

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

inw. ~~2720~~

№ 235

Schrank 11.3

Fach 3

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297485

x  
1957



# HYDROMECHANIK

ODER

## DIE TECHNISCHE MECHANIK FLÜSSIGER KÖRPER

VON

D<sup>R</sup>. MORITZ RÜHLMANN,

KÖNIGLICH PREUSSISCHER GEHEIMER REGIERUNGSRATH UND PROFESSOR  
AN DER K. POLYTECHNISCHEN SCHULE IN HANNOVER.

ERSTES HEFT.

HYDROSTATIK UND HYDRODYNAMIK BIS ZUM AUSFLUSSE DES  
WASSERS DURCH SOGENANNTHE PONCELET-MÜNDUNGEN.

ZWEITE VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUSGABE.



HANNOVER.

HAHN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1879.

*N<sup>o</sup> 61a*

X  
1954



I - 349452

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

~~112480~~

Hannover. Schrift und Druck von Fr. Culemann.

Akc. Nr.

~~1999~~/49

1394-10-265/2017

## Vorbemerkungen.

---

Bei der Herausgabe des ersten Heftes der zweiten Auflage meiner technischen Mechanik flüssiger Körper, halte ich es für angemessen, folgende Bemerkungen zu machen.

Zunächst war ich bemüht, alle möglichen Verbesserungen und Erweiterungen anzubringen, welche der gegenwärtige Standpunkt dieser Erfahrungswissenschaft zu fordern berechtigt ist.

Sodann wurden „die geschichtlichen Notizen“ in hervorragender, umfänglicher Weise abgefaßt, nachdem ich in meiner Lehrthätigkeit mich von dem großen Nutzen und von der äußerst wirksamen Anregung überzeugt hatte, welche das Einflechten des geschichtlichen Elementes auch hier (wie in meiner Allgemeinen Maschinenlehre), namentlich für die Studirenden Polytechnischer Hochschulen, mit sich führt.

Wenn irgend möglich, soll die zweite Hälfte (der Schluß) des Buches etwa Mitte August dieses Jahres erscheinen.

Endlich habe ich der neuen Verlagsbuchhandlung noch meinen besonderen Dank für die Ausstattung des Werkes auszusprechen und zwar sowohl hinsichtlich des schönen Druckes und Papieres, als auch für die Erneuerung sämmtlicher Holzschnitte.

Hannover, im Monat Februar 1879.

**Rühlmann.**





# Hydromechanik.

## Allgemeine Einleitung.

### §. 1.

Flüssig heißt jeder Körper, dessen Theile derartig äußerst leicht verschiebbar sind, daß er jede selbstständige Gestalt entbehrt, diese vielmehr von dem Gefäße bestimmt wird, in welchem er eingeschlossen ist und von den Kräften, welche auf ihn einwirken.

Da es bis jetzt, streng genommen, nicht möglich gewesen ist, die Grenze anzugeben, wo die feste Körperform aufhört und die flüssige anfängt, so nimmt man in der Mechanik die flüssigen Körper als absolut flüssig, d. h. als solche an, welche die Eigenschaft der leichten Verschiebbarkeit im höchsten Grade besitzen. Letzterer Annahme folgen wir stets, wenn das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird.

### §. 2.

Hinsichtlich bestimmt hervortretender physikalischer Eigenschaften hat man zwei Arten von Flüssigkeiten zu unterscheiden. Bei der einen Art hängen die Theilchen mit einer äußerst geringen, meist Null zu setzenden Attractionskraft (Cohäsion) zusammen, während bei der anderen Art diese Kraft nicht nur gänzlich fehlt, sondern den Theilchen eine Repulsivkraft (Expansivkraft) innewohnt, die ihnen ein stetes Ausdehnungsbestreben ertheilt.

Vermöge dieser Eigenschaft kann ein bestimmtes Volumen auch nur erhalten werden, wenn dasselbe von allen Seiten durch Gefäßwände begrenzt oder überall von äußeren Kräften gedrückt wird.

Eine minder physikalisch scharfe, jedoch technisch völlig zulässige Eintheilung der flüssigen Körper ist die in unelastische und in elastische Flüssigkeiten. Unter ersteren versteht man solche, deren Volumen durch Einwirkung äußerer Kräfte oder der Wärme verhältnißmäßig höchst wenig verändert werden kann<sup>1)</sup>, während letztere die flüssigen Körper begreift, welche diese Veränderung unter denselben Verhältnissen im höchsten Grade zeigen.

<sup>1)</sup> Unter dem Drucke von 1,0333 Kilogramm auf ein Quadrat-Centimeter Rühlmann's Hydromechanik.

Zu den Flüssigkeiten der ersteren Art gehören Wasser, Quecksilber, Alkohol etc. und man nennt diese auch tropfbare Flüssigkeiten, weil sie unter gewissen Umständen als Tropfen erscheinen können. Flüssigkeiten der zweiten Gattung sind die atmosphärische Luft und alle luftförmigen Körper oder Gase, wie Sauerstoff-, Stickstoff-, Wasserstoff-Gas etc.<sup>1)</sup>.

Eine besondere Art elastischer Flüssigkeiten sind die, welche man Dämpfe nennt, deren Unterschied von den Gasen jedoch nur durch gewisse Grenzen der Temperatur und des äußeren Drucks bedingt wird.

In der Folge wählen wir als Repräsentant der tropfbaren Flüssigkeiten das Wasser und ebenso für die luftförmigen Flüssigkeiten die atmosphärische Luft.

oder von 14,7 Pfund auf ein Quadratzoll engl. (einer Atmosphäre) wird um Millionentheile des ursprünglichen Volumens zusammengedrückt:

	Nach Oerstedt bei 3,75° C.	Nach Colladon und Sturm bei 10° C.	Nach Aimé bei 12,6° C.	Nach Regnault und Grassi bei 0° C.   bei 53° C.	
Quecksilber	2,65	5,03	4,0	3,0	
Wasser	46,77	50,50	50,2	50,0	44,0

Man sehe hierüber: Oerstedt in Poggend. Annalen Bd. 9, S. 603; Bd. 12, S. 158; Bd. 31, S. 362. Colladon und Sturm a. a. O. Bd. 12, S. 39. Aimé: Ebendasselbst. Zweiter Ergänzungsband S. 228. Regnault: Mémoires de l'Académie des Sciences. Tome XXI, Pg. 429. Paris, 1847. Grassi: Annal de chim. es et de phys. III. Sér. T. XXXI.

<sup>1)</sup> Die gasförmigen Körper lassen sich auch als solche bezeichnen, die weder eine selbstständige Gestalt, noch ein selbstständiges Volumen besitzen und sich durch jeden ihnen dargebotenen Raum verbreiten, bis sich ihnen ein äußeres Hinderniß entgegenstellt. In Folge ihres Expansionsvermögens können die Gase auch keine freie Oberfläche haben wie die tropfbar flüssigen Körper.

Nachdem man von Anfang dieses Jahrhunderts an gefunden hatte, verschiedene Gase tropfbar zu machen, z. B. kohlen-saures Gas unter einem Drucke von 36 Atmosphären, salzsaures Gas unter dem Drucke von 50 Atmosphären u. s. w., gelang es doch erst am Schlusse des Jahres 1877, sowohl Cailletet in Paris als Pietet in Genf, auch die bis dahin noch als permanent betrachteten Gase, wie Sauerstoff und Wasserstoff, durch die combinirte Anwendung von Druck und Kälte tropfbar zu machen und zwar beispielsweise durch Pietet das Sauerstoffgas unter dem Drucke von 320 Atmosphären und bei 140° C. Kälte.

Man sehe hierüber u. A. die Beiblätter (Poggendorfs) Annalen der Physik und Chemie Band II (1878) S. 15 und S. 135.

Atmosphärische Luft (21 Maaßtheile Sauerstoff und 79 Maaßtheile Stickstoff) will schon 1826 Perkins (Phil. Trans. 1826. III. 541) unter dem Drucke von 1200 Atmosphären tropfbar flüssig gemacht haben; allein seine Angaben waren nicht über allen Zweifel erhaben: Neuerdings soll Cailletet tropfbare atmosphärische Luft schon bei einer Pressung von 200 Atmosphären erhalten haben. Man sehe hierüber u. A. die englische „Zeitschrift Engineering“ vom 26. April 1878, Pg. 325 unter der Ueberschrift: „Liquefaction of Gases“.

## §. 3.

Die Wissenschaft, welche untersucht, inwiefern Kräfte, die auf flüssige Körper einwirken, denselben Gleichgewicht oder Bewegung zu ertheilen vermögen, wird Mechanik flüssiger Körper (Hydromechanik) genannt. Hiernach und mit Berücksichtigung der vorher bemerkten zwei Flüssigkeitsformen, ergibt sich die Eintheilung der Hydromechanik von selbst, nämlich in Hydrostatik, Aerostatik, Hydrodynamik und Aerodynamik. Letztere beiden faßt man auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Hydraulik zusammen.

## §. 4.

**Geschichtliche Notizen.**

Die allerältesten Untersuchungen im Gebiete der Mechanik flüssiger Körper betrafen einzig und allein deren Gleichgewicht (die Hydrostatik) und zwar ist es Archimedes<sup>1)</sup>, dem wir die ersten Principien hierüber verdanken. Dieser ausgezeichnete Mathematiker, der als Begründer der antiken, streng wissenschaftlichen Statik überhaupt betrachtet werden muß, behandelte insbesondere das Gleichgewicht fester auf dem Wasser schwimmender Körper<sup>2)</sup> und zwar in einer Weise, daß spätere Mathematiker verhältnißmäßig nur wenig beizufügen im Stande waren<sup>3)</sup>.

Der für Cultur, Kunst und Wissenschaft gleich traurige Zustand, in welchen bald nach Archimedes die damalige civilisirte Welt versetzt wurde, und die fast 2000jährige Dauer desselben war auch für die Hydrostatik die Ursache, daß man sich bis zum Ende des 16. Jahrhunderts mit den Sätzen des Archimedes begnügte.

Vornämlich unbekannt, obwohl naheliegend, waren die Gesetze geblieben, nach welchen Flüssigkeiten auf Böden und Wände drücken, in denen sie enthalten sind.

Der niederländische Mathematiker Stevin<sup>4)</sup>, überhaupt einer der würdigsten Vertreter der neuen wissenschaftlichen Mechanik, war der

<sup>1)</sup> Archimedes wurde um das Jahr 287 vor Chr. Geb. zu Syrakus geboren und 212 vor Chr. Geb. bei der Einnahme seiner Vaterstadt durch den römischen Feldherrn Marcellus, von einem Soldaten, getödtet.

<sup>2)</sup> Die hydrostatische Arbeit des Archimedes hat das Schicksal gehabt, nicht in der griechischen Ursprache, sondern durch arabische Vermittlung und zwar in einer höchst defecten Gestalt auf uns zu gelangen. Dühring (Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Zweite Auflage, S. 87) citirt eine lateinische Uebersetzung, aus zwei Büchern bestehend, von Commandinus, welche betitelt ist: „De iis quae vehuntur in aqua“ und 1565 erschienen sein soll. An anderer Stelle (Gehler's Physikalisches Wörterbuch, Ausgabe von 1789, Theil II, S. 660) werden diese zwei Bücher des Archimedes von den schwimmenden Körpern und zwar 1615 in Paris erschienen, unter dem Titel aufgeführt: „De insidentibus humido“.

<sup>3)</sup> Lagrange in der *Mécanique analytique*, 2. Ausgabe, 1811, Bd. 1, Lect. VI, Art. I.

<sup>4)</sup> Stevin wurde 1548 zu Brügge geboren und starb 1620 zu Haag. Dem Verfasser liegt über sein Leben und Wirken speciell ein Buch des Professors Steichen in Brüssel vor, welches betitelt ist „Mémoire sur la Vie et les Travaux de Simon Stevin“ und 1846 in Brüssel bei Van Dale erschien.

Erste, welcher sich um diesen Theil der Hydrostatik wesentliche Verdienste erwarb. In seiner Schrift „Principien der Statik und Hydrostatik“ (Leyden 1586)<sup>1)</sup> entwickelte er aus den Sätzen des Archimedes nicht nur das sogenannte hydrostatische Paradoxon (mit welchem Namen man den Satz belegte, daß Flüssigkeiten einen viel größeren Druck als ihr eignes Gewicht auf die Böden der Gefäße ausüben könnten), sondern bestimmte namentlich auch den Druck der Flüssigkeiten auf verticale und geneigte Seitenwände<sup>2)</sup>.

Der scharfsinnige, um Physik, Mathematik und Astronomie hochverdiente Italiener Galilei<sup>3)</sup>, der Verbesserer der Statik und Schöpfer der Dynamik, wandte zur wissenschaftlichen Herleitung der hydrostatischen Gesetze zuerst eine dem heutigen Principe der virtuellen Geschwindigkeit ähnliche Methode an, wobei man (später) jedoch noch Mancherlei auszusetzen hatte<sup>4)</sup>. In letzterer Beziehung noch glücklicher war der geistreiche französische Geometer Pascal<sup>5)</sup>, welcher das genannte Princip namentlich zum Beweise des Satzes anwandte, daß ein an einem Punkte der Oberfläche einer flüssigen Masse ausgeübter Druck sich gleichmässig nach allen anderen Punkten der Flüssigkeit verbreitet, wofern diese nicht auszuweichen im Stande ist.

Hiernach müßte also eine Flüssigkeit im Gleichgewicht bleiben, welche ein Gefäß ganz ausfüllt, in dem man geeignete Oeffnungen anbrachte, diese Oeffnungen durch Kolben verschloß und gegen letztere Kräfte wirken ließ, die sich gerade wie die Querschnitte dieser Kolben verhielten. (Man sehe hierzu die bildliche Darstellung in der nachher folgenden Figur 1)<sup>6)</sup>. Nachdem Pascal die Principien des Gleichgewichts flüssiger Körper vollständig festgestellt hatte, bemühte man sich, von da ab, die Grenzen dieser Wissenschaft immer mehr und mehr zu erweitern und die betreffenden Untersuchungen namentlich auch auf ungleichartige Flüssigkeiten auszudehnen, wenn auf diese beliebige

<sup>1)</sup> Eine Sammlung der Stevinschen literarischen Arbeiten erschien von 1605 bis 1608 in Leiden, in 2 Foliobänden, unter dem Titel: „Wiskonstighe Gedachtnissen.“ Witlebord Snellius hat den größten Theil derselben in die lateinische Sprache übersetzt, während Alb. Girard eine französische Uebersetzung besorgte.

<sup>2)</sup> Dühning, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Zweite Auflage, Seite 89.

<sup>3)</sup> Galilei oder eigentlich Galileo ward geboren am 15. Februar 1564 zu Pisa und starb 1642 (Geburtsjahr Newton's) den 8. Januar im 78. Jahre seines Alters zu Florenz.

<sup>4)</sup> Dühning a. a. O. S. 91.

<sup>5)</sup> Pascal, geb. am 19. Juni 1623 zu Clermont-Ferrand in der Auvergne, gestorben am 29. August 1662 in Paris.

<sup>6)</sup> In der *Traité de l'équilibre des liqueurs etc.* betitelten Abhandlung, welche 1663, d. h. ein Jahr nach Pascal's Tode herausgegeben wurde, wird jede Flüssigkeit, die sich in einem Gefäß befindet, als eine Maschine betrachtet, welche in ähnlicher Weise, wie der Hebel und die anderen sogenannten einfachen Maschinen, die gegenseitige Wirksamkeit der angreifenden Kräfte reget und für deren Gleichgewicht bestimmte Verhältnisse vorschreibt. Auf der Grundlage dieser Anschauung wird das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten sogar zur Erläuterung des gleichen Drucks gebraucht, der auf jeden Theil der die Wandungsausschnitte ersetzenden Stempel gerichtet ist.

Kräfte wirken. Hierzu gaben insbesondere die wichtigen Capitel von der Gestalt der Erde und die Erklärung der Ebbe und Fluth als Probleme der Hydrostatik directe Veranlassung. Indem sich die ausgezeichnetsten Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts mit der Auflösung dieser speciellen Fragen beschäftigten, brachten sie dadurch die wissenschaftliche Hydrostatik in die vollendete Form, in welcher wir sie heute vor uns erblicken.

Insbesondere waren es zuerst Huyghens<sup>1)</sup>, Newton<sup>2)</sup>, Bouguer<sup>3)</sup> und Daniel Bernoulli<sup>4)</sup>, welche sich hierbei zugleich um die Mechanik flüssiger Körper überhaupt verdient machten. Die vollständigsten Arbeiten lieferten jedoch erst Maclaurin<sup>5)</sup> (*Treatise on Fluxions*, Tome II, Cap. XIV) und Clairault<sup>6)</sup> (*Theorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique*, 1743). Während Maclaurin's betreffendes Werk als ein Meisterstück der Synthesis betrachtet wird, zeigte Clairault die außerordentliche Macht der Analysis und entwickelte zuerst die partiellen Differentialgleichungen, durch welche man die Gesetze des Gleichgewichts einer flüssigen Masse ausdrücken kann, wenn auf ihre Theile beliebige Kräfte wirken.

Dem größten und fruchtbarsten Mathematiker seiner Zeit, Leonhard Euler<sup>7)</sup>, gelang es später, die Clairaultschen partiellen Differentialgleichungen auf eine bei Weitem einfachere Art abzuleiten und sie in die höchst elegante Form zu bringen, in der wir sie heute zur Beantwortung der wissenschaftlichen Gleichgewichtsfragen flüssiger Körper anwenden<sup>8)</sup>.

Nach Euler haben Lagrange<sup>9)</sup> (*Mécanique analytique*. Erste Ausgabe 1788. Zweite Ausgabe 1811) und Laplace<sup>10)</sup> (*Mécanique céleste*, 1799) die Hydrostatik allein auf die vollkommene Beweglichkeit der kleinsten Flüssigkeitstheilchen gegründet und sodann die betreffenden Entwicklungen mit alleiniger Zuziehung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit ausgeführt. Die citirten Werke beider großen Meister sind auch für die Mechanik flüssiger Körper als die vollendetsten

<sup>1)</sup> Huyghens, geboren den 14. April 1629 in Haag; gestorben den 8. Juni 1695 ebendasselbst.

<sup>2)</sup> Newton, geboren den 5. Januar 1643 in Whoolsthorpe (Lincolnshire); gestorben den 31. März 1727 in London.

<sup>3)</sup> Bouguer, geboren den 16. Februar 1698 in Croisic (Nieder-Bretagne); gestorben in Paris den 15. August 1758.

<sup>4)</sup> Daniel Bernoulli, geboren den 9. Februar 1700 in Gröningen; gestorben den 17. März 1783 in Basel.

<sup>5)</sup> Maclaurin, geboren im Februar 1698 in Kilmoddan bei Inverary; gestorben den 14. Juni 1746 in York.

<sup>6)</sup> Clairault, geboren den 13. Mai 1713 in Paris; gestorben den 17. Mai 1765 ebendasselbst.

<sup>7)</sup> Euler, geboren den 15. April 1707 in Basel; gestorben den 18. Sept. 1783 in St. Petersburg.

<sup>8)</sup> Man sehe hierüber den folgenden Paragraph 7.

<sup>9)</sup> Lagrange, geboren den 25. Januar 1736 in Turin (aus einer seit 1672 daselbst ansässigen französischen Familie); gestorben den 10. April 1813 in Paris.

<sup>10)</sup> Laplace, geboren den 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge (Dép. Calvados); gestorben den 5. März 1827 in Paris.

Muster analytischer Schärfe und Allgemeinheit zu betrachten, so daß sie wohl für alle Zeiten (wahrscheinlich) die Schlußsteine der gesamten wissenschaftlichen Mechanik bilden.

Daß man sich nach einer derartigen Gestaltung der Mechanik flüssiger Körper auch an die Auflösung der schwersten Probleme der Hydrostatik (mit Einführung anderer entsprechender Hypothesen) wagte, zeigt insbesondere die Capillaritätsfrage<sup>1)</sup>, von welcher noch Daniel Bernoulli bemerkte, daß er sie auf kein allgemeines Gesetz zurückführen könne. Dieser wichtige Gegenstand fand nachher, insbesondere durch die Arbeiten von Laplace, Young<sup>2)</sup>, Gauß<sup>3)</sup>, Poisson<sup>4)</sup>, Hagen<sup>5)</sup> u. A. seine Erledigung<sup>6)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Unter Capillarität versteht man das Heben oder Senken des Wasser- oder Quecksilberspiegels in engen Röhren oder zwischen sehr nahestehenden Wänden.

<sup>2)</sup> Thomas Young, geboren zu Milverton (Somersetshire) den 13. Juni 1773; gestorben den 10. Mai 1829 in London.

<sup>3)</sup> Carl Friedrich Gauß, geboren den 30. April 1777 in Braunschweig; gestorben den 23. Februar 1855 in Göttingen.

<sup>4)</sup> Poisson, geboren den 21. Juni 1781 in Pithiviers (Dép. Loiret); gestorben den 25. April 1840 in Paris.

<sup>5)</sup> Hagen, geboren den 3. März 1797 in Königsberg (Preussen).

<sup>6)</sup> Ausführlichere Literatur über das Kapitel „Capillarität“ liefert namentlich Wülbern in seinem „Lehrbuche der Experimentalphysik“ (Dritte Ausgabe) von §. 74 an unter der Ueberschrift: „Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern“. Als Ergänzung hierzu möchte der Verfasser, insbesondere zum Studium für Anfänger, noch auf Jamin's „Cours de Physique de l'école polytechnique“, Paris 1858, aufmerksam machen, woselbst der Abschnitt „De la Capillarité“ die Treizième Leçon bildet.

# Erste Abtheilung.

## Hydrostatik.

### Erstes Capitel.

#### §. 5.

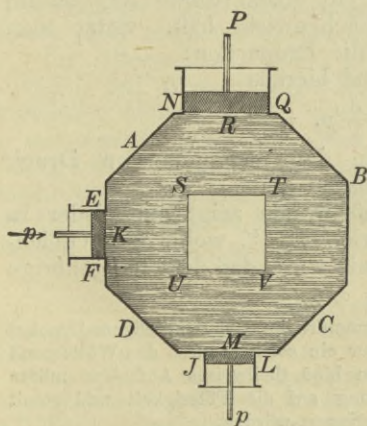
#### Pascal's Gesetz.

Wäre uns Gestalt, Größe und Verbindungsart der Theile flüssiger Körper bekannt, so ist es wenigstens wahrscheinlich, daß sich die Gesetze des Gleichgewichts derselben aus jenen ableiten lassen würden, welche für feste Körper gefunden worden sind. Da dies jedoch (bis jetzt) nicht der Fall ist, so sind wir genöthigt, eine charakteristische Eigenschaft der flüssigen Körper aufzusuchen und solche als Grundgesetz zur Ableitung der Lehren des Gleichgewichts zu benutzen. Eine solche folgt aber unmittelbar aus der leichten Verschiebbarkeit der Theile eines flüssigen Körpers, und man kann sie auf folgende Weise ausdrücken:

„Wird auf einen flüssigen Körper ein Druck ausgeübt, und bleibt ersterer dabei im Gleichgewicht, so pflanzt sich dieser Druck nach allen Richtungen durch die flüssige Masse gleichförmig fort und jedes Theilchen derselben erfährt einen gleichen Druck.“

Zur Erläuterung dieses Satzes diene Nachstehendes.

Fig. 1.



Damit vorerst der gemachten Voraussetzung entsprochen werde, daß nämlich der flüssige Körper während des auf ihn einwirkenden Drucks im Gleichgewicht verbleibt, denken wir uns die Flüssigkeit in einem (beliebigen) Gefäße befindlich, welches sie ganz ausfüllt und wovon *ABCD* Fig. 1 den Horizontal-Durchschnitt darstellen mag. Die röhrenförmige Mündung *EF* dieses Gefäßes sei durch einen verschiebbaren Kolben *K* gehörig dicht verschlossen, und die Flüssigkeit reiche genau bis unter die Fläche dieses Kolbens. Ferner denken wir uns dabei die Flüssigkeit als gewichtslos, sehen also von der

Wirkung der Schwerkraft, überdieß auch von allen sonst noch möglichen Kräften (und Widerständen) ab und nehmen nur an, daß von Außen gegen den Kolben  $K$  ein Normaldruck  $= p$  ausgeübt wird.

Die in dem Grundsatz ausgesprochene Behauptung läßt sich nun auf den Druck anwenden, welchen jedes Stück der Gefäßwände, ferner jeder in der Flüssigkeit befindliche Körper, sowie jeder Theil der Flüssigkeit selbst erfährt.

Jedes Stück der Gefäßwand, wie  $C, D$  etc., wo solches auch liegen mag, dessen Größe dem Querschnitte des Kolbens  $K$  gleichkommt, erfährt nämlich nach Außen einen dem  $p$  gleichen Normaldruck, dem für's Gleichgewicht die Festigkeit des Gefäßes gehörigen Widerstand leisten muß<sup>1)</sup>; oder wenn eine Stelle der Wandfläche, wie z. B.  $JL$  durch einen ebenfalls verschiebbaren Kolben  $M$  verschlossen wäre, so müßte, wenn ebenfalls Gleichgewicht stattfinden soll, gegen  $M$  ein von Außen nach Innen gerichteter Normaldruck angebracht werden, welcher dem auf den Kolben  $K$  wirkenden Drucke  $p$  völlig gleichkommt. — Der gegen  $K$  ausgeübte Normaldruck wirkt nämlich hier nicht bloß auf die in seiner geradlinigen Richtung liegenden Theile, wie solches bei festen Körpern der Fall sein würde, sondern er wird wegen der leichten Verschiebbarkeit der Flüssigkeitselemente auch unverändert denjenigen derselben mitgetheilt, welche seitwärts des Kolbens  $K$  liegen. — Wieviel aber auch dem Kolben  $K$  an Querschnitt gleiche verschiebbare Kolben  $M$  vorhanden sein mögen, jeder derselben müßte für den Zustand des Gleichgewichts durch einen Gegendruck gehalten werden, welcher dem gegen  $K$  ausgeübten Drucke gleich ist. Demnach ist aber jeder von diesen Drücken so anzusehen, als hielte er allen übrigen das Gleichgewicht; auch erkennt man, daß der Abstand zwischen den einzelnen beweglichen Wandstücken oder Kolben nicht in Betracht gezogen zu werden braucht, vielmehr gleich Null gesetzt werden kann, weshalb überhaupt folgt, daß der gegen einen Kolben  $K$  vom Querschnitte  $= a$  ausgeübte Druck  $= p$  dem auf einen Kolben vom Querschnitte  $R$  (in einem Rohre  $NQ$ )  $= na$  wirkenden Drucke  $= np$  das Gleichgewicht hält. Setzt man  $na = A, np = P$ , so ergibt sich die Proportion:

$$p : P = a : A \text{ und hieraus}$$

$$I. P = \frac{A}{a} p.$$

Den Normaldruck  $P$  kann man den fortgepflanzten Druck nennen, im Gegensatze des unmittelbaren  $p$ .

Dasselbe Verhalten wie die Gefäßwände zeigt auch jeder in der Flüssigkeit befindliche Körper, wie  $STUV$ , wobei für's Gleichgewicht nur wieder voraussetzen sein wird, daß derselbe gehörige

<sup>1)</sup> Es kann hier lediglich von einem Normaldrucke (rechtwinkeligem Drucke) gegen die Wandstücke die Rede sein, da nur ein solcher durch den Widerstand der Gefäßwände völlig aufgehoben wird; ein bloß theilweises Aufheben müßte Kräfte übrig lassen, die eine neue Wirkung auf die Flüssigkeit und somit Bewegung, nicht aber Gleichgewicht hervorbringen würden.



Festigkeit besitzt, um nicht von dem auf ihn fortgepflanzten Drucke in einen kleineren Raum zusammengedrängt zu werden. Endlich gilt dasselbe auch für jedes Theilchen der Flüssigkeit selbst, indem man beispielsweise blos die Ausdehnungen  $ST$  und  $UV$  des vorgedachten Körpers klein genug zu denken braucht, um eine Ebene entstehen zu lassen, die man auch als Berührungsfläche von Flüssigkeitstheilchen selbst ansehen, und auf welche man das Vorhergehende unmittelbar anwenden kann.

Anmerkung. Bei Flüssigkeiten, die mehr Cohäsion besitzen als Wasser, und andere, die im Vorstehenden vorausgesetzt wurden, besonders aber bei denen, welche man gewöhnlich mit dem Namen „halbflüssige Körper“ bezeichnet, findet der Satz der gleichförmigen Druckfortpflanzung mehr oder weniger unvollständig statt, wie wir später beim Boden- oder Seitendruck auf Wände besonders kennen lernen werden.

Höchst merkwürdig ist die bei den Vorarbeiten zum Baue der Menai-Röhrenbrücke in England gemachte Beobachtung, nach welcher Gußeisen, als auch andere Metalle, bei sehr hohen Drücken, ähnlich wie Flüssigkeiten, einen gleichen Druck nach jeder Richtung ausüben sollen, in welcher die Bewegung durch Widerstände verhindert wird.

Man sehe deshalb: Clark, The Tubular Bridges. Vol. I. p. 311.

### §. 6.

Nach Gleichung I kann man eine Kraft beliebig verstärken, d. h. mit einem sehr geringen Drucke einen außerordentlich großen erzeugen, wenn man die gegebene Kraft  $= p$  gegen einen Kolben vom Querschnitte  $= a$  wirken und den erzeugten Druck durch eine Flüssigkeit auf einen zweiten, entsprechend größeren Kolben vom Querschnitte  $= A$  fortpflanzen läßt. Daß indeß hierdurch an mechanischer Wirkung Nichts gewonnen wird, werden wir nachher besonders zeigen.

Auf diesem Satze beruht namentlich das Princip einer Maschine, die nach ihrem Erfinder Bramah'sche Presse<sup>1)</sup>, auch hydrostatische oder hydraulische Presse genannt wird. Das Wesentlichste einer solchen Maschine zeigt Fig. 2 im Verticaldurchschnitte.

Im Allgemeinen besteht dieselbe aus zwei cylindrischen, gewöhnlich mit Wasser oder Oel gefüllten Gefäßen  $A$  und  $B$  von ungleichen Durchmessern, deren innere Räume durch ein Rohr  $C$  so mit einander verbunden sind, daß sie Gefäße bilden, wobei die Flüssigkeit ungehindert aus einem in das andere treten kann, und welche man communicirende Gefäße oder Röhren nennt. In jedem der Cylinder befindet sich ein verschiebbarer (vermöge einer sogenannten Liederung) gehörig dichtender Kolben. Durch eine Oeff-

<sup>1)</sup> Joseph Bramah, geb. 1748 (oder 1749) zu Stainsborough in Yorkshire, ursprünglich Kunstschler, nachher berühmter Mechaniker und Ingenieur in London. Gest. daselbst 1827.

Das Geschichtliche der hydrostatischen oder hydraulischen Presse, begleitet von Abbildungen der ältesten Constructionsformen derselben, hat der Verfasser im 2. Bande seiner Allgem. Maschinenlehre (2. Auflage), S. 359 behandelt.

nung  $E$  gelangt das Wasser von unten in den kleinen Cylinder, und der Rücktritt wird durch ein in gedachter Oeffnung angebrachtes Ventil  $u$  verhindert. (Ueberhaupt gehört der kleine Kolben einer Druckpumpe an.) Durch das Niederdrücken des kleinen Kolbens wird das Wasser in den großen Cylinder getrieben und veranlaßt den darin befindlichen Kolben zum Aufsteigen. Damit ferner das einmal in den großen Cylinder gelangte Wasser nicht zurückfließen kann, ist bei  $v$  ein zweites Ventil (Sperrventil) angebracht. Gewöhnlich läßt man die gegen den kleinen Kolben wirkende Kraft an einem einarmigen Hebel  $GHI$  angreifen, dessen Drehpunkt hier bei  $G$  liegt.

Um sowohl zu großen Drücken vorzubeugen, welchen die Stärkenverhältnisse der Presse nicht widerstehen, vielmehr ein Zerstören derselben veranlassen könnten, also auch um die Größe des Druckes zu messen, welcher vom kleinen Kolben auf den großen übertragen wird, ist ein Sicherheitsventil  $x$  angebracht etc.

Zur Berechnung des auf den großen oder Preßkolben fortgepflanzten Druckes  $= P$ , sei  $p$  die unmittelbar gegen den kleinen Kolben wirkende Druckkraft, ferner mögen  $D$  und  $d$  die respectiven Durchmesser der Kolben bezeichnen. Sodann erhält man nach I. §. 5, da hier  $A = \frac{D^2\pi}{4}$ ,  $a = \frac{d^2\pi}{4}$  ist, (1)  $P = p \frac{D^2}{d^2}$ .

Ist ferner die am Hebel bei  $J$  angreifende Kraft  $= k$ , ferner  $GH = a$ ,  $GJ = b$  gegeben, so folgt  $p = k \frac{b}{a}$  und nach (1)

$$(2) P = k \frac{b}{a} \cdot \frac{D^2}{d^2}.$$

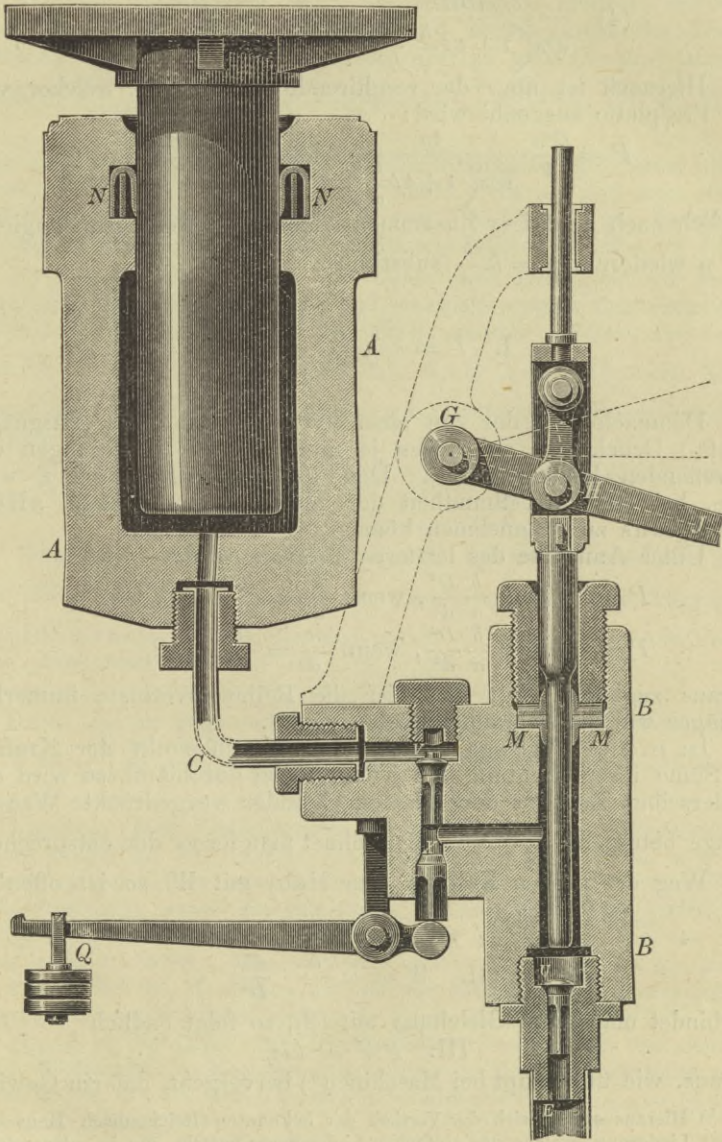
Hierbei ist jedoch von den stattfindenden Reibungen abgesehen. Läßt man den Widerstand unbeachtet, welcher durch das Anhängen etc. des Wassers an den Gefäßwänden, Durchgehen desselben durch Verengungen und Erweiterungen entsteht, so ist es namentlich die an den Liederungen  $M$  und  $N$  der beiden Kolben entstehende Reibung, welche in Betracht gezogen werden muß. Die Größe derselben läßt sich folgendermaßen ermitteln. Es mögen  $H$  und  $h$  die Höhen jeder der Liederungen bezeichnen, so daß die Flächen, an welchen die Reibung stattfindet, respective  $D\pi H$  und  $d\pi h$  sind; ferner werde angenommen, daß das Wasser selbst die Liederungen gegen die Kolben preßt. Sodann stelle  $x$  den Theil von  $p$  dar, welcher wirklich auf die Flüssigkeit übertragen wurde, so daß der Druck auf die Flächeneinheit:  $\frac{4x}{d^2\pi}$ , mithin der Druck

auf die Liederung des kleinen Kolbens:  $\frac{4x}{d^2\pi} \cdot d\pi h = 4x \cdot \frac{h}{d}$ , und auf

die des großen Kolbens:  $\frac{4x}{d^2\pi} \cdot D\pi h = 4x \frac{D}{d^2} H$ . Bezeichnet nun  $f$

den Reibungscoefficienten für beide Kolben, so ist der Druck pro Flächeneinheit, welcher fortgepflanzt wird: (3)  $\frac{4p}{d^2\pi \left(1 + 4f \frac{h}{d}\right)}$  und

Fig. 2.



mithin die Reibung, welche der große Kolben erfährt, indem man letzteren Werth mit  $f\pi DH$  multiplicirt:

$$(4) \frac{4fp\pi DH}{d^2\pi\left(1+4f\frac{h}{d}\right)} = 4fk\frac{b}{a} \frac{DH}{d^2\left(1+4f\frac{h}{d}\right)}.$$

Hiernach ist aber der resultirende Druck =  $P$ , welcher von der Preßplatte ausgeübt wird:

$$P = \frac{D^2\pi}{4} \cdot \frac{4p}{d^2\pi\left(1+4f\frac{h}{d}\right)} - 4fp \frac{DH}{d^2\left(1+4f\frac{h}{d}\right)},$$

folglich nach gehöriger Zusammenziehung und wenn man zugleich für  $p$  wiederum  $p = k\frac{b}{a}$  substituirt:

$$\text{I. } P = k\frac{b}{a} \frac{D^2}{d^2} \frac{1-4f\frac{H}{D}}{1+4f\frac{h}{d}}.$$

Demnach wird der von einer hydraulischen Presse ausgeübte (Nutz-) Druck um so größer je niedriger die Liederungen der betreffenden Kolben sind<sup>1)</sup>. Den Reibungscoefficienten  $f$  wird man, bei der Unbestimmtheit der Morin'schen Angaben, allerhöchstens zu  $\frac{1}{6}$  annehmen können.

Unter Annahme des letzteren Werthes wird:

$$P = 0,875 \cdot k \frac{b}{a} \frac{D^2}{d^2}, \text{ wenn } \frac{h}{d} = \frac{H}{D} = 0,1 \text{ ist,}$$

$$P = 0,765 \cdot k \frac{b}{a} \frac{D^2}{d^2}, \text{ wenn } \frac{h}{d} = \frac{H}{D} = 0,2,$$

woraus zugleich folgt, daß hier die Reibungsverluste immerhin geringer wie bei Schraubenpressen sind<sup>2)</sup>.

Ist  $w$  die Weglänge, welche der Angriffspunkt der Kraft  $k$  im Sinne ihrer Richtung bei jedem Hube durchläuft, so wird die in derselben Zeit aus dem kleinen Cylinder weggedrückte Wassermenge betragen:  $\frac{wa}{a} \cdot \frac{d^2\pi}{4}$ . Bezeichnet man ferner den entsprechenden Weg des großen Kolbens (per Hub) mit  $W$ , so ist offenbar

$$\frac{wa}{b} \cdot \frac{d^2\pi}{4} = W \frac{D^2\pi}{4}, \text{ also}$$

$$\text{II. } W = w \frac{a}{b} \cdot \frac{d^2}{D^2}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (2), so folgt endlich

$$\text{III. } PW = kw,$$

woraus, wie überhaupt bei Maschinen<sup>3)</sup> hervorgeht, daß ein Gewinn

<sup>1)</sup> Hieraus erklärt sich der Vortheil der bekannten (Reichenbach-Henschel-schen) Liederung, welche aus einfachen Lederringen besteht, die in entsprechenden Nuthen des Kolbens Platz finden. Man sehe hierüber u. A. die Allgemeine Maschinenlehre des Verfassers, Band I (Zweite Auflage), Seite 443, Note 1.

<sup>2)</sup> Man sehe deshalb u. A. des Verfassers „Grundzüge der Mechanik“, S. 275 ff.

<sup>3)</sup> „Grundzüge der Mechanik“, S. 174.

an mechanischer Arbeit durch die hydraulische Presse nicht zu bewirken ist.

Wichtig dürfte noch sein aufmerksam zu machen, daß der durch das Sicherheitsventil angegebene Druck nicht der Nutzdruk  $P$ , sondern ein größerer ist, welcher nach (3) pr. Flächeneinheit (5)  $\frac{4kb}{a\pi d^2} \left( \frac{1}{1 + 4f \frac{h}{d}} \right)$  beträgt, ein Umstand, der bei meh-

rerer mir bekannten Versuchen mit der hydraulischen Presse übersehen worden ist. Endlich werde noch erwähnt, daß man nicht gern höhere Drücke als 3 Tonnen engl. ( $\approx 2240 \text{ } \mathfrak{G}$ ) pr. Quadratzoll engl. eintreten läßt (Clark's Britannia-Röhren-Brücke. S. 621).

Beispiel. Wie groß ist der resultirende Druck auf der Preßplatte einer hydraulischen Presse und innerhalb welcher Zeit steigt der Preßkolben auf 1 Centimeter ( $= 1 \text{ cm}$ ) Höhe, wenn  $D = 30 \text{ cm}$ ,  $d = 3 \text{ cm}$ ,  $\frac{b}{a} = \frac{10}{1}$ ;  $\frac{h}{d} = \frac{1}{4}$ ;  $\frac{H}{D} = \frac{1}{8}$ ,  $f = \frac{1}{6}$  ist, ferner  $k = 2.15 = 30$  Kilogramm (zwei Arbeiter), die Hubhöhe wie Geschwindigkeit der Arbeiter  $= 75 \text{ cm pr. Sec.}$  beträgt.

Auflösung. Zuerst ist nach I:  $P = 0,786.30000 = 23580$  Kilogr. Sodann ist

$$W = 75 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9000} = 0,075 \text{ cm.}$$

Der Nutzeffekt folglich reichlich  $76 \frac{9}{10}$ . Es ist aber ferner die Zeit eines Hubes  $= \frac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = 1$  Secunde, die Zeit eines Auf- und Abganges (Doppelhubes) also 2 Secunden und mithin die Zeit  $= t$  um die Preßplatte (den grossen Kolben) um 1 cm zu heben:

$$t = \frac{2}{0,075} = 26,66 \text{ Secunden.}$$

Der Druck auf die Flächeneinheit des Sicherheitsventiles  $x$  beträgt nach (5):  $x = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10}{1} \cdot \frac{30}{9} \left\{ \frac{1}{1 + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}} \right\} = 36,37$  Kilogr. pr. Quadrat-Centimeter.

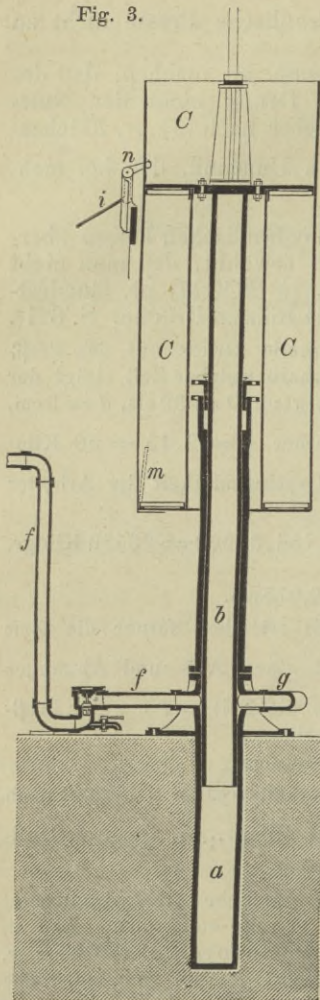
Zusatz. Eine eigenthümliche, höchst nützliche Art hydraulischer Pressen bilden die 1846 zuerst von Armstrong construirten und in Anwendung gebrachten sogenannten Accumulatoren (Kraftsammler, Kraftaufspeicher), womit ein künstliches Wassergefälle, eine künstliche Druckwassersäule erzeugt und dadurch sehr bedeutende Gewichte gehoben werden können. Man speichert damit Betriebskräfte für Heb- und andere Arbeits-Maschinen auf, die für intermittirende Bewegungen entsprechend zu verwenden sind<sup>1)</sup>.

Fig. 3 ist die Copie eines Accumulators, welcher bei der steuerfreien Niederlage in Harburg mit großem Erfolge zum Betriebe von hydraulischen Winden und Krähnen<sup>2)</sup> benutzt wird.

<sup>1)</sup> Des Verfassers „Allgemeine Maschinenlehre“. Bd. 1, S. 448 (2. Auflage), Bd. 2, S. 338 und Bd. 4, S. 335.

<sup>2)</sup> Bei den Harburger Accumulatoren haben die Kolben  $a$  einen Durchmesser von 10 Zoll englisch (254 mm) und 12 Fuß (3,66 m) Hub, während die Belastungsgewichte etwa 16000 Kilogr. betragen. Armstrong hielt es für ange-

Fig. 3.



Hierbei ist *a* der Cylinder des Accumulators und *b* dessen Kolben, welcher mit einem durch schwere Materialien gefüllten Behälter *CC* belastet ist, der sich in gehörigen Führungen seitlich verschiebt, um Schwankungen zu vermeiden. Das erforderliche Speisewasser wird, von einer geeigneten Dampf-Pumpe, im Rohre *f* zugeführt und im Rohre *g* erforderlichen Falles zu den Betriebsmaschinen geleitet. Ein Knaggen *m* am Accumulator und ein Apparat *ni* dienen dazu, die Dampfmaschine selbstthätig in Ruhe zu setzen, wenn genug Wasservorrath vorhanden ist, oder auch die gedachte Pumpe wieder selbstthätig in Gang zu bringen, wenn der Accumulator seinen Niedergang beginnt.

Specielles über Accumulatoren und deren Verwendung findet sich in nachbemerktten Schriften: Welkner in der Zeitschrift des Hannov. Archit. und Ingen.-Vereins, Jahrg. 1860 (Bd. IV), S. 448; hier werden besonders die Accumulatoren der steuerfreien Niederlage zu Harburg besprochen. Welkner, Ebendasselbst, Jahrg. 1877 (Bd. XII), S. 319 ff. (Seehafen etc. zu Geestemünde). Armstrong „Water Pressure Machinery“ in der Institution of Mechanical Engineers. Proceedings. 1868, Pg. 21 etc. Werner „Die Anwendung stark gepresster Wässer nach Armstrong's System zur Kraftübertragung auf unterirdische Wassersäulenmaschinen“. Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen im preußischen Staate. Bd. XIV, S. 77. Hieraus in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XI.

Endlich Armstrong „The History of the modern Development of Water Pressure Machinery“ in den „Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers“. Vol. L (1877), Pg. 64 ff.

## [§. 7.]

Mit Hülfe der Differenzialrechnung läßt sich (nach Euler)<sup>1)</sup> für das messen, keine höhere Pressung im Accumulator, als die anzuwenden, welche einer Wassersäule von 1500 Fuß englisch oder von 457,5 Meter, also einem Drucke von circa 45 Atmosphären entspricht.

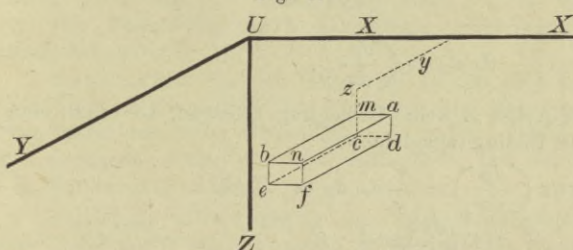
<sup>1)</sup> Mémoires der Berliner Academie der Wissenschaften vom Jahre 1755.

Brandes „Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper“. Nach Leonhard Euler's Abhandlungen in den Neuen Commentarien der Petersburger Academie übersetzt. Leipzig 1806, Seite 32 ff.

Gleichgewicht flüssiger Körper eine allgemeine Gleichung aufstellen, indem man sich mit der analytischen Auflösung folgender Aufgabe beschäftigt:

„Wenn irgend eine flüssige Masse der Einwirkung beliebiger accelerirender Kräfte unterworfen ist, die Bedingung anzugeben, unter welcher Gleichgewicht statt findet.“

Hierzu denken wir uns zunächst ein unendlich kleines Element der flüssigen Masse von parallelepipedischer Gestalt, Fig. 4, dessen Lage



durch drei rechtwinkelige Coordinaten bestimmt ist, während die drei unendlich kleinen Kanten desselben sein mögen:

$$\begin{aligned} ma &= dx, \\ mb &= dy, \\ mc &= dz. \end{aligned}$$

Der körperliche Inhalt dieses Elementes wird sodann dargestellt durch  $dx dy dz$ , so wie seine Masse  $dm$ , wenn  $\gamma$  die gleichförmige Dichtigkeit der Flüssigkeit und  $g$  die Erdacceleration bezeichnet, durch

$$(1) \quad dm = \frac{\gamma}{g} dx dy dz.$$

Wie nun auch immer die accelerirenden Kräfte beschaffen sein mögen, welche in  $m$  auf das Flüssigkeitselement wirken, in jedem Falle wird man sie sämmtlich nach drei auf einander rechtwinkeligen Richtungen parallel den drei Coordinatenachsen  $UX, UY, UZ$  zerlegen können. Bezeichnen daher  $X, Y$  und  $Z$  die den drei Achsen parallelen Componentensummen der Accelerationen, welche den gegebenen Kräften entsprechen, so hat man

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} dm X &= \frac{\gamma}{g} dx dy dz \cdot X; \\ dm Y &= \frac{\gamma}{g} dx dy dz \cdot Y; \\ dm Z &= \frac{\gamma}{g} dx dy dz \cdot Z. \end{aligned} \right.$$

Jede der vier Größen  $\gamma, X, Y$  und  $Z$  wird dabei als Funktion der drei Variablen  $x, y$  und  $z$  betrachtet.

Unter Voraussetzung fortdauernden Gleichgewichts muß aber die Wirkung dieser bewegenden Kräfte durch den Druck aufgehoben werden, welchen das Parallelepiped  $mf$  von allen Seiten erleidet. Dieser Druck im Punkte  $m$  werde nur durch die Größe  $p$  dargestellt, welche gleichfalls Funktion von  $x, y$  und  $z$  ist und deren totales Differenzial bekanntermaßen ist:

$$(3) \quad dp = \left( \frac{dp}{dx} \right) dx + \left( \frac{dp}{dy} \right) dy + \left( \frac{dp}{dz} \right) dz.$$

Dieser unbestimmte Ausdruck kann nun auf nachstehende Weise in einen bestimmten verwandelt werden. Der Druck auf die Fläche  $nma b$  läßt sich darstellen durch  $p \cdot dx dy$ . In Bezug auf die gegenüberliegende Fläche  $cdef$  bemerke man, daß der Druck auf die Einheit dieser Fläche um so viel größer (oder kleiner) geworden sein muß, als sich  $p$  in Bezug auf  $z$  geändert hat, weil beim Uebergange von  $m$  nach  $c$  die Coordinaten  $x$  und  $y$  unverändert geblieben sind. Hiernach wird aber der Druck auf  $cdef$  darzustellen sein durch  $dx dy \left[ p + \left( \frac{dp}{dz} \right) dz \right]$ , der resultirende Druck parallel der Achse  $UZ$  also durch:

$$dx dy dz \left( \frac{dp}{dz} \right).$$

Soll nun im Sinne der Achse  $Z$  keine Bewegung erfolgen, so erhält man mit Bezug auf (2) als Bedingungsgleichung:

$$dx dy dz \left( \frac{dp}{dz} \right) = \frac{\gamma}{g} dx dy dz \cdot Z, \text{ d. i.}$$

$$(4) \left( \frac{dp}{dz} \right) = \frac{\gamma}{g} \cdot Z.$$

Wegen des Satzes von der gleichförmigen Druckfortpflanzung etc. wird man die Drücke auf die Einheiten der Flächen  $mcb$  und  $mcd a$  ebenfalls  $= p$  annehmen können und überhaupt wie vorher als Gleichgewichtsbedingung im Sinne der Achsenrichtungen  $Y$  und  $X$  erhalten:

$$(5) \left( \frac{dp}{dy} \right) = \frac{\gamma}{g} Y; \quad (6) \left( \frac{dp}{dx} \right) = \frac{\gamma}{g} X.$$

Jetzt (4) bis mit (6) in (3) substituirt giebt endlich die gesuchte Bedingungsgleichung zu:

$$I. dp = \frac{\gamma}{g} (X dx + Y dy + Z dz).$$

Die Existenz des Gleichgewichts einer Flüssigkeit hängt also von dem Bestehen dieser Gleichung ab, d. h. es findet Gleichgewicht statt, wenn der rechte Theil integrirbar ist, was immer der Fall sein wird, wenn derselbe ein vollständiges Differenzial einer Funktion dreier unabhängiger Variablen ist<sup>1)</sup>. In der Hydrostatik setzen wir  $\gamma$  immer als unabhängig vom Drucke  $p$  voraus, also für dieselbe Flüssigkeit constant.

Zusatz 1. An den Stellen, woselbst sich die Flüssigkeit an entsprechend feste Wände lehnt, wird der Druck  $p$  offenbar vernichtet. Ueberall da, wo die Flüssigkeit mit Wänden nicht in Berührung ist, an der freien Oberfläche, muß jedoch  $p$  für den Gleichgewichtszustand an sich gleich Null sein, weil sonst nichts vorhanden ist, was diesen Druck aufzuheben vermöchte. Dasselbe gilt endlich auch, wenn  $p$

<sup>1)</sup> Die analytische Bedingung der Integrirbarkeit ist bekanntlich:  $\frac{d\gamma X}{dy} = \frac{d\gamma Y}{dx}; \frac{d\gamma X}{dz} = \frac{d\gamma Z}{dx}; \frac{d\gamma Y}{dz} = \frac{d\gamma Z}{dy}$ . Oder wenn  $\gamma$  constant ist:  $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}$ .



einen für die ganze Ausdehnung der Oberfläche constanten Druck repräsentirt. Die Gleichung

$$\text{II. } 0 = Xdx + Ydy + Zdz$$

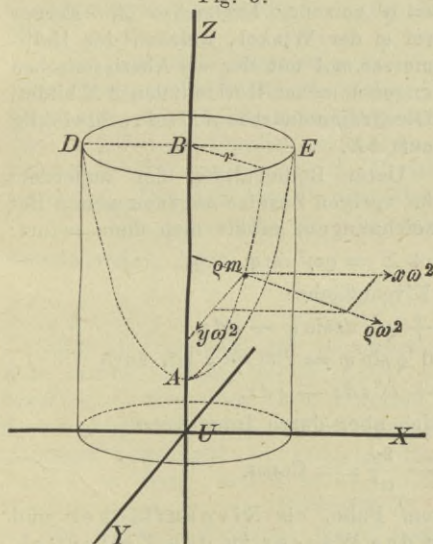
ist sonach das Differenzial der Coordinatengleichung der freien Oberfläche der ganzen Flüssigkeit.

Die Gleichung II entspricht überhaupt allen Flächen von gleichem Drucke, folglich auch noch allen Schichten im Innern der Flüssigkeit, in welchen der Druck überall derselbe ist und welche man auch Niveauschichten nennt. Die betreffenden Flächen unterscheiden sich dabei nur durch die Integralconstante von II, weil zwar der Druck für alle Punkte derselben constant, aber von Schicht zu Schicht veränderlich ist.

Zusatz 2. Aus der Gleichung II läßt sich auch noch der wichtige Satz ableiten, daß die Richtung der Resultirenden der auf eine Flüssigkeit mit freier Oberfläche wirkenden Kräfte auf der Tangente der krummen Linie, die man willkürlich auf der Oberfläche gezogen hat, rechtwinklig steht.

Zusatz 3. Um zugleich eine auch technisch nützliche Anwendung der Gleichung II nachzuweisen, wollen wir die Gestalt der freien Oberfläche des Wassers untersuchen, welches in einem cylindrischen Gefäße

Fig. 5.



mit kreisförmiger Basis von Halbmesser =  $r$ , Fig. 5, befindlich ist und mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine senkrechte Achse in Umdrehung versetzt wird. Die dabei auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte mögen allein Flieh- und Schwerkraft sein.

Nehmen wir die Achse  $Z$  als mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfallend und zugleich als Drehachse an und ist  $q$  die Entfernung für ein beliebiges Element  $dm$  der Flüssigkeit von dieser Achse, so ist die Fliehkraft desselben =  $dmq\omega^2$  und die Componenten parallel den Achsen  $Y$  und  $X$  sind respective  $dm y\omega^2$  und  $dm x\omega^2$ .

Ueberhaupt ist daher in II zu setzen:  $X = x\omega^2$ ,  $Y = y\omega^2$  und  $Z = -g$ , wo  $g$  die Erdbeschleunigung

bezeichnet, so daß man erhält:

$$0 = \omega^2 (x dx + y dy) - g dz, \text{ und}$$

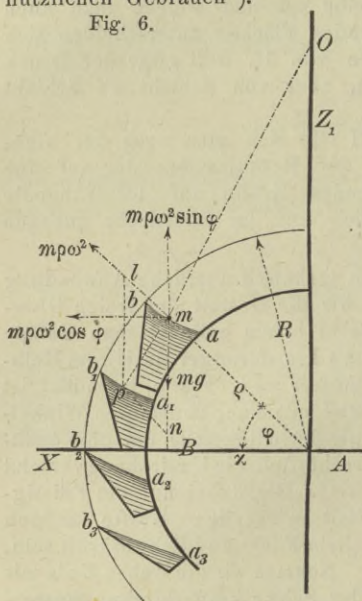
hieraus durch Integration:

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + C = \frac{\omega^2}{2g} q^2 + C,$$

welches die Coordinatengleichung der Oberfläche eines Rotationsparaboloids ist. Für den Scheitel  $A$  ist  $q = 0$  und  $z = AU = H$ , folglich

$H = C$  und  $z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + H$ . Für die Punkte der größten Erhebung wird  $q = r$  und  $z = UB = H + h$ , also  $H + h = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + H$ , und die Tiefe  $AB$  des paraboloidischen Trichters  $h = \frac{r^2 \omega^2}{2g}$  etc. Von letzterem Werthe macht man bei der Theorie gewisser horizontaler Wasserräder nützlichen Gebrauch<sup>1)</sup>.

Fig. 6.



Dreht sich das Gefäß (für unseren Zweck die mit Wasser gefüllte Zelle eines Wasserrades) Fig. 6 gleichförmig um eine horizontale, rechtwinklig auf der Bildfläche in  $A$  stehende Achse, so läßt sich die Gestalt der betreffenden Niveauläche wie folgt ermitteln und damit zugleich der Ort bestimmen, wo das Wasser aus den Zellen auszufließen anfängt.

Hierzu sei  $R$  der äußere Radhalbmesser und  $m$  ein Element der Masse des Zellenwassers, in der Entfernung  $= q$  von der Drehachse  $A$ . Ferner sei  $\varphi$  der Winkel, welchen der Halbmesser  $mA$  mit der als Abszissenachse angenommenen Horizontalen  $AX$  bildet. Die Ordinatenachse  $AZ$  sei rechtwinklig auf  $AX$ .

Unter Beibehaltung der außerdem im vorigen Zusatze angenommenen Bezeichnungen, erhält man dann sofort:

$$X = q\omega^2 \cos \varphi \text{ und } Z = q\omega^2 \sin \varphi - g,$$

daher aus II für die betreffende Niveauläche:

$$0 = q\omega^2 dx \cos \varphi + q\omega^2 dz \sin \varphi - g dz,$$

d. i., weil  $q \cos \varphi = \overline{AB} = x$  und  $q \sin \varphi = \overline{Bm} = z$  ist, auch

$$0 = \omega^2 x dx + \omega^2 z dz - g dz.$$

Aus letzterer Gleichung ergibt sich aber durch Integration

$$\text{IV. } x^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = \text{Const.}$$

Hiernach bilden, in gegenwärtigem Falle, die Niveaulächen und demgemäß auch die Oberfläche des Wasser in den Zellen ( $ab$ ,

<sup>1)</sup> Für ein gründlicheres und ausführlicheres Studium dieses ganzen Gegenstandes verdienen insbesondere empfohlen zu werden: die bereits vorher citirten Eulerschen Abhandlungen in den Neuen Commentarien der Petersburger Academie, wovon Prof. Brandes in Leipzig Uebersetzungen unter dem Seite 14 angegebenen Titel lieferte. Nächstem ist zum (theoretischen) Studium zu rathen: Decher (Prof. in Augsburg), „Handbuch der rationellen Mechanik“. Vierter Band (Mechanik flüssiger Systeme) S. 10 ff.

$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3$  etc.) des Rades Fig. 6, Theile von concentrischen Kreiscylindern.

Addirt man zu beiden Seiten der Gleichung IV den Werth  $\frac{g^2}{\omega^4}$ , so ergibt sich

$$x^2 + \left( z - \frac{g}{\omega^2} \right)^2 = \frac{g^2}{\omega^4} + \text{Const.}, \text{ oder}$$

wenn  $\frac{g^2}{\omega^4} + \text{Const.} = a^2$  gesetzt wird:

$$\text{V. } x^2 + \left( z - \frac{g}{\omega^2} \right)^2 = a^2.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunktscoordinaten  $x_1 = \text{Null}$  und  $z_1 = + \frac{g}{\omega^2}$  sind und dessen Halbmesser  $a = \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \text{Const.}}$  ist.

Die Achse der concentrischen Kreiscylinder, welche die Niveauflächen bilden, liegt also parallel der Drehachse des Gefäßes (parallel der Wasserradwelle) und zwar in der Höhe  $\frac{g}{\omega^2}$  vertikal darüber.

Letzterer Werth läßt sich auch noch auf nachstehendem, einfachem Wege nachweisen.

Ein beliebiges Element  $m$  der Wassermasse unterliegt offenbar der Einwirkung zweier Kräfte, der Schwerkraft  $mg$  und der Fliehkraft  $mQ\omega^2$ . Stellt man diese Kräfte beziehungsweise durch die Linien  $m\bar{n}$  und  $m\bar{l}$  dar, so liefert das Parallelogramm  $lmnp$  die betreffende Resultirende  $pm$ , welche gehörig verlängert, die Vertikale durch  $A$  in einem Punkte  $O$  schneidet. Der Ort von  $O$  wird aber durch die Proportion bestimmt:

$$\bar{AO} : \bar{Am} = \bar{m\bar{n}} : \bar{m\bar{l}}, \text{ d. i. durch } \bar{AO} : Q = mg : mQ\omega^2,$$

woraus richtig folgt:

$$\bar{AO} = \frac{g}{\omega^2}.$$

Zur Berechnung der wasserhaltenden Bögen vertikaler Wasserräder wurde letzterer Werth zuerst von Poncelet in Anwendung gebracht und zwar bereits 1832 in dessen (Lithographirtem) Werke: „Cours de mécanique appliquée aux machines“, Sect. VII Pg. 30. Noch vollständiger behandelte letztgedachte Frage der Bergrath und Professor Jenny im Berg- und Hüttenmännischen Jahrbuche der k. k. österr. Montananstalten etc. von 1862 (Bd. XI oder Bd. XIV der ganzen Reihe).

In Bezug auf die Constante vorstehender Gleichungen IV und V ist hier noch zu erwähnen, daß deren Werth vom Füllungsgrade und der Stellung der Schaufelzellen Fig. 6 abhängt und offenbar der Ausguß des Wassers aus den Zellen beginnt, wenn der Mantel des betreffenden Kreiscylinders die äußere Kante der correspondirenden Schaufel trifft.

Zum weiteren Studium des theoretischen Theiles der Sache ist namentlich noch folgendes Werk zu empfehlen: Decher a. a. O. Vierter Band, §. 25, S. 113—117.

## Zweites Capitel.

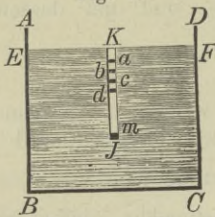
*Gleichgewicht und Druck des Wassers in Gefäßen, wenn auf solches bloß die Schwerkraft als wirksam gedacht wird.*

## §. 8.

Wirkt allein die Schwerkraft auf das in einem offenen Gefäße  $ABCD$ , Fig. 7, enthaltene Wasser, so entsteht ein vertikal abwärts gerichteter Druck, welcher sich zwar nach allen Seiten hin fortpflanzt, dessen Größe sich jedoch nach besonderen Gesetzen richtet, deren Aufsuchung im Nachstehenden geschehen soll.

Um zunächst ein Maaß für einen solchen Druck zu erhalten, betrachten wir ein in der flüssigen Masse befindliches Theilchen oder Element  $m$  und denken uns über demselben eine bis zur Oberfläche oder dem Wasserspiegel  $EF$  reichende Flüssigkeitssäule (Wasserfaden)  $KJ$  gleichsam als abgegrenzt. Das an der Oberfläche befindliche Element  $a$  wird nun durch sein Gewicht auf das zunächst unter ihm liegende Element  $b$ , so wie mittelbar auf alle folgende drücken; für den Druck auf das unter  $b$  liegende Element  $c$  vereinigt sich mit dem fortgepflanzten Drucke von  $a$  das Gewicht des Elementes  $b$ , u. s. f. für alle abwärts nach  $m$  hin liegende Elemente, so daß der Druck, welchen  $m$  erfährt, durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule  $KJ$  gemessen wird.

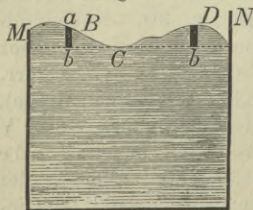
Fig. 7.



Der Druck, welchen irgend ein Flüssigkeitselement erfährt, ist sonach um so größer, je tiefer dasselbe unter dem Wasserspiegel  $EF$  liegt, und in einer von letzterem überall gleichweit abstehenden Fläche der flüssigen Masse müssen gleiche Drücke stattfinden.

Hiernach läßt sich nun zeigen, daß für den Zustand des Gleichgewichtes der Wasserspiegel  $EF$  eine horizontale Ebene bilden muß. Angenommen, es wäre letzteres nicht der Fall, vielmehr habe die Oberfläche eine aus der Durchschnittsfigur 8 sich ergebende Gestalt, wobei einzelne Theile der Flüssigkeit höher als andere

Fig. 8.



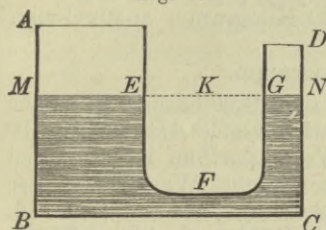
liegen. Durch den tiefsten Punkt  $C$  denke man sich eine horizontale Ebene  $MN$  geführt, und die darüber bei  $B$  und  $D$  befindlichen Flüssigkeitsmassen in Wassersäulen  $ab$  u. s. w. zerlegt. Jede solcher Wassersäulen übt nun einen nach allen Seiten hin gerichteten Druck aus, der nothwendig eine Bewegung veranlassen muß, wenn die übrigen Flüssigkeitselemente nicht einen gleichen Gegendruck leisten. So lange aber über  $MN$  nicht Flüssigkeitssäulen von gleicher Höhe stehen, oder die Oberfläche nicht zu  $MN$  parallel, d. i. horizontal ist, kann jener gleiche Gegendruck nicht stattfinden, folglich auch kein Gleichgewicht vorhanden sein.

Hieraus folgt zugleich, daß, für den Zustand des

Gleichgewichtes, die in einer und derselben beliebigen Horizontalschicht der Flüssigkeit stattfindenden Drücke sich gegen einander aufheben müssen.

Alle diese Gesetze sind von der Gefäßform ganz unabhängig und gelten daher auch für sogenannte communicirende Gefäße  $ABCD$ , Fig. 9, woselbst man den Satz vom horizontalen Wasserspiegel gewöhnlich so auszudrücken pflegt, daß man sagt: „in

Fig. 9.



communicirenden Gefäßen ist eine und dieselbe Flüssigkeit nur dann im Gleichgewichte, wenn die Oberflächenspiegel in einerlei Horizontalebene liegen.“

Letzteren Satz beweist man wohl auch so, daß man sich die Wände  $EFG$  der Gefäße hinweg und das Gefäß selbst so weit mit Wasser gefüllt vorstellt, daß  $MN$  den Wasserspiegel bildet, der nach dem Vorstehenden horizontal sein muß; hierauf den Theil  $EFGK$  der Flüssigkeit wieder fest werden und in der gezeichneten Lage der Figur erhalten läßt, wonach kein Grund vorhanden ist, anzunehmen, es lägen die beiden nunmehr getrennten Spiegel  $MB$  und  $GN$  nicht mehr in derselben horizontalen Ebene.

Anmerkung. Einigermaßen abgeändert wird letzterer Satz allein in dem Falle, wenn die betreffenden communicirenden Gefäße sehr enge Röhren (Haarröhren, Capillarröhren) bilden, was vom technischen Standpunkte betrachtet oft zu berücksichtigen ist, wenn die Durchmesser der Röhren entsprechend klein sind.

Eben so ist noch zu bemerken, daß die Oberflächen von Wassermassen bedeutender Ausdehnung Theile einer Kugelfläche bilden müssen, wenn allein die Schwerkraft auf das Wasser als wirksam gedacht wird. Man sehe hierzu den 5. und 6. Abschnitt im Ersten Theile der Eulerschen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper, worin zugleich höchst interessante Untersuchungen über die Gestalt der Erde geführt werden.

## §. 9.

**Bodendruck.**

Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar, daß Wasser, welches sich in einem prismatischen Gefäße mit verticaler Achse und horizontalem Boden befindet, gegen letzteren im Zustande des Gleichgewichtes einen Druck ausübt, welcher dem Gewichte des Wassers gleich ist. Denn wenn auch, der gleichförmigen Druckfortpflanzung wegen, gleichzeitig ein Druck auf die Seitenwände des Gefäßes ausgeübt werden muß, so ist dieser doch gleichsam als eine Art von Spannung anzusehen, wodurch keine Verminderung des Druckes in verticaler Richtung veranlaßt wird. Der Druck auf den horizontalen Boden eines geraden prismatischen Gefäßes ist folglich dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche diesen Boden zur Grundfläche und dessen Verticalabstand vom Wasserspiegel zur Höhe

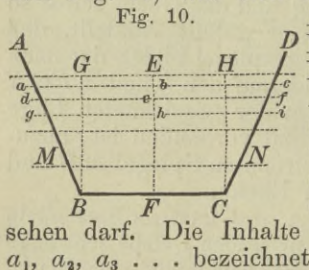
hat. Bezeichnet daher  $A$  den Flächeninhalt des Bodens,  $H$  die Wasserhöhe und  $\gamma$  das Gewicht der Cubikeinheit Wasser, so erhält man für den Bodendruck  $= P$

$$P = \gamma \cdot A \cdot H.$$

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, daß sich  $H$  und  $A$  auf dasselbe Längen- und Flächenmaaß beziehen, wie das Cubikmaaß für  $\gamma$ . Drückt man daher erstere beiden Größen respective in Metern und Quadratmetern aus, so bezeichnet  $\gamma$  das Gewicht eines Cubikmeters Wasser, welches gleich 1000 Kilogramm anzunehmen ist<sup>1)</sup>. Daher wird

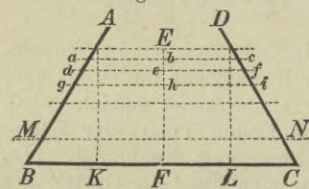
$$P = 1000 \cdot A \cdot H \text{ Kilogramm.}$$

Der so eben gefundene Satz für den Bodendruck gilt aber auch für jedes beliebige, wie immer gestaltete Gefäß  $ABCD$ , Fig. 10 oder Fig. 11, was sich auf folgende Weise darthun läßt. Es sei



$EF = H$  die senkrechte Wasserhöhe, der Inhalt des Horizontalbodens  $BC = A$ . Man denke sich  $EF$  in sehr kleine Theile  $Eb, be, eh$  etc. getheilt, und durch jeden der Theilpunkte eine horizontale Ebene, wie  $ac, df, gi$  etc. gelegt, so daß man die dadurch gebildeten Körperelemente ohne besonderen Fehler als Prismen ansehen darf. Die Inhalte der respectiven Grundflächen mögen mit  $a_1, a_2, a_3 \dots$  bezeichnet werden.

Fig. 11.



Nach dem Vorstehenden wird sodann der Druck  $= p_1$ , welchen die Fläche  $a_1$  erfährt, ausgedrückt durch

$$(1) \quad p_1 = \gamma \cdot a_1 \cdot Eb.$$

Der Druck  $= p_2$ , welchen die Fläche  $a_2$  erleidet, besteht aber aus dem Gewichte der unmittelbar über ihr stehenden Flüssigkeitssäule  $acdf$  und aus dem fortgepflanzten Drucke von  $p_1$ , so daß, wenn letzterer vorerst mit  $x$  bezeichnet wird, folgt

$$(2) \quad p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot \bar{be} + x.$$

Nach I. §. 5 verhält sich aber  $p_1 : x = a_1 : a_2$ , woraus sich  $x = p_1 \frac{a_2}{a_1}$  und somit ergibt

$$p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot \bar{be} + p_1 \frac{a_2}{a_1}; \text{ oder, wenn man für } p_1 \text{ den Werth aus}$$

(1) substituirt,

$$p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot \bar{be} + \gamma \cdot a_2 \cdot \bar{Eb} = \gamma \cdot a_2 (\bar{be} + \bar{Eb}); \text{ d. i.}$$

$$(3) \quad p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot \bar{Ee}.$$

<sup>1)</sup> Der Temperatureinfluß auf das Gewicht der Cubikeinheit Wasser kann bei gegenwärtigen Betrachtungen außer Acht bleiben. So rechnet man das Gewicht eines

englischen	Cubikfußes Wasser = 62,50 ℔ engl.
österreichischen	„ „ = 56,38 ℔ Wiener.

Ebenso erhält man für den Druck  $= p_3$  auf die Fläche  $a_3$ , wenn der von  $p_2$  fortgepflanzte Druck mit  $y$  bezeichnet wird,

$$(4) \quad p_3 = \gamma \cdot a_3 \cdot \bar{e}h + y.$$

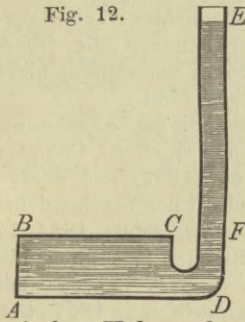
Es ist aber  $y = p_2 \frac{a_3}{a_2}$ , oder mit Bezug auf (3)  $y = \gamma \cdot a_3 \cdot \bar{E}e$ , somit aus (4)

$$p_3 = \gamma a_3 (\bar{e}h + \bar{E}e) = \gamma a_3 \bar{E}h.$$

Auf solche Weise fortgefahren, läßt sich allgemein zeigen, daß der Druck, welchen eine beliebige Horizontalebene  $MN$  erfährt, ganz unabhängig von der Gefäßform, dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, welche die gedrückte Fläche zur Basis und den Verticalabstand des Schwerpunktes derselben vom Wasserspiegel zur Höhe hat, so daß man für den Druck  $= p_n = P$  auf den Boden  $BC$  wie vorher erhält

$$P = \gamma \cdot A \cdot H.$$

Fig. 12.



Ebenso kann man darthun, daß vorstehendes Gesetz auch auf jeden horizontalen Theil der Seitenwände eines Gefäßes anwendbar ist. So ist z. B. der vertical aufwärts gerichtete Druck, welchen die Decke  $BC$  des bis zum Punkte  $E$  mit Wasser gefüllten Gefäßes  $ABCED$ , Fig. 12, erfährt, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche die Fläche  $BC$  zur Basis und den Verticalabstand  $EF$  zur Höhe hat.

Auf dem Satze vom Drucke gegen horizontale Böden, oder eben solche Wandstücken und Decken, beruht das Princip des anatomischen Hebers, der Real'schen Presse, der Wassersäulenmaschinen, Kolbenpumpen etc.

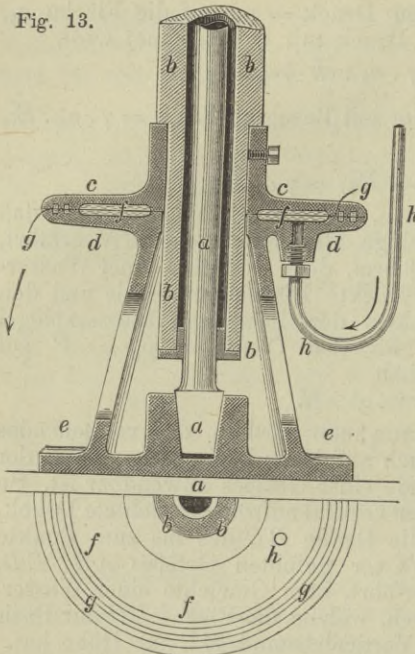
Zusatz. Eine interessante (wenn auch nicht sehr praktische) Anwendung des Satzes vom Bodendrucke des Wassers machte seiner Zeit der französische Ingenieur Girard, indem er bemüht war, diesen Druck zur Vermeidung (?) der Zapfenreibung von (namentlich stehenden) Wellen zu benutzen. Fig. 13 zeigt Girard's betreffende Anordnung für vertical stehende Turbinenwellen.

Dabei ist  $a$  eine unbewegliche Säule, welche oberwärts der hohlen Turbinenwelle  $b$  zur Stütze dient, indem in gehöriger Höhe über dem Spiegel des Aufschlagwassers ein sogenannter Kammzapfen angebracht ist<sup>1)</sup>.  $c$  und  $d$  sind zwei mit Nuthen (sogenannter Labyrinth-Dichtung) versehene Scheiben, wovon sich die obere  $c$  mit der Turbinenwelle  $b$  dreht, während die untere  $d$  mit dem Fußlagerbocke  $e$  ein Ganzes bildet, mit diesem also auch unbeweglich ist.

Durch Zuführung von Druckwasser (bei natürlichem Gefälle, oder besser durch eine besondere Pumpe), welches sich zwischen den beiden Scheiben  $c$  und  $d$  gehörig verbreiten kann, wollte Girard die metallische Berührung der Oberflächen beider Scheiben  $c$  und  $d$  völlig

<sup>1)</sup> Allgemeine Maschinenlehre, Bd. 1, S. 400 (Zweite Auflage).

Fig. 13.



vermeiden und folgerecht auch die Reibung beinahe auf Null herabziehen. So sehr diese Anordnung auch in einer der unten angegebenen französischen Quelle (Comptes rendus) belobt und eine große Arbeitersparniß (durch Rechnung, für einen besonderen Fall) nachgewiesen wird, so stellen sich dem ganzen Principe und dessen Ausführung doch erhebliche Nachteile entgegen. Welchen Werth Girard selbst auf die ganze Anordnung legte, dürfte daraus erhellen, daß bei allen Turbinen, wo er den hydraulischen Druck in gedachter Weise verwendete, er dennoch die Oberwasserzapfen (Kammzapfen) nicht für überflüssig hielt.

Näheres über die ganze Sache enthalten folgende Quellen: Comptes rendus (Decbr. 1862) und daraus in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1864, in

Dr. Grothe's „Jahresbericht über die Fortschritte der mech. Technik und Technologie“. Dritter Jahrg. (1863—1864), S. 310. Ferner (mit Abbildungen begleitet) in Lacroix's „Etudes sur l'exposition de 1867 etc.“ 3. Serie, Fasciculus 11—15, pg. 149.

Anmerkung 1. Nach diesen allgemeinen Sätzen könnte es auffallend erscheinen, daß der Bodendruck bald kleiner wie in Fig. 10, bald größer wie in Fig. 11 als das Gewicht der im Gefäße überhaupt enthaltenen Flüssigkeit ist; eine einfache Betrachtung giebt indeß hierüber Aufschluß. Bei Fig. 10 wird nämlich das in den Räumen *ABG* und daraus in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1864, in *HCD* enthaltene Wasser von den Seitenwänden getragen und hat auf den Bodendruck keinen Einfluß. Bei Fig. 11 dagegen erklärt sich der scheinbare Widerspruch (das hydrostatische Paradoxon), daß der Boden einen größeren Druck auszuhalten hat als das Gewicht des darüber stehenden Wassers, sofort dadurch, daß man sich durch die schiefen Wände *AB* und *DC* bis zum Boden reichende Röhren gesteckt denkt, worauf das Wasser nach dem Satze von den communicirenden Röhren (§. 8) in diesen sich eben so hoch stellen wird als im Gefäße *ABCD*. Der Druck der Flüssigkeitssäulen von der Gefäßwandstelle bis zum Spiegel des Wassers im eingesteckten Rohre, ist bei geschlossener Wand als Reaction von oben nach unten thätig, vergrößert den Bodendruck entsprechend etc. Die letzten möglichen Zweifel fallen später bei der Betrachtung der Drücke auf Seitenwände weg.

Anmerkung 2. In wie weit die sogenannten halbflüssigen Körper vorstehendem Satze vom Bodendrucke völlig flüssiger Körper entsprechen, ist der Natur der Sache nach bis jetzt für manche dieser Körper noch



unentschieden. Der wichtigen Anwendung im Baufache wegen hat man desfallsige Untersuchungen hauptsächlich auf Sand ausgedehnt, wovon wir hier mittheilen, was Hagen<sup>1)</sup> angiebt, während wir insbesondere noch auf Navier's<sup>2)</sup> Bemerkungen aufmerksam machen.

Hagen's Hauptsätze sind Folgende: „Der Druck auf dem Boden einer vertical gestellten cylindrischen Röhre ist bei geringen Höhen dem Gewichte der ganzen darüber stehenden Sandmasse gleich. Bei zunehmender Höhe der Sandmasse wächst dieser Druck jedoch in einem geringeren Maaße, wie das bemerkte Gewicht, und zwar wird die relative Vergrößerung desselben immer geringer, bis sie zuletzt ganz aufhört. Sobald man diese Grenze erreicht hat, wird gar keine Zunahme des Druckes noch ferner stattfinden, wie hoch man auch die Aufschüttung fortsetzen und welche andere Belastung man auf dem Sande auch noch anbringen mag.“

## [§. 10.]

Mit Hilfe von Gleichung I. §. 7 lassen sich die Ergebnisse der vorigen §§. fast unmittelbar herleiten. Unter den vorher gemachten Voraussetzungen ist nämlich, wenn die Achse der  $Z$  als mit der Schwerkraftichtung zusammenfallend vorausgesetzt wird, ohne Weiteres  $X = Y = \text{Null}$ ,  $Z = -g$  und  $dp = -\gamma dz$ , folglich  $p = -\gamma z + C$ .

Zur Bestimmung der Constanten  $C$  werde angenommen, daß  $Q$  die Pressung auf die Einheit der Oberfläche der Flüssigkeit bezeichne, wofür  $z = h$  ist und weshalb folgt:

$$p = Q + \gamma (h - z).$$

Es stellt aber  $h - z$  den Abstand derjenigen Gleichgewichtsschicht vom Oberwasserspiegel dar, welche überall pro Flächeneinheit den constanten Druck  $p$  erfährt, während  $Q$  dem äußeren Drucke auf die flüssige Oberfläche entspricht und welcher bei technischen Fragen meistens der Druck der atmosphärischen Luft ist. Ueberhaupt lehrt der für  $p$  gefundene Ausdruck, daß die Pressung in jedem Punkte einer beliebigen Gleichgewichtsschicht von der Tiefe dieses Punktes unter dem Oberwasserspiegel, keineswegs aber von der Gefäßform abhängt.

## §. 11.

Zur besseren Hervorhebung der Wichtigkeit vorstehender Sätze für technische Fragen mag hier folgende Aufgabe Platz finden<sup>3)</sup>.

Man soll die Dicke  $= e$  des Bétonbettes<sup>4)</sup> einer Baugrube, Fig. 14, unter nachstehenden Voraussetzungen und Umständen berechnen.

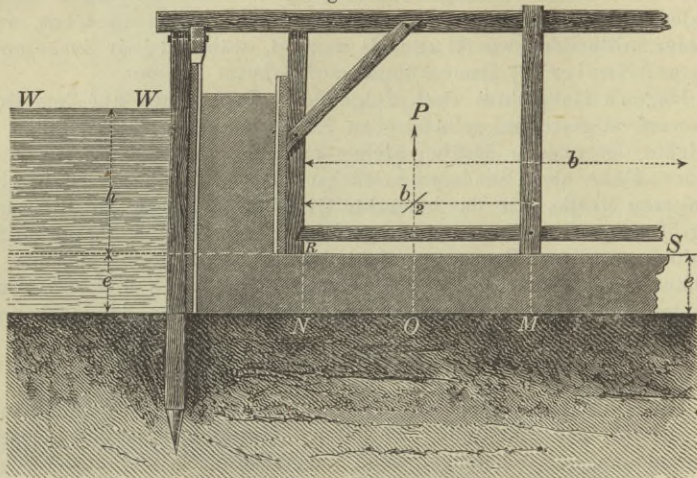
<sup>1)</sup> Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil, 2. Auflage, S. 507.

<sup>2)</sup> Navier, Mechanik der Baukunst, deutsch von Westphal, §. 268 u. f., bespricht recht ausführlich die Versuche von Delanges, Huber-Burnaud und Moreau.

<sup>3)</sup> Mary, De l'emploi du Béton, Annales des Ponts et Chaussées, 1832, 2. Serie, pag. 66 und 97 etc. Nach diesem: Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Theil I, S. 802.

<sup>4)</sup> Béton ist ein Gemenge von hydraulischem Mörtel mit Steinen (von höchstens 50 Millimeter Durchmesser) ungefähr in dem Verhältnisse von 1 : 1 in Maaßtheilen. Man sehe Hagen a. a. O. S. 788.

Fig. 14.



An beiden langen Seiten der Baugrube sind Fangdämme aus Béton aufgeführt, welche das Aufschwimmen des ganzen Bodens durch ihr Gewicht verhindern, jedoch einem Bruche in der Mitte des Bettes nicht entgegenwirken.

Auflösung. Es sei  $h$  die Druckhöhe des Außenwassers  $WW$  über der Oberfläche  $RS$  des Bétonbettes,  $b$  die Breite des Bétonbettes zwischen den Fangdämmen,  $m$  die absolute Festigkeit des Bétons in Kilogrammen pro Quadratmeter,  $\gamma$  das Gewicht eines Cubikmeters Wasser und  $q = 1,5 \cdot \gamma$  das Gewicht eines Cubikmeters Béton.

Der Wasserdruck =  $P$  auf eine halbe Bodenfläche  $MN$  des Bétonbettes von 1 m Breite ist:  $P = \gamma \frac{1}{2} b (h + e)$  und das statische Moment desselben, in Bezug auf  $N$ , wo  $MO = \frac{1}{2} NM = \frac{1}{4} b$  ist,

$$\frac{\gamma}{2} b (h + e) \frac{b}{4} = \frac{\gamma}{8} b^2 (h + e).$$

Das Gewicht des halben Bétonbettes:  $\frac{qbe}{2}$ , so wie dessen Momente, in Bezug auf  $N$ :

$$\frac{qb^2e}{8}.$$

Endlich ist das Moment der Bruchfestigkeit, wenn man die horizontale Gleichgewichtsschwerachse durch den höchsten Punkt des Querschnittes bei  $N$  legt:  $\frac{m}{3} \cdot 1 \cdot e^2$ .

Daher folgt als Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{m}{3} e^2 = \frac{\gamma b^2}{8} (h + e) - \frac{qb^2}{8} \cdot e, \text{ und hieraus}$$

$$e = \frac{-3b^2(q - \gamma) + b \sqrt{9b^2(q - \gamma)^2 + 96 \cdot \gamma hm}}{16 m}.$$

Nach Hagen ist  $m = 68256$  Kil. pro Quadratmeter zu nehmen.

Beispiel. Wie groß muß die Dicke des Bétonbettes sein, wenn  $b = 9^m, 1$ ,  $h = 4^m, 7$ ,  $\gamma = 1000$  Kil.,  $q = 1500$  Kil. ist?  
 $e = 1^m, 4$ .

§. 12.

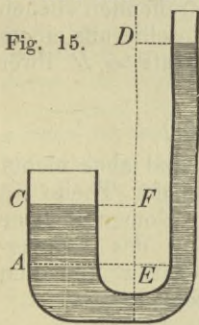
Bei Flüssigkeiten, deren Theile verschiedene Dichten haben und sich nicht mischen, lagern sich diese für den Gleichgewichtszustand im Verhältniß ihrer Dichten über einander, weil eben das Gleichgewicht erfordert, daß die Dichtigkeit gleichzeitig mit dem Drucke in der ganzen Ausdehnung einer Horizontalschicht constant sei. Der Druck gegen Bodenflächen ist in solchem Falle gleich dem Flächeninhalte des Bodens, multiplicirt mit der Summe der Producte aus den verschiedenen Flüssigkeitshöhen und ihren zugehörigen Dichten. Sind daher die Höhen der einzelnen Schichten  $h_1, h_2, h_3 \dots h_n$ , ihre Dichten respective  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots \gamma_n$ , und der Flächeninhalt des Gefäßbodens =  $A$ , so erhält man für den gedachten Druck =  $P$ :

$$P = A (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 \dots \gamma_n h_n).$$

§. 13.

Befinden sich zwei Flüssigkeiten, welche sich nicht vermischen, in communicirenden Gefäßen, so verhalten sich die Höhen ihrer Oberflächen über der Horizontalebene, in welcher sie sich berühren, wie umgekehrt ihre Dichten.

In den communicirenden Gefäßen, Fig. 15, sei der Theil  $AB$  von der Flüssigkeit mit geringerer Dichte =  $p$  und der Theil  $AC$  von der mit größerer Dichte =  $q$  eingenommen. Die Horizontalebenen der beiden Oberflächen in  $B$  und  $C$  mögen eine Verticallinie in  $D$  und  $F$  und die Horizontale  $A$ , wo sich die Flüssigkeiten berühren, eben diese Verticalle in  $E$  schneiden.



Sodann erhält man sofort für den Druck der Flüssigkeit  $AB$  in  $A$ :

$$p \cdot \overline{DE},$$

und für den Druck der Flüssigkeit  $AC$  in  $A$ :

$$q \cdot \overline{FE}.$$

Für den Gleichgewichtszustand müssen diese beiden Drücke gleich groß, d. i.  $p \cdot \overline{DE} = q \cdot \overline{FE}$  sein, oder es findet, wie behauptet wurde, die Proportion statt:

$$\overline{DE} : \overline{FE} = q : p.$$

§. 14.

Druck auf die Seitenwände der Gefäße.

Vorerst werde bemerkt, daß es in der Hydrostatik gebräuchlich ist, jeden nicht horizontalen Boden oder jedes solches Stück des-

selben als Theil der Seitenwand des betreffenden Gefäßes zu betrachten.

In jedem mit Wasser gefüllten, beliebig gestalteten Gefäße erleidet aber ein nach allen Richtungen hin unendlich kleines Stück (Elementarfläche) einer solchen Seitenwand einen Normaldruck, welcher dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, die das gedachte Wandstück zur Basis und dessen Verticalabstand vom Wasserspiegel zur Höhe hat. Denn da der Druck, den irgend ein Wassertheilchen im Gefäße erfährt, sich eben so gut nach den Seiten, als nach unten fortpflanzt, so ist klar, daß ein Stück der Seitenwand, wie das vorbezeichnete, denselben Druck wie ein eben so großes Stück des Bodens erleiden würde, wenn man für beide einerlei Abstand vom Wasserspiegel voraussetzte.

Bildet das gedachte Wandstück eine krumme Fläche, so ist die Richtung dieses Druckes als rechtwinkelig auf der Tangentialebene desselben anzunehmen.

### §. 15.

Für den Normaldruck, den eine ebene, senkrechte oder beliebig geneigte Seitenwand von willkürlicher Ausdehnung erfährt, läßt sich jetzt sehr leicht eine allgemeine Regel finden.

Man theile die ganze Wand in Elementarflächen, setze deren Inhalt  $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$  und ihre respectiven Abstände vom Wasserspiegel  $h_1, h_2, h_3, \dots h_n$ . Die Drücke auf diese Elemente sind daher nach vorigem §.:  $\gamma a_1 h_1, \gamma a_2 h_2, \gamma a_3 h_3, \dots \gamma a_n h_n$ . Die Richtung jedes dieser Drücke steht aber auf der betreffenden ebenen Wand normal, so daß der Gesamtdruck gegen dieselbe aus einem Systeme paralleler Kräfte besteht, deren Mittelkraft =  $R$  ihrer algebraischen Summe gleich ist, also

$$R = \gamma (a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \dots a_n h_n).$$

Die in der Parenthese befindlichen Producte sind aber nichts anderes als die Summe der statischen Momente der Theile  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ , wenn man den Wasserspiegel zur Momentenebene annimmt. Bezeichnet man daher die Entfernung des Schwerpunktes der ebenen Wand vom Wasserspiegel mit  $z$  und den Inhalt der ganzen gedrückten Fläche mit  $A$ , so folgt

$$\gamma Az = \gamma (a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \dots a_n h_n);$$

mithin aus (1)

$$R = \gamma Az.$$

Der Normaldruck gegen eine beliebige ebene Seitenwand eines Gefäßes ist daher dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche die gedrückte Ebene zur Basis und den Abstand des Schwerpunktes derselben vom Wasserspiegel zur Höhe hat.

Die Schwerpunktsentfernung einer solchen Ebene vom Wasserspiegel nennt man gewöhnlich die Druckhöhe dieser Ebene.

Aus dem Vorstehenden läßt sich zugleich abnehmen, daß der Normaldruck auf eine in die Flüssigkeit untergetauchte Ebene derselbe bleibt, wenn man auch letztere beliebig um ihren Schwerpunkt dreht.

Zusatz 1. Bei technischen Arbeiten und dahin gehörigen mathematischen Entwicklungen ersetzt man sehr oft Gewichte, welche die Intensitäten von Kräften ausdrücken, durch Flüssigkeitssäulen von gleicher Größe des Gewichtes. Ist z. B. in einem besondern Falle die Größe der gegen die Einheit einer Fläche drückenden Kraft  $= p$ , so erhält man, wenn  $x$  die Druckhöhe der Wassersäule bezeichnet, deren Gewicht das Maaß für jenes  $p$  ist,

$$p = \gamma \cdot 1 \cdot x, \text{ oder } x = \frac{p}{\gamma}.$$

So wird ein Druck (einer Atmosphäre) von 14,7  $\text{Ü}$  engl. pro  $\square$  Zoll engl. durch eine Wassersäule von  $x = \frac{144 \cdot 14,7}{62,5} = 33,8$  Fuß engl., ebenso der von 10333 Kilogr. pro Quadratmeter durch eine Wassersäule von der Höhe  $x = \frac{10333}{1000} = 10,333$  Meter gemessen.

Zusatz 2. Der Normaldruck  $= R$  gegen ein vertical gestelltes Rechteck von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$ , dessen obere Seite mit dem horizontalen Wasserspiegel zusammenfällt, ist sonach:

$R = \gamma b h \cdot \frac{h}{2} = \frac{\gamma b h^2}{2}$ , d. h. bei gleichbleibender Breite ist der Normaldruck dem Quadrate der Höhe proportional.

Zusatz 3. Was die bereits §. 9 angeführten halbflüssigen Körper in gegenwärtigem Falle anlangt, so dürfte auch hier nur das wichtig sein, was man bis jetzt beim Sande wahrgenommen hat<sup>1)</sup>. Insbesondere bemerkt Hagen, daß der horizontale Druck, den eine Sandschüttung gegen eine verticale Wand ausübt, dem Quadrate der Schüttungshöhe proportional ist, vorausgesetzt, daß die Oberfläche ganz wagrecht abgeglichen ist und daß die Wand, welche den fraglichen Druck erfährt, bis zu dieser Oberfläche heraufreicht. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Zusatzes setzt daher Hagen diesen Druck

$$R = A \frac{\gamma}{2} b h^2, \text{ wenn}$$

$\gamma'$  das Gewicht der Cubikeinheit des Sandes und  $A$  eine von der Natur des letztern abhängige Constante bezeichnet.

Hagen ermittelt insbesondere die Reibung einer Sandschüttung gegen einen Cylinder, der überall von ihr umgeben wird. Bezeichnet dabei  $f$  den Reibungscoefficienten zwischen Sand und Cylinder, ferner  $r$  den Radius der kreisförmigen Basis des letztern, so ist zuerst  $b = 2r\pi$  und die Reibung

$$f \cdot R = fA \cdot \gamma' r \pi h^2.$$

Für eisenhaltigen Streusand, und wenn der bemerkte Cylinder ein gläserner war, fand Hagen  $\gamma' = 2,82$  Loth,  $fA = 0,12$ , wenn der rhein-

<sup>1)</sup> Hagen, Wasserbaukunde, Bd. 1, S. 506 und Navier, Mechanik der Baukunst §. 269.

ländische Zoll als Maaßeinheit angenommen wurde. Für feines Schrot, wo  $\gamma = 8,245$  eben so  $fA = 0,135$  etc.

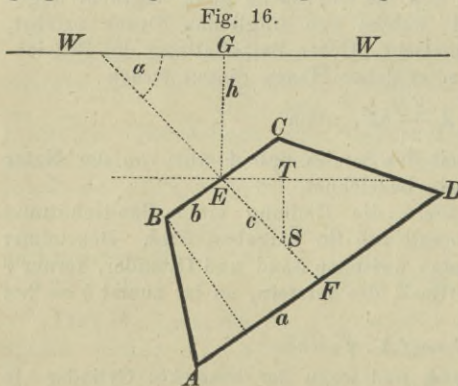
## §. 16.

Der Satz des vorigen §. kann auch benutzt werden, um den Druck auf die gesammte Seitenfläche eines Gefäßes, d. h. auf alle Dreiecke, Parallelogramme u. s. w., woraus dieselbe besteht, zu berechnen. Sieht man die Größe der Wandstücken wieder als Gewichte an, die in parallelen, gegen den Wasserspiegel rechtwinkligen Richtungen wirken müssen, so läßt sich, ähnlich wie vorher, zeigen, daß der Druck, den sämtliche Seitenwände erfahren, dem Gewichte eines Wasserkörpers gleich ist, welcher aus der Summe der Inhalte dieser Flächen multiplicirt mit dem Abstände des Schwerpunktes des ganzen Systemes vom Wasserspiegel besteht. Zu beachten ist jedoch hierbei, daß hier der Gesamtdruck nicht, wie im vorigen §., als Mittelkraft, sondern als der Inbegriff der Normaldrücke zu betrachten ist, welche jede der Flächen für sich allein erfährt. In diesem Sinne läßt sich bemerkte Regel auch auf den Gesamtdruck anwenden, den irgend eine krumme Seitenfläche erleidet, d. h. man muß diesen Druck als den Inbegriff der Normaldrücke ansehen, wovon jeder senkrecht auf der Ebene steht, welche als Berührende für jede der Elementarflächen gedacht werden kann.

Anmerkung. Die Frage, in wiefern sich zu diesen einzelnen Normaldrücken eine Mittelkraft angeben läßt, ob eine einzige solche in allen Fällen ausreicht, und wo der Angriffspunkt liegt, bleibt später folgenden Betrachtungen überlassen.

## §. 17.

Zur Erläuterung und Anwendung der Sätze vorstehender Paragraphen mögen hier einige Aufgaben folgen.



Aufgabe 1. Es ist der Normaldruck des Wassers gegen ein Trapez  $ABCD$ , Fig. 16, zu bestimmen, welches sich in einer gegen den Wasserspiegel  $WW$  oder dem Horizonte unter einem Winkel  $= \alpha$  geneigten Ebene befindet, und dessen parallele Seiten  $AD$  und  $BC$  horizontal sind. Die oberste Seite  $BC$  liege unter dem verticalen Tiefe  $EG = h$ , ferner sei  $AD = a$ ,  $BC = b$ , und

der rechtwinklige Abstand letzterer beiden Seiten  $EF = c$ .

Auflösung. Wir finden zuerst die Druckhöhe des Trapezes und nehmen deßhalb, an daß sich der Schwerpunkt derselben in  $S$  befinde. Nach §. 73 der Geostatik des Verfassers (Dritte Auflage) ist sodann

$$ES = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b},$$

und daher der Verticalabstand  $ST$  des Punktes  $S$ , von einer durch die oberste Seite  $BC$  parallel zum Wasserspiegel gelegten Ebene,

$$ST = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \cdot \sin \alpha.$$

Für die Druckhöhe  $= EG + ST = z$  erhält man sonach

$$z = h + \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \sin \alpha,$$

Es ist aber der Flächeninhalt des Trapezes  $= \frac{c}{2} (a + b)$ , folglich der gesuchte Normaldruck  $= P$  nach §. 15

$$P = \gamma \cdot \frac{c}{2} (a + b) \left( h + \frac{c}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} \sin \alpha \right), \text{ oder}$$

$$\text{I. } P = \frac{e\gamma}{6} \left\{ 3(a + b)h + c(2a + b) \sin \alpha \right\}.$$

Liegt die größere Seite  $AD$  des Trapezes dem Wasserspiegel zugekehrt, so erhält man auf gleichem Wege:

$$\text{II. } P = \frac{e\gamma}{6} \left\{ 3(a + b)h + c(a + 2b) \sin \alpha \right\}.$$

Zusatz 1. Für ein Rechteck ist unter sonst gleichen Umständen, wegen  $a = b$ ,

$$P = \gamma ac \left( h + \frac{1}{2} c \cdot \sin \alpha \right),$$

und wenn dessen obere Seite mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, also  $h = 0$  ist:

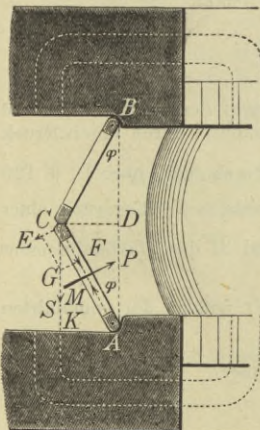
$$P = \frac{1}{2} \gamma ac^2 \cdot \sin \alpha.$$

Im Falle die gedrückte Fläche ein Dreieck ist, hat man  $b$  oder  $a$  gleich Null zu setzen, je nachdem die Spitze nach oben oder unten gekehrt ist.

§. 18.

Aufgabe 2. Es ist die Kraft zu bestimmen, womit die Riegelhölzer bei Schleusen-Stemthoren zusammengedrückt werden, so wie anzugeben, wie betreffende Dimensionen berechnet werden können.

Fig. 17.



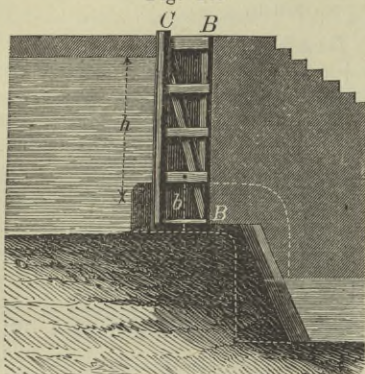
Auflösung. Es sei Fig. 17 Grundriß und Fig. 18 Aufriß eines Theiles vom sogenannten Oberhaupte einer Schleuse, wobei man das geschlossene Stemthor, Drempel (Schlagschwelle), die Umläufe (Kanäle) etc. für gegenwärtigen Zweck hinlänglich erkennen wird. Die lichte Weite  $AB$  der Thoröffnung sei  $= w$ , die Pfeilhöhe  $DC = e$ , so daß das Verhältniß  $\frac{e}{2w}$  (im Mittel  $\frac{1}{5}$ ), ferner  $\angle DAC = \varphi$  (gegen  $20^\circ$ ) und endlich die Thorflügellängen  $AC = BC = l$  als ebenfalls bekannt anzunehmen sind. Die Entfernung zweier Riegel eines jeden Thores sei, von Mitte zu Mitte derselben gemessen  $= b$  und die entsprechende Wasserdruckhöhe  $= h$ .

Die Normalpressung  $= P$  des Wassers

gegen den Theil eines Thores, welcher zwischen zwei Riegelmitten liegt, ist folglich

$$(1) P = \gamma b l \cdot h = \gamma b h \cdot \frac{w}{2 \cos \varphi}.$$

Fig. 18.



Wir ersetzen ferner den zweiten Thorflügel durch einen Gegendruck  $= S$  und bestimmen dessen Größe durch die Momentengleichung:

$$S \cdot \overline{AK} = P \cdot \overline{AM}, \text{ d. i.}$$

$$S \cdot l \sin \varphi = P \cdot \frac{l}{2}, \text{ und}$$

$$S = \frac{P}{2 \sin \varphi}.$$

Die Kraft  $CF = K$ , womit der Riegel zusammengedrückt wird, ist folglich

$$I. K = S \cos \varphi = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\gamma b h}{4} \cdot \frac{w}{\sin \varphi}.$$

Wegen der Componente  $CE$  von  $S$ , welche in  $C$  rechtwinklig auf der Thorebene steht und deren Größe  $CE = S \cdot \sin \varphi = \frac{P}{2}$  ist, verhält sich die Thorhälfte  $MC$  in Betracht von Kräften, welche dieselbe zu biegen sich bestreben, gerade so, als wenn der Flügel in der Mitte  $M$  eingemauert (festgehalten) würde, am Ende  $C$  die Normalkraft  $\frac{P}{2}$  wirke und über die Länge  $\overline{MC}$  ein Gewicht  $\frac{P}{2}$  gleichförmig verbreitet wäre. Das größte statistische Moment dieser beiden Normalkräfte in Bezug auf  $M$  ist aber:  $-\frac{P}{2} \cdot \frac{\overline{MC}}{2} + \frac{P}{2} \cdot \overline{MC} = +\frac{P}{4} \cdot \overline{MC} = \frac{Pl}{8}$ . Bezeichnet daher  $p$  das Tragvermögen des Riegels auf die Flächeneinheit bezogen, und bildet er im Querschnitte ein Rechteck von der Höhe  $a$  und Dicke  $c$  vom Inhalt  $A = ac$ , so folgt:

$$p = \frac{P}{2A \operatorname{tg} \varphi} + \frac{U}{T} \cdot \frac{Pl^1}{8},$$

<sup>1)</sup> Nach V., §. 116 der Geostatik (Dritte Auflage) des Verfassers, erhält man die Zusammendrückung einer Faser pro Längeneinheit durch einen Druck oder Zug  $Q$  in der Achsenrichtung zu:  $\frac{Q}{E \cdot A}$ . Eben so auch, nach I., §. 126 (derselben Quelle), für die größte durch Biegung veranlaßte Verlängerung einer Faser:  $\frac{U}{E \cdot T} \cdot M$ , wobei  $E$  den Elasticitätsmodul und  $M$  das Maximalmoment der biegenden Kräfte bezeichnet.

