

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw. ....

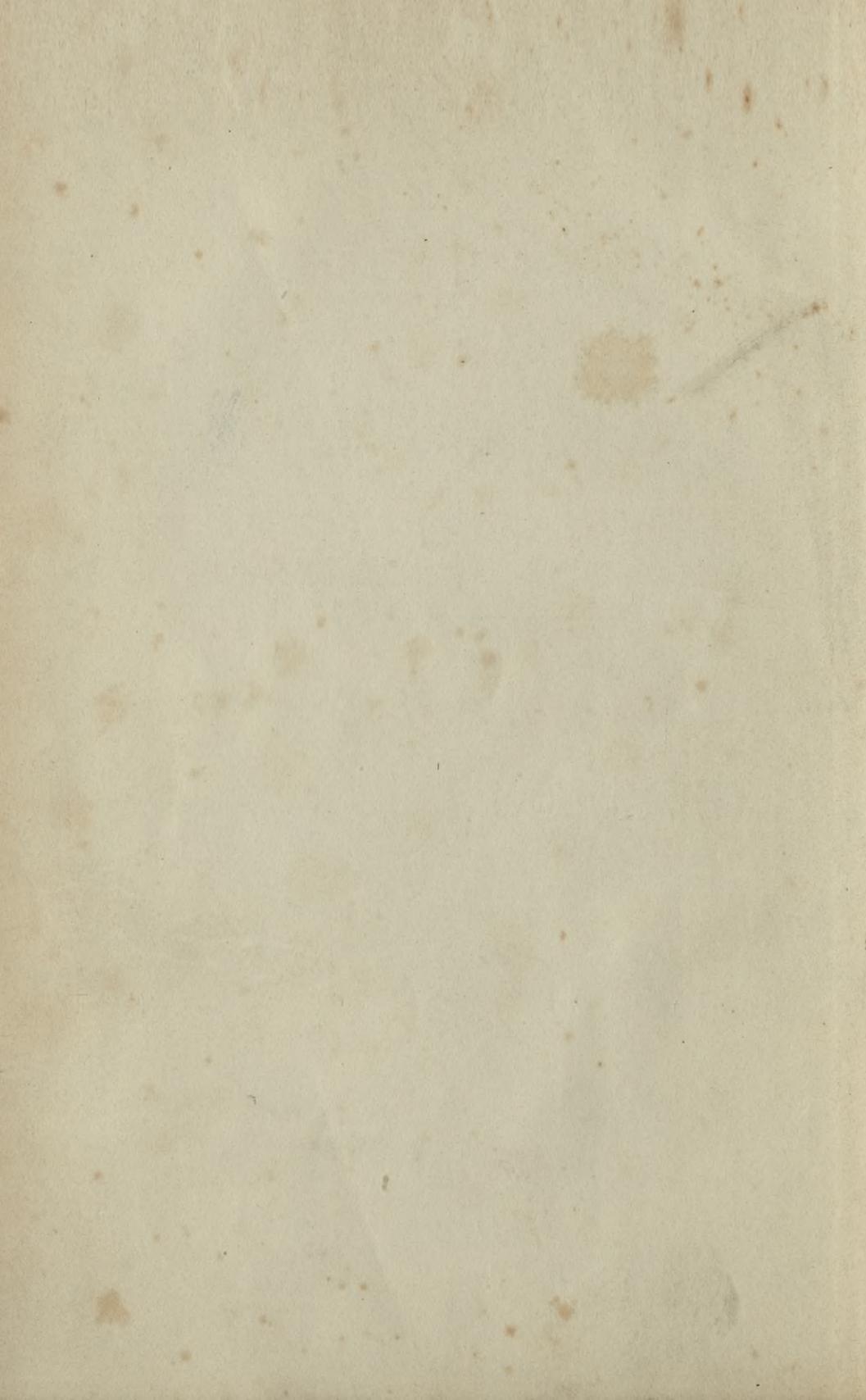
~~1202~~

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297081





*Inz. Stanislaw Resny*

DIE  
GRAPHISCHE STATIK  
DER  
BAUKONSTRUKTIONEN

VON

HEINRICH F. B. MÜLLER-BRESLAU

Dr.-Ing., GEH. REGIERUNGSRAT UND PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCH-  
SCHULE IN BERLIN.

Band II.  
Zweite Abteilung.

Mit 410 Abbildungen im Text und 2 Tafeln.



LEIPZIG  
Alfred Kröner Verlag  
1908.



T-348994

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

**BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW**

Akc. Nr.

~~145~~ ~~147~~

II. ~~1202~~

## Vorwort.

Die ersten sechs Bogen der zweiten Abteilung des zweiten Bandes der *Graphischen Statik der Baukonstruktionen* sind als besondere Lieferung bereits 1896 erschienen. Die Vollendung dieser Abteilung wurde verzögert durch die notwendig gewordenen neuen Auflagen von Band I und II, 1 und andere dringende Arbeiten des Verfassers, auch durch die Erweiterung des ursprünglich geplanten Umfanges. Vor allem schien es mir geboten, die zeichnerischen Verfahren überall dort durch analytische Untersuchungen zu ergänzen, wo der rechnerische Weg gleichwertig ist oder gar den Vorzug verdient. Dies letztere wird mit zunehmender Benutzung der Rechenmaschine auf immer weiteren Gebieten der Fall werden. Auch die Kürzung der Rechenarbeit durch Herstellung von Tafeln häufig vorkommender Zahlenwerte wird oft zugunsten des rechnerischen Verfahrens sprechen.

Der erste Abschnitt behandelt die Formveränderung des geraden, auf Biegung beanspruchten Stabes, sowie den an beiden Enden eingespannten Balken. Hieran schließt sich im Abschnitt II die Untersuchung des auf mehreren starren oder elastischen Stützen ruhenden Balkens, unter Beifügung zahlreicher, die allgemeinen Gesetze erläuternden Aufgaben.

Von den Anwendungen der Theorie des elastisch gestützten Balkens sind hervorzuheben: die Berechnung der Zwischenträger von Brücken mit Berücksichtigung der in den bekannten Arbeiten über diese Frage vernachlässigten Durchbiegungen der Hauptträger, verschiedene Anordnungen von Balken auf starr mit ihnen verbundenen Säulen, die Streckbalken von Schiffbrücken, die auf einer großen Anzahl gleichartiger, in gleichen Abständen ruhenden Balken.

Die auf den Seiten 226 bis 229 für Balken auf elastischen Stützen

aufgestellten Tabellen dürften insofern eine Ergänzung der bekannten Tabellen von A. Ritter bilden, als sie auch die zur vollständigen Darstellung der Einflußlinien innerhalb der einzelnen Öffnungen erforderlichen Zahlen  $\beta$  enthalten. Diese Darstellung ist besonders wichtig bei verhältnismäßig kleinen Stützensenkungen. An einem Beispiele wird gezeigt, wie man die Zahlen der Tabelle auch zur Ermittlung des Einflusses von zur Balkenachse parallelen Lasten benutzen kann.

§ 15 behandelt den Balken auf ununterbrochener, gleichförmiger, elastischer Unterlage. Die Ergebnisse dieser Untersuchung lassen sich auf den Fall in kurzen Abständen angeordneter elastischer Einzelstützen übertragen und führen dann zu sehr einfachen und doch zuverlässigen Formeln, was wohl am deutlichsten durch die in Nr. 75 mitgeteilte Berechnung einer Schiffbrücke gezeigt wird.

Den Schluß des Abschnittes II bildet die Untersuchung der Formveränderung und Beanspruchung eines zylindrischen Wasserbehälters, die auf eine ähnliche Differentialgleichung führt, wie die Theorie des stetig unterstützten Balkens und aus diesem Grunde mit aufgenommen worden ist.

Abschnitt III beschäftigt sich mit den im Fachwerk infolge steifer Knoten entstehenden Biegungsspannungen. Abschnitt IV untersucht die Beanspruchung und die Formveränderung der durch steife Halbrahmen gestützten Gurtung einer offenen Balkenbrücke.

Abschnitt V ist der Versteifung des gelenkigen Stabzuges durch einen Balken gewidmet. Der Untersuchung verschiedener Hängewerke und Sprengwerke mittels Einflußlinien folgt die Theorie der durch einen vollwandigen Balken versteiften Kette, wobei auch der Einfluß der Änderungen  $\Delta y$  der Kettenordinaten  $y$  auf den Horizontalzug der Kette und die Biegemomente des Balkens berücksichtigt wird.

Abschnitt VI enthält die von mir im Zentralblatt der Bauverwaltung 1904 veröffentlichte Theorie der parabelförmigen Einflußlinien und zeigt u. a. auch die Berechnung von Balken auf mehreren starren Stützen mit Hilfe der im vorliegenden Buche erheblich erweiterten Tabelle der Werte  $P_i$ . Nun folgt im Abschnitt VII die zeichnerische Ermittlung der Verschiebungen der Knotenpunkte biegeunflexibler Stabzüge und deren Anwendung bei der Berechnung statisch unbestimmter Stabzüge, z. B. vollwandiger Bogenträger. Hier genügt eine kürzere Darstellung, weil sich ähnliche Untersuchungen in der ersten Abteilung des zweiten Bandes finden und der Unterschied zwischen der Behandlung fachwerkartiger und vollwandiger Tragwerke derselben Art nur in der Ermittlung der Formänderungen

besteht. Für die beiden wichtigsten Arten der Bogenträger, den Zweigelenkbogen und den an beiden Enden eingespannten Bogen sind im Abschnitt VIII noch ausführlichere analytische Untersuchungen angestellt worden.

Weitere Übungsaufgaben enthält mein Buch: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig, erste Auflage 1886, dritte Auflage 1904.

Ein Anhang bringt eine für Träger mit gleichlangen Feldern bestimmte Tabelle der an verschiedenen Stellen des Buches benutzten Zahlen  $\omega_R$ ,  $\omega_D$ ,  $\omega_P$ ,  $\omega''_P$ , durch welche die Berechnung vieler statisch unbestimmter Tragwerke erheblich vereinfacht wird.

Besonderen Dank schulde ich meinem Assistenten, Herrn Dipl.-Ing. Stumpf, Konstruktionsingenieur des Lehrstuhles für eiserne Brücken, für die bei der Ausarbeitung der Zahlenbeispiele, der Herstellung der Figuren, dem Rechnen der Tabellen geleistete wertvolle Unterstützung und für das Lesen der Korrektur.

Binz auf Rügen, Pfingsten 1908.

**H. Müller-Breslau.**

## Berichtigungen.

Seite 27, Zeile 14 v. o. lies Fig. 27 statt Fig. 17.

Die Gleichungen auf Seite 46 sollen lauten:

$$\eta'_L = k \left( \frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3} \right) = \frac{k \xi' (l - \xi') (l + \xi')}{l^3} = \frac{k \lambda (l + \xi')}{l^2}$$

$$M_L = \frac{\lambda a_r}{\xi l} \left[ l - \frac{\xi (l + \xi')}{l} \right]$$

$$\left[ \frac{\xi (l + \xi')}{l} \right]_{\max} = l.$$

Seite 70, Gleichung (18) lies  $\frac{e'_{r-1}}{l_r}$  statt  $\frac{e'_{r+1}}{l_r}$ .

„ 71 in Figur 76 lies  $\beta_{i(r-1)} l_r^2$  statt  $\beta_{i(r-1)} l_r$ ;  $\beta_{ir} l_r^2$  statt  $\beta_{ir} l_r$ .

„ 76, Seitenüberschrift lies § 6 statt § 2.

„ 76, Zeile 20 v. o. lies + statt -.

„ 105, letzte Spalte, Zeile 10 und 12 v. u. lies 0,3088 statt 0,3089.

„ 105, letzte Spalte. Die Formel für  $\omega_P''$  lautet:

$$\omega_P'' = \frac{x^4}{l^4} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} = 2\omega_D - \omega_P = \omega_R (1 + \omega_R).$$

In der letzten Zeile muß stehen  $\frac{\lambda l^3}{15}$  statt  $\frac{\lambda l^3}{30}$ .

„ 106, Zeile 3 v. u. lies  $\frac{1}{15}$  statt  $\frac{1}{30}$ .

„ 118, Gleichung (38) lies 6,53 statt 2,08.

„ 119, Zeile 4 v. o. sind hinter Parabel die Worte einzuschalten: von der der Pfeilhöhe  $\frac{3}{4}v$ .

„ 129, Gleichung (25) lies  $u_r'$  statt  $d_r'$ .

„ 129, Gleichung (26) lies  $u_{r+1}$  statt  $d_{r+1}$ .

„ 129, Zeile 6 v. u. lies  $l_{r+1}$  statt  $l_r$ .

„ 152, Zeile 13 v. o. lies unendlich statt unendlichen.

„ 168, Zeile 20 und 2 v. u. lies (88) bis (91) statt (88) und (91).

„ 192, Zeile 5 v. u. lies  $M_i$  statt  $M_{ir}$ .

„ 199, Zeile 5 v. u. lies tm und tem statt t/m und t/cm.

„ 203, Zeile 2 v. o. lies  $\frac{209}{56}$  statt  $\frac{224}{56}$ .

„ 209, Zeile 9 v. o. lies  $E$  statt  $EJ$ .

„ 213, Zeile 10 v. o. lies 0,5 statt 0,2.

„ 244, Zeile 1 v. u. lies Stützweite statt Stützwerte.

„ 248, Zeile 3 und 4 v. o. muß  $p$  gestrichen werden.

„ 251, Zeile 7 v. u. lies  $\text{cm}^4$  statt  $\text{cm}^3$ .

„ 267, Zeile 2 v. u. lies  $\delta^2$  statt  $d^2$ .

„ 288, Gleichung (42) lies  $-gk^2$  statt  $+gk^2$ .

„ 290, Gleichung (53) lies  $-gk^2$  statt  $+gk^2$ .

„ 321, Zeile 9 v. u. lies 7,19 statt 7,09.

„ 400, Zeile 5 v. o. lies  $H_a$  statt  $H_k$ .

„ 423 und 424, Spalte 6 lies  $\bar{P}_i$  statt  $P_i'$ .

„ 516, Gleichung (8) lies  $Q_a = \sin \varphi$  statt  $Q_a \sin \varphi$ .

# Inhalt.

## I. Abschnitt.

Formveränderung des geraden Stabes. Anwendung auf Blechbalken.

	Seite
§ 1. Grundgesetze . . . . .	3
§ 2. Die Biegungslinie . . . . .	14
§ 3. Der an beiden Enden eingespannte gerade Stab . . . . .	25

## II. Abschnitt.

Der Balken auf mehreren Stützen.

§ 4. Balken mit beliebig vielen Stützpunkten, deren Verschiebungen gegeben sind . . . . .	32
§ 5. Fortsetzung. Einfluß einer gleichförmigen Belastung . . . . .	45
§ 6. Balken auf elastischen Stützen . . . . .	61
§ 7. Gelenklose Zwischenträger von Brücken . . . . .	77
§ 8. Anwendung der allgemeinen Elastizitätsgleichungen auf statisch unbestimmte Balken . . . . .	90
§ 9. Anwendung des Satzes $\delta_m = \frac{dA_i}{dP_m} - \frac{dL}{dP_m}$ . . . . .	107
§ 10. Sonderfälle des Balkens auf starren Stützen. Nachtrag zur Behandlung des allgemeinen Falles . . . . .	112
§ 11. Vollwandige Träger auf starr mit ihnen verbundenen Säulen . . . . .	130
§ 12. Balken auf schwimmenden Unterstützungen (Schiffbrücken) . . . . .	169
§ 13. Balken auf sehr vielen starren oder elastisch senkbaren Stützen . . . . .	202
§ 14. Graphische Untersuchung des gelenklosen Balkens mit veränderlichem Querschnitte auf elastisch senkbaren Stützen . . . . .	230
§ 15. Balken auf gleichförmiger, ununterbrochener elastischer Unterlage . . . . .	237
§ 16. Formänderung und Beanspruchung eines zylindrischen Wasserbehälters mit lotrechter Achse . . . . .	252

## III. Abschnitt.

Nebenspannungen im Fachwerk mit steifen Knotenverbindungen.

§ 17. Biegungsspannungen in Fachwerken, deren Gurtstäbe miteinander vernietet und deren Füllungsstäbe gelenkartig befestigt sind . . . . .	269
--	-----

	Seite
§ 18. Fachwerke, deren sämtliche Stäbe in den Knoten durch Niete befestigt sind . . . . .	291
§ 19. Einfluß der Momente $\mathfrak{M}$ auf die Spannkkräfte in den Stäben . . . . .	305

#### IV. Abschnitt.

Sicherung der oberen Gurtung einer Trogbrücke  
durch biegungsfeste Halbrahmen.

§ 20. Voraussetzung von Kugelgelenken an den Enden eines jeden Fachwerkstabes . . . . .	309
§ 21. Gelenklose, durch Halbrahmen gestützte Gurtung . . . . .	326

#### V. Abschnitt.

Versteifung des gelenkigen Stabzuges durch einen Balken.

§ 22. Hängewerke und Sprengwerke . . . . .	341
§ 23. Kette, versteift durch einen Balken . . . . .	393

#### VI. Abschnitt.

Parabelförmige Einflußlinien.

§ 24. Formeln und Tabellen . . . . .	415
§ 25. Stabbogen mit darüberliegendem Versteifungsbalken . . . . .	429
§ 26. Benutzung der Tabellen für parabelförmige Einflußlinien bei der Berechnung mehrfach gestützter Balken . . . . .	450

#### VII. Abschnitt.

Der biegungsfeste Stabzug.

§ 27. Darstellung der Verschiebungen der Knotenpunkte . . . . .	478
§ 28. Berechnung statisch unbestimmter, biegungsfester Stabzüge . . . . .	484

#### VIII. Abschnitt.

Der vollwandige Bogen.

§ 29. Allgemeine Gesetze . . . . .	503
§ 30. Der Zweigelenkbogen . . . . .	513
§ 31. Der an beiden Enden eingespannte Bogen . . . . .	556

#### Anhang.

Tabelle der Zahlen  $\omega_R$ ,  $\omega_D$ ,  $\omega$ ,  $\omega_I''$ .

#### Literatur.

## ZWEITE ABTHEILUNG.

Formveränderung vollwandiger Träger. — Untersuchung statisch unbestimmter vollwandiger Träger. — Nebenspannungen in Fachwerken in Folge von starren Knotenpunktverbindungen.

---



## I. Abschnitt.

### Formveränderung des geraden Stabes. Anwendung auf Blechbalken.

#### § 1.

#### Grundgesetze.\*)

1. Die **Normalspannungen**. Auf einen geraden Stab mögen beliebig gerichtete, in ein und derselben Ebene gelegene Kräfte wirken. Die Kräfteebene enthalte die Mittellinie des Stabes und schneide jeden Stabquerschnitt in einer Hauptachse  $vv$ ; Fig. 1 u. 2. Die Spannungs-Nulllinie  $nn$  ist dann für jeden Querschnitt eine zur  $vv$  rechtwinklige Gerade und die *Biegungslinie* des Stabes — auch *elastische Linie* genannt — fällt mit der Kräfteebene zusammen.

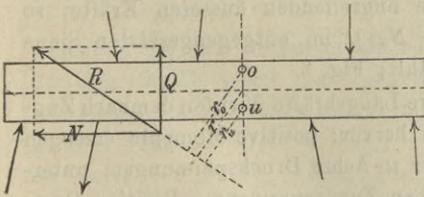


Fig. 1.

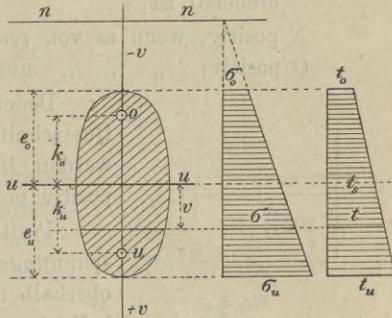


Fig. 2.

In allen von der  $nn$  gleich weit entfernten Querschnittsteilchen entstehen gleich grosse Normalspannungen  $\sigma$ , deren Grösse durch die Gleichung

$$(1) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$$

\*) Vergl. Band I, Abschnitt III, S. 48.

gegeben ist, wobei bedeutet:

$F$  den Inhalt des Querschnitts,

$J$  das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die zur  $v$ -Achse rechtwinklige Schwerachse  $uu$  des Querschnitts,

$v$  den Abstand des Querschnittstheilchens von der  $u$ -Achse,

$M$  das Angriffsmoment, bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnitts,

$N$  die Längskraft für den fraglichen Querschnitt.

Ausser den Normalspannungen  $\sigma$  werden noch Schubspannungen  $\tau$  hervorgerufen, welche aber vorläufig aus der Acht gelassen werden sollen.

Ist  $R$  die Mittelkraft der auf der einen Seite des fraglichen Querschnitts angreifenden äusseren Kräfte und  $r$  die Länge des vom Querschnitts-Schwerpunkte auf  $R$  gefällten Lothes, so ist

$$M = Rr.$$

Die Zerlegung von  $R$  nach den Richtungen von Stabachse und  $v$ -Achse liefert die Längskraft  $N$  und die Querkraft  $Q$ .

Hinsichtlich der Vorzeichen werde für den besonders häufigen Fall eines wagerechten Balkens folgendes festgesetzt:

Wird  $R$  als Mittelkraft der links vom fraglichen Querschnitte angreifenden äusseren Kräfte aufgefasst, so sei

$M$  positiv, wenn es rechtsdrehend (d. h. im Sinne des Uhrzeigers drehend) ist,

$N$  positiv, wenn es von rechts nach links gerichtet ist

$Q$  positiv, „ „ „ unten „ oben „ „ .

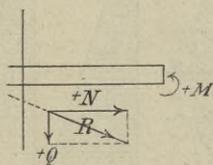


Fig. 3.

Bedeutet  $R$  die Mittelkraft der rechts vom Querschnitte angreifenden äusseren Kräfte, so werden  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  im entgegengesetzten Sinne positiv gezählt; Fig. 3.

Positive Längskräfte  $N$  rufen demnach Zugspannungen hervor; positive Momente erzeugen oberhalb der  $u$ -Achse Druckspannungen, unterhalb derselben Zugspannungen. Positive Querkräfte verursachen im rechten Endquerschnitte des linken Stabtheiles abwärts gerichtete Schubspannungen.

Die Normalspannungen in den äussersten Querschnittstheilchen sind:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_u = \frac{N}{F} + \frac{Me_u}{J} = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_u} \\ \sigma_o = \frac{N}{F} - \frac{Me_o}{J} = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_o} \end{array} \right.$$

wo

$$(3) \quad W_u = \frac{J}{e_u} \quad \text{und} \quad W_o = \frac{J}{e_o}$$

die sogenannten *Widerstandsmomente des Querschnitts* sind.

Durch Einführung der Momente, bezogen auf die in der  $v$ -Achse gelegenen Kernpunkte  $o$  und  $u$ , nämlich

$$M^o = Rr_o \quad \text{und} \quad M^u = Rr_u,$$

lassen sich die Gleichungen (2) auch auf die Form bringen:

$$(4) \quad \sigma_u^o = + \frac{M^o}{W_u}; \quad \sigma_o = - \frac{M^u}{W_o} \quad *)$$

Die Kernpunkte haben von der  $u$ -Achse die Abstände

$$(5) \quad k_o = \frac{W_u}{F}; \quad k_u = \frac{W_o}{F}.$$

**2. Formänderungen infolge der Normalspannungen und Temperaturänderungen.** Im Abstände  $v$  von der  $u$ -Achse ändert sich die ursprüngliche Entfernung  $dx$  des betrachteten Querschnitts  $CC$  von dem unendlich nahe gelegenen Querschnitte  $C'C'$  um die Strecke

$$(6) \quad \Delta dx_o = dx \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right),$$

wo  $E$  die Elasticitätsziffer (Elasticitätsmodul)

$t$  „ Temperaturänderung an der Stelle  $v$  (Fig. 2)

$\varepsilon$  das Verlängerungsverhältniss für  $t = 1$

bedeuten.  $E$  und  $\varepsilon$  seien in allen Punkten des Querschnitts gleich gross angenommen, und  $t$  möge sich, ebenso wie  $\sigma$ , nur mit  $v$  ändern. Für  $v = 0$ ,  $v = +e_u$ ,  $v = -e_o$  sei beziehw.  $t = t_s$ ,  $t = t_u$ ,  $t = t_o$ .

Dann ist die Längenänderung des Theilchens  $dx$  der Stabachse (wegen  $\sigma = \frac{N}{F}$  für  $v = 0$ ):

$$(7) \quad \Delta dx = dx \left( \frac{N}{EF} + \varepsilon t_s \right)$$

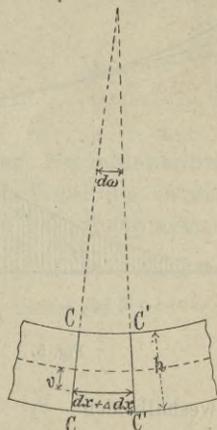


Fig. 4.

\*) Vergl. Band I, S. 147 u. 71. Die früher gebrauchten Bezeichnungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  wollen wir jetzt durch  $\sigma_u$ ,  $\sigma_o$  ersetzen.

während sich an den Stellen  $v = +e_u$  und  $v = -e_o$  der ursprüngliche Abstand der beiden Querschnitte um

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta dx_u = dx \left( \frac{N}{EF} + \frac{Me_u}{EJ} + \varepsilon t_u \right) \text{ beziehw.} \\ \Delta dx_o = dx \left( \frac{N}{EF} - \frac{Me_o}{EJ} + \varepsilon t_o \right) \end{cases}$$

ändert. Ist also die Höhe des Querschnitts  $= h$ , so beträgt der Winkel  $d\omega$ , um welchen sich die beiden Querschnitte  $CC$  und  $C'C'$  gegen einander drehen

$$(9) \quad \begin{aligned} d\omega &= \frac{\Delta dx_u - \Delta dx_o}{h} \text{ d. i.} \\ d\omega &= \left( \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{t_u - t_o}{h} \right) dx. \end{aligned}$$

Offenbar ist  $d\omega$  auch der Contingenzwinkel der elastischen Linie des Stabes, d. h. der Winkel, welchen zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten der elastischen Linie mit einander bilden.

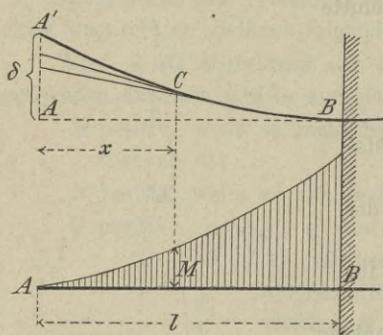


Fig. 5.

Sei beispielsweise  $AB$  ein ursprünglich wagerechter, am Ende  $B$  eingespannter, im übrigen freier Stab, der infolge irgend einer Belastung die Gestalt  $A'CB$  annimmt. Gegeben sei die Momentenfläche (in Fig. 5 schraffirt), gesucht die Durchbiegung  $\delta$  am freien Ende. Zwei an den Stellen  $x$  und  $x + dx$  an die elastische Linie gelegte Tangenten schneiden auf  $AA'$  die Strecke

$$xd\omega = x \left( \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{t_u - t_o}{h} \right) dx$$

ab, weshalb sich

$$(10) \quad \delta = \int_0^l x d\omega = \int_0^l \frac{Mx dx}{EJ} + \int_0^l \frac{\varepsilon(t_u - t_o)}{h} x dx$$

ergibt und im Falle überall gleicher Werthe  $E, J, \varepsilon, h, t_u, t_o$ :

$$(11) \quad \begin{cases} \delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l Mx dx + \varepsilon(t_u - t_o) \frac{l^2}{2h}, \text{ d. i.} \\ \delta = \frac{\mathfrak{S}_M}{EJ} + \varepsilon(t_u - t_o) \frac{l^2}{2h}, \end{cases}$$

wo  $\mathfrak{S}_M$  das statische Moment der Momentenfläche in Bezug auf die Senkrechte durch  $A$  bedeutet.

Ist  $J$  veränderlich bei überall gleichem  $h^*$ ), so schreiben wir

$$\delta = \frac{1}{EJ_c} \int_0^l M \frac{J_c}{J} x dx + \varepsilon(t_u - t_o) \frac{l^2}{2h},$$

unter  $J_c$  ein beliebig grosses aber konstantes Trägheitsmoment verstanden; sodann multiplizieren wir die Ordinaten  $M$  der Momentenlinie mit den entsprechenden Werthen  $J_c:J$  und bestimmen das auf die Senkrechte durch  $A$  bezogene statische Moment  $\mathfrak{S}'_M$  der so erhaltenen *verzerrten Momentenfläche*. Es ist dann:

$$(12) \quad \delta = \frac{\mathfrak{S}'_M}{EJ_c} + \varepsilon(t_u - t_o) \frac{l^2}{2h}.$$

Ist der Stab bei  $B$  nicht wagerecht sondern unter einem verschwindend kleinen Winkel eingespannt Fig. 6, so darf man die Gleich. 11. u. 12 auch auf den senkrecht gemessenen Abstand  $AA' = \delta$  anwenden, weil sich derselbe von der rechtwinklig zur Stabachse gemessenen Durchbiegung nur um eine verschwindend kleine Grösse höherer Ordnung unterscheidet.

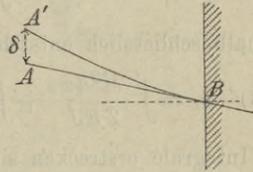


Fig. 6.

### 3. Formänderungsarbeit infolge der Normalspannungen.

Behufs gelegentlicher Verwerthung der in der Einleitung entwickelten *Castigliano'schen* Sätze berechnen wir noch die Formänderungsarbeit  $A$  und den Ausdruck

$$A_i = A + \int \sigma \varepsilon t dV = A + \iint \sigma \varepsilon t dx dF.$$

Der Einfluss der  $\sigma$  auf  $A$  ist:

$$A = \int \frac{\sigma^2 dV}{2E} = \iint \frac{\sigma^2 dx dF}{2E}.$$

Wir integrieren zuerst über den Querschnitt, sodann längs der Stabachse und erhalten mit

$$\sigma = \frac{Mv}{J} + \frac{N}{F}$$

\*) Bei Anwendung der obigen Formeln auf Blechbalken empfiehlt es sich, unter  $h$  die in der Regel konstante Stehblechhöhe zu verstehen. Die Veränderlichkeit von  $J$  ist dann eine Folge verschieden grosser Gurtquerschnitte.

und mit Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma dF = N, \quad \int \sigma v dF = M,$$

für die Formänderungsarbeit den Werth

$$A = \int \frac{dx}{2E} \int \sigma^2 dF = \int \frac{dx}{2E} \left[ \frac{M}{J} \int \sigma v dF + \frac{N}{F} \int \sigma dF \right]$$

$$A = \int \frac{M^2 dx}{2EJ} + \int \frac{N^2 dx}{2EF},$$

ferner, wegen  $t = t_s + \frac{t_u - t_o}{h} v$ ,

$$\begin{aligned} \iint \sigma \varepsilon t dx dF &= \int dx \varepsilon \int \sigma \left( t_s + \frac{t_u - t_o}{h} v \right) dF \\ &= \int \varepsilon t_s N dx + \int \varepsilon (t_u - t_o) \frac{M}{h} dx, \end{aligned}$$

weshalb schliesslich entsteht:

$$(13) \quad A_i = \int \frac{M^2 dx}{2EJ} + \int \frac{N^2 dx}{2EF} + \int \varepsilon (t_u - t_o) \frac{M}{h} dx + \int \varepsilon t_s N dx.$$

Die Integrale erstrecken sich über die ganze Stablänge.

Ausser den Formänderungen  $\Delta dx$  und  $d\omega$  werden durch die  $\sigma$  und  $t$  noch Aenderungen der Querschnittsabmessungen hervorgerufen, die aber als unwesentlich in den folgenden Untersuchungen vernachlässigt werden dürfen. Ein Beitrag zur Behandlung dieser Frage findet sich in des Verfassers Buch: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, Leipzig, Baumgärtners Buchhandlung 1886, § 22.

**4. Die Schubspannungen.** Für die im vorliegenden Buche zu behandelnden Aufgaben genügt hinsichtlich der Schubspannungen  $\tau$  die Beschränkung auf den Fall eines bezüglich der  $v$ -Achse symmetrischen Querschnitts. Ist die Querschnittsbreite  $2z$  eine stetige Funktion von  $v$  (Fig. 7), so wird durch die Querkraft  $Q$  in irgend einem Punkte  $D$  des Querschnitts eine Schubspannung  $\tau$  hervorgerufen, welche die  $v$ -Achse in einem Punkte  $H$  schneidet, dessen Lage man erhält, indem man durch  $D$  die der  $u$ -Achse parallele Sehne  $AB$  und in  $B$  eine Tangente  $BH$  an den Querschnittsumfang zieht.\*) Zerlegt man  $\tau$  in die Seitenspannungen  $\tau_v$  senkrecht zur  $v$ -Achse und  $\tau_u$  senkrecht zur  $u$ -Achse, so ist:

$$(14) \quad \tau_u = \frac{QS}{2zJ}; \quad \tau_v = \tau_u \operatorname{tg} \varphi \frac{u}{z}$$

\*) Vergl. auch Band I, Seite 80.

wobei  $S$  das auf die  $u$ -Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne  $AB$  begrenzten Querschnittsteile (z. B. des Theiles  $ABC$ )

$J$  das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts bezogen auf die  $u$ -Achse und

$\varphi$  den Winkel bedeutet, welchen die in  $B$  an den Querschnitt gelegte Tangente mit der  $v$ -Achse einschliesst.

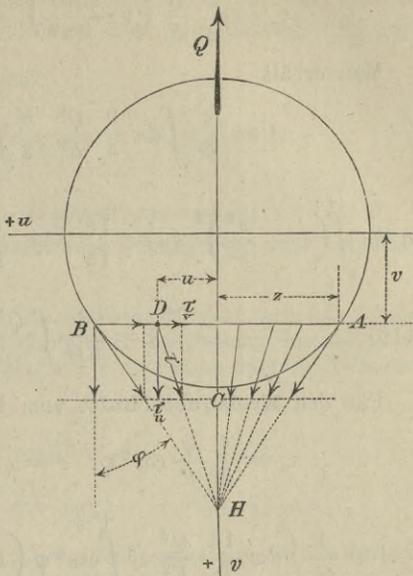


Fig. 7.

**5. Formänderung infolge der Schubspannungen.**

Den Einfluss der Spannungen  $\tau$  auf die Formänderung des Stabes werden wir mit Hilfe des Castiglianoschen Satzes von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit  $A$  ermitteln und bestimmen daher zunächst den von den Schubspannungen abhängigen Theil von  $A$ . Derselbe beträgt für den hier stets vorausgesetzten Fall eines konstanten Gleitmoduls  $G$  nach Seite 47, Gleich. 50, der Einleitung\*):

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2G} \int (\tau_u^2 + \tau_v^2) dV = \frac{1}{2G} \int dx \iint (\tau_u^2 + \tau_v^2) du dv \\
 &= \frac{1}{2G} \int dx \iint \tau_u^2 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{u^2}{z^2} \right) du dv \\
 &= \frac{1}{2G} \int dx \int \tau_u^2 dv \int_{-z}^{+z} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{u^2}{z^2} \right) du \text{ d. i.}
 \end{aligned}$$

$$(15) \quad A = \frac{1}{G} \int dx \int \tau_u^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) z dv.$$

Beispielsweise ist für einen Rechteckquerschnitt von der Breite  $b$  und der Höhe  $h = 2e$ :

\*) Siehe Abtheilung 1 dieses Bandes.

$$\tau_u = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right), \quad z = \frac{1}{2} b, \quad \varphi = 0.$$

Man erhält

$$A = \frac{1}{G} \int dx \frac{9}{4} \frac{Q^2}{F^2} \frac{b}{2} \int_{-e}^{+e} \left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right)^2 dv,$$

und da  $\int_{-e}^{+e} \left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right)^2 dv = \frac{16}{15} e = \frac{8F}{15b}$  ist,

$$(16) \quad A = \frac{3}{5G} \int \frac{Q^2 dx}{F}.$$

Für den **Kreisquerschnitt** vom Radius  $e$  ist

$$\tau_u = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \cos^2 \varphi, \quad z = e \cos \varphi, \quad v = e \sin \varphi$$

$$A = \frac{1}{G} \int dx \frac{16}{9} \frac{Q^2}{F^2} e^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) \cos^2 \varphi d\varphi,$$

und wegen

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^6 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$(17) \quad A = \frac{16}{27G} \int \frac{Q^2 dx}{F}.$$

Allgemein darf gesetzt werden

$$(18) \quad A = \frac{\kappa}{2G} \int \frac{Q^2 dx}{F},$$

wobei  $\kappa$  eine von der Gestalt des Querschnitts abhängige Zahl bedeutet.

Für das Rechteck ist  $\kappa = \frac{6}{5}$  und für den Kreis  $\kappa = \frac{32}{27}$ .

Wir haben bereits im ersten Bande (Seite 81) unseres Werkes darauf hingewiesen, dass die Gleichungen (14) unbrauchbar werden, sobald die von  $v$  abhängigen Größen  $z$  und  $\varphi$  stellenweise unstetig sind, ein Fall, der gerade bei einem der wichtigsten Querschnitte, nämlich dem Querschnitte des **Blechbalkens** vorliegt. Hier empfehlen wir allen überflüssigen Feinheiten der Rechnung durch die Annahme aus dem

Wege zu gehen, es vertheile sich die Querkraft  $Q$  nur über den Querschnitt  $F_s$  des Stehblechs, über diesen aber gleichmässig. Es ergibt sich dann  $\tau_u = \frac{Q}{F_s}$ ,  $\tau_v = 0$  und

$$(19) \quad A = \frac{1}{2G} \int \frac{Q^2 dx}{F_s} = \frac{1}{2G} \int \frac{x Q^2 dx}{F}$$

die Ziffer  $x$  ist hiernach für den Blechbalkenquerschnitt  $x = F : F_s$ ; dieselbe ist im allgemeinen für verschiedene Querschnitte desselben Balkens verschieden gross.

Bedeutet  $S_g$  und  $J_g$  bezieh. das statische Moment und das Trägheitsmoment der aus Winkelisen und Kopfplatten bestehenden Gurtung, bezogen auf die  $u$ -Achse, ferner  $h_1$  die Höhe und  $\delta$  die Stärke des Stehblechs, so hat man in die Formel

$$\tau_u = \frac{QS}{2zJ}$$

einzusetzen:

$$S = S_g + \frac{1}{8} \delta h_1^2 - \frac{1}{2} \delta v^2 = S_c - \frac{1}{2} \delta v^2 \text{ und } 2z = \delta$$

und erhält dann, bei Vernachlässigung der Schubspannungen in den Gurtungen:

$$A = \frac{1}{2G} \int dx \frac{Q^2}{\delta^2 J^2} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left( S_c - \frac{1}{2} \delta v^2 \right)^2 \delta \cdot dv = \frac{1}{2G} \int \frac{x Q^2 dx}{F}$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{F}{J^2 \delta} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}} \left( S_c - \frac{1}{2} \delta v^2 \right)^2 dv \\ &= \frac{F h_1}{J^2 \delta} \left[ S_c^2 - \frac{\delta S_c h_1^2}{12} + \frac{\delta^2 h_1^4}{320} \right] \\ &= \frac{F h_1}{J^2 \delta} \left[ \left( S_g + \frac{\delta h_1^2}{12} \right)^2 + \frac{\delta^2 h_1^4}{720} \right]. \end{aligned}$$

Das Glied  $\frac{\delta^2 h_1^4}{720}$  darf stets gegen

$\left( S_g + \frac{\delta h_1^2}{12} \right)^2$  vernachlässigt werden; setzt man dann noch  $h_1 : \delta = h_1^2 : F_s$ , wo  $F_s$  den Stehblechquerschnitt bedeutet, so findet man schliesslich:

$$x = \frac{F}{F_s} \left[ \frac{h_1 \left( S_g + \frac{1}{12} \delta h_1^2 \right)^2}{J} \right].$$

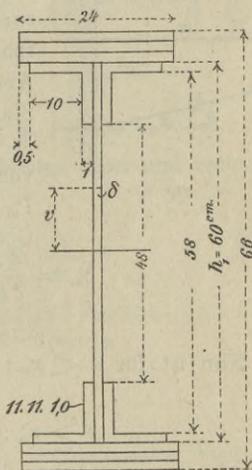


Fig. 8.

Für die in Fig. 8 angegebenen Querschnittsabmessungen ist z. B.:

$$S_g = \frac{1}{8} \left[ 24 \cdot 66^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 60^2 - 2 \cdot 10 \cdot 58^2 - 2 \cdot 1,0 \cdot 48^2 - 1,0 \cdot 60^2 \right] = 3182$$

$$J = \frac{1}{12} \left[ 24 \cdot 66^3 - 2 \cdot 0,5 \cdot 60^3 - 2 \cdot 10 \cdot 58^3 - 2 \cdot 1,0 \cdot 48^3 \right] = 213373$$

$$\delta = 1,0 \quad h_1 = 60 \quad \text{mithin}$$

$$\alpha = \frac{F}{F_s} \left[ \frac{60(3182 + 300)}{213373} \right]^2 = 0,96 \frac{F}{F_s}.$$

Lässt man die Kopfplatten weg, so erhält man

$$S_g = 3182 - \frac{24}{8} (66^2 - 60^2) = 914$$

$$J_g = 213373 - \frac{24}{12} (66^3 - 60^3) = 70002$$

$$\alpha = \frac{F}{F_s} \left[ \frac{60(914 + 300)}{70002} \right]^2 = 1,07 \frac{F}{F_s}.$$

In Anbetracht der immerhin unsicheren Grundlage der heutigen Theorie der Schubspannungen muss der Werth  $\alpha = 1,0 \frac{F}{F_s}$  als genügend genau angesehen werden.

Es liege nun ein wagerechter Stab  $AB$  von konstantem Querschnitt vor, Fig. 9, der bei  $B$  eingespannt ist und am Ende  $A$  durch eine zur Stabachse rechtwinklige Einzelkraft  $P$  beansprucht wird. Gesucht sei die ausschliesslich von den Schubspannungen abhängige Verschiebung  $\delta_m$  des im Abstände  $x_m$  von  $B$  gelegenen Punktes  $m$  der Stabachse.

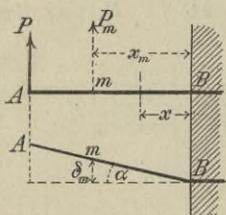


Fig. 9.

Bringen wir in  $m$  und in der Richtung von  $\delta_m$  die nachträglich  $= 0$  zu setzende Last  $P_m$  an, so erhalten wir

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m} = \frac{\alpha}{GF} \int_0^l Q \frac{dQ}{\partial P_m} dx.$$

$$\text{Nun ist für } x < x_m: \quad Q = P + P_m, \quad \frac{\partial Q}{\partial P_m} = 1$$

$$\text{,, } x > x_m: \quad Q = P, \quad \frac{\partial Q}{\partial P_m} = 0 \text{ also}$$

$$\delta_m = \frac{\alpha}{GF} \int_0^{x_m} P dx \text{ d. i.}$$

$$(20) \quad \delta_m = \frac{\alpha P x_m}{GF}.$$

Die Stabachse bleibt hiernach geradlinig und erfährt eine Neigung um

$$(21) \quad \alpha = \frac{\delta_m}{x_m} = \frac{\varkappa P}{GF}.$$

Dass  $m$  nur eine Verschiebung rechtwinklig zur Stabachse erleidet, nicht etwa noch eine solche in der Richtung der Stabachse, geht daraus hervor, dass eine mit der Stabachse zusammenfallende  $P_m$  keinen Einfluss auf  $Q$  ausübt, woraus dann  $\frac{\partial Q}{\partial P} = 0$  und  $\delta_m = 0$  folgt.

Zieht man also bei dem in Figur 10 dargestellten Belastungsfalle (Freitträger  $AB$  mit Einzellasten  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ) nur den Einfluss der Schubspannungen  $\tau$  in Betracht, so ergibt sich als elastische Linie des Stabes ein geradliniges Polygon. Entsprechen den Stababschnitten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  die Werthe  $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots$  und  $F_1, F_2, \dots$  so sind die Neigungswinkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$  der Polygonseiten:

$$\alpha_1 = \frac{\varkappa_1 Q_1}{GF_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\varkappa_2 Q_2}{GF_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{\varkappa_3 Q_3}{GF_3}, \quad \text{u. s. w.}$$

wo  $Q_1 = P_1, Q_2 = P_1 + P_2, Q_3 = P_1 + P_2 + P_3$  u. s. w.

Der Winkel  $\omega_2'$ , den die beiden Polygonseiten links und rechts von  $P_2$  mit einander bilden, ist

$$(22) \quad \omega_2' = \frac{1}{G} \left( \frac{\varkappa_2 Q_2}{F_2} - \frac{\varkappa_1 Q_1}{F_1} \right).$$

Bei überall gleichem Querschnitte ( $F_1 = F_2 = F_3 = \dots = F$  und  $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \dots = \varkappa$ ) geht Gleich. (22) über in

$$(23) \quad \omega_2' = \frac{\varkappa}{GF} P_2$$

und es ergibt sich hiernach ein der Last  $P_2$  proportionaler Werth  $\omega_2'$ .

Die Verschiebung  $\delta$  des Endpunktes  $A$  des Stabes wird

$$(24) \quad \delta = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots = \Sigma \alpha \lambda = \Sigma \frac{Q \varkappa \lambda}{GF},$$

und bei überall gleichem Querschnitte:

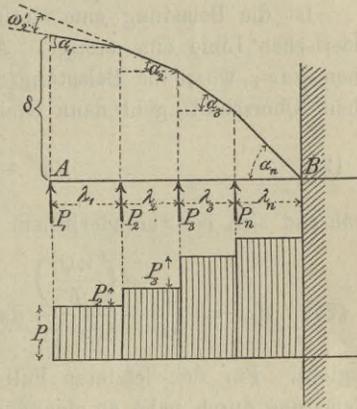


Fig. 10.

$$(25) \quad \delta = \frac{\alpha}{GF} \Sigma Q \lambda = \frac{\alpha \mathfrak{F}_0}{GF}$$

wo  $\mathfrak{F}_0$  den Inhalt der in Fig. 10 durch Schraffirung kenntlich gemachten Querkraftsfläche bedeutet.

Das eigenthümliche Ergebniss einer aus geraden Linien bestehenden elastischen Linie hat natürlich seinen Grund in der ungenauen Ermittlung der Schubspannungen in der Nähe der Lasten  $P$ ; denn die Annahme einer sprungweisen Aenderung der Schubspannungen ist nur ein Nothbehelf, geboten durch die Unmöglichkeit, den Spannungszustand an den Angriffsstellen der Lasten  $P$  schärfer zu bestimmen.

Ist die Belastung eine stetige, so wird auch die Krümmung der elastischen Linie eine stetige. An die Stelle der  $P$  treten Lasttheilchen  $p dx$ , wo  $p$  die Belastungsordinate bezeichnet. Bei überall gleichem Querschnitt geht dann Gleich. 23 über in

$$(26) \quad d\omega' = \frac{\alpha p dx}{GF},$$

während sich bei veränderlichem Querschnitte aus Gleich. (22)

$$(27) \quad d\omega' = \frac{1}{G} \frac{d\left(\frac{\alpha Q}{F}\right)}{dx} dx = \frac{1}{G} \left( \frac{\alpha}{F} p + Q \frac{d\left(\frac{\alpha}{F}\right)}{dx} \right) dx$$

ergiebt. Für den letzteren Fall empfiehlt es sich jedoch, die stetige Belastung durch nahe an einander liegende Einzellasten zu ersetzen und die Gleichung 22 anzuwenden. Den einzelnen Stabtheilchen sind konstante mittlere Werthe  $\alpha$  und  $F$  zuzuschreiben.

Schliesslich sei noch an die zwischen den Elasticitätsziffern  $G$  und  $E$  bestehende Beziehung

$$(28) \quad G = \frac{mE}{2(1+m)}$$

erinnert, wo  $m$  die Werthziffer der Querdehnung bedeutet. Für Schweisseisen und Flusseisen ist  $m = 3$  bis 4 also

$$(29) \quad G = \frac{3}{8} E \text{ bis } \frac{2}{5} E.$$

## § 2.

### Die Biegelinie.

6. — Da die Biegelinie eines steifen Stabes eine sehr flache Curve ist, so darf die Strecke, welche zwei aufeinanderfolgende Tan-

genten auf einer im Abstände 1 von der Berührungsstelle gezogenen Senkrechten abschneiden, gleich 1.  $d\omega$  gesetzt werden, wo  $d\omega$  den Contingenzwinkel bedeutet, Fig. 11. Daraus folgt aber, dass die Biegelinie als Seillinie senkrechter Lasten  $d\omega$  aufgefasst werden darf; die Polweite ist = 1 zu nehmen, oder besser = 1 :  $\nu$ , damit die Durchbiegungen in  $\nu$ -facher Vergrößerung gewonnen werden.

Wird zunächst von dem Einflusse der Schubspannungen abgesehen, so ist nach Gleich. 9, Seite 6:

$$d\omega = \left( \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{t_u - t_o}{h} \right) dx,$$

und die Biegelinie ist dann die Seillinie einer stetigen Belastung, welche an der Stelle  $x$  die Höhe

$$(1) \quad z = \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{t_u - t_o}{h}$$

hat.

Ist der Balkenquerschnitt konstant, so empfiehlt es sich, die Belastungshöhe

$$(2) \quad z = M + \varepsilon EJ \frac{t_u - t_o}{h}$$

einzuführen und die Seillinie mit der Polweite  $EJ$  (bezw.  $EJ : \nu$ ) zu zeichnen.

Ist dann  $t_u - t_o = 0$ , so wird sehr einfach  $z = M$ , d. h. die Momentenfläche wird zur Belastungsfläche der zu zeichnenden Seillinie.

Bei veränderlichem Querschnitte werden wir in der Regel die elastische Linie als Seillinie der Belastung

$$(3) \quad z = M \frac{J_c}{J} + \varepsilon EJ_c \frac{t_u - t_o}{h}$$

deuten, wo  $J_c$  ein beliebig grosses konstantes Trägheitsmoment bedeutet. Die Polweite muss dann =  $EJ_c$  (bezieh.  $EJ_c : \nu$ ) genommen werden.

Ist die Seillinie gezeichnet, so müssen behufs Bestimmung der Durchbiegungen  $\eta$  noch zwei Bedingungen zur Festlegung der Schlusslinie  $A'B'$  gegeben sein. In Fig. 11 ist  $AB$  als ein Feld eines über mehrere Stützen gestreckten Balkens gedacht; die Stützpunkte sind in senk-

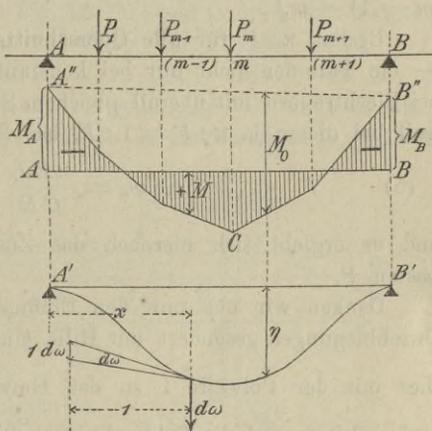


Fig. 11.

rechter Richtung unverschieblich angenommen und die Schlusslinie ist mit Hilfe der Bedingungen  $\eta_A = 0$ ,  $\eta_B = 0$  bestimmt worden.

7. — Soll auch der Einfluss der Schubspannungen berücksichtigt werden, so treten zu der  $z$ -Belastung (welche nach Gleich. 3 bestimmt sein möge) in den Angriffspunkten  $m$  der Lasten  $P_m$  nach Gleich. 22, Seite 13 noch die Einzelgewichte

$$(4) \quad w_m = \frac{EJ_c}{G} \left( \frac{\varkappa_{m+1} Q_{m+1}}{F_{m+1}} - \frac{\varkappa_m Q_m}{F_m} \right)^*$$

und zwar ist hierbei vorausgesetzt, dass eine auf den Balken etwa wirkende stetige Belastung durch eine Gruppe von Einzellasten ersetzt worden ist. Dabei sind  $\varkappa_m$ ,  $F_m$  Mittelwerthe für die Strecke  $(m-1) - m$ .

Besitzt  $\varkappa : F$  für alle Querschnitte des Balkens denselben Werth — ein Fall der nicht nur bei konstantem Querschnitte, sondern auch bei Blechträgern mit überall gleichem Stehblechquerschnitte  $F_s$  vorliegt, weil bei diesen ja  $\varkappa : F = 1 : F_s$  ist, Seite 11, so ist

$$(5) \quad w_m = \frac{\varkappa EJ_c}{GF} P_m,$$

und es ergibt sich hiernach das Zusatzgewicht  $w$  proportional den Lasten  $P$ .

Denken wir uns nun den Einfluss der Schubspannungen auf die Durchbiegungen gesondert mit Hilfe eines Seilpolygons dargestellt, welches mit der Polweite 1 zu den Gewichten  $w = \frac{\varkappa P}{GF}$  gezeichnet ist und welches, auf die Schlusslinie  $A'B'$  bezogen, die Ordinate  $\eta'$  besitzt, so muss sich, da die Momentenlinie  $A''CB''$  (Fig. 11) ein mit derselben Polweite 1 gezeichnetes Seilpolygon der Lasten  $P$  ist, offenbar verhalten:

$$\eta' : M_0 = \frac{\varkappa P}{GF} : P$$

und daraus folgt das überaus einfache Gesetz:

*Der Einfluss der Schubspannungen auf die Durchbiegung ist*

$$(6) \quad \eta' = \frac{\varkappa M_0}{GF}.$$

In der Regel wird es genügen, sich an der Hand des vorstehenden Ausdrucks, über den Einfluss der Schubspannungen auf irgend eine Ordinate der Biegelinie (in der Nähe von  $\eta_{max}$ ) zu unterrichten.

\*) Der Faktor  $EJ_c$  musste hinzugefügt werden, weil bei Anwendung der Gleich. 3 die Polweite der Biegelinie  $= EJ_c$  ist.

8. — Sind die Durchbiegungen eines Blechbalkens von veränderlichem Querschnitte für eine Reihe verschiedener Belastungsfälle darzustellen, so ist die folgende Abänderung des bisher eingeschlagenen Weges von Vortheil. Dieselbe stützt sich auf den Satz, dass man jedes einzelne Gewicht  $w$  eines Seilpolygons durch ein kleineres  $w'$  oder ein größeres  $w''$  ersetzen darf, wenn man nur die Polweite  $H$  in demselben Verhältnisse verkleinert oder vergrößert. Vgl. Fig. 12, in welcher  $I$  und  $II$  zwei aufeinander folgende Seiten eines Seilpolygons sind.

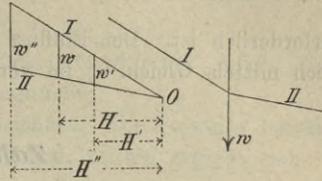


Fig. 12.

Es liege nun der Träger in Fig. 13 vor; sein Querschnitt sei sprunghaft veränderlich und besitze innerhalb der Strecken  $AC_1$ ,  $C_1C_2$ ,  $C_2C_3$ , ... die Trägheitsmomente  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ , ... Gesucht sei nur der Einfluss der Momente  $M$  auf die Durchbiegungen. Die Momentenfläche sei zur Belastungsfläche gewählt und so in Streifen zerlegt, dass die

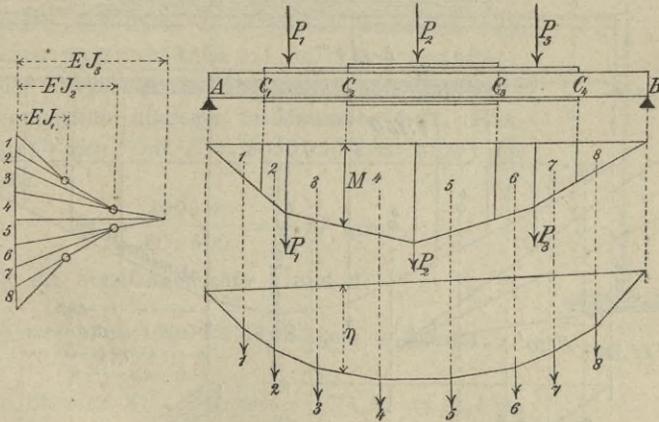


Fig. 13.

Senkrecht durch die Punkte  $C_1$ ,  $C_2$ , ... auch Grenzen von Streifen sind. Betrachtet man nun die Inhalte der Streifen als Gewichte und zeichnet man zu denselben in einander übergehende Seilpolygone, deren Polweiten bezieh.  $= EJ_1$ ,  $EJ_2$ ,  $EJ_3$  ... sind und welche bezieh. die den Theilen  $AC_1$ ,  $C_1C_2$ ,  $C_2C_3$ , ... entsprechenden Streifengewichte verbinden, so erhält man ein der elastischen Linie umschriebenes Polygon; dasselbe wird häufig ein Seilpolygon mit veränderlicher Polweite genannt.

Ändert sich die Belastung des Balkens, so braucht man nur die Momentenlinien neu zu zeichnen, während bei dem Verfahren nach No. 7 noch die Neuberechnung der verzerrten Momentenlinie  $\left(M \frac{J_c}{J}\right)$  erforderlich ist. Den Einfluss der Schubspannungen beurtheile man für sich mittels Gleich. 6; im vorliegenden Falle ist  $M_0 = M$ .

### Zahlenbeispiele.

a. Durchbiegung einer Blechbalkenbrücke. Fig. 14 stellt den Hauptträger einer eingeleisigen Blechbalkenbrücke dar; derselbe besteht aus einem Stehbleche von  $130 \cdot 1,0$  cm, aus Winkelisen von

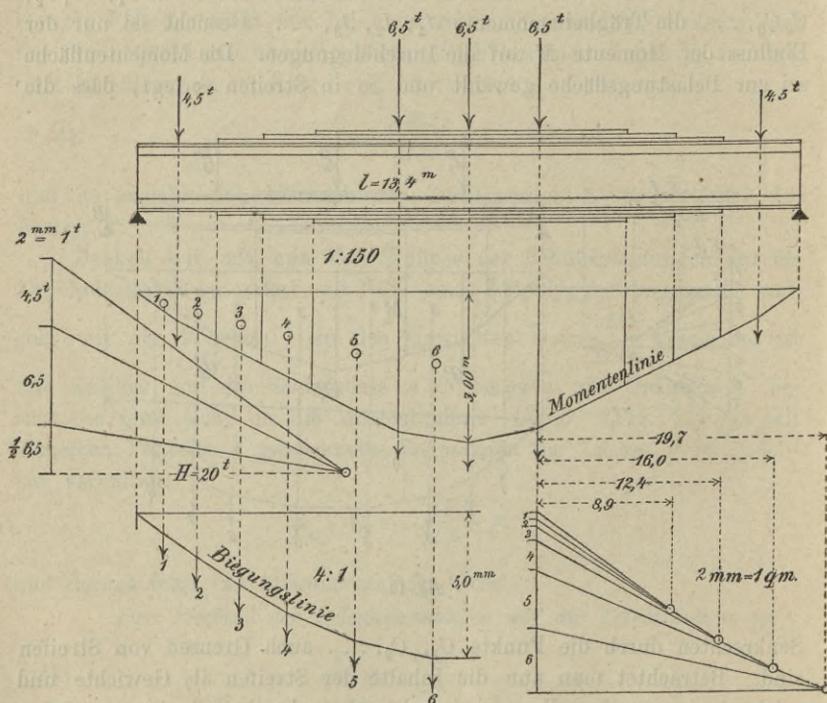


Fig. 14.

$10 \cdot 10 \cdot 1,2$  cm und aus Kopfplatten von  $24,5 \cdot 1,0$  cm, Fig. 15. Das Trägheitsmoment des Querschnitts beträgt ohne Abzug für Schwächung durch Niete

bei 0 Platten	$J_0 = 531500 \text{ cm}^4$
„ 1 Platte	$J_1 = 741700 \text{ „}$
„ 2 Platten	$J_2 = 958400 \text{ „}$
„ 3 Platten	$J_3 = 1181700 \text{ „}$

Auf den Träger wirken fünf Raddrücke von 6,5 bez. 4,5 t. Gesucht sei deren Einfluss auf die Durchbiegungen.

Zuerst wurde die Momentenlinie gezeichnet. Die Polweite beträgt  $H = 20 \text{ t}$ , die grösste Ordinate ist  $= 3,00 \text{ m}$ , mithin ergibt sich

$$M_{\max} = 20 \cdot 3,00 = 60 \text{ tm} = 6000 \text{ tcm}$$

Nun wurde die Hälfte der Momentenfläche in 6 Streifen zerlegt und deren Inhalte zu

$$0,23 \quad 0,61 \quad 1,06 \quad 1,64 \quad 4,19 \quad 4,03 \text{ qm}$$

ermittelt. Die Polweiten dieser Streifengewichte mussten nach der Formel

$$\xi = \frac{EJ}{H\nu}$$

berechnet werden, weil die Ordinaten der Momentenlinie gleich den durch  $H$  dividirten Momenten sind. Das Verzerrungsverhältniss  $\nu:1$  ist  $150:4:1 = 600:1$ , denn der Träger ist im Massstab  $1:150$  gezeichnet, die Biegelinie hingegen im Massstabe  $4:1$ . Hiernach ergab sich, mit  $E = 2000000 \text{ k} = 2000 \text{ t}$  für das qcm:

$$\xi = \frac{2000 J}{20 \cdot 600} = \frac{1}{6} J \text{ qcm}$$

also für die Streifengewichte 1 und 2:

$$\xi = \frac{1}{6} \cdot 531500 = 88583 \text{ qcm} = 8,9 \text{ qm}$$

$$\text{für den Streifen 3: } \xi = \frac{1}{6} \cdot 74,17 = 12,4 \text{ qm}$$

$$\text{für den Streifen 4: } \xi = \frac{1}{6} \cdot 95,84 = 16,0 \text{ qm}$$

$$\text{für die Streifen 5 u. 6: } \xi = \frac{1}{6} \cdot 118,17 = 19,7 \text{ qm.}$$

Wegen der symmetrischen Belastung wurde die Biegelinie nur für die eine Hälfte des Balkens gezeichnet. Die grösste Durchbiegung ergab sich  $= 5,00 \text{ mm}$ .

In Folge der Schubspannungen wächst dieser Werth um

$$\eta = \frac{\alpha M}{GF} = \frac{5}{2} \frac{M}{EF_s}$$

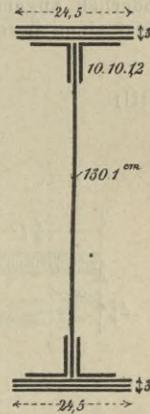


Fig. 15.

Der Stehblechquerschnitt ist  $F_s = 130$  qcm, mithin folgt

$$\eta = \frac{5}{2} \frac{6000}{2000 \cdot 130} = 0,06 \text{ cm} = 0,6 \text{ mm.}$$

Der Einfluss der Schubspannungen beträgt also 12% des zuerst gefundenen Werthes.

Zu einer einfachen und genügend genauen Näherungsformel für die grösste Durchbiegung führt folgende Betrachtung.

Für einen gleichmässig belasteten Balken ist  $M = \frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2}$  und, bei konstantem  $J$ , ohne Rücksicht auf den Einfluss der Schubspannungen:

$$(I) \quad \delta = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{1}{2}l} \left( \frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2} \right) x dx = \frac{5pl^4}{384EJ} = \frac{5M_{max}l^2}{48EJ}.$$

Wird der Querschnitt, bei überall gleicher Höhe, in solcher Weise veränderlich angenommen, dass die Beanspruchung  $\sigma$  konstant ist, so besitzt  $M:J$  einen festen Werth, und es ergibt sich dann

$$(II) \quad \delta = \frac{M}{EJ} \int_0^{\frac{1}{2}l} x dx = \frac{6M_{max}l^2}{48EJ},$$

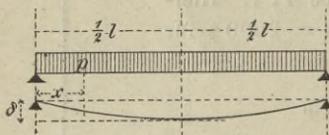


Fig. 16.

wo  $J$  das Trägheitsmoment des stärksten beanspruchten Querschnitts bedeutet.

Beim Blechbalken mit sprungweise veränderlichem Querschnitte liegt  $\delta$  zwischen den Werthen I und II und zwar etwas näher an I. Setzen wir  $\frac{5,4}{48} = \frac{9}{80} = \text{rund } \frac{1}{9}$  statt  $\frac{5}{48}$  und fügen wir noch den Einfluss der Scheerkräfte hinzu, so erhalten wir

$$\delta = \frac{M_{max}l^2}{9EJ} + \frac{5}{2} \frac{M_{max}}{EF_s},$$

im vorliegenden Falle also

$$\delta = \frac{6000 \cdot 1340^2}{9 \cdot 2000 \cdot 1181700} + \frac{5}{2} \frac{6000}{2000 \cdot 130} = 0,56 \text{ cm,}$$

d. i. ein mit dem oben gewonnenen übereinstimmendes Ergebniss. Für die Anwendung der Näherungsformel spricht noch der Umstand, dass auch die sogenannte genauere Berechnung an Voraussetzungen gebunden ist, die nicht streng erfüllt sind.

**b. Durchbiegung einer geöffneten Schwedlerschen Drehbrücke.** (Tafel 1). Ist die Brücke geschlossen, so ruht jeder Hauptträger auf den Stützen  $A, B, C$ . Bei  $B$  und  $C$  werden feste Unterlagsplatten angeordnet, bei  $A$  hingegen ein bewegliches Auflager, welches gesenkt oder beseitigt werden kann, beispielsweise ein umlegbares

Pendel. Soll die Brücke geöffnet werden, so wird sie bei  $A$  so weit gesenkt, dass sich die Träger bei  $B$  und  $C$  von den Lagern abheben und nur noch auf dem Drehzapfen  $D$  und einem Stützrad  $L$  ruhen. Ein Gegengewicht  $G$  am Ende  $A$  bewirkt, dass sich der Schwerpunkt der Brücke, welcher senkrecht über  $D$  angenommen werden darf, etwas

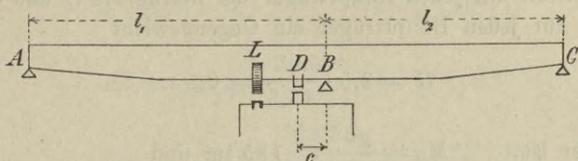


Fig. 17.

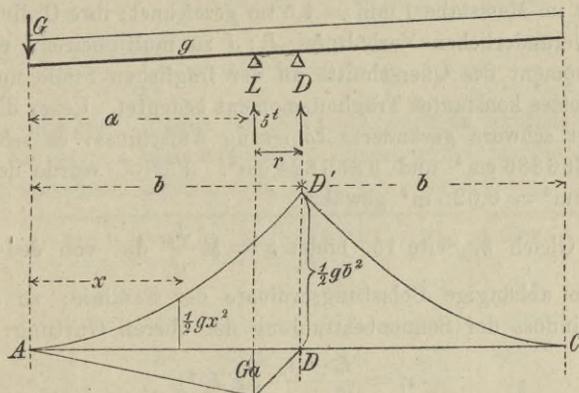


Fig. 18.

nach  $A$  hin verschiebt; dasselbe wird in der Regel so bemessen, dass das Stützrad eine Belastung von 5 t erfährt, woraus sich

$$G = 5 \cdot \frac{r}{b} \text{ Tonnen}$$

ergibt. Die ständige Belastung darf als gleichförmig vertheilt angesehen werden. Die Momentenfläche besteht dann bei geöffneter Brücke aus zwei Parabelflächen  $ADD'$  und  $CDD'$  (Fig. 18) von der Höhe  $\frac{1}{2} g b^2$  und einem Dreieck von der Höhe  $Ga$ . Die Scheitel der Parabeln liegen bei  $A$  und  $C$ .

Die Brücke diene zur Ueberführung einer zweigleisigen Eisenbahn

und besitze zwei Hauptträger. Es sei  $a=13,8\text{ m}$ ,  $r=3,5\text{ m}$ ,  $b=17,3\text{ m}$ ,  $l_1=18,1\text{ m}$ ,  $l_2=16,5\text{ m}$ ,  $c=0,8\text{ m}$ . Die Querschnittsabmessungen sind auf Taf. 1 angegeben. Hiernach sind die Stehblechabmessungen  $140.1\text{ cm}$  bis  $164.1,2\text{ cm}$ , die Abmessungen der Winkel  $10.10.1,3$  und  $11.11.1,4\text{ cm}$ , der Kopfplatten  $40.1,3\text{ cm}$ . Die ständige Belastung beträgt  $1,3\text{ t}$  für das Meter Gleis. Von dem Gegendrucke  $5\text{ t}$  des Stützrades  $L$  entfällt auf jeden Hauptträger der Betrag  $2,5\text{ t}$ , und es ergibt sich daher für jeden Hauptträger ein Gegengewicht

$$G = 2,5 \cdot \frac{3,5}{17,3} = 0,5\text{ t.}$$

Ferner ist 
$$M_D = \frac{gb^2}{2} = 195\text{ tm und}$$

$$Ga = 0,5 \cdot 13,8 = 7\text{ tm,}$$

wodurch die auf Tafel I blau geränderte Momentenfläche bestimmt ist. Dieselbe ist im Massstabe  $1\text{ mm} = 4,5\text{ tm}$  gezeichnet; ihre Ordinaten sind mit dem veränderlichen Verhältniss  $J_c : J$  zu multipliciren, wo  $J$  das Trägheitsmoment des Querschnitts an der fraglichen Stelle und  $J_c$  ein beliebig grosses konstantes Trägheitsmoment bedeutet. Ueber die Werthe  $J$  giebt der schwarz geränderte Linienzug Aufschluss; es schwankt  $J$  zwischen  $666386\text{ cm}^4$  und  $3356824\text{ cm}^4$ . Für  $J_c$  wurde der Werth  $2500000\text{ cm}^4 = 0,025\text{ m}^4$  gewählt.

Nach Gleich. 3, Seite 15, bildet  $z = M \frac{J_c}{J}$  die von den Normalspannungen abhängige Belastungsordinate der Seillinie; zu derselben tritt als Einfluss der Sonnenbestrahlung der oberen Gurtung:

$$z_t = \frac{t_o - t_u}{h} \varepsilon E J_c^*)$$

wobei *mindestens*  $t_o - t_u = 10^\circ$  Cels. zu setzen ist, weshalb, wenn für  $h$  die Stehblechhöhe ( $1,40$  bis  $1,64\text{ m}$ ) eingeführt und  $\varepsilon = 0,000012$ ,  $E = 20000000\text{ t f. d. qm}$ , also  $\varepsilon E = 240$  angenommen wird,

$$z_t = \frac{10}{1,40} \cdot 240 \cdot 0,025 = 43\text{ tm}$$

$$\text{bis } z_t = \frac{10}{1,64} \cdot 240 \cdot 0,025 = 37\text{ tm.}$$

Behufs Berücksichtigung der Schubspannungen nehmen wir, entsprechend den Einzelkräften

\*) Vgl. Formel (4) Seite 16. Die Vorzeichenumkehrung ist geboten, weil, entgegen der früheren Festsetzung, diejenigen Momente positiv angenommen wurden, welche in den obersten Querschnittstheilchen Zugspannungen hervorbringen.

$$G = 0,5 \text{ t}, \quad L = 2,5 \text{ t}, \quad D = 2gb + G - L = \text{rund } 43 \text{ t},$$

die nach der Formel  $w_m = \frac{\alpha P}{GF} EJ_c = \frac{5}{2} \frac{PJ_c}{F_s}$  (wo  $F_s = 0,0140$  bis  $0,0164 \cdot 1,2 \text{ qm}$ ) berechneten und auf Tafel 1 mit den Ziffern 1, 11, 15 bezeichneten Gewichte an:

$$w_1 = \frac{5}{2} \cdot 0,5 \frac{0,025}{0,014} = 2 \text{ t.m}^{2*})$$

$$w_{11} = \frac{5}{2} \cdot 2,5 \frac{0,025}{0,014} = 11 \text{ t.m}^2$$

$$w_{15} = \frac{5}{2} \cdot 43 \frac{0,025}{0,0164 \cdot 1,2} = 138 \text{ t.m}^2,$$

während wir als Einfluss der ständigen Belastung  $g = 1,3 \text{ t}$  die Lasthöhe

$$z_s = \frac{5}{2} \frac{gJ_c}{F_s} \text{ d. i.}$$

$$z_s = \frac{5}{2} \cdot 1,3 \frac{0,025}{0,014} = 6 \text{ tm bis } z_s = \frac{5}{2} \cdot 1,3 \frac{0,025}{0,0164 \cdot 1,2} = 4 \text{ tm}$$

in Abzug bringen. Damit ist die (roth geränderte) Belastungsfläche der als Seilpolygon darzustellenden Biegungslinie bestimmt; die Inhalte der einzelnen Streifen sind, in  $\text{t.m}^2$  ausgedrückt:

No.	Inhalt	No.	Inhalt	No.	Inhalt
2	57	10	258	20	255
3	48	12	510	21	189
4	84	13	82	22	171
5	102	14	86	23	123
6	149	16	153	24	60
7	194	17	98	25	73
8	209	18	347	26	52
9	223	19	359	27	62

Der Längenmassstab der Trägerzeichnung ist 1 : 240, während die Durchbiegungen im Massstabe 2 : 3 dargestellt sind. Daher ist

$$v = 240 \cdot \frac{2}{3} = 160$$

und die Polweite

$$H = \frac{EJ_c}{v} = \frac{20\,000\,000 \cdot 0,025}{160} = 3125 \text{ t.m}^2.$$

\*) Dieses Gewicht konnte seiner Kleinheit wegen nicht aufgetragen werden.

Zu beachten ist noch, dass die Gegendrücke von Drehzapfen und Stützrad nicht unmittelbar an den Hauptträgern angreifen, sondern zunächst auf elastische Zwischenträger wirken. Der Zapfenträger  $EF$  (vergl. die den Grundriss des mittleren Theils der Brücke darstellende Fig. 23) habe eine Stützweite von 100 cm und sein Querschnitt ein Trägheitsmoment von 200 000 cm<sup>4</sup>; seine Durchbiegung beträgt nach

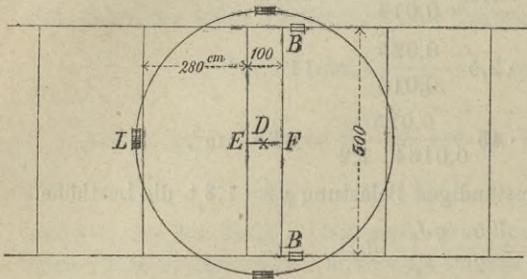


Fig. 23.

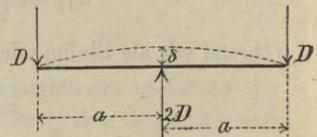


Fig. 24.

der für den Belastungsfall in Fig. 24 gültigen Formel

$$\delta = \frac{1}{3} \frac{D a^3}{EJ}, \text{ mit } D = 43 \text{ t,}$$

$$\delta' = \frac{1}{3} \frac{43 \cdot 50^3}{2000 \cdot 200000} \text{ cm,}$$

während sich für die den Zapfenträger aufnehmenden Querträger, deren beide Querschnitte zusammen  $J = 1750000$  cm<sup>4</sup> haben mögen

$$\delta'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{43 \cdot 250^3}{2000 \cdot 1750000} \text{ cm}$$

ergibt. Man findet  $\delta' + \delta'' = 0,7$  mm; und um diese Strecke liegt der Stützpunkt  $D$  in Fig. 21 (Tafel 1) oberhalb der dort gezeichneten elastischen Linie des Hauptträgers.

Der Gegendruck des Stützrades wird hauptsächlich von dem dicht neben diesem Rade gelegenen Querträger aufgenommen. Mit  $J = 400000$  cm<sup>4</sup> erhält man

$$\delta''' = \frac{1}{3} \frac{2,5 \cdot 250^3}{2000 \cdot 400000} = 0,016 \text{ cm} = 0,2 \text{ mm.}^*)$$

Bedeutet nun bei *geschlossener aber unbelasteter* Brücke (Fig. 19)  $y_a$  den Abstand von Unterkante Zapfen bis Oberkante Spurlager,  $y_i$  „ „ „ „ Stützrad „ „ Schiene,

\*) Dieser Werth ist meistens vernachlässigbar.

$y'_a$  die Durchbiegung an der Stelle  $D$  in Folge des Eigengewichts,  
 $y'_i$  desgl. an der Stelle  $L^*$ )

und nimmt man

$$y_a + y'_a = 1,3 \text{ mm}$$

$$y_i + y'_i = 18 \text{ mm}$$

an, so erhält man die in Fig. 21 eingezeichnete Lage der Stützpunkte  $A, B, C$  gegen die Biegungslinie der geöffneten Brücke und erkennt, dass sich beim Senken des Auflagers  $A$  der Träger vom Auflager  $B$  um 1,0 mm abhebt, vom Auflager  $C$  um 19 mm. Dies genügt für das Ausschwenken der Brücke. Bei  $A$  findet eine Senkung um 120 mm statt, und es muss daher die Vorrichtung zum Heben und Senken mindestens einen Hub von 120 mm erhalten. Damit aber auch bei  $A$  ein Spielraum bleibe, empfiehlt es sich, den Hub bis auf etwa 125 mm zu vergrößern.

### § 3.

#### Der an beiden Enden eingespannte gerade Stab.

9. — Die Untersuchung eines an beiden Enden eingespannten geraden Stabes leiten wir durch die Lösung der folgenden, auch für andere Untersuchungen wichtigen Aufgabe ein. *Ein frei auf zwei Stützen ruhender wagerechter Stab  $AB$  von überall gleichem Querschnitte sei mit lothrechten Kräften  $P$  belastet. Ausserdem mögen an den Stabenden Kräftepaare angreifen, deren Momente gleich  $M_A$  und  $M_B$  sind. Es sollen die Neigungswinkel  $\alpha'$  und  $\alpha''$  der Endtangente der elastischen Linie berechnet werden.* Fig. 25.

Ist  $ACB$  ein mit der Polweite 1 gezeichnetes Seilpolygon der Lasten  $P$ , so ist die schraffierte Fläche  $ACB$  die Momentenfläche eines einfachen Balkens  $AB$ , der nur von den Lasten  $P$  beansprucht wird, an dessen Enden also die Biegemomente gleich Null sind. Treten nun die Momente  $M_A$  und  $M_B$  hinzu, so ist die Schlusslinie  $AB$  durch die Schlusslinie  $A'B'$  zu ersetzen, und letztere ist bestimmt durch  $\overline{AA'} = M_A$ ,  $\overline{BB'} = M_B$ . Dem Balkenquerschnitt  $C$  entspricht dann das Biegemoment  $M = \overline{CC'}$ .

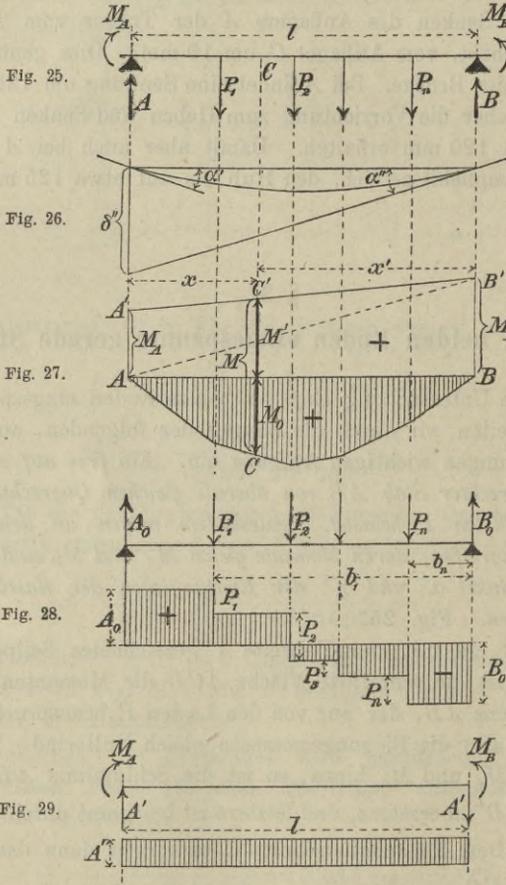
Die schraffierte Fläche in Fig. 27 pflegt man die *einfache Momentenfläche* des Balkens  $AB$  zu nennen; ist ihre Ordinate an der Stelle  $x$

\*) Die Durchbiegungen  $y'_a, y'_i$  müssen natürlich mittels einer besonderen Untersuchung festgestellt werden; sie betragen im vorliegenden Falle 0,2 mm bezieh. 1,2 mm.

gleich  $M_0$ , so erhält man

$$(1) \quad M = M_0 + \frac{1}{2}M' = M_0 + M_A \frac{x'}{l} + M_B \frac{x}{l}.$$

In ähnlicher Weise mögen auch die Auflagerwiderstände  $A'$  und  $B$  durch die Endmomente  $M_A$ ,  $M_B$  und durch die dem Falle  $M_A = 0$ ,  $M_B = 0$  entsprechenden Widerstände  $A_0$ ,  $B_0$  (Fig. 28) ausgedrückt



werden. Dazu beachte man, dass die Endmomente für sich allein zwei entgegengesetzt gleiche Stützenwiderstände  $A'$  (Fig. 29) hervorrufen, welche durch die Gleichgewichtsbedingung

$$(2) \quad A'l + M_A - M_B = 0$$

gegeben sind. Man gelangt dann zu den Formeln:

$$(3) \quad \begin{cases} A = A_0 + \frac{M_B - M_A}{l} \\ B = B_0 + \frac{M_A - M_B}{l}, \end{cases}$$

und erkennt auch ohne weiteres, dass für die Querkraft an irgend einer Stelle die Gleichung

$$(4) \quad Q = Q_0 + \frac{M_B - M_A}{l}$$

gilt, wobei  $Q_0$  die Querkraft für den Fall  $M_A = 0$ ,  $M_B = 0$  bedeutet. Die  $Q_0$ -Fläche (auch *einfache Querkraftsfläche* genannt) ist in der Figur 28 dargestellt worden.

Behufs Ermittlung der gesuchten Winkel  $\alpha''$ ,  $\alpha'$  bestimmen wir die von den Endtangente der elastischen Linie auf den Senkrechten durch  $A$  und  $B$  abgeschnittenen Strecken  $\delta'' = \alpha''l$  und  $\delta' = \alpha'l$  (Figur 26) mit Hilfe der im § 1 abgeleiteten Formeln 11 und 25 und finden, wenn wir die statischen Momente der Momentenfläche  $A'ACBB'$  (Fig. 27) in Bezug die auf linke und rechte Auflagersenkrechte mit  $\mathfrak{L}$  bzw.  $\mathfrak{R}$  bezeichnen und eine ungleichmässige Erwärmung des Balkens in Betracht ziehen, die Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha''l = \frac{\mathfrak{L}}{EJ} + \varepsilon(t_u - t_o) \frac{l^2}{2h} + \frac{\varkappa \mathfrak{F}_Q}{GF} \\ \alpha'l = \frac{\mathfrak{R}}{EJ} + \varepsilon(t_u - t_o) \frac{l^2}{2h} - \frac{\varkappa \mathfrak{F}_Q}{GF} \end{cases}$$

wo  $\mathfrak{F}_Q$  den Inhalt der Querkraftsfläche bedeutet. Das Minuszeichen des letzten Gliedes von  $\alpha'l$  ergibt sich aus der auf Seite 4 gemachten Festsetzung, dass die Querkraft  $Q$  als Mittelkraft der rechts vom fraglichen Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte in entgegengesetzter Richtung positiv gezählt wird, wie als Mittelkraft der äusseren Kräfte links vom Querschnitte.

Nun besteht die Momentenfläche  $A'ACBB'$  aus dem Trapez  $A'ABB'$  und aus der einfachen Momentenfläche  $ACB$ . Das statische Moment der letzteren, bezogen auf die Senkrechte  $AA'$  sei gleich  $\mathfrak{L}_0$  und bezogen auf die Senkrechte  $BB'$  gleich  $\mathfrak{R}_0$ . Dann findet man nach Zerlegung des Trapezes in zwei Dreiecke:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \frac{M_A l}{2} \cdot \frac{l}{3} + \frac{M_B l}{2} \cdot \frac{2l}{3} \\ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \frac{M_A l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{M_B l}{2} \cdot \frac{l}{3}. \end{cases}$$

Die Querkraftsfläche setzt sich zusammen aus der einfachen Querkraftsfläche (Fig. 28), deren Inhalt  $\mathfrak{F} = A_0 l_1 - P_1 b_1 - P_2 b_2 \dots - P_n b_n = 0$  ist und aus einem Rechteck (Fig. 29) von den Abmessungen  $A' = \frac{1}{l} (M_B - M_A)$  und  $l$ , weshalb sich

$$\mathfrak{F}_q = M_B - M_A$$

ergiebt.

Die Einführung dieser Werthe in die Gleichung 5 führt zu den Formeln

$$(7) \quad \begin{cases} EJ\alpha'' = \frac{\mathfrak{Q}_0}{l} + \frac{1}{6} (M_A + 2M_B)l + \kappa \frac{EJ}{GFl} (M_B - M_A) + (t_u - t_o) \frac{l}{2h} \varepsilon EJ \\ EJ\alpha' = \frac{\mathfrak{R}_0}{l} + \frac{1}{6} (M_B + 2M_A)l + \kappa \frac{EJ}{GFl} (M_A - M_B) + (t_u - t_o) \frac{l}{2h} \varepsilon EJ; \end{cases}$$

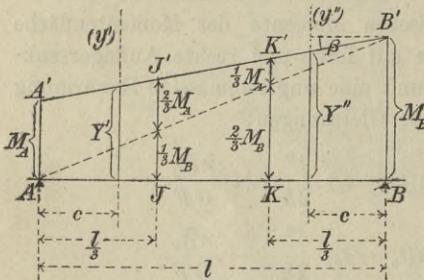


Fig. 30.

dieselben lassen sich aber noch wie folgt vereinfachen. Die durch die Endmomente  $M_A$  und  $M_B$  bestimmte Gerade  $A'B'$  deren Neigungswinkel  $\beta$  sein möge, Fig. 30, schneidet auf den *Drittelsenkrechten* (das sind die Senkrechten, welche die Stützweite  $l$  in drei gleiche Theile zerlegen) die Strecken

$$\overline{JJ'} = \frac{1}{3} (M_B + 2M_A) \text{ bzw.}$$

$$\overline{KK'} = \frac{1}{3} (M_A + 2M_B)$$

ab, und auf den Senkrechten  $(y')$  und  $(y'')$  im Abstände

$$(8) \quad c = \frac{l}{3} - 2 \times \frac{EJ}{GFl}$$

von  $A$  bzw.  $B$  die Strecken:

$$(9) \quad \begin{cases} Y' = \overline{JJ'} - 2 \times \frac{EJ}{GFl} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3} (M_B + 2M_A) - 2 \times \frac{EJ}{GFl^2} (M_B - M_A) \\ Y'' = \overline{KK'} + 2 \times \frac{EJ}{GFl} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3} (M_A + 2M_B) + 2 \times \frac{EJ}{GFl^2} (M_B - M_A). \end{cases}$$

Daraus folgt aber, dass die Gleichungen 7 auch geschrieben werden dürfen:

$$(10) \quad \begin{cases} EJ\alpha'' = \frac{1}{2} Y''l + \frac{\mathfrak{L}_0}{l} + (t_u - t_o) \frac{l}{2h} \varepsilon EJ \\ EJ\alpha' = \frac{1}{2} Y'l + \frac{\mathfrak{R}_0}{l} + (t_u - t_o) \frac{l}{2h} \varepsilon EJ. \end{cases}$$

Diese Fassung erweist sich namentlich dann als sehr nützlich, wenn die im Vorstehenden behandelte Aufgabe umgekehrt wird, wenn also die Winkel  $\alpha''$  und  $\alpha'$  gegeben sind und die Momente  $M_A$  und  $M_B$  gesucht werden, ein Fall

der vorliegt, sobald ein an beiden Enden eingespannter ursprünglich wagerechter Stab zu untersuchen ist, dessen Enden sich infolge der Nachgiebigkeit der Widerlager um die durch Beobachtung gefundene Winkel  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  gedreht haben (Fig. 31). Man berechne dann mittels der Gleichungen 10 die Momente  $Y'$ ,  $Y''$  und lege mit deren Hilfe die Schlusslinie  $A'B'$  fest. Fig. 31 setzt negative  $Y'$ ,  $Y''$  voraus.

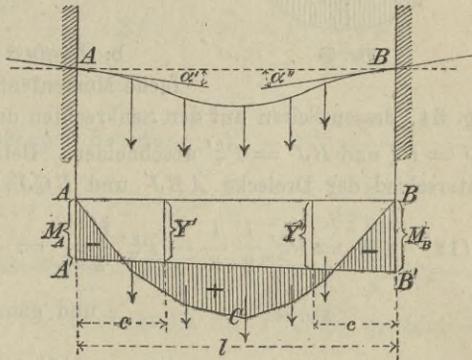


Fig. 31.

Fig. 31 setzt negative  $Y'$ ,  $Y''$  voraus.

Besonders wichtig aber sind die Gleichungen 10 für Balken auf mehreren Stützen, da sich die einzelnen Theile  $AB$  (Fig. 32) als beiderseits unter gewissen Winkeln  $\alpha'$  und  $\alpha''$  eingespannte Stäbe auf-

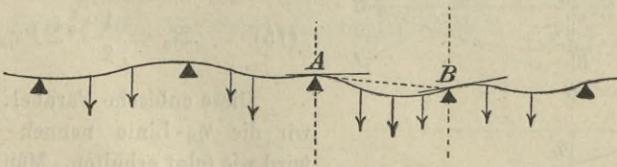


Fig. 32.

fassen lassen. Die Beziehungen, welche zwischen diesen Winkeln und den Stützenmomenten bestehen, führen zur Bestimmung der letzteren. Ehe wir auf die Lösung dieser Aufgabe näher eingehen, zeigen wir noch die Ermittlung der statischen Momente  $\mathfrak{L}_0$  und  $\mathfrak{R}_0$ .

a. Den Einfluss einer gleichmässigen Belastung  $g$  f. d. Längeneinheit findet man am schnellsten durch Rechnung. Die einfache Momentenlinie ist eine Parabel vom Pfeile

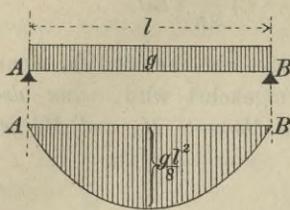


Fig. 33.

$\frac{1}{8} g l^2$ , Fig. 33. Der Inhalt der Parabelfläche ist  $\frac{1}{8} g l^2 \cdot \frac{2}{3} l$ , mithin ergibt sich

$$(11) \quad \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{R}_0 = \frac{1}{8} g l^2 \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{l}{2} = \frac{g l^4}{24}.$$

b. Einfluss einer Einzellast. Die einfache Momentenfläche ist ein Dreieck  $ABC$ , Fig. 34, dessen Seiten auf den Senkrechten durch  $A$  bez.  $B$  die Momente  $\overline{AJ} = P\xi$  und  $\overline{BJ'} = P\xi'$  abschneiden. Betrachtet man  $ABC$  als den Unterschied der Dreiecke  $ABJ'$  und  $BCJ'$  so findet man

$$(12) \quad \mathfrak{R}_0 = P\xi' \frac{l}{2} \frac{l}{3} - P\xi \frac{\xi'}{2} \frac{\xi'}{3} = \frac{Pl^3}{6} \left( \frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3} \right)$$

Fig. 34.

und ganz ebenso erhält man

$$(13) \quad \mathfrak{L}_0 = \frac{Pl^3}{6} \left( \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3} \right).$$

Zeichnet man also eine cubische Parabel, deren Gleichung

$$(14) \quad \eta_R = \frac{l}{3} \left( \frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3} \right)$$

ist, so findet man den Einfluss einer Gruppe von Einzellasten auf das statische Moment  $\mathfrak{R}_0$ :

$$(15) \quad \mathfrak{R}_0 = \frac{1}{2} l^2 \sum P \eta_R.$$

Diese cubische Parabel, welche wir die  $\eta_R$ -Linie nennen wollen, wird wie folgt erhalten. Man mache,

Figur 35,  $A'E = \frac{1}{3} l$ , ziehe  $EB'$ ,

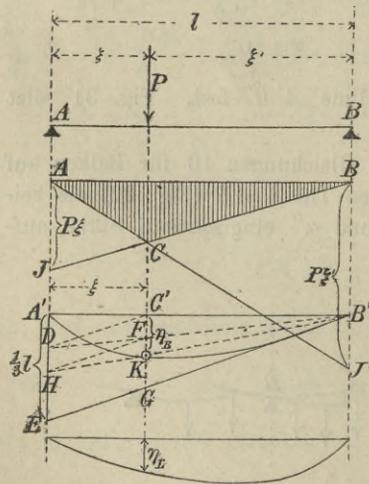


Fig. 35.

errichte an der Stelle  $\xi$  auf  $A'B'$  ein Loth  $C'G$ , ziehe  $C'D \parallel B'E$ , bestimme den Schnittpunkt  $F$  der Geraden  $DB'$  und  $C'G$ , ziehe  $FH \parallel B'E$  und verbinde  $H$  mit  $B'$ . Die Gerade  $HB'$  schneidet dann die  $C'G$  in einem Punkte  $K$  der gesuchten cubischen Parabel. Das Spiegelbild der

$\eta_R$ -Linie, die  $\eta_L$ -Linie, liefert:

$$(16) \quad \Omega_0 = \frac{1}{2} l^2 \Sigma P \eta_L.$$

*Beispiel.* Für einen beiderseits wagerecht eingespannten Balken mit starren Widerlagern würde sich, wegen  $\alpha' = 0$  und  $\alpha'' = 0$  ergeben:

$$0 = \frac{1}{2} Y'' l + \frac{gl^3}{24} + \frac{1}{2} l \Sigma P \eta_L + (t_u - t_o) \frac{l}{2h} \varepsilon EJ$$

$$0 = \frac{1}{2} Y' l + \frac{gl^3}{24} + \frac{1}{2} l \Sigma P \eta_R + (t_u - t_o) \frac{l}{2h} \varepsilon EJ$$

und hieraus findet man — gesondert —

den Einfluss der gleichmässigen Belastung:  $Y' = Y'' = -\frac{gl^2}{12}$

„ „ „ Einzellasten:  $Y' = -\Sigma P \eta_R$   
 $Y'' = -\Sigma P \eta_L$

„ „ „ Temperaturänderung:  $Y' = Y'' = +\frac{\varepsilon EJ}{h} (t_u - t_o)$ .

Die  $\eta_L$ -Linie ist also die Einflusslinie für  $Y''$ ; die  $\eta_R$ -Linie die Einflusslinie für  $Y'$ .

Noch sei hervorgehoben, dass der Einfluss der Schubspannungen auf die statisch nicht bestimmbar Grössen  $Y'$ ,  $Y''$  stets unbedeutend ist und vernachlässigt werden darf. Es verschwindet dann in Gleich. 8 das von  $\varkappa$  abhängige Glied, und man findet

$$c = \frac{1}{3} l.$$

An Stelle der Senkrechten  $y'$ ,  $y''$  in Fig. 30 treten die Drittelsenkrechten. — Eine wesentliche Erschwerung erfährt allerdings, bei der von uns gewählten Entwicklung, die Lösung der Aufgabe durch die Berücksichtigung der Schubspannungen nicht.

## II. Abschnitt.

### Der Balken auf mehreren Stützen.

#### § 4.

#### Balken mit beliebig vielen Stützpunkten, deren Verschiebungen gegeben sind.

10. **Allgemeines Verfahren.** Die allgemeine Untersuchung eines auf mehreren Stützpunkten ruhenden, nirgends durch ein Gelenk unterbrochenen Balkens (Fig. 36) ist bereits in der ersten Abtheilung dieses Bandes (§ 14) durchgeführt worden. Die dort entwickelten Gesetze

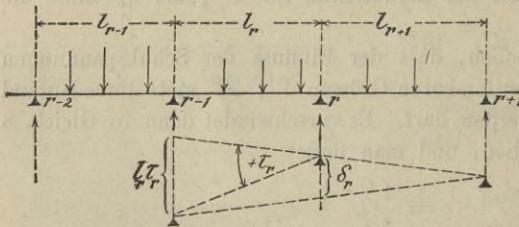


Fig. 36.

gelten sowohl für das Fachwerk als auch für den vollwandigen Träger; es bleibt nur noch einiges über die den Belastungszuständen

$\dots M_{r-1} = -1,$   
 $M_r = -1, M_{r+1} = -1,$   
 $\dots$  entsprechenden Bie-

gungslinien nachzutragen.

Wir betrachteten zwei aufeinanderfolgende Oeffnungen  $l_r, l_{r+1}$ , Fig. 37, zeichneter die Momentenfläche für den Zustand  $M_r = -1$ , d. i. ein Dreieck  $ABC$ , dessen Höhe absolut genommen gleich 1 ist, und ermittelten die zugehörige Biegungslinie  $(r-1)', r', (r+1)'$ . Sodann bestimmten wir die lediglich von Temperaturänderungen (z. B. Sonnenbestrahlung der oberen Gurtung) herrührende Biegungslinie  $(r-1)'', r'', (r+1)''$  und fanden zwischen den Stützenmomenten  $M_{r-1}, M_r, M_{r+1}$  die Beziehung

$$(1) \quad M_{r-1} \frac{d_r}{l_r} + M_r \left( \frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}} \right) + M_{r+1} \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} = N_r, \text{ wo}$$

$$(2) \quad N_r = - \left\{ \sum P_m \delta_{mr} + \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}} (\delta_r + c_{r,l}) \right\}.$$

Die Bedeutung von  $d_r$ ,  $d_{r+1}$ ,  $c_r$ ,  $c_{r+1}$ ,  $\delta_{mr}$  ist aus der Figur 37 ersichtlich;  $\delta_r$  ist die in Folge Nachgiebigkeit der Widerlager etwa verursachte, und als *gegeben* (z. B. durch Beobachtung gefunden) vorausgesetzte, nach oben positiv genommene lothrechte Verschiebung des Stützpunktes  $r$  gegen die Punkte  $(r-1)$  und  $(r+1)$  (Fig. 36). Auf das Glied  $\sum P_m \delta_{mr}$  sind nur die zwischen  $(r-1)$  und  $(r+1)$  aufgebrauchten Lasten von Einfluss. Sind also die beiden Oeffnungen  $l_r$  und  $l_{r+1}$  unbelastet, so wird  $\sum P_m \delta_{mr} = 0$ .

