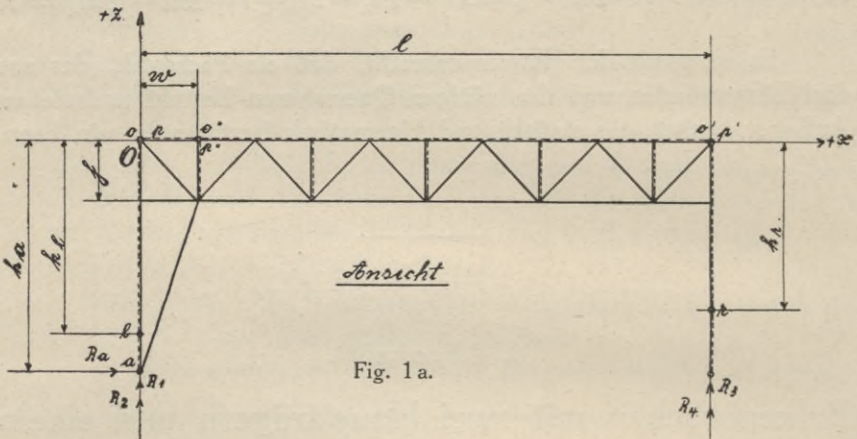


Fig. 1 a.

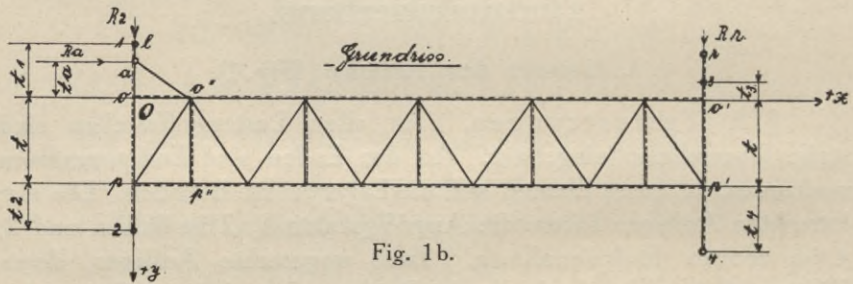


Fig. 1 b.

¹⁾ Es wird hervorgehoben, daß $+z$ nach oben gerichtet ist. Auch die Lastrichtung nach oben wurde als positiv gewählt. Das wird deshalb betont, da es sonst üblich ist, die positive Lastrichtung nach unten zu wählen, während bei Auflagerdrücken die Richtung nach oben als positiv angenommen wird. Diese übliche Wahl entspricht den natürlichen Verhältnissen. Wegen der Schwierigkeiten, die durch die verschiedenen positiven Richtungen von Last und Reaktion bei der analytischen Berechnung entstehen, wurde in den nachfolgenden Ausführungen die positive Richtung aller angreifenden lotrechten Kräfte nach oben gewählt. Ebenso ist die positive Richtung der Quer- und Längskräfte, sei es für Last oder Reaktion, parallel zu den positiven Richtungen der y - und der x -Achse gewählt.

„l“ und „r“ haben die Koordinaten:

x-Richtung: 0, + l,
 y- „ belanglos,
 z- „ — h_l, — h_r.

Der Punkt „a“ hat schließlich die Koordinaten:

$x_a = 0, y_a = -t_a, z_a = -h_a.$

Außer dem Endquerrahmen befindet sich an einem Brücken-

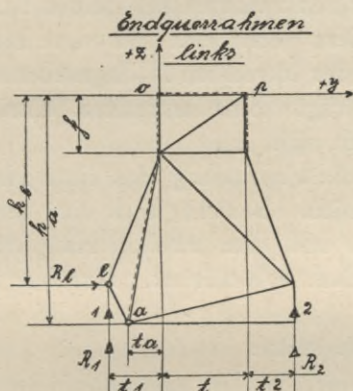


Fig. 1c.

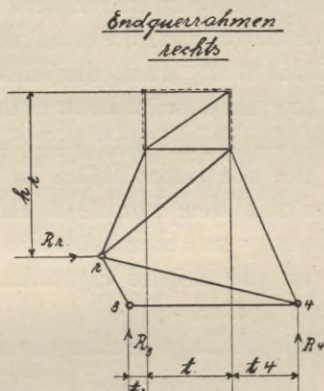


Fig. 1d.

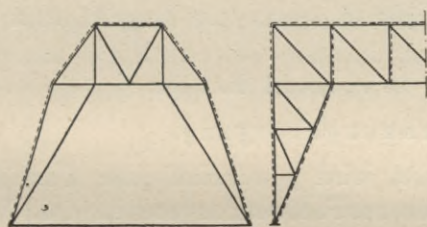


Fig. 1e.

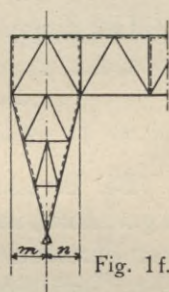


Fig. 1f.

ende noch ein Verbindungsglied zwischen dem Punkte „a“ und einem der Hauptträger zur Aufnahme der Längskräfte der Brücke.

Die Brückenseite, an der sich der Punkt a befindet, nennt man die feste Stütze der Brücke. Sie besteht, wie gesagt, aus einem Endquerrahmen, einem anderen Querrahmen im Abstände w und aus einem Verbindungsglied zwischen den Querrahmen und dem Punkt a. Die Gestaltung der festen Stütze kann überaus mannigfaltig sein. Sie ist bedingt durch den Zweck, dem die Brücke dient. Als Bei-

spiel sei in Fig. 1e die feste Stütze einer Brücke abgebildet, welche Form bei Verladebrücken häufig vorkommt.

Die andere Brückenseite, an der keine Längskräfte übertragen werden, nennt man die bewegliche, sehr oft die Pendelstütze.

Eine Abart der festen Stütze ist in Fig. 1f abgebildet, bei der sich die Auflagerpunkte nicht unterhalb eines Querrahmens befinden, sondern seitlich. Es sind hier zwei abgebogene Endquerrahmen vorhanden, die unten zusammenfließen. In diesem Falle sind die Längswände so zu rechnen, als wären zwischen den beiden Knoten an der betreffenden Stütze Balanciers vorhanden mit dem Hebelverhältnis $m : n$, wenn der Abstand der lotrechten Auflagerebene von den Querrahmenwänden m und n beträgt. Eine besondere Schwierigkeit in der Berechnung tritt demnach nicht auf.

Bei der festen Stütze ist nur die Verbindung des einen Hauptträgers mit dem Punkte a erforderlich. Besteht noch eine weitere Verbindung zwischen dem Punkte a und dem zweiten Hauptträger, dann ist die Brücke eigentlich statisch unbestimmt. Darüber folgt Näheres später.

Die Auflagerdrucke der Brücke seien:

Auflager der z -Richtung:	R_1, R_2, R_3 und $R_4,$
" " y - " "	$R_r, R_l,$
" " x - " "	$R_a.$

Die Zeiger der Auflagerkräfte R deuten den Angriffspunkt an.

2. Einfluß der lotrechten Kräfte.

a) § 6. Berechnungsvorgang.

Bei Berechnung von Brücken wird gewöhnlich jede Wand für sich gerechnet, indem sie als ein ebenes Fachwerk angesehen wird. Von dieser Berechnungsart wird auch im folgenden häufig Gebrauch gemacht. Daß dies zulässig ist, muß jedoch noch bewiesen werden. Bemerket sei, daß bei anderen räumlichen Fachwerken, wie Kuppeln, Tonnenflechtwerken usw. das Gleichgewicht der Stäbe in einem jeden Knotenpunkte festgelegt werden muß, um die Stabkräfte zu ermitteln. Die Einfachheit der Berechnung bei Brückenfachwerken ist eine bedeutende Erleichterung, deren Zulässigkeit aber noch bewiesen werden muß. Der Beweis stützt sich auf einen Satz, der erst im § 25 ausgesprochen und bewiesen wird. Anschließend an diesen Satz in § 25 ist der eigentlich hierher gehörende Beweis gebracht und wird hiermit darauf hingewiesen.

Die Kräfte treten in den Querrahmen auf. Durch diese werden sie auf die zwei Hauptträger übertragen. Der Querrahmen ist somit als Scheibe, die durch zwei vertikale, von den Hauptträgern ausgeübte Reaktionen im Gleichgewicht gehalten wird, zu rechnen. Eine dritte Reaktion, nämlich die in der Horizontalverspannung gelegene, wird durch diese Belastung nicht hervorgerufen. Die auf die Hauptträger entfallenden Teilkkräfte belasten dieselben und werden auf die Endquerrahmen übertragen. Zum Schlusse sind die Endquerrahmen zu berechnen. Sie übertragen die Lasten auf die Punkte 1, 2, 3 und 4.

b) § 7. Größe der Auflagerdrucke.

Zur Berechnung der vier Drucke stehen uns ohne weiteres drei Gleichungen zur Verfügung:

$$2) R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \Sigma P = 0 \quad 3) R_1 + R_2 = -\Sigma P \frac{l-x}{l}$$

$$4) M_o + M_o' - \Sigma P y = 0$$

wobei M_o bzw. M_o' die Summe der Momente aller am linken bzw. rechten Endquerrahmen wirkenden Lagerdrucke in bezug auf die x -Achse bedeuten.

Es ist

$$M_o = R_1 t_1 - R_2 (t + t_2) \text{ und}$$

$$M_o' = R_3 t_3 - R_4 (t + t_4).$$

Eine vierte Beziehung zur Ermittlung der vier Drucke ergibt sich aus der Bauart der Brücke. Sind die Querrahmen parallel zur $y-z$ -Ebene, dann ergibt sich:

$$5) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = -\Sigma P \frac{l-x}{l} \cdot \frac{t+t_2-y}{t+t_1+t_2} \quad R_2 = -\Sigma P \frac{l-x}{l} \cdot \frac{t_1+y}{t+t_1+t_2} \\ R_3 = -\Sigma P \frac{x}{l} \cdot \frac{t+t_4-y}{t+t_3+t_4} \quad R_4 = -\Sigma P \frac{x}{l} \cdot \frac{t_3+y}{t+t_3+t_4} \end{array} \right.$$

Wie man sieht, zerlegen sich die Summen $R_1 + R_2$ bzw. $R_3 + R_4$, die aus Gleichung 2) und 3) bekannt sind, auf die einzelnen Auflager im selben Verhältnisse, wie sich eine Kraft zerlegen würde, die auf die Balken von der Länge $t + t_1 + t_2$ bzw. $t + t_3 + t_4$ im Abstände $t_1 + y$ bzw. $t_3 + y$ vom Punkte 1 bzw. 3 angreift.

Dieses scheinbar selbstverständliche Ergebnis trifft bloß bei zu den Hauptträgern rechtwinklig eingebauten Querrahmen zu. Bei anderer Kraftübertragung, z. B. bei schrägen Querträgern, oder bei Reibungs-, Zahnrad- und anderen Zwischengliedern ist obige Regel ungültig.

c) Einflußflächen.

§ 8. Unter Einflußfläche sei (analog der Einflußlinie bei ebenen Fachwerken) die Fläche verstanden, die entsteht, wenn man die Werte einer statischen Größe für verschiedene Lagen einer sich im Raume parallel zu sich selbst verschiebenden Kraft Eins — am Orte der Kraft als Strecken aufträgt. Die Fußpunkte dieser Strecken liegen hierbei in einer Grundebene, die Endpunkte in der Einflußfläche. Es gelten für die Einflußfläche die gleichen Regeln, wie für die Einflußlinie beim ebenen Fachwerk. Die gesuchte statische Größe sei Z . Die x — y -Ebene sei die Grundebene, ζ seien die Applikaten der Fläche.

$$\begin{aligned} Z &= P_1 \zeta_1 + P_2 \zeta_2 + \dots = \Sigma P \zeta \text{ oder} \\ Z &= p \iint \zeta \, dx \, dy \qquad = p V. \end{aligned}$$

Hierbei sind P_1, P_2, \dots , allgemein P die wirkenden Kräfte, p die konstante Belastung pro Flächeneinheit, V der Kubikinhalt des von der Einflußfläche und der Grundebene eingeschlossenen Raumes. Die Integration erstreckt sich auf die belastete Fläche.

§ 9. Einflußflächen für eine statische Größe U der Hauptträger. Denkt man sich beide Hauptträger einer Brücke, deren Querrahmen rechtwinklig zu den Hauptträgern sind, zusammengelegt und alle Brückenlasten darauf wirkend, und bestimmt man nun den Wert U , so nennen wir diesen Wert — den Totalwert —.

Die Einzelwerte dieser Größe U_v, U_h , die zu den einzelnen Hauptträgern (vorn und hinten) gehören, ergänzen sich gegenseitig zum Totalwerte U_t

$$U_v + U_h = U_t$$

U_v und U_h sind die Ergänzungswerte.

Man zeichne sich die Einflußlinie u des Totalwertes unter den hinteren Hauptträger bzw. unter die Projektion dieses Trägers auf die x — y -Ebene. Ferner zeichne man die Projektion v des vorderen Hauptträgers auf die x — y -Ebene, und lasse sich nun eine erzeugende Gerade so bewegen, daß sie die Linien u und v schneidet und parallel zur z — y -Ebene verbleibt. Die Erzeugende beschreibt eine Konoïdfläche, die gleichzeitig die Einflußfläche für den Wert U_h des hinteren Hauptträgers ist. Die Linien u und v sind die Leitlinien des Konoïds. Wenn die Träger statisch bestimmt sind, dann übergeht die Konoïdfläche in ein oder mehrere hyperbolische Parabolöide, da dann u aus einer oder mehreren Geraden besteht.

Beweis: Ist eine Last Eins im Abstände y von der x — z -Ebene vorhanden, so ist der Anteil, der auf den hinteren Träger entfällt:

$\frac{t-y}{t}$ und der Wert der statischen Größe U beträgt: $u \frac{t-y}{t}$, wenn $u = f(x)$ die Einflußlinie des Wertes U für einen ebenen Träger darstellt.

$$7) \quad \zeta = u \frac{t-y}{t}$$

ist aber gleichzeitig die Applikate der vorhin konstruierten Konoïdfläche.

Für $y = t$ ist $\zeta = 0$, oder: Lasten, die in die Ebene des vorderen Trägers fallen, haben auf den hinteren Träger keinen Einfluß.

Für $y = 0$ ist $\zeta = u$, was auch selbstverständlich ist.

§ 10. Einflußflächen für die Auflagerdrucke. Die Gleichungen 5) geben mit Weglassung des Koeffizienten ΣP die Gleichungen der Einflußflächen. Es sind hyperbolische Parabolöide. Beispielsweise hat für den Auflagerdruck R_1 die Einflußfläche die

$$\text{Leitlinien: } u = \frac{l-x}{l}; y = -t_1 \text{ und } u = 0; y = t + t_2.$$

Die Erzeugenden sind parallel zur $y-z$ -Ebene.¹⁾

Bei Lasten, die eine und dieselbe Ordinate haben, gestaltet sich die Rechnung sehr einfach. Eine zweigleisige Eisenbahnbrücke z. B. trägt außer dem Eigengewicht nur Lasten bei $y = y_1$ und $y = y_2$, wenn y_1 und y_2 die Abstände der Gleismitten vom hinteren Träger bedeuten. Von der ganzen Einflußfläche für den Wert U der Brücke haben für uns nur zwei Linien auf dieser Fläche eine Bedeutung, und zwar die Schnittlinien der Einflußfläche mit den zwei Ebenen $y = y_1$ und $y = y_2$. Die Schnittlinien sind ähnlich beschaffene (verzerrte) Linien, wie die Einflußlinie $u = f(x)$ des ebenen Trägers. Die Applikaten ζ verhalten sich zu u wie $t - y_1$ bzw. $t - y_2$ zu t . Durch Änderung des Maßstabes können diese Werte direkt von der Linie u abgelesen werden.

Die Konstruktion der Linien u ist aus der Lehre vom ebenen Träger bekannt.

3. Einfluß der wagerechten Kräfte der y -Richtung (Querkräfte der Brücke).

a) Die Horizontalverspannung ist eben.

a) § 11. Berechnungsvorgang.

Die in den Querrahmen wirkenden Kräfte H erzeugen drei Reaktionen, die ihnen das Gleichgewicht halten und die in den

¹⁾ Die Bemerkung gilt für alle Einflußflächen.

Schnittgeraden eines jeden Querrahmens mit den drei Längswänden wirken. Hat die Kraft die Applikate z , so beträgt ihre Wirkung¹⁾ auf die horizontale Verspannung $H_w = +H$

„ den vorderen Träger $V_v = -H \frac{z}{t}$

„ „ hinteren „ $V_h = +H \frac{z}{t}$.

Die drei Längswände übertragen diese Kräfte auf die Endquerrahmen, und diese auf die Auflager.

b) § 12. Auflagerdrucke.

Die wagerechten Auflagerdrucke R_l und R_r betragen:

8) $R_l = -\Sigma H \frac{l-x}{l}$, 8') $R_r = -\Sigma H \frac{x}{l}$.

Der Auflagerdruck R_a : 9) $R_a = 0$.

Zur Bestimmung der vertikalen Auflagerdrucke R_1 R_2 R_3 R_4 dienen drei Gleichgewichtsbedingungen:

10) $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0$; $R_1 + R_2 = 0$ wegen $\Sigma M_y = 0$;
 $M_o + M_o' + \Sigma H z = 0$,

wobei $M_o = R_1 (t + t_1 + t_2) - R_l h_l$ und
 $M_o' = R_3 (t + t_3 + t_4) - R_r h_r$.

Eine vierte Beziehung zur Ermittlung von R_1 bis R_4 ergibt sich aus der Beschaffenheit der Brücke. Sind die Querrahmen parallel zur $y-z$ -Ebene und die Windverspannung parallel zur $x-y$ -Ebene bzw. mit ihr zusammenfallend, so ist

$$M_o = -\Sigma H \frac{l-x}{l} \cdot z, \quad M_o' = -\Sigma H \frac{x}{l} z;$$

und demnach:

11) $R_1 = -R_2 = -\Sigma H \frac{l-x}{l} \cdot \frac{h_l + z}{t + t_1 + t_2}$;
 $R_3 = -R_4 = -\Sigma H \frac{x}{l} \cdot \frac{h_r + z}{t + t_3 + t_4}$.

c) § 13. Einflußflächen.

Als Grundebene der Einflußfläche sei die $x-z$ -Ebene oder eine zu ihr parallele Ebene gewählt.

a) Einflußfläche einer Größe U der horizontalen Verspannung. Ist die Einflußlinie dieser Größe U bei einem

¹⁾ Siehe Fußnote S. 10.

ebenen Träger eine Linie, deren Gleichung $u = f(x)$ ist, so ist die Gleichung der Einflußfläche:

$$12) \quad u = f(x).$$

Es ist dies eine Zylinderfläche mit zur z -Achse parallelen Erzeugenden. Die Zylinderfläche besteht bei statisch bestimmten Verspannungen aus einer oder mehreren Ebenen.

b) Einflußfläche einer Größe U der vertikalen Hauptträger. Ist die Einflußlinie dieser Größe beim ebenen Träger $u = f(x)$, so lautet die Gleichung der Einflußfläche für den vorderen bzw. für den hinteren Hauptträger:

$$13) \quad u = \mp \frac{z}{t} f(x).$$

Es ist dies ein Konoïd, das meistens aus einem oder mehreren hyperbolischen Paraboloiden besteht. Die Leitlinien des Konoïds sind:

Die Gerade $u = 0, z = 0$; und die Linie $u = f(x), z = t$. Die Erzeugenden sind parallel zur $z - y$ -Ebene.

Für konstante z -Werte der Kräfte H sind für uns nur die entsprechenden Niveaulinien der Einflußfläche von Interesse. Diese Linien sind verzerrte $f(x)$ -Linien, verzerrt im Maßstabe $z : t$. Durch Änderung des Maßstabes können die Werte u von der Linie $f(x)$ abgelesen werden.

c) Einflußflächen der Auflagerdrucke. Die Gleichungen dieser Einflußflächen sind in Gleichung 8) 9) und 11) angegeben.

Die Einflußflächen für R_1 und R_r sind Ebenen, die parallel zur z -Achse liegen und deren Projektionen auf die $x - y$ -Ebene die Gleichungen haben

$$u = -\frac{l-x}{l} \quad \text{und} \quad u = -\frac{x}{l}.$$

Die Einflußflächen für R_1 usw. sind hyperbolische Parabolöide. Beispielsweise sind die Leitgeraden für die R_1 - und R_2 -Flächen:

$$u = 0, z = -h_1; \quad \text{und} \quad u = -\frac{l-x}{l} \cdot \frac{h}{t+t_1+t_2}, z = 0;$$

Die Einflußfläche für R_a fällt mit der $x - z$ -Ebene zusammen.

β) Die Horizontalverspannung ist eine gebogene oder gebrochene Fläche.

§ 14. Für diesen Fall gelten die Ausführungen unter α weiter. Als $x - y$ -Ebene ist die wagerechte Ebene zu betrachten, die durch

den Eckpunkt geht, in dem die horizontale Verspannung, der linke Endquerrahmen und der hintere Hauptträger zusammenkommen. Außer den Kräften, die durch die beiden Hauptträger übertragen werden und außer den lotrechten Auflagerdrucken entstehen hier noch vertikale Zusatzkräfte und infolgedessen Zusatz-Auflagerdrucke. Die genaue Berechnung dieser Zusatzkräfte ist im beifolgenden Aufsätze des Verfassers enthalten:

„Über die Berechnung von Balkenbrücken mit gebogenem oder gebrochenem Windverbände bei Wirkung von parallelen in der Fläche des Verbandes wirkenden Kräften.

(Zusatzkräfte in den Hauptträgern infolge der gebogenen Form des Windverbandes.)

Anwendung auf gegliederte Balkenträger.“

Dieser Aufsatz möge sich hier vollinhaltlich anreihen.¹⁾

Über die Berechnung von Balkenbrücken mit gebogenem oder gebrochenem Windverbände bei Wirkung von parallelen in der Fläche des Verbandes wirkenden Kräften.

(Zusatzkräfte in den Hauptträgern infolge der gebogenen oder gebrochenen Form des Windverbandes.)

Anwendung auf gegliederte Balkenträger.

I. § 15. Festsetzungen. Eine Brücke bestehe aus zwei parallelen ebenen Hauptträgern, die eine gebogene bzw. gebrochene Gurtung haben. Diese Gurtungen seien durch eine Horizontalverspannung verbunden. Die Brücke habe vier Auflager, die in vertikaler Richtung wirken, ferner zwei Auflager an den beiden Brückenden, die in wagerechter Richtung, parallel zur y -Achse, Kräfte übertragen. Ein weiteres Auflager in der x -Richtung ist ebenfalls vorhanden.

Auf die Brücke wirken wagerechte zu den Hauptträgern rechtwinklige Kräfte. Diese Kräfte H' werden vermittels der Querrahmen auf die Verspannung übertragen, wobei ein zusätzliches Kräftepaar von den Hauptträgern übernommen werden muß. Ist z die Entfernung einer Horizontalkraft H' von dem gebogenen Gurt, in dem sich die Verspannung befindet, dann erhält die letztere den Angriff $H = H'$, während die Hauptträger die Kräfte erhalten: $\pm H' \frac{z}{t}$.

Unser Augenmerk sei lediglich (gemäß dem Titel dieses Aufsatzes) auf die Kräfte, die in der Verspannungsfläche liegen, gerichtet,

¹⁾ Siehe Literaturbesprechung im Vorwort.

während die Wirkung der übrigen Kräfte als bekannt betrachtet und deshalb nicht weiter erörtert wird.

Die in der Zylinderfläche der Verspannung wirkenden Kräfte H rufen Spannungen sowohl in den Stäben der Verspannung als auch in den Hauptträgern hervor.

Die Verspannung wird gewöhnlich so gerechnet, daß man die Horizontalprojektion der Verspannung als ebenen Fachwerkträger behandelt, wobei man sich die Lasten in der Projektionsebene wirkend denkt. Die wirklichen Spannungen der Stäbe erhält man, indem man die so berechneten Stabkräfte mit der Sekante des Neigungswinkels des betreffenden Stabes zur Projektionsebene multipliziert. Die so erhaltenen Stabkräfte mögen die Hauptstabkräfte heißen. Die skizzierte Berechnungsweise ist richtig, aber soweit die Stäbe der Hauptträger in Frage kommen, nicht vollständig. Die Hauptträger erhalten nämlich infolge der gebogenen Form der Verspannung Zusatzkräfte, deren Bestimmung und Theorie den Inhalt der folgenden Zeilen, gemäß dem Untertitel des Aufsatzes, bilden möge.

§ 16. Fortsetzung. Die genaue Berechnung der Brücke erfolgt in der eingangs erwähnten Literatur auf diese Weise, daß man zuerst die Stabkräfte der Füllungsstäbe der Verspannung bestimmt und sich nun den Hauptträger durch einen zur Brückenachse parallelen Längsschnitt losgetrennt denkt, wobei die Spankräfte der Anschlußstäbe als äußere Lasten hinzugefügt werden. Bei diesem Verfahren werden die infolge der Zusatzkräfte der Hauptträger entstehenden Stabspankräfte in den Gurtungen zusammen mit den Hauptstabkräften der Gurtungen ermittelt. Dies hat den Nachteil, daß man die Stabkräfte erst nach einer mühevollen Arbeit erhält. Die errechneten Kräfte sind dabei verschiedener Größenordnung, es fallen nämlich die Stabkräfte des gebogenen Gurtes ziemlich groß aus, während die Diagonalen und der gerade Gurt gewöhnlich nur wenig beansprucht werden. Das hier angegebene Verfahren schlägt einen anderen Weg ein. Zuerst wird die Horizontalverspannung als ebener (projizierter) Balkenträger gerechnet, die Stabkräfte dann mit der Sekante des Neigungswinkels multipliziert, was sehr einfach geschieht, da sowohl die wahre Länge des Stabes (Zähler der Sekante) als auch die Länge in der Projektion (Nenner der Sekante) bekannt sind. Nun hat man bereits die Hauptstabkräfte und damit die angenäherten Endwerte der Stabkräfte gefunden, und man wird oft bei dieser Annäherung stehen bleiben. Der weitere (zweite) Teil der Rechnung beschränkt sich lediglich auf die Zusatzkräfte, die nur Korrektionswerte

liefern, und wird erst gewöhnlich bei der zweiten genaueren Berechnung des Bauwerkes durchgeführt. Beim zweiten Teil der Rechnung erhält man Stabkräfte der gleichen Größenordnung, die zumeist ziemlich klein ausfallen. Die für die Diagonalen und den geraden Gurt der Hauptträger erhaltenen Stabkräfte sind die einzigen, die bei dieser Belastung auftreten, während die Stabkräfte des gebogenen Gurtes zu den Hauptstabkräften algebraisch addiert werden müssen.

Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens ist, daß sich für die Zusatzkräfte eine verhältnismäßig einfache Theorie aufstellen und dadurch die Berechnung leicht durchführen läßt.

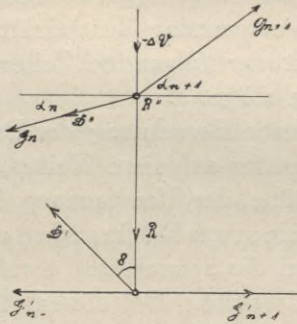


Fig. 2.

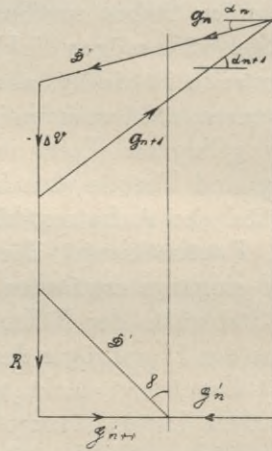


Fig. 3.

§ 17. Fortsetzung. Die Entfernung einer wagerechten Kraft H von der linken Auflagerebene sei a . Die Entfernung der Hauptträger sei t , die Spannweite l . Der Untergurt der Brücke sei wagerecht. Die Brückenhöhe in einem Punkte mit der Abszisse x sei $z = f(x)$. Die Höhe am linken Auflager ist $z = h_a$ und am rechten, bei $x = l$ — sei $z = h_b$.

Der linke Auflagerquerrahmen überträgt die Last $\Sigma_0^l H \frac{l-a}{l}$, der rechte $\Sigma_0^l H \frac{a}{l}$. Die horizontale Projektion der Gurtspannung eines Stabes ist zunächst

$$G' = \pm \frac{M_h}{t}, \text{ wobei } M_h = x \cdot \Sigma_0^l H \frac{l-a}{l} - \Sigma_0^a H(x-a).$$

Nun betrachte man das Gleichgewicht in einem beliebigen Knotenpunkte des gebogenen Gurtes. (Fig. 2.)

G_n, G_{n+1}, D' seien die wagerechten Projektionen der Stabkräfte G_n, G_{n+1} und DR ist die Stabkraft im Riegel. Aus dem Kräfteplan Fig. 3 ersieht man, daß zum Gleichgewicht eine vom Hauptträger zu leistende Vertikalkraft ΔV bzw. dV nötig ist.

$$\Delta V = - (G_n + D' \sin \gamma) (\operatorname{tg} \alpha_{n+1} - \operatorname{tg} \alpha_n) = - G_{n+1} (\operatorname{tg} \alpha_{n+1} - \operatorname{tg} \alpha_n).$$

$$\text{Nun ist: } G_n + D' \sin \gamma = G_{n+1} = \frac{M_n^h}{t}.$$

Somit beträgt:

$$14) \quad \Delta V = \mp \frac{M_n^h}{t} \Delta \operatorname{tg} \alpha; \quad \text{bzw. } dV = \mp \frac{M_n^h d^2 z}{t dx^2} dx^2.$$

M_n^h ist das Biegemoment eines Balkens, der entsteht, wenn man die Verspannung samt den Kräften H auf eine wagerechte Ebene projiziert und α ist der Neigungswinkel der Gurtungen zum Horizont.

Mit diesen Lasten ΔV bzw. dV belaste man nun die Hauptträger und berechne die Zusatzstabkräfte.

Bei der Betrachtung der Hauptträger muß der Wirkungssinn der Kräfte ΔV bzw. dV umgekehrt werden.

$$14') \quad \Delta V = + \frac{M_n^h}{t} \Delta \operatorname{tg} \alpha, \quad dV = \frac{M_n^h d^2 z}{t dx^2} dx^2.$$

ΔV gilt für einen gebrochenen Windverband, dV dagegen für einen stetig gebogenen fiktiven Träger, bei dem die Feldweite unendlich klein ist. Trotzdem wird in der Folge der Bequemlichkeit halber gewöhnlich der Ausdruck dV geschrieben. Die Konstruktion der einzelnen Ausdrücke wird natürlich trotz dieser Schreibweise für den endlichen Wert ΔV und nicht dV durchgeführt. Bei der analytischen Berechnung der Spezialfälle dagegen wird dV genommen, um die Summierung glatt durchführen zu können. Die Formeln sind dort daher Annäherungsformeln.

Bei Brücken mit zwei gebogenen Windverbänden, die eigentlich nicht in diesen Abschnitt gehören, müssen die Zusatzkräfte ΔV_0 und

¹⁾ Bei anderen Systemen als dem Ständerfachwerk ist das Resultat natürlich genau das gleiche.

²⁾ Das obere Vorzeichen gilt für den vorderen gezogenen Gurt der Verspannung, das untere Zeichen für den hinteren gedruckten Gurt. In der Zukunft wird immer nur das eine Vorzeichen, nämlich für den vorderen gezogenen Gurt, geschrieben werden. Man beachte, daß $\frac{d^2 z}{dx^2}$ sowie $\Delta \operatorname{tg} \alpha$ bei konkav nach oben liegenden Kurven positiv, bei konvex nach oben liegenden negativ ist.

ΔV_u besonders gerechnet werden. $z_o = f_o(x)$ und $z_u = f_u(x)$ sind dann die Gleichungen der Gurtkurven, nicht mehr die Höhen der Träger. Wenn beide Verbände die gleichen Windkräfte zu übertragen haben, dann braucht man die Zusatzkräfte nur einmal zu rechnen. Unter $z = f(x)$ kann dann die Trägerhöhe verstanden werden.

II. Einflußlinien der Auflagerdrucke der Hauptträger.

§ 18. Entwicklung. Wir betrachten nun den Einfluß einer Kraft H , deren Abstand a von der linken Auflagerebene veränderlich sei. Die wagerechten Auflagerdrucke sind

$$\text{links: } H_a = H \frac{l-a}{l} \quad \text{rechts: } H_b = H \frac{a}{l}.$$

Außerdem entstehen an den Eckpunkten der Hauptträger vertikale Auflagerdrucke; links R_a und $-R_a$, rechts R_b und $-R_b$.

[Die Zeiger a und b haben hier eine andere Bedeutung als im übrigen Aufsätze.]

Über diese Drucke läßt sich aussagen:

$$15) \quad R_a + R_b = H \frac{z}{t}.$$

Man zerlege die Auflagerdrucke R_a und R_b in R_a^o, \mathfrak{R}_a und R_b^o, \mathfrak{R}_b .

$$16) \quad \begin{cases} R_a = R_a^o + \mathfrak{R}_a \\ R_b = R_b^o + \mathfrak{R}_b \end{cases}$$

$$\text{wobei} \quad R_a^o = H \frac{l-a}{l} \frac{h_a}{t} \quad \text{und} \quad R_b^o = H \frac{a}{l} \frac{h_b}{t} \quad 17)$$

R_a^o und R_b^o sind die Reaktionen, welche durch die auf die Endquerrahmen entfallenden Anteile H_a und H_b der Kraft H erzeugt werden.

\mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_b sind die Auflagerkräfte infolge der Zusatzkräfte ΔV bzw. dV .

$$\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_b = - \int_0^l \Delta V = - \int_0^l dV = - V.$$

Eine oberflächliche aber oft vorkommende Annahme geht dahin, daß sich die Kräfte \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_b ebenso zueinander verhalten, wie die Abschnitte $l-a$ zu a . Sie trifft bloß bei symmetrischer Gurtung und Belastung zu.

$$V = \int_0^l \Delta V = \int_0^l dV = + \int_0^l \frac{M_x^h}{t} \Delta t g \alpha = + \int_0^l \frac{M_x^h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx.$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} V &= -(\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_b) = -(R_a + R_b) + (R_a^o + R_b^o) \\ &= -H \frac{z}{t} + H \frac{1}{lt} [(l-a) h_a + a h_b] \\ &= -\frac{H}{t} \left[z - \frac{(l-a) h_a + a h_b}{l} \right]. \end{aligned}$$

Verbindet man die Endpunkte des gebogenen Gurtes miteinander und nennt man die Ordinaten dieser Geraden z_0 , so findet man, daß $z_0 = h_a \frac{l-a}{l} + h_b \frac{a}{l}$ (Fig. 4). Setzt man nun $z = z_0 + \zeta$, dann ist

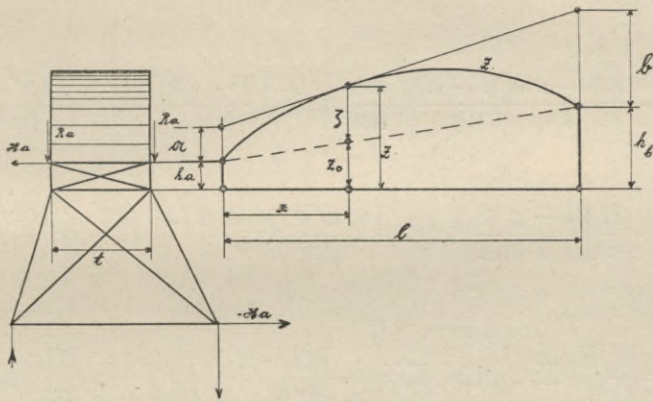


Fig. 4.

$$V = + \int_0^l \frac{M_x^h}{t} \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} dx = -\frac{H}{t} \zeta \text{ und}$$

$$\zeta = - \int_0^l \frac{M_x^h}{H} \frac{d^2 z}{dx^2} dx = - \int_0^a \frac{l-a}{l} x \frac{d^2 z}{dx^2} dx - \int_a^l \frac{a}{l} (l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx.$$

Die Tangente an den Gurt im Punkte $x=a$ und der Gurt selbst schneiden auf den Auflagerlotrechten die Abschnitte a und b ab. Aus Fig. 4 erkennt man, daß $\zeta = \frac{l-a}{l} a + \frac{a}{l} b$ somit ist

$$a = - \int_0^a x \frac{d^2 z}{dx^2} dx \quad \text{und} \quad b = - \int_a^l (l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx.$$

[Zu obigen Ausdrücken gelangt man gleichfalls auf geometrischem Wege, da $\frac{d^2 z}{dx^2} dx$ den Kontingenzwinkel des Gurtes im Punkte x bedeutet.]

Die Einflußlinien der Werte R_a^0 und R_b^0 sind bekannt, ihre Gleichungen übrigens durch die Gleichungen 17) angegeben. Es fehlen nur noch die Einflußlinien der Werte \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_b , die ja eigentlich den Einfluß der gebogenen Form der Verspannung darstellen.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_a &= - \int_0^l dV \frac{l-x}{l} = - \int_0^l \frac{l-x}{l} \frac{M_z^h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx = \\ &= - \int_0^a \frac{l-x}{l} \frac{H(l-a)x}{lt} \frac{d^2 z}{dx^2} dx - \int_a^l \frac{l-x}{l} \frac{Ha(l-x)}{lt} \frac{d^2 z}{dx^2} dx \\ &= - \frac{H}{t} \left[\frac{l-a}{l} \cdot \frac{1}{l} \int_0^a x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx + \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{l} \int_a^l (l-x)^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dx \right]. \end{aligned}$$

$$18) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_a &= + \frac{H}{t} \cdot K_a \text{ wobei } K_a = - \left[\frac{l-a}{l} \frac{1}{l} \int_0^a x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{l} \int_a^l (l-x)^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dx \right] \\ \mathfrak{R}_b &= + \frac{H}{t} K_b \text{ wobei } K_b = - \left[\frac{l-a}{l} \frac{1}{l} \int_0^a x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{l} \int_a^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx \right] \end{aligned} \right.$$

Ferner ist:

$$K_a + K_b = \frac{t}{H} (\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_b) = - \frac{t}{H} V = \frac{t}{H} \frac{H}{t} \zeta = \zeta. \text{ Somit ist}$$

19)

$$K_a = \zeta - K_b.$$

§ 19. Konstruktion. Da die Konstruktion der Ausdrücke

$$\int x \frac{d^2z}{dx^2} dx \text{ und } \int (l-x) \frac{d^2z}{dx^2} dx \text{ nach Vorigem bekannt ist, so können}$$

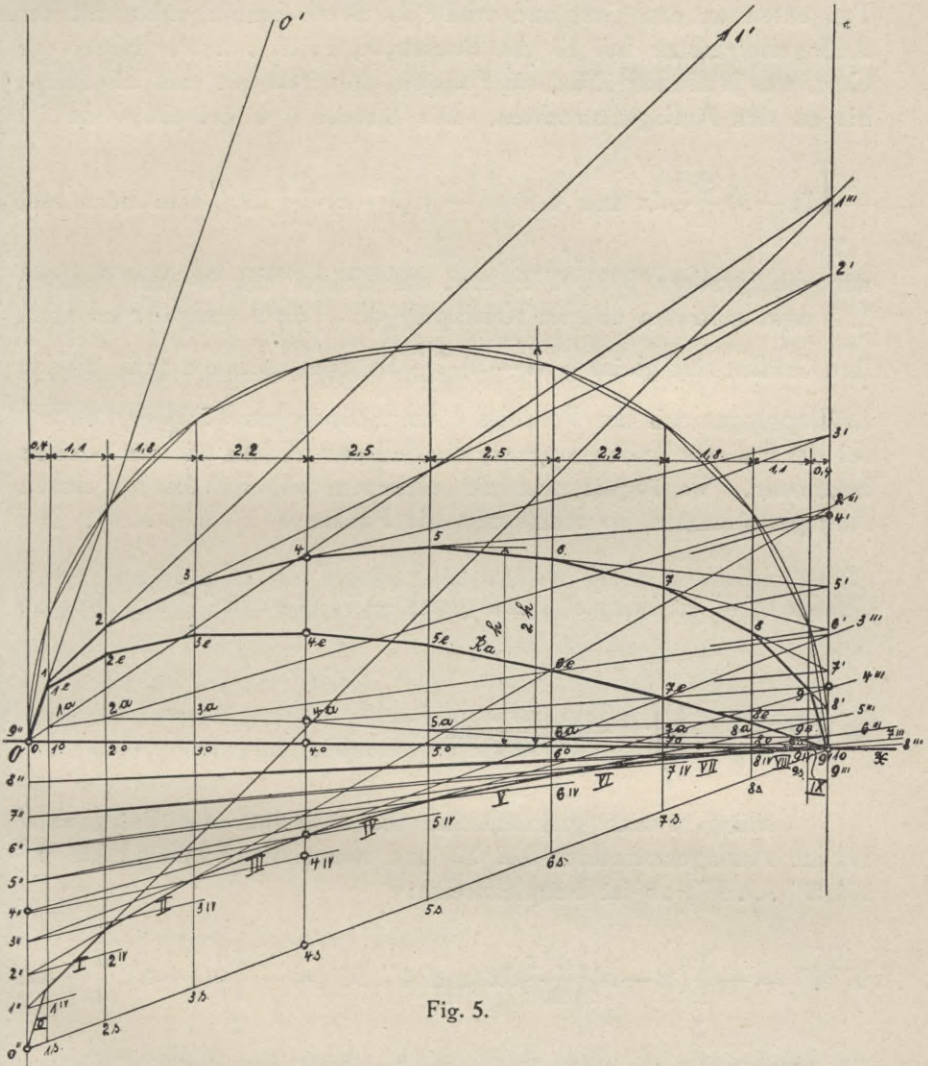


Fig. 5.

auch die Integrale in den Klammerausdrücken K_a und K_b mit Hilfe von Seillinien leicht konstruiert werden. Man beachte, daß diese Integrale die Summen der statischen Momente von $x \frac{d^2z}{dx^2} dx$ bzw.

$(l-x) \frac{d^2z}{dx^2} dx$ in bezug auf die Auflagerpunkte darstellen, wobei diese Größen bei x angreifend zu denken sind.

Man zieht in den Knotenpunkten (Fig. 5) des Gurtes 0, 1, 2 ... 9 Tangenten an den Gurt und erhält als deren Schnittpunkte mit der Auflagerlotrechten bei 10 die Punkte 0', 1', 2', ... 9'. Bildet der Gurt, was ja die Regel ist, ein Polygon, so verlängert man die Seiten bis zu den Auflagerlotrechten. Die Strecke 0' 4' beispielsweise ist

$$-\int_0^4 (l-x) \frac{d^2z}{dx^2} dx \text{ und } 4' 9' = -\int_5^l (l-x) \frac{d^2z}{dx^2} dx. \text{ Man betrachtet}$$

nun die Strecken 0' 1', 1' 2' usw. als Kräfte, die in den Punkten 1, 2 usw. auftreten und im Kräftepolygon 0' bis 9' aufgetragen sind.

Ihre Größen sind gleich $-(l-x) \frac{d^2z}{dx^2} dx$. Nun zeichne man zu diesem Kräftepolygon mit der Polweite l ein Seilpolygon s' . Der Punkt 0 sei der Pol des Kräftepolygons, die Seilseite IX falle mit der x -Achse zusammen. Verlängert man die einzelnen Seilseiten bis zur linken Auflagerlotrechten, so erhält man die Punkte 0'' 1'' 2'' ... 9''.

Die Strecke 0'' 4'' ist beispielsweise gleich $-\frac{1}{l} \int_0^4 (l-x) x \frac{d^2z}{dx^2} dx$. Ebenso

$$\text{ist } 4'' 9'' = -\frac{1}{l} \int_5^l (l-x) x \frac{d^2z}{dx^2} dx.$$

Verlängert man gleicherweise die Seilseiten des Polygons s' bis zur Auflagerlotrechten bei 10 und nennt die Schnittpunkte 0''' 1''' 2''' ... 9''', so ist beispielsweise:

$$0''' 4''' = -\frac{1}{l} \int_0^4 (l-x)^2 \frac{d^2z}{dx^2} dx \text{ und } 4''' 9''' = -\frac{1}{l} \int_5^l (l-x)^2 \frac{d^2z}{dx^2} dx.$$

Die Projektionen der Knotenpunkte des Gurtes auf die x -Achse nenne man 1⁰ 2⁰ usw. Die Lotrechten durch diese Punkte seien die Knotenpunktslotrechten. Die Gerade 0''' 9''' (die Schlußlinie des Seilpolygons s') schneidet diese Lotrechten in den Punkten 1_s 2_s ... 9_s. Verbindet man die Punkte 0'' bis 9'' mit dem Punkte 9''' und be-

stimmt die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden mit den entsprechenden Knotenpunktslotrechten $1''''$, $2''''$. . . $9''''$, so sind die Strecken beispielsweise:

$$4_s 4'''' = 0'' 4'' \cdot \frac{l-a}{l},$$

wenn a den Abstand des Punktes 4 von der linken Auflagerlotrechten bedeutet.

$$4_s 4'''' = -\frac{l-a}{l} \cdot \frac{1}{l} \int_0^a (l-x) x \frac{d^2 z}{dx^2} dx,$$

das ist aber der erste Summand des Klammerausdruckes K_a . Verbindet man den Punkt 0 mit den Punkten $0''''$ $1''''$ $2''''$ $9''''$ und bestimmt die Schnittpunkte dieser Verbindungsgraden mit den entsprechenden Knotenpunktslotrechten 1^a , 2^a bis 9^a , so sind die Strecken beispielsweise:

$$4^o 4^a = 9'''' 4'''' \frac{a}{l} = -\frac{a}{l} \frac{1}{l} \int_5^l (l-x)^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dx.$$

Dies aber ist der zweite Summand des Klammerausdruckes K_a . Das letzte Integral lautet für die Grenzen 5 bis l . Das versteht sich für die Grenzen 4 bis l ausschließlich der Kraft bei 4, da diese Kraft bereits in der Strecke $4_s 4''''$ berücksichtigt wurde, d. h. im ersten Summand von K_a . Man könnte ebensogut die Kraft bei 4 in den zweiten Summand hineinnehmen; daß dieses gleichgültig ist, erhellt aus folgendem.

Im ersten Summand beträgt der Einfluß der Kraft bei 4:

$$-\frac{l-a}{l} \cdot \frac{1}{l} \cdot (l-a) a \left(\frac{d^2 z}{dx^2} dx \right)_{x=a}.$$

Im zweiten Summand dagegen:

$$-\frac{a}{l} \cdot \frac{1}{l} \cdot (l-a)^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2} dx \right)_{x=a}.$$

Man sieht, daß beide Werte gleich sind. Es kann somit geschrieben werden:

$$4^o 4^a = -\frac{a}{l} \frac{1}{l} \int_a^l (l-x)^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dx.$$

Man muß bloß merken, daß die Kraft bei 4 nur einmal genommen wird, d. h. man nehme die Integrationsgrenzen entweder von 0 bis a und von $a + \varepsilon$ bis l oder von 0 bis $a - \varepsilon$ und von a bis l .

Trägt man die Strecken $1_s 1''''$, $2_s 2''''$ usw. über den Punkten $1_a, 2_a$ usw. auf, und zwar $1_s 1'''' = 1^a 1^e$, $2_s 2'''' = 2^a 2^e$ usw., so erhält man die Einflußlinie des Klammersausdruckes K_a ; denn es ist beispielsweise

$$4_o 4^e = 4_o 4^a + 4^a 4^e = -\frac{a}{l} \frac{1}{l} \int_a^l (l-x)^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dx - \frac{l-a}{l} \cdot \frac{1}{l} \int_0^a x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx = K_a.$$

Die Strecke $4^e 4 = 4_o 4 - 4_o 4^e = \zeta - K = K_b$. Somit stellt die Fläche zwischen der Einflußlinie für K_a und der Gurtlinie die Einflußfläche für K_b dar.

Hat man die Auflagerdrucke der Hauptträger berechnet, so können die Endquerrahmen weiterbehandelt werden. So wird z. B. der linke Rahmen mit den Kräften H_a , \mathfrak{N}_a und $-\mathfrak{N}_a$ belastet und berechnet. (Fig. 4.)

Aus der Beziehung, daß $V = -\frac{H}{t} \zeta$, ergibt sich, daß für gleichmäßige volle Belastung der Verspannung mit einer Windkraft w pro Längeneinheit des Gurtes — V beträgt:

$$V = -\int_0^l \frac{w dx}{t} \zeta = -\frac{w}{t} \int_0^l \zeta dx = -\frac{w}{t} F, ^1)$$

wobei F der vom gebogenen Gurte und seiner Sehne eingeschlossene Flächeninhalt ist. Bei symmetrischer Gestalt des Gurtes beträgt

$$\mathfrak{N}_a = \mathfrak{N}_b = -\frac{V}{2} = +\frac{w}{2t} F.$$

Bei unsymmetrischer Gestalt ist

$$\mathfrak{N}_a = \int_0^l \frac{\Delta H}{t} K_a = -\frac{w}{t} \int_0^l K_a d\xi = -\frac{w}{t} F_a$$

¹⁾ $V = F \frac{w}{t}$ auf anderem Wege abgeleitet, siehe F. Engesser, Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken (Springer, Berlin 1892) 2. A. β .

$$\text{und } \mathfrak{N}_b = -\frac{w}{t} \int_0^l K_b d\xi = -\frac{w}{t} F_b.$$

Die Größen F_a und F_b stellen die Flächeninhalte der Einflußflächen von K_a und K_b dar.

III. Einflußlinien der Biegemomente des Hauptträgers infolge der Zusatzkräfte ΔV .

§ 20. Für einen Punkt des Hauptträgers, dessen $x = b$ ist, beträgt das Biegemoment der Kräfte ΔV , hervorgerufen durch eine Kraft H , bei $x = a$

$$a < b \quad M_b = \mathfrak{N}_b (l - b) + \int_b^l dV (x - b)^1)$$

$$M_b = \frac{H}{t} (l - b) K_b + \int_b^l \frac{d^2z}{dx^2} dx H \frac{a}{lt} (l - x) (x - b)$$

$$a > b \quad M_b = \mathfrak{N}_a b + \int_0^b dV (b - x)$$

$$M_b = \frac{H}{t} b K_a + \int_0^b \frac{d^2z}{dx^2} dx \frac{H (l - a) x}{l t} (b - x)$$

$$20) \left\{ \begin{array}{l} M_b = \frac{H}{t} (l - b) \left[K_b + \frac{a}{l - b} \cdot \frac{1}{l} \int_b^l (l - x) (x - b) \frac{d^2z}{dx^2} dx \right] \quad a < b \\ M_b = \frac{H}{t} b \left[K_a + \frac{l - a}{b} \cdot \frac{1}{l} \int_0^b x (b - x) \frac{d^2z}{dx^2} dx \right] \dots \quad a > b. \end{array} \right.$$

Die Konstruktion der beiden Klammerausdrücke ist sehr einfach. Man trage die Einflußlinie für K_b , deren Ermittlung bekannt ist, von

¹⁾ Siehe Fußnote S. 10.

einer x -Achse nach unten ab. (Fig. 6.) Außerdem trage man das Spiegelbild der Seillinie s' auf. Die Eckpunkte der Seillinie, so wie sie in deren richtiger Lage gelten, übertrage man ins Spiegelbild: (1) (2) (3) (9). Nun verbinde man den Punkt O (Ursprung des Koordinatensystems) mit den Punkten (1) (2) und verlängere nach Bedarf diese Verbindungsgeraden bis zur gleichnamigen Knotenpunktslotrechten. Die Gerade 0 (4) hat beispielsweise die Gleichung

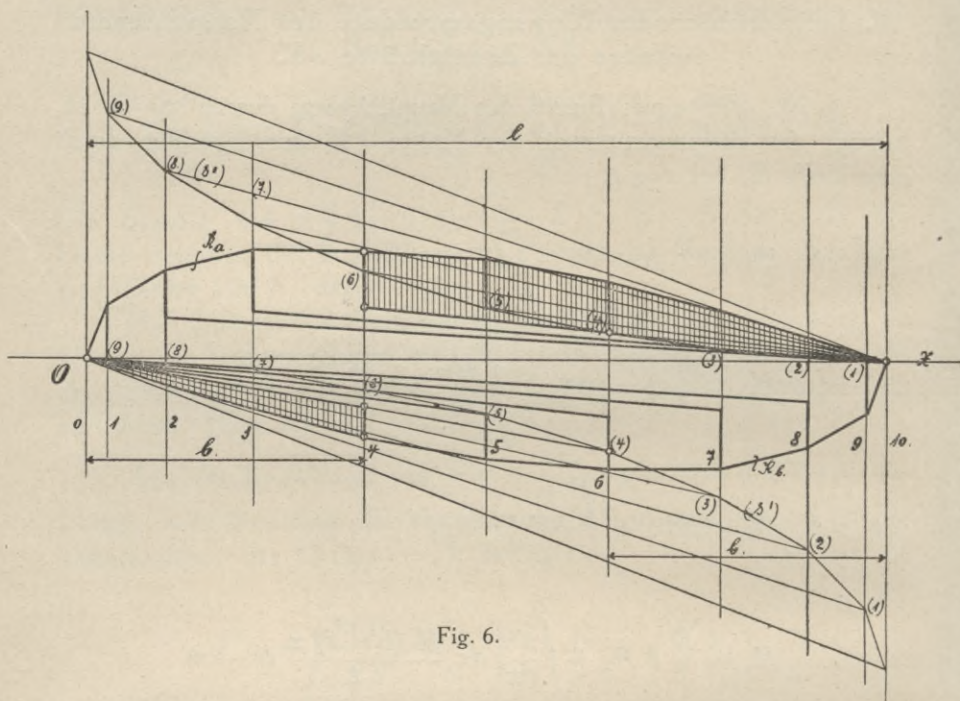


Fig. 6.

$$y = a \frac{(4) x}{l-b} = -a \frac{\frac{1}{l} \int_b^l (l-x)(x-b) \frac{d^2z}{dx^2} dx}{l-b}$$

$$= -\frac{a}{l-b} \cdot \frac{1}{l} \int_b^l (l-x)(x-b) \frac{d^2z}{dx^2} dx.$$

Somit bildet diese Gerade die Einflußlinie des zweiten Gliedes im Klammerausdruck für M_b für den Punkt $x=b$. Diese Gerade gilt bloß bis $a=b$. Die schraffierte Fläche in Fig. 6 zwischen der Linie K_b und der so gefundenen Geraden ist die Einflußfläche für den ganzen Klammerausdruck oder für das Moment M_b . Man er-

hält somit aus der einen Figur durch einmaliges Zeichnen der Linie K_b und Seillinie s' die Einflußflächen der Momente für alle Brückenpunkte, jedoch mit Gültigkeit von 0 bis b .

Für $a > b$ muß die K_a -Linie gezeichnet werden, am besten oberhalb derselben x -Achse. Es muß ferner das Spiegelbild einer Seillinie s'' aufgetragen werden, die zu den Kräften $x \frac{d^2z}{dx^2} dx$ mit der Polweite l gezeichnet wird. Die Ordinaten der Seillinie sind dann

$$-\frac{1}{l} \int_0^b x (b-x) \frac{d^2z}{dx^2} dz.$$

Die Eckpunkte der Seillinie im Spiegelbild (1) (2) (3) usw., verbunden mit dem Punkte der x -Achse für $x=l$, geben Geraden mit der Gleichung

$$y = (l-a) \frac{1}{l} \int_0^b x \frac{(b-x)}{b} \frac{d^2z}{dx^2} dx = \frac{l-a}{b} \frac{1}{l} \int_0^b x (b-x) \frac{d^2z}{dx^2} dx.$$

Dies ist aber der zweite Ausdruck des Klammerwertes für M_b , gültig von b bis l . Die schraffierte Fläche zwischen der Linie K_a und den letztthin genannten Geraden ist die Einflußfläche für den Klammerausdruck von M_b für $a > b$. Man kann somit aus dieser zweiten Figur die Einflußflächen von M_b für alle Brückenpunkte entnehmen, jedoch gültig von b bis l .

Man beachte, daß der Klammerausdruck einmal mit $\frac{H}{l} b$, das andere Mal mit $\frac{H}{l} (l-b)$ multipliziert werden muß, um das Moment selbst zu ergeben.

Bei symmetrischen Brückenträgern genügt das Auftragen der Einflußlinien für $a < b$ oder für $a > b$.

IV. Einflußlinien der Scherkräfte des Hauptträgers der Balkenbrücke infolge der Zusatzkräfte ΔV .

§ 21. Gesucht sei die Einflußlinie der Scherkräfte in einem Punkte, dessen Abstand von der linken Auflagerlotrechten, 0 , gleich b ist. Die Kraft H sei von 0 um a entfernt.

$$a < b \quad V_b = -\mathfrak{N}_b - \int_b^l dV = -\frac{H}{t} K_b - \int_b^l \frac{Ha(l-x)}{lt} \frac{d^2z}{dx^2} dx.$$

$$21a) \dots\dots V_b = -\frac{H}{t} \left[K_b + \frac{a}{l} \int_b^l (l-x) \frac{d^2z}{dx^2} dx \right] \quad \text{für } a < b.$$

Die Einflußlinie des Ausdruckes K_b ist bekannt. Sie sei zuerst nach oben von der x -Achse aufgetragen (Fig. 7). Der zweite Ausdruck in der Klammer stellt eine Gerade vor, die durch den Ursprung geht und auf der anderen Auflagerlotrechten die Strecke:

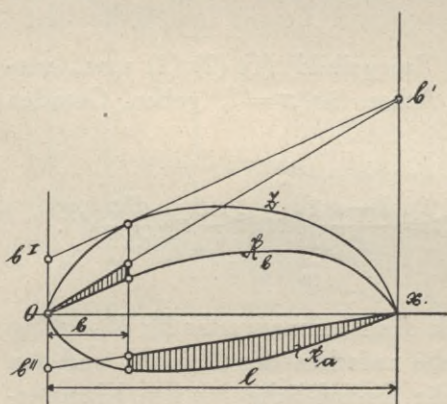


Fig. 7.

$$\int_b^l (l-x) \frac{d^2z}{dx^2} dx$$

abschneidet. Diese Strecke wurde bereits als Abschnitt der rechten Auflagerlotrechten erkannt zwischen der Tangente an den Gurt im Punkt $x=b$ und der Tangente im Endpunkte, der so wie der Anfangspunkt in der x -Achse gelegen sei.