Daher die Ausdehnung (oder Zusammendrückung) zufolge der combinirten Kraftwirkung:

$$\frac{p}{E} = \frac{Q}{E \cdot A} + \frac{U}{E \cdot T} \cdot M, \text{ oder}$$



wo  $U$  die von der neutralen Achse am entferntesten liegende Faser und  $T$  das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf eine Achse bezeichnet, welche in der Ebene der Figur liegt und durch den Schwerpunkt derselben geht. Hiernach also  $U = \frac{c}{2}$ ,  $T = \frac{1}{12} ac^3$  und somit ist:

$$\text{II. } p = \frac{P}{2ac \cdot \text{tg } \varphi} + \frac{3}{4} \frac{Pl}{ac^2}.$$

Hierbei ist von dem eigenen Gewichte des Thores noch abgesehen.

Zusatz 1. Führt man in (II) den Werth von  $P$  aus (1) und  $l = \frac{w}{2 \cos \varphi}$  ein, so folgt:

$$p = \frac{\gamma b h w}{4ac} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{3}{4} \frac{w}{c} \frac{1}{\cos \varphi^2} \right\}.$$

Letzterer Werth wird aber in Bezug auf  $\varphi$  eine Eminenzie, wenn man  $p$  aus der Gleichung berechnet:

$$\text{III. } \sin \varphi^4 - 2m \cdot \sin \varphi^3 - 2 \sin \varphi^2 + 1 = 0, \text{ wo } m = \frac{3w}{4c} \text{ ist}$$

und woraus man den vortheilhaften Winkel  $\varphi$  entnehmen kann.

Beispiel. Setzt man mit Hagen (Wasserbauk. II. Theil, Bd. 3, S. 95 und 106)  $c = 13$  Zoll,  $w = 30$  Fuß, so ergiebt sich aus III die Wurzel:  $+ 0,254$  oder  $\varphi$  nahe zu 18 Grad.

Zusatz 2. Barlow findet nach sehr unklarem Entwicklungsgange unter allen Umständen (Transactions of the Institution of Civil Engineers. Vol. I. p. 72) zur Bestimmung von  $\varphi$  die Gleichung

$$\text{tg } \varphi^3 + \frac{1}{2} \text{tg } \varphi^2 = \frac{1}{2},$$

welche  $\varphi = 19^\circ 25'$  giebt.

Woltmann in seinem Werke: „Beiträge zur Schiffbarmachung der Flüsse“ findet S. 232, nach höchst sonderbarer Herleitungsweise zur Bestimmung von  $\varphi$  die Gleichung

$$\frac{1}{\sec. \varphi^2 \text{ cosec. } \varphi} + \frac{1}{\sec. \varphi^2} = \text{Maxim.}, \text{ woraus}$$

$$\varphi = 19^\circ 28'.$$

Belidor in seiner hydraulischen Architektur (2. Theil, §. 164) gab bereits viel früher  $\varphi = 22\frac{1}{2}$  Grad an.

## §. 19.

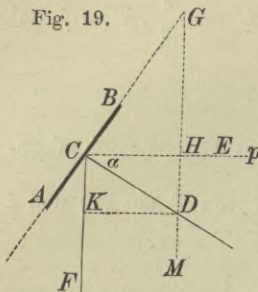
### Druck des Wassers nach bestimmten Richtungen.

Bei technischen Untersuchungen wird es sehr oft nöthig, den Druck anzugeben, welchen das Wasser gegen Gefäßwände nach

$$p = \frac{Q}{A} + \frac{U}{T} \cdot M,$$

worin  $p$  das Tragvermögen bezeichnet und die übrigen Größen oben im Texte angegeben sind.

einer vorgeschriebenen Richtung, die von der des Normaldruckes verschieden ist, ausübt. Nachstehendes sei zur Herleitung der hierbei stattfindenden Gesetze bestimmt.



Ist  $AB$ , Fig. 19, ein nach allen Seiten hin unendlich kleines Stück einer Gefäßwand, so kann man die Richtungen des Druckes auf dasselbe, gleichgültig, ob solches eben oder krumm, als unter einander parallel annehmen, so daß die ihnen zugehörige Mittelkraft der Summe der Drücke auf die einzelnen Punkte desselben Elementes gleich ist. Es sei nun  $C$  der Angriffspunkt,  $CD$  Richtung und Größe dieser Mittelkraft, und man soll angeben, wie stark  $AB$  nach einer von  $CD$  verschiedenen Richtung, z. B. der  $CE$ , die mit ersterer den Winkel  $DCE = \alpha$  einschließt, gedrückt wird. Zu diesem Ende zerlege man  $CD$  in zwei Seitenkräfte  $CH$  und  $CK$ , wovon erstere mit  $CE$  zusammenfällt, letztere auf  $CE$  rechtwinklig steht. Da nun sodann  $CK$  in der bezeichneten Richtung keine Wirkung äußern kann, so muß  $CH$  den gesuchten Druck darstellen. Setzt man daher den Inhalt des Elementes  $AB = a$ , die zugehörige Druckhöhe  $= h$ , so ist der Normaldruck  $CD = \gamma \cdot ah$ , und der Druck nach der Richtung  $CE = CH = CD \cos \alpha = \gamma ah \cdot \cos \alpha$ . (1).

Denkt man sich jetzt  $AB$  als Durchschnittlinie der Ebene, in welcher der Winkel  $DCE$  liegt, mit der Elementarfläche und führt durch die genannte Ebene eine zweite auf  $CE$  und somit auch auf der  $DCE$  rechtwinklig stehende Ebene, so wird, wenn  $GM$  die Durchschnittlinie letzterer beiden Ebenen ist,  $CGM$  der Neigungswinkel sein, welchen das Wandelement mit der Ebene  $GHM$  bildet. Denkt man sich ferner das Element  $AB$  auf die Ebene  $GHM$  projicirt, so stellt nach Sätzen der Geometrie  $a \cos \angle CGM$ , oder (da  $\angle CGM = \angle DCE = \alpha$  sein muß)  $a \cos \alpha$  die gedachte Projection dar. Demnach erhält man aus (1), wenn  $a \cos \alpha = f$  gesetzt wird, für den Druck  $= p$  nach der Richtung  $EC$ :

$$p = \gamma \cdot fh.$$

Es ist also der Druck des Wassers nach irgend einer Richtung gegen eine beliebige Elementarfläche gleich dem Normaldrucke gegen die rechtwinklig zur bezeichneten Richtung genommene Projection der Elementarfläche, wenn für beide Fälle einerlei Druckhöhe vorausgesetzt wird. Ueberhaupt ergibt sich aber der wichtige Satz:

Der Druck, welchen ein beliebiges Element einer Gefäßwand nach irgend einer bestimmten Richtung erfährt, wird stets erhalten, wenn man die Projection dieses Elementes auf eine Ebene sucht, welche rechtwinklig auf der bezeichneten Richtung steht, und die Fläche der Projection mit der Druckhöhe multiplicirt, die der gedrückten Fläche zukommt.

Zusatz 1. Unanwendbar könnte dieser Satz auf den Druck erscheinen, den irgend eine krumme Fläche von willkürlicher Größe nach einer bestimmten Richtung erfährt, indem hier die Normaldrücke auf die Elemente der krummen Fläche nicht, wie bei ebenen Flächen, unter einander parallel gerichtet sind.

Um hierüber Aufschluß zu erhalten, bestimmen wir den Normaldruck auf jedes Element der krummen Fläche und zerlegen jeden solchen (nach §. 65 Geostatik) in drei Seitenkräfte, die respective dreien rechtwinkligen Coordinatenachsen parallel sind, und worauf sich die zugehörigen Resultirenden, im Allgemeinen zwei, werden finden lassen. Allein für unseren Fall, wo der Druck nur nach einer vorgeschriebenen Richtung angegeben werden soll, braucht der letztere Theil der bemerkten Arbeit nicht vorgenommen zu werden, wenn man nur eine der drei Coordinatenachsen in die bezeichnete Richtung legt. Hat man z. B. die Achse der  $Z$ , die auf der Ebene  $XY$  rechtwinklig steht, in der vorgeschriebenen Druckrichtung angenommen, so wird nur nöthig sein, den Normaldruck auf jedes Element mit dem Cosinus des Winkels zu multipliciren, den die Richtung jenes Druckes mit der Achse der  $Z$ , oder, was dasselbe ist, den die Berührungsebene für ein solches Element mit der Ebene  $XY$  macht. Die Producte dieser Elemente in die respectiven Cosinus sind sodann nichts Anderes, als die Projectionen der Elemente auf die Ebene  $XY$ . Legt man daher diesen Projectionen, wie es §. 15 geschah, Gewichte bei, so läßt sich auf dem an gedachtem Orte gewählten Wege auch hier überhaupt zeigen,

daß der Druck nach einer bestimmten Richtung gegen eine krumme Fläche gleich dem Gewichte einer Wassersäule ist, welche die rechtwinklig zur bezeichneten Richtung genommene Projection der krummen Fläche zur Basis und die Druckhöhe der krummen Fläche zur Höhe hat.

Zusatz 2. Hiernach läßt sich ohne Weiteres der Druck angeben, welchen in verticaler Richtung die (krummen) Mantelflächen eines Kegels und einer Halbkugel erfahren, wenn solche ganz mit Wasser gefüllt sind, und wenn  $r$  den Halbmesser der kreisförmigen Kegelbasis so wie der Kugel und  $h$  die Höhe des Kegels bezeichnet.

Die Projection der gedrückten Flächen rechtwinklig gegen die Verticale ist  $= r^2\pi$ , die Druckhöhe für den Kegel  $= \frac{2}{3}h$ , wenn dessen Spitze nach oben gekehrt ist und die Druckhöhe für die Halbkugel  $= \frac{1}{2}r$ , wenn vorausgesetzt wird, daß deren größter Kreis mit dem Wasserspiegel zusammenfällt. Sonach der anzugebende Druck

$$\text{für den Kegel: } \gamma r^2\pi \cdot \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\gamma\pi r^2h;$$

$$\text{für die Halbkugel: } \gamma r^2\pi \cdot \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}\gamma\pi r^3.$$

Zugleich lösen sich hierbei die letzten Zweifel (Anmerkung 1, §. 9) über Bodendrücke (das sogenannte hydrostatische Paradoxon). So ist z. B. der Bodendruck bei dem so eben betrachteten Kegel:  $\gamma r^2\pi h$ . Wegen der festen Verbindung des Mantels mit diesem Boden und weil der Druck auf den Mantel nach verticaler Richtung aufwärts, der Bodendruck aber abwärts gerichtet ist, ergibt sich sonach ein resultirender Druck nach unten:

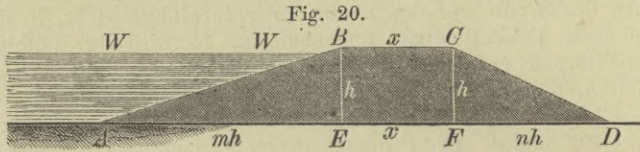
$$[\gamma r^2 \pi h - \frac{2}{3} \gamma \pi r^2 h] = \frac{\gamma}{3} \pi r^2 h,$$

d. h. wie ganz richtig, eine Kraft, welche gleich dem Gewichte des im Kegel befindlichen Wassers ist.

## §. 20.

Aufgabe 1. Man soll die obere oder Kronenbreite eines aus Erde aufgeführten Deichdammes unter der Voraussetzung berechnen, daß derselbe vom Wasserdrucke nicht auf seiner Grundfläche  $AD$  fortgeschoben werden kann.

Auflösung. Es sei  $ABCD$ , Fig. 20, das wenigstens der Form nach festgestellte Dammprofil, seine Höhe  $BE = CF = h$ ,



die äußere Böschung  $AB$  habe eine  $m$  (wenigstens drei)fache, die innere  $CD$  eine  $n$  (wenigstens zwei)fache Anlage, so daß  $AE = mh$ ,  $FD = nh$  ist, die Dammlänge sei  $= l$ . Das Gewicht der Cubikeinheit Erdmasse werde mit  $q$  und der Reibungscoefficient zwischen Dammkörper und dessen Grundfläche mit  $f$  bezeichnet.

Für den Zustand des Gleichgewichts wird letztere Reibung dem Horizontaldrucke des Wassers das Gleichgewicht zu halten haben. Beachtet man hierzu, daß der die Reibung erzeugende Druck aus dem Gewichte des Dammkörpers besteht, diesen vermehrt um den Verticaldruck des Wassers und setzt die Kronenbreite  $BC = x$ , so erhält man ohne Weiteres:

$$\frac{1}{2} \gamma h^2 l = f q h l \left[ x + \frac{h}{2} (m + n) \right] + f \frac{\gamma m h^2 l}{2}.$$

In vielen Fällen wird man indeß annehmen müssen, daß der Dammkörper nach und nach ganz vom Wasser durchdrungen wird, so daß statt obigem Dammgewichte ein anderes nämlich  $(q - \gamma) h l \left[ x + \frac{h}{2} (m + n) \right] h$  in Rechnung zu bringen, der Verticaldruck  $\frac{1}{2} \gamma m h^2 l$  des Wassers aber ganz wegzulassen sein wird, indem diesen das Grundwasser des Bodens im Gleichgewichte hält. Nimmt man überdies, der Sicherheit wegen, das  $1\frac{1}{2}$  fache des Horizontaldruckes in Rechnung, so folgt endlich:

$$\frac{3}{4} \gamma h^2 = f (q - \gamma) \left[ x + \frac{h}{2} (m + n) \right] h, \text{ woraus sich ergibt:}$$

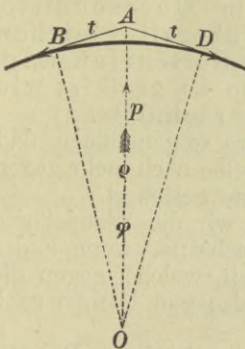
$$x = \frac{3 \gamma h}{4 f (q - \gamma)} - \frac{h}{2} (m + n).$$

Praktische Anforderungen verlangen gewöhnlich  $x$  noch größer zu nehmen, als diese Formel giebt.

§. 21.

Aufgabe 2. Man soll die erforderliche Stärke cylindrischer Röhren angeben, damit dieselben einem bestimmten Flüssigkeitsdrucke widerstehen können.

Fig. 21.



Auflösung. Als entsprechende Vorbereitung zur Lösung dieser Aufgabe untersuchen wir zuerst, welche Spannung =  $t$  in zwei auf einander folgende Seiten  $AB$  und  $AD$  eines elastischen Polygons, Fig. 20, hervorgerufen wird, wenn man gegen den Winkelpunkt  $A$  dieser Seiten ein Normaldruck =  $p$  ausübt. Hierzu sei  $AO = \rho$  der Krümmungshalbmesser des sehr kleinen Bogens  $BD$ , zu dessen Endpunkten  $AB$  und  $AD$  Tangenten sind, ferner  $\angle BOD = \varphi$ .

Zufolge §. 39, Gleichung V. der Geostatik des Verfassers, hat man zunächst:

$$p = 2t \cos \frac{1}{2} (180 - \varphi) = 2t \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

Wegen Kleinheit von  $\varphi$  ist der Sinus mit dem Bogen zu verwechseln, so daß folgt:  $p = t \cdot \varphi$ . Bezeichnet ferner  $s$  die Länge des Bogens  $BD$ , so ist  $s = \rho \varphi$  und folglich  $p = \frac{t \cdot s}{\rho}$ , oder wenn man  $s =$  der Einheit annimmt:

$$(1) \quad p = \frac{t}{\rho}, \quad 1) \quad \text{oder} \\ t = p \rho.$$

Da man sich die unendlich kleinen Polygonseiten mit dem unendlich kleinen Bogen des Radius  $\rho$  zusammenfallend vorstellen kann, so folgt aus (1) auch, daß man die Achsenspannung in einem beliebigen Punkte einer ebenen Curve findet, wenn man den daselbst stattfindenden Normaldruck mit dem Krümmungshalbmesser für diesen Punkt multiplicirt.

Bildet die Curve einen Kreisbogen, so bezeichnet  $\rho$  den Radius, womit derselbe beschrieben ist und daher  $\rho$  eine Constante. Ist ferner die Curve eine geschlossene und bildet sie überdies den Querschnittsumfang einer Röhre, deren Querschnitt ein Kreis vom Radius =  $r$  ist, so stellt

$$(2) \quad t = p r$$

die Spannung in der Peripherie der Röhrenquerschnitte unter der Voraussetzung dar, daß  $p$  der überall gleiche Druck auf die Flächeneinheit der Röhre ist.

Um die Spannung der Röhrenwand in der Richtung der Seiten einer cylindrischen Röhre zu erhalten, denken wir uns dieselbe an beiden Enden geschlossen, so daß diese Endflächen eine Pressung =  $p r^2 \pi$  erfahren. Sodann erleidet aber die Einheit vom

<sup>1)</sup> Ein bereits von d'Alembert aufgefundenenes Gesetz. *Traité des Fluides* §. 4 p. 4.

Umfang der Röhren eine Achsenspannung  $= t$ , welche gleich sein muß

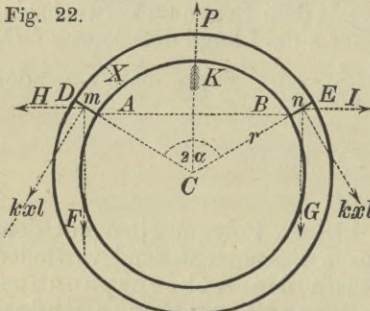
$$(3) \quad t = \frac{pr^2\pi}{2r\pi} = \frac{pr}{2}.$$

Aus (2) und (3) folgt nun der bemerkenswerthe Satz, daß bei einer Röhre mit kreisförmigem Querschnitte, welche von einer Flüssigkeit einen überall gleichen Druck erfährt, die Spannung in der Seitenrichtung, parallel der Röhrenachse, nur halb so groß ist wie die Spannung in der Richtung der Querschnitte.

Werden daher die Wandstücke einer Röhre so genommen daß Längensrisse nicht eintreten können, so ist dieselbe noch mehr gegen Zerstörungen in der Richtung der Querschnitte gesichert.

Unter diesen Voraussetzungen berechnen wir die Wandstärke  $= x$  einer Röhre von kreisförmigem Querschnitte, wenn  $r$  der innere Radius derselben ist und die Flüssigkeit, welche gegen die Röhre drückt, dieselbe füllt, die Druckkraft also von Innen nach Außen gerichtet ist.

Fig. 22.



Ein beliebiges Stück der Röhrenwand von der Länge  $= l$  und dem zugehörigen Centriwinkel  $DCE = 2\alpha$ , Fig. 22, lasse zuerst dergleichen Längensrisse bei  $D$  und  $E$  erwarten, wobei die Flächen  $x \cdot l$  bei  $AD$  und  $BE$  mit einer Kraft  $kx l$  rechtwinklig gegen  $AD$  und  $BE$  widerstehen, wenn  $k$  das sogenannte Tragvermögen, Zugspannung (II, §. 116 Geostatik) des vorhandenen Röhrenmaterials pro Flächeneinheit bezeichnet. Der Druck  $P$  nach der bestimmten Richtung  $CK$  rechtwinklig auf die Sehne des Bogens  $AKB$  ist ferner, wenn  $H$  die Druckhöhe der Flüssigkeit über der betreffenden Stelle bezeichnet,

$$P = \gamma \cdot \overline{AB} \cdot l \cdot H, \text{ oder weil } \overline{AB} = 2r \sin \alpha \text{ ist,}$$

$$(4) \quad P = 2 \gamma r l H \cdot \sin \alpha.$$

Diesem Drucke entgegen wirken die zur Richtung von  $P$  parallelen Componenten  $mF$  und  $nG$  von  $kx l$ , während sich die zu  $P$  rechtwinkligen  $mH$  und  $nI$  wechselseitig vernichten. Es ist aber

$$mF + nG = 2 kx l \cdot \sin \alpha,$$

woraus für's Gleichgewicht mit (4) verglichen folgt:

$$2 kx l \sin \alpha = 2 \gamma r l \cdot H \sin \alpha, \text{ d. i.}$$

$$x = \frac{\gamma}{k} r \cdot H, \text{ oder wenn } 2r = D \text{ eingeführt wird}$$

$$\text{I. } x = \frac{\gamma}{2k} \cdot D \cdot H.$$

Hieraus folgt zugleich, daß große und kleine Stücke der Röhre

mit gleicher Wahrscheinlichkeit von der drückenden Flüssigkeit her-  
ausgetrieben werden können, da in I. weder  $\alpha$  noch  $l$  enthalten ist.

Bezeichnet  $p$  den inneren Druck pro Flächeneinheit der Röhre  
und  $p_0$  eben so den äußeren Druck, so läßt sich auch setzen, indem  
man jetzt annimmt, der Riß der Röhre theilt dieselbe genau in zwei  
Hälften:

$$(2rl) (p - p_0) = k (2lx), \text{ d. i.}$$

$$\text{II. } x = \frac{r(p - p_0)}{k}.$$

Um vorstehende Ausdrücke für die Praxis möglichst brauchbar  
zu machen, sind an denselben entsprechende Correctionen anzu-  
bringen. Vorerst ist klar, daß sie nicht eine solche Form behalten  
können, wo für  $H = 0$  oder für  $p = p_0$  auch  $x = 0$  wird, da  
wegen der eigenen Stabilität der Röhre, selbst wenn kein Druck  
stattfindet, ferner bei gegossenen Röhren, wenn der Guß überhaupt  
noch möglich sein soll, immerhin eine gewisse Wanddicke vorhanden  
sein muß. Sodann wird es auch sicherer sein, den für gleiches  
Material und dieselbe Flüssigkeit constanten Factor  $\frac{y}{2k}$  (in I) durch  
directe Versuche zu ermitteln. Bezeichnet daher  $c$  die kleinste  
Dicke, welche man einer Röhre überhaupt noch geben darf, und  
wird  $\frac{y}{2k} = \mu$  gesetzt, so folgt aus I.

$$\text{III. } x = \mu \cdot DH + c.$$

Nach D'Aubuisson<sup>1)</sup> ist für gußeiserne Röhren und Meter-  
maße  $\mu = 0,00015$ ,  $c = 0,^m01$ , folglich für dieses Material

$$x = 0,^m00015 DH + 0,^m01.$$

Empfehlenswerth sind die für  $\mu$  und  $c$  aus Erfahrung entnom-  
menen Werthe Genieys<sup>2)</sup>. Derselbe führt in III. statt  $H$  die  
Anzahl der Atmosphären =  $n$  ein, die dem jedesmaligen Drucke  
(Ueberdrucke) entsprechen, jede derselben zu 10 Meter Druckhöhe  
gerechnet, und sodann, alle Maaße in Metern ausgedrückt,

für bleierne Röhren  $x = 0,005 nD + 0,0045$ ,

„ gußeiserne „  $x = 0,0007 nD + 0,01$ ,

„ Röhren von Eisenblech  $x = 0,0005 nD + 0,003$ ,

„ „ „ natürlichem Gestein  $x = 0,05 nD$ ,

„ „ „ künstlichem „ (Cement)  $x = 0,1 nD$ ,

„ hölzerne Röhren  $x = 0,833 nD + 0,027$ .

D'Aubuisson wie Genieys rathen übrigens, um recht sicher zu  
gehen, alle Röhren auf 100 Meter Druckhöhe zu prüfen, wonach  
in die Formel des ersteren  $H = 100$ , in die Formeln des letzteren  
 $n = 10$  gesetzt werden müßte.

Nach Redtenbacher<sup>3)</sup> lassen sich die Wanddicken der

<sup>1)</sup> Traité d'hydraulique; 2. éd. Paris 1840, p. 252.

<sup>2)</sup> Essai sur les moyens de conduire, d'élever et de distribuer les eaux  
Paris 1829, p. 177.

<sup>3)</sup> Resultate für den Maschinenbau. Sechste erweiterte Auflage von  
Dr. Grashof herausgegeben. Heidelberg 1875, Seite 76.

Röhren, wenn dieselben mit Sicherheit zu widerstehen im Stande sein sollen, aus nachstehenden Formeln berechnen, wenn  $\delta$  die Wanddicke in Centimetern,  $d$  den inneren Durchmesser ebenfalls in Centimetern und  $n$  den in Atmosphären dargestellten inneren Druck bezeichnet:

Eisenblech	$\delta = 0,00125$	$(n - 1) d + 0,3$
Gußeisen	$\delta = 0,004$	$(n - 1) d + 0,5$
Kupfer	$\delta = 0,002$	$(n - 1) d + 0,1$
Blei	$\delta = 0,040$	$(n - 1) d + 0,1$
Zink	$\delta = 0,025$	$(n - 1) d + 0,1$
Holz	$\delta = 0,032$	$(n - 1) d + 2,7$
Natürlicher Stein	$\delta = 0,037$	$(n - 1) d + 3,0$
Künstlicher Stein	$\delta = 0,054$	$(n - 1) d + 4,0$

In Frankreich wurde 1843 vorgeschrieben, die Eisenblechstärken von Dampfkesseln nach der Formel zu berechnen:<sup>1)</sup>

$$\text{IV. } \delta = 1,8 \cdot d (n - 1) + 3,$$

worin  $d$  den Durchmesser des cylindrischen Kessels in Metern,  $n$  die Dampfspannung im Innern des Kessels in Atmosphären und  $\delta$  die Blechdicke in Millimetern bezeichnet.

Diese französische Formel diente lange Zeit in fast allen Ländern zur gesetzlichen Bestimmung der Wanddicken von aus Eisenblech hergestellten Dampfkesseln, unter der Voraussetzung, daß diese nur Drücken von Innen nach Außen (inneren Ueberdruck) Widerstand zu leisten haben und wird noch gegenwärtig vielfach benutzt<sup>2)</sup>.

Zusatz 1. Der Ausdruck I soll zuerst von Mariotte aufgestellt worden sein und ist man dabei von der (falschen) Voraussetzung ausgegangen, daß der Widerstand gegen Trennung in allen Punkten der Röhrenwand stets gleich groß sei, sie mögen näher oder entfernter der äußeren Oberfläche liegen. Dies ist auch der Grund, weshalb sich diese Formel nur dann für die Praxis brauchbar gezeigt hat, wenn die Wanddicke verhältnißmäßig gering ist, weil nur in diesem Falle die

<sup>1)</sup> Annales des Ponts et Chaussées, 1843, I, Pg. 372.

<sup>2)</sup> Im Almanach für die k. k. österreichische Kriegsmarine für 1878 wird S. 45 unter der Ueberschrift „Formeln für die Construction der Schiffsdampfkessel“ bemerkt, daß die Kesselwandstärke für cylindrische, aus Eisenblech herzustellende Kessel zu berechnen sei aus:

$$\delta = \frac{1}{2} d \cdot \frac{p}{k} + 0,3.$$

Hierin bezeichnet  $\delta$  die Kesselwanddicke in Centimetern,  $d$  den inneren Kesseldurchmesser ebenfalls in Centimetern,  $p$  die größte beabsichtigte Dampfspannung (Ueberdruck) in Kilogrammen pro Quadrat-Centimeter und  $k$  einen Coefficienten, der für gewöhnliche Fälle = 700, für vom Feuer bestrichene Wände = 350 ist. In der Zeitschrift des Verbandes der Dampfkessel-Ueberwachungs-Vereine, Nr. 6 (vom Monat Juni) 1878, S. 66, wird für Walzenkessel mit Ueberdruck von Innen nach Außen, fast ganz der alten französischen Formel entsprechend, folgender Abdruck (als Vereinsseitige Vorschrift) empfohlen:

$$\delta = 1,8 \cdot d (n - 1) + 4,$$

vorausgesetzt dieselben Bezeichnungen und Maaße wie Formel III.



Voraussetzung einer gleichmäßigen Vertheilung der Spannung über die ganze Dicke der Röhrenwand, oder die Annahme, daß nicht der geringste Grad von Elasticität vorhanden ist, gestattet werden kann. Für dicke Röhrenwände, beispielsweise für hydraulische Pressen, Geschützröhren etc., ist daher die Mariotte'sche Formel völlig unbrauchbar<sup>1)</sup>.

Mit Rücksicht auf die Elasticität des Materials hat, nach Wissen des Verfassers, zuerst Barlow die erforderliche Wandstärke cylindrischer Röhren bestimmt (Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preußen, Dreizehnter Jahrgang, 1834, S. 121) und zwar unter Zuziehung der Hypothese, „daß für jede Ausdehnung der Röhre ihr Querschnitt immer denselben Flächeninhalt behalte“.

Hierdurch gelangt Barlow zu der Formel:

$$V. \quad x = \frac{pr}{k-p},$$

worin  $x$  die gesuchte Wanddicke bezeichnet,  $p$  den Druck auf den Quadratzoll der innern Oberfläche,  $r$  den innern Radius der Röhre und  $k$  die absolute Festigkeit des Materials, d. h. die Kraft bezeichnet, womit jeder Quadratzoll der Trennung Widerstand leistet.

Abgesehen von der Unrichtigkeit der genannten Hypothese ist die Richtigkeit dieser Formel auch deshalb zweifelhaft, weil sie für  $k = p$  die Wanddicke unendlich groß giebt<sup>2)</sup>.

Eine andere beachtenswerthe Formel leitete (1834) Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preußen, 13. Jahrgang (1834), S. 124, unter der Hypothese ab, „daß für eine Ausdehnung, welche innerhalb der Grenzen vollkommener Elasticität bleibt, die Dicke der Röhrenwand keine Aenderung erleidet, oder, was dasselbe ist, daß die Differenz des äußern und innern Durchmessers vor und nach der Ausdehnung constant bleibt.

Hiermit gelangt Brix zu der Formel:

$$VI. \quad x = r \left[ e^{\frac{p}{k}} - 1 \right],$$

worin dieselben Buchstaben gleiche Bedeutung wie bei Barlow haben und  $e = 2,71828 \dots$ , d. h. die Basis des natürlichen Logarithmen-systems ist.

Diese Formel wurde längere Zeit hindurch im Königreich Preußen zur Berechnung der gesetzlichen Wanddicke bei Dampfkesseln benutzt<sup>3)</sup>.

Frei von allen besonderen Hypothesen (wie Barlow und Brix), lediglich auf die Principien der Lehre vom Widerstande (elastischer)

<sup>1)</sup> Leider sind dem Verfasser die 1712 (2 Bde.) zu Leyden und 1740 zu Haag erschienenen Gesamtwerke Mariotte's nicht zur Hand. Eytelwein citirt hierbei in seiner Hydrostatik, S. 39, Mariotte's Erfahrungen unter dem Titel: „Divers ouvrages mathématiques et de physique par Mrs. de l'académie royale des sciences“, Paris 1693, Pg. 516.

<sup>2)</sup> Man sehe über die Barlow'sche Formel auch Bd. 9 (1826) S. 43 etc. der Jahrbücher des k. k. polytechn. Instituts in Wien.

<sup>3)</sup> Dabei wurde  $p = 15 \cdot (n - 1)$  Pfund und  $k = \frac{50000}{15}$  in Rechnung gebracht, so daß sich ergab:

Materialien gegründet, entwickelte zuerst Lamé in seinen 1852 erschienenen berühmten „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides“, Pg. 191 (die vorstehenden Bezeichnungen beibehaltend):

$$\frac{x+r}{r} = \sqrt{\frac{k+p}{k-p+2p_0}}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\text{VII. } x = r \left\{ -1 + \sqrt{\frac{k+p}{k-p+2p_0}} \right\}.$$

Mit  $p_0$  wird hier der äußere auf die Rohrwand kommende Druck bezeichnet.

Die Lamé'sche Formel zeigt sich namentlich bei sehr großen Pressungen als nützlich, wo die Mariotte'sche Formel zu kleine Werthe giebt, während bei geringen Pressungen beide Formeln fast übereinstimmende Werthe liefern.

Hat man beispielsweise die Wanddicke eines gußeisernen Rohres von 30 Centimeter Radius zu berechnen, wobei im Innern eine Pressung von 13 Atmosphären statt hat, während auf die Außenfläche die atmosphärische Luft drückt, und nimmt man den Tragmodul des Gußeisens zu 300 Kil. pro Quadratcentimeter an, so giebt die Formel II:

$$x = \frac{30(13-1)}{300} = 1,20 \text{ Centimeter.}$$

Eben so liefert die Formel VII:

$$x = 30 \left\{ -1 + \sqrt{\frac{313}{289}} \right\} = 1,22 \text{ Centimeter.}^1)$$

Ist dagegen die erforderliche Wanddicke des Cylinders einer hydraulischen Presse zu ermitteln, wobei  $r$  ebenfalls 30 Centimeter, dagegen  $p = 400$  Kil. (400 Atmosph.) ist und, des besseren Materials wegen,  $k = 500$  Kil. angenommen wird, so liefert die Mariotte'sche Formel

$$x = \frac{30(400-1)}{500} = 24 \text{ Centimeter,}$$

$$x = r \left[ -1 + e^{0,0045(n-1)} \right]$$

Daß hier  $n$  die Anzahl Atmosphären des Innendruckes bezeichnet und  $x$  in (preuß.) Zollen erhalten wird, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Was bereits seiner Zeit erfahrene Praktiker von allen diesen Formeln für Berechnung von Dampfkesselwanddicken hielten (d. h. höchst wenig) und deren Ansichten sich später dadurch bestätigten, daß man in dem (neuesten) Dampfkesselgesetze für das Königreich Preußen ganz von der gesetzlichen Vorschrift bestimmter Wanddicken für den gedachten Fall absah, erhellt besonders aus einem Artikel, welcher sich in Dingler's Polytechn. Journal, Bd. 111, S. 83 etc., abgedruckt vorfindet.

<sup>1)</sup> Der besonderen Merkwürdigkeit (!) wegen citirt der Verfasser noch eine Abhandlung, welche die Ueberschrift trägt: „Die Bestimmung der Wandstärken gußeiserner Rohre“, welche im 18. Bande (1872) S. 495 der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins abgedruckt ist. Als Commentar hierzu dienen Artikel in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XVII (1873), S. 219 und Bd. XIX (1875), S. 101. Ferner im Journal für Gasbeleuchtung (von Schilling), Jahrg. 1875, S. 66.

die Lamé'sche Formel<sup>1)</sup> dagegen

$$x = 30 \left\{ -1 + \sqrt{\frac{900}{98}} \right\} = 60 \text{ Centimeter.}$$

Der Unfall<sup>2)</sup>, welcher sich durch das Platzen fast aller hydraulischen Pressen ereignete, als man seiner Zeit bemüht war, das berühmte Riesenschiff „Great Eastern“ vom Stapel zu lassen, findet hiernach seine natürliche Erklärung.

Die Lamé'sche Formel enthält übrigens noch das für die Praxis wichtige Resultat, daß es für jedes Material einen Grenzwert des inneren Druckes giebt, welcher in keinem Falle überschritten werden darf, wie groß auch die Wanddicke und wie klein die innere Weite der Röhre auch sein mag. Dieser Grenzwert ist  $p = k + p_0$ , oder, wenn kein äußerer Druck vorhanden wäre,  $p = k$ , d. h. gleich der absoluten Festigkeit des Materials.

Eine der Lamé'schen fast gleiche Formel, für die Wanddicken hydraulischer Preßcylinder, entwickelt Grashof in seinem ausgezeichneten Werke „Die Elasticitätslehre“, Berlin 1878, Zweite Auflage, S. 327 (Nr. 571), nämlich:

$$x = r \left\{ -1 + \sqrt{\frac{k + 0,5 p}{k - p}} \right\}.$$

Sämmtliche Formeln sind praktisch unbrauchbar, sobald, bei cylindrischen Röhren, die Länge den Durchmesser um mehr als das dreifache übertrifft und der Druck (Ueberdruck) von Außen nach Innen gerichtet ist, ein Fall, der beispielsweise vielfach bei Dampfkesseln eintritt.

Zur Zeit sind alle Versuche zur Herleitung zuverlässiger, praktischer Formeln für letztern Zweck an der Schwierigkeit der Aufgabe an sich gescheitert<sup>3)</sup>, so wie auch daran, welche Form der Abweichungen von der Kreisform man bei den Rechnungen zu Grunde legen soll<sup>4)</sup>. Nur soviel steht fest, daß hierbei die Länge der Röhre nicht außer Acht gelassen werden darf.

Deshalb sind hier Versuche von besonderem Werthe, welche die Bildung einer empirischen Formel gestatten.

Dergleichen Versuche hat der bekannte englische Ingenieur W. Fairbairn mit Eisenblechröhren von 10 bis 48 Centimeter Durchmesser und von 48 bis 155 Centimeter Länge angestellt<sup>5)</sup> und daraus eine Formel von der Form

$$x = \mu \sqrt{pd}$$

<sup>1)</sup> Vereinfachte Ableitungsmethoden der Lamé'schen Formel haben geliefert: Scheffler in seiner Abhandlung „Die Elasticitätsverhältnisse der Röhren“, Wiesbaden 1859. Dann Dwelshauvers-Dery in der „Revue Universelle“, Tome 35 (1874), Pg. 73 und hiernach Prof. Keck im XX. Bande (1874) S. 622 der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins.

<sup>2)</sup> Rühlmann, Allgem. Maschinenlehre, Bd. 1, S. 5 (2. Auflage) und das „Practical mech. Journal“, 1857—58, Pg. 191.

<sup>3)</sup> Wiebe, „Lehre von der einfachen Maschinentheilung“, Bd. I. S. 359.

<sup>4)</sup> Weisbach, „Ingenieur- und Maschinen-Mechanik“. Zweiter Theil. Vierte Auflage (1865), S. 919, §. 411.

<sup>5)</sup> Zeuner, „Civilingenieur“, Bd. 4, S. 53.

abgeleitet, wenn man die vorigen Bezeichnungen beibehält,  $l$  die Länge der Röhre und  $\mu$  einen Erfahrungcoefficienten bezeichnet.

Wird  $l$  in Metern,  $d$  in Centimetern ausgedrückt und bez.  $p$  den Dampfdruck in Kilogrammen pro Quadratcentimeter, so ergibt sich die erforderliche Wandstärke in Millimetern zu

$$x = 0,27 \sqrt{pld}.$$

Grashof<sup>1)</sup> hat aus 21 Fairbairn'schen Versuchen, mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, die empirische Formel

$$n = 7790 \frac{\delta^{2,915}}{ld^{1,278}}$$

abgeleitet, worin  $l$  die Länge der Röhre in Centimetern,  $d$  den Durchmesser in Centimetern,  $\delta$  die Blechdicke in Millimetern und  $n$  den Ueberdruck in Atmosphären bezeichnet, durch welche die Röhre zerdrückt wird.

Da jedoch diese Formel die wichtigeren Versuche mit dickeren Blechen nicht genügend wiedergiebt, so wurde eine zweite Formel hergestellt, welche den gedachten Versuchen genau entspricht. Diese ist

$$n = 325 \frac{\delta^{2,081}}{l^{0,564} d^{0,889}}.$$

Eine noch andere Formel leitete der französische Ingenieur Love<sup>2)</sup> aus den erwähnten Fairbairn'schen Versuchen ab, deren Gestalt mit einer noch andern übereinstimmt, welche nachher von der „Commission der Hütte“ in Berlin<sup>3)</sup> abgeleitet wurde und die mit ihren Coefficienten (Alles in Centimetern ausgedrückt) nachstehende Gestalt hat:

$$p_1 = 376721 \frac{\delta^2}{ld} + 1160 \frac{\delta^2}{d} - 93 \frac{\delta}{d}.$$

Dabei bezeichnet  $p_1$  den äußeren Druck pro Kilogramm der Fläche, welcher nöthig ist, um die Elasticitätsgrenze schmiedeeiserner Röhren gerade zu überschreiten.

Der Verfasser muß Grashof beistimmen, welcher S. 244 der ersten Auflage seiner Festigkeitslehre hervorhebt, daß diese sämtlichen Formeln vorläufig nur als Nothbehelfe zu betrachten sind.

Da es Zweck und Umfang der Hydromechanik überschreiten würde, auf die Berechnung von Wandstärken anderer Gefäße, beispielsweise auf kugelförmige, auf solche mit ebenen Wandflächen u. A. einzugehen, so sieht sich der Verfasser in dieser Hinsicht genöthigt, auf die mehrfach citirten Werke, namentlich auf die vortreffliche Grashof'sche Festigkeitslehre zu verweisen.

## §. 22.

Aufgabe 3. Man soll eine Gleichung zur Berechnung der Querschnittsdimensionen eines gekrümmten Schleusenthores  $ABC$ , Fig. 23 entwickeln.

<sup>1)</sup> „Theorie der Elasticität und Festigkeit“, S. 329 (2. Auflage).

<sup>2)</sup> „Civil-Ingenieur“, Jahrg. 1861, S. 238 und Zeitschrift des Vereins zur Beförderung des Gewerbleißes in Preußen, Jahrg. 1870, S. 117.

<sup>3)</sup> In letzterer Quelle S. 119.

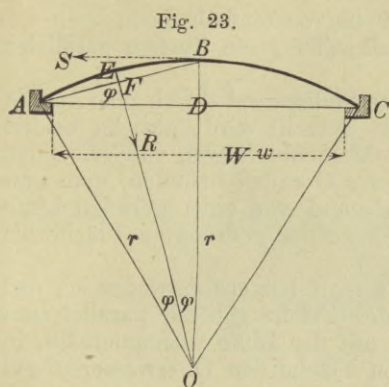


Fig. 23.

Auflösung. Behalten wir ganz die Bezeichnungen von Aufgabe 2 §. 18 bei, bezeichnen wir überdies den Wasserdruck pro Längeneinheit des Bogens  $AB$  mit  $q$ , d. h. setzen  $\gamma b h = q$ , so ist die Achsenspannung  $= t$  nach voriger Aufgabe in der Curve  $ABC$  an einer Stelle, wo  $q$  der Krümmungshalbmesser ist:  $t = q \cdot q$ .

Nehmen wir  $ABC$  als einen Kreisbogen und setzen  $AO = BO = r$ , so folgt die überall gleiche Achsenspannung

$$(1) \quad t = q r.$$

Ersetzen wir jetzt wiederum die eine Hälfte  $BC$  durch eine Horizontalkraft  $= S$ , so ergibt sich dieselbe, wegen  $S \cdot BD = R \cdot \overline{AF}$ , wo  $R$  den Wasserdruck  $= q \cdot \overline{AB}$  auf die Curve  $AEB$  in der Richtung  $EO$  bezeichnet, zu  $S = q \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \cdot \overline{AF} = q \cdot \frac{\overline{AF}}{\sin \varphi}$  1)

$= q \cdot r$  wie bereits in (1) gefunden. Aber  $2 \overline{AF} \cdot \cos \varphi = \frac{w}{2}$ , also  $\overline{AF} = \frac{w}{4 \cdot \cos \varphi}$ , daher auch  $S = \frac{q w}{4 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{q w}{2 \sin \varphi 2 \varphi} = \frac{\gamma b h w}{2 \sin 2 \varphi}$ .

Wird endlich das Tragvermögen des Thormaterials pro Flächeneinheit mit  $k$  und der Thorquerschnitt mit  $A$  bezeichnet, so ist

$$I. \quad A = \frac{\gamma b h w}{2 k \sin 2 \varphi}.$$

Hierbei ist abermals das Thorgewicht unbeachtet gelassen. Man sehe deshalb Navier, Baumechanik §. 574.

### §. 23.

#### Vom Mittelpunkte des Druckes.

Unter dem Mittelpunkte des Druckes versteht man den Angriffspunkt der Mittelkraft, welche den sämtlichen, auf die einzelnen Punkte einer Fläche wirkenden Normaldrücken des Wassers entspricht. Zur Bestimmung statischer Momente ist die Kenntniß der Lage dieses Punktes durchaus nothwendig.

Bei (horizontalen) Bodenflächen, wo alle Elemente gleichen Druck erfahren, fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte zusammen. Bei allen Seitenwänden liegt er dagegen stets unter dem Schwerpunkte derselben, weil hier die Drücke auf die einzelnen Punkte mit deren Tiefe unter dem Wasserspiegel zunehmen.

Zuerst werde der Mittelpunkt des Druckes für ebene Seiten-

1) Im  $\triangle AFO$  ist  $\angle AOF = \varphi$ , folglich  $\frac{AF}{AO} = \sin \varphi$  oder  $\frac{AF}{\sin \varphi} = AO = r$ .

wände bestimmt, was nach dem Früheren einfach darin bestehen wird, den Angriffspunkt der Mittelkraft für ein System paralleler Kräfte zu suchen.

Für den Fall, daß die gedrückte Seitenwand durch eine gerade Linie in zwei symmetrische Theile getheilt wird, also zu beiden Seiten derselben gleiche statische Momente liegen, muß sich der zu suchende Angriffspunkt in dieser Geraden befinden, und man wird nur nöthig haben, dessen Abstand von einer geraden Linie anzugeben, welche man in der Ebene der gedrückten Fläche als Momentenachse angenommen hat.

Der Einfachheit wegen wählt man letztere entweder so, daß sie, durch den höchsten Punkt der Fläche gehend, parallel zum Wasserspiegel liegt, oder daß sie mit der Linie zusammenfällt, in welcher die Ebene der gedrückten Fläche den Oberwasserspiegel schneidet.

Die gedrückte Fläche theilt man sodann in Elemente, deren Begrenzungslinie parallel zur Momentenachse sind, bestimmt die statischen Momente der Normaldrücke, welche diese Elemente erfahren, und dividirt deren Summe durch den Normaldruck auf die Gesamtfläche; der Quotient giebt den gesuchten Abstand des Druckmittelpunktes.

Läßt sich die Scheidewand nicht, wie vorbemerkt, durch eine Gerade theilen, so hat man die Momente der Druckelemente noch in Bezug auf eine zweite Achse zu bestimmen, welche erstere unter einem (rechten) Winkel schneidet und gleichfalls in der Ebene der gedrückten Wand liegt u. s. w.

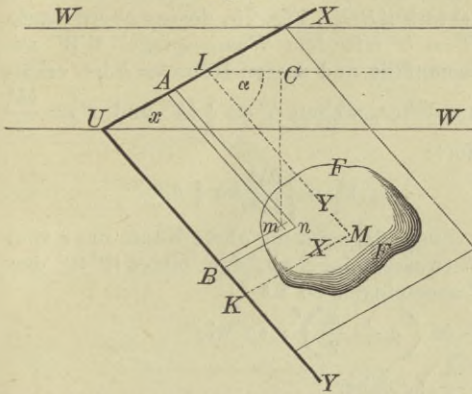
Um endlich den Mittelpunkt des Druckes für ein krummes Wandstück zu bestimmen, hat man (u. A. nach §. 65 der „Grundzüge der Mechanik“, 3. Auflage des Verfassers) die Normaldrücke auf die Elemente der krummen Fläche in Seitenkräfte zu zerlegen und die entsprechenden Resultirenden aufzusuchen.

Diese ihrer Lage und Größe nach so bestimmten Resultirenden lassen sich jedoch nur unter besonderen Umständen zu einer einzigen Resultante vereinigen; ist daher Letzteres nicht der Fall, so kann natürlich von einem Mittelpunkte des Druckes im obigen Sinne nicht die Rede sein. Zu den bemerkten Fällen, wo eine einzige Mittelkraft möglich ist, gehört namentlich der, wenn die gedrückte Wand die Flüssigkeit überall umgiebt, wie später gezeigt werden wird.

#### §. 24.

Mit Bezug auf den vorigen Paragraphen werde nun der Mittelpunkt des Druckes für eine ebene Fläche  $FF'$ , Fig. 24, bestimmt, die ganz unter dem Wasserspiegel liegt und gegen den Horizont unter einem Winkel  $\alpha$  geneigt ist. Die Gerade  $UX$  sei die Durchschnittslinie der Ebene der Fläche  $FF'$  mit dem Wasserspiegel  $WW$  und zugleich die Abscissenachse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Ordinatenachse  $UY$  in der Ebene von  $FF'$  liegt. Die Coordinaten eines beliebigen aber unendlich kleinen Flächenelementes  $mn$ , dessen Inhalt  $= \lambda$  sein mag, bezeichnen wir mit

Fig. 24.



$x (= UA = Bm)$  und mit  $y (= UB = Am)$  und erhalten sonach, weil die Druckhöhe  $mC = y \sin \alpha$  ist, den Normaldruck des Wassers auf  $mn: \gamma \lambda y \sin \alpha$  und die Summe aller dieser Drücke  $= \gamma \sin \alpha \Sigma (\lambda y) = \gamma \cdot P \sin \alpha$ , wenn  $\Sigma (\lambda y) = P$  gesetzt wird. Die statischen Momente dieses Druckes in Bezug auf die Achsen  $UX$  und  $UY$  ergeben sich daher ohne Weiteres respective zu  $\gamma \sin \alpha \Sigma (\lambda y^2)$  und  $\gamma \sin \alpha \Sigma (\lambda xy)$ . Setzt man daher die

Coordinationen des Druckmittelpunktes  $IM = Y, KM = X$ , so folgt nach dem bekannten Satze, daß das statische Moment des Ganzen gleich der Summe der statischen Momente der Theile sein muß:

$$Y \cdot \gamma P \sin \alpha = \gamma \sin \alpha \Sigma (\lambda y^2) \text{ und}$$

$$X \gamma P \sin \alpha = \gamma \sin \alpha \Sigma (\lambda xy), \text{ d. i.}$$

$$\text{I. } Y = \frac{\Sigma (\lambda y^2)}{P} \text{ und II. } X = \frac{\Sigma (\lambda xy)}{P}.$$

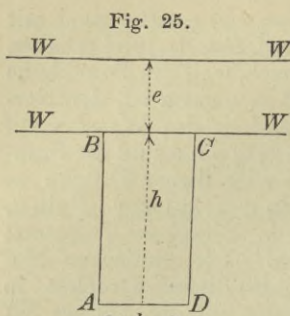
Der Zähler des ersten Ausdruckes ist aber nichts anderes als das Trägheitsmoment der gedrückten Fläche in Bezug auf eine Achse, welche in ihrer Ebene und zugleich in Oberwasserspiegel liegt, so wie im zweiten Ausdrucke der Zähler das Centrifugalmoment derselben Fläche auf dieselbe Achse bezogen bezeichnet. Zugleich folgt hieraus, daß der Mittelpunkt des Wasserdruckes für eine ebene Fläche nichts anderes als der Mittelpunkt des Stoßes ist, wenn man die Abscissenachse  $UX$  als Drehachse der Fläche  $FF'$  betrachtet.

Für eine Fläche, die in einer zur Ordinatenachse  $UY$  symmetrische Lage gebracht werden kann, wird  $\Sigma \lambda xy$  gleich Null, weil dann jedem  $+x$  auf der einen Seite dieser Achse ein  $-x$  auf der andern entspricht. Man erhält daher, wenn überdies das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Achse  $UX$  mit  $T$  bezeichnet wird:

$$\text{III. } Y = \frac{T}{P},$$

in diesem Falle findet man also den Mittelpunkt des Druckes, indem man das Trägheitsmoment der gedrückten Fläche durch das statische Moment der Fläche dividirt, beide Momente auf dieselbe Achse bezogen, welche in der Ebene der Fläche und im Wasserspiegel liegt.

Der so bestimmte Druckmittelpunkt fällt daher auch mit dem Schwingungspunkte der Fläche zusammen, wenn  $UX$  abermals die Drehachse bildet.



Zusatz 1. Für ein vertical stehendes Rechteck  $ABCD$ , Fig. 25, dessen obere Kante  $BC = b$  mit dem Wasserspiegel  $WW$  zusammenfällt und dessen Höhe  $= h$  ist, erhält man daher, wegen  $T = \frac{1}{3} bh^3$  und  $P = \frac{bh^2}{2}$  sofort:

$$Y = \frac{\frac{1}{3} bh^3}{\frac{1}{2} bh^2} = \frac{2}{3} h.$$

Steht dagegen die obere Kante um  $e$  vom Oberwasserspiegel ab, d. h. bildet  $W'W'$  den Wasserspiegel, so ist

$$T = \frac{1}{2} bh^3 + bh \left( e + \frac{h}{2} \right)^2, \text{ so wie}$$

$$P = bh \left( e + \frac{h}{2} \right), \text{ daher}$$

$$Y = \frac{e^2 + eh + \frac{1}{3} h^2}{e + \frac{h}{2}}$$

Für eine vertical stehende Kreisfläche vom Halbmesser  $= r$ , deren höchster Punkt um  $e$  unterm Wasserspiegel liegt, ist ähnlich wie vorher:

$$T = \frac{1}{4} \pi r^4 + r^2 \pi (r + e)^2$$

$$P = \pi r^2 (r + e), \text{ folglich}$$

$$Y = \frac{r^2 + 4 (r + e)^2}{4 (r + e)}.$$

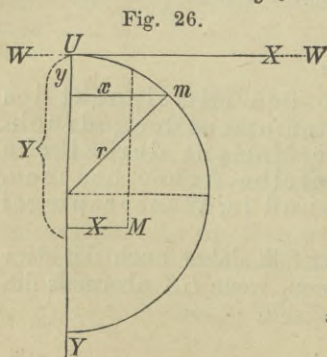
Fällt der höchste Punkt der Kreisfläche mit dem Wasserspiegel zusammen, so wird  $e = \text{Null}$  und  $Y = \frac{5}{4} r$ .

[§. 25.]

Für nicht symmetrische Flächen läßt sich genau genommen der Mittelpunkt des Druckes nur mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung bestimmen, was in diesem Paragraphen gezeigt werden soll.

Die Formeln I und II geben, in die Sprache der genannten Rechnung übersetzt, sofort:

$$Y = \frac{\int y^2 dx dy}{\int y dx dy}; \quad X = \frac{\int xy dx dy}{\int y dx dy}.$$



Mitteltst derselben mögen folgende specielle Fälle behandelt werden:

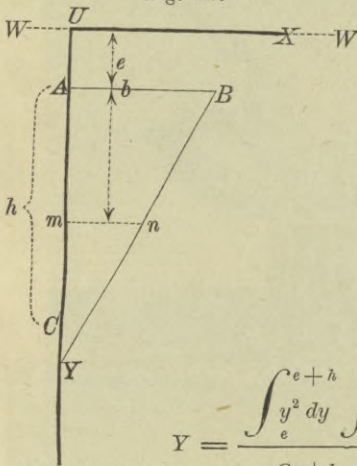
(1) Mittelpunkt des Druckes eines Halbkreises von Radius  $= r$ , Fig. 26, dessen verticaler Durchmesser mit der Verticalachse  $UY$ , und der Coordinatenursprung im Endpunkte des Durchmessers mit dem Wasserspiegel  $WW$  zusammenfallen mag. Für einen Punkt  $m$  der Kreisperipherie hat man bekanntlich  $x^2 = 2ry - y^2$ , folglich:



$$Y = \frac{\int_0^{2r} y^2 dy \int_0^{\sqrt{2ry-y^2}} dx}{\int_0^{2r} y dy \int_0^{\sqrt{2ry-y^2}} dx} = \frac{\frac{3}{8} r^4 \pi}{\frac{1}{2} r^3 \pi} = \frac{5}{4} r; \quad 1)$$

$$X = \frac{\int_0^{2r} y dy \int_0^{\sqrt{2ry-y^2}} x dx}{\int_0^{2r} y dy \int_0^{\sqrt{2ry-y^2}} dx} = \frac{\frac{2}{3} r^4}{\frac{1}{2} r^3 \pi} = \frac{4r}{3\pi}$$

Fig. 27.



(2) Mittelpunkt des Druckes für ein ebenes Dreieck  $ABC$ , Fig. 27, dessen eine Cathete  $AC = h$  vertical liegt, mit der Ordinatenachse  $UY$  zusammenfällt, während die andere Cathete  $AB = b$  um  $e$  vom Oberwasserspiegel absteht.

Zuerst erhält man hier für die Breite  $mn$  in dem beliebigen Abstände  $Um = y: mn = \frac{b}{h} (h + e - y)$  und sodann:

$$Y = \frac{\int_e^{e+h} y^2 dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx}{\int_e^{e+h} y dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx} = \frac{h^2 + 4he + 6e^2}{2h + 6e};$$

$$X = \frac{\int_e^{e+h} y dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} x dx}{\int_e^{e+h} y dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx} = \frac{b}{4} \frac{h + 4e}{h + 3e}.$$

$$1) \int dz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{1}{2} (a - z) \sqrt{2az - z^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \operatorname{vers.} \left( \frac{z}{a} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{2} (a - z) \sqrt{2az - z^2} + a^2 \arcsin \sqrt{\frac{z}{2a}} + C$$

$$\int z dz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{1}{3} \sqrt{(2az - z^2)^3} + a \int dx \sqrt{2az - z^2},$$

$$\int z^2 dz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{5a + 3z}{12} \sqrt{(2az - z^2)^3} + \frac{5a^2}{4} \int dz \sqrt{2az - z^2}.$$

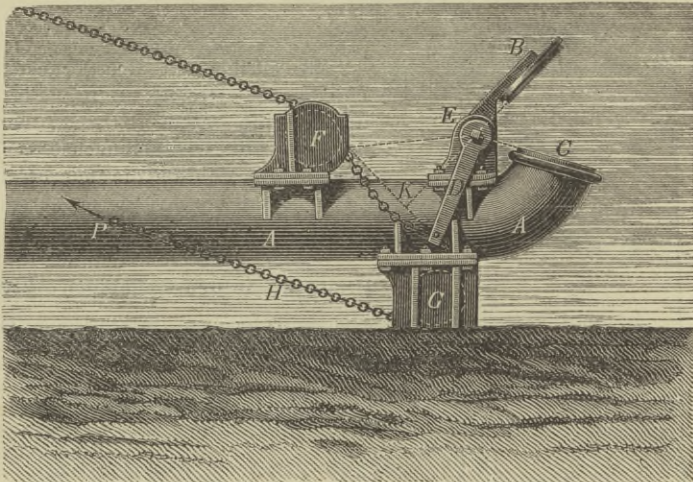
Für  $e = \text{Null}$  wird  $Y = \frac{1}{2}h$  und  $X = \frac{1}{4}b$ . Genau dieselben Werthe lassen sich für den Mittelpunkt des Stoßes einer Dreiecksfläche finden.

## §. 26.

Zur Anwendung der Lehre vom Mittelpunkte des Druckes folgen hier noch einige praktische Aufgaben.

Aufgabe 1. Zur Abführung des Wassers aus dem Speisebassin des von Telford erbauten Birmingham und Warwick Canales<sup>1)</sup> dient eine 18 Zoll (engl.) weite Röhrenleitung  $A$ , Fig. 28, (welche

Fig. 28.



horizontal durch den Bassin-Damm geht), die an der Eintrittsstelle  $C$  durch eine kreisförmige Scheibe  $B$  geschlossen und geöffnet werden kann. Für den Zweck dieser Bewegung ist die Scheibe mit einem Arme  $D$  derartig verbunden, daß überhaupt eine um  $E$  als Achse drehbare Hebelanordnung gebildet wird. Ueber feste Rollen  $F$  und  $G$  geleitete Ketten dienen respective zum Schließen und Oeffnen der Klappe  $B$  etc., welche Ketten der dreifüßigen (Höhe zur Anlage = 1 : 3) Dammböschung parallel bis zur Dammkrone geführt sind, sich dort auf die Trommel einer mit Räderwerk versehenen Aufzugsmaschine (Winde) wickeln etc.

Es soll die Zugkraft =  $P$  in der Kette  $K$  für den Anfang der Bewegung der als geschlossen gedachten Klappe, mit Nichtbeachtung aller Reibungen, bestimmt werden, wenn man weiß, daß die Druckhöhe für den Schwerpunkt der kreisförmigen Klappe 43 Fuß englisch, der Radius der Kreisscheibe  $B = 11\frac{1}{2}$  Zoll, der Neigungswinkel der Klappe gegen den Horizont (parallel der Dammböschung)  $18^\circ 26'$  ( $\frac{1}{3} = \text{tg. } 18^\circ 26'$ ), der Hebelarm der Zugkraft

<sup>1)</sup> Life of Telford, p. 80, Plate 29 und Hagen, Wasserbau, II. Theil, 3. Bd., S. 576.

= 22 Zoll, die Entfernung  $EB$  des Hebelrehpunktes von der Klappenmitte = 19 Zoll beträgt und ein Cubikfuß (engl.) Wasser = 62,5  $\mathfrak{A}$  gerechnet wird<sup>1)</sup>.

Auflösung. Es sei allgemein  $r$  der Radius des Klappenkreises,  $L$  die Entfernung des Mittelpunktes vom Wasserspiegel, in der Dammböschungrichtung gemessen, und  $Y$  die Entfernung des Druckmittelpunktes in Bezug auf die Gerade der Achse, wo der Oberwasserspiegel die Dammböschung berührt.

Sodann ist nach §. 25:

$$Y = \frac{\frac{1}{4}r^4\pi + r^2\pi L^2}{r^2\pi L} = \frac{r^2}{4L} + L, \text{ d. i.}$$

wegen  $\text{tg } \varphi = \frac{1}{3}$  und  $L = \frac{43'}{\sin \varphi} = 135',988$  engl.,  $r = 11'',5$ :

$$Y = 0',0017 + 135',978 = 135',9797.$$

Ferner ist der Wasserdruck auf die Klappe:

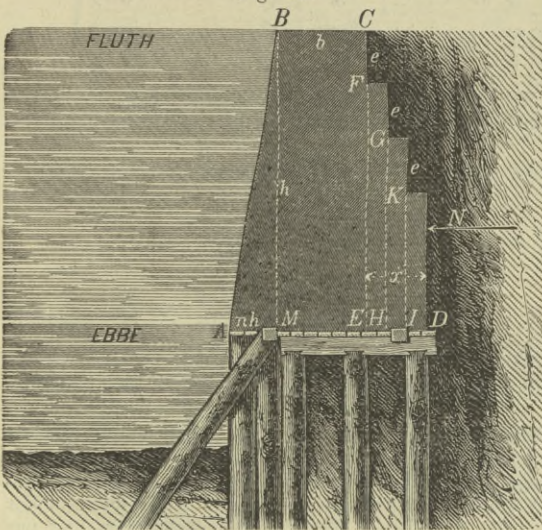
$$\left(\frac{11,5}{12}\right)^2 \pi \cdot 43 \cdot 62,5 = 7754,104 \mathfrak{A}.$$

Der Hebelarm dieses Druckes:  $19' + 0',0017 = 19' + 0'',0203 = 19,0203$  Zoll,

„ „ der Zugkraft = 22', sonach endlich:

$$P = \frac{19,0203 \cdot 7754,104}{22} = 6703,9 \mathfrak{A}.$$

Fig. 29.



Aufgabe 2. An einem Fluth und Ebbe haltenden Strome wird die Anlegung einer Kaimauer, Fig. 29, beabsichtigt, welche auf einen Pfahlrost zu gründen ist und eine obere Breite  $b = 4' 3'' (= 1^m,24)$  und eine gegen die Wasserseite frei stehende Höhe  $h = 17' 4'' (= 5^m,0)$  erhalten soll. Die Anlage  $AM$  der Vorderfläche  $AB$  sei  $nh = 1' 6'' (= 0^m,44)$  festgesetzt u. von der Krone ab nach unten drei Bankets, jedes von  $e = 3' (= 0^m,876)$

<sup>1)</sup> Entsprechend dem Original, woraus der Verfasser vorstehende Aufgabe entnahm, sind auch hier die englischen Maaße und Gewichte beibehalten worden. Für Bau- und Maschinen-Ingenieure haben die englischen Maaße insofern (neben dem Metermaaße) eine besondere Bedeutung, als weder für England noch Nord-

Höhe und gleicher Breite =  $\frac{x}{3}$  angeordnet. Man soll die Dicke  $ED = x$  der hinteren Maueranlage unter der Voraussetzung berechnen, daß das Erdreich  $N$ , was gegen die Mauer drückt, gleiche Dichte mit dem Wasser habe, das Mauerwerk eine Dichte =  $q$  besitze und der Druck der Masse  $N$  eine Drehung der Mauer um die Kante  $A$  zu bewirken strebt. Endlich werde  $\gamma = 53,2$   $\mathcal{A}$  (hannov.) gesetzt und  $q = 2\gamma$ .<sup>1)</sup>

Auflösung. Nach §. 20 ist das Moment des Wasserdruckes in Bezug auf die Kante  $A$ , wenn die auf der Bildfläche normale Mauerdimension = 1 gesetzt wird:  $\gamma h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{\gamma h^3}{6}$ , oder wenn  $m$  einen Sicherheitscoefficienten  $m > 1$  bezeichnet:  $\frac{m\gamma h^3}{6}$ . Setzt man diesen Werth der Summe der statischen Momente der sämtlichen Mauertheile, einschließlich des auf die Bankets kommenden Flüssigkeitsdruckes gleich, so erhält man folgende Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, aus welcher  $x$  zu reduciren ist:

$$\text{I. } \frac{m\gamma h^3}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} q n^2 h^3 \\ + q b h (n h + \frac{1}{2} b) \\ + \left[ \frac{q x}{3} (h - e) + \frac{\gamma e x}{3} \right] \left( n h + b + \frac{x}{6} \right) \\ + \left[ \frac{q x}{3} (h - 2e) + \frac{2\gamma e x}{3} \right] \left( n h + b + \frac{3x}{6} \right) \\ + \left[ \frac{q x}{3} (h - 3e) + \frac{3\gamma e x}{3} \right] \left( n h + b + \frac{5x}{6} \right) \end{array} \right\}$$

Für eine Mauer, wo die innere Seite  $CD$  vertical also  $x = \text{Null}$  ist, kann man  $b$  als unbekannt voraussetzen, so daß man erhält:

$$\frac{q}{3} n^2 h^3 + q b h (n h + \frac{1}{2} b) = \frac{m}{6} \gamma h^3 \text{ und hieraus}$$

$$\text{II. } b = h \left( -n + \sqrt{\frac{2}{3} n^2 + \frac{m\gamma}{3q}} \right).$$

amerika Aussicht vorhanden ist, daß in diesen Ländern das Metermaaß in nächster Zeit allgemein eingeführt wird.

Man merke deshalb, daß man den englischen Fuß = 0,305 Meter und den englischen Zoll = 25,4 Millimeter setzen und das englische Pfund = 0,453 Kilogramm annehmen kann.

<sup>1)</sup> Diese Aufgabe behandelt eine beim Baue des Geestemünder Hafens gestellte Aufgabe, wo die Ingenieure seiner Zeit (1855) noch verpflichtet waren, nach hannoverschen Maaßen zu rechnen und zu arbeiten. Aus letzterem Grunde schien es dem Verfasser angemessen, in diesem Falle auch in der 2. Auflage der Hydrodynamik die älteren Maaßgrößen beizubehalten und nur überall die Reduction in Meter beizusetzen. Man sehe hierzu „Technische Mittheilungen über die Hafenplätze Geestemünde und Bremerhafen“ im Jahrgang 1855 der Zeitschr. d. Hannov. Archit.- und Ingen.-Vereins, S. 45, Blatt 4, Fig. 4.

Endlich ist zu bemerken, daß durch ein Versehen der Zeichner in Fig. 29 die Spundwand in verticaler Richtung unter  $M$  anzugeben vergessen hat.

Endlich, wenn auch die Vorderfläche ungeböschet, also noch  $n = \text{Null}$  ist:

$$\text{III. } b = h \sqrt{\frac{m\gamma}{3q}}.$$

Für's mathematische Gleichgewicht, d. h. wenn  $m = 1$  ist und überdies  $q = 2\gamma$  folgt:

$$\text{IV. } b = 0,408 \cdot h,$$

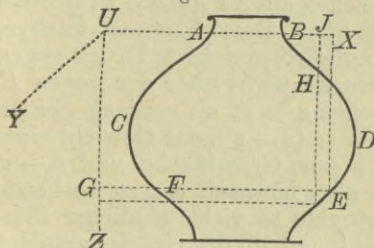
woraus sich die praktische Regel erklärt, derartige Mauern halb so dick zu machen, als der hinter ihnen befindliche Wasserstand beträgt. Für obige Zahlenwerthe wird  $x = 2,799$  Fuß (= 0,817 Meter), wenn  $m = 1$  ist und  $x = 4,287$  Fuß (= 1,252 Meter) für  $m = \frac{3}{2}$ . Der ausführende Ingenieur hat (Geestehafenbau)  $x = 3,33$  Fuß (0,972 Meter) genommen.

Die Formel IV erklärt die Angabe Minard's (Navigation des rivières, Chap. XIV, p. 170), daß er  $b = 0,4 h$  bei ungefähr 400 Schleusen als Mittelwerth gefunden habe.

§. 27.

Mittelkraft aus den Druckkräften, wenn die gedrückte Fläche die Flüssigkeit von allen Seiten umgiebt.

Fig. 30.



Es sei  $ABCD$ , Fig. 30, ein ganz beliebig gestaltetes Gefäß, welches bis  $AB$  mit Wasser gefüllt ist.  $E$  sei ein Element der Wandfläche,  $\omega$  der Flächeninhalt desselben, und die zugehörige Druckhöhe  $JE = z$ . Der Normaldruck gegen dieses Element werde wie in §. 23 in Seitenkräfte zerlegt, welche den drei Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes parallel sind, und wovon die  $UX$  und  $UY$  in der Ebene des Wasserspiegels liegen mögen,  $UZ$  also mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfällt. Bezeichnet man sodann die Projection des Elementes  $\omega$  gegen die Ebenen  $YZ$ ,  $XZ$  und  $XY$  mit  $a$ ,  $b$  und  $c$ , so erhält man nach §. 19 für die horizontalen Seitenkräfte  $\gamma az$  und  $\gamma bz$ , für die verticalen  $\gamma cz$ .

Um nun zunächst die Mittelkraft der Horizontalkräfte anzugeben, werde das horizontale Prisma  $GE$  betrachtet und das Element  $E$  auf die Ebene  $YZ$  projicirt. Dies Prisma schneidet auf der Gefäßwand bei  $F$  nothwendig ein Element ab, dessen Projection auf die Ebene  $YZ$  dieselbe Größe wie die Projection des Elementes  $E$ , auch dieselbe Druckhöhe wie letzteres hat, so daß beide Elemente einerlei Druck =  $\gamma az$  in horizontaler Richtung nach Außen erfahren. Die Richtungen dieser beiden Drücke wirken aber in derselben Geraden einander genau entgegen, heben sich daher völlig auf und tragen Nichts zur Bildung der respectiven Mittelkraft bei. Leicht erkennt man aber, daß dasselbe nicht nur von allen übrigen Drücken, die  $UX$  parallel gerichtet sind, nachgewiesen werden

Um nun zunächst die Mittelkraft der Horizontalkräfte anzugeben, werde das horizontale Prisma  $GE$  betrachtet und das Element  $E$  auf die Ebene  $YZ$  projicirt. Dies Prisma schneidet auf der Gefäßwand bei  $F$  nothwendig ein Element ab, dessen Projection auf die Ebene  $YZ$  dieselbe Größe wie die Projection des Elementes  $E$ , auch dieselbe Druckhöhe wie letzteres hat, so daß beide Elemente einerlei Druck =  $\gamma az$  in horizontaler Richtung nach Außen erfahren. Die Richtungen dieser beiden Drücke wirken aber in derselben Geraden einander genau entgegen, heben sich daher völlig auf und tragen Nichts zur Bildung der respectiven Mittelkraft bei. Leicht erkennt man aber, daß dasselbe nicht nur von allen übrigen Drücken, die  $UX$  parallel gerichtet sind, nachgewiesen werden

kann, sondern auch von jenen, welche  $UY$  parallel sind. Ueberhaupt folgt daher der Satz:

Alle Drücke, welche das Wasser auf die verschiedenen Theile der Seitenwand eines Gefäßes nach horizontalen Richtungen ausübt, heben sich gegenseitig auf, oder das ganze Gefäß wird vom Wasser nach horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt.

Wie daher auch die Form des Gefäßes sein mag, welches die Flüssigkeit überall umgiebt, so wird doch durch letztere dem Gefäße kein Bestreben zu irgend einer horizontalen Bewegung ertheilt. Vorausgesetzt ist natürlich hierbei, daß die Festigkeit der Gefäßwände hinreicht, sämtliche Horizontaldrücke zu vernichten.

Bringt man dagegen an irgend einer Stelle der Wand eine Oeffnung an, so wird der Druck an der gegenüber liegenden Stelle nicht mehr aufgehoben, und das Gefäß wird sich bestreben, eine horizontal gerichtete Bewegung anzunehmen. Hierauf beruht unter Anderem die Wirkung einer besonderen Art von Wasserrädern, die man deshalb Reactionsräder genannt hat.

Zur Bestimmung der fraglichen Mittelkraft bleiben daher die verticalen Seitenkräfte allein übrig. Hierzu werde das verticale Prisma  $EHH$  betrachtet und das Element  $E$  auf die Ebene  $XY$  projectirt gedacht. Das Prisma schneidet auf der Gefäßwand, oberhalb, ein zweites Element  $H$  ab, welches auf  $XY$  gleiche Projection wie  $E$ , aber nicht dieselbe Druckhöhe hat. Bezeichnet man letztere, d. i.  $HJ$ , mit  $z'$ , so ist der vertical aufwärts gerichtete Druck gegen das Element  $H = \gamma cz'$ . Diesem Drucke wirkt aber der gegen  $E$ , d. i.  $\gamma cz$ , genau entgegen, so daß wegen  $z > z'$ , als verticale Seitenkraft für die zu bildende Mittelkraft:  $\gamma c(z - z')$ , das Gewicht eines Wasserprismas verbleibt, welches  $c$  zur Grundfläche und  $z - z'$  zur Höhe hat. Ueberhaupt wird also hiernach die zu suchende Mittelkraft aus der Summe der Gewichte so vieler ähnlicher Prismen wie  $EH$  bestehen, als man solche innerhalb des Gefäßes gebildet denken kann; diejenigen Prismen, deren obere Endfläche in den Wasserspiegel fällt, können an dem vorhergehenden Resultate Nichts ändern.

Aus Allem ergibt sich aber,

daß die Mittelkraft aus allen Druckkräften einer Flüssigkeit, welche vom Gefäße überall umgeben wird, und wobei letzteres gehörigen Widerstand leistet, dem Gewichte der Flüssigkeit gleich ist; oder die Kraft, womit ein Gefäß vom darin befindlichen Wasser vertical abwärts getrieben wird, ist dem Gewichte des darin enthaltenen Wassers gleich.

Da man alle Seitenkräfte, die zur Bildung dieser Mittelkraft beitragen, unmittelbar als Gewichte betrachten kann, so muß die Richtung der Mittelkraft durch den Schwerpunkt des flüssigen Körpers gehen.

Drittes Capitel.

*Gleichgewicht des Wassers mit eingetauchten festen Körpern.*

§. 28.

**Druck des Wassers gegen eingetauchte Körper.**

**Archimedisches Princip.**

Aus einer einfachen Betrachtung wird zu entnehmen sein, daß sich der Druck, welchen ein in eine Flüssigkeit getauchter fester (freier) Körper überhaupt erfährt, ganz auf dieselbe Weise auffinden lassen muß, wie in §. 27 der Druck gegen eine die Flüssigkeit überall umgebende Fläche.

Die hier nach entsprechender Zerlegung erhaltenen Seitenkräfte unterscheiden sich von den an gedachtem Orte nur durch die relativen Zeichen, indem jetzt die Horizontalkräfte von Außen nach Innen gerichtet, die Verticalkräfte gegen die oberen (dem Wasserspiegel zugekehrten) Elemente abwärts und die Verticalkräfte gegen die unteren (entgegengesetzten) Elemente aufwärts gerichtet sind.

Verfährt man sodann wie in gedachtem Paragraphen, so ergeben sich für jeden ganz oder zum Theil in eine Flüssigkeit getauchten Körper leicht folgende Sätze:

Die horizontalen Druckkräfte heben sich auf, oder die ruhige Flüssigkeit drückt den festen Körper nach allen Horizontalrichtungen gleich stark.

Die Mittelkraft aus allen Druckkräften wirkt vertical aufwärts, ist gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, welche den Körper aus der von ihm eingenommenen Stelle verdrängt, und ihre Richtung geht durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit.

Letzteren Satz drückt man gewöhnlich auch so aus, daß man sagt:

„Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert so viel an seinem Gewichte, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt.“

Dieses Gesetz ist von Archimedes gefunden worden und trägt seinen Namen.

Den vertical aufwärts gerichteten Druck des Wassers nennt man den hydrostatischen Auftrieb. Vorstehendes gilt übrigens sowohl für gleich dichte Flüssigkeiten, als auch für solche, welche aus horizontalen Schichten von verschiedener Dichte bestehen.

Von diesen Sätzen macht man unter Anderem auch Anwendung bei der Bestimmung des specifischen (eigenthümlichen) Gewichtes eines Körpers, worunter man die (unbenannte) Zahl versteht, welche angiebt, wie viel Mal ein Körper mehr wiegt, als eine Masse Wasser, welche mit ihm gleiches Volumen hat.

Bezeichnet daher  $P$  das absolute,  $s$  das specifische Gewicht eines beliebigen gleichartigen Körpers von Volumen  $= V$ , ferner  $p$  das absolute Gewicht eines gleich großen Wasserkörpers, so ist

$$s = \frac{P}{p}, \text{ oder da auch } p = \gamma V \text{ sein muß:}$$

$$s = \frac{P}{\gamma V}, P = \gamma s \cdot V \text{ etc.}$$

Wenn im Folgenden das Gegentheil nicht besonders hervorgehoben wird, so nennt der Verfasser das Product  $\gamma s$  die Dichte des betreffenden Körpers, versteht also unter letzterer das Gewicht der Volumeneinheit desselben. Wird daher die Dichte mit  $\Delta$  bezeichnet, so hat man

$$\text{I. } \Delta = \gamma s,$$

$$\text{II. } s = \frac{\Delta}{\gamma} \text{ und}$$

$$\text{III. } P = \Delta V. ^1)$$

### §. 29.

#### Gleichgewicht schwimmender Körper.

Nach dem Vorstehenden läßt sich angeben, ob ein ganz unter das Wasser getauchter Körper an einer ihm gegebenen Stelle fort-dauernd verbleiben, ob er untersinken oder sich ganz oder zum Theil über den Wasserspiegel erheben wird. Dem hydrostatischen Auftriebe wirkt nämlich das in allen Fällen gleichbleibende Gewicht des Körpers selbst entgegen. Ist daher das Gewicht des Körpers eben so groß, als das der von ihm verdrängten Flüssigkeit, so wird er in der Flüssigkeit untersinken. Beträgt aber das Gewicht des Körpers weniger, so wird er in die Höhe steigen, und zwar so lange, bis nur noch ein solcher Theil desselben in die Flüssigkeit taucht, daß das Gewicht des ganzen Körpers dem Gewichte der Wassermasse gleich ist, die er sodann noch verdrängt. In letzterem Falle sagt man von dem Körper, daß er schwimme.

Damit sich jedoch ein auf einer ruhigen Flüssigkeit schwimmender Körper vollständig im Gleichgewicht befinde, ist, außer der Bedingung, daß das Gewicht des Körpers dem der verdrängten Flüssigkeit gleich sei, noch eine andere zu erfüllen nöthig, nämlich die, daß der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit in derselben Verticallinie liege. Ist sowohl der schwimmende Körper als die Flüssigkeit gleichartig, so liegt im vollständigen Gleichgewichtszustande der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit mit dem des eingetauchten Körpertheiles in einem und demselben Punkte.

Eine noch vollständigere Erledigung finden vorstehende Auseinandersetzungen durch folgende mathematische Betrachtung.

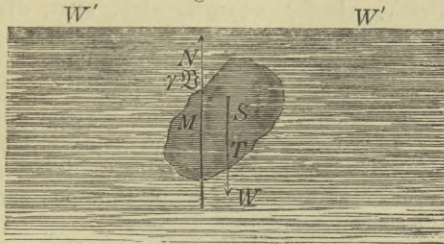
<sup>1)</sup> Mehrere neuere Schriftsteller verstehen unter specifischem Gewichte denjenigen Werth von  $\Delta$  in der Gleichung III, welchen man erhält, wenn man

$$P = 1 \text{ (= 1 Kilogramm) setzt, also erhält } 1 = \Delta V \text{ und so daß } \Delta = \frac{1}{V} \text{ ist.}$$

In diesem Falle nennt man  $V$  das specifische Volumen. Man sehe hierüber auch den Artikel „Dichte“ in Karmarsch und Heeren „Technischem Wörterbuche“. Dritte Auflage, Prag 1877.



Fig. 31.



Es sei  $S$ , Fig. 31, der Schwerpunkt eines ganz unter den Wasserspiegel  $W'W'$  getauchten Körpers vom absoluten Gewichte gleich  $W$  und  $\mathfrak{B}$  das Volumen der verdrängten Flüssigkeit, also  $\gamma\mathfrak{B}$  der hydrostatische Auftrieb, dessen Angriffspunkt im Schwerpunkte  $M$  der verdrängten

Flüssigkeit liegt.

Es lassen sich aber die beiden hier auftretenden Kräfte,  $W$  vertical abwärts und  $\gamma\mathfrak{B}$  vertical aufwärts wirkend zusammensetzen in eine Einzelkraft  $W - \gamma\mathfrak{B}$  oder  $\gamma\mathfrak{B} - W$  und in ein Kräftepaar von der Breite  $MS$ , welches sich bestrebt, den Körper in der Richtung  $SMN$  oder in der  $NMS$  mit einer Energie um den Schwerpunkt  $S$  zu drehen, deren Größe  $\gamma\mathfrak{B} \cdot MS$  ist.

Für's vollständige Gleichgewicht muß daher letzteres Moment gleich Null sein, d. h. die beiden gedachten Schwerpunkte müssen in derselben Verticalen liegen und überdies die Gleichung stattfinden:

$$I. \quad \gamma\mathfrak{B} = W$$

oder, wenn  $V$  das Volumen von  $W$  und  $s$  sein spezifisches Gewicht bezeichnet, also  $W = \gamma sV$  ist:

$$II. \quad \mathfrak{B} = s \cdot V.$$

Zusatz 1. Die oben erhaltene Einzelkraft  $\pm (\gamma\mathfrak{B} - W)$  (das Gewicht des Körpers im Wasser, auch das relative Gewicht genannt) giebt noch zu folgenden Schlüssen Veranlassung. Setzen wir gedachten Werth  $= R$  und  $W = \gamma sV$ , so ergibt sich  $R = \gamma (\mathfrak{B} - sV)$ . Ist nun anfänglich  $\mathfrak{B} = V$ , d. h. der eingetauchte Körper überall vom Wasser umgeben, so folgt

$$III. \quad R = \gamma\mathfrak{B} (1 - s) = \left( \frac{W}{s} - W \right).$$

Es wird also der Körper, wenn

- $1 > s$  aufwärts steigen, wenn
- $1 < s$  zu Boden sinken und endlich wenn
- $1 = s$  in jeder Lage unterm Wasser verharren.

Im ersteren Falle dauert die aufwärts gerichtete Bewegung so lange bis  $\mathfrak{B}$  wiederum eine solche Größe erlangt hat, daß  $R = \text{Null}$  ist und die Gleichungen II. und I. stattfinden.

Zusatz 2. Die Verbindungslinie beider vorgenannten Schwerpunkte nennt man die Schwimmachse, die horizontale Oberfläche der Flüssigkeit, in welcher der Körper schwimmt, die Schwimmebene. Man sagt, der Körper schwimmt in aufrechter Stellung, wenn es wenigstens eine durch seine Schwimmachse zu legende (verticale) Ebene giebt, die den Körper in zwei symmetrische Theile theilt; im entgegengesetzten Falle sagt man, der Körper schwimmt in schiefer Stellung. Ferner sagt man, ein Körper schwimme mit Stabilität oder im steten Gleichgewichte, wenn er, aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, von

selbst ein Bestreben besitzt, in diese Lage wieder zurückzukehren; mit Instabilität im unsteten Gleichgewichte, wenn er sich, statt, wie bemerkt, zurückzukehren, immer mehr von der ersten Lage entfernt; endlich ohne Stabilität, wenn er, aus seiner ursprünglichen Lage gebracht, gar kein Bestreben zu irgend einer Bewegung zeigt.

**Beispiel.** Welchen Auftrieb erfährt ein ganz ins Wasser getauchtes Stück Tannenholz von 40 Kilogramm Gewicht, mit welcher resultirenden Kraft erfolgt das Aufwärtssteigen und wie viel Cubikmeter Wasser werden von demselben aus der Stelle gedrängt, wenn es zur Ruhe gelangt ist und an der Oberfläche schwimmt.

**Auflösung.** Nimmt man das specifische Gewicht des Tannenholzes zu 0,6 an, so ergibt sich das relative Gewicht zu:

$$R = \frac{40}{0,6} - 40 = 26\frac{2}{3} \text{ Kilogramm,}$$

und das verdrängte Wasservolumen zu

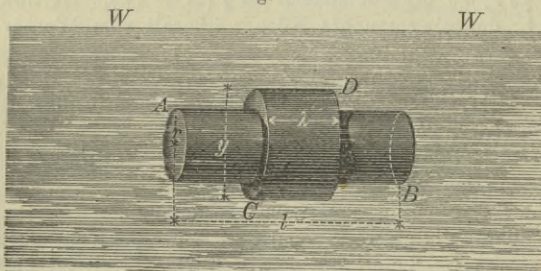
$$\mathfrak{B} = \frac{W}{\gamma_s} = \frac{40}{600} = 0,0666 \dots \text{ Cubikmeter.}$$

### §. 30.

Vom hydrostatischen Auftriebe macht man sehr oft Gebrauch, um Lasten aus dem Wasser zu heben, eingerammte Pfähle aus dem Grunde zu ziehen etc., worüber man nachlesen kann in Hagen Wasserbaukunst, 1. Theil, 2. Auflage, S. 683.

Auch wenn specifisch leichtere Körper als das Wasser mit specifisch schwereren verbunden werden, kann man letztere bis zur Oberfläche des Wassers ohne besondere Kraftanwendung erheben, sobald man nur eine derartige Anordnung trifft, daß der Auftrieb des Wassers dem absoluten Gewichte der festen Körperverbindung das Gleichgewicht hält.

Fig. 32.



Beispielsweise sei in Fig. 32 ein kupferner Cylinder  $AB$  mit kreisförmiger Basis vom Halbmesser  $= r$  und der Länge  $= l$  mit einem Korkringe  $CD$  von der Länge  $\lambda$  in der Weise zu umgeben, daß die Verbindung in jeder Lage

unterm Wasserspiegel im (indifferenten) Gleichgewichte verharret. Wie groß wird man den Durchmesser  $y$  des Korkringes zu nehmen haben, wenn das specifische Gewicht dieses Materials  $= s'$ , das des Kupfers  $= s$  gesetzt wird.

Mit Zuziehung bekannter Sätze der Geometrie erhält man sofort, wenn die Bezeichnung der letzteren Paragraphen beibehalten werden:

$$\mathfrak{B} = \gamma \left[ r^2 \pi l + \left( \frac{y^2 \pi}{4} - r^2 \pi \right) \lambda \right] \text{ und}$$

$$W = \gamma s r^2 \pi l + \gamma s' \left( \frac{y^2 \pi}{4} - r^2 \pi \right) \lambda.$$

Hieraus für's Gleichgewicht nach I. §. 29:

$$r^2\pi l + \left(\frac{y^2\pi}{4} - r^2\pi\right)\lambda = sr^2\pi l + s'\lambda\left(\frac{y^2\pi}{4} - r^2\pi\right),$$

so wie nach gehöriger Reduction:

$$y = 2r\sqrt{\frac{l}{\lambda}\frac{s-1}{1-s_1} + 1}.$$

Für  $r = 10$  cm,  $\lambda = 20$  cm,  $l = 60$ ,  $s = 8,8$  und  $s_1 = 0,24$ , findet man  $y = 112,8$  cm. Die Dicke des Korkringes muß folglich betragen:  $\frac{y-2r}{2} = \frac{112,8-20,0}{2} = 46,4$  cm.

### §. 31.

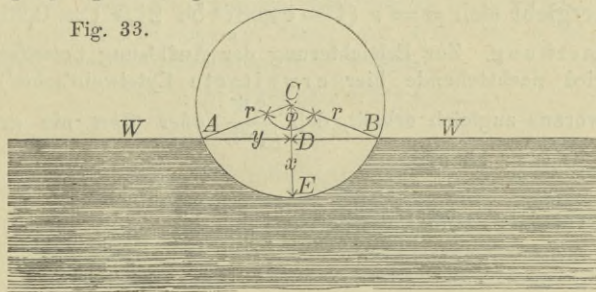
#### Tiefe der Einsenkung schwimmender (symmetrischer) Körper.

Ist der schwimmende Körper in Bezug auf irgend eine durch ihn gelegte Achse symmetrisch, d. h. ist er so gestaltet, daß für jede Ebene, welche durch ihn rechtwinklig zu gedachter Achse geführt wird, der Schwerpunkt der Schnittfläche in dieser Achse liegt, und senkt man ihn so in die Flüssigkeit, daß bemerkte Achse vertical gerichtet ist, so wird der Schwerpunkt des ganzen Körpers und der seines eingetauchten Theiles in dieser Achse liegen, und die Bedingung des Gleichgewichtes in Bezug auf Drehung wird von selbst erfüllt sein, wie tief auch der Körper eintauchen mag. Die Größe der Eintauchungstiefe wird aber aus einer Gleichung des §. 29 zu reduciren sein.

Zur weiteren Kenntnißnahme dieses für den Techniker besonders wichtigen Gegenstandes folgt von hier ab eine Reihe entsprechender Aufgaben und Beispiele.

Aufgabe 1. Es ist die Eintauchungstiefe eines Cylinders, Fig. 33, mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius =  $r$  und der Länge =  $l$  zu bestimmen, wenn seine geometrische Achse dem Wasserspiegel parallel gerichtet ist.

Fig. 33.



Auflösung. Es sei  $ADB$  die Durchschnittslinie der Schwimmebene mit einer Ebene, welche normal und vertical zur Cylinderachse gerichtet ist,  $DE = x$  die zu findende Eintauchungstiefe, so wie  $\varphi$  der zu  $AEB$  gehörige Bogen für den Halbmesser = 1.

Eine directe Auflösung der Aufgabe ist geradezu unmöglich, vielmehr ist erst  $\varphi$  zu finden und sodann  $x$  zu berechnen.

Zu diesem Ende beachte man, daß sein muß:

$$\mathfrak{B} = [\text{Sector } ACBE - \Delta ACB] l, \text{ d. i.}$$

$$\mathfrak{B} = \left[ \frac{r^2 \varphi}{3} - r^2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi \right] l, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{r^2}{2} (\varphi - \sin \varphi) l.$$

Ist das specifische Gewicht des Cylinders =  $s$  gegeben, so folgt ferner

$$W = \gamma s r^2 \pi \cdot l$$

und daher aus der Vergleichung mit  $\gamma \mathfrak{B}$ :  $\varphi - \sin \varphi = \frac{2W}{\gamma r^2 l}$ , oder

$$\text{I. } 2s\pi = \varphi - \sin \varphi.$$

Hat man durch diesen Ausdruck  $\varphi$  ermittelt, so erhält man für  $x$  ohne Weiteres:

$$\text{II. } x = r (1 - \cos \frac{1}{2} \varphi).$$

Beispiel. Ist  $s = \frac{3}{2\pi}$ , so wird aus I.  $3 = \varphi - \sin \varphi$  und demzufolge liegt, wie aus der Tabelle der folgenden Anmerkung erhellt, der Winkel  $\varphi$  zwischen 175 und 180 Graden.

Setzen wir zur näheren Bestimmung  $\varphi = 175 + z = \alpha + z$ , so wird aus I:

$$3 = (\alpha + z) - \sin (\alpha + z).$$

Reducirt man diese Gleichung auf  $z$  und beachtet, daß weil  $z$  sehr klein gedacht werden kann,  $\sin z = z$  und  $\cos z = 1$  zu setzen ist, so folgt (in Bogenmaaß):

$$z = \frac{3 - \alpha + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \text{ d. i.}$$

$$z = \frac{3 - 3,0543 + 0,0872}{1 + 0,996} = 0,0165 \text{ und deshalb in Graden:}$$

$$\varphi = 175 \text{ Grad } 56 \text{ Minuten } 43 \text{ Sekunden.}$$

Endlich giebt sich  $x = r (1 - \cos 87^\circ 58' 21,5'') = 0,9646 \cdot r$ .

Anmerkung. Zur Erleichterung der Auflösung betreffender Aufgaben wird nachstehende hier erweiterte Eytelwein'sche<sup>1)</sup> Tabelle dienen, woraus zugleich erhellt, daß  $\frac{2W}{\gamma r^2 l}$  oder  $2s\pi$  nie größer als 6,283185 werden können.

<sup>1)</sup> Eytelwein, Hydrostatik §. 67.

$\varphi$ Grade.	$\varphi - \sin \varphi$ .	$\varphi$ Grade.	$\varphi - \sin \varphi$ .	$\varphi$ Grade.	$\varphi - \sin \varphi$ .
5	0,000111	125	1,362510	245	5,182365
10	0,000885	130	1,502884	250	5,303016
15	0,002980	135	1,649088	255	5,416516
20	0,007046	140	1,800673	260	5,522664
25	0,013714	145	1,957151	265	5,621318
30	0,023599	150	2,117994	270	5,712389
35	0,037289	155	2,282642	275	5,795850
40	0,055344	160	2,450507	280	5,871730
45	0,078291	165	2,620974	285	5,940114
50	0,106620	170	2,793412	290	6,001147
55	0,140779	175	2,967170	295	6,055029
60	0,181173	180	3,141592	300	6,102013
65	0,228156	185	3,316015	305	6,142406
70	0,282038	190	3,489774	310	6,176565
75	0,343071	195	3,662211	315	6,204894
80	0,411456	200	3,832679	320	6,227841
85	0,487335	205	4,000543	325	6,245896
90	0,570796	210	4,165191	330	6,259587
95	0,661868	215	4,326034	335	6,269471
100	0,760521	220	4,482512	340	6,276140
105	0,866670	225	4,634098	345	6,280205
110	0,980170	230	4,780302	350	6,282300
115	1,100821	235	4,920676	355	6,283074
120	1,228370	240	5,054816	360	6,283185

Zusatz. Die Eintauchungstiefe =  $x$  einer schwimmenden Kugel, wenn Fig. 33 den betreffenden größten Kreis darstellt, ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{4}{3} \pi \gamma s r^3 = \gamma (rx^2 - \frac{1}{3} x^3) \pi^1, \text{ d. i. aus}$$

$$0 = x^3 - 3rx^2 + 4sr^3.$$

Ist die Kugel überdies mit einem Gewichte  $Q$  belastet, wie dies bei sogenannten Schwimmern häufig der Fall ist, so ist die Eintauchungstiefe aus der Gleichung zu berechnen:

$$\frac{4}{3} \gamma s r^3 \pi + Q = \gamma \pi (rx^2 - \frac{1}{3} x^3).$$

§. 32.

Aufgabe 2. Aus einer gehörigen Zahl von Tonnen ist Fig. 34 ein auf dem Wasser schwimmendes Floß gebildet, indem man die Tonnen in der Nähe der Böden gekoppelt und durch Seile mit hölzernen Schwellen, Zangen etc. zu einem Ganzen vereinigt hat. Es fragt sich, welche Last =  $Z$  mit Sicherheit auf ein derartiges Floß gesetzt werden kann, wenn das Gewicht der Tonnen und des

<sup>1)</sup> Es ist nämlich  $\mathfrak{B} = \int_0^x y^2 \pi dx$ , oder wegen  $y^2 = 2rx - x^2$ ,

$$\mathfrak{B} = \pi \int_0^x (2rx - x^2) dx = \pi (rx^2 - \frac{1}{3} x^3).$$

Fig. 34.



sonstigen Holzwerkes etc. =  $Q$  ist und die Tonnen, wie in der Figur angegeben, ganz unter das Wasser getaucht sind.

Auflösung. Das Tragvermögen einer (hölzernen) Tonne kann für practische Fälle genau genug gleich dem Wassergewichte gesetzt werden, welches ihr hohler Raum aufnimmt. Bezeichnet daher  $D$  die Spundtiefe,  $d$  die Bodentiefe und  $l$  die Länge einer Tonne, von denen  $n$  gleiche vorhanden sind, so ist bei Vernachlässigung des sonst mit eingetauchten Holzwerkes, nach den Grundzügen der Mechanik des Verfassers §. 77, S. 197 (Dritte Auflage),

$$\mathfrak{B} = n \frac{\pi}{4} \left( \frac{2D + d}{3} \right)^2 l$$

und

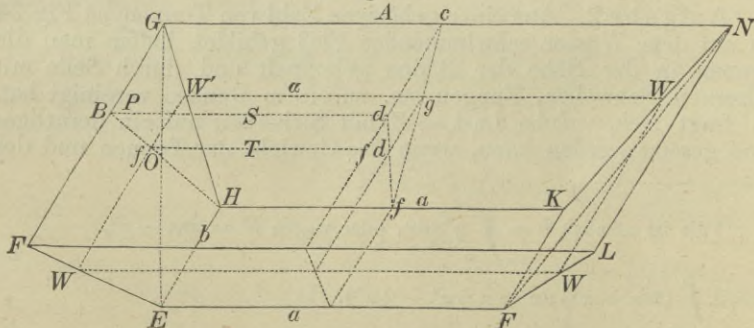
$$Z = \frac{\gamma n \pi}{4} \left( \frac{2D + d}{3} \right)^2 l - Q.$$

Anmerkung. Sind Menschen und Pferde auf ein derartiges Floß zu stellen, so kann man rechnen, daß ein Mann im Gedränge 0,20 bis 0,17 Quadratmeter Raum bedarf, 70 Kilogramm wiegt und auf 1 Quadratmeter folglich 350 bis 412 Kilogramm Belastung kommen. Ein Pferd von 2,7 Meter Länge und 1,0 Meter Breite aber 2,7 Quadratmeter Raum bedarf, 400 bis 500 Kilogr. wiegt und der Quadratmeter mit 150 bis 180 Kilogr. belastet wird.

### §. 33.

Aufgabe 3. Es ist eine Gleichung zwischen der Eintauchungstiefe eines auf dem Wasser schwimmenden Pontons neben skizzirter Form, Fig. 35, und der Belastung desselben zu entwickeln.

Fig. 35.



Auflösung. Die gegebenen Dimensionen des Pontons mögen folgende sein: die Seiten des obersten Rechteckes  $FN$ , nämlich  $FL = GN = A$  und  $FG = LN = B$ , die des unteren  $EK$  nämlich  $EI = HK = a$  und  $EH = IK = b$ , die ganze Tiefe  $fd = h$ . Die Dimensionen des durch die Schwimmebene gebildeten Rechteckes  $WW'$  lassen sich aus den vorher gegebenen berechnen und mögen vorläufig  $\alpha$  und  $\beta$  genannt werden, während wir die Eintauchungstiefe  $fh$  mit  $x$  bezeichnen. Nach der untenstehenden Note ist<sup>1)</sup>:

Inhalt des Prisma  $EGHINK = \frac{1}{2}bh \left( \frac{2a+A}{3} \right)$ , ebenso das Prisma  $FEGNIL = \frac{Bh}{2} \left( \frac{2A+a}{3} \right)$ , folglich der Inhalt =  $I$  beider zusammengenommen:

$$I = \frac{h}{6} \{ b(2a+A) + B(2A+a) \}.$$

Das verdrängte Wasservolumen =  $\mathfrak{B}$  ist ein ähnlicher Körper zu letzterem Volumen, und man findet den betreffenden Inhalt, wenn man in dem Ausdrücke für  $I$  statt  $h$  den Werth  $x$  setzt,  $A$  mit  $\alpha$  und  $B$  mit  $\beta$  verwechselt, also erhält:

$$(1) \mathfrak{B} = \frac{x}{6} \{ b(2\alpha + a) + \beta(2A + a) \}.$$

Es erübrigt nur noch,  $\alpha$  und  $\beta$  durch bekannte Dimensionen auszudrücken. Hierzu hat man aber, weil  $\Delta def \sim \Delta fgh$ ,  $hf:fd = hg:de$ , d. i.  $x:h = \frac{\beta-b}{2} : \frac{B-b}{2}$  und ebenso, weil  $\Delta HQT \sim \Delta HPS$ ,  $x:h = \frac{\alpha-a}{2} \cdot \frac{A-a}{2}$ . Aus diesen Proportionen folgt

$$\alpha = a + \frac{x(A-a)}{h} \quad \text{und} \quad \beta = b + \frac{x(B-b)}{h}:$$

so wie, wenn diese Werthe in (I) gesetzt werden, nach gehörigem Zusammenziehen und Ordnen:

$$\mathfrak{B} = \frac{(A-a)(B-b)}{3h^2} x^3 + \left[ \frac{b(A-a) + a(B-b)}{2h} \right] x^2 + abx.$$

Ist nun  $Q$  das Pontongewicht, einschliesslich der Belastung desselben, so folgt, wegen  $Q = \mathfrak{B}\gamma$ :

1) Der körperliche Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, Fig. 36, in welche sich unser Ponton zerlegen läßt, besteht aus dem Inhalte einer Pyramide, wovon das Rechteck  $ABCD$  Grundfläche und  $NO$  Höhe ist, deren Inhalt also beträgt, wenn  $AB = DC = k$ ,  $AD = BC = m$  und  $NO = EM = e$  gesetzt wird:  $mk \cdot \frac{e}{3}$ ; ferner aus einer zweiten Pyramide, wovon das Dreieck  $DEC$  Grundfläche und  $NE = n$  die Höhe ist, dessen Inhalt demnach sein muß:  $\frac{ke}{2} \cdot \frac{n}{3}$ . Daher der Inhalt beider Pyramiden oder des Prismas:

$$\frac{mke}{3} + \frac{nke}{6} = \frac{1}{6} ke (2m+n) = \frac{ke}{2} \left( \frac{2m+n}{3} \right).$$

$$\text{I. } \frac{Q}{\gamma} = \frac{(A-a)(B-b)}{3h^2} x^3 + \left[ \frac{b(A-a) + a(B-b)}{2h} \right] x^2 + abx, \text{ sowie}$$

$$\text{II. } x^3 + \frac{3}{2} h \left[ \frac{b(A-a) + a(B-b)}{(A-a)(B-b)} \right] x^2 + \frac{3abh^2}{(A-a)(B-b)} x$$

Beispiel. Die eisernen Pontons zum Transporte der Röhren der Menai-Brücken<sup>1)</sup> hatten folgende Dimensionen:  $A = 98$  Fuß (englisch),  $B = 31'$ ,  $a = 93'$ ,  $b = 26'$ ,  $h = 8\frac{3}{4}'$  und die Einsenkung  $= x$  betrug, wenn die Pontons mit einer der größten Röhren (472 Fuß Länge) belastet waren, 6 Fuß. Wie groß berechnet sich hiernach die Totalbelastung eines dieser Pontons, wenn  $\gamma = 62,5$  engl. gerechnet wird.

Auflösung.  $Q = 984719,388$  engl. = 439,607 Tons. Die ganze Tragfähigkeit für  $x = h$  ergibt sich ferner zu 1489596,255 engl. = 665 Tons.

Zusatz. Die sogenannten Fähren auf den meisten deutschen Flüssen bilden Pontons, wobei die langen Seitenwände auf den Böden normal stehen. In diesem Falle wird  $B = b$  und statt I. wird

$$\frac{Q}{\gamma} = \frac{b(A-a)}{2h} x^2 + abx \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{2ah}{(A-a)} x - \frac{Q}{\gamma} \cdot \frac{2h}{b(A-a)} = 0.$$

Beispiel. Wie tief sinkt eine Flußfähre von 2700 Kilogr. Gewicht ein, wobei  $A = 12^m,20$ ,  $a = 9^m,15$ ,  $B = b = 3^m,66$  und  $h = 1^m,0$  ist, wenn 90 Menschen, von je 70 Kilogr. Durchschnittsgewicht für einen Jeden, darin Platz nehmen.

Auflösung. Zuerst ist  $Q = 2700 + 90 \cdot 70 = 9000$ , ferner  $\frac{2ah}{A-a} = 6,3$ ;  $\frac{2h}{b(A-a)} = 0,178$  und sonach, da  $\gamma = 1000$  Kil. ist:  $x^2 + 6,30 x = 1,602$ , woraus folgt:  $x = 0,16$  Meter.

## §. 34.

Aufgabe 4. Man soll die Tiefe der Einsenkung eines Schiffes bestimmen, dessen isometrische Projection Fig. 37 darstellt.

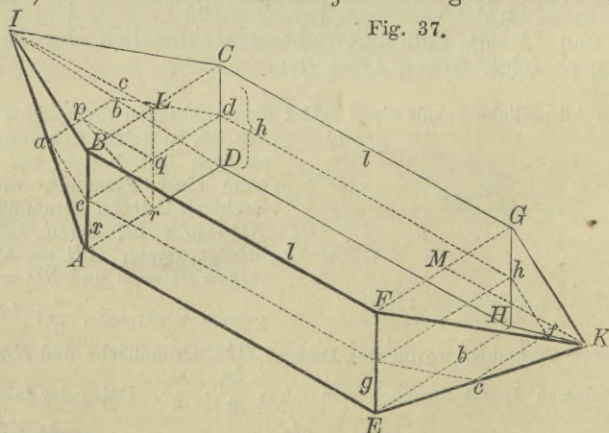


Fig. 37.