Bei Aufzeichnung der Biegelinie  $(r-1)'$   $r'$   $(r+1)'$  darf der Einfluss der Schubspannungen stets vernachlässigt werden. Es ist diese Linie dann das Seilpolygon einer stetigen Belastung, welche an irgend einer Stelle  $x$  die Höhe  $z = \frac{y}{EJ}$  hat, wenn  $y$  die

Höhe des Momentendreiecks  $ACB$  an der fraglichen Stelle bezeichnet. Die Polweite ist gleich 1. Wählt man nun die Polweite =  $w_P$ , giebt dem Momentendreieck  $ACB$  die beliebig grosse, aber für alle Stützpunkte gleiche Höhe  $y_c$  und setzt man schliesslich  $z = y \frac{J_c}{J}$  statt  $z = \frac{y}{EJ}$ , wo  $J_c$  ein beliebiges konstantes Querschnitts-Trägheitsmoment ist, so muss man die Werthe  $d$ ,  $c$  und  $\delta_{mr}$  noch mit  $w_P: EJ_c y_c$  multipliciren, oder — was auf dasselbe hinauskommt — das Glied  $\delta_r + c_{rt}$  durch jenen Ausdruck dividiren. Man erhält dann

$$(3) \quad N_r = - \left\{ \sum P_m \delta_{mr} + \frac{EJ_c(l_r + l_{r+1})y_c}{w_P l_r l_{r+1}} (\delta_r + c_{rt}) \right\}.$$

Drückt man die Inhalte  $w$  der Streifen, in welche die Belastungsfläche zerlegt werden muss, in  $qm$  aus, so muss man auch  $w_P$  in  $qm$

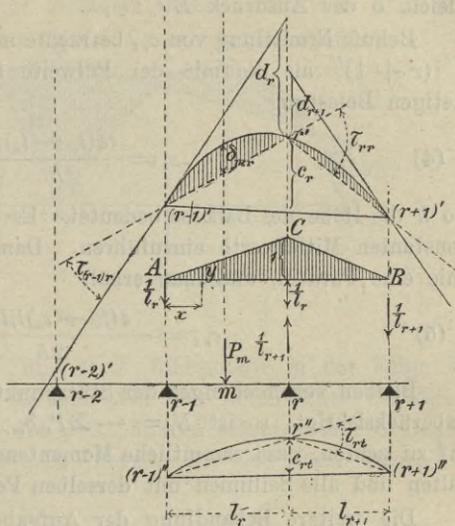


Fig. 37.

und  $EJ_c$  in  $\text{tm}^2$  ausdrücken.\*) Man erhält dann  $\frac{EJ_c}{w_P}$  in Tonnen. Die Höhe  $y_c$  wird mit dem Längenmaassstabe der Träger-Zeichnung gemessen. Haben sämtliche Streifen dieselbe Breite  $\lambda$ , so nehme man die mittleren Höhen der Streifen als Gewichte  $w$  an und drücke die Polweite  $w_P$  in Metern aus. An die Stelle von  $EJ_c: w_P$  tritt dann in Gleich. 3 der Ausdruck  $EJ_c: w_P \lambda$ .

Behufs Ermittlung von  $c_{r,t}$  betrachte man die Biegelinie  $(r-1)'' r'' (r+1)''$  als die mit der Polweite 1 gezeichnete Seillinie einer stetigen Belastung

$$(4) \quad z_t = \frac{\varepsilon(t_o - t_u)}{h},$$

wo  $h$  die Höhe des Balkens bedeutet. Es ist stets zulässig, für  $h$  einen konstanten Mittelwerth einzuführen. Dann ist die fragliche Biegelinie eine Parabel, und man erhält

$$(5) \quad c_{r,t} = \frac{\varepsilon(t_o - t_u) l_r l_{r+1}}{2h}.$$

Bleiben Verschiebungen der Stützpunkte und Temperaturänderungen unberücksichtigt, so ist  $N_r = -\sum P_m \delta_{m,r}$  und man hat lediglich darauf zu achten, dass sämtliche Momentendreiecke dieselbe Höhe  $y_c$  erhalten und alle Seillinien mit derselben Polweite  $w_P$  gezeichnet werden.

Die weitere Behandlung der Aufgabe erfolgt nach No. 131 und 132 von Abtheilung 1.

**11. Für den besonderen Fall eines überall gleichen Trägerquerschnitts\*\*)** möge noch ein anderes, von den im § 3 für den beiderseits eingespannten Balken gefundenen Gesetzen ausgehendes Verfahren zur Ermittlung der Stützenmomente angegeben werden. Der Einfluss der Schubspannungen werde wie vorhin vernachlässigt.

Fig. 38 stellt die durch Schraffirung kenntlich gemachte Momentenfläche für zwei aufeinander folgende Oeffnungen  $l_r, l_{r+1}$  dar; sie ist bestimmt durch die Stützenmomente  $M_{r-1}, M_r, M_{r+1}$ , welche hier *negativ* vorausgesetzt und *oberhalb* der Achse  $(r-1) r (r+1)$  aufgetragen wurden, und durch die einfachen Momentenlinien  $AHB, BKC$ . Die  $M_0$  sind bei abwärts gerichteten Lasten positiv und wurden ebenfalls

\*) Zur Kräfteinheit wählen wir die Tonne. Dann besitzt  $EJ_c$  die Einheit  $\frac{t}{m^2} \cdot m^4 = \text{tm}^2$ .

\*\*) Die Annahme eines überall gleichen Querschnitts ist fast ausnahmslos zulässig.

nach oben hin abgesetzt, so dass sich die Momentenfläche des durchgehenden Balkens als der Unterschied der einfachen Momentenflächen und der Trapeze  $AA'B'B$  und  $BB'C'C$  ergibt. Das statische Moment der einfachen Momentenfläche  $AHB A$  in Bezug auf die Senkrechte durch  $(r - 1)$  sei  $\mathfrak{L}_{o,r}$ , dasjenige der Fläche  $BKCB$  in Bezug auf die Senkrechte durch  $(r + 1)$  sei  $\mathfrak{R}_{o,(r+1)}$ .

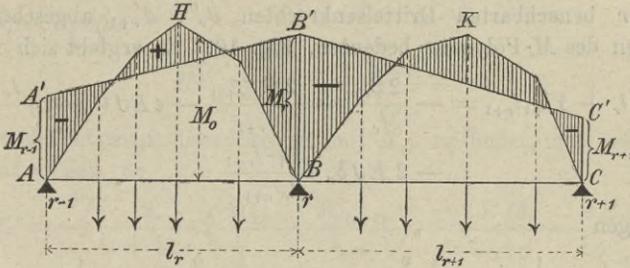


Fig. 38.

Für die Geraden  $A'B'$  und  $B'C'$  führen wir in der Folge die Bezeichnungen  $g_r$  und  $g_{r+1}$  ein und den von sämtlichen Geraden  $g$  gebildeten Linienzug, dessen den Stützpunkten entsprechende Ordinaten gleich den Stützenmomenten sind, nennen wir der Kürze wegen das *M-Polygon*.

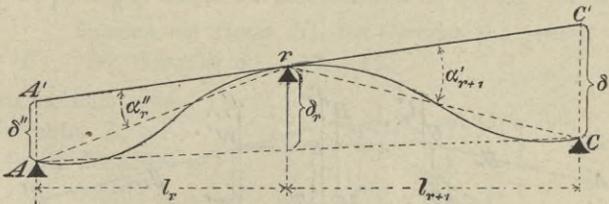


Fig. 39.

Ist nun  $A'C'$  in Fig. 39 die in  $r$  an die elastische Linie gelegte Tangente, so erhält man mit den in die Figur eingetragenen Bezeichnungen:

$$\delta_r = \frac{\delta' l_r + \delta'' l_{r+1}}{l_r + l_{r+1}}, \text{ woraus}$$

$$\frac{\delta''}{l_r} + \frac{\delta'}{l_{r+1}} = \delta_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}} \text{ oder}$$

$$\alpha_r'' + \alpha_{r+1}' = \delta_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}.$$

Nun ist aber nach Seite 29, Gleich. 10:

$$-EJ\alpha_r'' = \frac{1}{2} Y_r'' l_r + \frac{\mathcal{Q}_{or}}{l_r} + (t_u - t_o) \frac{l_r}{2h} \varepsilon EJ$$

$$-EJ\alpha'_{r+1} = \frac{1}{2} Y'_{r+1} l_{r+1} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}} + (t_u - t_o) \frac{l_{r+1}}{2h} \varepsilon EJ$$

wobei  $Y_r''$  und  $Y'_{r+1}$  die von den Geraden  $g_r, g_{r+1}$  auf den dem Stützpunkte  $r$  benachbarten Drittelsenkrechten  $d_r'', d'_{r+1}$  abgeschnittenen Ordinaten des  $M$ -Polygons bedeuten, Fig. 40. Es ergibt sich mithin:

$$(6) \quad Y_r'' l_r + Y'_{r+1} l_{r+1} = -\frac{2\mathcal{Q}_{or}}{l_r} - \frac{2\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}} - \varepsilon EJ(t_u - t_o) \frac{l_r + l_{r+1}}{h} - 2EJ\delta_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}$$

oder wegen

$$Y_r'' = \frac{1}{3} M_{r-1} + \frac{2}{3} M_r, \quad Y'_{r+1} = \frac{2}{3} M_r + \frac{1}{3} M_{r+1}$$

$$(7) \quad M_{r-1} l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = N_r,$$

wobei

$$(8) \quad N_r = -\left\{ 6 \left( \frac{\mathcal{Q}_{or}}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}} \right) + 6EJ\delta_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}} + 3\varepsilon EJ(t_u - t_o) \frac{l_r + l_{r+1}}{h} \right\}.$$

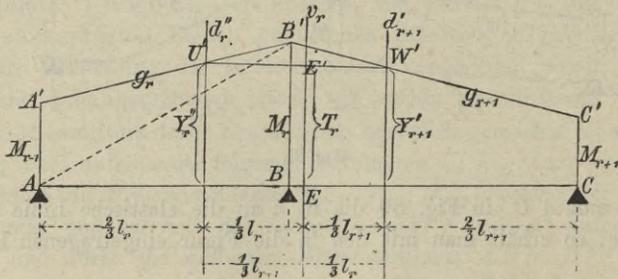


Fig. 40.

Die Gleichung (7) nennen wir die verallgemeinerte *Clapeyronsche Gleichung*, weil *Clapeyron* der erste war, welcher die Elasticitätsbedingungen durchgehender Balken auf diese Form gebracht hat. Das Glied  $N_r$  möge das *Belastungsglied* der *Clapeyronschen Gleichung* heißen.

Behufs Herleitung eines zeichnerischen Verfahrens knüpfen wir zunächst an die Gleichung 6 an. Es schneidet nämlich die Verbindungslinie  $U'W'$  der Endpunkte der Ordinaten  $Y_r'', Y_{r+1}'$  (Fig. 40) auf einer Lothrechten  $v_r$ , die von  $d_r''$  den Abstand  $\frac{1}{3}l_{r+1}$  und von  $d'_{r+1}$  den Abstand  $\frac{1}{3}l_r$  hat und den Namen *verschränkte Stützsenkrechte* führt, die Strecke

$$\overline{EE'} = \frac{Y_r''l_r + Y_{r+1}'l_{r+1}}{l_r + l_{r+1}}$$

ab. Bezeichnet man diese Strecke mit  $T_r$ , so findet man mit Rücksicht auf Gleich. 6:

$$(9) \quad T_r = -\frac{2}{l_r + l_{r+1}} \left( \frac{\mathfrak{L}_{0,r}}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{0,(r+1)}}{l_{r+1}} \right) - \frac{2EJ\delta_r}{l_r l_{r+1}} - \frac{\varepsilon EJ(t_u - t_o)}{h}$$

$$= \frac{N_r}{3(l_r + l_{r+1})}$$

Hiernach ist  $T_r$  ein von der Belastung, der Stützenverschiebung  $\delta_r$  und dem Temperaturunterschiede  $t_u - t_o$  abhängiger *gegebener* Werth, welcher in der Regel *negativ* ist und dann auf der Senkrechten  $v_r$  *oberhalb* der Achse  $(r-1)r(r+1)$  abzutragen ist.

Ein ähnliches Gesetz fanden wir in No. 132 (Seite 357) der Abtheilung 1; dasselbe führte zu einer einfachen Lösung der Aufgabe:

*Gegeben ein Punkt  $L'_r$  der Geraden  $g_r$ , gesucht ein Punkt  $L'_{r+1}$  der Geraden  $g_{r+1}$ , Fig. 41.*

Man bestimmt den senkrecht unter  $L_r$  gelegenen Punkt der Achse  $ABC$ , zieht durch  $L_r$  die beliebige Gerade  $g'_r$ , welche die Senkrechten  $d_r''$  und  $B'B$  bzw. in  $U''$  und  $B''$  schneidet, legt hierauf durch  $U''$  und  $E_r$  eine Gerade, welche  $d'_{r+1}$  in  $W''$  trifft und verbindet  $W''$  mit  $B''$ . Der Punkt  $L_{r+1}$ , in welchem die Achse  $ABC$  von der Geraden  $W''B''$  geschnitten wird, liegt dann lothrecht unter  $L'_{r+1}$ .

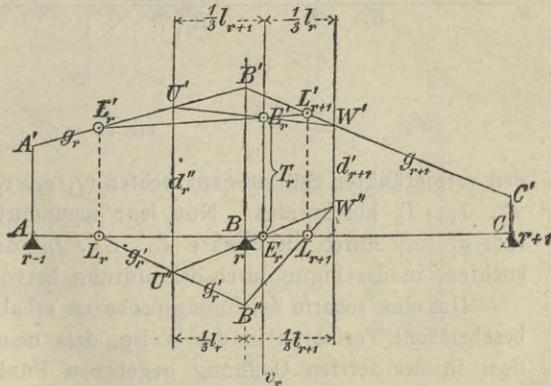


Fig. 41

Da nun weiter die drei Punkte  $L'_r$ ,  $E'_r$  und  $L'_{r+1}$  in einer Geraden liegen müssen, so ist die Lage des Punktes  $L'_{r+1}$  bestimmt und damit die gestellte Aufgabe gelöst.

Mit Hilfe der vorstehenden Entwicklungen ist man im Stande, das  $M$ -Polygon zu zeichnen, sobald zwei Punkte desselben gegeben sind.

Sind z. B. die Punkte  $L'_1$  und  $R'_4$  in Fig. 42 Punkte des  $M$ -Polygons des Balkens 0—4, so folgert man aus der Lage des Punktes  $L_1$  in der beschriebenen Weise die Lage von  $L_2$ , hierauf die von  $L_3$  und  $L_4$  und zeichnet den Linienzug  $L'_1 L'_2 L'_3 L'_4$ , dessen Seiten auf

Fig. 42.

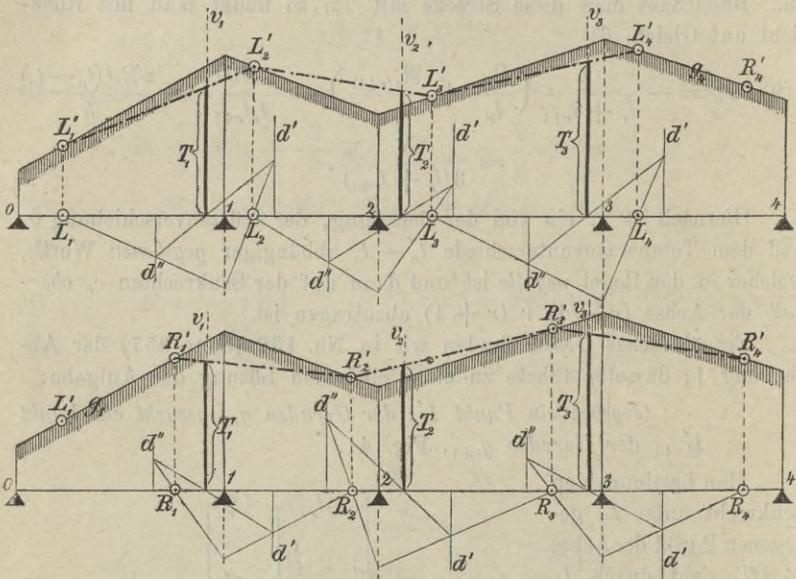


Fig. 43.

den verschränkten Stützen-Senkrechten  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  die gegebenen Strecken  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  abschneiden. Nun legt man durch  $L'_4$  und  $R'_4$  die Gerade  $g_4$  und durch die Punkte  $L'_3$ ,  $L'_2$ ,  $L'_1$  die übrigen Seiten des gesuchten, in der Figur durch Schraffur hervorgehobenen  $M$ -Polygons.

Um eine scharfe Zeichnungsprobe zu erhalten, wiederhole man das beschriebene Verfahren in der Weise, dass man nicht von  $L_1$ , sondern dem in der letzten Oeffnung gegebenen Punkte  $R_4$  ausgeht, in den vorhergehenden Oeffnungen Punkte  $R_3$ ,  $R_2$ ,  $R_1$  bestimmt — und zwar auf dieselbe Weise wie vorhin die Punkte  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  — hierauf durch die Endpunkte der Ordinaten  $T_3$ ,  $T_2$ ,  $T_1$  den Linienzug  $R'_4 R'_3 R'_2 R'_1$

führt, dessen Ecken  $R_4', R_3', R_2', R_1'$  lothrecht über den entsprechenden Punkten  $R$  liegen und endlich  $g_1$  durch  $L_1'$  und  $R_1'$  legt.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass die Punkte  $L$  und  $R$  mit den in No. 131 (Seite 352) der Abtheilung 1 eingeführten *Festpunkten* übereinstimmen. Ferner sei darauf hingewiesen, dass die Gleich. 7 die Form

$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$$

besitzt und dass sich daher die Ermittlung der Stützenmomente auch nach dem in No. 132 (Seite 357) der Abtheilung 1 gegebenen Verfahren (mit Hilfe von Lothrechten  $I_r, II_r$  an Stelle von  $d_r'', v_r, d'_{r+1}$ ) durchführen lässt.

Die beiden wichtigsten Sonderfälle sind:

I. *Der Balken liegt überall frei auf.* Vergl. Fig. 44, in welcher der allgemeinere Fall eines über die Endstützen ragenden Balkens angenommen wurde.  $\Sigma'P$

und  $\Sigma''P$  seien die Mittelkräfte der auf den überragenden Enden ruhenden Lasten, ihre Abstände von den Stützen 0 bzw.  $n$  seien  $e$  bzw.  $c$ . Dann sind die äussersten Stützenmomente:

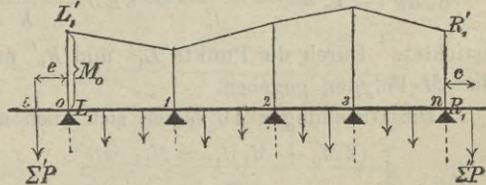


Fig. 44.

$$M_0 = -e \Sigma'P; \quad M_n = -c \Sigma''P;$$

es liegen also die von vornherein bekannten Punkte  $L_1'$  und  $R_n'$  des  $M$ -Polygons über den Stützpunkten 0 und  $n$ .

II. *Der Balken ist an den Enden unter den gegebenen Winkeln  $\alpha_0$  und  $\alpha_n$  gegen die Wagerechte eingespannt.*

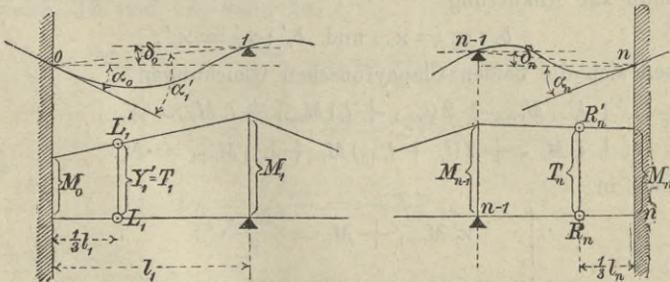


Fig. 45.

Bezeichnet man mit  $\delta_0$  die senkrechte Verschiebung des Stützpunktes 0 gegen den Stützpunkt 1, Fig. 45, so ist

$$\delta_o + l_1 \alpha_o = l_1 \alpha_1' \text{ und}$$

$$EJ \alpha_1' = \frac{1}{2} Y' l_1 + \frac{\mathfrak{R}_{o1}}{l_1} + (t_u - t_o) \frac{l_1}{2h} \varepsilon EJ,$$

weshalb sich ergibt:

$$(10) \quad \begin{cases} Y_1' = T_1, \text{ wo} \\ T_1 = -\frac{2\mathfrak{R}_{o1}}{l_1^2} - \varepsilon EJ \frac{t_u - t_o}{h} + \frac{2EJ(\delta_o + l_1 \alpha_o)}{l_1^2}. \end{cases}$$

Hiernach ist in der ersten Oeffnung der Schnittpunkt  $L_1'$  des  $M$ -Polygons mit der linken Drittelsenkrechten von vornherein bekannt, und in gleicher Weise kann man im  $n^{\text{ten}}$  Felde einen Punkt  $R_n'$  der  $g_n$  bestimmen, indem man im Abstände  $\frac{1}{3} l_n$  von  $n$  die Ordinate

$$\overline{R_n R_n'} = T_n = -\frac{2\mathfrak{Q}_{on}}{l_n^2} - \varepsilon EJ \frac{t_u - t_o}{h} + \frac{2EJ(\delta_n + l_n \alpha_n)}{l_n^2}$$

errichtet. Durch die Punkte  $L_1'$  und  $R_n'$  und die Momente  $T$  ist aber das  $M$ -Polygon gegeben.

Die Gleichungen 10 lassen sich auch auf die Form bringen:

$$(11) \quad \begin{cases} (2M_o + M_1)l_1 = N_1, \text{ wo} \\ N_1 = -\frac{6\mathfrak{R}_{o1}}{l_1} - 3EJ \frac{t_u - t_o}{h} l_1 + \frac{6EJ(\delta_1 + l_1 \alpha_o)}{l_1}. \end{cases}$$

**12. Einflusslinien für den Balken mit überall gleichem Querschnitt.** Wir setzen jetzt voraus, es seien die Festpunkte  $L$  und  $R$  auf die beschriebene Weise gefunden und verfolgen den Einfluss einer über irgend einer Oeffnung  $l_r$  aufgebrachten Belastung; die übrigen Oeffnungen seien unbelastet. Durch den Punkt  $L$  sei  $l_r$  in die Strecken  $a_r$  und  $b_r$  zerlegt, durch  $R$  in die Strecken  $a_r'$  und  $b_r'$ , Fig. 46. Setzt man dann zur Abkürzung

$$(12) \quad b_r : a_r = \alpha_r \text{ und } b_r' : a_r' = \alpha_r',$$

so lassen sich die beiden Clapeyronschen Gleichungen

$$(13) \quad \begin{cases} l_{r-1} M_{r-2} + 2(l_{r-1} + l_r) M_{r-1} + l_r M_r = N_{r-1} \\ l_r M_{r-1} + 2(l_r + l_{r+1}) M_r + l_{r+1} M_{r+1} = N_r \end{cases}$$

umformen in

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_r M_{r-1} + M_r = \frac{N_{r-1}}{l_r} *) \\ M_{r-1} + \alpha_r' M_r = \frac{N_r}{l_r}. \end{cases}$$

\*) Vergl. Abtheilung 1, Seite 354; die dort auftretenden Werthe  $\alpha_r, \beta_r, -\sum P_m \delta_{mr}$  sind jetzt bezw. durch  $l_r, 2(l_r + l_{r+1}), N_r$  zu ersetzen.

Bezeichnet man nun die Ordinaten der Geraden  $A'B'$  an den Stellen  $L$  und  $R$  mit  $Y_L$  und  $Y_R$ , so findet man:

$$(15) \quad Y_L = \frac{a_r}{l_r} (M_{r-1} x_r + M_r); \quad Y_R = \frac{a_r'}{l_r} (M_{r-1} + M_r x_r')$$

weshalb sich schliesslich zur Festlegung der  $A'B'$  die einfachen Werthe

$$(16) \quad \begin{cases} Y_L = \frac{N_{r-1}}{l_r} \cdot \frac{a_r}{l_r}; \\ Y_R = \frac{N_r}{l_r} \cdot \frac{a_r'}{l_r} \end{cases}$$

ergeben.

Trägt man also auf den Drittelsenkrechten die Ordinaten

$$(17) \quad \begin{cases} D_L = \frac{1}{3} \frac{N_{r-1}}{l_r} \text{ und} \\ D_R = \frac{1}{3} \frac{N_r}{l_r} \end{cases}$$

auf und verbindet man deren Endpunkte nach Fig. 46 mit den benachbarten Stützpunkten  $r-1$  und  $r$  durch gerade Linien, so treffen diese die in  $L$  bzw.  $R$  errichteten Senkrechten in Punkten  $L', R'$  der Geraden  $A'B'$ .

Da nur die Oeffnung  $l_r$  belastet ist, so ist nach Gleich. 8, Seite 36, und Gleich. 15 und 16, Seite 30:

$$N_{r-1} = -\frac{6 \mathfrak{M}_{or}}{l_r}, \quad N_r = -\frac{6 \mathfrak{Q}_{or}}{l_r} \text{ also}$$

$$(18) \quad \begin{cases} D_L = \frac{2 \mathfrak{M}_{or}}{l_r^2} = -\Sigma P \eta_R \\ D_R = \frac{2 \mathfrak{Q}_{or}}{l_r^2} = -\Sigma P \eta_L, \end{cases}$$

und hieraus folgt:

Die  $\eta_R$ -Linie ist Einflusslinie für das Moment  $D_L$   
 „  $\eta_L$ - „ „ „ „ „ „  $D_R$ .\*)

\*) Wäre  $l_r$  ein beiderseits wagerecht eingespannter Balken, so würde nach Seite 29, die Gerade  $A'B'$  durch die Endpunkte der Ordinaten  $D_L, D_R$  (anstatt der Ordinaten  $Y_L, Y_R$ ) zu führen sein.

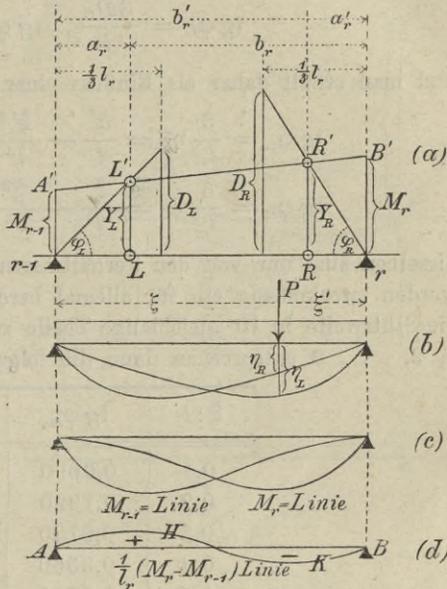


Fig. 46.

Mit Hilfe dieser beiden Linien, deren Darstellung auf Seite 30 gezeigt worden ist, lassen sich die Einflusslinien für  $M_{r-1}$  und  $M_r$  zeichnen.

Schneller aber führt der folgende Weg zum Ziele. Die Neigungswinkel  $\varphi_L$  und  $\varphi_R$  der Geraden  $(r-1)L'$  und  $rR'$  sind gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{3 D_L}{l}, \quad \operatorname{tg} \varphi_R = \frac{3 D_R}{l_r},$$

und man erhält daher als Einfluss einer Last  $P=1$  die Werthe

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{3}{l_r} \eta_R = \frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3} \quad (\text{vergl. Seite 30})$$

$$\operatorname{tg} \varphi_R = \frac{3}{l_r} \eta_L = \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3},$$

dieselben sind nur von den Verhältnissen  $\xi':l$  und  $\xi:l$  abhängig und werden zweckmässig ein für allemal berechnet, wobei es stets genügt, die Stützweite in 10 gleichlange Theile zu zerlegen. Den Theilpunkten 1, 2, . . . 9 entsprechen dann die folgenden Werthe:

$\xi:l$	$\operatorname{tg} \varphi_R$	$\operatorname{tg} \varphi_L$
0,1	0,0990	0,1710
0,2	0,1920	0,2880
0,3	0,2730	0,3570
0,4	0,3360	0,3840
0,5	0,3750	0,3750
0,6	0,3840	0,3360
0,7	0,3570	0,2730
0,8	0,2880	0,1920
0,9	0,1710	0,0990

Mit Hilfe dieser Zahlen werden die Winkel  $\varphi_R$  und  $\varphi_L$  aufgetragen und zur Ermittlung der Einflusslinien sämtlicher Stützmomente benutzt.\*) Dabei genügt es, für jedes Stützmoment diejenigen beiden Zweige der Einflusslinien zu zeichnen, welche den durch den fraglichen Stützpunkt getrennten beiden Oeffnungen angehören. Man braucht also z. B. die  $M_r$ -Linie nur von Stützpunkt  $r-1$  bis  $r+1$  zu ermitteln.

Jetzt kann man alle  $M$ -Linien und  $Q$ -Linien mittels des folgenden, bereits in Abtheil. 1 benutzten Verfahrens herleiten. Dasselbe

\*) Oder man bestimmt  $L'$  nach Fig. 48 mittels  $\eta_L = k \operatorname{tg} \varphi_L$ , wo  $k$  ein runder Werth. Ein drittes Verfahren findet sich in No. 25.

erfordert zunächst die Aufzeichnung der Einflusslinie für den Ausdruck

$$\frac{1}{l_r} (M_r - M_{r-1}) - \text{d. i. die Curve } AHKB \text{ in Fig. 46}^d \text{ und Fig. 47.}$$

a. Einflussfläche für die Querkraft  $Q_m$  des Feldes  $\lambda_m$ , Fig. 47.

Es ist

$$(19) \quad Q_m = Q_{om} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r},$$

wo  $Q_{om}$  die Querkraft für den Fall bedeutet, dass  $AB$  ein einfacher Balken ist. Die  $Q_{om}$ -Linie besteht aus den drei Geraden  $AL_1$ ,  $L_1L_2$ ,  $L_2B$  und ist bestimmt durch

$$\overline{AJ'} = 1 \text{ und } \overline{BJ''} = 1;$$

addirt man zu der  $Q_{om}$ -Fläche die  $(M_r - M_{r-1}) : l_r$ -Fläche, so erhält man die schraffierte  $Q_m$ -Fläche.

b. Einflussfläche für das Moment  $M_m$ . Bei ungleichen Feldweiten benutze man die Gleichung

$$(20) \quad M_m = M_{om} + M_r + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} x_m$$

um aus der Einflussfläche für das Moment  $M_{om}$  des einfachen Balkens  $AB$ , aus der  $M_r$ -Fläche und der  $(M_r - M_{r-1}) : l_r$ -Fläche die  $M_m$ -Fläche abzuleiten, oder aber man zeichne für verschiedene

Stellungen der Last  $P = 1$  nach Fig. 48 die Momentenfläche  $rB'C'A'r-1$ , welche den Einfluss von  $P$  auf sämtliche Querschnitte der Oeffnung  $l_r$  angiebt. Diese Fläche ist bestimmt durch  $\text{tg } \varphi_L$ ,  $\text{tg } \varphi_R$  und durch die lothrechte Höhe  $z$  der einfachen Momentenfläche  $A'C'B'$ .

Hierbei wird  $z$  als Ordinate einer Parabel erhalten, deren Pfeil =  $0,25 l_r$  ist.

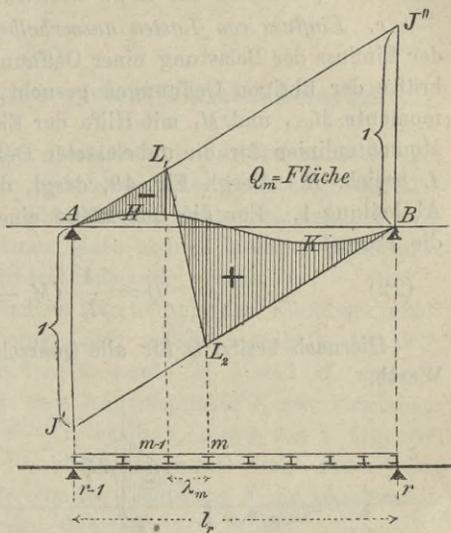


Fig. 47.

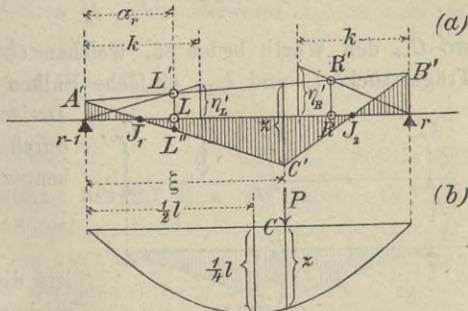


Fig. 48.

Haben alle Felder dieselbe Länge  $\lambda$ , so benutze man die Gleichung

$$(21) \quad \frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m$$

und zeichne — von der  $M_r : \lambda$ -Fläche ausgehend — schrittweise mit Hilfe der  $Q$ -Flächen die  $M : \lambda$ -Flächen.

c. *Einfluss von Lasten ausserhalb der fraglichen Oeffnung.* Wird der Einfluss der Belastung einer Oeffnung  $l_k$  auf die Momente und Querkräfte der übrigen Oeffnungen gesucht, so bestimme man die Stützmomente  $M_{k-1}$  und  $M_k$  mit Hilfe der Einflusslinien und zeichne nun die Momentenlinien für die unbelasteten Oeffnungen mittels der Festpunkte  $L$  bezieh.  $R$ . Vergl. Fig. 49, desgl. die Untersuchung auf Seite 353, Abtheilung 1. Für die Querkräfte einer unbelasteten Oeffnung  $l_r$  gilt die Formel

$$(22) \quad Q = \frac{1}{l_r} (M_r - M_{r-1}).$$

Hiernach besitzt  $Q$  für alle Querschnitte der Oeffnung  $l_r$  denselben Werth.

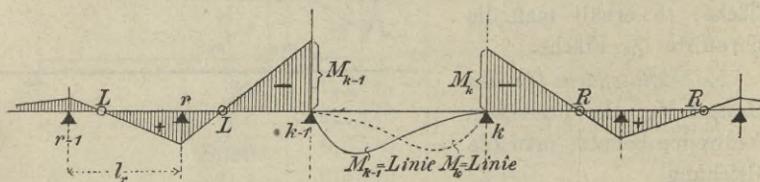


Fig. 49.

d. *Stützenwiderstände.* Der Widerstand  $C_r$  der Stütze  $r$  ist (nach Abtheil. 1, Seite 346):

$$(23) \quad C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}},$$

wo  $C_{or}$  den Werth bedeutet, welchen  $C_r$  annehmen würde, wenn die Trägerstücke  $l_r$  und  $l_{r+1}$  einfache Balken wären. Die  $C_{or}$ -Fläche ein

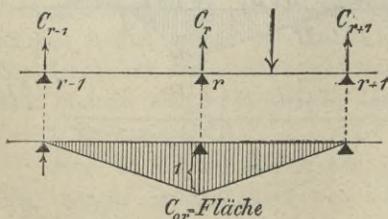


Fig. 50.

Dreieck von der Höhe 1, und hierdurch sowie durch die bereits früher benutzten Einflusslinien für

$$(M_r - M_{r-1}) : l_r \text{ und}$$

$$(M_{r+1} - M_r) : l_{r+1}$$

ist die  $C_r$ -Linie gegeben. Man zeichne dieselbe nur zwischen den Stützen  $(r-1)$  und  $(r+1)$ . Den Einfluss von Lasten links von  $(r-1)$

und rechts von  $(r+1)$  beurtheile man mittels der Gleichung

$$C_r = \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}},$$

nachdem man  $M_{r-1}$ ,  $M_r$ ,  $M_{r+1}$  mit Hilfe des unter  $c$  angegebenen Verfahrens bestimmt hat.

### § 5.

#### Fortsetzung. Einfluss einer gleichförmigen Belastung.

**13. Ungünstigste Belastung hinsichtlich der Querkräfte.** Bei gleichförmig vertheilter ständiger und beweglicher Belastung lässt sich die Bestimmung der Querkräfte, Momente und Stützenwiderstände noch erheblich vereinfachen. Wir nehmen einen überall gleichen Querschnitt an und setzen zunächst unmittelbare Belastung voraus.

Aus der in Fig. 48 gegebenen Darstellung des Einflusses einer Einzellast  $P$  geht hervor, dass eine Last, welche innerhalb der Oeffnung  $l_r$  liegt, stets negative Stützenmomente  $M_{r-1}$  und  $M_r$  erzeugt, und dass die Momente links von dem Angriffspunkte  $P$  mit zunehmender Entfernung von der Stütze  $r - 1$  wachsen, rechts von  $P$  hingegen abnehmen. Daraus folgt aber für alle Querschnitte links von  $P$  eine positive Querkraft  $Q$ , für die Querschnitte rechts von  $P$  ein negatives  $Q$ .

Je nachdem man also für den Querschnitt  $C$  in Fig. 51 und 52 die grösste positive Querkraft, d. i.  $max Q$ , oder die grösste negative Querkraft, d. i.  $min Q$  erhalten will, muss man die Strecke  $x'$  oder die Strecke  $x$  belasten. Wie die übrigen Oeffnungen zu belasten sind, darüber geben die Figuren 51 und 52 Aufschluss. Der Beweis folgt aus Fig. 49, welche zeigt, dass die Belastung der Oeffnung  $l_k$  in den Oeffnungen  $l_{k-1}$ ,  $l_{k-3}$ , . . . . ferner in  $l_{k+2}$ ,  $l_{k+4}$ , . . . . negative Querkräfte hervorruft, in den übrigen positive  $Q$ . Beispielsweise ergibt sich für alle Querschnitte der Oeffnung  $l_{k-1}$ :

$$Q = \frac{M_{k-1} - M_{k-2}}{l_{k-1}},$$

und dieser Werth ist negativ, weil  $M_{k-1}$  negativ und  $M_{k-2}$  positiv ist.

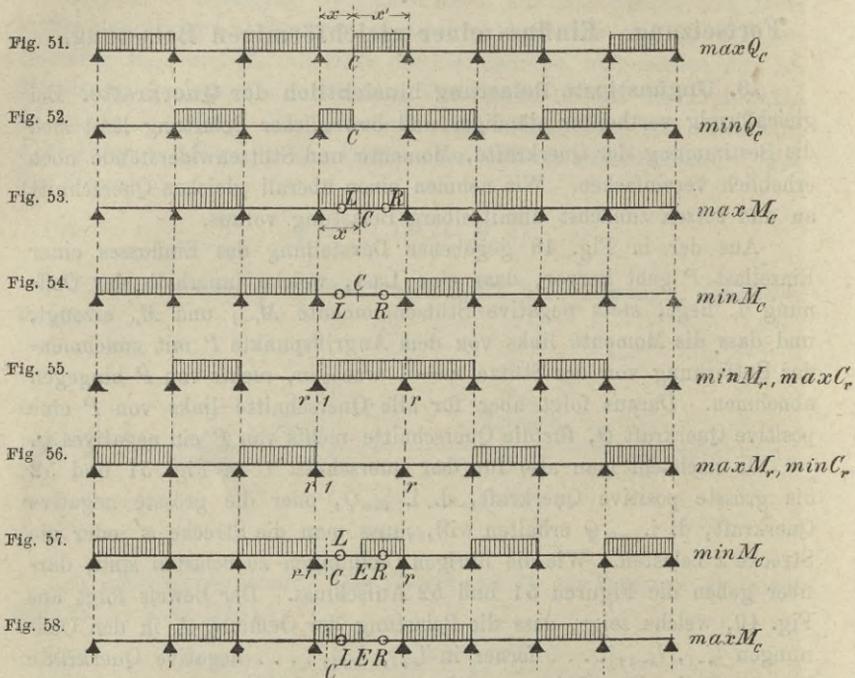
**14. Ungünstigste Belastung hinsichtlich der Momente.** Die der Einzellast  $P$  in Figur 48 entsprechende Momentenlinie  $A'C'B'$  schneidet die Achse ( $r - 1$ )  $r$  in zwei Punkten  $J_1$  und  $J_2$  über deren Lage wir durch Untersuchung der Momente an den Stäben  $L$  und  $R$  Aufschluss erhalten werden. An der Stelle  $L$  entsteht (mit  $P = 1$ ):

$$M_L = \overline{LL''} = \overline{L'L''} - \overline{L'L} = z \frac{a_r}{\xi} - \gamma_L' \frac{a_r}{k}$$

und wegen  $\eta_L' = k \operatorname{tg} \varphi_L$ , d. i.

$$\eta_L' = k \left( \frac{\xi'}{l} - \frac{\xi^3}{l^3} \right) = \frac{k \xi' (l - \xi) (l + \xi)}{l^3} = \frac{k z (l + \xi')}{l^2},$$

$$M_L = \frac{z a_r}{\xi l} \left[ l - \frac{\xi (l + \xi')}{l} \right].$$



Da nun 
$$\left[ \frac{\xi (l + \xi')}{l} \right]_{\max} = l$$

ist, so folgt, dass das von der Last  $P$  hervorgerufene Moment  $M_L$  stets positiv ist, dass also der Nullpunkt  $J_1$  jedenfalls links vom Festpunkte  $L$  liegt und ganz ebenso lässt sich nachweisen, dass der Nullpunkt  $J_2$  der Strecke  $Rr$  angehören muss.

Für die Querschnitte zwischen den Festpunkten  $L$  und  $R$  ergeben sich also infolge der Belastung der fraglichen Oeffnung stets positive Momente, und aus diesem wichtigen Gesetze und aus der Figur 49 folgen ohne weiteres die in den Figuren 53 und 54 dargestellten Belastungsweisen.

Für einen ausserhalb der Strecke  $LR$  gelegenen Querschnitt  $C$  (z. B. einen Querschnitt links von  $L$ ) ist zur Erzielung von  $_{max}M$  und  $_{min}M$  eine theilweise Belastung der fraglichen Oeffnung erforderlich, Fig. 57 u. 58. Es entspricht hier jedem Querschnitte  $C$  eine bestimmte Belastungsscheide  $E$ , beispielsweise dem Querschnitte  $J_1$  in Figur 48 die Belastungsscheide  $C$ ; die Aufsuchung derselben ist aber stets entbehrlich, weil man die  $_{max}M$ -Linien und die  $_{min}M$ -Linien für die Querschnitte ausserhalb der Strecke  $LR$  auch ohne Ermittlung der Belastungsscheiden zeichnen kann, wie in No. 17 gezeigt werden soll. *Man darf sogar die genauere Berechnung der Momente für die Querschnitte zwischen den Festpunkten und den benachbarten Stützpunkten ganz unterlassen und die Annahme machen, es verlaufe die Momentenlinie (sowohl die für  $_{min}M$  als auch für  $_{max}M$ ) zwischen einem Festpunkte und dem benachbarten Stützpunkte geradlinig*; vergl. das in No. 18 durchgeführte Zahlenbeispiel. Dieser sehr einfache Rechnungsgang liefert etwas zu grosse Momente. Die ungünstigste Belastungsweise hinsichtlich der Stützenmomente zeigt Fig. 55 und Fig. 56; bei diesen Laststellungen entstehen auch die Grenzwerte des Stützenwiderstandes  $C_r$ .

Behufs Ermittlung der Grenzwerte von  $Q$ ,  $M$ ,  $C$  genügt es, wie in No. 12, den Einfluss der Belastung einer Oeffnung zu verfolgen.

**15. Gänzliche, gleichmässige Belastung einer Oeffnung.** Die einfache Momentenlinie ist eine Parabel von der Pfeilhöhe  $\frac{pl^2}{8}$ , wenn  $p$  die Belastung für die Längeneinheit bedeutet. Die statischen Momente  $\mathfrak{Q}_o$  und  $\mathfrak{R}_o$  sind nach Seite 30:

$$(1) \quad \mathfrak{Q}_o = \mathfrak{R}_o = \frac{pl^4}{24}$$

und man erhält daher

$$(2) \quad D_L = D_R = -\frac{2}{l^2} \cdot \frac{pl^4}{24} = -\frac{pl^2}{12}.$$

Hierdurch sind die Stützenmomente  $M_{r-1} = \overline{AA'}$  und  $M_r = \overline{BB'}$  in Fig. 59<sup>a</sup> (vergl. auch Fig. 46) bestimmt, und es ergibt sich nach Einzeichnung der Parabel  $A'CB'$  in der schraffirten Fläche die gesuchte Momentenfläche der Oeffnung  $AB$ . Zur Konstruktion dieser Parabel wurde  $CD \parallel A'B'$  gezogen und sowohl  $CD$  als auch  $B'D$  in eine gleiche Anzahl gleichgrosser Theile zerlegt. Die Schnittpunkte der durch die Theilpunkte 1, 2, gelegten Lothrechten mit den Geraden, welche  $C$  mit den Theilpunkten  $1'$ ,  $2'$ , verbinden, sind Punkte der Parabel. Ganz ebenso wurde der Parabelzweig  $A'C$  erhalten. Die auf diese Weise gefundenen Momente mögen mit  $M_p$  bezeichnet werden.

Für die Querkräfte gilt die Gleichung

$$(3) \quad Q_p = Q_o + \frac{M_r - M_{r-1}}{l}.$$

Die dem Einzelbalken  $AB$  entsprechenden Querkräfte  $Q_o$  sind bekanntlich gleich den Ordinaten einer Geraden  $CF$  (Fig. 59<sup>b</sup>), welche auf den Stützenlothrechten die Strecken  $\pm \frac{pl}{2}$  abschneidet, und diese Gerade wird behufs Ermittlung der Querkräfte  $Q$  um

$$Q' = \frac{M_r - M_{r-1}}{l}$$

in lothrechter Richtung verschoben. In Fig. 59<sup>a</sup> ist  $M_r > M_{r-1}$  vorausgesetzt, mithin  $Q'$  negativ.

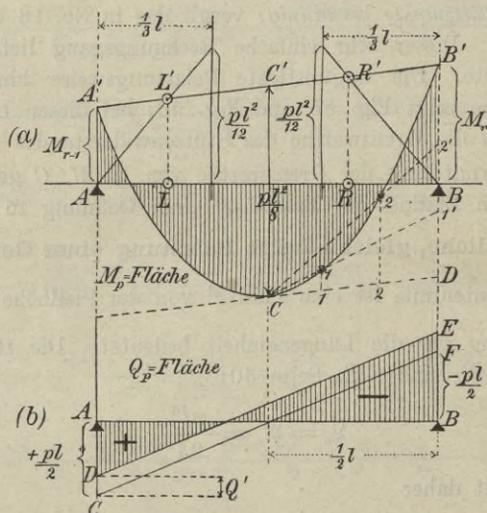


Fig. 59.

**16. Theilweise gleichförmige Belastung einer Oeffnung.** Die Belastung bedecke nach Fig. 60 die an das rechtsseitige Auflager grenzende Strecke  $\xi'$ . Es ist dann, da die  $\eta_{rL}$ -Linie die Einflusslinie für  $D_L$  ist, nach Gleich. 18 auf Seite 41:

$$(4) \quad -D_L = p \int_0^{\xi'} \eta_{rL} dx = \frac{pl}{3} \int_0^{\xi'} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) dx = \frac{pl^2}{12} \cdot \omega_L, \quad \text{wo}$$

$$(5) \quad \omega_L = \frac{\xi'^2}{l^2} \left( 2 - \frac{\xi'^2}{l^2} \right),$$

d. i. eine von der Stützweite unabhängige und nur von dem Verhältniss  $\xi':l$  abhängige Zahl. Für  $\xi' = l$  ist  $\omega_L = 1$ , und hieraus folgt, dass  $\omega_L$  infolge der Belastung von  $\xi'$  und  $\omega_L$  infolge der Belastung der Strecke  $\xi = l - \xi'$  zusammengenommen = 1 ist. Behufs Ermittlung von  $D_R = -\frac{pl^2}{12} \omega_R$  beachte man, dass der Werth  $\omega_R$  für die

in Fig. 60<sup>b</sup> angenommene Belastung ebenso gross ist, wie  $\omega_L$  für eine vom linksseitigen Auflager aus die gleiche Strecke  $\xi'$  bedeckende Last, weshalb nach Aufzeichnung der  $\omega_L$ -Linie der Werth  $\omega_R$  auf die in der Fig. 60<sup>b</sup> angegebene Weise erhalten wird. Man findet:

für $\xi':l = 0,1$ ,	$\omega_L = 0,0199$ ,	$\omega_R = 0,0361$
0,2	0,0784	0,1296
0,3	0,1719	0,2601
0,4	0,2944	0,4096
0,5	0,4375	0,5625
0,6	0,5904	0,7056
0,7	0,7399	0,8281
0,8	0,8704	0,9216
0,9	0,9639	0,9801
1,0	1,0000	1,0000

Mit Hilfe dieser Zahlenwerthe kann man die Grössen  $D_L$  und  $D_R$  für eine vom rechten Auflager aus vorrückende gleichförmige Belastung schnell berechnen und die zugehörigen Stützenmomente ermitteln. In der Regel kommt es aber nur darauf an, die infolge dieser einseitigen Belastung entstehenden *Querkräfte*  $Q$  zu bestimmen und hierzu ist (ausser der Ermittlung von  $Q_0$ ) nur die Angabe von

$$Q' = \frac{M_r - M_{r-1}}{l}$$

d. i. die Bestimmung des Unterschiedes der Stützenmomente erforderlich. Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich, auf den Drittelsenkrechten nicht die Momente  $D_L$  und  $D_R$  aufzutragen, sondern die Strecken

$$(6) \quad h_L = D_L : \frac{pl^2}{12e} \quad \text{bezw.} \quad h_R = D_R : \frac{pl^2}{12e}, \quad \text{nämlich}$$

$$h_L = e\omega_L \quad \text{bezw.} \quad h_R = e\omega_R,$$

wo  $e$  eine beliebig grosse, selbstverständlich durch eine runde Zahl ausdrückbare Strecke bedeutet. Es sind nämlich  $h_L$  und  $h_R$  unabhängig von der Weite  $l$  der fraglichen Oeffnung; sie brauchen nur einmal berechnet zu werden und lassen sich dann zur Untersuchung sämtlicher Oeffnungen verwerthen.

Nun bringt man die Geraden, welche die Endpunkte der Strecken  $h_L$  und  $h_R$  mit den benachbarten Stützpunkten verbinden, mit den Festpunktsenkrechten in  $L'$ ,  $R'$  zum Schnitt, legt durch  $L'$ ,  $R'$  die Gerade  $s$  und erhält, da  $s$  auf den Stützensenkrechten die durch  $\frac{pl^2}{12e}$  dividirten Stützenmomente abschneidet, für den Neigungswinkel von  $s$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{12e}{pl^2} \cdot \frac{M_r - M_{r-1}}{l}$$

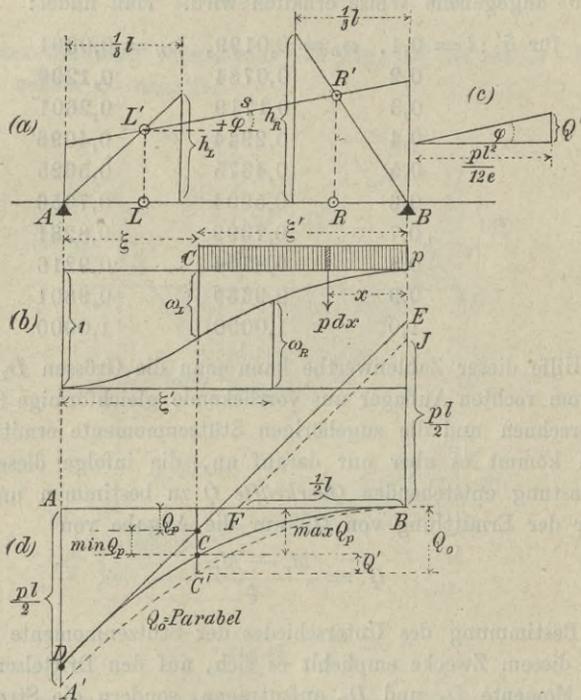


Fig. 60.

woraus sich (Fig. 60°)

$$Q' = - \frac{pl^2}{12e} \operatorname{tg} \varphi^*)$$

ergibt.

Jetzt findet man für den die belastete Strecke  $\xi'$  begrenzenden

\*) Das Minuszeichen ist nöthig, weil die Stützenmomente negativ sind und weil  $M_r > M_{r-1}$  ist sobald  $\varphi$  positiv ist.

Querschnitt  $C$  (da zunächst von der Belastung der übrigen Felder abgesehen werden soll):

$$\max Q_p = Q_o + Q',$$

wo  $Q_o = \frac{p\xi'^2}{2l}$  die Querkraft für den Querschnitt  $C$  des Einzelbalkens  $AB$  ist, d. i. die Ordinate einer Parabel  $BA'$  (Fig. 60<sup>a</sup>), deren Scheitel bei  $B$  liegt und die auf der Senkrechten durch  $A$  die Strecke  $\overline{AA'} = \frac{pl}{2}$  abschneidet.

Da nun weiter  $\min Q_p$  durch ausschliessliche Belastung der Strecke  $\xi$  hervorgerufen wird und

$$\min Q_p + \max Q_p = Q_p$$

d. i. gleich der Querkraft infolge gänzlicher Belastung der Oeffnung  $AB$  ist, so findet man  $\min Q_p$  gleich dem lothrechten Abstände der  $\max Q_p$ -Linie von einer Geraden  $DE$ , welche man erhält, indem man vom Mittelpunkte  $F$  der Oeffnung  $AB$  die Gerade  $FJ$  mit der Endordinate  $\overline{BJ} = \frac{1}{2} pl$  zieht und  $DE \parallel FJ$  macht. Infolge der Belastung

anderer Oeffnungen ändert sich nur der Werth  $Q' = \frac{1}{l} (M_r - M_{r-1})$ ;

man braucht also zur vollständigen Darstellung von  $\max Q_p$  und  $\min Q_p$  nur noch die Geraden  $DE$  und  $AB$ , um gewisse Strecken  $Q'$  in lothrechter Richtung zu verschieben. Vergleiche das in No. 18 durchgeführte Zahlenbeispiel.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass in den Mittelfeldern die Abweichung der  $\max Q_p$ -Linie von der  $Q_o$ -Parabel unwesentlich ist und die Werthe  $Q'$  nur soweit berücksichtigt zu werden brauchen, als sie von der Belastung anderer Oeffnungen herrühren. Nach diesem, die Rechnung sehr abkürzenden Verfahren erhält man die Querkräfte etwas zu gross.

**17. Fortsetzung.** Wird für den Fall theilweiser Belastung einer Oeffnung nicht nur nach den Querkräften, sondern auch nach den Momenten gefragt,\*) so ersetze man die auf den Drittelsenkrechten aufzutragenden Momente  $D_L, D_R$  durch die im beliebig zu wählenden Abstände  $k$  von den Stützpunkten aufzutragenden Momente (Fig. 61):

$$D_L' = \frac{3k}{l} D_L = \frac{pk l}{4} \omega_L \text{ und}$$

$$D_R' = \frac{3k}{l} D_R = \frac{pk l}{4} \omega_R$$

\*) D. h. begnügt man sich nicht mit der auf Seite 47 hinsichtlich der Momente empfohlenen Näherungsberechnung.

und wähle  $k$  so gross, dass sich für  $\frac{pk'l}{4}$  ein runder und für alle Oeffnungen gleicher Werth ergibt, damit die Berechnung der  $D_L'$ ,  $D_R'$  nicht für jede einzelne Oeffnung wiederholt zu werden braucht.

Die Gerade  $L'R'$  schneidet auf den Auflagersenkrechten die Stützmomente  $M_r$ ,  $M_{r-1}$  ab; man findet, wenn  $\varphi$  den Neigungswinkel der  $L'R'$  bezeichnet,

$$Q' = -1 \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

und ist jetzt im Stande, die Grenzwerte  $\max Q_p$ ,  $\min Q_p$  in derselben Weise zu ermitteln wie vorhin.

Infolge der Belastung der Strecke  $\xi'$  entsteht nun auch das Moment  $\min M_p$  für einen bestimmten links vom Festpunkte  $L$  gelegenen Querschnitt  $J$  — wobei zunächst wieder von der Belastung anderer Oeffnungen abgesehen werde.

Die Momentenlinie ist für den den Querschnitt  $J$  enthaltenden unbelasteten Balkentheil  $\xi$  eine Gerade  $A'E$ , welche durch die Stützmomente und durch die Bedingung gegeben ist, dass die Geraden  $A'B'$  und  $A'E$  auf einer im beliebigen Abstände  $k'$  von  $A'$  gezogenen Lothrechten das Moment  $Q_0 k'$  abschneiden müssen.  $Q_0$  ist bereits zur Ermittlung von

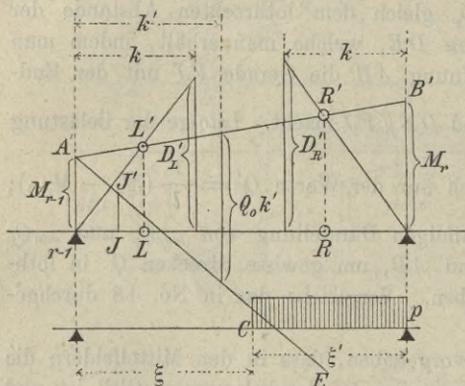


Fig. 61.

$\max Q_p$  gebraucht worden, und für  $k'$  wird man ein rundes Maass annehmen, so dass die Festlegung der Geraden  $A'E$  schnell von statten geht. Schreitet nun die bewegliche Belastung um  $d\xi$  weiter vor, so bleibt das Moment  $JJ'$  an der Stelle  $J$  ungeändert, da ja die Stelle  $C$  Belastungsscheide für den Querschnitt  $J$  ist. Die Momentenlinie  $A'E$  dreht sich im ersten Augenblicke der Weiterbewegung der Belastung um den Punkt  $J'$  und daraus folgt, dass die den verschiedenen  $\xi'$  entsprechenden Geraden  $A'E$  die Momentenlinie  $\min M_p$  einhüllen. Hat man diese Linie gezeichnet, so findet man  $\max M_p$  in Folge der Belastung der Strecke  $\xi$  mittels der Gleichung

$$\max M_p + \min M_p = M_p.$$

$M_p$  aber wird nach No. 15 bestimmt. Der Einfluss der Belastung der übrigen Oeffnungen wird dann nach Fig. 49 mit Hilfe der Festpunkte  $L$  und  $R$  ermittelt.

Ogleich die Darstellung der genaueren Momentenlinien hiernach keine Schwierigkeit bereitet, dürfte dem in No. 14 angegebenen und im nachstehenden Zahlenbeispiele angewandten Näherungsverfahren doch der Vorzug gebühren. Man beachte, dass die Einführung einer gleichförmigen beweglichen Belastung stets auf ziemlich groben Schätzungen beruht und dass eine allzu peinliche Berechnung schlecht hierzu passen dürfte.

**18. Zahlenbeispiel.** Auf Tafel 2 wurde nach dem im Vorstehenden entwickelten Verfahren ein Balken mit 4 Oeffnungen untersucht. Die Stützweiten sind  $l_1 = 10$  m für die Seitenöffnungen und  $l = 12$  m für die Mittelöffnungen. Die ständige Belastung beträgt  $g = 0,9$  t f. d. Meter, die bewegliche  $p = 3,6$  t.

Zuerst wurden in Fig. 62 die Drittelsenkrechten  $d$  und verschränkten Stützensenkrechten  $v$  eingetragen und (nach Seite 38) die Festpunkte  $L_1, L_2, L_3, L_4$  bestimmt. Damit sind, der Symmetrie wegen, auch die Punkte  $R$  gegeben.

Nun wurden in Fig. 62 die Stützenmomente für den Fall ermittelt, dass die erste Oeffnung gänzlich mit  $p$  belastet werde, die übrigen Oeffnungen hingegen unbelastet seien. Der roth schraffierte Linienzug ist das dieser Belastung entsprechende  $M$ -Polygon; er geht durch die Festpunkte  $L_1, R_2, R_3, R_4$  und ist durch die Bedingung bestimmt, dass die vom Stützpunkte 1 durch den Punkt  $R_1'$  gezogene Gerade auf der Drittelsenkrechten  $d_1$  das Moment

$$-\frac{pl_1^2}{12} = -\frac{3,6 \cdot 10^2}{12} = -30,00 \text{ tm}$$

abschneiden muss. Die Ergebnisse sind in die Figur eingetragen worden.

Der blau schraffierte Linienzug liefert die Stützenmomente für den Fall, dass nur die zweite Oeffnung, diese aber gänzlich belastet ist; er geht durch die Festpunkte  $L_1, R_3, R_4$  und ist durch die Bedingung gegeben, dass die von den Stützpunkten 1 und 2 aus durch  $L_2'$  bzw.  $R_2'$  gezogenen Geraden auf den Drittelsenkrechten  $d_2'$  und  $d_2''$  die Momente

$$-\frac{pl^2}{12} = -\frac{3,6 \cdot 12^2}{12} = -43,20 \text{ tm}$$

abschneiden müssen.

Hiermit ergibt sich nun die folgende Zusammenstellung:

Einfluss der Belastung $p$	Stützenmomente		
	$M_1$	$M_2$	$M_3$
der ersten Oeffnung	- 22,06 tm	+ 5,92 tm	- 1,61 tm
„ zweiten „	- 27,90 „	- 27,28 „	+ 7,44 „
„ dritten „	+ 7,44 „	- 27,28 „	- 27,90 „
„ vierten „	- 1,61 „	+ 5,92 „	- 22,06 „
zusammen:	- 44,13 „	- 42,72 „	- 44,13 tm

Auf Grund dieser Werthe wurden in Fig. 63 die grössten negativen und positiven Momente ( $\min M_p$ ,  $\max M_p$ ) dargestellt. Es geschah dies zunächst für die in Fig. 68 mit I, II, III, IV bezeichneten Belastungsfälle.

Der Belastungsfall I erzeugt für die Balkenstrecke  $L_1 R_1$  die Momente  $\min M_p$  und für die Strecke  $L_2 R_2$  die Momente  $\max M_p$ . Die Stützmomente sind:

$$M_1 = -27,90 - 1,61 = -29,5 \text{ tm}$$

$$M_2 = -27,28 + 5,92 = -21,4 \text{ tm};$$

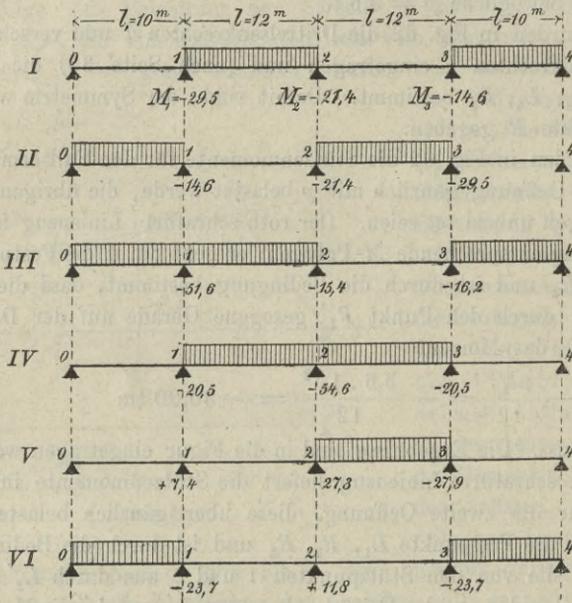


Fig. 68.

dieselben bestimmen in Fig. 63 den Linienzug I I. Die rothe Gerade I ist die  $\min M_p$ -Linie für die Strecke  $L_1 R_1$ ; von der blauen Geraden I aus werden (nach Fig. 59, Seite 48) die Ordinaten einer Parabel (I') aufgetragen, deren Pfeilhöhe  $= \frac{pl^2}{8} = \frac{3,6 \cdot 12^2}{8} = 64,8 \text{ tm}$  ist.

Diese Parabel ist die  $\max M_p$ -Linie für die Strecke  $L_2 R_2$ .

Der Belastungsfall II erzeugt die  $\max M_p$  für die Strecke  $L_1 R_1$  und die  $\min M_p$  für die Strecke  $L_2 R_2$ . Die Stützmomente sind:

$$M_1 = -14,6 \text{ tm}, \quad M_2 = -21,4 \text{ tm};$$

sie bestimmen die Geraden  $II$ ,  $II'$ . Der Pfeil der Parabel  $II'$  ist

$$\frac{pl_1^2}{8} = \frac{3,6 \cdot 10^2}{8} = 45,0 \text{ tm.}$$

Der Belastungsfall  $III$  erzeugt das grösste negative Stützenmoment:

$$\min M_1 = -22,06 - 27,90 - 1,61 = -51,6 \text{ tm,}$$

und damit ist auch die (angenäherte)  $\min M_p$ -Linie für die Strecke  $R_1 L_2$  gegeben; sie besteht aus den beiden Geraden  $III$ .

Dem Belastungsfall  $IV$  entspricht das grösste negative Stützenmoment:

$$\min M_2 = -2 \cdot 27,28 = -54,6 \text{ tm;}$$

dasselbe wird zur Festlegung der Geraden  $IV$ , welche die  $\min M_p$  für die Strecke  $R_2 2$  liefert, benutzt.

Die Belastungsfälle  $V$  und  $VI$  erzeugen schliesslich

$$\max M_1 = +7,4 \text{ tm}$$

$$\text{bezw. } \max M_2 = +2 \cdot 5,92 = +11,8 \text{ tm}$$

und diese Werthe liefern die angenäherten  $\max M_p$ -Linien  $V$  und  $VI$  für die Strecken  $R_1 L_2$  bzw.  $R_2 2$ .

Die Momente infolge der ständigen Belastung  $g = 0,9 = \frac{1}{4} p$

wurden gesondert dargestellt (Fig. 64); sie sind bestimmt durch die Stützenmomente

$$M_2 = -\frac{g}{p} \cdot 42,72 = -10,7 \text{ tm, } M_3 = -\frac{g}{p} 44,13 = -11,0 \text{ tm}$$

und durch die Parabelpfeile

$$\frac{gl^2}{8} = 16,20 \text{ tm, } \frac{gl_1^2}{8} = 11,25 \text{ tm.}$$

Die Querkräfte  $\max Q_p$  und  $\min Q_p$  der Seitenöffnung sind nach dem in No. 16 angegebenen Verfahren ermittelt. Die dort mit  $e$  bezeichnete Strecke wurde 10 m gewählt, weshalb sich die den Theilpunkten 0, 1, 2, 4 (in Fig. 66<sup>b</sup>) entsprechenden Höhen  $h_R = e \omega_R$  zu

$$10,00 \text{ m, } 9,22 \text{ m, } 7,06 \text{ m, } 4,10 \text{ m, } 1,30 \text{ m}^*)$$

ergeben; dieselben sind auf der Drittelsenkrechten  $d_1$  aufgetragen worden und dienen, da  $L_1$  mit der Stütze 0 zusammenfällt, zur Bestimmung der Strahlen  $00'$ ,  $01'$ ,  $02'$ ,  $03'$ ,  $04'$ . Diese Strahlen schneiden auf einer im Abstände

\*) Vergl. die Zahlen  $\omega_R$  auf Seite 49. Im vorliegenden Falle wurden nur die Werthe für  $\xi':l = 1,0; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2$  gebraucht.

$$\frac{pl_1^2}{12e} = \frac{3,6 \cdot 10^2}{12 \cdot 10} = 3,0 \text{ t}$$

vom Stützpunkte 0 gelegenen Senkrechten die von der  $Q_0$ -Parabel in Abzug zu bringenden Kräfte  $Q'$  ab.

Die auf diese Weise in Fig. 66 gewonnene und durch schwarze Schraffirung hervorgehobene ( $Q_0 - Q'$ )-Linie wurde in die Figur 67<sup>a</sup> übertragen und giebt auf die blau schraffierte Gerade VII bezogen die Querkräfte  $max Q_p$  an. Es muss nämlich, behufs Erzeugung von  $max Q_p$  noch die dritte Oeffnung gänzlich belastet werden, Fig. 69 (Fall VII), und infolge dessen wächst in der ersten Oeffnung die Querkraft um den Betrag  $\frac{M_1}{l_1} = + \frac{7,44}{10} = 0,75 \text{ t}$ .

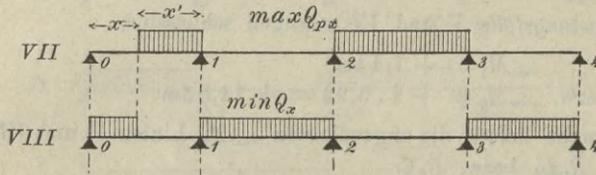


Fig. 69.

Da nun weiter zur Hervorbringung von  $min Q_p$  an der Stelle  $x$  nicht nur die Strecke  $x$  (Fig. 69) sondern noch die zweite und vierte Oeffnung gänzlich zu belasten sind und diesen gänzlischen Belastungen das Stützenmoment  $M_1 = -29,5 \text{ tm}$  entspricht, so tritt zu der Querkraft infolge der Belastung der Strecke  $x$  noch der Betrag  $\frac{M_1}{l_1} = -2,95 \text{ t}$ . Es geben deshalb die Abstände der schwarz schraffirten Linie von der roth schraffirten Geraden VIII (deren Bestimmung aus Fig. 67<sup>a</sup> hervorgeht) die grössten negativen Querkräfte  $min Q_p$  an.

Für die zweite Oeffnung ergeben sich für die nach Fig. 60 auf Seite 50 herzuleitenden  $Q'$  so kleine Werthe, dass die  $Q_0$ -Parabel beibehalten wurde. Die Festlegung der Geraden IX und X geschah mit Rücksicht auf die in Fig. 70 dargestellten Belastungsfälle IX und X wie folgt.

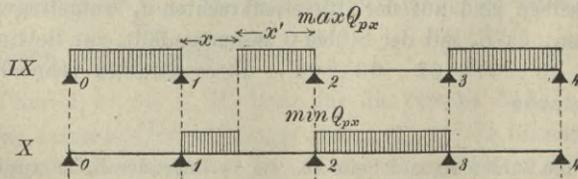


Fig. 70.

Die Belastung der ersten und vierten Oeffnung ruft  $M_1 = -23,7$  tm und  $M_2 = +11,8$  tm hervor, erzeugt also in der zweiten Oeffnung die Querkraft  $\frac{M_2 - M_1}{l} = +3,0$  t.

Infolge der Belastung der dritten Oeffnung entsteht  $M_1 = +7,4$ ,  $M_2 = -27,3$  und  $Q = \frac{M_2 - M_1}{l} = -2,9$  t. Das Weitere geht aus Fig. 67<sup>b</sup> hervor. Die beiden Geraden VIII und X sind parallel.

Die Querkräfte infolge der ständigen Belastung wurden in Fig. 65 für die dritte und vierte Oeffnung dargestellt. Für die dritte Oeffnung erweist sich der Einfluss der Stützenmomente, d. i.  $Q' = \frac{M_3 - M_2}{l} = \frac{-11,0 + 10,7}{12}$ , als so unwesentlich, dass die  $Q_c$ -Linie benutzt werden darf. Es ist dies eine Gerade mit den Endhöhen  $\pm \frac{gl}{2} = \pm 0,9 \cdot 6 = \pm 5,4$  t.

Die Querkraftslinie der vierten Oeffnung ist eine Gerade mit den Endhöhen

$$+ \frac{gl_1}{2} - \frac{M_3}{l_1} = +4,5 + 1,1 = +5,6 \text{ t und}$$

$$- \frac{gl_2}{2} - \frac{M_3}{l_1} = -4,5 + 1,1 = -3,4 \text{ t.}$$

Die Querkräfte  $Q_p$  der ersten und zweiten Oeffnung haben die entgegengesetzten Vorzeichen wie diejenigen der vierten und dritten Oeffnung. Beispielsweise besitzt die  $Q_p$ -Linie an den Stützen 0 und 1 die Höhen  $+3,4$  t bzw.  $-5,6$  t.

Es fehlt jetzt nur noch die Berechnung der Stützenwiderstände  $C_0, C_1, C_2$ . Man erhält nach der Gleichung

$$C_r = C_{0,r} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}$$

und nach Einführung der in die Figur 68 eingetragenen Stützenmomente:

$\alpha$ , den Einfluss der beweglichen Belastung

$$\text{Belastungsfall I } \min C_{0,p} = \frac{M_1}{l_1} = -\frac{29,5}{10} = -2,95 \text{ t}$$

$$\text{,, II } \max C_{0,p} = \frac{pl_1}{2} + \frac{M_1}{l_1} = 18,0 - \frac{14,6}{10} = +16,5 \text{ t}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Belastungsfall III } \max C_{1p} &= \frac{pl_1}{2} + \frac{pl}{2} - \frac{M_1}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l} \\
 &= 18,0 + 21,6 - \frac{51,6}{10} = \frac{-15,4 + 51,6}{12} \\
 &= +47,8 \text{ t} \\
 \text{„ IV } \max C_{2p} &= 2 \left( \frac{pl}{2} + \frac{M_1 - M_2}{l} \right) \\
 &= 2 \left( 21,6 + \frac{-20,5 + 54,6}{12} \right) = +48,9 \text{ t} \\
 \text{„ V } \min C_{1p} &= -\frac{M_1}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l} \\
 &= -\frac{7,4}{10} + \frac{-27,3 + 7,4}{12} = -2,4 \text{ t} \\
 \text{„ VI } \min C_{2p} &= 2 \frac{M_1 - M_2}{l} = 2 \frac{-23,7 - 11,8}{12} \\
 &= -5,9 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

b, den Einfluss der ständigen Belastung (nach Fig. 65)

$$\begin{aligned}
 C_{0g} = C_{4g} &= +3,4 \text{ t}; \quad C_{1g} = C_{3g} = +5,6 + 5,4 = +11,0 \text{ t} \\
 C_{2g} &= 2 \cdot 5,4 = +10,8 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Für die  $\min C$  erhält man im Ganzen:

$$\begin{aligned}
 \min C_0 &= -2,95 + 3,4 = +0,45 \text{ t} \\
 \min C_1 &= -2,4 + 11,0 = +9,6 \text{ t} \\
 \min C_2 &= -5,9 + 10,8 = +4,9 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

#### **Einfluss einer ungleichförmigen Erwärmung des Balkens.**

Wir setzen nun voraus, es handle sich im vorliegenden Falle um einen Brückenträger, dessen untere Gurtung im Schatten der Fahrbahn liegt, während die obere Gurtung über die Fahrbahn hinausragt und infolge Sonnenbestrahlung eine um  $15^\circ$  höhere Temperatur annimmt als die untere Gurtung. Die durch diese ungleichmässige Erwärmung erzeugten Stützenmomente ermitteln wir mit Hilfe des in No. 11 angegebenen Verfahrens. Dabei möge in den Ausdruck

$$T_r = \frac{\varepsilon EJ(t_o - t_u)}{h} \quad (\text{Gleich. 9, Seite 37})$$

für  $\frac{J}{h}$  der dem stärksten beanspruchten Querschnitte entsprechende Werth eingesetzt werden. Durch diese ungünstige Annahme (an Stelle der Einführung eines mittleren Werthes  $\frac{J}{h}$ ) tragen wir etwaigen schädlichen Verschiebungen der Stützpunkte Rechnung.

Das grösste Moment ergab sich bei Stütze 2; dasselbe ist:

$$M_2 = M_{2.p} + M_{2.g} = -54,6 - 10,7 = -65,3 \text{ tm}$$

und erfordert bei einer zulässigen Beanspruchung von  $\sigma = 750 \text{ kg f. d. qm} = 7500 \text{ t f. d. qm}$  ein Widerstandsmoment

$$W = \frac{M}{\sigma} = \frac{65,3}{7500} = 0,0082 \text{ m}^3$$

weshalb, wegen  $J = \frac{1}{2} Wh$  (d. h.  $\frac{J}{h} = 0,0041$ ) und mit  $\varepsilon E = 240 \text{ t f. d. qm}$  Scheweisseisen:

$$T_1 = T_2 = 240 \cdot 0,0041 \cdot 15 = \text{rund } 15 \text{ tm.}$$

Diese Werthe wurden in Fig. 71 auf den verschränkten Stützenkrechten  $v_1, v_2$  als Ordinaten aufgetragen, und hierauf wurden (nach Seite 38) die Punkte  $L_2'$  und  $L_3'$  des gesuchten  $M$ -Polygons

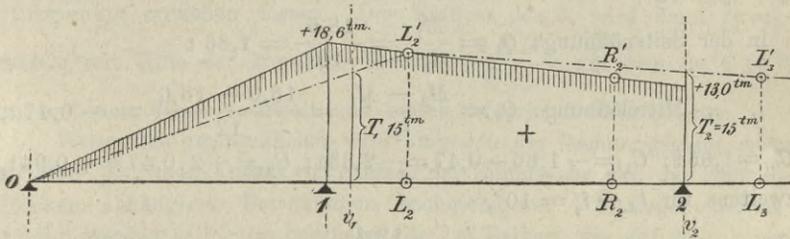


Fig. 71.

ermittelt. Da der Balken symmetrisch ist, so konnte aus der Lage von  $L_3'$  auf die Lage von  $R_2'$  geschlossen werden ( $R_2R_2' = L_3L_3'$ ) und damit war das  $M$ -Polygon bestimmt. Das Ergebniss lautet:

$$M_{1t} = +18,6 \text{ tm} \quad M_{2t} = +13,0 \text{ tm.}$$

Sonnenbestrahlung der oberen Gurtung erzeugt also überall positive Momente. Addirt man die auf Tafel 2 gesondert dargestellten Momente  $M_p$  und  $M_g$  so findet man in der ersten Oeffnung

$$\max(M_p + M_g) = 44,0 \text{ tm}$$

und in der zweiten Oeffnung

$$\max(M_p + M_g) = 44,7 \text{ tm.}$$

Fügt man nun die in Fig. 71 gewonnenen Momente  $M_t$  hinzu, so erhält man:

$$\max(M_p + M_g + M_t) = 53 \text{ tm} \text{ bezieh. } 60,5 \text{ tm.}$$

Hiernach wird  $_{max}M$  infolge der Temperaturänderung um 20% bezieh. 35% des zuerst ermittelten Werthes vergrößert.

Um schliesslich auch hinsichtlich der Momente  $_{min}M$  eine möglichst ungünstige Voraussetzung zu machen, nehmen wir an, es erfahre im Winter die obere Gurtung eine stärkere Abkühlung als die geschützt liegende untere Gurtung. Den Temperaturunterschied ermässigen wir aber auf 10°, setzen also:

$$M_{1t} = -\frac{2}{3} \cdot 18,6 = 12,4 \text{ tm} \quad M_{2t} = -\frac{2}{3} \cdot 13,0 \text{ tm} = -8,7 \text{ tm.}$$

Die Grösstwerthe der Stützenmomente sind dann:

$$M_1 = -51,6 - 11,0 - 12,4 = -75 \text{ tm};$$

$$M_2 = -65,3 - 8,3 = -74 \text{ tm};^*)$$

sie haben also um 20% bezieh. 13% zugenommen.

Die durch die ungleichmässige Erwärmung des Balkens hervorgerufenen Querkräfte  $Q_t$  und Stützenwiderstände  $C_t$  sind, erstens für  $t_o - t_u = 15^\circ$ ,

$$\text{in der Seitenöffnung: } Q_t = \frac{M_1}{l_1} = \frac{18,6}{10} = 1,86 \text{ t}$$

$$\text{,, ,, Mittelöffnung: } Q_t = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{13,0 - 18,6}{12} = -0,47 \text{ t,}$$

$$C_{0t} = 1,86 \text{ t}; \quad C_{1t} = -1,86 - 0,47 = -2,33 \text{ t}; \quad C_{2t} = +2,0,47 = +0,94 \text{ t,}$$

zweitens für  $t_u - t_o = 10^\circ$ ,

$$\text{in der Seitenöffnung: } Q_t = -\frac{12,4}{10} = -1,24 \text{ t}$$

$$\text{,, ,, Mittelöffnung: } Q_t = -\frac{8,7 + 12,4}{12} = +0,31 \text{ t}$$

$$C_{0t} = -1,24 \text{ t}; \quad C_{1t} = +1,24 + 0,31 = +1,55 \text{ t}; \quad C_{2t} = -2,0,31 = -0,62 \text{ t.}$$

Zu beachten ist namentlich der Einfluss der Temperaturänderungen auf die Kleinstwerthe  $C$ . Die auf Seite 58 gefundenen  $_{min}C$  gehen über in

$$_{min}C_0 = +0,45 - 1,24 = -0,8 \text{ t}$$

$$_{min}C_1 = +9,6 - 2,33 = +7,3 \text{ t}$$

$$_{min}C_2 = +4,9 - 0,62 = +4,3 \text{ t}$$

und es entstehen demnach an den Endstützen negative Stützendrücke, welche eine Verankerung der Balkenenden nothwendig machen.\*\*)

\*) Legt man dieses Moment der Berechnung von  $J:h$  und  $T$  zu Grunde, so erhält man  $J:h = 0,0048$  und  $T = 17,3 \text{ tm}$ . Eine Neubestimmung von  $M_{1t}$  und  $M_{2t}$  ist nicht nöthig.

\*\*\*) Diese Verankerung empfiehlt sich zur Vorsicht auch dann, wenn  $_{min}C$  einen kleinen positiven Werth besitzt.

In den vorstehenden Rechnungen wurden die Verschiebungen der Stützpunkte vernachlässigt. Es ist dies bei Trägern auf steinernen oder nicht zu hohen eisernen Pfeilern und bei sicherem Baugrunde auch zulässig, falls, wie hier geschehen, hinsichtlich des Einflusses des Temperaturunterschiedes  $t_o - t_u$  genügend ungünstige Annahmen gemacht werden.

## § 6.

## Balken auf elastischen Stützen.

19. — Bislang setzten wir voraus, dass die Strecke  $\delta_r$  (Fig. 72), um welche sich der Stützpunkt  $r$  gegen die Verbindungsgerade der Stützpunkte  $r-1$  und  $r+1$  verschiebt, gegeben sei, dass es sich also darum handle, den Einfluss beobachteter oder durch Schätzung bestimmter Verschiebungen der Stützpunkte festzustellen, oder die Vortheile zu prüfen, welche sich durch eine Aenderung der dem spannungslosen Zustande entsprechenden gegenseitigen Höhenlage der Stützpunkte erreichen lassen. Der Einfluss der  $\delta_r$  wird dann zweckmässig mit Hilfe der Momente  $T_r = -\frac{2 EJ \delta_r}{l_r l_{r+1}}$  auf dem im § 11\*) angegebenen Wege ermittelt und bietet keinerlei Schwierigkeiten.

Wesentlich umständlicher wird hingegen der Rechnungsgang, wenn bei einer grösseren Anzahl von Stützen der Einfluss der von den Stützendrücken abhängigen Bewegungen nachgiebiger Widerlager berücksichtigt werden soll, also beispielsweise bei Balken, die auf sehr hohen eisernen Pfeilern oder — wie die Hauptträger der Schiffbrücken — auf schwimmenden Körpern ruhen. In den beiden angeführten Fällen lässt sich die (nach unten positiv gezählte) lothrechte Verschiebung  $e_r$  des Stützpunktes  $r$  auf die Form

$$(1) \quad e_r = e_r' + \omega_r C_r$$

bringen, wo  $e_r'$  einen von dem Stützendrucke  $C_r$  unabhängigen Werth bedeutet, während  $\omega_r$  die Senkung des Stützpunktes infolge  $C_r = 1$  ist.

Ruht z. B. der Balken bei  $r$  auf einer Säule von der Länge  $h_r$ ,

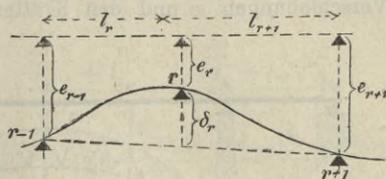


Fig. 72.

\*) Für den Balken mit veränderlichem Querschnitte findet sich das genauere Verfahren in Abtheil. 1, Seite 357.

dem Querschnitte  $F_r$  und der Elasticitätsziffer  $E_r$  und bezeichnet  $t_r$  die Temperaturerhöhung der Säule, so ist

$$(2) \quad e_r = -\varepsilon t_r h_r + \frac{C_r h_r}{E_r F_r} \text{ also } e_r' = -\varepsilon t_r h_r \text{ und } \omega_r = \frac{h_r}{E_r F_r}.$$

Dabei ist die Nachgiebigkeit von Baugrund und Grundmauerwerk vernachlässigt worden; dieselbe könnte schätzungsweise durch Vergrößerung von  $\omega_r$  berücksichtigt werden, ist aber in der Regel unwesentlich.

Wird ferner ein Balken bei  $r$  durch ein Schiff gestützt, so besteht zwischen dem durch irgend eine Belastung hervorgerufenen Stützwiderstande  $C_r$  und der Aenderung  $e_r$  der vor Aufbringung dieser Belastung herrschenden Tauchtiefe des Schiffes die Beziehung

$$\gamma F_r e_r = C_r,$$

wo  $F_r$  den Inhalt des wagerechten Schiffsquerschnitts in der Höhe des Wasserspiegels und  $\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit des Wassers ( $\gamma = 1$  t f. d. cm) bedeutet. Hierbei ist die stets zulässige Annahme gemacht, dass sich  $F$  bei Vergrößerung der Tauchtiefe nicht ändert, dass also der Rauminhalt des durch den Druck  $C_r$  verdrängten Wassers gleich  $F_r e_r$  ist. Erfährt nun die Tauchtiefe durch eine von  $C_r$  unabhängige Ursache — z. B. durch eine nachträgliche Aenderung des Schiffsgewichts — den Zuwachs  $e_r'$ , so verschiebt sich der Stützpunkt  $r$  im ganzen um

$$(3) \quad e_r = e_r' + \omega_r C_r \text{ wo } \omega_r = \frac{1}{\gamma F_r}.$$

Zu beachten ist, dass der Stützpunkt  $r$  in der Mitte des Schiffes angenommen ist. Mit dem Falle unmittelbar auf den Schiffsborden ruhender Balken werden wir uns später beschäftigen.

Durch die Gleichung (1) sind die möglichen Beziehungen zwischen den Verschiebungen  $e$  und den Kräften  $C$  keineswegs erschöpft. Es

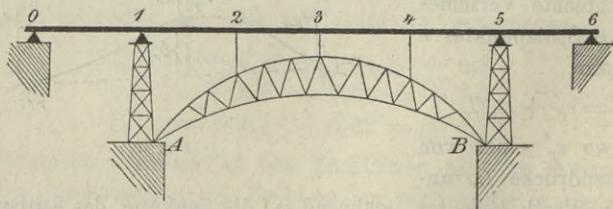


Fig. 73.

kann auch vorkommen, dass  $e_r$  von mehreren Stützendrücken  $C_r$  abhängt. Ein Beispiel bietet die Fig. 73. Der Balken 0 1 . . . 6 wird zum Theil von dem Fachwerk  $AB$  getragen, und es ist deshalb jede

der Verschiebungen  $e_2, e_3, e_4$  von den drei Stützendrücken  $C_2, C_3, C_4$  abhängig. Von der Behandlung derartiger Fälle wollen wir indess vorläufig absehen.

**20. Elasticitätsgleichungen für den Balken von überall gleichem Querschnitte.** Wir knüpfen an die auf Seite 36 abgeleiteten Gleichungen 7 und 8 an und drücken zunächst  $\delta_r$  durch die Verschiebungen  $e_{r-1}, e_r, e_{r+1}$  aus, Fig. 72. Es ist

$$\frac{e_r + \delta_r - e_{r-1}}{l_r} = \frac{e_{r+1} - (e_r + \delta_r)}{l_{r+1}}$$

mithin

$$(4) \quad \frac{\delta_r(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} = \frac{e_{r-1} - e_r}{l_r} + \frac{e_{r+1} - e_r}{l_{r+1}}$$

und das Belastungsglied  $N_r$  geht über in

$$(5) \quad N_r = -6 \left( \frac{Q_{or}}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}} \right) - 3 \varepsilon EJ (t_u - t_o) \frac{l_r + l_{r+1}}{h} \\ - 6 EJ \left[ \frac{e_{r-1}}{l_r} - \frac{e_r(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{e_{r+1}}{l_{r+1}} \right].$$

Setzt man nun  $e_r = e'_r + \omega_r C_r$  und (nach Gleich. 23, Seite 44)

$$(6) \quad C_r = C_{0r} + \frac{M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_r(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}},$$

wo  $C_{0r}$  den Werth bedeutet, welchen  $C_r$  annehmen würde, falls die Trägerstücke  $l_r$  und  $l_{r+1}$  einfache Balken wären, so erhält man nach einer leichten Zwischenrechnung die Beziehung:

$$(7) \quad M_{r-2}a_{r-1} + M_{r-1}b_r + M_r c_r + M_{r+1}b_{r+1} + M_{r+2}a_{r+1} = K_r.$$

Die Beiwerte  $a, b, c$  sind durch die Formeln bestimmt:

$$(8a) \quad \begin{cases} a_r = \frac{6 EJ \omega_r}{l_r l_{r+1}} \\ b_r = l_r - \frac{6 EJ}{l_r^2} \left( \omega_{r-1} \frac{l_{r-1} + l_r}{l_{r-1}} + \omega_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_{r+1}} \right) \\ c_r = 2(l_r + l_{r+1}) + 6 EJ \left[ \frac{\omega_{r-1}}{l_r^2} + \frac{\omega_r(l_r + l_{r+1})^2}{l_r^2 l_{r+1}^2} + \frac{\omega_{r+1}}{l_{r+1}^2} \right] \end{cases}$$

und das Belastungsglied lautet:

$$(9a) \quad \begin{cases} K_r = -6 \left( \frac{Q_{or}}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}} \right) - 3 \varepsilon EJ (t_u - t_o) \frac{l_r + l_{r+1}}{h} \\ - 6 EJ \left[ \frac{e'_{r-1}}{l_r} - \frac{e'_r(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{e'_{r+1}}{l_{r+1}} \right] \\ - 6 EJ \left[ \frac{\omega_{r-1} C_{0(r-1)}}{l_r} - \frac{\omega_r C_{0r}(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{\omega_{r+1} C_{0(r+1)}}{l_{r+1}} \right]. \end{cases}$$

Auch kann man die Gleichungen für  $b_r$  und  $c_r$  umformen in:

$$(8b) \quad \begin{cases} b_r = l_r - a_{r-1} \frac{l_{r-1} + l_r}{l_r} - a_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r} \\ c_r = 3(l_r + l_{r+1}) - a_{r-1} - b_r - b_{r+1} - a_{r+1} \end{cases}$$

und das letzte Glied des Belastungsgliedes  $K_r$  darf auch wie folgt geschrieben werden:

$$(9b) \quad -a_{r-1} l_{r-1} C_{0(r-1)} + a_r (l_r + l_{r+1}) C_{0r} - a_{r+1} l_{r+2} C_{0(r+1)}.$$

Eine etwas abweichende Form nehmen die beiden ersten Elasticitätsgleichungen an; sie sollen hier nur für den Fall eines überall frei aufliegenden (an den Enden also nicht eingespannten) Balkens, der jedoch über die Endstützen 0 und  $n$  hinausragen möge, aufgestellt werden, Fig. 44, Seite 39. Die äussersten Stützenmomente  $M_0$  und  $M_n$  sind bekannt. Die Widerstände der Stützen 0 und 1 sind:

$$(10) \quad \begin{cases} C_0 = C_{00} + \frac{M_1}{l_1} \\ C_1 = C_{01} - \frac{M_1(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} + \frac{M_2}{l_2} \end{cases}$$

wenn  $C_{00}$  und  $C_{01}$  die Stützenwiderstände für den Fall bedeuten, dass der Balken bei 1 und 2 durchgeschnitten wird, Fig. 74. Die fraglichen Elasticitätsgleichungen lauten:

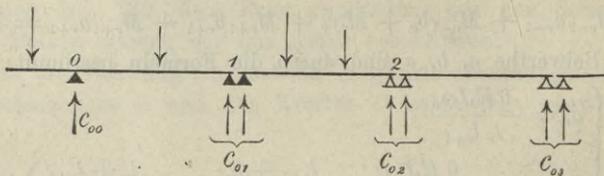


Fig. 74.

$$(11) \quad \begin{cases} M_1 c_1 + M_2 b_2 + M_3 a_2 = K_1 \\ M_1 b_2 + M_2 c_2 + M_3 b_3 + M_4 a_3 = K_2 \end{cases}$$

wobei  $K_1$  mittels der Ausnahmeformel

$$(12) \quad \begin{cases} K_1 = -M_0 l_1 - 6 \left( \frac{\mathfrak{Q}_{01}}{l_1} + \frac{\mathfrak{M}_{02}}{l_2} \right) - 3 \varepsilon EJ (t_u - t_o) \frac{l_1 + l_2}{h} \\ \quad - 6 EJ \left[ \frac{e_0'}{l_1} - \frac{e_1'(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} + \frac{e_2'}{l_2} \right] \\ \quad - a_0 l_0 C_{00} + a_1 (l_1 + l_2) C_{01} - a_2 l_3 C_{02}, \end{cases}$$

welche sich von der Gleich. 9a u. b durch das Glied  $-M_0 l_1$  unterscheidet, berechnet werden muss. Für  $K_2$  gilt Gleichung 9a u. b. Zu beachten ist, dass in

$$a_0 = \frac{6 E J \omega_0}{l_0 l_1}$$

für  $l_0$  eine beliebig lange Strecke eingeführt werden darf.\*)

In derselben Weise ist bei Aufstellung der beiden letzten Elastizitätsgleichungen zu verfahren.

**21. Balken mit veränderlichem Querschnitte.** Zur Berechnung der Stützenmomente dienen die allgemeinen Gleichungen (1) und (2) auf Seite 32. Dieselben lassen sich mittels der Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}} \delta_r &= \frac{e_{r-1}}{l_r} - \frac{e_r(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{e_{r+1}}{l_{r+1}} \\ e_r &= e'_r + \omega_r C_r \\ C_r &= C_{0r} + \frac{M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_r(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}} \end{aligned}$$

in derselben Weise umformen, wie die Elastizitätsgleichungen des Trägers mit überall gleichem Querschnitte. Man erhält nämlich:

$$(12) \quad M_{r-2} \alpha_{r-1} + M_{r-1} \beta_r + M_r \gamma_r + M_{r+1} \beta_{r+1} + M_{r+2} \alpha_{r+1} = Z_r$$

wobei die  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $Z$  durch die Formeln bestimmt sind:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_r &= \frac{\omega_r}{l_r l_{r+1}} \\ \beta_r &= \frac{d_r}{l_r} - \frac{1}{l_r^2} \left( \omega_{r-1} \frac{l_{r-1} + l_r}{l_{r-1}} + \omega_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_{r+1}} \right) \\ &= \frac{d_r}{l_r} - \alpha_{r-1} \frac{l_{r-1} + l_r}{l_r} - \alpha_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r} \\ \gamma_r &= \frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}} + \frac{\omega_{r-1}}{l_r^2} + \frac{\omega_r(l_r + l_{r+1})^2}{l_r^2 l_{r+1}^2} + \frac{\omega_{r+1}}{l_{r+1}^2} \\ &= \frac{d_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}} + \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} - \alpha_{r-1} - \beta_r - \beta_{r+1} - \alpha_{r+1} \end{aligned} \right.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} Z_r &= -\sum P_m \delta_{mr} - c_{rt} - \frac{e'_{r-1}}{l_r} + \frac{e'_r(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} - \frac{e'_{r+1}}{l_{r+1}} \\ &\quad - \alpha_{r-1} l_{r-1} C_{0(r-1)} + \alpha_r(l_r + l_{r+1}) C_{0r} - \alpha_{r+1} l_{r+2} C_{0(r+1)}. \end{aligned} \right.$$

Die Bedeutung der Buchstaben  $d_r, c_r, \delta_{mr}, c_{rt}$  ist aus Figur 37 Seite 33 ersichtlich.

\*) Das gleiche gilt für  $l_{n+1}$  in  $a_n = \frac{6 E J \omega_0}{l_n l_{n+1}}$ .

**22. Die Auflösung der Elasticitätsgleichungen** erfolgt am zweckmässigsten durch Rechnung; sie gestaltet sich besonders einfach bei symmetrischer Anordnung des Trägers.

Es handle sich beispielsweise um einen auf 8 Stützen ruhenden, irgendwie belasteten symmetrischen Balken *von überall gleichem Querschnitte*. Die Elasticitätsgleichungen desselben lauten:

$$\begin{aligned} M_1 c_1 + M_2 b_2 + M_3 a_2 &= K_1 \\ M_1 b_2 + M_2 c_2 + M_3 b_3 + M_4 a_3 &= K_2 \\ M_1 a_2 + M_2 b_3 + M_3 c_3 + M_4 b_4 + M_5 a_3 &= K_3 \\ M_2 a_3 + M_3 b_4 + M_4 c_3 + M_5 b_3 + M_6 a_2 &= K_4 \\ M_3 a_3 + M_4 b_3 + M_5 c_2 + M_6 b_2 &= K_5 \\ M_4 a_2 + M_5 b_2 + M_6 c_1 &= K_6 \end{aligned}$$

denn es ist  $a_4 = a_3$ ,  $a_5 = a_2$ , ferner  $b_5 = b_3$ ,  $b_6 = b_2$ , schliesslich  $c_4 = c_3$ ,  $c_5 = c_2$ ,  $c_6 = c_1$ .