Die Tangente an den Gurt im Punkte $x=b$ schneide die linke Auflagerlotrechte im Punkte b^I und die rechte im Punkte b' . Verbindet man b' mit dem Ursprung, so erhält man die Gerade, die den zweiten Ausdruck in der Klammer darstellt. Die zwischen der Linie K_b und dieser Geraden eingeschlossene Fläche ist die gesuchte Einflußfläche, gültig jedoch nur von o bis b .

$$\text{Für } a > b \text{ ist } V_b = \mathfrak{N}_a + \int_0^b dV = \frac{H}{t} K_a + \int_0^b \frac{H(l-a)x}{lt} \frac{d^2z}{dx^2} dx.$$

$$21b) \dots\dots V_b = \frac{H}{t} \left[K_a + \frac{l-a}{l} \int_0^b x \frac{d^2z}{dx^2} dx \right] \quad \text{für } a > b.$$

Die Einflußfläche von K_a ist bekannt. Sie werde zunächst nach unten von der x -Achse aufgetragen. (Fig. 7.) Macht man auf der linken Auflagerlotrechten $o b^{II} = -o b^I$ und verbindet den Punkt b^{II} mit dem Punkte $x=l$ der x -Achse, so erhält man eine Gerade, die den zweiten Ausdruck in der Klammer darstellt. Es ist nämlich

$$o b^I = - \int_0^b x \frac{d^2 z}{dx^2} dx. \quad \text{Der Raum zwischen der Linie } K_a \text{ und dieser}$$

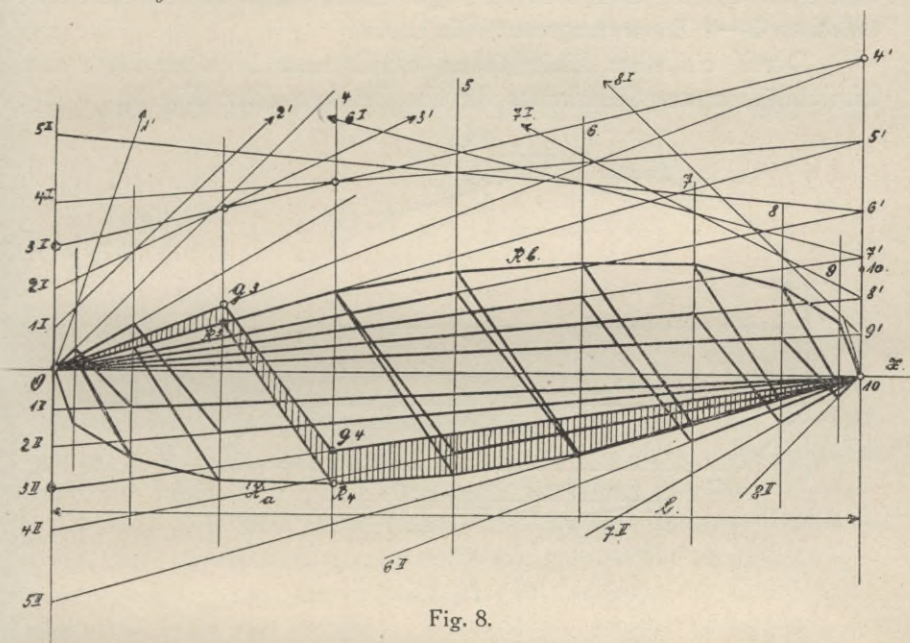


Fig. 8.

Geraden ist die gesuchte Einflußfläche. Sie gilt von b bis l .

Bei gebrochenem Gurt verfährt man ganz ähnlich (Fig. 8). Sucht man beispielsweise die Einflußlinie der Scherkräfte für das Feld 3—4, so verlängert man den Gurt 3—4 nach beiden Seiten bis zu den Auflagerlotrechten und erhält links den Punkt 3^I und rechts den Punkt $4'$.

$$3^I x = - \int_0^3 x \frac{d^2 z}{dx^2} dx, \quad 4' x = - \int_4^l (l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx.$$

Man trägt die Strecke $3^I x$ nach unten von der x -Achse ab $x 3^{II} = -3^I x$ und verbindet den Punkt 3^{II} mit dem rechten (10),

den Punkt 4' mit dem linken (0) Auflager bzw. mit deren Projektionen auf die x -Achse. Ferner zeichnet man die Linien K_b oberhalb, die Linie K_a unterhalb der x -Achse und zieht die Knotenpunktslotrechten bei 3 und 4. Dieselben schneiden die zwei Kurven und die zwei Geraden in den Punkten K_3, G_3 und K_4, G_4 . K_3, G_3 liegen oberhalb, K_4, G_4 unterhalb der x -Achse. Zieht man noch die Geraden $K_3 K_4$ und $G_3 G_4$, so ist die Fläche, die vom Linienzug $0-K_3-K_4-10-G_4-G_3-0$ umschlossen wird, die gesuchte Einflußfläche für das Feld 3—4. Der Beweis liegt darin, daß die Einflußfläche zwischen 3—4 linear umgrenzt sein muß.

Durch einfaches Linienziehen erhält man in einer Figur die Einflußflächen der Scherkräfte für alle Brückenfelder (Fig. 8).

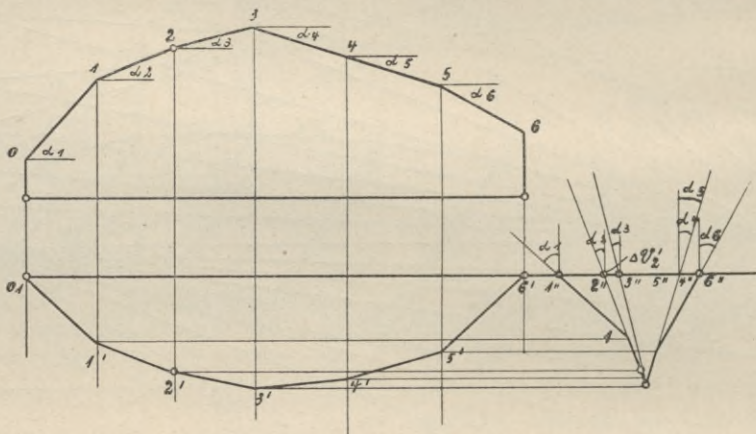


Fig. 9.

V. Direkte Bestimmung der Zusatzkräfte ΔV .

§ 22. Eine direkte Berechnung der Kräfte ΔV ohne Zuhilfenahme von Einflußlinien, wenn nur die Kräfte H gegeben sind, sei im folgenden angegeben. Man zeichne die Momentenlinie M_h mit waagrechter Schlußlinie für die horizontalen Kräfte H . Diese Linie gibt gleichzeitig den Verlauf der horizontalen Komponenten der Hauptgurtspannkkräfte $G' = G \cos \alpha = \frac{M_h}{t}$ an. α ist der Neigungswinkel der Gurtstäbe zum Horizont.

$\frac{d^2z}{dx^2} dx$ ist der Winkel, den die Tangenten zweier voneinander um dx entfernter Punkte miteinander einschließen. Bei gebrochenem

Gurt ist es der spitze Winkel zwischen zwei Seiten des Gurtpolygons.

Unterhalb der Gurtknotenpunkte 1, 2, 3 usw. (Fig. 9) liegen die Punkte des Momentenpolygons 1' 2' 3' usw. Man ziehe durch diese Punkte zur Schlußlinie parallele Geraden. Von einem Punkte der Schlußlinie beginnend, zeichne man zu den Gurtelementen bzw. Stäben rechtwinkelige Geraden, deren Schnittpunkte auf den oben erwähnten Parallelen liegen. Es entsteht eine Art von Seilpolygon. Verlängert man alle Seilseiten bis zur Schlußlinie, so erhält man die Punkte 1'' 2'' 3'' usw. Diese Punkte schneiden auf der Schlußlinie die Strecken $\sphericalangle V'$ ab. Es ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \sphericalangle V_2' = 2' 3' &= + \overline{2'x} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 - \overline{2'x} \operatorname{tg} \alpha_3 = + M_h^2 \sphericalangle \operatorname{tg} \alpha_2 \\ &= + M_h^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2} dx \right)_{x_2}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$22) \quad \sphericalangle V_2 = \frac{\sphericalangle V_2'}{t},$$

$$\text{da } \sphericalangle V_2 = \frac{M_h^2}{t} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} dx \right)_{x_2}.$$

Die Strecken 0'' 1'' 2'' ... stellen das um 90° gedrehte Kräftepolygon der Zusatzkräfte des Hauptträgers dar. Sind aber diese gegeben, so können die Momente und Scherkräfte, ferner das Fachwerk nach der Lehre vom ebenen Fachwerk berechnet werden.

Man wird sich hauptsächlich der letzteren Methode bedienen, wenn man an die Bestimmung der Zusatzspannungen im Hauptträger, hervorgerufen durch die Kräfte $\sphericalangle V$, geht, seltener der Einflußlinien. Statt mit Hilfe der letzteren festzustellen, welche Laststellung der Kräfte H für einen Stab die ungünstigste ist, wird man am einfachsten diese Kräfte gleichmäßig über den Träger verteilen und diese Laststellung für alle Stäbe zugrunde legen.

Für den Fall einer stetig verteilten Horizontalkraft, die auf die ganze Brückenlänge (nicht Gurtlänge) gleich pro Längeneinheit ist, mögen im Anhang Spezialfälle ausgerechnet werden.

VI. Anwendung auf Bogenträger.

§ 23. Bei Bogenträgern kann die Horizontalverspannung nicht mehr als ein gewöhnlicher, frei aufliegender Balken betrachtet werden, da auf den beiden Enden je zwei Horizontalkräfte in der Richtung der Brückenachse, entsprechend den zwei festen Lagern eines jeden

der zwei Hauptträger, auftreten. Sie ist vielmehr als ein beiderseitig eingespannter Träger zu behandeln. Bei diesem Träger überträgt sich die Kraft H , die im Abstände a vom linken Auflager in der Fläche des gebrochenen oder ebenen Verbandes wirkt, nicht mehr im Verhältnisse der Hebelarme $(l-a)$ und a auf die beiden Auflager, da an den Enden Einspannungsmomente M_l^h und M_r^h auftreten. Sind diese Momente bekannt und benennt man die Biegemomente im Träger ohne Endeinspannung mit \mathfrak{M}_h , dann ist

$$M_x^h = M_l^h + Ax - \sum_0^x H(x-a).$$

Der Wert von A bestimmt sich:

$$A = \frac{\sum_0^l H(l-a)}{l} - \frac{M_l^h}{l} - \frac{M_r^h}{l},$$

$$A = \mathfrak{X} - \frac{M_l^h + M_r^h}{l},$$

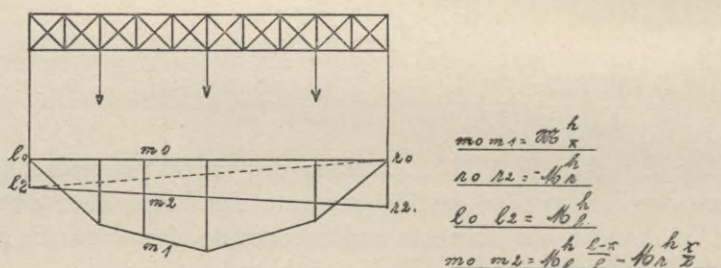


Fig. 11.

$$M_x^h = \mathfrak{X}x - \sum_0^x (x-a)H - \frac{M_l^h + M_r^h}{l}x + M_l^h = \mathfrak{M}_x^h + M_l^h \frac{l-x}{l} - M_r^h \frac{x}{l}$$

Fig. 11 zeigt den Verlauf der Momente. Es ist zum Verständnis der Fig. 11 nötig, zu beachten, daß M_r^h und M_l^h immer entgegengesetzt bezeichnet und M_l^h immer negativ ist.

Die Größe der Zusatzkräfte beträgt nach wie vor:

$$\Delta V = \frac{M_x^h}{t} \Delta \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad = \frac{M_x^h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx.$$

Dagegen gelten die vorangegangenen anderen Formeln und Verfahren nur für den einen Summanden des Momentes M_x^h , nämlich für \mathfrak{M}_x^h .

Will man die Formeln auch für den neuen Fall benutzen, so verwandle man die wirkliche Belastung der H -Kräfte in eine andere

durch Hinzufügung von vier Kräften an den vier Knotenpunkten der Endfelder der Verspannung. Die hinzukommenden Kräfte seien: $\pm \frac{M_l^h}{b_l}$ und $\pm \frac{M_r^h}{b_r}$. Der Balken kann jetzt als auf den Enden frei aufliegend betrachtet werden. Zu beachten ist jedoch, daß die Diagonalen und teilweise die Gurtungen der Endfelder unrichtige Werte erhalten, dagegen haben alle anderen Stäbe richtige Werte, da sowohl die Biegemomente als auch die Scherkräfte die richtigen sind. b_l und b_r sind die Feldweiten des linken bzw. des rechten Endfeldes.

Die Berechnung setzt die Kenntnis von M_l^h und M_r^h voraus. Die genaue Ermittlung der Einspannungsmomente ist ziemlich umständlich, da die Aufgabe ein- oder mehrfach statisch unbestimmt ist, je nach der Beschaffenheit der Hauptträger. Sie gehört deswegen nicht in den Rahmen dieses Aufsatzes.

Prof. F. Engesser bewies,¹⁾ daß es statthaft ist, anzunehmen, daß sich eine Kraft H im Verhältnisse der Hebelarme $(l-a)$ und a auf die beiden Auflager überträgt. Daraus folgt aber, daß $M_r^h = -M_l^h$ ist und es wäre hierdurch eine statische Unbestimmtheit behoben.

Dies angenommen, kann man leicht nachweisen, daß es einen Einfluß der Einspannungsmomente überhaupt nicht gibt, also $M_l^h = -M_r^h = 0$. Der Nachweis kann wie folgt geführt werden.

Das wagerechte Biegemoment besteht aus dem Teile $M_l^h \frac{l-x}{l} - M_r^h \frac{x}{l} = M_l^h$ (also konstant auf die ganze Brückenlänge) und aus dem Teile \mathfrak{W}_x^h . \mathfrak{W}_x^h erzeugt Gurtkräfte $\pm \mathfrak{W}_x^h \sec \alpha$, die dann die Zusatzkräfte $dV = \frac{\mathfrak{W}_x^h}{t} \frac{d^2z}{dx^2} dx$ hervorrufen. Diese Zusatzkräfte sind als Belastung des Bogenträgers anzusehen. Bleibt noch zu erwägen, welche Wirkung der Anteil M_l^h hat. Er erzeugt zunächst Gurtkräfte $\pm \frac{M_l^h}{t} \sec \alpha$ und Zusatzkräfte $\pm \frac{M_l^h}{t} \frac{d^2z}{dx^2} dx$. Bei der jetzt folgenden Berechnung des Bogens muß man die das Einspannungsmoment M_l^h vertretenden zwei Reaktionen der Horizontalverspannung $\frac{M_l^h}{t}$ in ihrem Wirkungssinne umkehren und als Belastung des Hauptträgers

¹⁾ Siehe Fr. Engesser, Zeitschrift für Bauwesen 1881, Über den Horizontalverband bei Bogenbrücken.

einsetzen. Der Bogen wird nun durch die Zusatzkräfte $+\frac{M_l^h}{t} \frac{d^2z}{dx^2} dx$, die in allen Knotenpunkten angreifen, in denen ein Bruch des Gurtes (bzw. Tangentenablenkung) vorhanden ist, und durch die zwei Kräfte $-\frac{M_l^h}{t}$, die an den Enden des gebrochenen Gurtes wirken, belastet.

Nun ist aber der Gurt nichts anderes als eine Seillinie der Kräfte $\frac{M_l^h}{t} \frac{d^2z}{dx^2} dx$ (da M_l^h konstant), deren Polweite eben $-\frac{M_l^h}{t}$ ist. Daraus folgt: erstens, daß sich die angreifenden Kräfte das Gleichgewicht halten, ohne Reaktionen an den Auflagern hervorzurufen; zweitens, daß außer den Gurtstäben keine anderen Stäbe des Bogenträgers beansprucht werden; und drittens, daß die Spannkkräfte des gebogenen Gurtes $-\frac{M_l^h}{t} \sec \alpha$ betragen. Diese Spannkkräfte sind aber entgegengesetzt gleich, wie die durch das Einspannungsmoment M_l^h hervorgerufenen Gurtspannkkräfte $+\frac{M_l^h}{t} \sec \alpha$.

Man sieht, daß das Einspannungsmoment M_l^h der Horizontalverspannung gar keinen Einfluß besitzt, man es somit gleich Null setzen kann, immer noch mit der Voraussetzung, deren Zulässigkeit von F. Engesser bewiesen wurde, daß sich H im Verhältnisse der Hebelarme $(l-a)$ und a auf die Auflager verteilt.

Die Berechnungsart ist somit bei Bogenträgern buchstäblich die gleiche, wie bei Balkenträgern. Natürlich gestaltet sich die Berechnung der Bogen selbst anders, für gewöhnlich schwieriger, als die des Balkens, aber die Bestimmung der Zusatzkräfte, der Einflußlinien dieser Kräfte, deren Scherkräfte, Momente usw. ist dieselbe.

Noch eine wichtige Folgerung läßt sich aus der obigen Beweisführung ziehen. Will man genauer rechnen und verzichtet auf die Annäherung, daß sich H im Verhältnisse der Hebelarme $(l-a)$ und a auf die Auflager verteilt, dann ist $M_l^h \mp M_r^h$, und dieser eine Grad der statischen Unbestimmtheit bleibt bestehen. Es ist aber nicht notwendig, ein M_l^h und ein M_r^h zu suchen, da man das kleinere von beiden auf beiden Seiten unterdrücken kann. Die Differenz $M_l^h - M_r^h$ (eine arithmetische Differenz) wird gleichgesetzt $M_l^{h'}$ und ist die einzige statisch unbestimmte Größe.

$M_i^{h'}$ kommt in zwei Kräften $\pm \frac{M_i^{h'}}{t}$ zum Ausdruck, von denen je eine in jedem der Hauptträger angreift. Außerdem wirken in den Endquerrahmen die Kräfte $\pm \frac{M_i^{h'}}{l}$, die aufzufassen sind als die Unterschiede zwischen den wirklichen Reaktionen, die die Kraft H hervorruft, und den Reaktionen $H \frac{l-a}{l}$ und $H \frac{a}{l}$, die die Kraft H nach dem Hebelgesetz erzeugen würde.

Die Belastung bei Annahme der letzteren Reaktionen, die ja einen Gleichgewichtszustand darstellt, sei der statisch bestimmte Grundfall ${}_0M_h^{i'} = 0$. Die Stabkräfte haben für diesen Fall die Werte S_0 . Für den Fall ${}_1M_h^{i'} = -1$, seien S' die Stabkräfte, deren Ausrechnungsgang früher angedeutet wurde. Es ist dann:

$$M_i^{h'} = \frac{\sum S_0 S' \frac{s}{Ef}}{\sum S'^2 \frac{s}{Ef}}$$

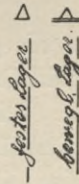


Fig. 12.

Die Summen beziehen sich auf alle Stäbe der Brücke. Ist $M_i^{h'}$ bekannt, so sind die Spannkkräfte der einzelnen Stäbe:

$$S = S_0 - M_i^{h'} \cdot S'$$

Es wird für gewöhnlich statthaft sein, das Moment $M_i^{h'}$ ganz zu unterdrücken. Dieses Verfahren ist auch im allgemeinen üblich. Seine Berechtigung hat es in dem Umstande, daß die wagerecht wirkenden Kräfte ja doch nicht genau bekannt sind und man sich infolgedessen die umständliche genaue Berechnung der von ihnen hervorgerufenen Stabkräfte sparen kann.

Es gibt übrigens ein Mittel, um das $M_i^{h'}$ ganz zu vermeiden, ohne den statischen Charakter der Hauptträger (Dreigelenkbogen, Zweigelenkbogen usw.) zu ändern. Dieses Mittel ist zwar nicht üblich, und man dürfte bloß dann zu ihm greifen, wenn man um jeden Preis eine statisch bestimmt gelagerte Brücke haben möchte. Es beruht darin, daß man die wagerechten Lagerungsstäbe beider Hauptträger paarweise aus einem Lagerpunkt a ausgehen läßt (Fig. 12). Da diese Lagerungsart noch nicht ausgeführt ist, kann man nicht sagen,

ob sie nicht noch andere Vorteile birgt. Die festen Lager des Bogens werden aufgelöst in je ein in einer wagerechten Ebene bewegliches Auflager und werden dann gegen den Punkt a abgestützt. Den Punkt a kann man sich in eines der beiden Lager verlegen, so daß an jedem Brückenende ein festes Lager (z. B. für den vorderen Bogenträger) und ein im Horizont bewegliches Lager (für den hinteren Bogen) vorgesehen ist. Die Kräfte, winkelrecht zur Brückenachse, werden vorteilhaft auch im Punkte a übertragen.

Bemerkung.

Die im obigen Aufsatz dargestellte Theorie der Zusatzkräfte wird im Laufe dieser Arbeit noch bei mehreren Gelegenheiten zur Anwendung gelangen.

VII. Balkonträger.

§ 24. Besondere Bedeutung erhalten die Ausführungen dieses Aufsatzes bei fachwerkartigen Balkonträgern, die aus einem oder zwei gekrümmten Hauptträgern und zwei horizontalen Verspannungen bestehen.

Man betrachte die gekrümmten Hauptträger als Windverbände einer Brücke; die wirkliche Belastung des Balkonträgers spielt die Rolle der H -Kräfte. Die horizontalen, ebenen Verspannungen erhalten jetzt die Zusatzkräfte dV , welche hier die Hauptkräfte bilden. Die Berechnungsweise eines solchen Balkonträgers bietet demnach nach dem oben Gesagten nichts Neues mehr. Ein Beispiel zeigt im Anhang die Anwendung obiger Ausführungen.¹⁾

Die Belastung des Balkonträgers wird gewöhnlich sein:

1. eine stetige zur Bogenlänge proportionale Belastung, herrührend vom Eigengewicht des gekrümmten Trägers (des eigentlichen Balkonträgers) und von der etwaigen Übermauerung, (Spezialfall 4 des Anhanges);
2. eine stetige zum Flächeninhalt der wagerechten Träger bzw. zur Balkentiefe proportionale Belastung, herrührend vom Eigengewicht der wagerechten Verspannungen und von der Belastung des Balkons (Spezialfall 5 des Anhanges);
3. etwaige Einzellasten.

¹⁾ Die hier weggelassene Fig. 13 erscheint ebenfalls im Anhang.

4. Einfluß der wagerechten Kräfte der x -Richtung (Längskräfte der Brücke).

a) Die Horizontalverspannung ist eben. (Fig. 1, Fig. 14—23.)

§ 25. a) Berechnungsvorgang. Bei Brücken, deren Lagerpunkt a , also der Punkt, an dem die Längskräfte der Brücke auf die Widerlager übergehen, sich in der Gurthöhe der Brücke befindet, ist der Einfluß der Längskräfte ein geringer. Anders bei Brücken, deren Enden mit hohen beinartigen Stützen versehen sind, bei denen also der Punkt „ a “ sich tief unter den Angriffsorten der Längskräfte befindet, mit anderen Worten, wenn h_a groß ist. Die Hauptträger erleiden in diesem Falle unter Umständen sehr hohe Beanspruchungen.

Liegt der Punkt a in der Ebene des Hauptträgers, an dem die Kräfte der x -Richtung auftreten, so ist der Fall höchst einfach (Fig. 14). Die Auflagerkräfte betragen:

$$R_a = -\Sigma H$$

$$R_1 = -R_3 = -\Sigma H \frac{h_a + z}{l}$$

Daß die Spannungen ziemlich erhebliche werden, erkennt man schon daraus, daß das Moment der Kraft R_a im Schnitte tt recht bedeutend werden kann.

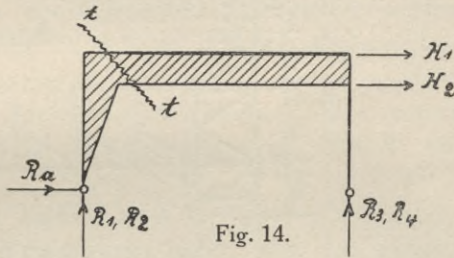


Fig. 14.

Im allgemeinen Falle, also wenn „ a “ sich nicht in der Ebene des Hauptträgers befindet, ist die Berechnung viel verwickelter. Dies trifft z. B. bei allen fahrbaren Brücken ein, da die die Längskräfte aufnehmenden Laufräder immer außerhalb der Hauptträger liegen.

Zur Lösung sei folgendes allgemeine Verfahren angegeben.

Um die Brücke zu berechnen, „reduziere man zunächst alle Längskräfte auf den Punkt o der Brücke“, welcher Punkt, wie bisher, der Ursprung des Koordinatensystemes sei. Unter der Reduktion wollen wir die Übertragung der Kräfte in den Punkt o verstehen, bei gleichzeitiger Hinzufügung von Momenten, die durch die verspannten Wände auf die Auflager R_1 bis R_4 und R_l , R_r übertragen werden. Bei diesem Prozeß werden selbstredend die Tragwände beansprucht.

Im einzelnen ist folgendes hervorzuheben. Die Längskräfte H , die gewöhnlich vom Längswind auf die Brücke, ferner von den Fahr- und Bremswiderständen herrühren, treten an den verschiedenen Stellen der Brücke auf. Durch Zwischenkonstruktionen werden sie auf die

Hauptträger übertragen. Nun berechne man die Hauptträger für diese Teillängskräfte, wobei als Lagerlinien (Lagerstäbe) die Schnittgeraden der Hauptträger mit den zwei Endquerrahmen und der Horizontalverspannung zu nehmen sind. Die Kräfte, die dadurch auf die Endrahmen übertragen werden (die Reaktionen der Haupt-

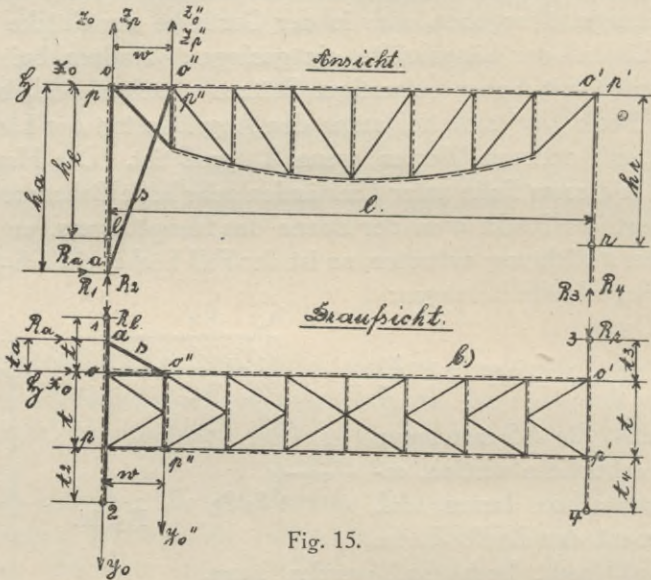
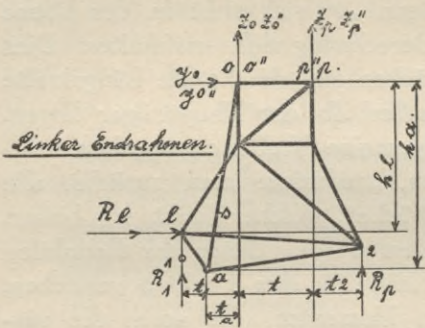


Fig. 15.



träger mit umgekehrten Richtungssinne), belasten diese Rahmen und erzeugen in deren Ebenen liegende vertikale Auflagerdrucke. Die dritte Reaktion des Hauptträgers, die in der Längsrichtung der Brücke an der horizontalen Verspannung angreift, wird nun als Angriffskraft der Verspannung betrachtet, wobei als Lagerlinien (Lagerstäbe)

die durch o gelegte x -Achse, sowie die zur y -Achse parallelen Schnittgeraden der Verspannung mit den Endquerrahmen anzusehen sind. Die zwei zur y -Achse parallelen Reaktionen belasten, in ihrem Wirkungssinne umgekehrt, die Endquerrahmen und erzeugen lotrechte und wagerechte Auflagerreaktionen. Die noch in der x -Achse wirkende Kraft ist gleich der Summe aller Längskräfte und ist die

einzigste, die noch zu berücksichtigen ist. $\mathfrak{H} = \Sigma H$. Durch diese Vorgänge wurden alle Längskräfte auf den Punkt o reduziert.

Damit ist der erste Teil der Berechnung abgeschlossen. Durch die Reduktion aller Lasten auf den Punkt o entstehen folgende Auflagerdrucke:

Sind die Koordinaten der Längskräfte gleich z und y , so ist:

$$23) \left\{ \begin{array}{l} R_r' = -R_l' = \Sigma H \frac{y}{l}; \quad R_a' = 0; \\ R_1' = \Sigma H \frac{-z(t+t_2-y) - y h_l}{l(t+t_1+t_2)}; \quad R_2' = \Sigma H \frac{-z(t_1+y) + y h_l}{l(t+t_1+t_2)} \\ R_3' = \Sigma H \frac{z(t+t_4-y) + y h_r}{l(t+t_3+t_4)}; \quad R_4' = \Sigma H \frac{+z(t_3+y) - y h}{l(t+t_3+t_4)} \end{array} \right.$$

Zu bemerken ist noch, daß bei einer Reduktion der H -Kräfte auf den Punkt „ o “ zwei Arten von Momenten hinzugefügt werden mußten: erstens Momente $H \cdot z$, um die y -Achse drehend, und zweitens Momente $H y$, um die z -Achse drehend. Die ersten Glieder im Zähler von R_1' , R_2' , R_3' und R_4' geben den Einfluß der Momente $H \cdot z$ wieder, während die zwei Glieder und die Auflagerdrucke R_r' und R_l' von den Momenten $H \cdot y$ herrühren.

Zu berechnen ist nun der Einfluß einer Kraft $\mathfrak{H} = \Sigma H$, die im Punkte o in der x -Richtung auf die Brücke wirkt, was den zweiten Teil der Aufgabe bildet.

Zur Bestimmung der durch diese Kraft entstehenden sieben Auflagerdrucke stehen uns sechs Gleichungen zu Gebote. Es sind dies die sechs allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen. Aus diesen Gleichungen lassen sich ohne weiteres berechnen:

$$R_a'' = -\mathfrak{H} \quad R_r'' = -R_l'' = +\mathfrak{H} \frac{t_a}{l}$$

Über die lotrechten Auflagerdrucke R_1'' , R_2'' , R_3'' und R_4'' ist bloß bekannt, daß

$$\begin{aligned} R_1'' + R_2'' + R_3'' + R_4'' &= 0, \quad R_1'' + R_2'' = -(R_3'' + R_4'') \\ &= -\mathfrak{H} \frac{h_a}{l}, \quad M_o + M_o' = 0, \end{aligned}$$

wobei $M_o = R_1'' t_1 - R_2'' (t + t_2) - R_l'' h_l$ und

$$M_o' = R_3'' t_3 - R_4'' (t + t_4) - R_r'' h_r.$$

Um die lotrechten Auflagerdrucke zu berechnen, muß auf die Beschaffenheit der Brücke selbst zurückgegriffen werden.

Bevor dieses geschieht, wollen wir einen Satz festlegen, der die Berechnung der Auflagerdrucke und der Stabkräfte erleichtert,

die sonst nur mit einigen Schwierigkeiten unter Zuhilfenahme des Stabvertauschungsverfahrens von Henneberg und Müller-Breslau möglich wäre. Der Satz lautet:

„Wird bei einem statisch bestimmten (ebenen oder räumlichen) Fachwerke ein beliebiger Teil desselben abgetrennt gedacht, wobei es gleichgültig ist, ob dieser Teil, für sich betrachtet, stabil ist oder nicht, und wird dieses Bruchstück des Fachwerkes durch hinzugefügte Lagerstäbe genügend gestützt und berechnet, so ergeben sich Stabkräfte, die wir S_0 und Reaktionen der Lagerstäbe, die wir R_0 nennen wollen. Dabei können von den auf das Bruchstück entfallenden Lasten P alle oder auch nur einige ausgesuchte P_0 als wirkend angenommen werden. Kehrt man nun die Reaktionen um und belastet das ganze Fachwerk mit den so erhaltenen Kräften, sowie mit den übrigen Lasten P' ($P' \triangleq P \triangleq P_0$), so ergeben sich Stabkräfte, die wir S' nennen wollen. Die wirklichen Stabkräfte sind $S = S' + S_0$.“

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf die Eigenschaft des statisch bestimmten Fachwerkes, daß die Werte der Stabkräfte eindeutig sind. Ein Gleichgewichtszustand in allen Knotenpunkten des Fachwerkes, der auf irgendwelchem Wege bestimmt wird, ist zugleich der einzige und richtige. Sowohl beim Bruchstück des Fachwerkes (Kräfte S_0), als auch beim ganzen Fachwerk (Kräfte S') wurde ein Gleichgewichtszustand in allen Knotenpunkten erzielt. Die Addition der Stabkräfte ($S = S_0 + S'$) ist eine Überlagerung zweier Gleichgewichtszustände, die auch ein Gleichgewicht ergibt. Man bemerke, daß etwa zugefügte Reaktionen (bei den Kräften S_0) später umgekehrt wurden, und daß diese Kräfte bei der Überlagerung der Zustände herausfallen.

Dieser Satz gilt lediglich für statisch bestimmte Fachwerke. Bei einem statisch unbestimmten nur dann, wenn das Bruchstück von der statisch unbestimmten Größe unabhängige Stabkräfte hat, also für den Zustand $X' = -1$, $P = 0$, keine Beanspruchung erleidet. Hierbei ist X die statisch unbestimmte Größe (Stabkraft, Moment, Lagerreaktion usw.) und P sind die angreifenden Kräfte.¹⁾

¹⁾ Dieser Satz bildet auch ohne weiteres den Beweis, daß die übliche und in den vorigen Ausführungen angewandte Berechnungsmethode der Brückenfachwerke, nach welcher jede Fachwerkswand für sich betrachtet und berechnet wird, richtig ist. Wirkt z. B. in der Ebene einer Fachwerkstragwand, beispielsweise in der oberen Verspannung eine wagerechte Kraft, so trenne man diese Tragwand vom ganzen Brückenfachwerk. Man erhält ein ebenes Fachwerk. Zu einem räumlichen wird dieses

In Fig. 15 ist die feste Stütze einer Brücke stark ausgezogen. Sie sei das vom Rest abgetrennt gedachte Bruchstück des Fachwerkes. Die nötige Lagerung dieses Teiles sei folgendermaßen gewählt: In den Punkten o , o'' , p und p'' greifen lotrechte Reaktionen an, ferner sei im Punkte o eine wagerechte zur x -Achse parallele Reaktion und schließlich in den Punkten o und o'' je eine wagerechte zur y -Achse parallele Lagerkraft vorhanden.

Um nun die lotrechten Auflagerdrücke zu berechnen, beachte man die alleinige Wirkung der Kraft R_a auf die feste Stütze. R_a kann durch das Verbindungsglied zwischen a und dem hinteren Hauptträger auf die vier Punkte o , p , o'' und p'' übertragen werden und erzeugt hier sieben Reaktionen, die vorhin erwähnt wurden. Die in ihrem Wirkungssinne umgekehrten Reaktionen, die nach dem oben ausgesprochenen Grundsätze das ganze Fachwerk belasten, seien

im Punkte o : X_o Y_o Z_o im Punkte o'' : Y_o'' Z_o''
 „ „ p : Z_p und „ „ p'' : Z_p'' .

Die Größe der Kräfte Z richtet sich nach der Bauart der festen Stütze. Wegen der Mannigfaltigkeit, mit der diese feste Stütze aus-

Fachwerk, wenn man in einem jeden Knotenpunkte einen Lagerstab anschließt, der nicht in der Ebene des Fachwerkes liegt. Nun berechne man dieses Fachwerk auf die in dessen Ebene wirkenden Kräfte. Alle Lagerstäbe werden spannungslos, und das System der Stabkräfte des ebenen Fachwerkes ist gleichzeitig das Spannkraftesystem des räumlichen Fachwerkes, da in jedem Knotenpunkt Gleichgewicht herrscht. Die Reaktionen, die der angreifenden Kraft das Gleichgewicht halten, liegen in den Ebenen der Endquerrahmen und eventuell in den Ebenen der vertikalen Tragwände. Nun stellt man die Verbindung des abgetrennten Teiles mit dem Brückenfachwerk her, kehre die Reaktionen um und lasse nun die das Teilfachwerk belastenden Kräfte weg. Man sieht daraus, daß dieser Weg derselbe ist wie der bereits bei der Berechnung eingeschlagene, dessen Berechtigung erst jetzt erwiesen ist.

Nun berechne man die Querrahmen. Man trenne zunächst den linken Rahmen vom Brückenfachwerk los, stütze einen jeden Knotenpunkt durch einen Lagerstab, der nicht in der Rahmenebene liegt, und berechne den Rahmen. Die Angriffskraft ist die Reaktion vom ersten Teil dieser Berechnung. Die Lagerstäbe sind spannungslos. Der Rahmen verhält sich genau wie ein ebenes Fachwerk. Die Reaktionen greifen in den Punkten l , 1 , und 2 an. Dann wird die Verbindung hergestellt. Die Reaktionen brauchen nun nicht mehr umgekehrt zu werden. Denselben Weg schlägt man dann beim rechten Endquerrahmen und beim Vertikalträger ein.

Dieser Zusatz verdankt seine Entstehung dem Herrn Prof. A. Hertwig von der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen, der mir die Anregung gab, einen Beweis zu geben, daß die Auflösung des Brückenfachwerkes in einzelne Tragwände, die als ebene Fachwerke behandelt werden, statthaft ist. Es sei mir gestattet, dem Herrn Prof. Hertwig an dieser Stelle für diese Anregung zu danken.

gebildet werden kann, ist es schlechthin unmöglich, einen allgemeinen Ausdruck für diese Kräfte zu geben.

Ist die Bauart der festen Stütze wie in Fig. 15, wo eine direkte ebene Verbindung zwischen a und den Punkten o und o'' angenommen wurde, dann sind: $Z_o = -Z_{o''} = -R_a \frac{h_a}{w}$; $Z_p = -Z_{p''} = 0$. Bei einer anderen Bauart der Brücke, z. B. nach Fig. 1, kommt zu Z noch ein Wert $+R_a \cdot \alpha$ hinzu. Durch dieses Glied, dessen Bestimmung später gezeigt wird, findet die Mannigfaltigkeit der festen Stützen Berücksichtigung.

Über die Ermittlung von α siehe später im § 26.

Es betragen:

$$\begin{array}{llll} \text{Im Punkte } o: & X_o = +R_a & Y_o = -R_a \frac{t_a}{w} & Z_o = -R_a \frac{h_a}{w} - R_a \cdot \alpha \\ \text{„ „ } o'': & & Y_{o''} = +R_a \frac{t_a}{w} & Z_{o''} = +R_a \frac{h_a}{w} + R_a \cdot \alpha \\ \text{„ „ } p: & & & Z_p = +R_a \cdot \alpha \\ \text{„ „ } p'': & & & Z_{p''} = -R_a \cdot \alpha \end{array}$$

Nun betrachten wir die Wirkung dieser sieben Kräfte und der früher nicht berücksichtigten Kraft \mathfrak{H} . Man beachte, daß $R_a = -\mathfrak{H}$.

$X_o = +R_a = -\mathfrak{H}$ hebt sich auf mit der Kraft $+\mathfrak{H}$, die wie X_o im Punkte o angreift.

Y_o und $Y_{o''}$ bilden im Kräftepaar, dessen Moment

$$+R_a \frac{t_a}{w} \cdot w = -\mathfrak{H} t_a$$

in den Punkten o und o' der Horizontalverspannung Reaktionen von der Größe $\pm \mathfrak{H} \frac{t_a}{l}$ hervorruft. Diese, durch die Endquerrahmen übertragen, erzeugen in den Lagerpunkten l und r die schon früher bekannten Reaktionen

$$R_l'' = -R_r'' = -\mathfrak{H} \frac{t_a}{l}$$

und in den Punkten 1, 2, 3 und 4 die Teilreaktionen:

$$R_{1a}'' = -R_{2a}'' = -\mathfrak{H} \frac{t_a}{l} \frac{h_l}{t + t_1 + t_2},$$

$$R_{3a}'' = -R_{4a}'' = +\mathfrak{H} \frac{t_a}{l} \frac{h_r}{t + t_3 + t_4}.$$

Die Kräfte Z_o und $Z_{o''}$ ergeben ein Kräftepaar in der Ebene des hinteren Hauptträgers, dessen Moment die Größe hat: $-\mathfrak{H} h_a - \mathfrak{H} \alpha w$.

Dieses Moment, durch den Hauptträger auf die Punkte o und o' übertragen, bildet hier die Kräfte $\pm \mathfrak{H} \left(\frac{h_a}{l} + \frac{\alpha w}{l} \right)$.

Ebenso bildet das Kräftepaar Z_p, Z_p'' in den Punkten p und p' die Kräfte: $\mp \mathfrak{H} \frac{\alpha w}{l}$.

Faßt man die Kräfte, die im linken und die im rechten Endquerrahmen wirken, paarweise zusammen, so erhält man:

im Punkte o , eine lotrechte Einzelkraft: $+\mathfrak{H} \frac{h_a}{l}$,

und das Moment: $\frac{\mathfrak{H} \alpha t w}{l} = -M_o$,

im Punkte o' , eine lotrechte Einzelkraft: $-\mathfrak{H} \frac{h_a}{l}$,

und das Moment: $-\mathfrak{H} \frac{\alpha t w}{l} = -M_{o'}$.

Diese Kräfte in den Endquerrahmen verursachen die Teilreaktionen:

$$R_{1b}'' = -\mathfrak{H} \frac{h_a(t+t_2) + \alpha t w}{l(t+t_1+t_2)}; \quad R_{2b}'' = -\mathfrak{H} \frac{h_a t_1 - \alpha t w}{l(t+t_1+t_2)}$$

$$R_{3b}'' = +\mathfrak{H} \frac{h_a(t+t_4) + \alpha t w}{l(t+t_3+t_4)}; \quad R_{4b}'' = +\mathfrak{H} \frac{h_a t_3 - \alpha t w}{l(t+t_3+t_4)}$$

Nun kann man alle Auflagerkräfte, hervorgerufen durch \mathfrak{H} , hinschreiben

$$24) \left\{ \begin{array}{l} R_a'' = -\mathfrak{H} \qquad R_l'' = -R_r'' = -\mathfrak{H} \frac{t_a}{l} \\ R_1'' = R_{1a}'' + R_{1b}'' = \mathfrak{H} \frac{-t_a h_l - (t+t_2) h_a - \alpha t w}{l(t+t_1+t_2)} \\ R_2'' = \qquad \qquad \qquad = \mathfrak{H} \frac{+t_a h_l - t_1 h_a + \alpha t w}{l(t+t_1+t_2)} \\ R_3'' = \qquad \qquad \qquad = \mathfrak{H} \frac{+t_a h_r + (t+t_4) h_a + \alpha t w}{l(t+t_3+t_4)} \\ R_4'' = \qquad \qquad \qquad = \mathfrak{H} \frac{-t_a h_r + t_3 h_a - \alpha t w}{l(t+t_3+t_4)} \end{array} \right.$$

Hiermit wäre der zweite Teil der Aufgabe, nämlich die Überführung der auf den Punkt o reduzierten Kraft $\mathfrak{H} = +\Sigma H$ auf die sieben Auflagerpunkte, erledigt. Die Ermittlung der Stabkräfte ist jetzt, da alle Auflagerdrucke bekannt sind, höchst einfach, wurde im übrigen schon angedeutet.

Die Auflagerdrucke R' und R'' zusammengefaßt, ergeben:

$$25) \left\{ \begin{array}{l} R_a = -\Sigma H; \quad R_l = -R_r = -\frac{1}{l} \Sigma H (y + t_a) \\ R_1 = \frac{1}{l(t+t_1+t_2)} \left\{ \begin{array}{l} [-t_a h_l - (t+t_2) h_a - \alpha w t] \cdot \Sigma H \\ + \Sigma [-z(t+t_2-y) - y h_l] H \end{array} \right\} \\ R_2 = \frac{1}{l(t+t_1+t_2)} \left\{ \begin{array}{l} [+t_a h_l - t_1 h_a + \alpha w t] \cdot \Sigma H \\ + \Sigma [-z(t_1+y) + y h_l] H \end{array} \right\} \\ R_3 = \frac{1}{l(t+t_3+t_4)} \left\{ \begin{array}{l} [+t_a h_r + (t+t_4) h_a + \alpha w t] \cdot \Sigma H \\ + \Sigma [+z(t+t_4-y) + y h_r] H \end{array} \right\} \\ R_4 = \frac{1}{l(t+t_3+t_4)} \left\{ \begin{array}{l} [-t_a h_r + t_3 h_a - \alpha w t] \Sigma H + \Sigma [z(t_3+y) \\ - y h_r] H \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

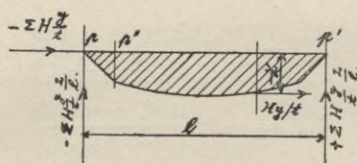


Fig. 16.

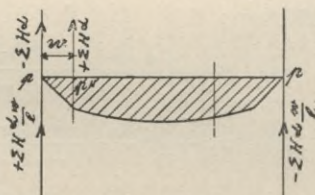


Fig. 17.

b) Beanspruchung der einzelnen Tragwände.

a) Vorderer Hauptträger. Bei der Reduktion der Kräfte H auf den Punkt o wird der vordere Hauptträger nach dem Schema Fig. 16 beansprucht. Die äußeren Kräfte sind allgemein $+H \frac{y}{t}$, die Lagerkräfte: lotrecht: $\mp \Sigma H \frac{y}{t} \frac{z}{l}$ am linken bzw. rechten Auflager, wagerecht: $-\Sigma H \frac{y}{t}$ im Punkte p .

Beim zweiten Teil der Aufgabe entsteht vorstehendes Belastungsbild dieses Hauptträgers (Fig. 17).

In den Punkten p und p'' wirken zwei lotrechte Kräfte von der Größe $\mp \Sigma H \alpha$, denen zwei Reaktionen in den Punkten p und p' von der Größe $\pm \Sigma H \frac{\alpha w}{l}$ das Gleichgewicht halten.

b) Hinterer Hauptträger. Beim ersten Teil der Aufgabe entsteht das Belastungsbild nach Fig. 18.

Angreifende Kräfte: allgemein $+ H \frac{t-y}{t}$ (wagrecht).

Reaktionen: im Punkte o : $-\Sigma H \frac{t-y}{t}$ (wagrecht),

im linken bzw. rechten Endquerrahmen: $\mp \Sigma H \frac{t-y}{t} \cdot \frac{z}{l}$
(lotrecht).

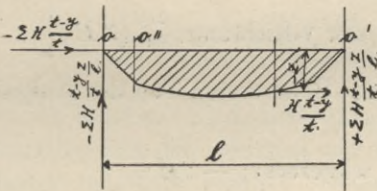


Fig. 18.

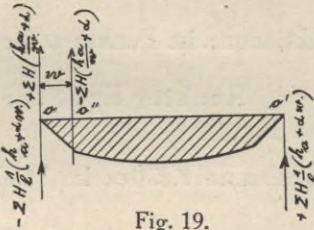


Fig. 19.

Beim zweiten Teil der Aufgabe entsteht das Belastungsschema nach Fig. 19.

Angreifende Kräfte: im Punkte o und o' die lotrechten Kräfte:

$$\pm (\Sigma H) \left(\frac{h_a}{w} + \alpha \right).$$

Reaktionen: im linken bzw. rechten Endquerrahmen die lotrechten Kräfte:

$$\mp (\Sigma H) \frac{1}{l} [h_a + \alpha w].$$

c) Horizontale Ver-
spannung. Beim ersten Teil
der Aufgabe entsteht das Be-
lastungsbild nach Fig. 20.

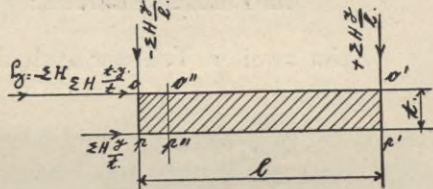


Fig. 20.

Angreifende Kräfte: im Punkte o : $+\Sigma H \frac{t-y}{t}$ in x -Richtung,

im Punkte p : $+\Sigma H \frac{y}{t}$ in x -Richtung.

Reaktionen: im Punkte o : $-\mathfrak{H} = -\Sigma H$ in x -Richtung,

in den Endquerrahmen parallel zur y -Richtung links bzw.

rechts: $\mp \Sigma H \frac{y}{l}$.

Angreifende Kräfte: im Punkte o' : wagerecht: $-(\Sigma H) \frac{t_a}{l}$,
 lotrecht: $-(\Sigma H) \frac{1}{l} [h_a + \alpha w]$,
 im Punkte p' : lotrecht: $+(\Sigma H) \frac{\alpha w}{l}$.

Reaktionen: im Punkte r : wagerecht: $+(\Sigma H) \frac{t_a}{l}$,
 im Punkte 3: lotrecht: $+(\Sigma H) \frac{[t_a h_r + (t+t_4) h_a + t w \alpha]}{l(t_3 + t_4 + t)}$,
 im Punkte 4: lotrecht: $(\Sigma H) \frac{-t_a h_r + t_3 h_a - t w \alpha}{l(t + t_3 + t_4)}$.

e) Linker Endquerrahmen. Dieser Endquerrahmen wird wesentlich mit den gleichen nur entgegengesetzt gerichteten Kräften belastet, wie der rechte. Außerdem aber erhält er eine Belastung aus seiner Eigenschaft als Teil der festen Stütze. Diese Belastung, sowie die Beanspruchung des Verbindungsgliedes zwischen dem Punkte „a“ und dem hinteren Hauptträger bezieht sich bloß auf den zweiten Teil der Aufgabe, ist lokal beschränkt, im übrigen aber in allgemeiner Form schwer festlegbar.

Da die Auflagerkräfte bekannt sind, ist die Berechnung dieses räumlichen Fachwerkes sehr einfach. Der Gang der Berechnung ist auf Seite 45 bis 47 angedeutet.

Die Gleichungen der Einflußflächen für die Auflagerdrucke sind in den Gleichungen 25) enthalten.

c) Bestimmung des Wertes α . (Fig. 24, S. 52.)

§ 26. Um α zu bestimmen, wird im Punkte „a“ eine zur x -Achse parallele Kraft „+Eins“ angenommen, die durch die feste Stütze geleitet, in den Punkten o und o' , p und p'' die sieben Reaktionen $Z_o, Z_o'', Z_p, Z_p'', X_o, Y_o, Y_o''$ hervorruft. α ist gleich der Reaktion $-Z_p = +Z_p''$.

Ein Blick auf die Fig. 24 zeigt, daß die Aufgabe statisch bestimmt ist. Es handelt sich um die Ausrechnung eines räumlichen Fachwerkes. Die Aufgabe beginnt man am einfachsten mit der Ausrechnung der drei wagerechten Reaktionen X_o, Y_o, Y_o'' , die gleich sind:

$-1, +\frac{t_a}{w}, -\frac{t_a}{w}$. Die Stäbe sind numeriert nach der Reihenfolge ihrer Bestimmbarkeit.

Einfach gebaute feste Stützen können analytisch berechnet werden, während man bei verwickelteren Stützen am leichtesten zeichnerisch zum Ziele kommt.

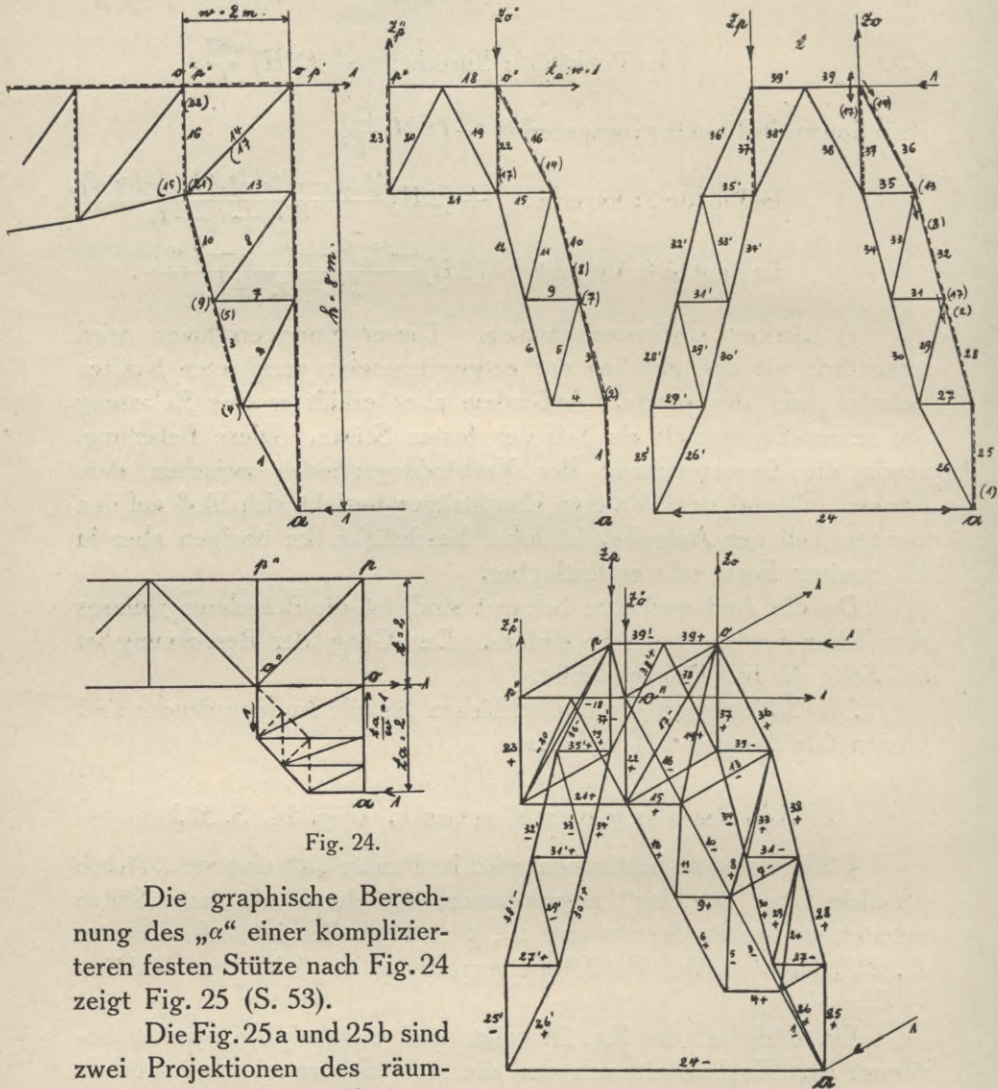


Fig. 24.

Die graphische Berechnung des „ α “ einer komplizierteren festen Stütze nach Fig. 24 zeigt Fig. 25 (S. 53).

Die Fig. 25a und 25b sind zwei Projektionen des räumlichen Kräfteplanes (Stäbe 1 bis 23). Man sieht, daß die Stäbe des Endquerrahmens hohe Ordnungszahlen haben (24—39). Dies kommt daher, daß der Endrahmen ein Dreigelenkbogen ist. Eigentlich ist die Ausrechnung der Stäbe (24—39) in Fig. 25c nicht notwendig, wenn

Stabspankräfte heben sich gegenseitig in jedem Knotenpunkte auf. Die Berechnung des Dreigelenkbogens konnte deswegen erst so spät vorgenommen werden, da man früher die anschließenden Stabkräfte ausrechnen mußte. Die Summe aller den Bogen selbst angreifenden Kräfte ist Null, ohne irgendwelche Reaktionen hervorzurufen, was als

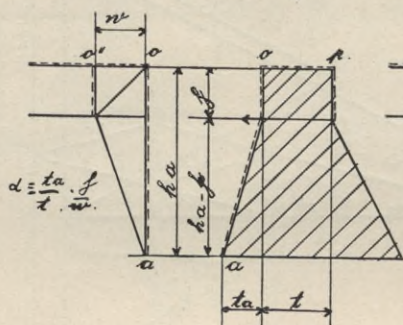


Fig. 26.

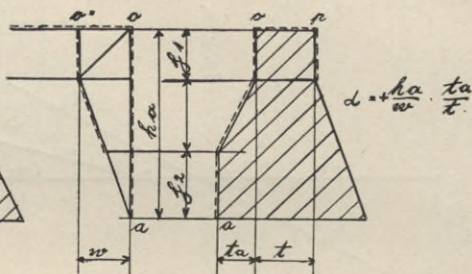


Fig. 27.