<sup>1)</sup> Clark, The Tubular Bridges, p. 503, 558, 587 etc.



Auflösung. Das Mittelstück  $ACEG$  bilde ein gerades Parallelepipedum, wovon die Länge  $AE = BF = CG = l$ , die Breite  $AD = BC = EH = b$ , die Tiefe  $AB = CD = EF = h$  sein mag. Jeder der beiden gleichen Schnäbel bilde eine vierseitige Pyramide mit rechteckiger Basis, die Länge  $IL = KM$  jedes Schnabels sei  $= c$ . Die punktirten Linien  $acqefhdba$  mögen die Durchschnittsfläche des Schiffes mit der Schwimmebene bezeichnen, die Eintauchtiefe  $cA = dD = gE = hH$  werde  $= x$  gesetzt. Der Cubikinhalte des eingetauchten Theiles vom Mittelstücke ist hiernach  $= xbl$ . Die eingetauchten Theile der Schnäbel bilden schiefe abgeschnittene dreiseitige Prismen  $abcdAD$  und  $efghEH$ , wovon jede der parallelen Seiten  $ab$  und  $ef = \frac{b}{h}(h - x)$ , die beiden andern  $cd = gh = b$ , die normalen Querschnitte  $pqr = \frac{1}{2} \frac{c}{h} x^2$ ,<sup>1)</sup> mithin der Cubikinhalte beider dreiseitigen Prismen zusammen

$$= \frac{1}{3} \frac{bc}{h^2} (3h - x) x^2 \text{ ist.}$$

Bezeichnet daher  $W$  das Gewicht des leeren Schiffes und  $P$  das der Ladung, so erhält man:

I.  $P + W = \gamma blx + \frac{1}{3} \gamma \frac{bc}{h^2} (3h - x) x^2$ , und hieraus

II.  $x^3 - 3hx^2 - 3 \frac{h^2 l}{c} x + \frac{3h^3}{\gamma bc} (P + W) = 0$ .

Beispiel. Die Holzschiffe auf der Moldau und Oberelbe haben eine ganz ähnliche Gestalt, wie Fig. 37, und nachbemerkte Dimensionen:<sup>2)</sup>

$l = 15^m, 2$ ;  $b = c = 3^m, 8$ ;  $h = 1^m, 3$  und ihr Gewicht beträgt unbelastet  $= 6183$  Kilogr., es fragt sich, zu welcher Tiefe dieselben in letztgedachtem Zustande einsinken?

Aufgabe. Die Gleichung II giebt, wenn  $P = 0$ ,  $W = 6183$  und  $\gamma = 1000$  gesetzt wird:

$$x^3 - 3,9 x^2 - 20,28 x + 2,17 = 0.$$

Hieraus aber

$$x = 0^m, 10.$$

Anmerkung. Es dürfte hier der geeignetste Ort sein, Einiges über die Ausmessung der Fluß- und Seeschiffe anzuführen.

Die Ausmessung der Schiffe (Aichen, Eichen der Schiffe, Jaugeage, Measurement of Ships) geschieht aus einem doppelten Grunde. Einmal um durch dieselbe dem Rheder und Schiffer einen Anhaltspunkt für die Belastung zu geben, damit Ueberladungen und dadurch Gefahren für

<sup>1)</sup> Es verhält sich  $BC : ab = AB : Bc$ , d. i.  $b : \overline{ab} h : h - x$  und  $\overline{ab} = \frac{b}{h}(h - x)$ ; ferner ist  $\Delta \overline{pqr} = \frac{\overline{pq} \cdot \overline{qr}}{2}$ , so wie  $IL : Lr = pq : qr$ , oder  $c : h = \overline{pq} : x$ , mithin  $\Delta \overline{pqr} = \frac{cx \cdot x}{2h} = \frac{cx^2}{2h}$ .

<sup>2)</sup> Gerstner, Handbuch der Mechanik, Bd. I, S. 57.

Leben und Eigenthum vermindert werden; zweitens um die öffentlichen Abgaben zu reguliren, welche der Schiffer unter höchst verschiedenen Namen, sowohl im eigenen Lande wie auswärts, zu leisten hat.

Zur Zeit geschieht dies Ausmessen und Rechnen überall nach praktischen Regeln, die meistens unendlich weit entfernt von den mathematischen Theorien liegen, auf welche sich streng genommen derartige Meßverfahren und Rechnungen gründen müßten.

Für gegenwärtigen Zweck wird es hinreichend sein, die für das Deutsche Reich seit dem 1. Januar 1873 in Kraft getretene Aichungsmethode oder Schiffsvermessungs-Ordnung hier mitzuthemen<sup>1)</sup>. Nach dem Reichsgesetzblatte Nr. 23 vom 5. Juli 1872 sind die betreffenden Bestimmungen folgende:

### I. Allgemeine Bestimmungen<sup>2)</sup>.

§. 1. Die nachstehenden Vorschriften finden Anwendung auf alle Schiffe, Fahrzeuge und Boote, welche nach ihrer Bauart ausschließlich oder vorzugsweise zum Verkehr auf See, oder auf den Buchten, Haffen und Watten derselben bestimmt sind, mit alleiniger Ausnahme derjenigen ausschließlich zur Fischerei bestimmten Fahrzeuge, welche mit durchlöcherem Fischbehälter versehen sind.

§. 2. Zur Ermittlung der Ladungsfähigkeit der Schiffe wird deren Raumgehalt durch Vermessung festgestellt. Die Vermessung erfolgt nach metrischem Maaß und erstreckt sich auf sämtliche innere Räume des Schiffes und der auf demselben fest angebrachten Aufbauten.

Das Ergebniß der Vermessung aller Räume eines Schiffes, in Körpermaaß ausgedrückt, heißt der Brutto-Raumgehalt des Schiffes und, nach Abzug der Logisräume der Schiffsmannschaft (§. 15), sowie der etwa vorhandenen Maschinen-, Dampfkessel- und Kohlenräume (§. 16), der Netto-Raumgehalt desselben.

§. 3. Die Vermessung erfolgt nach dem in den §§. 4 bis 11 vorgeschriebenen vollständigen Verfahren.

Ausnahmsweise kann jedoch nach Maaßgabe der §§. 12 und 13 ein abgekürztes Verfahren zur Anwendung gebracht werden, wenn das Schiff ganz oder theilweise beladen ist, oder Umstände anderer Art die Vermessung nach dem vollständigen Verfahren verhindern.

### II. Das vollständige Vermessungs-Verfahren.

§. 4. Dasjenige Deck, welches in Schiffen mit weniger als drei Decken das oberste und in Schiffen mit drei und mehr Decken das zweite von unten ist, heißt das Vermessungs-Deck.

Die unter dem Vermessungs-Deck befindlichen Schiffsräume werden als ein zusammenhängendes Ganze betrachtet und vermessen.

<sup>1)</sup> Die englischen und französischen Meßmethoden werden u. A. mitgetheilt in dem von dem Vereine „Hütte“ herausgegebenen Taschenbuche des Ingenieurs. Elfte Auflage, Berlin 1877, S. 438 und 439.

<sup>2)</sup> Das gegenwärtige deutsche Schiffsvermessungsverfahren ist unter dem Namen der Moorson'schen Aichungsmethode bekannt und hat in Nordamerika und allen europäischen Staaten, mit Ausnahme von Rußland, Griechenland und der Türkei, gesetzliche Gültigkeit. Bemerkenswert ist, daß in den Schlußbestimmungen der deutschen Schiffsvermessungs-Ordnung (§. 33) ausdrücklich hervorgehoben wird, daß eine Tonne von 1000 Kilogramm gleich 2,12 Cubikmeter, eine Last von 4000 Pfund gleich 4,24 Cubikmeter, eine Last von 5200 Pfund gleich 5,52 Cubikmeter, und eine Last von 6000 Pfund gleich 6,37 Cubikmeter gerechnet wird.

Die über dem Vermessungs-Deck befindlichen Räume, mögen sie durch ein drittes oder ein weiteres Deck, oder durch Aufbauten auf dem obersten Deck gebildet sein, werden als selbstständige Räume behandelt und ein jeder für sich vermessen.

§. 5. Die Messung des inneren Schiffsraumes unter dem Vermessungs-Deck geschieht durch Aufnahme der Länge und einer je nach der Länge verschieden großen Anzahl von Querschnitten (§. 6).

§. 6. Die Länge wird auf dem Vermessungs-Deck in gerader Linie gemessen und zwar von der inneren Fläche der Binnenbords-Bekleidung (in mittlerer Dicke) neben dem Vordersteven bis zu der inneren Fläche des mittelsten Heckstützens, oder der mittschiffs am Heck befindlichen Bekleidung (in mittlerer Dicke).

Von dieser Länge wird ein Abzug gemacht, bestehend in dem Fall des Bugs in der Dicke des Decks, in dem Fall des Heckstützens in der Dicke des Decks und in dem Fall des Heckstützens in einem Drittel der Deckbalkenbucht.

Die auf diese Weise gefundene Länge wird in eine Anzahl gleicher Theile getheilt, und zwar:

- 1) eine Länge bis zu 15 Meter in 4 gleiche Theile;
- 2) eine Länge über 15 Meter und bis zu 37 Meter in 6 gleiche Theile;
- 3) eine Länge über 37 Meter und bis zu 55 Meter in 8 gleiche Theile;
- 4) eine Länge über 55 Meter und bis zu 69 Meter in 10 gleiche Theile;
- 5) eine Länge über 69 Meter in 12 gleiche Theile.

§. 7. Auf jedem dieser Theilungspunkte wird ein Querschnitt des unter dem Vermessungs-Deck befindlichen Schiffsraumes in folgender Weise gemessen:

Die Tiefe jedes Querschnittes wird zwischen zwei Punkten gemessen, von denen der obere Punkt in einem Abstand von einem Drittel der Deckbalkenbucht unter dem Vermessungs-Deck und der untere Punkt in der oberen Fläche der Bodenwrange an der inneren Seite des Füllungsanges liegt. Fällt ein solcher Querschnitt in eine Erhöhung oder Vertiefung des Deckes, so wird der obere Punkt in der verlängert gedachten Fluchtlinie des Deckes ermittelt. Von der so gefundenen Tiefe wird die mittlere Dicke der zwischen der Kimmwegerung und dem Füllungsange befindlichen Binnenbords-Bekleidung in Abzug gebracht.

Beträgt die nach dem Vorstehenden bestimmte Tiefe des durch den mittelsten Theilungspunkt der Länge gelegten Querschnittes nicht mehr als 5 Meter, so wird die Tiefe eines jeden Querschnittes in vier gleiche Theile getheilt. Durch jeden der drei mittleren Theilungspunkte, sowie durch den oberen und unteren Endpunkt der Tiefe, werden sodann die inneren Breiten jedes Querschnittes rechtwinklig zur verticalen Kielebene gemessen, indem jedes Maaß bis zur mittleren Dicke desjenigen Theiles der Binnenbords-Bekleidung genommen wird, welcher zwischen den Vermessungspunkten liegt.

Zum Zwecke der Berechnung des Flächeninhalts der Querschnitte werden die fünf gemessenen Breiten eines jeden Querschnittes in der Weise numerirt, daß die oberste Breite mit 1, die nächstfolgenden Breiten mit 2, 3, 4, und die unterste Breite mit 5 bezeichnet wird. Die Summe nun, welche sich ergibt, wenn die zweite und vierte Breite mit 4, die dritte Breite mit 2 multiplicirt wird und hierzu die erste und die fünfte Breite addirt werden, wird mit dem dritten Theile des gemeinsamen Abstandes der Breiten von einander multiplicirt. Das Product ergibt sodann den Flächeninhalt des Querschnittes.

Beträgt jedoch die nach dem zweiten Absatze dieses Paragraphen bestimmte Tiefe des durch den mittelsten Theilungspunkt der Länge gelegten Querschnittes mehr als 5 Meter, so wird die Tiefe eines jeden Querschnittes anstatt in vier, in sechs gleiche Theile getheilt, so daß anstatt fünf Breiten sieben Breiten der Querschnitte zu messen sind. Die Messung geschieht übrigens in derselben Weise und auch die Art und Weise der Berechnung bleibt dieselbe. Es werden nämlich die zweite, vierte und sechste Breite mit 4, die dritte und fünfte Breite

mit 2 multiplicirt, die Producte addirt und zur Summe derselben die erste und die siebente Breite hinzugezählt. Die Gesamtsumme wird mit dem dritten Theil des gemeinsamen Abstandes der Breiten von einander multiplicirt und das Product ergibt sodann den Flächeninhalt des Querschnitts.

§. 8. Aus dem nach den Vorschriften des §. 7 ermittelten Flächeninhalt aller einzelnen Querschnitte wird der Inhalt des unter dem Vermessungs-Deck befindlichen Schiffsraumes in folgender Weise berechnet:

Die Querschnitte werden nach einander mit 1, 2, 3 u. s. w. in der Art numerirt, daß mit 1 der durch den Anfangspunkt der Länge am Bug und mit der letzten Nummer der durch den Endpunkt der Länge am Heck gelegte Querschnitt bezeichnet wird. Die Summe, welche sich ergibt, wenn jeder mit einer geraden Nummer bezeichnete Querschnitt mit 4, jeder mit einer ungeraden, mit Ausnahme der ersten und letzten Nummer, bezeichnete Querschnitt mit 2 multiplicirt wird und hierzu die mit der ersten und der letzten Nummer bezeichneten Querschnitte — sofern diese überhaupt einen Flächeninhalt ergeben haben — addirt werden, wird mit dem dritten Theil des gemeinsamen Abstandes der Querschnitte von einander multiplicirt. Das Product ergibt sodann den Inhalt des unter dem Vermessungs-Deck befindlichen Schiffsraumes.

§. 9. Hat das Schiff über dem Vermessungs-Deck noch ein drittes Deck, so wird der Inhalt des Raumes zwischen dem dritten Deck und dem Vermessungs-Deck folgendermaßen bestimmt:

Die innere Länge des Raumes wird auf halber Höhe desselben von der Bekleidung neben dem Vordersteven bis zur Bekleidung der Inhölzer am Heck gemessen. Diese Länge wird in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt, in welche die auf dem Vermessungs-Deck gemessene Länge getheilt worden ist (§. 6). An jedem dieser Theilungspunkte, sowie an den Endpunkten der Länge, am Bug und am Heck, werden die inneren Breiten gemessen und zwar ebenfalls auf halber Höhe.

Die Breiten werden nach einander mit 1, 2, 3 u. s. f. in der Art numerirt, daß die Breite am Bug als Nr. 1 bezeichnet wird. Die zweite und alle anderen, mit geraden Nummern bezeichneten Breiten werden mit 4, die dritte und alle anderen, mit ungeraden Nummern bezeichneten Breiten, mit Ausnahme der ersten und der letzten Breite, werden mit 2 multiplicirt. Die Summe der Producte und der ersten und letzten Breite wird mit dem dritten Theile des gemeinsamen Abstandes der Breiten von einander multiplicirt. Das Product ergibt den Flächeninhalt der mittleren wagerechten Durchschnittsfläche und dieser, mit der mittleren Höhe des Raumes multiplicirt, den Inhalt des gemessenen Raumes.

§. 10. Hat das Schiff mehr als drei Decke, so werden die über dem Vermessungs-Deck befindlichen Zwischendeck-Räume, ein jeder für sich, in der in §. 9 beschriebenen Weise vermessen.

§. 11. Befinden sich Kajüten, Hütten, Deckhäuser, Backe oder sonstige, fest angebrachte Aufbauten auf dem obersten Deck, welche zur Aufnahme von Gütern oder Vorräthen, oder zur Unterbringung oder sonstigen Bequemlichkeit der Passagiere oder der Schiffsbesatzung, einschließlich des Schiffsführers, dienen, so wird der Raumgehalt derselben in folgender Weise festgestellt:

Es wird die innere mittlere Länge eines jeden solchen Raumes gemessen und in zwei gleiche Theile getheilt. In halber Höhe desselben werden ferner drei innere Breiten gemessen, und zwar je eine Breite durch jeden der beiden Endpunkte, und die dritte durch die Mitte der gemessenen Länge. Zur Summe der beiden Endbreiten wird sodann das Vierfache der mittelsten Breite addirt und die Gesamtsumme mit einem Drittel des gemeinsamen Abstandes der Breiten von einander multiplicirt. Das Product ergibt den Flächeninhalt der mittleren wagerechten Durchschnittsfläche, und dieser, mit der mittleren Höhe des Raumes multiplicirt, den körperlichen Inhalt desselben.

### III. Das abgekürzte Vermessungsverfahren.

§. 12. Die Länge wird auf dem obersten Deck gemessen, von der Außenfläche der Außenhaut neben dem Vordersteven bis zur hinteren Fläche des Hinterstevens. Von dieser Länge wird der Abstand zwischen der hinteren Fläche des Hinterstevens und demjenigen Punkte der Sponung im Hintersteven, in welchem die Gillungsplanke dieselbe schneidet oder die Sponung in die Gillungslinie übergeht, in Abzug gebracht.

Es wird ferner die größte Breite des Schiffes gemessen zwischen den Außenflächen der Außenbords-Bekleidungen oder der Berghölzer. Auf der größten Breite wird sodann die Höhe des obersten Deckes außenbords an beiden Seiten vermerkt und mittelst einer, in senkrechter Richtung zum Kiel straff um das Schiff herum gezogenen Kette diejenige Linie gemessen, welche den einen der vermerkten Punkte unter dem Kiel hindurch mit dem anderen gegenüberliegenden Punkte verbindet. Zur Hälfte des so ermittelten äußeren Umfangs wird die Hälfte der größten Breite addirt. Die sich ergebende Summe wird mit sich selbst multiplicirt, sodann mit der nach Absatz 1 dieses Paragraphen ermittelten Länge des Schiffes multiplicirt und das Product wird nochmals, und zwar, wenn das Schiff zumeist von Eisen erbaut ist, mit 0,18 (achtzehn Hundertstel), wenn es zumeist von Holz erbaut ist, mit 0,17 (siebenzehn Hundertstel) multiplicirt. Die gefundene Zahl ergibt den Inhalt des unter dem obersten Deck befindlichen Schiffsraumes in Cubikmetern.

§. 13. Befinden sich Cajüten, Hütten, Deckhäuser, Backe oder sonstige, fest angebrachte Aufbauten auf dem obersten Deck, so wird der Inhalt dieser Räume in der Weise ermittelt, daß die mittlere Länge, mittlere Breite und mittlere Höhe derselben mit einander multiplicirt wird.

### IV. Die Vermessung offener Fahrzeuge.

§. 14. Bei Bestimmung des Brutto-Raumgehaltes offener Fahrzeuge bezeichnet die Oberkante des obersten Plankenganges die Grenzfläche des zu vermessenden Raumes.

Die Tiefen werden von denjenigen Querlinien ab gemessen, welche von Oberkante zu Oberkante des obersten Plankenganges durch die Theilungspunkte der Länge gezogen sind.

Im Uebrigen kommen die Vorschriften des zweiten bzw. dritten Abschnittes zur Anwendung.

### V. Die Abzüge vom Brutto-Raumgehalt.

§. 15. Bei allen Schiffen wird der Raumgehalt der vollständig und ausschließlich zum Gebrauch der Schiffsmannschaft dienenden Räume, nach ihrer durch Messung ermittelten Größe, jedoch höchstens bis zum zwanzigsten Theile des Brutto-Raumgehaltes des Schiffes, von dem letzteren in Abzug gebracht.

Für die Vermessung der erwähnten Räume gelten die im §. 11 gegebenen Vorschriften.

§. 16. Bei Schiffen, welche durch Dampf oder durch eine andere künstlich erzeugte Kraft bewegt werden, wird der Inhalt der Räume, welche von der Maschine und den Dampfkesseln thatsächlich eingenommen werden und für die wirksame Thätigkeit derselben abgeschieden sind, sowie ferner der abgeschlossene Raum solcher Kohlenbehälter, welche dauernd hergerichtet und derartig angebracht sind, daß aus ihnen die Kohlen unmittelbar in den Maschinenraum geschüttet werden können, je nach der durch Messung ermittelten Größe dieser Räume, jedoch höchstens bis zur Hälfte des Brutto-Raumgehaltes des Schiffes, von dem letzteren in Abzug gebracht.

Bei Schlepp-Dampfschiffen, welche ausschließlich zum Schleppen anderer Schiffe dienen, wird der Inhalt sämtlicher Maschinen-, Dampfkessel- und Kohlenräume ohne Beschränkung auf die Hälfte des Brutto-Raumgehaltes des Schiffes

in Abzug gebracht, sobald diese Räume den im ersten Absatze dieses Paragraphen enthaltenen Bestimmungen entsprechen.

Bei Schrauben-Dampfschiffen gehört auch der von dem Wellentunnel eingenommene Raum zu den in dem ersten Absatze dieses Paragraphen bezeichneten Räumen.

§. 17. Für die Vermessung der im §. 16 erwähnten Räume gelten folgende Vorschriften:

- 1) Es wird die mittlere Länge des Maschinenraumes einschließlich der in der vorgeschriebenen Weise eingerichteten Kohlenbehälter gemessen. Ferner werden in Gemäßheit der Bestimmungen des §. 7 drei Querschnitte gemessen bis zur Höhe des Deckes des Maschinenraumes oder des unmittelbar über dem Maschinenraume befindlichen Deckes, und zwar ein Querschnitt an jedem der beiden Endpunkte und ein Querschnitt in der Mitte der Länge. Zur Summe der beiden Endquerschnitte wird das Vierfache des Mittelquerschnitts addirt und die Gesamtsumme mit einem Drittel des gemeinsamen Abstandes zwischen den Querschnitten multiplicirt. Das Product ergibt den Inhalt des fraglichen Raumes.
- 2) Ist das unter Nr. 1 erwähnte, über dem Maschinenraum befindliche Deck nicht das oberste Deck des Schiffes, so wird der Inhalt des Raumes zwischen dem bereits gemessenen und dem obersten Deck, soweit er für die Maschine oder für den Zutritt von Licht und Luft abgeschieden ist, in der Weise ermittelt, daß die mittlere Länge, mittlere Breite und mittlere Tiefe mit einander multiplicirt werden. Der Inhalt dieses Raumes wird sodann dem Inhalt des übrigen Maschinenraumes zugerechnet.  
Das Gleiche gilt von dem Inhalt der in der vorgeschriebenen Weise angebrachten Kohlenbehälter, welche durch zwei Decke gehen.
- 3) Befinden sich die Maschine, der Dampfkessel oder die Kohlenbehälter in selbstständigen Abtheilungen, so werden diese in der unter Nr. 1 und 2 angegebenen Weise einzeln vermessen und die Summe des Raumgehaltes derselben gilt als der Inhalt des ganzen Raumes.
- 4) Zur Ermittlung des körperlichen Inhalts des von dem Wellentunnel in Schrauben-Dampfschiffen eingenommenen Raumes wird die mittlere Länge, mittlere Breite und mittlere Tiefe des Tunnels mit einander multiplicirt.

§. 18. Werden diejenigen Räume eines Schiffes, welche bei der Vermessung desselben vom Brutto-Raumgehalte in Abzug gebracht worden sind, in anderer Weise als in den §§. 15 und 16 vorgesehen, später nutzbar gemacht, so müssen sie dem Netto-Raumgehalte des Schiffes sofort zugezählt werden. Ob zu diesem Zwecke die Neuvermessung des Schiffes erforderlich ist oder nicht, bestimmt die Vermessungs-Behörde.

### §. 35.

Bei allen Schiffen, deren Theile nicht auf die eine oder andere der einfachen geometrischen Körperformen zurückzuführen sind, wie dies bei allen größern Flußschiffen, insbesondere aber bei allen See-, Segel- und Dampfschiffen der Fall ist, benutzt man zur Inhaltsberechnung des eingetauchten Schiffkörpers mit ganz entschiedenem Vortheile die Simpson'sche Regel<sup>1)</sup>. Hierzu denkt man sich den betreffenden Körper durch (zur Schwimmebene) horizontale oder verticale Schnittebenen in eine den Umständen entsprechende An-

<sup>1)</sup> Eine ganz vorzügliche Abhandlung über die „Simpson'sche Regel“ findet sich in Navier-Wittstein's „Lehrbuche der Differential- und Integral-Rechnung“. Zweiter Band, S. 215 (Vierte Auflage), unter der Ueberschrift „Angenäherte Quadraturen“.

zahl von Theilen zerlegt, wovon man zuerst die Inhalte der ebenen Begrenzungsflächen, sodann aber durch abermalige Anwendung der gedachten Regel, die Körperräume berechnet.

Um hierüber vollständige Einsicht zu erlangen, benutzen wir zu den gedachten Berechnungen nachstehende von Redtenbacher (Resultate für den Maschinenbau, Sechste Auflage, S. 309) aus Tredgold's Werke über die Dampfmaschinen (Anhang A und B) zusammengestellte Tabelle, welche die Verhältnisse des englischen Dampfschiffes Rainbow angiebt. Zur ferneren Erläuterung dienen die Figuren 38 und 39.

Fig. 38.

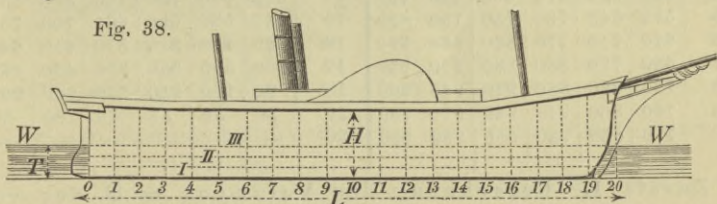
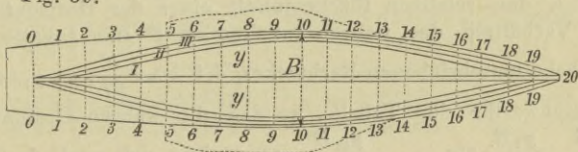


Fig. 39.



Dabei ist die  $= L$  gesetzte Länge des Schiffes zwischen den sogenannten Perpendicularen in 20 gleiche Theile getheilt, die Tauchung  $= T$ , für die normale Belastung in 6 gleiche Theile (wovon, um nicht undeutlich zu werden, in der Figur nur vier gezeichnet sind) und die größte Breite (die des Hauptspannten) in der Schwimmebene  $= B$  gesetzt.

Die Verticalreihen der Tabelle sind die Ordinatenwerthe der Begrenzungcurve des jedesmaligen Horizontalschnittes, wenn man die größte Breite in der Schwimmebene gleich 2000 setzt, so daß diese Werthe mit  $\frac{B}{2000}$  <sup>1)</sup> multiplicirt werden müssen, um ihre wahren Größen zu erhalten. Die Horizontalreihen sind eben so die Ordinaten der einzelnen Querprofile etc.

<sup>1)</sup> Setzt man die (halbe) wirkliche Ordinate  $= \eta$ , so verhält sich

$$\eta : y = B : 2000, \text{ d. i. } \eta = \frac{yB}{2000} \text{ u. s. w.}$$

Hinterschiff.							Vorderschiff.						
Nr. des Querschnitts	Ordinaten der Horizontalschnitte.						Nr. des Querschnitts	Ordinaten der Horizontalschnitte.					
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0	20	20	20	20	20	20	10	770	860	930	950	980	990
1	75	110	150	200	260	336	11	745	850	900	940	960	980
2	165	250	325	385	455	520	12	710	810	860	910	940	960
3	280	400	480	530	590	640	13	640	750	810	845	870	900
4	400	530	610	665	710	750	14	545	665	730	760	800	830
5	515	640	700	750	790	830	15	440	550	620	660	700	735
6	610	710	770	820	860	890	16	320	460	530	570	610	645
7	680	770	830	880	910	930	17	200	300	350	390	430	460
8	730	820	880	910	945	960	18	90	160	210	230	260	290
9	760	860	910	940	970	990	19	30	35	55	70	80	90
10	770	860	930	950	980	990	20	—	—	—	—	—	—

Zusatz 1. Berechnung des Volumens =  $\mathfrak{B}$  der verdrängten Flüssigkeit aus den Horizontalschnitten. Es bezeichnet  $K$  den relativen Flächeninhalt eines der Horizontalschnitte, oder das Verhältniß des wahren Inhaltes =  $F$  zum Inhalte des der Schwimmfläche umschriebenen Rechteckes, d. i.  $k = \frac{F}{BL}$ ,  $y_0, y_1, y_2 \dots y_{19}$  die Ordinatenwerthe der Tabelle, so daß die wahren Ordinatenwerthe also:  $\frac{y_0 B}{2000}$ ,  $\frac{y_1 B}{2000}$  etc. . . .  $\frac{y_{19} B}{2000}$ , so ergiebt sich nach der Simpson'schen Regel ohne Weiteres

$$k = \frac{F}{BL} = \frac{1}{20000} \cdot \frac{1}{3} \{y_0 + y_{20} + 2(y_2 + y_4 \dots y_{18}) + 4(y_1 + y_3 \dots y_{19})\}.$$

Daher für den ersten Schnitt:

$$y_0 + y_{20} = 20,$$

$$y_2 = 165$$

$$y_1 = 75$$

$$y_4 = 400$$

$$y_3 = 280$$

$$y_6 = 610$$

$$y_5 = 515$$

$$y_8 = 730$$

$$y_7 = 680$$

$$y_{10} = 770$$

$$y_9 = 760$$

$$y_{12} = 710$$

$$y_{11} = 745$$

$$y_{14} = 545$$

$$y_{13} = 640$$

$$y_{16} = 320$$

$$y_{15} = 440$$

$$y_{18} = 90$$

$$y_{17} = 200$$

$$4340 \times 2 = 8680; \quad y_{19} = 30$$

$$4365 \times 4 = 17460; \text{ also}$$

$$k_1 = \frac{1}{60000} (20 + 8680 + 17460) = 0,436.$$

Auf dieselbe Weise verfahren, erhält man (den 0ten Schnitt = Null gesetzt):

$$k_0 = 0; \quad k_1 = 0,4360; \quad k_2 = 0,526833; \quad k_3 = 0,582167; \quad k_4 = 0,620667;$$

$$k_5 = 0,656333; \quad k_6 = 0,687567.$$

Hieraus endlich:



$$\frac{\mathfrak{B}}{LBT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \left\{ k_0 + k_6 + 2(k_2 + k_4) + 4(k_1 + k_3 + k_5) \right\}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{LBT} = 0,53781 \text{ und}$$

$$\mathfrak{B} = 0,53781 \cdot LBT.$$

Zusatz 2. Begreiflicher Weise muß sich  $\mathfrak{B}$  auch aus den Verticalschnitten berechnen lassen, was zur Beurtheilung der Uebereinstimmung geschehen mag.

Zuerst erhält man, den relativen Flächeninhalt der Verticalschnitte mit  $r$  bezeichnet, d. h.  $r = \frac{F}{TB}$  gesetzt, wenn die betreffenden Ordinaten durch  $z$  ausgedrückt werden:

$$r = \frac{F}{TB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1000} \left\{ z_0 + z_6 + 2(z_2 + z_4) + 4(z_1 + z_3 + z_5) \right\}.$$

Daher für den Verticalschnitt, weil hier  $z_0 + z_1 = 20$ ;  $2(z_2 + z_4) = 80$ ;  $4(z_1 + z_3 + z_5) = 240$  ist,

$$r_0 = \frac{1}{18000} (20 + 80 + 240) = 0,018889.$$

So fortgefahren ergibt sich überhaupt:

$$\left. \begin{array}{l} r_0 = 0,018889 \\ r_1 = 0,160889 \\ r_2 = 0,309444 \\ r_3 = 0,438889 \\ r_4 = 0,556667 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r_5 = 0,646111 \\ r_6 = 0,717222 \\ r_7 = 0,772778 \\ r_8 = 0,813333 \\ r_9 = 0,841667 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r_{10} = 0,851667 \\ r_{11} = 0,832222 \\ r_{12} = 0,802222 \\ r_{13} = 0,742778 \\ r_{14} = 0,665556 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r_{15} = 0,566389 \\ r_{16} = 0,474722 \\ r_{17} = 0,320000 \\ r_{18} = 0,183889 \\ r_{19} = 0,053333 \end{array} \right\}$$

$$\text{Ferner ist } \frac{\mathfrak{B}}{BLT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} \left\{ r_0 + r_{20} + 2(r_2 + r_4 \dots r_{18}) + 4(r_1 + r_3 \dots r_{19}) \right\},$$

also wenn man vorstehende Zahlenwerthe substituirt:

$$\frac{\mathfrak{B}}{BLT} = 0,53781 \text{ oder}$$

$$\mathfrak{B} = 0,53781 \cdot BLT.$$

So weit sich die bestimmten Zahlenwerthe von  $B$ ,  $L$  und  $T$  aus den Zeichnungen des oben citirten Tredgold'schen Werkes entnehmen lassen, ist  $L = 182,50$  Fuß (engl.),  $B = 24',75$  und  $T = 6',00$ , d. i.  $\mathfrak{B} = 14575,33$  Cubikfuß<sup>1)</sup>.

Das Totalgewicht  $Q = \gamma \cdot \mathfrak{B}$  des Schiffes (Schale, Maschine und Kessel, Ausrüstung inclusive Takelage und Fracht) betrug daher, wenn man  $\gamma$  das Gewicht eines Cubikfußes Seewasser 1,024 mal so groß als ein Cubikfuß Süßwasser, also für englische Maaße

$$\gamma = 62,5 \times 1,024 = 64 \text{ Pfund englisch}^2) \text{ rechnet:}$$

$$Q = 14575,33 \times 64 = 932821,12 \text{ Pfd.},$$

oder in englischen Tonnen à 2240 Pfd:

$$Q = 416,4 \text{ Tons.}$$

<sup>1)</sup> Die Höhe =  $H$  der Schiffschale des Rainbow beträgt, nach den bereits erwähnten Tredgold'schen Zeichnungen,  $H = 12$  Fuß engl.

<sup>2)</sup> In englischen Tonnen ausgedrückt beträgt für Seewasser:

$$\gamma = \frac{64}{2240} = \frac{1}{35}.$$

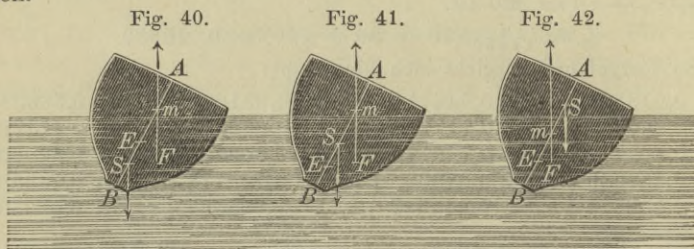
## §. 36.

**Stabilität schwimmender Körper.**

Für die technische Mechanik noch besonders wichtig ist die Aufsuchung der Bedingungen, unter welchen ein Körper mit Stabilität, Instabilität oder mit völliger Gleichgültigkeit schwimmt.

Hierzu nehmen wir an, daß der im Wasser schwimmende Körper nicht gleichartig ist, vielmehr in seinem Innern eine Substanz (Ladung) enthält, deren Dichte größer als die des Wassers ist, und folglich der Schwerpunkt des eingetauchten Körpertheils nicht mit dem des verdrängten Wassers zusammenfällt.

Fig. 40 bis 42 mögen sodann drei schwimmende Körper vorstellen, welche durch irgend eine Kraft aus der ursprünglich aufrechten Gleichgewichtslage in eine neue schiefe Lage gebracht wurden, ohne daß letztere ein Gleichgewicht an sich zuläßt. Auftriebs- und Schwerkraftsrichtungen also nicht in derselben Verticalen liegen.



In allen drei Figuren bezeichnet  $S$  den Schwerpunkt des ganzen Körpers (einschließlich der Ladung),  $E$  den Schwerpunkt des verdrängten Wassers bei aufrechter und  $F$  bei geneigter Stellung.

Jeder dieser Körper ist sodann (ähnlich wie bereits §. 28 erörtert wurde) der Wirkung zweier Kräfte unterworfen, die ihn veranlassen, zwei verschiedene Bewegungen anzunehmen, nämlich eine fortschreitende, vertical aufwärts durch den Schwerpunkt  $S$  gerichtete, und eine Drehbewegung um eine durch diesen Schwerpunkt gehende horizontale Achse, welche letztere rechtwinklig auf der Verticale steht.

Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes kann für die hier folgenden Untersuchungen außer Acht bleiben, wenn man nur berücksichtigt, daß bei aufrechter und schiefer oder geneigter Stellung des Körpers, unter sonst allerlei Umständen, stets ganz gleiche Wasservolumen verdrängt werden müssen, was nothwendiger Weise, für die meisten Fälle, eine Veränderung der Drehachsenlage voraussetzt und in die betreffenden Rechnungen mit einführt.

Sodann läßt sich aus der nähern Betrachtung der Figuren unmittelbar entnehmen, daß, wenn die Lage der Punkte  $F$  und  $S$  die von Fig. 40 und 41 ist, der Körper ein Bestreben besitzt, in seine ursprüngliche Stellung zurückzukehren; dagegen wenn die gedachten Punkte die Lage von Fig. 42 haben, dieses Bestreben darin besteht, den Körper immer mehr von der ersten Stellung zu entfernen, d. h. solchen endlich umzuschlagen.

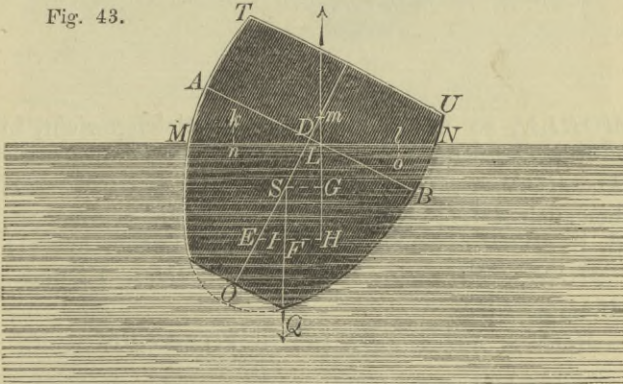
Verlängert man, zur weiteren Untersuchung, die durch  $F$  gehende Auftriebsrichtung, bis solche die vorher verticale Achse  $AB$  des Körpers in einem Punkte  $m$  schneidet, so ergibt sich leicht, daß der Körper mit Stabilität schwimmt, sobald dieser Punkt höher als der Schwerpunkt  $S$  liegt, dagegen umschlägt, mit Instabilität schwimmt, wenn  $m$  unter  $S$  liegt, so wie endlich, daß der Zustand völliger Gleichgültigkeit eintritt, sobald  $m$  mit  $S$  zusammenfällt. Gedachten Punkt  $m$  nennt man das Metacentrum des schwimmenden Körpers<sup>1)</sup>.

§. 37.

Es mag jetzt gezeigt werden, wie man die Stabilität eines schwimmenden Körpers, für jeden besondern Fall, durch Rechnung zu bestimmen im Stande ist, wobei wir jedoch nur Formen voraussetzen, wie sie beim Schiffsbaue vorkommen, d. h. solche Körper, welche beim aufrechten Stande von einer durch die Schwimmebene und Längsachse gelegten Verticalebene (Mastenebene) in zwei völlig symmetrische Theile getheilt werden. Außerdem werde vorerst angenommen, es bilden alle Querschnitte des betreffenden Schiffes ähnliche gleiche Figuren, so daß Flächen als mit Volumen gleichgeltend aufgeführt werden können.

In Fig. 43 sei  $TOU$  das schwimmende Schiff,  $S$  dessen Schwerpunkt (einschließlich Ballast und Ladung),  $AOB$  das verdrängte

Fig. 43.



Wasservolumen (Displacement) bei aufrechter Stellung und  $MNO$  dasselbe nach der Drehung des Schiffes, um den beliebigen Winkel  $OSQ$ ,  $SQ$  vertical vorausgesetzt. Bei der ersten Stellung sei  $E$  der Schwerpunkt des Displacements, bei der zweiten liege derselbe in der noch unbestimmten Verticalen  $HL$ .

Zieht man nun vom unveränderlichen Schwerpunkte  $S$  die Linie  $SG$  rechtwinklig gegen die Auftriebsrichtung  $HL$ , so erkennt man leicht, daß Alles auf die Bestimmung von  $SG$ , als Hebelarm des Auftriebes, ankommen wird, um das Drehungs- oder Stabilitätsmoment angeben zu können.

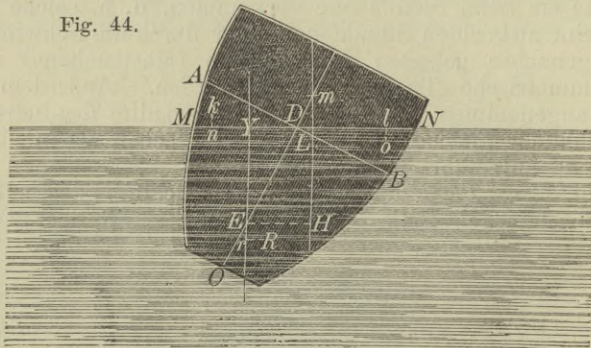
<sup>1)</sup> Von  $\text{Μετὰ}$  jenseits und  $\text{Κέντρον}$  Mittelpunkt.

Hierzu werde vorerst in Erinnerung gebracht, daß, um welchen Winkel das Schiff (bei gleichbleibender Ladung) auch gedreht werden mag, das *Displacement* stets dasselbe bleiben, folglich *ALM* für alle Fälle gleich *BLN* sein wird, wobei *L* den Durchschnittspunkt der ersten Schwimmebene *AB* mit der neuen *MN* bezeichnet, ein Punkt, dessen Lage, wie aus dem später Folgenden zu entnehmen, besonders durch die Gestalt der oberen Seitenwände des Schiffes bestimmt wird.

Sodann mögen die Schwerpunkte von *AML* und *BLN* respective in *k* und *o* liegen und von diesen auf *MN* die Senkrechten *kn* und *lo* gefällt sein. Zieht man ferner von *E* auf die neue Auftriebsrichtung die Normale *EH*, so wird letztere durch die Proportion bestimmt  $MON : BLN = nl : EH$ .

Denn bezeichnet in Fig. 44 *R* den Schwerpunkt des Volumen-

Fig. 44.



theiles *MOBLM*, so erhält man für das Gleichgewicht, in Bezug auf eine durch *E* gelegte Verticalebene *EY*, die Momentengleichung:

$$(1) \quad MON \times EH = MOBLM \times rR + LBN \times lY,$$

ferner aber auch  $AOB \times \text{Null} = MOBLM \times rR + ALM \times (-Yn)$ ,  
d. i.  $MOBLM \times rR = ALM \times Yn$ , daher aus (1)

$$MON \times EH = ALM \times nY + LBN \times Yl \text{ und}$$

wegen  $MAL = LBN$ ,

$$MON \times EH = LBN (nY + Yl) = LBN \times nl.$$

Demnach ist überhaupt  $EH = \frac{BLN}{MON} \cdot nl$ , oder wenn das Volumen  $BLN = v$ , das  $MON = \mathfrak{B}$  und  $nl = b$  gesetzt wird

$$(2) \quad \overline{EH} = \frac{v}{\mathfrak{B}} \cdot b.$$

Wird nun angenommen, daß der Abstand der Punkte *S* und *E*, Fig. 43, bekannt und gleich *e* ist und bezeichnet  $\varphi$  den Neigungswinkel  $OSQ = BLN$ , so folgt  $EI = ES \sin \varphi = e \sin \varphi$ . Wird sodann letzterer Werth von (2) abgezogen, so erhält man, weil  $IH = SG$ ,

$$(3) \quad SG = \frac{vb}{\mathfrak{B}} - e \sin \varphi.$$

Bezeichnet daher *Q* das Gewicht des *Displacements* oder das

Gewicht des ganzen Baues, so ergibt sich das Stabilitätsmoment  $M = Q\overline{SG}$  (Fig. 43) zu

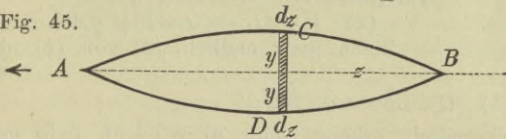
$$I. \quad M = Q \left[ \frac{vb}{3} - e \sin \varphi \right].$$

Im Falle sehr kleiner Schwingungen kann man mit dem Bogen  $\varphi$  statt mit  $\sin \varphi$  rechnen, da ferner auch statt dem Gewichte  $Q$  des ganzen Baues  $\gamma\mathfrak{B}$  zu setzen ist, so wird aus I:

$$M = \gamma\mathfrak{B} \left[ \frac{v \cdot b}{3} - e \cdot \varphi \right], \text{ oder auch}$$

$$II. \quad M = \gamma \left[ vb - e\mathfrak{B} \cdot \varphi \right].$$

Fig. 45.



Bezeichnet man jetzt mit  $2y$  (Fig. 45) die Schiffsbreite  $CD$  in der Schwimmebene gemessen und zwar in der

Entfernung  $= z$  vom Hintertheile  $B$  des Schiffes, so ergibt sich leicht:

$$v \cdot b = \int \left( \frac{y^2 \cdot \varphi}{2} \right) dz \cdot \left( \frac{4}{3} y \right) = \varphi \int \frac{2}{3} y^3 dz + C.$$

Letzteres Integral ist aber nichts anderes als das Trägheitsmoment der ganzen Schwimmfläche in Bezug auf deren Längsachse, so daß, wenn dies Trägheitsmoment mit  $\mu$  bezeichnet wird, aus II. überhaupt folgt:

$$III. \quad M = \gamma [\mu - e\mathfrak{B}] \varphi.$$

Bezeichnet man ferner in Fig. 43 die Entfernung des Schwerpunktes  $S$  vom Metacentrum mit  $e_1$ , so ergibt sich auch, wegen  $\overline{SG} = e_1 \sin \varphi$ :

$$M = Qe_1 \sin \varphi = \gamma\mathfrak{B}e_1 \sin \varphi,$$

oder in dem vorbemerkten besonderen Falle:

$$IV. \quad M = \gamma\mathfrak{B}e_1 \cdot \varphi.$$

Aus III. und IV. erhält man noch besonders:

$$V. \quad e < \frac{\mu}{\mathfrak{B}}$$

als Bedingung der Stabilität des Schiffes und

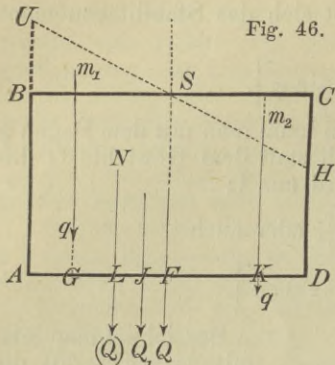
$$VI. \quad e + e_1 = \overline{Em} = \frac{\mu}{\mathfrak{B}},$$

als Höhe des Metacentrums über den Schwerpunkt des Deplacements oder des ganzen Baues.

Zusatz 1. Der für den rationellen Schiffsbau wichtige Ausdruck III. dürfte es verdienen, hier noch eine kurze (praktische) Ableitung desselben zu notiren:

Verschafft man sich nämlich den nachstehenden mit (3) bezeichneten Hilfssatz, so ergibt sich III. fast unmittelbar.

Hierzu repräsentire das Rechteck  $ABCD$ , Fig. 46, das Gewicht des ganzen Baues, also den Werth  $Q = \gamma\mathfrak{B}$ .



Ferner stelle die Fläche  $ABSHDKFA$  ein Gewicht  $Q_1$  dar und endlich sei eben so  $q$  das Gewicht der Dreiecksfläche  $CHS$ .

Wird hierauf  $A$  zum Momentenpunkte gewählt, so hat man:

$$(1) Q \cdot \overline{AF} = Q_1 \overline{AI} + q \cdot \overline{AK}.$$

Denkt man sich ferner die ganze Figur  $ABCD$  um  $S$  gedreht und zwar so, daß  $\triangle BUS = \triangle CHS$  wird (dabei  $BC$  als Schwimmebene gedacht), so läßt sich ferner setzen, das Gewicht  $Q$  jetzt in der Verticalen  $LN$  wirkend angenommen:

$$(2) Q \cdot \overline{AL} = Q_1 \overline{AI} + q \overline{AG}.$$

Zieht man endlich (2) von (1) ab,

so folgt:

$$(3) Q \cdot \overline{LF} = q \cdot \overline{GK}.$$

Bei einiger Aufmerksamkeit erkennt man aber leicht, daß, mit Bezug auf Fig. 43, geschrieben werden kann:

$$Q \cdot \overline{LF} = Q \cdot \overline{EH} \gamma \mathfrak{B} (e + e_1) \sin \varphi \text{ und}$$

$$q \cdot \overline{GK} = \gamma v b = \gamma \varphi \mu, \text{ so daß aus (3) wird:}$$

$$\gamma \mathfrak{B} (e + e_1) \sin \varphi = \gamma \varphi \mu \text{ oder}$$

$$\gamma \mathfrak{B} e \cdot \sin \varphi = \gamma \varphi \mu - \gamma \mathfrak{B} e_1 \sin \varphi, \text{ d. i.}$$

$$M = \gamma (\mu \varphi - \mathfrak{B} e \sin \varphi) \text{ oder } \varphi \text{ statt } \sin \varphi \text{ eingeführt:}$$

$$M = \gamma (\mu - e \mathfrak{B}) \varphi, \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz 2. Mit Hülfe des Werthes III. läßt sich leicht die Oscillation des Schiffes um eine durch den Schwerpunkt  $S$  (Fig. 43) des ganzen Baues gehende mit der Kiellinie parallele Achse, d. h. das sogenannte Schlingern berechnen.

Man erhält nämlich, da nach bekannten Sätzen die Bogenacceleration = Statisches Moment dividirt durch das Trägheitsmoment ist und wenn dabei die Schwingungszeit mit  $t$  und mit  $\lambda$  das Trägheitsmoment des ganzen Baues (bei Dampfschiffen incl. Maschine, Kessel etc.) bezeichnet wird:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{\gamma (\mu - e \mathfrak{B})}{\lambda} \cdot \varphi,$$

woraus sich die Zeit =  $\mathfrak{T}$  einer ganzen Oscillation ergibt zu<sup>1)</sup>:

$$\text{VII. } \mathfrak{T} = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma (\mu - e \mathfrak{B})}}.$$

Zusatz 3. Streng genommen würde hier der Ort sein, wo auch die sogenannte „Dynamische Stabilität“ der Schiffe, im Gegensatze der vorher behandelten „Statischen Stabilität“, erörtert werden müßte.

Umfang und Zweck unserer Hydrodynamik gebieten jedoch, daß

<sup>1)</sup> Specielles in Bezug auf Ableitung der Gleichung VII, so wie ferner ein Zahlenbeispiel, findet sich in dem vom Verfasser (1859) geschriebenen Artikel „Dampfschiff“ in den von Karmarsch herausgegebenen Supplementen der Prechtlschen „Technologischen Encyclopädie“, Bd. II, S. 449.

sich der Verfasser auf folgende Notizen, so wie auf die Angabe betreffender literarischer Quellen beschränkt.

Redtenbacher<sup>1)</sup> erörtert diesen Gegenstand Folgendermaßen: Die Wirkungsgröße, welche erforderlich ist, um ein Schiff um einen Winkel  $\alpha$  aus seiner aufrechten Lage abzulenken, ist nach Gleichung III, wenn die Bewegung ganz langsam erfolgt:

$$\int_0^{\alpha} \gamma (\mu - e\mathfrak{B}) \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \gamma (\mu - \mathfrak{B}) \alpha^2.$$

Hierzu bemerkt der genannte Autor Folgendes: Ebenso groß würde auch die zu einer rascher vor sich gehenden Ablenkung eines Schiffes erforderliche Wirkungsgröße sein, wenn das Schiff die Form eines halben Cylinders hätte, dessen Achse durch den Schwerpunkt des Schiffes ginge, weil die Drehung eines solchen Schiffes um die durch seinen Schwerpunkt gehende Längsachse keine Bewegung in dem das Schiff umgebenden Wasser verursachen würde. Allein die Schiffe und insbesondere die Dampfschiffe haben Formen, die von jenen eines halben Cylinders sehr bedeutend abweichen; insbesondere gilt dies von den Endtheilen, weniger von dem mittleren Theile. Eine rasche Drehung des Schiffes um eine durch den Schwerpunkt gehende Längsachse setzt daher das das Schiff umgebende Wasser in Bewegung, wozu eine gewisse Wirkungsgröße =  $W$  erforderlich ist.

Die totale Wirkung, welche erforderlich wird, um ein Schiff um einen Winkel  $\alpha$  abzulenken und ihm gleichzeitig eine gewisse Winkelgeschwindigkeit zu ertheilen, ist demnach:

$$\frac{1}{2} \gamma (\mu - \mathfrak{B}e) \alpha^2 + W.$$

Nach dem Betrage dieses Werthes ist die dynamische Stabilität eines Schiffes zu beurtheilen.

Nach diesen Erörterungen entwickelt Redtenbacher (in der angegebenen Quelle) einen Werth für  $W$  unter der Voraussetzung, daß der Schwerpunkt des ganzen Baues nur wenig über der Wasserfläche liegt.

Anmerkung 1. Die Ausdrücke V. und VI. hat zuerst Bouguer in seinem (1746 in Paris erschienenen) Werke „Traité du Navire“, Pg. 272, angegeben. Den Mangel derselben erkennt man leicht, da die Voraussetzung eines unendlich kleinen Neigungswinkels höchstens für Flußschiffe zulässig wäre.

Dennoch benutzt man diesen Ausdruck für gewöhnliche praktische Fälle seiner Einfachheit wegen und letzteres werde auch hier als Grund genommen, denselben zur betreffenden Berechnung des englischen Dampfschiffes Rainbow (§. 35) zu verwenden.

Zuerst erhält man, weil  $y$  vorstehender Formel durch  $\frac{By}{2000}$  ersetzt werden muß, ferner statt  $dz$  der Differenzwerth  $\Delta z = \frac{L}{20}$  eingeführt werden kann, nach VI:

$$E\bar{m} = \frac{B^3 \cdot L \Sigma (y^3)}{240\,000\,000\,000 \cdot \mathfrak{B}}.$$

<sup>1)</sup> „Der Maschinenbau“. Dritter Band (1865), S. 145.

Zufolge der Tabelle, §. 35, ist aber

$$\Sigma y^3 = [20^3 + 336^3 \dots + 290^3 + 90^3] = 9683585556,$$

ferner war  $\mathfrak{B} = 0,53781 \cdot BLT$ , daher die Metacentrumhöhe:

$$Em = \frac{0,9683585556}{24 \cdot 0,53781} \cdot \frac{B^2}{T},$$

$$Em = 0,075023 \frac{B^2}{T}.$$

Endlich speciell für das Dampfschiff Rainbow, wo  $B = 24',75$ ,  $T = 6',00$  ist:

$$Em = 7,65938 \text{ Fuß englisch.}$$

Anmerkung 2. Zur völligen Beantwortung betreffender Stabilitätsfragen ist noch die Lage des Schwerpunktes  $E$  der verdrängten Flüssigkeit zu bestimmen nöthig.

I. Höhe =  $Z$  des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit über dem Kiel des Schiffes.

Unter Beibehaltung der Bezeichnung §. 34 und mit Zuziehung von §. 75 (S. 192) der Mechanik des Verfassers ergibt sich ohne Weiteres:

$$Z = \frac{1}{6} T \left\{ \frac{0 \cdot k_0 + 1 \cdot 4k_1 + 2 \cdot 2k_2 + 3 \cdot 4k_3 + 4 \cdot 2k_4 + 5 \cdot 4k_5 + 6k_6}{k_0 + 4k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 2k_4 + 4k_5 + k_6} \right\}.$$

Für die Zahlenwerthe in §. 35:

$$Z = \frac{T}{6} \cdot \frac{33,054733}{9,68034} = 0,56909 \cdot T.$$

Endlich für das Schiff Rainbow, wo  $T = 6,00$ :

$$Z = 3,41454 \text{ Fuß.}$$

II. Horizontalabstand =  $X$  des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit vom hintern Ende des Kieles.

Auf ganz gleichem Wege wie vorher, mit den Bezeichnungen von §. 34, ergibt sich sofort:

$$X = \frac{L}{20} \left\{ \frac{0r_0 + 1 \cdot 4 \cdot r_1 + 2 \cdot 5 \cdot r_2 \dots 19 \cdot 4 \cdot r_{19} + 20r_{20}}{r_0 + r_{20} + 2(r_2 + r_4 \dots r_{18}) + 4(r_1 r_3 \dots r_{19})} \right\}.$$

Nach §. 35 läßt sich aber der Nenner durch  $\frac{60v}{BLT}$  ersetzen, so wie ferner ist, wenn man die Tabellenwerthe §. 35 substituirt:

$$X = \frac{L}{1200} \frac{309,873552}{0,53781} = 0,480147 \cdot L.$$

Speciell für das Schiff Rainbow also, wo  $L = 182',5$ ,

$$X = 87,626 \text{ Fuß.}$$

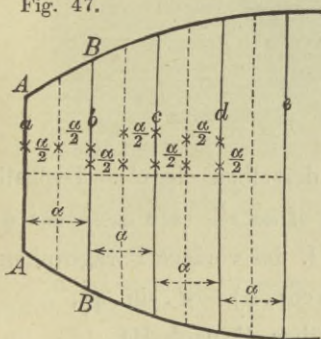
Anmerkung 3. Eine andere Formel zur Schwerpunktsbestimmung für Flächen vorher betrachteter (symmetrischer) Gestalt läßt sich wie folgt ableiten: Mit Bezug auf nebenstehende Figur 47 erhält man, den Inhalt der Fläche =  $F$  gesetzt,



$$FX = \left\{ \begin{array}{l} \frac{aa}{2} \cdot \frac{a}{4} \\ + \frac{ba}{2} \cdot \frac{3a}{4} + \frac{ba}{2} \cdot \frac{5a}{4} \\ + \frac{ca}{2} \cdot \frac{7a}{4} + \frac{ca}{2} \cdot \frac{9a}{4} \\ + \frac{da}{2} \cdot \frac{11a}{4} + \frac{da}{2} \cdot \frac{13a}{4} \text{ etc., d. i.} \end{array} \right.$$

$$FX = \frac{a^2}{4} \left( \frac{a}{2} + 4b + 8c + 12d \dots \right).$$

Fig. 47.



Eine noch andere von Bouguer in dessen Werke „de la mâture des vaisaux“, p. 126, Paris 1727) angegebene Regel erhält man folgendermaßen:

Jede der von zwei parallelen Geraden  $AA, BB$  etc. eingeschlossenen Flächen wird in ein Rechteck und in zwei congruente Dreiecke zerlegt, z. B. Fläche  $ABBA$  in das Rechteck vom Inhalte  $= a\alpha$  und in die beiden Dreiecke vom Inhalte  $\frac{b-a}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}$  etc., alsdann ergibt sich leicht:

$$F \cdot X = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2}{6} (a + 2b), \\ \frac{a^2}{6} (4b + 5c), \\ \frac{a^2}{6} (7c + 8d), \\ \frac{a^2}{6} (10d + 11e), \\ \frac{a^2}{6} (13e + 14f) \text{ etc., d. i.} \end{array} \right.$$

$$F \cdot X = a^2 \left( \frac{a}{6} + b + 2c + 3d + 4e + \frac{14}{6}f \right).$$

Beide Formeln stehen an Genauigkeit denen nach, welche aus der Simpson'schen Regel abgeleitet wurden.

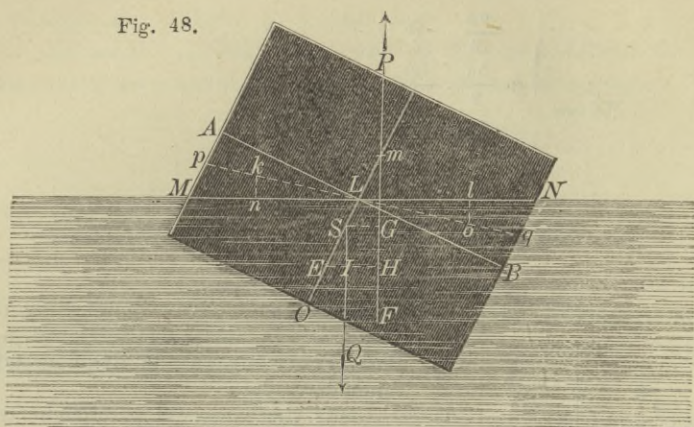
§. 38.

Für die Anwendung der vorstehenden allgemeinen Ausdrücke mögen hier einige specielle Aufgaben folgen.

Aufgabe 1. Das Schiff, Fig. 48, habe lauter rechteckige Querschnitte, und gegeben sei das Gesamtgewicht  $Q$ , das Displacement  $AOB = MON = V$ , die Breite  $AB = t$ , der Abstand der beiden Schwerpunkte  $S$  und  $E = d$  und der Winkel, um welchen das Schiff geneigt werden soll, d. i.  $\angle OSQ = \varphi$ . Die Länge des Schiffes sei der Einheit gleich.

Auflösung. Der Gestalt der Seiten nach ist hier anzunehmen, daß der Querschnittspunkt  $L$  der beiden Schwimmemebenen

Fig. 48.



$AB$  und  $MN$  im Halbirungspunkte derselben liegt<sup>1)</sup>. Deßhalb ergibt sich  $v = BLN = \frac{t^2 \operatorname{tg} \varphi}{8}$ ,  $b = nl = \frac{t}{3} (\sec \varphi + \cos \varphi)$  und somit das Stabilitätsmoment, nach I. des vorigen Paragraphen:

$$(1) \quad M = Q \left\{ \frac{t^2 \operatorname{tg} \cdot \varphi}{24V} (\sec \cdot \varphi + \cos \cdot \varphi) - d \cdot \sin \cdot \varphi \right\},$$

ferner die Höhe des Metacentrums  $m$  über  $E$ , nach III.

$$(2) \quad Em = \frac{t^3}{24} \frac{(\sec \cdot \varphi + \cos \cdot \varphi)}{V \cdot \cos \cdot \varphi}.$$

Ist für einen besonderen Fall  $t = AB = 100$ ,  $d = 13$ ,  $V = 3600$ ,  $Q = 1000$  Tonnen<sup>2)</sup>, so erhält man aus (1)  $M = 2841,7$  Tonnen. In der Entfernung = 50, in der Mastebene von der Drehungsachse, kann daher eine Kraft, (z. B. der Wind) von  $\frac{2841,7}{50} = 56,8$  Tonnen wirken, und gegen die aufrechte Stellung eine Neigung von  $15^\circ$  veranlassen, ohne daß das Schiff umschlägt, vielmehr wird dasselbe, wenn gedachte Kraft zu wirken aufhört, nach einigen Schwingungen in die erste, aufrechte Stellung von selbst zurückkehren.

Das Metacentrum liegt dabei nach (2) über  $E$  in der Höhe  $Em = 23,9$ .

<sup>1)</sup> Zieht man durch die Schwerpunkte  $k$  und  $o$  der Dreiecke  $AML$  und  $LBN$  die Grade  $pq$ , so erhält man  $NB = \frac{t \cdot \operatorname{tg} \cdot \varphi}{2}$ , folglich  $qB = \frac{t \cdot \operatorname{tg} \cdot \varphi}{4}$  mit-

hin  $Lq = \frac{t \sqrt{4 + \operatorname{tg} \cdot \varphi^2}}{4}$ . Ferner verhält sich  $Lq : Nq = \sin \cdot LNq : \sin \cdot NLq$ ,

daher  $\sin \cdot NLq = \frac{\sin \cdot \varphi}{\sqrt{4 + \operatorname{tg} \cdot \varphi^2}}$  und  $\cos^2 \cdot (NLq) = \frac{2 + \sec \cdot \varphi^2 + \cos \cdot \varphi^2}{4 + \operatorname{tg} \cdot \varphi^2}$

oder, weil  $2 \sec \cdot \varphi \cos \cdot \varphi = 2$  ist,  $\cos^2 \cdot (NLq) = \frac{(\sec \cdot \varphi + \cos \cdot \varphi)^2}{4 + \operatorname{tg} \cdot \varphi^2}$  d. i.

$\cos \cdot NLq = \frac{\sec \cdot \varphi + \cos \cdot \varphi}{\sqrt{4 + \operatorname{tg} \cdot \varphi^2}}$  da nun  $Ll = Lo \cdot \cos \cdot NLq = \frac{2}{3} Lq \cdot \cos \cdot NLq$ ,

so folgt  $Ll = \frac{t}{6} (\sec \cdot \varphi + \cos \cdot \varphi)$  und hieraus endlich  $b = nl = 2 Ll$ , wie oben angegeben.

<sup>2)</sup> Eine englische Tonne = 1051,649 Kilogramm = 2240  $\text{℔}$  engl.; eine französische Tonne = 1000 Kilogramm.

Aufgabe 2. Die Querschnitte des Schiffes bilden lauter Trapeze  $ABCD$ , Fig. 49. Gegeben sei die Breite in der Schwimmbene beim aufrechten Stande  $AB = a$ , ferner  $CD = c$ , die Eintauchtiefe  $KO = h$ , so wie der Neigungswinkel  $OSQ = \varphi$ .

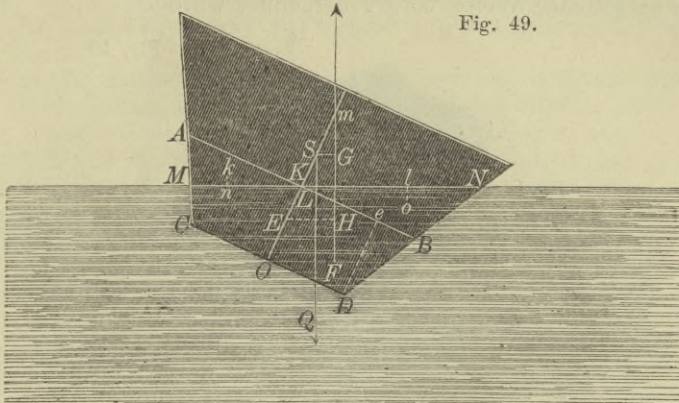


Fig. 49.

Auflösung. Vorerst ist die Lage des Punktes  $L$  anzugeben, durch welchen die Durchschnittslinie der ersten Schwimmbene  $AB$  mit der neuen  $MN$  geht, welcher Punkt hier (wegen der Gestalt der Seiten  $AM$  und  $BN$ ) nicht im Halbierungspunkte von  $AB$  mit  $MN$  liegen kann. Wie unten in der Note gezeigt ist<sup>1)</sup>, kann aber gedachte Bestimmung auf höchst einfachem geometrischen Wege geschehen, worauf also die Größe  $v$  der allgemeinen Formeln, ferner die Schwerpunkte  $k$  und  $o$  so wie  $ln = b$  zu finden sind. Eben so leicht kann mit Hülfe bekannter Sätze der Geostatik die Entfernung  $= d$  der beiden Schwerpunkte  $E$  und  $S$  berechnet werden<sup>2)</sup>, worauf, weil auch  $V = Q$  bestimmt werden können, die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist.

§. 39.

Es bleibt nunmehr noch übrig, zu zeigen, wie das Stabilitätsmoment für den Fall bestimmt werden kann, wenn alle Querschnitte des Schiffes (merklich) verschieden von einander sind.

<sup>1)</sup> Da  $\triangle ALM = \triangle BLN$  sein muß, so folgt  $BL \times LN = AL \times ML$ , und wenn vorerst  $LB = x$  gesetzt wird (1)  $x \cdot LN = (a - x) ML$ . Zur Bestimmung von  $LN$  und  $LM$ , werde von  $D$  auf  $AB$  die Normale  $De$  gefällt,  $\angle DBe$  mit  $\psi$  und  $\angle BNL$  mit  $\chi$  bezeichnet. Sodann ist  $Be = \frac{a-c}{2}$ ,  $\text{tg} \cdot \psi = \frac{h}{Be}$  und  $\chi = \psi - \varphi$ , folglich wegen  $BL : LN = \sin \cdot \chi : \sin \cdot \psi$ ,  $LN = \frac{x \sin \cdot \psi}{\sin \cdot \chi}$ , sowie  $ML = \frac{(a-x) \sin \cdot \psi}{\sin \cdot (\varphi + \psi)}$ . Durch Substitution letzterer beiden Werthe in (1) wird aber  $x$  und somit die Lage des Punktes  $L$  gefunden.

<sup>2)</sup> Ueber eine praktische Bestimmung von  $ES = d$  sehe man den Anhang zu diesem Buche unter Nr. 1.

Hierzu nehmen wir vorerst an, daß die Längensachse des Schiffes in entsprechende Theile getheilt ist, durch letztere rechtwinklig zur genannten Achse Verticalebenen gelegt sind und Form und Inhalt der betreffenden Querschnittsflächen bekannt ist; ferner das Deplacement in gleicher Weise vorher berechnet wurde.

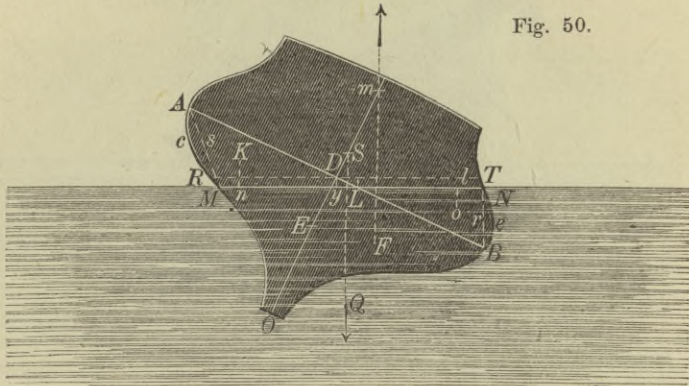


Fig. 50.

Fig. 50 stelle irgend einen der gedachten Querschnitte (z. B. den größten) dar, wobei  $AB$  die Schwimfebene bei aufrechter,  $MN$  die bei geneigter Lage des Schiffes bezeichnen mag. Vorerst ist hier zu bemerken, daß der Punkt  $L$ , in welchem sich letztgenannte Ebenen schneiden, nicht auf die Weise bestimmt werden kann, wie solches in der zweiten Aufgabe des vorigen Paragraphen geschah, dadurch nämlich, daß in irgend einem einzelnen Querschnitte Fläche  $MLA$  der Fläche  $BLN$  gleich angenommen oder gemacht wurde, indem nach gegenwärtiger Voraussetzung das in das Wasser und aus dem Wasser getretene Volumen nicht den respectiven Flächen selbst proportional ist, wie solches bei durchaus ähnlich gleichen Figuren der Fall war. Wie verschieden aber auch die gleichliegenden Flächen  $AML$  und  $BLN$  in den verschiedenen Querschnitten sein mögen, so wird doch immer noch das zwischen ihnen enthaltene Volumen in der ganzen Längenausdehnung des Schiffes, d. h. das respective aus und in das Wasser getretene Total-Volumen, gleich groß sein.

Auf eine für die Praxis hinreichend genaue Weise kann die Auflösung der fraglichen Aufgabe wie folgt geschehen. Man theile  $AB$  in zwei gleiche Theile und lege durch den Theilpunkt  $D$  eine Parallelebene  $RT$  zu  $MN$ . Der Abstand  $DL$  muß dann, wie leicht zu ermassen, in allen Querschnitten derselbe sein. Mit Zuziehung von Simpson's Regel berechne man ferner in jedem Querschnitte den Inhalt der Fläche  $BDTe$  und hieraus das zwischen den Ebenen  $BD$  und  $DT$  enthaltene Volumen; auf gleiche Weise ermittle man das zwischen den Ebenen  $AD$  und  $RD$  enthaltene Volumen  $ADRe$ . Ersteres Volumen werde mit  $p$ , letzteres mit  $q$  bezeichnet, außerdem mag  $p > q$  gefunden, auch der Inhalt  $= a$  der durch  $RT$  gelegten horizontalen Schnittfläche bekannt sein. Sodann ergibt sich

$DL = \frac{p - q}{a \sin. \varphi}$ ,<sup>1)</sup> wobei  $\varphi$  den Neigungswinkel des Schiffes bezeichnet. Ist aber  $L$  bekannt, so kann man für jeden Querschnitt die Fläche  $LBN$ , mithin das ganze eingetauchte Volumen (was hierbei annähernd dem aus dem Wasser getretenen Volumen gleich sein wird) also überhaupt die Größe  $v$  der allgemeinen Formeln berechnen.

Um die zweite Größe  $nl = b$  zu erhalten, bestimme man in allen Querschnitten die statischen Momente der Flächen  $BrNe$  und  $BLN$ , bezogen auf eine durch  $L$  gelegte Verticalebene, addire solche sämmtlich und dividire die Summe durch  $v$ , so giebt der Quotient die Entfernung  $lL$ ; auf gleiche Weise verfahre man, um  $Ln$  aufzufinden, wonach sodann  $ln = Ln + lL$  bekannt ist.

Die Lage des Schwerpunktes  $S$  hängt sowohl von der Construction als Ausrüstung und Ladung des Schiffes ab, welche Umstände fast immer die Bestimmung der Lage desselben, sowie weiter die Größe  $ES = e$  zulassen. Als Annäherungswerth kann man zuweilen  $ES = \frac{1}{8}$  der größten Breite des Schiffes, in der Schwimmebene gemessen, annehmen.

Specielle Aufgaben, namentlich Zahlenbeispiele für vorstehende Fälle hier aufzuführen, gestattet der Raum nicht, weßhalb wir auf ausführlichere Werke verweisen müssen<sup>2)</sup>.

## §. 40.

**Bestimmung der specifischen Gewichte fester und nicht zusammen-drückbar flüssiger Körper.**

Bezeichnet  $s$  das specifische Gewicht eines beliebigen Körpers,  $P$  dessen absolutes Gewicht und  $p$  das absolute Gewicht eines Wasserkörpers von gleichem Volumen, so erhält man unmittelbar nach §. 28

$$(1) \quad s = \frac{P}{p}.$$

Bezeichnet ferner  $\gamma$  die Dichte oder das Gewicht einer Cubikeinheit Wasser und  $\mathfrak{B}$  das vorausgesetzte gleiche Volumen, so ist  $p = \gamma\mathfrak{B}$ , also auch

$$(2) \quad s = \frac{P}{\gamma\mathfrak{B}}, \text{ so wie}$$

<sup>1)</sup> Es sei  $fl. BLNe = fl. ALMc = e$ ,  $fl. NLDT = m$ ,  $fl. MLDR = n$ , so wird man setzen können  $BDTe = e + m$ ,  $ADR = e - n$ , folglich die Differenz beider Letzteren, d. i.  $MNTR = m + n = u$ . Ist  $Dy$  der Abstand der Parallelen  $MN$  und  $RT$ , so folgt auch  $u = MN \times Dy = MN \times DL \sin. \varphi$ , mithin  $DL = \frac{u}{MN \cdot \sin. \varphi}$ , woraus der obige Ausdruck leicht abgeleitet werden kann.

<sup>2)</sup> Atwood, A Disquisition on the Stability of Ships; in den Phil. Transact. vom Jahre 1798, p. 287. Scott Russel, The modern system of naval architecture. London 1865. 3 Vol. in gr. Fol. Rankine, Shipbuilding, theoretical and practical. London 1866.

(3)  $P = \gamma s \mathfrak{B}$ , oder, wenn  $\Delta$  die Dichte des Körpers  $P$  ausdrückt.  
 (4)  $P = \Delta \cdot \mathfrak{B}$ . Haben sodann für irgend einen anderen Körper die Größen  $P'$ ,  $p'$ ,  $s'$ ,  $\mathfrak{B}'$  dieselbe Bedeutung, so erhält man folgende Proportionen:

$$s : s' = \frac{P}{p} : \frac{P'}{p'} = \frac{P}{\mathfrak{B}} : \frac{P'}{\mathfrak{B}'} \text{ etc., und hieraus}$$

$$\text{für } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}',$$

$$(5) \quad s : s' = P : P',$$

$$\text{für } P = P',$$

$$(6) \quad s : s' = \mathfrak{B} : \mathfrak{B}' \text{ etc.}$$

Gleichungen und Proportionen, welche sich leicht in Worten ausdrücken lassen.

Zusatz 1. Die Bestimmung specifischer Gewichte fester und nicht zusammendrückbar flüssiger Körper, unter Anwendung der Formeln des vorigen Paragraphen, macht meistentheils, zur Herleitung der dort vorkommenden Größen, verschiedene Hilfsmittel nothwendig, wovon die hauptsächlichsten die hydrostatische Waage, Glasgefäße (Flaschen) mit eingeschliffenem Stöpsel und die sogenannten Senkwaagen (Aräometer) sind.

Die hydrostatische Waage ist nichts anderes als eine doppelarmige gleicharmige Waage von großer Genauigkeit und Empfindlichkeit, die so eingerichtet ist, daß man damit Körper unter Wasser abwägen kann. Zu diesem Zwecke ist unter einer der Schalen ein Häkchen angebracht, woran ein feiner Faden (Draht, Haar) befestigt ist, an welchem der betreffende Körper aufgehängt werden kann.

A. Ist sodann der Körper, dessen specifisches Gewicht bestimmt werden soll, ein fester im Wasser unauflöslicher und zugleich specifisch schwerer als letzteres, so ermittelt man vorerst sein absolutes Gewicht  $= P$  in der Luft, sodann am Faden aufgehängt, sein absolutes Gewicht  $= q$  im Wasser, wonach zufolge §. 28 das Gewicht des gleichgroßen Wasservolumens  $p = P - q$  und nach (1) dieses Paragraphen das specifische Gewicht erhalten wird zu

$$s = \frac{P}{P - q}.$$

B. Ist der feste Körper specifisch leichter als Wasser, so hat man ihn mit einem anderen Körper mechanisch derartig zu verbinden, daß beide vereint vollkommen ins Wasser tauchen. Das Weitere ergibt sich aus Folgendem.

Das absolute Gewicht des specifisch schwereren Körpers sei  $= P$ , das des leichteren  $= Q$ ; im Wasser wiege ersterer  $= q$ , die Verbindung beider  $= W$ . Sodann ist für den ersten Körper der Auftrieb  $= P - q$ , für die Verbindung  $P + Q - W$ , folglich für den leichteren Körper allein  $(P + Q - W) - (P - q) = Q + q - W$ , mithin

$$s = \frac{Q}{Q + q - W}.$$

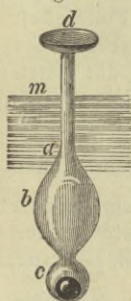
C. Vermag der Körper Wasser in seinen Poren aufzunehmen, so wiegt man ihn zuerst in trockenem Zustande in der Luft, läßt ihn sodann ganz mit Wasser ansaugen, wiegt ihn nochmals, erhält hierdurch das

Gewicht des aufgenommenen Wassers, bestimmt endlich seinen Gewichtsverlust im Wasser etc.

D. Löst sich der Körper im Wasser auf, so wendet man eine Flüssigkeit an, in welcher er unauflöslich und deren spec. Gewicht bekannt ist. Durch Ermittlung seines Gewichtsverlustes in gedachter Flüssigkeit und nachheriger Anwendung der Proportion (5) ergibt sich das spec. Gewicht.

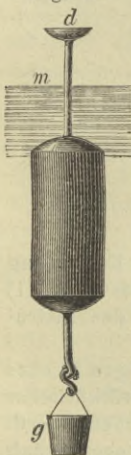
E. Ist das spec. Gewicht einer Flüssigkeit zu bestimmen, so taucht man einen geeigneten festen Körper einmal in diese, ein anderes Mal ins Wasser, worauf man ebenfalls unter Anwendung der Proportion (5) das gesuchte spec. Gewicht erhält. Obwohl die hydrostatische Waage streng genommen der genaueste und sicherste Apparat zur Bestimmung der spec. Gewichte, insbesondere fester Körper genannt werden muß, so verdienen doch einige andere mindestens hier der Erwähnung, was in nachstehenden Zusätzen geschehen soll<sup>1)</sup>.

Fig. 51.



Zusatz 2. Aräometer<sup>2)</sup> (Senkwaagen, Schwimmwaagen) sind frei schwimmende Körper von entsprechender Gestalt, durch deren Einsenkung in Flüssigkeiten sowohl das spec. Gewicht dieser, als auch fester Körper bestimmt werden kann. Ihr Constructions-Princip beruht entweder auf Proportion (5) oder (6) §. 40 und hiernach nennt man sie Gewichts-Aräometer oder Scalen- (Volumen-) Aräometer.

Fig. 52.



Will man mittelst dieser Aräometer nur das spec. Gewicht flüssiger Körper bestimmen, so kann man ihnen (nach Fahrenheit) im Allgemeinen die Gestalt von Fig. 51 geben. Dabei ist *ab* ein aus Glas oder Blech verfertigter, hohler, cylinder- oder birnförmiger Körper, der unterhalb eine mit Bleischrot oder Quecksilber gefüllte Kugel *c* trägt, oberhalb auf einem sehr dünnen Halse mit einem Schälchen *d* versehen ist, um Gewichte auflegen zu können. Am gedachten Halse ist ein Zeichen (Marke, Strich) *m* angebracht, bis zu welchem das Instrument beim Gebrauche stets einsinken muß.

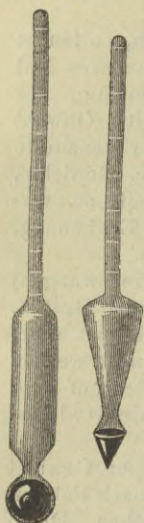
Soll dies Aräometer gleichzeitig auch für feste Körper brauchbar sein, so bringt man (nach Nicholsen) statt der Kugel *c* ein Eimerchen *g*, Fig. 52, an, welches zur Aufnahme des zu untersuchenden Körpers dient. Bemerktes Eimerchen läßt sich auch (nach Charles) durch ein Drahtkörbchen ersetzen, wobei sich weniger Luft, ohne gesehen zu werden, anhängen kann.

<sup>1)</sup> Ueber die Bestimmung des spec. Gewichtes der Flüssigkeiten mittelst der Waage nach einer neuen Methode sehe man: Mohr's „Lehrbuch der pharmaceutischen Technik“, und hieraus Pouillet-Müller, „Lehrbuch der Physik und Meteorologie“. Achte (1876) von Prof. Pfaunder besorgte Ausgabe, S. 123 ff. unter der Ueberschrift „Anwendung des Archimedischen Princips zur Bestimmung des spec. Gewichtes fester und flüssiger Körper“. Höchst beachtenswerth ist endlich noch der Abschnitt „Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper“ in Grashof's „Theoretischer Maschinenlehre“. Erster Band, S. 374, §. 68 u. f.

<sup>2)</sup> Von ἀραιός locker, dünn und μέτρον Maaß.

Zusatz 3. Denkt man sich bei dem Aräometer, Fig. 51, das Schälchen  $d$  hinweg, den Hals  $am$  verlängert und an diesem eine Scala angebracht, so erhält man die Form der gewöhnlichen Scalen-Aräometer, Fig. 53, die für die Praxis bei weitem wichtiger als die vorbeschriebenen sind.

Fig. 53.



Hierbei kann die Entwerfung der Scala mit Zuziehung folgender Rechnung erfolgen:

Es sei  $P$  das absolute Gewicht des Aräometers,  $v$  das Volumen, um welches dasselbe im Wasser einsinkt,  $\gamma$  das Gewicht der Cubikeinheit des letzteren, so ist zuerst (1)  $P = \gamma v$ . Senkt man das Instrument in eine Flüssigkeit vom spec. Gewichte  $s < 1$  und ist  $a$  der Querschnitt des Halses, Fig. 53,  $b$  die Einsenkungstiefe in die letztgedachte Flüssigkeit, so erhält man für's Gleichgewicht:  $P = \gamma sv + \gamma sab$  und wegen (1)  $P = Ps + \gamma sab$ , woraus (2)  $b = \frac{P}{\gamma a} \left( \frac{1-s}{s} \right)$  folgt. Der Querschnitt  $a$  kann sodann dadurch bestimmt werden, daß man das Aräometer wieder in Wasser einsenkt, ein Zulagegewicht  $p$  beifügt und hierbei die Einsenkungstiefe  $= c$  bemerkt, wonach  $p = \gamma ac$ , folglich  $b = \frac{cP}{p} \left( \frac{1-s}{s} \right)$  erhalten wird. Für den Fall, daß  $s > 1$ , findet sich auf gleichem Wege:  $b = \frac{cP}{p} \left( \frac{s-1}{s} \right)$ .

Endlich ergibt sich noch:

$$s = \frac{1}{1 + \frac{bp}{cP}}, \text{ wenn } s < 1$$

$$s = \frac{1}{1 - \frac{bp}{cP}}, \text{ wenn } s > 1.$$

Die Genauigkeit wird um so größer, je bedeutender die Entfernung eines Theilstriches vom andern ist, was zufolge des Werthes  $b$  in (1) einen kleinen Querschnitt  $a$ , d. h. einen sehr dünnen Hals des Instrumentes voraussetzt<sup>1)</sup>.

Zusatz 4. Bei der praktischen Bestimmung gegenwärtigen Buches dürfte es nicht unangemessen sein, der Aräometer mit willkürlicher Scala zu gedenken, obwohl dieselben keinen wissenschaftlichen Werth haben, da sie weder das specifische Gewicht, noch den Procentgehalt irgend einer Flüssigkeit angeben.

Die drei gebräuchlichsten dieser Aräometer sind zur Zeit das von Baumé, Cartier und Beck<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Weiteres über diese Gegenstände findet sich in folgenden Werken: Meißner „Aräometrie etc.“ Wien 1816. — Baumgartner „Aräometrie für Chemisten und Technologen“. Wien 1820. — Liebig, Handwörterbuch der reinen und angewandten Chemie. Bd. I, S. 474. — Kohlrausch, Praktische Regeln zu genaueren Bestimmungen des specifischen Gewichtes. Marburg 1856.

<sup>2)</sup> Nach dem Handbuche der Gewerbkunde von Karmarsch und Heeren, 2. Aufl., Bd. 1, S. 57.



Das Baumé'sche hat, je nachdem es für schwerere oder leichtere Flüssigkeiten bestimmt ist, ganz verschiedene Graduierung.

a) Für schwerere Flüssigkeiten bereitet man eine Auflösung von 15 Gewichtstheilen trockenem Kochsalz in 85 Theilen destillirtem Wasser, läßt das Instrument darin schwimmen und bezeichnet den Punkt, bis zu welchem es einsinkt, mit der Zahl 15; hierauf wird der Punkt, bis zu welchem es in reinem Wasser einsinkt, mit Null bezeichnet, der Abstand zwischen beiden Punkten in 15 gleiche Theile getheilt und dieselbe Theilung, soweit die Länge der Röhre gestattet, etwa bis zu 70 Graden noch weiter fortgesetzt. Die Null, dem specifischen Gewichte des Wassers entsprechend, bildet den oberen Anfang der Scala.

b) Für leichtere Flüssigkeiten löst man 1 Theil Kochsalz in 9 Theilen Wasser und bezeichnet den Punkt, bis zu welchem das Instrument in diese Lösung einsinkt, welcher Punkt am unteren Ende der Scala liegen muß, mit Null; sodann den Punkt, bis zu welchem es in reines Wasser einsinkt, mit 10; theilt den Zwischenraum in 10 gleiche Theile und trägt noch mehr solcher Theile bis zum oberen Ende der Scala.

Die Cartier'sche Scala ist durch eine willkürliche, noch dazu ganz unzweckmäßige Abänderung der Baumé'schen entstanden. Cartier vergrößerte die Grade ein wenig, so daß 15 seiner Grade = 16 Baumé'schen (für leichtere Flüssigkeit) wurden, ferner verrückte er die Scala in der Art, daß am Wasserpunkt  $10\frac{3}{4}$  zu stehen kam. Diese Scala würde ihrer unsinnigen Einrichtung wegen verdienen der Vergessenheit anheimzufallen, sie hat sich aber dennoch in Frankreich als Branntweinwaage sehr verbreitet.

Weit vernünftiger und zweckmäßiger ist die Scala von Beck in Bern, nach Bentely's Angaben construirt. Der Wasserpunkt, welcher ziemlich in der Mitte der Scala liegt, ist mit Null bezeichnet; ein zweiter Punkt, bis zu welchem das Instrument in einer Flüssigkeit von 0,85 specifischem Gewichte einsinkt, mit der Zahl 30. Der Zwischenraum beider Punkte wird in 30 gleiche Theile getheilt und gleich große Grade werden noch oberhalb und unterhalb aufgetragen. Die Scala gilt für die Normaltemperatur von  $+10^{\circ}$  R.

Folgende Tabelle giebt eine Zusammenstellung der Baumé'schen, Cartier'schen und Beck'schen Aräometer-Scalen, und der den Graden dieser Scalen entsprechenden specifischen Gewichte für Flüssigkeiten, welche leichter sind als Wasser:

Grade.	Baumé.	Cartier.	Beck.	Grade.	Baumé.	Cartier.	Beck.
0			1,0000	30	0,8788	0,8707	0,8500
5			0,9714	35	0,8530	0,8421	0,8292
10	1,0000		0,9444	40	0,8287	0,8153	0,8095
15	0,9666	0,9697	0,9189	45	0,8057		0,7907
20	0,9355	0,9343	0,8947	50	0,7839		0,7727
25	0,9063	0,9014	0,8717	60	0,7438		0,7391

## §. 41.

Vorstehendem Paragraphen werde hier eine tabellarische Zusammenstellung spec. Gewichte solcher Körper beigefügt, welche direct und indirect für die technische Mechanik von Wichtigkeit sind.

Sobald das Gegentheil nicht angegeben, ist überall eine mittlere Temperatur von 15 bis 20° C., ferner das specifische Gewicht des reinen oder destillirten Wassers = 1 vorausgesetzt.

I. Specifische Gewichte fester Körper<sup>1)</sup>.

Namen der Körper.	Specifische Gewichte.		Namen der Körper.	Specifische Gewichte.	
	Grenzen.	Mittelwerth.		Grenzen.	Mittelwerth.
Ahornholz, frisch . . . .	0,843 — 0,944	0,893	Gold, gehämmert . . . .	19,361 — 19,650	19,503
— lufttrocken . . . .	0,612 — 0,750	0,681	Granit . . . . .	2,50 — 3,063	2,781
Alabaster (körniger Gyps)	2,260 — 2,40	2,330	Grauwacke . . . . .	?	2,700
Aluminium . . . . .	2,56 — 2,67	2,615	Grauwackensandstein . . . .	?	2,660
Anhydrit . . . . .	2,80 — 5,00	2,900	Grünstein (Diabas) . . . .	2,770 — 3,080	2,925
Antimon . . . . .	6,656 — 6,860	6,758	Grünstein-Porphyr		
Apfelbaumholz, frisch . . .	0,960 — 1,137	1,048	(Aphanit) . . . . .	2,80 — 3,10	2,950
— lufttrock. . . . .	0,674 — 0,793	0,733	Hornblendeschiefer . . . .	2,909 — 3,153	3,031
Basalt . . . . .	2,415 — 3,30	2,857	Hornblendefels (-Gestein)	2,90 — 3,10	3,000
Birke, frisch . . . . .	0,851 — 0,987	0,919	Jakarandaholz, lufttr. . . .	?	0,908
— lufttrocken . . . . .	0,591 — 0,738	0,664	Kalkmörtel . . . . .	1,638 — 1,859	1,748
Birnbaum, lufttrocken . . .	0,646 — 0,732	0,689	Kalkstein . . . . .	2,0 — 2,720	2,360
Blei . . . . .	11,207 — 11,445	11,326	Kalk, gebrannt . . . . .	2,30 — 3,179	2,739
Buchenholz (Rothbuche), frisch . . . . .	0,852 — 1,109	0,980	Keupersandstein (dichter)	2,580 — 2,60	2,590
Buchenholz (Rothbuche), lufttrocken . . . . .	0,590 — 0,852	0,721	Kieselkalkstein . . . . .	2,60 — 2,80	2,70
Buchsbaumholz, lufttr. . . .	0,912 — 1,103	0,971	Kieselschiefer . . . . .	2,50 — 2,80	2,65
Chloritschiefer . . . . .	2,70 — 3,0	2,850	Kirschbaumholz, frisch . . .	?	0,982
Dachschiefer . . . . .	2,670 — 3,50	3,085	— lufttr. . . . .	0,577 — 0,715	0,646
Diorit (Grünstein) . . . . .	2,790 — 3,0	2,895	Klingstein (Phonolith) . . .	2,512 — 2,700	2,608
Dolerit . . . . .	2,790 — 2,930	2,825	Kreide (weiße) . . . . .	?	2,640
Dolomit (körniger) . . . . .	2,80 — 3,0	2,900	Kork . . . . .	?	0,240
Ebenholz (schwarz), lufttr.	1,187 — 1,331	1,259	Kupfer . . . . .	8,580 — 8,950	8,765
Eichenholz, frisch . . . . .	0,885 — 1,062	0,973	Lava . . . . .	2,348 — 2,880	2,614
— lufttrocken . . . . .	0,650 — 0,920	0,785	Lärchenholz, frisch . . . .	0,694 — 0,924	0,809
Eis, bei 0° . . . . .	—	0,926	— lufttrocken . . . . .	0,473 — 0,565	0,519
Eisen, Stabeisen . . . . .	7,352 — 7,912	7,600	Leuzitfels . . . . .	?	2,80
— Gußeisen. (weiß)	7,056 — 7,889	7,500	Lindenholz, frisch . . . . .	0,710 — 0,878	0,799
— — (grau)	6,635 — 7,572	7,100	— lufttrocken . . . . .	0,439 — 0,604	0,522
— — (halbirt)	6,631 — 7,430	7,100	Mahagoni, lufttrocken . . .	0,563 — 1,063	0,813
Erde, Gartenerde . . . . .	1,630 — 2,338	1,984	Marmor (körniger Kalk) . . .	2,516 — 2,862	2,689
Erlenholz, frisch . . . . .	0,809 — 0,994	0,901	Messing . . . . .	7,820 — 8,730	?
— lufttrocken . . . . .	0,428 — 0,680	0,551	Melaphyr (Angitporphyr)	2,770 — 3,10	2,938
Eschenholz, frisch . . . . .	0,778 — 0,927	0,852	Menschlicher Körper . . . .		1,111
— lufttrocken . . . . .	0,540 — 0,845	0,692	Mühlsteinquarz, porös . . . .	1,242 — 1,285	1,263
Feldstein-Porphyr . . . . .	2,430 — 3,389	2,909	— dicht . . . . .	2,485 — 2,613	2,549
Fichtenholz (Rothtanne), frisch . . . . .	0,794 — 0,993	0,893	Nageluhne . . . . .	?	2,090
Fichtenholz (Rothtanne), lufttrocken . . . . .	0,376 — 0,481	0,428	Neusilber (Argentan) . . . .	8,40 — 8,70	8,50
Föhrenholz (Kiefer) frisch	0,811 — 1,005	0,908	Pappelholz, frisch . . . . .	0,785 — 0,956	0,857
— — lufttr. . . . .	0,463 — 0,763	0,613	— lufttrocken . . . . .	0,353 — 0,591	0,472
Gabbro . . . . .	2,880 — 3,30	3,090	Pechstein . . . . .	2,049 — 2,669	2,359
Glas . . . . .	2,370 — 3,70	3,305	Pflaumenbaumholz, luft- trocken . . . . .	0,854 — 0,872	0,863
Glimmerschiefer . . . . .	2,60 — 3,0	2,800	Platin . . . . .	21,00 — 21,74	21,37
Gneiß (Gneus) . . . . .	2,50 — 2,90	2,700	Pockholz, lufttrocken . . . .	1,263 — 1,842	1,502
Gold, gegossen . . . . .	19,258 — 19,50	19,379	Porphyr . . . . .	2,70 — 2,80	2,750
			Quarzfels (körn. Quarz- gestein) . . . . .	2,560 — 2,750	2,655
			Roßkastanienholz . . . . .	0,551 — 0,610	0,580

1) Die meisten dieser Angaben sind entweder Karmarsch mechanischer Technologie entnommen, oder durch die besondere Güte dieses Herrn für gegenwärtige Zwecke mitgetheilt worden.

Namen der Körper.	Specifiche Gewichte.		Namen der Körper.	Specifiche Gewichte.	
	Grenzen.	Mittelwerth.		Grenzen.	Mittelwerth.
Sand, fein und trocken	1,399 — 1,638	1,518	Tannenholz, lufttrocken .	0,435 — 0,746	0,60
— feucht . . . . .	1,90 — 1,945	1,922	Talkschiefer . . . . .	?	2,74
Sandstein . . . . .	1,900 — 2,699	2,30	Thonschiefer . . . . .	2,60 — 3,50	3,05
Serpentinfels . . . . .	2,30 — 2,894	2,597	Tüpfelthon . . . . .	1,80 — 2,00	1,90
Speckstein . . . . .	2,614 — 2,880	2,747	Tombak . . . . .	8,515 — 9,00	?
Silber . . . . .	10,50 — 10,620	10,560	Trachit (Trapporphyr) . .	2,40 — 2,60	2,50
Stahl . . . . .	7,40 — 8,10	7,70	Ulmenbaumholz, frisch . .	0,878 — 0,941	0,909
— cementirt . . . . .	7,580 — 7,798	7,689	— luftfr. . . . .	0,568 — 0,671	0,619
— gefrischt . . . . .	7,50 — 7,782	7,641	Weidenholz, frisch . . . .	0,715 — 0,855	0,785
— raffinirt . . . . .	7,763 — 7,825	7,764	Weißbuchenholz, frisch . .	0,939 — 1,137	1,088
— gegossen . . . . .	7,826 — 8,092	7,959	Ziegelstein, Mauerstein . .	1,870 — 2,0	1,935
Steinkohlen . . . . .	1,210 — 1,331	1,270	— Klinker . . . . .	1,520 — 2,290	1,905
Syenit . . . . .	2,50 — 3,0	2,750	Zink . . . . .	6,850 — 7,30	7,075
Tannenholz (weiß) frisch	?	0,824	Zinn . . . . .	7,050 — 7,580	7,315

Specifiche Gewichte fester Körper mit Rücksicht auf die leeren Zwischenräume derselben.

A. Getreidearten, Sämereien und Hülsenfrüchte. <sup>1)</sup>			B. Brennmaterialien. <sup>2)</sup>		
Getreidearten etc.	Grenzen.	Mittelwerth.	Brennmaterialien	Grenzen.	Mittelwerth.
Weizen . . . . .	0,707 — 0,809	0,785	Steinkohlen, englische .	0,704 — 0,797	0,750
Roggen . . . . .	0,683 — 0,788	0,736	Cokes . . . . .	0,350 — 0,500	?
Gerste . . . . .	0,618 — 0,697	0,657	Torfziegel <sup>3)</sup> , lufttrocken		
Dinkel (Spaltgerste) . . .	0,406 — 0,468	0,418	weißer oder gelber . .	0,116 — 0,250	0,183
Hafer . . . . .	0,430 — 0,537	0,483	brauner und schwarzer	0,240 — 0,600	0,420
Hirse . . . . .	0,616 — 0,695	0,655	Erdtorf . . . . .	0,562 — 0,905	0,733
Mohnsamen . . . . .	0,568 — 0,687	0,627	Pechtorf . . . . .	0,639 — 1,031	0,835
Leinsamen . . . . .	0,637 — 0,758	0,707	Torfcoke <sup>4)</sup> . . . . .	0,250 — 0,300	0,275
Hanfsamen . . . . .	0,507 — 0,565	0,536	Buchenholz <sup>5)</sup> (Rothbuche)		
Kleesamen . . . . .	0,757 — 0,854	0,805	in großen Scheiten . .	—	0,400
Weißer Bohnen . . . . .	0,841 — 0,880	0,860	Buchenholz (Rothbuche)		
Pferde-Bohnen . . . . .	0,793 — 0,838	0,815	sehr trocken, in Knüppel		
Erbsen . . . . .	0,827 — 0,879	0,853	geschnitten, sorgfältig		
Wicken . . . . .	0,798 — 0,881	0,839	aufgesetzt . . . . .	—	0,440
Kartoffeln, eben gefüllt			Eichenholz, Angabe der		
gemessen . . . . .	?	0,611	Pariser Holzändler . .	0,431 — 0,584	0,501
gehäuft . . . . .	?	0,833	Eichenholz, 80 Jahre alt,		
Weizenmehl, regelmäßig			in Scheiten von 1m		
eingemessen . . . . .		0,379	Länge und 0m,05 —		
— zusammen-			0m,15 Dicke, gewöhn-		
gerüttelt . . . . .		0,640	lich geklaffert . . . . .	—	0,525
			Eichenholz, geößt . . . .	—	0,416
			Fichtenholz . . . . .	0,300 — 0,340	0,320
			Tannenholz . . . . .	0,303 — 0,380	0,341
			Holzkohle, hartes Holz <sup>6)</sup>	0,180 — 0,250	0,215
			— weiches Holz . . . . .	0,130 — 0,177	0,153

1) Nach Hofrath Wild durch Noback's Taschenbuch der Maass- und Gewichts-Verhältnisse. Seite XXXV. Leipzig, 1851.  
 2) Notizblatt des hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins. Bd. II. S. 357.  
 3) Nach Karmarsch. Mittheilungen des Gewerbe-Vereins für das Königreich Hannover 1840. Liefer. 21. S. 63.  
 4) Richard, Aide-Mémoire. Paris 1848. Première Partie, p. 377.  
 5) Ebendasselbst p. 365.  
 6) Ebendasselbst p. 365.

C. Baumaterialien. <sup>1)</sup>					
Baumaterialien.	Mittelwerthe.		Bemerkungen.		
	Grauwacke. Steinschlag von 4 Cubikzoll Größe im Durchschnitt . . . dicht aufgerüthet . . . . .	1,387 1,466		Ohne Zwischenräume, für die compacte Gesteinmasse, das specifische Gewicht: = 2,701.	
Keupersandstein. Steinschlag von 4 Cubikzoll Größe durchschnittlich . . . dicht aufgerüthet . . . . .	1,287 1,896		Ohne Zwischenräume = 2,584.		
Sand. gegraben und feucht . . . . . gelagert, im natürlichen Zustande	1,174—1,306 1,503—1,879		Die Zwischenräume des Sandes werden angegeben: a, von Räder zu 0,302—0,384 resp. für feinen und groben Sand, b, von Wolfram 0,388 der ganzen Masse. Das Raumverhältniß zwischen gewach- senen und gegrabenen Boden, aus Lehmsand, Grand und reinem Sand be- stehend, fand Bockelberg wie 1 zu 1,281.		
Specifische Gewichte mit Wasser vollkommen gesättigter Hölzer. <sup>2)</sup>					
Holzarten.	Specifisches Gewicht.		Zunahme in Procenten		
	trocken	naß	des Volumens	des absoluten Gewichts	des specifischen Gewichts
Laubholz . . . . .	0,659	1,110	8,8	83	69
Nadelholz . . . . .	0,453	0,839	5,5	102	91
Eichenholz . . . . .	0,680	1,125	6,8	77	66
Rothbuchenholz . . . . .	0,700	1,119	10,9	70	60
Pappel . . . . .	0,553	1,021	8,5	214	189

II. Specifische Gewichte tropfbarflüssiger Körper.<sup>3)</sup>

Alkohol, absoluter, bei 20° C.	0,792	Quecksilber, bei 0° gegen Wasser, bei 0° (nach Regnault) . . . . .	13,59593
Bier, Münchener Lagerbier .	1,915—1,017	Salzsoole, 26 $\frac{3}{4}$ (nach Karsten)	1,2046
Honig . . . . .	1,450	Salpetersäure, bei 12° R. .	1,522
Milch . . . . .	1,031	Salzsäure, bei 15° R. . . .	1,192
Oele; fette Oele, als Baumöl, bei 12° R. . . . .	0,9176—0,9190	Schwefelsäure, engl., bei 15 $\frac{1}{2}$ ° R. . . . .	1,850
Olivöl . . . . .	0,9153	Schwefelsäure, nordhäuser .	1,896
Leinöl (bei 12° R.) . . . .	0,9347—0,9400	Schwefelsäure, wasserfreie, bei 20° R. . . . .	1,970
Mandelöl (bei 15° R.) . . .	0,9180	Seewasser (Meerwasser) . .	1,020—1,029
Mohnöl (bei 15° R.) . . . .	0,9243—0,9250		
Rüböl (bei 15° R.) . . . . .	0,9130		
Hanföl . . . . .	0,9276		

1) Versuchsergebnisse des Herrn Geheimen Regierungs- und Baurathes Bockelberg in Hannover. Bei Steinschlag von 1,5 Cubikzoll Größe im Durchschnitt, betrug der Rauminhalt des Steinmaterials 0,5, während der der leeren Zwischenräume 0,5, also ebenfalls die Hälfte des ganzen Volumens wie oben ausmachte.

2) Nach Weisbach in den polytechnischen Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Bd. 2, S. 50. — Ferner empfehlenswerth ist eine betreffende Arbeit des Oberbauath Laves über das Quellen des Holzes in den Mittheilungen des hannoverschen Gewerbe-Vereins, Jahrgang 1857. Lief. 12. S. 283.

3) Vorzüglich nach Noback a. a. O. Seite XXXVII.

