MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII^E SÉRIE.
Tome XXXI, N° 4.

BEITRAG ZUR INTEGRATION

DER

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER STÖRUNGSTHEORIE.

VON

And. Lindstedt.

(*Lu le 15 Février 1883.*)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et C^{ie} et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 20 Kop. = 70 Pf.

Mathesis

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII^E SÉRIE.

Tome XXXI, N° 4.

BEITRAG ZUR INTEGRATION

DER

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER STÖRUNGSTHEORIE.

VON

And. Lindstedt.

(*Lu le 15 Février 1883.*)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et C^ie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 20 Kop. = 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Mai, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1 x + \Psi_2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

wo die Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2,... Funktionen von t sind, die ausser Constanten nur rein periodische Glieder von der Form

$$\beta \cos (\lambda t + b)$$

enthalten, und n^2 eine positive reelle Constante bedeutet, spielen bekanntlich in der theoretischen Physik und namentlich in der astronomischen Störungstheorie eine sehr wichtige Rolle. Es ist aber bis jetzt nur in einigen speciellen Fällen gelungen dieselben in direkter Weise zu integriren. Man hat deshalb seine Zuflucht zu indirekten Methoden genommen; aber auch diese waren, insofern man sich nicht mit Interpolationsformeln zufrieden giebt, sondern die wahre analytische Form des Integrals kennen lernen will, nicht genügend.

Die Schwierigkeiten, welche sich bei der früheren Art und Weise die Gleichung (1) zu integriren darbieten, bestehen hauptsächlich darin, dass man in den successiven Approximationen Glieder bekommt, welche die Zeit t und Potenzen derselben als Faktoren ausserhalb der periodischen Funktionen besitzen. Allerdings wäre es übereilt aus diesem Umstande den Schluss ziehen zu wollen, dass die gewonnenen Entwickelungen nicht konvergent seien; im Gegentheil, die Astronomen, welche das Problem in dieser Weise behandelt haben, sind nur unter stillschweigender Voraussetzung der unbedingten Konvergenz derselben berechtigt gewesen die aufeinanderfolgenden Annäherungen in der angegebenen Weise auszuführen. Die Theorie selbst aber muss nothwendig als ungenügend bezeichnet werden, so lange sie nicht im Stande ist, durch die Summirung jener sogenannten sekularen Glieder den Nachweis zu liefern, dass die geforderte Konvergenz auch wirklich existirt.

Die Bestrebungen der theoretischen Astronomen sind aus diesem Grunde immer darauf hinausgegangen die sekularen Glieder, wo möglich, aus der Störungstheorie fortzuschaffen. So bemerkenswerth nun auch viele von diesen Versuchen sind, so ist es doch anderseits wohlbekannt, dass dieselben es nur bis zu einem gewissen Punkte gebracht haben, indem nämlich, wenn die höheren Potenzen der störenden Massen oder der Excentricitäten und Neigungen berücksichtigt werden sollten, die sekularen Glieder sich wieder einstellten.

In der neuen Störungstheorie von Gyldén[1]) sind diese Uebelstände nicht mehr vorhanden. Die sekularen Glieder sind hier theils durch richtigere Formen der Argumente, theils durch die von Gyldén mit dem Namen «elementäre» bezeichneten Glieder ersetzt. Die elementären Glieder sind dadurch charakterisirt, dass ihre ursprünglich mit der störenden Masse multiplicirten Coefficienten durch den Integrationsprocess einen Divisor erhalten, der ebenfalls von der Ordnung der störenden Kraft ist; ausserdem sind ihre Perioden entweder sehr lang oder nahezu gleich der Umlaufszeit des gestörten Planeten. Diese Glieder fanden sich nur zum Theil in der älteren Theorie vor; anstatt der übrigen traten die Potenzreihen nach den Winkeln selbst, also sekuläre Glieder auf. Hieraus ersieht man zugleich die hohe Bedeutung der Gyldén'schen Untersuchungen für die Erlangung einer richtigen Einsicht in die Natur der Planeten-Bewegungen. Denn die früheren Resultate konnten nur so lange dem Bedürfnisse entsprechen, als die Einwirkungen der störenden Planeten als verhältnissmässig kleine Grössen angesehen werden dürfen. Im Laufe der Zeit aber erreichen dieselben, wie es aus der Gyldén'schen Theorie mit Evidenz hervorgeht, Beträge, die mit den Coordinaten selbst vergleichbar sind.

Zu diesen Resultaten kommt Gyldén durch Integration der Differentialgleichungen für die Evektion — Störung des Radius Vektors — und für die Variation — Störung der Länge in der Bahn—. Die erste besitzt gerade die Form (1) mit dem Unterschiede, dass $n^2 = 1$ ist; die Variationsgleichung kann auch auf die nämliche Form gebracht werden, wenn man nach Potenzen der Variation selbst entwickelt, in welchem Falle n^2 eine Grösse von der Ordnung der störenden Kraft wird, aber eine solche Reduktion ist, wie Gyldén bemerkt, nur in selteneren Fällen zu empfehlen.

Gyldén wendet nun bei der Integration strengere Annäherungsmethoden als seine Vorgänger an; soweit es sich übersehen lässt, gelingt es ihm auch vollständig die sekulären Glieder zu vermeiden. Indessen sind seine Methoden in vielen Fällen nicht so einfach und natürlich, wie es die Sache zu fordern scheint, woran sein Bestreben überall die elliptischen Funktionen fruchtbringend zu machen zuweilen Schuld sein mag. Da nun wegen der Wichtigkeit der Gyldén'schen Untersuchungen jeder Versuch seine Theorie in einzelnen Stücken zu vervollkommenen den Astronomen nur willkommen sein kann, so habe ich es in der vorliegenden Abhandlung gewagt eine indirekte Methode mitzutheilen, die nicht allein auf äusserst einfachen Principien beruht und in praktischer Hinsicht zu empfehlen ist, sondern auch in theoretischer Beziehung, insofern es sich um die Evektions-

1) Abhandlungen der königl. schwedischen Academie der Wissenschaften, Bihang. Bde. 6 u. 7. Ein in deutscher Sprache verfasstes, ausführliches Referat über die Gyldén'schen Untersuchungen, von Dr. Backlund, findet sich in «Copernicus» Vol. II, pag. 203 u. folg.

gleichung handelt, unter den bis jetzt bekannten indirekten Methoden die natürlichste sein dürfte. Ausserdem werde ich dieselbe an einer Reihe von Beispielen, von denen wenigstens das Eine nicht bloss für die Astronomie von Intresse ist, erläutern.

Zuvörderst will ich den Fall betrachten, dass die Coefficienten $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ *konstante* Werthe $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ besitzen. Die so entstehende Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots \tag{2}$$

bestimmt in Gyldéns Theorie den «intermediaren» Radius Vektor als Funktion der Länge in der Bahn.

