MOČNIK-
SPIELMANN

# LEHRBUCH DER GEOMETRIE
F. D. OBEREN KLASS. D. GYMNASIEN

Stefan Łobrowski

Eisgrub

# MOČNIKS

# LEHRBUCH DER GEOMETRIE

FÜR DIE

## OBEREN KLASSEN DER GYMNASIEN.

BEARBEITET VON

JOHANN SPIELMANN,

K. K. REGIERUNGSRAT, DIREKTOR DER STAATSREALSCHULE IM IV. BEZIRKE IN WIEN.

MIT 201 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

FÜNFUNDZWANZIGSTE AUFLAGE.

Unveränderter Abdruck der mit k. k. Ministerialerlaß vom 28. Mai 1904, Z. 18.894, allgemein zulässig erklärten 24. Auflage.

Preis: geheftet 3 K 30 h, gebunden 3 K 80 h.

WIEN.

VERLAG VON F. TEMPSKY.

1906.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

# Einleitung.

§. 1. Ein von allen Seiten begrenzter Raum wird ein Körper genannt.

Die Grenze eines Körpers nennt man dessen Oberfläche, und jeden Teil derselben eine Fläche.

Die Grenze einer Fläche nennt man deren Umfang, und jeden Teil desselben eine Linie.

Die Grenzen einer Linie nennt man Punkte.

Punkte, Linien, Flächen und Körper heißen Raumgebilde.

Linien, Flächen und Körper können durch Bewegung erzeugt werden. Bewegt sich ein Punkt, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie. Bewegt sich eine Linie so, daß jeder Punkt eine neue von der ursprünglichen verschiedene Linie erzeugt, so entsteht eine Fläche. Durch die Bewegung einer Fläche in einen der beiden durch sie geschiedenen Teile des Raumes hinein entsteht ein Körper.

Ein Körper hat drei Hauptausdehnungen (Dimensionen): Länge, Breite und Höhe. Eine Fläche hat zwei Hauptausdehnungen: Länge und Breite. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung: die Länge. Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

§. 2. Durch die Begrenzung der Ausdehnungen erhalten die Raumgebilde die Eigenschaft der Größe. Körper, begrenzte Flächen und begrenzte Linien werden daher auch Raumgrößen genannt.

Die Bestimmung der Größe (Quantität) eines begrenzten Raumgebildes geschieht durch das Messen. Ein Raumgebilde messen heißt, eine Zahl finden, die angibt, wie vielmal ein als Einheit angenommenes Raumgebilde derselben Art in dem gegebenen enthalten ist. Diese Zahl heißt die Maßzahl des Raumgebildes.

Die Größe einer begrenzten Linie heißt deren Länge, die Größe einer begrenzten Fläche deren Flächeninhalt, die Größe eines Körpers dessen Kubikinhalt oder Volumen.

§. 3. Außer der Größe kommt an den begrenzten Raumgebilden auch die Gestalt, d. i. die Art der Vereinigung der einzelnen Teile zu einem Ganzen, in Betrachtung.

Zwei Raumgebilde können dieselbe Größe haben, aber in der Gestalt verschieden sein; ebenso können zwei Raumgebilde dieselbe Gestalt und verschiedene Größe haben. Raumgebilde, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich; Raumgebilde, welche dieselbe Gestalt haben, heißen ähnlich; Raumgebilde, welche dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben, nennt man kongruent. Kongruente Raumgebilde unterscheiden sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden; sie können zur Deckung gebracht werden. Umgekehrt: Können zwei Raumgebilde zur Deckung gebracht werden, so sind sie kongruent.

Die Gleichheit zweier Raumgebilde wird durch das Zeichen $=$, die Ähnlichkeit durch $\sim$, und die Kongruenz durch $\cong$ ausgedrückt.

§. **4.** Die Wissenschaft von den Raumgebilden heißt Geometrie. Die Geometrie behandelt ihre Lehren nach der mathematischen Methode auf dem Grunde von Erklärungen, Grundsätzen und Forderungssätzen in Lehrsätzen, die bewiesen, in Aufgaben, die gelöst, und in Zu- und Folgesätzen, die jenen angeschlossen werden.

§. **5.** Eine Erklärung oder Definition ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffes.

Grundsätze oder Axiome sind Sätze, die man unmittelbar als wahr erkennt, die daher nicht bewiesen zu werden brauchen, aber auch nicht bewiesen werden können. Zu diesen Sätzen, die für den Aufbau der mathematischen Wissenschaft unentbehrlich sind, gehören:

1. jede Größe ist sich selbst gleich;
2. Größen, die einander gleich sind, können füreinander gesetzt werden;
3. jede Größe ist gleich der Summe ihrer Teile und größer als nur einige derselben;
4. werden mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vorgenommen, so erhält man wieder gleiche Größen.

Ein Lehrsatz (Theorem) ist ein Satz, dessen Wahrheit erst bewiesen werden muß. Ein geometrischer Lehrsatz ist gewöhnlich so gefaßt, daß ein Bedingungssatz mit einem Hauptsatze verbunden ist. Der Bedingungssatz enthält die Voraussetzung (Hypothesis), welche den Gegenstand angibt, von dem, und die Bedingungen, unter denen vom Gegenstande im Lehrsatze etwas ausgesagt wird. Der Hauptsatz enthält die Behauptung (Thesis) und spricht die zu beweisende Wahrheit aus. Häufig liegt die Voraussetzung auch in der vorangegangenen Erklärung eines im Lehrsatze gebrauchten Wortes. Jeder Lehrsatz bedarf eines Beweises, d. i. der Darlegung, daß die Wahrheit des Satzes eine notwendige Folge der Axiome oder anderer bereits als richtig erkannter Sätze ist. Der Beweis ist entweder direkt oder indirekt. Bei dem direkten Beweise wird die im Lehrsatze aufgestellte

Behauptung als Folgerung aus der Voraussetzung und aus schon anerkannten Sätzen durch eine Reihe von Schlüssen abgeleitet; bei dem indirekten Beweise aber wird auf die Wahrheit einer Behauptung geschlossen, indem man nachweist, daß die Annahme der entgegengesetzten Behauptung zu Folgerungen führen würde, welche mit der Voraussetzung oder schon als wahr erkannten Sätzen im Widerspruche stehen.

Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man einen Satz, welcher die Voraussetzung des ersten als Behauptung, und die Behauptung des ersten als Voraussetzung enthält. Enthält ein Lehrsatz nur eine Voraussetzung und eine Behauptung, so ist in diesem einfachsten Falle nur eine Umkehrung möglich. Besteht aber die Voraussetzung, oder die Behauptung, oder beide aus mehreren Teilen, so gibt es mehrere Umkehrungen. Sie werden dadurch gebildet, daß man gleich viele Teile der Voraussetzung und Behauptung miteinander vertauscht. Die Umkehrung eines richtigen Satzes ist nicht notwendig wieder richtig, sie bedarf daher eines besonderen Beweises.

Folgesätze sind Sätze, die aus einem vorhergehenden Satze unmittelbar oder durch einfache Schlüsse abgeleitet werden können. Ein Zusatz ist ein Satz, durch welchen die Aussage eines vorhergehenden Satzes erweitert oder näher bestimmt wird.

§. 6. Eine Aufgabe ist die Forderung, etwas herzustellen, das gegebenen Bedingungen genügt. Jede Aufgabe erfordert eine Auflösung.

Die Aufgaben der Geometrie sind entweder Konstruktions- oder Rechnungsaufgaben; erstere verlangen die Herstellung eines geometrischen Gebildes, letztere haben die Berechnung von Raumgrößen mit Hilfe der Zahl zum Gegenstande.

---

Erster Teil.

# Planimetrie.

## Erster Abschnitt.

## Gerade Linien und Winkel.

### I. Die gerade Linie und die ebene Fläche.

**§. 7.** Die einfachste Linie ist die gerade Linie, auch bloß Gerade. Die gerade Linie läßt sich nicht definieren, ihre Vorstellung muß als elementar vorausgesetzt werden.

Begriffe, welche sich nicht definieren lassen, heißen Grundbegriffe; diejenigen, welche definiert werden können, werden abgeleitete Begriffe genannt.

Eine Linie, die nicht gerade, aber aus geraden Linien zusammengesetzt ist, wird eine gebrochene Linie genannt. Eine Linie, von der kein Teil gerade ist, heißt krumm.

**Grundsatz.** Durch zwei Punkte kann nur eine Gerade gezogen werden.

**Folgesätze.** *a)* Die Lage einer Geraden ist durch zwei Punkte bestimmt.

*b)* Zwei voneinander verschiedene Gerade können nur einen gemeinsamen Punkt haben. Man sagt, sie schneiden sich in diesem Punkte, und nennt diesen gemeinsamen Punkt ihren Schnittpunkt.

**§. 8.** Die einfachste Fläche ist die ebene Fläche, auch bloß Ebene. Sie ist, so wie die gerade Linie, ein Grundbegriff.

Eine Fläche, von der kein Teil eben ist, heißt krumm.

**Grundsatz.** Jede Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemeinsam hat, liegt ganz in derselben.

Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte kann nur eine Ebene gelegt werden. Denn zieht man durch zwei dieser Punkte die Gerade und dreht eine Ebene, welche jene zwei Punkte, also auch die durch dieselben gezogene Gerade in sich enthält, um diese als Achse so lange, bis sie auch durch den dritten Punkt geht, so kann die Ebene weiter keine andere Lage einnehmen, ohne diesen Punkt zu verlassen.

**§. 9.** Jener Teil der Geometrie, welcher von den Raumgebilden handelt, die in einer und derselben Ebene liegen, heißt Planimetrie. Raumgebilde, die nicht als in einer einzigen Ebene liegend gedacht werden können, bilden den Gegenstand der Stereometrie.

## II. Strahlen und Strecken.

§. **10.** Eine nach beiden Seiten unbegrenzte Gerade wird ein Strahl genannt; er wird durch jeden seiner Punkte in zwei halbbegrenzte Gerade geteilt, die auf beiden Seiten des gemeinsamen Grenzpunktes liegen und von diesem aus entgegengesetzte Richtungen haben; jede derselben heißt ein Halbstrahl. Von den beiden Halbstrahlen, in die ein Strahl durch einen Punkt geteilt wird, wird jeder die Ergänzung des andern genannt.

Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade heißt eine Strecke; die beiden Grenzpunkte heißen ihre Endpunkte. Die Strecke zwischen zwei Punkten bestimmt die Entfernung oder den Abstand derselben.

Ein Punkt wird durch einen Buchstaben bezeichnet.

Ein Halbstrahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt, eine Strecke durch ihre Endpunkte bezeichnet.

Eine Strecke $AB$ kann von einem sich bewegenden Punkte auf zwei Arten beschrieben werden, entweder in der Richtung von $A$ nach $B$ oder in der entgegengesetzten Richtung von $B$ nach $A$. Wird auf diesen Gegensatz der Richtungen Rücksicht genommen, so nennt man $AB$ die Strecke, welche der Punkt in seiner Bewegung von $A$ nach $B$, und $BA$ die Strecke, die er in seiner Bewegung von $B$ nach $A$ zurücklegt, und nimmt die eine dieser Strecken als positiv, die andere ihr entgegengesetzte als negativ an. Hiernach ist $AB = -BA$ und $AB + BA = 0$.

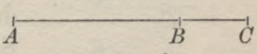
Häufig wird auf diesen Gegensatz der Richtungen nicht Rücksicht genommen und nur die absolute Länge der Strecken in Betracht gezogen.

Strecken sind als negative Größen seit dem 17. Jahrhundert im Gebrauch. Die Unterscheidung zwischen $AB$ und $BA$ rührt von dem deutschen Mathematiker und Astronomen Möbius (1827) her.

§. **11.** Legt man zwei Strecken so aufeinander, daß ein Paar Endpunkte und die Richtungen zusammenfallen, so sind die Strecken gleich, wenn auch die andern zwei Endpunkte zusammenfallen, sonst ungleich. In diesem Falle ist jene Strecke die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der andern Strecke liegt.

Verlängert man eine Strecke $AB$ (Fig. 1) über $B$ hinaus bis $C$, so heißt die erhaltene Strecke $AC$ die Summe der Strecken $AB$ und $BC$, und umgekehrt die Strecke $AB$ die Differenz der Strecken $AC$ und $BC$.

Fig. 1.




§. **12.** Um eine gegebene Strecke zu messen, untersucht man, wie vielmal eine andere als Einheit angenommene Strecke in derselben enthalten ist.

Als Einheit des Längenmaßes nimmt man das Meter an. Ein Meter ($m$) wird in 10 Dezimeter ($dm$) à 10 Zentimeter ($cm$) à 10 Millimeter ($mm$) eingeteilt. 1000 Meter sind ein Kilometer ($km$), 10.000 Meter sind ein Myriameter ($\mu m$).

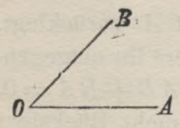
## III. Winkel.

§. **13.** Gehen in einer Ebene von einem Punkte zwei Halbstrahlen aus, so heißt die Größe der Drehung, welche der eine in dieser Ebene um den gemeinsamen Punkt machen muß, um in die Richtung des zweiten zu gelangen, der Winkel der beiden Halbstrahlen. Die zwei Halbstrahlen, welche den Winkel bilden, heißen die Schenkel; der gemeinsame Punkt heißt der Scheitel des Winkels. Die zwischen den Schenkeln liegende ebene Fläche, in welcher die Drehung vorgenommen wird, heißt die Winkelfläche.

Einen Winkel bezeichnet man entweder durch drei Buchstaben, von denen einer am Scheitel und zwei an den Schenkeln stehen und der am Scheitel stehende immer in die Mitte gesetzt wird, oder durch einen zwischen die Schenkel in der Nähe des Scheitels gesetzten Buchstaben, oder auch durch den Buchstaben am Scheitel allein, wenn dieser Scheitel nur einem einzigen Winkel angehört.

Ein Winkel $AOB$ (Fig. 2) kann von einem Halbstrahle, der sich um $O$ dreht, auf zwei Arten beschrieben werden, entweder durch die Drehung aus der Richtung $OA$ in die Richtung $OB$, oder durch die entgegengesetzte Drehung von $OB$ nach $OA$. Wird auf diesen Gegensatz der Drehungsrichtungen Rücksicht genommen, so nennt man $AOB$ den Winkel, welchen der Halbstrahl in seiner Drehung von $OA$ nach $OB$, und $BOA$ den Winkel, den er in seiner Drehung von $OB$ nach $OA$ beschreibt, und nimmt den ersten dieser Winkel, für welchen die Drehung der eines Uhrzeigers entgegengesetzt ist, als positiv, den andern als negativ an. Hiernach ist $AOB = -BOA$, und $AOB + BOA = 0$.

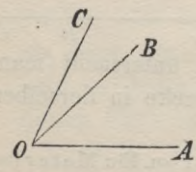
Fig. 2.



Meistens wird dieser Gegensatz der Drehungsrichtungen nicht berücksichtigt und der Winkel nur als absolute Größe in Betrachtung gezogen.

§. **14.** Legt man zwei Winkel so aufeinander, daß die Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen, so sind die Winkel gleich, wenn auch die andern zwei Schenkel zusammenfallen, sonst ungleich. Im zweiten Falle ist jener Winkel der kleinere, dessen zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des andern Winkels fällt.

Fig. 3.



Wird ein Halbstrahl $OA$ (Fig. 3) in einer Ebene um den Punkt $O$ so gedreht, daß er zuerst in die Richtung $OB$ und von da durch weitere Drehung in die Richtung $OC$ gelangt, so heißt der durch die ganze Drehung entstandene Winkel $AOC$ die Summe der Winkel $AOB$

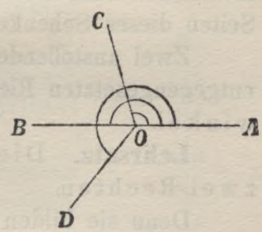
und $BOC$, und umgekehrt der Winkel $AOB$ die Differenz der Winkel $AOC$ und $BOC$.

§. **15.** Dreht sich ein Halbstrahl um seinen Grenzpunkt in einer Ebene herum, so bildet er nach und nach mit seiner anfänglichen Richtung alle um jenen Punkt möglichen Winkel.

Dreht sich der bewegliche Halbstrahl so weit, bis er wieder in seine ursprüngliche Richtung zurückgekehrt ist, so hat er eine Umdrehung gemacht. Der Winkel, welcher durch eine ganze Umdrehung entsteht, heißt ein voller Winkel; seine beiden Schenkel fallen zusammen. Alle vollen Winkel sind einander gleich.

Kommt der bewegliche Halbstrahl $OA$ (Fig. 4) in die Richtung $OB$, die seiner anfänglichen Richtung entgegengesetzt ist, so hat er eine halbe Umdrehung gemacht. Der durch dieselbe entstandene Winkel $AOB$ heißt ein gestreckter; seine Schenkel liegen auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels in einer Geraden. Ein gestreckter Winkel ist die Hälfte eines vollen Winkels. Alle gestreckten Winkel sind daher einander gleich.

Fig. 4.

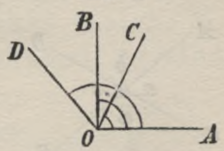



Ein Winkel $AOC$, der kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler (konkaver); ein Winkel $AOD$, der größer als ein gestreckter ist, ein erhabener (konvexer) Winkel.

Jedem hohlen Winkel zweier Halbstrahlen entspricht immer auch ein erhabener Winkel derselben; wenn jedoch nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, ist stets der hohle Winkel zu verstehen.

§. **16.** Ein Winkel $AOB$ (Fig. 5), welcher die Hälfte eines gestreckten Winkels ist, heißt ein rechter Winkel; zu seiner Entstehung wird der vierte Teil einer Umdrehung erfordert. Alle rechten Winkel sind einander gleich. Der rechte Winkel wird mit dem Buchstaben $R$ bezeichnet.

Fig. 5.




Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten; ein voller Winkel ist gleich vier Rechten.

Ein Winkel $AOC$, der kleiner als ein Rechter ist, heißt ein spitzer; ein Winkel $AOD$, welcher größer als ein Rechter, aber kleiner als ein gestreckter ist, ein stumpfer Winkel. Spitze und stumpfe Winkel heißen mit einem gemeinsamen Namen schiefe Winkel.

Zwei Winkel, deren Summe einen Rechten beträgt, heißen Komplementwinkel; zwei Winkel, deren Summe zwei Rechte beträgt, heißen Supplementwinkel.

Zu demselben Winkel oder zu gleichen Winkeln gehören *a)* gleiche Komplementwinkel, *b)* gleiche Supplementwinkel.

Beweis. Wenn $m = n$, so ist sowohl $R - m = R - n$, als auch $2R - m = 2R - n$. (Axiom 4.)

**Zusatz.** Wird der bewegliche Halbstrahl nach einer vollen Umdrehung noch weiter gedreht, so kommt er nach und nach wiederholt in die Richtungen, die er schon während der ersten Umdrehung hatte. Die Winkel, die dadurch erzeugt werden, sind gleich so vielmal vier Rechten, als volle Umdrehungen stattfanden, vermehrt um die Winkel, welche der Halbstrahl mit seiner anfänglichen Richtung bei der ersten Umdrehung gebildet hat.

**§. 17.** Zwei Winkel, die denselben Scheitel und einen gemeinsamen Schenkel haben und in derselben Ebene auf entgegengesetzten Seiten dieses Schenkels liegen, heißen anstoßende Winkel.

Zwei anstoßende Winkel, deren nicht gemeinsame Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen in einer Geraden liegen, heißen Nebenwinkel.

**Lehrsatz.** Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

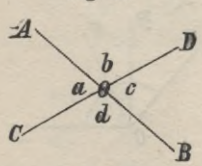
Denn sie bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

**Zusätze.** *a)* Die Summe aller anstoßenden Winkel, welche auf derselben Seite einer durch den gemeinsamen Scheitel gehenden Geraden aufeinander folgen, ist gleich zwei Rechten.

*b)* Die Summe aller anstoßenden Winkel, welche um den gemeinsamen Scheitel herum aufeinander folgen, ist gleich vier Rechten.

**§. 18.** Zwei Winkel, deren jeder von den Verlängerungen der Schenkel des andern über den Scheitel gebildet wird, heißen Scheitelwinkel, wie $a$ und $c$, oder $b$ und $d$ (Fig. 6).

Fig. 6.




**Lehrsatz.** Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Vorauss. $a$ und $c$ sind Scheitelwinkel.

Behaupt. $a = c$.

Beweis. $a$ und $c$ sind Supplemente desselben Winkels $b$.

Wie ergibt sich, daß $b = d$ ist?

**Folgesatz.** Ist von den Winkeln, die zwei einander schneidende Gerade bilden, einer ein Rechter, so sind es auch die andern; ist einer von jenen Winkeln ein schiefer, so sind es auch die andern.

**§. 19.** Zwei sich schneidende Gerade heißen zueinander normal (senkrecht), wenn sie miteinander rechte Winkel, und schief, wenn sie miteinander schiefe Winkel bilden. Daß $CD$ zu $AB$ normal ist, wird geschrieben: $CD \perp AB$.

Senkrecht und vertikal sind nicht miteinander zu verwechseln.

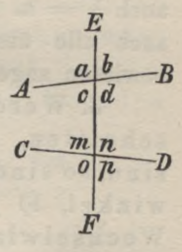
§. **20.** Um einen Winkel zu messen, untersucht man, wie vielmal ein als Einheit angenommener Winkel in dem gegebenen Winkel enthalten ist. Als Einheit des Winkelmaßes wird ein Grad (°), d. i. der 360ste Teil eines vollen Winkels angenommen. Einen Grad teilt man in 60 Minuten ('), eine Minute in 60 Sekunden (").

## IV. Parallele Linien.

§. **21.** Eine Gerade $EF$ (Fig. 7), die zwei oder mehrere gerade Linien schneidet, wird eine Transversale dieser Geraden genannt.

Werden zwei Gerade $AB$ und $CD$ von einer dritten $EF$ geschnitten, so entstehen an beiden Schnittpunkten acht Winkel.

Fig. 7.




Die Winkel $c$, $d$, $m$, $n$, die zwischen den geschnittenen Geraden liegen, heißen innere; die Winkel $a$, $b$, $o$, $p$ dagegen äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Transversale und an verschiedenen Scheiteln heißen Gegenwinkel; wie $a$ und $m$, $b$ und $n$, $c$ und $o$, $d$ und $p$.

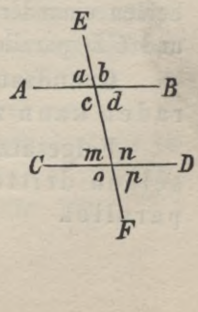
Zwei äußere oder zwei innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der Transversale und an verschiedenen Scheiteln werden Wechselwinkel genannt; wie $a$ und $p$, $b$ und $o$, $c$ und $n$, $d$ und $m$.

Zwei äußere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der Transversale heißen Anwinkel; wie $a$ und $o$, $b$ und $p$, $c$ und $m$, $d$ und $n$.

§. **22. Lehrsätze.**

1. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei Gegenwinkel gleich sind, so sind *a)* auch je zwei andere Gegenwinkel gleich, *b)* je zwei Wechselwinkel gleich, und *c)* je zwei Anwinkel Supplementwinkel (Fig. 8).

Fig. 8.




Vorauss. $a = m$.

Erste Behaupt. $b = n$, $c = o$, $d = p$.

Beweis. $b = n$ und $c = o$ als Supplemente zu den gleichen Winkeln $a$ und $m$.

Ferner ist $a = d$ und $m = p$, also wegen $a = m$ auch $d = p$.

Zweite Behaupt. $a = p$, $b = o$, $c = n$, $d = m$.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $a = m$, aber $m = p$, folglich auch $a = p$.

Ebenso zeigt man, daß $d = m$ ist; ferner $b = o$, $c = n$ (§. 16).

Dritte Behaupt. $a + o = 2R$, $b + p = 2R$,
$c + m = 2R$, $d + n = 2R$.

Beweis. $m + o = 2R$, $m = a$, folglich auch $a + o = 2R$. Ebenso zeigt man, daß $b + p = 2R$, $c + m = 2R$ und $d + n = 2R$ ist.

2. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind *a)* auch je zwei andere Wechselwinkel gleich, *b)* je zwei Gegenwinkel gleich und *c)* je zwei Anwinkel Supplementwinkel.

Beweis. Es sei $c = n$. Da $c = b$ als Scheitelwinkel, so ist auch $b = n$. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so müssen (nach 1.) auch alle übrigen in dem Lehrsatze enthaltenen Behauptungen als bewiesen angesehen werden.

3. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so sind auch *a)* je zwei andere Anwinkel Supplementwinkel, *b)* je zwei Gegenwinkel gleich und *c)* je zwei Wechselwinkel gleich.

Beweis. Es sei $a + o = 2R$. Da auch $a + c = 2R$, so muß $a + c = a + o$, daher $c = o$ sein. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so treffen (nach 1.) auch alle übrigen Behauptungen zu.

**Folgesatz.** Aus den voranstehenden drei Sätzen läßt sich indirekt folgern:

Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel nicht gleich, oder zwei Anwinkel nicht Supplementwinkel sind, so sind je zwei Gegenwinkel und je zwei Wechselwinkel nicht gleich, und je zwei Anwinkel nicht Supplementwinkel.

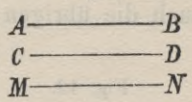
§. **23.** Zwei Gerade, die in derselben Ebene liegen und, so weit sie auch verlängert werden, in keinem Punkte zusammentreffen, heißen einander parallel. Um zu bezeichnen, daß zwei Gerade $AB$ und $CD$ parallel sind, schreibt man $AB \parallel CD$.

**Grundsatz.** Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur eine Parallele gezogen werden.

**Folgesätze.** *a)* Sind zwei gerade Linien einer und derselben dritten parallel, so sind sie auch untereinander parallel.

Ist (Fig. 9) $AB \parallel MN$ und $CD \parallel MN$, so ist auch $AB \parallel CD$.

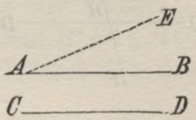
Fig. 9.




Denn wäre die Gerade $AB$ nicht parallel zu $CD$, so müßte sie hinreichend verlängert $CD$ in einem Punkte schneiden; dann gäbe es aber durch diesen Schnittpunkt zwei Parallele zu $MN$, was nach dem obigen Grundsatze nicht möglich ist.

*b)* Eine Gerade $AE$ (Fig. 10), welche eine von zwei Parallelen, $AB$, schneidet, muß bei gehöriger Verlängerung auch die andere $CD$ schneiden.

Fig. 10.

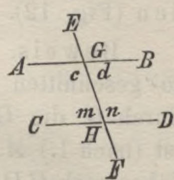



Denn schnitte sie diese nicht, so wäre sie ihr parallel; dann gäbe es aber durch den Punkt $A$ zwei Parallele zu $CD$, was dem obigen Grundsatze widerspricht.

## §. 24. Lehrsätze.

1. Werden zwei Gerade von einer Transversale so geschnitten, daß entweder zwei Wechselwinkel oder zwei Gegenwinkel gleich, oder zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so sind die geschnittenen Geraden parallel (Fig. 11).

Fig. 11.



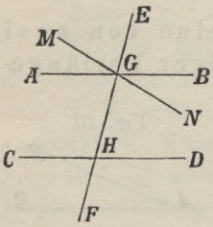

Beweis. Es schneide die Gerade $EF$ die beiden Geraden $AB$ und $CD$ so, daß $c = n$ ist. Da dann auch $d = m$ sein muß, so kann man den auf der einen Seite von $EF$ zwischen $BG$, $GH$ und $HD$ liegenden Teil der Ebene $BGHD$ durch Drehung um den Halbierungspunkt von $GH$ so in den auf der andern Seite liegenden Teil $CHGA$ bringen, daß die Strecke $GH$ auf $HG$ und die Halbstrahlen $GB$ und $HD$ bezüglich in die Richtungen $HC$ und $GA$ fallen, daß sich also die beiden Teile der Ebene decken. Die Geraden $AB$ und $CD$ bilden demnach mit $GH$ zu beiden Seiten der letzteren dasselbe geometrische Gebilde; hätten sie daher einen Punkt auf der einen Seite von $GH$ gemeinsam, so müßten sie auch auf der andern Seite einen solchen gemeinsam haben, also sich in zwei Punkten schneiden, was unmöglich ist (§. 7, *b*). Die Geraden $AB$ und $CD$ sind also parallel.

Da (§. 22) zwei Wechselwinkel auch gleich sind, wenn zwei Gegenwinkel einander gleich, oder wenn zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so ist der obige Lehrsatz vollständig bewiesen.

2. (Umkehrung des Lehrsatzes 1). Werden zwei parallele Gerade von einer Transversale geschnitten, so sind *a)* je zwei Wechselwinkel gleich, *b)* je zwei Gegenwinkel gleich, und *c)* je zwei Anwinkel Supplementwinkel (Fig. 12).

Man braucht hier nur zu zeigen, daß unter der gegebenen Voraussetzung zwei Wechselwinkel gleich sind, weil dann nach §. 22, 2 auch die übrigen Behauptungen zutreffen.

Fig. 12.




Vorauss. $AB \parallel CD$.

Behaupt. W. $BGH = CHG$.

Beweis. Wäre $BGH$ nicht $= CHG$, so müßte $BGH > CHG$, oder $BGH < CHG$ sein. Wäre $BGH > CHG$, so ziehe man die Gerade $MN$ so durch $G$, daß $NGH = CHG$ wird; dann wäre $MN \parallel CD$, was nicht möglich ist, da nach der Voraussetzung $AB \parallel CD$ ist und durch den Punkt $G$ zu einer Geraden nur eine Parallele gezogen werden kann. Ebenso läßt sich zeigen, daß $BGH$ nicht kleiner als $CHG$ sein kann. Es muß also $BGH = CHG$ sein.

3. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß die Summe der inneren Anwinkel auf einer Seite der Transversale kleiner ist als zwei Rechte, so müssen sich die beiden Geraden bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite der Transversale schneiden (Fig. 12).

Beweis. Es seien $MN$ und $CD$ zwei Gerade, welche von $EF$ so geschnitten werden, daß $HGN + GHD < 2R$ ist. Zieht man durch $G$ die Gerade $AB$ so, daß $HGB + GHD = 2R$ wird, so ist (nach 1.) $AB \parallel CD$. Die Gerade $MN$, welche $AB$ schneidet, muß daher auch $CD$ schneiden (§. 23, *b*). Dies ist aber nur in der Richtung $GN$ möglich, da wegen $HGN < HGB$ der Halbstrahl $GN$ zwischen $GB$ und $GH$, folglich $GM$ zwischen $GA$ und $GE$ liegt, und demnach der letztere mit $CD$ nicht zusammentreffen kann.

**§. 25. Lehrsätze.**

1. Sind zwei Gerade zu einer dritten normal, so sind sie parallel.

Der Beweis wird mit Hilfe von §. 24, 1 geführt.

2. Ist von zwei Parallelen die eine zu einer Geraden normal, so ist auch die andere zu ihr normal.

Beweis mit Zuziehung von §. 24, 2.

3. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur **eine** Normale gefällt werden.

Indirekter Beweis. Ließen sich von dem Punkte zu der Geraden mehrere Normale ziehen, so hätten diese einen Punkt gemeinsam und müßten nach 1. zugleich parallel sein, was einen Widerspruch enthält.

4. In einem Punkte einer Geraden kann auf diese nur eine Normale errichtet werden.

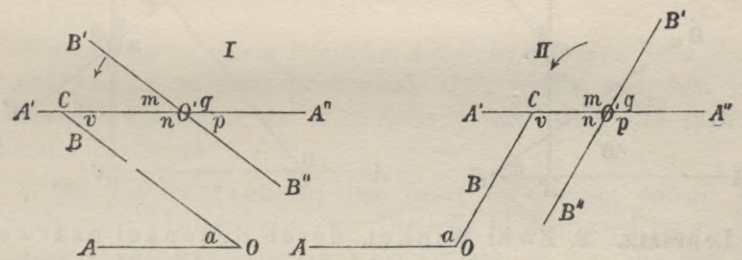
Beweis wie zu 3.

5. Errichtet man auf den Schenkeln eines nicht gestreckten Winkels Normale, so schneiden sie einander.

Man errichte im Scheitel auf einen der beiden Schenkel die Normale und benütze § 24, 3 und § 23, *b*.

§. 26. Es sei der Winkel $AOB$ (Fig. 13) und der Punkt $O'$ gegeben. Zieht man durch $O'$ die Gerade $A'A'' \parallel AO$ und $B'B'' \parallel BO$, so sind die Schenkel der um $O'$ entstehenden vier Winkel mit den

Fig. 13.




Schenkeln des gegebenen Winkels teils in demselben Sinne parallel, wie $O'A'$ mit $OA$, oder $O'B'$ mit $OB$, teils im entgegengesetzten Sinne parallel, wie $O'A''$ mit $OA$, oder $O'B''$ mit $OB$.

**Lehrsatz.** 1. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind *a)* einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben oder beide in entgegengesetztem Sinne parallel sind; dagegen *b)* Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden andern aber in entgegengesetztem Sinne parallel sind.

Beweis. *a)* Verlängert man $OB$, bis sie $A'A''$ in $C$ schneidet, so ist (nach §. 24, 2) $m = v$ und $a = v$, folglich auch $m = a$. — Aus $m = a$ und $m = p$ folgt auch $p = a$.

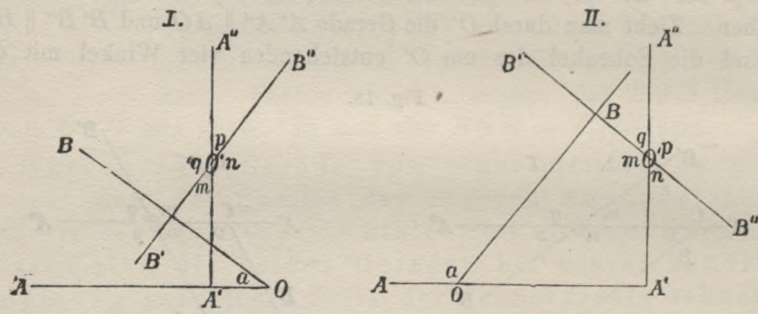
*b)* Nach *a)* ist $m = a$; da $n + m = 2R$, so ist auch $n + a = 2R$. Da $n = q$, so ist auch $q + a = 2R$.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn man den Punkt $O'$ in der Winkelfläche $AOB$ annimmt.

Dreht man in Fig. 13 die Geraden $A'A''$ und $B'B''$ als eine feste Verbindung um den Punkt $O'$ in der durch den Pfeil angezeigten Richtung um 90°, so kommen dieselben in eine Lage gegen den

Winkel $AOB$, wie sie Fig. 14 darstellt; es wird $A'A'' \perp OA$ und $B'B'' \perp OB$, während dabei die Winkel $m, n, p, q$ ungeändert bleiben. Die Schenkel dieser Winkel heißen in der neuen Lage zu den Schenkeln des Winkels $AOB$ in demselben oder in entgegengesetztem Sinne normal, je nachdem sie vor ihrer Drehung um $90^0$ zu den Schenkeln dieses Winkels in demselben oder in entgegengesetztem Sinne parallel waren. So ist $O'A'$ zu $OA$, oder $O'B'$ zu $OB$ in demselben Sinne normal, dagegen $O'A''$ zu $OA$, oder $O'B''$ zu $OB$ in entgegengesetztem Sinne normal.

Fig. 14.




**Lehrsatz.** 2. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise zueinander normal sind, sind *a)* einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide in entgegengesetztem Sinne zueinander normal sind; dagegen *b)* Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden andern aber in entgegengesetztem Sinne zueinander normal sind.

Folgt aus dem unter 1. bewiesenen Lehrsatze.

### Übungssätze.

§. 27. Beweise folgende Lehrsätze:

1. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel sind zueinander normal.

2. Die zur Halbierungslinie eines Winkels im Scheitel errichtete Normale halbiert den Nebenwinkel.

3. Die Halbierungslinie des einen zweier Scheitelwinkel halbiert auch den andern.

4. Die Halbierungslinien zweier Gegen- oder Wechselwinkel an zwei parallelen Geraden sind parallel.

5. Die Halbierungslinien zweier Anwinkel an zwei Parallelen sind zueinander normal.

6. Drei Gerade schneiden sich in einem Punkte; man weise nach, daß je drei nicht aneinander liegende Winkel $180^0$ betragen.

7. Errichtet man im Scheitel eines Winkels auf beiden Schenkeln nach verschiedenen Seiten Normale, so schließen diese einen Winkel ein, welcher zu dem gegebenen Winkel supplementär ist.

# Zweiter Abschnitt.

## Begrenzte ebene Gebilde.

### I. Das Dreieck.

#### 1. Erklärungen und allgemeine Eigenschaften der Dreiecke.

§. 28. Ein von drei Strecken begrenzter Teil der Ebene heißt ein Dreieck. Die drei Strecken heißen Seiten des Dreieckes.

Jedes Dreieck hat drei Eckpunkte, drei Seiten und drei Winkel. Jeder Seite liegt ein Winkel gegenüber, während die beiden andern Winkel dieser Seite anliegen; jedem Winkel liegt eine Seite gegenüber, während die beiden andern Seiten ihn einschließen.

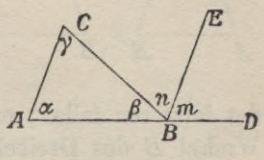
Nimmt man in einem Dreiecke $ABC$ irgend eine Seite $AB$ als Grundlinie an, so heißt die Normale $CD$, welche von dem gegenüberliegenden Eckpunkte auf diese Seite gefällt wird, die zugehörige Höhe des Dreieckes.

§. 29. Ein Dreieck, in dem keine Seite einer andern gleich ist, heißt ungleichseitig; ein Dreieck, in dem zwei Seiten gleich sind, heißt gleichschenklig; ein Dreieck, in dem alle drei Seiten gleich sind, heißt gleichseitig.

In einem gleichschenkligen Dreiecke nennt man die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie, und den dieser gegenüberliegenden Eckpunkt den Scheitel des Dreieckes.

§. 30. **Lehrsatz.** Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten.

Fig. 15.




Beweis. Verlängert man (Fig. 15) die Seite $AB$ über $B$ und zieht $BE \parallel AC$, so ist $m = \alpha$, $n = \gamma$; nun ist $m + n + \beta = 2R$, folglich auch $\alpha + \gamma + \beta = 2R$.

Man könnte auch durch $C$ die zu $AB$ parallele Hilfslinie ziehen. Wie wird dann der Beweis geführt?

**Folgesätze.** *a)* Durch zwei Winkel eines Dreieckes oder deren Summe ist auch die Größe des dritten Winkels bestimmt; wenn also zwei Dreiecke in zwei Winkeln oder in der Summe zweier Winkel übereinstimmen, so müssen die dritten Winkel gleich sein.

*b)* In einem Dreiecke kann nur ein rechter, sowie auch nur ein stumpfer Winkel vorkommen.

Welche Lage kann die Höhe eines Dreieckes haben?

§. **31.** Ein Dreieck heißt *spitzwinklig*, wenn alle drei Winkel desselben spitz sind; *rechtwinklig*, wenn in demselben ein rechter, *stumpfwinklig*, wenn in demselben ein stumpfer Winkel vorkommt.

In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, *Hypotenuse*, die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, werden *Katheten* genannt. Das spitz- und das stumpfwinklige Dreieck heißen *schiefwinklig*.

§. **32.** Unter einem *Außenwinkel* eines Dreieckes versteht man einen Winkel, den eine Dreiecksseite mit der Verlängerung einer andern bildet.

**Lehrsatz.** *Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel* (Fig. 15).

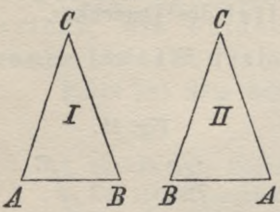
Denn $CBD = m + n = \alpha + \gamma$.

**Folgesatz.** Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich vier Rechten.

§. **33. Lehrsätze.**

1. *Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber.*
2. *Der größeren Seite eines Dreieckes liegt der größere Winkel gegenüber.*
3. *Gleichen Winkeln eines Dreieckes liegen gleiche Seiten gegenüber.*
4. *Dem größeren Winkel eines Dreieckes liegt die größere Seite gegenüber.*

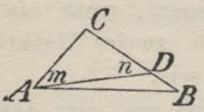
Fig. 16.




*Beweis* zum 1. Satze.

Es sei (Fig. 16) $BC = AC$. Man stelle sich das Dreieck $I$ noch einmal, jedoch umgewendet, vor, wie in $II$, und lege $II$ so auf $I$, daß sich die gleichen Winkel $C$ decken. Dann müssen wegen $BC = AC$ auch die Punkte $B$ und $A$ des Dreieckes $II$ auf die Punkte $A$ und $B$ des Dreieckes $I$, und somit die Seite $BA$ des ersteren auf die Seite $AB$ des letzteren fallen; es deckt also der Winkel $A$ des Dreieckes $II$ den Winkel $B$ des Dreieckes $I$; folglich $A = B$.

Fig. 17.




*Beweis* zum 2. Satze. (Fig. 17.)

Es sei die Seite $BC > AC$. Man mache $CD = AC$ und ziehe die Strecke $AD$. Dann ist (nach 1) in dem Dreiecke $CAD$ der Winkel $m = n$, aber Winkel $BAC > m$, folglich auch Winkel $BAC > n$. Nun ist $n$ als Außenwinkel des Dreieckes $ABD$ größer lalsder Winke $ABC$; somit muß umsomehr Winkel $BAC > ABC$ sein

Der Beweis zum 3. Satze wird indirekt geführt. Es sei (Fig. 16) der Winkel $A = B$. Wäre die Seite $BC$ nicht $= AC$, so müßte $BC \gtrless AC$ sein. Allein dann wäre nach dem vorhergehenden Satze auch $A \gtrless B$, was der Voraussetzung $A = B$ widerspricht. Es muß daher $BC = AC$ sein.

Beweis zum 4. Satze ebenfalls indirekt. Es sei (Fig. 17) der Winkel $BAC > ABC$. Gesetzt, es wäre nicht $BC > AC$, so müßte $BC = AC$ oder $BC < AC$ sein. Aus der ersten Annahme würde folgen, daß $BAC = ABC$ ist; aus der zweiten, daß $BAC < ABC$ ist; beides widerstreitet der Voraussetzung. Es muß daher $BC > AC$ sein.

**Folgesätze.** Aus 1. folgt:

*a)* In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind auch die andern zwei Winkel bestimmt.

*b)* Der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist doppelt so groß als jeder Winkel an der Grundlinie.

*c)* In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich, und daher jeder 60°.

Aus 4. folgt:

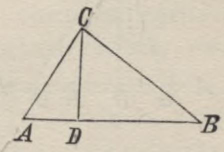
*d)* Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse größer als jede Kathete.

*e)* Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte.

§. 34. **Lehrsätze.** 1. Jede Seite eines Dreieckes ist kleiner als die Summe der beiden andern Seiten.

Beweis. Es sei $ABC$ (Fig. 18) ein Dreieck, dessen größte Seite $AB$ ist.

Fig. 18.




Zieht man $CD \perp AB$, so ist

$$\begin{array}{l} AD < AC \text{ und} \\ BD < BC, \text{ daher} \\ \hline AD + BD < AC + BC, \text{ oder} \\ AB < AC + BC. \end{array}$$

Daß $AC < AB + BC$ und $BC < AB + AC$ ist, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

2. Jede Seite eines Dreieckes ist größer als die Differenz der beiden andern Seiten.

Es sei $AB$ (Fig. 18) die größte, $BC$ die nächst kleinere und $AC$ die kleinste Seite des Dreieckes $ABC$.

Nach dem vorhergehenden Satze ist:

$$AC + BC > AB \text{ und } AB + AC > BC;$$

folglich ist auch

$$BC > AB - AC,\ AC > AB - BC \text{ und } AB > BC - AC.$$

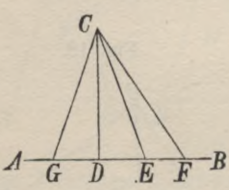
§. **35.** Wird von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser eine normale oder schiefe Gerade gezogen, so heißt ihr Durchschnitt mit der gegebenen Geraden der Fußpunkt der andern Geraden.

Der Fußpunkt der Normalen von einem Punkt auf eine Gerade heißt die Normalprojektion oder kurz Projektion dieses Punktes auf die Gerade. Jeder Punkt der Geraden ist selbst seine Projektion auf dieselbe. Unter der Projektion einer Strecke versteht man den Inbegriff der Projektionen aller Punkte derselben. Man erhält sie durch die Strecke zwischen den Projektionen ihrer Endpunkte. Ist die zu projizierende Strecke senkrecht gegen eine Gerade, so ist ihre Projektion ein Punkt. In Fig. 19 ist demnach $GD$ die Projektion von $CG$, $D$ jene von $CD$.

**Lehrsatz.** Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser die Normale und mehrere schiefe Strecken, so ist:

1. die Normale die kürzeste unter allen Strecken;
2. zwei schiefe Strecken, die gleiche Projektionen haben, sind einander gleich; und
3. von zwei schiefen Strecken mit ungleichen Projektionen ist diejenige die größere, welche die größere Projektion hat.

Fig. 19.




Beweis. 1. Daß $CD$ kürzer als $CE$, $CF$, $CG$ ist, folgt aus §. 33, *d*.

2. Ist $DE = DG$, so muß, wenn man den rechten Winkel $CDG$ um $CD$ umlegt, der Punkt $G$ auf $E$, also auch $CG$ auf $CE$ fallen; folglich ist $CE = CG$.

3. Im $\triangle CDE$ ist der Winkel $CED$ spitz, daher sein Nebenwinkel $CEF$ stumpf, somit im $\triangle CEF$ die Seite $CF > CE$.

Aus den Sätzen 2. und 3. folgen indirekt auch deren Umkehrungen.

Die von einem Punkte zu einer Geraden gezogene Normale bestimmt den Abstand des Punktes von der Geraden.

**Folgesatz.** Von einem Punkte außerhalb einer Geraden können zu dieser immer zwei, aber auch nur zwei gleich lange schiefe Strecken gezogen werden.

## 2. Kongruenz der Dreiecke.

§. **36.** Zwei Dreiecke sind kongruent (§. 3), wenn sie aufeinander gelegt einander decken. Damit dieses möglich sei, müssen in den Dreiecken alle sechs Bestandstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sein. Daraus folgt: In kongruenten Dreiecken sind die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, und die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Da die Seiten und Winkel eines Dreieckes voneinander nicht unabhängig sind, so genügt schon die Gleichheit von weniger als sechs Stücken, um umgekehrt auf die Kongruenz zweier Dreiecke schließen zu können. Die Fälle, in denen dieses stattfindet, sind in den folgenden Kongruenzsätzen enthalten.

§. **37. I. Kongruenzsatz.** Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent *(WSW)*.

Voraussetzung. Seite $AB = A'B'$, Winkel $A = A'$ und $B = B'$ (Fig. 20).

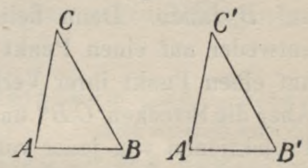


Fig. 20.

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf $ABC$, daß die Punkte $A'$ und $B'$ auf die Punkte $A$ und $B$ fallen, was möglich ist, weil $AB = A'B'$ ist. Weil der Winkel $A = A'$ ist, so muß $A'C'$ in die Richtung $AC$ fallen; wegen $B = B'$ muß ebenso $B'C'$ in die Richtung $BC$ fallen. Wenn aber die Geraden $A'C'$ und $B'C'$ in die Richtungen der Geraden $AC$ und $BC$ fallen, so muß auch der Schnittpunkt $C'$ der ersteren auf den Schnittpunkt $C$ der letzteren fallen. Die beiden Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ decken also einander.

**Folgesatz.** Zwei Dreiecke, die eine Seite, einen anliegenden und den gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich haben, sind kongruent (§. 30, *a*).

§. **38. II. Kongruenzsatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent *(SWS)*.

Voraussetzung. Es sei $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $C = C'$ (Fig. 20).

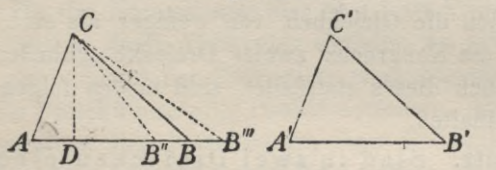
Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck $ABC$, daß $C'$ auf $C$, $C'A'$ in die Richtung $CA$, und $C'B'$ in die

Richtung $CB$ fällt, was möglich ist, da nach der Voraussetzung die Winkel $C'$ und $C$ gleich sind; wegen $AC = A'C'$ muß auch der Punkt $A'$ auf $A$, und wegen $BC = B'C'$ der Punkt $B'$ auf $B$, also die Seite $A'B'$ auf $AB$ fallen; folglich ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§. **39. III. Kongruenzsatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und die der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent (*SsW*).

Fig. 21.




Voraussetzung. Es sei (Fig. 21) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, ferner $BC > AC$, somit auch $B'C' > A'C'$, endlich der Winkel $A = A'$.

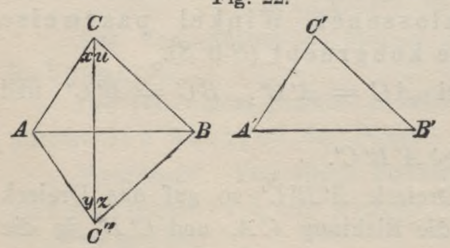
Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf das $\triangle ABC$, daß der Punkt $A'$ auf $A$, $C'$ auf $C$ und $A'B'$ in die Richtung $AB$ fällt, was wegen $AC = A'C'$ und $A = A'$ möglich ist. Dann muß auch $B'$ auf $B$ fallen. Denn fiele der Punkt $B'$ nicht auf $B$, so müßte er entweder auf einen Punkt innerhalb der Seite $AB$, etwa auf $B''$, oder auf einen Punkt ihrer Verlängerung, etwa auf $B'''$, zu liegen kommen. Aber die Strecken $CB''$ und $CB'''$ können nicht gleich $CB$ sein, da ihre Projektionen von jener von $CB$ verschieden sind. Der Punkt $B'$ muß daher auf $B$ fallen; dann ist aber $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

**Zusatz.** Der obige Beweis stützt sich auf die Bedingung, daß der Winkel der größeren der zwei gleichen Seiten gegenüberliegt. Wenn daher in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der kleineren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so ist es nicht gestattet, auf die Kongruenz der Dreiecke zu schließen. (Vgl. in Fig. 53 $\triangle AB'C$ und $\triangle AB''C$.)

§. **40. IV. Kongruenzsatz.** Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten paarweise gleich, so sind die Dreiecke kongruent (*SSS*).

Fig. 22.




Voraussetzung. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$ (Fig. 22).

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so an das Dreieck $ABC$, daß die zwei größten Seiten $A'B'$ und $AB$ einander decken und der Punkt $C'$ auf die entgegengesetzte Seite von $AB$ nach $C''$ fällt. Dann sind nach der Voraussetzung die Dreiecke $ACC''$ und $BCC''$ gleichschenklig, also sind die Winkel an der Grundlinie gleich, $x = y$, $u = z$; folglich ist auch $x + u = y + z$, oder Winkel $ACB = AC''B = A'C'B'$.

Ist aber Winkel $ACB = A'C'B'$, so ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$ $(SWS)$.

§. 41. Die Kongruenz der Dreiecke wird benützt, um aus drei als gleich bekannten Stücken zweier Dreiecke auf die Gleichheit der übrigen Stücke zu schließen; es sind die gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich und umgekehrt.

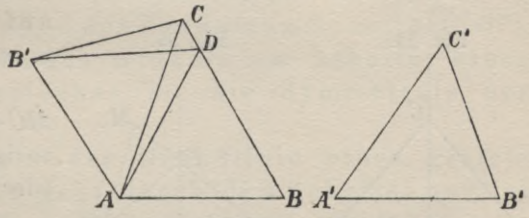
Da kongruente Dreiecke in Größe und Gestalt übereinstimmen, so folgt, daß die Bestandstücke, aus deren Gleichheit in zwei Dreiecken man auf die Kongruenz dieser letzteren schließen kann, die Größe und die Gestalt eines Dreieckes unzweideutig bestimmen. Die Bestimmungsstücke eines Dreieckes sind also: 1. eine Seite mit zwei Winkeln; 2. zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel; 3. zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel; 4. alle drei Seiten.

§. 42. **Lehrsatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar ist diejenige die größere, welche dem größeren Winkel gegenüberliegt (Fig. 23).

Es sei (Fig. 23) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und Winkel $BAC > B'A'C'$.

Behauptung. $BC > B'C'$.

Fig. 23.




Beweis. Man lege die beiden Dreiecke so nebeneinander, daß ein Paar gleicher Seiten $AC$ und $A'C'$ zur Deckung kommt. Die Halbierungslinie $AD$ des Winkels $BAB'$ muß in den größeren Winkel $BAC$ fallen. Man verbinde ihren Schnittpunkt $D$ mit der Gegenseite mit $B'$, so ist $ADB' \cong ADB$ $(SWS)$, daher $B'D = BD$. In dem Dreieck $B'CD$ ist $B'D + CD > B'C$, daher auch $BD + CD > B'C$, somit $BC > B'C'$.

§. **43. Lehrsatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so sind auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar ist derjenige der größere, welcher der größeren Seite gegenüberliegt (Fig. 23).

Beweis. Es sei $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und $BC > B'C'$. Dann ist $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B'A'C'$. Wäre $BAC \leqq B'A'C'$, so müßte $BC \leqq B'C'$ sein ($SWS$ und §. 42); beides widerspricht der Voraussetzung.

**Anwendung der Kongruenzsätze.**

§. **44.** Zwei Punkte liegen symmetrisch in Beziehung auf eine Gerade, wenn die Strecke, welche sie verbindet, zu dieser Geraden normal ist und durch sie halbiert wird; die Gerade heißt die Symmetrieachse oder Symmetrale.

Zwei ebene Gebilde liegen symmetrisch in Beziehung auf eine Gerade, wenn jedem Punkte des einen Gebildes ein symmetrisch liegender Punkt des andern Gebildes entspricht; zwei symmetrisch liegende ebene Gebilde können durch Umwendung um die Symmetrale zur Deckung gebracht werden.

Ein ebenes Gebilde heißt symmetrisch, wenn es sich durch eine Gerade (die Symmetrale oder Symmetrieachse) in zwei symmetrisch liegende Teile teilen läßt. Hat ein ebenes Gebilde $n$ Symmetralen, so heißt es eine $n$-achsig symmetrische Figur.

§. **45.** 1. Jede Strecke ist ein symmetrisches Gebilde; ihre Symmetrale ist die in der Mitte zu ihr errichtete Normale.

*a)* Jeder Punkt der Streckensymmetrale hat von den beiden Endpunkten der Strecke gleiche Abstände.

Folgt aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $ADC$ und $BDC$ (Fig. 24).

*b)* Liegt ein Punkt außerhalb der Streckensymmetrale, so ist er jenem Endpunkt der Strecke näher, der mit ihm auf derselben Seite der Symmetrale liegt.

Fig. 24.

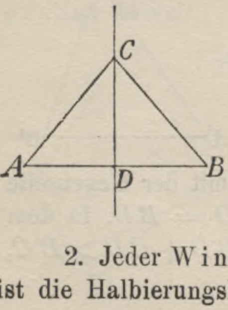
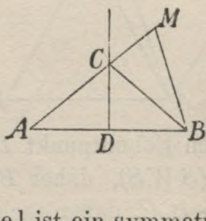



Fig. 25.




Beweis. (Fig. 25.) $MC + BC > MB$, da $AC = BC$, so ist auch $MC + AC > MB$, oder $AM > BM$.

Die Umkehrungssätze von *a)* und *b)* werden indirekt bewiesen.

2. Jeder Winkel ist ein symmetrisches Gebilde; seine Symmetrale ist die Halbierungslinie desselben.

*a)* Ist $CD$ (Fig. 26) die Symmetrale des Winkels $ACB$, also $ACD = BCD$, und ist $DE \perp AC$, $DF \perp BC$, so ergibt sich aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $CED$ und $CFD$:

Jeder Punkt der Winkelsymmetrale hat von den beiden Schenkeln des Winkels gleiche Abstände.

Fig. 26.

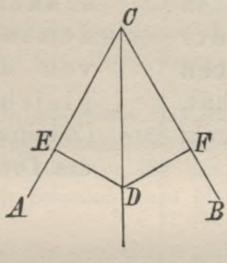
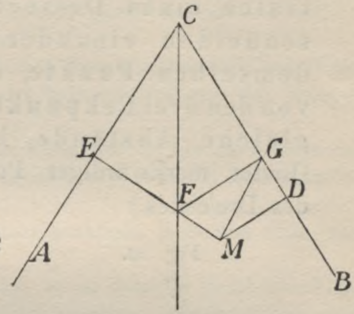



Fig. 27.



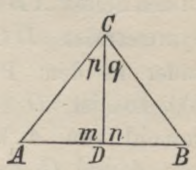

*b)* Liegt ein Punkt außerhalb der Winkelsymmetrale, so liegt er dem Schenkel näher, der mit ihm auf derselben Seite der Symmetrale sich befindet.

In Fig. 27 ist $FM + FG > MG$, daher um so mehr $FM + FG > MD$, oder $FM + EF > MD$; daher $ME > MD$.

Die Umkehrungssätze von *a)* und *b)* werden indirekt bewiesen.

§. **46. Lehrsätze.** 1. Die Gerade vom Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes nach der Mitte der Grundlinie ist die Symmetrale derselben und zugleich die Symmetrale des Winkels am Scheitel.

Fig. 28.




Voraussetzung. $AC = BC$, $AD = BD$ (Fig. 28).

Behauptung. $CD \perp AB$ und $p = q$.

Beweis. $\triangle ACD \cong BCD$ $(SSS)$, daher $m = n$, oder $CD \perp AB$, und $p = q$.

2. Die Höhe auf die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist die Symmetrale der Grundlinie und des Winkels am Scheitel $(SsW)$.

3. Die Symmetrale des Winkels am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist die Symmetrale der Grundlinie $(SWS)$.

4. Die Symmetrale der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes geht durch den Scheitel und ist die Symmetrale des Winkels am Scheitel. (§. 45.)

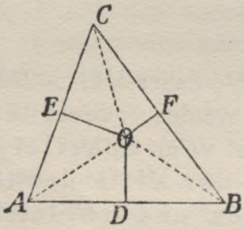
Ein gleichschenkliges Dreieck ist demnach eine einachsig symmetrische Figur. Die Symmetrale desselben ist die Höhe, welche mit der Symmetrale des Winkels am Scheitel und jener der Grundlinie zusammenfällt.

Ein gleichseitiges Dreieck ist symmetrisch in Beziehung auf jede seiner drei Höhen; es ist eine dreiachsig symmetrische Figur. Jede Höhe ist zugleich eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale.

## §. 47. Lehrsätze.

1. Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte, der von den drei **Eckpunkten** gleiche Abstände hat. (Erster merkwürdiger Punkt des Dreieckes.)

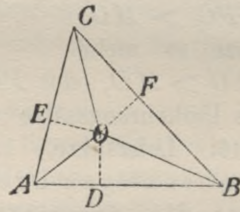
Fig. 29.




Beweis. Schneiden (Fig. 29) die zu den Seiten $AB$ und $AC$ gehörigen Symmetralen $DO$ und $EO$ einander in dem Punkte $O$ (§. 25, 5), so ist $O$ nach §. 45, 1 sowohl von $A$ und $B$ als auch von $A$ und $C$, daher auch von $B$ und $C$ gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt $O$ von $B$ und $C$ gleiche Abstände, so liegt er auch in der Symmetrale der Seite $BC$.

2. Die drei Winkelsymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte, der von den drei **Seiten** gleiche Abstände hat. (Zweiter merkwürdiger Punkt des Dreieckes.)

Fig. 30.




Beweis. Schneiden (Fig. 30) die Symmetralen der Winkel $BAC$ und $ABC$ einander in dem Punkte $O$ (§. 24, 3), so ist $O$ nach §. 45, 2 sowohl von $AB$ und $AC$ als auch von $AB$ und $BC$, daher auch von $AC$ und $BC$ gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt $O$ von $AC$ und $BC$ gleiche Abstände, so liegt er auch in der Symmetrale des Winkels $ACB$.

**Zusatz** zu 2. Wie in 2. wird bewiesen, daß die Symmetralen eines inneren Dreieckswinkels und der Nebenwinkel der beiden andern in einem Punkte einander schneiden, der von den drei Seiten gleiche Abstände hat.

### 3. Übungssätze.

§. 48. 1. Zieht man von einem Punkte im Innern eines Dreieckes Strecken zu den Endpunkten einer Seite, so ist *a)* die Summe dieser Strecken kleiner als die Summe der beiden andern Seiten und *b)* der von diesen Strecken gebildete Winkel größer als der Winkel, den die beiden andern Seiten einschließen.

Man verlängere eine Strecke bis zum Durchschnitte mit einer Seite und wende §. 34, 1 und §. 32 an.

2. Ein Winkel eines Dreieckes sei $\alpha$; wie groß ist der Winkel, welchen die Halbierungslinien der beiden andern Winkel miteinander bilden?

3. Halbiert man den Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, so ist die Halbierungslinie der Grundlinie parallel.

4. Zieht man durch den Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes die Parallele zur Grundlinie, so halbiert diese den Außenwinkel.

5. Der Winkel, welchen die auf einen Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes gefällte Höhe mit der Grundlinie bildet, ist halb so groß wie der Winkel an der Spitze.

6. Verlängert man die Hypotenuse über ihre Endpunkte je um die anliegende Kathete, so schließen die Verbindungslinien der neuen Endpunkte mit dem Scheitel des rechten Winkels einen Winkel von $135^0$ ein.

7. Die Höhen auf die Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind einander gleich.

8. Sind in einem Dreiecke zwei Höhen gleich, so ist dasselbe gleichschenklig.

9. Verbindet man zwei beliebige Punkte zweier paralleler Geraden durch eine Strecke und halbiert diese, so wird jede durch den Halbierungspunkt zwischen den Parallelen gezogene Strecke in demselben halbiert.

10. Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke einer der spitzen Winkel doppelt so groß als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so groß als die kleinere Kathete.

Legt man an das Dreieck ein kongruentes mit der größeren Kathete an, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck.

11. Ist in einem gleichschenkligen Dreiecke ein Basiswinkel doppelt so groß wie der Winkel am Scheitel, so wird es durch die Symmetrale eines Basiswinkels in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

## II. Das Viereck.

### 1. Erklärungen und Lehrsätze.

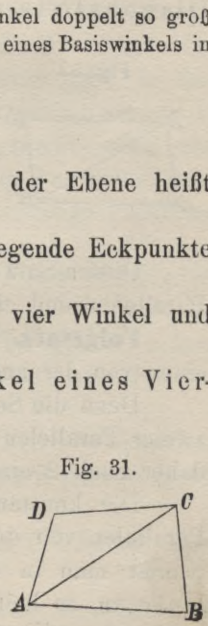
§. **49.** Ein von vier Strecken begrenzter Teil der Ebene heißt ein Viereck.

Die Strecke $AC$ (Fig. 31), die zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Viereckes verbindet, heißt eine Diagonale.

Ein Viereck hat vier Eckpunkte, vier Seiten, vier Winkel und zwei Diagonalen.

§. **50.** **Lehrsatz.** Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten.

Fig. 31.




Beweis. Zerlegt man (Fig. 31) das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so beträgt die Winkelsumme in jedem derselben zwei Rechte, also in beiden zusammen vier Rechte.

In einem Viereck kann mithin nur ein konvexer Winkel vorkommen. Es sollen nur Vierecke mit konkaven Winkeln betrachtet werden.

§. **51.** Mit Rücksicht auf die gegenseitige Lage der Seiten werden die Vierecke in Trapezoide, Trapeze und Parallelogramme eingeteilt.

Ein Trapezoid ist ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist; ein Trapez ist ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind; ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

### Lehrsätze von den Parallelogrammen.

§. **52.** 1. In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus §. 26, 1. *a)*.

2. Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm (Umkehrung von 1).

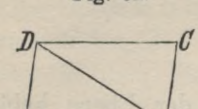
Der Beweis stützt sich auf §. 50 und §. 24, 1.

**Folgesatz.** Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind es auch die andern; ist ein Winkel ein schiefer, so sind es auch die andern.

Man unterscheidet daher rechtwinklige und schiefwinklige Parallelogramme.

§. **53.** 1. Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

Fig. 32.




Voraussetzung. Es sei $ABCD$ (Fig. 32) ein Parallelogramm, also $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Behauptung. $ABD \cong CDB$. Folgt aus §. 24, 2 und *WSW*.

2. In einem Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten gleich. $AB = DC$, $AD = BC$. Folgt aus 1.

Diesen Satz pflegt man auch so auszusprechen: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

**Folgesatz.** Sind zwei Gerade parallel, so haben alle Punkte der einen von der andern gleiche Abstände.

Denn die Senkrechten, welche die Abstände der Punkte der einen zweier Parallelen von der andern angeben, sind nach §. 25, 1 parallel, daher nach 2 einander gleich.

Die konstante Entfernung eines jeden Punktes der einen zweier Parallelen von der andern heißt der Abstand der beiden Parallelen. Nimmt man in einem Parallelogramm eine der Seiten als Grundlinie an, so heißt ihr Abstand von der gegenüberliegenden Seite die Höhe des Parallelogramms.

3. Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm (Umkehrung von 2).

Beweis. Es sei in dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 32) $AB = DC$ und $AD = BC$. Dann ist $\triangle ABD \cong CDB$, also sind die Wechselwinkel $ABD$ und $CDB$, ebenso $ADB$ und $CBD$ gleich; folglich $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$ (§. 24, 1).

4. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis. In dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 32) sei $AB = DC$ und $AB \parallel DC$. Dann ist $\triangle ABD \cong CDB$, also sind auch die Wechselwinkel $ADB$ und $CBD$ gleich, woraus $AD \parallel BC$ folgt.

5. Die Diagonalen eines jeden Parallelogrammes halbieren einander.

6. Halbieren die Diagonalen eines Viereckes einander, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweise zu 5. und 6. aus der Kongruenz von Dreiecken.

**§. 54.** Sind in einem Parallelogramm zwei anstoßende Seiten gleich, so sind es auch die andern; das Parallelogramm heißt in diesem Falle gleichseitig. Sind dagegen zwei anstoßende Seiten ungleich, so heißt das Parallelogramm ungleichseitig.

Mit Rücksicht auf die Größe der Winkel und die Länge der Seiten unterscheidet man vier Arten von Parallelogrammen: 1. das schiefwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid; 2. das schiefwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder den Rhombus; 3. das rechtwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck; 4. das rechtwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat.

**§. 55.** 1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

2. In einem Rhombus ist jede Diagonale die Symmetrale der andern und der beiden Winkel, welche sie durchschneidet.

3. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich, jede ist die Symmetrale der andern und der beiden Winkel, welche sie durchschneidet.

Beweise aus der Kongruenz der Dreiecke und den Sätzen über die Symmetralen.

**Zusätze.** *a)* Ein Rechteck ist symmetrisch in Beziehung auf jede der beiden Seitensymmetralen.

*b)* Ein Rhombus ist symmetrisch in Beziehung auf jede Diagonale.

*c)* Ein Quadrat ist symmetrisch sowohl in Beziehung auf jede der beiden Seitensymmetralen, als auch in Beziehung auf jede Diagonale.

Das Rechteck und der Rhombus sind mithin zweiachsig, das Quadrat ist vierachsig symmetrisch.

**Das Trapez.**

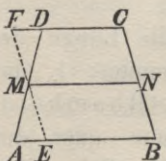
§. **56.** In einem Trapez heißen die parallelen Seiten die Grundlinien, ihr Abstand ist die Höhe des Trapezes. Die nicht parallelen Seiten werden Schenkel genannt. Sind sie gleich, so heißt das Trapez ein gleichschenkliges.

§. **57.** 1. Die Strecke zwischen den Halbierungspunkten der Schenkel eines Trapezes ist *a)* den Grundlinien parallel und *b)* gleich der halben Summe derselben.

Beweis. Es sei (Fig. 33) $AB \parallel DC$, $AM = MD$ und $BN = NC$.

*a)* Zieht man durch $M$ die Gerade $EF \parallel BC$ und verlängert $CD$ bis $F$, so ist $\triangle AEM \cong DFM$, daher $EM = MF$. Wegen $EF = BC$ ist auch $\frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}BC$, d. i. $EM = BN$. $BNME$ ist also ein Parallelogramm (§. 53, 4), folglich $MN \parallel EB$.

Fig. 33.




*b)* Aus der Kongruenz der Dreiecke $AEM$ und $DFM$ folgt $AE = DF$. Nun ist $MN = BE = AB - AE$ und auch $MN = CF = CD + DF$, folglich $2MN = AB + CD$ und $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Die Strecke $MN$ heißt die Mittellinie des Trapezes.

2. Zieht man in einem Trapeze durch den Halbierungspunkt eines Schenkels die Parallele mit den Grundlinien, so halbiert dieselbe auch den andern Schenkel.

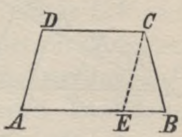
Beweis. Es sei (Fig. 33) $AM = MD$ und $MN \parallel AB$. Zieht man durch $M$ die Gerade $EF \parallel BC$ und verlängert $CD$ bis $F$, so ist $\triangle AEM \cong DFM$, daher $EM = MF$; aber $EM = BN$ und $MF = NC$, folglich $BN = NC$.

3. In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Winkel an jeder der parallelen Seiten einander gleich.

Beweis. Es sei (Fig. 34) $AB \parallel DC$ und $AD = BC$. Zieht man $CE \parallel DA$, so ist $EC = AD = BC$, also im $\triangle BEC$ der Winkel $E = B$; aber $E = A$, folglich auch $A = B$. Somit auch $D = C$ (§. 16).

4. Umgekehrt: Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der beiden parallelen Seiten gleich, so ist es gleichschenklig.

Fig. 34.



Beweis. Es sei (Fig. 34) $AB \parallel DC$ und $A = B$. Zieht man $CE \parallel DA$, so ist $CE = DA$ und Winkel $E = A = B$, also im $\triangle BEC$: $EC = BC$, mithin auch $AD = BC$.

5. In einem gleichschenkligen Trapeze ist die Symmetrale einer der beiden Parallelseiten auch die Symmetrale der andern und des gleichschenkligen Trapezes.

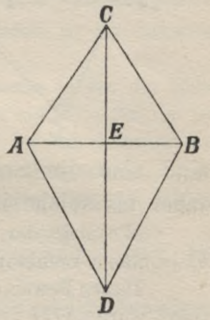
Beweis durch Deckung.

Das gleichschenklige Trapez ist einachsig symmetrisch.

### Das Deltoid.

§. 58. Ein Trapezoid, das zwei Paare gleicher anstoßender Seiten hat, heißt ein Deltoid.

Fig. 35.



Ist (Fig. 35) $AC = BC$ und $AD = BD$, so ist $ACBD$ ein Deltoid. Dasselbe besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinsame Grundlinie die Diagonale $AB$ ist. Mithin ist $CD$ die Symmetrale von $AB$. Daraus folgt:

1. Die Diagonalen eines Deltoids sind zueinander normal.

2. Das Deltoid ist einachsig symmetrisch; seine Symmetrieachse ist die Diagonale, welche die Eckpunkte verbindet, an denen je zwei gleiche Seiten einander treffen.

### Lehrsätze von den Parallelen im Dreieck.

§. 59. 1. Die Strecke zwischen den Mitten zweier Seiten eines Dreieckes ist *a)* der dritten Seite parallel und *b)* die Hälfte derselben.

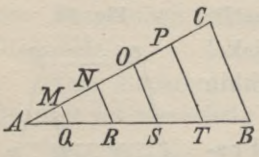
2. Zieht man in einem Dreiecke durch die Mitte einer Seite die Parallele zu einer zweiten Seite, so halbiert dieselbe auch die dritte Seite.

Die voranstehenden zwei Lehrsätze ergeben sich unmittelbar aus den analogen Sätzen vom Trapeze im §. 57, 1 und 2, indem man das Dreieck als ein Trapez betrachtet, dessen kleinere Parallelseite Null ist.

3. Wird in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilungspunkt die Parallele zu einer zweiten Seite gezogen, so wird

dadurch auch die dritte Seite in ebensoviele gleiche Teile geteilt (Fig. 36).

Fig. 36.



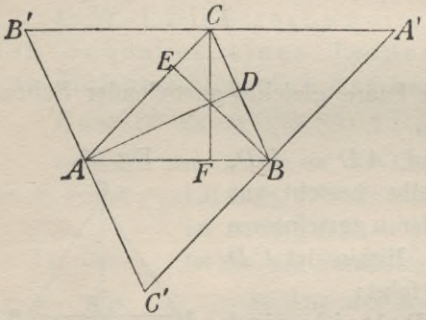

Voraussetzung. $AM = MN = NO = OP = PC$ und $MQ \parallel NR \parallel OS \parallel PT \parallel CB$.

Behauptung. $AQ = QR = RS = ST = TB$.

Beweis. $AQ = QR$ (nach 2.) und $QR = RS = ST = TB$ (nach §. 57, 2).

§. **60. Lehrsatz.** Die drei Höhen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte. (Dritter merkwürdiger Punkt des Dreieckes.)

Fig. 37.




Beweis. Es sei in dem Dreiecke $ABC$ (Fig. 37) $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$.

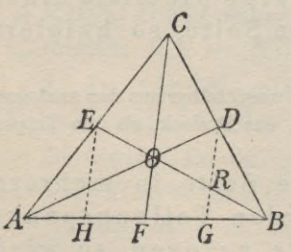
Zieht man durch $A$, $B$, $C$ Parallele zu $BC$, $AC$, $AB$, so erhält man das Dreieck $A'B'C'$. Da $AB' = BC = AC'$, so ist $A$ die Mitte der Seite $B'C'$. Ebenso folgt, daß $B$ die Mitte der Seite $A'C'$ und $C$ die Mitte der Seite $A'B'$ ist. Die Höhen $AD$, $BE$ und $CF$ des Dreieckes $ABC$ sind also die Seitensymmetralen des Dreieckes $A'B'C'$ und müssen daher als solche in demselben Punkte einander schneiden.

Wo liegt der Durchschnittspunkt der 3 Höhen *a)* in einem spitzwinkligen, *b)* in einem rechtwinkligen, *c)* in einem stumpfwinkligen Dreieck?

Dieser Beweis des schon im Altertum bekannten Satzes rührt von Gauß her. Gauß wurde 1777 zu Braunschweig geboren, war Professor an der Universität und Direktor der Sternwarte in Göttingen, wo er 1855 starb. Seine Arbeiten auf dem Gebiete der Mathematik, Physik, Astronomie und Geodäsie sind von unvergänglichem Werte.

§. **61. Lehrsatz.** Die drei Schwerlinien eines Dreieckes, d. i. die Strecken, welche von den drei Eckpunkten zu den Mitten der Gegenseiten gezogen werden, schneiden einander in demselben Punkte, welcher jede Schwerlinie so teilt, daß der an einer Ecke liegende Abschnitt doppelt so groß ist als der andere. (Vierter merkwürdiger Punkt des Dreieckes.)

Fig. 38.




Beweis. Es seien (Fig. 38) $D$, $E$ und $F$ die Mitten der Seiten $BC$, $AC$ und $AB$;

$O$ sei der Schnittpunkt der Schwerlinien $BE$ und $CF$ (§. 24, 3). Zieht man $DG$ und $EH$ parallel zu $CF$, so werden durch dieselben (nach §. 59, 2) $BF$ und $AF$ halbiert. Es ist demnach $BG = GF = FH$, daher (nach §. 59, 3) auch $BR = RO = OE$, somit $BO = 2OE$. Die Schwerlinie $BE$ wird also von einer zweiten Schwerlinie $CF$ in $O$ so geteilt, daß der an der Ecke $B$ liegende Abschnitt derselben doppelt so groß ist als der andere. Zieht man noch die dritte Schwerlinie $AD$, so muß auch sie $BE$ in dieselben zwei Abschnitte teilen und daher durch den Punkt $O$ gehen.

Der Schnittpunkt $O$ der drei Schwerlinien eines Dreieckes heißt der Schwerpunkt desselben.

### 2. Übungssätze.

§. **62.** 1. In jedem Vierecke ist die Summe der Diagonalen größer als die zweier Gegenseiten.

2. Jede in einem Parallelogramme durch den Schnittpunkt der Diagonalen gezogene Strecke wird in diesem Punkte halbiert.

3. Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Rhombus hat von den vier Seiten gleiche Abstände.

4. In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Diagonalen einander gleich.

5. Sind in einem Trapeze die Diagonalen einander gleich, so ist dasselbe gleichschenklig.

6. Die Halbierungspunkte der Seiten eines Parallelogramms bilden die Eckpunkte eines neuen Parallelogramms (§. 59, 1). Ist das erstere ein Rhombus, so ist das letztere ein Rechteck; ist das erstere ein Rechteck, so ist das letztere ein Rhombus; ist das erstere ein Quadrat, ist das letztere auch ein Quadrat.

7. Die Halbierungspunkte der Seiten eines gleichschenkligen Trapezes bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen Parallelogramms.

8. Die Halbierungslinien der vier Winkel eines Parallelogramms (oder der Außenwinkel desselben) schließen ein Rechteck ein.

9. Fällt man von einem Punkte in der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf jeden der Schenkel die Normale, so ist die Summe derselben gleich der zu einem Schenkel gehörigen Höhe des Dreieckes.

10. Verbindet man in einem Parallelogramme die Mitten zweier gegenüberliegender Seiten mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird durch diese Verbindungslinien die andere Diagonale in drei gleiche Teile geteilt.

11. Halbiert man in einem Rhombus die Winkel der Diagonalen, so bilden die Schnittpunkte dieser Halbierungslinien mit den Seiten die Ecken eines Quadrates.

12. Verbindet man in einem Vierecke die Mitten je zweier aufeinanderfolgender Seiten, so entsteht ein Parallelogramm.

13. Verbindet man in einem Vierecke die Mitten zweier gegenüberliegender Seiten mit den Mitten der beiden Diagonalen, so entsteht ein Parallelogramm.

## III. Das Vieleck.

§. **63.** Ein von mehreren Strecken begrenzter Teil der Ebene heißt ein Vieleck oder Polygon.

Ein Vieleck hat so viele Seiten als Winkel und ebensoviele Eckpunkte. Ein Vieleck, dessen alle Winkel hohl sind, heißt hohlwinklig. Nur solche Polygone sollen hier in Betracht gezogen werden.

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten unterscheidet man dreiseitige Vielecke oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke, ...$n$-seitige oder $n$-Ecke.

§. **64.** Eine Strecke, welche zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Eckpunkte eines Polygons verbindet, heißt eine Diagonale.

Durch ganz einfache Schlüsse wird man auf folgende Sätze geleitet:

1. Von jedem Eckpunkte eines $n$-seitigen Polygons lassen sich $n-3$ Diagonalen ziehen.

2. Die Anzahl aller möglichen Diagonalen eines $n$-Eckes ist gleich $\frac{n(n-3)}{2}$.

3. Jedes $n$-Eck läßt sich durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte aus gezogen werden, in $n-2$ Dreiecke zerlegen.

§. **65. Lehrsatz.** Die Summe aller Winkel eines Polygons ist gleich so vielmal zwei Rechten, als die um 2 verminderte Zahl der Seiten anzeigt.

Beweis. Zerlegt man ein $n$-seitiges Vieleck durch Diagonalen, die von einem Eckpunkte ausgehen, in $n-2$ Dreiecke, so ist die Winkelsumme derselben und somit auch des $n$-Eckes $(n-2) . 2\,R$.

Der Beweis könnte auch geführt werden, indem man von einem Punkte im Innern des Polygons zu allen Eckpunkten Strecken zieht.

§. **66.** Zwei Vielecke sind kongruent, wenn in denselben alle Seiten und alle Winkel in derselben Ordnung paarweise gleich sind.

**Lehrsätze.** 1. Zwei Polygone, die sich durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in paarweise kongruente Dreiecke zerlegen lassen, sind kongruent.

Beweis. Legt man die paarweise kongruenten Dreiecke der Reihe nach aufeinander, so fallen auch die Eckpunkte der beiden Polygone aufeinander; also sind diese kongruent.

2. Umgekehrt: Zwei kongruente Polygone werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in paarweise kongruente Dreiecke geteilt.

Beweis. Bringt man zwei kongruente Polygone zur Deckung, so decken einander auch die übereinstimmend gezogenen Diagonalen, mithin auch die dadurch gebildeten Dreiecke.

§. **67.** Zahl der Bestimmungsstücke eines Vieleckes.

Für ein Dreieck sind im allgemeinen drei Stücke erforderlich. Für das rechtwinklige und das gleichschenklige reduziert sich diese Zahl auf 2, für das gleichseitige auf 1 Stück.

Wie groß darf in diesen Fällen höchstens die Zahl der gegebenen Winkel sein?

Da ein Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerschnitten wird, so sind zur Bestimmung desselben im allgemeinen drei Stücke erforderlich. Für das Rechteck und den Rhombus reduziert sich diese Zahl auf zwei, für das Quadrat auf eines.

Für ein Trapez genügen im allgemeinen vier Stücke. Für eines der beiden Dreiecke, in welche es durch eine Diagonale geteilt wird, sind drei Stücke erforderlich; das zweite dieser Dreiecke verlangt nur mehr eines; beim gleichschenkligen Trapez ist kein weiteres Stück notwendig. In ähnlicher Weise wie beim Trapez überzeugt man sich, daß zur Bestimmung eines Trapezoides fünf Bestimmungsstücke erforderlich sind.

Wie viele verlangt das Deltoid?

Aus §. 66 ergibt sich, daß für die Kongruenz zweier $n$-Ecke die Gleichheit von $2n-3$ Stücken erforderlich ist. Daher ist ein $n$-Eck im allgemeinen durch $2n-3$ Stücke bestimmt; die drei nicht gegebenen dürfen jedoch nicht sämtlich Seiten sein. Denn es können höchstens $n-1$ Winkel gegeben sein, weil durch diese auch schon der letzte bestimmt ist; es müssen also mindestens $2n-3-n+1=n-2$ Seiten gegeben sein; von den $n$ Seiten können also höchstens zwei fehlen.

§. **68.** Ein Polygon, in welchem alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind, heißt regelmäßig oder regulär. Unter den Dreiecken ist das gleichseitige Dreieck, unter den Vierecken das Quadrat regulär.

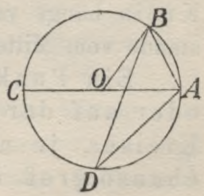
Jeder Winkel eines regulären $n$-Eckes beträgt $2R-\frac{4R}{n}$ (§. 65).

## IV. Der Kreis.

### 1. Allgemeines über den Kreis.

§. **69.** Dreht sich in einer Ebene eine Strecke $OA$ (Fig. 39) um den einen Eckpunkt $O$ herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der Punkt $A$ während dieser Umdrehung eine krumme Linie, welche Kreislinie oder Kreis genannt wird. Der Punkt $O$ heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum des Kreises.

Fig. 39.



Alle Punkte einer Kreislinie sind vom Mittelpunkte derselben gleich weit entfernt. Diese konstante Entfernung heißt der Halbmesser oder Radius des Kreises. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich.

Jeder Teil der Kreislinie heißt ein Bogen (*arcus*) und die ganze Kreislinie die Peripherie des Kreises.

Eine Strecke $AB$, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt Sehne (*chorda*). Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, wie $AC$, so heißt sie ein Durchmesser (*diameter*) des Kreises. Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als ein Halbmesser.

Ein Winkel $AOB$, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt, dessen Schenkel also Halbmesser des Kreises sind, heißt ein Zentriwinkel.

Ein Teil der Kreisfläche, der von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment. Ein Teil der Kreisfläche, der von zwei Halbmessern und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisausschnitt oder Sektor.

Zu jeder Sehne gehören zwei Zentriwinkel, zwei Bogen, wie auch zwei Ausschnitte und zwei Abschnitte, welche im allgemeinen ungleich sind. Wenn jedoch nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, ist stets der hohle Zentriwinkel, ferner derjenige Bogen, welcher kleiner ist als die halbe Peripherie, und derjenige Ausschnitt oder Abschnitt, welcher kleiner ist als die halbe Kreisfläche, zu verstehen.

**§. 70.** Zentrische Symmetrie.

Zwei Punkte $A$ und $A'$ liegen zentrisch bezüglich des Punktes $O$, wenn die Strecke $AA'$ durch $O$ halbiert wird. Der Punkt $O$ heißt das Zentrum. Ein Gebilde heißt zentrisch, wenn es einen Punkt hat, in Bezug auf welchen die Punkte des Gebildes paarweise zentrisch liegen.

Zentrische Gebilde sind:

1. Eine unbegrenzte Gerade. Jeder Punkt derselben kann als Zentrum angenommen werden.
2. Eine Strecke. Symmetriezentrum ist der Halbierungspunkt.
3. Zwei einander halbierende Strecken. Ihr Durchschnittspunkt ist das Zentrum.
4. Jedes Parallelogramm. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen ist das Zentrum.
5. Der Kreis.

**§. 71.** Die Lage eines Punktes in Bezug auf einen Kreis hängt von seinem Zentralabstande, d. i. von seinem Abstande vom Mittelpunkte des Kreises ab.

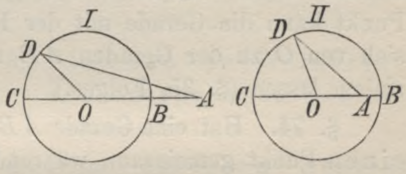
Ein Punkt liegt entweder außerhalb eines Kreises oder auf der Peripherie desselben oder innerhalb des Kreises, je nachdem sein Zentralabstand größer oder ebenso groß oder kleiner ist als der Halbmesser.

Diese Beziehungen, welche unmittelbar aus der Definition des Kreises in §. 69 folgen, gelten auch in ihren Umkehrungen.

Zwei Kreise mit gleichen Halbmessern sind kongruent.

§. 72. **Lehrsatz.** Von allen Strecken, die sich von einem Punkte an die Peripherie eines Kreises ziehen lassen, ist *a)* diejenige die größte, in welcher der Mittelpunkt des Kreises liegt, und *b)* diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

Fig. 40.




Beweis. Ist $A$ (Fig. 40) der gegebene Punkt, und zieht man von demselben durch den Mittelpunkt $O$ des Kreises die Gerade, welche die Peripherie in $B$ und $C$ schneidet, ferner eine beliebige Strecke $AD$ an die Peripherie, so ist

*a)* $AD < DO + AO$, d. i. $AD < AC$;

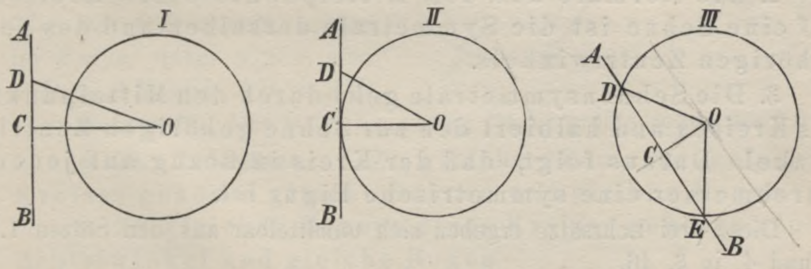
*b)* $AD > AO - DO$ (in $I$), oder $AD > DO - AO$ (in $II$), d. i. $AD > AB$.

## 2. Die Geraden und die Winkel am Kreise.

§. 73. Die Lage einer Geraden in Bezug auf einen Kreis hängt von ihrem Zentralabstande, d. i. von ihrem Abstande vom Mittelpunkte des Kreises ab.

**Lehrsatz.** Eine Gerade hat mit einem Kreise entweder *a)* keinen, oder *b)* einen, oder *c)* zwei Punkte gemeinsam, je nachdem ihr Zentralabstand größer, oder ebenso groß, oder kleiner ist als der Halbmesser.

Fig. 41.




Beweis. *a)* Ist (Fig. 41, $I$) die Normale $OC$ vom Mittelpunkte des Kreises auf die Gerade $AB$ größer als der Halbmesser, so liegt schon der Fußpunkt $C$ der Normalen außerhalb des Kreises, daher auch jeder andere Punkt $D$ der Geraden $AB$, da $OD > OC$ ist.

*b)* Ist (Fig. 41, *II*) die Normale $OC$ von $O$ auf $AB$ gleich dem Halbmesser des Kreises, so liegt ihr Fußpunkt $C$ auf der Peripherie des Kreises; jeder andere Punkt $D$ der Geraden $AB$ aber muß, da $OD > OC$ ist, außerhalb des Kreises liegen.

*c)* Ist endlich (Fig. 41, *III*) die Normale $OC$ von $O$ auf $AB$ kleiner als der Halbmesser, so liegt ihr Fußpunkt $C$ innerhalb des Kreises; die unbegrenzte Gerade $AB$ muß daher, um aus dem Innern des Kreises, der eine geschlossene Figur ist, nach außen zu treten, den Kreis auf jeder Seite von $C$, angenommen in den Punkten $D$ und $E$, treffen. Dann ist $OD = OE$ gleich dem Halbmesser. Einen dritten Punkt kann die Gerade mit der Kreislinie nicht gemeinsam haben, da sich von $O$ zu der Geraden $AB$ nicht mehr als zwei gleiche Strecken ziehen lassen (§. 35, Folges.).

§. **74.** Hat eine Gerade $AB$ (Fig. 41, *II*) mit einer Kreislinie nur einen Punkt gemeinsam, während alle andern Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen, so sagt man: die Gerade und der Kreis berühren einander in jenem Punkte. Eine solche Gerade heißt eine Tangente des Kreises, und der Punkt, den die Tangente mit der Kreislinie gemeinsam hat, der Berührungspunkt.

Hat eine Gerade $AB$ (Fig. 41, *III*) mit einer Kreislinie zwei Punkte gemeinsam, so sagt man: die Gerade schneidet den Kreis in diesen zwei Punkten. Eine solche Gerade heißt eine Sekante des Kreises. Das zwischen den beiden Schnittpunkten liegende Stück $DE$ der Sekante ist eine Sehne.

**Sehnen des Kreises.**

§. **75. Lehrsätze.** 1. Die Gerade aus dem Mittelpunkte des Kreises nach der Mitte einer Sehne ist die Symmetrale derselben und des zugehörigen Zentriwinkels.

2. Die Normale aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne ist die Symmetrale derselben und des zugehörigen Zentriwinkels.

3. Die Sehnensymmetrale geht durch den Mittelpunkt des Kreises und halbiert den zur Sehne gehörigen Zentriwinkel. Daraus folgt, daß der Kreis in Bezug auf jeden Durchmesser eine symmetrische Figur ist.

Diese drei Lehrsätze ergeben sich unmittelbar aus den Sätzen 1. 2. und 4. in §. 46.

§. **76. Lehrsatz.** Durch drei Punkte $A$, $B$ und $C$, welche nicht in einer Geraden liegen, ist ein Kreis unzweideutig bestimmt.

Beweis. Der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte $A$ und $B$ geht, liegt in der Symmetrale der Strecke $AB$ (§. 75, 3); der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch $A$ und $C$ geht, liegt ebenso in der Symmetrale der Strecke $AC$. Der Mittelpunkt eines durch alle drei Punkte gehenden Kreises ist demnach der Schnittpunkt $O$ dieser beiden Symmetralen (§. 25, 5.); der Halbmesser desselben ist $OA = OB = OC$.

Da die zwei Symmetralen einander nur in einem Punkte $O$ schneiden können, so gibt es auch nur einen Kreis, welcher durch die drei Punkte $A$, $B$ und $C$ geht.