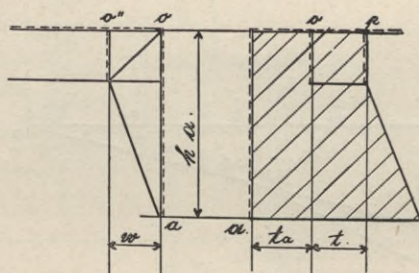


Fig. 28.

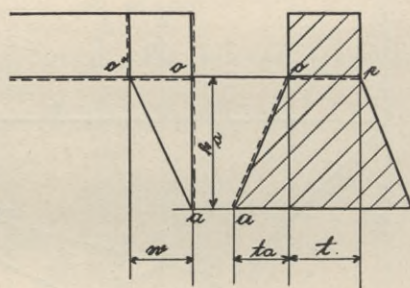


Fig. 29. $\alpha = 0.$

Richtigkeitsprobe gelten mag. Es ergab sich $\alpha = 2,25$.

Für einige einfacher gebaute Stützen, die jedoch die Mehrzahl aller in der Praxis vorkommenden Fälle umfassen, sei in den Fig. 26

bis 29 der Wert des Ausdruckes „ α “ angegeben. Die Bestimmung dieser Größe ist verhältnismäßig einfach, so daß ein Hinschreiben der Formeln genügen dürfte.

β) Der Windverband ist gebogen.

§ 27. Die Ausführungen unter α) sind für diesen Fall im allgemeinen gültig, nur ist noch zu beachten, daß bei Berechnung der Horizontalverspannung die Krümmung nicht vernachlässigt wird. Es

entstehen nämlich Zusatzkräfte, die die beiden Hauptträger belasten. Siehe Punkt 3β. Da die Horizontalverspannung nach den einfachen Schaubildern (Fig. 20 und 21) belastet wird, ist auch die Berechnung der Zusatzkräfte sehr einfach.

Am rechten Querrahmen (Punkt o') wirken die Kräfte $+\Sigma H \frac{y}{l}$ und $+\Sigma H \frac{t_a}{l}$, entsprechend dem 1. und dem 2. Teil der Aufgabe, zusammen $\Sigma H \frac{t_a + y}{l} = +R_r$.

In einem Punkte, der die Abszisse x besitzt, ist das durch R_r erzeugte Moment in der Horizontalverspannung $R_r(l-x)$. Die Zusatzkräfte in den Hauptträgern betragen demnach:

$$\pm R_r(l-x) \frac{1}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx,$$

wobei $z = f(x)$ die Gleichung des gebogenen Gurtcs darstellt.

In den Punkten o, p bzw. o', p' entstehen somit Zusatzreaktionen

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{B} = \mp \frac{R_r}{lt} \int_0^l (l-x) x \frac{d^2 z}{dx^2} dx. \quad 1)$$

¹⁾ Den Ausdruck $\mathfrak{A} = -\mathfrak{B} = \mp \frac{R_r}{lt} \int_0^l (l-x) x \frac{d^2 z}{dx^2} dx$ kann man graphisch

leicht deuten. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = -\mathfrak{B} &= \pm \frac{R_r}{lt} \int_0^l l x \frac{d^2 z}{dx^2} dx \mp \frac{R_r}{lt} \int_0^l x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dx = \\ &= \pm \frac{R_r}{tl} \left[l \int_0^l x \frac{d^2 z}{dx^2} dx - \int_0^l x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dx \right]. \end{aligned}$$

Es ist aber $\int_0^l x \frac{d^2 z}{dx^2} dx$

der Abschnitt AC der linken Auflagerlotrechten, der von den 2 Tangenten an die Endpunkte des Gurt-

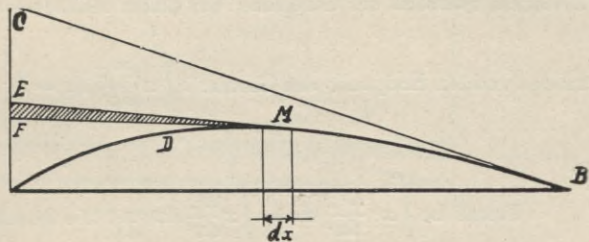


Fig. a.

Die Konstruktion dieser Ausdrücke ist sehr einfach (Fig. 30). Fig. 30 a zeigt den Aufriß einer Brücke mit einer gebogenen

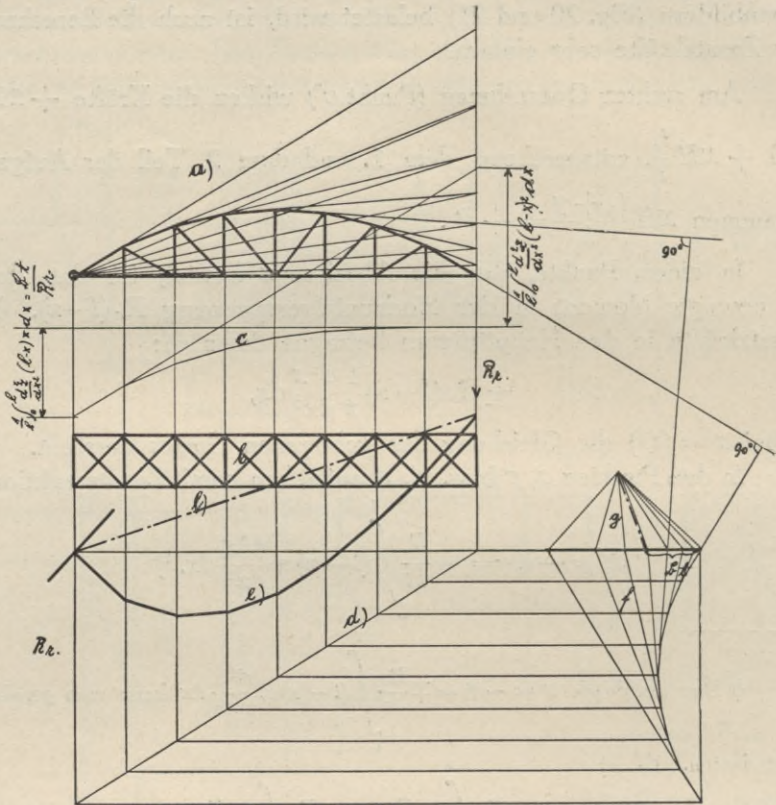


Fig. 30.

bogens abgeschnitten wird. Somit ist $l \cdot \int_0^l x \frac{d^2 z}{dx^2} dx$, die doppelte Fläche des

Dreiecks zwischen der Gurtsehne, der linken Auflagerlotrechten und der Tangente

an den rechten Endpunkt des Gurtes: $l \int_0^l x \frac{d^2 z}{dx^2} dx = 2 \cdot F \Delta (ABC)$.

Ferner ist $\int_0^l x^2 \frac{d^3 z}{dx^3} dx = \int_0^l x \frac{d^2 z}{dx^2} dx \cdot x$. Die Strecke EF , wie schon früher er-

Verspannung. Fig. 30b stellt den Grundriß dar. Eine Last R_r am rechten Ende wirkt auf die Verspannung. Zeichnet man das aus Fig. 5 (§ 17) bekannte Seilpolygon (Fig. 30c) der ideellen Lasten

wähnt, beträgt $x \frac{d^2 z}{dx^2} dx$ und das Flächendifferential EFM ist $\Delta F = \frac{1}{2} x \frac{d^2 z}{dx^2} dx \cdot x$.

$$\text{Somit ist } \int_0^l x \frac{d^2 z}{dx^2} dx \cdot x = \int_0^l 2 \Delta F = 2 F (ACBDA).$$

Man kann nun schreiben

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{B} = \pm \frac{R_r}{tl} [2 F \Delta (ABC) - 2 F (ACBDA)] = \pm \frac{R_r}{tl} 2 F,$$

wobei F die vom Gurtbogen und Sehne eingeschlossene Fläche darstellt.

Man kann $\mathfrak{A} = -\mathfrak{B}$ noch auf anderem Wege ableiten. Auf den Hauptträger wirken die Zusatzkräfte $dV = \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx = \frac{R_r (l-x)}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx$. Außerdem ist noch eine Zusatzkraft bei $x=0$ vorhanden, deren Größe beträgt

$$\Delta \mathfrak{B} = \frac{M_h^{x=0}}{t} \Delta \text{tg } \alpha_0 = - \frac{M_h^{x=0}}{t} \frac{dz}{dx} \Big|_{x=0} = - \frac{R_r l}{t} \frac{dz}{dx} \Big|_{x=0}.$$

$\frac{dz}{dx} \Big|_{x=0}$ nennen wir $\frac{dz_0}{dx}$.

Der Auflagerdruck \mathfrak{A} berechnet sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= - \int_0^l dV \cdot \frac{l-x}{l} - \Delta \mathfrak{B} = \frac{R_r l}{t} \frac{dz_0}{dx} - \frac{R_r}{tl} \int_0^l \frac{d^2 z}{dx^2} dx (l-x)^2 \\ &= \frac{R_r}{tl} \left[l^2 \cdot \frac{dz_0}{dx} - \int_0^l \frac{d^2 z}{dx^2} dx (l-x)^2 \right]. \end{aligned}$$

Nun ist

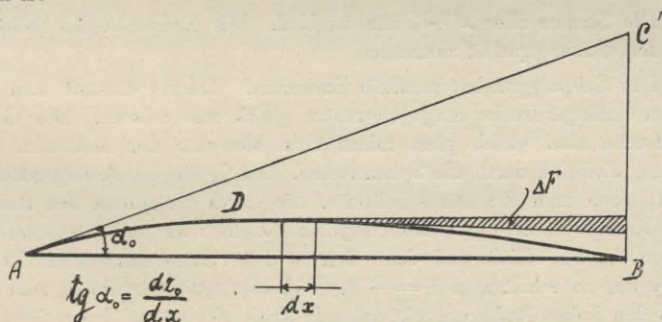


Fig. b.

$\frac{d^2 z}{dx^2} (l-x) dx$, welche Lasten bei x angreifend gedacht werden, so schneiden dessen Endseiten auf den Auflagerlotrechten die Strecken auf:

$$\text{links: } \frac{1}{l} \int_0^l \frac{d^2 z}{dx^2} (l-x) x dx = \frac{\mathfrak{B}t}{R_r}, \quad \text{rechts: } \frac{1}{l} \int_0^l \frac{d^2 z}{dx^2} (l-x)^2 dx.$$

Auf anderem Wege kommt man zum Ziele, wenn man das Verfahren nach § 22 (Fig. 9) anwendet. Fig. 30d stellt die Momentenlinie (-gerade) infolge der Wirkung der Last R_r dar. Fig. 30f zeigt die Konstruktion des um 90° gedrehten Kräftepolygons der Zusatzkräfte $M_h \frac{d^2 z}{dx^2} dx$.¹⁾ Fig. 30e stellt das Seilpolygon dieser Kräfte dar.²⁾

Die Reaktionen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bilden je ein Moment und werden durch die Endquerrahmen auf die Auflagerpunkte 1, 2 bzw. 3, 4 übertragen. Die Zusatzmomente vergrößern (algebraisch) die Momente

$$l^3 \frac{dz_0}{dx} = l \cdot BC' = 2 F \mathcal{A} (ABC'A); \quad \int_0^l \frac{d^2 z}{dx^2} dx (l-x)^2 = \int_0^l 2 \mathcal{A} F = 2 F (AC'BDA).$$

$$\text{Somit ist } \mathfrak{A} = \frac{R_r}{lt} [2 F \mathcal{A} (ABC'A) - 2 F (AC'BDA)] = \frac{R_r}{lt} 2 F = -\mathfrak{B}.$$

Statt $\frac{F}{l}$ kann man setzen η_m die mittlere Höhe der Gurtkurve. Somit ist

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{B} = \frac{2 R_r}{t} \eta_m.$$

Auf anderem Wege kann dieser Ausdruck ebenfalls abgeleitet werden. Vergleiche darüber F. Engesser, Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken.

¹⁾ Die Summe aller $\mathcal{A}V$ -Kräfte ist Null. Der Endpunkt des Kräftepolygons fällt mit dem Anfangspunkt zusammen.

²⁾ Das Seilpolygon hat parallele Endseiten. Daraus erkennt man auch, daß die beiden Auflagerdrucke entgegengesetzt gleich sein müssen. Die Größen der Auflagerdrucke sind gleich plus, minus dem Momente der äußersten Seilseitenspannungen, dividiert durch die Spannweite l . Die Größe der Auflagerdrucke erhält man auch, wenn man die letzte Seilseite, die durch die (durch den Punkt $x = 0$ gehende) Kraft $\mathcal{A}\mathfrak{B}$ erzeugt wird, wegläßt. Zieht man zu dem unvollständigen Seilpolygon die Schlußlinie und dann den zu dieser Linie senkrechten Polstrahl im Kräftepolygon, so erhält man $\mathfrak{B} = -\mathfrak{A}$. Daß dies richtig ist, sieht man ein, denn die durch den linken Auflagerpunkt gehende Kraft $\mathcal{A}\mathfrak{B}$ hat auf den rechten Auflagerdruck keinen Einfluß.

M_o bzw. M_o' um die Beträge $\mp \frac{R_r}{l} \int_0^l \frac{d^2 z}{dx^2} (l-x) x dx$, und die Zusatzauflegerdrucke betragen:

$$26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}_1 = -\mathfrak{N}_2 = + \frac{R_r}{l(t+t_1+t_2)} \int_0^l (l-x) x \frac{d^2 z}{dx^2} dx \\ \mathfrak{N}_3 = -\mathfrak{N}_4 = - \frac{R_r}{l(t+t_3+t_4)} \int_0^l (l-x) x \frac{d^2 z}{dx^2} dx. \end{array} \right.$$

Hierbei ist $R_r = \Sigma H \frac{t_a + y}{l}$.

γ) Statisch unbestimmter Fall.

§ 28. Sind beide Hauptträger mit dem Punkte a verbunden, was bei symmetrischen Brücken öfters vorkommen kann, dann ist die Brücke statisch unbestimmt. Es sei gleich bemerkt, daß diese Bauart nur dann vorkommen wird, wenn die Brücke ganz oder nahezu symmetrisch gebaut ist. t_a ist dann gleich $-\frac{t}{2}$ oder nahezu $-\frac{t}{2}$.

Eine angenäherte Berechnung kann so vorgenommen werden, daß anstatt alle Kräfte, die zur x -Achse parallel sind auf den einen Punkt „ o “ zu reduzieren (unter Hinzufügung eines Momentes $\Sigma H \cdot z$, das um die y -Achse dreht und eines Momentes $\Sigma H \cdot y$, das um die z -Achse dreht), man nun alle zur x -Achse parallelen Kräfte auf die zwei Punkte o und p reduziert, unter Hinzufügung des einen Momentes $\Sigma H \cdot z$, das um die y -Achse dreht.

Beim ersten Teil der Aufgabe, nämlich der Reduktion aller Kräfte H (\parallel zur x -Achse) auf die Punkte o und p , entstehen in diesen Punkten die Kräfte:

$$\mathfrak{S}_o = + \Sigma H \frac{t-y}{t} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_p = + \Sigma H \frac{y}{t}.$$

Außerdem entstehen die Auflagerdrucke:

$$\begin{array}{l} R_1' = - \Sigma H \frac{z}{l} \frac{t+t_2-y}{t+t_1+t_2}, \quad R_2' = - \Sigma H \frac{z}{l} \frac{t_1+y}{t+t_1+t_2}, \\ R_3' = + \Sigma H \frac{z}{l} \frac{t+t_4-y}{t+t_3+t_4}, \quad R_4' = + \Sigma H \frac{z}{l} \frac{t_3+y}{t+t_3+t_4}, \\ R_l' = R_r' = 0 \quad R_a' = 0. \end{array}$$

Im zweiten Teil der Aufgabe sollen nun die Kräfte \mathfrak{H}_o und \mathfrak{H}_p berücksichtigt werden.

Jede der beiden Verbindungsglieder des Punktes o mit den Hauptträgern überträgt einen Teil der Summe $\mathfrak{H}_p + \mathfrak{H}_o$. Unter der Annahme, daß die Brücke und die Belastung halbwegs symmetrisch sind, kann man jede der Verbindungen die Größe $\frac{1}{2} (\mathfrak{H}_p + \mathfrak{H}_o)$ übernehmen lassen. In Fällen, die ganz unsymmetrisch sind, kann man die Anteile abschätzen.

Um zu zeigen, wie eine genaue Berechnung durchzuführen

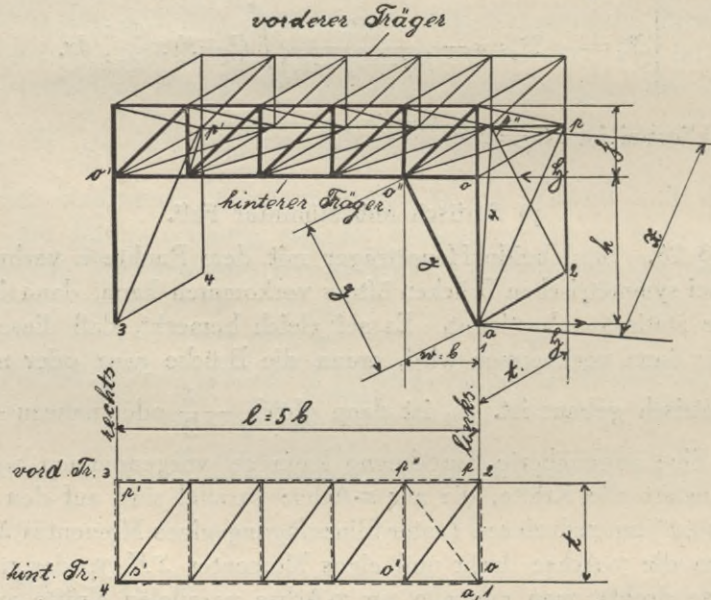


Fig. 31.

wäre und um obige Annäherungsregel zu erhärten, lassen wir nun ein Beispiel folgen.

Beispiel: Eine Brücke habe folgende Dimensionen:

$$l = 5b, w = b, \text{ Trägerhöhe } h, \text{ Brückenbreite } t$$

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_a = 0 \quad h_r = h_l = h_a = h. \text{ Fig. 31.}$$

Die horizontale Verspannung ist unten. Die Fachwerke seien Ständerfachwerke. Die Diagonalen haben die Länge d in den Hauptträgern, und d' in der horizontalen Verspannung. Die Länge der schrägen Streben im Hauptträger zwischen a und o'' beträgt y , die Länge der Verbindung zwischen a und dem Punkte p'' des vorderen Hauptträgers sei x . u ist die Länge der Diagonalen der Endrahmen, unter der Verspannung.

Im Punkte o greife eine Last \mathfrak{S} an, die parallel zur x -Achse gerichtet sei. Der Punkt o'' und p'' seien mit a verbunden. $o''a = y$, $p''a = x$, die darin wirkenden Stabkräfte seien Y und X . Wir wählen

$$X \text{ als statisch unbestimmte Größe, und es ist dann: } X = \frac{\sum S' S^0 \frac{s}{f}}{\sum S'^2 \frac{s}{f}},$$

wobei S' den Wert der Stabkräfte sei für $X = -1$, $\mathfrak{S} = 0$; S^0 den Wert der Stabkräfte für den Zustand $X = 0$, s und f die Stablängen und Querschnitte der einzelnen Stäbe bedeuten. Die Summen beziehen sich auf alle Stäbe der Brücke. Die Auflager werden als unnachgiebig angenommen.

Es ist zu beachten, daß beim Spannungszustande $X = 0$, nur die hintere Tragwand (in der sich der Punkt a befindet) Spannkkräfte erhält. Beim Zustande $X' = -1$, kann man die Kraft X' im Punkte a streichen, da sie an einem festen Lager angreift (Lagerpunkt mit drei Bedingungen, da im Punkte a die drei Punkte 1, l und a vereinigt sind). Die Gegenkraft $X' = -1$ am Punkte p'' angreifend, läßt sich nach den

$$\text{drei Koordinatenrichtungen zerlegen in } X'_x = + \frac{b}{x}, \quad X'_y = + \frac{t}{x},$$

$X'_z = + \frac{h}{x}$. X'_z beansprucht lediglich die vordere Tragwand. Die

Kraft X'_y beansprucht die untere Horizontalverspannung, sowie die Endquerrahmen. Die Kraft X'_x muß zunächst auf den Punkt o reduziert werden, wobei die Horizontalverspannung und die Endquerrahmen beansprucht werden. Die reduzierte Kraft X'_x beansprucht dann die ganze hintere Tragwand. Es ist klar, daß bei der Zusammensetzung der Stabspannkkräfte viele Kräfte sich aufheben, was in der Besonderheit der Belastung ($X' = -1$) seinen Grund hat und die Aufgabe wesentlich vereinfacht. (X' geht nämlich in der Fortsetzung durch ein festes Lager.)

Die Spannungen S^0 und S' sind tabellarisch geordnet.

Stäbe	S^0	S'	$\frac{s}{f}$	$S^0 S' \frac{s}{f}$	$S'^2 \frac{s}{f}$
Obergurt vorn	0	$+\frac{hb^2}{xlh} (0,1,2,3,4)$	$\frac{b}{fg}$	0	$\frac{h^2 b^5}{x^2 l^2 h^2 f g} (0,1,4,9,16)$
Obergurt hinten	$-\mathfrak{S} \frac{hb}{lh} (0,1,2,3,4)$	$-\frac{hb^2}{xlh} (0,1,2,3,4)$	„	$\mathfrak{S} \frac{b^4 h^2}{x l^2 h^2 f g} (0,1,4,9,16)$	„

Stäbe	S^0	S'	$\frac{s}{f}$	$S^0 S' \frac{s}{f}$	$S'^2 \frac{s}{f}$
Untergurt vorn	0	$-\frac{hb^2}{xl\eta} (1, 2, 3, 4, 0)$	$\frac{b}{f_g}$	0	$\frac{h^2 b^5}{x^2 l^2 \eta^2 f_g} (1, 4, 9, 16, 0)$
Untergurt hinten	$+\S \frac{hb}{l\eta} (1, 2, 3, 4, 0)$	$+\frac{hb^2}{xl\eta} (1, 2, 3, 4, 0)$	"	$\S \frac{b^4 h^2}{x l^2 \eta^2 f_g} (1, 4, 9, 16, 0)$	"
Diagonale 1—4 vorn	0	$+\frac{hb d}{xl\eta} (4 \text{ mal})$	$\frac{d}{f_d}$	0	$\frac{h^2 b^2 d^3}{x^2 l^2 \eta^2 f_d} (4 \text{ mal})$
Diagonale 5 vorn	0	$-\frac{h(l-b)d}{xl\eta}$	"	0	$\frac{h^2(l-b)^2 d^3}{x^2 l^2 \eta^2 f_d}$
Pfosten 1—4 vorn	0	$-\frac{bh}{xl} (4 \text{ mal})$	$\frac{\eta}{f_d}$	0	$\frac{h^2 b^2 \eta^3}{x^2 l^2 \eta^2 f_d} (4 \text{ mal})$
Pfosten 5 vorn	0	$+\frac{h(l-b)}{xl}$	"	0	$\frac{h^2(l-b)^2 \eta^3}{x^2 l^2 \eta^2 f_d}$
Diagonale 1—4 hinten	$-\S \frac{hd}{l\eta} (4 \text{ mal})$	$-\frac{bhd}{xl\eta} (4 \text{ mal})$	$\frac{d}{f_d}$	$\S \frac{b^2 h^2 d^3}{x l^2 \eta^2 b f_d} (4 \text{ mal})$	$\frac{h^2 b^2 d^3}{x^2 l^2 \eta^2 f_d} (4 \text{ mal})$
Diagonale 5 hinten	$+\S \frac{h(l-b)d}{bl\eta}$	$+\frac{h(l-b)d}{xl\eta}$	"	$\S \frac{h^2(l-b)^2 d^3}{x l^2 b \eta^2 f_d}$	$\frac{h^2(l-b)^2 d^3}{x^2 l^2 \eta^2 f_d}$
Pfosten 1—4 hinten	$+\S \frac{h}{l} (4 \text{ mal})$	$+\frac{bh}{xl} (4 \text{ mal})$	$\frac{\eta}{f_d}$	$\S \frac{b^2 h^2 \eta^3}{x l^2 \eta^2 b f_d} (4 \text{ mal})$	$\frac{h^2 b^2 \eta^3}{x^2 l^2 \eta^2 f_d} (4 \text{ mal})$
Pfosten 5 hinten	$-\S \frac{h(l-b)}{bl}$	$-\frac{h(l-b)}{xl}$	"	$\S \frac{h^2(l-b)^2 \eta^3}{x l^2 b \eta^2 f_d}$	$\frac{h^2(l-b)^2 \eta^3}{x^2 l^2 \eta^2 f_d}$
Diagonale und Pfosten unten	0	0	$\frac{d'}{f_d'}$	0	0
Stützenständer rechts vorn	0	$+\frac{bh}{xl}$	$\frac{h}{f_s}$	0	$\frac{b^2 h^3}{x^2 l^2 f_s}$
Desgl. rechts hinten	$-\S \frac{h}{l}$	$-\frac{bh}{xl}$	"	$\S \frac{b h^3}{x l^2 f_s}$	"
Stützendiaagonale rechts	0	0	$\frac{u}{f_s}$	0	0
Stützenständer links vorn	0	$-\frac{bh}{xl}$	$\frac{h}{f_s}$	0	$\frac{b^2 h^3}{x^2 l^2 f_s}$
Desgl. links hinten	$-\S \frac{h(l-b)}{lb}$	$-\frac{h(l-b)}{xl}$	$\frac{h}{f_s}$	$\S \frac{(l-b)^2 h^3}{x l^2 b f_s}$	$\frac{h^3(l-b)^2}{x^2 l^2 f_s}$
Stützendiaagonale links	0	$+\frac{u}{x}$	$\frac{u}{f_s}$	0	$\frac{u^3}{x^2 f_s}$

Stäbe	S^0	S'	$\frac{s}{f}$	$S^0 S' \frac{s}{f}$	$S'^2 \frac{s}{f}$
y-Strebe	$+\wp \frac{y}{b}$	$+\frac{y}{x}$	$\frac{y}{f_s}$	$\wp \frac{y^3}{b x f_s}$	$\frac{y^3}{x^2 f_s}$
x-Strebe	0	-1	$\frac{x}{f_s}$	0	$\frac{x^3}{x^2 f_s}$

Bemerket sei, daß die fünf Stäbe der Gurtungen zusammengefaßt wurden. In der Klammer stehen die fünf ihnen zukommenden Koeffizienten nebeneinander.

Nun sei die Zählersumme Z und die Nennersumme N gebildet.

Das Verhältnis der Stabquerschnittsflächen sei $\frac{f_g}{f_a} = \gamma$ und $\frac{f_g}{f_s} = \sigma$.

Unter f_g ist der mittlere Gurtquerschnitt, unter f_a der mittlere Querschnitt der Füllungsstäbe und unter f_s der mittlere Querschnitt der Stützenstäbe verstanden.

$$\begin{aligned} \Sigma S^0 S' \frac{s}{f} = Z &= \wp \frac{1}{x l^2 h^2 b f_g} \left\{ 60 b^5 h^2 + \gamma h^2 (d^3 + h^3) (5b^2 + l^2 - 2lb) \right. \\ &\quad \left. + \sigma h^3 h^2 (2b^2 + l^2 - 2lb) + \sigma \gamma^3 l^2 h^2 \right\} \\ &= \wp \frac{K_z}{x l^2 h^2 b f_g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma S'^2 \frac{s}{f} = N &= \frac{1}{x^2 l^2 h^2 f_g} \left\{ 120 b^5 h^2 + \gamma 2h^2 (d^3 + h^3) (5b^2 + l^2 - 2lb) \right. \\ &\quad \left. + \sigma h^3 h^2 (4b^2 + l^2 - 2lb) + \sigma u^3 l^2 h^2 \right. \\ &\quad \left. + \sigma \gamma^3 l^2 h^2 + \sigma x^3 l^2 h^2 \right\} \\ &= \frac{K_n}{x^2 l^2 h^2 f_g} \end{aligned}$$

$$X = \frac{Z}{N} = \wp \frac{x}{b} \cdot \frac{K_z}{K_n}$$

Die horizontale Komponente der X-Stabkraft in x-Richtung ist

$$X_x = X \frac{b}{x} = \wp \frac{K_z}{K_n}$$

$\frac{K_z}{K_n}$ ist ein echter Bruch, der den Anteil von \wp angibt, den der X-Stab überträgt.

Der Anteil des Stabes Y ist

$$\frac{Y_x}{\mathfrak{H}} = \frac{Y_o - XY' b}{\mathfrak{H} y} = \frac{\mathfrak{H} \frac{y}{b} - \mathfrak{H} \frac{x}{b} \frac{K_s}{K_n} \frac{y}{x} b}{\mathfrak{H} y} = 1 - \frac{K_s}{K_n},$$

wie es nicht anders zu erwarten war.

Es ist recht lehrreich und dient als Probe, die Werte Y und Y_x unabhängig von X zu rechnen, indem man die Y -Strebe, d. i. die Verbindung zwischen a und o'' als statisch überzähliges Glied wählt.

Wählt man in einem konkreten Falle: $\sigma = 1$, $\gamma = 1$, $l = 5b$, $h = b$, $h = 3b$ und $t = b$, dann ist $d^3 = 2\sqrt{2}b^3$; $u^3 = y^3 = 31,5b^3$ und $x^3 = 36,4b^3$.

Rechnet man die zwei echten Brüche aus, so erhält man $\frac{K_s}{K_n} = 0,455$ und $1 - \frac{K_s}{K_n} = 0,545$.

Wie man sieht, beteiligen sich die beiden Verbindungselemente des Punktes a mit den beiden Hauptträgern ziemlich gleichmäßig an der Übertragung der \mathfrak{H} -Kraft, trotzdem dieser Fall als ziemlich unsymmetrisch gelten darf, nachdem die Kraft \mathfrak{H} vertikal über dem Punkte a angreift. Man sieht auch, daß das bloße Vorhandensein der x -Strebe eine Heranziehung der übrigen Brückenstäbe zum Tragen zur Folge hat.

5. Brücken mit zwei wagerechten Auflagern der x -Richtung und einem wagerechten Auflager der y -Richtung.

§ 29. In den bisherigen Ausführungen war die Rede von Brücken, die zwei wagerechte Auflager der y -Richtung und ein Auflager der x -Richtung besaßen.

Nun gibt es, wie im Anhang ausgeführt wird, Fälle, wo von den drei wagerechten Auflagern zwei die x -Richtung und nur eines die y -Richtung besitzen.

Bei vertikal gerichteten Kräften ist es gleichgültig, wie die wagerechten Auflager gelegen sind. Deshalb bleibt der Absatz 2 dieses Abschnittes für die vertikalen Kräfte gültig.

Bevor auf den Einfluß der wagerechten Kräfte der y -Richtung und der x -Richtung eingegangen wird, sollen die nötigen Festsetzungen über Bauart gemacht werden.

Endquerrahmen geleistet, wodurch in den Punkten 1, 2, 3 und 4 Auflagerdrucke entstehen. Die Horizontalkraft, $+\Sigma H$, in der y -Richtung, die nun bei o wirkt, wird ebenfalls durch den linken Endquerrahmen auf die Punkte 1, 2 und l übertragen.

Insgesamt entstehen durch diese Reduktion folgende Reaktionen:

$$27) \begin{cases} R_1' = -R_2' = -\Sigma H \frac{z}{l} \frac{l-x}{t+t_1+t_2} - \Sigma H \cdot \frac{h_l}{t+t_1+t_2}, \\ R_3' = -R_4' = -\Sigma H \frac{z}{l} \frac{x}{t+t_3+t_4}, \\ R_l' = -\Sigma H. \end{cases}$$

Der erste Teil der Aufgabe wäre erledigt. Es bleibt noch der Einfluß eines Kräftepaars $\pm \mathfrak{H} = \pm \Sigma H \frac{x}{t}$ zu berücksichtigen. Die positive Kraft wirkt parallel zur x -Richtung im Punkt o , die negative in p .

Das Kräftepaar $\pm \mathfrak{H} = \pm \Sigma H \frac{x}{t}$ erzeugt sieben Auflagerdrucke $R_1'', R_2'', R_3'', R_4'', R_a'', R_b''$ und R_l'' . Zur Bestimmung dieser Drucke stehen uns sechs Gleichungen zur Verfügung, aus denen sich sofort ergibt:

$$28) \begin{cases} R_l'' = 0; & R_a'' = -R_b'' = -\mathfrak{H} \frac{t}{t+t_a+t_b}; \\ R_1'' + R_2'' = -(R_3'' + R_4''); & (R_3'' + R_4'') l + R_a'' (h_a - h_b) = 0; \\ & M_o + M_o' = 0, \end{cases}$$

wobei, wie bisher $M_o = R_1'' t_1 - R_2'' (t + t_2)$ und $M_o' = R_3'' t_3 - R_4'' (t + t_4)$ ist.

Um eine weitere Beziehung zur Berechnung der Auflagerdrucke zu finden, muß auf die Beschaffenheit der Brücke selbst zurückgegriffen werden.

Zu diesem Zwecke wird genau wie im analogen Fall unter Punkt 4 verfahren, indem man den Einfluß der zwei Kräfte R_b'' und R_a'' auf die feste Stütze betrachtet. Die feste Stütze wird in den Punkten o, o', p und p'' durch acht Auflager genügend gestützt, und damit das Bruchstück des Fachwerkes statisch bestimmt werde, sei die Diagonale des ersten Feldes der Horizontalverspannung herausgenommen.

Die Reaktionen, die die zwei Kräfte R_a'' und R_b'' in den Punkten o, o', p und p'' hervorrufen, seien:

$$-X_o, -Y_o, -Z_o; -Y_o'', -Z_o''; -X_p, -Z_p; -Z_p''.$$

Diese Kräfte mit den positiven Zeichen belasten dann das ganze Fachwerk, wobei man noch die restlichen Kräfte ($\pm \mathfrak{H}$) mitnimmt.

Es betragen:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{im Punkte } o: X_o = R_a''; \\
 Y_o = -R_a'' \frac{t_a}{w} + R_b'' \frac{t_b}{w}; Z_o = -R_a'' \frac{h_a}{w} - R_a'' \alpha + R_b'' \beta; \\
 \text{im Punkte } o': Y_o'' = +R_a'' \frac{t_a}{w} - R_b'' \frac{t_b}{w}; Z_o'' = +R_a'' \frac{h_a}{w} + R_a'' \alpha - R_b'' \beta; \\
 \text{im Punkte } p: X_p = R''; \quad Z_p = +R_a'' \alpha - R_b'' \frac{h_b}{w} - R_b'' \beta; \\
 \text{im Punkte } p'': \quad Z_p'' = -R_a'' \alpha + R_b'' \frac{h_b}{w} + R_b'' \beta.
 \end{array} \right\} 29)
 \end{array}$$

β ist ein der festen Stütze eigentümlicher Koeffizient, der von der Belastung unabhängig ist; er spielt für das Verbindungsglied des Punktes „b“ mit dem vorderen Hauptträger die gleiche Rolle, wie der Koeffizient α für die Verbindung des Punktes a mit dem hinteren Hauptträger.

Setzt man statt R_a'' und R_b'' ihre Werte aus Gleichung 28) ein, so sieht man, daß die Kräfte X_o , X_p und die zwei in o und p wirkenden Kräfte $\pm \mathfrak{H}$, noch ein Kräftepaar in o und p bilden:

$$\pm \mathfrak{H} \frac{t_a + t_b}{t + t_a + t_b}, \text{ dessen Moment beträgt: } \mathfrak{H} t \frac{t_a + t_b}{t + t_a + t_b}.$$

Die beiden Kräfte Y_o und Y_o'' ergeben ebenfalls ein Moment, dessen Größe: $-\mathfrak{H} t \frac{t_a + t_b}{t + t_a + t_b}$ beträgt. Diese beiden Momente heben sich gegenseitig auf.

Die zwei Kräfte Z_o und Z_o'' bilden ein Kräftepaar, dessen Moment, durch den Hauptträger übertragen, in den Punkten o und o' die Kräfte gibt: $\pm \mathfrak{H} \frac{1}{l(t + t_a + t_b)} [h_a t + t w \alpha + t w \beta]$.

Ebenso entstehen durch die Kräfte Z_p und Z_p'' in den Punkten p und p' die zwei Kräfte: $\mp \mathfrak{H} \frac{1}{l(t + t_a + t_b)} [h_b t + t w \alpha + t w \beta]$.

Die beiden Kräfte in o und p bzw. in o' und p' geben die gesuchten Momente $-M_o$ bzw. $+M_o'$ und die lotrechten Einzelkräfte $\pm V$ in o bzw. o' .

$$-M_o = +M_o' = \mathfrak{H} \frac{t}{l(t + t_a + t_b)} [h_b t + t \alpha w + t \beta w].$$

$$V = \mathfrak{H} \frac{t(h_a - h_b)}{l(t + t_a + t_b)}.$$

Diese Größen werden durch die Endquerrahmen auf die Auflagerpunkte 1, 2, 3 und 4 übertragen, in denen sie die Auflagerdrucke hervorrufen:

$$30) \left\{ \begin{aligned} R_1'' &= - \int \frac{t^2}{l(t_a + t_b + t)(t_1 + t_2 + t)} [h_b + w(\alpha + \beta)] \\ &\quad - \int \frac{t(t_2 + t)(h_a - h_b)}{l(t_a + t_b + t)(t_1 + t_2 + t)}; \\ R_2'' &= + \int \frac{t^2}{l(t_a + t_b + t)(t_1 + t_2 + t)} [h_b + w(\alpha + \beta)] \\ &\quad - \int \frac{t(h_a - h_b)t_1}{l(t_a + t_b + t)(t_1 + t_2 + t)}; \\ R_3'' &= + \int \frac{t^2}{l(t_a + t_b + t)(t_3 + t_4 + t)} [h_b + w(\alpha + \beta)] \\ &\quad + \int \frac{t(h_a - h_b)(t + t_4)}{l(t_a + t_b + t)(t_3 + t_4 + t)}; \\ R_4'' &= - \int \frac{t^2}{l(t_a + t_b + t)(t_3 + t_4 + t)} [h_b + w(\alpha + \beta)] \\ &\quad + \int \frac{t t_3 (h_a - h_b)}{l(t_a + t_b + t)(t_3 + t_4 + t)}. \end{aligned} \right.$$

Auch hier kann man mit Leichtigkeit die einzelnen Wände herausgreifen und ihre Beanspruchungsweise zwecks Berechnung der Stabkräfte angeben, ganz ähnlich, wie am Schlusse von 4 α geschehen. (Siehe 4 α , b.)

Bei symmetrischen Brücken vereinfachen sich die Werte der Gleichungen 30) bedeutend.

c) Längskräfte der Brücke (wagerechte Kräfte der x -Richtung).

Man reduziere alle Längskräfte der Brücke auf die beiden Punkte p und o . Dies geschieht in bekannter Weise durch Übertragung der Kräfte, vermittels der verspannten Wände, bei deren gleichzeitiger Beanspruchung. Hierbei entstehen die Reaktionen:

$$31) \left\{ \begin{array}{l} R_a' = 0 \quad R_b' = 0 \quad R_l' = 0 \\ R_1' = - \Sigma H \frac{z}{l} \frac{t + t_2 - y}{t + t_1 + t_2}; \quad R_2' = - \Sigma H \frac{z}{l} \frac{t_1 + y}{t + t_1 + t_2}; \\ R_3' = + \Sigma H \frac{z}{l} \frac{t + t_4 - y}{t + t_3 + t_4}; \quad R_4' = + \Sigma H \frac{z}{l} \frac{t_3 + y}{t + t_3 + t_4}; \end{array} \right.$$

Es bleibt noch der zweite Teil der Aufgabe zu erledigen, nämlich die Untersuchung des Einflusses einer oder zweier Kräfte, die in

Ist die Horizontalverspannung gebogen, dann kommen in den Hauptträgern noch Zusatzspannungen hinzu, die von den Zusatzkräften

$\Delta V = \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx$ herrühren. Die Momente M_o und M_o' werden um

die Größen $\pm \int_0^l M_h \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{x}{l} dx$ vergrößert. Siehe darüber Punkt 3 β .

6. Brücken mit vier wagerechten Auflagern. Statisch unbestimmter Fall.

§ 30. Fast alle Brücken haben sowohl zwei wagerechte Auflager der x -Richtung, als auch zwei der y -Richtung. Dieser Fall gehört zwar eigentlich zu den statisch unbestimmten Brücken, da es sich aber um sekundäre Kräfte handelt, wird die Berechnung meist vereinfacht und die statische Unbestimmtheit bleibt unberücksichtigt.

Auf die Berechnung des Einflusses der lotrechten Kräfte hat diese Bauart keine Wirkung.

Bei der Berechnung der Brücke für wagerechte Kräfte ist die einfachste und üblichste Annäherung diese, daß man für alle Querkräfte nur die Auflager der y -Richtung, für alle Längskräfte nur die Auflager der x -Richtung als vorhanden annimmt.

Somit reiht sich dieser Fall teilweise unter Punkt 3, teilweise unter Punkt 5 ein.

Um zu zeigen, inwiefern die obige Annäherung zutreffend ist, und gleichzeitig einen scharfen Berechnungsgang anzugeben, dienen folgende Überlegungen und Beispiele.

a) Querkräfte (Kräfte parallel zur y -Achse).

Die Auflagerkraft R_r an der Pendelstütze wird infolge der Einspannung des Horizontalverbandes an der festen Stütze kleiner, die Auflagerkraft R_l etwas größer, als wenn das eine Auflager der x -Richtung wegfiel. Dies hat zur Folge, daß bei Vernachlässigung der Einspannung (angenäherte Berechnung) die positiven Momente und die Querkräfte (Scher-) am rechten Brückenteil zu groß herauskommen, während die Querkräfte am linken Ende, sowie die negativen Momente zu klein sind. Die negativen Momente verschwinden sogar ganz,

falls die obige Vernachlässigung vorgenommen wird, wenn es sich um reine Balken ohne Ausleger handelt.

Im folgenden Beispiel sei eine Brücke nach Fig. 33 zu berechnen. Die Horizontalverspannung ist unten. Die Verbindung der Punkte o'' und p'' mit den Auflagerpunkten a und b ist auf die einfachste Weise, nämlich durch gerade Stäbe hergestellt.

Es sei $t_a = t_b = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$, die Fachwerke seien Strebenfachwerke.

Eine Kraft H , deren Abstand von der y - z -Ebene a beträgt,

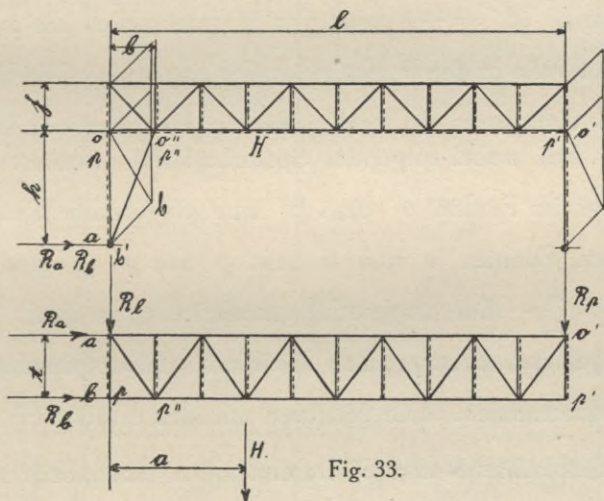


Fig. 33.

sei in die Ebene der Horizontalverspannung gebracht. Sie erzeugt die wagerechten Auflagerdrücke:

$$R_r, R_l \text{ und } R_a = -R_b = R_v.$$

$R_r + R_l = -H$, $R_v t = M_h$. Außerdem entstehen die Reaktionen R_1, R_2, R_3 und R_4 .

M_h sei die statisch unbestimmbare Größe.

Bemerkt sei, daß zur statisch unbestimmbaren Größe das Moment des Kräftepaars $R_a, R_b = -R_a$ gewählt wurde, das sonst gemäß der angegebenen Annäherung vernachlässigt zu werden pflegt.

Dem Zustande $M_h^0 = 0$ entsprechen die Werte $R_l^0 = -H \frac{l-a}{l}$,

$R_r^0 = -H \frac{a}{l}$ und die Stabkräfte S_o .

Dem Zustande $M_h' = -1$ entsprechen die Werte

$$R_r' = -R_l' = +\frac{1}{l}$$

und die Stabkräfte S' .

$$\text{Es ist } M_h = \frac{\Sigma S^o S' \frac{s}{f}}{\Sigma S'^2 \frac{s}{f}}.$$

Zu bemerken ist, daß beim Spannungszustande $M_h^o = 0$ nur die Horizontalverspannung und die Endquerrahmen Spannkkräfte erhalten. Beim Zustande $M_h' = -1$ wird das Moment durch die zwei Kräfte $\pm \frac{1}{t}$ gebildet, die in den Punkten a und b angreifen. Die Berechnung erfolgt am einfachsten so, daß jede der Haupttragwände für sich behandelt wird, wobei folgendes Spannungsbild entsteht: Die Kraft $\mp \frac{1}{t}$ erzeugt im Punkte o'' bzw. p'' eine wagerechte Reaktion $\pm \frac{1}{t}$ und in den Punkten o und o' bzw. p und p' je eine lotrechte Reaktion $\mp \frac{h}{t l}$. Die wagerechten Reaktionen, in ihren Wirkungs-sinnen umgekehrt, beanspruchen die Horizontalverspannung und die zwei Stützquerrahmen. Die letzteren mit den Kräften $\pm \frac{1}{l}$.

Die Stabkräfte S^o und S' werden unten tabellarisch zusammen-gestellt.

Nach der Näherungstheorie müßten sein:

$$R_a = R_a^o = 0, R_b = R_b^o = 0, R_l = R_l^o = -H \frac{l-a}{l}, R_r = R_r^o = -H \frac{a}{l}.$$

Um eine allgemeine, wenn auch angenäherte Formel zu er-halten, werden bei der Summierung die Feldweiten gleich dx ge-setzt. Ferner sei $w = b$. Die Längen der Diagonalen seien im Hauptträger „ d'' “, in der Horizontalverspannung d' . Die Trägerhöhe sei h . $h_a = h_b = h_l = h_r = h$. Die Brückenbreite sei wie gewöhn-lich t . Die schrägen Streben zwischen den Punkten a bzw. b und den Punkten o'' bzw. p'' der Hauptträger haben die Längen y . Sie liegen im vorliegenden Beispiele in den Ebenen der Hauptträger. Die Diagonalen der Endquerrahmen unterhalb der Verspannung haben die Längen u .

Stäbe	S ⁰	S'	$\frac{s}{f}$	S ⁰ S' $\frac{s}{f}$	S' ² $\frac{s}{f}$
Obergurt vorn, rechts von x = a	0	$+\frac{h(l-x)^l}{tlh} \Big _a$	$\frac{dx}{f_g}$	0	$\frac{h^2(l-x)^2 dx}{t^2 l^2 h^2 f_g} \Big _a$
Desgl. links von x = a	0	$+\frac{h(l-x)^a}{tlh} \Big _o$	"	0	$\frac{h^2(l-x)^2 dx}{t^2 l^2 h^2 f_g} \Big _o$
Untergurt vorn, rechts von x = a	$+H \frac{a(l-x)^l}{lt} \Big _a$	$-\frac{h(l-x)^l}{tlh} \Big _a - \frac{(l-x)^l}{lt} \Big _a$ $= -\frac{(h+b)(l-x)^l}{tlh} \Big _a$	"	$-H \frac{a(h+b)(l-x)^2 dx}{l^2 t^2 h f_g} \Big _a$	$\frac{(h+b)^2 (l-x)^2 dx}{t^2 l^2 h^2 f_g} \Big _a$
Desgl. links von x = a	$+H \frac{(l-a)x^a}{lt} \Big _o$	$-\frac{(h+b)(l-x)^a}{tlh} \Big _b$	"	$-H \frac{(l-a)(h+b)x(l-x) dx}{l^2 t^2 h f_g} \Big _b$	$\frac{(h+b)^2 (l-x)^2 dx}{t^2 l^2 h^2 f_g} \Big _b$
Diagonale vorn, rechts von p'	0	$+\frac{hd}{tlh}$	$\frac{d}{f_d}$	0	$\frac{h^2 d^3}{t^2 l^2 h^2 f_d}$
Desgl. links von p'	0	$-\frac{h(l-b)d}{tlbh}$	"	0	$\frac{h^2(l-b)^2 d^3}{t^2 l^2 h^2 b^2 f_d}$
Obergurt hinten, rechts von x = a	0	$-\frac{h(l-x)^l}{tlh} \Big _a$	$\frac{dx}{f_g}$	0	$\frac{h^2(l-x)^2 dx}{t^2 l^2 h^2 f_g} \Big _a$
Desgl. links von x = a	0	$-\frac{h(l-x)^a}{tlh} \Big _o$	"	0	$\frac{h^2(l-x)^2 dx}{t^2 l^2 h^2 f_g} \Big _o$
Untergurt hinten, rechts von x = a	$-H \frac{a(l-x)^l}{lt} \Big _a$	$+\frac{(h+b)(l-x)^l}{tlh} \Big _a$	"	$-H \frac{a(h+b)(l-x)^2 dx}{l^2 t^2 h f_g} \Big _a$	$\frac{(h+b)^2 (l-x)^2 dx}{t^2 h^2 l^2 f_g} \Big _a$
Desgl. links von x = a	$-H \frac{(l-a)x^a}{lt} \Big _o$	$+\frac{(h+b)(l-x)^a}{tlh} \Big _b$	"	$-H \frac{(l-a)(h+b)x(l-x) dx}{l^2 t^2 h f_g} \Big _b$	$\frac{(h+b)^2 (l-x)^2 dx}{t^2 h^2 l^2 f_g} \Big _b$
Diagonale hinten, rechts von o'	0	$-\frac{hd}{tlh}$	$\frac{d}{f_d}$	0	$\frac{h^2 d^3}{t^2 l^2 h^2 f_d}$
Desgl. links von o'	0	$+\frac{h(l-b)d}{tblh}$	"	0	$\frac{h^2(l-b)^2 d^3}{t^2 l^2 h^2 b^2 f_d}$
Stützen- pfosten vorn rechts	$-H \frac{a}{l} \frac{h}{t}$	$+\frac{h}{tl} + \frac{h}{tl} = 2 \frac{h}{tl}$	$\frac{h}{f_s}$	$-H \frac{2ah^3}{l^2 t^2 f_s}$	$\frac{4h^3}{t^2 l^2 f_s}$
Desgl. hinten rechts	0	$-\frac{h}{tl}$	"	0	$\frac{h^3}{t^2 l^2 f_s}$
Stützen- diagonale rechts	$+H \frac{a}{l} \frac{u}{t}$	$-\frac{u}{tl}$	$\frac{u}{f_s}$	$-H \frac{au^3}{l^2 t^2 f_s}$	$\frac{u^3}{l^2 t^2 f_s}$

Stäbe	S^0	S'	$\frac{s}{f}$	$S^0 S' \frac{s}{f}$	$S'^2 \frac{s}{f}$
Stützen- pfosten vorn links	$-H \frac{l-a}{l} \frac{h}{t}$	$+\frac{h(l-2b)}{tlb}$	$\frac{h}{f_s}$	$-H \frac{(l-a)(l-2b)h^3}{l^2 l^2 b f_s}$	$\frac{h^3(l-2b)^2}{l^2 l^2 b^2 f_s}$
Desgl. hinten links	0	$-\frac{h(l-b)}{tlb}$	"	0	$\frac{h^3(l-b)^2}{l^2 l^2 b^2 f_s}$
Stützen- diagonale links	$+H \frac{l-a}{l} \frac{u}{t}$	$+\frac{u}{tl}$	$\frac{u}{f_s}$	$+H \frac{(l-a)u^3}{l^2 t^2 f_s}$	$\frac{u^3}{l^2 t^2 f_s}$
Strebe y vorn	0	$-\frac{y}{tb}$	$\frac{y}{f_s}$	0	$\frac{y^3}{b^2 t^2 f_s}$
Strebe y hinten	0	$+\frac{y}{tb}$	"	0	$\frac{y^3}{b^2 t^2 f_s}$
Diagonale unten, rechts von a	$-H \frac{ad'}{lt}$	$+\frac{d'}{lt}$	$\frac{d'}{f_d}$	$-H \frac{ad'^3}{l^2 t^2 f_d'}$	$\frac{d'^3}{l^2 t^2 f_d'}$
Desgl. links von a	$+H \frac{(l-a)d'}{lt}$	$+\frac{d'}{lt}$	"	$+H \frac{(l-a)d'^3}{l^2 t^2 f_d'}$	$\frac{d'^3}{l^2 t^2 f_d'}$
Endpfosten vorn rechts	0	$+\frac{h}{tl}$	$\frac{h}{f_s}$	0	$\frac{h^2 h b^2}{l^2 l^2 b^2 f_s}$
Desgl. hinten rechts	0	$-\frac{h}{tl}$	"	0	$\frac{h^2 h b^2}{l^2 l^2 b^2 f_s}$
Desgl. vorn links	0	$+\frac{h(l-b)}{tlb}$	"	0	$\frac{h^2(l-b)^2 h}{l^2 l^2 b^2 f_s}$
Desgl. hinten links	0	$-\frac{h(l-b)}{tlb}$	"	0	$\frac{h^2(l-b)^2 h}{l^2 l^2 b^2 f_s}$

Zähler: $Z = \sum S_0 S' \frac{s}{f} =$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{3} H \frac{a(h+h)}{l^2 t^2 h f_g} (l-a)^3 - 2H \frac{(h+h)(l-a)}{l^2 t^2 h f_g} \left[\frac{1}{2} l(a^2 - b^2) - \frac{1}{3} (a^3 - b^3) \right] \\
 & - H \frac{2a h^3}{l^2 t^2 f_s} - H \frac{a u^3}{l^2 t^2 f_s} - H \frac{h^3(l-a)(l-2b)}{l^2 t^2 b f_s} + H \frac{(l-a)u^3}{l^2 t^2 f_s} \\
 & - H \frac{ad'^3(l-a)}{l^2 t^2 b f_d'} + H \frac{(l-a)ad'^3}{l^2 t^2 b f_d'} \\
 & = -\frac{H}{l^2 t^2 h^2 b^2 f_g} \left\{ \frac{1}{3} (h+h) h b^2 [2a l^3 - 3(a^2 + b^2) l^2 + (3ab^2 + 2b^3 \right. \\
 & \quad \left. + a^3) l - 2b^3 a] + \sigma h^2 b h^3 [l^2 - l(a+2b) + 4ab] \right. \\
 & \quad \left. + \sigma h^2 b^2 u^3 (2a - l) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nenner: } N &= \Sigma S^2 \frac{S}{f} \\ &= \frac{1}{t^2 l^2 h^2 b^2 f_g} [2b^2 h^2 \frac{1}{3} l^3 + 2b^2 (h+h)^2 \frac{1}{3} (l-b)^3 + \gamma 2h^2 d^3 b (l-b) \\ &\quad + \gamma 2h^2 d^3 (l-b)^2 + \sigma 5h^3 h^2 b^2 + \sigma 2u^3 b^2 h^2 \\ &\quad + \sigma h^3 h^2 (2l^2 - 6lb + 5b^2) + \sigma 2y^3 h^2 l^2 + \gamma' d'^3 b h^2 l \\ &\quad + \sigma 4h^2 h^3 b^2 + \sigma 2h^2 h^3 (l^2 - 2lb)] \\ &= \frac{1}{t^2 l^2 h^2 b^2 f_g} [\frac{2}{3} b^2 h^2 l^3 + \frac{2}{3} b^2 (h+h)^2 (l-b)^3 + \gamma 2h^2 d^3 b (l-b) \\ &\quad + \sigma h^2 h^3 (10b^2 + 2l^2 - 6bl) + \sigma 2h^2 (b^2 u^3 + l^2 y^3) \\ &\quad + \gamma' h^2 lb d'^3 + \sigma 2h^2 h^3 (l^2 - 2lb + 2b^2)] \end{aligned}$$

$$M_h = \frac{Z}{N} \text{ und } R_l' = -R_l' M_h = -R_r' = + \frac{M_h}{l}$$

R_l^1 und R_r^1 ist der Einfluß der statischen Unbestimmtheit.

$$\begin{aligned} R_l^1 = -R_r^1 = -H \frac{\frac{1}{3} (h+h) h b^2 [2al^3 - 3(a^2 + b^2)l^2 + l(3ab^2 + 2b^3 + a^3)] + \sigma h^2 b^2 u^3 (2a-l) - 2b^3 a + \sigma h^2 b h^3 [l^2 - l(a+2b) + 4ab]}{\frac{2}{3} b^2 h^2 l^3 + \frac{2}{3} b^2 (h+h)^2 (l-b)^3 l + \gamma 2h^2 d^3 l^2 (l-b) + \gamma' h^2 l^2 b d'^3 + \sigma h^2 h^3 l (10b^2 + 2l^2 - 6bl) + \sigma 2h^2 l (b^2 u^3 + l^2 y^3) + \sigma 2h^3 h^2 (2b^2 + l^2 - 2bl)l} \end{aligned}$$

Für $l=8b$, $h=b$, $h=4b$, $t=b$, $d=d'=\sqrt{2}b$, $u=\sqrt{17}b$, $y=\sqrt{17}b$, $\sigma=1$, $\gamma=1,5$, $\gamma'=2$, ist, wenn für $\frac{a}{b}=a$ gesetzt wird:

$$R_l = -R_r = -H \frac{40a^3 - 960a^2 + 4882a + 6656}{847859}$$

Für $a=0$	beträgt	$R_l^1 = -$	6656 : 847859	mal	$H = 0,008 H$
„ $a=1$	„	$R_l^1 = -$	10618 : 847859	„	$H = 0,012 H$
„ $a=2$	„	$R_l^1 = -$	12900 : 847859	„	$H = 0,015 H$
„ $a=3$	„	$R_l^1 = -$	13742 : 847859	„	$H = 0,016 H$
„ $a=4$	„	$R_l^1 = -$	13384 : 847859	„	$H = 0,015 H$
„ $a=5$	„	$R_l^1 = -$	12066 : 847859	„	$H = 0,014 H$
„ $a=6$	„	$R_l^1 = -$	10028 : 847859	„	$H = 0,012 H$
„ $a=7$	„	$R_l^1 = -$	7510 : 847859	„	$H = 0,009 H$
„ $a=8$	„	$R_l^1 = -$	4752 : 847859	„	$H = 0,006 H$

Der maximale Zuwachs bzw. Abfall der Reaktion R_r bzw. R_l infolge erwähnter Vernachlässigung beträgt 0,016 H , also 1,6 ‰, während die Reaktion selbst sich zwischen 0,0 und 1,0 H bewegt.