Astronomisch zu reden besteht die Aufgabe hier einerseits darin zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine für alle endlichen Werthe von t konvergente Darstellung von x durch eine trigonometrische Reihe mit reellem Argument möglich ist, und andererseits darin das Integral wirklich aufzustellen. Jene Bedingungen ganz allgemein anzugeben, ohne über das Bildungs-Gesetz der Coefficienten β eine bestimmte Annahme zu machen dürfte wohl unausführbar sein. Indessen kann man leicht die zur Convergenz ausreichenden Bedingungen aufstellen. Man sieht nämlich, dass die in der Folge vorgenommenen Entwickelungen erlaubt sind, wenn die Reihen

$$\beta_1 + \beta_2\eta_0 + \beta_3\eta_0^2 + \ldots$$
$$\beta_1 + \beta_2\beta_0 + \beta_3\beta_0^2 + \ldots$$

unbedingt konvergiren, und wenn zweitens die Quotienten

$$\frac{\beta_1}{n^2}, \quad \frac{\beta_2\eta_0}{n^2}, \quad \frac{\beta_3\eta_0^2}{n^2}, \ldots$$
$$\frac{\beta_2\beta_0}{n^2}, \quad \frac{\beta_3\beta_0^2}{n^2}, \ldots$$

echte Brüche sind, damit die unten mit σ bezeichnete Grösse, wovon das Argument abhängt, reell herauskommt.

Ich will zunächst eine direkte Integrationsmethode angeben, die deshalb von Interesse zu sein scheint, weil bisher keine solche bekannt war, und weil sie sich ausserdem auf sehr elementare, analytische Hülfsmittel gründet. In praktischer Hinsicht dürfte dieselbe dagegen wohl kaum einen Werth haben.

Um nicht während der successiven Operationen Coefficienten zu bekommen, welche die mit η_0 bezeichnete Integrationskonstante zum Divisor haben, was bei nahezu kreisförmigen Bahnen, wo η_0, eine Grösse von der Ordnung der Bahnexcentricität, sehr klein wird, unbequem sein würde, ist es vortheilhaft das konstante Glied β_0 fortzuschaffen. Zu dem Ende setzen wir

$$x = x' + x_0$$

und denken uns x_0 aus der Gleichung

$$n^2 x_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \beta_2 x_0^2 + \ldots$$

bestimmt. Anstatt (2) haben wir alsdann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n^2 x' = \beta_1' x' + \beta_2' x'^2 + \ldots$$

wo wir die Werthe der β' nicht weiter angeben. Wenn nun mit η_0 eine Integrationskonstante bezeichnet wird, so liefert eine erste Integration

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dx'}{dt^2}\right)^2 + n^2 x'^2 = n^2 \eta_0^2 + \tfrac{2}{2}\, \beta'_1 x'^2 + \tfrac{2}{3}\, \beta'_2 x'^3 + \ldots$$

Der Methode der Variation der Constanten gemäss nehmen wir nun für das Integral und für die erste Ableitung desselben dieselbe Form an, wie im Falle der Gleichung

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n^2 x' = 0$$

indem wir setzen

$$x' = \eta \cos n\alpha$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\, n\eta \sin n\alpha$$

wo also η und α zwei neue Variable bedeuten, die als Funktionen von t bestimmt werden sollen. Aus der letzten der beiden eben gegebenen Gleichungen folgt ausserdem

$$(\beta) \qquad n\eta \sin n\alpha = n\eta \sin n\alpha \frac{d\alpha}{dt} - \cos n\alpha \frac{d\eta}{dt}$$

Aus (α) folgt jetzt

$$n^2\eta^2 = n^2\eta_0^2 + \tfrac{2}{2}\, \beta'_1 \eta^2 \cos n\alpha^2 + \tfrac{2}{3}\, \beta'_2 \eta^3 \cos n\alpha^3 + \ldots$$

woraus unter den gemachten Voraussetzungen eine Gleichung von der Form

$$(\gamma) \qquad \eta = \eta_0 \left\{1 + b_2 \cos n\alpha^2 + b_3 \cos n\alpha^3 + \ldots\right\}$$

abgeleitet werden kann. Die Substitution dieses Werthes in (β) liefert zwischen α und t die Differentialgleichung

$$dt = d\alpha \,.\, \frac{1 + 3b_2 \cos n\alpha^2 + 4b_3 \cos n\alpha^3 + \ldots}{1 + b_2 \cos n\alpha^2 + b_3 \cos n\alpha^3 + \ldots}$$

Um dieselbe zu integriren, denken wir uns den Faktor von $d\alpha$ nach Potenzen von $\cos n\alpha$ entwickelt und die verschiedenen Potenzen in Cosinus der Vielfachen desselben Winkels verwandelt; bezeichnen wir dabei das konstante Glied mit $(1 - \sigma)^{-1}$, so ergiebt sich nach Multiplikation mit dem Faktor $n\,(1 - \sigma)$ eine Differentialgleichung

$$n(1-\sigma)\,dt = n\,d\alpha + \{A_1 \cos n\alpha + 2A_2 \cos 2n\alpha + \ldots\}\,d\alpha$$

nach deren Integration, wenn π die zweite Integrationskonstante ist,

$$n(1-\sigma)\,t + \pi = n\alpha + A_1 \sin n\alpha + A_2 \sin 2n\alpha + \ldots$$

erhalten wird. Hieraus kann man nun, etwa mit Hülfe des Lagrange'schen Theorems, $\cos n\alpha$ nach den Cosinus der Vielfachen des Winkels

$$w = n(1-\sigma)\,t + \pi$$

entwickeln. Nach Substitution hiervon in (γ) und mit Rücksicht auf die Relationen $x' = \eta \cos n\alpha$ und $x = x' + x_0$ erhält man schliesslich das gesuchte Integral in der Form

$$x = \eta_0 \cos w + p_0 + p_1 \cos w + p_2 \cos 2w + \ldots \tag{3}$$

Die Coefficienten $p_0, p_1, p_2, \ldots$ sind im Allgemeinen recht komplicirte Funktionen von den β, η_0 und n^2. Indessen überzeugt man sich leicht, dass sie von derselben Ordnung wie die Quotienten

$$\frac{\beta_0}{n^2},\quad \frac{\beta_1\eta_0}{n^2},\quad \frac{\beta_2\eta_0^2}{n^2},\ldots$$

resp. sind. Da sich indessen diese Methode zur Berechnung der Coefficienten weniger eignet, so habe ich es unterlassen hier ihre Werthe anzugeben. Aus diesem Grunde werde ich jetzt eine zweite Methode mittheilen, die in dieser Hinsicht Nichts zu wünschen übrig lässt.