§. 77. **Lehrsätze.**

1. Gleichen Sehnen eines Kreises entsprechen gleiche Zentralabstände.
2. Der größeren Sehne entspricht ein kleinerer Zentralabstand.
3. Gleichen Zentralabständen entsprechen gleiche Sehnen.
4. Dem größeren Zentralabstande entspricht eine kleinere Sehne.

Beweis zu 1. Ist (Fig. 42) $AB = CD$ und $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, so ist, wenn man $OA$ und $OC$ zieht, $\triangle AOE \cong COF$; mithin $OE = OF$.

Beweis zu 2. Es sei (Fig. 43) $AB > AC$, $OD \perp AB$ und $OE \perp AC$, so ist, wenn man $DE$ zieht, in dem Dreiecke $ADE$ der Winkel $b > a$, daher $d < c$ und folglich $OD < OE$.

Beweis zu 3. Es sei (Fig. 42) $OE = OF$. Dann ist $\triangle AEO \cong CFO$, daher ist $AE = CF$, folglich auch $AB = CD$.

Beweis zu 4. Es sei (Fig. 43) $OD < OE$, mithin ist $d < c$, daher $b > a$, also $AD > AE$ und $AB > AC$.

Fig. 42.

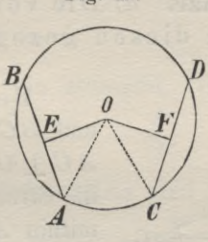
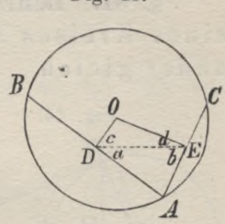



Fig. 43.




**Folgesatz.** Der Durchmesser ist die größte Sehne des Kreises.

§. 78. **Lehrsätze.** 1. Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

2. Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Zentriwinkel und gleiche Bogen.

3. Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sehnen und gleiche Zentriwinkel.

Die Beweise dieser Sätze durch Deckung.

§. **79.** Teilt man die Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Teile, so entspricht jedem derselben ein Zentriwinkel von 1 Grad. Man nennt deshalb auch den 360sten Teil der Peripherie einen Grad (Bogengrad) und teilt den Grad ($^0$) in 60 Bogenminuten ($'$), jede Minute in 60 Bogensekunden ($''$). Da zu gleichen Bogen eines Kreises gleiche Zentriwinkel gehören, so drückt die Zahl der Grade, Minuten und Sekunden eines Kreisbogens zugleich die Zahl der Grade, Minuten und Sekunden des zugehörigen Zentriwinkels aus. In diesem Sinne sagt man, daß der Kreisbogen das Maß des zugehörigen Zentriwinkels ist, obwohl beide ungleichartig sind.

Die Sexagesimalteilung des Kreises stammt aus Babylon.

## Tangenten des Kreises.

§. **80. Lehrsätze.** 1. Die Gerade, welche im Endpunkte eines Halbmessers zu diesem normal ist, ist eine Tangente des Kreises. (Folgt aus §. 73, *b.*)

2. Der Halbmesser eines Kreises nach dem Berührungspunkte ist zur Tangente normal; denn er ist die kürzeste Gerade vom Mittelpunkt zur Tangente.

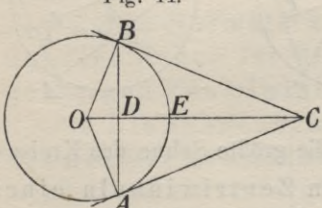
3. Die Normale aus dem Mittelpunkte eines Kreises zur Tangente geht durch den Berührungspunkt.

4. Die zur Tangente eines Kreises im Berührungspunkte errichtete Normale geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Die Beweise für die Umkehrungen 3., 4. werden indirekt geführt.

§. **81. Lehrsätze.** *a)* Die von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen gezogenen Tangenten sind einander gleich.

Fig. 44.




Beweis. Es seien (Fig. 44) $AC$ und $BC$ Tangenten des Kreises $O$, also $AC \perp OA$ und $BC \perp OB$. Zieht man die Strecke $CO$, so ist $\triangle OAC \cong OBC$, mithin $AC = BC$.

Die Sehne $AB$ zwischen den Berührungspunkten des Kreises und der Tangenten $AC$ und $BC$ heißt die Berührungssehne.

*b)* Die Gerade vom Schnittpunkte zweier Tangenten eines Kreises nach dem Mittelpunkte desselben halbiert 1. den von den beiden Tangenten gebildeten und den von den Halbmessern der beiden Berührungspunkte eingeschlossenen Winkel, 2. sie halbiert den zwischen den

Berührungspunkten liegenden Bogen, 3. sie ist die Symmetrale der Berührungssehne.

*c)* Der Winkel zweier Tangenten eines Kreises ist das Supplement des von den Halbmessern der beiden Berührungspunkte gebildeten Winkels.

**Peripheriewinkel.**

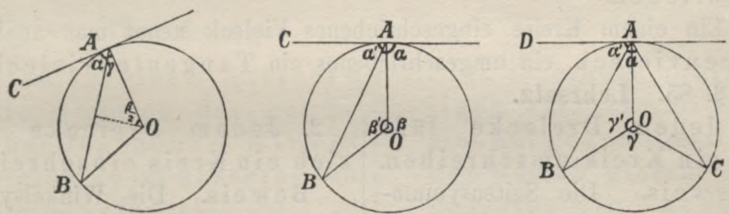
§. 82. Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, heißt ein Peripheriewinkel, wenn seine Schenkel entweder Sehnen sind (Fig. 39), oder der eine eine Sehne, der andere eine Tangente ist. Als zugehöriger Bogen eines Zentriwinkels oder Peripheriewinkels wird jener bezeichnet, der zwischen den Schenkeln liegt.

§. 83. **Lehrsatz.** Ein Peripheriewinkel ist gleich dem halben Zentriwinkel auf demselben Bogen.

1. Ein Schenkel des Peripheriewinkels ist eine Sehne, der zweite eine Tangente.

*a)* Der Peripheriewinkel ist ein spitzer. (Fig. 45, *a.*) $\alpha = \frac{\beta}{2}$ als Komplemente zu dem Winkel $\gamma$.

Fig. 45, *a.* Fig. 45, *b.* Fig. 45, *c.*



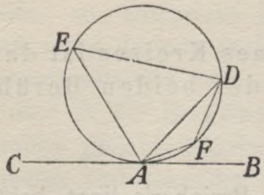

*b)* Der Peripheriewinkel ist ein stumpfer. (Fig. 45, *b.*) Es ist $\alpha = 2R - \alpha' = 2R - \frac{\beta'}{2} = \frac{4R - \beta'}{2} = \frac{\beta}{2}$.

2. Beide Schenkel des Peripheriewinkels sind Sehnen. (Fig. 45, *c.*) Nach 1 ist $\alpha + \alpha' = \frac{\gamma + \gamma'}{2}$ und $\alpha' = \frac{\gamma'}{2}$, daher $\alpha = \frac{\gamma}{2}$.

**Folgesätze.** *a)* Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen eines Kreises aufstehen, sind einander gleich. Denn jeder derselben ist gleich dem halben Zentriwinkel auf demselben Bogen.

*b)* Der Winkel, den eine Tangente eines Kreises mit einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne bildet, ist jedem Peripheriewinkel über dieser Sehne im entgegengesetzten Kreisabschnitte gleich. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle AED$ und $\sphericalangle CAD = \sphericalangle AFD$ (Fig. 46).

Fig. 46.




*c)* Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen. (Umkehrung von *a.*)

*d)* Zwei Peripheriewinkel, welche über derselben Sehne in den entgegengesetzten Kreisabschnitten stehen, ergänzen einander zu zwei Rechten. Denn die Summe ihrer Zentriwinkel beträgt vier Rechte.

*e)* Ein Winkel im Halbkreise, d. h. ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, ist ein rechter.

Denn der Zentriwinkel auf demselben Bogen ist ein gestreckter.

### 3. Dem Kreise ein- und umgeschriebene Dreiecke und Vierecke.

**§. 84.** Ein Vieleck, dessen Eckpunkte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen desselben sind, heißt dem Kreise eingeschrieben; der Kreis ist dem Vielecke umgeschrieben.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben, der Kreis ist dem Vielecke eingeschrieben.

Ein einem Kreise eingeschriebenes Vieleck nennt man auch ein Sehnenvieleck, ein umgeschriebenes ein Tangentenvieleck.

**§. 85. Lehrsatz.**

1. Jedem Dreiecke läßt sich ein Kreis umschreiben.

Beweis. Die Seitensymmetralen eines Dreieckes (Fig. 29) schneiden einander in einem Punkte $O$, der von den drei Eckpunkten denselben Abstand $OA$ hat (§. 47, 1). Beschreibt man daher aus $O$ mit $OA$ einen Kreis, so geht er durch alle Eckpunkte des Dreieckes.

2. Jedem Dreiecke läßt sich ein Kreis einschreiben.

Beweis. Die Winkelsymmetralen eines Dreieckes (Fig. 30) schneiden einander in einem Punkte $O$, der von den drei Seiten denselben Abstand $OD$ hat (§. 47, 2). Beschreibt man daher aus $O$ mit $OD$ einen Kreis, so berührt er alle drei Seiten des Dreieckes.

**Zusätze.** *a)* Da in einem gleichseitigen Dreieck die Winkel- und Seitensymmetralen zusammenfallen, so fallen auch die Mittelpunkte des ein- und umgeschriebenen Kreises zusammen. Da die Winkel- und Seitensymmetralen zugleich die Höhen und Schwerlinien des gleichseitigen Dreieckes sind, so ergibt sich:

Für das gleichseitige Dreieck ist der Radius des eingeschriebenen Kreises $\frac{1}{3}$, jener des umgeschriebenen $\frac{2}{3}$ der Höhe.

*b)* Der Mittelpunkt des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises liegt innerhalb oder außerhalb des Dreieckes, je nachdem dasselbe spitzwinklig oder stumpfwinklig ist; für das rechtwinklige Dreieck ist der Halbierungspunkt der Hypotenuse der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises. (§. 83, und Folgesatz *e.*)

*c)* Aus dem Zusatze zu §. 47, 2 folgt, daß es außer dem in 2. angegebenen Kreise auch noch drei Kreise gibt, welche je eine Seite des Dreieckes und die Verlängerungen der beiden andern berühren. Man nennt diese drei Kreise äußere Berührungskreise des Dreieckes, während der obige Kreis der innere Berührungskreis genannt wird.

### §. 86. Lehrsätze.

1. In jedem Sehnenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel einander gleich; jede derselben ist $2R$.

Folgt aus §. 83, *d*.

2. In jedem Tangentenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Folgt aus §. 81, *a*.

### §. 87. Umkehrungen.

1. Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Winkel gleich, so ist dasselbe ein Sehnenviereck.

Beweis indirekt. Würde der durch drei Eckpunkte $A$, $B$, $C$ beschriebene Kreis nicht auch durch den vierten $D$ gehen, so müßte er die Seite $CD$ selbst oder ihre Verlängerung in einem Punkte schneiden, durch dessen Verbindung mit $A$ man ein Sehnenviereck erhielte. Dann aber würde sich ergeben, daß ein Außenwinkel eines Dreieckes einem inneren gegenüberliegenden gleich wäre.

2. Sind in einem hohlwinkligen Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Tangentenviereck.

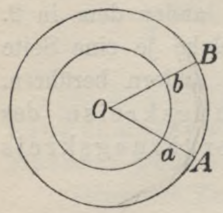
Beweis indirekt. Würde der drei Seiten des Viereckes berührende Kreis nicht auch die vierte berühren, so könnte von dem einen Endpunkte dieser vierten Seite eine Tangente an den Kreis gezogen werden, wodurch man ein Tangentenviereck erhielte. Dann aber würde sich ergeben, daß eine Seite eines Dreieckes der Differenz der beiden andern gleich wäre.

Welche Vierecke können *a)* Sehnenvierecke, *b)* Tangentenvierecke sein? Wo liegen die Mittelpunkte der Kreise?

### 4. Lage zweier Kreise gegeneinander.

§. 88. Zwei Kreise, die denselben Mittelpunkt haben, heißen konzentrisch, wie die Kreise in Fig. 47.

Fig. 47.




Die Fläche, welche zwischen den Peripherien zweier konzentrischer Kreise enthalten ist, wird ein Kreisring, und ein Teil desselben, wie $aABb$, ein Ringausschnitt genannt. Den Unterschied $aA$ der beiden Halbmesser nennt man die Breite des Ringes oder des Ringausschnittes.

§. 89. Zwei Kreise, die verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man exzentrisch, und den Strahl, welcher durch die Mittelpunkte gelegt wird, die Zentrale. Die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte heißt der Zentralabstand. Zwei exzentrische Kreise haben entweder keinen oder einen oder zwei Punkte miteinander gemeinsam. Drei Punkte können zwei Kreise nicht gemeinsam haben, da sie sonst (nach §. 76) ganz zusammenfielen.

Haben zwei Kreise nur einen Punkt gemeinsam, so berühren sie einander, und zwar von außen, wenn sie übrigens ganz außerhalb einander liegen; von innen, wenn übrigens der eine Kreis innerhalb des andern liegt. Haben zwei Kreise zwei Punkte gemeinsam, so schneiden sie einander in diesen Punkten. Die gemeinsame Fläche zweier sich schneidender Kreise heißt eine Linse, jedes der nicht gemeinsamen Stücke ein Mond *(lunula)*.

Unter dem Winkel zweier einander schneidenden Kreise versteht man den Winkel der durch einen ihrer Schnittpunkte an sie gezogenen Tangenten.

§. 90. Da jeder Durchmesser eines Kreises eine Symmetrale desselben ist, so liegen zwei exzentrische Kreise bezüglich ihrer Zentrale symmetrisch. Wenn sie nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, so muß mithin dieser in der Zentrale liegen. Da er der gemeinsame Endpunkt zweier Radien ist, so haben die beiden Kreise in diesem Punkt eine gemeinsame auf der Zentrale senkrecht stehende Tangente. Haben zwei exzentrische Kreise einen Punkt außerhalb der Zentrale gemeinsam, so müssen sie noch einen zweiten zu dem ersten bezüglich der Zentrale symmetrisch liegenden Punkt gemeinschaftlich haben. Die Zentrale ist die Symmetrale der gemeinschaftlichen Sehne, der zugehörigen Zentriwinkel und Bogen.

§. 91. Folgende Lagen zweier exzentrischer Kreise sind möglich:

1. Die beiden Kreise schließen einander aus. (Fig. 48.) Ist $c$ der Zentralabstand, sind $R$ und $r$ die beiden Radien, so ist $c > R + r$.

Denn liegt $P$ außerhalb der beiden Kreise, so ist $PO > R$, $PO' > r$, daher $O\,O' > R + r$.

Fig. 48.

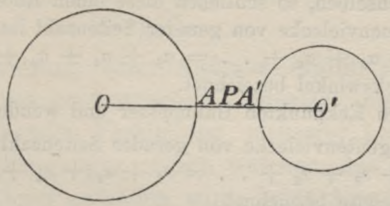
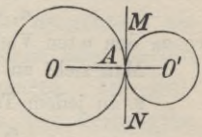



Fig. 49.




2. Die beiden Kreise berühren einander von außen (Fig. 49); es ist $c = R + r$.

3. Die beiden Kreise schneiden einander. (Fig. 50.) Es ist $R + r > c > R - r$. (§. 34, 1. und 2.)

4. Die beiden Kreise berühren einander von innen. (Fig. 51.) Es ist $c = R - r$.

5. Der kleinere Kreis wird vom größeren eingeschlossen. (Fig. 52.) Da $OA' < R$ (§. 72) und $O'A' = r$, so ist $OA' - O'A' < R - r$, oder $c < R - r$.

Fig. 50.

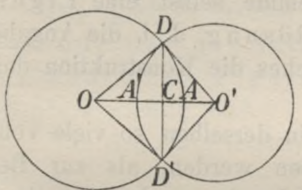



Fig. 51.

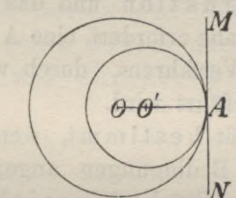
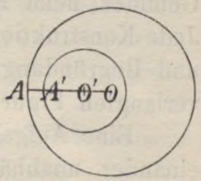



Fig. 52.




Da in diesen fünf Sätzen alle möglichen einander ausschließenden Fälle enthalten sind, die bezüglich des Zentralabstandes im Vergleich zur Summe und Differenz der Halbmesser der beiden Kreise stattfinden können, so läßt sich auch die Richtigkeit der Umkehrungen dieser Sätze indirekt beweisen.

### 5. Übungssätze.

§. **92.** 1. Von allen Sehnen, die durch einen Punkt innerhalb eines Kreises gezogen werden können, ist diejenige die kleinste, welche zu dem durch diesen Punkt gezogenen Halbmesser normal ist. (§. 77, 4.)

2. Zwei Sehnen, welche nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, können einander nicht halbieren.

3. Kreisbogen zwischen parallelen Sehnen sind einander gleich.

Beweis aus der Gleichheit der Wechselwinkel und §. 83, *c*.

4. Die Endpunkte zweier gleicher nicht zusammenstoßender Bogen eines Kreises bilden die Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes.

5. Die Endpunkte zweier gleicher und paralleler Sehnen eines Kreises bilden die Eckpunkte eines Rechteckes.

6. Alle einer Tangente eines Kreises parallelen Sehnen werden durch den zum Berührungspunkte gezogenen Durchmesser halbiert.

7. Zieht man durch die Eckpunkte eines in einen Kreis beschriebenen Rechteckes Tangenten an denselben, so schließen diese einen Rhombus ein. (§. 81.)

8. In jedem Sehnenvielecke von gerader Seitenzahl ist

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots,$$

wo $\alpha_n$ den $n$ten Vieleckswinkel bezeichnet.

Man zieht zu den Eckpunkten Halbmesser und wendet §. 83 an.

9. In jedem Tangentenvielecke von gerader Seitenzahl ist

$$s_1 + s_3 + s_5 + \ldots = s_2 + s_4 + s_6 + \ldots,$$

wo $s_n$ die $n$te Vielecksseite bezeichnet.

10. Wenn drei Kreise, welche durch die drei Eckpunkte eines Dreieckes gehen, einander paarweise auf den Seiten desselben schneiden, so gehen sie durch einen gemeinsamen Punkt. (§. 86 und 87.)

## V. Konstruktionsaufgaben.

§. 93. Eine geometrische Konstruktionsaufgabe (§. 6) spricht die Forderung aus, ein geometrisches Gebilde herzustellen, welches gegebenen Bedingungen entspricht. Die Herstellung des bezüglichen Gebildes heißt Konstruktion und das Gebilde selbst eine Figur. Jede Konstruktionsaufgabe erfordert eine Auflösung, d. i. die Angabe und Begründung des Verfahrens, durch welches die Konstruktion der verlangten Figur ausgeführt wird.

Eine Aufgabe heißt bestimmt, wenn in derselben so viele voneinander unabhängige Bedingungen angegeben werden, als zur Bestimmung der gesuchten Stücke hinreichend, aber auch erforderlich sind; enthält eine Aufgabe weniger Bedingungen, so heißt sie unbestimmt; enthält sie mehr Bedingungen, so heißt sie überbestimmt; z. B. ein Dreieck aus einer Seite und den drei Winkeln zu konstruieren. Eine bestimmte Aufgabe läßt entweder eine einzige Auflösung oder eine gewisse, genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen zu und heißt dann bezüglich eindeutig bestimmt oder mehrdeutig bestimmt. Eine unbestimmte Aufgabe hat unendlich viele Auflösungen. Eine überbestimmte Aufgabe ist im allgemeinen unlösbar, da in der Regel die gegebenen Stücke den Eigenschaften der verlangten Figur widersprechen.

Eine Konstruktionsaufgabe ist als gelöst anzusehen, wenn sie auf Aufgaben zurückgeführt wird, deren Auflösung man als selbstverständlich voraussetzen muß, und die daher Forderungssätze oder Postulate heißen.

Die Forderungssätze der Planimetrie sind:

1. Durch zwei gegebene Punkte eine Gerade von beliebiger Länge zu ziehen.

2. Um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben.

Zur wirklichen Ausführung dieser beiden Postulate bedient man sich des Lineals und des Zirkels.

§. **94.** Die Auflösung einer Aufgabe ergibt sich manchmal als unmittelbare Folge eines geometrischen Lehrsatzes, meistens aber beruht sie auf der entsprechenden Verbindung mehrerer Lehrsätze. Die Entwicklung des Gedankenganges, durch welchen das zu der verlangten Figur führende Verfahren gefunden wird, heißt Analysis.

Aus der Analysis ergibt sich die Konstruktion, wie auch der Beweis, der die Richtigkeit der Konstruktion zu zeigen hat.

Zu dem Beweise tritt häufig noch die Determination hinzu, d. i. die Erörterung der Frage, unter welchen Bedingungen die Lösung möglich ist, und ob der Aufgabe nur eine oder mehrere Lösungen genügen.

Die vollständige Auflösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe enthält demnach im allgemeinen vier Teile: die Analysis, die Konstruktion, den Beweis und die Determination.

Die Analysis bedient sich verschiedener Methoden, von denen die Methode der geometrischen Örter, die der Hilfsfiguren, der ähnlichen Figuren und der algebraischen Analysis besonders wichtig sind.

Von den zwei letzteren Methoden wird erst später die Rede sein können.

## 1. Fundamental-Aufgaben.

§. **95.** Diejenigen Konstruktionsaufgaben, welche als die einfachsten am häufigsten Anwendung finden und deren Auflösung bei zusammengesetzteren Aufgaben als bekannt vorausgesetzt wird, bezeichnet man mit dem Namen Fundamental-Aufgaben.

1. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn seine drei Seiten $a$, $b$ und $c$ gegeben sind.

Die Eckpunkte eines Dreieckes werden mit $A$, $B$, $C$, die Winkel an denselben mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, die gegenüberliegenden Seiten mit $a$, $b$, $c$ bezeichnet.

Analysis. Durch die Seite $a$ sind zwei Eckpunkte $B$ und $C$ des gesuchten Dreieckes $ABC$ bestimmt. Soll der dritte Eckpunkt $A$ von $C$ den Abstand $b$ haben, so muß er in der Kreislinie liegen, die um $C$ mit dem Halbmesser $b$ beschrieben wird; soll ferner $A$ von $B$ den Abstand $c$ haben, so muß er auch in der Kreislinie liegen, die um $B$ mit dem Halbmesser $c$ beschrieben wird; der Punkt $A$ kann daher nur in dem Durchschnitte dieser beiden Kreislinien liegen.

Konstruktion. Sie ergibt sich aus der Analysis.

Der Beweis liegt unmittelbar in der Konstruktion.

Determination. Die Seiten $a$ und $b$ sind beliebig; für $c$ gilt die Bedingung $a + b > c > a - b$ (§. 34, 1. und 2.).

Besondere Fälle sind die Aufgaben:

*a)* Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Grundlinie und ein Schenkel gegeben sind. (Determination?)

*b)* Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, wenn seine Seite gegeben ist.

2. Ein Dreieck zu konstruieren, welches mit einem gegebenen Dreiecke kongruent ist.

Konstruktion mit Hilfe der drei Seiten des gegebenen Dreieckes nach Aufgabe 1.

3. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte aufzutragen.

Auflösung. Man schneide vom Scheitel des gegebenen Winkels aus von dessen Schenkeln gleiche Stücke ab und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke, wodurch man ein gleichschenkliges Dreieck erhält; dann konstruiere man (nach Aufg. 2) ein ihm kongruentes Dreieck so, daß der Scheitel des neuen Dreieckes in den gegebenen Punkt und ein Schenkel in die gegebene Gerade fällt.

Für die Konstruktion ist es nicht notwendig, die Grundlinien der beiden gleichschenkligen Dreiecke zu zeichnen.

4. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite und die ihr anliegenden Winkel gegeben sind.

Man trage an die gegebene Seite z. B. $a$ in ihren Endpunkten die gegebenen Winkel $\beta$ und $\gamma$ auf; der Durchschnitt $A$ der beiden Schenkel dieser Winkel ist der dritte Eckpunkt des gesuchten Dreieckes.

Der Beweis liegt in der Konstruktion.

Determination. Es gibt nur dann ein Dreieck, wenn $\beta + \gamma < 2R$ ist.

5. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

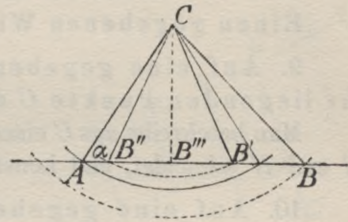
Man konstruiere den gegebenen Winkel, mache dessen Schenkel gleich den gegebenen Seiten und ziehe zwischen den Endpunkten eine Strecke. (Determination?)

Als spezieller Fall:

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die beiden Katheten gegeben sind.

6. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten $a$ und $b$ und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel $\alpha$ gegeben sind. (Fig. 53.)

Fig. 53.




Konstruktion. Man konstruiere den gegebenen Winkel $\alpha$ und trage auf dem einen Schenkel die diesem Winkel anliegende Seite $b$ auf; um den Endpunkt $C$ beschreibe man mit der andern gegebenen, dem Winkel $\alpha$ gegenüberliegenden Seite $a$ als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher den zweiten Schenkel des Winkels $\alpha$ in $B$ schneidet, und ziehe die Strecke $BC$; $ABC$ ist dann das gesuchte Dreieck.

Der Beweis liegt in der Konstruktion.

Determination. Der um $C$ mit $a$ beschriebene Kreisbogen schneidet den zweiten Schenkel des Winkels $\alpha$ in einem einzigen Punkte $B$, wenn $a > b$ ist, da der andere Schnittpunkt in die Ergänzung des Halbstrahles $AB$ fällt; man erhält ein Dreieck $ABC$, die Aufgabe ist eindeutig bestimmt. Ist $a < b$, so erhält man zwei nicht kongruente Dreiecke ($ACB'$ und $ACB''$) oder eines ($ACB'''$) oder gar keines, je nachdem $a \gtreqless CB'''$ ist, wenn $CB'''$ der Abstand des Punktes $C$ von dem zweiten Schenkel von $\alpha$ ist. Ein Dreieck erhält man auch, wenn $a = b$ ist.

Determination. Für $a > b$ muß $\alpha < 180^0$ sein. Für $a \leqq b$ muß $\alpha < 90^0$ sein.

Ein spezieller Fall ist die eindeutig bestimmte Aufgabe:

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

7. Die Symmetrale einer gegebenen Strecke $AB$ zu konstruieren.

Man beschreibe um $A$ und $B$ mit demselben Halbmesser nach oben und unten Kreisbogen, die einander in $C$ und $D$ schneiden; diese Punkte haben von $A$ und $B$ gleiche Abstände, folglich ist die Gerade $CD$ die Symmetrale der Strecke $AB$ (§. 45, 1).

Dieselbe Konstruktion liefert auch die Lösung für die Aufgabe:

Eine gegebene Strecke zu halbieren.

8. Die Symmetrale eines gegebenen Winkels $ACB$ zu konstruieren.

Man bestimme auf den Schenkeln durch Beschreibung eines Kreisbogens zwei Punkte $M$ und $N$, welche vom Scheitel $C$ gleich weit abstehen, und konstruiere die Symmetrale der Strecke $MN$; dieselbe ist auch die Symmetrale des Winkels $ACB$.

Dies ist auch die Lösung für die gleichbedeutende Aufgabe:

Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

9. Auf eine gegebene Gerade $AB$ von einem außer ihr liegenden Punkte $C$ die Normale zu fällen.

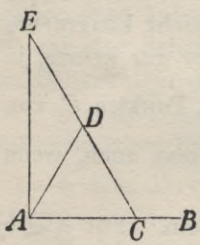
Man beschreibe aus $C$ einen Kreisbogen, welcher $AB$ in den Punkten $M$ und $N$ schneidet, und konstruiere die Symmetrale der Strecke $MN$.

10. Auf eine gegebene Gerade $AB$ in einem Punkte $C$ derselben die Normale zu errichten.

Man mache auf der Geraden $CM = CN$ und konstruiere die Symmetrale der Strecke $MN$.

11. Auf eine gegebene Strecke $AB$ in einem Endpunkte $A$ derselben die Normale zu errichten (Fig. 54).

Fig. 54.




Konstruktion. Man schneide von der gegebenen Strecke ein Stück $AC$ ab, beschreibe darüber das gleichseitige Dreieck $ACD$, verlängere die Seite $CD$ um ihre eigene Länge bis $E$ und ziehe die Strecke $AE$; diese ist die gesuchte Normale.

Beweis. $CAD = 60^0$ und $DAE = \frac{1}{2} ADC = 30^0$; daher $CAE = 90^0$.

12. Zu einer gegebenen Geraden $AB$ durch einen außerhalb derselben gegebenen Punkt $C$ die Parallele zu ziehen.

Auflösung 1. Man ziehe durch $C$ eine Gerade, welche $AB$ in $D$ schneidet, und trage in $C$ einen Winkel $DCE = ADC$ so auf, daß er zu $ADC$ Wechselwinkel wird; der zweite Schenkel $CE$ des konstruierten Winkels ist die gesuchte Parallele.

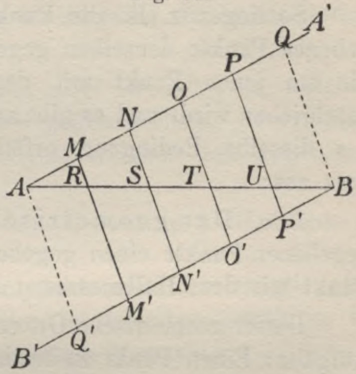
Auflösung 2. Man mache $CF \perp AB$ und $CE \perp CF$; dann ist $CE \parallel AB$.

Auflösung 3. Man ziehe durch $C$ eine Gerade, welche $AB$ in $D$ schneidet, und beschreibe um $D$ mit dem Halbmesser $CD$ einen Kreisbogen, welcher $AB$ in $E$ schneidet; beschreibt man mit demselben Halbmesser um $C$ und $E$ zwei Kreisbogen, die einander in $F$ schneiden, so ist $CF \parallel AB$ (§. 53, 3).

13. Eine gegebene Strecke $AB$ (Fig. 36) in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Man ziehe von $A$ unter einem beliebigen Winkel einen Strahl $AC$, trage auf ihm eine beliebige Strecke sovielmal auf, als gleiche Theile verlangt werden, verbinde den Endpunkt $C$ mit $B$ durch die Strecke $CB$ und ziehe zu dieser auch durch die übrigen Punkte die Parallelen $MQ$, $NR$, $OS$, $PT$; dadurch wird die gegebene Strecke in die verlangte Anzahl gleicher Teile geteilt (§. 59, 3).

Fig. 55.




Die Konstruktion der vielen Parallelen kann vermieden werden (Fig. 55). Man lege durch die Endpunkte der zu teilenden Strecke die Parallelen $AA'$ und $BB'$, trage auf jeder so viele gleiche Teile auf, als $AB$ enthalten soll und verbinde die Teilungspunkte, wie aus der Figur ersichtlich ist. Dann ist $AR = RS = ST = TU = UB$ (§. 53, 4).

§. **96.** 1. Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

Mittels der Symmetralen zweier nicht paralleler Sehnen.

2. Einen Kreisbogen zu halbieren (§. 78, 1).

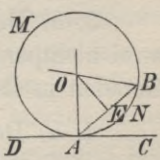
3. Durch einen gegebenen Punkt auf der Peripherie eines Kreises an diesen die Tangente zu ziehen (§. 80, 1).

4. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb eines Kreises an diesen Tangenten zu ziehen.

Ist $C$ (Fig. 44) der gegebene Punkt und $O$ der Mittelpunkt des Kreises, so ziehe man die Strecke $CO$, beschreibe über dieser als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten $A$ und $B$ schneidet; die Geraden $CA$ und $CB$ sind die gesuchten Tangenten. (§ 80, § 83, e.)

5. Über einer Strecke als Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, in dem jeder Peripheriewinkel über dieser Sehne einem gegebenen Winkel gleich ist.

Fig. 56.




Es sei $BAC$ (Fig. 56) der gegebene Winkel und $AB$ die gegebene Strecke. Man konstruiere zu $AB$ die Symmetrale $EO$, ziehe $AO \perp AC$, und beschreibe um den Schnittpunkt $O$ der Geraden $EO$ und $AO$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AO = BO$ einen Kreis. Dann ist (§. 83, $b$) $AMB$ der Kreisbogen, in welchem der gegebene Winkel $BAC$, und $ANB$ der Kreisbogen, in dem sein Nebenwinkel $BAD$ als Peripheriewinkel über der Sehne $AB$ liegt.

## 2. Methode der geometrischen Örter.

§. **97.** Eine Linie oder Fläche von solcher Beschaffenheit, daß alle in ihr liegenden Punkte, aber auch nur diese, einer gewissen gegebenen Bedingung Genüge leisten, heißt der geometrische Ort dieser Punkte.

So liegen z. B. alle Punkte einer Ebene, welche von einem gegebenen Punkte denselben gegebenen Abstand haben, in der Kreislinie, die um jenen Punkt mit dem gegebenen Abstande als Halbmesser beschrieben wird, und es gibt außerdem keinen andern Punkt der Ebene, der dieselbe Bedingung erfüllt. Man drückt dies durch folgenden Satz aus:

1. *a)* Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand $a$ haben, ist der um diesen Punkt mit dem Halbmesser $a$ beschriebene Kreis.

Dieser geometrische Ort enthält die Lösungen der unbestimmten Aufgabe: Einen Punkt zu bestimmen, der von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

Ein anderer Ausdruck für denselben geometrischen Ort ist:

1. *b)* Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Halbmesser $a$ haben, ist der um diesen Punkt mit dem Halbmesser $a$ beschriebene Kreis.

Ebenso ergeben sich aus bekannten geometrischen Lehrsätzen folgende geometrische Örter:

2. *a)* Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben, ist die Symmetrale ihrer Verbindungsstrecke.

2. *b)* Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, ist die Symmetrale ihrer Verbindungsstrecke.

3. *a)* Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände haben, ist die Symmetrale dieses Winkels.

3. *b)* Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei nichtparallele Gerade berühren, ist die Symmetrale des von den Geraden in ihrem Schnittpunkte gebildeten Winkels.

4. *a)* Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Geraden auf einer bestimmten Seite derselben einen gegebenen Abstand $a$ haben, ist die zu der Geraden auf derselben Seite in dem Abstande $a$ gezogene Parallele.

4. *b)* Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser $a$ haben und eine gegebene Gerade auf einer bestimmten Seite derselben berühren, ist die zu der Geraden auf derselben Seite in dem Abstande $a$ gezogene Parallele.

5. Der geometrische Ort der Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke, welche eine gegebene Hypotenuse haben, ist der über dieser als Durchmesser beschriebene Kreis.

6. Der geometrische Ort der Scheitel aller Dreiecke, in welchen einer gegebenen Seite ein gegebener Winkel gegenüberliegt, ist der über der Seite als Sehne beschriebene Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel faßt.

Wie man einen solchen Kreisbogen konstruiert, wurde im §. 96, Aufgabe 5, angegeben.

7. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben berühren, ist die in diesem Punkte zu der Geraden errichtete Normale.

8. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berühren, ist die durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehende Gerade.

9. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Halbmesser haben und einen gegebenen Kreis berühren, ist ein mit diesem konzentrischer Kreis, dessen Halbmesser gleich ist der Summe oder der Differenz der beiden gegebenen Halbmesser, je nachdem die Berührung von außen oder von innen stattfindet.

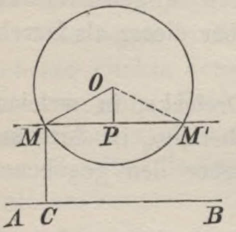
§. **98.** Ist für einen Punkt ein einziger geometrischer Ort gegeben, so ist dadurch die Lage des Punktes nicht bestimmt, da es unzählig viele Punkte gibt, welche in diesem geometrischen Orte liegen. Sind dagegen für einen Punkt zwei geometrische Örter bekannt, so gibt es nur einen, oder eine bestimmte Anzahl von Punkten, welche in beiden geometrischen Örtern liegen.

Die Methode der geometrischen Örter besteht nun darin, daß man bei Aufgaben, deren Lösung von der Bestimmung eines Punktes abhängt, aus den gegebenen Bedingungen zwei Linien (Gerade oder Kreise) als geometrische Örter des Punktes findet, indem man zu diesem Zwecke zunächst nur die eine Bedingung, welche der Punkt erfüllen soll, beachtet und von der andern ganz absieht, hierauf ebenso nur die zweite Bedingung ins Auge faßt und die erste unbeachtet läßt. Die gemeinsamen Punkte der so gefundenen zwei geometrischen Örter sind dann die gesuchten Punkte.

Folgende Aufgaben mögen als Beispiele dienen.

1. **Einen Punkt zu bestimmen, der von einer gegebenen Geraden $AB$ (Fig. 57) und von einem gegebenen Punkte $O$ außerhalb der Geraden denselben gegebenen Abstand $a$ hat.**

Fig. 57.




Analysis. Es sei $M$ der verlangte Punkt. Da $M$ von $AB$ den Abstand $a$ haben soll, so ist der g. Ort für $M$ die zu $AB$ im Abstande $CM = a$ gezogene Parallele $MM'$; da ferner $M$ von $O$ den Abstand $a$ haben soll, so ist die um $O$ mit $OM = a$ beschriebene Kreislinie ein zweiter g. Ort für $M$; also liegt $M$ im Durchschnitte der beiden Örter.

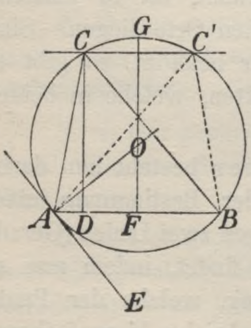
Konstruktion. Man ziehe zu $AB$ in dem Abstande $CM = a$ die Parallele $MM'$ und beschreibe aus $O$ mit dem Halbmesser $a$ einen Kreis, welcher die gezogene Parallele in dem Punkte $M$ ($M'$) schneidet; dieser Punkt ist der gesuchte Punkt.

Beweis. Derselbe folgt unmittelbar aus der Konstruktion.

Determination. Die Aufgabe hat zwei Auflösungen, oder nur eine, oder gar keine, je nachdem der um $O$ beschriebene Kreis die Parallele $MM'$ schneidet, oder berührt, oder gar nicht trifft. Zieht man $OP \perp MM'$, so treten diese drei Fälle ein, je nachdem $a > OP$, oder $a = OP$, oder $a < OP$ ist.

2. **Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite $c$, der ihr gegenüberliegende Winkel $\gamma$ und die Höhe $h$ auf diese Seite gegeben sind.**

Fig. 58.




Analysis. Es sei $ABC$ (Fig. 58) das gesuchte Dreieck, in welchem $AB = c$, $ACB = \gamma$ und $CD = h$ ist. Durch die Seite $AB$ sind die Eckpunkte $A$ und $B$ gegeben; somit ist nur noch der Eckpunkt $C$ zu bestimmen. Da $ACB = \gamma$ sein soll, so ist der g. Ort für $C$ ein über $AB$ als Sehne beschriebener Kreisbogen, der den Winkel $\gamma$ als Peripheriewinkel faßt; da ferner die Höhe des Dreieckes, d. i. der Abstand des Scheitels von der Grundlinie $= h$ sein soll, so ist ein zweiter Ort für $C$ die in dem Abstande $h$ zu $AB$ parallel gezogene Gerade; $C$ ist also durch den Durchschnitt dieser Örter gegeben.

Konstruktion. An $AB = c$ lege man in $A$ einen Winkel $BAE = \gamma$, ziehe $AO \perp AE$ und zu $AB$ die Symmetrale $FG$, welche die Normale $AO$ in $O$ trifft. Beschreibt man nun aus $O$ mit $OA$ als Halbmesser einen Kreisbogen und zieht in dem Abstande $CD = h$ zu $AB$ die Parallele $CC'$, welche den Kreisbogen in $C$ schneidet, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.

Beweis. In dem Dreiecke $ABC$ ist nach der Konstruktion $AB = c$, der Winkel $ACB = \gamma$ und die Höhe $CD = h$.

Determination. Man erhält zwei Dreiecke $ABC$ und $ABC'$, welche jedoch kongruent sind, oder nur ein Dreieck oder gar keines, je nachdem $h < FG$ oder $h = FG$ oder $h > FG$ ist.

### 3. Methode der Hilfsfiguren.

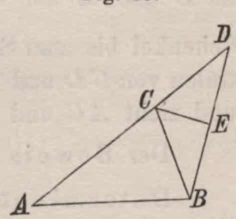
**§ 99.** Bei der Methode der Hilfsfiguren nimmt man zum Zwecke der Analysis eine vorläufige Figur als Lösung der gestellten Aufgabe an und untersucht unter Anwendung von geometrischen Lehrsätzen den Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken, indem man diejenigen gegebenen Bestimmungsstücke, die in der angenommenen Figur nicht unmittelbar vorkommen, durch entsprechende Hilfslinien mit derselben in Verbindung bringt und dadurch eine konstruierbare Hilfsfigur ermittelt, aus welcher sich die in der Aufgabe verlangte Figur herleiten läßt.

Als Beispiele sollen folgende Aufgaben durchgeführt werden:

1. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite $c$, ein anliegender Winkel $\alpha$ und die Summe $s$ der beiden andern Seiten gegeben sind.

Analysis. Man nehme vorläufig irgend ein Dreieck $ABC$ (Fig. 59) als das verlangte an, so daß $AB = c$, $BAC = \alpha$ und $BC + AC = s$ ist. Da zur Auflösung alle gegebenen Stücke zu benützen sind, so muß die Strecke $s$, welche in der Figur selbst nicht unmittelbar vorkommt, in geeigneter Weise mit ihr in Verbindung gebracht werden. Verlängert man zu diesem Zwecke $AC$ um die der Seite $BC$ gleiche Strecke $CD$ und zieht $BD$, so erhält man das Hilfsdreieck $BAD$, in welchem die Seiten $AB = c$ und $AD = s$, sowie der Winkel $BAD = \alpha$ bekannt sind, welches daher konstruiert werden kann. Von diesem Dreieck aber gelangt man zu dem gesuchten Dreiecke $BAC$, indem man die Symmetrale von $BD$ zieht, welche, da das $\triangle CBD$ gleichschenklig ist, $AD$ im Punkte $C$ trifft.

Fig. 59.



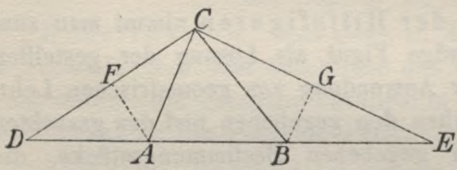
Konstruktion. Man ziehe $AB = c$, lege in $A$ den Winkel $BAD = \alpha$ an, mache den Schenkel $AD = s$ und ziehe $BD$. Konstruiert man nun die Symmetrale von $BD$, welche die Seite $AD$ in $C$ schneidet, so ist $ABC$ das gesuchte Dreieck.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Konstruktion.

Determination. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $\alpha < 180^0$ und $c < s$ ist; sie ist eindeutig bestimmt.

2. Ein Dreieck zu construieren, von welchem der Umfang und zwei Winkel gegeben sind.

Fig. 60.




Analysis. Es sei $ABC$ (Fig. 60) das verlangte Dreieck, welches den gegebenen Umfang $AB + AC + BC = u$ und die gegebenen Winkel $BAC = \alpha$ und $ABC = \beta$ hat. Stellt man $u$ so dar, daß man $AB$ nach beiden Seiten verlängert und $AD = AC$, $BE = BC$ macht, und zieht $DC$ und $EC$, so entsteht das Hilfsdreieck $DEC$, das sich konstruieren läßt, da in demselben $DE = u$, $EDC = \frac{\alpha}{2}$ und $DEC = \frac{\beta}{2}$ gegeben sind. Dadurch ist auch der Eckpunkt $C$ des gesuchten Dreieckes bestimmt. Die beiden andern Eckpunkte $A$ und $B$ sind die Scheitel zweier gleichschenkliger Dreiecke über den Grundlinien $CD$ und $CE$ und liegen in der Strecke $DE$; sie sind also die Schnittpunkte der Symmetralen von $CD$ und $CE$ mit $DE$.

Konstruktion. Man mache die Strecke $DE = u$, trage an $DE$ in $D$ und $E$ die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ auf und verlängere die andern Schenkel bis zum Schnittpunkt $C$. Konstruiert man dann die Symmetralen von $CD$ und $CE$, welche $DE$ in den Punkten $A$ und $B$ schneiden, und zieht $AC$ und $BC$, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.

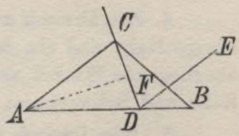
Der Beweis liegt in der Analysis.

Determination. Es wird vorausgesetzt, daß $\alpha + \beta < 180^0$ ist; dann ist stets, und zwar nur ein einziges der Aufgabe genügendes Dreieck möglich.

3. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite, die Differenz der beiden andern Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Analysis. Es sei $ABC$ (Fig. 61) das verlangte Dreieck, von welchem $BC = a$, $AB - AC = d$ und Winkel $BAC = \alpha$ gegeben sind. Trägt man von $AB$ ein Stück $AD = AC$ ab, so daß $BD = d$ wird, und zieht $CD$, so ist Winkel $ADC$ die Hälfte des Nebenwinkels von $\alpha$. Das Hilfsdreieck $BDC$, von welchem die Seiten $BC = a$, $BD = d$ und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel $BDC$ bekannt sind, läßt sich also konstruieren. Dadurch sind auch die Eckpunkte $B$ und $C$ des gesuchten Dreieckes bestimmt. Der dritte Eckpunkt $A$ ergibt sich dann als Scheitel des gleichschenkligen Dreieckes $ACD$.

Fig. 61.




Konstruktion. Man ziehe $BD = d$, mache den Winkel $BDE = \alpha$, halbiere dessen Nebenwinkel $ADE$ durch $DC$ und beschreibe um $B$ mit dem Halbmesser $a$ einen Kreisbogen, welcher $DC$ in $C$ schneidet; sodann ziehe man $BC$, konstruiere zu $DC$ die Symmetrale, welche die verlängerte $BD$ in $A$ trifft, und ziehe $AC$; $ABC$ ist das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ergibt sich aus der Analysis.

Determination. Die Aufgabe ist lösbar, wenn $d < a$ und $\alpha < 180^0$ ist.

## 4. Übungsaufgaben.

### *A)* Nach der Methode der geometrischen Örter.

§. **100.** 1. Einen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist und von einem dritten gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

2. In einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei außerhalb derselben gegebenen Punkten gleich weit absteht.

3. In einer gegebenen Geraden einen Punkt so zu bestimmen, daß er von einer zweiten gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat.

4. Einen Punkt zu finden, welcher von zwei gegebenen parallelen und einer dritten sie schneidenden Geraden gleich weit absteht.

5. In einer Seite eines gegebenen Dreieckes den Punkt zu bestimmen, welcher von den beiden andern Seiten gleich weit absteht.

6. Zu einem gegebenen Vierecke den Punkt zu konstruieren, welcher von zwei bestimmten Eckpunkten desselben, und ebenso von den beiden anderen Eckpunkten gleich weit absteht.

7. Zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels eine gegebene Strecke so einzutragen, daß sie zu dem einen Schenkel normal ist.

§. **101.** 1. Über einer gegebenen Strecke als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Scheitel in einer zur Strecke parallelen Geraden liegt.

2. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* die Hypotenuse und die Höhe auf dieselbe; *b)* die Hypotenuse und ein spitzer Winkel; *c)* die Abschnitte, in welche die Hypotenuse durch die Höhe zerteilt wird.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck *a)* aus der Grundlinie und Höhe, *b)* aus einem Schenkel und der zugehörigen Höhe zu konstruieren.

4. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* eine Seite, die zugehörige Höhe und ein der Seite anliegender Winkel; *b)* eine Seite, der ihr gegenüberliegende Winkel und die Höhe auf eine andere Seite; *c)* eine Seite, die zugehörige Höhe und Schwerlinie; *d)* zwei Seiten und die zu einer gehörige Schwerlinie.

5. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* ein Winkel und die Höhen auf die ihn einschließenden Seiten; *b)* zwei Seiten und die Höhe auf eine derselben; *c)* zwei Seiten und die zur dritten Seite gehörige Höhe; *d)* eine Seite, die zu ihr und die zu einer zweiten Seite gehörige Höhe; *e)* eine Seite und die Höhen auf die beiden andern Seiten.

§. **102.** 1. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher *a)* durch zwei gegebene Punkte geht; *b)* eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt; *c)* eine gegebene Gerade berührt und durch einen außer ihr gegebenen Punkt geht; *d)* zwei gegebene sich schneidende Gerade berührt.

2. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher *a)* einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt; *b)* einen gegebenen Kreis berührt und durch einen außerhalb desselben gegebenen Punkt geht; *c)* eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt; *d)* zwei gegebene Kreise berührt.

3. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen bestimmten Punkt geht und in einem gegebenen Punkt *a)* eine gegebene Gerade, *b)* einen gegebenen Kreis berührt.

4. Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene einander schneidende Gerade und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt.

5. Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und eine gegebene Gerade berührt.

Ist auf Aufgabe 4 zurückzuführen.

### *B)* **Nach der Methode der Hilfsfiguren.**

§. **103.** Jedes Dreieck wird durch die Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt, welche als Hilfsfiguren dienen können; ebenso diejenigen Dreiecke, in welche ein Dreieck durch eine Schwerlinie zerschnitten wird.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* eine Kathete und die Höhe auf die Hypotenuse; *b)* die Höhe und ein spitzer Winkel; *c)* eine Kathete und der ihr anliegende Höhenabschnitt der Hypotenuse; *d)* die Höhe und ein Höhenabschnitt der Hypotenuse.

2. Ein gleichseitiges Dreieck aus der Höhe zu konstruieren.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren *a)* aus dem Schenkel und der Höhe, *b)* aus der Höhe und einem Winkel, *c)* aus der Basis und der Höhe auf einen Schenkel.

4. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aus der Höhe zu konstruieren.

5. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* eine Seite, die Höhe auf eine zweite Seite und der der letzteren Seite gegenüberliegende Winkel;

*b)* eine Seite, die zugehörige Schwerlinie und ein der Seite anliegender Winkel; *c)* die Höhe auf eine Seite und die dieser anliegenden Winkel; *d)* die Höhen auf zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel; *e)* die zu einer Seite gehörige Höhe und Schwerlinie, dann ein dieser Seite anliegender Winkel.

§. **104.** Kommen unter den gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreieckes die Summe oder die Differenz zweier Seiten (oder einer Seite und der Höhe) vor, so erhält man durch entsprechende Verlängerung einer Seite oder bezüglich durch Abtragen von derselben als Hilfsfigur ein Dreieck, in welchem die gegebene Summe oder Differenz als Seite erscheint.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* die Hypotenuse und die Summe (Differenz) der beiden Katheten; *b)* eine Kathete und die Summe (Differenz) der Hypotenuse und der andern Kathete; *c)* ein spitzer Winkel und die Summe (Differenz) der beiden Katheten; *d)* die Summe (Differenz) aus der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel; *e)* die Summe (Differenz) der beiden Katheten und die Differenz der ihnen gegenüberliegenden Winkel; *f)* der Umfang und ein spitzer Winkel.

2. Ein gleichseitiges Dreieck aus der Summe (Differenz) seiner Seite und Höhe zu konstruieren.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn nebst der Summe (Differenz) der Grundlinie und des Schenkels *a)* der Winkel an der Grundlinie, *b)* der Winkel am Scheitel gegeben ist; wenn nebst der Summe (Differenz) des Schenkels und der Höhe *c)* die Grundlinie, *d)* der Winkel an der Grundlinie (am Scheitel) gegeben ist.

4. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* die Summe (Differenz) zweier Seiten, die dritte Seite und der dieser gegenüberliegende Winkel; *b)* die Summe (Differenz) zweier Seiten, die dritte Seite und ein dieser anliegender Winkel; *c)* die Summe (Differenz) zweier Seiten und zwei Winkel.

§. **105.** Die Aufgaben über die Konstruktion der Parallelogramme oder Vierecke überhaupt lassen sich im allgemeinen mit Hilfe der Konstruktion eines der Dreiecke lösen, in welche das Parallelogramm (Viereck) durch eine einzelne Diagonale oder durch die beiden Diagonalen zugleich geteilt wird.

1. Ein Quadrat *a)* aus der Seite, *b)* aus der Diagonale, *c)* aus der Summe (Differenz) der Diagonale und der Seite zu konstruieren.

2. Ein Rechteck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* zwei anstoßende Seiten; *b)* eine Seite und die Diagonale; *c)* eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel der beiden Diagonalen; *d)* die Diagonale und der Winkel der Diagonalen; *e)* die Summe (Differenz) zweier Seiten und die Diagonale; *f)* eine Seite und die Summe (Differenz) der Diagonale und der andern Seite.

3. Einen Rhombus zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* die Seite und ein Winkel; *b)* die Seite und die Höhe; *c)* die Seite und eine Diagonale; *d)* die zwei Diagonalen; *e)* die Seite und die Summe (Differenz) der Diagonalen; *f)* die Summe (Differenz) der Seite und der Höhe und ein Winkel.

4. Ein Rhomboid zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel; *b)* zwei Seiten und eine Diagonale; *c)* eine Seite und die beiden Diagonalen; *d)* die Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel; *e)* zwei Seiten und die Höhe auf eine derselben; *f)* die Summe (Differenz) zweier

Seiten, ein Winkel und eine Diagonale; *g)* die Summe (Differenz) der Diagonalen, eine Seite und der von den beiden Diagonalen eingeschlossene Winkel.

5. Ein Deltoid zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* zwei ungleiche Seiten und eine Diagonale; *b)* die beiden Diagonalen und eine Seite.

§. **106.** Ein Trapez ist durch jedes der Dreiecke, welche durch eine Diagonale abgeschnitten werden, nebst einem davon unabhängigen Stücke des andern dieser Dreiecke, ein gleichschenkliges Trapez schon durch eines dieser Dreiecke bestimmt.

Sind die beiden Parallelseiten gegeben, so zieht man durch einen Eckpunkt die Parallele zu einem der Schenkel und erhält dadurch als Hilfsfigur ein Dreieck, dessen eine Seite der Differenz der Parallelseiten gleich ist.

1. Ein gleichschenkliges Trapez zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* eine Parallelseite, der Schenkel und die Diagonale; *b)* eine Parallelseite, der Schenkel und die Höhe; *c)* die zwei Parallelseiten und die Höhe; *d)* die zwei Parallelseiten und der Schenkel; *e)* der Schenkel, die Diagonale und die Höhe; *f)* eine Parallelseite, ein Winkel und die Höhe; *g)* die Summe (Differenz) einer Parallelseite und des Schenkels, die Diagonale und ein Winkel.

2. Ein Trapez zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* alle vier Seiten; *b)* drei Seiten und die Höhe; *c)* drei Seiten und ein zwischen zweien derselben liegender Winkel; *d)* eine Parallelseite, die ihr anliegenden Winkel und eine Diagonale; *e)* die Parallelseiten, ein Schenkel und eine Diagonale; *f)* die beiden Schenkel, eine Diagonale und die Höhe; *g)* die Summe (Differenz) einer Parallelseite und eines Schenkels, die beiden andern Seiten und die dem Winkel, welchen diese einschließen, gegenüberliegende Diagonale; *h)* die Summe (Differenz) einer Parallelseite und eines Schenkels, die der Parallelseite anliegenden Winkel und die Höhe.

## *C)* Aufgaben ohne Beziehung auf eine bestimmte Methode.

§. **107.** 1. Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

Man konstruiere (Fig. 54) das gleichseitige $\triangle ACD$ und halbiere den Winkel $CAD$.

2. In einer gegebenen Geraden einen Punkt so zu bestimmen, daß die Strecken, welche von ihm nach zwei gegebenen Punkten außerhalb der Geraden gezogen werden, mit dieser gleiche Winkel bilden.

Fällt man von dem einen Punkte auf die Gerade die Normale, verlängert diese um sich selbst über den Fußpunkt hinaus und verbindet den Endpunkt mit dem zweiten gegebenen Punkte, so schneidet diese Verbindungsstrecke die Gerade in dem gesuchten Punkte.

3. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

Man trage den gegebenen Winkel an die gegebene Gerade auf und ziehe zu dem zweiten Schenkel durch den gegebenen Punkt die Parallele.

4. Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zu ziehen, daß das von den Schenkeln begrenzte Stück derselben in dem gegebenen Punkte halbiert wird.

Man ziehe durch den Punkt $P$ die Parallele zu dem einen Schenkel $AC$, welche von dem andern Schenkel eine Strecke $AD$ abschneidet, verlängere diese letztere um sich selbst und ziehe durch den Endpunkt $E$ und den gegebenen Punkt $P$ die Gerade. (§. 59, 2.)

5. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie von den Schenkeln gleiche Stücke abschneidet.

6. Zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels eine Gerade von gegebener Länge so zu legen, daß sie von den Schenkeln gleiche Stücke abschneidet.

7. In einem gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge so zu legen, daß sie einer gegebenen Geraden parallel wird.

8. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach einem gegebenen Kreise gezogene Tangente eine gegebene Länge hat.

Man ziehe an den Kreis eine beliebige Tangente von der gegebenen Länge und beschreibe durch ihren Endpunkt einen mit dem gegebenen konzentrischen Kreis; der Schnittpunkt dieses Kreises mit der gegebenen Geraden ist der gesuchte Punkt.

§. **108.** 1. Ein Vieleck zu konstruieren, das mit einem gegebenen Vielecke kongruent ist.

2. Ein $n$-Eck aus der in §. 67 angegebenen Zahl der Bestimmungsstücke zu konstruieren.

3. Ein regelmäßiges $n$-Eck zu konstruieren, wenn eine Seite desselben gegeben ist.

4. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben sind: *a)* zwei Seiten; *b)* eine Seite und ein ihr anliegender Winkel; *c)* zwei Winkel; *d)* eine Seite und die zugehörige Höhe; *e)* eine Seite und die zugehörige Schwerlinie; *f)* eine Seite und die Höhe auf eine andere Seite.

Bei *c)* konstruiere man zuerst $2\alpha$ als Zentriwinkel, so hat man die Sehne und sonach die Aufgabe *b*.

5. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben sind: *a)* zwei Winkel; *b)* eine Seite und ein ihr anliegender Winkel; *c)* eine Seite und die Höhe auf eine andere Seite.

Hier kommt §. 81, *c)* in Anwendung.

6. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und *a)* drei Seiten, *b)* zwei gegenüberliegenden Seiten nebst einem Winkel, *c)* einer Seite mit den zwei anliegenden Winkeln.

7. Ein Tangentenviereck zu konstruieren aus dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und *a)* zwei anstoßenden Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, *b)* einer Seite mit den Winkeln, welche einer anstoßenden Seite anliegen.

---

# Dritter Abschnitt.

## Proportionalität der Strecken und Ähnlichkeit der ebenen Gebilde.

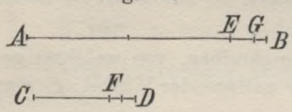
### I. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

§. **109.** Eine Raumgröße heißt ein Maß einer andern gleichartigen Raumgröße, wenn die zweite aus gleichen Teilen besteht, deren jeder der ersten Raumgröße gleich ist. Ist z. B. $A = aM$, wo $a$ irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist $M$ ein Maß von $A$. Ist $M$ sowohl ein Maß von $A$ als von $B$, so heißt es ein gemeinsames Maß von $A$ und $B$.

Um ein gemeinsames Maß zweier Raumgrößen zu finden, nehme man von der größeren $A$ die kleinere $B$ so oft weg, als es möglich ist; hierauf in gleicher Weise den Rest $C$ von der kleineren Größe $B$ so oft, als es angeht; dann den neuen Rest $D$ von dem vorigen Reste $C$, u. s. f. Kommt man bei diesem Verfahren einmal auf einen Rest $R$, der ein Maß des nächst vorhergehenden ist, so ist $R$ ein gemeinsames, und zwar, wie aus der Arithmetik bekannt ist, das größte gemeinsame Maß von $A$ und $B$.

Wir wollen dieses Verfahren an zwei Strecken $AB$ und $CD$ (Fig. 62) veranschaulichen.

Fig. 62.



Man trägt die kleinere Strecke $CD$ auf der größeren $AB$ so oft auf, als es angeht, hier 2 mal; den Rest $EB$ trägt man auf der kleineren Strecke $CD$ (2 mal) auf, den Rest $FD$ auf dem vorigen Rest $EB$ (1 mal), den neuen Rest $GB$ wieder auf dem früheren $FD$, in welchem er genau 2 mal enthalten sei. Man hat dann

$$\begin{aligned} FD &= 2\,GB, \\ EB &= FD + GB = 3\,GB, \\ CD &= 2\,EB + FD = 8\,GB, \\ AB &= 2\,CD + EB = 19\,GB. \end{aligned}$$

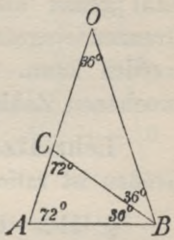
Es haben demnach $AB$ und $CD$ das größte gemeinsame Maß $GB$, und zwar ist dieses in $AB$ 19 mal, in $CD$ 8 mal enthalten.

§. **110.** Kommt man bei dem im §. 109 angeführten Verfahren, soweit auch das wiederholte Wegnehmen der Reste fortgesetzt wird, auf keinen Rest $= 0$, so haben die beiden gegebenen Größen kein gemeinsames Maß.

Zwei Größen, die ein gemeinsames Maß haben, heißen kommensurabel; zwei Größen, die kein gemeinsames Maß haben, inkommensurabel.

Ein Beispiel zweier inkommensurabler Größen bilden die Grundlinie und der Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel $36^0$ ist.

Fig. 63.




Halbiert man den Winkel $B = 72^0$ (Fig. 63), so ist $AB = BC = CO$ und $AC < AB$. Es läßt sich daher die Grundlinie dieses gleichschenkligen Dreieckes auf dem Schenkel nur einmal auftragen und es bleibt als Rest $AC$; es muß nun untersucht werden, wie oft dieser in $AB$ enthalten ist. Da aber das Dreieck $ABC$ dieselben Winkel wie $AOB$ enthält, so gilt dasselbe für $AB$ wie für $AO$, etc. ohne Ende. $AB$ und $AO$ sind also inkommensurabel.

Bei praktischen Messungen tritt in den angegebenen Längen zweier Strecken der Fall der Inkommensurabilität deshalb nicht hervor, weil man den Rest, wenn er hinreichend klein geworden ist, vernachlässigt.

§. **111.** Das Verhältnis $A:B$ zweier Raumgrößen bestimmen, heißt jene Zahl suchen, welche angibt, wie oft $B$ in $A$ enthalten ist.

*a)* Die Größen $A$ und $B$ seien kommensurabel. Ist ihr größtes gemeinschaftliches Maß $\alpha$ und ist

$$A = m\alpha,\ B = n\alpha, \text{ so ist } A:B = \frac{m}{n}.$$

Der Quotient des Verhältnisses $A:B$ ist daher eine ganze oder gebrochene Zahl, je nachdem $n = 1$, oder von 1 verschieden ist. Für den in der Fig. 62 vorliegenden Fall ist $AB:CD = \frac{19}{8}$.

*b)* Die Größen $A$ und $B$ seien inkommensurabel.

Der Quotient ist dann weder eine ganze noch ein gebrochene Zahl, also es ist weder $A:B = m$ noch $A:B = \frac{m}{n}$ $\left(A = \frac{B}{n} . m\right)$. Denn im ersten Falle wäre $B$, im zweiten $\frac{B}{n}$ ein gemeinschaftliches Maß von $A$ und $B$.

Teilt man aber $B$ in $n$ gleiche Teile, so liegt $A$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von $\frac{B}{n}$; es ist also:

$$\frac{(m+1)B}{n} > A > \frac{mB}{n} \text{ oder } \frac{m}{n} + \frac{1}{n} > \frac{A}{B} > \frac{m}{n}.$$

Setzt man für den Exponenten des Verhältnisses $A:B$ entweder $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ oder $\frac{m}{n}$, so begeht man einen Fehler, welcher kleiner als $\frac{1}{n}$ ist, also um so kleiner wird, je größer $n$ ist.

Der Quotient des Verhältnisses zweier inkommensurabler Größen läßt sich daher weder durch eine ganze noch durch eine gebrochene Zahl genau ausdrücken; aber er kann zwischen zwei Brüchen als Grenzen eingeschlossen werden, deren Differenz beliebig klein gemacht werden kann. Solche Zahlen heißen irrationale, die ganzen und gebrochenen Zahlen rationale.

**Lehrsatz.** Der Quotient des Verhältnisses zweier kommensurabler Größen ist rational, jener zweier inkommensurabler Größen irrational.

§. **112.** Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine Proportion. Eine Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder gleich sind, heißt eine stetige Proportion, z. B. $A:B = B:C$; das mittlere Glied wird die mittlere Proportionale (das geometrische Mittel) zwischen den beiden äußeren Gliedern, und das vierte Glied die dritte stetige Proportionale zu dem ersten und dem mittleren Gliede genannt.

Sind zwei Arten von Größen so voneinander abhängig, daß, wenn $A$ und $B$ zwei zusammengehörige Werte derselben sind, für ein beliebiges $m$ zu $mA$ auch $mB$ gehört, daß sich also zwei Größen der einen Art wie die zugehörigen Größen der andern Art verhalten, so sagt man: die beiden Arten von Größen sind gerade proportioniert, auch bloß proportioniert; gehört dagegen zu $mA$ der Wert $\frac{B}{m}$, so daß sich zwei Größen der einen Art umgekehrt wie die zugehörigen Größen der andern Art verhalten, so sagt man: die beiden Arten von Größen sind verkehrt proportioniert.

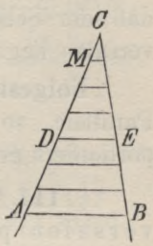
## II. Proportionalität der Strecken.

§. **113.** Mehrere durch denselben Punkt gehende Gerade einer Ebene bilden einen Strahlenbüschel; der gemeinsame Punkt heißt sein Scheitel. Jede Gerade, welche die Strahlen eines Strahlenbüschels schneidet, heißt eine Transversale desselben. Entsprechende (homologe) Strecken der Strahlen heißen solche, die zwischen dem Scheitel und einer Transversale, oder zwischen denselben Transversalen liegen. Entsprechende Punkte der Strahlen heißen die auf derselben Transversale liegenden Schnittpunkte.

**Lehrsatz.** Zwei Strahlen werden von je zwei parallelen Transversalen so geschnitten, daß die entsprechenden Abschnitte der Strahlen proportional sind.

Voraussetzung. Es sei $DE \parallel AB$ (Fig. 64).

Fig. 64.




Behauptung. $AD:CD = BE:CE,$
$AC:AD = BC:BE,$
$AC:CD = BC:CE.$

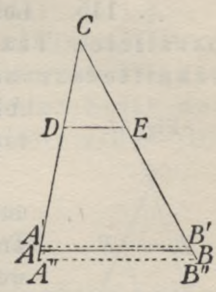
Beweis. *a)* Es seien $CD$ und $AD$ kommensurabel, $CM$ ein gemeinsames Maß derselben und zwar $CD = m.CM$, $AD = n.CM$; dann ist $AD:CD = n:m$. Teilt man nun $CD$ in $m$ und $DA$ in $n$ gleiche Teile und zieht durch jeden Teilungspunkt die Parallelen zu $AB$, so wird auch $CE$ in $m$ und $EB$ in $n$ gleiche Teile geteilt; es ist also $BE:CE = n:m$, sonach $AD:CD = BE:CE$.

*b)* $CD$ und $AD$ (Fig. 65) seien inkommensurabel. Man teile $CD$ in $m$ gleiche Teile und trage einen derselben $\frac{CD}{m}$ von $D$ aus auf $DA$ auf; es sei $A''D = (n+1)\,\frac{CD}{m}$ und $A'D = n\,\frac{CD}{m}$. Dann ist

$$\frac{(n+1)\,CD}{m} > AD > n.\frac{CD}{m}$$

$$\frac{n}{m} + \frac{1}{m} > \frac{AD}{CD} > \frac{n}{m}.$$

Fig. 65.




Zieht man durch alle Teilungspunkte Parallele mit $AB$ gegen $BC$, so wird auch $CE$ in $m$ gleiche Teile geteilt; auf $B''E$ kommen $n+1$ und auf $B'E$ $n$. Es ist

$$\frac{(n+1)\,CE}{m} > BE > \frac{n.CE}{m}$$

$$\frac{n}{m} + \frac{1}{m} > \frac{BE}{CE} > \frac{n}{m}.$$

Die irrationalen Verhältnisse $\frac{AD}{CD}$ und $\frac{BE}{CE}$ liegen daher zwischen denselben Grenzen, deren Differenz, wenn man $m$ hinlänglich groß annimmt, beliebig klein gemacht werden kann; folglich sind sie gleich. Es ist daher auch für den Fall der Inkommensurabilität $AD:CD = BE:CE$.

Aus dieser Proportion ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten und dritten der oben aufgestellten Proportionen.

Man hat

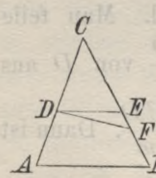
$$(AD+CD):AD = (BE+CE):BE \text{ oder } AC:AD = BC:BE,$$
$$(AD+CD):CD = (BE+CE):CE \text{ oder } AC:CD = BC:CE.$$

Auf gleiche Weise kann auch der obige Lehrsatz für den Fall, daß der Scheitel des Strahlenbüschels zwischen den parallelen Transversalen liegt, bewiesen werden.

**Folgesatz.** Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so werden durch dieselbe die beiden andern Seiten proportioniert geschnitten.

§. **114. Lehrsatz.** Werden zwei Strahlen von zwei Transversalen proportioniert geschnitten, so sind die beiden Transversalen parallel.

Fig. 66.

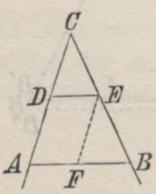



Beweis. Es sei (Fig. 66) $CA:CD = CB:CE$. Wäre nicht $DE$ sondern $DF$ die durch $D$ mit $AB$ parallel gezogene Gerade, so wäre (nach §. 113) $CA:CD = CB:CF$. Dann aber muß mit Rücksicht auf die Voraussetzung $CF = CE$, d. h. der Punkt $F$ mit $E$ identisch sein. Folglich ist $DE \parallel AB$.

**Folgesatz.** Werden zwei Seiten eines Dreieckes von einer Transversale proportioniert geschnitten, so ist diese zur dritten Seite parallel.

§. **115. Lehrsatz.** Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten, so sind die Abschnitte der beiden Transversalen den entsprechenden Abschnitten eines jeden Strahles proportioniert (Fig. 67).

Fig. 67.




Beweis. Ist $DE \parallel AB$, und zieht man $EF \parallel CA$ und betrachtet $B$ als Scheitel, mithin $EF$ und $CA$ als Transversalen, so ist auch $AB : AF = CB : CE$, oder, weil $AF = DE$ ist, $AB : DE = CB : CE$. Man hat daher

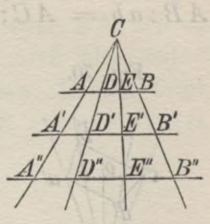
$$AB : DE = CB : CE = CA : CD.$$

§. **116. Lehrsatz.** Wird ein Strahlenbüschel von zwei oder mehreren parallelen Transversalen geschnitten, so sind *a)* je zwei Abschnitte des einen Strahles den entsprechenden Abschnitten jedes anderen Strahles, und *b)* je zwei Abschnitte einer Transversale den entsprechenden Abschnitten jeder anderen Transversale proportioniert (Fig. 68).

Voraussetzung. $AB \parallel A'B' \parallel A''B'' \ldots$

Behauptung. a) $CA : CA' : CA'' \ldots$
$= CD : CD' : CD'' \ldots$
$= CE : CE' : CE'' \ldots$
b) $AD : A'D' : A''D'' \ldots$
$= DE : D'E' : D''E'' \ldots$
$= EB : E'B' : E''B'' \ldots$

Fig. 68.



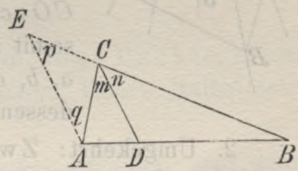

Beweis folgt aus §§. 113 und 115.

§. **117.** 1. Die Symmetrale eines Dreieckswinkels teilt die Gegenseite in zwei Abschnitte, welche den ihnen anliegenden Seiten des Dreieckes proportioniert sind.

Voraussetzung. Es sei im Dreiecke $ABC$ (Fig. 69) der Winkel $C$ durch die Gerade $CD$ halbiert, so daß $m = n$ wird.

Behauptung. $AD : BD = AC : BC$.

Fig. 69.




Beweis. Man verlängere $BC$ und ziehe durch $A$ die Parallele zu $DC$, welche die Verlängerung von $BC$ in $E$ schneidet. Es ist nun $m = q$, $n = p$, und wegen $m = n$ auch $q = p$, folglich $EC = AC$. In dem Dreiecke $ABE$ ist $CD \parallel EA$, daher findet die Proportion $AD : BD = EC : BC$ statt, woraus dann $AD : BD = AC : BC$ folgt.

2. Die Symmetrale eines Außenwinkels eines Dreieckes teilt die verlängerte Gegenseite in einem Punkte, dessen Abstände von den Endpunkten jener Seite den beiden andern Dreiecksseiten proportioniert sind. (Beweis analog zu 1.)

## III. Ähnlichkeit der ebenen Gebilde.

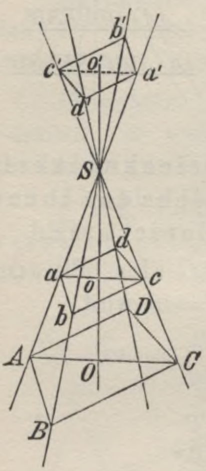
§. **118. Lehrsätze.** 1. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels (Fig. 70) vom Scheitel $S$ aus in den Punkten $A$ und $a$, $B$ und $b$, $C$ und $c$,... proportioniert geschnitten, so sind in den Gebilden $ABCD\ldots$ und $abcd\ldots$ die entsprechenden Strecken zwischen je zwei Schnittpunkten proportioniert und die von diesen Strecken gebildeten Winkel paarweise gleich.

Beweis. Es sei $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$

Aus dieser Voraussetzung folgt (§. 114) unmittelbar $AB \parallel ab$, $AC \parallel ac$, $BC \parallel bc, \ldots$, somit (§. 115) $AB : ab = SB : Sb$ und

$BC : bc = SB : Sb$, daher auch $AB : ab = BC : bc$; ebenso auch $AB : ab = AC : ac$ u. s. w.

Fig. 70.




Daß ferner W. $ABC = abc$, W. $BAC = bac$, W. $BCD = bcd, \ldots$ ist, folgt aus §. 26, 1.

Dieselben Beziehungen finden auch statt, wenn der Scheitel zwischen den Gebilden $ABCD\ldots.$ und $a'b'c'd'\ldots.$ liegt; nur sind in diesem Falle je zwei entsprechende Strecken derselben in entgegengesetztem Sinne parallel.

**Zusatz.** Sind $A, B, C, D, \ldots$ Umfangspunkte eines Kreises, so sind auch $a, b, c, d \ldots$ Umfangspunkte eines Kreises. Denn ist $O$ der Mittelpunkt des durch $A, B, C, \ldots$ gehenden Kreises, und $o$ der Punkt, welcher auf dem Strahle $SO$ dem Punkte $O$ entspricht, so hat man $AO : ao = BO : bo = CO : co = \ldots$; allein $AO = BO = CO = \ldots$, somit auch $ao = bo = co = \ldots$, d. h. die Punkte $a, b, c, \ldots$ liegen in dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt $o$ ist.

2. Umgekehrt: Zwei ebene Gebilde, in denen die entsprechenden Strecken nach der Ordnung proportioniert und die entsprechenden Winkel paarweise gleich sind, lassen sich immer auf einem Strahlenbüschel in eine solche Lage bringen, daß ihre entsprechenden Punkte auf denselben Strahlen und zwar bezüglich des Scheitels auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten liegen und von demselben proportionierte Abstände haben (Fig. 70).

Beweis. Es sei $AB : ab = AC : ac = BC : bc = \ldots$, und W. $ABC = abc$, $BAC = bac$, $BCD = bcd, \ldots$

Legt man die beiden Gebilde so gegeneinander, daß zwei in einem Punkte einander schneidende Strecken des einen Gebildes den entsprechenden Strecken des andern in demselben Sinne parallel sind, so müssen, da die Winkel paarweise gleich sind, auch je zwei andere entsprechende Strecken in demselben Sinne parallel sein.

Liegen aber die zwei Gebilde so gegeneinander, daß je zwei entsprechende Strecken derselben parallel sind, so müssen die durch je zwei entsprechende Punkte derselben gezogenen Geraden in einem gemeinsamen Punkte einander schneiden. Es sei $S$ der Punkt, in dem sich $Aa$ und $Bb$ schneiden. Würde $Cc$ nicht durch $S$ gehen, sondern $Bb$

in $S'$ schneiden, so wäre (§. 115) $AB:ab = SB:Sb$ und $BC:bc = S'B:S'b$, daher wegen $AB:ab = BC:bc$ auch $SB:Sb = S'B:S'b$, woraus $(SB - Sb):(S'B - S'b) = SB:S'B$, oder $Bb:Bb = SB:S'B$, mithin $S'B = SB$ folgt. Der Punkt $S'$ muß also mit $S$ identisch sein, d. h. $Cc$ muß durch den Punkt $S$ gehen. Ebenso folgt, daß auch die Gerade $Dd$ durch $S$ gehen muß, daß somit $SA$, $SB$, $SC$, $SD$,.. die Strahlen eines Strahlenbüschels sind.

Dann ergibt sich aus §. 113

$$SA:Sa = SB:Sb = SC:Sc = \ldots$$

Der Beweis bleibt derselbe, wenn die Gebilde so gelegt werden, daß der Scheitel des Strahlenbüschels zwischen denselben liegt.

§. **119.** Zwei ebene Gebilde, die sich auf einem Strahlenbüschel in eine solche Lage bringen lassen, daß ihre entsprechenden Punkte auf denselben Strahlen liegen und vom Scheitel proportionierte Abstände haben, heißen ähnlich ($\sim$) und in dieser Lage zugleich perspektivisch liegend.

Je zwei entsprechende Punkte heißen homologe Punkte, ebenso je zwei entsprechende Strecken (Seiten, Diagonalen, Höhen, Halbmesser) homologe Strecken.

In zwei perspektivisch liegenden ähnlichen Gebilden sind zwei homologe Strecken entweder in demselben oder in entgegengesetztem Sinne parallel.

Der Punkt, in welchem die durch je zwei entsprechende Punkte zweier perspektivisch liegender ähnlicher Gebilde gezogenen Geraden einander schneiden, heißt der Ähnlichkeitspunkt der Gebilde, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem die homologen Punktpaare auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten dieses Punktes liegen; im ersten Falle sind die entsprechenden Seiten in demselben, im zweiten in entgegengesetztem Sinne parallel. Jeder durch zwei entsprechende Punkte der beiden Gebilde gehende Strahl heißt ein Ähnlichkeitsstrahl.

Das konstante Verhältnis der Abstände zweier homologer Punkte vom Ähnlichkeitspunkte heißt Ähnlichkeitsexponent oder Modulus der ähnlichen Figuren. Er ist auch dem konstanten Verhältnis zweier homologer Strecken der ähnlichen Gebilde gleich. Nimmt man auf die Lage der genannten Abstände Rücksicht, so ist bei einem äußeren Ähnlichkeitspunkt der Modulus positiv, bei einem inneren negativ. Ist der Modulus $= +1$, so sind die Gebilde kongruent; ist er $-1$, so sind sie zentrisch symmetrisch.

**Folgesätze.** *a)* In zwei ähnlichen Gebilden sind die homologen Strecken proportioniert und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich.

*b)* Je zwei Kreise sind ähnlich und zugleich perspektivisch liegend.

**Zusatz.** Die hier begründete Erklärung ähnlicher Gebilde enthält zugleich die genaueren Merkmale des in §. 3 aufgestellten Begriffes der Ähnlichkeit als der Übereinstimmung der Gestalt.

**Ähnlichkeit der Dreiecke.**

§. **120.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben die homologen Seiten proportioniert und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind. (§. 118 und §. 119).

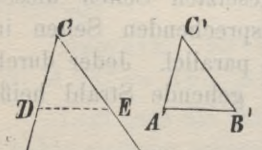
**Lehrsatz.** Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck dem durch die Parallele abgeschnittenen Dreiecke ähnlich (Fig. 71).

Beweis. Die Proportionalität der Seiten beider Dreiecke folgt aus §. 115, die Gleichheit der Winkel aus §. 24, 2.

Nach der oben aufgestellten Definition sind zur Ähnlichkeit zweier Dreiecke scheinbar 6 Bedingungen erforderlich: die Gleichheit von 3 Winkelpaaren und die Gleichheit der Verhältnisse der 3 Seitenpaare. Diese 6 Bedingungen reduzieren sich ohne weiteres auf 4; denn aus der Gleichheit von je zwei Winkeln folgt schon die Gleichheit der dritten; ferner ergibt sich aus der Gleichheit des Verhältnisses zweier Paare homologer Seiten mit dem Verhältnis des dritten Paares auch die Gleichheit der beiden ersten Verhältnisse. Es läßt sich aber beweisen, daß auch diese 4 Bedingungen nicht unabhängig voneinander sind, sondern daß 2 Bedingungen ausreichen. Darnach unterscheidet man vier Ähnlichkeitssätze.

§. **121. I. Ähnlichkeitssatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke ähnlich *(WWW)*.

Fig. 71.




Voraussetzung. $A = A'$ und $C = C'$ (Fig. 71).

Behauptung. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist W. $CDE = A = A'$, daher $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (*WSW*). Nun ist $\triangle ABC \sim DEC$ (§. 120), mithin auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

**Folgesatz.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Seiten paarweise parallel oder zueinander normal sind (§. 26).

§. **122. II. Ähnlichkeitssatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportioniert und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich *(SWS)*.

Es sei (Fig. 71) $AC : A'C' = BC : B'C'$ und $C = C'$.

Macht man $CD = C'A'$ und zieht $DE \parallel AB$, so ist $AC : CD = BC : CE$, oder $AC : A'C' = BC : CE$. Allein nach der Voraussetzung ist $AC : A'C' = BC : B'C'$; folglich $CE = B'C'$, und daher $\triangle DEC \cong A'B'C'$ *(SWS)*; nun ist $\triangle ABC \sim DEC$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. **123. III. Ähnlichkeitssatz.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportioniert und die den größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich *(SsW)*.

Der Beweis ist unter Beziehung auf §. 39 demjenigen in §. 122 analog.

§. **124. IV. Ähnlichkeitssatz.** Sind in zwei Dreiecken die drei Seiten des einen den drei Seiten des andern proportioniert, so sind die Dreiecke ähnlich *(SSS)*.

Es sei (Fig. 71) $AC : A'C' = AB : A'B' = BC : B'C'$.

Macht man $CD = C'A'$ und zieht $DE \parallel AB$, so ist

$AC : CD = AB : DE$ und $AC : CD = BC : CE$, oder

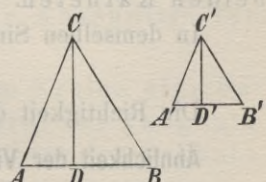
$AC : A'C' = AB : DE$ und $AC : A'C' = BC : CE$.

Vergleicht man diese zwei Proportionen mit den in der Voraussetzung enthaltenen, so folgt $DE = A'B'$ und $CE = C'B'$, somit $\triangle DEC \cong A'B'C'$ *(SSS)*; nun ist $\triangle ABC \sim DEC$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. **125. Lehrsatz.** In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die homologen Höhen wie zwei homologe Seiten.

Beweis. Es sei (Fig. 72) das $\triangle ABC \sim A'B'C'$, $CD$ die Höhe auf die Seite $AB$ und $C'D'$ die Höhe auf die homologe Seite $A'B'$.

Fig. 72.

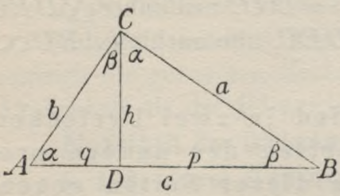



Die Dreiecke $ACD$ und $A'C'D'$ haben zwei Winkel wechselseitig gleich, sind also ähnlich; mithin ist $CD : C'D' = AC : A'C'$, daher auch $CD : C'D' = AB : A'B' = BC : B'C'$.

§. **126. Lehrsatz.** Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels die Normale auf die Hypotenuse, so ist 1. jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und ihrer Projektion auf dieselbe, 2. die Normale die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Beweis. Es sei (Fig. 73) der Winkel $ACB$ ein rechter und $CD \perp AB$.

Fig. 73.




Jedes der Dreiecke $ABC$, $ACD$, $CBD$ enthält die Winkel $\alpha$, $\beta$, $R$; daher ist:

$\triangle ABC \sim ACD$, somit $c:b = b:q$;
$\triangle ABC \sim CBD$, somit $c:a = a:p$;
$\triangle ACD \sim CBD$, somit $q:h = h:p$.

§. **127.** Aus den in §. 126 aufgestellten Proportionen ergibt sich, wenn $a$, $b$, $c$, $h$, $p$, $q$ die Maßzahlen der bezüglichen Strecken der Fig. 73 bedeuten,

$$b^2 = cq, \quad a^2 = cp, \quad h^2 = pq \text{ und}$$
$$b = \sqrt{cq}, \quad a = \sqrt{cp}, \quad h = \sqrt{pq}.$$

Aus $cq = b^2$ und $cp = a^2$ folgt noch $cp + cq = a^2 + b^2$; allein es ist $cp + cq = c\,(p + q) = c^2$; folglich $a^2 + b^2 = c^2$.

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist also das Quadrat der Maßzahl der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der Maßzahlen der beiden Katheten. (Pythagoreischer Lehrsatz.)

**Zusatz.** Wird unter dem Produkte zweier Strecken das Produkt ihrer Maßzahlen, also unter dem Quadrate einer Strecke das Quadrat ihrer Maßzahl verstanden, so kann der Pythagoreische Lehrsatz kürzer auch so ausgedrückt werden:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

In demselben Sinne kann man dann auch schreiben:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Die Richtigkeit der Umkehrung des Satzes zu beweisen.

### Ähnlichkeit der Vielecke.

§. **128.** Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn in denselben die homologen Seiten proportioniert und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind. (§. 119).

Aus dieser Erklärung und §. 118 ergeben sich folgende Sätze:

1. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die homologen Diagonalen wie die homologen Seiten.

2. Ähnliche Vielecke werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

3. Vielecke, welche sich auf übereinstimmende Weise in gleich viel ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, sind ähnlich.

4. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ihre homologen Seiten.

Ist der Modulus $q$, so hat man

$$AB = A'B' \,.\, q, \quad BC = B'C' \,.\, q \ldots;$$

daher $AB + BC + \ldots = (A'B' + B'C' + \ldots)\, q$ und

$$(AB + BC + \ldots) : (A'B' + B'C' + \ldots) = AB : A'B' = BC : B'C' = \ldots$$

Reguläre Vielecke von gleicher Seitenanzahl sind ähnlich.

## IV. Anwendungen der Ähnlichkeitssätze auf den Kreis.

**§. 129. Lehrsatz.** Zieht man von einem Punkte eines Kreises Sehnen zu den Endpunkten eines Durchmessers und die Normale auf diesen, so ist 1. jede Sehne die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und ihrer Projektion auf denselben; 2. die Normale die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers. (Folgt aus §§. 83 und 126.)

**§. 130.** Zieht man durch einen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises eine Sekante, so nennt man die Strecken zwischen diesem Punkte und den Schnittpunkten mit dem Kreise die beiden Abschnitte der Sekante.

**Lehrsätze.** 1. Gehen durch einen Punkt zu einem Kreise zwei Sekanten, so hat das Produkt der Abschnitte für beide Sekanten denselben Wert.

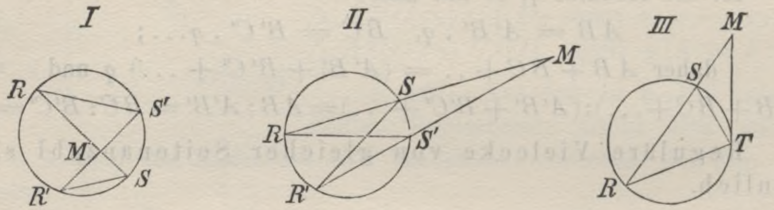
2. Gehen von einem Punkte zu einem Kreise eine Sekante und eine Tangente, so ist das Quadrat der Tangente dem Produkte aus den beiden Abschnitten der Sekante gleich.

Beweis zu 1. Zieht man (Fig. 74, *I* und *II*) die Strecken $RS'$ und $R'S$, so ist der Winkel $MRS' = MR'S$ (§. 83), daher $\triangle MRS' \backsim MR'S$, folglich $MR : MR' = MS' : MS$ und $MR' \,.\, MS' = MR \,.\, MS$.

Zu 2. Zieht man (Fig. 74, *III*) die Strecken $RT$ und $ST$, so ist W. $MRT = MTS$ (§. 83), daher $\triangle MRT \backsim MTS$, folglich $MR : MT = MT : MS$ und $MT^2 = MR \,.\, MS$.

Das konstante Produkt $MR \,.\, MS$ (Fig. 74) der beiden Abschnitte der durch den gegebenen Punkt $M$ gezogenen Sekanten heißt die Potenz des Punktes $M$ in Beziehung auf den gegebenen Kreis. Liegt $M$ außerhalb des Kreises, so sind die Abschnitte $MR$ und $MS$

Fig. 74.



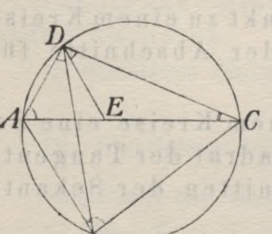

in derselben Richtung gezählt, beide werden positiv genommen, die Potenz des Punktes ist daher positiv. Für jeden Punkt innerhalb eines Kreises werden die Abschnitte entgegengesetzt von $M$ aus gezählt, in diesem Falle ist die Potenz des Punktes negativ. Für jeden Punkt der Peripherie ist sie Null.

Aufgabe.

Ist der Zentralabstand eines Punktes $c$, der Radius eines Kreises $r$, so ist zu zeigen, daß für jeden Punkt *a)* außerhalb des Kreises die Potenz $c^2 - r^2$, *b)* innerhalb des Kreises der absolute Wert derselben $r^2 - c^2$ ist.

§. **131. Lehrsatz.** In jedem Sehnenvierecke ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte je zweier gegenüberliegender Seiten. (Ptolemäischer Lehrsatz.) (Fig. 75.)

Fig. 75.




Beweis. Macht man den Winkel $CDE = ADB$, so ist, da auch der W. $ACD = ABD$ ist (§. 83), das $\triangle ECD \sim ABD$, daher $EC : CD = AB : BD$, oder $EC . BD = AB . CD$.

Ebenso ist $\triangle AED \sim BCD$, daher $AE : AD = BC : BD$, oder $AE . BD = AD . BC$.

Folglich $EC . BD + AE . BD = AB . CD + AD . BC$, oder $(EC + AE) . BD = AC . BD = AB . CD + AD . BC$.

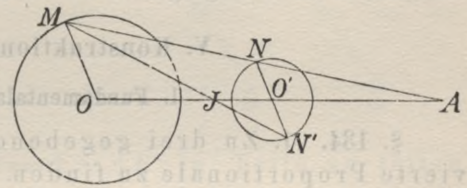
Welcher Satz ergibt sich für das eingeschriebene Rechteck?