Spiritus :		Wein :	
absoluter Alkohol $12\frac{3}{4}^{\circ}$ R	0,7946	Hochheimer . . . . .	0,9890
von $90^{\circ}$ Tralles . . . . .	0,8338	Rheinwein, überh. . . . .	0,9925—1,0020
— $70^{\circ}$ — . . . . .	0,8900	Madeira . . . . .	1,0380
— $50^{\circ}$ — . . . . .	0,9343	Malaga . . . . .	1,0150
Wein :		Mosel . . . . .	0,9160
Bordeauxwein . . . . .	0,9940	Portwein . . . . .	0,9970
Burgunder . . . . .	0,9915	Weißer franz. Wein (Graves)	0,9806
Champagner . . . . .	0,9620	Franzbranntwein . . . . .	0,9345

## Zusatz-Capitel.

Ausdehnung der Körper durch die Wärme.<sup>1)</sup>

## §. 42.

Der Erfahrung nach dehnen sich alle Körper beim Erwärmen aus und ziehen sich beim Erkalten zusammen<sup>1)</sup>. Die Größe der Ausdehnung und Zusammenziehung, für eine bestimmte Temperatur, ist dabei hauptsächlich von dem Aggregatzustande der Körper abhängig, nämlich kleiner bei festen als bei wasserförmigen, und bei luftförmigen größer als bei jenen beiden. Dehnen sich aber feste und flüssige Körper durch die Wärme nicht nach einerlei Verhältniß aus, so folgt zunächst in Bezug auf die Sätze der letzteren Paragraphen des vorigen Capitels, daß dieselben auch bei verschiedenen Temperaturen verschiedene spec. Gewichte haben und somit die früheren desfallsigen Bestimmungen eine entsprechende Correction erfahren müssen.

Hat man auch bei gewöhnlichen technischen Untersuchungen nicht gerade nöthig, in aller Strenge hierauf Rücksicht zu nehmen, indem daselbst die Annahme einer mittleren Temperatur gewöhnlich ausreicht, so eignet sich das nähere Eingehen auf diesen Gegenstand doch in so fern für uns, als wir dabei eine passende Veranlassung finden, andere für den Techniker wichtige Fragen in Betracht zu ziehen.

Wir handeln daher zuerst von der Ausdehnung der Körper im Allgemeinen und kommen sodann (gelegentlich) auf den Temperatureinfluß bei der Bestimmung spec. Gewichte zurück.

Auf der Ausdehnung der Körper durch die Wärme beruhen auch die gewöhnlichen Instrumente, Thermometer, welche man

<sup>1)</sup> Es ist von größter Wichtigkeit für den wissenschaftlich gebildeten Techniker, schon hier recht kräftig hervorzuheben, daß die Ansicht ein völlig überwundener Standpunkt genannt werden kann, daß die Wärme ein besonderer Stoff sei, welcher in den Körpern in größerer oder geringerer Menge vorhanden ist und hierdurch ihre höhere oder tiefere Temperatur bedingt werde. Vielmehr weiß man jetzt ganz sicher, daß Wärme in einer Bewegung der kleinsten Körper- und Aethertheilchen besteht und daß die Quantität der Wärme das Maaß der lebendigen Kraft dieser Bewegung ist. (Clausius „Die mech. Wärmetheorie“. Zweite Aufl., 1876, S. 22).

zum Messen der Temperatur verwendet, deren Einrichtung, Verfertigung u. s. w. jedoch hier als bekannt vorausgesetzt werden muß<sup>1)</sup>.

Zusatz. Um sehr hohe Grade von Wärme zu messen, wo Quecksilberthermometer nicht mehr zu brauchen sind, z. B. den Schmelzpunkt der Metalle, die Temperatur eines Porzellanofens, der Hochofen, Schornsteine etc., erhitzter Gase u. d. m., bedient man sich eigener Werkzeuge, welche Pyrometer genannt werden. Zur Zeit existirt noch kein Pyrometer, was zuverlässig und einfach genug ist, um praktischen Zwecken vollkommen zu genügen. Ueber ältere Pyrometer von Wedgwood, Guyton de Morveau, Daniell u. A. belehrt am besten der Artikel „Pyrometer“ in Gehler's physikalischem Wörterbuche, ferner auch Karmarsch in der „Einleitung zu seiner Geschichte der Technologie“. Ueber neue Pyrometer, insbesondere über das von Gauntlett, von Bock, von Oechsle, von Lamy, Siemens und Andern finden sich Abhandlungen in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1873, S. 544 und Jahrg. 1874, (Siemens' Pyrometer) S. 39. Endlich wird eine gute Uebersicht über neuere Pyrometer (Codazza, Regnault, Lamy etc.) geliefert in Ferrini's „Technologie der Wärme“, Deutsch von Schröder, Seite 18 bis mit 28. Jena 1878, bei Costenoble.

Wir beschränken uns hier auf die Angabe folgender Schmelzpunkte technisch wichtiger Metalle, die wir dem Lehrbuche der mechanisch-metallurgischen Technologie von Ledebur (Braunschweig 1877, S. 90) entnehmen:

	Schmelzpunkt.
Gußstahl . . . . .	1375 <sup>0</sup> Celsius.
Graues Roheisen . . . . .	1275    „
Weißes Roheisen . . . . .	1075    „
Kupfer . . . . .	1200    „
Silber . . . . .	1000    „
Gold . . . . .	1200    „
Zink . . . . .	415     „
Zinn . . . . .	233     „
Wismuth . . . . .	267     „
Blei . . . . .	326     „

### §. 43.

#### Ausdehnung fester Körper durch die Wärme.

Auch die Ausdehnung der Körper unter sich steht streng genommen in keinem constanten Verhältniß zu den Temperaturveränderungen, so daß sich z. B. Kupfer, Eisen, Platin, Glas von 0° bis 300° C. mehr als dreimal so stark ausdehnen, als solches von 0° bis 100° C. der Fall ist. Innerhalb der letztgedachten Grenzen ist indeß der Unterschied so gering, daß die Ausdehnung geradezu der Wärmezunahme proportional gesetzt werden kann.

<sup>1)</sup> Bezeichnet  $R$  eine beliebige Anzahl Grade nach Réaumur,  $C$  und  $F$  respective die correspondirenden nach Celsius und Fahrenheit, so ist

$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{9} (F - 32); \quad C = \frac{5}{4} R = \frac{5}{9} (F - 32);$$

$$F = \frac{9}{4} R + 32 = \frac{9}{5} C + 32.$$

Aehnlich verhält es sich mit der Frage, ob sich die festen Körper durch die Wärme nach allen drei Dimensionen des Raumes hin um gleich viel ausdehnen, oder nicht. Nach den bisherigen Erfahrungen hierüber möchte anzunehmen sein, daß ersteres stets dann erfolgt, wenn die Theile (Atome) eines Körpers nach allen Richtungen gleich angeordnet sind, letzteres aber, wenn diese Anordnung nach verschiedenen Richtungen ebenfalls verschieden ist<sup>1)</sup>.

Bei festen Körpern, wo man die Ausdehnung nach allen Seiten hin gleich groß voraussetzen kann, muß sich aus der Verlängerung nach einer Dimension (der linearen Ausdehnung) die nach zwei oder drei Dimensionen (die cubische Ausdehnung) ohne Weiteres ableiten lassen.

Aus letzterem Grunde ermittelte man bisher, durch Versuche, gewöhnlich nur die lineare Ausdehnung fester Körper, wobei die hierzu angewandten Methoden, im Allgemeinen, in den sorgfältigsten (mikrometrischen) Messungen der Verlängerungen bestanden, welche Stangen, aus den betreffenden Körpern gebildet, bei verschiedenen Temperaturen erfuhren. Ausnahmen hiervon machen allein die Versuche von Dulong und Petit, welche unmittelbar die Ermittlung der cubischen Ausdehnung fester Körper zur Absicht hatten<sup>2)</sup>.

## §. 44.

Bezeichnet man, unter vorgeannten Voraussetzungen, die Ausdehnung der Längeneinheit eines Körpers von 0° bis 100° C. mit  $a$  und ebenso die Ausdehnung, welche einem einzigen Grad  $C$  entspricht (die eigenthümliche oder specifische Längenausdehnung) mit  $e$ , so ist  $e = \frac{a}{100}$  zu setzen.

Sind daher  $L_0$  und  $L$  die Längen eines Körpers respective bei 0° und  $t$ ° C, so ist offenbar

$$(1) L = L_0 + e \cdot L_0 t = L_0 (1 + et)$$

ebenso für einen Körper desselben Stoffes, welcher bei der Temperatur  $t_1$  die Länge  $L_1$  besitzt

$$L_1 = L_0 (1 + et_1), \text{ woraus} \\ \frac{L_1}{L} = \frac{1 + et_1}{1 + et}, \text{ oder genau genug}$$

$$(2) L_1 = L [1 + e(t_1 - t)] \text{ folgt.}$$

Bezeichnen  $F$  und  $F_1$  Flächen von Körpern gleichen Stoffes, so ist nach geometrischen Gründen zu setzen:  $\frac{F_1}{F} = \frac{L_1^2}{L^2}$ , daher

<sup>1)</sup> Vollständig erwiesen ist diese Annahme bei den Krystallen, wo man bestimmt weiß, daß sich nur diejenigen nach allen Richtungen gleichmäßig ausdehnen, welche zum regelmäßigen Systeme gehören und keine doppelte Strahlenbrechung zeigen.

<sup>2)</sup> Ausführlicheres hierüber findet man in dem Wörterbuche der Physik von Gehler und in dem Handwörterbuche der Chemie von Liebig, Poggendorf, Wöhler etc. im Artikel „Ausdehnung“. Ferner ist hier der Abschnitt „Verhalten fester Körper“ (Ausdehnung fester Körper durch die Wärme) im ersten Bande der Grashof'schen „Theoretischen Maschinenlehre“, Bd. 1, §. 23 etc. zum Studium zu empfehlen.

$$\frac{F_1}{F} = \frac{(1 + et_1)^3}{(1 + et)^3}, \text{ oder ebenfalls hinlänglich genau}$$

$$(3) F_1 = F[1 + 2e(t_1 - t)].$$

Sind endlich  $V$  und  $V_1$  die Volumina gedachter Körper, so erhält man, wegen  $\frac{V_1}{V} = \frac{L_1^3}{L^3}$ ,

(4)  $V_1 = V[1 + 3e(t_1 - t)]$ ; oder, wenn man hier die Ausdehnung der Cubikeinheit, d. i.  $3e = K$  setzt,

$$(5) V_1 = V[1 + K(t_1 - t)].$$

## §. 45.

Von den Resultaten der in §. 43 gedachten Messungen stellen wir die Ausdehnungen der für die Mechanik wichtigen festen Körper in folgender Tabelle zusammen.

Die Länge der Körper ist bei  $0^\circ C = 1$  gesetzt.

Name der Körper.	Ausdehnung von $0^\circ$ bis $100^\circ C.$ ( $a. = 100 \cdot e$ ).	Beobachter.
Blei.....	0,002719	$\frac{1}{368}$ Morveau.
" .....	0,002848	$\frac{1}{351}$ Lavoisier und Laplace.
" .....	0,003086	$\frac{1}{324}$ Berthoud.
Bronze.....	0,001817	$\frac{1}{557}$ Smeaton.
Eisen, Stab.....	0,001167	$\frac{1}{857}$ Bessel.
" .....	0,001267	$\frac{1}{790}$ Dulong und Petit.
" .....	0,001220	$\frac{1}{819}$ Lavoisier und Laplace.
" Draht.....	0,001140	$\frac{1}{877}$ Troughton.
" Guß.....	0,001072	$\frac{1}{933}$ Daniell.
" .....	0,001109	$\frac{1}{901}$ Roy.
Glas, weißes.....	0,000861	$\frac{1}{1161}$ Dulong und Petit.
" .....	0,000944	$\frac{1}{1059}$ Herbert.
" Röhren <sup>2)</sup> .....	0,000921	$\frac{1}{1085}$ Horner.
" .....	0,000776	$\frac{1}{1288}$ Roy.
Gold, feines (de départ) ...	0,001466	$\frac{1}{682}$ Lavoisier und Laplace.
Granit.....	0,000789	$\frac{1}{1267}$ Adie.
" .....	0,000868	$\frac{1}{1152}$ Bartlett.
Hartloth (2 Kupfer und 1 Zink)	0,002058	$\frac{1}{486}$ Smeaton.
Kupfer.....	0,001841	$\frac{1}{543}$ Dulong und Petit.
" .....	0,001919	$\frac{1}{521}$ Troughton.
Marmor, weißer (carrarisch) .	0,001072	$\frac{1}{932}$ Dunn und Sang.

<sup>1)</sup> Höchst empfehlenswerth, neben reichhaltigen Literaturangaben, zum speciellen Studium dieses Gegenstandes, ist der Abschnitt „Ausdehnung der Körper durch die Wärme“ im dritten Bande des Lehrbuchs der Elementarphysik von Prof. Wüllner, am K. Polytechn. in Aachen, wobei wir noch ganz besonders auf §. 16 (S. 118) aufmerksam machen möchten, welcher Paragraph die Ueberschrift trägt: „Berücksichtigung der Temperatur bei Wägungen und Dichtigkeitsbestimmungen“.

<sup>2)</sup> Nach Hallström gilt für die lineare Ausdehnung von Röhren aus Kaliglas folgende Formel (die Temperatur in C. Graden)

$$L = 1 + 0,00000196 t + 0,000000105 t^2.$$



Name der Körper.	Ausdehnung von 0° bis 100° C. ( $a. = 100 . e$ ).		Beobachter.
Marmor, schwarzer .....	0,000426	$\frac{1}{2374}$	Dunn und Sang.
Messing, gegossen .....	0,001875	$\frac{1}{533}$	Smeaton.
„ 0,25 Zink und 0,75 Kupfer	0,002144	$\frac{1}{466}$	Daniell.
„ gewalzt (Tafel) .....	0,001920	$\frac{1}{510}$	Stampfer.
„ Draht .....	0,001885	$\frac{1}{531}$	Herbert.
Platin .....	0,000984	$\frac{1}{1016}$	Dulong und Petit.
Sandstein .....	0,001174	$\frac{1}{851}$	Adie.
„ .....	0,001716	$\frac{1}{582}$	Bartlett.
Silber .....	0,002083	$\frac{1}{480}$	Troughton.
„ (Kapellen) .....	0,001910	$\frac{1}{524}$	Lavoisier und Laplace.
Stahl, Huntsmann'scher .....	0,001074	$\frac{1}{931}$	Horner.
„ Fischer'scher .....	0,001112	$\frac{1}{899}$	„
„ Steyer'scher .....	0,001152	$\frac{1}{867}$	„
„ gehärteter .....	0,001225	$\frac{1}{816}$	Smeaton.
„ bei 30° angelassen ...	0,001369	$\frac{1}{730}$	Lavoisier und Laplace.
„ bei 65° „ .....	0,001240	$\frac{1}{807}$	„
„ weicher .....	0,001079	$\frac{1}{926}$	„
Stein (zum Bau) von St. Perron	0,000430	$\frac{1}{2324}$	Destigny.
„ „ „ von St. Leu..	0,000646	$\frac{1}{1541}$	„
Weichloth (1 Zinn und 2 Blei)	0,002505	$\frac{1}{399}$	Smeaton.
Weißtanne (faserig) .....	0,000602	$\frac{1}{1644}$	Struve.
„ „ „ .....	0,000408	$\frac{1}{2451}$	Kater.
Ziegelstein (gewöhnlich) .....	0,000550	$\frac{1}{1818}$	Adie.
Zink, gegossen .....	0,002968	$\frac{1}{337}$	Horner.
„ gewalzt .....	0,003331	$\frac{1}{300}$	Bessel.

Die ungewöhnliche Abweichung mancher dieser Angaben für ein und dasselbe Material, rührt theils von Beobachtungsfehlern, vorzüglich aber (wie bei den Festigkeitscoefficienten und den specifischen Gewichten) von der natürlichen Verschiedenheit der chemischen und physikalischen Zustände der Körper her. Bei sehr sorgfältigen Untersuchungen, z. B. bei größeren geodätischen Vermessungen, Pendelversuchen u. s. w. sieht man sich daher gewöhnlich genöthigt, eigene desfallsige Versuche anzustellen.

Beispiel 1. Die Länge der Stephenson'schen Blechbrücke über die Menai-Straits betrug nach Clark<sup>1)</sup> bei 0° C. (32 F.) 1510 Fuß 1½ Zoll englisch (460,588 Meter), während diese Länge bei 14½ C. (58° F.) um genau 3¼ Zoll (85,5 Millimeter) größer geworden war. Es fragt sich, wie groß hiernach die eigenthümliche Längenausdehnung ist?

Auflösung. Man erhält hier mittelst der Formeln §. 44 sofort:

$$1510,3958 = 1510,125 (1 + 14,44 . e), \text{ d. i.}$$

$$e = 0,00001241,$$

also fast unerwartet mit den Werthen der Tabelle §. 45 stimmend.

Beispiel 2. Bei 12° C. beträgt die Länge einer Eisenbahnschiene 18 Fuß englisch, oder 5,4864 Meter; man soll bestimmen, um

<sup>1)</sup> The Tubular Bridges, p. 715.

wie viel sich dieselbe bei 60° C. ausgedehnt haben wird? Letzter Temperatur wurde dadurch ermittelt, daß man in die Schiene Löcher bohrte, diese mit Quecksilber ausfüllte und in letzteres beim stärksten Sonnenschein die Kugeln von Quecksilberthermometern steckte.

Auflösung. Nimmt man nach Lavoisier und Laplace  $e=0,00001235$ , so ergibt sich ohne Weiteres:

$$L = 18 [1 + 0,00001235 \cdot 48] = 18' + 1\frac{1}{2}'' \text{ oder } 5,4896 \text{ Meter.}$$

### §. 46.

#### Ausdehnung nichtzusammendrückbar flüssiger Körper durch die Wärme.

Obwohl für alle flüssigen Körper erwiesen ist, daß sie sich durch die Wärme nach allen Seiten hin völlig gleichmäßig ausdehnen, so lag es doch in der Natur der Sache, daß sich alle deßhalb angestellten Versuche nur auf ihre cubische Ausdehnung beziehen konnten. Auf die Angabe der dabei angewandten Methoden können wir ebenfalls nicht eingehen und verweisen deßhalb wieder besonders auf die bereits citirten Wörterbücher von Gehler und Liebig. Bemerkt mag nur noch werden, daß in dem Nachstehenden allein die (absolute) wahre Ausdehnung der Flüssigkeit in Betracht gezogen ist, d. h. diejenige, welche man beobachten würde, wenn sich das Gefäß, der Behälter der Flüssigkeit, durchaus nicht ausdehnte.

Bei den nicht zusammendrückbar flüssigen Körpern tritt die vorher erwähnte Ungleichförmigkeit der Ausdehnung im Verhältnisse zur Temperatur am meisten hervor und zwar um so bedeutender, je mehr sich die Temperatur dem Punkte nähert, wo die Flüssigkeiten ihren Aggregatzustand ändern<sup>1)</sup>.

Am wenigsten ungleichförmig unter allen genannten Flüssigkeiten dehnt sich Quecksilber aus, so daß man die Ausdehnung desselben, zwischen 0° und 100° C als (beinahe) gleichförmig betrachten kann. Nach den sorgfältigen Versuchen von Dulong und Petit beträgt die cubische Ausdehnung des Quecksilbers für die Temperaturerhöhung von 0° bis 100° C:  $\frac{1}{5550} = 0,018018$ , oder für jeden Grad C:

$$\frac{1}{5550} = 0,00018018.$$

Die späteren sorgfältigen Bestimmungen Regnault's geben letzteren Werth zu

$$0,00018153,$$

also um sehr wenig größer.

Nächst dem Quecksilber zeigen, innerhalb der Grenzen 0° und 100° C, die fetten Oele die wenigste, alle übrigen Flüssigkeiten aber, wie Wasser, Alkohol, Salzlösungen u. s. w., eine um so bedeutendere ungleichförmige Ausdehnung. Für unseren Zweck beschränken wir

<sup>1)</sup> Die Analogie läßt wohl vermuthen, daß sich ein ähnliches Verhältniß auch bei der Ausdehnung fester Körper zeigen würde, wenn man sie bis zum Schmelzpunkte erhitzte.

uns indeß darauf, die älteren und neuesten Ergebnisse über die cubische Ausdehnung des reinen Wassers hier noch aufzuführen.

Nach Hallström, gestützt auf eigene Versuche, so wie auf die von Munke und Stampfer, läßt sich das Volumen =  $\mathfrak{B}_t$  des reinen Wassers, von der Temperatur =  $t$ , bei  $0^\circ C = 1$  gesetzt, durch folgende Gleichungen ausdrücken:<sup>1)</sup>

Für Temperaturen von  $0^\circ$  bis  $30^\circ C$ ,

$$\mathfrak{B}_t = 1 - 0,000057577t + 0,000075601t^2 - 0,000003509t^3.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich überdies, daß das reine Wasser sein kleinstes Volumen und mithin seine größte Dichte bei  $+3,92^\circ C$  besitzt<sup>2)</sup>.

Für Temperaturen von  $30^\circ$  bis  $100^\circ C$ :

$$\mathfrak{B}_t = 1 - 0,0000094178t + 0,00000533661t^2 - 0,0000000104086t^3.$$

Kopp<sup>3)</sup> fand neuerdings, aus mit musterhafter Sorgfalt angeordneten Versuchen, daß sich die Ausdehnung des Wassers von  $0^\circ$  bis  $100^\circ$  am besten durch 4 Gleichungen darstellen läßt.

Zwischen  $0^\circ$  und  $25^\circ$  durch:

$$\mathfrak{B}_t = 1 - 0,000061045t + 0,0000077183t^2 - 0,00000003734t^3.$$

Das Maximum der Dichte, oder das kleinste Volumen, findet sich hieraus zu  $t = 4^\circ,08$ .

Zwischen  $25^\circ$  und  $50^\circ$  durch:

$$\mathfrak{B}_t = 1 - 0,000065415t + 0,0000077587t^2 - 0,000000035408t^3.$$

Zwischen  $50^\circ$  und  $75^\circ$  durch:

$$\mathfrak{B}_t = 1 + 0,00005916t + 0,0000031849t^2 + 0,0000000072848t^3.$$

Zwischen  $75^\circ$  und  $100^\circ$  durch:

$$\mathfrak{B}_t = 1 + 0,00008645t + 0,0000031892t^2 + 0,0000000024487t^3.$$

### §. 47.

Für Anwendung vorstehender Sätze folgen hier noch einige Aufgaben.

**Aufgabe 1.** Das specifische Gewicht eines metallenen Körpers ist bei der Temperatur  $t = 20^\circ C$ . gegen Wasser = 1 von derselben Temperatur bestimmt und =  $m$  gefunden; es fragt sich, wie groß dasselbe bei  $0^\circ$  Temperatur sein wird?

**Auflösung.** Es mögen  $S$  und  $S_1$  die spec. Gewichte zweier verschiedener Körper bei Null Grad Wärme und  $s, s_1$  bei einerlei

<sup>1)</sup> Gehler's physik. Wörterbuch, Artikel „Wärme“ S. 913.

<sup>2)</sup> Nach Desprez (Ann. Ch. Ph. 1840, LXXIII, 296) hat das Wasser seine größte Dichte bei  $4^\circ C$ . Nach Joule und Plaifair (L. Ed. Ph. Mag. 1847, XXX, 41) bei  $3^\circ,945 C$ . Neuere über diesen Gegenstand findet sich u. A., insbesondere für technische Zwecke, in Grashofs „Theoretischer Maschinenlehre“. Erster Band, §. 22, S. 123.

<sup>3)</sup> Poggendorfs Annalen, Bd. LXXII und Liebig's Annalen, Bd. XCIII. Ueber noch andere Resultate, nach Versuchen von Jolly, Pierre, Hagen, Matthiessen, Hirn u. A., berichtet Wüllner im Dritten Bande, S. 71 (Dritte Ausgabe) seines „Lehrbuches der Experimental-Physik“.

Temperatur =  $t$  bezeichnen; ferner  $V, V_1$  und  $v, v_1$  die respectiven Volumena, so wie  $K, K_1$  die Ausdehnungen der Volumeneinheiten.

Sodann ist  $v = VK$ ,  $v_1 = K_1V_1$  und wegen  $v = \frac{VS}{s}$  und  $v_1 = \frac{V_1S_1}{s_1}$ ,  $S = Ks$ ,  $S_1 = K_1s_1$ . Durch Division und Reduction erhält man aber aus letzteren beiden Gleichungen

$$S_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{s_1}{s} \cdot S.$$

Setzen wir nun für unseren Fall  $S = 1$ , so ist  $\frac{s_1}{s} = m$  und daher

$$S_1 = \frac{K_1}{K} \cdot m = \frac{(1 + 3et)m}{K},$$

wo  $e$  die eigenthümliche Längenausdehnung des Metallkörpers bezeichnet.

Nach vorigem Paragraphen ist aber, für  $t = 20^\circ$ ,  $\frac{1}{K} = 0,998411$ , folglich

$$S_1 = 0,998411 (1 + 3e \cdot t) m.$$

Hätte man z. B. das specifische Gewicht des Schmiedeeisens bei  $20^\circ$  C. zu 7,6 gefunden, so würde dasselbe bei  $0^\circ$  C. betragen, wenn  $e = 0,00001235$  angenommen wird:

$$S_1 = 7,618.$$

Aufgabe 2. Die Höhe einer in einem genau cylindrischen Glasgefäße befindlichen Quecksilbermasse ist mit Hülfe einer geeigneten Messingscale bei der Temperatur  $t$  zu  $h$  gefunden; es fragt sich, wie groß gedachte Höhe bei  $0^\circ$  Temperatur ist, wenn zugleich auf die Ausdehnung der Scale Rücksicht genommen wird.

Auflösung. Bezeichnet  $k$  die cubische Ausdehnung des Quecksilbers für jeden Grad  $C$  und  $h_1$  die Höhe dieser Flüssigkeit bei Null Grad Temperatur ohne Rücksicht auf die Ausdehnung der Scale, so ist zuerst nach §. 44:  $h = h_1 (1 + kt)$ .

Geschah die Theilung der Scale bei der Temperatur  $t_1$  und bezeichnet  $e$  die eigenthümliche Ausdehnung des Messings, so ist in letzterer Gleichung  $h_1$  durch  $\frac{h_1}{1 + e(t_1 - t)}$  zu ersetzen und folglich mit Rücksicht auf beide Correctionen, die Höhe der auf Null Grad Temperatur reducirten Quecksilbersäule:  $h = \frac{h_1(1 + kt)}{1 + e(t_1 - t)}$  und  $h_1 = h [1 + e(t_1 - t)] (1 - kt)$  genau genug.

Für  $h = 0^m,72$  bei  $t = -20^\circ$  C. und ferner  $t_1 = 16^\circ$  C., so wie  $k = 0,00018$ ,  $e = 0,00001875$  ergibt sich bei  $0^\circ$  Temperatur:

$$h_1 = 0,720487.$$

Aufgabe 3. Eine schmiedeeiserne Stange von  $5^m,5$  Länge,  $0^m,06$  Breite und  $0^m,03$  Dicke, wurde bei der Temperatur  $+18^\circ$  C. mit beiden Enden in zwei unverrückbaren Ständern befestigt; man soll die Kraft bestimmen, womit die Stange bei einer Temperatur-

erniedrigung bis zu  $-20^{\circ}$ , vermöge des Bestrebens der Zusammenziehung, gegen gedachte Ständer wirkt.

**Auflösung.** Nimmt man aus der Tabelle §. 45 für Schmiedeeisen die Mittelzahl  $\alpha = 0,0012$ , also  $e = 0,000012$ , so würde sich bei der Temperatur-Differenz von  $38^{\circ}$  C. die freiliegende Stange für jeden Meter ihrer Länge um  $0,000012 \times 38 = 0,000456$  verkürzen. Da aber letzteres durch die Befestigung der Enden in den Ständern verhindert wird, so müssen diese von einer verhältnißmäßigen Druckkraft  $= P$  angeregt werden, die sich mit Hilfe der Gleichung I, §. 116 der Geostatik des Verfassers (Dritte Auflage) berechnen läßt. Man erhält nämlich

$$P = \frac{\lambda}{l} \cdot EF,$$

wenn  $\frac{\lambda}{l}$  die Ausdehnung pro Längeneinheit,  $E$  den Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens und  $F$  den Querschnitt der Stange bezeichnet, also  $\frac{\lambda}{L} = 0,000456$ ,  $F = 1800$  und  $E$  (für Quadratmillimeter und Kilogramme)  $= 2000$  ist, so folgt:

$$P = 0,000456 \cdot 20000 \cdot 1800 = 16416 \text{ Kilogr.}$$

Hieraus erkennt man zugleich, wie wichtig es ist, bei Metallconstructions, Röhrenleitungen, den Schienen der Eisenbahnen, Dampföhnen und Kolben u. s. w. auf die möglichen Verlängerungen und Verkürzungen Rücksicht zu nehmen, welchen diese bei Temperaturveränderungen unterworfen sind.

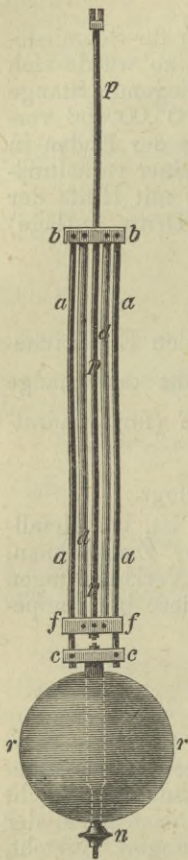
## §. 48.

### Compensationspendel.

Von der Ungleichheit, mit welcher sich Körper von verschiedenem Stoffe bei gleicher Temperaturveränderung ausdehnen, macht man eine höchst vortheilhafte Anwendung auf die Construction der Uhrpendelcompensationen, worunter man Vorrichtungen versteht, welche dem Einflusse von Wärme und Kälte auf die Längenveränderung der Pendel entgegenwirken. Die Nothwendigkeit einer constanten Länge des Pendels, wenn solches seine Schwingungen stets in gleicher Zeit verrichten soll, darf hier als bekannt vorausgesetzt werden. Man sehe deshalb auch des Verfassers Allgemeine Maschinenlehre, Bd. 1, S. 66 (Zweite Auflage).

Wir betrachten hier nur zwei der bemerkenswerthesten Compensationen, nämlich die sogenannte Rost- und die Quecksilber-Compensation. Eine gebräuchliche Anordnung erster Art (ein Rostpendel) zeigt Fig. 53. Dabei ist  $p$  die schmiedeeiserne Pendelstange, welche an dem oberen Ende derartig aufgehängt ist, daß die ganze Zusammenstellung um eine Achse schwingen kann, welche auf der Bildebene der Figur rechtwinklig steht.  $aa$  sind zwei gleichfalls schmiedeeiserne Stäbe, deren Enden durch Stifte mit den äußersten Bügeln oder Querstäben  $bb$  und  $cc$  fest verbunden sind.  $dd$  sind zwei Zinkstäbe, welche oberhalb am Querstabe  $bb$ ,

Fig. 53.



unterhalb aber an einem dritten Querstabe *ff* ebenfalls durch Stifte befestigt sind, während durch diesen Querstab *f* die Stäbe *aa* ganz ungehindert hindurch gehen können, weshalb in *ff* entsprechende Oeffnungen gebildet sind.

Uebrigens wird das Querstück *ff* von der Pendelstange *p* getragen, welche deshalb in der Mitte von *f* gehörig befestigt ist, während diese Stange *p* durch das obere Querstück *bb* frei hindurch tritt.

Die Linse *r* ist fest mit dem unteren Bügel *cc* verbunden, deren höhere und tiefere Stellen (als anderweitiges Regulierungsmittel) durch eine Stellerschraube *n* bewirkt werden kann. Wie durch diese Anordnung die Pendellänge bei constanter Länge zu erhalten ist, wird fast von selbst klar. Dehnt sich nämlich die Pendelstange *p* nach unten aus, so werden die Zinkstäbe *dd* eine nach oben gerichtete Ausdehnung veranlassen, weil sie an der unabhängigen Ausdehnung nach unten vom Querstücke *ff* gehindert werden (das ja von *p* getragen wird), einer Ausdehnung der Stäbe *dd* nach oben nichts entgegensteht, als daß sie dabei gezwungen sind, die Stäbe *aa* und mit ihnen die Linse *r* nach aufwärts zu ziehen etc.

Die Ausdehnung der Eisenstäbe *a* nach unten und die größere Ausdehnung der Zinkstäbe nach oben läßt eine genaue Compensation zu, sobald man die Längen der beiden Gattungen von Stäben entsprechend anordnet.

Um letzteres durch Rechnung zu ermitteln, sei *L* die Entfernung des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte des Pendels, bei einer bestimmten Temperatur, ferner *l* die Länge der Pendelstange *p* vom Aufhängepunkte oberhalb bis zum Stege *ff*,  $\lambda$  die Entfernung des obersten Bügels *bb* vom Schwingungspunkte der Linse und endlich *x* die unbekannte Länge der Zinkstäbe *d*. Sodann ist

$$(1) \quad L = l + \lambda - x.$$

Bezeichnet ferner *e* die eigenthümliche Längenausdehnung des Eisens, *e*<sub>1</sub> die des Zinkes, so ergiebt sich für eine um *t* Grade höhere oder niedrigere Temperatur eine neue Länge *L*<sub>*t*</sub>:

$$L_t = (l + \lambda) (1 \pm et) - x (1 \pm e_1 t).$$

Der Anforderung gemäß muß jedoch  $L = L_t$  sein, so daß man die Bedingungsgleichung erhält:

$$(2) \quad (l + \lambda) e - x e_1 = 0, \text{ oder wegen (1)}$$

$$(L + x) e - x e_1 = 0, \text{ d. i.}$$

$$(3) \quad x = \frac{e}{e - e_1} \cdot L.$$

Aus der Bedingungsgleichung (2) folgt noch der allgemeine Satz für die Compensation:

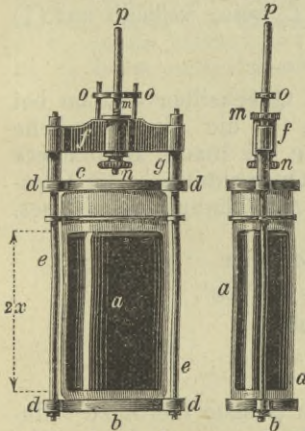
Die Gesammtlänge der verticalen Stäbe des gegebenen Metalles verhält sich zur Gesammtlänge des compensirenden Metalles umgekehrt, wie die zugehörigen linearen Ausdehnungen.

§. 49.

Eine der einfachsten Compensationen läßt sich mit Anwendung von Quecksilber herstellen (Quecksilberpendel), indem man nämlich an der Pendelstange, statt der Linse, ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß (gewöhnlich aus Glas) anbringt. Senkt sich hierbei die Pendelstange, so steigt das Quecksilber auf eine größere Höhe, und bei gehöriger Anordnung läßt es sich leicht erreichen, daß hierdurch der Schwingungspunkt eben so viel gehoben wird, als er sich durch die Verlängerung der Pendelstange senkt. Zugleich bietet diese Compensation den Vortheil, daß sich ein damit versehenes Pendel sehr dem einfachen Pendel nähert, da die Masse der Stange im Verhältniß zu der des Quecksilbers sehr gering ist.

Fig. 54.

Fig. 55.



Das Specielle der Anordnung eines Quecksilberpendels zeigt Fig. 54 in der Vorder- und Fig. 55 in der Seitenansicht, wobei wohl kaum bemerkt zu werden braucht, daß die Pendelstange *p* verkürzt gezeichnet ist.

Zur Aufnahme des Quecksilbergefaßes *a* und respective zur Verbindung desselben mit der Pendelstange *p* dient ein steigbügelförmiges Gehäuse *bef*. Es besteht dies aus den Messingtellern *b* und *c*, wovon ersterer als Boden, letzterer als Deckplatte dient. An jedem dieser Teller befinden sich zwei Lappen *dd*, wovon die bei *b* zur Befestigung (mittels Nieten oder Schrauben) der unteren Enden zweier eisernen Tragstangen *ee* dienen, während die Lappen des Tellers *c* gedachte Stangen frei hindurchlassen. Oberhalb werden die Stangen *ee* von den Enden eines Bügels *f* umfaßt, wobei die Hülsen oder röhrenförmigen Fortsetzungen *gg* desselben gleichzeitig zum gehörigen Aufdrücken des Tellers *c* benutzt werden; die Feststellung der gedachten Verbindung wird durch Muttern und Gegenmuttern bewirkt. Um endlich dem Ganzen möglichst viel Stabilität zu geben, ist zwischen *b* und *c* noch ein zweitheiliger, durch Nieten vereinigt Ring angebracht. Hinsichtlich der Verbindung der Pendelstange *p* mit dem Bügel *f* wird nur zu bemerken sein, daß von den beiden Schraubenmuttern *m* und *n* die letztere zugleich als weiteres Regulierungsmittel für den Gang der Uhr dient, und zu diesem Ende auf ihrem Rande eine Theilung befindlich ist, *n* also überhaupt eine Mikrometer-

schraube bildet. Um bei einer solchen Regulirung die Drehung der Pendelstange zu verhindern, ist an dieser das metallene Querstück  $o$  befestigt, an dem Bügel  $f$  aber zwei Drähte, welche frei durch die Enden von  $o$  hindurchgehen.

Zur Berechnung der nothwendigen Dimensions- und Gewichtsgröße des Quecksilberkörpers wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, daß sich der Schwingungspunkt des Pendels (nahe genug) in der Mitte des Quecksilberkörpers befindet<sup>1)</sup>. Sodann bezeichne  $L$  die Entfernung des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte des Pendels,  $a$  den Abstand des oberen Endes  $m$  des Bügels  $f$  von demselben Punkte,  $b$  die verticale Höhe des ganzen Gehäuses von  $m$  bis zur Platte  $b$  gemessen, sowie  $2x$  die zu suchende Höhe des Quecksilberkörpers.

Für die bestimmte Temperatur, wobei letztere Größen gemessen sind, erhält man

$$(1) \quad L = a + b - x.$$

Für eine um  $t$  Grad höhere Temperatur dagegen, wenn  $e$  die eigenthümliche Längenausdehnung des Eisens, und  $2x^1$  die verhältnißmäßig veränderte Höhe des Quecksilberkörpers bezeichnet

$$(2) \quad L^1 = (a + b) (1 + et) - x^1.$$

Wie früher muß aber auch hier  $L = L^1$  sein, weßhalb aus (1) und (2) folgt

$$(3) \quad 0 = (a + b) et + x - x^1.$$

Um zunächst  $x^1$  zu finden, sei  $v$  das Quecksilbervolumen bei der vorherbemerkten Normaltemperatur,  $k$  die eigenthümliche cubische Ausdehnung dieser Flüssigkeit,  $r$  der innere Halbmesser des auf einen Kreiscylinder reducirten Querschnittes vom Glasgefäße, und  $e^1$  die eigenthümliche lineare Ausdehnung des Glases. Sodann ist anfänglich

$$(4) \quad v = r^2 \pi \cdot 2x, \text{ nachher aber}$$

$$(5) \quad v (1 + kt) = \pi r^2 (1 + e^1 t)^2 2x^1.$$

Dividirt man (5) durch (4), so ergibt sich

$$(1 + kt) = \frac{(1 + e^1 t)^2 x^1}{x},$$

woraus für  $x^1$  der angenäherte, hinlänglich genaue Werth zu reduciren ist:

$$x^1 = x + x (k - 2e^1)t.$$

Durch Subst. in (3) erhält man daher

$$0 = (a + b) et - x (k - 2e^1)t \text{ und in Bezug auf (1)}$$

$$0 = (L + x) e - x (k - 2e^1), \text{ demnach}$$

$$x = \frac{e}{k - 2e^1 - e} \cdot L.$$

Hier endlich nach Dulong und Petit, zufolge §. 45 und 46  $e = 0,00001182$ ,  $k = 0,00018018$  und  $e^1 = 0,000008613$  gesetzt, giebt

$$x = 0,0782 \cdot L$$

<sup>1)</sup> Welcher Fehler bei dieser Annahme begangen wird, läßt sich leicht abschätzen.



und die ganze Höhe des Quecksilberkörpers

$$2x = 0,1564 \cdot L.$$

Für den besonderen Fall, daß  $L = 0^m,9935$ , ist sonach

$$2x = 0^m,1554.$$

Nimmt man hierbei den Querschnitt des Gefäßes = 0,002 Quadratmeter und Quecksilber von spec. Gewichte = 13,560 an, so erhält man für das Gewicht =  $Q$  des Quecksilbers:

$$Q = 1000 \cdot 13,56 \cdot 0,002 \cdot 0,1554 = 4,214 \text{ Kil.}$$

Eine nach solcher Berechnung angeordnete Quecksilbercompensation macht indeß, für einen sehr genauen Gang der betreffenden Uhr, immer noch das Anbringen anderweitiger Regulierungsmittel nothwendig (in Fig. 54 und 55 die Mikrometerschraube  $n$ ), was allein schon aus unserer Annahme von ganz bestimmten Ausdehnungscoefficienten erklärbar ist.

In Betreff anderer Compensations- und Regulierungsmethoden muß auf ausführlichere Werke über diese Gegenstände verwiesen werden <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Gehler's Wörterbuch, Artikel „Compensation“ und „Pendel“. Rees' Encyclopädie, Artikel „Horology“, Vol. II, Plate XXXIX and XL. Ferner die neueren Werke über Uhrmacherkunst von Jürgens, Martens, Heidner, Georgi u. A., worüber ausführliche Literatur in des Verfassers Allgem. Maschinenlehre, Bd. 1, Zweite Auflage, S. 34, 45, 54 und 66 zu finden ist.



## Zweite Abtheilung.

# Aërostatik.

### §. 50.

Die Gleichgewichtsgesetze wasserförmiger Flüssigkeiten und deren Verhalten gegen feste Flächen und Körper, sind auch für luftförmige Flüssigkeiten gültig, insofern dabei auf die §. 2 hervorgehobenen charakteristischen Eigenschaften der letzteren Rücksicht genommen wird.

Unter Beachtung gedachter Eigenschaften besteht daher auch in der Aërostatik der Satz von der gleichförmigen Druckfortpflanzung<sup>1)</sup>, der vom Boden- und Wanddrucke, so wie ferner der Satz (das Princip des Archimedes), daß ein von der luftförmigen Flüssigkeit überall umgebener fester Körper so viel an seinem absoluten Gewichte verliert, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt.

Vollständige Entscheidung über alle hierher gehörige Fragen werden spätere Paragraphen geben, im Voraus diene zur weiteren Verständigung Folgendes.

Sollen tropfbare Flüssigkeiten Drücke ausüben, so müssen sie der Wirkung der Schwerkraft unterworfen sein, oder es müssen äußere Kräfte auf dieselben einwirken. Bei luftförmigen Flüssigkeiten sind für diesen Fall äußere Kräfte nicht erforderlich, vielmehr üben diese schon durch das ihnen innenwohnende stete Ausdehnungsbestreben bestimmte Drücke aus. Vom technischen Standpunkte aus sieht man meistens vom absoluten Gewichte luftförmiger Flüssigkeiten ab, so wie man auch den Druck, welchen sie auf die Gefäßwände ausüben, als überall constant betrachtet. Endlich wird gewöhnlich noch angenommen, daß in der ganzen Flüssigkeitsmasse durchaus dieselbe Temperatur stattfindet.

<sup>1)</sup> Statt des Wassers oder Oeles zum Betriebe einer hydraulischen Presse könnte daher auch Luft in Anwendung gebracht werden. Die Luft würde nur, bevor sie den auf sie ausgeübten Druck fortpflanzt, so weit zusammendrücken sein, bis sie eine der Druckkraft gleiche Spannung angenommen hat. Die Hauptursache, weshalb man bei der gedachten Presse lieber tropfbare Flüssigkeiten als luftförmige zum Druckfortpflanzungsmittel benutzt, liegt hauptsächlich in der Schwierigkeit des nothwendigen Dichthaltens aller betreffenden Theile.

Anders ist dies jedoch bei der Betrachtung luftförmiger Flüssigkeitsmassen von beträchtlicher Ausdehnung, wie insbesondere diejenige ist, welche, überall unsere Erde umgebend, die Atmosphäre derselben bildet.

## §. 51.

## Barometer, Manometer.

Um die Größe der drückenden Kraft (Expansivkraft) in Gefäßen abgesperrter Luft zu messen, benutzt man Instrumente, welche Manometer<sup>1)</sup> genannt werden, während zu gleichen Zwecken, für die freie atmosphärische Luft, das, hier als bekannt vorauszusetzende, Barometer<sup>2)</sup> dient.

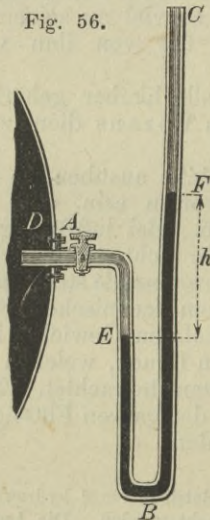
Beide Instrumente gründen sich auf den bereits von Toricelli (1643) aufgefundenen Satz:

„daß der Druck der Luft tropfbare Flüssigkeiten bis zu Höhen erhebt, welche ihrer Dichte umgekehrt proportional sind.“

Hieraus folgt zugleich, daß das Gleichgewichtsgesetz wasserförmiger Flüssigkeiten in communicirenden Gefäßen auch für luftförmige Flüssigkeiten gültig ist.

Beim Barometer ist vom communicirenden Gefäße nur ein Schenkel, die oben geschlossene, unten offene, mit Quecksilber gefüllte (und mit der Oeffnung wieder in solches getauchte) Glasröhre vorhanden, während der zweite, unsichtbare Schenkel durch eine Luftsäule von der Höhe der Erdatmosphäre gebildet wird.

Fig. 56.



Beim Manometer, Fig. 56, besteht das communicirende Gefäß (gewöhnlich) aus einer Glasröhre ABC, in beiden Schenkeln Quecksilber oder Wasser befindlich, wovon der kürzere Schenkel AB mit der gepressten Luft im Gefäße D, der längere, oben offene Schenkel BC dagegen mit der äußeren atmosphärischen Luft in Verbindung steht. Befindet sich im Gefäße D verdünnte Luft, so ist  $BF < BE$  etc.<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Von  $\mu\alpha\nu\omicron\varsigma$  dünn etc.

<sup>2)</sup> Von  $\beta\acute{\alpha}\rho\omicron\varsigma$  schwer etc.

<sup>3)</sup> Manometer, wobei der längere Schenkel BC geschlossen ist, stehen den beschriebenen an Genauigkeit und Zuverlässigkeit sehr nach und sollen hier (zunächst) unbeachtet bleiben.

## §. 52.

Bei einer Temperatur von  $0^{\circ}$  C. am Spiegel des Meeres und unter mittlerer geographischer Breite beträgt im Barometer die Höhe der Quecksilbersäule, welche den Druck der atmosphärischen Luft mißt,  $0^m,76$  ( $= 28$  pariser Zoll  $= 29,92$  engl.).

Da nun nach Regnault<sup>2)</sup> das specifische Gewicht des Quecksilbers bei  $0^{\circ}$ , verglichen mit Wasser von  $4^{\circ}$  Temperatur, 13,596 ist, so beträgt dieser Druck  $= P_m$ , nach §. 9:

I.  $P_m = 1000 \cdot 13,596 \cdot 0,76 = 10333$  Kil. pro □Meter, oder pro □Centimeter ( $= P_c$ )

$$\text{II. } P_c = \frac{10333}{10000} = 1,0333 \text{ Kilogramm.}$$

Geht man vom Barometerstande  $0^m,7355$  aus, so ergibt sich  $P_m$  zu:

$$P_m = 1000 \cdot 13,596 \cdot 0,7355 = 9999,858 \text{ Kil. pro □Meter,}$$

wofür man offenbar setzen kann:

$$\text{III. } P_m = 10000 \text{ Kil. pro □Meter, oder}$$

$$\text{IV. } P_c = 1,0 \text{ Kil. pro □Centimeter.}$$

Die Größe dieses Druckes nennt man den Druck einer Atmosphäre und zwar insbesondere in der Beziehung, um denselben als Maaßeinheit bei der Bestimmung des Druckes der Luft und Gase (auch der Wasserdämpfe) überhaupt zu gebrauchen. Aus IV. erklärt sich die im preußischen Staate zum Gesetze erhobene Annahme, durch ein und dieselbe Ziffer die Zahl der Atmosphären und die correspondirende Druckgröße pro □Centimeter zu bezeichnen.

Durch den Manometerstand, d. h. die Differenz der beiden Flüssigkeitssäulen  $FB$  und  $EB$  im Manometer, Fig. 56, wird der Druckunterschied der im Gefäße  $D$  eingeschlossenen Luft und der atmosphärischen Luft gemessen.

Bezeichnet daher  $P$  die innere Pressung, pro □Meter in Kilogrammen ausgedrückt, und  $p$  die äußere Pressung auf dieselbe Weise ausgedrückt, endlich  $h$  den Manometerstand, und nimmt man, um mit möglichst einfachen Zahlen zu rechnen, das specifische Gewicht des Quecksilbers zu 13,60 an, so folgt:

$$P - p = 1000 \cdot 13,6 \cdot h = 13600 h, \text{ wenn Quecksilber die Manometerflüssigkeit bildet und}$$

$$P - p = 1000 \cdot h, \text{ wenn die Manometerflüssigkeit Wasser ist. Wenn } P \text{ und } p \text{ auf 1 □Centimeter bezogen werden, folgt:}$$

$$P - p = 1,36 \cdot h \text{ beim Quecksilbermanometer,}$$

$$P - p = 0,1 \cdot h \text{ beim Wassermanometer.}$$

Zusatz. Wie beispielsweise §. 6, S. 13 bei der hydraulischen Presse für wasserförmige Flüssigkeiten geschah, bestimmt man sehr oft

<sup>1)</sup> Mém. de l'Acad. de Paris 1847, T. 21, Pg. 162.

<sup>2)</sup> Es beträgt dieser Druck

pro □Zoll englisch: 14,70 ℥ engl.  
" " österreichisch: 12,80 ℥ Wiener etc.

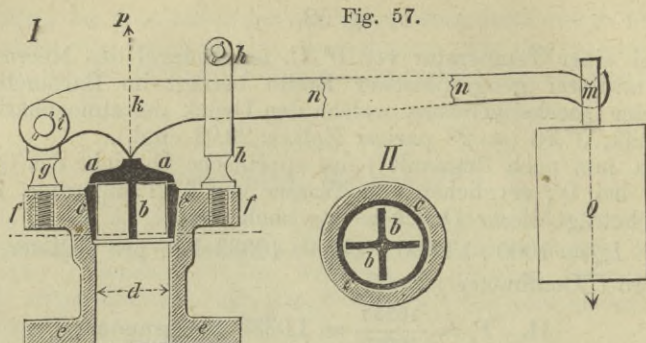


Fig. 57.

auch die Druckkraft elastischer Flüssigkeiten mit Hülfe eines geeigneten (empfindlichen etc.) Ventiles, Figur 57.

Wird dabei der innere Druck gegen die ganze Ventilfläche  $ab$  mit  $P$ , der äußere (einschließlich des Ventilgewichtes) mit  $p$  bezeichnet, ferner die geradlinige Entfernung vom Drehpunkte  $i$  des Hebels bis zum Aufhängepunkte eines Gewichtes  $Q$ , d. i.  $im = L$ ,  $ik = l$  gesetzt und die Schwerpunktsentfernung des Hebels  $in$  vom Drehpunkte  $i$  mit  $\lambda$ , das Gewicht des ganzen Hebels mit  $q$  bezeichnet, endlich der resultirende Druck in  $i$  mit  $R$ , der Zapfenreibungscoefficient bei  $i$  durch  $f$  ausgedrückt, so folgt für den Gleichgewichtszustand, nach bekannten Sätzen vom Hebel:

$$Q \cdot L = (P - p) l - q\lambda - fR,$$

woraus  $Q$  oder  $L$  bestimmt werden können, wenn die übrigen Größen gegeben sind.

Beispiel. Wie groß ist das Gewicht  $Q$  zu nehmen, welches am einarmigen Hebel eines Sicherheitsventiles aufgehängt werden muß, wenn der Durchmesser der Ventildruckfläche, d. i.  $mn = 0^m,05$ , die innere Pressung 4 Atmosphären beträgt, ferner  $L = 1^m,0$ ,  $l = 0^m,1$ ,  $\lambda = 0^m,4$ ,  $q = 7,5$  Kil. ist, das Ventilgewicht 1 Kilogramm, und die Zapfenreibung bei  $A = \text{Null}$  angenommen werden kann<sup>1)</sup>.

Auflösung. Hier ist

$$P = 0,785 \cdot 5^2 \cdot 1,0333 \cdot 4 = 81,1140 \text{ Kil.}$$

$$p = \frac{P}{4} + 1 = 21,2844 \text{ Kil., also}$$

$$l(P - p) = 5,983 \text{ und}$$

$$Q = \frac{5,983 - 7,5 \cdot 0,4}{1,0} = 2,983 \text{ Kil.}$$

<sup>1)</sup> Weiteres über die Berechnung der Belastung, insbesondere bei Dampfkessel-Sicherheitsventilen, findet sich Bd. 1, S. 623 (Zweite Auflage) der Allgem. Maschinenlehre des Verfassers. Wie gering der Fehler ist, welchen man begeht, wenn, wie oben, die Zapfenreibung vernachlässigt wird, findet sich u. A. nachgewiesen in der 5. Auflage des (von Herrmann bearbeiteten) Weisbach'schen Lehrbuches der Ingenieur-Mechanik, S. 349.

Wegen mancherlei unvorhergesehenen, nicht immer zu beseitigenden Umständen (Porosität der Ventil-Sitzflächen, Unbestimmtheit der Reibungscoefficienten etc.) darf gesetzlich die zulässige Belastung bei Dampfkesselventilen nicht mehr berechnet, sondern muß durch geeignete Versuche ermittelt werden. Man sehe deshalb die Anweisung des preußischen Handelsministers vom 11. Juni 1871, §. 4.

## §. 53.

**Mariotte-Boyle's und Gay-Lussac's Gesetz.**

Von besonderer Wichtigkeit ist für alle weiteren Betrachtungen das Gesetz, welches die Beziehung zwischen Elasticität, Dichte und Volumen der Luft ausdrückt und welches fast gleichzeitig von dem Engländer Boyle (1660) und dem Franzosen Mariotte (1670) aufgefunden wurde. Es lautet dies Gesetz folgendermaßen:

„Die Elasticität und Dichtigkeit der Luft ist der sie zusammendrückenden Kraft direct, das Volumen, oder der Raum, den sie einnimmt, dieser Kraft umgekehrt proportional, vorausgesetzt, daß die Temperatur constant bleibt.“

Hat man daher zwei Luftvolumen  $v_1$  und  $v_2$  von gleicher Temperatur, deren respectiven Pressungen  $p_1$  und  $p_2$ , so wie Dichten  $\Delta$  und  $\Delta_1$  sind, so stellt sich das Mariotte-Boyle'sche Gesetz durch folgende Proportionen dar:

$$(1) \begin{cases} p_1 : p_2 = v_2 : v_1; \\ p_1 : p_2 = \Delta_1 : \Delta_2; \\ v_1 : v_2 = \Delta_2 : \Delta_1. \end{cases}$$

Ein zweites wichtiges Gesetz, betreffend die Ausdehnung der Luft durch Wärme, ist das Gesetz Gay-Lussac's (Dalton's), was also lautet:

„Trockne atmosphärische Luft dehnt sich bei gleichem Temperaturzuwachse um gleich viel und zwar für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers um 0,00375 ihres Volumens aus, vorausgesetzt, daß der Druck, unter welchem diese Luftmasse steht, sich nicht verändert.“

Die neueren Bestimmungen von Magnus, Regnault u. A.) weichen hiervon etwas ab<sup>1)</sup>, insbesondere beträgt die gedachte Volumenausdehnung =  $\delta$  für jeden Grad des Intervalls von 0° bis 100° C., nur:

$$\delta = 0,003666 = \frac{1}{273}.$$

Bezeichnet  $v_0$  ein Luftvolumen von 0° Temperatur, so erhält man für die Volumina  $v_1$  und  $v_2$  bei  $t_1$  und  $t_2$  Temperatur:

$$v_1 = v_0 (1 + \delta t_1) \text{ und } v_2 = v_0 (1 + \delta t_2)$$

und hieraus:

$$(2) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t_2}.$$

Aus der Verbindung des Mariotte'schen mit dem Gay-Lussac'schen Gesetze ergeben sich noch folgende besonders wichtige Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t_2};$$

$$(4) \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{p_1}{p_2} \frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1}.$$

<sup>1)</sup> Man sehe hierüber den später folgenden mit „Geschichtlichen Notizen“ überschriebenen Paragraphen.

## §. 54.

Zu besonderen Erörterungen des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes diene (zunächst) Folgendes.

Das Gewicht eines Liters (Cubikdecimeters) trockener atmosphärischer Luft bei 0° C Temperatur, unter der Pressung von 0<sup>m</sup>,76 Quecksilbersäule (einer Atmosphäre) und unter der geographischen Breite von Paris beträgt nach Regnault<sup>1)</sup>

1,293187 Gramm, folglich wiegt

1 Cubikmeter = 1,293187 Kilogramm.

Für die geographische Breite =  $\varphi$  und  $h$  Meter über dem Meere, beträgt dies Gewicht:

$$1,292673 \frac{1}{1 + \frac{2h}{r}} [1 - 0,002836 \cdot \cos 2\varphi],$$

wobei  $r$  den mittleren Erdradius bezeichnet und wofür gesetzt werden kann:

$$r = 6366198 \text{ Meter.}$$

Hiernach erhält man, mit Zuziehung der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen, für das Gewicht eines Cubikmeters atmosphärischer Luft, für die Dichte =  $\Delta$  der letzteren, bei der Temperatur =  $t$  und unter dem Drucke =  $p$  in Kilogrammen pro Quadratmeter

$$(1) \quad \Delta = 1,293187 \frac{p}{10333} \cdot \frac{1}{1 + \delta t}, \text{ oder}$$

$$(2) \quad \Delta = \frac{p}{7992,655} \cdot \frac{1}{1 + \delta t}.$$

Ferner ergibt sich für das Gewicht =  $w$  eines Volumens  $v$  atmosphärischer Luft

$$(3) \quad w = \Delta \cdot v = \frac{pv}{7992,655 (1 + \delta t)}.$$

Bezeichnet man weiter für  $w = 1$  Kilogramm das correspondirende Volumen mit  $v_0$  und die zugehörige Dichte mit  $\Delta_0$ , so ergibt sich für den Fall, daß  $p = 10333$  Kil. und  $t = \text{Null}$  ist:

$$1 = \Delta_0 v_0, \text{ also}$$

$$(4) \quad v_0 = \frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{1,293187} = 0,7733 \text{ Cubikmeter.}$$

Das (unter den bezeichneten Umständen) einem Kilogramme atmosphärischer Luft entsprechende Volumen pflegt man das specifische Volumen zu nennen.

Unter Benutzung vorstehender Werthe lassen sich die Gleichungen (3) und (4) des vorigen Paragraphen in andere Gestalt bringen.

Bezeichnet man vorerst Druck und Volumen, welche der Temperatur Null entsprechen, beziehungsweise mit  $p_0$  und  $v_0$ , so erhält man

$$(5) \quad pv = p_0 v_0 (1 + \delta t),$$

<sup>1)</sup> Mémoire de l'academie royale de sciences de l'Institut de France, Tome XXI, p. 157. Paris 1847. Ferner Karsten, Fortschritte der Physik, Jahrg. II, S. 88.



und wenn man den echten Bruch  $\delta = 0,003665 = \frac{1}{273} = \frac{1}{a}$  setzt,

$$pv = \frac{p_0 v_0}{a} (a + t).$$

Schreibt man ferner zur Abkürzung

$$\frac{p_0 v_0}{a} = R \text{ und } a + t = T,$$

so ergibt sich

$$(6) \quad pv = RT.$$

Die von  $-a$  ( $-273^\circ C$ ) an gezählte Temperatur  $T$  pflegt man die absolute Temperatur zu nennen<sup>1)</sup>. Außerdem erkennt man leicht, daß  $R$  eine Constante ist, welche von der Beschaffenheit (Natur) des Gases abhängt. Für atmosphärische Luft und für die Temperatur  $t = \text{Null}$ , also für die absolute Temperatur  $T_0 = 273$ , erhält man folglich:

$$R = \frac{p_0 v_0}{T_0}, \text{ d. i.}$$

mit Bezug auf (4)

$$(7) \quad R = \frac{10333 \cdot 0,7733}{273} = 29,27.$$

Für ein Volumen atmosphärische Luft von  $M$  Kilogramm Gewicht ist statt (6) zu setzen:

$$(8) \quad pv = MRT.$$

Interessante (neue) Erörterungen der Gleichungen (6) und (8) hat kürzlich A. Ritter in Aachen geliefert, welche sich abgedruckt finden in der neuen Folge der (Poggendorf'schen, jetzt Wiedemann'schen) Annalen der Physik und Chemie, Monat Juni 1877, S. 273 ff.

Schließlich noch folgende Bemerkungen:

1) Da unter Voraussetzung constant bleibender Temperatur für die Beziehung zwischen Druck und Volumen eines Gases das Mariotte'sche Gesetz gilt, so läßt sich letzteres auch ausdrücken durch

$$pv = \text{Const.}$$

<sup>1)</sup> Oskar Meyer in seinem schätzbaren Werke „Kinetische Theorie der Gase“. Breslau 1877, entwickelt (S. 25) für die Molekulargeschwindigkeit  $= G$  der Gase die Formel  $G^2 = G_0^2 (1 + \delta t)$ . Dieser Werth verschwindet, wenn  $1 + \delta t = 0$  wird, d. i. für  $t = -\frac{1}{\delta} = -273^\circ C$ .

Ist daher (wie bereits Note 1, S. 93 hervorgehoben wurde) die Wärme nichts anderes als die lebendige Kraft der molekularen Bewegung, so muß der Punkt, wo ein Gas gar keine Wärme mehr enthält, mit dem identisch sein, wo die molekulare Bewegung verschwunden ist und alle Atome und Molekule in völliger Ruhe verharren. (Weiteres in dem angegebenen Werke.)

Auch die obige Gleichung (5) läßt sich zur Erklärung der absoluten Temperatur benutzen, indem man unter der Voraussetzung von  $v = v_0$  denjenigen Werth von  $t$  sucht, für welchen der Druck  $p$  zu Null wird. Man erhält ebenfalls  $1 + \delta t = 0$ ,  $t = -\frac{1}{\delta} = -a = -273$ .

Eine Gleichung, welche einer gleichseitigen, in einer Ebene liegenden Hyperbel entspricht, sobald diese die rechtwinkligen Coordinatenachsen zu Asymptoten hat. Unter solchen Umständen nennt man diese krumme Linie die isothermische Curve.

In einem späteren Paragraphen kommen wir unter der Rubrik isothermische Compressions- und Expansions-Arbeit auf diesen Gegenstand zurück.

2) Die geometrische Darstellung der Gleichung

$$pv = RT,$$

als die Vereinigung des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes liefert eine hyperbolische Paraboloidfläche.

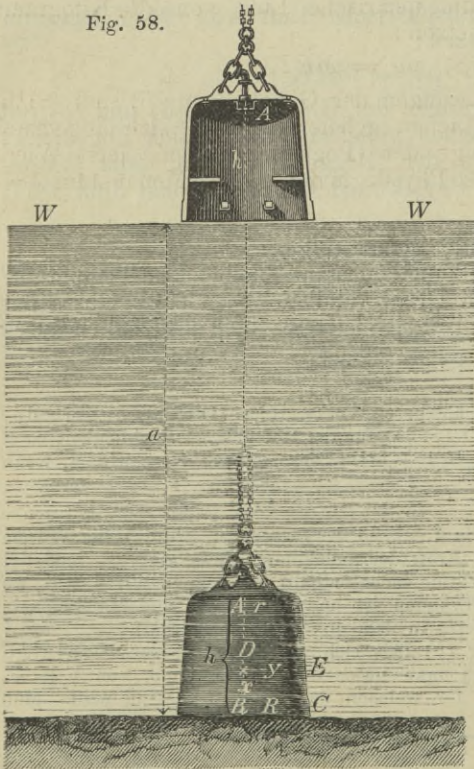
Auch hierüber hat A. Ritter in Aachen im Dec.-Hefte 1877 der Poggend.-Wiedemann'schen Annalen etc. interessante Erörterungen geliefert.

## §. 55.

Einige technisch wichtige Anwendungen der Hauptsätze vorstehender Paragraphen.

### I. Taucherglocke.

Fig. 58.



Bei der Taucherglocke, Fig. 58, soll zuerst die Frage beantwortet werden, bis zu welcher Höhe  $DB = x$  Wasser in dieselbe dringt, wenn ihre Dimensionen, so wie die Tiefe  $= a$  bekannt ist, in welcher sie unter dem Oberwasserspiegel aufgestellt wird. Gedachter Fall kann eine Beachtung erfordern, wenn durch ungünstige Umstände veranlaßt, die Druckpumpe (Compressionspumpe) eine Zeit lang außer Thätigkeit gesetzt ist, mittelst welcher sonst durch die Oeffnung A in elastischen Röhren (Schläuche) frische zum Einathmen der Arbeiter geeignete Luft eingeführt wird, die auch zugleich das Wasser aus der Taucherglocke entfernt.

Des ersten Verständnisses wegen werde angenommen, daß die Taucherglocke einen mit der Grund-

fläche parallel abgekürzten Kegel bildet (wie beispielsweise eine bei den Hafendarbeiten in Cherbourg benutzte Taucherglocke<sup>1)</sup>), dessen Höhe  $h$  ist, während  $R$  und  $r$  die Radien der kreisförmigen Endflächen sind. Die den Atmosphärendruck messende Wassersäule werde  $b$  ( $= 10^m,333$ ) und der veränderliche Radius der Glocke  $DE = y$  gesetzt.

Da die Volumina der in der Glocke befindlichen Luft

$$\text{über dem Wasser: } \frac{h\pi}{3} (R^2 + r^2 + Rr),$$

$$\text{in der Tiefe } a: \frac{(h-x)\pi}{3} (y^2 + r^2 + ry) \text{ sind,}$$

ferner auch

$$y = R - \frac{R-r}{h} \cdot x \text{ ist,}$$

so erhält man nach dem Mariotte'schen Gesetze die Proportion:

$$b : (a + b - x) = (h - x) (y^2 + r^2 + ry) : h (R^2 + r^2 + Rr).$$

Wird hier  $h (R^2 + r^2 + Rr) = k$ ,  $\frac{R-r}{h} = n$  und  $a + b = m$  gesetzt, so erhält man zur Bestimmung von  $x$  folgende Gleichung:

$$\text{I. } (R - nx)^2 (h - x) (m - x) + r (R - nx) (h - x) (m - x) + r^2 (h - x) (m - x) = bk.$$

Bildet die Glocke einen Cylinder, so wird  $R = r$ ,  $n = \text{Null}$ ,  $k = 3hr^2$ , folglich aus I:

$$(h - x) (m - x) = bh \text{ und}$$

$$x = \frac{a + b + h}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{a + b + h}{2}\right)^2 - ah}.$$

Hinsichtlich der mechanischen Arbeit, welche aufzuwenden ist, um die Luft bei  $a$  Wassertiefe der Glocke mit Hülfe einer Druckpumpe (Compressionspumpe) auszutreiben und gleichzeitig diese Luft zum Einathmen für die Arbeiter geeigneter zu machen, muß auf [§. 58] verwiesen werden.

Beispiel. Bei der erwähnten Cherbourger Glocke ist

$$h = 1^m,594; R = 0^m,8805; r = 0^m,8075;$$

$$a = 15^m,0, \text{ also } m = 15 + 10,333 = 25^m,333;$$

$$n = \frac{R-r}{h} = 0,045797; k = 3,40623;$$

$$b = 10^m,333. \text{ Daher wird aus I:}$$

$$0,00209734 x^4 - 0,1741092 x^3 + 5,39072 x^2 - 62,3350 x + 51,1493 = 0, \text{ oder}$$

$$x^4 - 83,0137 x^3 + 2570,26235 x^2 - 29720,9482 x + 24387,6673 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = 0^m,88661.$$

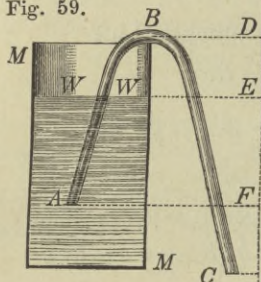
<sup>1)</sup> Bulletin d'encouragement, 19 Année (1820), p. 198, Pl. 193. Andere Taucherglocken (gußeiserner mit fast rechteckigen Querschnitten) finden sich beschrieben und abgebildet in folgenden Werken: Armengaud Publication Indust. 4<sup>e</sup> Vol., Pl. 7. — Papers of Royal Engineering, Vol. I., Pl. XV—XX. — Cavé, Bateau Plongeur etc. du Nil. Bulletin d'encouragement etc. 48<sup>e</sup> Année (1849), Pg. 405. — Die Construction der Taucherglocken zur Fundirung der Rheinbrücke bei Hamm. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Jahrg. 1869 (Bd. XIII), S. 186.

## §. 56.

## II. H e b e r.

Es ist die Kraft zu bestimmen, womit in einem beliebigen Gefäße  $MM$ , Fig. 59, enthaltenes Wasser zum Abfließen durch einen Heber  $ABC$  angetrieben wird. Vorausgesetzt wird dabei, daß die Zusammenstellung überall von der atmosphärischen Luft umgeben ist, das Gefäß eben so viel Zufluß erhält, als durch den Heber abfließt, der Spiegel  $WW$  also constant bleibt, endlich beide Heberschenkel bereits mit Wasser gefüllt sind, auch  $C$  vor dem Beginn des Ausfließens gehalten wird.

Fig. 59.



Auflösung. Bezeichnet, wie vorher,  $b$  die den Atmosphärendruck messende Wassersäule ( $10^m,333$ ), so erfährt die Einheit der Fläche (wenn man zuvor die Horizontalen durch  $A, B, C$  etc. zieht) einen Druck in  $B$

von links nach rechts:  $\gamma [b + \overline{EF} - \overline{DF}] = \gamma [b - \overline{DE}]$ , so wie von rechts nach links:  $\gamma [b - \overline{DG}]$ .

Soll nun ein Fließen von  $B$  nach  $C$  erfolgen, so muß offenbar ersterer Werth den letzteren übertreffen und zwar muß die Differenz beider, die Resultierende  $= p$ , wodurch gedachte Bewegung veranlaßt wird, sein:

$$p = \gamma [b + \overline{EF} - \overline{DF} - b + \overline{DG}] = \gamma \cdot \overline{EG}.$$

Die Druckkraft, welche pro Flächeneinheit gegen die Flüssigkeit wirkt und diese zum Fließen bringt, wird also durch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule gemessen, welche den Abstand der Ausflußöffnung vom Wasserspiegel im Gefäße zur Höhe hat.

Taucht die Mündung  $C$  unter Wasser, so wird die wirksame Druckhöhe  $\overline{EG}$  durch den Abstand des Wasserspiegels über  $C$  vom Wasserspiegel  $WW$  im Gefäße  $MM$  bestimmt.

Außerdem ergeben sich noch folgende wichtige Sätze:

1) Es findet so lange ein Abfluß durch den Heber statt, als der Ausflußpunkt  $C$  noch tiefer wie der Wasserspiegel  $WW$  im Gefäße liegt. Hieraus ergibt sich überdies, daß der Schenkel  $\overline{BC}$  auch kürzer wie der  $\overline{AB}$  sein kann, ohne den Ausfluß zu stören.

2) Der Abstand des Wasserspiegels  $WW$  im Gefäße vom Scheitel  $B$  oder höchsten Punkte des Heberröhrens muß kleiner wie  $b$  d. i. kleiner wie  $10^m,333$  sein, da der in  $B$  von links nach rechts wirksame Druck  $\gamma (b - \overline{DE})$  nicht negativ sein darf, also  $b > \overline{DE}$  erfordert wird.

Zusatz. In dem Gebiete des Maschinenwesens und der Baukunst macht man, um Wasser über Höhen (nicht auf Höhen) zu heben, von dem Heber mannigfachen nützlichen Gebrauch. So benutzt man ihn bei geringen Gefällen zur Zuleitung des Aufschlagwassers der Turbinen, wenn deren Tieferlegung nicht zulässig ist<sup>1)</sup>, ferner als selbstfüllenden

<sup>1)</sup> Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre, Bd. I (Zweite Auflage, S. 413).

Heber (wie er schon den Alten unter dem Namen „diabetes“ bekannt war) zur Hahnsteuerung bei Maschinen etc.<sup>1)</sup> Auch benutzt man den Heber, um überflüssiges Wasser aus Behältern abzulassen (wie beim Canale von Languedoc)<sup>2)</sup>, oder Wasser über Höhen zu leiten, wo ein Fortleiten in Röhren durch die Höhen nicht möglich, oder, der örtlichen Umstände wegen, nicht rätlich ist. Eine Anordnung letzterer Art zeigt Fig. 60. Das dort bemerkte Fluthwasser gehört der Schelde an, der Graben *WW*, welcher von diesem Wasser gespeist werden soll, gehört zum Marienfort unterwärts Antwerpen etc.<sup>3)</sup>.

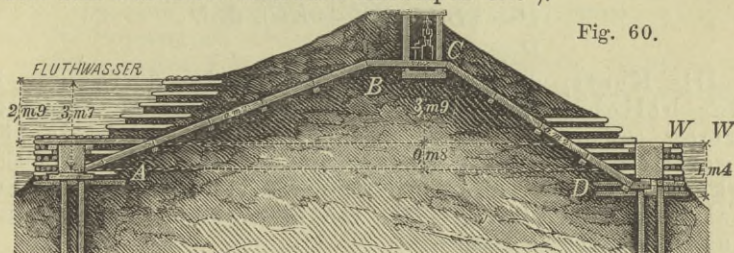


Fig. 60.

Der ganze Heber *ABCD* wird von einer gußeisernen  $0^m,2$  weiten Röhre gebildet. Um den Heber in Thätigkeit zu setzen, d. h. um die in der Röhre *ABCD* enthaltene Luft auszutreiben und Wasser eintreten lassen zu können, ist auf der höchsten Stelle bei *B* eine entsprechende Saugpumpe angebracht. Die wirksame Druckhöhe ist hierbei  $2^m,9$ <sup>4)</sup>.

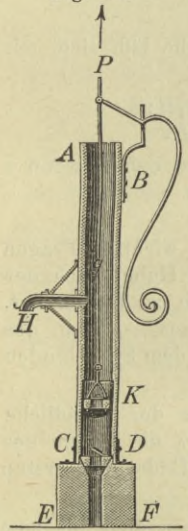
Fig. 61.

## §. 57.

## III. Pumpen (Kolbenpumpen).

Es sei *ABCD*, Fig. 61, der Kolbencylinder (Stiefel) einer Wasserpumpe mit durchbrochenem Kolben *K*, sowie *CEFD* das unterwärts angebrachte (in der Abbildung verkürzte) Saugrohr mit dem Saugventile bei *CD*. Man soll die Größe der in der Kolbenstange anzubringenden Kraft *P* bestimmen, welche, wenn von allen sogenannten passiven Widerständen (auch vom Gewichte des Kolbens) abgesehen wird, den Kolben in einer bestimmten Lage im Gleichgewicht zu halten im Stande ist.

Auflösung. Nehmen wir an, es sei der ganze Raum *GCF* der Pumpe mit Wasser gefüllt, der Kolben *K* im Aufsteigen begriffen und für einen Augenblick in der gezeichneten Stelle festgehalten, die Ventile im Kolben geschlossen, dagegen das Saugventil *CD* geöffnet. Wird dann der Kolbendurchmesser mit *D*, die den Atmosphärendruck messende Wassersäule mit *b* ( $= 10^m,333$ ) bezeichnet



<sup>1)</sup> Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre, Bd. IV, S. 581.

<sup>2)</sup> Gerstner, Mechanik, Bd. 2, S. 269, Tafel 52.

<sup>3)</sup> Förster, Bauzeitung 1852, S. 260.

<sup>4)</sup> Anwendung des Saughebers zur Wassergewältigung in der Grube „Himmelsbeck“ bei Mühlheim und in der Grube „Bergwerkswohlfahrt“ bei Clausthal. Kerls, Berg- und Hüttenmännische Zeitung, Jahrg. 1864, S. 367. Die Siphons des Verdon-Canales. Annales des ponts et chaussées 1877, Pg. 370.

und  $\frac{\pi}{4} = 0,785 = \pi'$  gesetzt, so beträgt, mit Bezug auf die Figur, das auf die obere Kolbenfläche drückende Gewicht:

$$(1) \quad \gamma D^2 \pi^1 [b + \overline{GK}],$$

während die untere Kolbenfläche einen Druck erfährt, der gleich ist:

$$(2) \quad \gamma D^2 \pi^1 [b - \overline{KF}].$$

Wird (2) von (1) abgezogen, so erhält man für die bestimmende Kraft  $P$  den Werth:

$$P = \gamma D^2 \pi^1 [\overline{GK} + \overline{KF}], \text{ d. i.}$$

$$P = \gamma D^2 \pi^1 \cdot \overline{FG}.$$

Die Kraft, welche den Kolben beim Aufgange in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht zu erhalten vermag (oder die Kraft zum Aufziehen bei gleichförmiger Bewegung) ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche den Querschnitt des Kolbens zur Basis und den Abstand des Unterwassers vom Ausgüßpunkte zur Höhe hat.

Die Kraft, welche beim Niedergange den Kolben im Gleichgewichte zu erhalten im Stande ist, hat nur die oben bemerkten passiven Widerstände, als Kolbenreibung, Durchgang des Wassers durch die Ventile, Anhängen des Wassers an den Röhrenwänden etc. zu überwinden und, da von diesen Widerständen hier (zunächst) abgesehen werden soll, so kann von einer derartigen Kraft weiter nicht die Rede sein.

Zusatz 1. Für die gewöhnlichen praktischen Fälle läßt sich, mit Beachtung der passiven Widerstände setzen:

$$\text{Aufgang: } P = 1\frac{1}{2} D^2 \pi_1 H \text{ bis } 1\frac{1}{5} D^2 \pi_1 H;$$

$$\text{Niedergang: } P_1 = \frac{1}{2} D^2 \pi_1 H \text{ bis } \frac{1}{5} D^2 \pi_1 H.$$

Die pro Sec. aufzuwendenden mechanischen Arbeiten sind daher, wenn  $v$  die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens bezeichnet:

$$L = Pv \text{ und } L_1 = P_1 v.$$

Zusatz 2. Eben so interessante als technisch wichtige Fragen sind die nach der Steighöhe des Wassers bei jedem Hube, nach der größten Steighöhe und den Anordnungen, welche man zu treffen hat, um den Nachtheil des sogenannten schädlichen Raumes — d. h. des bei jedem Hube zwischen der unteren Kolbenfläche und dem Stiefelboden verbleibenden Raumes — möglichst herabzuziehen.

Für diese Betrachtungen sei  $l$  der Kolbenhub,  $e$  der schädliche Raum,  $A$  der Stiefel- und  $a$  der Saugrohrquerschnitt,  $\lambda$  die Länge des Steigrohres und  $x_1$  die Steighöhe des Wassers am Ende des ersten Kolbenhubes, endlich  $b$  wiederum =  $10^m,333$ .

Bevor noch Wasser in die Pumpe tritt, der Kolben aber bis zum tiefsten Punkte herabgedrückt ist, besitzt die im Raume unter dem Kolben bis zum Unterwasser befindliche Luft

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ein Volumen} = \lambda a + eA \text{ und} \\ \text{eine Pressung} = b. \end{array} \right.$$

Nachdem der Kolben ganz erhoben und das Wasser im Saugrohre auf  $x_1$  Höhe gestiegen ist, hat diese Luft

$$(2) \begin{cases} \text{ein Volumen: } A(l + e) + a(\lambda - x_1) \text{ und} \\ \text{eine Spannung: } b - x_1. \end{cases}$$

Für die Bestimmung von  $x_1$  erhält man daher, nach dem Mariotte'schen Gesetze, ohne Weiteres die Proportion:

$$(3) Ae + a\lambda : A(l + e) + a(\lambda - x_1) = b - x_1 : b.$$

Wird jetzt der Kolben abermals ganz niederwärts bewegt, so verbleibt endlich nach dem Schlusse des Saugrohres zwischen diesem und der unteren Kolbenfläche ein Luftvolumen  $Ae$  von der Atmosphärenpressung  $= b$ . Dagegen verbleibt im Saugrohre ein Luftvolumen  $= a(\lambda - x_1)$  von der Pressung  $= b - x_1$ .

Dies letztere Volumen ist zur Bestimmung der Steighöhe  $= x_2$  beim zweiten Kolbenhube, auf ein Volumen  $= z$  von der Atmosphärenpressung  $= b$  zu reduciren und sodann mit  $Ae$  zu vereinigen. Hierzu ist

$$\begin{aligned} z : a(\lambda - x_1) &= (b - x_1) : b, \text{ d. i.} \\ z &= \frac{a(b - x_1)(\lambda - x_1)}{b}. \end{aligned}$$

Daher das von dem zweiten Aufzuge des Kolbens in der Pumpe überhaupt eingeschlossene Luftvolumen von Atmosphärenpressung  $= b$ :

$$(4) Ae + \frac{a(b - x_1)(\lambda - x_1)}{b}.$$

Ist sodann der zweite Kolbenaufgang vollendet und ist dabei das Wasser in der Saugröhre auf die Höhe  $x_2$  gestiegen, so besitzt die in der Pumpe abgesperrte Luft

$$(5) \begin{cases} \text{ein Volumen: } A(l + e) + a(\lambda - x_2) \text{ und} \\ \text{eine Spannung: } b - x_2. \end{cases}$$

Aus (4) und (5) erhält man daher zur Bestimmung von  $x_2$ :

$$(6) \frac{Ae b + a(b - x_1)(\lambda - x_1)}{b} : A(l + e) + a(\lambda - x_2) = b - x_2 : b.$$

Hieraus wird man leicht erkennen, daß nach dem  $n^{\text{ten}}$  Kolbenaufgange die Steighöhe  $= x_n$  aus der Proportion zu reduciren ist:

$$I. \frac{Ae b + a(b - x_{n-1})(\lambda - x_{n-1})}{b} : A(l + e) + a(\lambda - x_n) = b - x_n : b.$$

Die Existenz dieser Proportion ist zunächst an die Bedingung geknüpft, daß  $x_{n-1} < b$  sei. Stellt man sich daher unter  $x_{n-1}$  die größte Steighöhe  $= X$  des Wassers vor, so wird zur Bestimmung von  $X$  auch  $x_n = X$  zu setzen sein. Führt man letztere Größe in I. ein und reducirt auf dieselbe, so folgt endlich:

$$X = \frac{bl}{e + l} = \frac{b}{1 + \frac{e}{l}}.$$

Die größte Saughöhe einer Pumpe kann daher niemals die Höhe einer Säule von der Dichte der zu hebenden Flüssigkeit erreichen, welche dem Drucke einer Atmosphäre das Gleichgewicht hält. Es wird also  $X < 10^m,333$  für Wasser,  $X < 0^m,76$  für Quecksilber etc. Ferner tritt, unter sonst gleichen Umständen, der schädliche Raum um so weniger nachtheilig auf, je größer man den Kolbenhub macht.

Für  $e = 0^m,076$  und  $b = 10^m,333$  ergiebt sich:

$$X = 8^m, 26, \text{ wenn } l = 0^m, 3,$$

$$X = 9^m, 60, \text{ wenn } l = 1^m, 0 \text{ ist.}$$

Zusatz 3. Luftpumpe. Bezeichnet  $V$  den Inhalt des Receptienten und  $v$  den des Stiefels einer Luftpumpe, so erhält man:

A. Für die Verdünnungspumpe die Dichte  $= x_1$  nach dem ersten Zuge aus der Proportion:

$$\frac{V : (V + v) = x_1 : b, \text{ d. i.}}{x_1 = b \left( \frac{V}{V + v} \right)}.$$

Eben so für die Dichte  $= x_2$  nach dem zweiten Zuge:

$$\frac{V : (V + v) = x_2 : x_1}{x_2 = x_1 \left( \frac{V}{V + v} \right) = b \left( \frac{V}{V + v} \right)^2},$$

daher nach dem  $n^{\text{ten}}$  Kolbenzuge die Dichte  $x_n$ :

$$x_n = b \left( \frac{V}{V + v} \right)^n.$$

B. Für die Verdichtungs- (Compressions-) Pumpe ergibt sich, in ähnlicher Weise verfahren, die Dichte nach  $n$  Kolbenzügen zu:

$$x_n = \frac{V + nv}{V}.$$

In beiden Fällen A. und B. ist der schädliche Raum der Pumpen unbeachtet geblieben.

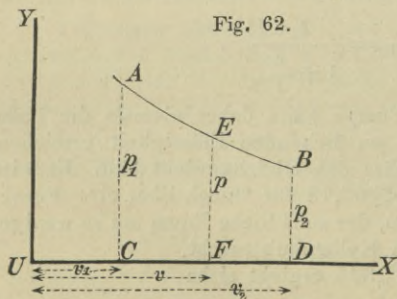
Beispiel. Bei der atmosphärischen Eisenbahn von Kingston nach Dalkey in Irland betrug der cubische Inhalt der 7470 Fuß (engl.) langen und 15 Zoll im Durchmesser haltenden, zwischen den Bahnschienen liegenden Triebröhre (incl. 5% wegen Nichtdichten derselben) 9630 Cubikfuß. Der Inhalt des dortigen Luftpumpenstiefels (bei 67 Zoll Durchmesser und 66 Zoll Hub) war gleich 134,66 Cubikfuß. Es fragt sich, wie viel Spiele die Luftpumpe machen mußte, wenn die Luft aus der Triebröhre bis auf 15 Zoll Quecksilbersäule ( $\frac{1}{2}$  Atmosphäre Spannung) ausgepumpt werden sollte?

Auflösung. Aus Zusatz 3, A, folgt unmittelbar:

$$n = \frac{\text{Lg } b - \text{Lg } x_n}{\text{Lg } (V + v) - \text{Lg } V} = \frac{\text{Lg } 30 - \text{Lg } 15}{\text{Lg } 9765 - \text{Lg } 9630} = 49,95.$$

### §. 58.

#### Isothermische Expansion und Compression.



Es sei  $AB$ , Fig. 62, die Druckcurve nach dem Mariotte'schen Gesetze, also nach §. 54 die isothermische Curve und zwar sei  $v_1$  ein Volumen, welches in einem (cylindrischen) geeigneten Gefäße abgesperrt ist und die Pressung  $p_1$  besitzt. Sodann werde  $v_1$  durch die Abscisse  $UC$  und  $p_1$  durch die Ordinate  $AC$  der Druckcurve dargestellt.



Das ausgedehnte, nach der Expansion vorhandene Volumen sei  $v_2$  und werde durch die Abscisse  $UD$ , die correspondirende (geringere) Pressung  $p_2$  durch die Ordinate  $BD$  sichtbar gemacht.

Der Querschnitt des gedachten cylindrischen Gefäßes sei  $a$ , der nach einer beliebigen Zeit von einem entsprechenden Kolben zurückgelegte Weg sei  $s$  und die correspondirende Pressung auf die Flächeneinheit des Kolbens sei  $= p$ . Dann erhält man offenbar für die elementare Expansionsarbeit  $d\mathfrak{A}_e$ :

$$d\mathfrak{A}_e = apds, \text{ oder, wenn } ads = dv \text{ gesetzt wird:}$$

$$(1) \quad d\mathfrak{A}_e = p dv.$$

Mit Bezug auf unsere Figur wird aber  $p$  durch eine entsprechende Ordinate  $EF$ , so wie das correspondirende Volumen durch die zugehörige Abscisse  $AF$  dargestellt. Hiernach erhält man aus (1)

$$\mathfrak{A}_e = \int_{v_1}^{v_2} p dv.$$

Hiernach wird die Expansionsarbeit durch den Flächeninhalt des Vierecks  $ABDC$  repräsentirt.

Zur Ausführung der Integration hat man nur zu beachten, daß, den Voraussetzungen entsprechend,  $p = \frac{p_1 v_1}{v}$  und  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2}$  ist, also erhalten wird:

$$\text{I. } \mathfrak{A}_e = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_1}{p_2}.$$

Die unter gleichen Umständen stattfindende Compressionsarbeit, um ein Volumen  $v_2$  von der Pressung  $p_2$  zum Volumen  $v_1$  mit der Pressung  $p_1$  zu comprimiren, wird eine Arbeit  $\mathfrak{A}_c$  erfordert, welche sich aus dem Vorstehenden ergibt zu:

$$\text{II. } \mathfrak{A}_c = - p_2 v_2 \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{v} = p_2 v_2 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_2 v_2 \text{ Lgnt. } \frac{v_2}{v_1} = p_2 v_2 \text{ Lgnt. } \frac{p_1}{p_2},$$

oder da  $p_2 v_2 = p_1 v_1$  ist, auch

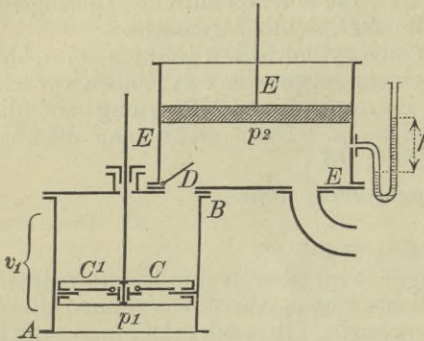
$$\mathfrak{A}_c = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_1}{p_2},$$

woraus schließlich  $\mathfrak{A}_e = \mathfrak{A}_c$  folgt.

Von den mannigfach praktisch wichtigen Anwendungen, welche von vorstehenden Gleichungen I. und II. gemacht werden können, mag hier zunächst die Platz finden, welche die Frage nach dem theoretischen Arbeitsaufwand zum Betriebe der Cylindergebläse für Metallschmelzöfen betrifft.

Hierzu sei in Fig. 63  $AB$  der zur Aufnahme und Comprimirung bestimmte Cylinder, dessen Inhalt  $= v_1$  mit atmosph. Luft von der Pressung  $p_1$  gefüllt ist. Beim Niedergange des gehörig dichtenden Kolbens  $C$  wird zuerst ein bestimmter Weg zurückgelegt, während

Fig. 63.



dessen keine Luft aus  $AB$  in den Sammelbehälter (Regulator)  $E$  tritt, sondern dieselbe nur ein Zusammen-drücken erfährt. Erst wenn das ursprüngliche Volumen  $v_1$  auf  $v_2$  von der Pressung  $p_2$  zusammengedrückt wurde, erfolgt das Öffnen eines (hier gewichtslos gedachten) Ventiles  $D$  und der Uebertritt, das Fort-schaffen der Luft in dem Sammelbehälter  $E$ .

Bei aufmerksamer Betrachtung erkennt man leicht, daß der gesammte Arbeitsaufwand  $= \mathcal{A}$ , bei einem Niedergange des Kolbens aus nachbemerkten drei Theilen besteht:

Erstens aus der Arbeit  $= \mathcal{A}_c$  zum Comprimiren des Volumens  $v_1$  von  $p_1$  Pressung auf  $p_2$  d. i.  $\mathcal{A}_c = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{p_1}$ .

Zweitens aus der Arbeit  $= \mathcal{A}_f$  zum Fortschaffen der auf  $p_2$  zusammen gepreßten Luft vom Volumen  $v_2$ , d. i.  $\mathcal{A}_f = p_2 v_2$ , und

Drittens aus der Arbeit  $= \mathcal{A}_a$ , welche nutzbringend die äußere atmosphärische Luft auf die äußere (untere) Fläche des Kolbens  $C$  ausübt, also

$$\mathcal{A}_a = p_1 v_1.$$

Sonach ist

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_c + \mathcal{A}_f - \mathcal{A}_a, \text{ oder}$$

$$\mathcal{A} = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{p_1} + p_2 v_2 - p_1 v_1, \text{ d. i.,}$$

weil  $p_2 v_2 = p_1 v_1$ :

$$\text{III. } \mathcal{A} = p_1 v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{p_1} = p_2 v_2 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{p_1}.$$

Ganz denselben Ausdruck erhält man für die Arbeit, welche frei wird, wenn man das zusammengedrückte Volumen  $v_2$  von der Pressung  $p_2$  aus dem Reservoir  $E$  in einen zweiten Cylinder treten, hier durch Expansion wieder auf einen Kolben wirken und schließlich in die Atmosphäre entweichen läßt. Diese Art der Arbeitsleistung tritt u. A. bei den durch gepreßte atmosph. Luft betriebenen Tunnelbohrmaschinen ein, woselbst der gedachte zweite Cylinder der Bohrmaschine angehört.

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen ergibt sich nämlich: <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Man sehe hierüber eine höchst werthvolle Arbeit des Herrn Professor Dolezalek am Königl. Polytechnikum zu Hannover, welche im Jahrgange 1878, S. 42 und S. 48 der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, unter der Ueberschrift „Bemerkungen über Bohrmaschinen im Gotthardtunnel“ abgedruckt ist.

$$\mathcal{W}_e = p_2 v_2 \text{Lgnt.} \frac{p_2}{p_1},$$

$\mathcal{W}_f = (p_2 - p_1) v_2$  (hier Volldruckarbeit genannt) und

$\mathcal{W}_a = (v_1 - v_2) p_1$ , daher

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_e + \mathcal{W}_f - \mathcal{W}_a = p_2 v_2 \text{Lgnt.} \frac{p_2}{p_1} + p_2 v_2 - p_1 v_2 - p_1 v_1 + p_1 v_2, \text{ d. i.}$$

$$\mathcal{W} = p_2 v_2 \text{Lgnt} \frac{p_2}{p_1}.$$

In vorstehende Gleichungen führt man sehr oft (für hüttenmännische Zwecke) statt der Pressungen  $p_1$  und  $p_2$  die correspondirenden Barometer- und Manometerstände ein. Wird ersterer mit  $b$  und letzterer mit  $h$  (Fig. 63) bezeichnet, so erhält man, unter Voraussetzung einer Manometerflüssigkeit von der Dichte  $\Delta$ :

$$p_1 = \Delta \cdot b \text{ und } p_2 = \Delta \cdot (b + h), \text{ daher}$$

$$\text{IV. } \mathcal{W} = \Delta b v_1 \text{Lgnt.} \frac{b+h}{b}.$$

Ist  $h$  recht klein<sup>1)</sup>, so läßt sich annäherungsweise

$$\text{Lgnt.} \frac{b+h}{b} = \frac{h}{b} \text{ setzen,}$$

so daß statt IV. erhalten wird:

$$\text{V. } \mathcal{W} = \Delta \cdot h \cdot v_1^2.$$

Letztere Gleichung entspricht der bei Fachleuten am meisten angewandten Regel, daß man den erforderlichen theoretischen Arbeitsaufwand eines Gebläses findet, wenn man die bedürftigte Windmenge mit dem Manometerstande und mit der Dichte der Manometerflüssigkeit multiplicirt.

Beispiel 1. Mittelst eines Cylindergebläses soll pro Secunde 1 Cubikmeter Wind von 83 Centimeter Pressung (Quecksilbermanometer) in einen Hochofen geschafft werden und zwar an einer Stelle, wo ein (mittlerer) Barometerstand von 71 Centimeter (Quecksilbersäule) vorhanden ist. Welcher theoretische Arbeitsaufwand ist hierzu erforderlich?

Auflösung. Aus Gleichung IV. ergiebt sich ( $\Delta = 1000 \cdot 13,6$  angenommen):

$$\mathcal{W} = (1000 \cdot 13,60) \cdot 0,71 \cdot 1,0 \cdot \text{Lgnt.} \frac{83}{71}, \text{ d. i.}$$

$$\mathcal{W} = 9686 \cdot \text{Lgnt.} 1,17 = 9686 \cdot 0,157 = 1520,7^{mk},$$

oder in Maschinenpferdekräften (=  $N$ ) à  $75^{mk}$  ausgedrückt

$$N = \frac{1520,7}{75} = 21,6.$$

<sup>1)</sup> Bei gewöhnlichen Eisenhochöfengebläsen mit Cokesfeuerung übersteigt  $h$  fast niemals  $\frac{1}{3}$  Atmosph. oder ist allerhöchstens  $h = \frac{0^m,76}{3} = 0^m,25$ . Bei Ge-

bläsen zum Bessemerproceße kommen dagegen Pressungen von  $1\frac{1}{2}$  bis (wohl gar) 2 Atmosphären vor und ist dann im ersteren Falle  $h = 1,5 \cdot 0,76 = 1,140$  Meter.

<sup>2)</sup> Bei weitem wissenschaftlichere Effectberechnungen der Gebläse haben Weisbach (Ing.-Mech. Bd. 3, S. 1055 ff.) und besonders Grashof (Zeitschr. des Vereins deutscher Ing. Bd. VIII, S. 47 und 101) geliefert. Man sehe hinsichtlich der von Grashof gefundenen Werthe auch Redtenbacher's Resultate des Maschinenbaues. 6. Auflage, Seite 381.

Die Gleichung V. liefert dagegen:

$$\mathcal{A} = 1000 \cdot 13,6 \cdot 0,12 = 1632^{mk} \text{ und daher}$$

$$N = \frac{1632}{75} = 20,9.$$

Den erforderlichen, reellen Arbeitsaufwand =  $\mathcal{A}r$ , welcher sämtliche vorhandene mechanische und hydraulische Widerstände überwindet, nimmt man bei Gebläsen gewöhnlich zu 0,60 an, d. h. setzt

$$\mathcal{A}r = \frac{\mathcal{A}}{0,6}$$

und erhält daher im vorberechneten speciellen Falle:

$$\mathcal{A}r = \frac{p_1 v_1}{0,60} \cdot \text{Lgnt. } \frac{p_2}{p_1}, \text{ oder in Maschinen-Pferdekräften}$$

$$Nr = \frac{p_1 v_1}{75 \cdot 0,60} \cdot \text{Lgnt. } \frac{p_2}{p_1} {}^1).$$

Beispiel 2. Zum Betriebe einer der im Gotthardtunnel benutzten (Ferroux'schen) Gesteinbohrmaschinen werden pro Minute 0,58 Cubikmeter atmosphärische Luft von 5 Atmosphären absoluter Spannung benutzt. Es fragt sich, welche (theoretische) mechanische Arbeit =  $\mathcal{A}$  diesem Falle entspricht<sup>2</sup>).

Auflösung. Man erhält ohne Weiteres, mittelst der Gleichung III. die secundliche Arbeit zu

$$\mathcal{A} = 5 \cdot 10333 \cdot \frac{0,58}{60} \cdot \text{Lgnt. } 5, \text{ d. i.}$$

$$\mathcal{A} = 499,43 \cdot 1,609 = 803^{mk},58 \text{ und}$$

$$N = \frac{803,58}{75} = 10,71.$$

## §. 59.

### Das potenzierte Mariotte'sche Gesetz.

(Das Laplace'sche oder Poisson'sche Gesetz).<sup>3</sup>)

Befindet sich Gas in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle, so daß während einer Volumenänderung des Gases weder Wärme mitgetheilt noch entzogen wird, oder geht die Volumenänderung so schnell vor sich, daß in der entsprechend kurzen Zeit keine (merkliche) Wärmemenge zu oder abströmen kann, so ist das Mariotte'sche Gesetz in seiner ursprünglichen Form nicht

<sup>1</sup>) Hierdurch erklärt sich u. A. die in der 6. Auflage, S. 383 von Redtenbacher's Resultaten für den Maschinenbau befindliche Gleichung für den Nutzeffect, welchen eine betreffende Betriebsmaschine, in Pferdekräften ausgedrückt, bei Gebläsen entwickeln muß, die folgende Gestalt hat:

$$Nr = \frac{1,70 \cdot 10333}{75} \cdot v_1 \text{ Lgnt. } \frac{p_2}{10333}.$$

<sup>2</sup>) Professor Dolezaleck a. a. O. S. 122.

<sup>3</sup>) Daß richtiger hier Laplace statt Poisson genannt wird, erhellt aus einem folgenden mit der Ueberschrift „Geschichtliche Notizen“ überschriebenen Paragraphen.

mehr gültig, sondern tritt nach Laplace<sup>1)</sup> und Poisson<sup>2)</sup> unter der Gestalt auf:

$$\text{I. } \left\{ \frac{A_1}{A_2} = \frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^n, {}^3 \right\}$$

wo für atmosphärische Luft  $n = 1,41$  ist. Redtenbacher hat hierfür den passenden Namen des potenzierten Mariotte'schen Gesetzes eingeführt.

Verbindet man hiermit (nach §. 54) die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 v_1 &= RT_1 \text{ und} \\ p_2 v_2 &= RT_2, \end{aligned}$$

so erhält man noch folgende Werthe:

$$\text{II. } \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1}.$$

$$\text{III. } \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \text{ und}$$

$$\text{IV. } \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \text{ so wie}$$

$$\text{V. } T_2 p_2^{-\frac{n}{n-1}} = T_1 \cdot p_1^{-\frac{n}{n-1}} = \text{Constante.}$$

Rechnet man mit diesen Gleichungen, so ist es von Nutzen, zu beachten, daß für  $n = 1,41$ , auch

$$\frac{1}{n} = 0,7093; \quad n - 1 = 0,41; \quad \frac{n-1}{n} = 0,2908 \text{ und}$$

$$\frac{n}{n-1} = 3,439 \text{ wird.}$$

Stellt man, in gleicher Weise wie §. 54 beim Mariotte'schen Gesetze geschah, auch das Laplace-Poisson'sche Gesetz derartig dar, daß die verschiedenen Werthe der Volumen  $v$  die Abscissen und die correspondirenden Pressungen  $p$  die Ordinaten bilden, so erhält

<sup>1)</sup> Oeuvres de Laplace, V, Pg. 155 (Chapitre III unter der Ueberschrift: „De la vitesse du son et du mouvement des fluides elastiques“).

<sup>2)</sup> Traité de mécanique. Paris 1811. Zweite Ausgabe 1833. Deutsche Bearbeitung von Stern (in Göttingen) von 1836, §. 638, Seite 501.

<sup>3)</sup> Clausius leitet dies Gesetz, in höchst sinnreicher, eigenthümlicher Weise, in der 2. Auflage seiner mechanischen Wärmetheorie (S. 65) aus den Fundamentalgleichungen letzterer Wissenschaft ab, so wie er ferner, in derselben Quelle, den Werth des Exponenten  $n$  aus der Gleichung berechnet:

$$n = \frac{u^2 \cdot A}{g \cdot p},$$

worin  $u$  die Schallgeschwindigkeit bei Null Grad Temperatur bezeichnet, also  $u = 332,40$  Meter (nach Bravais und Martins), ferner  $A = 1,2932$ ,  $g = 9,809$  und  $p = 10333$  ist, so daß erhalten wird:

$$n = \frac{(332,5)^2 \cdot 1,2932}{9,8089 \cdot 10333} = 1,410.$$

man eine krumme Linie, welche man (nach Rankine) die adiabatische Curve<sup>1)</sup> zu nennen pflegt.

Beispiel 1. Wenn man im Beispiele 2 des vorigen Paragraphen voraussetzen wollte, daß bei atmosphärischer Luft in den Bohrmaschinen des Gotthardtunnels weder Wärme ab noch zugeführt wird, so fragt es sich, wie groß die Temperaturerniedrigung am Ende der dort stattfindenden Expansion von 5 auf 1 Atmosphäre sein müßte, wenn die anfängliche Temperatur 10 Grad ist.

Auflösung. Man erhält hier ohne Weiteres, nach III:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = T_1 \left( \frac{1}{5} \right)^{0,2907}, \text{ d. i.}$$

wegen  $T_2 = 273 + t_2$  und  $T_1 = 273 + 10 = 283$

$$273 + t_2 = 283 \left( \frac{1}{5} \right)^{0,2907}, \text{ d. i.}$$

$$t_2 = -273 + \frac{283}{5^{0,2907}} = 175,5 - 273,0, \text{ also}$$

$$t_2 = -97,5 \text{ Grad Celsius.}$$

Beispiel 2. In einem Cylinder hat man 1 Kilogramm atmosphärische Luft von Null Grad Temperatur und der Pressung = 1 Atmosphäre eingeschlossen, es fragt sich, auf wie viel sich diese Luft erwärmt, wenn dieselbe so zusammengedrückt wird, daß die Spannung das Doppelte, also zwei Atmosphären erreicht?

Auflösung. Hier ist

$$T_1 = T_2 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \text{ also } 273 + t_1 = 273 (2)^{0,2908}, \text{ folglich}$$

$$t_1 = 334 - 273 = 61, \text{ d. h.}$$

die Luft erwärmt sich um 61 Grad.

§. 60.

Adiabatische Expansion und Compression.

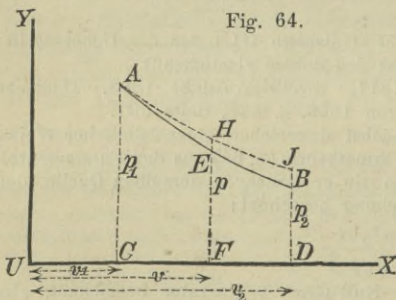


Fig. 64.

Um einen Ausdruck für die Expansionsarbeit eines Gases zu entwickeln, wobei die sogenannte Druckcurve die adiabatische Curve AB Fig. 64 ist<sup>2)</sup>, sei, wie in §. 58 das ursprüngliche Volumen  $v_1$  durch die Abscisse UC, die correspondirende Pressung  $p_1$  durch die correspondirende Ordinate AC dargestellt, während die Endwerthe von  $v$  und  $p$  durch  $v_2 = UD$  und  $p_2 = DB$  repräsentirt sind.

Zur Ausführung der Integration des Ausdruckes

<sup>1)</sup> Vom griechischen Worte διαβαίνειν (diabainein) durchgehen.