Die gewöhnliche Methode die Gleichung (2) durch successive Approximationen zu integriren besteht ganz einfach darin, dass man von dem Integrale $x = \eta_0 \cos(nt + \pi)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = 0$$

ausgeht und mit demselben die rechte Seite in (2) berechnet. Man erhält in dieser Weise eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = \sum \alpha_p \cos(\lambda_p t + a_p)$$

deren Integral im Allgemeinen

$$x = \eta_0 \cos(nt + \pi) + \sum \frac{\alpha_p}{n^2 - \lambda_p^2} \cos(\lambda_p t + a_p)$$

ist. Wenn aber, was im vorliegenden Fall wirklich vorkommt, eins von den λ_p genau gleich n ist, so hat man im Integral dem entsprechend die Glieder

$$\frac{\alpha}{n^2}\cos(nt + a) + \frac{\alpha t}{2n}\sin(nt + a)$$

also u. A. auch ein sekuläres Glied. Unter der Voraussetzung, dass dasselbe das erste Glied einer beständig konvergirenden Potenzreihe ist, setzt man nun den neuen Werth von x in die rechte Seite von (2) ein, worauf eine weitere Integration einen neuen verbesserten Werth von x liefert, u. s. w. Die Zahl der sekulären Glieder mehrt sich dabei immerfort.

Um dieser Calamität vorzubeugen, geht Gyldén[1]) von dem Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta_1 x + \beta_3 x^3$$

aus. Allerdings treten auch jetzt in den Integralen der verschiedenen Differentialgleichungen, in welche Gyldén die gegebene Gleichung zerlegt, seculäre Glieder auf, aber die daraus sich ergebenden überzähligen Integrationskonstanten lassen sich so bestimmen, dass jene Glieder verschwinden. Diese Möglichkeit beruht darauf, dass die mit η_0 bezeichnete Integrationskonstante schon in der ersten Annäherung, die hier eine elliptische Funktion ist, in das Argument hineinkommt.

Bei einer näheren Betrachtung der zur Anwendung gebrachten Annäherungsmethoden kommt man nämlich bald zu dem Resultate, es habe das Vorkommen der sekulären Glieder überhaupt darin seinen Grund, dass man nur Annäherungen in den Werthen der Coefficienten $p_0, p_1 \ldots$ bewirken kann, während anderseits das Argument unverändert gleich nt gesetzt wird. Schon die Untersuchung der beiden einfachen Fälle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta_1 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta_1 x + \beta_3 x^3$$

die sich unmittelbar integriren lassen, genügt aber um einzusehen, dass das Hinzutreten noch weiterer Potenzen von x auf der rechten Seite das Argument nothwendig beeinflussen muss. Es lässt sich demnach erwarten, dass eine mit Rücksicht hierauf vorgenomme Abänderung der alten Methode vollständig zum Ziele führen wird. In der That ist auch die Methode, die ich jetzt auseinandersetzen werde, wie man leicht finden wird, aus einer solchen Ueberlegung hervorgegangen.

Der Kürze wegen bezeichnen wir die rechte Seite von (2) mit $f(x)$ sowie ihre Ableitungen nach x mit $f'(x)$, $f''(x), \ldots$ resp. Wir haben alsdann vor Allem die Coefficienten für die Cosinus der Vielfachen von w zu berechnen, wenn wir in

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots$$

anstatt x den Werth $\eta_0 \cos w$ substituiren. Schreiben wir zu dem Ende

---

1) Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft 1?. Jahrg., pag. 297.

$$f\ (\eta_0 \cos w) = a_0 + 2a_1 \cos w + 2a_2 \cos 2w + \ldots$$

$$f'\ (\eta_0 \cos w) = a'_0 + 2a'_1 \cos w + 2a'_2 \cos 2w + \ldots$$

$$f''\ (\eta_0 \cos w) = a''_0 + 2a''_1 \cos w + 2a''_2 \cos 2w + \ldots$$

. . . .

so hat man, wie unmittelbar ersichtlich,

$$a_{2m} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p} \beta_{2p}$$

$$a_{2m+1} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p+1)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p+1} \beta_{2p+1}$$

$$a'_{2m} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p+1)\,(2p)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p} \beta_{2p+1}$$

$$a'_{2m+1} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p+2)\,(2p+1)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p+1} \beta_{2p+2}$$

$$a''_{2m} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p+1)\,(2p+2)\,(2p)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p} \beta_{2p+2}$$

. . . .

Wie allgemein gebräuchlich ist hier $(m)_n$ die Bezeichnung für den Coefficienten für x^n in der Entwicklung von $(1 + x)^m$ nach Potenzen von x. Wir können somit die $a, a', a'', \ldots$ als vollständig bekannte Ausdrücke in den $\beta_0, \beta_1, \ldots$ und η_0 betrachten.

Das Integral von (2) hat nun die Form

$$x = \eta_0 \cos w + p_0 + p_2 \cos 2w + p_3 \cos 3w + \ldots$$

wobei p_1 in die Integrationskonstante η_0 hineingezogen worden ist. Das Argument w ist nach dem Vorigen

$$w = n\,(1 - \sigma)\,t + \pi$$

Die Unbekannten sind also $p_0, p_2, p_3, \ldots$ und σ, und da dieselben Funktionen der β sind, so wird unsere Methode darin bestehen in einer ersten Annäherung aller Glieder erster Ordnung in Bezug auf die β in jenen Unbekannten zu ermitteln; eine zweite Annäherung soll die Glieder zweiter Ordnung hinzufügen, u. s. w.

Die Bestimmung von σ wird indessen nicht direkt geschehen, sondern durch die Einführung einer gewissen Constante ν vermittelt werden; zwichen σ und ν hat man die Relation.

$$1 - \sigma = \sqrt{1 - \nu}$$

wodurch σ aus ν berechnet werden kann. Die Constante ν selbst soll in jeder Annäherung so bestimmt werden, dass keine sekulären Glieder zum Vorschein kommen; es wird demnach ν und also auch σ immer besser bestimmt werden. Insofern wir in ν und x die Glieder erster Ordnung als bekannt voraussetzen dürfen, benutzen wir die Bezeichnungen ν_1 und x_1, nach der zweiten Approximation dementsprechend ν_2 und x_2, u. s. w.

Die Integrationskonstanten bleiben während aller Operationen dieselben, nämlich π und η_0. Weiter sei es hervorgehoben, dass in der ersten Approximation nur die a-Coefficienten als bekannt vorausgesetzt werden, in der zweiten sind noch die a' erforderlich, u. s. w.