§. **132. Lehrsatz.** Zieht man in zwei Kreisen durch die Endpunkte je zweier Halbmesser, welche entweder in demselben oder in entgegengesetztem Sinne parallel sind, gerade Linien, so schneiden sich diese alle bezüglich in einem Punkte auf der Verlängerung oder in einem Punkte des Zentralabstandes selbst.

Dieser Satz folgt schon aus §. 118; er soll jedoch hier noch besonders bewiesen werden.

Es sei $OM$ (Fig. 76) zu $O'N$ in demselben Sinne, zu $O'N'$ in entgegengesetztem Sinne parallel, so ist, wenn man $OM = R$, $O'N = O'N' = r$ und $OO' = c$ setzt, $\frac{AO}{AO'} = \frac{R}{r}$ und $\frac{JO}{JO'} = \frac{R}{r}$, daher auch $\frac{AO}{AO - AO'} = \frac{R}{R-r}$ und $\frac{JO}{JO + JO'} = \frac{R}{R+r}$, also

Fig. 76.




$AO = \frac{cR}{R-r}$ und $JO = \frac{cR}{R+r}$, somit, da $AO' = AO - c$ und $JO' = c - JO$ ist, $AO' = \frac{cr}{R-r}$ und $JO' = \frac{cr}{R+r}$.

Da diese Ausdrücke von der Lage der parallelen Halbmesser unabhängig und somit konstant sind, so folgt, daß sich in $A$ alle Geraden, welche die Endpunkte je zweier in demselben Sinne paralleler Halbmesser verbinden, und in $J$ alle Geraden, welche durch die Endpunkte zweier in entgegengesetztem Sinne paralleler Halbmesser gehen, schneiden.

$A$ ist der äußere und $J$ der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

§. **133.** Jedem Punkt, den ein Ähnlichkeitsstrahl zweier Kreise mit dem einen Kreis gemeinschaftlich hat, entspricht auch ein mit dem zweiten Kreis gemeinschaftlicher Punkt dieses Strahles.

Es habe (Fig. 76) der äußere Ähnlichkeitsstrahl $AM$ mit der Kreislinie $O$ den Punkt $M$ gemeinsam. Man ziehe $OM$ und damit $O'N$ in demselben Sinne parallel. Die Gerade $MN$ geht dann (nach §. 132) durch den Punkt $A$; die Punkte $M$, $N$, $A$ liegen also in einer geraden Linie, d. h. $AM$ hat auch mit der Kreislinie $O'$ einen Punkt $N$ gemeinsam.

Ebenso wird der Beweis für einen inneren Ähnlichkeitsstrahl $JM$ geführt.

**Folgesätze.** *a)* Hat ein Ähnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie zwei Punkte gemeinsam, so hat er auch mit der andern zwei Punkte gemeinsam, d. h. er ist eine gemeinsame Sekante der beiden Kreise.

*b)* Hat ein Ähnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie nur einen Punkt gemeinsam, so hat er auch mit der andern nur einen Punkt gemeinsam, d. h. er ist eine gemeinsame Tangente beider Kreise, und zwar eine äußere oder innere, je nachdem der Ähnlichkeitsstrahl ein äußerer oder innerer ist.

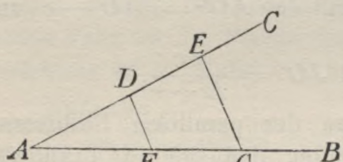
*c)* Hat ein Ähnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie keinen Punkt gemeinsam, so hat er auch mit der zweiten keinen Punkt gemeinsam, d. h. er liegt ganz außerhalb der beiden Kreise.

## V. Konstruktionsaufgaben.

### 1. Fundamentalaufgaben.

§. **134.** 1. Zu drei gegebenen Strecken $a$, $b$ und $c$ die vierte Proportionale zu finden.

Fig. 77.



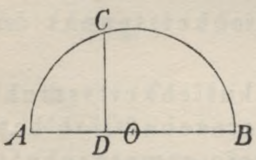

Man konstruiere einen willkürlichen Winkel $BAC$ (Fig. 77), mache $AD = a$, $DE = b$, $AF = c$, ziehe $DF$ und damit parallel $EG$; dann ist $FG$ die vierte Proportionale zu $a$, $b$, $c$.

2. Zu zwei gegebenen Strecken $a$ und $b$ die dritte stetige Proportionale zu konstruieren.

Nach Aufgabe 1, indem man dort $c = b$ setzt.

3. Zu zwei gegebenen Strecken $a$ und $b$ die mittlere Proportionale zu konstruieren.

Fig. 78.




Auflösung. Man mache (Fig. 78) $AD = a$, $DB = b$, beschreibe über $AB$ einen Halbkreis und errichte $DC \perp AB$; dann ist $DC$ die mittlere Proportionale zwischen $AD$ und $DB$.

Wie könnte man nach §. 129 die Konstruktion noch in anderer Weise ausführen?

4. *a)* Eine gegebene Strecke $AB$ (Fig. 79) im Verhältnis $m : n$ von innen, d. h. so zu teilen, daß der Teilungspunkt in $AB$ liegt.

Man mache $AC = m$, $CD = n$, verbinde $D$ mit $B$ und ziehe $CE \parallel DB$. Dann ist $AE : EB = m : n$.

*b)* Eine gegebene Strecke $AB$ (Fig. 80) im Verhältnis $m : n$ von außen, d. h. so zu teilen, daß der Teilungspunkt in der Verlängerung von $AB$ liegt.

Man mache $AC = m$, $CD = n$, verbinde $D$ mit $B$ und ziehe $CE \parallel DB$. Dann ist $AE : EB = m : n$.

Durch ähnliche Konstruktionen wie in $4a$ und $4b$ kann auch die Aufgabe, eine Strecke in einem vorgeschriebenen Verhältnis zu verkleinern oder zu vergrößern, gelöst werden.

Fig. 79.

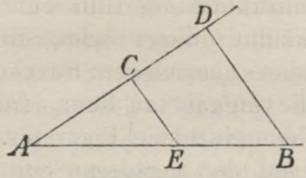
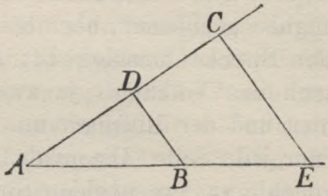



Fig. 80.




5. Eine gegebene Strecke $AB$ in Teile zu teilen, die sich wie $m:n:p\ldots$ verhalten.

Man ziehe durch $A$ einen willkürlichen Halbstrahl $AX$, trage auf demselben von $A$ aus Strecken auf, welche sich wie $m:n:p\ldots$ verhalten, und verfahre dann wie bei der Aufgabe 13 in §. 95.

6. Ein Dreieck zu konstruieren, welches einem gegebenen Dreiecke $ABC$ (Fig. 71) ähnlich ist.

Die Konstruktion kann, entsprechend den Ähnlichkeitssätzen, auf vier Arten geschehen, am einfachsten jedoch, wenn man auf einer beliebigen Strecke $A'B'$ in den Endpunkten die Winkel $A$ und $B$ aufträgt, deren Schenkel sich in $C'$ schneiden; dann ist $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Die Aufgabe ist unbestimmt. Erst wenn zu den zwei Bedingungen, die in dem Begriffe der Ähnlichkeit liegen, noch eine dritte Bedingung hinzutritt, z. B. daß die Strecke $A'B'$ eine gegebene Länge haben soll, wird die Aufgabe eine bestimmte.

7. An zwei gegebene Kreise eine gemeinsame Tangente zu ziehen.

Man bestimme (§. 132) den äußeren und den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise und ziehe aus denselben Tangenten an den einen Kreis; diese sind dann zugleich Tangenten des zweiten Kreises.

Determination. Liegt der eine Kreis ganz außerhalb des andern, so gibt es vier gemeinsame Tangenten, zwei äußere und zwei innere; berühren die beiden Kreise einander von außen, so gibt es zwei äußere und nur eine innere Tangente; schneiden sie einander, so sind nur die beiden äußeren Tangenten möglich; berühren sie einander von innen, so gibt es nur eine äußere Tangente; liegt der eine Kreis ganz innerhalb des andern, so ist keine gemeinsame Tangente möglich.

### 2. Methode der ähnlichen Figuren.

**§. 135.** Ist durch einige der zur Konstruktion einer Figur gegebenen Bestimmungsstücke die Gestalt der Figur bestimmt, so daß alle Figuren, welche in diesen Stücken übereinstimmen, einander ähnlich sind, so kann bei der Lösung die **Methode der ähnlichen Figuren** angewendet werden. Dabei zeichnet man zunächst mit den die Gestalt bestimmenden Stücken eine der gesuchten ähnliche Hilfsfigur von beliebiger Größe und konstruiert in ihr auch die Strecke, welche der in der Aufgabe gegebenen, aber bei der Konstruktion der Hilfsfigur nicht benützten Strecke homolog ist; das Verhältnis dieser beiden Strecken gibt auch das Verhältnis je zweier anderer homologen Strecken der gesuchten und der Hilfsfigur an. Um die Aufgabe zu lösen, darf man daher nur jede Seite (Diagonale, Höhe) der gesuchten Figur als vierte Proportionale zu jenen beiden Strecken und der homologen Seite (Diagonale, Höhe) der Hilfsfigur konstruieren.

Die **Gestalt eines Dreieckes** ist bestimmt durch zwei Winkel, durch das Verhältnis zweier Seiten und den eingeschlossenen oder den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel, oder durch die Verhältnisse der drei Seiten.

Es ist zur Anwendung dieser Methode nicht nötig, daß sich zu der gesuchten Gesamtfigur eine ähnliche konstruieren lasse; es genügt häufig, daß dies für einen **Teil** der letzteren möglich sei, sofern durch diesen Teil ein oder mehrere Bestimmungsstücke der ganzen Figur gefunden werden, durch deren Benützung die Aufgabe auf eine bereits bekannte zurückgeführt wird.

Durch das Verhältnis einer Höhe zu einer anliegenden Seite, oder durch einen Winkel an der Grundlinie ist die **Gestalt eines Teildreieckes** des gesuchten Dreieckes bestimmt.

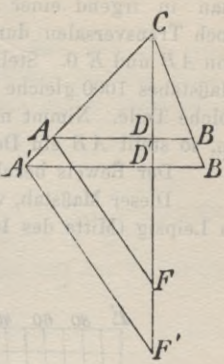
Durch nachstehend durchgeführte Aufgabe soll die Methode näher erläutert werden.

**Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Winkel $\alpha$ und $\beta$ und die Summe $s$ der vom Scheitel des dritten Winkels ausgehenden Höhe und einer anliegenden Seite gegeben sind.**

**Analysis.** Durch die gegebenen Winkel ist die Gestalt des gesuchten Dreieckes bestimmt, d. h. jedes beliebige, mit diesen Winkeln konstruierte Dreieck ist dem gesuchten ähnlich. Konstruiert man nun die Summe der vom Scheitel des dritten Winkels ausgehenden Höhe und einer anliegenden Seite des Hilfsdreieckes, so muß diese Summe sich zu der gegebenen verhalten, wie jede Seite des Hilfsdreieckes zu der homologen Seite des gesuchten. Man kann daher irgend eine Seite des letzteren als vierte Proportionale zu drei bekannten Strecken, und dann aus ihr und den Winkeln das gesuchte Dreieck konstruieren.

**Konstruktion.** Man zeichne eine beliebige Strecke $A'B'$ (Fig. 81) und in ihren Endpunkten $A'$ und $B'$ die gegebenen Winkel $\alpha$ und $\beta$, so daß das Dreieck $A'B'C$ entsteht. Dann ziehe man in diesem Dreiecke die Höhe $CD'$, verlängere sie um $D'F' = A'C$ und trage auf $CF'$ die Strecke $CF$ gleich der gegebenen Summe $s$ auf. Zieht man nun $F'A'$, $FA \parallel F'A'$ und $AB \parallel A'B'$, so ist $ABC$ das verlangte Dreieck.

Fig. 81.




Beweis. Da $AB \parallel A'B'$, so ist der Winkel $BAC = B'A'C = \alpha$ und $ABC = A'B'C = \beta$. Ferner hat man $CD : CD' = AC : A'C$, also auch $(CD + AC) : (CD' + A'C) = AC : A'C = CF : CF'$, folglich $(CD + AC) : CF' = s : CF'$, woraus $CD + AC = s$ folgt.

Determination. Durch die gegebenen Stücke ist das gesuchte Dreieck stets und zwar eindeutig bestimmt.

## VI. Übungssätze und Übungsaufgaben.

§. **136. Lehrsätze.**

1. Die Höhen eines Dreieckes sind den Seiten, zu denen sie normal sind, verkehrt proportioniert.

2. Je zwei Höhen eines Dreieckes schneiden einander so, daß das Produkt aus den Abschnitten der einen dem Produkte aus den Abschnitten der andern gleich ist.

3. Werden zwei Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleicher Höhe durch eine der Grundlinie parallele Transversale geschnitten, so sind die innerhalb der Dreiecke liegenden Abschnitte dieser Transversale einander gleich.

4. Die Diagonalen eines Trapezes schneiden einander proportioniert.

5. Zieht man an zwei Kreise, welche einander von außen berühren, die innere und eine äußere gemeinsame Tangente, so bilden die drei Berührungspunkte die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreieckes (§. 83).

§. **137.** Konstruktionsaufgaben.

1. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

2. Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine von diesen begrenzte Gerade so zu ziehen, daß sie in jenem Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ geteilt wird.

Mit Hilfe einer Parallelen.

3. Ein Vieleck zu konstruieren, das mit einem gegebenen Vielecke ähnlich ist und dessen Seiten zu den Seiten des gegebenen Vieleckes ein bestimmtes Verhältnis $m : n$ haben.

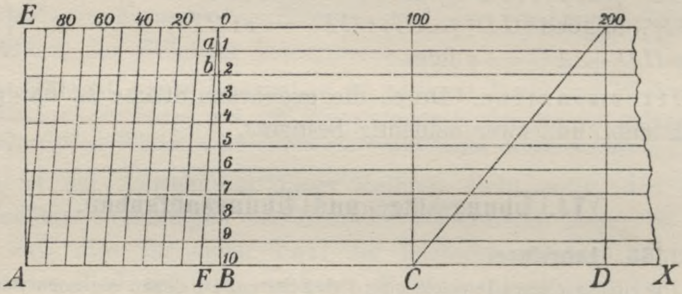
4. Einen tausendteiligen Maßstab zu konstruieren.

Man trage (Fig. 82) auf eine Gerade $AX$ 10 gleiche Teile auf, errichte in $A$, $B$ und den folgenden Teilungspunkten Normale auf $AX$ und ziehe zu $AX$ 10 Parallele in gleichen Abständen. Nun teile man sowohl $AB$ als die ihr gegenüberstehende Strecke $E\,0$ in 10 gleiche Teile, zu deren leichteren Bestimmung man in irgend einer Abteilung eine Diagonale $C\,200$ zieht. Endlich ziehe man noch Transversalen durch $F$ und 0, sowie durch je zwei folgende Teilungspunkte von $AB$ und $E\,0$. Stellen die auf $AX$ aufgetragenen 10 Strecken dieses Transversal-Maßstabes 1000 gleiche Teile vor, so enthält $AB$ 100, $FB$ 10, $a\,1$ 1, $b\,2$ 2 u. s. w. solche Teile. Nimmt man die Länge der ganzen Strecke $AX$ z. B. für ein Meter an, so stellt $AB$ ein Dezimeter, $BF$ ein Zentimeter, $a$ 1 ein Millimeter dar.

Der Beweis beruht auf der Ähnlichkeit der Dreiecke.

Dieser Maßstab, welcher Transversalmaßstab genannt wird, rührt von H o m m e l in Leipzig (Mitte des 16. Jahrh.).

Fig. 82.




5. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn ein spitzer Winkel und außerdem *a)* die Summe der Hypotenuse und der Höhe auf dieselbe, *b)* die Schwerlinie zur Hypotenuse gegeben ist.

Diese und die folgenden Konstruktionsaufgaben sind nach der Methode der ähnlichen Figuren aufzulösen.

6. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn das Verhältnis beider Katheten und außerdem *a)* die Hypotenuse, *b)* die Höhe auf die Hypotenuse gegeben ist.

7. Ein gleichschenkliges Dreieck aus einem Winkel und der Summe der Grundlinie und der Höhe zu konstruieren.

8. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: *a)* zwei Winkel und die Summe einer gegenüberliegenden Seite und der Höhe auf dieselbe; *b)* das Verhältnis zweier Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel und die Summe (Differenz) der dritten Seite und der Höhe auf dieselbe; *c)* eine Seite und ihre Verhältnisse zu den andern Seiten.

9. Ein Viereck zu konstruieren, wenn eine Diagonale und die vier Winkel, welche die andere Diagonale mit den Seiten bildet, gegeben sind.

10. Ein Dreieck mit Hilfe von Teildreiecken zu konstruieren, wenn die Verhältnisse einer Höhe zu den beiden anliegenden Seiten und außerdem *a)* die dritte Seite; *b)* die Schwerlinie zu der dritten Seite gegeben sind.

11. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn das Verhältnis einer Höhe zu einer anliegenden Seite, der dieser Seite gegenüberliegende Winkel und *a)* eine der zwei andern Seiten, *b)* die Summe dieser Seiten gegeben sind.

12. Ein Rechteck aus dem Verhältnisse einer Seite zur Diagonale und aus der Summe der andern Seite und der Diagonale zu konstruieren.

13. Ein Rechteck aus dem Verhältnisse zweier Seiten zu konstruieren, wenn außerdem *a)* die Diagonale, *b)* die Summe (Differenz) der Diagonale und einer Seite gegeben ist.

14. Ein Parallelogramm aus dem Verhältnisse zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zu konstruieren, wenn außerdem *a)* eine Höhe, *b)* die Summe der Diagonale und einer Seite, *c)* die Summe beider Diagonalen gegeben ist.

§. **138.** Rechnungsaufgaben.

1. In einem rechtwinkligen Dreiecke bezeichnen $a$ und $b$ die Katheten, $c$ die Hypotenuse; man berechne aus je zweien dieser Größen die dritte (§. 127).

2. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse und das Verhältnis der beiden Katheten gegeben; man bestimme die Katheten.

3. Aus einer Kathete und dem Verhältnisse der Hypotenuse zur andern Kathete die Hypotenuse und die zweite Kathete zu berechnen.

4. Es seien $p$ und $q$ die den Katheten $a$ und $b$ anliegenden Abschnitte der Hypotenuse $c$, in welche diese durch die zugehörige Höhe $h$ geteilt wird; *a)* aus $b$ und $q$, *b)* aus $p$ und $q$, *c)* aus $p$ und $h$ die übrigen Größen zu berechnen.

5.* In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse und *a)* die Summe, *b)* die Differenz der beiden Katheten gegeben; wie groß ist jede Kathete?

Diese und die weiterhin mit einem Sternchen bezeichneten Aufgaben sind für eine höhere Stufe bestimmt.

6. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete und *a)* die Summe, *b)* die Differenz der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben; man suche die Hypotenuse und die zweite Kathete.

7. In einem gleichseitigen Dreiecke ist $a$ die Seite und $h$ die Höhe; aus einer dieser Größen die andere zu bestimmen.

Man findet $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Sind $R$ und $r$ die Radien des um- und eingeschriebenen Kreises, so folgt aus §. 61 und §. 85 $R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $r = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.

8. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist $a$, der Schenkel $b$, die Höhe $h$; aus je zweien dieser Größen die dritte zu finden.

9. In einem Quadrate ist $a$ die Seite und $d$ die Diagonale; aus einer dieser Größen die andere zu bestimmen.

10. In einem Quadrate ist die Summe aus der Seite und der Diagonale gegeben; man suche die Seite und die Diagonale.

11. Von einem Punkte, dessen kürzester Abstand von einem Kreise $a$ ist, sei an diesen eine Tangente gezogen; wie groß ist der Halbmesser des Kreises, wenn die Tangente die Länge $t$ hat?

12. Das Auge eines Beobachters auf der Erdoberfläche sieht auf derselben so weit, als die Tangente angibt, welche vom Auge nach der Erdkugel gezogen wird; wie groß ist die Gesichtsweite $w$, oder wie lang ist die Tangente, wenn $h$ die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und $r$ den Halbmesser der Erde bezeichnet?

13. Wie weit erstreckt sich die Fernsicht von der Spitze eines 48 *m* hohen Turmes? ($r = 6378$ *km.*).

## Vierter Abschnitt.

### Flächeninhalt der geradlinigen ebenen Gebilde.

**§. 139.** Um den Flächeninhalt eines ebenen Gebildes, d. i. die Größe der von ihm begrenzten Fläche, zu bestimmen, untersucht man, wie vielmal eine als Einheit angenommene Fläche in dem gegebenen Gebilde enthalten ist. Als Flächeneinheit wird die Fläche eines Quadrates angenommen, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist. Nimmt man z. B. das Meter als Längeneinheit an, so ist das Quadratmeter ($m^2$) die Flächeneinheit.

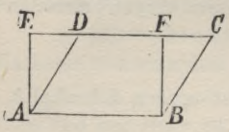
Zwei begrenzte Flächen, die gleichen Flächeninhalt haben, heißen flächengleich.

Da eine direkte Ausmessung des Flächeninhaltes einer Figur mit der gewählten Flächeneinheit meist nicht durchführbar ist, so wird die Fläche durch Rechnung bestimmt.

### I. Flächengleichheit.

**§. 140. Lehrsatz.** Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist flächengleich einem Rechtecke, welches mit ihm dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Fig. 83.




Beweis. Es sei $ABCD$ (Fig. 83) ein schiefwinkliges Parallelogramm. Zieht man $AE \perp AB$ und $BF \perp AB$, so hat das Rechteck $ABFE$ mit $ABCD$ dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe. Da nun $\triangle ADE \cong BCF$ ist, so ist auch $ABFD + ADE = ABFD + BCF$, d. i. $ABFE = ABCD$.

**Folgesatz.** Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

**§. 141. Lehrsatz.** Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Folgt aus §. 53, 1.

**Folgesatz.** Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

**§. 142. Lehrsatz.** Jedes Trapez ist flächengleich einem Parallelogramme, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie gleich ist der halben Summe der parallelen Seiten des Trapezes.

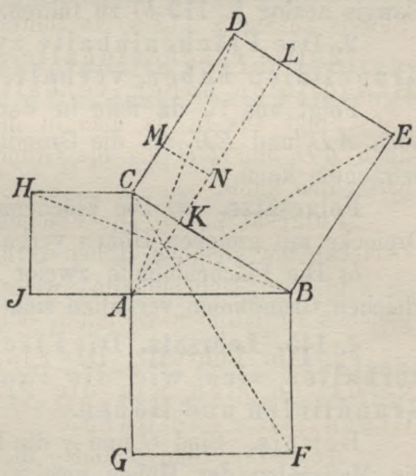
Der Beweis beruht auf §. 57, 1.

§. 143. **Lehrsätze.** In jedem rechtwinkligen Dreieck ist *a)* das Quadrat über einer jeden Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse; *b)* das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten; *c)* das Quadrat über der Höhe auf die Hypotenuse gleich dem Rechteck aus den Abschnitten derselben.

Beweis. *a)* Fällt man von (Fig. 84) $A$ auf $BC$ die Normale $AK$ und verlängert sie bis $L$, so sind die Rechtecke $BELK$ und $CDLK$ den Quadraten $ABFG$ und $ACHJ$ gleich.

Denn zieht man $AE$ und $CF$, so ist $\triangle ABE = \frac{BELK}{2}$ und $\triangle BCF = \frac{ABFG}{2}$ (§. 141); nun ist $\triangle\ ABE \cong FBC$, also auch $BELK = ABFG$.

Fig. 84.



Zieht man ferner $AD$ und $BH$, so ist ebenso $\triangle ACD = \frac{CDLK}{2}$, $\triangle BCH = \frac{ACHJ}{2}$, und, da $\triangle ACD \cong HCB$ ist, auch $CDLK = ACHJ$.

*b)* Es ist

$BELK + CDLK = ABFG + ACHJ$,

oder $BC^2 = AB^2 + AC^2$,

wenn das Quadrat über $BC$ mit $BC^2$ bezeichnet wird. (Pythagoreischer Lehrsatz.)

Die Richtigkeit dieses Satzes im arithmetischen Sinne ist schon im §. 127 nachgewiesen worden.

*c)* Aus dem Dreieck $AKC$ folgt $AK^2 = AC^2 - CK^2 = CDLK - CK^2 = DLNM$, wenn (Fig. 84) $CM = CK$ ist. $DLNM$ ist aber das Rechteck, dessen Seiten $CK$ und $KB$ gleich sind.

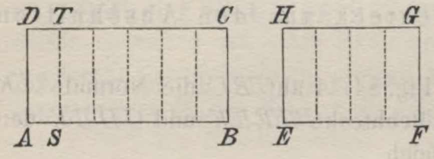
## II. Flächenverhältnisse.

§. 144. **Lehrsätze.** 1. Die Flächeninhalte zweier Rechtecke, welche gleiche Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Beweis. Es seien in den Rechtecken $ABCD$ und $EFGH$ (Fig. 85) die Höhen $AD$ und $EH$ gleich und die Grundlinien $AB$ und $EF$ kommensurabel.

Ist in diesem Falle $AS$ ein gemeinsames Maß der Grundlinien, und zwar $AB = m.AS$ und $EF = n.AS$, so hat man $AB : EF = m : n$.

Fig. 85.



Teilt man $AB$ in $m$ und $EF$ in $n$ Teile, deren jeder gleich $AS$ ist, und errichtet in den Teilungspunkten auf die Grundlinien Senkrechte, so wird dadurch das Rechteck $ABCD$ in $m$ und das Rechteck $EFGH$ in $n$ Rechtecke zerlegt, deren jedes mit $ASTD$ kongruent ist; es ist daher

$$ABCD = m.ASTD \text{ und } EFGH = n.ASTD,$$

somit $ABCD : EFGH = m : n$ und folglich

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

Sind die Grundlinien $AB$ und $EF$ inkommensurabel, so ist der Beweis analog §. 113 *b)* zu führen.

2. Die Flächeninhalte zweier Rechtecke, die gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

Folgt aus 1., da man in den Rechtecken $ABCD$ und $EFGH$ auch $AD$ und $EH$ als die Grundlinien, $AB$ und $EF$ als die Höhen betrachten kann.

**Folgesätze.** *a)* Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

*b)* Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

§. **145. Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweier Rechtecke verhalten sich wie die Produkte der Maßzahlen ihrer Grundlinien und Höhen.

Beweis. Sind $G$ und $g$ die Maßzahlen der Grundlinien, $H$ und $h$ die Maßzahlen der Höhen zweier Rechtecke $R$ und r, so sei $R'$ ein Rechteck, dessen Grundlinie $g$ und dessen Höhe $H$ zur Maßzahl hat. Dann ist (§. 144)

$$R : R' = G : g,$$

$$R' : r = H : h; \text{ daher durch Multiplikation}$$

$$R : r = G.H : g.h.$$

Den obigen Satz pflegt man (§. 127, Zus.) gewöhnlich so auszudrücken:

Die Flächeninhalte zweier Rechtecke verhalten sich wie die Produkte ihrer Grundlinien und Höhen.

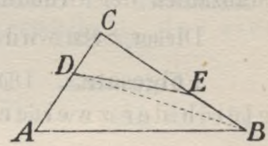
**Folgesätze.** *a)* Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich wie die Produkte ihrer Grundlinien und Höhen.

*b)* Die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

§. 146. **Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweier Dreiecke, welche einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Beweis. Man lege die Dreiecke $ACB$ und $DCE$ so aufeinander, daß sie den gleichen Winkel gemeinsam haben. (Fig. 86.)

Fig. 86.




Zieht man $BD$, so ist

$$\triangle ABC : DBC = AC : CD \text{ und}$$

$$\triangle DBC : DEC = BC : CE,$$

daher durch Multiplikation

$$\triangle ABC : DEC = AC.BC : CD.CE.$$

**Folgesatz.** Zwei Dreiecke, welche einen Winkel gemeinsam haben, sind flächengleich, wenn die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten gleich sind.

§. 147. **Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Beweis. Es sei $\triangle ABC \sim A'B'C'$ und $BC = a$, $AC = b$, $B'C' = a'$, $A'C' = b'$. Dann hat man, da $\sphericalangle\, C = C'$ ist, nach §. 146

$$\triangle ABC : A'B'C' = a.b : a'.b' = (a : a')\,(b : b').$$

Nun ist nach der Voraussetzung $b : b' = a : a'$, daher durch Substitution $\triangle ABC : A'B'C' = (a : a')\,(a : a') = a^2 : a'^2$.

§. 148. **Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Folgt aus §. 128, 2 und §. 147.

## III. Bestimmung des Flächeninhaltes.

§. 149. **Lehrsatz.** Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Beweis. Es sei $R$ ein Rechteck, das $G$ zur Grundlinie und $H$ zur Höhe hat, und $M$ die Flächeneinheit, d. i. ein Quadrat, dessen Seite $m$ die Längeneinheit ist. Nach §. 145 hat man

$$\frac{R}{M} = \frac{G.H}{m.m} = \frac{G}{m} \cdot \frac{H}{m}.$$

Es bedeutet nun $\frac{R}{M}$ die Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit $M$ in dem gegebenen Rechtecke enthalten ist; $\frac{G}{m}$ und $\frac{H}{m}$ aber sind die Zahlen, welche angeben, wie oft die entsprechende Längeneinheit $m$ bezüglich in der Grundlinie $G$ und in der Höhe $H$ jenes Rechteckes enthalten ist.

Die Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechteckes ist also gleich dem Produkte der auf die entsprechende Längeneinheit sich beziehenden Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe desselben.

Dieser Satz wird kürzer in der obigen Form ausgedrückt.

**Folgesatz.** Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite.

§. **150. Lehrsätze.** 1. Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe (§. 140 und §. 149).

2. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie und der Höhe (§. 141 und §. 150, 1).

3. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist *a)* gleich dem Produkte aus der halben Summe der Parallelseiten und der Höhe (§. 142), oder *b)* gleich dem Produkte aus der Mittellinie und der Höhe (§. 57, 1).

4. Der Flächeninhalt eines Viereckes mit senkrechten Diagonalen ist gleich dem halben Produkte der Diagonalen.

Man vergleiche das Viereck mit dem Rechteck, welches die Diagonalen desselben zu Seiten hat.

5. Der Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes wird bestimmt, indem man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, die Flächeninhalte derselben sucht und die erhaltenen Dreiecksflächen addiert.

## IV. Konstruktions- und Rechnungsaufgaben.

§. **151.** Verwandlung geradliniger Gebilde.

Ein Gebilde verwandeln heißt, ein anderes dem gegebenen flächengleiches Gebilde konstruieren, das gewissen Bedingungen Genüge leistet.

1. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, das eine Seite des gegebenen Dreieckes zur Grundlinie hat.

Auflösung mittels der geometrischen Örter.

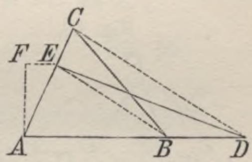
2. Ein Dreieck mit Beibehaltung einer Seite in ein anderes zu verwandeln, das an dieser Seite einen gegebenen Winkel $\alpha$ hat.

Auflösung mittels der geometrischen Örter.

3. Ein Dreieck $ABC$ (Fig. 87) unter Beibehaltung eines Winkels $A$ in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Seite $c$ hat.

Man trage $c$ auf $AB$ bis $D$ auf, ziehe $CD$, und zu ihr parallel $BE$; ferner $DE$, so ist $ADE$ das verlangte Dreieck. Denn $\triangle ADE = ABC$, da $\triangle BED = BEC$ ist.

Fig. 87.

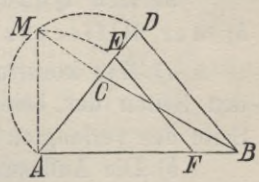



4. Ein Dreieck $ABC$ (Fig. 87) unter Beibehaltung eines Winkels $A$ in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe $h$ hat.

Errichtet man $AF = h$ normal zu $AB$, zieht $FE \parallel AB$, $CD \parallel EB$ und $ED$, so ist $\triangle ADE = ABC$.

5. Ein Dreieck $ABC$ (Fig. 88) unter Beibehaltung eines Winkels $A$ in ein anderes zu verwandeln, in welchem die diesem Winkel gegenüberliegende Seite einer gegebenen Geraden $BD$ parallel ist.

Fig. 88.

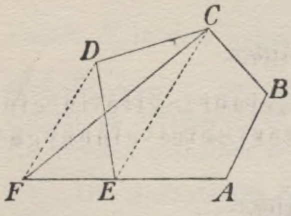



Analysis. Ist $AFE$ das gesuchte Dreieck, also $EF \parallel DB$, so hat man $AB:AF = AD:AE$. Damit $\triangle ABC = AFE$ sei, muß auch (nach §. 146, Folges.) $AB.AC = AF.AE$ oder $AB:AF = AE:AC$ sein. Man hat also $AD:AE = AE:AC$, d. i. $AE$ ist die mittlere geometrische Proportionale zu $AD$ und $AC$.

Konstruktion. Man suche zu $AD$ und $AC$ die mittlere geometrische Proportionale $AM$, mache $AE = AM$ und ziehe $EF \parallel DB$; $AFE$ ist das verlangte Dreieck.

6. Ein Vieleck $ABCDE$ (Fig. 89) in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Fig. 89.




Man schneide durch eine Diagonale $CE$ von dem gegebenen Vielecke ein Dreieck $CDE$ ab, lege durch $D$ zu $CE$ die Parallele $DF$, welche die verlängerte Seite $AE$ in $F$ schneidet, und ziehe $CF$; dann ist das Vieleck $ABCDE =$ Vieleck $ABCF$, weil beide aus gleichen Teilen bestehen.

Durch Wiederholung dieser Konstruktion kann jedes Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden.

7. Ein Dreieck in ein Parallelogramm mit derselben Grundlinie zu verwandeln.

Man mache (Fig. 90) $BD = CD$, ziehe $EF \parallel AB$ und $BF \parallel AC$; es ist $ABFE = ABC$.

8. Ein Rechteck $ABCD$ (Fig. 91) in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 90.

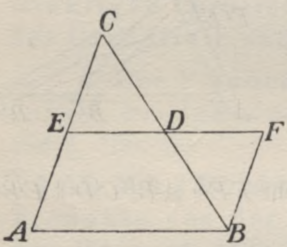
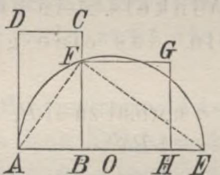



Fig. 91.




Man mache $BE = BC$, beschreibe über $AE$ einen Halbkreis, welcher $BC$ in $F$ schneidet. Das über $BF$ konstruierte Quadrat $BFGH$ ist dem gegebenen Rechtecke flächengleich (§. 143, $c$).

Durch Anwendung der Konstruktionen 6, 7 und 8 kann man jedes Vieleck in ein Quadrat verwandeln. (Quadratur eines Vieleckes.)

9. Ein Quadrat zu konstruieren, das $a$) der Summe, $b$) der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.

*a)* Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten den Seiten der beiden Quadrate gleich sind; die Hypotenuse ist die Seite des verlangten Quadrates.

*b)* Die Auflösung beruht auf §. 143.

10. Ein Quadrat zu konstruieren, welches der Summe dreier oder mehrerer Quadrate gleich ist.

Man vereinige nach der Aufgabe 9 *a)* zuerst zwei Quadrate miteinander, das gefundene mit dem dritten u. s. w.

**§. 152.** Teilung geradliniger Gebilde.

1. Ein gegebenes Dreieck durch Gerade, welche von einem Eckpunkte ausgehen, *a)* in gleiche Teile, *b)* in Teile zu teilen, welche in einem gegebenen Verhältnis stehen.

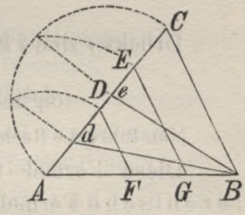
Man teile die Gegenseite *a)* in gleiche Teile, *b)* nach dem gegebenen Verhältnis und ziehe von dem Eckpunkte Strecken nach den Teilungspunkten.

2. Ein Dreieck $ABC$ durch Gerade, welche von einem auf einer Seite $AB$ liegenden Punkte $M$ ausgehen, in drei Teile zu teilen, welche sich wie $m:n:p$ verhalten.

Man teile das Dreieck (nach 1) durch die Geraden $CD$ und $CE$ nach dem gegebenen Verhältnisse und verwandle (nach Aufg. 3 in §.151) die Dreiecke $ADC$ und $BEC$ in zwei Dreiecke über den Grundlinien $AM$ und $BM$.

3. Ein Dreieck $ABC$ (Fig. 92) durch Gerade, welche einer Seite $BC$ parallel sind, in Teile zu teilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse $m:n:p$ stehen.

Fig. 92.




Teilt man $AC$ in den Punkten $d$ und $e$ nach dem Verhältnisse $m:n:p$, so haben die Dreiecke $ABd$, $dBe$ und $eBC$ die verlangte Größe. Man verwandelt nun die Dreiecke $ABd$ und $ABe$ mit Beibehaltung des Winkels $A$ (nach §. 151, Aufg. 5) in die Dreiecke $AFD$ und $AGE$, in denen die Gegenseiten $FD$ und $GE$ der Seite $BC$ parallel sind; $FD$ und $GE$ sind dann die gesuchten Teilungslinien.

Ist $m = n = p$, so wird das $\triangle ABC$ in gleiche Teile geteilt.

4. Ein Parallelogramm durch Gerade, die einer Seite parallel sind, *a)* in gleiche Teile, *b)* nach einem gegebenen Verhältnisse zu teilen.

5. Ein Trapez durch gerade Linien, welche die beiden Parallelseiten schneiden, *a)* in gleiche Teile, *b)* nach einem gegebenen Verhältnisse zu teilen.

§. **153.** Rechnungsaufgaben.

1. In einem gleichseitigen Dreiecke ist 1) die Seite $a$, 2) die Höhe $h$; wie groß ist der Flächeninhalt $f$?

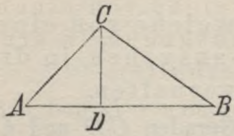
$$1)\ f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \qquad 2)\ f = \frac{h^2}{3}\sqrt{3}.$$

2. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist $a$ die Grundlinie, $b$ der Schenkel; man suche den Flächeninhalt $f$.

$$f = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

3. In einem Dreiecke sind die drei Seiten $a, b, c$; man berechne die zu einer Seite gehörige Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 93.




Es sei in dem Dreiecke $ABC$ (Fig. 93) die Höhe $CD = h$ und die Strecke $AD = x$.

Aus den Dreiecken $ACD$ und $BCD$ ergibt sich $h^2 = b^2 - x^2$, $h^2 = a^2 - (c - x)^2$, daher $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$ und daraus $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$; folglich $h^2 = b^2 - x^2 = (b + x)$. $(b - x)$ oder $h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) =$

$$\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c},$$

daher $h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b + c + a)\,(b + c - a)\,(a + b - c)\,(a - b + c)}$.

Setzt man $a + b + c = 2s$, so wird $h = \frac{2}{c}\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$.

Drückt $f$ den Flächeninhalt des Dreieckes $ABC$ aus, so ist $f = \frac{c \,.\, h}{2}$,

folglich $f = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$.

Man führe die Rechnung für den Fall durch, daß der Winkel $A$ ein stumpfer ist.

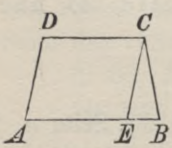
Diese Formel für den Flächeninhalt eines Dreieckes heißt die Heronische Formel. (Heron von Alexandrien, um das Jahr 100 v. Chr.)

Ist $a = 15$, $b = 14$, $c = 13$, so ist

$$f = \sqrt{21.6.7.8} = \sqrt{3.7.2.3.7.2.4} = 3.7.2.2 = 84.$$

4. In einem Trapeze sind die vier Seiten $a, b, c, d$; man berechne die Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 94.




Es sei (Fig. 94) $AB = a$, $CD = b$, $AD = c$ und $BC = d$, die Höhe $h$ und der Flächeninhalt $f$. Zieht man $CE \parallel DA$, so sind in dem Dreiecke $BEC$ die Seiten $BE = a - b$, $BC = d$ und $CE = c$, daher (nach Aufg. 3) die zu $BE$ gehörige Höhe

$$h = \frac{1}{2(a - b)} \,.\, \sqrt{(c + d + a - b)\,(c + d - a + b)\,.}$$
$$\sqrt{(a - b + c - d)\,(a - b - c + d)}.$$

Da nun $h$ zugleich die Höhe des Trapezes und der Flächeninhalt desselben $f = \frac{a + b}{2} \,.\, h$ ist, so folgt

$$f = \frac{a + b}{4\,(a - b)} \,.\, \sqrt{(b + c + d - a)\,(a + c + d - b)\,(a + d - b - c)\,(a + c - b - d)}.$$

Dimensionen. Man sagt, ein Produkt hat $n$ Dimensionen, wenn es die Maßzahlen von $n$ Linien als Faktoren enthält. Die Dimension eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Dimensionen des Dividends und des Divisors. Die Dimension einer Potenz wird gefunden, indem man die Dimension der Basis mit dem Exponenten multipliziert. Die Dimension einer Wurzel ist gleich der Dimension des Radikanden gebrochen durch den Wurzelexponenten.

Eine Linie ist stets durch einen Ausdruck von einer Dimension, eine Fläche durch einen Ausdruck von zwei Dimensionen bestimmt. Enthalten die Ausdrücke für geometrische Größen Summen oder Differenzen, so müssen dieselben homogen sein, d. h. alle Glieder müssen dieselbe Dimension haben. Bei geometrischen Aufgaben läßt die Bestimmung der Dimension der Resultate ihre Möglichkeit erkennen.

Der Schüler bestimme die Dimension der bis jetzt vorgekommenen Formeln.

## V. Übungssätze und Übungsaufgaben.

§. **154.** Übungssätze.

1. Die Summe der drei Normalen von einem Punkte im Innern eines gleichseitigen Dreieckes auf die Seiten ist gleich der Höhe des Dreieckes.

2. Jede durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms gezogene Gerade halbiert dasselbe.

3. Zieht man durch die vier Eckpunkte eines Viereckes Parallele zu den Diagonalen, so ist das von ihnen gebildete Parallelogramm doppelt so groß als das Viereck.

4. Zieht man in einem Parallelogramme durch irgend einen Punkt einer Diagonale Parallele zu den Seiten, so sind die von der Diagonale nicht durchschnittenen Parallelogramme flächengleich.

5. Zieht man von der Mitte einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes Strecken zu den Endpunkten der andern, so ist das dadurch bestimmte Dreieck gleich der Hälfte des Trapezes.

6. Beweise mit Hilfe entsprechender Konstruktionen, daß die folgenden arithmetischen Formeln auch im geometrischen Sinne richtig sind:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

7. Konstruiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes als homologen Seiten ähnliche Vielecke, so ist das Vieleck über der Hypotenuse gleich der Summe der Vielecke über den Katheten (§. 148 und §. 143).

8. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Umfange ist das gleichschenklige das größtmögliche (ein Maximum).

Es sei $a$ die Grundlinie, $s$ die Summe der beiden anderen Seiten, und, wenn diese ungleich sind, $\frac{s}{2} + x$ die größere, $\frac{s}{2} - x$ die kleinere Seite; dann ist der Flächeninhalt $f = \frac{1}{4}\sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - 4x^2)}$.

Je kleiner $x$ ist, desto größer ist $f$ und am größten, wenn $x = 0$ wird, d. h. wenn das Dreieck gleichschenklig ist.

9. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Flächeninhalte ist der Umfang des gleichschenkligen der kleinstmögliche (ein Minimum).

Aus $f = \frac{1}{4}\sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - 4x^2)}$ folgt $s = \sqrt{\frac{16 f^2}{a^2 - 4x^2} + a^2}$.

$s$ und daher auch der Umfang $u = a + s$ erhält also den kleinsten Wert, wenn $x = 0$ wird, d. i. für das gleichschenklige Dreieck.

§. **155.** Konstruktionsaufgaben.

1. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, von welchem gegeben ist *a)* die Grundlinie, *b)* ein Schenkel.

2. Ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels in ein rechtwinkliges zu verwandeln (Aufg. 5 in §. 151).

3. Ein Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln, von welchem gegeben ist *a)* eine Kathete, *b)* die Hypotenuse.

4. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln (Aufg. 2 und 5 in §. 151).

5. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist (Aufg. 5 in §. 151).

6. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches *a)* einen gegebenen Winkel, *b)* eine gegebene Seite, *c)* einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat.

7. Ein Dreieck durch eine Gerade, welche zu einer Seite normal ist, zu halbieren (Aufg. 1 in §. 152 und die obige Aufg. 2).

§. **156.** Rechnungsaufgaben.

1. In einem rechtwinkligen Dreiecke sind gegeben *a)* die Hypotenuse und eine Kathete, *b)* eine Kathete und die zur Hypotenuse gehörige Höhe; berechne den Flächeninhalt!

2. Den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes zu bestimmen, wenn gegeben sind:

*a)** die Hypotenuse und die Summe der beiden Katheten;

*b)* eine Kathete und die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete.

3.* In einem rechtwinkligen Dreiecke sind der Flächeninhalt und die zur Hypotenuse gehörige Höhe gegeben; bestimme die drei Seiten!

4.* In einem rechtwinkligen Dreiecke sind die Hypotenuse und der Flächeninhalt gegeben; bestimme die beiden Katheten!

5.* Aus dem Umfange und dem Flächeninhalte eines rechtwinkligen Dreieckes dessen Seiten zu berechnen.

6. Aus der Diagonale $d$ (36 *cm*) eines Quadrates den Flächeninhalt $f$ zu berechnen.

7. Aus einer Seite $a$ (7·2 *m*) und der Diagonale $d$ (12·5 *m*) eines Rechteckes den Flächeninhalt $f$ zu bestimmen.

8.* Aus dem Umfange und dem Flächeninhalte eines Rechteckes dessen Seiten zu berechnen.

9. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Flächeninhalt $2\ m^2$ beträgt?

10. Den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes aus der Summe der Seite und der Höhe zu bestimmen.

11. Aus der Grundlinie $a$ ($2 \cdot 34\ m$) und dem Flächeninhalte $f$ ($3 \cdot 76\ m^2$) eines gleichschenkligen Dreieckes den Schenkel $b$ zu berechnen.

12. Den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreieckes zu bestimmen, wenn gegeben sind:

*a)* die zur Grundlinie und zu einem Schenkel gehörigen Höhen;

*b)* die Grundlinie und die zu einem Schenkel gehörige Höhe;

*c)* der Umfang und die zur Grundlinie gehörige Höhe.

13. In einem Dreiecke sind zwei Seiten $a$, $b$ und die zur dritten Seite gehörige Höhe $h$ gegeben; berechne den Flächeninhalt $f$!

14. Den Flächeninhalt eines Dreieckes zu berechnen, dessen Seiten $21\ m$, $17\ m$, $10\ m$ sind.

15. In einem Dreiecke sind zwei Seiten $a$, $b$ und die Schwerlinie $m$ der dritten gegeben; berechne $f$!

Verlängere im $\triangle ABC$ die Schwerlinie $CD$ um ihre eigene Länge bis $E$ und ziehe $AE$; dann ist $\triangle ABC = AEC$, daher nach §. 153, 3

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2m)\,(b+2m-a)\,(a+2m-b)\,(a+b-2m)}.$$

16. In einem Dreiecke sind die drei Schwerlinien $m$, $m'$, $m''$ gegeben; berechne $f$!

Da (Fig. 38 und §. 61) $\triangle ABC = 3\,AOB$ ist, so erhält man nach Aufg. 15

$$f = \tfrac{1}{3}\sqrt{(m+m'+m'')\,(m'+m''-m)\,(m+m''-m')\,(m+m'-m'')}.$$

17. In einem Dreiecke sind die drei Höhen $h$, $h'$, $h''$ gegeben; bestimme $f$!

$$f = \frac{1}{\sqrt{(p+p'+p'')\,(p'+p''-p)\,(p+p''-p')\,(p+p'-p'')}},$$

wenn $\frac{1}{h} = p$, $\frac{1}{h'} = p'$, $\frac{1}{h''} = p''$ gesetzt wird.

18. Die Diagonalen eines Deltoids sind $D$ ($45\ cm$) und $d$ ($32\ cm$). Bestimme den Flächeninhalt!

19. Den Flächeninhalt eines Rhombus zu berechnen, wenn *a)* beide Diagonalen, *b)* die Seite und eine Diagonale gegeben sind.

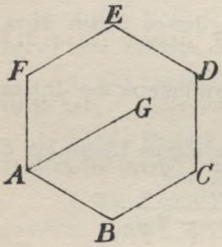
Fünfter Abschnitt.

# Die regelmäßigen Polygone und die Maßbestimmungen am Kreise.

## I. Die regelmäßigen Polygone.

**§. 157. Lehrsätze.** 1. Jede Winkelsymmetrale und jede Seitensymmetrale eines regulären Polygons ist eine Symmetrale des Polygons.

Fig. 95.

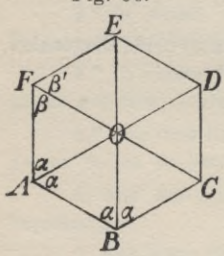



Es sei $AG$ (Fig. 95) die Symmetrale des Winkels $A$. Durch eine Drehung von 180° um $AG$ kommt also $AB$ in die Richtung von $AF$, wegen $AB = AF$ der Punkt $B$ auf $F$. Ferner $BC$ auf $FE$, da Winkel $B = F$ und $BC = FE$ etc. Ebenso kann der zweite Teil des Satzes bewiesen werden.

2. Ein reguläres $n$-Eck hat $n$ Symmetrieachsen. Ist $n$ eine gerade Zahl, so haben immer je zwei gegenüberliegende Winkel und je zwei gegenüberliegende Seiten dieselbe Symmetrale, da die Zahl der Eckpunkte auf beiden Seiten einer Symmetrale dieselbe sein muß. Ist $n$ ungerade, so fällt aus demselben Grunde jede Seitensymmetrale mit der Symmetrale des gegenüberliegenden Winkels zusammen.

3. In jedem regelmäßigen Polygon schneiden einander alle Winkel- und Seitensymmetralen in demselben Punkt, welcher *a)* von allen Eckpunkten, *b)* von allen Seiten des Polygons gleiche Abstände hat.

Fig. 96.




Es seien $AO$ und $BO$ (Fig. 96) die Symmetralen der Winkel $A$ und $B$; sie schneiden einander in $O$ (§. 24, 3). Verbindet man diesen Punkt mit allen übrigen Eckpunkten, so erhält man die Symmetralen der Winkel an denselben. Denn $\triangle AOB \cong AOF$, daher $\beta = \alpha$, mithin auch $\beta' = \alpha$ und $OB = OA = OF$ etc. Die Dreiecke $AOB$, $AOF$, $EOF\ldots$ sind gleichschenklig, die Symmetralen der Seiten des Polygons müssen daher alle durch $O$ gehen; die Abstände dieses Punktes von den Seiten des Polygons sind als gleichliegende Höhen kongruenter Dreiecke einander gleich. $O$ heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Polygons.

4. Jedes regelmäßige Polygon von gerader Seitenzahl ist in Beziehung auf den Mittelpunkt eine zentrischsymmetrische Figur.

Ziehe vom Mittelpunkte eines regulären $n$-Eckes zu allen Eckpunkten Strecken; wie groß ist *a)* der Winkel am Scheitel, *b)* der Winkel an der Grundlinie in jedem der dadurch gebildeten gleichschenkligen Dreiecke?

Berechne diese Winkel insbesondere:

*a)* für das gleichseitige Dreieck; *b)* für das Quadrat;
*c)* für das reguläre Fünfeck; *d)* für das reguläre Sechseck;
*e)* für das reguläre Zehneck; *f)* für das reguläre Zwölfeck.

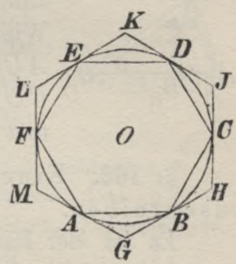
§. **158. Lehrsätze.** 1. Jedem regulären Vielecke läßt sich ein Kreis um- und einschreiben.

Der Beweis ist in §. 157 enthalten.

Der Abstand des Mittelpunktes des regulären Vieleckes von den Eckpunkten ist der Halbmesser des umgeschriebenen, der Abstand des Mittelpunktes von den Seiten der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

2. Ist die Peripherie eines Kreises in $n$ gleiche Teile geteilt, so bilden *a)* die Sehnen zwischen je zwei benachbarten Teilungspunkten ein eingeschriebenes und *b)* die Tangenten in den Teilungspunkten ein umgeschriebenes reguläres $n$-Eck.

Fig. 97.




Beweis. Es sei (Fig. 97) der Bogen $AB = BC = CD = \ldots$

*a)* Zieht man die Sehnen $AB, BC, CD, \ldots$, so sind in dem Vielecke $ABCD\ldots$ die Seiten $AB$, $BC$, $CD, \ldots$ gleich (§. 78, 3), ferner die Winkel $A$, $B$, $C$, $D, \ldots$ gleich (§. 83); folglich ist das Polygon $ABCD\ldots$ regulär.

*b)* Zieht man durch $A$, $B$, $C$, $D\ldots$ Tangenten an den Kreis, welche einander in den Punkten $G$, $H$, $J$, $K, \ldots$ schneiden, so sind wegen der Gleichheit der Seiten $AB$, $BC$, $CD, \ldots$ und der ihnen anliegenden Winkel (§. 83) die Dreiecke $AGB$, $BHC$, $CJD, \ldots$ kongruent und gleichschenklig; mithin sind die Summen je zweier Schenkel gleich, also $GH = HJ = JK = \ldots$ Aus der Kongruenz der obigen Dreiecke folgt auch die Gleichheit der Winkel $MGH$, $GHJ, \ldots$; folglich ist das Polygon $GHJK\ldots$ regulär.

§. **159.** Zahl der Bestimmungsstücke eines regulären Polygons.

Verbindet man die Endpunkte einer Seite eines regulären Polygons mit dem Mittelpunkt desselben, so erhält man das **Bestimmungsdreieck** des Polygons.

Dieses ist konstruierbar, wenn eine Seite und die Seitenzahl des Vieleckes gegeben sind.

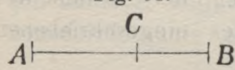
Zur Bestimmung eines regelmäßigen Vieleckes sind also zwei Stücke ausreichend.

§. **160.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regulären Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises.

Beweis. Zieht man vom Mittelpunkte Strecken zu den Eckpunkten des Sechseckes, so sind die dadurch entstehenden Dreiecke gleichseitig, da jeder Winkel in denselben $60^0$ beträgt.

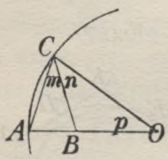
§. **161.** Eine Strecke heißt nach stetiger Proportion geteilt, wenn der größere Abschnitt derselben die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitte ist, wenn also die Proportion (Fig. 98) $AB:AC = AC:BC$ besteht. (Goldener Schnitt.)

Fig. 98.




**Lehrsatz.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen, regulären Zehneckes ist gleich dem größeren Abschnitte des nach stetiger Proportion geteilten Halbmessers.

Fig. 99.

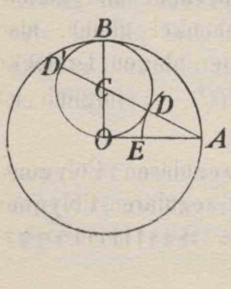



Beweis. Es sei $AC$ (Fig. 99) die Seite des eingeschriebenen, regulären Zehneckes. Zieht man die Halbmesser $OA$ und $OC$, so ist $AOC = 36^0$ und daher in dem gleichschenkligen Dreiecke $ACO$ der Winkel $ACO = 72^0$. Halbiert man nun den Winkel $ACO$, so daß $m = n = p$ wird, so ist (§. 117) $CO:AC = BO:AB$, oder $AO:BO = BO:AB$, und $BO > AB$.

§. **162.** Einem Kreis ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben.

Es ist der Radius $AO$ des Kreises (Fig. 100) stetig zu teilen. Man konstruiere $BO \perp AO$, beschreibe über $BO$ als Durchmesser einen Kreis und ziehe durch $A$ und $C$ die Sekante $AD'$; macht man $AE$ gleich $AD$, so ist $AO$ in $E$ stetig geteilt.

Fig. 100.




Beweis.

$AD':AO = AO:AD$,

$(AD' - AO):AO = (AO - AD):AD$,

$AE:AO = EO:AE$,

oder $AE^2 = AO.EO$; $AE$ ist daher die Seite des eingeschriebenen, regelmäßigen Zehneckes.

§. 163. 1. In regulären Vielecken von gleicher Seitenanzahl verhalten sich die Halbmesser der ihnen ein- oder umgeschriebenen Kreise wie zwei Seiten.

2. Die Umfänge regulärer Vielecke von gleicher Seitenanzahl verhalten sich wie die Halbmesser der den Vielecken ein- oder umgeschriebenen Kreise.

§. 164. Der Flächeninhalt eines regulären Vieleckes ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange desselben und dem Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Beweis. Es seien $s$, $r$ und $f$ bezüglich die Maßzahlen einer Seite, des Radius des eingeschriebenen Kreises und des Flächeninhaltes eines regulären $n$-Eckes. Zieht man vom Mittelpunkte zu allen Eckpunkten Strecken, so wird dadurch das $n$-Eck in $n$ kongruente Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt eines solchen Dreieckes ist $\frac{sr}{2}$, daher

$$f = n.\frac{s.r}{2} = \frac{ns.r}{2},$$

wo $ns$ die Maßzahl des Umfanges des Vieleckes ist.

Die Fläche eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seite $s$ ist $\frac{3s^2}{2}\sqrt{3}$.

§. 165. Aufgaben.

1. Die Peripherie eines Kreises *a)* in 2, 4, 8... *b)* in 3, 6, 12... gleiche Teile zu teilen.

2. Die Peripherie eines Kreises in 5, 10, 20... gleiche Teile zu teilen.

3. Die Peripherie eines Kreises in 15, 30... gleiche Teile zu teilen $\left(\frac{p}{15} = \frac{p}{6} - \frac{p}{10}\right)$.

4. Einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck mit der Seitenzahl *a)* 4, 8..., *b)* 3, 6, 12..., *c)* 5, 10, 20..., *d)* 15, 30... ein- und umzuschreiben.

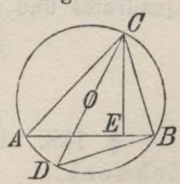
5. Über einer gegebenen Seite ein regelmäßiges *a)* Achteck, *b)* Zwölfeck zu konstruieren.

## II. Berechnung der Sehnen- und Tangentenvielecke.

§. 166. Das Sehnen- und Tangentendreieck.

1. Es sei $O$ (Fig. 101) der Mittelpunkt, $CD$ ein Durchmesser des dem Dreiecke $ABC$ umgeschriebenen Kreises und $CE \perp AB$, ferner $CE = h$ und $OC = R$. Da $\triangle CBD \sim CEA$, so ist $CD : CB = AC : CE$, oder $2R : a = b : h$; mithin $2hR = ab$, und $2chR = abc$, oder $4fR = abc$, wenn $f$ den Flächeninhalt des Dreieckes $ABC$ bezeichnet.

Fig. 101.



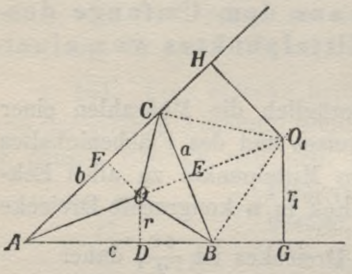
Man hat daher

$$f = \frac{abc}{4R} \text{ und } R = \frac{abc}{4f} = \frac{abc}{4\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}.$$

Diese Formel ist in einem astronomischen Werke des indischen Mathematikers Brahmagupta (geb. 598 n. Chr.) enthalten.

2. Es sei $O$ (Fig. 102) der Mittelpunkt, $OD = OF = OE = r$ der Halbmesser des dem Dreiecke $ABC$ eingeschriebenen Kreises und $f$ der Flächeninhalt dieses Dreieckes.

Fig. 102.




Man hat

$$f = \triangle BOC + AOC + AOB \text{ oder}$$

$$f = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}.(a+b+c)$$

$$= rs \text{ und } r = \frac{f}{s} \text{ oder}$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}.$$

**Zusatz.** Ist $O_1$ der Mittelpunkt eines äußeren Berührungskreises (§. 85, Zusatz *c)* und $O_1 G$ dessen Radius, so ist

$$f = ABO_1 + ACO_1 - BCO_1 = \frac{cr_1}{2} + \frac{br_1}{2} - \frac{ar_1}{2}, \text{ somit}$$

$$f = \frac{r_1}{2}\,(b + c - a) = \frac{r_1}{2}.2\,(s-a) = r_1\,(s-a) \text{ und } r_1 = \frac{f}{s-a}.$$

Auf gleiche Weise findet man bezüglich der beiden andern äußeren Berührungskreise $r_2 = \frac{f}{s-b}$, $r_3 = \frac{f}{s-c}$.

Daraus ergibt sich $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{s-a+s-b+s-c}{f} =$
$\frac{s}{f} = \frac{1}{r}$ und $r_1\,r_2\,r_3 = \frac{f^3}{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \frac{f^3}{r^2 s} = \frac{f^2}{r^2}.\frac{f}{s} = \frac{f^2}{r}$,
somit $rr_1\,r_2\,r_3 = f^2$.

Die Radien des einem gleichseitigen Dreiecke ein- und umgeschriebenen Kreises erhält man am einfachsten direkt. (Vgl. §. 138, Aufg. 7.)

§. **167.** Das ein- und das umgeschriebene Quadrat.

Sind $s_4$ und $S_4$ die Seiten des ein- und des umgeschriebenen Quadrates und $r$ der Halbmesser des Kreises, so ist

$$s_4 = r\sqrt{2},\ S_4 = 2r \text{ und umgekehrt}$$

$$r = \frac{s_4}{2}\sqrt{2} = \frac{S_4}{2}.$$

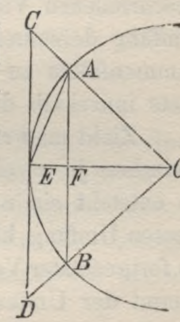
§. **168.** Das einem Kreise eingeschriebene, reguläre Zehneck.

Ist $AO = r$ (Fig. 100) der Radius des Kreises, so ist $CO = \frac{r}{2}$, $AC = s_{10} + \frac{r}{2}$, daher $\left(s_{10} + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$, $s_{10} + \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$ und $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

§. 169. Aus der Seite $s_n$ des einem gegebenen Kreise eingeschriebenen, regulären Vieleckes die Seite $S_n$ des demselben Kreise umgeschriebenen, regulären Vieleckes von gleicher Seitenzahl zu bestimmen.

Ist (Fig. 103) $OA = r$ der Halbmesser des Kreises und $AB = s_n$ die Seite des eingeschriebenen, regulären $n$-Eckes, so ist, wenn $OE \perp AB$ und die Tangente durch $E$ von den Halbmessern $OA$ und $OB$ in $C$ und $D$ geschnitten wird, $CD = S_n$ die Seite des umgeschriebenen $n$-Eckes. Da dann $\triangle CDO \sim ABO$ ist, so folgt

Fig. 103.




$$CD : AB = OE : OF \text{ oder}$$

$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ daher}$$

$$S_n = \frac{rs_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

Man erhält $S_6 = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \frac{r^2}{\frac{r}{2}\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

§. 170. Aus der Seite $s_n$ des einem gegebenen Kreise eingeschriebenen, regulären Vieleckes die Seite $s_{2n}$ des demselben Kreise eingeschriebenen, regulären Vieleckes von doppelter Seitenzahl zu berechnen.

Haben $r$ und $s_n$ die ihnen im §. 169 beigelegte Bedeutung, so ist (Fig. 103) Sehne $AE = s_{2n}$. Man hat nun nach §. 129, 1

$$s_{2n}^2 = 2r \cdot EF = 2r(r - OF) = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)$$

und
$$s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}.$$

Man erhält für $s_{12} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}\right)} = \sqrt{2r\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)}$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

## III. Bestimmung der Peripherie und des Flächeninhaltes eines Kreises.

§. 171. **Lehrsatz.** Die Peripherie eines Kreises liegt für jede Seitenzahl des ihm ein- und des ihm umgeschriebenen Vieleckes zwischen den Umfängen dieser Vielecke.

Beweis. Zieht man in einem Kreise, dem ein Vieleck eingeschrieben ist, von je zwei aufeinanderfolgenden Eckpunkten desselben zu einem Punkte des von ihnen begrenzten Bogens Sehnen, so erhält man ein neues eingeschriebenes Vieleck von doppelter Seitenzahl, dessen Umfang größer ist als der Umfang des früheren (§. 34, 1). Fährt man auf diese Art mit der Vermehrung der Seitenzahl der eingeschriebenen Vielecke fort, so wächst mit der Seitenanzahl auch der Umfang derselben, ohne jedoch je mit der Peripherie des Kreises zusammenfallen zu können, da alle Vielecksseiten als Sehnen des Kreises stets innerhalb desselben liegen.

Zieht man an einen Kreis, dem ein Vieleck umgeschrieben ist, zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Seiten desselben eine Tangente, so entsteht ein neues umgeschriebenes Vieleck von doppelter Seitenzahl, dessen Umfang kleiner ist als der Umfang des früheren (§. 34, 1). Bei so fortgesetzter Vermehrung der Seitenzahl der umgeschriebenen Vielecke nimmt der Umfang derselben fortwährend ab; er kann jedoch nie mit der Peripherie des Kreises zusammenfallen, da alle Vielecksseiten als Tangenten des Kreises stets außerhalb desselben liegen.

Ist einem Kreise ein reguläres Vieleck eingeschrieben und ein anderes umgeschrieben, so nähern sich mithin bei unendlich wachsender Seitenzahl die Umfänge beider Vielecke, und zwar der Umfang des eingeschriebenen bei fortgesetztem Wachsen, der des umgeschriebenen bei fortgesetztem Abnehmen, demselben gemeinsamen Grenzwerte, nämlich der Peripherie des Kreises. Dieselbe Beziehung muß auch zwischen den Flächeninhalten der ein- und umgeschriebenen, regulären Vielecke und der Kreisfläche stattfinden.

Hierauf beruhen folgende Definitionen:

Die Länge der Peripherie eines Kreises ist der gemeinsame Grenzwert der Umfänge der dem Kreise ein- und umgeschriebenen regulären Vielecke mit wachsender Seitenzahl; der Flächeninhalt des Kreises ist der gemeinsame Grenzwert der Flächeninhalte derselben Vielecke.

§. 172. **Lehrsatz.** Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser oder wie ihre Durchmesser.

Folgt unter Anwendung des Grenzbegriffes aus §. 163.

**Folgesätze.** *a)* Drücken $p$ und $P$ die Peripherien zweier Kreise aus, deren Halbmesser $r$ und $R$, deren Durchmesser $d$ und $D$ sind, so ist $p:P = r:R$ und $p:P = d:D$. Aus der zweiten Proportion folgt $p:d = P:D$, d. h. das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser ist in allen Kreisen ein konstantes. Dieses konstante Verhältnis bezeichnet man durch die Zahl $\pi$, so daß $\frac{p}{d} = \frac{p}{2r} = \pi$ ist.

*b)* Aus den letzten Ausdrücken folgt: $p = d\pi$ oder $p = 2r\pi$, d. h. die Peripherie eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser und der Zahl $\pi$.

*c)* Für $r = 1$ ist $p = 2\pi$, also $\pi = \frac{p}{2}$. Die Zahl $\pi$ kann demnach auch als die Maßzahl der halben Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ ist, betrachtet werden.

§. **173.** Berechnung der Zahl $\pi$.

Nach §. 172, *c* ist $2\pi$ die Maßzahl für die ganze Peripherie eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 1$. Um diese näherungsweise zu bestimmen, berechnet man die Umfänge des ein- und des umgeschriebenen, regulären $n$-Eckes für $r = 1$. Die Dezimalen, in denen die Umfänge übereinstimmen, geben für die Peripherie einen Näherungswert, der um so genauer wird, je größer $n$ ist.

Es soll z. B. die Zahl $\pi$ auf 4 Dezimalstellen genau bestimmt werden. Geht man bei der Berechnung, wie es am bequemsten ist, von dem eingeschriebenen, regulären Sechsecke aus, in welchem die Seite $s_6 = r = 1$ und der Umfang $u_6 = 6$ ist, so erhält man (§. 169) für das umgeschriebene Sechseck die Seite $S_6 = 1 \cdot 1547005..$ und den Umfang $U_6 = 6 \cdot 928203..$ Aus $u_6$ und $U_6$ berechnet man nach §§. 169 und 170 $u_{12}$ und $U_{12}$, aus diesen wieder $u_{24}$ und $U_{24}$ u. s. w., bis man auf $u_{1536} = 6 \cdot 283181...$ und $U_{1536} = 6 \cdot 283194...$ kommt. Da sich diese Umfänge erst in der fünften Dezimale voneinander unterscheiden, so ergibt sich auf 4 Dezimalen genau $2\pi = 6 \cdot 2832....$, daher

$$\pi = 3 \cdot 1416.....$$

Nach demselben Verfahren erhält man auf 20 Dezimalen genau

$$\pi = 3 \cdot 14159\ 26535\ 89793\ 23846.....$$

Die Zahl $\pi$ ist zuerst von Archimedes bestimmt worden, welcher $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ fand. Die erste Zahl wird häufig gebraucht, wenn es nicht auf große Genauigkeit ankommt; sie ist genauer als der ebenfalls oft gebrauchte Näherungswert $3 \cdot 14$.

Ludolf von Ceulen († 1610) berechnete $\pi$ auf 35 Dezimalstellen; nach ihm wird $\pi$ auch die Ludolf'sche Zahl genannt; sie ist ein unendlicher nicht periodischer Dezimalbruch.

Das hier beschriebene Verfahren (von Archimedes zuerst bis zum 96-Eck angewendet) soll nur die Möglichkeit der Berechnung der Zahl $\pi$ erkennen lassen. Die höhere Mathematik lehrt bequemere Methoden.

**§. 174. Lehrsätze.** 1. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie und dem Halbmesser.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich nach dem Grenzbegriffe aus §. 164.

**Folgesatz.** Drückt $r$ den Halbmesser, $p$ die Peripherie und $f$ den Flächeninhalt eines Kreises aus, so ist $f = p . \frac{r}{2}$ oder, da $p = 2 r \pi$ ist,

$$f = r^2 \pi,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Zahl $\pi$.

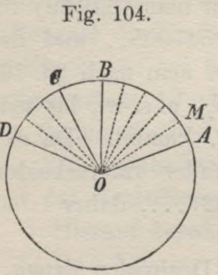
2. Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

3. Der Flächeninhalt eines Kreisringes mit den Radien $R$ und $r$ ist $F = R^2\pi - r^2\pi = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi\,(R + r)\,(R - r)$.

## IV. Bestimmung der Kreisbogen und Kreissektoren.

**§. 175. Lehrsatz.** In demselben Kreise verhalten sich die Kreisbogen wie die zugehörigen Zentriwinkel.

Fig. 104.




Beweis. Es seien die Bogen $AB$ und $CD$ (Fig. 104) kommensurabel; $AM$ sei ihr gemeinsames Maß, und zwar $AB = m . AM$, $CD = n . AM$; $AB : CD = m : n$. Zieht man zu jedem Teilungspunkte der beiden Kreisbogen Halbmesser, so ist auch W. $AOB = m . AOM$, W. $COD = n . AOM$, folglich W. $AOB$ : W. $COD = m : n$, somit

Bog. $AB$ : Bog. $CD$ = W. $AOB$ : W. $COD$.

Daß diese Proportion auch dann stattfindet, wenn $AB$ und $CD$ inkommensurabel sind, folgt analog §. 113, $b$.

**§. 176.** Länge eines Kreisbogens.

1. Ist $b$ die Länge eines Kreisbogens, der zu dem Zentriwinkel $\alpha$ gehört, und $r$ der Halbmesser des Kreises, so hat man nach §. 175,

$$b : r\pi = \alpha : 180, \text{ daher } b = r . \frac{\alpha \pi}{180}.$$

2. Für $r = 1$ ist $b = \frac{\alpha\pi}{180}$. Der Ausdruck $\frac{\alpha\pi}{180}$ gibt also die Länge des Bogens von $\alpha$ Grad für den Halbmesser 1 an; wir wollen diesen Ausdruck kürzer durch $arc\,\alpha$ bezeichnen.

3. Das Längenmaß eines Bogens für den Halbmesser 1 wird häufig auch als Maß des zugehörigen Winkels selbst angenommen und hiernach $2\pi$ für den vollen Winkel, $\pi$ für den gestreckten, $\frac{\pi}{2}$ für den rechten Winkel, allgemein $arc\,\alpha$ für den Winkel $\alpha$ gesetzt. Dies ist jedoch, da Längen und Winkel als ungleichartige Größen im eigentlichen Sinne nicht durcheinander gemessen werden können, stets nur in dem Sinne zu verstehen, daß aus der Bogenlänge für den Halbmesser 1 unzweideutig auch auf die Anzahl Grade des zugehörigen Zentriwinkels geschlossen werden kann.

§. 177. **Lehrsatz.** In demselben Kreise verhalten sich die Kreissektoren wie die zugehörigen Zentriwinkel.

Der Beweis ist analog §. 175.

§. 178. **Lehrsatz.** Der Flächeninhalt eines Kreissektors ist gleich dem halben Produkte aus dem im Längenmaße ausgedrückten Bogen und dem Halbmesser.

Beweis. Bezeichnet $f$ den Flächeninhalt eines Kreissektors, der für den Halbmesser $r$ dem Zentriwinkel $\alpha$ entspricht, und $b$ die Länge des zugehörigen Bogens, so hat man (nach §. 177) $f : r^2\pi = \alpha : 360$, daher $f = \frac{r^2\alpha\pi}{360}$ oder, da $\frac{r\alpha\pi}{180} = b$ ist,

$$f = \frac{br}{2}.$$

**Zusatz.** Der Flächeninhalt eines Kreissegmentes ist, je nachdem dasselbe kleiner oder größer als der Halbkreis ist, gleich der Differenz oder der Summe aus der Fläche des zugehörigen Kreissektors und der Dreiecksfläche zwischen der Sehne und den beiden Halbmessern.

## V. Übungsaufgaben.

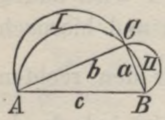
§. 179. Übungssätze.

1. Die Diagonalen eines Sehnenviereckes verhalten sich wie die Summen der Produkte der in ihren Endpunkten zusammenstoßenden Seiten.

Man bestimmt die Flächeninhalte der zwei Dreiecke, in welche das Viereck durch die eine Diagonale zerlegt wird, mit Rücksicht auf §. 166, 1 aus den drei Seiten und dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, dann ebenso die Flächeninhalte der beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch die zweite Diagonale zerlegt wird, und setzt die Summe der ersteren gleich der Summe der letzteren.

2. Beschreibt man über den Katheten eines in einem Halbkreis eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieckes Halbkreise, so ist die Summe der dadurch gebildeten Monde (§. 89) gleich der Fläche des rechtwinkligen Dreieckes. (Lehrsatz des Hippokrates.)

Fig. 105.




Der Flächeninhalt des Dreieckes und der beiden kleinen Halbkreise (Fig. 105) ist gleich dem Flächeninhalte des großen Halbkreises und der beiden Monde, somit $\frac{a\,b}{2} + \frac{b^2\pi}{8} + \frac{a^2\pi}{8} = \frac{c^2\pi}{8} + \mathrm{I} + \mathrm{II}$, somit ist wegen $a^2 + b^2 = c^2$ auch $\frac{a\,b}{2} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$.

3. Wie groß ist die Summe der Monde in Aufgabe 2, wenn das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig und die Hypotenuse desselben $c$ ist?

4. Die Summe der vier Monde, welche durch die Halbkreise über den Seiten des einem Kreise eingeschriebenen Quadrates gebildet werden, ist der Fläche des Quadrates gleich.

§. **180.** Rechnungsaufgaben.

1. In einem Kreise ist $r$ der Halbmesser, $p$ die Peripherie, $f$ der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die beiden andern zu berechnen.

Gegeben: *a)* $r = 5{\cdot}28\ m$; *b)* $p = 17{\cdot}75\ m$; *c)* $f = 4{\cdot}0115\ dm^2$;
*d)* $r = 6{\cdot}2872\ldots\ m$; *e)* $p = 24{\cdot}8562\ldots\ m$; *f)* $f = 13{\cdot}402734\ldots\ m^2$.

2. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes des Erdäquators infolge der Rotation um die Achse? Wie groß die eines Punktes in der Breite 60°? (Durchmesser der Erde am Äquator 12756 *km*.)

3. Ein Schwungrad von 2·5 *m* Radius macht in der Minute 40 Umdrehungen; wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes des Umfanges?

4. Wie viele Umläufe in der Minute muß ein Rad mit dem Umfange von 2 *m* machen, wenn die Geschwindigkeit eines Punktes der Peripherie 6 *m* sein soll?

5. Zwei Riemenscheiben von 900 *mm* und 600 *mm* Durchmesser sind durch einen Treibriemen von 8 *m* Länge verbunden; wie oft läuft die kleinere Scheibe und der Treibriemen um, wenn die größere 1000 Umläufe macht?

6. Wie ändert sich der Radius eines Kreises, wenn *a)* die Peripherie, *b)* die Fläche $n$-mal so groß wird?

7. Die Peripherien zweier Kreise stehen in dem Verhältnis $m:n$; wie verhalten sich die Flächen?

8. Die Flächen zweier Kreise stehen in dem Verhältnis $m:n$; wie verhalten sich die Peripherien?

9. Die untere Fläche eines Sicherheitsventils hat 50 *mm* Durchmesser; welcher Druck muß von außen auf das Ventil wirken, wenn es bei 6 Atmosphären Dampfspannung gehoben werden soll?

10. Die Fläche eines Kreises mit dem Radius $r$ soll durch einen konzentrischen Kreis halbiert werden; den Radius dieses Kreises zu berechnen.

11. Die Fläche eines Kreises soll durch zwei konzentrische Kreise in dem Verhältnis 2:3:4 geteilt werden. Wie groß sind die Radien dieser Kreise?

12. Der Radius eines Kreises wird in dem Verhältnis $m:n$ geteilt und durch den Teilungspunkt ein mit dem gegebenen konzentrischer Kreis gezogen. Die Teile des Kreises zu berechnen.

13. Aus der Sehne $s$ und der Höhe $h$ des zugehörigen Bogens die Peripherie und die Fläche des Kreises zu berechnen.

Höhe des Bogens $AB$ Fig. 103 ist $EF$.

14. Die Länge eines Bogens von $\alpha^0$ für den Halbmesser $r$ ist $b$, der Flächeninhalt des zugehörigen Kreissektors $f$; aus zweien dieser Größen die beiden andern zu berechnen.

15. Wie lang ist $arc\ 1^0$, $arc\ 1'$, $arc\ 1''$?

16. Bestimme das Gradmaß $\varrho^0$ eines Kreisbogens, dessen Länge dem Halbmesser gleich ist.

$$\varrho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57{\cdot}29578\ldots{}^0.$$

17. Die französische Gradmessung am Ende des 18. Jahrhunderts ergab für den Bogen zwischen Barcelona und Dünkirchen 551584·72 Toisen; wie groß ist der Radius der Erde, wenn sie als Kugel angesehen wird und der zu dem Bogen gehörige Zentriwinkel $9^0\ 40'\ 25{\cdot}7''$ beträgt? (1 Toise = 1·949 $m$.)

18. Die Fläche eines Kreisausschnittes ist 15 $m^2$, der Radius 3 $m$; den Zentriwinkel zu suchen.

19. Die Fläche eines Kreisausschnittes ist 10 $m^2$; den Radius zu suchen, wenn der Zentriwinkel $24^0\ 12'$ beträgt.

20. Welchen Zentriwinkel hat ein Kreissektor, der flächengleich ist, *a)* dem eingeschriebenen Quadrat, *b)* dem eingeschriebenen, gleichseitigen Dreieck?

21. Von einer Ecke eines gleichseitigen Dreieckes wird mit der Höhe desselben als Radius ein Kreis beschrieben; wie groß sind die Teile, in welche durch denselben das Dreieck zerschnitten wird?

22. Drei gleiche Kreise mit dem Radius $r$ berühren einander gegenseitig; die zwischen denselben liegende Fläche zu berechnen.

23. Die Fläche des Segmentes zu berechnen, dessen Halbmesser und Sehne $= r$ sind, wenn dasselbe *a)* größer, *b)* kleiner als der Halbkreis ist.

24. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Segmentes, dessen Sehne die Seite des dem Kreis eingeschriebenen, gleichseitigen Dreieckes ist?

25. Das Segment zu berechnen, welches durch die Seite des einem Kreise eingeschriebenen, regelmäßigen Achteckes abgeschnitten wird.

26. Aus den Peripherien zweier Kreise die Fläche des von denselben gebildeten Ringes zu berechnen.

27. Aus dem Flächeninhalte $f$ und der Breite eines Kreisringes die Halbmesser der beiden Kreise zu berechnen.

28. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ringausschnittes, dessen Bogen 0·5 $m$ und 0·4 $m$ zu Halbmessern haben und zu einem Zentriwinkel von $48^0$ gehören?

29. Die Seiten eines Dreieckes sind 21 $m$, 17 $m$, 10 $m$. Die Radien des ein- und umgeschriebenen Kreises und die der drei äußeren Berührungskreise zu berechnen. Die Summe der Inhalte der Segmente zu suchen, welche dasselbe von dem umgeschriebenen Kreise abschneidet.

30. Wie groß ist der Radius eines äußeren Berührungskreises eines gleichseitigen Dreieckes?

31. Einem Kreise mit dem Radius $r$ ist *a)* ein regelmäßiges Dreieck, *b)* ein regelmäßiges Sechseck ein- und umgeschrieben. Die zwischen den beiden Polygonen liegende Fläche zu berechnen.

32. Einem Kreise mit dem Radius $r$ ist ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben. Peripherie und Fläche des diesem Dreieck eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

33. Der Radius eines Kreises ist $r$; die Seite und die Fläche des *a)* eingeschriebenen, *b)* umgeschriebenen, regelmäßigen Achteckes zu suchen.

34. Aus der Seite des einem Kreise mit dem Radius $r$ eingeschriebenen, regelmäßigen Zehneckes die des eingeschriebenen, regelmäßigen Fünfeckes zu suchen. (§. 170.)

35. Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen, regelmäßigen Zehneckes und der Radius sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse die Seite des regelmäßigen, eingeschriebenen Fünfeckes ist. (Pythagoreischer Lehrsatz.)

36. Einem Kreise mit dem Radius $r$ sind zwei gleichseitige Dreiecke so eingeschrieben, daß sie einen regelmäßigen, sechsstrahligen Stern bilden. Zu zeigen, daß jede Seite des einen Dreieckes durch die Seiten des andern in drei gleiche Teile geteilt wird; die innere Figur und die Fläche des Sternes zu berechnen.

37. Aus den Seiten eines Sehnenviereckes die beiden Diagonalen zu berechnen (§. 131 und §. 179, 1).

38. In einen Kreis mit dem Halbmesser $r$ ist ein Rechteck beschrieben, dessen eine Seite $a$ ist; wie groß ist sein Flächeninhalt?

39. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier gleichseitiger Dreiecke, wenn der dem einen umgeschriebene Kreis flächengleich ist dem in das andere eingeschriebenen?

40. In den Quadranten eines Kreises vom Halbmesser $r$ wird ein Kreis beschrieben, welcher die Schenkel und den Bogen des Quadranten berührt; bestimme den Flächeninhalt eines dritten Kreises, dessen Halbmesser der Summe aus den Halbmessern des Quadranten und des ihm eingeschriebenen Kreises gleich ist! ($2r^2\pi$.)

41. Ein Rechteck hat die Seite des einem Kreise vom Halbmesser $r$ eingeschriebenen, gleichseitigen Dreieckes zur Grundlinie und die Seite des demselben Kreise umgeschriebenen, regulären Sechseckes zur Höhe; wie groß ist der Umfang eines Kreises, welcher mit diesem Rechtecke flächengleich ist? ($2r\sqrt{2\pi}$.)

---

# Anhang zur Planimetrie.

## Lösung von Konstruktionsaufgaben nach der Methode der algebraischen Analysis.

### 1. Geometrische Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

**§. 181.** Drückt man gegebene Strecken durch ihre Maßzahlen aus, so erhält man auch für andere Strecken, die von jenen auf eine vorgeschriebene Art abhängen, bestimmte Zahlenausdrücke. Sind z. B. $a$ und $b$ die Maßzahlen der Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, so ist $\sqrt{a^2+b^2}$ der Zahlenausdruck für die Hypotenuse. Umgekehrt kann ein Zahlenausdruck von der Form $\sqrt{a^2+b^2}$ wieder in seiner geometrischen Bedeutung hergestellt werden, indem man ihn als die

Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes konstruiert, dessen Katheten $a$ und $b$ Längeneinheiten enthalten.

Die Konstruktion einer Strecke, deren Maßzahl $x$ durch einen algebraischen Ausdruck bestimmt ist, läßt sich auf einen der nachstehenden Hauptfälle zurückführen:

1. Ist $x = a + b$ zu konstruieren, so trägt man auf einer gegebenen Geraden $AB = a$ und dann in derselben Richtung weiter $BC = b$ auf, wodurch die Summe $a + b$ als eine einzige Strecke $AC$ erscheint.

2. Um $x = a - b$ zu konstruieren, trägt man auf einer gegebenen Geraden von $A$ aus in einer bestimmten Richtung $AB = a$ und dann von $B$ aus in der entgegengesetzten Richtung $BC = b$ auf; die Strecke $AC$ stellt die Differenz $a - b$ dar.

Ist $b > a$, also $x$ negativ, so erscheint $AC$ von $A$ aus in einer Richtung, welche der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt ist.

3. Der Ausdruck $x = \frac{bc}{a}$, entstanden aus der Proportion $a : b = c : x$, wird als vierte Proportionale zu drei gegebenen Strecken $a$, $b$, $c$ nach §. 134, 1, konstruiert.

4. $x = \frac{b^2}{a}$ führt zu der Proportion $a : b = b : x$ und bildet die dritte stetige Proportionale zu $a$ und $b$. Die Konstruktion erfolgt nach §. 134, 2.

5. $x = \sqrt{ab}$, entstanden aus $x^2 = ab$, oder aus der Proportion $a : x = x : b$, ist die mittlere Proportionale zwischen den Strecken $a$ und $b$ und wird als solche nach §. 134, 3, konstruiert.

6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den gegebenen Katheten $a$ und $b$ konstruiert. Für $b = a$ erhält man $x = a\sqrt{2}$ als die Hypotenuse eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieckes mit der Kathete $a$.

7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist als die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem $a$ die Hypotenuse und $b$ die andere Kathete ist, zu konstruieren. Für $b = \frac{a}{2}$ erhält man $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ als die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite $a$ ist.

**§. 182.** Beispiele.

1. $x = a - b + c$. Konstruiere $m = a - b$ und dann $x = m + c$!

2. $x = \frac{abc}{df}$. Konstruiere $m = \frac{ab}{d}$ und dann $x = \frac{mc}{f}$!

3. $x = \frac{ab + cd}{f}$. Konstruiere $m = \frac{ab}{f}$, $n = \frac{cd}{f}$ und dann $x = m + n$!

4. $x = 2a - a\sqrt{2}$. Konstruiere $m = a\sqrt{2}$ und dann $x = 2a - m$!

5. $x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ist die Seite des einem Kreise vom Halbmesser $r$ eingeschriebenen, regulären Zehneckes (§. 168).

Konstruktion: $x = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$.

6. $x = \sqrt{a^2 + bc}$. Konstruiere $m = \sqrt{bc}$ und dann

$$x = \sqrt{a^2 + m^2}!$$

7. $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$. Konstruiere zunächst $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann $n = \sqrt{m^2 - c^2}$ und endlich $x = \sqrt{n^2 + d^2}$!

8. $x = a\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{2}}$. Konstruiere $m = a\sqrt{2}$, $n = \sqrt{a \cdot m}$ und dann $x = \sqrt{m^2 - n^2}$!

## 2. Algebraische Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben.

§. **183.** Ist die Lösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe von dem Auffinden einer Strecke abhängig, so kann dabei die Methode der algebraischen Analysis angewendet werden, welche darin besteht, daß man für die Maßzahl der zu bestimmenden Strecke den entsprechenden algebraischen Ausdruck sucht und diesen sodann geometrisch konstruiert.

Zu diesem Zwecke müssen zunächst die Bedingungen der Aufgabe in die algebraische Zeichensprache übersetzt werden; man drückt die gesuchte Strecke durch $x$ aus, wählt die Bezeichnungen für die als bekannt zu benützenden Größen und leitet aus den Beziehungen zwischen $x$ und den bekannten Größen durch Anwendung entsprechender geometrischer Lehrsätze eine Gleichung ab. Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man für $x$ einen algebraischen Ausdruck, welcher sodann wieder auf seine geometrische Bedeutung zurückzuführen, d. i. geometrisch zu konstruieren ist.

Der Beweis für die Richtigkeit der Auflösung ist schon in der Analysis enthalten. Die Determination lehnt sich an die geometrische Deutung des gefundenen Zahlenausdruckes an.

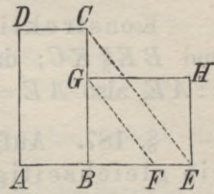
Die Auflösung geometrischer Aufgaben durch algebraische Analysis ist auf den französischen Mathematiker Vieta (1540—1603) zurückzuführen.

### Ausgeführte Beispiele.

§. **184. Aufgabe.** Ein gegebenes Rechteck $ABCD$ (Fig. 106) in ein anderes, von dem eine Seite gegeben ist, zu verwandeln.

Algebraische Analysis. Die Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn die Länge der zweiten Seite des verlangten Rechteckes gefunden ist. Bezeichnet man daher diese unbekannte Länge durch $x$ und die bekannte Seite $BE$ durch $a$, setzt ferner in dem gegebenen Rechtecke $AB = b$ und $BC = c$, so ist, da die beiden Rechtecke flächengleich sein sollen,

Fig. 106.




$$ax = bc; \text{ daher}$$

$$x = \frac{bc}{a}.$$

$x$ ist also die vierte Proportionale zu $a$, $b$ und $c$.

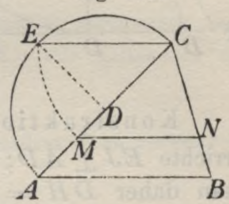
Konstruktion. Man mache $BF = AB = b$, ziehe die Strecke $EC$ und zu ihr die Parallele $FG$, welche $BC$ in $G$ schneidet. Dann ist $BE : BF = BC : BG$, oder $a : b = c : BG$; also $x = BG$ und $BEHG$ das verlangte Rechteck.

Determination. Die vorstehende Auflösung ist stets und nur auf eine Art möglich.

§. 185. **Aufgabe.** Ein Dreieck $ABC$ (Fig. 107) durch eine Gerade $MN$, die zu einer Seite $AB$ parallel ist, in zwei gleiche Teile zu teilen.

Analysis. Hier handelt es sich nur um die Auffindung des Punktes $M$, durch welchen $MN \parallel AB$ gezogen werden soll, also um die Bestimmung der Strecke $CM$, die wir durch $x$ ausdrücken wollen. Setzt man $AC = b$, so ist, da $\triangle CMN \sim CAB$ ist, (nach §. 147) $\triangle CMN : CAB = x^2 : b^2$.

Fig. 107.