Die angenäherte Berechnungsweise erscheint hier-
nach zulässig.

Die Gleichung $R_l^i = -R_r^i = \dots$ ist gleichzeitig die Gleichung der Einflußlinie der R_l^i -Werte.

Für volle Belastung mit w pro Längeneinheit berechnet sich:

$$R_l^i = -R_r^i = - \int_0^l w \frac{40 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 960 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4882 \left(\frac{a}{b}\right) + 6656}{847859} da$$

$$= - \frac{wb}{847859} \int_0^8 (40a^3 - 960a^2 + 4882a + 6566) da = -w \frac{b8}{847859}$$

$$[10 \cdot 8^3 - 320 \cdot 8^2 + 2441 \cdot 8 + 6656] = -wl \frac{10824}{847859} = -0,013 wl$$

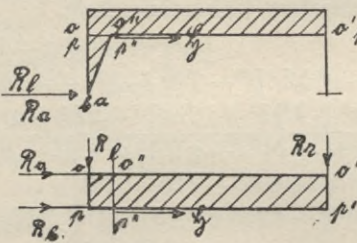


Fig. 34.

$= 2,6\%$ von R_l^i , da $R_l^i = -0,5 wl$.

Somit ist:

$$R_l = R_l^o + R_l^i = -0,5 wl - 0,013 wl = -0,513 wl,$$

während nach der Annäherung $R_l = 0,5 wl$ ist.

b) Längskräfte (Kräfte parallel zur x -Achse.) (Fig. 34.)

Die zu berechnende Brücke sei dieselbe wie im letzten Beispiel.

Bei o wirke eine Längskraft $+S$. Nach der Näherungsmethode müßte $R_a = -S$, $R_b = 0$, $R_l = 0$, $R_r = 0$ sein. Als statisch unbestimmte Größe wählen wir die Lagerkraft R_b .

Für den Zustand $R_b^o = 0$ ist $R_l^o = R_r^o = 0$, $R_a^o = -S$, die Werte der Stabkräfte $= S^o$.

Für den Zustand $R_b^i = -1$ ist $R_l^i = -R_r^i = +\frac{t}{l}$, $R_a^i = +1$, die Werte der Stabkräfte $= S^i$.

$$\text{Es ist dann } R_b = \frac{\sum S^o S^i \frac{s}{f}}{\sum S^i \frac{s}{f}}.$$

Zu bemerken ist, daß man die Werte S^i erhält, wenn man die Stabkräfte S^o vom vorigen Beispiel mit $-t$ multipliziert. Der Nenner kann mithin sofort hingeschrieben werden.

$$N = \Sigma S' \frac{s}{f} = \frac{1}{b^2 h^2 l^2 f_g} \left[\frac{2}{3} b^2 h^2 l^3 + \frac{2}{3} b^2 (h+h)^2 (l-b)^3 + \gamma 2 h^2 d^3 l (l-b) \right. \\ \left. + \sigma h^2 h^3 (10 b^2 + 2 l^2 - 6 b l) + \sigma 2 h^2 h^3 (l^2 - 2 l b + 2 b^2) \right. \\ \left. + \sigma 2 h^2 (b^2 u^3 + l^2 y^3) + \gamma' h^2 l b d^3 \right]$$

Um den Zähler zu berechnen, stellen wir die Kräfte tabellarisch zusammen. Tabelle siehe nächste Seite. Aus der Tabelle ergibt sich:

$$Z = \Sigma S' \frac{s}{f} = -\mathfrak{H} \frac{1}{l^2 h^2 b^2 f_g} \left[h^2 b^2 \frac{l^3}{3} + \frac{1}{3} h (h+h) (l-b)^3 b^2 \right. \\ \left. + \gamma h^2 d^3 (l-b) l + \sigma h^3 h^2 (2 b^2 + l^2 - 2 l b) \right. \\ \left. + \sigma h^2 h^3 (l^2 - 2 b l + 2 b^2) + \sigma h^2 y^3 l^2 \right]$$

Somit ist

$$R_b = -\mathfrak{H} \frac{\frac{1}{3} h^2 b^2 l^3 + \frac{1}{3} (h+h) h (l-b)^3 b^2 + \gamma h^2 d^3 (l-b) l + \sigma h^3 h^2 (2 b^2 + l^2 - 2 l b) + \sigma h^2 h^3 (l^2 - 2 b l + 2 b^2) + \sigma h^2 y^3 l^2}{\frac{2}{3} b^2 h^2 l^3 + \frac{2}{3} b^2 (h+h)^2 (l-b)^3 + \gamma 2 h^2 d^3 l (l-b) + \gamma' h^2 l b d^3 + \sigma 2 h^2 h^3 (10 b^2 + 2 l^2 - 6 b l) + \sigma 2 h^2 h^3 (l^2 - 2 l b + 2 b^2) + \sigma 2 h^2 (b^2 u^3 + l^2 y^3)}$$

Mit Einsetzung der einzelnen Werte, wie im vorigen Beispiele ergibt sich:

$$R_b = -0,061 \mathfrak{H} \quad \text{gegenüber } R_b = 0 \quad \text{nach der Näherungsmethode,}$$

$$R_a = -(1 - 0,061) \mathfrak{H} = -0,939 \mathfrak{H} \quad \text{gegenüber } R_a = 1 \cdot \mathfrak{H} \quad \text{nach der Näherungsmethode.}$$

Auch in diesem Falle sind die Abweichungen der Näherungsmethode ziemlich gering.

Greift die Last \mathfrak{H} am anderen Ende der Brücke an, so wird die Spannkraft des Untergurtes um $+\mathfrak{H}$ größer, der Zähler erhält noch das Glied: $-\mathfrak{H} \frac{(h+h)(l-b)^2}{2 l h f_g}$, und die Differenz gegen die scharfe Berechnung wird um $0,003 \mathfrak{H}$ größer.

Stäbe	S^0	S'	$\frac{s}{f}$	$S^0 S' \frac{s}{f}$	$S'^2 \frac{s}{f}$
Obergurt hinten	$-\mathfrak{H} \frac{h l - x}{l h} \Big _o^l$	$\frac{h (l-x)}{l h} \Big _o^l$	$\frac{dx}{f_g}$	$-\mathfrak{H} \frac{h^2 (l-x)^2 dx}{l^2 h^2 f_g} \Big _o^l$	
Untergurt hinten	$+\mathfrak{H} \frac{h l - x}{l h} \Big _b^l$	$-\frac{(h+h)(l-x)}{l h} \Big _b^l$	"	$-\mathfrak{H} \frac{h (h+h)(l-x)^2 dx}{l^2 h^2 f_g} \Big _b^l$	
Diagonale hinten, rechts von o'	$-\mathfrak{H} \frac{h d}{l h}; \left(\frac{l-b}{b}\right) \text{ mal}$	$+\frac{h d}{l h}$	$\frac{d}{f_d}$	$-\mathfrak{H} \frac{h^2 d^3}{l^2 h^2 f_d}$	

Stäbe	S^0	S'	$\frac{s}{f}$	$S^0 S' \frac{s}{f}$	$S'^2 \frac{s}{f}$
Desgl. links von o'	$+\$ \frac{h(l-b)d}{lbh}$	$-\frac{h(l-b)d}{bth}$	$\frac{d}{f_d}$	$-\$ \frac{h^2(l-b)^2 d^3}{l^2 b^2 h^2 f_d}$	
Stützen- pfosten rechts hinten	$-\$ \frac{h}{l}$	$+\frac{h}{l}$	$\frac{h}{f_s}$	$-\$ \frac{h^3}{l^2 f_s}$	
Desgl. links hinten	$-\$ \frac{h(l-b)}{lb}$	$+\frac{h(l-b)}{lb}$	"	$-\$ \frac{h^3(l-b)^2}{l^2 b^2 f_s}$	
Stützen- strebe y	$+\$ \frac{y}{b}$	$-\frac{y}{b}$	$\frac{y}{f_s}$	$-\$ \frac{y^3}{b^2 f_s}$	
Endpfosten hinten rechts	$-\$ \frac{h}{l}$	$+\frac{h}{l}$	$\frac{h}{f_s}$	$-\$ \frac{h^2 h}{l^2 f_s}$	
Desgl. links	$-\$ \frac{h(l-b)}{lb}$	$+\frac{h(l-b)}{lb}$	"	$-\$ \frac{h^2(l-b)^2 h}{l^2 b^2 f_s}$	

$$\text{Zähler} = \Sigma S^0 S' \frac{s}{f} = -\$ \frac{1}{l^2 b^2 h^2 f_g} \left[\frac{1}{3} h^2 b^2 l^3 + \frac{1}{3} (h+h) h (l-b)^3 b^2 + \gamma h^2 d^3 (l-b) l + \sigma h^3 h^2 (2b^2 + l^2 - 2lb) + \sigma h^2 h^3 (l^2 - 2lb + 2b^2) + \sigma h^2 y^3 l^2 \right].$$

II. Abschnitt.

Brücken mit zwei horizontalen und einem vertikalen Hauptträger.

1. Allgemeines.

§ 31. Diese statisch bestimmten Brücken zeichnen sich dadurch aus, daß die Horizontalverbände auch infolge lotrechter Lasten Spannkkräfte erleiden. Sie bilden für gewisse Zwecke ein sehr gut brauchbares System und wurden schon mit Erfolg angewandt. (Unter anderem für die Schwebbahn Elberfeld-Barmen, Rieppelträger.)

Prinzipiell bieten diese Träger nichts Neues. Die in den Ebenen der Querrahmen wirkenden Kräfte werden durch drei Reaktionen im Gleichgewicht gehalten. Die drei Reaktionen liegen in den Schnittgeraden der Querrahmenebene mit den drei verspannten Wänden. Die Reaktionen, in ihrem Wirkungssinne umgekehrt, belasten die drei Wände. Die Längswände übertragen die Kräfte auf die Endquerrahmen, und diese auf die Auflagerpunkte.

Die Lagerung der Brücke erfolgt, wie bisher in sieben Punkten mit je einer Auflagerbedingung. Von diesen sieben Punkten können mehrere zusammenfallen. In vier Punkten gibt es lotrechte, in drei Punkten wagerechte Auflager. Von den letzteren wirkt zunächst eines in der x -Richtung und zwei haben die y -Richtung. Die Bezeichnungen und Lage der Lagerpunkte bleibt im großen ganzen wie bisher. Der Wert t ist nun gleich Null.

2. Einfluß der lotrechten Kräfte.

§ 32. a) Die Verspannungen sind eben.

Eine lotrechte Kraft P , die in einem Querrahmen angreift und den Abstand y vom vertikalen Hauptträger hat, belastet den vertikalen Hauptträger mit der Kraft: $V = +P$, die zwei Verspannungen mit den Kräften: $H_o = -H_u = -P \frac{y}{\mathfrak{z}}$, wobei \mathfrak{z} der Abstand der beiden Verspannungen ist.

Ist die Einflußlinie einer statischen Größe U des von der Brücke losgelöst gedachten vertikalen Hauptträgers ausdrückbar durch $u = f(x)$, dann ist die Gleichung der Einflußfläche dieser Größe für die Brücke ebenfalls

$$34) \quad u = f(x). \quad u // z$$

Die Einflußfläche ist ein Zylinder mit zur y -Achse parallelen Erzeugenden. Die Leitlinie des Zylinders ist $u = f(x)$, $y = 0$; bei statisch bestimmten Fachwerken besteht die Zylinderfläche aus Ebenen.

Ist die Einflußlinie einer statischen Größe U der oberen Horizontalverspannung, die von der Brücke losgelöst gedacht werden möge, ausdrückbar durch $u = f(x)$, dann ist die Gleichung der Einflußfläche

$$35) \quad u = -f(x) \frac{y}{\mathfrak{z}}.$$

Diese Fläche ist ein Konoid mit zur $u-y$ -Ebene parallelen Erzeugenden. Die Leitgerade des Konoids ist die x -Achse (Schnittgerade der Ebene des Hauptträgers mit der $x-y$ -Ebene): $u = 0$, $y = 0$.

Die zweite Leitlinie hat die Gleichung $u = -\frac{1}{\mathfrak{z}} f(x)$, $y = 1$. Das Konoid besteht bei konstantem \mathfrak{z} und statisch bestimmten Fachwerken aus hyperbolischen Paraboloiden.

Die Größen und Einflußlinien der Auflagerdrucke bleiben dieselben, wie bei Brücken mit zwei vertikalen Hauptträgern und einer Horizontalverspannung.

β) Die Horizontalverspannung ist gebogen.

Die Berechnung ist nach dem Aufsatz in Abschnitt I. 3. β durchzuführen.

Zunächst wird die Horizontalverspannung gerechnet, indem man ihre Projektion auf die Sehnenebene behandelt. Dann werden die so erhaltenen Stabkräfte, welche nichts anderes bedeuten, als die Projektionen der wirklichen Stabkräfte auf die Sehnenebene, mit der Sekante des Neigungswinkels des betreffenden Stabes zur Sehnenebene multipliziert.

In den Gurtknotenpunkten der gebogenen Verspannung entstehen die lotrechten Zusatzkräfte: $\pm \frac{1}{t} M_h \frac{d^2 z}{dx^2} dx$, welche ein Moment $M_h \frac{d^2 z}{dx^2} dx$ bilden. Dieses Moment wird durch den Querrahmen auf die beiden Verspannungen in Form zweier Kräfte $\pm \frac{1}{\delta} M_h \frac{d^2 z}{dx^2} dx$ übertragen.

Auf Berücksichtigung dieser letztgenannten Kräfte, welche nur die Horizontalverspannungen und nicht den vertikalen Träger belasten, wird sich gewöhnlich die Berechnung beschränken. Genau genommen müßte man beachten, daß durch diese Zusatzkräfte 1. Ordnung, noch weitere Zusatzkräfte 2. Ordnung bedingt werden usw., die jedoch sehr gering sind und vernachlässigt werden können.

3. Querkräfte (Kräfte der y -Richtung).

§ 33. Diese Kräfte werden durch die Querrahmen auf die beiden Verspannungen gebracht, die sie dann auf die Endquerrahmen übertragen. Der vertikale Träger wird nicht belastet.

Liegt die $x - y$ -Ebene in der oberen Verspannung (bzw. wenn diese gebogen ist, in deren Sehnenebene), und hat die Querkraft H , die Applikate z , so beträgt der Anteil von H , der auf die obere Verspannung wirkt: $+ H \frac{\delta + z}{\delta}$ und auf die untere Verspannung: $- H \frac{z}{\delta}$.

Die Einflußfläche einer Größe U der oberen bzw. der unteren Verspannung hat die Gleichung ($u // y$).

$$36) \quad u = \frac{z + \delta}{\delta} f(x) \quad \text{bzw.} \quad u = - \frac{z}{\delta} f(x),$$

wenn $u = f(x)$ die Gleichung der Einflußlinie der Größe U ist, bei von der Brücke losgelöst gedachter Lage der Verspannung.

Diese Flächen sind Konoide. Die Leitlinien sind $u=0, z=-\frac{1}{3}$ und $u=f(x), z=0$ für das erste Konoid, bzw. $u=0, z=0$ und $u=f(x), z=-\frac{1}{3}$ für das zweite Konoid. Die Erzeugenden sind parallel zur $y-z$ -Ebene.

Wie man sieht, sind die Leitlinien für das erste (bzw. für das zweite) Konoid:

1. Die Projektion der unteren (bzw. oberen) Verspannung auf die $z-x$ -Ebene

2. Die Linien $u=f(x)$, die von der Projektion der oberen (bzw. der unteren) Verspannung auf die $z-x$ -Ebene in den projizierenden Ebenen aufgetragen werden.

Ist eine von den Verspannungen (oder beide) gebogen, dann erhalten sie Zusatzkräfte von der Größe $\pm \frac{M_h}{3} \frac{d^2 z}{dx^2} dx$, die ihrerseits

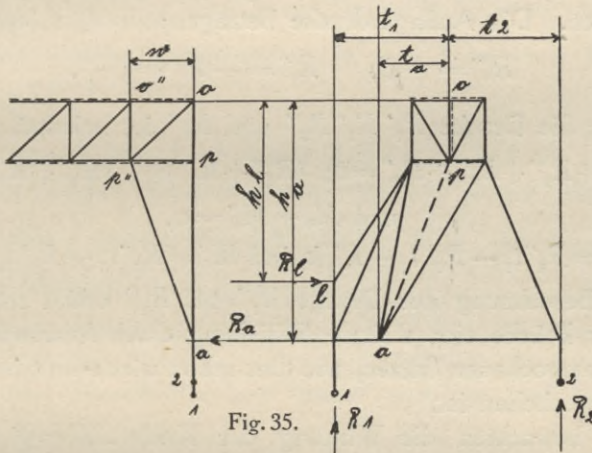


Fig. 35.

weitere Zusatzkräfte höhere Ordnung hervorrufen, welche letztere jedoch verschwindend klein sind.

Die Auflagerdrucke sind bei diesen Brücken genau so groß, wie bei den Brücken mit zwei vertikalen und einer horizontalen Tragwand.

4. Längskräfte (Kräfte der x -Richtung).

§ 34. Die feste Stütze habe folgende Gestaltung. Der Punkt a ist mit dem Hauptträger durch ein Verbindungsglied, das nach Fig. 35 ausgebildet werden möge, verbunden. Dieses Verbindungsglied mündet in zwei Querrahmen der Brücke, deren Abstand w sei.

Der Koordinatenursprung o liege in der Ecke, die vom vertikalen Hauptträger, dem linken Endquerrahmen und der oberen Verspannung gebildet wird.

Man reduziere die Längskräfte auf den Punkt o in bekannter Weise. Es entsteht im Punkte o eine Längskraft $\mathfrak{H} = +\Sigma H$ und in den Lagerpunkten der Brücke folgende Reaktionen:

$$37) \left\{ \begin{array}{ll} R_r' = -R_l' = \frac{1}{l} \Sigma H y, & R_a' = 0, \\ R_1' = -\Sigma H \frac{z(t_2 - y) + y h_l}{l(t_1 + t_2)}, & R_2' = -\Sigma H \frac{z(t_1 + y) - y h_l}{l(t_1 + t_2)}, \\ R_3' = +\Sigma H \frac{z(t_4 - y) + y h_r}{l(t_3 + t_4)}, & R_4' = +\Sigma H \frac{z(t_3 + y) - y h_r}{l(t_3 + t_4)}. \end{array} \right.$$

Der zweite Teil der Aufgabe, nämlich die Berechnung des Einflusses einer im Punkte o vereinigten Längskraft \mathfrak{H} , bleibt noch zu erledigen. Die Auflagerdrucke betragen:

$$38') \quad R_a'' = -\mathfrak{H}, \quad R_r'' = -R_l'' = \mathfrak{H} \frac{t_a}{l}.$$

Über die Drucke $R_1'' R_2'' R_3''$ und R_4'' ist bekannt, daß

$$38'') \left\{ \begin{array}{l} R_1'' + R_2'' + R_3'' + R_4'' = 0; \quad (R_1'' + R_2'') = -(R_3'' + R_4'') = -\mathfrak{H} \frac{h_a}{l} \\ \text{und } M_o + M_o' = 0, \end{array} \right.$$

wobei $M_o = R_1'' t_1 - R_2'' t_2 - R_l'' h_l$ und $M_o' = R_3'' t_3 - R_4'' t_4 - R_r'' h_r$.

Zur Berechnung der Drucke R_1'' bis R_4'' erhält man aus der Bauart der Brücke eine weitere Beziehung durch Anwendung des im § 25 ausgesprochenen Satzes, wie dies schon wiederholt bei ähnlicher Aufgabe geschehen ist.

Wir betrachten die Wirkung der Kraft $R_a'' = -\mathfrak{H}$ auf die feste Stütze der Brücke. In den Punkten o o'' p und p'' (es seien dies die vier Eckpunkte zwischen dem vertikalen Hauptträger, den zwei Querrahmen an der festen Stütze und den zwei horizontalen Verspannungen) entstehen als Folge der Kraft R'' , folgende Kräfte:

$$\text{in } o: \quad X_o = R_a''; \quad Y_o = -R_a'' \frac{t_a}{w} - R_a'' \alpha, \quad Z_o = -R_a'' \frac{h_a}{w},$$

$$\text{„ } o'': \quad Y_{o''} = -R_a'' \frac{t_a}{w} + R_a'' \alpha, \quad Z_{o''} = +R_a'' \frac{h_a}{w},$$

$$\text{„ } p: \quad Y_p = +R_a'' \alpha,$$

$$\text{„ } p'': \quad Y_{p''} = -R_a'' \alpha.$$

„ α “ hat hier eine ähnliche Bedeutung, wie früher bei Abschnitt I, 4 α und ff.

$X_a = R_a'' = -\mathfrak{H}$ und die Kraft \mathfrak{H} , die gleichfalls in o angreift, heben sich auf. Das Moment des Kräftepaars Z_o und Z_o'' wird durch die vertikale Tragwand auf die Punkte o und o' übertragen, wo dadurch die Kräfte entstehen: $\mp R_a \frac{h_a}{l} = \pm \mathfrak{H} \frac{h_a}{l}$. Diese Kräfte erzeugen die Auflagerdrucke

$$39) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{in 1.} & -\mathfrak{H} \frac{h_a}{l} \frac{t_2}{t_1+t_2}, \\ \text{in 3.} & +\mathfrak{H} \frac{h_a}{l} \frac{t_4}{t_3+t_4}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{in 2.} & -\mathfrak{H} \frac{t_1 h_a}{l(t_1+t_2)}, \\ \text{in 4.} & +\mathfrak{H} \frac{h_a t_3}{l(t_3+t_4)}. \end{array} \right.$$

Das Kräftepaar Y_o und Y_o'' bildet ein Moment, das durch die obere Horizontalverspannung auf die Punkte o und o' übertragen wird.

In diesen Punkten entstehen dadurch die Kräfte $\pm \mathfrak{H} \frac{t_a}{l} \pm \mathfrak{H} \frac{\alpha w}{l}$.

Ebenso entstehen infolge des Kräftepaars Y_p , Y_p'' in den Ebenen der unteren Verspannung, in den Punkten p und p' die Kräfte $\mp \mathfrak{H} \frac{\alpha w}{l}$.

Die zwei Kräfte in o und p bzw. in o' und p' , die in den Ebenen der beiden Endquerrahmen wirken, lassen sich ersetzen durch die zwei wagerechten Einzelkräfte in o und o' : $\pm \mathfrak{H} \frac{t_a}{l}$ und die beiden Momente $-M_o$ und $-M_o'$:

$$-M_o = +M_o' = \mathfrak{H} \frac{\alpha w \mathfrak{H}}{l}.$$

Die zwei Einzelkräfte in o und o' und die zwei Momente ergeben die Auflagerdrucke:

$$R_l'' = -R_r'' = -\mathfrak{H} \frac{t_a}{l}, \quad R_1''' = -R_2''' = -\mathfrak{H} \frac{t_a h_l}{l(t_1+t_2)} - \mathfrak{H} \frac{\alpha w \mathfrak{H}}{l(t_1+t_2)},$$

$$R_3''' = -R_4''' = +\mathfrak{H} \frac{t_a h_r}{l(t_3+t_4)} + \mathfrak{H} \frac{\alpha w \mathfrak{H}}{l(t_3+t_4)}.$$

Somit sind die gesamten Auflagerdrucke, hervorgerufen durch eine Kraft \mathfrak{H} , im Punkte o :

$$40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} R_r'' = -R_l'' = +\mathfrak{H} \frac{t_a}{l}; & R_a'' = -\mathfrak{H}; \\ R_1'' = +\mathfrak{H} \frac{-t_2 h_a - t_a h_l - \alpha w \mathfrak{H}}{l(t_1+t_2)}; & R_2'' = +\mathfrak{H} \frac{-t_1 h_a + t_a h_l + \alpha w \mathfrak{H}}{l(t_1+t_2)}; \\ R_3'' = +\mathfrak{H} \frac{t_4 h_a + t_a h_r + \alpha w \mathfrak{H}}{l(t_3+t_4)}; & R_4'' = +\mathfrak{H} \frac{t_3 h_a - t_a h_r - \alpha w \mathfrak{H}}{l(t_3+t_4)}. \end{array} \right.$$

6*

Somit wäre der zweite Teil der Aufgabe erledigt. Zusammengefaßt betragen die Auflagerdrucke $R = R' + R''$.

$$41) \begin{cases} R_a = - \Sigma H, & R_r = - R_l = \frac{1}{l} \Sigma H (t_a + y) \\ R_1 = - \frac{1}{l(t_1 + t_2)} \Sigma H [z(t_2 - y) + h_l y + t_2 h_a + t_a h_l + \alpha w \delta] \\ R_2 = - \frac{1}{l(t_1 + t_2)} \Sigma H [z(t_1 + y) - h_l y + t_1 h_a - t_a h - \alpha w \delta] \\ R_3 = + \frac{1}{l(t_3 + t_4)} \Sigma H [z(t_4 - y) + h_r y + t_4 h_a + t_a h_r + \alpha w \delta] \\ R_4 = + \frac{1}{l(t_3 + t_4)} \Sigma H [z(t_3 + y) - h_r y + t_3 h_a - t_a h_r - \alpha w \delta]. \end{cases}$$

Ist eine oder beide Verspannungen gebogen, so sind noch die dadurch entstehenden Zusatzkräfte erster Ordnung $\pm \frac{M_h}{\delta} \frac{d^2 z}{dx^2} dx$, die die Horizontalverspannungen belasten, zu berücksichtigen. Diese Zusatzkräfte vermehren (algebraisch) die Momente M_0 und M_0' um die Größen:

$$\int_0^l \frac{M_h}{\delta} \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{l-x}{l} \delta_l dx \text{ bzw. } \int_0^l \frac{M_h}{\delta} \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{l-x}{l} dx \cdot \delta_r,$$

wobei δ_l und δ_r die Abstände der Horizontalverspannungen an den Endquerrahmen bedeuten.

5. Brücken mit zwei wagerechten Auflagern der x -Richtung und einem Auflager der y -Richtung.

§ 35. Die Auflagerdrucke der x -Richtung greifen in den Punkten a und b an. Die Koordinaten dieser Punkte seien, wie früher; $o, -t_a, -h_a$; und $o, +t_b, -h_b$.

Das rechte wagerechte Auflager der y -Richtung (R_r) fällt nun fort.

Für den Einfluß der lotrechten Kräfte ist es gleichgültig, wie die drei wagerechten Auflager gerichtet sind. Es bleibt somit der Punkt 2 dieses Absatzes für diese Kräfte gültig.

Es handelt sich lediglich um den Einfluß der wagerechten Kräfte H .

Man reduziere alle wagerechten Kräfte auf die Punkte o und o'' .
Dadurch entstehen im Punkte o die Kräfte:

$$\mathfrak{H}_y = + \Sigma H \sin \varphi \qquad \mathfrak{H}_x = + \Sigma H \cos \varphi$$

ferner in den Punkten o und o'' ein Kräftepaar mit zur y -Richtung parallelen Kräften

$$\mp \Sigma H \frac{1}{w} (x \sin \varphi - y \cos \varphi).$$

φ ist der Neigungswinkel der Richtungslinie der Kraft H zur x -Achse.

Gleichzeitig entstehen die Auflagerdrucke:

$$\text{im Punkte 1: } - \Sigma H \frac{\cos \varphi \cdot z (t_2 - y) + \sin \varphi \cdot z \cdot (l - x)}{l(t_1 + t_2)}$$

$$\text{„ „ 2: } - \Sigma H z \frac{\cos \varphi \cdot (t_1 + y) - \sin \varphi \cdot (l - x)}{l(t_1 + t_2)}$$

$$\text{„ „ 3: } + \Sigma H z \frac{\cos \varphi \cdot (t_4 - y) - \sin \varphi \cdot x}{l(t_3 + t_4)}$$

$$\text{„ „ 4: } + \Sigma H z \frac{\cos \varphi \cdot (t_3 + y) + \sin \varphi \cdot x}{l(t_3 + t_4)}$$

Bringt man noch die Kraft \mathfrak{H} auf die Auflagerpunkte, so entstehen insgesamt beim ersten Teil der Aufgabe die Reaktionen:

$$42) \left\{ \begin{array}{l} R'_a = 0 \quad R'_b = 0 \quad R'_l = - \Sigma H \sin \varphi \\ R'_1 = - \Sigma H \frac{z}{l(t_1 + t_2)} [(t_2 - y) \cos \varphi \mp (l - x) \sin \varphi] - \frac{h_l}{t_1 + t_2} \Sigma H \sin \varphi \\ R'_2 = - \Sigma H \frac{z}{l(t_1 + t_2)} [(t_1 + y) \cos \varphi - (l - x) \sin \varphi] + \frac{h_l}{t_1 + t_2} \Sigma H \sin \varphi \\ R'_3 = + \Sigma H \frac{z}{l(t_3 + t_4)} [(t_4 - y) \cos \varphi - x \sin \varphi] \\ R'_4 = + \Sigma H \frac{z}{l(t_3 + t_4)} [(t_3 + y) \cos \varphi + x \sin \varphi]. \end{array} \right.$$

Es bleibt noch der zweite Teil der Aufgabe zu erledigen, nämlich die Überführung der Kraft $\mathfrak{H}_x = \Sigma H \cdot \cos \alpha$ und des Kräftepaares: $M_h = \Sigma H (x \sin \varphi - y \cos \varphi)$.

Infolge dieser Kräfte entstehen sieben Auflagerdrucke R'' .

$$43) R''_l = 0; R''_a = - \mathfrak{H}_x \frac{t_b}{t_a + t_b} - M_h \frac{1}{t_a + t_b}; R''_b = - \mathfrak{H}_x \frac{t_a}{t_a + t_b} + M_h \frac{1}{t_a + t_b}$$

Zur Bestimmung der anderen vier Drucke R_1'' bis R_4'' dienen die Gleichungen:

$$44) \left\{ \begin{array}{l} R_1'' + R_2'' + R_3'' + R_4'' = 0; \quad -(R_3'' + R_4'')l + \mathfrak{H} h_a + R_b''(h_a - h_b) = 0 \\ \text{und } M_o + M_o' = 0 \end{array} \right.$$

wobei $M_o = R_1'' t_1 - R_2'' t_2$ und $M_o' = R_3'' t_3 - R_4'' t_4$.

Eine weitere Beziehung ergibt sich aus der Bauart der Brücke bei Anwendung des Satzes vom § 25 wie in früheren Fällen.

Die Kräfte R_a'' und R_b'' erzeugen in den Punkten o , o' , p und p'' die Kräfte:

$$\text{in } o: X_o = R_a'' + R_b''; \quad Y_o = -R_a'' \frac{t_a + \alpha w}{w} + R_b'' \frac{t_b + \beta w}{w};$$

$$Z_o = -R_a'' \frac{h_a}{w} - R_b'' \frac{h_b}{w}$$

$$\text{in } o'': \quad Y_o'' = +R_a'' \frac{t_a + \alpha w}{w} - R_b'' \frac{t_b + \beta w}{w};$$

$$Z_o'' = +R_a'' \frac{h_a}{w} + R_b'' \frac{h_b}{w}$$

$$\text{in } p: \quad Y_p = +R_a'' \frac{\alpha w}{w} - R_b'' \frac{\beta w}{w}$$

$$\text{in } p'': \quad Y_p'' = -R_a'' \frac{\alpha w}{w} - R_b'' \frac{\beta w}{w}.$$

Ersetzt man die Größen R_a'' und R_b'' durch ihre Werte und beachtet, daß im Punkte o eine Kraft \mathfrak{H}_x und in der oberen Verspannung das Moment M_h wirkt, so erhält man:

in den Punkten o und o' die vertikalen Kräfte

$$\pm V = \pm \left[\mathfrak{H}_x \frac{t_a h_b + t_b h_a}{(t_a + t_b) l} + \frac{M_h (h_a - h_b)}{l (t_a + t_b)} \right]$$

und die Momente $-M_o$ und $-M_o'$

$$-M_o = +M_o' = \frac{\mathfrak{H}_x w \delta (\alpha t_b - \beta t_a) + M_h w \delta (\alpha + \beta)}{l (t_a + t_b)}.$$

Diese Einzelkräfte und Momente ergeben die Auflagerdrucke:

$$45) \left\{ \begin{array}{l} R_1'' = -\frac{V t_2}{t_1 + t_2} + \frac{M_o}{t_1 + t_2} \quad R_2'' = -\frac{V t_1}{t_1 + t_2} - \frac{M_o}{t_1 + t_2} \\ R_3'' = -V \frac{t_4}{t_3 + t_4} + \frac{M_o'}{t_3 + t_4} \quad R_4'' = +\frac{V t_3}{t_3 + t_4} - \frac{M_o'}{t_3 + t_4} \end{array} \right.$$

Faßt man alle Auflagerdrucke zusammen ($R = R' + R''$), so erhält man:

$$46) \left\{ \begin{aligned} R &= -\mathfrak{H}_y; R_a = -\mathfrak{H}_x \frac{t_b}{t_a+t} - \frac{M^h}{t_a+t_b}; R_b = -\mathfrak{H}_x \frac{t_a}{t_a+t_b} + \frac{M^h}{t_a+t_b}; \\ R_1 &= -\Sigma H \cos \varphi \frac{z(t_2-y)}{l(t_1+t_2)} - \mathfrak{H}_y \frac{h_1}{t_1+t_2} - V \frac{t_2}{t_1+t_2} + M_o \frac{1}{t_1+t_2} - \Sigma H \sin \varphi \frac{z(l-x)}{l(t_1+t_2)} \\ R_2 &= -\Sigma H \cos \varphi \frac{z(t_1+y)}{l(t_1+t_2)} + \mathfrak{H}_y \frac{h_1}{t_1+t_2} - V \frac{t_1}{t_1+t_2} - M_o \frac{1}{t_1+t_2} + \Sigma H \sin \varphi \frac{z(l-x)}{l(t_1+t_2)} \\ R_3 &= +\Sigma H \cos \varphi \frac{z(t_4-y)}{l(t_3+t_4)} + V \frac{t_4}{t_3+t_4} + M_o' \frac{1}{t_3+t_4} - \Sigma H \sin \varphi \frac{zx}{l(t_3+t_4)} \\ R_4 &= +\Sigma H \cos \varphi \frac{z(t_3+y)}{l(t_3+t_4)} + V \frac{t_3}{t_3+t_4} - M_o' \frac{1}{t_3+t_4} + \Sigma H \sin \varphi \frac{zx}{l(t_3+t_4)}. \end{aligned} \right.$$

$$47) \left\{ \begin{aligned} \text{Hierbei ist:} \quad \mathfrak{H}_x &= \Sigma H \cos \varphi \quad \mathfrak{H}_y = \Sigma H \sin \varphi \\ M_h &= \Sigma H (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \quad V = \mathfrak{H}_x \frac{t_a h_b + t_b h_a}{l(t_a+t_b)} + M_h \frac{h_a - h_b}{l(t_a+t_b)} \\ M_o &= -M_o' = -\frac{\mathfrak{H}_x w \frac{1}{2} (\alpha t_b - \beta t_a) + M_h w \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{l(t_a+t_b)}. \end{aligned} \right.$$

α und β haben hier ähnliche Bedeutung wie früher.

7. Brücken mit vier wagerechten Auflagern.

§ 36. Die meisten Brücken haben zwei wagerechte Auflager der x -Richtung und zwei der y -Richtung. Diese Fälle gehören eigentlich zu den statisch unbestimmten Brücken; da es sich aber um sekundäre Kräfte handelt, wird die Unbestimmtheit gewöhnlich nicht beachtet und die Berechnung so durchgeführt, daß die wagerechten Kräfte der y -Richtung nur durch die zu ihnen parallelen Auflager aufgenommen gedacht werden, während man die anderen zwei Auflager als nicht bestehend betrachtet. Ebenso läßt man die Kräfte der x -Richtung durch die Auflager der x -Richtung übertragen.

Eine genaue Berechnung ist ohne weiteres durchführbar, jedoch wird die angenäherte Berechnungsart zumeist recht gute Werte ergeben. Siehe auch § 30.

Bemerkung 1.

Ein vom Schreiber dieser Zeilen ausgeführtes Beispiel einer großen Förderbrücke mit zwei horizontalen und einem vertikalen Träger zeigt Fig. 36. Dieser Träger hat noch die Eigentümlichkeit,

daß der Obergurt des Hauptträgers aufgelöst ist und durch die obere Verspannung mit ihren zwei Gurten ersetzt wurde. Der Zweck dieser Maßnahme war, einen Obergurt zu sparen, da rechts außen ja doch eine schwere Hängebahnschiene angebracht werden mußte. Der

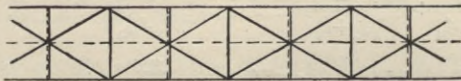
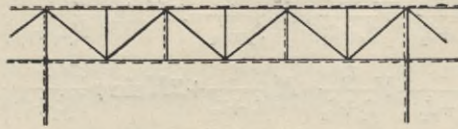


Fig. 36.

Träger ist sehr leicht (siehe „Fördertechnik“ 1911, Heft 5 und 6).¹⁾ Die Brücke wurde in einer Länge von 750 m, als Gerberträger ausgeführt.

Bemerkung 2.

Hierher gehören auch verwandte Konstruktionen, wie Dreiecksträger mit drei verspannten Wänden, die ein dreieckiges Prisma bilden. Im statischen Sinne

bieten sie nach dem Vorausgegangenen nichts Neues.

III. Abschnitt.

Durchbiegung von Brücken.

§ 37. Allgemeines. Wirken auf eine Brücke allerlei Kräfte, so ist der Weg eines Punktes m der Brücke in der Richtung mm' gleich

$$48) \delta_m = \Sigma S S' \frac{s}{E f} + L + \Sigma S' \epsilon t s.$$

Dabei ist:

S die wirkliche Stabkraft eines Stabes;

S' die Stabkraft des Stabes für die Belastung 1, die im Punkte m in Richtung mm' wirkt (Belastungseinheit des Punktes m);

s , F und E die Länge, Querschnittsfläche des prismatischen Stabes und Elastizitätsmodul;

¹⁾ Der Titel des erwähnten Aufsatzes in der „Fördertechnik“ lautet: Beitrag zur theoretischen Gewichtsbestimmung von Brücken, insbesondere für Verladezwecke. Sonderabdruck erschienen.

L die virtuelle Arbeit der Auflagerdrucke bei der Belastungseinheit des Punktes m und der wirklichen Verschiebung der Auflagerpunkte;

$\varepsilon t s$ die Verlängerung des Stabes infolge Temperaturerhöhung um t^0 C, ε = linearer Wärmeausdehnungskoeffizient.

Der erste Ausdruck zeigt den Einfluß der elastischen Formänderung des Fachwerkes, L ist der Einfluß der Nachgiebigkeit der Widerlager, und das dritte Glied zeigt den Einfluß der Temperaturerhöhung.

Unter Weg eines Punktes m in Richtung mm' versteht man die Projektion des tatsächlichen Weges auf die Richtung mm' .

Mit Hilfe der obigen Gleichung kann man jede gesuchte Verschiebung berechnen.

Die Summe erstreckt sich auf alle notwendigen Stäbe des Systems.

In der nachfolgenden Betrachtung wird die Nachgiebigkeit der Widerlager und die Temperaturänderung nicht berücksichtigt. Da die drei Ausdrücke von einander unabhängig sind, kann man die einzelnen Einflüsse getrennt rechnen.

§ 38. Ebenes Parallelfachwerk. Bevor auf die elastische Deformation der Brücke eingegangen wird, sei die Durchbiegung eines ebenen parallelen Fachwerkträgers abgeleitet. Es sei h die Trägerhöhe, l die Trägerlänge, $b = \frac{l}{n}$ die überall gleiche Feldweite. Die Last P greife bei $x = a$ an. Sie erzeugt am Angriffsort eine Durchbiegung δ .

$\delta = \Sigma P S^2 \frac{s}{E f}$, wo S die Stabkraft ist, hervorgerufen durch die Last 1 am Durchbiegungsorte. Der Träger sei ein Strebenfachwerk. Die Stabkräfte seien tabellarisch zusammengestellt:

Gurt oben links von P :	$S = -\frac{l-a}{l} \frac{x}{h}$	$\frac{s}{f} = \frac{dx}{f_g}$
" " rechts " P :	$-\frac{a}{l} \frac{l-x}{h}$	$\frac{dx}{f_g}$
" unten links " P :	$+\frac{l-a}{l} \frac{x}{h}$	$\frac{dx}{f_g}$
" " rechts " P :	$+\frac{a}{l} \frac{l-x}{h}$	$\frac{dx}{f_g}$
Diagonale links " P :	$+\frac{l-a}{l} \frac{x}{h}$	$\frac{d}{f_d}$
" rechts " P :	$-\frac{a}{l} \frac{d}{h}$	$\frac{d}{f_d}$

$$\delta = \Sigma S^2 \frac{s}{f} = \frac{P}{Ef_g} \left[2 \frac{(l-a)^2}{l^2 h^2} \int_0^a x^2 dx + 2 \frac{a^2}{l^2 h^2} \int_a^l (l-x)^2 dx \right]$$

$$+ \frac{P}{E f_a} \frac{d^3}{l^2 h^2} \left[\frac{(l-a)^2 a}{b} + \frac{a^2 (l-a)}{b} \right]$$

49) $\delta = P \frac{2}{3} \frac{(l-a)^2 a^2}{l h^2 f_g E} + P \frac{a(l-a) d^3}{l h^2 b f_a E}$.

Der erste Ausdruck zeigt den Einfluß der Gurte auf die Durchbiegung, der zweite den Einfluß der Diagonalen.

Es sei $l = 8b$, $h = b$, $f_g = f_a = f$, $a = 3b$, $d = \sqrt{2}b$, dann ist $\delta = P \frac{b}{E f} (18,75 + 5,25)$.

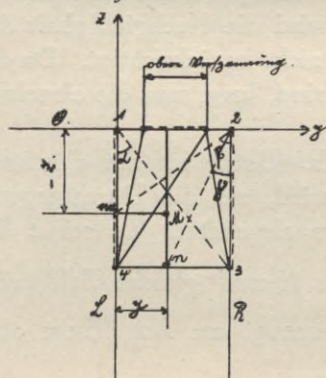


Fig. 37a.

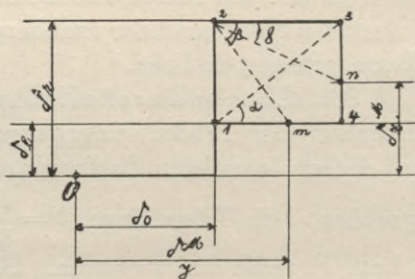


Fig. 37b.

Man sieht, daß der Einfluß der Gurte (Beiwert: 18,75) den Einfluß der Diagonalen bei weitem übersteigt. Oft wird vom Einfluß der Diagonalen abgesehen.

Ist das Fachwerk ein Ständerfachwerk, so ist in der Formel 49 statt d^3 nun $(d^3 + h^3)$ zu schreiben.

§ 39. Brücke mit drei selbständigen Tragwänden. Wir betrachten nun eine Brücke, die aus drei Parallelträgern zusammengesetzt ist: zwei vertikalen Hauptträgern und einer Horizontalverspannung oben. Wir sehen von der Formänderung der Querrahmen ab und untersuchen die Bewegung eines Querrahmens im Abstände x vom linken Auflager.

Ist die Brücke nach Fig. 37a gebaut, d. h. hat jede der drei Tragwände besondere Gurtungen, dann ist die Ermittlung der Bewegungen sehr einfach. Ist die Schnittgerade der oberen Ver-

spannung mit dem linken Hauptträger die x -Achse, so betragen die Verschiebungen eines Punktes, dessen Koordinaten: $x = a, y, z$,

$$50) \quad \delta_y = \delta_o - (\delta_r - \delta_l) \frac{z}{t}; \quad \delta_z = \frac{1}{t} [\delta_r y + \delta_l (t - y)].$$

Hierbei sind δ_y und δ_z die zur y - bzw. z -Richtung parallelen Komponenten der Verschiebung. $\delta_r, \delta_l, \delta_o$ sind die Wege des rechten, linken bzw. oberen Trägers in seiner eigenen Ebene.

Diese Beziehungen kann man am leichtesten erhalten, indem man sich die Brücke durch folgenden Mechanismus ersetzt denkt. Man löst den Querrahmen heraus und denkt sich an Stelle eines jeden der Brückenträger einen Stab, der in die Projektion des betreffenden Trägers auf die Querrahmenebene fällt. Der Stab besitze eine solche Länge und Elastizitätsmodul, daß seine elastische Dehnung gleich ist der Durchbiegung des ersetzten Trägers an der Stelle, wo der betrachtete Querrahmen sich befindet. Man erhält eine Scheibe, die mittels dreier Stäbe mit der festen Erde verbunden ist. Sind die Dehnungen der drei Ersatzstäbe δ_r, δ_l und δ_o , so kann man, bei Annahme der Starrheit des Querrahmens, einen einfachen Williot'schen Verschiebungsplan zeichnen (Fig. 37b), aus dem sich obige Beziehungen sofort ergeben.

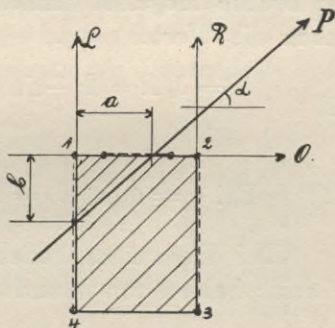


Fig. 38.

Es ist bemerkenswert, daß auch bei lotrechten Lasten ($\delta_o = 0$) die Punkte des Querrahmens eine Bewegung im wagerechten Sinne ausführen.

Wir fragen jetzt nach dem augenblicklichen Drehpunkt des Querrahmens.

Seine Koordinaten lassen sich leicht finden. Es sind

$$y_a = t \frac{\delta_l}{\delta - \delta_r} \quad \text{und} \quad z_a = -t \frac{\delta_o}{\delta_l - \delta_r}$$

die Ordinate und Applikate des Drehpunktes.

Betrachten wir die Durchbiegung am Orte der Last, die in der Ebene eines Querrahmens wirke (Fig. 38). Die Kraft P , deren Richtungsline und Lage durch den Punkt $z = o, y = a$ und durch den Winkel α , zwischen der positiven Krafrichtung und positiven y -Richtung festgelegt sei, wird in die drei Komponenten R, L und O zerlegt, die

in die Projektionen r , l , und o der drei Tragwände der Brücke auf den Querrahmen fallen.

$$51) \quad R = P \frac{a}{t} \sin \alpha, \quad L = P \frac{t-a}{t} \sin \alpha, \quad O = P \cos \alpha.$$

Für $\alpha = 0$ haben diese Formeln eine ungünstige Form, deshalb schreiben wir für

$$51') \quad \alpha = 0: \quad R = P \frac{b}{t} \quad L = -P \frac{b}{t} \quad O = P,$$

wobei b die Applikate des Schnittpunktes der Kraft P mit der Linie l ist.

Greift an der Querrahmenstelle eine Kraft Eins nach einander in den Ebenen der Tragwände r , l , o an, so erzeuge sie eine Durchbiegung δ_r' , δ_l' , δ_o' , wobei man sich die einzelnen Tragwände von der Brücke losgelöst denken muß. Die Durchbiegung δ_r , δ_l und δ_o haben die Werte:

$$52) \quad \begin{cases} \delta_r = \delta_r' R = P \frac{a}{t} \sin \alpha \delta_r', & \delta_l = \delta_l' L = P \frac{t-a}{t} \sin \alpha \delta_l', \\ \delta_o = O \delta_o' = P \cos \alpha \delta_o'. \end{cases}$$

$$52') \quad \text{Bei } \alpha = 0 \text{ ist } \delta_r = P \frac{b}{t} \delta_r'; \quad \delta_l = -P \frac{b}{t} \delta_l'; \quad \delta_o = P \delta_o'.$$

Der Weg eines beliebigen Punktes des Querrahmens, zerlegt in seine beiden zur y - und z -Achse parallelen Komponenten, beträgt:

$$53) \quad \begin{cases} \delta_y = \delta_o - (\delta_r - \delta_l) \frac{z}{t} = P \left\{ \cos \alpha \cdot \delta_o' - \frac{z}{t} \cdot \frac{\sin \alpha}{t} [\delta_r' a - \delta_l' (t-a)] \right\} \\ \delta_z = \frac{1}{t} [\delta_r y + \delta_l (t-y)] = P \left[\frac{a}{t^2} \cdot \sin \alpha \cdot \delta_r' \cdot y + \frac{t-a}{t^2} \sin \alpha \delta_l' (t-y) \right] \end{cases}$$

Für $\alpha = 0$

$$53') \quad \delta_y = P \left[\delta_o' - \frac{z b}{t^2} (\delta_r' + \delta_l') \right], \quad \delta_z = P \frac{b}{t^2} [\delta_r' y - \delta_l' (t-y)].$$

Die Koordinaten des augenblicklichen Drehpunktes des Querrahmens sind:

$$54) \quad y_a = t \frac{\delta_l}{\delta - \delta_r} = t \frac{1}{1 - \frac{a}{t-a} \cdot \frac{\delta_r'}{\delta_l'}}; \quad z_a = -t \frac{\delta_o}{\delta_l - \delta_r} = -t^2 \frac{\frac{\delta_o'}{\delta_l'} \cotg \alpha}{t-a-a \frac{\delta_r'}{\delta_l'}}$$

Für $\alpha = 0$

$$54') \quad y_a = +t \frac{1}{1 + \frac{\delta_r'}{\delta_l'}}; \quad z_a = t \cdot \frac{t}{b} \frac{\frac{\delta_o'}{\delta_l'}}{1 + \frac{\delta_r'}{\delta_l'}}$$

a) Für lotrechte Lasten ist $\alpha = 90^\circ$, $y_a = t \frac{1}{1 - \frac{a}{t} \frac{\delta_r'}{\delta_l'}}$, $z_a = 0$,

falls der Nenner von z_a nicht gleichzeitig Null wird, d. h. wenn $t - a \neq a \frac{\delta_r'}{\delta_l'}$. Für $a = 0$: $y_a = t$, $z_a = 0$; für $a = t$: $y_a = 0$, $z_a = 0$.

Daraus folgt, daß, wenn eine vertikale Last in der Ebene des rechten bzw. linken Hauptträgers wirkt, sich der Querrahmen um die Schnittgerade des linken bzw. des rechten Hauptträgers mit der Horizontalverspannung dreht.

Ist $t - a = a \frac{\delta_r'}{\delta_l'}$ oder $\frac{t - a}{a} = \frac{\delta_r'}{\delta_l'}$, dann ist $y_a = \infty$ oder die Bewegung des Querrahmens ist eine fortschreitende, parallele zur z -Achse.

b) Für $\alpha = 0$ also bei wagerechten Lasten ist:

für $b = 0$: $z_a = \infty$, d. h. die Bewegung ist fortschreitend, parallel zur y -Achse.

Bei symmetrischer Brücke $\delta_l' = \delta_r' = \delta'$

$$y_a = t \frac{1}{1 - \frac{a}{t - a}}$$

$$z_a = -t^2 \frac{\frac{\delta_o'}{\delta_l'} \cotg \alpha}{t - 2a},$$

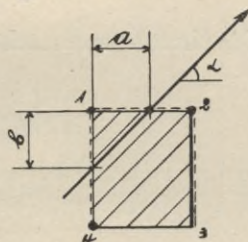


Fig. 39.

für $\alpha = 0^\circ$; $y_a = +\frac{1}{2} t$,

$z_a = \frac{t^2}{2b} \frac{\delta_o'}{\delta_l'}$,

für $\alpha = 90^\circ$: $z_a = \infty$, wenn $t \neq 2a$; ist $t = 2a$, dann ist $y_a = \infty$;

für $\alpha = 0^\circ$: $y_a = +\frac{1}{2} t$, für $b = 0$: $y_a = +\frac{1}{2} t$; $z_a = \infty$.

Da diese Bauart der Brücke nach Fig. 37a) selten ist, mögen die weiteren Spezialfälle nicht verfolgt werden.

§ 40. Brücke normaler Bauart. Haben die drei Tragwände, was die Regel ist, zwei gemeinsame Gurte 1 und 2, dann sind die Durchbiegungen δ_r , δ_l und δ_o nicht mehr unabhängig voneinander (Fig. 39).

Man betrachte die Wirkung einer Last P , die in der Ebene eines Querrahmens angreift, und zerlege sie in die drei Teilkräfte R , L und O . Jede der drei Kräfte belastet die entsprechende Tragwand und erzeugt Stabkräfte.

Denkt man sich die Tragwände durch je eine Kraft + 1 am Querrahmenorte belastet, so erzeuge sie folgende Gurtspannungen:
rechts $G_{2r} G_{3r}$; links $G_{1l} G_{4l}$; oben $G_{1o} G_{2o}$.

Sieht man von dem Einflusse der Diagonalen auf die Formänderung ab, so kann man schreiben, wenn $\varrho = \frac{S}{E f}$ gesetzt wird:

Die Kraft R verursacht: $\delta_3^x = \delta_2^x = R (\Sigma G_{3r}^2 \varrho_3 + \Sigma G_{2r}^2 \varrho_2)$

$$\delta_2^y = \delta_1^y = R (\Sigma G_{2r} G_{2o} \varrho_2)$$

$$\delta_1^x = \delta_4^x = 0$$

$$\delta_3^y = \delta_4^y = R \left[\Sigma G_{2r} \left(G_{2o} + \frac{\delta}{t} G_{2r} \right) \varrho_2 + \Sigma \frac{\delta}{t} G_{3r}^2 \varrho_3 \right].$$

Die Kraft L verursacht: $\delta_{1z} = \delta_{4z} = L [\Sigma G_{1l}^2 \varrho_1 + \Sigma G_{4l}^2 \varrho_4]$

$$\delta_{2y} = \delta_{1y} = L (\Sigma G_{1l} G_{1o} \varrho_1)$$

$$\delta_{3y} = \delta_{4y} = L \left[\Sigma G_{1l} \left(G_{1o} - \frac{\delta}{t} G_{1l} \right) \varrho_1 - \Sigma \frac{\delta}{t} G_{4l}^2 \varrho_4 \right]$$

$$\delta_{2z} = \delta_{3z} = 0.$$

Die Kraft O verursacht: $\delta_{1y} = \delta_{2y} = O [\Sigma G_{1o}^2 \varrho_1 + \Sigma G_{2o}^2 \varrho_2]$

$$\delta_{3y} = \delta_{4y} = O \left[\Sigma G_{1o} \left(G_{1o} - \frac{\delta}{t} G_{1l} \right) \varrho_1 + \Sigma \varrho_2 G_{2o} \cdot \left(G_{2o} + \frac{\delta}{t} G_{2r} \right) \right]$$

$$\delta_{1z} = \delta_{4z} = O [\Sigma G_{1o} G_{1l} \varrho_1]$$

$$\delta_{2z} = \delta_{3z} = O [\Sigma G_{2o} G_{2r} \varrho_2].$$

Die Bewegungen der einzelnen Punkte infolge der Last P sind:

$$55) \left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt 1} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{1y} = R \Sigma G_{2r} G_{2o} \varrho_2 + L \Sigma G_{1l} G_{1o} \varrho_1 + O [\Sigma G_{1o}^2 \varrho_1 + \Sigma G_{2o}^2 \varrho_2] \\ \delta_{1z} = L [\Sigma G_{1l}^2 \varrho_1 + \Sigma G_{4l}^2 \varrho_4] + O \Sigma G_{1o} G_{1l} \varrho_1 \end{array} \right. \\ \text{Punkt 2} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{2z} = R [\Sigma G_{3r}^2 \varrho_3 + \Sigma G_{2r}^2 \varrho_2] + O \Sigma G_{2o} G_{2r} \varrho_2 \\ \delta_{2y} = R \Sigma G_{2r} G_{2o} \varrho_2 + L \Sigma G_{1l} G_{1o} \varrho_1 + O [\Sigma G_{1o}^2 \varrho_1 + \Sigma G_{2o}^2 \varrho_2] \end{array} \right. \\ \text{Punkt 3} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{3z} = R [\Sigma G_{3r}^2 \varrho_3 + \Sigma G_{2r}^2 \varrho_2] + O \Sigma G_{2o} G_{2r} \varrho_2 \\ \delta_{3y} = R \left[\Sigma G_{2r} \left(G_{2o} + \frac{\delta}{t} G_{2r} \right) \varrho_2 + \frac{\delta}{t} \Sigma G_{3r}^2 \varrho_3 \right] + L \left[\Sigma G_{1l} \left(G_{1o} - \frac{\delta}{t} G_{1l} \right) \varrho_1 \right. \\ \left. - \frac{\delta}{t} \Sigma G_{4l}^2 \varrho_4 \right] + O \left[\Sigma G_{1o} \left(G_{1o} - \frac{\delta}{t} G_{1l} \right) \varrho_1 + \Sigma \left(G_{2o} + \frac{\delta}{t} G_{2r} \right) G_{2o} \varrho_2 \right] \end{array} \right. \\ \text{Punkt 4} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{4z} = L [\Sigma G_{1l}^2 \varrho_1 + \Sigma G_{4l}^2 \varrho_4] + O [\Sigma G_{1o} G_{1l} \varrho_1] \\ \delta_{4y} = R \left[\Sigma G_{2r} \left(G_{2o} + \frac{\delta}{t} G_{2r} \right) \varrho_2 + \frac{\delta}{t} \Sigma G_{3r}^2 \varrho_3 \right] + L \left[\Sigma G_{1l} \left(G_{1o} - \frac{\delta}{t} G_{1l} \right) \varrho_1 \right. \\ \left. - \Sigma \frac{\delta}{t} G_{4l}^2 \varrho_4 \right] + O \left[\Sigma G_{1o} \left(G_{1o} - \frac{\delta}{t} G_{1l} \right) \varrho_1 + \Sigma G_{2o} \left(G_{2o} + \frac{\delta}{t} G_{2r} \right) \varrho_2 \right] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Man setze für eine Brücke, die aus drei Parallelträgern besteht und deren Höhe \mathfrak{z} , deren Weite t beträgt:

$$G_{2r} = +\frac{1}{\mathfrak{z}} G, \quad G_{3r} = -\frac{1}{\mathfrak{z}} G, \quad G_{1l} = +\frac{1}{\mathfrak{z}} G, \quad G_{4l} = -\frac{1}{\mathfrak{z}} G,$$

$$G_{1o} = -\frac{1}{t} G, \quad G_{2o} = +\frac{1}{t} G,$$

was zulässig ist, da die Gurtspankräfte den Trägerhöhen direkt, proportional sind und alle drei Träger gleiche Längen haben.