Addirt man die erste und die letzte Gleichung, ebenso die zweite und die vorletzte u. s. w. und führt man die neuen Unbekannten ein:

$$\begin{aligned} X_1 &= M_1 + M_6; & X_2 &= M_2 + M_5; & X_3 &= M_3 + M_4 \\ Y_1 &= M_1 - M_6; & Y_2 &= M_2 - M_5; & Y_3 &= M_3 - M_4 \end{aligned}$$

so erhält man zwei Gruppen von Gleichungen mit je drei Unbekannten, nämlich:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} X_1 c_1 + X_2 b_2 & + X_3 a_2 & = A_1 \\ X_1 b_2 + X_2 c_2 & + X_3 (b_3 + a_3) & = A_2 \\ X_1 a_2 + X_2 (b_3 + a_3) & + X_3 (c_3 + b_4) & = A_3 \end{cases} \\ \text{(II)} \quad & \begin{cases} Y_1 c_1 + Y_2 b_2 & + Y_3 a_2 & = B_1 \\ Y_1 b_2 + Y_2 c_2 & + Y_3 (b_3 - a_3) & = B_2 \\ Y_1 a_2 + Y_2 (b_3 - a_3) & + Y_3 (c_3 - b_4) & = B_3 \end{cases} \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} A_1 &= K_1 + K_6, & A_2 &= K_2 + K_5, & A_3 &= K_3 + K_4 \\ B_1 &= K_1 - K_6, & B_2 &= K_2 - K_5, & B_3 &= K_3 - K_4. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die aus den Beiwerthen der Grössen  $X$  gebildete Determinante mit  $D$ , ferner mit  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  diejenigen Determinanten, welche man erhält wenn man in  $D$  die erste bzw. zweite bzw. dritte Spalte durch die Spalte  $A_1 A_2 A_3$  ersetzt, so erhält man

$$X_1 = \frac{D_1}{D}, \quad X_2 = \frac{D_2}{D}, \quad X_3 = \frac{D_3}{D},$$

worin also

$$D = \begin{vmatrix} c_1 & b_2 & a_2 \\ b_2 & c_2 & (b_3 + a_3) \\ a_2 (b_3 + a_3) & (c_3 + b_4) & \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_1 & b_2 & a_2 \\ A_2 & c_2 & (b_3 + a_3) \\ A_3 & (b_3 + a_3) & (c_3 + b_4) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & A_1 & a_2 \\ b_2 & A_2 & (b_3 + a_3) \\ a_2 & A_3 & (c_3 + b_4) \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Die Rechnung wird dadurch wesentlich vereinfacht, dass die Gleichungen (I) einfach symmetrisch sind, was zur Folge hat, dass auch die Lösungen in derselben einfach symmetrischen Form erscheinen. Schreibt man die Gleichungen (I) übersichtlicher wie folgt:

$$X_1 a' + X_2 b' + X_3 c' = A_1$$

$$X_1 b' + X_2 d' + X_3 e' = A_2$$

$$X_1 c' + X_2 e' + X_3 f' = A_3$$

so lauten die Lösungen

$$X_1 = a'' A_1 + b'' A_2 + c'' A_3$$

$$X_2 = b'' A_1 + d'' A_2 + e'' A_3$$

$$X_3 = c'' A_1 + e'' A_2 + f'' A_3$$

und hierin ist

$$a'' = \frac{a_1'}{D}, \quad b'' = \frac{b_1'}{D}, \quad c'' = \frac{c_1'}{D}, \quad d'' = \frac{d_1}{D} \text{ u. s. w.}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & d' & e' \\ c' & e' & f' \end{vmatrix} = a' a_1' + b' b_1' + c' c_1'$$

und  $a_1', b_1', c_1', d_1' \dots$  die Unterdeterminanten zu den Elementen  $a', b', c' \dots$  von  $D^*$ ) nämlich:

$$a_1' = + \begin{vmatrix} d' & e' \\ e' & f' \end{vmatrix}$$

$$b_1' = - \begin{vmatrix} b' & c' \\ e' & f' \end{vmatrix}, \quad d_1' = + \begin{vmatrix} a' & c' \\ c' & f' \end{vmatrix}$$

$$c_1' = + \begin{vmatrix} b' & c' \\ d' & e' \end{vmatrix}, \quad e_1' = - \begin{vmatrix} a' & c' \\ b' & e' \end{vmatrix}, \quad f_1' = + \begin{vmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{vmatrix}.$$

Hat man auf dieselbe Weise die Unbekannten  $Y$  in der Form

$$Y_1 = a''' B_1 + b''' B_2 + c''' B_3$$

$$Y_2 = b''' B_1 + d''' B_2 + e''' B_3$$

$$Y_3 = c''' B_1 + e''' B_2 + f''' B_3$$

\*) Die allgemeine Form einer aus  $n$  Elementen  $a b c \dots q$  gebildeten Determinante  $n^{\text{ten}}$  Grades ist:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & q_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & q_n \end{vmatrix}.$$

dargestellt, so findet man:

$$M_1 = \frac{1}{2} (X_1 + Y_1); \quad M_6 = \frac{1}{2} (X_1 - Y_1)$$

$$M_2 = \frac{1}{2} (X_2 + Y_2); \quad M_5 = \frac{1}{2} (X_2 - Y_2)$$

$$M_3 = \frac{1}{2} (X_3 + Y_3); \quad M_4 = \frac{1}{2} (X_3 - Y_3).$$

Es ist also beispielsweise:

$$\begin{aligned} 2M_1 &= a''(K_1 + K_6) + b''(K_2 + K_5) + c''(K_3 + K_4) \\ &+ a'''(K_1 - K_6) + b'''(K_2 - K_5) + c'''(K_3 - K_4) \\ &= K_1(a'' + a''') + K_2(b'' + b''') + K_3(c'' + c''') \\ &+ K_4(c'' - c''') + K_5(b'' - b''') + K_6(a'' - a'''). \end{aligned}$$

Die Rechnung wird wieder durch den Umstand vereinfacht, dass die schliesslichen Lösungen in der doppelt symmetrischen Form erscheinen müssen:

$$M_1 = \underline{a} K_1 + \underline{b} K_2 + \underline{c} K_3 + \underline{\bar{c}} K_4 + \underline{\bar{b}} K_5 + \underline{\bar{a}} K_6$$

$$M_2 = \underline{\bar{b}} K_1 + \underline{d} K_2 + \underline{e} K_3 + \underline{\bar{e}} K_4 + \underline{\bar{d}} K_5 + \underline{\bar{b}} K_6$$

$$M_3 = \underline{c} K_1 + \underline{e} K_2 + \underline{f} K_3 + \underline{\bar{f}} K_4 + \underline{\bar{e}} K_5 + \underline{\bar{c}} K_6$$

$$M_4 = \underline{\bar{c}} K_1 + \underline{\bar{e}} K_2 + \underline{\bar{f}} K_3 + \underline{f} K_4 + \underline{e} K_5 + \underline{c} K_6$$

$$M_5 = \underline{\bar{b}} K_1 + \underline{d} K_2 + \underline{e} K_3 + \underline{\bar{e}} K_4 + \underline{\bar{d}} K_5 + \underline{\bar{b}} K_6$$

$$M_6 = \underline{\bar{a}} K_1 + \underline{\bar{b}} K_2 + \underline{\bar{c}} K_3 + \underline{\bar{c}} K_4 + \underline{\bar{b}} K_5 + \underline{\bar{a}} K_6$$

wo:

$$\underline{a} = \frac{a'' + a'''}{2}, \quad \underline{b} = \frac{b'' + b'''}{2}, \quad \underline{c} = \frac{c'' + c'''}{2},$$

$$\underline{\bar{c}} = \frac{c'' - c'''}{2}, \quad \underline{\bar{b}} = \frac{b'' - b'''}{2}, \quad \underline{\bar{a}} = \frac{a'' - a'''}{2}$$

$$\underline{d} = \frac{d'' + d'''}{2}, \quad \underline{e} = \frac{e'' + e'''}{2}, \quad \underline{\bar{e}} = \frac{e'' - e'''}{2}, \quad \underline{\bar{d}} = \frac{d'' - d'''}{2}$$

$$\underline{f} = \frac{f'' + f'''}{2}, \quad \underline{\bar{f}} = \frac{f'' - f'''}{2}.$$

Ganz ähnlich ist der Rechnungsgang bei einer ungeraden Anzahl von Elasticitätsgleichungen. Ist z. B. die Anzahl der Stützen gleich 7, so hat man:

$$\begin{aligned} M_1 c_1 + M_2 b_2 + M_3 a_2 &= K_1 \\ M_1 b_2 + M_2 c_2 + M_3 b_3 + M_4 a_3 &= K_2 \\ M_1 a_2 + M_2 b_3 + M_3 c_3 + M_4 b_3 + M_5 a_2 &= K_3 \\ M_2 a_3 + M_3 b_3 + M_4 c_2 + M_5 b_2 &= K_4 \\ M_3 a_2 + M_4 b_2 + M_5 c_1 &= K_5 \end{aligned}$$

und erhält mit

$$\begin{aligned} M_1 + M_5 &= X_1, & M_2 + M_4 &= X_2, & M_3 + M_3 &= X_3 \\ M_1 - M_5 &= Y_1, & M_2 - M_4 &= Y_2 \end{aligned}$$

die beiden Gruppen von Gleichungen:

$$(I) \quad \begin{cases} X_1 c_1 + X_2 b_2 & + X_3 a_3 = K_1 + K_5 = A_1 \\ X_1 b_2 + X_2 (c_2 + a_3) + X_3 b_3 & = K_2 + K_4 = A_2 \\ X_1 a_2 + X_2 b_3 & + X_3 \frac{c_3}{2} = K_3 = A_3 \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} Y_1 c_1 + Y_2 b_2 & = K_1 - K_5 = B_1 \\ Y_1 b_2 + Y_2 (c_2 - a_3) & = K_2 - K_4 = B_2. \end{cases}$$

Hieraus findet man nun zunächst die  $X$  und  $Y$  in der einfach symmetrischen Form:

$$\begin{aligned} X_1 &= a'' A_1 + b'' A_2 + c'' A_3 \\ X_2 &= b'' A_1 + d'' A_2 + e'' A_3 \\ X_3 &= c'' A_1 + e'' A_2 + f'' A_3 \\ Y_1 &= a''' B_1 + b''' B_2 \\ Y_2 &= b''' B_1 + d''' B_2 \end{aligned}$$

und schliesslich die Stützenmomente:

$$\begin{aligned} M_1 &= \underline{a} K_1 + \underline{b} K_2 + (\underline{c}) K_3 + \underline{\bar{b}} K_4 + \underline{\bar{a}} K_5 \\ M_2 &= \underline{\bar{b}} K_1 + \underline{\bar{d}} K_2 + (\underline{e}) K_3 + \underline{\bar{d}} K_4 + \underline{\bar{b}} K_5 \\ M_3 &= \underline{\bar{c}} K_1 + \underline{\bar{e}} K_2 + (\underline{f}) K_3 + \underline{\bar{e}} K_4 + \underline{\bar{c}} K_5 \\ M_4 &= \underline{\bar{b}} K_1 + \underline{\bar{d}} K_2 + (\underline{e}) K_3 + \underline{\bar{d}} K_4 + \underline{\bar{b}} K_5 \\ M_5 &= \underline{\bar{a}} K_1 + \underline{\bar{b}} K_2 + (\underline{c}) K_3 + \underline{\bar{b}} K_4 + \underline{\bar{a}} K_5 \end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a'' + a'''}{2}, & b &= \frac{b'' + b'''}{2}, & (c) &= \frac{c''}{2}, & \bar{b} &= \frac{b'' - b'''}{2}, & \bar{a} &= \frac{a'' - a'''}{2} \\ d &= \frac{d'' + d'''}{2}, & (e) &= \frac{e''}{2}, & \bar{d} &= \frac{d'' - d'''}{2} \\ (f) &= \frac{f''}{2}. \end{aligned}$$

**23. Einflusslinien für die Stützenmomente.** Die Aufstellung allgemeiner Regeln für die gefährlichste Belastungsweise begegnet bei nachgiebigen Stützen grossen Schwierigkeiten, und es empfiehlt sich daher, diese Frage von Fall zu Fall mittels Einflusslinien zu entscheiden. Um den einzuschlagenden Weg auf möglichst übersichtliche Weise beschreiben zu können, geben wir dem durch Auflösung der Elasticitätsgleichungen für irgend ein Stützenmoment (z. B.  $M_i$  bei Stütze  $i$ ) ge-

wonnenen Ausdruck die Form:

$$(15) M_i = \beta_{i1} K_1 + \beta_{i2} K_2 + \beta_{i3} K_3 + \dots + \beta_{i(n-1)} K_{n-1} = \sum_1^{n-1} \beta_{ir} K_r$$

und zerlegen den von der Belastung abhängigen Theil von  $K_r$  in

$$(16) K_r' = -6 \left( \frac{\mathcal{Q}_{or}}{l_r} + \frac{\mathfrak{H}_{o(r+1)}}{l_{r+1}} \right) \text{ und}$$

$$(17) K_r'' = -a_{r-1} l_{r-1} C_{0(r-1)} + a_r (l_r + l_{r+1}) C_{0r} - a_{r+1} l_{r+2} C_{0(r+1)}.$$

Der Einfluss des Restes, d. i.

$$(18) K_r''' = -3 \varepsilon EJ (t_u - t_o) \frac{l_r + l_{r+1}}{h} - 6 EJ \left[ \frac{e'_{r\pm 1}}{l_r} - \frac{e_r' (l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{e'_{r\mp 1}}{l_{r+1}} \right]$$

wird für sich allein festgestellt, und kommt jetzt nicht weiter in Betracht.

Zunächst nehmen wir an, es seien sämtliche  $K''$  gleich Null, setzen also

$$M_i = \beta_{i1} K_1' + \beta_{i2} K_2' + \beta_{i3} K_3' + \dots + \beta_{i(n-1)} K_{n-1}'.$$

Liegt dann die über den Balken wandernde Last  $P$  über der  $r^{\text{ten}}$  Öffnung, und zwar in den Abständen  $\xi$  bezieh.  $\xi'$  von  $(r-1)$  bzw.  $r$  (Fig. 75a), so entsteht nach Seite 30:

$$K'_{r-1} = -\frac{6 \mathfrak{H}_{or}}{l_r} = -Pl_r^2 \left( \frac{\xi'}{l_r} - \frac{\xi'^3}{l_r^3} \right) \text{ und}$$

$$K_r' = -\frac{6 \mathcal{Q}_{or}}{l_r} = -Pl_r^2 \left( \frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3} \right)$$

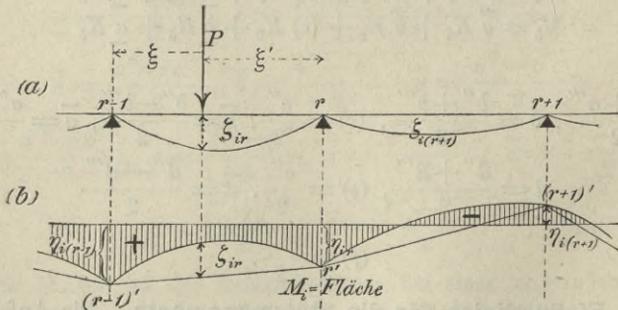


Fig. 75.

während alle übrigen  $K'$  verschwinden; und es ergibt sich daher mit den auf Seite 42 eingeführten Bezeichnungen:

$$\text{tg } \varphi_L = \frac{\xi'}{l_r} - \frac{\xi'^3}{l_r^3} \text{ und } \text{tg } \varphi_R = \frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3}$$

für den Einfluss der über der  $r^{\text{ten}}$  Oeffnung liegenden Lasteinheit auf das Moment  $M_i$  der Ausdruck:

$$(19) \quad M_{i,r} = -P(\beta_{i(r-1)} \operatorname{tg} \varphi_L + \beta_{i,r} \operatorname{tg} \varphi_R) l_r^2 = -P \zeta_{i,r}$$

Für eine Last  $P=1$  über der ersten Oeffnung findet man

$$(20) \quad \zeta_{i,1} = -\beta_{i,1} \operatorname{tg} \varphi_R l_1^2$$

und für eine Last über der Oeffnung  $l_n$ :

$$(21) \quad \zeta_{i,n} = -\beta_{i(n-1)} \operatorname{tg} \varphi_L l_n^2$$

Da  $\operatorname{tg} \varphi_L$  und  $\operatorname{tg} \varphi_R$  nur von den Verhältnissen  $\xi':l_r$  bzw.  $\xi:l_r$  abhängig sind, nicht aber von den Stützweiten, so lässt sich die Berechnung der  $\zeta_i$ -Linie ohne grossen Zeitaufwand ausführen. Selbst bei

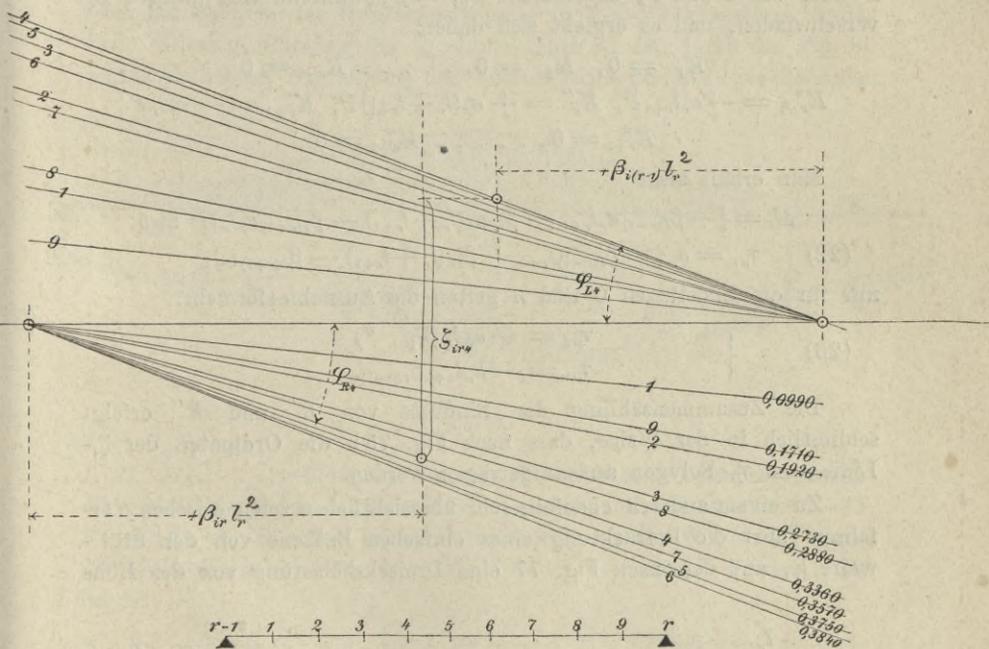


Fig. 76.

grösseren Oeffnungen genügt es, die Stützweite in 10 gleichlange Strecken zu theilen, so dass die Tabelle auf Seite 42 ausreicht. Zur zeichnerischen Ermittlung der  $\zeta$  empfiehlt sich die Benutzung zweier Strahlenbüschel in der durch Fig. 76 (Bestimmung von  $\zeta_{i,r}$  für den 4<sup>ten</sup> Theilpunkt der Oeffnung  $l_r$ ) veranschaulichten Weise. Die auf die Strahlen gesetzten Zahlen geben die Ordnungsziffern der zugehörigen Theilpunkte und die der Tabelle entnommenen Tangenten der Neigungs-

winkel der Strahlen an. Die Werthe  $\operatorname{tg} \varphi_L$  für die Theilpunkte 1, 2, 3, . . . stimmen bew. überein mit den Werthen  $\operatorname{tg} \varphi_R$  für die Theilpunkte 9, 8, 7, . . .

Noch einfacher gestaltet sich die Darstellung des Einflusses der Glieder  $K''$ . Denn die Einflusslinie für  $C_{0,r}$  besteht nach Fig. 50, Seite 44, aus zwei Geraden, welche sich auf der Senkrechten durch  $r$  treffen und bei  $(r-1)$  sowie bei  $(r+1)$  die Ordinaten 0 besitzen, und es muss deshalb die Einführung der  $K''$  in die Gleichung 15 ein Einflusspolygon ergeben, dessen Eckpunkte . . .  $(r-1)'$   $r'$   $(r+1)'$  . . . senkrecht unter den Stützpunkten liegen, Fig. 75 b; dasselbe ist bestimmt durch die Ordinaten  $\eta_{i0}, \eta_{i1}, \dots, \eta_{ir}, \dots, \eta_{in}$ . Liegt die Last  $P$  über der Stütze  $r$ , so entsteht  $C_{0,r} = P$ , während alle übrigen  $C_0$  verschwinden, und es ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} K_1'' &= 0, \quad K_2'' = 0, \quad \dots \quad K_{r-2}'' = 0 \\ K_{r-1}'' &= -a_r l_{r+1} P, \quad K_r'' = +a_r (l_r + l_{r+1}) P, \quad K_{r+1}'' = -a_r l_r P \\ K_{r+1}'' &= 0, \quad \dots \quad K_{n-1}'' = 0. \end{aligned}$$

Man erhält also:

$$\begin{aligned} M_i &= [-\beta_{i(r-1)} a_r l_{r+1} + \beta_{ir} a_r (l_r + l_{r+1}) - \beta_{i(r+1)} a_r l_r] P \text{ also} \\ (22) \quad \eta_{ir} &= a_r [-\beta_{i(r-1)} l_{r+1} + \beta_{ir} (l_r + l_{r+1}) - \beta_{i(r+1)} l_r]; \end{aligned}$$

nur für die Endstützen 0 und  $n$  gelten die Ausnahmeformeln:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{i0} = -a_0 l_0 \beta_{i1} \quad * \\ \eta_{in} = -a_n l_{n+1} \beta_{i(n-1)}. \end{array} \right.$$

Die Zusammenzählung der Einflüsse von  $K'$  und  $K''$  erfolgt schliesslich in der Weise, dass nach Fig. 75 b die Ordinaten der  $\zeta_i$ -Linie vom  $\eta_i$ -Polygon aus aufgetragen werden.

Zu einem anderen ebenfalls sehr übersichtlichen zeichnerischen Verfahren führt die Betrachtung eines einfachen Balkens von der Stützweite  $l_r$ , auf den nach Fig. 77 eine Dreiecksbelastung von der Höhe

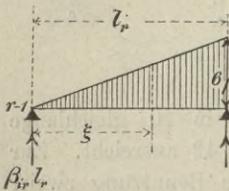


Fig. 77.

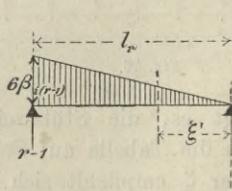


Fig. 78.

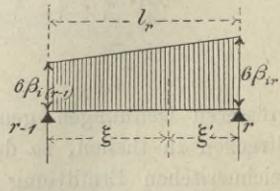


Fig. 79.

$6\beta_{ir}$  wirkt. Der Gegendruck der Stütze  $(r-1)$  ist  $\beta_{ir} l_r$  und das Mo-

§) Hinsichtlich  $l_0$  und  $l_{n+1}$  vergleiche man Seite 65.

ment an der Stelle  $\xi$  ist:

$$(M) = \beta_{i,r} l_r \cdot \xi - 6 \beta_{i,r} \frac{\xi^2}{l_r} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\xi}{3} = \beta_{i,r} l_r^2 \left( \frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3} \right)$$

und ganz ebenso findet man das Moment infolge der Dreiecksbelastung in Fig. 78:

$$(M) = \beta_{i(r-1)} l_r^2 \left( \frac{\xi'}{l_r} - \frac{\xi'^3}{l_r^3} \right).$$

Der Trapezbelastung in Fig. 79 entspricht also

$$(M) = (\beta_{i(r-1)} \operatorname{tg} \varphi_L + \beta_{i,r} \operatorname{tg} \varphi_R) l_r^2 = -\zeta_{i,r}$$

und hieraus folgt, dass die  $\zeta_{i,r}$ -Linie als die mit der Polweite 1 gezeichnete Seillinie des Belastungstrapezes in Fig. 79 angesehen werden darf. Diese Auffassung der  $\zeta_{i,r}$ -Linie führt zu der durch die Fig. 80 veranschaulichten Darstellung der Einflussfläche für  $M_i$ . Die Seillinien

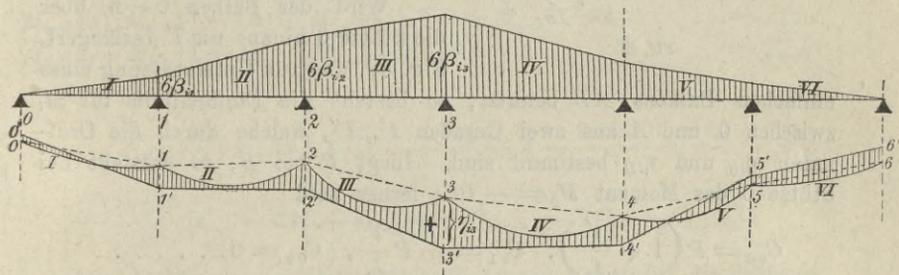


Fig. 80.

*I, II, III, . . .* gehören zu den gleichbezeichneten Belastungsflächen; die gestrichelten den Einzelbalken entsprechenden Schlusslinien  $0-1, 1-2, 2-3, \dots$  sind behufs Berücksichtigung der Werthe  $K''$  durch die Schlusslinien  $0'-1', 1'-2', 2'-3', \dots$  ersetzt worden. Dabei ist:

$$\overline{0-0'} = \eta_{i0}, \quad \overline{1-1'} = \eta_{i1}, \quad \overline{2-2'} = \eta_{i2}, \quad \dots$$

Die Zeichnung setzt voraus, dass die  $\eta$  zum Theil positiv, zum Theil negativ sind. Auch die  $\beta_i$  werden in der Regel zum Theil positiv zum Theil negativ sein; sie wurden in Fig. 80 aber durchweg positiv angenommen.

Bezüglich der Einheiten und Maassstäbe ist folgendes zu beachten.

Die Beiwerte  $\beta$  sind reciproke Linien (z. B.  $\frac{1}{\text{Meter}}$ ); die  $\eta$  und  $\zeta$  sind Linien (Meter). Die Inhalte  $f$  der Streifen, in welche die Belastungsflächen *I, II, . . .* in Fig. 80 und 81 behufs Aufzeichnung der

Seillinien zerlegt werden, sind Zahlen  $\left(\frac{1}{m} \cdot m\right)$ ; ersetzt man sie durch die mittleren Streifenhöhen  $y = \frac{f}{c}$ , wo  $c$  die Streifenbreite bedeutet, so muss man die Polweite 1 (Zahl) durch die Polweite  $1:c$  ersetzen. Der Maassstab, in dem die reciproken Linien  $f:c$  und  $1:c$  aufgetragen

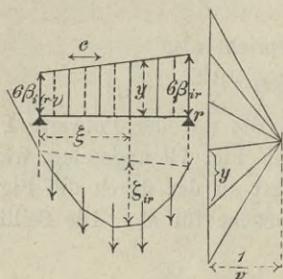


Fig. 81.

werden, ist gleichgiltig; man erhält die  $\zeta$  in demselben Längenmaassstabe, in dem die Stützenweiten  $l$  gezeichnet sind. Es ist aber zweckmässig, für die  $\zeta$  einen grösseren, etwa einen  $v$ -mal so grossen Maassstab zu wählen wie für die Stützenweiten. Man erreicht dies, indem man die Polweite gleich  $1:vc$  macht.

Wird der Balken  $0-n$  über die Stütze  $0$  hinaus um  $l'$  verlängert, Fig. 82, und zur Unterstützung eines

einfachen Balkens  $AB$  benutzt, so besteht die Einflusslinie für  $M_i$  zwischen  $0$  und  $A$  aus zwei Geraden  $I', I''$ , welche durch die Ordinaten  $\eta_{i0}$  und  $\eta_{iB}$  bestimmt sind. Liegt  $P$  bei  $B$ , so entsteht bei Stütze  $0$  das Moment  $M_0 = -Pl'$ ; ferner wird

$$C_{00} = P \left(1 + \frac{l'}{l_1}\right), \quad C_{01} = -P \frac{l'}{l_1}, \quad C_{02} = 0, \dots$$

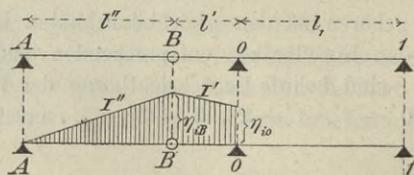


Fig. 82.

und man erhält mit  $P = 1$  (nach Gleich. 12):

$$K_1 = -l'l_1 - a_0l_0 \left(1 + \frac{l'}{l_1}\right) - a_1(l_1 + l_2) \frac{l'}{l_1} \text{ ferner}$$

$$K_2 = +a_1l_1 \frac{l'}{l_1} = a_1l' \text{ also}$$

$$\eta_{iB} = -\beta_{i1} \left[ l'l_1 + a_0l_0 \left(1 + \frac{l'}{l_1}\right) + a_1(l_1 + l_2) \frac{l'}{l_1} \right] + \beta_{i2} a_1l'$$

24. Fortsetzung. In dem häufig vorkommenden Falle gleichgrosser Oeffnungen ( $l_1 = l_2 = \dots = l$ ) und gleich beschaffener Stützen ( $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega$ ) vereinfachen sich die vorstehend abgeleiteten Beziehungen wie folgt.

Die Elasticitätsbedingungen lauten, wenn zur Abkürzung

$$\frac{6 EJ \omega}{l^3} = \alpha$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} M_1(4 + 6\alpha) + M_2(1 - 4\alpha) + M_3\alpha &= Z_1 \\ M_1(1 - 4\alpha) + M_2(4 + 6\alpha) + M_3(1 - 4\alpha) + M_4\alpha &= Z_2 \\ M_1\alpha + M_2(1 - 4\alpha) + M_3(4 + 6\alpha) + M_4(1 - 4\alpha) + M_5\alpha &= Z_3 \\ \dots &\dots \\ M_{r-2}\alpha + M_{r-1}(1 - 4\alpha) + M_r(4 + 6\alpha) + M_{r+1}(1 - 4\alpha) + M_{r+2}\alpha &= Z_r \\ \dots &\dots \\ M_{n-4}\alpha + M_{n-3}(1 - 4\alpha) + M_{n-2}(4 + 6\alpha) + M_{n-1}(1 - 4\alpha) &= Z_{n-2} \\ M_{n-3}\alpha + M_{n-2}(1 - 4\alpha) + M_{n-1}(4 + 6\alpha) &= Z_{n-1} \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{K_r}{l} = -6 \left( \frac{Q_{or}}{l^2} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l^2} \right) - \frac{6 \varepsilon EJ (t_u - t_o)}{h} \\ &- \frac{6 EJ}{l^2} [e'_{r-1} - 2e'_r + e'_{r+1}] - \alpha [C_{o(r-1)} - 2C_{or} + C_{o(r+1)}] l. \end{aligned}$$

Die Auflösung der Elasticitätsbedingungen liefert für die Stützenmomente Gleichungen von der Form

$$M_i = \beta_{i1} Z_1 + \beta_{i2} Z_2 + \dots + \beta_{ir} Z_r + \dots + \beta_{i(n-1)} Z_{n-1},$$

worin die Grössen  $Z$  Momente und die Beiwerte  $\beta$  Zahlen sind. Die Einflusslinie für  $M_i$  bestimme man wie vorhin mit Hilfe einer  $\zeta_i$ -Linie und eines  $\eta_i$ -Polygons. Die Gleichung der  $\zeta_i$ -Linie ist im  $r^{\text{ten}}$  Felde

$$(24) \quad \zeta_{ir} = -(\beta_{i(r-1)} \operatorname{tg} \varphi_L + \beta_{ir} \operatorname{tg} \varphi_R) l$$

und die  $\eta_i$  sind nach der Formel zu berechnen:

$$(25) \quad \eta_{ir} = \alpha l (-\beta_{i(r-1)} + 2\beta_{ir} - \beta_{i(r+1)}).$$

Für die äussersten Oeffnungen gelten die Ausnahmeformeln:

$$(26) \quad \zeta_{i0} = -\beta_{i1} \operatorname{tg} \varphi_R l \quad \zeta_{i(n-1)} = -\beta_{i(n-1)} \operatorname{tg} \varphi_L l$$

$$(27) \quad \eta_{i1} = -\alpha l \beta_{i1} \quad \eta_{in} = -\alpha l \beta_{i(n-1)}.$$

Will man die  $\zeta_i$ -Linien als Seilpolygone der in Figur 80 dargestellten, durch die Ordinaten  $6\beta_{ir}$  bestimmten Belastungsflächen auffassen, so muss man die Polweite gleich  $l:c$  (anstatt, wie früher,  $1:c$ ) wählen. Man erhält dann die  $\zeta_i$  in demselben Maassstabe, in dem die

Stützweiten gezeichnet sind. Wird für  $\zeta_i$  der  $\nu$ -fache Maassstab angewendet, so ist die Polweite gleich  $l : \nu c$  zu machen.

Wird der Balken nach Fig. 82 über 0 hinaus verlängert, so ist

$$(28) \quad \eta_{iB} = -\beta_{i1}(l' + \alpha l + 3\alpha l') + \beta_{i2}\alpha l'.$$

**25. Nachtrag zur Untersuchung des auf starren Stützen ruhenden Balkens.** Das in No. 23 u. 24 entwickelte Verfahren zur Darstellung der Einflusslinien für die Stützenmomente gilt natürlich auch für den Fall starrer Stützen. Infolge des Nullwerdens der Werthe  $\omega$  verschwinden die  $K''$  und damit auch die  $\eta$ -Polygone, und es ist daher die  $\zeta_i$ -Linie die Einflusslinie für  $M_r$ . Eine weitere Vereinfachung ergibt sich nach Bestimmung der Festpunkte  $L$  und  $R$  aus der Möglichkeit, die Momente  $M_{r-1}$  und  $M_r$  für zwei aufeinander folgende Stützpunkte mit Hilfe der beiden Gleichungen (14), Seite 40, zu berechnen, ferner aus dem Umstande, dass es genügt, für jedes Stützenmoment diejenigen beiden Zweige der Einflusslinien zu zeichnen, welche den durch den fraglichen Stützpunkt getrennten beiden Oeffnungen angehören. Die in den fraglichen Gleichungen enthaltenen Werthe  $N_{r-1}$  und  $N_r$  sind gleichbedeutend mit  $K'_{r-1}$  und  $K'_r$ . Die Auflösung ergibt für  $M_r$  die Formel:

$$M_r = \beta_{r,r} N_r + \beta_{r,(r-1)} N_{r-1} \text{ wo}$$

$$\beta_{r,r} = \frac{x_r}{l_r(x'_r x_r - 1)} \text{ und } \beta_{r,(r-1)} = -\frac{1}{l_r(x'_r x_r - 1)} = -\frac{\beta_{r,r}}{x_r}.$$

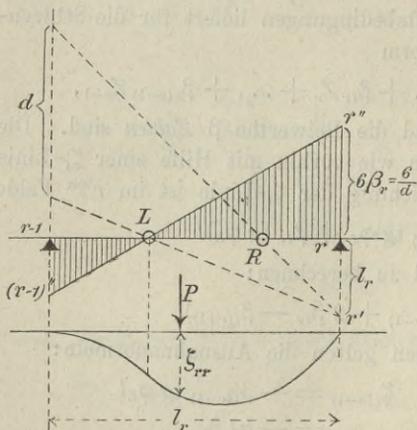


Fig. 83.

Dabei sind  $x_r$  und  $x_{r-1}$  gleich den Streckenverhältnissen:

$$x_r = \frac{\overline{rL}}{L(r-1)} \text{ und}$$

$$x'_r = \frac{\overline{(r-1)R}}{Rr}.$$

Macht man also (Fig. 83)

$\overline{r r''} = 6\beta_{r,r}$  und legt man durch  $r''$  und den linken Festpunkt die Gerade  $r''(r-1)''$  so ist  $\overline{(r-1)(r-1)''} = 6\beta_{r,(r-1)}$ . Die  $\zeta_{r,r}$ -Linie ist die Seillinie der

schraffierten Belastungsfläche; sie besitzt bei  $L$  einen Wendepunkt und liefert das von der Einzellast  $P$  hervorgerufene Stützenmoment:

$$M_r = -P\zeta_{r,r}.$$

Die Polweite ist 1. Zur bequemen Ermittlung von  $\beta_{r,r}$  mache man (am besten in kleinerem Maassstabe)  $\overline{r r'} = l_r$ , ziehe von  $r'$  aus durch die Festpunkte gerade Linien und bestimme die von diesen auf der Senkrechten durch  $(r-1)$  abgeschnittene Strecke  $d$ . Man findet dann leicht, dass  $\beta_{r,r} = \frac{1}{d}$  ist. Ganz ebenso wird die  $M_{r-1}$ -Linie gezeichnet.

## § 7.

## Gelenklose Zwischenträger von Brücken.

(Eine Anwendung von § 6.)

26. Das Tragwerk einer Brücke (vgl. den Grundriss in Fig. 84) besteht im allgemeinen aus den Hauptträgern  $H$ , den Querträgern  $Q$  und den Zwischenträgern  $Z$ . Die letzteren werden wohl allgemein als Einzelbalken betrachtet, deren Stützweite gleich der Feldweite ist, obgleich diese Auffassung nur dann zutrifft, wenn die Zwischen-

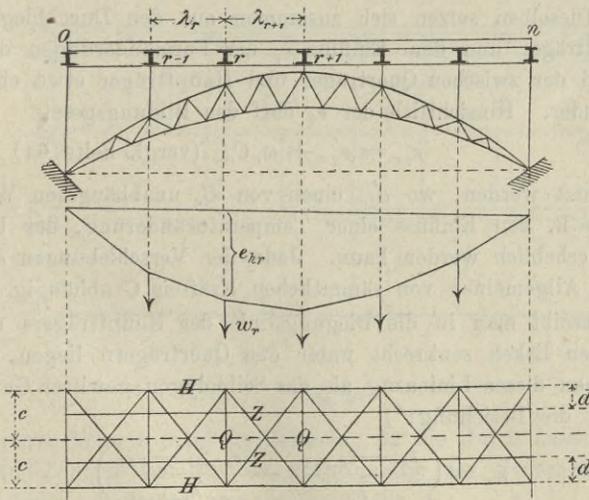


Fig. 84.

träger gelenkartig mit den Querträgern verbunden sind. Fehlen diese Gelenke, ist also jeder Zwischenträger an den Enden mit den Querträgern in der üblichen Weise durch Nieten verbunden oder durch Ausparungen in den Querträgerwänden hindurchgesteckt, so liegt ein durchlaufender Balken auf elastischen Stützen vor, dessen Biegungs-

momente von den Formänderungen der Querträger und Hauptträger und von den Temperaturschwankungen, namentlich der Hauptträger, abhängig sind.

Wir betrachten eine eingleisige Eisenbahnbrücke. Der Abstand der beiden Hauptträger sei  $2c$  (Fig. 84), der beiden Zwischenträger  $2(c-d)$ . Die Feldweiten seien  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots$ , die Stützenmomente des Zwischenträgers  $M_1, M_2, \dots, M_r, \dots$ , die Drücke, welche die Zwischenträger auf die Querträger ausüben,  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_r, \dots$ . Der Querschnitt des Zwischenträgers sei konstant vorausgesetzt — eine stets zulässige Annahme —, sein Trägheitsmoment sei  $J$ . Wird von dem unwesentlichen Einflusse der ungleichmässigen Erwärmung des Zwischenträgers abgesehen, so gilt für drei aufeinander folgende Stützenmomente die Beziehung:

$$(1) \quad M_{r-1}\lambda_r + 2M_r(\lambda_r + \lambda_{r+1}) + M_{r+1}\lambda_{r+1} = -6 \left( \frac{\mathfrak{Q}_{or}}{\lambda_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{\lambda_{r+1}} \right) \\ - 6EJ \left[ \frac{e_{r-1}}{\lambda_r} - \frac{e_r(\lambda_r + \lambda_{r+1})}{\lambda_r \lambda_{r+1}} + \frac{e_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right],$$

wo  $e_{r-1}, e_r, e_{r+1}$  die lothrechten Verschiebungen der Stützpunkte bedeuten. Dieselben setzen sich zusammen aus den Durchbiegungen  $e_h$  der Hauptträger und dem Einfluss  $e_q$  der Formänderungen der Querträger und der zwischen Querträger und Hauptträger etwa eingeschalteten Ständer. Hinsichtlich der  $e_q$  darf das Bildungsgesetz

$$(2) \quad e_{qr} = e'_{qr} + \omega_r C_r \quad (\text{vergl. Seite 61})$$

vorausgesetzt werden, wo  $e'_{qr}$  einen von  $C_r$  unabhängigen Werth bedeutet, z. B. den Einfluss einer Temperaturänderung, der bei hohen Ständern erheblich werden kann. Jede der Verschiebungen  $e_h$  ist dagegen im Allgemeinen von sämtlichen Kräften  $C$  abhängig.

Beschreibt man in die Biegelinie des Hauptträgers ein Polygon, dessen Ecken senkrecht unter den Querträgern liegen, und betrachtet man diesen Linienzug als das Seilpolygon gewisser Gewichte  $w$ , so besteht die Beziehung:\*)

$$(3) \quad w_r = \left( \frac{e_{hr} - e_{h(r-1)}}{\lambda_r} - \frac{e_{h(r+1)} - e_{hr}}{\lambda_{r+1}} \right) \\ = - \left[ \frac{e_{h(r-1)}}{\lambda_r} - \frac{e_{hr}(\lambda_r + \lambda_{r+1})}{\lambda_r \lambda_{r+1}} - \frac{e_{h(r+1)}}{\lambda_{r+1}} \right]$$

und die Gleichung (1) geht über in:

\*) Wir machen im vorliegenden § von den in der Abtheilung 1, § 3, entwickelten Gesetzen Gebrauch.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & M_{r-1}\lambda_r + 2M_r(\lambda_r + \lambda_{r+1}) + M_{r+1}\lambda_{r+1} \\
 & = -6 \left( \frac{\mathfrak{L}_{0r}}{\lambda_r} + \frac{\mathfrak{H}_{0(r+1)}}{\lambda_{r+1}} \right) + 6EJw_r \\
 & - 6EJ \left[ \frac{e'_{q(r-1)}}{\lambda_r} - \frac{e'_{qr}(\lambda_r + \lambda_{r+1})}{\lambda_r \lambda_{r+1}} - \frac{e_{q(r+1)}}{\lambda_{r+1}} \right] \\
 & - 6EJ \left[ \frac{\omega_{r-1}C_{r-1}}{\lambda_r} - \frac{\omega_r C_r (\lambda_r + \lambda_{r+1})}{\lambda_r \lambda_{r+1}} + \frac{\omega_{r+1}C_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right].
 \end{aligned}$$

Hervorzuheben ist, dass bis jetzt über die Anordnung der Hauptträger nichts Bestimmtes vorausgesetzt wurde; es ist also gleichgültig, ob die Hauptträger fachwerkartig oder vollwandig sind, ob Balken oder Bögen.

**27. Zwischenträger einer Blechbalkenbrücke.** Es sei (Fig. 85 a)  $A'B'$  der durchgehende Zwischenträger,  $A''B''$  der Hauptträger. Auf den ersteren wirken die bekannten Raddrücke  $P$  und die Gegendrücke  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_r, \dots$  der Querträger, Fig. 85 b, auf den letzteren nur die Kräfte  $C$ , Fig. 85 c. Das Eigengewicht der Hauptträger und

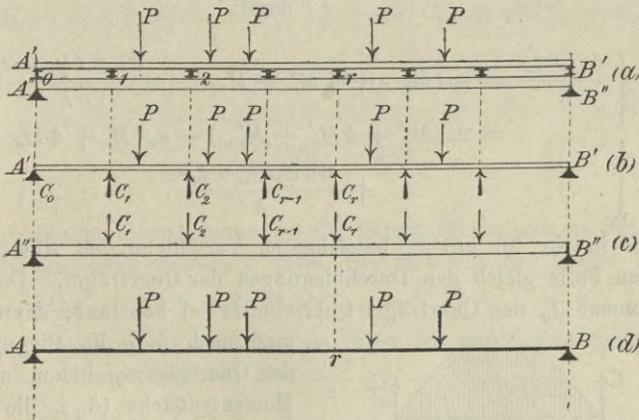


Fig. 85.

Querträger kommt nicht in Betracht, da die durch dasselbe erzeugten Formänderungen bereits vor Aufbringung der Zwischenträger eingetreten sind. Bedeutet nun an der Stelle  $r$ :

- $\overline{M}_r$  das Biegemoment für den Zwischenträger,
- $\overline{M}_r$  „ „ „ „ „ Hauptträger,
- $\overline{M}'_r$  „ „ „ für einen einfachen Balken  $AB$  (Figur 85 d), auf den nur die Lasten  $P$  wirken,

so ist

$$(5) \quad M_r = \overline{M}'_r - \overline{M}_r.$$

Das Gewicht  $w_r$  ist, nach Fig. 86, welche ein Stück der Biegelinie des Hauptträgers darstellt,

$$w_r = \Delta \varphi_r = \alpha_r'' + \alpha_{r+1}'^*)$$

und man erhält, nach Gleich. 7, Seite 28, wenn  $J_r$  und  $J_{r+1}$  die innerhalb der Felder  $\lambda_r$  und  $\lambda_{r+1}$  konstant angenommenen Trägheitsmomente des Querschnitts des Hauptträgers sind:

$$6 E J w_r = \frac{J}{J_r} (\overline{M}_{r-1} + 2 \overline{M}_r) \lambda_r + \frac{J}{J_{r+1}} (\overline{M}_{r+1} + 2 \overline{M}_r) \lambda_{r+1} + \frac{6 \varepsilon E J (t_u - t_o) \lambda}{h}$$

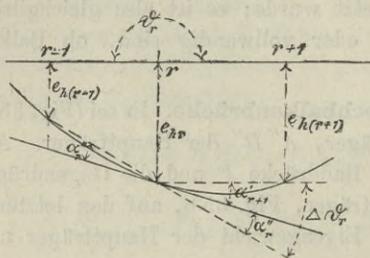


Fig. 86.

wo  $h$  die mittlere Höhe des Hauptträgers bedeutet.

Wir setzen eine konstante Feldweite  $\lambda$  voraus und führen — was stets zulässig ist — an Stelle von  $J:J_r$  und  $J:J_{r+1}$  einen Mittelwerth ein, den wir mit  $\alpha_r$  bezeichnen. Wir erhalten dann:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{6 E J w_r}{\lambda} &= \alpha_r (\overline{M}_{r-1} + 4 \overline{M}_r + \overline{M}_{r+1}) + \frac{6 \varepsilon E J (t_u - t_o)}{h} \\ &= \alpha_r (M_r' + 4 M_r' + M_{r+1}') - \alpha_r (M_r + 4 M_r + M_{r+1}) \\ &\quad + \frac{6 \varepsilon E J (t_u - t_o)}{h} \end{aligned} \right.$$

Die in No. 26 mit  $e_q$  bezeichneten Verschiebungen sind im vorliegenden Falle gleich den Durchbiegungen der Querträger. Das Trägheitsmoment  $J_q$  des Querträger-Querschnitts sei konstant; dann erhält

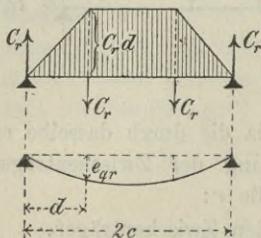


Fig. 87.

man nach § 3 die Biegelinie des Querträgers, indem man die Momentenfläche (d. i. die schraffierte Fläche in Fig. 87) als Belastungsfläche ansieht, eine neue Momentenfläche bestimmt und deren Ordinaten durch  $E J_q$  dividirt. Da nun der Inhalt der Belastungsfläche gleich  $C_r d (2c - d)$  ist, so kommt auf jede Stütze:

\*) Man findet auch unmittelbar:

$$\frac{e_{hr} - e_{h(r-1)}}{\lambda_r} - \frac{e_{h(r+1)} - e_{hr}}{\lambda_{r+1}} = \alpha_r'' + \alpha_{r+1}'.$$

$\frac{1}{2} C_r d (2c - d)$ , und es ergibt sich an der Angriffsstelle von  $C_r$  das Moment

$$\frac{1}{2} C_r d (2c - d) \cdot d - C_r d \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{3} = \frac{1}{3} C_r d^2 (3c - 2d).$$

Hieraus folgt aber:

$$(7) \quad e_{qr} = \frac{C_r d^2 (3c - 2d)}{3 E J_q} \quad \text{also} \quad e'_{qr} = 0 \quad \text{und} \quad \omega_r = \frac{d^2 (3c - 2d)}{3 E J_q}.$$

Setzt man noch

$$(8) \quad C_r = C_{0r} + \frac{M_{r-1}}{\lambda} - \frac{2M_r}{\lambda} + \frac{M_{r+1}}{\lambda}$$

so geht die Gleichung (4), nach Division mit  $\lambda$ , über in:

$$(9) \quad \alpha M_{r-2} + (1 - 4\alpha + \varkappa_r) M_{r-1} + (4 + 6\alpha + 4\varkappa_r) M_r \\ + (1 - 4\alpha + \varkappa_r) M_{r+1} + \alpha M_{r+2} = Z_r$$

wo

$$(10) \quad Z_r = -6 \left( \frac{\mathfrak{Q}_{or}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{\lambda^2} \right) - \alpha \lambda [C_{0(r-1)} - 2C_r + C_{0(r+1)}] \\ + \varkappa_r (M'_{r-1} + 4M'_r + M'_{r+1}) + \frac{6\varepsilon E J (t_u - t_o)}{h}$$

und

$$(11) \quad \alpha = 2 \frac{J}{J_q} \frac{d^2 (3c - 2d)}{\lambda^3}.$$

Die Auflösung der Gleichungen (9) liefert für irgend ein Stützenmoment  $M_i$  des Zwischenträgers einen Ausdruck von der Form:

$$(12) \quad M_i = \beta_{i1} Z_1 + \beta_{i2} Z_2 + \beta_{ir} Z_r + \dots + \beta_{i(n-1)} Z_{n-1}$$

und hiernach ergibt sich zunächst als Folge der ungleichmässigen Erwärmung der Hauptträger das Moment:

$$(13) \quad M_i = \frac{6\varepsilon E J (t_u - t_o)}{h} [\beta_{i1} + \beta_{i2} + \dots + \beta_{ir} + \dots + \beta_{i(n-1)}].$$

Der Einfluss der Lasten  $P$  auf  $M_i$  wird zweckmässig zeichnerisch bestimmt. Wäre

$$(14) \quad Z_r = -6 \left( \frac{\mathfrak{Q}_{or}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{\lambda^2} \right) - \alpha \lambda (C_{0(r-1)} - 2C_{0r} + C_{0(r+1)}),$$

so wäre das in No. 24 angegebene Verfahren ohne weiteres anwendbar; für die  $\zeta_r$ -Linie und das  $\eta_r$ -Polygon gelten dann die Gleichungen 24 bis 27.

Nun tritt aber der Werth

$$(15) \quad Z_r = x_r (M'_{r-1} + 4M'_r + M'_{r+1})$$

hinzu und es fragt sich jetzt, welchen Einfluss hat dieser Zuwachs auf das Moment  $M_i$ . Drückt man  $Z_1$  bis  $Z_{n-1}$  nach Formel 15 aus, so geht Gleichung (12) über in

$$M_i = \sum \beta_{i,r} x_r (M'_{r-1} + 4M'_r + M'_{r+1})$$

oder, wenn dieser Ausdruck nach den Momenten  $\dots M'_{r-1}, M', M'_{r+1}, \dots$  geordnet wird, in

$$(16) \quad M_i = \sum M'_r (\beta_{i(r-1)} x_{r-1} + 4\beta_{i,r} x_r + \beta_{i(r+1)} x_{r+1})$$

wobei das erste Glied lautet:  $M'_1 (4\beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2)$  und das letzte:  $M'_{n-1} (\beta_{i(n-2)} x_{n-2} + 4\beta_{i(n-1)} x_{n-1})$ .

Gesetzt nun, es liege die über den Zwischenträger wandernde Last  $P$  im  $k$ -ten Felde, Fig. 88a. Dann ist

$$\text{für } r < k-1 \quad M'_r = \frac{Pb}{l} x_r$$

$$\text{,, } r > k \quad M'_r = \frac{Pa}{l} x'_r$$

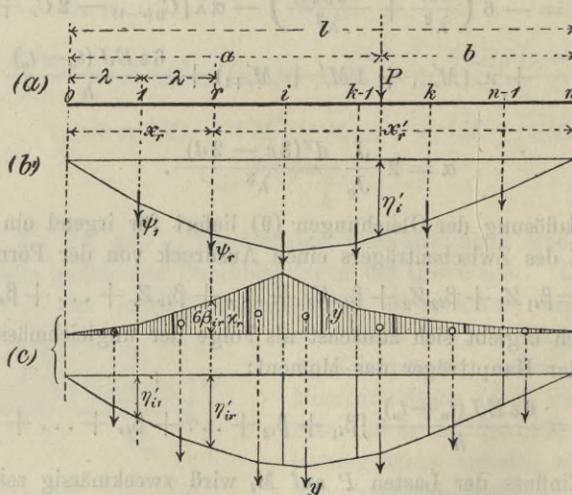


Fig. 88.

mithin, wenn zur Abkürzung die Bezeichnung

$$(17) \quad \beta_{i(r-1)} x_{r-1} + 4\beta_{i,r} x_r + \beta_{i(r+1)} x_{r+1} = \psi_{i,r}$$

eingeführt wird:

$$(18) \quad M_i = \left( \frac{b}{l} \sum_0^{k-1} \psi_{i,r} x_r + \frac{a}{l} \sum_k^{n-1} \psi_{i,r} x'_r \right) P = P \eta'_i$$

wo  $\eta'_i$  die unter der Last  $P$  gemessene Ordinate eines Seilpolygons bedeutet, welches zu den in den Knotenpunkten  $1, 2, \dots, r, \dots, (n-1)$  angreifenden Gewichten  $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \dots, \psi_{ir}, \dots, \psi_{i(n-1)}$  mit der Polweite  $1$  gezeichnet ist, Fig. 88 b. Zu demselben Ergebniss gelangt man, wenn man die mittleren Höhen  $y$  der in Fig. 88 c dargestellten Trapeze, welche durch die auf den Stützensenkrechten aufgetragenen Ordinaten  $6\beta_{ir}x_{ir}$  bestimmt sind, als lothrechte, in den Trapezeschwerpunkten angreifende Gewichte auffasst, durch ein Seilpolygon mit der Polweite  $1$  verbindet und in dieses ein zweites Polygon einbeschreibt, dessen Eckpunkte senkrecht unter den Knotenpunkten liegen. Um das einzusehen, betrachte man die schraffierte Fläche in Fig. 87 c als Belastungsfläche und vertheile sie auf die Knotenpunkte. Auf  $r$  entfällt:

$$\frac{1}{3} 6\beta_{i(r-1)}x_{i(r-1)} \frac{\lambda}{2} + \frac{4}{3} 6\beta_{ir}x_{ir} \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3} 6\beta_{i(r+1)}x_{i(r+1)} \frac{\lambda}{2} = \psi_{ir}\lambda,$$

und dieser Betrag muss durch  $\lambda$  dividirt werden, sobald die Inhalte der Trapeze durch die mittleren Höhen ersetzt werden. Das Einbeschreiben eines Polygons in das in Fig. 87 c gezeichnete Seileck darf übrigens unterbleiben, weil es genügt, die den Knotenpunkten entsprechenden Ordinaten  $\eta'_{i1}, \eta'_{i2}, \dots, \eta'_{ir}, \dots, \eta'_{i(n-1)}$  zu ermitteln. Denn die Berücksichtigung des Einflusses der Glieder  $Z_r = x_r(M'_{r+1} + 4M'_r + M'_{r+1})$  besteht schliesslich darin, dass die in No. 25 gefundenen  $\eta_i$  um die entsprechenden  $\eta'_i$  vergrössert werden. *An Stelle des  $\eta_i$ -Polygons der früheren Entwicklung tritt also jetzt das  $(\eta_i + \eta'_i)$ -Polygon.*

Sowohl die Werthe  $\psi_{ir}$  als auch die mittleren Höhen  $y$  der Belastungstrapeze in Fig. 87 c sind *Zahlen*. Macht man die Polweite des zugehörigen Seilpolygons gleich der Zahl  $1$ , so erhält man die Strecken  $\eta'_i$  in demselben Maassstabe, in dem die Stützweiten  $\lambda$  gezeichnet sind. Sollen die (in der Regel sehr kleinen)  $\eta'_i$  im  $\nu$ -fachen Maassstabe der  $\lambda$  dargestellt werden, so muss die Polweite  $1 : \nu$  gewählt werden.

**28. Zwischenträger einer Fachwerkbalkenbrücke, Fig. 89.** Die Feldweite  $\lambda$  sei konstant, und die Querträger mögen unmittelbar

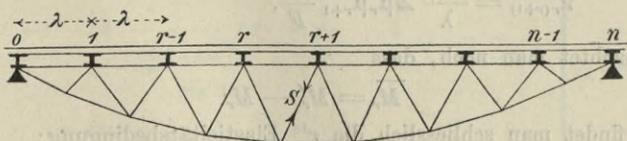


Fig. 89.

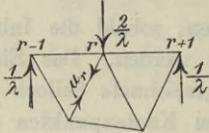
auf den Hauptträgern ruhen. Es unterscheidet sich dann die Berechnung des Zwischenträgers von der in No. 27 durchgeführten Unter-

suchung nur dadurch, dass das Gewicht  $w_r$  nicht nach Gleichung 6 zu bestimmen ist, sondern mittels des in Abtheil. 1, Seite 105, Gleich. 5, nachgewiesenen Gesetzes

$$(19) \quad w_r = \sum \mu_r \Delta s$$

wo  $\mu_r$  die Spannkraft in irgend einem Fachwerkstabe infolge des (in Fig. 90 dargestellten) Belastungszustandes  $\bar{M}_r = 1$  und  $\Delta s$  die wirkliche Aenderung der Stablänge bedeutet. Für die in Fig. 90 nicht vorkommenden Stäbe ist  $\mu_r = 0$ . Die Spannkräfte  $S$  der Fachwerkstäbe lassen sich nun als geradlinige Funktionen der Knotenpunktmomente ...  $\bar{M}_{r-1}$ ,  $\bar{M}_r$ ,  $\bar{M}_{r+1}$  ... darstellen; sie erscheinen in der Form

$$(20) \quad S = \dots \mu_{r-1} \bar{M}_{r-1} + \mu_r \bar{M}_r + \mu_{r+1} \bar{M}_{r+1} + \dots$$



Fig' 90.

und zwar ist für den besonderen Fall eines aus aneinander gereihten Dreiecken bestehenden Fachwerks jede Spannkraft  $S$  höchstens von drei aufeinander folgenden Knotenpunktmomenten abhängig — in dem hier gezeichneten Falle eines Strebenfachwerks sogar höchstens von zwei Momenten.\*) Es darf daher

in die Gleichung 19 gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{Ss}{EF} + \varepsilon ts \\ &= \frac{s}{EF} (\mu_{r-1} \bar{M}_{r-1} + \mu_r \bar{M}_r + \mu_{r+1} \bar{M}_{r+1}) + \varepsilon ts \end{aligned}$$

und man erhält:

$$(21) \quad \frac{6 EJ w_r}{\lambda} = \alpha_{r(r-1)} \bar{M}_{r-1} + \alpha_{r,r} \bar{M}_r + \alpha_{r,(r+1)} \bar{M}_{r+1} + \frac{6 \varepsilon EJ}{\lambda} \sum \mu_r t s$$

wo

$$(22) \quad \begin{aligned} \alpha_{r(r-1)} &= \frac{6J}{\lambda} \sum \mu_{r-1} \mu_r \frac{s}{F}; \quad \alpha_{r,r} = \frac{6J}{\lambda} \sum \mu_r^2 \frac{s}{F}; \\ \alpha_{r,(r+1)} &= \frac{6J}{\lambda} \sum \mu_r \mu_{r+1} \frac{s}{F}. \end{aligned}$$

Beachtet man noch, dass

$$\bar{M}_r = M_r' - M_r$$

ist, so findet man schliesslich die  $r^{\text{te}}$  Elasticitätsbedingung:

$$(23) \quad \begin{aligned} \alpha M_{r-2} + (1 - 4\alpha + \alpha_{r,(r-1)}) M_{r-1} + (4 + 6\alpha + \alpha_{r,r}) M_r \\ + (1 - 4\alpha + \alpha_{r,(r+1)}) M_{r+1} + \alpha M_{r+2} = Z_r \end{aligned}$$

\*) Vergl. Abtheil. 1, § 16.

wo

$$(24) \quad Z_r = -6 \left( \frac{\mathfrak{Q}_{or}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{\lambda^2} \right) - \alpha \lambda (C_{0(r-1)} - 2C_{0r} + C_{0(r+1)}) \\ + \varkappa_{r(r-1)} M'_{r-1} + \varkappa_{rr} M'_r + \varkappa_{r(r+1)} M'_{r+1} + \frac{6 \varepsilon EJ}{\lambda} \sum \mu_r ts$$

und

$$(25) \quad \alpha = 2 \frac{J}{J_0} \frac{d^2(3c - 2d)}{\lambda^3}.$$

Hat sich hiernach für irgend ein Stützenmoment  $M_i$  der Ausdruck

$$M_i = \beta_{i1} Z_1 + \beta_{i2} Z_2 + \beta_{i3} Z_3 + \dots + \beta_{i(n-1)} Z_{n-1}$$

ergeben, so entspricht einer ungleichförmigen Erwärmung der Hauptträger:

$$(26) \quad M_i = \frac{6 \varepsilon EJ}{\lambda} [\beta_{i1} \sum \mu_1 ts + \beta_{i2} \sum \mu_2 ts + \dots + \beta_{i(n-1)} \sum \mu_{n-1} ts].$$

Die Einflusslinie für  $M_i$  wird auf die in No. 2 angegebene Weise ermittelt; nur sind die Gewichte  $\psi$  mit Hilfe der Gleichung

$$(27) \quad \psi_{ir} = \beta_{i(r-1)} \varkappa_{r(r-1)} + \beta_{ir} \varkappa_{rr} + \beta_{i(r+1)} \varkappa_{r(r+1)}$$

zu berechnen.

### Zahlenbeispiel.

Eine Blechbalkenbrücke hat 10 m Stützweite, 2 m Feldweite, 3,6 m Breite, Figur 91 und 92. Der Hauptträger ist nach Figur 93 aus einem Stahlebleche (82.1 cm), vier Winkleisen (10.10.1,3 cm) und Gurtplatten (21.1,3 cm) zusammengesetzt; das Trägheitsmoment seines Querschnitts beträgt:

bei zwei Platten in jedem Gurte	376 000 cm <sup>4</sup>
„ einer Platte „ „ „	275 000 „
ohne Gurtplatten	181 000 „

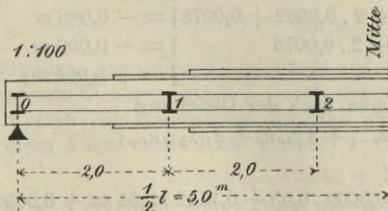


Fig. 91.

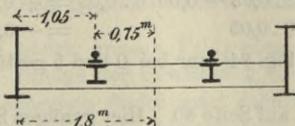


Fig. 92.

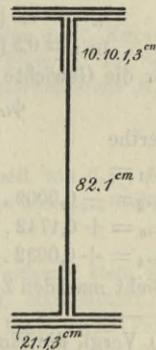


Fig. 93.

Die Trägheitsmomente von Zwischenträger und Querträger (Normal-Profile No. 32 bezieh. No. 45) sind

$$J = 12600 \text{ bzw. } J_q = 46200 \text{ cm}^4.$$

Die Längen der Gurtplatten gehen aus Fig. 91 hervor. Behufs Berechnung der Zahlen  $x$  seien den Knotenpunkten 1 und 2 die Werthe  $J_1 = 250000$  und  $J_2 = 376000$  als Trägheitsmomente des Hauptträger-Querschnitts zugeschrieben; es werde also gesetzt:

$$x_1 = \frac{12600}{250000} = 0,05 = x_1$$

$$x_2 = \frac{12600}{376000} = 0,03 = x_2^*.$$

Nach Fig. 92 ist  $d = 1,05 \text{ m}$ ,  $c = 1,8 \text{ m}$  also

$$\alpha = 2 \frac{J}{J_q} \frac{d^2(3c-d)}{\lambda^3} = 2 \frac{12600}{46200} \frac{1,05^2(3 \cdot 1,8 - 2 \cdot 1,05)}{2,0^3} = 0,25.$$

Die Elasticitätsbedingungen zur Berechnung der Stützenmomente des Zwischenträgers lauten:

$$\begin{aligned} M_1(4+6\alpha+4x_1) + M_2(1-4\alpha+x_1) + \alpha M_3 &= Z_1 \\ M_1(1-4\alpha+x_2) + M_2(4+6\alpha+4x_2) + M_3(1-4\alpha+x_2) + \alpha M_4 &= Z_2 \\ \alpha M_1 + M_2(1-4\alpha+x_3) + M_3(4+6\alpha+4x_3) + M_4(1-4\alpha+x_3) &= Z_3 \\ \alpha M_2 + M_3(1-4\alpha+x_4) + M_4(4+6\alpha+4x_4) &= Z_4, \end{aligned}$$

sie liefern beispielsweise für  $M_2$ , auf dessen Untersuchung wir uns hier beschränken wollen, den Werth

$$M_2 = -0,0009 Z_1 + 0,1742 Z_2 + 0,0032 Z_3 - 0,0078 Z_4,$$

so dass also:

$$\beta_{2 \cdot 1} = -0,0009; \quad \beta_{2 \cdot 2} = +0,1742; \quad \beta_{2 \cdot 3} = +0,0032; \quad \beta_{2 \cdot 4} = -0,0078.$$

Mittels der Formel

$$\gamma_{i,r} = \alpha \lambda (-\beta_{i(r-1)} + 2\beta_{i,r} - \beta_{i(r+1)})$$

ergibt sich nun (wegen  $\alpha \cdot \lambda = 0,25 \cdot 2,0 = 0,5 \text{ m}$ ):

$$\begin{aligned} \gamma_{2 \cdot 0} &= 0,5 [ \quad \quad \quad + 0,0009 ] = 0,000 \text{ m} \\ \gamma_{2 \cdot 1} &= 0,5 [ \quad \quad \quad - 2 \cdot 0,0009 - 0,1742 ] = -0,088 \text{ m} \\ \gamma_{2 \cdot 2} &= 0,5 [ + 0,0009 + 2 \cdot 0,1742 - 0,0032 ] = +0,173 \text{ m} \\ \gamma_{2 \cdot 3} &= 0,5 [ - 0,1742 + 2 \cdot 0,0032 + 0,0078 ] = -0,080 \text{ m} \\ \gamma_{2 \cdot 4} &= 0,5 [ - 0,0032 - 2 \cdot 0,0078 \quad \quad ] = -0,009 \text{ m} \\ \gamma_{2 \cdot 5} &= 0,5 [ + 0,0078 \quad \quad \quad ] = +0,004 \text{ m}; \end{aligned}$$

und für die Gewichte  $\psi$  erhält man nach der Gleichung

$$\psi_{i,r} = \beta_{i(r-1)} x_{r-1} + 4\beta_{i,r} x_r + \beta_{i(r+1)} x_{r+1}$$

die Werthe

$$\begin{aligned} \psi_{2 \cdot 1} &= \quad \quad \quad - 4 \cdot 0,0009 \cdot 0,05 + 0,1742 \cdot 0,03 = +0,005046 \\ \psi_{2 \cdot 2} &= -0,0009 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,1742 \cdot 0,03 + 0,0032 \cdot 0,03 = +0,020955 \\ \psi_{2 \cdot 3} &= +0,1742 \cdot 0,03 + 4 \cdot 0,0032 \cdot 0,03 - 0,0078 \cdot 0,05 = +0,005220 \\ \psi_{2 \cdot 4} &= +0,0032 \cdot 0,03 - 4 \cdot 0,0078 \cdot 0,05 \quad \quad \quad = -0,001464. \end{aligned}$$

Sieht man den Zwischenträger (Fig. 94) nur bei 0 und 5 gestützt an, und

\*) Vergl. die Einführung von  $x_r$  auf Seite 80. Hier genügen Schätzungen, denn der Einfluss der Zahlen  $x$  ist sehr gering.

belastet ihn in den Punkten 1, 2, 3, 4 mit den Gewichten  $\psi_{2.1}$ ,  $\psi_{2.2}$ ,  $\psi_{2.3}$ ,  $\psi_{2.4}$  so findet man an den Stellen 1, 2, 3, 4 die Momente:

$$\eta_1' = +0,037, \quad \eta_2' = +0,064, \quad \eta_3' = +0,048, \quad \eta_4' = +0,014^*)$$

und es sind deshalb die Ordinaten des  $(\eta + \eta')$ -Polygons (d. i. des Polygons  $0'1'2'3'4'5'$  in Fig. 94b):

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_1' &= -0,088 + 0,037 = -0,051 \text{ m} \\ \eta_2 + \eta_2' &= +0,173 + 0,064 = +0,237 \text{ m} \\ \eta_3 + \eta_3' &= -0,080 + 0,048 = -0,032 \text{ m} \\ \eta_4 + \eta_4' &= -0,009 + 0,023 = +0,014 \text{ m} \\ \eta_5 + \eta_5' &= +0,004 = +0,004 \text{ (unwesentlich).} \end{aligned}$$

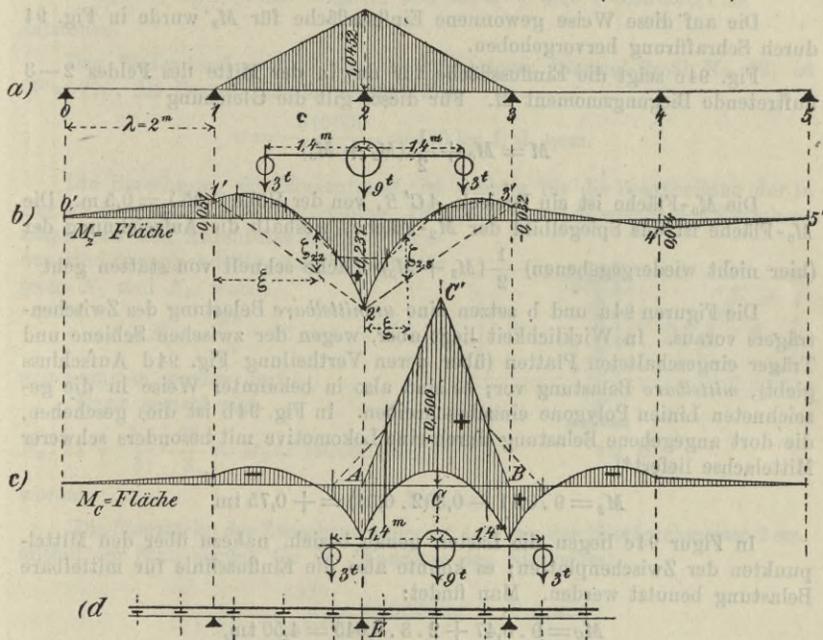


Fig. 94.

Trägt man, von diesem Linienzuge aus, die Ordinaten der  $\zeta$ -Kurven nach der negativen Richtung hin auf (vergl. die allgemeine Figur 75 auf Seite 70), so erhält man die Einflusslinie für das gesuchte Stützenmoment  $M_2$ . Wir wollen diese Kurve mittels der Formel

$$\zeta_{ir} = (\beta_{i(r-1)} \operatorname{tg} \varphi_L + \beta_{ir} \operatorname{tg} \varphi_E) \lambda$$

berechnen und erkennen sofort, dass wegen der Kleinheit von  $\beta_{2.1}$ ,  $\beta_{2.3}$  und  $\beta_{2.4}$  (welche gleich Null gesetzt werden dürfen) nur die von  $\beta_{2.2}$  abhängigen Werthe  $\zeta_{2.2}$  und  $\zeta_{2.3}$  von Einfluss sind.\*\*)

\*) Bei gleich grossen Feldweiten zieht es der Verfasser stets vor, die Momente  $\eta'$  infolge der Gewichte  $\psi$  zu rechnen. Die  $\eta'$  sind Meter.

\*\*) Zeichnerisch findet man nach Seite 75 die  $\zeta$ -Linie eines Feldes als Momentenlinie eines Belastungsdreiecks von der Höhe  $6\beta_{2.2} = 1,0452$ .

Wir setzen also (wegen  $\beta_{i,r} \lambda = 0,1742 \cdot 2 = 0,3484$ )

$$\zeta_{2 \cdot 2} = 0,3484 \operatorname{tg} \varphi_R \text{ und } \zeta_{2 \cdot 3} = 0,3484 \operatorname{tg} \varphi_L$$

und erhalten für die 4 Theilpunkte der in 5 gleich lange Strecken zerlegten Feldweite, mit den Zahlenwerthen auf Seite 42

für $\frac{\xi}{\lambda} = 0,2$	$\zeta_{2 \cdot 2} = 0,3484 \cdot 0,1920 = 0,067 \text{ m}$	$\zeta_{2 \cdot 3} = 0,100 \text{ m}$
= 0,4	= $0,3484 \cdot 0,3360 = 0,117 \text{ „}$	= 0,134 „
= 0,6	= $0,3484 \cdot 0,3840 = 0,134 \text{ „}$	= 0,117 „
= 0,8	= $0,3484 \cdot 0,2880 = 0,100 \text{ „}$	= 0,067 „

Die auf diese Weise gewonnene Einflussfläche für  $M_2$  wurde in Fig. 94 durch Schraffirung hervorgehoben.

Fig. 94c zeigt die Einflussfläche für das in der Mitte des Feldes 2—3 auftretende Biegemoment  $M$ . Für dieses gilt die Gleichung

$$M = M_0 + \frac{1}{2} (M_2 + M_3).$$

Die  $M_0$ -Fläche ist ein Dreieck  $AC'B$ , von der Höhe  $0,25 \lambda = 0,5 \text{ m}$ . Die  $M_3$ -Fläche ist das Spiegelbild der  $M_2$ -Fläche, weshalb die Aufzeichnung der (hier nicht wiedergegebenen)  $\frac{1}{2} (M_2 + M_3)$ -Fläche schnell von statten geht.

Die Figuren 94a und b setzen eine *unmittelbare* Belastung des Zwischenträgers voraus. In Wirklichkeit liegt aber, wegen der zwischen Schiene und Träger eingeschalteten Platten (über deren Vertheilung Fig. 94d Aufschluss giebt), *mittelbare* Belastung vor; es sind also in bekannter Weise in die gezeichneten Linien Polygone einzubeschreiben. In Fig. 94b ist dies geschehen, die dort angegebene Belastung durch eine Lokomotive mit besonders schwerer Mittelachse liefert\*)

$$M_2 = 9 \cdot 0,11 - 0,3 (2 \cdot 0,04) = + 0,75 \text{ tm.}$$

In Figur 94c liegen die Lasten genau bezieh. nahezu über den Mittelpunkten der Zwischenplatten; es konnte also die Einflusslinie für mittelbare Belastung benutzt werden. Man findet:

$$M_C = 9 \cdot 0,47 + 2 \cdot 3 \cdot 0,045 = 4,50 \text{ tm,}$$

das ist zufällig derselbe Werth, den die  $M_0$ -Linie ergeben würde (nämlich  $9 \cdot 0,5 = 4,5$ ). Der Fehler, den man bei Auffassung des Zwischenträgers als Einzelbalken begangen haben würde, wäre also gleich Null gewesen; *derselbe hat sich übrigens in allen vom Verfasser gerechneten Fällen als unerheblich herausgestellt*. Der Einfluss einer ungleichförmigen Erwärmung der Hauptträger auf  $M_2$  und  $M_3$  und ebenso auf das Moment  $M_C$  ist:

\*) Die Annahmen in Figur 94 sind besonders ungünstig gewählt. Die Kräfte 3t und 9t sind *Raddrücke*, nicht *Achsenbelastungen*. Die ständige Last wurde vernachlässigt.

\*\*) Eine gute Annäherung ist:  $M_i = \frac{6 \varepsilon EJ (t_u - t_o)}{(4 + 6 \alpha + \alpha_2) h} = 0,18 \cdot \frac{6 EJ (t_u - t_o)}{h}$ .

$$M_{2t} = M_{3t} = M_{Ct} = (\beta_{2.1} + \beta_{2.2} + \beta_{2.3} + \beta_{2.4}) \frac{6 \varepsilon EJ (t_u - t_o)**}{h}$$

$$= 0,17 \cdot \frac{6 \cdot 24 \cdot 12600}{84} (t_u - t_o)$$

wobei für  $h$  der Mittelwerth 84 cm und  $\varepsilon E = 24$  kg f. d. qcm gesetzt wurde. Mit  $t_u - t_o = 15^\circ$  erhält man

$$M_{2t} = M_{3t} = M_{Ct} = 55080 \text{ kcm} = 0,55 \text{ tm}$$

weshalb schliesslich

$$M_2 = + 0,75 + 0,55 = 1,3 \text{ tm} \text{ und } M_C = + 4,50 + 0,55 = 5,1 \text{ tm}$$

entstehen.

Das Widerstandsmoment des Zwischenträgers (Normal-Profil No. 32) ist  $W = 790$ , die Beanspruchung beträgt also:

$$\sigma = \frac{510000}{790} = 630 \text{ kg f. d. qcm.}$$

Die Berechnung des Momentes  $M_2$  ist wichtig für die Beurtheilung der in Fig. 95 dargestellten Nietverbindung. Die Niete 1 und 2, welche den Zwischenträger mit den Anschlusswinkeln verbinden, sind doppelschnittig; ihre Widerstände seien  $N_1$  und  $N_2$ , wobei

$$N_2 : N_1 = \frac{22}{3} : 22 = 1 : 3$$

angenommen werden darf.

Dann ergibt sich

$$N_1 \cdot 22 + \frac{N_1}{3} \cdot \frac{22}{3} = M_2 = 130000 \text{ kcm,}$$

woraus

$$N_1 = 5320 \text{ kg.}$$

Die Stegstärke des Zwischenträgers ist 1,15 cm, der Nietdurchmesser 2 cm, mithin der Stauchdruck für die Wandung des Nietloches:

$$\frac{5320}{2 \cdot 1,15} = 2320 \text{ kg f. d. qcm}$$

und die mittlere Schubspannung im Nietquerschnitt (3,14 qcm):

$$\frac{5320}{2 \cdot 3,14} = 850 \text{ kg f. d. qcm.}$$

Die Niete, welche die Winkleisen mit dem Querträger befestigen, werden unterhalb der  $n-n$  in der Längsrichtung auf *Zug* beansprucht und zwar höchstens mit

$$\frac{1}{2} N_1 = 2660 \text{ kg.}$$

Die Zugspannung beträgt

$$\sigma = \frac{2660}{3,14} = 850 \text{ kg f. d. qcm.}$$

Ausserdem werden die Niete noch durch den vom Zwischenträger auf den Querträger ausgeübten lothrechten Druck  $A$  auf Abscheerung bean-

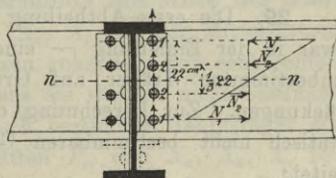


Fig. 95.

spricht.\*) Zur Bestimmung dieses Druckes verschieben wir die Lokomotive nach rechts bis die Last 9 t über der Platte E (Fig. 94d) liegt, betrachten den Zwischenträger als Einzelbalken und finden  $A = \frac{5}{6} \cdot 9 = 7,5$  t. Der wirkliche Druck A ist etwas kleiner, da  $M_2$  den vorhin ermittelten positiven Werth behält. Der auf jeden der vier doppelschnittigen Niete entfallende Betrag  $\frac{1}{4} \cdot 7,5 = 1,9$  t wird mit  $N_1$  zur Mittelkraft  $N = \sqrt{1,9^2 + 5,3^2} = 5,6$  t zusammengesetzt. Der Stauchdruck steigt also bis auf  $\frac{5600}{2 \cdot 1,15} = 2440$  kg f. d. qcm und die Schubspannung bis auf  $\frac{5600}{2 \cdot 3,14} = 900$  kg f. d. qcm. Die Rechnung lehrt, dass die Beanspruchung derartiger Verbindungen eine ziemlich hohe ist.

§ 8.

Anwendung der allgemeinen Elasticitätsgleichungen auf statisch unbestimmte Balken.

29. Die erste Abtheilung des vorliegenden Bandes enthält — und zwar in der Einleitung — eine allgemeine Untersuchung der statisch unbestimmten Träger auf Grund des Gesetzes der virtuellen Ver-rückungen. Zur Berechnung der mit  $X_a, X_b, X_c, \dots$  bezeichneten statisch nicht bestimm-baren Grössen wurden die Gleichungen abgeleitet:

$$(1) \begin{cases} L_a - \delta_{at} + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ba} X_b - \delta_{ca} X_c - \delta_{da} X_d - \dots \\ L_b - \delta_{bt} + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{cb} X_c - \delta_{db} X_d - \dots \\ L_c - \delta_{ct} + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - \delta_{ac} X_a - \delta_{bc} X_b - \delta_{cc} X_c - \delta_{dc} X_d - \dots \\ \dots \end{cases}$$

Hierin bedeuten  $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \dots$  die Wege der Belastungen  $X_a, X_b, X_c \dots$  des statisch bestimmten Hauptträgers,  $\delta_m$  den Weg der gegebenen Belastung  $P_m$ ,\*\*)

- $\delta_{ma}$  den Einfluss der Ursache  $X_a = -1$  auf den Weg  $\delta_m$ ,
- $\delta_{mb}$  „ „ „ „  $X_b = -1$  „ „ „ „ u. s. w.
- $\delta_{aa}$  „ „ „ „  $X_a = -1$  „ „ „ „  $\delta_a$ ,
- $\delta_{ab}$  „ „ „ „  $X_b = -1$  „ „ „ „  $\delta_b$ , u. s. w.
- $\delta_{at}$  „ „ einer Aenderung der dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Temperatur des statisch bestimmten Hauptträgers auf den Weg  $\delta_a$ ,

\*) Diese Zusatzbeanspruchung wird ermässigt durch unter die Zwischen-träger genietete (in Fig. 95 punktirt angegebene) Winkeleisenstücke.

\*\*\*) Die Begriffe „Belastung“ und „Weg einer Belastung“ wurden in der Einleitung auf Seite 31 eingeführt.

$L_a$  diejenige virtuelle Arbeit, die man erhält, wenn man die von der Ursache  $X_a = -1$  herrührenden Auflagerwiderstände des statisch bestimmten Hauptträgers mit den Projektionen der wirklichen Verrückungen ihrer Angriffspunkte multiplicirt, u. s. w.

Die Gleichungen (1) wurden in der Einleitung zuerst für das Fachwerk entwickelt und durch ein Beispiel ausführlich erläutert. Auf Seite 35 und 36 sind sie in kürzester Weise mit Hilfe des Maxwell'schen Satzes ( $\delta_{mn} = \delta_{nm}$ ) bewiesen worden. Sodann wurde auf Seite 47, 48 u. 49 die Gültigkeit des Maxwell'schen Satzes für den isotropen festen Körper erweitert, und hieraus folgt dann die Gültigkeit der Gleichungen (1) für statisch unbestimmte vollwandige Träger von unveränderlicher Stützungsart\*) und unveränderlicher Gliederung.

Die folgenden Anwendungen, die wir zunächst nur in grossen Zügen vorführen\*\*), werden zeigen, dass sich die Ermittlung der Grössen  $X$  mit Hilfe der Gleichungen (1) durch grosse Allgemeinheit und ausserordentliche Uebersichtlichkeit auszeichnet.

**30. Ermittlung der Stützenwiderstände mit Hilfe der Gleichungen (1).** Werden die Widerstände  $X_a, X_b, X_c$  der Mittelstützen des in Fig. 96 dargestellten, auf 5 Stützen ruhenden, von senkrechten Lasten  $P_m$  ergriffenen wagerechten Balkens als statisch nicht bestimmbare Grössen eingeführt, so ist der statisch bestimmte Hauptträger ein einfacher Balken  $AB$ , der mit den Kräften  $P_m$  und  $X_a, X_b, X_c$  belastet wird. Die Senkungen der Stützpunkte  $A, a, b, c, B$  seien  $\delta_A, \delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_B$ . In den Figuren 97, 98 und 99 sind die Belastungszustände  $X_a = -1, X_b = -1$  und  $X_c = -1$  dargestellt; im ersten Falle entstehen infolge der in  $a$  angreifenden Last 1 bei  $A$  und  $B$  die Auflagerwiderstände  $1 \frac{a'}{l}$  und  $1 \frac{a}{l}$ , im zweiten Falle entsteht  $1 \frac{b'}{l}$  und  $1 \frac{b}{l}$  u. s. w.

$Aa'B$  ist die Biegelinie für den Zustand  $X_a = -1$

$Ab'B$  „ „ „ „ „ „ „  $X_b = -1$

$Ac'B$  „ „ „ „ „ „ „  $X_c = -1$ .

Diese Linien werden nach den im § 2 angegebenen Verfahren gezeichnet; sie liefern die Durchbiegungen.

$$\delta_{aa}, \delta_{ba}, \delta_{ca}, \delta_{ma}$$

$$\delta_{ab}, \delta_{bb}, \delta_{cb}, \delta_{mb}$$

$$\delta_{ac}, \delta_{bc}, \delta_{cc}, \delta_{mc}.$$

\*) S. Einleitung, Seite 6 und 7.

\*\*) Ausführlicher behandelte Beispiele finden sich im § 9.

Ist genau gezeichnet worden, so muss, nach dem Maxwell'schen Satze sein:

$$\delta_{ba} = \delta_{ab}, \quad \delta_{cb} = \delta_{bc}, \quad \delta_{ca} = \delta_{ac}.$$

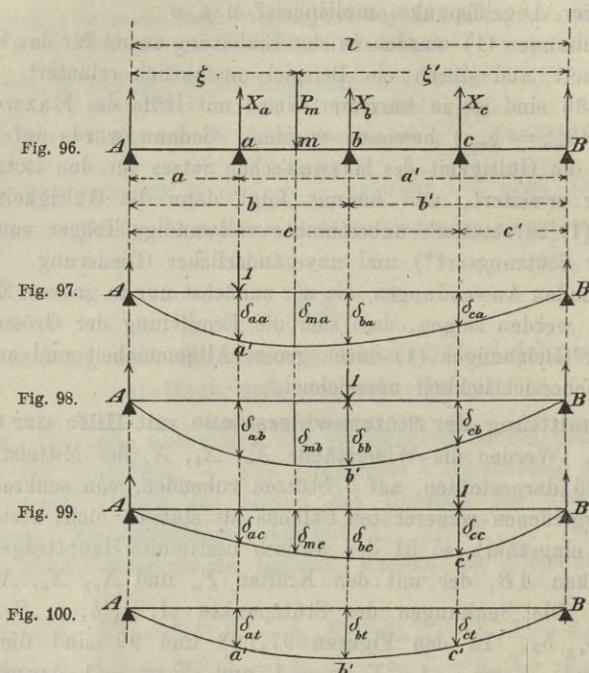


Fig. 100 zeigt die Biegelinie  $Aa'b'c'B$ , hervorgerufen durch eine Temperaturänderung; sie liefert  $\delta_{at}$ ,  $\delta_{bt}$ ,  $\delta_{ct}$  und ist unter der Annahme  $t_u > t_o$  gezeichnet. Meistens darf für die Trägerhöhe  $h$  ein fester Mittelwerth eingeführt werden. Dann ist  $Aa'b'c'B$  die Seillinie

für eine gleichförmige Belastung von der Höhe  $\varepsilon \frac{t_u - t_o}{h}$  (nach Gleichung 1, Seite 15) also eine Parabel, und man erhält:

$$(2) \quad \delta_{at} = \varepsilon \frac{t_u - t_o}{2h} aa'; \quad \delta_{bt} = \varepsilon \frac{t_u - t_o}{2h} bb'; \quad \delta_{ct} = \varepsilon \frac{t_u - t_o}{2h} cc'.$$

Für die virtuellen Arbeiten  $L$  findet man die Werthe:

$$(3) \quad \begin{cases} L_a = -1 \frac{a'}{l} \delta_A - 1 \frac{a}{l} \delta_B \\ L_b = -1 \frac{b'}{l} \delta_A - 1 \frac{b}{l} \delta_B \\ L_c = -1 \frac{c'}{l} \delta_A - 1 \frac{c}{l} \delta_B \end{cases}$$

und es erübrigt nur noch, die Verschiebungen  $\delta_A, \delta_B, \delta_a, \delta_b, \delta_c$  anzugeben.

Bei Balken auf gemauerten Pfeilern oder auf kurzen eisernen Säulen werden die Stützenverschiebungen meistens vernachlässigt; man setzt dann  $\delta_A = \delta_B = \delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$ .

Will man durch Schätzung oder Beobachtung gefundene Stützenverschiebungen in Rechnung stellen, so bezieht man diese Verschiebungen zweckmässig auf die Gerade  $AB$  als Nulllinie, setzt also  $\delta_A = \delta_B = 0$ .

Wird der Balken bei  $a$  durch eine längere Säule gestützt, so setzt man nach Gleich. (2) Seite 62 (wo auch die Buchstaben erklärt sind)

$$\delta_a = -\varepsilon t_a h_a + \frac{X_a h_a}{E_a F_a}.$$

Erfolgt die Unterstützung durch ein Ponton, so ist nach Gleich. (3)

$$\text{Seite 62} \quad \delta_a = \delta'_a + \frac{X_a}{\gamma F_a},$$

wo  $\delta'_a$  eine von  $X_a$  unabhängige Verschiebung des Punktes  $a$  bedeutet, z. B. der Einfluss einer Senkung des Wasserspiegels, oder die Aenderung der Tauchtiefe des Pontons durch unmittelbare Belastung desselben. Erfahren auch die Punkte  $A$  und  $B$  Verschiebungen, die von den

Stützendrücken  $A$  und  $B$  abhängig sind, ist z. B.  $\delta_A = \delta'_A + \frac{A}{\gamma F_A}$  (frei schwimmender Theil einer Pontonbrücke) so müssen natürlich  $A$  und  $B$  durch die Kräfte  $X_a, X_b, X_c$  ausgedrückt werden. Man erhält:

$$(4) \quad \begin{cases} A = \Sigma \frac{P_m \xi'}{l} - X_a \frac{a'}{l} - X_b \frac{b'}{l} - X_c \frac{c'}{l} \\ B = \Sigma \frac{P_m \xi}{l} - X_a \frac{a}{l} - X_b \frac{b}{l} - X_c \frac{c}{l}. \end{cases}$$

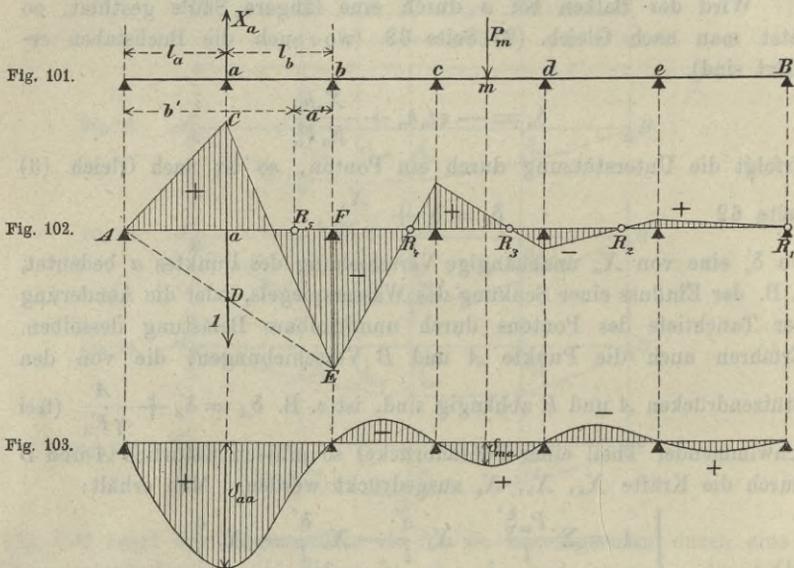
Die Grössen  $X_a, X_b, X_c$  lassen sich jetzt aus den Gleichungen (1) berechnen, und damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

### 31. Einführung eines statisch unbestimmten Hauptträgers.

Will man bei der Untersuchung eines  $r$ -fach statisch unbestimmten Trägers die Gleichungen (1) nicht über sämtliche statisch nicht bestimmbare Grössen  $X$  ausdehnen, sondern nur über die  $i$ -Grössen  $X_a, X_b, \dots, X_i$ , so ist der von den Belastungen  $P_m, X_a, X_b, \dots, X_i$  ergriffene Träger (den wir wieder den Hauptträger nennen wollen)  $(r - i)$ -fach statisch unbestimmt, und für diesen statisch unbestimmten Träger müssen nun die den Belastungszuständen  $X_a = -1, X_b = -1, \dots, X_i = -1$  entsprechenden Verschiebungen  $\delta_{ma}, \delta_{aa}, \delta_{ab}, \dots$  ermittelt werden. Ist  $i = r - 1$ , so bleibt nur eine Gleichung mit einer Unbekannten  $X$  übrig.

Es sei beispielsweise die Einflusslinie für den Widerstand  $X_a$  des Stützpunktes  $a$  des in Fig. 101 dargestellten, auf 7 Stützen ruhenden Balkens zu zeichnen. Sämtliche Widerlager seien starr. Der Querschnitt sei konstant.

Man beseitige die Stütze  $a$ , belaste den nunmehr nur noch auf 6 Stützen ruhenden Balken im Punkte  $a$  mit der Last 1, und zeichne für diesen Belastungsfall mit Hilfe der Festpunkte  $R$  die Momenten-



fläche (in Fig. 102) schraffirt), schliesslich die zu dieser Momentenfläche gehörige Biegungslinie. Dann ist:

$$0 = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} \quad \text{mithin}$$

$$X_a = \sum \frac{P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

Die gezeichnete Biegungslinie ist also die  $X_a$ -Linie; der Multiplikator ist  $1: \delta_{aa}$ .

Das Stützenmoment  $\overline{FE} = M_{ba}^*$ ) in Fig. 102 ist nach der zweiten der Gleichungen 14, Seite 40, \*\*)

$$M_{ba} = \frac{1}{x'} \frac{N_b}{l_a + l_b} \quad \text{wo } x' = \frac{a'}{b'}$$

\*)  $M_{ba}$  bedeutet: Moment an der Stelle  $b$  infolge  $X_a = -1$ .

\*\*) Die erste Gleichung (14) wird für die erste Öffnung ungültig.

und, nach Gleich. (8) Seite 36 und Gleich. (13) Seite 30:

$$N_b = -1 \cdot \frac{l_a l_b (2l_a + l_b)}{l_a + l_b}.$$

Zur Bestimmung des Punktes  $a'$  ist von der Geraden  $AE$  aus die Strecke  $\overline{CD} = 1 \cdot \frac{l_a l_b}{l_a + l_b}$  aufzutragen.

**32. Wagebalkenstützung.** In Fig. 104 ist ein Balken dargestellt, dessen Stützenwiderstände  $X_a$  und  $X_b$  nicht unmittelbar am Balken selbst angreifen, sondern durch Zwischenträger  $CD$  und  $EF$  übertragen werden. Der Träger  $AB$  wird also gewissermassen, ausser an den Enden  $A$  und  $B$ , durch zwei Wagebalken  $CD$  und  $EF$  unterstützt. Die Momentenfläche für den Zustand  $X_a = -1$  zeigt

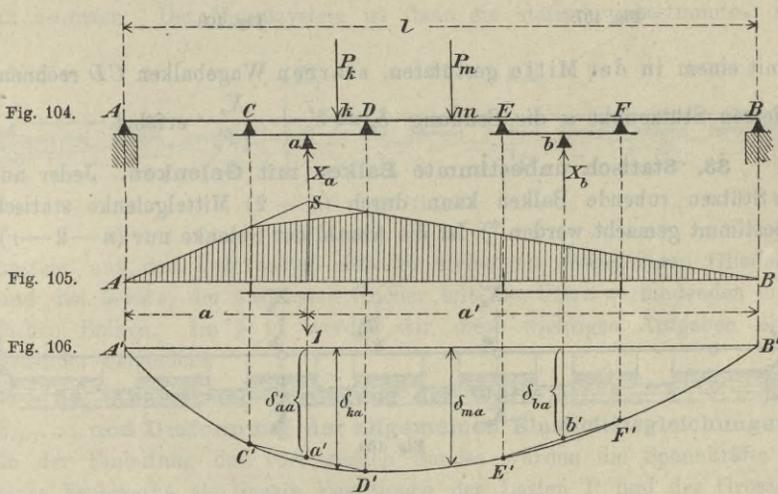


Fig. 105; das der unmittelbaren Belastung entsprechende umschriebene Momentendreieck  $ASB$  hat die Höhe  $1 \frac{a a'}{l}$ . Fig. 106 zeigt die zur schraffirten Momentenfläche gehörige Biegelinie  $A'C'D'E'F'B'$ . Wird der Wagebalken  $CD$  zunächst starr angenommen, so liegt  $a'$  in der Geraden  $C'D'$  und es ist  $\delta_{aa} = \delta'_{aa}$ . Nun biegt sich aber der Wagebalken  $CD$  an der Stelle  $a$  um  $\delta''_{aa} = 1 \frac{e'^2 e''^2}{3 E J' e}$  durch, wo  $J'$  das Trägheitsmoment des Querschnittes des Wagebalkens bedeutet, mithin ist

$$\delta_{aa} = \delta'_{aa} + \delta''_{aa}.$$

Punkt  $b'$  hingegen liegt, wenn nur die Ursache  $X_a = -1$  wirkt, in der Geraden  $E'F'$ , es ist also  $\delta_{ba}$  gleich der Ordinate des Punktes  $b'$ . Ganz ebenso wird der Belastungsfall  $X_b = -1$  behandelt. Die weitere Untersuchung ist genau wie in No. 30.