Wir führen nun ν in der Weise ein, dass wir anstatt (2)

$$(\delta) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1 - \nu)\,x = -n^2\nu x + f(x)$$

schreiben. Um die erste Approximation zu erlangen, gehen wir von dem Integrale $x = \eta_0 \cos w$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1 - \nu_1)\,x = 0$$

aus und berechnen mit diesem Werthe von x die rechte Seite von (δ). Man erhält in dieser Weise die Gleichung

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + n^2(1 - \nu_1)\,x_1 = a_0 + (2a_1 - n^2\nu_1\eta_0)\cos w + 2a_2 \cos 2w + \ldots$$

Soll nun die Integration dieser Gleichung vollzogen werden können, ohne dass ein sekuläres Glied zum Vorschein kommt, so muss rechts das Glied in $\cos w$ weggeschafft werden. Diese Bedingung liefert für ν_1 den Werth

$$\nu_1 = \frac{2a_1}{n^2\eta_0}$$

Die Integration ergiebt darauf sofort

$$x_1 = \eta_0 \cos w + \frac{1}{n^2}\left\{a_0 + \frac{2a_2}{1-2^2}\cos 2w + \frac{2a_3}{1-3^2}\cos 3w + \ldots\right\}$$

worin alle Glieder erster Ordnung in den Coefficienten p_0, p_2,... von (3) berücksichtigt worden sind. Eigentlich wäre noch für die Parenthese $1 - \nu_1$ als Divisor hinzuzufügen; die Vernachlässigung von ν_1 an dieser Stelle äussert aber ihren Einfluss erst in den Gliedern zweiter Ordnung, die der Symmetrie halber in der folgenden Approximation vollständig ermittelt werden sollen.

Hierauf schreiben wir in (δ) ν_2 anstatt ν_1 und berechnen die rechte Seite mit dem eben gewonnenen Werthe $x = x_1$. Bemerken wir dabei, dass wenn nur Glieder zweiter Ordnung in Betracht gezogen werden sollen

$$f(x_1) = f(\eta_0 \cos w) + \frac{1}{n^2} f'(\eta_0 \cos w) \, . \left\{a_0 + \frac{2a_2}{1-2^2} \cos 2w + \ldots\right\}$$

so erhalten wir zur Ermittelung von x_2 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + n^2(1-\nu_2)\, x_2 = - n^2\nu_2\eta_0 \cos w + f(\eta_0 \cos w) +$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left\{a_0 + \frac{2a_2}{1-2^2}\cos 2w + \ldots\right\} \cdot \left\{a'_0 + 2a'_1 \cos w + 2a'_2 \cos 2w + \ldots - \nu_1 n^2\right\}$$

oder kürzer

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + n^2(1-\nu_2)\, x_2 = - n^2\nu_2\eta_0 \cos w + f(\eta_0 \cos w) +$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left\{b_0 + 2b_1 \cos w + 2b_2 \cos 2w + \ldots\right\}$$

wo die b-Coefficienten durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$b_0 = a_0 a'_0 + \frac{2a_2 a'_2}{1-2^2} + \frac{2a_3 a'_3}{1-3^2} + \ldots - a_0 \nu_1 n^2$$
$$b_1 = a_0 a'_1 + \frac{a_2(a'_1 + a'_3)}{1-2^2} + \frac{a_2(a'_2 + a'_4)}{1-3^2} + \ldots$$
$$b_2 = a_0 a'_2 + \frac{a_2(a'_0 + a'_4)}{1-2^2} + \frac{a_3(a'_1 + a'_5)}{1-3^2} + \ldots - \frac{a_2 \nu_1 n^2}{1-2^2}$$
$$b_3 = a_0 a'_3 + \frac{a_2(a'_1 + a'_5)}{1-2^2} + \frac{a_3(a'_0 + a'_6)}{1-3^2} + \ldots - \frac{a_3 \nu_1 n^2}{1-3^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wird nun ν_2 nach demselben Princip wie vorhin bestimmt, also

$$\nu_2 = \frac{2a_1}{n^2\eta_0} + \frac{2b_1}{n^4\eta_0} = \nu_1 + \frac{2b_1}{n^4\eta_0}$$

so liefert die darauf folgende Integration:

$$x_2 = \eta_0 \cos w + \frac{1+\nu_1}{n^2}\left\{a_0 + \frac{2a_2}{1-2^2}\cos 2w + \frac{2a_3}{1-3^2}\cos 3w + \ldots\right\} +$$
$$+ \frac{1}{n^4}\left\{b_0 + \frac{2b_2}{1-2^2}\cos 2w + \frac{2b_3}{1-3^2}\cos 3w + \ldots\right\}$$

worin alle Glieder erster und zweiter Ordnung berücksichtigt worden sind.

Von derselben Beschaffenheit sind die für die Erlangung der Glieder dritter, vierter,... Ordnung erforderlichen Operationen, die ich indessen hier nicht ausführe, weil man in den meisten Fällen mit den zwei ersten Annäherungen ausreicht; in der That sind nähmlich in der Störungstheorie die Coefficienten $\beta_0, \beta_1, \ldots$ mit der störenden Masse multiplicirt. In den

Fällen, wo es nothwendig ist noch weiter zu gehen, als es hier geschehen ist, bietet die Fortsetzung keine Schwierigkeit.

Dass nun die eben vorgetragene Methode, ohne irgend welche Modifikation. sich zur Integration der allgemeinen Differentialgleichung verwenden lässt, leuchtet ohne Weiteres ein. Die erste Approximation ergiebt sich demnach unmittelbar durch Integration von

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 (1 - \nu_1) x = - n^2\nu_1\eta_0 \cos w + \Psi_0 + \Psi_1\eta_0 \cos w + \Psi_2\eta_0^2 \cos w^2 + \ldots$$

nachdem ν_1 so bestimmt worden ist, dass rechts alle Glieder in $\cos w$ sich aufheben. Wenn $\beta_0, \beta_1, \ldots$ die konstanten Glieder in den $\Psi_0, \Psi_1, \ldots$ bedeuten, so nimmt ν_1 offenbar denselben Werth wie im Falle der Gleichung (2) an. Die zweite Approximation erhält man, wenn die rechte Seite mit dem ersten Annäherungswerth, anstatt mit $x = \eta_0 \cos w$, berechnet wird, und ν_2 nach demselben Grundsatz wie vorhin gewählt wird. Der Werth von ν_2 wird aber offenbar nicht mit dem ν_2 im vorigen Falle identisch sein; denn die Coefficienten für die periodischen Glieder in den Ψ werden jetzt eine Einwirkung haben. Vor Allem aber heben wir hervor, dass in dem Integrale erstens alle in die Ψ-Funktionen eingehenden Argumente auftreten, zweitens ausserdem nur das einzige Argument

$$w = n (1 - \sigma) t + \pi$$

wo σ wie gewöhnlich durch die Relation $1 - \sigma = \sqrt{1 - \nu}$ definirt ist. Weiter sei bemerkt, dass wir stillschweigend angenommen haben, es finde sich unter den gegebenen Argumenten keins, das die Form

$$n (1 - \sigma) t + \alpha$$

habe, wo α einen von π verschiedenen Werth besitzt. Wie man in diesem Falle zu verfahren hat, leuchtet aus den folgenden Beispielen ein.