<sup>2)</sup> Die punktirte Linie AHJ stellt die correspondirende isothermische Curve dar.

$$(1) \quad d\mathcal{W}_e = p dv,$$

ist vorstehendem Paragraphen gemäß

$$p = p_1 v_1^n \cdot \frac{1}{v^n},$$

so daß (1) übergeht in

$$\mathcal{W}_e = p_1 v_1^n \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^n}, \text{ d. i.}$$

$$\text{I. } \begin{cases} \mathcal{W}_e = \frac{p_1 v_1^n}{n-1} \left( \frac{1}{v_1^{n-1}} - \frac{1}{v_2^{n-1}} \right) \text{ oder auch:} \\ \mathcal{W}_e = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right\}. \end{cases}$$

Oder mit Bezug auf §. 59, indem man beachtet, daß

$$\frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{n}} \text{ ist:}$$

$$\mathcal{W}_e = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}.$$

Für die Compressionsarbeit  $= \mathcal{W}_e$  erhält man auf gleichem Wege

$$\text{II. } \mathcal{W}_e = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\}.$$

Um demnach ein Volumen  $v_1$  atmosphärischer Luft von  $p_1$  Pressung, ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme, erstens bis zur Pressung  $p_2$  zu comprimiren und zweitens aus dem Raume von der Pressung  $p_1$ , worin sie das Volumen  $v_1$  hatte, mit dem entsprechend verkleinerten Volumen  $v_2$  in einen Raum von der Pressung  $p_2$  zu versetzen, ist, analog des gleichen Falles §. 58, S. 122 (bei Benutzung des Mariotte'schen Gesetzes) eine Arbeit  $= \mathcal{W}_1$  aufzuwenden, welche sich aus der Gleichung berechnet:

$$\mathcal{W}_1 = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\} + p_2 v_2 - p_1 v_1, \text{ oder wegen}$$

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 = p_1 v_1 \left\{ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right\} = p_1 v_1 \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\};$$

$$\mathcal{W}_1 = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\} + p_1 v_1 \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\}, \text{ d. i. endlich}$$

$$\text{III. } \mathcal{W}_1 = \frac{n}{n-1} p_1 v_1 \left\{ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\}.$$

Wird umgekehrt, unter sonst gleichen Umständen, das Volumen  $v_2$  von der Pressung  $p_2$  durch plötzliche Expansion auf das Volumen  $v_1 = v_2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}$  zurückgeführt, so wird eine Arbeit =  $\mathfrak{A}_2$  frei oder verrichtet:

$$\text{IV. } \mathfrak{A}_2 = \frac{n}{n-1} p_2 v_2 \left\{ 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}.$$

Beispiel 1. In einem Windkessel befindet sich ein Luftvolumen  $v_1$  bei einem Drucke  $p_1 = 5$  Atmosphären abgesperrt. Es fragt sich, welche Compressionsarbeit =  $\mathfrak{A}_c$  erforderlich ist, wenn der Druck bis auf 47,2 Atmosphären gebracht werden soll.

Auflösung. Die Gleichung I. liefert hier ohne Weiteres

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_c &= \frac{5 \cdot 10333 \cdot v_1}{0,41} \left\{ \left(\frac{47,2}{5}\right)^{0,2908} - 1 \right\}, \text{ d. i.} \\ \mathfrak{A}_c &= 126012,2 \cdot v_1 \left\{ (9,44)^{0,2908} - 1 \right\} \text{ und} \\ \mathfrak{A}_c &= 126012,2 \cdot 0,920 \cdot v_1 = 115931,2 \cdot v_1.^1) \end{aligned}$$

Beispiel 2. Welche Betriebsarbeit =  $\mathfrak{A}$  berechnet sich für das bereits Seite 123 betrachtete Gebläse, womit pro Secunde 1 Cubikmeter Luft atmosphärischer Pressung erstens bis auf  $\frac{83}{71}$  Atmosphären zusammengedrückt und zweitens einem Windreservoir (Regulator) zugeführt werden sollte, sobald man annimmt, daß die Druckveränderung nach dem Laplace'schen Gesetze vor sich geht?

Auflösung. Mit Hülfe von Gleichung II, erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= 3,44 \left\{ \left(\frac{83}{71}\right)^{0,2908} - 1 \right\} 1 \cdot 10333, \\ \mathfrak{A} &= 35545,52 \left\{ (1,17)^{0,2908} - 1 \right\}, \\ \mathfrak{A} &= 35545,52 \cdot 0,046 = 1635,1^{mk} \text{ oder} \\ N &= \frac{1635,1}{75} = 21,80 \text{ Maschinenpferde,} \end{aligned}$$

statt  $N = 21,6$  und  $20,9$  solcher Pferdekkräfte, wenn (wie §. 58) die isothermische Linie als Druckcurve angenommen wird.

## §. 61.

### Wärmeeinheit und spezifische Wärme.

Vor weiteren Erörterungen und Verwendungen der Gesetze vorstehender Paragraphen sind hier noch einige Eigenschaften der Wärme zu notiren.

<sup>1)</sup> Der Verfasser entlehnte dies Beispiel absichtlich der 2. Auflage des vortrefflichen Grashof'schen Werkes „Theorie der Elasticität und Festigkeit“, S. 462, um damit zugleich auf das in dieser Quelle behandelte Capitel „der Deformationsarbeit“ von Wasserleitungsröhren aufmerksam zu machen, wenn das in solchen Röhren fließende Wasser plötzlich in seiner Bewegung gehemmt wird (der sogenannte hydraulische Widder auftritt). Der sonach von Grashof behandelte Gegenstand ist zugleich als Ergänzung der in §. 21, S. 38—44 aufgestellten Formeln zur Berechnung von Röhrenwanddicken zu betrachten.



Als aus der Allgemeinen Physik bekannt ist zunächst vorauszusetzen, daß man zur Messung der mannigfaltigen Wirkungen, welche die Wärme hervorbringt, übereingekommen ist, diejenige Wärmegröße (Wärmemenge) als Einheit (als Wärmeeinheit, Calorie) anzunehmen, welche erforderlich ist, die Temperatur eines Kilogrammes destillirten Wassers um einen Grad des hunderttheiligen Thermometers zu erhöhen. Dabei entspricht einer Wärmeeinheit (Calorie) ein mechanisches Aequivalent von 425 Meterkilogrammen und das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit ist gleich  $\frac{1}{425}$  Calorien. Mit der Arbeit von 425 Calorien kann man folglich 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad des hunderttheiligen Thermometers erwärmen. Auf die Erörterung und Ermittlung dieser Werthe soll im folgenden Paragraphen besonders eingegangen werden.

Die Erfahrung lehrt ferner, daß jeder Körper eine besondere Empfänglichkeit für die Wärme besitzt, d. h. gleiche Gewichte der Körper nicht um gleich viel Temperaturgrade geändert werden. Diese verschiedene Empfänglichkeit für Wärmeaufnahme pflegt man die Wärmecapacität oder die specifische Wärme der Körper zu nennen<sup>1)</sup>.

Für feste und tropfbar flüssige Körper nimmt man die specifische Wärme des Wassers, dagegen für Gase die specifische Wärme der atmosphärischen Luft zur Einheit an.

Hiernach gelangt man aber zur Berechnung der Wärmemenge (oder Anzahl Calorien) =  $Q$ , welche erforderlich ist, um  $P$  Kilogramme Wasser von  $t^0$  Temperatur auf die Temperatur  $t_1^0$  zu bringen, ohne Weiteres zu folgender Gleichung:

$$I. \quad Q = P (t_1 - t).$$

Ferner erhält man für einen Körper, verschieden vom Wasser, dessen Gewicht  $P_1$  ist und dem die specifische Wärme =  $c$  entspricht, zur Ermittlung der Anzahl von Calorien =  $Q_1$ , die Gleichung

$$II. \quad Q_1 = cP_1 (t_1 - t).$$

Für  $c$  aus zahlreichen Versuchen erhaltene Werthe<sup>2)</sup> finden sich (so weit es der hier vorliegende technische Zweck erfordert) in nachstehender Zusammenstellung:

Specifische Wärme einiger Körper nach Regnault:<sup>3)</sup>

Aluminium . . .	0,2143	Nickel . . .	0,1092
Antimon . . .	0,0508	Platin . . .	0,0324
Blei . . .	0,0314	Quecksilber . . .	0,0319
Eisen . . .	0,1138	Schwefel . . .	0,2026
Gold . . .	0,0324	Silber . . .	0,0570
Kohlenstoff . . .	0,1469	Wismuth . . .	0,0308
Kupfer . . .	0,0952	Zink . . .	0,0956
Mangan . . .	0,1217	Zinn . . .	0,0562

<sup>1)</sup> Man sehe hierzu noch Note <sup>(1)</sup> S. 141.

<sup>2)</sup> Bei Jamin a. a. O., T. II. (2. Auflage), Pg. 43\* und bei Wüllner a. a. O., im zweiten Bande, erster Abschnitt, drittes Capitel. In diesen Quellen werden auch mit entsprechender Ausführlichkeit die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der specifischen Wärme erörtert.

<sup>3)</sup> Mémoires de l'Academie des Sciences, T. XXI, und Wüllner, a. a. O., Bd. III, S. 460.

Hierbei ist noch zu beachten, daß die specifische Wärme mit steigender Temperatur wächst, wie unter Andern<sup>1)</sup> aus nachstehenden vom schwedischen Physiker Byström gewonnenen Resultaten erhellt<sup>2)</sup>).

Temperatur.	Specifische Wärme			
	Roheisen.	Gußstahl.	Silber.	Platin.
0° C.	0,12768	0,11782	0,05698	0,03286
50	0,12830	0,11850	0,05715	0,03248
100	0,12954	0,11986	0,05749	0,03266
200	0,13388	0,12462	0,05868	0,03332
300	0,14070	0,13216	0,12672	0,06055

Aus letzterer Tabelle erkennt man, daß bei niedrigen Temperaturen die Unterschiede der specifischen Wärmen für feste Körper verhältnißmäßig gering sind und daher für viele technische Anwendungen hierauf nicht Rücksicht genommen zu werden braucht.

Bei Flüssigkeiten ist der Temperatureinfluß bemerkbarer, indem hier die Erfahrung lehrt, daß schon eine geringe Aenderung der Temperatur eine merkliche Aenderung der specifischen Wärme zur Folge hat. So fand Regnault u. A.<sup>3)</sup> bei folgenden Substanzen die specifischen Wärmen:

	20 — 15°	15 — 10°	10 — 5°
Quecksilber . . .	0,0290	0,0283	0,0282
Alkohol . . . .	0,6148	0,6017	0,5987
Holzgeist . . . .	0,6009	0,5868	0,5901

Kennt man die Form des mathematischen Ausdruckes, welcher die specifische Wärme =  $c$  eines Körpers als Function der Temperatur =  $t$  darstellt, so kann man, wenigstens für eine unendlich kleine Temperatur-Zu- oder Abnahme,  $c$  als constant betrachten und dann, wenn  $P$  in den vorstehenden Gleichungen überdies noch = 1 Kilogramm gesetzt wird, für die entsprechende Wärmemenge =  $dq$  schreiben:

$$\text{III. } \left\{ \begin{array}{l} dq = cdt, \text{ oder} \\ q = \int_0^t cdt. \end{array} \right.$$

Bei Gasen und Dämpfen hat man noch den Unterschied der specifischen Wärme bei constantem Volumen und bei constanten Pressung zu beachten. Spricht man von der speci-

<sup>1)</sup> Wüllner, Experimentalphysik. Bd. III (Dritte Ausgabe), S. 437.

<sup>2)</sup> Berliner Bericht über die Fortschritte der Physik für 1860, S. 369.

<sup>3)</sup> Wüllner a. a. O., S. 437.

fischen Wärme bei constantem Drucke<sup>1)</sup>, so denkt man sich, das Gas dehne sich während der Wärmezuführung unter Ueberwindung eines äußeren constanten Druckes aus; während im anderen Falle eine solche Ausdehnung nicht erfolgt, sondern das Volumen unverändert erhalten wird. Nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie ist ohne Weiteres klar, daß die spezifische Wärme bei constantem Drucke größer, als die bei constantem Volumen sein muß, da im ersten Falle bei gleicher Temperaturerhöhung dem Gase eine größere Wärmemenge mitzuthemen ist, als im letzteren Falle, weil in Folge der Ausdehnung unter constantem Drucke Arbeit vom Gase verrichtet wird und sonach ein Theil der zugeführten Wärme verschwindet, oder, wie man sagt, in Arbeit verwandelt wird.

Vorstehender Erörterung gemäß werden wir die spezifische Wärme der Gase bei constantem Drucke mit  $c_p$  und die bei constantem Volumen mit  $c_v$  bezeichnen.

Zur Zeit ist die spezifische Wärme von Flüssigkeiten nur bei constanten und zwar atmosphärischer Pressung direct bestimmt worden, so z. B. für Wasser nach Regnault zu

$$c_p = 1 + 0,000\ 04t + 0,000\ 000\ 9t^2.$$

Die Gleichung III. liefert daher, für diesen speciellen Fall

$$IV. \quad q = t + 0,000\ 02t^2 + 0,000\ 000\ 3t^3,$$

wo also  $q$  die Wärmemenge ist, welche die Gewichtseinheit Wasser erfordert, um solche von  $0^\circ$  bis  $t^\circ$  zu erwärmen.

Die Ermittlung der spezifischen Wärme bei constantem Volumen hat man nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie vorgenommen (berechnet), worüber in den unten notirten Werken<sup>2)</sup> nachzulesen ist.

Bezeichnet man überdies das Verhältniß  $\frac{c_p}{c_v}$  mit  $n$ , so läßt sich folgende Zusammenstellung machen:

	$c_p$	$c_v$	$n = \frac{c_p}{c_v}$
Atmosphärische Luft	0,23751	0,16847	1,4098
Stickstoff . . . .	0,24380	0,17273	1,4114
Sauerstoff . . . .	0,21751	0,15507	1,4026
Wasserstoff . . . .	3,40900	2,41226	1,4132

Aus dieser Tabelle geht hervor, daß  $n$  fast constant und zugleich der Exponent des Laplace-Poisson'schen Gesetzes ist, wofür wir S. 125 für atmosph. Luft

$$n = 1,41$$

annahmen.

Statt der Gleichungen III. erhält man folglich hier

<sup>1)</sup> Zeuner, Mechanische Wärmetheorie (2. Auflage), S. 110 und S. 117.

<sup>2)</sup> Clausius, Die mechanische Wärmetheorie (2. Auflage), S. 59 unter der Ueberschrift „Numerische Berechnung der spezifischen Wärme bei constantem Volumen“. — Zeuner, a. a. O., S. 116. — Richard Rühlmann, Handbuch der mechanischen Wärmetheorie, Bd. 1, S. 181.

$$V. \quad dq_p = c_p dt,$$

wenn die Erwärmung bei constantem Drucke statthat und

$$VI. \quad dq_v = c_v dt,$$

wenn die Erwärmung bei constantem Volumen stattfindet.

**Beispiel.** Ein Dampfkessel aus Eisenblech von 11,4 Millimeter Dicke besteht aus einem Cylinder mit überall kreisförmigen Querschnitten und aus Halbkugeln an beiden Enden. Sein Durchmesser beträgt 1,553 Meter, während der cylindrische Theil 7,677 Meter Länge hat.

Es fragt sich, welches Wärmequantum erforderlich wird, um Kessel und Wasser von der Temperatur  $10^{\circ} C$  auf die von  $144^{\circ} C$  (4 Atmosphären innere Dampfspannung) zu bringen?

**Auflösung.** Der Gesamtinhalt dieses Kessels berechnet sich zu 18,50 Cubikmeter und sein Gewicht zu 5186 Kilogramm. Das Gewicht des Wassers, wenn der Kessel bis auf 0,60 seines Inhaltes gefüllt ist, läßt sich rund zu  $11.1000 = 11000$  Kilogramm annehmen.

Man erhält also nach I. und II. dieses Paragraphen

$Q = 11000 \cdot (144 - 10) = 1474000$  als erforderliche Wärmemenge für das Wasserquantum und

$Q_1 = 0,12 \cdot 5186 (144 - 10) = 83391$  für die Eisenmasse, wenn für Eisenblech  $c = 0,12$  angenommen wird.

Daher die gesammte erforderliche Wärmemenge:

$$Q + Q_1 = 1474000 + 83391 = 1557391 \text{ Calorien.}$$

## §. 62.

### Das mechanische Wärmeäquivalent.

Die hier zu lösende Aufgabe betrifft die Auffindung des bereits Seite 129 notirten Arbeitswerthes der Wärmeinheit. Wir bewirken die Lösung auf folgendem, zuerst von Weisbach<sup>1)</sup> angegebenen Wege.

Nach vorigem Paragraphen erhält man zuerst die Wärmemenge  $Q_1$ , welche einem Temperaturverluste  $t_1 - t_2$  entspricht, wenn  $v_1$  ein Volumen atmosphärischer Luft von der Pressung  $p_1$ , sich so expandirt, daß die Pressung auf  $p_2$  herabgeht und das Volumen  $v_1$  in einen Raum vom Inhalte  $v_2$  fortgeschoben wird:

$$Q_1 = c_p P_1 (t_1 - t_2),$$

oder, wenn nach §. 54 die anfängliche Dichte der atmosphärischen Luft mit  $\Delta_1$  bezeichnet wird, also  $P_1 = \Delta_1 v_1$  ist und ferner, wegen  $c_p = 0,23751$ :

$$(1) \quad Q_1 = 0,23751 (t_1 - t_2) \Delta_1 v_1.$$

Für die beim vorerwähnten Acte frei werdende mechanische Arbeit erhält man nach §. 60, IV:

$$\mathfrak{A}_c = \frac{n}{n-1} v_1 p_1 \left\{ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}, \text{ oder auch, wegen}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \text{ nach §. 59,}$$

<sup>1)</sup> Der Civilingenieur (von Bornemann), Bd. 5, Jahrg. 1859, S. 48.

$$\mathcal{A}_e = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{v_1 p_1}{T_1} (T_1 - T_2), \text{ d. i.}$$

weil  $T_1 = 273 + t_1$  und  $T_2 = 273 + t_2$ , auch

$$(2) \quad \mathcal{A}_e = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{v_1 p_1}{T_1} (t_1 - t_2), \text{ d. i.}$$

die Arbeit, welche bei Abkühlung des Volumens  $v_1$  von der Temperatur  $t_1$  auf die  $t_2$  verrichtet wird.

Entfernt man mittelst der Gleichung 2 des §. 54 aus letzterem Ausdrücke für  $\mathcal{A}_e$ , die Pressung  $p_1$ , mit Hülfe von

$$p_1 = 7992,655 \cdot \frac{T_1}{a} \Delta_1,$$

wo  $a = 273$  ist, so folgt aus (2):

$$\mathcal{A}_e = \frac{n}{n-1} \cdot 7992,655 \cdot \frac{\Delta_1}{a} (t_1 - t_2) v_1,$$

oder weil  $\frac{n}{n-1} = 3,44$  ist, auch

$$\mathcal{A}_e = \frac{3,44 \cdot 7992,655}{273} (t_1 - t_2) \Delta_1 v_1, \text{ d. i.}$$

$$(3) \quad \mathcal{A}_e = 100,713 (t_1 - t_2) \Delta_1 v_1.$$

Dividirt man letztere Gleichung durch die unter (1) entwickelte, so erhält man

$$\text{I.} \quad \frac{\mathcal{A}_e}{Q} = \frac{100,713}{0,23751} = 424^{mk},3.$$

Hiernach ist also eine Wärmeeinheit oder Calorie einer mechanischen Arbeit von 424,3 Meterkilogrammen äquivalent.

Wir bezeichnen den Quotienten  $\frac{\mathcal{A}_e}{Q}$ , d. i. das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit, oder der Arbeitswerth, welcher der Wärmemenge = 1 entspricht, in der Folge mit  $E$ , setzen aber nach später anzugebenden Gründen<sup>1)</sup>

$$E = 425^{mk}.$$

Den reciproken Werth von  $E$ , d. i. das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, den Arbeitswerth der Wärmeeinheit (das mechanische Wärmeäquivalent), bezeichnen wir dagegen mit  $A$ , setzen also

$$A = \frac{1}{E} = \frac{1}{425},$$

also auch

$$\text{II.} \quad Q = \mathcal{A} \cdot A.$$

Zusatz 1. Clausius<sup>2)</sup> entwickelt zur Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalents die Gleichung:

$$\text{III.} \quad E = \frac{R}{c_p - c_v},$$

woraus folgt, wenn man die vorher (S. 131) angegebenen Werthe von  $R$ ,  $c_p$  und  $c_v$  substituirt:

$$E = \frac{29,27}{0,2315 - 0,1684} = 423^{mk},4.$$

<sup>1)</sup> In dem nachher (S. 137) folgenden mit „Geschichtliche Notizen“ überschriebenen §. 63.

<sup>2)</sup> Die mechanische Wärmetheorie, zweite Auflage, S. 55.

Die Verschiedenheit dieses Werthes von den unter I. gefundenen fällt nicht auf, wenn man beachtet, daß die Werthe von  $c_p$  (bis jetzt allein durch Versuche ermittelt) und von  $c_v$  (zur Zeit nur durch Rechnungen, nicht durch Versuche bestimmt) veränderlich sind, so wie der Quotient (das Verhältniß)  $n = \frac{c_p}{c_v}$  ebenfalls, bei directer Ermittlung, je nach dem hierzu betretenen Wege verschieden ausfällt, nicht zu gedenken, daß man ebenfalls verschiedene Zahlenwerthe erhält, sobald man von anderen Gasarten als atmosphärische Luft ausgeht.

Um bestimmte Nachweise in letzteren Beziehungen machen zu können, benutzt der Verfasser eine der jüngsten Arbeiten eines deutschen Physikers, des Herrn Dr. Röntgen<sup>1)</sup> der aus directen Versuchen für  $n$  findet:<sup>2)</sup>

Für trockene atmosph. Luft  $n = 1,4053$ ;  
 „ Kohlensäure . . . .  $n = 1,3052$ ;  
 „ Wasserstoff . . . .  $n = 1,3852$ .

Für atmosphärische Luft  $c_p = 0,2375$  (nach Regnault) angenommen, findet Röntgen  $c_v = 0,1690$  und  $E = 427^{mk}, 31$ .

Für Kohlensäure aber  $c_p = 0,19256$  und  $c_v$  verschieden je nach der Temperatur, nämlich zu  $0,1415$  (bei  $0^0$ ),  $0,1475$  (bei  $19^0,5$ ) und zu  $0,1702$  (bei  $100^0$ ) und  $E = 425^{mk}, 16$  etc.

Eine recht angemessene Zusammenstellung von auf verschiedenen Wegen für  $E$  gefundenen Werthen giebt Hirn in seiner *Théorie Mécanique de la Chaleur*, 2<sup>e</sup> Edit., Pg. 71, so wie mein Neffe, Herr Prof. Richard Rühlmann, in seinem (theilweise nach Verdet bearbeiteten) Handbuche der mechanischen Wärmetheorie, Bd. 1, S. 61, welche letztere hier unten in der Note<sup>3)</sup> verzeichnet sind.

<sup>1)</sup> Bestimmung des Verhältnisses der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu derjenigen bei constantem Volumen für einige Gase. Poggend. Annalen der Physik, Bd. 148 (1873), S. 580—621.

<sup>2)</sup> Für atmosphärische Luft fand Masson (1858)  $n = 1,4196$ ; Weisbach (1859) fand  $n = 1,4025$ .

<sup>3)</sup>

Namen des Phänomens, dem die Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme entlehnt ist.	Namen der Physiker, welche das theoretische Princip der Bestimmung angegeben haben.	Namen der Physiker, welche die experimentellen Daten lieferten.	Werth des mechanischen Aequivalentes der Wärme.
Allgemeine Eigenschaften der Luft	Mayer Clausius	Regnault, Moll u. v. Beck	426
Reibung	Joule	Joule	425
Mech. Arbeit der Dampfmaschinen	Clausius	Hirn	413
Wärme entbunden durch Inductionsströme	Joule	Joule	452
Wärme entbunden durch eine elektro magnetische Maschine	Favre	Favre	443
Gesammte im Kreise einer Daniellschen Kette entbundene Wärme	Bosscha	W. Weber Joule	420
Die Wärme, welche in einem Metalldrahte, der von einem elektrischen Strome durchflossen ist, entwickelt wird	Clausius	v. Quintus	400

Es wird dem Verfasser hier die Bemerkung gestattet sein, daß die höchst interessanten Versuche und Rechnungen seines Collegen, des Herrn Professor von Quintus-Ilcius, sich im 01. Bde. (1857) der Poggend. Annalen, von S. 69—105, abgedruckt vorfinden.

Zusatz 2. Die Seite 127 für die Expansions- und Compressionsarbeit gefundenen Ausdrücke nehmen unter Einführung vorstehender Werthe folgende einfache Gestalt an:

Zuerst erhält man mit Benutzung der Werthe auf S. 125, indem man beachtet, daß

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{T_2}{T_1}$$

und nach Seite 113 auf  $p_1 v_1 = RT_1$  ist ( $v_1 = \frac{1}{A_1}$  nach S. 112 vorausgesetzt)

$$\mathcal{A}_e = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right\} = \frac{RT_1}{n-1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right), \text{ d. i.}$$

$$(4) \quad \mathcal{A}_e = \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2).$$

Ferner ist  $R = (c_p - c_v) E = c_v \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) E$ , also da  $\frac{c_p}{c_v} = n$ ,

$R = c_v (n - 1) E$ , oder  $\frac{R}{n-1} = c_v$  ist, auch folglich statt (4):

$$(5) \quad \mathcal{A}_e = c_v E (T_1 - T_2).$$

Beispiel.<sup>1)</sup> Es sei in einem Cylinder die Gewichtseinheit (= 1 Kil.) Gas (atmosphärische Luft) eingeschlossen, dessen Temperatur  $T_1 = 30^\circ C$  und dessen Druck  $1\frac{1}{2}$  Atmosphären beträgt ( $p_1 = 1\frac{1}{2} \cdot 10333$  Kil.). Man soll die frei gewordene Arbeit berechnen, wenn sich das Gas, ohne Mittheilung und ohne Entziehung von Wärme, auf eine Atmosphäre ( $p_2 = 10333$  Kil.) ausdehnt.

Auflösung. Zuerst berechnet sich aus  $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ ,

$$T_2 = T_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{0,2908} = 0,888 \text{ und wegen } T_2 = 273 + t_2 \text{ und}$$

$T_1 = 273 + 30 = 303$ ,  $t_2 = -273 + 303 \cdot 0,888$ , d. i.  $t_2 = -3,7$ , d. h. die Temperatur sinkt von  $+30^\circ$  auf  $-3,7$  herab.

Sodann erhält man

$$\mathcal{A}_e = 0,16847 \cdot 425 \cdot (30 + 3,7) = 2422^{mk}, 5.$$

Die verschwundene Wärmemenge beträgt aber:

$$\frac{\mathcal{A}_e}{E} = \frac{2422,5}{425} = 5,677 \text{ Calorien.}$$

Zusatz 3. Faßt man das gehörig zusammen, was in den vorstehenden Paragraphen enthalten ist, so lassen sich leicht wichtige Betrachtungen anstellen, die man als Einleitung in das Studium der mechanischen Wärmetheorie betrachten kann.

Werden einem Körper, der irgend welchen Kräften unterworfen ist,  $Q$  Wärmeeinheiten (Calorien) zugeführt, so wird zunächst, dem Vorstehenden gemäß, die Gesamtarbeit =  $\mathcal{A}$ , welche derselbe aufgenommen hat, dargestellt durch:

$$\mathcal{A} = 425 \cdot Q = EQ,$$

<sup>1)</sup> Zeuner, Mechanische Wärmetheorie, Zweite Auflage, S. 134.

so wie sich umgekehrt  $Q$  ergibt zu

$$\text{IV. } Q = \frac{\mathfrak{A}}{425} = \frac{\mathfrak{A}}{E}.$$

Dem gegenwärtigen Stande der Physik gemäß kann  $\mathfrak{A}$  aus drei Theilen bestehend gedacht werden, die wir mit  $H$ ,  $J$  und  $W$  bezeichnen wollen. Davon stellt  $H$  denjenigen Theil von  $\mathfrak{A}$  dar, welcher die fühlbare Wärme des Körpers oder was dasselbe ist, welcher die lebendige Kraft der Molecüle vergrößert, und die Schwingungsarbeit genannt werden kann. Ferner repräsentirt  $J$  denjenigen Theil von  $\mathfrak{A}$ , welcher zur Verschiebung der Mittellagen der kleinsten Theilchen (der Verückung, der Positionsänderung der Atome und Molecüle) diene. Endlich stellt  $W$  die Arbeit dar, welche Kräfte von Außen auf den Körper ausüben.

Man hat daher schließlich:

$$Q = \frac{H + J + W}{E}.$$

Nennen wir mit Zeuner<sup>1)</sup>  $H + J$ , d. h. die molecularen mechanischen Arbeiten, die inneren Arbeiten, dagegen  $W$  die äußeren Arbeiten und setzen  $H + J = U$ , so folgt:

$$Q = \frac{U + W}{E},$$

oder, wenn man die Zunahme der Wärmemenge und beziehungsweise die Zunahme an innerer und äußerer Arbeit ausdrücken will, also vorstehende Gleichung differencirt:

$$\text{V. } dQ = \frac{dU + dW}{E}, \text{ oder auch}$$

$$dQ = A(dU + dW), \text{ wenn } \frac{1}{E} = A \text{ gesetzt wird.}$$

$dU$  pflegt man die Zunahme an Energie des Körpers zu nennen.

Wird einem Körper die endliche Wärmemenge  $Q$  mitgetheilt und geht dabei seine Energie aus  $U_1$  in  $U_2$  über, so ist:

$$\text{VI. } Q = \frac{U_2 - U_1 + \int dW}{E}.$$

Das Integral kann hier nur dann bestimmt werden, wenn die äußeren Kräfte bekannt sind, welchen der Körper in jedem einzelnen Momente der mit ihm vorgegangenen Aenderung unterworfen gewesen ist. Im Falle, daß  $U_1 = U_2$  ist, pflegt man die betreffende Zustandsänderung einen Kreisproceß zu nennen<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Clausius (in seiner mechanischen Wärmetheorie, 2. Auflage, S. 33) sagt in Bezug auf diese Zusammenfassung Folgendes: „Da die im Körper wirklich vorhandene Wärme und die innere Arbeit sich unter einander gleich verhalten, und da wir ferner, wegen unserer Unbekanntschaft mit den inneren Kräften der Körper, gewöhnlich nicht die einzelnen Werthe der beiden Größen  $H$  und  $I$ , sondern nur ihre Summe kennen, so habe ich schon in einer 1850 erschienenen, auf die Wärme bezüglichen Abhandlung (Poggend. Annalen, Bd. 79, S. 368) diese beiden Größen unter ein Zeichen zusammengefaßt und  $U = H + I$  gesetzt.“

<sup>2)</sup> Mit vorstehenden Erörterungen beabsichtigte der Verfasser keineswegs eine eigentliche Einleitung in die mechanische Wärmetheorie zu geben,



Für den Fall, wo als äußere Kraft nur ein gleichmäßiger und normaler Druck  $= p$  auf die Einheit der Oberfläche eines Volumens  $v$  wirkt, erhält man für  $dW$  den bereits S. 121 für solchen Fall gewonnenen Ausdruck  $dW = pdv$ , wonach Gleichung V. folgende Gestalt annimmt:

$$\text{VII. } dQ = \frac{dU + pdv}{E} = A (dU + pdv).$$

Bleibt die innere Arbeit constant, ist also  $dU = 0$ , so wird dies die isodynamische Zustandsänderung genannt, gegenüber der bereits §. 60 erörterten adiabatischen Zustandsänderung, bei welcher  $dQ = 0$  ist.

Die Gleichung VII. bildet zugleich den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie<sup>1)</sup>.

## §. 63.

## Geschichtliche Notizen.

Das §. 53 erörterte Gesetz, nach welchem sich, bei constanter Temperatur, das Volumen einer bestimmten Gasmenge umgekehrt proportional mit dem Drucke ändert, oder der Druck eines Gases der Dichtigkeit proportional ist, wurde 1662 vom Engländer Robert Boyle<sup>2)</sup> entdeckt<sup>3)</sup> und im Jahre 1662 als Anhang zu dem Werke „Nova experimenta physico-mechanica de vi aeris elastica“ veröffentlicht. Mariotte<sup>4)</sup> stellte dasselbe Gesetz an die Spitze seines 1679 erschienenen Essai „De la nature de l'air“ und begründete es durch sorgfältige Versuche, ohne, wie es scheint, von Boyle's Entdeckung Kenntniß gehabt zu haben. Hat hiernach letzterer Physiker dies Gesetz 17 Jahre früher als Mariotte gekannt, so darf es nicht Wunder nehmen, daß man neuerdings, selbst außerhalb England (wie z. B. Oskar Meyer in seiner „Kinetischen Theorie der Gase“, S. 10), angefangen hat, überhaupt nur von einem Boyle'schen Gesetze zu sprechen.

Das zweite wichtige Gesetz, das der Ausdehnung der Gase, bei verschiedenen Temperaturen (Seite 111 als das Gay-Lussac'sche aufgeführt), wurde von Charles<sup>5)</sup> entdeckt, der seiner Zeit Professor der

---

vielmehr benutzt er nur die Gelegenheit, auf einige Formen dieser neuen, schönen und auch dem Techniker höchst nützlichen Wissenschaft aufmerksam zu machen. Bei seinen Vorträgen über theoretische Maschinenlehre, am Königl. Polytechnikum in Hannover, setzt der Verfasser voraus, daß den Studirenden die mechanische Wärmetheorie nach den Vorträgen des Herrn Professor von Quintus-Idcilus bekannt ist.

<sup>1)</sup> Clausius, „Die mechanische Wärmetheorie“, Zweite Auflage, S. 41, und Zeuner, „Mechanische Wärmetheorie“, S. 35, Gleichung 9. Grashof, „Theoretische Maschinenlehre“, Bd. 1, S. 75, Gleichung 3.

<sup>2)</sup> R. Boyle wurde 1626 zu Lismore in Irland geboren und starb 1691 in London. Oskar Meyer in seinem Werke „Die kinetische Theorie der Gase“, notirt S. 11 dies Werk nach seinem englischen Titel folgendermaßen: „A defence of the doctrine touching the spring and weight of the air“. London 1862.

<sup>3)</sup> Gehler's Physikalisches Wörterbuch, Bd. 4, S. 1026.

<sup>4)</sup> Mariotte, geb. zu Bourgogne im Anfang des 17. Jahrh.; gest. zu Paris 1684.

<sup>5)</sup> Geb. zu Baugency 12. Novbr. 1746, gest. 7. April 1823. Ueber Charles' Erfindung berichtet auch (mein Neffe) Herr Professor Richard Rühlmann in seinem „Handbuch der mechanischen Wärmetheorie“, Bd. 1, S. 88.

Physik am Conservatoire des arts et métiers in Paris und als Erfinder des Wasserstoff-Luftballons berühmt war. Daß man dies Gesetz nachher fast ausschließlich das Gay-Lussac'sche<sup>1)</sup> oder Dalton'sche<sup>2)</sup> nannte, hat seinen rechtlichen Grund wohl darin, daß die beiden genannten Physiker derartig umfangreiche, genaue und sorgfältige Versuche anstellten, daß deren Resultate bis beinahe in die jüngste Zeit als gültig und vollkommen genügend angesehen wurden<sup>3)</sup>.

Obwohl über die entschiedene Richtigkeit und die Grenzen dieses Gesetzes hin und wieder einige Zweifel ausgesprochen waren (u. A. in Munke's Physik, Bd. 1, S. 500), so hielt man doch fast 40 Jahre lang die Physiker, welche es aufgestellt hatten, für zu bedeutend, als daß man diesen Zweifeln durch neue Versuche zu begegnen für erforderlich gehalten hätte.

Erst der schwedische Physiker und Hüttenmann Rudberg<sup>4)</sup>, in Upsala, aufmerksam gemacht durch bedeutende Anomalien, welche sich ihm bei einer Untersuchung über den Schmelzpunkt leicht flüssiger Metalle (unter Anwendung der Zahl  $\frac{3}{8} = 0,375$  vom Eisschmelzpunkte bis zum Siedepunkte) herausstellten, unternahm höchst sorgfältige neue Versuche, wobei sich denn auch erwies, daß der Dalton- und Gay-Lussac'sche Coefficient statt 0,375 nur 0,364 bis 0,365 betrug. Natürlich sprach zuerst der Autoritätsglaube nicht wenig gegen die von Rudberg gefundenen Zahlen, auch hatte er seine Versuche nur auf atmosphärische Luft erstreckt, nicht aber auf (andere) Gase und Dämpfe, die sich ja sämmtlich um 0,375 ausdehnen sollten! Es wurden daher mehrfach neue und wo möglich noch sorgfältigere Versuche unternommen. Nach solchen fand Magnus in Berlin (Poggend. Annalen, Bd. 50) den Ausdehnungcoefficienten für atmosphärische Luft zwischen 0° und 100° zu 0,3668, bei anderen Gasen erhielt er von diesen etwas abweichende Werthe.

Die umfangreichsten und sorgfältigsten Versuche über die Ausdehnung der Gase hat Regnault<sup>5)</sup> angestellt.

Dieser ausgezeichnete Physiker fand vor Allem die Angaben von Magnus bestätigt, daß sich alle Gase nicht um gleiche Bruchtheile ihres Volumens bei gleicher Temperaturerhöhung ausdehnen, sondern hiervon in dem Maße abweichen, je mehr sie sich von dem Mariotte'schen Gesetze entfernen, daß sich ferner die Ausdehnungcoefficienten derselben Gase mit wachsendem Drucke vergrößern etc. etc.

<sup>1)</sup> Gay-Lussac, geb. 1778 zu Leonard im Departement Obervienne; gest. 1850 zu Paris. Die betreffenden Abhandlungen finden sich in den *Annales de chimie et de physique*, Tome 43, und in Gilbert's Annalen der Physik, Jahrg. 12.

<sup>2)</sup> Dalton, geb. 1766 zu Eaglesfield bei Cockermonth (Cumberland); gest. zu Manchester 1844. Ueber Dalton's Versuche wird in Gilbert's Annalen berichtet, Jahrgang 12 und 15.

<sup>3)</sup> Ferrini in seiner „Technologie der Wärme“, spricht S. 20 nur von einem Boyle-Volta'schen Gesetze, ohne Mariotte und Gay-Lussac zu erwähnen. Dem Verfasser ist nicht bekannt, wie Ferrini zu dieser Annahme gelangt!

<sup>4)</sup> Rudberg, geb. 1800 zu Norrköping (Schweden); gest. 1839 zu Upsala. Ueber Rudberg's Versuche berichten betreffende Artikel in Poggendorfs Annalen der Physik, Bd. 41 und 44.

<sup>5)</sup> Mémoire de l'Académie etc. Tome XXI, Pg. 15.

Beispielsweise ergibt sich aus den Regnault'schen Versuchswerthen, wenn man annimmt, daß der Ausdehnungscoefficient  $\delta$  eines vollkommenen Gases dem Drucke proportional wachse<sup>1)</sup>, für

	$\delta$	$\frac{1}{\delta} = a$
Atmosphärische Luft	0,0036603	273,20
Wasserstoffgas . .	0,0036612	273,13
Kohlensaures Gas .	0,0036522	273,81.

Unsere technischen Anwendungen erlauben hiernach allgemein für ein vollkommenes Gas, den bereits Seite 111 markirten Werth zu wählen, d. h. zu setzen:

$$\delta = 0,0036630 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\delta} = a = 273.$$

Als geschichtlich wichtig dürfte hier noch hervorzuheben sein, daß die Einführung des reciproken Werthes für  $\delta$ , also  $a = 273$  (der sogenannten absoluten Temperatur), zuerst und zwar schon 1833 durch den französischen Bergwerks-Ingenieur Clapeyron<sup>2)</sup> erfolgte, wobei zugleich bemerkt werden mag, daß dieser Mathematiker es ist, dem wir überhaupt die erste (hier unten citirte) mathematische Arbeit über mechanische Wärmetheorie verdanken<sup>3)</sup>,

Bevor wir die Mittheilungen dieser auch für Techniker höchst interessanten und geschichtlichen Notizen fortsetzen, müssen wir etwas zurückgreifen und hervorheben, daß die Zweifel an der ganz allgemeinen Richtigkeit des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes, schon bald nach Bekanntwerden desselben, von damaligen Mathematikern und Physikern erhoben wurden und daß namentlich die theoretischen Untersuchungen von d'Alembert<sup>4)</sup> und Leonhard Euler<sup>5)</sup> als die wichtigsten genannt zu werden verdienen. Dagegen zeigten die Versuche von Oerstedt und Swendsen<sup>6)</sup>, daß mindestens die atmosphärische Luft bis zu einem höchst bedeutenden Drucke nicht merklich vom Mariotte'schen Gesetze abweicht. Die Versuche einer 1829 von der Pariser Academie der Wissenschaften ernannte Commission (bestehend aus Arago, Ampère, Dulong, Girard und Prony) bestätigte dasselbe bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären<sup>7)</sup>. Regnault<sup>8)</sup> zeigte durch seine bis jetzt noch völlig unübertroffenen Versuche, daß das Mariotte-Boyle'sche Gesetz weder für die sogenannten unbeständigen Gase, wie Kohlensäure, Ammoniak, Cyan etc., noch auch für die beständigen

1) Mousson „Die Physik auf Grundlage der Erfahrung“. Zürich 1860. Bd. II, S. 59, und Zeuner „Die mech. Wärmetheorie“, 2. Aufl., S. 103.

2) Clapeyron, geb. 1799; gest. (?)

3) „Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur“. Journal de l'école royale polytechnique. 22 Cahier, Tome XIV, Pg. 153—190. Clapeyron schreibt in diesem Memoire Pg. 164:  $p v = R (267 + t)$ , womit die Setzung S. 113 zu vergleichen ist.

4) d'Alembert, geb. zu Paris 1717; gest. das. 29. October 1783.

5) Leonhard Euler; geb. 1707 zu Basel; gest. 1783 zu Petersburg.

6) Gehler's physikalisches Wörterbuch. Bd. 4 (2. Abtheilung), S. 1040.

7) Annales de chimie et physique, Tome XLIII (1830).

8) Regnault, geb. 1810 in Aachen; gest. 19. Januar 1878 zu Paris.

(permanenten) [?], wie atmosphärische Luft, Stickstoffgas und Wasserstoffgas in aller Strenge Gültigkeit besitzt. Dabei prophezeite Regnault zugleich das im Voraus, was bereits Seite 2, Note 1 über die jüngsten Versuche von Pictet und Cailletet mitgeteilt wurde, daß nämlich alle Gase, sobald nur ein gehörig großer Druck und eine entsprechend niedrige Temperatur in Anwendung gebracht wird, flüssig und beziehungsweise fest werden können. Regnault dehnte, beiläufig gesagt, seine Versuche bis zu einem Drucke von 36 Atmosphären aus.

Natterer<sup>1)</sup> in Wien unterwarf im Jahre 1854 das Wasserstoff-, Sauerstoff- und Stickstoffgas einer Pressung von 2790 Atmosphären, wobei sich herausstellte, daß das Mariotte'sche Gesetz absolut falsch wird, wenn man die Pressung von 100 Atmosphären überschreitet.

Folgende Tabelle ist ein Auszug der in untenstehender Quelle<sup>2)</sup> enthaltenen Angaben. Dabei enthalten die mit (1) überschriebenen Columnen die Zahlen, um welche das ursprüngliche Gasvolumen zusammengedrückt wurde. Die durch (2) markirten Columnen zeigen die beobachteten in Atmosphären ausgedrückten Pressungen. Endlich finden sich in der 3. Columnen die Differenzen der letztern Pressungen.

Wasserstoff			Sauerstoff			Stickstoff		
Volum.	Atm.	Differ.	Volum.	Atm.	Differ.	Volum.	Atm.	Differ.
(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
0	0	} 8	0	0	} 7	0	0	} 5
8	8		7	7		5	5	
18	18	} 10	17	17	} 10	15	15	} 10
28	28		27	27		25	25	
68	68	} 10	157	157	} 10	75	75	} 10
78	78		167	167		85	85	
128	134	} 12	227	232	} 11	225	240	} 12
138	146		237	243		235	252	
238	274	} 13	277	287	} 11	275	306	} 15
248	287		287	298		285	321	
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Zur Ergänzung der bereits S. 2 gemachten Angaben über das Tropfbarflüssigmachen der früher als permanent bezeichneten Gase werde hier bemerkt, daß in der so eben notirten Quelle (a. a. O. S. 99) Pictet nachweist, daß er Wasserstoffgas, unter dem Drucke von 650 Atmosphären und bei gleichzeitiger Anwendung einer Temperatur von  $-140$  Graden des Celsius-Thermometers, tropfbar flüssig gemacht habe.

Ueber die Bemühungen neuerer Mathematiker (Dupré, Recknagel, Reye u. m. A.), die ursprünglichen Formeln, welche das combinirte Mariotte-Boyle'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz darstellen, derartig umzugestalten, daß sie die hervorgehobenen Abweichungen von den Versuchsergebnissen mit in sich fassen, berichtet ausführlich mein Neffe,

<sup>1)</sup> Natterer, geb. zu Laißenburch bei Wien 9. November 1787, gest. am 17. Juni 1843.

<sup>2)</sup> Archives des sciences physiques et naturelles, Nr. 241, 15. Janvier 1878, Pg. 22, in einem Memoire Raoul Pictet's „Sur la Liquéfaction de l'Oxygène“.

Herr Professor Rühlmann in Chemnitz, in seinem Handbuche der mechanischen Wärmetheorie, Bd. 1, S. 263 bis S. 265 (s. Noten). Leider entspricht noch keine dieser Formeln dem beabsichtigten Zwecke.

Der Aufeinanderfolge des im vorstehenden Paragraphen behandelten Stoffes entsprechend, gelangen wir jetzt zu geschichtlichen Notizen über die Wärmecapacitäten oder die specifischen Wärmen elastischer Flüssigkeiten<sup>1)</sup>.

Seit einem Jahrhundert ist eine große Anzahl ausgezeichnete Physiker mit Untersuchung der specifischen Wärme der elastischen Flüssigkeiten beschäftigt gewesen<sup>2)</sup>. Crawford, Lavoisier und Laplace, Dalton, Clément-Desormes, de la Roche und Bérard, Haycraft, Gay-Lussac, Dulon und Petit, de la Rive, Marcet und in allerjüngster Zeit ganz besonders wieder Regnault.

Wir greifen indeß vorher für unsere Zwecke in den geschichtlichen Notizen zuerst etwas weiter zurück und gedenken vor Allem des Holländers Boerhaave<sup>3)</sup>, welcher die ersten, wenn auch sehr unbestimmten Wahrnehmungen bezüglich der Wärmecapacität machte. Zu einer festeren Begriffsbestimmung dieser Erscheinung gelangte jedoch erst der Schotte Black<sup>4)</sup> und sein Schüler Irvine<sup>5)</sup>. Black war es, welcher zuerst erklärte, daß die Wirkung einer gegebenen Wärmemenge auf die Temperatur eines Körpers nicht allein von der Masse des Körpers, sondern auch von dem Stoffe abhängt, aus welchem der Körper besteht. Irvine gab dieser Eigenschaft den Namen „Wärmecapacität“. Die Bezeichnung „specifische Wärme“ ist später (1784) von Gadolin in Abo eingeführt worden<sup>6)</sup>.

Die Bemühungen von Black und Irvine wurden jedoch erst später durch Crawford<sup>7)</sup> (in dessen *Chemical Essai's*) bekannt, nachdem

<sup>1)</sup> Wie manche Schriftsteller unterscheidet auch Maxwell in seiner „Theorie der Wärme“ (deutsche Bearbeitung von Auerbach, Breslau 1877, S. 60) Wärmecapacität von specifischer Wärme. Beide Begriffe werden hier wie folgt definiert:

a. „Die Wärmecapacität eines Körpers ist die Anzahl von Wärmeeinheiten, welche erforderlich sind, um die Temperatur dieses Körpers um einen Grad zu erhöhen.“

b. „Die specifische Wärme eines Körpers ist das Verhältniß der Wärmemenge, welche erforderlich ist, die Temperatur dieses Körpers um einen Grad zu erhöhen, zu derjenigen Wärmemenge, welche erforderlich ist, um ein gleiches Gewicht Wasser um einen Grad zu erwärmen.“

<sup>2)</sup> Regnault, Untersuchungen über die specifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten. *Comptes rendus T. XXXVI, Pg. 676*, und daraus in Poggend. *Annalen, Bd. 89 (1859), S. 335 und S. 344.*

<sup>3)</sup> Boerhaave, geb. 1668 bei Leyden; gest. 1738 in Leyden, woselbst B. bis zu seinem Tode Professor der Medicin, Botanik und Chemie war. B. war zugleich einer der berühmtesten Aerzte seiner Zeit. Auf seinem Grabdenkmale, welches ihm die Stadt Leyden (in der Peterskirche) errichten ließ, befindet sich B.'s Lieblingspruch: „Simplex sigillum veri“. Außerdem hat dies Denkmal die bescheidene Inschrift: „Salutifero Boerhavii genio sacrum“.

<sup>4)</sup> Black, geb. 1728 zu Bordeaux von schottischen Aeltern; gest. 1799. B. war als Mediciner und Chemiker nacheinander Professor an den Universitäten Glasgow und Edinburgh.

<sup>5)</sup> Irvine, geb. (?); gest. 1787 in Glasgow.

<sup>6)</sup> Maxwell, „Theorie der Wärme“. Breslau 1877, S. 60.

<sup>7)</sup> Crawford, geb. 1749 in Irland; gest. 1795 in England, zu Limington.

Wilke<sup>1)</sup> die Aufgabe im Jahre 1772 in weiterem Umfange behandelt hatte und dessen erhaltene Resultate um so größeres Aufsehen machten, je entschiedener sie in dem Streite über das eigentliche Wesen der Wärme waren.

Von den betreffenden Arbeiten später folgender Experimentatoren, zur Ermittlung der specifischen Wärme der Gase, sind zunächst die von Lavoisier<sup>2)</sup> und Laplace<sup>3)</sup> von Wichtigkeit. Diese Physiker bestimmten namentlich (1780) die specifische Wärme der atmosphärischen Luft und des Sauerstoffes mittelst des Eis calorimeters (Eisschmelzmethode) worüber die in der untenstehenden Note (<sup>4)</sup>) verzeichneten Quellen Auskunft geben.

Die seiner Zeit vollständigste Arbeit über diesen Gegenstand war jedoch die von de la Roche und Bérard, welche 1813 von der Pariser Academie der Wissenschaften gekrönt wurde<sup>5)</sup>. Aus diesen Versuchen ging vor Allem hervor, daß die specifische Wärme der Gase nicht gleich für alle ist, sie möge nun auf Volumen oder auf Gewichte bezogen werden, so wie daß die specifische Wärme der atmosphärischen Luft 0,2669 betrage.

Regnault fand durch seine Versuche, welche gegenwärtig immer noch alle anderen an Umfang und Genauigkeit übertreffen, einen kleineren Werth für die specifische Wärme der atmosphärischen Luft als de la Roche und Bérard, nämlich 0,23751.

Hervorgehoben muß hier werden, daß vorstehende Werthe nur die specifische Wärme der atm. Luft bei constantem Drucke, also nach unserer Bezeichnung oben S. 131, §. 61,  $c_p = 0,23751$  ist und daß man die specifische Wärme der Gase bei constantem Volumen (unser  $c_v$  nach S. 131, §. 61) auf directem Wege durch Versuche bis jetzt nicht zu ermitteln vermochte<sup>6)</sup>.

Dafür hat man sich damit beschäftigt, das Verhältniß  $\frac{c_p}{c_v} = n$  zu ermitteln.

<sup>1)</sup> Wilke, Neue schwedische Abhandlung. Leipzig 1784, T. II, Pg. 84. Gehler's Physik. Wörterbuch, Bd. 10 (1. Abth.), S. 668.

<sup>2)</sup> Lavoisier, geb. 1743 zu Paris; gest. 1794 zu Paris.

<sup>3)</sup> Laplace (s. S. 5, Note 10). Ueber die Bestimmung der specifischen Wärmen mittelst des Eis calorimeters sehe man namentlich Gehler's Physik. Wörterbuch, Bd. 10 (1. Abth.), S. 673.

<sup>4)</sup> Man kann hauptsächlich drei Methoden zur Bestimmung der specifischen Wärme der Körper unterscheiden. Die (ältere) Mengungsmethode, die Eisschmelzmethode (das Calorimetrische Verfahren) und die Abkühlungsmethode. Alle drei Methoden werden ausführlich erörtert in folgenden neueren Werken: Jamin-Bouty, Cours de Physique. Troisième Édition (Paris 1878), Tome Deuxième, Seconde Fascicule, Pg. 54 ff. Willner, Lehrbuch der Experimental-Physik, 2. Auflage, Bd. III, S. 392 ff. Mousson, „Die Physik auf Grundlage der Erfahrung“. Zweite Auflage, Zweiter Band, S. 66 ff.

<sup>5)</sup> Untersuchungen über die spec. Wärmen der elastischen Flüssigkeiten von Herrn V. Regnault in Poggend. Annalen der Physik (nach dem Comptes rendus, T. XXXVI, Pg. 676), Jahrg. 1853, Bd. 83, S. 335. Ausführlich aber in den Mémoires de l'Académie etc. Tome XXVI. — Aus letzterer Quelle mit vortrefflichen Abbildungen begleitet im 3. Bande (Dritte Auflage) von Jamin-Bouty's „Cours de physique“, Pg. 61.

<sup>6)</sup> Man sehe deshalb unter Andern den Artikel „Wärme“ in Marbach's „Physikalisches Lexikon“, (Zweite Auflage), Bd. 6, S. 696.

Nach des Verfassers Wissen war es Laplace, der zuerst in seiner *Mécanique céleste*<sup>1)</sup>, bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit =  $u$  in atmosphärischer Luft, zeigte, daß man statt der Newton'schen Formel für  $u$ , nämlich  $u = \sqrt{gpv}$  (die früheren Bezeichnungen beibehaltend) setzen müsse  $u = \sqrt{ngpv}$ , d. h.  $np$  statt  $p$  in die Rechnung einzuführen habe. Statt letzterer Gleichung kann man nach Nr. 6, S. 113, daß  $pv = RT$  ist, auch schreiben:

$$u = \sqrt{ngRT}.$$

Da man nun diese Schallgeschwindigkeit erfahrungsmäßig durch ganz andere Versuche (für  $t^0$  Temp. in Metern zu  $333 \sqrt{1 + \delta t}$ ) kennt, so erhellt, daß sich  $n$  aus vorstehender Gleichung berechnen läßt. Daß man jetzt das Verhältniß  $n = \frac{c_p}{c_v}$  ( $n = 1,410$  für atm. Luft) besser und einsichtsvoller mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie ermittelt, und daß in dieser Beziehung namentlich die Verfahrungsweisen von Clausius<sup>2)</sup> und die von Röntgen<sup>3)</sup> zu empfehlen sind, wurde bereits S. 133 und 134 hervorgehoben.

Die mechanische Wärmetheorie giebt namentlich auch über den Grund Rechenschaft, weshalb die spezifische Wärme  $c_p$  größer als die  $c_v$  ist, während man dies früher einfach als Erfahrungssatz hinnahm oder mit dem unklaren Ausdruck von frei oder latent werdender Wärme zu erklären suchte<sup>4)</sup>.

Die Nothwendigkeit der Einführung von  $np$  statt  $p$  in die Newton'sche Formel für die Schallgeschwindigkeit erklärt Clausius im Sinne von Laplace in folgender Weise<sup>5)</sup>.

Das Mariotte'sche Gesetz gilt (bekanntlich) nur, wenn die Dichtigkeitsänderung bei constanter Temperatur vor sich geht. Dieses ist aber bei den Schallschwingungen nicht der Fall, sondern bei jeder Verdichtung findet gleichzeitig Erwärmung und bei jeder Verdünnung Abkühlung statt. Demgemäß muß bei der Verdichtung der Druck stärker zunehmen und bei der Verdünnung der Druck stärker abnehmen, als es nach dem Mariotte'schen Gesetze sein sollte. Laplace benutzt daher in der bereits wiederholt citirten Arbeit<sup>6)</sup>, zur Lösung der Frage über die Geschwindigkeit des Schalls die Gleichung  $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n$ .

1) In den „Oeuvres de Laplace“, Tome Cinquième, findet sich diese wichtige Abhandlung im 12. Buche, Capitel III, S. 143, unter der Ueberschrift „De la vitesse du son et du mouvement des fluides élastiques“.

2) Clausius, Die mechanische Wärmetheorie. Bd. 1, Zweite Auflage, S. 52, unter der Ueberschrift „Verhältniß der beiden spezifischen Wärmen“.

3) Röntgen. Spec. Wärme einiger Gase, bei constantem Drucke und bei constantem Volumen. Poggend. Annalen, Bd. 148 (1873), S. 580 und 624.

4) Dr. Joemann in seinem „Beitrag zur Theorie der Gase“ in der Schlömilch'schen „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, 5. Jahrg. (1860), S. 28 ff.

Man sehe auch den Abschnitt: Die Bestimmung des Verhältnisses  $n = \frac{c_p}{c_v}$ , im ersten Bande, S. 273, Nr. 12, der mechanischen Wärmetheorie meines Neffen, des Herrn Professor Richard Rühlmann in Chemnitz, wo  $n$  nach verschiedenen anderen Methoden berechnet ist.

5) Clausius a. a. O., S. 53.

6) a. a. O., Vol. V, Pg. 155.

Letztere von Laplace zuerst aufgestellte Gleichung ist bald nachher von Poisson in verschiedenen Abhandlungen über Dichtigkeit, Elasticität und Wärmecapacität der Gase<sup>1)</sup>, sowie in seinem Lehrbuche der Mechanik, wovon die erste Auflage 1811 erschien, benutzt worden, was manche Schriftsteller dazu veranlaßte, diese Darstellung des Mariotte'schen Gesetzes unter besonderer Voraussetzung (daß die Druckcurve nicht die isothermische §. 58, sondern die adiabatische §. 60 ist) das Poisson'sche Gesetz zu nennen. Letzterer Umstand ist offenbar nicht Poisson's Schuld, und dürfte hiernach eine Art Abfertigung, welche Jamin in der dritten Auflage (Tome II, Pg. 117') seines „Cours de Physique“ dem Poisson, noch nach seinem Tode, für nothwendig zu geben hält, mindestens als ungerechtfertigt zu bezeichnen sein<sup>2)</sup>.

Seite 124 wurde es vorgezogen, für das fragliche Gesetz die von Redtenbacher eingeführte Benennung „das potenzierte Mariotte'sche Gesetz“ zu adoptiren.

Wir sind hier zu einer Stelle gelangt, an welcher wir zunächst auf die Seite 133 aufgestellten Berechnungsweisen des mechanischen Wärmeäquivalents aus der specifischen Wärme des Gases nach Weisbach und Clausius hinweisen müssen, zugleich aber als Ergänzung die geschichtlichen Notizen über den Ausspruch des Grundsatzes: „Wärme und Arbeit sind äquivalent“ und über die Bestimmung des Arbeitsäquivalentes (den Arbeitswerth) oder des mechanischen Wärmeäquivalentes, liefern wollen.

Rumford<sup>3)</sup> war 1798 der erste, welcher zu dem Schlusse gelangte, daß man durch mechanische Arbeit Wärme erzeugen könne und zwar zufolge von Beobachtungen beim Ausbohren von Geschützrohren in der Kanonenbohrwerkstatt zu München<sup>4)</sup>. Der Ansicht Rumford's schloß sich, durch eigne Experimente (Zusammenreiben von Eisstücken) unterstützt, Humphry Davy<sup>5)</sup>, einer der berühmtesten Chemiker seiner Zeit, rasch an<sup>6)</sup>. Entscheidend begründet wurde die Frage nach der Verhältnißzahl zwischen Wärme und Arbeit in der Zeit von 1842 bis 1850, nach einander von einem Deutschen, Dr. Mayer in Heilbronn<sup>7)</sup>, einem Dänen Colding<sup>8)</sup> in Kopenhagen und dem Engländer Joule<sup>9)</sup> in Manchester.

<sup>1)</sup> Annales de Chimie et Physique, Tome XXIII, Pg. 337, und XIV Cahier, Pg. 360 du Journal de l'École Polytechn.

<sup>2)</sup> Es dürfte für unsere geschichtlichen Notizen von Interesse sein, Jamin's Urtheil hier wörtlich wieder zu geben, welches folgendermaßen lautet: „Poisson, auquel certains auteurs attribuent cette formule, n'en a fourni qu'une démonstration inexacte.“

<sup>3)</sup> Rumford (Benjamin Thompson, Graf v.), geb. 1752 zu Rumford in Nordamerika, gest. zu Auteuil 1814.

<sup>4)</sup> An Inquiry concerning the Source of the Heat, which is excited by Friction. Phil. Transact. für das Jahr 1798, Bd. XVIII, Pg. 286. — Wir benutzen die Gelegenheit und machen auf Dr. Berthold's Schrift aufmerksam: „Rumford und die mechanische Wärmetheorie“. Heidelberg 1875.

<sup>5)</sup> Humphry Davy, geb. 1779 zu Penzance (Cornwall); gest. 1829 zu Genf.

<sup>6)</sup> Davy, „Elements of Chemical Philosophy“, Pg. 94. Ferner Zeuner, „Mechan. Wärmetheorie“, 2. Auflage, S. 14.

<sup>7)</sup> Julius Robert Mayer, geb. 25. Nov. 1814 in Heilbronn; gest. 20. März 1878.

<sup>8)</sup> Colding (Wasserbauingenieur der Stadt Kopenhagen), geb. 1815 auf Seeland.

<sup>9)</sup> Joule, geb. 1818 bei Manchester (Brauer in Salford und Mitglied der Royal Society).



Die Priorität in der Reihenfolge betreffender Untersuchungen und Veröffentlichungen derselben gebührt zweifellos Dr. Mayer. Dieser wurde auf den wichtigen Satz von der erwähnten Aequivalenz durch Beobachtungen geführt, die er in Java als Schiffsarzt 1840 machte, indem sich dort die Farbe des venösen Blutes der Europäer viel heller zeigte als dies in Europa der Fall gewesen war, was er bald als eine Folge der höheren Temperatur in der heißen Zone erkannte. Diese Beobachtung wurde für ihn der Ausgangspunkt zur Entdeckung des Grundprincips von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit, (des sogenannten ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie<sup>1)</sup>). Dabei berechnete Mayer das mechanische Wärmeäquivalent, dem Grundprincipe nach, wie Clausius und Weisbach, worüber vorher Seite 133 bereits Auskunft gegeben wurde. Da jedoch Mayer (seiner Zeit, 1842) nur die älteren Angaben über die specifische Wärme der Luft benutzen konnte, so fand er das Aequivalent zu klein, nämlich nur zu 365 Meter-Kilogramm<sup>2)</sup>. Die ersten völlig zuverlässigen Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalentes sind durchaus das Verdienst Joule's. Joule hat die Wärme unter verschiedenen Umständen gemessen, welche durch Reibung erzeugt wurde, wenn er feste Körper (ein messingnes Schaufelrad) im Wasser gehörig umdrehte, eben so Eisen auf Quecksilber und endlich auch Gußeisen auf Gußeisen reiben ließ und den hierzu erforderlichen Arbeitsaufwand gleichzeitig durch das Auf- und Absteigen von an Schnüren aufgehängenen Gewichten bestimmte. Auf diesem Wege gelangte Joule<sup>3)</sup> zu nachfolgenden Resultaten für das mechanische Wärmeäquivalent =  $E$ :

	Meter - Kilogramm
Beim Reiben von Messing und Wasser:	424,90
" " " Eisen auf Quecksilber	{ 425,0 Erste Versuchsreihe.
	{ 426,3 Zweite " "
" " " Eisen auf Eisen . .	{ 426,7 Erste " "
	{ 425,6 Zweite " "
Mittelwerth	425,6 <sup>mk 4)</sup> .

Hieraus erklärt sich unsere, Seite 129 gemachte Annahme,  $E = 425^{mk}$  zu setzen.

Von anderen, insbesondere den Experimentatoren zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes, welche bereits Seite 134 in einer

<sup>1)</sup> Ausführlich über diesen wichtigen Gegenstand berichtet Dr. Mayer selbst in seinem Werke „Die Mechanik der Wärme“. Stuttgart 1874 (2. Auflage), S. 95.

<sup>2)</sup> Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler und Liebig. 1842, Bd. LXII, Maiheft, Pg. 240.

<sup>3)</sup> Spengel, „Das mechanische Wärmeäquivalent“. Gesammelte Abhandlungen von James Prescott Joule. Braunschweig 1872. Die Hauptarbeit Joule's findet sich in den Philosoph. Transact., for 1850, Pg. 1. Ins Deutsche übertragen findet sich diese Arbeit in Poggendorfs Annalen der Physik etc. Ergänzungsband IV, Leipzig 1854, S. 601—630.

<sup>4)</sup> Einen etwas größeren Werth für  $E$ , nämlich 460<sup>mk</sup>, fand (1843) Joule, als er den Arbeitsaufwand zum Umdrehen eines electromagnetischen Rotationsapparates mit der in den Windungen desselben frei werdenden Wärmemenge verglich. (Man sehe hierüber die vorher genannte Schrift von Spengel „Das mechanische Wärmeäquivalent“.)

tabellarischen Uebersicht genannt wurden, verdienen nach einander noch Hirn, v. Quintus und Favre ganz besondere Beachtung. Von den Versuchen Hirn's<sup>1)</sup> ist zuerst diejenige Reihe zu nennen, wo dieser Physiker und Ingenieur bemüht war, das mechanische Wärmeäquivalent durch Zusammenpressen von Blei zu ermitteln, indem er einen eisernen Balken von 350 Kilogr. Gewicht gegen ein circa 3 Kilogr. schweres Bleistück stoßen ließ. Indem Hirn die Arbeit (lebendige Kraft) berechnete, welche scheinbar beim Stoße verschwunden, in Wahrheit aber zur Erwärmung und Verdichtung des Bleies verwandt worden war, gelangte er zur Zahl 280,42 Meter-Kil., als Größe der auf das Zusammendrücken des Bleies aufgewandten Arbeit, während die producirte Wärmemenge sich zu 0,65955 Calorien ergab<sup>2)</sup>. Hieraus folgte demnach

$$E = \frac{280,42}{0,65955} = 425,2^{mk}.$$

Bei einer anderen Reihe von Versuchen ermittelte Hirn den Werth  $E$  an der Dampfmaschine einer Baumwollspinnerei in der Umgegend von Colmar<sup>3)</sup>. Hirn maß hierbei die Wärme des in den Cylinder der Maschinen tretenden Dampfes und ermittelte eben so die Wärmemenge des durch eingespritztes Wasser in Condensation verdichteten Dampfes. Letzteres Wärmequantum vom ersteren abgezogen, mußte der mechanischen Arbeit äquivalent sein, welche der Dampf auf den Kolben der Maschine übertragen hatte.

In der That gaben die durch den Indicator am Cylinder gemessenen Arbeiten insofern überraschende Resultate, als bei Dampfmaschinen von circa 150 Maschinenpferden eine Menge Einflüsse auf die Richtigkeit des Resultates wirkten, die man vergeblich bekämpfte und die in Physicalischen Cabinetten (bei Versuchen im Kleinen) alle mehr oder weniger beseitigt werden können<sup>4)</sup>. Der Mittelwerth aus neun Versuchen war  $E = 398^{mk}$ .

Einen fast gleichen Werth erhielt Herr Professor v. Quintus in Hannover<sup>5)</sup>, nämlich  $399,7^{mk}$ , wobei jedoch hervorgehoben werden muß, daß dieser sorgfältige Experimentator eigentlich nur nachweisen wollte, daß die durch electriche Ströme erregte Wärme das Aequivalent der dabei verbrauchten Arbeit ist. Die zu solchem Zwecke nöthigen Messungen erforderten außerdem eine Menge von Fundamentalbestimmungen, die allerlei Fehlerquellen bildeten.

<sup>1)</sup> Hirn, geb. 1815 zu Logelbach im Elsaß.

<sup>2)</sup> Hirn, *Théorie mécanique de la chaleur* (2. Auflage), T. I, Pg. 85, und hieraus (wie das Original mit Abbildungen begleitet) in (meines Neffen) Prof. Richard Rühlmann „*Mech. Wärmetheorie*“, Bd. 1, S. 218.

<sup>3)</sup> Hirn a. a. O., Pg. 35 und Richard Rühlmann a. a. O., S. 200.

<sup>4)</sup> Diese Hirn'schen Versuche an einer größeren Dampfmaschine liefern insbesondere den Nachweis, welchen die mechanische Wärmetheorie verlangt, daß in allen Fällen, wo durch Wärme Arbeit geleistet wird, eine dieser Arbeit proportionale Wärmemenge verschwindet oder verbraucht wird. Clausius hat diesen Satz zuerst in voller Bestimmtheit ausgesprochen und theoretisch begründet.

<sup>5)</sup> „Ueber den numerischen Werth der Constante in der Formel für die electrodynamische Erwärmung von Metalldrähten“. Poggendorf's Annalen etc. Bd. 101 (1857), S. 69.

Zu den jüngsten bemerkenswerthen Ermittlungen des mechanischen Wärmeäquivalentes gehören die von Favre<sup>1)</sup> in Paris, wobei Wärme durch electromagnetische Maschinen entbunden wurde und worüber die unten notirte Quelle<sup>2)</sup>, so wie mein Neffe, Herr Prof. Rühlmann in Chemnitz, in seinem Handbuche der mechanischen Wärmetheorie, Bd. 1, Seite 54 und Seite 109 berichtet. Favre bestimmte auf diesem Wege  $E = 413,2^{mk}$ , statt früher  $426^{mk}$ .

Beim Schlusse vorstehender geschichtlicher Bemerkungen hält es der Verfasser für Pflicht, noch auf eine vortreffliche Arbeit von Clausius aufmerksam zu machen, welche betitelt ist: „Zur Geschichte der mechanischen Wärmetheorie“ und sich abgedruckt findet im 145. Bande (Jahrgang 1872), Seite 132 von Poggendorf's Annalen der Physik.

Nachdem sich hierin Clausius bemühte, die Rechte des Dr. Mayer in Heilbronn zu vertreten, tritt derselbe dem rücksichtslosen Verfahren Maxwell's entgegen, womit dieser die Verdienste der deutschen Physiker ignorirt. Dagegen schenkt Clausius den Arbeiten von Joule, Thomson<sup>3)</sup> und Rankine<sup>4)</sup> die gebührendste Anerkennung, wobei wir die Gelegenheit benutzen möchten, auch die beiden letztgenannten Physiker als verdienstvolle Männer um die mechanische Wärmetheorie zu bezeichnen. Noch andere Engländer haben übrigens die Anmaßungen Maxwell's nie getheilt, von denen in erster Linie John Tyndall zu nennen ist. In seinem Werke „Heat considered as a mode of motion“, deutsch herausgegeben von Helmholtz und Wiedemann, unter dem Titel „Die Wärme betrachtet als eine Art der Bewegung“<sup>5)</sup>, wird (§. 41) bestimmt hervorgehoben, daß Dr. Mayer in Heilbronn im Jahre 1842 zuerst das mechanische Wärmeäquivalent berechnet habe und §. 83 hinzugefügt, daß dem Dr. Mayer das Recht nicht abgesprochen werden kann, als Mann von wahren Genie in der ersten Reihe unter den Begründern der dynamischen Theorie der Wärme zu stehen. Uebrigens muß anerkannt werden, daß Maxwell in der vierten Auflage seiner „Theorie der Wärme“ sowohl Dr. Mayer's Priorität in der Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes (§. 41) anerkennt, als auch Clausius nicht mehr ignorirt, wie das u. A. die Paragraphen 43, 45, 174, 180 u. a. erkennen lassen.

Schließlich verbleibt dem Verfasser die große Freude noch, hier der deutschen Männer Zeuner, Gustav Schmidt und Grashof gedenken zu müssen, welche sich sowohl um das Verständniß der mechanischen Wärmetheorie, ganz besonders aber um deren Anwendung auf technische Fragen hoch verdient gemacht haben und deren betreffende Arbeiten vom Verfasser bei der Bearbeitung der 2. Auflage dieses Buches vielfach benutzt wurden.

1) Favre, geb. 1813 zu Lyon.

2) „Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur“. Comptes rendus, Tome 45, Juillet-December 1857, Pg. 337.

3) Thomson. (Weder von Sir William Thomson in Edinburg (?), noch von Professor James Thomson in Belfast, konnte der Verfasser das Geburtsjahr erfahren.)

4) Rankine, geb. 1820 zu Edinburg; gest. 1871 in Glasgow (?).

5) Tyndall's oben bezeichnetes Werk kann, als ein Meisterstück populärer wissenschaftlicher Darstellung, nicht genug empfohlen werden.

## §. 64.

**Wasserdämpfe.**

Dem Nachweise vorstehender Paragraphen entsprechend, daß ganz streng genommen, keinerlei Gase existiren, welche dem Mariotte-, Gay-Lussac'schen Gesetze vollständig entsprechen, daß dies vielmehr nur bei ideellen Gasen der Fall ist; erweitern wir auch den bereits §. 2, Seite 2 erörterten Begriff Dämpfe, speciell Wasserdämpfe, dahin, daß wir darunter die Gasform solcher Körper verstehen, deren Condensationspunkt innerhalb der uns zugänglichen Temperaturen und Drücken (Spannungen) liegen.

Dem heutigen Standpunkte der Physik gemäß haben wir auch in der Technik zweierlei Arten von Wasserdämpfe zu unterscheiden, nämlich gesättigten und ungesättigten oder überhitzten Dampf.

Bei den gesättigten Dämpfen ist Spannung und Dichte nicht von dem Volumen, sondern einzig und allein von der Temperatur abhängig. Wenn bei diesen Dämpfen die Temperatur constant bleibt und hinreichend Flüssigkeit zur Bildung neuer Dämpfe vorhanden ist, wird zwar eine Raumvergrößerung die sofortige Erzeugung neuer Dämpfe zur Folge haben, allein wenn sich dieser Raum ganz mit Dampf der entsprechenden Temperatur gefüllt (gesättigt) hat, wird Spannung und Dichte genau wieder die ursprünglich vorhandene sein. Bei Verminderung des Raumes schlägt sich genau eben so viel Dampf nieder, als erforderlich ist, um Spannung und Dichte abermals der unveränderlich gelassenen Temperatur proportional zu machen.

Erhöht man endlich die Temperatur und läßt den Raum unverändert; so erzeugt sich ebenfalls neuer Dampf, aber auch nur so viel, als erforderlich ist, um gedachten Raum damit zu sättigen, d. h. wiederum jenes bestimmte Verhältniß zwischen Temperatur und Spannung herzustellen.

Derartige Dämpfe befinden sich im Maximum ihrer Dichte, es sind gesättigte Dämpfe.

Dämpfe, die sich nicht im Maximum ihrer Dichte befinden, nennt man ungesättigte oder überhitzte Dämpfe. Ueberhitzter Dampf ist zugleich solcher, welcher bei derselben Spannung eine größere Temperatur und ein größeres specifisches Volumen (§. 54, Seite 112) hat, als gesättigter Dampf. Ueberhitzter Dampf muß stets von der tropfbaren Flüssigkeit, woraus er gebildet ist, getrennt sein, und nähert sich derselbe in seinem Verhalten dem eines permanenten (idealen) Gases um so mehr, je mehr seine Temperatur erhöht wird.

## §. 65.

**Von der Spannkraft (Expansivkraft) gesättigter Wasserdämpfe.**

Unter den vielen empirischen Formeln<sup>1)</sup>, welche man als Ausdrücke für die Spannkraft des Wasserdampfes, die, wie schon

<sup>1)</sup> Ueber die (unglaublich) große Zahl derartiger Formeln wird in einem später folgenden Paragraphen berichtet, der wieder (für das Gebiet der Dämpfe) mit „Geschichtliche Notizen“ überschrieben ist.

erwähnt, nur eine Function der Temperatur ist, sind es besonders zwei, welche für unsere technischen Zwecke von Bedeutung und von besonderem Werth sind.

Die erste seiner Zeit von Tredgold<sup>1)</sup> aufgestellte Formel ist:

$$i = \left( \frac{75 + t}{175} \right)^6,$$

worin  $t$  die Temperatur und  $i$  die correspondirende Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes in Atmosphären ausdrückt.

Diese Formel zeichnet sich so sehr durch Einfachheit aus, daß sie für technische Zwecke, namentlich wenn es sich um (rasche) angenäherte Angaben der Temperatur handelt, nothwendig hier Platz finden mußte.

Die zweite der erwähnten (empirischen) Formeln hat Regnault nach seinen sorgfältigen, umfangreichen Versuchen aufgestellt und wird diese mit einigen Modificationen als die zur Zeit empfehlenswertheste bezeichnet. Regnault<sup>2)</sup> fand:

$$\text{Lg } F = a - b\alpha^x - c\beta^x.$$

Hierin ist  $F$  die Dampfdruckung in Millimetern Quecksilbersäule (§. 52) ausgedrückt, also  $i = \frac{F}{760}$ , während die übrigen Größen

folgenden Werthen entsprechen:  $x = t + 20$ ;

$$a = 6,2640348;$$

$$\text{Lg } b = 0,1397743; \quad \text{Lg } \alpha = 1,994049292;$$

$$\text{Lg } c = 0,6924351; \quad \text{Lg } \beta = 1,998343862.$$

Die Uebereinstimmung dieser Formel mit den Beobachtungen ist aus der untenstehenden Tabelle in Note <sup>3)</sup> zu entnehmen.

<sup>1)</sup> Tredgold, geb. 1788 zu Brandon bei Durham, gest. 1829 zu London. Sein Hauptwerk ist: The steam engine (übersetzt von Mellet unter dem Titel „Traité des machines a vapeur“). London 1827, Pg. 101.

<sup>2)</sup> „Relation des expériences etc.“ Tome XXI (1847), Pg. 606. Dieser höchst werthvollen Abhandlung sind namentlich mehrere große Kupfertafeln beigelegt, worauf die Apparate und Instrumente Regnault's abgebildet sind, welche Regnault bei seinen Versuchen benutzte.

<sup>3)</sup>

Temperatur = $t$ mit dem Luftthermometer gemessen.	Beobachtete Spannung in Millimetern Quecksilber- säule ausgedrückt.	Differenz mit der Formel.
— 20 . . . .	. . . . . 0,91 . . .	. . . + 0,00
— 10 . . . .	. . . . . 2,08 . . .	. . . + 0,11
0 . . . . .	. . . . . 4,60 . . .	. . . + 0,12
+ 20 . . . .	. . . . . 17,59 . . .	. . . + 0,09
+ 50 . . . .	. . . . . 91,98 . . .	. . . — 0,04
+ 70 . . . .	. . . . . 233,09 . . .	. . . — 0,02
+ 120 . . . .	. . . . . 1489,00 . . .	. . . — 2,28
+ 150 . . . .	. . . . . 3572,00 . . .	. . . — 9,23
+ 200 . . . .	. . . . . 11660,00 . . .	. . . — 29,00
+ 230 . . . .	. . . . . 20915,00 . . .	. . . — 11,38

In der S. 153 folgenden Tabelle für gesättigten Wasserdampf finden sich nach Berechnungen von Zeuner<sup>1)</sup> und einigen späteren Ergänzungen von Grashof<sup>2)</sup> die Dampfspannungen in Atmosphären =  $i$  verzeichnet, welche bestimmten Temperaturen  $t$  entsprechen.

## §. 66.

**Gesamtwärme, Flüssigkeitswärme. Innere und äußere Verdampfungswärme. Dampfwärme.**

Nach Regnault<sup>3)</sup> ist Gesamt-Wärmemenge =  $Q$ , welche man der Gewichtseinheit (= 1 Kilogramm) Wasser von Null Grad Temperatur zuzuführen hat, um dasselbe unter verschiedenem Drucke in gesättigten Dampf von  $t^0$  Temperatur zu verwandeln:

$$(1) \quad Q = 606,50 + 0,3050t.$$

Nach §. 63, S. 136 besteht  $Q$  aus drei Theilen, d. h. erstens aus der Wärme, welche zur Vermehrung der Schwingungsarbeit, d. h. zur Temperaturerhöhung des Wassers dient; zweitens aus der Wärme, welche zur Distanzvergrößerung der Moleculen und zur Ueberwindung der Cohäsion, welche sie zusammenhält, dient, und drittens aus der äußeren Arbeit, welche hier während der Dampfbildung verrichtet werden muß, und bei diesem Prozesse verschwindet.

Wir bezeichnen die zwei ersten dieser Wärmetheile beziehungsweise mit  $q$  und  $q$  und setzen für die gedachte äußere Arbeit nach §. 62 vorerst den Werth  $Afpdv$ , so daß sich ergibt:

$$(2) \quad Q = q + q + Afpdv.$$

Hierbei erkennt man leicht, daß  $q$  nichts Anderes als der bereits §. 61, S. 131 gefundene Werth ist, welcher hier erforderlich wird, um das Wasser erst von Null Grad bis  $t$  Grad zu erwärmen, bevor die Dampfbildung eintritt.

Statt des Werthes  $q$  in IV, S. 131, setzen wir hier nach Clausius<sup>4)</sup>, als hinlänglich genau, den einfacheren Ausdruck

$$(3) \quad q = 1,013t,$$

und nennen überdies  $q$  die Flüssigkeitswärme.

Den anderen Theil =  $q$  der Wärme, welcher zu innerer Arbeit verwandt wird, der Zuwachs an Körperwärme beim Uebergange aus dem flüssigen in den dampfförmigen Zustand, nennen wir nach Zeuner die innere Verdampfungswärme und berechnen dieselbe aus der von letztgenanntem Autor aufgestellten Gleichung:<sup>5)</sup>

$$(4) \quad q = 575,40 - 0,791t.$$

Für das dritte Glied in (2), der Wärmewerth der Expansionsarbeit, welche bei der Verdampfung verrichtet wird, erhält man leicht

<sup>1)</sup> Mech. Wärmetheorie, Zweite Auflage, Seite 250 ff.

<sup>2)</sup> Theoret. Maschinenlehre, Bd. 1, S. 153 ff.

<sup>3)</sup> Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie, Tome XXI (1847), Pg. 635 unter der Ueberschrift: „Mémoire sur les chaleurs latentes de la vapeur aqueuse a saturation sous divers pressions.“ Die Gleichung (1) findet sich zuerst auf S. 726 der Abhandlung.

<sup>4)</sup> Die mechanische Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 281.

<sup>5)</sup> Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 283.

$$Afpdv = Ap(v - w),$$

wenn  $p$  den constanten Druck des gesättigten Dampfes bezeichnet, während  $v$  das specifische Volumen  $v = \frac{1}{\Delta}$  (nach §. 54, S. 112) des gesättigten Dampfes und  $w$  das specifische Volumen des Wassers, also  $w = 0,001$  Cubikmeter ist.

Denkt man sich nun einen Cylinder und in demselben einen Kolben vom Querschnitte  $= a$ , unter diesem Kolben aber, auf dem Boden des Cylinders, ein Kilogramm Wasser von Null Grad Temperatur, so ist  $w$  das Volumen dieses Wassers. Erzeugt man nun aus diesem Wasser gesättigten Dampf von  $p$  Kilogramm Druck pro Quadratmeter gebildet, so wird sich das Wasservolumen  $w$  in das Dampfvolumen  $v$  verwandeln und eine Arbeit ausgeübt werden, welche, bei constant bleibendem  $p$ , offenbar  $p(v - w)$  ist. Dieser Arbeit entspricht aber ein Wärmequantum

$$\frac{p(v - w)}{E} = Ap(v - w).$$

Wir bezeichnen  $v - w$  mit  $u$  und erhalten

$$(5) \quad Afpdv = Apu.$$

Zur Berechnung von  $Apu$  gelangt man folgendermaßen:

Es ist zunächst nach (2)

$$(6) \quad Apu = Q - q - q,$$

also wenn man  $Q - q = r$  setzt, nach (1) und (3)

$$r = 606,50 + 0,3050t - 1,013t, \text{ d. i.}$$

$$(7) \quad r = 606,5 - 0,708t.$$

Hiernach aber  $Apu = r - q$ , d. i. mittelst der Werthe in (4) und (7):

$$(8) \quad Apu = 31,10 + 0,083t.$$

Die in nachfolgender Tabelle für  $Apu$  berechneten Werthe weichen von denen der Formel (8) etwas ab, da sie mittelst der Zeuner'schen Gleichung<sup>1)</sup> berechnet wurden:

$$(9) \quad Apu = 31,1 + 1,096t - q.$$

Zum weiteren Verständniß der erwähnten Tabelle ist noch zu bemerken, daß die letzte, mit  $\Delta$  überschriebene Columne die den Temperaturen und Pressungen correspondirende specifische Dichte, oder das specifische Gewicht des gesättigten Wasserdampfes verzeichnet und daß die betreffenden Tabellenwerthe mittelst der Gleichung berechnet sind:

$$(10) \quad \Delta = \frac{1}{u + 0,001},$$

(der reciproke Werth von  $v = u + w = u + 0,001$ , wenn man unter  $v$  das specifische Volumen versteht).

Zeuner entwickelt in seinen Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie<sup>2)</sup> eine für practische Zwecke sehr brauchbare Formel für  $\Delta$ , nämlich:

$$(11) \quad \Delta = 0,6061 (i)^{0,3333},$$

<sup>1)</sup> Mech. Wärmetheorie, 2. Aufl., S. 284.

<sup>2)</sup> a. a. O., S. 294.

worin  $i$  (unseren obigen Werth) die Anzahl der Atmosphären bezeichnet, welche der jedesmaligen Temperatur des gesättigten Wasserdampfes entsprechen.

Hinsichtlich der Werthe  $\frac{q}{u}$  in der 7. Columne unserer Tabelle ist zu bemerken, daß von diesem Quotienten häufig Gebrauch gemacht werden muß, wie sich schon bei Lösung der technischen Aufgabe des folgenden Paragraphen zeigen wird. Uebrigens giebt dieser Quotient (nahezu) auch an, wie viel Calorien für 1 Cubikmeter Dampf unter verschiedenen Spannungen zur inneren Verdampfungswärme erforderlich sind.

Schließlich ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß, weil beim Verdampfungsprocesse die der verrichteten äußeren Arbeit entsprechende Wärmemenge  $Apu$ , also die äußere latente Wärme verschwindet, von der ganzen Wärmemenge  $Q$  im gesättigten Dampfe nur noch die Wärmemenge  $Q - Apu$  zurückgeblieben ist, welchen Rest wir mit Zeuner<sup>1)</sup> mit  $J$  bezeichnen und Dampfwärme nennen.

Der Werth

$$(12) \quad J = Q - Apu$$

giebt sonach an, wie viel Calorien Wärme in der Gewichtseinheit von gesättigtem Dampf gewissen Druckes  $p$  mehr enthalten sind, als in der Gewichtseinheit Flüssigkeit von  $0^\circ$  Temperatur.

Aus der Verbindung von (5) mit (12) folgt endlich noch

$$(13) \quad J = q + q.$$

Zur Uebersicht geben wir folgendes Schema, über den Zusammenhang der sechs Größen  $Q$ ,  $q$ ,  $q$ ,  $Apu$ ,  $J$  und  $r$ , woraus also erhellt, wie die Wärme bei der Bildung gesättigten Wasserdampfes verwendet wird.

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\hspace{10em}}^Q \\
 \underbrace{q \quad + \quad q}_{J} \quad + \quad \overbrace{q \quad + \quad Apu}^r \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_Q
 \end{array}$$

In Worten ausgedrückt also:

$$\begin{array}{c}
 \text{Gesamtwärme} \\
 \overbrace{\hspace{10em}}^{\text{Verdampfungswärme}} \\
 \text{Flüssigkeitswärme} + \overbrace{\hspace{5em}}^{\text{innere Verdampfsw.}} + \overbrace{\hspace{5em}}^{\text{äußere Verdampfsw.}} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Dampfwärme}} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Gesamtwärme.}}
 \end{array}$$

<sup>1)</sup> Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. 2. Auflage, S. 270.



**T a f e l**  
für gesättigte Wasserdämpfe.

1	2	3	4	5	6	7	8
Dampfspannung in Atmosphären.	$t$	$q$	$Q$	$Apu$	$u$	$\frac{Q}{u}$	$\Delta$
0,02	17,83	17,838	561,296	32,804	67,303	8,3398	0,0149
0,04	29,35	29,375	552,184	33,893	34,769	15,882	0,0288
0,06	36,56	36,601	646,481	34,569	23,641	23,116	0,0423
0,08	41,92	41,977	542,241	35,067	17,987	30,146	0,0556
0,10	46,21	46,282	538,848	35,464	14,552	37,029	0,0687
0,12	49,83	49,917	535,984	35,797	12,241	43,786	0,0817
0,15	54,37	54,477	532,393	36,213	9,9063	53,743	0,1009
0,2	60,45	60,589	527,584	36,764	7,5428	69,945	0,1326
0,3	69,49	69,687	520,433	37,574	5,1393	101,27	0,1945
0,4	76,25	76,499	515,086	38,171	3,9157	131,54	0,2553
0,5	81,71	82,017	510,767	38,637	3,1708	161,08	0,3153
0,6	86,32	86,662	507,121	39,045	2,6703	189,91	0,3743
0,7	90,32	90,704	503,957	39,387	2,3088	218,28	0,4329
0,8	93,88	94,304	501,141	39,688	2,0357	246,18	0,4910
0,9	97,08	97,543	498,610	39,957	1,8218	273,69	0,5486
1,0	100,00	100,500	496,300	40,200	1,6495	300,88	0,6059
1,1	102,68	103,216	494,180	40,421	1,5078	327,75	0,6628
1,2	105,17	105,740	492,210	40,626	1,3892	354,31	0,7193
1,3	107,50	108,104	490,367	40,816	1,2883	380,63	0,7756
1,4	109,68	110,316	488,643	40,993	1,2015	406,69	0,8316
1,5	111,74	112,408	487,014	41,159	1,1259	432,56	0,8874
1,6	113,69	114,389	485,471	41,315	1,0596	458,16	0,9429
1,7	115,54	116,269	484,008	41,463	1,0008	483,62	0,9982
1,8	117,30	118,059	482,616	41,602	0,9484	508,87	1,0533
1,9	118,99	119,779	481,279	41,734	0,9013	533,98	1,1083
2,0	120,60	121,417	480,005	41,861	0,8589	558,86	1,1629
2,1	122,15	122,995	478,779	41,981	0,8203	583,66	1,2176
2,2	123,64	124,513	477,601	42,096	0,7852	608,25	1,2719
2,3	125,07	125,970	476,470	42,207	0,7530	632,76	1,3263
2,4	126,46	127,386	475,370	42,314	0,7235	657,04	1,3803
2,5	127,80	128,753	474,310	42,416	0,6962	681,28	1,4343
2,6	129,10	130,079	473,282	42,515	0,6710	705,34	1,4881
2,7	130,35	131,354	472,293	42,610	0,6476	729,30	1,5418
2,8	131,57	132,599	471,328	42,702	0,6258	753,16	1,5954
2,9	132,76	133,814	470,387	42,791	0,6055	776,86	1,6488
3,0	133,91	134,989	469,477	42,876	0,5865	800,47	1,7021
3,1	135,03	136,133	468,591	42,960	0,5686	824,11	1,7556
3,2	136,12	137,247	467,729	43,040	0,5519	848,39	1,8086
3,3	137,19	138,341	466,883	43,119	0,5362	870,73	1,8615
3,4	138,23	139,404	466,060	43,196	0,5213	894,03	1,9147

1	2	3	4	5	6	7	8
Dampfspannung in Atmosphären.	$t$	$q$	$Q$	$Apv$	$u$	$\frac{Q}{u}$	$A$
3,5	139,24	140,438	465,261	43,269	0,5072	917,31	1,9676
3,6	140,23	141,450	464,478	43,342	0,4940	940,24	2,0203
3,7	141,21	142,453	463,703	43,413	0,4814	963,24	2,0729
3,8	142,15	143,416	462,959	43,480	0,4695	986,07	2,1255
3,9	143,08	144,368	462,224	43,548	0,4581	1008,9	2,1780
4,0	144,00	145,310	461,496	43,614	0,4474	1031,6	2,2303
4,1	144,89	146,222	460,792	43,677	0,4371	1054,2	2,2826
4,2	145,76	147,114	460,104	43,739	0,4273	1076,8	2,3349
4,3	146,61	147,985	459,431	43,799	0,4179	1099,3	2,3871
4,4	147,46	148,857	458,759	43,859	0,4090	1121,7	2,4391
4,5	148,29	149,708	458,103	43,918	0,4004	1144,0	2,4911
4,6	149,10	150,539	457,462	43,975	0,3922	1166,3	2,5430
4,7	149,90	151,360	456,829	44,030	0,3844	1188,5	2,5949
4,8	150,69	152,171	456,204	44,085	0,3768	1210,6	2,6467
4,9	151,46	152,961	455,595	44,139	0,3696	1232,7	2,6984
5,0	152,22	153,741	454,994	44,192	0,3626	1254,7	2,7500
5,1	152,97	154,512	454,401	44,243	0,3559	1276,6	2,8016
5,2	153,70	155,262	453,823	44,293	0,3495	1298,5	2,8531
5,3	154,43	156,012	453,246	44,343	0,3433	1320,3	2,9046
5,4	155,14	156,741	452,684	44,392	0,3373	1342,1	2,9560
5,5	155,85	157,471	452,123	44,441	0,3315	1363,8	3,0073
5,6	156,54	158,181	451,577	44,487	0,3259	1385,4	3,0586
5,7	157,22	158,880	451,039	44,533	0,3205	1407,0	3,1098
5,8	157,90	159,579	450,501	44,579	0,3153	1428,5	3,1610
5,9	158,56	160,259	449,979	44,623	0,3103	1450,0	3,2122
6,0	159,22	160,938	449,457	44,667	0,3054	1471,5	3,2632
6,1	159,87	161,607	448,943	44,710	0,3007	1492,0	3,3142
6,2	160,50	162,255	448,444	44,753	0,2962	1514,2	3,3652
6,3	161,14	162,915	447,938	44,794	0,2917	1535,5	3,4161
6,4	161,76	163,553	447,448	44,836	0,2874	1556,7	3,4670
6,5	162,37	164,181	446,965	44,876	0,2833	1577,9	3,5178
6,7	162,98	164,810	446,483	44,916	0,2792	1599,0	3,5685
6,6	163,58	165,428	446,008	44,956	0,2753	1620,1	3,6192
6,8	164,18	166,047	445,534	44,994	0,2715	1641,2	3,6699
6,9	164,76	166,645	445,075	45,032	0,2678	1662,2	3,7206
7,00	165,34	167,243	444,616	45,070	0,2642	1683,0	3,7711
7,25	166,77	168,718	443,485	45,162	0,2556	1735,2	3,8974
7,50	168,15	170,142	442,393	45,250	0,2475	1787,1	4,0234
7,75	169,50	171,535	441,325	45,337	0,2400	1838,7	4,1490
8,00	170,81	172,888	440,289	45,420	0,2329	1890,1	4,2745
8,25	172,10	174,221	439,269	45,501	0,2263	1941,2	4,3997
8,50	173,35	175,514	438,280	45,578	0,2200	1992,1	4,5248
8,75	174,57	176,775	437,315	45,654	0,2141	2042,8	4,6495

1	2	3	4	5	6	7	8
Dampfspannung in Atmosphären.	$t$	$q$	$Q$	$Apu$	$u$	$\frac{Q}{u}$	$A$
9,00	175,77	178,017	436,366	45,727	0,2085	2093,3	4,7741
9,25	176,94	179,228	435,440	45,798	0,2031	2143,5	4,8985
9,50	178,08	180,408	434,539	45,868	0,1981	2193,5	5,0226
9,75	179,21	181,579	433,645	45,935	0,1933	2243,3	5,1466
10,00	180,31	182,719	432,775	46,001	0,1887	2293,0	5,2704
10,25	181,38	183,828	431,928	46,064	0,1844	2342,5	5,3941
10,50	182,44	184,927	431,090	46,127	0,1802	2391,7	5,5174
10,75	183,48	186,005	430,267	46,189	0,1763	2440,7	5,6405
11,00	184,50	187,065	429,460	46,247	0,1725	2489,5	5,7636
11,25	185,51	188,113	428,661	46,306	0,1689	2538,2	5,8864
11,50	186,49	189,131	427,886	46,362	0,1654	2536,8	6,0092
11,75	187,46	190,139	427,119	46,417	0,1621	2635,2	6,1318
12,00	188,41	191,126	426,368	46,471	0,1589	2683,4	6,2543
12,25	189,35	192,104	425,424	46,524	0,1558	2731,4	6,3765
12,50	190,27	193,060	424,896	46,576	0,1529	2779,3	6,4986
12,75	191,18	194,007	424,177	46,626	0,1500	2827,0	6,6206
13,00	192,08	194,944	423,465	46,676	0,1473	2874,5	6,7424
13,25	192,96	195,860	422,769	46,724	0,1447	2922,0	6,8642
13,50	193,83	196,766	422,080	46,772	0,1421	2969,3	6,9857
13,75	194,69	197,662	421,400	46,818	0,1397	3016,5	7,1072
14,00	195,53	198,537	420,736	46,864	0,1373	3063,4	7,2283

## §. 67.

## Zeuner's Dampfkesselaufgabe.

Um die nützliche Verwendbarkeit vorstehender Tabellenwerthe für einen practischen Fall zu zeigen, hat Zeuner bereits im Jahre 1863 folgende Aufgabe gelöst<sup>1)</sup>, welche noch gegenwärtig verdient, in allen betreffenden technischen Lehrbüchern aufgenommen zu werden.

Aufgabe. Nach welchem Gesetze wächst in einem Dampfkessel die Dampfspannung bei fortgesetztem Heizen mit der Zeit, wenn man von einem gewissen Zeitpunkte an die Dampfbildung unterbricht und die Ventile in geschlossenem Zustande erhält?

Auflösung. Es sei im Augenblicke, wo die Dampfableitung unterbrochen wird, das Gewicht von Wasser und Dampf im Kessel  $M$  und davon  $m$  Kilogramm dampfförmig. Die Temperatur sei  $t$  und die correspondirende Spannung sei  $p$ .

Behalten wir dann die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen

<sup>1)</sup> Neue Tabelle für gesättigte Wasserdämpfe. Von Prof. Dr. G. Zeuner. Schweizerische Polytechnische Zeitschrift. Bd. VIII, Jahrg. 1863, S. 1 ff.

bei<sup>1)</sup>, so erhalten wir zunächst

$$(M - m)w \text{ für das Wasservolumen und} \\ mv \text{ für das Dampfvolumen.}$$

Demnach aber das Volumen  $V$  der ganzen Masse:

$$V = (M - m)w + mv,$$

oder da  $v - w = u$  war:

$$V = Mw + mu.$$

Durch das fortgesetzte Heizen des Kessels sei die Dampfmenge nach  $\tau$  Minuten in den größeren Werth  $m_1$ , die Temperatur in  $t_1$  und die Spannung in  $p_1$  übergegangen. Dann wird offenbar

$$V = Mw + m_1u_1,$$

wobei  $u_1$  der Temperatur  $t_1$  entspricht.

Durch das Gleichsetzen beider Werthe von  $V$  ergibt sich dann:

$$(1) \quad m_1u_1 = mu.$$

Außer dieser Gleichung läßt sich aber noch eine andere in nachstehender Weise gewinnen.

Es beträgt die anfänglich im Wasser enthaltene Wärmemenge

$$(M - m)q$$

und die im Dampfe enthaltene

$$mJ.$$

Daher die Wärmemenge der ganzen Masse

$$(M - m)q + mJ, \text{ oder}$$

$$Mq + m(J - q),$$

d. i. mit Bezug auf Gleichung (13) des vorigen Paragraphen:

$$Mq + mQ.$$

Bei einer anderen Temperatur  $t_1$  erhält man eben so

$$Mq_1 + m_1Q_1,$$

und daher die Wärmemenge  $Q$ , welche von Außen zuzuführen war, damit die Temperatur von  $t$  auf  $t_1$  stieg:

$$(2) \quad Q = M(q_1 - q) + m_1Q_1 - mQ.$$

Nun war nach (3) §. 66,  $q = 1,013t$ , folglich  $q_1 = 1,013t_1$ .

Ferner ist nach (1) dieses Paragraphen  $m_1 = \frac{mu}{u_1}$ , daher wenn man diese Werthe in (2) substituirt:

$$Q = 1,013 M(t_1 - t) + mu \left( \frac{Q_1}{u_1} - \frac{Q}{u} \right).$$

Ist endlich noch  $Q_0$  die Wärmemenge, die in jeder Minute in den Kessel tritt, so erhält man die Zeit  $\tau$  (in Minuten), innerhalb welcher die Temperatur von  $t$  auf  $t_1$  und die Spannung von  $p$  auf  $p_1$  steigt zu:

$$(3) \quad \tau = \frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{Q_0} \left\{ 1,013 M(t_1 - t) + mu \left( \frac{Q_1}{u_1} - \frac{Q}{u} \right) \right\}.$$

<sup>1)</sup> D. h. bezeichnet  $w$  das spezifische Volumen der Gewichtseinheit (= 1 Kilogr.) Wasser und  $v = \frac{1}{A}$  das spezifische Volumen der Gewichtseinheit (= 1 Kilogr.) Dampf etc.

Beispiel. Die Heizfläche eines einfachen cylindrischen Dampfkessels betrage 18 Quadratmeter (d. h. der Kessel würde ungefähr einer Dampfmaschine von 12 bis 15 Pferdekräften genügen), während derselbe einen Inhalt von 11 Cubikmetern hat, wovon 0,4 mit Dampf von 4 Atmosphären Spannung und 0,6 mit Wasser gefüllt ist.

Es fragt sich, in welcher Zeit die Dampfspannung auf 8 Atmosphären steigen wird, wenn überdies noch die Temperatur des Speisewassers  $15^{\circ}$  Cels. ist?

Auflösung. Rechnet man, daß jeder Quadratmeter der vorhandenen Heizfläche 25 Kilogramm Dampf pro Stunde liefert, so giebt dies pro Minute, für den ganzen Kessel,

$$\frac{25 \cdot 18}{60} = 7,5 \text{ Kil. Dampf.}$$

Nach unserer Tabelle beträgt die Wärmemenge =  $Q$ , welche man jedem Kilogramm Speisewasser von Null Grad Temperatur (bei constantem Drucke) zuführen müßte:

$$Q = q + q + A p u,$$

d. i., weil der Spannung von 4 Atmosphären die Temperatur von 144 Grad entspricht, und nach der Tabelle Seite 153:

$$q = 145,310,$$

$$q = 461,496,$$

$$A p u = 43,614 \text{ erhalten wird:}$$

$$Q = 145,31 + 461,496 + 43,614 = 650,420 \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Da jedoch das Speisewasser nicht die Temperatur = Null, sondern die  $15^{\circ}$  Grad hat, so beträgt die zuzuführende Wärmemenge nur  $Q - 15 = 635,42$  Wärmeeinheiten.

Vorstehendem gemäß liefert der Kessel pro Minute 7,50 Kilogr. Dampf, so daß sich die während derselben Zeit in den Kessel tretende Wärmemenge =  $Q_0$  ergibt zu:

$$Q_0 = 635,42 \times 7,5 = 4765,65 \text{ Calorien.}$$

Daher folgt aus (3):

$$Q_0 = \frac{1}{4765,65} \left\{ 1,013 M (t_1 - t) + m u \left( \frac{q_1}{u_1} - \frac{q}{u} \right) \right\}.$$

Wir schreiten nun zur Ermittlung der verschiedenen Glieder dieser Gleichung und erhalten Folgendes:

Da nach unserer Tabelle 1 Cubikmeter Dampf von 4 Atmosphären Spannung 2,2303 Kilogramm wiegt, so beträgt das Dampfgewicht  $m$

$$m = 0,4 \cdot 11 \cdot 2,2303 = 9,8133 \text{ Kilogramm.}$$

Eben so ergibt sich für das Wassergewicht

$$M - m = 0,6 \cdot 11 \cdot 1000 = 6600 \text{ Kilogramm.}$$

Daher erhält man für das Gewicht von Dampf und Wasser zusammen:

$$M = 6600 + m = 6609,8133 \text{ Kilogramm.}$$

Ferner ist nach der Tabelle (4 Atmosph. entsprechend)  $t = 144$  und letzterer Temperatur correspondirend  $u = 0,4474$ , so wie  $\frac{q}{u} = 1031,6$ .

Eben so für 8 Atmosphären

$$t_1 = 170,81; \frac{q_1}{u_1} = 1890,1 \text{ und} \\ t_1 - t = 170,81 - 144 = 26,81.$$

Daher

$$1,013 M (t_1 - t) = 1,013 \cdot 6609,8133 \cdot 26,81 = 179512,79.$$

Ferner ergibt sich

$$mu = 9,8133 \cdot 0,4474 = 4,390.$$

$$\frac{q_1}{u_1} - \frac{q}{u} = 1890,1 - 1031,6 = 858,5, \text{ folglich}$$

$$mu \left( \frac{q_2}{u_1} - \frac{q}{u} \right) = 4,390 \cdot 858,5 = 3768,815.$$

Demnach

$$\tau = \frac{179512,79 + 3768,815}{4765,65} = \frac{183281,605}{4765,65}, \text{ d. i.}$$

$$\tau = 38,45 \text{ Minuten,}$$

als die Zeit, innerhalb welcher die Dampfspannung, bei unveränderter Heizung im bezeichneten Kessel, von 4 auf 8 Atmosphären wächst.