Die Wagebalkenstützung liegt u. a. bei Pontonbrücken vor, deren Streckbalken unmittelbar auf den Borden liegen, Fig. 108, und zwar darf man, wegen der Kleinheit des Neigungswinkels des Pontons, stets

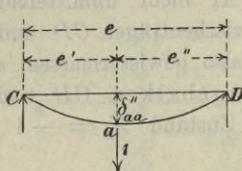


Fig. 107.

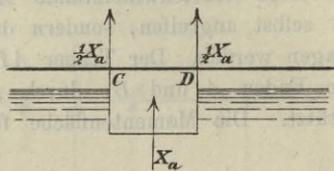


Fig. 108.

mit einem in der Mitte gestützten, starren Wagebalken  $CD$  rechnen, dessen Stützpunkt  $a$  die Senkung  $\delta_a = \delta'_a + \frac{X_a}{\gamma F_a}$  erfährt.

**33. Statisch unbestimmte Balken mit Gelenken.** Jeder auf  $n$  Stützen ruhende Balken kann durch  $(n - 2)$  Mittelgelenke statisch bestimmt gemacht werden.\*) Ist die Anzahl der Gelenke nur  $(n - 2 - r)$ ,

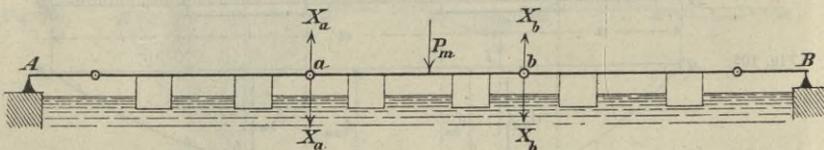


Fig. 109.

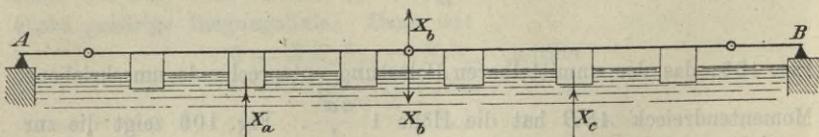


Fig. 110.

so ist der Balken  $r$ -fach statisch unbestimmt, er lässt sich durch Beseitigung von  $r$  Stützen, deren Widerstände  $X_a, X_b, X_c, \dots$  sein mögen, in einen Gerber'schen Balken verwandeln, und auf diesen statisch bestimmten Hauptträger können dann die Gleichungen (1) angewendet werden.

\*) Vergl. Band I, Seite 92 und Abschnitt VI.

Als Beispiele seien die in den Figuren 109 bis 111 dargestellten Balken von Schiffbrücken angeführt. Werden zweischiffige Brückenglieder nach Fig. 109 durch Gelenke  $a, b \dots$  aneinander gekuppelt, so tritt an jeder Verbindungsstelle ein statisch unbestimmter Gelenkdruck auf. Die äussersten Brückenglieder sind mit den Ufern durch einfache Balken verbunden. An dem einen Ufer ist ein festes Lager, an dem anderen ein wagerechtes Gleitlager anzubringen.

Sind die einzelnen Brückenglieder dreischiffig, so ist jedes Glied für sich allein einfach statisch unbestimmt. In dem Beispiele Fig. 110 sind ein Gelenkdruck und zwei Schiffswiderstände zu statisch unbestimmten Grössen gewählt worden. Zweckmässiger ist es aber, zunächst ein dreischiffiges Glied für sich allein zu untersuchen und hierauf die Gleichungen (1) auf Seite 90 nur zur Berechnung der Gelenkdrücke  $X_1, X_2 \dots$  (Fig. 111) auf zu benutzen. Das Hauptsystem ist dann ein statisch unbestimmtes; es

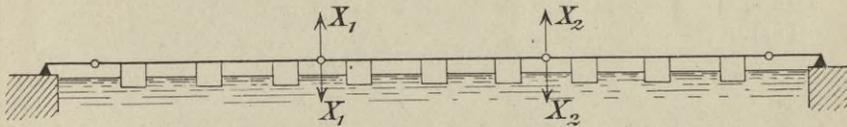


Fig. 111.

besteht aus den lose neben einander stehenden dreischiffigen Gliedern und den beiden, die äussersten Glieder mit den Ufern verbindenden einfachen Balken. Im § 11 werden wir diese wichtigen Aufgaben eingehender behandeln.

**34. Analytische Ermittlung der Werte  $\delta_{aa}, \delta_{ba}, \delta_{ca} \dots \delta_{bb}, \delta_{cb} \dots$  und Umformung der allgemeinen Elasticitätsgleichungen.** In der Einleitung des vorliegenden Bandes wurden die Spannkraften  $S$  eines Fachwerks als lineare Funktionen der Lasten  $P$  und der Grössen  $X_a, X_b, X_c \dots$  dargestellt.

Es ergab sich

$$(5) \quad S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \dots,$$

wobei  $S_0$  eine lineare Funktion der Lasten  $P$  ist, während  $S_a, S_b \dots$  der Reihe nach die durch die Ursachen  $X_a = -1, X_b = -1, \dots$  hervorgerufenen Werte von  $S$  bedeuten. Nach den Ausführungen in No. 31 lassen wir es fortan dahingestellt, ob durch Nullsetzen der Grössen  $X_a, X_b \dots$  ein statisch bestimmtes oder ein statisch unbestimmtes Hauptsystem entsteht.

Mit Hilfe der Arbeitsbedingung

$$(6) \quad \sum \bar{Q} \delta = \sum \bar{S} \Delta s = \sum \bar{S} \left( \frac{S s}{EF} + \epsilon t s \right)$$

fanden wir

$$(7) \quad \delta_{aa} = \Sigma S_a^2 \frac{s}{EF}, \quad \delta_{ab} = \Sigma S_a S_b \frac{s}{EF}, \quad \dots$$

$$(8) \quad \delta_{at} = \Sigma S_a \varepsilon t s, \quad \delta_{bt} = \Sigma S_b \varepsilon t s, \quad \dots$$

Bezeichnen wir mit  $i$  und  $k$  zwei beliebige der Zeiger  $a, b, c, \dots$ , so können wir die Formelgruppe (7) ersetzen durch die Gleichung

$$(9) \quad \delta_{ik} = \Sigma S_i S_k \frac{s}{EF},$$

und die Formelgruppe (8) durch die Gleichung

$$(10) \quad \delta_{it} = \Sigma S_i \varepsilon t s.$$

Weiter ergab sich in der Einleitung:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma P_m \delta_{ma} = \Sigma S_o S_a \frac{s}{EF} \\ \Sigma P_m \delta_{mb} = \Sigma S_o S_b \frac{s}{EF} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

weshalb man die Elasticitätsgleichungen auch wie folgt schreiben kann:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_a - \delta_{at} + \delta_a = \delta_{oa} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ba} X_b - \delta_{ca} X_c - \dots \\ L_b - \delta_{bt} + \delta_b = \delta_{ob} - \delta_{ab} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{cb} X_c - \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

mit der Festsetzung, dass alle auf den rechten Seiten stehenden  $\delta$  mittelst der Formel (9) berechnet werden.

Die Einführung der Werte  $\delta_{oi}$  an Stelle der Summen  $\Sigma P_m \delta_{mi}$  kann sich als zweckmässig erweisen, wenn das zu untersuchende Tragwerk nur für einen einzigen oder wenige Belastungsfälle berechnet werden soll.

Mit der Ausrechnung der Summen  $\Sigma S_o S_i \frac{s}{EF}$  kommt man dann oft schneller zum Ziele als mit der Darstellung der Verschiebungen  $\delta_{mi}$ .

Es ist nun die Frage, welche Formeln treten an die Stelle der Gleichungen (9) und (10), wenn kein Fachwerk vorliegt, sondern ein aus geraden Stäben bestehendes System, dessen einzelne Stäbe durch Längskräfte  $N$  und Biegemomente  $M$  beansprucht werden, wobei zu beachten ist, dass  $N$  für die verschiedenen Querschnitte eines und desselben Stabes im allgemeinen verschieden gross ist.

Wir knüpfen an die auf den Seiten 5 und 6 angestellte Untersuchung der Formänderung eines von zwei unendlich nahen Querschnitten begrenzten Stabstückes an. Für die Längenänderung des Teilchens  $dx$  der Stabachse fanden wir den Wert

$$(13) \quad \Delta dx = \left( \frac{N}{EF} + \varepsilon t_s \right) dx,$$

und für den Winkel, um welchen sich die beiden Querschnitte gegen einander drehen, den Wert

$$(14) \quad d\omega = \left( \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{t_u - t_o}{h} \right) dx.$$

Die virtuelle Formänderungsarbeit ist für das Stabtheilchen  $dx$  gleich

$$N\Delta dx + Md\omega,$$

und es tritt daher an die Stelle der für das Fachwerk gefundenen Gleichung (6) nunmehr die Arbeitsbedingung

$$(15) \quad \Sigma \bar{Q} \delta = \int \bar{N} \Delta dx + \int \bar{M} d\omega \\ = \int \bar{N} N \frac{dx}{EF} + \int \bar{M} M \frac{dx}{EJ} + \int \bar{N} \varepsilon t_s dx + \int \frac{\bar{M}}{h} \varepsilon \Delta t dx,$$

wo

$$\Delta t = t_u - t_o$$

ist. Aus dieser Betrachtung folgen nun ohne weiteres die Formeln

$$(16) \quad \delta_{ik} = \int N_i N_k \frac{dx}{EF} + \int M_i M_k \frac{dx}{EJ},$$

$$(17) \quad \delta_{it}^*) = \int N_i \varepsilon t_s dx + \int \frac{M_i}{h} \varepsilon \Delta t dx.$$

Die Integrale sind über sämtliche Stäbe des Bauwerks auszudehnen.

Der Gleichung (5) stehen die Gleichungen gegenüber

$$(18) \quad N = N_o - N_a X_a - N_b X_b - N_c X_c - \dots$$

$$(19) \quad M = M_o - M_a X_a - M_b X_b - M_c X_c - \dots$$

$N_a$  und  $M_a$  sind die Werte von  $N$  und  $M$  für den Belastungszustand  $X_a = -1$ .  $N_b$  und  $M_b$  entsprechen dem Zustande  $X_b = -1$ , u. s. w. Verschwinden sämtliche Grössen  $X$ , so entstehen die Werte  $N_o$  und  $M_o$ .

In den vorstehenden Entwicklungen ist der Einfluss der Querkräfte  $Q$ , welche sich ebenfalls auf die Form

$$Q = Q_o - Q_a X_a - Q_b X_b - Q_c X_c - \dots$$

bringen lassen, vernachlässigt worden. Soll dieser Einfluss berücksichtigt werden, so muss die Formel (16) ersetzt werden durch

$$(16a) \quad \delta_{ik} = \int N_i N_k \frac{dx}{EF} + \int M_i M_k \frac{dx}{EJ} + \varkappa \int Q_i Q_k \frac{dx}{GF}.$$

\*) Der Zeiger  $t$  weist immer auf den Einfluss von Temperaturänderungen hin.

Es folgt dies ohne weiteres aus der Vergleichung der für die Formänderungsarbeit auf den Seiten 8 und 10 abgeleiteten Formeln

$$A = \int \frac{M^2 dx}{2 EJ} + \int \frac{N^2 dx}{2 EF} \quad (\text{Einfluss von } M \text{ und } N)$$

und

$$A = \varkappa \int \frac{Q^2 dx}{2 GF} \quad (\text{Einfluss von } Q).$$

Angaben über die von der Form des Querschnitts abhängige Zahl  $\varkappa$  findet man auf den Seiten 10—12.  $G$  bedeutet den Gleitmodul.

**35. Einige wichtige Formeln zur schnellen Berechnung der Integrale  $\int M_i M_k dx$ .** In den meisten in der Praxis vorkommenden

Fällen ist es erlaubt, für die einzelnen Stäbe oder Stabstücke einen von  $x$  unabhängigen Mittelwert  $EJ$  einzuführen. Der Einfluss, den die Momentenflächen eines solchen Stabstückes auf  $\delta_{ik}$  ausüben, ist dann durch die Gleichung

$$EJ \delta_{ik} = \int M_i M_k dx$$

gegeben.

Es sei nun die eine der beiden  $M$ -Linien — wir geben ihr den Zeiger  $i$  — eine Gerade (Fig. 112), deren Endordinaten  $Y_1$  und  $Y_2$  sind; die andere sei von beliebiger Gestalt. Dann ist

$$M_i = Y_1 \frac{x'}{l} + Y_2 \frac{x}{l},$$

und man erhält

$$\int M_i M_k dx = \frac{Y_1}{l} \int_0^{x'} M_k x' dx' + \frac{Y_2}{l} \int_0^x M_k x dx.$$

Bezeichnet man mit  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  die statischen Momente der  $M_k$ -Fläche in Bezug auf die durch die Endpunkte 1 und 2 des Stabstückes  $l$  rechtwinklig zu  $l$  angenommenen Achsen 1—1' und 2—2', so findet man

$$(20) \quad \int M_i M_k dx = \frac{1}{l} (Y_1 \mathfrak{S}_2 + Y_2 \mathfrak{S}_1).$$

Wird schliesslich noch mit  $\mathfrak{S}'$  das auf die Achse 1—2 bezogene statische Moment der  $M_k$ -Fläche bezeichnet, so ergibt sich

$$(21) \quad \int M_k^2 dx = 2 \mathfrak{S}'.$$

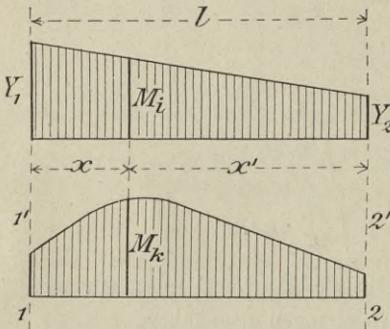


Fig. 112.

Wir stellen die Ergebnisse der vorstehenden Formeln für einige häufiger vorkommende Fälle zusammen.

a. Beide  $M$ -Flächen sind Trapeze, Fig. 113.

$$(22) \quad \int M_i M_k dx = \frac{l}{6} [Y_1 (2 Y_1' + Y_2') + Y_2 (2 Y_2' + Y_1')]$$

$$(23) \quad \int M_i^2 dx = \frac{l}{3} [Y_1^2 + Y_1 Y_2 + Y_2^2].$$

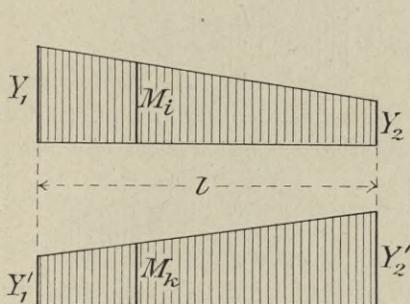


Fig. 113.

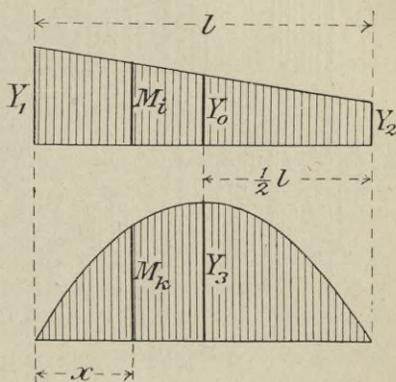


Fig. 114.

b. Die  $M_i$ -Fläche ist ein Trapez, die  $M_k$ -Fläche ein Parabelabschnitt, Fig. 114. Mit

$$M_k = \frac{4 Y_3 x (l - x)}{l^2}$$

erhält man

$$(24) \quad \int M_i M_k dx = \frac{l}{3} (Y_1 + Y_2) Y_3 = \frac{2l}{3} Y_0 Y_3,$$

wo  $Y_0$  die Ordinate des Mittelpunktes der  $M_i$ -Linie bedeutet. Weiter ist

$$(25) \quad \int M_k^2 dx = \frac{8}{15} Y_3^2 l.$$

c. Die  $M_i$ -Fläche ist ein Trapez, die  $M_k$ -Fläche ein Dreieck, Fig. 115. Wir betrachten die  $M_k$ -Fläche als den Unterschied zweier Dreiecke, deren gemeinsame Grundlinie gleich  $Y_3 \frac{l}{\xi'}$  ist und deren Höhen  $l$  und  $\xi$  sind. Dann ergibt sich

$$\mathfrak{S}_1 = Y_3 \frac{l}{\xi'} \frac{l^2 - \xi'^2}{6} = \frac{Y_3 l}{6} (l + \xi), \text{ ebenso}$$

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{Y_3 l}{6} (l + \xi'), \text{ also}$$

$$(26) \quad \int M_i M_k dx = \frac{Y_3}{6} [2 Y_0 l + Y_1 \xi' + Y_2 \xi].$$

Man darf auch schreiben:

$$(27) \quad \int M_i M_k dx = \frac{Y_3 l}{2} \left[ Y_0 + \frac{1}{3} (Y_1 - Y_2) \frac{\xi''}{l} \right].$$

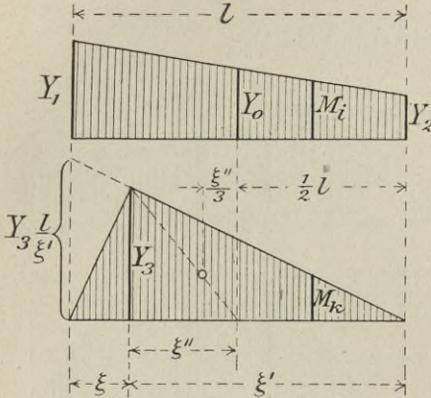


Fig. 115.

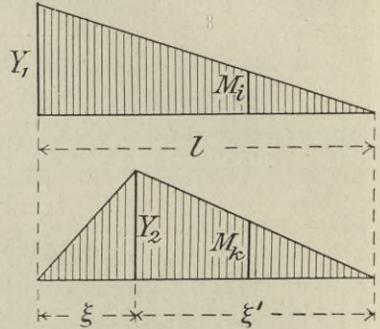


Fig. 115 a.

Für den oft vorkommenden Sonderfall in Fig. 115 a erhält man

$$(28) \quad \int M_i M_k dx = \frac{Y_1 Y_2 (l + \xi)}{6}.$$

d. Die  $M_i$ -Fläche ist ein symmetrischer Parabelabschnitt, Fig. 116, die  $M_k$ -Fläche von beliebiger Gestalt. Da

$$M_i = \frac{4 Y_1}{l^2} (x l - x^2),$$

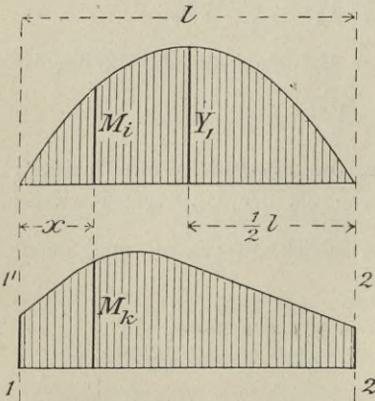


Fig. 116.

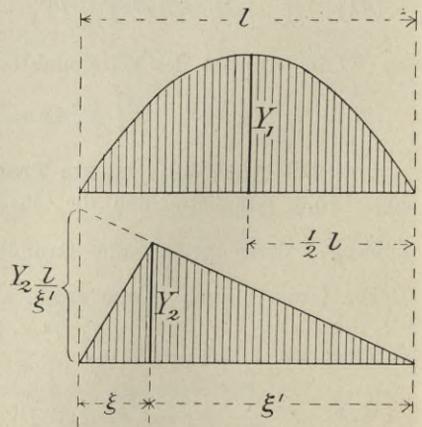


Fig. 117.

ist, so ergibt sich

$$(29) \quad \int M_i M_k dx = \frac{4 Y_1}{l^2} (l \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_1),$$

wo  $\mathfrak{S}_1$  das Trägheitsmoment und  $\mathfrak{S}_1$  das statische Moment der  $M_k$ -Fläche in Bezug auf die Achse 1—1' bedeuten.

**e. Die  $M_i$ -Fläche ist ein Parabelabschnitt, die  $M_k$ -Fläche ein Dreieck, Fig. 117.** Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= Y_2 \frac{l}{\xi'} \frac{l^2 - \xi^2}{6} = \frac{Y_2 l}{6} (l + \xi) \\ \mathfrak{S}_1 &= Y_2 \frac{l}{\xi'} \frac{l^3 - \xi^3}{12} = \frac{Y_2 l}{12} (l^2 + l\xi + \xi^2), \end{aligned}$$

und man findet mittelst Gleichung (24):

$$(30) \quad \int M_i M_k dx = \frac{Y_1 Y_2}{3 l} (l^2 + \xi \xi').$$

**36. Die  $\alpha$ -Gewichte.** Der Einfluss einer Last  $P_m = 1$  auf die Grössen  $X_a, X_b, X_c \dots$  ist durch die Gleichungen bestimmt:

$$(31) \quad \begin{cases} X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ba} + X_c \delta_{ca} + \dots = \delta_{ma} \\ X_a \delta_{ab} + X_b \delta_{bb} + X_c \delta_{cb} + \dots = \delta_{mb} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

Die Auflösung liefert für irgend eine Unbekannte  $X_i$  einen linearen Ausdruck:

$$(32) \quad X_i = \alpha_{ia} \delta_{ma} + \alpha_{ib} \delta_{mb} + \alpha_{ic} \delta_{mc} + \dots$$

Da nun  $\delta_{mb}$  die Verschiebung des Knotenpunktes  $m$  im Sinne von  $P_m$  und infolge der Belastung  $X_b = -1$  ist, so ist  $\alpha_{ib} \delta_{mb}$  der Wert, den diese Verschiebung infolge der Belastung  $X_b = -\alpha_{ib}$  annimmt, und es ergibt sich mithin der Satz:

*Der Einfluss von  $P_m$  auf  $X_i$  ist*

$$X_i = P_m \delta_m,$$

*wo  $\delta_m$  die Verschiebung bedeutet, welche der Punkt  $m$  im Sinne von  $P_m$  erfährt, wenn das Hauptsystem von den Belastungen  $X_a = -\alpha_{ia}, X_b = -\alpha_{ib}, \dots$  angegriffen wird.*

Handelt es sich um die Einflusslinie für  $X_i$ , so darf man den Satz auch so aussprechen:

*Die Einflusslinie für  $X_i$  ist die Biegelinie des von den Belastungen  $X_a = -\alpha_{ia}, X_b = -\alpha_{ib}, \dots$  angegriffenen Hauptsystems\*).*

\*) Der allgemeine Begriff *Belastung* ist in der Einleitung der Abteilung I, Seite 31, erklärt worden. Im allgemeinen besteht eine Belastung aus einer Gruppe von Kräften.

Bei diesem Belastungszustande entstehen die Momente

$$(33) \quad M = \alpha_{ia} M_a + \alpha_{ib} M_b + \alpha_{ic} M_c + \dots$$

**37. Die Hilfwerte**  $\omega_R, \omega_D, \omega_P, \omega_P''$ . Die zur Ermittlung der Biegungslinien dienenden Seillinien werden meistens schneller durch Rechnung als durch Zeichnung gefunden. Es gilt dies namentlich für den Fall, dass sich die Belastungsflächen aus Rechtecken, Dreiecken und Parabelflächen zusammensetzen. Es leisten dann die in der Tabelle auf Seite 105 zur Berechnung der Momente eines einfachen Balkens angegebenen Zahlen  $\omega$  gute Dienste. Vor allem erleichtert aber die Einführung der Zeichen  $\omega_R, \omega_D, \omega_P, \omega_P''$  öfter das Anschreiben von Formeln, wie dies bereits einige in der ersten Abteilung dieses Bandes (Auflage 1903, Seite 424 u. f. oder 1907, Seite 427 u. f.) durchgeführte Untersuchungen gezeigt haben; dort findet sich die Tabelle auf Seite 425 bzw. 430.

Wichtig ist auch der in Fig. 118 dargestellte Belastungsfall. Die Belastungslinie ist ein Polygon. Die Ordinaten der Eckpunkte sind

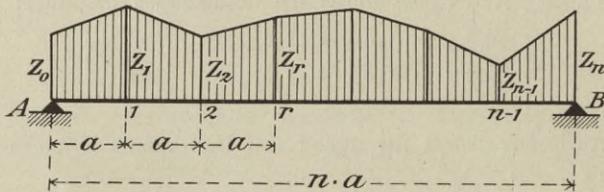


Fig. 118.

$z_0, z_1, z_2, \dots$ . Die Abschnitte  $a$  sind gleichlang. Gesucht sind die Momente für die Balkenquerschnitte 1, 2, 3, ...

Ein durch den Punkt  $r$  geführter lotrechter Schnitt zerlegt die Belastungsfläche in zwei Teile. Das statische Moment des linken Teiles, bezogen auf die Lotrechte durch  $A$ , sei  $\mathfrak{Q}_r$  und das statische Moment des rechten Teiles, bezogen auf die Lotrechte durch  $B$ , sei  $\mathfrak{R}_r$ . Die Anzahl der Abschnitte  $a$  sei  $n$ . Dann ergibt sich

$$M_r = \mathfrak{Q}_r \frac{n-r}{n} + \mathfrak{R}_r \frac{r}{n},$$

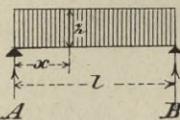
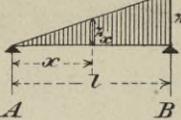
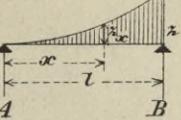
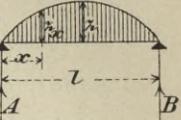
und zwar ist

$$\mathfrak{Q}_r = \frac{z_0 a^2}{6} + a^2 [z_1 + 2z_2 + 3z_3 + \dots + (r-1)z_{r-1}] + \frac{z_r a^2}{2} \left( r - \frac{1}{3} \right).$$

Ganz ebenso wird  $\mathfrak{R}_r$  berechnet. Man findet die Formel

$$(34) \quad M_r = \frac{a^2}{n} \left( \frac{1}{6} z_0 + \gamma_{r1} z_1 + \gamma_{r2} z_2 + \gamma_{r3} z_3 + \dots + \gamma_{r(n-1)} z_{n-1} + \frac{1}{6} z_n \right).$$

Tabelle der Werthe  $\omega_R, \omega_D, \omega_P, \omega_P''$ .

				
		$\xi_x = \xi \frac{x}{l}$	$\xi_x = \xi \frac{x^2}{l^2}$	$\xi_x = \frac{4 \xi x (l-x)}{l^2}$
$A = B = \frac{\xi l}{2}$	$A = \frac{\xi l}{6}$ $B = \frac{\xi l}{3}$	$A = \frac{\xi l}{12}$ $B = \frac{\xi l}{4}$	$A = B = \frac{\xi l}{3}$	
$M = \omega_R \frac{\xi l^2}{2}$	$\omega_D \frac{\xi l^2}{6}$	$\omega_P \frac{\xi l^2}{12}$	$\omega_P'' \frac{\xi l^2}{3}$	
$\frac{x}{l}$	$\omega_R = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}$	$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$	$\omega_P = \frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4}$	$\omega_P'' = \frac{1}{2} \frac{x^4}{l^4} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{2} \frac{x}{l}$ $= 2 \omega_D - \omega_P$ $= \omega_R (1 + \omega_R)$
0,05	0,0475	0,0499	0,0500	0,0498
0,10	0,0900	0,0990	0,0999	0,0981
0,15	0,1275	0,1466	0,1495	0,1438
0,20	0,1600	0,1920	0,1984	0,1856
0,25	0,1875	0,2344	0,2461	0,2227
0,30	0,2100	0,2730	0,2919	0,2541
0,35	0,2275	0,3071	0,3350	0,2793
0,40	0,2400	0,3360	0,3744	0,2976
0,45	0,2475	0,3589	0,4090	0,30898
0,50	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125
0,55	0,2475	0,3836	0,4585	0,3089
0,60	0,2400	0,3840	0,4704	0,2976
0,65	0,2275	0,3754	0,4715	0,2793
0,70	0,2100	0,3570	0,4599	0,2541
0,75	0,1875	0,3281	0,4336	0,2227
0,80	0,1600	0,2880	0,3904	0,1856
0,85	0,1275	0,2359	0,3280	0,1438
0,90	0,0900	0,1710	0,2439	0,0981
0,95	0,0475	0,0926	0,1355	0,0498
$\int_0^l M dx =$	$\frac{\xi l^3}{12}$	$\frac{\xi l^3}{24}$	$\frac{\xi l^3}{40}$	$\frac{\xi l^3}{15}$

Die Koeffizienten  $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \dots$  werden nach der Formel

$$(35) \quad \gamma_{rr} = r(n-r) - \frac{n}{6}$$

berechnet. Für die übrigen  $\gamma$  gilt

$$(36) \quad \gamma_{ik} = i(n-k)$$

mit der Bedingung  $i < k$ .

Hiernach ergibt sich z. B. für  $M_4$  der Wert

$$(37) \quad M_4 = \frac{a^2}{n} \left\{ \frac{1}{6} z_0 + 1(n-4)z_1 + 2(n-4)z_2 + 3(n-4)z_3 \right. \\ \left. + \left[ 4(n-4) - \frac{n}{6} \right] z_4 + 4(n-5)z_5 + 4(n-6)z_6 \right. \\ \left. + \dots + 4 \cdot 1 z_{n-1} + \frac{1}{6} z_n \right\}.$$

Schliesslich führen wir noch eine Formel an, die in vielen wichtigen Fällen die Berechnung des Inhaltes der Einflussflächen erleichtern wird.

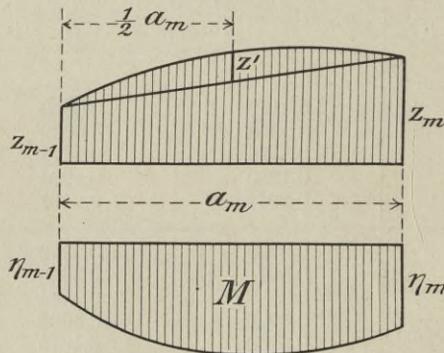


Fig. 119.

In zwei Punkten  $(m-1)$  und  $m$  seien  $z_{m-1}$  und  $z_m$  die Belastungshöhen,  $\eta_{m-1}$  und  $\eta_m$  die Ordinaten der zugehörigen Momentenlinie. Die Belastungslinie sei eine Parabel von der Pfeilhöhe  $z'$  (Fig. 119). Dann ist der Inhalt der zur Strecke  $a_m = (m-1) - m$  gehörigen Momentenfläche

$$(38) \quad \mathfrak{F}_m = \frac{1}{2} a_m (\eta_{m-1} + \eta_m) + \frac{1}{24} a_m^3 (z_{m-1} + z_m) + \frac{1}{30} a_m^3 z'.$$

Diese Formel folgt aus den Werten der letzten Zeile der auf Seite 105 stehenden Tabelle.

## § 9.

Anwendung des Satzes  $\delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m} - \frac{\partial L}{\partial P_m}$ .

38. An die Stelle des in der Einleitung für das Fachwerk angegebenen Wertes

$$A_i = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s$$

tritt in die Formel

$$(1) \quad \delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m} - \frac{\partial L}{\partial P_m}$$

nach den Entwicklungen des § 1, No. 3 bis 5, der Ausdruck

$$(2) \quad A_i = \int \frac{M^2 dx}{2EJ} + \int \frac{N^2 dx}{2EF} + \varkappa \int \frac{Q^2 dx}{2GF} + \int \varepsilon t_s N dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{M}{h} dx.$$

$L$  bedeutet die virtuelle Arbeit der Stützenwiderstände, deren Angriffspunkte sich um gegebene, etwa durch Beobachtung gefundene Strecken verschieben mögen. Man vergleiche den Abschnitt über die Castigliano'schen Sätze in der Einleitung der Abteilung I, Seite 49—51.

**39. Beispiel.** Ein eiserner Balken besitzt bei  $A$  ein wagerechtes Gleitlager, bei  $B$  ein festes Auflager; er ist bei  $D$  mit einer frei drehbar gelagerten Säule vernietet. Fig. 120. Das Tragwerk ist zweifach statisch unbestimmt. Als Größen  $X_a$  und  $X_b$  sollen der Widerstand des Gleitlagers und die wagerechte Seitenkraft des festen Auflagers  $B$  eingeführt werden. Der Angriffspunkt von  $X_b$  liege unterhalb der Balkenachse. Es soll der Einfluß der wagerechten Lasten  $K_1, K_2$ , sowie der Einfluß von Temperaturänderungen und beobachteten Verschiebungen der Stützpunkte auf  $X_a$  und  $X_b$  festgestellt werden. Es sei, vom spannungslosen Anfangszustande aus gerechnet,

$t$  die Temperaturänderung für alle Punkte der Achse des Balkens,

$t_u$  desgleichen der Unterkante des Balkens,

$t_o = t_u - \Delta t$  desgleichen der Oberkante des Balkens,

$t'$  die Temperaturänderung der Säule,

$\delta_a$  die beobachtete lotrechte Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft  $X_a$  gegen den ruhend angenommenen Säulenfuß,

$\delta_B$  desgleichen der Kraft  $B$ ,

$\delta_b$  die beobachtete wagerechte Verschiebung des Angriffspunktes von  $X_b$ .

Die Verschiebungen  $\delta_a, \delta_b, \delta_B$  seien positiv, wenn sie im Sinne der Kräfte  $X_a, X_b, B$  erfolgen.

Beseitigt man das bewegliche Lager am linken Ende des Balkens und ersetzt man das feste Lager am rechten Balkenende durch ein wagerechtes Gleitlager, so erhält man das statisch bestimmte Hauptsystem. An diesem greifen außer den Kräften  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  noch die mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen berechneten Stützwiderstände an:

$$B = B_0 + X_a - X_b \frac{c}{l}, \text{ wo } B_0 = K_1 \frac{a_1}{l} + K_2 \frac{a_2}{l},$$

$$A = -B_0 - 2X_a + X_b \frac{c}{l},$$

$$C = X_b - K_1 - K_2,$$

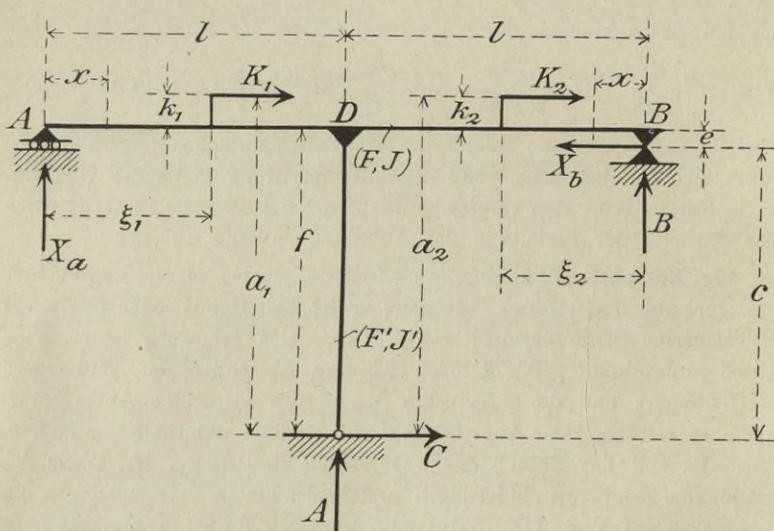


Fig. 120.

und es ergibt sich, da  $A$  und  $C$  an dem ruhend angenommenen Säulenfüße angreifen, die virtuelle Arbeit

$$L = B \delta_B = \left( B_0 + X_a - X_b \frac{c}{l} \right) \delta_B.$$

Es entstehen folgende Momente  $M$  und Längskräfte  $N^*$ ):

in der linken Hälfte des Balkens

$$\text{für } x < \xi_1 \quad M = X_a x$$

$$N = 0$$

$$\text{für } x > \xi_1 \quad M = X_a x + K_1 k_1$$

$$N = -K_1$$

\*) Den Einfluß der Querkräfte wollen wir gleich von vornherein vernachlässigen.

in der rechten Hälfte des Balkens

$$\text{für } x < \xi_2 \quad M = Bx - X_b e \\ = (B_0 + X_a)x - X_b \left( \frac{c}{l} x + e \right), \quad N = -X_b$$

$$\text{für } x > \xi_2 \quad M = (B_0 + X_a)x - X_b \left( \frac{c}{l} x + e \right) - K_2 k_2, \quad N = K_2 - X_b$$

in der Säule

$$M = Cx = (X_b - K_1 - K_2)x, \quad N = B_0 + 2X_a - X_b \frac{c}{l}.$$

Bedeutend  $J$  und  $F$  das Trägheitsmoment und den Inhalt des Balkenquerschnitts,  $J'$  und  $F'$  die entsprechenden Werte des Säulenquerschnitts,  $h$  die Trägerhöhe,  $s$  die Säulenlänge, Fig. 148, so folgt aus

$$(3) \quad \delta_a = \frac{\partial A_i}{\partial X_a} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_a} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X_a} dx + \int \varepsilon t \frac{\partial N}{\partial X_a} dx \\ + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial X_a} + \frac{\partial L}{\partial X_a}$$

für den Fall unveränderlicher Werte  $J$ ,  $F$ ,  $J'$ ,  $F'$  die Gleichung

$$EJ\delta_a = \int_0^l X_a x^2 dx + K_1 k_1 \int_{\xi_1}^l x dx \\ + \int_0^l \left[ (B_0 + X_a)x - X_b \left( \frac{c}{l} x + e \right) \right] x dx - K_2 k_2 \int_{\xi_2}^l x dx \\ + \frac{J}{F'} \left( B_0 + 2X_a - X_b \frac{c}{l} \right) 2s + \varepsilon EJt' 2s \\ + 2\varepsilon EJ \frac{\Delta t}{h} \int_0^l x dx + EJ\delta_B,$$

und in derselben Weise ergibt sich

$$EJ\delta_b = - \int_0^l \left[ (B_0 + X_a)x - X_b \left( \frac{c}{l} x + e \right) \right] \left( \frac{c}{l} x + e \right) dx \\ + K_2 k_2 \int_{\xi_2}^l \left( \frac{cx}{l} + e \right) dx + \frac{J}{J'} \int_0^s (X_b - K_1 - K_2) x^2 dx \\ + \frac{J}{F'} [X_b l - K_2(l - \xi_2)] - \frac{J}{F'} \left( B_0 + 2X_a - X_b \frac{c}{l} \right) \frac{c}{l} s - \varepsilon EJt \\ - \varepsilon EJt' \frac{c}{l} s - \varepsilon EJ \frac{\Delta t}{h} \int_0^l \left( \frac{cx}{l} + e \right) dx - EJ\delta_B \frac{c}{l}.$$

Nach Ausführung der Integrationen erhält man die Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \gamma_{aa} X_a + \gamma_{ab} X_b = T_a \\ \gamma_{ba} X_a + \gamma_{bb} X_b = T_b, \end{cases}$$

wo

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{aa} &= \frac{2}{3} l^3 + 4s \frac{J}{F'}, \\ \gamma_{ab} = \gamma_{ba} &= - \left( \frac{1}{3} cl^2 + \frac{1}{2} el^2 + 2s \frac{c}{l} \frac{J}{F'} \right) \\ &= - \frac{l^2}{6} (2f + e) - 2s \frac{c}{l} \frac{J}{F'}, \\ \gamma_{bb} &= \frac{f^2 l}{3} + efl + e^2 l + \frac{J}{J'} \frac{s^3}{3} + l \frac{J}{F} + s \frac{c^2}{l^2} \frac{J}{F'} \\ &= \frac{l}{3} (f^2 + fe + e^2) + \frac{J}{J'} \frac{s^3}{3} + l \frac{J}{F} + s \frac{c^2}{l^2} \frac{J}{F'}. \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} T_a &= - \frac{1}{2} K_1 k_1 (l^2 - \xi_1^2) + \frac{1}{2} K_2 k_2 (l^2 - \xi_2^2) \\ &\quad - (K_1 a_1 + K_2 a_2) \left( \frac{l^2}{3} + 2 \frac{s}{l} \frac{J}{F'} \right) \\ &\quad - \varepsilon EJ \left( 2t's + \Delta t \frac{l^2}{h} \right) + EJ (\delta_a - \delta_B), \\ T_b &= - K_2 k_2 \left[ \frac{c}{2l} (l^2 - \xi_2^2) + e(l - \xi_2) \right] \\ &\quad + (K_1 a_1 + K_2 a_2) \left( \frac{cl}{3} + \frac{el}{2} + \frac{s}{l} \frac{c}{l} \frac{J}{F'} \right) \\ &\quad + (K_1 + K_2) \frac{J}{J'} \frac{s^3}{3} + K_2 (l - \xi_2) \frac{J}{F} + EJ (\delta_b + \delta_B \frac{c}{l}) \\ &\quad + \varepsilon EJ \left[ tl + t' \frac{c}{l} s + \Delta t \frac{l}{2h} (c + 2e) \right]. \end{aligned} \right.$$

Es sei  $l = 12^m$ ,  $e = 0,5^m$ ,  $c = 4,5^m$ ,  $s = 4,5^m$ ,  $\frac{J}{J'} = 8$ . Die letzte Zahl muß zunächst geschätzt werden, wenn es sich um den *Entwurf* eines Tragwerks handelt. Die von den Längskräften  $N$  herrührenden Glieder dürfen als unwesentlich vernachlässigt werden, man darf also  $F = F' = \infty$  setzen. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma_{aa} &= 1152, \quad \gamma_{ab} = -252, \quad \gamma_{bb} = 354, \\ X_a &= 0,00108 T_a + 0,00073 T_b \\ X_b &= 0,00073 T_a + 0,00335 T_b. \end{aligned}$$

Ist weiter  $k_1 = k_2 = 0,5^m$ , also  $a_1 = a_2 = 5,5^m$ , so erhält man für den Einfluß der wagerechten Lasten  $K_1$  und  $K_2$  die Ausdrücke

$$T_a = - \left( 300 - 36 \frac{\xi_1^2}{l^2} \right) K_1 - \left( 228 + 36 \frac{\xi_2^2}{l^2} \right) K_2$$

$$T_b = 358,5 K_1 + \left( 342 + 3 \frac{\xi_2^2}{l} + 13,5 \frac{\xi_2^2}{l^2} \right) K_2,$$

$$X_a = K_1 \left( -0,047 + 0,037 \frac{\xi_1^2}{l^2} \right) + K_2 \left( 0,015 + 0,002 \frac{\xi_2^2}{l} - 0,027 \frac{\xi_2^2}{l^2} \right)$$

$$X_b = K_1 \left( +0,982 + 0,026 \frac{\xi_1^2}{l^2} \right) + K_2 \left( 0,979 + 0,010 \frac{\xi_2^2}{l} + 0,019 \frac{\xi_2^2}{l^2} \right).$$

Der Ausdruck für  $X_b$  lehrt, daß die wagerechten Lasten  $K$  hauptsächlich von der Stütze  $B$  aufgenommen werden.

Der Einfluß der Temperaturänderungen soll unter der Annahme berechnet werden, daß Säule und Balkenunterkante dieselbe Temperaturänderung  $t' = t_u$  erfahren. Für  $t$  ist der Wert

$$t = t_u - \frac{1}{2} \Delta t$$

einzusetzen. Ist die Höhe des Balkens  $h = 1^m$  und wird, für Flußeisen,

$$\varepsilon E = 250 t/m^2$$

gesetzt, so erhält man

$$T_a = (36000 \Delta t - 2250 t_u) J$$

$$T_b = (6750 \Delta t + 3420 t_u) J$$

$$X_a = (42 \Delta t + 0,2 t_u) J$$

$$X_b = (49 \Delta t + 10,8 t_u) J.$$

Das durch diese Wärmeänderungen hervorgerufene größte Biegemoment ist für den Balken

$$M = X_a l = (504 \Delta t + 6 t_u) J,$$

und für die Säule

$$M' = X_b s = (220 \Delta t + 49 t_u) J.$$

Im Balken, dessen Schwerachse in der halben Höhe des Balkens liegen möge, entsteht die Biegespannung

$$\sigma = \pm \frac{Mh}{2J} = \pm (252 \Delta t + 3 t_u) h,$$

und in der Säule entsteht (mit  $\frac{J}{J'} = 8$ )

$$\sigma' = \pm \frac{M'h'}{2J'} = \pm (880 \Delta t + 196 t_u) h'.$$

Die Aufstellungstemperatur betrage  $10^\circ \text{C}$ . Man habe gemessen in der unteren Gurtung des Balkens  $25^\circ$  und in der von der Sonne bestrahlten oberen Gurtung  $40^\circ$ . Dann ist  $t_u = 15^\circ$ ,  $\Delta t = t_u - t_o = -15^\circ$ , und man erhält für  $h = 1,0^m$  und  $h' = 0,5^m$  die verhältnismäßig hohen Beanspruchungen

$$\sigma = 3735 \text{ t/m}^2 = 374 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma' = 3420 \text{ t/m}^2 = 342 \text{ kg/cm}^2.$$

## § 10.

### Sonderfälle des Balkens auf starren Stützen. Nachtrag zur Behandlung des allgemeinen Falles.

Wir gehen jetzt dazu über, die im § 8 durchgeführten Untersuchungen durch eine Reihe wichtiger Beispiele zu erläutern.

#### 1. Balken auf drei starren Stützen.

**40. Der Querschnitt ist veränderlich.** Als statisch unbestimmte Größe wird der Widerstand  $X_a$  der Mittelstütze eingeführt. Die Momentenfläche für  $X_a = -1$  ist ein Dreieck von der Höhe

$$(1) \quad Y_1 = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}.$$

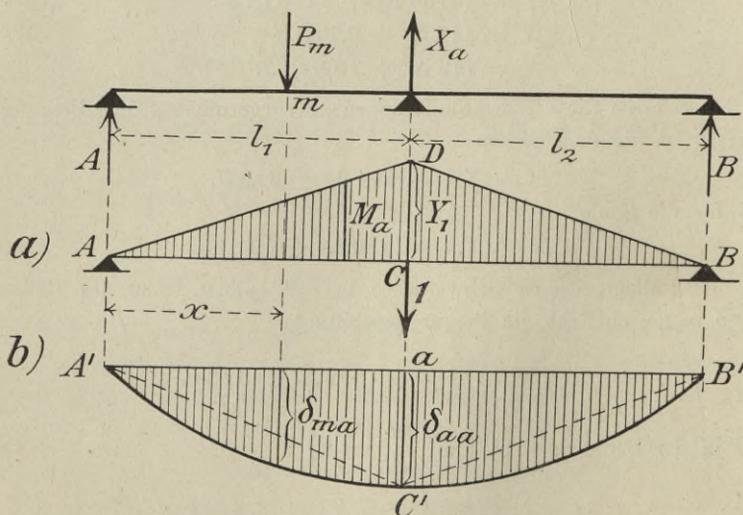


Fig. 121.

Hierzu wird nach § 2 die Biegelinie  $A'C'B'$  gezeichnet und nunmehr

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

gefunden. Die Biegelinie  $A'C'B'$  ist also Einflußlinie für  $X_a = -1$ ; der Multiplikator ist  $\mu = \frac{1}{\delta_{aa}}$ . Im übrigen verweisen wir auf Abteilung I, § 12. Dort ist angegeben worden, wie sich aus der  $X_a$ -Linie die Einflußlinien für die Momente, Querkräfte und die Widerstände der Endstützen herleiten lassen.

**41. Der Querschnitt ist unveränderlich.** Die  $M_a$ -Fläche wird als Belastungsfläche des einfachen Balkens  $AB$  angesehen. Es ergibt sich nach Gleich. (23), Seite 101

$$(2) \quad EJ \delta_{aa} = \int M_a^2 dx = \frac{Y_1^2 (l_1 + l_2)}{3},$$

und an der Stelle  $x$  nach Seite 105

$$EJ \delta_{ma} = \delta_{aa} \frac{x}{l_1} + \omega_D \frac{Y_1 l_1^2}{6},$$

denn die Fläche zwischen der Kurve  $A'C'$  und der Geraden  $A'C'$  ist die Momentenfläche eines mit dem Dreieck  $ACD$  belasteten einfachen Balkens  $AC$ . Man findet für eine über der Öffnung  $l_1$  stehende Last  $P_m = 1$

$$(3) \quad X_a = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{x}{l_1} + \omega_D \frac{l_1}{2l_2}.$$

Mit dieser einfachen Formel kommt man schneller zum Ziele als mittels des zeichnerischen Verfahrens. Die Annahme eines überall gleichen Querschnitts ist in der Regel zulässig.

Der Einfluß einer ungleichmäßigen Erwärmung des Balkens auf  $X_a$  ist

$$X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}, \quad \text{wo} \quad \delta_{at} = \frac{\varepsilon \Delta t}{h} \int M_a dx = \frac{\varepsilon \Delta t}{h} Y_1 \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Man erhält

$$(4) \quad X_{at} = \frac{3}{2} \varepsilon EJ \frac{\Delta t}{h} \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}. \quad \Delta t = t_u - t_o.$$

Senkt sich die Mittelstütze um  $\delta_a$  gegen die Verbindungslinie der Endstützen, so ändert sich  $X_a$  um

$$(5) \quad \Delta X_a = - \frac{\delta_a}{\delta_{aa}} = - 3 EJ \delta_a \frac{l_1 + l_2}{l_1^2 l_2^2}.$$

## 2. Balken auf vier starren Stützen, Fig. 122.

**42.** Für den Fall, daß die Veränderlichkeit des Querschnitts berücksichtigt werden soll, verweisen wir auf Abteilung I, § 13. Der einzige Unterschied ist der, daß die Biegelinien jetzt nach dem für Müller-Breslau, Graphische Statik. II. 2.

den vollwandigen Balken angegebenen Verfahren gezeichnet werden. Auch das in Nr. 44 der vorliegenden Abteilung beschriebene allgemeine Verfahren ist beim Balken auf vier Stützen vorteilhaft. Meistens ist aber die Annahme eines überall gleichen Querschnitts erlaubt. Dann dürfte der folgende Weg, den wir gleich an einem Zahlenbeispiele erläutern wollen, der kürzeste sein.

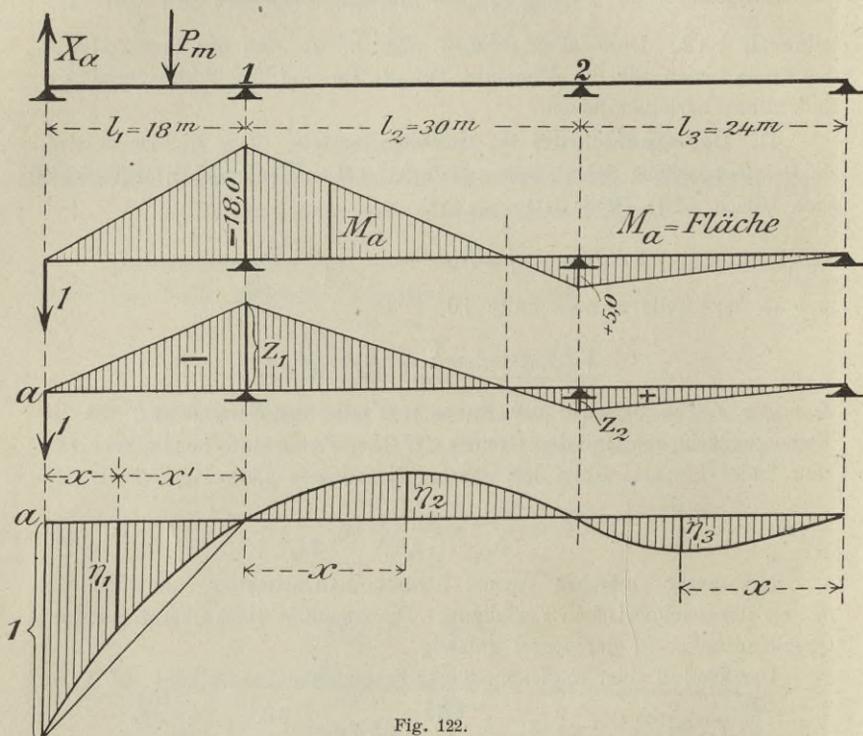


Fig. 122.

Wir führen nur eine Größe  $X$  ein und wählen hierzu den Widerstand  $X_\alpha$  der linken Endstütze. Das Hauptsystem ist ein Balken auf drei Stützen. Zwischen den Stützmomenten  $M_{1 \cdot \alpha}$  und  $M_{2 \cdot \alpha}$  besteht die Gleichung

$$M_{1 \cdot \alpha} l_2 + 2 M_{2 \cdot \alpha} (l_2 + l_3) = 0;$$

und es ergibt sich daher

$$M_{1 \cdot \alpha} = -l_1, \quad M_{2 \cdot \alpha} = + \frac{l_1 l_2}{2(l_2 + l_3)},$$

also für  $l_1 = 18\text{ m}$ ,  $l_2 = 30\text{ m}$ ,  $l_3 = 24\text{ m}$

$$M_{1 \cdot \alpha} = -18, \quad M_{2 \cdot \alpha} = +5,0.$$

Die Gleichung der  $X_\alpha$ -Linie ist für  $P_m = 1$

$$X_\alpha = 1 \frac{\delta_{m\alpha}}{\delta_{\alpha\alpha}},$$

wo nach Gleich. (23), Seite 101

$$EJ\delta_{aa} = \int M_a^2 dx = \frac{18}{3} 18^2 + \frac{30}{3} (18^2 - 5 \cdot 18 + 5^2) + \frac{24}{3} 5^2 = 4734.$$

Dividiert man die Ordinaten der  $M_a$ -Linie durch den Wert  $EJ\delta_{aa}$ , so erhält man die Belastungslinie, deren zugehörige Seillinie die gesuchte  $X_a$ -Linie ist. Diese Belastungslinie ist durch die Ordinaten gegeben

$$z_1 = -\frac{18}{4734} = -0,00380 \quad \text{und} \quad z_2 = +\frac{5}{4734} = 0,00106.$$

Die zugehörige Seillinie (Polweite 1) schneidet die Stützensenkrechten in drei, in einer Geraden liegenden Punkten. An der Stelle  $a$  ist ihr Abstand von dieser Geraden gleich 1. Denn eine in  $a$  angreifende Last  $P=1$  erzeugt  $X_a=1$ , und Lasten, die in den anderen Stützpunkten angreifen, haben keinen Einfluß auf  $X_a$ . Durch Rechnung findet man für die einzelnen Öffnungen die folgenden, mit  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  bezeichneten Ordinaten der  $X_a$ -Linie.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 \frac{x'}{l} - \omega_D \cdot 0,00380 \frac{l_1^2}{6} &&= \frac{x'}{l} - 0,205 \omega_D \\ -\eta_2 &= \omega_R (0,00380 + 0,00106) \frac{l_2^2}{2} - \omega_D 0,00106 \frac{l_2^2}{6} &&= 2,19 \omega_R - 0,159 \omega_D \\ \eta_3 &= \omega_D 0,00106 \frac{l_3^2}{6} &&= 0,102 \omega_D. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise wird die Einflußlinie für den Widerstand der rechten Endstütze gefunden. Hinsichtlich der Darstellung der übrigen Einflußlinien wird auf Abteilung I, § 13, Fig. 352, verwiesen.

Der Einfluß einer ungleichmäßigen Erwärmung des Balkens ist

$$X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} = \frac{1}{\delta_{aa}} \frac{\varepsilon \Delta t}{h} \int M_a dx, \quad \text{wo}$$

$$\int M_a dx = -18 \frac{18+30}{2} + 5,0 \frac{30+24}{2} = 297.$$

Man erhält

$$X_{at} = -0,063 \varepsilon EJ \frac{\Delta t}{h}.$$

### 3. Balken auf mehreren starren Stützen\*).

**43. Einflußlinien für die Stützenmomente bei unveränderlichem Querschnitt.** Wird die Annahme eines unveränderlichen Balkenquerschnitts gemacht, so führt selbst bei einer größeren Anzahl von

\*) Den allgemeinen Fall haben wir noch einmal mit aufgeführt, um auf einige Vereinfachungen der früher angegebenen Lösungen nachträglich hinzuweisen.

Stützpunkten die Berechnung der Einflußlinien für die Stützmomente schneller zum Ziele, als das zeichnerische Verfahren. Wir erinnern zunächst daran, daß links vom belasteten Felde zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützmomenten  $M_{k-1}$ ,  $M_k$ ,  $M_{k+1}$  die Beziehung besteht

$$(6) \quad M_{k-1}l_k + 2M_k(l_k + l_{k+1}) + M_{k+1}l_{k+1} = 0,$$

woraus dann folgt

$$\frac{M_{k-1}}{M_k} l_k + 2(l_k + l_{k+1}) + \frac{M_{k+1}}{M_k} l_{k+1} = 0,$$

und mit Beachtung von

$$\frac{M_k}{M_{k-1}} = -\frac{b_k}{a_k} = -\alpha_k \quad (\text{Fig. 123}),$$

$$-\frac{l_k}{\alpha_k} + 2(l_k + l_{k+1}) - \alpha_{k+1}l_{k+1} = 0.$$

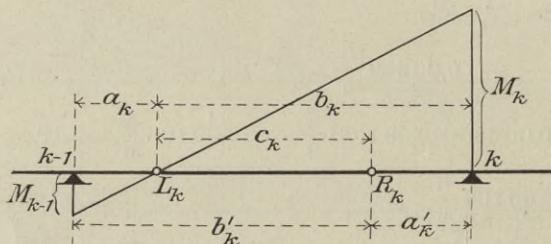


Fig. 123.

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten  $\alpha$  besteht also die Gleichung

$$(7) \quad \alpha_{k+1} = \frac{2(l_k + l_{k+1}) - \frac{l_k}{\alpha_k}}{l_{k+1}},$$

mit deren Hilfe man, mit

$$(8) \quad \alpha_2 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2}$$

beginnend, schrittweise die Werte  $\alpha$  und hierauf die Strecken

$$(9) \quad a_k = \frac{l_k}{1 + \alpha_k}$$

berechnen kann. In derselben Weise werden die Strecken  $\alpha'$  ermittelt.

Liegt nun die Last  $P = 1$  über der  $r^{\text{ten}}$  Öffnung, so ist (nach Abteilung I, § 14)

$$(10) \quad \begin{cases} M_r = -f_r \omega_D + v_r \omega_D' \\ M_{r-1} = -k_r \omega_D' + v_r \omega_D, \end{cases}$$

wo, Fig. 124,

$$(11) \quad f_r = a_r' \frac{b_r}{c_r}, \quad k_r = a_r \frac{b_r'}{c_r}, \quad v_r = \frac{a_r a_r'}{c_r}.$$

Die Formeln (10) lassen sich noch etwas vereinfachen.

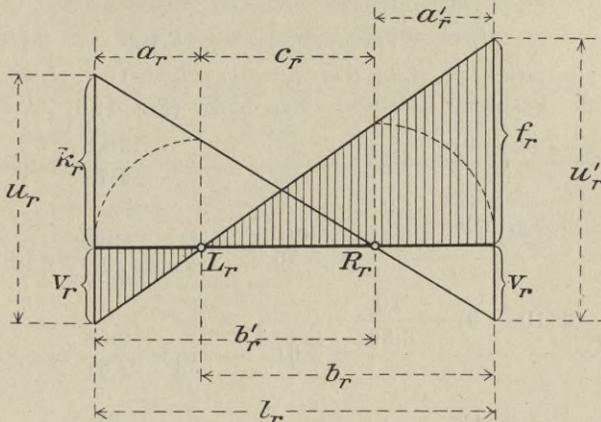


Fig. 124.

Zwischen den Zahlen

$$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \quad \text{und} \quad \omega_D' = \frac{x'}{l} - \frac{x'^3}{l^3}, \quad (x' = l - x)$$

besteht die Beziehung

$$(12) \quad \omega_D' = 3\omega_R - \omega_D,$$

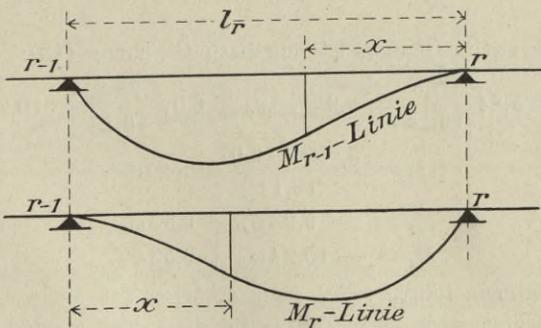


Fig. 125.

und man darf deshalb auch schreiben

$$(13) \quad \begin{cases} M_r = -u_r \omega_D + 3v_r \omega_R \\ M_{r-1} = -u_r \omega_D + 3v_r \omega_R, \end{cases}$$

wo (Fig. 124)

$$(14) \quad u_r' = a_r' \frac{l_r}{c_r} \quad \text{und} \quad u_r = a_r \frac{l_r}{c_r}.$$

Bei der  $M_{r-1}$ -Linie muß hierbei die Abszisse  $x$  von der Stütze  $r$  aus gerechnet werden, Fig. 125. Die Formeln (13) sind bequemer als die Formeln (10), weil die  $\omega_R$  für die linke und rechte Hälfte einer Öffnung gleich groß sind.\*)

Für die Endöffnungen ist  $v = 0$ . Man erhält

$$(15) \quad M_1 = -f_1 \omega_D, \quad M_{n-1} = -k_n \omega_D.$$

*Zahlenbeispiel.* Sei  $l_1 = 8\lambda$ ,  $l_2 = 9\lambda$ ,  $l_3 = 10\lambda$ ,  $l_4 = 9\lambda$ , wo  $\lambda = 3,2^m$  die Feldweite bedeutet. Man findet (Fig. 126)

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2(8+9)}{9} = 3,78 & a_2 &= \frac{28,8}{4,78} = 6,02^m \\ x_3 &= \frac{2(9+10) - \frac{9}{3,78}}{10} = 3,56 & a_3 &= \frac{32}{4,56} = 7,02^m \\ x_4 &= \frac{2(10+9) - \frac{10}{3,56}}{9} = 3,91 & a_4 &= \frac{28,8}{4,91} = 5,86^m \\ x_3' &= \frac{2(9+10)}{10} = 3,80 & a_3' &= \frac{32}{4,80} = 6,67 \\ x_2' &= \frac{2(10+9) - \frac{10}{3,80}}{9} = 3,93 & a_2' &= \frac{28,8}{4,93} = 5,84 \\ x_1' &= \frac{2(9+8) - \frac{9}{3,93}}{8} = 3,96 & a_1' &= \frac{25,6}{4,96} = 5,16. \end{aligned}$$

Für die zweite Öffnung ist nun nach Gleichung (13):

$$\begin{aligned} u_2' &= 5,84 \frac{28,8}{16,14} = 9,93^m, & u_2 &= 6,02 \frac{28,8}{16,14} = 10,24^m, \\ 3v_2 &= \frac{3 \cdot 5,84 \cdot 6,02}{16,14} = 2,08^m, & & 6,53 \\ M_2 &= -9,93 \omega_D + 6,53 \omega_R \\ M_1 &= -10,24 \omega_D + 6,53 \omega_R. \end{aligned}$$

Diese Formeln führen selbst dann schneller zum Ziele als das zeichnerische Verfahren, wenn keine Tabelle für die Zahlen  $\omega_D$  und  $\omega_R$  zur Verfügung steht, weil sich die Werte  $\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$  und  $\omega_R = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}$  für die stets ausreichende Teilung  $\frac{x}{l} = 0,1, 0,2, 0,3 \dots$  schnell

\*) In der vierten Auflage (1907) der Abteilung 1 dieses Bandes sind die Strecken  $u_r, u_r'$  bereits benutzt worden. In den Formeln (46) (47) auf Seite 402 steht dort versehentlich  $v_r$  statt  $3v_r$ .

hinschreiben lassen. Für diejenigen Leser, welche zeichnerische Verfahren bevorzugen, bemerken wir noch, daß das erste Glied des Ausdruckes

$$M_r = -u'_r \omega_D + 3V_r \omega_{B_3} \frac{3}{4} v$$

von der der Pfeilhöhe  $\frac{3}{4} v$

durch eine kubische Parabel, das zweite durch eine gewöhnliche Parabel dargestellt werden kann. Hieraus folgt die in Fig. 127 angegebene Konstruktion der  $M_r$ -Fläche. Die drei Linien  $I$  sind parallel.

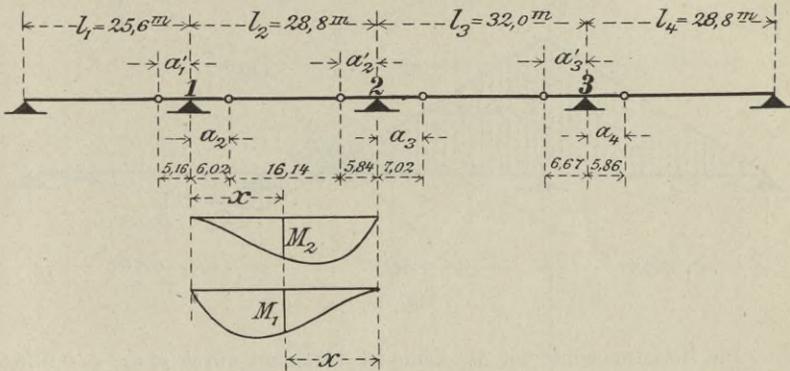


Fig. 126.

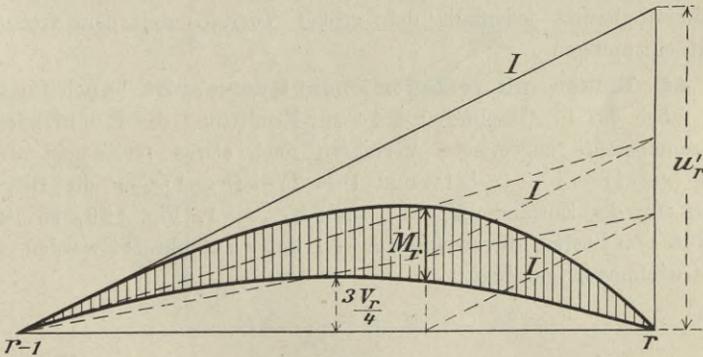


Fig. 127.

Schließlich möge noch auf ein einfaches Gesetz hingewiesen werden, welches aus der in Nr. 25 durchgeführten Untersuchung folgt. Findet man nämlich durch Auflösung der Clapeyronschen Gleichungen für  $M_r$  den Wert

$$M_r = \beta_{r,1} N_1 + \beta_{r,2} N_2 + \beta_{r,3} N_3 + \dots,$$

so besitzt die Belastungslinie der  $M_r$ -Linie bei den Stützen 1, 2, 3 ... die Ordinaten

$$z_1 = 6\beta_{r,1}, \quad z_2 = 6\beta_{r,2}, \quad z_3 = 6\beta_{r,3}, \quad \dots$$

Die Nullpunkte der Belastungslinie sind Festpunkte.

Sind also z. B. die Spannweiten eines Trägers auf vier Stützen  $40^m$ ,  $50^m$ ,  $40^m$ , so lauten die Clapeyronschen Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 \cdot 90 M_1 + 50 M_2 &= N_1 \\ 50 M_1 + 2 \cdot 90 M_2 &= N_2. \end{aligned}$$

Man findet

$$M_1 = \frac{2 \cdot 90 N_1 - 50 N_2}{(2 \cdot 90)^2 - 50^2} = 0,0361 \frac{N_1}{6} - 0,0100 \frac{N_2}{6}.$$

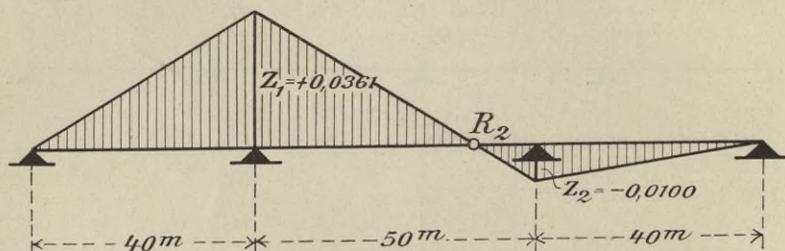


Fig. 128.

Die Belastungslinie der  $M_1$ -Linie ist bestimmt durch  $z_1 = +0,0361$  und  $z_2 = -0,0100$ . Für die  $M_2$ -Linie gilt das Spiegelbild. Dieses Verfahren besitzt jedenfalls den großen Vorzug, sich dem Gedächtnis leicht einzuprägen.

**44. Balken mit veränderlichem Querschnitt.** Auch für diesen Fall möge das in Abteilung I § 14 zur Ermittlung der Einflußlinien der Stützenmomente angegebene Verfahren noch etwas vereinfacht werden. Sind  $(r-1) - r' - (r+1)$  und  $(r-2) - (r-1)' - r$  die Biegelinien für die Zustände  $M_r = 1$  und  $M_{r-1} = 1$ , Fig. 129, so ist der Einfluß von Lasten, die zwischen  $r-1$  und  $r$  aufgebracht werden, durch die Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned} x_r M_{r-1} + M_r &= -\frac{l_r}{d_r} \sum P_m \delta_{mr} \\ M_{r-1} + x_r' M_r &= -\frac{l_r}{d_r} \sum P_m \delta_{m(r-1)}. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus für  $P = 1$  mittels der in Abteilung I, § 14 angegebenen Entwicklung

$$(16) \quad \begin{cases} M_r = -\frac{f_r}{d_r} \delta_{mr} - \frac{v_r}{d_r} \delta_{m(r-1)} \\ M_{r-1} = -\frac{k_r}{d_r} \delta_{m(r-1)} - \frac{v_r}{d_r} \delta_{mr}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich die Einflußlinien für  $M_r$  und  $M_{r-1}$  schnell berechnen. Die Festpunkte können nach Abteilung I,

§ 14, mittels der Biegelinien für . . .  $M_{r-1} = 1, M_r = 1, \dots$  ermittelt werden. Ist  $L_r$  gegeben, so bestimmt die durch den Punkt  $r'$  gezogene Gerade  $L_r L_{r+1}$  den Punkt  $L_{r+1}$ . Der Punkt  $L_1$  der ersten Öffnung fällt mit dem Stützpunkte 0 zusammen. Verfasser gibt aber auch bei veränderlichem Balkenquerschnitte der rechnerischen Bestimmung der

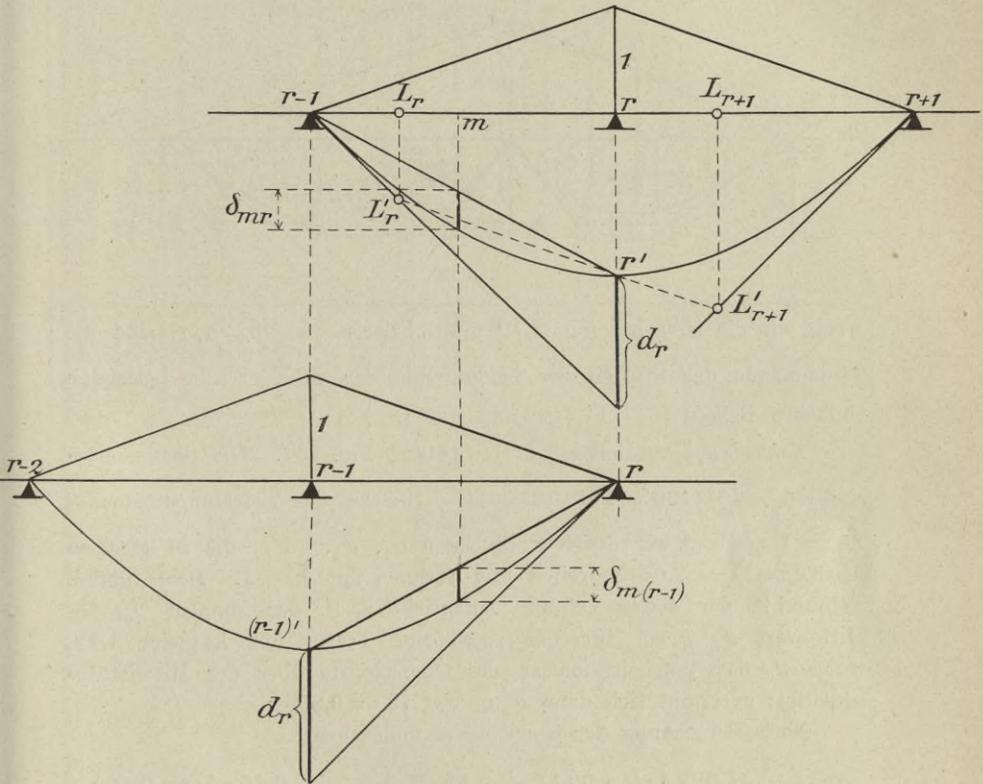


Fig. 129.

Festpunkte den Vorzug. An die Stelle der Gleichung (6), Seite 116, tritt die Gleichung

$$(17) \quad \alpha_k M_{k-1} + \beta_k M_k + \alpha_{k+1} M_{k+1} = 0,$$

und (7) ist zu ersetzen durch

$$(18) \quad \chi_{k+1} = \frac{\beta_k - \frac{\alpha_k}{\chi_k}}{\alpha_{k+1}},$$

ferner (8) durch

$$(19) \quad \chi_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Die Biegelinie für  $M_r = 1$  (Fig. 130) liefert

$$\alpha_r = \tau_{(r-1)r}, \quad \beta_r = \tau_{rr} = \tau_{rr}' + \tau_{rr}'', \quad \alpha_{r+1} = \tau_{(r+1)r}.$$

Bezeichnen wir, der Kürze wegen, mit  $\delta_{mr}$  die  $EJ_c$ -fachen Durchbiegungen für den Belastungsfall  $M_r = 1$ , wo  $J_c$  ein beliebiges Trägheitsmoment ist, so erhalten wir die Belastungsfläche der  $\delta_{mr}$ -Linie,

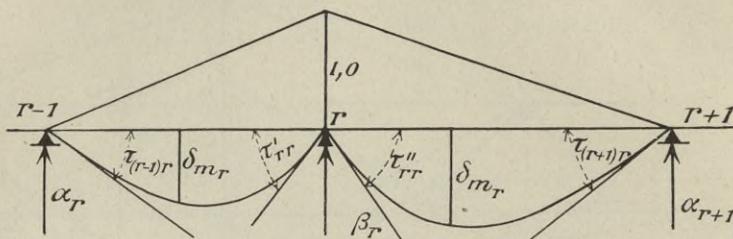


Fig. 130.

wenn wir die Momente mit  $J_c/J$  multiplizieren.  $\alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}$  sind die Widerstände der Stützen der beiden mit der  $M \frac{J_c}{J}$ -Fläche belasteten einfachen Balken  $(r-1) - r$  und  $r - (r+1)$ .

**Zahlenbeispiel.** Balken auf 5 Stützen, Fig. 131. Die Spannweiten sind  $16^m, 20^m, 20^m, 16^m$ . Die  $M \frac{J_c}{J}$ -Fläche des Belastungszustandes  $M_1 = 1$  ersetzen wir durch Einzellasten  $w_1, w_2, \dots$ , die in gleichen Abständen  $\lambda = 2,0^m$  angreifen und rechnen mit  $\lambda = 1$ . Dem fünften Teilpunkte der ersten Öffnung entspricht z. B. das Moment  $\frac{5}{8}$ ; der Mittelwert  $J_c/J$  sei für das zugehörige Trägerstück  $\lambda$  gleich  $1,42$ , wobei  $J_c$  das Trägheitsmoment des Querschnitts über der Mittelstütze bedeutet; es ergibt sich dann  $w_5 = \frac{5}{8} \cdot 1,42 = 0,89$ .

Nach Berechnung der Gewichte  $w$  findet man

$$\alpha_1 = \frac{1}{8} (1,09 \cdot 1 + 1,90 \cdot 2 + 0,89 \cdot 3 + \dots + 0,46 \cdot 7) = 2,420$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{10} (1,04 \cdot 1 + 1,06 \cdot 2 + 1,01 \cdot 3 + \dots + 0,12 \cdot 9) = 2,321.$$

Für die erste Öffnung ist

$$\sum_1^7 w = 5,54 \text{ und } 5,54 - 2,42 = 3,12,$$

für die zweite Öffnung

$$\sum_1^9 w = 6,15 \text{ und } 6,15 - 2,321 = 3,829.$$

Demnach

$$\beta_1 = 3,120 + 3,829 + 1,000 = 7,95$$

$$\beta_2 = 2 \cdot 3,829 + 1,000 = 8,66.$$

Die Berechnung der zu den  $w$ -Gewichten gehörigen Momentenlinien geschieht nun in bekannter Weise mit Hilfe der Querkräfte (Bd. I, § 50). Wir schreiben den vollständigen Ansatz für die erste Öffnung hin.

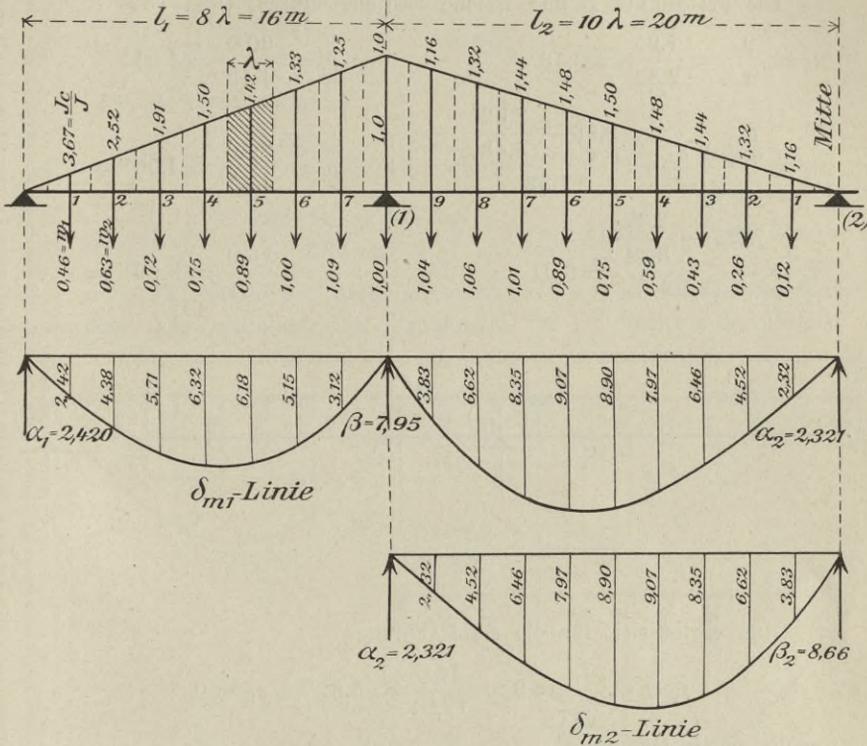


Fig. 131.

$\alpha_1 = 2,42$	$\delta_{m1} = 2,42$
$-0,46$	$+1,96$
$1,96$	$\delta_{m2} = 4,38$
$-0,63$	$+1,33$
$1,33$	$\delta_{m3} = 5,71$
$-0,72$	$+0,61$
$0,61$	$\delta_{m4} = 6,32$
$-0,75$	$-0,14$
$-0,14$	$\delta_{m5} = 6,18$
$-0,89$	$-1,03$
$-1,03$	$\delta_{m6} = 5,15$
$-1,00$	$-2,03$
$-2,03$	$\delta_{m7} = 3,12$
$-1,09$	$-3,12$
$-3,12$	$0$

Das Trägerstück (1)—(2) der zweiten Öffnung ist symmetrisch in Bezug auf seine Mitte. Es ist dann für diese Öffnung die  $\delta_{m_2}$ -Linie das Spiegelbild der  $\delta_{m_1}$ -Linie.

Die Festpunkte  $L$  und  $R$  sind bestimmt durch: (Fig. 132)

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\beta_1}{\alpha_2} = \frac{7,95}{2,32} = 3,43 & a_2 &= \frac{20,0}{4,43} = 4,51^m \\ x_3 &= \frac{\beta_2 - \frac{\alpha_2}{x_2}}{x_3} = \frac{8,66 - \frac{2,32}{3,43}}{2,32} = 3,44 & a_3 &= \frac{20,0}{4,44} = 4,50^m = a_2' \\ x_4 &= \frac{7,95 - \frac{2,32}{3,44}}{2,42} = 3,01 & a_4 &= \frac{16,0}{4,01} = 3,99^m = a_1'. \end{aligned}$$

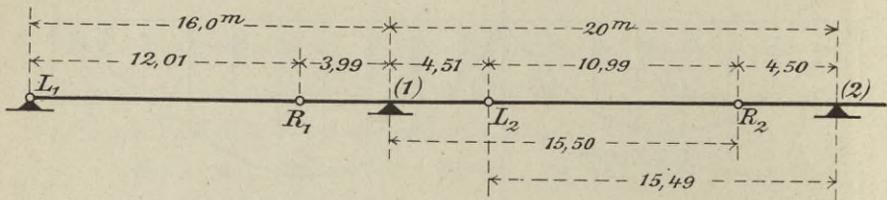


Fig. 132.

Nun ergibt sich für die erste Öffnung:

$$f_1 = a_1' \frac{l_1}{c_1} = 3,99 \frac{16,0}{12,01} = 5,32^m, \quad v_1 = 0,$$

für die zweite Öffnung:

$$f_2 = 4,50 \frac{15,49}{10,99} = 6,34^m, \quad k_2 = 4,51 \frac{15,50}{10,99} = 6,36^m,$$

$$v_2 = \frac{4,50 \cdot 4,51}{10,99} = 1,85^m.$$

Die Gleichungen (16) gehen mit  $d_r = \alpha_r l_r$  über in\*)

$$(20) \quad \begin{cases} M_r = \frac{-f_r \delta_{mr} + v_r \delta_{m(r-1)}}{\alpha_r l_r} \\ M_{r-1} = \frac{-k_r \delta_{m(r-1)} + v_r \delta_{mr}}{\alpha_r l_r} \end{cases}$$

\*) In der vierten Auflage (1907) der Abteilung 1 dieses Bandes sind die nachstehenden Formeln bereits zur Untersuchung eines Fachwerkbalkens auf mehreren Stützen benutzt worden (Seite 391—395).

Wegen  $l_1 = 8\lambda = 8$  und  $l_2 = 10\lambda = 10$  (weil wir ja mit  $\lambda = 1$  gerechnet haben) ergibt sich

für die erste Öffnung:

$$M_1 = \frac{-5,32\delta_{m1}}{2,42 \cdot 8} = -0,275\delta_{m1},$$

für die zweite Öffnung:

$$M_1 = \frac{-6,36\delta_{m1} + 1,85\delta_{m2}}{2,32 \cdot 10} = -0,274\delta_{m1} + 0,080\delta_{m2}$$

$$M_2 = \frac{-6,34\delta_{m2} + 1,85\delta_{m1}}{2,32 \cdot 10} = -0,273\delta_{m2} + 0,080\delta_{m1}.$$

Die Ergebnisse der Rechnung sind in Fig. 133 zusammengestellt worden. Die Darstellung der Einflußlinien für die Momente der übrigen

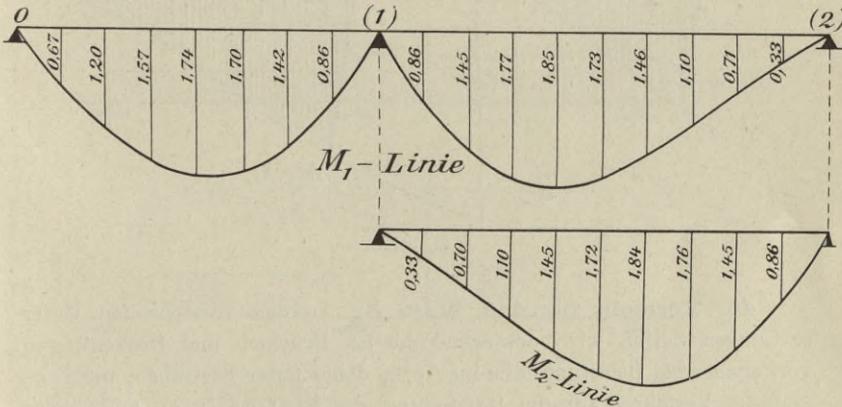


Fig. 133.

Balkenquerschnitte geschieht jetzt nach dem in Abteilung I, § 14 angegebenen Verfahren. Für die Querkräfte gilt innerhalb der ersten Öffnung die Formel

$$Q = Q_0 - \frac{M_1}{l_1}$$

und innerhalb der zweiten Öffnung die Formel

$$Q = Q_0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2}.$$

Fig. 134 zeigt die  $Q$ -Fläche für das vierte Feld der ersten und das dritte Feld der zweiten Öffnung, und zwar ist nur der zur frag-

lichen Öffnung gehörige Teil der  $Q$ -Fläche dargestellt worden. Hinsichtlich der Untersuchung des Einflusses von Lasten, die außerhalb der fraglichen Öffnung liegen, verweisen wir auf Seite 44.

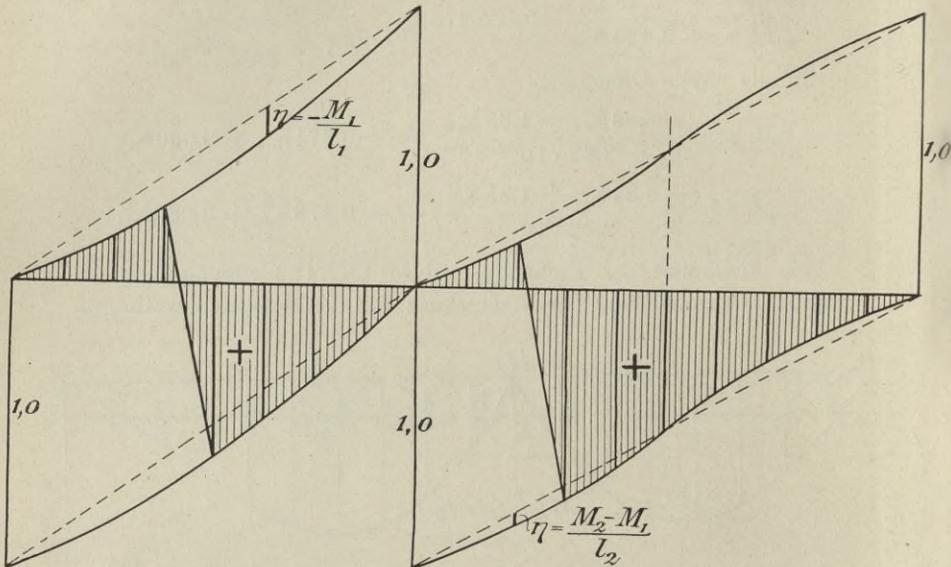


Fig. 134.

**45. Formeln für den Wert  $N$ .** In den vorstehenden Untersuchungen hatten wir vorwiegend die bei Brücken- und Deckenträgern vorkommenden Belastungsfälle im Auge, daher unser Bestreben, möglichst einfache Verfahren für die Darstellung der Einflußlinien aufzufinden. Trägt nun ein Balken von unveränderlichem Querschnitte eine unregelmäßige ständige Belastung (z. B. Säulen, Pfeiler, Wände, die durch Öffnungen für Türen und Fenster unterbrochen werden, u. s. w.), so empfiehlt es sich, die Werte  $N$  auszurechnen und die Clapeyronschen Gleichungen

$$M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1} = N_r$$

aufzulösen oder aus den Werten  $N$  die Momente  $T$  zu berechnen und hierauf die Stützmomente mittels des in Nr. 11 angegebenen Verfahrens zeichnerisch zu bestimmen. Wir stellen daher die Formeln für die am häufigsten vorkommenden Fälle übersichtlich zusammen. Die drei aufeinanderfolgenden Stützpunkte haben wir der Kürze wegen mit 1, 2, 3 bezeichnet. Es entspricht den Einzellasten in Fig. 135:

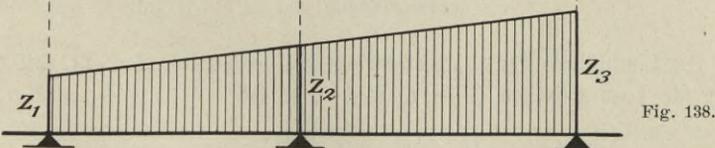
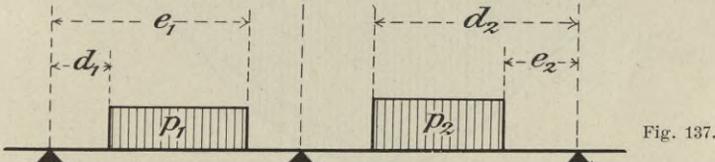
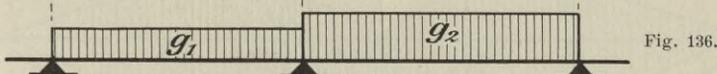
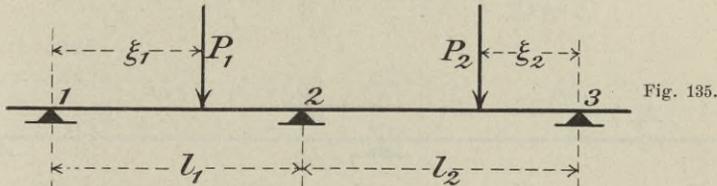
$$(21) \quad N_2 = \frac{P_1 \xi_1 (l_1^2 - \xi_1^2)}{l_1} + \frac{P_2 \xi_2 (l_2^2 - \xi_2^2)}{l_2},$$

der vollen gleichförmigen Belastung in Fig. 136:

$$(22) \quad N_2 = \frac{g_1 l_1^3}{4} + \frac{g_2 l_2^3}{4},$$

der teilweisen gleichförmigen Belastung in Fig. 137:

$$(23) \quad N_2 = \frac{p_1 (e_1^2 - d_1^2) (2l_1^2 - e_1 - d_1)}{4l_1} + \frac{p_2 (e_2^2 - d_2^2) (2l_2^2 - e_2 - d_2)}{4l_2}$$



und der Trapezbelastung in Fig. 138:

$$(24) \quad N_2 = l_1^3 \left[ \frac{z_1}{4} + \frac{2}{15} (z_2 - z_1) \right] + l_2^3 \left[ \frac{z_3}{4} - \frac{2}{15} (z_3 - z_2) \right].$$

Die Formeln (21) und (22) erhält man aus Gleichung (8), Seite 36, indem man für die statischen Momente  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{R}$  der einfachen Momentenflächen deren Werte einsetzt; und die Formeln (23) und (24) gewinnt man durch Anwendung von (21) auf das Lastelement  $p dx$  bzw.  $z dx$ .

**46. Einflußlinien für die Stützenwiderstände.** Der Widerstand  $C_r$  der Stütze  $r$  ist gleich dem Unterschiede der Querkräfte für die beiden Querschnitte unmittelbar rechts und unmittelbar links von der Stütze  $r$ . Hiernach ist die  $C_r$ -Linie durch zwei  $Q$ -Linien bestimmt. Werden die Querkräfte nicht gebraucht, was bei vollwandigen Balken öfter vorkommt, so empfiehlt sich die folgende Darstellung der  $C_r$ -Linie; sie geht von der auf Seite 44 abgeleiteten Formel aus:

$$C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}.$$

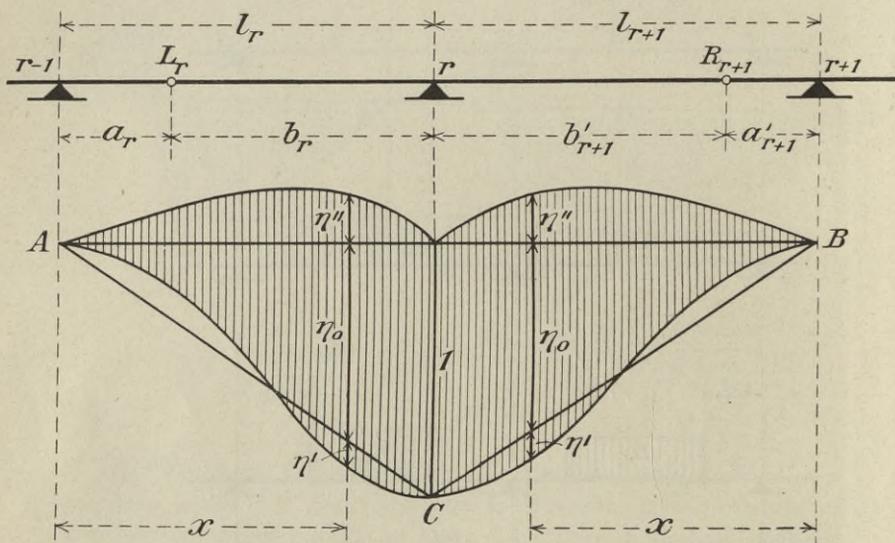


Fig. 139.

Die Einflußlinie für  $C_{or}$  besteht aus den beiden Geraden  $AC$  und  $CB$ . Liegt die Last zwischen  $(r-1)$  und  $r$ , so ist

$$M_{r+1} = -M_r \frac{a'_{r+1}}{b'_{r+1}},$$

und man findet dann, Fig. 139,

$$C_r = \eta_0 + \eta' + \eta'',$$

wo

$$\eta' = \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r}, \quad \eta'' = -\frac{M_r}{b'_{r+1}}.$$

Für eine zwischen  $r$  und  $r+1$  liegende Last ist

$$\eta' = \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}, \quad \eta'' = -\frac{M_r}{b_r}.$$

Für den Fall eines unveränderlichen Querschnitts wollen wir noch  $C_r$  als Funktion der Zahlen  $\omega_D$  und  $\omega_R$  darstellen und setzen für die Öffnung  $l_r$ , indem wir  $x$  von  $(r-1)$  aus zählen,

$$M_r = -f_r \omega_D + v_r (3\omega_R - \omega_D)$$

$$M_{r-1} = -k_r (3\omega_R - \omega_D) + v_r \omega_R.$$

Die Gleichung

$$C_r = \eta_0 + \frac{M_{r-1}}{l_r} - M_r \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{b'_{r+1}} \right)$$

liefert dann

$$(25) \quad C_r = \frac{x}{l_r} + \left( \frac{a_r + a'_r}{c_r} + \frac{\overset{u}{d}'_r}{b'_{r+1}} \right) \omega_D - 3 \left( \frac{a_r}{c_r} + \frac{v_r}{b'_{r+1}} \right) \omega_R.$$

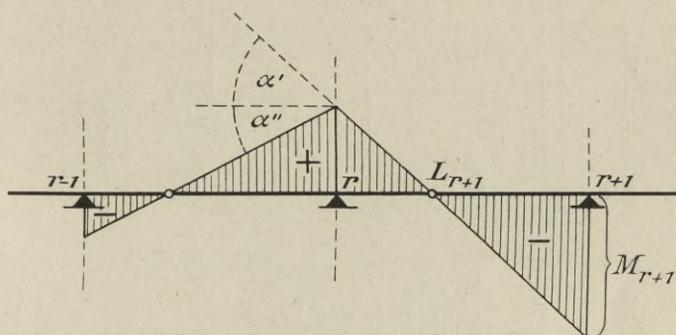


Fig. 140.

Ganz ebenso ergibt sich für eine über der Öffnung  $l_{r+1}$  ruhende Last, wenn  $x$  von  $(r+1)$  aus gezählt wird,

$$(26) \quad C_r = \frac{x}{l_{r+1}} + \left( \frac{a_{r+1} + a'_{r+1}}{c_{r+1}} + \frac{\overset{u}{d}_{r+1}}{b_r} \right) \omega_D - 3 \left( \frac{a'_{r+1}}{c_{r+1}} + \frac{v_{r+1}}{b_r} \right) \omega_R.$$

Wird die Öffnung  $l_{r+2}$  belastet, so ermitteln wir mit Hilfe des zu dieser Öffnung gehörenden Zweiges der  $M_{r+1}$ -Linie das Moment  $M_{r+1}$ , bestimmen sodann mittels der Festpunkte  $L_{r+1}$  und  $L_r$  die zugehörigen Momente  $M_r$  und  $M_{r-1}$  und erhalten mit den Bezeichnungen der Fig. 140

$$(27) \quad C_r = -(\operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha'').$$

§ 11.

**Vollwandige Träger auf starr mit ihnen verbundenen Säulen.**

Wir beginnen mit Sonderfällen, die wir als Beispiele zu den in Nr. 34—37 vorgetragenen Untersuchungen behandeln.