Als ein weiteres Beispiel werde ich die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\beta \cos (\lambda t + b)\} x = 0 \tag{4}$$

durchführen. Diese Differentialgleichung ist allerdings nur ein ganz specieller Fall der Gleichung (1), denn sie entsteht aus dieser, wenn man

$$\Psi_0 = \Psi_2 = \Psi_3 = \ldots = 0$$

$$\Psi_1 = 2\beta \cos (\lambda t + b)$$

annimmt. Indessen hat sie an und für sich ein so bedeutendes Interesse, dass es wohl entschuldigt werden kann, wenn wir uns mit derselben etwas näher beschäftigen. Gyldén reducirt in seiner Störungstheorie die Bestimmung der Evection auf eine Reihe solcher

Differentialgleichungen, wobei die rechte Seite noch Ψ_0 enthalten kann. Dieser Fall wird unten besprochen werden. Ausserdem spielt die Gleichung bekanntlich in der Theorie der Schwingungen gespannter Membrane eine wichtige Rolle. Man hat sie vor Gyldén — vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2-te Auflage, Th. I, pag. 404 u. folg. — weder direkt noch durch Annäherungen in befriedigender Weise integriren können. Nur unter der speciellen Annahme, dass x sich durch eine trigonometrische Reihe mit dem Argumente λt ausdrücken lasse, hat man die Integration durch Substitution einer solchen Reihe mit unbestimmten Coefficienten vollziehen können.

Unsere Methode soll uns nun dazu dienen über die wahre analytische Form des Integrals Aufschluss zu erhalten. Nachdem diese bekannt geworden, ist es nicht schwer Formeln zur Berechnung der Coefficienten aufzufinden.

Schreiben wir anstatt (4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 2\beta \cos(\lambda t + b)\, x$$

und wenden die erwähnte Methode an, so giebt die erste Approximation

$$x_1 = \eta_0 \cos w + \frac{\beta\eta_0}{n^2 - (\lambda + n)^2} \cos(\lambda t + b + w) + \frac{\beta\eta_0}{n^2 - (\lambda - n)^2} \cos(\lambda t + b - w)$$

und die zweite

$$\begin{aligned} x_2 = x_1 &+ \frac{\beta^2\eta_0}{\{n^2 - (\lambda + n)^2\}\{n^2 - (2\lambda + n)^2\}} \cos\{2(\lambda t + b) + w\} \\ &+ \frac{\beta^2\eta_0}{\{n^2 - (\lambda - n)^2\}\{n^2 - (2\lambda - n)^2\}} \cos\{2(\lambda t + b) - w\} \end{aligned}$$

u. s. w. Hier bedeutet, wie immer,

$$w = n(1 - \sigma)t + \pi$$

wobei wir, wenn wir uns mit den zwei angeführten Annäherungen begnügen, für σ zu setzen haben

$$\sigma = -\frac{\beta^2}{n^2(\lambda^2 - 4n^2)}$$

Man sieht daraus, dass das allgemeine strenge Integral, wenn jene Operationen noch weiter fortgesetzt gedacht werden, nothwendig die Form

$$x = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i \cos\{w + i(\lambda t + b)\} \tag{5}$$

besitzen muss. Schreiben wir nun der Kürze wegen

$$m = n(1 - \sigma)$$

$$w = mt + \pi$$

so sind die Coefficienten μ_i nebst m die Unbekannten des Problems. Die Integrationskonstanten sind μ_0 $(= \eta_0)$ und π.

Setzen wir nun in (4) den Ausdruck (5) für x ein, so erhalten wir zur Bestimmung der Unbekannten das Formelsystem

$$\text{(6)} \qquad \begin{gathered} \mu_i \{n^2 - (m + i\lambda)^2\} = \beta \{\mu_{i-1} + \mu_{i+1}\} \\ (i = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \end{gathered}$$

Um diese Gleichungen in bequemer Weise aufzulösen, führen wir, indem wir die Fälle i positiv und i negativ trennen, folgende Bezeichnungen ein:

$$M_i = \frac{\beta}{n^2 - (m + i\lambda)^2}$$

$$M_{-i} = \frac{\beta}{n^2 - (m - i\lambda)^2}$$

$$\alpha_i = \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}$$

$$\alpha_{-i} = \frac{\mu_{-i}}{\mu_{-i+1}}$$

und erhalten alsdann zur successiven Berechnung der μ_i und μ_{-i} aus μ_0 folgende Gleichungen:

$$\text{(7)} \qquad \begin{gathered} \alpha_i = \frac{M_i}{1 - M_i \alpha_{i+1}} \\ \alpha_{-i} = \frac{M_{-i}}{1 - M_{-i} \alpha_{-i-1}} \\ \mu_i = \alpha_i \mu_{i-1} \\ \mu_{-i} = \alpha_{-i} \mu_{-i+1} \end{gathered}$$

Wenn nun m bekannt wäre, so könnte die Berechnung der Coefficienten des Integrals unmittelbar geschehen. Da aber m selbst hier unbekannt ist, und da sein Werth für die Berechnung der M_i und M_{-i} erforderlich ist, so muss man bei numerischen Anwendungen zunächst einen angenäherten Werth von m aufsuchen. Ein solcher ist auch leicht zu finden. Für $i = o$ erhalten wir aus (6)

$$\mu_0 \{n^2 - m^2\} = \beta \{\mu_{-1} + \mu_1\}$$

und also

$$\text{(8)} \qquad m = n\sqrt{1 - \frac{\beta}{n^2}(\alpha_1 + \alpha_{-1})}$$

Diese Formel giebt bis auf Glieder dritter Ordnung in Bezug auf β für m den Annäherungswerth

$$m = n\left\{1 + \frac{\beta^2}{n^2(\lambda^2 - 4n^2)}\right\}$$

was mit dem oben für σ gefundenen Werth genau übereinstimmt. Mit Zugrundelegung desselben führt man nun eine erste Berechnung der α_i und α_{-i} aus. Mit den daraus sich ergebenden neuen Werthen von α_1 und α_{-1} verbessert man nach (8) den Werth von m und wiederholt die Rechnung, u. s. w. In den allermeisten Fällen der Störungstheorie wird die zweite Berechnung ausreichen. Nur in gewissen Fällen, vor allen Dingen wenn λ sich von $2n$ nur um Grössen erster Ordnung unterscheidet, ist es damit nicht genug. Alsdann wird nämlich, wie man sofort übersieht, der angegebene erste Werth von m nur bis auf Grössen zweiter Ordnung genau, und während weiter im allgemeinen Falle ein Coefficient μ_i oder μ_{-i} von der Ordnung i ist, so wird dagegen in dem erwähnten Fall μ_{-1} von der nullten Ordnung, was gerade einem elementären Gliede entspricht. Es ist weiter zu bemerken, dass das Auftreten eines sekulären Gliedes in diesem Falle wohl möglich, aber nicht wahrscheinlich ist. Da nämlich $m = n\,(1 - \sigma)$ ist, so sieht man, dass nur wenn entweder

$$\lambda = \frac{n\sigma}{i} = \frac{1}{i}\left\{n - m\right\}$$

oder

$$\lambda = -\frac{2n}{i} + \frac{n\sigma}{i} = -\frac{1}{i}\left\{n + m\right\}$$

μ_i unendlich gross wird, was eben das Vorkommen eines sekulären Gliedes charakterisirt.

