Herr Doktor J. Bergbohm
ktningsfullt från författaren.

EINIGE UNTERSUCHUNGEN
IN DER SUBSTITUTIONSTHEORIE
UND DER ALGEBRA

VON

J. T. SÖDERBERG.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 14 März 1891).

UPSALA 1892,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

1. In meiner Inauguraldissertation [1]) habe ich eine Methode gegeben, aus einer beliebig gegebenen Gruppe von Substitutionen andere Gruppen herzuleiten. Ich werde diese Gruppen näher untersuchen. Dann werde ich eine Methode geben, die Theorie des Isomorphismus rein substitutionentheoretisch herzustellen. Schliesslich werde ich zeigen, dass eine algebraische Gleichung gewisse Eigenschaften haben muss, wenn gewisse Resolventengleichungen gleiche rationale Wurzeln haben sollen.

Die Arbeit zerfällt in einen substitutionentheoretischen und einen algebraischen Theil.

I.

SUBSTITUTIONENTHEORETISCHER THEIL.

2. Ich bezeichne mit

$$1\ ,\ S_1\ ,\ S_2\ ,\ .\ .\ .\ S_{\nu-1}$$

ν Substitutionen der Elemente $x_0\ ,\ x_1\ ,\ .\ .\ .\ x_{n-1}$, welche Substitutionen eine Gruppe G bilden sollen, und mit

$$1\ ,\ T_1\ ,\ T_2\ ,\ .\ .\ .\ T_{r-1}$$

r Substitutionen derselben Elemente, so gewählt, dass die $r\nu$ Substitutionen in

$$G\ ,\ GT_1\ ,\ GT_2\ ,\ .\ .\ .\ GT_{r-1}$$

alle verschieden sind. Dann gilt folgender Satz:

---

1) Deduktion af nödvändiga och tillräckliga vilkoret för algebraiska eqvationers solution med radikaler. Upsala Universitets årsskrift 1886. Siehe auch Acta mathematica, 11: 3 pag. 299.

Die Substitutionen, welche in jeder Kolumne des Schemas

$$(1)\quad \left|\begin{array}{llll} G\,, & T_1^{-1}G\,, & \ldots & T_{r-1}^{-1}G \\ GT_1\,, & T_1^{-1}GT_1\,, & \ldots & T_{r-1}^{-1}GT_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ GT_{r-1}\,, & T_1^{-1}GT_{r-1}\,, & \ldots & T_{r-1}^{-1}GT_{r-1} \end{array}\right.$$

enthalten sind, bilden eine Gruppe.

Diesen Satz habe ich a. a. O. mit anderen Worten ausgesprochen und in meiner Inauguraldissertation auch bewiesen. Weder der Ausspruch noch der Beweis des Satzes waren aber rein substitutionentheoretisch, sondern auf die Anwendungen der Substitutionentheorie auf die Lehre von Funktionen mehrerer Variabeln gegründet. Ich werde hier den Beweis des Satzes, wie den Ausspruch desselben, rein substitutionentheoretisch herstellen.

Wir bemerken zuerst, dass jede Substitution, welche in eine Kolumne in (1) eingeht, nur einem der r Komplexe von Substitutionen in dieser Kolumne zugehört. Wenn also eine Substitution Σ allen Kolumnen in (1) zugehört, so muss sie in r und nur in r der r^2 Komplexe von Substitutionen in (1) eingehen. Die Komplexe, in welche Σ eingeht, mögen

$$(2)\qquad GT_{\alpha_0}\,,\ T_1^{-1}GT_{\alpha_1}\,,\ \ldots\ldots\ T_{r-1}^{-1}GT_{\alpha_{r-1}}$$

sein, wo für T_0 die Ziffer 1 zu setzen ist. Es ist leicht zu zeigen, dass $\alpha_0\,, \alpha_1\,, \ldots\, \alpha_{r-1}$ alle verschieden sind.

Wir haben nämlich, was auch i und j seien, für passende Werte h und k

$$\Sigma = T_i^{-1}S_hT_{\alpha_i} \text{ und } \Sigma = T_j^{-1}S_kT_{\alpha_j}\,, \quad \therefore\ T_i^{-1}S_hT_{\alpha_i} = T_j^{-1}S_kT_{\alpha_j}\,.$$

Wäre nun $\alpha_i = \alpha_j$ wenn $i \gtrless j$, so hätten wir

$$T_i^{-1}S_h = T_j^{-1}S_k\,,$$

also, wenn für beide Substitutionen die reciproken Substitutionen gesetzt werden,

$$S_h^{-1}T_i = S_k^{-1}T_j\,,$$

was unmöglich ist. Also kan nicht $\alpha_i = \alpha_j$ sein, wenn $i \gtrless j$, und $\alpha_0\,, \alpha_1\,, \ldots\ldots\, \alpha_{r-1}$ sind alle verschieden.

Die Indices α_0, α_1, ... α_{r-1} geben die Horizontalreihen in (1) an, in welchen die respektiven Komplexe (2) enthalten sind. Es folgt, dass nie zwei von den Komplexen (2) in derselben Horizontalreihe in (1) vorkommen. Aus dem für die Ungleichheit der Indices α_0, α_1, ... α_{r-1} gegebenen Beweise kann auch gefolgert werden, dass die Substitutionen in einer beliebigen Horizontalreihe in (1) sämmtlich verschieden sind.

Es sei nun auch Θ eine Substitution, welche in alle Kolumnen in (1) eingeht, und es mögen

$$(3) \qquad G T_{\beta_0}, \; T_1^{-1} G T_{\beta_1}, \; \ldots \; T_{r-1}^{-1} G T_{\beta_{r-1}}$$

die Komplexe in (1) sein, welchen Θ zugehört. Weil α_0, α_1, ... α_{r-1} alle verschieden sind, kann man die Komplexe (3) in einer neuen Ordnung folgendermassen schreiben:

$$(3') \qquad T_{\alpha_0}^{-1} G T_{\gamma_0}, \; T_{\alpha_1}^{-1} G T_{\gamma_1}, \; \ldots \; T_{\alpha_{r-1}}^{-1} G T_{\gamma_{r-1}}.$$

Wenn wir die Substitutionen in einem der Komplexe (2) mit denen in einem der Komplexe (3′) multipliciren, so erhalten wir einen Komplex von Substitutionen, in welchem $\Sigma\Theta$ vorkommt. Dies gilt insbesondere, wenn die Substitutionen in einem der Komplexe (2) mit denen in dem entsprechenden Komplexe (3′) multiplicirt werden. $\Sigma\Theta$ muss daher in sämmtliche Komplexe

$$(4) \qquad G T_{\gamma_0}, \; T_1^{-1} G T_{\gamma_1}, \; \ldots \; T_{r-1}^{-1} G T_{\gamma_{r-1}}$$

eingehen. $\Sigma\Theta$ geht also wie Σ und Θ in jede Kolumne in (1) ein. Die in jede Kolumne in (1) eingehenden Substitutionen bilden also eine Gruppe, w. z. b. w.

Diese Gruppe bezeichnen wir durch

$$((G, T_1, T_2, \ldots T_{r-1})),$$

und verstehen unter

$$(G, T_1, T_2, \ldots T_{r-1})$$

die niedrigste Gruppe, welche die in Klammern aufgenommenen Substitutionen enthält.

3. Es existirt eine Gruppe Γ von Substitutionen von r Elementen, welche zu der Gruppe $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ isomorph ist. Da nämlich die Indices α_0, α_1, ... α_{r-1} in (2) alle verschieden sind, so bezeichnet

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \dots & r-1 \\ \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{r-1} \end{pmatrix}$$

eine Substitution der Ziffern $0, 1, \dots r-1$. Wir verstehen wie bevor unter T_0 die identische Substitutionen 1 und denken uns die Komplexe in der ersten Kolumne in (1) links mit T_0^{-1} multiplicirt und diejenigen in der ersten Horizontalreihe rechts mit T_0 multiplicirt. Dem entsprechend denken wir uns den ersten der Komplexe (2) links mit T_0^{-1} multiplicirt. Wir können dann die Substitution

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & \dots & r-1 \\ \alpha_0, & \alpha_1, & \dots & \alpha_{r-1} \end{pmatrix}$$

dadurch kennzeichnen, dass sie den Index des ersten T in jedem der Komplexe (2) mit dem Index des zweiten T ersetzt. Entsprechend den r Komplexen aus (1), welche sämmtlich dieselbe Substitution in $((G, T_1, \dots T_{r-1}))$ enthalten, existirt also eine Substitution von $0, 1, \dots r-1$, welche den Index des ersten T in jedem der r Komplexe durch den Index des zweiten T ersetzt. Diese Substitutionen von $0, 1, \dots r-1$ ordnen wir denen der Substitutionen in $((G, T_1, \dots T_{r-1}))$ zu, welche in jedem der r Komplexe enthalten sind. Es mögen

$$1, s_1, s_2, \dots s_{R-1} \tag{5}$$

die sämmtlichen Substitutionen von $0, 1, \dots r-1$ sein, welche somit den Substitutionen in $((G, T_1, \dots T_{r-1}))$ zugeordnet werden. Die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & \dots & r-1 \\ \alpha_0, & \alpha_1, & \dots & \alpha_{r-1} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0, & 1, & \dots & r-1 \\ \beta_0, & \beta_1, & \dots & \beta_{r-1} \end{pmatrix},$$

welche den Σ und Θ entsprechen, bezeichnen wir mit s_1 und s_2. Nach (3') hat man für s_2 auch

$$s_2 = \begin{pmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \dots & \alpha_{r-1} \\ \gamma_0, & \gamma_1, & \dots & \gamma_{r-1} \end{pmatrix},$$

also

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \dots & r-1 \\ \gamma_0, & \gamma_1, & \dots & \gamma_{r-1} \end{pmatrix}.$$

$s_1 s_2$ entspricht also $\Sigma\Theta$ nach (4). Hieraus folgt, dass die Substitutionen (5) eine Gruppe bilden und dass diese Gruppe zu der Gruppe $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ isomorph ist. Wir bezeichnen die Gruppe (5) mit Γ.

Der Substitution 1 in Γ entsprechen in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ die Substitutionen, welche den Gruppen $G, T_1^{-1} G T_1, \ldots T_{r-1}^{-1} G T_{r-1}$ gemeinsam sind. Ist die Anzahl dieser Substitutionen m, und bezeichnet R die Ordnung von Γ, so ist die Ordnung von $((G, T_1 \ldots T_{r-1}))$ gleich mR.

Wenn Γ transitiv ist, muss $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ Substitutionen aus allen r^2 Komplexen in (1) enthalten. Wenn $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ Substitutionen aus allen r Komplexen einer Kolumne in (1) enthält, so ist Γ transitiv. Ist Γ intransitiv, so existiren in jeder Kolumne in (1) unter den r Komplexen solche, in welche keine Substitution aus $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ eingeht.

4. Es mögen in G eine oder mehrere Gruppen J enthalten sein, so beschaffen, dass die Substitutionen in

$$J, J\Sigma^{(1)} T_1, \ldots J\Sigma^{(r-1)} T_{r-1} \tag{6}$$

eine Gruppe bilden, wenn $\Sigma^{(1)}, \ldots \Sigma^{(r-1)}$ passende Substitutionen aus G sind, welche vielleicht auf verschiedene Weise für verschiedene J zu wählen sind. Dann muss die Gruppe (6) in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ vorkommen.

Weil nämlich die Substitutionen in (6) eine Gruppe bilden, so ist $T_\lambda^{-1} \Sigma^{(\lambda)-1}$ eine derselben und man erhält wieder die Substitutionen in (6), wenn man sie links mit $T_\lambda^{-1} \Sigma^{(\lambda)-1}$ multiplicirt. Die Substitutionen in (6) sind also dieselben, wie die in

$$T_\lambda^{-1} \Sigma^{(\lambda)-1} J, \quad T_\lambda^{-1} \Sigma^{(\lambda)-1} J \Sigma^{(1)} T_1, \ldots T_\lambda^{-1} \Sigma^{(\lambda)-1} J \Sigma^{(r-1)} T_{r-1}.$$

Diese sind aber alle in der $(\lambda + 1)^{\text{sten}}$ Kolumne in (1) enthalten. Jede Substitution in (6) kommt also in der $(\lambda + 1)^{\text{sten}}$ Kolumne in (1) vor und also in jeder Kolumne in (1), da λ willkürlich ist. Also muss jede Substitution in (6) in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ eingehen.