Setzt man ferner für $\Sigma G^2 \varrho$ den Abkürzungswert A ein, so ist:

$$56) \left\{ \begin{array}{l} \text{für Punkt 1: } \delta_{1y} = \frac{A}{t^2} \left(R \frac{t}{\mathfrak{z}} - L \frac{t}{\mathfrak{z}} + 2O \right), \quad \delta_{1z} = \frac{A}{t^2} \left(2L \frac{t^2}{\mathfrak{z}^2} - O \frac{t}{\mathfrak{z}} \right); \\ \text{„ „ 2: } \delta_{2y} = \frac{A}{t^2} \left(R \frac{t}{\mathfrak{z}} - L \frac{t}{\mathfrak{z}} + 2O \right), \quad \delta_{2z} = \frac{A}{t^2} \left(2R \frac{t^2}{\mathfrak{z}^2} + O \frac{t}{\mathfrak{z}} \right); \\ \text{„ „ 3: } \delta_{3y} = \frac{A}{t^2} \left[R \left(2 \frac{t}{\mathfrak{z}} + \frac{t}{\mathfrak{z}} \right) - 3L \frac{t}{\mathfrak{z}} + 4O \right], \\ \quad \delta_{3z} = \frac{A}{t^2} \left[2R \frac{t^2}{\mathfrak{z}^2} + O \frac{t}{\mathfrak{z}} \right]; \\ \text{„ „ 4: } \delta_{4y} = \frac{A}{t^2} \left[R \left(2 \frac{t}{\mathfrak{z}} + \frac{t}{\mathfrak{z}} \right) - 3L \frac{t}{\mathfrak{z}} + 4O \right], \\ \quad \delta_{4z} = \frac{A}{t^2} \left[2L \frac{t^2}{\mathfrak{z}^2} - O \frac{t}{\mathfrak{z}} \right]. \end{array} \right.$$

Aus den Größen $\delta_{1z} = \delta_{4z}$ und $\delta_{2z} = \delta_{3z}$ erhält man die Ordinate y_d des augenblicklichen Drehungsmittelpunktes:

$$57) \quad y_d = \delta_{1z} \frac{t}{\delta_{1z} - \delta_{2z}} = t \frac{2Lt - O\mathfrak{z}}{2(L - R)t - 2O\mathfrak{z}}.$$

Ebenso erhält man aus $\delta_{1y} = \delta_{2y}$ und $\delta_{3y} = \delta_{4y}$ die Applikate z_d des Drehungsmittelpunktes:

$$57') \quad z_d = \mathfrak{z} \frac{\delta_{1y}}{\delta_{3y} - \delta_{1y}} = \mathfrak{z} \frac{(R - Lt\mathfrak{z} + 2O\mathfrak{z}^2)}{R(t\mathfrak{z} + t\mathfrak{z}) - 2Lt\mathfrak{z} + 2O\mathfrak{z}^2} = \mathfrak{z} \frac{(R - L)t + 2O\mathfrak{z}}{2(R - L)t + 2O\mathfrak{z}}.$$

Der Ausdruck $A = \Sigma G^2 \varrho = \Sigma G^2 \frac{s}{E\bar{f}}$ ist nichts anderes als die halbe Durchbiegung eines Trägers von der Höhe $h=1$, infolge einer Last 1 am Lastorte, wobei jedoch angenommen wird, daß die Diagonalen keinen Einfluß auf die Durchbiegung haben. Nach Gleichung 49) ist $A = \frac{1}{3} \frac{a^2(l-a)^2}{lE\bar{f}_g}$. a ist die Lastabszisse.

Setzt man wie früher (Fig. 38)

$$O = P \cos \alpha, \quad R = P \sin \alpha \cdot \frac{a}{t} \quad L = P \sin \alpha \frac{t-a}{t}$$

$$\text{bzw. für } \alpha = 0 \quad O = P, \quad R = P \frac{b}{t}, \quad L = -P \frac{b}{t},$$

so ist:

a) für $\alpha = 0^\circ$ (wagerechte Lasten).

$$y_a = + \frac{t}{2} \quad z_a = \frac{1}{1 + \frac{b}{\frac{1}{2} + b}}$$

für $b = 0$ ist $z_a = \frac{1}{2}$

„ $b = \infty$ (Moment) ist $z_a = \frac{1}{2}$; $y_a = \frac{1}{2} t$.

Umgekehrt ist für $b = -\frac{1}{2}$... $z_a = \infty$.

b) für $\alpha = 90^\circ$ (lotrechte Lasten).

$$R = P \frac{a}{t} \quad L = P \frac{t-a}{t} \quad O = 0$$

$$y_a = t \frac{t-a}{t-2a}$$

$$z_a = \frac{1}{2}$$

für $a = \frac{t}{2}$ ist $y_a = \infty$ $z_a = \frac{1}{2}$ } fortschreitende Bewegung,
parallel zur z -Achse

„ $a = 0$ „ $y_a = t$ $z_a = \frac{1}{2}$

„ $a = t$ „ $y_a = 0$ $z_a = \frac{1}{2}$ }

„ $a = \infty$ (Moment) ist $y_a = \frac{t}{2}$ $z_a = \frac{1}{2}$ }

Wann liegt der augenblickliche Drehpunkt in der Richtungslinie der Kraft selbst?

Für $\alpha = 0$; $z_a = -b$, bei $b =$ komplexe Größe,

für $\alpha = 90$; $y_a = a$, bei $a =$ komplexe Größe.

§ 41. Erweiterung. Bisher wurde die Annahme gemacht, daß die Diagonalstäbe keinen Einfluß auf die Formänderung

haben. Wären z. B. die Stabquerschnitte der Diagonalen oder deren E unendlich groß, dann hätten die Formeln strenge Geltung. Bei normalen Brückenbelastungen haben die Formeln den Wert einer Annäherung.

Nun kommen aber Belastungen vor, die kleine Gurtstabkräfte und hohe Diagonalkräfte ergeben (z. B. bei Brücken, die durch ein Torsionsmoment beansprucht werden). Will man deshalb oder aus einem anderen Grunde den Einfluß der Dehnung der Diagonalen auf die elastische Formänderung der Brücke mit berücksichtigen, so braucht man deswegen die Rechnung nicht etwa neu zu wiederholen, sondern es kann dem im vorigen Paragraphen betrachteten Bewegungsbilde ein zweites Bild überlagert werden. Im zweiten Bilde werden nur die Bewegungen der Brücke infolge der Längenänderungen der Diagonalstäbe berücksichtigt. Da die Diagonalspannkkräfte einzig von Kräften herrühren, die in den betreffenden Tragwänden wirken, so können zur Berechnung dieser zweiten Bewegung das Verfahren und die Ergebnisse vom § 39 benutzt werden.

(Dieser Fall ist genau der gleiche, wie im § 39, da die Durchbiegung einer Wand infolge der Diagonalspannungen dieser Wand keinen Einfluß hat auf die Durchbiegungen der anderen Tragwände.)

Es sind nun δ_o , δ_l und δ_r anzusehen als die Durchbiegungen der Träger (oben, links und rechts) infolge der Längenänderungen der Diagonalen bei Belastung der betreffenden Tragwand, mit den Kräften O , L und R . Die Gurte müssen bei diesem Teil der Aufgabe als starr angesehen werden, d. h. ihr Stabquerschnitt oder Elastizitätsmodul wird als unendlich groß angenommen.

Wie man Bewegungen zusammensetzt, die eine starre Scheibe ausführt, braucht hier nicht erörtert zu werden.

Zweite Abteilung.

Einfach statisch unbestimmte Brücken.

Die statische Unbestimmtheit möge darin bestehen, daß die Anzahl der Tragwände um eins größer ist als die notwendige. Unter diesen Brücken sind die wichtigsten die

Brücken mit vier Außentragwänden.

§ 42. Bauart: Es soll hier nur von den geschlossenen Brücken, d. h. von Brücken mit zwei vertikalen und zwei wagerechten Hauptwänden, die im Querschnitt ein Rechteck bilden, die Rede sein. Die Zwischenquerrahmen sind unsteif, mit einer Bewegungsfreiheit¹⁾ (wenn sie von den Brücken losgelöst gedacht sind), die Endquerrahmen natürlich steif. Im übrigen sei die Bauart wie in Abteilung I.

Der Brückenrumpf ist ein starres Ganzes. Würde die Brücke mit sechs Auflagern ausgestattet sein, von denen drei vertikal und drei horizontal sind, dann wäre das System statisch bestimmt. Nun hat jede Brücke vier vertikale und drei bis vier horizontale Auflager. Wir wollen die Fälle festhalten, in denen die Brücke vier vertikale, zwei horizontale Auflager der y -Richtung und ein horizontales Auflager der x -Richtung besitzt. Diese Brücken sind äußerlich statisch unbestimmt, und zwar einfach.

Fortsetzung. Betrachten wir den Einfluß einer lotrechten Kraft P , die auf den vorderen Hauptträger²⁾ (p, p') wirkt. Der vertikale Auflagerdruck bei 1 (also näher dem hinteren Hauptträger) sei als statisch unbestimmbare Größe gewählt. Nimmt man das Auflager 1 weg, dann erzeugt P die Stabkräfte S^0 und die Auflagerdrucke R^0 . Zunächst wird die Kraft P durch den vorderen Haupt-

¹⁾ $s = 2k - 4$, wobei s die Stabzahl und k die Anzahl der Knotenpunkte des Rahmens bedeutet. Teile des Querrahmens können auch durch besondere Scheiben (vollwandige Teile, Biegebalken) ersetzt werden.

²⁾ Bezeichnungen dieselben wie früher. Siehe auch Figur auf nächster Seite.

träger auf die Endquerrahmen übertragen, wo in den Punkten p und p' die Teilkräfte $P \frac{t-a}{l}$ und $P \frac{a}{l}$ entstehen. Die Kraft $P \frac{a}{l}$ wird durch den rechten Endquerrahmen auf die Auflagerpunkte 3 und 4 gebracht, wo die Auflagerdrucke

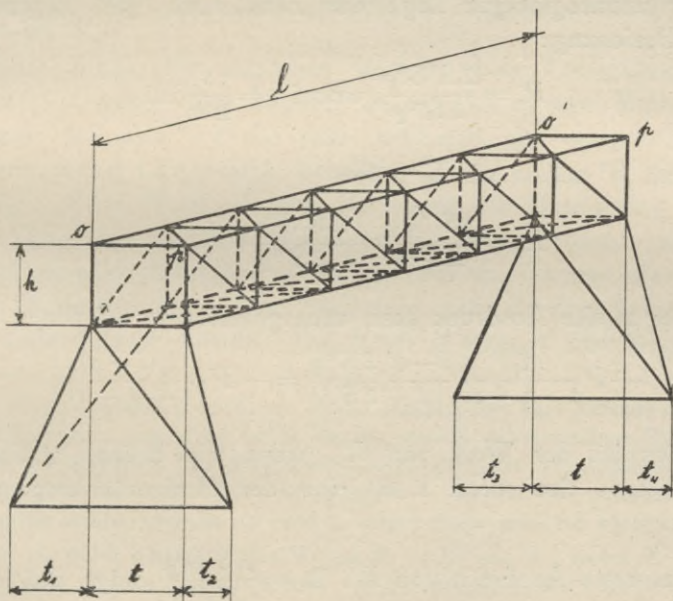
$$R_{3I}^o = -P \frac{a}{l} \frac{t_4}{t+t_3+t_4}, \quad R_{4I}^o = -P \frac{a}{l} \frac{t+t_3}{t+t_3+t_4}$$

auftreten.

Bei dieser Operation entstehen die Stabkräfte S_{I0} .

Die Kraft $P \frac{l-a}{l}$ im Punkte p des linken Endquerrahmens, bildet mit der Auflagerreaktion $R_2^o = -P \frac{l-a}{l}$ ein Kräftepaar, dessen Moment M : $+P \frac{l-a}{l} t_2$ beträgt. Dieses Moment mit zur x -Richtung parallelen Achse, (Torsionsmoment), wird durch den ganzen Brückenrumpf geleitet und erzeugt hierbei die Spannkkräfte S_{II} und die Auflagerdrucke

$$R_{3II}^o = -P \frac{l-a}{l} \frac{t_2}{t+t_3+t_4} = -R_{4II}^o.$$



Zusammengefaßt, betragen die Auflagerdrucke $R^0 = R_I^0 + R_{II}^0$

$$R_2^0 = -P \frac{l-a}{l}$$

$$R_3^0 = P \frac{-at_4 - (l-a)t_2}{l(t+t_3+t_4)}, \quad R_4^0 = P \frac{-a(t+t_3) + (l-a)t_2}{l(t+t_3+t_4)}$$

und die Stabkräfte $S^0 = S_I^0 + S_{II}^0$.

Denkt man sich nun am Auflagerpunkte 1 eine Kraft -1 wirkend, so erzeuge sie die Stabkräfte S' und die Auflagerdrucke R' . Die letzteren betragen

$$R_2' = +1 \quad R_3' = -R_4' = \frac{t+t_1+t_2}{t+t_3+t_4}$$

Die Stabkräfte S' sind den Stabkräften S_{oII} proportional, da S' auch infolge eines Torsionsmomentes: $-(t+t_1+t_2)$ entstehen, das am linken Endquerrahmen wirkt und durch den Rumpf geleitet wird. Es verhält sich S' zu S_{II}^0 wie $-(t+t_1+t_2)$ zu $P \frac{l-a}{l} t_2$.

$$\text{Somit ist } S_{II}^0 = -S' \cdot \frac{t_2(l-a)}{l(t+t_1+t_2)} \cdot P.$$

Unter der Annahme einer gleichbleibenden Temperatur und richtiger unnachgiebiger Lage der Fundamente gilt folgende bekannte Beziehung:

$$R_1 = \frac{\Sigma S' S^0 \varrho}{\Sigma S'^2 \varrho}, \text{ wobei } \varrho = \frac{s}{EF} \text{ ist.}$$

Statt S^0 setzen wir $S_I^0 + S_{II}^0$.

$$58) \quad R_1 = \frac{\Sigma S' S_I^0 \varrho}{\Sigma S'^2 \varrho} + \frac{\Sigma S' S_{II}^0 \varrho}{\Sigma S'^2 \varrho}.$$

Der zweite Ausdruck kann auch geschrieben werden:

$$-P \frac{t_2}{t+t_1+t_2} \frac{l-a}{l} \frac{\Sigma S'^2 \varrho}{\Sigma S'^2 \varrho} = -P \frac{t_2(l-a)}{(t_1+t_2+t)l}$$

Dies ist der Wert von R_1 , wenn die Brücke statisch bestimmt wäre, also wenn z. B. eine der Horizontalverspannungen wegfiel.

Der erste Ausdruck von R_1 : $\mathfrak{R}_1 = \frac{\Sigma S' S_I^0 \varrho}{\Sigma S'^2 \varrho}$ zeigt den Einfluß

der statischen Unbestimmtheit auf die Größe der Auflagerdrucke.¹⁾

Wir untersuchen nun den Wert \mathfrak{N}_1 , lassen aber den Einfluß der Querrahmen selbst als gering unberücksichtigt.

α) Parallelepipetische Brücke.

§ 43. Die Brücke sei ein orthogonales Parallelepipet. Die konstante Brückenhöhe sei h , die Brückentiefe (Abstand der beiden Hauptträger) sei t . Die konstante Feldweite sei $b = \frac{l}{n}$.

Die Stabkräfte S_i^0 betragen:

Gurte	rechts	von P	im vorderen Hauptträger:	$\pm P \frac{a(l-x)}{l_3}$
„	links	„ P „	„	$\pm P \frac{(l-a)x}{l_3}$
Diagonalen	rechts	„ P „	„	$\pm P \frac{a}{l} \sec \alpha_v$
„	links	„ P „	„	$\pm P \frac{l-a}{l} \sec \alpha_v$

Alle anderen Stäbe sind spannungslos bei $R_1 = 0$. Die Stabkräfte seien gleich S' .

Diese Stabkräfte entstehen infolge eines Torsionsmomentes $M = -(t + t_1 + t_2)$. Das Moment zerlegt sich in zwei Kräftepaare, von denen das eine $\pm V$ die zwei vertikalen, das andere $\pm H$ die zwei horizontalen Längswände belastet.

$H_3 + Vt = M$ ist die eine Beziehung zur Berechnung von V und H . Um eine zweite Beziehung zu erhalten, betrachte man den rechten Endpunkt des Obergurtes, an dem die Summe aller wagerechten Stabkräftekomponenten Null sein muß, da dort keine wagerechte äußere Kraft auftritt. Die Kraft H erzeugt eine wagerechte

¹⁾ In dem mehrfach erwähnten Buche „Zusatzkräfte und Nebenspannungen“ empfiehlt Engesser, eine solche Größe als die statisch unbestimmbare Unbekannte zu wählen, die nur einen Korrektionswert besitzt, also nicht den Auflagerdruck R_1 , sondern den Zusatzwert \mathfrak{N}_1 . Diese Anregung ist in der Tat sehr glücklich. Da ich sie erst später erfuhr, habe ich sie nicht in diesem Falle verwerten können. Immerhin gelang es, durch Zerlegung des Wertes R_1 in R_1^0 und \mathfrak{N}_1 , wobei R_1^0 den angenäherten und \mathfrak{N}_1 den Korrektionswert von R_1 darstellen, die Vorteile des Verfahrens von Engesser beizubehalten.

Wirkung $\mp H \frac{l}{t}$ und die Kraft V eine wagerechte Wirkung $\pm V \frac{l}{\delta}$.

Somit muß $H \frac{l}{t} - V \frac{l}{\delta} = 0$ sein, und $H \delta = Vt$.

$$\text{Somit ist } H \delta = Vt = \frac{M}{2} \text{ oder } H = \frac{M}{2\delta}, \quad V = \frac{M}{2t}.$$

Wie man sieht, zerlegt sich das Moment M in zwei gleiche Momente, die in Form zweier Kräftepaare die vier Tragwände beanspruchen. Man merke, daß es sich um eine parallelepipedische Brücke handelt.

Jeder Gurtstab besitzt zwei ihm zugeordnete Rittersche Momentenpunkte, von denen jeder in eine der zwei Tragwände fällt, die als gemeinsames Glied den Stab besitzen. Diese zwei Punkte liegen manchmal in einem Brückenquerschnitt, manchmal sind sie aber um eine Feldweite entfernt. Die Spannkraft im Gurtstab beträgt:

$$S_g' = V \frac{x_1}{\delta} - H \frac{x_2}{t} = \frac{M}{2\delta t} (x_1 - x_2) = \frac{M}{2t\delta} b \alpha.$$

α ist entweder gleich Null oder ± 1 . Jedenfalls ist die Gurtspannung ganz klein. Bei einem Ständerfachwerk sind die Gurtstäbe in benachbarten Feldern gleich bezeichnet, jedoch wechselt das Vorzeichen in Brückenmitte, da dort gewöhnlich das System wechselt. Bei Strebenfachwerken sind die Gurtstäbe alternierend positiv und negativ. Haben die anstoßenden Wände verschiedene Systeme, so kann auch α zwischen Null und ± 1 abwechseln.

Die Füllungsstäbe sind im vorderen Hauptträger

$$\pm V \sec \alpha_v = \pm \frac{M}{2t} \sec \alpha_v.$$

Nun sind wir in der Lage, die Zählersumme $\Sigma S_i^0 S' \varrho$ zu bilden. Die Summe erstreckt sich nur auf diejenigen Stäbe, die bei der Belastung des vorderen Trägers durch P Spannkraften erhalten, also lediglich auf die Stäbe des vorderen Hauptträgers.

Für die Gurtstäbe ist die Summe $\Sigma S_i^0 S' \varrho$:

- a) bei Strebenfachwerken immer Null, da S_i^0 entweder 0 ist oder alternierend plus und minus;
- b) bei Ständerfachwerken hat diese Summe den Wert Null oder nahezu Null, da S_i^0 entweder verschwinden oder rechts und links von der Mitte verschiedene Vorzeichen haben, so daß die Summe für symmetrische Belastung immer Null, für unsymmetrische da-

von nicht sehr verschieden ist. Diese an und für sich kleine Summe verschwindet für $a=0$, $a=\frac{l}{2}$ und $a=l$, somit ist der Fehler nicht groß, wenn man sie ganz unterdrückt. Die Betrachtung galt bis jetzt für einen Gurt. Nun ist diese Summe (wenn sie nicht ganz verschwindet) im Obergurt und Untergurt meistens verschieden bezeichnet, so daß die Annahme um so mehr berechtigt ist.

Für die Füllungsstäbe ist die $\Sigma S_1^0 S'q$:

a) bei Strebenfachwerken:

$$\begin{aligned} & \Sigma_0^a P \frac{l-a}{l} \sec \alpha_v \cdot \frac{M}{2t} \sec \alpha_v \frac{\sec \alpha_v}{EF_d} \cdot \frac{a}{b} \\ - \Sigma_a^l P \frac{a}{l} \sec \alpha_v \cdot \frac{M}{2t} \sec \alpha_v \frac{\sec \alpha_v}{EF_d} \frac{l-a}{b} &= \frac{PM \sec^3 \alpha_v}{2t l EF_d} \left[(l-a) \frac{a}{b} - a \frac{l-a}{b} \right] = 0; \end{aligned}$$

b) bei Ständerfachwerken ist sie für die Diagonalen gleich Null und für die Pfosten:

$$\begin{aligned} & \Sigma_0^a P \frac{l-a}{l} \frac{M}{2t} \frac{\sec \alpha_v}{EF_p} \frac{a}{b} - \Sigma_a^l P \frac{a}{l} \frac{M}{2t} \frac{\sec \alpha_v}{EF_p} \frac{l-a}{b} \\ &= \frac{PM \sec^3 \alpha_v}{2t l EF_p} \left[(l-a) \frac{a}{b} - a \frac{l-a}{b} \right] = 0. \end{aligned}$$

Somit kann die Zählersumme $\Sigma S_1^0 S'q$ gleich Null gesetzt werden, und es ist

$$\mathfrak{N}_1 = 0, \text{ ferner } R_1 = P \frac{l-a}{l} \frac{t_2}{t+t_1+t_2}.$$

Man sieht, daß sich die parallelepipedischen Brücken genau so verhalten wie statisch bestimmte Brücken, und daß man die Unbestimmtheit nicht zu beachten braucht.

β) Brücken mit gebogenen Verbänden.

§ 44. Bevor auf eine Berechnung des Ausdruckes \mathfrak{N}_1 eingegangen wird, soll allgemein gezeigt werden, wie sich der Einfluß eines Torsionsmomentes M , das auf einem Brückenende angreift und zum anderen Endquerrahmen geleitet werden soll, bestimmt. Für das orthogonale Parallelepiped ist diese Frage erledigt.

Am linken Endquerrahmen, dessen Lagerpunkte weggenommen gedacht werden, wirkt ein Moment M . Dieses Moment zerlegt sich in zwei Kräftepaare, die beim Parallelepiped gleich waren, im allgemeinen aber verschieden sind. Die vertikalen Träger haben eine

variable Höhe z , bestimmt durch $z=f(x)$. Am linken Auflager ist $z=\delta_l$, am rechten $z=\delta_r$. Der Abstand der Hauptträger sei konstant gleich t .

Es ist von vornherein klar, daß $\pm H$, die Scherkräfte der Horizontalverspannungen, konstant sein müssen, da auf die Gurte keine wagerechten äußeren Kräfte einwirken. Anders V , die Scherkräfte der vertikalen Träger, die sich in jedem Punkte der Brücke ändern, in dem ein Knick im Gurte ist. Denn, wie in Abteilung I, Abschnitt I, 3 β gezeigt, entsteht in jedem Knickpunkt des Gurtes eine vertikale Zusatzkraft

$$\Delta V = \pm \frac{M_h}{t} \Delta \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad dV = \pm \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx.$$

Zwischen H und dem jeweiligen V besteht die Beziehung

$$Hx + Vt = M \quad \text{oder} \quad V = \frac{M}{t} - H \frac{x}{t}.$$

Die Summe der horizontalen Komponenten der Stabkräfte am Ende eines Gurtes muß Null sein, da dort keine äußere Horizontalkraft auftreten kann. Somit ist

$$0 = V_l \frac{l}{\delta_r} + \int_0^l \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx \frac{l-x}{\delta_r} - H \frac{l}{t}.$$

Setzt man statt V_l den Wert $V_l = \frac{M}{t} - \frac{H}{t} \delta_l$ und statt M_h den Wert $M_h = H \cdot x$, so erhält man

$$0 = \frac{M}{t} \frac{l}{\delta_r} - \frac{H}{t} \frac{\delta_l l}{\delta_r} + \frac{H}{t \delta_r} \int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx - H \frac{l}{t},$$

woraus sich ergibt

$$59) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = M \frac{1}{\delta_l - \frac{1}{l} \int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx + \delta_r} \\ V = M \frac{1}{t} \cdot \frac{\delta_r + \delta_l - \frac{1}{l} \int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx - z}{\delta_r + \delta_l - \frac{1}{l} \int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx} \end{array} \right.$$

Da diese zwei Werte bekannt sind, können alle Stabkräfte ausgerechnet werden. Die Füllungsstäbe haben die Spannkkräfte $V \sec \alpha_V$ bzw. $H \sec \alpha_h$ und die Gurtkräfte werden:

$$V_l \frac{\xi r}{z} + \int_0^{\xi} \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx \frac{\xi - x}{z} = H \frac{\xi}{t},$$

wobei ξ den Ort des Stabes angibt und $M_h = Hx$ ist.

Spezialfälle.

a) Trapezträger: $l = a + b + c$. Auf der Strecke a und c ist der Gurt geneigt, auf der Strecke b ist er wagerecht und hat die Höhe h . Am linken bzw. rechten Auflager ist die Trägerhöhe h_l bzw. h_r .

$$-\frac{1}{l} \int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx = \frac{1}{a+b+c} \left[\frac{h-h_l}{a} (b+c)a + \frac{h-h_r}{c} c(a+b) \right]$$

$$= \frac{h(a+2b+c) - h_l(b+c) - h_r(a+b)}{a+b+c}.$$

$$\text{Somit ist } H = M \frac{a+b+c}{ah_l + ch_r + (a+2b+c)h} = M \frac{a+b+c}{2F_a} = \frac{M}{2y_m}$$

$$V = \frac{M}{t} - \frac{Hz}{t},$$

wobei F_a die Ansichtsfläche des Hauptträgers und y_m die mittlere Höhe des Trägers ist.

Für $a = c$ und $h_r = h_l = h_o$ (symmetr. Trapeztr.)

$$H = M \frac{2a+b}{2h_o a + 2h(a+b)}, \quad V_l = \frac{M}{t} \frac{2ha + 2hb - bh_o}{2h_o a + 2ha + 2hb};$$

für $b = 0$ ist $H = M \frac{1}{h_o + h}$.

$$\text{b) Parabelgurt: } z = \delta + \frac{4f}{l^2} x(l-x), \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2},$$

$$-\frac{1}{l} \int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx = \frac{8f}{l^3} \int_0^l x(l-x) dx = \frac{4}{3} f,$$

$$H = M \frac{1}{2\delta + \frac{4}{3}f} = M \frac{1}{2y_m}; \quad \text{für } \delta = 0 \text{ ist } H = \frac{3M}{4f}.$$

Die graphische Darstellung des Ausdruckes $-\frac{1}{l} \int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx$

ist sehr einfach. Er wurde bereits in Fig. 5 als die Strecke gefunden, die von den äußersten Seilseiten des Seilpolygons s' auf der linken Auflagerlotrechten abgeschnitten wird.¹⁾

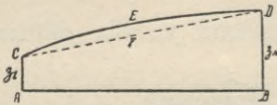
Nun kann die Aufgabe behandelt werden, wie groß der Ausdruck $\mathfrak{N}_1 = \frac{\sum S_I^0 S' \varrho}{\sum S'^2 \varrho}$ wird, der den Einfluß der statischen Unbestimmtheit auf den Auflagerdruck darstellt, und der, wie gezeigt, bei parallelpedischen Brücken verschwindet.

Hier ist er nicht mehr gleich Null und muß von Fall zu Fall ausgerechnet werden. Wir wollen ihn für den Fall einer Parabelbrücke ohne Endpfosten finden und dabei den Einfluß der Diagonalen vernachlässigen.

Die Zählersumme $Z = \sum S_I^0 S' \varrho$,

Für Gurte ist: $\xi < a$: $S_I^0 = \pm P \frac{(l-a)\xi}{lz} = \pm P \frac{(l-a)l}{4f(l-\xi)}$,
 $\xi > a$: $S_I^0 = \pm P \frac{(l-\xi)a}{lz} = \pm P \frac{la}{4f\xi}$.

¹⁾ Der Ausdruck für H läßt sich noch folgendermaßen deuten:



$$H = M \frac{1}{\frac{1}{2} l [(h_l + h_r) l - \int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx]}$$

Nun ist aber $(h_l + h_r) l$ die doppelte Trapezfläche $ABCD$, gebildet durch den geraden Gurt, die Sehne des gebogenen Gurtes und die Endpfosten des Hauptträgers. Ferner ist $-\int_0^l x(l-x) \frac{d^2 z}{dx^2} dx$, wie bereits bei Fußnote 1 zur Seite 55

bewiesen, gleich der doppelten Fläche, die vom gebogenen Gurt und der Sehne eingeschlossen wird. Somit ist der Klammerwert im Nenner von H gleich der doppelten Ansichtsfläche F des Hauptträgers $H = \frac{M}{\frac{1}{l} \cdot F \cdot 2} = \frac{1}{2} \frac{M}{F}$. Setzt man

$$\frac{F}{l} = \eta_m, \text{ der mittleren Höhe des Hauptträgers, so ist } H = \frac{1}{2} \frac{M}{\eta_m}.$$

Eine andere sehr elegante Ableitung dieses Satzes siehe Handbuch der Ingenieurwissenschaften II. Band (Der Brückenbau), auch im Buche von Engesser: Zusatzkräfte und Nebenspannungen.

$$\begin{aligned}
 S' &= + V_l \frac{\xi}{z} - H \frac{\xi}{t} - \int_0^{\xi} \frac{H x}{t} \frac{8 f \xi - x}{l^2 z} dx = \frac{M}{t} \frac{\xi l^2}{4 f \xi (l - \xi)} \\
 &\quad - \frac{3 M \xi}{4 f t} - \frac{3 M 8 f}{4 f t l^2} \int_0^{\xi} x (\xi - x) dx \cdot \frac{l^2}{4 f \xi (l - \xi)} \\
 &= \frac{M}{t} \frac{l^2}{4 f (l - \xi)} - \frac{M 3 \xi}{t 4 f} - \frac{3 M}{2 t} \frac{\xi^3}{6 f \xi (l - \xi)} = \frac{M}{t} \cdot \frac{l - 2 \xi}{4 f}.
 \end{aligned}$$

Die Summe

$$\begin{aligned}
 \Sigma S'_l S'_\rho &= 2 \int_0^a P \frac{l(l-a)}{4 f l - \xi} \frac{M l - 2 \xi}{t} \frac{d \xi}{E F_g} + 2 \int_a^l P \frac{l a}{4 f \xi} \cdot \frac{M}{t} \cdot \frac{l - 2 \xi}{4 f} \frac{d \xi}{E F_g} \\
 &= 2 \frac{P M l (l-a)}{16 f^2 t E F_g} \left[2 a + l \cdot \log n \frac{l-a}{l} \right] + 2 \frac{P M l a}{16 f^2 t E F_g} \left[l \log n \frac{l}{a} - 2(l-a) \right] \\
 &= 2 \frac{P M l^2}{16 f^2 t E F_g} \left[(l-a) \log n \frac{l-a}{l} + a \log n \frac{l}{a} \right].
 \end{aligned}$$

Der Klammerausdruck ist

für $a = 0$ gleich 0

für $a = \frac{l}{2}$ gleich 0

für $a = l$ gleich 0.

Die Nennersumme $N = \Sigma S'^2 \rho$

$$N = 2 \int_0^l \frac{M^2 (l - 2 \xi)^2}{t^2} \frac{d \xi}{16 f^2 E F_g} = 2 \frac{M^2 l^3}{48 f^2 t^2 E F_g}.$$

Somit ist $\mathfrak{N}_1 = \frac{P 3 t}{M l} \left[(l-a) \log n \frac{l-a}{l} + a \log n \frac{l}{a} \right]$;

$$60) \quad \mathfrak{N}_1 = -P \frac{3 t}{t + t_1 + t_2} \left[\frac{a}{l} \log n \frac{l}{a} - \frac{l-a}{l} \log n \frac{l}{l-a} \right]$$

Gleichung der Einflußlinie für \mathfrak{N}_1 .

Daraus erkennt man, daß die übliche Methode der Berechnung von Parabelbrücken, die auf die statische Unbestimmtheit infolge der vier vertikalen Auflager keine Rücksicht nimmt, nicht streng richtig sein kann.

Beispiel. $l = 40 \text{ m}$, $a = 6 \text{ m}$, $t_1 + t_2 + t = t$. ($t_1 = t_2 = 0$.)
 $\mathfrak{N}_1 = -3 P [0,15 \log n 6,67 - 0,85 \log n 1,17]$
 $= -3 P [0,15 (6,5 - 4,6) - 0,85 (4,8 - 4,6)] = -P \cdot 3 (0,285 - 0,133)$
 $= -0,453 P \approx -0,5 P$.

Für welches a ist \mathfrak{N}_1 ein Extrem?

$$\frac{d}{da} \left[\frac{l-a}{l} \log n \frac{l-a}{l} - \frac{a}{l} \log n \frac{a}{l} \right] = 0$$

$$-\frac{l-a}{l} \frac{1}{l-a} \frac{1}{l} - \frac{1}{l} \log n \frac{l-a}{l} - \frac{a}{l} \frac{1}{a} \frac{1}{l} - \frac{1}{l} \log n \frac{a}{l} = 0$$

$$-1 - 1 - \log n \frac{l-a}{l} \cdot \frac{a}{l} = 0; \log n \frac{(l-a)a}{l^2} = -2,$$

$$\frac{l^2}{a(l-a)} = e^2; a^2 - a l + \frac{l^2}{e^2} = 0, a = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{e}}$$

$$= \frac{l}{2} \pm \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{e^2}}; a = \frac{l}{2} \pm 0,34 l = \begin{cases} 0,84 l \\ 0,16 l \end{cases}$$

§ 45. Einfluß der Ungenauigkeit der Widerlager. Die Applikaten der vier Auflagerpunkte in deren richtiger Lage seien $-h_1$, $-h_2$, $-h_3$ und $-h_4$. Die wirklichen Applikaten seien um $-dh_1$, $-dh_2$, $-dh_3$ und $-dh_4$ verschieden.

Sind die Größen dh_1 bis dh_4 so beschaffen, daß

$$61) \quad dh_1 = dh_2 + (dh_3 - dh_4) \frac{t + t_1 + t_2}{t + t_3 + t_4} = \mathcal{A}_1$$

ist, dann geht diese Änderung spannungslos vor sich. Dies erkennt man daraus, daß, wenn man sich die Größen dh_2 , dh_3 und dh_4 von einer $x-y$ -Ebene als Applikaten aufträgt, natürlich oberhalb oder unterhalb der zugehörigen Auflagerpunkte und durch die drei Punkte im Raume eine Ebene legt, so hat diese Ebene die Gleichung

$$z = - \frac{dh_2 (t + t_3 + t_4) + dh_3 (t_4 - t_2) + dh_4 (t + t_2 + t_3)}{l (t + t_3 + t_4)} x$$

$$+ \frac{dh_4 - dh_3}{t + t_3 + t_4} y - dh_2 + \frac{dh_4 (t + t_2) - dh_3 (t + t_2)}{t + t_3 + t_4}.$$

Dieser Gleichung genügen aber die Koordinaten eines Punktes $x = 0$, $y = -t_1$, $z = \mathcal{A}_1$.

Ist nun $dh_1 \neq \mathcal{A}_1$, dann geht die Änderung der Höhenlagen nicht mehr spannungslos vor sich. Eine Rolle spielt nur der Ausdruck: $dh_1 - \mathcal{A}_1 = -\delta_1$.

Durch die beschriebene Senkung der Brücke entstehen Auflagerdrucke R und Stabkräfte.

Es ist $\Sigma S' \mathcal{L} s = \delta_1$, woraus folgt: $R_1 = -\frac{\delta_1}{\Sigma S'^2 \varrho}$, wobei S' den Einfluß einer Kraft -1 am Punkte 1 bedeutet.

$\Sigma S'^2 \varrho$ ist der Ausdruck, der uns schon früher beschäftigte, und der die Deformation der Brücke, gemessen im Punkte 1 infolge der Kraft -1 , darstellt.

Bei einer parallelepipedischen Brücke ist:

- a) für die 4 Gurte: $S' = \frac{M}{2t_3} b m$, wobei $m = 0$ oder ± 1 sein kann, es ist somit infolge der Gurtkräfte

$$\Sigma S'^2 \varrho = 4 \int_0^l \frac{M^2}{4t^2 \delta^2} b^2 m^2 dx \frac{1}{EF_g} = \mu \frac{M^2 b^2 l}{t^2 \delta^2 EF_g},$$

μ kann sein, 0 , 1 oder $1/2$;

- b) für die Diagonalen in den vertikalen Wänden:

$$S' = \pm \frac{M}{2t} \sec \alpha_v \text{ somit ist } \Sigma S'^2 \varrho = 2 \frac{M^2 \delta \sec^3 \alpha_v l}{4t^2 EF_d b};$$

- c) für die Diagonalen in den horizontalen Wänden:

$$S' = \pm \frac{M}{2\delta} \sec \alpha_h, \text{ somit ist } \Sigma S'^2 \varrho = 2 \frac{M^2 t \sec^3 \alpha_h l}{4\delta^2 EF_d b};$$

- b) für die Pfosten in den vertikalen Wänden:

$$S' = \pm \frac{M}{2t}, \text{ somit ist } \Sigma S'^2 \varrho = 2 \frac{M^2 \delta l}{4t^2 b EF_p};$$

- c) für die Riegel in den horizontalen Wänden:

$$S' = \pm \frac{M}{2\delta}, \text{ somit ist } \Sigma S'^2 \varrho = 2 \frac{M^2 t l}{4\delta^2 b EF_p}.$$

Insgesamt ist:

$$\Sigma S'^2 \varrho = \frac{M^2 n}{2t^2 \delta^2 E} \left[\frac{2\mu b^3}{F_g} + \sqrt{(b^2 + \delta^2)^3} \frac{1}{F_d} + \sqrt{(b^2 + t^2)^3} \frac{1}{F_d} + \frac{\delta^3 + t^3}{F_p} \right].$$

Hierbei ist $M = -(t + t_1 + t_2)$.

Bei Strebenfachwerken entfallen die letzten zwei Glieder in der Klammer. Haben die parallelen Fachwerke andere Diagonalsysteme, dann kann die letzte Formel als Annäherung angewandt werden.

Beispiel. Eine parallelepipedische Brücke, deren Hauptträger Ständerfachwerke und deren Horizontalverspannungen Streben-

fachwerke seien, habe eine Spannweite $l = 40 \text{ m}$, $n = 10$ Felder, $b = 4 \text{ m}$, $z = 4 \text{ m}$, $t = 4 \text{ m}$, $t_1 = t_2 = 0$, $F_g = 50 \text{ cm}^2$, $F_d = 40 \text{ cm}^2$, $F_p = 30 \text{ cm}^2$, $E = 2000 \text{ t/cm}^2$, $\mu = \frac{1}{2}$, $M = t = -4,0 \text{ m}$.

$$\begin{aligned} \Sigma S'^2 \varrho &= \frac{400 \cdot 400 \cdot 10}{2 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 2000} \left[\frac{2 \times \frac{1}{2} \times 400 \times 400 \times 400}{50} \right. \\ &\quad \left. + \frac{400 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 1,41^3}{40} + \frac{400 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 1,41^3}{40} + \frac{400 \cdot 400 \cdot 400}{30} \right] \\ &= \frac{1}{64000000} [1280000 + 4512000 + 4512000 + 2133000] \\ &= 0,194 \text{ cm/t.} \end{aligned}$$

Der Auflagerdruck R_1 ist $R_1^i = \frac{\delta_1}{\Sigma S'^2 \varrho} = \frac{\delta_1}{0,194} = 5,15 \cdot \delta \text{ cm}$.

§ 46. Berechnungsvorgang. Günstige Anordnung der Querrahmen. Die Berechnung von Brücken mit vier Außenragwänden gestaltet sich gewöhnlich sehr einfach. Durch Zwischensysteme (z. B. Querträger) werden die Lasten auf die Außenragwände übertragen, von denen sie dann weiter auf die Auflager geleitet werden. Will man die oben beschriebene statische Unbestimmtheit berücksichtigen, so ist das Korrektionsglied \mathfrak{N}_1 des Auflagerdruckes zu bestimmen und dann die Brücke mit dem Torsionsmoment $\mathfrak{N}_1 (t + t_1 + t_2)$ zu belasten. Ebenso können etwaige wirkliche oder mögliche Ungenauigkeiten der Auflager berücksichtigt werden.

Da die Ausbildung der Zwischensysteme verschieden sein kann, läßt sich nicht ohne weiteres sagen, welchen Anteil jede der Wände von einer Last erhält. Für gewöhnlich werden die vertikalen Lasten durch Querträger auf die zwei vertikalen Längswände im Verhältnisse $y:t - y$ übertragen, ebenso die horizontalen Kräfte auf die horizontalen Verbände. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, denn die Zwischensysteme können so beschaffen sein, daß z. B. lotrechte Lasten durch eine lotrechte und die zwei wagerechten Wände übernommen werden.

Die Übertragung der äußeren Lasten auf die Auflagerpunkte bietet jedoch im allgemeinen nichts Neues. Systematisch die Materie zu fassen, ist wegen der erwähnten Mannigfaltigkeit der Ausbildung schwierig.

Der Freiheitsgrad der unsteifen Querrahmen kann dazu verwandt werden, die Lastanteile, die auf die einzelnen Tragwände entfallen, nach Bedarf und günstig zu regulieren.

Es zeige beispielsweise eine Brücke den Querschnitt nach Fig. 40. Lasten greifen an den äußersten Ecken an. Die Brücke könnte z. B. für eine Hängebahn bestimmt sein. Die Last P überträgt sich auf alle vier Wände. Es ist

$$H = \pm P \frac{e' + t'}{h} \quad V' = P \frac{t'}{t} \quad V'' = P \frac{t'}{t}.$$

Die Teilstrecken t und t' sollen möglichst günstig gewählt werden. Als die günstigste Lösung wäre der Fall zu betrachten, in dem erreicht wird, daß die Last V auf beide Hauptträger gleichmäßig verteilt wird und das durch die Verschiebung entstehende Moment sich auf die zwei parallelen Paare von Wänden so überträgt, daß die Gurte infolge der Momente keine oder geringe Spannung erhalten. Dies wird erreicht, wenn das Verschiebungsmoment

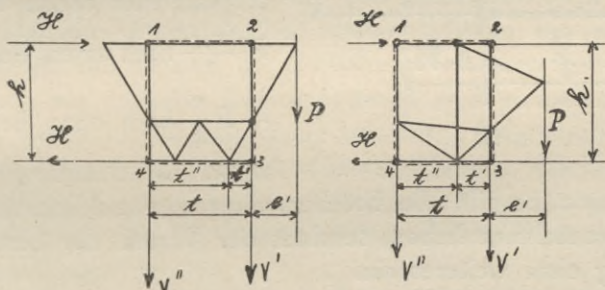


Fig. 40.

$M = P \left(e' + \frac{t}{2} \right)$ in zwei Kräftepaare mit gleichen Momenten zerfällt. Die Einzelkräfte der Kräftepaare sind $\pm \frac{M}{2t}, + \frac{M}{2h}$.

Insgesamt betragen nun die Beanspruchungen der Wände:

$$\text{rechts: } V_1' = \frac{P}{2} + \frac{M}{2t} = \frac{P}{2} + P \frac{2e' + t}{2 \cdot 2t} = \frac{3}{4} P + \frac{1}{2} P \frac{e'}{t},$$

$$\text{links: } V_1'' = \frac{P}{2} - \frac{M}{2t} = \frac{P}{2} - P \frac{2e' + t}{2 \cdot 2t} = \frac{1}{4} P - \frac{1}{2} P \frac{e'}{t},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{oben u.} \\ \text{unten} \end{array} \right\} H_1 = \pm \frac{M}{2h} = \pm P \frac{2e' + t}{4h}.$$

Setzt man die Ausdrücke für V' usw. einander gleich, so erhält man ($V_1' = V'$; $V_1'' = V''$, $H_1 = H$)

$$\frac{e' + t'}{h} = \frac{2e' + t}{4h}; \quad t' = \frac{t}{4} - \frac{e'}{2}.$$

Dieser Wert von t' erfüllt auch die anderen zwei Gleichungen.

Bei dem ausgerechneten Werte von t' werden die Gurte genau dieselben Stabkräfte erhalten, als wenn die Last in Mitte des Querrahmens angreifen würde. Die Diagonalen der vertikalen Träger werden beansprucht, als wenn im rechten Hauptträger die Last $\frac{3}{4}P + \frac{1}{2}P\frac{e'}{t}$, im linken die Lasten $\frac{1}{4}P - \frac{1}{2}P\frac{e'}{t}$ und in den Verspannungen die

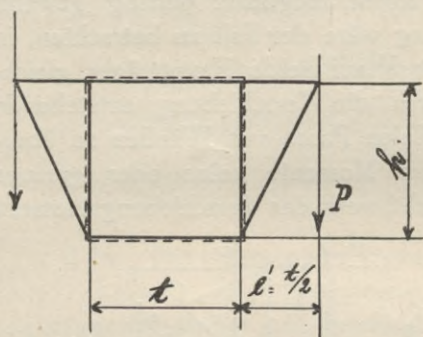


Fig. 41.

Lasten $\pm P\frac{2e' + t}{4h}$ wirkten.

Würde ein gewöhnlicher Querräger eingebaut sein, der auf dem rechten und linken Hauptträger seine Stützpunkte hätte, so wäre der rechte Träger mit $P\frac{e' + t}{t}$ nach unten, der linke mit $+P\frac{e'}{t}$ nach oben beansprucht,

wobei die Belastung für Gurte und Füllungsstäbe gilt. Bei Brücken, die rechts und links exzentrische Lasten aufzunehmen haben, leuchtet der Vorteil der beschriebenen Anordnung ohne weiteres ein.

Für $e' = \frac{t}{2}$ ergibt sich $t' = 0$, was besonders günstig ist, da der Querrahmen sehr einfach aussieht. Es hat dann der Querrahmen die Form nach Fig. 41.

Selbstredend kann man auch andere Bedingungen vorschreiben und dementsprechend das t' wählen.

Dritte Abteilung.

Brücken mit vier Tragwänden und steifen Zwischenquerrahmen.¹⁾

§ 47. Entwicklung. Aus dem Bisherigen geht es hervor, daß die statische Unbestimmtheit dieser Brücken um einen Grad höher ist, als die Anzahl der Zwischenquerrahmen beträgt; denn, die Brücken mit unsteifen Zwischenrahmen sind einmal statisch unbestimmt, wenn sie vier Tragwände besitzen. Jeder steife Zwischenquerrahmen bringt eine neue Unbestimmtheit herein. Die Unbestimmtheit, die durch die vier Tragwände bedingt ist, kann hier außer acht gelassen werden. Bei parallelepipedischen Brücken kann sie übrigens ganz vernachlässigt werden.

Es bleibt zu untersuchen, welchen Einfluß die Zwischenquerrahmen haben. Die folgenden Untersuchungen seien auf parallelepipedische Brücken beschränkt.

Es sei vorausgeschickt, daß diese Brücken sehr oft ausgeführt werden, insbesondere bei den Brücken für Verladezwecke, ferner bei Hängebahnbrücken usw., weil sich hierbei die Notwendigkeit ergibt, Querrahmen zur Aufhängung von Fahrbahnen der auf den Brücken verkehrenden Hebezeuge, Hängebahnwagen usw. einzubauen. Meistens werden diese Querrahmen steif ausgeführt. In der Regel werden jedoch diese Brücken nicht ganz genau gerechnet, indem man das Vorhandensein der Querrahmen bei der Berechnung vernachlässigt und sie lediglich bei der Übertragung der Lasten auf die Tragwände berücksichtigt. Nun spielen die Querrahmen auch bei der

¹⁾ Dieses Thema wurde bereits vom Verfasser im Eisenbau 1912, Heft 3, bearbeitet. Leider muß er bekennen, daß durch Vernachlässigung der Spannungen der Diagonalen und dergleichen sich ein prinzipieller Fehler eingeschlichen hat. Merkwürdigerweise sind die Schlußfolgerungen des dort Gesagten im ganzen richtig. Die Dritte Abteilung dieser Arbeit möge als Ersatz des Aufsatzes im Eisenbau dienen.

schärferen Berechnung eine Rolle. Die übliche Berechnungsart könnte zwar manchmal zu Fehlern bei der Querschnittsbemessung führen, in der Hauptsache aber ergibt sie ein zu großes Eisengewicht der Brückenkonstruktion. Insbesondere bei Brücken, bei denen Momente in zur Brückenachse senkrechten Ebenen wirken, kann man bei einer richtigen Berechnung Vorteile erzielen, also z. B. bei Verladebrücken mit ganz einseitig wirkenden Lasten oder bei einer mit einem fahrbaren Drehkran belasteten Konstruktion. Eine solche Brücke ist zwar mehrfach statisch unbestimmt, die Berechnung gestaltet sich aber in sehr vielen Fällen so einfach, daß man sie ruhig in Kauf nehmen kann.

Das kinematische Kennzeichen der statischen Unbestimmtheit obiger Brücken beruht darin, daß sich die einzelnen äußeren Tragwände nicht willkürlich durchbiegen können; denn sie müssen dabei die Bedingung erfüllen, daß alle Brückenpunkte, die in einem Querrahmen liegen, nach der elastischen Deformation nahezu in derselben Lage zueinander verbleiben, wie bei der unbelasteten Brücke. Nahezu — weil die Querrahmen auch elastische Deformationen erleiden, die jedoch auf die gesamte Durchbiegung und infolgedessen auf die Kräfteverteilung von geringem Einflusse sind.

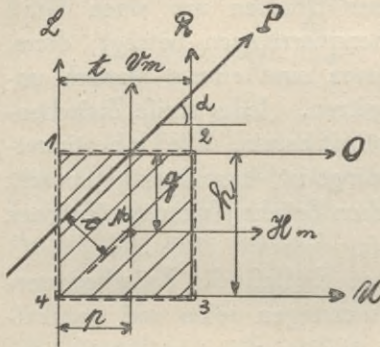


Fig. 42.

Man denke sich nun vorläufig, daß alle Zwischenquerrahmen bis auf einen durch Herausnahme gewisser Stäbe unsteif geworden sind und nur derjenige Rahmen steif bleibt, an dem eine im allgemeinen schräg gerichtete Kraft P angreift (Fig. 42). Die Brücke ist nun streng genommen, zweifach statisch unbestimmt; bei Vernachlässigung der einen Unbestimmtheit, die durch die vier Außenwände bedingt ist, verbleibt noch ein Grad der statischen Unbestimmtheit.

Es gibt innerhalb des Brückenquerschnittes einen ausgezeichneten Punkt M , den wir den „statischen Mittelpunkt“ des Brückenrahmens nennen wollen. Die Ermittlung seiner Koordinaten folgt später. Die Definition des statischen Mittelpunktes sei folgende: „Geht durch diesen Punkt M eine lotrechte Kraft, so werden lediglich die lotrechten Wände zur Übertragung der Kraft herangezogen. Geht durch ihn dagegen eine wagerechte Kraft, so werden nur die horizontalen

Verspannungen beansprucht.“ Es ist klar, daß bei einer Brücke, bei der alle vier Gurte denselben Querschnitt haben und ebenso alle gegenüberliegenden Diagonalen, der statische Mittelpunkt M in der Mitte des Rechteckes liegt, das durch die vier Projektionen der Tragwände auf die Querrahmenebene gebildet wird. Die im Brückenquerschnitt beliebig gelegene Kraft P verschieben wir parallel zu sich selbst in den statischen Mittelpunkt des Brückenrahmens bei gleichzeitiger Hinzufügung eines Momentes M , dessen Achse parallel zur Brückenachse liegt. Wir verfolgen nun die Wirkung der durch den statischen Mittelpunkt gehenden Kraft P_m und die Wirkung des Momentes M einzeln.

Die Kraft P_m läßt sich zerlegen in zwei zu den Wänden parallele Komponenten V_m und H_m . V_m zerlegt sich in $L = V_m \frac{t-p}{t}$ und $R = V_m \frac{p}{t}$, wobei L und R die Anteile der Kraft V_m sind, die durch die linke bzw. rechte Tragwand übertragen werden, während p der Abstand des statischen Mittelpunktes von der linken Tragwand bedeutet. Nach der Definition des statischen Mittelpunktes werden die Kräfte L und R unmittelbar durch die beiden Tragwände auf die Auflagerquerrahmen übertragen.

Ebenso zerlegt sich H_m in O und U ,

$$O = H_m \frac{h-q}{h}, \quad U = H_m \frac{q}{h},$$

wobei q der Abstand des statischen Mittelpunktes von der oberen Verspannung ist.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Wirkung des Torsionsmomentes M zu untersuchen. Das Moment verteilt sich in zwei Teilmomente, von denen jedes in Form eines Kräftepaars die beiden Wände belastet. M_v sei das Moment, das durch die vertikalen, und M_h das Moment, das durch die horizontalen Wände übernommen wird. Es ist $M_h + M_v = M$. Eine zweite Gleichung zur Ermittlung der beiden Teilmomente erhält man nur auf Grund der Betrachtung der elastischen Verschiebungen. Als statisch bestimmten Grundfall wählen wir den Fall, daß die zwei Teilmomente M_h und M_v Werte besitzen, bei denen die Gurtspannungen der Brücke entweder ganz verschwinden oder ganz gering werden. Es ist dies nämlich dann der Fall, wenn $M_h^0 = M_v^0 = \frac{M}{2}$ ist. Bei diesem Grundfall entstehen die Stabkräfte S_0 .

Die Kräfte, welche durch die vier Tragwände übertragen werden, sind beim statisch bestimmten Grundfall

$$L_o = -R_o = \frac{M}{2t} \quad \text{und} \quad O_o = -U_o = \frac{M}{2h}.$$

Die wirklichen Kräfte sind

$$L = L_o + L_1, \quad R = R_o + R_1, \quad O = O_o + O_1 \quad \text{und} \quad U = U_o + U_1.$$

Die Kräfte O_1, U_1, R_1 und L_1 bilden ein Gleichgewichtssystem. Es muß sein: $R_1 = -L_1, O_1 = -U_1 = -L_1 \frac{t}{h}$. L_1 sei die statisch unbestimmte Größe.

Beim Belastungssystem R', L', O' und U' , wobei $L' = -1, R' = +1, O' = \frac{t}{h}, U' = -\frac{t}{h}$ (siehe Fig. 43) entstehen die Stabkräfte S' .