Wenn dagegen λ und n oder λ und m in einem genau rationalen Verhältnisse zu einander stehen, so kann kein sekuläres Glied in dem Integral vorhanden sein. Da ich indessen jetzt nur die Absicht habe die Evektionsgleichung, so wie Gyldén sie gegeben, in möglichst einfacher Weise zu integriren, so werde ich auf diese Frage hier nicht weiter eingehen.

Ich will nun den Fall behandeln, dass die rechte Seite von (4) nicht Null, sondern gleich Ψ_0 ist, wo Ψ_0 ein Aggregat aus rein periodischen Gliedern bedeutet, also

$$\Psi_0 = \alpha_1 \cos(k_1 t + a_1) + \alpha_2 \cos(k_2 t + a_2) + \ldots$$

wo die Coefficienten die störende Masse als Faktor enthalten, also im Vergleich mit n^2 kleine Grössen sein sollen. Weiter machen wir über die Argumente in Ψ_0 vorläufig keine specielle Voraussetzung.

Die zu integrirende Differentialgleichung ist somit jetzt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left\{n^2 - 2\beta\cos(\lambda t + b)\right\} = \Psi_0 \tag{9}$$

Unsere Methode zeigt dann sofort, dass das Integral folgendes Aussehen hat

$$(10)\quad x = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i \cos\{w + i(\lambda t + b)\} + \sum_{p=1}^{p=+\infty} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i^{(p)} \cos\{k_p t + a_p + i(\lambda t + b)\}$$

Substituirt man diesen Ausdruck für x in (9), so erhält man zur Berechnung der μ_i und m die Gleichungen (6). Der erste Theil des Integrals von (9) ist also nichts anderes als das schon gefundene Integral (5) von (4). Was die $\mu_i^{(p)}$ betrifft, so kommt man zu dem Resultate, dass ihre Berechnung sich für jeden einzelnen p-Werth unabhängig ausführen lässt. Man erhält nämlich allgemein

$$(11)\quad \begin{gathered} (n^2 - k_p^2)\,\mu_0^{(p)} = \alpha_p + \beta\,\{\mu_1^{(p)} + \mu^{(p)}_{-1}\} \\ \mu_i^{(p)}\,\{n^2 - (i\lambda + k_p)^2\} = \beta\,\{\mu^{(p)}_{i-1} + \mu^{(p)}_{i+1}\} \\ (i = \ldots -2, -1, 1, 2, \ldots) \end{gathered}$$

Bezeichnen wir demnach mit x_0 das Integral von (4) und setzen wir weiter

$$x_p = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i^{(p)} \cos\{k_p t + a_p + i(\lambda t + b)\}$$

so können wir anstatt (10)

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$$

schreiben. Jedes von den x_p ist alsdann durch ein System von Gleichungen (11) vollständig bestimmt, und es erübrigt nur noch dasselbe für numerische Anwendungen bequem umzuwandeln.

Wir sehen dabei sofort, dass die Gleichungen (11), mit Ausnahme der ersten, der Form nach mit (6) genau übereinstimmen. Wir können demnach ganz ähnliche Formeln einführen wie bei diesen. Setzen wir also

$$M_i^{(p)} = \frac{\beta}{n^2 - (k_p + i\lambda)^2}$$

$$M^{(p)}_{-i} = \frac{\beta}{n^2 - (k_p - i\lambda)^2}$$

$$\alpha_i^{(p)} = \frac{\mu_i^{(p)}}{\mu^{(p)}_{i-1}};\ \alpha^{(p)}_{-i} = \frac{\mu^{(p)}_{-i}}{\mu^{(p)}_{-i+1}}$$

so erhalten wir

$$(12)\quad \begin{gathered} \alpha_i^{(p)} = \frac{M_i^{(p)}}{1 - M_i^{(p)}\,\alpha^{(p)}_{i+1}} \\ \alpha^{(p)}_{-i} = \frac{M^{(p)}_{-i}}{1 - M^{(p)}_{-i}\,\alpha^{(p)}_{-i-1}} \\ \mu_i^{(p)} = \alpha_i^{(p)}\,\mu^{(p)}_{i-1};\ \mu^{(p)}_{-i} = \alpha^{(p)}_{-i}\,\mu^{(p)}_{-i+1} \end{gathered}$$

Hier können aber die $M_i^{(p)}$ und $M^{(p)}_{-i}$ direkt berechnet werden, da in denselben nur bekannte Grössen enthalten sind. Demnach lassen sich auch die $\alpha_i^{(p)}$ und $\alpha^{(p)}_{-i}$ unmittelbar berechnen, indem man für einen hinreichend hohen Index $\alpha_i^{(p)}$ und $\alpha_{-i}^{(p)}$ gleich Null setzt und die übrigen daraus rückwärts berechnet; selbst in den schwierigsten Fällen, wo elementäre Glieder auftreten, ist es ausreichend mit $\alpha_6^{(p)} = o$ anzufangen.

In dieser Weise erhalten wir die $\mu_i^{(p)}$ durch $\mu_0^{(p)}$ ausgedrückt, und wir haben also nur noch diesen letzten Coefficienten zu berechnen. Da man aber

$$\mu_1^{(p)} = \alpha_1^{(p)} \mu_0^{(p)}, \quad \mu^{(p)}_{-1} = \alpha^{(p)}_{-1} \mu_0^{(p)}$$

hat, und da die $\alpha_1^{(p)}$ und $\alpha^{(p)}_{-1}$ schon bekannt sind, so giebt die Einsetzung dieser Werthe in die erste der Gleichungen (11), wenn wir dieselbe nach $\mu_0^{(p)}$ auflösen

$$\mu_0^{(p)} = \frac{\alpha_p}{n^2 - k_p^2 - \beta\,(\alpha_1^{(p)} + \alpha^{(p)}_{-1})} \tag{13}$$

womit die Aufgabe erledigt ist.