Es sei H die Gruppe der Substitutionen, welche G und $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ gemeinsam sind. Weil $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ die Substitutionen (6) enthält und also Substitutionen aus allen r Komplexen in der ersten Kolumne in (1), so besteht $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ aus

$$(7) \qquad H\,,\ HS^{(1)}T_1\,,\ \ldots\ HS^{(r-1)}T_{r-1}\,,$$

wenn $S^{(1)}, \ldots S^{(r-1)}$ passende Substitutionen aus G sind. H genügt also der Definition von J unter der Voraussetzung, dass eine oder mehrere Gruppen J existiren. Wenn nur ein J existirt, ist J demnach identisch mit H und (6) mit (7), also mit $((G\,,\ T_1\,,\ \ldots\ T_{r-1}))$. Wenn mehrere J existiren, ist eine der J identisch mit H und also eine der Gruppen (6) mit (7), d. h. mit $((G\,,\ T_1\,,\ \ldots\ T_{r-1}))$. Die Gruppen (6) haben daher die Eigenschaft, dass eine derselben die übrigen enthalten muss.

Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Es mögen in G *eine oder mehrere Gruppen* J *enthalten sein, welche die Eigenschaft haben, dass die Substitutionen in* (6) *eine Gruppe bilden, wenn* $\Sigma^{(1)}, \ldots \Sigma^{(r-1)}$ *passende Substitutionen aus* G *sind, welche vielleicht für verschiedene* J *auf verschiedene Weise zu wählen sind. Wenn nur eine Gruppe* J *existirt, ist* (6) *mit* $((\mathrm{G}\,,\ \mathrm{T}_1\,,\ \ldots\ \mathrm{T}_{r-1}))$ *identisch. Wenn mehrere* J *existiren (und also auch mehrere Gruppen* (6)), *so sind die Gruppen* (6) *so beschaffen, dass eine derselben die übrigen enthält, und diese Gruppe ist mit* $((\mathrm{G}\,,\ \mathrm{T}_1\,,\ \ldots\ \mathrm{T}_{r-1}))$ *identisch.*

Wenn die Substitutionen in der ersten Kolumne von (1) eine Gruppe bilden, ist die allgemeinste Gruppe J die Gruppe G selbst, und $((G\,,\ T_1\,,\ \ldots\ T_{r-1}))$ ist mit der aus $G\,,\ GT_1\,,\ \ldots\ GT_{r-1}$ bestehenden Gruppe identisch. Die Identität dieser Gruppen geht auch aus der Definition von $((G\,,\ T_1\,,\ \ldots\ T_{r-1}))$ hervor.

5. Wir bemerken zuerst, dass die Substitutionen, welche durch die Eigenschaft charakterisirt sind, dass jede in die $(a_\varrho+1)^{\underline{\text{ste}}}$, $(a_{\varrho+1}+1)^{\underline{\text{ste}}}$, $\ldots$ $(a_{\varrho+m-1}+1)^{\underline{\text{ste}}}$ Kolumne von (1) eingeht und ausschliesslich in solche Komplexe dieser Kolumnen, welche in der $(a_\varrho+1)^{\underline{\text{sten}}}$, $(a_{\varrho+1}+1)^{\underline{\text{sten}}}$ $\ldots$ $(a_{\varrho+m-1}+1)^{\underline{\text{sten}}}$ Horizontalreihe enthalten sind, eine Gruppe bilden, nämlich

$$\left(\left(T_{a_\varrho}^{-1} G\, T_{a_\varrho}\,,\quad T_{a_\varrho}^{-1} T_{a_{\varrho+1}}\,,\ \ldots\,,\ T_{a_\varrho}^{-1} T_{a_{\varrho+m-1}}\right)\right).$$

Wir nehmen weiter an, dass Γ intransitiv ist. Es mögen die Elemente von Γ in die Systeme

$$a_0\,,\ a_1\,,\ \ldots\ a_{\varrho_1-1}\,;\ \ldots\,;\ a_{\varrho_i}\,,\ a_{\varrho_i+1}\,,\ \ldots\ a_{\varrho_{i+1}-1}\,;\ \ldots\,;$$

$$a_{\varrho_{k-1}}\,,\ a_{\varrho_{k-1}+1}\,,\ \ldots\ a_{r-1}$$

zerfallen, welche so beschaffen sind, dass Γ ein willkürlich gegebenes Element nur durch Elemente ablöst, welche demselben Systeme zugehören wie das gegebene Element. Wenn nun eine Substitution in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ den Komplexen

$$T_j G T_{\alpha_j} \qquad (j = 0, 1, \ldots r-1)$$

zugehört, so ist die entsprechende Substitution in Γ:

$$\begin{pmatrix} j \\ \alpha_j \end{pmatrix};$$

also muss α_j gleich einer der Zahlen $a_{\varrho_i}, a_{\varrho_i+1}, \ldots a_{\varrho_{i+1}-1}$ sein, wenn j eine dieser Zahlen ist. Es folgt, dass die in die $(a_{\varrho_i}+1)^{\text{ste}}$, $(a_{\varrho_i+1}+1)^{\text{ste}}, \ldots (a_{\varrho_{i+1}-1}+1)^{\text{ste}}$ Kolumne in (1) eingehenden Komplexe, welche eine Substitution in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ enthalten, ausschliesslich in der $(a_{\varrho_i}+1)^{\text{sten}}, (a_{\varrho_i+1}+1)^{\text{sten}}, \ldots (a_{\varrho_{i+1}-1}+1)^{\text{sten}}$ Horizontalreihe vorkommen. Also muss jede Substitution in

$$((G, T_1, \ldots T_{r-1})) \text{ in die Gruppe } \left(\left(T^{-1}_{a_{\varrho_i}} G T_{a_{\varrho_i}}, T^{-1}_{a_{\varrho_i}} T_{a_{\varrho_i+1}}, \ldots T^{-1}_{a_{\varrho_i}} T_{a_{\varrho_{i+1}-1}}\right)\right)$$

eingehen, wo $i = 0, 1, \ldots k-1$ successive zu setzen ist.

Umgekehrt müssen die Substitutionen, welche diesen k Gruppen gemeinsam sind, in alle Kolumnen in (1) eingehen und somit in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ enthalten sein. Also besteht diese Gruppe aus den Substitutionen, welche den k Gruppen

$$\left(\left(T^{-1}_{a_{\varrho_i}} G T_{a_{\varrho_i}}, T^{-1}_{a_{\varrho_i}} T_{a_{\varrho_i+1}}, \ldots T^{-1}_{a_{\varrho_i}} T_{a_{\varrho_{i+1}-1}}\right)\right) \qquad (i = 0, 1, \ldots k-1)$$

gemeinsam sind.

6. Wenn die Substitutionen in der ersten Kolumne in (1) eine Gruppe bilden, so sind, wenn $\varrho < r$ ist und wir unter $a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ eine Permutation von $1, 2, \ldots r-1$ verstehen, die Gruppen

$$\left((G, T_{a_1}, \ldots T_{a_{\varrho-1}})\right) \text{ und } \left(\left(T^{-1}_{a_\varrho} G T_{a_\varrho}, T^{-1}_{a_\varrho} T_{a_{\varrho+1}}, \ldots T^{-1}_{a_\varrho} T_{a_{r-1}}\right)\right)$$

identisch.

Weil nämlich die Substitutionen in der ersten Kolumne in (1) eine Gruppe bilden, so enthält jede Kolumne in (1) diese Substitutionen, somit auch die Gruppe $((G, T_{a_1}, \ldots T_{a_{\varrho-1}}))$. Nun gilt von den ϱ, eine willkürliche Substitution in $((G\,,\,T_{a_1}\,,\,\ldots\,T_{a_{\varrho-1}}))$ enthaltenden, Komplexen in der $1^{\underline{\text{sten}}}$, $(a_1+1)^{\underline{\text{sten}}}$, ... $(a_{\varrho-1}+1)^{\underline{\text{sten}}}$ Kolumne in (1), dass von der $1^{\underline{\text{sten}}}$, $(a_1+1)^{\underline{\text{sten}}}$, ... $(a_{\varrho-1}+1)^{\underline{\text{sten}}}$ Horizontalreihe in (1) jede einen dieser Komplexe enthält. Gemäss n:o **2** können weiter zwei, eine und dieselbe Substitution enthaltende, Komplexe nicht in derselben Horizontalreihe in (1) vorkommen. Dann folgt, dass die eine Substitution in $((G\,,\,T_{a_1}\,,\,\ldots\,T_{a_{\varrho-1}}))$ enthaltenden Komplexe in der $(a_\varrho+1)^{\underline{\text{sten}}}$, $(a_{\varrho+1}+1)^{\underline{\text{sten}}}$, ... $(a_{r-1}+1)^{\underline{\text{sten}}}$ Kolumne in (1) ausschliesslich in der $(a_\varrho+1)^{\underline{\text{sten}}}$, $(a_{\varrho+1}+1)^{\underline{\text{sten}}}$, ... $(a_{r-1}+1)^{\underline{\text{sten}}}$ Horizontalreihe in (1) vorkommen. Da nun auch jede Substitution in $((G\,,\,T_{a_1}\,,\,\ldots\,T_{a_{\varrho-1}}))$ in jeder der genannten Kolumnen in (1) vorkommt, so folgert sich daraus nach dem im Anfange von n:o **5** Gesagten, dass $((G\,,\,T_{a_1}\,,\,\ldots\,T_{a_{\varrho-1}}))$ in $((T_{a_\varrho}^{-1}G\,T_{a_\varrho}\,,\,T_{a_\varrho}^{-1}T_{a_{\varrho+1}}\,,\,\ldots\,T_{a_\varrho}^{-1}T_{a_{r-1}}))$ eingehen muss. In analoger Weise kann bewiesen werden, dass diese Gruppe in jene eingeht. Also sind die Gruppen identisch.

7. Wir nehmen nun an, dass die Substitutionen einer Anzahl ϱ der Komplexe in der ersten Kolumne in (1) zusammen eine Gruppe F bilden. Dann lässt sich zeigen, dass die nach n:o **3** gebildete zu $((G\,,\,T_1\,,\,\ldots\,T_{r-1}))$ isomorphe Gruppe Γ imprimitiv oder intransitiv ist.

Unter den ϱ Komplexen, deren Substitutionen die Gruppe F bilden, muss G vorkommen. Die ϱ Komplexe können daher bezeichnet werden durch

$$G\,,\,G\,T_{a_1}\,,\,\ldots\,G\,T_{a_{\varrho-1}}\,.$$

Es sei ferner Σ eine Substitution in $((G\,,\,T_1\,,\,\ldots\,T_{r-1}))$, welche den Komplexen

$$T_i\,G\,T_{\alpha_i} \qquad (i=0\,,\,1\,,\,\ldots\,r-1)$$

zugehört. Wenn Σ der Gruppe F zugehört, muss für jedes unter den Zahlen $0\,,\,a_1\,,\,\ldots\,a_{\varrho-1}$ vorkommende i auch α_i eine dieser Zahlen sein. Wenn nun für ein gegebenes, unter den Zahlen $0\,,\,a_1\,,\,\ldots\,a_{\varrho-1}$ vorkommendes, i das entsprechende α_i auch unter diesen Zahlen vorkommt, muss Σ der Gruppe F zugehören. Wenn also für ein unter den Zahlen $0\,,\,a_1\,,\,\ldots\,a_{\varrho-1}$ vorkommendes i das entsprechende α_i eine dieser Zahlen ist, so muss für jedes unter den Zahlen $0\,,\,a_1\,,\,\ldots\,a_{\varrho-1}$ vorkommende i auch α_i eine dieser Zahlen sein. Die Substitution:

$$\begin{pmatrix} 0\,,\,1\,,\,\ldots\,r-1 \\ \alpha_0\,,\,\alpha_1\,,\,\ldots\,\alpha_{r-1} \end{pmatrix},$$

welche in Γ der Σ entspricht, muss also die Elemente $0, a_1, \ldots$ $a_{\varrho-1}$ entweder nur unter sich vertauschen oder durch lauter neue Elemente ersetzen. Also muss Γ intransitiv oder imprimitiv sein.

Wenn umgekehrt gegeben ist, dass Γ intransitiv oder imprimitiv ist, so folgt, dass die Substitutionen in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$, welche gewissen Komplexen in der ersten Kolumne in (1) zugehören, eine Gruppe bilden.

Es möge nämlich Γ die Elemente $0, a_1, \ldots a_{\varrho-1}$ entweder unter sich vertauschen oder durch lauter neue Elemente ersetzen. Es seien ferner Σ und Θ zwei Substitutionen in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$, welche in dem Schema

$$G, GT_{a_1}, \ldots GT_{a_{\varrho-1}} \tag{8}$$

enthalten sind und nicht verschieden sein müssen.