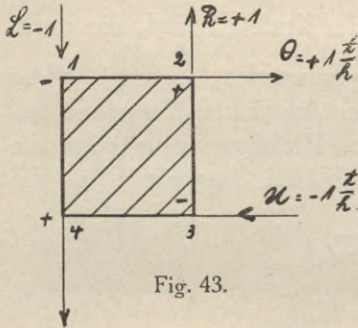


Fig. 43.

$$\text{Es ist } \sum S' \Delta s = 0 \quad \text{oder} \quad \sum S' \frac{Ss}{Ef} = 0.$$

Nach Einsetzung von $S = S_o - S'L'$ erhält man $\sum S'S_o \frac{s}{Ef} - L' \sum \frac{S'^2 s}{Ef} = 0$

$$\text{und} \quad L_1 = \frac{\sum S'S_o \frac{s}{Ef}}{\sum S'^2 \frac{s}{Ef}}.$$

E sei konstant, f sei für jede Gruppe von Stäben konstant (bei ungleichen Querschnittsflächen ist ein mittlerer Wert zu nehmen).

$$62) \quad L_1 = \frac{\sum G'G_o \frac{b}{f_g} + \sum D'_1 D_{1o} \frac{d}{f_{d1}} + \sum D'_2 D_{2o} \frac{d_2}{f_{d2}}}{\sum G'^2 \frac{b}{f_g} + \sum D_1'^2 \frac{d_1}{f_{d1}} + \sum D_2'^2 \frac{d_2}{f_{d2}}},$$

wobei G, D_1, D_2 sich auf die Gurte, Diagonalen der Hauptträger und Diagonalen der Verspannungen beziehen.

Die einzelnen Summen im Zähler betragen:

$$\sum G'G_o \frac{b}{f_g} = 0.$$

Beweis: Wir bilden die Summe für ein Feld. Es wird sich zeigen, daß nicht nur die Summe im ganzen, sondern auch für jedes Brückenfeld einzeln, als verschwindend angesehen werden kann. Das betrachtete Feld sei links vom Angriffsort der Kraft, und die Abszissen der Knotenpunkte dieses Feldes seien x und $x + b$.

G_0 eines beliebigen Stabes kann nun sein:

1. wenn die beiden Ritterschen Momentenpunkte dieses Stabes in einem Brückenquerschnitt liegen (bei x)

$$S_0 = \pm \frac{M}{2t} \frac{x(l-a)}{lh} \mp \frac{M}{2h} \frac{x(l-a)}{lt} = 0;$$

2. wenn die beiden Ritterschen Momentenpunkte nicht in einem Querschnitt liegen, sondern um ein Feld voneinander entfernt sind.

$$S_0 = \pm \frac{M_h}{2t} \frac{x(l-a)}{lh} \mp \frac{M_h}{2h} \frac{(x+b)(l-a)}{lt} = \mp \frac{M_h(l-a)b}{2thl}.$$

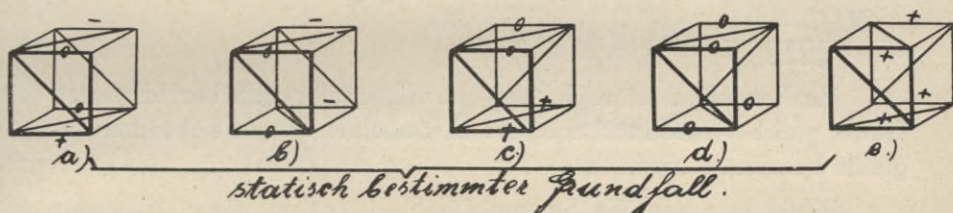


Fig. 44.

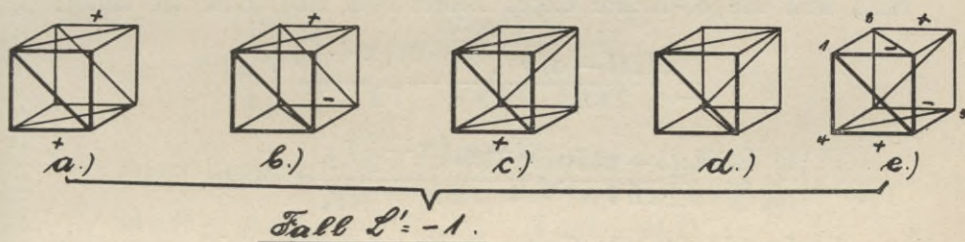


Fig. 45.

Die Fig. 44 a, b, c, d, e zeigen fünf verschiedene Fälle eines Feldes, die alle möglichen relativen Kombinationen der Diagonalrichtungen besitzen. Die Vorzeichen, die die Stabkräfte besitzen, sind in die Figuren eingetragen. Man sieht, daß entweder alle vier Gurte verschwinden, oder aber es verschwinden zwei Gurtkräfte, und die zwei nicht spannungslosen Stäbe sind entweder gleich bezeichnet (wenn sie in derselben Tragwand liegen) oder ungleich bezeichnet, (wenn sie in entgegengesetzten Trägern liegen, also diagonal gegenüber). Schließlich können alle vier Gurte Spannungen haben, die dann alle das gleiche Vorzeichen besitzen.

Für die gleichen fünf Fälle des Brückenfeldes sind in Fig. 45 a, b, c, d und e die Vorzeichen der Gurtspannungen eingetragen, die von der Belastung $L = -1$ herrühren.

Die Stabkräfte für diesen Fall betragen:

1. $S' = \pm \frac{(l-a)x}{lh} \pm \frac{t(l-a)x}{h \cdot lt} = \pm 2 \frac{(l-a)x}{lh}$ oder
2. $S' = \pm \frac{(l-a)(x+b)}{lh} \pm \frac{t(l-a)(x+b)}{h \cdot lt} = \pm 2 \frac{(l-a)(x+b)}{lh}$ oder
3. $S' = \pm \frac{(l-a)x}{lh} \pm \frac{t(l-a)(x+b)}{h \cdot lt} = \pm 2 \frac{(l-a)(x + \frac{b}{2})}{lh}$.

Die Stabkräfte unter 1. und 2. treten ein, wenn gleichzeitig die Stabkräfte S_0 verschwinden, unter 3. dagegen, wenn S_0 den Wert $\pm \frac{M_h(l-a)b}{2thl}$ hat.

Zu bemerken ist noch, daß die diagonal gegenüber liegenden Gurte gleich bezeichnet und die in derselben Wand liegenden ungleich bezeichnet sind.

Bildet man nun die Summe $\Sigma S_0 S' \frac{S}{f}$, so ist diese entweder Null, weil alle S_0 -Kräfte dieses Feldes Null sind, oder sie lautet:

$$\pm \frac{M_h(l-a)b}{2thl} \cdot 2 \frac{(l-a)(x + \frac{b}{2})}{lh} \frac{b}{f_g}$$

$$\mp \frac{M_h(l-a)b}{2thl} \cdot 2 \frac{(l-a)(x + \frac{b}{2})}{lh} \frac{b}{f_g} = \text{Null.}$$

Ist f_g nicht für alle Gurte desselben Feldes gleich, dann hat die $\Sigma G' G_0 \frac{b}{f_g}$ eines Feldes einen Wert, der von 0 verschieden, aber immerhin sehr klein ist. Für alle Felder der Brücke werden trotzdem gewöhnlich die Summen verschwindend klein sein und für symmetrische Belastung ganz verschwinden aus den im § 43 angeführten Gründen, so daß man für alle Fälle $\Sigma G' G_0 \frac{b}{f_g}$ gleich Null setzen kann.

Die zweite Summe im Zähler von L' .

$\Sigma D_1' D_1^0 \frac{d}{f_a} = ?$ Die Fig. 46 zeigt die Vorzeichen der Diagonalen beim statisch bestimmten Grundfall und beim Falle $L' = -1$. Man sieht, daß die Summe $\Sigma D_1' D_1^0 \frac{d_1}{f_{a1}}$ negativ bezeichnet sein muß, da

alle Glieder in den zwei Fällen entgegengesetzt bezeichnet sind.

Dagegen muß die Summe $\Sigma D_2' D_2^0 \frac{d_2}{f_{d_2}}$ positiv sein.

Es ist für die Diagonalen der Hauptträger:

$$\text{links von } a: D_1^0 = \pm L^0 \frac{l-a}{l} \frac{d_1}{h} = \pm \frac{M}{2t} \frac{l-a}{l} \frac{d_1}{h};$$

$$D_1' = \pm L' \frac{l-a}{l} \frac{d_1}{h} = \mp \frac{l-a}{l} \frac{d_1}{h};$$

$$\text{rechts von } a: D_1^0 = \pm L^0 \frac{a}{l} \frac{d_1}{h} = \pm \frac{M}{2tl} \frac{a}{h},$$

$$D_1' = +L' \frac{a}{l} \frac{d_1}{h} = -\frac{a}{l} \frac{d_1}{h}.$$

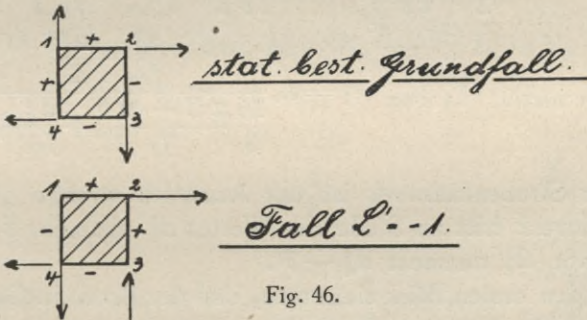


Fig. 46.

$$\begin{aligned} \text{Somit ist } \Sigma D_1^0 D_1' \frac{d_1}{f_{d_1}} &= -\frac{M}{2t} \frac{(l-a)^2 d_1^3 a}{l^2 h^2 f_{d_1} b} - \frac{M a^2}{2t} \frac{d_1^3}{l^2 f_{d_1} h^2} \frac{l-a}{b} \\ &= -\frac{M a (l-a) d_1^3}{2t l^2 h^2 b f_{d_1}} (l-a+a) = -\frac{M a (l-a) d_1^3}{2t l h^2 b f_{d_1}}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich:

$$\Sigma D_2^0 D_2^1 \frac{d_2}{f_{d_2}} = +\frac{M a (l-a) d_2^3}{2t l h^2 b f_{d_2}}.$$

Der Zähler von L_1 beträgt somit:

$$Z = M \frac{a(l-a)}{2t h^2 l b} \left(\frac{d_2^3}{f_{d_2}} - \frac{d_1^3}{f_{d_1}} \right).$$

Der Nenner von L_1 setzt sich zusammen aus den drei Nennersummen:

$$\begin{aligned} \Sigma G' \frac{b}{f_g} &= 4 \int_0^a \left(2 \frac{l-a}{lh} x \right)^2 \frac{dx}{f_g} + 4 \int_a^l \left[2 \frac{a}{lh} (l-x) \right]^2 \frac{dx}{f_g} \\ &= \frac{16 a^2 (l-a)^2}{3 l h^2 f_g}; \end{aligned}$$

$$\Sigma D_1 \cdot \frac{d_1}{f_{d1}} = \frac{(l-a)^2 d_1^3 a}{l^2 h^2 f_{d1} b} + \frac{a^2 d_1^3 l-a}{l^2 h^2 f_{d1} b} = \frac{a(l-a) d_1^3}{l b h^2 f_{d1}},$$

$$\Sigma D_2 \cdot \frac{d_2}{f_{d2}} = \frac{a(l-a) d_2^3}{l b h^3 f_{d2}}.$$

Der Nenner beträgt somit:

$$N = \frac{16 a^2 (l-a)^2}{3 l h^2 f_g} + \frac{a(l-a) d_1^3}{l b h^2 f_{d1}} + \frac{a(l-a) d_2^3}{l b h^2 f_{d2}}.$$

Die Größe L_1 hat den Wert:

$$63) \left\{ \begin{aligned} L_1 &= M \frac{a(l-a) \frac{1}{2 t h^2 l b} \left(\frac{d_2^3}{f_{d2}} - \frac{d_1^3}{f_{d1}} \right)}{\frac{16 a^2 (l-a)^2}{3 l h^2 f_g} + \frac{a(l-a) \left[\frac{d_2^3}{f_{d2}} + \frac{d_1^3}{f_{d1}} \right]}{l b h^2}} \\ &= L^o \frac{\frac{d_2^3}{f_{d2}} - \frac{d_1^3}{f_{d1}}}{\frac{16 a(l-a) b}{3 f_g} + \frac{d_2^3}{f_{d2}} + \frac{d_1^3}{f_{d1}}}. \end{aligned} \right.$$

Beim Strebenfachwerk ist der Ausdruck strenge gültig, beim Ständerfachwerk tritt an Stelle des Wertes d_1^3 nunmehr $d_1^3 + h^3$ und an Stelle von d_2^3 nunmehr $d_2^3 + t^3$.

Auf den ersten Blick sieht man, daß der Bruch in Gleichung 63) von Null nicht sehr verschieden ist. Befindet sich doch im Zähler eine Differenz zweier gleichartiger Größen, während im Nenner außer der Summe derselben zwei Glieder sich noch ein Summand befindet.

Es sei $l = 10 b$, $h = b$, $t = \frac{2}{3} b$, $d_1 = b\sqrt{2}$, $d_2 = b\frac{\sqrt{13}}{3}$,
 $f_d = \frac{1}{2} f_g$, $f_d' = \frac{1}{4} f_g$, $a = \frac{l}{2} = 5 b$.

Es beträgt dann:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{b^3 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{13\sqrt{13}}{\frac{1}{4} \cdot 27} \right) \frac{1}{f_g}}{\frac{16}{3} \frac{1}{f_g} 5 \cdot 5 \cdot b^3 + \left[\frac{13\sqrt{13}}{\frac{1}{4} \cdot 27} + \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \right] \frac{1}{f_g} b^3} \cdot L^o \\ &= \frac{6,95 - 5,65}{6,95 + 5,65 + 133,30} L^o = 0,0089 L^o = \sim 1\% \text{ von } L^o. \end{aligned}$$

Daraus ist zu folgern, daß es in den meisten Fällen angängig ist, $M_v = M_v^o = \frac{M}{2}$ und $M_h = M_h^o = \frac{M}{2}$ zu setzen oder mit anderen

Worten: Das Moment M verteilt sich so in zwei Kräftepaare, daß die Gurtkräfte entweder ganz oder beinahe ganz verschwinden.

§ 48. Lage des statischen Mittelpunktes M . Fig. 47. Die y -Koordinate des statischen Mittelpunktes sei p . Sie muß laut Definition des Punktes M so groß sein, daß eine Vertikalkraft V_m , die durch M geht, sich nach dem Hebelgesetz auf R und L zerlegt und damit O und U gleich Null werden. Wir nehmen vorläufig von dieser Eigenschaft von p keine Notiz und zerlegen nun die Kraft V_m in die vier Kräfte R , L , O und U .

$$R = R_o + R_1, \quad L = L_o + L_1, \quad O = O_o + O_1, \quad U = U_o + U_1.$$

Als statisch bestimmten Grundfall wählen wir:

R_1 L_1 O_1 U_1 verschwinden, $R_o = V_m \frac{t-p}{t}$, $L_o = V_m \frac{t}{p}$, $O_o = o$, $U_o = o$, $S = S_o$. Die Kräfte R_1 , L_1 , O_1 und U_1 bilden ein Gleichgewichtssystem, somit ist $R_1 = -L_1$,

$$O_1 = -U_1 = -L_1 \frac{t}{h}.$$

Für

$$L_1' = -1 \text{ ist } R_1' = +1, \quad O_1' = -U_1' = \frac{t}{h}, \quad S = S'.$$

$$\text{Es bestimmt sich: } L_1 = \frac{\sum S' S_o \frac{s}{f}}{\sum S'^2 \frac{s}{f}}.$$

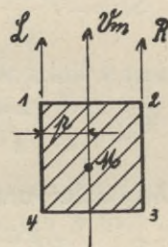


Fig. 47.

Nach der Definition des statischen Mittelpunktes muß nun $O = U = o$, somit $L_1 = o$ sein, oder es muß $\sum S' S_o \frac{s}{f} = o$ sein.

Die Gurte in den Punkten 1, 2, 3 und 4 haben die Querschnitte f_1, f_2, f_3 und f_4 . Die Diagonalen in den Wänden: oben, rechts (vorne), unten, links (hinten) sind f_o, f_r, f_u und f_l .

Gurt 1 rechts von a :

$$S_o = +V \frac{t-p}{t} \frac{a}{l} \frac{l-x}{h}, \quad S' = -2 \frac{a}{lh} (l-x), \quad S_o S' \frac{s}{f} = -2V \frac{t-p}{t f_1} \frac{a^2 (l-x)^2 dx}{l^2 h^2}$$

Gurt 1 links von a :

$$S_o = +V \frac{t-p}{t} \frac{(l-a)x}{lh}, \quad S' = -2 \frac{l-a}{lh} x, \quad S_o S' \frac{s}{f} = -2V \frac{t-p}{t f_1} \frac{(l-a)^2 x^2 dx}{l^2 h^2}$$

Gurt 2 rechts von a :

$$S_o = +V \frac{p a (l-x)}{t l h}, \quad S' = +2 \frac{a (l-x)}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = +2V \frac{p a^2 (l-x)^2 dx}{t f_2 l^2 h^2}$$

Gurt 2 links von a :

$$S_o = +V \frac{p (l-a) x}{t l h}, \quad S' = +2 \frac{(l-a) x}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = +2V \frac{p (l-a)^2 x^2 dx}{t f_2 l^2 h^2}$$

Gurt 3 rechts von a :

$$S_o = -V \frac{p a (l-x)}{t l h}, \quad S' = -2 \frac{a (l-x)}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = +2V \frac{p a^2 (l-x)^2 dx}{t f_3 l^2 h^2}$$

Gurt 3 links von a :

$$S_o = -V \frac{p (l-a) x}{t l h}, \quad S' = -2 \frac{(l-a) x}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = +2V \frac{p (l-a)^2 x^2 dx}{t f_3 l^2 h^2}$$

Gurt 4 rechts von a :

$$S_o = -V \frac{t-p a (l-x)}{t l h}, \quad S' = +2 \frac{a (l-x)}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = -2V \frac{(t-p) a^2 (l-x)^2 dx}{t f_4 l^2 h^2}$$

Gurt 4 links von a :

$$S_o = -V \frac{t-p (l-a) x}{t l h}, \quad S' = +2 \frac{(l-a) x}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = -2V \frac{(t-p) (l-a)^2 x^2 dx}{t f_4 l^2 h^2}$$

Diagonale vorn rechts von a :

$$S_o = -V \frac{p a d_1}{t l h}, \quad S' = + \frac{a d_1}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = -V \frac{p a^2 d_1^3}{t l^2 h^2 f_r}$$

Diagonale vorn links von a :

$$S_o = +V \frac{p (l-a) d_1}{t l h}, \quad S' = - \frac{(l-a) d_1}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = -V \frac{p (l-a)^2 d_1^3}{t l^2 h^2 f_r}$$

Diagonale hinten rechts von a :

$$S_o = -V \frac{t-p a d_1}{t l h}, \quad S' = - \frac{a d_1}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = +V \frac{(t-p) a^2 d_1^3}{t l^2 h^2 f_l}$$

Diagonale hinten links von a :

$$S_o = +V \frac{t-p (l-a) d_1}{t l h}, \quad S' = + \frac{(l-a) d_1}{l h}, \quad S_o S' \frac{s}{f} = +V \frac{(t-p) (l-a)^2 d_1^3}{t l^2 h^2 f_l}$$

$$\Sigma S' S_o \frac{s}{f} = -V \frac{a (l-a)}{3 t l h^2 b} \left\{ 2 b a (l-a) \left[\frac{(t-p) (f_1 + f_4)}{f_1 f_4} - \frac{p (f_2 + f_3)}{f_2 f_3} \right] \right. \\ \left. + 3 d_1^3 \left[\frac{p}{f_r} - \frac{t-p}{f_l} \right] \right\}.$$

Die Bedingung $\Sigma S' S_o \frac{S}{f} = 0$ lautet demnach

$$64) \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{t}{2} \frac{3 d_1^3 \frac{1}{f_l} - 4 a (l-a) b \frac{f_1 + f_4}{2 f_1 f_4}}{3 d_1^3 \frac{f_r + f_l}{2 f_r f_l} - 4 b a (l-a) \frac{f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3 f_4 + f_3 f_4 f_1 + f_4 f_1 f_2}{4 f_1 f_2 f_3 f_4}} \\ &= \frac{t}{2} \frac{3 d_1^3 \frac{1}{f_l} - 4 a (l-a) b \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right)}{3 d_1^3 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_r} + \frac{1}{f_l} \right) - 4 a (l-a) b \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} \right)}, \\ \text{und ebenso findet man die } z\text{-Koordinate des statischen Mittel-} \\ \text{punktes } M \\ q &= \frac{h}{2} \frac{3 d_2^3 \frac{1}{f_o} - 4 a (l-a) b \frac{f_1 + f_2}{2 f_1 f_2}}{3 d_2^3 \frac{f_o + f_u}{2 f_o f_u} - 4 a (l-a) b \frac{f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3 f_4 + f_3 f_4 f_1 + f_4 f_1 f_2}{4 f_1 f_2 f_3 f_4}} \\ &= \frac{h}{2} \frac{3 d_2^3 \frac{1}{f_o} - 4 a (l-a) b \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)}{3 d_2^3 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_o} + \frac{1}{f_u} \right) - 4 a (l-a) b \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Die Lage des statischen Mittelpunktes ändert sich von Brückenquerschnitt zu Querschnitt, da in den Koordinatenwerten p und q die Größe $a(l-a)$ vorkommt. Die Differenzen sind aber ganz gering, so daß man statt des $a(l-a)$ den konstanten Mittelwert (arithmetisches Mittel) von $a(l-a)$ nehmen kann, und zwar den Wert

$$\frac{1}{l} \int_0^l a(l-a) da = \frac{l^2}{6}.$$

Die Werte p und q , die jetzt konstant sind, haben die Werte p_m, q_m .

$$64') \left\{ \begin{aligned} p_m &= \frac{t}{2} \frac{3 d_1^3 \frac{1}{f_l} - \frac{2}{3} l^2 b \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right)}{3 d_1^3 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_r} + \frac{1}{f_l} \right) - \frac{2}{3} l^2 b \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} \right)}, \\ q_m &= \frac{h}{2} \frac{3 d_2^3 \cdot \frac{1}{f_o} - \frac{2}{3} l^2 b \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)}{3 d_2^3 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_o} + \frac{1}{f_u} \right) - \frac{2}{3} l^2 b \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Der erste Ausdruck im Zähler und Nenner ist gewöhnlich viel kleiner als der zweite, so daß man die höheren Potenzen des Verhältnisses des ersten Ausdruckes zum zweiten vernachlässigen kann. Wir heben also im Zähler und im Nenner die zweiten Glieder aus der Klammer. Es ist

$$\begin{aligned}
 p_m &= \frac{\left[1 - \frac{9 d_1^3}{2 b l^2} \frac{1}{f_i} 2 \frac{1}{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4}\right)}\right]^2 l^2 b \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4}\right)}{\left[1 - \frac{9 d_1^3}{2 b l^2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_r} + \frac{1}{f_l}\right) 4 \frac{1}{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4}\right)}\right]^2 l^2 b \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4}\right)} \cdot \frac{t}{2} \\
 &= \frac{t}{2} \left[1 - \frac{9 d_1^3}{2 b l^2} \frac{1}{f_i} 2 \frac{1}{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4}\right)}\right. \\
 &\quad \left. + \frac{9 d_1^3}{2 b l^2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_r} + \frac{1}{f_l}\right) \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4}\right)\right] \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4}\right)}{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4}\right)}.
 \end{aligned}$$

Angenommen, daß alle Stabquerschnitte des rechten Trägers α mal so groß sind als die des linken, dann ist

$$\begin{aligned}
 p_m &= \frac{t}{2} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4}\right)}{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4}\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \left[1 - \frac{9 d_1^3}{2 b l^2} \frac{1}{f_i} 2 \frac{1}{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4}\right)}\right. \\
 &\quad \left. + \frac{9 d_1^3}{2 b l^2} \frac{1}{2} \frac{1}{f_l} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4}\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}\right] = t \frac{\alpha}{1 + \alpha}.
 \end{aligned}$$

Denkt man sich im linken und rechten Hauptträger Gewichte vereinigt, wobei die im rechten α mal so schwer sind als die im linken Hauptträger, so liegt bekanntlich der Schwerpunkt dieser Gewichte in einer Entfernung p' vom linken Hauptträger, wobei $p' = \frac{\alpha}{1 + \alpha} t$ ist. Das ist aber nichts anderes als die Größe für p , den Abstand des statischen Mittelpunktes vom linken Hauptträger.

Ebenso ergibt es sich: Ist die untere Verspannung β mal so schwer als die obere, dann liegt der Schwerpunkt in einer Tiefe von q' unter der oberen Verspannung, wobei $q' = \frac{\beta}{1 + \beta}$ ist. Dasselbe ergibt sich für q , den Abstand des statischen Mittelpunktes von der

oberen Verspannung, wenn die Querschnitte der Stäbe unten β mal so groß sind, wie die der oberen Verspannung.

Der statische Mittelpunkt deckt sich somit mit dem Schwerpunkt des ideellen Brückenquerschnittes.

§ 49. Berechnungsvorgang. Ist nach obigen Regeln die Lage des statischen Mittelpunktes ermittelt, so verschiebe man eine jede Kraft P parallel zu sich selbst in den statischen Mittelpunkt und füge ein Moment $M = \Sigma P e$ hinzu. Die Kräfte P , zu einer Resultierenden vereinigt, geben ΣP . ΣP zerlegt man in zwei zu den Hauptrichtungen der Tragwände parallele Komponenten $V = \Sigma P \sin \alpha$; $H = \Sigma P \cos \alpha$. Die Kräfte V und H zerlegt man nun in je zwei parallele in die vier Tragwände fallende Kräfte nach dem Hebelgesetz. Jede der Tragwände wird nun für die auf sie entfallende Kraft R, L, O, U berechnet.

$$R = V \frac{p}{t}, \quad L = V \frac{t-p}{t}, \quad O = H \frac{h-q}{h}, \quad U = H \frac{q}{h}.$$

Das Moment M zerlegt man ferner in zwei Kräftepaare

$$\pm V_1 = \pm \frac{M}{2t} \quad \pm H_1 = \pm \frac{M}{2h}$$

von denen das erste die vertikalen, das zweite die Horizontal-längswände beansprucht. Die Momente der einzelnen Kräftepaare sind gleich und betragen $\frac{M}{2}$. Der Sinn der vier Kräfte bestimmt sich aus dem Sinn des angreifenden Momentes. Erwähnt sei, daß bei der Beanspruchungsart durch solche zwei Momente, die Gurtstäbe entweder gar keine oder nur ganz geringe Kräfte erhalten, die der jeweiligen Scherkraft und der Feldweite proportional sind. Man begeht sehr oft keinen großen Fehler, wenn man diese Kräfte überhaupt vernachlässigt, zumal sie nur an den Auflagern verhältnismäßig größere Werte erhalten.

Da das Moment keinen Einfluß auf die Gurtkräfte hat, hat es auch keinen Einfluß auf die Querschnittsbemessung der Gurte. Die Querschnittsbemessung richtet sich demnach ausschließlich nach der absoluten Größe der Kräfte P . Nimmt man vorläufig an, daß die beiden Hauptträger gleich dimensioniert sind, so beträgt $p = \frac{t}{2}$, da $\alpha = 1$ ist. Die vertikale Komponente von ΣP verteilt sich demnach in zwei gleiche Teile $R = L = \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} \Sigma P \sin \alpha$. Dadurch ist aber tatsächlich die Beanspruchung rechts und links gleich, und es liegt

keine Veranlassung vor, die beiden Hauptträger verschieden zu dimensionieren. Für die Berechnung einer solchen (symmetrischen) Brücke auf die vertikalen Komponenten der Kräfte ergibt sich daraus folgende einfache Regel:

Von jeder Vertikalkraft P bringe man je die Hälfte, also $\frac{1}{2}P$, auf jeden der zwei Hauptträger und bestimme so die Gurtkräfte. Außerdem denke man sich im betreffenden Querrahmenorte der Brückenhauptträger die Belastung $\Sigma \left(\frac{1}{2}P \pm \frac{1}{2}P \frac{e}{t} \right)$ und bestimme danach die Füllungsstäbe der Hauptträger. e bedeutet hierbei die Entfernung der vertikalen Last von der Brückenmitte, und t die Entfernung beider Hauptträger voneinander. Das Zeichen von $\frac{1}{2}P \frac{e}{t}$ bestimmt man so, daß diejenige Tragwand, an welche P näher liegt, das Zeichen $+$ bekommt. Die Füllungsstäbe der beiden Verspannungen berechnet man, indem man die Verspannungen mit $\pm \frac{1}{2}P \frac{e}{h}$ im Sinne des Momentes belastet.

Bei der Berechnung der Brücke auf horizontale Kräfte kann nicht mehr angenommen werden, daß die Gurtquerschnitte gleich sind, weil gerade die Obergurte gewöhnlich stärker ausgeführt werden, und zwar wegen der Knickgefahr, ferner weil sich am Obergurt von vielen Brücken, die gerade für Verladezwecke bestimmt sind, Kranfahrbahnen befinden, die eine stärkere Dimensionierung erfordern. Nimmt man nun an, daß der Untergurt β mal stärker ist als der Obergurt, die darin befindlichen Diagonalen eingeschlossen, so liegt, wie früher gezeigt wurde, der statische Mittelpunkt in einer Tiefe $q = h \frac{1 + \beta}{\beta}$ unter der oberen Verspannung. β ist gewöhnlich ein echter Bruch.

Verschiebt man nun alle horizontalen Kräfte W (oder die wagerechten Komponenten der Lasten) in den statischen Mittelpunkt, und zerlegt man nun die Kräfte W nach dem Hebelgesetz auf die Verspannungen, so entfällt auf die obere Verspannung:

$$O = W \frac{h - q}{h} = \frac{1}{1 + \beta} W,$$

und auf die untere Verspannung: $U = W \frac{\beta}{1 + \beta}$.

Man ersieht, daß sich O zu U verhalten, wie 1 zu β , genau so, wie die Profile der oberen Verspannung sich verhalten zu denjenigen

der unteren. Die Spannungen werden daher nahezu gleich sein, und die Lastverteilung ist die denkbar günstigste.

Nennt man den Abstand der Kraft W (bevor sie in den Punkt M verschoben wurde) vom statischen Mittelpunkt w , so muß noch zwecks Berechnung der Füllungsstäbe der horizontalen Verspannung außer der Kraft O und U noch die Kraft $\pm \frac{Ww}{2h}$ angebracht werden. Um die Füllungsstäbe der Hauptträger zu berechnen, belaste man sie mit den Kräften $\pm \frac{Ww}{2t}$. Durch diese letzteren Kräfte werden, wie mehrfach erwähnt, die Gurtspannungen nicht tangiert.

Aus den obigen Ausführungen ergibt sich, daß die statisch unbestimmten parallelepipedischen Brücken, bei denen die statische Unbestimmtheit von den überzähligen steifen Querrahmen herrührt, sehr günstig sind, insbesondere wenn Torsionsmomente auftreten. Zwar kann man, wie in § 46 gezeigt, auch die in dieser Beziehung statisch bestimmten Brücken so konstruieren, daß sie diese Eigenschaften besitzen; jedoch erfordert jene Bauart besonders geartete unsteife Querrahmen.

Bei der üblichen Berechnungsart der Brücken überträgt man vertikale Lasten durch die zwei Hauptträger und horizontale durch die zwei Verspannungen, wobei die Kräfte nach dem Hebelgesetze verteilt werden.

Wirkt beispielsweise eine vertikale Kraft P im Abstände e von der Mitte der Brücke, so hat man nach der üblichen Rechnungsart die Kraft P zerlegt in $\frac{P}{2} + P\frac{e}{t}$, die auf die näher gelegene und $\frac{P}{2} - P\frac{e}{t}$, die auf die entfernter gelegene Tragwand entfällt, was, im Vergleiche mit der genaueren Rechnungsart, viel größere Stabkräfte ergibt, insbesondere bei den Gurtungen. Die Füllungsstäbe bei den Verspannungen werden dagegen nach der üblichen Methode als spannungslos angesehen, was natürlich falsch ist und zu Überbeanspruchungen führen kann.

§ 50. Verschiebung des belasteten Querrahmens. Wir untersuchen nacheinander die Verschiebungen, die der Querrahmen erleidet, wenn auf ihn eine Last V_m , die durch den statischen Mittelpunkt geht, einwirkt, ferner, wenn die Brücke durch ein Torsionsmoment M belastet ist.

Fall einer Einzellast V_m .

Bei der Belastung durch V_m sind gemäß der Definition des statischen Mittelpunktes die beiden Horizontalverspannungen unbelastet, d. h. die Diagonalen dieser Verspannungen sind spannungslos. Die linke Tragwand biegt sich durch. Da die Gurte der linken Tragwand gleichzeitig Gurte der Verspannungen sind, so bewegt sich der Obergurt, der Zugspannungen erfährt, nach außen, also nach links, und der gedrückte Untergurt nach innen, also nach rechts. Die ganzen Verspannungen machen diese wagerechte Bewegung mit. Nun erhält die rechte Tragwand ebenfalls Spannungen, so daß die obere Verspannung nach rechts und die untere nach links wandert. Diese beiden entgegengesetzt gerichteten Bewegungen heben sich

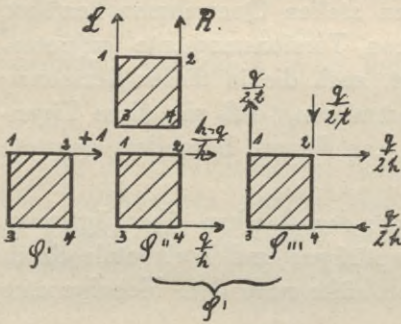


Fig. 48.

zum Teil oder ganz auf. Es ist nun die Frage: Wieviel beträgt die seitliche Ausbiegung der oberen und wieviel die der unteren Verspannung? Ferner: Welches ist der Weg dieses Querrahmens? Da der Querrahmen seine geometrische Gestalt infolge seiner Steifigkeit behalten muß, und zwar vollkommen behalten muß, da wir ihn als starr ansehen wollen, genügt es, wenn wir den Weg eines einzigen Punktes genau

ermitteln und von einem anderen Punkte wenigstens die eine Komponente seiner Bewegung.

Wie groß ist δ_{1h} ? $\delta_{1h} = \Sigma S_0 S' \frac{s}{E f}$, wobei S_0 die Spannkraft bei der Belastung L und R und S' bei Belastung $O = +1$ ist. S' zerfällt nach der vorausgegangenen Theorie in S'' und S''' , wobei S'' die Spannkraft ist bei $O = +\frac{1}{2}$, $U = +\frac{1}{2}$, während S''' die Spannkraft beim Torsionsmoment $M = \frac{h}{2}$ bedeutet (Fig. 48).

$$E \delta_{1h} = \Sigma S_1^0 S_1'' \frac{s}{f_1} + \Sigma S_2^0 S_2'' \frac{s}{f_2} + \Sigma S_3^0 S_3'' \frac{s}{f_3} + \Sigma S_4^0 S_4'' \frac{s}{f_4} \\ + \Sigma D_l^0 D_l''' \frac{d}{f_l} + \Sigma D_r^0 D_r''' \frac{d}{f_r}.$$

Man beachte, daß für die Gurte S_0''' , für die Diagonalen D_0^0 , D_u^0 , D_i'' und D_r'' verschwinden.

$$\begin{aligned}
 S_1^0 &= +L \frac{l-ax}{l} \frac{x}{h} \text{ bzw. } +L \frac{al-x}{l} \frac{x}{h}; & S_1''' &= -\frac{h-ql-ax}{h} \frac{x}{l} \frac{x}{t} \text{ bzw. } -\frac{h-qa-l-x}{h} \frac{x}{l} \frac{x}{t} \\
 S_2^0 &= +R \frac{l-ax}{l} \frac{x}{h} \text{ " } +R \frac{al-x}{l} \frac{x}{h}; & S_2''' &= +\frac{h-ql-ax}{h} \frac{x}{l} \frac{x}{t} \text{ " } +\frac{h-qa-l-x}{h} \frac{x}{l} \frac{x}{t} \\
 S_3^0 &= -R \frac{l-ax}{l} \frac{x}{h} \text{ " } -R \frac{al-x}{l} \frac{x}{h}; & S_3''' &= +\frac{ql-ax}{h} \frac{x}{l} \frac{x}{t} \text{ " } +\frac{qal-x}{hl} \frac{x}{t} \\
 S_4^0 &= -L \frac{l-ax}{l} \frac{x}{h} \text{ " } -L \frac{al-x}{l} \frac{x}{h}; & S_4''' &= -\frac{ql-ax}{h} \frac{x}{l} \frac{x}{t} \text{ " } -\frac{qal-x}{hl} \frac{x}{t} \\
 D_i^0 &= -L \frac{l-ad}{l} \frac{d}{h} \text{ " } +L \frac{ad}{l} \frac{d}{h}; & D_i''' &= -\frac{ql-ax}{2t} \frac{x}{l} \frac{x}{t} \text{ " } +\frac{qal-x}{2tl} \frac{x}{t} \\
 D_r^0 &= -R \frac{l-ad}{l} \frac{d}{h} \text{ " } +R \frac{ad}{l} \frac{d}{h}; & D_r''' &= +\frac{ql-ax}{2t} \frac{x}{l} \frac{x}{t} \text{ " } -\frac{qal-x}{2tl} \frac{x}{t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Ed_{1h} \text{ ergibt sich zu } & L \frac{(l-a)^2 a^2}{3lht} \left[-\frac{h-q}{hf_1} + \frac{q}{hf_4} \right] \\
 & + R \frac{a^2(l-a)^2}{3lht} \left(\frac{h-q}{hf_2} - \frac{q}{hf_3} \right) + \frac{qa(l-a)d^3}{2th^2bl} \left[L \frac{1}{f_l} - R \frac{1}{f_r} \right].
 \end{aligned}$$

Nach Einsetzung der Werte $L = V_m \frac{t-p}{t}$ und $R = V \frac{p}{t}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 Ed_{1h} &= V \frac{(l-a)a}{12lh t^2 b} \left\{ 2a(l-a)b \left[(t-p) \left(\frac{q}{hf_4} - \frac{h-q}{hf_1} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + p \left(\frac{h-q}{hf_2} - \frac{q}{hf_3} \right) \right] + 3 \frac{q}{h} d^3 \left[(t-p) \frac{1}{f_l} - p \frac{1}{f_r} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Setzt man wieder $f_2 = \alpha f_1$, $f_3 = \alpha f_4$, $f_r = \alpha f_l$, dann ist

$$p = t \frac{\alpha}{1+\alpha} \text{ und } Ed_{1h} = 0.$$

Man sieht, daß dann die horizontale Bewegung Null wird. Die Bewegung ist somit eine fortschreitende parallel zur Kraft- richtung V_m .

Wie groß ist δ_{1v} , die vertikale Bewegung des Punktes 1?

$$Ed_{1v} = \Sigma S^0 S' \frac{s}{f}, \text{ wo } S' \text{ jetzt die Stab-}$$

kraft bedeutet, die entsteht, wenn im Punkte 1 eine Kraft 1 nach oben wirkt (Fig. 49).

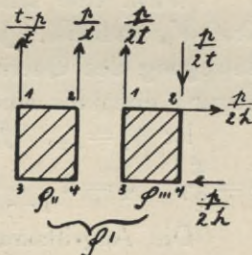


Fig. 49.

$$E\delta_{1V} = \frac{1}{2} L \frac{a^2(l-a)^2}{3lh^2f_1} + \frac{1}{2} L \frac{a^2(l-a)^2}{3lh^2f_4} + \frac{1}{2} R \frac{a^2(l-a)^2}{3lh^2f_2} + \frac{1}{2} R \frac{a^2(l-a)^2}{3lh^2f_3} \\ + \left(\frac{t-p}{t} + \frac{p}{2t}\right) L \frac{a(l-a)d^3}{lh^2bf_1} + \left(\frac{p}{t} - \frac{p}{2t}\right) R \frac{a(l-a)d^3}{lh^2bf_2}$$

Setzt man $L = \frac{t-p}{t} V = V \frac{1}{1+\alpha}$ $R = V \frac{\alpha}{1+\alpha}$ $f_2 = \alpha f_1$
 $f_3 = \alpha f_4$ $f_r = \alpha f_l$, so ergibt sich

$$E\delta_{1V} = \left[V \frac{a^2(l-a)^2}{6lh^2} 2 \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) + V \frac{d^3 a(l-a)}{2lh^2b} \frac{2}{f_l} \right] \frac{1}{1+\alpha}$$

Denkt man sich die beiden Hauptträger zu einem vereinigt, so daß alle Stabquerschnitte sich addieren, also
 $f_{1,2} = f_1 + f_2 = (1+\alpha)f_1$; $f_{3,4} = f_3 + f_4 = (1+\alpha)f_4$; $f_d = f_l + f_r = (1+\alpha)f_l$;
 und läßt man auf diesen Träger eine Kraft V_m wirken, dann ist gemäß § 38 Gleichung 49)

$$E\delta = V \frac{a^2(l-a)^2}{3lh^2} \left(\frac{1}{f_{1,2}} + \frac{1}{f_{3,4}} \right) + V \frac{a(l-a)d^3}{lh^2b} \frac{1}{f_d} = E\delta_{1V}$$

Bemerkung: Die Berechnung des δ_{1h} und δ_{1V} kann auch auf die Weise einfacher vorgenommen werden, daß man in der Formel $\Sigma S' S^o \frac{S}{Ef}$ unter S' nicht die Stabkräfte versteht, die entstehen, wenn auf den Querrahmen bei 1 eine Kraft 1 nach rechts bzw. nach oben wirkt, und das System der Brücke statisch unbestimmt bleibt; sondern man kann auch unter S' die Stabkräfte verstehen, die hervorgerufen werden, wenn eine Kraft 1 auf ein statisch bestimmtes System einwirkt, also wenn der Querrahmen durch Wegnahme eines Stabes unsteif und dadurch die Brücke statisch bestimmt gemacht wird.

Wirkt eine schräge Last durch M , so zerlegt sie sich in eine Kraft V_m und H_m . Jede der beiden Kräfte ruft eine fortschreitende Bewegung des Querrahmens hervor, somit ist die resultierende Bewegung ebenfalls eine fortschreitende.

Ist $f_1 = f_2$, $f_3 = f_4 = \beta f_1$, $f_l = f_r$, $f_u = f_o \cdot \beta$, dann ist
 $p = \frac{t}{2}$, $q = h \frac{\beta}{1+\beta}$.

Die Angriffskraft sei P und gehe durch M . Der Neigungswinkel zum Horizont sei φ . Die horizontale Komponente der Bewegung beträgt:

$$\delta_h = P \cos \varphi \left[\frac{a^2(l-a)^2}{3lt^2} \frac{2}{f_1} + \frac{a(l-a)d^3}{2lt^2b} \frac{2}{f_o} \right] \frac{1}{1+\beta}$$

Die vertikale Komponente der Bewegung beträgt:

$$\begin{aligned} \delta_v &= P \sin \varphi \left[\frac{a^2 (l-a)}{3 l h^2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) + \frac{a (l-a) d_1^3}{2 l h^2 b} \frac{2}{f} \right] \cdot \frac{1}{2} \\ &= P \sin \varphi \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 (l-a)^2 (1+\beta)}{3 l h^2 f_1 \beta} + \frac{a (l-a) d_1^3}{l h^2 b} \frac{1}{f_1} \right]. \end{aligned}$$

Die resultierende Bewegung ist $\delta = \sqrt{\delta_h^2 + \delta_v^2}$. Der Winkel φ_1 der Bewegungsrichtung beträgt $\operatorname{arctg} \frac{\delta_v}{\delta_h}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\delta_v}{\delta_h} = \operatorname{tg} \varphi \frac{a (l-a) \left[a (l-a) b \frac{1+\beta}{f_1 \beta} + 3 d_1^3 \frac{1}{f_1} \right] 3 l t^2 b}{6 l h^2 b a (l-a) \left[a (l-a) b \frac{2}{f_1} + 3 d_2^3 \frac{1}{f_0} \right] \frac{1}{1+\beta}} \\ &= \operatorname{tg} \varphi \frac{t^2}{h^2} \frac{a (l-a) b \frac{1+\beta}{\beta f_1} + 3 d_1^3 \frac{1}{f_1}}{2 \left[a (l-a) b \frac{2}{f_1} + 3 d_2^3 \frac{1}{f_0} \right] \frac{1}{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Für $\beta = 1$ ist $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \frac{t^2}{h^2} \frac{a (l-a) b \frac{1}{f_1} + \frac{3}{2} d_1^3 \frac{1}{f_1}}{a (l-a) b \frac{1}{f_1} + \frac{3}{2} d_2^3 \frac{1}{f_1}}$;

für $\varphi = 0^\circ$ ist $\varphi_1 = 0^\circ$, für $\varphi = 90^\circ$ ist $\varphi_1 = 90^\circ$.

Fall eines Torsionsmomentes M .

Bei Wirkung eines Torsionsmomentes auf die Brücke macht der Querrahmen ebenfalls eine Bewegung.

Der Weg des Punktes 1 nach oben beträgt $\delta_{1v} = \Sigma S^o S' \frac{s}{E f}$, wobei S^o die Spannkraft eines Stabes ist bei der Wirkung des Moments M und S' die Stabkraft eines Stabes des statisch bestimmten Brückensystems, beim Angriff einer Last 1 am Gurte 1 in der Richtung nach oben. (Fig. 50).

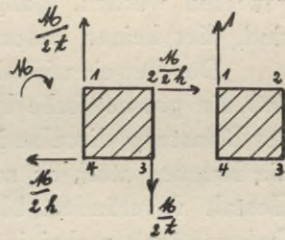


Fig. 50.

$$E \delta_{1v} = M \frac{a (l-a) d_1^3}{2 t l h^2 b f_1} \text{ und ebenso berechnet sich}$$

$$E \delta_{2v} = M \frac{a (l-a) d_1^3}{2 t l h^2 b f_r}.$$

Der Abstand des Drehungsmittelpunktes vom linken Hauptträger p' ist gleich:

$$-t \frac{\delta_{1V}}{\delta_{2V} - \delta_{1V}} = t \frac{\delta_{1V}}{\delta_{1V} - \delta_{2V}} = t \frac{\frac{1}{f_i}}{\frac{1}{f_i} + \frac{1}{f_r}} = t \frac{f_r}{f_i + f_r}.$$

Bei $f_r = \alpha f_i$ ist $p' = t \frac{\alpha}{1 + \alpha} = p$.

Die zweite Koordinate des Drehungsmittelpunktes q' berechnet sich analog zu: $q' = h \frac{f_u}{f_o + f_u}$, bei $f_u = \beta f_o$ ist $q' = t \frac{\beta}{1 + \beta} = q$.

Man sieht, daß der Drehungsmittelpunkt des Querrahmens bei der Wirkung eines Torsionsmomentes mit dem statischen Mittelpunkt zusammenfällt.

Welches ist das Maß der Drehung (Drehungswinkel)?

$$\begin{aligned} \tau = \frac{d_{1V}}{p'} &= \sim \frac{M a (l - a) d_1^3 f_i + f_r}{E 2 t l h^2 b f_i t f_r} = \sim \frac{M a (l - a) d_1^3}{2 t^2 l h^2 b E} \left(\frac{1}{f_r} + \frac{1}{f_i} \right) \\ &= \sim \frac{M a (l - a) d_2^3}{2 t^2 l h^2 b E} \left(\frac{1}{f_o} + \frac{1}{f_u} \right). \end{aligned}$$

Die beiden Ausdrücke von τ sind nur angenähert gleich; ihre Differenz beträgt $\frac{M a (l - a)}{2 t^2 l h^2 b E} \left[\frac{d_1^3}{f_r} + \frac{d_1^3}{f_i} - \frac{d_2^3}{f_o} - \frac{d_2^3}{f_u} \right]$. Die Differenz in der Klammer wurde seinerzeit bei Ableitung des Ausdruckes für L_1 vernachlässigt.

§ 51. Übergang auf Brücken mit mehreren steifen Querrahmen. Bisher wurde die Berechnung so durchgeführt, als ob die unbelasteten Querrahmen unsteif wären. Es soll nun nachgewiesen werden, daß, wenn auch die anderen Querrahmen steif sind, dies keinen besonderen Einfluß auf die Berechnung haben kann.

Der Beweis wird dann erbracht sein, wenn es gelingt, zu zeigen, daß die geometrische Form der anderen Querrahmen vor und nach der Belastung dieselbe ist, auch wenn die Rahmen unsteif sind. Sind die Rahmen steif, so sorgen die Stäbe dafür, daß die geometrische Gestalt unverändert bleibt (bis auf die eigene geringe elastische Deformation), wobei jedoch diese Stäbe Spannungen erleiden. Sind aber die Querrahmen unsteif, indem beispielsweise eine Hauptdiagonale fehlt, und behalten sie trotzdem ihre geometrische Form, so ist klar, daß es gleichgültig ist, ob die Diagonale im Rahmen enthalten war oder nicht, mit anderen Worten: Die Diagonale erhält keine Spannung, und die Brücke verhält sich genau so, als ob der steife Querrahmen unsteif wäre.

Es bleibt uns also noch übrig, nachzuweisen, daß ein beliebiger unsteifer Querrahmen seine geometrische Gestalt, infolge der Belastung eines steifen Rahmens (in dessen Ebene), nicht verändert.

Fall einer Einzellast V .

Geht eine vertikale Last durch den statischen Mittelpunkt, so bewegt sich der Querrahmen fortschreitend um den früher ausgerechneten Betrag.

$$E\delta_a^v = V \frac{a^2(l-a)^2}{3lh^2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) \frac{1}{1+\alpha} + V \frac{a(l-a)d^3}{lh^2b} \frac{1}{f_i} \frac{1}{1+\alpha}.$$

Der Zeiger a bedeutet, daß es sich um einen Querrahmen handelt, dessen Abstand vom linken Endrahmen a beträgt.

Wie groß ist nun die Verschiebung eines unsteifen Querrahmens, im Abstände x vom linken Endrahmen? $\delta_x = \Sigma S_0 S' \frac{S}{Ej}$, wobei S_0 wie früher die Stabkraft infolge der Kraft V_m und S' die Stabkraft infolge einer Last $+1$ ist, die am Querrahmen x angreift, bedeutet (Fig. 51). Beim letzteren Angriff kann die Brücke als statisch bestimmt, also der Querrahmen a als unsteif angesehen werden.

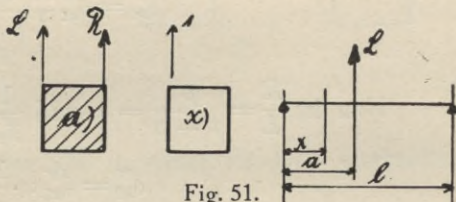


Fig. 51.

$$\begin{aligned} E\delta_x^v &= \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) L \int_0^x \frac{l-a}{l} \frac{\xi}{h} \frac{l-x}{l} \frac{\xi}{h} d\xi + \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) L \int_x^a \frac{l-a}{l} \frac{\xi}{h} \frac{x}{l} \frac{l-\xi}{h} d\xi \\ &+ \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) L \int_a^l \frac{a}{l} \frac{l-\xi}{h} \frac{x}{l} \frac{l-\xi}{h} d\xi + L \frac{(l-a)d}{f_i l h} \frac{d}{l} \frac{l-x}{h} \frac{d}{b} \\ &- L \frac{l-a}{f_i l h} \frac{d}{l} \frac{x}{h} \frac{d}{l} \frac{(a-x)}{b} d + L \frac{a}{f_i l h} \frac{d}{l} \frac{x}{h} \frac{d}{l} \frac{l-a}{b} d \\ &= L \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) \frac{l}{6l^2 h^2} x (2l^2 a - 3la^2 - lx^2 + ax^2 + a^3) \\ &\quad + L \frac{l-a}{lh^2} \frac{ax}{b} \frac{d^3}{f_i} \cdot 1) \end{aligned}$$

1) Diese Gleichung ist die Gleichung der Einflußlinie der Durchbiegung $E \cdot \delta_x$ eines Punktes bei x infolge einer wandernden Einzellast L mit der Abszisse a für einen ebenen Parallelträger. Sie gilt für $a > x$. Für $a < x$ erhält man die Gleichung durch Vertauschung von x und a .

Mit Einsetzung von $L = V \frac{1}{1 + \alpha}$ ergibt sich:

$$E\delta_x^V = V \frac{1}{6lh^2b(1+\alpha)} \left[xb(2l^2a - 3la^2 - lx^2 + ax^2 + a^3) \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) + 6x(l-a) \frac{d^3}{f_l} \right].$$

Das Verhältnis der Durchbiegungen bei x und bei a beträgt:

$$\frac{\delta_{x1}^V}{\delta_{a1}^V} = \frac{xb(2l^2a - 3la^2 - lx^2 + ax^2 + a^3) \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) + 6x(l-a) \frac{d^3}{f_l}}{2ba^2(l-a)^2 \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right) + 6a(l-a) \frac{d^3}{f_l}}.$$

Dies war für den linken Hauptträger.

Für den rechten ist:

$$\delta_{a2}^V = \delta_{a1}^V$$

$$\delta_{x2}^V = \delta_{x1}^V \frac{R}{L} \frac{\left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right)}{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right)}.$$

Nun ist $\frac{R}{L} = \frac{p}{t-p} = \alpha$ und $\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_4} \right)$, somit ist

$$\delta_{x2}^V = \delta_{x1}^V \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \delta_{x1}^V.$$

Man sieht also, daß $\frac{\delta_x^2}{\delta_a^2} = \frac{\delta_x^1}{\delta_a^1} =$ konstant für alle Punkte des

Querrahmens, und da $\delta_a^1 = \delta_a^2$ ist, so ist die Bewegung eines jeden Punktes des Querrahmens bei x im vertikalen Sinne konstant.

Wie verhalten sich nun die wagerechten Wege der Querrahmenpunkte (des unsteifen Rahmens bei x) bei der Wirkung der Kraft V_m im steifen Querrahmen bei a ?

$\delta_x^{1h} = \Sigma S^o S' \frac{1}{Ef}$. Diese Summe beschränkt sich bloß auf die zwei Obergurte, und da sich gemäß (Fig. 52) für beide Gurte verschieden bezeichnete Werte von $S^o S'$ ergeben, so ist $\delta_x^{1h} = 0$. Wie früher gezeigt wurde, ist $\delta_a^{1h} = 0$.

Wir sehen somit, daß die Bewegung des Querrahmens bei x eine genau gleichartige ist, wie die des Querrahmens bei a . Da nun der Querrahmen bei a seine geometrische Gestalt nicht ändern kann, da er steif ist, so wird der Querrahmen bei x seine Gestalt

ebenfalls nicht ändern, was aber nötig ist, damit das Steifsein dieses Querrahmens keine Rolle spielt.

Was für die vertikale Last V_m nachgewiesen wurde, gilt gleichfalls für horizontale Lasten H_m , somit für alle beliebig gerichtete durch den statischen Mittelpunkt gehende Kräfte P_m .

Fall eines Torsionsmomentes M .

Bei diesem Belastungsfall beschreibt der Querrahmen bei a eine drehende Bewegung um den statischen Mittelpunkt.

Hierbei ist
$$\delta_{1V}^a = M \frac{a(l-a)d_1^3}{2tlh^2bf_i}$$

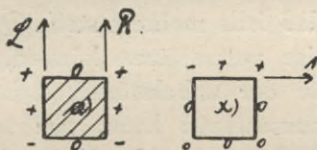


Fig. 52.

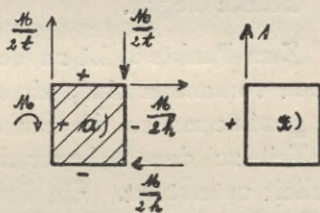


Fig. 53.

Im Querrahmen bei x , der als unsteifer Rahmen angesehen wird, beträgt (Fig. 53)

$$\delta_{1V}^x = \frac{M l - a d_1 l - x d_1 d_1 x}{2t l h l} \frac{d_1 d_1 x}{h f_i b} - \frac{M l - a d_1 x d_1 d_1 a - x}{2t l h l} \frac{d_1 d_1 a - x}{h f_i b} + \frac{M a d_1 x d_1^2 (l - a)}{2t l h l h f_i b} = \frac{M (l - a) d_1^3}{2t h^2 l b f_i} \cdot x.$$

$$\frac{\delta_{1V}^x}{\delta_{1V}^a} = \frac{x}{a}, \text{ ebenso ist } \frac{\delta_{1h}^x}{\delta_{1h}^a} = \frac{x}{a}.$$

Jeder Punkt des unsteifen Rahmens bei x macht eine gleichartige Bewegung, wie der steife Querrahmen bei a . Da nun der letztere seine geometrische Form behalten muß, da er steif ist, so behält auch der Rahmen bei x seine Gestalt, mit anderen Worten: Die Steifheit des Querrahmens bei x hat gar keinen Einfluß auf die Berechnung der Brücke. Maßgebend ist bloß die Steifigkeit des belasteten Rahmens.

Zusammenfassend sei wiederholt, das die besonders einfache, sehr günstige Resultate liefernde Berechnungsart eine angenäherte

ist und folgende Vereinfachungen bzw. Voraussetzungen zur Grundlage hat:

1. Die steifen Querrahmen werden als starr angenommen.
2. Der Ausdruck $\left(\frac{d_1^3}{f_i} + \frac{d_1^3}{f_r}\right) - \left(\frac{d_2^3}{f_o} + \frac{d_2^3}{f_u}\right)$ wurden gegen den Ausdruck $\left(\frac{d_1^3}{f_i} + \frac{d_1^3}{f_r}\right) + \left(\frac{d_2^3}{f_o} + \frac{d_2^3}{f_u}\right) + \frac{16}{3} \frac{1}{f_g} a(l-a)b$ unterdrückt.
3. Von allen Gurtquerschnitten wurde ein Mittel — f_g genommen, was auch eine gewisse Fehlerquelle bilden kann, falls die Fachwerksysteme nicht so beschaffen sind, daß die Ritterschen Momentenpunkte eines jeden Stabes in einem Querschnitte der Brücke liegen.