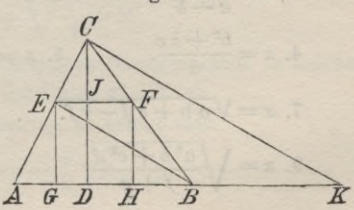

Soll nun $\triangle CMN = \dfrac{CAB}{2}$ sein, so muß auch $x^2 = \dfrac{b^2}{2} = b \cdot \dfrac{b}{2}$ sein; $x$ ist also die mittlere Proportionale zu $b$ und $\dfrac{b}{2}$.

Konstruktion. Dieselbe ist aus Fig. 107 ersichtlich.

§. 186. **Aufgabe.** In ein gegebenes Dreieck $ABC$ (Fig. 108) ein Quadrat einzuschreiben.

Analysis. Zur Festlegung des verlangten Quadrates $EFHG$ handelt es sich offenbar nur darum, in der Seite $AC$ den Punkt $E$ zu bestimmen, durch welchen die zu $AB$ parallele Strecke $EF$ gezogen werden soll, damit $EF = EG$ werde. Man setze also die unbekannte Strecke $AE = x$, ferner $AC = b$, $AB = c$ und die Höhe $CD = h$.

Fig. 108.



Da $\triangle ABC \sim EFC$ ist, so hat man $AB : CD = EF : CJ = EG : CJ = AE : CE$ oder $c : h = x : (b - x)$, woraus $x = \dfrac{bc}{c+h}$ folgt. $x$ ist also die vierte Proportionale zu $c + h$, $b$ und $c$.

Konstruktion. Man verlängere $AB$ um $BK = CD$, ziehe $KC$ und $BE \parallel KC$; dann ist $AK : AC = AB : AE$ oder $(c + h) : b = c : AE$, also $AE = x$ und $EFHG$ das verlangte Quadrat.

§. 187. **Aufgabe.** Ein gleichschenkliges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Analysis. Es sei $ABC$ (Fig. 109) ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $BC$ und der Höhe $AD$; ferner sei $EBC$ ein gleichseitiges Dreieck über der Seite $BC$ und $HFG$ das gesuchte gleichseitige Dreieck. Zur Bestimmung dieses Dreieckes kommt es nur darauf an, den Punkt $H$ zu finden. Setzen wir daher $DH = x$, ferner $AD = m$ und $DE = n$, so ist

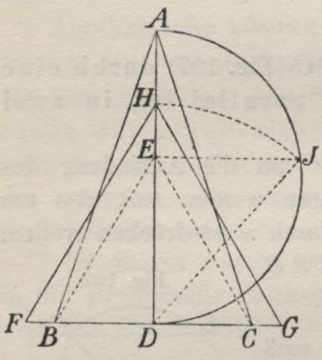
$$\triangle BDE : FDH = n^2 : x^2 \text{ oder}$$
$$\triangle BDE : BDA = n^2 : x^2;$$

es ist aber auch

$$\triangle BDE : BDA = n : m,$$

daher $n^2 : x^2 = n : m$, folglich $x = \sqrt{mn}$. $x$ ist also die mittlere Proportionale zu $m$ und $n$.

Fig. 109.




Konstruktion. Man beschreibe über $AD$ einen Halbkreis und errichte $EJ \perp AD$; dann ist $DJ = \sqrt{AD \,.\, DE} = \sqrt{mn} = x$. Macht man daher $DH = DJ$ und zieht $HF \parallel EB$ und $HG \parallel EC$, so ist $HFG$ das verlangte gleichseitige Dreieck.

## 3. Übungsaufgaben.

§. 188. Bestimme die Dimensionen und konstruiere folgende Ausdrücke:

1. $x = \dfrac{ab}{a-b}$. 2. $x = \dfrac{abc^2}{def}$. 3. $x = \dfrac{a^2+b^2}{c}$.

4. $x = \dfrac{b^2+bc}{a}$. 5. $x = \dfrac{ab+bc}{a-b}$. 6. $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

7. $x = \sqrt{ab + cd - ef}$. 8. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab}$.

9. $x = \sqrt{\dfrac{a^2b + c^2d}{f+g}}$. 10. $x = \sqrt{\left\{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}\right\}}$

§. **189.** Mit Hilfe der algebraischen Analysis folgende Aufgaben zu lösen:

1. Ein Rechteck zu konstruieren, wenn die Summe $s$ zweier Seiten und ihre Differenz $d$ gegeben sind.

2. Die größere Seite eines Rechteckes so zu teilen, daß die Differenz der Quadrate der Abschnitte dem Flächeninhalte des Rechteckes gleich wird.

3. Um jeden Eckpunkt eines gegebenen Dreieckes einen Kreis so zu beschreiben, daß jeder dieser Kreise die beiden andern von außen berührt.

4. Über einer Seite eines Dreieckes ein Rechteck zu konstruieren, welches dem Rechtecke aus den beiden andern Seiten flächengleich ist.

5. In einem Dreiecke zu einer Seite die Parallele zu ziehen, welche einer gegebenen Strecke gleich ist.

6. In einem gegebenen Dreiecke $ABC$ zu der Seite $BC$ die Parallele $MN$ so zu ziehen, daß der eine obere Abschnitt $AM$ dem andern unteren $NC$ gleich ist.

7. Zu einem gegebenen Rechtecke ein Quadrat so zu konstruieren, daß die Umfänge beider Figuren sich zueinander verhalten wie ihre Flächeninhalte.

8. Eine Strecke $a$ in zwei Teile so zu teilen, daß die Differenz der Quadrate beider Teile einem gegebenen Quadrate $m^2$ gleich wird.

9. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn eine Kathete $a$ und die Summe $s$ der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben sind.

10. Ein Rechteck aus einer Seite und der Summe der Diagonale und der andern Seite zu konstruieren.

11. Ein Rechteck $ab$ in ein Quadrat $x^2$ zu verwandeln.

12. Ein Parallelogramm, dessen Seiten $a$ und $b$ sind, in einen Rhombus zu verwandeln, welcher mit dem Parallelogramme einen Winkel gemeinsam hat (§. 146, Folges.).

13. Von einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkte eine Sekante so zu ziehen, daß sie durch den Kreisumfang halbiert wird.

14. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Ist $x$ die Seite des eingeschriebenen Dreieckes und $r$ der Halbmesser des Kreises, so erhält man

$$x = \sqrt{3r^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2}.$$

15. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a$ in ein Quadrat $x^2$ zu verwandeln.

$$x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}.$$

16.* Ein Rechteck $xy$ aus der Diagonale $d$ und der Differenz $m$ zweier Seiten zu konstruieren.

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2d^2 - m^2} + \frac{m}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2d^2 - m^2} - \frac{m}{2}.$$

17.* Eine gegebene Sehne $a$ eines Kreises so zu verlängern, daß die vom Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gezogene Tangente die Länge $b$ hat.

$$\text{Verlängerung } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

18.* Ein Quadrat mit der Seite $a$ in einen Rhombus zu verwandeln, in welchem die Summe der Diagonalen dem Umfange des Quadrates gleich ist.

Sind $2x$ und $2y$ die Diagonalen des Rhombus, so erhält man

$$x = a + \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ und } y = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

19. Ein Quadrat $x^2$ zu konstruieren, wenn die Summe $s$ der Seite und der Diagonale gegeben ist.

$$x = -s + s\sqrt{2}.$$

20.* Ein Rechteck $xy$ zu konstruieren, wenn der Umfang $u$ und der Flächeninhalt $a^2$ gegeben sind.

$$x = \frac{u}{4} \pm \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2} \text{ und } y = \frac{u}{4} \mp \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2}.$$

21.* Ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn der Umfang $u$ gegeben ist.

$$x = u - \frac{u}{2}\sqrt{2}, \text{ wenn } x \text{ die Kathete bezeichnet.}$$

22.* Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Summe $s$ der beiden Katheten und die Höhe $h$ auf die Hypotenuse gegeben sind.

Man erhält $x = -h + \sqrt{s^2 + h^2}$, wenn $x$ die Hypotenuse bezeichnet.

23.* Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Differenz $d$ der Katheten und der Höhe $h$ auf die Hypotenuse zu konstruieren.

24.* Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Summen $a$ und $b$ der Hypotenuse und jeder Kathete gegeben sind.

Bezeichnet man die Hypotenuse durch $z$, die Katheten durch $x$ und $y$, so ist $z = a + b - \sqrt{2ab}$, daher $x = \sqrt{2ab} - b$ und $y = \sqrt{2ab} - a$.

25.* Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Differenzen $a$ und $b$ der Hypotenuse und jeder Kathete gegeben sind.

26.* In den Quadranten eines Kreises vom Halbmesser $r$ einen Kreis zu beschreiben, welcher die beiden Schenkel und den Bogen des Quadranten berührt.

Heißt $x$ der Abstand des Mittelpunktes des gesuchten Kreises vom Bogen des Quadranten, gezählt auf der Halbierungslinie des rechten Winkels, so ist

$$x = -r \pm r\sqrt{2}.$$

Welche Deutung läßt sich dem negativen Werte von $x$ geben?

27. Ein Trapez durch eine Parallele zu den Grundlinien zu halbieren.

Die Teilungslinie ist $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

28.* Eine Strecke $a$ nach stetiger Proportion zu teilen.

Man findet für den größeren Abschnitt $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Vgl. die Konstruktion §. 162.

## Zweiter Teil.

# Stereometrie.

## Erster Abschnitt.

### Gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. **190.** Eine Ebene ist bestimmt:

1. Durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte. (§. 8.)

Daher ist sie auch bestimmt:

2. Durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben.
3. Durch zwei einander schneidende Gerade.
4. Durch zwei parallele Gerade.

§. **191.** Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegeneinander haben: 1. sie sind entweder parallel, 2. sie schneiden einander hinreichend verlängert in einem Punkte. 3. sie sind weder parallel, noch schneiden sie einander; die eine geht über oder neben der andern vorbei. Solche Gerade nennt man einander kreuzende oder windschiefe. In den ersten zwei Fällen läßt sich durch die beiden Geraden eine Ebene legen.

§. **192. Lehrsätze.** 1. Eine Gerade, welche nicht in einer Ebene liegt, kann diese Ebene nur in **einem** Punkte treffen.

Denn träfe die Gerade die Ebene noch in einem zweiten Punkte, so müßte sie ganz in die Ebene fallen (§. 8, Grunds.).

Der Punkt, in welchem eine Gerade eine Ebene schneidet, heißt der Fußpunkt dieser Geraden in der Ebene.

2. Wenn zwei Ebenen einander schneiden, so ist ihre Schnittlinie eine Gerade.

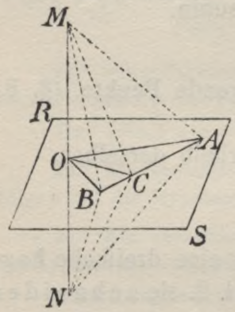
Wäre die Schnittlinie nicht gerade, so müßte es in derselben drei Punkte geben, die nicht in gerader Linie liegen. Dann müßten die drei Punkte in beiden Ebenen liegen und daher diese gegen die Voraussetzung eine einzige Ebene bilden (§. 8).

### I. Lage der Geraden gegen eine Ebene.

§. **193.** Eine Gerade des Raumes kann gegen eine Ebene in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fällt die Gerade ganz in die Ebene; oder es schneidet die hinreichend verlängerte Gerade die Ebene in einem Punkte, sie ist gegen die Ebene geneigt; oder es trifft die unbegrenzt verlängerte Gerade mit der beliebig erweiterten Ebene nie zusammen, die Gerade ist mit der Ebene parallel.

§. **194. Lehrsatz.** Ist eine Gerade zu zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogen werden, normal, so ist sie auch zu jeder andern durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden normal.

Fig. 110.




Beweis. Es seien (Fig. 110) $OA$ und $OB$ zwei Gerade in der Ebene $RS$ und $MO \perp OA$, $MO \perp OB$; ferner sei $OC$ eine dritte in dieser Ebene durch $O$ willkürlich gezogene Gerade. Man verlängere die Gerade $MO$ über den Fußpunkt $O$, mache die Verlängerung $ON = OM$ und ziehe $AB$, welche $OC$ in $C$ schneidet, ferner $MA$ und $NA$; dann ist $MA = NA$. (§. 45, 1.) Zieht man $MB$ und $NB$, so ist ebenso $MB = NB$. Mithin $\triangle MAB \cong NAB$; bringt man $NAB$ mit $MAB$ durch Drehung um $AB$ zur Deckung, so fällt $NC$ auf $MC$, mithin $CO \perp MN$ (§. 45, 1).

§. **195.** Ist eine Gerade zu jeder durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogenen Geraden normal, so sagt man, die Gerade und die Ebene stehen zueinander normal oder senkrecht; im entgegengesetzten Falle sind die Gerade und die Ebene zueinander schief.

**Folgesatz.** Ist eine Gerade zu zwei einander schneidenden Geraden normal, so ist sie auch zu der durch dieselben bestimmten Ebene normal.

§. **196. Lehrsätze.** 1. In einem Punkte einer Ebene kann zu dieser nur **eine** Normale errichtet werden.

Ließen sich zwei Normale errichten, so wären, wenn man durch beide die Ebene legt, in demselben Punkte auf einer Geraden in einer Ebene zwei Gerade normal, was nicht möglich ist.

2. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann auf diese nur **eine** Normale gefällt werden.

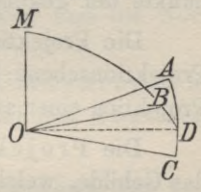
Ließen sich zwei Normale fällen, so müßten diese mit der Verbindungsstrecke ihrer Fußpunkte ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln bilden.

3. In einem Punkte einer Geraden kann auf diese nur eine einzige normale Ebene errichtet werden.

Angenommen, es wären zwei Normalebenen möglich. Dann könnte man durch die Gerade eine Ebene so legen, daß von ihr die Normalebenen nicht in ihrer Durchschnittslinie geschnitten werden. Man würde dann in einer Ebene zwei Normale in demselben Punkt auf eine Gerade erhalten.

§. **197. Lehrsatz.** Steht eine Gerade auf drei andern Geraden in ihrem gemeinsamen Schnittpunkte normal, so liegen diese in einer Ebene.

Fig. 111.

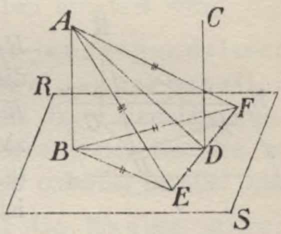



Beweis. Es sei (Fig. 111) $OM$ normal zu den Geraden $OA$, $OB$ und $OC$. Man lege durch $OA$ und $OC$ die Ebene $AOC$. Würde $OB$ nicht in dieser Ebene liegen, so müßte, wenn eine durch $OM$ und $OB$ gelegte Ebene die Ebene $AOC$ in $OD$ schneidet, der Winkel $MOD = R$ sein (§. 194), was unmöglich ist (§. 25, 4).

§. **198.** 1. Sind zwei Gerade zu einer Ebene normal, so sind sie parallel.

Es sei (Fig. 112) $AB \perp RS$, $CD \perp RS$. Zieht man $BD$, so ist $\sphericalangle ABD + CDB = 2R$, mithin $AB \parallel CD$, wenn diese Geraden in einer Ebene liegen.

Fig. 112.




Um dieses nachzuweisen, ziehe man in $RS$ die Normale $EF$ zu $BD$, mache $ED = DF$ und ziehe $AD$, $AE$, $AF$, $BE$ und $BF$. Dann ist $BD$ die Symmetrale von $EF$, daher $BE = BF$; sodann $\triangle ABE \cong ABF$, daher $AE = AF$, mithin $AD$ die Symmetrale von $EF$, daher $EF$ normal auf $AD$; da auch $EF$ normal auf $BD$ und $CD$ ist, so liegen $BD$, $AD$ und $CD$ (§. 197) in derselben Ebene und mithin auch $AB$ und $CD$ (§. 8).

2. Ist von zwei parallelen Geraden die eine zu einer Ebene normal, so ist es auch die andere.

Beweis. Es sei (Fig. 112) $AB \parallel CD$ und $AB \perp$ Ebene $RS$. Wäre $CD$ nicht $\perp RS$, so sei es $C'D$. Dann müßte nach 1. in der durch $AB$ und $D$ gelegten Ebene $C'D \parallel AB$ sein. In derselben Ebene ist aber nach der Voraussetzung $CD \parallel AB$; also gäbe es zu $AB$ durch denselben Punkt zwei Parallele, was dem Grundsatze in §. 23 widerspricht.

**Folgesatz.** Alle Normalen von verschiedenen Punkten einer Geraden auf eine Ebene liegen in einer einzigen Ebene, daher alle ihre Fußpunkte in einer und derselben Geraden.

**§. 199.** Zieht man von einem Punkte im Raume die Normale zu einer Ebene, so heißt der Fußpunkt der Normalen die Projektion (Normalprojektion) des Punktes auf die Ebene und die Ebene die Projektionsebene.

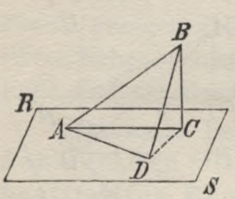
Unter der Projektion einer Linie auf eine Ebene versteht man diejenige Linie dieser Ebene, welche die Projektionen sämtlicher Punkte jener Linie enthält. Die Projektion einer Strecke auf eine Ebene ist daher die Strecke zwischen den Projektionen der Endpunkte der gegebenen Strecke. (§. 198, Folgesatz.)

Die Projektion eines Punktes oder einer Geraden, welche in der Projektionsebene liegen, ist der Punkt oder die Gerade selbst; die Projektion einer auf der Projektionsebene normalen Geraden ist ein Punkt.

Die Projektion eines ebenen Gebildes auf eine Ebene ist das Gebilde, welches von den Projektionen der Grenzlinien des gegebenen Gebildes begrenzt wird.

**§. 200. Lehrsatz.** Der Winkel einer Strecke mit ihrer Projektion auf eine Ebene ist der kleinste von allen Winkeln, welche diese Strecke mit den durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet.

Fig. 113.




Beweis. Es sei (Fig. 113) $BC \perp$ Ebene $RS$, also $AC$ die Projektion der Strecke $AB$ auf die Ebene $RS$. Zieht man durch $A$ in der Ebene $RS$ irgend eine andere Gerade $AD = AC$ und zieht noch $CD$ und $BD$, so ist $BC < BD$ (§. 35, 1). In den Dreiecken $BAC$ und $BAD$ ist dann auch der Winkel $BAC < BAD$ (§. 43).

Der Winkel, den eine Strecke mit ihrer Projektion auf eine Ebene bildet, wird als Maß für die Neigung der Strecke gegen die Ebene angenommen und heißt der Neigungswinkel derselben.

**§. 201. Lehrsatz.** Ist eine Strecke zu einer Geraden einer Ebene normal, so ist diese Gerade auch normal zur Projektion der Strecke auf die Ebene.

Es sei (Fig. 112) $AD \perp EF$ und $BD$ die Projektion von $AD$ auf $RS$. Man mache $ED = DF$ und ziehe $AE$, $AF$, $BE$ und $BF$. Da $AD$ die Symmetrale von $EF$ ist, so ist $AE = AF$. Sodann ist $\triangle ABE \cong ABF$, daher $BE = BF$. Mithin ist $BD$ die Symmetrale von $EF$, also $EF \perp BD$. Auf gleiche Weise ergibt sich auch die Richtigkeit der Umkehrung des Satzes.

§. 202. **Lehrsatz.** Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser die Normale und mehrere schiefe Strecken, so ist

1. die Normale die kürzeste unter diesen Strecken;

2. zwei Schiefe, welche gleiche Projektionen auf die Ebene haben, sind einander gleich; und

3. von zwei Schiefen, welche ungleiche Projektionen auf die Ebene haben, ist diejenige die größere, welche die größere Projektion hat.

Der Beweis wird, wenn man durch die Strecken und die Normale Ebenen legt, ähnlich wie in §. 35 geführt.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgen indirekt auch deren Umkehrungen.

Die Normale von einem Punkte auf eine Ebene gibt den Abstand dieses Punktes von der Ebene an.

**Folgesätze.** *a)* Die Fußpunkte aller gleichen Strecken, die von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser gezogen werden, liegen in einer Kreislinie, welche den Fußpunkt der Normalen zum Mittelpunkte hat.

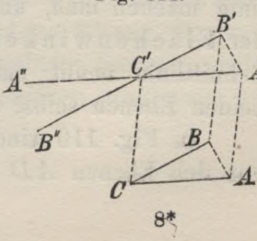
*b)* Der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, welche von drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Punkten gleich weit abstehen, ist die Normale, die im Mittelpunkte des durch jene drei Punkte gehenden Kreises auf die Ebene desselben errichtet wird.

§. 203. **Lehrsatz.** Zwei Gerade, deren jede einer dritten Geraden im Raume parallel ist, sind auch einander parallel.

Denkt man sich eine Ebene, zu welcher die dritte Gerade normal steht, so müssen nach §. 198, 2 auch die beiden ersten Geraden zu dieser Ebene normal stehen, folglich nach §. 198, 1 einander parallel sein.

§. 204. **Lehrsätze.** 1. Zwei Winkel im Raume, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind *a)* gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide in entgegengesetztem Sinne parallel sind; dagegen *b)* Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden andern aber in entgegengesetztem Sinne parallel sind.

Fig. 114.




Beweis. *a)* Es sei (Fig. 114) $AC \parallel A'A''$ und $BC \parallel B'B''$.

Macht man $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$, und zieht die Strecken $AA'$, $BB'$, $CC'$, $AB$ und $A'B'$, so ist $AA'$ gleich und parallel mit $CC'$ (§. 53, 4), ebenso $BB'$ gleich und parallel mit $CC'$, mithin auch $AA'$ gleich und parallel mit $BB'$ (§. 203); folglich ist auch $AB = A'B'$ (§. 53, 4). Dann ist aber $\triangle ACB \cong A'C''B'$, daher Winkel $ACB = A'C''B'$. Wegen W. $A'C''B' = A''C'B''$ ist auch W. $ACB = A''C'B''$.

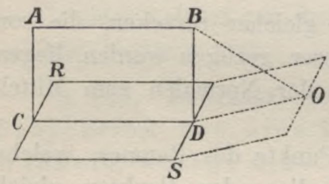
*b)* Nach *a)* ist $ACB = A'C''B'$, aber $A'C''B' + A''C''B' = 2R$, folglich auch $ACB + A''C''B' = 2R$.

2. Zwei parallele Gerade, welche eine Ebene schneiden, bilden mit dieser gleiche Neigungswinkel.

Denn sie bilden mit den von je einem ihrer Punkte auf die Ebene gefällten Normalen gleiche Winkel (§. 198, 1 und §. 204).

§. **205. Lehrsätze.** 1. Ist eine Gerade außerhalb einer Ebene mit einer in dieser Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie auch mit der Ebene selbst parallel.

Fig. 115.




Beweis. Es sei (Fig. 115) $AB \parallel CD$. Hätte $AB$ mit der Ebene $RS$ einen Punkt $O$ gemeinsam, so müßte derselbe, wenn man durch $AB$ und $CD$ die Ebene $ABCD$ legt, zugleich in dieser Ebene liegen; $O$ wäre also beiden Ebenen gemeinsam, d. h. er wäre ein Punkt ihrer Schnittlinie $CD$, was der Voraussetzung widerspricht.

2. Ist eine Gerade mit einer Ebene parallel und legt man durch die Gerade eine zweite Ebene, welche die erste schneidet, so ist die Gerade auch mit der Schnittlinie beider Ebenen parallel.

Der Beweis wird ebenfalls indirekt geführt.

## II. Lage der Ebenen gegeneinander.

§. **206.** Zwei Ebenen können gegeneinander in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fallen die zwei Ebenen ganz zusammen; oder die hinreichend erweiterten Ebenen schneiden einander in einer geraden Linie, sie sind gegeneinander geneigt; oder die beiden Ebenen treffen, soweit man sie auch erweitern mag, nie zusammen, sie sind parallel.

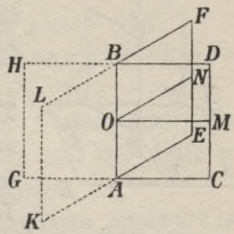
§. **207.** Wenn zwei Ebenen einander schneiden, so heißt die Größe der Drehung, welche die eine Ebene um die gemeinsame Schnittlinie machen muß, um in die Lage der anderen Ebene zu gelangen, der Flächenwinkel oder Keil der beiden Ebenen; die gemeinsame Schnittlinie nennt man die Scheitellinie oder Kante und die beiden Ebenen selbst Schenkelflächen oder Seiten des Keiles.

In Fig. 116 sind $AB$ die Kante, $AD$ und $AF$ die Seiten des von den Ebenen $AD$ und $AF$ gebildeten Keiles $D(AB)F$.

$F(AB)H$ heißt der Nebenkeil, $H(AB)L$ der Scheitelkeil von $D(AB)F$.

Oft wird der zwischen den Schenkelflächen liegende Teil des Raumes als Keil erklärt.

Fig. 116.




**§. 208.** Errichtet man in irgend einem Punkte $O$ (Fig. 116) der Kante eines Keiles auf dieselbe zwei Normale $OM$ und $ON$ so, daß die eine Normale in die eine, die zweite in die andere Schenkelfläche fällt, so hat der Winkel $MON$ dieselbe Größe, in welchem Punkte der Kante man auch die Normalen errichten mag, da je zwei solche Winkel parallele und gleichgerichtete Schenkel haben. Dieser konstante Winkel heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen, welche den Keil bilden.

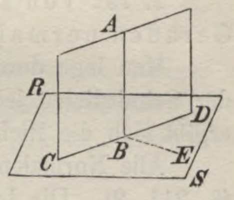
**Lehrsatz.** Zu gleichen Keilen gehören gleiche Neigungswinkel, und umgekehrt. (Beweis durch Deckung.)

Man nimmt daher die Größe des Neigungswinkels der Seiten eines Keiles als Maß für die Größe des Keiles an.

**§. 209.** Zwei Ebenen heißen zueinander normal oder senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist.

**Lehrsätze.** 1. Ist eine Gerade zu einer Ebene normal, so ist auch jede durch die Gerade gelegte Ebene zu der ersteren Ebene normal.

Fig. 117.




Es sei (Fig. 117) $AB \perp RS$, so muß auch die Ebene $ACD \perp RS$ sein. Zieht man $BE \perp CD$ in der Ebene $RS$, so ist $ABE$ der Neigungswinkel der Ebenen $ACD$ und $RS$; allein $ABE = R$, da $AB \perp RS$; folglich $ACD \perp RS$.

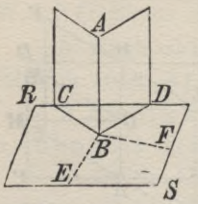
2. Sind zwei Ebenen zueinander normal und zieht man in der einen eine Normale zu der Schnittlinie, so ist diese Normale auch zu der zweiten Ebene normal.

Es sei $ACD \perp RS$ und $AB \perp CD$. Zieht man in der Ebene $RS$ $BE \perp CD$, so ist $ABE = R$, weil $ACD \perp RS$; folglich steht $AB$ auf $CD$ und $BE$, daher auch auf der Ebene $RS$ normal.

3. Sind zwei Ebenen zueinander normal und errichtet man in einem Punkte der Schnittlinie auf die eine Ebene die Normale, so muß diese ganz in der andern Ebene liegen.

Denn fiele die in $B$ (Fig. 117) auf $RS$ errichtete Normale nicht mit der in $B$ in der Ebene $ACD$ auf $CD$ gezogenen zusammen, so hätte man in $B$ auf $RS$ zwei Normale.

Fig. 118.




§. **210. Lehrsatz.** Sind zwei einander schneidende Ebenen zu einer dritten normal, so ist auch ihre Schnittlinie zu der dritten Ebene normal.

Es sei (Fig. 118) $AC \perp RS$ und $AD \perp RS$. Zieht man in der Ebene $RS$ $BE \perp BC$ und $BF \perp BD$, so ist (§. 209, 2) $BE \perp AC$, daher auch $BE \perp AB$; ferner ist $BF \perp AD$, daher auch $BF \perp AB$; folglich $AB \perp RS$.

§. **211. Lehrsätze.** 1. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel.

Beweis indirekt.

2. Parallele Strecken zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich. (Beweis folgt aus 1. und §. 53, 2.)

§. **212. Lehrsätze.** 1. Sind zwei Ebenen zu einer Geraden normal, so sind sie parallel.

Würden die beiden Ebenen einander schneiden, so müßten die Normale und die Verbindungsstrecken ihrer Fußpunkte mit irgend einem Punkte der Schnittlinie beider Ebenen ein Dreieck bilden, worin zwei rechte Winkel vorkämen.

2. Ist von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer Geraden normal, so ist es auch die andere.

Man lege durch die Gerade zwei Ebenen; aus dem Parallelismus der Schnittlinien jeder dieser Ebenen mit den beiden parallelen Ebenen ergibt sich die Richtigkeit des Satzes.

Alle Normalen zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich lang (§. 211, 2). Die Länge einer solchen Normalen gibt den Abstand der beiden parallelen Ebenen an.

§. **213. Lehrsätze.** 1. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie auch untereinander parallel.

Denn errichtet man auf die dritte Ebene eine Normale, so muß diese (§. 212, 2) auch zu den beiden ersteren Ebenen normal sein, folglich sind dieselben (§. 212, 1) einander parallel.

2. Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann nur eine zu dieser parallele Ebene gelegt werden.

Folgt indirekt aus 1.

§. **214. Lehrsätze.** 1. Zwei parallele Ebenen bilden mit derselben Geraden gleiche Neigungswinkel.

Zieht man von einem Punkte der Geraden die Normale zu der einen Ebene, so steht dieselbe auch zu der andern Ebene normal. Legt man nun durch die Normale und die gegebene Gerade die Ebene, so bilden ihre parallelen Schnittlinien in der Ebene mit der gegebenen Geraden die Neigungswinkel, welche nach §. 24, 2 gleich sind.

2. Eine Ebene, die zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit diesen gleiche Neigungswinkel.

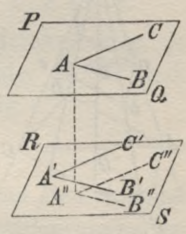
Man lege zu den parallelen Schnittlinien eine Normalebene; ihre Durchschnittslinien mit den beiden parallelen Ebenen und der dieselben schneidenden Ebene bilden die gleichen Neigungswinkel.

§. **215. Lehrsatz.** Zwei Keile, deren Seiten paarweise parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Seitenpaare in demselben oder beide in entgegengesetztem Sinne parallel sind.

Man verlängere eine Seite des einen Keiles, so daß sie eine Seite des andern Keiles schneidet, und wende dann §. 214, 2 an.

§. **216. Lehrsatz.** Die Ebenen zweier Winkel im Raume, deren Schenkel parallel sind, sind einander parallel.

Fig. 119.




Es sei (Fig. 119) $AB \parallel A'B'$ und $AC \parallel A'C'$. Zieht man $AA'' \perp RS$, ferner $A''B'' \parallel A'B'$ und $A''C'' \parallel A'C'$, so ist $AA''$ normal zu $A''B''$ und $A''C''$. Nun ist (§. 203) $A''B'' \parallel AB$ und $A''C'' \parallel AC$; folglich ist auch $AA''$ normal zu $AB$ und $AC$, mithin auch zu $PQ$; folglich ist $PQ \parallel RS$ (§. 212, 1).

§. **217.** Einzelne von den vorausgegangenen Sätzen hängen so zusammen, daß aus einem derselben der ihm zugeordnete durch Vertauschung von „Gerade“ und „Ebene“ hervorgeht. (Gesetz der Dualität.)

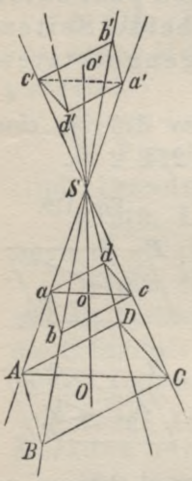
Solche Paare von Sätzen sind:

| | |
|---|---|
| *a)* In einem Punkt einer Ebene kann auf diese nur eine Normale errichtet werden. (§. 196, 1.) | *a')* In einem Punkt einer Geraden kann auf diese nur eine einzige normale Ebene errichtet werden. (§. 196, 3.) |
| *b)* Sind zwei Gerade zu einer Ebene normal, so sind sie parallel. (§. 198, 1.) | *b')* Sind zwei Ebenen zu einer Geraden normal, so sind sie parallel. (§. 212, 1.) |
| *c)* Ist von zwei parallelen Geraden die eine zu einer Ebene normal, so ist es auch die andere. (§. 198, 2.) | *c')* Ist von zwei parallelen Ebenen die eine zu einer Geraden normal, so ist es auch die andere. (§. 212, 2.) |
| *d)* Zwei parallele Gerade bilden mit derselben Ebene gleiche Neigungswinkel. (§. 204, 2.) | *d')* Zwei parallele Ebenen bilden mit derselben Geraden gleiche Neigungswinkel. (§. 214, 1.) |

§. **218.** Mehrere durch denselben Punkt gehende Gerade des Raumes bilden ein Strahlenbündel; der gemeinsame Punkt heißt der Scheitel desselben.

**Lehrsätze.** 1. Die Strahlen eines Strahlenbündels werden durch je zwei parallele Ebenen proportioniert geschnitten.

Fig. 120.




Es sei Ebene $ABCD \parallel abcd$ (Fig. 120). Da $SA$ und $SB$ in derselben Ebene liegen, so ist (§. 211, 1 und §. 113) $SA:Sa = SB:Sb$; ebenso ist $SB:Sb = SC:Sc$; folglich $SA:Sa = SB:Sb = SC:Sc = ..$

2. Werden die Strahlen eines Strahlenbündels von zwei Ebenen proportioniert geschnitten, so sind die beiden Ebenen parallel.

Ist $SA:Sa = SB:Sb = SC:Sc = ..$, so ist $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$; daher sind die durch die Winkel $ABC$ und $abc$ gelegten Ebenen $ABCD$ und $abcd$ parallel (§. 114 und §. 216).

3. Werden die Strahlen eines Strahlenbündels von zwei parallelen Ebenen geschnitten, so sind die von den entsprechenden Verbindungsstrecken der Schnittpunkte begrenzten Gebilde ähnlich.

Ist Ebene $ABCD \parallel abcd$, so ist (§ 211, 1) $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel cd, \ldots$ Daraus folgt (§. 115) $AB:ab = SB:Sb$ und $BC:bc = SB:Sb$, daher auch $AB:ab = BC:bc$. Ebenso folgt $BC:bc = CD:cd$, u. s. w. Ferner ist W. $A = a$, W. $B = b$, W. $C = c$, u. s. w., somit $ABCD \sim abcd$.

Dieselben Beziehungen finden statt, wenn der Scheitel des Strahlenbündels zwischen den beiden Ebenen liegt. (Fig. 120.)

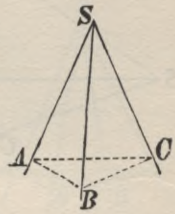
## III. Körperliche Ecken.

§. **219.** Wird ein Halbstrahl um seinen Grenzpunkt so gedreht, daß er an dem Umfang eines Polygons, dessen Ebene den Drehungspunkt nicht enthält, hingleitet, so beschreibt er eine Reihe von Ebenen, die einen Raum teilweise begrenzen, welcher körperliche Ecke oder auch bloß Ecke genannt wird. Die Gerade heißt die erzeugende Gerade, das Polygon das Leitpolygon

Der Drehungspunkt heißt der Scheitel der Ecke, die Schnittlinien der Begrenzungsebenen nennt man die Kanten; die Winkel je zweier aufeinanderfolgender Kanten die Kantenwinkel oder Seiten und ihre Winkelflächen die Seitenflächen; endlich die Neigungswinkel je zweier benachbarter Seitenflächen die Flächenwinkel, auch bloß Winkel der Ecke.

Im folgenden soll unter einer Ecke stets nur eine solche verstanden werden, deren Flächenwinkel hohl sind.

Fig. 121.




Ist (Fig. 121) $S$ der Scheitel der Ecke und sind $SA$, $SB$, $SC$ deren Kanten, so bezeichnet man die Ecke durch $SABC$; die Seiten bezeichnet man entweder, wie die ebenen Winkel, durch $ASB$, $ASC$, $BSC$, oder auch durch $(AB)$, $(AC)$, $(BC)$.

Eine Ecke hat so viele Seiten als Kanten. Nach der Anzahl derselben unterscheidet man drei-, vier-,..., $n$-seitige Ecken, oder Dreikante, Vierkante, .., $n$-Kante.

Eine körperliche Ecke heißt gleichseitig oder gleichwinklig, je nachdem die Seiten, beziehungsweise die Winkel einander gleich sind. Eine regelmäßige Ecke ist gleichseitig und gleichwinklig.

### Scheitelecken und Polarecken.

**§. 220.** *a)* Wenn man alle Kanten einer Ecke über den Scheitel hinaus verlängert, so heißt die Ecke, welche die Verlängerungen zu Kanten hat, die Scheitelecke der ersteren.

Zwei Scheitelecken $SABC$ und $SA'B'C'$ (Fig. 123, I) haben nach der Ordnung paarweise gleiche Seiten und gleiche Winkel; diese folgen jedoch in den beiden Ecken in entgegengesetztem Sinne der Drehung aufeinander, wenn man sie von außen gegen den Scheitel betrachtet.

*b)* Zieht man von einem beliebigen Punkte in einer Ecke auf jede Seitenfläche derselben die Normale, so bilden diese Normalen die Kanten einer neuen Ecke, welche die Polarecke der gegebenen heißt.

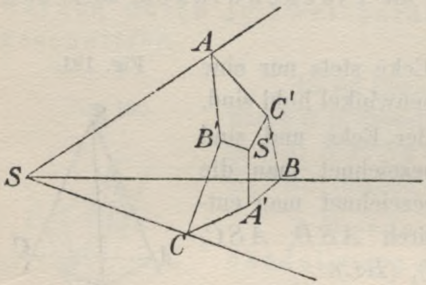
Ist (Fig. 122) $S'$ ein Punkt im Innern der Ecke $SABC$, und $S'A' \perp SBC$, $S'B' \perp SAC$, $S'C' \perp SAB$, so ist $S'A'B'C'$ die Polarecke der Ecke $SABC$.

Am bequemsten wird die Polarecke konstruiert, indem man im Scheitel der gegebenen Ecke auf deren Seitenflächen Normale nach außen errichtet.

**Lehrsätze.** 1. Jede Ecke ist Polarecke zu ihrer eigenen Polarecke.

Da $S'A' \perp SBC$, so ist auch die Ebene $S'A'CB' \perp SBC$; da $S'B' \perp SAC$, so ist auch die Ebene $S'A'CB' \perp SAC$; somit ist auch die Schnittlinie $SC$ der Ebenen $SBC$ und $SAC$ normal zur Ebene $S'A'CB'$. Ebenso folgt, daß die Kante $SB \perp S'A'BC'$ und $SA \perp S'B'AC'$ ist.

Fig. 122.




2. S i n d z w e i E c k e n P o l a r e c k e n z u e i n a n d e r, s o s i n d d i e S e i t e n d e r e i n e n S u p p l e m e n t e d e r W i n k e l d e r a n d e r n.

Der Seite $BSC$ der Ecke $SABC$ entspricht der Winkel an der Kante $S'A'$ der Polarecke $S'A'B'C'$. Das Maß dieses Winkels ist $BA'C$, da $S'A'$ normal zu der Ebene $SBC$, daher auch normal zu $A'C$ und $A'B$ ist. Nun sind, da $SC \perp S'A'CB'$ und $SB \perp S'A'BC'$ ist, in dem Vierecke $SBA'C$ die W. $SCA'$ und $SBA'$ rechte Winkel; daher ist auch $BSC + BA'C = 2R$. Ebenso folgt, daß $ASC + AB'C = 2R$ und $ASB + AC'B = 2R$ ist.

§. **221.** Zwei Ecken heißen k o n g r u e n t, wenn sie sich so ineinander legen lassen, daß alle ihre Kanten und Seitenflächen einander decken. Sollen zwei Ecken zur Deckung gebracht werden können, so müssen in denselben nicht nur alle Seiten und Winkel paarweise gleich sein, sondern auch in d e m s e l b e n S i n n e der Drehung aufeinander folgen.

Zwei Ecken, welche paarweise gleiche Seiten und Winkel haben, in denen aber diese in e n t g e g e n g e s e t z t e m S i n n e aufeinander folgen, können im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden.

B e w e i s. Es seien $SABC$ und $SA'B'C'$ Scheitelecken (Fig. 123, I).

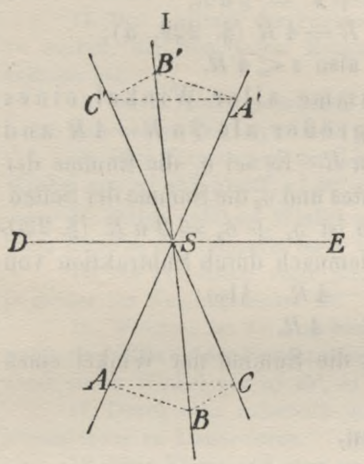
Die Seite $(A'C')$ kann mit der gleichen Seite $(AC)$ auf zweifache Weise zur Deckung gebracht werden.

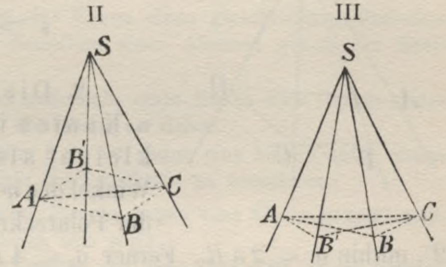
1. Dreht man $(A'C')$ in ihrer Ebene um $S$, so kann sie mit $(AC)$ zum Zusammenfallen gebracht werden (Fig. 123, II); bei dieser Drehung bleiben aber die Kanten $SB$ und $SB'$ auf entgegengesetzten Seiten der Ebene $SAC$, so daß eine Deckung der Ecken nicht stattfinden kann.

2. Dreht man $SA'B'C'$ um die Symmetrale $DE$ des Winkels $A'SC$ um 180°, so kommen $(A'C')$ und $(AC)$ zur Deckung. Die Kanten $SB'$ und $SB$ liegen dann zwar auf derselben Seite der Ebene

$SAC$ (Fig. 123, III), fallen aber nur dann zusammen, wenn zufällig die Flächenwinkel $B(AS)C$ und $A(CS)B$, folglich auch $B(AS)C$ und $A'(C''S)B'$ einander gleich sind. Im allgemeinen können mithin die Ecken auch auf diese Art nicht zur Deckung gebracht werden.

Fig. 123.





Zwei Ecken, in welchen die Seiten und Winkel paarweise gleich sind, aber in entgegengesetztem Drehungssinn aufeinander folgen, heißen s y m m e t r i s c h.

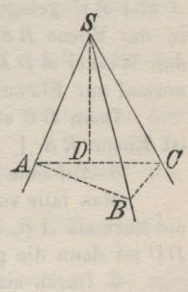
**Folgesätze.** *a)* Jede Ecke ist ihrer Scheitelecke s y m m e t r i s c h.

*b)* Zwei Ecken, welche einer dritten symmetrisch sind, sind untereinander kongruent.

*c)* Ist von zwei kongruenten Ecken die eine einer dritten symmetrisch, so ist es auch die andere.

§. **222. Lehrsatz.** I n j e d e m D r e i k a n t e i s t *a)* d i e S u m m e z w e i e r S e i t e n g r ö ß e r, *b)* d i e D i f f e r e n z d e r s e l b e n k l e i n e r a l s d i e d r i t t e S e i t e.

Fig. 124.



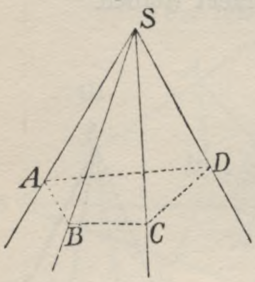
B e w e i s. *a)* Ist $(AC)$ die größte Seite, so ziehe man in der Ebene $ASC$ die Gerade (Fig. 124) $SD$ so, daß $ASD = ASB$ wird, mache $SD = SB$ und lege durch $B$ und $D$ eine beliebige, die Kanten $SA$ und $SC$ in $A$ und $C$ schneidende Ebene. Dann ist $\triangle ASD \cong ASB$, also $AD = AB$. Da nun $AB + BC > AD + CD$, so ist $BC > CD$, mithin ist Winkel $BSC > DSC$, d. i. $(BC) > (AC) - (AB)$ oder $(BC) + (AB) > (AC)$.

*b)* Der Beweis ist analog §. 34, 2.

§. **223. Lehrsätze.** 1. I n j e d e m *n*-K a n t i s t d i e S u m m e a l l e r S e i t e n k l e i n e r a l s $4R$.

Legt man (Fig. 125) durch das $n$-Kant eine Ebene, die alle Kanten schneidet, so erhält man als Durchschnittsfigur ein $n$-Eck und an den Seitenflächen des $n$-Kantes $n$ Dreiecke. Die Summe aller Winkel derselben bei $S$ sei $s$, jene bei $A$, $B$, .... $s'$, so ist

Fig. 125.



$$s + s' = 2nR,$$
$$s' > 2nR - 4R \text{ (§. 222, } a\text{);}$$
$$\text{also } s < 4R.$$

2. **Die Summe aller Winkel eines $n$-Kantes ist größer als $2nR - 4R$ und kleiner als $2nR$.** Es sei $\sigma_1$ die Summe der Winkel des $n$-Kantes und $\sigma_2$ die Summe der Seiten der Polarecke; so ist $\sigma_1 + \sigma_2 = 2nR$ (§. 220, 2), mithin $\sigma_1 < 2nR$. Ferner $\sigma_2 < 4R$, demnach durch Subtraktion von der voranstehenden Gleichung $\sigma_1 > 2nR - 4R$. Also:

$$2nR > \sigma_1 > 2nR - 4R.$$

Für ein Dreikant ist $n = 3$; daher liegt die Summe der Winkel eines Dreikantes zwischen $6R$ und $2R$.

## IV. Aufgaben.

§. **224.** 1. Von einem gegebenen Punkte im Raume zu einer gegebenen Geraden die Normale zu ziehen.

Man lege durch den Punkt und die Gerade die Ebene und fälle in derselben von dem gegebenen Punkte die Normale auf die gegebene Gerade.

2. Durch einen gegebenen Punkt im Raume mit einer gegebenen Geraden die Parallele zu ziehen.

Die Auflösung ist der früheren analog.

3. Durch einen gegebenen Punkt einer Geraden zu dieser die normale Ebene zu legen (§. 195, Folges.).

4. Von einem Punkte $A$ außerhalb einer Ebene $RS$ zu dieser die Normale zu ziehen.

Man ziehe in der Ebene $RS$ eine beliebige Gerade $BC$, fälle in der durch $A$ und $BC$ gelegten Ebene von $A$ auf $BC$ die Normale $AD$; in $D$ errichte man in der Ebene $RS$ auf $BC$ die Normale $DE$ und fälle auf dieselbe in der durch den Winkel $ADE$ gelegten Ebene von $A$ aus die Normale $AF$; diese ist dann normal zur Ebene $RS$.

Denn $BC$ steht nach der Konstruktion normal auf der Ebene $ADF$, daher ist Ebene $RS \perp ADE$ (§. 209, 1), mithin ist auch $AF \perp$ Ebene $RS$ (§. 209, 2).

5. Auf eine Ebene $RS$ in einem Punkte $D$ derselben die Normale zu errichten.

Man fälle von einem beliebigen Punkte $A$ außerhalb der Ebene $RS$ auf diese die Normale $AB$, lege durch $AB$ und $D$ die Ebene und ziehe in dieser $DC \parallel AB$; $DC$ ist dann die gesuchte Normale.

6. Durch eine gegebene Gerade in einer Ebene die zu dieser normale Ebene zu legen.

7. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

8. Durch einen außerhalb einer Ebene liegenden Punkt zu dieser eine Normalebene zu legen.

9. Zu untersuchen, ob zwei Gerade, welche zu derselben Ebene parallel sind, auch untereinander parallel sind.

10. Ein Punkt außerhalb einer Ebene ist gegeben; den geometrischen Ort derjenigen Punkte der Ebene zu suchen, welche von dem gegebenen Punkt den Abstand $a$ haben.

11. Den Abstand des Punktes von der Ebene eines gleichseitigen Dreieckes zu suchen, der von jedem Eckpunkt desselben einen Abstand gleich der Dreieckseite hat.

12. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer Ebene eine Gerade unter einem gegebenen Neigungswinkel gegen die Ebene zu ziehen.

13. Eine Strecke von der Länge 2 *m* 3 *dm* ist gegen eine Ebene unter einem Winkel von *a)* $45^0$, *b)* $30^0$, *c)* $60^0$ geneigt; die Projektion zu berechnen.

14. Unter welchem Winkel muß eine Strecke gegen eine Ebene geneigt sein, wenn dieselbe das Doppelte ihrer Projektion sein soll?

15. Die Projektion einer schiefen Strecke auf eine Ebene ist um so kleiner, je größer ihr Neigungswinkel ist.

16. Wie groß ist die Projektion eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite $a$, wenn eine Seite in der Projektionsebene liegt und die Dreiecksebene gegen dieselbe unter einem Winkel von *a)* $45^0$, *b)* $60^0$ geneigt ist?

17. Durch eine außerhalb einer Ebene liegende Gerade zu der ersteren die Normalebene zu konstruieren.

18. Eine Ebene und eine zu derselben parallele Gerade sind gegeben; durch diese die zur ersteren parallele Ebene zu legen.

19. Verbindet man die Schnittpunkte, in denen zwei parallele Ebenen von parallelen Geraden geschnitten werden, durch entsprechende Strecken, so erhält man zwei kongruente Polygone.

20. Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht senkrecht auf beiden.

21. Eine Ebene unter einem gegebenen Neigungswinkel gegen eine gegebene Ebene zu konstruieren.

22. Eine Ebene und eine mit ihr parallele Gerade sind gegeben. Durch die Gerade die Ebene zu legen, welche mit der gegebenen Ebene den Winkel $\alpha$ bildet.

23. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu finden, welche von den Endpunkten einer Strecke gleich weit abstehen.

24. Den geometrischen Ort jener Punkte zu bestimmen, welche von den Eckpunkten eines Dreieckes denselben Abstand haben.

25. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu finden, welche von den Seiten eines Keiles gleich weit abstehen.

26. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu finden, welche von den Seitenflächen eines Dreikantes gleich weit abstehen.

27. Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines Keiles eine zur Kante desselben senkrechte Ebene zu legen.

28. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu bestimmen, welche von den Seiten eines Keiles beziehungsweise die Abstände $m$ und $n$ haben.

29. Ein Punkt innerhalb eines Keiles ist gegeben; durch denselben die mit den Seiten desselben parallele Gerade zu legen.

30. In einem Dreikant sind zwei Seiten $105^0$ und $63^0$; die Grenzen für die dritte Seite anzugeben.

31. Die Grenzen für $a)$ eine Seite, $b)$ einen Winkel eines regelmäßigen $n$-Kantes anzugeben.

32. In jedem Dreikant ist die Differenz der Summe zweier Winkel und des dritten kleiner als $2\,R$.

33. In jedem Dreikant ist die Differenz zweier Winkel stets kleiner als die Differenz zwischen $2\,R$ und dem dritten.

34. Wenn zwei Winkel eines Dreikantes $130^0$ und $75^0$ sind, zwischen welchen Grenzen liegt der dritte?

35. Sind in einem Dreikant zwei Seiten $90^0$, so sind auch die gegenüberliegenden Winkel $90^0$.

36. Sind in einem Dreikant alle Seiten rechte, so sind es auch die gegenüberliegenden Winkel.

---

# Zweiter Abschnitt.

## Von den Körpern im allgemeinen.

### I. Ebenflächige Körper.

**§. 225.** Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein ebenflächiger Körper oder ein Polyeder. Zur Begrenzung eines Polyeders sind wenigstens vier Ebenen erforderlich. Die einzelnen Grenzebenen heißen die Flächen des Polyeders und bilden zusammen dessen Oberfläche; die Schnittlinien der Flächen heißen die Kanten und die von den Flächen gebildeten Ecken die Ecken des Polyeders.

#### 1. Die Pyramide.

**§. 226.** Wird eine Ecke durch eine alle Kanten derselben treffende Ebene geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder eine Pyramide. Die Schnittfläche heißt die Grundfläche, die andern Grenzflächen heißen die Seitenflächen, die Schnittlinien der letzteren miteinander die Seitenkanten, und die mit der Grundfläche die Grundkanten der Pyramide. Den gemeinsamen Schnittpunkt der Seitenkanten nennt man den Scheitel, und den Abstand des Scheitels von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke.

Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche teilt man die Pyramiden in drei-, vier- und mehrseitige ein. Die dreiseitige Pyramide ist das einfachste Polyeder.

Eine Pyramide, in welcher alle Seitenkanten gleich sind, heißt gerade, jede andere schief. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Sehnenvieleck, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt der Höhe ist (§. 202, Folges. $a$); die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke.

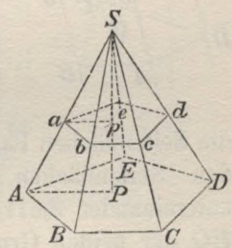
Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein reguläres Polygon ist, heißt regelmäßig oder regulär. Ihre Seitenflächen sind kongruente, gleichschenklige Dreiecke; die Höhe eines jeden derselben heißt die Seitenhöhe der regulären Pyramide.

Eine Pyramide, in welcher alle Kanten gleich sind, heißt gleichkantig. Sie ist zugleich regelmäßig. Da die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind, so kann eine gleichkantige Pyramide höchstens fünfseitig sein.

### Schnittfiguren einer Pyramide durch eine Ebene.

§. **227.** 1. Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist *a)* die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich und *b)* die Flächeninhalte beider verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel.

Fig. 126.




Beweis. Es sei (Fig. 126) $abcde \parallel ABCDE$.

*a)* Folgt unmittelbar aus §. 218, 3.

*b)* Ist $SP \perp ABCDE$, also auch $Sp \perp abcde$, und legt man durch $ASP$ die Ebene, welche die beiden Vielecke in den Geraden $ap$ und $AP$ schneidet, so ist $ap \parallel AP$, daher $ab : AB = Sa : SA = Sp : SP$. Nun ist $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$, folglich auch $abcde : ABCDE = Sp^2 : SP^2$.

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen den beiden parallelen Flächen liegende Teil der Pyramide ein Pyramidenstumpf, der zwischen der Schnittfläche und dem Scheitel liegende Teil aber die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Der Pyramidenstumpf wird von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und so vielen Trapezen als Seitenflächen begrenzt, als jedes der Vielecke Seiten hat. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Ist die Pyramide eine gerade oder eine reguläre, so ist es auch der Pyramidenstumpf. In einem geraden Pyramidenstumpfe sind alle Seitentrapeze gleichschenklig, in einem regulären zugleich kongruent. In dem letzteren heißt die Höhe eines jeden Seitentrapezes die Seitenhöhe des regulären Pyramidenstumpfes.

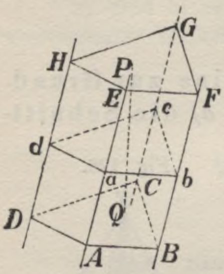
2. Legt man durch zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Seitenkanten einer Pyramide die Ebene, so ist die Schnittfigur ein Dreieck und heißt ein Diagonalschnitt der Pyramide.

**Jede vielseitige Pyramide läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden von der Höhe der ganzen Pyramide zerlegen.**

### 2. Das Prisma.

§. **228.** Durch Parallelverschiebung der unbegrenzten Geraden $AE$ (Fig. 127) längs des Umfanges eines Polygons $ABCD\ldots$ erhält man Ebenen, deren Schnittlinien parallel sind, und einen nach zwei Seiten offenen Raum, welcher ein prismatischer Raum heißt. $AE$ ist die erzeugende Gerade, $ABCD\ldots$ das Leitpolygon.

Fig. 127.




Wird ein prismatischer Raum durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Prisma. Die zwei parallelen Schnittfiguren heißen die Grundflächen, die übrigen Grenzflächen Seitenflächen. Die Grundflächen eines Prismas sind kongruente Polygone (§. 211), die Seitenflächen Parallelogramme. Die Schnittlinien der Grundflächen mit den Seitenflächen heißen Grundkanten, jene der Seitenflächen untereinander Seitenkanten; diese sind einander gleich. Der Abstand $PQ$ der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

Legt man durch zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Seitenkanten eines Prismas die Ebene, so heißt die Durchschnittsfigur ein Diagonalschnitt; er ist ein Parallelogramm.

Jeder Schnitt, in welchem ein Prisma durch eine zu den Seitenkanten normale Ebene geschnitten wird, heißt ein Normalschnitt des Prismas.

§. **229.** Nach der Anzahl der Seitenkanten unterscheidet man drei-, vier- oder mehrseitige Prismen. Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen heißt ein Prisma gerade oder schief, je nachdem die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht oder schief stehen.

Ein gerades Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Polygone sind, heißt regelmäßig.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped (Quader). Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten gleich sind, heißt ein Kubus oder Würfel. Jedes Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen, ein rechtwinkliges Parallelepiped von sechs Rechtecken, ein Kubus von sechs Quadraten begrenzt.

§. **230.** Unter einer Diagonale eines Parallelepipeds versteht man eine Diagonale eines Diagonalschnittes. Ein Parallelepiped hat vier Diagonalen.

**Lehrsätze.** 1. In jedem Parallelepiped schneiden sich die Diagonalen in demselben Punkte und halbieren einander.

Beweis. Legt man durch die Kanten $AB$ und $HG$ (Fig. 128) die Ebene, so ist die Schnittfläche $ABGH$ ein Parallelogramm; es müssen also in demselben die Diagonalen $AG$ und $BH$ in dem Punkte $O$ einander halbieren. Aber auch $CE$ muß $BH$ halbieren, muß also durch $O$ gehen etc.

Fig. 128.

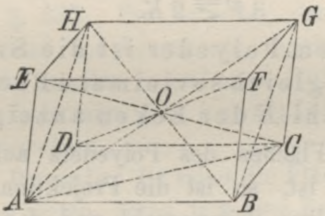
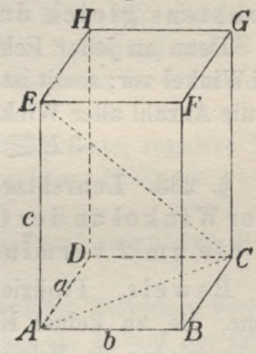



Fig. 129.




2. In jedem rechtwinkligen Parallelepiped sind die Diagonalen einander gleich; denn je zwei derselben sind Diagonalen eines Rechteckes.

3. In jedem rechtwinkligen Parallelepiped ist das Quadrat einer Diagonale gleich der Summe der Quadrate der drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten.

Es sei das Parallelepiped $ABCDEFGH$ (Fig. 129) rechtwinklig. Dann ist

$$EC^2 = AC^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

§. **231.** Schnitte durch ein Prisma. 1. Wird ein Prisma durch eine zu den Grundflächen parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche mit den Grundflächen kongruent.

$abcd \cong ABCD$ (Fig. 127.) Der Beweis beruht auf §. 211.

2. Jedes vielseitige Prisma läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen von der Höhe des ganzen Prismas zerlegen.

### 3. Polyeder überhaupt und die regulären insbesondere.

§. **232.** Ein Polyeder, welches nur hohle Flächenwinkel hat, heißt konvex. Nur von solchen Polyedern ist in dem nachfolgenden die Rede.

**Lehrsätze.** 1. In jedem Polyeder ist die Anzahl $W$ aller Kantenwinkel doppelt so groß als die Anzahl $K$ aller Kanten.

Denn jedes Polyeder hat so viele Winkel, als die Anzahl der Seiten aller Flächen beträgt; diese Anzahl ist aber doppelt so groß als die der Kanten, da jede Kante in zwei anliegenden Flächen als Seite vorkommt; folglich

$$W = 2K.$$

2. In jedem Polyeder ist die dreifache Anzahl $E$ der Ecken, ebenso die dreifache Anzahl $F$ der Flächen höchstens gleich der doppelten Anzahl $K$ der Kanten.

Denn an jeder Ecke, ebenso in jeder Fläche, kommen mindestens drei Winkel vor; somit ist $3E$, und ebenso $3F$ entweder gleich oder kleiner als die Anzahl aller Winkel; diese beträgt aber $2K$ (nach 1), folglich ist

$$3E \lesseqgtr 2K \qquad \text{und} \qquad 3F \lesseqgtr 2K.$$

§. **233. Lehrsätze.** 1. In jedem Polyeder ist die Summe aller Winkel an der Oberfläche gleich sovielmal 4 Rechten, als die um 2 verminderte Anzahl $E$ der Ecken anzeigt.

Beweis. Projiziert man alle Flächen des Polyeders auf eine Ebene, die zu keiner Kante normal ist, so ist die Projektion jeder Fläche wieder ein Polygon von derselben Seitenanzahl und daher die Summe $S$ aller Winkel an der Oberfläche des Polyeders gleich der Summe der Vieleckswinkel aller Projektionsflächen. Fallen nun die Projektionen von $e_1$-Ecken des Polyeders auf den Umfang der Projektionsfigur und die Projektionen von $e_2$-Ecken in das Innere derselben, so geben die Vieleckswinkel aller Projektionsflächen zusammen die doppelte Winkelsumme eines $e_1$-Eckes und $e_2$ volle Winkel; folglich ist

$$S = 2\,(e_1 - 2)\,.\,2R + e_2\,.\,4R = (e_1 + e_2 - 2)\,.\,4R,$$

oder, da $e_1 + e_2 = E$ ist,

$$S = (E - 2)\,.\,4R.$$

2. In jedem Polyeder ist die Summe aller Winkel an der Oberfläche auch gleich sovielmal 4 Rechten, als die Differenz der Anzahl $K$ der Kanten und der Anzahl $F$ der Flächen anzeigt.

Beweis. Ist die Zahl der Seiten der einzelnen Flächen des Polyeders $n_1$, $n_2$, $n_3 \ldots$, so sind die Summen der Winkel in diesen Polygonen $(n_1 - 2).\,2R$, $(n_2 - 2)\,.\,2R$, $(n_3 - 2)\,.\,2R, \ldots$ daher die Summe aller Winkel auf der Oberfläche des Polyeders $S = (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots)\,.\,2R - F\,.\,4R$. Nun ist $n_1 + n_2 + n_3 \ldots = 2K$, da jede Kante zwei Polygonseiten bildet; daher $S = K\,.\,4R - F\,.\,4R$, oder

$$S = (K - F)\,.\,4R.$$

§. **234. Lehrsatz.** In jedem Polyeder ist die Summe der Anzahl $E$ der Ecken und der Anzahl $F$ der Flächen um 2 größer als die Anzahl $K$ der Kanten.

Dieser Satz wurde 1752 von Leonhard Euler gefunden und er heißt nach ihm der Eulersche Satz. Euler, einer der bedeutendsten Mathematiker, wurde 1707 zu Basel geboren, war Professor in Petersburg und Berlin und starb 1783 in Petersburg.

Beweis. Nach §. 233 ist die Winkelsumme an der Oberfläche $S = (E-2) \cdot 4R$ und auch $S = (K-F) \cdot 4R$. Hieraus folgt $E-2 = K-F$, oder

$$E + F = K + 2.$$

Die Gleichung $E + F = K + 2$ sowie die in §. 232 abgeleiteten Ungleichungen $3E \gtreqless 2K$ und $3F \gtreqless 2K$ sind in Beziehung auf $E$ und $F$ symmetrisch, d. h. sie bleiben richtig, wenn man in denselben $E$ und $F$ miteinander vertauscht.

§. **235.** Ein Polyeder, dessen Flächen kongruente, reguläre Vielecke sind und kongruente, regelmäßige Ecken bilden, heißt ein regelmäßiges oder reguläres Polyeder.

**Lehrsatz.** Es kann nicht mehr als fünf reguläre Polyeder geben.

Beweis. Es seien die Flächen eines regulären Polyeders Vielecke von $m$ Seiten, deren je $n$ eine Ecke bilden, $E$ sei die Anzahl der Ecken, $F$ die Zahl der Flächen und $K$ die Zahl der Kanten des Polyeders. Dann ist die Gesamtzahl der Seiten aller Flächen $2K$, da jede Kante als Seite zweier zusammenstoßender Flächen vorkommt; sie ist aber, da in jeder Ecke $n$ Seiten zusammenstoßen, auch $nE$ und, da jede Fläche $m$ Seiten hat, auch $mF$; es ist mithin $nE = 2K$ und $mF = 2K$, oder

$$E = \frac{2K}{n} \text{ und } F = \frac{2K}{m}.$$

Nun ist (nach §. 234) $E + F = K + 2$, daher $\frac{2K}{n} + \frac{2K}{m} = K + 2$, folglich

$$K = \frac{2mn}{2(m+n) - mn}.$$

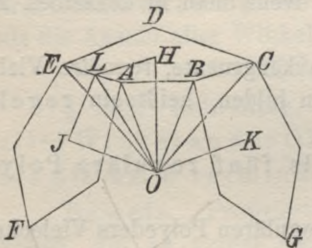
Damit $K$ positiv werde, kann man $m$ und $n$ nur solche Werte beilegen, für welche $2(m+n) > mn$ oder $\frac{2m}{m-2} > n$ wird. Demnach ist die Bildung regulärer Polyeder nur für folgende Werte von $m$ und $n$ möglich:

1. $m = 3$, $n = 3$, woraus $K = 6$, $E = 4$, $F = 4$. (Tetraeder.)
2. $m = 3$, $n = 4$, „ $K = 12$, $E = 6$, $F = 8$. (Oktaeder.)
3. $m = 3$, $n = 5$, „ $K = 30$, $E = 12$, $F = 20$. (Ikosaeder.)
4. $m = 4$, $n = 3$, „ $K = 12$, $E = 8$, $F = 6$. (Hexaeder.)
5. $m = 5$, $n = 3$, „ $K = 30$, $E = 20$, $F = 12$. (Dodekaeder.)

Das Hexaeder und das Oktaeder haben gleiche Kantenzahl, die Zahl der Ecken des einen ist gleich der Zahl der Flächen des andern und die Seitenzahl jeder Fläche des einen ist gleich der Kantenzahl jeder Ecke des andern. Man nennt deshalb diese zwei regulären Polyeder einander zugeordnet. Aus demselben Grunde sind das Dodekaeder und das Ikosaeder einander zugeordnet. Das Tetraeder ist sich selbst zugeordnet; es hat so viele Ecken als Flächen und die Seitenzahl einer Fläche ist gleich der Kantenzahl einer Ecke.

§. **236. Lehrsatz.** Jedes reguläre Polyeder hat einen Punkt, der *a)* von allen Seitenflächen und *b)* von allen Eckpunkten gleich weit absteht.

Fig. 130.




Beweis. *a)* Es seien (Fig. 130) $AEC$, $AEF$,... Seitenflächen eines regulären Polyeders und $H$, $J$,... ihre Mittelpunkte. Zieht man aus $H$ und $J$ zu der Mitte $L$ der Kante $AE$ die Strecken $HL$ und $JL$, so stehen diese zu $AE$ normal, daher ist $HLJ$ der Neigungswinkel der Ebenen $AEC$ und $AEF$ und es sind diese Ebenen zu der durch den Winkel $HLJ$ gelegten Ebene normal. Werden daher auf $AEC$ und $AEF$ in $H$ und $J$ Normale errichtet, so müssen sie in der Ebene $HLJ$ liegen (§. 209, 3) und einander in einem Punkte $O$ schneiden. Zieht man nun $OL$, so ist $\triangle OHL \cong OJL$, daher $OH = OJ$; d. h. der Punkt $O$ hat von den zwei Seitenflächen gleiche Abstände. Wegen der Gleichheit aller Winkel und Seiten muß auch die Mittelnormale jeder Nachbarfläche von $AEC$ die Mittelnormale derselben in $O$ schneiden; so fortschließend findet man, daß der Punkt $O$ von allen Seitenflächen des regulären Polyeders gleiche Abstände hat.

*b)* Da ferner $OH$, $OJ$, $OK$,... zu den Seitenflächen $AEC$, $AEF$, $BCG$,... normal sind und durch die Mittelpunkte $H$, $J$, $K$,... derselben gehen, so müssen (nach §. 202) alle schiefen Strecken aus $O$ nach den Eckpunkten der Seitenflächen gleiche Länge haben. Der Punkt $O$ hat also auch von allen Eckpunkten des Polyeders gleiche Abstände.

Der Punkt $O$ heißt der Mittelpunkt des regulären Polyeders.

Auf dem vorstehenden Lehrsatze und der in §. 235 nachgewiesenen dualen Zuordnung der regulären Polyeder beruhen folgende Sätze über die Umgestaltung dieser Körper:

1. Werden alle Flächen eines regulären Polyeders durch ihre Mittelpunkte als Ecken ersetzt, so sind diese die Ecken eines zugeordneten regulären Polyeders.

2. Werden alle Ecken eines regulären Polyeders durch ebene, zu ihren Kanten gleich geneigte Flächen ersetzt, so sind diese die Flächen eines zugeordneten regulären Polyeders.

## II. Krummflächige Körper.

§. **237.** Körper, welche ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzt werden, heißen k r u m m f l ä c h i g e Körper.

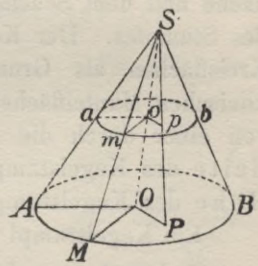
### 1. Der Kegel.

§. **238.** Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets durch einen festen Punkt außerhalb der Ebene einer Kreislinie geht, längs dieser Kreislinie fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie eine krumme Fläche, die man eine k o n i s c h e F l ä c h e nennt. Die gegebene Kreislinie heißt die L e i t l i n i e, der gegebene feste Punkt der S c h e i t e l der konischen Fläche.

**Lehrsatz.** J e d e r z u r E b e n e d e r L e i t l i n i e p a r a l l e l g e l e g t e S c h n i t t e i n e r k o n i s c h e n F l ä c h e i s t e i n K r e i s.

B e w e i s. Es sei $S$ (Fig. 131) der Scheitel und der Kreis $AMB$ die Leitlinie der konischen Fläche, ferner Ebene $amb \parallel AMB$. Zieht man von $S$ zu dem Mittelpunkte $O$ der Leitlinie die Strecke $SO$, welche die Schnittfläche in $o$ schneidet, und legt durch $SO$ und einen willkürlichen Punkt $m$ der Schnittlinie die Ebene, welche die konische Fläche in der Geraden $SmM$ schneidet, so ist $om:OM = So:SO$, und $oa:OA = So:SO$, folglich $om:OM = oa:OA$, woraus wegen $OM = OA$ auch $om = oa$ folgt. Es sind also alle Punkte im Umfange des Schnittes von $o$ gleich weit entfernt, mithin ist der Schnitt ein Kreis.

Fig. 131.




§. **239.** Wird eine konische Fläche durch eine zur Ebene der Leitlinie parallele Ebene geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein K e g e l. Die ebene Schnittfläche ist eine Kreisfläche und heißt die G r u n d f l ä c h e, die konische Fläche wird der M a n t e l des Kegels genannt. Die Strecke, welche den Scheitel und den Mittelpunkt der Grundfläche verbindet, heißt die A c h s e und jede Strecke, in welcher der Mantel von einer durch die Achse gelegten Ebene geschnitten wird, eine S e i t e des Kegels. Den Abstand des Scheitels von der Grundfläche des Kegels nennt man die H ö h e desselben.

Ist die Achse zur Grundfläche normal, so heißt der Kegel ein g e r a d e r, sonst ein s c h i e f e r. Einen geraden Kegel kann man sich durch Drehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten als Achse entstanden denken. In einem geraden Kegel sind alle Seiten gleich und die Achse stellt zugleich die Höhe vor. In einem schiefen

Kegel gibt es eine kürzeste und eine längste Seite; dieselben liegen in der durch die Achse und ihre Projektion auf die Grundfläche gehenden Ebene.

Ein gerader Kegel, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, heißt gleichseitig.

Zieht man durch einen Umfangspunkt der Grundfläche eines Kegels die Tangente zu dieser und die Seite, so hat die durch beide Linien gelegte Ebene nur die Seite mit der Kegelfläche gemeinsam; sie heißt eine Berührungsebene des Kegels.

§. **240. Schnittfiguren.** 1. Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist *a)* der Schnitt ein Kreis, und es verhalten sich *b)* die Flächeninhalte der Schnittfläche und der Grundfläche wie die zweiten Potenzen ihrer Abstände vom Scheitel des Kegels.

Beweis. Es sei (Fig. 131) die Ebene $amb \parallel AMB$.

*a)* Folgt aus §. 238.

*b)* Ist $SP \perp AMB$, also auch $Sp \perp amb$, und legt man durch $O$ und $SP$ die Ebene, welche die beiden Kreise in $OP$ und $op$ schneidet, so ist $op \parallel OP$, daher $Sp : SP = So : SO = ao : AO$. Nun ist $amb : AMB = ao^2 : AO^2$, folglich auch $amb : AMB = Sp^2 : SP^2$.

Wird ein Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche liegende Theil des Kegels ein Kegelstumpf, der zwischen der Schnittfläche und dem Scheitel liegende Teil aber der Ergänzungskegel des Stumpfes. Der Kegelstumpf wird von zwei parallelen ungleichen Kreisflächen als Grundflächen und der zwischen ihnen enthaltenen konischen Mantelfläche begrenzt. Jede Strecke, in welcher der Mantel von einer durch die Achse gehenden Ebene geschnitten wird, heißt Seite des Kegelstumpfes. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt Höhe des Kegelstumpfes.

Ein Kegelstumpf ist, wie der Kegel selbst, gerade oder schief.

2. Legt man durch die Achse eines Kegels eine Ebene, so heißt die Schnittfigur ein Achsenschnitt. Jeder Achsenschnitt eines Kegels ist ein Dreieck.

Denn jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Grundfläche in einem Durchmesser und die Mantelfläche in zwei Strecken.

In einem geraden Kegel sind alle Achsenschnitte gleichschenklige, kongruente und zur Grundfläche normale Dreiecke. In einem schiefen Kegel ist nur eines, und zwar dasjenige, welches durch die Projektion der Achse auf die Grundfläche geht, zu dieser letzteren normal; es ist das charakteristische Dreieck des Kegels und enthält die längste und kürzeste Seite desselben. Nur eines ist gleichschenklig und zwar dasjenige, welches die Grundfläche in dem zur Projektion der Achse senkrechten Durchmesser schneidet. (§. 201.) Die Ebenen der beiden Dreiecke stehen aufeinander normal.

3. Jeder Achsenschnitt eines Kegelstumpfes ist ein Trapez.

Denn jede durch die Achse gehende Ebene schneidet die Grundflächen in zwei parallelen Durchmessern und die Mantelfläche in zwei nicht parallelen Strecken.

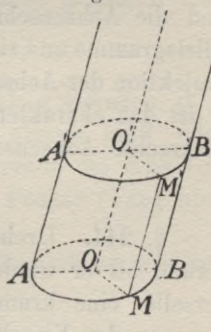
In einem geraden, wie in einem schiefen Kegelstumpfe gilt von den Trapezen als Achsenschnitten dasselbe, was bei den Achsenschnitten des Kegels von den Dreiecken angeführt wurde.

## 2. Der Zylinder.

§. **241.** Bewegt sich eine Gerade so, daß sie stets einer festen, die Ebene einer Kreislinie in ihrem Mittelpunkte schneidenden Geraden parallel bleibt, längs dieser Kreislinie fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie eine krumme Fläche, die man eine zylindrische Fläche nennt. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie, die durch ihren Mittelpunkt gehende feste Gerade die Achse der zylindrischen Fläche.

**Lehrsatz.** Jeder zur Ebene der Leitlinie parallel gelegte Schnitt einer zylindrischen Fläche ist ein Kreis, welcher mit der Leitlinie gleichen Halbmesser hat.

Fig. 132.




Beweis. Es sei der Kreis $ABM$ (Fig. 132) die Leitlinie der zylindrischen Fläche und eine zu diesem Kreise parallele Ebene $A'B'M'$ schneide die Achse $OO'$ in $O'$. Legt man durch $OO'$ und einen beliebigen Punkt $M'$ der Schnittlinie die Ebene, welche die zylindrische Fläche in der Geraden $MM'$ schneidet, so ist $OO' \parallel MM'$ und $O'M' \parallel OM$; daher ist $OO'M'M$ ein Parallelogramm und folglich $O'M' = OM$. Es ist also der Abstand eines jeden Punktes der Schnittlinie von $O'$ dem Halbmesser der Leitlinie gleich, d. h. der Schnitt ist ein mit der Leitlinie kongruenter Kreis.

§. **242.** Wird eine zylindrische Fläche durch zwei zur Ebene der Leitlinie parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Zylinder. Die zwei ebenen Schnittflächen sind kongruente Kreisflächen und heißen die Grundflächen; die zwischen denselben liegende Fläche nennt man den Mantel des Zylinders. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte beider Kreise heißt die Achse und jede Schnittlinie des Mantels mit einer durch die Achse gelegten Ebene eine Seite des Zylinders. Der Abstand der beiden Grundflächen wird die Höhe des Zylinders genannt.

Alle Seiten des Zylinders sind parallel und einander gleich.

Steht die Achse zu den Grundflächen normal, so heißt der Zylinder ein gerader, sonst ein schiefer. Einen geraden Zylinder kann man sich auch durch Drehung eines Rechteckes um eine Seite als Achse entstanden denken. In einem geraden Zylinder stellt die Achse zugleich die Höhe vor.

Ein gerader Zylinder, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, wird gleichseitig genannt.

Zieht man durch einen Umfangspunkt der Grundfläche eines Zylinders die Tangente zu dieser und die Seite, so hat die durch beide Linien gelegte Ebene nur die Seite mit der Mantelfläche gemeinsam; eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene des Zylinders.

§. **243. Schnittfiguren.** 1. Wird ein Zylinder durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist der Schnitt ein mit der Grundfläche kongruenter Kreis.

Folgt aus §. 241.

2. Jeder Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Parallelogramm.

Denn in dem erhaltenen Vierecke sind die Schnittlinien der Ebene mit der Mantelfläche als Seiten des Zylinders parallel und gleich.

In einem geraden Zylinder sind alle Achsenschnitte kongruente Rechtecke und stehen zur Grundfläche normal. In einem schiefen Zylinder sind die Achsenschnitte ungleiche im allgemeinen schiefwinklige Parallelogramme und steht nur einer und zwar derjenige, welcher durch die Projektion der Achse auf die Grundfläche geht, zur Grundfläche normal; er ist das charakteristische Parallelogramm des Zylinders. Der darauf senkrechte Achsenschnitt ist ein Rechteck.

### 3. Die Kugel.

§. **244.** Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser so weit herum, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt derselbe eine krumme Fläche, welche Kugelfläche genannt wird. Der von der Kugelfläche begrenzte Körper heißt Kugel.

Jeder Punkt der Kugelfläche ist von dem Mittelpunkte des erzeugenden Halbkreises gleich weit entfernt; dieser Punkt heißt darum auch der Mittelpunkt der Kugel. Eine Strecke, die vom Mittelpunkte bis zur Kugelfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Strecke, die durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Kugeloberfläche verbindet, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser einer

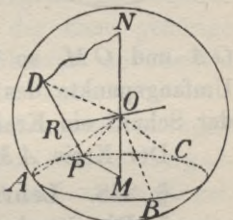
Kugel sind einander gleich; ebenso alle Durchmesser. Die Endpunkte eines Durchmessers werden Gegenpunkte der Kugelfläche genannt.

Bezüglich der Lage eines Punktes zur Kugelfläche vgl. §. 71.

**Folgesatz.** Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche von einem gegebenen Punkte den Abstand $r$ haben, ist die um diesen Punkt mit dem Halbmesser $r$ beschriebene Kugelfläche.

§. **245. Lehrsatz.** Durch vier Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ (Fig. 133), welche nicht in einer Ebene liegen, ist eine Kugel unzweideutig bestimmt.

Fig. 133.




Der geometrische Ort eines Punktes, der von $A$, $B$, $C$ gleich weit absteht, ist die im Mittelpunkte $M$ des durch die drei Punkte gehenden Kreises auf diesen errichtete Normale $MN$. Jeder Punkt dieser Normalen ist von allen Punkten der Peripherie dieses Kreises gleich weit entfernt. Legt man daher durch $MN$ und den vierten außerhalb der Kreisebene liegenden Punkt $D$ die Ebene, welche die Peripherie des Kreises in $P$ schneidet, und errichtet in dieser letzteren Ebene die Symmetrale der Strecke $DP$, welche $MN$ in $O$ trifft, so ist $O$ nicht nur von $D$ und $P$ gleich weit entfernt, sondern steht auch von $D$ und den drei Punkten $A$, $B$, $C$ gleich weit ab; $O$ ist somit der Mittelpunkt der durch $A$, $B$, $C$, $D$ gehenden Kugelfläche.

Da die beiden Geraden $MN$ und $RO$ nur in einem Punkte einander schneiden, so kann es auch nur eine einzige Kugelfläche geben, welche durch die vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ geht.

## Die Gerade und die Kugel.

§. **246.** Je nachdem der Zentralabstand einer Geraden, d. i. ihr Abstand vom Mittelpunkte einer Kugel, kleiner, ebenso groß oder größer ist als deren Halbmesser, schneidet die Gerade die Kugel in zwei Punkten, oder berührt sie dieselbe in einem Punkte (Tangente), oder liegt sie ganz außerhalb der Kugel.

Von einer Tangente an eine Kugel gelten dieselben Sätze wie von den Tangenten an einen Kreis (§. 80, 1—4).

Für welche Ebene gilt der Satz 4?

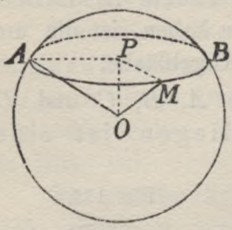
Alle von einem Punkte außerhalb einer Kugel an diese gezogenen Berührungsstrecken sind einander gleich (§. 81).

## Die Ebene und die Kugel.

§. **247.** Der Zentralabstand einer Ebene, d. i. ihr Abstand vom Mittelpunkte einer Kugel, ist entweder kleiner oder ebenso groß oder größer als deren Halbmesser. Im ersten Falle schneidet die

Ebene die Kugel; im zweiten Falle berührt sie dieselbe in einem Punkte (Tangentialebene); im dritten liegt sie ganz außerhalb der Kugel.

Fig. 134.




Von einer Tangentialebene an eine Kugel gelten analoge Sätze wie von der Tangente.

**Lehrsatz.** Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.

Beweis. Es sei $AMB$ (Fig. 134) ein ebener Kugelschnitt. Fällt man vom Kugelmittelpunkte $O$ die Normale $OP$ auf die Schnittfläche, zieht von $P$ nach dem Umfange des Schnittes die beliebigen Strecken $PA$ und $PM$, ferner noch die Halbmesser $OA$ und $OM$, so ist $PA = PM$ (§. 202). Daraus folgt, daß alle Umfangspunkte des Schnittes von $P$ gleichen Abstand haben, daß also der Schnitt ein Kreis ist.

Der Kreis $AMB$ wird ein Kugelkreis genannt.

§. 248. **Lehrsätze** von den Kugelkreisen.

1. Die Strecke aus dem Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte eines Kugelkreises ist normal zur Ebene des letzteren.

2. Die Normale aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene eines Kugelkreises geht durch den Mittelpunkt des letzteren.

3. Die Gerade, welche im Mittelpunkte eines Kugelkreises auf dessen Ebene normal errichtet wird, geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

4. Gleichen Kugelkreisen entsprechen gleiche Zentralabstände; und umgekehrt.

5. Dem größeren Kugelkreise entspricht ein kleinerer Zentralabstand; und umgekehrt.

Die Beweise dieser Sätze stimmen mit jenen für die analogen Sätze von den Sehnen des Kreises in §§. 75 und 77 überein.

**Zusätze.** *a)* Unter allen Kugelkreisen ist der durch den Mittelpunkt der Kugel gehende der größte. Er heißt deshalb auch geradezu ein größter Kugelkreis oder ein Hauptkreis. Der Halbmesser eines Hauptkreises der Kugel ist dem Kugelhalbmesser gleich.

*b)* Zwei Hauptkreise einer Kugel schneiden einander immer in einem Durchmesser derselben und halbieren einander gegenseitig.

*c)* Durch je zwei Punkte der Kugelfläche, welche nicht Gegenpunkte sind, ist die Lage eines Hauptkreises der Kugel unzweideutig bestimmt. Der zwischen zwei Punkten liegende kleinere Bogen eines Hauptkreises gibt den sphärischen Abstand dieser Punkte an.

*d)* Von den beiden Endpunkten des zur Ebene eines Kugelkreises normalen Kugeldurchmessers hat jeder von allen Umfangspunkten des

Kugelkreises gleiche sphärische Abstände. Diese zwei Punkte heißen deshalb sphärische Mittelpunkte des Kugelkreises.

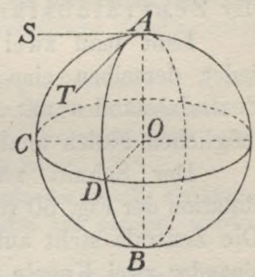
§. 249. Die beiden Teile, in welche die Kugel durch die Ebene eines Kugelkreises geteilt wird, heißen Kugelabschnitte oder Kugelsegmente und die dazugehörigen Teile der Kugelfläche Kugelmützen oder Kalotten. Die Kreisfläche ist die Grundfläche der beiden Kugelsegmente und der Kugelmützen. Der von der Mütze und ihrer Grundfläche begrenzte Teil des zu dieser normalen Durchmessers der Kugel ist die Höhe des Kugelsegmentes und der Kugelmütze.

Der zwischen den Ebenen zweier paralleler Kugelkreise liegende Teil der Kugel heißt eine Kugelschichte und der dazu gehörige Teil der Kugelfläche eine Kugelzone. Der Abstand der beiden Kreisflächen ist die Höhe der Kugelschichte und der Zone.

Dreht sich ein Kreissektor um einen seiner Halbmesser, so heißt der dadurch beschriebene Körper ein Kugelausschnitt oder Kugelsektor. Derselbe besteht aus einem Kugelsegment und einem Kegel.

§. 250. Der Neigungswinkel der Ebenen zweier Hauptkreise einer Kugel heißt der sphärische Winkel der beiden Kreise. Er kann gemessen werden durch den Bogen $CD$ (Fig. 135), welcher von jedem der zwei Schnittpunkte der Hauptkreise um $90^0$ absteht. Da nämlich $CO \perp AO$ und $DO \perp AO$ ist, so ist $COD$ der Neigungswinkel der Ebenen der beiden größten Kreise $ACB$ und $ADB$ und der Bogen $CD$ das Maß dieses Winkels. Er ist auch der Winkel $SAT$ der Tangenten, welche durch einen Schnittpunkt der zwei Hauptkreise an dieselben gezogen werden.

Fig. 135.




§. 251. Ein Teil der Kugelfläche, der von zwei größten Halbkreisen der Kugel begrenzt wird, wie z.B. $ACBDA$ (Fig. 135), heißt ein sphärisches Zweieck.

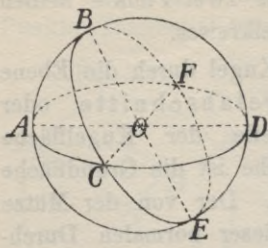
Zu gleichen sphärischen Winkeln derselben Kugel gehören gleiche sphärische Zweiecke; und umgekehrt.

Beweis durch Deckung.

§. 252. Ein Teil der Kugelfläche, der von drei Bogen größter Kugelkreise begrenzt wird, heißt ein sphärisches Dreieck; wie $ABC$ (Fig. 136).

Die Kreisbogen $AB$, $AC$ und $BC$ werden die Seiten, die sphärischen Winkel $ACB$, $ABC$ und $BAC$ die Winkel des sphärischen Dreieckes genannt. Die Größe der Seiten wird stets im Bogenmaße angegeben.

Fig. 136.




Die Seiten eines jeden sphärischen Dreieckes sind zugleich die Seiten eines zweiten sphärischen Dreieckes, welches das erste zu der ganzen Kugeloberfläche ergänzt. Wenn übrigens nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, so ist immer dasjenige sphärische Dreieck zu verstehen, welches kleiner ist als die halbe Kugelfläche.

**§. 253.** Eine Kugel heißt einem Polyeder eingeschrieben, wenn alle Grenzflächen desselben Berührungsebenen der Kugel sind, und umgeschrieben, wenn alle Eckpunkte des Polyeders in der Kugelfläche liegen.

Jedem regulären Polyeder kann eine Kugel ein- und umgeschrieben werden. (Folgt aus §. 236.)

### Lage zweier Kugeln gegeneinander.

**§. 254.** Zwei Kugeln, die denselben Mittelpunkt haben, heißen konzentrisch. Zwei Kugeln, die verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man exzentrisch; der durch die Mittelpunkte derselben gelegte Strahl heißt die Zentrale, die durch die Mittelpunkte begrenzte Strecke der Zentralabstand.

Läßt man zwei Kreise um ihre Zentrale rotieren, so beschreibt jeder derselben eine Kugel. In Bezug auf den Zusammenhang des Zentralabstandes mit den Radien der Kugeln müssen daher in allen möglichen Fällen analoge Sätze gelten wie bei zwei Kreisen (§. 91).

Der Schnitt zweier Kugeln ist ein Kreis. Er wird bei der Rotation der Fig. 50 von der gemeinschaftlichen Sehne $DD'$ beschrieben. Die Zentrale steht auf der Ebene des Schnittkreises normal. Berühren einander zwei Kugeln von außen oder von innen, so haben sie im Berührungspunkt gemeinschaftliche Tangenten und eine gemeinschaftliche Tangentialebene.

## III. Aufgaben.

**§. 255.** Konstruktionsaufgaben.

1. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb *a*) eines Zylinders, *b*) eines Kegels, *c*) einer Kugel eine Tangentialebene zu legen.

2. Durch eine Gerade eine Berührungsebene an eine Kugel zu legen.

3. Um einen gegebenen Mittelpunkt eine Kugel zu beschreiben, welche *a*) eine Ebene, *b*) eine Kugel berührt.

4. Mit einem gegebenen Halbmesser eine Kugel zu beschreiben, welche in einem gegebenen Punkt *a*) eine Ebene, *b*) eine Kugel berührt.

5. Den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Kugeln mit einem gegebenen Radius zu bestimmen, welche *a*) eine Ebene, *b*) eine Kugel von außen oder von innen berühren.

6. Einem Würfel ein Oktaeder einzuschreiben.

7. Einem Oktaeder einen Würfel umzuschreiben.

8. Die Darstellung aller Grenzflächen eines Körpers in einer zusammenhängenden ebenen Figur heißt das Netz des Körpers.

Konstruiere das Netz:

*a*) eines regelmäßigen, dreiseitigen Prismas,

*b*) einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide,

*c*) eines regelmäßigen, dreiseitigen Pyramidenstumpfes,

*d*) eines Würfels, 1. mit der Diagonale $d$ einer Seitenfläche, 2. mit der Diagonale $d$,

*e*) eines Tetraeders,

*f*) eines Oktaeders,

*g*) eines geraden Zylinders,

*h*) eines geraden Kegels,

*i*) eines geraden Kegelstumpfes.

§. **256.** Aufgaben.

1. In welchem Abstand vom Scheitel ist durch eine Pyramide eine zur Grundfläche parallele Ebene zu legen, wenn die Durchschnittsfläche *a*) die Hälfte, *b*) ein Viertel der Grundfläche sein soll?