Es seien ferner

$$T_i^{-1} GT_{\alpha_i} \text{ und } T_i^{-1} GT_{\beta_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots r-1)$$

die Komplexe in (1), welchen Σ und Θ zugehören. Weil $T_0 \equiv 1$ ist, müssen α_0 und β_0 unter den Zahlen $0, a_1, \ldots a_{\varrho-1}$ vorkommen.

Die Substitutionen in Γ, welche den Σ und Θ entsprechen, sind

$$\alpha \equiv \binom{i}{\alpha_i} \text{ und } \beta \equiv \binom{i}{\beta_i}.$$

Weil α_0 und β_0 unter den Zahlen $0, a_1, \ldots a_{\varrho-1}$ vorkommen, müssen zufolge der über Γ gemachten Annahme α_i und β_i immer unter den Zahlen $0, a_1, \ldots a_{\varrho-1}$ enthalten sein, wenn i eine dieser Zahlen ist. Wenn nun

$$\alpha\beta \equiv \binom{i}{\gamma_i}$$

gesetzt wird, so folgt, dass γ_i eine der Zahlen $0, a_1, \ldots a_{\varrho-1}$ ist, wenn i eine dieser Zahlen ist. $\Sigma\Theta$ muss den Komplexen

$$T_i^{-1} GT_{\gamma_i}$$

zugehören. Da γ_0 eine der Zahlen $0, a_1, \ldots a_{\varrho-1}$ ist, muss $\Sigma\Theta$ wie Σ und Θ in einen der Komplexe (8) eingehen. Die Substitutionen in $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$, welche in die Komplexe (8) eingehen, bilden also eine Gruppe.

8. In den Darstellungen der Theorie des Isomorphismus, welche ich gesehen habe, sind einige der gewichtigsten Sätze nicht rein substitutionentheoretisch hergeleitet, sondern auf die Anwendungen der Substitutionentheorie auf die Lehre von Funktionen mehrerer Variabeln gegründet. Ich werde hier diese Sätze rein substitutionentheoretisch herleiten.

Es sei eine Gruppe F von Substitutionen gegeben und eine Untergruppe G von F. Es möge r das Verhältniss der Ordnungen von F und G sein. Dann können $r-1$ Substitutionen $T_1, \ldots T_{r-1}$ aus F ausgewählt werden der Beschaffenheit, dass die in

$$G, GT_1, \ldots GT_{r-1}$$

enthaltenen Substitutionen die Gruppe F bilden. Dann ist nach n:o **4** $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ mit F identisch, was auch unmittelbar aus der Definition jener Gruppe folgert. Nach n:o **3** können wir nun eine Gruppe Γ der Elemente $0, 1, \ldots r-1$ bilden, welche zu $((G, T_1, \ldots T_{r-1}))$ isomorph ist, also auch zu F. Der Substitution ι in Γ entsprechen in F die Substitutionen, welche $G, T_1^{-1}GT_1, \ldots T_{r-1}^{-1}GT_{r-1}$ gemeinsam sind. Γ wird nach n:o **3** transitiv. Wir haben also folgenden Satz rein substitutionentheoretisch hergeleitet:

Für jede Untergruppe G von F kann eine transitive zu F isomorphe Gruppe gebildet werden, deren Grad der Quotient der Ordnungen von F und G ist und deren Ordnung gleich ist dem Quotient der Ordnung von F und der Anzahl der Substitutionen, welche den Gruppen $G, T_1^{-1}GT_1, \ldots T_{r-1}^{-1}GT_{r-1}$ gemeinsam sind.

9. Wir haben weiter den Satz zu beweisen, dass alle zu F isomorphen transitiven Gruppen nach der in n:o 8 dargestellten Methode gebildet werden können.

Es sei K eine transitive zu F isomorphe Gruppe von Substitutionen, welche die Elemente $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{\varkappa-1}$ vertauschen. Die Untergruppe von K, welche ξ_0 nicht umsetzt, nennen wir Λ. Da K transitiv ist, enthält sie $\varkappa-1$ Substitutionen

$$\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{\varkappa-1},$$

welche ξ_0 durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varkappa-1}$ ersetzen. Die in $\Lambda, \Lambda\tau_1, \ldots \Lambda\tau_{\varkappa-1}$ enthaltenen Substitutionen bilden die Gruppe K.

Es sei ferner G die Untergruppe von F, welche der $\varDelta$ entspricht,

$$T_1, T_2, \ldots T_{\varkappa-1}$$

Substitutionen in F, welche den $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{\varkappa-1}$ entsprechen. Die Substitutionenkomplexe in F, welche den $\varDelta, \varDelta\tau_1, \ldots \varDelta\tau_{\varkappa-1}$ entsprechen, sind dann

$$G, GT_1, \ldots GT_{\varkappa-1},$$

deren Substitutionen also verschieden sind und sämmtliche Substitutionen in F ausmachen.

Die Gruppe $((G, T_1, \ldots T_{\varkappa-1}))$ wird mit F identisch. Wir bilden nach n:o **3** die zu $((G, T_1, \ldots T_{\varkappa-1}))$ isomorphe Gruppe Γ aus den Elementen $0, 1, \ldots \varkappa - 1$. Diese wird zu F isomorph und transitiv. Wir haben zu zeigen, dass Γ und K ähnlich sind.

Es sei

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} 0, & 1, & \ldots & \varkappa - 1 \\ \alpha_0, & \alpha_1, & \ldots & \alpha_{\varkappa-1} \end{pmatrix}$$

eine Substitution in Γ. Dieser entsprechen in F Substitutionen, welche den $\varkappa$ Komplexen

$$GT_{\alpha_0}, \; T_1^{-1} G T_{\alpha_1}, \ldots T_{\varkappa-1}^{-1} G T_{\alpha_{\varkappa-1}} \tag{9}$$

zugehören. In K muss wenigstens eine Substitution vorkommen, welche den genannten Substitutionen in F entspricht. Diese muss in die $\varkappa$ Komplexe

$$\varDelta\tau_{\alpha_0}, \; \tau_1^{-1}\varDelta\tau_{\alpha_1}, \ldots \tau_{\varkappa-1}^{-1}\varDelta\tau_{\alpha_{\varkappa-1}} \tag{10}$$

eingehen, wo unter τ_0 die identische Substitution 1 zu verstehen ist. Die Substitutionen in dem Komplexe $\tau_i^{-1}\varDelta\tau_{\alpha_i}$ müssen aber ξ_i durch ξ_{α_i} ersetzen. Eine Substitution, welche in die Komplexe (10) eingeht, wird daher nothwendig identisch mit

$$\vartheta \equiv \begin{pmatrix} \xi_0, & \xi_1, & \ldots & \xi_{\varkappa-1} \\ \xi_{\alpha_0}, & \xi_{\alpha_1}, & \ldots & \xi_{\alpha_{\varkappa-1}} \end{pmatrix}$$

sein. Den Substitutionen in F, welche den Komplexen (9) zugehören, entspricht also in K nur ϑ. Den übrigen Substitutionen in F entsprechen andere Substitutionen in K. Also sind K und Γ derselben Ordnung. Da ϑ und α ähnlich sind, werden K und Γ ähnlich, w. z. b. w.

Dieser Beweis kommt dem von Prof. Netto gegebenen[1]) ziemlich nahe. Netto stützt seinen Beweis auf die Lehre von Funktionen mehrerer Variabeln, ich habe aber den Beweis in rein substitutionentheoretischer Form hergestellt.

10. Wenn in n:o 8 die Gruppe G eine ausgezeichnete Untergruppe von F ist, so ist die den Gruppen

$$G\,,\; T_1^{-1} G T_1\,,\; \ldots\; T_{r-1}^{-1} G T_{r-1}$$

gemeinsame Gruppe die Gruppe G selbst. Die Ordnung der Gruppe Γ wird dann wie ihr Grad gleich r, wie aus n:o 8 erhellt.

Wenn G nur die Substitution 1 enthält, ist Ordnung und Grad von Γ gleich der Ordnung von F.

Schliesslich ergeben sich folgende Sätze, die in den mir bekannten substitutionentheoretischen Werken nicht vorkommen:

Wenn die Gruppe G nicht eine allgemeinste Untergruppe von F ist, d. h. wenn die Substitutionen einer Anzahl $\varrho < r$ und > 1 der Komplexe

$$G\,,\; G T_1\,,\; \ldots\; G T_{r-1}$$

eine Gruppe bilden, so muss die Gruppe Γ, welche nach n:o 8 transitiv ist, nach n:o 7 imprimitiv sein, und wenn umgekehrt Γ imprimitiv ist, so ist nach n:o 7 G keine allgemeinste Untergruppe von F.

1) Siehe Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra von Eugen Netto, pagg. 100 ff.

II.

ALGEBRAISCHER THEIL.

11. Eine Gleichung vom Primzahlgrade n

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

mit den Wurzeln $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ sei gegeben. Wir bezeichnen mit G die Gruppe der linearen Substitutionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$,

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_{\alpha i+\beta} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots n-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots n-1 \end{pmatrix}$$

wo $x_r \equiv x_s$ ist wenn $r \equiv s$ (mod. n) ist, und verstehen unter

$$1, T_1, T_2, \ldots T_{(n-2)!-1} \tag{2}$$

$(n-2)!$ Substitutionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, so beschaffen, dass in

$$G, GT_1, GT_2, \ldots GT_{(n-2)!-1}$$

alle Substitutionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ enthalten sind.

Wir bezeichnen durch

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$$

eine rationale Funktion (mit rationalen Koefficienten) von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, welche für die Substitutionen in G und nur für diese formal unverändert bleibt. Die Formen, in welche φ durch die respektiven Substitutionen (2) übergeführt wird, schreiben wir:

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{(n-2)!-1}. \tag{3}$$

Wenn eine dieser Formen φ_r von den übrigen numerisch verschieden ist und einen rationalen Wert hat, so sind $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ alle verschieden, die Gruppe der Gleichung (1) in der Gruppe $T_r^{-1} G T_r$ enthalten und die Gleichung durch Wurzelgrössen auflösbar.

Wenn aber φ_r wohl rational ist, nicht aber von den übrigen Formen (3) numerisch verschieden, so wissen wir nicht, ob $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ sämmtlich verschieden sind. Wären $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ auch verschieden, so folgt nicht, dass die Gruppe der Gleichung (1) in $T_r^{-1} G T_r$ enthalten ist. Die Gleichung ist bald durch Wurzelgrössen auflösbar, bald nicht. Wir werden im Folgenden Untersuchungen über die Gruppe, die Lösbarkeit und Reduktibilität der Gleichung (1) vornehmen im Falle, dass mehrere der Funktionen (3) denselben rationalen Wert haben. Den Fall, dass $f(x)$ vom fünften Grade ist, werden wir eingehender betrachten.

12. Es mögen nun von den Funktionen (3) eine Anzahl ϱ denselben rationalen Wert haben, von den übrigen aber verschieden sein. Diese ϱ Funktionen mögen

(4) $$\varphi_{r_0}, \varphi_{r_1}, \ldots \varphi_{r_{\varrho-1}}$$

sein. Die Gruppe

(5) $$\left(\left(T_{r_0}^{-1} G T_{r_0}, T_{r_0}^{-1} T_{r_1}, \ldots T_{r_0}^{-1} T_{r_{\varrho-1}}\right)\right)$$

ist identisch mit der in meiner Inauguraldissertation definirten numerischen Gruppe von φ_{r_0}[1]). A. a. O. habe ich gezeigt, dass die rationalen Funktionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, welche für diese Gruppe numerisch unverändert bleiben, einen rationalen Wert haben. Dies gilt, die Wurzeln $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ mögen sämmtlich verschieden sein oder nicht.

Wenn $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ alle verschieden sind, ist die Gruppe der Gleichung (1) in (5) enthalten.

Wenn $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ nicht alle verschieden sind, möge $f(x)$ in zwei Faktoren $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zerlegt werden, deren der erste $f_1(x)$ die nicht mannigfaltigen Wurzeln von $f(x)$ enthält, die zweite $f_2(x)$ die mannigfaltigen. $f_1(x)$ und $f_2(x)$ haben dann rationale Koefficienten. Wir bezeichnen durch I die Gruppe von $f_1(x)$.