Die Gleichung (13) giebt uns auch Aufschluss über die Frage, wann elementäre oder sekuläre Glieder in dem Integrale vorhanden sind. So oft k_p entweder gleich n ist, oder sich von n nur um Grössen erster Ordnung unterscheidet, ist der Nenner von $\mu_0^{(p)}$ ebenfalls von derselben Ordnung und also $\mu_0^{(p)}$ selbst von der nullten Ordnung. Im Allgemeinen hat man also ein elementäres Glied in diesem Falle.

Wenn dagegen der Nenner von $\mu_0^{(p)}$ genau Null wird, wenn also k_p einen solchen Werth hat, dass

$$\mu_0^p \,\{n^2 - k_p^2 - \beta\,(\alpha_1^{(p)} + \alpha_{-1}^{(p)})\}$$

identisch verschwindet, so hat das Integral ein sekuläres Glied. In diesem Falle haben dann die Coefficienten $\mu_i^{(p)}$ Werthe, welche das Gleichungssystem

$$\mu_i^{(p)} \,\{n^2 - (k_p + i\lambda)^2\} = \beta\,(\mu_{i-1}^{(p)} + \mu_{i+1}^{(p)})$$

auch für $i = o$ erfüllen. Da nun aber diese Gleichungen mit den (6) identisch sind, so muss, wenn ein sekuläres Glied, der Hinzufügung von Ψ_0 zufolge, vorhanden sein soll, Eins von den k_p genau gleich m sein. Dasselbe ist der Fall, wenn k_p die Form hat

$$k_p = i\lambda \pm n$$

wo i alle positiven und negativen Zahlenwerthe annehmen darf; denn alsdann wird der Faktor von $\mu_i^{(p)}$ in (11) gleich Null.

Nehmen wir anstatt (4) die etwas allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\beta_1 \cos \lambda_1 t - 2\beta_2 \cos \lambda_2 t\}\, x = 0$$

wo wir der Kürze halber in den Argumenten die etwa noch hinzutretenden Constanten b_1 und b_2 weggelassen haben, so finden wir in ähnlicher Weise wie vorhin, dass ihr Integral die Form

$$x = \sum_{1,2} \mu_{i_1, i_2} \cos \{w + i_1\lambda_1 t + i_2\lambda_2 t\}$$

wo i_1 und i_2 alle positiven und negativen ganzen Zahlen bedeuten sollen, besitzen muss. Zur Bestimmung der μ_{i_1, i_2} und m haben wir die Formeln

$$\mu_{i_1, i_2} \{n^2 - (i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + m)^2\} = \beta_1 (\mu_{i_1-1, i_2} + \mu_{i_1+1, i_2}) + \beta_2 (\mu_{i_1, i_2-1} + \mu_{i_1, i_2+1})$$

wo $\mu_{0,0}$ die eine Integrationskonstante ist; wenn β_2 beträchtlich kleiner als β_1 ist, lassen sich diese Gleichungen unschwer nach der Regula falsi auflösen.

Verstehen wir unter Ψ_1 einen Ausdruck von der Form

$$\Psi_1 = \beta_1 \cos (\lambda_1 t + b_1) + \beta_2 \cos (\lambda_2 t + b_2) + \ldots$$

so sieht man in derselben Weise dass das Integral von

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\Psi_1\} x = 0 \tag{14}$$

aus Cosinusgliedern zusammengesetzt ist, deren allgemeine Form

$$\mu_{i_1, i_2, \ldots} \cos \{w + i_1 (\lambda_1 t + b_1) + i_2 (\lambda_2 t + b_2) + \ldots\}$$

ist.

Bekanntlich giebt es eine Menge Substitutionen, durch welche die Differentialgleichung (14) auf eine Differentialgleichung erster Ordnung und auf eine Quadratur zurückgeführt werden kann. So z. B. giebt die Substitution

$$x = e^{\int \varphi dt}$$

zur Bestimmung von φ

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi^2 = 2\Psi_1 - n^2$$

die nur durch Annäherungen zu lösen ist. Bequemer ist jedoch die anfangs dieser Schrift im Falle der Gleichung (2) benutzte Substitution

$$x = \eta \cos n\alpha; \quad \frac{dx}{dt} = - n\eta \sin n\alpha$$

Hieraus erhält man nämlich

$$\frac{d\alpha}{\partial t} = 1 - \frac{1}{n^2}\Psi_1 - \frac{1}{n^2}\Psi_1 \cos 2n\alpha$$

$$\frac{d\eta}{\eta} = -\frac{1}{n}\Psi_1 \sin 2n\alpha . dt$$

von denen die erste sich verhältnissmässig einfach annäherungsweise so integriren lässt, dass auch die analytische Form des Integrals zum Vorschein kommt. Die zweite führt darauf zu einer Quadratur.

Wenn indessen die Anzahl der Glieder in Ψ_1 sehr gross und die Konvergenz derselben nicht beträchtlich ist, und wenn ausserdem eine Menge verschiedener Argumente auftreten, so ist die anfangs auseinandergesetzte indirekte Methode ohne Zweifel allen anderen solchen vorzuziehen. Wegen der grossen Wichtigkeit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\Psi_1\}\, x = \Psi_0 \tag{15}$$

wo die Bedeutung von Ψ_1 und Ψ_0 oben angegeben worden ist, werde ich hier das Integral derselben bis auf Glieder vierter Ordnung in Bezug auf die Coefficienten in Ψ_0 und Ψ_1 anführen.

Wenn wir uns also erinnern, dass

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \beta_i \cos(\lambda_i t + b_i)$$

$$\Psi_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i \cos(k_i t + a_i)$$

wobei wir indessen der Kürze wegen die b_i und a_i in den Argumenten fortlassen, weil sie später ohne Weiteres hinzugefügt werden können, so giebt die *erste* Annäherung

$$x_1 = \eta_0 \cos w + \eta_0 \sum_i \frac{\beta_i}{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2} \cos(w \pm \lambda_i t) +$$
$$+ \sum_i \frac{\alpha_i}{n^2 - k_i^2} \cos k_i t$$

wo $w = nt + \pi$ zu setzen ist, und η_0 und π die beiden Integrationskonstanten sind.

Die *zweite* Annäherung liefert

$$x_2 = \eta_0 \cos w + \eta_0 \sum_i \frac{\beta_i}{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2} \cos(w \pm \lambda_i t) + \sum_i \frac{\alpha_i}{n^2 - k_i^2} \cos k_i t +$$
$$+ \eta_0 \sum_{i,j} \frac{\beta_i \beta_j}{\{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2\}\{n^2 - (n \pm \lambda_i \pm \lambda_j)^2\}} \cos(w \pm \lambda_i t \pm \lambda_j t)$$
$$+ \sum_{i,j} \frac{\alpha_i \beta_j}{\{n^2 - k_i^2\}\{n^2 - (k_i \pm \lambda_j)^2\}} \cos(k_i t \pm \lambda_j t)$$

Hier ist

$$w = n(1 - \sigma)t + \pi$$

zu setzen, wo

$$\sigma = -\frac{1}{n^2}\sum \frac{\beta_i^2}{\lambda_i^2 - 4n^2}$$

Weiter ist zu bemerken, dass in den Argumenten

$$w + \lambda_i t - \lambda_j t$$

$$w - \lambda_i t + \lambda_j t$$

die Combination $i = j$ ausgeschlossen ist.