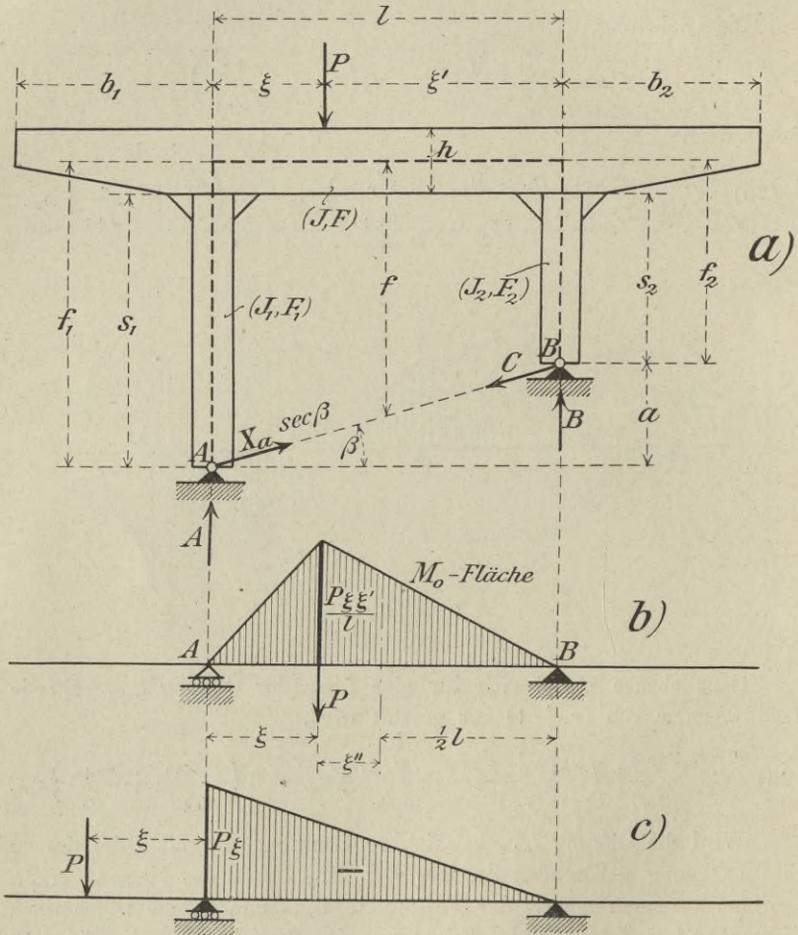


Fig. 141.

**47. Kragträger auf zwei Säulen mit Fußgelenken. Fig. 141.**

Es seien

$F$  und  $J$  der Inhalt und das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts,  
 $F_1, J_1$  die entsprechenden Werte für die linke Säule,  
 $F_2, J_2$  " " " " rechte " .

Alle übrigen Bezeichnungen sind den Figuren zu entnehmen. Innerhalb der Strecke  $l$  sei der Balkenquerschnitt unveränderlich. Auch die Säulen seien zunächst prismatisch angenommen.

Die Stützenwiderstände seien nach lotrechter Richtung und nach der Richtung der Geraden  $AB$  zerlegt. Die lotrechten Seitenkräfte seien  $A$  und  $B$ , die schrägen Stützkkräfte  $C$  und  $X_a \sec \beta$ .

Solange nur lotrechte Lasten  $P$  wirken, ist

$$C = X_a \sec \beta.$$

Für die Ermittlung des Einflusses einer lotrechten Last  $P$  auf die Unbekannte  $X_a$  geben wir zwei Lösungen an.

*Erste Lösung.* Anwendung der Gleichungen (12) auf Seite 98. Es ist

$$X_a = \frac{\delta_{oa}}{\delta_{aa}}.$$

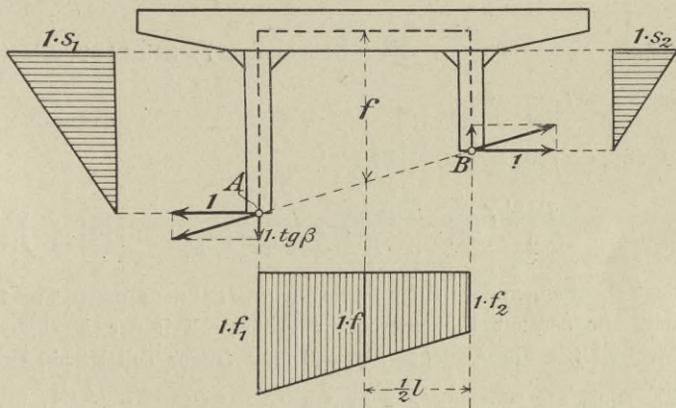


Fig. 142.

Den Belastungszustand  $X_a = -1$  zeigt Fig. 142. In  $A$  und  $B$  greifen die in die Gerade  $AB$  fallenden beiden Kräfte  $1 \sec \beta$  an; sie mögen in die Seitenkräfte  $1$  und  $1 \operatorname{tg} \beta$  zerlegt werden. Die  $M_a$ -Fläche für das Balkenstück  $l$  ist ein Trapez, dessen Höhen an den Enden gleich  $1 \cdot f_1$  und  $1 \cdot f_2$  sind. Die  $M_a$ -Flächen für die Säulen sind Dreiecke von den Breiten  $1 \cdot s_1$  und  $1 \cdot s_2$ . Weiter ist

für das Balkenstück $l$	$N_a = +1,$
„ die Säule $s_1$	$N_a = + \operatorname{tg} \beta,$
„ „ „ $s_2$	$N_a = - \operatorname{tg} \beta.$

Der Einfluß der Querkräfte soll hier und in allen Beispielen dieses § vernachlässigt werden.

Für

$$\delta_{aa} = \int M_a^2 \frac{dx}{EJ} + \int N_a^2 \frac{dx}{EF}$$

erhält man mit Hilfe der Formel (23), Seite 101 den Wert

$$(1) \quad \delta_{aa} = \frac{l}{3EJ} (f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2) + \frac{s_1^3}{3EJ_1} + \frac{s_2^3}{3EJ_2} + \frac{l}{EF} \\ + \frac{s_1 \operatorname{tg}^2 \beta}{EF_1} + \frac{s_2 \operatorname{tg}^2 \beta}{EF_2}.$$

Die  $M_0$ -Fläche für den Zustand  $X_a = 0$  stimmt mit der Momentenfläche eines einfachen Balkens  $AB$  überein; sie ist für eine zwischen  $A$  und  $B$  liegende Last  $P$  ein Dreieck von der Höhe  $\frac{P\xi\xi'}{l}$ , Fig. 141 b.

Für den Balken ist  $N_0 = 0$ , für die linke Säule  $N_0 = -\frac{P\xi'}{l}$ , für die rechte Säule  $N_0 = -\frac{P\xi}{l}$ . Nach Gleichung (27), Seite 102, erhält man also (mit  $f_1 - f_2 = a$ )

$$(2) \quad EJ\delta_{0a} = \int M_0 M_a dx + J \int N_0 N_a \frac{dx}{F} \\ = \frac{P\xi\xi'}{2} \left( f + \frac{a}{3} \frac{\xi''}{l} \right) - \left( \frac{\xi'}{l} s_1 \frac{J}{F_1} - \frac{\xi}{l} s_2 \frac{J}{F_2} \right) P \operatorname{tg} \beta.$$

Liegt  $P$  auf einem der beiden Ausleger, z. B. auf dem linken, Fig. 141 c, so kommt nur der zur Balkenstrecke  $l$  gehörige Teil der  $M_0$ -Fläche in Betracht, weil für die Ausleger  $M_a = 0$  ist. Dieser Teil ist ein Dreieck von der Höhe  $-P\xi$ ; für die Säulen ist  $N_0 = -P \frac{l+\xi}{l}$  bzw.  $N_0 = +P \frac{\xi}{l}$ , und es ergibt sich mittels Gleichung (22), Seite 101,

$$(3) \quad EJ\delta_{0a} = -P\xi(2f_1 + f_2) \frac{l}{6} - \left( \frac{l+\xi}{l} s_1 \frac{J}{F_1} + \frac{\xi}{l} s_2 \frac{J}{F_2} \right) P \operatorname{tg} \beta.$$

Zahlenrechnungen zeigen nun, daß man in der Regel die von den Längskräften  $N$  herrührenden Glieder vernachlässigen, also  $F = F_1 = F_2 = \infty$  setzen darf. Man findet dann für eine zwischen den beiden Säulen liegende Last den Wert

$$(4) \quad X_a = \frac{P\xi\xi'}{2l} \frac{3f + a \frac{\xi''}{l}}{f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 + \frac{J}{J_1} \frac{s_1^3}{l} + \frac{J}{J_2} \frac{s_2^3}{l}}$$

und für eine auf dem linken Ausleger ruhende Last:

$$(5) \quad X_a = -\frac{P\xi}{2} \frac{2f_1 + f_2}{f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 + \frac{J}{J_1} \frac{s_1^3}{l} + \frac{J}{J_2} \frac{s_2^3}{l}}$$

Wird die Längeneinheit der Balkenstrecke  $l$  gleichmäßig mit  $g$  belastet, so ist die  $M_0$ -Linie eine Parabel von der Pfeilhöhe  $\frac{gl^2}{8}$ , und es liefert dann die Formel (24), Seite 101, den Wert

$$EJ\delta_{0a} = \frac{2l}{3} \cdot \frac{gl^2 f}{8} = \frac{gl^3 f}{12}$$

Den Einfluß einer auf dem linken Ausleger ruhenden gleichförmigen Belastung  $g_1$  findet man, indem man in Gleichung (3) den Wert  $P\xi$  ersetzt durch  $g_1 b_1 \frac{b_1}{3}$ . Es entsteht

$$EJ\delta_{0a} = \frac{g_1 b_1^2 l}{12} (2f_1 + f_2).$$

Die gleichförmige Belastung ( $g_2$ ) des Auslegers  $b_2$  liefert

$$EJ\delta_{0a} = \frac{g_2 b_2^2 l}{12} (2f_2 + f_1).$$

Im ganzen ergibt sich also infolge der gleichförmigen Lasten

$$(6) \quad X_a = \frac{1}{4} \cdot \frac{gl^2 f + g_1 b_1^2 (2f_1 + f_2) + g_2 b_2^2 (2f_2 + f_1)}{f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 + \frac{J}{J_1} \frac{s_1^3}{l} + \frac{J}{J_2} \frac{s_2^3}{l}}$$

*Zweite Lösung.* Aus den Gleichungen (1), Seite 90, folgt

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

$\delta_{ma}$  ist die Ordinate der zur  $M_a$ -Fläche gehörigen Biegungslinie. Da die Ausleger im Belastungsfalle  $X_a = -1$  spannungslos sind, so sind ihre Biegungslinien gerade Linien, welche den gekrümmten Teil  $ACB$  der Biegungslinien in  $A$  und  $B$  berühren, Fig. 143. Bei diesem Verfahren läßt sich eine Veränderlichkeit des Querschnitts leicht berücksichtigen. Wir verweisen auf § 2.

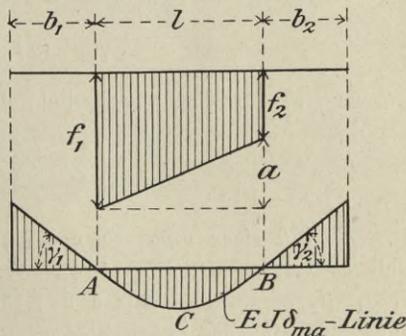


Fig. 143.

Es empfiehlt sich, die  $EJ_c$ -fachen Durchbiegungen  $\delta_{ma}$  zu ermitteln, wo  $J_c$  ein beliebiges konstantes Trägheitsmoment ist. Den Wert  $EJ_c \delta_{aa}$

bestimmt man am zweckmäßigsten durch Rechnung. Es genügt, die Summenformel

$$EJ_c \delta_{aa} = \Sigma M_a^2 \frac{J_c}{J} \lambda + \Sigma N_a^2 \frac{J_c}{F} \lambda$$

anzuwenden.  $\lambda$  bedeutet die Länge eines kleinen Stabstückes, dem die Mittelwerte  $M_a$ ,  $N_a$ ,  $J$ ,  $F$  entsprechen. Die Summen erstrecken sich über den Balken und die Säulen. Das zweite Glied darf in der Regel vernachlässigt werden.

Es kommt vor, daß man wohl für den Balken ein konstantes  $J$  einführen darf, nicht aber für die sich nach unten mehr oder weniger stark verjüngenden Säulen. Der in die vorstehenden, für unveränderlichen Säulenquerschnitt abgeleiteten Formeln einzusetzende Wert  $J_1$  ist dann bestimmt durch

$$(7) \quad \frac{1 \cdot s_1^3}{3 J_1} = \int_0^{s_1} \frac{x^2 dx}{J} = \sum_0^{s_1} x^2 \frac{\lambda}{J},$$

wo  $J$  den veränderlichen Säulenquerschnitt bezeichnet. Ebenso verhält es sich mit  $J_2$ .

Ist der Balkenquerschnitt innerhalb der Strecke  $l$  unveränderlich, so findet man  $EJ \delta_{ma}$  als Biegemoment eines einfachen Balkens, dessen Belastungsfläche die  $M_a$ -Fläche ist. Es ergibt sich also

$$(8) \quad EJ \delta_{ma} = \omega_R \frac{f_1 l^2}{2} - \omega_D \frac{a l^2}{6}.$$

Die Tangenten der Neigungswinkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  der geraden Biegelinien der Ausleger sind gleich den Stützenwiderständen des mit der  $M_a$ -Fläche belasteten einfachen Balkens  $AB$ . Man findet

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = (2f_1 + f_2) \frac{l}{6},$$

woraus sich für die Biegelinie des linken Auslegers die Gleichung ergibt

$$EJ \delta_{ma} = -\xi (2f_1 + f_2) \frac{l}{6}.$$

*Einfluß einer wagerechten Kraft  $K$* , die im Abstände  $k$  von der Balkenachse angreift (Fig. 144). Wir nehmen wieder konstante Werte  $J$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  an und bestimmen den Einfluß von  $K$  auf den wagerechten Widerstand  $X_a$  der linken Stütze. Das statisch bestimmte Hauptsystem besitzt also bei  $A$  ein wagerechtes Gleitlager. Die lotrechten Stützenwiderstände sind gleich  $\pm \frac{Kc}{l}$ . Liegt der Angriffspunkt  $m$  von  $K$  zwischen den beiden Säulen, so ist die  $M_0$ -Fläche des Balkens der Unter-

schied eines Dreiecks von der Höhe  $Kc$  und eines Parallelogramms, dessen lotrecht gemessene Höhe gleich  $Kk$  ist. Diese Fläche liefert zu  $\delta_{0a}$  den Beitrag

$$\int M_0 M_a dx = \frac{l}{6} Kc (2f_2 + f_1) - Kkf' \xi'.$$

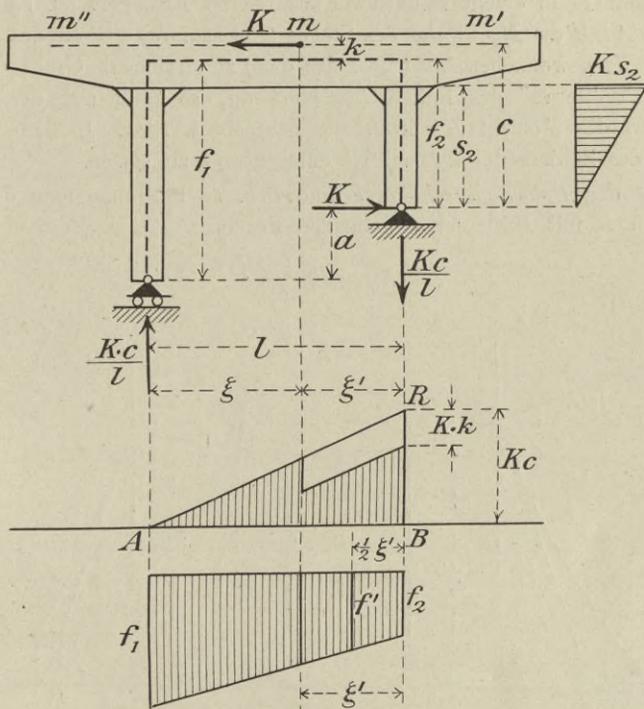


Fig. 144.

Das erste Glied dieses Ausdruckes folgt aus Formel (22), Seite 101; das zweite Glied ist gleich dem Produkte aus dem Momente  $Kk$  und dem Flächeninhalte des zugehörigen Teiles der  $M_a$ -Fläche.  $f'$  bedeutet die Ordinate der  $M_a$ -Linie an der Stelle  $\frac{1}{2} \xi'$ .

Der  $M_0$ -Fläche der rechten Säule entspricht

$$\int M_0 M_a dx = \frac{Ks_2^3}{3},$$

und man findet daher mit

$$f' = f_2 + \frac{a \xi'}{2l}$$

für  $X_a$  den Wert

$$(9) \quad X_a = \frac{\delta_{0a}}{\delta_{aa}} = K \frac{c \left( f_2 + \frac{f_1}{2} \right) - 3k \left( f_2 + \frac{a}{2} \frac{\xi'}{l} \right) \frac{\xi'}{l} + \frac{s_2^3}{l} \frac{J}{J_2}}{f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 + \frac{J}{J_1} \frac{s_1^3}{l} + \frac{J}{J_2} \frac{s_2^3}{l}}.$$

Greift  $K$  in einem Punkte  $m'$  des rechten Auslegers an, so ist das Dreieck  $ABR$  die  $M_0$ -Fläche des Stabes  $l$ . Das zweite Glied des Zählers des für  $X_a$  gewonnenen Ausdrucks ist dann zu streichen. Greift dagegen  $K$  im Punkte  $m''$  des linken Auslegers an, so muß auf der ganzen Strecke  $l$  das Moment  $Kk$  in Abzug gebracht werden. In dem zweiten Gliede des Zählers der Formel ist dann  $\xi' = l$  zu setzen.

Ist der Balkenquerschnitt veränderlich, so bestimme man den Einfluß von  $K$  mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

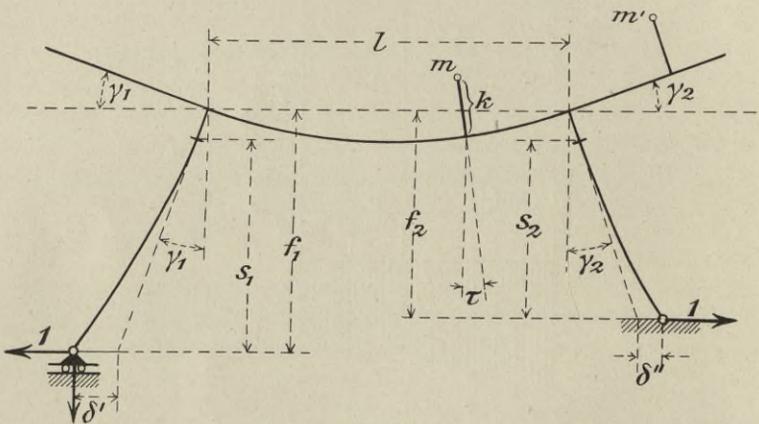


Fig. 145.

Bedeutet dann, für den Belastungsfall  $X_a = -1$ ,  $\tau$  den Neigungswinkel der elastischen Linie an der Angriffsstelle der Last  $K$ , so ist die wagerechte Verschiebung des Angriffspunktes  $m$  infolge der Drehung des Querschnitts gleich  $k\tau$  und hierzu tritt der Einfluß der Drehung und Verbiegung der Säule. Im ganzen entsteht mit den in Fig. 145 angegebenen Bezeichnungen

$$\delta_{ma} = k\tau + f_2\gamma_2 + \delta'' \quad \text{und}$$

$$X_a = K \frac{k\tau + f_2\gamma_2 + \delta''}{f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 + \delta' + \delta''}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist gleichbedeutend mit  $\int M_a^2 \frac{dx}{EJ}$ .

*Einfluß von Temperaturänderungen.* Infolge von Temperaturänderungen entsteht

$$X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}},$$

wo

$$\delta_{at} = \int N_a \varepsilon t_s dx + \int \frac{M_a}{h} \varepsilon \Delta t dx.$$

Es sei die mittlere Temperaturänderung

für alle Punkte der Balkenachse	$t$
„ „ „ „ Unterkante des Balkens	$t_u$
„ „ „ „ Oberkante „ „	$t_o$
„ „ „ „ linken Säule	$t_1$
„ „ „ „ rechten Säule	$t_2$

Dann ergibt sich, da für den Balken  $\int M_a dx = fl$  ist,

$$\delta_{at} = + 1 \cdot \varepsilon tl + \operatorname{tg} \beta \cdot \varepsilon t_1 s_1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \varepsilon t_2 s_2 + \varepsilon (t_u - t_o) \frac{fl}{h},$$

und bei unveränderlichem  $J_1$

$$(10) \quad X_{at} = 3 \varepsilon EJ \frac{t + \operatorname{tg} \beta \left( t_1 \frac{s_1}{l} - t_2 \frac{s_2}{l} \right) + (t_u - t_o) \frac{f}{h}}{f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 + \frac{J}{J_1} \frac{s_1^3}{l} + \frac{J}{J_2} \frac{s_2^3}{l}}.$$

*Einflußlinien für die Kernpunktmente des Balkens.* Es liege eine Eisenbahnbrücke von der in Fig. 146 dargestellten Anordnung vor; sie besteht aus Tragwerken der soeben untersuchten Art, die miteinander

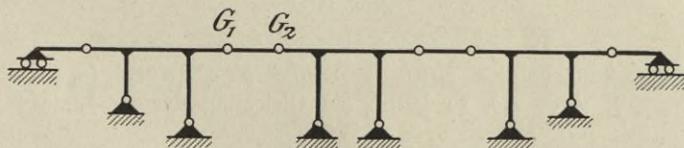


Fig. 146.

und mit den Endwiderlagern durch einfache Balken verbunden sind. Jeder dieser Koppelbalken besitzt an dem einen Ende ein festes, an dem anderen Ende ein in wagerechter Richtung bewegliches Auflager. Das eine der beiden Gelenke  $G_1$  und  $G_2$  muß also einen Spielraum erhalten, der eine wagerechte Verschiebung des Balkenstützpunktes gestattet.

Es genügt, den in Fig. 147 dargestellten Brückenabschnitt zu betrachten.

Die Einflußlinie für  $X_a$  sei in der angegebenen Weise ermittelt worden; es treten noch die den beiden Koppelbalken entsprechenden

Geraden *I* und *II* hinzu. Der in lotrechter Richtung gemessene Abstand des oberen Kernpunktes *o* des zu untersuchenden Balkenquerschnittes von der Geraden *AB* sei  $y_0$ . Dann ist das Angriffsmoment für den Kernpunkt *o*

$$M^o = M_0 - X_a y_0,$$

wo  $M_0$  das Angriffsmoment für den Fall bedeutet, daß das Tragwerk infolge Nullwerdens von  $X_a$  in einen Gerberschen Balken übergeht. Wir führen, wie beim Zweigelenkbogen\*), den Multiplikator  $\mu = y_0$  ein und erhalten die in Fig. 147 dargestellte Einflußfläche für  $M^o$ .

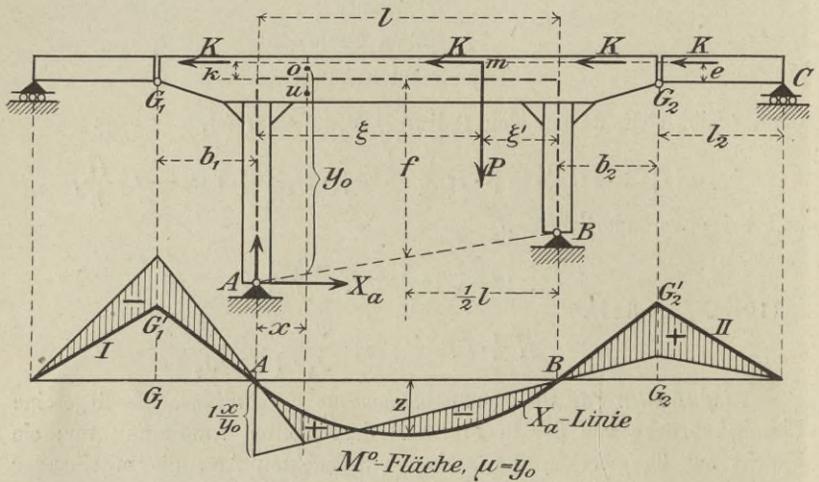


Fig. 147.

Sind beide Säulen gleich hoch und gleich stark ( $s_1 = s_2 = s$ ,  $f_1 = f_2 = f$ ,  $J_2 = J_1$ ), so lautet die Gleichung der  $X_a$ -Linie für das Trägerstück  $AB$

$$(11) \quad X_a = \frac{P \xi \xi'}{2 f l} \nu, \quad \text{wo}$$

$$(12) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{f^2 l}}$$

Diese Linie ist daher eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$(13) \quad z = \frac{l}{8f} \nu.$$

\*) Vgl. Abteilung 1 § 7, Nr. 84 und § 10, Fig. 302.

Die geraden  $X_a$ -Linien für die Ausleger sind bestimmt durch die Strecken

$$(14) \quad \overline{G_1 G_1'} = 2z \frac{b_1}{\frac{1}{2}l} = \frac{b_1}{2f} \nu, \quad \overline{G_2 G_2'} = \frac{b_2}{2f} \nu.$$

Für den Einfluß einer zwischen  $A$  und  $B$  am Balken angreifenden wagerechten Last  $K$  liefert Gleichung (9) den Wert

$$X_a = \frac{K}{2} \frac{c - 2k \frac{\xi'}{l} + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{fl}}{f + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{fl}},$$

und dieser läßt sich umformen in

$$(15) \quad X_a = \frac{K}{2} \left[ 1 + \frac{k}{f} \nu \left( 1 - 2 \frac{\xi'}{l} \right) \right].$$

Greift  $K$  in irgend einem Punkte des rechten Auslegers an, so entsteht

$$(16) \quad X_a = \frac{K}{2} \left( 1 + \frac{k}{f} \nu \right),$$

wirkt  $K$  am linken Ausleger, so ergibt sich

$$(17) \quad X_a = \frac{K}{2} \left( 1 - \frac{k}{f} \nu \right).$$

Der Einfluß einer an einem Koppelträger angreifenden Last  $K$  auf  $X_a$  hängt ab von der Höhenlage des Gelenkes.  $K$  wirke am rechten Koppelträger im Abstände  $e$  vom Gelenke  $G_2$ . Dann übt der Koppelträger auf den Ausleger im Punkte  $G_2$  einen wagerechten Druck  $K$  und einen lotrechten, nach unten gerichteten Druck von der Größe  $\frac{Ke}{l_2}$  aus. Es entsteht also — immer gleich hohe Säulen vorausgesetzt —

$$(18) \quad X_a = \frac{K}{2} \left( 1 + \frac{k-e}{f} \nu \right) + \frac{Ke}{2l_2} \frac{b_2}{f} \nu.$$

Fallen die Kräfte  $K$  und die Gelenke  $G_1$  und  $G_2$  mit der Balkenachse zusammen ( $k = 0$ ,  $e = 0$ ), so entsteht

$$(19) \quad X_a = \frac{1}{2} K,$$

gleichgültig, ob  $K$  an einem Koppelträger, oder an einem Ausleger, oder zwischen  $A$  und  $B$  angreift.

Der Einfluß der Temperaturänderungen beträgt nach Gleichung (10):

$$(20) \quad X_{at} = \frac{\varepsilon EJ}{f^2} \nu \left( t + (t_u - t_w) \frac{f}{h} \right).$$

48. Wir wenden uns jetzt zu dem in Fig. 148 dargestellten Tragwerk; es unterscheidet sich von dem in Nr. 47, Fig. 147, untersuchten nur durch das am äußeren Ende des rechts gelegenen Koppelträgers angeordnete feste Auflager und ist zweifach statisch unbestimmt. Als neu hinzutretende statisch unbestimmte Größe führen wir den wagerechten Widerstand  $X_b$  des festen Endauflagers ein; er habe von dem Gelenke  $G_2$  den Abstand  $e$ , und dieses von der Achse des Balkens  $AB$  den Abstand  $e'$ . Die Säulen seien gleich hoch und gleich stark. Das in Nr. 47 behandelte Tragwerk nehmen wir als statisch unbestimmtes Hauptsystem an. Den Widerstand des linken Säulengelenkes bezeichnen wir jetzt mit  $H$ ; er wird auf die Form gebracht

$$H = H_0 - H_b X_b.$$

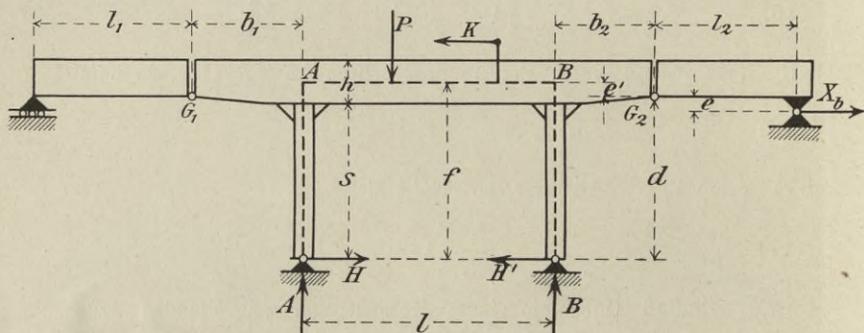


Fig. 148.

Der Wert  $H_0$  ist also gleichbedeutend mit dem in Nr. 47 ermittelten Werte  $X_a$ . Nun greift infolge von  $X_b$  im Gelenkpunkte  $G_2$  am Ausleger  $BG_2$  eine nach rechts gerichtete Kraft  $X_b$  und eine lotrechte, nach unten gerichtete Kraft  $X_b \frac{e}{l_2}$  an, und es entsteht daher (bei unveränderlichem  $J$ )

$$H = H_0 - \frac{X_b}{2} \left( 1 - \frac{e'}{f} \nu \right) - \frac{X_b e}{2 l_2} \frac{b_2}{f} \nu,$$

$$A = A_0 - X_b \frac{d}{l} - X_b \frac{e}{l_2} \frac{b_2}{l}$$

$$B = B_0 + X_b \frac{d}{l} + X_b \frac{e}{l_2} \left( 1 + \frac{b_2}{l} \right)$$

$$H' = X_b + H - \Sigma K,$$

wo  $d$  den Abstand des Gelenkes  $G_2$  von der durch die Säulenfüße gelegten Geraden und  $H'$  den Widerstand des rechten Säulengelenkes

bedeutet. Der Verschiebungsplan für den Zustand  $X_b = -1$  liefert

$$X_b = P_m \frac{\delta_{m\bar{b}}}{\delta_{bb}}, \quad X_{b\epsilon} = \frac{\delta_{b\epsilon}}{\delta_{bb}},$$

$$\delta_{bb} = \int \frac{M_b^2 dx}{EJ}, \quad \delta_{b\epsilon} = \int N_b \epsilon t dx + \int \epsilon \Delta t \frac{M_b}{h} dx.$$

Die weitere Untersuchung bietet, selbst für den Fall veränderlichen Querschnitts, keine Schwierigkeit; sie möge hier nur für den Fall  $e = e' = 0$  und für unveränderliche Trägheitsmomente  $J$  und  $J_1$ \*) weiter durchgeführt werden. Es wird dann

$$(21) \quad \begin{cases} H = H_0 - \frac{1}{2} X_b, & H' = X_b + H - \Sigma K, \\ A = A_0 - X_b \frac{f}{l}, & B = B_0 + X_b \frac{f}{l}, \end{cases}$$

und man erhält für  $X_b = -1$  die in Fig. 149 dargestellten Momentenflächen; sie liefern

$$EJ\delta_{bb} = \frac{f^2 l}{12} + \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{6}.$$

Zwischen  $A$  und  $B$  besteht also die Belastungslinie der  $X_b$ -Linie aus einer Geraden, deren Endordinaten

$$z = \pm \frac{\frac{1}{2} f}{\frac{1}{12} f^2 l + \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{6}} = \pm \frac{6f}{f^2 l + 2 \frac{J}{J_1} s^3}$$

sind. Die Gleichung der  $X_b$ -Linie ist demnach

$$\eta = + \omega_D \frac{z \left(\frac{l}{2}\right)^2}{6} = \omega_D \frac{z l^2}{24}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(22) \quad \frac{1}{1 + 2 \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{f^2 l}} = \nu',$$

so ergibt sich

$$(23) \quad \eta = \omega_D \frac{l}{4f} \nu',$$

\*) Bei veränderlichem Säulenquerschnitt ist  $J_1$  mittels Gleichung (7), Seite 134, zu berechnen.

wobei die Abszissen ( $x''$ ) von der Trägermitte aus zu zählen sind. Da  $\overline{CB} = 0,5l$  ist, so ist natürlich

$$\omega_D = \frac{x''}{0,5l} - \left( \frac{x''}{0,5l} \right)^3.$$

Die zu den Auslegern und den Koppelträgern gehörenden geraden  $X_b$ -Linien sind bestimmt durch

$$\eta_{11} = b_1 \gamma, \quad \eta_{12} = b_2 \gamma.$$

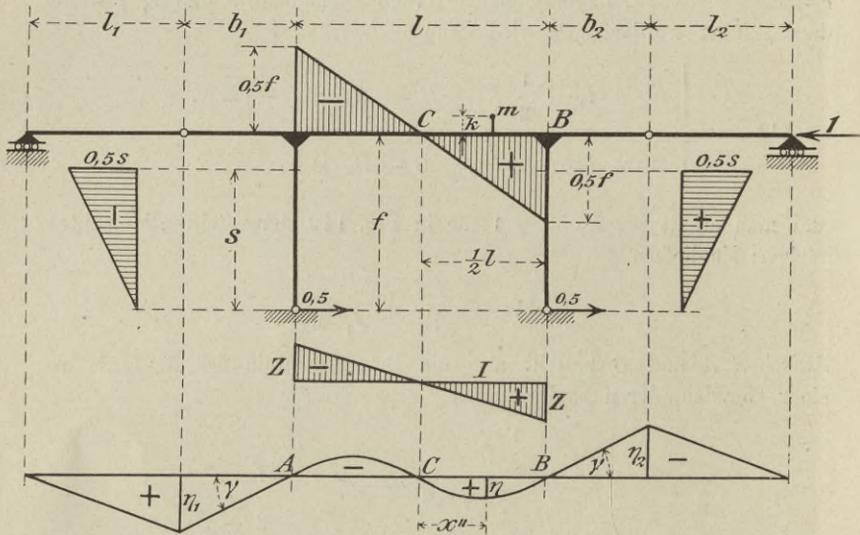


Fig. 149.

Der Winkel  $\gamma$  läßt sich deuten als der Widerstand der Stütze  $B$  eines einfachen Balkens  $CB$ , dessen Belastungsfläche das Dreieck  $I$  ist. Man erhält  $\gamma = \frac{1}{6} z l$  und

$$(24) \quad \eta_{11} = \frac{b_1}{f} \gamma', \quad \eta_{12} = \frac{b_2}{f} \gamma'.$$

Um den Einfluß wagerechter Lasten  $K$  zu bestimmen, brauchen wir nur die wagerechten Verschiebungen  $\delta_{mb}$  ihrer Angriffspunkte  $m$  infolge  $X_b = -1$  zu bestimmen und die Formel

$$X_b = K \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

anzuwenden. Da nun sämtliche Punkte der Balkenachse (deren Längenänderung wir ja vernachlässigen) sich in wagerechter Richtung um  $\delta_{bb}$

verschoben, so erzeugt jede mit der Balkenachse zusammenfallende Last  $K$ :

$$(25) \quad X_b = K,$$

gleichgültig, ob sie zwischen  $A$  und  $B$ , oder an einem Ausleger oder an einem Koppelträger angreift.

Liegt der Angriffspunkt  $m$  von  $K$  oberhalb der Balkenachse im Abstände  $k$  von dieser Achse, und bedeutet  $\tau$  den Neigungswinkel der elastischen Linie des Zustandes  $X_b = -1$ , so dreht sich der Querschnitt, dem  $m$  angehört, um den Winkel  $\tau$ , und es entsteht

$$(26) \quad \delta_{mb} = \delta_{bb} - k\tau, \quad X_b = K \left( 1 - \frac{k\tau}{\delta_{bb}} \right),$$

wenn festgesetzt wird, daß die Durchbiegungen nach unten, die Abszissen nach rechts positiv gerechnet werden und die positive Richtung von  $K$  mit der Richtung von  $X_b = -1$  übereinstimmt.

Da wir nun die  $X_b$ -Linie aus der Biegelinie für  $X_b = -1$  fanden, indem wir deren Ordinaten durch  $\delta_{bb}$  dividierten, so dürfen wir auch schreiben:

$$(27) \quad X_b = K \left( 1 - k \frac{d\eta}{dx} \right).$$

Liegt also  $m$  zwischen  $A$  und  $B$  im Abstände  $x''$  von der Mitte, so ist zu setzen

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{l\nu'}{4f} \frac{d\omega_D}{dx''},$$

und man erhält

$$(28) \quad X_b = K \left[ 1 + \frac{k\nu'}{2f} \left( 12 \frac{x''^2}{l^2} - 1 \right) \right].$$

Gehört der Punkt  $m$  dem rechten oder linken Ausleger an, so ist

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\nu'}{f} \quad \text{und}$$

$$(29) \quad X_b = K \left[ 1 + \frac{k}{f} \nu' \right].$$

Für den linken oder rechten Koppelträger wird  $\frac{d\eta}{dx} = \frac{\eta_1}{l_1} = \frac{b_1}{l_1} \frac{\nu'}{f}$ ,

bzw.  $= \frac{b_2}{l_2} \frac{\nu'}{f}$ , und man erhält daher

$$(30) \quad X_b = K \left[ 1 - \frac{b_1}{l_1} \frac{k}{f} \nu' \right], \quad \text{bzw.} \quad X_b = K \left[ 1 + \frac{b_2}{l_2} \frac{k}{f} \nu' \right].$$

Es ist noch der Einfluß der auf Seite 137 bezeichneten Temperaturänderungen zu bestimmen. Der Inhalt der  $M_b$ -Fläche des Balkens ist

Null; ein Temperaturunterschied  $\Delta t = t_u - t_o$  hat daher keinen Einfluß auf  $X_b$ . Die Längskraft  $N_b$  ist für die linke Säule  $= -\frac{d}{l}$ , für die rechte  $= +\frac{d}{l}$ ; gleichmäßige und gleichgroße Erwärmung beider Säulen ( $t_1 = t_2$ ) ist mithin ebenfalls ohne Einfluß auf  $X_b$ . Für das Balkenstück  $l + b_2 + l_2$  ist  $N_b = -1$ ; es ergibt sich also

$$\delta_{b,t} = \int N_b \varepsilon t dx = -\varepsilon t (l + b_2 + l_2),$$

und

$$(31) \quad X_{b,t} = \frac{EJ\delta_{b,t}}{EJ\delta_{b,b}} = -\frac{12\varepsilon EJt(l + b_2 + l_2)v'}{f^2l}.$$

Die Ermittlung der im Balken entstehenden Spannungen  $\sigma$  wird etwas vereinfacht, wenn man nicht von den Kernpunktmomenten  $M^o$  und  $M^u$  ausgeht, sondern die Formel

$$\sigma = \pm \frac{M}{W} + \frac{N}{F}$$

benutzt und, zugunsten der Sicherheit des Bauwerks, jedes der beiden Glieder für sich zu einem Maximum macht. Es ist  $N = -H$  für einen Balkenquerschnitt der Strecke  $AB$  und  $N = +X_b$  für einen Querschnitt rechts von  $B$ . Links von  $A$  ist  $N = 0$ . Den zur Darstellung der  $M$ -Linien einzuschlagenden Weg wollen wir durch ein Zahlenbeispiel erläutern.

Es sei

$$l = 16^m, \quad h = 1,4^m, \quad f = 6,0^m, \quad b_1 = b_2 = b = 3,0^m, \quad s = f - \frac{h}{2} = 5,3^m$$

$$\frac{J}{J_1} = 8,0, \quad \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{f^2l} = 2,1,$$

also nach Gleichung (12) und Gleichung (22)

$$v = \frac{1}{2,4}, \quad v' = \frac{1}{5,2}.$$

Wir beginnen mit der  $X_b f$ -Linie; ihre Gleichung lautet

$$\eta = \omega_D \frac{l}{4} v' = \omega_D \frac{4,0}{5,2} = 0,769 \omega_D.$$

Die Abszissen ( $x''$ ) sind von der Mitte aus zu zählen. Man findet in der Tabelle auf Seite 105:

für $\frac{x''}{\frac{1}{2}l} =$	0,2	0,4	0,6	0,8
$\omega_D =$	0,192	0,336	0,384	0,288;
daher ist $\eta =$	0,148	0,258	0,295	0,221.

Den Gelenkpunkten  $G_1$  und  $G_2$  entspricht

$$\eta = \pm b\nu' = \pm \frac{3,0}{5,2} = \pm 0,577.$$

Aus der in Fig. 150a dargestellten  $X_b f$ -Linie erhält man die in Fig. 150b abgebildete Einflußlinie für  $Hf$  mittels der Gleichung

$$Hf = H_o f - \frac{1}{2} X_b f.$$

Die  $H_o f$ -Linie der Strecke  $AB$  ist eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$\frac{l}{8} \nu = \frac{16}{8 \cdot 2,4} = 0,833,$$

sie ist in Fig. 150b durch eine gestrichelte Linie angegeben worden.

Für die Gelenkpunkte ist  $H_o f = -\frac{1}{2} b\nu = -\frac{1,5}{2,4} = -0,625$ . Daher erhält man für den rechten Gelenkpunkt

$$Hf = -0,625 + \frac{1}{2} 0,577 = -0,337$$

und für den linken Gelenkpunkt

$$Hf = -0,625 - \frac{1}{2} 0,577 = -0,913.$$

Die  $H'f$ -Linie ist das Spiegelbild der  $H \cdot f$ -Linie.

Fig. 150c zeigt die Einflußlinie für

$$A = A_o - X_b \frac{f}{l}.$$

Die gestrichelte Linie ist die  $A_o$ -Linie. Die  $B$ -Linie ist das Spiegelbild der  $A$ -Linie. Durch diese beiden Linien sind die Einflußlinien für die Querkräfte der Strecke  $AB$  gegeben. Solange sich die Lastenheit rechts vom Querschnitte befindet, ist  $Q = +A$ ; liegt sie links vom Querschnitte, so entsteht  $Q = -B$ .

Das Biegemoment für einen Querschnitt im Abstände  $x$  von  $A$  ist

$$M = M_o - Hf - X_b \frac{f}{l} x,$$

wo  $M_o$  das Biegemoment für den Querschnitt eines Gerberschen Balkens bedeutet, der nicht starr mit den Säulen verbunden ist. Die Einflußfläche für das Glied  $M_o - Hf$  zeigt Fig. 150d; ihre Ordinaten

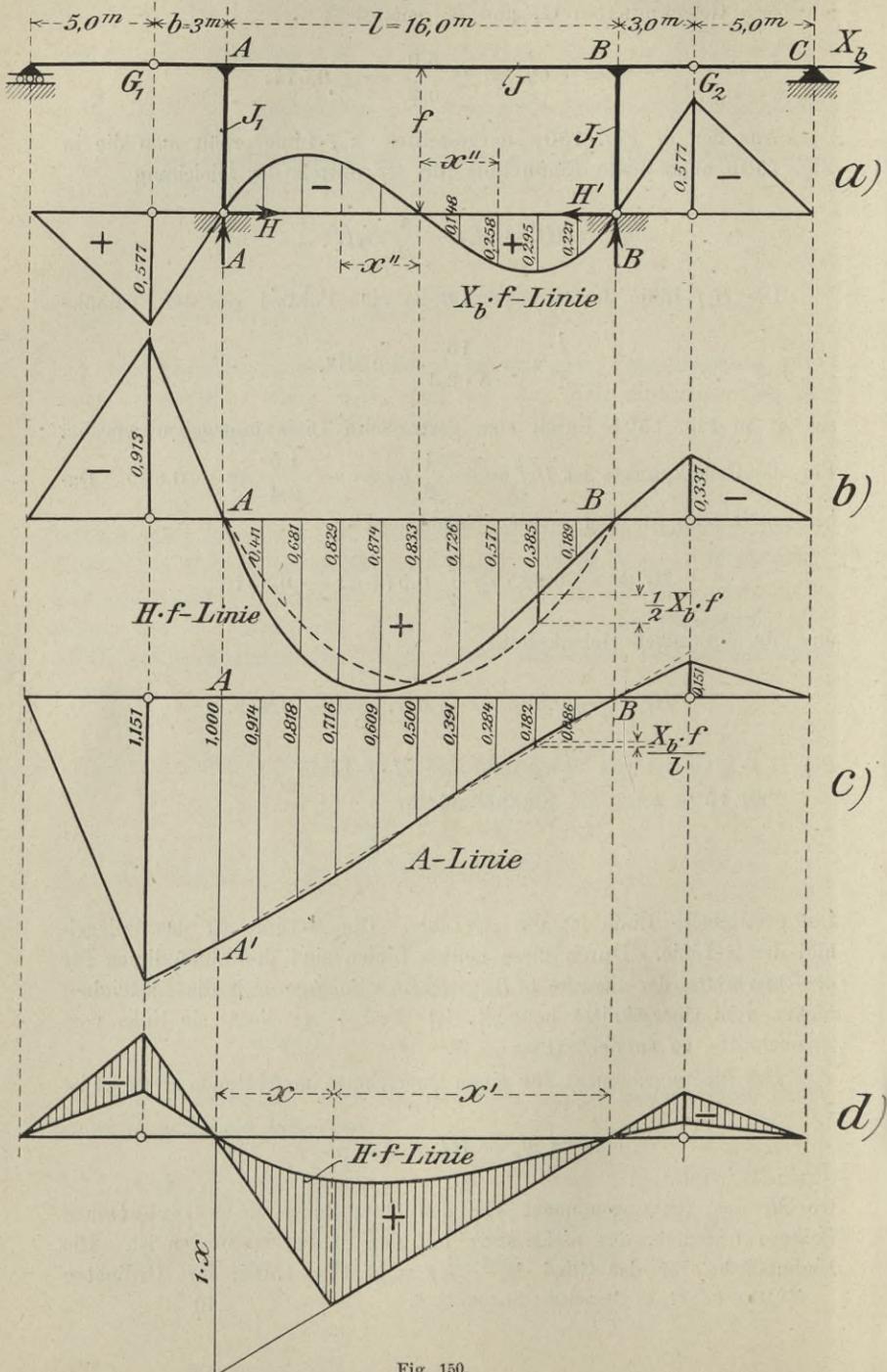


Fig. 150.

wurden (in größerem Maßstabe) in Fig. 151 von einer wagerechten Achse aus aufgetragen, und von der so erhaltenen gestrichelten Linie wurde die  $X_b \frac{f}{l} x$ -Linie in Abzug gebracht. Für die Gelenkpunkte erhält man die Werte:

bei  $G_2$ : 
$$M = -b \frac{x}{l} + 0,337 + 0,577 \frac{x}{l} = -0,390,$$

bei  $G_1$ : 
$$M = -b \frac{x'}{l} + 0,913 - 0,577 \frac{x}{l} = -1,360.$$

Für den Balkenquerschnitt unmittelbar rechts neben der Säule  $AA$  ( $x = 0$ ) stimmt die  $M$ -Linie rechts von  $A$  mit der  $Hf$ -Linie überein. Im Punkte  $G_1$  hat sie die Ordinate  $-b + 0,913 = -2,087$ .

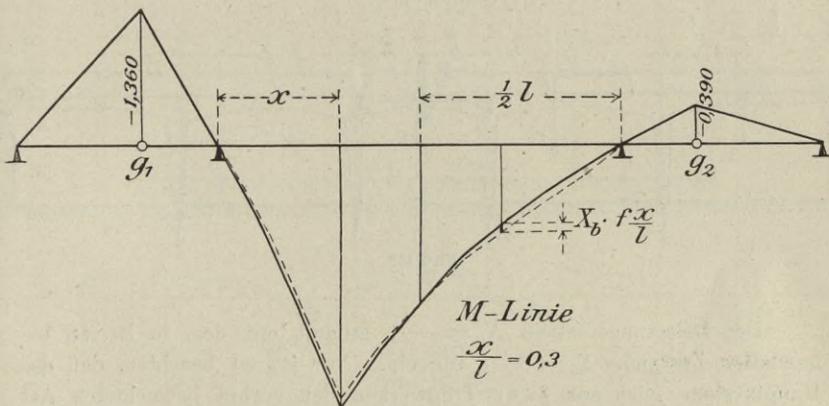


Fig. 151.

Für die Querschnitte des Auslegers werden die Momente und Querkräfte genau in derselben Weise bestimmt wie beim gewöhnlichen Gerber-Balken. Die Koppelträger verhalten sich wie einfache Balken. Nur ist zu beachten, daß das Balkenstück  $BC$  durch  $X_b$  auf Zug und Druck beansprucht wird.

49. Werden zwei Tragwerke von der in Nr. 47 untersuchten Art durch ein Gelenk  $G$  miteinander verbunden, Fig. 152, so entsteht ein vierfach statisch unbestimmtes System. Als neue statisch unbestimmte Größen treten zu den in Nr. 47 untersuchten Horizontalschüben der beiden einzelnen Tragwerke die Seitenkräfte  $X_b$  und  $X_c$  des Gelenkdruckes. Es sei  $X_b$  positiv angenommen, sobald es die in  $G$  zusammenhängenden Kragarme auf Zug beansprucht.  $X_c$  sei positiv, wenn es auf den links von  $G$  liegenden Kragarm von unten nach oben wirkt. Ist

die Lotrechte durch  $G$  eine Symmetrieachse, so ist  $\delta_{bo} = \delta_{cb} = 0$ , und man erhält

$$X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}} + \frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}},$$

$$X_c = \frac{\sum P_m \delta_{mc}}{\delta_{cc}} + \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}}.$$

Man vergleiche die ähnlichen Untersuchungen in Abteilung I, Nr. 164 und 166.

Das Gelenk  $G$  liege in der Achse des Balkens. Es sei

$J$  das überall gleiche Trägheitsmoment des Querschnittes der Balken  $AB$  und  $B'A'$ .

$J_2$  desgleichen der Ausleger  $BG$ ,

$J_1$  „ „ „ Säulen\*).

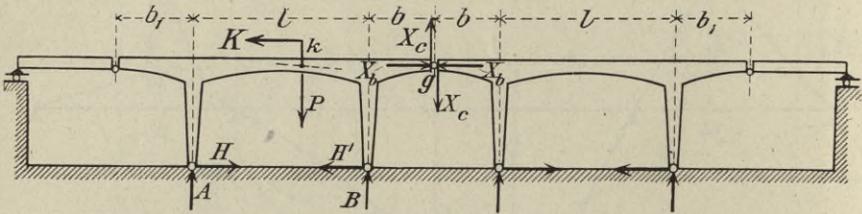


Fig. 152.

Der Belastungszustand  $X_b = -1$  stimmt mit dem in Nr. 48 behandelten Zustande  $X_b = -1$  überein. Nur ist zu beachten, daß das Hauptsystem jetzt aus zwei Tragwerken der vorhin betrachteten Art besteht. Es ist also  $\delta_{bb}$  doppelt so groß wie vorhin, und man erhält daher für die in Fig. 153 dargestellte  $X_b$ -Linie die Gleichungen:

$$(32) \quad \eta = \omega_D \frac{l}{8f} v', \quad \eta_1 = \frac{b_1}{2f} v', \quad \eta_2 = \frac{b}{2f} v', \quad \text{wo}$$

$$v' = \frac{1}{1 + 2 \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{f^2 l}}.$$

Um den Einfluß wagerechter Lasten  $K$  zu ermitteln, beachte man, daß sich die links von  $G$  gelegenen Punkte der Balkenachse um  $\frac{1}{2} \delta_{bb}$  nach links, die rechts gelegenen Punkte um  $\frac{1}{2} \delta_{bb}$  nach rechts ver-

\*) Hinsichtlich der Ermittlung des Wertes  $J_1$  für eine nach unten sich verjüngende Säule verweisen wir auf Seite 134, Gleichung (7).

schieben. Für die linke Hälfte des Tragwerks gehen also die auf Seite 143 abgeleiteten Gleichungen (26) und (27) über in

$$(33) \quad \delta_{mb} = \frac{1}{2} \delta_{bb} - k\tau, \quad X_b = \frac{K}{2} \left( 1 - \frac{2k\tau}{\delta_{bb}} \right),$$

$$(34) \quad X_b = \frac{K}{2} \left( 1 - 2k \frac{d\eta}{dx} \right).$$

Liegt  $K$  zwischen  $A$  und  $B$ , so ist

$$(35) \quad X_b = \frac{K}{2} \left[ 1 + \frac{kv'}{2f} \left( 12 \frac{x''^2}{l^2} - 1 \right) \right].$$

Greift  $K$  an einem der Ausleger  $BG$  oder  $G_1A$  an, so folgt:

$$(36) \quad X_b = \frac{K}{2} \left( 1 + \frac{kv'}{f} \right).$$

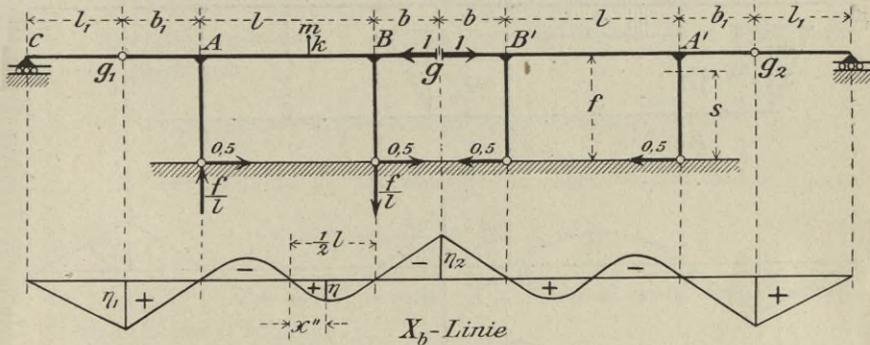


Fig. 153.

Einer am Koppelträger  $CG_1$  wirkenden Last entspricht

$$(37) \quad X_b = \frac{K}{2} \left( 1 - \frac{b_1}{l_1} \frac{k}{f} v' \right).$$

Ist  $k = 0$ , so wird  $X_b = \frac{1}{2} K$ . Greift  $K$  an der rechten Hälfte des Tragwerks an, so ändert sich nur das Vorzeichen von  $X_b$ .

Den Belastungszustand  $X_b = -1$  zeigt Fig. 154. An den Säulenfüßen werden nach Gleichung (14), Seite 139, die wagerechten Widerstände  $\frac{bv}{2f}$  hervorgerufen. Die Momentenfläche des links von  $G$  liegenden Balkens  $AB$  besteht aus einem Dreieck von der Höhe  $-b$  und einem Rechteck von der Höhe  $\frac{1}{2} bv$ , wo  $v$  die durch Gleichung (12) bestimmte Zahl bedeutet. Die Momentenfläche des zugehörigen Aus-

legers  $BG$  ist ein Dreieck von der Höhe  $-b$ . Die Momentendreiecke der Säulen haben die Höhe  $+\frac{bs}{2f}\nu$ . Für das Tragwerk rechts von  $G$  gelten dieselben Flächen, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen. Man findet für die beiden Balken  $AB$ :

$$EJ\delta_{cc} = \int M_c^2 dx = 2 \cdot \frac{l}{3} \left[ \frac{b^2 \nu^2}{4} + \frac{b\nu}{2} \left( \frac{b\nu}{2} - b \right) + \left( \frac{b\nu}{2} - b \right)^2 \right],$$

für die beiden Ausleger  $BG$ :

$$EJ\delta_{cc} = 2 \cdot \frac{b}{3} b^2 \frac{J}{J_2},$$

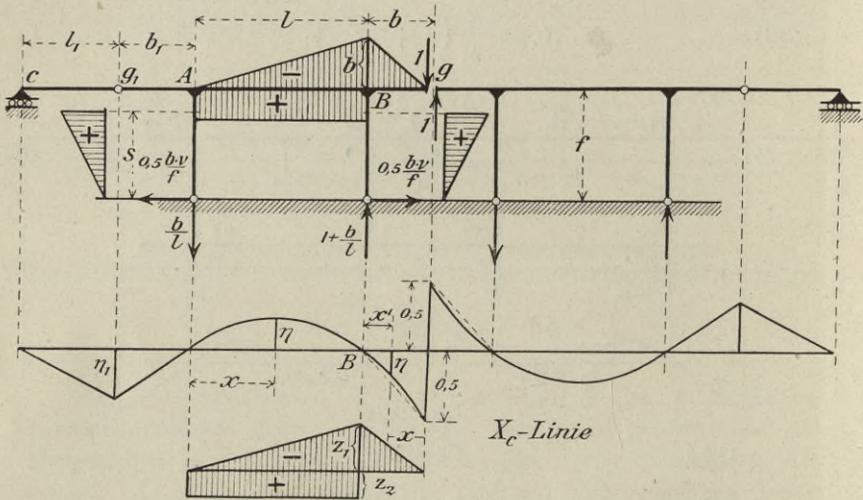


Fig. 154.

für die vier Säulen:

$$EJ\delta_{cc} = 4 \frac{s}{3} \frac{b^2 s^2 \nu^2}{4 f^2} \frac{J}{J_1},$$

im ganzen also:

$$(38) \quad EJ\delta_{cc} = \frac{b^2 l}{6} [1 + 3\nu(\nu - 3)] + \frac{2}{3} b^3 \frac{J}{J_2} + \frac{b^2 s^3 \nu^2}{3 f^2} \frac{J}{J_2}.$$

Die Belastungsfläche der  $X_c$ -Linie ist gegeben durch die Werte

$$z_1 = \frac{b}{EJ\delta_{cc}}, \quad z_2 = \frac{0,5b\nu}{EJ\delta_{cc}}.$$

Man erhält

$$(39) \quad z_1 = \frac{-6}{bl\rho}, \quad z_2 = \frac{+3\nu}{bl\rho}, \quad \text{wo}$$

$$(40) \quad \varrho = 1 + 3\nu(\nu - 3) + 4 \frac{b}{l} \frac{J}{J_2} + 2 \frac{s^3}{f^2 l} \nu \frac{J}{J_1} \quad \text{und}$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{f^2 l}}.$$

Für eine in  $G$  angreifende Last 1 muß sich  $X_c = \frac{1}{2}$  ergeben.

Daraus folgt für die  $X_c$ -Linie des Auslegers  $BG$  die Gleichung

$$(41) \quad \eta = 0,5 \frac{x'}{b} + \omega_D \frac{z_1 b^2}{6} = 0,5 \frac{x'}{b} - \omega_D \frac{b}{l\varrho}.$$

Für den Balken  $AB$  gilt

$$(42) \quad \eta = \omega_D \frac{z_1 l^2}{6} + \omega_R \frac{z_2 l^2}{2} = -\omega_D \frac{l}{b\varrho} + \omega_R \frac{3l\nu}{2b\varrho}.$$

Der Neigungswinkel  $\gamma$  der  $X_c$ -Linie im Punkte  $A$  ist (nach oben positiv gerechnet)

$$\gamma = \frac{6}{bl\varrho} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3\nu}{bl\varrho} l \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 - 3\nu}{2b\varrho}.$$

Im Gelenkpunkte  $G_1$  hat also die  $X_c$ -Linie die Ordinate

$$(43) \quad \eta_1 = \frac{2 - 3\nu}{2\varrho} \cdot \frac{b_1}{b}.$$

Ist  $3\nu > 2$ , so ist  $\eta_1$  negativ. Die  $X_c$ -Linie besitzt dann zwischen  $A$  und  $B$  einen Nullpunkt.

Die wagerechte Verschiebung der Punkte der Balkenachse ist  $\delta_{e\delta} = 0$ . Der Einfluß wagerechter Lasten  $K$  ist also (vgl. Seite 143)

$$(44) \quad X_c = -\frac{Kk\tau}{\delta_{e\delta}} = -Kk \frac{d\eta}{dx}.$$

Hiernach ergibt sich für eine zwischen  $A$  und  $B$  angreifende Last  $K$ :

$$(45) \quad X_c = \frac{Kk}{b\varrho} \left[ 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} - 1,5\nu \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) \right],$$

für eine Last  $K$  am Ausleger  $BG$ :

$$(46) \quad X_c = -\frac{Kk}{b} \left[ \frac{1}{2} + \frac{b}{l\varrho} \left( 1 - 3 \frac{x^2}{b^2} \right) \right],$$

für eine Last  $K$  am Ausleger  $G_1A$ :

$$(47) \quad X_c = \frac{Kk(2 - 3\nu)}{2b\varrho},$$

für eine Last  $K$  am Koppelträger  $CG_1$ :

$$(48) \quad X_c = - \frac{Kk(2 - 3\nu)}{2b\varrho} \cdot \frac{b_1}{l_1}.$$

Vorzeichenfehler sind ausgeschlossen, wenn man die Gestalt der Biegelinie für den Zustand  $X_b = -1$  betrachtet. In dem in Fig. 153 angenommenen Falle  $2 > 3\nu$  erfährt z. B. der Koppelträger  $CG_1$  eine Rechtsdrehung; die oberhalb der Balkenachse liegenden Punkte  $m$  verschieben sich nach rechts; folglich müssen links gerichtete Kräfte  $K$  ein negatives  $X_c$  hervorbringen.

*Einfluß von Temperaturänderungen auf  $X_b$ .* In der Formel (31), Seite 144, ist  $2(l + b)$  an Stelle von  $l + b_2 + l_2$  zu setzen.  $\delta_{bb}$  ist jetzt doppelt so groß als in Nr. 48. Man erhält daher

$$(49) \quad X_{bt} = - \frac{12 \varepsilon EJt(l + b)\nu'}{f^2 l}.$$

Da wir annehmen, daß links und rechts vom Gelenke  $G$  dieselben Temperaturänderungen entstehen, so ergibt sich  $X_{ct} = 0$ .

Die Berechnung von  $X_b$  und  $X_c$  ist hiermit erledigt. Für die an den Säulenfüßen angreifenden Stützenwiderstände findet man jetzt

$$(50) \quad \begin{cases} A = A_o - \frac{f}{l} X_b - \frac{b}{l} X_c \\ B = B_o + \frac{f}{l} X_b - \left(1 + \frac{b}{l}\right) X_c \\ H = H_o^*) - \frac{1}{2} X_b - \frac{b\nu}{2f} X_c. \end{cases}$$

Das Angriffsmoment für einen Querschnitt des Balkens  $AB$  ist beispielsweise

$$(51) \quad M = M_o - H_o f + \frac{1}{2} X_b f + X_c \frac{b\nu}{2},$$

wo  $M_o$  das Moment für den Fall bedeutet, daß  $H_o = 0$ ,  $X_b = 0$ ,  $X_c = 0$  ist. Die Ermittlung der Einflußlinien bietet keine Schwierigkeit.

**50. Dreifach statisch unbestimmter Gelenkbalken, Fig. 155.** Der Balken ruht auf drei Säulen und besitzt an den Enden wagerechte Gleitlager. Als statisch unbestimmtes Hauptsystem wird wieder das in Nr. 47 untersuchte Tragwerk eingeführt. Es ist also  $H_o$  gleichbedeutend mit dem in Nr. 47 berechneten Werte  $X_a$ ; nur ist zu beachten, daß die Stützweite des Hauptsystems nunmehr  $2l$  statt  $l$  ist. Als statisch unbestimmte Größen führen wir die am Fuße der mittelsten Säule angreifenden Stützenwiderstände  $X_b$  und  $X_c$  ein. Der statisch unbestimmte

\*)  $H_o$  ist gleichbedeutend mit dem in Nr. 47 ermittelten Werte  $X_a$ .

Teil des Tragwerks sei symmetrisch in bezug auf die Achse der mittelsten Säule. Dann ist

$$\delta_{bc} = \delta_{cb} = 0,$$

und es ergibt sich

$$X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb} + \delta_{bt}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = \frac{\sum P_m \delta_{mc} + \delta_{ct}}{\delta_{cc}}.$$

Wir nehmen konstante Querschnitte  $J$  und  $J_1$  an.

Fig. 156 zeigt den Belastungszustand  $X_b = -1$ . Es entsteht nach Gleichung (11), Seite 138:

$$(52) \quad H_b = \frac{l\nu''^*}{4f}, \text{ wo}$$

$$(53) \quad \nu'' = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{f^2 l}}.$$

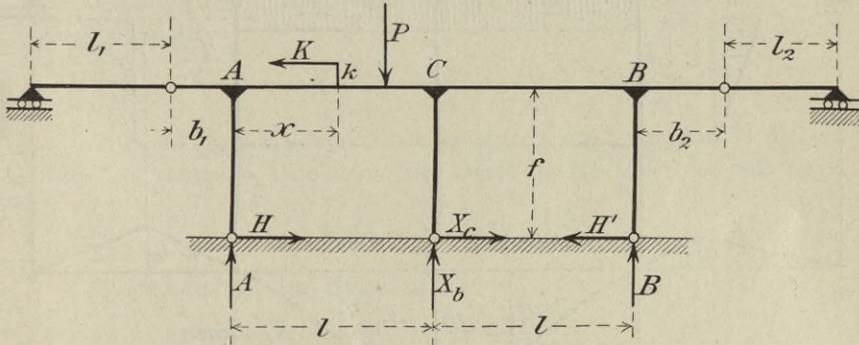


Fig. 155.

Die  $M_b$ -Fläche des Balkens besteht aus einem Dreieck von der Höhe  $0,5l$  und einem Rechteck von der Höhe  $\frac{1}{4} \nu'' l$ . Die  $M_b$ -Fläche jeder äußeren Säule ist ein Dreieck von der Höhe  $\frac{1}{4} \nu'' l$ . Man erhält nach Gleichung (23), Seite 101

$$EJ\delta_{bb} = 2 \cdot \frac{l}{3} \left[ \frac{l^2 \nu''^2}{16} - \frac{l\nu''}{4} \left( 0,5l - \frac{l\nu''}{4} \right) + \left( 0,5l - \frac{l\nu''}{4} \right)^2 \right] + 2 \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{3}.$$

\*) Man hat  $\xi = \xi' = l$  zu setzen und im Nenner statt  $l$  die Stützweite  $2l$  einzuführen.

Setzt man zur Abkürzung

$$(54) \quad \rho' = 1 - \frac{3}{2} \nu + \frac{3}{4} \nu^2 + 4 \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{l^3},$$

so ergibt sich

$$(55) \quad EJ\delta_{bb} = \frac{l^3 \rho'}{6}.$$

Da nun die  $X_b$ -Linie im Punkte  $C$  die Ordinate 1 hat, so lautet die Gleichung des Zweiges  $AC'$  dieser Linie

$$(56) \quad \eta = 1,0 \frac{x}{l} + \omega_D \frac{0,5l \cdot l^2}{6EJ\delta_{bb}} - \omega_R \frac{0,25l\nu'' \cdot l^2}{2EJ\delta_{bb}},$$

$$(56) \quad \eta = 1,0 \frac{x}{l} + \frac{\omega_D}{2\rho'} - \frac{3\omega_R}{4\rho'}.$$

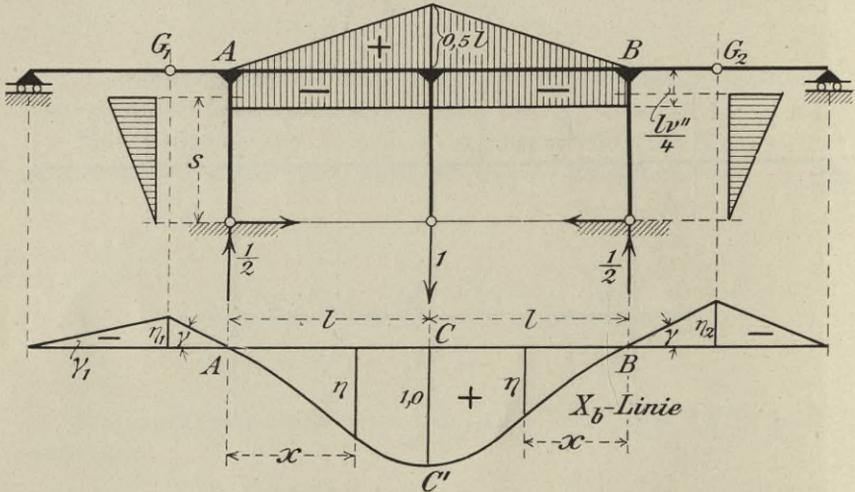


Fig. 156.

Der Neigungswinkel der Tangente ist bestimmt durch

$$(57) \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{1,0}{l} + \frac{1}{2l\rho'} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2}\right) - \frac{3}{4l\rho'} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right).$$

Für  $x = 0$  erhält man die Neigung\*)

$$(58) \quad \gamma = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{1}{2\rho'} - \frac{3}{4\rho'}\right),$$

und es entsprechen daher den Gelenkpunkten  $G_1$  und  $G_2$  die Ordinaten

$$(59) \quad \eta_1 = -b_1\gamma, \quad \eta_2 = -b_2\gamma.$$

\*) Wir fassen die  $X_b$ -Linie als eine in sehr großem Maßstabe gezeichnete Biegelinie auf und schreiben daher kurz  $\gamma$  statt  $\text{tg } \gamma$ .

Im Belastungsfalle  $X_b = -1$  ist die wagerechte Verschiebung sämtlicher Punkte der Achse des Balkens gleich Null. Der Einfluß einer im Abstände  $x$  von  $A$  in der Höhe  $k$  oberhalb der Balkenachse angreifenden wagerechten Last  $K$  ist deshalb

$$(60) \quad X_b = -Kk \frac{d\eta}{dx}.$$

Greift  $K$  an einem Ausleger an, so erzeugt es

$$(61) \quad X_b = \pm Kk\gamma,$$

und zwar gilt das obere Vorzeichen für den Ausleger  $b_2$ , das untere für  $b_1$ .

Die Koppelträger drehen sich um

$$\gamma_1 = \frac{b_1}{l_1} \gamma, \quad \text{bzw.} \quad \gamma_2 = \frac{b_2}{l_2} \gamma.$$

Eine am linken oder rechten Koppelträger angreifende Last  $K$  erzeugt demnach

$$(62) \quad X_b = +Kk\gamma \frac{b_1}{l_1}, \quad \text{bzw.} \quad X_b = -Kk\gamma \frac{b_2}{l_2}.$$

Hinsichtlich der Temperaturänderungen machen wir wieder die auf Seite 137 erklärten Annahmen. Der Inhalt der  $M_b$ -Fläche des Balkens ist

$$\int M_b dx = \frac{1}{2} l^2 (1 - \nu'').$$

Weiter ist für den Balken  $AB$

$$N_b = -H_b = -\frac{l\nu''}{4f}.$$

Gleichmäßige Erwärmung der Säulen ist ohne Einfluß auf  $X_b$ , weil für die drei Säulen zusammen  $\sum N_b = 0$  ist.

Man erhält mit  $t_u - t_o = \Delta t$

$$\delta_{bt} = \int M_b \frac{\varepsilon \Delta t}{h} dx + \int N_b \varepsilon t dx = \frac{\varepsilon \Delta t l^2}{2h} (1 - \nu'') - \varepsilon t \frac{l^2 \nu''}{4f},$$

$$X_b = \frac{EJ\delta_{bt}}{EJ\delta_{bb}},$$

$$(63) \quad X_b = \frac{3\varepsilon EJ\rho'}{fl} \left[ \Delta t \frac{f}{h} (1 - \nu'') - t\nu'' \right].$$

Wir wenden uns jetzt zur Ermittlung von  $X_c$ . Den Belastungszustand  $X_c = -1$  zeigt Fig. 157. Die  $M_c$ -Fläche des Balkens besteht aus zwei Rechtecken von der Höhe  $\mp 0,5f$ ; für die Säulen erhält man Dreiecke von den Höhen  $\mp 0,5s$  und  $\mp 1,0s$ . Folglich ist

$$EJ\delta_{cc} = 2 \cdot (0,5f)^2 l + \left( \frac{s^3}{3} + \frac{2(0,5s)^2 s}{3} \right) \frac{J}{J_1},$$

$$(64) \quad EJ\delta_{cc} = \frac{f^2 l}{2} \varphi'', \text{ wo}$$

$$(65) \quad \varphi'' = 1 + 3 \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{f^2 l}.$$

Die Gleichung der  $X_c$ -Linie des Balkens  $AB$  ist

$$(66) \quad \begin{cases} \eta = \mp \omega_R \frac{0,5fl^2}{2EJ\delta_{cc}}, \\ \eta = \mp \omega_R \frac{l}{2f\varphi''}. \end{cases}$$

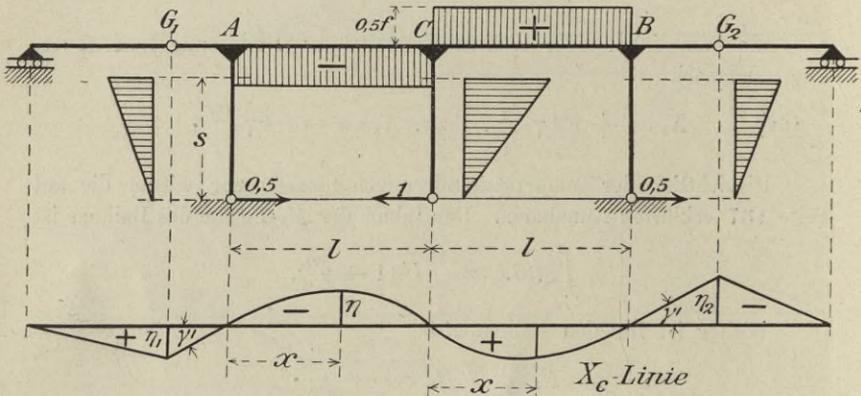


Fig. 157.

Das obere Vorzeichen gilt für den Teil  $AC$ , das untere für den Teil  $CB$ . Die  $X_c$ -Linie besteht aus zwei Parabeln von den Pfeilhöhen  $\mp \frac{l}{8f\varphi''}$ . Die Neigungswinkel der Parabeltangente in  $A$  und  $B$  sind ohne Vorzeichen genommen

$$\gamma' = \frac{1}{2f\varphi''},$$

und man findet daher

$$(67) \quad \eta_1 = + b_1 \gamma' = \frac{b_1}{2f\varphi''}, \quad \eta_2 = - \frac{b_2}{2f\varphi''}.$$

Um den Einfluß wagerechter Lasten  $K$  festzustellen, müssen wir zunächst das Verhältnis  $\nu'''$  der wagerechten Verschiebung der Balken-

achse für den Belastungsfall  $X_c = -1$  zur Verschiebung  $\delta_{cc}$  angeben. Indem wir die  $X_c$ -Linie als Biegelinie auffassen, finden wir (Fig. 158)

$$\begin{aligned} \nu''' &= f\gamma' + \frac{0,5 s^3 J}{3 J_1 E J \delta_{cc}}, \text{ das ist} \\ (68) \quad \nu''' &= \frac{1}{2\rho''} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{f^2 l} \right) = \frac{1}{2\rho''\nu} \\ (69) \quad X_c &= K \left( \nu''' - k \frac{d\eta}{dx} \right), \end{aligned}$$

also für eine Last zwischen  $C$  und  $B$  im Abstände  $x$  von  $C$ :

$$(70) \quad X_c = K\nu''' \left[ 1 - \frac{k\nu}{f} \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \right],$$

für eine Last zwischen  $A$  und  $B$  im Abstände  $x$  von  $A$ :

$$(71) \quad X_c = K\nu''' \left[ 1 + \frac{k\nu}{f} \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \right],$$

für eine Last auf dem linken oder rechten Ausleger:

$$(72) \quad X_c = K\nu''' \left( 1 + \frac{k\nu}{f} \right),$$

für eine Last auf dem linken oder rechten Koppelpalken:

$$(73) \quad X_c = K\nu''' \left( 1 - \frac{k b_1 \nu}{f l_1} \right), \text{ bzw. } X_c = K\nu''' \left( 1 + \frac{k b_2 \nu}{f l_2} \right).$$

Ist die Achse der mittelsten Säule auch für die Temperaturänderungen eine Symmetrieachse, so ist der Einfluß der Temperaturänderungen auf  $X_c$  gleich Null.

Damit ist die Berechnung von  $X_b$  und  $X_c$  erledigt. Nun findet man

$$(74) \quad H = H_0 - X_b \frac{l\nu''}{4f} - \frac{1}{2} X_c.$$

Wir wiederholen, daß  $H_0$  nach den in Nr. 47 für  $X_a$  angegebenen Formeln berechnet wird und daß in diesen Formeln die Stützweite  $l$  ersetzt werden muß durch  $2l$ . Die  $H_0$ -Linie ist also zwischen  $A$  und  $B$  eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$(75) \quad \eta_0 = \frac{l\nu''}{4f};$$

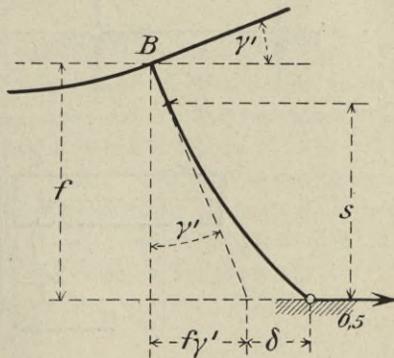


Fig. 158.

in den Gelenkpunkten  $G_1$  und  $G_2$  besitzt sie die Ordinaten

$$\eta_{11} = 2\eta_o \frac{b_1}{l} \quad \text{und} \quad \eta_{12} = 2\eta_o \frac{b_2}{l}.$$

Kennt man  $X_b$ ,  $X_c$  und  $H$ , so findet man die übrigen Stützwiderstände  $A$ ,  $B$ ,  $H'$  mittels der drei Gleichgewichtsbedingungen. Die

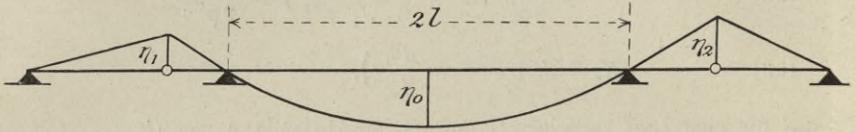


Fig. 159.

Herleitung der Einflußlinien für die Querkräfte und die Momente bietet keine Schwierigkeit. Für die Momente des Teiles  $AC$  kann auch das in Abteilung I, § 13 Nr. 153, beschriebene Verfahren benutzt werden;  $M_I$  und  $M_{II}$  bedeuten dann die Momente für die Endquerschnitte des Teiles  $AC$ .

**51. Fünffach statisch unbestimmter Gelenkbalken, Fig. 160.**

Als lehrreiches Übungsbeispiel empfehlen wir dem Leser die Unter-

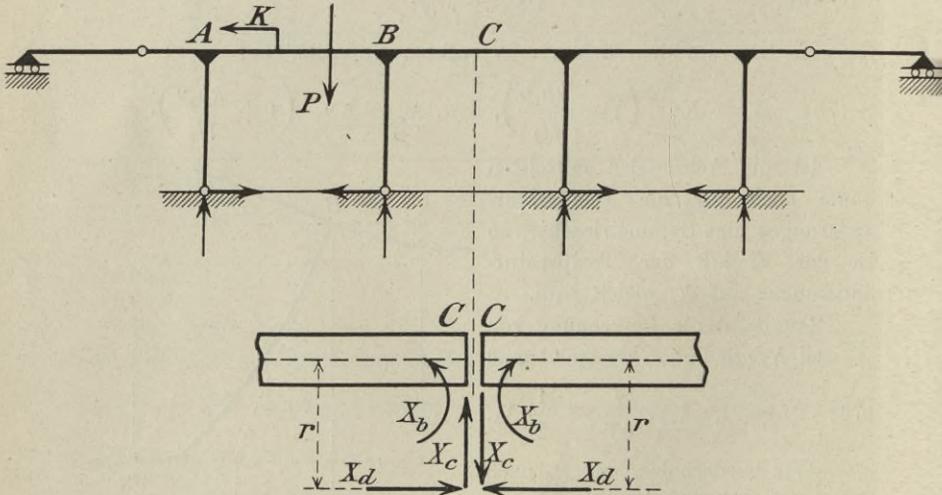


Fig. 160.

suchung eines auf vier Säulen ruhenden Balkens, der in den Außenöffnungen Gelenke und an den Enden wagerechte Gleitlager besitzt, und dessen lotrechte Mittellinie eine Symmetrieachse ist. Die Wahl der statisch unbestimmten Größen  $X_b$ ,  $X_c$ ,  $X_d$  ist in der Fig. 160 angegeben. Das Hauptsystem besteht aus zwei einfach statisch unbestimmten Trag-

werken von der in Nr. 47 untersuchten Art. Die Strecke  $r$  wird so gewählt, daß  $\delta_{ac} = \delta_{ca} = 0$  wird. Daß die Verschiebungen  $\delta_{bc} = \delta_{cb}$  und  $\delta_{ba} = \delta_{ab}$  gleich Null sind, folgt aus der Symmetrie. Wir verweisen auf die ähnlichen Aufgaben in Abteilung I, § 11, Nr. 128 und § 15, Nr. 167. Man kann auch das Tragwerk in Fig. 152 zum Hauptssystem wählen. Es tritt dann nur eine neue statisch unbestimmte Größe, ein Moment  $X_a$  auf. Das Tragwerk ist wegen des ungünstigen Einflusses der Temperaturänderungen nicht zu empfehlen.

**52. Gelenkloser Balken auf drei Stützen. Die Mittelstütze ist eine Säule mit Fußgelenk.** An dem einen Ende sei ein wagerechtes Gleitlager, an dem anderen ein festes Lager vorhanden.

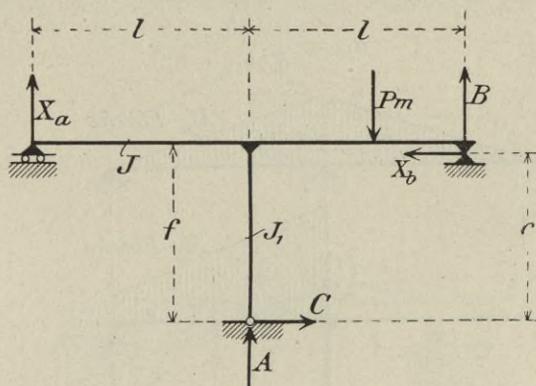


Fig. 161.

Als statisch unbestimmte Größen sollen der lotrechte Widerstand  $X_a$  des Gleitlagers und der wagerechte Widerstand  $X_b$  des festen Lagers eingeführt werden. Außerdem entstehen noch die drei Stützenwiderstände  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Solange nur lotrechte Lasten wirken, ist  $C = X_b$ . Gesucht sind die Einflußlinien für  $X_a$  und  $X_b$ . Balken und Säule haben unveränderliche Querschnitte mit den Trägheitsmomenten  $J$  bzw.  $J_1$ . Der unwesentliche Einfluß der Längskräfte  $N$  soll vernachlässigt werden.

Die Momentenflächen ( $M_a$ ,  $M_b$ ) für die Belastungszustände  $X_a = -1$  und  $X_b = -1$  sind in Fig. 162 dargestellt worden. Man findet mit Hilfe der in Nr. 35 entwickelten Formeln

$$\begin{aligned}
 EJ \delta_{aa} &= \int M_a^2 dx = \frac{2}{3} l^3 \\
 EJ \delta_{ab} &= \int M_a M_b dx = -\frac{l^2}{6} (2f + e) \\
 EJ \delta_{bb} &= \int M_b^2 dx = \frac{l}{3} (f^2 + fe + e^2) + \frac{J}{J_1} \frac{s^3}{3}
 \end{aligned}$$

Die Auflösung der beiden Gleichungen

$$X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = \delta_{ma}$$

$$X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} = \delta_{mb}$$

liefert

$$X_a = \alpha_{aa} \delta_{ma} + \alpha_{ab} \delta_{mb}$$

$$X_b = \alpha_{ba} \delta_{ma} + \alpha_{bb} \delta_{mb},$$

wo

$$\alpha_{aa} = \frac{\delta_{bb}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}$$

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba} = \frac{-\delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}$$

$$\alpha_{bb} = \frac{\delta_{aa}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

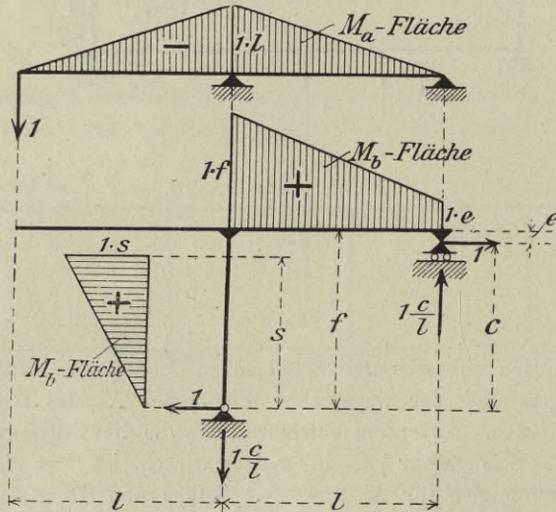


Fig. 162.

Es sei nun

$$l = 12^m, \quad e = 0,5^m, \quad f = 5,0^m, \quad c = 4,5^m, \quad s = 4,5^m, \quad \frac{J}{J_1} = 8,0.$$

Dann ergibt sich

$$EJ \delta_{aa} = 1152, \quad EJ \delta_{ab} = -252, \quad EJ \delta_{bb} = 354.$$

Die Größe  $EJ$  ist ohne Einfluß auf  $X_a$  und  $X_b$  und wird zweckmäßig gleich 1 gesetzt. Das Verhältnis  $J:J_1$  ist bei der Berechnung von  $\delta_{bb}$  berücksichtigt worden. Man findet

$$\alpha_{aa} = 1,028 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_{ab} = 0,732 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_{bb} = 3,346 \cdot 10^{-3}.$$

Die Einflußlinie für  $X_a$  ist nun die Biegelinie für den Belastungsfall  $X_a = -\alpha_{aa}$ ,  $X_b = -\alpha_{ab}$ . Vgl. Nr. 36, Seite 103. Es entstehen die Momente

$$M = \alpha_{aa}M_a + \alpha_{ab}M_b.$$

Die Momentenfläche setzt sich nach Fig. 163 aus zwei Dreiecken und einem Rechteck zusammen, deren Höhen

$$\begin{aligned} z_1 &= -\alpha_{aa}l &= -12,34 \cdot 10^{-3}, \\ z_2 &= -\alpha_{aa}l + \alpha_{ab}c &= -9,04 \cdot 10^{-3}, \\ z_3 &= &\alpha_{ab}e &= +0,37 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

sind. Die zugehörige, mit der Polweite 1 gezeichnete Seillinie ist die Einflußlinie für  $X_a$ . Da nun eine in  $C$  angreifende Last  $P = 1$  den

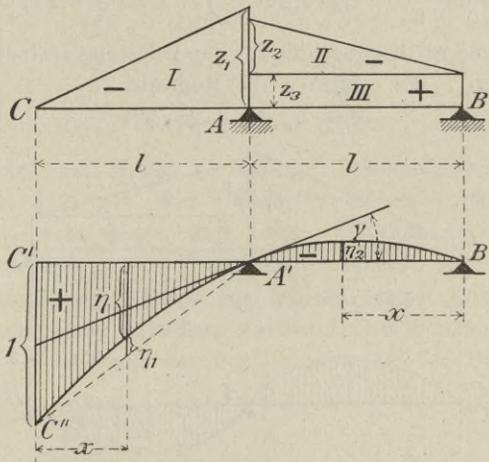


Fig. 163.

Widerstand  $X_a = 1$  erzeugt, so muß sich  $\overline{C''C'} = 1$  ergeben. Diese Eigenschaft kann zu einer Prüfung der Zahlenrechnung benutzt werden. Das statische Moment des Teiles I der Momentenfläche in bezug auf die Lotrechte durch  $C$  ist gleich  $\frac{z_1 l^2}{3}$ , und es folgt deshalb

$$\overline{C''C'} = \frac{z_1 l^2}{3} + l\gamma,$$

wo  $\gamma$  den Druck bedeutet, den die Belastungen II und III auf die Stütze  $A$  des Balkens  $AB$  ausüben; man erhält

$$\overline{C''C'} = \frac{z_1 l^2}{3} + l \left( \frac{z_2 l}{3} - \frac{z_3 l}{2} \right) = (z_1 + z_2) \frac{l^2}{3} - z_3 \frac{l^2}{2},$$

in welchen Ausdruck für  $z_1, z_2, z_3$  die absoluten Werte einzusetzen sind. Dies gibt

$$\overline{C''C'} = \left[ (12,34 + 9,04) \frac{12^2}{3} - 0,37 \frac{12^2}{2} \right] 10^{-3} = 0,9996 \sim 1.$$

Da nun der in lotrechter Richtung gemessene Abstand  $\eta_1$  der Biegelinie  $C''A'$  von der Geraden  $C''A'$  gleich dem Momente für den Querschnitt eines einfachen Balkens  $AC$  ist, dessen Belastungsfläche das Dreieck  $I$  ist, so lautet die Gleichung der  $X_a$ -Linie des Teiles  $CA$

$$\eta = 1 \frac{l-x}{l} - \omega_D 12,34 \frac{12^2}{6} \cdot 10^{-3} = 1 \frac{l-x}{l} - 0,296 \omega_D.$$

Für den Teil  $AB$  erhält man

$$\eta_2 = \left( -\omega_D \cdot 9,04 \frac{12^2}{6} + \omega_R \cdot 0,37 \frac{12^2}{2} \right) 10^{-3} = -0,217 \omega_D + 0,027 \omega_R.$$

Die  $X_b$ -Linie ist Biegelinie für den Belastungszustand  $X_a = -\alpha_{ba}$  und  $X_b = -\alpha_{bb}$ . Es entstehen die Momente

$$M = \alpha_{ba} M_a + \alpha_{bb} M_b.$$

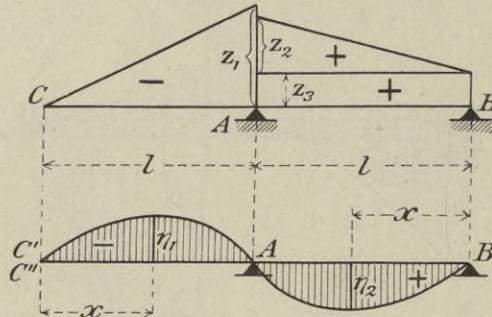


Fig. 164.

Die Momentenfläche, Fig. 164, ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} z_1 &= -\alpha_{ba} l &&= -8,78 \cdot 10^{-3}, \\ z_2 &= -\alpha_{ba} l + \alpha_{bb} c &&= +6,27 \cdot 10^{-3}, \\ z_3 &= &&+ \alpha_{bb} e = +1,67 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Das gibt

$$\overline{C''C''} = \left[ (-8,78 + 6,27) \frac{12^2}{3} + 1,67 \frac{12^2}{2} \right] 10^{-3} = -0,0002 \sim 0.$$

Die Gleichung der Einflußlinie für  $X_b$  lautet zwischen  $C$  und  $A$ :

$$\eta_1 = -\omega_D 8,78 \frac{12^2}{6} 10^{-3} = -0,211 \omega_D,$$

und zwischen  $A$  und  $B$ :

$$\eta_2 = +\omega_D 6,27 \frac{12^2}{6} 10^{-3} + \omega_R 1,67 \frac{12^2}{2} 10^{-3} = +0,150 \omega_D + 0,120 \omega_R.$$

In der folgenden Tabelle sind die nach den vorstehenden Gleichungen berechneten Ordinaten der Einflußlinien für  $X_a$  und  $X_b$  zusammengestellt worden.

$\frac{x}{l}$	Balkenteil CA		Balkenteil AB	
	$X_a$	$-X_b$	$X_a$	$X_b$
0	1,000			
0,1	0,871	0,021	-0,019	+0,026
0,2	0,743	0,041	-0,037	+0,048
0,3	0,619	0,058	-0,054	+0,066
0,4	0,501	0,071	-0,066	+0,079
0,5	0,389	0,079	-0,075	+0,086
0,6	0,286	0,081	-0,077	+0,086
0,7	0,194	0,075	-0,072	+0,079
0,8	0,115	0,061	-0,058	+0,062
0,9	0,049	0,036	-0,035	+0,036

Den Einfluß der Kräfte  $K$  und der Temperaturänderungen haben wir bereits im § 9 nach dem Castiglianoschen Verfahren bestimmt. Wir empfehlen dem Leser aber, diese Einflüsse auch auf dem in Nr. 47—49 eingeschlagenen Wege zu untersuchen.

**53. Gelenkloser Balken mit einem festen Endauflager auf beliebig vielen, starr mit ihm verbundenen Säulen.** Bedeutet  $e_r$  die lotrechte Verschiebung des Schnittpunktes  $r$  der Balkenachse und

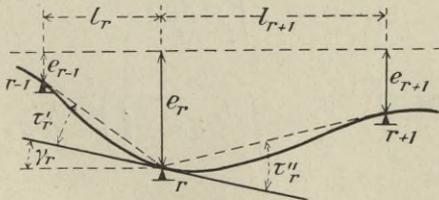


Fig. 165.

$r$ -ten Säulenachse, und sind  $\gamma_r$ ,  $\tau'_r$ ,  $\tau''_r$  die Winkel, welche die in  $r$  an die elastische Linie des Balkens gelegte Tangente mit der Wagerechten und den Geraden  $(r-1)-r$  und  $r-(r+1)$ , Fig. 165, bildet, so ist

$$(76) \quad \tau'_r = -\gamma_r + \frac{\Delta e_r}{l_r}, \quad \tau''_r = +\gamma_r - \frac{\Delta e_{r+1}}{l_{r+1}}, \quad \text{wo}$$

$$\Delta e_r = e_r - e_{r-1}, \quad \Delta e_{r+1} = e_{r+1} - e_r.$$

Der Winkel  $\gamma_r$  stimmt überein mit dem Drehungswinkel der oberen Endtangente der elastischen Linie der Säule.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Die Säule ist am unteren Ende lotrecht eingespannt, Fig. 166. Die auf den oberen Endquerschnitt der Säule wirkenden Kräfte ersetzen wir durch ein Kräftepaar, dessen Moment  $\mathfrak{M}_r$  sei, und zwei sich in  $r$  schneidende Einzelkräfte  $C_r$  und  $H_r$ . Punkt  $r$  möge sich gegen den Fußpunkt  $r'$  der Säule in wagerechtem Sinne um  $e_r'$  verschieben; weiter möge sich infolge des Nachgebens des Widerlagers der Säule die untere Endtangente der elastischen Linie der Säule im Sinne von  $\mathfrak{M}_r$  um  $\gamma_r'$  drehen. Dann ist

$$\gamma_r - \gamma_r' = \int_c^f \frac{H_r x + \mathfrak{M}_r}{EJ} dx$$

$$e_r' - f\gamma_r' = \int_c^f \frac{H_r x + \mathfrak{M}_r}{EJ} x dx,$$

und hieraus folgt:

$$(77) \quad \mathfrak{M}_r = + \frac{EJ_r (\gamma_r - \gamma_r')}{a_r} - \frac{EJ_r (e_r' - f\gamma_r')}{b_r^2}$$

$$(78) \quad H_r = - \frac{EJ_r (\gamma_r - \gamma_r')}{b_r^2} + \frac{EJ_r (e_r' - f\gamma_r')}{d_r^3},$$

wo

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_r = \frac{\int_c^f x^2 \frac{J_r}{J} dx \int_c^f \frac{J_r}{J} dx - \left( \int_c^f x \frac{J_r}{J} dx \right)^2}{\int_c^f x^2 \frac{J_r}{J} dx} \\ b_r^2 = \frac{\int_c^f x^2 \frac{J_r}{J} dx \int_c^f \frac{J_r}{J} dx - \left( \int_c^f x \frac{J_r}{J} dx \right)^2}{\int_c^f x \frac{J_r}{J} dx} \\ d_r^3 = \frac{\int_c^f x^2 \frac{J_r}{J} dx \int_c^f \frac{J_r}{J} dx - \left( \int_c^f x \frac{J_r}{J} dx \right)^2}{\int_c^f \frac{J_r}{J} dx} \end{array} \right.$$

$J_r$  bedeutet ein beliebig gewähltes Trägheitsmoment.

Ist der Säulenquerschnitt unveränderlich und bezeichnet  $J_r$  sein Trägheitsmoment, so ergibt sich

$$(80) \quad a_r = \frac{s^3}{4(f^2 + fc + c^2)}, \quad b_r^2 = \frac{s^3}{6(f+c)}, \quad d_r^3 = \frac{s^3}{12}.$$

2. Die Säule ist am unteren Ende drehbar befestigt, Fig. 167. Man erhält für unveränderlichen Querschnitt

$$e_r' = f\gamma_r - \int_0^s \frac{Mx dx}{EJ_r} = f\gamma_r - \frac{H_r s^3}{3EJ_r},$$

woraus, mit Rücksicht auf die Bedingung

$$(81) \quad \mathfrak{M}_r = Hf,$$

sich ergibt:

$$(82) \quad \mathfrak{M}_r = \frac{3fEJ_r}{s^3} (f\gamma_r - e_r').$$

Hinsichtlich der Bedeutung von  $J_r$  bei veränderlichem Säulenquerschnitte verweisen wir auf Seite 134, Gleichung (7).

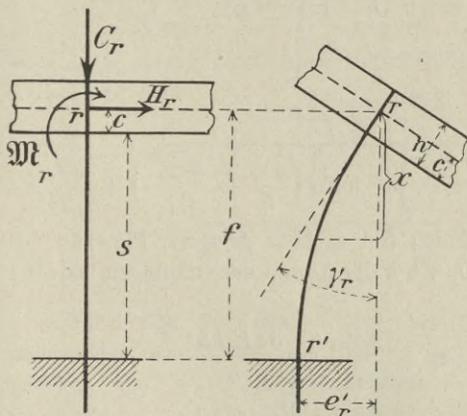


Fig. 166.

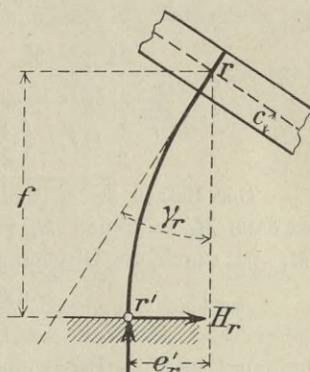


Fig. 167.