Es sei ψ eine rationale Funktion der Wurzeln von $f_1(x)$, welche für die Substitutionen in (5) numerisch unverändert bleibt, für jede Substitution aber, welche die Wurzeln von $f_1(x)$ durch eine Anzahl der Elemente $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ auf andere Weise ersetzt, als die Substitutionen in (5), ihren Wert ändert. Diese Funktion hat einen rationalen Wert,

1) Siehe auch Acta mathematica a. a. O.

muss also für I numerisch unverändert bleiben. Also muss entsprechend jeder Substitution in I eine oder mehrere Substitutionen in (5) existiren, welche die Wurzeln von $f_1(x)$ auf dieselbe Weise unter sich vertauschen, wie die Substitution in I. Wir haben also folgenden Satz:

Wenn wir in (5) *nur Substitutionen berücksichtigen, welche die Wurzeln von* $f_1(x)$ *ausschliesslich unter sich vertauschen, und in diesen Substitutionen nur die Cykeln, welche diese Wurzeln enthalten, so erhalten wir eine Gruppe, welche die Gruppe von* $f_1(x)$ *in sich enthält.*

Die Ordnung der Gruppe I ist ein Divisor der Ordnung der Gruppe (5). Es möge nämlich H die allgemeinste intransitive Untergruppe von (5) sein, welche die Wurzeln von $f_1(x)$ ausschliesslich unter sich vertauscht. Dann besteht I aus den Substitutionen, welche wir aus den Substitutionen in H auf die Weise bilden, dass wir nur die Cykeln, welche die Wurzeln von $f_1(x)$ vertauschen, beibehalten, und es gilt der Satz, dass die Ordnung von I ein Divisor der Ordnung von H ist [1]). Die Ordnung von H ist aber ein Divisor der Ordnung von (5). Also ist auch die Ordnung von I ein Divisor der Ordnung von (5).

13. Wenn $\varrho > 1$ ist, ist die Ordnungszahl m der Gruppe, welche den Gruppen

$$(6) \qquad T_{r_0}^{-1} G T_{r_0}, \; T_{r_1}^{-1} G T_{r_1}, \; \ldots \; T_{r_{\varrho-1}}^{-1} G T_{r_{\varrho-1}}$$

gemeinsam ist, in $n-1$ als Divisor enthalten. Wir haben nämlich zuerst, dass die Gruppen $T_{r_0}^{-1} G T_{r_0}$ und $T_{r_1}^{-1} G T_{r_1}$ keine Cirkularsubstitution n^{ter} Ordnung gemeinsam haben können. Sonst würden nämlich auch die von diesen Gruppen durch $T_{r_0}^{-1}$ transformirten Gruppen G und $T_{r_0} T_{r_1}^{-1} G T_{r_1} T_{r_0}^{-1}$ eine solche gemeinsam haben. Dann wäre $T_{r_1} T_{r_0}^{-1}$ mit der Gruppe der Cirkularsubstitutionen n^{ter} Ordnung in G permutabel, was unmöglich ist, weil $T_{r_1} T_{r_0}^{-1}$ nicht linear ist. Aus der Thatsache aber, dass die den Gruppen (6) gemeinsame Gruppe keine Cirkularsubstitution der Primzahlordnung n enthält, folgt, wie CAUCHY es gezeigt hat [2]), dass die Ordnungszahl m der Gruppe den Faktor n nicht

1) Siehe NETTO's Substitutionentheorie etc., pag. 102.

2) In den Exercises d'analyse et de physique mathématique, pag. 250.

enthält. Nun muss m ein Divisor der Ordnungszahl $n(n-1)$ der Gruppe $T_{r_0}^{-1} G T_{r_0}$ sein. Also ist m Divisor von $n-1$, wenn $\varrho > 1$ ist.

Es sei ferner P die Ordnungszahl der mit (5) isomorphen Gruppe von ϱ Elementen, welche nach n:o **3** gebildet werden kann. Dann ist nach n:o **3** die Ordnungszahl der Gruppe (5) gleich mP. Nun ist P Divisor von $\varrho!$. Also ist die Ordnungszahl von (5) Divisor der Zahl $(n-1).\varrho!$, wenn $\varrho > 1$ ist.

Die Gruppe (5) kann nach n:o **6** geschrieben werden:

$$\left(\left(T_{r_\varrho}^{-1} G T_{r_\varrho},\ T_{r_\varrho}^{-1} T_{r_{\varrho+1}},\ \ldots\ T_{r_\varrho}^{-1} T_{r_{(n-2)!-1}}\right)\right),$$

doch unter der Voraussetzung, dass $\varrho < (n-2)!$ ist. Wenn $\varrho < (n-2)! - 1$ ist, so gilt von dieser Bezeichung der Gruppe Analoges mit dem von der Bezeichung (5) unter der Voraussetzung $\varrho > 1$ Bewiesenen. Also ist die Ordnung der Gruppe in diesem Falle Divisor von $(n-1)\{(n-2)! - \varrho\}!$. Die Ordnungszahl der Gruppe (5) ist also Divisor von $(n-1)\varrho!$, wenn $\varrho > 1$ und, wenn $\varrho < (n-2)! - 1$ ist, auch von $(n-1)\{(n-2)! - \varrho\}!$.

14. Wenn $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ alle verschieden sind, hat $f(x) = 0$ eine Gruppe. Da diese in der Gruppe (5) enthalten ist, muss ihre Ordnungszahl Divisor von $(n-1)\varrho!$ sein, wenn $\varrho < 1$ ist, und, wenn $\varrho < (n-2)! - 1$ ist, auch von $(n-1)\{(n-2) - \varrho\}!$. Die Ordnung der Gruppe der Gleichung (1) ist daher relative Primzahl zu n wenn $1 < \varrho < n$ ist oder wenn zugleich $\varrho < (n-2)! - 1$ und $(n-2)! - \varrho < n$ ist. Die Gruppe der Gleichung ist also intransitiv und die Gleichung reduktibel

1) wenn $1 < \varrho < n$ ist;

2) wenn $(n-2)! - n < \varrho < (n-2)! - 1$.

Es möge nun die Gleichung (1) gleiche Wurzeln haben. Dann gilt unsere Beweisführung nicht, weil die Gleichung keine Gruppe hat, die Gleichung ist aber auch in diesem Falle reduktibel. Wir haben ja $f(x) = f_1(x) f_2(x)$.

Es möge $f_1(x)$ vom Grade $n-2$ sein. Nach n:o **12** muss die Ordnung der Gruppe von $f_1(x)$ Divisor sein der Ordnung der Gruppe (5), also Divisor von $(n-1)\varrho!$ wenn $\varrho > 1$ und von $(n-1)\{(n-2)! - \varrho\}!$ wenn $\varrho < (n-2)! - 1$. Da weiter $n-2$ und $n-1$ relative Primzahlen sind, so ist die Gruppe von $f_1(x)$ intransitiv und $f_1(x)$ reduktibel

1) wenn $\varrho!$ nicht durch $n-2$ theilbar ist und $\varrho > 1$;

2) wenn $\{(n-2)! - \varrho\}!$ nicht durch $n-2$ theilbar ist und $\varrho < (n-2)! - 1$.

Wir bezeichnen durch

$$\Phi(y) = 0$$

die Resolventengleichung, welche die Funktionen (3) zu Wurzeln hat. Dann haben wir folgenden Satz:

Wenn die Resolventengleichung $\Phi(y) = 0$ ϱ *unter sich gleiche rationale Wurzeln hat, welche von den übrigen Wurzeln verschieden sind, so ist die ursprüngliche Gleichung* (1) *reduktibel*

1) *wenn* $1 < \varrho < n$ *ist*;

2) *wenn* $(n-2)! - n < \varrho < (n-2)! - 1$;

und wenn die Gleichung $f(x) = 0$ *gleiche Wurzeln hat und* $f_1(x)$ *vom Grade* $n-2$ *ist, so ist* $f_1(x)$ *reduktibel*

1) *wenn* $\varrho!$ *nicht durch* $n-2$ *theilbar ist und* $\varrho > 1$;

2) *wenn* $\{(n-2)! - \varrho\}!$ *nicht durch* $n-2$ *theilbar ist und* $\varrho < (n-2)! - 1$.

15. Wenn $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ alle verschieden sind, so existirt eine rationale Funktion ψ dieser Grössen, welche für die Substitutionen in $T_{r_0}^{-1} G T_{r_0}$ formal unverändert bleibt, bei allen anderen Substitutionen aber ihren Wert ändert. Diese Funktion nimmt für die Substitutionen (5) ϱ Formen an. Da die zur Gruppe (5) gehörende Gattung von Funktionen rational ist, wird also ψ durch Lösung einer Gleichung vom Grade ϱ bekannt. Wenn aber ψ bekannt ist, ist die Gleichung (1) durch Wurzelgrössen auflösbar. Dies ist also immer der Fall, wenn $\varrho < 5$ ist.

Wir denken uns nun die Gruppe (5) in die Form

$$\left(\left(T_{r_\varrho}^{-1} G T_{r_\varrho}, \ T_{r_\varrho}^{-1} T_{r_{\varrho+1}}, \ \ldots \ T_{r_\varrho}^{-1} T_{r_{(n-2)!-1}}\right)\right)$$

gesetzt, was $\varrho < (n-2)!$ voraussetzt. Wir verstehen unter χ eine rationale Funktion von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, welche bei den Substitutionen in $T_{r_\varrho}^{-1} G T_{r_\varrho}$ formal unverändert bleibt, für alle übrigen Substitutionen aber ihren Wert ändert. Dann nimmt χ durch die Gruppe (5) $(n-2)! - \varrho$

verschiedene Formen an und wird also durch Auflösung einer Gleichung vom Grade $(n-2)!-\varrho$ bekannt. Wenn aber χ bekannt ist, ist die Gleichung (1) durch Wurzelgrössen auflösbar. Dies ist also der Fall, wenn $(n-2)!-\varrho < 5$ ist, d. h. wenn $\varrho > (n-2)!-5$ ist, wozu die alte Bedingung $\varrho < (n-2)!$ hinzukommt.

Wir haben also folgenden Satz:

Wenn die Resolventengleichung $\Phi(y)=0$ ϱ unter sich gleiche rationale Wurzeln hat, welche von den übrigen Wurzeln verschieden sind, und die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung alle verschieden sind, so ist die ursprüngliche Gleichung durch Wurzelgrössen auflösbar:

1) *wenn* $\varrho < 5$ *ist;*

2) *wenn* $(n-2)!-5 < \varrho < (n-2)!$ *ist.*

16. Wir wollen nun speciell die Beschaffenheit der Gleichungen fünften Grades untersuchen, bei denen die oben definirte Resolventengleichung $\Phi(y)$ gleiche rationale Wurzeln hat.

Es sei also

$$f(x)=0 \tag{7}$$

eine Gleichung fünften Grades mit den Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Wenn wir $|i, \theta(i)|$ anstatt $\begin{pmatrix} x_i \\ x_{\theta(i)} \end{pmatrix}$ schreiben, erhalten wir für die Substitutionen der linearen Gruppe G von x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 den Ausdruck:

$$|i, \alpha i+\beta|, \qquad \left(\begin{matrix}\alpha\equiv 1, 2, 3, 4 \\ \beta\equiv 0, 1, 2, 3, 4\end{matrix}\right\} \text{mod. } 5\Big).$$

Die Substitutionen von $x_0, x_1, \ldots x_4$ können sämmtlich in die Formen

$$|i, \alpha i+\beta| \text{ oder } |i, \alpha(i+\beta)^3+\gamma| \quad (\gamma\equiv 0, 1, 2, 3, 4; \text{ mod. } 5)$$

gesetzt werden [1]). Sie können dann auch in die Formen

$$|i, \alpha i+\beta| \text{ oder } |i, (\alpha i+\beta)^3+\gamma|$$

gesetzt werden. Wenn wir also die Substitution

$$|i, i^3+\gamma-1|$$

1) Siehe Jordan, Traité des substitutions etc., pag. 90.

mit T_γ bezeichnen, so sind alle Substitutionen von $x_0, x_1, \ldots x_4$ in

$$(8) \qquad G, GT_1, GT_2, GT_3, GT_4, GT_5$$

enthalten.

Da der analytische Ausdruck von T_γ ungeändert bleibt, wenn γ um Multipeln des Moduls vermehrt oder vermindert wird, müssen wir festhalten, dass

$$T_r = T_s \text{ ist, wenn } r \equiv s \pmod{5} .$$

Speciell wird $T_0 = T_5$, während im Vorhergehenden $T_0 = 1$ zu setzen war, z. B. in (5).

Eine Funktion von $x_0, x_1, \ldots x_4$, welche für die Substitutionen in G und nur für diese formal unverändert bleibt, nimmt durch Substitutionen von $x_0, x_1, \ldots x_4$ 6 verschiedene Formen an. Wir bezeichnen eine so beschaffene Funktion von $x_0, x_1, \ldots x_4$, welche zugleich rational ist und rationale Koefficienten hat, mit φ, und mit

$$(9) \qquad \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$$

die Formen, welche φ durch die respektiven Substitutionenkomplexe (8) annimmt. Wir führen weiter

$$\varphi_r \equiv \varphi_{T_r}$$

ein, so dass $\varphi_r \equiv \varphi_s$ ist, wenn $r \equiv s \pmod{5}$, und speciell $\varphi_0 \equiv \varphi_5$, während im Vorhergehenden $\varphi_0 \equiv \varphi$ zu setzen war, z. B. in (4).