2. Die Grundflächen eines Pyramidenstumpfes sind $G$ und $g$, die Höhe ist $h$; die Höhe der Ergänzungspyramide zu berechnen.

3. In welchem Abstande von der unteren Grundfläche eines Pyramidenstumpfes mit der Höhe $h$ und den Grundflächen $G$ und $g$ ist parallel zu denselben eine Ebene zu legen, damit die Durchschnittsfigur das geometrische Mittel zwischen den Grundflächen des Stumpfes ist?

4. Eine Grundkante einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide ist $a$, eine Seitenkante $3a$; den Radius der ein- und umgeschriebenen Kugel zu berechnen.

5. Zu zeigen, daß die Durchschnittslinie zweier Diagonalschnitte eines Prismas parallel und gleich den Seitenkanten des Prismas ist.

6. Die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedes durch die Diagonalen der Grenzflächen, welche von demselben Eckpunkte aus gezogen werden, auszudrücken.

7. Den Radius des einem regelmäßigen Prisma mit der Grundkante $a$ ein- und umgeschriebenen Cylinders zu berechnen, wenn das Prisma *a*) dreiseitig, *b*) vierseitig, *c*) sechsseitig ist. (§ 278.)

8. Dieselbe Aufgabe für ein dreiseitiges Prisma mit den Grundkanten $a$, $b$, $c$ zu lösen; $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

9. Das Verhältnis der Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedes ist $1:2:3$. Den Radius der umgeschriebenen Kugel zu berechnen, wenn die 1. Kante $a$ ist.

10. Den Winkel zu bestimmen, welchen eine Diagonalebene eines Würfels mit den Grenzflächen bildet.

11. Welche Folgerungen kann man aus dem Eulerschen Satz über die Ecken- und Flächenzahl eines Polyeders ziehen, wenn die Zahl der Kanten *a*) gerade, *b*) ungerade ist?

12. Die Mitten zweier Paare gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders sind die Eckpunkte eines Parallelogrammes, dessen Ebene dem dritten Kantenpaare parallel ist.

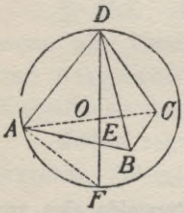
13. Die Verbindungsstrecken der Mitten der drei Paare gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders schneiden einander in demselben Punkt.

14. Ist $\varrho$ der Radius des einer Seitenfläche eines regulären Polyeders umgeschriebenen Kreises, sind $R$ und $r$ die Radien der dem Polyeder um- und eingeschriebenen Kugel, so ist $R^2 = \varrho^2 + r^2$.

15. Aus der Kante $a$ eines Hexaeders den Radius der ein- und umgeschriebenen Kugel zu berechnen.

16. Aus der Kante $a$ eines Tetraeders den Radius der ein- und umgeschriebenen Kugel zu berechnen.

Fig. 137.

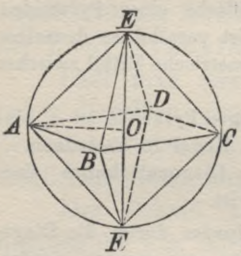



Es sei um das Tetraeder $ABCD$ (Fig. 137) eine Kugel beschrieben und $DE \perp ABC$, so ist $E$ der Mittelpunkt des um $ABC$ beschriebenen Kreises; wird $DE$ bis $F$ verlängert, so ist $DF$ ein Kugeldurchmesser und $AE$ der Radius des dem Dreieck $ABC$ umgeschriebenen Kreises. Aus dem rechtwinkligen $\triangle\, DAF$ erhält man $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$.

Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2$ folgt $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.

17. Aus der Kante $a$ eines Oktaeders den Radius der ein- und umgeschriebenen Kugel zu berechnen.

Fig. 138.




Zieht man im Oktaeder (Fig. 138) die Diagonale $EF$, so ist diese ein Durchmesser der umgeschriebenen Kugel; sie steht normal auf $ABCD$ und der Fußpunkt $O$ ist der Mittelpunkt sowohl der umgeschriebenen Kugel als des um das Quadrat $AECF$ beschriebenen Kreises. Es ist daher $EO = R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}$ folgt ferner $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$.

18. Der charakteristische Achsenschnitt eines schiefen Kegels hat den kleinsten, der zu demselben normale den größten Inhalt.

19. Ein abgestumpfter Kegel soll durch eine mit den Grundflächen parallele Ebene so geschnitten werden, daß der Inhalt der Schnittfläche *a*) das arithmetische, *b*) das geometrische Mittel der beiden Grundflächen ist. Den Abstand derselben von der kleineren Grundfläche zu bestimmen.

20. Durch einen geraden Zylinder ist ein zur Achse paralleler Schnitt gelegt, der $\frac{1}{n}$ des Achsenschnittes ist. Den Abstand desselben von der Achse zu suchen.

21. Zwei nicht parallele Berührungsebenen eines Zylinders schneiden einander in einer zur Achse parallelen Geraden.

22. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte des Raumes zu bestimmen, deren Verbindungslinien mit zwei festen Punkten aufeinander normal stehen.

23. Legt man durch eine Gerade die beiden Berührungsebenen an eine Kugel und eine dritte Ebene durch den Mittelpunkt, so wird der Neigungswinkel der beiden Berührungsebenen durch die dritte Ebene halbiert.

24. Eine Kugel hat den Radius $R$; den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kugelkreise mit dem Radius $r$ zu bestimmen.

25. Eine Kugel wird von einer Geraden geschnitten; wie ist durch die Gerade eine Ebene zu legen, damit der Schnittkreis *a)* ein Maximum, *b)* ein Minimum wird?

26. Eine Kugel wird durch eine Ebene geschnitten, welche den zu ihr normalen Durchmesser im Verhältnis $m:n$ teilt; wie groß ist der Halbmesser der Schnittfläche?

27. Legt man durch zwei konzentrische Kugeln eine Ebene, so hat der von den Kugelflächen aus der Ebene ausgeschnittene Ring einen konstanten Inhalt.

---

# Dritter Abschnitt.

## Kongruenz, Symmetrie und Ähnlichkeit der Körper.

### §. 257. Kongruenz und Symmetrie der Körper.

Zwei Körper, die so ineinander gelegt werden können, daß alle ihre Grenzflächen einander decken, heißen kongruent.

Zwei Körper, die auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Verbindungsstrecke je zweier entsprechender Punkte derselben zu dieser Ebene normal ist und durch sie halbiert wird, heißen symmetrisch gleich. Diese Ebene heißt die Symmetrieebene. Symmetrisch gleich sind z. B. ein Körper und sein Bild in einem ebenen Spiegel, die rechte und die linke Hand.

Sowohl in kongruenten als in symmetrisch gleichen Körpern sind je zwei entsprechende Strecken (Kanten, Höhen, Diagonalen, Halbmesser, Achsen) gleich, je zwei entsprechende Flächen kongruent und je zwei entsprechende Keile gleich; die entsprechenden Ecken aber sind nur in kongruenten Körpern kongruent, in symmetrisch gleichen dagegen symmetrisch.

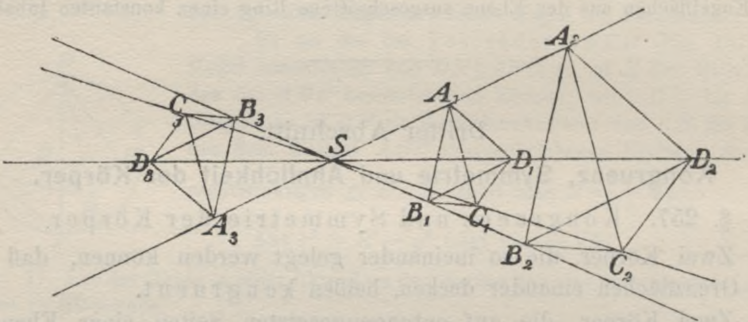
Um zu einem gegebenen Polyeder ein symmetrisch gleiches zu konstruieren, darf man nur zu einer Ecke des gegebenen Körpers die Scheitelecke bilden und von dieser ausgehend einen zweiten Körper konstruieren, welcher mit dem gegebenen nach der Ordnung gleiche Kanten, kongruente Flächen und gleiche Keile hat. Die Ecken der beiden Körper sind symmetrisch, die Körper selbst symmetrisch gleich.

### §. 258. Ähnlichkeit der Körper.

Zieht man von einem Punkt $S$ (Fig. 139) durch die Ecken eines Körpers Strahlen $SA_2$, $SB_2$, $SC_2$ etc. und bestimmt auf jedem derselben je einen Punkt $(A_1, B_1, C_1 \ldots)$ oder bezüglich $S$ auf der entgegengesetzten Seite $(A_3, B_3, C_3 \ldots)$ so, daß die homologen Strahlenabschnitte in demselben konstanten Verhältnisse stehen, so gehört jede

Gruppe dieser Punkte einem Körper an, welcher mit dem ersten perspektivisch ähnlich liegt. Je zwei entsprechende Punkte, Strecken, Flächen, Keile und Ecken heißen homolog, der Punkt $S$ heißt Ähnlichkeitspunkt; er kann (analog §. 119) ein äußerer oder ein innerer sein. Das konstante Verhältnis der Strahlenabschnitte heißt Ähnlichkeitsmodulus. In ähnlichen

Fig. 139.




Körpern stehen homologe Strecken in demselben konstanten Verhältnis, welches dem Ähnlichkeitsmodulus gleich ist, die homologen Winkel sind einander gleich, die homologen Ecken entweder congruent oder symmetrisch, je nachdem der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer oder ein innerer ist. Im ersten Falle heißen die Körper ähnlich, im zweiten symmetrisch ähnlich. Ist der Ähnlichkeitsmodulus $+ 1$, so geht die Ähnlichkeit in Kongruenz, ist derselbe $- 1$, so geht die symmetrische Ähnlichkeit in symmetrische Gleichheit über.

Wie zwei Kreise, so sind auch zwei Kugeln immer ähnlich und zugleich perspektivisch liegend. Sie haben immer einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt.

Beispiele von ähnlichen Körpern sind: 1. Eine Pyramide und die zu einem Stumpf derselben gehörige Ergänzungspyramide. 2. Ein Kegel und der zu einem Stumpf desselben gehörige Ergänzungskegel.

Zwei Kegel oder zwei Zylinder sind ähnlich, wenn ihre Achsen den Durchmessern ihrer Grundflächen proportioniert sind und mit den letzteren gleiche Neigungswinkel bilden.

---

## Vierter Abschnitt.

## Größenbestimmung der Körper.

§. **259.** Bei der Ausmessung der Körper kommt die Bestimmung der Oberfläche und des Kubikinhaltes oder Volumens in Betracht.

Die Oberfläche eines Körpers erhält man, indem man alle Grenzflächen berechnet und die erhaltenen Flächeninhalte addiert.

Um das Volumen eines Körpers, d. i. die Größe des von seinen Grenzflächen eingeschlossenen Raumes zu bestimmen, untersucht man, wie vielmal ein als Einheit angenommener Körper in dem gegebenen enthalten ist.

Als Einheit des Körpermaßes wird ein Kubus angenommen, dessen Kante der Längeneinheit gleich ist, und der für das Metermaß bezüglich ein Kubikmeter ($m^3$), ein Kubikdezimeter ($dm^3$),... heißt. 1 $m^3$ = 1000 $dm^3$ à 1000 $cm^3$ à 1000 $mm^3$. Als Hohlmaß heißt das Kubikdezimeter Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

Zwei Körper, welche gleiches Volumen haben, heißen inhaltsgleich.

Die Oberflächen und die Volumina der Körper sind durch Ausdrücke von zwei, beziehungsweise von drei Dimensionen (§. 153) bestimmt.

§. 260. Satz von Cavalieri.

Zwei auf eine Ebene gelegte Körper, welche mit jeder parallelen Ebene gleiche Schnittflächen ergeben, besitzen dasselbe Volumen.

Zum Verständnis dieses Satzes diene die Überlegung, daß man sich Körper von der erwähnten Eigenschaft in unmeßbar dünne Platten zerlegt denken kann, die paarweise einander gleich sind; daher müssen auch die Summen dieser Platten, d. h. die beiden Körper selbst dasselbe Volumen besitzen.

## I. Ausmessung ebenflächiger Körper.

### 1. Das Prisma.

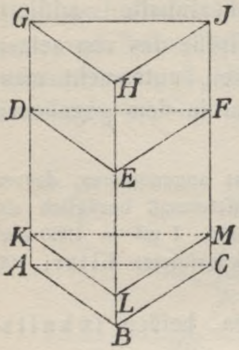
**Oberfläche eines Prismas.**

§. 261. Die Oberfläche $o$ eines Prismas wird erhalten, indem man die Seitenflächen bestimmt und zu der dadurch erhaltenen Seitenoberfläche (Mantel) $m$ den doppelten Flächeninhalt $g$ der Grundfläche addiert; also $o = m + 2g$.

Der Mantel eines geraden Prismas ist einem Rechtecke gleich, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Prismas zur Höhe hat.

§. 262. **Lehrsatz.** Gerade Prismen mit kongruenten Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Fig. 140.



*a)* Es seien die Höhen $AD$ und $AG$ der beiden Prismen $ABCDEF$ und $ABCGHI$ (Fig. 140) kommensurabel, $AK$ das gemeinsame Maß derselben und $AD = m.AK$, $AG = n.AK$; mithin $AD : AG = m : n$. Legt man durch die Teilungspunkte von $AD$ und $AG$ zur Grundfläche parallele Ebenen, so erhält man kongruente Prismen; es ist $ABCDEF = m.ABCKLM$ und $ABCGHI = n.ABCKLM$; daher $ABCDEF : ABCGHI = m : n$ und folglich $ABCDEF : ABCGHI = AD : AG$.

*b)* Sind die Höhen der beiden Prismen inkommensurabel, so ist der Beweis analog §. 113 *b.*

**Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedes.**

**§. 263.** Es sei $P$ ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Dimensionen (Maßzahlen) $a$, $b$, $c$. Man vergleiche die drei folgenden rechtwinkligen Parallelepipede:

$P$ : Dimensionen $a$, $b$, $c$.
$P'$ : „ $a$, $b$, 1.
$P''$ : „ $a$, 1, 1.
$W$ : „ 1, 1, 1.

Es ist:

$$P : P' = c : 1,$$
$$P' : P'' = b : 1,$$
$$P'' : W = a : 1.$$

Aus diesen Proportionen ergibt sich:

$$P = abc.W \text{ oder}$$
$$\frac{P}{W} = abc.$$

Da $\frac{P}{W}$ die Maßzahl des Volumens des rechtwinkligen Parallelepipedes $P$ ist, so hat man den Satz:

Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedes ist gleich dem Produkte der Maßzahlen dreier zusammenstoßender Kanten.

Da $ab$ die Maßzahl der Grundfläche und $c$ die der Höhe des rechtwinkligen Parallelepipedes ist, so kann man auch sagen:

Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedes ist gleich dem Produkte aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe. (Kürzer: Produkt aus Grundfläche und Höhe.)

Für den Würfel ist $a = b = c = s$, also sein Volumen $V = s^3$.

Das Volumen $V'$ eines zweiten Würfels mit der Seite $s'$ ist $V' = s'^3$; daher

$$V : V' = s^3 : s'^3.$$

Die Volumina zweier Würfel verhalten sich also wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

### Volumen eines jeden Prismas.

§. **264.** Da nach dem Satze von Cavalieri ein jedes Prisma gleich ist einem rechtwinkligen Parallelepiped von gleicher Grundfläche und Höhe, so muß das Volumen eines jeden Prismas gleich sein dem Produkte aus der Grundfläche und Höhe. $V = g \, . \, h$.

Aus dieser Gleichung erhält man die Sätze:

*a)* Die Volumina zweier Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

*b)* Die Volumina zweier Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

*c)* Die Volumina ähnlicher Prismen verhalten sich zueinander wie die dritten Potenzen homologer Dimensionen.

Beweis. Es seien $P$ und $p$ zwei ähnliche Prismen, $G$ und $g$ ihre Grundflächen, $H$ und $h$ ihre Höhen, und $A$ und $a$ zwei homologe Kanten. Man hat $P : p = G . H : g . h.$

Nun sind die Grundflächen $G$ und $g$ ähnlich und die Höhen $H$ und $h$, zwei homologen Kanten $A$ und $a$ proportioniert, daher

$$G : g = A^2 : a^2, \text{ und } H : h = A : a.$$

Multipliziert man diese beiden Proportionen, so ergibt sich

$$G . H : g . h = A^3 : a^3, \text{ folglich auch}$$

$$P : p = A^3 : a^3.$$

## 2. Die Pyramide.

### Oberfläche und Volumen einer Pyramide.

§. **265.** Um die Oberfläche $o$ einer Pyramide zu erhalten, berechnet man die Seitenflächen, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche (Mantel) $m$, und addiert zu derselben den Flächeninhalt $g$ der Grundfläche; also $o = m + g$.

Der Mantel einer regulären Pyramide ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfang der Grundfläche und der Seitenhöhe.

§. **266. Lehrsatz.** Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

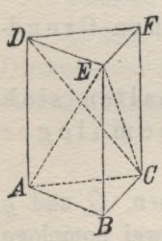
Wenn die beiden Pyramiden mit den Grundflächen auf derselben Ebene aufstehen, so geben sie mit jeder zu dieser parallel gelegten Ebene die gleiche Durchschnittsfigur. Denn ist ihre Grundfläche $G$, $h$ ihre Höhe, $d$ der Abstand der Schnittebene vom Scheitel, sind ferner $F$ und $F'$ die Schnittflächen, so ist

$$G : F = h^2 : d^2 \text{ und}$$
$$G : F' = h^2 : d^2; \text{ daher}$$

$F = F'$. Die beiden Pyramiden sind also Cavalierische Körper und als solche gleich.

§. 267. **Lehrsatz.** Jedes dreiseitige Prisma kann in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden (Fig. 141).

Fig. 141.



Beweis. Legt man durch die Punkte $A$, $E$ und $C$ des dreiseitigen Prismas $ABCDEF$ die Ebene, so zerfällt dadurch das Prisma in die dreiseitige Pyramide $EABC$ und die vierseitige $EACFD$. Diese letztere wird, wenn man durch die Punkte $C$, $E$ und $D$ die Ebene legt, wieder in zwei dreiseitige Pyramiden $EACD$ und $ECDF$ geteilt. Das ganze Prisma besteht demnach aus drei dreiseitigen Pyramiden $EACD$, $ECDF$ und $EABC$, von denen die erste der zweiten und diese der dritten gleich ist (§. 266).

**Folgesatz.** Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Teil eines dreiseitigen Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

§. 268. **Lehrsätze.** *a)* Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §. 267 und §. 264.

*b)* Das Volumen einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus der Grundfläche und der Höhe.

Denn jede mehrseitige Pyramide ist einer dreiseitigen gleich, wenn sie gleiche Grundfläche und Höhe haben. (§. 266.)

§. 269. **Lehrsatz.** Die Volumina zweier ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer homologen Kanten.

Beweis analog § 264, c.

**Oberfläche und Volumen eines Pyramidenstumpfes.**

§. 270. Die Oberfläche $o$ eines Pyramidenstumpfes wird erhalten, indem man die Summe $m$ aller Seitenflächen, d. h.

den Mantel bestimmt und zu demselben die beiden Grundflächen $G$ und $g$ addiert; also

$$o = m + G + g.$$

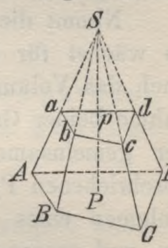
Die Seitenoberfläche eines regulären Pyramidenstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des mittleren Durchschnittes und der Seitenhöhe.

Denn halbiert man eine Seitenkante und legt durch den Halbierungspunkt eine mit den Grundflächen parallele Ebene, so halbiert diese auch die übrigen Seitenkanten und man erhält als den mittleren Durchschnitt ein reguläres Vieleck. Durch Zuziehung des Lehrsatzes §. 150, 3, $b$ ergibt sich sogleich die Richtigkeit des obigen Satzes.

§. 271. **Lehrsatz.** Das Volumen eines Pyramidenstumpfes ist gleich dem Volumen dreier Pyramiden, welche die beiden Grundflächen und ihr geometrisches Mittel zu Grundflächen und die Höhe des Stumpfes zur Höhe haben.

Beweis. Ergänzt man den Pyramidenstumpf $ABCDabcd$ (Fig. 142) zur ganzen Pyramide, so ist das Volumen desselben

Fig. 142.



$$v = \text{Pyr. } SABCD - \text{Pyr. } Sabcd.$$

Bezeichnen $G$ und $g$ die Grundflächen, $h$ die Höhe $pP$, und $x$ die noch unbekannte Höhe $Sp$, so hat man daher

$$v = \frac{G(h+x)}{3} - \frac{gx}{3} = \frac{Gh}{3} + \frac{x}{3}(G-g).$$

Zur Bestimmung von $x$ hat man (§. 227, 1) die Proportion:

$$G : g = (h+x)^2 : x^2, \text{ oder } \sqrt{G} : \sqrt{g} = (h+x) : x.$$

Daraus folgt $(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = h : x$ und $x = \dfrac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$; somit

$$v = \frac{Gh}{3} + \frac{h\sqrt{g}}{3(\sqrt{G}-\sqrt{g})}(G-g) = \frac{Gh}{3} + \frac{h\sqrt{g}}{3}(\sqrt{G}+\sqrt{g})$$

$$= (G + \sqrt{Gg} + g)\cdot\frac{h}{3}.$$

Diese Formel wurde von Leonardo von Pisa (Fibonacci) in seinem Werke: Practica Geometriae 1220 mitgeteilt.

### 3. Reguläre Polyeder.

§. 272. 1. Die Oberfläche eines regulären Polyeders wird erhalten, indem man eine Seitenfläche bestimmt und den Flächeninhalt mit der Zahl der Seitenflächen multipliziert.

2. Das Volumen eines regulären Polyeders ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus der Oberfläche desselben und dem Halbmesser der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel.

Der Beweis ergibt sich aus §§. 236 und 268.

## II. Ausmessung krummflächiger Körper.

### 1. Der Kegel.

#### Oberfläche und Volumen eines Kegels.

§. **273.** Wird der Grundfläche eines Kegels ein reguläres Vieleck ein- oder umgeschrieben und dasselbe als Grundfläche einer Pyramide angenommen, deren Scheitel der Scheitel des Kegels ist, so heißt diese Pyramide dem Kegel bezüglich eingeschrieben oder umgeschrieben.

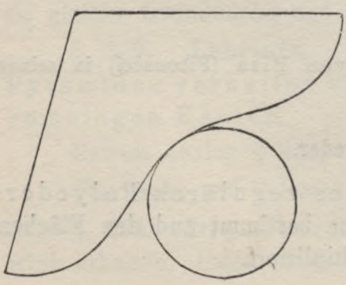
Die Seitenkanten der eingeschriebenen Pyramide sind Seiten, die Seitenflächen der umgeschriebenen Pyramide sind Berührungsebenen des Kegels.

Nimmt die Seitenzahl der ein- und umgeschriebenen Pyramide zu, so wächst für die eingeschriebenen Pyramiden sowohl der Mantel als auch das Volumen, für die umgeschriebenen Pyramiden findet eine Abnahme beider Größen statt. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist der gemeinsame Grenzwert der Seitenoberflächen der ein- und umgeschriebenen Pyramiden bei unbegrenzter Seitenzahl. Ebenso ist das Volumen eines Kegels der gemeinsame Grenzwert der Volumina der ein- und umgeschriebenen Pyramiden bei unbegrenzter Seitenzahl.

§. **274.** Der Mantel eines geraden Kegels ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfang der Grundfläche und der Seite.

Ist der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels $r$, die Seite $s$, so ist sein Mantel $m = 2r\pi\frac{s}{2} = r\pi s$.

Fig. 143.



Die ganze Oberfläche ist $o = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r+s)$.

Für einen gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher $m = 2r^2\pi$ und $o = 3r^2\pi$.

Die Formel für die Berechnung des Mantels eines geraden Kegels kann auch durch Abwicklung desselben erhalten werden; er ist ein Kreisausschnitt, dessen Bogen und Radius beziehungsweise $2r\pi$ und $s$ sind.

Der Mantel ist also $2r\pi.\frac{s}{2} = r\pi s.$

Der Mantel eines schiefen Kegels kann nicht durch diese Formel berechnet werden; abgewickelt ist er durch Fig. 143 dargestellt.

§. **275. Lehrsatz.** Das Volumen eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 268.

Ist $r$ der Halbmesser der Grundfläche und $h$ die Höhe eines Kegels, so ist das Volumen $v = \frac{r^2 h \pi}{3}$.

Ist der Kegel ein gerader und $s$ die Seite, so ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher $v = \frac{r^2 \pi}{3} \sqrt{s^2 - r^2}$.

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, folglich $v = \frac{r^2 \pi}{3}\sqrt{3}$.

Die Volumina ähnlicher Kegel verhalten sich wie die dritten Potenzen homologer Dimensionen.

**Oberfläche und Volumen eines Kegelstumpfes.**

§. **276. Lehrsatz.** Die Manteloberfläche eines geraden Kegelstumpfes ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des mittleren Schnittkreises und der Seite.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 270.

Sind $R$ und $r$ die Halbmesser des geraden Kegelstumpfes und $s$ dessen Seite, so ist, da der mittlere Schnittkreis den Halbmesser $\frac{R+r}{2}$ hat, die Manteloberfläche $m = (R + r)\,\pi.s$ und die Gesamtoberfläche

$$o = [R^2 + r^2 + (R + r)\,s].\pi.$$

§. **277. Lehrsatz.** Das Volumen eines Kegelstumpfes ist gleich dem Volumen dreier Kegel, welche die beiden Grundflächen und ihr geometrisches Mittel zu Grundflächen und die Höhe des Stumpfes zur Höhe haben.

Folgt aus §. 271.

Bezeichnen $R$ und $r$ bezüglich die Halbmesser der beiden Grundflächen und $h$ die Höhe des Kegelstumpfes, so ist das Volumen

$$v = (R^2\pi + r^2\pi + Rr\pi)\frac{h}{3} = (R^2 + r^2 + Rr)\,.\frac{h\pi}{3}.$$

### 2. Der Zylinder.

§. **278.** Wird der Grundfläche eines Zylinders ein reguläres Vieleck ein- oder umgeschrieben und dasselbe als Grundfläche eines Prismas angenommen, dessen Seiten parallel und gleich sind der Achse des Zylinders, so heißt dieses Prisma dem Zylinder ein- oder umgeschrieben.

Die Seitenkanten des eingeschriebenen Prismas sind Seiten, die Seitenflächen des umgeschriebenen Prismas sind Berührungsebenen des Zylinders,

Wie beim Kegel, so ist auch der Mantel eines geraden Zylinders der gemeinsame Grenzwert der Seitenoberflächen der demselben ein- und umgeschriebenen Prismen mit wachsender Seitenzahl; das Volumen eines Zylinders ist der gemeinsame Grenzwert der Volumina der dem Zylinder ein- und umgeschriebenen Prismen mit wachsender Seitenanzahl.

§. **279.** Der Mantel eines geraden Zylinders ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §§. 278 und 261.

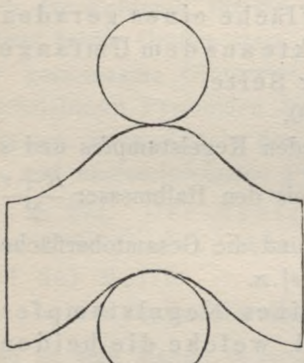
Bezeichnet $r$ den Halbmesser der Grundfläche und $h$ die Höhe eines geraden Zylinders, so ist der Mantel $m = 2rh\pi$, daher die Gesamtoberfläche

$$o = 2r^2\pi + 2rh\pi = 2r\pi\ (r + h).$$

Im gleichseitigen Zylinder ist $h = 2r$, daher $o = 6r^2\pi$.

Die Formel für den Mantel eines geraden Zylinders kann auch durch Abwicklung desselben erhalten werden. Er bildet ein Rechteck, dessen Grundlinie und Höhe beziehungsweise Umfang der Grundfläche und Höhe des geraden Zylinders sind; mithin ist $m = 2r\pi h$. Der Mantel eines schiefen Zylinders kann nicht nach dieser Formel berechnet werden; abgewickelt ist er durch Fig. 144 dargestellt.

Fig. 144.



§. **280. Lehrsatz.** Das Volumen eines Zylinders ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §§. 278 und 264.

Ist $r$ der Halbmesser der Grundfläche eines Zylinders, so ist der Kubikinhalt $v = r^2h\pi$.

Für den gleichseitigen Zylinder hat man $h = 2r$, daher $v = 2r^3\pi$.

Die Volumina ähnlicher Zylinder verhalten sich wie die dritten Potenzen homologer Dimensionen.

### 3. Rotationsflächen und Rotationskörper.

§. **281.** Dreht sich eine gerade, gebrochene oder krumme Linie oder eine ebene Figur um eine feste Gerade, so beschreibt während einer vollen Umdrehung jeder Punkt derselben eine Kreislinie, deren Ebene zu der festen Geraden normal ist. Die feste Gerade heißt die Rotationsachse oder bloß Achse, die durch die Drehung der Linie beschriebene Fläche die Rotationsfläche dieser Linie, und der durch die Drehung der ebenen Figur erzeugte Körper der Rotationskörper dieser Figur.

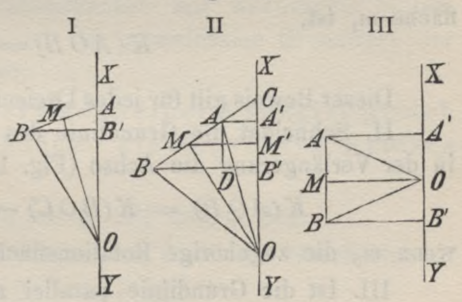
Die Rotationsfläche einer Strecke um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Achse ist je nach der Lage dieser Strecke gegen die Achse die Manteloberfläche eines geraden Kegels, eines geraden Kegelstumpfes oder eines geraden Cylinders, oder endlich, wenn die Strecke zur Achse normal ist, die Fläche eines Kreises oder Kreisringes.

Dreht sich eine gebrochene Linie um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Achse, so ist ihre Rotationsfläche gleich der Summe der Rotationsflächen aller Strecken, aus denen die gebrochene Linie besteht.

§. **282. Lehrsatz.** Die Rotationsfläche des halben Umfanges eines regulären Vieleckes von gerader Seitenzahl um eine durch zwei entgegengesetzte Eckpunkte gehende Achse ist gleich dem Produkte aus dem Umfang des dem ganzen Polygone eingeschriebenen Kreises und der Achse.

Beweis. Verbindet man den Mittelpunkt der Achse mit den Eckpunkten des Halbpolygons, so erhält man kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Grundlinien entweder selbst oder verlängert die Achse schneiden, oder mit ihr parallel sind. (Fig. 145 I, II, III.)

Fig. 145.




Das Dreieck II erzeugt den Mantel $m$ eines senkrechten Kegelstumpfes.

Es ist $m = 2\pi.MM'.AB$. Da $MM'O \sim ADB$ ist, so ergibt sich $MO : MM' = AB : AD$ und $MM'.AB = MO.AD$. Daher ist $m = 2\pi.MO.AD = 2r\pi.A'B'$, wenn $OM = r$ ist.

In diesem Falle ist die erzeugte Fläche gleich dem Umfang des dem Polygon eingeschriebenen Kreises multipliziert mit der Projektion der erzeugenden Geraden auf die Achse. Es läßt sich leicht zeigen, daß derselbe Satz auch für I und III gilt.

Durch Addition der von den Grundlinien aller gleichschenkligen Dreiecke erzeugten Flächen erhält man die ganze Rotationsfläche. Ist dieselbe $O$ und sind $p_1, p_2 \ldots$ die Projektionen der erzeugenden Geraden auf die Achse, so ist $O = 2r\pi(p_1 + p_2 + p_3 \ldots) = 2r\pi a$, wenn $a$ die Achse ist.

**Zusatz.** Soll nicht die ganze Rotationsfläche, sondern nur jene berechnet werden, die durch Rotation eines Teiles des Umfanges des Halbpolygones entsteht, so hat man statt $a$ die Projektion dieses Teiles des Umfanges auf die Achse zu setzen.

§. 283. Der Rotationskörper der Hälfte eines regulären Vieleckes von gerader Seitenzahl um eine durch zwei entgegengesetzte Eckpunkte gehende Achse ist gleich dem Produkte aus dem dritten Teile der gesamten Oberfläche und dem Radius des dem ganzen Polygon eingeschriebenen Kreises.

Beweis. Auch hier sind wieder dieselben drei Fälle wie in §. 282 zu unterscheiden.

I. Schneidet die Grundlinie des gleichschenkligen Dreieckes selbst die Achse, so ist der von dem Dreiecke $AOB$ (Fig. 145, I) erzeugte Rotationskörper, den wir durch $K\,(AOB)$ bezeichnen wollen, die Summe zweier Kegel, daher $K(AOB) = \frac{1}{3}\pi BB'^2 . OA$; aber $BB'.OA = AB.OM$, weil jedes dieser Produkte den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes $AOB$ ausdrückt; daher auch $K\,(AOB) = \pi BB'.AB.\frac{1}{3}OM$, oder, da $\pi BB'.AB$ die von der Grundlinie $AB$ beschriebene Kegelfläche $m_1$ ist,

$$K(AOB) = m_1 . \frac{r}{3}.$$

Dieser Beweis gilt für jedes Dreieck $AOB$, in welchem $AO > B'O$ ist.

II. Schneidet die Grundlinie des gleichschenkligen Dreieckes erst in der Verlängerung die Achse (Fig. 145, II), so ist

$$K(AOB) = K(BOC) - K(AOC) = m_2 \frac{r}{3},$$

wenn $m_2$ die zugehörige Rotationsfläche ist.

III. Ist die Grundlinie parallel mit der Achse (Fig. 145, III), so ist der von dem $\triangle AA'O$ beschriebene Kegel $\frac{1}{3}$ des von dem Rechtecke $AA'OM$ beschriebenen Zylinders, daher der von dem $\triangle AOM$ beschriebene Körper $\frac{2}{3}$ desselben Zylinders. Ebenso folgt, daß der von dem $\triangle BOM$ beschriebene Körper $\frac{2}{3}$ des von dem Rechtecke $BB'OM$ beschriebenen Zylinders ist. Somit hat man

$$K(AOB) = \tfrac{2}{3}K(AA'B'B) = \tfrac{2}{3}\pi OM^2 . A'B' = m_3 \frac{r}{3},$$

wenn $m_3$ die zugehörige Rotationsfläche ist.

Den Rotationskörper $V$ des Halbpolygons erhält man durch Summierung der Rotationskörper aller gleichschenkligen Dreiecke. Es ist

$$V = \frac{r}{3}(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) = \frac{O}{3}r,$$

wenn $O$ die gesamte Oberfläche bedeutet.

**Zusatz.** Soll nicht der ganze Rotationskörper, sondern nur jener berechnet werden, der durch Rotation eines Teiles des Halbpolygons entsteht, so hat man statt $O$ den zugehörigen Teil der Rotationsfläche zu setzen.

## 4. Die Kugel.

### Oberfläche und Kubikinhalt einer Kugel.

**§. 284.** Wird einem Kreise ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl ein- oder umgeschrieben und dasselbe samt dem Kreise um eine Winkelsymmetrale gedreht, so beschreibt der Halbkreis eine Kugel, der halbe Umfang des Vieleckes eine Rotationsfläche und das halbe Vieleck selbst einen Rotationskörper, welche der Kugel bezüglich eingeschrieben oder umgeschrieben heißen.

Mit wachsender Seitenzahl werden die eingeschriebenen Rotationsflächen und Rotationskörper immer größer, die umgeschriebenen immer kleiner. Beide nähern sich immer mehr der Kugel.

Die Oberfläche der Kugel ist der gemeinsame Grenzwert der ihr ein- und umgeschriebenen Rotationsflächen mit wachsender Seitenanzahl; das Volumen derselben ist der gemeinsame Grenzwert der Volumina derselben Rotationskörper.

**§. 285. Lehrsatz.** Die Oberfläche einer Kugel ist gleich $4r^2\pi$, d. h. der vierfachen Fläche eines größten Kreises derselben.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 284 und §. 282.

Ist $r$ die Maßzahl des Kugelhalbmessers, so ist die Oberfläche

$$o = 2r\pi . 2r = 4r^2\pi.$$

**Zusatz.** Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Denn $O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2$.

**§. 286. Lehrsatz.** Das Volumen einer Kugel ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus der Oberfläche und dem Radius.

Ergibt sich aus §. 284 und §. 283.

Ist $r$ der Halbmesser, $o$ die Oberfläche und $v$ das Volumen einer Kugel, so ist $o = 4r^2\pi$, daher $v = 4r^2\pi.\frac{r}{3} = \frac{4}{3}r^3\pi$.

**Zusatz.** Die Volumina zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

Denn $V:v = \frac{4}{3}R^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi = R^3 : r^3$.

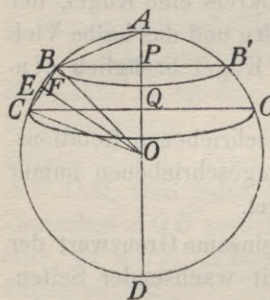
**Oberfläche einer Kugelmütze und einer Kugelzone.**

§. 287. **Lehrsatz.** Die Oberfläche einer Kugelmütze ist gleich dem Produkte aus dem Umfang eines größten Kugelkreises und der Höhe.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 282, Zusatz.

Ist (Fig. 146) $OA = r$ der Halbmesser der Kugel und $AP = h$ die Höhe der Kugelmütze $ABB'$, so ist die Fläche dieser Mütze

Fig. 146.




$$C = 2r\pi.h \ldots .1).$$

Ist $\varrho = BP$ und $h$ gegeben, so ist

$$\varrho^2 = (2r - h)\,h, \text{ also}$$
$$2rh = \varrho^2 + h^2 \text{ und}$$
$$C = (\varrho^2 + h^2)\,\pi \ldots 2).$$

Ist die Sehne $AB = s$ gegeben, so folgt aus 1) oder 2)...

$$C = s^2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots 3).$$

§. 288. **Lehrsatz.** Die Oberfläche einer Kugelzone ist gleich dem Produkte aus dem Umfang eines größten Kugelkreises und der Höhe.

Folgt aus §. 282, Zusatz.

Heißt $Z$ die Fläche der zu dem Bogen $BC$ (Fig. 146) gehörigen Kugelzone $BCC'B'$, so ist für $OA = r$ und $PQ = h$

$$Z = 2r\pi.h \ldots\ldots 1).$$

Sind nebst $r$ die Halbmesser der Grundflächen $CQ = \varrho_1$ und $BP = \varrho_2$ gegeben, so hat man, da $h = OP - OQ$ ist,

$$Z = 2r\pi\,(\sqrt{r^2 - \varrho_2{}^2} - \sqrt{r^2 - \varrho_1{}^2}) \ldots .2).$$

**Volumen eines Kugelsektors, eines Kugelsegmentes und einer Kugelschichte.**

§. 289. **Lehrsatz.** Das Volumen eines Kugelsektors ist gleich dem Volumen eines Kegels, der die Kugelmütze des

Sektors zur Grundfläche und den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat.

Folgt nach dem Grenzbegriffe aus §. 283, Zusatz.

Haben $r$ und $h$ die in §. 287 angeführten Bedeutungen, so ist das Volumen $v$ des durch die Rotation des Kreisausschnittes $AOB$ (Fig. 146) erzeugten Kugelsectors

$$v = 2r\pi h . \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r^2 h \pi.$$

§. **290.** Das Volumen eines Kugelsegmentes ist, je nachdem es kleiner oder größer als die Halbkugel ist, gleich der Differenz oder der Summe der Volumina des entsprechenden Kugelsektors und eines Kegels, dessen Grundfläche die Grundfläche des Segmentes, und dessen Höhe der Abstand dieser Grundfläche von dem Kugelmittelpunkte ist.

Haben $r$, $\varrho$, $h$ die in §. 287 angegebenen Bedeutungen, so hat man für den Inhalt $S$ des zu dem Bogen $AB$ (Fig. 146) gehörigen Kugelsegmentes $ABB'$

$$S = \tfrac{2}{3} r^2 h\pi - \tfrac{1}{3} \varrho^2 (r - h) \pi,$$

oder, da $\varrho^2 = (2r - h) h$ ist,

$$S = \tfrac{2}{3} r^2 h \pi - \tfrac{1}{3} h (2r - h) (r - h) \pi, \text{ oder}$$

$$S = \tfrac{1}{3} h^2 (3r - h) \pi.$$

Die Formel gilt auch für ein Segment, welches größer ist als die Halbkugel.

§. **291.** Das Volumen $v$ des Körpers zu berechnen, welcher durch Rotation des Kreisabschnittes $BCF$ (Fig. 146) entsteht.

Das gesuchte Volumen ist gleich der Differenz der Körper, welche durch Rotation des Kreisausschnittes $BECO$ und des Dreieckes $BCO$ entstehen.

Ist $PQ = h$, so findet man

$$v = 2\pi OE.h.\frac{OE}{3} - 2\pi.OF.h.\frac{OF}{3} = \frac{2\pi h}{3}(OE^2 - OF^2) =$$

$$\frac{2\pi h}{3}.(OB^2 - OF^2) = \frac{h\pi s^2}{6},$$

wenn die Sehne $BC = s$ gesetzt wird.

§. **292.** Das Volumen einer Kugelschichte zu berechnen.

Es seien $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Radien der beiden Grundflächen und $h$ die Höhe der Schichte. Der Inhalt derselben ist gleich dem abgestumpften geraden Kegel mit den erwähnten Dimensionen, vermehrt um den durch das Kreissegment $BECF$ (Fig. 146) gebildeten Rotationskörper. Es ist daher

$$v = \frac{\pi s^2 h}{6} + \frac{h\pi}{3}(\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + \varrho_1 \varrho_2). \text{ Da}$$

$$s^2 = h^2 + (\varrho_1 - \varrho_2)^2, \text{ wird}$$

$$v = \frac{h^3 \pi}{6} + \frac{h\pi}{2}(\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2).$$

Eine Kugelschichte ist also gleich der Summe aus dem arithmetischen Mittel zweier Cylinder, deren Grundflächen die Grundflächen der Kugelschichte, deren Höhen gleich der Höhe der Schichte sind, und einer Kugel, welche die Höhe der Schichte zum Durchmesser hat.

Anmerkung: Der Inhalt einer Kugel und einer Kugelschichte kann auch nach dem Satze von Cavalieri (Vgl. §. 294, 61 und 62) gefunden werden. Die Oberfläche einer Kugel läßt sich sodann aus dem Volumen derselben ermitteln.

## III. Übungsaufgaben.

§. **293.** Aufgaben über ebenflächige Körper.

1. In einem Würfel ist $a$ die Kante, $d$ die Diagonale, $o$ die Oberfläche, $v$ das Volumen; aus einer dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Gegeben: 1) $a = 1\ m\ 3\ dm\ 3\ cm$; 2) $d = 0{\cdot}755\ m$;
3) $o = 10\ cm^2$; 4) $v = 12{\cdot}326391\ m^3$;
5) $v = 42{\cdot}627483\ldots dm^3$.

2. Oberfläche und Inhalt eines Würfels durch den Umfang $u$ eines Diagonalschnittes auszudrücken.

3. Aus $p$ Gramm eines Stoffes von dem Volumgewicht $s$ und aus $p'$ Gramm eines anderen mit dem Volumgewicht $s'$ wird ein Würfel gegossen; wie groß ist die Kante desselben?

4. Wird die Kante eines Würfels vom Volumgewicht $s$ um $b$ $cm$ vergrößert, so wird dadurch das Gewicht um $q$ Gramm vermehrt. Die Kante zu berechnen.

5. In einem rechtwinkligen Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche ist $a$ ($3{\cdot}2\ dm$) eine Grundkante und $o$ ($52{\cdot}48\ dm^2$) die Oberfläche; man bestimme das Volumen $v$.

6. Die Oberfläche $o$ und das Volumen $v$ eines rechtwinkligen Parallelepipeds aus dem Verhältnisse der drei Kanten und aus der Diagonale einer Seitenfläche zu berechnen.

Sind $x$, $y$, $z$ die ungleichen Kanten, und ist $x : y : z = m : n : p$ und $d$ die Diagonale der Seitenfläche, deren Seiten $y$ und $z$ sind, so erhält man

$$o = \frac{2\ (mn + mp + np)}{n^2 + p^2}.\ d^2 \text{ und } v = \frac{mnp}{(n^2 + p^2)\sqrt{n^2 + p^2}}.d^3.$$

7. Aus dem Volumen $v$ eines rechtwinkligen Parallelepipeds und dem Verhältnisse $m : n : p$ der drei Kanten die Kanten zu berechnen.

8. Aus der Summe der drei Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds $x + y + z = s$ und aus dem Verhältnisse $x : y : z = m : n : p$ die Oberfläche und den Inhalt des Parallelepipeds zu berechnen. Speziell $s = 74{\cdot}4\ cm$, $x : y : z = 5 : 4 : 3$

9. Ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten $a$, $b$, $c$ und dem Volumgewicht $s$ soll zylindrisch mit einem Stoff, dessen Volumgewicht $s'$ ist, ausgegossen werden. Wie tief muß die Höhlung gehen, wenn ihr Durchmesser $2r$ ist, damit $\frac{1}{n}$ des Körpers ins Wasser tauche?

10. Die Höhe eines **geraden Prismas** ist $h$, die Basis desselben *a*) ein reguläres Dreieck, *b*) ein reguläres Sechseck, dessen Seite $a$ ist; bestimme *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen des Prismas! $h = 4{\cdot}1\ dm$, $a = 2{\cdot}1\ dm$.

11. Aus einer geraden, prismatischen Säule von Holz, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist, wird das größte regelmäßige, dreiseitige Prisma gehauen; wie viel beträgt der Abfall, wenn die Grundkante des sechsseitigen Prismas 15 *cm* und die Seitenkante 1 *m* beträgt?

12. Ein regelmäßiges, gleichkantiges Prisma hat die Oberfläche $o$; wie groß ist eine Kante, wenn das Prisma *a*) dreiseitig, *b*) sechsseitig ist?

13. Das Gewicht eines gleichkantigen, regelmäßigen, sechsseitigen Prismas ist $p$; die Seite zu berechnen, wenn das Volumgewicht $s$ ist.

14. In einer **geraden Pyramide**, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, ist *a*) $a$ eine Grundkante und $s$ eine Seitenkante; *b*) $a$ eine Grundkante und $h$ die Höhe; bestimme die Oberfläche $o$ und das Volumen $v$!

15. Eine Pyramide mit der Höhe $h$ und dem Volumen $v$ hat zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck; wie groß ist eine Grundkante?

16. Die Oberfläche einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, ist $o$; wie groß ist eine Grundkante, wenn die Höhe der Pyramide doppelt so groß wie eine Grundkante ist?

17. Die Oberfläche und den Inhalt einer geraden Pyramide zu finden, in welcher die Höhe $h$, die Grundfläche ein reguläres Sechseck mit der Seite $a$ ist.

18. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a$; wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen, wenn die Seitenkanten aufeinander normal stehen?

19. Die Grundkanten einer geraden, dreiseitigen Pyramide sind 24 *cm*, 32 *cm*, 40 *cm*. Jede Seitenkante ist 36 *cm*. Oberfläche und Volumen zu berechnen.

20. Eine regelmäßige, quadratische Pyramide hat die Grundkante $a$, die Seitenkante $s$; Oberfläche und Volumen zu berechnen.

21. Die Pyramide in Aufgabe 20 wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geschnitten, daß die Höhe halbiert wird. Oberfläche und Volumen der Ergänzungspyramide zu berechnen.

22. Die Höhe einer regelmäßigen, quadratischen Pyramide ist $h$, ihre Oberfläche $o$. Die Grundkante zu berechnen.

23. Die Höhe einer abgestumpften Pyramide ist $h$, die Summe der beiden Grundflächen $s$, das Volumen $v$. Die beiden Grundflächen zu berechnen.

24. Eine Pyramide hat die Grundfläche $g$, das Volumen $v$. In welcher Höhe über der Grundfläche ist parallel zu derselben eine Ebene zu legen, damit der Inhalt des Pyramidenstumpfes $v'$ ist?

25. Die Grundflächen eines Pyramidenstumpfes sind $G$ und $g$, die Höhe der Ergänzungspyramide ist $h$. Das Volumen des Stumpfes zu suchen.

26. In einem **geraden Pyramidenstumpfe** ist die Seitenkante $s$, die Grundflächen sind *a*) gleichseitige Dreiecke, *b*) Quadrate, *c*) reguläre Sechsecke mit den Seiten $a_1$ und $a_2$; wie groß ist die Oberfläche und das Volumen?

27. Eine Pyramide, deren Grundfläche $g$ und deren Höhe $h$ ist, wird in dem Abstande $a$ vom Scheitel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten; berechne die Volumina der beiden Teile der Pyramide!

28. In welchem Abstande vom Scheitel einer Pyramide muß man eine mit der Grundfläche parallele Ebene legen, damit sie *a)* die Mantelfläche, *b)* das Volumen der Pyramide in dem Verhältnisse $m : n$ teile?

29. Aus der Kante $a$ eines Tetraeders, Hexaeders und Oktaeders *a)* die Oberfläche $o$, *b)* das Volumen $v$ desselben zu bestimmen.

Es ist für das Tetr. $o = a^2 \sqrt{3}$, für das Oktaeder $o = 2a^2 \sqrt{3}$, für das Hexaeder ist $o = 6a^2$.

$$\text{Tetr. } v = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}, \qquad \text{Okt. } v = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}, \qquad \text{Hexaed. } v = a^3.$$

Man bestimme aus dem Volumen eines *a)* Tetraeders, *b)* Oktaeders den Radius der eingeschriebenen Kugel. (§. 272, 2.)

30. Die Oberfläche und das Volumen eines Hexaeders, Tetraeders, Oktaeders aus dem Halbmesser *a)* der eingeschriebenen, *b)* der umgeschriebenen Kugel zu bestimmen.

31. Die Ecken eines Würfels sind durch Ebenen abgeschnitten, welche durch die Halbierungspunkte der Kanten gehen. Oberfläche und Volumen des Restkörpers zu bestimmen.

32. Über einem Quadrat mit der Seite $a$ ist ein gerades Perallelepiped und eine regelmäßige Pyramide von gleicher Höhe konstruiert. Diese Höhe zu berechnen, wenn eine Seitenfläche des Prismas $n$-mal so groß ist als eine der Pyramide.

33. Über einem Sechseck mit der Seite $a$ ist ein regelmäßiges Prisma und eine regelmäßige Pyramide von derselben Höhe $h$ errichtet. Die Differenz *a)* der Oberflächen, *b)* der Volumina der beiden Körper zu berechnen.

§. **294.** Aufgaben über krummflächige Körper.

1. In einem geraden Kegel ist $r$ der Halbmesser der Grundfläche, $h$ die Höhe, $s$ die Seite, $m$ die Manteloberfläche, $v$ das Volumen;

man bestimme *a)* $h$, $s$, $m$, wenn $r$, $v$ gegeben sind;
*b)* $r$, $h$, $v$, „ $s$, $m$ „ „
c) $r$, $m$, $v$, „ $h$, $s$ „ „ .

Gegeben: 1) $r = 4\,dm$, $v = 70{\cdot}37167\,dm^3$; 2) $s = 8{\cdot}1\,dm$, $m = 89{\cdot}1873\,dm^2$; 3) $h = 1{\cdot}32\,m$, $s = 1{\cdot}43\,m$.

2. Den Radius eines gleichseitigen Kegels zu berechnen, wenn *a)* der Mantel, *b)* das Volumen gegeben ist. $m = 24{\cdot}27\,m^2$; $v = 126{\cdot}257\,dm^3$.

3. Der Umfang der Grundfläche eines geraden Kegels ist $p$, der Achsenschnitt desselben ist ein rechtwinkliges Dreieck; Oberfläche und Volumen zu berechnen.

4. Den Inhalt eines Kegels mit dem Radius $r$ zu berechnen, dessen abgewickelter Mantel *a)* ein Quadrant, *b)* ein Sextant ist.

5. Einem geraden Kegel $(r, h)$ wird eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche *a)* eingeschrieben, *b)* umgeschrieben; wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

6. Einem geraden Kegel $(r, h)$ ist eine regelmäßige *a)* dreiseitige, *b)* sechsseitige Pyramide eingeschrieben und umgeschrieben. Die Volumina dieser Pyramiden zu berechnen.

7. Aus der Höhe eines gleichseitigen Kegels den Mantel und die Oberfläche zu berechnen.

8. Ein schiefwinkliges Dreieck hat die Seiten $a$, $b$, $c$. Die Volumina der Rotationskörper zu suchen, wenn das Dreieck um jede der Seiten rotiert.

9. In einem geraden Kegelstumpfe sind $R$ und $r$ die Halbmesser der Grundflächen und $o$ die Oberfläche; bestimme das Volumen $v$.

10. Wie groß ist die Höhe $h$ eines geraden Kegelstumpfes mit den Halbmessern $R$ und $r$, wenn die Manteloberfläche desselben der Summe der Grundflächen gleich ist?

11. Einem Kegelstumpfe mit der Höhe $h$ und den Halbmessern $R$ und $r$ wird ein Pyramidenstumpf mit quadratischen Grundflächen eingeschrieben; wie groß ist das Volumen dieses Pyramidenstumpfes?

12. Einem geraden Kegelstumpf ($R$, $r$, $h$) wird ein regelmäßiger, sechsseitiger Pyramidenstumpf *a*) eingeschrieben, *b*) umgeschrieben; das Volumen der beiden Stumpfe zu berechnen.

13. Die Radien der Grundflächen und die Seite eines geraden Kegelstumpfes sind $r$, $R$, $s$. Parallel zu den Grundflächen ist ein Kreis gelegt, dessen Inhalt das geometrische Mittel zwischen den beiden Grundflächen ist. Wie groß ist der untere Mantelteil des Stumpfes?

14. Wenn man das Volumen eines Kegelstumpfes durch einen gleich hohen Zylinder ersetzt, dessen Radius dem mittleren Radius des Stumpfes gleich ist, welchen Fehler begeht man?

15. In welchem Abstande von der kleineren Grundfläche eines Kegelstumpfes muß eine mit ihr parallele Ebene gelegt werden, damit *a*) die Schnittfläche $\frac{m}{n}$ der größeren Grundfläche sei, *b*) damit der Schnitt den Kegelstumpf halbiere?

16. In einem geraden Zylinder ist $r$ der Halbmesser der Grundfläche, $h$ die Höhe, $m$ die Mantelfläche, $v$ das Volumen; berechne aus je zweien dieser Größen die beiden andern.

Gegeben: 1) $r = 1{\cdot}064\,m$, $h = 2{\cdot}725\,m$; 2) $r = 6{\cdot}42\,dm$, $m = 15{\cdot}18\,dm^2$; 3) $m = 20\,dm^2$, $v = 7{\cdot}07356\,dm^3$.

17. Den Radius eines gleichseitigen Zylinders zu berechnen, wenn *a*) der Mantel, *b*) das Volumen gegeben ist. $m = 150\,dm^2$; $v = 30{\cdot}456\,dm^3$.

18. In einem geraden Zylinder, dessen Kubikinhalt $v$ ist, verhält sich die Höhe zu dem Durchmesser der Grundfläche wie $m : n$; wie groß ist die Oberfläche?

19. Das Volumen einer Zylinderröhre aus den beiden Halbmessern $R$ und $r$ und der Höhe $h$ zu berechnen.

20. Aus dem Volumen $v$ einer Zylinderröhre, der Höhe $h$ und dem größeren Halbmesser $R$ die Dicke $d$ zu finden.

21. Ein Ziment für 1 Liter $= 1\,dm^3$ des Flüssigkeitsmaßes hat die Form eines Zylinders, dessen Höhe das Doppelte des Durchmessers beträgt; wie groß sind die Dimensionen dieses Zimentes in Millimetern?

22. Ein Ziment für ein Deziliter des Hohlmaßes für trockene Gegenstände hat die Form eines Kegelstumpfes, dessen oberer Durchmesser gleich ist dem Durchmesser eines inhaltsgleichen gleichseitigen Zylinders und dessen unterer Durchmesser $^5/_4$ des oberen beträgt; welche Dimensionen hat dasselbe?

23. Auf jeder Grundfläche eines geraden Zylinders ($r$, $h$) steht ein Kegel, dessen Scheitel der Mittelpunkt der anderen Grundfläche ist; bestimme den Umfang des Kreises, in welchem sich die beiden Kegelmäntel schneiden, und die Abschnitte derselben.

24. Einem geraden Zylinder mit dem Halbmesser $r$ und der Höhe $h$ wird ein Prisma mit quadratischer Grundfläche eingeschrieben; wie groß ist jede Seitenfläche des Prismas?

25. Wie groß ist die Manteloberfläche eines Zylinders, der einem Würfel von der Kante $a$ 1) eingeschrieben, 2) umgeschrieben ist?

26. Einem gleichseitigen Zylinder mit dem Radius $r$ ist ein regelmäßiges, sechsseitiges Prisma ein- und umgeschrieben; die Differenz der Mantelflächen der beiden Prismen zu bestimmen.

27. Die Höhe eines geraden Zylinders durch die Oberfläche und den Mantel desselben auszudrücken.

28. In welchem Verhältnis stehen *a*) die Mantelflächen, *b*) die Oberflächen eines gleichseitigen Kegels und eines gleichseitigen Zylinders bei gleichem Inhalt?

29. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte eines gleichseitigen Kegels und eines gleichseitigen Zylinders bei gleicher Oberfläche?

30. Ein gleichschenkliges Trapez, dessen Höhe $h$ und dessen Parallelseiten $a$ und $a + m$ sind, rotiert um die Seite $a$ als Achse; bestimme *a*) die Rotationsfläche, *b*) den Rotationskörper.

31. Ein Trapez rotiert einmal um die größere, dann um die kleinere seiner Parallelseiten; die Inhalte der dadurch erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie $m : n$. Wie verhalten sich die beiden parallelen Seiten zueinander?

32. Bestimme *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation eines regulären Sechseckes von 8 *cm* Seitenlänge um eine Winkelsymmetrale desselben erzeugt wird.

33. Der Halbmesser einer Kugel ist $r$, $o$ die Oberfläche und $v$ das Volumen; suche aus jeder dieser Größen die beiden andern.

Gegeben: 1) $r = 0{\cdot}3589\ m$; 2) $r = 1\ m\ 1\ dm\ 5{\cdot}8\ cm$;
3) $o = 64{\cdot}184\ dm^2$; 4) $v = 5{\cdot}33774\ dm^3$.

34. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, welche mit einem gegebenen geraden *a*) Zylinder, *b*) Kegel, *c*) Kegelstumpf 1. gleiche Oberfläche, 2. gleiches Volumen hat.

35. Aus einer metallenen Hohlkugel, deren äußerer Durchmesser $2r$ (18 *cm*), und deren Wanddicke $d$ (2 *cm*) ist, soll eine massive Kugel gegossen werden; wie groß wird der Durchmesser derselben?

36. Der größere Halbmesser einer Hohlkugel sei $r$ und das Volumen ihrer Schale $k$; wie dick ist die Schale?

37. Eine Hohlkugel vom äußeren Durchmesser $2r$ sinkt mit ihrer Hälfte im Wasser ein. Die Wandstärke zu suchen, wenn die Dichte des Materiales $s$ ist.

38. Das Auge eines Beobachters auf der Erdoberfläche übersieht von derselben eine Kalotte, welche durch die Kreislinie begrenzt wird, welche die Berührungspunkte der vom Auge nach der Erde gezogenen Tangenten verbindet. Wie groß ist diese Kalotte, wenn $h$ die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und $r$ den Halbmesser der Erde bezeichnet?

$$f = \frac{2r^2 h\pi}{r + h}.$$

39. Wie groß ist die Fläche der Erde, welche man in einer Höhe von 137·88 $m$ übersieht? (Radius der Erde = 6378 $km$.)

40. Der Radius einer Kugel ist $r$; es ist die Höhe einer Kalotte zu berechnen, deren krumme Oberfläche $n$ mal so groß ist als die zugehörige Kreisfläche.

41. Ein leuchtender Punkt hat vom Mittelpunkt einer Kugel ($r$) den Abstand $d$; wie groß ist die beleuchtete Kalotte? Wie groß wird sie für $d = \infty$?

42. Die krumme Oberfläche einer Kalotte ist $C$, ihre Höhe $h$; die Fläche des zugehörigen Kugelkreises und den Inhalt des Segmentes zu suchen.

43. Eine Kugel mit dem Halbmesser $r$ wird durch eine Ebene so geschnitten, daß sich die Kugelmützen wie $m : n$ verhalten; wie groß sind die Kubikinhalte der zugehörigen Kugelsegmente?

$$S_1 = (m + 3n) . \frac{4m^2 r^3 \pi}{3(m+n)^3} \text{ und } S_2 = (3m + n) . \frac{4n^2 r^3 \pi}{3(m+n)^3}.$$

44. Ein Segment einer Kugel vom Halbmesser $r$ hat ein doppelt so großes Volumen als eine Kugel, welche die Höhe des Segmentes zum Halbmesser hat; wie groß ist die Höhe?

45. Das Volumen eines Kugelsegmentes durch die Höhe und den Radius der Grundfläche auszudrücken.

46. Die Höhe einer Kugelschichte mit gleichen Grundkreisen ist dem halben Kugelradius gleich; der wievielte Teil der Kugel ist sie?

47. In einen gleichseitigen Zylinder werden eine Kugel und ein gerader Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Volumina dieser drei Körper?

48. Um eine Kugel werden ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich *a*) die Oberflächen, *b*) die Volumina dieser drei Körper?

49. Eine Kugel mit der Oberfläche $o$ soll in einen inhaltsgleichen geraden Zylinder verwandelt werden, dessen Manteloberfläche der Oberfläche der Kugel gleich ist; wie groß ist *a*) der Halbmesser, *b*) die Höhe des Zylinders?

50. Einem gleichseitigen Dreiecke ist ein Kreis eingeschrieben; wie verhält sich die Manteloberfläche des durch Rotation des Dreieckes um eine seiner Höhen beschriebenen Kegels zu der Oberfläche der Kugel, welche bei dieser Drehung durch den Kreis erzeugt wird?

51. Um einen Würfel von der Kante $a$ wird eine Kugel und um diese ein Tetraeder beschrieben; wie groß ist *a*) die Oberfläche, *b*) das Volumen des Tetraeders?

52. Eine Kugel wird durch eine Ebene geschnitten, welche den darauf senkrechten Durchmesser in dem Verhältnisse $m : n$ teilt; auf der Schnittfläche stehen zwei gerade Kegel, deren Scheitel in der Kugeloberfläche liegen. Wie verhält sich das Volumen dieses Doppelkegels zu dem Volumen der Kugel?

53. Einem geraden Kegel, dessen Grundfläche $r$ zum Halbmesser hat, und dessen Seite $s$ ist, wird eine Kugel eingeschrieben. Wie groß ist *a*) der Halbmesser $\varrho$ des Parallelkreises, in welchem die Kugel von der Mantelfläche des Kegels berührt wird, *b*) das Volumen $v$ des durch diesen Kreis abgeschnittenen Kugelsegmentes?

$$\varrho = \frac{r(s-r)}{s} \text{ und } v = \frac{\varrho^3 \pi}{3} \cdot \frac{2s+r}{s+r} \sqrt{\frac{s-r}{s+r}}.$$

54. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich einer Zone, welche zu einer Kugel vom Radius $r$ gehört und deren Höhe $h$ ist; man bestimme die Oberfläche und das Volumen eines Oktaeders, welchem die erstere Kugel eingeschrieben ist.

55. Einem Oktaeder ist eine Kugel ein- und umgeschrieben; das Verhältnis der Radien, der Oberflächen und der Inhalte der beiden Kugeln zu suchen.

56. Eine Kugelschichte hat das Gewicht $p$, die Höhe $h$. Eine Begrenzungsfläche ist ein größter Kugelkreis; den Halbmesser der Kugel zu berechnen, wenn die Dichte des Materiales $s$ ist.

57. Eine Kugel mit dem Radius $r$ hat eine zylindrische Bohrung, deren Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Das Volumen und die Oberfläche des Kugelringes zu suchen, wenn die Höhe desselben $h$ ist.

58. Die Oberfläche und den Inhalt der Kugel zu suchen, welche sich einem senkrechten Kegel ($r$, $h$) $a$) einschreiben, $b$) umschreiben läßt.

59. In einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide ist eine Grundkante $a$, eine Seitenkante $3a$. Die Oberfläche und das Volumen der ein- und umgeschriebenen Kugel zu suchen.

60. Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn außer der Grundkante $a$ die Höhe der Pyramide gegeben ist.

61. Das Volumen einer Halbkugel ist gleich der Differenz der Inhalte des der Halbkugel umgeschriebenen Zylinders und des diesem Zylinder eingeschriebenen Kegels.

Anleitung. Man zeige, daß der Kreis, in welchem die Halbkugel ($r$) durch jede zur Basis des Zylinders parallele Ebene geschnitten wird, gleich ist dem Kreisring, der als Schnittfigur derselben Ebene mit dem Differenzkörper entsteht. (Jede dieser beiden Flächen ist $\pi\,(r^2 - h^2)$, wenn $h$ der Abstand der Ebene von der Basis des Zylinders ist.) Sodann wende man Cavalierischen Satz an.

Daraus ergibt sich das Volumen der Kugel $\frac{4\,r^3\pi}{3}$.

62. Werden die drei Körper der Aufgabe 61 durch zwei mit der Grundfläche des Zylinders parallele Ebenen geschnitten, so ist nach dem Cavalierischen Satz der Inhalt der entstehenden Kugelschichte gleich dem zwischen denselben Ebenen liegenden Teile des Differenzkörpers. Daraus die Formel für den Inhalt einer Kugelschichte abzuleiten.

Anleitung: Ist $h$ der Abstand der beiden parallelen Schnittebenen, sind $m$ und $n$ ($m > n$) die Abstände derselben vom Kugelmittelpunkt, so ist das Volumen des Differenzkörpers $= r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\,(m^2 + n^2 + mn) = \frac{\pi h}{6}(6r^2 - 2m^2 - 2n^2 - 2mn) = \frac{\pi h}{6}\,[3\,(r^2 - m^2) + 3\,(r^2 - n^2) + (m - n)^2] = ?$

Dritter Teil.

# Ebene Trigonometrie.

---

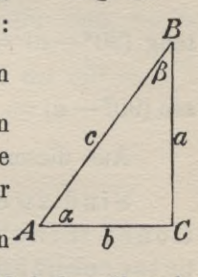
## I. Goniometrie und Auflösung der Dreiecke.

§. **295.** Um die gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und der Winkel eines Dreieckes voneinander durch Gleichungen darstellen und mittels dieser aus gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreieckes die übrigen Stücke desselben durch Rechnung finden zu können, hat man als Maße der Winkel die Verhältniszahlen gewisser Strecken, durch welche die Winkel unzweideutig bestimmt sind, eingeführt. Da diese Verhältniszahlen von der Größe der Winkel abhängig sind und in der Mathematik jede Größe, die von einer anderen abhängig ist, eine Funktion derselben genannt wird, so nennt man dieselben Funktionen der Winkel oder goniometrische, auch trigonometrische Funktionen, und die Lehre von den Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen derselben die Goniometrie.

Die Anwendung der Winkelfunktionen auf die Berechnung der Dreiecke bildet den Gegenstand der Trigonometrie.

§. **296.** Die goniometrischen Funktionen spitzer Winkel.

Fig. 147.




Zwischen den Seiten des rechtwinkligen Dreieckes $ABC$ (Fig. 147) sind folgende sechs Verhältnisse möglich: $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}$ und die reziproken: $\frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}$. Zeichnet man ein zweites rechtwinkliges Dreieck mit denselben Winkeln, so ist dasselbe dem ersten ähnlich. Die Verhältnisse der Seiten beider Dreiecke haben daher denselben Wert. $\left(\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \text{ etc.}\right)$ Dieselben hängen daher nur von den Winkeln ab, können als Maß derselben benützt werden und heißen goniometrische Funktionen der Winkel.

$\frac{a}{c}$ heißt der Sinus, $\frac{b}{c}$ der Kosinus, $\frac{a}{b}$ die Tangente, $\frac{b}{a}$ die Kotangente, $\frac{c}{b}$ die Sekante, $\frac{c}{a}$ die Kosekante des Winkels $\alpha$.

Für die goniometrischen Funktionen eines spitzen Winkels eines rechtwinkligen Dreieckes hat man mithin folgende Definitionen:

1. Der Sinus ist die gegenüberliegende Kathete, gebrochen durch die Hypotenuse.

2. Der Kosinus ist die anliegende Kathete, gebrochen durch die Hypotenuse.

3. Die Tangente ist die gegenüberliegende Kathete, gebrochen durch die anliegende.

4. Die Kotangente ist die anliegende Kathete, gebrochen durch die gegenüberliegende.

5. Die Sekante ist die Hypotenuse, gebrochen durch die anliegende Kathete.

6. Die Kosekante ist die Hypotenuse, gebrochen durch die gegenüberliegende Kathete.

In Zeichen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{b},\quad \cot\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b},\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

Alle goniometrischen Funktionen sind unbenannte Zahlen.

§. **297.** Der Winkel $\beta$ (Fig. 147) ist $90^0 - \alpha$; nach §. 296 sind seine trigonometrischen Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} \sin(90^0-\alpha) &= \frac{b}{c} = \cos\alpha, & \cos(90^0-\alpha) &= \frac{a}{c} = \sin\alpha, \\ \operatorname{tang}(90^0-\alpha) &= \frac{b}{a} = \cot\alpha, & \cot(90^0-\alpha) &= \frac{a}{b} = \operatorname{tang}\alpha, \\ \sec(90^0-\alpha) &= \frac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha, & \operatorname{cosec}(90^0-\alpha) &= \frac{c}{b} = \sec\alpha. \end{aligned}\right\} \ldots 1.$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich der Satz ablesen:

Sind zwei Winkel komplementär, so sind die Funktionen (Sinus, Tangente, Sekante) des einen gleich den entsprechenden Kofunktionen (Kosinus, Kotangente, Kosekante) des anderen.

§. **298.** Aufgaben.

1. Gegeben ist $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreieckes den Winkel $\alpha$ zu finden.

2. Ebenso den Winkel $\alpha$ zu bestimmen, wenn *a)* $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, *b)* $\operatorname{tang}\alpha = \frac{5}{2}$, *c)* $\cot\alpha = 1$, *d)* $\sec\alpha = \frac{5}{4}$, *e)* $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{4}{3}$.

§. 299. Die Funktionen eines Winkels von *a)* 45°, *b)* 60°, *c)* 30° zu berechnen.

*a)* Ist (Fig. 147) $\alpha = 45^0$, so ist $a = b$, $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$.

Mithin ist $\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tang} 45^0 = 1, \qquad \cot 45^0 = 1,$$

$$\sec 45^0 = \frac{b\sqrt{2}}{b} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{cosec} 45^0 = \sqrt{2}.$$

*b)* Ist (Fig. 147) $\alpha = 60^0$, so ist $b = \frac{c}{2}$, $a = \frac{c}{2}\sqrt{3}$.

Mithin ist $$\sin 60^0 = \frac{\frac{c}{2}\sqrt{3}}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\cos 60^0 = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tang} 60^0 = \frac{\frac{c}{2}\sqrt{3}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}, \quad \cot 60^0 = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec 60^0 = \frac{c}{\frac{c}{2}} = 2, \quad \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{c}{\frac{c}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

*c)* Da die Winkel von 30° und 60° komplementär sind, so ist $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{tang} 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot 30^0 = \sqrt{3}$, $\sec 30^0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{cosec} 30^0 = 2$.

Aufgaben.

1. Die Seite des einem Kreise mit dem Radius $r$ eingeschriebenen, regulären Zehneckes ist $\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$; wie groß sind die Funktionen eines Winkels von 18°? (Auf 3 Dez.)

2. Wie groß sind die Funktionen eines Winkels von 72°?

Nach §. 170 läßt sich die Möglichkeit der Berechnung der trigonometrischen Funktionen von noch andern Winkeln ersehen. Die Angabe von geeigneten Methoden zur Berechnung derselben für alle Winkel überschreitet die Grenzen der elementaren Mathematik; die Resultate der Rechnungen wurden in Tabellen zusammengestellt. Da aber die goniometrischen Funktionen zumeist irrationale Zahlen sind, so werden sie um so genauer bestimmt sein, durch je mehr Dezimalstellen man sie ausdrückt; aber in demselben Grade wird auch das Multiplizieren und Dividieren durch diese Funktionen erschwert. Um diesem Übelstande zu begegnen, bedient man sich in trigonometrischen Rechnungen der Logarithmen, weshalb die Briggsschen Logarithmen der Funktionen für die einzelnen Winkel bestimmt und in den Logarithmentafeln gehörig zusammengestellt wurden. Nach §. 297 ist zu erkennen, daß man diesen Tabellen die Funktionen, beziehungsweise die Logarithmen derselben für alle spitzen Winkel entnehmen kann, wenn sie bis 45° sich erstrecken.

**§. 300.** Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

Da nach den Definitionen in §. 296 die Kotangente, die Sekante und die Kosekante bezüglich die reziproken Werte der Tangente, des Kosinus und des Sinus sind, so ergibt sich:

$$\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} \;..\; 2) \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \;..\; 3) \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \;..\; 4);$$

ferner ist Fig. 147:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \;....\; 5)$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b:c}{a:c} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \;....\; 6).$$

Dividiert man die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ durch $c^2$, $a^2$, $b^2$, so erhält man:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \text{ d. h. } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;.....\; 7)$$

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \text{„ „ } 1 + \cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha \;...\; 8)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \quad \text{„ „ } \operatorname{tang}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \;....\; 9).$$

**§. 301.** Ist von den Funktionen eines spitzen Winkels eine bekannt, so lassen sich aus ihr mittels der vorhergehenden Gleichungen auch die übrigen bestimmen.

Ist z. B. $\sin\alpha$ gegeben, so folgt aus der Gleichung 7)

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Aus 5) und 6) erhält man sodann

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \text{ und } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Die Gleichungen 3) und 4) geben endlich

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \text{ und } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Aufgaben.

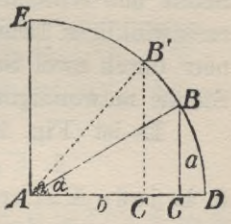
1. Die goniometrischen Funktionen des Winkels $\alpha$ sind auszudrücken durch *a)* $\cos\alpha$, *b)* $\operatorname{tang}\alpha$, *c)* $\cot\alpha$, *d)* $\sec\alpha$, *e)* $\operatorname{cosec}\alpha$.

2. Die übrigen goniometrischen Funktionen sind zu berechnen, wenn *a)* sin $\alpha = \frac{12}{13}$, *b)* cos $\alpha = \frac{4}{17}$, *c)* tang $\alpha = \frac{7}{24}$, *d)* cot $\alpha = \frac{5}{12}$, *e)* sec $\alpha = \frac{41}{40}$, *f)* cosec $\alpha = 3\frac{4}{7}$ gegeben ist.

### §. 302. Änderung der goniometrischen Funktionen bei Zunahme des Winkels von 0° bis 90°.

Läßt man den Winkel $\alpha$ (Fig. 148) bei ungeänderter Hypotenuse zunehmen, so wächst $a$, $b$ nimmt ab. Daher nehmen mit wachsendem Winkel der Sinus und die Tangente zu, der Kosinus und die Kotangente hingegen ab.

Fig. 148.




Für $\alpha = 0^0$ ist $a = 0$, $b = c$, daher ist sin $0^0 = 0$, cos $0^0 = 1$, tang $0^0 = 0$, cot $0^0 = \infty$.

Für $\alpha = 90^0$ ist $b = 0$, $a = c$, daher ist sin $90^0 = 1$, cos $90^0 = 0$, tang $90^0 = \infty$, cot $90^0 = 0$.

Der Sinus und der Kosinus sind daher für spitze Winkel echte Brüche, die Tangente und die Kotangente hingegen können alle Werte zwischen 0 und $\infty$ annehmen.

Folgende Fälle sind für die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Wichtigkeit.

log sin $0^\circ = -\infty$, log sin $90^0 = 0$, log cos $0^0 = 0$,
log cos $90^0 = -\infty$, log tang $0^0 = -\infty$, log tang $45^0 = 0$,
log tang $90^0 = \infty$, log cot $0^0 = \infty$, log cot $45^0 = 0$,
log cot $90^0 = -\infty$.

Mithin sind die Logarithmen für den Sinus und Kosinus, für die Tangente von $0^0 - 45^0$, für die Kotangente von $45^0 - 90^0$ negativ. In allen diesen Fällen ist die Mantisse dadurch positiv gemacht, daß 10 zu dem Logarithmus addiert wurde. Um den wahren Wert zu erhalten, hat man von dem Tafelwert 10 zu subtrahieren. Bei den Logarithmen der Tangenten von $45^0 - 90^0$ und der Kotangenten von $0^0 - 45^0$ kann diese Addition, beziehungsweise Subtraktion entfallen.

Genaueres über die Einrichtung der Tafeln enthalten diese selbst.

Suche aus den Logarithmentafeln folgende Logarithmen:

| | |
|---|---|
| 1. log sin $38^0\,17'$ | 2. log sin $17^0\;8'\,20''$ |
| 3. log sin $51^0\,58'\,33''$ | 4. log sin $76^0\,48'\,37''$ |
| 5. log tang $1^0\,25'\,40''$ | 6. log tang $69^0\,27'\,39''$ |
| 7. log tang $23^0\,23'\,23''$ | 8. log tang $89^0\,19'\,31''$ |
| 9. log cos $57^0\,48'$ | 10. log cos $39^0\;9'\,47''$ |
| 11. log cos $50^0\;9'\;9''$ | 12. log cos $71^0\;2'\,12''$ |
| 13. log cot $77^0\,31'$ | 14. log cot $8^0\;8'\,54''$ |
| 15. log cot $0^0\,40'\,29''$ | 16. log cot $53^0\,29'\;8''$. |

Suche zu folgenden Logarithmen die entsprechenden Winkel:

| | |
|---|---|
| 1. log sin $x = 9{\cdot}49654 - 10$ | 2. log sin $y = 9{\cdot}79358 - 10$ |
| 3. log sin $z = 8{\cdot}74109 - 10$ | 4. log sin $\alpha = 9{\cdot}99736 - 10$ |

| | |
|---|---|
| 5. $\log \operatorname{tang} \alpha = 0{\cdot}13264$ | 6. $\log \operatorname{tang} \beta = 0{\cdot}64570$ |
| 7. $\log \operatorname{tang} \gamma = 8{\cdot}95629-10$ | 8. $\log \operatorname{tang} \beta = 8{\cdot}47380-10$ |
| 9. $\log \cos \gamma = 8{\cdot}49033-10$ | 10. $\log \cos x = 9{\cdot}17973-10$ |
| 11. $\log \cos y = 9{\cdot}97706-10$ | 12. $\log \cos z = 8{\cdot}82544-10$ |
| 13. $\log \cot \alpha = 1{\cdot}44266$ | 14. $\log \cot \beta = 0{\cdot}21671$ |
| 15. $\log \cot \gamma = 8{\cdot}90828-10$ | 16. $\log \cot \alpha = 2{\cdot}44033$. |

## §. 303. Auflösung des rechtwinkligen Dreieckes.

Unter Auflösung eines Dreieckes versteht man die Berechnung von Seiten und Winkeln aus gegebenen Bestimmungsstücken desselben. Ein rechtwinkliges Dreieck ist durch eine Seite und einen spitzen Winkel, oder durch zwei Seiten bestimmt. Die zur Berechnung der fehlenden Stücke notwendigen Gleichungen folgen aus §. 296.

Es ist (Fig. 147):

1. $a = c \sin \alpha, \qquad b = c \sin \beta;$

d. h. jede Kathete ist gleich dem Produkte aus der Hypotenuse und dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

2. $b = c \cos \alpha, \qquad a = c \cos \beta;$

d. h. jede Kathete ist gleich dem Produkte aus der Hypotenuse und dem Kosinus des dieser Kathete anliegenden spitzen Winkels.

3. $a = b \operatorname{tang} \alpha, \qquad b = a \operatorname{tang} \beta;$

d. h. jede Kathete ist gleich dem Produkte aus der andern Kathete und der Tangente des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels.

4. $b = a \cot \alpha, \qquad a = b \cot \beta;$

d. h. jede Kathete ist gleich dem Produkte aus der andern Kathete und der Kotangente des der ersteren Kathete anliegenden spitzen Winkels.

Zu diesen trigonometrischen Lehrsätzen tritt noch der Pythagoreische Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2$, welcher den Zusammenhang zwischen den drei Seiten ausdrückt.

Bei der Bestimmung der Dimension trigonometrischer Formeln beachte man, daß die Winkelfunktionen unbenannte Zahlen sind und bei der Ermittlung der Dimension nicht in Betracht kommen.

## §. 304. Auflösungsfälle des rechtwinkligen Dreieckes.

I. Gegeben die beiden Katheten $a$ und $b$.

Für die Berechnung des Winkels $\beta$ hat man $\operatorname{tang} \beta = \frac{b}{a}$; für $c$ ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, oder wegen der logarithmischen Rechnung vorteilhafter $c = \frac{b}{\sin \beta}$.

Es sei z. B. $a = 418$, $b = 325$. Man hat

$$\begin{array}{rlrl} \log b &= 2\cdot51\ 188 & \log b &= 2\cdot51\ 188 \\ \log a &= \underline{2\cdot62\ 118} & \log \sin \beta &= \underline{9\cdot78\ 803-10} \\ \log \operatorname{tang} \beta &= 9\cdot89\ 070-10 & \log c &= 2\cdot72\ 385 \\ \beta &= 37^0 51' 54'' \text{ und} & c &= 529\cdot48. \\ \alpha &= 52^0\ 8'\ 6''. & & \end{array}$$

II. Gegeben die Hypotenuse $c$ und eine Kathete $b$.

$$\sin \beta = \cos \alpha = \frac{b}{c} \text{ und } a = \frac{b}{\operatorname{tang} \beta} \text{ oder } a = \sqrt{(c+b)\,(c-b)}.$$

III. Gegeben eine Kathete $b$ und ein Winkel, z. B. $\beta$.

$$\alpha = 90^0 - \beta,\ a = \frac{b}{\operatorname{tang} \beta},\ c = \frac{b}{\sin \beta}.$$

IV. Gegeben die Hypotenuse $c$ und ein Winkel, z. B. $\beta$.

$$\alpha = 90^0 - \beta,\quad b = c \sin \beta,\quad a = c \cos \beta.$$

§. **305.** Berechnung des Flächeninhaltes eines rechtwinkligen Dreieckes.

Für die Berechnung des Flächeninhaltes $f$ eines rechtwinkligen Dreieckes ergeben sich mit Rücksicht auf die in §. 304 angeführten vier Fälle, wenn nur die gegebenen Stücke benützt werden, folgende Ausdrücke:

$$f = \frac{ab}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{(c+b)\,(c-b)} = \frac{b^2}{2\,tang\,\beta} = \frac{c^2}{2}\,sin\,\beta\,cos\,\beta.$$

§. **306.** Zahlenbeispiele zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $\alpha$ | $\beta$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 208 | 105 | 233 | 63⁰ 12′ 53″ | 26⁰ 47′ 7″ | 10920 |
| 2. | 325 | 228 | 397 | 54⁰ 56′ 56″ | 35⁰ 3′ 4″ | 37050 |
| 3. | 377 | 336 | 505 | 48⁰ 17′ 28″ | 41⁰ 42′ 32″ | 63336 |
| 4. | 40·3 | 39·6 | 56·5 | 45⁰ 30′ 5″ | 44⁰ 29′ 55″ | 797·94 |
| 5. | 3·171 | 2·083 | 3·794 | 56⁰ 41′ 58″ | 33⁰ 18′ 2″ | 3·3026 |
| 6. | 1·8828 | 1·3988 | 2·3456 | 53⁰ 23′ 23″ | 36⁰ 36′ 37″ | 1·31685. |

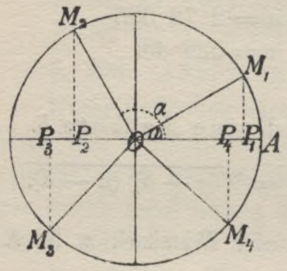
7. Die Fläche eines rechtwinkligen Dreieckes ist $23\cdot86\ m^2$, $\alpha$ ist $52^0\ 36'$; die Seiten zu berechnen.

8. In einem rechtwinkligen Dreieck ist $a : b = \frac{2}{3}$; die Winkel zu berechnen.

§. **307.** Die goniometrischen Funktionen beliebiger Winkel.

Dreht man (Fig. 148) den Radius $AB$ (die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes $ABC$) von $AD$ bis $AE$, so nimmt $\alpha$ alle Werte von $0^0$ bis $90^0$ an. Die Kathete $b$ ist für jede Lage der Hypotenuse die Projektion derselben auf die Projektionsachse $AD$, die Kathete $a$ das Projektionslot (Normale). Setzt man die Drehung weiter fort, so durchläuft der Radius alle vier Quadranten (Fig. 149); die Winkel, welche er mit der ursprünglichen Lage ($OA$) bildet, werden in abgekürzter Ausdrucksweise als Winkel im 1., 2., 3. und 4. Quadranten bezeichnet, je nachdem der Radius im 1., 2., 3. oder 4. Quadranten liegt. Überträgt man die Definitionen der goniometrischen Funktionen spitzer Winkel auf Winkel jeder beliebigen Größe, so erhält man für die Projektionsdreiecke in allen Quadranten:

Fig. 149.



1. das Verhältnis der Normale zur Hypotenuse (Radius) ist der Sinus des Winkels $\alpha$, $\frac{MP}{OM} = \sin\alpha$ (Fig. 149);

2. das Verhältnis der Projektion zur Hypotenuse (Radius) ist der Kosinus dieses Winkels, $\frac{OP}{OM} = \cos\alpha$;

3. das Verhältnis der Normale zur Projektion ist die Tangente des Winkels $\alpha$, $\frac{MP}{OP} = \operatorname{tang}\alpha$;

4. das Verhältnis der Projektion zur Normale ist die Kotangente dieses Winkels, $\frac{OP}{MP} = \cot\alpha$;

5. das Verhältnis der Hypotenuse (Radius) zur Projektion ist die Sekante des Winkels $\alpha$, $\frac{OM}{OP} = \sec\alpha$;

6. das Verhältnis der Hypotenuse (Radius) zur Normale ist die Kosekante dieses Winkels, $\frac{OM}{MP} = \operatorname{cosec}\alpha$.

Die in §. 300 entwickelten Gleichungen zwischen den Funktionen eines spitzen Winkels gelten für beliebige Winkel.

## §. 308. Vorzeichen der Winkelfunktionen.

Für Winkel verschiedener Quadranten (Fig. 149) liegt die Normale bald über, bald unter der Projektionsachse $OA$, die Projektion bald rechts, bald links von dem Scheitel $O$. Zur genauen Bestimmung derselben muß daher dieser Gegensatz ihrer Lage durch das Vorzeichen ausgedrückt werden, wodurch dann auch die Winkelfunktionen der Größe der Winkel entsprechende Vorzeichen erhalten.

Man nimmt allgemein die Normalen und Projektionen in derjenigen Lage, welche sie für Winkel im ersten Quadranten haben, also die Normalen über $OA$ und die Projektionen rechts von $O$ als positiv an; die Normalen unter $OA$ und die Projektionen links von $O$ müssen dann als negativ angesehen werden.

Hiernach ist die Normale für Winkel im 1. und 2. Quadranten positiv, für Winkel im 3. und 4. Quadranten negativ; die Projektion für Winkel im 1. und 4. Quadranten positiv, für Winkel im 2. und 3. Quadranten negativ.

Für die Vorzeichen der Winkelfunktionen ergeben sich dann, da die Hypotenuse (Radius) immer absolut (positiv) angenommen wird, folgende Beziehungen:

1. Der Sinus und die Kosekante haben gleiches Vorzeichen mit der Normale; sie sind also für Winkel im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. negativ.

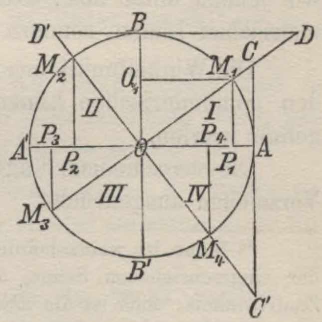
2. Der Kosinus und die Sekante haben gleiches Vorzeichen mit der Projektion und sind demnach für Winkel im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ.

3. Die Tangente und die Kotangente sind positiv, wenn die Normale und die Projektion gleiche Vorzeichen, und negativ, wenn diese verschiedene Vorzeichen haben; somit für Winkel im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

**§. 309.** Darstellung der Winkelfunktionen am Kreise,

Zieht man (Fig. 150) in einem Kreise, dessen Halbmesser $r$ ist, zwei zueinander normale Durchmesser $AA'$ und $BB'$, so zerteilen sie den Kreis in vier Quadranten und es bildet ein Halbmesser $OM$, welcher sich von dem festen Halbmesser $OA$ aus um $O$ dem Uhrzeiger entgegen durch alle vier Quadranten dreht, nach und nach mit dem festen Halbmesser $OA$ alle um den Punkt $O$ möglichen Winkel.

Fig. 150.




*a)* Ist $AOM = \alpha$ einer dieser Winkel und zieht man von dem Endpunkte $M$ des beweglichen Halbmessers $OM$ auf den festen Halbmesser $OA$ oder auf dessen Verlängerung $OA'$ die Normale $MP$, so ist für alle Quadranten mit Berücksichtigung des Index

$$\frac{MP}{OM} = \frac{MP}{r} = \sin \alpha \text{ und } \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{r} = \cos \alpha.$$

*b)* Errichtet man ferner in dem Endpunkte $A$ des festen Halbmessers $OA$ auf diesen die Normale $AC$, welche den verlängerten beweglichen Halbmesser $OM$ in $C$ schneidet, so hat man, da $\triangle OAC \sim OPM$ ist,

$$\frac{MP}{OP} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{r} = \text{tang}\ \alpha \text{ und } \frac{OM}{OP} = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{r} = \sec \alpha.$$

*c)* Errichtet man endlich in $B$ auf $OB$ die Normale $BD$, welche den verlängerten beweglichen Halbmesser $OM$ in $D$ schneidet, so hat man, da $\triangle OBD \sim MPO$ ist,

$$\frac{OP}{MP} = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{r} = \cot \alpha \text{ und } \frac{OM}{MP} = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{r} = \text{cosec}\ \alpha.$$

Die Strecken $MP$, $OP$, $AC$, $OC$, $BD$ und $OD$, deren Verhältnisse zu dem Halbmesser $r$ des Kreises die Winkelfunktionen bestimmen, heißen goniometrische Linien, und zwar $MP$ die Sinuslinie*), $OP$ die Kosinuslinie†), $AC$ die Tangentenlinie**), $OC$ die Sekantenlinie***), $BD$ die Kotangentenlinie†) und $OD$ die Kosekantenlinie†).

Da die Verhältnisse dieser Linien zu dem Halbmesser nur von der Größe des Winkels $\alpha$ abhängen und für jeden beliebigen Halbmesser dieselben Werte haben, so kann man, ohne die Werte der Winkelfunktionen zu ändern, die Längeneinheit selbst als Halbmesser des Kreises annehmen und somit $r = 1$ setzen. Dann gehen die obigen Verhältnisse in die folgenden Ausdrücke über:

$$MP = \sin \alpha, \quad AC = \text{tang}\ \alpha, \quad BD = \cot \alpha,$$
$$OP = \cos \alpha, \quad OC = \sec \alpha, \quad OD = \text{cosec}\ \alpha;$$

wo jedoch unter $MP$, $OP$, $AC$, $OC$, $BD$ und $OD$ nicht die goniometrischen Linien, sondern ihre Maßzahlen zu verstehen sind.