Wir führen jetzt links und rechts von  $r$  zwei unendlich nahe Schnitte und bezeichnen das Biegemoment für den Schnitt links von  $r$  mit  $M_r'$ , rechts von  $r$  mit  $M_r''$ . Sodann betrachten wir das Balkenstück  $(r-1) - r$ . An seinen Enden greifen die Momente  $M''_{r-1}$  und  $M_r'$  an. Ist der Querschnitt des Balkens unveränderlich, so bestehen nach Seite 28, Gleichung (7), die Beziehungen:

$$(83) \quad \begin{cases} M''_{r-1} + 2M_r' = \frac{6EJ}{l_r} \tau_r' - \frac{6\mathfrak{Q}_{or}}{l_r} - \frac{3\varepsilon EJ\Delta t}{h} \\ 2M''_{r-1} + M_r' = \frac{6EJ}{l_r} \tau''_{r-1} - \frac{6\mathfrak{M}_{or}}{l_r} - \frac{3\varepsilon EJ\Delta t}{h}; \end{cases}$$

sie liefern für  $M_r'$  den Wert

$$(84) \quad M_r' = \frac{2EJ}{l_r} (2\tau_r' - \tau_{r-1}'') - \frac{2}{l_r^2} (2\mathfrak{Q}_{or} - \mathfrak{R}_{or}) - \frac{\varepsilon EJ\Delta t}{h},$$

und ganz ebenso ergibt sich

$$(85) \quad M_r'' = \frac{2EJ}{l_{r+1}} (2\tau_r'' - \tau_{r+1}') - \frac{2}{l_{r+1}^2} (2\mathfrak{R}_{o(r+1)} - \mathfrak{Q}_{o(r+1)}) - \frac{\varepsilon EJ\Delta t}{h}.$$

Setzt man die vorstehenden Werte in die Gleichgewichtsbedingung

$$(86) \quad M_r' - M_r'' = \mathfrak{M}_r,$$

und drückt die Winkel  $\tau$  und Momente  $\mathfrak{M}$  mit Hilfe der Formeln (76) und (77) oder (82) durch die Winkel  $\gamma$  aus, so gelangt man zu einer Gleichung, welche die drei aufeinanderfolgenden Winkel  $\gamma_{m-1}$ ,  $\gamma_m$  und  $\gamma_{m+1}$  enthält. Für am unteren Ende lotrecht eingespannte Säulen ergibt sich z. B. mit der zur Abkürzung eingeführten Bezeichnung

$$(87) \quad \varphi_r = EJ\gamma_r$$

die Gleichung:

$$(88) \quad \frac{\varphi_{r-1}}{l_r} + \varphi_r \left( \frac{2}{l_r} + \frac{2}{l_{r+1}} + \frac{J_r}{2J} \frac{1}{a_r} \right) + \frac{\varphi_{r+1}}{l_{r+1}} = Z_r,$$

wo

$$(89) \quad Z_r = -\frac{2\mathfrak{Q}_{or} - \mathfrak{R}_{or}}{l_r^2} + \frac{2\mathfrak{R}_{o(r+1)} - \mathfrak{Q}_{o(r+1)}}{l_{r+1}^2} + \frac{1}{2} EJ_r \gamma_r' \left( \frac{1}{a_r} - \frac{f}{b_r^2} \right) + 3EJ \left( \frac{\Delta e_r}{l_r^2} + \frac{\Delta e_{r+1}}{l_{r+1}^2} \right) + \frac{EJ_r e_r'}{2b_r^2}.$$

Der Balken sei an den Enden frei drehbar gelagert, Fig. 168. Es ist dann  $M_o'' = 0$  und  $M_n' = 0$ , wo  $n$  die Anzahl der Öffnungen bedeutet.  $M_1'$  ist durch die Gleichung

$$2M_1' = \frac{6EJ}{l_1} \tau_1' - \frac{6\mathfrak{Q}_{o1}}{l_1} - \frac{3\varepsilon EJ\Delta t}{h}$$

bestimmt und die Bedingung  $M_1' - M_1'' = \mathfrak{M}_1$  liefert:

$$(90) \quad \varphi_1 \left( \frac{1,5}{l_1} + \frac{2}{l_2} + \frac{J_1}{2J} \frac{1}{a_1} \right) + \frac{\varphi_2}{l_2} = Z_1,$$

wo

$$(91) \quad Z_1 = -\frac{1,5\mathfrak{Q}_{o1}}{l_1} + \frac{2\mathfrak{R}_{o2} - \mathfrak{Q}_{o2}}{l_2^2} + \frac{\varepsilon EJ\Delta t}{4h} + \frac{1}{2} EJ_1 \gamma_1' \left( \frac{1}{a_1} - \frac{f}{b_1^2} \right) + 3EJ \left( \frac{0,5\Delta e_1}{l_1} + \frac{\Delta e_2}{l_2} \right) + \frac{EJ_1 e_1'}{2b_1^2}.$$

In derselben Weise ist auch die letzte der aufzustellenden Gleichungen zu ändern.

Die Werte  $Z$  hängen nicht nur von den bekannten Lasten und Temperaturänderungen und den vorgeschriebenen, durch Beobachtung

gefundenen Verschiebungen der Widerlager ab; sie sind vielmehr auch Funktionen der vorläufig noch unbekannt, durch die Kräfte  $C$  und  $H$  verursachten Längenänderungen des Balkens und der Säulen, sowie der wagerechten Verschiebung eines der beiden Stützpunkte  $o$  und  $n$  der Balkenachse. Bezeichnet man mit

- $t$  die Temperaturänderung für alle Punkte der Achse des Balkens,
- $t_u$  desgleichen der Unterkante des Balkens,
- $t_o = t_u - \Delta t$  desgleichen der Oberkante des Balkens,
- $t'$  die Temperaturänderung für alle Punkte sämtlicher Säulen,
- $F$  den Inhalt des konstant angenommenen Balkenquerschnitts,
- $F_r$  den Querschnitt der  $r^{\text{ten}}$  Säule,
- $u_r$  den Abstand der  $r^{\text{ten}}$  Säule vom Stützpunkte  $o$ ,

so ist

$$e_r = \frac{C_r s_r}{E F_r} - \varepsilon t' f_r + e_{r,w}$$

$$e'_r = e'_{o,w} - \sum_{i=1}^{i=r} \frac{H_i l_i}{E F} + \varepsilon t u_r + e'_{r,w},$$

wo  $e'_{o,w}$ ,  $e'_{r,w}$ ,  $e_{r,w}$  beobachtete Verschiebungen infolge des Nachgebens der Widerlager sind.

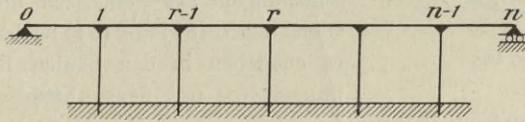


Fig. 168.

Wird nun der Einfluß der Kräfte  $C$  und  $H$  auf die Längenänderungen der Achsen des Balkens und der Säulen vernachlässigt, so bestehen alle Werte  $Z$  aus bekannten Größen und die Gleichungen zur Berechnung der Winkel  $\varphi$  haben dann dieselbe Form wie die Gleichungen

$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$$

zur Berechnung der Stützenmomente eines Balkens auf starren Stützen. Nach Berechnung der Werte  $\alpha$  und Bestimmung der Festpunkte läßt sich der Einfluß jedes einzelnen Wertes  $Z_r$  schnell angeben. Handelt es sich um den Einfluß einer Einzellast, so drücke man die  $\mathcal{Q}_o$  und  $\mathcal{R}_o$  durch die Zahl  $\omega_D$  aus. Vgl. Seite 30.

Soll die Veränderlichkeit des Balkenquerschnitts berücksichtigt werden, so treten an die Stelle der Gleichungen (83) die Gleichungen

$$\tau'_r = \sum P_m \delta'_{mr} + \tau'_{rr} M'_r + \tau'_{r(r-1)} M''_{r-1}$$

$$\tau''_{r-1} = \sum P_m \delta''_{r-1} + \tau_{(r-1)r} M'_r + \tau''_{(r-1)(r-1)} M''_{r-1},$$

deren Koeffizienten mit Hilfe der Biegelinien für die Zustände  $M'_r = 1$  und  $M''_{r-1} = 1$  ermittelt werden. Der Einfluß wagerechter, außerhalb der Balkenachse angreifender Lasten  $K$  kann durch Hinzufügung von Gliedern  $\pm \sum K k \tau'$  bzw.  $\pm \sum K k \tau''$  berücksichtigt werden, wo  $\tau'$  und  $\tau''$  die Neigungswinkel der beiden Biegelinien bedeuten. Fig. 169.

*Anmerkung.* Die Aufgabe der Berechnung eines Balkens auf beliebig vielen, starr mit ihm verbundenen Säulen ist in der Literatur schon

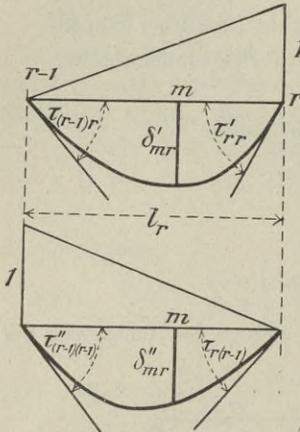


Fig. 169.

mehrfach behandelt worden, in allen dem Verfasser bekannt gewordenen Arbeiten aber unter Beschränkung auf den Einfluß lotrechter Lasten und unter der Voraussetzung, daß die wagerechte Verschiebung eines jeden Säulenkopfes gleich Null ist. Diese Voraussetzung ist nicht allein an die Vernachlässigung des verhältnismäßig geringen Einflusses der Kräfte  $H$  auf die Änderung der Länge der Balkenachse gebunden, sondern auch an die ganz unzulässige Streichung der von Temperaturänderungen herrührenden Verschiebungen  $e'$ . Die Wirkung dieser Verschiebungen  $e'u$  läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (88) und (91) leicht verfolgen\*); es entstehen in den Säulen Biegungsspannungen, die mit dem Abstände der Säulen

vom festgehaltenen Balkenende stark anwachsen. Wir verweisen auch auf das Zahlenbeispiel in Nr. 39. Dort ist nur eine einzige Säule, die noch dazu unten drehbar gelagert ist, vorhanden, und trotzdem ist der Einfluß der Temperaturänderungen schon recht erheblich.

Steht also an dem einen Ende des Balkens ein fester Punkt zur Aufnahme der wagerechten Lasten, z. B. der Bremskräfte eines Eisenbahnzuges zur Verfügung, so ist es im allgemeinen am zweckmäßigsten, jede Säule am Kopfe und am Fuße gelenkartig zu befestigen und unter Vernachlässigung der von den Drücken  $C$  herrührenden Längenänderungen der Säulen den Balken nach § 4 und § 10 zu berechnen. Der Einfluß der Temperaturänderungen der Säulen wird durch die auf Seite 35 in Fig. 39 eingeführte Verschiebung  $\delta_r$ , welche sich leicht durch die Strecken  $e = \epsilon t f$  ausdrücken läßt, berücksichtigt.

Die feste Vernietung von Balken und Säule ist aber wichtig für Hochbahnen, deren Tragbalken auf einer langen Reihe von Säulen ruhen.

\*) Die Gleichungen (88) und (91) ermöglichen auch eine nachträgliche Prüfung des Einflusses der von Kräften  $C$  und  $H$  herrührenden Längenänderungen.

Hier wird es oft zweckmufig sein, die Säulen zur Aufnahme der Bremskräfte heranzuziehen. Höhere Grade statischer Unbestimmtheit wird man allerdings auch in diesem Falle wegen des ungünstigen Einflusses der Temperaturänderungen vermeiden. Durch Einschaltung von Gelenken, darunter auch solche mit wagerechten Spielräumen, wird man den Grad der statischen Unbestimmtheit entsprechend herabsetzen. Die in Nr. 47 bis 53 vorgeführten Untersuchungen dürften genügen, um die Berechnung derartiger Konstruktionen zu erläutern. Bei der in Nr. 47 behandelten Anordnung ist der Einfluß der Wärmeschwankungen am geringsten. Allerdings muß die auf einen Brückenabschnitt wirkende Bremskraft von nur zwei Säulen aufgenommen werden.

 12.

**Balken auf schwimmenden Unterstutzungen (Schiffbrücken).**

54. Wir gehen jetzt dazu über, die im  8 kurz angedeuteten Aufgaben über die Berechnung der Streckbalken der Schiffbrücken ausführlicher zu behandeln. Es soll der Einfluß lotrechter Lasten mit Hilfe der Gleichungen

$$(1) \begin{cases} L_a + \delta_a = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ba} - X_c \delta_{ca} - \dots \\ L_b + \delta_b = \sum P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{cb} - \dots \\ \dots \end{cases}$$

untersucht werden.

Für einen rechtwinklig zur Langssachse belasteten Balken, der sich ganz allgemein aus vollwandigen und fachwerkartigen Teilen zusammensetzen möge, gilt die Gleichung

$$(2) \quad \delta_{ik} = \int M_i M_k \frac{dx}{EJ} + \sum S_i S_k \varphi, \quad \varphi = \frac{s}{EF},$$

wo *i* und *k* zwei beliebige der Zeiger *a*, *b*, *c*, . . . bedeuten. Das Integral erstreckt sich über die auf Biegung beanspruchten vollwandigen Teile, die Summe über die Fachwerkstäbe. Die Rechnung gewinnt an Übersichtlichkeit, wenn die Schiffe durch gleichwertige Stäbe (Säulen) ersetzt werden. Bedeutet *F* den Inhalt des wagerechten Schiffsquerschnittes in der Höhe des Wasserspiegels und  $\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit des Wassers, und wird vorausgesetzt, daß die Schiffswande innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen senkrecht sind, so ist das Schiff einer Säule gleichwertig, für die

$$(3) \quad \varphi = \frac{1}{\gamma F}$$

ist. Ruhen die Balken unmittelbar auf den Borden der Schiffe, so schalte

man zwischen den Balken und den das Schiff ersetzenden Stab nach Fig. 170 einen Wagebalken ein und nehme diesen Balken starr an, weil die elastischen Formänderungen des Schiffes vernachlässigt werden dürfen. Auch rechne man wegen der Kleinheit der Schiffsneigung mit einem in der Mitte gestützten Wagebalken. Vgl. auch Seite 96.

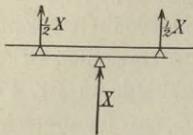


Fig. 170.

Die Lasten mögen in der Längsachse der Brücke angreifen. Eine Drehung der Schiffe um ihre Querachsen sei also ausgeschlossen.

Wir beginnen mit der Untersuchung von Schiffbrücken, die aus einzelnen, durch Gelenke miteinander verbundenen Gliedern bestehen, Fig. 171.

**1. Schiffbrücke, gebildet aus zweischiffigen Gliedern.**

**55. Allgemeines Verfahren.** Als statisch unbestimmte Größen führen wir die senkrechten Gelenkdrücke  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}, X_r, X_{r+1}, \dots$  ein, Fig. 171.  $X_r$  sei positiv, wenn es auf das  $r^{\text{te}}$  Glied

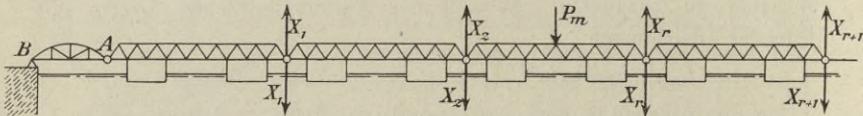


Fig. 171.

von unten nach oben und auf das  $(r + 1)^{\text{te}}$  Glied von oben nach unten wirkt. Die Biegungslinie für den Zustand  $X_r = -1$  zeigt Fig. 172; es werden nur zwei aufeinanderfolgende Glieder beansprucht. Die ursprünglich zusammenfallenden Gelenkpunkte  $r$  verschieben sich gegeneinander in senkrechter Richtung um  $\delta_{r,r}$ , die Punkte  $(r - 1)$  um  $\delta_{(r-1)r}$  und die Punkte  $r + 1$  um  $\delta_{(r+1)r}$ , und zwar sind diese Verschiebungen positiv zu nehmen, wenn sie im Sinne der Kräfte  $X = -1$  erfolgen, wenn also nach der Verbiegung der Endpunkt des linken Gliedes unter dem Endpunkte des rechten Gliedes liegt. Die Lage der Biegungslinie gegen die Abszissenachse  $KK$  ist bestimmt durch die senkrechten Schiffsverschiebungen

$$\frac{e_r}{d_r} \cdot \frac{1}{\gamma F_r}, \quad \frac{e'_r}{d_r} \cdot \frac{1}{\gamma F'_r}, \quad \frac{c_{r+1}}{d_{r+1}} \cdot \frac{1}{\gamma F_{r+1}}, \quad \frac{c'_{r+1}}{d_{r+1}} \cdot \frac{1}{\gamma F'_{r+1}}.$$

Bei genau passenden Gelenken besteht zwischen den Lasten  $P_m$  und den von diesen hervorgerufenen Gelenkdrücken  $X$  die aus den Gleichungen (1) folgende Beziehung

$$(4) \quad \delta_r = \sum P_m \delta_{mr} - X_{r-1} \delta_{(r-1)r} - X_r \delta_{r,r} - X_{r+1} \delta_{(r+1)r} = 0,$$

deren Übereinstimmung mit der zwischen den Stützenmomenten  $M_{r-1}$ ,  $M_r$ ,  $M_{r+1}$  eines Balkens auf starren Stützen bestehenden Gleichung

$$(5) \quad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$$

ohne weiteres zu den folgenden Aussagen führt:

I. Wird nur ein einziges Glied, beispielsweise das Glied  $(r - 1) r$  belastet, und sind die Gelenkdrücke  $X_{r-1}$  und  $X_r$  an den Enden dieses Gliedes bekannt, so kann man die übrigen Gelenkdrücke mit Hilfe von festen Punkten  $L$  und  $R$  bestimmen. Trägt man nämlich die  $X$  an den

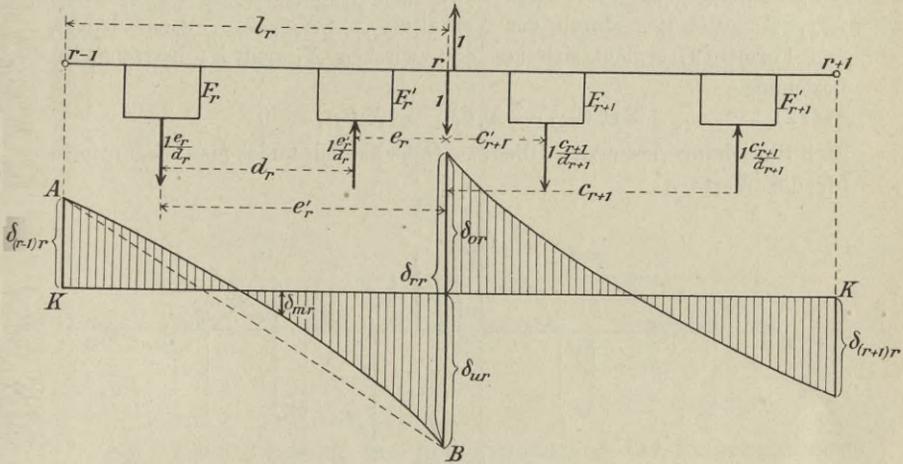


Fig. 172.

Gelenkstellen als Ordinaten auf, Fig. 173, und verbindet deren Endpunkte durch die Geraden  $g_{r-1}$ ,  $g_{r-2}$ ,  $\dots$   $g_{r+1}$ ,  $g_{r+2}$ ,  $\dots$ , so gehen die Geraden  $g_{r-1}$ ,  $g_{r-2}$ ,  $\dots$  durch die Festpunkte  $L_{r-1}$ ,  $L_{r-2}$ ,  $\dots$  und die Geraden  $g_{r+1}$ ,  $g_{r+2}$ ,  $\dots$  durch die Festpunkte  $R_{r+1}$ ,  $R_{r+2}$ ,  $\dots$ . Die Festpunkte  $L_r$  und  $R_r$  sind durch die Strecken

$$(6) \quad a_r = \frac{l_r}{1 + \alpha_r} \text{ und}$$

$$(7) \quad a'_r = \frac{l_r}{1 + \alpha'_r}$$

bestimmt. Die den einzelnen Gliedern entsprechenden Zahlen  $\alpha$  werden schrittweise mittels der Formel

$$(8) \quad \alpha_{r+1} = \frac{\delta_{rr}}{\delta_{(r+1)r}} - \frac{1}{\alpha_r} \frac{\delta_{(r-1)r}}{\delta_{(r+1)r}}$$

berechnet, wobei von

$$(9) \quad \alpha_2 = \frac{\delta_{1.1}}{\delta_{2.1}}$$

ausgegangen wird. Und ebenso findet man, am rechten Ende beginnend,

$$(10) \quad \chi_r' = \frac{\delta_{rr}}{\delta_{(r-1)r}} \frac{1}{\chi'_{r+1}} \frac{\delta_{(r+1)r}}{\delta_{(r-1)r}},$$

wobei man (wenn die Anzahl der Glieder gleich  $n$  ist) von

$$(11) \quad \chi'_{n-1} = \frac{\delta_{(n-1)(n-1)}}{\delta_{(n-2)(n-1)}}$$

ausgeht. Zu der Formel (8) gelangt man bekanntlich, wenn man in Gleichung (4) das Glied  $\sum P_m \delta_{mr}$  streicht und das Verhältnis  $X_{r+1} : X_r = -\chi_{r+1}$  durch das Verhältnis  $X_r : X_{r-1} = -\chi_r$  ausdrückt, und Formel (9) ergibt sich aus der zwischen  $X_1$  und  $X_2$  herrschenden Beziehung

$$(12) \quad \sum P_m \delta_{m.1} - X_1 \delta_{1.1} - X_2 \delta_{2.1} = 0$$

nach Streichung des ersten Gliedes. Ganz ähnlich findet man die Formeln für die Werte  $\chi'$ .

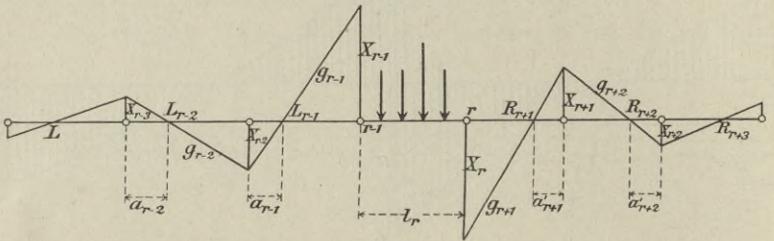


Fig. 173.

II. Zwischen den beiden Gelenkdrücken  $X_{r-1}$  und  $X_r$  an den Enden des belasteten Gliedes (Fig. 173) bestehen die Gleichungen

$$(13) \quad \begin{cases} \chi_r X_{r-1} + X_r = \frac{\sum P_m \delta_{m(r-1)}}{\delta_{(r-1)r}}, \\ X_{r-1} + \chi_r' X_r = \frac{\sum P_m \delta_{mr}}{\delta_{(r-1)r}}, \end{cases}$$

aus denen sich die Werte ergeben

$$(14) \quad X_{r-1} = \frac{\chi_r' \sum P_m \delta_{m(r-1)} - \sum P_m \delta_{mr}}{(\chi_r \chi_r' - 1) \delta_{(r-1)r}},$$

$$(15) \quad X_r = \frac{\chi_r \sum P_m \delta_{mr} - \sum P_m \delta_{m(r-1)}}{(\chi_r \chi_r' - 1) \delta_{(r-1)r}}.$$

Der Einfluß der Belastung des ersten Gliedes  $A-1$  und des nach dem Ufer führenden Koppelbalkens  $AB$  auf den Gelenkdruck  $X_1$  ist, Fig. 174,

$$(16) \quad X_1 = \frac{\sum P_m \delta_{m1}}{\chi_1' \delta_{A.1}}.$$

Die gestellte Aufgabe ist hiermit gelöst\*). Die Gelenkdrücke lassen sich nunmehr für jeden Belastungsfall angeben. Auf folgendes ist besonders hinzuweisen. Wird der Einfluß der Belastung des  $r$ -ten Gliedes auf ein Moment, eine Querkraft, eine Spannkraft u. s. w. des  $k$ -ten Gliedes gesucht, wo  $k < r$  ist, so ist die gesuchte Größe — wir wollen sie ganz allgemein mit  $Y_k$  bezeichnen — zunächst nur abhängig von den Gelenkdrücken  $X_{k-1}$  und  $X_k$ . Nun lassen sich aber diese Drücke mit Hilfe des in Fig. 173 dargestellten Verfahrens durch  $X_{r-1}$  ausdrücken, und daraus folgt dann  $Y_k = C \cdot X_{r-1}$ , wo  $C$  einen festen Wert bedeutet. Auf der Strecke  $(r - 1) - r$  unterscheidet sich also die Einflußlinie für  $Y_k$  von der  $X_r$ -Linie nur durch einen Multiplikator.

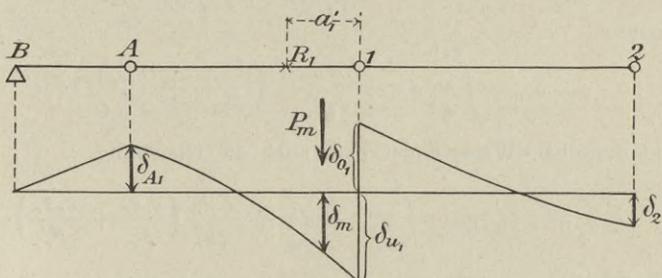


Fig. 174.

**56. Vereinfachung bei der Ermittlung der Biegungslinien und Festpunkte.**

Für Schiffbrücken kommen als Träger hauptsächlich in Betracht: der vollwandige Balken und der Fachwerkbalken mit parallelen Gurtungen. Im ersten Falle ist es bei der Berechnung der  $\delta$  in der Regel zulässig, innerhalb eines Gliedes für  $EJ$  einen festen Wert anzunehmen. Diese Annahme führt zu einfachen Formeln, die sich meistens auch mit genügender Genauigkeit auf den Fachwerkbalken mit parallelen Gurtungen übertragen lassen, wenn man das Querschnittsträgheitsmoment  $J$  ersetzt durch den Wert  $\frac{1}{2} F_g h^2$ , wo  $F_g$  den Inhalt des Querschnitts einer Gurtung und  $h$  die Trägerhöhe bezeichnet. Da nun weiter der Einfluß der Lasten  $P$  auf die Größen  $X$  nicht von den Durchbiegungen  $\delta$  selbst abhängt, sondern nur von dem gegenseitigen Verhältnis dieser Durchbiegungen, so empfiehlt es sich, mit den  $EJ$ -fachen Durchbiegungen zu rechnen und diese der Kürze wegen wieder mit  $\delta$  zu bezeichnen. An die Stelle der Gleichung (2) tritt dann die Gleichung

$$(17) \quad \delta_{ik} = \int M_i M_k dx + \sum S_i S_k \frac{EJ}{\gamma F}$$

\*) Wir verweisen auch auf die zeichnerische Behandlung der Gleichungen  $\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$  in Abteilung 1 § 14.

Der Einfluß des Belastungszustandes  $X_r = -1$  erstreckt sich über die beiden Glieder  $(r-1) - r$  und  $r - (r+1)$ . Setzt man also  $i = k = r$  und dehnt man die Integration und Summation über diese beiden Glieder aus, so erhält man den Wert  $\delta_{r,r}$ . Berücksichtigt man nur das Glied  $(r-1) - r$ , so erhält man nur den Bestandteil  $\delta_{r,r}$  von  $\delta_{r,r} = \delta_{u,r} + \delta_{o,r}$ . Beachtet man, daß den Schiffen des  $r^{\text{ten}}$  Gliedes die Werte  $S_r = +\frac{e'_r}{d_r}$ , bzw.  $S_r = -\frac{e_r}{d_r}$  entsprechen, so findet man die Formel

$$(18) \quad \delta_{u,r} = \int_{r-1}^r M_r^2 dx + \frac{E J_r}{\gamma d_r^2} \left( \frac{e_r^2}{F_r} + \frac{e'_r{}^2}{F'_r} \right)$$

und ebenso

$$\delta_{o,r} = \int_r^{r+1} M_r^2 dx + \frac{E J_{r+1}}{\gamma d_{r+1}^2} \left( \frac{e_{r+1}^2}{F_{r+1}} + \frac{e'_{r+1}{}^2}{F'_{r+1}} \right).$$

Ganz in derselben Weise findet man auch die Gleichung

$$(19) \quad \delta_{r(r-1)} = \delta_{(r-1)r} = \int_{r-1}^r M_{r-1} M_r dx + \frac{E J_r}{\gamma d_r^2} \left( \frac{c_r e_r}{F_r} + \frac{c'_r e'_r}{F'_r} \right).$$

Die Integrale  $\int M_r^2 dx$  und  $\int M_{r-1} M_r dx$  berechne man mit Hilfe der in Nr. 35 abgeleiteten Formeln.

*Zahlenbeispiel.* Es sei für sämtliche Glieder, Fig. 175,  $l = 20$  m,  $b = 4$  m,  $d = 12$  m,  $e = c' = 4$  m,  $e' = c = 16$  m,  $F = F' = 100$  qm. Die Brücke erhalte zwei Hauptträger; ihre Achse gehe im Grundriß durch die Schwerpunkte der Schiffsquerschnitte  $F$ . Auf jeden Hauptträger kommt  $F = 50$  qm. Ferner sei die Trägerhöhe  $h = 2$  m und der Inhalt des Querschnitts einer Gurtung  $F_g = 31,4$  qcm. Dann ist  $J = \frac{1}{2} \cdot 2,0^2 \cdot 0,00314 = 0,00628$  m<sup>4</sup> und man erhält mit  $E = 2150000$  kg/cm<sup>2</sup> = 21500000 t/m<sup>2</sup> (Flußeisen),  $\gamma = 1,0$ , abgerundet

$$\frac{EJ}{\gamma F} = 2700 \text{ m}^3.$$

Nun wird

$$(20) \quad \delta_{u,r} = \delta_{o,r} = \frac{1}{2} \delta_{r,r} = \int_{r-1}^r M_r^2 dx + \frac{EJ}{\gamma F} \cdot \frac{e^2 + e'^2}{d^2},$$

$$(21) \quad \delta_{r(r-1)} = \delta_{(r-1)r} = \int_{r-1}^r M_{r-1} M_r dx + 2 \frac{EJ}{\gamma F} \frac{ee'}{d^2},$$

wo  $\frac{EJ}{\gamma F} \frac{e^2 + e'^2}{d^2} = 5100, \quad 2 \frac{EJ}{\gamma F} \frac{ee'}{d^2} = 2400.$

Fig. 175 zeigt die Momentenflächen für die Zustände  $X_r = -1$  und  $X_{r-1} = -1$ . Es ergibt sich nach Formel (23), Seite 101,

$$\int_{r-1}^r M_r^2 dx = \frac{4,0}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{8}{3} \left( \frac{4}{9} + \frac{20}{9} + \frac{100}{9} \right) + \frac{4}{3} \left( \frac{100}{9} + \frac{20}{3} + 4 \right) + \frac{2,0}{3} \cdot 4 = 69,$$

und nach Formel (22), Seite 101,

$$\int_{r-1}^r M_{r-1} M_r dx = -2 \cdot \frac{4,0}{6} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{20}{3} + 2 \right) - \frac{8,0}{6} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{20}{3} + \frac{2}{3} \right) + \frac{10}{3} \left( \frac{4}{3} + \frac{10}{3} \right) \right] = -35,$$

und es wird daher für alle Glieder

$$\delta_{ur} = \delta_{or} = \frac{1}{2} \delta_{rr} = 5100 + 69 = 5169,$$

$$\delta_{(r-1)r} = \delta_{r(r-1)} = 2400 - 35 = 2365.$$

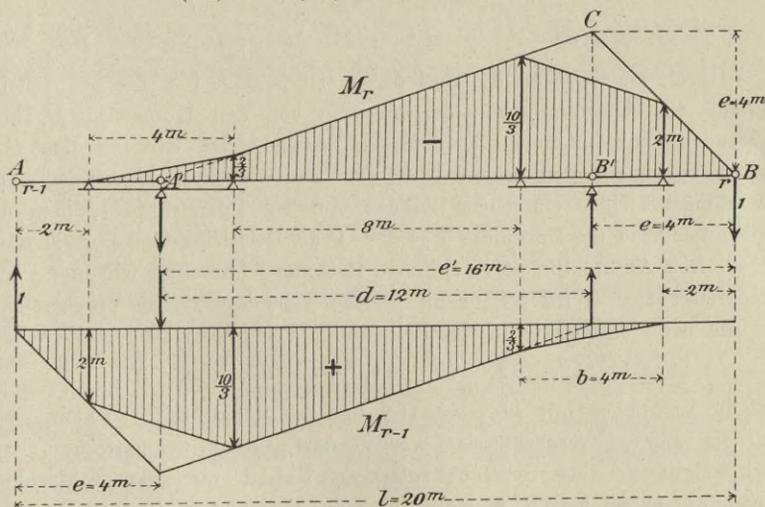


Fig. 175.

Für den festen Wert  $\frac{1}{2} \delta_{rr} : \delta_{(r-1)r}$  führen wir die Bezeichnung ein

$$(22) \quad \frac{\delta_{rr}}{2 \delta_{(r-1)r}} = \mathfrak{Z},$$

und erhalten dann aus Gleichung (8) für den Fall gleicher, symmetrischer Glieder, wegen  $\delta_{(r-1)r} = \delta_{(r+1)r}$ ,

$$(23) \quad \alpha_r = 2\mathfrak{Z} - \frac{1}{\alpha_{r-1}}, \quad \alpha_2 = 2\mathfrak{Z}.$$

Mit den vorstehenden Zahlen ergibt sich  $2\zeta = 4,37$ , also

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 4,37; & \alpha_3 &= 4,37 - \frac{1}{4,37} = 4,14; \\ \alpha_4 &= 4,37 - \frac{1}{4,14} = 4,13 = \alpha_5 = \alpha_6 = \dots \end{aligned}$$

Die Werte  $\alpha$  nähern sich sehr schnell einer festen Grenze, welche durch die Gleichung

$$(24) \quad \alpha = 2\zeta - \frac{1}{\alpha}$$

bestimmt ist. Man erhält

$$(25) \quad \alpha = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} = 4,13.$$

Meistens ist es zulässig, bereits für  $\alpha_3$  den durch die Gleichung (25) bestimmten Wert  $\alpha$  anzunehmen und höchstens für das zweite Glied einen besonderen Wert  $\alpha$  einzuführen.

Die Lage der Festpunkte ist nunmehr bestimmt durch die Strecken

$$a_2 = \frac{l}{1 + \alpha_2} = 3,72 \text{ m}, \quad a_3 = a_4 = \dots = \frac{l}{1 + \alpha} = 3,90 \text{ m}.$$

Durch die Strecken  $\delta_{r,r}$  und  $\delta_{(r-1),r}$  ist in Fig. 172 die gestrichelte Gerade  $AB$  bestimmt, von der aus die von den Momenten  $M_r$  herührenden Durchbiegungen aufgetragen werden. Da wir mit den  $EJ$ -fachen Verschiebungen rechnen, so erhalten wir diese Durchbiegungen als Momente eines einfachen Balkens von der Spannweite  $l$ , dem die Momentenfläche des Zustandes  $X_r = -1$  als Belastungsfläche zugewiesen wird. Den Ansatz für diese einfache Rechnung brauchen wir hier nicht wiederzugeben. Wird  $l$  in zehn gleiche Teile zerlegt, so ergeben sich für die neun Teilpunkte in der Reihenfolge von  $r-1$  nach  $r$  die Werte

$$21, \quad 42, \quad 62, \quad 79, \quad 91, \quad 94, \quad 87, \quad 68, \quad 37,$$

welche, verglichen mit  $\frac{1}{2}\delta_{r,r} = 5169$  und  $\delta_{(r-1),r} = 2365$ , so klein sind, daß ihr Einfluß vernachlässigt werden darf. Aber noch weitere Vernachlässigungen sind meistens zulässig. Nimmt man der Einfachheit wegen an, es sei  $b = 0$ , es werde also der Balken nur in zwei Punkten gestützt, so sind die Momentenflächen für  $X_r = -1$  und  $X_{r-1} = -1$  Dreiecke von der Höhe  $e$  und der Grundlinie  $e'$  und man findet

$$(26) \quad \frac{1}{2}\delta_{r,r} = \frac{EJ}{\gamma F} \left( \frac{e^2}{d^2} + \frac{e'^2}{d^2} \right) + \frac{1}{3}e^2e' = 5185,$$

$$(27) \quad \delta_{(r-1),r} = 2 \frac{EJ}{\gamma F} \frac{ee'}{d^2} - \frac{e^2d}{6} = 2368,$$

$$\alpha_2 = \frac{2 \cdot 5158}{2368} = 4,38, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 4,14 \text{ [nach Gleichung (25)].}$$

Der Einfluß der Wagebalkenstützung auf die Größen  $X$  ist im vorliegenden Falle von ganz untergeordneter Bedeutung. Geht man noch einen Schritt weiter und vernachlässigt überhaupt den Einfluß von  $M_r$  und  $M_{r-1}$ , so findet man die von  $J$  und  $F$  unabhängigen einfachen Werte

$$(28) \quad \alpha_2 = \frac{\delta_{rr}}{\delta_{(r-1)r}} = \frac{e^2 + e'^2}{ee'} = \frac{17}{4} = 4,25, \quad \alpha_2 = \frac{20}{5,25} = 3,81 \text{ m,}$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 \dots = 4,00, \quad \alpha = \frac{20}{5,00} = 4,0 \text{ m,}$$

die im vorliegenden Falle zu durchaus zuverlässigen Ergebnissen führen und beim Entwerfen von Schiffbrücken mit steifen Trägern sehr wichtig sind, weil sie zum mindesten eine von den gesuchten Größen  $J$  und  $F$  unabhängige Überschlagsrechnung gestatten.

**57. Einflußlinie für  $X_r$ .** Eine am Gliede  $(r - 1)r$  angreifende Last  $P = 1$  erzeugt nach Gleichung (15)

$$(29) \quad X_r = \frac{\alpha_r \delta_{mr} - \delta_{m(r-1)}}{(\alpha_r \alpha'_r - 1) \delta_{(r-1)r}}$$

Für den Einfluß einer am Gliede  $r(r + 1)$  wirkenden Last  $P = 1$  erhält man mittels Gleichung (14), indem man den Zeiger um 1 erhöht, den Wert

$$(30) \quad X_r = \frac{\alpha'_{r+1} \delta_{mr} - \delta_{m(r+1)}}{(\alpha'_{r+1} \alpha'_{r+1} - 1) \delta_{r(r+1)}}$$

Wir wollen zunächst die meist schwach gekrümmten Biegungslinien  $\delta_{mr}$  und  $\delta_{m(r-1)}$  durch gerade Linien ersetzen. Es ergibt sich dann für  $X_r$  eine aus geraden Linien bestehende Einflußlinie (Fig. 176 a), und es genügt, die den Gelenkpunkten entsprechenden Ordinaten zu berechnen. Der Einfluß einer im Punkte  $r$  angreifenden Last ist verschieden groß, je nachdem dieser Punkt zum Gliede  $(r - 1)r$  oder zum Gliede  $r(r + 1)$  gerechnet wird. Im ersten Falle ist in die Gleichung (29) einzusetzen  $\delta_{mr} = \delta_{ur}$  und  $\delta_{m(r-1)} = \delta_{r(r-1)}$ ; im zweiten Falle gilt Gleichung (30) mit  $\delta_{mr} = -\delta_{or}$  und  $\delta_{m(r+1)} = -\delta_{r(r+1)}$ . Man erhält (Fig. 176 a) die Einflußzahlen

$$(31) \quad \eta_{ru} = \frac{+1}{\alpha_r \alpha'_r - 1} \left( \alpha_r \frac{\delta_{ur}}{\delta_{r(r-1)}} - 1 \right),$$

$$(32) \quad \eta_{ro} = \frac{-1}{\alpha'_{r+1} \alpha'_{r+1} - 1} \left( \alpha'_{r+1} \frac{\delta_{or}}{\delta_{r(r+1)}} - 1 \right).$$

Die irgend einem Gelenkpunkte  $k$  entsprechende Ordinate der  $X_r$ -Linie bezeichnen wir mit  $\eta_{rk}$ ; ihre Ermittlung erfolgt mit Hilfe der Festpunkte  $L$  und  $R$ . Es genügt zu zeigen, wie der Einfluß einer in  $r$  angreifenden Last 1 auf die an den anderen Gelenken wirkenden Drücke  $X$  dargestellt wird. Zunächst nehme man an, es gehöre  $r$  zum Gliede

$r(r+1)$ , es sei also das Glied  $(r-1)r$  unbelastet. Dann erhält man  $X_r = -\eta_{r0}$  und kann aus dieser Zahl mit Hilfe der Punkte  $L$  nach Fig. 176 b die Zahlen  $\eta_{(r-1)r}, \eta_{(r-2)r}, \dots$  folgern, und ganz ebenso findet man mittels der Festpunkte  $R$  aus der Zahl  $\eta_{ru}$  die Zahlen  $\eta_{(r+1)r}, \eta_{(r+2)r}, \dots$ . Man beachte hierbei, daß die Strecken  $\eta_{rk}$  und  $\eta_{kr}$  im allgemeinen verschieden groß sind, daß also die in Fig. 176 a mit  $L'$  und  $R'$  bezeichneten Punkte nicht mit den Festpunkten  $L$  und  $R$  zusammenfallen. Besteht aber die Brücke aus einer so großen Zahl gleicher symmetrischer Glieder, daß für alle  $x$  und  $x'$  ein und derselbe, durch die Gleichung (25) bestimmte Wert gesetzt werden darf, so ist

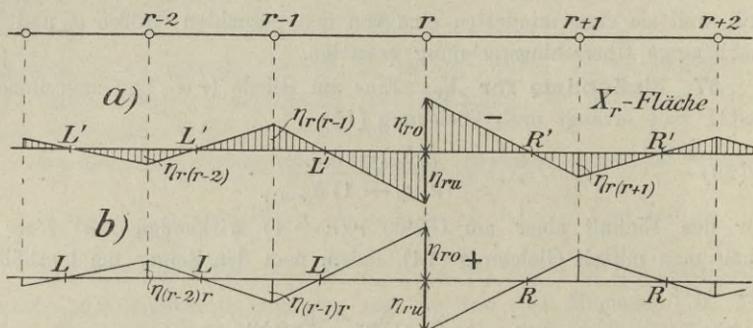


Fig. 176.

$\eta_{rk} = -\eta_{kr}$ , und es fallen die Punkte  $L'$  und  $R'$  mit den Festpunkten zusammen. Man findet dann

$$(33) \quad \eta_{ru} = -\eta_{r0} = \frac{1}{x^2 - 1} (x\mathfrak{Z} - 1)$$

und, wenn man  $\mathfrak{Z}$  mittels Gleichung (24) durch  $x$  ausdrückt,

$$\eta_{ru} = -\eta_{r0} = 0,5,$$

das ist ein Ergebnis, das man auch unmittelbar aus der bestehenden Symmetrie hätte folgern können. An den Stellen  $(r-1)$  und  $(r+1)$  erhält man

$$(34) \quad \eta_{r(r-1)} = -\frac{0,5}{x} \quad \text{und} \quad \eta_{r(r+1)} = +\frac{0,5}{x}.$$

Um nun zu prüfen, ob es notwendig ist, die Krümmung der Biegungslinien zu berücksichtigen, stelle man zunächst folgende einfache Rechnung an, die hier nur für ein symmetrisches Glied durchgeführt werden soll. Man ersetze die genaue  $M_r$ -Fläche durch das Dreieck  $A'CB$  (Fig. 175) von der Höhe  $e$  und der Grundlinie  $e' = l - e$  und berechne an den Stellen  $A'$  und  $B'$  und in der Mitte des Gliedes die Abweichungen  $\delta', \delta''$  und  $\delta'''$  der  $\delta_{mr}$ -Linie (Fig. 177) von der oben eingeführten Geraden. Betrachtet man zu dem Zwecke das Dreieck  $A'CB$  als

Belastungsfläche eines einfachen Balkens  $AB$ , so findet man die Stützendrücke

$$A = \frac{ee'}{6}, \quad B = \frac{ee'}{3},$$

und für die Querschnitte  $A'$ ,  $B'$  und die Balkenmitte die Momente

$$(35) \quad \delta' = \frac{e^2 e'}{6}, \quad \delta'' = \frac{e^2 (2e' - e)}{6}, \quad \delta''' = \frac{e(3l^2 - 4e^2)}{48}.$$

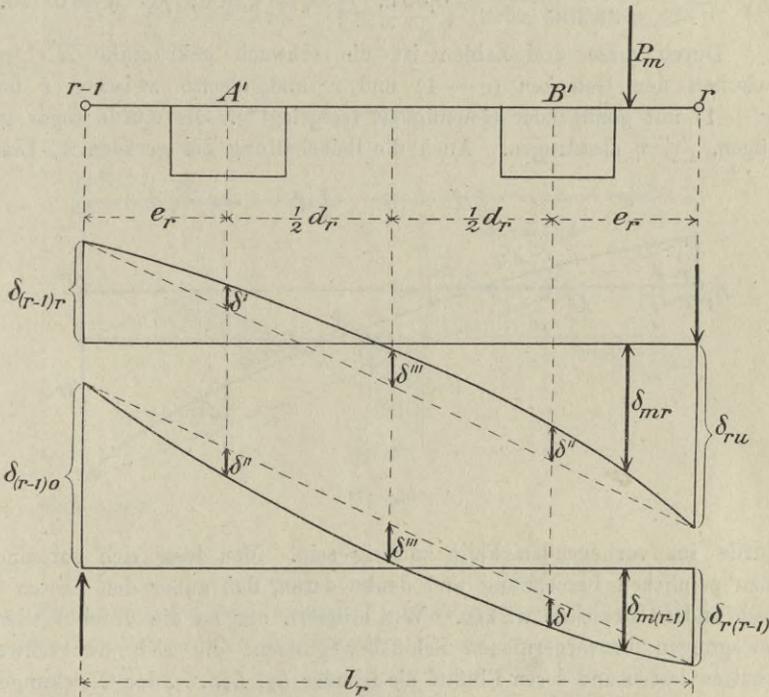


Fig. 177.

Diese Momente stellen die  $EJ$ -fachen Durchbiegungen dar. Ihnen entsprechen nach Gleichung (29) — für ein symmetrisch gebautes Glied — die folgenden Abweichungen der  $X_r$ -Linie von der durch die Ordinaten  $\eta_{r,u}$  und  $\eta_{r,(r-1)}$  bestimmten Geraden (Fig. 178)

$$(36) \quad \Delta' \eta = \frac{x_r \delta' + \delta''}{(x_r x_r' - 1) \delta_{(r-1)r}},$$

$$(37) \quad \Delta'' \eta = \frac{x_r \delta'' + \delta'}{(x_r x_r' - 1) \delta_{(r-1)r}},$$

$$(38) \quad \Delta''' \eta = \frac{x_r \delta''' + \delta'''}{(x_r x_r' - 1) \delta_{(r-1)r}}.$$

Für das unter Nr. 56 behandelte Zahlenbeispiel:  $e = 4$  m,  $l = 20$  m ergeben sich die Werte

$$\delta' = 43, \quad \delta'' = 75, \quad \delta''' = 95$$

an Stelle der früher gefundenen Werte 42, 68, 91; sie liefern in Verbindung mit den Werten  $\varkappa = \varkappa' = 4,14$  und  $\delta_{(r-1)r} = 2365$  die Zahlen

$$\Delta' \eta = \frac{4,14 \cdot 43 + 75}{38200} = 0,007; \quad \Delta'' \eta = 0,009; \quad \Delta''' \eta = 0,013.$$

Durch diese drei Zahlen ist die schwach gekrümmte  $X_r$ -Linie zwischen den Gelenken  $(r-1)$  und  $r$  und ebenso zwischen  $r$  und  $(r+1)$  mit genügender Genauigkeit festgelegt\*). Es würde sogar genügen,  $\Delta''' \eta$  abzutragen. Auch die Beibehaltung der geraden  $X_r$ -Linie

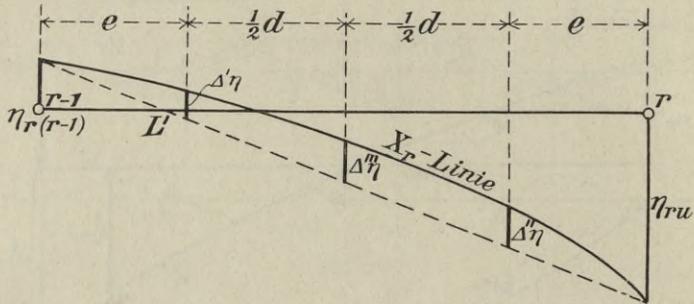


Fig. 178.

würde im vorliegenden Falle zulässig sein. Man hüte sich vor einer allzu peinlichen Berechnung und denke daran, daß außer den Lasten  $P$  noch andere Ursachen wirken. Wir erinnern nur an die durch Wellenbewegungen hervorgerufenen Schiffsbewegungen, die sich nur schwer schätzen lassen und deren Einfluß die Glieder  $L_a, L_b, \dots$  der Gleichungen (1) berücksichtigen, ferner an die Einflüsse  $\delta_{at}, \delta_{bt}, \dots$  von Temperaturänderungen.

Es sind noch die Formeln für den Gelenkdruck  $X_1$  anzugeben. Ruht die Last  $P_m = 1$  auf dem Koppelbalken oder dem Gliede  $A-1$ , so entsteht

$$(39) \quad X_1 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{\delta_{m1}}{\delta_{A1}};$$

liegt sie auf dem Gliede  $1-2$ , so ergibt sich

$$(40) \quad X_1 = \frac{\varkappa_2 \delta_{m1} - \delta_{m2}}{(\varkappa_2 \varkappa_2' - 1) \delta_{1.2}}.$$

\*) Links von  $r-1$  und rechts von  $r+1$  kann man die Aufzeichnung der  $X_r$ -Linie entbehren. Vgl. den Schluß von Nr. 55.

Man erhält also (Fig. 179)

$$(41) \quad \eta_{1,A} = -\frac{1}{x_1'}; \quad \eta_{1,u} = \frac{1}{x_1'} \frac{\delta_{u1}}{\delta_{A1}},$$

$$(42) \quad \eta_{1,o} = \frac{-1}{x_2 x_2' - 1} \left( x_2' \frac{\delta_{o1}}{\delta_{1,2}} - 1 \right); \quad \eta_{1,2} = \eta_{2,o} \frac{1}{x_2'}.$$

Sind alle Glieder gleich und symmetrisch, so darf man setzen

$$\frac{\delta_{u1}}{\delta_{A1}} = \frac{\delta_{o1}}{\delta_{1,2}} = \varrho = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \text{ [siehe Gleichung (24)],}$$

ferner

$$x_2 = x + \frac{1}{x}, \quad x_2' = x, \quad x_2 x_2' - 1 = x^2.$$

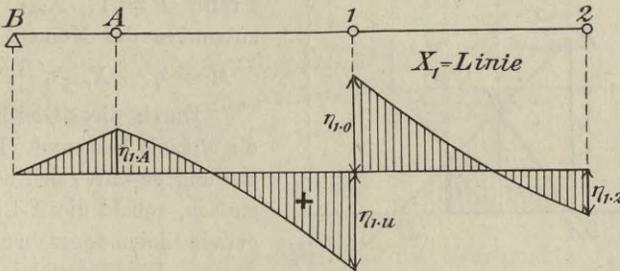


Fig. 179.

Man erhält

$$\eta_{1,A} = -\frac{1}{x}, \quad \eta_{1,u} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}, \quad \eta_{1,o} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}, \quad \eta_{1,2} = -\eta_{1,o} \frac{1}{x} \text{ *)}.$$

Zur Festlegung der gekrümmten  $X_1$ -Linie genügen bei verhältnismäßig steifen Hauptträgern auf der Strecke A1 die Werte

$$\Delta' \eta = \frac{\delta'}{x \delta_{1,2}}, \quad \Delta'' \eta = \frac{\delta''}{x \delta_{1,2}}, \quad \Delta''' \eta = \frac{\delta'''}{x \delta_{1,2}},$$

und auf der Strecke 1—2 die Werte

$$\Delta' \eta = \frac{x \delta' + \delta''}{x^2 \delta_{1,2}}, \quad \Delta'' \eta = \frac{x \delta'' + \delta'}{x^2 \delta_{1,2}}, \quad \Delta''' \eta = \frac{(x + 1) \delta'''}{x^2 \delta_{1,2}}.$$

58. Sind die Einflußlinien für die Gelenkdrücke  $X$  gegeben, so ist die Herleitung der übrigen Einflußlinien (für Biegemomente, Querkräfte, Stützenwiderstände und Stabkräfte) eine so einfache Aufgabe, daß wir es für genügend halten, ein Beispiel vorzuführen.

\*) Folgt aus dem mittels Gleichung (40) berechneten Werte

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{x_2 x_2' - 1} \left( x_2' - \frac{\delta_{o2}}{\delta_{1,2}} \right) = \frac{x^2 - 1}{2x^3}.$$

Gesucht sei die Einflußlinie für das Biegemoment  $M_C$  des zwischen den beiden Schiffen eines Gliedes gelegenen Balkenquerschnitts  $C$ . Außer der Last  $P=1$  greifen an dem Balkenstücke  $(r-1) - r$  die Gelenkdrücke  $X_{r-1}$  und  $X_r$  an.

Figur 180 zeigt die  $M_C$ -Linie für den Fall  $X_r = 0$ ,  $X_{r-1} = 0$ ; sie besteht aus den beiden Geraden  $JC$  und  $CK$ . Die Gerade  $CK$  schneidet auf der Lotrechten durch den Stützpunkt  $A$  die Strecke  $AE = 1 \cdot x$  ab. Die absoluten Werte der Ordinaten an den Stellen  $(r-1)$  und  $r$  seien  $\eta'$  und  $\eta''$ . Dann erzeugen die drei Kräfte  $P=1$ ,  $X_{r-1}$  und  $X_r$  zusammen das Moment

$$M = \eta - X_{r-1}\eta' + X_r\eta''.$$

Durch diese Gleichung ist die  $M$ -Linie bestimmt. Die Darstellung gestaltet sich besonders einfach, sobald die  $X$ -Linien als gerade Linien angesehen werden dürfen. Die Einflußlinie für den Ausdruck

$$-X_{r-1}\eta' + X_r\eta''$$

ist dann eine gerade Linie, welche man am zweckmäßigsten durch Berechnung der Ordinaten für die Stellen  $L'$  und  $R'$  (Fig. 176 a) bestimmt. An der Stelle  $L'$  ist der Einfluß von  $X_r$  gleich Null; an der Stelle  $R'$  verschwindet der Einfluß von  $X_{r-1}$ .

Besteht die Brücke aus einer so großen Zahl gleicher symmetrischer Glieder, daß nach  $\eta_{r,u} = -\eta_{r,o} = 0,5$  gesetzt werden darf und die Punkte  $L'$  und  $R'$  mit den Festpunkten zusammenfallen, so erzeugt eine im Punkte  $r$  angreifende Last 1:

$$X_r = +0,5, \quad X_{r-1} = +0,5 \frac{a_r}{b_r},$$

$$M = -\eta'' - 0,5 \frac{a_r}{b_r} \eta' + 0,5 \eta'' = -0,5 \left( \eta'' + \eta' \frac{a_r}{b_r} \right),$$

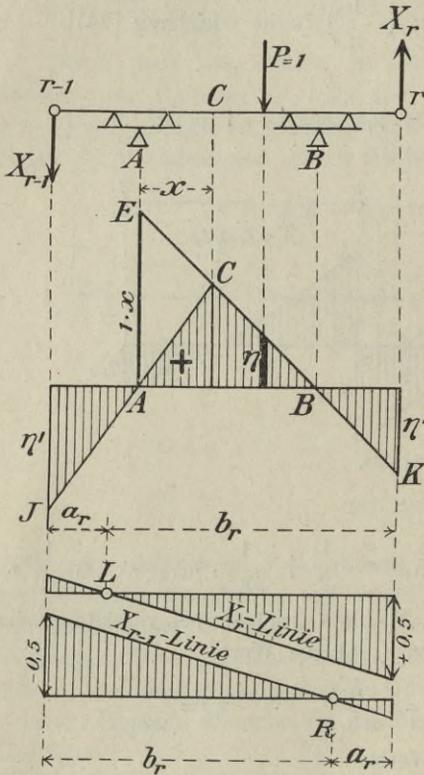


Fig. 180.

und eine im Punkte  $r - 1$  angreifende Last:

$$X_{r-1} = -0,5, \quad X_r = -0,5 \frac{a_r}{b_r},$$

$$M = -\eta' + 0,5\eta' - 0,5 \frac{a_r}{b_r} \eta'' = -0,5 \left( \eta' + \eta'' \frac{a_r}{b_r} \right).$$

Hieraus ergibt sich die in Fig. 181 dargestellte Konstruktion der Einflußfläche für  $M_C$ . Es wurden von  $J$  und  $K$  aus durch  $L$  und  $R$

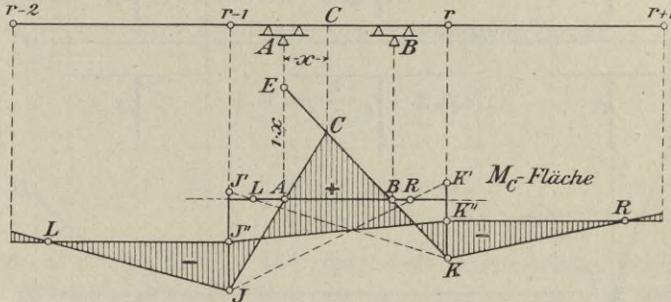


Fig. 181.

die Geraden  $KJ'$  und  $JK'$  gezogen und die Mittelpunkte  $J''$  und  $K''$  der Strecken

$$\overline{JJ'} = \eta' + \eta'' \frac{a_r}{b_r} \quad \text{und} \quad \overline{KK'} = \eta'' + \eta' \frac{a_r}{b_r}$$

bestimmt. Die schraffierte Fläche ist dann die Einflußfläche für  $M_C$ .

## 2. Mehrschiffige Glieder.

Die allgemeinen Gleichungen (4) bis (15) gelten auch dann, wenn einzelne oder alle Glieder mehrschiffig sind. Es ändert sich nur die Berechnung der  $\delta_{rr}$ ,  $\delta_{r(r-1)}$ ,  $\delta_{mr}$  für die mehrschiffigen Glieder.

**59. Das dreischiffige Glied** ist für sich allein einfach statisch unbestimmt. Als statisch unbestimmte Größe führen wir den Widerstand des Mittelschiffes ein. Fig. 182a zeigt den Zustand  $X_{r-1} = 0$ ,  $X_r = 0$ . Fig. 182b stellt den Belastungsfall  $X_a = -1$  dar; die Widerstände der Seitenschiffe seien  $\alpha$  und  $\beta$ , die Inhalte der drei Schiffsquerschnitte  $F_a$ ,  $F$ ,  $F_\beta$ . In Fig. 182c ist die Linie  $JK$  die Biegelinie für  $X_a = -1$ ; die Lage der Schlußlinie  $AB$  ist bestimmt durch die Schiffsenkungen

$$\delta_\alpha = \frac{\alpha}{\gamma F_a}, \quad \delta_\beta = \frac{\beta}{\gamma F_\beta}.$$

Die Belastung  $X_r = -1$  erzeugt

$$X_a = 1 \frac{\delta_{ra}}{\delta_{aa}}$$

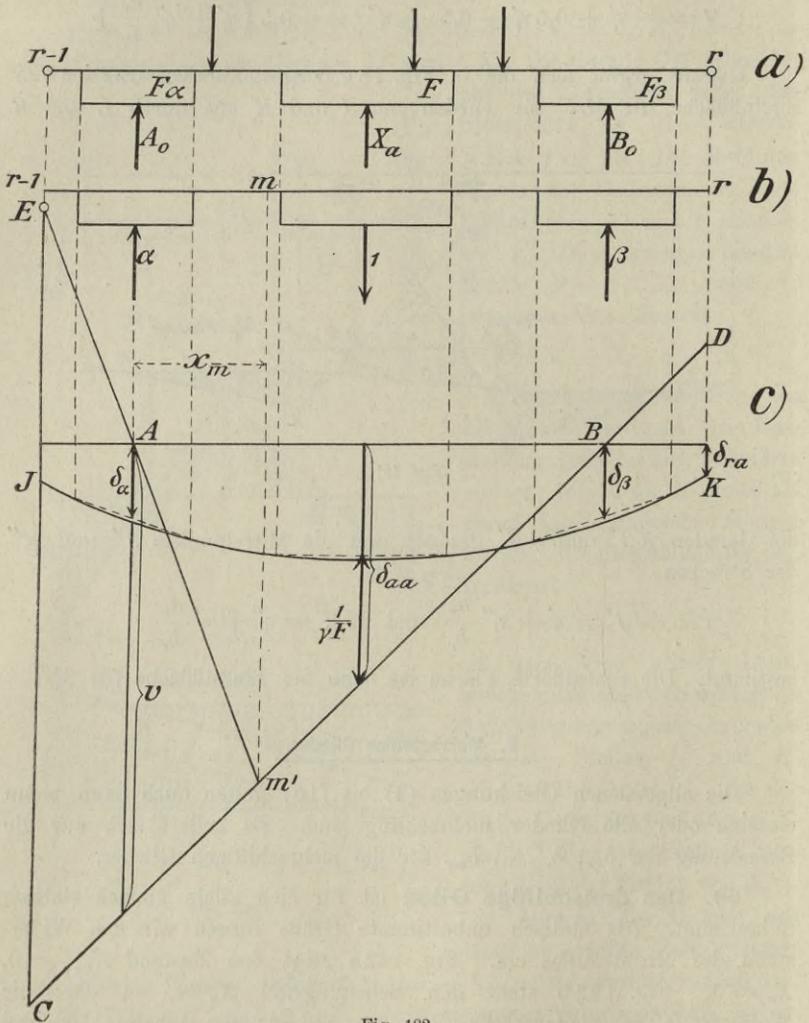


Fig. 182.

Kennt man die Schiffswiderstände infolge  $X_r = -1$ , so kann man die Momente  $M_r$  für diesen Belastungszustand berechnen und die zugehörige Biegelinie ermitteln. Wir erinnern noch daran, daß sich nach Abteilung I, § 12, aus der Biegelinie  $JK$  in Fig. 182c die

Einflußflächen für den Balken auf drei Stützen mittels Ziehen gerader Linien gewinnen lassen. Beispielsweise ist die Fläche zwischen der Kurve  $JK$  und der Geraden  $CD$  Einflußfläche für  $A_0$  (Multiplikator  $\frac{1}{v}$ ) und die Fläche zwischen der Kurve  $JK$  und den beiden Geraden  $Em'D$  Einflußfläche für das Biegemoment des Querschnitts  $m$  (Multiplikator  $\frac{x_m}{v}$ ). Zu den so ermittelten Einflüssen treten noch diejenigen der Gelenkdrücke  $X_{r-1}$  und  $X_r$ .

Zur rechnerischen Ermittlung von  $X_a$  dient die Formel

$$(43) \quad X_a = \frac{\int_{r-1}^r M_0 M_a \frac{dx}{EJ} + \sum_{r-1}^r S_0 S_a \varphi}{\int_{r-1}^r M_a^2 \frac{dx}{EJ} + \sum_{r-1}^r S_a^2 \varphi}.$$

Es liege z. B. das in Fig. 183 dargestellte symmetrische Glied vor.  $EJ$  sei konstant, ebenso  $F$ . Statt nur den Punkt  $r$  mit 1 zu belasten, bringen wir auch in  $(r - 1)$  eine Last 1 auf; wir erhalten dann, da beide Lasten zu  $X_a$  den gleichen Beitrag liefern,

$$2 X_a = \frac{\int_{r-1}^r M_0 M_a dx + \frac{EJ}{\gamma F} \sum S_0 S_a}{\int_{r-1}^r M_a^2 dx + \frac{EJ}{\gamma F} \sum S_a^2}.$$

Die Summen beziehen sich auf die die Schiffe ersetzenden Stäbe. Die Momentenflächen ( $M_a$  und  $M_0$ ) zeigt Fig. 183. Die einfachen Zwischenrechnungen übergehen wir. Es ergibt sich, in Buchstaben,

$$\int_{r-1}^r M_a^2 dx = \frac{1}{6} d^3 + \frac{1}{16} b^3 - \frac{1}{8} b^2 d,$$

$$\int_{r-1}^r M_0 M_a dx = -\frac{1}{2} d^2 e + \frac{1}{24} b^3.$$

Ferner ist

$$\sum S_a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2},$$

$$\sum S_0 S_a = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,$$

mithin

$$(44) \quad X_a = \frac{\frac{EJ}{\gamma F} - \frac{1}{2} d^2 e + \frac{1}{24} b^3}{\frac{3}{2} \frac{EJ}{\gamma F} + \frac{1}{3} d^3 + \frac{1}{8} b^3 - \frac{1}{4} b^2 d}.$$

Ist, wie in dem vorigen Zahlenbeispiel (Nr. 56),  $\frac{EJ}{\gamma F} = 2700$ ,  $d = 12$  m,  $e = 4$  m,  $b = 4$  m, so wird

$$X_a = \frac{2700 - 288}{8100 + 536} = 0,280.$$

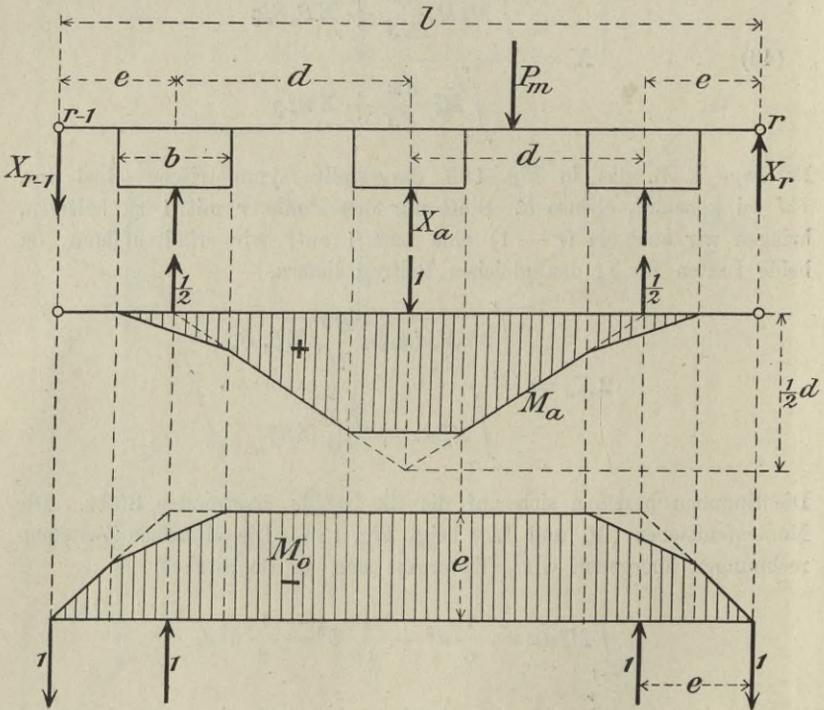


Fig. 183.

Setzt man  $b = 0$ , vernachlässigt man also die Wagebalkenunterstützung, so erhält man

$$X_a = \frac{2700 - 288}{8100 + 576} = 0,278,$$

in beiden Fällen also rund  $X_a = 0,28$ . Die Gegendrucke der beiden anderen Schiffe und die Momentenflächen für die Zustände  $X_r = -1$

und  $X_{r-1} = -1$  gibt Fig. 184 an. Mit Hilfe der Formeln (20) und (21) auf Seite 174 findet man die  $EJ$ -fachen Durchbiegungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_{r,r} &= \int_{r-1}^r M_r^2 dx + \frac{EJ}{\gamma F} \sum_{r-1}^r S_r^2 \\ &= \frac{4,0}{3} (0,62^2 + 3,10^2 + 3,10 \cdot 3,70 + 3,70^2 + 3,94^2 \\ &\quad + 3,94 \cdot 2,0 + 2,0^2) \\ &\quad + \frac{8,0}{3} (0,62^2 + 0,62 \cdot 3,10 + 3,10^2 + 3,70^2 + 3,70 \cdot 3,94 + 3,94^2) \\ &\quad + \frac{2,0}{3} \cdot 2,0^2 + \frac{EJ}{\gamma F} (0,31^2 + 0,28^2 + 1,03^2), \\ \frac{1}{2} \delta_{r,r} &= 235 + 1,235 \frac{EJ}{\gamma F} = 235 + 3335 = 3570. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{(r-1)r} &= \int_{r-1}^r M_{r-1} M_r dx + \frac{EJ}{\gamma F} \sum_{r-1}^r S_{r-1} S_r \\ &= -2 \cdot \frac{4,0}{6} 0,62 (2 \cdot 3,94 + 2,0) - 2 \cdot \frac{8,0}{6} [0,62 (2 \cdot 3,94 + 3,70) \\ &\quad + 3,10 (2 \cdot 3,70 + 3,94)] \\ &\quad - \frac{4,0}{6} [3,10 (2 \cdot 3,70 + 3,10) + 3,70 (2 \cdot 3,10 + 3,70)] \\ &\quad + \frac{EJ}{\gamma F} (0,31 \cdot 1,03 \cdot 2 - 0,28^2). \end{aligned}$$

$$\delta_{(r-1)r} = -167 + \frac{EJ}{\gamma F} 0,560 = -167 + 1512 = 1345.$$

Besteht die Brücke aus lauter gleichen Gliedern, so erhält man

$$2\mathfrak{S} = \frac{2 \cdot 3570}{1345} = 5,31;$$

$$x_2 = 5,31, \quad x_3 = 5,31 - \frac{1}{5,31} = 5,12 = x_4 = x_5 = \dots$$

$$a_2 = \frac{32}{1 + 5,31} = 5,08 \text{ m}, \quad a_3 = a_4 = \dots = \frac{32}{1 + 5,12} = 5,23 \text{ m}.$$

Die Vernachlässigung der Durchbiegungen bei den vorstehenden Rechnungen würde liefern  $X_a = \frac{1}{3}$  und

$$2\mathfrak{S} = \frac{2 \sum S_r^2}{\sum S_{r-1} S_r} = 4,41 \text{ m};$$

sie würde also zu etwas größeren Unterschieden führen wie in dem in Nr. 56 gerechneten Beispiele.

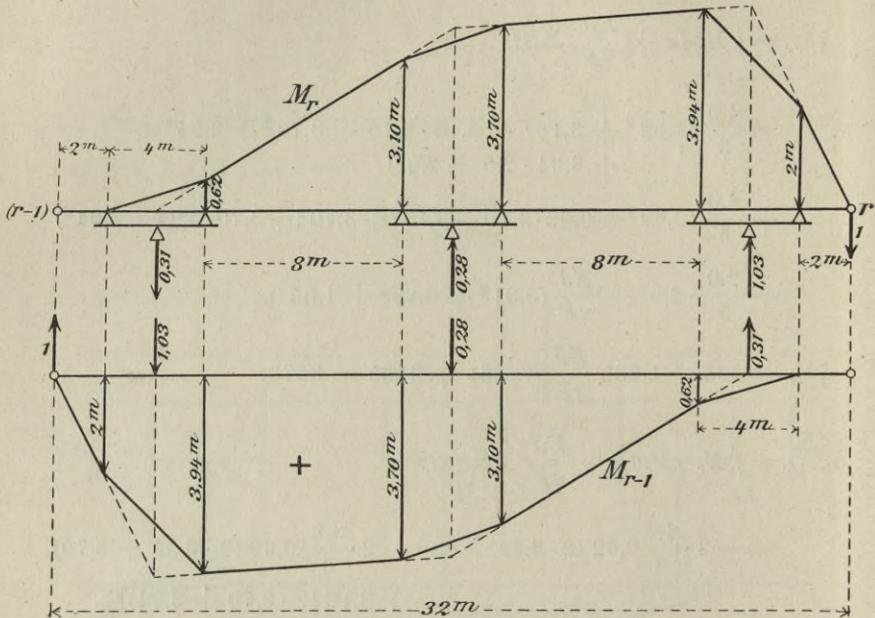


Fig. 184.

60. Wir zeigen noch die rechnerische Bestimmung von  $\delta_{rr}$  und  $\delta_{(r-1)r}$  für ein symmetrisch gebautes *vierschiffiges Glied*. Zunächst ist die Berechnung der Schiffswiderstände für den Belastungsfall  $X_r = -1$  (Fig. 185) zu erledigen. Dieser Belastungsfall ist zweifach statisch unbestimmt. Als statisch unbestimmte Größen führen wir das Biegemoment  $X_a$  und die Querkraft  $X_b$  des mittelsten Balkenquerschnitts ein. Die Figuren 185 b, c, d enthalten die Darstellung

der Momente  $M_0$  (Zustand  $X_a = 0, X_b = 0$ )

„ „  $M_a$  ( „  $X_a = -1$ )

„ „  $M_b$  ( „  $X_b = -1$ ).

Man findet

$$\int M_0 M_a dx = \frac{4,0}{6} \left[ \frac{2}{3} \left( 2 \cdot \frac{5}{6} + 1 \right) \right] + \frac{8,0}{6} \left[ \frac{2}{3} \left( 2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \right) \right. \\ \left. + \frac{10}{3} \left( 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \right) \right] + \frac{4,0}{6} \left[ \frac{1}{6} \left( 2 \cdot \frac{10}{3} + 2 \right) \right] = 9.$$

$$\int M_0 M_b dx = \frac{4,0}{6} \left[ \frac{2}{3} (2 \cdot 5 + 4) \right] + \frac{8,0}{6} \left[ \frac{2}{3} (2 \cdot 5 + 1) \right. \\ \left. + \frac{10}{3} (2 \cdot 1 + 5) \right] + \frac{4,0}{6} \left[ 1,0 (2 \cdot \frac{10}{3} + 2) \right] = 53.$$

$$\frac{1}{2} \int M_a^2 dx = 1^2 \cdot 4 + \frac{4,0}{3} \left[ 1 + 1 \cdot \frac{5}{6} + \frac{25}{36} \right] + \frac{8,0}{3} \left[ \frac{25}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{36} \right] \\ + \frac{4,0}{3} \cdot \frac{1}{36} = 9,7.$$

$$\frac{1}{2} \int M_b^2 dx = \frac{4,0}{3} 4^2 + \frac{4,0}{3} (4^2 + 4 \cdot 5 + 5^2) + \frac{8,0}{3} (5^2 + 5 \cdot 1 + 1^2) \\ + \frac{4,0}{3} \cdot 1 = 186,7.$$

$$\Sigma S_0 S_a = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{12} = -\frac{5}{36},$$

$$\Sigma S_0 S_b = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{7}{6},$$

$$\Sigma S_a^2 = 4 \left( \frac{1}{12} \right)^2 = \frac{1}{36}, \quad \Sigma S_b^2 = 2 \left( \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \right) = 5.$$

$$\int M_a M_b dx = 0, \quad \Sigma S_a S_b = 0.$$

$$X_a = \frac{\int M_0 M_a dx + \frac{EJ}{\gamma F} \Sigma S_0 S_a}{\int M_a^2 dx + \frac{EJ}{\gamma F} \Sigma S_a^2},$$

$$X_b = \frac{\int M_0 M_b dx + \frac{EJ}{\gamma F} \Sigma S_0 S_b}{\int M_b^2 dx + \frac{EJ}{\gamma F} \Sigma S_b^2},$$

und, mit  $\frac{EJ}{\gamma F} = 2700$  (wie in den vorigen Beispielen),

$$X_a = \frac{9 - 375}{19,5 + 75} = -3,87,$$

$$X_b = \frac{53 - 3150}{373 + 13500} = -0,222.$$

Vernachlässigt man die Wagebalken, nimmt man also an, es greifen die Stützendrücke  $A, B, C, D$  unmittelbar am Balken an, so findet man

$$(45) \quad X_a = \frac{\frac{de}{6} - \frac{e+e'}{4} \frac{EJ}{\gamma F}}{\frac{5d}{3} + \frac{4}{d^2} \frac{EJ}{\gamma F}} = \frac{8 - 375}{20 + 75} = -3,86.$$

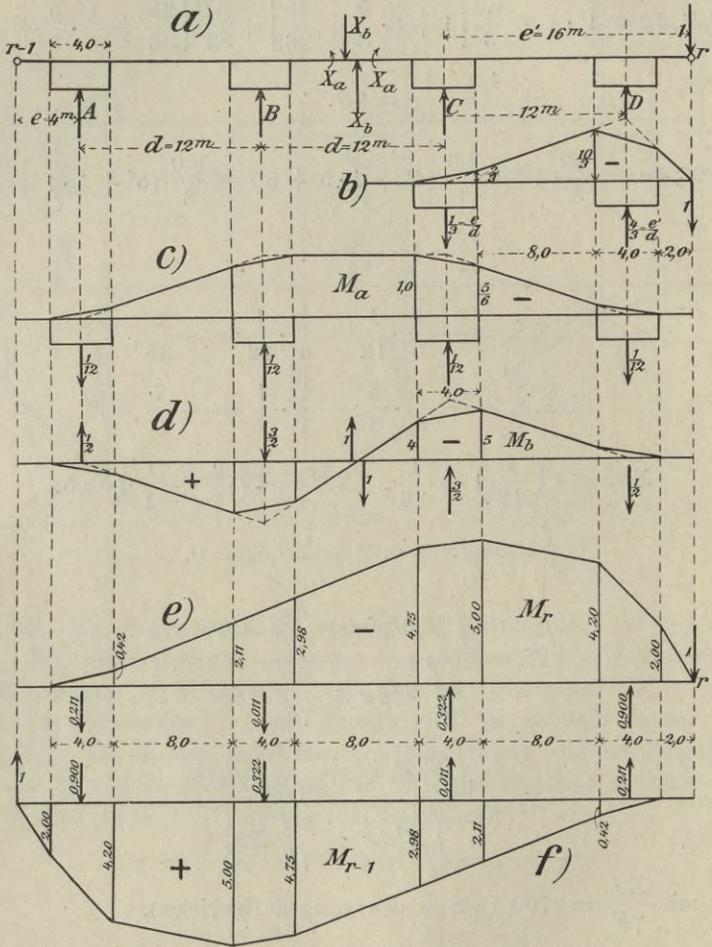


Fig. 185.

$$(46) \quad X_b = \frac{\frac{d^3 e}{12} - \frac{e' + 3e}{2d} \frac{EJ}{\gamma F}}{\frac{d^3}{4} + 5 \frac{EJ}{\gamma F}} = \frac{48 - 3150}{432 + 13500} = -0,223.$$

Die Wagebalken erweisen sich also wieder als nahezu einflußlos. Für die Schiffswiderstände erhält man jetzt die Werte

$$(47) \quad A = + \frac{X_a}{d} - \frac{1}{2} X_b = -0,211,$$

$$(48) \quad B = - \frac{X_a}{d} + \frac{3}{2} X_b = -0,011,$$

$$(49) \quad C = - \frac{X_a}{d} - \frac{3}{2} X_b - \frac{e}{d} = +0,322,$$

$$(50) \quad D = + \frac{X_a}{d} + \frac{1}{2} X_b + \frac{e'}{d} = +0,900.$$

Die Figuren 185 e, d zeigen die mit Hilfe dieser Zahlen berechneten Momentenflächen für die Zustände  $X_r = -1$  und  $X_{r-1} = -1$ . Man findet abgerundet

$$\int_{r-1}^r M_r^2 dx = 470, \quad \int_{r-1}^r M_{r-1} M_r dx = -280,$$

$$\Sigma S_r^2 = 0,211^2 + 0,011^2 + 0,322^2 + 0,900^2 = 0,958,$$

$$\Sigma S_{r-1} S_r = 2(0,211 \cdot 0,900 + 0,011 \cdot 0,322) = 0,387,$$

$$\delta_{r,r} = 2 \left( 470 + 0,958 \frac{EJ}{\gamma F} \right) = 6113,$$

$$\delta_{(r-1)r} = -280 + 0,387 \frac{EJ}{\gamma F} = 765.$$

Besteht die Brücke aus gleichen Gliedern, so hat man

$$x_2 = \frac{6113}{765} = 7,99, \quad x_3 = 7,99 - \frac{1}{7,99} = 7,86 = x_4 = x_5 = \dots$$

**3. Gelenkloser Balken auf einer größeren Zahl von Schiffen.**

61. Wird angenommen, daß der Balken von jedem Schiffe nur in einem, in Schiffsmitte liegenden Punkte gestützt wird, oder wird eine etwa vorhandene Wagebalkenstützung vernachlässigt, so kann die Be-

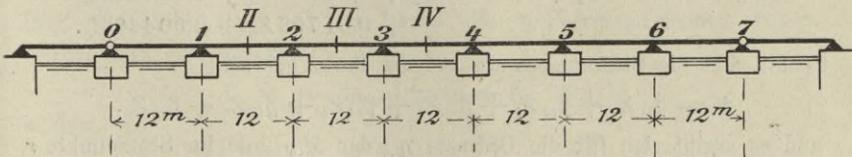


Fig. 186.

rechnung des Balkens auch mit Hilfe der im § 6 entwickelten Formeln erfolgen. Wir erläutern das Verfahren durch ein Beispiel.

Die Streckbalken einer Fußgängerbrücke ruhen auf 8 Schiffen, Fig. 186, und seien mit den Ufern durch gelenkartig angeschlossene

Koppelbalken verbunden. Die Brücke habe eine Breite von 6,0 m. Das Eigengewicht der Streckbalken und der Fahrbahn betrage  $300 \text{ kg/m}^2$ , die Verkehrslast (Menschengedränge)  $450 \text{ kg/m}^2$ ; es sei also

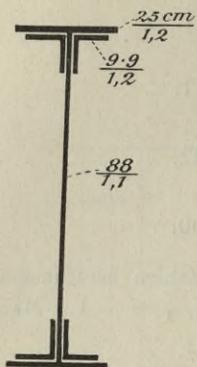


Fig. 187.

$$g = 0,3 \cdot 6,0 = 1,8 \text{ t/m}, \quad p = 0,45 \cdot 6,0 = 2,7 \text{ t/m}.$$

Die Anzahl der als Blechträger ausgebildeten Streckbalken sei vier. Das Trägheitsmoment des Querschnitts eines Balkens ist — ohne Abzug für Nietlöcher —  $315260 \text{ cm}^4$  (Fig. 187). Für die vier Balken ergibt sich also  $J = 0,0126 \text{ m}^4$ . Der wagerechte Schiffsquerschnitt sei  $F = 100 \text{ m}^2$  und die Stützweite  $l = 12 \text{ m}$ . Mit  $E = 215 \cdot 10^5 \text{ t/m}^2$  erhält man

$$\alpha = \frac{6 EJ}{\gamma F l^3} = \frac{6 \cdot 215 \cdot 1260}{1,0 \cdot 100 \cdot 12^3} = 9,4,$$

$$4 + 6\alpha = 60,4, \quad 1 - 4\alpha = -36,6.$$

1. *Einflußlinien für die Stützenmomente.* Die auf Seite 75 entwickelten Beziehungen zwischen den Stützenmomenten gehen über in

$$\begin{aligned} 60,4 M_1 - 36,6 M_2 + 9,4 M_3 &= Z_1 \\ -36,6 M_1 + 60,4 M_2 - 36,6 M_3 + 9,4 M_4 &= Z_2 \\ 9,4 M_1 - 36,6 M_2 + 60,4 M_3 - 36,6 M_4 + 9,4 M_5 &= Z_3 \\ 9,4 M_2 - 36,6 M_3 + 60,4 M_4 - 36,6 M_5 + 9,4 M_6 &= Z_4 \\ 9,4 M_3 - 36,6 M_4 + 60,4 M_5 - 36,6 M_6 &= Z_5 \\ 9,4 M_4 - 36,6 M_5 + 60,4 M_6 &= Z_6. \end{aligned}$$

Ihre Auflösung liefert\*)

$$\begin{aligned} M_1 &= 0,03004 Z_1 + 0,02575 Z_2 + 0,01360 Z_3 + 0,00449 Z_4 \\ &\quad + 0,00029 Z_5 - 0,00053 Z_6 \\ M_2 &= 0,02575 Z_1 + 0,05210 Z_2 + 0,03742 Z_3 + 0,01753 Z_4 \\ &\quad + 0,00498 Z_5 + 0,00029 Z_6 \\ M_3 &= 0,01360 Z_1 + 0,03742 Z_2 + 0,05826 Z_3 + 0,03941 Z_4 \\ &\quad + 0,01753 Z_5 + 0,00449 Z_6. \end{aligned}$$

Damit sind die Stützenmomente auf die Form gebracht

$$M_i = \beta_{i1} Z_1 + \beta_{i2} Z_2 + \beta_{i3} Z_3 + \beta_{i4} Z_4 + \beta_{i5} Z_5 + \beta_{i6} Z_6,$$

und es ergibt sich für die Ordinate  $\eta_{ir}$  der  $M_{i*}$ -Linie im Stützpunkte  $r$  der Ausdruck

$$\eta_{ir} = \alpha l (-\beta_{i(r-1)} + 2\beta_{ir} - \beta_{i(r+1)}),$$

wo  $\alpha l = 9,4 \cdot 12 = \text{rund } 113$  ist. Man erhält

\*) Vgl. die Anmerkung auf Seite 201.

für das Moment  $M_1$ :

$$\begin{aligned}
 \eta_{1 \cdot 0} &= 113 ( \phantom{+ 2 \cdot 0,03004} - 0,03004 ) = - 3,39 \text{ m} \\
 \eta_{1 \cdot 1} &= 113 ( \phantom{+ 2 \cdot 0,03004} + 2 \cdot 0,03004 - 0,02575 ) = + 3,88 \\
 \eta_{1 \cdot 2} &= 113 ( - 0,03004 + 2 \cdot 0,02575 - 0,01360 ) = + 0,89 \\
 \eta_{1 \cdot 3} &= 113 ( - 0,02575 + 2 \cdot 0,01360 - 0,00449 ) = - 0,34 \\
 \eta_{1 \cdot 4} &= 113 ( - 0,01360 + 2 \cdot 0,00449 - 0,00029 ) = - 0,55 \\
 \eta_{1 \cdot 5} &= 113 ( - 0,00449 + 2 \cdot 0,00029 + 0,00053 ) = - 0,38 \\
 \eta_{1 \cdot 6} &= 113 ( - 0,00029 - 2 \cdot 0,00053 \phantom{+ 0,00053} ) = - 0,15 \\
 \eta_{1 \cdot 7} &= 113 ( + 0,00053 \phantom{- 0,00053} ) = + 0,06,
 \end{aligned}$$

für das Moment  $M_2$ :

$$\begin{aligned}
 \eta_{2 \cdot 0} &= 113 ( \phantom{+ 2 \cdot 0,02575} - 0,02575 ) = - 2,91 \\
 \eta_{2 \cdot 1} &= 113 ( \phantom{+ 2 \cdot 0,02575} + 2 \cdot 0,02575 - 0,05210 ) = - 0,07 \\
 \eta_{2 \cdot 2} &= 113 ( - 0,02575 + 2 \cdot 0,05210 - 0,03742 ) = + 4,64 \\
 \eta_{2 \cdot 3} &= 113 ( - 0,05210 + 2 \cdot 0,03742 - 0,01753 ) = + 0,59 \\
 \eta_{2 \cdot 4} &= 113 ( - 0,03742 + 2 \cdot 0,01753 - 0,00498 ) = - 0,83 \\
 \eta_{2 \cdot 5} &= 113 ( - 0,01753 + 2 \cdot 0,00498 - 0,00029 ) = - 0,89 \\
 \eta_{2 \cdot 6} &= 113 ( - 0,00498 + 2 \cdot 0,00029 \phantom{- 0,00029} ) = - 0,50 \\
 \eta_{2 \cdot 7} &= 113 ( - 0,00029 \phantom{+ 0,00029} ) = - 0,03,
 \end{aligned}$$

für das Moment  $M_3$ :

$$\begin{aligned}
 \eta_{3 \cdot 0} &= 113 ( \phantom{+ 2 \cdot 0,01360} - 0,01360 ) = - 1,54 \\
 \eta_{3 \cdot 1} &= 113 ( \phantom{+ 2 \cdot 0,01360} + 2 \cdot 0,01360 - 0,03742 ) = - 1,15 \\
 \eta_{3 \cdot 2} &= 113 ( - 0,01360 + 2 \cdot 0,03742 - 0,05826 ) = + 0,34 \\
 \eta_{3 \cdot 3} &= 113 ( - 0,03742 + 2 \cdot 0,05826 - 0,03941 ) = + 4,48 \\
 \eta_{3 \cdot 4} &= 113 ( - 0,05826 + 2 \cdot 0,03941 - 0,01753 ) = + 0,34 \\
 \eta_{3 \cdot 5} &= 113 ( - 0,03941 + 2 \cdot 0,01753 - 0,00449 ) = - 1,00 \\
 \eta_{3 \cdot 6} &= 113 ( - 0,01753 + 2 \cdot 0,00449 \phantom{- 0,00449} ) = - 0,97 \\
 \eta_{3 \cdot 7} &= 113 ( - 0,00449 \phantom{+ 0,00449} ) = - 0,51.
 \end{aligned}$$

Zu den Ordinaten der durch diese Strecken  $\eta$  bestimmten Polygone (Fig. 188, 189, 190), die wir kurz die  $\eta$ -Polygone nennen wollen, werden nun die Strecken

$$\zeta_{i,r} = - (\beta_{i(r-1)} \operatorname{tg} \varphi_L + \beta_{i,r} \operatorname{tg} \varphi_R) l$$

addiert, wo

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi_R = \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3}$$

Zahlen sind, die mit den Zahlen  $\omega_D$  übereinstimmen\*). Die auf diese Weise gewonnenen, aus je zwei stetig gekrümmten Zweigen bestehenden

\*) Man vergleiche Seite 70, 71 und 75.

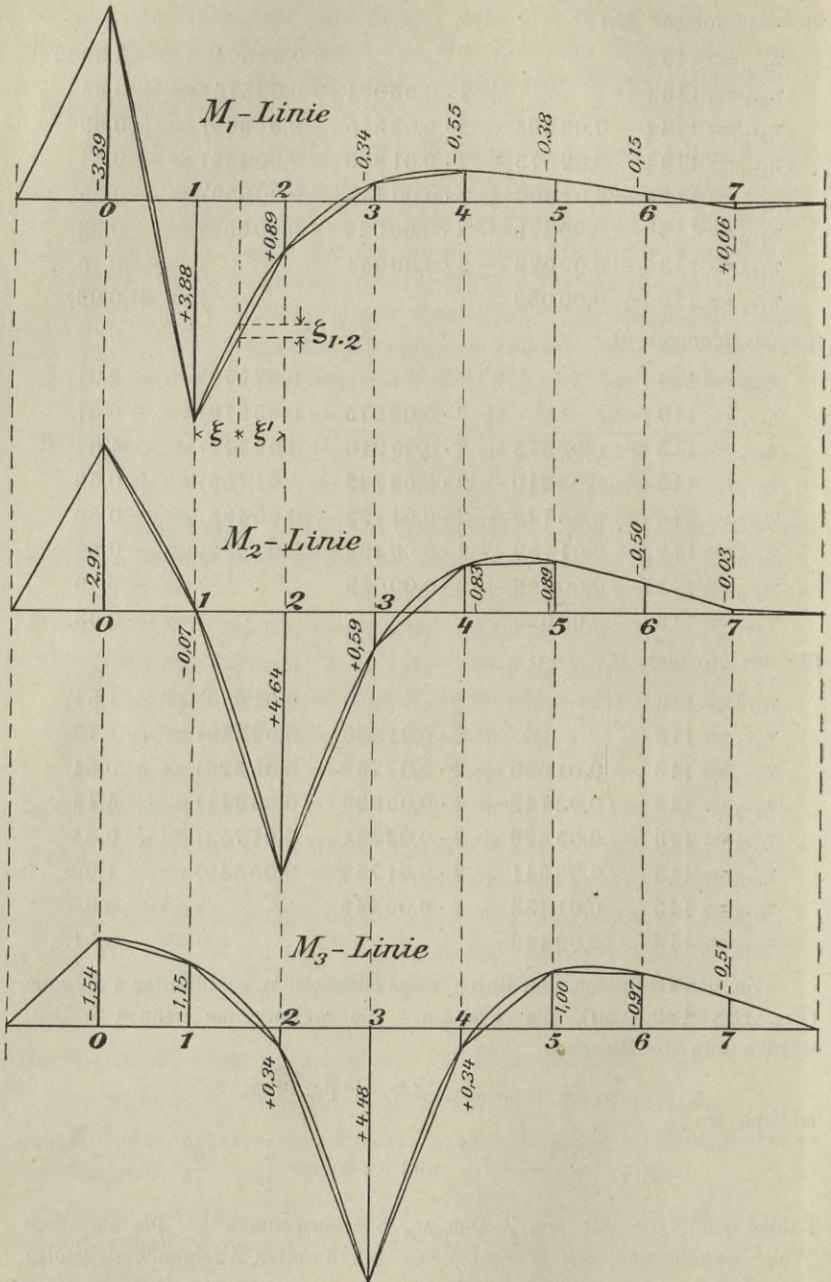


Fig. 188–190.

$M$ -Linien weichen nun bei Schiffbrücken in der Regel so wenig von den  $\eta$ -Polygonen ab, daß es genügt, für jede Öffnung eine Ordinate, und zwar die der Mitte entsprechende zu berechnen. Für  $\xi = \xi' = \frac{1}{2} l$  ist

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \operatorname{tg} \varphi_R = \frac{3}{8}. \quad \text{Das gibt mit } l = 12,0^m$$

$$\zeta_{i,r} = -4,5 (\beta_{i,(r-1)} + \beta_{i,r}),$$

und z. B. für das Moment  $M_1$ :

$$\zeta_{1,1} = -4,5 ( \quad \quad \quad + 0,03004) = -0,14 \text{ m}$$

$$\zeta_{1,2} = -4,5 (+ 0,03004 + 0,02575) = -0,25$$

$$\zeta_{1,3} = -4,5 (+ 0,02575 + 0,01360) = -0,18$$

$$\zeta_{1,4} = -4,5 (+ 0,01360 + 0,00449) = -0,08$$

$$\zeta_{1,5} = -4,5 (+ 0,00449 + 0,00029) = -0,02$$

$$\zeta_{1,6} = -4,5 (+ 0,00029 - 0,00053) = +0,00$$

$$\zeta_{1,7} = -4,5 (-0,00053 \quad \quad \quad) = +0,00.$$

Ebenso erhält man für  $M_2$  und  $M_3$  die Zahlen:

$$\zeta_2 = -0,12; -0,35; -0,40; -0,25; -0,10; -0,03; -0,00,$$

$$\zeta_3 = -0,06; -0,23; -0,43; -0,43; -0,26; -0,10; -0,02.$$

Nach Aufzeichnung der Einflußlinien für die Stützenmomente lassen sich auch die Einflußlinien für die übrigen Momente  $M$  leicht angeben. Für einen Querschnitt der Öffnung  $(r-1) - r$ , im Abstände  $x$  von  $(r-1)$  und  $x'$  von  $r$  erhält man

$$M = M_o + \frac{M_{r-1}}{l_r} x' + \frac{M_r}{l_r} x.$$

Es genügt, die Momente für die in den Mitten der einzelnen Öffnungen liegenden Querschnitte darzustellen. Man erhält dann

$$M = M_o + \frac{1}{2} (M_{r-1} + M_r).$$

Die  $M_o$ -Fläche ist ein Dreieck von der Höhe

$$\frac{1}{4} l = 3,0^m.$$

Die Figuren 191—193 zeigen die Einflußlinien für die den Mitten der Öffnungen 1—2, 2—3 und 3—4 entsprechenden Momente  $M_{II}$ ,  $M_{III}$  und  $M_{IV}$ . Die Ausrundung der Einflußlinien der Stützenmomente mittels der verhältnismäßig kleinen Strecken  $\zeta$  ist hierbei unterblieben; es wurden nur die  $\eta$ -Polygone benutzt. Dieses, durch große Einfachheit sich auszeichnende Verfahren ist zulässig, sobald, wie im vorliegenden Falle, der Inhalt des positiven Teiles der  $M$ -Fläche größer ist als der Inhalt des negativen Teiles, weil dann die Vernachlässigung der  $\zeta$  die Sicherheit des Bauwerks erhöht. Der mit dieser Rechnungsweise

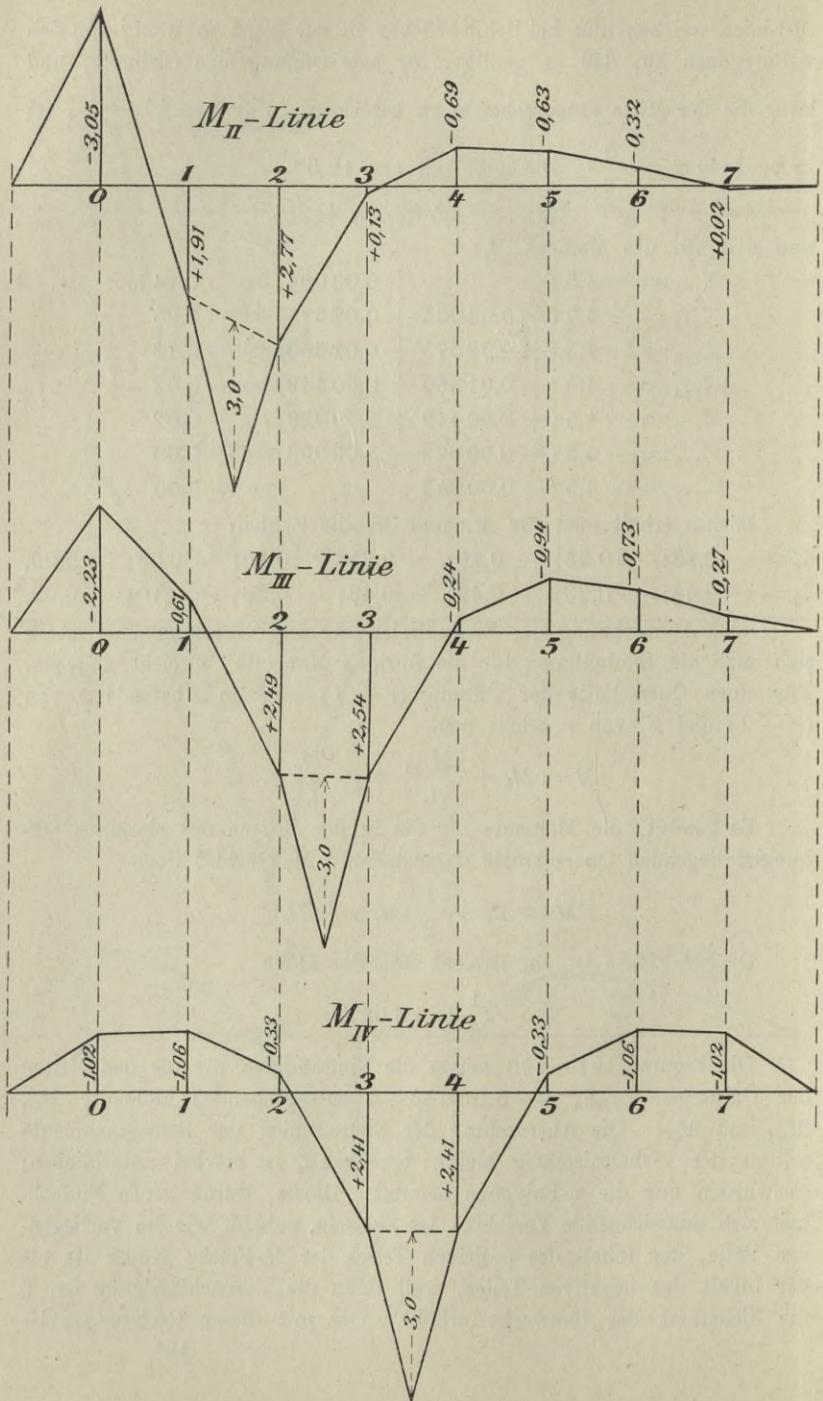


Fig. 191—193.

verbundene Zuschlag zu den Momenten ist aber auch aus einem anderen Grunde zweckmäßig. Die aufgestellte Theorie setzt ruhendes Wasser voraus, während in Wirklichkeit durch Wellen Schiffsverschiebungen  $e'$  entstehen können, die zwar in den allgemeinen Gleichungen berücksichtigt sind, die sich aber schwer schätzen lassen.