Wir haben nun die Beschaffenheit der Gleichung (7) zu untersuchen im Falle, dass die ϱ Funktionen

$$(10) \qquad \left| \begin{array}{l} \varphi, \varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \ldots \varphi_{r_{\varrho-1}} \\ \text{oder} \\ \varphi_{r_0}, \varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \ldots \varphi_{r_{\varrho-1}} \end{array} \right.$$

denselben rationalen Wert haben und von den übrigen Funktionen (9) verschieden sind. Wenn $x_0, x_1, \ldots x_4$ sämmtlich verschieden sind, muss nach n:o **12** die Gruppe der Gleichung (7) in der ersten oder zweiten der Gruppen

$$
(11) \quad \left\{ \begin{array}{c} \left(\left(G_0 , T_{r_1} , T_{r_2} , \ldots T_{r_{\varrho-1}} \right)\right) , \\[2ex] \left(\left(T_{r_0}^{-1} G T_{r_0} , T_{r_0}^{-1} T_{r_1} , T_{r_0}^{-1} T_{r_2} , \ldots T_{r_0}^{-1} T_{r_{\varrho-1}} \right)\right) \end{array} \right.
$$

enthalten sein, je nachdem φ unter den Funktionen (10) vorkommt oder nicht. Die beiden Fälle fielen in n:o **12** zusammen, weil dort $\varphi \equiv \varphi_0$ und $T_0 = 1$ zu setzen war. Wenn $x_0 , x_1 , \ldots x_4$ nicht sämmtlich verschieden sind, kann man mittelst einer der Gruppen (11) die Gruppe der Gleichung $f_1(x) = 0$ finden, welche die nicht mannigfaltigen Wurzeln von $f(x) = 0$ enthält.

Ehe wir die Gleichung (7) näher untersuchen, schicken wir einige Formeln voraus. Wir haben

$$
(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_r^{-1} = | i , i - r + 1 | . T_1 , \\[2ex] T_r T_s = \left\{ \begin{array}{l} | i , 2(r-1)^2 i - r + 1 | . T_{2(r-1)^3 + s} \text{ wenn } r \gtrless 1 , \\[1ex] | i , i + s - 1 | \text{ wenn } r \equiv 1 . \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

Wenn also die Substitution $| i , \alpha i + \beta |$ mit S bezeichnet wird, erhalten wir:

$$
(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_r S = \left| i , \dfrac{i}{\alpha} \right| . T_{\alpha(r-1)+\beta+1} , \quad T_r^{-1} S = \left| i , \dfrac{i-r+1}{\alpha} \right| . T_{\beta+1} , \\[3ex] T_r^{-1} S T_s = \left\{ \begin{array}{l} \left| i , 2\beta^2 \dfrac{i-r+1}{\alpha} - \beta \right| . T_{2\beta^3+s} \text{ wenn } \beta \gtrless 0 , \\[2ex] \left| i , \dfrac{i-r+1}{\alpha} + s - 1 \right| \text{ wenn } \beta \equiv 0 \text{ ist.} \end{array} \right. \\[5ex] T_r S T_s = \left\{ \begin{array}{l} \left| i , 2\{\alpha(r-1)+\beta\}^2 \dfrac{i}{\alpha} - \{\alpha(r-1)+\beta\} \right| . T_{2\{\alpha(r-1)+\beta\}^3+s} \\[1ex] \text{wenn } \alpha(r-1)+\beta \gtrless 0 , \\[1ex] \left| i , \dfrac{i}{\alpha} + s - 1 \right| \text{ wenn } \alpha(r-1)+\beta \equiv 0 . \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

17. Wir schreiten nun zur näheren Untersuchung der Gleichung (7) im Falle, dass die Funktionen (10) einen rationalen Wert haben und von den übrigen Funktionen (9) verschieden sind. Wir haben die untergeordneten Fälle $\varrho = 2, 3, 4, 5, 6$, jeden einzeln zu betrachten. Wir beginnen mit dem Falle

$$\varrho = 2.$$

Wir haben zuerst die Substitutionen in den Gruppen (11) aufzusuchen. Wir müssen dann die Schemata aufstellen, mittelst derer diese Gruppen zu definiren sind. Die enthaltenen Substitutionenkomplexe setzen wir in die Formen Σ oder ΣT_k, wo Σ der Gruppe G zugehört. Dies geschieht mittelst (12) und (13). Wir bezeichnen weiter mit H_0 die Gruppe der Substitutionen

$$|i,\ \alpha(i - r + 1) + r - 1|, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

Dann erhalten wir:

$$(14) \quad ((G, T_r)) \equiv \text{Die Substitutionen in } H_0,\ H_0 . |i,\ i - r + 1| . T_r'.$$

Wir bezeichnen ferner mit H_1 die Gruppe der Substitutionen:

$$1,\ |i,\ -i + r + s - 2|,$$

und erhalten:

$$(15) \left| \begin{aligned} &((T_r^{-1} G T_r,\ T_r^{-1} T_s)) \equiv \text{Die Substitutionen in} \\ &H_1,\ H_1 . |i,\ 2(r-s)^2(i + 2r + 2s + 1)| . T_{3r+3s}, \\ &H_1 . |i,\ (r-s)^2(i + r - 2s + 1)| . T_{2s-r}, \\ &H_1 . |i,\ (r-s)^2(i + s - 2r + 1)| . T_{2r-s}. \end{aligned} \right.$$

Die Gruppen $((G, T_r))$ und $((T_r^{-1} G T_r,\ T_r^{-1} T_s))$ enthalten beide 8 Substitutionen. Bei der ersten Gruppe wird x_{r-1} nicht umgesetzt, bei der zweiten $x_{3r+3s-1}$.

Für die weiteren Untersuchungen des Falles $\varrho = 2$ sind drei untergeordnete Fälle **A**, **B**, **C** zu unterscheiden.

A. Es mögen x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sämmtlich unter sich verschieden sein.

Wenn die Funktionen (10) aus φ und φ_r bestehen, ist die Gruppe der Gleichung (7) in der Gruppe (14) enthalten; wenn sie aus φ_r und φ_s bestehen, in der Gruppe (15). Die Gleichung (7) zerfällt in beiden Fällen in zwei Gleichungen mit rationalen Koefficienten, was schon aus n:o **14** folgt, weil $1 < \varrho < n$ ist. Die erste dieser Gleichungen ist vom ersten Grade und hat im ersten Falle die Wurzel x_{r-1}, im zweiten die Wurzel $x_{3r+3s-1}$. Die zweite Gleichung ist vom vierten Grade und ist in beiden Fällen ohne Kubikwurzeln auflösbar.

B. Es mögen einige der Wurzeln $x_0, x_1, \ldots x_4$ einander gleich sein und die Funktionen (10) aus φ und φ_r bestehen.

Wir bezeichnen zwei einander gleiche Wurzeln durch x_τ und x_θ und werden zuerst untersuchen, wie τ und θ von r abhängen. Es wird sich dabei zeigen, dass x_τ und x_θ von den übrigen Wurzeln verschieden sind.

Durch die Transposition (x_τ, x_θ) kann die Funktion φ ihren numerischen Wert nicht ändern. Da von den Funktionen (9) nur φ_r der Funktion φ numerisch gleich ist, muss φ durch die Transposition (x_τ, x_θ) in φ_r übergehen oder formal ungeändert bleiben. Das letztere kann nicht eintreten, weil G keine Transposition enthält. Also haben wir, wenn wir (x_τ, x_θ) kurz mit (τ, θ) bezeichnen, $\varphi_{(\tau,\theta)} \equiv \varphi_r$, was

$$(16) \qquad (\tau, \theta) = \Sigma T_r$$

giebt, wo Σ der Gruppe G zugehört.

Wir werden nun den analytischen Ausdruck für (τ, θ) aufsuchen. Wir haben:

$$|i, i^3| = (2, 3).$$

Die Substitution $|i, (\tau - \theta)i - 2(\tau + \theta)|$ ersetzt 2 durch θ und 3 durch τ. Also wird:

$$(\tau, \theta) = |i, (\tau - \theta)i - 2(\tau + \theta)|^{-1} . |i, i^3| . |i, (\tau - \theta)i - 2(\tau + \theta)|, \text{ d. h.}$$

$$(17) \qquad (\tau, \theta) = \left| i, \frac{i + 2(\tau + \theta)}{(\tau - \theta)^2} \right| . T_{3(\tau+\theta)+1} .$$

(16) und (17) geben $3(\tau + \theta) + 1 \equiv r$, d. h.

$$(18) \qquad \tau + \theta \equiv 2(r - 1).$$

Wenn τ gegeben ist, giebt (18) nur einen Wert für θ. Also kann neben x_θ keine andere Wurzel x_λ der Gleichung (7) gleich x_τ sein. x_τ und x_θ sind also von den übrigen Wurzeln von $f(x)$ verschieden.

Nach diesen Untersuchungen über x_τ und x_θ nehmen wir an, dass die übrigen Wurzeln von $f(x)$ auch unter sich verschieden sind und untersuchen die Gleichung

$$(19) \qquad \frac{f(x)}{(x - x_\tau)(x - x_\theta)} = 0 .$$

Aus n:o **14** folgert sich, dass (19) reduktibel ist, weil $\varrho!$ nicht durch $n - 2$ theilbar ist und $\varrho > 1$ ist. Wir wollen aber die Gruppe I aufsuchen, in welcher gemäss n:o **12** die Gruppe von (19) enthalten ist. Wir haben dann die in der Gruppe (14) enthaltenen Substitutionen aufzusuchen, welche die Wurzeln von (19) ausschliesslich unter sich vertauschen. Die Gruppe (14) besteht aus den Substitutionen:

$$1, (\tau, 2\theta - \tau, \theta, 2\tau - \theta), (\tau, 2\tau - \theta, \theta, 2\theta - \tau),$$

$$(\tau, \theta)(2\tau - \theta, 2\theta - \tau), (\tau, \theta), (2\tau - \theta, 2\theta - \tau),$$

$$(\tau, 2\tau - \theta)(\theta, 2\theta - \tau), (\tau, 2\theta - \tau)(\theta, 2\tau - \theta).$$

Die Substitutionen, welche die Wurzeln von (19) ausschliesslich unter sich vertauschen, müssen auch x_τ, x_θ ausschliesslich unter sich vertauschen und umgekehrt. Diese Substitutionen sind also

$$1, (\tau, \theta), (2\tau - \theta, 2\theta - \tau), (\tau, \theta)(2\tau - \theta, 2\theta - \tau).$$

Wenn wir in diesen nur die Cykeln berücksichtigen, welche die Wurzeln von (19) umsetzen, erhalten wir

$$(20) \qquad 1, (2\tau - \theta, 2\theta - \tau) .$$

Dies ist die gesuchte Gruppe I.

Da nach (18) τ und θ von $r - 1$ verschieden sind, ist x_{r-1} eine Wurzel von (19). Diese Wurzel ist rational, weil sie durch (14) nicht umgesetzt wird.

C. Es mögen einige der Wurzeln $x_0, x_1, \ldots x_4$ einander gleich sein und die Funktionen (10) aus φ_r und φ_s bestehen.

Wir nennen zwei einander gleiche Wurzeln x_τ und x_θ. Dann untersuchen wir, wie τ und θ von r und s abhängen. Dabei wird sich ergeben, dass x_τ und x_θ von den übrigen Wurzeln verschieden sind.