Zum Punkte 1, ist zu bemerken, daß falls mehrere steife Querrahmen vorhanden sind, sie sich teilweise unterstützen können, da man gewissermaßen die Stabquerschnitte der unbelasteten Rahmen zum Teil zu den Stabquerschnitten hinzuschlagen kann, was seine Starrheit unterstützt. Ein Beispiel im Anhang zeigt den Unterschied der Ergebnisse der angenäherten und der scharfen Rechnungsart.

Anhang.

I. Spezialfälle zur ersten Abteilung I, 3β.

1. Spezialfall: Trapezgurtung.

§ 52. Der Gurt besteht aus den zwei schrägen Endstrecken und aus einer wagerechten Strecke in der Mitte. a , c , b sind die entsprechenden Längen der drei Brückenabschnitte. b ist die Länge der mittleren Strecke.

$$a + b + c = l.^1)$$

Die Brückenhöhe im mittleren Teile sei h . Die Grenzpunkte der drei Strecken seien 0, I, II, III. Die Belastung sei $H = w \cdot l$ und gleichmäßig über l verteilt.

$$M_I^h = \frac{w}{2} a (b + c), \quad M_{II}^h = \frac{w}{2} c (a + b)$$

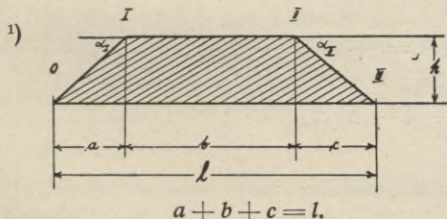
Die Zusatzlasten sind:

$$V_I = -\frac{M_I^h}{t} \operatorname{tg} \alpha_a = -\frac{w a (b + c) h}{2 t a} = -\frac{w (b + c) h}{2 t},$$

$$V_{II} = -\frac{M_{II}^h}{t} \operatorname{tg} \alpha_c = \frac{w (a + b) h}{2 t}.$$

Die Auflagerdrucke betragen:

$$23) \quad A = \frac{w h (b + c)^2 + (a + b) c}{2 t (a + b + c)} = \frac{w}{t} F_a;$$



$$B = \frac{w h (a + b)^2 + (b + c) a}{2 t \frac{a + b + c}{a + b + c}} = \frac{w}{t} F_b.$$

$$A + B = -(V_I + V_{II}) = \frac{w h}{2 t} (a + 2 b + c) = \frac{w}{t} F.$$

$$\text{Das Verhältnis } A : B = F_a : F_b = \frac{b^2 + c^2 + 3 b c + a c}{b^2 + a^2 + 3 b a + a c}.$$

Die Höhe des Angriffspunktes der Resultierenden der w -Kräfte liegt in der Höhe η_s über der vierten Trapezseite (der Basis).

$$\eta_s = \frac{(A + B) t}{H} = \frac{h a + 2 b + c}{2 a + b + c} = \frac{F}{l}.$$

$\frac{F}{l}$ ist die mittlere Höhe des Trapezes.

Die Biegemomente des Hauptträgers infolge der Kräfte V_I und V_{II} betragen:

$$65) \quad \begin{cases} M_I^V = \frac{w h (a + b) c + (b + c)^2 a}{2 t \frac{a + b + c}{a + b + c}}, \\ M_{II}^V = \frac{w h (a + b)^2 + a (b + c) c}{2 t \frac{a + b + c}{a + b + c}}, \\ M_o = 0, & M_{III} = 0. \end{cases}$$

Zwischen den Punkten 0— I , I — II , II — III ist der Momentenverlauf ein linearer.

Die Scherkräfte betragen:

$$66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen 0 und } I: S_{oI} = + \frac{w h (b + c)^2 + (a + b) c}{2 t \frac{a + b + c}{a + b + c}}, \\ \text{„ } I \text{ „ } II: S_{I II} = + \frac{w h - (b + c) a + (a + b) c}{2 t \frac{a + b + c}{a + b + c}}, \\ \text{„ } II \text{ „ } III: S_{II III} = - \frac{w h (a + b)^2 + (b + c) a}{2 t \frac{a + b + c}{a + b + c}}. \end{array} \right.$$

Ist $c = a$, $b = l - 2 a$, also beim symmetrischen Trapez, dann ist:

$$V_I = V_{II} = -A = -B = -\frac{w h}{2 t} (l - a),$$

$$M_I = M_{II} = \frac{w h}{2 t} (l - a) a,$$

$$\eta_s = h \frac{l - a}{l}.$$

Bei einer Dreiecksgurtung, also wenn $b = 0$ und $c = l - a$, ist:

$$V_I = -\frac{w h}{2 t} l = -(A + B); \quad A = \frac{w h}{2 t} (l - a); \quad B = \frac{w h}{2 t} a;$$

$$M_I^V = \frac{w h}{2 t} (l - a) a \text{ und } \eta_s = \frac{h}{2};$$

ist $a = c = \frac{l}{2}$; dann ist

$$V_1 = -2A = -2B = -\frac{w h}{2 t} l; \quad M_I^V = \frac{w h l^2}{8 t}.$$

2. Spezialfall: Parabelgurtung.

§ 53. Die Trägerhöhe am Auflager h_0 ist auf die Kräfte ΔV ohne jeden Einfluß, deshalb kann man schreiben: $z = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$, wobei f die Pfeilhöhe der Parabel in Brückenmitte bedeutet.

Die Horizontalkraft $H = wl$ sei gleichmäßig über l verteilt.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4f}{l} - \frac{8f}{l^2} x; \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2}; \quad M_h = \frac{w}{2} x(l-x);$$

$$dV = -\frac{w x(l-x)}{2} \frac{8f}{l^2} dx = -\frac{4fw}{l^2 t} x(l-x) dx.$$

$$67) \quad A + B = -\int_0^l dV = \frac{4fwl^3}{l^2 t} \frac{1}{6} = \frac{2fwl}{3t} = \frac{wF}{t};$$

$$A = B = \frac{1fwl}{3t} = \frac{wF}{2t}.$$

Die Höhe der Resultierenden η_s beträgt

$$\eta_s = \frac{F}{l} = \frac{2}{3} f.$$

Scherkräfte:

$$\begin{aligned} S_x &= + \int dV + C_1^1) = -\frac{4fw}{l^2 t} \int x(l-x) dx + C_1 \\ &= -\frac{4fwlx^2}{l^2 t} \frac{1}{2} + \frac{4fwx^3}{l^2 t} \frac{1}{3} + C_1, \end{aligned}$$

¹⁾ Gewöhnlich lautet diese Gleichung $S = -f dV + C$. Dies hängt mit der in Fußnote zu Seite 10 besprochenen Wahl der positiven Richtung zusammen.

für $x = 0$ ist $S_x = A = \frac{f w l}{3 t} = + C_1$, somit

$$68) \quad S_x = + \frac{f w l}{3 t} \left[1 - 6 \frac{x^2}{l^2} + 4 \frac{x^3}{l^3} \right],$$

für $x = \frac{l}{2}$ ist $S_x = 0$.

Momente:

$$M_x = \int S_x dx + C_2 = \frac{f w l}{3 t} \left[x - 6 \frac{x^3}{3 l^2} + 4 \frac{x^4}{4 l^3} \right] + C_2,$$

für $x = 0$ ist $M_x = 0 = C_2$, somit ist

$$69) \quad M_x = \frac{f w l^2}{3 t} \left[\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right],$$

für $x = \frac{l}{2}$ ist $M_x = \frac{5 f w l^2}{48 t}$,

für $x = l$ ist $M_x = 0$.

§ 54. Einflußlinien. Für diesen wichtigen Fall einer Parabelgurtung seien noch die Gleichungen der Einflußlinien abgeleitet.

a) Einflußlinien der spezifischen Zusatzkraft $\frac{dV}{dx}$ für einen Punkt des Hauptträgers, dessen $x = b$.

$$70) \quad \begin{cases} a < b & \frac{dV}{dx} = + \frac{M_b^h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} = - 8 \frac{H f}{t l} \left(1 - \frac{b}{l} \right) \cdot \frac{a}{l}, \\ a > b & \frac{dV}{dx} = + \frac{M_b^h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} = - 8 \frac{H f b}{t l l} \left(1 - \frac{a}{l} \right). \end{cases}$$

Die Einflußlinien sind Geraden.

b) Einflußlinien der Auflagerdrucke des Hauptträgers infolge der Zusatzkräfte ΔV bzw. dV .

$$A = - \int_0^a \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx \frac{l-x}{l} - \int_a^l \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx \frac{l-x}{l}.$$

Nach Einsetzung von $M_h = \frac{H x(l-a)}{l}$ im ersten und $M_h = \frac{H a(l-x)}{l}$

im zweiten Ausdruck, ferner nach Gleichsetzung von $\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2}$ und Ausrechnung der Integrale ergibt sich:

$$71) \quad \begin{cases} A = \frac{4}{3} H \frac{f a}{t l} \cdot \frac{l-a}{l} \cdot \frac{2l-a}{l} \text{ und ähnlich} \\ B = \frac{4}{3} H \frac{f a}{t l} \frac{l-a}{l} \frac{l+a}{l}. \end{cases}$$

c) Einflußlinie der Scherkräfte im Punkte $x=b$ des Hauptträgers infolge der Zusatzkräfte dV .

$$\text{Für } a < b \quad dV_{x>a} = + \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx = - \frac{H a (l-x)}{t l} \frac{8f}{l^2} dx,$$

somit ist die Scherkraft

$$S_{x>a} = \int dV + C_1' = \frac{H 8f a}{t l^2} \frac{1}{2} (l-x)^2 + C_1', \quad 1)$$

$$\text{für } x=l \text{ ist } S_x = C_1' = -B = -\frac{4}{3} H \frac{f a}{t l} \frac{l-a}{l} \frac{l+a}{l}, \text{ somit}$$

$$S_{x>a} = \frac{4}{3} \frac{H a f}{t l l^2} (2l^2 - 6lx + 3x^2 + a^2) \text{ oder mit } x=b$$

$$72') \quad S_b' = \frac{4}{3} \frac{H a f}{t l l^2} (2l^2 + 3b^2 - 6lb + a^2) \text{ für } a < b.$$

$$\text{Für } a > b \text{ ist } dV_{x<a} = \frac{M_h}{t} \frac{d^2 z}{dx^2} dx = -\frac{H (l-a) x}{t l} \frac{8f}{l^2} dx,$$

$$\text{somit die Scherkraft } S_{x<a} = + \int dV + C_1'' = -\frac{H l-a}{t l} \frac{8f x^2}{l^2} \frac{1}{2} + C_1'',$$

$$\text{für } x=0 \text{ ist } S_x = C_1'' = A = \frac{4}{3} \frac{H f a}{t l} \frac{l-a}{l} \frac{2l-a}{l} \text{ oder}$$

$$S_{x<a} = \frac{4}{3} \frac{H f}{t l^2} \frac{l-a}{l} (-3x^2 + 2la - a^2), \text{ d. h. mit Einsetzung}$$

von $x=b$

$$72'') \quad S_b'' = \frac{4}{3} \frac{H l-a}{t l} \frac{f}{l^2} (-3b^2 + 2la - a^2) \text{ für } a > b.$$

Zur Probe der Richtigkeit dient, daß für $a=b$, $S_b' = S_b''$ sein muß

$$S_b^a = 2 \frac{4}{3} \frac{H f b}{t l^2 l} (l-b) (l-2b).$$

¹⁾ Gewöhnlich lautet diese Gleichung $S = -f dV + C$. Dies hängt mit der in Fußnote zu Seite 10 besprochenen Wahl der positiven Richtung zusammen.

b) Einflußlinie der Momente im Punkte $x=b$ des Hauptträgers infolge der Zusatzkräfte dV .

Für $a > b$:

$$M_{x < a} = \int S_{x < a} dx + C_2' = \frac{4}{3} \frac{H f l - a}{t l} (-x^3 + 2lax - a^2x) + C_2'$$

für $x=0$ ist $M_x = 0 = C_2'$ oder

$$M_{x < a} = \frac{4}{3} H \frac{f l - a}{t l} x \left(2 \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) \text{ oder mit Einsetzung } x=b.$$

$$73') \quad M_b' = \frac{4}{3} H \frac{f l - a}{t l} b \left(2 \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{l^2} \right) \text{ für } a > b.$$

Ebenso ist für $a < b$

$$M_{x > a} = \int S_{x > a} dx + C_2'' = \frac{4}{3} \frac{H f a}{t l^2 l} (2l^2x - 3lx^2 + x^3 + a^2x) + C_2'',$$

$$\text{für } x=l \text{ ist } M_x = 0 = \frac{4}{3} \frac{H f a}{t l^2 l} (2l^3 - 3l^3 + l^3 + a^2l) + C_2''$$

$$C_2'' = -\frac{4}{3} \frac{H f a}{t l^2 l} a^2l, \text{ somit}$$

$$M_{x > a} = \frac{4}{3} H \frac{f}{t} a \left[-\frac{a^2}{l^2} + \frac{a^2x}{l^2 l} + 2\frac{x}{l} - 3\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] \text{ oder mit } x=b$$

$$73'') \quad M_b'' = \frac{4}{3} H \frac{f}{t} a \left[-\frac{a^2}{l^2} + \frac{a^2b}{l^3} + 2\frac{b}{l} - 3\frac{b^2}{l^2} + \frac{b^3}{l^3} \right] \text{ für } a < b.$$

Für $a=b$ muß $M_b' = M_b'' = M_b^a$

$$M_b^a = \frac{8}{3} H \frac{f b^2 (l-b)^2}{t l^3}.$$

In den Gleichungen 70 bis 73 ist a die variable Laststellung, also die Abszissenkoordinate der Einflußlinie.

3. Spezialfall: Halbkreisgurtung $H=wl$; $w=\text{konst.}$

§ 55. Fläche Kreisbögen betrachte man als Parabeln von gleicher Pfeilhöhe. Hier sei nur der Fall eines halbkreisförmigen Gurtes behandelt. Dieser Gurt kommt zwar als solcher selten vor, dennoch besitzt dieser Fall eine gewisse Bedeutung für den Balkenträger

$$z^2 = -x^2 + lx; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{l-2x}{2\sqrt{x(l-x)}};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{l^2}{4x(l-x)\sqrt{x(l-x)}} = -\frac{l^2}{4} x^{-\frac{3}{2}} (l-x)^{-\frac{3}{2}}.$$

Die Verspannung sei durch eine Kraft $H = wl$, die gleichmäßig über die Spannweite l verteilt ist, belastet.

$$dV = \frac{M_h d^2 z}{t dx^2} dx = - \frac{wx(l-x)l^2}{2t} \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} (l-x)^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$= - \frac{wl^2}{8t} x^{-\frac{1}{2}} (l-x)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Für $x = 0$ und $x = l$ ist die spezifische Belastung $\frac{dV}{dx} = \infty$.

Für $x = \frac{l}{2}$ ist die spezifische Belastung $\frac{dV}{dx} = \frac{wl}{4t}$.

Auflagerdrucke:

$$74) \quad A = B = \frac{wl^2}{2 \cdot 8t} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x(l-x)}} = \frac{wl^2 \pi}{16t}.$$

$$A + B = \frac{wl^2 \pi}{8t} = \frac{w}{t} F.$$

Die Höhe der Resultierenden der w -Kräfte beträgt:

$$\eta_s = \frac{(A+B)t}{H} = \frac{F}{l} = \frac{l\pi}{8} = \frac{h\pi}{4}, \text{ da } h = \frac{l}{2}.$$

Scherkräfte:

$$S_x = \int dV + C_1 = - \frac{wl^2}{8t} \int \frac{dx}{\sqrt{l x - x^2}} + C_1 = + \frac{wl^2}{8t} \arcsin\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) + C_1$$

für $x = \frac{l}{2}$ ist $S_x = 0 = C_1$, somit

$$75) \quad S_x = \frac{wl^2}{8t} \arcsin\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)$$

$$\text{für } x = 0, S_x = \frac{wl^2 \pi}{16t} = A.$$

Momente:

$$M_x = \int S_x dx + C_2 = \int \frac{wl^2}{8t} \arcsin\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) dx + C_2$$

$$= - \frac{wl^2}{8t} l \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right) \arcsin\left(1 - \frac{2x}{l}\right) - \frac{wl^2}{8t} l \sqrt{\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}} + C_2$$

für $x = 0$ ist $M_x = 0 = -\frac{wl^3\pi}{32t} + C_2$; $C_2 = \frac{wl^3\pi}{32t}$, somit

$$76) M_x = \frac{wl^3}{32t} \left[\pi - 4\sqrt{\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}} - 2\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \arcsin\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \right]$$

für $x = \frac{l}{2}$ ist $M_x = \frac{wl^3}{32t} (\pi - 2)$.

Für den halbkreisförmigen Gurt mögen noch zwei Fälle durchgerechnet werden, die von größerer Bedeutung sind: erstens, wenn die Belastung w proportional der Gurtlänge ist; zweitens, wenn sie proportional den Halbkreisordinaten ist. Diese Fälle sind auf den Halbkreisbalkenträger zugeschnitten.

4. Spezialfall: Halbkreisgurtung.

$$H = wl; w = w \frac{ds}{dx}.$$

$$\S 56. \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{l}{2\sqrt{x(l-x)}}; w = w \frac{l}{2\sqrt{x(l-x)}} \quad 77)$$

für $x = 0$ ist $w = \infty$

„ $x = \frac{1}{2}l$ „ $w = w$

„ $x = l$ „ $w = \infty$

$$78) M_x^h = \frac{wl^2}{8} \left[\pi - 2\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \arcsin\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) - 4\sqrt{\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)} \right].$$

Bildet man die Ausdrücke für dV , so sieht man, daß so die Aufgabe nicht elementar zu lösen ist. Es ist nämlich:

$$79) dV = \frac{wl^4}{32t} \pi \frac{dx}{\sqrt{(l-x-x^2)^3}} - dx \frac{wl}{16t} \frac{1 - 2\frac{x}{l}}{\sqrt{\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)^3}} \arcsin\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) - \frac{wl^3 dx}{8t \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}.$$

Um die Aufgabe doch wenigstens angenähert scharf zu lösen, ersetze man den Ausdruck der Gleichung 77) durch einen angenäherten der die weiteren Rechnungen elementar gestaltet.

$$77a) w = w \frac{\pi}{8} \sqrt{l} \left[x^{-\frac{1}{2}} + (l-x)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

Für $x = 0$ ist $w = \infty$

„ $x = \frac{l}{2}$ „ $w = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} w = 1,11 w$, um 11% größer, als w nach
der strengen Formel.

„ $x = l$ „ $w = \infty$.

Der Verlauf der Scherkräfte dieser Belastung w ergibt sich zu

$$T_x = + \int w dx + C_1 = + \frac{w\pi\sqrt{l}}{8} \left[2x^{\frac{1}{2}} - 2(l-x)^{\frac{1}{2}} \right] + C_1 \quad 1)$$

für $x = \frac{l}{2}$ ist $T_x = 0 = + \frac{w\pi\sqrt{l}}{8} \left[2\left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2\left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] + C_1$; $C_1 = 0$,
somit:

$$80) \quad T_x = + \frac{w\pi\sqrt{l}}{4} \left[x^{\frac{1}{2}} - (l-x)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für } x = 0 \text{ ist } T_x = A = -\frac{w\pi l}{4} \\ \text{„ } x = l \text{ „ } -T_x = B = -\frac{w\pi l}{4} \end{array} \right.$$

$A + B = -\frac{w\pi l}{2}$. Man sieht, daß der Ausdruck für w in
Gleichung 77a) so gewählt wurde, daß die Gesamtbelastung die
gleiche ist, wie nach der Formel 77).

Der Verlauf der Momente dieser Belastung w ergibt sich zu

$$M_x^h = \int -T_x dx + C_2 = -\frac{w\pi\sqrt{l}}{4} \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(l-x)^{\frac{3}{2}} \right] + C_2$$

für $x = 0$ ist $M_x = 0 = -\frac{w\pi\sqrt{l}}{4} \left[\frac{2}{3}l^{\frac{3}{2}} \right] + C_2$; $C_2 = \frac{1}{6}w\pi l^2$ und

$$78a) \quad M_x^h = \frac{w\pi l^2}{6} \left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{l-x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

für $x = \frac{l}{2}$; $M_x^h = \frac{w\pi l^2}{12} (2 - \sqrt{2}) = 0,1544 w l^2$ gegen $0,1425 w l^2$
nach der strengen Gleichung 78).

Die Zusatzkräfte des Hauptträgers betragen:

$$dV = \frac{M_x^h d^2 z}{t dx^2} dx = -\frac{w\pi l^2}{24tl} \left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{l-x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{l-x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} dx$$

¹⁾ Gewöhnlich lautet diese Gleichung $S = -f dV + C$. Dies hängt mit der
in Fußnote zu Seite 10 besprochenen Wahl der positiven Richtung zusammen.

$$79a) \quad dV = -\frac{w\pi l}{24t} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{l-x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{l-x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \right] dx.$$

Der Verlauf der Scherkräfte infolge dieser Zusatzlasten dV gestaltet sich:

$$S_x + \int dV + C_1 = -\frac{w\pi l}{24t} \left[-2 \frac{l-2x}{\sqrt{lx-x^2}} - 2l^{\frac{3}{2}}(l-x)^{-\frac{1}{2}} + 2l^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} \right] + C_1$$

für $x = \frac{l}{2}$ ist $S_x = 0 = C_1$, somit

$$82) \quad S_x = \frac{w\pi l^2}{12t} \left[\frac{l-2x}{\sqrt{lx-x^2}} + l^{\frac{1}{2}}(l-x)^{-\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{w\pi l^2}{12t} \left[\frac{1-2\frac{x}{l}}{\sqrt{\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}}} + \left(1-\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x=0 \text{ ist } S_x = A = \frac{w\pi l^2}{12t}; [\infty + 1 - \infty] = \text{unbestimmte Form} = +1 \\ \text{„ } x=l \text{ „ } - S_x = B = \frac{w\pi l^2}{12t}; [\infty - \infty - 1] = \text{„ „} = -1 \end{array} \right.$$

Die Höhe der Resultierenden aller w -Kräfte liegt in der Höhe $\eta_s = \frac{(A+B)t}{H} = \frac{w\pi l^2 t}{6tw\pi \frac{l}{2}} = \frac{l}{3}$ gegen $\frac{l}{\pi}$, als die genaue Schwerpunkthöhe des Halbkreisbogens.

Der Verlauf der Momente der Zusatzkräfte dV bestimmt sich:

$$M_x = \int S_x dx + C_2$$

$$= \frac{w\pi l^2}{12t} \left[\int \frac{l-2x}{\sqrt{lx-x^2}} dx + \int \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l-x}} dx - \int \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{x}} dx \right] + C_2$$

$$M_x = \frac{w\pi l^2}{12t} \left[2\sqrt{lx-x^2} - 2\sqrt{l(l-x)} - 2\sqrt{lx} \right] + C_2$$

für $x=0$ ist $M_x = 0 = -\frac{w\pi l^2}{12t} \cdot 2l + C_2$; $C_2 = +\frac{w\pi l^3}{6t}$ und

$$84) \quad M_x = \frac{w\pi l^3}{6t} \left[1 + \sqrt{\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}} - \sqrt{1-\frac{x}{l}} - \sqrt{\frac{x}{l}} \right]$$

für $x = \frac{1}{2}l$ ist $M_x = \frac{w\pi l^3}{12t} (3 - 2\sqrt{2})$.

5. Spezialfall: Halbkreisgurtung $w = w z$.

§ 57. 85) $z = \sqrt{lx - x^2}, \quad w = w \sqrt{lx - x^2}.$

Für $x = 0$ ist $w = 0$,

„ $x = \frac{l}{2}$ „ $w = w \frac{l}{2} = 0,5 w l$,

„ $x = l$ „ $w = 0$.

Legt man die Belastung nach Gleichung 85) zugrunde, so läßt sich die Aufgabe elementar nicht zu Ende führen. Man erhält nämlich

$$86) \quad T_x = -\frac{w l^2}{8} \left[\left(2 - 4 \frac{x}{l}\right) \sqrt{\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}} + \arcsin \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \right],$$

als Gleichung der Scherkräfte für die Belastung w , und

$$M_x^h = \int -T_x dx + C.$$

Man setze daher wieder an Stelle der Gleichung 85) eine andere angenäherte, die aber elementare Differentialgleichungen ergibt.

$$85' a) \quad \begin{cases} w' = \frac{3 \pi l w}{8 \sqrt{2}} \sqrt{\frac{x}{l}} & \text{für } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ w'' = \frac{3 \pi l w}{8 \sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x}{l}} & \text{„ } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Für $x = 0$ ist $w' = 0$,

„ $x = \frac{l}{2}$ „ $w' = w'' = \frac{3}{16} \pi l w = 0,59 l w$,

„ $x = l$ „ $w'' = 0$.

Der Verlauf der Scherkräfte dieser Belastung stellt sich:

$$T_x' = + \frac{3 \pi l^2 w}{8 \sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{x}{l}} d \frac{x}{l} + C_1' = + \frac{3 \pi l^2 w}{8 \sqrt{2}} \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^3} + C_1'$$

und ebenso

$$T_x'' = \frac{3 \pi l^2 w}{8 \sqrt{2}} \frac{2}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3} + C_1'' \quad \text{für } x = \frac{l}{2} \text{ ist } T_x' = T_x'' = 0.$$

Daraus bestimmt sich $C_1' = -\frac{\pi}{16} l^2 w$, $C_1'' = +\frac{\pi}{16} l^2 w$. Somit ist

$$86) \quad \begin{cases} T_x' = -\frac{\pi}{16} l^2 w \left[1 - 2 \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^3}\right] & \text{für } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ T_x'' = +\frac{\pi}{16} l^2 w \left[1 - 2 \sqrt{2} \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3}\right] & \text{„ } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

$$87) \quad \begin{cases} \text{Für } x=0 \text{ ist } T_x' = A = -\frac{\pi l^2 w}{16}, \\ \text{„ } x=l \text{ „ } -T_x'' = B = -\frac{\pi l^2 w}{16}. \end{cases}$$

Man beachte, daß $A + B = \pi \frac{l^2}{8} w$ ist. $\frac{\pi}{8} l^2$ ist die Fläche des Halbkreises. $A + B$ ist somit genau so groß, wie nach der strengen Formel 85).

Der Verlauf der Momente dieser Belastung w ergibt sich:

$$M_x^h = \int -T_x dx + C_x,$$

$$0 < x < \frac{l}{2} \quad M_x^{h'} = \frac{\pi l^3 w}{16} \left[\frac{x}{l} - 2\sqrt{2} \int \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^3} d\frac{x}{l} \right] + C_2', \\ = \frac{\pi l^3 w}{16} \left[\frac{x}{l} - \frac{4}{5} \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^5} \right] + C_2',$$

$$\text{für } x=0 \text{ ist } M_x^{h'} = 0 = C_2';$$

$$\frac{l}{2} < x < l \quad M_x^{h''} = -\frac{\pi l^3 w}{16} \left[-1 + \frac{x}{l} - 2\sqrt{2} \int \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3} d\frac{x}{l} \right] \\ + C_2'' = +\frac{\pi l^3 w}{16} \left[1 - \frac{x}{l} - 2\sqrt{2} \frac{2}{5} \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^5} \right] + C_2'',$$

$$\text{für } x=l \text{ ist } M_x^{h''} = 0 = C_2''.$$

Somit ist

$$88) \quad \begin{cases} M_x^{h'} = \frac{\pi l^3 w}{80} \cdot \frac{x}{l} \cdot \left[5 - 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{x^3}{l^3}} \right] \text{ für } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ M_x^{h''} = \frac{\pi l^3 w}{80} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[5 - 4\sqrt{2} \sqrt{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3} \right] \text{ für } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

$$\text{Für } x = \frac{l}{2} \text{ ist } M_x^{h'} = M_x^{h''} = \frac{3}{160} \pi l^3 w.$$

Die Zusatzkräfte dV der Hauptträger betragen:

$$dV = + \frac{M_x^h d^2 z}{t dx^2} dx.$$

$$0 < x < \frac{l}{2}; \quad dV = \frac{\pi l^3 w}{80 \cdot 4 \cdot l t} \frac{x}{l} \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left[5 - 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{x^3}{l^3}} \right] dx.$$

$$89) \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < \frac{l}{2} \\ dV' = -\frac{\pi l^3 w}{320 t} \left[5 \left(\frac{x}{l} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{-\frac{3}{2}} d \frac{x}{l} - 4 \sqrt{2} \left(\frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{-\frac{3}{2}} d \frac{x}{l} \right] \\ \text{und ebenso} \\ \frac{l}{2} < x < l \\ dV'' = -\frac{\pi l^3 w}{320 t} \left[5 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{l} \right)^{-\frac{3}{2}} d \frac{x}{l} - 4 \sqrt{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(\frac{x}{l} \right)^{-\frac{3}{2}} d \frac{x}{l} \right] \end{array} \right.$$

Die Scherkräfte S_x des Hauptträgers infolge der Lasten dV haben den Verlauf (mit Gleichsetzung $\frac{x}{l} = \xi$):

$$0 < x < \frac{l}{2}$$

$$S_x' = -\frac{\pi l^3 w}{320 t} \left[5 \int \xi^{-\frac{1}{2}} (1 - \xi)^{-\frac{3}{2}} d\xi - 4 \sqrt{2} \int \xi (1 - \xi)^{-\frac{3}{2}} d\xi \right] + C_1',$$

$$S_x' = -\frac{\pi l^3 w}{320 t} \left[\frac{10 \xi}{\sqrt{\xi - \xi^2}} - \frac{4 \sqrt{2} (4 - 2 \xi)}{\sqrt{1 - \xi}} \right] + C_1',$$

$$\text{für } x = \frac{l}{2} \text{ ist } S_x' = 0 = -\frac{\pi}{320} l^3 w \frac{10 - 24}{t} + C_1'$$

$$\text{oder } C_1' = -\frac{7}{160} \frac{\pi l^3 w}{t};$$

$$\frac{l}{2} < x < l$$

$$S_x'' = -\frac{\pi l^3 w}{320 t} \left[5 \int (1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{3}{2}} d\xi - 4 \sqrt{2} \int (1 - \xi) \xi^{-\frac{3}{2}} d\xi \right] + C_1'',$$

$$S_x'' = -\frac{\pi l^3 w}{320 t} \left[-\frac{5 \cdot 2 (1 - \xi)}{\sqrt{\xi - \xi^2}} + 4 \sqrt{2} \cdot 2 \frac{1 + \xi}{\sqrt{\xi}} \right] + C_1'',$$

$$\text{für } x = \frac{l}{2} \text{ ist } \xi = \frac{1}{2} \text{ und } S_x'' = 0 = -\frac{\pi l^3 w}{320 t} (-10 + 24) + C_1''$$

$$\text{oder } C_1'' = \frac{7}{160} \frac{\pi l^3 w}{t}.$$

Somit ist:

$$90) \left\{ \begin{array}{l} S_x' = -\frac{\pi l^3 w}{160 t} \left[7 + 5 \frac{\xi}{\sqrt{\xi - \xi^2}} - 4 \sqrt{2} \frac{2 - \xi}{\sqrt{1 - \xi}} \right] \text{ für } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ S_x'' = +\frac{\pi l^3 w}{160 t} \left[7 + 5 \frac{1 - \xi}{\sqrt{\xi - \xi^2}} - 4 \sqrt{2} \frac{1 + \xi}{\sqrt{\xi}} \right] \text{ für } \frac{l}{2} < x < l. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für } x = 0; \xi = 0 \text{ ist } S_x' = + A = \frac{\pi l^3 w}{160 t} (8\sqrt{2} - 7), \\ \text{für } x = l; \xi = 1 \text{ ist } - S_x'' = B = \frac{\pi l^3 w}{160 t} (8\sqrt{2} - 7). \end{array} \right\} 91)$$

$$A + B = \frac{\pi l^3 w}{80 t} (8\sqrt{2} - 7).$$

Die Höhe der Resultierenden aller w Kräfte η_s beträgt:

$$\eta_s = \frac{(A + B) t}{H} = \frac{\pi l^3 w (8\sqrt{2} - 7) t}{80 \cdot t \cdot \frac{\pi l^2 w}{8}} = \frac{(8\sqrt{2} - 7) l}{10}$$

$$= \frac{8\sqrt{2} - 7}{5} \cdot h = 0,856 h \text{ gegen } 0,848 h,$$

wenn man nach der strengen Formel 85) rechnen würde.

Der Verlauf der Momente der Kräfte dV ist $M_x = \int S_x dx$.

$$0 < x < \frac{l}{2} \quad M_x' = \frac{\pi l^4 w}{160 t} \left[-7\xi - 5 \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi - \xi^2}} + 4\sqrt{2} \int \frac{(2-\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi}} \right] + C_2',$$

$$= \frac{\pi l^4 w}{160 t} \left[-7\xi + \frac{5}{2} \arcsin(1-2\xi) + 5\sqrt{\xi - \xi^2} \right.$$

$$\left. - \frac{8}{3} \sqrt{2} \sqrt{(1-\xi)^3} - 8\sqrt{2} \sqrt{1-\xi} \right] + C_2'.$$

$$M_x' \text{ ist für } x = 0, \xi = 0: M_0 = 0 = \frac{\pi l^4 w}{160 t} \left(\frac{5}{4} \pi - \frac{8}{3} \sqrt{2} - 8\sqrt{2} \right) + C_2'.$$

$$C_2' = \frac{\pi l^4 w}{12 \cdot 160 t} (-15\pi + 128\sqrt{2}).$$

$$\frac{l}{2} < x < l \quad M_x'' = \frac{\pi l^4 w}{160 t} \left[7\xi + 5 \int \frac{(1-\xi) d\xi}{\sqrt{\xi - \xi^2}} - 4\sqrt{2} \int \frac{(1+\xi) d\xi}{\sqrt{\xi}} \right] + C_2''.$$

$$M_x'' = \frac{\pi l^4 w}{160 t} \left[7\xi - \frac{5}{2} \arcsin(1-2\xi) + 5\sqrt{\xi - \xi^2} - 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{\xi} \right.$$

$$\left. - 4\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\xi^3} \right] + C_2'',$$

$$\text{für } x = l, \xi = 1 \text{ ist } M_x'' = 0 = \frac{\pi l^4 w}{160 t} \left(7 + \frac{5}{4} \pi - 8\sqrt{2} - \frac{8}{3} \sqrt{2} \right) + C_2''.$$

$$C_2'' = \frac{\pi l^4 w}{12 \cdot 160 t} (-84 - 15\pi + 128\sqrt{2}).$$

Somit ist:

$$92) \left\{ \begin{aligned} M_x' &= \frac{\pi l^4 w}{12 \cdot 160 t} [-15 \pi + 128 \sqrt{2} - 84 \xi + 30 \arcsin(1 - 2 \xi) \\ &\quad + 60 \sqrt{\xi - \xi^2} - 32 \sqrt{2} \sqrt{(1 - \xi)^3} - 96 \sqrt{2} \sqrt{1 - \xi}] \text{ für } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ M_x'' &= \frac{\pi l^4 w}{12 \cdot 160 t} [128 \sqrt{2} - 15 \pi - 84(1 - \xi) - 30 \arcsin(1 - 2 \xi) \\ &\quad + 60 \sqrt{\xi - \xi^2} - 96 \sqrt{2} \sqrt{\xi} - 32 \sqrt{2} \sqrt{\xi^3}] \text{ für } \frac{l}{2} < x < l. \end{aligned} \right.$$

Für $x = \frac{l}{2}$ $\xi = \frac{1}{2}$ ist $M_x' = M_x'' = M_{\frac{l}{2}}$.

$$M_{\frac{l}{2}} = \frac{\pi l^4 w}{12 \cdot 160 t} [-15 \pi + 128 \sqrt{2} - 124] = \frac{9,4}{12 \cdot 160} \cdot \frac{\pi l^4 w}{t}.$$

6. Spezialfall: Halbkreisgurtung, Einflußlinien.

§ 58. a) Einflußlinien der spez. Zusatzkräfte $\frac{dV}{dx}$ für einen Punkt $x = b$.

$$z = \sqrt{x(l-x)} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{1}{4l} \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$a > b \quad \left(\frac{dV'}{dx}\right)_{x < a} = \frac{M_x^h d^2 z}{t dx^2} = -\frac{Hx(l-a)}{t l} \cdot \frac{1}{4l} \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$a < b \quad \left(\frac{dV''}{dx}\right)_{x > a} = \frac{M_x^h d^2 z}{t dx^2} = -\frac{H(l-x)a}{t l} \cdot \frac{1}{4l} \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Setzt man $x = b$, so erhält man die Gleichungen der Einflußlinien.

$$93) \left\{ \begin{aligned} a > b \quad \frac{dV'}{dx} &= -H \frac{1}{4t} \left(\frac{b}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{b}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{a}{l}\right), \\ a < b \quad \frac{dV''}{dx} &= -H \frac{1}{4t} \left(\frac{b}{l}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{b}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{a}{l}. \end{aligned} \right.$$

b) Einflußlinien der Auflagerdrucke infolge der Kräfte dV .

$$A = -\int_0^{\frac{a}{l}} dV \frac{l-x}{l} - \int_{\frac{a}{l}}^1 \frac{l-x}{l} dV' = +\frac{H(l-a)}{4t} \int_0^{\frac{a}{l}} \xi^{-\frac{1}{2}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \\ + \frac{Ha}{4t} \int_{\frac{a}{l}}^1 \xi^{-\frac{3}{2}} (1-\xi)^{+\frac{1}{2}} d\xi.$$

$$A = + \frac{H(l-a)}{4t} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{l-2a}{l} \right) + H \frac{a}{2t} \cdot \frac{l-a}{\sqrt{al-a^2}} - H \frac{a}{4t} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{l-2a}{l} \right].$$

$$94) \begin{cases} A = + \frac{H}{t} \left[\frac{\sqrt{a(l-a)}}{2} + \frac{(l-2a)\pi}{8} - \frac{l}{4} \arcsin \left(1 - 2 \frac{a}{l} \right) \right] \text{ und} \\ B = + \frac{H}{t} \left[\frac{\sqrt{a(l-a)}}{2} + \frac{(2a-l)\pi}{8} + \frac{l}{4} \arcsin \left(1 - 2 \frac{a}{l} \right) \right] \end{cases} \text{ ebenso}$$

$$A + B = + \frac{H}{t} \sqrt{a(l-a)} = + \frac{H}{t} z_a.$$

c) Einflußlinien der Scherkräfte für einen Punkt, dessen $x=b$, des Hauptträgers infolge der Kräfte dV .

$$a > b \quad S_{x < a} = \int dV_{x < a} + C_1' = - \frac{H(l-a)}{4t} \int \xi^{-\frac{1}{2}} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} d\xi + C_1' = - \frac{H(l-a)\xi}{2t\sqrt{\xi-\xi^2}} + C_1'$$

$$a < b \quad S_{x > a} = \int dV_{x > a} + C_1'' = - \frac{Ha}{4t} \int \xi^{-\frac{3}{2}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi + C_1'' = \frac{Ha(1-\xi)}{2t\sqrt{\xi-\xi^2}} + C_1''.$$

Für $x=0$, $\xi=0$ ist $S_{x < a} = A$ nach Gl. 53) und für $x=l$, $\xi=1$ ist $S_{x > a} = -B$ nach Gl. 53), woraus sich ergibt:

$$C_1' = + \frac{H}{t} \left[\frac{\sqrt{(l-a)a}}{2} + \frac{(l-2a)\pi}{8} - \frac{l}{4} \arcsin \left(1 - 2 \frac{a}{l} \right) \right]$$

$$C_1'' = + \frac{H}{t} \left[- \frac{\sqrt{a(l-a)}}{2} + \frac{(l-2a)\pi}{8} - \frac{l}{4} \arcsin \left(1 - 2 \frac{a}{l} \right) \right],$$

somit ist

$$S_{x < a} = \frac{H}{t} \left[\frac{1}{2} \sqrt{a(l-a)} + \frac{\pi}{8} (l-2a) - \frac{l}{4} \arcsin \frac{l-2a}{l} - \frac{1}{2} (l-a) \frac{\xi}{\sqrt{\xi-\xi^2}} \right]$$

$$S_{x > a} = \frac{H}{t} \left[- \frac{1}{2} \sqrt{a(l-a)} + \frac{\pi}{8} (l-2a) - \frac{l}{4} \arcsin \frac{l-2a}{l} + \frac{1}{2} a \frac{1-\xi}{\sqrt{\xi-\xi^2}} \right].$$

Setzt man $\xi = \frac{b}{l}$, so erhält man die Gleichungen der Einflußlinien.

$$95) \left\{ \begin{array}{l} a < b: S_b' = \frac{H}{t} \left[\frac{1}{2} \sqrt{a(l-a)} + \frac{\pi}{8} (l-2a) - \frac{l}{4} \arcsin \frac{l-2a}{l} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{2} (l-a) \frac{b}{\sqrt{b(l-b^2)}} \right] \\ a > b: S_b'' = \frac{H}{t} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{a(l-a)} + \frac{\pi}{8} (l-2a) - \frac{l}{4} \arcsin \frac{l-2a}{l} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{2} a \frac{l-b}{\sqrt{b(l-b^2)}} \right] \end{array} \right.$$

für $a = b$ ist $S_b' = S_b'' = S_b^a$
 $S_b^a = \frac{H}{t} \left[\frac{\pi}{8} (l-2b) - \frac{l}{4} \arcsin \frac{l-2b}{l} \right].$

b) Einflußlinien der Momente für einen Punkt, dessen $x = b$, des Hauptträgers infolge der Kräfte dV .

$$a > b \quad M_{x < a} = + \int S_{x < a} dx + C_2$$

$$M_{x < a} = \frac{H}{t} l \left[\frac{1}{2} \sqrt{a(l-a)} \xi + \frac{\pi}{8} (l-2a) \xi - \xi \frac{l}{4} \arcsin \frac{l-2a}{l} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (l-a) \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi - \xi^2}} \right] + C_2'$$

$$M_{x < a} = \frac{H}{t} l \left[\frac{1}{2} \sqrt{a(l-a)} \xi + \frac{\pi}{8} (l-2a) \xi - \xi \frac{l}{4} \arcsin \frac{l-2a}{l} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (l-a) \sqrt{\xi - \xi^2} + \frac{1}{4} (l-a) \arcsin (1-2\xi) \right] + C_2'$$

für $x=0$, $\xi=0$ ist $M_{x < a} = 0$, woraus $C_2' = -\frac{Hl\pi}{t} (l-a)$,

somit

$$M_{x < a} = \frac{H}{t} l \left[-\frac{\pi}{8} (l-a) + \frac{1}{2} \sqrt{a(l-a)} \xi + \frac{\pi}{8} (l-2a) \xi - \frac{l}{4} \xi \arcsin \frac{l-2a}{l} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (l-a) \sqrt{\xi - \xi^2} + \frac{1}{4} (l-a) \arcsin (1-2\xi) \right].$$

Ebenso erhält man

$$M_{x > a} = \frac{H}{t} l \left[-\frac{\pi}{8} a + \frac{1}{2} \sqrt{a(l-a)} (1-\xi) - \frac{\pi}{8} (l-2a) (1-\xi) \right. \\ \left. + \frac{l}{4} (1-\xi) \arcsin \frac{l-2a}{l} + \frac{1}{2} a \sqrt{\xi - \xi^2} - \frac{1}{4} a \arcsin (1-2\xi) \right].$$

Setzt man $\xi = \frac{b}{l}$, so erhält man die Gleichungen der Einflußlinien:

$$96) \begin{cases} a > b \quad M_b' = \frac{H}{t} l \left[-\frac{\pi}{8} (l-a) + \frac{1}{2} \frac{b}{l} \sqrt{a(l-a)} + \frac{\pi}{8} (l-2a) \frac{b}{l} \right. \\ \left. - \frac{b}{4} \arcsin \frac{l-2a}{l} + \frac{1}{2} (l-a) \sqrt{\frac{b}{l} - \frac{b^2}{l^2}} + \frac{1}{4} (l-a) \arcsin \left(1 - 2 \frac{b}{l} \right) \right] \\ a < b \quad M_b'' = \frac{H}{t} l \left[-\frac{\pi}{8} a + \frac{1}{2} \frac{l-b}{l} \sqrt{a(l-a)} - \frac{\pi}{8} (l-2a) \frac{l-b}{l} \right. \\ \left. + \frac{l-b}{4} \arcsin \frac{l-2a}{l} + \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{b}{l} - \frac{b^2}{l^2}} - \frac{1}{4} a \arcsin \left(1 - 2 \frac{b}{l} \right) \right]. \end{cases}$$

Für $a = b$ ist $M_b' = M_b'' = M_b^a$

$$M_b^a = \frac{H}{t} l \left[\frac{\pi}{8} \left(2b - l - 2 \frac{b^2}{l} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{bl - b^2} + \frac{l-2b}{4} \arcsin \frac{l-2b}{l} \right].$$

In den Gleichungen 93) bis 96) ist a der veränderliche Abstand der Kraft H von der linken Auflagerebene, somit die variable Abszissenkoordinate der Einflußlinien.

II. Rechnungsbeispiel zur ersten Abteilung I,3 β .

§ 59. Wir wollen für eine Halbparabelbrücke die Tragkraft des mittleren Untergurt- und Obergurtstabes U und O ausrechnen,

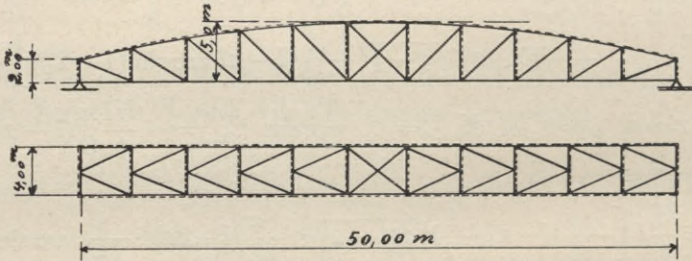
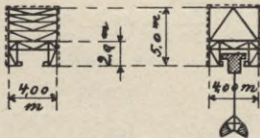


Fig. 10.



um zu zeigen, wie groß der Einfluß der Zusatzkräfte ist.

Die Brücke (Fig. 10) diene zur Aufnahme einer Greiferkatze, die einen Lageraum unterhalb der Brücke bedient. Sie muß unten offen sein, und sei daher die Horizontalverspannung oben angeordnet. Die

Brücke habe eine Spannweite von 50 m. Die Endpfosten seien 2 m hoch, die Höhe der Brücke in der Mitte sei 5,0 m. Die Brückenbreite beträgt $t = 4$ m. Das Eigengewicht der Brücke sei 60^t , wovon die Hälfte auf einen Hauptträger entfällt. Die Greiferkatze habe ein Gewicht von 16^t , davon kommt auf einen Träger $8,0^t$. Die Windfläche, die am Untergurt konzentriert gedacht ist, beträgt $1,0 \text{ m}^2$ pro 1 m Brückenlänge, desgleichen am Obergurt $0,5 \text{ m}^2/\text{m}$. Die Windstärke sei 150 kg/m^2 .

a) Das Eigengewicht erzeugt in Trägermitte ein Biegemoment

$$\frac{1}{8} 30^t \cdot 50^m = 187,5 \text{ tm, somit ist } U_g = -O_g = \frac{187,5}{5} = + 37,5^t.$$

b) Desgleichen erzeugt das Gewicht der Greiferkatze ein Moment

$$\frac{1}{4} 8,0^t \cdot 50^m = 100 \text{ tm, somit ist } U_p = -O_p = + \frac{100}{5} = + 20,0^t.$$

c) Die am Untergurt wirkenden Windkräfte von

$$1,0 \cdot 150 = 150 \text{ kg/m} = w_u$$

werden durch die Querrahmen nach oben übertragen, wobei der windseitige Hauptträger durch eine vertikal nach unten wirkende Zusatzlast beansprucht wird, die pro 1 m Brückenlänge beträgt:

$$w = -w_u \cdot z \cdot \frac{1}{t}. \text{ Hierbei ist } z = 2,0 + \frac{4 \cdot 3}{50^2} x (50 - x) \\ = 2,00 + 0,24 x - 0,0048 x^2,$$

$$t = 4,0 \text{ m,}$$

$$w = -w_u (0,50 + 0,06 x - 0,0012 x^2) \text{ kg/m.}$$

Das Moment dieser Belastung in Trägermitte rechnet sich folgendermaßen:

Die Scherkräfte sind:

$$S_x = + \int w dx + C_1 = -w_u (0,50 x + 0,03 x^2 - 0,0004 x^3) + C_1.$$

$$\text{Für } x = \frac{l}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m ist } S_x = 0 = -w_u (12,50 + 18,75 - 6,25) \\ + C_1 = -25 w_u + C_1.$$

$$\text{Somit: } S_x = -w_u (-25,00 + 0,50 x + 0,03 x^2 - 0,0004 x^3).$$

Der Verlauf der Momente ist:

$$M_x = \int S_x dx + C_2,$$

$$M_x = -w_u (-25,00 x + 0,25 x^2 + 0,01 x^3 - 0,0001 x^4) + C_2,$$

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } M_x = 0 = C_2,$$

somit $M_w = -w_u (-25,00x + 0,25x^2 + 0,01x^3 - 0,0001x^4)$,
 für $x = \frac{l}{2} = 25$ ist $M_{\frac{l}{2}} = -w_u (-625 + 156,25 + 156,25 - 39,0625)$
 $= 351,5625 w_u = 351,5625 \times 0,150 = 52,73 \text{ tm}$.

Somit ist $U_k = -O_k = \frac{52,73}{5,0} = 10,55 \text{ t}$.

δ) Die vereinigten Windkräfte auf Ober- und Untergurt $w = w_o + w_u = (1,0 + 0,5) \cdot 150 = 225 \text{ kg/m} = 0,225 \text{ tm}$ belasten die horizontale Verspannung und erzeugen in Brückenmitte ein horizontales Biegemoment von

$$M_h = \frac{1}{8} 0,225 \cdot 50^2 = 70,3 \text{ tm}.$$

Der Obergurtstab auf der Windseite erhält die Stabkraft

$$O_w = -\frac{70,3}{4} = -17,575^t = \sim -17,58^t.$$

ε) Infolge der Biegung der oberen Verspannung kommen noch auf den windseitigen Hauptträger vertikal nach oben gerichtete Zusatzkräfte hinzu, die in der Brückenmitte ein Biegemoment M_z^o erzeugen, das nach § 54 beträgt:

$M_z^o = \frac{5fwl^2}{48t}$, wobei f den Pfeil der Parabel $5,0 - 2,0 = 3,0 \text{ m}$;
 $w = 0,225 \text{ tm}$ die wagerechte gleichmäßig auf die Brückenlänge verteilte Belastung, $l = 50 \text{ m}$ die Spannweite und $t = 4,0 \text{ m}$ die Breite der Brücke bedeutet.

Der Verlauf der Momente M_z über die ganze Brückenlänge ist

$$M_z = \frac{fwl^2}{3t} \left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right).$$

Es beträgt $M_z^o = \frac{5 \cdot 3 \cdot 0,225 \cdot 50}{48 \cdot 4,0} = 43,94 \text{ tm}$ und die Stabkräfte der Gurtstäbe O und U

$$U_z = -O_z = -\frac{43,94}{5} = -8,79^t.$$

Zusammengestellt betragen:

$$U = +37,50 + 20,00 + 10,55 - 8,79 = +59,26^t.$$

$$O = -37,50 - 20,00 - 10,55 - 17,58 + 8,79 = -76,84^t.$$

Man ersieht hieraus, daß der Betrag U_z und O_z im Vergleich zu den anderen Anteilen keineswegs klein ist, im gegebenen Beispiele aber die Gurtstäbe entlastet.

Will man noch den Wind auf die Katze berücksichtigen, so stellen sich die Stabkräfte:

$$\begin{aligned} \text{Windfläche der Katze} &= 6 \text{ m}^2. \\ W &= 6,0 \cdot 150 = 900 \text{ kg} = 0,9^t; \end{aligned}$$

diese Kraft greift unten an. Bei Übertragung dieser Kraft auf die obere Verspannung erhält der windseitige Hauptträger einer nach unten gerichteten Last von

$$\frac{0,900 \cdot 5,0}{4,0} = 1,125^t.$$

Diese Last erzeugt ein Moment in Trägermitte von

$$1,125 \cdot \frac{50}{4} = 14,0625 \text{ tm},$$

das folgende Stabkräfte hervorruft:

$$\frac{14,0625}{5,0} = \pm 2,81^t.$$

Das obere Zeichen gilt für den Untergurt, das untere Zeichen für den Obergurt.

An der oberen gekrümmten Verspannung greift nun eine Einzelast von $0,9^t$ an, die zunächst eine Obergurtspannkraft von

$$-\frac{0,9 \cdot 50}{4 \cdot 4,0} = -2,81^t$$

erzeugt. Außerdem entstehen Zusatzkräfte im Hauptträger, die nach oben gerichtet sind. Diese Zusatzkräfte erzeugen ein Moment, das aus der Gleichung der Einflußlinie der Momente Gl. 32' oder 32'' berechnet werden kann.

$$b = a = \frac{l}{2} \quad M = \frac{8}{3} H \frac{f l^2 l^2 1}{t 4 4 l^3} = \frac{8 fl}{3 16 t} H = \frac{1 fl}{6 t} H.$$

Mit Einsetzung der Werte ergibt sich

$$M = \frac{1 \cdot 3,0 \cdot 50}{6 \cdot 4,0} 0,9 = 6,25 \cdot 0,9 = 5,625^{\text{tm}}.$$

Die dadurch entstehenden Stabkräfte sind im Obergurt:

$$\frac{5,625}{5} = + 1,12^t; \text{ im Untergurt: } - 1,12^t.$$

Insgesamt entstehen infolge des Windes auf die Katze im

$$\text{im Untergurt: } + 2,81 - 1,12 = + 1,69^t;$$

$$\text{im Obergurt: } - 2,81 - 2,81 + 1,12 = - 4,50^t.$$

Addiert man diese Spannungen zu den früher erhaltenen Stabkräften, so erhält man:

$$U = 59,26 + 1,69 = 60,95^t \quad O = - 76,84 - 4,50 = - 81,34^t.$$

III. Beispiel eines Balkonträgers.

Fahrbahnträger einer Drehbrücke (zur ersten Abteilung I, 3β, §24).

(Fig. 13.)

§ 60. Ein gebogener Fachwerkträger, dessen Grundriß ein Halbkreis bzw. ein in einen Halbkreis eingeschriebenes Vieleck ist, dient als Fahrbahn für eine Auslegerdrehbrücke, deren Königszapfen im Mittelpunkt des Halbkreises liegt. Der Radius des Halbkreises ist $\frac{l}{2} = 8,0$ m. Die Trägerhöhe t ist 2,5 m. Die Feldteilung des Trägers ist derart, daß die wirklichen Gurtlängen einander gleich sind, und zwar $\frac{8\pi}{10} = \sim 2,5$ m.

Die Abszissen der einzelnen Knotenpunkte betragen:

$$x_1 = 0,40 \text{ m, } x_2 = 1,50 \text{ m, } x_3 = 3,30 \text{ m, } x_4 = 5,50 \text{ m, } x_5 = 8,00 \text{ m.}$$

Die weiteren Knotenpunkte liegen symmetrisch zur Mitte (Punkt 5). In der Ober- bzw. Untergurtebene befinden sich ebene wagerechte sichelförmige Träger. Die Lagerung des Balkons sei statisch bestimmt gewählt. Im Punkt 0 befindet sich unten ein festes Lager mit drei Auflagerbedingungen, oben ein Lager mit der einen Bedingung, daß der Punkt in der lotrechten Ebene, die durch $\overline{0,10}$ geht, geführt ist (Lagerkraft horizontal). Der untere Punkt 10 kann Lagerkräfte im lotrechten und im wagerechten zur $\overline{0,10}$ Ebene winkelrechten Sinne

übertragen. Der obere Punkt 10 kann lediglich wagerechte, zur 0—10 Ebene winkelrechte Kräfte aufnehmen.

Die Lasten sind:

1. $g = 600 \text{ kg/m}$ gleichmäßig über den Bogen verteilt.
2. Zwei Lasten $\frac{1}{2} P = 12^t$, die Raddrücke der drehbaren Auslegerbrücke, auf dem Obergurt des Balkonträgers wandernd. Der Einfachheit halber wird angenommen, daß beide Lasten zusammengelegt sind, so daß nur eine wandernde Einzellast $P = 24^t$ in Frage kommt.

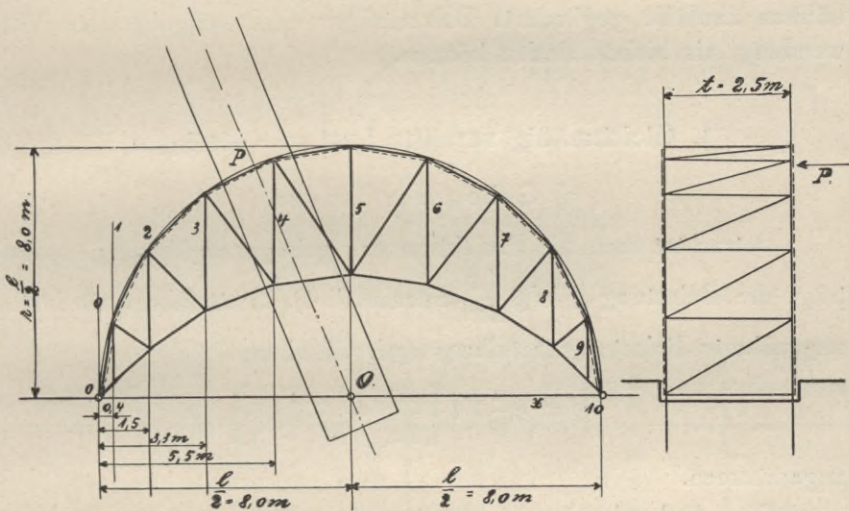


Fig. 13.