2. *Einflußlinien für die Querkräfte.* Für die Querkraft eines Querschnittes der Öffnung  $(r - 1) - r$  gilt die Formel

$$Q = Q_0 + \frac{M_r - M_{r-1}}{l},$$

sie liefert für die Querkraft des unmittelbar rechts neben der Stütze 2 gelegenen Querschnitts die in Fig. 194 dargestellte Einflußlinie  $ABCDEF$ . Zur Aufzeichnung dieser Linie wurden nur die  $\eta$ -Polygone benutzt; diese liefern die den Stützpunkten 0, 1, 2, ... entsprechenden Ordinaten

$$\frac{M_3 - M_2}{12,0} = \frac{-1,54 + 2,91}{12,0} = +0,11$$

$$\frac{-1,15 + 0,07}{12,0} = -0,09 \text{ u. s. w.}$$

Für den Punkt 2 ist  $Q_0 = 1,0$ , für alle übrigen  $Q_0 = 0$ . Die so gefundenen Ordinaten wurden durch stetige Kurven  $BC$  und  $DE$  verbunden. Zu den Koppelträgern  $A - 0$  und  $B - 7$  gehören gerade Einflußlinien.

Für die Querkraft des unmittelbar links von Stütze 3 gelegenen Querschnitts ergibt sich die Einflußlinie  $ABC'D'EF$ . Die Linien  $CC'$  und  $DD'$  haben überall den lotrechten Abstand Eins; sie bestimmen die Einflußlinien für die Querkräfte sämtlicher Querschnitte der Öffnung 2—3. Für die Querkraft  $Q_m$  des Querschnitts  $m$  erhält man die Einflußlinien  $ABC''D''EF$ .

3. *Einflußlinien für die Stützenwiderstände.* Der Widerstand der Stütze 0 ist

$$C_0 = C_{00} - \frac{M_1}{l}.$$

Für den Stützpunkt 0 ist  $C_{00} = 1$ , für alle übrigen  $C_{00} = 0$ . Die mit Hilfe des  $\eta_1$ -Polygons berechnete  $C_0$ -Linie zeigt Fig. 195. In den Figuren 196—198 sind, ebenfalls lediglich mit Hilfe der  $\eta$ -Polygone die Einflußlinien für

$$C_1 = C_{01} + \frac{M_2 - 2M_1}{l},$$

$$C_2 = C_{02} + \frac{M_1 + M_3 - 2M_2}{l},$$

$$C_3 = C_{03} + \frac{M_2 + M_4 - 2M_3}{l}$$

dargestellt worden.

4. *Einfluß des Eigengewichts.* Ist die Brücke unbelastet, so mögen die Stützpunkte in ein und derselben Wagerechten liegen. Durch ein-

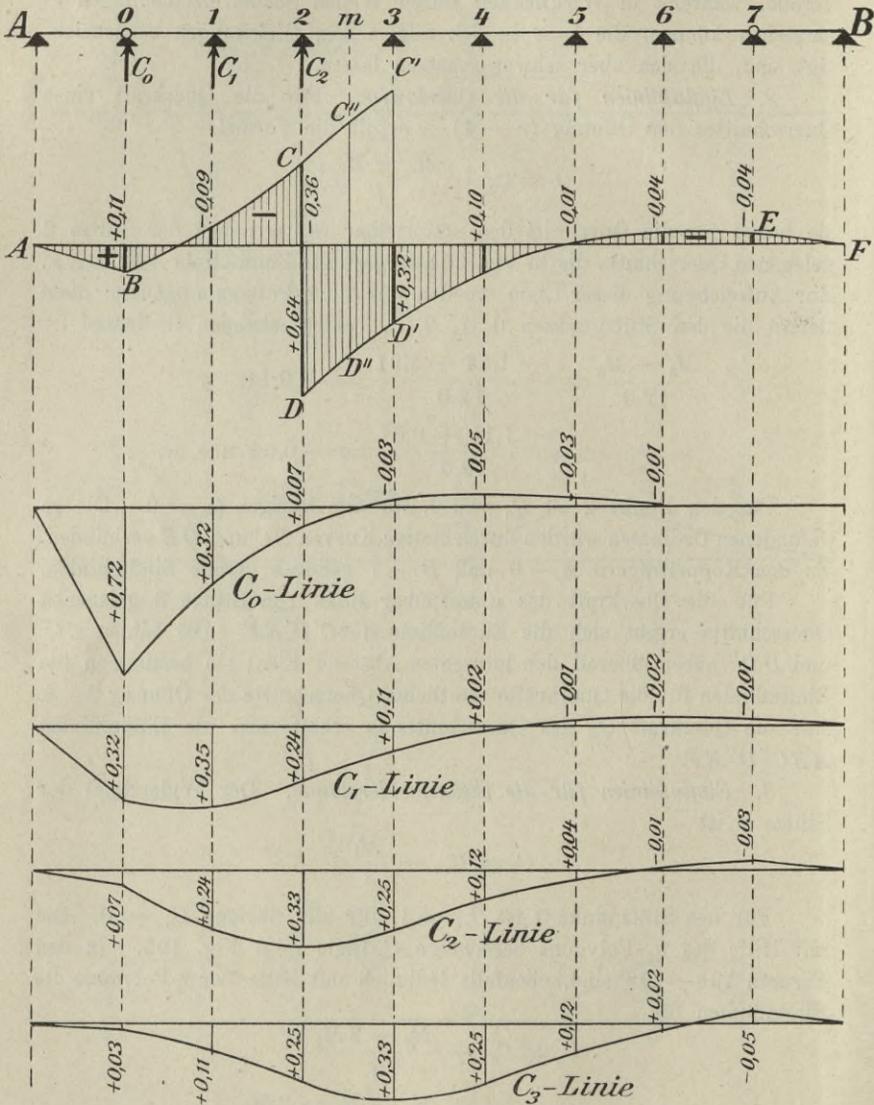


Fig. 194—198.

stellbare Lager oder Regelung der Höhenlage der Schiffe mittels Ballast läßt sich diese Forderung stets erfüllen. Der Einfluß der ständigen Belastung  $g$  wird dann wie bei einem Balken auf starren Stützen be-

stimmt. Wir benutzen die Clapeyronschen Gleichungen, sie lauten für gleich große Stützweiten und gleichmäßige Belastung

$$4 M_1 + M_2 = - \frac{gl^2}{2},$$

$$M_1 + 4 M_2 + M_3 = - \frac{gl^2}{2},$$

$$M_2 + 4 M_3 + M_4 = - \frac{gl^2}{2},$$

wo wegen der Symmetrie  $M_4 = M_3$  ist, und liefern:

$$M_1 = - \frac{15 gl^2}{142} = - 15,2 g,$$

$$M_2 = - \frac{11 gl^2}{142} = - 11,2 g,$$

$$M_3 = - \frac{12 gl^2}{142} = - 12,2 g.$$

Die Stützenwiderstände infolge des Eigengewichts sind

$$C_0 = gl + \frac{M_1}{l} = 10,7 g,$$

$$C_1 = gl + \frac{M_2 - 2 M_1}{l} = 13,6 g,$$

$$C_2 = gl + \frac{M_1 + M_3 - 2 M_2}{l} = 11,6 g,$$

$$C_3 = gl + \frac{M_2 - M_3}{l} = 12,1 g.$$

5. *Beanspruchung des Balkens.* Das größte Moment erhält man für den Querschnitt III in der Mitte der Öffnung 2—3. Der Inhalt des positiven Teiles der  $M_{III}$ -Fläche ist rund  $74 \text{ m}^2$ . Die ständige Last erzeugt

$$M = \frac{gl^2}{8} + \frac{M_2 + M_3}{2} = 6,3 g,$$

im ganzen entsteht also

$$M = 74 p + 6,3 g = 74 \cdot 2,7 + 6,3 \cdot 1,8 = 211 \text{ t} \cdot \text{m} = 21100 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Das Widerstandsmoment des Querschnitts eines Blechbalkens ist, nach Abzug der Nietlöcher,  $W = 5990$ . Die Balken werden daher beansprucht mit

$$\sigma = \frac{21100}{4 \cdot 5990} = 0,88 \text{ t/cm}^2.$$

6. *Einsenkungen der Schiffe infolge der Verkehrslast.* Die Inhalte der positiven Teile der Einflußflächen der Stützenwiderstände  $C_0, C_1, C_2, C_3$  sind

$$13,0 \qquad 12,5 \qquad 12,5 \qquad 13,2.$$

Der wagerechte Schiffsquerschnitt ist  $F = 100 \text{ m}^2$ . Die größte Ein-senkung beträgt daher

$$\frac{13,2 p}{100} = \frac{13,2 \cdot 2,7}{100} = 0,36 \text{ m}.$$

7. Wir wollen schließlich noch die  $\eta$ -Polygone für den Fall an-geben, daß der Balken nur auf 6 Schiffen ruht. Die Rechnung läßt sich hier leicht in Buchstaben durchführen. Setzt man zur Abkürzung

$$4\alpha - 1 = \alpha', \quad 4 + 6\alpha = \alpha'',$$

so lauten die aufzulösenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha'' M_1 - \alpha' M_2 + \alpha M_3 &= Z_1 \\ -\alpha' M_1 + \alpha'' M_2 - \alpha' M_3 + \alpha M_4 &= Z_2 \\ \alpha M_1 - \alpha' M_2 + \alpha'' M_3 - \alpha' M_4 &= Z_3 \\ \alpha M_2 - \alpha' M_3 + \alpha'' M_4 &= Z_4. \end{aligned}$$

Addiert man die erste Gleichung zur letzten, die zweite zur dritten, so erhält man

$$\begin{aligned} \alpha'' (M_1 + M_4) - (\alpha' - \alpha) (M_2 + M_3) &= Z_1 + Z_4 \\ -(\alpha' - \alpha) (M_1 + M_4) + (\alpha'' - \alpha') (M_2 + M_3) &= Z_2 + Z_3. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der entsprechenden Gleichungen entsteht:

$$\begin{aligned} \alpha'' (M_1 - M_4) - (\alpha' + \alpha) (M_2 - M_3) &= Z_1 - Z_4 \\ -(\alpha' + \alpha) (M_1 - M_4) + (\alpha'' + \alpha') (M_2 - M_3) &= Z_2 - Z_3. \end{aligned}$$

Die Nennerdeterminanten dieser beiden Gruppen von Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha'' (\alpha'' - \alpha') - (\alpha' - \alpha)^2 \\ \Delta' &= \alpha'' (\alpha'' + \alpha') - (\alpha' + \alpha)^2. \end{aligned}$$

Nach Berechnung der Zahlen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\alpha'' - \alpha'}{2\Delta}, & \varphi_2 &= \frac{\alpha' - \alpha}{2\Delta}, & \varphi_3 &= \frac{\alpha''}{2\Delta} \\ \varphi_1' &= \frac{\alpha'' + \alpha'}{2\Delta'}, & \varphi_2' &= \frac{\alpha' + \alpha}{2\Delta'}, & \varphi_3' &= \frac{\alpha''}{2\Delta'} \end{aligned}$$

findet man

$$\begin{aligned} M_1 &= (\varphi_1 + \varphi_1') Z_1 + (\varphi_2 + \varphi_2') Z_2 + (\varphi_3 - \varphi_3') Z_3 + (\varphi_1 - \varphi_1') Z_4 \\ M_2 &= (\varphi_2 + \varphi_2') Z_1 + (\varphi_3 + \varphi_3') Z_2 + (\varphi_3 - \varphi_3') Z_3 + (\varphi_2 - \varphi_2') Z_4. \end{aligned}$$

Mit  $\alpha = 9,4$  entsteht:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0,03001 Z_1 + 0,02564 Z_2 + 0,01335 Z_3 + 0,00410 Z_4 \\ M_2 &= 0,02564 Z_1 + 0,05136 Z_2 + 0,03472 Z_3 + 0,01335 Z_4. \end{aligned}$$

Aus den Ziffern dieser Gleichungen ergeben sich nun die folgenden  $\eta$ -Polygone für die Momente  $M_1$  und  $M_2$ .

Stützpunkt	0	1	2	3	4	5
$\eta_{1r} =$	-3,39	+3,88	+0,89	-0,34	-0,58	-0,46
$\eta_{2r} =$	-2,90	-0,01	+4,79	+0,53	-0,91	-1,51.

Führt man mit Hilfe dieser Werte die weitere Rechnung auf dem vorhin beschriebenen Wege durch, so findet man, daß sich die Beanspruchung des Balkens und die Einsenkungstiefen der Schiffe durch die Verminderung der Schiffszahl nur unwesentlich ändern.

Einfache Näherungsformeln für Schiffbrücken findet man im § 15, Nr. 74.

*Anmerkung.* Die praktische Berechnung eines Balkens auf einer großen Zahl von Stützen wird durch die Tatsache sehr erleichtert, daß der Einfluß der Belastung einer Öffnung nach beiden Seiten hin rasch abnimmt und nur für die nächsten Öffnungen noch wesentlich ins Gewicht fällt. In der Regel wird es bei gleichen Stützweiten und gleich beschaffenen Stützen genügen, wie im vorliegenden Beispiele, einen Balken auf 8 Stützen zu untersuchen. Es treten dann 6 unbekannte Stützenmomente auf und es führt das in Nr. 22 beschriebene Verfahren zu der Aufgabe, zwei Gruppen von je drei Gleichungen mit je drei Unbekannten aufzulösen. Es möge daher ein bequemes und übersichtliches Schema für die Lösung dieser Aufgabe mitgeteilt werden\*). Es liegen die Gleichungen vor:

$$(1) \quad \begin{cases} +8x_1 - 7x_2 - x_3 = A \\ +2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = B \\ -6x_1 + 5x_2 + 9x_3 = C. \end{cases}$$

Man schreibe die Zahlen der zweiten Gleichung, mit dem zweiten Gliede beginnend, in der zyklischen Reihenfolge +3, +4, +2, +3 hin und setze darunter, immer mit dem zweiten Gliede beginnend, die Zahlen der dritten, ersten und zweiten Gleichung. Am Kreuzungspunkte der die Zahlen +3, +9 und +5, +4 verbindenden Linien trage man den Wert der aus diesen vier Zahlen gebildeten Determinante +3·9 - 5·4 = +7 ein und fülle in dieser Weise das Schema aus.

	+3	+4	+2	+3
(A)		+7	-42	+28
	+5	+9	-6	+5
(B)		+58	+66	+2
	-7	-1	+8	-7
(C)		-25	-34	+38
	+3	+4	+2	+3

Bezeichnet man nun die Nennerdeterminante der drei Gleichungen mit  $D$ , so erhält man

\*) Übernommen aus des Verfassers „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen“. Dritte Auflage, 1904.

$$Dx_1 = + 7A + 58B - 25C$$

$$Dx_2 = - 42A + 66B - 34C$$

$$Dx_3 = + 28A + 2B + 38C.$$

Zur Berechnung von  $D$  stehen drei Ansätze zur Verfügung:

$$D = + 7 \cdot 8 + 58 \cdot 2 + 25 \cdot 6 = 322$$

$$D = + 42 \cdot 7 + 66 \cdot 3 - 34 \cdot 5 = 322$$

$$D = - 28 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 38 \cdot 9 = 322.$$

Der erste Ansatz entsteht durch Multiplikation der Zahlen  $+7$ ,  $+58$ ,  $+25$  der ersten senkrechten Determinantenreihe mit den entsprechenden Zahlen  $+8$ ,  $+2$ ,  $-6$  der ersten senkrechten Koeffizientenreihe der Gleichungen (I). Und in ähnlicher Weise ergeben sich die beiden anderen Ansätze für  $D$  aus den zweiten und dritten senkrechten Reihen.

Zur Prüfung der Zahlenrechnung empfiehlt sich die dreimalige Ermittlung von  $D$ .

Sind die  $n$  Stützweiten nicht gleich groß, die Stützen nicht gleich beschaffen und fehlt die Symmetrie, so ist die folgende Auflösung der  $(n-1)$  Elastizitätsgleichungen im allgemeinen die zweckmäßigste.

Man nimmt zunächst  $M_1$  und  $M_2$  bekannt an, berechnet mit Hilfe der ersten Elastizitätsgleichung das Moment  $M_3$ , hierauf mittels der zweiten Gleichung das Moment  $M_4$  u. s. f., bis man aus der  $(n-3)$ ten Gleichung das Moment  $M_{n-1}$  gefunden hat. Auf diese Weise erhält man  $M_3$  bis  $M_{n-1}$  als lineare Funktionen von  $M_1$  und  $M_2$  und kann nunmehr diese beiden Momente mit Hilfe der noch zur Verfügung stehenden  $(n-2)$ ten und  $(n-1)$ ten Elastizitätsgleichung berechnen.

## § 13.

### Balken auf sehr vielen starren oder elastisch senkbaren Stützen.

**62.** Im vorigen Paragraphen zeigte sich bei der Berechnung eines Balkens unveränderlichen Querschnitts, der auf vielen gleichartigen, in gleichen Abständen angeordneten Stützen ruht, daß die Beanspruchung der einzelnen Öffnungen nahezu gleich und unabhängig von der Anzahl der Stützen ist. Es genügt dann, eine Mittelöffnung und die erste Öffnung zu untersuchen. Fälle dieser Art kommen ziemlich häufig vor, nicht nur bei Schiffbrücken. Es möge deshalb die Berechnung derartiger Balken noch etwas weiter ausgeführt werden.

#### 1. Balken auf starren Stützen.

**63. Untersuchung einer Mittelöffnung.** Für die Zahlen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  eines auf starren Stützen ruhenden Balkens gilt bei gleich großen Stützweiten  $l$  nach Gleichung (7), Seite 116, die Formel

$$(1) \quad x_{k+1} = 4 - \frac{1}{x_k}.$$

Man erhält der Reihe nach

$$x_2 = 4, \quad x_3 = \frac{15}{4} = 3,75, \quad x_4 = \frac{56}{15} = 3,7333, \quad x_5 = \frac{209}{56} = 3,7321$$

und erkennt, daß sich diese Werte schnell der durch die Gleichung

$$(2) \quad x = 4 - \frac{1}{x}$$

bestimmten festen Grenze nähern:

$$(3) \quad x = 2 + \sqrt{3} = 3,7321.$$

Man kann also eine beliebige Öffnung  $(r - 1) - r$  herausgreifen, ihre Festpunkte  $L$  und  $R$  mit Hilfe der Strecken

$$(4) \quad a = a' = \frac{l}{1 + x} = \frac{l}{6} (3 - \sqrt{3}) = 0,2113 l$$

bestimmen, den Einfluß der Belastung dieser Öffnung auf die Stützmomente  $M_{r-1}$  und  $M_r$  angeben und schließlich nach Fig. 49 die Momentenlinien für die übrigen Öffnungen ermitteln, wobei man sich auf wenige Öffnungen beschränken darf, weil der Einfluß der belasteten Öffnung nach beiden Seiten hin rasch abnimmt.

Der Einfluß einer zwischen den Stützen  $(r - 1)$  und  $r$  im Abstände  $x$  von  $r - 1$  ruhenden Einzellast  $P = 1$  auf das Moment  $M_r$  ist nach § 10, Gleichung (13),

$$(5) \quad M_r = -u' \omega_D + 3v \omega_R,$$

wo

$$(6) \quad u' = u = \frac{al}{c} = \frac{al}{l - 2a} = \frac{l}{x - 1} = 0,3660 l,$$

$$(7) \quad v = \frac{a^2}{c} = u \frac{a}{l} = \frac{l}{x^2 - 1} = 0,0774 l.$$

Die Zahlen  $\omega_D$ ,  $\omega_R$  finden sich in der Tabelle auf Seite 105. Man erhält für

$\frac{\xi}{l} =$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
$\frac{M_r}{l} =$	-0,0333	-0,0675	-0,0795	-0,0858	-0,0684.

Wie man aus der  $M_r$ -Linie die übrigen Einflußlinien herleiten kann, ist in den vorhergehenden Paragraphen mehrfach beschrieben worden.

Ist die Öffnung  $(r - 1) - r$  gleichmäßig mit  $p$  für die Längeneinheit belastet, so entsteht

$$M_r = \left( -u \int_0^l \omega_D dx + 3v \int_0^l \omega_R dx \right) p = \frac{pl}{4} (-u + 2v),$$

und dieser Ausdruck läßt sich umformen in

$$(8) \quad M_r = -\frac{pl^2}{4(x+1)} = -\frac{pla}{4}.$$

Ebenso groß ist auch das Moment  $M_{r-1}$  am linken Ende des belasteten Feldes.

Der Einfluß der Belastung der Öffnung  $l_r^*$ ) auf die Stützenmomente rechts von  $r$  ist

$$M_{r+1} = -M_r \frac{1}{x}, \quad M_{r+2} = -M_r \frac{1}{x} = +M_r \frac{1}{x^2},$$

$$M_{r+3} = -M_r \frac{1}{x^3}, \quad M_{r+4} = +M_r \frac{1}{x^4}, \text{ u. s. w.}$$

und links von der Öffnung  $l_r$  entstehen

$$M_{r-2} = M_{r+1}, \quad M_{r-3} = M_{r+2}, \text{ u. s. w.}$$

Das Moment  $M_r$  nimmt nun den größten negativen Wert an, wenn rechts von  $r$  die Öffnungen  $l_{r+1}$ ,  $l_{r+3}$ ,  $l_{r+5}$ , ... belastet werden und links von  $r$  die Öffnungen  $l_r$ ,  $l_{r-2}$ ,  $l_{r-4}$ , ... Man erhält:

$$M_r = -2 \cdot \frac{pla}{4} - 2 \cdot \frac{pla}{4} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots \right),$$

$$M_r = -\frac{pla}{2} - \frac{pla}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - 1}; \text{ das gibt}$$

$$(9) \quad M_r = -\frac{pa(l+v)}{2},$$

und nach Einsetzen der für  $a$  und  $v$  gefundenen Werte

$$(10) \quad M_r = -0,1138 pl^2.$$

Das größte positive Moment entsteht in der Mitte der Öffnung. Die fragliche Öffnung ist voll zu belasten. Die Nachbaröffnungen bleiben unbelastet. Die folgenden Öffnungen sind abwechselnd belastet und unbelastet anzunehmen. Es ergibt sich

$$\max M = \frac{pl^2}{8} + M_1,$$

$$M_r = -\frac{pla}{4} + 2 \frac{pla}{4} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots \right]$$

$$= -\frac{pla}{4} + \frac{pla}{2} \frac{1}{x^2 - 1},$$

mithin

$$(11) \quad \max M = \frac{pl^2}{8} - \frac{pla}{4} \left( 1 - \frac{2v}{l} \right) = 0,0804 pl^2.$$

\*) Der Zeiger gibt nur die Lage der Öffnung gegen die Stütze  $r$  an.

Der Druck  $C$  auf Stütze  $r$  wird am größten bei der das größte negative Moment  $M_r$  erzeugenden Belastung. In die Formel

$$C = C_o + \frac{2(M_{r-1} + M_r)}{l}$$

hat man einzusetzen:

$$C_o = pl,$$

$$M_r = -\frac{pa(l+v)}{2} \text{ (nach Gleichung 9),}$$

$$\begin{aligned} M_{r-1} &= -\frac{pal}{4} + 2\frac{pal}{4} \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^5} + \dots \right] \\ &= -\frac{pal}{4} + \frac{pal}{2\alpha} \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2 - 1} \right) = -\frac{pal}{4} + \frac{pa(l+v)}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Das erste Glied von  $M_{r-1}$  berücksichtigt den Einfluß der Belastung der Öffnung  $l_r$ , das zweite den Einfluß der Belastung der übrigen Öffnungen. Man findet schließlich

$$(12) \quad \text{max } C = pl \left( 1 + \frac{1}{2\alpha - 2} \right) = 1,183 pl.$$

Sehr einfach gestaltet sich die Ermittlung des Einflusses einer gleichförmigen ständigen Belastung  $g$  für die Längeneinheit. Das Balkenstück  $l_r$  verhält sich wie ein an beiden Enden wagerecht eingespannter Stab; es entsteht also nach Seite 31

$$(13) \quad M_r = -\frac{gl^2}{12},$$

und in der Mitte von  $l_r$ :

$$(14) \quad M = +\frac{gl^2}{24}.$$

Ferner ist

$$(15) \quad C = gl.$$

Da für den mittleren Teil des Balkens die vom Eigengewicht her rührenden Stützenmomente gleich groß angenommen werden dürfen, so folgt der oben für  $M_r$  angegebene Wert auch aus der Gleichung

$$M_r + 4M_r + M_r = \frac{N}{l} = \frac{gl^2}{2}.$$

In derselben Weise findet man den Einfluß des Temperaturunterschiedes  $t_u - t_o$ , mittels Gleichung (8), Seite 36:

$$(16) \quad M_r = \frac{N}{6l} = -\frac{\varepsilon EJ(t_u - t_o)}{h}.$$

Die Biegungsspannung infolge dieser Wärmeschwankung beträgt

$$(17) \quad \sigma = \pm \frac{M_r h}{2J} = \mp \frac{1}{2} \varepsilon E(t_u - t_o).$$

**64. Die erste Öffnung.** Der Festpunkt  $R$  der ersten Öffnung liegt im Abstände

$$a = \frac{l}{1 + \alpha} = 0,2113 l$$

von Stütze 1. Man erhält für eine in der ersten Öffnung im Abstände  $x$  von Stütze 0 angreifende Last 1

$$(18) \quad M_1 = -u_1' \omega_D = -a \frac{l}{l-a} \omega_D = -\frac{l}{\alpha} \omega_D. \quad \text{Das gibt}$$

$$(19) \quad \frac{M_1}{l} = -(2 - \sqrt{3}) \omega_D = -0,2679 \omega_D.$$

$$\text{Zu } \frac{x}{l} = \quad 0,2 \quad \quad 0,4 \quad \quad 0,5 \quad \quad 0,6 \quad \quad 0,8$$

$$\text{gehört } \frac{M_1}{l} = -0,0514 \quad -0,0900 \quad -0,1005 \quad -0,1034 \quad -0,0772.$$

Im zweiten Felde liegt  $R$  im Abstände  $a$  von Stütze 2. Dagegen hat  $L_2$  von 1 den Abstand

$$a_2 = \frac{l}{1 + \alpha_2} = \frac{l}{1 + 4} = 0,2 l.$$

$$\text{Man findet } c_2 = l - a - a_2 = 0,5887 l,$$

$$u_2' = a \frac{l}{c_2} = \frac{0,2113}{0,5887} l = 0,3589 l,$$

$$v = \frac{a a_2}{c_2} = \frac{0,2 \cdot 0,2113}{0,5887} l = 0,0758 l,$$

und für eine Last 1 im Abstände  $x$  von Stütze 2

$$(20) \quad \frac{M_1}{l} = -u_2' \omega_D + 3v \omega_R,$$

$$\frac{M_1}{l} = -0,3589 \omega_D + 0,2274 \omega_R.$$

$$\text{Zu } \frac{x}{l} = \quad 0,2 \quad \quad 0,4 \quad \quad 0,5 \quad \quad 0,6 \quad \quad 0,8$$

$$\text{gehört } \frac{M_1}{l} = -0,0325 \quad -0,0660 \quad -0,0777 \quad -0,0840 \quad -0,0665.$$

Diese  $M_1$ -Linie unterscheidet sich von der  $M_1$ -Linie der Mittelfelder so wenig, daß sie durch letztere ersetzt werden darf, zum mindesten, wenn es sich um den Einfluß einer gleichförmigen Belastung  $p$  handelt. Wir rechnen also für gleichförmige Belastung der zweiten Öffnung:

$$M_1 = -\frac{pla}{4}$$

und für gleichförmige Belastung der 4<sup>ten</sup>, 6<sup>ten</sup>, 8<sup>ten</sup> u. s. w. Öffnung:

$$M_1 = -\frac{pla}{4} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots \right] = -\frac{pla}{4(x^2 - 1)} = -\frac{pav}{4}.$$

Gleichförmige Belastung der ersten Öffnung liefert

$$M_1 = -\frac{pl}{x} \int_0^l \omega_D dx = -\frac{pl^2}{4x}.$$

Durch Zusammensetzung dieser Belastungen erhalten wir

$$(21) \quad \min M_1 = -\frac{pl^2}{4x} - \frac{pa(l+v)}{4} = -0,1240 pl^2.$$

Um nun für das Endfeld das größte positive Moment zu erhalten, belasten wir die erste, dritte, fünfte u. s. w. Öffnung und finden zunächst

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{pl^2}{4x} + \frac{pla}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \dots \right) \\ &= -\frac{pl^2}{4x} + \frac{plav}{4} x = -0,05174 pl^2. \end{aligned}$$

Der Druck  $A$  auf die Endstütze ist für diese Belastung

$$(22) \quad \max A = \frac{pl}{2} + \frac{M_1}{l} = 0,4483 pl.$$

Im Abstände  $x$  von  $A$  entsteht

$$M = Ax - \frac{px^2}{2}$$

und dieser Wert wird ein Maximum für  $x = \frac{A}{p}$ . Man erhält

$$(23) \quad \max M = \frac{A^2}{2p} = 0,1005 pl^2.$$

Das Stützenmoment  $M_1$  infolge einer gleichförmigen ständigen Belastung  $g$  ist

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{gl^2}{4x} - \frac{gal}{4} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - + \dots \right) \\ &= -\frac{gl^2}{4x} - \frac{gav}{4} \frac{x}{x+1} = -\frac{gl^2}{4x} - \frac{ga^2x}{4}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$(24) \quad M_1 = -0,1097 gl^2.$$

Der Druck auf die Endstütze ist

$$(25) \quad A = \frac{gl}{2} + \frac{M_1}{l} = 0,3903 gl.$$

2. Balken auf elastischen Stützen.

**65. Untersuchung des Stützenmomentes und Stützendruckes im mittleren Teile des Balkens.** Die Bezifferung der Stützpunkte zeigt Fig. 199. Ist die Anzahl der Stützen sehr groß, so darf die Lotrechte durch den der Mitte zunächst gelegenen Stützpunkt 1 als Symmetrieachse aufgefaßt werden. Das Moment  $M_1$  nimmt dann die Form an:

$$(26) \quad M_1 = \dots + \beta_3 Z_3' + \beta_2 Z_2' + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + \dots$$

Hinsichtlich der Bezeichnungen verweisen wir auf Seite 75.

Die Gleichungen, denen die Stützenmomente genügen müssen, lauten:

$$\begin{aligned} M_5' \alpha + M_4' (1 - 4\alpha) + M_3' (4 + 6\alpha) + M_2' (1 - 4\alpha) + M_1 \alpha &= Z_3' \\ M_4' \alpha + M_3' (1 - 4\alpha) + M_2' (4 + 6\alpha) + M_1 (1 - 4\alpha) + M_2 \alpha &= Z_2' \\ M_3' \alpha + M_2' (1 - 4\alpha) + M_1 (4 + 6\alpha) + M_2 (1 - 4\alpha) + M_3 \alpha &= Z_1 \\ M_2' \alpha + M_1 (1 - 4\alpha) + M_2 (4 + 6\alpha) + M_3 (1 - 4\alpha) + M_4 \alpha &= Z_2 \\ M_1 \alpha + M_2 (1 - 4\alpha) + M_3 (4 + 6\alpha) + M_4 (1 - 4\alpha) + M_5 \alpha &= Z_3 \end{aligned}$$

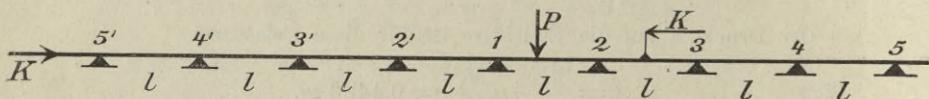


Fig. 199.

Wir multiplizieren nun die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit  $\dots \beta_3, \beta_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ , addieren sie, ordnen die linke Seite der erhaltenen Gleichung nach den Momenten, setzen den Faktor von  $M_1$  gleich 1, die Faktoren aller übrigen Momente gleich Null und gewinnen dann außer der Gleichung (26) die zur Berechnung der  $\beta$  dienenden Gleichungen:

$$(27) \quad \begin{cases} \beta_3 \alpha + \beta_2 (1 - 4\alpha) + \beta_1 (4 + 6\alpha) + \beta_2 (1 - 4\alpha) + \beta_3 \alpha = 1 \\ \beta_4 \alpha + \beta_3 (1 - 4\alpha) + \beta_2 (4 + 6\alpha) + \beta_1 (1 - 4\alpha) + \beta_2 \alpha = 0 \\ \beta_5 \alpha + \beta_4 (1 - 4\alpha) + \beta_3 (4 + 6\alpha) + \beta_2 (1 - 4\alpha) + \beta_1 \alpha = 0 \\ \dots \\ \beta_{n+1} \alpha + \beta_n (1 - 4\alpha) + \beta_{n-1} (4 + 6\alpha) + \beta_{n-2} (1 - 4\alpha) + \beta_{n-3} \alpha = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Sind mit Hilfe dieser Gleichungen die Werte  $\beta$  gefunden worden, so lassen sich alle Fragen, die bei der Untersuchung der Momente auftreten, schnell beantworten.

Multipliziert man die Glieder der zweiten Differenzenreihe der  $\beta$  mit  $-\alpha l$ , so erhält man die den Stützpunkten entsprechenden Ordinaten  $\eta$  der Einflußlinie für  $M_1$  und kann nunmehr mit Hilfe der  $\beta$  und der

Zahlen  $\omega_D$  und  $\omega_R$  für eine beliebige Stelle zwischen zwei Stützen die Ordinate der  $M_1$ -Linie berechnen\*). Man kann aber auch, ohne erst die Einflußlinien zeichnen zu müssen, jeden beliebigen Belastungsfall untersuchen, indem man die  $Z$  mit Hilfe der auf Seite 75 angegebenen Formel bestimmt und in die Gleichung (26) einsetzt. Der Einfluß der Temperaturänderung  $t_u - t_o$  ist z. B.

$$M_1 = - \frac{6 \varepsilon EJ (t_u - t_o)}{h} \sum \beta,$$

und die durch dieses Moment im Balken erzeugte Biegungsspannung ist

$$\sigma = \pm \frac{M_1 h}{2J} = \mp 3 \varepsilon E \alpha (t_u - t_o) \sum \beta.$$

Die Berechnung der Werte  $\beta$  wird nun durch die Tatsache sehr erleichtert, daß der Einfluß der Lasten auf das Moment  $M_1$  mit ihrer Entfernung von der Stütze 1 sehr rasch abnimmt. Vergleichende Rechnungen zeigen, daß man in der Regel schon  $\beta_5$  gleich Null setzen darf. Man hat dann nur vier Gleichungen und zwar solche von sehr einfacher Art aufzulösen. Je größer  $\alpha$  ist, desto weiter kann sich eine Last von der Stütze 1 entfernen, bevor sie ihren Einfluß auf  $M_1$  verliert. Solche größere Werte  $\alpha$  kommen bei Schiffbrücken vor. Aber auch hier spielt die Anzahl der Stützen keine große Rolle, wie aus den im § 12, Nr. 61, durchgeführten Zahlenrechnungen hervorgeht. In jenem Beispiele war  $\alpha = 9,4$ . Runden wir diese Zahl auf  $\alpha = 10$  ab, berechnen wir sodann mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen die Werte  $\beta$  und mit diesen die Ordinaten  $\eta$ , so erhalten wir für  $l = 12^m$  die folgenden Zahlenreihen:

a)  $\beta_5 = 0$ , d. h. Balken auf 9 Schiffen,

$$\eta_1 = + 4,48, \eta_2 = + 0,34, \eta_3 = - 1,02, \eta_4 = - 1,00, \eta_5 = - 0,56;$$

b)  $\beta_6 = 0$ , d. h. Balken auf 11 Schiffen,

$$\eta_1 = + 4,49, \eta_2 = + 0,36, \eta_3 = - 0,98, \eta_4 = - 0,98, \eta_5 = - 0,56.$$

Diese beiden Zahlenreihen und die in Nr. 61 für einen Balken auf 8 oder 6 Schiffen erhaltenen Werte dürfen als praktisch vollkommen gleichwertig bezeichnet werden. Hinsichtlich des Grenzfalles unendlich vieler Stützen verweisen wir auf Nr. 67 und 68. Außerdem werden wir für größere Zahlen  $\alpha$  und verhältnismäßig kurze Stützweiten im § 15 ein sehr einfaches Näherungsverfahren angeben, welches u. a. gestattet, das größte Biegemoment infolge einer gleichmäßigen Verkehrslast sofort anzugeben.

\*) Vgl. das Zahlenbeispiel in Nr. 61.

Wird nun bereits  $\beta_5 = 0$  gesetzt, so entstehen die vier Gleichungen

$$(28) \quad \begin{cases} \beta_4(4 + 6\alpha) + \beta_3(1 - 4\alpha) + \beta_2\alpha = 0 \\ \beta_4(1 - 4\alpha) + \beta_3(4 + 6\alpha) + \beta_2(1 - 4\alpha) + \beta_1\alpha = 0 \\ \alpha\beta_4 + \beta_3(1 - 4\alpha) + \beta_2(4 + 6\alpha) + \beta_1(1 - 4\alpha) + \beta_2\alpha = 0 \\ \alpha\beta_3 + \beta_2(1 - 4\alpha) + \beta_1(4 + 6\alpha) + \beta_2(1 - 4\alpha) + \beta_3\alpha = 1. \end{cases}$$

Sie gehen mit den Bezeichnungen

$$\beta' = \alpha\beta, \quad 6 + \frac{4}{\alpha} = \tau, \quad \frac{1}{\alpha} - 4 = \varphi$$

über in:

$$(29) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \tau\beta_4' + \varphi\beta_3' + \beta_2' = 0 \\ \text{(II)} & \varphi\beta_4' + \tau\beta_3' + \varphi\beta_2' + \beta_1' = 0 \\ \text{(III)} & \beta_4' + \varphi\beta_3' + \tau\beta_2' + \varphi\beta_1' + \beta_2' = 0 \\ \text{(IV)} & \beta_3' + \varphi\beta_2' + \tau\beta_1' + \varphi\beta_2' + \beta_3' = 1. \end{cases}$$

Nun folgt aus (I)

$$(30) \quad \beta_2' = -\varphi\beta_3' - \tau\beta_4',$$

hierauf aus (II)

$$(31) \quad \beta_1' = a\beta_3' + b\beta_4',$$

wo

$$(32) \quad a = \varphi^2 - \tau, \quad b = \varphi(\tau - 1),$$

schließlich aus (III) und (IV)

$$(33) \quad \begin{cases} \beta_4' = \frac{d}{ce + df} \\ \beta_3' = \frac{c}{ce + df}, \end{cases}$$

wo

$$(34) \quad \begin{cases} c = \tau(\tau + 1) - 1 - \varphi b; & d = \varphi(a - \tau) \\ e = \tau a + 2 - 2\varphi^2; & f = \tau(b - 2\varphi). \end{cases}$$

Die Ordinate  $\eta_r$  der  $M_1$ -Linie im Stützpunkte  $r$  ist nach Seite 75:

$$(35) \quad \begin{aligned} \eta_r &= -\alpha l [(\beta_r - \beta_{r-1}) - (\beta_{r+1} - \beta_r)] \\ \eta_r &= -l [(\beta_r' - \beta_{r-1}') - (\beta_{r+1}' - \beta_r')]. \end{aligned}$$

Die Glieder der zweiten Differenzenreihe der Zahlen  $\beta'$  sind also, mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen, gleich den Werten  $\eta_r | l^*$ .

\*) Ein anderer Rechnungsgang, für sehr kleine Werte  $\alpha$ , ist der: Man findet aus den beiden ersten Gleichungen [in (28)]

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \beta_2 \frac{+1 - 12\alpha + 10\alpha^2}{15 + 56\alpha + 20\alpha^2} + \beta_1 \frac{\alpha(1 - 4\alpha)}{15 + 56\alpha + 20\alpha^2}, \\ \beta_3 &= \beta_2 \frac{-4 + 11\alpha + 20\alpha^2}{15 + 56\alpha + 20\alpha^2} - \beta_1 \frac{\alpha(4 + 6\alpha)}{15 + 56\alpha + 20\alpha^2}. \end{aligned}$$

und berechnet  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen.

Zur Bestimmung der Einflußlinie des Momentes  $M_1$  dient zwischen den Stützpunkten  $r-1$  und  $r$  die Gleichung

$$\zeta = -(\beta_{r-1}\omega_D' + \beta_r\omega_D)l,$$

oder, wegen  $\omega_D' = 3\omega_R - \omega_D$ ,

$$(36) \quad \frac{\zeta}{l} = -3\beta_{r-1}\omega_R + (\beta_{r-1} - \beta_r)\omega_D.$$

Die Abszissen  $x$  zählen von  $r-1$  aus; die  $\zeta$  werden von den Seiten des  $\eta$ -Polygons aus aufgetragen; vgl. Fig. 200, welche voraussetzt, daß  $\zeta$  negativ ist. Die Gleichung der Einflußlinie für  $M_1$  lautet also, auf die Balkenachse als Abszissenachse bezogen,

$$(37) \quad \eta = \eta_{r-1} + \frac{\eta_r - \eta_{r-1}}{l}x + \zeta.$$

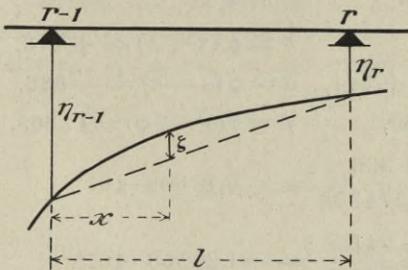


Fig. 200.

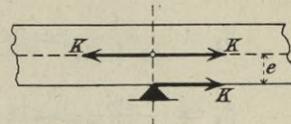


Fig. 201.

Häufig genügt es, die Ordinate  $\eta$  für die Mitte der Öffnung zu berechnen. Für  $x = \frac{1}{2}l$  ist  $\omega_D = \omega_D' = 0,375$ , folglich

$$(38) \quad \eta = \frac{\eta_{r-1} + \eta_r}{2} - 0,375(\beta_{r-1} + \beta_r)l.$$

Eine in der Höhe  $k$  über der Balkenachse in der Richtung  $r-(r-1)$  angreifende wagerechte Last  $K$  erzeugt, wenn der feste Stützpunkt mit der Balkenachse zusammenfällt und die unwesentliche Längenänderung der Balkenachse vernachlässigt wird,

$$\begin{aligned} M_1 &= -Kk \frac{d\eta}{dx} \\ &= Kk \left( \frac{\eta_{r-1} - \eta_r}{l} - \frac{d\zeta}{dx} \right). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}, \quad \omega_D' = \frac{x'}{l} - \frac{x'^3}{l^3},$$

folglich

$$(39) \quad \frac{M_1}{Kk} = \frac{\eta_{r-1} - \eta_r}{l} - \beta_{r-1}\varphi' + \beta_r\varphi,$$

wobei zur Abkürzung die Bezeichnungen eingeführt wurden:

$$(40) \quad \begin{cases} \varphi' = 1 - 3 \frac{x'^2}{l^2} = \frac{d\omega'}{dx} \\ \varphi = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} = \frac{d\omega}{dx} \end{cases}$$

Liegt der feste Stützpunkt unterhalb oder oberhalb der Balkenachse, so tritt nach Fig. 201 zu dem Einflusse von  $Kk$  noch der Einfluß von  $\mp Ke$ .

**Zahlenbeispiel.** Es sei  $\alpha = 0,10$ , also  $\frac{1}{\alpha} = 10$ .

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\alpha} - 4 = 6, & \tau &= \frac{4}{\alpha} + 6 = 46, \\ a &= \varphi^2 - \tau = -10, & b &= \varphi(\tau - 1) = +270, \\ c &= \tau(\tau + 1) - 1 - \varphi b = +541, & d &= \varphi(a - \tau) = -336, \\ e &= \tau a + 2 - \varphi^2 = -530, & f &= \tau(b - 2\varphi) = 11868, \end{aligned}$$

$$\beta_4' = \frac{d}{ec + fd} = \frac{-336}{-4274378} = +0,78608 \cdot 10^{-4},$$

$$\beta_3' = \frac{c}{ec + fd} = \frac{+541}{-4274378} = -1,26568 \cdot 10^{-4},$$

$$\beta_2' = -\varphi\beta_3' - \tau\beta_4' = -28,56560 \cdot 10^{-4},$$

$$\beta_1' = a\beta_3' + b\beta_4' = +224,89840 \cdot 10^{-4}.$$

Die Differenzenreihen der Werte  $10^4 \cdot \beta'$  lauten:

$r = 2$	$10^4 \beta'$	$10^4 \Delta_1 \beta'$	$10^4 \Delta_2 \beta'$
	— 28,56560	— 253,46400	— 506,92800
1	+ 224,89840	+ 253,46400	+ 280,76392
2	— 28,56560	— 27,29992	— 25,24816
3	— 1,26568	— 2,05176	— 2,83784
4	+ 0,78608	+ 0,78608	+ 0,78608
5	0,00000	0,00000	

Nun ist  $\frac{\eta_r}{l} = -\Delta_2 \beta_r'$  und  $\beta_r = \frac{1}{\alpha} \beta_r' = 10 \beta_r'$ , also:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= +0,0507l, & \eta_2 &= -0,0281l, & \eta_3 &= +0,0025l, & \eta_4 &= +0,0003l, \\ & & & & & & \eta_5 &= -0,0001l, \\ \beta_1 &= +0,2249, & \beta_2 &= -0,0286, & \beta_3 &= -0,0013, & \beta_4 &= +0,0008. \end{aligned}$$

$$\Sigma\beta = \beta_1 + 2\sum_2^4\beta = 0,1667.$$

Die auf diesem Wege erhaltenen Werte  $\beta$  und  $\eta$  sind auf den Seiten 226 bis 229 für eine große Reihe von Werten  $\frac{1}{\alpha}$  angegeben; sie gestatten eine schnelle Erledigung der verschiedenen Belastungsfälle.

Ungleiche Wärmeänderungen  $t_o$  und  $t_u$  erzeugen im Balken die Biegungsspannung

$$\sigma = \mp 3\varepsilon E(t_u - t_o) \Sigma\beta = \mp 0,25 \varepsilon E(t_u - t_o).$$

Senken sich die Stützen 1, 2, 3, 4, 5, Fig. 199, infolge von Temperaturänderungen oder Nachgeben des Baugrundes um die gegebenen Werte  $e_1', e_2', e_3', e_4', e_5'$ , so entsteht nach Seite 75

$$Z_2' = -\frac{6EJ}{l^2} [0 - 0 + e_1']$$

$$Z_1 = -\frac{6EJ}{l^2} [0 - 2e_1' + e_2']$$

$$Z_2 = -\frac{6EJ}{l^2} [e_1' - 2e_2' + e_3']$$

$$Z_3 = -\frac{6EJ}{l^2} [e_2' - 2e_3' + e_4']$$

$$Z_4 = -\frac{6EJ}{l^2} [e_3' - 2e_4' + e_5'],$$

und es wird erzeugt:

$$M_1 = \beta_2 Z_2' + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + \beta_4 Z_4$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6EJ}{l^2} \{ e_1' (-\beta_2 + 2\beta_1 - \beta_2) \\ &\quad + e_2' (-\beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3) \\ &\quad + e_3' (-\beta_2 + 2\beta_3 - \beta_4) \\ &\quad + e_4' (-\beta_3 + 2\beta_4 - 0) \\ &\quad + e_5' (-\beta_4 + 0 - 0) \}. \end{aligned}$$

Hierfür darf man aber mit Rücksicht auf Gleichung (25), Seite 75, schreiben:

$$M_1 = \frac{6EJ}{\alpha l^3} [e_1' \eta_1 + e_2' \eta_2 + e_3' \eta_3 + e_4' \eta_4 + e_5' \eta_5].$$

Der Einfluß der Senkungen der Stützen 2', 3', 4', ... ist natürlich ebenso groß wie derjenige der Stützen 2, 3, 4, ...

Senkt sich z. B. Stütze 1 um  $e_1'$ , so wird der Balken, dessen Höhe  $h$  sei, beansprucht mit

$$\sigma = \frac{M_1 h}{2J} = \frac{3 E e_1' h}{0,1 l^2} \cdot 0,0507 = 1,52 E \frac{e_1'}{l} \cdot \frac{h}{l}.$$

*Ermittlung der Einflußlinie des Momentes  $M_1$ .* Vom  $\eta$ -Polygon aus werden die Strecken  $\zeta$  aufgetragen, Fig. 202. Für die Öffnung 1—2 ist

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{l} &= -3\beta_1 \omega_R + (\beta_1 - \beta_2) \omega_D \\ &= -0,6747 \omega_R + 0,2535 \omega_D. \end{aligned}$$

Man erhält

für $\frac{x}{l} =$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
$\frac{\zeta}{l} =$	-0,0593	-0,0768	-0,0736	-0,0646	-0,0349.

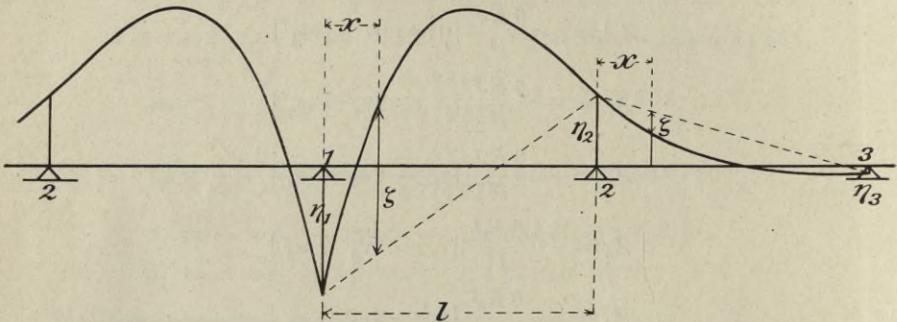


Fig. 202.

Für die Öffnung 2—3 gilt

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{l} &= -3\beta_2 \omega_R + (\beta_2 - \beta_3) \omega_D \\ &= +0,0858 \omega_R - 0,0273 \omega_D. \end{aligned}$$

$\frac{x}{l} =$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
$\frac{\zeta}{l} =$	+0,0085	+0,0114	+0,0112	+0,0101	+0,0059.

Für die Mitte der Öffnung 3—4 ergibt sich

$$\frac{\zeta}{l} = -0,375 (\beta_3 + \beta_4) = +0,0002.$$

Der Einfluß der Belastung dieser Öffnung ist bereits unwesentlich.

Eine in der Öffnung 1—2 auftretende wagerechte Last  $K$  erzeugt

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{Kk} &= \frac{\eta_1 - \eta_2}{l} - \beta_1 \rho' + \beta_2 \rho \\ &= +0,0788 - 0,2249 \rho' - 0,0286 \rho. \end{aligned}$$

Für  $\frac{x}{l} =$  0      0,2      0,4      0,6      0,8      1,0

ist

$\rho = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} =$	+1,00	+0,88	+0,52	-0,08	-0,92	-2,00
$\rho' =$	-2,00	-0,92	-0,08	+0,52	+0,88	+1,00
$\frac{M_1}{Kk} =$	+0,500	+0,261	+0,082	-0,036	-0,093	-0,089.

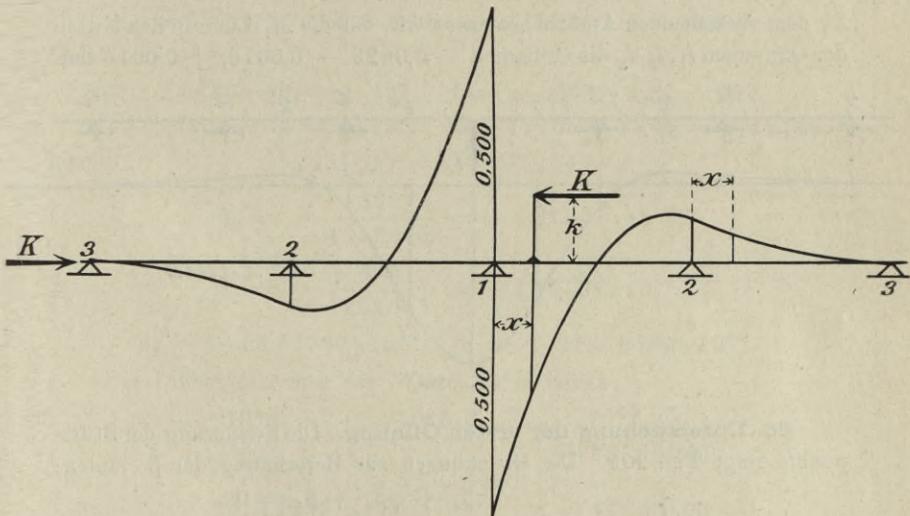


Fig. 203.

Greift  $K$  in der Öffnung 2—3 an, so entsteht

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{Kk} &= \frac{\eta_2 - \eta_3}{l} - \beta_2 \rho' + \beta_3 \rho \\ &= -0,0306 - 0,0286 \rho' - 0,0013 \rho. \end{aligned}$$

Für  $\frac{x}{l} =$  0      0,2      0,4      0,6      0,8      1,0

ist  $\frac{M_1}{Kk} =$  -0,089   -0,058   -0,034   -0,016   -0,004   +0,001.

Die  $\frac{M}{Kk}$ -Linie ist in Fig. 203 dargestellt worden.

Die *Einflußlinie des Stützdruckes C*, Fig. 204, besitzt in den Stützpunkten 1, 2, 3, ... und den Mittelpunkten 1'', 2'', 3'' der Öffnungen 1—2, 2—3, 3—4 die folgenden mittels der Formel

$$C = C_0 + \frac{M_2 - 2M_1 + M_2'}{l}$$

berechneten Ordinaten:

$$(1) \quad C = 1,0 - 0,0281 - 2 \cdot 0,0507 - 0,0281 = + 0,8424$$

$$(1'') \quad C = 0,5 - 0,0623 + 2 \cdot 0,0623 - 0,0016 = + 0,5607$$

$$(2) \quad C = + 0,0507 + 2 \cdot 0,0281 + 0,0025 = + 0,1094$$

$$(2'') \quad C = - 0,0623 + 2 \cdot 0,0016 + 0,0016 = - 0,0607$$

$$(3) \quad C = - 0,0281 - 2 \cdot 0,0025 + 0,0003 = - 0,0328$$

$$(4) \quad C = + 0,0025 - 2 \cdot 0,0003 - 0,0001 = + 0,0018.$$

Zu dem vorstehenden Ansätze bemerken wir, daß die  $M_1$ -Linie in den Mitten der Öffnungen  $l_1, l_2, l_3$  die Ordinaten  $- 0,0623, - 0,0016, + 0,0016$  hat.

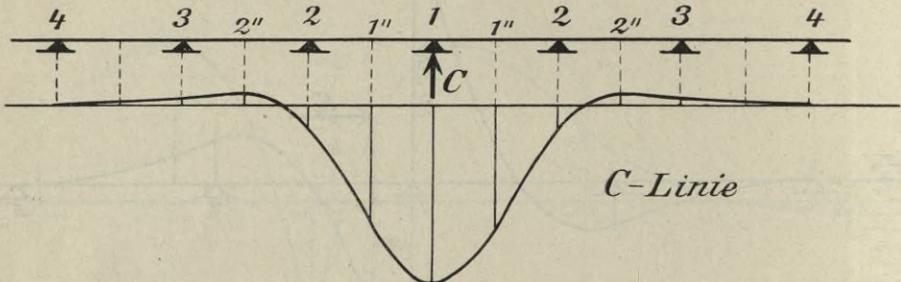


Fig. 204.

**66. Untersuchung der ersten Öffnung.** Die Bezifferung der Stützpunkte zeigt Fig. 205. Die Gleichungen zur Berechnung der  $\beta'$  lauten:

$$(41) \quad \begin{cases} \tau\beta_4' + \varphi\beta_3' + \beta_2' = 0 \\ \varphi\beta_4' + \tau\beta_3' + \varphi\beta_2' + \beta_1' = 0 \\ \beta_4' + \varphi\beta_3' + \tau\beta_2' + \varphi\beta_1' = 0 \\ \beta_3' + \varphi\beta_2' + \tau\beta_1' = 1. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen stimmen mit den für die Mittelstütze aufgestellten überein. Man findet auf demselben Wege wie auf Seite 210:

$$(42) \quad \beta_4' = \frac{d'}{c'e' + d'f'}$$

$$(43) \quad \beta_3' = \frac{c'}{c'e' + d'f'}$$

$$(44) \quad \beta_2' = -\varphi\beta_3' - \tau\beta_4'$$

$$(45) \quad \beta_1' = a\beta_3' + b\beta_4'.$$

$a$  und  $b$  haben dieselbe Bedeutung wie auf Seite 210.

Zwischen den Werten  $c', d', e', f'$  und den auf Seite 210 angegebenen Werten  $c, d, e, f$  bestehen die Beziehungen

$$(46) \quad \begin{cases} c' = c - \tau & d' = d + \varphi \\ e' = e + \varphi^2 - 1 & f' = f + \tau\varphi. \end{cases}$$

Aus der Einflußlinie für  $M_1$  kann man alle für die erste Öffnung erforderlichen Einflußlinien herleiten.

Hinsichtlich des Grenzfalles unendlich vieler Stützen verweisen wir auf Nr. 68.

**Zahlenbeispiel.** Es sei  $\alpha = 0,1$ , also  $\frac{1}{\alpha} = 10$ . Aus den auf Seite 212 berechneten Werten

$$\begin{aligned} \varphi &= 6, & \tau &= 46, & a &= -10, & b &= +270, \\ c &= +541, & d &= -336, & e &= -530, & f &= 11868 \end{aligned}$$

findet man

$$\begin{aligned} c' &= 541 - 46 = +495, & d' &= -336 + 6 = -330, \\ e' &= -530 + 35 = -495, & f' &= 11868 + 6 \cdot 46 = +12144, \end{aligned}$$

hierauf:  $c'e' + d'f' = -4252545.$

$$\beta_4' = \frac{-330}{-4252545} = +0,77601 \cdot 10^{-4}$$

$$\beta_3' = \frac{+495}{-4252545} = -1,16401 \cdot 10^{-4}$$

$$\beta_2' = -28,71240 \cdot 10^{-4}, \quad \beta_1' = +221,16280 \cdot 10^{-4}.$$

Die Differenzenreihen der Werte  $10^4\beta'$  lauten:

$10^4\beta'$	$10^4\Delta_1\beta'$	$10^4\Delta_2\beta'$
0		+ 221,16 280
+ 221,16 280	- 221,16 280	- 471,03 800
- 28,71 240	+ 249,87 520	+ 277,42 359
- 1,16 401	- 27,54 839	- 25,60 837
- 0,77 601	- 1,94 002	- 2,71 603
	+ 0,77 601	+ 0,77 601

Hieraus ergibt sich  $\frac{\eta_r}{l} = -\Delta_2\beta'$  und  $\beta_r = \frac{1}{\alpha}\beta_r' = 10\beta_r'$ , also

$$\eta_0 = -0,0221 l, \quad \eta_1 = +0,0471 l, \quad \eta_2 = -0,0277 l, \quad \eta_3 = +0,0026 l,$$

$$\eta_4 = +0,0003 l, \quad \eta_5 = -0,0001 l.$$

$$\beta_1 = +0,2212, \quad \beta_2 = -0,0287, \quad \beta_3 = -0,0012, \quad \beta_4 = +0,0008.$$

Wir berechnen die  $M_1$ -Linie nur für die Öffnungen 0—1, 1—2 und 2—3, Fig. 205a.

Für die Öffnung 0—1 ist

$$\frac{\zeta}{l} = -\beta_1 \omega_D = -0,2212 \omega_D.$$

Für $\frac{x}{l} =$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
---------------------	-----	-----	-----	-----	-----

wird $\frac{\zeta}{l} =$	-0,0425	-0,0743	-0,0830	-0,0849	-0,0637.
--------------------------	---------	---------	---------	---------	----------

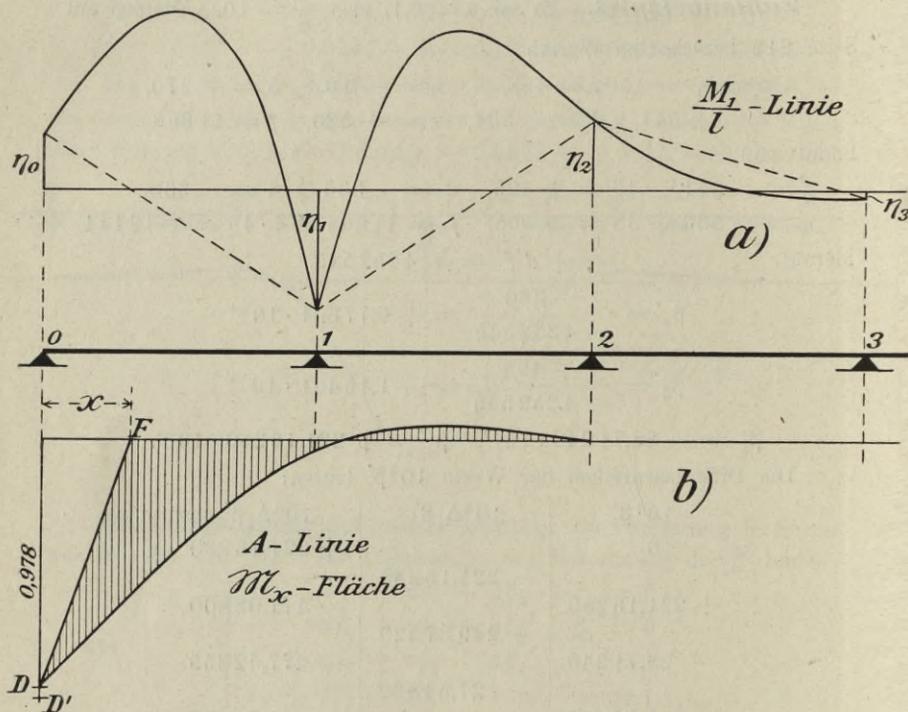


Fig. 205.

Für die Öffnung 1—2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{l} &= -3\beta_1 \omega_R + (\beta_1 - \beta_2) \omega_D \\ &= -0,6636 \omega_R + 0,2499 \omega_D. \end{aligned}$$

$\frac{x}{l} =$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
-----------------	-----	-----	-----	-----	-----

$\frac{\zeta}{l} =$	-0,0582	-0,0753	-0,0722	-0,0633	-0,0342,
---------------------	---------	---------	---------	---------	----------

und für die Öffnung 2—3:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{l} &= -3\beta_2\omega_R + (\beta_2 - \beta_1)\omega_D \\ &= +0,0861\omega_R - 0,0275\omega_D. \end{aligned}$$

Hier dürfen ohne weiteres die für das Stützenmoment in der Balkenmitte berechneten Werte beibehalten werden; schon für die Öffnung 1—2 sind die Unterschiede zwischen den vorstehend und auf Seite 214 ermittelten  $\zeta$  unwesentlich.

Fig. 205a zeigt die Einflußlinie für  $\frac{M_1}{l}$ . In Fig. 205b ist die Einflußlinie für den Druck  $A$  auf die Stütze 0 dargestellt worden; man erhält sie nach der Formel

$$A = A_0 + \frac{M_1}{l},$$

wenn man die  $\frac{M_1}{l}$ -Linie von der  $A_0$ -Linie aus aufträgt. Die beiden Figuren sind in verschiedenen Maßstäben gezeichnet worden. Die in der Fig. 205b schraffierte Fläche ist die Einflußfläche des Momentes  $M_x$  für den Querschnitt an der Stelle  $x^*$ ; ihr Multiplikator ist  $x$ .

Der Einfluß wagerechter Lasten  $K$  wird in derselben Weise untersucht wie in Nr. 65.

**67. Der Balken erstrecke sich von der Mittelstütze 1 aus nach beiden Seiten ins Unendliche**, Fig. 199. Die Werte  $\beta'$  genügen den Gleichungen:

$$(47) \quad \begin{cases} \beta_3' + \varphi\beta_2' + \tau\beta_1' + \varphi\beta_2' + \beta_3' = 1 \\ \beta_4' + \varphi\beta_3' + \tau\beta_2' + \varphi\beta_1' + \beta_2' = 0 \\ \beta_5' + \varphi\beta_4' + \tau\beta_3' + \varphi\beta_2' + \beta_1' = 0 \\ \beta_6' + \varphi\beta_5' + \tau\beta_4' + \varphi\beta_3' + \beta_2' = 0 \\ \beta_7' + \varphi\beta_6' + \tau\beta_5' + \varphi\beta_4' + \beta_3' = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

die wir durch einen wagerechten Strich in zwei Gruppen zerlegt haben. Nehmen wir zunächst an, es seien  $\beta_1'$  und  $\beta_2'$  bekannt, so liefert die Auflösung der unteren Gruppe für  $\beta_3'$  einen Wert von der Form

$$\beta_3' = \mu\beta_2' + \nu\beta_1',$$

wo  $\mu$  und  $\nu$  Ziffern sind, die nur von den Zahlen  $\varphi$  und  $\tau$  abhängen.

\*) Streng genommen müßte die Gerade  $FD$  ersetzt werden durch die Gerade  $FD'$ , wobei  $\overline{DD'} = \frac{\gamma_0}{l}$ . Bei kleinen Werten  $\gamma_0$  empfiehlt sich aber deren Vernachlässigung.

Da nun die untere Gruppe aus unendlich vielen gleichartig gebauten Gleichungen besteht, so ist auch

$$\beta_4' = \mu \beta_3' + \nu \beta_2',$$

und man erkennt, daß für alle  $\beta'$ , mit Ausnahme von  $\beta_1'$  und  $\beta_2'$  die Gleichung gilt:

$$(48) \quad \beta_r' = \mu \beta_{r-1}' + \nu \beta_{r-2}'.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung lassen sich die Gleichungen der zweiten Gruppe umformen in

$$\beta_2' \psi + \beta_1' \mathfrak{S} = 0$$

$$\beta_3' \psi + \beta_2' \mathfrak{S} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\beta_r' \psi + \beta_{r-1}' \mathfrak{S} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

wo

$$(49) \quad \psi = \mu [\mu (\mu + \varphi) + \tau] + 2 \mu \nu + \nu \varphi + \varphi$$

$$(50) \quad \mathfrak{S} = \nu [\mu (\mu + \varphi) + \tau] + \nu^2 + 1.$$

Die Gleichungen der zweiten Gruppe werden also erfüllt, sobald

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = 0$$

ist. Hieraus folgt zunächst

$$\frac{2 \mu \nu + \nu \varphi + \varphi}{\mu} = \frac{\nu^2 + 1}{\nu},$$

wonach

$$(51) \quad \mu = \varphi \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

Nun ergibt sich aus  $\mathfrak{S} = 0$  die Gleichung

$$(52) \quad \mu^2 + \nu^2 + \tau \nu + 1 = 0.$$

Die Gleichungen (51) und (52) besitzen nur die eine brauchbare Lösung:

$$(53) \quad \nu = - \frac{1 + \gamma' - \gamma''}{1 + \gamma' + \gamma''}$$

$$(54) \quad \mu = \frac{2(\gamma' - 1)}{1 + \gamma' + \gamma''}$$

wo

$$(55) \quad \gamma' = \sqrt{\frac{1 + 8\alpha}{3}} \quad \text{und} \quad \gamma'' = \sqrt{\frac{4}{3} + 2\gamma'}.$$

Nach Berechnung von  $\nu$  und  $\mu$  liefert die zweite Gleichung (47) das Verhältnis

$$(56) \quad \frac{\beta_2'}{\beta_1'} = \frac{\mu}{1 - \nu}$$

und die erste den Wert

$$(57) \quad \beta_1' = \frac{1}{\tau + 2\nu + 2(\varphi + \mu) \frac{\beta_2'}{\beta_1'}}$$

Nunmehr können die übrigen  $\beta'$  schrittweise mit Hilfe der Gleichung (48) berechnet werden.

**Zahlenbeispiel.**

Für  $\alpha = 10$  ist  $\varphi = \frac{1}{10} - 4 = -3,9$ ,  $\tau = 6 + 4 \cdot \frac{1}{10} = 6,4$

$\gamma' = \sqrt{27} = 5,196152$ ,  $\gamma'' = 3,424272$ ,  $\nu = -0,2881$ ,  $\mu = 0,8723$

$\frac{\beta_2'}{\beta_1'} = \frac{0,8723}{1,2881} = 0,6772$

$\beta_1' = \frac{1}{5,8238 - 6,0554 \cdot 0,6772} = 0,5803$ ,  $\beta_2' = +0,3930$

$\beta_3' = +0,1756$ ,  $\beta_4' = +0,0400$ ,  $\beta_5' = -0,0157$ ,  $\beta_6' = -0,0252$ ,  
 $\beta_7' = -0,0175$ .

Berechnet man nun auf dem in Nr. 65 angegebenen Wege die Ordinaten  $\eta$ , so findet man für  $l = 12^m$  (d. i. die Stützweite der früher untersuchten Schiffbrücke) die folgenden Zahlen, denen die für  $\beta_5' = 0$  nach dem Verfahren in Nr. 65 sich ergebenden in Klammern beigefügt sind:

$\eta_1 = +4,50$  (4,48)  $\eta_3 = -0,98$  (1,02)  $\eta_5 = -0,55$  (0,56).

$\eta_2 = +0,36$  (0,34)  $\eta_4 = -0,98$  (1,00)

Die Gegenüberstellung der Werte  $\beta = \frac{1}{\alpha} \beta'$  liefert folgendes Bild:

$\beta_1 = +0,0580$  (0,0578)  $\beta_3 = +0,0176$  (0,0176)

$\beta_2 = +0,0393$  (0,0391)  $\beta_4 = +0,0040$  (0,0046).

**68. Der Balken erstrecke sich von der Stütze 0 aus nach der einen Seite ins Unendliche**, Fig. 205. Für die Ziffern  $\beta'$ , mit Ausnahme von  $\beta_1'$  und  $\beta_2'$ , gilt wieder die Gleichung (48)

$\beta_r' = \mu \beta_{r-1}' + \nu \beta_{r-2}'$ .

Die beiden ersten Gleichungen (47) sind aber jetzt zu ersetzen durch die Bedingungen

(58) 
$$\begin{cases} \beta_3' + \varphi \beta_2' + \tau \beta_1' = 1 \\ \beta_4' + \varphi \beta_3' + \tau \beta_2' + \varphi \beta_1' = 0, \end{cases}$$

deren Auflösung die einfachen Werte liefert:

(59) 
$$\beta_1' = -\nu \text{ und } \beta_2' = -\nu\mu.$$

**Zahlenbeispiele.** Für  $\alpha = 10$  ergab sich  $\nu = -0,2881$ ,  $\mu = +0,8723$ . Man erhält also  $\beta_1' = +0,2881$  und  $\beta_2' = +0,2513$  und gelangt zu den folgenden Werten  $\beta = \frac{1}{\alpha} \beta'$ , denen die nach dem in Nr. 66 angegebenen Verfahren berechneten in Klammern beigefügt sind:

$$\begin{array}{ll} \beta_1 = +0,0288 (0,0288) & \beta_2 = +0,0251 (0,0250) \\ \beta_3 = +0,0136 (0,0133) & \beta_4 = +0,0046 (0,0042). \end{array}$$

Den unwesentlichen Abweichungen der Werte  $\beta$  entsprechen auch geringfügige Unterschiede der zugehörigen  $\eta$ .

Je größer  $\alpha$  ist, um so größer ist der Einfluß der Stützensahl. Wir geben daher noch eine Gegenüberstellung der Werte für den größten in unsere für  $\beta_5' = \beta_6' = \dots = 0$  gerechnete Zahlentafel aufgenommenen Wert  $\alpha$ , nämlich für  $\alpha = 20$ . Man findet:

$$\begin{array}{ll} \beta_1 = +0,0176 (0,0173) & \beta_3 = +0,0123 (0,0108) \\ \beta_2 = +0,0180 (0,0173) & \beta_4 = +0,0064 (0,0041) \\ \eta_0 = -0,351 (0,347) & \eta_3 = +0,006 (0,006) \\ \eta_1 = +0,342 (0,347) & \eta_4 = -0,037 (0,052) \\ \eta_2 = +0,123 (0,128) & \eta_5 = -0,082 (0,082). \end{array}$$

Von wesentlichem Einfluß ist nur die Belastung der ersten drei Öffnungen; hier besteht selbst bei dem großen Werte  $\alpha = 20$  befriedigende Übereinstimmung.

Wird also die Berechnung eines auf vielen gleichartigen Stützen ruhenden Balkens verlangt, und stehen keine Zahlentafeln zur Verfügung, so braucht man nur ein über wenige Öffnungen reichendes Stück des Balkens herauszuschneiden und eine geringe Zahl von einfachen Gleichungen aufzulösen, oder man führt die Rechnung mittels der einfachen Formeln für unendlich viele Stützen durch. Unsere Zahlenrechnungen beweisen, daß die Annahme  $\beta_5' = \beta_6' = \dots = 0$  in der Regel erlaubt ist, denn größere Werte  $\alpha$  als die in unsere Tabelle aufgenommenen dürften nur selten vorkommen.

**69. Eisenbahnschienen auf Querschwellen.** Wird die Annahme gemacht, es sei die Eindrückung der Schwelle in die Bettung proportional dem von der Schiene auf die Schwelle ausgeübten Drucke, so darf die Schiene als ein auf elastisch senkbaren Stützen ruhender Balken angesehen werden. Es genügt, die Untersuchung der in Fig. 206 dargestellten symmetrischen Belastung. Betrachten wir die Schiene zunächst als Balken auf 6 Stützen, so treten vier Stützenmomente auf, die aber paarweise einander gleich sind ( $M_3 = M_2$ ,  $M_4 = M_1$ ). Es bestehen die Gleichungen

$$(60) \quad \begin{cases} (4 + 6\alpha) M_1 + (1 - 4\alpha) M_2 + \alpha M_2 = Z_1 \\ (1 - 4\alpha) M_1 + (4 + 6\alpha) M_2 + (1 - 4\alpha) M_2 + \alpha M_1 = Z_2; \end{cases}$$

sie liefern

$$M_2 = \frac{(4 + 6\alpha) Z_2 - (1 - 3\alpha) Z_1}{9\alpha^2 + 44\alpha + 19}.$$

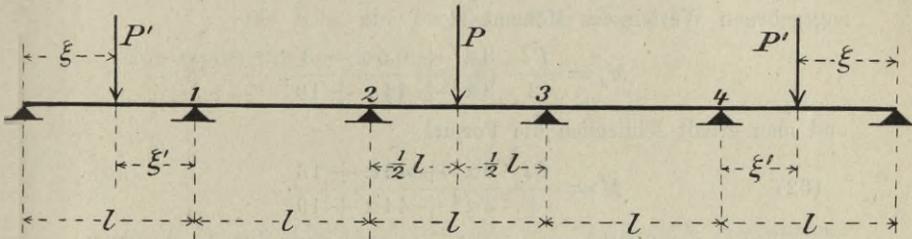


Fig. 206.

Den drei Radrücken  $P'$ ,  $P$ ,  $P'$  entsprechen die Werte:

$$C_{00} = P' \frac{\xi'}{l}, \quad C_{01} = P' \frac{\xi}{l}, \quad C_{02} = C_{03} = \frac{P}{2},$$

ferner nach Seite 75

$$Z_1 = -\frac{6\mathfrak{Q}_{01}}{l^2} - \alpha(C_{00} - 2C_{01} + C_{02})l,$$

$$Z_2 = -\frac{6\mathfrak{R}_{02}}{l^2} - \alpha(C_{01} - 2C_{02} + C_{03})l,$$

wo, nach Seite 30,

$$6\mathfrak{Q}_{01} = P'l^3 \left( \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3} \right) = P'l^3 \cdot \omega_D,$$

$$6\mathfrak{R}_{02} = Pl^3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = Pl^3 \cdot \frac{3}{8},$$

weshalb

$$Z_1 = -\omega_D P'l - \alpha P'(l - 3\xi) - \frac{1}{2} \alpha Pl,$$

$$Z_2 = -\frac{3}{8} Pl + \frac{1}{2} \alpha Pl - \alpha P'\xi.$$

Der Einfluß von  $P' = 1$  auf den Zähler von  $M_2$  ist

$$(61) \quad - (6\alpha + 4)\alpha\xi + (3\alpha - 1)(-\omega_D l - \alpha l + 3\alpha\xi) \\ = +\alpha\xi(3\alpha - 7) - (\omega_D + \alpha)(3\alpha - 1)l;$$

er nimmt für den engsten Radstand, also für den größten Abstand  $\xi$ , seinen größten Wert an. Ist  $\xi = l$  (was einen Radstand von  $1,5 \cdot l$

gibt), so wird  $\omega_D = 0$ , und der Ausdruck (61) geht über in  $(-6\alpha l)$ . Nun ist aber in der Mitte des Balkens

$$M = \frac{Pl}{4} + M_2;$$

wir rechnen also ungünstig, wenn wir den negativen Einfluß von  $P'$  auf  $M_2$  vernachlässigen. Dann ergibt sich mit den oben für  $Z_1$  und  $Z_2$  angegebenen Werten das Moment

$$M_2 = \frac{Pl}{2} \frac{3\alpha^2 + 0,5\alpha - 3}{3\alpha^2 + 44\alpha + 19},$$

und man erhält schließlich die Formel

$$(62) \quad M = \frac{Pl}{4} \frac{9\alpha^2 + 45\alpha + 13}{3\alpha^2 + 44\alpha + 19}.$$

Sieht man die Schiene als einen auf 8 Stützen ruhenden Balken an, so erhält man (auf demselben Wege, der in der vorstehenden Entwicklung benutzt wurde) für den Einfluß von  $P$  die von Schwedler\*) aufgestellte Formel

$$(63) \quad M = \frac{Pl}{8} \frac{32\alpha^3 + 524\alpha^2 + 568\alpha + 97}{4\alpha^3 + 194\alpha^2 + 330\alpha + 71}.$$

Beschränkt man dagegen die Anzahl der Stützen auf 4, so findet man die von Zimmermann\*\*) empfohlene Formel

$$(64) \quad M = \frac{Pl}{4} \frac{8\alpha + 7}{4\alpha + 10}.$$

Zur Vergleichung dieser verschiedenen Formeln mögen die folgenden Zahlenreihen dienen;  $n$  bedeutet die Anzahl der Stützen.

	$\alpha = 0,2$	0,6	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$n = 4$	$M = 0,199$	0,238	0,268	0,319	0,352	0,375	$0,392 \cdot Pl$
$n = 6$	$M = 0,200$	0,233	0,254	0,292	0,322	0,343	$0,369 \cdot Pl$
$n = 8$	$M = 0,200$	0,233	0,255	0,291	0,317	0,337	$0,354 \cdot Pl$

Der Unterschied zwischen diesen Werten ist unerheblich; insbesondere weichen die Werte für  $n = 6$  nur sehr wenig von denen für  $n = 8$  ab.

Um  $\alpha$  zu bestimmen, bezeichnen wir die Breite der Schwelle mit  $b$ , die Länge mit  $2a$  und nehmen zunächst an, daß sich der von beiden Schienen auf die Schwelle ausgeübte Druck  $2C$  gleichmäßig über die

\*) Schwedler, Beiträge zur Theorie des Eisenbahnoberbaues. Zeitschrift für Bauwesen, 1889, S. 103. Den Wert  $\alpha$  bezeichnet Schwedler mit  $\frac{1}{\gamma}$ .

\*\*) Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues, Berlin 1888, S. 218, Gleich. 200.

Grundfläche  $2ba$  verteilt. Dann darf die Eindrückung der Schwelle in die Bettung gesetzt werden:

$$(65) \quad e = \frac{2C}{K2ab},$$

wó  $K$  einen Erfahrungswert bedeutet, der nach Zimmermann beträgt

$$\text{für Kies ohne Packlage } K = 3 \text{ kg/cm}^3$$

$$\text{für Kies auf Packlage } K = 8 \text{ kg/cm}^3.$$

Nun ergibt sich

$$\alpha = \frac{6EJ}{l^3} \cdot \frac{e}{C}, \text{ das ist}$$

$$(66) \quad \alpha = \frac{6EJ}{Kab l^3}.$$

Ist z. B.  $J = 1580 \text{ cm}^3$  (Schiene der Preußischen Hauptbahnen, 1905, Nr. 15),  $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $l = 80 \text{ cm}$ ,  $a = 135 \text{ cm}$ ,  $b = 26 \text{ cm}$ , so erhält man für  $K = 3$  und  $8$  die Werte  $\alpha = 3,7$  und  $1,4$ . Nun verteilt sich aber der Druck der Schienen nicht gleichmäßig über die Grundfläche der Schwelle. Die Druckverteilung hängt von der Durchbiegung und von der Art der Unterstopfung der Schwelle ab; ihre genaue Bestimmung darf wohl als unmöglich angesehen werden\*). Machen wir nun die Annahme, es werde durch diese Ursachen die Ziffer  $\alpha$  nahezu verdoppelt, rechnen wir also mit  $\alpha = 7,0$  und  $2,5$ , so liefert die einfache Formel (64), der wir in Anbetracht der unsicheren Rechnungsgrundlagen den Vorzug geben, für  $P = 9000 \text{ kg}$  und  $l = 80 \text{ cm}$  die Biegemomente

$$M = 298500 \text{ kg/cm}, \quad M = 243000 \text{ kg/cm}.$$

Das Widerstandsmoment des Schienenquerschnitts ist  $W = 217$ . Die Biegebbeanspruchung beträgt daher

$$\sigma = 1375 \text{ kg/cm}^2, \text{ bzw. } \sigma = 1120 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei Berechnung des Druckes der Schiene auf die Schwelle genügt es, den Einfluß von drei Radlasten zu berücksichtigen. Wir bezeichnen die Stützpunkte nach Fig. 199, nehmen eine Last  $P$  über der Stütze 1 an, zwei gleich große Lasten in den Mitten der Felder 2—3 und 2'—3' und erhalten:

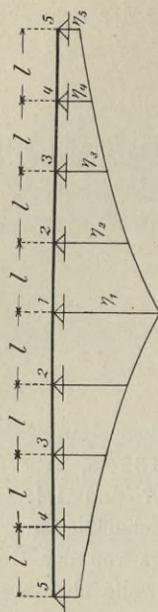
\*) Der Einfluß der Durchbiegung der Schwelle läßt sich mit Hilfe der in § 15 mitgeteilten Theorie des Balkens auf stetiger elastischer Unterlage für den Fall einer gleichförmigen elastischen Bettung verfolgen. Es ist aber nicht die Aufgabe dieses Buches, auf alle diese Einzelheiten einzugehen; wir verweisen auf die im Literaturverzeichnis angeführten, mit der Theorie des Eisenbahnoberbaues sich befassenden Schriften, insbesondere auf die Arbeiten von Schwedler und Zimmermann.

## Balken auf elastisch senkbaren Stützen.

a) Stützensmoment  $M_1$  in Balkenmitte.

(Seite 208, Nr. 65.)

$$\alpha = \frac{6 E I_1 \omega}{l^3}$$

 $\omega$  = Stützensenkung für den Auflagerdruck 1 (Seite 61).

$\frac{1}{\alpha}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\gamma_1 : l$	$\gamma_2 : l$	$\gamma_3 : l$	$\gamma_4 : l$	$\gamma_5 : l$	$\frac{1}{\alpha}$
25	+ 0,256	- 0,052	+ 0,008	- 0,001	+ 0,025	- 0,015	+ 0,003	- 0,000	+ 0,000	25
20	+ 0,250	- 0,047	+ 0,006	- 0,001	+ 0,030	- 0,017 <sub>5</sub>	+ 0,003	- 0,000	+ 0,000	20
15	+ 0,241	- 0,040	+ 0,003	+ 0,000	+ 0,037	- 0,022	+ 0,003	- 0,000	- 0,000	15
12	+ 0,232	- 0,034	+ 0,001	+ 0,000 <sub>6</sub>	+ 0,044	- 0,025	+ 0,003	+ 0,000	- 0,000	12
10	+ 0,225	- 0,029	- 0,001	+ 0,001	+ 0,051	- 0,028	+ 0,002 <sub>6</sub>	+ 0,000	- 0,000	10
9	+ 0,220	- 0,025	- 0,002	+ 0,001	+ 0,055	- 0,030	+ 0,002	+ 0,000 <sub>6</sub>	- 0,000	9
8	+ 0,215	- 0,022	- 0,003	+ 0,001	+ 0,059	- 0,032	+ 0,002	+ 0,001	- 0,000	8
7	+ 0,209	- 0,018	- 0,005	+ 0,001	+ 0,065	- 0,034	+ 0,001	+ 0,001	- 0,000	7
6	+ 0,202	- 0,013	- 0,006	+ 0,001	+ 0,072	- 0,037	- 0,000	+ 0,001	- 0,000	6
5	+ 0,193	- 0,007	- 0,007	+ 0,000 <sub>6</sub>	+ 0,080	- 0,040	- 0,002	+ 0,002	- 0,000	5
4	+ 0,183	0	- 0,008	0	+ 0,091	- 0,044	- 0,004	+ 0,002	0	4
3,5	+ 0,176	+ 0,004	- 0,009	- 0,000	+ 0,098	- 0,045 <sub>6</sub>	- 0,006	+ 0,002	+ 0,000	3,5
3	+ 0,169	+ 0,008 <sub>6</sub>	- 0,009	- 0,001	+ 0,107	- 0,048	- 0,008 <sub>6</sub>	+ 0,002	+ 0,000	3
2,6	+ 0,162	+ 0,012 <sub>6</sub>	- 0,009	- 0,002	+ 0,115	- 0,049	- 0,011	+ 0,002	+ 0,001	2,6
2,2	+ 0,154	+ 0,017	- 0,009	- 0,002	+ 0,125	- 0,051	- 0,014 <sub>6</sub>	+ 0,002	+ 0,001	2,2
2	+ 0,149 <sub>6</sub>	+ 0,019	- 0,008	- 0,003	+ 0,130 <sub>6</sub>	- 0,052	- 0,016 <sub>6</sub>	+ 0,002	+ 0,001	2
1,8	+ 0,145	+ 0,021	- 0,008	- 0,003	+ 0,137	- 0,052	- 0,019	+ 0,001	+ 0,002	1,8
1,6	+ 0,139 <sub>6</sub>	+ 0,024	- 0,007	- 0,003	+ 0,144	- 0,053	- 0,022	+ 0,000	+ 0,002	1,6

1,4	+ 0,154	+ 0,026 <sub>6</sub>	- 0,006	- 0,004	+ 0,153	- 0,053	- 0,025 <sub>6</sub>	- 0,001	+ 0,003	1,4
1,2	+ 0,127	+ 0,029	- 0,005	- 0,004	+ 0,163	- 0,053	- 0,030	- 0,002	+ 0,003	1,2
1	+ 0,120	+ 0,032	- 0,004	- 0,004	+ 0,176	- 0,052	- 0,035	- 0,005	+ 0,004	1
0,9	+ 0,116	+ 0,034	- 0,003	- 0,004	+ 0,183	- 0,051	- 0,038	- 0,007	+ 0,005	0,9
0,8	+ 0,112	+ 0,035	- 0,001 <sub>6</sub>	- 0,004	+ 0,192	- 0,050	- 0,042	- 0,009	+ 0,005	0,8
0,7	+ 0,107	+ 0,036	- 0,000	- 0,004	+ 0,202	- 0,049	- 0,046	- 0,012	+ 0,006	0,7
0,6	+ 0,102	+ 0,038	+ 0,002	- 0,004	+ 0,213	- 0,046	- 0,051	- 0,015 <sub>6</sub>	+ 0,006	0,6
0,55	+ 0,099	+ 0,038	+ 0,003	- 0,004	+ 0,219 <sub>6</sub>	- 0,045	- 0,054	- 0,018	+ 0,006 <sub>6</sub>	0,55
0,5	+ 0,096	+ 0,039	+ 0,004	- 0,003	+ 0,227	- 0,043	- 0,057	- 0,020	+ 0,006 <sub>6</sub>	0,5
0,45	+ 0,092 <sub>6</sub>	+ 0,040	+ 0,005	- 0,003	+ 0,235	- 0,040	- 0,060	- 0,023 <sub>6</sub>	+ 0,006	0,45
0,4	+ 0,089	+ 0,040	+ 0,006	- 0,002	+ 0,244 <sub>6</sub>	- 0,037	- 0,063 <sub>6</sub>	- 0,027	+ 0,006	0,4
0,35	+ 0,085	+ 0,041	+ 0,008	- 0,002	+ 0,255	- 0,034	- 0,067	- 0,032	+ 0,005	0,35
0,3	+ 0,081	+ 0,041	+ 0,009	- 0,001	+ 0,268	- 0,029	- 0,071	- 0,037	+ 0,003	0,3
0,26	+ 0,077 <sub>6</sub>	+ 0,041	+ 0,011	- 0,000	+ 0,280	- 0,023 <sub>6</sub>	- 0,075	- 0,042	+ 0,000 <sub>6</sub>	0,26
0,22	+ 0,074	+ 0,041	+ 0,012	+ 0,001	+ 0,295	- 0,017	- 0,078	- 0,049	- 0,004	0,22
0,2	+ 0,071	+ 0,041	+ 0,013	+ 0,001	+ 0,304	- 0,012 <sub>6</sub>	- 0,080	- 0,053	- 0,007	0,2
0,18	+ 0,069	+ 0,041	+ 0,014	+ 0,002	+ 0,313	- 0,007 <sub>6</sub>	- 0,082	- 0,057	- 0,010 <sub>6</sub>	0,18
0,16	+ 0,067	+ 0,041	+ 0,015	+ 0,002 <sub>6</sub>	+ 0,325	- 0,001 <sub>6</sub>	- 0,083	- 0,062	- 0,016	0,16
0,14	+ 0,064	+ 0,040	+ 0,016	+ 0,003	+ 0,338	+ 0,006	- 0,084	- 0,068	- 0,023	0,14
0,12	+ 0,061	+ 0,040	+ 0,017	+ 0,004	+ 0,353 <sub>6</sub>	+ 0,016	- 0,085	- 0,075	- 0,032	0,12
0,1	+ 0,058	+ 0,039	+ 0,018	+ 0,005	+ 0,373	+ 0,028	- 0,085	- 0,084	- 0,046	0,1
0,09	+ 0,056	+ 0,039	+ 0,018	+ 0,005	+ 0,386	+ 0,036	- 0,084	- 0,089	- 0,056	0,09
0,08	+ 0,054	+ 0,038	+ 0,018	+ 0,005	+ 0,400	+ 0,046	- 0,083	- 0,095	- 0,067	0,08
0,07	+ 0,052	+ 0,037	+ 0,019	+ 0,006	+ 0,417	+ 0,058	- 0,081	- 0,103	- 0,082	0,07
0,06	+ 0,049 <sub>6</sub>	+ 0,036	+ 0,019	+ 0,006	+ 0,437	+ 0,073	- 0,078	- 0,111 <sub>6</sub>	- 0,101	0,06
0,055	+ 0,048	+ 0,036	+ 0,019	+ 0,006	+ 0,450	+ 0,082	- 0,076	- 0,117	- 0,113	0,055
0,05	+ 0,047	+ 0,035	+ 0,019	+ 0,006	+ 0,464	+ 0,092	- 0,074	- 0,123	- 0,127	0,05

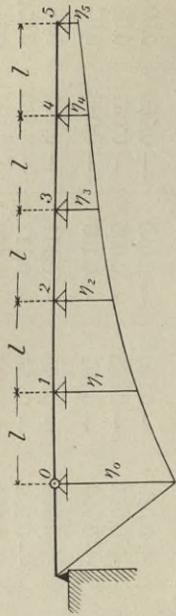
Balken auf elastisch senkbaren Stützen.

b) Stützmoment  $M_1$  am Ende der Öffnung 0 — 1.

(Seite 216, Nr. 66.)

$$\alpha = \frac{6 E J \omega}{l^3}$$

$\omega$  = Stützsenkung für den Auflagerdruck 1 (Seite 61).