Wenn wir in φ_r die Substitution (τ, θ) ausführen, wird φ_r formal verändert, bleibt aber numerisch unverändert, und geht also in φ_s über. Wir erhalten daher $\varphi T_{r(\tau,\theta)} \equiv \varphi_s$; also wird

$$(21) \qquad T_r(\tau, \theta) = \Sigma T_s,$$

wo Σ der Gruppe G zugehört. Wenn wir für (τ, θ) aus (17) in (21) einsetzen, erhalten wir:

$$T_r \,.\left| i, \frac{i + 2(\tau + \theta)}{(\tau - \theta)^2} \right| . \, T_{3(\tau+\theta)+1} = \Sigma T_s \,.$$

Hieraus ergiebt sich nach (12) und (13)

$$(22) \quad \left| i, \left(\frac{r - 1 + 2(\tau + \theta)}{\tau - \theta}\right)^2 i - \frac{r - 1 + 2(\tau + \theta)}{(\tau - \theta)^2} \right| . \, T_{\frac{2(\tau-\theta)^2}{r-1+2(\tau+\theta)} + 3(\tau+\theta)+1} = \Sigma T_s,$$

wenn $r - 1 + 2(\tau + \theta) \gtrless 0$ ist. Diese Forderung ist immer erfüllt. Sonst wäre nämlich (18) erfüllt, und wir hätten numerisch $\varphi = \varphi_r$, was gegen die Voraussetzungen in C streitet. Die Gleichung (22) giebt, da die Indices der beiden T in Bezug auf den Modul 5 kongruent sein müssen,

$$\tau^2 + \tau\theta + \theta^2 + (r + s - 2)(\tau + \theta) \equiv 2(r - 1)(s - 1) \pmod{5}.$$

Wir erhalten hieraus:

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tau &\equiv r - 1 \\ \theta &\equiv 2r - s - 1 \end{aligned} \right. \qquad \text{oder} \left\{ \begin{aligned} \tau &\equiv s - 1 \\ \theta &\equiv 2s - r - 1 \,. \end{aligned} \right.$$

Dass x_τ und x_θ von den übrigen Wurzeln von $f(x)$ verschieden sind, erhellt daraus, dass gemäss (23) nur ein θ existirt, wenn τ gegeben ist.

Wir nehmen nun an, dass die Wurzeln der Gleichung

$$(24) \qquad \frac{f(x)}{(x - x_\tau)(x - x_\theta)} = 0,$$

welche gemäss n:o **14** reduktibel ist, sämmtlich verschieden sind. Wir wollen die Gruppe aufsuchen, in welcher die Gruppe der Gleichung nach n:o **12** enthalten ist. Wir haben dann die Gruppe (15) zu betrachten. Diese besteht aus den Substitutionen

$$1\,,\ (\tau\,,\ 2\tau-\theta)(\theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,,\ (\tau\,,\ 3\tau+3\theta)(\theta\,,\ 2\tau-\theta)\,,$$
$$(\tau\,,\ \theta)(2\tau-\theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,,\ (\tau\,,\ \theta)\,,\ (2\tau-\theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,,$$
$$(\tau\,,\ 2\tau-\theta\,,\ \theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,,\ (\tau\,,\ 3\tau+3\theta\,,\ \theta\,,\ 2\tau-\theta)\,.$$

Wenn wir die Substitutionen ausnehmen, welche die Wurzeln der Gleichung (24) ausschliesslich unter sich vertauschen und in diesen Substitutionen nur die Cykeln berücksichtigen, welche die genannten Wurzeln enthalten, so ergiebt sich die Gruppe der Substitutionen

$$1\,,\ (2\tau-\theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,.$$

In dieser muss gemäss n:o **12** die Gruppe der Gleichung (24) enthalten sein.

Zufolge (23) ist $3r+3s-1$ von τ und θ verschieden. Also ist $x_{3r+3s-1}$ eine Wurzel der Gleichung (24). Diese Wurzel ist rational, weil sie durch die Gruppe (15) nicht umgesetzt wird.

18. Wir betrachten nun den Fall $\varrho=3$.

Wir suchen zuerst die Substitutionen der Gruppen (11) auf. Die Substitutionenkomplexe in den Schemata, durch welche diese Gruppen zu definiren sind, setzen wir zu dem Zwecke in die Formen Σ und ΣT^k. Der Kürze halber bezeichnen wir wie vorher mit H_1 die Gruppe der Substitutionen $1, |\,i, -i+r+s-2\,|$. Wir erhalten:

$$(25)\left\{\begin{array}{l} ((G\,,\ T_r\,,\ T_s))\equiv \text{Die Substitutionen in} \\ H_1\,,\ H_1.|\,i\,,2(r-s)^2(i-r+1)|.T_r\,,\ H_1.|i\,,2(r-s)^2(i-s+1)|.T_s\,. \end{array}\right.$$

Wenn r, s, t alle verschieden sind bezüglich des Modul 5, muss eine der Kongruenzen

$$2r\equiv s+t\,,\quad 2s\equiv t+r\,,\quad 2t\equiv r+s \pmod{5}$$

richtig sein. Wenn nämlich r, s, t, u, v nach dem Modul 5 inkongruente ganze Zahlen sind, so muss die Kongruenz

$$2x\equiv u+v \pmod{5}$$

durch r, s oder t erfüllt werden. Je nachdem sie durch r, s oder t erfüllt ist, gilt die erste, zweite oder dritte der fraglichen Kongruenzen.

Wir nehmen an, es sei die mittlere die geltende. In dem wir die Gruppe der Substitutionen $1\,,\,|\,i\,,\,-\,i+r+t-2\,|$ mit H'_1 bezeichnen, erhalten wir:

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} ((T_r^{-1}G\,T_r\,,\;T_r^{-1}T_s\,,\;T_r^{-1}T_t)) \equiv \text{Die Substitutionen in} \\ H'_1, H'_1.|i,3(r-t)^2(i+r-2t+1)|.T_{2t-r}, H'_1.|i,3(r-t)^2(i+t-2r+1)|.T_{2r-t}. \end{array}\right.$$

Diese Gruppe können wir aus (25) erhalten mittelst der Identität

$$((\,G\,,\;T_{2r-t}\,,\;T_{2t-r}\,)) \equiv ((\,T_r^{-1}G\,T_r\,,\;T_r^{-1}T_s\,,\;T_r^{-1}T_t))$$

welche aus n:o **6** hervorgeht.

Die Gruppen (25) und (26) enthalten jede 6 Substitutionen. Sie sind beide intransitiv. Jene vertauscht die Wurzeln $x_{r-1}\,,\;x_{s-1}\,,\;x_{3r+3s-1}$ ausschliesslich unter sich, ebenso die Wurzeln x_{2r-s-1} und x_{2s-r-1}. Diese vertauscht $x_{s-1}\,,\;x_{2r-t-1}$ und x_{2t-r-1} ausschliesslich unter sich, wie auch $x_{r-1}\,,\;x_{t-1}$.

Die Wurzeln der Gleichung (7) sind alle verschieden. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, es seien zwei dieser Wurzeln x_τ und x_θ einander gleich. Es mögen weiter die Funktionen (10) aus

$$\varphi\,,\;\varphi_r\,,\;\varphi_s$$

bestehen. Dann muss eine der Gleichungen

$$(27)\qquad \varphi_{(\tau,\,)} = \varphi_r\,,\;\varphi_{(\tau,\theta)} = \varphi_s$$

identisch erfüllt sein. Es möge dies die erstere sein. Dann folgt, wenn wir in dieser die Transposition $(\tau\,,\,\theta)$ ausführen, die Identität

$$(28)\qquad \varphi \equiv \varphi_{T_r.(\tau,\theta)}\,,$$

Es muss aber φ_s in φ oder φ_r übergehen durch die Transposition $(\tau\,,\;\theta)$, so dass eine der Gleichungen

$$\varphi_{T_s.(\tau,\theta)} = \varphi \text{ und } \varphi_{T_s.(\tau,\theta)} = \varphi_r$$

identisch gelten muss. Wenn wir in diesen die Transposition $(\tau\,,\,\theta)$ ausführen, erhalten wir identisch

$$\varphi_s = \varphi_{(\tau,\theta)} \text{ oder } \varphi_s = \varphi_{T_r.(\tau,\theta)}\,.$$

Die erste dieser Gleichungen kann nicht identisch gelten, weil die erste der Gleichungen (27) als identisch angenommen ist; die zweite ist wegen der Identität (28) nicht identisch. Wenn wir von der zweiten der Gleichungen (27) als identisch geltend ausgehen, gelangen wir in einen ähnlichen Widerspruch. Also war die Annahme $x_\tau = x_\vartheta$ unstatthaft, und die Wurzeln der Gleichung (7) sind alle von einander verschieden. Wir haben hier angenommen, dass die Funktionen (10) aus φ, φ_r, φ_s bestehen. Unsere Behauptung kann aber auf ähnliche Weise bewiesen werden, wenn die Funktionen (10) aus φ_r, φ_s, φ_t bestehen.

Die Gruppe der Gleichung (7) ist in der Gruppe (25) oder (26) enhalten, je nachdem die Funktionen (10) aus φ, φ_r, φ_s oder aus φ_r, φ_s, φ_t bestehen. Die Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen mit rationalen Koefficienten, was schon aus n:o **14** hervorgeht wegen $1 < \varrho < n$; die eine ist 2^{ten}, die andere 3^{ten} Grades.

19. Wir kommen weiter zum Falle $\varrho = 4$.

Um die Substitutionen der ersten der Gruppen (11) in einfacherer Weise ausdrücken zu können, setzen wir wie vorher $2s \equiv r + t$ (mod. 5). Die Substitutionenkomplexe im Schema, welches zur Definition der Gruppe dient, bringen wir mittelst der Formeln (12) und (13) in die Formen Σ oder ΣT_k. Dann ergiebt sich:

$$
(29)\left\{\begin{array}{l}
((G,\ T_r,\ T_s,\ T_t)) \equiv \text{Die Substitutionen in} \\[1ex]
H'_1,\, H'_1 . |\, i,\, 2(r-t)^2(i+2r+2t+1)\, | \,.\, T_{3r+3t},\ H'_1 . |\, i,\, -(r-t)^2(i-r+1)\, | \,.\, T_r, \\[1ex]
\qquad\qquad H'_1 . |\, i,\, -(r-t)^2(i-t+1)\, | \,.\, T_t .
\end{array}\right.
$$

Dieses Resultat geht auch aus (15) hervor mittelst der Identität

$$((G,\ \mathrm{T}_r,\ \mathrm{T}_s,\ \mathrm{T}_t)) \equiv ((\mathrm{T}_{2r-t}^{-1} G\, \mathrm{T}_{2r-t},\ T_{2r-t}^{-1} T_{2t-r})),$$

welche aus n:o **6** folgert.

Wir suchen weiter die Substitutionen der zweiten Gruppe (11) auf. In dem wir n:o **6** anwenden und die Gruppe der Substitutionen

$$|\, i,\ \alpha(i + r + s + t + u + 1) - (r + s + t + u + 1)\, | \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

mit H'_0 bezeichnen, erhalten wir:

$$(30)\quad \left|\begin{array}{l} ((T_r^{-1} G T_r\,,\ T_r^{-1} T_s\,,\ T_r^{-1} T_t\,,\ T_r^{-1} T_u)) \equiv ((G\,,\ T_{-(r+s+t+u)})) \\ \equiv H'_\theta,\ H'_0\,.\,|\,i,\ i+r+s+t+u+1\,|\,.\,T_{-(r+s+t+u)}\,. \end{array}\right.$$

Die Gruppen (29) und (30) enthalten beide 8 Substitutionen. Die erste lässt x_{s-1}, die zweite $x_{-(r+s+t+u)}$ unverändert.

Bei den weiteren Untersuchungen des Falles $\varrho = 4$ haben wir drei untergeordnete Fälle **A**, **B**, **C**, jeden für sich zu betrachten.

A. Die Wurzeln $x_0\,,\ x_1\,,\ .\ .\ .\ x_4$ sind sämmtlich unter sich verschieden.

Die Gruppe der Gleichung (7) ist in der Gruppe (29) oder (30) enthalten, je nachdem die Funktionen (10) aus $\varphi\,,\ \varphi_r\,,\ \varphi_s\,,\ \varphi_t$ bestehen oder aus $\varphi_r\,,\ \varphi_s\,,\ \varphi_t\,,\ \varphi_u$. Die Gleichung zerfällt in beiden Fällen in zwei Gleichungen mit rationalen Koefficienten, was schon aus n:o **14** hervorgeht wegen $1 < \varrho < n$. Die eine ist vom 1^sten^ Grade und hat die Wurzel x_{s-1} im ersten Falle, $x_{-(r+s+t+u+1)}$ im zweiten; die andere ist vom 4^ten^ Grade und ohne Kubikwurzeln auflösbar.

B. Es mögen einige der Wurzeln der Gleichung (7) unter sich gleich sein, und die Funktionen (10) aus $\varphi\,,\ \varphi_r\,,\ \varphi_s\,,\ \varphi_t$ bestehen.

Wir bezeichnen mit x_τ und x_θ zwei einander gleiche Wurzeln der Gleichung (7). Wir nehmen an, die Bezeichungen r, s, t seien so gewählt, dass $2s \equiv r + t$ (mod. 5) ist. Dann untersuchen wir, wie τ und θ von r, s, t abhängen, wobei sich auch zeigen wird, dass x_τ und x_θ von den übrigen Wurzeln verschieden sind.