Die Winkelfunktionen können daher als Maßzahlen der entsprechenden goniometrischen Linien am Kreise für den Halbmesser $= 1$ aufgefaßt werden.

Die verschiedene Lage der goniometrischen Linien wird durch das Vorzeichen ausgedrückt.

---

*) Sinus ist wahrscheinlich, entstanden aus s. ins.: semissis inscriptae, Hälfte der eingeschriebenen Sehne, denn $MP$ ist die Hälfte der Sehne des doppelten Zentriwinkels; doch ist die Erklärung des Namens überhaupt unsicher.

**) Weil sie Tangente an den Kreis ist.

***) Weil sie den Kreis schneidet. Die Namen Tangente und Sekante wurden von Fink (Geometria rotundi, 1583) eingeführt.

†) Der Name Kosinus, aus complementi sinus = co. sinus, rührt von dem englischen Mathematiker Gunter (gest. 1626) her. Ähnlich sind auch die Namen Kotangente und Kosekante zu erklären.

Die Sinus- und die Tangentenlinie über dem festen Durchmesser $AA'$ sind positiv, unter demselben negativ.

Die Kosinus- und die Kotangentenlinie rechts vom festen Durchmesser $BB'$ sind positiv, links von demselben negativ.

Die Sekanten- und die Kosekantenlinie sind positiv, wenn sie durch Vorwärtsverlängerung des beweglichen Halbmessers, und negativ, wenn sie durch Rückwärtsverlängerung desselben erhalten werden.

Von den sechs goniometrischen Funktionen werden im folgenden die Sekanten und Kosekanten, da sie selten Verwendung finden, übergangen.

§. **310.** Zu- und Abnahme der Funktionen bei dem Wachsen des Winkels.

Ändert sich der Winkel $\alpha$, so ändern sich auch die zugehörigen goniometrischen Linien, daher auch ihre Maßzahlen, d. i. die Winkelfunktionen.

*A.* Größe des Sinus und des Kosinus (Fig. 150).

1. Je kleiner der Winkel $\alpha$, desto kleiner ist auch der Sinus, während sich der Kosinus ohne Ende der Einheit nähert; fallen beide Schenkel zusammen, so wird $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = +1$. Für sehr kleine Winkel ist der Unterschied zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels um so kleiner, je mehr sich der Winkel der Null nähert, wobei jedoch der Sinus stets kleiner bleibt als der Bogen.

2. Wächst $\alpha$ von $0^0$ bis $90^0$, so nimmt $\sin \alpha$ zu, anfangs rascher, dann langsamer; $\cos \alpha$ dagegen nimmt ab, anfangs langsamer, dann rascher; beide sind positiv. Für $\alpha = 90^0$ fällt die Sinuslinie mit dem beweglichen Schenkel zusammen und es ist daher $\sin 90^0 = +1$, $\cos 90^0 = 0$.

3. Wächst $\alpha$ von $90^0$ bis $180^0$, so ist der Sinus positiv und abnehmend, der Kosinus dagegen negativ und dem absoluten Werte nach wachsend. Wird $\alpha = 180^0$, so hat man $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$.

4. Während $\alpha$ von $180^0$ bis $270^0$ zunimmt, ist $\sin \alpha$ negativ und absolut zunehmend, $\cos \alpha$ auch negativ, aber absolut abnehmend; es wird $\sin 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$.

5. Wird $\alpha > 270^0$, aber $< 360^0$, so ist der Sinus negativ und sein absoluter Wert abnehmend, der Kosinus positiv und wachsend. Für $\alpha = 360^0$ werden Sinus und Kosinus wieder so groß wie für $\alpha = 0^0$, nämlich $\sin 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = +1$.

Sinus und Kosinus liegen demnach immer zwischen den Grenzen $+1$ und $-1$.

*B.* Größe der Tangente (Fig. 150).

1. Je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch die Tangente; fallen die beiden Schenkel zusammen, so hat man tang $0^0 = 0$. Ferner: Je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch der Unterschied zwischen dem Bogen und der Tangente des Winkels, wobei jedoch die Tangente stets größer bleibt als der Bogen.

2. Wächst $\alpha$ von $0^0$ bis $90^0$, so ist tang $\alpha$ positiv und zunehmend. Für $\alpha = 90^0$ ist die Tangente unendlich groß.

3. Nimmt $\alpha$ über $90^0$ hinaus bis $180^0$ zu, so wird die Tangente negativ und dem absoluten Werte nach abnehmend. Erreicht $\alpha$ die Größe $180^0$, so wird tang $180^0 = 0$.

4. Wenn $\alpha$ von $180^0$ bis $270^0$ wächst, so ist die Tangente positiv und zunehmend. Für $\alpha = 270^0$ ist die Tangente unendlich groß.

5. Wächst $\alpha$ über $270^0$ bis $360^0$, so ist die Tangente negativ, der absolute Wert nimmt ab und es wird endlich tang $360^0 = 0$.

Die Tangente kann demnach alle möglichen reellen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen; bei $90^0$ u. $270^0$ springt sie, die Stetigkeit unterbrechend, von $+\infty$ nach $-\infty$. Man schreibt daher auch tang $90^0 = \pm\infty$, tang $270^0 = \pm\infty$.

*C.* Größe der Kotangente (Fig. 150).

1. Mit abnehmendem Winkel wächst die Kotangente und wird für $\alpha = 0^0$ unendlich groß.

2. Im 1. Quadranten nimmt die Kotangente mit wachsendem Winkel ab; cot $90^0 = 0$.

3. Im 2. Quadranten ist die Kotangente negativ, ihr absoluter Wert nimmt mit wachsendem Winkel zu, bis er bei $180^0$ unendlich groß wird.

4. Im 3. Quadranten ist die Kotangente positiv, nimmt mit wachsendem Winkel ab, bis cot $270^0 = 0$ wird.

5. Im 4. Quadranten ist die Kotangente negativ und dem absoluten Werte nach wachsend; für $\alpha = 360^0$ ist sie unendlich groß.

Die Kotangente liegt also zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$; bei $180^0$ und $360^0$ ($0^0$) springt sie, die Stetigkeit unterbrechend, von $-\infty$ nach $+\infty$. Man schreibt daher auch cot $180^0 = \mp\infty$. cot $360^0$ oder cot $0^0 = \mp\infty$.

**Zusatz.** Eine jede Funktion hat in den vier einzelnen Quadranten vier gleiche absolute Werte, von denen zwei positiv und zwei negativ sind. Während durch einen gegebenen Winkel seine Funktionen unzweideutig bestimmt sind, entsprechen jeder gegebenen positiven und ebenso jeder gegebenen negativen Funktion zwei Winkel, die in verschiedenen Quadranten liegen. Handelt es sich um einen Dreieckswinkel, so ist derselbe durch den Kosinus, die Tangente und die Kotangente eindeutig, durch den Sinus hingegen zweideutig bestimmt.

Die Drehung des beweglichen Schenkels kann auch über $360^0$ fortgesetzt werden. Man erhält dadurch Winkel, deren Differenz eine ganze Anzahl von Umdrehungen ist, die also durch $\alpha$ und $\alpha + 2n\pi$ bezeichnet werden können, wenn $n$ eine ganze Zahl ist. Solche Winkel haben gleiche trigonometrische Funktionen.

Es ist also

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2n\pi) &= \sin\alpha,\\ \cos(\alpha + 2n\pi) &= \cos\alpha,\\ \operatorname{tang}(\alpha + 2n\pi) &= \operatorname{tang}\alpha,\\ \cot(\alpha + 2n\pi) &= \cot\alpha.\end{aligned}$$

Dadurch kommen der Aufgabe, zu einer gegebenen Funktion den zugehörigen Winkel zu bestimmen, unendlich viele Lösungen zu. Für die Gesamtgruppe der trigonometrischen Funktionen wiederholen sich die Werte nach $2\pi$; sie sind daher periodisch. Berücksichtigt man die Änderung des Wertes einer einzigen Funktion, so ist für den Sinus und den Kosinus die Periodizität an $2\pi$, für die Tangente und die Kotangente hingegen an $\pi$ gebunden.

§. **311.** Zwei Winkel, deren Differenz $90^0$ beträgt.

Die allgemeine Form zweier solcher Winkel ist $\alpha$ und $90^0 + \alpha$.

Ist (Fig. 150) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$ und $M_2M_4 \perp M_1M_3$, so ist $AOM_2 = 90^0 + \alpha$. Man hat dann, da $\triangle M_2P_2O \cong \triangle OP_1M_1$ ist,

$$\begin{aligned}\sin(90^0 + \alpha) &= M_2P_2 = OP_1 = \cos\alpha.\\ \cos(90^0 + \alpha) &= -OP_2 = -M_1P_1 = -\sin\alpha.\end{aligned}$$

Nimmt man $\alpha$ gleich dem stumpfen Winkel $AOM_2$ an, so ist $AOM_3 = 90^0 + \alpha$, und wegen $\triangle M_3P_3O \cong \triangle OP_2M_2$

$$\begin{aligned}\sin(90^0 + \alpha) &= -M_3P_3 = -OP_2 = \cos\alpha,\\ \cos(90^0 + \alpha) &= -OP_3 = -M_2P_2 = -\sin\alpha.\end{aligned}$$

Setzt man endlich $AOM_3 = \alpha$, daher $AOM_4 = 90^0 + \alpha$, so hat man, da $\triangle M_4P_4O \cong \triangle OP_3M_3$ ist,

$$\begin{aligned}\sin(90^0 + \alpha) &= -M_4P_4 = -OP_3 = \cos\alpha,\\ \cos(90^0 + \alpha) &= OP_4 = M_3P_3 = -\sin\alpha.\end{aligned}$$

Es ist daher allgemein für jeden Winkel $\alpha$

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^0 + \alpha) &= \cos\alpha\\ \cos(90^0 + \alpha) &= -\sin\alpha.\end{aligned}\right\}\ldots\ 10).$$

Daraus folgt auch

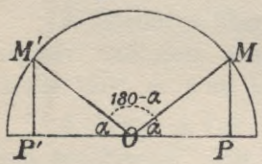
$$\operatorname{tang}(90^0 + \alpha) = -\cot\alpha \text{ und } \cot(90^0 + \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$$

§. 312. Supplementwinkel.

Macht man $M'OP' = MOP = \alpha$ (Fig. 151), so ist $M'OP =$ $= 180^0 - \alpha$. Wird $OM = 1$ angenommen, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(180^0 - \alpha) = M'P' = MP = \sin\alpha, \\ \cos(180^0 - \alpha) = -OP' = -OP = -\cos\alpha; \\ \text{daher ist } \operatorname{tang}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha, \\ \qquad\qquad \cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha. \end{array}\right\} \ldots . 11)$$

Fig. 151.




Die Funktionen eines stumpfen Winkels sind daher denselben Funktionen des supplementären spitzen Winkels jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich, mit Ausnahme des Sinus, der dasselbe Vorzeichen hat.

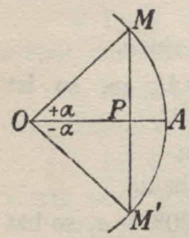
In ähnlicher Weise lassen sich die Beziehungen zwischen den Funktionen des spitzen Winkels $\alpha$ und der Winkel $2R + \alpha$ und $4R - \alpha$ ermitteln.

Aus diesen Beziehungen und aus §. 297 ist zu ersehen, daß die Funktionen aller Winkel aus jenen von $0^0 \ldots . . 45^0$ abgeleitet werden können.

§. 313. Negative Winkel.

Werden die Winkel, welche (Fig. 152) durch die Drehung des beweglichen Schenkels von $A$ gegen $M$ (dem Uhrzeiger entgegen) entstehen, als positiv betrachtet, so müssen die Winkel, welche durch die Drehung des beweglichen Schenkels nach der entgegengesetzten Richtung von $A$ nach $M'$ entstehen, als negativ angesehen werden.

Fig. 152.




Ist daher der Winkel $AOM' = AOM$ und setzt man $AOM = +\alpha$, so ist $AOM' = -\alpha$. Nimmt man $OM = OM' = 1$ an und verbindet $M$ und $M'$, so ist $OP$ die Symmetrale von $MM'$; es ist

$$\sin\alpha = MP,\ \sin(-\alpha) = -M'P = -MP \text{ und}$$
$$\cos\alpha = OP,\ \cos(-\alpha) = OP;$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{mithin } \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \quad \cos\alpha, \\ \text{daher} \\ \qquad \operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha. \end{array}\right\} \ldots . 12)$$

Die Funktionen negativer Winkel sind gleich denselben Funktionen der positiven Winkel, doch mit entgegengesetztem Vorzeichen, mit Ausnahme des Kosinus, der dasselbe Vorzeichen behält.

§. **314.** Aufgaben.

1. Die Winkel in den ersten vier Quadranten zu konstruieren, wenn $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.
2. Ebenso, wenn $\sin\alpha = +\frac{4}{5}$.
3. Ebenso, wenn $\operatorname{tang}\alpha = +3$, $\operatorname{tang}\alpha = -3$.
4. Ebenso, wenn $\cot\alpha = +4$, $\cot\alpha = -4$.
5. Wenn $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, die zugehörigen Werte von $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\cot\alpha$ zu berechnen, wenn $\alpha$ *a)* im ersten, *b)* im zweiten Quadranten liegt.
6. Wenn $\operatorname{tang}\alpha = -4$, die zugehörigen Werte von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cot\alpha$ zu berechnen, wenn $\alpha$ *a)* im 2., *b)* im 4. Quadranten liegt.
7. Drücke durch Funktionen von spitzen Winkeln aus:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a)* sin 125°, | *b)* sin 200°, | *c)* sin 430°, | *d)* sin 98° 12′; |
| *e)* cos 139°, | *f)* cos 288°, | *g)* cos 538°, | *h)* cos 110° 38′ 42″; |
| *i)* tang 91°, | *k)* tang 199°, | *l)* tang 620°, | *m)* tang 159° 9′ 30″; |
| *n)* cot 163°, | *o)* cot 315°, | *p)* cot 726°, | *q)* cot 128° 41′ 55″! |

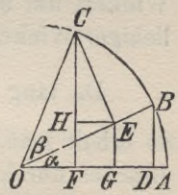
8. Die Funktionen eines Winkels von *a)* 120°, *b)* 135°, *c)* 150° zu bestimmen.

## §. 315. Funktionen der Summe zweier Winkel.

*a)* $\alpha$ und $\beta$ (Fig. 153 *a*) seien spitze Winkel und $\alpha + \beta < 90°$.

Ist W. $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, so ist $AOC = \alpha + \beta$. Zieht man nun $BD \perp OA$, $CE \perp OB$, $CF \perp OA$, $EG \perp OA$ und $EH \perp CF$, so ist

Fig. 153 *a*.



$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{CF}{OC} = \frac{EG + CH}{OC} = \frac{EG}{OC} + \frac{CH}{OC},$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OF}{OC} = \frac{OG - EH}{OC} = \frac{OG}{OC} - \frac{EH}{OC}.$$

Nun ist

$$\frac{EG}{OC} = \frac{EG}{OE}\cdot\frac{OE}{OC} = \sin\alpha\cos\beta, \quad \frac{CH}{OC} = \frac{CH}{CE}\cdot\frac{CE}{OC} = \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\frac{OG}{OC} = \frac{OG}{OE}\cdot\frac{OE}{OC} = \cos\alpha\cos\beta, \quad \frac{EH}{OC} = \frac{EH}{CE}\cdot\frac{CE}{OC} = \sin\alpha\sin\beta,$$

daher

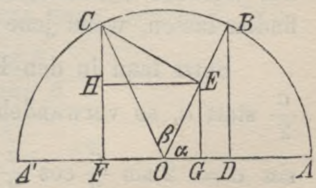
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \;\ldots .\; 13)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \;\ldots .\; 14).$$

*b)* $\alpha$ und $\beta$ seien spitze Winkel und $\alpha + \beta > 90°$ (Fig. 153 *b*).

In diesem Falle bleibt die Beweisführung mit allen ihren Folgerungen dieselbe wie oben, mit alleiniger Ausnahme der Vorzeichen, in welchen während der Entwicklung eine Verschiedenheit eintritt, die sich aber in den Endresultaten wieder behebt. Die obigen Formeln gelten also für alle spitzen Winkel $\alpha$ und $\beta$.

Fig. 153 *b*.



*c)* Gelten nun die Formeln 13) und 14) für irgend zwei Winkel $\alpha$ und $\beta$, so gelten sie auch noch, wenn einer derselben um $90^0$ vergrößert wird, wenn z. B. $\alpha$ in $\alpha' = 90^0 + \alpha$ übergeht. Denn

$$\sin(\alpha' + \beta) = \sin(90^0 + \alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) \text{ (§. 311)},$$
$$\cos(\alpha' + \beta) = \cos(90^0 + \alpha + \beta) = -\sin(\alpha + \beta);$$

somit
$$\sin(\alpha' + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha' + \beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Nun ist
$$\cos\alpha = \sin(90^0 + \alpha) \text{ (§. 311)} = \sin\alpha',$$
$$\sin\alpha = -\cos(90^0 + \alpha) = -\cos\alpha'; \text{ daher}$$
$$\sin(\alpha' + \beta) = \sin\alpha'\cos\beta + \cos\alpha'\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha' + \beta) = \cos\alpha'\cos\beta - \sin\alpha'\sin\beta.$$

Hieraus folgt aber, daß die Formeln 13) und 14) allgemein gültig sind. Denn, da sie für die Summe je zweier spitzer Winkel gelten, so gelten sie auch, wenn einer dieser Winkel um $90^0$ wächst, also gelten sie auch für jede wiederholte Vergrößerung des einen oder des andern Winkels um $90^0$; folglich sind sie allgemein für die Summe zweier beliebiger Winkel gültig.

Da $\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$ ist, so erhält man, wenn man den Zähler und den Nenner des letzteren Bruches durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividiert,

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} \ldots 15).$$

Ebenso findet man

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha} \ldots 16).$$

**§. 316.** Funktionen von doppelten und halben Winkeln.

Setzt man in den Formeln 13) bis 16) $\beta = \alpha$, so erhält man

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ldots 17) \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ldots 18)$$
$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha} \ldots 19) \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \ldots 20),$$

aus welchen Gleichungen sich die Funktionen des doppelten Winkels finden lassen, wenn jene des einfachen Winkels bekannt sind.

Setzt man in den Formeln 17) und 18) überall $\alpha$ statt $2\alpha$, daher $\frac{\alpha}{2}$ statt $\alpha$, so verwandeln sich dieselben in die folgenden:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \ldots 21) \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \ldots 22).$$

Da $\quad 1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ (nach 7) und

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \text{ ist,}$$

so findet man, wenn diese beiden Gleichungen addiert und subtrahiert werden,

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \ldots . 23) \qquad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \ldots 24),$$

$$\text{daher } \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \ldots . 25) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \ldots 26).$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt ferner durch Division:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \ldots . 27) \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \ldots 28).$$

In den Gleichungen 25 bis 28 aus der Größe von $\alpha$ das Vorzeichen zu bestimmen.

Mittels der Formeln 25) bis 28) kann man die Funktionen des halben Winkels bestimmen, wenn der Kosinus des ganzen Winkels bekannt ist.

§. 317. Differenz zweier Winkel.

Es ist $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$.

Wendet man auf diese Summe die Gleichungen 13) und 14) an, so erhält man

$$\sin \alpha = \sin (\alpha - \beta) \cos \beta + \cos (\alpha - \beta) \sin \beta,$$
$$\cos \alpha = \cos (\alpha - \beta) \cos \beta - \sin (\alpha - \beta) \sin \beta.$$

Löst man diese zwei Gleichungen auf, indem man in denselben $\sin (\alpha - \beta)$ und $\cos (\alpha - \beta)$ als die beiden Unbekannten betrachtet, so ergibt sich, da $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ ist,

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \ldots . 29)$$
$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \ldots . . 30),$$

welche Formeln, sowie jene in 13) und 14), aus denen sie abgeleitet wurden, allgemein gültig sind.

Die Gleichungen 29) und 30) können auch in gleicher Weise wie die Gleichungen 13) und 14) in §. 315. selbständig entwickelt werden.

Aus den Formeln 29) und 30) erhält man dann wie in §. 315

$$\operatorname{tang} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta} \ldots . 31)$$

$$\cot (\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha} \ldots 32).$$

## §. 318. Summe und Differenz der Winkelfunktionen.

Aus den Formeln 13), 14), 29) und 30) erhält man durch Addition und Subtraktion

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta, \\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta, \\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta, \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$\alpha+\beta=\varphi, \qquad \text{daher } \alpha = \tfrac{1}{2}(\varphi+\psi),$$
$$\alpha-\beta=\psi, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \text{ setzt,}$$

$$\sin\varphi+\sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 33)$$
$$\sin\varphi-\sin\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 34)$$
$$\cos\varphi+\cos\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 35)$$
$$\cos\varphi-\cos\psi = -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 36).$$

Aus 33) und 34) folgt durch Division:

$$\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \ldots . 37)$$

$$\frac{\sin\varphi\pm\sin\psi}{\cos\varphi+\cos\psi} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi\pm\psi) \ldots . 38).$$

### §. 319. Aufgaben:

1. Berechne aus $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ die Funktionen des Winkels von $15^0$!
2. Bestimme aus $\sin 30^0$ und $\sin 18^0$ den Sinus von $12^0$, $48^0$, $42^0$, $78^0$!
3. Die Funktionen eines Winkels von $36^0$ zu bestimmen.
4. Bestimme aus $\sin 36^0$ und $\sin 30^0$ den Sinus von $6^0$, $84^0$, $66^0$, $24^0$!
5. Verwandle

| | |
|---|---|
| *a*) $\cos\alpha + \frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}$ | in einen Ausdruck, der nur $\sin\alpha$ enthält; |
| *b*) $\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\alpha}$ | „ „ „ „ „ $\cos\alpha$ „ ; |
| *c*) $1-\cos^2\alpha\cot^2\alpha(\operatorname{tang}^2\alpha-1)$ | „ „ „ „ „ $\operatorname{tang}\alpha$ „ ; |
| *d*) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{tang}^2\alpha(\cot^2\alpha-1)$ | „ „ „ „ „ $\cot\alpha$ „ ! |

Die Richtigkeit folgender Formeln zu beweisen:

6. $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$.
7. $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tang}^2\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$.
8. $\operatorname{tang}(45^0\pm\alpha) = \frac{1\pm\operatorname{tang}\alpha}{1\mp\operatorname{tang}\alpha}$.
9. $\cot(45^0\pm\alpha) = \frac{\cot\alpha\mp 1}{\cot\alpha\pm 1}$.
10. $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tang}\alpha$.
11. $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \cot\alpha$.
12. $\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tang}^2\alpha}{2}$.
13. $\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{\cot^2\alpha-1}{2}$.
14. $\operatorname{tang}\alpha\pm\operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.
15. $\cot\alpha\pm\cot\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

16. $\dfrac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{\cot\alpha \pm \cot\beta} = \pm \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta.$

17. *a*) $\sin\alpha \pm \cos\alpha$, *b*) $1 \pm \sin\alpha$ in ein Produkt zu verwandeln.

18. $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\alpha.$ $\sin\beta\sin\gamma.$

19. $\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\alpha+\gamma-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=$ $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Ferner für $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ zu beweisen:

20. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}.$

21. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}.$

22. $\cos\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\beta}{2}+\cos\dfrac{\gamma}{2}=4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{4}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{4}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}.$

23. $\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta+\operatorname{tang}\gamma=\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma.$

24. $\cot\dfrac{\alpha}{2}+\cot\dfrac{\beta}{2}+\cot\dfrac{\gamma}{2}=\cot\dfrac{\alpha}{2}\cot\dfrac{\beta}{2}\cot\dfrac{\gamma}{2}.$

Wie ergeben sich die Ausdrücke 22. und 24. aus 20. und 23. durch Substitution?

25. Die Formel in §. 305 $f=\dfrac{c^2}{2}\sin\beta\cos\beta$ so umzuformen, daß nur eine einzige Funktion von $2\beta$ in derselben vorkommt.

## §. 320. Goniometrische Gleichungen.

Bestimmungsgleichungen, welche goniometrische Funktionen von unbekannten Winkeln enthalten, heißen goniometrische Gleichungen. Kommt nur ein unbekannter Winkel vor, so hat man die Gleichung so zu transformieren, daß sie nur eine einzige Function dieses Winkels enthält. Kommen mehrere unbekannte Winkel vor, so leite man aus den gegebenen Gleichungen solche ab, welche nur eine Funktion eines jeden der unbekannten Winkel oder von Verbindungen derselben enthalten.

Beispiele. 1. $2\cos x=\cot x.$

Substituiert man $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, so ergibt sich $2\cos x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,

$$\text{daher } \cos x\left(2-\frac{1}{\sin x}\right)=0,\ \sin x=\tfrac{1}{2},\ \cos x=0,$$

wodurch der Winkel $x$ bestimmt ist.

Aus $\sin x=\frac{1}{2}$ folgt $x=30^0$. Dies ist jedoch nicht der einzige Wert von $x$. Da in den 4 Quadranten noch ein zweiter Winkel vorkommt, welcher denselben Sinus $\frac{1}{2}$ hat, nämlich der Supplementwinkel von $30^0$, so ist $x=150^0$ ein zweiter Wert von $x$. Wird aber der Begriff des Winkels auch auf Winkel, welche größer als $360^0$ sind, und auf negative Winkel ausgedehnt, so hat man als allgemeine Lösungen $x=30^0\pm n.360^0$ und $x=150^0\pm n.360^0$, wenn $n=0$ oder gleich einer beliebigen ganzen Zahl ist. $x$ kann demnach bei diesem erweiterten Begriffe des Winkels unzählig viele Werte haben; gewöhnlich beschränkt man sich jedoch auf jene zwei Werte, welche in den ersten vier Quadranten liegen. Ebenso ergeben sich aus $\cos x=0$ die Lösungen $x=90^0$, $270^0$.

2. $a \sin(\alpha + x) = b \cos(\beta + x)$.

Man erhält

$a \sin\alpha \cos x + a \cos\alpha \sin x = b \cos\beta \cos x - b \sin\beta \sin x$, oder
$\sin x (a \cos\alpha + b \sin\beta) = \cos x (b \cos\beta - a \sin\alpha)$, daher

$$\operatorname{tang} x = \frac{b \cos\beta - a \sin\alpha}{a \cos\alpha + b \sin\beta}.$$

3. $a \sin x + b \cos x = c$.

Es ist $b \cos x = c - a \sin x$; quadriert man diese Gleichung und setzt $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, so ergibt sich:

$$\sin x = \frac{a\,c \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Es muss untersucht werden, welche von den für den Winkel $x$ gefundenen Werte der Gleichung $a \sin x + b \cos x = c$ und welche der Gleichung $a \sin x - b \cos x = c$ Genüge leisten; z. B. $2 \sin x + \sqrt{3} \cos x = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Einfacher gestaltet sich die Auflösung durch Einführung eines Hilfswinkels. Bringt man die gegebene Gleichung auf die Form

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

und bestimmt einen Hilfswinkel $\varphi$ so, daß $\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a}$ ist, so ergibt sich

$\sin x + \operatorname{tang} \varphi \cos x = \frac{c}{a}$, oder $\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi = \frac{c}{a} \cos\varphi$,

folglich $$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos\varphi.$$

Aus dieser Gleichung kann, da $\varphi$ bekannt ist, der Wert von $x + \varphi$, also auch der Wert von $x$ berechnet werden.

4. Es seien zwei Gleichungen gegeben:

$$\sin^2 x + \cos^2 y = a \quad \text{und} \quad \cos^2 x - \sin^2 y = b.$$

Wird in der zweiten Gleichung $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ und $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ substituiert, so erhält man

$$-\sin^2 x + \cos^2 y = b.$$

Aus dieser und der ersten der gegebenen Gleichungen ergibt sich dann $2 \sin^2 x = a - b$ und $2 \cos^2 y = a + b$, folglich

$$\sin x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a - b)} \quad \text{und} \quad \cos y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a + b)}.$$

5. $x + y = \beta$; $\sin x - \sin y = n$.

Es ist $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}(x-y), \text{ also}$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}(x-y) = n \quad\text{und}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{n}{2\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Aus dieser Gleichung kann man $\frac{1}{2}(x-y)$ finden und erhält dann aus $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}\beta$ und $\frac{1}{2}(x-y)$ die Werte von $x$ und $y$.

§. **321.** Aufgaben.

*a)* Folgende goniometrische Gleichungen aufzulösen:

1. $2\sin x = \operatorname{tang} x$.
2. $2\sin x = 3\cot x$.
3. $\sin x = \cos^2 x$.
4. $\operatorname{tang} x - \cot x = 4\sqrt{2}$.
5. $2(\operatorname{tang} x + \cot x) = 5$.
6. $2\operatorname{tang} y + 3\cot y = 5$.
7. $\sin(\varphi - x) = \cos(\varphi + x)$.
8. $\sin(\alpha - x) = \cos(\beta + x)$.
9. $\sin x + \operatorname{tang} x = 1 + \cos x$.
10. $\cot x - \cos x = 1 - \sin x$.
11. $5\sin^2 x + \cos^2 x = 2$.
12. $(\cos x - \sin x)^2 = \sin 2x$.
13. $1 + \cos x = \sqrt{3}\cos\frac{1}{2}x$.
14. $1 - \cos 2x = (\sqrt{2} - 1)\sin 2x$.
15. $3(\cos y + \cot y) = 2(1 + \sin y)$.
16. $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \frac{5}{4}\cos^2 x = 0$.
17. $\dfrac{\operatorname{tang} 2x}{\operatorname{tang} x} - \dfrac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} 2x} = 2$.
18. $\sin x = \sqrt{2}\sin y$, $\operatorname{tang} x = \dfrac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{tang} y$.
19. $\sin x + \sin y = 1$, $\cos x + \cos y = 1{\cdot}7$.
20. $x + y = 60^0$, $\cos x + \cos y = 1{\cdot}71$.
21. $x + y = 45^0$, $\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y = \frac{1}{8}$.
22. $x + y = 120^0$, $\sin x \sin y = 0{\cdot}5$.
23. $x + y = 60^0$, $\operatorname{tang} y = 2\operatorname{tang} x$.
24. $x + y = 45^0$, $\sin x\cos y = 0{\cdot}53$. Man benutze die Gleichung $\sin(x+y) + \sin(x-y) = ?$
25. $x - y = 14^0$, $\cos x\cos y = 0{\cdot}76$.
26. $5^{\sin x} + 3^{\sin y} = 4$, $3.5^{\sin x} - 2.3^{\sin y} = 5$.
27. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck $a^2 = bc$ ist, wie groß sind die Winkel desselben?

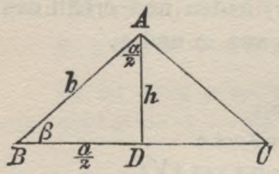
*b)* Durch Einführung eines Hilfswinkels folgende Ausdrücke für logarithmische Rechnung geeignet zu machen.

1. $x = \dfrac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}$, für $a > \sqrt{b}$. Man setze $\sqrt{b} = a\cos\varphi$.
2. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, für $a > b$.
3. $x = \sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b}$, für $a > b$.
4. $x = a\sin\alpha \pm b\cos\alpha$. Man setze $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tang}\varphi$.
5. $x = \dfrac{a}{\sqrt{b - c\cos\alpha}}$.
6. $x = \dfrac{a}{\sqrt{b + c\cos\alpha}}$.
7. $x = \sin\alpha\sin\beta \pm \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Man hebe $\sin\alpha$ heraus und setze $\cot\alpha\cos\gamma = \operatorname{tang}\varphi$.
8. $x = m\sin\alpha - \cos\alpha$.
9. $x = \sqrt{a^2 + 2ab\cot\alpha}$.
10. $x = \sqrt{a^2 - 2ab\operatorname{tang}\alpha}$.

**Auflösung des gleichschenkligen Dreieckes und Berechnung der regelmäßigen Polygone.**

§. **322.** Zur Bestimmung eines gleichschenkligen Dreieckes $ABC$ (Fig. 154) müssen zwei voneinander unabhängige Stücke gegeben sein.

Fig. 154.




Da durch die zur Grundlinie $BC$ gezogene Höhe $AD$ das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke zerfällt, so kann jede Aufgabe über das gleichschenklige Dreieck auf die Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes zurückgeführt werden.

Ist $a$ die Grundlinie, $b$ der Schenkel, $\alpha$ der Winkel am Scheitel, $\beta$ der Winkel an der Grundlinie und $f$ der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreieckes $ABC$, so ergeben sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke $ADB$ folgende Auflösungsgleichungen:

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^0, \qquad a = 2b \sin\frac{\alpha}{2} = 2b \cos\beta,$$

$$h = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a}{2} \operatorname{tang}\beta = b \sin\beta,$$

$$f = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a^2}{4} \operatorname{tang}\beta = \frac{b^2}{2} \sin 2\beta.$$

§. **323.** Beispiele zur Berechnung gleichschenkliger Dreiecke:

| | $a$ | $b$ | $h$ | $\alpha$ | $\beta$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 88 | 125 | 117 | 41° 13′ 6″ | 69° 23′ 27″ | 5148 |
| 2. | 240 | 241 | 209 | 59° 43′ 32″ | 60° 8′ 14″ | 25080 |
| 3. | 672 | 505 | 377 | 83° 25′ 4″ | 48° 17′ 28″ | 126672 |
| 4. | 3·12 | 2·05 | 1·33 | 99° 6′ | 40° 27′ | 2·0748 |
| 5. | 4·5 | 2·3995 | 0·8338 | 139° 20′ | 20° 20′ | 1·876 |

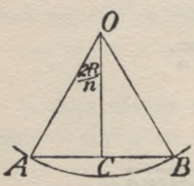
6. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Summe der Grundlinie und der auf ihr stehenden Höhe doppelt so groß als der Schenkel; berechne seine Winkel!

§. **324.** Das regelmäßige Polygon.

Aus der Seite und der Seitenzahl eines regelmäßigen Polygones den Radius des ein- und umgeschriebenen Kreises und den Flächeninhalt zu berechnen.

$AB = s$ (Fig. 155) sei die Seite eines regelmäßigen $n$-Eckes, $AO = R$ der Radius des umgeschriebenen, $OC = r$ der des eingeschriebenen Kreises, $f$ der Flächeninhalt. Es ist:

Fig. 155.




$$r = \frac{s}{2} \cot\frac{180^0}{n}, \qquad R = \frac{s}{2 \sin\frac{180^0}{n}},$$

$$f = \frac{ns}{2} r = \frac{ns^2}{4} \cot\frac{180^0}{n}.$$

§. 325. Zahlenbeispiele zur Berechnung regulärer Vielecke.

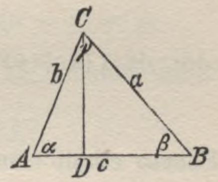
| | $n$ | $s$ | $r$ | $R$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 5 | 2·6042 | 1·7922 | 2·2153 | 11·669. |
| 2. | 8 | 1·5 | 1·8107 | 1·9598 | 10·864. |
| 3. | 10 | 1·5596 | 2·4 | 2·5235 | 18·715. |
| 4. | 15 | 0·83165 | 1·9563 | 2· | 12·202. |
| 5. | 24 | 0·39251 | 1·4907 | 1·5036 | 7·0213. |

6. Ein reguläres Zwölfeck ist flächengleich mit einem regulären Sechsecke, dessen Seite $s = 4$ ist; wie groß ist der Halbmesser des dem regulären Zwölfecke eingeschriebenen Kreises?

## Das Dreieck überhaupt.

§. 326. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel (Sinus-Satz).

Fig. 156.




Zieht man $CD \perp AB$ (Fig. 156), so ist in den rechtwinkligen Dreiecken $BDC$ und $ADC$

$CD = a \sin\beta$, $CD = b \sin\alpha$, mithin

$$a \sin\beta = b \sin\alpha.$$

Ebenso erhält man

$$\left.\begin{aligned} a : b &= \sin\alpha : \sin\beta. \\ a : c &= \sin\alpha : \sin\gamma. \\ b : c &= \sin\beta : \sin\gamma. \end{aligned}\right\} \ldots \text{I)}$$

Man beweise die Richtigkeit der ersten Proportion, wenn $\alpha$ stumpf ist.

Mithin ist $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, d. h., das Verhältnis zwischen einer Seite und dem Sinus ihres Gegenwinkels ist für dasselbe Dreieck eine konstante Größe; sie heißt die Konstante des Dreieckes.

Da in Fig. 101 $\sphericalangle\, CDB = CAB = \alpha$ ist, so ist $a = 2\,R \,.\, \sin\alpha$, und $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2\,R$. Da nun $a$ und $\alpha$ auch im Dreieck $ABC$ den gleichen Wert haben, so ist auch für dieses Dreieck $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2\,R$, d. h. die Konstante des Dreieckes ist gleich dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises.

§. 327. In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels (Kosinus-Satz).

Zieht man (Fig. 156) $CD \perp AB$, so ist

$$a^2 = CD^2 + BD^2.$$

Nun ist $CD = b \sin \alpha$, $BD = c - b \cos \alpha$; daher

$$a^2 = b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha,$$

oder, da $b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = b^2$ ist,

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \\ \text{Ebenso erhält man}\quad b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}\right\} \ldots \text{II)}$$

Fällt die Normale $CD$ außerhalb des Dreieckes, so ist dann $CD = b \sin (180^0 - \alpha)$ und $BD = c + b \cos (180^0 - \alpha)$, woraus sich dasselbe Resultat wie oben ergibt. Die Gleichungen II) gelten demnach allgemein.

§. 328. Mollweidesche Gleichungen.

Es ist $\frac{a+b}{c} = \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta}{2R \sin \gamma} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma} =$

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma},$$

oder, da $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$, also $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos \frac{1}{2}\gamma$ ist,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma}. \\ \text{Ebenso erhält man}\quad &\\ &\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma}. \end{aligned}\right| \ldots \text{III)}$$

Drücke diese Formeln mit Worten aus!

§. 329. Aus $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ ergibt sich auch

$(a + b) : (a - b) = (\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta)$, oder (§. 318, 37)

$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \ldots$ IV).

Dieser Satz führt den Namen Tangenten-Satz und sagt:

Die Summe zweier Seiten eines Dreieckes verhält sich zur Differenz derselben wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel.

Der Tangenten-Satz kann auch durch Division aus den Formeln III abgeleitet werden.

**Auflösungsfälle.**

Für das schiefwinklige Dreieck hat man entsprechend den Kongruenzsätzen vier Auflösungsfälle.

§. 330. I. Gegeben eine Seite $a$ und zwei Winkel $\beta$ und $\gamma$.

Man erhält erstlich den dritten Winkel $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Ferner folgen aus $b : a = \sin \beta : \sin \alpha$ und $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$

die Gleichungen $\qquad b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ und $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$.

Z. B. $a = 788$, $\beta = 55^\circ 43' 18''$, $\gamma = 72^\circ 12' 35''$. Man erhält $\alpha = 52^\circ\ 4'\ 7''$.

$$\begin{array}{rlrl}
\log a &= 2\cdot 89\,653 & \log a &= 2\cdot 89\,653 \\
\log \sin \beta &= \underline{9\cdot 91\,715} - 10 & \log \sin \gamma &= \underline{9\cdot 97\,872} - 10 \\
&\phantom{=}\ 2\cdot 81\,368 & &\phantom{=}\ 2\cdot 87\,525 \\
\log \sin \alpha &= \underline{9\cdot 89\,694} - 10 & \log \sin \alpha &= \underline{9\cdot 89\,694} - 10 \\
\log b &= 2\cdot 91\,674 & \log c &= 2\cdot 97\,831 \\
b &= 825\cdot 54 & c &= 951\cdot 28.
\end{array}$$

§. **331.** II. Gegeben zwei Seiten $a$ und $b$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\gamma$.

Aus der in §. 329 abgeleiteten Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2}\gamma$$

erhält man $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Dann hat man, da $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ bekannt ist,

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \alpha \text{ und } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \beta.$$

Die Seite $c$ findet man aus $c = \dfrac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$, oder vorteilhafter nach §. 328 aus $c = \dfrac{(a+b)\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$, oder $c = \dfrac{(a-b)\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$.

Es sei z. B. $a = 748$, $b = 375$, $\gamma = 63^\circ 35' 30''$. Man hat

$$\begin{array}{rl}
a + b &= 1123 \\
a - b &= \phantom{1}373 \\
\tfrac{1}{2}\gamma &= \underline{31^\circ 47' 45''} \\
\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) &= 58^\circ 12' 15'' \\
\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \underline{28^\circ 10' 54''} \\
\alpha &= 86^\circ 23'\ \ 9'' \\
\beta &= 30^\circ\ \ 1' 21''.
\end{array}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\begin{array}{rl}
\log (a-b) &= \phantom{1}2\cdot 57\,171 \\
\log \cot \tfrac{1}{2}\gamma &= \underline{10\cdot 20\,766} - 10 \\
&\phantom{=}\ 12\cdot 77\,937 - 10 \\
\log (a+b) &= \underline{\phantom{1}3\cdot 05\,038} \\
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \phantom{1}9\cdot 72\,899 - 10 \\
\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= 28^\circ 10' 54''.
\end{array}$$

Zur Berechnung von $c$ nach den Mollweideschen Gleichungen hat man

$$\begin{array}{rlrl}
\log (a+b) &= 3\cdot 05\,038 & \text{oder} \quad \log (a-b) &= 2\cdot 57\,171 \\
\log \sin \dfrac{\gamma}{2} &= \underline{9\cdot 72\,172 - 10} & \log \cos \dfrac{\gamma}{2} &= \underline{9\cdot 92\,938 - 10} \\
&\phantom{=}\ 12\cdot 77\,210 - 10 & &\phantom{=}\ 12\cdot 50\,109 - 10 \\
\log \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \underline{9\cdot 94\,520} - 10 & \log \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \underline{9\cdot 67\,419} - 10 \\
\log c &= 2\cdot 82\,690 & \log c &= 2\cdot 82\,690
\end{array}$$

$$c = 671\cdot 27.$$

Die Übereinstimmung beider Werte ist eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

**Zusätze.** *a*) Jeder der Winkel $\alpha$ und $\beta$ läßt sich auch einzeln aus $a$, $b$ und $\gamma$ unmittelbar berechnen.

Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ erhält man $b \sin\alpha = a \sin\beta$ oder

$$b \sin\alpha = a \sin(\alpha + \gamma) = a \sin\alpha \cos\gamma + a \cos\alpha \sin\gamma, \text{ daher}$$

$$b \operatorname{tang}\alpha = a \operatorname{tang}\alpha \cos\gamma + a \sin\gamma, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a \sin\gamma}{b - a\cos\gamma}.$$

Die Rechnung nach dieser Formel ist logarithmisch unterbrochen; die Unterbrechung kann jedoch durch Anwendung eines Hilfswinkels beseitigt werden.

Wird für $\gamma < 90^0$ ein Hilfswinkel $\varphi$ so bestimmt, daß $\frac{a\cos\gamma}{b} = \sin^2\varphi$ ist, so erhält man $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b\cos^2\varphi}$.

Für $\gamma > 90^0$ wählt man einen solchen Hilfswinkel $\psi$, daß $-\frac{a\cos\gamma}{b} = \operatorname{tang}^2\psi$ ist; dann hat man $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\gamma\cos^2\psi}{b}$.

*b)* Auch die dritte Seite $c$ kann aus $a$, $b$ und $\gamma$ unabhängig von den Winkeln $\alpha$ und $\beta$ berechnet werden. Es ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\left(1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\right)$$

$$= (a-b)^2 + 4ab\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma = (a-b)^2 . \left[1 + \frac{4ab\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{(a-b)^2}\right].$$

Wird nun ein Hilfswinkel $\varphi$ so bestimmt, daß $\frac{4ab\sin^2\frac{1}{2}\gamma}{(a-b)^2} = \operatorname{tang}^2\varphi$ ist, so hat man $c^2 = \frac{(a-b)^2}{\cos^2\varphi}$, daher $c = \frac{a-b}{\cos\varphi}$.

§. **332.** III. Gegeben zwei Seiten $a$ und $b$, und zwar $a > b$, und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel $\alpha$.

Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ erhält man $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$.

Da $\beta$ durch den Sinus zu bestimmen ist, so kann dafür im allgemeinen entweder der zu diesem Sinus gehörige spitze Winkel oder auch dessen stumpfer Supplementwinkel genommen werden; diese Zweideutigkeit fällt jedoch hier weg, da man weiß, daß $a > b$, also auch $\alpha > \beta$ ist, und somit $\beta$ spitz sein muß, welchen Wert auch $\alpha$ haben mag.

Aus $\alpha$ und $\beta$ erhält man dann $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Die Seite $c$ findet man aus der Gleichung $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Z. B. für $a = 1238$, $b = 519$, $\alpha = 78^0 17' 20''$ ergibt sich

$\beta = 24^0 14' 10''$, $\gamma = 77^0 28' 30''$, ferner $c = 1234 \cdot 2$.

Ist hier nebst $a = 1238$ und $b = 519$ der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel $\beta = 24^0 14' 10''$ gegeben, so erhält man aus der Gleichung $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$, da $\alpha$ spitz oder stumpf sein kann,

entweder $\alpha = 78^\circ 17' 20''$ oder $\alpha = 101^\circ 42' 40''$, folglich
$\gamma = 77^\circ 28' 30''$ „ $\gamma = 54^\circ 3' 10''$.

Aus der Gleichung $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ ergibt sich dann entweder $c = 1234 \cdot 2$ oder $c = 1023 \cdot 5$. — Die Aufgabe läßt also zwei Auflösungen zu. (Vgl. $\frac{a \sin \beta}{b} \gtreqless 1$ mit §. 95, 6.)

§. **333.** IV. Gegeben alle drei Seiten $a$, $b$ und $c$.

Sind die Maßzahlen der Seiten ein- oder zweiziffrig, so kann zur Bestimmung der Winkel der Kosinus-Satz benützt werden.

Z. B. $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$.

Man findet $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{37}{40}$ und $\alpha = 22^\circ 20'$.

Sind hingegen die Maßzahlen der Seiten mehrzifferig, so sind Formeln zu verwenden, welche für die logarithmische Rechnung geeignet sind.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ daher}$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$1 + \cos \alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},$$

somit, da $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ und $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ist,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Setzt man, wie in §. 153, 3, der Kürze wegen $a + b + c = 2s$, so folgt

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

daher

$$\tang \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{r}{s-a}.$$

Ähnliche Formeln erhält man auch für die Funktionen von

$$\frac{\beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}.$$

Ist der gesuchte halbe Winkel sehr nahe an $0^0$, so läßt sich derselbe mittels der Formel für den Kosinus nicht mit gehöriger Schärfe bestimmen, da sich die Kosinus nahe an $0^0$ liegender Winkel nur sehr wenig ändern. Dasselbe gilt bezüglich der Formel für den Sinus, wenn der halbe Winkel sehr nahe an $90^0$ liegt. Am zweckmäßigsten ist es, in allen Fällen die Formeln für die Tangenten anzuwenden.

Es sei z. B. $a = 1011$, $b = 956$, $c = 533$; man hat:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{r}{s-a},\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\beta = \frac{r}{s-b},\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\gamma = \frac{r}{s-c}.$$

$$\begin{array}{rlrl}
a = & 1011 & \log\,(s-a) = & 2\cdot 37\,840 \\
b = & 956 & \log\,(s-b) = & 2\cdot 46\,835 \\
c = & \underline{533} & \log\,(s-c) = & \underline{2\cdot 85\,552} \\
2s = & 2500 & & 7\cdot 70\,227 \\
s = & 1250 & \log s = & \underline{3\cdot 09\,691} \\
s-a = & 239 & \log r^2 = & 4\cdot 60\,536 \\
s-b = & 294 & \log r = & 2\cdot 30\,268 \\
s-c = & 717 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\alpha = 9\cdot 92\,428-10 \\
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\beta = 9\cdot 83\,433-10 \\
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\gamma = \underline{9\cdot 44\,716-10}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\tfrac{1}{2}\,\alpha = 40^0\;\;1'48'', & \text{daher} & \alpha = 80^0\;\;3'36''; \\
\tfrac{1}{2}\,\beta = 34^0 19' 40'', & \text{,,} & \beta = 68^0 39' 20''; \\
\tfrac{1}{2}\,\gamma = 15^0 38' 32'', & \text{,,} & \gamma = 31^0 17'\;\;4''.
\end{array}$$

§. **334.** Berechnung des Flächeninhaltes eines schiefwinkligen Dreieckes.

Ist $h$ die zur Seite $a$ gehörige Höhe, so ist $h = b \sin \gamma$, daher

$$f = \frac{ah}{2} = \frac{ab}{2} \sin \gamma \ldots .1),$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Nach diesem Satze kann man für den zweiten Auflösungsfall den Flächeninhalt aus den gegebenen Stücken unmittelbar berechnen; in den übrigen Fällen müssen zuerst die nicht gegebenen Stücke der obigen Formel gesucht werden.

Für den vierten Fall liefert schon die Planimetrie (§. 153, 3) eine zur unmittelbaren Berechnung brauchbare Formel, die auch trigonometrisch abgeleitet werden kann. Es ist

$$f = \frac{ab}{2} \sin \gamma = \frac{ab}{2} \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2}\,\gamma \cos \tfrac{1}{2}\,\gamma,$$

daher mit Rücksicht auf §. 333

$$f = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \ldots 2).$$

Ist in diesem Falle zur Bestimmung der Winkel der Halbmesser $r$ des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises benützt worden, so hat man zur Berechnung des Flächeninhaltes (§. 166, 2) die einfachere Formel

$$f = rs \ldots 3).$$

## §. 335. Beispiele zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke.

Man wähle in den nachfolgenden Beispielen 1—8 solche Bestimmungsstücke, welche die Aufgabe zu einer bestimmten machen.

| | $a$ | $b$ | $c$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 17 | 113 | 120 | 7° 37′ 40″ | 61° 55′ 40″ | 110° 26′ 40″ | 900 |
| 2. | 119 | 145 | 156 | 46° 23′ 50″ | 61° 55′ 40″ | 71° 40′ 30″ | 8190 |
| 3. | 388 | 389 | 195 | 75° 10′ 52″ | 75° 45′ 0″ | 29° 4′ 8″ | 36666 |
| 4. | 569 | 281 | 680 | 55° 17′ 31″ | 23° 57′ 8″ | 100° 45′ 21″ | 78540 |
| 5. | 330·1 | 412·2 | 371·3 | 49° 29′ 50″ | 71° 42′ 42″ | 58° 47′ 28″ | 58188 |
| 6. | 15·47 | 17·39 | 22·88 | 42° 30′ 44″ | 49° 25′ 49″ | 88° 3′ 27″ | 134·43 |
| 7. | 1·275 | 1·2753 | 0·0565 | 88° 25′ 36″ | 89° 2′ 5″ | 2° 32′ 19″ | 0·03601 |
| 8. | 1·2344 | 1·4303 | 0·9332 | 58° 32′ 56″ | 81° 17′ 28″ | 40° 9′ 36″ | 0·56932. |

9. Folgende Dreiecke aufzulösen: 1. $a = 438·2$, $b = 200$, $\beta = 30°$; 2. $a = 438·2$, $b = 219·1$, $\beta = 30°$; 3. $a = 438·2$, $b = 356·8$, $\beta = 30°$; 4. $a = 46·2$, $b = 30·6$, $\beta = 54°36'$; 5. $a = 46·2$, $b = 40·23$, $\beta = 54°36'$.

In dem Dreiecke $ABC$ (Fig. 156) sei $CD = h$, $BD = p$, $AD = q$. Man löse das Dreieck auf, wenn gegeben ist:

10. $a$, $b$ und $h$; 11. $b$, $h$ und $p$; 12. $p$, $q$ und $h$;
13. $h$, $\alpha$ und $\beta$; 14. $p$, $q$ und $\gamma$; 15. $f$, $a$, $h_b$.

16. Ein Dreieck aufzulösen, wenn eine Schwerlinie und die Winkel, welche sie mit den anstoßenden Seiten bildet, gegeben sind.

Man verlängere die Schwerlinie um ihre eigene Länge etc.

17. $h_a$, $h_b$, $\alpha$;

$$a h_a = b h_b, \ \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}; \text{ etc.}$$

18. Aus einer Seite $a$ und zwei Winkeln $\alpha$, $\beta$ eines Dreieckes die zu der Seite $a$ gehörige Höhe $h$ und den Flächeninhalt $f$ zu berechnen.

19. Die Seiten eines Dreieckes zu berechnen, wenn der Flächeninhalt $f$ und die Winkel $\alpha$, $\beta$ gegeben sind.

20. Die Formel für tang $\frac{\alpha}{2}$ (§. 333) direkt mit Benützung des Radius des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises abzuleiten.

Verbindet man den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises mit den Berührungspunkten und den Eckpunkten des Dreieckes, so hat eines der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke eine Kathete $r$ und den Winkel $\frac{\alpha}{2}$; die zweite Kathete kann durch Anwendung von § 81, $a$ gefunden werden.

## §. 336. Berechnung eines Dreieckes aus Verbindungen von Bestimmungsstücken.

Sind die Bestimmungsstücke eines Dreieckes nicht unmittelbar gegeben, so kann man zur Auflösung desselben einen zweifachen Weg einschlagen:

*a)* Man konstruiere aus den gegebenen Stücken ein Hilfsdreieck und benütze dasselbe zur Berechnung der noch fehlenden Stücke des aufzulösenden Dreieckes.

*b)* Man benütze Gleichungen zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken des aufzulösenden Dreieckes und berechne aus denselben die noch nicht bekannten Stücke desselben. (Analytische Lösung.)

Beispiele:

1. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen aus $a + b = s$ und $\alpha$.

*a)* Mittels eines Hilfsdreieckes.

Macht man (Fig. 157) $CD = b$, so erhält man das Hilfsdreieck $ABD$, aus welchem die Seite $c$ berechnet werden kann.

$$(a + b) : c = \sin(\alpha + 45^0) : \sin 45^0,$$

$$c = \frac{(a+b)\sin 45^0}{\sin(\alpha + 45^0)} = \frac{s}{\sqrt{2}\sin(\alpha + 45^0)}.$$

Sodann ist $a = c \sin \alpha$ und $b = c \cos \alpha$.

*b)* Durch analytische Lösung.

$$a + b = s;\; a = c \sin \alpha,\; b = c \cos \alpha,$$

$$\text{daher } c \sin \alpha + c \cos \alpha = s$$

$$c = \frac{s}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{s}{\sqrt{2}\sin(\alpha + 45^0)}.$$

Fig. 157.

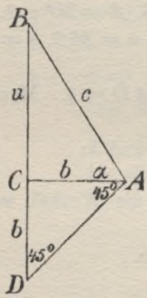
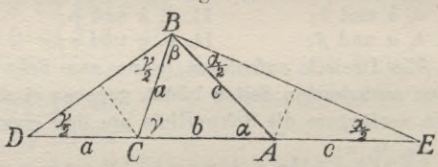



Fig. 158.




2. Ein Dreieck aufzulösen aus dem Umfang $2s$ und den Winkeln desselben.

*a)* Mittels einer Hilfsfigur.

Macht man (Fig. 158) $CD = a$, $AE = c$, so erhält man das Hilfsdreieck $BDE$. Aus demselben ergibt sich für $BD = d$

$$d : 2s = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\left(\beta + \frac{\alpha + \gamma}{2}\right)$$

$$\frac{d}{2} = \frac{s \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(90^0 + \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{s\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Nun ist $\frac{d}{2} = a \cos\frac{\gamma}{2}$, daher $a = \dfrac{s \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} =$

$$\frac{s \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{s \sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Die Seiten $b$ und $c$ sind nach dem Sinussatz:

$$b = \frac{s \sin \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}, \qquad c = \frac{s \sin \gamma}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

*b)* Durch analytische Lösung.

Ist $2R$ der Durchmesser des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises, so ist $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \sin \gamma$; daher

$$2s = 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 8R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$2R = \frac{s}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}. \text{ Mithin } a = \frac{s \sin \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \text{ etc.}$$

Bei der Berechnung eines numerischen Beispieles sucht man zuerst $\log 2R$, sodann die Seiten nach den Gleichungen $a = 2R \sin \alpha$ etc.

§. **337.** Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind (Fig. 73):

1. $a - b = d$ und $\alpha$;
2. $c + a = s$ und $\alpha$;
3. $c - a = d$ und $\alpha$;
4. $a + b + c = 2s$ und $\alpha$;
5. $a + b - c = d$ und $\alpha$;
6. $p - q = d$ und $\alpha$;
7. $a - b = d$ und $p - q = d'$;
8. $p - q = d$ und $h$;
9. $a + b$ und $a : b$.

§. **338.** Ein schiefwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind:

1. $a + b = s, h_c, \alpha$;
2. $a - b = d, h_c, \alpha$;
3. $a + b = s, c, \gamma$. (§. 328, III.) Determination: $c \gtreqless (a + b) \sin \frac{\gamma}{2}$. Man vergleiche das Ergebnis der analytischen Entwicklung mit jenem, das die Konstruktion mittels eines Hilfsdreieckes liefert.
4. $a - b = d, c, \gamma$;
5. $a + b = s, c, \alpha - \beta$;
6. $a - b = d, c, \alpha - \beta$;
7. $a + b = s, \alpha, \beta$. (Bei analytischer Behandlung ist $2R$ zu suchen, oder §. 328.)
8. $a - b = d, \alpha, \beta$;
9. $a + b - c = d, \alpha, \beta$.
Ähnlich wie §. 336, Aufg. 2.
10. $a + b, c, \alpha$.
Man beginne mit $(a + b + c) : (a + b - c) = ?$ Oder Hilfsdreieck und Anwendung von §. 329 auf dasselbe.
11. $a + b = s, R, \gamma$;
12. $a - b = d, R, \gamma$;
13. $a - b = d, R, \alpha - \beta$;
14. $h_a - h_b, \alpha, \beta$. (Vgl. §. 335, 17.)
15. Aus dem Umfang eines Dreieckes $2s$ und den Winkeln desselben die Fläche zu berechnen.
16. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreieckes und der Winkel am Scheitel sind gegeben; das Dreieck aufzulösen: $u = 1682$, $\alpha = 83^0\,25'\,4''$.

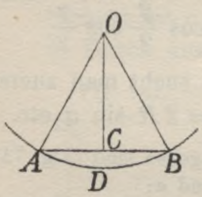
## II. Anwendung der ebenen Trigonometrie.

### 1. Aufgaben aus der Planimetrie.

**§. 339.** Berechnungen von Sehnen, Zentriwinkeln, Kreisausschnitten und Kreisabschnitten.

In einem Kreise (Fig. 159) sei der Halbmesser $OA = r$, die Sehne $AB = s$, der zugehörige Zentriwinkel $AOB = \alpha$; ferner sei $\Delta$ der Flächeninhalt des Dreieckes $AOB$, $F$ der Flächeninhalt des Kreissektors $AOB$ und $f$ der Flächeninhalt des Kreissegments $ADBC$.

Fig. 159.




1. Gegeben $r$ und $s$; zu suchen $\alpha$.

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s}{2r}.$$

2. Gegeben $r$ und $\alpha$; zu suchen $s$, $\Delta$, $F$ und $f$.

$$s = 2r \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\Delta = \frac{r^2}{2}\sin\alpha,\quad F = \frac{r^2\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{180},$$

$$f = F - \Delta = \frac{r^2}{2}\left\{\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right\}.$$

3. Gegeben $s$ und $\alpha$; zu suchen $r$, $\Delta$, $F$ und $f$.

$$r = \frac{s}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},\quad \Delta = \frac{s^2}{4}\cot\tfrac{1}{2}\alpha,\quad F = \frac{s^2\pi}{8\sin^2\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{\alpha}{180},$$

$$f = F - \Delta = \frac{s^2}{4}\left\{\frac{\pi}{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{\alpha}{180} - \cot\tfrac{1}{2}\alpha\right\}.$$

**§. 340.** Aus den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ eines Dreieckes und dem Halbmesser $r$ des ihm eingeschriebenen Kreises die Seiten zu berechnen.

Ist (Fig. 102) $OD = OE = OF = r$ der Halbmesser des dem Dreiecke $ABC$ eingeschriebenen Kreises, so ist

$$BE = r\cot\tfrac{1}{2}\beta,\quad EC = r\cot\tfrac{1}{2}\gamma;\ \text{daher}$$

$$a = r(\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = \frac{r\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{r\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$\frac{r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{r\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = m\sin\alpha,$$

$$\text{wenn } m = \frac{r}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ ist.}$$

Ebenso erhält man

$$b = m\sin\beta,\quad c = m\sin\gamma.$$

§. **341.** Den Flächeninhalt $f$ eines Parallelogramms zu finden, wenn zwei Seiten $a$, $b$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\alpha$ gegeben sind.

Man erhält $f = ab \sin \alpha$.

§. **342.** Den Flächeninhalt $f$ eines Viereckes zu bestimmen, wenn dessen Diagonalen $p$ und $q$ und ihr Winkel $\varphi$ gegeben sind.

Bestimmt man die Flächeninhalte der vier Dreiecke, in welche das Viereck durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, und addiert dieselben, so ergibt sich

$$f = \frac{pq}{2} \sin \varphi.$$

§. **343.** Die Winkel und den Inhalt eines Sehnenviereckes aus den Seiten desselben zu berechnen.

In dem Sehnenvierecke $ABCD$ (Fig. 75) sind die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, die Winkel $A$, $B$, $C$, $D$ der Reihe nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Aus den beiden Dreiecken $ABD$ und $BCD$ erhält man durch Anwendung des Kosinussatzes auf die Seite $BD$:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc} \text{ und}$$

daraus analog mit §. 333, wenn $a + b + c + d = 2s$ gesetzt wird,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}.$$

Wie werden die Winkel $\beta$, $\gamma$, $\delta$ berechnet?

Die Summe der Inhalte der beiden Dreiecke $ABD$ und $BCD$ gibt für den Inhalt des Viereckes:

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Diese Formel wurde von Brahmagupta angegeben. (Vergl. §. 166.)

### 2. Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

§. **344.** Die Höhe $h$ eines Gegenstandes $AB$ (eines Turmes) zu bestimmen, wenn man eine gegen den Fußpunkt gerichtete horizontale Gerade (die Standlinie) messen kann.

1. Die Standlinie geht vom Fußpunkte $A$ aus.

Man messe von einem Punkte $C$ aus die Strecke $CA = a$ und in $C$ den Höhenwinkel $ACB = \alpha$; dann ist $h = a \operatorname{tang} \alpha$.

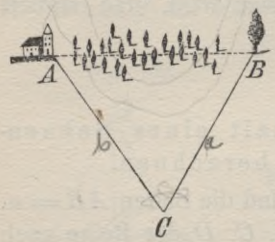
Wie kann man die Messung von $\alpha$ mit Hilfe des Polarsternes umgehen?

2. Die Standlinie geht nicht vom Fußpunkt aus.

Man messe in einer durch $B$ gehenden Vertikalebene die Strecke $CD = a$ als Standlinie und in ihren Endpunkten die Höhenwinkel $ACB = \alpha$ und $ADB = \beta$; dann ist $h = \dfrac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$.

§. **345.** Die Entfernung zweier Punkte $A$ und $B$ (Fig. 160) auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.

Fig. 160.



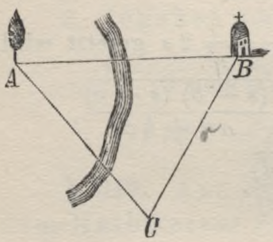

Man messe von einem dritten Punkte $C$ aus die Strecken $CB = a$ und $CA = b$, sowie den Winkel $ACB = \gamma$. Dann ist

$$AB = \frac{a - b}{\cos \varphi} \text{ (§. 331, Zusatz } b\text{)},$$

$$\text{wenn } \operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma \sqrt{a b}}{a - b} \text{ ist.}$$

§. **346.** Die Entfernung zweier Punkte $A$ und $B$ (Fig. 161) auf dem Felde zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben kommen kann.

Fig. 161.



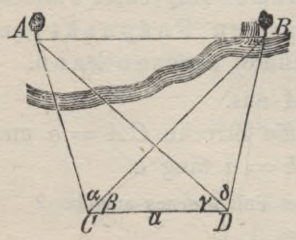

Man wähle einen dritten Standpunkt $C$, von dem man zu einem der beiden Punkte $A$ oder $B$ hin messen kann, und messe die Strecke $BC = a$, sowie die Winkel $B = \beta$ und $C = \gamma$. Dann ergibt sich

$$AB = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

§. **347.** Die Entfernung zweier Punkte $A$ und $B$ (Fig. 162) auf dem Felde zu bestimmen, wenn man zu keinem derselben kommen kann.

Man wähle zwei Standpunkte $C$ und $D$, messe die Standlinie $CD = a$, in ihren Endpunkten die Winkel $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $ADC = \gamma$ und $ADB = \delta$. Dann hat man

Fig. 162.




$$\text{im } \triangle ACD..AD = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)} = b,$$

$$\text{„ } \triangle BCD..BD = \frac{a \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma + \delta)} = c,$$

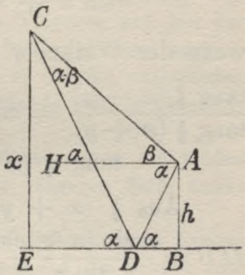
$$\text{„ } \triangle ABD..AB = \frac{b - c}{\cos \varphi},$$

$$\text{wenn } \operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \delta \sqrt{b c}}{b - c} \text{ ist.}$$

§. **348.** Die Höhe einer Wolke aus der Höhe des Beobachtungspunktes über einer Wasserfläche, dem Elevationswinkel der Wolke und dem Depressionswinkel des Bildes derselben zu bestimmen.

Ein Beobachter $A$ (Fig. 163) befindet sich in der Höhe $AB = h$ über dem Spiegel eines benachbarten Teiches $D$; er visiert nach einem bestimmten Punkte $C$ einer Wolke und mißt den Winkel $CAH = \beta$ (Elevationswinkel), den diese Visierlinie mit der durch sein Auge gehenden Horizontalen $AH$ der Vertikalebene $ACE$ bildet. Die Wolke spiegelt sich im Teiche, der Beobachter sieht ihr Bild in der Richtung $AD$ und mißt den Winkel $HAD = \alpha$ (Depressionswinkel), den die Richtung zum Bilde mit $AH$ einschließt. Zu suchen ist die Höhe $CE = x$ der Wolke über dem Teichniveau aus $h$, $\alpha$, $\beta$.

Fig. 163.




Aus $\triangle CED$ ist $x = CD \cdot \sin CDE$, und da nach dem Spiegelungsgesetze W. $CDE = ADB = \alpha$ ist, hat man $x = CD \cdot \sin \alpha$.

Die Länge $CD$ ergibt sich aus dem Dreiecke $CAD$; es ist $CD : AD = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta)$;

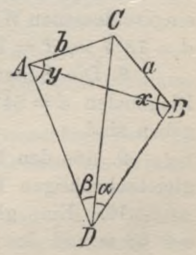
$$\text{daher } CD = AD \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Endlich ist aus $\triangle ADB$ die Länge $AD = \frac{h}{\sin \alpha}$. Folglich ist

$$x = h \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

§. **349.** Aus drei ihrer Lage nach auf dem Felde gegebenen Punkten $A$, $B$, $C$ die Lage eines vierten Punktes $D$ zu bestimmen, wenn man nur die Winkel messen kann, welche die von $D$ an die drei Punkte gezogenen Visierlinien bilden. (Pothenot'sche Aufgabe oder Problem des Rückwärtseinschneidens beim Meßtisch.)

Fig. 164.




Es sei das Dreieck $ABC$ (Fig. 164) gegeben, und zwar $BC = a$, $AC = b$, W. $ACB = C$. Man messe in dem der Lage nach zu bestimmenden Punkte $D$ die Winkel $BDC = \alpha$ und $ADC = \beta$.

Für $D$ seien die Winkel $CBD = x$, $CAD = y$ und die Entfernungen $AD$, $BD$ und $CD$ zu bestimmen.

Da $x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + C)$, so suche man noch $x - y$. Aus $a : CD = \sin\alpha : \sin x$ und $b : CD = \sin\beta : \sin y$ folgt

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}, \text{ daher}$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{b \sin\alpha - a \sin\beta}{b \sin\alpha + a \sin\beta} = \frac{\cot\varphi - 1}{\cot\varphi + 1},$$

wenn der Winkel $\varphi$ so bestimmt wird, daß $\cot\varphi = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$ ist; oder

$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x + y)} = \cot(45^0 + \varphi)$ (§. 319, 9); folglich

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x + y) \cot(45^0 + \varphi).$$

Aus $\frac{1}{2}(x + y)$ und $\frac{1}{2}(x - y)$ erhält man $x$ und $y$. Dann ist

$$DB = \frac{a \sin(\alpha + x)}{\sin\alpha}, \quad DA = \frac{b \sin(\beta + y)}{\sin\beta}, \quad DC = \frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin y}{\sin\beta}.$$

Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn $D$ innerhalb des Dreieckes $ABC$, oder in der Strecke $AB$ liegt?

Diese Aufgabe wurde von Snellius 1617 angegeben und gelöst; 1624 wurde aber auch die Auflösung von Schickard und 1692 von Pothenot gefunden; nach dem letzteren erhielt sie den Namen.

## III. Übungsaufgaben.

§. **350.** 1. In einem Rechtecke ist die Diagonale $d$ und der Winkel, welchen sie mit einer Seite bildet, $\varphi$; berechne die Seiten und den Flächeninhalt!

2. Wie groß ist die Fläche eines Rechteckes, von dem die Differenz zweier zusammenstoßender Seiten 40 *cm* ist und der Winkel der beiden Diagonalen $36^0 29'$ beträgt?

3. Aus den Seiten $a$ und $b$ eines Rechteckes die Winkel zu bestimmen, welche die Seiten mit einer Diagonale bilden. $a = 0{\cdot}8263\ m$, $b = 0{\cdot}7642\ m$.

4. Aus den Diagonalen $d$ und $d'$ eines Rhombus die Winkel desselben zu berechnen. $d = 2{\cdot}486\ m$, $d' = 3{\cdot}048\ m$.

5. Die Seite eines Rhombus ist $a = 25\ cm$, ein spitzer Winkel desselben $\alpha = 38^0 0' 2''$; wie groß ist der Radius eines Kreises, welcher mit diesem Rhombus gleichen Inhalt hat?

6. Aus einer Diagonale $d$ eines Parallelogramms und den Winkeln $\varphi$ und $\psi$, welche dieselbe an ihrem einen Endpunkte mit den Seiten bildet, die Seiten zu berechnen. $d = 14{\cdot}8$, $\varphi = 73^0 24'$, $\psi = 58^0 36'$.

7. In einem Parallelogramme sind die Diagonalen $d$ und $d'$, der von ihnen eingeschlossenen Winkel $\gamma$; bestimme die Seiten und die Winkel des Parallelogramms! $d = 13{\cdot}7\ m$, $d' = 19{\cdot}5\ m$, $\gamma = 67^0 24'$.

8. Die Seiten eines Parallelogramms sind zu berechnen, wenn die beiden Diagonalen $d = 84{\cdot}5\ cm$, $d_1 = 364\ cm$ und der Flächeninhalt $f = 14280\ cm^2$ gegeben sind.

9. Aus den beiden parallelen Seiten $a$ und $b$ und dem Flächeninhalte $f$ eines gleichschenkligen Trapezes die Winkel desselben zu berechnen.

10. Ein gleichschenkliges Trapez hat die parallelen Seiten $a = 94\ m$, $b = 68\ m$ und den spitzen Winkel $\alpha = 65^0 5' 43''$; wie groß ist der Inhalt?

11. Die Seiten und die Winkel eines gleichschenkligen Trapezes aus der Diagonale $d$ und den Winkeln $\varphi$ und $\psi$, welche sie an ihrem einen Endpunkte mit den Seiten bildet, zu berechnen. $d = 0\cdot834\ m$, $\varphi = 36^0 24'$, $\psi = 44^0 16'$.

12. Von einem gleichschenkligen Trapeze sind die Schenkel $c = 8\ m$ und der Radius des umgeschriebenen Kreises $r = 10\ m$ gegeben; die Fläche soll den fünften Teil der umgeschriebenen Kreisfläche betragen; wie groß sind die Seiten und Winkel dieses Trapezes? $a = 18\cdot05\ m$, $b = 5\cdot95\ m$, $\alpha = 40^0 53' 15''$. (§. 326.)

13. Aus den beiden parallelen Seiten $a$ und $b$ eines Trapezes und den der Seite $a$ anliegenden Winkeln $\alpha$ und $\beta$ die nicht parallelen Seiten zu berechnen.

14. In einem Trapeze sind die größere Parallelseite $a$, die ihr anliegenden Winkel $\alpha$ und $\beta$ und die mit ihr den Winkel $\alpha$ einschließende Seite $c$ gegeben; wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes?

15. Wie groß ist der Inhalt einer trapezförmigen Wiese, wenn die beiden parallelen Seiten $a = 318\ m$, $b = 215\ m$ sind und die der längeren Seite anliegenden Winkel $\alpha = 63^0 45'$ und $\gamma = 58^0 40'$ betragen?

16. Den Flächeninhalt eines zwischen zwei parallelen Sehnen eines Kreises liegenden Stückes desselben zu bestimmen, wenn die Abstände $d, d'$ der Sehnen vom Kreismittelpunkte und der Halbmesser $r$ gegeben sind.

17. Die zu einem Kreissektor gehörige Sehne beträgt 440 $m$, die Höhe ($EF$ Fig. 103) des betreffenden Bogens ist $^1/_{20}$ der Sehne; den Radius, den Zentriwinkel und die Fläche des Sektors zu suchen.

18. Eine Sekante und eine Tangente desselben Kreises schneiden einander unter einem Winkel von $60^0$, der äußere Abschnitt der Sekante ist gleich 1, der innere gleich 3; wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

19. In einem Kreise schneiden einander zwei Durchmesser unter einem Winkel von $30^0$; verbindet man ihre Endpunkte, so ist die eine Verbindungssehne um 409 $m$ länger als die andere; wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

20. Welchen Winkel bilden die äußeren gemeinsamen Tangenten zweier Kreise, deren Halbmesser $r$ und $r'$ sind, und deren Zentralabstand gleich $c$ ist?

21. Drei Kreise mit den Halbmessern $R$, $r$ und $\varrho$ berühren einander von außen; bestimme die Winkel, welche die drei Zentralen miteinander bilden!

22. Den Flächeninhalt $f$ eines Dreieckes zu berechnen, wenn nebst den Winkeln $\alpha = 65^0 28' 14''$, $\beta = 42^0 30' 4''$ desselben *a)* der Halbmesser $R = 205\ mm$ des ihm umgeschriebenen, *b)* der Halbmesser $r = 150\ mm$ des ihm eingeschriebenen Kreises gegeben ist.

*a)* $f = 2\ R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$; *b)* $f = r^2 \cot\frac{1}{2}\alpha \cot\frac{1}{2}\beta \cot\frac{1}{2}\gamma$.

23. Die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ eines Dreieckes und der Halbmesser $R$ des ihm umgeschriebenen Kreises sind gegeben; man bestimme den Halbmesser $r$ des diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.

$$r = 4\ R \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

24. Von einem Sehnenvierecke sind zwei gegenüberliegende Seiten $a$ und $c$, ein Winkel $\alpha$ und der Halbmesser $R$ des umgeschriebenen Kreises gegeben; berechne die beiden andern Seiten! (§. 326.)

25. Von einem Sehnenvierecke sind die beiden Diagonalen $m$ und $n$, der von ihnen eingeschlossene Winkel $\varepsilon$ und der Halbmesser $R$ des Kreises gegeben; bestimme die Winkel und die Seiten des Sehnenviereckes! (§. 326.)

26. Aus zwei anstoßenden Seiten $a$ und $b$ eines Tangentenviereckes, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $\beta$ und dem Halbmesser $r$ des Kreises die Winkel und die Seiten des Viereckes zu berechnen.

27. (Das Parallelogramm der Kräfte.) Es seien $p$ und $q$ zwei Kräfte, welche auf einen Punkt unter dem Winkel $\varphi$ wirken und mit der Richtung der

Resultierenden $r$ die Winkel $\alpha$ und $\beta$ bilden. Wenn von diesen sechs Größen drei gegeben sind, und zwar:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $p, q, \varphi$; | 3) $p, r, \alpha$; | 5) $p, r, \varphi$; | 7) $r, \alpha, \beta$; |
| 2) $p, q, \alpha$; | 4) $p, r, \beta$; | 6) $p, \alpha, \beta$; | 8) $p, q, r$; |

in jedem Falle die drei übrigen Größen zu bestimmen.

28. Wie hoch ist der Stand der Sonne, wenn ein 24 $m$ hoher Gegenstand in der Horizontalebene einen Schatten von 72 $m$ Länge wirft?

29. Wie groß ist der wahre Durchmesser des Mondes, wenn sein scheinbarer mittlerer Halbmesser 15′ 31·69″ und seine mittlere Entfernung von der Erde 384.415 $km$ beträgt?

30. Wie groß ist der scheinbare Durchmesser der Venus bei einer Entfernung $d$ = 40 Millionen $km$ von dem Beobachter auf der Erde, wenn der wahre Durchmesser $a$ = 12000 $km$ beträgt?

31. Damit ein Gegenstand in der normalen Sehweite von 25 $cm$ sichtbar sei, muß sein Sehwinkel mindestens 40″ betragen; wie groß muß daher der Durchmesser eines sichtbaren Gegenstandes mindestens sein?

32. Unter welchem Winkel $\varphi$ sieht ein Mann, dessen Auge 1·6 $m$ über dem Boden sich befindet, einen Turm von 65 $m$ Höhe in der Entfernung von 85 $m$?

33. Wie hoch ist das auf der Spitze eines Turmes von 50·2 $m$ Höhe stehende Kreuz, wenn es in der horizontalen Entfernung von 63·7 $m$ vom Fußpunkte des Turmes unter einem Winkel von 1° 32′ gesehen wird?

34. An dem einen Ufer eines Flusses steht ein Gebäude; von zwei 10 $m$ voneinander entfernten Öffnungen desselben in derselben Vertikalen wird ein gerade gegenüberliegender Punkt des jenseitigen Ufers unter den Depressionswinkeln $\varphi = 17° 21' 14''$ und $\psi = 10° 37' 10''$ gesehen. Die Breite des Flusses zu berechnen.

35. An dem einen Ufer eines Flusses wird eine Standlinie $a = 60$ $m$ abgemessen. Die Visierlinien von den Endpunkten derselben gegen eine am jenseitigen Ufer stehende Stange schließen mit der Standlinie die Winkel $\beta = 60° 26'$ und $\gamma = 52° 28'$ ein. Die Breite des Flusses zu berechnen.

36. Wie hoch ist ein Berg, von dessen Spitze die Endpunkte einer 100 $m$ langen mit ihr in derselben Vertikalebene liegenden horizontalen Strecke unter den Depressionswinkeln $\alpha = 63° 26'$ und $\beta = 71° 34'$ gesehen werden?

37. Über einem Orte $A$ schwebt ein Luftballon $S$; man hat die Standlinie $BC = m$, welche mit $A$ in derselben Horizontalebene liegt, gemessen und die Winkel $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$ und $ABS = \delta$. Die Höhe des Ballons über $A$ zu berechnen.

38. Die Höhe eines Berges zu berechnen, wenn die gegen den Fußpunkt desselben gehende Standlinie $AB$ nicht horizontal ist. Bekannt sind die Standlinie $AB = m$, der Winkel $\gamma$, den sie mit der Horizontalebene bildet, und die Winkel $\alpha$ und $\beta$ der Visierlinien von $A$ und $B$ gegen die Spitze des Berges mit der Horizontalebene.

$$h = m \, \frac{\sin(\beta - \gamma) \sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha) \cos\gamma}.$$

39. Die Schwerlinien eines Dreieckes durch die Seiten desselben auszudrücken.

Ist $t_a$ die Schwerlinie bezüglich der Seite $a$, so erhält man durch dieselbe zwei Dreiecke. Der Kosinussatz gibt zwei Gleichungen, aus welchen man

$$t_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \text{ erhält.}$$

40. Die Winkelsymmetralen eines Dreieckes durch die drei Seiten desselben auszudrücken.

Der Flächeninhalt des Dreieckes ist der Summe der Flächeninhalte der durch eine Winkelsymmetrale entstandenen Dreiecke gleich. Man erhält für die Symmetrale des

$$\text{Winkels } \alpha : \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}.$$

§. **351.** Stereometrisch-trigonometrische Aufgaben.

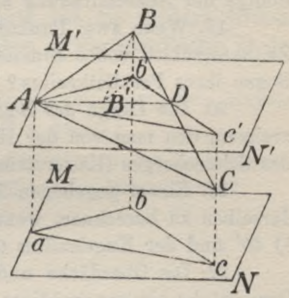
1. Eine Strecke von 3·48 $m$ Länge ist gegen eine Ebene unter einem Winkel von $56^0\,15'$ geneigt; die Projektion derselben auf die Ebene zu berechnen.

2. Wie groß ist die Projektion eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite $a = 0{\cdot}47\ m$, wenn eine Seite in der Projektionsebene liegt und die Dreiecksebene gegen dieselbe unter einem Winkel von $42^0\,30'$ geneigt ist?

3. Gegeben ist ein Dreieck $D$ und sein Neigungswinkel $\alpha$ gegen eine Ebene $MN$; man bestimme die Projektion $d$ des Dreieckes auf die Ebene.

Anleitung. Das Dreieck $D$ sei $ABC$ (Fig. 165). Man kann immer durch einen Eckpunkt $A$ desselben eine mit $MN$ parallele Ebene $M'N'$ legen, welche das Dreieck $ABC$ in $AD$ schneidet. Dann ist die Projektion $Ab'c'$ des Dreieckes $ABC$ auf die Ebene $M'N'$ offenbar kongruent mit der Projektion $abc$ desselben auf die Ebene $MN$. $AD$ teilt sowohl das Dreieck $ABC$ in die Dreiecke $ADB$ und $ADC$, als auch dessen Projektion $Ab'c'$ in die Dreiecke $ADb'$ und $ADc'$.

Fig. 165




Zieht man $BB' \perp AD$ und verbindet $B'$ mit $b'$, so ist $BB'b' = \alpha$; man bestimme nun $Ab'D$ und $Ac'D$ und zeige, daß $d = D\cos\alpha$.

4. Gegeben ist ein Vieleck $P$ und sein Neigungswinkel $\alpha$ gegen eine Ebene $MN$; man bestimme die Projektion $p$ des Vieleckes auf die Ebene.

$$p = P\cos\alpha.$$

Folgt aus Aufg. 3, wenn das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt wird.

5. Sind $s$ und $s'$ zwei Seitenkanten einer Pyramide und $\alpha$ und $\beta$ ihre Neigungswinkel gegen die Grundfläche, so ist $s : s' = \sin\beta : \sin\alpha$.

6. Den Neigungswinkel zweier Seitenflächen eines Tetraeders zu berechnen.

7. Den Neigungswinkel zweier Seitenflächen eines Oktaeders zu berechnen.

8. In einer regelmäßigen, dreiseitigen Pyramide ist eine Seitenfläche das $n$fache der Grundfläche. Den Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche zu berechnen.

9. Den Winkel zu berechnen, den die Diagonale eines Würfels mit einer Seitenfläche bildet.

10. Den Winkel zu berechnen, unter welchem die Diagonalen eines Würfels einander schneiden.

11. Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedes mit den Kanten derselben Ecke bildet, so ist $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

12. Ein gerades, dreiseitiges Prisma, dessen Höhe $h$ ist, hat zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a$. Durch eine Grundkante und den gegenüberliegenden Eckpunkt der anderen Grundfläche ist die Ebene gelegt; den Neigungswinkel derselben gegen die Grundflächen zu berechnen. Wie groß ist derselbe für ein gerades, gleichkantiges Prisma?

13. Trigonometrisch den Radius der einem regelmäßigen Polyeder eingeschriebenen Kugel durch den Radius $\varrho$ des einer Begrenzungsfläche eingeschriebenen Kreises und den Neigungswinkel $\varphi$ seiner Begrenzungsflächen auszudrücken.

14. Die Aufgaben 16 und 17 in §. 256 nach der voranstehenden Aufgabe zu lösen.

15. Einem geraden Kegelstumpf $(R, r)$ ist eine Kugel eingeschrieben; den Radius derselben und den Neigungswinkel einer Seite gegen die Grundflächen zu suchen.

16. Der Neigungswinkel der Achse eines schiefen Kegels (Radius $r$) gegen die Grundfläche ist $40^0$. Den charakteristischen und den gleichschenkligen Achsenschnitt zu berechnen, wenn die Achse des Kegels dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist.

17. Der rechtwinklige Achsenschnitt eines schiefen Zylinders ist *a)* das $\sqrt{2}$fache, *b)* das Dreifache des charakteristischen Achsenschnittes. Den Neigungswinkel der Achse gegen die Grundflächen zu suchen.

18. Die Länge eines Grades auf dem Parallelkreis von Wien ($48^0\,12'\,36''$) zu berechnen; wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes dieses Parallelkreises infolge der Achsendrehung der Erde? (Erdradius 6378 *km*.)

19. Wenn zwei Punkte auf der Oberfläche der Erde die Breite $\varphi$ und einen Zeitunterschied von 3 Stunden haben, wie groß ist der zwischen ihnen liegende Bogen ihres Parallelkreises?

20. Die Länge des Bogens der Erde *a)* in Graden, *b)* in Kilometern zu berechnen, den man von der Höhe des Wiener Schneeberges übersehen kann. (Höhe des Schneeberges (Kaiserstein) 2061 *m*.)

21. Einem gegebenen Kugelsektor ist eine Kugel einzuschreiben. Den Radius derselben zu berechnen, wenn der Winkel des Achsenschnittes des Sektors *a)* $60^0$, *b)* $40^0$ und der Kugelradius $0\cdot385$ *m* ist.

22. Die Oberfläche und den Inhalt einer geraden, prismatischen Säule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Achteck ist, aus einer Grundkante $a$ und einer Seitenkante $s$ zu berechnen. $a = 0\cdot947$ *m*, $s = 2\cdot624$ *m*.

23. Die Grundfläche eines Prismas ist ein Dreieck, welches die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ hat und einem Kreise vom Halbmesser $R$ eingeschrieben ist, die Seitenkanten desselben sind gleich $s$ und gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\varphi$ geneigt; wie groß ist das Volumen des Prismas? $v = 2\,s\,R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin\varphi$.

24. Durch eine Grundkante $a$ eines regelmäßigen, dreiseitigen Prismas wird eine Ebene gelegt, welche gegen die Basis unter dem Winkel $\varphi$ geneigt ist. Das Volumen $v$ der abgeschnittenen Pyramide zu berechnen. $a = 0\cdot875$ *m*, $\varphi = 56^0\,24'$.

25. Wenn in Aufgabe 3 die Größen $v$ und $\varphi$ gegeben sind, die Größe der Durchschnittsfigur zu bestimmen.

26. Die Seiten eines Dreieckes sind 13 *m*, 14 *m*, 15 *m*; über demselben ist ein Prisma errichtet, dessen Seitenkante $18\cdot5$ *m* beträgt und gegen die Grundfläche unter einem Winkel von $70^0$ geneigt ist. Das Volumen des diesem Prisma ein- und umgeschriebenen Zylinders zu berechnen.

27. Zwei Winkel der Grundfläche eines dreiseitigen Prismas sind $\alpha$ und $\beta$, das Volumen ist $v$. Der Inhalt des umgeschriebenen Zylinders zu suchen.

28. Gegeben ist der Kubikinhalt $v$ einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche und der Neigungswinkel $\alpha$ der Seitenkante gegen die Grundfläche; bestimme *a)* die Grundkante, *b)* die Seitenkante.

29. In einer dreiseitigen Pyramide ist jede Seitenkante 40 *cm* lang, von der Grundfläche sind zwei Seiten 23 *cm* und 12 *cm* und der von ihnen eingeschlossene Winkel $74^0\,52'\,42''$ gegeben; wie groß ist der Inhalt dieser Pyramide?

30. In einer regulären, $n$-seitigen Pyramide ist $a$ die Grundkante, $s$ die Seitenkante; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* das Volumen?

31. Jede Seitenkante einer regelmäßigen, zehnseitigen Pyramide ist $s = 132\ cm$ und gegen die Basis unter dem Winkel $\alpha = 35^0 15'$ geneigt; wie groß ist der Inhalt dieser Pyramide? $v = \frac{5}{6} s^3 \sin 2\alpha \cos\alpha \sin 36^0$.

32. Die Oberfläche und das Volumen einer regulären, $n$-seitigen Pyramide, deren Grundkante $a$ und deren Höhe der doppelte Halbmesser des um die Grundfläche beschriebenen Kreises ist, zu berechnen.

33. Das Volumen einer regulären Pyramide, die zur Grundfläche ein $n$-Eck mit der Seite $a$ hat, ist $v$; wie groß ist der Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche?

34. Die Grundkanten einer geraden, dreiseitigen Pyramide sind 10, 17, 21, das Volumen ist 224. Eine Seitenkante und ihren Neigungswinkel gegen die Grundfläche zu suchen.

35. In einem regulären Pyramidenstumpfe ist die größere Grundfläche ein Achteck mit der Seite $a$, die Projektion einer Seitenkante auf die größere Grundfläche $p$ und der zugehörige Neigungswinkel $\alpha$; berechne *a)* die Oberfläche, *b)* das Volumen des Stumpfes!

36. Wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* das Volumen eines geraden Kegels, dessen Seite $s$ mit der Grundfläche den Neigungswinkel $\varphi$ bildet?

37. Der Inhalt eines geraden Kegels sei $V$, die Seitenlinien des Kegels seien unter dem Winkel $\alpha$ gegen die Basis geneigt; wie groß ist die Mantelfläche?

$$M = \sqrt[3]{\left(\frac{3\ V}{\sin\alpha}\right)^2 \frac{\pi}{\cos\alpha}}.$$

38. Die Manteloberfläche und das Volumen eines geraden Kegels aus dem Halbmesser $r$ der Grundfläche und dem Winkel $\alpha$ am Scheitel eines Achsenschnittes zu berechnen.

39. In einem schiefen Kegel ist die Achse $a$ gegen die Grundfläche, deren Halbmesser $r$ ist, unter dem Winkel $\alpha$ geneigt; wie groß ist die Höhe, das Volumen, die größte und die kleinste Seite des Kegels? $r = 4\ dm$, $a = 7\ dm$, $\alpha = 70^0$.

40. In einem schiefen Kegel ist $\alpha$ der kleinste Neigungswinkel einer Seite gegen die Grundfläche, $h$ die Höhe und $p$ die Projektion der Achse auf die Grundfläche; das Volumen zu berechnen.

41. Wie groß ist der Inhalt eines schiefen Kegels, wenn die kleinste Seitenlinie $b$ desselben 15 $dm$ beträgt und gegen die Grundfläche unter $\alpha = 74^0 36'$, die größte Seitenlinie aber unter $\beta = 36^0 48'$ geneigt ist, und die Höhe zwischen der größten und kleinsten Seitenlinie liegt?

$$v = \frac{b^3\pi}{12} \frac{\sin\alpha \sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2\beta}.$$

42. Über derselben Kreisfläche mit dem Radius $r$ sind auf entgegengesetzten Seiten zwei gerade Kegel errichtet. Oberfläche und Volumen des Doppelkegels zu berechnen, wenn die Seiten gegen die Grundfläche unter den Winkeln $\alpha$ und $\beta$ geneigt sind. $r = 0{\cdot}675\ m$, $\alpha = 68^0 54'$, $\beta = 53^0 48'$.