### §. 68.

#### Expansionsarbeit gesättigten Wasserdampfes.

Als weitere Anwendung der Werthe vorstehender Tabelle auf Mischungen von gesättigtem Dampfe mit Wasser<sup>1)</sup>, ermitteln wir die Arbeit, welche solcher Dampf verrichtet, wenn er sich nach der adiabatischen Curve expandirt, d. h. wenn ihm bei der Ausdehnung weder Wärme mitgetheilt, noch solche entzogen wird. Unter dieser Voraussetzung kann äußere Arbeit nur auf Kosten der inneren geleistet werden. Die äußere Arbeit ist aber gleich dem Aequivalente der entzogenen Flüssigkeitswärme ( $q$ ) und der Veränderung der inneren latenten Wärme ( $Q$ ), so daß sich folgendes Schema aufstellen läßt, sobald man beim Beginnen der Expansion annimmt, daß  $x_2$  Kilogramm gesättigter Dampf und  $1 - x_2$  Kilogramm Wasser vorhanden ist:

$$\begin{array}{llll} x_2 \text{ Kil. Dampf} & \text{enthalten an Wärmeeinheiten:} & x_2 (q_2 + Q_2); \\ (1 - x_2) \text{ „ Wasser} & \text{„ „ „ „} & (1 - x_2) q_2. \\ \text{Das Gemisch enthält sonach} & \text{„ „ „ „} & q_2 + x_2 Q_2. \end{array}$$

Sind ferner am Ende der Expansion vorhanden:  $x_1$  Kilogr. Dampf und  $1 - x_1$  Kilogr. Wasser, so ergibt sich für dies Gemisch an Wärmeeinheiten:  $q_1 + x_1 Q_1$ .

Die bei der Ausdehnung geleistete äußere aber verschwundene Arbeit =  $\mathcal{A}$  ist daher (mit Bezug auf VI, S. 136):

$$\frac{\mathcal{A}}{E} = \frac{U_2 - U_1}{E} = q_2 + x_2 Q_2 - q_1 - x_1 Q_1 \text{ oder}$$

$$\text{I. } \mathcal{A} = E (q_2 - q_1 + x_2 Q_2 - x_1 Q_1).$$

<sup>1)</sup> Kein Dampfkessel vermag völlig trocknen Dampf, d. h. solchen ohne Beimischung von (unverdampftem) Wasser zu liefern. Im III. Bande meiner Allgem. Maschinenlehre (2. Auflage) ist nachgewiesen, daß das mechanisch mit fortgerissene Wasser 3 bis 30 Procent betragen kann.

Für practische Rechnungen ist nun eine Formel erforderlich, mittelst welcher man  $x_2$  (am Ende der Expansion) aus  $x_1$  (am Anfange der Expansion) zu berechnen im Stande ist. Eine solche Formel hat aber Clausius<sup>1)</sup> entwickelt, nämlich

$$\frac{x_2 r_2}{T_2} = \frac{x_1 r_1}{T_1} + c \text{Lgnt} \frac{T_1}{T_2},$$

wo  $r_2$  und  $r_1$  die den Temperaturen des Dampfes entsprechenden Werthe (von  $r$ ) der Tabelle bezeichnen und  $c = 1,013$  ist.

Zeuner<sup>2)</sup> hat dafür eine empirische Formel aufgestellt, die für's practische Rechnen bequemer ist, nämlich

$$\text{II. } \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1 = \frac{x_2 r_2}{T_2} + \tau_2,$$

$$\text{worin } \tau = \int_0^t \frac{dq}{T} \text{ ist.}$$

Daß hier überall  $T$  und  $q$  die früher erörterten Bedeutungen haben, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Zeuner hat überdies für den practischen Gebrauch der Formel II folgende Tabelle berechnet:<sup>3)</sup>

Druck in Atmosphären	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{r}{T}$	1,5488	1,4383	1,3258	1,2591	1,2112	1,1739	1,1432	1,1171	1,0944	1,0742	1,0561
$\tau$	0,2627	0,3135	0,3681	0,4020	0,4271	0,4469	0,4639	0,4784	0,4912	0,5027	0,5129

Beispiel. Welche Arbeit ( $\mathcal{A}$ ) verrichtet 1 Kilogramm gesättigter Wasserdampf von 4 Atm. Spannung, wenn er adiabatisch bis auf 1 Atm. Spannung expandirt?

Auflösung. Zuerst erhält man aus II:

$$x_2 = \frac{T_2}{r_2} \left( \frac{x_1 r_1}{T_1} + \tau_1 - \tau_2 \right)$$

und daher mittelst vorstehender Tabelle, da  $x_1 = 1$  Kil, ist:

$$x_2 = \frac{1}{1,4383} (1,2112 + 0,4271 - 0,3135) = \frac{1,3148}{1,4383} = 0,921$$

$$1 - x_2 = 1 - 0,921 = 0,079.$$

Hiernach haben sich also fast  $8\frac{9}{10}$  Dampf während der Expansion zu Wasser niedergeschlagen.

Mit Bezug auf I. ergiebt sich weiter (mittelst der Tabelle S. 153):

$$q_1 = 145,310; \text{ so wie: } q_2 = 100,50$$

$$x_1 q_1 = 461,496 \quad x_2 q_2 = 0,921 \cdot 496,30 = 457,092, \text{ also}$$

$$q_1 + x_1 q_1 = 606,806. \quad q_2 + x_2 q_2 = 557,592.$$

Daher erhält man für die während der Ausdehnung verschwundene Wärme:

<sup>1)</sup> Mechanische Wärmetheorie, 2. Auflage, S. 164.

<sup>2)</sup> Grundzüge der Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 322.

<sup>3)</sup> Ebendasselbst, S. 316.

$\frac{Q}{E} = (606,806 - 557,592) = 49,213$  Wärmeeinheiten (Calorien). Ferner ergibt die während dieser Ausdehnung verrichtete äußere mechanische Arbeit zu:

$$Q = 425 \cdot 49,216 = 20916,80 \text{ Meterkilogramm.}$$

Zusatz 1. Das während der Expansion sich niedergeschlagene Dampfquantum  $x_1 - x_2$  ergibt sich überhaupt allgemein aus II. zu:

$$x_1 - x_2 = \frac{T_2}{r_2} \left[ x_1 \left( \frac{r_2}{T_1} - \frac{r_1}{T_2} \right) + \tau_2 - \tau_1 \right].$$

Clausius und nach diesem Regnault leiteten zuerst diesen auch für die Anwendung in der Technik wichtigen Satz mit Hilfe der mechanischen Wärmetheorie ab, während ihn Hirn durch Experimente bestätigte.

In seiner ganzen Ausdehnung lautet das wichtige Ergebnis (nach Clausius) folgendermaßen:<sup>1)</sup>

„Gesättigter Wasserdampf muß sich bei der Ausdehnung theilweise niederschlagen, bei der Zusammendrückung aber erhitzen, sobald er sich in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle befindet.“

Pambour<sup>2)</sup> (dem wir die erste beachtenswerthe Theorie der Dampfmaschine verdanken) und nach ihm Redtenbacher, (der sich um die Ausbildung dieser Theorie verdient machte); beide nahmen an, daß der Dampf bei seiner Ausdehnung nicht nur im gesättigten Zustande bleibe, sondern daß sich auch das vorhandene Dampfgewicht nicht ändere, daß also die Ausdehnung nach der Curve constanter Dampfmenge oder Dampfgewichte stattfinde.

Nach den vorbemerkten Entdeckungen von Clausius und Rankine bleibt zwar der gesättigte Dampf während der Expansion und Compression gesättigt, allein das vorhandene Dampfgewicht oder die vorhandene Dampfmenge bleibt nicht constant.

Zusatz 2. Bei der Wichtigkeit vorstehenden Satzes hat man sich gar bald die Frage vorgelegt, ob sich für gesättigten Wasserdampf das Gesetz der adiabatischen Linie (entsprechend §. 60) nicht durch eine Gleichung von der Form

$$pv^\mu = p_1v_1^\mu = p_2v_2^\mu \dots$$

darstellen lasse, sobald nur  $\mu$  entsprechend bekannt ist.

In der That ist es Zeuner<sup>3)</sup> (nach dem Vorgange von Rankine<sup>4)</sup>) geglückt, eine empirische Formel aufzufinden, woraus  $\mu$  für Mischungen aus gesättigtem Dampf und Wasser berechnet werden kann und welche für die Praxis befriedigende Uebereinstimmungen mit der Erfahrung giebt.

Diese Formel ist

$$\text{III. } \mu = 1,035 + 0,10y,$$

worin  $y$  den verhältnißmäßigen Dampfgehalt, die specifische Dampfmenge beim Beginn der Expansion darstellt, also  $y = 1$  ist für ganz trockenen Dampf, der in der Praxis entweder gar nicht oder doch nur höchst selten vorkommt und weshalb auch Zeuner aufmerksam macht, daß er seine Formel nur innerhalb der Grenzen  $y = 1$  und  $y = 0,70$  benutzt wissen will.

<sup>1)</sup> Die mechanische Wärmetheorie. Zweite Auflage, S. 138.

<sup>2)</sup> Pambour, geb. 1795 zu Noyen (Dep. Oise).

<sup>3)</sup> Mechanische Wärmetheorie. 2. Auflage, S. 342.

<sup>4)</sup> Man sehe den später folgenden, mit „Geschichtliche Notizen“ überschriebenen §. 70.



Aller Dampf ist mehr oder weniger feucht, zumal wenn er in langer Leitung zugeführt wird und wenn der Kessel nicht zur Ueberhitzung eingerichtet ist. Erfahrene Practiker rathen neuerdings<sup>1)</sup>, für gewöhnlich  $y = 0,90$  als Mittelwerth zu rechnen, d. h. anzunehmen, daß in einem Kilogramm des verwendeten Gemisches sich 0,10 Kilogramm Wasser und 0,90 Kilogramm Dampf befindet, so daß in runder Ziffer mit

$$\mu = 1,035 + 0,090 = 1,125$$

zu rechnen ist.

Da die Gleichung der adiabatischen Curve für gesättigten Wasserdampf, unter Einführung des Werthes  $\mu$ , dieselbe Gestalt hat, wie dies bei atmosphärischer Luft (§. 59) der Fall ist, so muß auch die Leistung dieses Dampfes bei seiner Ausdehnung nach der adiabatischen Linie, aus der Gleichung I. des §. 60 berechnet werden können, so bald man die dort erforderliche Zahl  $n$  durch das vorstehende  $\mu$  ersetzt, also erhält:

$$\text{IV. } \mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1} \left\{ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}} \right\},$$

oder auch, wegen  $\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^\mu$ :

$$\mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1} \left\{ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\mu - 1} \right\},$$

oder endlich, wenn man  $\frac{v_1}{v_2}$ , das Expansionsverhältniß =  $\varepsilon$  setzt:

$$\text{V. } \mathfrak{A}_e = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1} \left\{ 1 - \varepsilon^{\mu - 1} \right\}.$$

In wie weit practische Aufgaben, welche man mittelst vorstehender Gleichungen IV und V statt mit der genauen Gleichung I rechnet, abweichende Werthe liefern, erhellt aus folgendem Beispiele. In der That ist die Uebereinstimmung größer, als man erwarten konnte, und darf es daher den Practikern um so weniger verdacht werden, bei der Berechnung von Dampfmaschinenleistungen die letzteren Gleichungen und nicht die (wissenschaftlich richtigere) Gleichung I zu benutzen<sup>2)</sup>, weil die sogenannten passiven Widerstände und noch andere Umstände (namentlich daß die Bedingungen, unter welchen das Druckgesetz das adiabatische ist, practisch nicht ganz zu erfüllen sind), einen viel größeren Einfluß auf die Richtigkeit des Endresultates haben können, als die Benutzung der Annäherungsformel zur Berechnung der Expansionsarbeit<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Ingenieur Geber unter der Ueberschrift „Die Arbeit des Dampfes in der Dampfmaschine“. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XXII (Jahrg. 1878), S. 113.

<sup>2)</sup> G. Schmidt (Prof. in Prag) in der Zeitschrift des österr. Ingenieur-Vereins, Jahrg. XV (1863), S. 193. Hrabák, „Die Dampfmaschinenberechnungen etc.“ Dritte Auflage, Prag 1877, S. 56 ff.

<sup>3)</sup> Zeuner selbst sagt S. 324 (in der 2. Auflage) seiner „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie“ Folgendes: „Die Gleichung der adiabatischen Curve für Dampf- und Flüssigkeitsmischungen läßt sich in der Form  $p = f(v)$

Beispiel. Wie groß ist die Leistung von 1 Kil. gesättigten Wasserdampfes, wenn derselbe von 4 auf 1 Atmosphäre expandirt, unter der Voraussetzung, daß dem Dampfe ursprünglich kein Wasser beige-mischt, d. h. völlig trockener Dampf (der sogenannte Grenzzustand) vorhanden ist, also  $y = 1$  gesetzt werden kann?

Auflösung. Zunächst liefert die Gleichung III dieses Paragraphen den Werth:

$$\mu = 1,035 + 0,10 = 1,135,$$

daher aus IV, wegen  $\mu - 1 = 0,135$  und  $\frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{0,135}{1,135} = 0,122$ , folgt:

$$\mathfrak{H}_e = \frac{p_1 v_1}{0,135} \left\{ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{0,122} \right\}.$$

Ferner ist hier  $p_1 = 4 \cdot 10333$  Kil.,  $v_1 = \frac{1}{A_1} = \frac{1}{2,2303}$  (nach Tabelle S. 153), d. i.  $v_1 = 0,448$  und  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{4} = 0,25$ . Daher

$$\mathfrak{H}_e = \frac{10333 \cdot 4 \cdot 0,448}{0,135} \left\{ 1 - (0,25)^{0,122} \right\} = 21397,2 \text{ Meter Kilogramm.}$$

Letzterer Werth weicht von dem S. 160 ermittelten, (d. h. von 20916,8 Meterkilogramm) verhältnißmäßig wenig ab. Man sehe auch hierüber den folgenden mit „Geschichtliche Notizen“ überschriebenen §. 70.

Zusatz 3. Völckers liefert in seinem werthvollen Buche „Der Indicator“ (Anleitung zum Gebrauche desselben bei der Prüfung von Dampfmaschinen)<sup>1)</sup> folgende Tabelle, welche dazu dienen kann, die Annahme der Practiker zu rechtfertigen „Zur Berechnung der Nutzarbeit einer Expansions-Dampfmaschine, das Mariotte'sche Gesetz beizubehalten“<sup>2)</sup>. In der Tabelle bezeichnet  $l_1$  den Admissionsweg des Dampfkolbens und  $l$  dessen ganzen Schub oder Hub,  $p_1$  die mittlere Dampfspannung während der Admission,  $p_2$  die Dampfspannung beim Beginn der Expansion, beide in Kilogr. pro Quadratcentimeter ausgedrückt, und  $ml$  die Höhe des sogenannten schädlichen Raumes auf jeder Seite des Kolbens. Die Werthe der letzten Columne sind mittelst Indicatordiagrammen berechnet.

auf theoretischem Wege nicht darstellen. Hierin liegt aber der Grund, weswegen die Formeln der mechanischen Wärmetheorie bei Berechnung der Dampfmaschinen noch keine allgemeine Anwendung gefunden haben.“

<sup>1)</sup> Erste Auflage (Berlin 1863), S. 51. Zweite Auflage (Berlin 1878), S. 49.

<sup>2)</sup> Zeuner stimmt am Schlusse (S. 536) seiner „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie“ (2. Auflage) derselben Annahme bei. Eben so zeigt auch Grove in seiner werthvollen Abhandlung „Die Lokomotive im Allgemeinen“, Bd. III, S. 155 des v. Heusinger'schen Handbuches der Eisenbahntechnik, daß bei Lokomotiv-Dampfmaschinen das Mariotte'sche Gesetz dem thät-sächlichsten Vorgange am nächsten kommt.

Versuchsnummer	$\frac{l_1}{l}$	$m$	$p_1$	$p_2$	$p_m$ die mittlere absolute Dampfspannung hinter dem Kolben in Kil. pro Quadratcentimeter.		
					Nach Laplace Poisson	Nach Mariotte	Nach den Diagrammen
1	0,8	0,06	3,238	3,143	3,133	3,123	3,166
2	0,75	0,09	2,858	2,595	2,682	2,664	2,720
3	0,46	0,06	5,380	5,336	4,169	4,318	4,332
4	0,45	0,06	3,406	3,267	2,587	2,682	2,779
5	0,45	0,06	3,801	3,669	2,894	3,002	3,029
6	0,25	0,085	3,201	2,962	1,726	1,874	1,968
7	0,16	0,013	4,459	4,386	1,683	2,059	2,237
8	0,132	0,037	4,183	4,110	1,457	1,789	1,747
9	0,131	0,037	4,119	4,046	1,430	1,756	1,567
10	0,130	0,013	4,459	4,386	1,438	1,786	1,888
11	0,12	0,013	4,550	4,477	1,392	1,770	1,990

Die Folgerungen aus dieser Tabelle können wohl Jedem überlassen bleiben, so wie auch das Lesen der betreffenden Stellen unserer Quelle zu empfehlen ist.

## §. 69.

## Ueberhitzter Wasserdampf.

Zu dem, was bereits §. 64 über den Unterschied zwischen gesättigtem und überhitztem Dampfe bemerkt wurde, werde hier noch hinzugefügt, daß sich die überhitzten Dämpfe den Gasen um so mehr nähern, je weiter sie von ihrem Condensationspunkte entfernt sind, so wie daß man die überhitzten Dämpfe als in der Mitte zwischen gesättigten Dämpfen und (permanenten) Gasen liegend, also letztere beiden als Grenzzustände betrachten kann.

Wäre uns daher die Zustandsgleichung (d. h. die Beziehung zwischen Pressung  $p$ , Volumen  $v$  und Temperatur  $t$ ) des überhitzten Wasserdampfes genau bekannt, so würde dieselbe die Zustandsgleichung der gesättigten Dämpfe und der Gase in sich schließen.

Da eine solche Bekanntschaft nicht vorhanden ist, so hat man sich, bis auf Weiteres, mit folgenden Formeln als Zustandsgleichungen zu begnügen, deren Zahlenwerthe vorzugsweise

aus Versuchen von Hirn<sup>1)</sup> und Cazin<sup>2)</sup> direct oder indirect entlehnt sind.

Nach Hirn<sup>3)</sup> hat man:

$$(1) \quad pv = 0,00473268\tau - f(v),$$

wo  $p$  die Spannung in Atmosphären,  $v$  das spezifische Volumen (von 1 Kilogramm Gewicht),  $f(v) = 0,09247 \left( 0,353 \cdot 48 + \frac{1}{\sqrt{v}} \right)$  und  $\tau = 273 + t$  ist.

Nach Zeuner<sup>4)</sup> hat man:

$$(2) \quad pv = 0,0049287\tau - 0,18781 \sqrt[4]{p}.$$

Nach Schmidt<sup>5)</sup> hat man:

$$(3) \quad pv = 0,0046282\tau - \frac{0,0951}{v^{0,45}}.$$

Was die Verwendung des überhitzten Wasserdampfes zum Maschinenbetriebe anlangt, so wird der hin und wieder gerühmte beträchtliche (?) Vortheil<sup>6)</sup> insofern in Wirklichkeit beeinträchtigt, als dieser Dampf (abgesehen von den leicht zerstöbaren Ueberheizungsapparaten) das Fett, womit geschmiert wird, in hoher Temperatur auflöst, mit fortführt und dadurch die sich reibenden Flächen angreift, Undichtigkeiten, häufige Reparaturen etc. veranlaßt. Ueberhaupt scheint feuchter Dampf wesentlich zur Erhaltung der betreffenden Maschinentheile, dagegen überhitzter Dampf zu deren Zerstörung beizutragen<sup>7)</sup>. Prof. Kick, im Artikel „Dampf“ der dritten Auflage von Karmarsch und Heeren's „Technischem Wörterbuche“ (Bd. II, S. 510), äußert sich in ähnlicher Weise, indem er speciell Folgendes bemerkt: „Ueberhitzte Dämpfe finden in der Praxis fast keine Anwendung (insofern die Ueberheizung nicht in dem Trocknen des Dampfes besteht), weil sie die Packungen verbrennen und die Schmiermittel noch schneller zerstören als hochgespannte gesättigte Dämpfe.“ Das was sich in der Praxis

<sup>1)</sup> Annales de chim. et de phys. 4. Serie, Tome 10 (1867), Pg. 349—370.

<sup>2)</sup> Ebendasselbst Tome 14 (1868), Pg. 374—410. Ferner Comptes rendus, Dec. 1866.

<sup>3)</sup> Theorie mécanique de la chaleur. 2<sup>e</sup> Edit. (1865), Première Partie, Pg. 201 und Combes im Bulletin de la Soc. d'encouragement. Tome XI (1864), 62 année, Pg. 477.

<sup>4)</sup> „Theorie der überhitzten Wasserdämpfe“ in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. XI (1867), S. 1—66.

<sup>5)</sup> „Die Zustandsgleichung des Wasserdampfes“. Ebendasselbst, S. 653.

<sup>6)</sup> Mein Neffe, Herr Prof. Richard Rühlmann, führt Bd. 1, S. 733 seiner mech. Wärmetheorie als besondere Vortheile des überhitzten Wasserdampfes zum Maschinenbetriebe Folgendes an: „Vergleicht man die Wärmemenge, welche ein Kilogramm Dampf in einer Maschine in Arbeit umsetzt, so findet man, daß dies bei derjenigen, welche mit gesättigtem Dampfe arbeitet, 132,0 und bei jener, zu deren Betriebe überhitzter Dampf verwandt wird, (unter sonst gleichen Umständen) 156,5 Wärmeeinheiten beträgt, so daß die disponible Arbeit beinahe um  $\frac{1}{5}$  wächst.“

<sup>7)</sup> Antenheimer (Director des Technicums in Winterthur) in der von ihm umgearbeiteten 6. Auflage der Bernoulli'schen Dampfmaschinenlehre S. 86.

unter dem Namen überhitzter Dampf vorfindet, ist gewöhnlich nur trockener Dampf.

Wer sich dennoch mit dem allerdings höchst interessanten Studium überhitzter Wasserdämpfe, vom Standpunkte der mechanischen Wärmetheorie, zu beschäftigen wünscht, dem kann der Verfasser namentlich folgende neuere Bücher und Abhandlungen empfehlen: Grashof, Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1, S. 180 bis 216. Weyrauch, Von den überhitzten Wasserdämpfen. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. XX (1876), S. 1 und Ebendaselbst, Bd. XXI, S. 241 unter der Ueberschrift: „Noch einmal die überhitzten Dämpfe“. E. Herrmann (Prof. der Mechanik an der K. Ungarischen Berg- und Forstacademie zu Schemnitz), Compendium der mechanischen Wärmetheorie mit besonderer Berücksichtigung der Maschinentechnik. Berlin 1879, S. 183—191.

## §. 70.

**Geschichtliche Notizen,**

## die Wasserdämpfe betreffend.

Die zuerst bekannt gewordene Eigenschaft des Wasserdampfes ist seine ausdehnende Kraft oder seine Elasticität. Diese Eigenschaft kannten schon Hero von Alexandrien<sup>1)</sup> (etwa 120 Jahre vor Christi Geburt), dann Anthemius<sup>2)</sup>, Baumeister der Sophienkirche in Constantinopel (538 nach Christo), später Leonardo da Vinci<sup>3)</sup>, noch später (1683) Samuel Moreland<sup>4)</sup>, Papin<sup>5)</sup> u. m. A. Daß aber die Elasticität des Wasserdampfes mit der Temperatur wachse und nach welchem Gesetze dies geschehe, untersuchten zuerst James Watt<sup>6)</sup> und Ziegler<sup>7)</sup> in größerem Umfange.

Die erste Formel, welche das Elasticitätsgesetz des gesättigten Wasserdampfes ausdrückt, stellte im Jahre 1794 Prony<sup>8)</sup> auf, wozu dieser Geometer Versuche von Betancourt<sup>9)</sup> benutzte. Allein abgesehen von der sehr unbequemen Gestalt dieser Formel (eine aus vier Gliedern bestehende Exponential-Function), drückte dieselbe auch das Verhältniß zwischen Temperatur und Spannung (Druck), den Beobachtungen entsprechend, nicht hinreichend genau aus.

<sup>1)</sup> Man sehe des Verfassers „Allgemeine Maschinenlehre“. Bd. I (Zweite Auflage), S. 489.

<sup>2)</sup> Ebendaselbst, S. 489, Note 3.

<sup>3)</sup> Leonardo da Vinci, geb. in Vinci bei Florenz zwischen 1444 und 1452, gest. 1519 in Paris. Es wird behauptet, daß Leonardo der Erfinder einer Dampfkanone sei. Man sehe deshalb Dr. Grothe in den Berliner Verhandlungen, Jahrg. 1874, S. 152.

<sup>4)</sup> Des Verfassers „Allgemeine Maschinenlehre. Bd. I (Zweite Auflage), S. 492, Note 2.

<sup>5)</sup> Papin, geb. 1650 zu Blois in Frankreich, gest. 1710 zu Marburg.

<sup>6)</sup> James Watt, geb. 19. Jan. zu Greenock in Schottland, gest. 25. Aug. 1819 in seinem Landhause zu Heathfield bei Birmingham.

<sup>7)</sup> Gehler's „Physicalisches Wörterbuch“. Zweiter Band, S. 316 (Artikel „Dampf“).

<sup>8)</sup> Prony, geb. 1755 zu Chamlet im Rhônedepartement, gest. 1839 in Paris.

<sup>9)</sup> Mémoire sur la force expansive de la vapeur etc. Paris 1792.

Mit neuen Versuchen und daraus abgeleiteten Formeln von Schmidt<sup>1)</sup>, Soldner<sup>2)</sup>, La Place<sup>3)</sup> u. A. war man nicht viel glücklicher, bis 1807 der Engländer Thomas Young<sup>4)</sup> eine Function von der Form:

$$F = (a + bt)^m,$$

in Anwendung brachte, worin  $a$ ,  $b$  und  $m$  constante Werthe darstellen, die durch Experimente zu ermitteln sind,  $t$  aber die Temperatur ist, welche der als Quecksilbersäule ausgedrückten Spannung des gesättigten Dampfes correspondirt.

Tredgold<sup>5)</sup> (verbessert von Mellet<sup>6)</sup>) fand:

$\frac{F}{10} = \left(\frac{t + 75}{85}\right)^6$ , wenn  $t$  in Centigraden und  $F$  in Millimetern (Quecksilbersäule) ausgedrückt wird, oder

$p = \left(\frac{75 + t}{174}\right)^6$ , wenn  $p$  den Druck in Kilogrammen pro Quadratcentimeter bezeichnet, oder endlich

$i = \left(\frac{75 + t}{175}\right)^6$ , wenn  $i$  ( $= \frac{F}{760}$ ) die Spannung des Dampfes in Atmosphären darstellt.

Von gleicher Form war die Formel der französischen Academiker (Dulong und Arago)<sup>7)</sup>, nämlich:

$i = \frac{F}{760} = (1 + 0,7153T)^5$ , wo  $T = \frac{t - 100}{100}$  ist, oder wenn, wie vorher  $p$  den Dampfdruck in Kilogrammen pro Quadratcentimeter bezeichnet:

$$p = (0,2847 + 0,007153t)^5.$$

Ohne hier noch alle anderen derartigen bemerkenswerthen Formeln (des Raummangels wegen) mittheilen zu können<sup>8)</sup>, gedenken wir noch der von Magnus<sup>9)</sup>, welche (aus theoretischen Gründen) lautet:

$$F = 4,525 \cdot 10^{\frac{7,4804 \cdot t}{236,22 + t}},$$

so wie die Formel von Biot<sup>10)</sup>:

$$\text{Lgnt } F = a + ba^t + c\beta^t.$$

Letztere benutzte Regnault zur Darstellung seiner Versuche und wurden diese bereits S. 149 mit den von Regnault ermittelten Werthen der Constanten  $a$ ,  $b$  und  $c$ , ferner  $\alpha$  und  $\beta$  mitgetheilt.

<sup>1)</sup> Gren N. Journ. IV, S. 264 (Leipzig 1798).

<sup>2)</sup> Gilbert Ann. XVII, S. 44; XXV, S. 411.

<sup>3)</sup> Mécanique céleste, T. IV (1805), Pg. 273.

<sup>4)</sup> Young, geb. 13. Juni 1773 in der Grafschaft Somerset, gest. 10. Mai 1829.

<sup>5)</sup> The steam engine. London 1827. (In der Ausgabe von 1838, S. 57.)

<sup>6)</sup> Traité des machines à vapeur. Paris 1838, Pg. 108.

<sup>7)</sup> Mémoires de l'Institut, T. X, Pg. 230 und Annales de Chimie et de Physique, 2<sup>e</sup> série, T. XLIII, Pg. 74.

<sup>8)</sup> Eine Zusammenstellung von nicht weniger als 50 solcher Formeln findet sich in Marbach's „Physicalisches Lexicon“, Bd. II, Artikel „Dampf“, S. 135—140.

<sup>9)</sup> Poggendorff's Annalen etc., Bd. LXI, S. 247.

<sup>10)</sup> Connaissance des Temps pour 1844 und Poggendorff's Annalen, Bd. XXXI, S. 42 und Bd. XLVI, S. 627.

Wir wenden uns nun zu einer zweiten, theoretisch wie practisch wichtigen Eigenschaft des Wasserdampfes, zu derjenigen nämlich, zufolge deren Wasser nur dadurch zu Dampf umgewandelt wird, daß es ein gehöriges Quantum Wärme in sich aufnimmt, verschwinden macht, oder, wie man zu sagen pflegt, diese Wärme verschluckt, gebunden, latent wird. Nach Clausius führt die latente Wärme, in der Nomenclatur der neueren Naturwissenschaften, den Namen „Verdampfungswärme“ und wird (wie auch bereits S. 152 geschah) in der mechanischen Wärmetheorie mit dem Buchstaben  $r$  bezeichnet.

Der Entdecker des betreffenden wichtigen Gesetzes war (im Jahre 1762) der bereits S. 141 genannte Engländer Black, der zuerst ganz allgemein nachwies, daß bei der Veränderung des Aggregatzustandes eines Körpers stets eine gewisse Quantität Wärme gebunden oder frei wird, die zugleich bei verschiedenen Körpern verschieden ist.

Die Gesamtwärme des Wasserdampfes in der Siedehitze ermittelte Black zu 530 Grad Celsius<sup>1)</sup>, d. h. er wies nach, daß so viel Wärmeeinheiten erforderlich sind, um die Gewichtseinheit Wasser von Null Grad Temperatur in gesättigten Wasserdampf von 100 Grad zu verwandeln, wonach sich die latente Wärme dieses Dampfes zu 430 Grad Celsius oder Wärmeeinheiten, d. h. viel zu klein ergab.

Watt<sup>2)</sup> stellte (von 1765 bis 1783) genauere und vollständigere Versuche an und zeigte zugleich, daß die Gesamtwärme, welche man der Gewichtseinheit des flüssigen Wassers von Null Grad mittheilen muß, um dasselbe gänzlich in Dampf zu verwandeln, constant, d. h. immer dieselbe, also unabhängig von Spannkraft und Temperatur, und zwar gleich 650 Wärmeeinheiten sei. Letzteres Resultat ist unter dem Namen „Watt'sches Gesetz“ bekannt. Es sei gleich hier erwähnt, daß noch später technische Autoritäten, wie u. A. Pambour und Parkes, bei ihren Rechnungen diesem Gesetze folgten.

Von 1803 ab stellten die Engländer Southern<sup>3)</sup> und Creighton<sup>4)</sup> neue umfangreiche Versuche an und gelangten zu dem Resultate, daß nicht die Gesamtwärme, sondern nur die latente Wärme constant sei und zwar 550 Wärmeeinheiten betrage. Die Gesamtwärme wird hiernach durch

$$550 + t$$

dargestellt, wenn  $t$  die Temperatur ist, welche das Thermometer anzeigt. Dies Gesetz wird von den Physikern das Southern'sche genannt<sup>5)</sup>.

Experimente, welche 1819 von den französischen Physikern Clément und Desormes über denselben Gegenstand angestellt wurden, schienen das Watt'sche Gesetz zu bestätigen<sup>6)</sup>.

Diese Sache blieb unentschieden, bis Regnault<sup>7)</sup> auch diese

1) Regnault in den Mémoires de l'Académie, Tome XXI, Pg. 636.

2) Ebendasselbst.

3) Regnault, a. a. O., Pg. 642.

4) Ebendasselbst, Pg. 644.

5) Desgleichen, Pg. 648.

6) Desgleichen, Pg. 652. Es kann hier nicht unterlassen werden, zu bemerken, daß mehrere deutsche Schriftsteller das Southern'sche Gesetz fälschlich als das Clément's bezeichnen.

7) Ebendasselbst, Pg. 726.

wichtige Frage genauer untersuchte und aus seinen nach Umfang und Genauigkeit gleich ausgezeichneten Versuchen fand, daß keines dieser Gesetze vollkommen richtig ist, vielmehr bis auf Weiteres der bereits S. 150 uns bekannt gewordene Werth, nämlich

$$606,5 + 0,305t$$

angenommen werden muß, welcher dahin lautet: „daß die Summe der latenten und freien Wärme einen mit steigender Temperatur wachsenden Werth hat.

Hinsichtlich der Geschichte eines anderen Gegenstandes, der Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes des gesättigten Wasserdampfes, hat man lange Zeit hindurch die betreffenden Versuche und Resultate von Gay-Lussac<sup>1)</sup> als fast zweifellos richtig bezeichnet, deren Hauptergebniß dahin ging, daß das specifische Gewicht des Wasserdampfes 0,6235 oder ziemlich genau  $\frac{5}{8}$  desjenigen betragen solle, welches die atmosphärische Luft bei gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur besitzt. Zweifel über die vollkommene Richtigkeit dieses Satzes<sup>2)</sup> erhob unter Andern in Deutschland entschieden Holzmann<sup>3)</sup>. Dieser scharfsinnige Physiker glaubte die Dichtigkeit =  $\Delta$  des gesättigten Wasserdampfes, gegen atmosphärische Luft von gleicher Temperatur und Pressung, durch die Formel ausdrücken zu können:

$$\Delta = 0,55964 \frac{272,63 + t}{236,22 + t},$$

wobei die Temperatur  $t$  von Null Grad aus zu zählen ist.

Hierbei verdient auch noch bemerkt zu werden, daß Holzmann auch den Ausdehnungscoefficienten des Wasserdampfes (zuerst) als verschieden von dem der atmosphärischen Luft (S. 111), nämlich zu  $\delta = 0,004233$  nachwies.

Mit ganz entschiedenem Erfolge bekämpfte den Gay-Lussac'schen Satz, mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie, Clausius (im Jahre 1850), der später die Formel aufstellte<sup>4)</sup>:

$$(k) \quad \frac{s}{v_1} = M - N\alpha',$$

worin  $s$  das Volumen einer Gewichtseinheit gesättigten Wasserdampfes und  $v_1$  das Volumen einer Gewichtseinheit atmosphärischer Luft unter demselben Drucke und bei derselben Temperatur  $t$  bezeichnet,  $M$ ,  $N$  und  $\alpha$  aber constante Größen sind, und zwar

$$M = 1,6630; N = 0,05527; \alpha = 1,007164.$$

Eine vortreffliche experimentelle Bestätigung erfuhr die Clausius'sche Formel durch die im Jahre 1860 veröffentlichten Versuche der Engländer Fairbairn und Tate<sup>5)</sup>, deren Beobachtungsergebnisse in

<sup>1)</sup> Biot, *Traité de Physique*, T. I, Pg. 291.

<sup>2)</sup> Fortschritte der Physik. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Bd. I, S. 101.

<sup>3)</sup> Holzmann, „Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe“. Mannheim 1845, S. 21.

<sup>4)</sup> Die mechanische Wärmetheorie. Zweite Auflage. S. 158.

<sup>5)</sup> Experimental researches to determine the density of steam at different temperatures and to determine the law of expansion of superheated steam.



der nachstehenden Tabelle einerseits mit den früher angenommenen Zahlen, bei welchen für alle Temperaturen das specifische Gewicht 0,622 vorausgesetzt ist, und anderseits mit den aus vorstehender Gleichung ( $k$ ) hervorgehenden Zahlen verglichen sind.

Temperatur in Centesimalgraden (= $t$ )	Volumen eines Kilogramm gesättigten Wasserdampfes in Cubikmetern <sup>1</sup> ).		
	Nach Gay-Lussac	Nach der Clausius' Gleichung ( $k$ )	Nach Fairbairn-Tate's Beobachtungen
58° 21'	8,38	8,23	8,27
77° 18'	3,84	3,74	3,72
92° 66'	2,18	2,11	2,15
118° 46'	0,954	0,911	0,891
137° 46'	0,562	0,530	0,514
144° 74'	0,466	0,437	0,432

Auf die sehr practische empirische Formel Zeuner's<sup>2</sup>) zur Berechnung des spec. Gewichtes oder der Dichte  $\Delta = \frac{1}{v}$  des gesättigten Wasserdampfes, nämlich  $\Delta = 0,6061 (i)^{0,9893}$ , wurde bereits S. 151 hingewiesen.

Schließlich ist hervorzuheben, daß die allererste solcher empirischer Formeln von Navier<sup>3</sup>) im Jahre 1835 aufgestellt wurde, von welcher Pambour<sup>4</sup>) und später auch Redtenbacher<sup>5</sup>) in ihren Dampfmaschinen-Theorien Gebrauch machten. Diese Formeln sind folgende:

$\Delta = \text{Gewicht eines Cubikmeters gesättigten Wasserdampfes}$

$\Delta = 0,50 \cdot i + 0,09$  (Navier),  $i$  Spannkraft in Atmosph.

$\Delta = \frac{10000}{1,421 + 0,000471 \cdot p}$  (Pambour),  $p$  Spannkraft in Kilogr. pro Quadratmeter.

$\Delta = \alpha + \beta p$  (Redtenbacher),  $p$  wie vorher etc.

hier  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0,0610; \beta = 0,0000510; \frac{\alpha}{\beta} = 1196 \text{ Dampf niederer Spannung.} \\ \alpha = 0,1427; \beta = 0,0000473; \frac{\alpha}{\beta} = 3018 \text{ Dampf v. hoher Spannung.} \end{array} \right.$

Philos. Transact. of the Royal Society of London (1860). Tome 150, Pg. 185 bis 222. Hieraus (mit Abbildungen begleitet) auszugsweise in meines Neffen (Prof. Rühlmann) Mech. Wärmetheorie, Bd. 1, S. 597 ff.

<sup>1</sup>) Ausführlicher bei Clausius (a. a. O.) und bei meinem Neffen (a. a. O.).

<sup>2</sup>) Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. 2. Auflage, S. 294.

<sup>3</sup>) Annales des Ponts et Chaussées. 1835, 1<sup>e</sup> Série, Vol. II, Pg. 148.

<sup>4</sup>) Théorie des machines à vapeur. Paris 1836. (Deutsche Uebersetzung, S. 60.)

<sup>5</sup>) Resultate für den Maschinenbau. Mannheim 1848, S. 205.

Als Schluß vorstehender geschichtlicher Notizen muß noch auf die von Clausius und Rankine im Jahre 1850 wohl gleichzeitig<sup>1)</sup> gemachte, auch für die practische Technik wichtige Entdeckung hingewiesen werden, nach welcher die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes negativ und durch die Formel (nach Clausius)<sup>2)</sup> dargestellt werden kann:

$$h = 1,013 - \frac{800,3}{273 + t}.$$

Referent hält für Pflicht, die von Clausius zu dieser Formel (a. a. O., S. 138) gemachten Bemerkungen hier wörtlich wiederzugeben. Sie lauten folgendermaßen:

„Der Umstand, daß die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes negative und zwar so große negative Werthe hat<sup>3)</sup>, bildet eine wichtige Eigenschaft desselben. Man kann sich von der Ursache dieses eigenthümlichen Verhaltens in folgender Weise Rechenschaft geben. Wenn der Dampf zusammengedrückt wird, so wird durch die dabei verbrauchte Arbeit Wärme erzeugt, und diese Wärme ist mehr als ausreichend, um den Dampf um so viel zu erwärmen, daß er die Temperatur annimmt, zu welcher die neue Dichtigkeit als Maximum gehört. Man muß ihm daher, wenn er sich gerade nur in der Weise erwärmen soll, daß er gesättigt bleibt, einen Theil der erzeugten Wärme entziehen. In entsprechender Weise wird bei der Ausdehnung des Dampfes mehr Wärme verbraucht, als nöthig ist, um den Dampf um so viel abzukühlen, daß er gerade in dem Zustande als gesättigter Dampf bleibt. Man muß ihm also, wenn dieses letztere stattfinden soll, bei der Ausdehnung Wärme mittheilen (zuführen).

Sollte sich der ursprünglich gesättigte Dampf in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle befinden, so würde er bei der Zusammenrückung überhitzt werden, und bei der Ausdehnung sich theilweise niederschlagen.“

### §. 71.

#### Druck und Dichte einer elastischen Flüssigkeitssäule, in verschiedenen Höhepunkten, welche allein der Schwerkraftswirkung unterworfen ist.

Setzt man in Bezug auf die allgemeine Gleichung I, §. 7 (S. 16) voraus, daß die Raumcoordinatenachse  $Z$  mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfällt, so ist  $X=Y=$  Null,  $Z=-g$  und, da ferner  $\Delta$  statt  $\gamma$  zu schreiben sein wird, endlich nach §. 54 aber

<sup>1)</sup> Clausius trug die betreffende Abhandlung im Februar 1850 in der Berliner Academie vor. Rankine ebenfalls im Februar 1850 in der Edinburger Royal Society.

<sup>2)</sup> Die mechanische Wärmetheorie. Erster Band (2. Auflage), S. 137.

<sup>3)</sup> Die Formel giebt für:

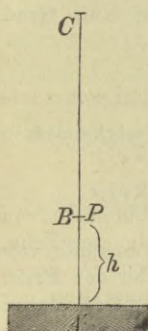
$t =$	$0^{\circ}$	$50^{\circ}$	$100^{\circ}$	$150^{\circ}$	$200^{\circ}$
$h$	-1,916	-1,465	-1,133	-0,879	-0,676

$\Delta = \frac{p}{k}$  ist, wenn  $7992,655 (1 + \delta t) = k$  gesetzt wird, ergibt sich überhaupt aus gedachter Gleichung:

$$(1) \quad dp = - \frac{p}{gk} \cdot g dz, \text{ d. i.} \\ k \cdot \frac{dp}{p} = - dz.$$

Liegt der Coordinatenursprung  $A$ , Fig. 65, auf einer festen Fläche und findet im Abstände  $AB = h$  die Pressung  $P$ , in der Entfernung  $AC = z$  aber die Pressung  $= \Pi$  statt, so folgt:

Fig. 65.



$$k \int_P^\Pi \frac{dp}{p} = - \int_h^z dz, \text{ d. i.}$$

$$k \operatorname{Lgnt} \frac{\Pi}{P} = - (z - h), \text{ woraus}$$

$$\text{I. } \Pi = P e^{-\frac{1}{k} (z - h)}, \text{ oder}$$

$$\text{II. } P = \Pi e^{\frac{1}{k} (z - h)}$$

und weiter sich ergibt:

$$\text{III. } \Delta = \frac{1}{k} P e^{-\frac{1}{k} (z - h)}$$

Annäherungsweise läßt sich für geringe Werthe von  $z - h$  setzen:

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{k} (z - h)}} = 1 + \frac{z - h}{k},$$

weshalb aus II. wird:

$$P = \Pi + \frac{\Pi}{k} (z - h), \text{ d. i. wegen } \frac{\Pi}{k} = \Delta,$$

$$\text{IV. } P = \Pi + \Delta (z - h).$$

Aus letzterer Gleichung ergibt sich aber folgender Satz:

„Der Druck auf die Flächeneinheit in einem Punkte  $B$  einer elastischen Flüssigkeitssäule  $AC$  ist gleich dem Drucke im höchsten Punkte  $C$  derselben, vermehrt um das Gewicht des Flüssigkeitsprismas, vom Querschnitt gleich Eins, welches die Differenz der Abstände der Punkte  $B$  und  $C$  zur Höhe hat.“

Es ist daher IV. ganz derselbe Ausdruck für luftförmige Flüssigkeiten, wie §. 10 für wasserförmige gefunden wurde.

Auf ähnliche Weise findet man aus III:

$$\Delta = \frac{P}{k} - \frac{P(z - h)}{k^2},$$

oder weil  $\frac{1}{k^2}$  ein sehr kleiner Werth ist:

$$\text{V. } \Delta = \frac{P}{k}, \text{ d. h.}$$

bei sehr geringen verticalen Erhebungen wird auch die elastische Flüssigkeit, annäherungsweise, als gleich dicht betrachtet werden können.

Zusatz. Vorstehende Entwicklungen gelten nur für Flüssigkeitssäulen von solchen Höhen, innerhalb welchen die Schwerkraft als eine constante Kraft betrachtet werden kann, ferner unter Voraussetzung überall gleicher Temperatur und für die geographische Breite, wofür  $\Delta$  berechnet wurde.

Bei ganz beliebigen Höhen und mit Beachtung der letztbemerkten Umstände, gestalten sich die betreffenden Rechnungen folgendermaßen. Zuerst ist nach Regnault<sup>1)</sup> für eine beliebige geographische Breite das Gewicht  $\Delta$  eines Cubikmeters atmosphärische Luft bei  $0^m,76$  Barometerstande oder 10333 Kil. Pressung pro Quadratmeter, Null Grad Temperatur und an dem Spiegel des Meeres:

$$\Delta = 1,292673 (1 - 0,002836 \cdot \cos 2\varphi),$$

wenn  $\varphi$  die geographische Breite bezeichnet.

Für die mittlere Temperatur =  $\tau$  in der ganzen Flüssigkeitssäule und für die Pressung =  $p$  auf jeden Quadratmeter:

$$\Delta = \frac{1,292673 (1 - 0,002836 \cos 2\varphi) p}{10333 (1 + \delta\tau)}$$

Hiernach sei  $AMN$ , Fig. 66, eine Luftsäule von der Höhe  $AN = z_n$  über der Oberfläche der Erde. Die Pressung in einer beliebigen Schicht  $D$ , deren Höhe  $AD = z$  ist, sei =  $p$ , die Acceleration der Schwerkraft daselbst =  $G$ .

Zufolge eines bekannten Gesetzes erhält man vorerst, wenn der mittlere Erdradius = 6366198 Meter mit  $r$  bezeichnet wird:  $G = \frac{gr^2}{(r+z)^2}$ . Ferner

wenn man wiederum setzt:  $\Delta = \frac{p}{k}$  also

$$(2) \quad k = \frac{10333 (1 + \delta\tau)}{1,292673 (1 - 0,002836 \cos 2\varphi)}$$

nach (1) dieses Paragraphen:

$$dp = - \frac{p}{gk} \cdot \frac{gr^2}{(r+z)^2} \cdot dz, \text{ d. i.}$$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{r^2}{k} \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Bezeichnet man die Pressung in einer Schicht  $mn$  im Abstände =  $z_0$  von der Erdoberfläche mit  $p_0$ , und die Pressung in der Schicht  $MN$  mit  $p_n$ , so liefert letztere Gleichung durch Integration den Ausdruck:

$$\text{Lgnt} \frac{p_0}{p_n} = \frac{r^2}{k} \cdot \frac{z_n - z_0}{(r+z_0)(r+z_n)}.$$

Hier  $z_n - z_0 = Z$ ,  $r + z_0 = R$  gesetzt, giebt  $r + z_n = R + Z$ , also:

$$\text{Lgnt} \frac{p_0}{p_n} = \frac{r^2}{k} \cdot \frac{Z}{R(R+Z)}.$$

<sup>1)</sup> a. a. O., S. 112, wobei der Coefficient 0,002836 nach Biot genommen ist.

In den meisten Fällen kann man  $R$  mit  $r$  verwechseln, so daß man erhält:

$$\text{VI. } \text{Lgnt } \frac{p_0}{p_n} = \frac{r}{k} \cdot \frac{Z}{r+Z},$$

sonach auch:

$$\text{VII. } p_n = p_0 e^{-\frac{r}{k} \frac{z}{r+z}},$$

und endlich:

$$\text{VIII. } \Delta = \frac{p_n}{k} = \frac{p_0}{k} e^{-\frac{r}{k} \frac{z}{r+z}}.$$

Beispiel. Wie groß ist die Pressung der atmosphärischen Luft und wie groß das Gewicht eines Cubikmeters derselben in der Höhe von 292 Meter über dem Meeresspiegel und in der geographischen Breite  $52^\circ 22' 15''$  (Egidienkirche in Hannover)?

Auflösung. Zuerst berechnet sich

$$k = 8528; \quad \frac{r}{k} = 746,5; \quad \frac{r}{k} \frac{z}{r+z} = 0,03423. \quad \text{Sodann ist}$$

$$p_n = \frac{p_0}{e^{0,03423}} = \frac{p_0}{1,0348} = \frac{10333}{1,0348} = 9988,4 \text{ Kil. pro Quadratmeter;}$$

endlich:

$$\Delta = \frac{10336}{1,0348 \cdot 8528} = 1,17115 \text{ Kil.}$$

## §. 72.

### Höhenmessen mit dem Barometer.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen lassen sich mit Anbringung einiger Correctionen zur Berechnung von Höhen (oder Tiefen) an der Oberfläche unserer Erde verwenden, sobald es möglich war, die Barometerstände an dem oberen und unteren Endpunkte (Station) und die betreffenden Temperaturen von Quecksilber und Luft für dieselben Zeiten zu beobachten.

Eine betreffende, von Laplace hierzu abgeleitete Formel, die als Ziel nachstehender Rechnungen betrachtet werden soll, ist folgende:

$$Z = A (1 + 0,002845 \cdot \cos 2\varphi) \left[ 1 + \frac{t_0 + t_n}{500} \right] \times \left\{ \left( 1 + \frac{Z}{r} \right) \text{Lg} \frac{b_0}{b_n \left[ 1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550} \right]} + 0,8686 \frac{Z}{r} \right\},$$

oder wenn man  $b_n \left[ 1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550} \right]$  durch  $b$  ersetzt:

$$Z = A (1 + 0,002845 \cdot \cos 2\varphi) \left[ 1 + \frac{2(t_0 + t_n)}{1000} \right] \times \left\{ \left( 1 + \frac{Z}{r} \right) \text{Lg} \frac{b_0}{b} + 0,8686 \frac{Z}{r} \right\},$$

wie Laplace in seiner *Mécanique Céleste* (Oeuvres de Laplace, Tome Quatrième, Seconde Partie, Livre Dixième), Pg. 328, findet.

Hierbei sind die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten und von den neuen Größen ist  $A$  ein Zahlenwerth (der barometrische Coefficient), die Buchstaben mit den Indexen Null und  $n$  beziehen sich respective auf die untere und obere Station, ferner sind die Lufttemperaturen mit  $t$ , die Quecksilbertemperaturen mit  $\tau$  und die Barometerstände mit  $b$  bezeichnet.

Zur Ableitung dieser Gleichung benutzen wir den vorher unter VI gefundenen Ausdruck

$$(1) \text{ Lgnt } \frac{p_0}{p_n} = \frac{r}{k} \frac{Z}{r+Z},$$

in welchem vor Allem die Pressungen  $p_0$  und  $p_n$  durch die Quecksilbersäulen  $B_0$  und  $B_n$  der Barometerstände in  $\overline{MN}$  und  $\overline{mn}$ , Fig. 66, zu ersetzen sind.

Hierbei ist aber, wie im Zusatze des vorigen Paragraphen für die Luftsäule geschah, die Einwirkung der veränderlichen Schwerkraft in großen Abständen vom Erdmittelpunkt zu beachten.

Es ist daher zu setzen:  $p_n = \Delta B_n \left( \frac{Z}{r+z_n} \right)^2$  und auch

$$p_0 = \Delta B_0 \left( \frac{r}{r+z_0} \right)^2. \text{ Sodann hieraus}$$

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{B_0}{B_n} \frac{(r+z_n)^2}{(r+z_0)^2} = \frac{B_0}{B_n} \frac{(R+Z)^2}{R^2} = \frac{B_0}{B_n} \left( 1 + \frac{Z}{R} \right)^2,$$

oder wenn man wieder  $R$  durch  $r$  ersetzt:

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{B_0}{B_n} \left( 1 + \frac{z}{r} \right)^2.$$

Sodann wird aus (1):

$$\text{Lgnt } \frac{B_0}{B_n} \left( 1 + \frac{Z}{r} \right)^2 = \frac{r}{k} \frac{Z}{r+Z}, \text{ oder}$$

auf  $Z$  im Zähler des rechten Theiles reducirt:

$$(2) \quad Z = \frac{k}{r} (r+Z) \left\{ \text{Lgnt } \frac{B_0}{B_n} + 2 \text{Lgnt } \left( 1 + \frac{Z}{r} \right) \right\}.$$

Beide Quecksilbersäulen  $B_0$  und  $B_n$  sind von Null Grad Temperatur vorausgesetzt, was bei den wirklich am Barometer an beiden Stationen abgelesenen  $b_0$  und  $b_n$  nicht der Fall sein wird. Es sind daher erstere durch letztere auszudrücken, denen respective die Temperaturen  $\tau_0$  und  $\tau_n$  entsprechen mögen.

Sodann hat man aber ohne Weiteres nach §. 44 und §. 46:

$$b_0 = B_0 \left( 1 + \frac{\tau_0}{5550} \right); \quad b_n = B_n \left( 1 + \frac{\tau_n}{5550} \right),$$

woraus annäherungsweise, aber genau genug, zu reduciren ist:

$$\frac{B_0}{B_n} = \frac{b_0}{b_n \left[ 1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550} \right]}.$$

Deshalb wird aus (2):

$$(3) \quad Z = \frac{k}{r} (r+Z) \left\{ \text{Lgnt } \frac{b_0}{b_n \left[ 1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550} \right]} + 2 \text{Lgnt } \left( 1 + \frac{Z}{r} \right) \right\}$$

Um den natürlichen Logarithmen des ersten Gliedes der Parenthese durch einen Brigg'schen Logarithmen auszudrücken, hat man bekanntlich ersteren mit der Zahl (dem Modul)  $m = 2,302585$  zu multipliciren, oder durch 0,4342944 zu dividiren, so daß man statt (3) erhält:

$$(4) \quad Z = mk \left( 1 + \frac{Z}{r} \right) \left\{ \text{Lg} \frac{b_0}{b_n \left[ 1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550} \right]} + \frac{2}{m} \text{Lgt} \left( 1 + \frac{Z}{r} \right) \right\}.$$

Da in allen Fällen  $Z$  gegen  $r$  sehr klein sein wird, so läßt sich annäherungsweise  $\text{Lgt} \left( 1 + \frac{Z}{r} \right) = \frac{Z}{r}$  setzen, daher, so wie wegen  $\frac{2}{m} = 0,8686$ , statt (4) zu schreiben ist:

$$(5) \quad Z = mk \left\{ \text{Lg} \frac{b_0}{b_n \left[ 1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550} \right]} + 0,8686 \frac{Z}{r} \right\} \left( 1 + \frac{Z}{r} \right).$$

Führt man hier den Werth von  $k$  aus §. 71, Gleichung (2), Seite 172, ein, beachtet, daß  $\tau = \frac{t_0 + t_n}{5550}$  und faßt die bestimmten Größen von  $k$  mit dem Factor  $m$  in dem einzigen Coefficienten  $A$  zusammen, so wird aus (5):

$$Z = A \frac{1 + \frac{\delta(t_0 + t_n)}{2}}{1 - 0,002837 \cos 2\varphi} \left\{ \text{Lg} \frac{b_0}{b_n \left[ 1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550} \right]} + 0,8686 \frac{Z}{r} \right\} \times \left( 1 + \frac{Z}{r} \right), \text{ oder auch:}$$

$$Z = A (1 + 0,002837 \cos 2\varphi) \left[ 1 + \frac{\delta(t_0 + t_n)}{2} \right] \left\{ \text{Lg} \frac{b_0}{b_n \left[ 1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550} \right]} + 0,8686 \frac{Z}{r} \right\} \left( 1 + \frac{Z}{r} \right).$$

Multiplicirt man jetzt mit dem letzten Factor  $\left( 1 + \frac{Z}{r} \right)$  in die große Parenthese, vernachlässigt aber gedachten Factor in Bezug auf das letzte Glied, schreibt  $1 + 0,002845 \cos 2\varphi$  statt des betreffenden Werthes in (5), so erhält man die bereits oben aufgeführte Formel von Laplace.

Was nun den barometrischen Coefficienten  $A$  betrifft, so kann man diesen entweder berechnen, indem  $A = mk$  ist (also nach unseren Zahlenwerthen = 18411 sein würde), oder, was jedenfalls vorzuziehen, als Mittelwerth aus einer großen Anzahl von Höhen  $Z$ , die trigonometrisch gemessen worden sind, berechnen. So nimmt

Laplace<sup>1)</sup>, nach Ramond's Messungen,  $A = 18336$  Meter. Gauß<sup>2)</sup> setzt  $A = 18382$  Meter, Bessel nimmt  $A = 18316$ <sup>3)</sup> u. s. w.

Zusatz 1. Seit Laplace hat die Formel zum Höhenmessen mit dem Barometer in nachbemerkten drei Richtungen Verbesserungen erfahren<sup>4)</sup>. Man hat

1. Die Constanten mit den neueren physikalischen Forschungen, namentlich Regnault's, in Einklang gebracht.

2. Auf den Feuchtigkeitszustand der Luft angemessen Rücksicht genommen.

3. Hierdurch die willkürlichen Aenderungen der Constanten vermieden, welche (außer Bessel) alle früheren Autoren über barometrische Höhenmessungen in der Absicht vorgenommen hatten, eine größere Uebereinstimmung der letzteren mit trigonometrischen Höhenmessungen zu bewirken.

Von neueren, mit diesen Verbesserungen ausgestatteten Formeln verdienen nachfolgende drei besondere Beachtung:

1. Die Formel von Bauernfeind<sup>5)</sup>:

$$\text{I. } h = 18404,9 \left( 1 + 0,0026 \cdot \cos 2\varphi \right) \left( 1 + \frac{2z+h}{r} \right) \left( 1 + \frac{3}{8}\psi \right) \times \\ \left[ 1 + 0,003665 \left( \frac{t_0+t_n}{2} \right) \right] \left\{ \text{Lgt } \frac{B_0}{B_n} + \text{Lgt} \left( 1 - \frac{T_0-T_n}{5550} \right) + 0,86859 \frac{h}{r} \right\}.$$

Die zu berechnende Höhe ist hier mit  $h$ , die Höhe der unteren Station über dem Meere mit  $z$  bezeichnet. Ferner sind  $B_0$  und  $B_n$  die direct abgelesenen Barometerhöhen, während durch den Factor  $\left( 1 + \frac{3}{8}\psi \right)$  der Einfluß der mit Psychrometern beobachteten Luftfeuchtigkeit corrigirt wird.

2. Die Formel von Richard Rühlmann<sup>6)</sup>:

$$\text{II. } h = 18400,2 \left( 1,00157 + 0,00367 \frac{t_0+t_n}{2} \right) \left( 1 + 0,378 \frac{\frac{\sigma'}{b_0} + \frac{\sigma''}{b}}{2} \right) \\ \left( 1 + 0,00262 \cos 2\varphi \right) \times \left( 1 + \frac{2z+h}{6378150} \right) \times \text{Lg } \frac{b_0}{b}.$$

Hier bezeichnen  $\sigma'$  und  $\sigma''$  die Dampfdrücke in der unteren und oberen Station,  $b_0$  und  $b$  die correspondirenden auf die Temperatur  $0^\circ$  des Quecksilbers und auf die Normaltemperatur der Scala reducirten Barometerstände.

<sup>1)</sup> a. a. O., p. 326.

<sup>2)</sup> Bode's astronomisches Jahrbuch für 1818, S. 170.

<sup>3)</sup> Astronomische Nachrichten Nr. 279, Bd. XXI, S. 187 und hieraus Poggend. Annalen, Bd. XXXVI (1835), S. 187. Für Toisen ist hier  $A = 9397,74$  und daher für Metermaaß (1 Toise = 1,94903 Meter und 1 Meter = 0,51307 Toisen):  $A = 18316^m$ .

<sup>4)</sup> Grashof im VIII. Bande (1864), S. 224, der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

<sup>5)</sup> Dr. C. M. Bauernfeind, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen. München 1862.

<sup>6)</sup> Richard Rühlmann, Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Leipzig 1870.



3. Die Formel von Grashof<sup>1)</sup>:

$$\text{III. } h = 18404 \text{ Lgnt} \left\{ \frac{b_0}{b} \left( 1,0025 + \frac{t_0 + t}{543} \right) \left( 1 + \frac{3}{8} \psi \right) \times \right. \\ \left. \left( 1 + 0,0026 \cdot \cos 2\varphi \right) \left( 1 + \frac{2z + h_1}{r} \right) \right\}.$$

Auch hier sind  $b_0$  und  $b$  die reducirten Höhen der beobachteten Quecksilbersäulen, während  $(1 + \frac{3}{8} \psi)$  der Feuchtigkeitscorrector ist und  $h_1$  denjenigen Werth von  $h$  bezeichnet, welcher ohne Rücksicht auf den Factor  $(1 + \frac{2z + h_1}{r})$  gefunden wird.

Da es geradezu gleichgültig ist, mit welcher dieser drei Formeln eine betreffende Höhe berechnet wird, indem ihre Abweichungen (bei den sonst durch keine Formel überhaupt zu corrigirenden Mängeln aller barometrischen Höhenmessungen) fast Null sind, so wählt der Verfasser hier die Formel III zur Berechnung eines Beispielles, weil diese für die Zwecke seines Buches am Wenigsten Hülftabellen erfordert<sup>2)</sup>.

Aus letzterem Grunde folgen hier noch einige Nachträge in Bezug auf die Grashof'sche Formel.

Zunächst nimmt dieser Autor  $r = 6370000$  Meter, setzt (genau genug)

$$\text{Lgnt} \left( 1 + \frac{2z + h_1}{r} \right) = 0,4343 \frac{2z + h_1}{6370000} = \frac{2z + h_1}{14670000},^3)$$

und schreibt, wenn  $2\varphi = 90 + x$ , also  $\cos 2\varphi = \cos(90 + x) = -\sin x$  eingeführt wird:

$$\begin{aligned} \text{Lgnt} \left( 1 + 0,0026 \cos 2\varphi \right) &= \text{Lgnt} (1 - 0,0026 \sin x), \text{ d. i.} \\ &= 0,4343 \text{ Lgnt Brgg} (1 - 0,0026 \cdot \sin x), \text{ oder}^3) \\ &= -0,4343 \cdot 0,0026 \cdot \sin x. \end{aligned}$$

Wenn ferner  $\tau_0$  und  $\tau$  Temperaturen (beziehungsweise in der oberen und unteren Station) sind, welche mittelst eines Psychrometers (Thermometer mit angefeuchteten Kugeln) beobachtet wurden, setzt Grashof:<sup>4)</sup>

$$\psi = \frac{\beta_0 + \beta}{b_0 + b} - k_0 \frac{t_0 - \tau_0}{2} - k \frac{t - \tau}{2},$$

räth  $k_0 = k = 0,0008$  zu nehmen, wenn  $\tau_0$  respective  $\tau > 0$ , dagegen  $k_0 = k = 0,00069$  für  $\tau_0$  respective  $\tau < 0$  ist und giebt für  $\beta$  (in Millimetern Quecksilbersäulenhöhe) folgende Tabelle:

<sup>1)</sup> Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. VIII (1864), S. 226, so wie „Theoretische Maschinenlehre“, Bd. 1 (1875), S. 368.

<sup>2)</sup> Die hypsometrischen Tafeln meines Neffen finden sich übrigens auch in der 9. Auflage meiner Logarithm.-trigonometr. und anderer für Rechner nützlichen Tafeln. (Es sei für manche Leser hier bemerkt, daß das Wort hypsos aus der griechischen Sprache entlehnt ist, wo es Höhe, Gipfel etc. bezeichnet.)

<sup>3)</sup> Bekanntlich ist approximativ  $\text{Lgnt} (1 \pm y) = \pm y$ , wenn  $y$  klein genug angenommen wird. Oder für Briggs'sche Logarithmen:

$$\text{Lgnt} (1 \pm y) = 0,4343 \text{ Lgnt Brgg} (1 \pm y) = \pm 0,4343 \cdot y.$$

<sup>4)</sup> Grashof leitet die Formel für  $\psi$  aus der Psychrometerformel

$$b_0 = \beta_0 - k_0 (t_0 - \tau_0) b$$

ab, wobei er zugleich verweist auf Mousson, Physik auf Grundlage der Erfahrung. Zweite Auflage, S. 159.

$\tau$	$\beta$	$\tau$	$\beta$	$\tau$	$\beta$	$\tau$	$\beta$	$\tau$	$\beta$
- 14	1,52	- 6	2,89	+ 2	5,23	+ 10	9,13	+ 18	15,35
- 13	1,65	- 5	3,11	+ 3	5,62	+ 11	9,75	+ 19	16,34
- 12	1,80	- 4	3,36	+ 4	6,03	+ 12	10,42	+ 20	17,40
- 11	1,95	- 3	3,62	+ 5	6,47	+ 13	11,13	+ 21	18,50
- 10	2,11	- 2	3,90	+ 6	6,94	+ 14	11,88	+ 22	19,67
- 9	2,28	- 1	4,20	+ 7	7,44	+ 15	12,68	+ 23	20,91
- 8	2,47	0	4,52	+ 8	7,96	+ 16	13,52	+ 24	22,21
- 7	2,67	+ 1	4,87	+ 9	8,52	+ 17	14,41	+ 25	23,58

Beispiel. Im Jahre 1856 wurde von Bauernfeind<sup>1)</sup> eine der bedeutendsten Höhen des bayerischen Hochgebirges, der Miesing<sup>2)</sup>, trigonometrisch und barometrisch gemessen. Letztere Messungen lieferten folgende Werthe:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,6916 \text{ Mtr.} & t_0 &= 13^{\circ},6 & \tau_0 &= 12^{\circ} & z &= 875 \text{ Mtr.,} & \varphi &= 47^{\circ} 40'. \\ b &= 0,6085 & t &= 6^{\circ},1 & \tau &= 6^{\circ} \end{aligned}$$

Ferner fand man  $\beta_0 = 10,42$  und  $\beta = 6,94$  Millimeter. Fs fragt sich, welche Werthe die Grashof'sche Formel liefert.

Auflösung. Zunächst findet man ohne Weiteres (die einzelnen Glieder beziehungsweise mit  $B, C, D, E, F$  und  $G$  bezeichnet):

$$\begin{aligned} \text{Lgnt } 18404 (= B) & \dots \dots \dots 4,264912 \\ \text{Lgnt} (\text{Lgnt } b_0 - \text{Lgnt } b) (= C) & \dots \dots \dots 0,745028 - 2 \\ \text{Lgnt} \left[ 1,0025 + \frac{t_0 + t}{543} \right] (= D) & \dots \dots \dots 0,016660 \\ \text{Lgnt} \left( 1 + \frac{3}{8} \psi \right) (= E) & \dots \dots \dots 0,002166 \\ \hline B + C + D + E & = 3,028596 \end{aligned}$$

Ferner

$\text{Lgnt} (1 + 0,0026 \cdot \cos 2\varphi) = 1 + 0,0026 \cdot \cos (90^{\circ} + 5^{\circ} 20')$ , d. i. wegen  $\sin 5^{\circ} 20' = 0,09295$  approximativ:

$$\begin{aligned} \text{Lgnt} (1 - 0,0026 \cdot \sin 5^{\circ} 20') &= - 0,4343 \cdot 0,0026 \cdot \sin 5^{\circ} 20' \\ &= - 0,4343 \cdot 0,0026 \cdot 0,09295, \\ &= - 0,000105 (= - F), \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B + C + D + E - F &= 3,028596 - 0,000105, \text{ d. i.} \\ &= 3,028491 = \text{Lgnt } h_1, \\ \text{folglich } h_1 &= 1068,0 \text{ Meter.} \end{aligned}$$

Endlich berechnet sich noch:

$$\frac{2z + h_1}{14670000} = \frac{2 \cdot 815 + 1068,0}{14670000} = 0,00018 (= G).$$

Daher schließlich:

$$\begin{aligned} \text{Lgnt } h &= B + C + D + E - F + G = 3,028491 + 0,000180, \\ \text{Lgnt } h &= 3,028671, \text{ d. i.} \\ h &= 1068,20 \text{ Meter,} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen etc. München 1862, S. 34.

<sup>2)</sup> Südöstlich von Tegernsee, unweit Rotach.

während die (höchst genaue) trigonometrische Messung ergab:

$$h = 1068,80 \text{ Meter.}$$

Zusatz 2. Uebereinstimmungen vorstehender Art, zwischen barometrischen und trigonometrischen Höhenmessungen, werden, von Gegnern des erstgenannten Meßverfahrens, mehr als zufällig bezeichnet, während wieder andere Geometer den trigonometrischen Höhenmessungen kein Vertrauen schenken wollen. Zwischen diesen extremen Urtheilen liegt die Wahrheit in der Mitte. Bauernfeind spricht sich hierüber sowohl S. 2, als auch S. 143 (am Ende seines vorgenannten Buches) dahin aus, daß die bedeutenden Differenzen zwischen barometrischen und trigonometrischen Höhenmessungen (abgesehen von groben Beobachtungsfehlern) hauptsächlich von dem großen Horizontalabstande der Stationen, dem Unterschiede in der Beobachtungszeit, der zu geringen Zahl von Beobachtungen und der Nichtberücksichtigung der Wärmestrahlung des Bodens herkommen.

Hinsichtlich des Nivellements von Eisenbahnen und Chausseen ist aber auch Bauernfeind der Ansicht, daß für solche Zwecke die barometrische Meßmethode nur zu ganz vorläufigen Terrainuntersuchungen empfohlen werden kann. Ueberhaupt, bemerkt dieser Autor, daß in allen Fällen, wo die zu bestimmenden Höhenunterschiede weniger als 100 Meter betragen, die trigonometrischen und insbesondere die nivellatorischen Messungen, den barometrischen weit vorzuziehen sind<sup>1)</sup>.

Die günstigsten Zeiten für Barometer-Beobachtungen hat mein Neffe in folgender Tabelle zusammengestellt:<sup>2)</sup>

Monat.	Vorm.	Nachm.	Monat.	Vorm.	Nachm.
Januar	Nur Mittag 1 Uhr		Juli	6 $\frac{1}{2}$ Uhr	9 $\frac{1}{2}$ Uhr
Februar	10 Uhr	4 Uhr	August	7 "	7 $\frac{1}{2}$ "
März	8 "	6 "	September	8 "	6 "
April	7 $\frac{1}{2}$ "	7 "	October	10 "	3 $\frac{1}{2}$ "
Mai	7 "	7 "	November	10 $\frac{1}{2}$ "	2 $\frac{1}{2}$ "
Juni	6 $\frac{1}{2}$ "	9 $\frac{1}{2}$ "	December	Ganz zu vermeiden.	

Zusatz 3. Ueber die Verwendung der sogenannten Aneroidbarometer zum Höhenmessen muß der Verfasser auf folgende zwei Schriften verweisen:

Bauernfeind, Verwerthung des Naudet'schen Aneroidbarometers. München 1874.

Goldschmid-Koppe, Das Aneroidbarometer etc. Zürich 1877

<sup>1)</sup> Dr. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde. Dritte Auflage (Stuttgart 1869), §. 378, S. 692. In der 1876 erschienenen 5. Auflage dieses Werkes befindet sich die betreffende Stelle im 2. Bande, S. 343.

<sup>2)</sup> Dr. Richard Rühlmann, Die barometrischen Höhenmessungen etc. Leipzig 1870, S. 116.

## §. 73.

Geschichtliche Notizen <sup>1)</sup>

das barometrische Höhenmessen betreffend.

Bald nach Erfindung des Barometers durch Toricelli<sup>2)</sup>, im Jahre 1643, wodurch so viel zum Umsturze der alten scholastischen Physik beigetragen wurde, gelangte man auch zu dem verhältnißmäßig nabeliegenden Schlusse, daß, wenn man mit einem solchen Barometer eine nicht zu geringe Höhe erstiege, die Quecksilbersäule (merklich) kürzer und die sogenannte Toricelli'sche Leere größer werden müßte. Der geistreiche französische Geometer Pascal<sup>3)</sup> ließ diesen Gedanken zuerst im Jahre 1648 durch seinen Schwager Perrier in Clermont (Auvergne) prüfen, indem er diesen veranlaßte, ein Barometer auf den etwa 500 Toisen<sup>4)</sup> (= 3000 Pariser Fuß = 974,52 Meter) hohen Puy de Dôme zu tragen, wobei derselbe richtig fand, daß die Quecksilbersäule auf dem Gipfel gegen 3 Zoll kürzer war als im Jardin des Minimes in Clermont. Nach diesem Versuche erklärte Pascal das Barometer als das einfachste Mittel, um bedeutende Höhenunterschiede indirect zu messen.

Eine Formel, mittelst welcher man eine betreffende Höhe (=  $h$ ) aus den gemessenen Barometerständen berechnen kann, stellte zuerst Mariotte auf. Bezeichnet man die Differenz der Barometerstände an der oberen und unteren Station, d. i. (nach den Bezeichnungen in der Grashof'schen Formel)  $b_0 - b$  mit  $z$  und wird  $b_0$  und  $b$  in Pariser Linien ausgedrückt, so fand Mariotte:

$$h = 63z + \frac{3}{8} \left( \frac{z-1}{2} \right).$$

Den richtigen theoretischen Weg zur Entwicklung einer Formel, d. h. die Ableitung des Gesetzes der Druckabnahme mit der Höhe (nach dem Boyle'schen Gesetze) unter gleichzeitiger Bestimmung des specifischen Gewichtes der Luft und des Quecksilbers, schlug zuerst Halley<sup>5)</sup> ein, dessen Formel in englischen Maaßen ausgedrückt, also lautet:

$$h = 62162,795 \text{ Lgt} \frac{B_0}{B}, \text{ } ^6)$$

worin  $B_0$  und  $B$  die direct abgelesenen Barometerstände bezeichnen.

Die Correction wegen der Abnahme der Schwere bei Entfernung

<sup>1)</sup> Dem Verfasser war hier besonders der Abschnitt: „Die Geschichte der barometrischen Höhenmessungen“, in der Schrift seines Neffen, des Herrn Prof. Rühlmann in Chemnitz, von Nutzen.

<sup>2)</sup> Toricelli, geb. 1608 zu Faenza, gest. 1647 zu Florenz.

<sup>3)</sup> Pascal, geb. zu Clermont den 19. Juni 1623, gest. den 19. August 1662 zu Paris. Pascal's Hauptwerk, welches 1658 in Paris erschien, war betitelt: „Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air.“

<sup>4)</sup> 1 Toise = 1,94903 Meter und 1 Meter = 0,51307 Toisen.

<sup>5)</sup> Halley, geb. 1656 in London, gest. 1742 in Greenwich.

<sup>6)</sup> A discourse of the rule of the decrease of the hight of the mercury of the barometer etc. in: Philos. Transact. 1686 and 1687. T. 16, pag. 104.

vom Erdcentrum geschah zuerst 1771 durch Fontana<sup>1)</sup>, obgleich der Gedanke hierzu schon von Newton im Jahre 1686 ausgesprochen worden war.

Von der größten Wichtigkeit waren nachher die Versuche Deluc's<sup>2)</sup>, welcher zuerst den Einfluß zu berücksichtigen lehrte, den die Temperatur sowohl auf das Gewicht der Luft, als auf die Höhe der Quecksilbersäule ausübte.

Die von Deluc aufgestellte Formel diente u. A. mit ihren Constanten zur Berechnung der berühmten Messungen, welche Saussure im Jahre 1787 am Montblanc und 1788 am Col de Géant anstellte.

Auf alle zu beachtenden Umstände nahm endlich Laplace bei Aufstellung seiner berühmten Formel für barometrische Höhenmessungen (S. 173) Rücksicht, welche er im ersten Bande seiner *Mécanique céleste* (Paris 1799) entwickelte, und über welche man der Hauptsache nach eigentlich noch nicht hinaus gekommen ist.

Ungeachtet der mathematischen Strenge, womit Laplace seine Formel entwickelt hatte, stimmten deren Resultate nicht genau genug mit trigonometrischen Messungen oder Nivellements überein. Gestützt auf eine sehr große Anzahl directer Messungen, welche der französische Geometer Ramond<sup>3)</sup> namentlich am Pic du Midi de Bigorre (in den Pyrenäen) anstellte, zeigte sich, daß man den Laplace'schen Coefficienten, nämlich 18336 Meter, für Mittagsbeobachtungen auf 18393 Meter erhöhen müsse.

Mit Rücksicht dessen, was bereits oben über die Formeln von Bessel, Bauernfeind, Richard Rühlmann und Grashof mitgetheilt wurde, sind wir soweit zum Schlusse der geschichtlichen Notizen über barometrische Höhenmessungen gelangt, daß wir zur Vervollständigung nur noch der Männer gedenken, welche sich um das Entwerfen von Tafeln (hypsometrische Tafeln), zur möglichst bequemen Berechnung von Höhen aus barometrischen Messungen, verdient machten. Es sind dies hauptsächlich, mit Angabe der betreffenden Schriften, folgende:

Lindenau<sup>4)</sup>, *Tables barométriques pour faciliter le calcul des nivellements et des mesures des hauteurs par le baromètre*. Gotha 1809.

Oltmanns<sup>5)</sup>, *Tafeln in: Voyage de Humboldt et Bonpland. Astronomie I, Nivellement barométrique* p. 286, 289 (1811).

Gauss<sup>6)</sup>, die kleinsten der bis jetzt bekannt gewordenen Tafeln in Bode's astronomischem Jahrbuche für 1818, p. 171 und desgl. 1836, p. 138.

Der neuesten Tafeln von Richard Rühlmann wurde bereits oben S. 177 gedacht.

<sup>1)</sup> Delle altezze barometriche et di alcuni insigni paradossi, Saggio analitico. Pavia 1771.

<sup>2)</sup> Recherches sur les modifications de l'atmosphère. Paris 1772.

<sup>3)</sup> Mémoires sur la formule barométrique de la Mécanique céleste. Paris 1808—1811.

<sup>4)</sup> Lindenau, geb. 1779 in Altenburg, gest. 1854 ebendasselbst.

<sup>5)</sup> Oltmanns, geb. 1783 in Wittmund (Ostfriesland), gest. 1833 in Berlin.

<sup>6)</sup> Gauss, geb. 30. April 1777 in Braunschweig; gest. 23. Febr. 1855 in Göttingen.

## §. 74.

Scheinbares und wahres Gewicht der Körper<sup>1)</sup>.

Wie bereits §. 50 bemerkt, gilt das Princip des Archimedes auch für luftförmige Körper, so daß beim Wägen irgend eines Körpers in der atmosphärischen Luft stets eine geringere Gewichtsangabe erhalten wird, als dies Gewicht in Wirklichkeit beträgt. Man kann deshalb auch das Gewicht eines in der atmosphärischen Luft abgewogenen Körpers sein scheinbares Gewicht, das im luftleeren Raume aber sein wahres Gewicht nennen<sup>2)</sup>.

Nachstehende Entwicklungen werden dazu dienen, das Gewicht  $Q$  eines Körpers für den luftleeren Raum durch Abwägen in der Luft mittelst einer gewöhnlichen doppelarmigen, gleicharmigen Waage zu finden.

Bezeichnet (wie §. 9 etc.)  $\gamma$  die Dichte des reinen Wassers bei Null Grad Temperatur und  $S$  das spezifische Gewicht des Körpers  $Q$ , so ist das Volumen von  $Q$  bei  $0^{\circ}$  C.:

$$\frac{Q}{\gamma S},$$

bei der Temperatur  $t$  aber, wenn  $e$  die eigenthümliche Ausdehnung des Körpers  $Q$  bezeichnet:

$$\frac{Q}{\gamma S} (1 + et)^3.$$

Ist nun  $\Delta$  wie bisher die Dichte der atmosphärischen Luft bei der Temperatur  $t$ , im Augenblicke der Wägung, so verdrängt derselbe Körper ein Luftvolumen vom Gewichte:

$$\Delta \frac{Q}{\gamma S} (1 + et)^3.$$

Für die Gewichtsstücke, deren man sich bedient, mögen  $q$ ,  $s$ ,  $\varepsilon$  dasselbe bedeuten, was  $Q$ ,  $S$  und  $e$  für den abzuwägenden Körper, so findet man, daß die Gewichtsstücke ein Volumen Luft verdrängen, deren Gewicht ist:

<sup>1)</sup> Ausführlicher wird über diesen Gegenstand in folgenden Werken gehandelt: Jamin-Bouty, „Cours de Physique“. 3<sup>e</sup> Edit. Tome II, Pg. 131, unter der Ueberschrift „Mesure des Poids“ etc. — Wüllner, Lehrbuch der Elementarphysik. Bd. III (Dritte Ausgabe), S. 118, unter der Ueberschrift „Berücksichtigung der Temperatur bei Wägungen“ etc.

<sup>2)</sup> Bemerkt muß hier vor Allem werden, daß sich die in Europa gebräuchlichsten Gewichtseinheiten, das Pfund und das Kilogramm, auf den luftleeren Raum beziehen, also wahres Gewicht sind, daß daher betreffende Gewichtsstücke (aus Eisen, Messing, Platina etc.), welche auf der doppelarmig, gleicharmigen Waage abzuwägenden Körpern das Gleichgewicht halten, ebenfalls wahre Gewichte darstellen und alle unsere Gewichtsangaben im practischen Leben, in Pfunden oder Kilogrammen, streng genommen, als allein für den luftleeren Raum gültig zu betrachten sind.

Der Grund, die Gewichtseinheiten der Körper für den luftleeren Raum festzustellen, liegt einfach darin, daß man Irrungen vermeiden will, welche offenbar aus der Verschiedenheit des Gewichtes eines Körpers entstehen müssen, wenn derselbe bei verschiedenen Barometer- und Thermometerständen in der Luft gewogen wird.

$$\Delta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Der Druck auf die eine Waagschale ist daher:

$$Q - \Delta \frac{Q}{\gamma S} (1 + \varepsilon t)^3,$$

auf die andere:

$$q - \Delta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Für's Gleichgewicht ergibt sich also:

$$(1) \quad Q - \Delta \frac{Q}{\gamma S} (1 + \varepsilon t)^3 = q - \Delta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3,$$

woraus folgt:

$$(2) \quad Q = q + \Delta \frac{Q}{\gamma S} (1 + \varepsilon t)^3 - \Delta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Für die meisten Fälle erhält man die Resultate genau genug, wenn man  $Q$ , im rechten Theile der Gleichung, mit  $q$  verwechselt, also setzt:

$$Q = q \left\{ 1 + \frac{\Delta}{\gamma} \left[ \frac{(1 + \varepsilon t)^3}{S} - \frac{(1 + \varepsilon t)^3}{s} \right] \right\}.$$

Nach §. 54 ist  $\frac{\Delta}{\gamma} = \frac{B}{587693,94} \cdot \frac{1}{1 + \delta t}$ , wenn  $B$  die Barometerhöhe im Augenblicke der Wägung in Millimetern bei Null Grad Temperatur bezeichnet und weshalb endlich folgt:

$$I. \quad Q = q \left\{ 1 + \frac{B}{587693,94 (1 + \delta t)} \left[ \frac{(1 + \varepsilon t)^3}{S} - \frac{(1 + \varepsilon t)^3}{s} \right] \right\}^{.1)}$$

Beispiel. Ein Platinakörper vom spec. Gewichte = 21,1878, ward mit Messinggewichten gewogen, deren spec. Gewicht 8,0262 betrug, und man fand dabei sein Gewicht in der Luft = 7716,213 Grains (7000 Grains = 1  $\mathfrak{A}$  engl. avoirdupois). Die Barometerhöhe im Augenblicke der Wägung betrug 760,35 Millimeter und das am Barometer befestigte Thermometer zeigte + 18°,3 C. Die gemeinschaftliche Platinkörper und der Messinggewichte war 19°,1.

Auflösung. Hier ist:

$$q = 7716,213; \frac{B}{1 + \delta t} = \frac{760,35}{1 + \frac{18,30}{5550}} = 757,90; S = 21,1878; s = 8,0262.$$

Nach Schumacher ist die eigenthümliche Ausdehnung für Platina  $e = 0,000009$ , für Messing  $\varepsilon = 0,000018785$ , endlich  $t = 19,10$ .

Daher aus I. das wahre Gewicht des Platinakörpers:

<sup>1)</sup> Weiteres über diesen höchst interessanten Gegenstand findet sich in den hier zugleich benutzten Schriften: Bessel, „Tafel zur Reduction von Abwägungen“. Astronom. Nachrichten, Bd. 7, Nr. 162, S. 373, und Schumacher: „Ueber die Berechnungen der bei Wägungen vorkommenden Reductionen“.

$$Q = [7716,213 + 0,4381 - 1,1598] \text{ Grains, oder}$$

$$Q = 7715,4913 \text{ Grains} = 1,1022 \text{ ℥ engl.} = 500,0557 \text{ Gramm.}$$

Zusatz 1. Specifische Gewichte. Wir sind nunmehr auch in den Stand gesetzt, die Bestimmung specifischer Gewichte, und zwar zunächst fester Körper, genauer zu machen, wie §. 40 geschah, d. h. mit Rücksicht auf den Einfluß der Temperatur, des Luftdruckes und des Gewichtsverlustes der Körper in der Luft.

Hierzu sei  $Q$  das absolute und  $S$  das specifische Gewicht irgend eines festen Körpers, der mit dem Gewichte  $q$  an einer Waage im Gleichgewichte befindlich ist. Sodann erhält man nach Vorstehendem:

$$(1) \quad Q - q \frac{1 - \frac{\Delta}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3}{1 - \frac{\Delta}{\gamma S} (1 + \varepsilon t)^3} = q \frac{t - \frac{c}{s} r^3}{t - \frac{c}{S} R^3},$$

wenn  $\frac{\Delta}{\gamma} = c$ ,  $(1 + \varepsilon t)^3 = r^3$  und  $(1 + \varepsilon t)^3 = R^3$  gesetzt wird.

Wägt man  $Q$  im Wasser, so mögen, weil im Allgemeinen Wasser- und Lufttemperatur als verschieden anzunehmen sind, die Größen  $q$  und  $r$  in (1) mit  $q_1$  und  $r_1$  bezeichnet werden und wenn man überdies beachtet, daß im Wasser die Größe  $c$  im Nenner gleich der Einheit wird, so folgt:

$$(2) \quad Q = q_1 \frac{1 - c \frac{r_1^3}{s}}{1 - \frac{R^3}{S}}.$$

Aus der Vergleichung von (1) und (2) und nach nachheriger Reduction auf  $S$  erhält man endlich:

$$\text{I. } S = \frac{qR^3(s - cr^3) - q_1cR^3(s - c_1r_1^3)}{q(s - cr^3) - q_1(s - c_1r_1^3)}$$

Für die Temperaturen = Null wird  $r = R = 1$  und wenn man überdies auch  $\Delta = c = c_1 = \text{Null}$  setzt, ergibt sich

$$S = \frac{q}{q - q_1},$$

genau die Formel, welche bereits §. 40, Zusatz 1, gefunden wurde.

Zusatz 2. Mit Hülfe der Hauptsätze des gegenwärtigen Paragraphen ist es jetzt auch möglich, das Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser im luftgefüllten Raume zu berechnen, wenn das wahre Gewicht  $Q$  desselben bei der Temperatur  $t$  bekannt ist, und  $q$  das wahre Gewicht der Messingstücke bezeichnet, welches der bemerkten Cubikeinheit Wasser im luftgefüllten Raume das Gleichgewicht hält.

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen ergibt sich hierzu ohne Weiteres die Gleichung:

$$(1) \quad Q - (\text{Gewicht der Cubikeinheit Luft bei } t^0 \text{ Temperatur und } 0^m,76 \text{ Barometer}) = q \left[ 1 - \frac{\Delta}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3 \right],$$



wo das Luftgewicht im ersten Gliede derselben Cubikeinheit entspricht, in welcher  $Q$  ausgedrückt ist.

Anmerkung. Das absolute Gewicht des Wassers (im luftleeren Raume) ermittelt man gewöhnlich dadurch, daß man einen Körper von bekanntem Volumen (gewöhnlich einen hohlen Metallblechcylinder) in demselben mit aller nur möglichen Vorsicht abwägt. Ganz speciell findet man diesen Gegenstand behandelt von Stampfer im 16. Bande (1830) der Jahrbücher des Wiener polytechnischen Institutes, S. 1 etc. Recht übersichtlich giebt ferner die hierher gehörigen Rechnungen etc. Miller in seinen „Elements of Hydrostatics and Hydrodynamics“, Fourth Edition. Cambridge 1850, p. 115.

---



## Dritte Abtheilung.

# H y d r o d y n a m i k.

§. 75.

### Geschichtliche Notizen.

#### Ausfluß des Wassers aus Gefäßen<sup>1)</sup>

Den allerersten Grund zur Hydrodynamik oder der Wissenschaft, welche die Bewegungsgesetze flüssiger Körper behandelt, legten die Schüler Galilei's, namentlich Castelli<sup>2)</sup> und Toricelli, indem sie die Ausflußgesetze des Wassers durch Versuche zu bestimmen suchten. Der erstere, ein Benedictiner vom Monte Casino, zeigte ums Jahr 1640<sup>3)</sup>, daß die Geschwindigkeit, womit Wasser aus kleinen Gefäßmündungen strömt, von dem Wasserstande (der Druckhöhe) über diesen Mündungen abhängt. Nur irrte er sich in dem Gesetze dieser Abhängigkeit, indem er behauptete, daß die Ausflußgeschwindigkeiten im directen (geraden) Verhältnisse zu den Druckhöhen ständen.

Toricelli war in letzterer Beziehung glücklicher, indem er ganz richtig nachwies, daß sich die Geschwindigkeit des aus Bodenöffnungen der Gefäße fließenden Wassers wie die Quadratwurzeln aus den entsprechenden Druckhöhen verhielten. Toricelli's betreffende Schrift ist: „Del moto dei gravi“. Firenz 1644. Ihm stimmte zuerst Baliani in seiner Abhandlung bei: „De motu naturali gravium“. Genuae 1646. Nachher bestätigten mehrere Andere das Toricelli'sche Gesetz, insbesondere aber Mariotte, nach zahlreichen Experimenten, in seiner Schrift: „Traité du mouvement des eaux et des autres fluides“. Paris 1686. (Deutsch übersetzt von Meining. Leipzig 1723.) Bemerk

<sup>1)</sup> Es werde hier ausdrücklich hervorgehoben, daß im Nachstehenden die technische Hydrodynamik überhaupt in den drei Abschnitten besprochen wird:

1. Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.
2. Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.
3. Wirkung und Widerstand des Wassers.

<sup>2)</sup> Castelli, geb. 1577 zu Brescia, gest. 1644 zu Rom.

<sup>3)</sup> Nuova raccolta d'autori che trattano del moto dell' acque. Parma 1766. VI. Tom. 4.

zu werden verdient hierbei noch, daß Mariotte zur Bestimmung der aus einem Gefäße fließenden Wassermenge, als Maaßeinheit den „Wasserzoll“ (pouce d'eau)<sup>1)</sup> einführte. Weitere Bestätigungen des Toricelli'schen Satzes gaben besonders noch Versuche des Italieners Domenico Guilielmini (veröffentlicht in der Schrift: *Mensura aquarum fluentium*. Bononia 1690)<sup>2)</sup>, so wie ganz besonders die noch ausführlicheren Versuche Poleni's<sup>3)</sup>. Letzterer Experimentator bestimmte zugleich das Verhältniß der Ausflußmenge bei verschiedenen Druckhöhen, so wie auch die wahre Quantität der ausgeflossenen Wassermenge, indem er zuerst nachwies, daß diese Wassermenge von der Beschaffenheit und Gestalt der Gefäßöffnung abhängt und unter Umständen der ausfließende Wasserstrahl die Mündung gar nicht ausfüllt, eine Zusammenziehung (Contraction) erfährt. Beispielsweise fand Poleni durch Messung, beim Ausflusse aus einer Kreismündung von 26 Linien Durchmesser und bei der constanten Druckhöhe von 256 Linien, den Durchmesser des zusammengezogenen Wasserstrahles zu  $20\frac{1}{2}$  Linien, so daß sich das Durchmesserverhältniß von Strahl und Mündung zu  $\frac{4\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}}$ , folglich der Querschnitt der Mündung im Boden des Gefäßes zum Querschnitt des Strahles wie  $1 : (\frac{4\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}})^2$ , d. i. wie  $1 : 0,622$  herausstellte. Bemerk't zu werden verdient noch, daß Poleni seine Versuche auch auf den Ausfluß durch cylindrische und conische Ansätze erstreckte.

Newton war der erste, welcher die Ausflußgesetze aus Gefäßmündungen und zwar in seinen berühmten Principien<sup>4)</sup> mathematisch ermittelte, leider gehörte dieser Abschnitt in dem sonst mit Recht berühmt gewordenen Werke zu den allerschwächsten Leistungen des großen Mannes. Nach der ersten Ausgabe sollte die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus der Bodenöffnung eines Gefäßes gleich der Endgeschwindigkeit sein, welche ein durch die halbe Druckhöhe frei fallender Körper erlangte. Da jedoch letzterer Satz weder mit den Versuchen Toricelli's und Anderen, noch mit seinen eignen, späteren Beobachtungen

<sup>1)</sup> Mariotte fand aus Versuchen, daß pro Minute aus einer verticalen, kreisförmigen Mündung (in dünner Wand) von einem Pariser Zoll Durchmesser, bei einer constanten Druckhöhe von 7 Linien über der Kreismitte, ein Wasserquantum von 14 Pariser Pinten (1 Cubikfuß = 36 Pinten) ausfloß, welches Quantum von Mariotte und zuweilen noch heute in Frankreich und Italien von den Brunnenmeistern mit dem Namen „Wasserzoll“ bezeichnet und selbst zum Messen kleiner fließender Wassermengen benutzt wird. Rechnet man den Pariser Cubikfuß = 0,03428 Cubikmeter, so fließen aus gedachter Mündung pro Minute:  $\frac{14}{36} \cdot 0,03428 = 0,01333$  Cubikmeter, d. i. pro Stunde: 0,7998 Cubikmeter, oder pro 24 Stunden = 19,1950 Cubikmeter.

Wie wenig bestimmt und sicher indeß diese sogenannte Maaßeinheit ist, wird sich später, im Capitel „Ausfluß des Wassers aus Seitenmündungen der Gefäße“, bestimmt herausstellen.

<sup>2)</sup> Guilielmini bestätigte den Toricelli'schen Satz zuerst durch Versuche, welche sich auch mitgetheilt finden in Kästner's „Anfangsgründe der Hydrodynamik“. Zweite Auflage (Göttingen 1797), S. 65, §. 95.

<sup>3)</sup> In der Schrift „De Castellis“. Florentia 1718, und italienisch unter dem Titel „Delle Pescaje“ in der Nuova raccolta. Vol. III. Auszugsweise auch bei Kästner a. a. O., §. 116.

<sup>4)</sup> *Philosophiae naturalis principia mathematica*, L. II, Prop. 36. (Erste Ausgabe von 1687.)

an springenden Strahlen übereinstimmte, so suchte er in der zweiten Ausgabe der Principien<sup>1)</sup> den Widerspruch durch die Zusammenziehung des Wasserstrahles in der Ausflußmündung (von ihm *vena contracta* genannt) zu erklären. In der Gefäßmündung selbst sollte dann die Geschwindigkeit des Wassers der halben, in der kleinsten Zusammenziehung (etwas nach auswärts von der Mündung entfernt) aber der ganzen Druckhöhe entsprechen.

Das Verhältniß des Durchmessers des zusammengezogenen Strahles zu dem der Mündung fand Newton, durch wirkliche Abmessungen, zu  $\frac{42}{50}$ ,<sup>2)</sup> wobei er jedoch zu verstehen giebt, daß seine Messungen nicht die größte Schärfe hätten, was andere Versuche auch bestätigten.

Die bis hierher angestellten Versuche, so wie auch die betreffenden theoretischen Entwicklungen, bezogen sich nur auf die Verhältnisse der Ausflußgeschwindigkeiten zu einander, nicht aber auf die Ermittlung ihrer absoluten Größen<sup>3)</sup>.

Die Lösung dieser Aufgabe sowohl, als auch die erste wahrhaft wissenschaftliche Begründung der Gesetze des Ausflusses des Wassers aus Gefäßen, gelang den beiden großen, um die mathematischen Wissenschaften hochverdienten Männern Johann Bernoulli<sup>4)</sup> und (dessen Sohne) Daniel Bernoulli<sup>5)</sup>. Die betreffende Schrift des ersten Autors führt den Titel: *Joh. Bernoulli Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis. Anno 1732.* Sie ist in Tom. IV seiner Opera mitgedruckt und er schreibt im VIII. Paragraphen des I. Theiles, daß er bereits im Jahre 1729 zuerst seine Methode erfunden habe. Um eben diese Zeit hatte dessen Sohn, Daniel Bernoulli, sein berühmtes Werk: „*Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum Commentarii*“. Argentorati 1738, im Drucke erscheinen lassen, was jedoch der Vater schon in der gedachten *Hydraulica* erwähnte. Während die hauptsächlichsten Endresultate, zu welchen Vater und Sohn gelangten, dieselben waren, basirte Johann Bernoulli seine Entwicklungen auf die Gesetze der allgemeinen Mechanik, Daniel Bernoulli dagegen auf das, zuerst von Huyghens zur Auflösung des Problems vom Mittelpunkte des Schwunges benutzte, Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Hierbei drückte Daniel Bernoulli das gedachte Princip in folgenden Worten aus: Zwischen dem actualen Herabsteigen (*descensum actualem*) einer Flüssigkeit in einem Gefäße und dem virtuellen Aufsteigen (*ascensum potentialem*) findet stets Gleichheit statt.

Zur Unterstützung der betreffenden mathematischen Entwicklungen benutzten Beide den Satz vom „Parallelismus der Schichten“

1) Zweite Ausgabe von 1717, L. II, Sect. 7, Prop. 36.

2) Das Verhältniß des Mündungsquerschnittes zum Strahlquerschnitt würde hiernach betragen 1 : 0,707.

3) Die Geschwindigkeiten mit  $v_1$  und  $v_2$ , die correspondirenden Druckhöhen mit  $h_1$  und  $h_2$  bezeichnet, hatte man:

$$v_1 : v_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}.$$

4) Geb. zu Basel 1667, gest. ebendasselbst 1748.

5) Geb. zu Gröningen 1700, gest. 1783 zu Basel.

und den Satz von der „Continuität der Flüssigkeiten“. Ersteren Satz drückte man so aus, daß man sagte: „es strömen in gleichen Zeiten durch verschiedene Querschnitte gleiche Volumina“, wonach sich die Flächeninhalte dieser Querschnitte umgekehrt wie die darin stattfindenden Geschwindigkeiten verhalten.

Der Satz von der Continuität der Flüssigkeit drückt die Bedingung aus, daß in der fortströmenden Masse nirgends Lücken oder Zwischenräume vorkommen, sondern überall inniger Zusammenhang stattfindet.

Die Fundamentalgleichung für den Ausfluß des Wassers aus Bodenöffnungen der Gefäße, unter Voraussetzung constanter Druckhöhe und dem Eintritte des Beharrungszustandes, war bei beiden Bernoulli's folgende:

$$z = \frac{v^2}{2g} = \frac{hA^2}{A^2 - a^2}.$$

Hierin ist  $v$  die Geschwindigkeit in der Bodenöffnung,  $a$  deren Flächeninhalt und  $A$  der überall gleiche Querschnitt des Sammelgefäßes, so wie  $z$  die sogenannte Geschwindigkeitshöhe. Auf  $v$  reducirt erhält man sonach:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

Hieraus aber, wenn  $a$  klein genug gegen  $A$  ist und sonach  $\left(\frac{a}{A}\right)^2$  gegen die Einheit vernachlässigt werden kann:

$$v = \sqrt{2gh},$$

welchen letzteren Werth man (aus begrifflichen Gründen) die Toricelli'sche Formel zu nennen pflegt.

Zweierlei Einwürfe waren es seiner Zeit insbesondere, welche man der Methode Daniel Bernoulli's machte, wovon sich jedoch später nur der eine als begründet erwies. Erstens nämlich war man mit dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte nicht einverstanden, weil (damals) noch der Beweis seiner allgemeinen Gültigkeit fehlte und weshalb selbst Johann Bernoulli seines Sohnes Methode „methodum indirectam“ nannte. Zweitens schätzte Daniel Bernoulli den Einfluß oder den Verlust bei plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen falsch, weil ihm der später nach Carnot<sup>1)</sup> dem Vater benannte Satz unbekannt war, nach welchem immer die lebendige Kraft verloren geht, die der verlorenen Geschwindigkeit entspricht.

Der dritte in der Reihe der ausgezeichneten Männer, welche sich um die Theorie der Hydrodynamik verdient gemacht haben, ist d'Alembert<sup>2)</sup>. In seinem Werke „Traité de l'équilibre et du mouvement“, welches 1744 in Paris erschien, bediente sich d'Alembert zur Auflösung der hydraulischen Probleme des nach ihm benannten Principis,

<sup>1)</sup> Carnot (Lazare, Nicolas, Marguerit), geb. 1753 zu Nolay in Burgund, gest. 1823 in Magdeburg.

<sup>2)</sup> d'Alembert, geb. 1717 zu Paris, gest. 1783 ebendasselbst.

welches er bereits in einem vorausgegangenen Werke „Traité de Dynamique“. Paris 1743, bei Untersuchungen über die Bewegungen fester Körper mit Erfolg in Anwendung gebracht hatte. In dieser Hinsicht hatte d'Alembert entschiedenes Glück, indem er durch Klarheit und Bestimmtheit der Auffassung, so wie durch Richtigkeit des Rechnungsganges die Einwürfe beseitigte, welche sich, in mehreren Beziehungen, gegen die Theorien der beiden Bernoulli's machen ließen<sup>1)</sup> so daß die d'Alembert'sche Methode noch gegenwärtig von vielen Schriftstellern der Hydrodynamik, als der Sache am entsprechendsten, beibehalten wird.

Das Vorzüglichste seiner Zeit, in Bezug auf eine streng wissenschaftliche Darstellung der theoretischen Hydrodynamik, lieferte Leonhard Euler. Dieser, nicht nur als einer der talentvollsten, fruchtbarsten und vielseitigsten Schriftsteller im Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, sondern auch wegen einleuchtender, verständlicher Darstellung, als vorzüglicher Lehrer bekannte Mann<sup>2)</sup>, erschöpfte beinahe das Thema der Mechanik flüssiger Körper. Euler kam mehreremale auf die betreffenden Untersuchungen zurück, wovon jedoch ganz besonders folgende zwei Arbeiten zu erwähnen sind:

1. „Principes généraux du mouvement des fluides“ in den Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. Année 1755, Pg. 274, und (die in lateinischer Sprache geschrieben):

2. Commentarien der Petersburger Academie, Bd. 13—15, wovon bereits im Jahre 1805 der Professor Brandes in Leipzig (früher zu Eckwarden im Herzogthum Oldenburg) eine vortreffliche deutsche Bearbeitung unter dem Titel lieferte: „Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper“. Dargestellt von Leonhard Euler. Leipzig 1806.

Seit Euler hat man daher auch recht bedeutsame Fortschritte im Gebiete der Hydrodynamik nicht machen können, abgerechnet die höchst eleganten Darstellungen von Lagrange in seiner Mécanique Analytique und von Laplace in der Mécanique Céleste, welcher dabei ganz Besonderes in der Anwendung allgemeiner hydrodynamischer Gleichungen auf die Gestalt der Erde, auf die Oscillationen des Meeres bei der Ebbe und Fluth etc., glücklich war, und endlich Cauchy<sup>3)</sup> in seinen schätzenswerthen Untersuchungen über Wellenbewegungen etc.

Von allen diesen vortrefflichen Arbeiten können wir hier (und zwar im folgenden Zusatze) nur die auch für Ingenieure wichtigen, sogenannten hydrodynamischen Grundgleichungen Euler's mittheilen, selbst diese aber auch nicht ohne wichtige Bemerkungen:

Zuvörderst sind diese allgemeinen partiellen Differenzialgleichungen der Bewegung flüssiger Körper nur in wenigen Fällen und selbst dann nur unter Zuziehung neuer Hypothesen integrirbar,

<sup>1)</sup> Man sehe hierüber besonders Kästners bereits vorher citirte „Hydrodynamik“ (Zweite Auflage), S. 598 unter der Ueberschrift: „Ueber Herrn d'Alembert's Erinnerungen gegen Johann Bernoulli's Theorie“, so wie eine Vorlesung Kästner's, welche er selbst S. 613 (§. 667) der Hydrodynamik citirt.

<sup>2)</sup> L. Euler, geb. zu Basel 1707, gest. zu St. Petersburg 1783.

<sup>3)</sup> Cauchy, geb. 1789 in Paris, gest. ebendas. 1856 (?).

woran die Schuld gewiß nicht in der Mangelhaftigkeit der mathematischen Analysis, sondern gewiß in der Begründung ihrer Herleitung und folgerecht in unserer schon früher erwähnten Unbekanntschaft mit der wahren Natur der Flüssigkeiten, in der Unbekanntschaft mit den Moleculargesetzen liegt.

Glaubt man nun auch in allerjüngster Zeit, in der Dynamik der Gase erhebliche Fortschritte und zwar unter Benutzung der mechanischen Wärmetheorie gemacht zu haben, so gilt von dieser Theorie für die technische Hydrodynamik gegenwärtig immer noch der Anspruch, welchen bereits vor hundert Jahren Bossut in der Einleitung zu seiner Hydrodynamik machte und der folgendermaßen lautete:

„Malheureusement ces calculs sont si compliqués par la seule nature de la chose, qu'on ne peut les regarder que comme des vérités géométriques, précieuses en elles-mêmes, mais non comme des symboles propre à peindre l'image sensible du mouvement actuel et physique d'un fluide.“

Zusatz. Die Euler'schen Differenzialgleichungen der Bewegung flüssiger Körper betreffend.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen in §. 7 und unter der dort gemachten Annahme, daß die geometrische Gestalt eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens als ein rechtwinkliges Parallelepiped vom Inhalte  $dx dy dz$  und von der Masse  $dm = \frac{\gamma}{g} dx dy dz$  gedacht werden kann, und dies einem Drucke  $p$  ausgesetzt ist, bezeichnen wir die Achsengeschwindigkeiten dieses Theilchens am Ende einer Zeit  $t$ :

nach der Richtung	UX	mit $u$ ,
" "	UY	" $v$ ,
" "	UZ	" $w$ ,

Sodann setzen wir in der Folge  $\frac{\gamma}{g} = \rho$ , so daß letztere Größe die Masse der Volumeneinheit ist.