Die Funktionen (9) bestehen neben den Funktionen (10) aus φ_{2r-t} und φ_{2t-r}, welche also von den Funktionen (10) numerisch verschieden sind. Da weiter φ_{2r-t} bei der Substitution $(\tau\,,\ \theta)$ numerisch unverändert bleibt, formal aber verändert wird, muss

$$\varphi_{T_{2r-t}(\tau,\theta)} \equiv \varphi_{2t-r}$$

sein, so dass

$$(31)\qquad T_{2r-t}(\tau\,,\ \theta) = \Sigma T_{2t-r}$$

wird. Diese Gleichung ergiebt sich aus (21), wenn $2r-t$ und $2t-r$ für r und s gesetzt wird. Wie die Formeln (23) aus (21) hervorgehen, kommen also aus (31):

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{l} \tau \equiv 2r - t - 1\,, \\ \theta \equiv t - 1\,, \end{array}\right. \qquad \text{oder} \left\{\begin{array}{l} \tau \equiv 2t - r - 1\,, \\ \theta \equiv r - 1\,. \end{array}\right.$$

Dass x_τ und x_θ von den übrigen Wurzeln verschieden sind, folgert sich daraus, dass die Formeln (32) für θ nur einen Wert geben, wenn τ gegeben ist.

Wir nehmen nun an, dass die Wurzeln der Gleichung

$$(33) \qquad \frac{f(x)}{(x-x_\tau)(x-x_\theta)} = 0$$

alle verschieden sind. Nach n:o **14** wissen wir, dass (33) reduktibel ist, weil $[(n-2)! - \varrho]!$ nicht durch $n-2$ theilbar ist und $\varrho < (n-2)! - 1$ ist. Wir werden aber auch die Gruppe I aufsuchen, in welcher gemäss n:o **12** die Gruppe der Gleichung (33) enthalten ist. Die Gruppe (29) besteht aus den Substitutionen:

$$1\,,\ (\tau\,,\ 2\tau-\theta)(\theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,,\ (\tau\,,\ \theta)(2\tau-\theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,,$$

$$(\tau\,,\ 3\tau+3\theta)(\theta\,,\ 2\tau-\theta)\,,\ (\tau\,,\ \theta)\,,\ (2\tau-\theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,,$$

$$(\tau\,,\ 2\tau-\theta\,,\ \theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,,\ (\tau\,,\ 3\tau+3\theta\,,\ \theta\,,\ 2\tau-\theta).$$

Da wir die Substitutionen ausnehmen, welche die Wurzeln der Gleichung (33) ausschliesslich unter sich vertauschen, und in diesen Substitutionen nur die Cykeln beibehalten, welche diese Wurzeln vertauschen, so ergiebt sich

$$1\,,\ (2\tau-\theta\,,\ 3\tau+3\theta)\,.$$

Dies ist die gesuchte Gruppe I.

Zufolge (32) ist $s-1$ von τ und θ verschieden. x_{s-1} ist also eine der Wurzeln der Gleichung (33). Weil x_{s-1} durch (29) nicht umgesetzt wird, ist diese Wurzel rational.

C. Es mögen einige der Wurzeln der Gleichung (7) unter sich gleich sein, und die Funktionen (10) aus φ_r, φ_s, φ_t, φ_u bestehen.

Wir bezeichnen wie vorher mit x_τ und x_θ zwei einander gleiche Wurzeln der Gleichung (7), und haben zuerst die Relation zwischen τ, θ und r, s, t, u aufzusuchen.

Die Funktionen (9) bestehen aus den Funktionen (10) und aus φ und $\varphi_{-(r+s+t+u)}$. Aus der Thatsache, dass φ bei der Transposition (τ, θ) formal verändert wird, numerisch unverändert bleibt und dass φ und

$\varphi_{-(r+s+t+u)}$ von den Funktionen (10) numerisch verschieden sind, folgt die Identität $\varphi_{(\tau,\theta)} \equiv \varphi_{-(r+s+t+u)}$; wir erhalten also:

$$(34) \qquad (\tau\,,\,\theta) = \Sigma T_{-(r+s+t+u)}\,.$$

Diese Gleichung geht in (16) über, wenn r für $-(r+s+t+u)$ gesetzt wird. Wie (18) aus (16), kommt also aus (34) die Kongruenz:

$$(35) \qquad \tau + \theta \equiv -2(r+s+t+u+1)\,.$$

Da diese für jedes τ nur ein θ giebt, sind x_τ und x_θ von den übrigen Wurzeln von (7) verschieden.

Wir nehmen an, dass die Wurzeln der Gleichung

$$(36) \qquad \frac{f(x)}{(x-x_\tau)(x-x_\theta)} = 0\,,$$

welche nach n:o **14** reduktibel ist, alle verschieden sind. Um die Gruppe der Gleichung zu untersuchen, schreiben wir die Substitutionen (30) auf folgende Weise:

$$1\,,\,(\tau\,,\,2\theta-\tau\,,\,\theta\,,\,2\tau-\theta)\,,\,(\tau\,,\,2\tau-\theta\,,\,,\theta\;2\theta-\tau)\,,$$

$$(\tau\,,\,\theta)(2\tau-\theta\,,\,2\theta-\tau)\,,\,(\tau\,,\,\theta)\,,\,(2\tau-\theta\,,\,2\theta-\tau)\,,$$

$$(\tau\,,\,2\theta-\tau)(\theta\,,\,2\tau-\theta)\,,\,(\tau\,,\,2\tau-\theta)(\theta\,,\,2\theta-\tau)\,.$$

Gemäss n:o **12** ergiebt sich nun, dass die Gruppe von (36) in der Gruppe

$$1\,,\,(2\tau-\theta\,,\,2\theta-\tau)$$

enthalten ist.

Aus (35) folgert sich, dass $-(r+s+t+u)-1$ von τ und θ verschieden ist. Also ist $x_{-(r+s+t+u+1)}$ eine Wurzel von (36). Diese Wurzel ist rational, weil sie von der Gruppe (30) nicht umgesetzt wird.

20. Wir haben schliesslich die Fälle $\varrho = 5$ und $\varrho = 6$ zu diskutiren.

Im Falle $\varrho = 5$ kann die Gleichung (7) nicht gleiche Wurzeln haben, weil eine der Funktionen (9) von den übrigen verschieden ist.

Wenn die Funktionen (10) aus

$$\varphi\,,\ \varphi_r\,,\ \varphi_s\,,\ \varphi_t\,,\ \varphi_u$$

bestehen, ist die Gruppe der Gleichung in $((G\,,\,T_r\,,\,T_s\,,\,T_t\,,\,T_u))$ enthalten. Diese ist nach n:o **6** identisch mit $T^{-1}_{-(r+s+t+u)}\,G\,T_{-(r+s+t+u)}$.

Wenn die Funktionen (10) aus

$$\varphi_r\,,\ \varphi_s\,,\ \varphi_t\,,\ \varphi_u\,,\ \varphi_v$$

bestehen, ist die Gruppe der Gleichung in $((T_r^{-1}\,G\,T_r\,, T_r^{-1}\,T_s\,,\ T_r^{-1}\,T_t\,,\ T_r^{-1}\,T_u\,,\ T_r^{-1}\,T_v))$ enthalten, welche gemäss n:o **6** mit G identisch ist.

Die Gleichung (7) ist in dem Falle $\varrho = 5$ immer durch Wurzelgrössen auflösbar, wie schon aus n:o **15** erhellt. Sie braucht aber nicht reduktibel zu sein.

Im Falle $\varrho = 6$ kann man mit Hilfe des Vorhergehenden nichts über die Gleichung (7) aussagen, weil $((G\,,\,T_r\,,\,T_s\,,\,T_t\,,\,T_u\,,\,T_v))$ alle Substitutionen von $x_0\,,\,x_1\,,\,\ldots\,x_4$ enthält. Wie auch die Gleichung beschaffen sein mag, scheint es möglich zu sein, eine Funktion φ zu finden, deren durch die Substitutionen hervorgegangene 6 verschiedene Formen numerisch gleich sind.

21. Wir haben im Vorhergehenden Gruppen von Substitutionen der Elemente $x_0\,,\,x_1\,,\,\ldots\,x_4$ aufgestellt, welche in den Fällen $\varrho = 2$, 3, 4, 5, 6 die Gruppe der Gleichung (7) enthalten müssen. Ob aber diese alle Substitutionen jener Gruppen enthalten kann, oder die aufgestellten Gruppen zu allgemein sind, ist nicht entschieden worden. Wir werden nun Gleichungen aufweisen, bei denen für eine gewisse Funktion φ der Fall $\varrho = 5$ oder die in **19 A** und **17 C** behandelten Fälle eintreten und deren Gruppen identisch sind mit denen, in welchen sie nach dem Vorhergehenden enthalten sein müssen. In den genannten Fällen wenigstens sind also die aufgestellten Gruppen nicht zu allgemein, d. h. sie können nicht durch speciellere Gruppen ersetzt werden.

Es sei ω eine Wurzel der Gleichung $\dfrac{z^5 - 1}{z - 1} = 0$, Θ die Funktion

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^3 x_3 + \omega^4 x_4)^5\,,$$

$\Sigma_1\,,\ \Sigma_2\,,\ \Sigma_3\,,$ die Substitutionen $|\,i\,,\,2i\,|$, $|\,i\,,\,3i\,|$, $|\,i\,,\,4i\,|$. Wir setzen

$$\varphi = \Theta\cdot\Theta_{\Sigma_1}\cdot\Theta_{\Sigma_2}\cdot\Theta_{\Sigma_3}\,. \tag{37}$$

Dies können wir thun, weil diese Funktion für die Substitutionen in G formal ungeändert bleibt, für jede andere Substitution aber ihre Form ändert. Dann berechnen wir die Werte der Funktionen (9) für einige specielle Formen der Gleichung (7).

Es sei zuerst

$$x^5 + A = 0 \tag{38}$$

die Gleichung (7) und die Anordnung der Wurzeln durch

$$x_r = \omega^r \sqrt[5]{-A} \qquad (r = 0, 1, 2, 3, 4)$$

gegeben. Dann ergiebt sich:

$$\varphi = 0, \ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = -5^{10}A^4.$$

Wir können hier $\varrho = 5$ setzen. Nach dem im Vorhergehenden über diesen Fall Gesagten muss die Gruppe der Gleichung (38) in der linearen Gruppe von $x_0, x_1, \ldots x_4$ enthalten sein. In der That ist die Gruppe der Gleichung mit dieser identisch [1]).

Es sei zweitens

$$x^5 + Ax = 0 \tag{39}$$

die gegebene Gleichung und die Anordnung der Wurzeln durch

$$x_r = (\sqrt{-1})^r \sqrt[4]{-A}, \ x_4 = 0, \qquad (r = 0, 1, 2, 3)$$

gegeben. Wir erhalten

$$\varphi = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_5 = -5^5 A^5, \ \varphi_1 = -5^5(2 + \sqrt{-1})^{10} A^5,$$

$$\varphi_4 = -5^5(2 - \sqrt{-1})^{10} A^5.$$

Wir haben hier $\varrho = 4$ und sind auf den Fall **19 A** gekommen. Nach dem in **19 A** Gesagten muss die Gruppe der Gleichung (39) in der Gruppe (29) enthalten sein, wenn in (29) $r = 2$, $s = 5$, $t = 3$ gesetzt wird. Die Substitutionen in (29) werden dann:

---

1) Siehe Jordan, Traité des substitutions etc., pag. 300.

$$(29') \quad \begin{cases} 1, (x_0, x_3)(x_1, x_2), (x_0, x_2)(x_1, x_3), (x_0, x_1)(x_2, x_3), \\ (x_0, x_2), (x_0, x_3, x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_0, x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die Gruppe der Gleichung (39) alle diese Substitutionen enthält. Diese Gruppe ist nämlich dieselbe, wie die der Gleichung

$$(39') \qquad x^4 + A = 0.$$

Wenn wir zu dieser $\sqrt{-A}$ adjungiren, wird sie reduktibel. Sie kann nämlich geschrieben werden:

$$(x^2 + \sqrt{-A})(x^2 - \sqrt{-A}) = 0.$$

Der erste Faktor hat die Wurzeln x_1, x_3, der zweite x_0, x_2. Die Gruppe von (39') wird also nach Adjungirung von $\sqrt{-A}$:

$$1, (x_0, x_2), (x_1, x_3), (x_0 x_2)(x_1 x_3).$$

Wenn zur Gleichung (39') die Grösse $\sqrt[4]{A}$ adjungirt wird, so wird sie eine Abel'sche Gleichung und ihre Gruppe enthält die Substitutionen[1])

$$1, (x_0, x_1)(x_2, x_3), (x_0, x_2)(x_1, x_3), (x_0, x_3)(x_1, x_2).$$

Es geht nun hervor, dass die Gruppe von (39') die Substitutionen (29') enthält. Dies gilt dann auch von der Gruppe der Gleichung (39). Also kann nicht in **19 A** die Gruppe (29) durch eine speciellere ersetzt werden.