43. Die Aufgabe 42 zu lösen, wenn die beiden Kegel auf derselben Seite der Kreisfläche errichtet werden.

44. Einem geraden Kegel $(r, h)$ ist eine regelmäßige, $n$-seitige Pyramide ein- und umgeschrieben. Die Oberfläche und das Volumen derselben zu berechnen.

45. Die Peripherie der Grundfläche eines geraden Kegels ist $p$, der Winkel am Scheitel des Achsenschnittes $\alpha$. Die Oberfläche und das Volumen zu berechnen.

46. Ein gerader Kegel ist in eine Kugel mit dem Volumen $v$ eingeschrieben; ein Achsenschnitt des Kegels hat am Scheitel den Winkel $\alpha$. Das Volumen und den Mantel des Kegels zu suchen.

47. Das Volumen eines geraden Kegelstumpfes aus der Seite $s$, ihrem Neigungswinkel $\alpha$ gegen die Grundflächen und der Manteloberfläche $m$ zu berechnen.

$$v = \frac{\pi s}{4} \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{m^2}{s^2 \pi^2} + \frac{s^2}{3} \cos^2\alpha\right).$$

48. Wie groß ist der Inhalt eines geraden Kegelstutzes, wenn die Mantelfläche 194·35 $cm^2$, die Seite 7·9 $cm$ und der Neigungswinkel der letzteren gegen die Grundflächen $84^\circ 28' 30''$ beträgt?

49. Die Mantelfläche eines geraden, abgestutzten Kegels mit der Seitenlänge 1 $m$ ist gleich der großen Grundfläche, der Neigungswinkel einer Seitenlinie gegen die Grundflächen *a)* $60^\circ$, *b)* $45^\circ$, *c)* $30^\circ$; wie groß sind die Radien und die Mantelfläche?

50. In einem geraden Kegelstumpfe sind $R$ und $r$ die Halbmesser der Grundflächen und $v$ das Volumen; wie groß ist *a)* der Neigungswinkel $\alpha$ der Seite gegen die Grundflächen, *b)* die Seite $s$, *c)* die Manteloberfläche $m$ des Stumpfes?

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{3v}{\pi(R^3 - r^3)}, \quad s = \frac{R - r}{\cos\alpha}, \quad m = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos\alpha}.$$

51. Wie groß ist der Mantel eines abgestumpften geraden Kegels, dessen Seiten gegen die Grundflächen unter dem Winkel $\alpha$ geneigt sind, wenn die Differenz der Grundflächen $d$ ist?

52. Die Grundflächen eines geraden Kegelstumpfes haben die Radien $R$ und $r$, der Neigungswinkel einer Seite gegen die Grundflächen ist $\alpha$. Der Radius derjenigen Kugel zu berechnen, deren Oberfläche dem Mantel des Stumpfes gleich ist. $R = 45\ cm$, $r = 34\ cm$, $\alpha = 50^\circ$.

53. In einem schiefen Zylinder ist die Achse $a$ gegen die Grundfläche, deren Halbmesser $r$ ist, unter dem Winkel $\alpha$ geneigt; berechne *a)* den Flächeninhalt des zur Grundfläche normalen Achsenschnittes, *b)* das Volumen des Zylinders!

54. Wie groß ist *a)* die Rotationsfläche, *b)* der Rotationskörper eines regulären Zwölfeckes mit der Seite $a$ um eine Winkelsymmetrale als Achse?

55. Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten $a$ und $b$ den Winkel $\gamma$ einschließen, dreht sich um die dritte nicht gegebene Seite; wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers? $a = 10\ cm$, $b = 15\ cm$, $\gamma = 80^\circ$.

56. Ein Dreieck mit der Seite $b = 5\ dm$ und den beiden anliegenden Winkeln $\alpha = 54^\circ 36'$, $\gamma = 74^\circ 54'$ rotiert um $b$ als Achse; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Rotationskörpers?

$$o = \frac{2\pi b^2}{\sin^2\beta} \sin\alpha \sin\gamma \sin\frac{\gamma + \alpha}{2} \cos\frac{\gamma - \alpha}{2}; \quad v = \frac{b^3\pi}{3}\left(\frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin\beta}\right)^2.$$

57. Eine Dreieckseite ist $b$, die anliegenden Winkel sind $\alpha$ und $\gamma$. Das Dreieck rotiert um eine durch $B$ mit der Seite $b$ parallel laufende Achse. Das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen.

58. Ein rechtwinkliges Dreieck rotiert um die Kathete $a$; wie groß ist die Oberfläche des Rotationskörpers, wenn das Produkt aus der Hypotenuse und der Achse $m$ und der Winkel $\alpha$ bekannt sind?

59. Ein Dreieck mit der Seite $a$ und den anliegenden Winkeln $\beta$ und $\gamma$ rotiert um $c$ als Achse. Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers zu berechnen.

60. Die Oberfläche einer Kugel ist $o$, eine Kalotte derselben $m$; bestimme den Zentriwinkel $\alpha$ des Bogens, durch dessen Umdrehung die Kalotte erzeugt wird.

61. Ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel $2\alpha$ und dem Radius $r$ rotiert um einen seiner Begrenzungsradien. Die Oberfläche des Rotationskörpers zu berechnen.

62. Aus dem Volumen $v$ eines Kugelsektors und dem Winkel $\alpha$ des Achsenschnittes den Halbmesser $r$ der Kugel zu finden.

63. Einer Kugel von $o = 50\ dm^2$ Oberfläche soll ein gerader Kegel eingeschrieben werden, welcher an der Spitze des Achsenschnittes den Winkel $\alpha = 34^\circ 18' 36''$ hat; wie groß ist der Inhalt des Kegels?

$$v = \frac{2\pi}{3} r^3 \left(\sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

64. Die Achse $a$ eines schiefen Kegels bildet mit der Grundfläche, deren Halbmesser $r$ ist, den Neigungswinkel $\alpha$; wie groß ist der Halbmesser der um den Kegel beschriebenen Kugel? $r = 3\ dm$, $a = 5\ dm$, $\alpha = 70^\circ$.

65. Ein Kreissektor, dessen Zentriwinkel $\alpha$ und dessen Halbmesser $r$ ist, dreht sich um den zur Sehne seines Bogens parallelen Durchmesser; wie groß ist *a)* die Oberfläche $o$, *b)* das Volumen $v$ des Rotationskörpers?

$$o = 2 r^2 \pi \left(2 \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right), \qquad v = \frac{4 r^3 \pi}{3} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

66. Gegeben sind die Halbmesser $R$ und $r$ der größeren und der kleineren Grundfläche eines geraden Kegelstumpfes und der Neigungswinkel $\alpha$ der Seiten gegen die Grundflächen des Stumpfes; bestimme die Höhe einer Kugelmütze, welche der Manteloberfläche des Kegelstumpfes gleich ist und zu einer Kugel gehört, welche die Höhe des Stumpfes zum Halbmesser hat!

67. Den Mantel, das Volumen und den Neigungswinkel der Seiten gegen die Grundflächen des einer Kugel ($r$) umgeschriebenen geraden Kegelstumpfes zu suchen, wenn $G : g = 2 : 1$ ist.

68. Eine Zone zu berechnen, wenn der Radius der Erde und die geographischen Breiten der beiden Begrenzungskreise bekannt sind.

69. Bestimme die Höhe und die Oberfläche *a)* der heißen Zone, *b)* der gemäßigten Zone, *c)* der kalten Zone der Erde, wenn man den Erdhalbmesser $r = 6378\ km$ und $\varphi = 23^\circ 27'$ als den Abstand des Polarkreises vom Pole, wie auch als den Abstand eines Wendekreises vom Äquator annimmt!

70. Ein Kreisausschnitt rotiert um einen seiner Begrenzungsradien. Wie groß muß der Zentriwinkel sein, wenn *a)* die entstehende Kalotte gleich dem Mantel des Kegels, *b)* das Segment dem Kegel gleich sein soll?

71. Wie groß muß der Zentriwinkel des Achsenschnittes eines Kugelsegmentes sein, wenn die Gesamtoberfläche desselben einem größten Kugelkreise gleich sein soll?

72. Ein Kreissegment rotiert um den zu seiner Begrenzungssehne parallelen Durchmesser. Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers zu berechnen, wenn der zu dem Segment gehörige Bogen den Radius $r$ und den Zentriwinkel $2\alpha$ hat.

73. Ein Kreisausschnitt mit dem Radius $r$ und dem Zentriwinkel $2\alpha$ rotiert um eine Achse, welche durch den Mittelpunkt geht und mit der zu dem Bogen des Kreisausschnittes gehörigen Sehne parallel ist; die Ergänzung des entstehenden Rotationskörpers zur ganzen Kugel zu berechnen.

74. Die Höhe eines geraden Kegels ist $h$, der Winkel an der Spitze seines Achsenschnittes $2\alpha$; man suche das Volumen des Kugelsektors, von welchem der Kegel ein Teil ist.

75. Ein gerader Hohlkegel hat den Radius $r$, der Winkel am Scheitel des Achsenschnittes ist $2\alpha$. In den Kegel wird eine Kugel gelegt, welche den Mantel an der Peripherie der Grundfläche des Kegels berührt. Wie groß ist die in dem Kegel befindliche Kalotte?

# Vierter Teil.

# Analytische Geometrie.

§. 352. Die analytische Geometrie hat die Untersuchung der Raumgebilde mit Hilfe der Rechnung (Analysis) zum Gegenstande.

In der vorliegenden Abhandlung beschränken wir uns auf die analytische Geometrie der Ebene.

## I. Der Punkt.

§. 353. Strecken als relative Größen.

Wenn auf die Richtung einer Strecke Rücksicht genommen wird, so ist die Strecke $AB$ von der Strecke $BA$ verschieden. Die Richtung einer Strecke wird durch das Vorzeichen ersichtlich gemacht; es soll für die Richtung nach rechts das Zeichen $+$, für jene nach links $-$ gewählt werden. In einer vertikalen Geraden sollen die Richtungen nach aufwärts und abwärts beziehungsweise durch $+$ und $-$ bezeichnet werden. Demnach ist $AB + BA = 0$, somit $AB = -BA$. Ferner ist $AB = AC + CB$ für jede Lage von $C$. Denn die rechte Seite der Gleichung drückt eine Bewegung von $A$ nach $C$ und von $C$ nach $B$ aus, so daß die schließliche Entfernung des bewegten Punktes von $A$ gleich $AB$ ist, was auch die linke Seite der Gleichung fordert.

§. 354. Bestimmung eines Punktes einer Geraden. Ein Punkt $M$ der Geraden $XX'$ ist bestimmt, wenn seine Entfernung von einem festen Punkt $O$ in derselben und durch das Vorzeichen angegeben wird, auf welcher Seite von $O$ er sich befindet. Die mit entsprechendem Vorzeichen versehene Entfernung $OM$ heißt die Abszisse des Punktes $M$, $XX'$ wird die Abszissenachse, $O$ der Anfangspunkt genannt. $OM$ wird mit dem Buchstaben $x$ bezeichnet.

Es entspricht jedem Punkt der Abszissenachse eine ganz bestimmte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegende Zahl und umgekehrt jeder zwischen diesen Grenzen liegenden Zahl entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Abszissenachse.

Aufgabe.

In einer gegebenen Abszissenachse die Punkte $+2$, $-3$, $+\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{3}$ zu bestimmen.

§. **355.** Der Anfangspunkt $O$ soll nach $O'$ in der Achse verschoben werden. Die neue Abszisse des Punktes $M = x'$ zu bestimmen, wenn $OO' = m$ ist.

Für jede Lage des Punktes $O'$ ist $O'M = O'O + OM = OM - OO'$ oder $x' = x - m$.

Aufgabe.

Die Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ haben in Beziehung auf $O$ die Abszissen $+4$, $-5$, $+\frac{2}{3}$; wie heißen ihre Abszissen, wenn die Abszisse des neuen Ursprunges $O'$ $\alpha$) $+5$, $\beta$) $-2$ ist?

§. **356.** Den Abstand der Punkte $M_1$ $(x_1)$ und $M_2$ $(x_2)$ der Abszissenachse der Länge und dem Vorzeichen nach zu bestimmen.

Für beliebige Punkte ist $M_1 M_2 = M_1 O + O M_2 = O M_2 - O M_1 = x_2 - x_1$.

Aufgabe.

Der Länge und dem Vorzeichen nach den Abstand $M_1 M_2$ zu bestimmen, wenn 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, 2) $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, 3) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, 4) $x_1 = -2$, $x_2 = -4$ ist.

§. **357.** Die Abszisse $\xi$ desjenigen Punktes $P$ zu bestimmen, welcher die Strecke $M_1 M_2$ in einem vorgeschriebenen Verhältnis teilt.

Das Teilungsverhältnis $\frac{M_1 P}{P M_2}$ sei $\lambda$.

Dann ist $\lambda = \frac{\xi - x_1}{x_2 - \xi}$ und $\xi = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

Liegt $P$ zwischen $M_1$ und $M_2$, so sind $M_1 P$ und $PM_2$ gleich bezeichnet, $\lambda$ ist also positiv.

Liegt aber $P$ außerhalb der Strecke $M_1 M_2$, so sind $M_1 P$ und $PM_2$ entgegengesetzt bezeichnet, $\lambda$ ist in diesem Falle negativ.

Ist $P$ der Halbierungspunkt der Strecke $M_1 M_2$, so ist $\lambda = 1$, daher $\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Aufgabe.

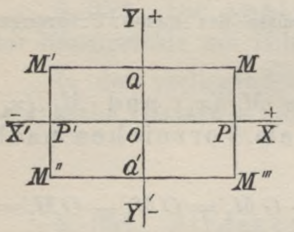
$M_1$ (1), $M_2$ (5); die Abszisse desjenigen Punktes zu bestimmen, welcher die Strecke $M_1 M_2$ nach dem Verhältnis $a$) 2, $b$) $-2$ teilt.

§. **358.** Bestimmung eines Punktes in der Ebene. Um die Lage eines Punktes in der Ebene zu bestimmen, wird derselbe meist auf zwei festliegende Linien, die man Koordinatenachsen nennt, bezogen. Das einfachste und am meisten im Gebrauche stehende Koordinatensystem ist das rechtwinklige.

Man zieht (Fig. 166) zwei feste, zueinander normale Gerade $XX'$ und $YY'$, die einander im Punkte $O$ schneiden; $XX'$ heißt die Abszissenachse, $YY'$ die Ordinatenachse, $O$ der Anfangspunkt oder Ursprung.

Es sei nun $M$ ein Punkt im 1. Quadranten. Fällt man von demselben zu $XX'$ die Normale $MP$ und zu $YY'$ die Normale $MQ$, so sind durch die Lage des Punktes $M$ auch seine Abstände $MP$ und $MQ$ von den Koordinatenachsen unzweideutig bestimmt. Sind umgekehrt die Abstände $MP$ und $MQ$ gegeben, so ist durch dieselben auch die Lage des Punktes $M$ bestimmt; man darf nur in $P$ die Normale zu $XX'$ und in $Q$ die Normale zu $YY'$ ziehen, ihr Durchschnitt ist der Punkt $M$.

Fig. 166.




Die Abstände $MQ$ und $MP$ heißen die **Koordinaten** des Punktes $M$ und zwar der Abstand $MQ$ oder der ihm gleiche Abschnitt $OP$ die **Abszisse** und der Abstand $MP$ oder $OQ$ die **Ordinate**. Die **Abszisse** wird gewöhnlich durch $x$, die Ordinate durch $y$ bezeichnet, wenn der Punkt als ein beliebiger gelten soll.

Hat ein bestimmter Punkt $M$ die Koordinaten $OP = a$ und $MP = b$, so drückt man dies analytisch durch die Gleichungen

$$x = a, \; y = b$$

aus, welche deshalb die **Gleichungen des Punktes** $M$ heißen.

Derselbe Punkt wird auf diese Weise immer durch dieselben zwei Gleichungen ausgedrückt, und dieselben zwei Gleichungen bestimmen immer denselben Punkt. Der Punkt $M$ ist demnach der geometrische Repräsentant der Gleichungen $x = a$, $y = b$, und diese sind der analytische Repräsentant des Punktes $M$.

Einen Punkt $M$, dessen Koordinaten $a$ und $b$ sind, pflegt man auch kurzweg durch $(a, b)$ zu bezeichnen.

**§. 359.** In jedem der übrigen drei Quadranten läßt sich ein Punkt finden, der dieselben Koordinaten hat wie der Punkt $M$ im ersten Quadranten. Daher genügen die absoluten Werte der Koordinaten zur unzweideutigen Bestimmung der Lage eines Punktes noch nicht, wohl aber, wenn sie mit Vorzeichen versehen werden. Man betrachtet die Abszissen in der Richtung nach **rechts** von der Ordinatenachse als **positiv**, die Abszissen in der Richtung nach **links** als **negativ**; ebenso die Ordinaten in der Richtung nach **oben** von der Abszissenachse als **positiv**, die Ordinaten in der Richtung nach **unten** als **negativ**.

Unter dieser Voraussetzung hat man, wenn (Fig. 166) $OP = OP'$ $= a$ und $OQ = OQ' = b$ gesetzt wird,

für den Punkt $M \ldots x = +a, y = +b$;
„ „ „ $M' \ldots x = -a, y = +b$;
„ „ „ $M'' \ldots x = -a, y = -b$;
„ „ „ $M''' \ldots x = +a, y = -b$.

Für die Punkte, welche in der Abszissenachse liegen, ist die Ordinate Null; für die Punkte, welche in der Ordinatenachse liegen, ist die Abszisse Null. Für den Anfangspunkt $O$, welcher sowohl in der Ordinaten- als in der Abszissenachse liegt, ist $x = 0$ und $y = 0$.

Die Verbindungslinie eines Punktes mit dem Mittelpunkt wird der Radiusvektor dieses Punktes genannt; er wird stets positiv genommen.

Wählt man in dem Schenkel $OM$ (Fig. 149) eines Winkels in einem beliebigen Quadranten einen Punkt $M(x, y)$, so können nunmehr die in §. 307 enthaltenen Definitionen der trigonometrischen Funktionen (1.—4.) in folgender Form gegeben werden.

Der Sinus eines jeden Winkels ist gleich dem Verhältnis der Ordinate zum Radiusvektor. $\sin\alpha = \frac{y}{r}$.

Der Kosinus eines jeden Winkels ist gleich dem Verhältnis der Abszisse zum Radiusvektor. $\cos\alpha = \frac{x}{r}$.

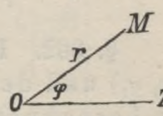
Die Tangente eines jeden Winkels ist gleich dem Verhältnis der Ordinate zur Abszisse. $\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}$.

Die Kotangente eines jeden Winkels ist gleich dem Verhältnis der Abszisse zur Ordinate. $\cot\alpha = \frac{x}{y}$.

**Polar-Koordinaten.**

§. **360.** Manchmal ist auch das Polar-Koordinatensystem im Gebrauche. Bei diesem nimmt man einen festen Punkt $O$ (Fig. 167) an, welcher der Pol genannt wird, und von demselben aus einen festen Halbstrahl $OZ$, der die Polarachse heißt.

Fig. 167.



Die Lage eines Punktes $M$ ist nun vollkommen bestimmt, wenn der Abstand $MO$ dieses Punktes vom Pole und der Winkel $ZOM$, den $MO$ mit der Polarachse bildet, bekannt sind. Der Abstand $MO$ heißt der Radiusvektor; er wird immer im absoluten Sinne genommen und allgemein durch $r$

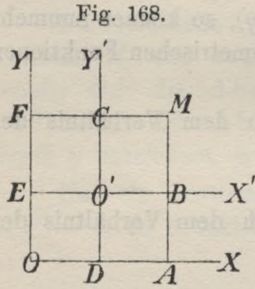
bezeichnet. Der Winkel $ZOM = \varphi$ heißt die Anomalie und wird in positiver Richtung von $0^0$ bis $360^0$ gezählt. Die Größen $r$ und $\varphi$ heißen die Polar-Koordinaten des Punktes $M$.

§. **361.** Transformation der Koordinaten. Häufig tritt bei analytischen Untersuchungen das Bedürfnis ein, die Koordinaten eines Punktes in einem bestimmten Achsensystem durch die Koordinaten dieses Punktes in Bezug auf ein neues Achsensystem zu ersetzen, dessen Lage gegen das frühere bekannt ist. Diesen Vorgang nennt man Transformation der Koordinaten. Eine solche Umformung wurde schon im §. 355 vorgenommen.

Es seien nur zwei einfache Fälle angeführt.

*a*) Transformation der Koordinaten eines rechtwinkligen Systemes in ein rechtwinkliges mit direkt parallelen Achsen.

Fig. 168.




In Fig. 168 habe $M$ in Bezug auf das System $O$ die Koordinaten $x, y$, bezüglich des Systemes $O'$ die Koordinaten $x', y'$. Die Koordinaten von $O'$ selbst seien $m$ und $n$. Die im §. 355 gelehrte Transformation ist auf beide Achsen anzuwenden. Somit ist für jede beliebige Lage der Punkte $D$ und $E$, somit auch von $O'$

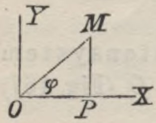
$$x' = x - m \text{ und } y' = y - n; \text{ und}$$

$$x = x' + m,\ y = y' + n.$$

*b*) Transformation von Polarkoordinaten in rechtwinklige und umgekehrt.

Nach der Definition der trigonometrischen Funktionen (§. 307 und §. 359) hat man für jede Lage von $M$ (Fig. 169):

Fig. 169.




$$\frac{x_1}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{y_1}{r} = \sin\varphi, \text{ daher}$$

$x_1 = r\cos\varphi$, $y_1 = r\sin\varphi$, durch welche Gleichungen Polarkoordinaten in rechtwinklige umgerechnet werden können.

Umgekehrt:

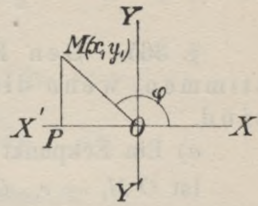
$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},\ \cos\varphi = \frac{x_1}{r},\ \sin\varphi = \frac{y_1}{r}.$$

§. **362.** Den Radiusvektor (Leitstrahl) eines Punktes $(x_1\, y_1)$ und den Winkel desselben mit der Abszissenachse zu berechnen.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $OMP$ (Fig. 170) erhält man für jede Lage des Punktes $M: r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Für die Bestimmung des Winkels des Radiusvektors mit der Abszissenachse hat man die Gleichungen

Fig. 170.



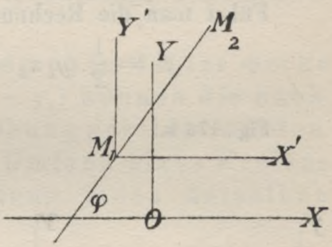

$$\sin\varphi = \frac{y_1}{r},\ \cos\varphi = \frac{x_1}{r},\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{y_1}{x_1},$$

$$\cot\varphi = \frac{x_1}{y_1}.$$

Der Winkel wird im positiven Sinne von der positiven Richtung der Abszissenachse von $0^0$ bis $360^0$ gerechnet.

**§. 363.** Den Abstand $d$ zweier Punkte und den Winkel zu bestimmen, welchen $d$ mit der Abszissenachse einschließt.

Fig. 171.




Die Punkte seien (Fig. 171) $M_1\ (x_1, y_1)$ und $M_2\ (x_2, y_2)$.

Man verlege den Ursprung des Koordinatensystemes nach $M_1$, die Achsen sollen parallel und gleichgerichtet sein. Dann ist die Aufgabe auf § 362 zurückgeführt; die neuen Koordinaten von $M_2$ sind $\xi = x_2 - x_1$ und $\eta = y_2 - y_1$; es ist

$$d = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Zur Bestimmung des Winkels $\varphi$, den $M_1\,M_2$ mit $M_1\ X'$ bildet, hat man:

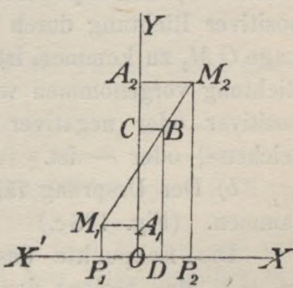
$$\sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{d},\ \cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{d},\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\cot\varphi = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Der Winkel $\varphi$ wird in derselben Weise wie in §. 362 gerechnet.

**§. 364.** Die Strecke $M_1 M_2$ in einem vorgeschriebenen Verhältnis zu teilen.

Fig. 172.




In demselben Verhältnis, in welchem $M_1 M_2$ (Fig. 172) durch $B$ geteilt wird, werden auch die Projektionen von $M_1\ M_2$ auf die Koordinatenachsen durch die Projektionen von $B$ auf diese Achsen geteilt. Durch Anwendung von §. 357 auf beide Achsen findet man daher für die Koordinaten $\xi, \eta$ des Teilungspunktes:

$$\xi = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1 + \lambda},\ \eta = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1 + \lambda}.$$

Soll $B$ der Halbierungspunkt von $M_1 M_2$ sein, so ist $\lambda = 1$ und

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ \eta = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

§. **365.** Den Flächeninhalt eines Dreieckes zu bestimmen, wenn die Koordinaten der Eckpunkte gegeben sind.

*a*) Ein Eckpunkt fällt mit dem Ursprung zusammen.

Ist $O M_1 = r_1$, $O M_2 = r_2$, so ist für Fig. 173 *a*

$$f = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)$$

$$= \frac{1}{2} r_1 r_2 \left(\frac{y_2}{r_2} \cdot \frac{x_1}{r_1} - \frac{x_2}{r_2} \cdot \frac{y_1}{r_1}\right) = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Führt man die Rechnung für Fig. 173 *b* durch, so erhält man

$$f = \frac{1}{2} (y_1 x_2 - x_1 y_2) = -\frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Fig. 173 *a*.

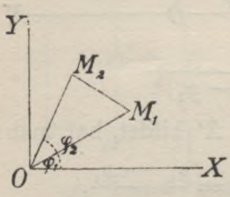



Fig. 173 *b*.

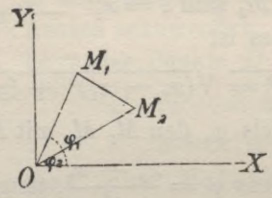
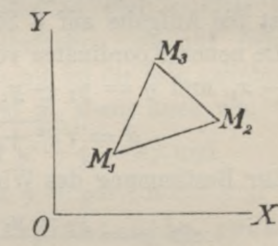



Fig. 173 c.




Diese beiden Ausdrücke für $f$ unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Nimmt man in beiden Fällen für den Flächeninhalt die Gleichung $f = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2)$, so erhält man nicht allein durch den absoluten Wert der rechten Seite der Gleichung den Inhalt des Dreieckes, sondern auch durch das Vorzeichen Aufschluß über die Lage der Punkte $M_1$ und $M_2$. Ist das Vorzeichen positiv, so muß $O M_1$ um $O$ in positiver Richtung durch die Dreiecksfläche gedreht werden, um in die Lage $O M_2$ zu kommen, ist es negativ, so muß diese Drehung in negativer Richtung vorgenommen werden. Oder die Punkte $O$, $M_1$, $M_2$ folgen in positiver oder negativer Richtung aufeinander, je nachdem das Vorzeichen $+$ oder $-$ ist.

*b*) Der Ursprung fällt mit keinem Eckpunkt des Dreieckes zusammen. (Fig. 173 c.)

Die Eckpunkte des Dreieckes seien $M_1$ $(x_1, y_1)$, $M_2$ $(x_2, y_2)$, $M_3$ $(x_3, y_3)$. Man verlege den Ursprung mit parallelen und gleichgerichteten

Achsen nach $M_1$, so ist die Aufgabe auf *a*) zurückgeführt. Die neuen Koordinaten sind für $M_2 : x_2 - x_1,\ y_2 - y_1$ und für $M_3 : x_3 - x_1,\ y_3 - y_1$. Es ist

$$f = \frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right] =$$
$$\frac{x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)}{2}.$$

Der absolute Wert von $f$ gibt die Fläche des Dreieckes.

Ist das Vorzeichen $+$, so muß $M_1 M_2$ um $M_1$ in positiver Richtung durch die Dreiecksfläche gedreht werden, um $M_1 M_3$ zu treffen.

Ist das Vorzeichen —, so muß diese Drehung eine negative sein. Oder die Punkte $M_1, M_2, M_3$ folgen in positiver, beziehungsweise negativer Richtung aufeinander.

Als Gedächtnisregel für die Indices im Zähler merke man: aus dem ersten Gliede $x_1 (y_2 - y_3)$ können die nächsten zwei durch zyklische Vertauschung gebildet werden. D. h., man setze die Zeiger auf den Umfang eines Kreises und vertausche in gleicher Richtung jeden derselben mit dem nächsten.

§. **366.** Bedingung, unter welcher drei Punkte in derselben Geraden liegen.

Liegen die Punkte $M_1, M_2, M_3$ in derselben Geraden, so ist die Fläche des Dreieckes $M_1 M_2 M_3 = 0$. Also (§. 365, *b*) entweder

$$x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0 \text{ oder}$$
$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$. Der letzte Ausdruck ergibt:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Sollen also drei Punkte in derselben Geraden liegen, so müssen die Ordinatendifferenzen je zweier Punkte den entsprechenden Abszissendifferenzen proportional sein.

§. **367.** Aufgaben. 1. Bestimme die Lage der Punkte, deren Koordinaten sind:

*a*) $x = 3,\ y = 4$; *b*) $x = -2,\ y = 3$; *c*) $x = -1,\ y = -4$;
*d*) $x = -2,\ y = 1$; *e*) $x = 0,\ y = 2$; *f*) $x = -3,\ y = 0$!

2. Konstruiere das Dreieck $ABC$, in welchem der Eckpunkt $A\ (-2, 0)$, $B\ (2, -3)$ und $C\ (4, 4)$ ist!

3. Bestimme den Abstand der Punkte *a*) (7, 10) und (—5, 5), *b*) (6, —5) und (—2, 1), *c*) (12, —12) und (—9, 7); ferner den Winkel ihrer Verbindungslinie mit der Abszissenachse!

4. Drücke durch eine Gleichung aus, daß der Punkt $(x, y)$ von den Punkten (5, 4) und (3, 2) gleich weit absteht!

5. Bestimme den Punkt, welcher von den Punkten (3, 4), (2, —3) und (—2, 3) gleich weit absteht, und gib diesen Abstand an!

6. Die Verbindungslinie von $M_1$ (— 3, +4) und $M_2$ (2,—5) *a)* so zu teilen, daß $\frac{M_1 P}{P M_2} = \frac{1}{3}$, *b)* über $M_2$ um das Doppelte ihrer eigenen Länge bis $P$ zu verlängern; die Koordinaten von $P$ zu berechnen.

7. Zwei Eckpunkte eines Dreieckes sind (4, —2) und (3, 2), der dritte liegt im Ursprunge; zu bestimmen *a)* die Länge jeder Seite, *b)* die Koordinaten des Halbierungspunktes jeder Seite, *c)* den Flächeninhalt des Dreieckes und die Bedeutung des Vorzeichens zu erklären; *d)* den Schwerpunkt des Dreieckes zu suchen.

8. Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Dreieckes zu berechnen, wenn die Eckpunkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ sind.

9. Die Eckpunkte eines Dreieckes sind (3, 4), (2, —3), (—2, 3). Den Flächeninhalt desselben zu bestimmen und die Bedeutung des Vorzeichens anzugeben.

10. Auf welcher Seite von $OM_1$ liegt $M_2$, wenn $M_1$ (+3, —4) und $M_2$ (—2, +3) ist?

11. Die Polarkoordinaten der Punkte (5, 0), (0, 3), (3, 3), (—2, 0), (0, —3), (4, —4) zu bestimmen.

12. Die orthogonalen Koordinaten jener Punkte zu bestimmen, deren Polarkoordinaten sind:

$$a)\ r = 2,\ \varphi = 60^0;\ b)\ r = 4,\ \varphi = 90^0;\ c)\ r = 6,\ \varphi = 135^0;\ d)\ r = 3,\ \varphi = 240^0;\ e)\ r = 2,\ \varphi = 321^0.$$

13. Die Punkte $M_1$ (0, 0), $M_2$ (0, 6) sind die Angriffspunkte der Kräfte 12 *kg* und 18 *kg*. Den Angriffspunkt der Resultierenden zu bestimmen, wenn die beiden Kräfte *a)* direkt, *b)* invers parallel sind.

14. Zu untersuchen, ob die Punkte

*a)* $M_1$ (1, 5), $M_2$ (3, 9), $M_3$ (—2, —1);

*b)* $M_1$ (2, 3), $M_2$ (5, —7), $M_3$ (—4, —3)

in derselben Geraden liegen.

15. $M_1$ (2, —7), $M_2$ (—3, +4), $M_3$ (1, $y$); $y$ so zu bestimmen, daß die Gerade $M_1 M_2$ durch $M_3$ geht.

16. Zu den Punkten $A$ (2, 3), $B$ (4, 7), $C$ (6, 5) den Punkt $D$ so zu bestimmen, daß $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Man benütze eine Eigenschaft der Diagonalen eines Parallelogrammes.

## II. Gleichungen zwischen zwei Variablen und ihre geometrischen Örter.

**§. 368.** Größen, denen man während einer Rechnung oder Entwicklung einen bestimmten unveränderlichen Wert beilegt, heißen **konstant**, im Gegensatze zu den **veränderlichen** oder **variablen** Größen, welche jeden beliebigen, ihrer Natur angemessenen Wert annehmen können.

Die Beziehungen zwischen variablen und konstanten Größen werden durch Gleichungen ausgedrückt; z. B. $y = 2x + 3$. Bedeutet hier $x$ eine variable Größe, so ist, da der Wert von $2x + 3$ mit $x$ sich ändert, auch $y$ variabel; weil jedoch zu jedem speziellen Werte von $x$ aus $y = 2x + 3$ ein bestimmter Wert von $y$ sich ergibt, so erscheint $y$ als abhängig von $x$. Man unterscheidet daher unabhängig und abhängig Variable; die ersteren sind jene, denen man jeden beliebigen mit ihrer Natur verträglichen Wert beilegen kann, die letzteren solche, deren Werte durch jene der unabhängig Variablen bestimmt werden.

Um auszudrücken, daß eine Variable $y$ von einer andern $x$ abhängig sei, sagt man, $y$ sei eine Funktion von $x$.

§. **369.** Eine Gleichung zwischen zwei Variablen $x$ und $y$ hat unzählig viele Auflösungen; werden für $x$ nach und nach verschiedene spezielle Werte gesetzt, so erhält man zu jedem Werte von $x$ aus der Gleichung auch für $y$ einen oder mehrere zugehörige Werte. Betrachtet man nun jedes Paar zusammengehörender Werte von $x$ und $y$ als Koordinaten eines Punktes $M$ in Bezug auf ein bestimmtes Achsensystem und konstruiert hiernach den Punkt, so erscheint jede Auflösung der Gleichung geometrisch durch einen Punkt dargestellt.

Je weniger voneinander verschieden man die aufeinanderfolgenden Werte von $x$ annimmt, desto näher aneinander rücken auch die durch die Koordinaten bestimmten Punkte. Durchläuft $x$ alle reellen negativen und positiven Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so beschreibt der variable Punkt $M$ eine bestimmte Linie, welche die Eigenschaft hat, daß die Koordinaten jedes ihrer Punkte der gegebenen Gleichung genügen. Diese Linie heißt deshalb der geometrische Ort der Gleichung.

In der Ausführung werden so viele Punkte der Linie bestimmt, als nötig sind, um die Linie vollständig darzustellen.

Zum besseren Verständnisse mögen folgende Beispiele dienen.

1. Es sei die Gleichung des ersten Grades

$$y = 2x - 1$$

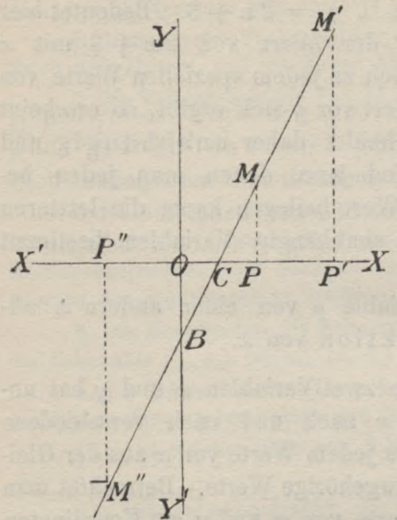
zu konstruieren, d. i. ihr geometrischer Ort zu bestimmen.

Die Abszissenachse sei $XX'$ (Fig. 174) und $O$ der Anfangspunkt der Koordinaten.

$$\text{Für } x = 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$$
$$\text{ist } y = 1, 3, 5, \ldots, -3, -5, -7, \ldots$$

Trägt man auf der Abszissenachse die positiven Werte von $x$ von $O$ aus bis $P, P' \ldots$ und die negativen von $O$ bis $P'' \ldots$ auf, er-

Fig. 174.




richtet in diesen Punkten Normale und trägt auf denselben die entsprechenden Werte von $y$, und zwar die positiven nach oben, die negativen nach unten auf, so liegen die Endpunkte $M, M', M'' \ldots$ in der Linie, welche durch die Gleichung $y = 2x - 1$ analytisch bestimmt ist. Da die Ordinatendifferenzen den Abszissendifferenzen proportioniert sind, so ist die Linie nach §. 366 gerade.

Um den Punkt $B$ zu erhalten, in welchem diese Gerade die Ordinatenachse schneidet, erwäge man, daß für diesen Punkt $x = 0$ ist; dann wird $y = 2x - 1 = -1$, also $OB = -1$. Für den Punkt $C$, in welchem die Gerade die Abszissenachse schneidet, muß $y = 0$, also $2x - 1 = 0$ sein, woraus sich $x = \frac{1}{2}$ ergibt; also ist $OC = \frac{1}{2}$.

Konstruiere ebenso die Gleichung $y = -2x$.

Welcher geometrische Ort entspricht folgenden Gleichungen:

*a*) $y = 0$, *b*) $x = 0$, *c*) $y = \pm b$, *d*) $x = \pm a$, *e*) $y = +x$, *f*) $y = -x$?

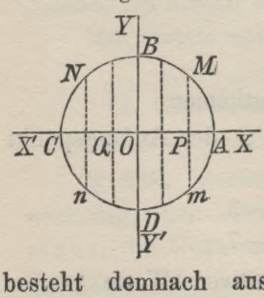
Jeder Gleichung des ersten Grades entspricht eine gerade Linie.

2. Man konstruiere die quadratische Gleichung

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ oder } y = \pm\sqrt{9 - x^2}.$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Für | $x = 0,$ | $1,$ | $2,$ | $3\ldots$ | $-1,$ | $-2,$ | $-3$ |
| ist | $y = \pm 3,$ | $\pm\sqrt{8},$ | $\pm\sqrt{5},$ | $0\ldots$ | $\pm\sqrt{8},$ | $\pm\sqrt{5},$ | $0.$ |

Fig. 175.




Werden je zwei zusammengehörige Werte von $x$ und $y$ als Koordinaten eines Punktes in Bezug auf das System, dessen Abszissenachse $XX'$ (Fig. 175) und dessen Anfangspunkt $O$ ist, angenommen, so ergibt sich, daß zu jeder Abszisse zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten und ebenso zu jeder Ordinate zwei gleiche entgegengesetzte Abszissen gehören. Die der obigen Gleichung entsprechende Linie besteht demnach aus vier zusammenhängenden Teilen, die in Beziehung auf die Koordinatenachsen symmetrisch liegen.

Für $x = 0$ ist $y = \pm 3$; nimmt man daher $OB = +3$ und $OD = -3$ an, so sind $B$ und $D$ die Punkte, in denen die Ordinatenachse von der Linie geschnitten wird. Zu $y = 0$ gehört $x = \pm 3$; nimmt man daher $OA = +3$ und $OC = -3$ an, so sind ebenso $A$ und $C$ die Schnittpunkte der Linie mit der Abszissenachse.

Für alle positiven und negativen Werte von $x$, die (absolut) größer als 3 sind, gibt es keine Ordinaten, da $y$ für $x > 3$ imaginär wird; ebenso kann auch $y$ (absolut) nicht größer als 3 sein. Die krumme Linie ist also eine begrenzte.

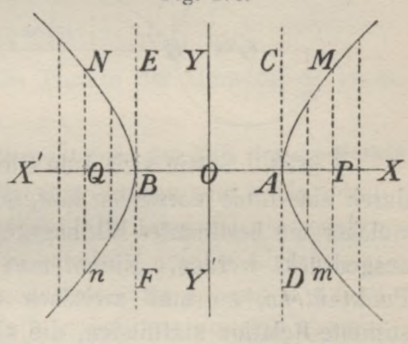
3. Es sei zu konstruieren die quadratische Gleichung

$$x^2 - y^2 = 9, \text{ oder } y = \pm\sqrt{x^2 - 9}.$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Für $x =$ | $\pm 3$, | $\pm 4$, | $\pm 5$, | $\pm 6$, |
| wird $y =$ | $0$, | $\pm\sqrt{7}$, | $\pm 4$, | $\pm\sqrt{27}$. |

Für alle Werte von $x$, die zwischen $-3$ und $+3$ liegen, wird $y$ imaginär und man erhält daher (Fig. 176) keine Punkte der Linie. Macht man daher $OA = +3$ und $OB$ gleich $-3$ und errichtet in $A$ und $B$ auf $AB$ die Normalen $CD$ und $EF$, so liegt zwischen denselben kein Punkt der Kurve. Für $x = \pm 3$ wird $y = 0$; die Linie schneidet also die Abszissenachse in den Abständen $OA = +3$ und $OB = -3$. Da ferner zu jeder positiven oder negativen Abszisse, deren absoluter Wert größer als 3 ist, zwei gleiche und entgegengesetzte Ordinaten gehören, so folgt, daß die Linie aus zwei getrennten Ästen zusammengesetzt ist, die zur Abszissenachse symmetrisch liegen. Da mit wachsenden Werten von $x$ auch die Ordinaten zunehmen und mit den Abszissen ohne Ende wachsen, so folgt, daß jeder Ast der Linie aus zwei Teilen besteht, die sich oberhalb und unterhalb der Abszissenachse symmetrisch ins Unendliche erstrecken.

Fig. 176.




Da zu jedem Werte von $y$ zwei entgegengesetzte und (absolut) gleiche Werte von $x$ gehören, so liegt auch die Kurve symmetrisch in Bezug auf die Ordinatenachse.

Konstruiere noch die quadratischen Gleichungen:

*a)* $y^2 = 6x - x^2$, *c)* $y = x^2 + 3x - 2$, *e)* $4x^2 + 9y^2 = 36$,

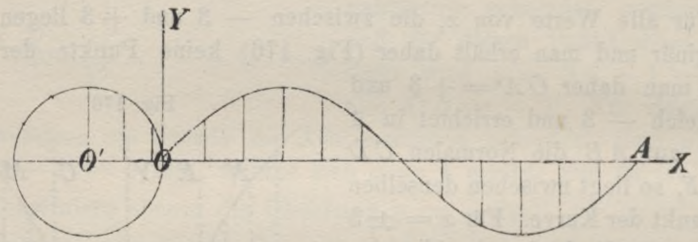
*b)* $y^2 = 4x$, *d)* $xy = 10$, *f)* $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Aus den voranstehenden Aufgaben ist ersichtlich, daß die geometrischen Örter quadratischer Gleichungen an Gestalt sehr verschieden sein können.

4. Es soll noch die transzendente Gleichung $y = \sin x$ konstruiert werden (Fig. 177).

Man trage die Peripherie eines Kreises, dessen Radius 1 ist, als gerade Linie auf der Abszissenachse auf, die zu den Punkten 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{6}$ etc. gehörigen Ordinaten können dem Kreise $O'$ entnommen werden. Da die Peripherie wiederholt links und rechts von $O$ aufgetragen werden kann, so ist die Kurve $y = \sin x$ unbegrenzt.

Fig. 177.




§. **370.** Sowie sich jede Gleichung zwischen $x$ und $y$ geometrisch durch eine Linie darstellen läßt, so kann auch umgekehrt jede Linie, in welcher ein bestimmtes Bildungsgesetz vorherrscht, durch eine Gleichung ausgedrückt werden. Nimmt man nämlich in der Linie einen variablen Punkt $M$ an, so muß zwischen den Koordinaten desselben eine bestimmte Relation stattfinden, die sich aus irgend einer charakteristischen Eigenschaft der Linie ergibt und die daher für alle Lagen des variablen Punktes unverändert fortbesteht. Wird diese Relation zwischen $x$ und $y$ durch eine Gleichung ausgedrückt, so heißt dieselbe die Gleichung der Linie.

Eine Gleichung zwischen zwei Variablen ist demnach der analytische Repräsentant für eine gegebene Linie, sowie umgekehrt die Linie der geometrische Repräsentant für eine gegebene Gleichung ist. Auf dieser Wechselbeziehung beruht das Wesen der analytischen Geometrie. Sie hat die Aufgabe, aus irgend einer bekannten charakteristischen Eigenschaft einer gegebenen Linie die Gleichung abzuleiten, welche durch die Koordinaten eines jeden Punktes der Linie erfüllt wird, und anderseits aus einer gegebenen Gleichung zwischen zwei Variablen das durch sie dargestellte geometrische Gebilde zu ermitteln; insbesondere auch, durch Modifikation und Kombination der zu bestimmten Linien gehörigen Gleichungen und deren geometrische Deutung die Eigenschaften dieser Linien zu entwickeln.

In dem Nachfolgenden sollen nach der Ordnung die einzelnen Linien, die sich durch Gleichungen des ersten und des zweiten Grades ausdrücken lassen, analytisch untersucht werden.

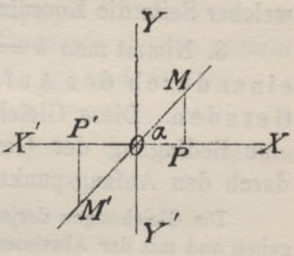
## III. Die gerade Linie.

### §. 371. Allgemeine Gleichung einer Geraden.

*a)* Die Gerade geht durch den Ursprung.

Diese Gerade ist bestimmt durch den Winkel $\alpha$, welchen sie mit der $X$-Achse einschließt; er wird von der positiven Richtung der Abszissenachse gegen die positive Richtung der Ordinatenachse gerechnet.

Fig. 178.




Für den Punkt $M$ (Fig. 178) ist

$\frac{MP}{OP} = \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \alpha$; für $M'$ ist

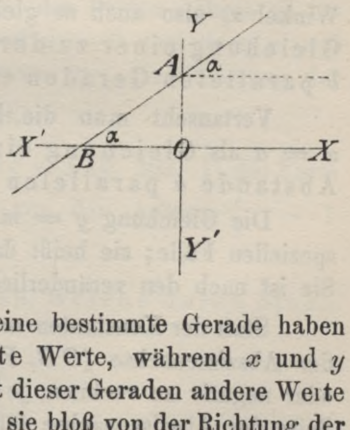
$\frac{M'P'}{OP'} = \frac{y}{x} = \operatorname{tang}(\alpha + \pi) = \operatorname{tang} \alpha$; setzt man $\operatorname{tang} \alpha = m$, so ist also für alle Punkte der Geraden $\frac{y}{x} = m$, oder $y = mx$.

Man beweise die Richtigkeit dieser Gleichung für den Fall, daß die Gerade den zweiten und vierten Quadranten scheidet.

*b)* Die Gerade geht nicht durch den Ursprung.

Sie ist bestimmt durch den Abschnitt $OA = b$ von der Ordinatenachse und den Winkel $\alpha$ (Fig. 179).

Fig. 179.




Verlegt man den Ursprung nach $A$ und läßt die Achsen parallel und gleichgerichtet, so ist die Gleichung der Geraden $\eta = m\,\xi$; für das System $O$ ist, da $\xi = x$, $\eta = y - b$ ist die Gleichung der Geraden $y - b = mx$ und

$$y = mx + b.$$

Da $m$ und $b$ jede beliebige reelle Zahl bedeuten können, so ist die Gleichung $y = mx + b$ der analytische Ausdruck für alle möglichen geraden Linien. Für eine bestimmte Gerade haben auch $m$ und $b$ ganz bestimmte, konstante Werte, während $x$ und $y$ variabel sind, d. i. für jeden andern Punkt dieser Geraden andere Werte annehmen. Die Größe $m = \operatorname{tang} \alpha$ heißt, da sie bloß von der Richtung der Geraden gegen die Abszissenachse abhängt, die Richtungskonstante.

§. 372. Diskussion der Gleichung $y = mx + b$.

1. Da die Gleichung $y = mx + b$ zwei Konstante $m$ und $b$ hat, die so lange unbestimmt bleiben, als nicht von einer bestimmten Geraden die Rede ist, so folgt, daß zur vollkommenen Bestimmung einer Geraden zwei Bedingungen erforderlich sind.

2. Die Richtungskonstante $m$ ist positiv oder negativ, je nachdem der Winkel $\alpha$, den die Gerade mit der positiven Abszissenachse bildet, spitz oder stumpf ist. Die Konstante $b$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Gerade die Ordinatenachse oberhalb oder unterhalb der Abszissenachse schneidet.

Man kann daher schon aus den Vorzeichen der Konstanten ersehen, auf welcher Seite die Koordinatenachsen von der Geraden geschnitten werden.

3. Nimmt man $b = 0$ an, so erhält man $y = mx$ als Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehenden Geraden. Diese Gleichung enthält nur noch eine Konstante, da die eine Bedingung der Geraden schon dadurch angegeben ist, dass sie durch den Anfangspunkt geht.

Die Gleichungen derjenigen Geraden anzugeben, welche durch den Ursprung gehen und mit der Abszissenachse einen Winkel von 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150° einschließen.

4. Soll die Gerade, welche durch den Koordinatenanfangspunkt geht und deren Gleichung $y = mx$ ist, mit der Abszissenachse zusammenfallen, so muß man den Winkel $\alpha$, und somit auch $m$ gleich Null setzen; man erhält also $y = 0$ als Gleichung der Abszissenachse.

Vertauscht man die Abszissenachse mit der Ordinatenachse, so ergibt sich dann $x = 0$ als Gleichung der Ordinatenachse.

5. Soll die Gerade zur Abszissenachse, und zwar in dem Abstande $b$ parallel sein, so muß man in der Gleichung $y = mx + b$ den Winkel $\alpha$, also auch $m$ gleich Null setzen, wodurch man $y = b$ als Gleichung einer zu der Abszissenachse in dem Abstande $b$ parallelen Geraden erhält.

Vertauscht man die Koordinatenachsen, so ergibt sich ebenso $x = a$ als Gleichung einer zu der Ordinatenachse in dem Abstande $a$ parallelen Geraden.

Die Gleichung $y = mx + b$ enthält mithin alle oben angeführten speziellen Fälle; sie heißt daher die allgemeine Gleichung der Geraden. Sie ist nach den veränderlichen Koordinaten vom ersten Grad.

Statt der Konstanten $m$ kann auch der Abschnitt $a$ der Geraden von der Abszissenachse ($OB$, Fig. 179) eingeführt werden; er ist positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem er auf die positive oder negative Seite der Abszissenachse fällt.

Für den Durchschnittspunkt der Geraden mit der Abszissenachse ist $x = a, y = 0$; daher ist $0 = am + b$ und $m = -\frac{b}{a}$. Die Gleichung $y = mx + b$ nimmt mithin die Form $y = -\frac{b}{a}x + b$ oder $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ an.

§. **373.** Der geometrische Ort einer Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Variablen ist eine Gerade.

Beweis. Jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Variablen $Ax + By + C = 0$ läßt sich auf die Form $y = mx + b$ bringen. Betrachtet man nun die Gleichung $y = mx + b$ als den analytischen Ausdruck für eine Linie, indem man $x$ und $y$ als die Koordinaten ihrer Punkte, $m$ und $b$ aber als konstante Größen ansieht, so hat man für irgend drei Punkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ und $(x_3, y_3)$

$$y_1 = mx_1 + b, \quad y_2 = mx_2 + b, \quad y_3 = mx_3 + b.$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von jeder der letzteren, so erhält man

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \text{ und } y_3 - y_1 = m(x_3 - x_1),$$

daher

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Die drei Punkte liegen demnach (§. 366) in einer Geraden, d. i. der geometrische Ort der Gleichung $y = mx + b$ ist eine Gerade.

§. **374.** Konstruktion einer Geraden, deren Gleichung gegeben ist.

Man bestimme zwei Punkte, durch welche die Gerade gehen soll, indem man aus der Gleichung zwei Paare zusammengehöriger Werte von $x$ und $y$ sucht und diese konstruiert. Im allgemeinen ist es am bequemsten, die Abschnitte der Geraden von den beiden Achsen zu bestimmen, indem man in der Gleichung einmal $y = 0$ und dann $x = 0$ setzt; sie sind auch sofort zu erkennen, wenn man die Gleichung der Geraden auf die Form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ bringt.

So erhält man für die Gerade $y = 2x - 1$ (§. 369, 1) die Form $\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{1} = 1$, somit sind die Abschnitte von den Achsen $\frac{1}{2}$ $-1$ (Fig. 174).

§. **375.** Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt $(x_1, y_1)$ geht.

Die verlangte Gleichung hat die Form

$$y = mx + b \ldots 1);$$

$m$ und $b$ sind der Bedingung der Aufgabe gemäß zu bestimmen.

Damit die Gerade durch den Punkt $(x_1, y_1)$ gehe, müssen dessen Koordinaten der Gleichung 1) genügen; es muß also

$$y_1 = mx_1 + b \ldots 2)$$

sein. Diese Gleichung enthält außer den bekannten Zahlen $x_1$ und $y_1$ noch die Unbekannten $m$ und $b$, von denen daher nur eine ermittelt werden kann. Bestimmt man $b$, so erhält man $b = y_1 - mx_1$ und damit geht die Gleichung 1) über in

$$y = mx + y_1 - mx_1, \text{ oder } y - y_1 = m\,(x - x_1) \ldots 3).$$

Diese Gleichung 3), welche man auch durch die Subtraktion der Gleichung 2) von 1) erhält, hat noch eine unbestimmte Konstante $m$, die alle Werte zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen kann; es entsprechen ihr daher unendlich viele Gerade, wie es sein muß, da durch einen Punkt unzählig viele Gerade gezogen werden können. Ist aber die Aufgabe gestellt, die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch den Punkt $(x_1, y_1)$ geht und die $X$-Achse unter einem bestimmten Winkel schneidet, so hat $m$ einen bestimmten Wert, oder es gibt nur eine Gerade, welche diesen Bedingungen genügt.

§. 376. Gleichung einer Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ geht..

Die verlangte Gleichung hat die Form

$$y = mx + b \ldots 1);$$

$m$ und $b$ sind nach den Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen.

Damit die Gerade durch die zwei Punkte gehe, müssen deren Koordinaten der Gleichung 1) genügen, es müssen somit die Bedingungsgleichungen

$$y_1 = mx_1 + b \ldots 2) \text{ und } y_2 = mx_2 + b \ldots 3) \quad \text{bestehen.}$$

Aus 2) und 3) können nun $m$ und $b$ bestimmt und ihre Werte in 1) eingesetzt werden, wodurch die unbekannten Konstanten $m$ und $b$ in 1) durch die Koordinaten der gegebenen Punkte ausgedrückt sind.

Kürzer kommt man zum Ziele, wenn man die Gleichung 2) von 1) und dann von 3) subtrahiert.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \ldots 4) \qquad y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1) \ldots 5)$$

und nun $m$ aus 4) und 5) eliminiert. Man erhält so als die gesuchte Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) \ldots 6).$$

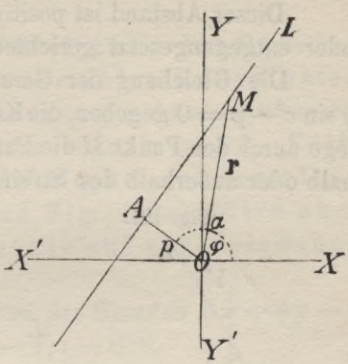
Wie kann diese Gleichung aus §. 366 abgeleitet werden?

Man leite aus der Gleichung 6) die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ab.

§. 377. Normalform der Gleichung einer Geraden.

Ist (Fig. 180) $p = OA \perp L$ und $\sphericalangle XOA = \alpha$, so ist die Lage der Geraden $L$ auch durch $p$ und $\alpha$ bestimmt; $p$ wird absolut und $\alpha$ in positiver Richtung von $0^0$ bis $360^0$ genommen.

Fig. 180.




Sind $x$ und $y$ die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes $M$ der Geraden $L$, $r$ und $\varphi$ die Polarkoordinaten für $OX$ als Polarachse, so ist $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$; multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$, so erhält man durch Addition

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = r \cos (\alpha - \varphi) = p$;

mithin ist

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Diese Form der Gleichung einer Geraden heißt die Normalform.

Die Gleichung einer Geraden ist in allen Formen nach $x$ und $y$ vom ersten Grade; sie läßt sich immer auf die Gestalt $Ax + By + C = 0$ bringen.

§. **378.** Die Gleichung einer Geraden $Ax + By + C = 0$ in die Normalform umzuwandeln.

Die Bedeutung der Gleichung kann nicht geändert werden, wenn sie mit einer konstanten, endlichen, von Null verschiedenen Zahl multipliziert wird. Dieselbe sei $\lambda$. Dann ist:

$\lambda A x + \lambda B y + \lambda C = 0$. Soll diese in die Normalform $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ übergehen, so muß $\lambda$ so gewählt werden, daß

$\lambda A = \cos \alpha$,

$\lambda B = \sin \alpha$ wird. Aus diesen Gleichungen erhält man $\lambda = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Das Vorzeichen ist dadurch bestimmt, daß $\lambda C = -p$ sein muß. Da $p$ positiv ist, muß $\lambda C$ immer negativ sein; $\lambda$ muß also das entgegengesetzte Zeichen von $C$ erhalten.

Soll $3x + 4y + 6 = 0$ in die Normalform umgewandelt werden, so ist $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{9 + 16}} = -\dfrac{1}{5}$.

Die Normalform ist demnach: $-\dfrac{3x}{5} - \dfrac{4y}{5} - \dfrac{6}{5} = 0$.

Für $3x + 4y - 6 = 0$ wäre $\lambda = \dfrac{1}{5}$ und die Normalform

$$\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - \frac{6}{5} = 0.$$

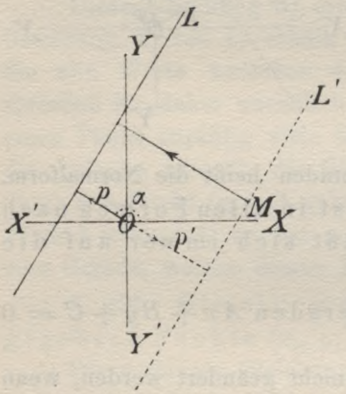
Berechne für beide Fälle den Winkel $\alpha$!

## §. 379. Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Dieser Abstand ist positiv oder negativ, je nachdem er mit $p$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist.

Die Gleichung der Geraden $L$ sei in der Normalform $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ gegeben, die Koordinaten des Punktes $M$ seien $\xi$ und $\eta$. Man lege durch den Punkt $M$ die Parallele $L'$ zu $L$, so kann der Ursprung innerhalb oder außerhalb des Streifens $LL'$ liegen, wenn $L'$ nicht durch $O$ geht.

Fig. 181.




*a)* $O$ liegt innerhalb des Streifens $LL'$ (Fig. 181). Der gesuchte Abstand $d$ ist $p + p'$. Die Gleichung der Linie $L'$ ist: $x \cos (\alpha \pm 180^0) + y \sin (\alpha \pm 180^0) - p' = 0$ oder $-x \cos \alpha - y \sin \alpha - p' = 0$. Da $M$ dieser Linie angehört, so müssen die Koordinaten $\xi$, $\eta$ diese Gleichung befriedigen; es ist also

$$-\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha - p' = 0 \text{ und}$$
$$p' = -\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha; \text{ demnach}$$
$$d = p + p' = p - \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha = -(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p).$$

*b)* $O$ liegt außerhalb des Streifens $LL'$ (Fig. 182, *a*, *b*). Der gesuchte Abstand ist dem Zeichen und der Größe nach $d = p - p'$;

Fig. 182 *a*.

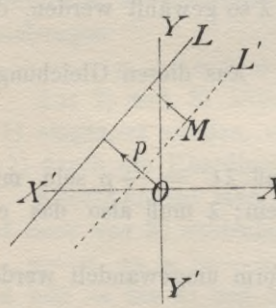
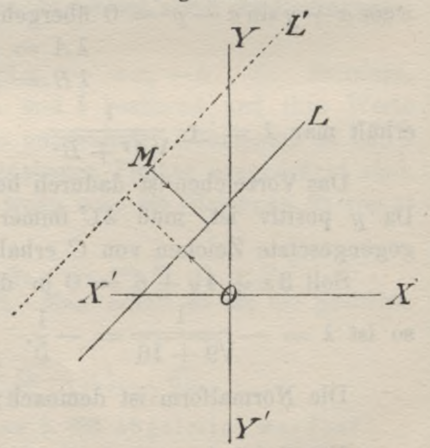



Fig. 182 *b*.




für 182 *a* hat $d$ gleiche Richtung mit $p$ und ist positiv, für 182 *b* hat $d$ entgegengesetzte Richtung mit $p$ und wird negativ, da $p < p'$ ist.

In beiden Fällen gehört zu $L'$ derselbe Winkel $\alpha$, wie zu $L$. Daher ist die Gleichung der Linie $L'$: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p' = 0$. Da $M$ dieser Linie angehört, so müssen die Koordinaten $\xi$, $\eta$ diese Gleichung befriedigen; es ist also $\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p' = 0$ und $p' = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$, demnach $d = p - p' = p - \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha = -(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p)$.

Für die Bestimmung des Abstandes $d$ ergibt sich daher folgende Regel:

Man setze in das Trinom der Gleichung der Geraden in der Normalform an Stelle der variablen Koordinaten der Punkte der Geraden die Koordinaten $\xi$, $\eta$ des gegebenen Punktes ein und multipliziere das Resultat mit $-1$. Fällt $d$ positiv aus, so liegen die Punkte $M$ und $O$ auf derselben Seite der Geraden $L$ (Fig. 181 und Fig. 182$a$); wird aber $d$ negativ, so liegen die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden $L$ (Fig. 182$b$).

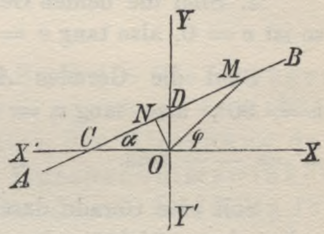
Der Abstand des Punktes $M$ (1,1) von der Geraden $3x + 4y + 6 = 0$ ist $2{\cdot}6$, der des Punktes $M(-2, -1)$: $-0{\cdot}8$.

Geht $L'$ durch $O$, so ist $d = p$.

§. **380.** Polargleichung einer Geraden.

Um die Gleichung der Geraden $AB$ (Fig. 183) in Polarkoordinaten zu erhalten, nehmen wir der Einfachheit halber den Ursprung $O$ der rechtwinkligen Koordinaten als Pol und die Abszissenachse $OX$ als Polarachse an; für den Punkt $M$ ist dann $r = OM$, $\varphi = XOM$. Ist nun $ON = p$ der Abstand des Poles von der Geraden $AB$ und der Winkel $XCB = \alpha$, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke $MNO$

Fig. 183.




$$OM = \frac{ON}{\sin NMO}, \text{ oder, da } NMO = \varphi - \alpha \text{ ist,}$$

$$r = \frac{p}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

als Polargleichung der Geraden $AB$.

Diese Gleichung erhält man auch aus $y = mx + b$, indem man $y = r \sin\varphi$ und $x = r\cos\varphi$ setzt und beachtet, daß $m = \operatorname{tang}\alpha$ und $b\cos\alpha = p$ ist.

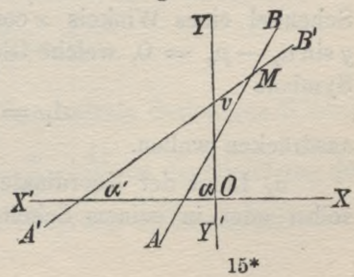
## Zwei Gerade.

§. **381.** Schnittpunkt zweier Geraden.

Es seien $y = mx + b \ldots 1)$,
$y = m'x + b' \ldots 2)$

die Gleichungen der beiden Geraden $AB$ und $A'B'$ (Fig. 184); man suche die Koordinaten ihres Schnittpunktes $M$.

Fig. 184.




Für alle Punkte der Geraden $AB$ ist $y = mx + b$; für alle Punkte der Geraden $A'B'$ ist $y = m'x + b'$; für den Punkt, der in den beiden Geraden liegt, für den Schnittpunkt $M$, muß daher $y = mx + b$ und zugleich auch $y = m'x + b'$ gelten. Dem Punkte $M$ werden daher jene Koordinaten $x$ und $y$ zukommen, die beiden Gleichungen zugleich genügen; diese Werte ergeben sich aber durch Auflösung jener Gleichungen; man erhält

$$x = \frac{b - b'}{m' - m}, \qquad y = \frac{m'b - mb'}{m' - m}.$$

§. 382. Winkel zweier Geraden.

1. Sind (Fig. 184) die Gleichungen der Geraden $AB$ und $A'B'$, welche mit der Abzsissenachse die Winkel $\alpha$ und $\alpha'$ bilden,

$$y = mx + b \text{ und } y = m'x + b',$$

wo also $m = \operatorname{tang}\alpha$, $m' = \operatorname{tang}\alpha'$ ist, so hat man zur Bestimmung des Winkels $AMA' = v$, den die beiden Geraden einschließen,

$$\operatorname{tang} v = \operatorname{tang}(\alpha - \alpha') = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha'}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'}, \text{ oder } \operatorname{tang} v = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

Ist $v'$ der Nebenwinkel von $v$, so ist

$$\operatorname{tang} v' = -\operatorname{tang} v = -\frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

2. Sind die beiden Geraden $AB$ und $A'B'$ zueinander parallel, so ist $v = 0$, also $\operatorname{tang} v = 0$; daher muß $m = m'$ und $\alpha = \alpha'$ sein.

Sind die Geraden $AB$ und $A'B'$ zueinander normal, so ist $v = 90^0$, also $\operatorname{tang} v = \infty$; es muß daher $1 + mm' = 0$, mithin $m' = -\frac{1}{m}$ sein.

Soll eine Gerade durch den Punkt $x', y'$ gehen und mit einer Geraden, deren Richtungskonstante $m$ ist, parallel oder zu ihr senkrecht sein, so heißt ihre Gleichung $y - y' = m(x - x')$, beziehungsweise $y - y' = -\frac{1}{m}(x - x')$.

§. 383. Gleichung der Halbierungslinie eines Winkels, dessen Schenkel durch ihre Gleichungen gegeben sind.

Es seien die in der Normalform gegebenen Gleichungen der Schenkel eines Winkels $x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0$ und $x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$, welche Gleichungen wir der Kürze halber durch die Symbole

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 = 0$$

ausdrücken wollen.

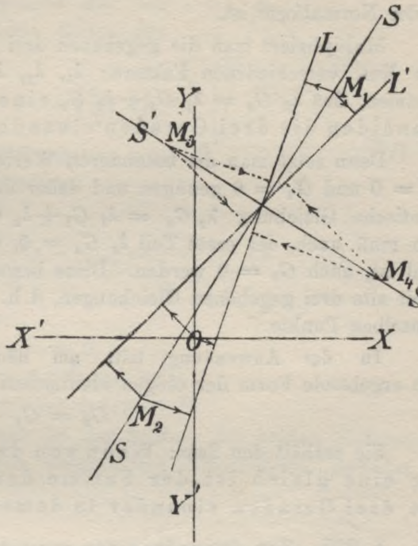
*a)* Liegt der Koordinatenanfangspunkt in dem gegebenen Winkel selbst oder in seinem Scheitelwinkel (Fig. 185), so sind die Abstände eines beliebigen Punktes $(x, y)$ der Winkelsymmetrale von den Schenkeln $-A_1$ und $-A_2$; beide sind zugleich positiv oder negativ; da sie, absolut genommen, einander gleich sind, so muß ihre Differenz Null sein. Somit ist die Gleichung der Symmetrale dieser beiden Winkel:

$$A_1 - A_2 = 0.$$

*b)* Liegt der Koordinatenanfangspunkt in einem der Nebenwinkel des gegebenen Winkels (Fig. 185), so sind die Abstände eines jeden Punktes der Winkelsymmetrale von den Schenkeln $-A_1$ und $-A_2$; sie sind absolut gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt. Daher muß ihre Summe gleich Null sein. Mithin ist in diesem Falle die Gleichung der Winkelsymmetrale:

$$-A_1 + (-A_2) = 0 \quad \text{oder}$$
$$A_1 + A_2 = 0.$$

Fig. 185.




Man hat daher folgenden Satz: Sind die Gleichungen zweier Geraden in der Normalform gegeben, so erhält man aus denselben durch Subtraktion die Gleichung der Halbierungslinie jenes Paares der Durchschnittswinkel, das den Ursprung enthält, hingegen durch Addition für jenes Paar, das den Ursprung nicht enthält.

Beispiel. Die Gleichungen der Symmetralen der von den Geraden $4x - 3y - 2 = 0$ und $12x + 5y + 3 = 0$ gebildeten Winkel zu suchen.

Die Gleichungen der beiden Geraden in der Normalform sind:

$$\frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} - \frac{2}{5} = 0$$
$$-\frac{12x}{13} - \frac{5y}{13} - \frac{3}{13} = 0.$$

$y = 8x - \frac{11}{14}$ ist die Gleichung der Symmetrale desjenigen Winkelpaares, in dem der Ursprung liegt; $y = -\frac{x}{8} - \frac{41}{64}$ ist die Gleichung der Symmetrale jenes Winkelpaares, das den Ursprung nicht enthält.

§. 384. Bedingung, unter welcher drei Gerade in demselben Punkte einander schneiden.

Es seien $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ die Gleichungen dreier Geraden, wo $G = 0$ das Symbol für die Gleichung einer Geraden in der allgemeinen Form oder in der Normalform ist.

Multipliziert man die gegebenen drei Gleichungen folgeweise mit den drei von Null verschiedenen Faktoren $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ und lassen sich dieselben so bestimmen, daß $\lambda_3 G_3 = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$ eine identische Gleichung wird, so schneiden die drei Geraden einander in demselben Punkte.

Denn setzt man die besonderen Werte für $x$ und $y$, welche den Gleichungen $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ genügen und daher ihrem Schnittpunkte angehören, in die identische Gleichung $\lambda_3 G_3 = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$, so verschwindet der zweite Teil, also muß auch der erste Teil $\lambda_3 G_3 = 0$, und, da $\lambda_3$ eine von Null verschiedene Zahl ist, auch $G_3 = 0$ werden. Diese besonderen Werte für $x$ und $y$ befriedigen somit alle drei gegebenen Gleichungen, d. h. die drei Geraden schneiden einander in demselben Punkte.

In der Anwendung tritt am häufigsten die für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ sich ergebende Form der obigen identischen Gleichung auf:

$$G_3 = G_1 + G_2.$$

Sie enthält den Satz: Wenn von den Gleichungen dreier Geraden die eine gleich ist der Summe der beiden anderen, so schneiden die drei Geraden einander in demselben Punkte.

§. 385. Zur Anwendung der voranstehenden Lehren sollen hier die analytischen Beweise einiger Lehrsätze vom Dreiecke folgen:

1. Die Halbierungslinien der drei inneren Winkel eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte (§. 47, 2).

Sind die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes in der Normalform

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0,$$

so sind, wenn man den Koordinatenanfangspunkt innerhalb des Dreieckes annimmt, die Gleichungen der Winkelhalbierungslinien

$$A_1 - A_2 = 0, \qquad A_1 - A_3 = 0, \qquad A_3 - A_2 = 0.$$

Da nun die erste dieser Gleichungen gleich ist der Summe der beiden anderen, so folgt nach §. 384, daß sich die drei Halbierungslinien in demselben Punkte schneiden.

2. Die Halbierungslinien eines inneren Winkels und der zwei ihm nicht anliegenden Außenwinkel eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte.

Nach §. 383 erhält man die drei Gleichungen

$$A_2 - A_1 = 0, \ \ A_1 + A_3 = 0, \ \ A_2 + A_3 = 0.$$

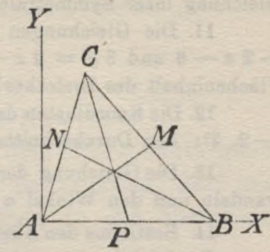
Die dritte Gleichung ist die Summe der beiden anderen; also schneiden die drei Winkelhalbierungslinien einander in demselben Punkte.

3. Die Schwerlinien eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte (§. 61).

Wir wählen in dem Dreiecke $ABC$ (Fig. 186) der Einfachheit halber den Eckpunkt $A$ als Koordinatenanfangspunkt und die Seite $AB$ als Abszissenachse.

Dann haben wir zur analytischen Bestimmung die drei Eckpunkte

Fig. 186.




$$A = (0, 0), \quad B = (x_2, 0), \quad C = (x_3, y_3).$$

Sind $M, N, P$ die Halbierungspunkte der den Eckpunkten $A, B, C$ gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes, so ist

$$M = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right), \quad N = \left(\frac{x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right), \quad P = \left(\frac{x_2}{2}, 0\right).$$

Für die Schwerlinien $AM, BN, CP$ erhalten wir daher nach §. 376 folgeweise die Gleichungen:

$$y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_2 + x_3}{2}} \cdot x, \; y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_3}{2} - x_2}(x - x_2), y = \frac{y_3}{x_3 - \frac{x_2}{2}}\left(x - \frac{x_2}{2}\right),$$

welche sich auch so ausdrücken lassen:

$$(x_2 + x_3)\, y - y_3 x = 0,$$
$$(x_3 - 2x_2)\, y - y_3 x + x_2 y_3 = 0,$$
$$(2x_3 - x_2)\, y - 2y_3 x + x_2 y_3 = 0.$$

Da nun die dritte Gleichung gleich ist der Summe der beiden anderen, so schneiden die durch diese Gleichungen dargestellten Schwerlinien einander in demselben Punkte.

§. 386. Aufgaben.

1. Suche die Gleichung jener Geraden, welche *a*) von der Ordinatenachse das Stück $-2$ abschneidet und mit der Abszissenachse einen Winkel von $45^0$ bildet; *b*) von der Abszissenachse das Stück $-3$ und von der Ordinatenachse das Stück 2 abschneidet!

2. Konstruiere die Geraden:

*a*) $y = 3x + 5$, *b*) $y = -2x + 3$, *c*) $y = 2x$;

3. Gegeben sind die Punkte:

*a*) $(1, -1)$ und $(-2, 2)$, *b*) $(2, 7)$ und $(-1, 1)$,
*c*) $(-\frac{1}{2}, 3)$ und $(3, 0)$, *d*) $(0, -2)$ und $(-\frac{2}{3}, 3)$

suche die Gleichung der Geraden, welche durch diese Punkte geht!

4. Eine Gerade geht durch den Punkt $(-2, +5)$ und ist *a*) der $X$-Achse, *b*) der $Y$-Achse, *c*) je einer der Winkelsymmetralen der Achsen parallel. Die Gleichung derselben zu suchen.

5. Die Gleichung jener Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt $(4, -1)$ und den Schnittpunkt der beiden Geraden $y = 2x - 4$ und $y = -x - 5$ geht.

6. Die Gleichung jener Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt $(-4, 3)$ geht und zu der Geraden $5y = 2x - 4$ parallel ist.

7. Die Gleichung jener Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt $(1, 4)$ geht und zur Geraden $2y + x - 2 = 0$ normal ist.

8. Die Eckpunkte des Dreieckes $ABC$ sind gegeben; die Gleichungen jener Geraden zu suchen, welche durch den Ursprung gehen und zu den Seiten des Dreieckes *a*) parallel, *b*) normal sind. $A$ (2, 3), $B$ (—4, 6), $C$ (3, —5).

9. In dem Schnittpunkte der Geraden $\frac{x}{3} + y = 1$ und $\frac{x}{2} - y = 1$ wird zu der letzteren Geraden die Normale gezogen; ihre Gleichung zu suchen.

10. Die Endpunkte einer Strecke sind $(1, -2)$ und $(3, -4)$; bestimme die Gleichung ihrer Symmetrale!

11. Die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes sind $y = -x - 3$, $7y = -2x - 6$ und $3y = 2x - 14$; suche *a*) die Koordinaten der Eckpunkte, *b*) den Flächeninhalt des Dreieckes!

12. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Viereckes sind: $(3, 4)$, $(2, 0)$, $(-2, -1)$, $(-2, 2)$; den Durchschnittswinkel der Diagonalen zu suchen.

13. Die Gleichung der Geraden $2x - 3y + 1 = 0$ in die Normalform umzuwandeln und den Winkel $\alpha$ zu bestimmen.

14. Bestimme den Abstand *a*) des Punktes $(2, 3)$ von der Geraden $4y = 3x + 12$; *b*) des Punktes $(-7, -4)$ von der Geraden $15y = -8x - 30$!

15. Die Eckpunkte eines Dreieckes sind $(-2, 2)$, $(4, 2)$ und $(1, 6)$; zu suchen *a*) die Gleichungen der Seiten; *b*) die Gleichungen der Höhen; *c*) die Höhen des Dreieckes; *d*) die Koordinaten des Mittelpunktes des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises.

16. Den Abstand der Geraden $2x + 3y - 7 = 0$ und $3x + 5y + 2 = 0$ vom Ursprung zu bestimmen.

17. Die Gleichungen der Schenkel eines Winkels sind *a*) $3y + 4x = 2$ und $4y = 3x - 5$; *b*) $10y - 24x = 1$ und $6y - 8x = 5$; suche die Gleichungen der beiden Winkelsymmetralen!

18. Die Gleichungen der Geraden *a*) $x - y = 0$; *b*) $x + y = 0$; *c*) $2x - 7 = 0$; *d*) $2x + 7 = 0$; *e*) $3y - 4 = 0$; *f*) $3y + 4 = 0$; *g*) $y + x\sqrt{3} = 0$; *h*) $y - x\sqrt{3} = 0$ in der Normalform anzugeben.

Geht die Gerade durch den Ursprung, so ist der Winkel $\alpha$ in der Normalform der kleinere der beiden positiven Winkel, welchen die im Ursprung auf die Gerade errichtete Normale mit der positiven Seite der Abszissenachse bildet.

19. Gehen die Geraden *a*) $2x + 3y - 48 = 0$; *b*) $x + 2y + 7 = 0$ durch den Schnittpunkt der Geraden $y = -3x + 5$ und $y = -2x - 4$?

Beweise analytisch folgende Lehrsätze:

20. Die Halbierungslinien eines Winkels und seines Nebenwinkels sind zueinander normal.

21. Die drei Höhen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte.

22. Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in demselben Punkte.

23. Die Basis eines Dreieckes ist $a$, die Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten ist $d^2$; den Ort für den Scheitel zu bestimmen.

24. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu bestimmen, welche von der Geraden $4x - 3y + 5 = 0$ den Abstand *a*) 4, *b*) $-3$ haben.

25. Über der Geraden $AB = c$ sind Dreiecke $ABC$ so zu konstruieren, daß die Seiten $AC$ und $BC$ sich so zueinander verhalten wie die anliegenden Höhenabschnitte auf $AB$; die Gleichung für den Ort von $C$ zu suchen.

26. Über der Geraden $AB = c$ Dreiecke $ABC$ so zu zeichnen, daß sie durch die Höhe auf $AB$ in zwei Teile zerschnitten werden, die in dem Verhältnis $m : n$ stehen; den Ort für $C$ zu suchen.

27. Ein rechter Winkel ist gegeben. Der geometrische Ort jener Punkte zu suchen, für welche *a*) die Summe, *b*) die Differenz der Abstände von den Schenkeln desselben konstant ist. Wie heißt die Gleichung für den geometrischen Ort, wenn die Summe zur Differenz dieser Abstände in dem konstanten Verhältnis $a : b$ steht?

28. Ein gleichseitiges Dreieck ist gegeben; den geometrischen Ort jener Punkte zu suchen, deren Abstand von der Grundlinie des Dreieckes gleich der halben Summe der Abstände von den Scheitelseiten ist.

## IV. Die Kreislinie.

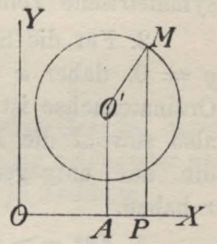
### §. 387. Allgemeine Gleichung des Kreises.

In der Kreislinie sind alle Punkte von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt. Um die Gleichung des Kreises zu erhalten, darf man nur diese charakteristische Eigenschaft desselben in die analytische Zeichensprache übertragen.

Sind (Fig. 187) $OP = x$, $MP = y$ die Koordinaten des Punktes $M$ einer Kreislinie, deren Halbmesser $O'M = r$ ist, ferner $OA = p$, $O'A = q$ die Koordinaten des Mittelpunktes $O'$, so ist für jeden Punkt der Peripherie

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \text{ (§. 363) . . . 1).}$$

Fig. 187.




Diese Gleichung heißt die allgemeine Gleichung des Kreises; da ihre Bedeutung dieselbe bleibt, wenn sie mit einer Konstanten $a$ multipliziert wird, so kann sie auf folgende Form gebracht werden:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0 \text{ . . . 2).}$$

Die allgemeine Gleichung eines Kreises ist daher nach $x$ und $y$ quadratisch, sie enthält nicht das Produkt $xy$ und die Glieder mit $x^2$ und $y^2$ sind mit demselben Koeffizienten versehen.

Umgekehrt kann man beweisen, daß jede Gleichung obiger Form einen Kreis bedeutet. Sie läßt sich nämlich in folgende transformieren:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2};$$

diese bedeutet aber einen Kreis, für welchen

$$p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{c}{2a},\ r = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad} \text{ ist.}$$

Es ist aber noch notwendig, daß $b^2 + c^2 > 4ad$ ist; für $b^2 + c^2 < 4ad$ wären $x$ und $y$ imaginär. Für $b^2 + c^2 = 4ad$ müßte $x = -\frac{b}{2a}$ und $y = -\frac{c}{2a}$ sein. Die Gleichung würde dann einen Punkt bedeuten.

**§. 388.** Für besondere Lagen des Kreises nimmt die Gleichung desselben eine einfachere Gestalt an.

1. Liegt der Mittelpunkt des Kreises in der positiven Abszissenhalbachse im Abstande $p = r$ von $O$, so geht die Gleichung 1) über in

$$x^2 + y^2 = 2rx \text{...3).}$$

Diese Gleichung heißt die Scheitelgleichung des Kreises.

2. Liegt der Mittelpunkt des Kreises im Ursprunge der Koordinaten, so ist $p = 0$, $q = 0$, und man erhält aus 1) die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots 4).$$

Diese Gleichung heißt die **Mittelpunktsgleichung** des Kreises.

### §. 389. Diskussion der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.

Als Gleichung des Kreises wählen wir die Mittelpunktsgleichung als die einfachste.

1. Aus $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ und $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ folgt, daß jedem Werte von $x$ $(y)$, für den überhaupt $y$ $(x)$ einen reellen Wert hat, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von $y$ $(x)$ entsprechen; die Kreislinie wird also von der Abszissenachse (Ordinatenachse) in zwei symmetrische Teile geteilt.

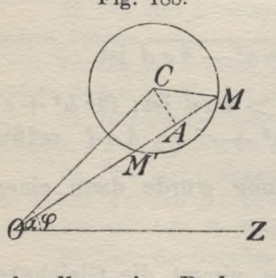
2. Für die Schnittpunkte des Kreises mit der Abszissenachse ist $y = 0$, daher $x = \pm r$. Für die Schnittpunkte des Kreises mit der Ordinatenachse ist $x = 0$, daher $y = \pm r$. Die Kreislinie schneidet also sowohl die Abszissen- als die Ordinatenachse in zwei Punkten, die auf entgegengesetzten Seiten vom Ursprunge den Abstand $r$ haben.

3. Für $x > r$ wird $y$ imaginär, für $y > r$ wird $x$ imaginär; der größte Wert, den man für $x$ oder $y$ setzen kann, ist also der Halbmesser $r$.

### §. 390. Polargleichung des Kreises.

Es sei (Fig. 188) $C$ der Mittelpunkt eines Kreises, $CM = a$ dessen Halbmesser, ferner $O$ der Pol des Polarkoordinatensystems, $OC = \varrho$ der Radiusvektor des Mittelpunktes und $ZOC = \alpha$ der Winkel, den $OC$ mit der Polarachse $OZ$ bildet. Ist nun $M$ irgend ein Punkt der Kreislinie, also $r = OM$ sein Radiusvektor und $\varphi = ZOM$ seine Anomalie, so erhält man aus der Gleichung des Kreises $(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2$, da $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $p = \varrho\cos\alpha$, $q = \varrho\sin\alpha$ ist,

Fig. 188.




$$r = \varrho\cos(\alpha - \varphi) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2\sin^2(\alpha - \varphi)}$$

als allgemeine **Polargleichung** des Kreises.

Für $\varrho = 0$ erhält diese Gleichung die Form $r = a$.

Man diskutiere die Gleichung. Dabei ist zu beachten, daß $AC = \varrho . \sin(\alpha - \varphi)$. Man leite aus der Gleichung den Satz ab, daß $OM . OM'$ konstant ist.

**§. 391.** Lage einer Geraden in Bezug auf einen Kreis.

Der Rechnung soll die Mittelpunktsgleichung des Kreises und die Gleichung der Geraden in der Normalform zu Grunde gelegt werden.

Für die Durchschnittspunkte der beiden Linien hat man also die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ und}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \text{ zu verbinden.}$$

$$y = \frac{p - x \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$x^2 + \frac{(p - x \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} = r^2$$

$$x^2 \sin^2 \alpha + p^2 + x^2 \cos^2 \alpha - 2px \cos \alpha = r^2 \sin^2 \alpha$$

$$x^2 - 2px \cos \alpha = r^2 \sin^2 \alpha - p^2$$

$$x = p \cos \alpha \pm \sqrt{p^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha - p^2} =$$

$$p \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{r^2 - p^2}.$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen, daß eine Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkte eines Kreises $p$ ist, zwei, oder einen, oder gar keinen Punkt mit dem Kreise gemeinschaftlich hat, je nachdem

$$r \mathop{\gtreqless} p \text{ ist. (§. 73.)}$$

**§. 392.** Aufgaben.

1. Die Gleichung eines Kreises ist

*a)* $x^2 + y^2 = 6x + 8y + 24$; *b)* $x^2 + y^2 = 2x$; *c)* $36x^2 + 36y^2 + 36x + 144y + 89 = 0$.

Die Koordinaten des Mittelpunktes und den Halbmesser zu bestimmen; liegt der Ursprung innerhalb oder außerhalb dieser Kreise?

2. Konstruiere die Kreise:

*a)* $x^2 + y^2 - 6y = 16$; *b)* $2x^2 + 2y^2 - x = 0$; *c)* $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y = 19$; *d)* $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.

3. Die Gleichung eines Kreises ist durch die Proportion $x : y = (y - 6) : (8 - x)$ gegeben; den Kreis zu konstruieren. Geht er durch den Ursprung?

4. Die Schnittpunkte des Kreises $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ mit den Achsen zu bestimmen; welche Eigenschaft haben die Produkte der Achsenabschnitte?

5. Wie heißt die Gleichung jenes Kreises, der durch den Ursprung geht und den Mittelpunkt $(4, -5)$ hat?

6. Die Gleichung desjenigen Kreises zu suchen, der durch den Ursprung und die Punkte $(2, -1)$, $(3, -2)$ geht.

7. Die Gleichung jenes Kreises zu suchen, der durch die drei Punkte $(4, -2)$, $(-1, 3)$ und $(-5, -1)$ geht. Schneidet er die Achsen?

8. Die Gleichung jenes Kreises zu suchen, der durch den äußern und inneren Ähnlichkeitspunkt zweier gegebener Kreise geht und den Abstand derselben zum Durchmesser hat.

9. Die Gleichungen jener Kreise zu finden, welche *a*) die Abszissenachse im Punkte $x = m$, *b*) die Ordinatenachse im Punkte $y = n$, *c*) beide Achsen berühren.

10. Die Gleichung desjenigen Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt (3, —2) ist und der die Gerade $2x + 3y - 26 = 0$ berührt.

11. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt $(p, q)$ ist, berührt die Gerade $y = mx + b$; wie lautet die Gleichung dieses Kreises?

12. Es soll mit dem Radius $r = 5$ ein Kreis beschrieben werden, welcher die Gerade $4y + 3x = 25$ in dem Punkte, dessen Abszisse $x = 3$ ist, berührt; wie heißt die Gleichung dieses Kreises?

13. Suche die Gleichung des Kreises, welcher durch den Punkt (6, 8) geht und die Gerade $4x + 3y + 1 = 0$ in dem Punkte, dessen Abszisse $x = -1$ ist, berührt.

14. Die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes sind:

$$y = 3, \; x + y + 1 = 0, \; x - y - 1 = 0;$$

die Gleichung des eingeschriebenen Kreises zu suchen.

15. Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch die Punkte (—2, 0) und (2, 0) geht und die Gerade $3x - 4y + 6 = 0$ berührt.

16. Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch die Punkte (0, 0) und (2, 0) geht und den Kreis $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$ von außen berührt.

17. Die Gleichungen zweier Kreise sind

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4;$$

suche *a*) die Gleichung ihrer Zentrale; *b*) den Abstand des Koordinatenanfangspunktes von der Zentrale; *c*) bestimme die Lage der beiden Kreise!

18. Wie lang ist die den beiden Kreisen $x^2 + y^2 = 4$ und $(x-1)^2 + y^2 = 4$ gemeinsame Sehne?

19. Wie viele Punkte hat die Gerade *a*) $y = x + 2$, *b*) $4x + 3y = 50$, *c*) $3y = x + 40$ mit dem Kreise $x^2 + y^2 = 100$ gemeinsam?

20. Der Kreis $4x^2 + 4y^2 = 25$ wird von der Geraden $2y = 14x - 25$ geschnitten; bestimme *a*) die Koordinaten der beiden Schnittpunkte; *b*) die Länge der diese Punkte verbindenden Sehne; *c*) den zugehörigen Zentriwinkel.

21. Die Gleichung für den geometrischen Ort der Scheitel aller Dreiecke zu finden, welche dieselbe Grundlinie $a$ haben und in denen *a*) die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten $m^2$ ist; *b*) die beiden anderen Seiten im Verhältnis $m : n$ stehen. Die Linien zu konstruieren.

22. In den Dreiecken $ABC$ ist $BC = a$ konstant; den Ort für den Halbierungspunkt von $AC$ zu bestimmen, wenn $AB$ den konstanten Wert $c$ hat.

23. Den geometrischen Ort für alle Punkte innerhalb eines gleichschenkligen Dreieckes zu bestimmen, für welche die Entfernung von der Basis die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen von den Schenkeln ist. Die Linie zu konstruieren.

## V. Die Ellipse.

**§. 393.** Eine Linie der Ebene von solcher Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände jedes ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten konstant ist, heißt eine Ellipse.

Sind $F$ und $F'$ (Fig. 189) die zwei gegebenen Punkte, und ist $2a$ die konstante Summe der Abstände eines jeden Punktes der Ellipse von jenen zwei Punkten, so ist $M$ ein Punkt der Ellipse, wenn $FM + F'M = 2a$ ist.

Die zwei gegebenen Punkte $F$ und $F'$ heißen die **Brennpunkte** der Ellipse, die von ihnen zu einem Punkte $M$ der Ellipse gezogenen Strecken $FM$ und $F'M$ die **Leitstrahlen** dieses Punktes.