Offenbar sind  $u$ ,  $v$  und  $w$  Functionen von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$  und man übersieht, daß, wenn  $t$  in Secunden ausgedrückt wird, für  $u$ ,  $v$  und  $w$  der Raum gesetzt werden kann, der vermöge dieser Geschwindigkeiten in 1 Secunde durchlaufen würde<sup>1)</sup>.

Die ganze Theorie der Bewegung flüssiger Körper ist dann darin enthalten, daß man aus der Natur des flüssigen Körpers, sofern nämlich  $p$  und  $\rho$  gegenseitig von einander abhängen, und aus den Kräften, welche auf dieselben wirken, die Größen  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  und  $w$  bestimme und dieselben durch  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$  ausdrücke, um für jede gegebene Zeit und für jeden gegebenen Punkt der Flüssigkeit ihre Werthe angeben zu können.

Um letzteres auszuführen, nehmen wir an, daß am Ende der Zeit  $t + dt$  die Coordinaten des Theilchens  $abcdefmn$ , Fig. 4 (S. 15), zu  $x + udt$ ,  $y + vdt$  und  $z + wdt$  geworden sind. Da sich nun zunächst

<sup>1)</sup> Bossut, geb. 1730 zu Tartaras im Dép. Rhône, gest. 1814 zu Paris.

<sup>2)</sup> Der Verfasser folgt zunächst hier (so weit als möglich) wörtlich Euler (Brandes, Uebersetzung S. 119 ff.). Nachher verläßt er diesen Weg aus dabei angegebenen Gründen.



der allgemeine Werth von  $du$  (das vollständige Differenzial, aus der Summe der partiellen Differenziale) ergibt zu:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{dz}{dt}\right) dz + \left(\frac{du}{dt}\right) dt, ^1)$$

so erhält man, wegen  $dx = udt$ ,  $dy = vdt$  und  $z = wdt$ :

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) udt + \left(\frac{du}{dy}\right) vdt + \left(\frac{du}{dz}\right) wdt + \left(\frac{du}{dt}\right) dt$$

und eben so:

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right) udt + \left(\frac{dv}{dy}\right) vdt + \left(\frac{dv}{dz}\right) wdt + \left(\frac{dv}{dt}\right) dt;$$

$$dw = \left(\frac{dw}{dx}\right) udt + \left(\frac{dw}{dy}\right) vdt + \left(\frac{dw}{dz}\right) wdt + \left(\frac{dw}{dt}\right) dt.$$

Bezeichnet man daher die resultirenden Accelerationen oder Beschleunigungen parallel den drei rechtwinkligen Coordinatenachsen beziehungsweise mit  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$ , so hat man

$$J_x = \frac{du}{dt}, \quad J_y = \frac{dv}{dt} \quad \text{und} \quad J_z = \frac{dw}{dt},$$

d. i. nach vorstehenden Gleichungen (1), (2) und (3):

$$J_x = u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{du}{dy}\right) + w \left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right);$$

$$J_y = u \left(\frac{dv}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right);$$

$$J_z = u \left(\frac{dw}{dx}\right) + v \left(\frac{dw}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Bringt man nun die resultirenden Bewegungsgrößen  $qJ_x$ ,  $qJ_y$  und  $qJ_z$  entgegengesetzten Sinnes zu den eingepägten Bewegungsgrößen an, d. h. beziehungsweise entgegengesetzt zu  $qX$ ,  $qY$  und  $qZ$  an, so erhält man, nach dem d'Alembert'schen Principe und zufolge unserer Gleichungen (4), (5) und (6) in §. 7:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = q(X - J_x); \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = q(Y - J_y) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dp}{dz}\right) = q(Z - J_z),$$

oder nach Einsetzung vorstehender Werthe für  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$ :

$$\text{I.} \quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = q \left\{ X - u \left(\frac{du}{dx}\right) - v \left(\frac{du}{dy}\right) - w \left(\frac{du}{dz}\right) - \left(\frac{du}{dt}\right) \right\};$$

$$\text{II.} \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = q \left\{ Y - u \left(\frac{dv}{dx}\right) - v \left(\frac{dv}{dy}\right) - w \left(\frac{dv}{dz}\right) - \left(\frac{dv}{dt}\right) \right\};$$

$$\text{III.} \quad \left(\frac{dp}{dz}\right) = q \left\{ Z - u \left(\frac{dw}{dx}\right) - v \left(\frac{dw}{dy}\right) - w \left(\frac{dw}{dz}\right) - \left(\frac{dw}{dt}\right) \right\}.$$

Letztere drei Gleichungen genügen aber nicht zur Bestimmung

<sup>1)</sup> Da es sich hier um die Geschichte des Gegenstandes handelt, so hat der Verfasser es für erforderlich gehalten, die Euler'sche Bezeichnung für die partiellen Differenziale, nämlich  $\left(\frac{du}{dx}\right) dx \dots$  beizubehalten, statt daß man jetzt gewöhnlich setzt:  $\frac{\partial u}{\partial x} dx \dots$

der fünf Functionen  $p$ ,  $q$ ,  $u$ ,  $v$  und  $w$ ; es sind vielmehr noch zwei andere Gleichungen erforderlich, die wir im Nachstehenden zu gewinnen suchen wollen.

Wir gehen hierzu von der Bedingung aus, daß die Flüssigkeit eine zusammenhängende Masse bildet und denken uns auch für diesen Zweck die geometrische Gestalt des flüssigen Elementes als rechtwinkliges Parallelepipedum vom Inhalte  $dx dy dz^1$ ).

Die Masse der Flüssigkeit, welche am Ende der Zeit  $t$  in dem gedachten Elemente enthalten ist, beträgt sonach  $q dx dy dz$  und am Ende der Zeit  $t + dt$ , offenbar  $\left[ q + \left( \frac{dq}{dt} \right) dt \right] dx dy dz$ .

Die durch die drei ersten Seitenflächen des Parallelepipeds in der Zeit  $dt$  eintretende Masse des Fluidums ist aber

$$dy dz \cdot q u dt + dx dz \cdot q v dt + dx dy \cdot q w dt,$$

dagegen ist die durch die drei entgegengesetzten Seitenflächen austretende Flüssigkeit

$$dy dz \left[ q u + \left( \frac{d \cdot qu}{dx} \right) dx \right] dt + dx dz \left[ q v + \left( \frac{d \cdot qv}{dy} \right) dy \right] dt + dx dy \left[ q w + \left( \frac{d \cdot qw}{dz} \right) dz \right] dt.$$

Daher ist der Ueberschuß der ersteren Masse über die zweite:

$$- dx dy dz \left[ \left( \frac{dq \cdot u}{dx} \right) + \left( \frac{d \cdot qv}{dy} \right) + \left( \frac{d \cdot qw}{dz} \right) \right] dt.$$

Setzt man aber diese Größe der Zunahme  $\left( \frac{dq}{dt} \right) \cdot dt \cdot dx dy dz$  gleich, so erhält man, mit Weglassung der gemeinsamen Factoren:

$$\text{IV. } \frac{dq}{dt} + \left( \frac{d \cdot qu}{dx} \right) + \left( \frac{d \cdot qv}{dy} \right) + \left( \frac{d \cdot qw}{dz} \right) = 0.$$

Dieser Ausdruck ist der, welchen man (S. 190) die Gleichung der Continuität der Flüssigkeit nennt.

Handelt es sich um eine tropfbare Flüssigkeit, deren Dichte in allen Punkten dieselbe und unabhängig von der Zeit ist, so reducirt sich IV. auf:

$$\text{IV}^a. \left( \frac{du}{dx} \right) + \left( \frac{dv}{dy} \right) + \left( \frac{dw}{dz} \right) = 0.$$

Bei einer zusammendrückbaren Flüssigkeit von constanter Temperatur, erhält man als die fünfte der erforderlichen Gleichungen

$$\text{V. } p = kq,$$

wo  $k$  wie in §. 71 und ferner einen constanten Coefficienten bezeichnet.

(Anwendungen dieser allgemeinen Gleichungen auf besondere, auch technisch wichtige Fälle folgen später.)

<sup>1)</sup> Der Verfasser verläßt hier den Euler'schen Entwicklungsgang, welcher die geometrische Form des unendlich kleinen Flüssigkeittheilchens (Brandes a. a. O., §. 130) als dreiseitige Pyramide voraussetzt, dabei zu interessanten, aber etwas umständlichen Rechnungen kommt. Für gegenwärtiges Lehrbuch war es daher (des ersten Verständnisses wegen) entsprechender, den Annahmen Navier's (Mechanik §. 403), Delaunay's (Rationelle Mechanik §. 264) etc. zu folgen, welche das Flüssigkeitselement als rechtwinkliges Parallelepipedum annehmen.

Zur Orientirung im ganzen (schwierigen) Gebiete noch Folgendes:

1. In einem sehr ausgedehnten Falle kann man die Gleichungen I. II. und III. auf eine partielle Differenzialgleichung erster Ordnung reduciren und es so einrichten, daß die drei Unbekannten  $u$ ,  $v$  und  $w$  von einer Größe abhängen. Wer sich hierüber belehren will, findet vollständigen Aufschluß bei Euler (a. a. O., Brandes Uebersetzung etc., §. 151 ff); ferner bei Poisson (Mechanik, Uebersetzung von Stern, §. 653).

2. Vorstehende 5 Gleichungen reichen nicht aus, wenn die Gleichung V. nicht in obiger Form benutzt werden darf, was z. B. der Fall ist, wenn die Bewegung so schnell ist, daß die Flüssigkeit nicht Zeit hat, auf ihre ursprüngliche Temperatur zurückzukommen, wie dies beispielsweise bei den Untersuchungen über Ausbreitung des Schalles stattfindet und worüber man ausführliche Belehrung bei Laplace „Mécanique Céleste“, Oeuvres de Laplace V, Livre douzième, Chapitre III, Pg. 143, unter der Ueberschrift findet: „De la vitesse du son et du mouvement des fluides élastiques“.

Empfehlenswerth ist es, schon mit dem Studium der Erörterungen zu beginnen, welche Laplace (Oeuvres etc., Tome Premier, Pg. 108) mit der Continuitätsgleichung IV. anhebt.

Daß in den Fällen, wo die Gleichung V. nicht statthat, die mechanische Wärmetheorie eine sehr wichtige Rolle spielt, hat, für Ingenieure brauchbar, in jüngster Zeit Grashof im ersten Bande seiner theoretischen Maschinenlehre gezeigt, woselbst dieser Autor zur Lösung der verschiedenen Aufgaben, in §. 12, unter der Ueberschrift „Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der Zustandsänderung einer Flüssigkeit“ (im weiteren Sinne) unter gegebenen Umständen (S. 69) 7 Fundamentalgleichungen aufstellt.

Die betreffenden 7 Größen sind dann die Geschwindigkeitscomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , das specifische Volumen, die Pressung  $p$ , die Temperatur und das innere Arbeitsvermögen (S. 136 gegenwärtigen Buches).

Von den zu untersuchenden Bewegungen der Flüssigkeiten, die theils strömende, theils oscillatorische sind, bezeichnet Grashof (a. a. O., S. 380) eigentlich nur die ersteren von technischer Wichtigkeit, während die letzteren höchstens als Wellenbewegung des Wassers in den Bereich der technischen Studien zu ziehen sein würden.

Bei der unmittelbar practischen Bestimmung und bei der (wenn auch möglichst gründlichen) elementaren Behandlung des Stoffes der „Technischen Mechanik flüssiger Körper“, hielt es der Verfasser gerathener, das Capitel „Wellenbewegung des Wassers“ nicht aufzunehmen, deshalb hauptsächlich auf Grashof's schöne Behandlung dieses Gegenstandes, von S. 830 bis mit S. 866, zu verweisen und nur noch folgende Werke zu empfehlen, welche sich auf denselben Gegenstand beziehen:

Gerstner, „Theorie der Wellen“ etc. Prag 1804. — Weber Gebrüder, „Wellenlehre auf Experimente gegründet“. Leipzig 1825. — Emy, „Du Mouvement des ondes et des travaux hydrauliques maritimes“. Paris 1831. — Hagen, „Ueber Wellen auf Gewässern von gleichmäßiger Tiefe“. Berlin 1862.

## §. 76.

**Fortsetzung der geschichtlichen Notizen,**  
den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen betreffend.

Nachdem in theoretischer Hinsicht gleichsam Alles geleistet worden war, was der menschliche Geist nur immer vermochte, dessen ungeachtet aber selbst einfache Fragen, wie die der Contraction des Wassers, beim Ausflusse durch Oeffnungen der Gefäßwände, ungelöst blieben, erkannte man namentlich in dem zweiten Drittel des vorigen Jahrhunderts, daß für die Fortschritte unserer Kenntnisse im gedachten Gebiete (Ausfluß des Wassers aus Gefäßen) ein anderer Weg eingeschlagen werden müsse. Dieser Weg besteht darin, daß man die Complication der Elemente, welche in den Erscheinungen vorkommen, nicht durch die Rechnung darstellt, sondern vielmehr die ganze Theorie auf die Erscheinung selbst gründet und schließlich die Endresultate mit Hilfe geeigneter Versuche corrigirt. Und in der That darf dieser Weg, wo die Rechnung gleichsam mit der Erfahrung Hand in Hand geht, ein sehr glücklicher genannt werden, da er zu mannigfachen schönen Entdeckungen und zu wahrhaft practischen, mit der Erfahrung meist gut stimmenden Formeln geführt hat.

Unter den Männern, die sich in dieser Beziehung namentlich verdient machten, ist zuerst Borda<sup>1)</sup> zu nennen, und zwar insbesondere auch deshalb, weil er dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte diejenige Geltung verschaffte, die dasselbe für die Beantwortung hydraulischer Fragen verdient<sup>2)</sup>. Daniel Bernoulli hatte insbesondere die Verluste an lebendiger Kraft nicht richtig bemessen, welche durch plötzliche Verengungen und Erweiterungen der Gefäße entstehen. Hierauf nahm Borda sorgfältig Rücksicht und zeigte, wie durch entsprechende Einführung derjenigen lebendigen Kraft, welche der verlorenen Geschwindigkeit entspricht (bekanntlich der nach Carnot dem Vater bekannte Satz), die Auflösung der betreffenden Aufgaben mit einer Richtigkeit erfolgen kann, wie es immer nur die Natur der Sache gestattet<sup>3)</sup>.

Borda bestätigte gleichzeitig seine Rechnungen für gewisse Fälle durch entsprechende und sinnreiche Versuche. Unter Andern suchte Borda die Contractionsfrage, beim Ausflusse durch eine scharfkantige kreisförmige Oeffnung in dünner Wand, durch sorgfältige directe Messung der Strahlform an der Stelle der größten Zusammenziehung zu bestimmen. Dabei fand er das Verhältniß des Querschnittes der Mündung

<sup>1)</sup> Borda, geb. zu Dax im Dep. des Landes 1733, gest. zu Paris 1799.

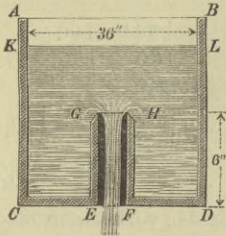
<sup>2)</sup> Mémoires de l'académie des sciences, 1766, Pg. 579 unter der Ueberschrift: „Mémoires sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases“.

<sup>3)</sup> Zur Kenntnißnahme und Beurtheilung des Borda'schen Rechnungsganges theilen wir hier die Auflösung des Problems IV, a. a. O., Pg. 599, mit, welches folgendes ist:

Es sei  $ABCD$ , Fig. 67, ein cylindrisches Gefäß, welches mit einer kurzen Ansatzröhre  $EF$  versehen ist und wobei vorausgesetzt wird, daß die Flüssigkeit

zu dem kleinsten Querschnitte des Strahles  $154\frac{2}{3} : 100$ , so daß dieser Querschnitt des Strahles 0,646 von dem der Mündung betrug.

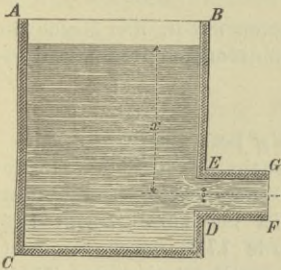
Fig. 68.



Die allerstärkste Contraction fand Borda in dem neben skizzirten Falle, Fig. 68 (wobei die angegebenen Maaße altfranzösische sind), wenn der Ausfluß durch eine nach innen gerichtete cylindrische Röhre *EFGH* (von 6 Zoll Länge und 1 Zoll  $2\frac{1}{10}$  Linie Durchmesser) mit oberhalb scharfen Kanten erfolgte. Zur Vergleichung dieses Falles mit jenem, wo der Ausfluß von *EF* durch eine dünne Wand erfolgt, legte er nach den ersten Versuchen eine 12 Zoll im Durchmesser haltende Platte so auf die Mündung *EF* der gedachten Röhre,

daß die Oeffnung in der Platte (von ebenfalls 1 Zoll  $2\frac{1}{10}$  Linie Durchmesser) mit jener Mündung genau concentrisch lag.

Fig. 67.



beim Ausströmen durch diese Röhre die Mündung *FG* genau ausfüllt und in dieser überall einerlei Geschwindigkeit besitzt. Man soll diese Ausflußgeschwindigkeit = *u* bestimmen.

Borda bezeichnet nun die Druckhöhe über dem Schwerpunkte der Mündung mit *x*, setzt den Querschnitt der cylindrischen Röhre *EF* = *a*, den der größten Zusammenziehung des Strahles *aa*, wo  $a < 1$  ist, nimmt die unter Voraussetzung constanter Druckhöhe, in der Zeit *dt* zu- und abfließende Masse = *dx* und schreibt dann, nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte

$$(1) \quad \frac{1}{2} u^2 dx = gx dx,$$

wo *g* die Acceleration (Beschleunigung) der Schwerkraft bezeichnet.

Sodann bemerkt Borda, daß, unter Annahme des Principes vom Parallelismus der Schichten,  $au = aay$ , wenn *y* die Geschwindigkeit in der Stelle der größten Zusammenziehung des Strahles bezeichnet, also  $y = \frac{u}{a}$  ist, ein Geschwindigkeitsverlust  $y - u = \left(\frac{1}{a} - 1\right) u$  und demnach ein Verlust an lebendiger Kraft erfolge, der

$$\frac{1}{2} dx \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 u^2 \text{ ist.}$$

Letzterer Werth zur lebendigen Kraft in (1) addirt, giebt:

$$\frac{1}{2} u^2 dx + \frac{1}{2} dx \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 u^2 = gx dx, \text{ woraus}$$

$$u = \sqrt{\frac{2gx}{1 + \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2}}$$

folgt, ein Ausdruck, der noch heute für die Ausflußgeschwindigkeit kurzer cylindrischer Ansätze, deren Länge  $1\frac{1}{2}$  bis 3 mal Durchmesser beträgt, als brauchbar bezeichnet wird und auf welchen wir später zurückkommen werden.

Da Borda die Zeit beobachtete, in welcher sich in beiden Fällen der Oberwasserspiegel  $KL$  von 11 Zoll 11 Linien auf 7 Zoll 11 Linien senkte, so gaben die Versuche offenbar die Verhältnisse der theoretischen zur wirklich ausgeflossenen Wassermenge, also die Ausflußcoefficienten, und zwar erhielt er

für die nach innen mündende Röhre wie  $194\frac{1}{5} : 100$ ;

„ „ dünne Wand wie . . . . .  $160 : 100$ .

Hiernach ist der Ausflußcoefficient für die nach innen

mündende Röhre . . . . .  $\frac{500}{971} = 0,514$ ;

„ ist der für die dünne Wand . . . . .  $\frac{100}{160} = 0,625$ .

Vergleicht man diesen letzteren Versuch mit der vorherigen directen Messung des zusammengezogenen Wasserstrahles, so kann man schließen, daß bei einer Oeffnung in dünner Wand die Geschwindigkeit in der kleinsten Querschnittsstelle des Strahles  $\frac{0,625}{0,646} = 0,967$  von der theoretischen Geschwindigkeit beträgt, welches Resultat den späteren und jüngsten Versuchen entspricht.

Bezeichnen wir daher den Ausflußcoefficienten mit  $\mu$ , den Geschwindigkeitscoefficienten mit  $\psi$  und den Contractionscoefficienten mit  $\alpha$ , so würde man setzen können:

$$\mu = \psi \cdot \alpha,$$

eine Annahme, die sich auch später als richtig herausstellte.

Zahlreich und großartig sind die Versuche, welche die beiden Italiener Michelotti (Vater und Sohn) in einem besonderen hydraulischen Observatorium, einer Meierei Parella bei Turin<sup>1)</sup>, von 1763 bis 1785, anstellten. Dies Etablissement wurde 1763 durch Francesco Dominico Michelotti (dem Vater)<sup>2)</sup> unter der Protection des Königs von Sardinien gegründet und zu ausgedehnten Versuchen benutzt, die 20 Jahre später durch (den Sohn) Therese Michelotti<sup>3)</sup> wichtige Ergänzungen erfuhren.

Das Hauptwerk des hydraulischen Observatoriums war ein Thurm von über 30 Fuß Höhe, der im Innern einen verticalen Schacht mit quadratischem Querschnitte von 3 Fuß Seitenlänge bildete. In einem besonderen gemauerten Gerinne wurde diesem Thurme das erforderliche Wasser aus einem Seitenarme des Flusses Dora zugeführt. In der vorderen Seitenwand desselben befanden sich drei quadratische Ausflußöffnungen von 8 Zoll Seitenlänge in verschiedenen Höhen über einander. Die unterste Oeffnung war unmittelbar über dem durch einen Stein gebildeten Boden placirt, der Mittelpunkt der nächst höheren Oeffnung lag 10 Fuß 4 Zoll und der der obersten Mündung 15 Fuß 4 Zoll über dem Boden und 5 Fuß unter der Sohle des Zufußcanales.

Diese Oeffnungen wurden von außen durch quadratische, 1 Fuß

<sup>1)</sup> Der Verfasser besuchte die Parella am 20. August 1860 und fand das hydraulische Etablissement leider nicht mehr in dem früheren Zustande, vielmehr etwas verfallen.

<sup>2)</sup> F. D. Michelotti, geb. 1710 zu Cincano, gest. 1777 zu Turin.

<sup>3)</sup> J. T. Michelotti, geb. 1764 zu Turin, gest. 1846 ebendasselbst.

lange und eben so hohe und 8 Linien dicke Messingplatten mit 3zölligen quadratischen Mündungen durch Anwendung von in Wachs und Fett getränktem Leder verschlossen. Außerdem waren noch fernere Anordnungen getroffen, um auch kleinere quadratische oder kreisförmige Mündungen anbringen zu können.

Die ausfließende Wassermenge wurde in einem 24 Fuß langen, 12 Fuß breiten und  $2\frac{1}{2}$  Fuß tiefen ausgemauerten Behälter aufgefangen und darin gemessen (cubicirt).

Die Resultate dieser Versuche wurden in folgenden beiden Werken veröffentlicht: „Sperimenti idraulici di F. D. Michelotti“, Torino 1767, und „Mémoire physico-mathématique contenant les resultats d'expériences hydrauliques“. In den Mémoires de l'Académie des sciences de Turin, An. 1784—1785. Letztere Quelle enthält die Versuche des Sohnes J. T. Michelotti. Beide Arbeiten zusammen genommen wurden 1808 von Professor Zimmermann in Berlin in die deutsche Sprache übersetzt und mit Anmerkungen von Eytelwein begleitet.

Die Hauptergebnisse dieser Versuche lehrten, daß sich die Ausflußcoefficienten mit den Druckhöhen verändern, abnehmen, wenn die Druckhöhen wachsen. Indessen war die Veränderlichkeit dieser Coefficienten so klein, daß man allgemein für den Ausfluß des Wassers durch dünne Wände setzen konnte:

$$\mu = 0,619.$$

Eine interessante Bestätigung erhielten die Michelotti'schen Versuche durch die, welche Bossut<sup>1)</sup> von 1775 ab (auf Kosten des Herzogs von Choiseul) an den Wasserleitungen von Mézières anstellte.

Bossut bediente sich zu seinen Versuchen eines parallelepipedisch geformten Kastens von 12 Fuß Höhe und von quadratischem Querschnitte mit 2 Fuß Seitenlänge, wobei der Ausfluß durch kreisrunde und durch quadratische Mündungen erfolgte. Die größte Bossut'sche Druckhöhe war 10 Fuß 9 Zoll mit 2 Zoll hohen Mündungen in dünner Wand (aus  $\frac{1}{2}$  Linie dickem Kupferblech gebildet). Die ausgeflossene Wassermenge wurde in einem Fasse aufgefangen und hier mittelst eines geaichten, würfelförmigen Kupfergefäßes von  $\frac{1}{8}$  Cubikfuß Inhalt genau gemessen. Bossut fand, daß die Ausflußcoefficienten mit der Druckhöhe abnehmen.

Specielles über seine Versuche enthält sein bereits S. 192 erwähntes Werk über Hydraulik<sup>2)</sup>, von welchem Langsdorf Uebersetzungen lieferte, die 1792 in Frankfurt a. M. erschienen.

So verdienstlich und beachtenswerth auch die bis hierher angestellten Versuche genannt werden mußten, so genügten sie doch lange nicht den practischen Bedürfnissen. In dieser Beziehung werde namentlich auf zweierlei aufmerksam gemacht, nämlich erstens darauf, daß man die Ausflußmündungen verhältnißmäßig immer noch zu klein genommen hatte und zweitens, daß man auch nicht bei Oeffnungen Versuche angestellt hatte, welche bis zur Oberfläche des Wassers (bis zum Wasserspiegel) reichten, d. h. nicht bei sogenannten Ueberfällen, obwohl auch hier eine Contraction eintreten und mit dieser eine Verminderung des Ausflußquantums verbunden sein mußte.

<sup>1)</sup> Bossut, geb. 1730 zu Tartaras (Dép. Rhône), gest. zu Paris 1814.

<sup>2)</sup> Traité élément. d'hydrodynamique. 2 Vol. Paris 1772.

Die ersten beachtenswerthen Versuche über Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle (rectanguläre Seitenöffnungen bis zum Wasserspiegel reichend), stellte der französische Ingenieuroberst Du Buat<sup>1)</sup> an und veröffentlichte nachher dieselben in seinem berühmten Werke: „Principes d'hydraulique et d'hydrodynamique“. Paris 1779<sup>2)</sup>.

Du Buat benutzte hierzu einen künstlich gebildeten Canal, der quer-rechtwinklig auf seiner Länge, einen Einbau aus Brettern enthielt, in welchem eine oben offene Mündung gebildet war, durch die das Wasser in geeigneter Weise abfloß. Das durchgeflossene Wasserquantum wurde von einem cubicirten Bassin aufgenommen und demgemäß gemessen.

Bei 1,438 Fuß Breite der Ueberfallskante und bei Höhen des Wasserspiegels über der Ueberlaßschwelle von 0,140 Fuß bis 0,549 Fuß ergab sich aus 8 Versuchen für den Ausflußcoefficienten der Mittelwerth  $\mu = 0,652$ . Hierzu muß jedoch bemerkt werden, daß bei den ersten vier Versuchen der Ausfluß mit vollständiger Contraction, d. i. an der unteren (der horizontalen) Abflußkante und an beiden verticalen Seiten abgelöst, stattfand, bei den übrigen Versuchen aber mit partieller Contraction, weil hierbei die Abflußkante in der Mitte oder am Ende des Canales lag<sup>3)</sup>.

Fast denselben Mittelwerth für den Ausflußcoefficienten bei Ueberfällen, gaben Versuche, welche die seiner Zeit berühmten englischen Ingenieure Brindley<sup>4)</sup> und Smeaton<sup>5)</sup> anstellten und worüber in den unten bezeichneten Quellen berichtet wird<sup>6)</sup>.

Aus, wie behauptet wird, nicht sehr genau ausgeführten Versuchen Christian's<sup>7)</sup>, welche in dem unten angegebenen, seiner Zeit geschätzten Werke<sup>8)</sup> notirt sind, ergaben sich theilweise mit Du Buat stimmende, theils mit Brindley und Smeaton widerstreitende Ergebnisse, so daß aus mehrfachen Gründen fernere und namentlich Versuche mit Ueberfällen größerer Dimensionen, wünschenswerth wurden. Die ersten derartigen Versuche wurden aber auf Veranlassung Eytelwein's<sup>9)</sup> (am Schlusse des vorigen Jahrhunderts) durch den Bauinspector Kypke, neben dem Bromberger Canale, eine Viertelmeile von der Stadt Bromberg an einem Bache angestellt, den man auf 260 Fuß (preuß.) Länge durch Bretter zu einem Canale umgestaltet hatte. In letzterem wurden Ueberfälle von 0,50 Fuß bis 3,448 Fuß (rhein.) Breite gebildet und

<sup>1)</sup> Du Buat (oder Dubuat), geb. 1732 in der Normandie, gest. 1787 zu Nançay (Dép. Cher & Inder).

<sup>2)</sup> Tome II, Nr. 409—415 (Ausgabe von 1816).

<sup>3)</sup> Ausführlich über diese Versuche Du Buat's berichtet Egen in seiner Schrift: „Untersuchungen etc. über Wasserwerke“, S. 32. Berlin 1831.

<sup>4)</sup> Brindley, geb. 1716 zu Dunsted (Derby), gest. 1772 zu Turnhorst (Staffordshire).

<sup>5)</sup> Smeaton, geb. 1724 zu Austhorpe bei Leeds, gest. 1792 ebendasselbst.

<sup>6)</sup> Rees Cyclopaedia, Artikel „Water“ und hiernach Weisbach in Hülse's „Maschinenencyclopädie“, Artikel „Ausfluß“, Bd. 1, S. 476. Ferner auch Egen a. a. O., S. 34.

<sup>7)</sup> Christian, geb. 1776 zu Verviers (Belgien), gest. 1832 zu Paris.

<sup>8)</sup> Traité de mécanique industrielle. Vol. I, Pg. 348.

<sup>9)</sup> Eytelwein, geb. 1764 zu Frankfurt a. M., gest. zu Berlin 1849.



Wasserstände (Druckhöhen) von 0,344 bis 1,250 Fuß angeordnet. Als Mittelwerth erhielt man  $\mu = 0,629^1$ .

Eytelwein vernachlässigte die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers, was (wenigstens im Allgemeinen) als unrichtig bezeichnet werden muß und auf die Größe des Ausflußcoefficienten von Einfluß ist. Später folgende Experimentatoren (d'Aubuisson, Castel, Weisbach u. A.) haben angemessen hierauf Rücksicht genommen.

Aus der Periode gegen Ende des vorigen Jahrhunderts sind streng genommen noch einige Experimentatoren, insbesondere die Engländer Young und Vince<sup>2)</sup>, so wie der Italiener Venturi<sup>3)</sup> zu verzeichnen.

<sup>1)</sup> Ausführlich über diese Versuche berichtet Eytelwein selbst in seinem Handbuche der Mechanik fester Körper und Hydraulik (Zweite Auflage), S. 123 ff.

Zu Ehren des überhaupt um die practisch-wissenschaftliche Mechanik hochverdienten Mannes, lassen wir hier die Ergebnisse der 6 angestellten Versuche folgen und copiren treu die beigegebene Fig. 69:

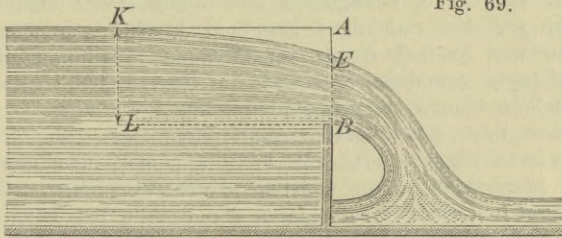


Fig. 69.

Nro. des Versuchs.	Breite der Oeffnung Fuß.	$\overline{EB}$ Strahldicke über der Abflußkante Fuß.	$\overline{AE}$ Senkung des Wasserspiegels Fuß.	$\overline{AB} = KL$ Druckhöhe Fuß.	$\overline{AK}$ Abstand des ungesenkten Wasserspiegels Fuß.	Verhältniß $\frac{EB}{AB}$	Ausflußcoefficient $= \mu$ .
1	0,500	1,219	0,031	1,250	0,330	0,975	0,632
2	0,833	0,853	0,047	0,900	0,540	0,947	0,621
3	1,167	0,645	0,075	0,720	0,790	0,895	0,633
4	1,500	0,523	0,073	0,596	0,810	0,877	0,640
5	2,146	0,408	0,072	0,480	0,750	0,850	0,619
6	3,448	0,292	0,052	0,344	0,660	0,848	0,634

<sup>2)</sup> Phil. Transact. 1795. P. I, Art. 2, und Gregory's Darstellung der mech. Wissenschaften (1828, Deutsch von Dietlein), Bd. 1, §. 464, und Gilbert's Annalen, Bd. II und III. Ferner Gehler's Physik. Wörterbuch, Bd. 5, Abth. 1, S. 535. Auch Kästner, Hydrodynamik, S. 71 und 123.

<sup>3)</sup> Venturi, geb. 1746 zu Bibano bei Reggio (Lombardei), gest. 1822 zu Reggio.

Ueber die Versuche (Ausfluß durch Bodenöffnungen) der ersteren finden sich Berichte in den vorher angegebenen Quellen.

Venturi's (seiner Zeit Professor in Modena) Versuche<sup>1)</sup> hatten mehr practischen Werth, indem sie über einige wichtige Fragen Auskunft gaben, u. A. über die Erscheinungen beim Ausfluß des Wassers durch gewisse Ansatzröhren, da hier außer der Capillarität (S. 6) auch noch eine innere Pressung des Wassers wirksam ist, vermöge welcher letzteres mit einer gewissen Kraft nach allen Seiten, folglich auch gegen die Wände der Ansatzröhren drückt, bekanntlich eine schon von Daniel Bernoulli (Hydrodynamica, Sect. III) in Betracht gezogene Erscheinung und die sich auch, unter Umständen, zu einem Ansaugen (Hydrodynamica, Sect. XII) gestalten kann. Alles Dinge, welche auch hier später ausführlich besprochen werden sollen<sup>2)</sup>).

Etwas spätere Versuche des Franzosen Hachette<sup>3)</sup> bestätigten die Venturi's und erweiterten diese auch dahin, daß er Auskunft über die verschiedenen Formen der Wasserstrahlen beim Ausfließen durch kreisförmige, elliptische, trianguläre und quadratische Oeffnungen ertheilte. Ein practisch wichtiges Ergebniß hierbei war das, daß, im Allgemeinen, der Ausfluß durch verschiedene Mündungen in dünner Wand unabhängig von deren geometrischer Gestalt, jedoch nur so lange ist, als dieselben keinen einspringenden Winkel enthalten<sup>4)</sup>.

Als einen der fruchtbarsten Experimentatoren im Gebiete der Hydraulik dieses Jahrhunderts von 1829 ab, muß man den Italiener Bidone<sup>5)</sup> bezeichnen. Die meisten seiner Versuche stellte dieser wackere Mann in dem Wasserschlosse der Parella bei Turin an, jener Schöpfung des älteren Michelotti, worüber bereits vorher S. 198 berichtet wurde.

Des großen Umfanges und der Vielseitigkeit der Bidone'schen Versuche wegen, muß auf die speciellen, hier später folgenden Abschnitte verwiesen werden, so daß wir hier nur kurz die hauptsächlichsten Experimente aus dem Gebiete des Ausflusses aus Gefäßen notiren<sup>6)</sup>.

Hierher gehören zuerst (Hachette's Versuche ergänzend und weit

<sup>1)</sup> Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides. Par le Citoyen J. P. Venturi. Paris. An. VI (1797), Pg. 75 etc.

<sup>2)</sup> Einen schönen Auszug über diese Venturi'schen Versuche hat der verstorbene Bergrath Weisbach in der Hülse'schen Maschinenencycl., Bd. 1, S. 498 ff. geliefert. In neuerer Zeit hat Magnus in Berlin (1850) die Venturi'schen Versuche wiederholt und ist dabei in mehrfacher Hinsicht zu ganz anderen Resultaten gelangt. Man sehe deshalb Poggend. Annalen etc. Bd. 80, S. 1—36.

<sup>3)</sup> Hachette, geb. 1796 zu Mézières, gest. 1834 zu Paris.

<sup>4)</sup> Hachette's ausführlichste Arbeit hierüber findet sich in den Mémoires der Pariser Academie vom Jahre 1805 und zwar unter den Volumes des savans étrangers, theilweise auch in den Annales de chim. et phys., T. I, Pg. 200, so wie endlich in seinem „Traité élémentaire des Machines“, Nr. 111.

<sup>5)</sup> Georg Bidone, geb. 1781 zu Casal Noceto, gest. zu Turin 1839.

<sup>6)</sup> Die betreffenden literarischen Arbeiten sind hauptsächlich folgende: „Expériences sur la forme et la direction des veines et courans d'eau lancés par diverses ouvertures“. Turin 1829. „Expériences expérimentales et théoriques sur la contraction partielles des veines d'eau“ etc. Turin 1836. Dann vorzüglich die Mémoires der Academie zu Turin von 1829, 1830, 1831 etc.

übertreffend) die Versuche über den Ausfluß aus Wandöffnungen unter Verwendung von Mundstücken der verschiedensten Formen, wobei Bidone die Wasserstrahlen auch außerhalb der Mündung studirte, beobachtete, zeichnete und dabei die den Wasserstrahl charakterisirenden Wendungen (ren versements), Knoten (noeuds), Blätter (nappes), Bäuche (ventres), welche sich in verschiedenen Entfernungen von den Mündungen bilden, kennen zu lernen bemüht war<sup>1)</sup>.

Sodann sind besonders zu markiren Bidone's Versuche und Ergebnisse über partielle Contraction, so wie über den Ausfluß des Wassers bei breiten Ueberfällen u. m. A., worüber im Verlaufe der später folgenden Darstellungen der verschiedenen hydrodynamischen Erörterungen, Fragen und Aufgaben, ausführlich berichtet werden wird.

Die großartigsten, genauesten und für die practische Anwendung wichtigsten Versuche über den Ausfluß durch rechteckige Seitenöffnungen sind die, welche auf Veranlassung des französischen Kriegsministeriums, 1827 bis 1829 von Poncelet<sup>2)</sup> und Lesbros<sup>3)</sup>, und 1829 bis 1834 von Lesbros allein vorgenommen wurden<sup>4)</sup>.

Beide Experimentatoren benutzten hierzu als Wassergefäß einen Festungsgraben der Stadt Metz und zwar den der früher vorhandenen Front „Saint-Vincent“<sup>5)</sup>, wobei die Speisung von der Obermosel aus geschehen und das benutzte Wasser in die Untermosel abgelassen werden könnte. Das erste Sammelgefäß hatte eine Oberfläche von 25000 Quadratmeter und würde allein schon entsprechend gewesen sein, hätte man seine Wasserstände gehörig reguliren können. Da letzteres nicht der Fall war, so setzte man dies Gefäß mit einem zweiten in Verbindung, dessen Oberfläche 15000 Quadratmeter betrug und wobei der Abfluß von  $1\frac{1}{2}$  Cubikmeter Wasser eine Senkung des Oberwasserspiegels von nur 1 Millimeter veranlaßte.

Um ferner die Umstände des beabsichtigten Ausflusses so viel als möglich den in der Praxis vorkommenden Fällen anzupassen, wurde an der Mündungsstelle ein hölzernes Durchlaßwehr eingebaut, gleichsam ein dritter Behälter gebildet und in dessen Wand die Ausflußöffnung angebracht<sup>6)</sup>.

Von letzterem Behälter führte ein unterirdischer Canal nach dem unteren Moselflusse und befand sich in diesem eine zweite Schutzvor-

<sup>1)</sup> Bidone's Erklärungen dieser Erscheinungen hat später (1855) Magnus in Berlin kritisiert und anders (besser) zu geben versucht. Man sehe deshalb Poggend. Annalen der Physik etc. Bd. 95, S. 1.

<sup>2)</sup> Poncelet, geb. 1. Juli 1788 zu Metz, gest. 22. Dec. 1868 zu Paris.

<sup>3)</sup> Lesbros, geb. 1790 zu Vynes (Hautes-Alpes).

<sup>4)</sup> Die betreffenden Hauptwerke sind folgende: Poncelet et Lesbros, Expériences hydrauliques etc. Paris 1832, und Lesbros, Expériences hydrauliques etc. Paris 1851.

<sup>5)</sup> Um diese geschichtlich wichtige Versuchsstelle kennen zu lernen, besuchte der Verfasser im August 1878 die Stadt Metz, fand aber die betreffenden Festungswerke und Wassergräben daselbst so verändert, daß nur durch die äußersten Bemühungen gütiger sachverständiger Freunde zu ermitteln war, daß die fragile Anlage auf dem Glacis der jetzigen Bastion III der Stadtbefestigung, links von dem Ostende der Pontiffroy-Brücke, existirt hat.

<sup>6)</sup> Später folgt eine (größere) Abbildung dieses dritten Behälters etc.

richtung, die zum Reguliren des Abflusses und insofern ebenfalls dazu diente, das Niveau des Wassers im zweiten Behälter auf einerlei Höhe zu erhalten.

Die Versuche von 1828 erstreckten sich hauptsächlich auf rechteckige Mündungen in dünner Wand von 0,2 Meter constanter Breite, mit Höhen von 0,01 Meter bis 0,20 Meter und auf Druckhöhen (Abständen des Oberwasserspiegels von der oberen Mündungskante) von 3 Millimeter bis 1,7 Meter. Auch auf einige (untergeordnete) Versuche hatte man Bedacht genommen.

Die Versuche, welche von 1829 bis 1834 Lesbros allein anstellte (der Zahl nach über 2000) übertrafen an Umfang und Mannigfaltigkeit die ersten bedeutend und erstreckten sich namentlich auf viele bisher unerörterte Fälle der Praxis<sup>1)</sup>.

Da ein Resumé aus allen diesen Versuchen dem Charakter der hier zu gebenden geschichtlichen Notizen unangemessen sein würde und später ausführliche Berichte folgen, so beschränken wir uns hier auf folgende Ergebnisse:

Die gemeinschaftlichen Versuche von Poncelet und Lesbros lehrten, daß sich die Ausflußcoefficienten mit den Druckhöhen und mit den Mündungshöhen ändern und daß sie (mit unbedeutenden Ausnahmen) größer werden, wenn Druckhöhen und Mündungshöhen abnehmen.

Ferner ergab sich, daß sich die Ausflußcoefficienten bei größeren Druckhöhen und verschiedenen Mündungshöhen der Mittelzahl 0,610 nähern.

Die von Lesbros allein angestellten Versuche bestätigten nicht nur die vorgenannten Ergebnisse, sondern führten auch noch zu folgendem interessanten und wichtigen Endresultate:

Daß die Ausflußcoefficienten, unter sonst gleichen Umständen, dieselben bleiben, welche Seite einer rechteckigen Mündung auch zur Höhe der Basis genommen wird, sobald nur die größte Dimension die kleinste nicht um das Zwanzigfache übertrifft.

So ausgezeichnet und werthvoll diese Metzger Versuche auch im Allgemeinen genannt zu werden verdienen, so ließen sie doch eine für die Praxis bedeutsame Lücke, nämlich Versuche über den Ausfluß bei Ueberfällen größerer Dimensionen und unter den in der Praxis vorkommenden Umständen. Diese Lücke auszufüllen bemühte sich der Ingenieur Castel in Toulouse, auf Veranlassung der Academie der Wissenschaften in Toulouse und D'Aubuisson's de Voisins<sup>2)</sup>, seiner Zeit Chefdirector des französischen Bergwerk-Corps.

Als Wasserwerk-Ingenieur der Stadt Toulouse stand Castel der sogenannte Wasserthurm (château d'eau) zur Verfügung, von welchem aus die Stadt stündlich mit 150000 bis 200000 Liter Wasser versorgt wird.

<sup>1)</sup> 1100 Versuche betrafen den Ausfluß durch dünne Wand in die freie Luft unter verschiedenen Dispositionen und Formen des Ausflußbehälters. 526 Versuche bei außerhalb angesetzten Gerinnen. 49 Versuche bei unter Wasser gesetzten Durchlaßmündungen. 353 Versuche bei Ueberfällen in die freie Luft mündend, oder mit angesetzten Gerinnen, Ueberfällen an den Enden von besonderen Gerinnen und unvollständigen, d. h. solchen Ueberfällen, welche zum Theil vom Unterwasser bedeckt werden.

<sup>2)</sup> d'Aubuisson, geb. 1769 zu Toulouse, gest. 1841 ebendasselbst.

Unter Berücksichtigung aller möglichen Umstände und mit Aufnahme des ausgeflossenen Wassers in besonderen Aichkasten, wurden nicht weniger als 494 Versuche in drei Reihen angestellt, wobei die Ueberfallsbreiten von 0,01 Meter bis 0,74 Meter variirten und zwar unter Druckhöhen über der Ueberfallsschwelle von 0,03 Meter bis 0,24 Meter.

Während wir auf die betreffenden Endresultate bei den später zu erörternden Formeln zurückkommen, welche Castel bei seinen Versuchen zu Grunde legte, werde hier schon ein Hauptergebniß aller Versuche mitgetheilt, darin bestehend, daß der Ausflußcoefficient für verschiedene Breiten des Wandeinschnittes sehr verschieden ist und zwar bei weiteren Einschnitten auffallend größer als bei schmälern, weshalb auch d'Aubuisson (in der unten notirten Hydraulik, §. 77) 4 Fälle beim Ausflusse des Wassers durch Ueberfälle unterscheidet<sup>1)</sup>.

Mit dem Anfange der vierziger Jahre veröffentlichte Weisbach in Freiberg<sup>2)</sup> seine ersten Arbeiten aus dem Gebiete der Experimental-Hydraulik und beginnt damit jene große Reihe werthvoller Arbeiten, wofür ihm Theorie und Praxis für alle Zeiten ein dankbares Andenken widmen muß.

Den Anfang machten seine Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, dem schon ein Jahr später (1843) Versuche über unvollkommene Contraction des Wassers folgten und womit Weisbach ein Gesetz bestimmt ausdrückte, was namentlich Castel und d'Aubuisson nur ahnten, nicht aber zur Klarheit hierüber gelangten.

Von hier ab bezeichnet nämlich, nach Weisbach's Vorgange, die experimentelle, wissenschaftliche Hydraulik jede Contraction bei stillstehendem Oberwasser als vollkommen, dagegen die bei bewegtem Oberwasser als unvollkommen. Zugleich entschied Weisbach bestimmt, daß das Ausflußquantum bei letzterer Contraction stets größer als bei ersterer ist und zwar in dem Maaße, als der Flächenraum der Mündung  $a$  größer ist, wie der Querschnitt  $A$  des ankommenden Wassers (S. 190), oder der Inhalt der Wand, in welcher sich die Ausflußmündung befindet<sup>3)</sup>.

Allgemeiner bekannt wurden Weisbach's fruchtbare Versuche in fast allen Gebieten der technischen Mechanik flüssiger Körper, erst durch die Herausgabe seiner „Ingenieur-Mechanik“, wovon 1846 der erste Band erschien.

<sup>1)</sup> Die Hauptquelle der Castel'schen Versuchresultate sind die Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse. T. IV, 1837. Dann d'Aubuisson's Hydraulique. Seconde Édition (1840), Pg. 79 ff. Annales des ponts et chaussées. 1837, 2<sup>e</sup> Sem., Pg. 113. Annales des chim. et de phys. Tom. 62, sowie Weisbach's Artikel „Ausfluß“ in Hülse's Maschinenencyklopädie, Bd. 1, S. 484 ff.

<sup>2)</sup> Julius Weisbach, geb. 10. Aug. 1806 zu Mittelschmiedeberg bei Annaberg im Königreiche Sachsen, gest. 24. Febr. 1871 zu Freiberg.

<sup>3)</sup> Die Begriffe vollkommene und unvollkommene Contraction sind nicht zu verwechseln mit den Begriffen partielle und totale (vollständige) Contraction. Letztere beziehen sich auf die Erscheinungen, daß beziehungsweise der Strahl nur auf einen Theil seines Umfanges, oder überall zusammengezogen wird.

Hiernach bedarf es kaum der Bemerkung, daß wir in den nachfolgenden Theilen der Hydrodynamik auf die von Weisbach gewonnenen Versuchsergebnisse recht oft zurückkommen werden.

Nach Weisbach bemühte sich (von 1845 ab) Boileau<sup>1)</sup>, französischer Artilleriecapitän und Professor in Metz, sowohl die in sehr kleinem Maaßstabe angestellten Versuche von Poncelet und Lesbros, zu vervollständigen, als auch neue Formeln für den Ausfluß bei Ueberfällen aufzustellen<sup>2)</sup>, welche über die ganze Wand reichen. Hierbei tadelte Boileau namentlich, daß alle bis dahin aufgestellten Formeln das Oberflächengefälle gar nicht enthielten, und vergleicht deshalb den Ausfluß bei einem Ueberfalle mit dem Ausflusse durch eine Mündung unter Wasser. Auch hielt er für erforderlich, in seiner Formel für das Ausflußquantum die Höhe des Ueberfalls einzuführen. Jedenfalls ist das Urtheil<sup>3)</sup> über diese Arbeiten Boileau's richtig, daß es viel naturgemäßer ist, das Princip der unvollkommenen Contraction weiter zu verfolgen, als durch neue Annahmen und Wendungen der eigentlichen Sache aus dem Wege zu gehen. Später kommen wir auch auf die Boileau'schen Versuche zurück.

Zu fast derselben Zeit hatte auch der nordamerikanische Ingenieur Francis Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle bis zu 10 Fuß Breite und für Druckhöhen von 0,60 bis 1,60 Fuß angestellt<sup>4)</sup>.

Die aus den Versuchen entnommenen Formeln folgen später und verdienen wohl beachtet zu werden.

Weniger günstig hat man eine Formel über den Ausfluß durch Ueberfälle beurtheilt, welche der französische Artillerie-Hauptmann Clarinval im Jahre 1857 aufstellte<sup>5)</sup> und welche den merkwürdigen Charakter hat, daß sie das wahre, ausgeschlossene Wasserquantum angiebt, ohne eines Ausflußcoefficienten zu bedürfen.

Größeres Vertrauen hat sich dagegen eine Formel, ebenfalls für die Berechnung der Wassermenge bei Ueberfällen, erworben, welche Prof. Braschmann in Moskau im Anfange der sechziger Jahre aufstellte<sup>6)</sup> und die, dem Principe nach, der Weisbach'schen unvollkommenen Contraction entspricht. Wir werden auch diese Formel

<sup>1)</sup> Beiläufig gesagt, stellte Boileau seine Versuche in Metz an derselben Stelle wie Poncelet und Lesbros an.

<sup>2)</sup> „Mémoire sur le jaugeage des cours d'eau“ im XIX. Bande des *Journals de l'école polytechnique* etc. (Paris, 1850), und als besondere Schrift: „*Traité de la mesure des eaux courantes*“. Paris, 1854.

<sup>3)</sup> Bornemann, Vergleich der Formeln von Weisbach und Boileau über den Ausfluß durch Ueberfälle und Mündungen über die ganze Wand. In der Zeitschrift „*Der Civilingenieur*“. Bd. 2, S. 72.

<sup>4)</sup> J. B. Francis, *Lowell hydraulic experiments etc., on the flow of water over weirs etc.* Boston, 1855.

<sup>5)</sup> *Annales des Mines*, Tome XII (1857), und Bornemann's *Civilingenieur* etc., Bd. 5 (1859), S. 210.

<sup>6)</sup> Stüssi in der Schweizerischen Polytechn. Zeitschrift. Bd. 9 (1864), S. 1—42 (nach einer gekrönten Preisschrift). Ferner Bornemann's *Civilingenieur*. Bd. IX (1863), S. 450. Dann Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfließes in Preußen, Jahrg. 1867, S. 32, und Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1868, S. 699.

später, bei der vergleichenden Berechnung eines und desselben practischen Falles benutzen.

Von beachtenswerthen Experimenten, über Ausfluß des Wassers aus Gefäßen, sind, aus jüngster Zeit und der Gegenwart, (leider) nur die des Herrn Kunstmeisters Bornemann in Freiberg, eines Schülers und würdigen Nachfolgers Weisbach's im Gebiete der practischen Hydrodynamik, rühmlichst zu nennen, dessen Versuche und Ergebnisse von 1866 ab bis zur Gegenwart reichen. Von besonderem Nutzen werden uns später in diesem Buche die Bornemann'schen Versuchsergebnisse namentlich bei Berechnungen des Ausflusses durch Mündungen unter Wasser<sup>1)</sup> und bei vollkommenen<sup>2)</sup> und unvollkommenen Ueberfällen sein<sup>3)</sup>.

Noch bleibt viel zu thun übrig, und steht zu hoffen, daß namentlich die vorhandenen Widersprüche und Lücken durch Versuche beseitigt und beziehungsweise ausgefüllt werden, welche insbesondere bei letztgenannten Ausflüssen bestehen und doch für ganz genaue Wassermessungen nothwendig sind, die man zur Ermittlung des Güteverhältnisses von Wassermotoren dringend bedarf.

## Erstes Capitel.

### Ausfluß des Wassers aus Bodenöffnungen bei constanter Druckhöhe.

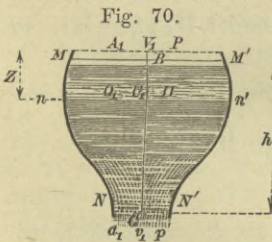
#### §. 77.

##### Ausflußgeschwindigkeit.

Unter Voraussetzung der Gültigkeit des Satzes vom Parallelismus der Schichten (S. 189), ferner, daß die Bewegung bereits den Beharrungszustand erreicht hat und das Wasser die Gefäßquerschnitte überall ausfüllt, läßt sich mit Hülfe des Principes von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, in nachstehender Weise ein mathematischer Ausdruck für die Geschwindigkeit herleiten, mit welcher das Wasser aus der horizontalen Mündung  $NN'$  eines beliebig gestalteten Gefäßes (Fig. 70) fließt.

Angenommen wird überdies, daß die inneren Gefäßwände sanft gekrümmt sind, nirgends Vorsprünge, Ecken, Kanten, Löcher etc. vorkommen, auch von Reibungen, Adhäsion des Wassers etc., sowohl seiner Theilchen unter sich, als mit den Gefäßwänden, abgesehen wird.

Hiernach sei  $A$  der Querschnitt der Oberfläche  $MM'$  des Gefäßes,  $V$  die Geschwindigkeit, mit welcher sich in der betreffenden Schicht das Wasser fortwährend ersetzt. Der



<sup>1)</sup> Civilingenieur, Bd. XVII (1871), S. 46.

<sup>2)</sup> Ebendasselbst, Bd. XVI (1870), S. 291 und 375.

<sup>3)</sup> Desgleichen, Bd. XXII (1876), S. 87.

Querschnitt der Mündung  $NN'$  sei  $= a$ , die Ausflußgeschwindigkeit daselbst sei  $= v$  und endlich der Verticalabstand des Mündungsquerschnittes vom horizontalen Oberwasserspiegel die sogenannte Druckhöhe  $= h$ .

Ueberdies werde vorerst die Flüssigkeit als allein der Schwerkraftswirkung unterworfen gedacht.

Ein Massenelement  $m$ , was in der sehr kleinen Zeit  $\tau$  durch das Gefäß strömt, läßt sich ausdrücken, wenn  $\gamma$  und  $g$  die früheren Bedeutungen beibehalten, durch

$$m = \frac{\gamma A V \tau}{g} = \frac{\gamma a v \tau}{g}.$$

Die lebendige Kraft, welche der Schicht  $MM'$  inne wohnt, ist hiernach:  $\frac{1}{2} m V^2$ , oder weil, nach dem Parallelismus der Schichten,  $V = \frac{va}{A}$  ist, auch  $\frac{1}{2} m \left(\frac{av}{A}\right)^2$ . Die lebendige Kraft, welche diese Schicht erlangt hat, wenn sie nach  $NN'$  gekommen ist, beträgt:  $\frac{1}{2} m v^2$ .

Daher ist auch die beim Niedergange dieser Schicht von  $MM'$  nach  $NN'$  gewonnene lebendige Kraft:

$$\frac{1}{2} m \left[ v^2 - \left(\frac{av}{A}\right)^2 \right].$$

Da nun die Flüssigkeit allein der Schwerkraft unterworfen vorausgesetzt wurde, so wird die mechanische Arbeit, welche jenen Zuwachs an lebendiger Kraft erzeugte, sein:  $mgh$  und daher nach dem genannten Principe folgen:

$$(1) \quad \frac{1}{2} m \left[ v^2 - \left(\frac{av}{A}\right)^2 \right] = mgh,$$

woraus sich endlich ergibt:

$$I. \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}}},$$

ein bereits (nach S. 190) von Johann und Daniel Bernoulli, so wie von d'Alembert gefundener Ausdruck.

Ist  $a$  im Verhältniß zu  $A$  sehr klein, mindestens  $\frac{a}{A} < \frac{1}{10}$ , so kann man  $\frac{a^2}{A^2}$  gegen 1 vernachlässigen und (wie S. 190) setzen:

$$II. \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Zusatz 1. Vorstehende Formeln geben die Ausflußgeschwindigkeiten etwas zu groß an, was seinen Grund in der unbeachtet gelassenen Reibung des Wassers an den Gefäßwänden und in der Klebrigkeit (viscosité) oder nicht völligen Flüssigkeit desselben hat. Daher wird auch die wirkliche Geschwindigkeit, womit Wasser aus horizontalen Bodenöffnungen in dünner Wand ausströmt, mittelst obiger Formeln nur erhalten, wenn man dieselben mit jener Zahl  $\psi$  (S. 198) multiplicirt, welche



kleiner als 1 ist und die man den Geschwindigkeitscoefficienten nennt<sup>1)</sup>

Im Allgemeinen scheint dieser Coefficient, unter sonst gleichen Umständen, mit der Druckhöhe zu wachsen (?), indem sich aus Weisbach's<sup>2)</sup> Versuchen folgende Zusammenstellung machen läßt:

$h =$ in Metern	0,02	0,50	3,5	17,0	103,0
$\psi =$	0,959	0,967	0,975	0,994	0,994

Hierbei erfolgte der Ausfluß durch ein gut abgerundetes, nach Innen erweitertes Mundstück von 1 Centimeter Durchmesser.

Vorstehendem gemäß würde beim Ausflusse durch Mündungen in dünner Wand ein Verlust an Geschwindigkeit und somit auch an lebendiger Kraft oder an mechanischer Arbeit stattfinden.

Zusatz 2. Für  $a = A$  wird  $v = \infty$ , was jedoch kein Widerspruch ist, sobald man beachtet, daß dann wegen  $V = \frac{av}{A}$  auch  $V = \infty$  sein muß.

Beispiel. Mit welcher Geschwindigkeit strömt Wasser aus einer horizontalen Bodenöffnung in dünner Wand von  $a = 0,02$  m Inhalt, bei einer constanten Druckhöhe von  $h = 4,0$  m, wenn der horizontale Oberwasserspiegel  $A = 0,20$  m ist und  $g = 9,8088$  angenommen wird?

Auflösung. Man erhält ohne Weiteres:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 9,8088}{1 - \frac{1}{100}}} = 8^m,903.$$

Vernachlässigt man  $\frac{a}{A}$  im Nenner, so folgt

$$v = 8^m,858.$$

Wird endlich der betreffende Geschwindigkeitscoefficient = 0,97 gesetzt, so ergibt sich die wirkliche Geschwindigkeit

$$\text{im ersten Falle: } 0,97 \cdot 8^m,903 = 8^m,636,$$

$$\text{im zweiten Falle: } 0,97 \cdot 8,858 = 8^m,502.$$

### §. 78.

In vorstehendem Paragraphen ist angenommen, daß die Flüssigkeit an der Oberfläche und Ausflußmündung gleichen Druck erfährt. Ist dies nicht der Fall, wird vielmehr die Einheit der Oberfläche mit einer Kraft  $P$  und die der Ausflußöffnung eben so mit einer Kraft  $p$  gedrückt, wobei erstere im Sinne der Bewegung, letztere entgegengesetzt wirkt, so gestalten sich die betreffenden Rechnungen folgendermaßen.

Die Größe der Arbeiten, welche während der Zeit  $\tau$  von  $P$

<sup>1)</sup> Die Nothwendigkeit der Einführung eines allgemeinen Geschwindigkeitscoefficienten hat zuerst Bidone (Turiner Mémoires, T. XL, §. 19) nachgewiesen. In Deutschland ist dieser Gegenstand jedoch zuerst von Weisbach zur Geltung gebracht worden.

<sup>2)</sup> Ing.-Mech. Bd. I, Fünfte Auflage (1875), S. 969. Ausführlich in Weisbach's Mittheilungen etc. Civilingenieur, Bd. V (1859), S. 2 und S. 87.

und  $p$  der Flüssigkeit eingepreßt werden, sind nämlich

$$PAV\tau - pav\tau,$$

oder, weil  $m = \frac{\gamma AV\tau}{g} = \frac{\gamma av\tau}{g}$  ist:

$$PAV\tau = \frac{gmP}{\gamma} \text{ und}$$

$$- pav\tau = - \frac{gmp}{\gamma}.$$

Daher wird die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen zu:

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv^2 \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) = gmh + \frac{gmP}{\gamma} - \frac{gmp}{\gamma},$$

so wie hieraus, wenn man zugleich den Geschwindigkeitscoefficienten  $\psi$  einführt:

$$v = \psi \sqrt{\frac{2g \left[ h + \frac{P-p}{\gamma} \right]}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

Beispiel. Die horizontale Ausflußöffnung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes mündet in einen luftverdünnten Raum, woselbst eine Pressung von  $\frac{1}{10}$  Atmosphäre statthat, während die Oberfläche durch die umgebende, äußere Luft pro Quadratmeter mit 10333 Kilogramm gepreßt wird. Man soll die Größe der Ausflußgeschwindigkeit für den Fall berechnen, daß die constante Druckhöhe  $h = 1^m,0$ , der Coefficient  $\psi = 0,97$  ist, zugleich aber um den Einfluß des Werthes  $\frac{a}{A}$ , wo  $a = 0^m,01$  ist, beurtheilen zu können, auf einander folgend  $\frac{a}{A} = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{25}$  und Null setzen.

Auflösung:

$$v = 0,97 \sqrt{\frac{2,9,8088 \left[ 1 + \frac{10333(1-0,1)}{1000} \right]}{1 - \frac{1}{25}}} = 14^m,0734 \text{ für } \frac{a}{A} = \frac{1}{5},$$

eben so

$$v = 13^m,8595 \text{ für } \frac{a}{A} = \frac{1}{10};$$

$$v = 13,8011 \quad " \quad \frac{a}{A} = \frac{1}{25};$$

$$v = 13,790 \quad " \quad \frac{a}{A} = \text{Null}.$$

### §. 79.

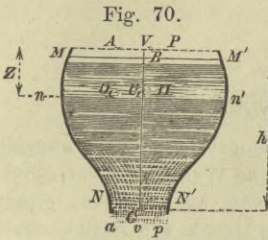
#### Hydraulischer Druck.

Aus (1) des vorigen Paragraphen folgt noch:

$$\frac{p}{\gamma} = h + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right),$$

oder auch wegen  $\frac{a}{A} = \frac{V}{v}$ :

$$(1) \quad \frac{p}{\gamma} = h + \frac{P}{\gamma} - \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{V^2}{2g}\right).$$



Für eine Schicht  $nn'$ , im Innern der Flüssigkeit um  $Z$  vom Oberwasserspiegel abstehend, deren Flächeninhalt  $O$  ist, woselbst die Wassertheilchen die Geschwindigkeit  $U$  besitzen und in ihr die Pressung  $\Pi$  stattfindet, wird sonach sein:

$$(2) \quad \frac{\Pi}{\gamma} = Z + \frac{P}{\gamma} - \left( \frac{U^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} \right).$$

Hierbei sind  $\frac{P}{\gamma}$  und  $\frac{\Pi}{\gamma}$ , nach §. 15, Zusatz 1, Wassersäulen, welche die betreffenden Drücke messen.

Die Ausdrücke (1) und (2) lehren, daß der Druck der bewegten Flüssigkeit auf die Wände des einschließenden Gefäßes von dem Drucke einer gleichen ruhenden Flüssigkeit verschieden ist, weshalb man ersteren den hydraulischen Druck, im Gegensatz zu dem letzteren, dem hydrostatischen, nennt.

Ueberhaupt ist der hydraulische Druck an einer beliebigen Wandstelle des Gefäßes gleich dem hydrostatischen Drucke an derselben Stelle, letzteren vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen eben daselbst und an der Oberfläche der im Gefäße befindlichen Flüssigkeit.

Je schneller also das Wasser durch einen bestimmten Querschnitt strömt, um so weniger Druck übt dasselbe gegen die Wände des betreffenden Gefäßes aus.

Diese bereits von Daniel Bernoulli<sup>1)</sup> aufgefundenen Sätze, stimmen auch ganz gut mit betreffenden Versuchen überein.

Zusatz 1. Aus der Gleichung (2) folgt überdies, da  $U = \frac{av}{O}$  und  $V = \frac{av}{A}$  ist,

$$(3) \quad \frac{\Pi}{\gamma} = Z + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} \left( \frac{a^2}{O^2} - \frac{a^2}{A^2} \right).$$

In den Fällen, wo  $\frac{a}{A} < \frac{1}{25}$  ist und  $P = p$  in die Geschwindigkeitsformel, §. 78, gesetzt werden kann, was fast immer der Fall ist, wenn das Gefäß überall von atmosphärischer Luft umgeben wird, läßt sich als hinreichend genau, wegen  $\frac{v^2}{2g} = h$ , setzen:

$$(4) \quad \frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - h \frac{a^2}{O^2}.$$

Hier bezeichnet nun  $\frac{P}{\gamma}$  die den Atmosphärendruck messende Wassersäule  $b = 10^m,333$ , so daß überhaupt  $z$  und  $O$  veränderliche Größen sind. Allgemein für  $\frac{\Pi}{\gamma}$  kann man daher schreiben:

<sup>1)</sup> Hydraulico-statico (Hydrodynamica, Sectio XII) und Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik. (Die Hydraulik.) 5. Theil. §. 220.

$$\frac{\Pi}{\gamma} = b \pm \chi,$$

wenn

$$z - h \frac{a^2}{O^2} = \pm \chi \text{ gesetzt wird.}$$

Ist, wie bereits oben bemerkt, das fragliche Wassergefäß überall von atmosphärischer Luft umgeben, so erfährt eine Wandstelle desselben im Abstände  $z$  vom Oberwasserspiegel, von Innen nach Außen, einen Druck, welcher gleich  $b \pm \chi$  ist, dagegen einen Druck von Außen nach Innen  $= b$ , so daß der resultirende oder wirkliche Druck beträgt:

$$\chi = z - h \frac{a^2}{O^2}.$$

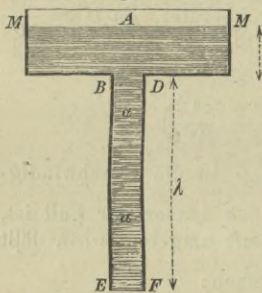
Wie leicht einzusehen, sind nun in Bezug auf diesen Druck folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. Es ist der Druck  $\chi$  positiv, d. h. von Innen nach Außen gerichtet, wenn  $z > h \frac{a^2}{O^2}$ , oder  $O^2 > \frac{h}{z} a^2$  ist.
2. Der fragliche Druck ist Null, sobald  $z = h \frac{a^2}{O^2}$  oder  $O^2 = \frac{a^2 h}{z}$ .
3. Negativ ist endlich dieser Druck, d. h. er verwandelt sich in ein Saugen, wenn

$$z > h \frac{a^2}{O^2} \text{ oder } O^2 < \frac{a^2 h}{z} \text{ ist.}$$

In letzterem Falle ist zugleich der Querschnitt  $O$  die Stelle, wo sich das voranlaufende Wasser von dem nachfolgenden trennen wird, oder es wird sich das Wasser daselbst von der Wand losreißen und innerhalb der Röhre einen freien Strahl bilden.

Fig. 71.



Bildet das Wassergefäß einen größeren Behälter  $MM$  von der Höhe  $= l$ , Fig. 71, in Verbindung mit einer prismatischen Röhre, deren überall gleicher Querschnitt  $= a$  und Höhe  $= \lambda$  ist, so wird aus (1) wegen  $O = a$ ,  $z = l$  und  $h = \lambda + l$ :

$$\frac{\Pi}{\gamma} = b + l - (\lambda + l), \text{ d. i. } \frac{\Pi}{\gamma} = b - \lambda.$$

Soll daher das durch die Röhre  $BF$  abfließende Wasser ein zusammenhängender Körper bleiben, so darf die Röhre  $\lambda$  nicht über  $b = 10^m,333$  hoch sein. Hat aber  $\lambda$  eine größere Höhe, so wird bei  $BD$  das voranlaufende Wasser von dem nachfolgenden abreißen und überhaupt so weit ein luftleerer Raum gebildet werden, bis im unteren Theile der Röhre eine  $10^m,333$  hohe Wassersäule gleichsam hängen bleibt oder von der Atmosphäre getragen wird<sup>1)</sup>. Eben so wird das Wasser durch  $EF$  nur in sofern abfließen, in wie weit das durch  $BD$  nachlaufende Wasser diese untere Säule immer wieder erhöht, so daß man sehr fehlen würde, wollte man die Geschwindigkeit des durch

<sup>1)</sup> Dieser Satz ist unter andern von Wichtigkeit bei den sogenannten Henschel-Jonval'schen Turbinen (Achsal-Turbinen).

*EF* ausfließenden Wassers so berechnen, als entspräche ihr die Druckhöhe  $l + \lambda$ .

Zusatz 2. Auf das hervorgehobene, unter bestimmten Umständen und Verhältnissen eintretende Saugen einer verticalen Röhre, durch welche Wasser herabfließt, gründet sich unter Andern das sogenannte Wassertrommelgebläse (Trombe)<sup>1)</sup>, Fig. 72.

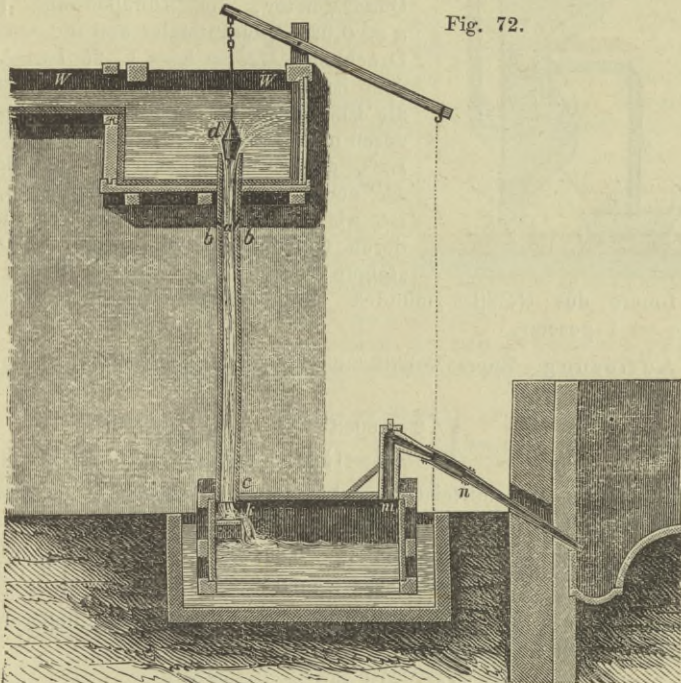
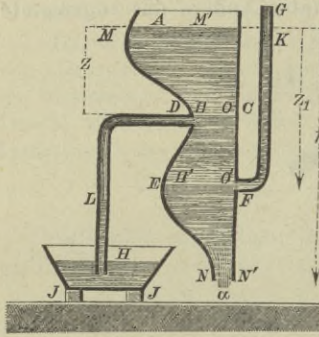


Fig. 72.

In beistehender Figur ist *WW* der Spiegel des zuströmenden Wassers, welches nach Erhebung des Propfen *d* in der Röhre *bc* herabstürzt, dabei einen Strahl bildet, welcher die Röhre, namentlich bei *a*, nicht ausfüllt und folglich durch die in die Röhrrand gebohrten Löcher *bb* äußere Luft ansaugt. Unter der Mündung schlägt der Wasserstrahl auf eine feste Platte *k*, wodurch die Luft vom Wasser noch mehr getrennt und übrigens abgesperrt zum Ausflusse nach *m* in die Düse *n* genöthigt wird, während das Wasser am Boden der ganzen Anordnung abfließen kann.

<sup>1)</sup> Ausführlicheres über diese Gebläse (Tromben) giebt Chaptal in Gilb. Annalen, Bd. 3, S. 132. D'Aubuisson in den Annales des Mines von 1828, Nr. 3 und 4. Ueber die Wirksamkeit des Wassertrommelgebläses handelt besonders Magnus im 80. Bande (1850), S. 32, von Poggend. Annalen. Auf dieselbe Weise wie das Wassertrommelgebläse wirkt auch die sogenannte Saugstrahlpumpe von Thomson (Weisb. Ing. Mech., Bd. 3, S. 1188), und die von Nagel (Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. X, 1866, S. 126). Ferner ist von ähnlicher Wirkung die Giffard'sche Dampfstrahlpumpe (Zeuner, Grundzüge der mech. Wärmetheorie, 2. Auflage, S. 391) etc. etc.

Beispiel. Es sind die Pressungen oder hydraulischen Druckhöhen in den Schichten  $DC$ , Fig. 73, vom Inhalte  $O = 0,03$  Quadratmeter, in der Entfernung  $AO = Z = 0^m,4$  vom Oberwasserspiegel und in Fig. 73.



$EF = O_1 = 0,15$  Quadratmeter um  $AO' = Z_1 = 0^m,90$  Entfernung anzugeben, wenn der Querschnitt  $MM' = A = 0,2$  Quadratmeter, die Abflußöffnung ( $NN'$ )  $a = 0,025$  Quadratmeter und die constante Druckhöhe  $MN = h = 1^m,25$  ist. Außerdem ist anzugeben, auf welche Höhe sich die Flüssigkeit in einer Röhre  $FG$  erhebt, deren oberes Ende mit der atmosphärischen Luft, das untere  $F$  aber mit der Schicht  $EF$  communicirt, sowie endlich anzugeben ist, wie hoch das Wasser aus einem besonderen Gefäße  $J$  in einer Röhre  $HD$  aufsteigen wird, welche an der Stelle  $D$  in das Innere des Gefäßes mündet. Der Geschwindigkeitscoefficient  $\psi$  werde  $= 1$  gesetzt.

Auflösung. Zuerst erhält man für die Geschwindigkeit  $= v$  der Bodenmündung  $NN'$ :

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8088 \cdot 1,25}{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2}} = 4^m,991.$$

Sodann ergibt sich mittelst Formel (4) die hydraulische Druckhöhe im Innern von  $DC$ :

$$\frac{\Pi}{\gamma} = 0,4 + 10,333 - \frac{(4,9911)^2}{2 \cdot 9,8088} \left[ \left(\frac{0,025}{0,030}\right)^2 - \left(\frac{0,025}{0,200}\right)^2 \right] 9^m,910.$$

Daher die Druckdifferenz, weil  $10,333$  dem Drucke der äußeren Luft an derselben Stelle entspricht:

$$9^m,910 - 10,333 = -0^m,423.$$

Der resultirende Druck in  $DC$  ist folglich negativ, so daß  $0^m,423$  zugleich die Höhe  $HL$  ist, bis zu welcher sich das Wasser in der Röhre  $HD$  erhebt.

Für die hydraulische Druckhöhe in der Schicht  $EF$  ergibt sich eben so:

$$\frac{\Pi}{\gamma} = 0,9 + 10,333 - \frac{(4,9911)^2}{2 \cdot 9,8088} \left[ \left(\frac{0,025}{0,150}\right)^2 - \left(\frac{0,025}{0,200}\right)^2 \right] = 11^m,221.$$

Dem resultirenden Drucke an der Wandstelle  $F$  entspricht folglich die Höhe:

$$11,221 - 10,333 = 0^m,888,$$

welches zugleich diejenige ist, zu welcher das Wasser in der Röhre  $FG$  empor steigt.

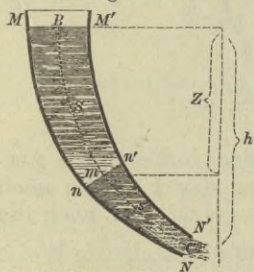
Bei betreffenden Versuchen werden sich, der passiven Widerstände, Reibungen, Krümmungen etc. wegen, die hier berechneten Höhen etwas geringer herausstellen.

§. 80.

**Ausfluß aus Gefäßen mit nicht verticaler Achse, wenn der Beharrungs-  
zustand noch nicht eingetreten ist.**

Hierzu denken wir uns das Gefäß als eine beliebig gekrümmte aber enge Röhre  $MN$ , Fig. 74, damit die Hypothese vom Parallelismus der Schichten noch Anwendung finden, d. h. angenommen werden kann, daß sich die Wassertheilchen in Schichten fortbewegen, welche auf der Röhrenachse normal stehen; alle anderen bisherigen Voraussetzungen mögen unverändert Geltung behalten. In gleicher Weise mögen die Bezeichnungen dieselben bleiben, nur werde für den beliebigen Querschnitt  $nn'$  in der Entfernung  $z$  vom Oberwasserspiegel der Flächeninhalt  $= \omega$ , die Geschwindigkeit der Wassertheilchen daselbst  $= u$ , die ganze Achsenlänge der Röhre  $BC$  mit  $S$ , und die eines beliebigen Theiles wie  $mC$  aber  $= s$  gesetzt.

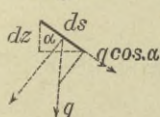
Fig. 74.



Das Gewicht  $q$  einer unendlich dünnen Schicht  $nn'$  von der Länge  $ds$  in der Achsenrichtung gemessen, ist zunächst:

$$q = \gamma \omega ds, \text{ so wie deren Masse: } m = \frac{\gamma \omega ds}{g}.$$

Fig. 75.



Sodann aber ergibt sich für die in der Achsenrichtung der Röhre wirkende Kraft, wenn  $\alpha$  den Winkel bezeichnet, welchen das Element  $ds$  mit der Verticalen einschließt und mit Bezug auf Fig. 75:

$$q \cos \alpha = \gamma \omega ds \cdot \cos \alpha = \gamma \omega ds \frac{dz}{ds} = \gamma \omega dz.$$

Ferner ist die wirklich zu Stande gekommene Acceleration:  $\frac{du}{dt}$  und die ihr entsprechende Bewegungsgröße:

$$m \frac{du}{dt} = \frac{\gamma \omega ds}{g} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Sonach ist die im Sinne des d'Alembert'schen Principes verlorene Bewegungsgröße der betreffenden Schicht:

$$\frac{\gamma}{g} \omega \left( g dz - \frac{du}{dt} ds \right),$$

so wie die verlorene mechanische Arbeit, wenn man den letzteren Werth mit dem in der Zeit  $dt$  zurückgelegten Wege  $u dt$  multiplicirt:

$$\frac{\gamma}{g} \omega \left( g dz - \frac{du}{dt} ds \right) u dt.$$

Endlich ergibt sich hiernach die in der ganzen Ausdehnung  $S$  der Röhre verlorene mechanische Arbeit, wenn noch beachtet wird, daß  $AV dt = \omega u dt = \omega v dt$  constante Producte sind:

$$(1) \quad \frac{\gamma}{g} \omega u dt \left( \int_0^h g dz - \int_0^S \frac{du}{dt} ds \right).$$

Die gleichzeitigen Arbeiten, welche den Pressungen  $P$  und  $p$  entsprechen, sind:

$$\Sigma \omega \Pi u dt = \omega u dt (P - p),$$

weshalb überhaupt statt (1) entsprechend dem angeführten Principe erhalten wird:

$$0 = \omega u dt (P - p) + \frac{\gamma}{g} \omega u dt \left( \int_0^h g dz - \int_0^s \frac{du}{dt} ds \right), \text{ oder}$$

$$(2) \quad 0 = P - p + \gamma h - \frac{\gamma}{g} \int_0^s \frac{du}{dt} ds.$$

Es bleibt zur vollständigen Auflösung der vorliegenden Aufgabe, nämlich die Ausflußgeschwindigkeit für den Fall des noch nicht eingetretenen Beharrungszustandes anzugeben, nur noch die nähere Bestimmung von  $\frac{du}{dt} ds$  übrig, was auf nachstehende Weise geschehen kann.

Man beachte, daß aus  $u = \frac{av}{\omega}$ , wo  $v$  und  $\omega$  als von einander unabhängige Variablen zu betrachten sind, durch Differenziation erhalten wird:

$$du = \left( \frac{du}{dv} \right) dv + \left( \frac{du}{d\omega} \right) d\omega, \text{ oder}$$

$$\text{weil } \frac{du}{dv} = \frac{a}{\omega}, \quad \frac{du}{d\omega} = -\frac{av}{\omega^2} \text{ ist, auch}$$

$$du = \frac{a}{\omega} dv - av \frac{d\omega}{\omega^2}.$$

Es ist aber  $v$  eine Function von  $t$ ,  $\omega$  eine Function von  $s$  und  $s$  wieder eine Function von  $t$ , folglich auch

$$du = \frac{a}{\omega} \frac{dv}{dt} dt - \frac{av}{\omega^2} \frac{d\omega}{ds} \frac{ds}{dt} dt, \text{ oder}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{\omega} \frac{dv}{dt} - \frac{av}{\omega^2} \frac{d\omega}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Beachtet man nun noch, daß  $\frac{ds}{dt} = u = \frac{av}{\omega}$  ist, so wird letztere Gleichung zu:

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{\omega} \frac{dv}{dt} - \frac{a^2 v^2}{\omega^3} \frac{d\omega}{ds}, \text{ oder}$$

$$\frac{du}{dt} ds = a \frac{dv}{dt} \frac{ds}{\omega} - a^2 v^2 \frac{d\omega}{\omega^3}.$$

Ueberhaupt erhält man nunmehr aus (2):

$$0 = (P - p) + \gamma h - \frac{\gamma}{g} a \frac{dv}{dt} \int_0^s \frac{ds}{\omega} + \frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \int_A^a \frac{d\omega}{\omega^3}, \text{ d. i.}$$



wenn die Integration im letzten Gliede ausgeführt und das von der

Gefäßform abhängige Integral  $\int_0^s \frac{ds}{\omega}$  mit  $N$  bezeichnet wird:

$$0 = (P - p) + \gamma h - \frac{\gamma a}{g} \frac{dv}{dt} N + \frac{\gamma}{g} \frac{a^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{A^2} - \frac{1}{a^2} \right),$$

oder

$$(3) \quad 0 = 2g \left[ \frac{P-p}{\gamma} + h \right] - 2aN \frac{dv}{dt} - v^2 \left( 1 - \frac{a^2}{A^2} \right).$$

Zur Abkürzung werde jetzt

$$2g \left[ \frac{P-p}{\gamma} + h \right] = D,$$

$$2aN = B \text{ und } 1 - \frac{a^2}{A^2} = C \text{ gesetzt,}$$

woraus folgt:

$$0 = D - B \frac{dv}{dt} - Cv^2$$

und weiter sich ergibt

$$dt = \frac{B \cdot dv}{D - Cv^2}.$$

Durch Integration findet man ferner: <sup>1)</sup>

$$t = \frac{B}{2\sqrt{DC}} \operatorname{Lgnt} \frac{\sqrt{D} + v\sqrt{C}}{\sqrt{D} - v\sqrt{C}}$$

und hieraus endlich:

$$v = \sqrt{\frac{D}{C}} \frac{-1 + e^{\frac{2\sqrt{DC}}{B} t}}{1 + e^{\frac{2\sqrt{DC}}{B} t}}.$$

Uebersteigt, wie gewöhnlich in der Praxis, der Oberflächenquerschnitt des Wassers den Mündungsquerschnitt sehr bedeutend, so wächst  $v$  rasch mit der Zeit  $t$ . Nach verhältnißmäßig kurzer Zeit werden daher die Potenzen von  $e$  so groß, daß man die Einheiten im vorstehenden Werthe von  $v$  gegen die Potenzen von  $e$  vernachlässigen, also schreiben kann

$$v = \sqrt{\frac{D}{C}}, \text{ d. i.}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g \left( h + \frac{P-p}{\gamma} \right)}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

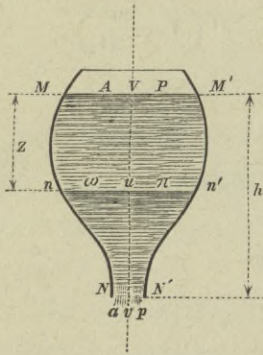
---

<sup>1)</sup>  $\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \operatorname{Lgnt} \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + \text{const.}$

Derselbe Werth wäre sofort erhalten worden, hätte man in (3)  $\frac{dv}{dt} = \text{Null}$ , also den Beharrungszustand als bereits eingetreten vorausgesetzt, was ganz der Ableitung desselben Ausdruckes in §. 77 entspricht.

Zusatz. Um eine Anwendung von den Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen (S. 193) zu machen, werde letzterer Ausdruck nochmals, jedoch für den einfacheren Fall, Fig. 76, abgeleitet, wo die Achse des Gefäßes als vertical gerichtet vorausgesetzt wurde. Man erhält dann zunächst ohne Weiteres, wenn die Richtung der Schwerkraft als mit der Z Achse zusammenfallend angenommen wird und wegen  $Z = g$ :

Fig. 76.



Man erhält dann zunächst ohne Weiteres, wenn die Richtung der Schwerkraft als mit der Z Achse zusammenfallend angenommen wird und wegen  $Z = g$ :

$$\frac{1}{\varrho} \left( \frac{dp}{dz} \right) = g - \left( \frac{dw}{dt} \right) - w \left( \frac{dw}{dz} \right),$$

oder, wenn wir, den Bezeichnungen nebenstehender Figur 76 entsprechend,  $\Pi$  statt  $p$  und  $u$  statt  $w$  schreiben:

$$(4) \quad \frac{1}{\varrho} \left( \frac{d\Pi}{dz} \right) = g - \left( \frac{du}{dt} \right) - u \left( \frac{du}{dz} \right).$$

Dann ist aber auch  $u = \frac{av}{\omega}$  und demnach:

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{\omega} \frac{dv}{dt} \quad \text{und} \quad u \left( \frac{du}{dz} \right) = - \frac{a^2 v^2}{\omega^3} \frac{d\omega}{dz}, \quad \text{daher aus (4)}$$

$$\frac{1}{\varrho} \left( \frac{d\Pi}{dz} \right) = g - \frac{a}{\omega} \frac{dv}{dt} + \frac{a^2 v^2}{\omega^3} \frac{d\omega}{dz}.$$

Multipliziert man hier auf beiden Seiten mit  $dz$  und integrirt, so folgt:

$$\Pi = \varrho \left[ gz - a \frac{dv}{dt} \int \frac{dz}{\omega} - \frac{a^2 v^2}{2\omega^2} \right] + C.$$

Setzt man dann sogleich den Fall voraus, welcher am Ende des Paragraphen erwähnt wurde, wofür also  $\frac{dv}{dt} = \text{Null}$  ist, so erhält man:

$$(5) \quad \Pi = \varrho \left[ gz - \frac{a^2 v^2}{2\omega^2} \right] + C.$$

Hiernach ergeben sich aber, mit Bezug auf die Berechnungen unserer Figur und wegen  $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ , die beiden Gleichungen:

$$P = - \frac{\gamma}{g} \frac{a^2 v^2}{2A^2} + C \quad \text{und} \quad p = \frac{\gamma}{g} \left( gh - \frac{v^2}{2} \right) + C.$$

Demnach

$$p - P = \gamma h - \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{g} \frac{a^2 v^2}{2A^2},$$

d. i. schließlich wieder:

$$v = \sqrt{\frac{2g \left( h + \frac{P-p}{\gamma} \right)}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

## §. 81.

## Wassermenge.

Um die aus einer horizontalen Gefäßmündung während einer Zeit  $t$  fließende Wassermenge zu berechnen, denkt man sich den Weg  $vt$ , welchen ein Wasserelement während dieser Zeit durchlaufen würde, als Höhe eines auf der Gefäßmündung normal stehenden Prismas, dessen cubischer Inhalt sonach die fragliche Wassermenge ausdrücken wird.

Bezeichnet demnach  $Q$  die pro Secunde ausfließende Wassermenge in Cubikeinheiten, so ist

$$Qt = avt \\ Q = av, \text{ oder}$$

$$\text{I. } Q = \psi a \sqrt{\frac{2g \left( h + \frac{P-p}{\gamma} \right)}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}$$

Ist  $P = p$  und  $\frac{a}{A} < \frac{1}{25}$ , so darf man setzen:

$$\text{II. } Q = \psi a \sqrt{2gh}$$

Zusatz 1. Unter Beibehaltung von  $\psi$  und  $a$  erhält man für eine andere Wassermenge  $Q'$ , wenn  $h'$  die entsprechende Druckhöhe ist, die Proportion:

$$Q : Q' = \sqrt{h} : \sqrt{h'} = v : v'$$

Zur Vergleichung dieses Satzes mit der Erfahrung können Versuche Bossut's<sup>1)</sup> dienen, der bei nachbemerkten Druckhöhen aus Kreismündungen von 1 Zoll Durchmesser pro Minute an Wassermengen in pariser Cubikzollen beobachtete:

Druckhöhen.	Wassermengen.
1 Fuß	2722
2 "	3846
3 "	4710
4 "	5436

Nach vorstehender Proportion müßte daher sein:

$$2722 : 3846 = \sqrt{1} : \sqrt{2}$$

$$3846 : 4710 = \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

$$4710 : 5436 = \sqrt{3} : \sqrt{4}$$

$$2722 : 5436 = \sqrt{1} : \sqrt{4}$$

etc.

etc.

was genau genug der Fall ist.

<sup>1)</sup> Traité d'hydrodynamique §. 513.

## §. 82.

**Contraction des ausfließenden Wasserstrahles.**

Aus dem, was in der geschichtlichen Einleitung Seite 188 und Seite 198 hinsichtlich der hier in der Ueberschrift genannten Erscheinung aus Gefäßmündungen fließender Wassermassen erörtert wurde, erhellt bereits die Thatsache, daß vorstehende Rechnungsergebnisse viel größere Werthe liefern, als die wirklich beobachteten Ausflußmengen, wenn auch das Verhältniß dieser Wassermassen mit der theoretischen Bestimmung nicht im Widerspruche steht, wie vorher gezeigt wurde. Die Ursache der Contraction der Wasserstrahlen liegt hauptsächlich darin, daß nahe zu der Mündung (noch innerhalb des Gefäßes) der Parallelismus der Schichten gänzlich aufhört, weil besonders die seitwärts der Mündung zuströmenden Wassertheilchen eine Ablenkung des Strahles von der ursprünglichen Richtung erzeugen und hierdurch, so wie durch (wahrscheinlich) noch andere Ursachen (Reibung der Wassertheilchen unter einander und Molecularwirkungen) veranlaßt, eine Zusammenziehung des Strahles (*contractio venae*) bewirken, wodurch die Mündung nur zum Theil oder gar nicht vom durchfließenden Wasser ausgefüllt wird. Etwas vor der Mündung, außerhalb des Gefäßes, findet die kleinste Zusammenziehung (wenigstens meistens) statt und daselbst ist auch der Parallelismus der Schichten wiederhergestellt, weshalb man diesen Querschnitt an die Stelle des Mündungsquerschnittes in die Formeln einführt. Der echte Bruch  $= \alpha$ , welcher dabei angiebt, um wie viel der Strahlquerschnitt in der kleinsten Zusammenziehung kleiner als der Mündungsquerschnitt ist, oder, womit die letztere Mündung multiplicirt werden muß, um den Strahlquerschnitt zu erhalten, wird (Seite 198) der *Contractioncoefficient* genannt.

Man erhält daher für die wirkliche (effective) aus horizontaler Bodenmündung vom Querschnitt  $a$  pro Secunde fließende Wassermasse  $= Q$ :

$$Q = \psi a v.$$

Wie bereits in der geschichtlichen Einleitung (Seite 198) erörtert wurde, setzt man:

$$\mu = \psi \alpha,$$

welche Gleichung dem Bidone'schen Satze entspricht, daß der Ausflußcoefficient das Product aus Geschwindigkeits- und Contractioncoefficient ist.

Zusatz 1. Im Allgemeinen ist die Contraction ausfließender Wasserstrahlen von sehr vielen Umständen abhängig, die leider lange noch nicht so vollständig bekannt sind, als dies die technische (practische) Hydrodynamik wünschenswerth macht. Das Hauptsächlichste, was sich bis jetzt<sup>1)</sup> hierüber (als auch für die Praxis wichtig) sagen läßt, ist folgendes:

<sup>1)</sup> Die beachtenswerthesten Abhandlungen, Werke etc., welche Bemühungen enthalten, die Contractionen auf mathematischem Wege zu erörtern, beziehungsweise die betreffenden Coefficienten zu berechnen, sind folgende: Bidone, *Mémoire sur la Détermination théorique de la section contractée*

a. Zunächst hängt die Contraction von der Größe der Druckhöhe und der Mündungsfläche ab (ob auch letztere einspringende Winkel besitzt oder nicht) und wird geringer (die Ausflußmenge größer), je kleiner die Mündungen und je niedriger die Druckhöhen sind.

b. Ferner ist die Contraction davon abhängig, ob die Mündung unmittelbar in der Gefäßwand angebracht ist<sup>1)</sup>, oder ob dieselbe durch kurze (cylindrische, conische oder conoidische) innere oder äußere Ansatzröhren gebildet wird. Am kleinsten wird die Contraction, wenn ein derartiges außerhalb der Wandmündung angesetztes Rohr die Gestalt des zusammengezogenen Wasserstrahles hat (siehe nächstfolgenden Zusatz), dagegen wird die Contraction am größten, wenn dies kurze Ansatzrohr cylindrisch, nach Innen, wie Fig. 67 (Seite 197), gerichtet ist und der Ausfluß so bewirkt wird, daß das Wasser die Röhre niemals ausfüllt.

c. Ist die Contraction von der Fläche abhängig, worin sich die Mündung befindet, und zwar wird sie geringer, wenn die Fläche nach Innen zu concav, größer, wenn sie convex ist.

d. Ferner hängt die Contraction davon ab, ob die Mündung im Gefäße bis an eine oder mehrere Seitenwände reicht, oder inwendig mit Blech etc. eingefast (armirt) ist. Sodann ist die Contraction an den betreffenden Mündungsstellen aufgehoben und man nennt die ganze Erscheinung (Seite 200) die partielle Contraction, im Gegensatze zu der, welche an allen Stellen der Mündung statt hat und deshalb die vollständige Contraction genannt wird. Unter allen Umständen wird die Ausflußmenge vergrößert, sobald eine partielle Contraction auftritt.

e. Endlich ist die Contraction noch davon abhängig, ob das Wasser mit großer oder kleiner Geschwindigkeit vor der Ausflußmündung ankommt, was sich im Allgemeinen wiederum darnach richtet, ob der Mündungsinhalt in Beziehung auf die Gefäßwand oder auf dem Querschnitt des Gefäßes beträchtlich oder gering ist.

Befindet sich das Wasser vor der Ausflußmündung beinahe in Ruhe, so heißt die dann stattfindende Contraction (Seite 205) eine vollkommene, während sie unvollkommen genannt wird, wenn das Wasser mit beträchtlicher Geschwindigkeit vor der Mündung anlangt. Unter sonst gleichen Umständen wird durch das Auftreten der unvollkommenen Contraction die Ausflußmenge vergrößert.

---

des veines liquides. Memoiren der Turiner Academie, Bd. 34 (1830). — Gerstner, Handbuch der Mechanik, Bd. II (1833), S. 142 (§. 104, Anmerkung). — Navier, Résumé des leçons sur l'application mécanique. Seconde partie. Nr. 53. — Buff, Poggend. Annalen der Physik und Chemie. Bd. 46 (1839), S. 227. — Feilitsch, Ueber den Ausfluß der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünner Wand etc. etc. Poggend. Annalen etc., Bd. 63 (1844), S. 1 und S. 215. — Bayer, Theorie der Contraction des Wassers beim Ausflusse durch Oeffnungen in ebener, dünner Wand. Crelle's Journal f. d. Baukunst. 1847, S. 131. — Scheffler, Die Principien der Hydrostatik und Hydraulik. Erster Band (1847), S. 224, §. 82 ff. — Boussinesq, „Essai sur la théorie des eaux courantes“. Paris 1877, und zwar, von §. 203 ab, unter der Ueberschrift: „Équations différentielles dont doit dépendre la forme de la veine“.

<sup>1)</sup> Ob diese Wand selbst dünn oder dick ist.

f. Schließlich hängt die Contraction noch davon ab, ob der Strahl nach Verlassen der Mündung ungehindert in die freie Luft tritt, oder ob sich vor der Mündung, und zwar unterhalb oder seitwärts derselben, Platten oder Flächen finden, an welche sich das Wasser zum Theil hängen und in seiner Bewegung verzögert werden kann, wie solches namentlich bei den Schützenöffnungen der Wasserräder der Fall ist.

Zusatz 2. Um zunächst in Bezug auf die eben bemerkten wichtigen Fragen einige speciellere Antworten beim Ausflusse aus einer kreisförmigen und aus einer quadratischen horizontalen Bodenmündung in dünner Wand<sup>1)</sup>, bei vollständiger und vollkommener Contraction, zu liefern, theilen wir folgende Versuche Bossut's<sup>2)</sup> mit.

Die Mündung war in einer  $\frac{1}{2}$  Linien dicken Platte angebracht und die constante Druckhöhe betrug 11 Fuß 8 Zoll 10 Linien pariser Maß (die Acceleration  $g = 30,1958$  pariser Fuß):

Durchmesser des Kreises oder Größe der Quadratseite in Linien = $d$ .	Kleinster Durchmesser = $\delta$ des zusammengezogenen Strahles in Linien.	Abstand = $e$ der kleinsten Zusammenziehung von der Mündung in Linien.	$\frac{\delta}{d}$	$\frac{e}{d}$	$\mu$	$\alpha$	$\psi$
Kreis { 12	9,8	6—7	0,816	0,542	0,6164	0,666	0,926
24	19,5	12—13	0,812	0,521	0,6179	0,659	0,937
Quadrat = 12	9,8	7	0,816	0,583	0,6157	0,6658	0,924

Aus Versuchen und directen Strahlungsmessungen, beim Ausflusse durch horizontale, kreisförmige Bodenöffnungen, welche Michelotti der Sohn<sup>3)</sup> anstellte, läßt sich eine ähnliche Zusammenstellung machen, die wir hier (des Vergleiches wegen) noch folgen lassen:

Druckhöhe in Pariser Zollen.	Mündungsdurchmesser = $\delta$ in Linien.	Kleinste Strahldicke = $\delta$ in Linien.	Abstand = $e$ der kleinsten Zusammenziehung von der Mündung in Linien.	$\frac{\delta}{d}$	$\frac{e}{d}$	$\mu$
77,50	72,0	56,850	28,45	0,789	0,395	0,619
135,25	72,0	56,756	28,35	0,788	0,394	0,618
82,73	36,0	28,285	14,15	0,785	0,393	0,612
140,87	36,0	28,185	13,85	0,783	0,385	0,611

Als Mittelwerth für Annäherungsrechnungen könnte man hiernach für Oeffnungen in dünner Wand, den Contractionscoefficienten

<sup>1)</sup> Ueber die Contractionserscheinungen beim Ausflusse des Wassers durch cylindrische, prismatische, conische und conoidische Ansätze, wird später ausführlich berichtet und gehandelt.

<sup>2)</sup> Traité d'hydraulique. Tome second, §. 462, §. 487 und §. 488.

<sup>3)</sup> Hydraulische Versuche. Deutsche Ausgabe, S. 244.

$$\alpha = 0,666 \dots = \frac{2}{3},$$

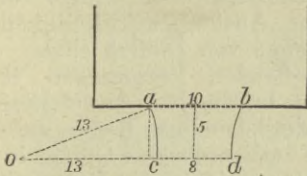
den Ausflußcoefficienten  $\mu = 0,616$  und

den Geschwindigkeitscoefficienten  $\psi = \frac{\mu}{\alpha} = 0,925$

in Rechnung bringen.

Annäherungsweise und für viele practische Fälle hinreichend genau läßt sich auch nach den Bossut'schen Versuchen die Form des zusammengezogenen Strahles dadurch bestimmen,

Fig. 77.



daß man das Verhältniß der Mündung zur kleinsten Strahldicke, zur Entfernung der letzteren, wie  $d : \delta : e = 10 : 8 : 5$  setzt, wonach sich auch der Krümmungshalbmesser  $oa = oc$  der Begrenzungskurve  $ac$  des Conoides  $abcd$  zu 13 ergibt, wenn man anders die Curve  $ac$  als einen Kreisbogen betrachtet.

Die Michelotti'schen Werthe liefern das Verhältniß

$$d : \delta : e = 100 : 79 : 39.$$

Zusatz 3. Aus dem Vorstehenden ergibt sich überdies noch der höchst wichtige Satz, daß in allen Fällen, wo man eine Contraction des Wasserstrahles zu erwarten hat, die Fläche der Mündung  $a$ , durch welche das Wasser läuft, durch den Querschnitt  $\alpha a$  der größten Zusammenziehung in den betreffenden Formeln ersetzt werden muß.

Aus den Gleichungen für  $v$ , S. 210 und 3, §. 79, wird sonach:

$$v = \psi \sqrt{\frac{2g \left( h + \frac{P-p}{\gamma} \right)}{1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}}} \quad \text{und}$$

$$\frac{\Pi}{\gamma} = \frac{P}{\gamma} + z - \left( \frac{\alpha^2 a^2}{O^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2} \right).$$

Für die pro Secunde aus der Mündung vom Querschnitte  $a$  wirklich ausfließende Wassermenge erhält man endlich:

$$Q = \psi \alpha a v = \mu a v = \mu a \sqrt{\frac{2g \left( h + \frac{P-p}{\gamma} \right)}{1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}}}.$$

Beispiel. Welche Wassermenge fließt durch eine kreisförmige Bodenöffnung in dünner Wand bei vollkommener und vollständiger Contraction, wenn die constante Druckhöhe  $h = 4^m,0$ , der Mündungsquerschnitt  $a = 0 \square^m,02$ , der Querschnitt des horizontalen Oberwasserspiegels  $A = 0 \square^m,80$  beträgt, der Contractionscoefficient  $\alpha = 0,64$  und der Ausflußcoefficient  $\mu = 0,62$ , endlich der Druck  $P$  gegen den Oberwasserspiegel gleich dem  $p$  gegen die Mündung gesetzt werden kann.

Auflösung. Da  $\sqrt{2g} = 4,4292$ ,  $\sqrt{2gh} = 2 \cdot 4,4292 = 8^m,8584$ ,

ferner  $\left( \frac{\alpha a}{A} \right)^2 = 0,000256$ , so ergibt sich

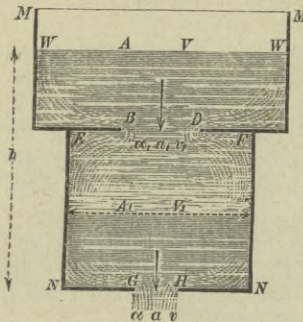
$$v = 8^m,86 \quad \text{und}$$

$$Q = 0,62 \cdot 0,02 \cdot 8,86 = 0,1099 \text{ Cubikmeter pro Secunde.}$$

## §. 83.

## Verengungen und Erweiterungen im Innern der Gefäße.

Fig. 78.



Kommen im Innern eines Gefäßes, aus welchem Wasser strömt, dünne Scheidewände, wie in Fig. 78 vor, so treten plötzliche Geschwindigkeitsänderungen und somit Verluste an lebendiger Kraft ein, welche mehr oder weniger auf die Größe der Ausflußgeschwindigkeit und Wassermenge von Einfluß sind.

Die betreffenden Rechnungen in solchen Fällen haben, bei Anwendung des Principes der lebendigen Kräfte, ganz einfach auf die vorkommenden Geschwindigkeitsverluste (nach dem Vorgange

Borda's, S. 197 und nach dem Carnot'schen Principe) Rücksicht zu nehmen, sind aber sonst den vorhergehenden ganz gleich zu führen.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen, sei jetzt  $\alpha_1$  der Contractioncoefficient für die Mündung  $BD$ ,  $\alpha_1$  der Querschnitt der letzteren und  $v_1$  die Geschwindigkeit daselbst. Das Gefäß  $EN$  habe überall den Querschnitt  $A_1$  und die Schicht  $EF$  in demselben besitze die Geschwindigkeit  $= V_1$ . Die Pressungen in  $A$  und  $a$  mögen gleich groß sein.