Da in der *dritten* Annäherung das Argument w keine Veränderung erleidet, so können wir schreiben

$$x_3 = x_2 - 2\sigma n \eta_0 \sum_i \frac{\beta_i (n \pm \lambda_i)}{\{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2\}^2} \cos(w \pm \lambda_i t) +$$

$$+ \eta_0 \sum_{i,j,k} \frac{\beta_i \beta_j \beta_k \,.\, \cos(w \pm \lambda_i t \pm \lambda_j t \pm \lambda_k t)}{\{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2\}\{n^2 - (n \pm \lambda_i \pm \lambda_j)^2\}\{n^2 - (n \pm \lambda_i \pm \lambda_j \pm \lambda_k)^2\}} +$$

$$+ \sum_{i,j,k} \frac{\alpha_i \beta_j \beta_k \cos(k_i t \pm \lambda_j t \pm \lambda_k t)}{\{n^2 - k_i^2\}\{n^2 - (k_i \pm \lambda_j)^2\}\{n^2 - (k_i \pm \lambda_j \pm \lambda_k)^2\}}$$

wo, wie erwähnt, σ den in der zweiten Annäherung gefundenen Werth unverändert behält.

Wenn wir uns vorstellen, dass die β_i und α_i mit der störenden Masse multiplicirt sind so giebt diese dritte Approximation im Allgemeinen alle Glieder bis zur dritten Ordnung inclusive in Bezug auf die störende Kraft. Ausnahmen finden statt, wenn die λ_i und k_i solche Werthe besitzen, dass die Integrationsdivisoren selbst von der ersten Ordnung werden, also wenn elementäre Glieder auftreten. In solchem Falle ist für diese Glieder die Approximation nur in den Gliedern zweiter Ordnung vollständig. Indessen dürfte es überflüssig sein die Genauigkeit hier weiter zu treiben.

Der Vollständigkeit halber werde ich zum Schluss zeigen, dass die oben angegebene Methode sich mit gleichem Erfolge auf ein System *simultaner* Differentialgleichungen anwenden lässt. Zu diesem Zweck ist es vollständig ausreichend die beiden Differentialgleichungen

$$(16) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x &= P(x, x') \\ \frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2 x' &= P'(x, x') \end{aligned}$$

zu betrachten, wo $P(x,x')$ und $P'(x,x')$ Potenzreihen bedeuten sollen, die nach den positiven ganzen Potenzen der beiden Variabeln x und x' fortschreiten. Ueber die Coefficienten dieser

Reihen sowie über n^2 und n'^2 denken wir uns ähnliche Voraussetzungen gemacht, wie im Falle der Gleichung (2), damit wir versichert sein dürfen, dass die folgenden Entwickelungen, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der mit η_0 und η'_0 bezeichneten Integrationskonstanten, beständig konvergiren.

Den vorhin befolgten Principien gemäss, schreiben wir, indem wir zwei vorläufig unbestimmt gelassene Constanten ν und ν' einführen, anstatt (16)

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x &= -n^2\nu x + P(x, x')\\ \frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2(1-\nu')x' &= -n'^2\nu' x' + P'(x, x')\end{aligned} \tag{17}$$

Darauf haben wir von den Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x = 0$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2(1-\nu')x' = 0$$

auszugehen. Ihre Integrale

$$x = \eta_0 \cos w$$

$$x' = \eta'_0 \cos w'$$

wo

$$w = n(1-\sigma)t + \pi$$

$$w' = n'(1-\sigma')t + \pi'$$

$$1 - \sigma = \sqrt{1-\nu}$$

$$1 - \sigma' = \sqrt{1-\nu'}$$

und η_0, η'_0, π und π' die vier Integrationskonstanten sind, werden in die rechten Seiten von (17) substituirt, worauf zwei Differentialgleichungen von folgender Form resultiren

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x = -n^2\nu\eta_0\cos w + \sum_{i,i'} a_{i,i'}\cos(iw + i'w)$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2(1-\nu')x' = -n'^2\nu'\eta'_0\cos w' + \sum_{i,i'} a'_{i,i'}\cos(iw + i'w')$$

Hierauf sind die ν und ν' zu bestimmen, und zwar so, dass in der ersten Gleichung kein Glied in $\cos w$, in der zweiten kein Glied in $\cos w'$ vorkommt. Es muss also

$$\nu = \frac{a_{10}}{n^2\eta_0}$$

$$\nu' = \frac{a'_{01}}{n'^2\eta'_0}$$

genommen werden. Die Integration liefert dann folgendes in den Gliedern erster Ordnung in Bezug auf die Coefficienten in P und P' vollständige Integralsystem:

$$x = \eta_0 \cos w + \frac{1}{n^2} \sum_{i,i'} \frac{a_{i,i'}}{1 - \left\{i + \frac{n'}{n} i'\right\}^2} \cos (iw + i'w')$$

$$x' = \eta'_0 \cos w' + \frac{1}{n'^2} \sum_{i,i'} \frac{a'_{i,i'}}{1 - \left\{i' + \frac{n}{n'} i\right\}^2} \cos (iw + i'w')$$

Bei der Summation ist in dem ersten Ausdruck die Combination

$$i = 1, \quad i' = 0$$

in dem zweiten

$$i = 0, \quad i' = 1$$

auszuschliessen.

Die Glieder zweiter Ordnung ergeben sich darauf, indem man die rechten Seiten von (17) mit den eben gefundenen ersten Annäherungen von x und x' berechnet und ν und ν' in derselben Weise wie vorhin bestimmt, u. s. w. Man sieht daraus, dass die strengen Integrale nur die beiden Argumente w und w' enthalten.

Das nämliche Verfahren ist offenbar auch dann noch zu benutzen, wenn mehr als zwei simultane Differentialgleichungen derselben Form vorliegen, oder wenn die Coefficienten für die Produkte und Potenzen der x und x' in P und P' periodische Funktionen von t sind, deren Argumente als bekannt vorausgesetzt werden.

Auf solche Differentialgleichungen führen z. B. die bekannten Differentialgleichungen für die sekulären Aenderungen der elliptischen Bahnelemente — vgl. u. A. Leverrier, Annales de l'Observatorie de Paris, Tome II, pag. 110 —, wenn man die bisher vernachlässigten höheren Potenzen der Neigungen und Excentricitäten mit berücksichtigt.