### §. 394. Bestimmung der Leitstrahlen der Ellipse.

Es sei $O$ (Fig. 189) der Halbierungspunkt von $FF'$ und zugleich der Anfangspunkt der Koordinaten und $AB$ die Abszissenachse. Ist nun $M$ ein beliebiger Punkt der Ellipse, also $FM + F'M = 2a$, sind $x = OP$, $y = MP$ die Koordinaten dieses Punktes, so erhält man nach § 363, wenn $OF = OF' = e$ gesetzt wird,

$FM^2 = (x + e)^2 + y^2$

$F'M^2 = (x - e)^2 + y^2$, daher

$FM^2 - F'M^2 = 4ex$ oder

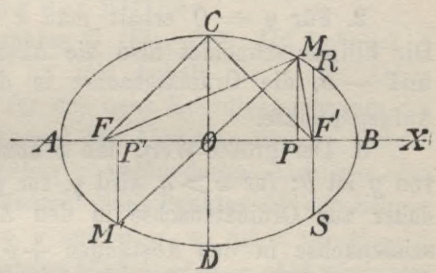
$(FM + F'M).(FM - F'M) = 4ex$;

aber $FM + F'M = 2a$, daher

$$FM - F'M = \frac{2ex}{a} \text{ und}$$

$$FM = a + \frac{ex}{a} \text{ und } F'M = a - \frac{ex}{a}.$$

Fig. 189.




### §. 395. Gleichung der Ellipse.

Aus dem $\triangle FPM$ (Fig. 189) folgt $MP^2 = FM^2 - FP^2$ oder

$$y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 - (x + e)^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - e^2$$

$$= a^2 - e^2 - \frac{a^2 - e^2}{a^2} . x^2, \text{ daher}$$

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - e^2).$$

Da unter allen Umständen $FM + F'M > F'F$, also $2a > 2e$ oder $a > e$ ist, so muß die Differenz $a^2 - e^2$ immer positiv sein. Setzt man daher $a^2 - e^2 = b^2$, so ergibt sich

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

als die **Gleichung der Ellipse**. Dieselbe läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

### §. 396. Diskussion der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

1. Löst man diese Gleichung nach $y$ und dann nach $x$ auf, so erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ und } x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

woraus hervorgeht, daß zu jedem Werte von $x$, für welchen $y$ reell ausfällt, zwei gleiche entgegengesetzte Werte von $y$ und ebenso zu jedem Werte von $y$, für welchen $x$ reell wird, zwei gleiche entgegengesetzte Werte von $x$ gehören. Die Ellipse liegt also gegen beide Koordinatenachsen symmetrisch.

Da die Gleichung der Ellipse nach $x$ und $y$ rein quadratisch ist, so muß, wenn $(+x, +y)$ $(M)$ ein Punkt derselben ist, auch $(-x, -y)$ $(M')$ ihr angehören. Verbindet man $M$ und $M'$ durch eine Gerade, so hat der Halbierungspunkt derselben die Koordinaten 0, 0, ist also der Ursprung $O$. Jede Sehne einer Ellipse, die durch $O$ geht, wird also in diesem Punkte halbiert; daher heißt $O$ der Mittelpunkt der Ellipse, jede durch ihn gehende Sehne ein Durchmesser derselben, die Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ die Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

2. Für $y = 0$ erhält man $x = \pm a$, für $x = 0$, $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet also die Abszissenachse in den Abständen $+a$ und $-a$, die Ordinatenachse in den Abständen $+b$ und $-b$ vom Anfangspunkte.

3. Der größte Wert, den $x$ annehmen kann, ist $a$, der größte Wert von $y$ ist $b$; für $x > a$ wird $y$, für $y > b$ wird $x$ imaginär. Zieht man daher zur Ordinatenachse in den Abständen $+a$ und $-a$, zur Abszissenachse in den Abständen $+b$ und $-b$ parallele Gerade, so ist die ganze Ellipse in dem von denselben gebildeten Rechtecke enthalten. Daraus folgt, daß die Ellipse eine geschlossene krumme Linie ist.

4. Bezeichnet man den Abstand $OM$ eines beliebigen Punktes $M$ der Ellipse vom Mittelpunkte $O$ mit $d$, so ist

$$d = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Für $x = \pm a$ erhält man, absolut genommen, die beiden größten Werte $d = \sqrt{a^2} = a = OB = OA$, für $x = 0$ erhält man die beiden kleinsten Werte $d = \sqrt{b^2} = b = OC = OD$. Unter allen durch den Mittelpunkt gezogenen Sehnen ist daher $AB$ die größte, $CD$ die kleinste. Man nennt deshalb $AB = 2a$ die große, $CD = 2b$ die kleine Achse der Ellipse; die Punkte $A$ und $B$ heißen die Scheitel der großen, $C$ und $D$ die der kleinen Achse.

Auch folgt daraus: Die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist gleich der großen Achse.

5. Aus $a^2 - e^2 = b^2$ ergibt sich

$$FO = F'O = e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

welche Größe die lineare Exzentrizität der Ellipse heißt. Das Verhältnis $\frac{e}{a} = \varepsilon$ nennt man die numerische Exzentrizität.

6. Je kleiner die Exzentrizität ist, desto weniger ist $a$ von $b$ verschieden, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; für $e = 0$ wird $a = b$ und die Gleichung der Ellipse geht in die des Kreises über. Der Kreis kann demnach als eine Ellipse betrachtet werden, deren Exzentrizität Null ist.

7. Für $x = e = \sqrt{a^2 - b^2}$ erhält man $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Die durch einen Brennpunkt zur großen Achse normal gezogene Sehne $RS$ heißt der Parameter der Ellipse. Es ist somit, wenn man diesen durch $2p$ bezeichnet, $p = \frac{b^2}{a}$, d. h. der halbe Parameter ist die dritte stetige Proportionale zu der halben großen und der halben kleinen Achse.

§. 397. Scheitelgleichung der Ellipse.

Nimmt man statt des Mittelpunktes $O$ (Fig. 189) den Scheitel $A$ als Anfangspunkt der Koordinaten an und behält die große Achse $AB$ als Abszissenachse, so bleiben für das neue Koordinatensystem die früheren Ordinaten unverändert, während die Abszissen für das frühere System den um die halbe große Achse $a$ verminderten Abszissen des neuen gleich sind. Sind die Koordinaten eines Punktes $M$ der Ellipse bezüglich der Systeme $O$ und $A$ $x, y$ und $x', y'$, so ist $x = x' - a$, $y = y'$. (Vgl. auch § 361, $a$.) Die Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ wird also:

$$b^2 (x' - a)^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2 \quad \text{oder} \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax' - x'^2)$$

oder nach Weglassung der Zeiger und, wenn

$\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt wird, $y^2 = \frac{p}{a} (2ax - x^2) = 2px - \frac{px^2}{a}$.

§. 398. Polargleichung der Ellipse.

In (Fig. 189) sei $F$ der Pol und $FB$ die Polarachse. Für den Punkt $M$ ist $FM = r = a + \frac{ex}{a}$, wenn $x$ die Abszisse für das System $O$ ist. Verlegt man dasselbe mit parallelen Achsen nach $F$ und ist $x'$ die neue Abszisse, so ist $x = x' - e$,

also $r = a + \frac{e(x' - e)}{a}$; da $x' = r \cos \varphi$, erhält man

$$ar = a^2 + er \cos \varphi - e^2$$
$$r(a - e \cos \varphi) = a^2 - e^2$$

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos \varphi} = \frac{b^2}{a - e \cos \varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a} \cos \varphi} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

als Polargleichung der Ellipse; es ist hierin $\varepsilon < 1$.

Aufgaben.

**§. 399.** 1. Beliebig viele Punkte einer Ellipse zu bestimmen, wenn die große Achse und die Brennpunkte gegeben sind.

Man nehme in der großen Achse zwischen den Brennpunkten beliebig viele Punkte an, deren jeder die große Achse in zwei Abschnitte teilt, und beschreibe mit denselben als Halbmessern von den Brennpunkten aus Kreisbogen; die Schnittpunkte derselben sind Punkte der Ellipse.

2. Beliebig viele Punkte einer Ellipse zu bestimmen, wenn beide Achsen gegeben sind.

3. Bestimme die Gleichung einer Ellipse, in welcher die große Achse $= 8$ und ein Punkt $(2, 1)$ ist!

4. Für welchen Punkt der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sind Abszisse und Ordinate gleich? Wie läßt sich der Punkt durch Konstruktion finden?

5. Welches ist die Scheitelgleichung einer Ellipse mit der kleinen Achse $2b$ und dem Parameter $2p$?

6. Wie heißt die Mittelpunktsgleichung derjenigen Ellipse, für welche $b = 4$, $p = 2$ ist?

7. In welcher Beziehung stehen die Radienvektoren eines Punktes zur Hauptachse einer Ellipse, wenn derselbe *a*) innerhalb, *b*) außerhalb der Ellipse liegt? Welches Zeichen hat das Trinom $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$ in beiden Fällen?

8. Welche Lage hat der Punkt *a*) $(4, 3)$, *b*) $(3, 3)$ zur Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$?

9. Aus je zweien der Größen $a$, $b$, $e$, $p$ die anderen durch Konstruktion zu finden.

10. Die Entfernungen der Erde von der Sonne im Perihel und Aphel stehen im Verhältnis $29 : 30$. Die numerische Exzentrizität der Erdbahn zu berechnen.

11. Die Bedeutung von *a*) $25x^2 + 16y^2 = 400$, *b*) $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ zu suchen.

12. Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Ellipse sind $m$ und $n$, die Achsen derselben $2a$ und $2b$; welches ist die Gleichung der Ellipse, wenn ihre Achsen den Koordinatenachsen parallel laufen?

Man beachte, daß infolge paralleler Verschiebung des Achsensystemes außer den Gliedern mit $x^2$ und $y^2$ noch solche mit $x$ und $y$ in der Gleichung erscheinen.

13. Die Gleichung einer Ellipse ist $9x^2 + 16y^2 + 36x - 96y + 36 = 0$; bestimme *a*) die Koordinaten des Mittelpunktes, *b*) die Achsen!

Man nehme eine parallele Verschiebung des Achsensystemes vor und wähle die Koordinaten des neuen Ursprunges so, daß die Glieder mit $x$ und $y$ verschwinden; oder man hebe aus den Gliedern mit $x$ und ebenso aus jenen mit $y$ den gemeinschaftlichen Faktor heraus und ergänze jeden Klammerausdruck zu einem vollständigen Quadrat.

14. Die Gleichung einer Ellipse ist $9x^2 + 16y^2 = 144$, die Gleichung einer Geraden *a*) $y = 3x + 5$, *b*) $y = x + 5$, *c*) $y = 2x - 9$; wie viele Punkte hat die Ellipse mit jeder dieser Geraden gemeinsam?

15. Die Gleichung der Sehne der Ellipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ zu suchen, die im Punkte $(2, 1)$ halbiert wird.

16. Die Koordinaten der Durchschnittspunkte der Ellipse $5x^2 + 7y^2 = 35$ mit den Symmetralen der Achsenwinkel zu berechnen.

17. Die Länge des zur Geraden $5y - 2x = 7$ parallelen Durchmessers der Ellipse $5x^2 + 7y^2 = 35$ zu berechnen.

18. Die Länge des Durchmessers einer Ellipse zu berechnen, welcher den von den Achsen gebildeten Winkel halbiert.

19. Die Polargleichung einer Ellipse für den Mittelpunkt als Pol und die positive Seite der Abszissenachse als Polarachse lautet: $r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$.

20. Den Durchmesser einer Ellipse zu berechnen, welcher die große Achse unter dem Winkel $\varphi$ schneidet. $\left(d^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.\right)$

21. Wie lange sind die durch einen Brennpunkt einer Ellipse gezogenen Sehnen, welche den beiden Winkelsymmetralen der Achsen parallel sind? (Polargleichung.)

22. Jede durch einen Brennpunkt einer Ellipse gezogene Sehne ist die dritte geometrische Proportionale zur Hauptachse und dem parallel zur Sehne gezogenen Durchmesser. (Polargleichung.)

23. Die Fläche des der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ eingeschriebenen Quadrates zu berechnen.

24. Auf einen Durchmesser eines Kreises sind von allen Punkten der Peripherie Normale gefällt; den Ort der Halbierungspunkte derselben zu suchen.

25. Eine Gerade von konstanter Länge bewegt sich so, daß ihre Endpunkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels bleiben; den Ort des Punktes zu suchen, der von ihren Endpunkten die Abstände $a$ und $b$ hat.

26. Über derselben Geraden $2e$ sind Dreiecke errichtet, in welchen die Summe der Scheitelseiten $2a$ ist; den geometrischen Ort der Schwerpunkte dieser Dreiecke zu suchen.

27. Von jedem Punkte der Peripherie eines Kreises ist auf eine Gerade die Normale gefällt; den geometrischen Ort der Halbierungspunkte dieser Normalen zu suchen.

28. Den geometrischen Ort für die Spitzen $A$ aller Dreiecke über $BC$ zu suchen, $a$) in denen die Seite $AB$ die mittlere Proportionale zwischen den Höhenabschnitten auf $BC$ ist; $b$) in denen das Quadrat der Höhe auf $BC$ dem $m$fachen Rechteck aus den Höhenabschnitten von $BC$ gleich ist. ($m = 1$?)

## VI. Die Hyperbel.

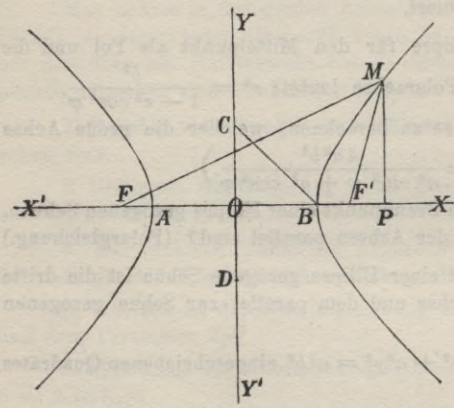
**§. 400.** Eine Linie der Ebene von solcher Beschaffenheit, daß die Differenz der Abstände jedes ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten konstant ist, heißt eine Hyperbel.

Sind $F$ und $F'$ (Fig. 190) die gegebenen Punkte, ist $2a$ die konstante Differenz der Abstände eines jeden Punktes der Hyperbel von jenen zwei Punkten, so ist $M$ ein Punkt der Hyperbel, wenn $MF - MF' = 2a$ ist.

Die beiden gegebenen Punkte $F$ und $F'$ heißen die Brennpunkte der Hyperbel, die Strecken $FM$ und $F'M$ die Leitstrahlen des Punktes M.

**§. 401.** Bestimmung der Leitstrahlen der Hyperbel.

Fig. 190.




Nimmt man (Fig. 190) die Mitte $O$ des Abstandes $FF'$ beider Brennpunkte als Anfangspunkt der Koordinaten und $FF'$ als Abszissenachse an, so erhält man, wenn $OF = OF' = e$ gesetzt wird, für einen beliebigen Punkt $M$ der Hyperbel analog wie für die Ellipse in §. 394.

$$FM = \frac{ex}{a} + a \text{ und}$$

$$F'M = \frac{ex}{a} - a.$$

**§. 402.** Gleichung der Hyperbel.

Aus dem Dreiecke $FMP$ (Fig. 190) erhält man auf gleiche Weise wie für die Ellipse in §. 395

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2 y^2 = a^2\, (a^2 - e^2).$$

Während jedoch die Differenz $a^2 - e^2$ für die Ellipse positiv ist, muß sie hier negativ angenommen werden; denn $FM - F'M < FF'$, also $2a < 2e$, oder $a < e$, somit auch $a^2 < e^2$. Setzt man daher $a^2 - e^2 = -b^2$, so ergibt sich als die gesuchte Gleichung der Hyperbel

$$-b^2 x^2 + a^2 y^2 = -a^2 b^2, \text{ oder } b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Diese Gleichung läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich von jener der Ellipse nur dadurch, daß statt $b^2$ der letzteren in der ersteren $-b^2$ vorkommt.

**§. 403.** Diskussion der Gleichung $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$.

1. Diese Gleichung gibt

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \text{ und } x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}.$$

So lange (absolut) $x < a$ ist, fällt $y$ imaginär aus; macht man $AO = BO = a$ und errichtet in $A$ und $B$ Normale auf die Abszissenachse, so liegt zwischen denselben kein Punkt der Hyperbel. Zu jeder

Abszisse $x > a$ gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von $y$; ebenso erhält man für jeden Wert von $y$ zwei gleiche und entgegengesetzte Abszissen. Die Hyperbel besteht also aus zwei getrennten, zur Ordinatenachse symmetrisch liegenden Ästen; jeder dieser Äste wird durch die Abszissenachse in zwei symmetrische Teile geteilt. Da die Gleichung nach $x$ und $y$ rein quadratisch ist, so muß, wenn $(+x, +y)$ ein Punkt der Hyperbel ist, auch $(-x, -y)$ derselben angehören. In gleicher Weise wie bei der Ellipse (§. 396) folgt, daß $O$ der Mittelpunkt der Hyperbel ist; die Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ heißt daher die Mittelpunktsgleichung derselben.

2. Da $x$ und $y$ jeden noch so großen Wert annehmen können, so folgt, daß sich die Äste der Hyperbel ins Unendliche ausdehnen.

3. Für $y = 0$ wird $x = \pm a$; die Hyperbel schneidet also die Abszissenachse in zwei Punkten $A$ und $B$, deren Abstand $2a$ beträgt. Die Strecke $AB = 2a$ heißt die erste oder Hauptachse der Hyperbel; $A$ und $B$ nennt man die Scheitel derselben.

Daraus folgt: Die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Hyperbel ist gleich der Hauptachse.

4. Die Hyperbel schneidet die Ordinatenachse nicht. Wegen der wichtigen Beziehung der Länge $b$ zur Hyperbel trägt man jedoch auf der Ordinatenachse die Strecken $OC = OD = \pm b$ auf und nennt, analog wie bei der Ellipse, die Strecke $CD = 2b$ auch eine Achse, und zwar die Nebenachse der Hyperbel.

5. Aus $a^2 - e^2 = -b^2$, oder $e^2 = a^2 + b^2$ folgt

$$OF = OF' = e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

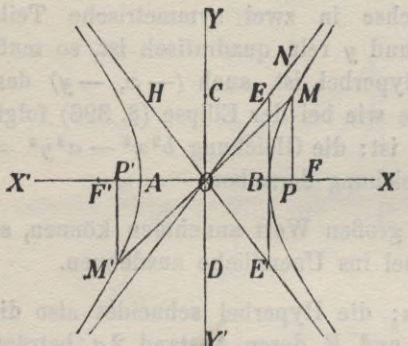
Die Größe $e$ heißt die lineare, die Größe $\frac{e}{a} = \varepsilon$ die numerische Exzentrizität.

6. Für $x = e = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Auch bei der Hyperbel wird die durch den Brennpunkt zur ersten Achse normal gezogene Sehne der Parameter genannt. Es ist daher, wenn man denselben mit $2p$ bezeichnet, $p = \frac{b^2}{a}$, d. h. der halbe Parameter ist die dritte stetige Proportionale zu der halben Haupt- und der halben Nebenachse.

7. Für $a = b$ wird die Hyperbel eine gleichseitige genannt; ihre Gleichung ist $x^2 - y^2 = a^2$.

8. Verbindet man mit der Gleichung der Hyperbel die Gleichung $y = mx$ einer durch $O$ (Fig. 191) gehenden Geraden $M'M$, so erhält man für die Schnittpunkte der beiden Linien:

Fig. 191.




$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}},\ y = \frac{\pm amb}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}},$$

worin das obere Zeichen dem Punkte $M$, das untere dem Punkte $M'$ entspricht. Aus diesen Werten folgt, daß ein Schnitt einer solchen Geraden mit der Hyperbel nur möglich ist, wenn $b^2 > a^2 m^2$ oder (absolut) $m < \frac{b}{a}$ ist; wird $m > \frac{b}{a}$, so fallen die Werte von $x$ und $y$ imaginär aus.

9. Besonders merkwürdig sind jene zwei Geraden, für welche $b^2 = a^2 m^2$, also $m = \pm \frac{b}{a}$ ist. Um diese Geraden zu konstruieren, errichte man in $B$ auf $OX$ die Normale, trage auf ihr $BE = BE' = b$ auf und ziehe die Geraden $OE$ und $OE'$; man hat für diese

$$\text{tang } NOB = \frac{b}{a} \text{ und tang } HOB = -\frac{b}{a}.$$

Aus der Gleichung der Hyperbel ergibt sich für die Ordinate eines Punktes derselben $y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$; diese Gleichung läßt erkennen, daß für dieselbe Abszisse die Ordinate eines Hyperbelpunktes $(M)$ von jener des zugehörigen Punktes dieser Geraden $(N)$ sich um so weniger unterscheidet, je größer $x$ wird, daß sich also die Hyperbeläste jenen Geraden immer mehr und mehr nähern, ohne sie aber zu erreichen.

Eine Gerade, welcher sich eine krumme Linie immer mehr nähert, ohne jedoch mit ihr je zusammenzutreffen, nennt man eine Asymptote der krummen Linie. Die Hyperbel hat zwei Asymptoten, deren Gleichungen sind:

$$y = +\frac{b}{a} . x \text{ und } y = -\frac{b}{a} . x.$$

## §. 404. Scheitelgleichung der Hyperbel.

Man erhält, analog wie für die Ellipse, wenn $B$ als Ursprung gewählt wird,

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

## §. 405. Polargleichung der Hyperbel.

In Fig. 190 sei $F'$ der Pol und $F'X$ die Polarachse; $F'M = r$, und $XF'M = \varphi$ sind mithin die Polarkoordinaten von $M$. Es ist $F'M = r = \frac{ex}{a} - a$, wenn $x$ die Abszisse für das System $O$ ist; verlegt man den Ursprung nach $F'$ mit parallelen Achsen, und ist $x'$ die neue Abszisse von $M$, so ist $x = x' + e$, und $r = \frac{e(x'+e)}{a} - a$; wegen $x' = r\cos\varphi$ erhält man $ar = er\cos\varphi + e^2 - a^2$,

$$r(a - e\cos\varphi) = b^2,$$

$$r = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}\cos\varphi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

als Polargleichung des Hyperbelastes $BM$; es ist hierin $\varepsilon > 1$.

Aufgaben.

§. 406. 1. Beliebig viele Punkte einer Hyperbel zu bestimmen, wenn die Hauptachse und die beiden Brennpunkte gegeben sind.

Man nehme in der Verlängerung der Hauptachse außerhalb der Brennpunkte beliebig viele Punkte an, beschreibe mit dem Abstande eines jeden von den Scheiteln von den Brennpunkten aus Kreisbogen; die Schnittpunkte derselben sind Punkte der Hyperbel.

2. Ein Punkt $(x', y')$ einer Hyperbel und die Hauptachse $2a$ sind gegeben; welches ist die Gleichung der Hyperbel?

3. Für welchen Punkt der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ist die Ordinate gleich der Abszisse? (Wann ist die Lösung möglich?)

4. Die Gleichung einer Hyperbel aus der Hauptachse $2a$ und dem Parameter $2p$ aufzustellen.

5. Aus je zweien der Größen $a$, $b$, $e$, $p$ die anderen zu konstruieren.

6. $a$ und $b$ einer Hyperbel durch $p$ und $\varepsilon$ auszudrücken.

7. $\varepsilon$ für die gleichseitige Hyperbel zu berechnen.

8. Die Brennpunkte einer Hyperbel zu suchen, wenn man die Asymptoten und die Scheitel der Hauptachse kennt.

9. Welche Kurve entspricht der Gleichung $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$?

10. In welcher Beziehung stehen die Radienvektoren zur Hauptachse für Punkte $a)$ zwischen den Hyperbelzweigen, $b)$ auf der konkaven Seite eines Hyperbelzweiges? Welches Zeichen hat das Trinom $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$ in diesen Fällen?

11. Wo liegen die Punkte $(5\sqrt{2}, 4)$, $(2, 3)$, $(10, 4)$ in Bezug auf die Hyperbel $16x^2 - 25y^2 = 400$?

12. Die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ aufzustellen und die Winkel derselben mit der Abszissenachse zu berechnen.

13. Den Sinus des Asymptotenwinkels ($EOE'$ Fig. 191) einer Hyperbel durch $\varepsilon$ auszudrücken.

14. Die Normale von einem Brennpunkte einer Hyperbel auf eine Asymptote ist gleich der halben Nebenachse.

15. Die Kurve $3x^2 + 6x - 5y^2 + 20y = 32$ zu konstruieren. (Vgl. §. 399, 12 und 13.)

16. Die Gleichung einer Hyperbel ist $4x^2 - 9y^2 = 36$; wie viele und welche Punkte hat die Gerade $a)$ $y = \frac{4x}{3} + 2$, $b)$ $y = 2x - 8$, $c)$ $6y = 5x - 9$ mit derselben gemeinsam?

17. Wie viele Punkte hat eine Hyperbel mit einer zu einer Asymptote derselben parallelen Geraden gemeinschaftlich?

18. Die Fläche des Rechteckes zu berechnen, welches durch die Durchschnittspunkte der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ mit dem Kreise, der mit der Hyperbel konzentrisch ist und ihre Exzentrizität zum Radius hat, bestimmt ist.

19. In der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ jenen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit den Scheiteln einen Winkel von $a)$ $45^0$, $b)$ $30^0$, $c)$ $60^0$ einschließen.

20. Die Polargleichung einer Hyperbel für den Mittelpunkt als Pol und die positive Seite der Abszissenachse als Polarachse aufzustellen.

21. Die Länge des Durchmessers einer Hyperbel zu berechnen, der mit der positiven $X$-Achse den Winkel $\varphi$ bildet.

22. Das Verhältnis der Fläche des Rechteckes, welches durch die Abschnitte einer durch einen Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel gehenden Sehne bestimmt ist, zu jenem Rechteck zu suchen, welches aus dieser ganzen Sehne und dem Parameter konstruiert werden kann. (Polargleichung.)

23. Es ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte jener Kreise zu suchen, welche die beiden Kreise $x^2 + y^2 = 9$ und $(x - 5)^2 + y^2 = 4$ von außen berühren.

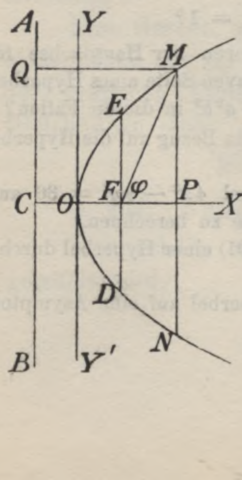
24. Den geometrischen Ort für die Spitzen $A$ aller Dreiecke zu suchen, deren Grundlinie den konstanten Wert $a$ hat, und in welchen $\beta = 2\gamma$ ist.

25. In einem Kreis zieht man den Durchmesser $AB$, dessen Verlängerung von einer Tangente $CD$ in $C$ geschnitten wird; errichtet man in $C$ die Normale $CF$ auf den verlängerten Durchmesser und macht $CF = CD$, welches ist der geometrische Ort für den Punkt $F$?

## VII. Die Parabel.

**§. 407.** Eine Linie der Ebene von solcher Beschaffenheit, daß jeder ihrer Punkte von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden denselben Abstand hat, heißt eine *Parabel*.

Fig. 192.




Ist $F$ (Fig. 192) der gegebene Punkt und $AB$ die gegebene Gerade, ferner $MQ \perp AB$, so ist $M$ ein Punkt der Parabel, wenn $MF = MQ$ ist.

Der gegebene Punkt $F$ heißt der *Brennpunkt*, die gegebene Gerade $AB$ die *Leitlinie* der Parabel und $FM$ der *Leitstrahl* des Punktes $M$.

**§. 408. Bestimmung eines Leitstrahls der Parabel.**

Man ziehe (Fig. 192) $CF \perp AB$ und nehme die Mitte $O$ der Normalen $CF$ als Anfangspunkt der Koordinaten und $COX$ als Abszissenachse an. Ist nun $M$ ein beliebiger Punkt der Parabel, so ergibt sich, wenn $OC = OF = \frac{p}{2}$ gesetzt wird,

$$FM = MQ = CP = CO + OP, \text{ also}$$

$$FM = x + \frac{p}{2}.$$

§. **409.** Gleichung der Parabel.

Nach § 363 und § 408 ist (Fig. 192) $MF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$; daher $y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$, woraus $y^2 = 2px$ als die gesuchte Gleichung der Parabel folgt.

§. **410.** Diskussion der Gleichung $y^2 = 2px$.

1. Aus dieser Gleichung ergibt sich $y = \pm \sqrt{2px}$. Zu jedem positiven Werte von $x$ gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten; die Parabel liegt also symmetrisch bezüglich der Abszissenachse; $OX$ heißt die Achse der Parabel.

2. Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; der Ursprung $O$ der Koordinaten ist also ein Punkt der Parabel, er heißt der Scheitel, und daher die Gleichung $y^2 = 2px$ die Scheitelgleichung der Parabel. Je größer $x$ wird, desto größer wird auch $y$; die Kurve entfernt sich also immer mehr von der Abszissenachse, sie ist nicht geschlossen.

3. Für ein negatives $x$ wird $y$ imaginär; negativen Abszissen entsprechen daher keine Punkte der Parabel.

4. Setzt man $x = \frac{p}{2} = OF$, so wird $y = \pm p$; daher ist $DE = 2p$. Die Größe $2p$ stellt also die durch den Brennpunkt normal auf die Achse gezogene Sehne $DE$ dar; sie heißt der Parameter der Parabel.

5. Aus $y^2 = 2px$ folgt $2p : y = y : x$, d. h. die Ordinate eines jeden Punktes der Parabel ist die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der Abszisse des Punktes.

6. Sind $x'$ und $x''$ die Abszissen, $y'$ und $y''$ die zugehörigen Ordinaten zweier Punkte einer Parabel, deren Parameter $2p$ ist, so hat man

$$y'^2 = 2px' \text{ und } y''^2 = 2px'', \text{ daher}$$

$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

d. h. die Quadrate der Ordinaten zweier Punkte einer Parabel verhalten sich wie die zugehörigen Abszissen.

**Zusatz.** Alle bisher betrachteten krummen Linien lassen sich durch die gemeinsame Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px + qx^2$$

darstellen, in welcher $p$ für den Kreis den Halbmesser, für die übrigen krummen Linien den halben Parameter bedeutet, und $q$ für den Kreis $= -1$, für die Ellipse $= -\frac{p}{a} = -\frac{b^2}{a^2}$, also negativ und absolut $< 1$, für die Hyperbel $= \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$, also positiv und für die Parabel $= 0$ ist.

Die Vergleichung des Inhaltes des Quadrates über der Ordinate eines Punktes der letzten drei Kurven mit dem Rechteck aus der zugehörigen Abszisse und dem Parameter führte zu den Namen derselben: ἔλλειψις, ὑπερβολή, παραβολή.

§. **411.** Polargleichung der Parabel.

Nimmt man (Fig. 192) den Brennpunkt $F$ als den Pol und $FX$ als die Polarachse an, so ist für den Punkt $M$ der Parabel der Radiusvector $r = FM$ und $\varphi = XFM$. Es ist für jede Lage des Punktes $M$: $r = CP = CF + FP = p + r \cos\varphi$; mithin $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$.

**Zusatz.** Alle bisher betrachteten krummen Linien lassen sich durch die gemeinsame Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$$

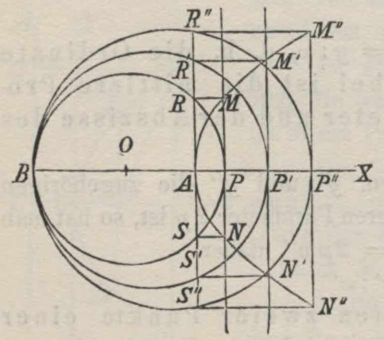
darstellen, in welcher $p$ für den Kreis den Halbmesser, für die übrigen krummen Linien den halben Parameter bedeutet, und $\varepsilon$ für den Kreis $= 0$, für die Ellipse $< 1$, für die Hyperbel $> 1$, für die Parabel $= 1$ ist.

Aufgaben.

§. **412.** 1. Beliebig viele Punkte einer Parabel zu bestimmen.

*a*) Nach der Definition der Parabel. Es sei die Leitlinie und der Brennpunkt gegeben. Man bestimme zuerst die Achse und den Scheitel; dann nehme man in der Achse beliebig viele Punkte an, ziehe durch dieselben Normale auf die Achse und beschreibe mit dem Abstande jedes Punktes von der Leitlinie als Halbmesser um den Brennpunkt Kreisbogen, welche die entsprechende Normale schneiden: die Schnittpunkte sind Punkte der Parabel.

Fig. 193.




*b*) Nach der Gleichung der Parabel (§. 410, 5).

Es sei $AB$ (Fig. 193) der Parameter, $A$ der Scheitel und $AX$ die Achse der Parabel. Man wähle $BO > p$ und beschreibe von $O$ aus mit $BO$ als Radius einen Kreis, betrachte $AP$ als Abszisse eines Punktes der Parabel, so ist

$AR$ die zugehörige Ordinate und daher $M$ ein Punkt der Parabel. So werden auch $M'$, $M''$ etc. erhalten und durch Verbindung dieser Punkte die Parabel.

2. In welcher Beziehung steht der Radiusvektor eines Punktes zum Abstand von der Leitlinie, wenn der Punkt $a$) auf der konvexen, $b$) auf der konkaven Seite einer Parabel liegt? Welches Zeichen hat das Binom $y^2 - 2px$ in diesen beiden Fällen?

3. Wo liegen die Punkte (4, —4), (1, 3), (5, 2) in Bezug auf die Parabel $y^2 = 4x$?

4. Die Kurven $y^2 = -16x$, $x^2 = 12y$, $x^2 = -10y$ zu bestimmen.

5. Der Parameter einer Parabel, deren Achse mit der Abszissenachse parallel ist, ist $2p$; die Koordinaten des Scheitels sind $m$ und $n$. Wie lautet die Gleichung derselben?

Beachte, daß durch diese Verlegung des Koordinatensystems ein Glied mit $y$ und ein konstantes Glied in die Gleichung hineinkommen!

6. Wie lautet die Gleichung der Parabel, wenn der Ursprung im Durchschnittspunkt der Achse derselben mit der Leitlinie liegt und die Abszissenachse mit der Achse zusammenfällt?

7. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 - 4y - 6x - 3 = 0$; zu bestimmen $a$) die Koordinaten des Scheitels, $b$) den Parameter.

Man nehme eine parallele Verschiebung des Koordinatensystems vor und wähle die Koordinaten des neuen Ursprunges so, daß das Glied mit $y$ und das konstante Glied verschwinden. Oder durch Transformation der gegebenen Gleichung auf die Form in Aufgabe 5.

8. Der Parabel $y^2 = 2px$ ist ein gleichseitiges Dreieck so eingeschrieben, daß ein Eckpunkt in den Scheitel und die Höhe in die Achse fällt; die Seite und den Flächeninhalt zu berechnen und das Dreieck zu konstruieren.

9. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 5x$; wie viele Punkte hat die Gerade $a$) $4y = 5x + 4$, $b$) $y = 2x - 1$, $c$) $y = 3x + 2$ mit derselben gemeinsam?

10. Wie viele Punkte hat eine Parabel mit einer zu ihrer Achse parallelen Geraden gemeinschaftlich?

11. Den Halbierungspunkt derjenigen Sehne der Parabel $y^2 = 16x$ zu bestimmen, welche durch den Brennpunkt derselben geht und auf der Geraden $y = 2x$ senkrecht steht.

12. Ein Körper, welcher die Höhe $h$ über dem Horizonte hat, erhält durch eine Kraft eine gleichförmige Bewegung in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit $c$ (in einer Zeitsekunde) und vermöge der Schwerkraft eine vertikale Bewegung mit der Beschleunigung $g$. $a$) Welche Linie durchläuft er? $b$) Nach welcher Zeit und $c$) in welcher horizontalen Entfernung vom Anfangspunkte langt er in der Horizontalebene an? (Der Widerstand der Luft bleibt unbeachtet.)

13. Die Summe der reziproken Werte der Abschnitte einer durch den Brennpunkt einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel gehenden Sehne zu berechnen. (Polargleichung.)

14. Das vierfache Rechteck aus den Abschnitten einer durch den Brennpunkt einer Parabel gezogenen Sehne ist dem Rechteck aus der ganzen Sehne und dem Parameter gleich. (Polargleichung.)

15. Die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte jener Kreise zu suchen, welche durch den Punkt (1,1) gehen und die Ordinatenachse berühren.

16. Die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise zu suchen, welche die Gerade $y = -4$ und den Kreis $x^2 + (y-2)^2 = 4$ berühren, wenn $a$) äußere, $b$) innere Berührung der beiden Kreise stattfindet.

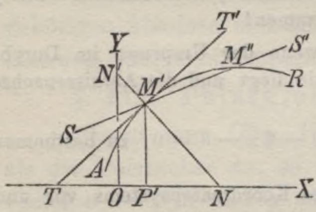
17. Die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte jener Kreise zu suchen, welche einen gegebenen Kreis und eine durch den Mittelpunkt desselben gehende Gerade berühren, wenn *a*) äußere, *b*) innere Berührung der beiden Kreise stattfindet.

## VIII. Tangenten und Normalen der krummen Linien.

### §. 413. Allgemeiner Begriff der Tangente.

Es sei $AR$ (Fig. 194) irgend eine krumme Linie und $M'$ der Punkt, in dem sie von der Geraden $TT'$ berührt werden soll. Man denke sich durch diesen Berührungspunkt $M'$ und durch einen benachbarten Punkt $M''$ zuerst eine Sekante $SS'$ gezogen und diese dann um $M'$ so gedreht, daß $M''$ dem Punkt $M'$ immer näher rückt; dann wird sich auch die Sekante $SS'$ der Tangente $TT'$ immer mehr nähern und endlich mit ihr zusammenfallen, wenn $M''$ auf den Berührungspunkt $M'$ zu liegen kommt.

Fig. 194.




Man kann daher die Tangente einer krummen Linie als eine Sekante derselben betrachten, welche durch die Drehung um den einen Schnittpunkt in eine solche Lage gebracht wurde, daß der zweite Schnittpunkt mit dem ersten zusammenfällt.

Die im Berührungspunkte $M'$ auf der Tangente normale Gerade $M'N$ heißt eine Normale der krummen Linie.

Bei der Berührung einer krummen Linie mit einer Geraden sind nachstehende vier Größen von Wichtigkeit:

1. Die Tangente $M'T$, d. i. die Länge der Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zum Schnittpunkte mit der Abszissenachse;

2. die Subtangente $P'T$, d. i. die Projektion der Tangente auf die Abszissenachse;

3. die Normale $M'N$, d. i. die Länge der Normallinie zwischen dem Berührungspunkte und der Abszissenachse; und

4. die Subnormale $P'N$, d. i. die Projektion der Normale auf die Abszissenachse.

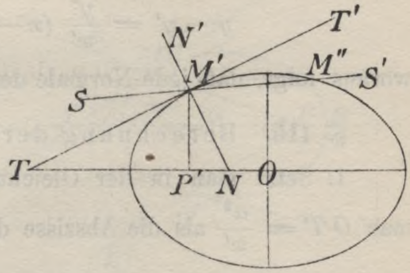
Die Längen dieser vier Linien heißen die Berührungsgrößen für den Punkt $M'$. Die Tangente und die Normale sind wesentlich positiv. Die Subtangente und die Subnormale dagegen sind positiv oder negativ, je nachdem sie von der Ordinate aus nach der positiven oder negativen Abszissenrichtung liegen; sie werden in jedem Falle bestimmt durch die Differenz $x - x'$, in welcher $x$ die Abszisse des Schnittpunktes der Tangente, beziehungsweise der Normale, mit der Abszissenachse, und $x'$ die Abszisse des Berührungspunktes bezeichnet (§. 356).

### 1. Ellipse und Kreis.

§. **414.** Gleichungen der Tangente und der Normale.

Sind $x'$, $y'$ und $x''$, $y''$ die Koordinaten zweier benachbarter Punkte $M'$ und $M''$ (Fig. 195) einer Ellipse, deren Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, so hat man für die durch $M'$ und $M''$ gehende Sekante $SS'$ die Gleichung

Fig. 195.




$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x'),$$

mit der zugleich die Bestimmungsgleichungen

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2,$$
$$b^2x''^2 + a^2y''^2 = a^2b^2$$

stattfinden; durch Subtraktion erhält man:

$$b^2 (x''^2 - x'^2) + a^2 (y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder $\quad b^2 (x'' + x') (x'' - x') + a^2 (y'' + y') (y'' - y') = 0$

und daher $\quad \dfrac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \dfrac{b^2 (x'' + x')}{a^2 (y'' + y')}.$

Substituiert man diesen Wert in die obige Gleichung der Sekante $SS'$, so nimmt dieselbe folgende Form an:

$$y - y' = - \frac{b^2 (x'' + x')}{a^2 (y'' + y')} (x - x').$$

1. Fällt nun der Punkt $M''$ mit $M'$ zusammen, so kommt die Sekante $SS'$ in die Lage der Tangente $TT'$; setzt man also in der letzten Gleichung $x'' = x'$, $y'' = y'$, so erhält man für die Tangente $TT'$ die Gleichung

$$y - y' = - \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x') \ldots 1),$$

welche man auch so darstellen kann:

$$b^2 x x' + a^2 y y' = a^2 b^2.$$

In dieser letzteren Form läßt sich die Gleichung der Tangente unmittelbar aus jener der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ leicht ableiten, indem man die Quadrate $x^2$ und $y^2$ durch die Produkte $xx'$ und $yy'$ ersetzt.

2. Für die im Punkte $M'$ auf die Tangente errichtete Normale $NN'$ ergibt sich die Gleichung

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x') \ldots 2).$$

**Zusatz.** Für $b = a = r$ geht die Ellipse in einen Kreis über. Für den **Kreis** ist daher

*a)* die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'), \text{ oder } xx' + yy' = r^2;$$

*b)* die Gleichung der Normale

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x'), \text{ oder } y = \frac{y'}{x'}x,$$

woraus folgt, daß jede Normale des Kreises durch den Mittelpunkt geht.

## §. 415. Berechnung der vier Berührungsgrößen.

1. Setzt man in der Gleichung der Tangente $y = 0$, so erhält man $OT = \frac{a^2}{x'}$ als die Abszisse des Punktes $T$ (Fig. 195); folglich ist

$$\text{Subtangente } P'T = OT - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Subtangente von der kleinen Achse $2b$ unabhängig ist, daß also alle Ellipsen, somit auch der Kreis, welche über derselben großen Achse beschrieben werden, für gleiche Abszissen auch dieselbe Subtangente haben.

2. Für die Tangente $M'T$ erhält man:

$$M'T^2 = M'P'^2 + P'T^2 = y'^2 + \frac{(a^2 - x'^2)^2}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}\left(x'^2 + \frac{a^4 y'^2}{b^4}\right),$$

daher $$\text{Tangente } M'T = \frac{y'}{b^2 x'}\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}.$$

3. Setzt man in der Gleichung der Normale die Koordinaten des Punktes $N(ON, 0)$ ein, so erhält man für die Subnormale

$$ON - x' = -\frac{b^2 x'}{a^2}.$$

4. Zur Bestimmung der Normale $M'N$ hat man

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^4} = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4}, \text{ daher}$$

$$\text{Normale } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2}.$$

**Zusatz.** Für $b = a = r$, d. i. für den **Kreis** ist

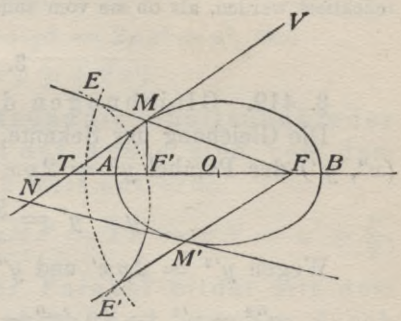
*a)* die Subtangente $= \frac{r^2 - x'^2}{x'}$; *b)* die Tangente $= \frac{ry'}{x'}$;

*c)* die Subnormale $= -x'$; *d)* die Normale $= r$.

§. 416. **Jede Tangente der Ellipse bildet mit den Leitstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.**

Es seien (Fig. 196) $FM$ und $F'M$ die Leitstrahlen des Punktes $M(x', y')$ einer Ellipse, deren Mittelpunkt $O$ ist.

Fig. 196.




Nach §. 415, 1 ist die Abszisse des Schnittpunktes einer Tangente der Ellipse mit der Abszissenachse $\frac{a^2}{x'}$.

Ist nun $F'ME$ ein Außenwinkel des Dreieckes $FF'M$, $MT$ die Halbierungslinie dieses Winkels und $T$ ihr Schnittpunkt mit der Abszissenachse, so ist nach §. 117, 2

$$F'T : FT = F'M : FM$$

oder mit Rücksicht auf §. 394

$$(OT - e) : (OT + e) = \left(a - \frac{ex'}{a}\right) : \left(a + \frac{ex'}{a}\right),$$

woraus auch $TO = \frac{a^2}{x'}$ folgt.

Der Punkt, in welchem die Halbierungslinie des Winkels $F'ME$ die Abszissenachse schneidet, ist also identisch mit dem Durchschnittspunkte der Tangente; d. i. die Tangente im Punkte $M$ ist die Halbierungslinie $MT$ des Winkels $F'ME$.

Da nun $EMT = FMV$ und $F'MT = EMT$ ist, so ist auch $F'MT = FMV$.

Dieser Satz erklärt folgende Erscheinungen, die auf dem Reflexionsgesetze beruhen. Von einer elliptischen Spiegelfläche werden die von einem Brennpunkte ausgehenden Licht-, Wärme- oder Schallstrahlen so reflektiert, daß sie sich im andern Brennpunkte vereinigen. Erregt man in einem elliptisch geformten Gefäße, worin sich eine Flüssigkeit befindet, in dem einen Brennpunkte eine Wellenbewegung, so treffen die reflektierten Wellen im andern Brennpunkte zusammen.

## 2. Hyperbel.

§. 417. **Tangenten und Normalen der Hyperbel.**

Die Gleichungen der Tangente und der Normale, sowie die Längen der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale lassen sich hier in analoger Weise wie bei der Ellipse (§§. 414 und 415) entwickeln; sie können aber auch aus den dort gewonnenen Resultaten sofort erhalten werden, wenn man in denselben $b^2$ mit $-b^2$ vertauscht.

§. **418.** Jede Tangente der Hyperbel bildet mit den Leitstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

Der Beweis wird unter Beziehung auf §. 117, 1 analog mit §. 416 geführt.

Auf diesen Satz gründet sich die Erscheinung, daß von einem hyperbolisch geschliffenen Hohlspiegel Lichtstrahlen, die von einem Brennpunkte ausgehen, so reflektiert werden, als ob sie vom andern Brennpunkte herkämen.

### 3. Parabel.

§. **419.** Gleichungen der Tangente und der Normale.

Die Gleichung der Sekante, welche durch die Punkte $(x', y')$ und $(x'', y'')$ der Parabel $y^2 = 2px$ geht, ist

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

Wegen $y'^2 = 2px'$ und $y''^2 = 2px''$ ist:

$$y''^2 - y'^2 = 2p\,(x'' - x') \text{ und } \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y'}.$$

Durch Substitution ergibt sich daher als Gleichung der Sekante

$$y - y' = \frac{2p}{y'' + y'}(x - x').$$

1. Läßt man nun den Punkt $(x'', y'')$ mit $(x', y')$ zusammenfallen, so wird $y'' = y'$, und man erhält als Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') \ldots . 1),$$

oder

$$yy' = p\,(x + x').$$

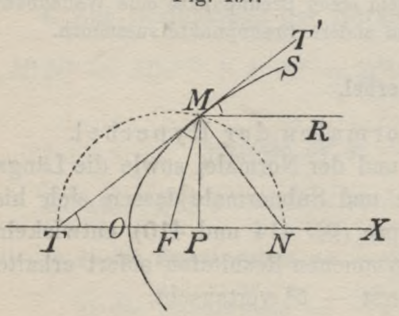
2. Für die zu dieser Tangente gehörige Normale folgt aus 1)

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x') \ldots . 2).$$

§. **420.** Berechnung der vier Berührungsgrößen.

1. Aus der Gleichung der Tangente ergibt sich die Abszisse $OT$ des Punktes $T$ (Fig. 197), indem man $y = 0$ setzt, $OT = -x'$;

Fig. 197.




Subtangente $PT = -2x'$.

Die Subtangente eines Punktes der Parabel ist (dem absoluten Werte nach) der doppelten Abszisse desselben gleich.

2. Für die Tangente $MT$ hat man $MT^2 = MP^2 + TP^2 = y'^2 + 4x'^2 = 2px' + 4x'^2$, somit

Tangente $MT = \sqrt{2x'\,(p + 2x')}$.

3. Setzt man in der Gleichung der Normale $y = 0$, so erhält man $ON - x' = p$; daher ist

$$\text{Subnormale } PN = p.$$

In der Parabel ist die Subnormale konstant und gleich dem halben Parameter.

4. Für die Normale $MN$ erhält man

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = y'^2 + p^2 = 2px' + p^2, \text{ also}$$
$$\text{Normale } MN = \sqrt{p(p + 2x')}.$$

**Zusatz.** Der Berührungspunkt und die Schnittpunkte der Tangente und der Normale mit der Achse sind von dem Brennpunkte der Parabel gleich weit entfernt.

Denn wegen $FP = x' - \frac{p}{2}$ ist $MF = TF = FN = x' + \frac{p}{2}$.

§. **421.** Die Tangente einer Parabel bildet mit dem Leitstrahle des Berührungspunktes und mit der durch diesen Punkt zur Achse parallelen Geraden gleiche Winkel.

Da nach §. 420, Zusatz, das $\triangle FMT$ (Fig. 197) gleichschenklig ist, so ist der W. $FMT = FTM$; nun ist auch W. $RMT' = FTM$, daher $FMT = RMT'$.

Auf diesem Satze beruht die Anwendung parabolischer Hohlspiegel. Fallen nämlich Licht-, Wärme- oder Schallstrahlen parallel zur Achse auf den Spiegel auf, so vereinigen sie sich nach der Reflexion im Brennpunkte. Umgekehrt: Die vom Brennpunkte ausgehenden Strahlen werden von dem Spiegel parallel zur Achse reflektiert.

Aufgaben.

§. **422.** Kreis.

1. An den Kreis $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ wird im Punkte $(x', y')$ die Tangente gezogen; wie lautet die Gleichung derselben?

2. An den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ sind in den Punkten $(-4, 3)$ und $(-3, 4)$ Tangenten gelegt; bestimme $a)$ die Gleichungen der beiden Tangenten, $b)$ den von ihnen eingeschlossenen Winkel, $c)$ die Berührungsgrößen.

3. An den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ sollen von einem außerhalb desselben liegenden Punkte $(\xi, \eta)$ Tangenten gezogen werden; bestimme $a)$ die Koordinaten der Berührungspunkte, die Gleichungen $b)$ der Berührungssehne, $c)$ der Tangenten!

Die Gleichung der Tangente ist $xx' + yy' = r^2 \ldots 1)$. Da die Tangente durch den Punkt $(\xi, \eta)$ gehen soll, so muß $\xi x' + \eta y' = r^2 \ldots 2)$, und weil der Berührungspunkt $(x', y')$ dem Kreise angehört, auch $x'^2 + y'^2 = r^2 \ldots 3)$ sein. Aus 2) und 3) sind nun $x'$ und $y'$ zu bestimmen und dann die Werte in 1) einzusetzen. Speziell: $x^2 + y^2 = 25$, $\xi = -1$, $\eta = 7$.

4. Die Gerade $2x + y = 10$ schneidet den Kreis $x^2 + y^2 = 25$ in zwei Punkten; durch diese Schnittpunkte werden Tangenten an den Kreis gelegt. In welchem Punkte und unter welchem Winkel schneiden die beiden Tangenten einander?

5. In den Schnittpunkten des Kreises $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$ mit der $X$-Achse sind an denselben Tangenten errichtet; die Gleichungen derselben zu ermitteln.

6. An den Kreis $x^2 + y^2 = 100$ ist eine Tangente zu ziehen, welche mit der Geraden $y = \frac{3x}{4} + 15$ parallel ist; wie lautet ihre Gleichung?

7. Die Gleichungen derjenigen Tangenten des Kreises $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ zu suchen, welche auf der Geraden $y - 2x - 7 = 0$ normal stehen.

8. Unter welcher Bedingung berührt die Gerade $Ax + By + C = 0$ den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$?

*a)* Man bringe die Gleichung der Geraden auf die Normalform und setze ihren Abstand vom Mittelpunkt gleich dem Radius

*b)* Die Gleichung der Tangente ist $\frac{xx'}{r^2} + \frac{yy'}{r^2} - 1 = 0$, die der Geraden $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$; für den Fall der Tangente muß $-\frac{A}{C} = \frac{x'}{r^2}$, $-\frac{B}{C} = \frac{y'}{r^2}$ sein. Setzt man die daraus sich ergebenden Werte von $x'$ und $y'$ in die Kreisgleichung ein, so erhält man zwischen $A$, $B$, $C$ und $r$ dieselbe Beziehung wie nach $a$).

Man erhält $r^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}$. (Lösung von Aufg. 3, *c*) nach dieser Gleichung.)

9. Welchen Wert muß $r$ in der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ erhalten, damit $3x + 4y - 12 = 0$ eine Tangente dieses Kreises wird?

10. Unter welcher Bedingung ist $Ax + By + C = 0$ eine Tangente an den Kreis $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$?

Man erhält $r^2 = \frac{(Ap + Bq + C)^2}{A^2 + B^2}$.

11. Welchen Wert muß $C$ in der Gleichung $2x + y + C = 0$ erhalten, damit diese Gerade eine Tangente an den Kreis $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ werde?

12. Die Koordinaten der Berührungspunkte der Tangenten zu suchen, welche vom Ursprung an den Kreis $x^2 + y^2 - 4y - 6x + 12 = 0$ gezogen werden.

13. Es sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise $x^2 + y^2 = 4$ und $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ zu suchen.

14. Zwei Kreise haben die Gleichungen $x^2 + y^2 = 1$ und $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. Die Koordinaten eines Punktes so zu bestimmen, daß die von ihm an die beiden Kreise gezogenen Tangenten die gleiche Länge 5 haben.

15. Analytisch zu beweisen, daß die Gerade, welche den Durchschnittspunkt zweier Tangenten eines Kreises mit dem Mittelpunkt verbindet, auf der Berührungssehne senkrecht steht.

16. Unter welchem Winkel schneiden einander die Linien $2y - 3x = 6$ und $x^2 + y^2 = 25$?

17. Unter welchem Winkel schneiden einander die Kreise $x^2 + y^2 = 64$ und $(x - 10)^2 + y^2 = 9$?

18. Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, wenn die von demselben an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gezogenen Tangenten aufeinander normal stehen.

Man beachte das Viereck, dessen Eckpunkte der Mittelpunkt des Kreises, die beiden Berührungspunkte und der Schnittpunkt der Tangenten sind.

19. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu suchen, die in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ die Potenz $t^2$ haben, *a*) für äußere, *b*) für innere Punkte (absolut). Vgl. §. 130 Aufg.

20. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu suchen, welche bezüglich der beiden Kreise $x^2 + y^2 = 4$ und $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$ dieselbe Potenz haben.

Der geometrische Ort dieser Punkte heißt die Potenzlinie der beiden Kreise. An dem vorliegenden Beispiel die Lage der Potenzlinie gegen die Zentrale der beiden Kreise zu bestimmen.

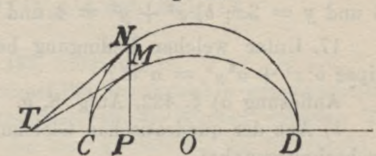
## §. 423. Ellipse.

1. Durch einen Punkt $M$ einer Ellipse an diese die Tangente zu ziehen.

Auflösung 1. Verlängert man (Fig. 196) den Leitstrahl $FM$ über $M$ hinaus, so darf man, um die Lage der Tangente $MN$ zu erhalten, (nach §. 416) nur den Winkel $F'ME$ halbieren.

Auflösung 2. Nach §. 415, 1. Man beschreibe (Fig. 198) über der großen Achse $CD$ einen Kreis, verlängere die Ordinate $MP$ bis $N$, konstruiere in $N$ die Tangente $NT$ an den Kreis und ziehe $TM$.

Fig. 198.




2. Aus einem Punkte $N$ (Fig. 196) außerhalb einer Ellipse an diese Tangenten zu ziehen.

Ist $MN$ die gesuchte Tangente und $ME = MF'$, so ist $MN$ die Symmetrale der Strecke $EF'$. Für den Punkt $E$ hat man als Ort den Kreis mit dem Mittelpunkt $F$ und dem Radius $2a$, ferner den Kreis mit dem Mittelpunkt $N$ und dem Radius $NF'$. Verbindet man $E$ mit $F$, so ist der Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinie mit der Ellipse der Berührungspunkt.

Da man zwei Punkte $E$ bekommt, so erhält man auch zwei Tangenten.

3. Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Ellipse $x^2 + 25y^2 = 25$ im Punkte $(-3, y' > 0)$? Den Winkel derselben mit der Abszissenachse zu berechnen.

4. An die Ellipse $4x^2 + 25y^2 = 100$ werden durch den Punkt $(4, \frac{6}{5})$ die Tangente und die Normale gezogen; die Berührungsgrößen zu berechnen.

5. Wie verhalten sich die Abschnitte, in welche die Abszisse eines Punktes einer Ellipse durch die Normale dieses Punktes geteilt wird?

6. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche vom Punkte $(0, 2)$ an die Ellipse $2x^2 + 3y^2 = 6$ gezogen werden können? (Vgl. §. 422, 3.)

7. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, welche zu der Geraden $5y + 4x = 7$ *a*) parallel, *b*) senkrecht sind?

8. An die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 100$ werden durch die Punkte $(8, 3)$ und $(6, -4)$ Tangenten gezogen; bestimme *a*) die Koordinaten ihres Schnittpunktes, *b*) den von ihnen gebildeten Winkel, *c*) die Gleichungen ihrer Winkelsymmetralen!

9. Die Länge der Senkrechten vom Mittelpunkte einer Ellipse auf die durch den Punkt $(x', y')$ derselben gezogene Tangente zu bestimmen.

10. Das Produkt aus der Normale eines Punktes einer Ellipse und der Senkrechten vom Mittelpunkte auf die Tangente desselben Punktes ist konstant und gleich dem Quadrate der halben kleinen Achse.

11. Die Länge der Senkrechten von einem Brennpunkte einer Ellipse auf die durch den Punkt $(x', y')$ derselben gezogene Tangente zu finden.

12. Das Produkt aus den Senkrechten von den Brennpunkten einer Ellipse auf eine Tangente derselben ist konstant und gleich dem Quadrate der halben kleinen Achse.

13. Die Koordinaten des Fußpunktes der Senkrechten von einem Brennpunkte einer Ellipse auf die durch den Punkt $(x', y')$ derselben gezogene Tangente zu bestimmen.

14. Der Abstand des Fußpunktes der von einem Brennpunkte einer Ellipse auf eine Tangente gezogenen Senkrechten vom Mittelpunkte der Ellipse ist gleich der halben großen Achse.

15. Durch Konstruktion des Ausdruckes für eine der beiden Koordinaten denjenigen Punkt einer Ellipse zu bestimmen, für welchen die Tangente der Normale gleich ist. Die Berührungsgrößen zu berechnen.

16. Unter welchem Winkel schneiden einander die Linien *a*) $9x^2 + 25y^2 = 225$ und $y = 3x$; *b*) $x^2 + y^2 = 4$ und $3x^2 + 5y^2 = 15$?

17. Unter welcher Bedingung berührt die Gerade $Ax + By + C = 0$ die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$?

Auflösung *a*) §. 422, Aufg. 8, *b*.

*b*) Aus der quadratischen Gleichung für die Berechnung der Koordinaten der Durchschnittspunkte.

Man erhält $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

18. In der Gleichung der Geraden $y = 3x + b$ ist $b$ so zu bestimmen, daß die Gerade eine Tangente der Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ wird.

19. In der Gleichung der Ellipse $b^2x^2 + 25y^2 = 25b^2$ ist $b$ so zu bestimmen, daß die Gerade $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ eine Tangente wird.

20. Die Gleichung der im Punkte $x', y'$ an eine Ellipse gezogenen Tangente lautet für die Scheitelgleichung $yy' = p(x + x') - \frac{p}{a}xx'$.

21. Wenn eine Tangente einer Ellipse vom Mittelpunkt den Abstand $d$ hat und mit der großen Achse den Winkel $\alpha$ bildet, so ist $d^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha$.

22. Über derselben großen Achse sind Ellipsen konstruiert; die Gleichung für den geometrischen Ort der Berührungspunkte aller Tangenten zu suchen, welche von dem Punkt $(m, 0)$ an die Ellipsen gezogen werden können. (§. 415, 1.)

23. Die zum Punkt $M$ einer Ellipse gehörige Normale schneidet die große Achse in $N$. Auf der in $N$ zu der Hauptachse errichteten Senkrechten macht man $AN = MN$. Den geometrischen Ort für $A$ zu suchen.

### §. 424. Hyperbel.

1. Durch einen Punkt einer Hyperbel an diese die Tangente zu ziehen.

Die Auflösung ist analog der Auflösung 1 zu §. 423, Aufg. 1.

2. An die Hyperbel $9x^2 - 16y^2 = 144$ ist im Punkte $(\frac{20}{3}, 4)$ die Tangente zu ziehen und deren Gleichung anzugeben.

3. Von einem außerhalb einer Hyperbel liegenden Punkte an dieselbe Tangenten zu ziehen.

Wird analog wie Aufg. 2 in §. 423 aufgelöst.

4. Wie lauten die Gleichungen der beiden Tangenten, welche vom Punkte $(1, 0)$ an die Hyperbel $x^2 - 2y^2 = 2$ gezogen werden können?

5. Der zwischen den Asymptoten liegende Teil einer Tangente der Hyperbel wird im Berührungspunkte halbiert.

6. Den Punkt einer Hyperbel zu suchen, für welchen die Subtangente und die Subnormale gleich lang sind.

7. Unter welchem Winkel schneiden einander die beiden Kurven

$$x^2 + y^2 = 60\tfrac{1}{4}, \quad 9x^2 - 16y^2 = 144?$$

8. An einen Punkt der Hyperbel $25x^2 - 16y^2 = 400$, dessen Ordinate gleich der Abszisse ist, wird die Tangente gezogen. Die Berührungsgrößen zu berechnen.

9. Die Gleichung der Tangente an die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ zu ermitteln, welche mit der Abszissenachse einen Winkel von 45° bildet.

10. Die Gleichung der Tangente an die Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ zu ermitteln, welche mit der Abszissenachse einen Winkel von 60° bildet; die Berührungsgrößen zu berechnen.

11. Unter welcher Bedingung ist die Gerade $Ax + By + C = 0$ eine Tangente an die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$? (Vgl. § 423, Aufg. 17.)

Man erhält $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

Ähnliche Aufgaben zu bilden wie §. 423, Aufg. 18, 19.

12. Wenn eine Ellipse und eine Hyperbel die Brennpunkte gemeinschaftlich haben, so stehen die in den Durchschnittspunkten an die Kurven gelegten Tangenten aufeinander senkrecht. (§. 416 und der analoge Satz für die Hyperbel.)

13. In einer gleichseitigen Hyperbel verbindet man den Berührungspunkt einer Tangente mit dem Mittelpunkt der Hyperbel. Welche Beziehung herrscht zwischen den Richtungskonstanten dieser Verbindungslinie und der Tangente?

14. Wenn man vom Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel die Normale $OP$ auf eine Tangente fällt und bis zum Durchschnitt $Q$ mit der Hyperbel verlängert, so ist $OP.OQ = a^2$.

15. Das Dreieck, welches eine Tangente einer Hyperbel mit den Asymptoten derselben bildet, hat einen konstanten Inhalt.

### §. 425. Parabel.

1. Durch einen Punkt $M$ einer Parabel an diese die Tangente zu ziehen.

Auflösung 1. Durch Halbierung des Winkels $FMQ$ (§. 421.) (Fig. 199).

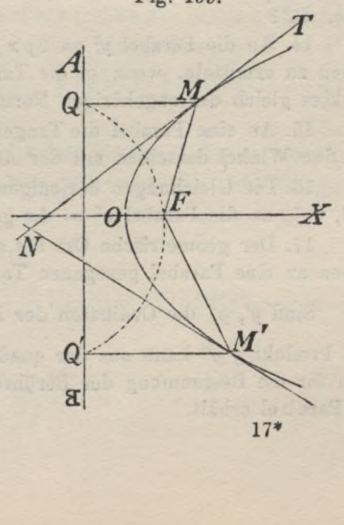
Auflösung 2. Mit Rücksicht auf §. 420, 1. Man mache (Fig. 197) $OT = OP$ und ziehe $TM$.

Auflösung 3. Nach §. 420, Zusatz. Man beschreibe (Fig. 197) um den Brennpunkt $F$ mit dem Leitstrahle $FM$ als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die verlängerte Achse in $T$ schneidet, und ziehe $TM$.

2. Wie lautet die Gleichung der Tangente, welche im Punkte $(2, y' > 0)$ an die Parabel mit dem Parameter $4\frac{1}{2}$ gezogen wird?

3. Aus einem Punkte $N$ (Fig. 199) außerhalb einer Parabel an diese Tangenten zu ziehen.

Fig. 199.



Mit Beziehung auf die 1. Auflösung der Aufgabe 1 handelt es sich hier nur darum, den Punkt Q der Leitlinie zu bestimmen, durch welchen die mit der Achse parallele Gerade $QM$ gezogen werden muß, damit sie den Berührungspunkt $M$ treffe. Da $MN$ die Symmetrale von $QF$ ist, so ist $NF = NQ$. Man beschreibe daher um $N$ mit dem Halbmesser $NF$ einen Kreis, welcher die Leitlinie in $Q$ schneidet, ziehe $QM \parallel OX$ und sodann die Gerade $NM$.

Da jener Kreis die Leitlinie auch noch in einem zweiten Punkte $Q'$ schneidet, so erhält man, wenn $Q'M' \parallel OX$ gezogen wird, einen zweiten Berührungspunkt $M'$ und es ist auch $NM'$ eine Tangente der Parabel.

4. Die Gleichung einer Parabel sei $y^2 = 16x$; suche die Gleichung derjenigen Tangente derselben, welche zu der Geraden $y - x + 3 = 0$ *a*) parallel, *b*) senkrecht ist.

5. An eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = 4x$ ist, seien durch zwei ihrer Punkte, deren Ordinaten 2 und $-4$ sind, Tangenten gezogen; bestimme *a*) den Schnittpunkt der beiden Tangenten, *b*) den von ihnen gebildeten Winkel, *c*) den Flächeninhalt des von den Tangenten und der Berührungssehne begrenzten Dreieckes!

6. Die Senkrechte vom Brennpunkte einer Parabel auf eine Tangente derselben ist die mittlere Proportionale zwischen dem entsprechenden Leitstrahl und dem vierten Teile des Parameters.

7. Man vergleiche die vom Brennpunkt einer Parabel auf eine Tangente gezogene Senkrechte mit der zur Tangente gehörigen Normale.

8. Unter welchem Winkel schneiden einander die beiden Kurven

$$y^2 = 2x \text{ und } x^2 + y^2 = 8?$$

9. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche in den Schnittpunkten an die beiden Kurven $4x^2 - 9y^2 = 36$ und $y^2 = \frac{10}{3}x$ gezogen werden können, und unter welchem Winkel schneiden diese Tangenten einander?

10. Für welchen Punkt einer Parabel bildet die Tangente mit der Achse einen Winkel von 45°?

11. Die Bedingung zu ermitteln, unter welcher $Ax + By + C = 0$ eine Tangente der Parabel $y^2 = 2px$ ist. (Vgl. §. 423, 17.)

Man erhält $B^2p = 2AC$.

12. Wie lautet die Scheitelgleichung jener Parabel, für welche die Gerade $y = 2x + 3$ eine Tangente ist?

13. Welche Tangente der Parabel $y^2 = 6x$ schneidet die Gerade $y = 3x + 5$ unter 45°?

14. An die Parabel $y^2 = 2px$ ist eine Tangente gelegt; die Gleichung derselben zu ermitteln, wenn *a*) die Tangente, *b*) der Radiusvektor des Berührungspunktes gleich der zugehörigen Normale ist.

15. An eine Parabel die Tangente zu legen, die dem halben Parameter gleich ist; den Winkel derselben mit der Achse zu berechnen.

16. Die Gleichungen derjenigen Tangenten zu suchen, welche vom Punkte $(-1, -1)$ an die Parabel $y^2 = 4x$ gezogen werden.

17. Der geometrische Ort für alle Punkte zu bestimmen, wenn die von denselben an eine Parabel gezogenen Tangenten aufeinander senkrecht stehen.

Sind $y'$, $y''$ die Ordinaten der Berührungspunkte, so muß $\frac{p^2}{y'y''} = -1$ sein. Das Produkt $y'y''$ kann aus der quadratischen Gleichung abgelesen werden, welche man für die Bestimmung der Berührungspunkte einer Tangente von $(x, y)$ aus an die Parabel erhält.

## IX. Berechnung des Flächeninhaltes einer Ellipse und eines Parabelsegmentes.

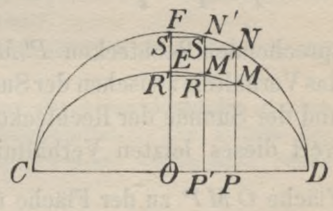
§. **426.** *a)* Beschreibt man über der großen Achse einer Ellipse als Durchmesser einen Kreis (Hauptkreis), so verhalten sich die derselben Abszisse entsprechenden Ordinaten der Ellipse und des Kreises wie die halbe kleine zur halben großen Achse.

Setzt man (Fig. 200) $OP = x$, $MP = y$ und $NP = \eta$, so ist

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, $\eta^2 = a^2 - x^2$; daher

$y^2 : \eta^2 = b^2 : a^2$, und $y : \eta = b : a$.

Fig. 200.



*b)* Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Produkte aus den beiden Halbachsen und der Zahl $\pi$.

Zieht man (Fig. 200) durch beliebig viele Punkte $M$, $M'$,.. der Ellipse Ordinaten, deren Verlängerungen den über der großen Achse $CD$ beschriebenen Kreis in den Punkten $N$, $N'$,.. treffen, ferner parallel zur großen Achse die Strecken $MR$, $M'R'$,.., $NS$, $N'S'$,.., so verhalten sich je zwei entsprechende Rechtecke $MPP'R$ und $NPP'S$ wie $b : a$. In demselben Verhältnisse stehen daher auch die Summen aller dieser Rechtecke. Nimmt man nun die Punkte $M$, $M'$,.. unendlich nahe an, so müssen sich auch die Grenzwerte, denen sich jene Summen ohne Ende nähern, d. i. die Flächen der Ellipse und des Kreises wie $b : a$ verhalten. Der Flächeninhalt des Kreises ist $a^2\pi$; heißt $f$ der Flächeninhalt der Ellipse, so hat man $f : a^2\pi = b : a$; folglich ist $f = ab\pi$.

§. **427.** Der Inhalt der von zwei zusammengehörigen Koordinaten und dem zwischen denselben liegenden Parabelbogen begrenzten Fläche ist gleich $\frac{2}{3}$ des Produktes aus diesen Koordinaten.

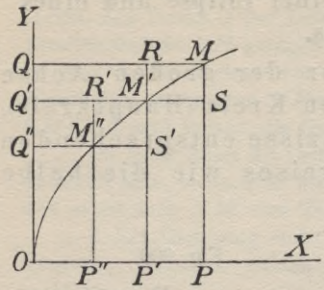
Es sei $OM$ (Fig. 201) ein parabolischer Bogen. Zieht man durch beliebig viele Punkte $M$, $M'$, $M''$,... Normale auf die Abszissenachse $OX$ und auf die Ordinatenachse $OY$, so ist, wenn $OP = x$, $MP = y$, $OP' = x'$, $M'P' = y'$... gesetzt wird,

Rechteck $PMRP' = (x - x')y = \frac{(y^2 - y'^2)y}{2p}$, Rechteck $QMSQ' = x(y - y')$;

daher

$$\frac{PMRP'}{QMSQ'} = \frac{(y + y')y}{2px}.$$

Fig. 201.




Je näher man die Punkte der Parabel annimmt, desto mehr nähern sich auch die Koordinaten derselben, desto mehr nähert sich das Verhältnis der Rechtecke $PMRP'$ und $QMSQ'$ dem Grenzwerte von

$$\frac{(y+y')y}{2px} = \frac{2y^2}{2px} = 2.$$

Demselben Grenzwerte 2 nähert sich unter dieser Voraussetzung auch das Verhältnis zwischen je zwei folgenden entsprechenden Rechtecken $P'M'R'P''$ und $Q'M'S'Q''$, u. s. w., daher auch das Verhältnis zwischen der Summe der Rechtecke $PMRP' + P'M'R'P'' + ..$ und der Summe der Rechtecke $QMSQ' + Q'M'S'Q'' + \ldots.$ Der Grenzwert dieses letzten Verhältnisses ist aber zugleich das Verhältnis der Fläche $OMP$ zu der Fläche $OMQ$; somit ist das Verhältnis $\frac{OMP}{OMQ} = 2.$

Hieraus folgt

$$2\,OMQ = OMP, \text{ daher } 3\,OMQ = OMP + OMQ = xy; \text{ also}$$

$$OMQ = \tfrac{1}{3}xy, \text{ und } OMP = \tfrac{2}{3}xy.$$

Aufgaben.

§. **428.** 1. Die Seiten eines Dreieckes sind 6, 5, 7. Die Fläche derjenigen Ellipse zu berechnen, deren Brennpunkte mit den Endpunkten der ersten Seite zusammenfallen und in deren Umfang der dritte Eckpunkt liegt.

2. Die Beziehung der Fläche einer Ellipse zu den Inhalten des ein- und umgeschriebenen Kreises aufzusuchen.

3. Über einer Ellipse ist ihr Hauptkreis konstruiert. Die zwischen beiden Linien liegende Fläche durch eine Ellipse zu halbieren, welche über derselben Hauptachse konstruiert ist.

4. Die numerische Exzentrizität einer Ellipse ist $\varepsilon$, ihre Fläche $f$. Die Achsen zu berechnen.

5. Die kleine Achse einer Ellipse ist $2b$; wie groß muß die große Achse sein, damit die Ellipse der Mantelfläche eines gleichseitigen Kegels, welcher die halbe kleine Achse der Ellipse zur Höhe hat, gleich ist?

6. Die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist der Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes gleich, dessen Grundflächen die Halbmesser $a$ und $b$ haben; wie groß ist die Höhe des Stumpfes?

7. Durch den Brennpunkt einer Parabel ist die zur Achse normale Sehne gezogen. Das abgeschnittene Segment zu berechnen.

8. Durch zwei Punkte mit den Ordinaten 2 und — 4 der Parabel $y^2 = 4x$ ist die Sehne gezogen; den Inhalt des abgeschnittenen Segmentes zu berechnen.

9. Durch den Scheitel einer Parabel ist eine Sehne gezogen, welche gegen die Achse unter einem Winkel von $60^0$ geneigt ist; wie groß ist das abgeschnittene Segment?

10. Der Parabel $y^2 = 12x$ ist ein gleichschenkliges Dreieck so eingeschrieben, daß der Scheitel desselben im Scheitel der Parabel liegt; wie groß sind die von den Schenkeln des Dreieckes abgeschnittenen Segmente, wenn die Höhe zur Grundlinie im Verhältnis 5 : 4 steht?

11. An die Parabel $y^2 = 2px$ ist eine Tangente gelegt, die mit der Achse einen Winkel von $30^0$ bildet; vom Berührungspunkt wird auf die Achse die senkrechte Sehne gezogen; das Quadrat zu konstruieren, welches dem durch diese Sehne abgeschnittenen Segment gleich ist.

12. An die Parabel $y^2 = 8x$ wird in dem Punkt, dessen Ordinate 4 ist, die Tangente errichtet. Die Fläche zu berechnen, welche von der Ordinatenachse, dieser Tangente und dem zugehörigen Parabelbogen begrenzt ist. Welche Fläche schneidet die zugehörige Normale von der Parabel ab?

13. Die Teile zu berechnen, in welche der Kreis $x^2 + y^2 = 8$ durch die Parabel $y^2 = 2x$ geteilt wird.

14. Die Ordinaten zweier auf derselben Seite der Achse liegender Punkte einer Parabel sind $a$ und $b$, der Abstand dieser Ordinaten ist $c$. Die Fläche des Segmentes zu berechnen, das von der durch diese Punkte bestimmten Sehne abgeschnitten wird.

---

## Anhang.

### §. 429. Geschichtliche Bemerkungen über die elementare Geometrie.

*a*) Planimetrie.

Die Geometrie entstand bei dem ältesten Kulturvolk des Altertums, den Ägyptern. Die großartigen Bauwerke derselben und die Notwendigkeit der Vermessung des Landes nach den jährlichen Überschwemmungen des Nils beweisen, daß sie in der praktischen Geometrie erfahren waren. Dies zeigt auch der Inhalt eines Papyrus, der aus dem Besitze des Mr. Rhind für das Britische Museum erworben wurde. Er enthält Aufgaben vorzugsweise über die Maßbestimmungen der Figuren. Es ist zu erkennen, daß die Ägypter mit der Lehre von den Winkeln und Parallelen, mit der Bestimmung der Dreiecke, Parallelogramme und Trapeze aus einzelnen Stücken, mit der Flächenberechnung dieser Figuren und den Elementen der Kreislehre vertraut waren. Die Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren war ihnen fremd, da sie die Proportionen nicht kannten.

Die Ägypter waren in der Geometrie die Lehrmeister der Griechen. Thales von Milet, Pythagoras, Platon und andere zogen nach Ägypten und waren die Schüler der ägyptischen Priester.

Thales (geboren um 624 v. Chr.) war der Stifter der jonischen Philosophenschule. Er selbst machte wenige eigene Entdeckungen in der Geometrie, sein Hauptverdienst besteht in der Verbreitung der geometrischen Kenntnisse der Ägypter unter den Griechen.

Einen größeren Fortschritt verdankt die Geometrie der Pythagoreischen Philosophenschule. Der Gründer derselben, Pythagoras aus Samos, wurde um das Jahr 568 v. Chr. geboren und soll ein Alter von 80 oder 90 Jahren erreicht haben. Er hielt sich lange Zeit in Ägypten auf, kehrte dann wieder nach Samos zurück und gründete um 510 in Kroton in Unteritalien die nach ihm benannte Philosophenschule.

Pythagoras erhob die Geometrie, die vor ihm vielfach nur eine Dienerin der Praxis war, zum Range einer Wissenschaft. Mit der Einführung der Lehre von den Proportionen wurde die Behandlung der Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren möglich, mit dem Auffinden der mittleren geometrischen Proportionale die Verwandlung eines Rechteckes in ein Quadrat. Am bekanntesten ist sein Name durch die Erfindung des nach ihm benannten Lehrsatzes von den Quadraten über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes. Die Art des Beweises ist uns unbekannt; der in §. 143 enthaltene Beweis rührt von Euklid her. Er soll auch den goldenen Schnitt und die Konstruktion des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes gefunden haben. Im übrigen wurde die Lehre vom Kreise nicht weiter entwickelt.

In dem folgenden Jahrhundert suchten die Geometer vorzüglich zwei Aufgaben zu lösen: die Teilung eines Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und die Berechnung des Flächeninhaltes des Kreises und einzelner Teile desselben. Die erste Aufgabe löste Hippias von Elis, ein Zeitgenosse des Sokrates; mit der zweiten beschäftigte sich Hippokrates aus Chios (um 440 v. Chr.). Er suchte durch Monde des Kreises über verschiedenen Sehnen zum Ziele zu kommen, fand aber die Lösung nicht.

Einen weiteren Aufschwung nahm die Geometrie in der Schule Platons (429—348 v. Chr.) Die Bedeutung Platons liegt weniger in selbständigen geometrischen Forschungen als in der Betonung der Wichtigkeit der Geometrie. Über die Türe seiner Lehrhalle schrieb er die Worte: „*Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω μοῦ τὴν στέγην*“. An den Namen Platons und seiner Schule knüpft sich die strengere Feststellung der Grundbegriffe der Geometrie, die genauere Ausbildung der Theorie der schon der Pythagoreischen Schule bekannten irrationalen Zahlen und der geometrischen Örter.

Ihre Blütezeit erlebte die griechische Geometrie von 300—200 v. Chr. In diese Zeit gehören Euklid, Archimedes, Eratosthenes und Apollonius. Euklid lebte um das Jahr 300 v. Chr. in Alexandrien. Er überlieferte uns in seinen Elementen eine vollständige Übersicht der Mathematik seiner Zeit; dieses Werk wurde nicht allein bis auf unsere Zeit vielfach als Muster eines geometrischen Lehrbuches angesehen, sondern es hat auch für die Geschichte der Geometrie die Bedeutung, daß es die Zeit abschließt, in welcher die Entwickelung der Geometrie nicht selten auf Vermutungen beruht.*)

Archimedes wurde 287 v. Chr. in Syrakus geboren, hielt sich eine Zeit in Ägypten auf, während welcher er mit den Gelehrten Alexandriens in Verbindung gewesen sein dürfte. Er kehrte wieder nach Syrakus zurück und wurde bei der Eroberung dieser Stadt durch Marcellus 212 v. Chr. von einem römischen Soldaten getötet. Er fand durch Berechnung des Umfanges des einem Kreise ein- und umgeschriebenen regelmäßigen 96-Eckes die Peripherie und aus derselben die Fläche des Kreises (vgl. §. 173), das erste Beispiel der Lösung einer Aufgabe durch Annäherung. Ferner bestimmte er die Fläche der Ellipse und eines Parabelsegmentes. Eratosthenes (geb. 276 v. Chr.) ermittelte die Länge eines Meridiangrades. Apollonius (geb. zwischen 247 und 221 v. Chr.) behandelte die Eigenschaften der Ellipse, Parabel und Hyperbel und führte für diese Kurven die noch jetzt gebräuchlichen Namen ein.

Von den späteren Geometern seien noch Heron und Pappus erwähnt. Heron, dessen Blütezeit um das Jahr 100 v. Chr. war, beschäftigte sich vorzugsweise mit der Ausmessung der Flächen und Körper und fand die Formel für die Berechnung des Inhaltes eines Dreieckes aus den drei Seiten. Pappus lebte gegen das Ende des 3. oder 4. Jahrhunderts nach Chr. Er hinterließ uns in seinen „Mathematischen Sammlungen“ ein Denkmal der alten Mathematik. Dieses Werk enthält aber nicht allein Entdeckungen seiner Vorgänger, sondern auch eigene von größter Bedeutung.

*) Bretschneider, die Geometrie und die Geometer vor Euklid.

Bald nach Pappus trat in der Entwickelung der Geometrie ein Stillstand ein, der fast 1000 Jahre umfaßte.

*b*) Stereometrie.

Die Kenntnisse der Ägypter aus der Stereometrie waren unbedeutend. Nach Bretschneider kannten sie die Bedingung der normalen Lage einer Geraden gegen eine Ebene, auch hatten sie eine beschränkte Theorie für den Parallelismus von Geraden und Ebenen im Raume. Ihre Kenntnis von den Körpern ging über die Existenz der Prismen, der vierseitigen, regulären Pyramiden, der geraden Formen des Zylinders, Kegels und der regelmäßigen Körper (mit Ausnahme des Dodekaeders) nicht hinaus. Nur die Eigenschaften der Kugel waren ihnen infolge ihrer Beschäftigung mit der Astronomie genauer bekannt.

Die jonische Philosophenschule machte in der Stereometrie keine Fortschritte. Durch Pythagoras und seine Schule wurde die Lehre von den körperlichen Ecken und den regelmäßigen Körpern weiter ausgebaut, von den letzteren im Zusammenhang mit der Konstruktion des regelmäßigen Fünfeckes das Dodekaeder entdeckt. Nach Pythagoras bildete die Verdoppelung des Würfels, das sog. Delische Problem, eine Hauptaufgabe der Geometer. Hippokrates von Chios konstruierte nicht nur die Seite des doppelten Würfels, sondern löste auch die Aufgabe für jede beliebige Vervielfachung desselben.

Die gegen die Planimetrie zurückgebliebene Stereometrie machte durch die Schule Platons wesentliche Fortschritte. Eudoxus fand den Satz, daß jede Pyramide der dritte Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe ist, dann den gleichen Satz über den Kegel und Zylinder. Die Berechnung des Volumens einer Pyramide und eines Kegels ist somit auf diesen Geometer zurückzuführen. Wahrscheinlich fand Eudoxus auch den Satz, daß die Volumina zweier Kugeln sich wie die 3. Potenzen ihrer Durchmesser verhalten.

Die Berechnung der Kugel gelang erst Archimedes und zwar durch Vergleichung derselben mit dem umgeschriebenen Zylinder. In den ersten Sätzen seines Werkes: „*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*" finden wir die Berechnung des Mantels eines geraden Zylinders, Kegels und Kegelstumpfes, im Verlaufe der Entwickelungen die Berechnung der Kalotte, der Oberfläche und des Volumens der Kugel, eines Ausschnittes und eines Segmentes derselben. Archimedes selbst hielt diese Leistung für seine bedeutendste und wünschte, daß eine Kugel mit dem umgeschriebenen Zylinder auf seinem Grabstein eingemeißelt werde. Marcellus erfüllte diesen Wunsch und an diesem Merkmale erkannte später Cicero das Grabmal des großen Mannes, der in der Geschichte der Mathematik eine Epoche bildet.

Der in diesem Buche bei der Berechnung des Inhaltes der Körper angewendete Satz von Cavalieri (1598—1647) wurde von demselben 1635 veröffentlicht.

*c*) Trigonometrie.

Naturgemäß später als die Planimetrie und Stereometrie entwickelte sich die Trigonometrie. Den Anstoß gab die Astronomie. Der wahrscheinliche Begründer der Trigonometrie ist der berühmte Astronom Hipparch von Nicaea, der um die Mitte des 2. Jahrhunderts v. Chr. lebte. Er lehrte die Benützung der Sehnen des Kreises zur Berechnung der Winkel. Auch Menelaus (ca. 98 n. Chr.) benützte die Sehnen zur Berechnung des ebenen und sphärischen Dreieckes. Die älteste erhaltene Sehnentafel findet sich in dem berühmten Almagest*) von Ptolemäus (um 140 n. Chr. in Alexandrien); sie enthält in Sexagesimalteilen des Halbmessers des Kreises die Sehnen zu den Winkeln von $0^\circ$—$180^\circ$ in Stufen von $30'$. Ihre Berechnung wurde mittels des Ptolemäischen Satzes durchgeführt. Überdies enthält das Werk

*) Entstanden aus dem arabischen Artikel al und dem Titel des Werkes: *Μεγάλη σύνταξις*.

Berechnungen des ebenen und sphärischen Dreieckes. In Indien benützte man zur Messung der Winkel die halbe Sehne des doppelten Bogens, d. i. den Sinus des Winkels. Von den Indern verbreitete sich diese Art der Messung eines Winkels zu den Arabern. Ihr trigonometrisches Werk war der Sendhend, eine im Jahre 772 aus dem Indischen hergestellte Übersetzung, die später umgearbeitet und mit Verbesserungen aus dem Almagest versehen wurde. Die Araber benützten auch zur Messung der Winkel die Tangente und zwar wurde sie zuerst von Albategnius (gest. 928) angewendet; bald darauf wurden Tafeln für die Tangenten und Kotangenten berechnet.

Einen wesentlichen Fortschritt verdankt die Trigonometrie den deutschen Mathematikern des 15. und 16. Jahrhunderts. Die Verdienste derselben bestehen zunächst in einer bedeutenden Verbesserung der Tafeln. Es wurde die unbequeme Sexagesimalteilung des Radius aufgegeben und die Dezimalteilung desselben eingeführt. Johannes Müller, 1436—1476, von seinem Geburtsort Königsberg in Coburg Regiomontanus genannt, berechnete Sinus- und Tangententafeln und dehnte sie auf einzelne Minuten aus; die besten Tafeln stammen aber von Georg Joachim, 1514—1576, nach seinem Vaterland Vorarlberg Rhäticus genannt. Unter seiner Aufsicht wurden nicht allein die Tafeln genauer berechnet, sondern er fügte auch zur Vermeidung lästiger Divisionen eine Sekantentafel hinzu. Die Beendigung des Werkes erlebte er nicht, dasselbe wurde nach seinem Tode von seinem Schüler Otho unter dem Titel Opus Palatinum 1596 herausgegeben. Aber auch die Art der Berechnung der Dreiecke wurde wesentlich verbessert. Bisher wurde die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes durch Konstruktion einer Höhe auf die des rechtwinkligen Dreieckes zurückgeführt. Durch die Auffindung der Fundamentalsätze über das schiefwinklige Dreieck wurde dies überflüssig. Regiomontanus fand den Sinussatz (der in §. 326 enthaltene Beweis rührt von dem Bamberger Clavius, 1537—1612, her), Fink aus Flensburg veröffentlichte in seiner Geometria rotundi 1583 den Tangentensatz (§. 329), Vieta 1593 den Kosinussatz (§. 327), auf Rhäticus sind die Formeln für tang $\frac{\alpha}{2}$ etc. (§. 333) zurückzuführen.

Dazu kam noch die Einführung der Logarithmen durch den Schotten Napier 1614 und den Engländer Briggs 1618; durch dieselben wurde nicht nur das Zahlenrechnen erleichtert und eine Vereinfachung der Tafeln durch das Wegfallen der Sekanten erzielt, sondern auch die Goniometrie durch die notwendig gewordene Auffindung logarithmierbarer Formeln gefördert. Euler gebührt das Verdienst der stärkeren Betonung der trigonometrischen Funktionen als Zahlen statt als Linien, womit die Rechnung in der Trigonometrie einen größeren Spielraum erhielt. Von Euler stammt auch die Bezeichnung der trigonometrischen Funktionen mit $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ etc., wofür früher besondere Buchstaben gesetzt wurden, und die noch jetzt übliche Bezeichnung der Seiten und Winkel eines Dreieckes.

*d*) Analytische Geometrie.

Der Schöpfer der analytischen Geometrie ist der berühmte Philosoph und Mathematiker Descartes (Cartesius), geb. in la Haye 1596, gest. in Stockholm 1650. Durch die Aufstellung des Koordinatenbegriffes und die Anwendung der Algebra auf die Lehre von den Kurven lenkte er nicht allein die ganze Mathematik in neue Bahnen, sondern veranlaßte auch einen ungeahnten Fortschritt der mit ihr in Verbindung stehenden Wissenschaften.

*) Entstanden aus dem arabischen Artikel al und dem Titel des Werkes: *Μεγάλη σύνταξις*.

# Inhalt.

### Vierter Abschnitt.

**Flächeninhalt der geradlinigen ebenen Gebilde.**



### Fünfter Abschnitt.

**Die regelmäßigen Polygone und die Maßbestimmungen am Kreise.**



## Anhang zur Planimetrie.

**Lösung von Konstruktionsaufgaben nach der Methode der algebraischen Analysis.**



---

## Zweiter Teil.

## Stereometrie.

### Erster Abschnitt.

**Gerade Linien und Ebenen im Raume.**



### Zweiter Abschnitt.

**Von den Körpern im allgemeinen.**

## Dritter Abschnitt.



## Vierter Abschnitt.

### Größenbestimmung der Körper.



---

## Dritter Teil.

### Ebene Trigonometrie.



---

## Vierter Teil.

### Analytische Geometrie.



### Anhang.



---