Zuerst werde sodann bemerkt, daß hier

$$AV = \alpha_1 a_1 v_1 = A_1 V_1 = \alpha a v, \text{ oder}$$

$$v_1 = \frac{\alpha a}{\alpha_1 a_1} v \text{ und } V_1 = \frac{\alpha a v}{A_1} \text{ ist.}$$

Wegen des plötzlichen Ueberganges der Bewegung aus dem Querschnitt  $BD$  in den Querschnitt  $EF$  entsteht ein Geschwindigkeitsverlust:

$$v_1 - V_1 = \frac{\alpha a}{\alpha_1 a_1} v - \frac{\alpha a}{A_1} v$$

und daher ein Verlust an lebendiger Kraft:

$$\frac{m}{2} (v_1 - V_1)^2 = \frac{m v^2}{2} \left( \frac{1}{\alpha_1^2 a_1^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)^2 \alpha^2 a^2.$$

So wie nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$\frac{1}{2} m (v^2 - V^2) + \frac{1}{2} m v^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1} \right)^2 \alpha^2 a^2 = gmh, \text{ oder}$$

$$v^2 \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2} \right) + \alpha^2 a^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1} \right)^2 \right\} = 2gh,$$

so wie

$$\text{I. } v = \sqrt{\frac{2gh}{\left( 1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2} \right) + \alpha^2 a^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 a_1} - \frac{1}{A_1} \right)^2}}.$$



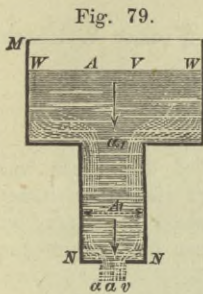
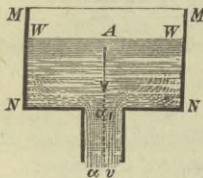


Fig. 80.



Für den Fall, daß das Gefäß die Form wie Fig. 79 besitzt, also  $\alpha_1 = A_1$  ist, wird aus I:

$$\text{II. } v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2}\right) + \frac{\alpha^2 a^2}{A_1^2} \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}}.$$

Nimmt endlich das Gefäß die Gestalt von Fig. 80 an, d. h. wird  $a = A_1$ ,  $\alpha = 1$ , so erhält man:

$$\text{III. } v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}},$$

oder endlich, wenn  $\frac{a}{A}$  recht klein ist, ergibt sich:

$$\text{IV. } v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}},$$

ein bereits (nach S. 197) von Borda für die Ausflußgeschwindigkeit bei kurzen cylindrischen Ansatzröhren gefundener Ausdruck.

Für  $\alpha_1 = 0,64$  wird aus IV:

$$v = 0,872 \sqrt{2gh},$$

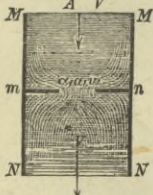
während der Mittelwerth aus den directen Versuchen giebt:

$$v = 0,816 \sqrt{2gh}.$$

Die Ursache der nicht völligen Uebereinstimmung liegt wahrscheinlich an der Nichtbeachtung des Anhängens der flüssigen Massen an den Gefäßwänden, so wie überhaupt an unserer Nichtbekanntschaft mit der wahren Natur der flüssigen Massen.

Spätere Paragraphen werden weitere Erfahrungen und Aufschlüsse über diesen Gegenstand enthalten.

Zusatz 1. Mannigfache technische Anwendungen machen die Betrachtung einiger speciellen Fälle besonders wünschenswerth.



Bei einer Verengung, wie Fig. 81, erhält man, wenn die in der Figur eingeschriebenen Bezeichnungen angenommen werden, einen Verlust an lebendiger Kraft:

$$\frac{1}{2} m (v_1 - V)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{A}{\alpha_1 \alpha_1} - 1\right)^2 V^2.$$

Bezeichnet man mit  $z$  die Widerstandshöhe oder den Druckhöhenverlust, so giebt das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{A}{\alpha_1 \alpha_1} - 1\right)^2 V^2 = gmz, \text{ d. i.}$$

$$z = \left(\frac{A}{\alpha_1 \alpha_1} - 1\right)^2 \frac{V^2}{2g}.$$

Wird hier  $\left(\frac{A}{\alpha_1 \alpha_1} - 1\right)^2 \frac{V^2}{2g} = \eta$  gesetzt und  $\eta$  (nach Weisbach) der Widerstandscoefficient genannt, so erhält man auch

$$z = \eta \frac{V^2}{2g}.$$

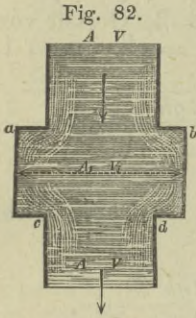


Fig. 82.

Zusatz 2. Hat das Gefäß die Form von Fig. 82 und machen wir von den eingeschriebenen Bezeichnungen Gebrauch, so erhält man für den Verlust an lebendiger Kraft, wegen der Erweiterung bei  $ab$ :

$$\frac{1}{2} m (V - V_1)^2 = \frac{1}{2} m V^2 \left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2.$$

Ferner wegen der Verengung bei  $cd$ , einen Verlust:

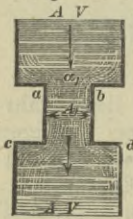
$$\frac{1}{2} m \left(\frac{V}{\alpha} - V\right)^2 = \frac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Und wenn  $z_1$  den Verlust an Druckhöhe oder die sogenannte Widerstandshöhe bezeichnet, nach bekanntem Principe:

$$\frac{1}{2} m V^2 \left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2 + \frac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = gmz_1, \text{ d. i.}$$

$$z_1 = \frac{V^2}{2g} \left\{ \left(1 - \frac{A}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \right\}.$$

Fig. 83.



Zusatz 3. Besitzt endlich das Gefäß die Gestalt von Fig. 83, so wird bei  $ab$  ein Verlust an lebendiger Kraft entstehen, der gleich ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left(\frac{V_1}{\alpha_1} - V_1\right)^2 &= \frac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{A}{A_1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 \left(\frac{A}{A_1}\right)^2; \end{aligned}$$

ferner bei  $cd$  ein Verlust stattfinden, der gleich ist:

$$\frac{1}{2} m (V_1 - V)^2 = \frac{1}{2} m V^2 \left(\frac{A}{A_2} - 1\right)^2.$$

Bezeichnet daher jetzt  $z_2$  die Widerstandshöhe, so folgt, wie vorher:

$$\frac{1}{2} m V^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 \left(\frac{A}{A_1}\right)^2 + \frac{1}{2} m V^2 \left(\frac{A}{A_1} - 1\right)^2 = gmz_2,$$

woraus sich ergibt:

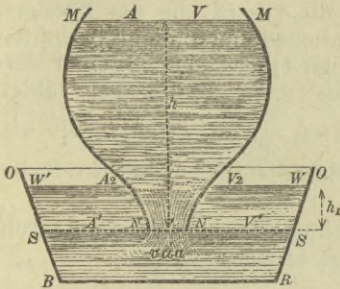
$$z_2 = \frac{V^2}{2g} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 \left(\frac{A}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{A}{A_1} - 1\right)^2 \right\}.$$

## §. 84.

### Ausfluß durch Bodenmündungen unter Wasser.

Es sei  $MN$ , Fig. 84, ein beliebiges Gefäß ohne innere Kanten und Vorsprünge, überall sanfte Uebergänge von einer Wandstelle zur anderen bildend, dessen Mündung  $NN$  auf eine Tiefe  $h_1$  unter dem constanten Wasserspiegel  $OO$  in dem besonderen Gefäße  $RR$  taucht. Unmittelbar bei  $NN$  verbreite sich die ausströmende Flüssigkeit.

Fig. 84.



sigkeit plötzlich in den Querschnitt  $SS$ , während die über  $NN$  vorhandene Druckhöhe  $h$  während des ganzen Ausflusses dieselbe bleibt, endlich die Pressungen auf dem Spiegel bei  $MM$  und  $OO$  einander gleich sind.

Gebraucht man auch hier die in den Figuren eingeschriebenen Bezeichnungen, wobei dieselben Buchstaben die bereits früher festgestellten Bedeutungen haben, so erhält man, ohne zuvörderst Rücksicht

auf plötzliche Geschwindigkeitsänderungen zu nehmen, nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$(1) \quad \frac{1}{2} m (V_2^2 - V^2) = gm (h - h_1).$$

Wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsänderung im Querschnitte  $SS$  hat man nach Carnot's Satze einen Verlust an lebendiger Kraft in Rechnung zu bringen, der

$$\frac{1}{2} m (v - V_1)^2$$

beträgt. Deshalb nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$(2) \quad \frac{1}{2} m (V_2^2 - V^2) + \frac{1}{2} m (v - V_1)^2 = gm (h - h_1).$$

Nun ist aber  $\alpha av = AV = A_1 V_1 = A_2 V_2$ , folglich:

$$V = \frac{\alpha a}{A} v, \quad V_2 = \frac{\alpha a}{A_2} v, \quad V_1 = \frac{\alpha a}{A_1} v$$

und daher aus (2)

$$\frac{1}{2} m v^2 \left( \frac{\alpha^2 a^2}{A_2^2} - \frac{\alpha^2 a^2}{A^2} \right) + \frac{1}{2} m \left( v - \frac{\alpha a}{A_1} v \right)^2 = gm (h - h_1), \text{ d. i.}$$

$$\text{I. } v = \sqrt{\frac{2g (h - h_1)}{\alpha^2 a^2 \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A^2} \right) + \left( 1 - \frac{\alpha a}{A_1} \right)^2}}.$$

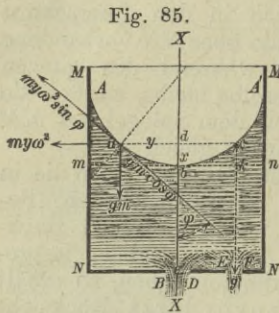
Sind  $A$ ,  $A_1$  und  $A_2$  recht groß und  $a$  recht klein, so folgt genau genug

$$\text{II. } v = \sqrt{2g (h - h_1)}.$$

§. 85.

**Ausfluß aus bewegten Gefäßen.**

Es sei  $MN$ , Fig. 85, ein beliebiges Gefäß, welches sich in einer gleichförmigen Drehbewegung um die Verticalachse  $XX$  und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  befindet. Im Boden dieses Gefäßes sind sehr kleine Oeffnungen  $BD$  und  $EF$  angebracht, durch welche Wasser strömt, und zwar in der Art, daß die ausgeflossene Wassermenge stets durch einen genau eben so großen Zufluß ersetzt wird, die Druckhöhen über den Mündungen also constant sind, endlich auch der Beharrungszustand des Ausflusses bereits eingetreten ist.



Aus §. 7, Zusatz 3, ist für diesen Fall bekannt, daß die Oberfläche der flüssigen Masse ein Paraboloid und die Durchschnittslinie  $AabcA'$  der Oberfläche mit einer Verticalebene eine gemeine Parabel bildet, deren Parameter  $\frac{2g}{\omega^2}$  ist, wenn  $g$  wie bisher die Acceleration der Schwerkraft bezeichnet<sup>1)</sup>.

Die Gleichung der betreffenden Durchschnittslinie ist sonach:

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2} x$$

und woraus folgt:

$$\frac{(y\omega)^2}{2g} = x.$$

Da nun  $y\omega$  die Umfangsgeschwindigkeit ist, welche ein Punkt  $a$  der Oberfläche besitzt, der sich in einer Entfernung  $= y$  von der Drehachse befindet, so erhält man auch, wenn diese Geschwindigkeit mit  $u$  bezeichnet wird:

$$\frac{u^2}{2g} = x (= \bar{ck}).$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks wird man aber in den Stand gesetzt, anzugeben, um wie viel die Druckhöhen für Ausflußmündungen sich vergrößern, die nicht unmittelbar an der Drehachse angebracht sind.

Bezeichnet man daher die Druckhöhe  $eb$  für die sehr kleine Mündung  $BD$  mit  $h$ , so erhält man für die Druckhöhe einer ebenfalls kleinen Mündung  $EF$ , die um  $eg$  von der Drehachse absteht,

<sup>1)</sup> Der Beweis hierzu läßt sich u. A. auch folgendermaßen führen. Es sei  $a$  ein beliebiger Punkt der gedachten Durchschnittslinie, so wird ein daselbst befindliches Wasserelement  $= m$  mit der Kraft  $gm$  vertical niederwärts, zufolge der Fliehkraft aber auch gleichzeitig mit der Kraft  $my\omega^2$  radial auswärts getrieben, wenn  $y$  die Entfernung des fraglichen Elementes von der Drehachse  $XX'$  bezeichnet. Zerlegt man diese beiden Kräfte in Composanten, welche mit der Tangente des Curvenelementes bei  $a$  zusammenfallen, während andere in die Richtung der Normale zu liegen kommen, und beachtet, daß, für den Gleichgewichtszustand, letztere durch die Cohäsionskraft der Wasseroberfläche aufgehoben werden müssen, erstere sich aber das Gleichgewicht halten, so erhält man für letzteren Fall die Bedingungsgleichung:

$$(1) \quad my\omega \sin \varphi = gm \cos \varphi,$$

sobald  $\varphi$  den Winkel bezeichnet, welche die Tangente bei  $a$  mit der Verticalebene einschließt. Beachtet man nun, daß, wenn  $bd = x$  und  $ad = y$  die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes  $a$  sind,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$  ist, so folgt aus (1)

$$\omega^2 y \operatorname{tg} \varphi = g \quad \text{und} \quad \omega^2 y \frac{dy}{dx} = g, \quad \text{oder} \quad y dy = \frac{g}{\omega^2} dx.$$

Integrirt man den letzteren Ausdruck, so ergibt sich endlich:

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2} x.$$

mittelst des obigen Ausdrucks

$$\overline{cg} = h + \overline{ck} = h + \frac{u^2}{2g},$$

wobei natürlich, wegen  $\overline{cd} = \overline{eg}$ , die Größe  $u$  die Umfangsgeschwindigkeit bezeichnet, welche die Mitte der Mündung  $EF$  bei gleichförmiger Umdrehung des Gefäßes um die Achse  $XX$  besitzt.

Aus der Mündung  $EF$  wird daher das Wasser mit einer Geschwindigkeit  $= v$  fließen, welche ist:

$$I. \quad v = \psi \sqrt{2g \left( h + \frac{u^2}{2g} \right)} = \psi \sqrt{2g \left( h + \frac{y^2 \omega^2}{2g} \right)}.$$

Aus der Mündung  $\overline{BD}$  strömt dagegen das Wasser mit einer Geschwindigkeit:

$$II. \quad v = \psi \sqrt{2gh}.$$

Diese Formeln sind übrigens von der Gefäßform ganz unabhängig und sind selbst dann noch anwendbar, wenn sich unterhalb  $b$ , in der Richtung  $mbn$  eine Wand befindet, welche das Zustandekommen des Paraboloids ganz verhindert, wie dies namentlich bei gewissen horizontalen Wasserrädern der Fall ist.

Beispiel. Welche Wassermenge fließt pro Secunde aus einer Bodenöffnung  $EF$  von  $a = 0^m,01$  Querschnitt in dünner Wand eines cylindrischen Gefäßes  $MN$  angebracht, welches sich gleichförmig um eine Verticalachse dreht, wenn die constante Druckhöhe an der Stelle der Drehachse gemessen  $h = 4^m,0$  beträgt, die Mitte der Oeffnung  $EF$  um  $0^m,2$  von der Drehachse absteht, der Radius des kreisförmigen Querschnittes  $bn = eN = 0^m,3$  ist und endlich pro Minute 80 Umdrehungen erfolgen, der Ausflußcoefficient aber gleich  $0,62$  gesetzt werden kann.

Auflösung. Zuerst ist  $\omega = \frac{2\pi \cdot 80}{60} = 8,3773$ , folglich:

$$u = x\omega = 0,2 \times 8,3773 = 1,67546, \text{ daher:}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,8088 \cdot 4 + (1,67546)^2}$$

$$v = 9^m,01 \text{ und}$$

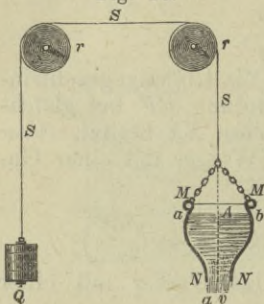
$$Q = 0,62 \cdot 0,01 \cdot 9,01 = 0,05558 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 86.

**Ausfluß aus einem Gefäße mit verticaler Achse, welches mit bestimmter Acceleration auf- (oder abwärts) bewegt wird.**

Es sei  $MN$ , Fig. 86, das bemerkte Gefäß, dessen Masse, einschließlich des darin befindlichen Wassers, am Ende einer Zeit  $t$  gleich  $m$  (also vorerst veränderlich) gesetzt werden mag, ferner sei  $M$  die Masse eines Gewichtes  $Q$ , wodurch eine Bewegung des Gefäßes  $MN$  vertical aufwärts veranlaßt wird, endlich  $V$  die Geschwindigkeit, welche am Ende der Zeit  $t$ , Gefäß wie Gewicht  $Q$  gemeinschaftlich besitzen. Die Masse der Rollen  $rr$ , über welche für den gedachten Zweck die völlig biegsame Schnur  $S$  geleitet ist,

Fig. 86.



werde eben so vernachlässigt, wie die Reibung der Rollzapfen in ihren Lagern.

Am Ende der Zeit  $t$  wohnt daher dem bewegten Systeme eine lebendige Kraft inne, welche gleich ist:

$$\frac{1}{2} (M + m) V^2.$$

Der Zuwachs an lebendiger Kraft innerhalb eines Zeitelementes  $dt$  wird daher betragen:

$$(1) \quad d \left[ (M + m) \frac{V^2}{2} \right] = (M + m) V dV + \frac{1}{2} V^2 dm.$$

Die mechanische Arbeit, welche dem Systeme während derselben Zeit  $dt$  eingepreßt wird, beträgt ferner

$$(2) \quad g (M - m) V dt;$$

daher nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, aus der Vergleichung von (1), und (2)

$$(M + m) V dV + \frac{1}{2} V^2 dm = g (M - m) V dt,$$

woraus gefunden werden kann:

$$(3) \quad (M + m) \frac{dV}{dt} = g (M - m) + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} V.$$

Für die Bewegung des Wassers im Gefäße, bevor der Beharrungszustand eingetreten ist, hat man ferner nach (3), §. 80, für gegenwärtigen Fall:

$$(4) \quad \left( g + \frac{dV}{dt} \right) z - a \frac{dv}{dt} \int_0^z \frac{dz}{\omega} - \frac{v^2}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{A^2} \right) = 0.$$

Aus der Verbindung von (3) mit (4) erhält man leicht  $v$  und somit die Lösung der fraglichen Aufgabe, unter der Voraussetzung, daß die Druckhöhe  $z$  constant ist.

Ist bereits der Beharrungszustand des Wasserflusses eingetreten, so werden auch  $v$  und  $m$  constant, folglich  $dv$  und  $dm$  zu Null und daher aus (3) und (4):

$$(5) \quad \frac{dV}{dt} = g \frac{M - m}{M + m},$$

$$g \left\{ 1 + \frac{M - m}{M + m} \right\} z = \frac{v^2}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{A^2} \right) \text{ und}$$

$$v = \sqrt{2gz \frac{2M}{(M + m) \left( 1 - \frac{a^2}{A^2} \right)}}.$$

Wird das Gefäß mit unveränderlicher Geschwindigkeit, also gleichförmig aufwärts bewegt, so ist  $\frac{dV}{dt} = \text{Null}$  zu setzen, in welchem Falle aus  $v$  wird:

$$v = \sqrt{2gz},$$

d. h. das Wasser strömt mit derselben Geschwindigkeit aus, als befände sich das Gefäß im Zustande der Ruhe. Für den Fall der Abwärtsbewegung des Gefäßes ist die Acceleration  $\frac{dV}{dt}$  negativ in Rechnung zu bringen.

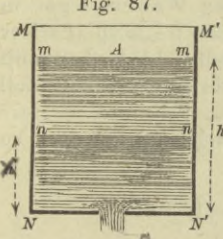
Weiteres über den Ausfluß aus bewegten Gefäßen findet sich in folgenden Werken: Bossut, *Traité d'hydrodynamique* (auch deutsch von Langsdorf). Tome premier. §. 296. — Scheffler, *die Principien der Hydrostatik und Hydraulik*, Bd. I, §. 126. — Grashof, *theoretische Maschinenlehre*. Bd. I (Hydraulik), §. 81.

Zweites Capitel.

**Ausfluß aus horizontalen Bodenöffnungen bei veränderlicher Druckhöhe.**

§. 87.

Es sei *MN*, Fig. 87, ein prismatisches Gefäß vom Querschnitte = *A*, welches von der Bodenmündung, deren Querschnitt = *a* ist, bis zu einer Höhe  $\overline{Nm} = \overline{N_1m_1} = h$ , mit Wasser gefüllt ist und daher das Volumen des letzteren gleich *A* · *h* einschließt.



Man soll die Zeit = *t* finden, nach welcher die anfängliche Druckhöhe auf  $\overline{nN} = \overline{n_1N_1} = x$  herabgesunken ist. Hierzu erhält man sofort die Gleichung:

$$- A dx = \mu a dt \sqrt{2gx}, \text{ also}$$

$$dt = - \frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}, \text{ woraus folgt:}$$

$$t = - \frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \int_h^x dx x^{-\frac{1}{2}}, \text{ d. i.}$$

$$\text{I. } t = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{x}).$$

Für die Zeit = *t*<sub>1</sub> des völligen Leerlaufes, wo *x* = Null, erhält man sonach:

$$\text{II. } t_1 = \frac{2A\sqrt{h}}{\mu a \sqrt{2g}}.$$

Die Zeit *t*<sub>2</sub>, während welcher, unter Voraussetzung einer constanten Druckhöhe = *h*, das Volumen *A* · *h* aus demselben Gefäße geflossen sein würde, läßt sich ohne Weiteres durch die Gleichung finden:

$$\mu a t_2 \sqrt{2gh} = Ah, \text{ woraus folgt:}$$

$$t_2 = \frac{A\sqrt{h}}{\mu a \sqrt{2g}}.$$

Die Zeit des Leerlaufens eines prismatischen Gefäßes ist hiernach genau doppelt so groß als die Zeit, welche erforderlich sein würde, wenn dasselbe Volumen bei constanter Druckhöhe herausfließen sollte.

Anmerkung. Die Formel II. enthält die Voraussetzung, daß der Ausfluß, vom Anfange bis zur völligen Entleerung des Gefäßes keine Störungen durch Wirbel und Einsenkung in der Mitte des niedergehenden Wasserspiegels erfährt, was in der Wirklichkeit nicht der Fall ist. Sobald vielmehr der Wasserspiegel bis zu einer gewissen Tiefe herabgesunken ist, bildet sich über der Mündung ein Trichter, der eine Verminderung der Druckhöhe zur Folge hat und der selbst dann nicht vollständig vermieden werden kann, wenn man auf der Oberfläche der Flüssigkeit, in geeigneter Weise, leichte Körper, z. B. eine Holzscheibe, schwimmen läßt, die sich mit dem Wasserspiegel gleichmäßig senken. Die Uebereinstimmung der Formel II. mit der Beobachtung ist aus diesen Gründen nicht so groß, wie dies bei der Formel I. der Fall ist, sobald die Senkung nicht zu tief herabgegangen ist, wie insbesondere aus nachfolgendem Beispiele und desfalligen Experimenten Bossut's hervorgeht<sup>1)</sup>.

Beispiel 1. In welcher Zeit senkt sich der Wasserspiegel in einem prismatischen Gefäße vom Querschnitte =  $A = 9 \square$  Fuß (Pariser Maaß), um 4 Fuß, wenn die anfängliche Druckhöhe 11 Fuß 8 Zoll beträgt und die Ausflußöffnung in dünner Wand ein Kreis von 2 Zoll Durchmesser ist?

Auflösung. Nimmt man mit Bossut  $\mu = \frac{5}{8} = 0,625$  an, so findet sich nach I:

$$t = \frac{2 \cdot 9}{0,625 \cdot 0,785 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{11,66} - \sqrt{7,66})$$

und wenn (ebenfalls mit Bossut)  $g = 30,1958$  Pariser Fuß gesetzt wird, folgt  $t = 110,59$  Sec. = 1 Minute 50,59 Sec., während die Beobachtung  $t = 1$  Minute 52 Sec. gab.

Diese mit noch anderen Beobachtungen desselben Experimentators stellen wir in folgender Tabelle zusammen, wobei bemerkt werden mag, daß die Uebereinstimmung noch größer gewesen wäre, hätte Bossut  $\mu$  entsprechender angenommen.

Anfängliche Druckhöhe.	Durchmesser der kreisförmigen Mündung.	Senkung des Oberwasserspiegels.	Beobachtete Zeit.	Berechnete Zeit.
11 Fuß 8 Zoll	1 Zoll	4 Fuß	7 Min. 25 $\frac{1}{2}$ Sec.	7 Min. 22,36 S.
—	2 "	— "	1 " 52 "	1 " 50,59 "
—	1 "	9 "	20 " 24 $\frac{1}{2}$ "	20 " 16,0 "
—	2 "	9 "	5 " 6 "	5 " 4,0 "

Beispiel 2. Zur Bestimmung des Ausflußcoefficienten in ebener

<sup>1)</sup> Bossut, *Traité d'hydrodynamique*. Tome second. Nr. 560 und 561.



dünner (Blech-) Wand bei vollständiger und vollkommener Contraction, maß und beobachtete Weisbach<sup>1)</sup> den Querschnitt des betreffenden prismatischen Gefäßes  $A = 4388,7$  Quadratcentimeter, folglich

$$\frac{2A}{\sqrt{2g}} = 1981,7, (\sqrt{2g} = 4,4292);$$

ferner fand derselbe den Durchmesser der kreisförmigen Mündung  $= 3,965$  Centimeter, daher den Inhalt der Mündung:  $12,347$  Quadratcentimeter, die anfängliche Druckhöhe  $h = 0^m,7520$  und am Ende der Beobachtungszeit von  $t = 63,5$  Sekunden, die Druckhöhe  $h_1 = 0,3940$ . Es fragt sich, wie groß sich hiernach  $\mu$  berechnet?

Auflösung. Unsere Formel I. giebt:

$$\mu = \frac{2A (\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{at \sqrt{2g}}, \text{ d. i.}$$

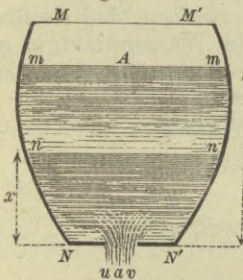
$$\mu = \frac{1981,7}{12,347 \cdot 63,5} (\sqrt{0,7520} - \sqrt{0,3940}),$$

$$\mu = 0,605.$$

§. 88.

Um die Aufgabe des Ausflusses bei veränderlicher Druckhöhe allgemein zu lösen, müßte man mit Hülfe des (§. 80) die Beziehung zwischen der veränderlichen Druckhöhe  $x$  über der Gefäßmündung  $a$ , Fig. 88, und der entsprechenden Ausflußgeschwindigkeit  $v$  für jede beliebige Zeit aufstellen.

Fig. 88.



Wir wählen hierzu den Fall, daß das Gefäß eine verticale Achse, aber veränderlichen Querschnitt hat, so daß, unter Beibehaltung der Bezeichnungen des (§. 80),  $A$  den veränderlichen Flächeninhalt des sinkenden Oberwasserspiegels bezeichnet und aus der Gleichung (3) des gedachten Paragraphen folgt:

$$(1) 0 = 2g \left[ \frac{P-p}{\gamma} + x \right] - 2aN \frac{dv}{dt} - v^2 \left( 1 - \frac{a^2}{A^2} \right).$$

Zu dieser Gleichung kommt noch die sich von selbst verstehende Bedingung:

$$(2) avdt = -Adx.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen  $t$  und setzt überdies  $v = \sqrt{2g\eta}$ , wo  $\eta$  eine veränderliche Druckhöhe bezeichnet, so ergibt sich:

$$(3) 0 = \left[ \frac{P-p}{\gamma} + x \right] dx + \frac{a^2}{A} Nd\eta - \eta \left( 1 - \frac{a^2}{A^2} \right) dx.$$

Die Integration dieser Gleichung ist ohne besondere Einschränkung für die meisten Fälle mit so besonderen Schwierigkeiten verknüpft, daß für unsere Zwecke auf Navier's „Résumé des

<sup>1)</sup> Hydraulische Versuche. Abtheilung I, S. 90.

leçons“ etc., Deuxième Partie, Nr. 42, verwiesen werden muß. Für die meisten unserer practischen Anwendungen kann man in der Regel  $a^2$  so klein gegenüber  $A$  voraussetzen, daß alle mit  $a^2$  multiplicirten Glieder wegzulassen sind und aus (3) erhalten wird

$$\frac{P-p}{\gamma} + x = \eta,$$

oder wenn man zu gleicher Zeit  $P = p$  voraussetzt:

$$x = \eta = \frac{v^2}{2g}, \text{ d. i.}$$

$$(4) \quad v = \sqrt{2gx}.$$

Aus der Verbindung von (2) mit (4) folgt aber sodann, wenn zugleich  $\mu a$  statt  $a$  gesetzt wird:

$$\mu a dt \sqrt{2gx} = -A dx, \text{ folglich:}$$

$$(5) \quad dt = \frac{-A dx}{\mu a \sqrt{2gx}}.$$

Ist  $A$  constant und die anfängliche Druckhöhe  $= h$ , so erhält man für die Zeit der Senkung um  $h - x$ , so daß die Druckhöhe am Ende der Zeit  $t$  zu  $x$  geworden ist, ohne Weiteres:

$$(6) \quad t = -\frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \int_h^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{x}),$$

d. h. denselben Ausdruck, welcher bereits §. 87 gefunden wurde.

Die Gleichung (5) werde nunmehr dahin erweitert, daß sie für den Fall brauchbar ist, wo pro Secunde ein Wasserquantum  $q$  oder  $q dt$  pro Zeit  $dt$  zufließt, welches kleiner oder größer ist, wie die durch die Mündung abfließende Wassermenge.

Da die Geschwindigkeit, womit sich das Wasser an der Oberfläche ersetzt  $\frac{q}{A}$  ist, so erhält man statt (2):

$$\mu a dt \sqrt{2gx + \left(\frac{q}{A}\right)^2} = -A dx + q dt, \text{ sonach}$$

$$dt = \frac{-A dx}{-q + \mu a \sqrt{2gx + \left(\frac{q}{A}\right)^2}}.$$

In den meisten Fällen ist jedoch  $\left(\frac{q}{A}\right)^2$  als klein genug zu vernachlässigen, so daß überhaupt folgt:

$$(7) \quad dt = \frac{-A dx}{-q + \mu a \sqrt{2gx}}.$$

Hierbei ist einleuchtend, daß der Oberwasserspiegel sinkt oder steigt, je nachdem  $q <$  oder  $>$   $\mu a \sqrt{2gx}$  ist. Ebenso versteht sich von selbst, daß bei nicht prismatischen Gefäßen von der Integration

der Gleichungen (5) oder (7) der veränderliche Querschnitt  $A$  als Function von  $x$  ausgedrückt werden muß. Aufgaben der folgenden Paragraphen werden über alle diese Bemerkungen vollständigen Aufschluß geben.

§. 89.

**Aufgabe 1. Wasseruhren.** Ein cylindrisches Gefäß von kreisförmigem Querschnitte, dessen Durchmesser  $D = 1$  Meter, mit senkrechter Achse, ist bis auf  $h = 4$  Meter Höhe mit Wasser gefüllt. Im Boden desselben soll eine kreisförmige Mündung und an den Seiten des Gefäßes oder an einem (leichten) Schwimmstabe eine derartige Scala angebracht werden, daß in entsprechender Weise Stunden und Minuten abgelesen werden können, überhaupt eine sogenannte Wasseruhr (klepsydera) entsteht, welche zwölf Stunden geht<sup>1)</sup>.

Es fragt sich, welche Größe die Ausflußöffnung erhalten muß, und nach welcher Regel die Scala anzufertigen ist.

**Auflösung.** Zuerst liefert die Gleichung II, §. 88, den erforderlichen Werth von  $a = \frac{d^2 \pi}{4}$ , wenn  $d$  den Durchmesser der kreisförmigen Mündung bezeichnet:

$$d = D \sqrt{\frac{2 \sqrt{h}}{\mu t_1 \sqrt{2g}}}$$

Der Aufgabe gemäß ist hier  $D = 1$ ,  $h = 4$  und  $t_1 = 12 \cdot 3600$  (Secunden), daher (wegen  $\sqrt{2g} = 4,43$ ), wenn  $\mu = 0,62$  angenommen wird:

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{0,62 \cdot 12 \cdot 3600 \cdot 4,43}}$$

$d = 5,806$  Millimeter.

Ist, wie vorausgesetzt,  $t_1$  die Zeit, in welcher das Gefäß ganz leer läuft und  $h_1$  die anfängliche Druckhöhe, so erhält man die einer andern Zeit  $t_2$  entsprechende Druckhöhe  $= h_2$ , nach II, §. 88, durch die Proportion:

$$t_1 : t_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}, \text{ also}$$

$$t_2 = t_1 \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Nach letzterer Formel erhält man für die Scala einer Zwölf-Stunden-Uhr:

Zeiten in Stunden.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Höhen vom Gefäßboden aus gerechnet.	4 <sup>m</sup>	3 <sup>m</sup> ,361	2 <sup>m</sup> ,777	2 <sup>m</sup> ,250	1 <sup>m</sup> ,777	1 <sup>m</sup> ,361	1 <sup>m</sup> ,00	0 <sup>m</sup> ,694	0 <sup>m</sup> ,444	0 <sup>m</sup> ,250	0 <sup>m</sup> ,111	0 <sup>m</sup> ,028	0

<sup>1)</sup> Abbildungen derartiger Uhren findet man in Rees' „Cyclopaedia“. Artikel: Horology, Plates Vol. II.

Jedenfalls darf diese Uhr nur so weit ablaufen, daß die bereits §. 87 erwähnte Trichterbildung über der Mündung nicht eintreten kann.

Zusatz. Wäre ein Gefäß anzugeben verlangt worden, dessen Querschnitte Rechtecke von constanter Breite  $= b$ , aber veränderlicher Länge  $= y$  bilden, welches die Eigenschaft besitzt, daß sich beim Ausflusse aus einer kleinen Bodenöffnung  $a$  desselben der Wasserspiegel in gleichen Zeiten um gleich viel senkt, so brauchte man in (5), §. 88, die Ausflußgeschwindigkeit  $\frac{dx}{dt}$  nur constant  $= -\frac{1}{k}$  zu setzen, worauf man erhalten hätte

$$k = \frac{by}{\mu a \sqrt{2gx}}$$

Da jedoch  $A = by$  angenommen wurde, so folgt:

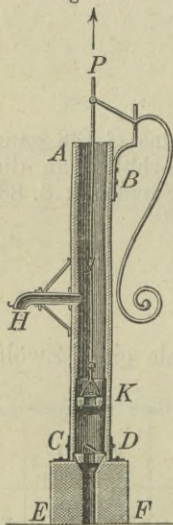
$$k = \frac{A}{\mu a \sqrt{2gx}}, \text{ woraus sich}$$

$$y^2 = \left( \frac{\mu a k \sqrt{2g}}{b} \right)^2 \cdot x$$

ergiebt, d. h. die Querschnitte rechtwinklig zur Seite  $b$  müßten gemeine Parabeln bilden, deren Parameter  $\left( \frac{\mu a k \sqrt{2g}}{b} \right)^2$  ist.

### §. 90.

Fig. 89.



Aufgabe 2. Geschwindigkeit der Kolben bei Wasserpumpen. Es ist die Geschwindigkeit anzugeben, mit welcher der Kolben  $K$  einer Wasserpumpe, Fig. 89, aufwärts gezogen werden darf, damit das Wasser noch im Stande ist, dem aufsteigenden Kolben zu folgen.

Auflösung. Hierzu ist zuvörderst die Zeit  $t$  zu berechnen, innerhalb welcher das Wasser den Raum vom Saugventile  $CD$  bis zum höchsten Kolbenstande durchläuft, was, nach einiger Ueberlegung, mit Hülfe von Gleichung I, §. 87, geschehen kann, sobald man von den passiven Widerständen absieht, welche das aufsteigende Wasser zu überwinden hat.

Bezeichnet daher  $\delta$  den Durchmesser der Ventilöffnung,  $D$  den des Kolbens,  $\lambda$  den Abstand des Saugventils vom Unterwasser,  $l$  den Kolbenhub und  $b$  die Wassersäule ( $= 10^m, 333$ ), welche dem Drucke einer Atmosphäre entspricht, so erhält man für die anfängliche Druckhöhe  $= h$ :

$$h = b - \lambda,$$

ferner für die Druckhöhe am Ende des Hubes:

$$x = b - \lambda - l,$$

sowie

$$\frac{A}{a} = \frac{D^2}{\delta^2}$$

und somit

$$t = \frac{2D^2}{\mu\delta^2 \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{b - \lambda} - \sqrt{b - \lambda - l} \right\}.$$

Sodann ergibt sich die Geschwindigkeit  $u$ , womit das Wasser dem Kolben folgt, zu  $u = \frac{l}{t}$ . Besitzt nun der Kolben selbst eine Geschwindigkeit  $= v$ , so muß offenbar  $u > v$  sein, wenn das aufsteigende Wasser den Raum hinter dem Kolben stets gehörig ausfüllen, also die Pumpe überhaupt gut wirken soll.

Um die vorerwähnten, passiven Widerstände einigermaßen zu corrigiren, kann man mit D'Aubuisson<sup>1)</sup> den kleinsten möglichen Werth von  $\mu$ , nämlich 0,5, in Rechnung bringen<sup>2)</sup>.

Beispiel. Bei einer Pumpe, wo  $l = 1^m,453$  beträgt und pro Minute  $4\frac{1}{2}$  Hübe erfolgen, ist  $v = \frac{2 \cdot 1,453 \cdot 4,5}{60} = 0^m,218$ .

Ist ferner  $D = 0^m,3248$ ,  $d = 0^m,135$ ,  $\lambda = 8^m,0$  und wird  $b = 10^m,0$  gesetzt, so liefert vorstehende Formel:

$$t = 3,508 \text{ Sekunden,}$$

sonach  $u = \frac{1,453}{3,508} = 0^m,414$ , was beinahe noch einmal so groß als  $v$ , folglich ganz entsprechend ist.

### §. 91.

Aufgabe 3. Ausfluß aus pontonförmigen Gefäßen. In dem Boden des pontonförmigen Gefäßes, Fig. 35, befinde sich eine Mündung vom Inhalte  $= a$ , die Länge des Wasserspiegels sei  $= L$ , seine Breite  $= B$  und die anfängliche Druckhöhe  $= h$ . Für die Bodenfläche sei  $l$  die Länge und  $b$  die Breite.

Man soll die Zeit bestimmen, nach welcher so viel Wasser ausgeflossen ist, daß die dann vorhandene Druckhöhe  $= x$  beträgt.

Auflösung. Die Beantwortung der hier gestellten Frage ergibt sich unmittelbar mit Hilfe von Formel (5), §. 88, sobald man  $A$  als Function von  $x$  ausgedrückt hat.

<sup>1)</sup> Traité d'hydraulique, Nr. 447.

<sup>2)</sup> Prof. Fink in seinem empfehlenswerthen Buche „Theorie und Construction der Brunnenanlagen“ etc., 2. Auflage (Berlin 1878), S. 121, findet für (Metermaaße) die Maximal-Kolbengeschwindigkeit  $= u$  der Wasserpumpen

$$u = \sqrt{\frac{2g(b - \lambda - h_2)}{9}} \quad \text{für einfach wirkende Pumpen mit Saugwindkessel,}$$

$$u = \sqrt{\frac{2g(b - \lambda - h_2)}{4,8}} \quad \text{für doppelt wirkende Pumpen mit Saugwindkessel.}$$

Mit  $h_2$  bezeichnet Fink die Druckhöhe, wodurch die Reibungswiderstände gemessen werden.

Nach §. 33, S. 63 erhält man aber für die veränderliche Länge  $\alpha$  der Wasseroberfläche im Abstände  $x$  vom Boden

$$\alpha = l + \frac{x(L-l)}{h},$$

so wie für die betreffende Breite  $= \beta$ :

$$\beta = b + \frac{x(B-b)}{h}, \text{ folglich}$$

$$A = \alpha \cdot \beta = \frac{[lh + x(L-l)][bh + x(B-b)]}{h^2},$$

daher

$$-\mu a dt \cdot h^2 \sqrt{2g} = dx \left\{ \frac{b^2 h^2 + x[(B-b)lh + (L-l)bh] + x^2(L-l)(B-b)}{Vx} \right\},$$

so wie hieraus durch Integration:

$$t = \frac{1}{\mu a h^2 \sqrt{2g}} \left\{ 2b^2 h^2 (h^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) + \frac{2}{3} [(B-b)lh + (L-l)bh] (h^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) + \frac{2}{5} (L-l)(B-b)(h^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}}) \right\}.$$

Für die Zeit der völligen Entleerung, wenn die Trichterbildung über der Mündung vermieden werden könnte, erhielte man, weil dann  $x = \text{Null}$  zu setzen wäre:

$$t = \frac{2}{15} \frac{V\bar{h}}{\mu a \sqrt{2g}} \left\{ 8bl + 2(Bl + bh) + 3BL \right\}.$$

Zusatz 1. Ist das Gefäß ganz unregelmäßig gestaltet, wie dies z. B. bei Teichen oftmals der Fall ist, so hat man sich zur Berechnung der Ausflußzeit einer Annäherungsmethode zu bedienen, wobei am Besten von der Simpson'schen Regel Gebrauch gemacht wird.

Bezeichnet man zu diesem Zwecke die Senkung des Wasserspiegels mit  $h_0 - h_n$ , theilt letzteren Abstand in  $n$  gleiche Theile, bezeichnet die Flächeninhalte der correspondirenden Wasserspiegel respective mit  $A_0, A_1, A_2 \dots A_n$ , so wie die entsprechenden Druckhöhen mit  $h_0, h_1, h_2 \dots h_n$  und beachtet endlich die Form der Gleichung 5 (§. 89):

$dt = \frac{A dx}{\mu a \sqrt{2gx}}$ , behält übrigens die bisherigen Bezeichnungen bei, so findet sich:

$$t = \frac{h_0 - h_n}{3n\mu a \sqrt{2g}} \left\{ \frac{A_0}{V\bar{h}_0} + \frac{A_n}{V\bar{h}_n} + 4 \left( \frac{A_1}{V\bar{h}_1} + \frac{A_3}{V\bar{h}_3} \dots \frac{A_{n-1}}{V\bar{h}_{n-1}} \right) + 2 \left( \frac{A_2}{V\bar{h}_2} + \frac{A_4}{V\bar{h}_4} \dots \frac{A_{n-2}}{V\bar{h}_{n-2}} \right) \right\}.$$

Die Wassermenge  $= Q$ , welche in dieser Zeit ausgeflossen ist, erhält man zu:

$$Q = \frac{h_0 - h_n}{3n} \left\{ A_0 + A_n + 4(A_1 + A_3 + \dots A_{n-1}) + 2(A_2 + A_4 \dots A_{n-2}) \right\}.$$

Zusatz 2. In dem Falle endlich, wo die Gestalt und Größe des Wasserbehälters, aus welchem der Ausfluß erfolgt (auch der etwaige Zufuß), unbekannt, dagegen die Mündungsgröße gegeben ist, sucht man

ebenfalls mit Hülfe der Simpson'schen Regel der Formel  $dQ = \mu a dt \sqrt{2gx}$  Genüge zu leisten, was folgendermaßen geschehen kann.

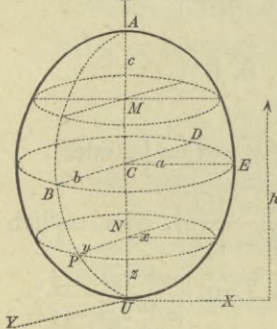
Man theilt die ganze Zeit, während welcher der Ausfluß beobachtet wird, in  $n$  gleiche Theile und trägt  $\frac{\tau}{n}$  ( $= dt$ ) als Abscissen einer Curve, auf deren Ordinaten die während der Zeitintervalle  $\frac{\tau}{n}$  beobachteten Druckhöhen  $h_0, h_1, h_2 \dots h_n$  sind. Der Inhalt der betreffenden Fläche entspricht sodann der Summe von  $dt\sqrt{x}$ , so daß die während  $\tau$  Zeit ausgeflossene Wassermenge  $Q$  überhaupt dargestellt wird durch

$$Q = \mu a \frac{\tau}{3n} \sqrt{2g} \left\{ \sqrt{h_0} + \sqrt{h_n} + 4 (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_3} \dots \sqrt{h_{n-1}}) + 2 (\sqrt{h_2} + \sqrt{h_4} \dots \sqrt{h_{n-2}}) \right\}.$$

§. 92.

Aufgabe 4. Ausfluß aus einem dreiachsigen Ellipsoid. Es sei  $ABCDUEA$ , Fig. 90, ein hohles dreiachsiges Ellipsoid,

Fig. 90.



wobei die Größe der Halbachsen  $a, b, c$  ist. Am Ende  $U$  der vertical gestellten Achse  $UA = 2c$  sei eine kleine Oeffnung vom Inhalte  $\omega$  angebracht. Bei Herstellung der letzteren sei das Ellipsoid auf eine Höhe  $UM = h$  mit Wasser gefüllt, man soll die Zeit finden, nach welcher der Spiegel so weit gesunken ist, daß diese Druckhöhe nur noch  $UN = z$  beträgt. Alle sonstigen Voraussetzungen und Bezeichnungen mögen die vorigen bleiben.

Auflösung. Denkt man sich durch die Hauptachse  $2c$  entsprechende Ebenen

Für die Ellipse  $AEU: x^2 = \frac{a^2}{c^2} (2cz - z^2).$

Für die Ellipse  $ABU: y^2 = \frac{b^2}{c^2} (2cz - z^2).$

Hiernach ergibt sich der Flächeninhalt  $A$  einer beliebigen Wasserschicht in der Höhe  $z$  von der Mündung aus gerechnet zu:

$$A = \pi xy = \frac{\pi ab}{c^2} (2cz - z^2).$$

Nach (5), §. 89, ist sonach

$$dt = - \frac{\pi ab}{\mu \omega c^2 \sqrt{2g}} \left( \frac{2cz - z^2}{\sqrt{z}} \right) dz.$$

Hieraus folgt aber durch Integration:

$$I. \quad t = \frac{\pi ab}{\mu \omega c^2 \sqrt{2g}} \left\{ \frac{4}{3} c (h^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{3}{2}}) - \frac{2}{5} (h^{\frac{5}{2}} - z^{\frac{5}{2}}) \right\}.$$

Zusatz. Für die Zeit, in welcher ein auf  $h$  Höhe gefülltes Kugelsegment leer läuft, folgt aus I, wenn der Radius der ganzen Kugel  $r$ , also  $a = b = c = r$  gesetzt wird:

$$t = \frac{2}{15} \frac{\pi}{\mu\omega\sqrt{2g}} (10rh^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{5}{2}}).$$

## §. 93.

Aufgabe 5. Ausfluß bei gleichzeitigem Zufluß. Ein prismatisches Gefäß (Fig. 87) vom Querschnitte  $A$  erhält pro Sec.  $q$  Cubikeinheiten Wasserzufluß, jedoch weniger (oder mehr) als durch eine Bodenöffnung  $a$  desselben abfließt. Die anfängliche Druckhöhe sei  $h$  und es fragt sich, nach welcher Zeit der Wasserspiegel so weit herabgesunken (oder gestiegen) ist, daß die vorhandene Druckhöhe  $x$  beträgt.

Auflösung. Die Auflösung besteht hier einfach in der Integration der Gleichung (7) (§. 88). Man erhält zu diesem Ende

$$t = \frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \int \frac{-dx}{-\frac{q}{\mu a \sqrt{2g}} + \sqrt{x}},$$

oder wenn  $\frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} = B$  und  $\frac{q}{\mu a \sqrt{2g}} = \sqrt{k}$  gesetzt wird:

$$t = B \int_h^x \frac{-dx}{-\sqrt{k} + \sqrt{x}}, \text{ d. i. } ^1)$$

$$t = 2B \left\{ \sqrt{k} \cdot \text{Lgnt} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{x}} + \sqrt{h} - \sqrt{x} \right\}, \text{ oder}$$

$$t = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h} - \sqrt{x} + \sqrt{k} \text{Lgnt} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{x}} \right\}, \text{ oder endlich}$$

$$t = \frac{2A}{(\mu a \sqrt{2g})^2} \left\{ \mu a \sqrt{2g} (\sqrt{h} - \sqrt{x}) + q \text{Lgnt} \frac{\mu a \sqrt{2gh} - q}{\mu a \sqrt{2gx} - q} \right\}.$$

Beispiel. Ein Teich, auf prismatische Form reducirt, hat 3600 Quadratmeter Oberfläche, 3<sup>m</sup>,2 Tiefe und wird durch einen Bach gespeist, der pro Secunde 0,95 Cubikmeter Wasser zuführt. Eine Abflußöffnung am Boden des Teiches hat 0,66 Quadratmeter Querschnitt. Man soll die Zeit bestimmen, binnen welcher die anfängliche Druckhöhe so weit herabgesunken ist, daß sie nur noch 0<sup>m</sup>,4 beträgt. Der entsprechend vortheilhaft gestalteten Mündung wegen kann der Ausflußcoefficient  $\mu = 0,7$  gesetzt werden.

Auflösung. Hiernach ist  $\mu a \sqrt{2g} = 2,0462$ ;

$$q = 0,95 \text{ und } \text{Lgnt} \frac{\mu a \sqrt{2gh} - q}{\mu a \sqrt{2gx} - q} = 2,303 \text{ Lg Brg} \frac{2,7105}{0,3442} = 2,303 \cdot 0,8962.$$

Daher

$$t = \frac{2 \cdot 3600}{(2,0462)^2} \left\{ 2,0462 (\sqrt{3,2} - \sqrt{0,4}) + 0,95 \cdot 2,303 \cdot 0,8962 \right\},$$

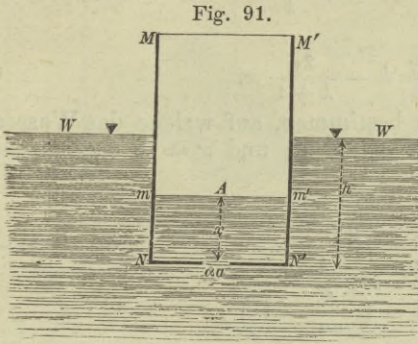
$$t = 7442 \text{ Sec.} = 2 \text{ Stund. } 6 \text{ Min. } 2 \text{ Sec.}$$

<sup>1)</sup> Zum Zwecke des Integrirens  $-\sqrt{k} + \sqrt{x} = y$  gesetzt.



§. 94.

Aufgabe 6. Mit welcher Geschwindigkeit tritt unbegrenztes Wasser  $WW$ , Fig. 91, in ein leeres oben offenes cylindrisches Gefäß



$MN'$  vom Querschnitte  $= A$  durch die Bodenöffnung  $a$  desselben, wenn constant die Mündung  $a$  um  $h$  vom Oberwasserspiegel absteht, und welches ist die größte Höhe, auf welche das Wasser im Gefäße steigt?

Auflösung. Hat sich am Ende der Zeit  $t$  das Wasser im Gefäße auf die Höhe  $Nm = x$  erhoben, so beträgt die Masse  $Nmm' N'$  der Flüssigkeit:

$M = \frac{\gamma Ax}{g}$ , weshalb die pro Zeit  $dt$  eingetretene Masse  $\frac{\gamma A}{g} dx$  ist. Bezeichnet ferner  $u$  die Geschwindigkeit der Schicht  $mm'$ , am Ende der Zeit  $t$ , so wird die entsprechende lebendige Kraft der ganzen Masse dargestellt durch  $\frac{1}{2} Mu^2$  und daher der Zuwachs an lebendiger Kraft in der Zeit  $dt$  betragen:  $d\left(\frac{1}{2} Mu^2\right) = d\left(\frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} Axu^2\right)$ , d. i.

$$(1) \quad \frac{\gamma}{g} Axudu + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} Au^2 dx.$$

Die während derselben Zeit  $dt$  verrichtete mechanische Arbeit ist aber auszudrücken durch:

$$(2) \quad \gamma A (h - x) dx,$$

da man sich vorstellen kann, der hydrostatische Druck  $\gamma A (h - x)$  treibe die Schicht  $mm'$ , während gedachter Zeit durch  $dx$  Weg.

Ferner beachte man, daß der Wasserstrahl vom Querschnitte  $aa$  in der Mündung  $a$  sich nach dem Eintritte in das Gefäß plötzlich zum Querschnitte  $A$  erweitern muß, folglich ein Verlust an lebendiger Kraft eintritt, der gleich ist:

$$(3) \quad \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} A dx \left(\frac{A}{aa} - 1\right)^2 u^2.$$

Nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte erhält man daher:

$$\frac{\gamma}{g} Axudu + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} Au^2 dx + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} A dx \left(\frac{A}{aa} - 1\right)^2 u^2 = \gamma A (h - x) dx,$$

so wie hieraus, wenn  $1 + \left(\frac{A}{aa} - 1\right)^2 = k$  gesetzt wird:

$$ku^2 dx + 2xudu + 2gxdx = 2ghdx.$$

Diese Differenzialgleichung wird integrirbar, wenn sie mit  $x^{k-1}$  multiplicirt wird. Man erhält nämlich

$$kx^{k-1} u^2 dx + 2x^k udu + 2gx^k dx = 2ghx^{k-1} dx, \text{ d. i.}$$

$$d(u^2 x^k) + 2gx^k dx = 2ghx^{k-1} dx,$$

woraus durch Integration folgt:

$$u^2 x^k + \frac{2g}{k+1} x^{k+1} = \frac{2g}{k} hx^k.$$

Sonach ist

$$I. \quad u^2 = \frac{2g}{k} h - \frac{2g}{k+1} x.$$

Um die größte Höhe  $H$  zu bestimmen, auf welche das Wasser im Gefäße steigt, hat man in I.  $u = \text{Null}$  und  $x = H$  zu setzen, wonach erhalten wird:

$$H = h + \frac{h}{k}, \text{ oder}$$

$$H = h + \frac{h}{1 + \left(\frac{A}{aa} - 1\right)^2}.$$

Ist ferner  $A = a$ , so folgt:

$$H = h \left( \frac{3\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} \right).$$

Endlich ergibt sich, wenn  $\alpha = 1$  ist:

$$H = 2h.$$

Diese höchst interessanten Resultate hat zuerst Borda<sup>1)</sup> entwickelt und durch Versuche bestätigt.

Bei einem Versuche Bossut's<sup>2)</sup> hatte das Gefäß (Röhre)  $MN$  einen Fuß Höhe und 20 Linien Durchmesser. Wurde  $A = a$  gemacht und die Röhre 7 Zoll 7 Linien tief eingetaucht, so stieg das Wasser bis zum oberen Rande der Röhre. Umgab man jedoch das untere Ende der Röhre mit einem Blechringe, so stieg das Wasser schon bis zum oberen Röhrenrande bei nur 6 Zoll 11½ Linien Eintauchung.

### Drittes Capitel.

## Ausfluß des Wassers durch Mündungen in den Seitenwänden der Gefäße bei constanter Druckhöhe.

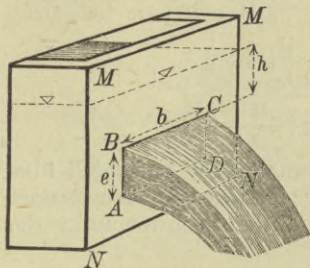
### §. 95.

Um hierbei zunächst die Menge des ausfließenden Wassers zu berechnen, werde vor Allem beachtet, daß die Druckhöhen für die verschiedenen Höhenpunkte einer Seitenmündung nicht gleich sind und folglich auch die entsprechenden Geschwindigkeiten verschieden sein müssen, mit denen das Wasser aus den betreffenden Mündungsstellen heraustritt.

1) Mémoire de l'académie des sciences, 1766, pag. 579.

2) Traité d'hydrodynamique, T. II, §. 569.

Fig. 92.



Mit Beachtung dieses wichtigen Umstandes und unter Beibehaltung der sonstigen Voraussetzungen und Bezeichnungen in den vorhergehenden Capiteln, ergibt sich, mittelst der Rechnungen im folgenden Paragraphen, die pro Secunde aus einer rechteckigen Seitenmündung  $ABCD$ , Fig. 92, strömende Wassermenge  $= Q$  zu:

$$I. \quad Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Dabei bezeichnet  $b$  die Länge jeder der horizontalen Mündungskanten  $AD = BC$ ,  $H$  den Abstand der unteren Kante und  $h$  den Abstand der oberen Kante von dem horizontalen Wasserspiegel.

Dividirt man diesen Werth durch den kleinsten Querschnitt  $ab(H-h)$  des zusammengezogenen Wasserstrahles, so erhält man einen Quotienten, welcher die mittlere Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers genannt wird und die wir mit  $V$  bezeichnen wollen. Daher

$$V = \frac{Q}{ab(H-h)}, \text{ oder}$$

$$(1) \quad V = \frac{2}{3} \psi \sqrt{2g} \frac{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}}{H-h}.$$

Hieraus ergibt sich ferner ( $\psi = 1$  d. i.  $\alpha = \mu$  gesetzt) die  $V$  entsprechende, oder die mittlere Druckhöhe  $= z$  zu:

$$(2) \quad z = \frac{1}{2g} \left\{ \frac{Q}{ab(H-h)} \right\}^2, \text{ oder}$$

$$z = \frac{4}{9} \left\{ \frac{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}}{H-h} \right\}^2, \text{ oder}$$

wenn die Höhe der Mündung mit  $e$  bezeichnet, also  $H-h = e$  gesetzt wird,

$$z = \frac{4}{9e^2} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - (H-e)^{\frac{3}{2}} \right\}^2.$$

Setzt man hier  $e$  so klein gegen  $H$  voraus, daß, mit Beibehaltung dreier Glieder der Reihenentwicklung von  $(H-e)^{\frac{3}{2}}$ , ein für die Praxis hinreichender Annäherungsausdruck erhalten wird, so folgt:

$$z = \frac{4}{9e^2} \left\{ \frac{3}{2} e H^{\frac{1}{2}} - \frac{3e^2}{8H} \right\}^2 = \frac{4}{9e^2} \left\{ \frac{9}{4} e^2 H - \frac{9e^3}{8} + \frac{9}{64} \frac{e^4}{H} \right\}.$$

Wird hier endlich noch der (meistentheils sehr kleine) Werth  $\frac{e^4}{H}$  vernachlässigt, so erhält man:

$$z = H - \frac{1}{2} e = \frac{H+h}{2}, \text{ d. h.}$$

bei niedrigen Seitenmündungen ist als mittlere Druckhöhe der Abstand des Schwerpunktes der Mündungsfläche vom Oberwasserspiegel in Rechnung zu bringen.

Führt man letzteren Werth von  $z$  in (2) ein, so ergibt sich unter bemerkter Voraussetzung:

$$\frac{H+h}{2} = \frac{1}{2g} \left\{ \frac{Q}{ab(H+h)} \right\}^2, \text{ oder}$$

$$\text{II. } Q = ab(H-h) \sqrt{2g \left( \frac{H+h}{2} \right)}.$$

Um für practische Anwendungen etwas mehr Aufschluß über die Grenzen zu erhalten, innerhalb welcher letzterer Ausdruck noch anwendbar ist, sei  $\eta$  die Druckhöhe für den Schwerpunkt der Mündung und die Höhe der letzteren

$$H - h = \frac{\eta}{2}.$$

Sodann ist zunächst, weil gleichzeitig  $\eta = \frac{H+h}{2}$  sein muß,  $H = \frac{5}{4}\eta$ ,  $h = \frac{3}{4}\eta$ , folglich, nach (1):

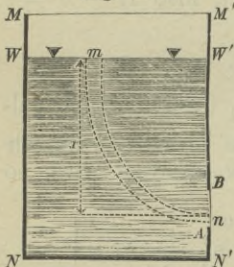
$$V = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \left( \frac{5}{4}\eta \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{3}{4}\eta \right)^{\frac{3}{2}} = 0,999 \dots \sqrt{2g\eta} = 0,999 \dots \sqrt{2g \left( \frac{H+h}{2} \right)}.$$

Der Werth II. ist sonach für practische Zwecke so lange als hinreichend genau zu betrachten, als die Schwerpunktsdruckhöhe nicht kleiner wird, wie die doppelte Mündungshöhe, d. h. so lange  $\eta \geq 2(H-h)$  ist.

### §. 96.

Der im vorigen Paragraphen behandelte Gegenstand gehört zur allgemeinen Aufgabe, die Wassermenge zu bestimmen, welche durch beliebig gestaltete Seitenöffnungen der Gefäße unter Voraussetzung constanter Druckhöhe strömt.

Fig. 93.



Für den Zweck der Ableitung eines entsprechenden mathematischen Ausdruckes für diese Wassermenge stelle Fig. 93 das Profil eines beliebigen Gefäßes mit ebener Seitenmündung dar, aus welcher Wasser fließt, das man sich dabei in gekrümmte Röhren  $mn$  zertheilt vorstellt. Nach §. 80 ist sodann die Geschwindigkeit in der Mündungsstelle  $n$  unabhängig von der Form dieser Röhren und entsprechend dem Verticalabstande  $nW$  des Punktes  $n$  vom Oberwasserspiegel, so daß man für die bemerkte Geschwindigkeit erhält, wenn  $nW = x$  gesetzt wird:  $\sqrt{2gx}$ .

Wird ferner die Breite des als unendlich kleinen Rechtecks zu denkenden Querschnitts bei  $n$  mit  $dy$  bezeichnet, so ergibt sich ohne Weiteres das Differenzial des pro Secunde ausfließenden Wasserquantums  $dQ$  zu:

$$dQ = \mu dx dy \sqrt{2gx},$$

ein Ausdruck, dessen bestimmtes Integral die Auflösung der gestellten Aufgabe liefert.

**1. Rectanguläre Mündung**

*mit respective horizontalen und verticalen Seiten.*

Behält man die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei und beachtet überdies die Geschwindigkeit =  $c$ , mit welcher das Wasser unmittelbar vor der Mündung ankommt<sup>1)</sup>, so erhält man für die rectanguläre Mündung:

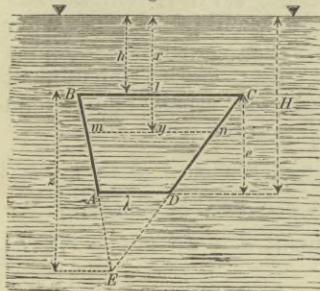
$$Q = \mu V \sqrt{2g} \int_0^b dy \int_{h + \frac{c^2}{2g}}^{H + \frac{c^2}{2g}} dx \sqrt{x}, \text{ d. i.}$$

$$I. \quad Q = \frac{2}{3} \mu b V \sqrt{2g} \left\{ \left( H + \frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( h + \frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Ist  $c$  klein genug, was z. B. der Fall ist wenn der Mündungsquerschnitt gering ist, im Verhältniß zur Wandfläche, in welcher sich die Seitenöffnung befindet, so ergibt sich I. des vorigen Paragraphen.

**2. Trapez- und Dreieckmündung.**

Fig. 94.



Die Seitenlinie  $\overline{BC} = l$  und  $\overline{AD} = \lambda$  der Mündung, Fig. 94, mögen parallel zum Oberwasserspiegel liegen, die veränderliche Breite  $mn \parallel BC$  werde mit  $y$ , die zugehörige Druckhöhe mit  $x$  bezeichnet, die Höhe des Dreiecks  $BCE$ , welches durch Verlängerung der Seiten  $BA$  und  $CD$  entsteht, sei =  $z$ , alle anderen Bezeichnungen sollen die bisherigen bleiben.

Zunächst ist sodann:

$$Q = \mu V \sqrt{2g} \int_h^{h+c} dx \sqrt{x} \int_0^y dy.$$

Um ferner  $y$  als Function von  $x$  auszudrücken, bemerke man, daß  $z = l \frac{x-h}{l-y}$  und auch  $z = \frac{el}{l-\lambda}$ , folglich

$$y = \frac{l(e+h) - \lambda h}{e} - \frac{l-\lambda}{e} \cdot x \text{ ist,}$$

wofür gesetzt werden mag:  $y = m - nx$ .

<sup>1)</sup> Bezeichnet  $A$  den Querschnitt des Behälters parallel zur Mündung, so kann man  $c = \frac{Q}{A}$  setzen.

Sodann ergibt sich aber:

$$\text{II. } Q = \mu \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} m [(h+e)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}] - \frac{2}{5} n [(h+e)^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}] \right\},$$

$$\text{wo } m = \frac{(e+h)l - hl}{e} \text{ und } n = \frac{l - \lambda}{e} \text{ ist.}$$

Für eine Mündung, welche ein mit der Spitze nach unten gekehrtes Dreieck bildet, wird  $\lambda = \text{Null}$ ,  $m = \frac{Hl}{H-h}$ ,  $n = \frac{l}{e}$  und daher

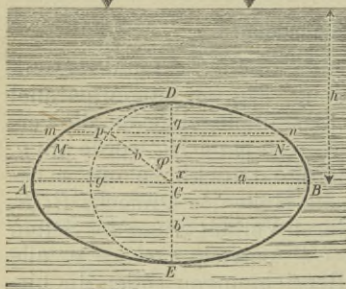
$$Q = \mu \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} \frac{Hl}{H-h} [H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}] - \frac{2}{5} \frac{l}{H-h} [H^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}] \right\}, \text{ oder}$$

$$\text{III. } Q = \frac{2\mu l \sqrt{2g}}{15} \left\{ \frac{2H^{\frac{5}{2}} - 5H^{\frac{3}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}}}{H-h} \right\}.$$

Sind die Mündungshöhen  $e = H - h$  sehr klein in Bezug auf die Druckhöhe  $h$ , so läßt sich auch hier, wie §. 95, der Schwerpunktsabstand der Fläche vom Oberwasserspiegel als mittlere Druckhöhe einführen.

### 3. Ellipsen- und Kreismündung.

Fig. 95.



Wir bezeichnen die Halbachsen der Ellipse  $ABDE$  mit  $a$  und  $b$ , die Druckhöhe über dem Mittelpunkte  $C$  mit  $h$ . Ferner sei  $mN$  ein zu  $AB$  parallel liegendes Flächenelement der Ellipse von der unendlich kleinen Breite  $qt$ . Für den Flächeninhalt dieses Elementes erhält man, wenn  $\angle pCq = \varphi$  gesetzt wird, wegen

$$mn = 2a \sin \varphi, \text{ und } \bar{tq} = b \sin \varphi d\varphi^1)$$

$$\text{Fläche } mN = 2ab \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Da die Druckhöhe für dies Flächenelement  $h - b \cos \varphi$  ist, so folgt endlich:

$$dQ = 2\mu ab \sin^2 \varphi d\varphi \sqrt{2g} (h - b \cos \varphi)$$

oder wenn  $\frac{b}{h} = m$  gesetzt und eine Reihenentwicklung vorgenommen wird:

$$dQ = 2\mu ab \sqrt{2gh} \left\{ \sin^2 \varphi d\varphi \left( 1 - \frac{m}{2} \cos \varphi - \frac{m^2}{8} \cos^2 \varphi - 16 \cos^3 \varphi - \frac{5}{128} m^4 \cos^4 \varphi \dots \right) \right\}.$$

Bildet die ganze Ellipsenfläche die fragliche Mündung, so ist das

<sup>1)</sup> Es ist bekanntlich:  $\overline{mq^2} = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - x^2)$ ;  $\overline{pq^2} = b^2 - x^2$ ; ferner  $\overline{pq} = b \sin \varphi$ , folglich:  $\overline{mq} = a \sin \varphi$ ,  $\overline{2mq} = \overline{mn} = 2a \sin \varphi$ . Endlich wegen  $\overline{Cq} = b (1 - \cos \varphi)$  auch  $\overline{tq} = b \sin \varphi d\varphi$ .

Integral des letzteren Ausdrucks zwischen den Grenzen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  zu nehmen und man erhält<sup>1)</sup>:

$$\text{IV. } Q = \mu ab\pi \sqrt{2gh} \left\{ 1 - \frac{1}{3^2} \frac{b^2}{h^2} - \frac{5}{1024} \frac{b^4}{h^4} \dots \right\}.$$

Für eine kreisförmige Mündung, deren Radius =  $r$  ist, ergibt sich:

$$\text{V. } Q = \mu r^2\pi \sqrt{2gh} \left\{ 1 - \frac{1}{3^2} \frac{r^2}{h^2} - \frac{5}{1024} \frac{r^4}{h^4} \dots \right\}.$$

Für  $h = r$  folgt noch

$$\text{VI. } Q = 0,964 \mu r^2\pi \sqrt{2gh}.$$

Anmerkung. Mit Hilfe der letzten Formel würde sich unter besonderen Umständen das Quantum Wasser bestimmen lassen, welches dem von Mariotte eingeführten „Wasserzoll“ (pouce d'eau), S. 188, Note 1, entspricht.

§. 97.

Was die Frage nach der Form des mittleren Wasserfadens  $AB$ , Fig. 96,

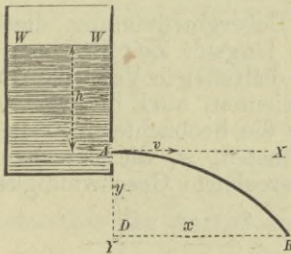


Fig. 96, eines Strahles anlangt, welcher aus einer Seitenöffnung unmittelbar in die freie Luft tritt, wenn man den Widerstand der letzteren als gering genug vernachlässigt, so läßt sich die betreffende Antwort wie folgt geben:

Mit Bezug auf die Figur erhält man ohne Weiteres die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Hieraus aber durch Integration, wenn man zugleich beachtet, daß die betreffenden Constanten Null sind:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = gt$$

Hieraus ferner, durch nochmalige Integration:

$$x = vt \quad \text{und} \quad y = \frac{gt^2}{2}$$

<sup>1)</sup> Man beachte, daß  $\int_0^\pi dx \sin^2 x = \frac{\pi}{2}$ ;  $\int_0^\pi dx \sin^2 x \cos^n x = \frac{1}{2+n} \int_0^\pi dx \cos^n x$ ,

endlich:  $\int_0^\pi dx \cos^n x = \left( \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \right) \frac{\pi}{2}$ , wenn  $n$  eine gerade,

$\int_0^\pi dx \cos^n x = \text{Null}$ , wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist.

und durch Elimination der Zeit  $t$ :

$$\text{I. } y = \frac{g}{2v^2} x^2.$$

Die Curve (des mittleren Wasserfadens)  $AB$  ist demnach eine gemeine Parabel mit dem Parameter:  $\frac{g}{2v^2}$ .

Eliminirt man in letzterer Gleichung  $v$  mittelst  $v = \sqrt{2gh}$  (II, S. 208), so ergibt sich:

$$\text{I. } y = \frac{x^2}{4h}, \text{ so wie}$$

$$\text{II. } x = 2\sqrt{h \cdot y} \text{ und endlich:}$$

$$\text{III. } v = x \sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Ist der mittlere Wasserfaden bei seinem Austritte aus der Mündung  $A$  unter einem Winkel  $\alpha$ , abwärts gegen den Horizont geneigt, so erhält man statt I, die Gleichung V:

$$\text{V. } y = xt \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2.$$

Die für die Praxis hinreichende Uebereinstimmung dieser Gleichungen mit der Erfahrung haben in jüngster Zeit Boileau<sup>1)</sup> und Weisbach<sup>2)</sup> nachgewiesen. Andere betreffende Versuche (mit Hinzufügung der Geschwindigkeitscoefficienten) sind in folgender Tabelle zusammengestellt, wobei  $y$  und  $x$  die beobachteten (respective verticalen und horizontalen) Coordinaten,  $x_1$  die berechnete Abscisse und  $v_1$  die nach Formel III. berechnete Geschwindigkeit bezeichnet<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Journal de l'école polytechnique. T. XIX, Cahier 33 (1850), p. 206.

<sup>2)</sup> Die Experimental-Hydraulik. Freiberg 1855, S. 52 ff.

<sup>3)</sup> Man sehe hierüber auch Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I, S. 442.



Die Mündungen sind sämtlich kreisförmig. Die ersten beiden Versuche beziehen sich auf franz. Zolle und Fuße ( $g = 30,1958$  Fuß), die übrigen auf Metermaasse.

Beobachter	Durchmesser der Kreis- mündung	Druck- höhe $= h$	Beobachtet		Aus der Beobachtung berechnet		Theoreti- sche Geschwin- digkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$	$\psi = \frac{v}{v_1}$	Mündung
			$y$	$x$	$x_1 = 2\sqrt{hy}$	$v = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$			
Bossut <sup>1)</sup>	$\frac{1}{2}$ Zoll	9,0 Fuß	4',2986	12',270	12',439	22',997	23',313	0,986	dünne Wand
Venturi <sup>2)</sup>	$1\frac{1}{2}$ Zoll	2,708	4',500	6',791	6',973	12',444	12',798	0,973	desgl.
Michelotti <sup>3)</sup>	$0^m,02710$	$7^m,190$	$1^m,410$	$6^m,250$	$6^m,368$	$11^m,670$	$11^m,880$	0,983	desgl.
Castel <sup>4)</sup>	$0^m,01550$	$2^m,004$	$0^m,8926$	$2^m,2100$	$2^m,6740$	$5^m,181$	$6^m,269$	0,826	Cylind. Ansatz außerhalb von $0^m,040$ Länge
Desgl. . . .	$0^m,01550$	$2^m,006$	$0^m,8926$	$2^m,5590$	$2^m,672$	$6^m,272$	$6^m,003$	0,975	Conischer Ansatz von $13^{\circ}4$ Con- vergenz- winkel

§. 98.

Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Seitenöffnungen.

I. Es ist Druckwasser über der oberen Mündungskante vorhanden. (Durchlaßöffnungen.)

Wie bereits S. 203 erwähnt wurde, hat man bis heute weder großartigere noch umfangreichere Versuche über den Ausfluß des Wassers aus Seitenmündungen angestellt, als die an gedachter Stelle erörterten Metzger Versuche von Poncelet und Lesbros.

Deshalb vervollständigen wir im Nachstehenden die bereits S. 203 gemachten Angaben, welche sich auf die späteren, von Lesbros allein angestellten Versuche beziehen.

Der an gedachter Stelle erwähnte dritte Behälter, in dessen Wand sich die Ausflußöffnung befand, ist, mit den von Lesbros angebrachten Veränderungen, Fig. 97 bis mit Fig. 97<sup>b</sup> abgebildet und zwar zeigt die erstere Figur den Verticaldurchschnitt nach der Richtung von *EFFGGH* der Grundrißfigur 97<sup>a</sup> genommen, während

1) Traité d'hydrodynamique, §. 609.

2) Gilbert's Annalen, Bd. III, S. 40.

3) D'Aubuisson Hydraulique, §. 37. Michelotti (deutsche Uebersetzung), S. 158.

4) Annales des Mines 1838, T. XIV, p. 187.

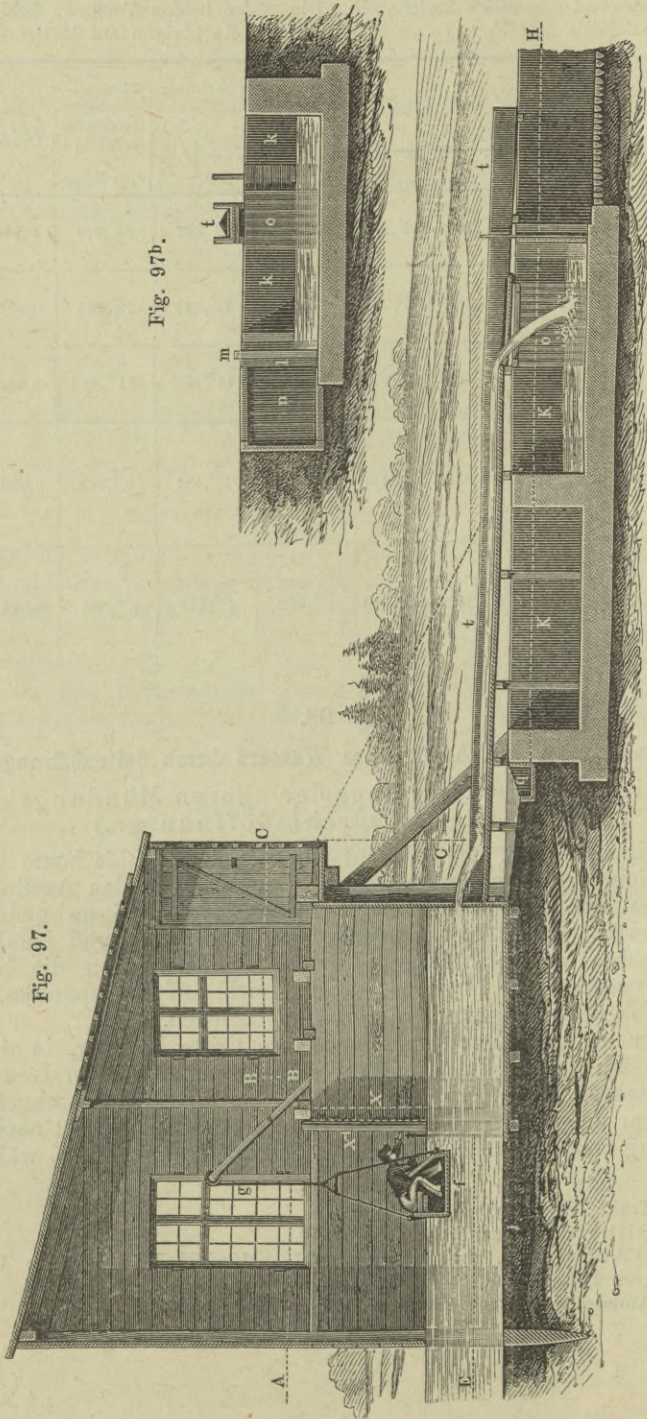


Fig. 97.

Fig. 97b.



letztere Figur der Schnittrichtung  $ABBCCD$  der Fig. 97 und die Querprofilansicht, Fig. 97<sup>b</sup>, der Schnittrichtung  $JK$  des Grundrisses entspricht.

Lesbros schloß das früher ganz freie Ausfluß-Reservoir (Fig. 97<sup>a</sup>) so ein, wie es die Grundrißfigur erkennen läßt, versah es auch (gegen Sonne und Wetter) mit einem Dache, ließ den Beobachter des Wasserstandes seitwärts vom Stromstriche in einem Schwimmkasten  $fg$  Platz finden, stellte den zur Ermittlung des ruhigen Wasserspiegels (weit von der Mündung) erforderlichen Maaßstab (Pegel) <sup>1)</sup> in  $X'$  (statt früher mit Poncelet bei  $X$ ) auf etc.

Vor der Ausflußmündung brachte man (statt der vorher hölzernen) in hydraulischen Mörtel gemauerte Aichräume  $k$  von je  $3.3.1 = 9$  Cubikmeter = 9000 Liter an, führte diesen das ausgeflossene Wasser durch ein Gerinne  $t$  (in der Grundrißfigur weggelassen) zu und stellte unter der Bodenöffnung in diesem Gerinne ein durchbrochenes Gefäß  $o$  auf, um das ankommende Wasser zu zertheilen, seine lebendige Kraft größtentheils zu vernichten und nachtheilige Schwankungen zu vermindern.

Das Wasser beider Aichräume  $k$  konnte durch Schützen mit einander in Verbindung gesetzt, abgesperrt oder in die Untermosel (nach der Richtung  $GH$  der Grundrißfigur) abgelassen werden.

Die Seitenwand des zweiten Gefäßes  $k$  wurde bei  $l$  (Fig. 97<sup>a</sup>) durchbrochen und daselbst ein parallelepipedischer Raum (Kasten) von  $0^m,2$  Seite gebildet, der mittelst eines kleinen Schützens von  $k$  abgesperrt werden konnte. An dem Boden des Kastens  $l$  befestigte man in geeigneter Weise einen Stab (Pegel)  $m$ , Fig. 97<sup>b</sup>, mit Scala, Nonius etc. versehen, um damit die Wasserstände der Aichgefäße  $k$  bestimmen zu können. Hinter  $l$  wurde ein vertiefter Raum  $n$  angebracht, groß genug, um einer Person Platz zu verschaffen, die mittelst eines Spiegels den Augenblick zu beobachten hatte, wo eine Spitze des gedachten Pegels die steigende Wasserfläche berührte.

Zur Abführung etwaigen Filterwassers diente ein Canal  $q$ , während ein längerer Canal  $rr$  zum Zwecke hatte, das Wasser im Hauptreservoir zu reguliren, oder dasselbe völlig in die Untermosel ablassen zu können.

Um nicht eine mathematisch genaue Form der Aichgefäße voraussetzen zu müssen, wurden diese Räume besonders und zwar dadurch gemessen, daß man Gefäße von genau bekanntem Inhalte (die wieder durch kleinere Gefäße von noch genauer bestimmtem cubischen Raum gefüllt worden waren) in dieselben ausleerte und die jeder Entleerung entsprechende Wasserhöhe mit aller denkbaren Sorgfalt maß.

<sup>1)</sup> Auf die treffliche Anordnung und Herstellung dieser Maaßstäbe, sowie auf das Messen selbst, wurde die äußerste Sorgfalt verwendet und überhaupt alle betreffenden Arbeiten mit einer Genauigkeit und Vorsicht ausgeführt, deren Nachahmung für ähnliche Fälle nicht genug empfohlen werden kann. Wegen des Speciellen hierüber muß auf die S. 203 angeführten Quellen verwiesen werden.

§. 99.

Strahlenmessungen.

Von den Resultaten der vorher erörterten eben so interessanten als practisch wichtigen Versuche mögen zuerst einige Ergebnisse directer Strahlenmessungen mitgetheilt werden.

Fig. 98.

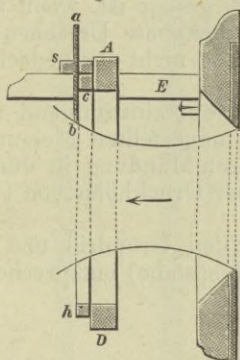


Fig. 98a.

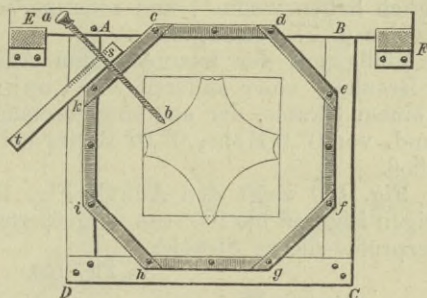
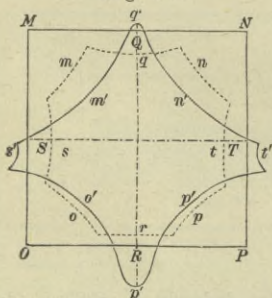


Fig. 98 zeigt die hierzu angewandte Vorrichtung in der Vorder- und Fig. 98a in der Seitenansicht, wenn man sich erstere Figur in der Mitte vertical durchschnitten denkt.

Dabei ist *ABCD* ein in Trägern *EF* verschiebbar vor der Ausflußöffnung aufgehängener hölzerner Rahmen, auf welchem außerhalb ein reguläres aus Schienen mit Scaleneintheilung gebildetes Achteck *cdefghik* in der Art befestigt ist, daß es den ausfließenden Strahl überall umgiebt. Auf jeder dieser Polygonseiten läßt sich ein mit Nonius versehenes Lineal *ts* aufbringen und verschieben, welches zugleich die Mutter einer langen Schraube *ab* enthält, deren feine Spitze *b* man nach und nach mit allen Punkten des ausfließenden Strahles in Berührung zu bringen sucht.

Bei einer quadratischen Oeffnung *MNOPRSTQ*, Fig. 99, von

Fig. 99.



0<sup>m</sup>,2 Seite in dünner Wand, mündend in die freie Luft, bei vollständiger Contraction und einer Druckhöhe von 1<sup>m</sup>,68 über der Mitte, erhielten Poncelet und Lesbros auf dem beschriebenen Wege:

das Profil *mntpros* bei 15 Centimeter Abstand von der Mündung und von 237,46 Quadrat-Centimeter Inhalt,

das Profil *m<sub>1</sub>n<sub>1</sub>t<sub>1</sub>p<sub>1</sub>o<sub>1</sub>s<sub>1</sub>q<sub>1</sub>* bei 30 Centimeter Abstand von der Mündung und von 225,06 Quadrat-Centimeter Inhalt.

Letzteres Profil war zugleich das kleinste, was an diesem Strahle beobachtet wurde und wonach sich der Contractioncoefficient  $\alpha$  ergab:

$$\alpha = \frac{225,06}{400,0} = 0,563.$$

Da ferner der Ausflußcoefficient  $\mu$  für dieselbe Mündung zu 0,602 gefunden wurde, so müßte hier nach §. 82 ein Geschwindigkeitscoefficient  $\psi$  stattfinden:

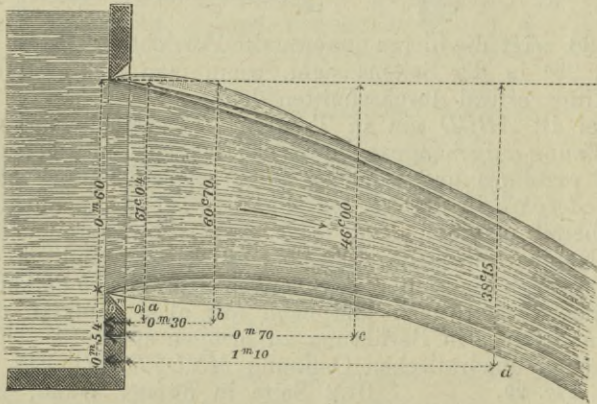
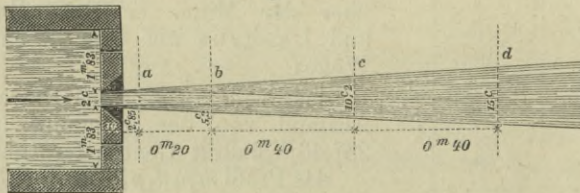
$$\psi = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{0,602}{0,563} = 1,069.$$

Letzteres Resultat würde aber im Widerspruch mit dem stehen, was §. 77 (S. 208), Zusatz 1, in Betreff  $\psi$  gesagt ist, wenn man in diesem speciellen Falle nicht andere unbekanntere Ursachen für möglich halten wollte<sup>1)</sup> und sonstige Versuche nicht den gedachten Satz des §. 77 bestätigten<sup>2)</sup>.

Völlig mit der letztgedachten Ansicht übereinstimmend sind die Resultate einer anderen von Lesbros angestellten Messung<sup>3)</sup> an einem Strahle, der aus einer rechteckigen Mündung in dünner Wand, von 0<sup>m</sup>,6 Höhe, 0<sup>m</sup>,02 Breite bei einer Druckhöhe von 1<sup>m</sup>,55 ausfloß.

Fig. 100 zeigt den Aufriß, Fig. 100<sup>a</sup> den Grundriß und die übrigen Figuren bis 100<sup>c</sup> (im vergrößerten Maaßstabe) entsprechende Querprofile dieses Strahles.

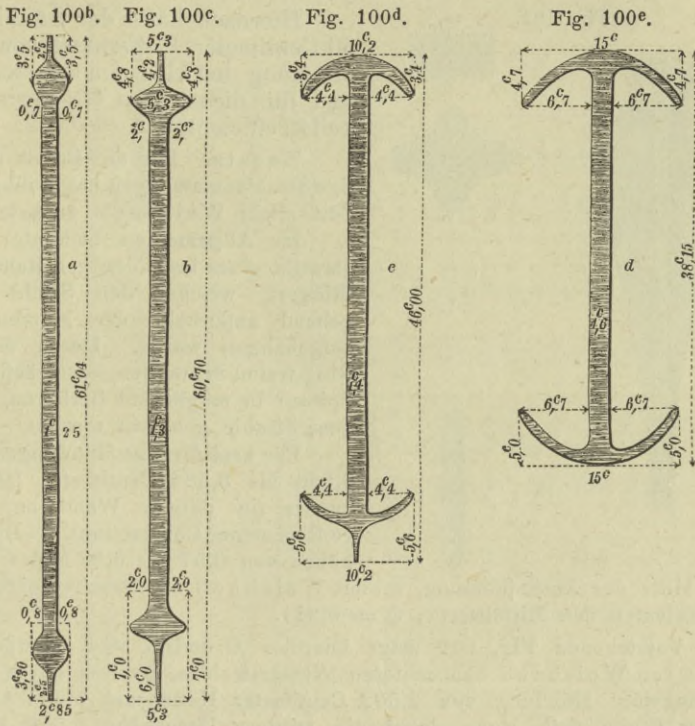
Fig. 100.

Fig. 100<sup>a</sup>.

<sup>1)</sup> Lesbros sucht (a. a. O. p. 44) dies Resultat dadurch zu erklären, daß er einen besonderen Centralstrahl voraussetzt, dessen lebendige Kraft zu der hinzu träte, welche der Druckhöhe der Flüssigkeit über dem Mittelpunkt entspricht.

<sup>2)</sup> Weisbach in Hülse's Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluß“, S. 503, und die „Experimental-Hydraulik“ dieses Autors §. 14 — §. 17.

<sup>3)</sup> a. a. O. p. 46.



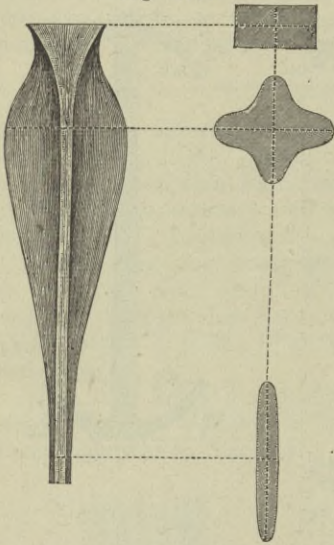
Die pro Secunde ausfließende Wassermenge  $Q$  wurde hierbei mittelst der Formel  $Q = \mu e \sqrt{2gH}$  berechnet und  $\mu = 0,625$  durch anderweitige Versuche bestimmt. Daher ergab sich

$$Q = 0,625 \cdot 0,02 \cdot 0,60 \sqrt{1g \cdot 1,55} = 0,041458 \text{ Cubikmeter.}$$

Alle sonstigen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Abstand der Strahlquerschnitte von der Mündungsebene (1)	Querschnittsflächen		Contraction-coefficient = $\alpha$ (4)	Druckhöhe über dem Schwerpunkt des Normal-schnittes (5)	Theoretische Geschwindigkeiten, den Druckhöhen der vorigen Columne entsprechend (6)	Mittlere Geschwindigkeiten, wenn die Wassermenge $Q$ durch die Werthe von Columne (3) dividirt wird (7)	Geschwindigkeits-coefficient $\psi$ (8)
	Vertical (2)	Normal zum Central-faden des Strahles (3)					
Centimeter —	Quadrat-Centim. 120,00	Quadrat-Centim. 120,00	1,000	Meter 1,5500	Meter 5,5143	Meter 3,4465	0,625
10,0	79,51	78,30	0,653	1,5409	5,4980	5,2820	0,961
30,0	77,70	76,52	0,638	1,5757	5,5600	5,4049	0,972
70,0	84,95	83,66	0,697	1,6460	5,6825	4,9436	0,870
110,0	92,55	86,41	0,720	1,7644	5,8833	4,7863	0,814

Fig. 101.



Hiernach hatte der Strahl bei 30 Centimeter Entfernung von der Mündung den kleinsten Querschnitt und für diesen den Geschwindigkeitscoefficienten  $\psi = 0,972$ .

Zusatz. Für die Praxis wichtige Strahlenmessungen hat in jüngster Zeit allein Weisbach angestellt<sup>1)</sup>.

Im Allgemeinen bediente sich derselbe eines kreisförmigen Rahmens (Ringes), welcher den Strahl umgebend außerhalb der Mündungen aufgehangen wurde. Durch diesen Ring traten Schrauben, deren äußerste Spitzen in möglichste Berührung mit dem Strahle gebracht wurden.

Für kreisförmige Mündungen von 0,866 bis 3,584 Centimeter Durchmesser (in dünner Wand und bei vollkommener Contraction), bei Druckhöhen von 0,57 bis 0,58 Meter über

der Mitte der Ausflußöffnung, erhielt Weisbach als Geschwindigkeitscoefficienten den Mittelwerth:  $\psi = 0,961$ .

Vorstehende Fig. 101 zeigt überdies Grundriß und Querprofile eines von Weisbach beobachteten Wasserstrahles, welcher durch eine rechteckige Mündung von 2,502 Centimeter Höhe und 5,052 Centimeter Breite floß, wenn dabei die mittlere Druckhöhe 0,559 Meter betrug.

### §. 100.

**Ausflußcoefficienten, nach Poncelet und Lesbros für rechteckige Seitenöffnungen in (blech-) dünner Wand<sup>2)</sup>, bei vollkommener Contraction und mündend in die freie Luft.**

Nachstehende Tabelle ist das Hauptresultat der Versuche von 1828, erweitert durch Interpolation von 1<sup>m</sup>,70 bis 3<sup>m</sup>,0 Druckhöhe<sup>3)</sup>. Die Mündungsbreiten =  $b$ , betragen überall 0<sup>m</sup>,20.

<sup>1)</sup> „Untersuchungen aus dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik“. Abtheil. 1, S. 90–92 und besonders Abth. 2, S. 73.

<sup>2)</sup> Sogenannte Poncelet-Mündungen, d. h. in Blechtafeln ausgeschnittene Seitenwandöffnungen mit Contraction an allen vier Seiten.

<sup>3)</sup> Beiläufig bemerkt, wurden die Tabellen nach dem von Kretz, nach Poncelet's Tode, herausgegebenen Cours de Mecanique etc., Seconde Partie, Pg. 58, berichtigt.



## Tafeln der Ausflußcoefficienten

für rechteckige, verticale Mündungen in dünner Wand, bei vollständiger Contraction und Ausfluß in die freie Luft.

I. Tafel. Die Wasserstände sind an einem Punkte des Reservoirs gemessen, woselbst das Wasser vollkommen rubig ist.		II. Tafel. Die Wasserstände sind unmittelbar an der Mündung gemessen.															
Wasserstände über dem obern Rande der Mündungen	Coefficienten d. Formel $Q = b(H-h) \sqrt{\frac{2g(H+h)}{2}}$																
	für Mündungshöhen von																
	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$					
0 <sup>m</sup> ,000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795
0,005	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,597	0,630	0,668	0,725	0,750	0,778
0,010	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762
0,015	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745
0,02	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,594	0,614	0,638	0,668	0,697	0,729
0,03	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694	0,592	0,611	0,623	0,644	0,664	0,594	0,612	0,637	0,659	0,685	0,708
0,04	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688	0,594	0,612	0,626	0,643	0,662	0,593	0,610	0,636	0,654	0,678	0,695
0,05	0,585	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683	0,596	0,612	0,627	0,642	0,660	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,06	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679	0,597	0,613	0,628	0,642	0,659	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,07	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676	0,598	0,614	0,629	0,641	0,658	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,08	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673	0,598	0,614	0,630	0,640	0,657	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,09	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670	0,599	0,614	0,630	0,639	0,656	0,595	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675
0,10	0,592	0,611	0,630	0,637	0,655	0,668	0,599	0,614	0,631	0,638	0,655	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672
0,12	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663	0,600	0,615	0,631	0,638	0,654	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669
0,14	0,595	0,613	0,631	0,636	0,653	0,663	0,600	0,615	0,631	0,637	0,653	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665
0,16	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658	0,600	0,616	0,631	0,636	0,652	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661
0,18	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657	0,601	0,617	0,630	0,635	0,650	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659
												0,598	0,615	0,631	0,635	0,650	0,657

Fortsetzung der Tafeln voriger Seite.

Wasserstände über dem obern Rande der Mündungen	I. Tafel. Die Wasserstände sind an einem Punkte des Reservoirs gemessen, wosobst das Wasser vollkommen ruhig ist.										II. Tafel. Die Wasserstände sind unmittelbar an der Mündung gemessen.																			
	Coeffizienten d. Formel $q = b(H-h) \sqrt{\frac{2g(H+h)}{3}}$ für Mündungshöhen von										Coeffizienten d. Formel $q = b(H-h) \sqrt{\frac{2g(H+h)}{3}}$ für Mündungshöhen von																			
	0 <sup>m</sup> ,20	0 <sup>m</sup> ,30	0 <sup>m</sup> ,40	0 <sup>m</sup> ,50	0 <sup>m</sup> ,60	0 <sup>m</sup> ,70	0 <sup>m</sup> ,80	0 <sup>m</sup> ,90	1,00	1,10	1,20	0 <sup>m</sup> ,20	0 <sup>m</sup> ,30	0 <sup>m</sup> ,40	0 <sup>m</sup> ,50	0 <sup>m</sup> ,60	0 <sup>m</sup> ,70	0 <sup>m</sup> ,80	0 <sup>m</sup> ,90	1,00	1,10	1,20								
0,20	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655	0,667	0,677	0,684	0,688	0,601	0,617	0,630	0,633	0,648	0,655	0,667	0,677	0,684	0,688	0,599	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655	0,667	0,677	0,684	0,688
0,25	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,665	0,675	0,682	0,686	0,601	0,617	0,630	0,632	0,646	0,653	0,665	0,675	0,682	0,686	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,665	0,675	0,682	0,686
0,30	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650	0,661	0,671	0,678	0,682	0,602	0,618	0,630	0,632	0,644	0,650	0,661	0,671	0,678	0,682	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651	0,661	0,671	0,678	0,682
0,40	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647	0,657	0,666	0,673	0,677	0,603	0,618	0,629	0,631	0,642	0,647	0,657	0,666	0,673	0,677	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647	0,654	0,662	0,670	0,677
0,50	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,653	0,661	0,668	0,672	0,604	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,653	0,661	0,668	0,672	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645	0,651	0,658	0,665	0,672
0,60	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642	0,650	0,657	0,664	0,668	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642	0,650	0,657	0,664	0,668	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643	0,649	0,655	0,662	0,669
0,70	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640	0,648	0,655	0,661	0,665	0,605	0,617	0,627	0,629	0,637	0,640	0,648	0,655	0,661	0,665	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,643	0,649	0,655	0,662	0,669
0,80	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,645	0,652	0,658	0,662	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,645	0,652	0,658	0,662	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,643	0,649	0,655	0,662	0,669
0,90	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635	0,642	0,649	0,655	0,659	0,605	0,616	0,626	0,628	0,634	0,635	0,642	0,649	0,655	0,659	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,638	0,644	0,650	0,656	0,663
1,00	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,639	0,646	0,652	0,656	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,639	0,646	0,652	0,656	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,638	0,644	0,650	0,656	0,663
1,10	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,636	0,643	0,649	0,653	0,605	0,615	0,625	0,627	0,631	0,629	0,636	0,643	0,649	0,653	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,638	0,644	0,650	0,656	0,663
1,20	0,605	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,633	0,640	0,646	0,650	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,633	0,640	0,646	0,650	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,638	0,644	0,650	0,656	0,663
1,30	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,629	0,636	0,642	0,646	0,604	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,629	0,636	0,642	0,646	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,632	0,638	0,644	0,650	0,656
1,40	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,625	0,632	0,638	0,642	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,625	0,632	0,638	0,642	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,628	0,634	0,640	0,646	0,652
1,50	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615	0,622	0,629	0,635	0,639	0,603	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615	0,622	0,629	0,635	0,639	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,626	0,632	0,638	0,644	0,650
1,60	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,620	0,627	0,633	0,637	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,620	0,627	0,633	0,637	0,602	0,611	0,620	0,618	0,618	0,625	0,631	0,637	0,643	0,649
1,70	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612	0,619	0,626	0,632	0,636	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612	0,619	0,626	0,632	0,636	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,622	0,628	0,634	0,640	0,646
1,80	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612	0,619	0,626	0,632	0,636	0,602	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612	0,619	0,626	0,632	0,636	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,621	0,627	0,633	0,639	0,645
1,90	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611	0,618	0,625	0,631	0,635	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611	0,618	0,625	0,631	0,635	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,619	0,625	0,631	0,637	0,643
2,00	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,617	0,624	0,630	0,634	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,617	0,624	0,630	0,634	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,619	0,625	0,631	0,637	0,643
3,00	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,615	0,622	0,628	0,632	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,615	0,622	0,628	0,632	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,616	0,622	0,628	0,634	0,640

Zusatz. Die Tabellenwerthe<sup>1)</sup> sind übrigens auch für kreisförmige<sup>2)</sup> und für Mündungen gültig, deren Querschnittsform beliebige geradlinige Figuren bilden<sup>3)</sup>, sobald dabei nur keine einspringenden Winkel vorkommen<sup>4)</sup> und die Druckhöhen nicht zu gering sind.

Beispiel. Welche Wassermenge fließt pro Secunde durch eine rechteckige Oeffnung in dünner Wand bei vollkommener Contraction, welche 0<sup>m</sup>,30 Breite und 0<sup>m</sup>,15 Höhe hat und die Druckhöhe über der oberen Kante 0<sup>m</sup>,05 beträgt.

Auflösung. Der Ausflußcoefficient  $\mu$  der Formel

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right\}$$

ist hier nach der Tabelle, weil er zwischen 0,597 und 0,613 fällt, zu 0,605 zu nehmen, so daß erhalten wird

$$Q = \frac{2}{3} \times 0,605 \times 0,30 \times 4,43 (0,20^{\frac{3}{2}} - 0,05^{\frac{3}{2}}) = 0,0417 \text{ Cubikmeter.}$$

Unter Anwendung der gewöhnlich gebräuchlichen Formel

$$Q = \mu b (H - h) \sqrt{2g \left( \frac{H+h}{2} \right)}$$

liefert die Tabelle  $\mu = \frac{0,585 + 0,605}{2} = 0,595$ , daher ist

$$Q = 0,595 \times 0,30 \times 0,15 \times 4,43 \sqrt{0,125} = 0,0418 \text{ Cubikmeter.}$$

## §. 101.

### Ausfluß durch Oeffnungen in Wänden von bestimmter Dicke.

Um den Ausfluß durch Oeffnungen in Wänden von einer Dicke, wie solche in der Praxis vorkommen, richtig abzuschätzen,

<sup>1)</sup> Bemerkt muß werden, daß diese Tabellen in der angegebenen Folge der Druckhöhengrößen nicht den directen Versuchen entnommen, sondern aus diesen berechnet sind; eben so erstreckten sich die Versuche nur auf Druckhöhen bis zu 1<sup>m</sup>,7 (über der oberen Mündungskante), so daß die Erweiterung bis zu 3<sup>m</sup>,0 durch Interpolation geschehen mußte.

<sup>2)</sup> Weisbach's Versuche (Hydraulische Untersuchungen, 2. Abth., S. 65) bestätigten ebenfalls diese allgemeinen Angaben; speciell fand derselbe für Mündungen in dünner Wand bei vollkommener Contraction nachstehende Werthe:

Druckhöhe	Durchmesser	$\mu$	Druckhöhe	Durchmesser	$\mu$
0 <sup>m</sup> ,60	0 <sup>m</sup> ,01	0,628	0 <sup>m</sup> ,25	0 <sup>m</sup> ,01	0,637
—	0 <sup>m</sup> ,02	0,621	—	0 <sup>m</sup> ,02	0,629
—	0 <sup>m</sup> ,03	0,614	—	0 <sup>m</sup> ,03	0,622
—	0 <sup>m</sup> ,04	0,607	—	0 <sup>m</sup> ,04	0,614

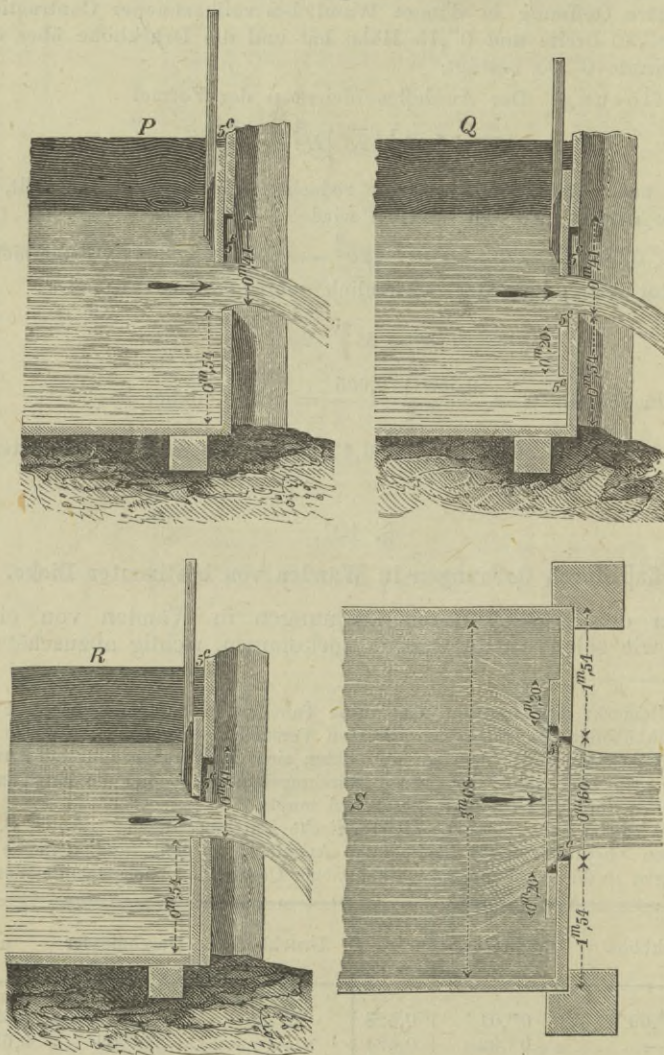
<sup>3)</sup> D'Aubuisson, Traité d'hydraulique, §. 27.

<sup>4)</sup> Hachette, Annales de Chimie, T. I, p. 202.

hat Lesbros Versuche über den Ausfluß bei Schützenöffnungen angestellt, wie sie Fig. 102 in *P*, *Q*, *R* und *S* abgebildet sind<sup>1)</sup>.

Die Resultate dieser Versuche sind auszugsweise in folgender Tabelle (S. 261) zusammengestellt.

Fig. 102.



<sup>1)</sup> Letztere Figur ist eigentlich nur der Grundriß von Figur *Q*, entspricht jedoch zugleich ganz dem Grundrisse von *R*, so wie dem von *P*, wenn man sich, in letzterem Falle, die Bohle unterhalb der horizontalen Mündungsbasis entfernt denkt.

8-2

100

S-98



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-349452

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297485