Es sei drittens

$$(40) \qquad x^5 + a^3 x^2 = 0$$

die Gleichung (7) und die Anordnung der Wurzeln durch

$$x_r = -\alpha^r a, \; x_3 = x_4 = 0, \qquad (r = 0, 1, 2)$$

gegeben, wo α eine Wurzel von $\dfrac{z^3 - 1}{z - 1} = 0$ ist.

1) Siehe JORDAN, Traité des substitutions etc., pag. 296.

Dann wird

$$\varphi_3 = \varphi_4 = -5^5 a^{20}, \ \varphi = \varphi_2 = -5^5 \alpha a^{20}, \ \varphi_1 = \varphi_5 = -5^5 \alpha^2 a^{20}.$$

Wir haben hier $\varrho = 2$ und sind auf den Fall **17 C** gerathen. Es ist $r = 3$, $s = 4$. Von den Formeln (23) sind die letzteren zu wählen; sie geben $\tau = 3$, $\theta = 4$. Die Gleichung (24) geht in

$$(40') \qquad x^3 + a^3 = 0$$

über. Ihre Gruppe muss nach **17 C** in $1, (2\tau - \theta, 3\tau + 3\theta)$ enthalten sein, d. h. in $1, (x_2, x_1)$. In der That enthält die Gruppe der Gleichung (40') beide dieser Substitutionen. Die in **17 C** gefundene Gruppe ist also nicht zu allgemein.

22. Aus n:o **14** ergiebt sich folgender Satz:

Wenn die Gleichung (1) irreduktibel ist und $\Phi(y) = 0$ ϱ unter sich gleiche rationale Wurzeln hat, welche von den übrigen Wurzeln verschieden sind, so ist

$$n \leq \varrho \leq (n-2)! - n.$$

Wir haben in n:o **21** Gelegenheit gehabt, diesen Satz zu verificiren. Als wir nämlich für (1) die Gleichung $x^5 + A = 0$ setzten und φ durch (37) definirten, fanden wir $\varrho = 5$. Wir werden nun zu dem Satze ein neues Beispiel aufsuchen, in dem wir für (1) die Gleichung

$$(41) \qquad x^7 + A = 0$$

setzen und φ auf geeignete Weise bestimmen.

Die Anordnung der Wurzeln von (41) sei durch

$$x_r = \omega^r \sqrt[7]{-A} \qquad (r = 0, 1, \ldots 6)$$

gegeben, wo ω eine Wurzel von $\dfrac{z^7 - 1}{z - 1} = 0$ ist.

Es sei ferner

$$\Theta \equiv (x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^3 x_3 + \omega^4 x_4 + \omega^5 x_5 + \omega^6 x_6)^7,$$

und $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$ die Substitutionen

$$|i, 2i|, |i, 3i|, |i, 4i|, |i, 5i|, |i, 6i|, \text{(mod. 7)}.$$

Dann definiren wir

$$\varphi = \Theta . \Theta_{\Sigma_1} . \Theta_{\Sigma_2} . \Theta_{\Sigma_3} . \Theta_{\Sigma_4} . \Theta_{\Sigma_5}, \tag{42}$$

was statthaft ist, weil die für φ eingeführte Funktion bei den Substitutionen in G und nur bei diesen formal unverändert bleibt.

Wir haben nun die Funktionen (3) zu berechnen, wenn für φ aus (42) eingesetzt wird.

Die Substitutionen von $x_0, x_1, \ldots x_6$ sind, wenn wir i für x schreiben:

$$|i, \alpha i + \beta|, \; |i, \alpha\theta(i+\beta) + \gamma|, \qquad \left(\left.\begin{matrix} \alpha \equiv 1, 2, \ldots 6 \\ \beta \equiv 0, 1, \ldots 6 \\ \gamma \equiv 0, 1, \ldots 6 \end{matrix}\right\} \text{mod. } 7\right)$$

wo für $\theta(i)$ successive zu setzen ist:

$$i^4 \pm 3i, \; i^5 + ai^3 + a^3 i, \; i^5 \pm 2i, \; i^5 + bi^3 \pm i^2 + 3b^2 i.$$

In diesen Ausdrücken sind für a successive die Zahlen $0, 1, \ldots 6$ zu setzen, für b die quadratischen Nichtreste von 7 [1]. Die Substitutionen von $x_0, x_1, \ldots x_6$ können also gebildet werden durch Multiplikation der Substitutionen $|i, \alpha i + \beta|$ rechts mit den Substitutionen:

$$1, \; T_{1,0,\gamma} = |i, -i^4 + 3i + \gamma|, \; T_{1,1,\gamma} = |i, i^4 + 3i + \gamma|, \; T_{2,0,\gamma} = |i, i^5 + \gamma|,$$

$$T_{3,c,\gamma} = |i, c(i^5 + i^3 + 3i) + \gamma|, \; T_{4,c,\gamma} = |i, c(i^5 - i^3 + 3i) + \gamma)$$

(c quadr. Rest von 7),

$$T_{5,0,\gamma} = |i, i^5 - 2i + \gamma|, \; T_{5,1,\gamma} = |i, i^5 + 2i + \gamma|,$$

$$T_{6,d,\gamma} = |i, d(i^5 + 3i^3 + i^2 - i) + \gamma| \qquad (d \equiv 1, 2, \ldots 6; \text{ mod. } 7).$$

Dies sind die Substitutionen (2) für $n = 7$.

---

1) Siehe Jordan, Traité des subst. etc., pagg. 90 ff.

Wenn wir nun

$$\varphi_{r,s,t} = \varphi_{T_{r,s,t}}$$

setzen, und r, s, t die Werte durchlaufen lassen, welche als Indices der T vorkommen, wird $\varphi_{r,s,t}$ successive gleich den 120 verschiedenen Formen von φ. Nachdem wir diese Formen hergestellt haben, können wir sie leicht berechnen. Wir finden:

$$\varphi = \varphi_{1,0,\gamma} = \varphi_{1,1,\gamma} = 0\,, \quad \varphi_{2,0,\gamma} = -\,7^{14} A^6\,, \quad \varphi_{3,c,\gamma} = 7^{14}(3 - 2\,\omega^{3c} - 2\,\omega^{4c})^7 A^6\,,$$

$$\varphi_{4,c,\gamma} = 7^{14}(3 + \omega^{2c} + \omega^{5c} - \omega^{3c} - \omega^{4c})^7 A^6\,, \quad \varphi_{5,0,\gamma} = 7^{14}(3 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^6)^7 A^6\,,$$

$$\varphi_{5,1,\gamma} = 7^{14}(3 + \omega + \omega^2 + \omega^4)^7 A^6\,, \quad \varphi_{6,d,\gamma} = -\,7^{14}(2\,\omega^d + 4\,\omega^{2d} + 2\,\omega^{4d})^7 A^6\,.$$

Wir erhalten also

$$(43)\quad \left|\begin{aligned} \Phi(y) = y^{15}(y + 7^{14} A^6)^7 & \prod_c \{y - 7^{14}(3 - 2\,\omega^{3c} - 2\,\omega^{4c})^7 A^6\}^7 \\ & .\prod_c \{y - 7^{14}(3 + \omega^{2c} + \omega^{5c} - \omega^{3c} - \omega^{4c})^7 A^6\}^7 \\ & .\prod_{p=1,3} \{y - 7^{14}(3 + \omega^p + \omega^{2p} + \omega^{4p}) A^6\}^7 \\ & .\prod_d \{y + 7^{14}(2\,\omega^d + 4\,\omega^{2d} + 2\,\omega^{4d})^7 A^6\}^7\,. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung hat die mannigfaltigen rationalen Wurzeln 0 und $-\,7^{14} A^6$. Wir erkennen die Richtigkeit des erwähnten aus n:o **14** sich ergebenden Satzes in diesem Falle, in dem wir $\varrho = 15$ und $\varrho = 7$ haben.

Die Gleichung (43) hat auch mannigfaltige irrationale Wurzeln. Durch Adjungirung von ω zum Rationalitetsbereiche werden diese Wurzeln rational, während die Gleichung (41) irreduktibel bleibt. Eben die mannigfaltigen, irrationalen Wurzeln von (43) müssen also nach dem erwähnten Satze wenigstens 7-fach sein, was sich auch bestätigt.

23. Nach n:o **12** muss die Gruppe der Gleichung (41) in den Gruppen

$$(44)\quad ((G\,,\ T_{1,0,0}\,,\ T_{1,0,1}\,,\ \ldots\ T_{1,0,6}\,,\ T_{1,1,0}\,,\ T_{1,1,1}\,,\ \ldots\ T_{1,1,6}))\,,$$

$$(45)\quad ((T_{2,0,0}^{-1} G\, T_{2,0,0}\,,\ T_{2,0,0}^{-1} T_{2,0,1}\,,\ \ldots\ T_{2,0,0}^{-1} T_{2,0,6}))$$

enthalten sein. Wir wollen die Substitutionen dieser Gruppen aufsuchen.

Wir gestatten uns die Bemerkung, dass

$$i^4 + 3i \equiv 2i, \text{ wenn } i \text{ quadr. Nichtrest von 7 ist, und}$$
$$\equiv 4i, \text{ wenn } i \text{ quadr. Rest von 7 ist}.$$

Wir finden dann leicht[1]), indem wir $|i, \alpha i + \beta|$ durch S bezeichen:

$$T_{1,k,\gamma}^{-1} = |i, i - \gamma| \, T_{1,k+1,0},$$

$$T_{1,k,\gamma}^{-1} S = |i, \alpha(i - \gamma)| \, T_{1,k+1+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{\alpha}{7}\right)\right], \beta}$$

wo $\left(\frac{\alpha}{7}\right)$ das Legendre'sche Symbol bedeutet und für die zweiten Indices der T ihre kleinsten Reste modulo 2 zu setzen sind.

Wenn $\beta \gtrless 0 \pmod{7}$ ist, ist keiner der Substitutionen $T_{1,k,\gamma}^{-1} S T_{1,l,\gamma}$ in den Substitutionenkomplexen $G, G T_{1,h,\gamma}$ enthalten, welche die erste Kolumne im Schema bilden, welches zur Definition von (44) dient.

Wenn aber $\beta \equiv 0 \pmod{7}$ ist, haben wir dagegen:

$$T_{1,k,\gamma}^{-1} S T_{1,l,\gamma_1} = \begin{cases} |i, \alpha(i-\gamma) + \gamma_1| \text{ wenn } k + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{7}\right)\right] \equiv l \pmod{2}, \\ |i, \alpha(i-\gamma) + \gamma_1| \cdot T_{1,l+1,\gamma} \text{ wenn } k + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{7}\right)\right] \gtrless l \pmod{2}, \end{cases}$$

wo wieder für den zweiten Index der T sein kleinster Rest modulo 2 zu setzen ist.

Aus diesen Formeln geht hervor, dass die Gruppe (44) mit G identisch ist.

Weiter haben wir

$$T_{2,0,\gamma}^{-1} = |i, (i - \gamma)| \cdot T_{2,0,0}, \quad T_{2,0,\gamma}^{-1} S = \left| i, \frac{i-\gamma}{\alpha} \right| \cdot T_{2,0,\beta},$$

$$\therefore \; T_{2,0,\gamma}^{-1} S T_{2,0,\gamma_1} = \begin{cases} \left| i, \frac{i-\gamma}{\alpha} + \gamma_1 \right| \text{ wenn } \beta \equiv 0 \text{ ist}, \\ \left| i, \frac{2\beta(i-\gamma)}{\alpha} - 2\beta^2 \right| \cdot T_{6,3\beta^5,4\beta^5+\gamma_1} \text{ wenn } \beta \gtrless 0. \end{cases}$$

---

1) Siehe SERRET, Cours d'Algèbre supérieure, Tome II, pag. 410.

Man erhält hieraus, dass auch die Gruppe (45) mit G identisch ist.

Nun ist G die Gruppe der Gleichung (41)[1]. Die Gruppen (44) und (45), in welchen wir nach n:o **12** die Gruppe der Gleichung (41) zu suchen haben, fallen also mit dieser Gruppe zusammen.

1) Siehe Jordan, Traité des substitutions etc., pag. 300.

Man ersieht hieraus, dass auch die Gruppe (45) mit G identisch ist.

Nun ist G die Gruppe der Gleichung (41)[1]. Die Gruppen (44) (44') und (45), in welchen wir nach n:o 12 die Gruppe der Gleichung (41) (41') zu suchen haben, fallen also mit dieser Gruppe zusammen.

[1] Siehe JORDAN, Traité des substitutions etc., pag. 300.