Zu ermitteln ist:

- a) Biegemomente und Scherkräfte für die einzelnen Knotenpunkte und Felder des gegliederten Balkonträgers zwecks Bestimmung der Stabkräfte.
- b) Biegemomente und Scherkräfte für die einzelnen Knotenpunkte und Felder der Sichelträger, die in den Ebenen der beiden Gurte des eigentlichen Balkonträgers wagerecht angeordnet sind.

Bei der Berechnung der Scherkräfte für einzelne Felder, sofern dieselbe nicht mit Hilfe von Einflußlinien erfolgt, soll der Einfachheit

halber die Scherkraft für denjenigen Knotenpunkt (Begrenzungspunkt) des Feldes ausgerechnet werden, der den größeren Wert ergibt, anstatt, daß sie für einen erst zu bestimmenden Punkt innerhalb des Feldes gerechnet werde.

Es sei hier vorweggenommen, daß dieses Beispiel einen aus der Luft gegriffenen Fall darstellt, der wohl noch nie vorgekommen ist. Immerhin ist es möglich, daß solche Fälle zum Teile deshalb nicht ausgeführt werden, weil die Theorie dieser Balken in breiteren Kreisen ziemlich unbekannt und bisher nicht weit genug entwickelt ist. Es will dem Schreiber dieser Zeilen scheinen, daß bei beweglichen Brücken, Balkonstraden in Festsälen, Unterbauten für Drehbühnen ähnliche gegliederte Balkenträger eine weitgehendere Verwendung, als bisher, finden können.

1. Gleichmäßig verteilte Last $g = 600 \text{ kg/m}$.

a) Gebogener Träger.

Betrachtet man die Projektion des gebogenen Trägers, so beträgt die Belastung $g' = g \frac{ds}{dx}$ (Spezialfall 4). Statt dieser wird eine angenäherte Belastungsverteilung nach Gleichung 77 a)

$$g' = g \frac{\pi}{8} \sqrt{l} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{l-x}} \right]$$

angenommen.

Die Scherkräfte im gebogenen Träger betragen nach Gleichung 80)

$$T_v = -\frac{g \pi \sqrt{l}}{4} [\sqrt{x} - \sqrt{l-x}] = -\frac{g \pi l}{4} \left[\sqrt{\frac{x}{l}} - \sqrt{1 - \frac{x}{l}} \right].$$

Die Auflagerkräfte des gebogenen Trägers betragen nach Gleichung 81)

$$A_v = B_v = \frac{g \pi l}{4}.$$

Die Biegemomente im gebogenen Träger sind nach Gleichung 78 a)

$$M_v' = \frac{g \pi l^2}{6} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Diese Momente sind bezogen auf die Projektion des Trägers. Um die wirklichen Momente zu berechnen, die für die Stabkraftbestimmung in Frage kommen, müssen obige Momente M_V' noch mit der Sekante des Neigungswinkels des Stabelementes zur Projektionsebene multipliziert werden.

$$M_V = M_V' \sec \alpha_x$$

$$\sec \alpha_x = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{l}{2\sqrt{l x - x^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Somit ist das Biegemoment M_V

$$M_V = \frac{g \pi l^2}{6} \frac{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ausgerechnet, betragen die einzelnen Werte:

$$A_V = B_V = \frac{g \pi l}{4} = 7550 \text{ kg.}$$

Feld	Punkt	x	$\frac{x}{l}$	$\frac{g \pi l}{4}$	$-\sqrt{\frac{x}{l}} + \sqrt{1 - \frac{x}{l}}$	Scherkraft
0—1	0	0,0	0,000	7550	1,000	+ 7550 kg
1—2	1	0,4	0,025	7550	0,830	+ 6260 "
2—3	2	1,5	0,094	7550	0,646	+ 4880 "
3—4	3	3,3	0,206	7550	0,438	+ 3310 "
4—5	4	5,5	0,344	7550	0,224	+ 1690 "

Punkt	$\frac{x}{l}$	$\frac{g \pi l^2}{12}$	$\frac{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}}$	M_V (Moment)
0	0,000	40 350 kgm	0,000	0
1	0,025	40 350 "	0,205	8 250 kgm
2	0,094	40 350 "	0,371	14 950 "
3	0,206	40 350 "	0,486	19 600 "
4	0,344	40 350 "	0,575	23 200 "
5	0,500	40 350 "	0,580	23 400 "

b) Sichelträger.

Die Auflagerkräfte der wagerechten Sichelträger berechnen sich nach Gleichung 83)

$$A_h = B_h = \frac{g \pi l^2}{12 t}.$$

Die Scherkräfte betragen nach Gleichung 82)

$$S_h = \frac{g \pi l^2}{12 t} \left[\frac{l - 2x}{\sqrt{lx - x^2}} + l^{\frac{1}{2}}(l - x)^{-\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} \right]$$

oder, geordnet nach $\frac{x}{l}$:

$$S_h = \frac{g \pi l^2}{12 t} \left[\frac{1 - 2\frac{x}{l}}{\sqrt{\frac{x}{l}(1 - \frac{x}{l})}} + \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{g \pi l^2}{12 t} \cdot \frac{1 - 2\frac{x}{l} + \sqrt{\frac{x}{l}} - \sqrt{1 - \frac{x}{l}}}{\sqrt{\frac{x}{l}(1 - \frac{x}{l})}}.$$

Die Biegemomente der Sichelträger berechnen sich nach Gleichung 84)

$$M_h = \frac{g \pi l^3}{6 t} \left[1 + \sqrt{\frac{x}{l}(1 - \frac{x}{l})} - \sqrt{1 - \frac{x}{l}} - \sqrt{\frac{x}{l}} \right].$$

Ausgerechnet betragen die einzelnen Werte:

$$A_h = B_h = \frac{g \pi l^2}{12 t} = 16100 \text{ kg.}$$

Feld	Punkt	$\frac{x}{l}$	$\frac{g \pi l^2}{12 t}$ kg	$1 - 2\frac{x}{l} + \sqrt{\frac{x}{l}} - \sqrt{1 - \frac{x}{l}}$	Scherkraft kg
				$\sqrt{\frac{x}{l}(1 - \frac{x}{l})}$	
0—1	0	0,000	16 100	1,000	+ 16 100
1—2	1	0,025	16 100	0,770	+ 13 400
2—3	2	0,094	16 100	0,570	+ 9 200
3—4	3	0,206	16 100	0,378	+ 6 100
4—5	4	0,344	16 100	0,185	+ 2 980

Punkt	$\frac{x}{l}$	$\frac{g \pi l^3}{6 t}$ kgm	$1 + \sqrt{\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)} - \sqrt{1 - \frac{x}{l}} - \sqrt{\frac{x}{l}}$	Moment M_h kgm
0	0,000	516 000	0,000	0
1	0,025	516 000	0,010	5 160
2	0,094	516 000	0,033	17 020
3	0,206	516 000	0,061	31 500
4	0,344	516 000	0,079	40 800
5	0,500	516 000	0,086	44 400

2. Wandernde Einzellast $P = 24000$ kg.

a) Gebogener Träger.

Die maximalen Auflagerdrucke betragen:

$$A = B = P = 24000 \text{ kg.}$$

Die maximalen Scherkräfte betragen:

$$T_{\max}^v = + P \frac{l-x}{l} \qquad T_{\min}^v = - P \frac{x}{l}.$$

Die maximalen Momente, bezogen auf die Projektion, betragen M_v' :

$$M_v' = P \frac{x(l-x)}{l} = Pl \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

M_v , die wirklichen Momente zur Ausrechnung der Gurtkräfte sind:

$$M_v = M_v' \sec \alpha_v = Pl \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ oder}$$

$$M_v = \frac{1}{2} Pl \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ausgerechnet, ergeben sich die einzelnen Werte:

$$A_v = B_v = 24000 \text{ kg.}$$

Feld	Punkt	$\frac{x}{l}$	P kg	$\frac{l-x}{l}$	$\left(\frac{x}{l}\right)_{n+1}$	max Scherkraft kg	min Scherkraft kg
0—1	0	0,000	24 000	1,000	0,025	+ 24 000	— 600
1—2	1	0,025	24 000	0,975	0,094	+ 23 400	— 2 260
2—3	2	0,094	24 000	0,906	0,206	+ 21 800	— 4 950
3—4	3	0,206	24 000	0,794	0,344	+ 19 100	— 8 270
4—5	4	0,344	24 000	0,656	0,500	+ 15 750	— 12 000

Punkt	$\frac{x}{l}$	$\frac{1}{2}Pl$ kgm	$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$	Moment M_V kgm
0	0,000	192 000	0,000	0
1	0,025	192 000	0,156	30 000
2	0,094	192 000	0,291	56 000
3	0,206	192 000	0,407	78 200
4	0,344	192 000	0,475	91 200
5	0,500	192 000	0,500	96 000

b) Sichelträger.

Die Scherkräfte und Biegemomente der wagerechten Sichelträger berechnet man am einfachsten mit Hilfe der Einflußlinien, zeichnerisch. Sie aus den Formeln zu errechnen, ist allzu unständlich.

In Fig. 5, 6 und 8 sind bereits die Einflußlinien dargestellt. Der halbkreisförmige Gurt wurde dabei durch einen elliptischen ersetzt, dessen kleine Achse gleich der halben großen Achse angenommen wurde. Dies ist gleichbedeutend mit einer Änderung des Maßstabes (1 : 2) der Ordinaten des Gurtes sowohl, als auch der Einflußlinien.

Auflagerdrucke. (Fig. 5.)

$$A_{\max} = \frac{P}{t} K_a^{\max} = \frac{P}{t} K_a \Big|_{a=x_4} = \frac{24000 \text{ kg}}{2,5 \text{ m}} \times 4,4 \text{ m} = 42200 \text{ kg}$$

$$B_{\max} = A_{\max} = 42200 \text{ „}$$

Scherkräfte. (Fig. 8.)

$$S_{\max}^b = \frac{P}{t} \times \text{Ordinate der Einflußlinie.}$$

Feld	Ungünstigste Laststellung		$\frac{P}{t}$ kgm	Ordinate der Einflußlinie		Scherkraft	
	max	min		max m	min m	max +	min -
0—1	$a = x_4$	$a = x_0$	9600	+ 4,4	0	42 200	0
1—2	$a = x_4$	$a = x_0$	9600	+ 3,3	0	31 700	0
2—3	$a = x_5$	$a = x_0$	9600	+ 2,5	0	24 000	0
3—4	$a = x_5$	$a = x_0$	9600	+ 1,6	0	15 400	0
4—5	$a = x_6$	$a = x_4$	9600	+ 0,9	- 0,1	8 620	960

Momente. (Fig. 6.)

$$M_{\max} = \frac{P}{t} b \times \text{Ordinate der Einflußlinie für } a > b.$$

Punkt	Ungünstigste Laststellung	$\frac{P}{t}$ kg/m	b^m	Ordinate der Einflußlinie m	$b \times \text{Ordinate}$ m ²	Moment kgm
1	$a = x_3$	9600	0,4	4,4	1,76	16 900
2	$a = x_4$	9600	1,5	3,1	4,65	44 600
3	$a = x_5$	9600	3,3	2,8	9,25	89 000
4	$a = x_5$	9600	5,5	2,4	13,20	126 600
5	$a = x_5$	9600	8,0	1,9	15,20	146 000
0	—	9600	0	—	0	0

Will man genauer rechnen, so bestimmt man mit Hilfe der Einflußlinien die ungünstigste Laststellung und setzt die Abszisse des Lastortes a in die Gleichungen für S_b und M_b [No. 95) und 96)].

Zusammenstellung der Auflagerkräfte, Scherkräfte und Momente.

a) Balkonträger (gebogener Träger).

$$\max A = \max B = + 7550 + 24000 = + 31550 \text{ kg vertikal}$$

$$\min A = \min B = + 7550 + 0 = + 7550 \text{ „ „}$$

Feld	Scherkräfte max	Scherkräfte min
0 1	$+ 7550 + 24 000 = + 31 550 \text{ kg}$	$+ 7550 - 600 = + 6 950 \text{ kg}$
1 2	$+ 6260 + 23 400 = + 29 660 \text{ „}$	$+ 6260 - 2 260 = + 4 000 \text{ „}$
2 3	$+ 4880 + 21 800 = + 26 680 \text{ „}$	$+ 4880 - 4 950 = - 70 \text{ „}$
3 4	$+ 3310 + 19 100 = + 22 410 \text{ „}$	$+ 3310 - 8 270 = - 4 960 \text{ „}$
4 5	$+ 1690 + 15 750 = + 17 440 \text{ „}$	$+ 1690 - 12 000 = - 10 310 \text{ „}$

Punkt	$M_V \text{ max}$	$M_V \text{ min}$
0	$0 + 0 = 0$	0
1	$+ 8 250 + 30 000 = + 38 250 \text{ kgm}$	$+ 8 250 \text{ kgm}$
2	$+ 14 950 + 56 000 = + 70 950 \text{ „}$	$+ 14 950 \text{ „}$
3	$+ 19 600 + 78 200 = + 97 800 \text{ „}$	$+ 19 600 \text{ „}$
4	$+ 23 200 + 91 200 = + 114 400 \text{ „}$	$+ 23 200 \text{ „}$
5	$+ 23 400 + 96 000 = + 119 400 \text{ „}$	$+ 23 400 \text{ „}$

b) Sichelträger (wagerechte Träger).

$$\max A = \max B = + 16100 + 42200 = + 58300 \text{ kg wagerecht}$$

$$\min A = \min B = + 16100 + 0 = + 16100 \text{ „ „}$$

Feld	Scherkräfte	Scherkräfte
	max	min
0—1	+ 16 100 + 42 200 = + 58 300 kg	+ 16 100 + 0 = + 16 100 kg
1—2	+ 13 400 + 31 700 = + 45 100 „	+ 13 400 + 0 = + 13 400 „
2—3	+ 9 200 + 24 000 = + 33 200 „	+ 9 200 + 0 = + 9 200 „
3—4	+ 6 100 + 15 400 = + 21 500 „	+ 6 100 + 0 = + 6 100 „
4—5	+ 2 980 + 8 620 = + 11 600 „	+ 2 980 - 960 = + 2 020 „

Punkt	M^h max	M^h min
	0	0 + 0 = 0
1	+ 5 160 + 16 900 = + 22 060 kgm	+ 5 160 kgm
2	+ 17 020 + 44 600 = + 61 620 „	+ 17 020 „
3	+ 31 500 + 89 000 = + 120 500 „	+ 31 500 „
4	+ 40 800 + 126 600 = + 167 400 „	+ 40 800 „
5	+ 44 400 + 146 000 = + 190 400 „	+ 44 400 „

Obige Daten genügen, um die extremen Stabkräfte der Träger zu berechnen.

Die Gurtkräfte des gebogenen Trägers ergeben sich aus den Momenten für die jeweiligen Ritterschen Momentpunkte des betreffenden Stabes, dividiert durch die Trägerhöhe $t = 2,5$ m.

Die Diagonalkräfte ergeben sich, wenn man die Scherkräfte des betreffenden Feldes mit $\frac{s}{t}$ multipliziert, wobei s die wirkliche Stablänge einer Diagonale und t die Trägerhöhe 2,5 m bedeutet. Im behandelten Beispiel ist $\frac{s}{t} = 1,41 = \text{konstant}$.

Die Pfostenkräfte sind gleich den negativen Scherkräften der in der Richtung nach dem Auflager angrenzenden Felder.

Die wagerechten Sichelträger werden ebenfalls auf Grund der ausgerechneten Momente und Scherkräfte nach den Lehren vom ebenen Fachwerk ausgerechnet. Man beachte, daß beim oberen Sichelträger die positive Richtung nach innen beim unteren dagegen nach außen gekehrt ist.

Die Stabkräfte der Gurtstäbe, die dem Balkenträger und den Sichelträgern gemeinsam sind, setzen sich zusammen aus den Stabkräften der einzelnen Träger. Im vorliegenden Beispiel sind diese Einzelstabkräfte entgegengesetzt bezeichnet und müssen die Werte voneinander subtrahiert werden. Die so erhaltene algebraische Summe ist aber nur dann gleich der Stabkraft, wenn die entsprechenden Laststellungen die gleichen waren. Sonst muß das Resultat noch berichtigt werden. Ebenso muß darauf gesehen werden, daß die Differenz der Stabkräfte tatsächlich ein Maximum ist. Mit Hilfe der Einflußlinien lassen sich diese Korrekturen, die nur für die gemeinsamen Stäbe nötig sind, leicht durchführen.

IV. Radreibungskraft bei beweglichen Brücken und ähnliche Beanspruchungen.

Zur ersten Abteilung I, 5 § 29 b.¹⁾

§ 61. Brücken, die zwei wagerechte Auflager in der x -Richtung und nur eins in der y -Richtung haben, kommen für gewöhnlich nicht oder nur ganz ausnahmsweise vor. Somit hätten scheinbar die Ausführungen unter Punkt 5 a) b) und c) nur höchstens ein theoretisches Interesse. Trotzdem ist dieser Fall von großer Bedeutung bei fahrbaren Brücken, die ja immer häufiger vorkommen.

Bei diesen Brücken werden die Laufräder der einen Brückenseite eng in der Konstruktion verlagert, während auf der anderen Seite die Laufräder einen Spielraum auf den Achsen oder zwischen

¹⁾ Das Auftreten dieser Kraft, sowie die Notwendigkeit, die fahrbaren Brücken daraufhin zu untersuchen, hat wohl als erster Herr Oberingenieur R. P. Schröder erkannt und die ihm unterstellten Konstrukteure darauf hingewiesen. Dies war im Jahre 1905 in der Kranbauabteilung der Firma Steffens & Nölle A.-G., Berlin-Tempelhof, wo seinerzeit auch der Verfasser dieser Zeilen tätig war. Mit diesem Hinweis möchte ich gleichzeitig Herrn Oberingenieur Schröder meinen Dank für die Anregung aussprechen, welcher Anregung dieser Paragraph seine Entstehung verdankt.

Die Untersuchung der maschinellen Getriebe, sowie Arbeitsverluste infolge dieser Radreibungskraft (die im Bureau-Sprachgebrauch μ -Kraft hieß) ist von Herrn Dipl.-Ing. Martin Pape durchgeführt und in „Dinglers Polytechnischem Journal“, Jahrgang 1910, veröffentlicht worden. Auch Herr Pape weist auf die von Herrn Schröder empfangene Anregung hin.

den Spurkränzen haben, um Ungenauigkeiten der Fahrbahn, Temperaturausdehnung usw. Rechnung zu tragen. Diese bewegliche Seite nennt man oft besonders bei hohen Bockbrücken die Pendelstütze. Sie überträgt nur lotrechte, eventuell auch wagerechte Kräfte der y -Richtung. Die wagerechten Kräfte der x -Richtung werden bloß an der geführten Seite, der festen Stütze, übertragen. Im Ruhezustande der Brücke hat das Bauwerk somit vier wagerechte Auflager, zwei in der y -Richtung an den beiden Endrahmen und zwei in der x -Richtung an den beiden Rädern der festen Stütze. Beim Verfahren der Brücke, also wenn die Bremsen gelüftet sind, ändert sich das Bild. Durch die unvermeidlichen Differenzen in den Laufraddurchmessern eilt die eine Brückenseite etwas vor. Dies geht so lange spannungslos vor sich, bis das Spiel zwischen Schiene und den Spurkränzen bzw. zwischen Rad und Konstruktion erschöpft ist. Das Voreilen der einen Brückenseite verursacht von da ab eine Verbiegung der Brücke, die sich, wie ein an der Feststütze eingespannter Freibalken verhält. Jedem Grade des Voreilens der einen Seite entspricht ein Spannungszustand, der so dargestellt werden kann, daß an den Laufrädern der Pendelstütze eine Kraft W in den y -Richtung wirkend gedacht wird. Der maximale Wert von W ist $\mu \cdot R_n$, wobei μ den Koeffizienten der gleitenden Reibung und R_n den Raddruck des an der Pendelstütze befindlichen angetriebenen Rades bedeutet. Hat W diesen Wert erreicht, dann tritt, statt eines weiteren Voreilens, ein Schleudern des angetriebenen Rades ein, wodurch die Brücke teilweise wieder entspannt wird.

Die Kraft W wollen wir die Radreibungskraft des Rades nennen.

Ist „ s “ das Gesamtspiel zwischen Schiene und Spurkranz, ϱ der Radius der Laufräder, $\Delta = \frac{\Delta \varrho}{\varrho}$ der Ungenauigkeitsgrad der Laufraddurchmesser, so beträgt die Fahrlänge der Brücke, auf der keine Spannungen infolge des Voreilens der einen Brückenseite stattfinden: $L' = \frac{ls}{r \Delta}$, wobei l die Spannweite der Brücke und r den Radstand bedeutet.

Beträgt die elastische Durchbiegung der Brücke infolge einer Kraft 1, die an den Laufrädern der Pendelstütze angreift, gemessen an der Pendelstütze selbst: δ' , so entspricht der Fahrlänge L_x der Brücke eine Reibungskraft

$$97) \quad W = \frac{\Delta}{\delta'} \left(L_x - \frac{ls}{r \Delta} \right).$$

Zwischen den Werten der Fahrlänge

$$L' = \frac{ls}{r\Delta} \text{ bis } L'' = \frac{ls}{r\Delta} + \frac{\mu R_n \delta'}{\Delta} \text{ 1)$$

wächst die Reibungskraft von 0 bis $W = \mu R_n$. Über $L_x = L''$ hinaus, bleibt der Wert W angenähert, mit kleinen Abschwächungen und Wiederanschwellungen, konstant.

Dieselbe Beanspruchung der Brücke entsteht, wenn das Räderpaar an der Pendelstütze überhaupt nicht angetrieben wird. W ist dann gleich dem Fahrwiderstande, den die Pendelstütze beim Verfahren erleidet.

Es gibt noch viele Fälle, in denen sich eine fahrbare Brücke so verhält, als wären zwei wagerechte Auflager der x -Richtung und nur eines der y -Richtung vorhanden.

Der Belastungsfall durch W ist ein Spezialfall des in Punkt 5 b behandelten.

Es ist dabei:

$$h_a = h_b = h_l; \quad t_a = t_b = t_1 = t_2 = t_i; \quad 2t_i + t = r_l; \quad t_3 = t_4 = t_r; \\ t + t_3 + t_4 = r_r, \quad \alpha = \beta.$$

Die Auflagerdrücke, die die Brücke erfährt, wenn eine Kraft W angreift, sind:

$$R_l = -W, \quad R_a = -R_b = -W \frac{l}{t + t_a + t_b} = -W \frac{l}{r_l},$$

$$R_1 = -W \frac{1}{lr_l^2} [h_l r_l l + h_l^2 t + 2 \alpha w t^2] = -R_2,$$

$$R_3 = +W \frac{1}{lr_l r_r} [h_r l r_l + h_l t^2 + 2 \alpha w t^2] = -R_4.$$

6. Radreibungskraft W (zur ersten Abteilung II, 5).

§ 62. Der Einfluß der Kraft W und ähnlicher Kräfte ist genau so zu untersuchen, wie im Absatz 5 des Abschnittes II der ersten Abteilung beschrieben. Er ist ja bloß ein Spezialfall des dort behandelten.

1) Diese Formeln erhielt ich auf Grund einer rein geometrischen Betrachtung, deren Wiedergabe unnötig erscheint.

$$H = W; \varphi = 90^\circ; t_a = t_b = t_1 = t_2 = t_l, \quad t_3 = t_4 = t_r, \\ h_a = h_b = h_l, \quad \alpha = \beta.$$

Es ist ferner:

$$\mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = W, \quad M_h = Wl.$$

$$V = 0, \quad M_o = -W \frac{w \delta 2 \alpha}{2 t_l} = -W \frac{w \delta \alpha}{t_l} = -M_o'.$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$R_a = -W \frac{l}{t_a + t_b} = -W \frac{l}{2 t_l}; \quad R_b = +W \frac{l}{2 t_l}; \quad R_l = -W;$$

$$R_1 = -W \frac{h_l}{2 t_l} - W \frac{w \delta \alpha}{2 t_l^2} = -W \frac{1}{2 t_l} \left(h_l + \frac{w \delta \alpha}{t} \right) = -R_2,$$

$$R_3 = +W \frac{w \delta \alpha}{2 t_l t_r} + W \frac{h_r}{2 t_r} = +W \frac{1}{2 t_r} \left(h_r + \frac{w \delta \alpha}{t_l} \right) = -R_4.$$

V. Bemerkung über die Belastungskräfte von Brücken.

§ 63. Von der Herkunft der einzelnen Kräfte (Eigenlast, Verkehrslasten, Wind, Brems-Fahrwiderstände, Fliehkräfte usw.) und von ihrer Größe soll hier weiter nicht die Rede sein, um so mehr, als es nicht in den Rahmen dieses Aufsatzes gehört. Es sei bloß eine Bemerkung gestattet, die sich auf die Richtung von Kräften bezieht, wenn diese Richtung nicht von vorneherein festliegt.

Ein Bauwerk habe die Windfläche F_y für einen Wind der parallel zur y -Achse weht, und die Windfläche F_x , wenn der Wind zur x -Achse parallel ist. Schließt die Windrichtung den Winkel α mit der x -Achse ein, dann wird gewöhnlich angenommen, daß die Wirkung des Windes beträgt:

$$\text{parallel zur } x\text{-Achse: } X = w \cdot F_x \cdot \cos \alpha,$$

$$\text{„ „ } y\text{-Achse: } Y = w \cdot F_y \cdot \sin \alpha,$$

wenn w die Windstärke in Krafteinheit pro Flächeneinheit bedeutet.

Die Stabkraft eines Stabes ist eine Funktion von X und Y . Es sei $S = X \cdot \xi + Y \cdot \eta$ oder $S = w (F_x \cdot \xi \cos \alpha + F_y \cdot \eta \sin \alpha)$.

Es liegt nun die Frage nahe, welche Windrichtung α_0 für die Stabkraft ein Extrem ergibt, und wie groß dieser extreme Wert von S ist.

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0 = -F_x \xi \sin \alpha_0 + F_y \cdot \eta \cos \alpha_0; \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{F_y \cdot \eta}{F_x \cdot \xi};$$

$$\text{ferner ist } \cos \alpha_0 = \pm \frac{F_x \xi}{\sqrt{F_x^2 \xi^2 + F_y^2 \eta^2}}; \quad \sin \alpha_0 = \pm \frac{F_y \cdot \eta}{\sqrt{F_x^2 \xi^2 + F_y^2 \eta^2}}.$$

Es ist weiter

$$98) S_{max} = w \left[\frac{F_x^2 \xi^2}{\sqrt{F_x^2 \xi^2 + F_y^2 \eta^2}} + \frac{F_y^2 \eta^2}{\sqrt{F_x^2 \xi^2 + F_y^2 \eta^2}} \right] = w \sqrt{F_x^2 \xi^2 + F_y^2 \eta^2}.$$

Aus Obigem ergibt sich, daß man im allgemeinen für die Stäbe eine schräge, unter α_0 geneigte Windrichtung nehmen muß.

Für die Diagonalen der Hauptträger ist $\eta = 0$, somit $\alpha_0 = 0$, für die Diagonalen der horizontalen Verspannung ist $\xi = 0$, somit $\alpha_0 = 90^\circ$. Das letztere jedoch nur bei symmetrischen Brücken und symmetrischer Belastung, eine normale Brückenbauart angenommen.

Trägt man den Wert S in Richtung des Windes von einem Pol auf, so erhält man eine Einflußlinie der Stabkraft S in Polarkoordinaten. Diese Einflußlinie ist gewöhnlich eine Ellipse. Die große Achse der Ellipse zeigt die Richtung α_0 , die kleine $90^\circ + \alpha_0$.

Ähnliche Ergebnisse erhält man, wenn man die Werte einer Stabkraft oder eines Auflagerdruckes für eine wechselnde Stellung des Auslegers eines Drehkranes sucht, oder wenn man die Stabkraft einer sich um die Längsachse drehenden Trommel eines Kreiselwippers ausrechnen würde. (Vgl. Aufsatz des Schreibers dieser Zeilen in der Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines, Jahrgang 1911, Heft 28, 29.)

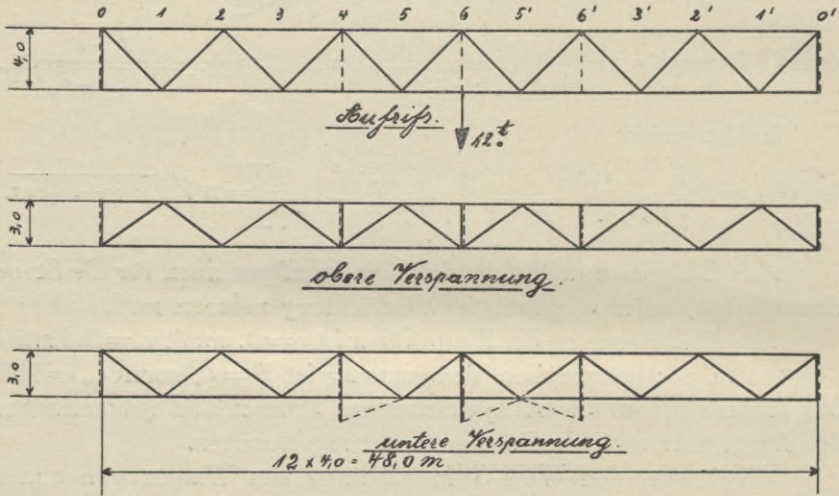
VI. Beispiel zur dritten Abteilung.

(Fig. 54.)

§ 64. Die genaue Berechnung einer Brücke nach Fig. 54 möge zu dem Zwecke durchgeführt werden, um den Gang einer solchen Berechnungsart zu zeigen.

Die Brücke habe: die Spannweite $l = 48$ m, die Feldweite $b = 4$ m, die Brückenhöhe $h = 4$ m, die Brückenbreite $t = 3,0$ m.

Im Punkte 4, 6 und 4' bei den Abszissen $x = 16$ m, 24 m und



Querschnitten bei 4, 6 u. 4'

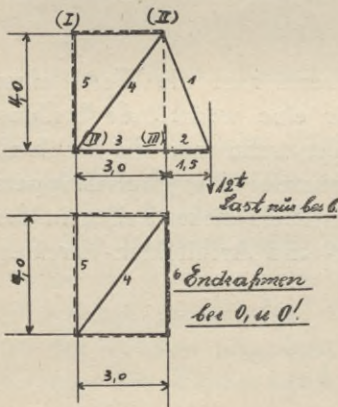


Fig. 54.

32 m habe die Brücke drei steife Querrahmen, ebenso natürlich in den Auflagerquerschnitten. Der mittlere Steifrahmen bei 6 ($x = 24$ m) besitzt einen Ausleger, dessen Spitze um $1,5$ m über die rechte Tragwand hinausragt. An der Spitze greift eine lotrechte Last von $12t$ an. Die Lager befinden sich an den vier unteren Punkten der Endrahmen. Die Fachwerke sind Strebenfachwerke.

Die Querschnittsflächen betragen: im Obergurt 40 cm^2 ; im Untergurt 33 cm^2 ; in den Diagonalen der Hauptträger 30 cm^2 ; in den Diagonalen der oberen Verspannung 25 cm^2 ; desgleichen unten 20 cm^2 . Die Quer-

rahmenstäbe in den Zwischenrahmen haben 20 cm^2 ; desgleichen in den Endrahmen 40 cm^2 .

Zwecks Berechnung fügen wir in den Obergurtpunkten des belasteten Querrahmens je zwei gleiche, aber entgegengesetzt

gerichtete Lasten von 6 t und trennen nun die Aufgabe in zwei Teile.

Erster Teil (Fig. 55). Berechnung der Brückenspankräfte, wenn die Brücken durch je zwei Lasten à 6 t in den Obergurtpunkten des belasteten Rahmens beansprucht werden. Als statisch unbestimmte Größen wählen wir die Stabkräfte X_1 und Y_1 der Diagonalen des mittleren bzw. der seitlichen Querrahmen. Die Aufgabe ist nämlich, wegen vollständiger Symmetrie in bezug auf die mittlere Querschnittsebene der Brücke, trotz der drei steifen Rahmen bloß zweifach statisch unbestimmt.

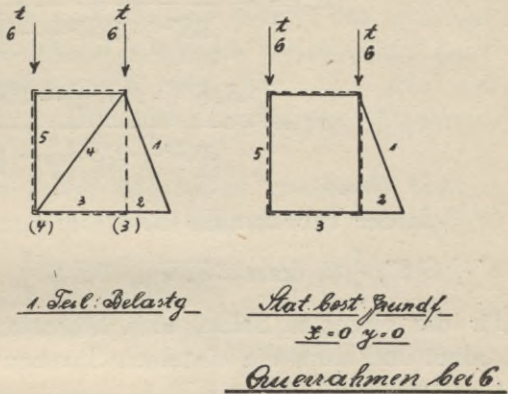


Fig. 55.

Die Stabkräfte im statisch bestimmten Grundfall $X^0=0, Y^0=0$ seien S_0 .

Das Belastungsbild bei $X'=-1$ und $Y'=-1$ zeigt Fig. 56. Die dabei entstehenden Stabkräfte sind:

S' und S'' .

Die Stabkraft S beträgt:

$$S = S_0 - X_1 S' - Y_1 S''$$

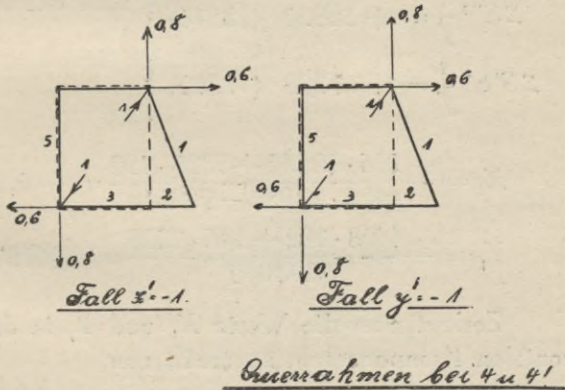


Fig. 56.

Wendet man den Satz der virtuellen Geschwindigkeit auf den Belastungszustand $X'=-1$ und $Y'=-1$ und auf den wirklichen Verschiebungszustand an, so erhält man die zwei Gleichungen:

$$\sum S' \Delta s = 0 \text{ und } \sum S'' \Delta s = 0,$$

aus denen sich, nach Einsetzung des Wertes für S : $S = S_0 - X_1 S' - Y_1 S''$, die Werte X_1 und Y_1 sich ergeben:

$$X_1 = \frac{\Sigma S_0 S' \frac{s}{f} \cdot \Sigma S''^2 \frac{s}{f} - \Sigma S' S'' \frac{s}{f} \cdot \Sigma S_0 S'' \frac{s}{f}}{\Sigma S'^2 \frac{s}{f} \cdot \Sigma S''^2 \frac{s}{f} - \left(\Sigma S' S'' \frac{s}{f}\right)^2},$$

$$Y_1 = \frac{\Sigma S_0 S'' \frac{s}{f} \cdot \Sigma S'^2 \frac{s}{f} - \Sigma S' S'' \frac{s}{f} \cdot \Sigma S_0 S' \frac{s}{f}}{\Sigma S'^2 \frac{s}{f} \cdot \Sigma S''^2 \frac{s}{f} - \left(\Sigma S' S'' \frac{s}{f}\right)^2}.$$

In der Tabelle sind die Werte von S_0 , S' , S'' , $S_0 S'$, $S_0 S''$, S'^2 , S''^2 , $S' S''$, $\frac{s}{f} n$, dann $\Sigma S_0 S' \frac{s}{f}$, $\Sigma S_0 S'' \frac{s}{f}$, $\Sigma S'^2 \frac{s}{f}$, $\Sigma S''^2 \frac{s}{f}$ und $\Sigma S' S'' \frac{s}{f}$ für die einzelnen Stäbe, bzw. Stabarten, der Reihenfolge nach geordnet und dann die einzelnen Summen ermittelt.

Es ergibt sich für:

$\Sigma S_0 S' \frac{s}{f} = - 146$	(-170)	}	Die eingeklammerten Zahlen sind die entsprechenden Werte, wenn man die Querrahmen als steif betrachten würde.
$\Sigma S_0 S'' \frac{s}{f} = - 192$	(-240)		
$\Sigma S'^2 \frac{s}{f} = + 4408$	(4361)		
$\Sigma S''^2 \frac{s}{f} = + 12930$	(12816)		
$\Sigma S' S'' \frac{s}{f} = + 7328$	(7309)		

$$X_1 = \frac{-146 \cdot 12930 + 7328 \cdot 192}{4408 \cdot 12930 - 7328^2} = -0,1458^t \quad (-0,1260^t)$$

$$Y_1 = \frac{-4408 \cdot 192 + 146 \cdot 7328}{3296000} = 0,0678^t.$$

Zerlegt man die Werte X_1 und Y_1 in die vertikalen und horizontalen Komponenten, so erhält man

$$\begin{array}{ll} X_1^v = -0,1166 & Y_1^v = 0,0542^t \\ X_1^h = -0,0873 & Y_1^h = 0,0406^t. \end{array}$$

Der zweite Teil der Aufgabe lautet: Am belasteten Querrahmen wirken: an der Auslegerspitze eine lotrechte Kraft von 12^t nach

unten, an den zwei Obergurten je zwei Lasten von 6^t nach oben. Alle Lasten ergeben zusammen ein Torsionsmoment von $12 \cdot (1,5 + \frac{1}{2}3,0) = 36 tm$. Als statisch bestimmten Grundfall wollen wir annehmen: $X=0, Y=0$. Es verteilt sich in diesem Falle das Moment in zwei Teilmomente à $18 tm$, von denen das eine mit $\pm 6,0^t$ die vertikalen, das andere mit $\pm 4,5^t$ die horizontalen Längswände belastet. Das Belastungsbild zeigt Fig. 57. Die sich bei dem statisch bestimmten Grundfall ergebenden Stabkräfte seien \mathfrak{C}_0 .

In der Tabelle wurden außer den schon erwähnten Größen ferner noch ausgerechnet: die Kräfte \mathfrak{C}_0 , hiernach die Werte $\mathfrak{C}_0 S', \mathfrak{C}_0 S'', \Sigma \mathfrak{C}_0 S' \frac{S}{f}, \Sigma \mathfrak{C}_0 S'' \frac{S}{f}$.

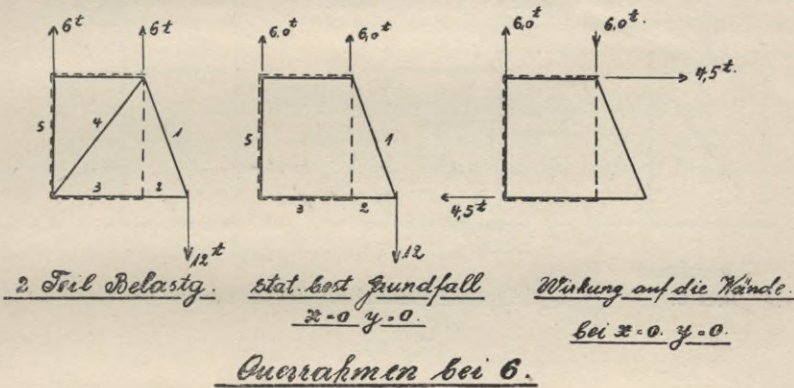


Fig. 57.

Es betragen $\Sigma \mathfrak{C}_0 S' \frac{S}{f} = -78$; $\Sigma \mathfrak{C}_0 S'' \frac{S}{f} = -92$. Nun kann man X_2 und Y_2 aus folgenden (analogen) Formeln ausrechnen.

$$X_2 = \frac{\Sigma \mathfrak{C}_0 S' \frac{S}{f} \cdot \Sigma S''^2 \frac{S}{f} - \Sigma S' S'' \frac{S}{f} \cdot \Sigma \mathfrak{C}_0 S' \frac{S}{f}}{\Sigma S'^2 \frac{S}{f} \cdot \Sigma S''^2 \frac{S}{f} - \left(\Sigma S' S'' \frac{S}{f} \right)^2}$$

$$Y_2 = \frac{\Sigma \mathfrak{C}_0 S'' \frac{S}{f} \cdot \Sigma S'^2 \frac{S}{f} - \Sigma S' S'' \frac{S}{f} \cdot \Sigma \mathfrak{C}_0 S' \frac{S}{f}}{\Sigma S'^2 \frac{S}{f} \cdot \Sigma S''^2 \frac{S}{f} - \left(\Sigma S' S'' \frac{S}{f} \right)^2}$$

Es ergeben sich:

$$X_2 = -0,101^t \begin{cases} X_2^V = -0,081^t \\ X_2^h = -0,061^t \end{cases}; Y_2 = +0,0505 \begin{cases} Y_2^V = 0,0404^t \\ Y_2^h = 0,0302^t \end{cases}$$

Faßt man nun die Werte $X_1 + X_2$ und $Y_1 + Y_2$ zusammen, so erhält man:

$$X = -0,1458 - 0,1010 = -0,247^t \begin{cases} X_V = -0,198^t \\ X_h = -0,148^t \end{cases}$$

$$Y = +0,068 + 0,050 = +0,118^t \begin{cases} Y_V = +0,094^t \\ Y_h = +0,071^t \end{cases}$$

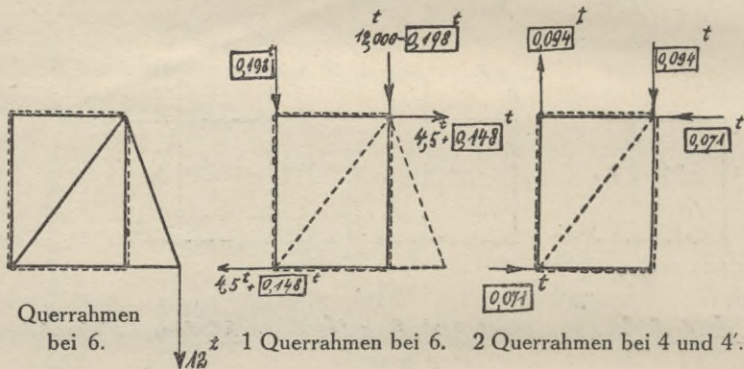


Fig. 58.

Die Fig. 58 zeigen die wirklichen Belastungsbilder, wobei die eingeringelten Zahlen die Werte bedeuten, die bei der scharfen Berechnungsart hinzukommen, verglichen mit der Berechnungsart nach der Annäherungsmethode.

Die vorletzte Rubrik der Tabelle zeigt die Werte einiger wichtigster Brückenstabkräfte, die sich bei der Annäherungsmethode ergeben $S = \sim S_0 + \mathcal{E}_0$. Die letzte Rubrik zeigt die Stabkräfte derselben Stäbe nach der genauen Berechnungsart:

$$S = S_0 + \mathcal{E}_0 - XS' - YS''.$$

Bemerkt sei noch, daß die zwei statisch bestimmten Grundfälle der beiden Teile der Aufgaben die angenähert richtigen Belastungsfälle der Brücke ergeben. Die Ausrechnung der Werte X und Y hatte hier somit die Bedeutung einer Korrekturrechnung zur Ergänzung der Berechnungsart nach der Annäherungsmethode.

Die Differenzen der beiden Rechnungsarten betragen bei den Stabkräften

der Diagonalen im vorderen Hauptträger:	0,0%
„ „ der Verspannungen:	0,0%
„ Obergurte im vorderen Hauptträger:	1,6%
„ „ „ hinteren „	1,9%
„ Untergurte „ vorderen „	2,5%
„ „ „ hinteren „	2,3% ^{.1)}

(Tabelle siehe nächste Seite.)

²⁶⁾ Zu den Ergebnissen des Rechnungsbeispiels sei bemerkt, daß die Ungenauigkeit der Annäherungsmethode größer ist im ersten Teile der Aufgabe als im zweiten. Dieses Ergebnis ist einigermaßen überraschend, da man nicht erwarten durfte, daß bei einer symmetrisch belasteten Brücke die beiden Hauptträger ungleichmäßig beansprucht werden, und daß dabei die Horizontalverspannungen in Mitleidenschaft gezogen werden.

Es rührt dies daher, daß die Brücke nicht ganz symmetrisch ist.

Die Abweichungen der scharfen Berechnung von der Näherungsmethode sind nicht groß und jedenfalls zulässig. Um hier, sowie bei anderen Brücken, einem Fehler infolge der angenäherten Berechnung vorzubeugen, wird es sich dennoch empfehlen, die Last um ca. 5% höher oder die zulässige Beanspruchung des Materials 5% niedriger in Rechnung zu setzen.

Berechnungs-

Stabart	Stab	S_0 t	S'	S''	$S_0 \cdot S'$ t	$S_0 \cdot S''$ t	S'^2 +	S''^2 +	$S' \cdot S''$ +	$\frac{s}{f} \cdot n$ 1/cm	$\Sigma S_0 S' \cdot \frac{s}{f}$ t/cm	$\Sigma S_0 S'' \cdot \frac{s}{f}$ t/cm
End- rahmen 0	4	0	+0,50	+1,00	0	0	0,25	1,00	0,50	25	24	48
	5	-3,00	-0,40	-0,80	+1,20	+2,40	0,16	0,64	0,32	20		
	6	-3,00	+0,40 - 0,40 = 0	0	0	0	0	0	0	20		
Quer- rahmen bei 4	y	0	0	-1,00	0	0	0	1,00	0	50	0	0
	5	0	0	+0,80	0	0	0	0,64	0	40		
Quer- rahmen bei 6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	21,3	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	7,5		
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	15		
	x	0	-1,00	0	0	0	1,00	0	0	25		
	5	0	+0,80	0	0	0	0,64	0	0	20		
Dia- gonalen vorn	0-4	+4,25	-0,57	+1,13	-2,40	-4,80	0,3	1,28	0,64	151	-542	-725
	4-6	+4,25	-0,57	0	-2,40	0	0,32	0	0	75,5		
Dia- gonalen hinten	0-4	+4,25	+0,57	-1,13	+2,40	+4,80	0,32	1,28	0,64	151	542	+725
	4-6	+4,25	+0,57	0	+2,40	0	0,32	0	0	75,5		
Dia- gonale oben	0-4	0	+0,50	+1,00	0	0	0,25	1,00	0,50	160	0	0
	4-6	0	+0,50	0	0	0	0,25	0	0	80		
Dia- gonale unten	0-4	0	-0,50	-1,00	0	0	0,25	1,00	0,50	200	0	0
	4-6	0	-0,50	0	0	0	0,25	0	0	100		
Ober- gurt vorn (rechts) (2)	0 1	-3,00	+0,40 + 0,40 = +0,80	+0,80 + 0,80 = +1,60	-2,40	-4,80	0,64	2,56	1,28	20	-3360	-5760
	1 2	-3,00	+0,40 + 0,40 = +0,80	+0,80 + 0,80 = +1,60	-2,40	-4,80	0,64	2,56	1,28	20		
	2 3	-9,00	+1,20 + 1,20 = +2,40	+2,40 + 2,40 = +4,80	-21,60	-43,20	5,76	23,04	11,52	20		
	3 4	-9,00	+1,20 + 1,20 = +2,40	+2,40 + 2,40 = +4,80	-21,60	-43,20	5,76	23,04	11,52	20		
	4 5	-15,00	+2,00 + 2,00 = +4,00	+3,20 + 3,20 = +6,40	-60,00	-96,00	16,00	40,96	25,60	20		
	5 6	-15,00	+2,00 + 2,00 = +4,00	+3,20 + 3,20 = +6,40	-60,00	-96,00	16,00	40,96	25,60	20		
Ober- gurt hinten (links) (1)	0-1	-3,00	-0,40 - 0,00 = -0,40	-0,80 - 0 = -0,80	+1,20	+2,40	0,16	0,64	0,32	20	3360	5760
	1-2	-3,00	-0,40 - 0,80 = -1,20	-0,80 - 1,60 = -2,40	+3,60	+7,20	1,44	5,76	2,88	20		
	2-3	-9,00	-1,20 - 0,80 = -2,00	-2,40 - 1,60 = -4,00	+18,00	+36,00	4,00	16,00	8,00	20		
	3-4	-9,00	-1,20 - 1,60 = -2,80	-2,40 - 3,20 = -5,60	+25,20	+50,40	7,84	31,36	15,68	20		
	4-5	-15,00	-2,00 - 1,60 = -3,60	-3,20 - 3,20 = -6,40	+54,00	+96,00	12,96	40,96	23,04	20		
	5-6	-15,00	-2,00 - 2,40 = -4,40	-3,20 - 3,20 = -6,40	+66,00	+96,00	19,36	40,96	28,16	20		

Tabelle.

$\Sigma S^2 \cdot \frac{s}{f}$ 1/cm	$\Sigma S'^2 \cdot \frac{s}{f}$ 1/cm	$\Sigma S''^2 \cdot \frac{s}{f}$ 1/cm	$\Sigma \epsilon_0$ t	$\epsilon_0 S'$ t	$\epsilon_0 S''$ t	$\Sigma \epsilon_0 S' \cdot \frac{s}{f}$ t/cm	$\Sigma \epsilon_0 S'' \cdot \frac{s}{f}$ t/cm	$\frac{-XS' - YS''}{-YS''}$ t	$S_0 + \epsilon_0$ t	$S = S_0 + \epsilon_0 - XS' - YS''$ t
9,5	37,8	18,9	+3,75 +3,00 -3,00 - 3,00 = -6,00	+1,87 ₅ -1,20 0	+3,75 -2,40 0	22,9	45,8			
0	75,6	0	0 0	0 0	0 0	0	0			
37,8	0	0	+12,8 -4,5 -4,5 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0	0			
72,5	193,2	96,7	+4,25 +4,25	-2,40 -2,40	-4,80 0	-542	-725	-0,008	+8,500	+8,492
72,5	193,2	96,7	-4,25 -4,25	-2,40 -2,40	-4,80 0	-542	-725			
60	160	80	+3,75 +3,75	+1,87 ₅ +1,87 ₅	+3,75 0	+450	+600	+0,005	+3,750	+3,755
75	200	100	-3,75 -3,75	+1,87 ₅ +1,87 ₅	+3,75 0	+562	+750			
896	2662,4	1536	-3,0 + 3,0 = 0 -3,0 + 3,0 = 0 -9,0 + 9,0 = 0 -9,0 + 9,0 = 0 -15,0 + 15,0 = 0 -15,0 + 15,0 = 0	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	0	0	+0,235	-15,000	-14,765
915,2	2713,6	1561,6	+3,00 - 0 = +3,00 +3,00 - 6,00 = -3,00 +9,00 - 6,00 = +3,00 +9,00 - 12,00 = -3,00 +15,00 - 12,00 = +3,00 +15,00 - 18,00 = -3,00	-1,20 +3,60 -6,00 -6,00 +8,40 -10,80 +13,20	-2,40 +7,20 -12,00 +16,80 -19,20 +19,20	+144	192	-0,330	-18,000	-18,330

Stabart	Stab	S_0 t	S'	S''	$S_0 \cdot S'$ t	$S_0 \cdot S''$ t	S'^2 +	S''^2 +	$S' \cdot S''$ +	$\frac{s}{f} \cdot n$ 1/cm	$\Sigma S_0 S' \cdot \frac{s}{f}$ t/cm	$\Sigma S_0 S'' \cdot \frac{s}{f}$ t/cm
Untergurt vorn (rechts) (3)	0-1	+ 0,00	- 0 - 0 = 0	- 0 - 0 = 0	0	0	0	0	0	24		
	1-2	+ 6,00	- 0,80 - 0,80 = - 1,60	- 1,60 - 1,60 = - 3,20	- 9,60	- 19,20	2,56	10,24	5,12	24		
	2-3	+ 6,00	- 0,80 - 0,80 = - 1,60	- 1,60 - 1,60 = - 3,20	- 9,60	- 19,20	2,56	10,24	5,12	24	- 4380	
	3-4	+ 12,00	- 1,60 - 1,60 = - 3,20	- 3,20 - 3,20 = - 6,40	- 38,40	- 76,80	10,24	40,96	20,48	24		- 7380
	4-5	+ 12,00	- 1,60 - 1,60 = - 3,20	- 3,20 - 3,20 = - 6,40	- 38,40	- 76,80	10,24	40,96	20,48	24		
	5-6	+ 18,00	- 2,40 - 2,40 = - 4,80	- 3,20 - 3,20 = - 6,40	- 86,40	- 115,20	23,04	40,96	30,72	24		
Untergurt hinten (links) (4)	0-1	+ 0,00	+ 0 + 0,40 = + 0,40	+ 0 + 0,80 = + 0,80	0	0	0,16	0,64	0,32	24		
	1-2	+ 6,00	+ 0,80 + 0,40 = + 1,20	+ 1,60 + 0,80 = + 2,40	+ 7,20	+ 14,40	1,44	5,76	2,88	24		
	2-3	+ 6,00	+ 0,80 + 1,20 = + 2,00	+ 1,60 + 2,40 = + 4,00	+ 12,00	+ 24,00	4,00	16,00	8,00	24	4210	
	3-4	+ 12,00	+ 1,60 + 1,20 = + 2,80	+ 3,20 + 2,40 = + 5,60	+ 33,60	+ 67,20	7,84	31,36	15,68	24		7140
	4-5	+ 12,00	+ 1,60 + 2,00 = + 3,60	+ 3,20 + 3,20 = + 6,40	+ 43,20	+ 76,80	12,96	40,96	23,04	24		
	5-6	+ 18,00	+ 2,40 + 2,00 = + 4,40	+ 3,20 + 3,20 = + 6,40	+ 79,20	+ 115,20	19,36	40,96	28,16	24		
Summe											- 146 (- 170)	- 192 (- 240)

$\Sigma S'^2 \cdot \frac{s}{f}$ 1/cm	$\Sigma S''^2 \cdot \frac{s}{f}$ 1/cm	$\Sigma S' S'' \cdot \frac{s}{f}$ 1/cm	\mathcal{E}_0 t	$\mathcal{E}_0 S'$ t	$\mathcal{E}_0 S''$ t	$\Sigma \mathcal{E}_0 S' \cdot \frac{s}{f}$ t/cm	$\Sigma \mathcal{E}_0 S'' \cdot \frac{s}{f}$ t/cm	$\frac{XS' - YS''}{t}$	$S_0 + \mathcal{E}_0$ t	$S = S_0 + \mathcal{E}_0 - XS' - YS''$ t	
1170	3442	1965	0 - 0 = 0	0	0						
			+ 6,00 - 6,00 = 0	0	0						
			+ 6,00 - 6,00 = 0	0	0	0	0				
			+ 12,00 - 12,00 = 0	0	0	0	0				
			+ 12,00 - 12,00 = 0	0	0						
			+ 18,00 - 18,00 = 0	0	0					- 0,430	+ 18,000
1100	3252	1873	- 0 + 3,00 = + 3,00	+ 1,20	+ 2,40						
			- 6,00 + 3,00 = - 3,00	- 3,00	- 7,20						
			- 6,00 + 9,00 = + 3,00	+ 6,00	+ 12,00				- 230,4		
			- 12,00 + 9,00 = - 3,00	- 8,40	- 16,80	- 172,8					
			- 12,00 + 15,00 = + 3,00	+ 10,80	+ 19,20						
			- 18,00 + 15,00 = - 3,00	- 13,20	- 19,20					+ 0,330	+ 15,000
4408 (4361)	12930 (12816)	7328 (7309)				- 78 (- 101)	- 92 (- 139)				

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Hartmann's Pneumatische Förderung G. m. b. H.

Frankfurt a. Main

Pneumatische Transport - Anlagen

für Getreide, Gerste, Malz, Grünmalz, Salze, Soda,
Sulphate, Abbrände usw.; für Kohle, Asche direkt
:- :- von Kessel- und Ofenanlagen — kurz :- :-
für alle Materialien, auch glühend heiße.

Größte Erfahrung / Langjährig bewährt
Erstklassige Referenzen

Ingenieure auf Wunsch zur Verfügung

DIE FÖRDERTECHNIK

Zeitschrift für den Bau und Betrieb der Hebe-
zeuge und Transportanlagen, Pumpen und Gebläse.

Herausgegeben von **MAX WILLE**, Geh. Regierungsrat
unter Mitwirkung von **C. MICHENFELDER**, Dipl.-Ing.

A. Ziemschen Verlag, Wittenberg (Bz. Halle).

DIE FÖRDERTECHNIK behandelt das gesamte Gebiet der Bewegung fester, flüssiger und gasförmiger Körper mit Ausnahme der Bewegung auf Eisenbahnen und Schiffen. Sie bespricht in Originalartikeln von Fachautoritäten die Hebezeuge und Transportanlagen, insbesondere auch die der Bergwerke, Hütten, Werften usw., die Pumpen und Gebläse. Zusammenhängende Gebiete, wie die der Bagger, Grabmaschinen, Förderwagen, Förderlokomotiven, Gießwagen, Aschejektoren, Munitionsaufzüge, Silos, Pressen, Wägevorrichtungen usw., werden gleichfalls behandelt.

Erscheint bis 1913 noch monatlich, ab 1914 am 1. und 15. jeden Monats.

Abonnementspreis vierteljährlich nur M. 4.—.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297228