$\frac{1}{\alpha}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\eta_0 : l$	$\eta_1 : l$	$\eta_2 : l$	$\eta_3 : l$	$\eta_4 : l$	$\eta_5 : l$	$\frac{1}{\alpha}$
25	+ 0,246	- 0,050	+ 0,008	- 0,001	- 0,010	+ 0,022	- 0,014	+ 0,003	- 0,000	+ 0,000	25
20	+ 0,241	- 0,046	+ 0,006	- 0,001	- 0,012	+ 0,026	- 0,017	+ 0,003	- 0,000	+ 0,000	20
15	+ 0,234	- 0,039 <sub>5</sub>	+ 0,003	+ 0,000	- 0,016	+ 0,034	- 0,021	+ 0,003	- 0,000	- 0,000	15
12	+ 0,227	- 0,034	+ 0,001	+ 0,000 <sub>6</sub>	- 0,019	+ 0,041	- 0,025	+ 0,003	+ 0,000	- 0,000	12
10	+ 0,221	- 0,029	- 0,001	+ 0,001	- 0,022	+ 0,048	- 0,028	+ 0,003	+ 0,000	- 0,000	10
9	+ 0,217	- 0,026	- 0,002	+ 0,001	- 0,024	+ 0,051	- 0,030	+ 0,002	+ 0,000	- 0,000	9
8	+ 0,213	- 0,022	- 0,003	+ 0,001	- 0,027	+ 0,056	- 0,032	+ 0,002	+ 0,001	- 0,000	8
7	+ 0,208	- 0,018	- 0,005	+ 0,001	- 0,030	+ 0,062	- 0,034	+ 0,001	+ 0,001	- 0,000	7
6	+ 0,201	- 0,013	- 0,006	+ 0,001	- 0,033 <sub>5</sub>	+ 0,069	- 0,037	+ 0,000	+ 0,001	- 0,000	6
5	+ 0,193	- 0,007	- 0,007	+ 0,000 <sub>6</sub>	- 0,039	+ 0,079	- 0,040	- 0,001 <sub>6</sub>	+ 0,002	- 0,000	5
4	+ 0,182	0	- 0,008	0	- 0,045 <sub>5</sub>	+ 0,091	- 0,043 <sub>6</sub>	- 0,004	+ 0,002	0	4
3,5	+ 0,176	+ 0,004	- 0,009	- 0,000	- 0,050	+ 0,099	- 0,045	- 0,006	+ 0,002	+ 0,000	3,5
3	+ 0,168	+ 0,009	- 0,009	- 0,001	- 0,056	+ 0,109	- 0,047	- 0,008 <sub>6</sub>	+ 0,002	+ 0,000	3
2,6	+ 0,160	+ 0,013	- 0,009	- 0,002	- 0,062	+ 0,118	- 0,048	- 0,011	+ 0,002	+ 0,001	2,6
2,2	+ 0,151	+ 0,018	- 0,008	- 0,002	- 0,069	+ 0,130	- 0,049	- 0,015	+ 0,002	+ 0,001	2,2
2	+ 0,146	+ 0,020	- 0,008	- 0,003	- 0,073	+ 0,136	- 0,049	- 0,017	+ 0,001	+ 0,001	2
1,8	+ 0,141	+ 0,022 <sub>6</sub>	- 0,007	- 0,003	- 0,078	+ 0,144	- 0,049	- 0,019	+ 0,001	+ 0,002	1,8
1,6	+ 0,134	+ 0,025	- 0,007	- 0,003	- 0,084	+ 0,152	- 0,049	- 0,022	+ 0,000	+ 0,002	1,6

1,4	+ 0,127	+ 0,028	- 0,006	- 0,004	- 0,091	+ 0,162	- 0,047 <sub>6</sub>	- 0,025	- 0,001	+ 0,003	1,4
1,2	+ 0,119	+ 0,030	- 0,004	- 0,004	- 0,099	+ 0,174	- 0,046	- 0,029	- 0,003	+ 0,003	1,2
1	+ 0,110	+ 0,033	- 0,002	- 0,004	- 0,110	+ 0,187	- 0,042	- 0,033 <sub>6</sub>	- 0,006	+ 0,004	1
0,9	+ 0,105	+ 0,034	- 0,001	- 0,004	- 0,116 <sub>6</sub>	+ 0,195	- 0,040	- 0,036	- 0,007	+ 0,004	0,9
0,8	+ 0,099	+ 0,035	+ 0,000	- 0,004	- 0,124	+ 0,204	- 0,037	- 0,039	- 0,009 <sub>6</sub>	+ 0,005	0,8
0,7	+ 0,093	+ 0,036	+ 0,002	- 0,003 <sub>6</sub>	- 0,133	+ 0,214	- 0,032	- 0,042	- 0,012	+ 0,005	0,7
0,6	+ 0,086	+ 0,036	+ 0,003	- 0,003	- 0,143	+ 0,225	- 0,027	- 0,045	- 0,015 <sub>6</sub>	+ 0,005	0,6
0,55	+ 0,082	+ 0,037	+ 0,004	- 0,003	- 0,149	+ 0,231	- 0,024	- 0,046	- 0,017 <sub>6</sub>	+ 0,005	0,55
0,5	+ 0,078	+ 0,037	+ 0,005	- 0,002	- 0,156	+ 0,238	- 0,020	- 0,048	- 0,020	+ 0,004 <sub>6</sub>	0,5
0,45	+ 0,073 <sub>6</sub>	+ 0,037	+ 0,006	- 0,002	- 0,163	+ 0,245	- 0,015	- 0,049	- 0,022	+ 0,004	0,45
0,4	+ 0,069	+ 0,036	+ 0,008	- 0,001	- 0,172	+ 0,253	- 0,009	- 0,050	- 0,025	+ 0,003	0,4
0,35	+ 0,064	+ 0,036	+ 0,009	- 0,000 <sub>6</sub>	- 0,182	+ 0,262	- 0,002	- 0,051	- 0,028	+ 0,001	0,35
0,3	+ 0,058	+ 0,035	+ 0,010	+ 0,000	- 0,194	+ 0,272	+ 0,006	- 0,051	- 0,032	- 0,001	0,3
0,26	+ 0,053 <sub>6</sub>	+ 0,034	+ 0,011	+ 0,001	- 0,206	+ 0,280	+ 0,014	- 0,050	- 0,035	- 0,004	0,26
0,22	+ 0,048	+ 0,033	+ 0,012	+ 0,002	- 0,220	+ 0,290	+ 0,025	- 0,048	- 0,038	- 0,008	0,22
0,2	+ 0,045 <sub>6</sub>	+ 0,032	+ 0,012 <sub>6</sub>	+ 0,002	- 0,227 <sub>6</sub>	+ 0,295	+ 0,031	- 0,047	- 0,040	- 0,011	0,2
0,18	+ 0,043	+ 0,031	+ 0,013	+ 0,003	- 0,236	+ 0,300	+ 0,038	- 0,044	- 0,042	- 0,015	0,18
0,16	+ 0,039	+ 0,030	+ 0,013	+ 0,003	- 0,246 <sub>6</sub>	+ 0,306	+ 0,046	- 0,042	- 0,043 <sub>6</sub>	- 0,019 <sub>6</sub>	0,16
0,14	+ 0,036	+ 0,029	+ 0,013	+ 0,003 <sub>6</sub>	- 0,258	+ 0,312	+ 0,055	- 0,038	- 0,045	- 0,025	0,14
0,12	+ 0,033	+ 0,027	+ 0,013	+ 0,004	- 0,271 <sub>6</sub>	+ 0,318	+ 0,066	- 0,033	- 0,047	- 0,032	0,12
0,1	+ 0,029	+ 0,025	+ 0,013	+ 0,004	- 0,288	+ 0,326	+ 0,079	- 0,026	- 0,049	- 0,042	0,1
0,09	+ 0,027	+ 0,024	+ 0,013	+ 0,004	- 0,297	+ 0,329 <sub>6</sub>	+ 0,086 <sub>6</sub>	- 0,022	- 0,050	- 0,048	0,09
0,08	+ 0,025	+ 0,022	+ 0,013	+ 0,004	- 0,307	+ 0,334	+ 0,095	- 0,017	- 0,050 <sub>6</sub>	- 0,054	0,08
0,07	+ 0,022	+ 0,021	+ 0,012	+ 0,004	- 0,319	+ 0,338	+ 0,104 <sub>6</sub>	- 0,010 <sub>6</sub>	- 0,051	- 0,062	0,07
0,06	+ 0,020	+ 0,019	+ 0,012	+ 0,004	- 0,332	+ 0,342 <sub>6</sub>	+ 0,115	- 0,003	- 0,052	- 0,071	0,06
0,055	+ 0,019	+ 0,018	+ 0,011	+ 0,004	- 0,339	+ 0,345	+ 0,121	+ 0,001	- 0,052	- 0,077	0,055
0,05	+ 0,017	+ 0,017	+ 0,011	+ 0,004	- 0,346 <sub>6</sub>	+ 0,347	+ 0,128	+ 0,005 <sub>6</sub>	- 0,052	- 0,082	0,05

$$M_1 = P\eta_1 + 2P \left[ \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + \frac{3}{8} (\beta_2 + \beta_3) l \right],$$

$$M_2 = \frac{1}{2} P(\eta_1 + \eta_2) - \frac{3}{8} P(\beta_1 + \beta_2) l + P\eta_2$$

$$+ \frac{1}{2} P(\eta_3 + \eta_4) - \frac{3}{8} P(\beta_3 + \beta_4) l.$$

Nun ist

$$C = P + 2 \frac{M_2 - M_1}{l},$$

folglich

$$(67) \quad \frac{C}{P} = 1 - \frac{\eta_1}{l} + \frac{\eta_2}{l} - \frac{\eta_3}{l} + \frac{\eta_4}{l} - \frac{3}{4} (\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4).$$

Liegen die beiden äußeren Lasten über den Stützen 3 und 3', so entsteht

$$M_1 = P(\eta_1 + 2\eta_3),$$

$$M_2 = P(2\eta_2 + \eta_4),$$

$$(68) \quad \frac{C}{P} = 1 - 2 \left( \frac{\eta_1}{l} - 2 \frac{\eta_2}{l} + 2 \frac{\eta_3}{l} - \frac{\eta_4}{l} \right).$$

Wir wählen die Zahlen des letzten Beispiels und betrachten den Fall  $K = 8$ . Hierzu gehört bei gleichmäßiger Belastung der Grundfläche der Schwelle  $\alpha = 1,4$ . Um möglichst ungünstig zu rechnen, ermäßigen wir diesen Wert auf  $\alpha = 1,0$ , denn, je kleiner  $\alpha$  ist, desto größer wird  $C$ . Mit den für diese Ziffer  $\alpha$  in unserer Tabelle angegebenen Werten  $\eta$  und  $\beta$  liefert Gleichung (67)  $C = 0,74 P$  und Gleichung (68)  $C = 0,57 P$ . Die zugehörigen Radstände sind  $1,5 l = 1,5 \cdot 80 = 120$  cm und  $2 l = 160$  cm. Im ersten Falle erzeugt  $P = 8$  t rund  $C = 6$  t.

Ein anderes Verfahren, den Druck  $C$  zu berechnen, findet der Leser im § 15, Nr. 76.

## § 14.

### Graphische Untersuchung des gelenklosen Balkens mit veränderlichem Querschnitte auf elastisch senkbaren Stützen.

70. In unseren bisherigen Untersuchungen des Balkens auf elastischen Stützen haben wir den analytischen Weg bevorzugt. Er führt auch stets in übersichtlicher Weise zu der das Hauptziel bildenden Darstellung der Einflußlinien für die Stützenmomente. Denn die Koeffizienten der die Stützenmomente liefernden Elastizitätsgleichungen lassen sich schnell berechnen, ebenso die in den Werten  $Z$  (Seite 65) vorkommenden Ordinaten  $\delta_m$ , der Biegungslinien für die Zustände  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 1$ , ... Auch

die Auflösung der Elastizitätsgleichungen, bietet selbst bei größerer Zahl dieser Gleichungen und unsymmetrisch gebauten Trägern gar keine Schwierigkeiten.

Immerhin erscheint es zweckmäßig, auch eine rein zeichnerische Behandlung der vorliegenden Aufgabe anzugeben, und es möge daher ein von Vianello herrührendes Verfahren hier aufgenommen werden, welches nur von dem Maxwellschen Satze und den Biegungslinien Gebrauch macht und sich deshalb am besten in den Rahmen dieses Buches einfügt. Es bezieht sich auf den im § 6 analytisch behandelten Fall von einander unabhängiger Stützen, deren Senkungen  $e_r$  proportional den Stützenwiderständen  $C_r$  sind, so daß

$$e_r = \omega_r C_r = \omega_r \frac{C_r}{1,0}$$

ist, wo  $\omega_r$  die Senkung der Stütze  $r$  infolge von  $C_r = 1$  bedeutet (Seite 61). Das Verfahren ist sowohl für den Fachwerkbalken als auch für den vollwandigen Balken mit veränderlichem Querschnitt brauchbar.

Wir setzen voraus, daß nur eine einzige Öffnung belastet sei und betrachten den links von dieser belasteten Öffnung gelegenen Balkenteil 0—1—2—3 . . . , Fig. 207. Die Momentenlinie besteht aus Geraden, welche die Balkenachse in den Punkten  $L_1, L_2, L_3, \dots$  schneiden.  $L_1$  fällt mit der Stütze 0 zusammen.

Beim Balken auf starren Stützen haben diese Punkte  $L$  und ebenso die Nullpunkte  $R$  der Momentenlinie rechts von der belasteten Öffnung eine feste, von der Belastung unabhängige Lage. Beim Balken auf elastischen Stützen ist diese Lage veränderlich, sie muß für jeden Belastungsfall von neuem bestimmt werden. Wohl aber läßt sich, wie wir sogleich zeigen werden, eine Beziehung zwischen den Lagen zweier auf einander folgenden Punkte  $L_k$  und  $L_{k+1}$  herleiten, so daß es nur der Bestimmung eines einzigen Punktes  $L$  und ebenso eines einzigen Punktes  $R$  bedarf, um die übrigen Nullpunkte der Momentenlinien schnell zu finden.

Den Ausgangspunkt für die Herleitung dieser Beziehung bildet die Eigenschaft, daß die Punkte  $L$  die Lagen der den Balkenteilen  $l_1, l_2, l_3, \dots$  entsprechenden Querkräfte

$$Q_1 = C_0, \quad Q_2 = C_0 + C_1, \quad Q_3 = Q_2 + C_2, \dots$$

bestimmen. Es geht die Mittelkraft  $Q_2$  von  $C_0$  und  $C_1$  durch den Punkt  $L_2$ , die Mittelkraft  $Q_3$  von  $C_0, C_1, C_2$  durch  $L_3$  u. s. w.

Wir führen nun durch den Balken unmittelbar links neben dem Stützpunkte 3 einen Schnitt und setzen die in dem Schnitte wirkenden Spannungen zu einer Mittelkraft zusammen. Diese muß dieselbe Größe und Lage, aber entgegengesetzte Richtung haben, wie die Mittelkraft  $Q_3$

der am Balkenstück 0—3 angreifenden äußeren Kräfte  $C_0, C_1, C_2$ ; sie sei an einem starren Stabe angreifend gedacht, der mit dem Endquerschnitte 3 fest verbunden ist. Fällt die Achse dieses in Fig. 207b etwas oberhalb der Balkenachse gezeichneten Stabes mit der Balkenachse zu-

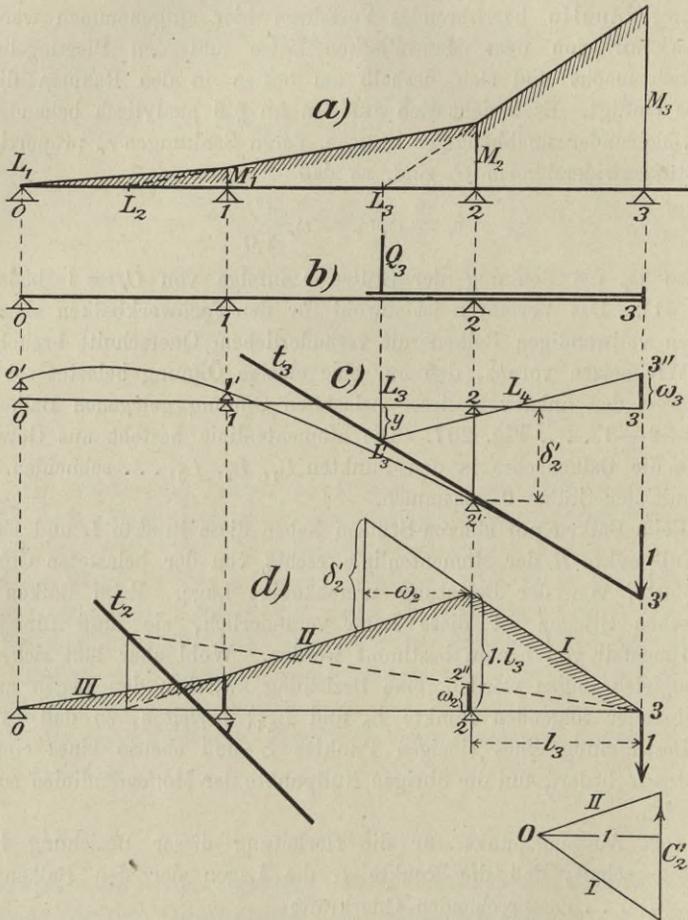


Fig. 207.

sammen, so ist sie bei jeder eintretenden Verbiegung des Balkenstückes 0—3 Tangente der elastischen Linie im Punkte 3.

Belasten wir jetzt das auf den drei Stützen 0, 1, 2 ruhende Balkenstück 0—3 im Punkte 3 mit der lotrechten Last 1 (Fig. 207c) und nehmen wir an, es sei für diesen Zustand die elastische Linie

$0'1'2'3'$  und ihre rechte Endtangente  $t_3$  gegeben, so können wir mit Hilfe des Maxwellschen Satzes wie folgt schließen:

Eine in 3 angreifende Last 1 senkt den dem starren Stabe angehörigen Angriffspunkt von  $Q_3$  um  $y$ , folglich ruft  $Q_3$  eine Senkung des Punktes 3 um  $Q_3 y$  hervor. Nun soll aber die Senkung des Punktes 3 gleich  $C_3 \omega_3$  sein; es ist daher

$$Q_3 y = C_3 \omega_3.$$

Trägt man also nach der entgegengesetzten Richtung von  $3-3'$  die Senkung  $3-3'' = \omega_3$  auf, welche die Stütze 3 infolge von  $C_3 = 1$  erfahren würde, und verbindet  $3''$  mit dem Punkte  $L_3'$ , so schneidet die Gerade  $3''L_3'$  die Balkenachse in dem die Lage von  $Q_4$  bestimmenden Punkte  $L_4$ . Umgekehrt kann man aus der Lage von  $L_4$  auf die Lage von  $L_3$  schließen.

Es ist nun zu zeigen, wie man die Gerade  $t_3$  findet, die man als *Einflußlinie der Senkung des Querschnitts 3* für lotrechte Kräfte bezeichnen darf, welche an dem mit dem Querschnitte befestigten starren Stabe angreifen. Der Belastungsfall, um den es sich hierbei handelt, ist statisch unbestimmt. Von der Momentenlinie, Fig. 207d, ist zunächst nur die Ordinate  $1 \cdot l_3$  an der Stelle 2 bekannt. Kennt man aber die der zweiten Öffnung angehörige Gerade  $t_2$ , so kann man den Nullpunkt der Momentenlinie der zweiten Öffnung finden. Denn für den Belastungsfall in Fig. 207d ist  $Q_3$  gleich der in 3 angreifenden Last 1. Macht man also  $2-2'' = \omega_2$  und lotet man den Schnittpunkt der beiden Geraden  $t_2$  und  $3-2''$  auf die Balkenachse herunter, so erhält man den gesuchten Nullpunkt und kann nunmehr die Momentenlinie und die zugehörige Biegelinie zeichnen. Der Belastungsfall aber, dessen elastische Linie die Tangente  $t_2$  liefert, ist statisch bestimmt; es liegt hier ein auf zwei Stützen 0 und 1 ruhender Balken 0-2 vor, der im Punkte 2 eine lotrechte Last 1 trägt; seine Momentenlinie und Biegelinie kann ohne weiteres gezeichnet werden. In derselben Weise aber, wie man von der Geraden  $t_2$  zur Geraden  $t_3$  gelangt, kann man aus  $t_2$  und  $t_3$  die  $t_4$  herleiten, hierauf die  $t_5$  u. s. w. Und ganz ebenso kann man, am rechten Trägerende beginnend und nach links fortschreitend, ein System von Geraden  $t'$  für die rechts von der belasteten Öffnung liegenden Öffnungen finden. Die Geraden  $t$  und  $t'$  spielen also eine ähnliche Rolle wie die Festpunkte des auf starren Stützen ruhenden Balkens; ihre Lage ist unabhängig von der Belastung. Mit ihrer Hilfe kann man links von der belasteten Öffnung aus der Lage eines Punktes  $L_k$  schrittweise auf die Lage von  $L_{k-1}$ ,  $L_{k-2}$ , . . . schließen, rechts von der belasteten Öffnung aus der Lage eines Punktes  $R_i$  auf die von  $R_{i+1}$ ,  $R_{i+2}$ , . . . . Für jeden neuen Belastungsfall aber sind die Punkte  $L$  und  $R$  von neuem zu bestimmen.

Es möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß zur Bestimmung der Tangente  $t_3$  das Stück  $1'2'3'$  der Biegelinie ausreicht; seine Lage gegen die Achse 1—2—3 ist bestimmt durch die Stützensenkungen  $\delta_1'$  und  $\delta_2'$ . Um  $\delta_2'$  zu finden, beachte man, daß zwei zu den Seiten *I* und *II* der Momentenlinie in Fig. 207 d von einem Punkte *O* aus gezogene Parallelen auf einer Lotrechten im Abstände 1 von *O* den zugehörigen Widerstand  $C_2'$  der Stütze 2 abschneiden. Aus  $C_2'$  findet man

$$\delta_2' = \omega_2 \frac{C_2'}{1,0}$$

und erkennt, daß man diese Verschiebung auch mittels der in Fig. 207 d angegebenen Konstruktion bestimmen kann. Ganz ebenso wird  $\delta_1'$  gefunden.

Besitzt der Balken überall denselben Querschnitt, so betrachte man bei der Darstellung der Biegelinien die Momentenflächen als Belastungsflächen. Man erhält dann die *EJ*-fachen Durchbiegungen und muß natürlich auch die *EJ*-fachen Verschiebungen  $\omega_r$  auftragen. Da nun die elastischen Linien selbst nicht weiter gebraucht werden, sondern nur die Tangenten *t*, so genügt es, die Momentenfläche des Trägerstückes 1—2—3 (Fig. 207 d) in zwei Teile zu zerlegen, in das zu 1—2 gehörige Trapez und das zu 2—3 gehörige Dreieck. Man erhält dann von der elastischen Linie nur drei Tangenten; die eine davon ist  $t_3^*$ ).

**71.** Nunmehr wenden wir uns zu der Hauptaufgabe, der **Darstellung der Einflußlinie für ein Stützenmoment  $M_r$** . Wir setzen vorübergehend  $M_r = X_a$  und benutzen die Gleichung

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

Das statisch unbestimmte Hauptsystem erhalten wir, wenn wir den Balken an der Stelle *r* mit einem Gelenk versehen (Zustand  $X_a = 0$ ). Da es nur auf das Verhältnis  $\delta_{ma} : \delta_{aa}$  ankommt, dürfen wir an Stelle von  $X_a = -1$ , für  $X_a$  ein beliebig großes Moment annehmen, das wir mit  $M_r'$  bezeichnen wollen, Fig. 208. Es wird also darauf ankommen, aus diesem Momente  $M_r'$  die Momente  $M'_{r-1}$ ,  $M'_{r-2}$ , . . ., ferner  $M'_{r+1}$ ,  $M'_{r+2}$ , . . . mit Hilfe der festen Geraden *t* abzuleiten. Ist dies geschehen, so lassen sich die zugehörigen Stützenverschiebungen  $\delta'$  und die elastischen Linien der einzelnen Öffnungen bestimmen. Unter  $\delta_{aa}$

\*) Das beschriebene Verfahren besitzt den Nachteil, daß die Punkte *L* und *R* zuweilen recht unbequeme Lagen außerhalb des Zeichenblattes annehmen. Man muß dann die bekannten Konstruktionen der neueren Geometrie, gerade Linien durch weit abliegende Punkte zu ziehen, benutzen oder die Rechnung zu Hilfe nehmen.

ist der Winkel zu verstehen, um den sich bei  $r$  die Endquerschnitte der durch das Gelenk miteinander verbundenen Balkenquerschnitte gegeneinander drehen; er stimmt mit dem Winkel überein, den die in  $r$  an die beiden Zweige der elastischen Linie gelegten Tangenten miteinander bilden. Mit den aus der Fig. 208 ersichtlichen Bezeichnungen findet man also

$$\delta_{aa} = \frac{a}{b},$$

wobei eine der beiden Strecken  $a$  und  $b$  beliebig groß angenommen werden darf.

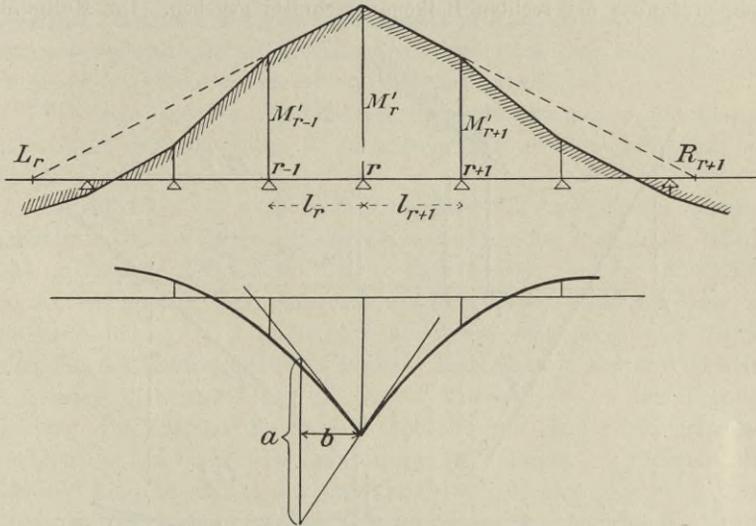


Fig. 208.

Die Aufgabe, die Momente  $M'$  zu ermitteln, ist als gelöst anzusehen, sobald es gelingt, den Punkt  $L_r$  zu bestimmen. Denn aus der Lage dieses Punktes kann man schrittweise auf die Lage von  $L_{r-1}$ ,  $L_{r-2}$ , . . . schließen. Dieselben Konstruktionen sind dann zur Ermittlung von  $R_{r+1}$ ,  $R_{r+2}$ , . . . zu benutzen.

Um  $L_r$  zu bestimmen, führen wir unmittelbar links von  $r$  einen Schnitt, Fig. 209. Die Einflußlinie für die Senkung des Endquerschnittes  $r$  des linken Balkenteiles ist die Gerade  $t_r$ . Der Endquerschnitt  $r$  des rechten Balkenteiles liegt gerade über einer Stütze. Bringt man also, um die Einflußlinie für die Senkung dieses Endquerschnittes zu bestimmen, in  $r$  die Last 1 an, so wird ein Stützenwiderstand  $Y$  hervorgerufen und es greift jetzt an dem fraglichen Endquerschnitte die lotrechte Last  $1 - Y$  an. Die Ordinaten der Einflußlinie  $t_r'$  müssen also mit  $1 - Y$  multipliziert werden. Behufs Berechnung von  $Y$  bezeichnen

wir die Ordinate der Geraden  $t_r'$  im Punkte  $r$  mit  $f$  und erhalten dann für die Senkung von  $r$  infolge  $1 - Y$  den Wert  $(1 - Y)f$ . Andererseits muß diese Senkung aber gleich  $\omega_r Y$  sein. Es ergibt sich also

$$1 - Y = \frac{\omega_r}{f + \omega_r},$$

und an die Stelle von  $f$  tritt

$$f' = \frac{f \omega_r}{f + \omega_r}.$$

Durch diese Ordinate ist die Einflußlinie  $t_r''$  für die Senkung des Endquerschnitts des rechten Balkenquerschnitts gegeben. Ihr Nullpunkt

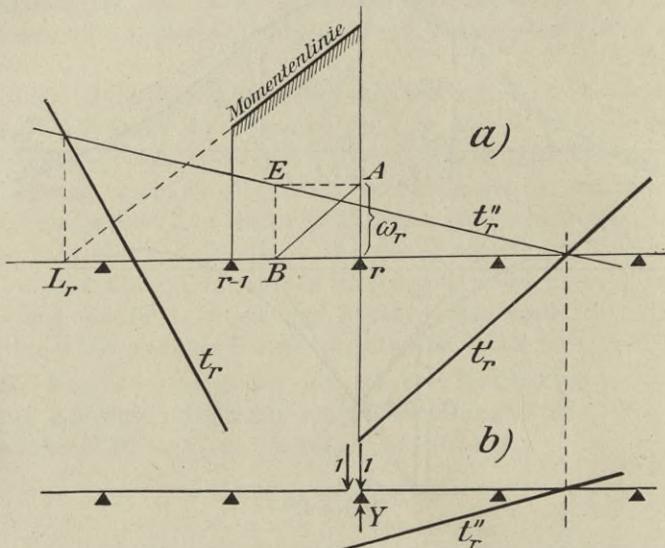


Fig. 209.

fällt mit dem Nullpunkte der Geraden  $t_r'$  zusammen. Wir wiederholen, daß die Einflußlinien  $t$  für Kräfte gelten, die an den mit den fraglichen Querschnitten starr verbundenen Stäben angreifen.

Da nun die beiden Endquerschnitte dieselbe Senkung erfahren müssen, da ferner die Querkraft für den einen Querschnitt nach oben, für den anderen nach unten gerichtet ist, so findet man den Angriffspunkt  $L_r$  der Querkraft, indem man die beiden Einflußgeraden  $t_r$  und  $t_r''$  zum Schnitt bringt, nachdem man vorher die eine der beiden Geraden in die entgegengesetzte Lage umgeklappt hat. Fig. 209a zeigt, wie man die beiden Arbeiten des Multiplizierens der Geraden  $t_r'$  mit  $\omega_r : (f + \omega_r)$  und Umklappens übersichtlich vereinigen kann. Die Diagonale  $AB$  des Rechtecks  $rAEB$  ist parallel zu  $t_r'$ . Lotrecht unter dem Schnittpunkte

von  $t_r$  und  $t_r''$  liegt der Punkt  $L_r$ . Genau ebenso wird der Punkt  $R_{r+1}$  gefunden; der Schnitt wird jetzt unmittelbar rechts von  $r$  geführt.

Hat man nun aus den Punkten  $L_r$  und  $R_{r+1}$  die Punkte  $L_{r-1}$ ,  $L_{r-2}$ , . . . ,  $R_{r+1}$ ,  $R_{r+2}$ , . . . abgeleitet und das  $M'$ -Polygon gezeichnet, so ermittelt man die zugehörigen Stützenverschiebungen  $\delta'$  auf die in Fig. 207d angegebene Weise und gewinnt so die den Stützpunkten entsprechenden Ordinaten der gesuchten elastischen Linie. Man verbindet sie durch gerade Linien und faßt dann die von Stützpunkt zu Stützpunkt reichenden Teile der Biegungslinien als Momentenlinien einfacher Balken auf. Bei unveränderlichem Querschnitte werden die  $EJ$ -fachen Durchbiegungen bestimmt. Mit Hilfe der Zahlenwerte  $\omega_D$  und  $\omega_E$  auf Seite 105 kann man schnell eine größere Zahl von Ordinaten berechnen. Beispiele für dieses Verfahren haben wir zur Genüge vorgeführt.

Wie man aus den Einflußlinien der Stützenmomente alle übrigen Einflußlinien herleiten kann, ist in unseren früheren Untersuchungen ausführlich beschrieben worden.

Zu erwähnen ist noch der Ausnahmefall des Stützenmomentes eines Endfeldes. Die vorhin beschriebene Konstruktion der Einflußlinie ist hier nicht anwendbar. Man geht am zweckmäßigsten von der Einflußlinie für den Widerstand der Endstütze aus, mit deren Hilfe sich dann auf dem in Abteilung I, § 13 angegebenen Wege sehr leicht alle Einflußlinien für das Endfeld herleiten lassen. Bezeichnet man den Widerstand der rechten Endstütze  $n$  mit  $X_a$ , so ist  $X_a = \delta_{ma} : \delta_{aa}$ . Die Biegungslinie für den Zustand  $X_a = -1$  läßt sich mit Hilfe der Geraden  $t$  ohne weiteres zeichnen, weil das Moment  $M_{n-1} = -1 \cdot l_n$  bekannt und auch der Angriffspunkt  $n$  der Querkraft des Endfeldes gegeben ist. Es handelt sich also um dieselben Konstruktionen wie bei der Herleitung der Geraden  $t_r$  aus den vorhergehenden Geraden  $t$ , nur mit dem Unterschiede, daß man die Biegungslinie so weit darzustellen hat, als sie einen beachtenswerten Einfluß liefert. Ist  $f_n$  die Ordinate dieser Biegungslinie im Punkte  $n$ , so ist der Multiplikator

$$\frac{1}{\delta_{aa}} = \frac{1}{f_n + \omega_n}.$$

Als Übungsbeispiel empfehlen wir dem Leser die Untersuchung der in Nr. 61 behandelten Schiffbrücke.

### § 15.

## Balken auf gleichförmiger, ununterbrochener, elastischer Unterlage.

**72. Die Grundgleichungen von Winkler und Schwedler.**  
Ein prismatischer, von lotrechten Einzellasten angegriffener Stab ruhe

auf einer wagerechten, gleichmäßig beschaffenen, elastischen Unterlage. An einer beliebigen Stelle sei die Durchbiegung des Stabes  $y$  und der Widerstand der Unterlage für die Längeneinheit der Stabachse  $z$ . Es sei

$$(1) \quad z = E_0 y,$$

wo  $E_0$  einen durch die Erfahrung bestimmten Wert bedeutet, der mit derselben Einheit gemessen wird, wie die Elastizitätsziffer  $E$ .

Die Differentialgleichung der Momentenlinie ist

$$(2) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = z = E_0 y$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M,$$

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} = -E_0 y,$$

wofür wir schreiben

$$(3) \quad \frac{s^4}{4} \frac{d^4 y}{dx^4} = -y.$$

Die Länge  $s$  ist durch die Gleichung bestimmt

$$(4) \quad s = \sqrt[4]{4 \frac{E}{E_0} J}.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (3) ist, wenn  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet und zur Abkürzung

$$(5) \quad \frac{x}{s} = \varphi$$

gesetzt wird,

$$(6) \quad y = (A_1 e^\varphi + A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi + (B_1 e^\varphi + B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi.$$

Durch viermaliges Differenzieren findet man

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \frac{dy}{dx} = + (A_1 e^\varphi - A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi + (B_1 e^\varphi + B_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ \quad \quad \quad - (A_1 e^\varphi + A_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + (B_1 e^\varphi - B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi \\ \frac{s^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = - (A_1 e^\varphi - A_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + (B_1 e^\varphi - B_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ \frac{s^3}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} = - (A_1 e^\varphi + A_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + (B_1 e^\varphi + B_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ \quad \quad \quad - (A_1 e^\varphi - A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi - (B_1 e^\varphi - B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi \\ \frac{s^4}{4} \frac{d^4 y}{dx^4} = - (A_1 e^\varphi + A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi - (B_1 e^\varphi + B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi = -y. \end{array} \right.$$

Die letzte Gleichung beweist die Richtigkeit der Integration.

Aus dem zweiten und dritten Differentialquotienten findet man

$$(8) \quad M = - EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{E_0 s^4}{4} \frac{d^2 y}{dx^2},$$

$$(9) \quad Q = - EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = - \frac{E_0 s^4}{4} \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Wir untersuchen zunächst einen gewichtslosen Stab von der Länge  $2l$ , in dessen Mitte eine Einzellast  $P$  angreift, Fig. 210, und nehmen an, daß der Stab mit der Unterlage so befestigt sei, daß  $z$  auch negativ werden kann. Die Abszissen  $x$  zählen wir von der Angriffsstelle der Last aus nach rechts. Für  $x = 0$  muß  $\frac{dy}{dx} = 0$  sein; ferner muß an dieser Stelle die Querkraft den Wert

$$Q = - \frac{E_0 s^4}{4} \frac{d^3 y}{dx^3} = - \frac{P}{2}$$

annehmen. Das gibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 + B_1 + B_2 &= 0 \\ -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 &= \frac{P}{E_0 s}; \end{aligned}$$

aus ihnen folgt:

$$(10) \quad A_2 = A_1 + \frac{P}{2E_0 s}, \quad B_2 = -B_1 + \frac{P}{2E_0 s}.$$

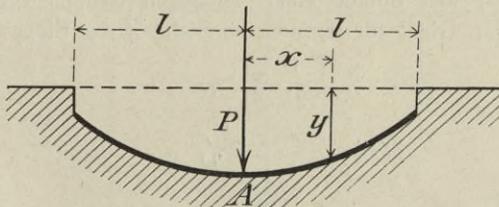


Fig. 210.

An den Stabenden ist sowohl  $M = 0$  als auch  $Q = 0$ . Für  $x = l$  muß also  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$  und  $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$  sein. Mit der Bezeichnung

$$(11) \quad \frac{l}{s} = \lambda$$

und mit Beachtung der Gleichungen (10) erhält man zur Berechnung von  $A_1$  und  $B_1$  die Bedingungen

$$\begin{aligned} A_1 (e^\lambda - e^{-\lambda}) \sin \lambda - B_1 (e^\lambda + e^{-\lambda}) \cos \lambda &= - \frac{P}{2E_0 s} e^{-\lambda} (\cos \lambda - \sin \lambda) \\ A_1 [(e^\lambda - e^{-\lambda}) \cos \lambda + (e^\lambda + e^{-\lambda}) \sin \lambda] \\ - B_1 [(e^\lambda - e^{-\lambda}) \cos \lambda - (e^\lambda + e^{-\lambda}) \sin \lambda] &= + \frac{P}{E_0 s} e^{-\lambda} \cos \lambda. \end{aligned}$$

Sie liefern

$$(12) \quad A_1 = \frac{P}{4E_0s} \frac{2 + e^{-2\lambda} + \cos 2\lambda - \sin 2\lambda}{\mathfrak{S}in 2\lambda + \sin 2\lambda},$$

$$(13) \quad B_1 = \frac{P}{4E_0s} \frac{\cos 2\lambda + \sin 2\lambda - e^{-2\lambda}}{\mathfrak{S}in 2\lambda + \sin 2\lambda} *).$$

Ist der Stab so lang, daß  $\frac{l}{s} = \infty$  gesetzt werden darf, so wird  $e^{-2\lambda} = 0$  und  $\mathfrak{S}in 2\lambda = \infty$ . Man erhält dann

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0,$$

$$A_2 = B_2 = \frac{P}{2E_0s},$$

mithin

$$z = E_0y = \frac{P}{2s} e^{-\varphi} (\cos \varphi + \sin \varphi),$$

$$M = -\frac{E_0s^4}{4} \frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{Ps}{4} e^{-\varphi} (\cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$Q = -\frac{E_0s^4}{4} \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{P}{2} e^{-\varphi} \sin \varphi.$$

Nun darf man aber beim unendlich langen Stabe jede Stelle als Stabmitte ansehen, und daraus folgt, daß die vorstehenden Gleichungen auch gestatten, den Einfluß einer beliebigen Gruppe von Einzellasten anzugeben. Man erhält für irgend eine Stelle  $A$  des Stabes die Werte

$$(14) \quad z = \frac{1}{2s} \sum P \eta,$$

$$(15) \quad M = \frac{s}{4} \sum P \eta',$$

$$(16) \quad Q = \frac{1}{2} \sum P \eta'',$$

wo

$$(17) \quad \eta = e^{-\varphi} (\cos \varphi + \sin \varphi),$$

$$(18) \quad \eta' = e^{-\varphi} (\cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$(19) \quad \eta'' = -e^{-\varphi} \sin \varphi,$$

$$\varphi = \frac{x}{s}, \quad s = \sqrt[4]{4 \frac{E}{E_0} J}.$$

$x$  bedeutet den Abstand der Last vom Querschnitte.

\*) Tafeln der Hyperbelfunktionen  $\mathfrak{S}in \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}$  und  $\mathfrak{C}os \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}$  finden sich u. a. in dem bekannten Taschenbuche der Hütte, ferner in dem Taschenbuche der Mathematik von Dr. W. Ligowski.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der Werte  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta''$  für verschiedene  $\varphi^*$ .

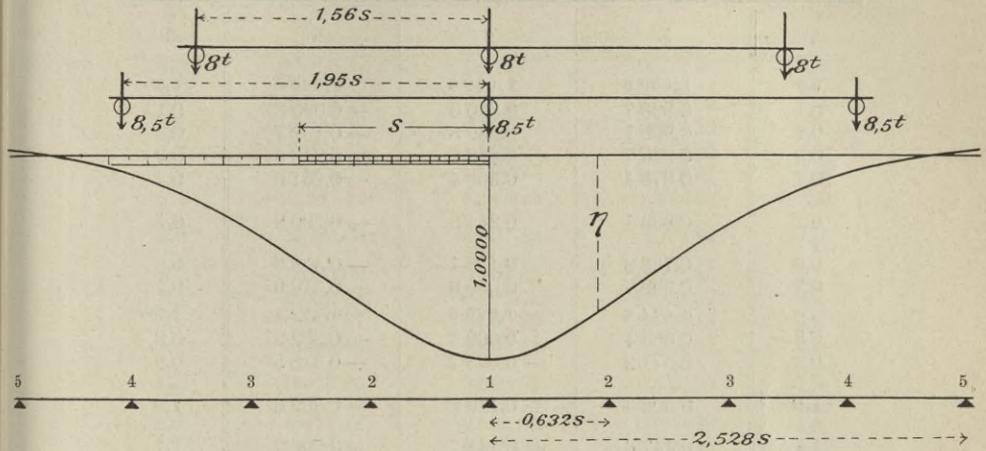


Fig. 211.

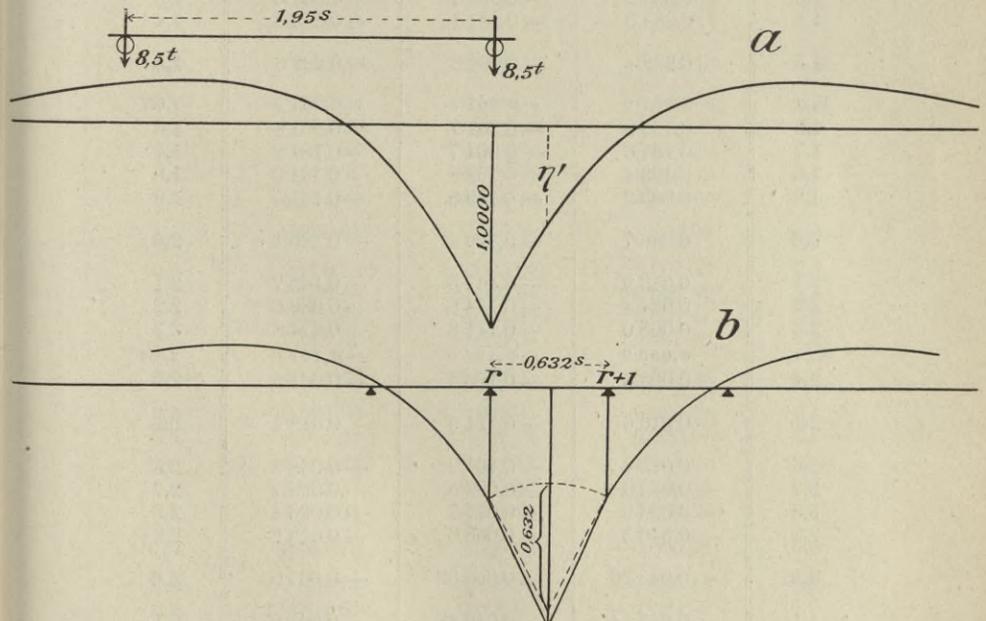


Fig. 212.

\*) Die Tabelle ist dem bekannten Werke: Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues, Berlin 1888, mit Erlaubnis des Herrn Verfassers entlehnt worden.

Tabelle der Werte  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta''$  (Seite 240).

$\varphi$	$\eta$	$\eta'$	$\eta''$	$\varphi$
<b>0,0</b>	1,000 0	1,000 0	0,000 0	<b>0,0</b>
0,1	0,990 7	0,810 0	— 0,090 3	0,1
0,2	0,965 1	0,639 8	— 0,162 7	0,2
0,3	0,926 7	0,488 8	— 0,218 9	0,3
0,4	0,878 4	0,356 4	— 0,261 0	0,4
<b>0,5</b>	0,823 1	0,241 5	— 0,290 8	<b>0,5</b>
0,6	0,762 8	0,143 1	— 0,309 9	0,6
0,7	0,699 7	0,059 9	— 0,319 9	0,7
$\frac{1}{4}\pi$	0,644 8	0,000 0	— 0,32 24	0,785
0,8	0,635 4	— 0,009 3	— 0,322 3	0,8
0,9	0,571 2	— 0,065 7	— 0,318 5	0,9
<b>1,0</b>	0,508 3	— 0,110 8	— 0,309 6	<b>1,0</b>
1,1	0,447 6	— 0,145 7	— 0,296 7	1,1
1,2	0,389 9	— 0,171 6	— 0,280 7	1,2
1,3	0,335 5	— 0,189 7	— 0,262 6	1,3
1,4	0,284 9	— 0,201 1	— 0,243 0	1,4
<b>1,5</b>	0,238 4	— 0,206 8	— 0,222 6	<b>1,5</b>
$\frac{1}{2}\pi$	0,207 9	— 0,207 9	— 0,207 9	1,571
1,6	0,195 9	— 0,207 7	— 0,201 8	1,6
1,7	0,157 6	— 0,204 7	— 0,181 2	1,7
1,8	0,123 4	— 0,198 5	— 0,161 0	1,8
1,9	0,093 2	— 0,189 9	— 0,141 5	1,9
<b>2,0</b>	0,066 7	— 0,179 4	— 0,123 1	<b>2,0</b>
2,1	0,043 9	— 0,167 5	— 0,105 7	2,1
2,2	0,024 4	— 0,154 8	— 0,089 6	2,2
2,3	0,008 0	— 0,141 6	— 0,074 8	2,3
$\frac{3}{4}\pi$	0,000 0	— 0,134 0	— 0,067 0	2,356
2,4	— 0,005 6	— 0,128 2	— 0,061 3	2,4
<b>2,5</b>	— 0,016 6	— 0,114 9	— 0,049 1	<b>2,5</b>
2,6	— 0,025 4	— 0,101 9	— 0,038 3	2,6
2,7	— 0,032 0	— 0,089 5	— 0,028 7	2,7
2,8	— 0,036 9	— 0,077 7	— 0,020 4	2,8
2,9	— 0,040 3	— 0,066 6	— 0,013 2	2,9
<b>3,0</b>	— 0,042 26	— 0,056 32	— 0,007 03	<b>3,0</b>
3,1	— 0,043 14	— 0,046 88	— 0,001 87	3,1
$\pi$	— 0,043 21	— 0,043 21	0,000 00	3,142
3,2	— 0,043 07	— 0,038 31	0,002 38	3,2
3,3	— 0,042 24	— 0,030 60	0,005 82	3,3
3,4	— 0,040 79	— 0,023 74	0,008 53	3,4

Tabelle der Werte  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta''$  (Seite 240).

$\varphi$	$\eta$	$\eta'$	$\eta''$	$\varphi$
<b>3,5</b>	— 0,038 87	— 0,017 69	0,010 59	<b>3,5</b>
3,6	— 0,036 59	— 0,012 41	0,012 09	3,6
3,7	— 0,034 07	— 0,007 87	0,013 10	3,7
3,8	— 0,031 38	— 0,004 01	0,013 69	3,8
3,9	— 0,028 62	— 0,000 77	0,013 92	3,9
$\frac{5}{4}\pi$	— 0,027 86	0,000 00	0,013 93	3,927
<b>4,0</b>	— 0,025 83	0,001 89	0,013 86	<b>4,0</b>
4,1	— 0,023 09	0,004 03	0,013 56	4,1
4,2	— 0,020 42	0,005 72	0,013 07	4,2
4,3	— 0,017 87	0,006 99	0,012 43	4,3
4,4	— 0,015 46	0,007 91	0,011 68	4,4
<b>4,5</b>	— 0,013 20	0,008 52	0,010 86	<b>4,5</b>
4,6	— 0,011 12	0,008 86	0,009 99	4,6
4,7	— 0,009 21	0,008 98	0,009 09	4,7
$\frac{6}{4}\pi$	— 0,008 98	0,008 98	0,008 98	4,712
4,8	— 0,007 48	0,008 92	0,008 20	4,8
4,9	— 0,005 93	0,008 70	0,007 32	4,9
<b>5,0</b>	— 0,004 55	0,008 37	0,006 46	<b>5,0</b>
5,1	— 0,003 34	0,007 95	0,005 64	5,1
5,2	— 0,002 29	0,007 46	0,004 87	5,2
5,3	— 0,001 39	0,006 92	0,004 15	5,3
5,4	— 0,000 63	0,006 36	0,003 49	5,4
$\frac{7}{4}\pi$	0,000 00	0,005 79	0,002 90	5,498
<b>5,5</b>	0,000 01	0,005 78	0,002 88	<b>5,5</b>
5,6	0,000 53	0,005 20	0,002 33	5,6
5,7	0,000 95	0,004 64	0,001 84	5,7
5,8	0,001 27	0,004 09	0,001 41	5,8
5,9	0,001 52	0,003 56	0,001 02	5,9
<b>6,0</b>	0,001 69	0,003 07	0,000 69	<b>6,0</b>
6,1	0,001 80	0,002 61	0,000 41	6,1
6,2	0,001 85	0,002 19	0,000 17	6,2
$\frac{8}{4}\pi$	0,001 87	0,001 87	0,000 00	6,283
6,3	0,001 87	0,001 81	— 0,000 03	6,3
6,4	0,001 84	0,001 46	— 0,000 19	6,4
<b>6,5</b>	0,001 79	0,001 15	— 0,000 32	<b>6,5</b>
6,6	0,001 72	0,000 87	— 0,000 42	6,6
6,7	0,001 62	0,000 63	— 0,000 50	6,7
6,8	0,001 52	0,000 42	— 0,000 55	6,8
6,9	0,001 41	0,000 24	— 0,000 58	6,9
<b>7,0</b>	0,001 29	0,000 09	— 0,000 60	<b>7,0</b>
$\frac{9}{4}\pi$	0,001 20	0,000 00	— 0,000 60	7,069

Zwei Lasten, die zu beiden Seiten des Querschnittes in gleichen Entfernungen liegen, erzeugen Querkräfte von gleicher Größe, aber von verschiedenen Vorzeichen. Der links vom Querschnitte gelegenen Last entspricht bei positivem  $\eta''$  eine negative Querkraft. Die von beiden Lasten hervorgerufenen  $z$  und  $M$  haben gleiche Größe und gleiches Vorzeichen.

Die Figuren 211 und 212a zeigen die Einflußlinien für  $z$  und  $M$ . Die Abszissen sind Vielfache der Länge  $s$ ; die Ordinaten sind  $\eta$  und  $\eta'$ . Der Multiplikator der  $z$ -Linie ist also  $\mu = \frac{1}{2s}$ , derjenige der  $M$ -Linie ist  $\mu = \frac{s}{4}$ . Wir haben die Linien nur bis  $x = 2,6s$  gezeichnet.

**73. Eng nebeneinander gelegte Querschwellen auf Eisenbahnbrücken,** Fig. 213, 214, sind als stetige elastische Unterstützung der Schienen anzusehen. Ihre Stützweite sei  $c$ , der Abstand der Schienen von den Stützpunkten der Schwellen  $d$ , der Druck der Schiene auf die Schwelle  $P_1$ .

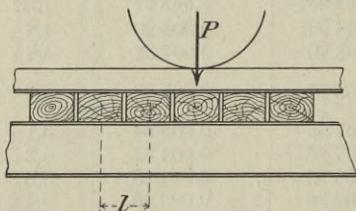


Fig. 213.

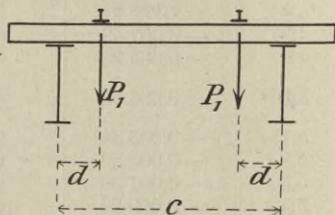


Fig. 214.

Bedeutet weiter  $E_1$  den Elastizitätsmodul der Querschwelle,  $J_1$  das Trägheitsmoment des Schwellenquerschnitts,  $l$  den Abstand von Mitte zu Mitte der Schwelle, so ist die Durchbiegung der Schwelle an der Angriffsstelle von  $P_1$  nach Seite 81\*)

$$(20) \quad y = \frac{P_1 d^2 (3c - 4d)}{6 E_1 J_1},$$

und es erscheint der Gegendruck  $z$ , den die Schwellen auf die Längeneinheit der Schiene ausüben, in der Form

$$z = \frac{P_1}{l} = \frac{6 E_1 J_1 y}{l d^2 (3c - 4d)} = E_0 y.$$

Es ergibt sich also

$$(21) \quad E_0 = E_1 \frac{6 J_1}{l d^2 (3c - 4d)},$$

\*) Man achte darauf, daß wir die Stützweite, abweichend von Seite 80, jetzt mit  $c$  bezeichnet haben.

und es nimmt daher die Länge  $s = \sqrt[4]{4 \frac{E}{E_0} J}$  den Wert an

$$(22) \quad s = \sqrt[4]{\frac{2E}{3E_1} \cdot \frac{J}{J_1} l d^2 (3c - 4d)},$$

wo  $E$  den Elastizitätsmodul und  $J$  das Querschnitts-Trägheitsmoment der Schiene bedeuten.

1. *Beispiel.* Es sei  $c = 200$  cm,  $d = 25$  cm,  $J = 1580$  cm<sup>4</sup>,  $W = 217$  cm<sup>3</sup> (Widerstandsmoment des Schienenquerschnitts). Als Querschwellen seien Zoreisen Nr. 9 mit  $J_1 = 206$  cm<sup>4</sup> und  $W_1 = 45,8$  cm<sup>3</sup> in Zwischenräumen von 2 cm verlegt. Die Breite dieser Schwellen beträgt 20 cm; es ist also  $l = 22$  cm, und man erhält mit  $E = E_1$ :

$$s = \sqrt[4]{\frac{2}{3} \cdot \frac{1580}{206} 22 \cdot 25^2 (3 \cdot 200 - 4 \cdot 25)} = 77,0 \text{ cm.}$$

Es soll nun die Beanspruchung der Schwelle für eine aus drei Lokomotivachsen bestehende Belastung berechnet werden. Der Raddruck sei  $P = 8,5$  t, der Radstand 1,5 m. Für  $\varphi = \frac{1,5}{0,77} = 1,95$ , d. h. für  $x = 1,95 s$  liefert die Einflußlinie für  $z$  (Fig. 211) die Ordinate  $\eta = 0,08$ . Aus

$$\frac{P_1}{l} = z$$

folgt

$$P_1 = \frac{l}{2s} P \Sigma \eta = \frac{22P}{2 \cdot 77} (1,0 + 2 \cdot 0,08) = 0,17 P = 1,45 \text{ t.}$$

Das Zoreisen wird also beansprucht mit

$$\sigma = \frac{M}{W_1} = \frac{P_1 d}{W_1} = \frac{1,45 \cdot 25}{45,8} = 0,79 \text{ t/cm}^2.$$

Würde man mit  $P = 8$  t und 1,2 m Radstand rechnen, so würde man erhalten:  $\varphi = \frac{1,2}{0,77} = 1,56$ ,  $\eta = 0,21$ ,  $P_1 = 0,20 P = 1,6$  t und  $\sigma = 0,87 \text{ t/cm}^2$ .\*).

\*) Wenn, wie im vorliegenden Falle, die ungünstigste Laststellung ohne weiteres angegeben werden kann und nur wenige Werte  $\eta$  zu berechnen sind, so braucht man die Einflußlinie nicht zu zeichnen. Die  $\eta$  können der Tabelle entnommen werden, nötigenfalls mit Hilfe geradliniger Einschaltung. Sind verschiedene Zugstellungen zu untersuchen, so verdient die Benutzung der Einflußlinie im allgemeinen den Vorzug. Die Radstände werden als Vielfache der Länge  $s$  ausgedrückt und eine einmal gezeichnete Einflußlinie kann dann für die verschiedensten Aufgaben benutzt werden.

Für die Beanspruchung der Schiene ist der größere Radstand der ungünstigere. An Stelle der Mittelachse der Lokomotive muß eine Seitenachse über dem fraglichen Schienenquerschnitt stehen. Zu  $\varphi = 1,95$  gehört nach Fig. 212a  $\eta' = -0,18$ ; der zu  $\varphi = 2 \cdot 1,95 = 3,9$  gehörige Wert  $\eta' = -0,001$  ist unerheblich. Man erhält

$$M = \frac{Ps}{4} \sum \eta = \frac{8,5 \cdot 77}{4} (1,0 - 0,18) = 134 \text{ tm},$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{134}{217} = 0,62 \text{ t/cm}^2.$$

Der einzelne Raddruck würde erzeugen

$$M = \frac{8,5 \cdot 77}{4} = 164 \text{ und } \sigma = 0,76 \text{ t/cm}^2.$$

Für die Praxis empfiehlt es sich, schon wegen der Abnutzung der Schienen, mit dem ungünstigen Falle zu rechnen, daß nur ein einziger Raddruck angreift.

2. *Beispiel.* An Stelle der im ersten Beispiele vorausgesetzten eisernen Querschwellen sollen hölzerne Querschwellen von 24 cm Breite und 16 cm Höhe treten. Dann ist  $J_1 = 8200$ ,  $W_1 = 1025$ ,

$$\frac{2}{3} \frac{E}{E_1} = \frac{2100000}{100000} \cdot \frac{2}{3} = 14, \quad \frac{2}{3} \frac{E}{E_1} \frac{J}{J_1} = \frac{14 \cdot 1580}{8200} = 2,7$$

und man erhält mit  $l = 24 + 2 = 26$  cm:

$$s = \sqrt[4]{2,7 \cdot 26 \cdot 25^2 (3 \cdot 200 - 4 \cdot 25)} = 68,4 \text{ cm}.$$

Wir rechnen mit 1,2 m Radstand und  $P = 8$  t. Zu  $\varphi = \frac{1,2}{0,684} = 1,75$  gehört  $\eta = 0,14$ . Daher

$$P_1 = \frac{26P}{2 \cdot 68,4} (1,0 + 2 \cdot 0,14) = 0,24P = 1,92 \text{ t},$$

$$\sigma = \frac{P_1 d}{W_1} = \frac{1,9 \cdot 25}{1025} = 0,05 \text{ t/cm}^2.$$

Für die Schiene ergibt sich für  $P = 8,5$  t

$$\sigma = \frac{Ps}{4W} = \frac{8,5 \cdot 68,4}{4 \cdot 217} = 0,67 \text{ t/cm}^2.$$

**74. Einfluß einer gleichförmigen Verkehrslast.** Wir kehren zur Behandlung des allgemeinen Falles zurück. Der Druck  $z$  wird 0, sobald  $\text{tg } \varphi = -1$  ist, und das geschieht für  $\varphi = \frac{3}{4} \pi$ ,  $\frac{7}{4} \pi$ ,  $\frac{11}{4} \pi$ , ... Die Strecken, deren Belastung an der Stelle  $A$  ein positives  $z$  erzeugen, reichen von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \frac{3}{4} \pi$ , von  $\varphi = \frac{7}{4} \pi$  bis  $\varphi = \frac{11}{4} \pi$ , u. s. w.

Die Belastung der dazwischen gelegenen Strecken ruft ein negatives  $z$  hervor. Jeder  $\frac{\text{positiven}}{\text{negativen}}$  Beitragstrecke links von  $A$  entspricht eine gleichlange  $\frac{\text{positive}}{\text{negative}}$  Beitragstrecke rechts von  $A$ . Infolge einer gleichmäßigen Verkehrslast  $p$  entsteht also, wegen  $dx = s d\varphi$ ,

$$\max z = \frac{p}{2} \left[ 2 \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \eta d\varphi + 2 \int_{\frac{7}{4}\pi}^{\frac{11}{4}\pi} \eta d\varphi + \dots \right].$$

Nun ist

$$\int \cos \varphi e^{-\varphi} d\varphi = + \frac{1}{2} e^{-\varphi} (\sin \varphi - \cos \varphi)$$

$$\int \sin \varphi e^{-\varphi} d\varphi = - \frac{1}{2} e^{-\varphi} (\sin \varphi + \cos \varphi)$$

$$\int \eta d\varphi = \int e^{-\varphi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = - e^{-\varphi} \cos \varphi$$

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \eta d\varphi = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} = 1,067^*)$$

$$\int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{11\pi}{4}} \eta d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( e^{-\frac{11\pi}{4}} + e^{-\frac{7\pi}{4}} \right) = 0,003.$$

Der Einfluß der übrigen positiven Beitragstrecken ist unwesentlich. Man findet daher, auf eine Dezimalstelle abgerundet,

$$(23) \quad \max z = 1,1 p,$$

also einen Wert, der nur wenig größer als  $p$  ist.

Das Biegemoment  $M$  wird 0 für  $\text{tg } \varphi = +1$ , das ist für  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,

$\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{9}{4}\pi$ , ... Infolge einer gleichmäßigen Verkehrslast entsteht mithin

$$\max M = \frac{ps^2}{4} \left[ 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta' d\varphi + 2 \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \eta' d\varphi + \dots \right],$$

\*) Es ist  $\log e^{-\frac{\pi}{4}} = 0,658906 - 1$ .

wo

$$\int \eta' d\varphi = \int e^{-\varphi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = e^{-\varphi} \sin \varphi$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta' d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\pi}{4}} = 0,161 \text{ } \cancel{\text{F}}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \eta' d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( e^{-\frac{9\pi}{4}} + e^{-\frac{5\pi}{4}} \right) = 0,007 \text{ } \cancel{\text{F}}$$

Die übrigen positiven Beitragstrecken dürfen vernachlässigt werden. Es entsteht

$$(24) \quad \max M = 0,17 p s^2.$$

**75. Anwendung auf Schiffbrücken.** Ruht ein sehr langer gelenkloser prismatischer Balken auf gleich großen, in gleichen, verhältnismäßig kurzen Abständen aufeinander folgenden Schiffen und ist, wie bei dem in Nr. 61 gerechneten Beispiele der Einfluß der Werte  $\zeta$  verhältnismäßig klein, so dürfen die Widerstände  $C$  der Schiffe bei der Berechnung der Momente und der Einsenkungen der Schiffe mit genügender Annäherung durch einen stetigen Gegendruck

$$z = \frac{C}{l} = \gamma \frac{Fy}{l}$$

ersetzt werden, wo  $l$  den Abstand der Mitten zweier benachbarten Schiffe,  $F$  den Inhalt des wagerechten Schiffsquerschnitts und  $\gamma$  das Gewicht des Wassers für die Raumeinheit bedeutet. Es ist dann

$$(25) \quad E_0 = \frac{\gamma F}{l} \quad \text{und} \quad s = \sqrt[4]{\frac{4 E J l}{\gamma F}},$$

und man erhält für das größte Stützenmoment infolge einer gleichmäßigen Verkehrslast den Wert

$$(26) \quad \max M_p = 0,34 p \sqrt{\frac{E J l}{\gamma F}}.$$

Für das Moment in der Mitte einer Öffnung rechnen wir den Betrag

$$M_0 = \frac{1}{8} p l^2 \text{ hinzu.}$$

Hinsichtlich der ständigen Belastung  $g$  verhalten sich die einzelnen Stücke  $l$  des unendlich langen Balkens wie an beiden Enden wagerecht eingespannte Stäbe. Es entsteht über einer Stütze

$$M_g = -\frac{gl^2}{12}$$

und in der Mitte einer Öffnung

$$M_g = \frac{gl^2}{8} - \frac{gl^2}{12} = \frac{gl^2}{24}.$$

Das größte Biegemoment beträgt daher im ganzen

$$(27) \quad M = 0,34 p \sqrt{\frac{EJl}{\gamma F}} + \frac{1}{8} pl^2 + \frac{1}{24} gl^2.$$

Die größte Belastung eines Schiffes infolge der Verkehrslast ist

$$(28) \quad C_{max} = 1,1 pl.$$

Wenden wir diese Formeln auf die in Nr. 61 untersuchte Schiffbrücke an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{EJl}{\gamma F}} &= \sqrt{\frac{215 \cdot 1260 \cdot 12}{1,0 \cdot 100}} = 180 \text{ m}^2 \\ M_{max} &= \left(0,34 \cdot 180 + \frac{1}{8} \cdot 12^2\right) p + \frac{12^2}{24} g \\ &= 79 p + 6 g = 79 \cdot 2,7 + 6 \cdot 1,8 = 214 \text{ tm.} \\ C_{max} &= 1,1 p \cdot 12 = 13,2 p, \end{aligned}$$

welche Werte mit den früher erhaltenen:

$$M_{max} = 74 p + 6,3 g = 211 \text{ tm, } C_{max} = 13,2 p$$

trotz der Stützenentfernung von  $l = 12 \text{ m}$  und der nicht einmal sehr großen Zahl von Schiffen sehr gut übereinstimmen.

Wir bemerken noch, daß für das vorstehende Beispiel

$$s = \sqrt[4]{\frac{4EJl}{\gamma F}} = 19,0 \text{ m}$$

ist, daß also die zweite positive Beitragstrecke hinsichtlich des Momentes erst im Abstände  $\frac{5}{4} \pi s = 75 \text{ m}$  von der Balkenmitte beginnt und im Abstände  $\frac{9}{4} \pi s = 134$  endigt. Es hätte also genügt,  $M_p = 0,16 ps^2$  zu setzen. Ähnlich verhält es sich mit  $C_{max}$ . Bei der Anwendung von Näherungsformeln empfiehlt es sich aber, etwas reichlich zu rechnen.

Die Wirkung von Einzellasten läßt sich mit Hilfe der in den Figuren 211 und 212 dargestellten Einflußlinien leicht verfolgen. Der Widerstand  $C$  eines Schiffes infolge einer Last  $P = 1$  ist

$$C = zl = \frac{l}{2s} \eta = \frac{12}{38} \eta = 0,32 \eta.$$

Drückt man nun  $l$  als Vielfaches von  $s = 19$  m aus, so erhält man  $l = 0,632 s$ , und kennt jetzt den Maßstab, in welchem der Balken unter die  $\eta$ -Linie gesetzt werden muß, wenn diese Linie die Einflußlinie für  $C$  sein soll. Der Multiplikator ist 0,32. Um eine Vergleichung mit den Ergebnissen der in Nr. 61 durchgeführten Untersuchung zu ermöglichen, geben wir noch die den Stützpunkten 1, 2, 3, 4, 5 entsprechenden Werte  $0,32\eta$  an. Wir finden die Zahlen

$$0,32 \quad 0,24 \quad 0,11 \quad 0,03 \quad - 0,01,$$

welche von den früher gewonnenen nur wenig abweichen. Die Einflußlinie für den Widerstand  $C_0$  des zunächst dem Ufer gelegenen Schiffes hat natürlich eine von den übrigen  $C$ -Linien völlig abweichende Form. Man findet sie mit genügender Genauigkeit mittels der am Schluß von Nr. 61 unter 7 durchgeführten Untersuchung aus der Einflußlinie für  $M_1$ .

Um die Wirkung von Einzellasten auf die Momente des mittleren Teiles der Brücke zu untersuchen, betrachte man die  $\eta'$ -Linie, Fig. 212 a, als die mit dem Multiplikator  $\frac{1}{4}s$  behaftete Einflußlinie, sowohl des Stützenmomentes  $M_r$  als auch des Stützenmomentes  $M_{r+1}$  und leite die Einflußlinie des Momentes  $M$  für den in der Mitte der Öffnung  $l$  gelegenen Querschnitt mit Hilfe der Formel

$$M = M_0 + \frac{M_r + M_{r+1}}{2}$$

ab. Die  $M_0$ -Fläche ist ein Dreieck von der Höhe  $\frac{1}{4}l$ , wofür natürlich wegen des Multiplikators  $\frac{1}{4}s$  die Zahl  $l:s$  aufgetragen werden muß. Im vorliegenden Fall ist (für  $P = 1$ )

$$M_r = \frac{1}{4}s\eta' = 4,75 \eta',$$

und die Höhe des  $M_0$ -Dreiecks gleich  $l:s = 0,632$ . Das beschriebene Verfahren ist in Fig. 212 b durchgeführt worden. Der zur Öffnung  $l$  gehörige Teil der  $\frac{1}{2}(M_r + M_{r+1})$ -Linie wurde gestrichelt. Multipliziert man die in der Mitte von  $l$  und bei den Stützpunkten  $r$  und  $r - 1$  gemessenen Ordinaten mit 4,75, so erhält man

$$+ 5,32 \quad + 2,66 \quad - 0,24.$$

Ersetzt man innerhalb der Öffnung die  $\frac{1}{2}(M_r + M_{r+1})$ -Linie durch eine wagerechte Gerade, was stets zu empfehlen ist, so findet man

$$+ 5,66 \quad + 2,66 \quad - 0,24.$$

In Nr. 61 erhielten wir

$$+ 5,41 \quad + 2,41 \quad - 0,33.$$

Die Übereinstimmung ist eine befriedigende\*). Jedenfalls ist das Näherungsverfahren sehr wertvoll für eine Voruntersuchung langer gelenkloser Schiffbrücken, da es gestattet, den Einfluß von  $\frac{EJ}{\gamma F}$  schnell festzustellen. Eine nachträgliche genauere Berechnung auf dem in Nr. 61 beschriebenen Wege, die sich nach den vom Verfasser an verschiedenen Beispielen gesammelten Erfahrungen auf einen von 6 bis 8 Schiffen getragenen Balken beschränken darf, hat es dann mit einem Werte  $\alpha$  zu tun, den man wohl nur in seltenen Fällen wird verbessern müssen. Auch die in Nr. 67 u. 86 vorgetragene Theorie des Balkens auf unendlich vielen elastischen Einzelstützen führt rasch zum Ziele.

**76. Eisenbahnschienen auf Querschwellen** dürfen bei den üblichen kurzen Abständen der im Schotterbett liegenden Schwellen ebenfalls mit genügender Genauigkeit als stetig unterstützte Balken behandelt werden. Zur Bestimmung des größten Druckes, den ein Eisenbahnzug auf eine Schwelle ausübt, kann daher ohne weiteres die in Fig. 211 gezeichnete  $\eta$ -Linie benutzt werden. Man braucht nur die Größe der Strecke  $s$  anzugeben. Hierbei ist zu beachten, daß der Druck auf die Schwelle um so größer ausfällt, je geringer die Einsenkung der Schwelle ist. Wir rechnen also ungünstig, wenn wir annehmen, daß sich der von beiden Schienen auf die Schwelle ausgeübte Druck  $2P_1$  gleichmäßig über die Grundfläche  $2ab$  der Schwelle verteilt. Hierbei bedeutet  $2a$  die Länge,  $b$  die Breite der Schwelle. Die Schwelle senkt sich also um

$$y = \frac{2P_1}{K 2ab},$$

wo  $K$  den auf Seite 225 erklärten Erfahrungswert bezeichnet. Es wird daher

$$(29) \quad E_0 = \frac{z}{y} = \frac{P_1}{ly} = \frac{Kab}{l},$$

$$(30) \quad s = \sqrt[4]{\frac{4EJl}{Kab}},$$

wo  $l$  den Abstand von Mitte zu Mitte der Schwelle bedeutet. Ist z. B. für die Schiene  $J = 1580 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ , ferner  $l = 80 \text{ cm}$ ,  $a = 135 \text{ cm}$ ,  $b = 26 \text{ cm}$ , so erhält man

für	$K = 3$	$8 \text{ kg/cm}^3$
die Längen	$s = 100 \text{ cm}$	$78 \text{ cm}$ .

\*) Bei der Bewertung der geringen Unterschiede beachte man auch, daß an Stelle der in Nr. 61 angenommenen Stützung in Schiffsmitte in Wirklichkeit wohl immer eine Wagebalkenstützung (siehe Fig. 108) treten wird.

Es soll die Wirkung einer dreiachsigen Lokomotive untersucht werden. Der Radstand sei 1,2 m, der Raddruck 8,0 t. Als Vielfaches von  $s$  ausgedrückt, nimmt der Radstand für die zwei betrachteten Fälle die Werte an

$$1,20 s \qquad 1,54 s$$

und man findet nun mit Hilfe der Figur 211

$$\Sigma \eta = \qquad 1,78 \qquad 1,44.$$

Die Schwelle erfährt den Druck

$$P_1 = \frac{l}{2s} \Sigma P \eta = \frac{40 \cdot 8,0}{s} \Sigma \eta = \frac{320 \Sigma \eta}{s}.$$

Das gibt:

$$P_1 = \qquad 5,7 t \qquad 5,9 t,$$

also für beide Fälle abgerundet  $P_1 = 6 t$ . Die negativen Stützendrucke, die sich aus der Annahme eines unendlichen langen Balkens ergeben und von den lose auf der Bettung liegenden Schwellen nicht aufgenommen werden können, werden das Ergebnis der vorstehenden Rechnung sicher nicht sehr beeinflussen, denn sie treten erst in größerer Entfernung von der fraglichen Schwelle auf. Auch darf nicht außer acht gelassen werden, daß wir nur mit drei Raddrücken gerechnet haben, um ein ungünstiges Ergebnis zu erzielen. Auf dem im § 13 eingeschlagenen Wege fanden wir ebenfalls  $C =$  rund 6 t.

Zwischen der Strecke  $s$  und der im § 13 vorkommenden Zahl  $\alpha$  besteht die Beziehung

$$(31) \qquad s = l \sqrt[4]{\frac{2}{3} \alpha}.$$

## § 16.

### Formänderung und Beanspruchung eines zylindrischen Wasserbehälters mit lotrechter Achse.

Die Untersuchung eines zylindrischen Wasserbehälters führt auf eine Differentialgleichung, welche sich von der die Grundlage des vorigen Paragraphen bildenden Gleichung (3) nur dadurch unterscheidet, daß auf der rechten Seite das Glied  $Cx$  hinzutritt, wo  $C$  eine von  $x$  unabhängige Größe bedeutet. Es möge deshalb diese Untersuchung hier eingeschaltet werden.

**77. Die Wandstärke ist überall gleich groß.** Die Höhe des Behälters sei  $l$ , der Radius  $r$ , die Wandstärke  $\delta$ , Fig. 215. Es sei  $\delta$  sehr klein im Verhältnis zu  $l$  und  $r$ . Im Abstände  $x$  vom oberen

Rande des Behälters ändere sich  $r$  infolge der elastischen Verbiegung der Wand um  $y$ .

Aus der Zylinderwand sei ein senkrechter Streifen von der Breite  $r d\psi$  herausgeschnitten. Im Teilchen  $\delta dx$  der senkrechten Schnittfläche werden Zugspannungen erzeugt, für welche bei dünner Wand ein Mittelwert  $\sigma_r$  eingeführt werden darf, der sich zum Elastizitätsmodul  $E$  verhält wie  $\Delta 2\pi r : 2\pi r$ . Da nun  $\Delta r = y$  ist, so folgt

$$(1) \quad \frac{\sigma_r}{E} = \frac{y}{r}.$$

Auf das Teilchen  $dx \cdot r d\psi$  der Innenwand wirkt der Wasserdruck  $\gamma x dx r d\psi$ , wo  $\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit des Wassers bedeutet. Es verhält sich also der aus der Zylinderwand herausgeschnittene senkrechte Streifen wie ein Balken, dessen Längeneinheit an der Stelle  $x$  mit

$$p = \gamma x r d\psi - \sigma_r \delta d\psi = \left( \gamma x r - \frac{y \delta E}{r} \right) d\psi$$

belastet ist. Das Trägheitsmoment seines Querschnittes beträgt

$$J = \frac{r d\psi \delta^3}{12}$$

und die Gleichung seiner elastischen Linie lautet

$$(2) \quad EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = p.$$

Nach einer einfachen Umformung erhält man mit der Bezeichnung

$$(3) \quad s = \sqrt[4]{\frac{r^2 \delta^2}{3}}$$

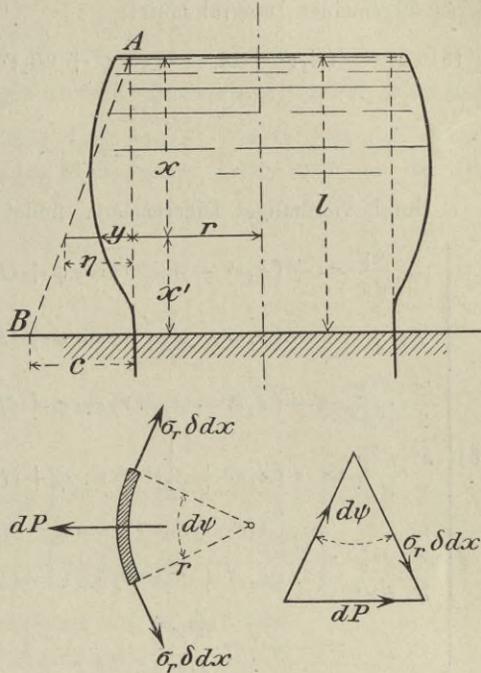


Fig. 215.

die Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{s^4}{4} \frac{d^4 y}{dx^4} = -y + \gamma \frac{r^2 x}{E\delta},$$

deren allgemeines Integral lautet:

$$(5) \quad y = (A_1 e^\varphi + A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi + (B_1 e^\varphi + B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + \gamma \frac{r^2 x}{E\delta},$$

wo

$$\varphi = \frac{x}{s}.$$

Durch viermaliges Differenzieren findet man

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \frac{dy}{dx} = + (A_1 e^\varphi - A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi + (B_1 e^\varphi + B_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ \quad - (A_1 e^\varphi + A_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + (B_1 e^\varphi - B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + \gamma \frac{r^2 s}{E\delta} \\ \frac{s^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} = - (A_1 e^\varphi - A_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + (B_1 e^\varphi - B_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ \frac{s^3}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} = - (A_1 e^\varphi + A_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + (B_1 e^\varphi + B_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ \quad - (A_1 e^\varphi - A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi - (B_1 e^\varphi - B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi \\ \frac{s^4}{4} \frac{d^4 y}{dx^4} = - (A_1 e^\varphi + A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi - (B_1 e^\varphi - B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi \\ \quad = -y + \gamma \frac{r^2 x}{E\delta}. \end{array} \right.$$

Am oberen Rande des Gefäßes ( $x = 0$ ) muß sein

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0,$$

weil Moment und Querkraft dort gleich Null sind. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} B_2 &= B_1 \\ A_2 &= A_1 - 2B_1, \end{aligned}$$

weshalb

$$(7) \quad y = + A_1 (e^\varphi + e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ + B_1 [(e^\varphi + e^{-\varphi}) \sin \varphi - e^{-\varphi} 2 \cos \varphi] + \gamma \frac{r^2 x}{E\delta},$$

$$(8) \quad s \frac{dy}{dx} = + A_1 [(e^\varphi - e^{-\varphi}) \cos \varphi - (e^\varphi + e^{-\varphi}) \sin \varphi] \\ + B_1 [(e^\varphi + e^{-\varphi}) (\cos \varphi + \sin \varphi) + e^{-\varphi} 2 \cos \varphi] + \gamma \frac{r^2 s}{E\delta}.$$

Am Boden sei das Gefäß senkrecht eingespannt. Die wagerechte Ausdehnung des Bodens möge vernachlässigt werden. Dann muß sein für  $x = l$ , das ist für  $\varphi = \frac{l}{s}$ ,

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Durch diese beiden Bedingungen sind die Festwerte  $A_1$  und  $B_1$  bestimmt.

Bei dünnwandigen Gefäßen darf nun  $e^{-\frac{l}{s}}$  stets gegen  $e^{+\frac{l}{s}}$  vernachlässigt werden. Die beiden Bedingungen gehen dann mit der Bezeichnung

$$\lambda = \frac{l}{s}$$

über in

$$0 = A_1 \cos \lambda + B_1 \sin \lambda + \gamma \frac{r^2 l}{E \delta e^\lambda}$$

$$0 = A_1 (\cos \lambda - \sin \lambda) + B_1 (\cos \lambda + \sin \lambda) + \gamma \frac{r^2 l}{E \delta \lambda e^\lambda};$$

sie liefern

$$(9) \quad A_1 = -\gamma \frac{r^2 l}{E \delta e^\lambda} \left[ \cos \lambda + \sin \lambda - \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right],$$

$$(10) \quad B_1 = +\gamma \frac{r^2 l}{E \delta e^\lambda} \left[ \cos \lambda - \sin \lambda - \frac{\cos \lambda}{\lambda} \right].$$

Führt man Hyperbelfunktionen ein, so darf man

$$(11) \quad e^\lambda = 2 \mathfrak{C} \mathfrak{h} \lambda$$

setzen. Man findet dann mit den Bezeichnungen

$$(12) \quad \gamma \frac{r^2 l}{E \delta} = c \text{ und}$$

$$(13) \quad c \frac{x}{l} = \eta$$

die folgende Gleichung der elastischen Linie:

$$(14) \quad \frac{\eta - y}{c} = \varrho_1 \frac{\cos \varphi \mathfrak{C} \mathfrak{h} \varphi}{\mathfrak{C} \mathfrak{h} \lambda} - \varrho_2 \frac{\sin \varphi \mathfrak{C} \mathfrak{h} \varphi - \cos \varphi (\mathfrak{C} \mathfrak{h} \varphi - \mathfrak{S} \mathfrak{h} \varphi)}{\mathfrak{C} \mathfrak{h} \lambda},$$

wo

$$(15) \quad \varrho_1 = \cos \lambda + \sin \lambda - \frac{\sin \lambda}{\lambda},$$

$$(16) \quad \varrho_2 = \cos \lambda - \sin \lambda - \frac{\cos \lambda}{\lambda}.$$

Die Werte  $c$  und  $\eta$  und die durch die Gleichung bestimmte Gerade  $AB$  (Fig. 216) lassen sich in einfacher Weise deuten.

Man denke sich aus der Zylinderwand im Abstände  $x$  vom oberen Ende durch zwei wagerechte Schnitte einen Ring von der Höhe  $dx$  herausgeschnitten und nehme die wagerechten Schnittflächen spannungslos an. Dann besteht zwischen der Ringspannung  $\sigma_r$  an der Stelle  $x$  und dem Wasserdrucke  $\gamma x$  offenbar die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_r \delta dx d\psi = \gamma x dx r d\psi,$$

und es ergibt sich für diesen Fall:

$$\sigma_r = \frac{\gamma x r}{\delta}.$$

Die zugehörige Änderung des Radius ist

$$\Delta r = \frac{\sigma_r}{E} r = \gamma \frac{x r^2}{E \delta},$$

sie stimmt mit dem oben eingeführten Werte  $\eta$  überein. Für  $x = l$  wird  $\eta = c$ .

Wäre nun die Zylinderwand mit dem Boden nicht befestigt, so könnten sich die einzelnen wagerechten Ringe in der oben beschriebenen Weise ausdehnen; es würde dann die Gerade  $AB$  die

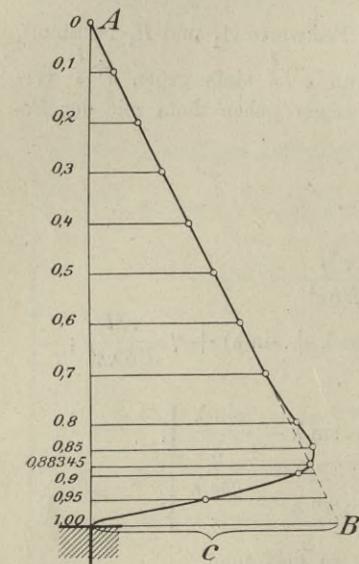


Fig. 216.

elastische Linie sein. Der durch die Gleichung (14) bestimmte Wert  $\eta - y$  gibt also die Abweichung der wirklichen elastischen Linie von der Geraden  $AB$  an.

Bevor wir diese Abweichung zahlenmäßig verfolgen, geben wir noch die Gleichung der elastischen Linie für den Fall an, daß die oben eingeführten Vereinfachungen wegen eines zu kleinen Wertes  $\lambda$  ungültig werden sollten. Es wird dann

$$(17) \quad \frac{\eta - y}{c} = + \rho' \cos \varphi \mathfrak{Cof} \varphi - \rho'' [\sin \varphi \mathfrak{Cof} \varphi - \cos \varphi (\mathfrak{Cof} \varphi - \mathfrak{Sin} \varphi)],$$

wo  $\rho'$  und  $\rho''$  durch die Gleichungen bestimmt sind

$$(18) \quad 2(\mathfrak{Cof}^2 \lambda + \cos^2 \lambda) \rho' = \mathfrak{Cof} \lambda (2 \cos \lambda + \sin \lambda) - \mathfrak{Sin} \lambda \cos \lambda - \frac{1}{\lambda} [\mathfrak{Cof} \lambda (\sin \lambda - \cos \lambda) + \mathfrak{Sin} \lambda \cos \lambda],$$

und

$$(19) \quad 2(\mathfrak{Cof}^2 \lambda + \cos^2 \lambda) \rho'' = \mathfrak{Sin} \lambda \cos \lambda - \mathfrak{Cof} \lambda \sin \lambda - \frac{\mathfrak{Cof} \lambda \cos \lambda}{\lambda}.$$

Bei genügend großem  $\lambda$  darf man  $\text{Sin } \lambda = \text{Cos } \lambda$  setzen und  $\cos^2 \lambda$  gegen  $\text{Cos}^2 \lambda$  streichen. Dann geht

$$\varphi' \text{ über in } \frac{\varphi_1}{\text{Cos } \lambda} \text{ und } \varphi'' \text{ in } \frac{\varphi_2}{\text{Cos } \lambda}.$$

*Zahlenbeispiel.* Es sei  $l = 0,5r$  und  $\delta = \frac{l}{376}$  also

$$(20) \quad \lambda = \frac{l}{s} = \sqrt[4]{3 \frac{l^2}{r^2} \frac{l^2}{\delta^2}} = \text{rund } 20.$$

Die Voraussetzung  $\text{Sin } \lambda = \text{Cos } \lambda$  trifft hier zu\*); es dürfen also die Näherungsformeln benutzt werden. Wegen des sehr großen Wertes  $\text{Cos } \lambda = \frac{1}{2} e^\lambda = 242582778$  entsprechen kleinen Werten  $\varphi = \frac{x}{s} = \frac{x}{l} \lambda$  nur sehr geringe Unterschiede  $\eta - y$ , so daß für den oberen Teil der Gefäßwand die elastische Linie fast genau mit der Geraden  $AB$  zusammenfällt. In die folgende Zusammenstellung haben wir diese äußerst kleinen Werte mit aufgenommen, schon um zu zeigen, daß die elastische Linie eine Wellenlinie ist, welche die Gerade  $AB$  mehrfach schneidet. Es ist

für $\frac{x}{l} = 0$	$\eta - y = + 0,000000003 \cdot c$
$= 0,1$	$= - 0,000000001 \cdot c$
$= 0,2$	$= - 0,000000139 \cdot c$
$= 0,3$	$= + 0,000000896 \cdot c$
$= 0,4$	$= + 0,00000205 \cdot c$
$= 0,5$	$= - 0,000062 \cdot c$
$= 0,6$	$= + 0,000267 \cdot c$
$= 0,7$	$= + 0,001669 \cdot c$
$= 0,8$	$= - 0,02514 \cdot c$
$= 0,85$	$= - 0,0426 \cdot c$
$= 0,88345$	$= 0$
$= 0,9$	$= + 0,0603 \cdot c$
$= 0,95$	$= + 0,4929 \cdot c$
$= 1,00$	$= + c$

Bis zu  $x = 0,7l$  darf die in Fig. 216 maßstäblich dargestellte elastische Linie als mit der Geraden  $AB$  zusammenfallend angesehen werden. Die Biegungsspannungen braucht man nur für den unteren

\*) Bereits zu  $\lambda = 4,0$  gehört  $\text{Cos } \lambda - \text{Sin } \lambda = 27,308 - 27,290 = 0,018$  und zu  $\lambda = 5,0$ :  $\text{Cos } \lambda - \text{Sin } \lambda = 74,210 - 74,203 = 0,007$ .

Teil der Zylinderwand zu untersuchen. Für diesen Teil ist aber  $\varphi = \frac{x}{l} \lambda \approx 0,7 \cdot 20 = 14$ . Man darf also  $\text{Cof } \varphi = \text{Sin } \varphi$  setzen und erhält dann die einfache Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\eta - y}{c} &= (\rho_1 \cos \varphi - \rho_2 \sin \varphi) \frac{\text{Cof } \varphi}{\text{Cof } \lambda} \\ &= (\rho_1 \cos \varphi - \rho_2 \sin \varphi) \frac{e^\varphi}{e^\lambda} \\ &= \frac{\rho_1 \cos \varphi - \rho_2 \sin \varphi}{e^{\lambda - \varphi}}. \end{aligned}$$

Drückt man  $\rho_1$  und  $\rho_2$  mittels der Gleichungen (15) und (16) aus und führt die Bezeichnung ein

$$\lambda - \varphi = \frac{l - x}{s} = \frac{x'}{s} = \varphi',$$

so findet man

$$(21) \quad \frac{y}{c} = \frac{x}{l} - \frac{\cos \varphi' + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \sin \varphi'}{\text{Cof } \varphi'}$$

und durch zweimaliges Differenzieren dieser Gleichung, wobei  $\text{Cof } \varphi' = \frac{1}{2} e^{\varphi'}$  gesetzt wird:

$$(22) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2c}{s^2 \text{Cof } \varphi'} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cos \varphi' - \sin \varphi' \right).$$

Nun wird die Biegungsspannung:

$$(23) \quad \begin{aligned} \sigma_b &= \pm \frac{M}{W} = \pm \frac{M\delta}{2J} = \pm \frac{E\delta}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}, \text{ das ist} \\ \sigma_b &= \pm \frac{Ec\sqrt{3}}{r \text{Cof } \varphi'} \left[ \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cos \varphi' - \sin \varphi' \right], \end{aligned}$$

und die Ringspannung:

$$(24) \quad \sigma_r = E \frac{y}{r} = \frac{Ec}{r} \left[ \frac{x}{l} - \frac{\cos \varphi' + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \sin \varphi'}{\text{Cof } \varphi'} \right].$$

Es empfiehlt sich, diese Spannungen mit den der geraden elastischen Linie entsprechenden Ringspannungen

$$(25) \quad \sigma_e = \gamma \frac{rx}{\delta}, \quad \sigma_i = \gamma \frac{rl}{\delta}$$

zu vergleichen. Wir schreiben daher

$$(26) \quad \sigma_b = \pm \sigma'_i \frac{\sqrt{3}}{\text{Cos} \varphi'} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cos \varphi' - \sin \varphi' \right),$$

$$(27) \quad \sigma_r = \sigma'_x \left( 1 - \frac{l}{x} \frac{\cos \varphi' + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \sin \varphi'}{\text{Cos} \varphi'} \right).$$

Die Biegungsspannung ist am größten für  $x' = 0$ ; sie besitzt dort den Wert

$$(28) \quad \sigma_{b \max} = \pm \sigma'_i \sqrt{3} \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Mit wachsendem  $x'$  nimmt  $\sigma_b$  schnell ab; es wird gleich Null, sobald

$$(29) \quad \text{tg} \varphi' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

ist, und besitzt ein zweites Maximum für

$$(30) \quad \text{tg} \varphi' = 2\lambda - 1.$$

Bei hohen dünnwandigen Gefäßen ist  $\lambda$  meistens so groß, daß die Gleichung (29) nahezu für  $\varphi' = \frac{\pi}{4}$  und die Gleichung (30) nahezu für  $\varphi' = \frac{\pi}{2}$  erfüllt wird. Dem letzteren Werte entspricht  $\text{Cos} \varphi' = 2,50$  und  $\sigma_b = \mp 0,7 \sigma'_i$ . Diese Biegungsspannung ist erheblich kleiner als die Biegungsspannung an der Stelle  $x' = 0$ . Da ferner zu  $\varphi' = \frac{\pi}{4}$  der Wert  $x' = \frac{\pi}{4} \frac{l}{\lambda}$  gehört, so erkennt man, daß Biegungsspannungen, welche die Beanspruchung  $\sigma'_i$  übersteigen, nur ganz in der Nähe des Bodens vorkommen.

Die Ringspannungen  $\sigma_r$  sind zum Teil größer, zum Teil kleiner als die entsprechenden Spannungen  $\sigma'_x$ , weil die wirkliche elastische Linie die Gerade  $AB$  mehrfach schneidet. Der Fall  $\sigma_r > \sigma'_x$  tritt ein, sobald

$$\cos \varphi' + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \sin \varphi' < 1$$

ist. Es genügt das Verhalten des untersten Teiles zu prüfen. Ist z. B.  $\lambda = 20$  und wird zur Vereinfachung der Zahlenrechnung  $(\lambda - 1) : \lambda = 1$  gesetzt, so ergeben sich für

$$\frac{x'}{l} = 0,13 \quad 0,14 \quad 0,15 \quad 0,16 \quad 0,17 \quad 0,18 \quad 0,19$$

die (etwas zu großen) Werte

$$\frac{\sigma_r}{\sigma'_x} = 1,058 \quad 1,086 \quad 1,099 \quad 1,103 \quad 1,099 \quad 1,089 \quad 1,078.$$

Der größte Unterschied zwischen  $\sigma_x$  und dem zugehörigen  $\sigma_x'$  beträgt also im vorliegenden Falle nur etwa 10 v. H.

Aus unserer Untersuchung geht hervor, daß die für die Bestimmung der Wandstärke maßgebende Spannung für hohe dünnwandige Gefäße die Biegungsspannung am Boden ist, nämlich

$$(31) \quad \sigma_{b \max} = \gamma \frac{rl}{\delta} \sqrt{3} \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \text{ wo}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{3 \frac{l^2}{r^2} \cdot \frac{l^2}{\delta^2}}.$$

Wir heben schließlich noch hervor, daß man die für den unteren Teil der Wand gewonnenen Formeln auch ohne weiteres aus den Gleichungen (6) erhält, wenn man  $A_2$  und  $B_2$  gleich Null setzt und  $A_1$ ,  $B_1$  mittels der für  $x=l$  bestehenden Bedingungen  $y=0$  und  $\frac{dy}{dx}=0$  berechnet. Daraus folgt aber, daß die Spannungen im unteren Teile der Wand unabhängig von den Bedingungen sind, die zur Berechnung der Konstanten  $A_2$  und  $B_2$  dienten. Wird also das Gefäß auch am oberen Ende senkrecht eingespannt ( $y=0$  und  $\frac{dy}{dx}=0$  für  $x=0$ ), was zur Folge hat, daß

$$A_2 = -A_1 \text{ und } B_2 = -B_1 - \frac{c}{\lambda}$$

wird, so hat diese Änderung unserer früheren Voraussetzungen bei großen Zahlen  $\lambda$  keinen Einfluß auf die Beanspruchung in der Nähe des Bodens.

**78. Veränderliche Wandstärke.** Bei größeren Wasserbehältern ändert sich  $\delta$  mit  $x$ . Die Wand wird aus ungleich starken plattenförmigen Ringen, sogenannten Bahnen, zusammengesetzt. Für jede Bahn gilt die allgemeine Gleichung (5); es nehmen aber  $\delta$  und damit auch  $s$ , ferner die vier Integrationskonstanten für die verschiedenen Bahnen verschiedene Werte an.

Die Berechnung der Konstanten kann nun auf dem folgenden Wege geschehen. Mittels der beiden für den oberen Rand zur Verfügung stehenden Bedingungen drückt man zunächst zwei der Konstanten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  der obersten Bahn durch die beiden übrigen aus, z. B., wie in Nr. 72,  $A_2$  und  $B_2$  durch  $A_1$  und  $B_1$ . Hierauf schreibt man für die Grenze zwischen der obersten und der nächsten Bahn die vier Gleichungen an, welche aussagen, daß die Werte

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad M = EJ \frac{d^2y}{dx^2}, \quad Q = EJ \frac{d^3y}{dx^3}$$

zweier benachbarten Bahnen stetig ineinander übergehen müssen, und stellt mit Hilfe dieser Bedingungen die Konstanten der zweiten Bahn ebenfalls als Funktionen von  $A_1$  und  $B_1$  dar. Dieselbe Arbeit nimmt man dann an der Grenze der zweiten und dritten, der dritten und vierten Bahn usw. vor, und schließlich berechnet man  $A_1$  und  $B_1$  mittels der beiden für den unteren Rand des Gefäßes geltenden Bedingungen  $y = 0$  und  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Die Durchführung der Zahlenrechnung ist allerdings ziemlich mühsam; für den wichtigen Fall größerer dünnwandiger Bottiche — gekennzeichnet durch Werte  $\lambda$ , welche gestatten,  $\text{Sin } \lambda = \text{Cos } \lambda$  zu setzen — ist diese Arbeit aber entbehrlich. Hier genügt es, die oberen Bahnen für die Spannungen  $\sigma_x^A$  zu berechnen und nur den unteren Teil der Wand auf seine Biegefestigkeit zu untersuchen.

Um nun möglichst schnell ein Bild von der Veränderung zu erhalten, welche die einer überall gleichen Stärke  $\delta$  entsprechende Biegespannung  $\sigma_b$  am Boden erfährt, wenn der obere Teil der Wand dünner gemacht wird, stellen wir die folgende Untersuchung an.

Die Wand habe vom oberen Rande bis zur Tiefe  $x = a$  die Stärke  $\delta_o$ , von hier ab die Stärke  $\delta_u$ . Es seien die Bezeichnungen eingeführt:

$$l - a = b, \quad \sqrt[4]{\frac{r^2 \delta_o^2}{3}} = s_o, \quad \sqrt[4]{\frac{r^2 \delta_u^2}{3}} = s_u,$$

$$\alpha = \frac{a}{s_o} = \sqrt[4]{\frac{a^2}{3} \cdot \frac{a^2}{r^2 \cdot \delta_o^2}}, \quad \beta = \frac{b}{s_u} = \sqrt[4]{\frac{b^2}{3} \cdot \frac{b^2}{r^2 \cdot \delta_u^2}},$$

$$c_o = \gamma \frac{r^2 l}{E \delta_o}, \quad c_u = \gamma \frac{r^2 l}{E \delta_u}$$

und es werde angenommen,  $\alpha$  sei so groß, daß  $e^{-\alpha} = 0$  gesetzt werden darf.

Dann gelten für den unteren Teil des Wandabschnittes  $a$  die aus den Gleichungen (7) und (8) folgenden Formeln:

$$y_o = (A \cos \varphi + B \sin \varphi) e^{\varphi} + c_o \frac{x}{l},$$

$$s_o \frac{dy_o}{dx} = [A (\cos \varphi - \sin \varphi) + B (\cos \varphi + \sin \varphi)] e^{\varphi} + c_o \frac{s_o}{l},$$

$$\frac{s_o^2}{2} \frac{d^2 y_o}{dx^2} = (-A \sin \varphi + B \cos \varphi) e^{\varphi},$$

$$\frac{s_o^3}{2} \frac{d^3 y_o}{dx^3} = [-A (\sin \varphi + \cos \varphi) + B (\cos \varphi - \sin \varphi)] e^{\varphi}.$$

Wird zur Abkürzung gesetzt

$$Ae^\alpha = \mathfrak{A}, \quad Be^\alpha = \mathfrak{B},$$

so entstehen für  $\varphi = \alpha$  die Gleichungen

$$+ \mathfrak{A} \cos \alpha + \mathfrak{B} \sin \alpha = y_0 - c_0 \frac{a}{l},$$

$$- \mathfrak{A} \sin \alpha + \mathfrak{B} \cos \alpha = \frac{s_0^2}{2} \frac{d^2 y_0}{dx^2},$$

$$+ \mathfrak{A} (\cos \alpha - \sin \alpha) + \mathfrak{B} (\cos \alpha + \sin \alpha) = s_0 \frac{dy_0}{dx} - c_0 \frac{s_0}{l},$$

$$- \mathfrak{A} (\cos \alpha + \sin \alpha) + \mathfrak{B} (\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{s_0^3}{2} \frac{d^3 y_0}{dx^3}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\mathfrak{A} = \left( y_0 - c_0 \frac{a}{l} \right) \cos \alpha - \frac{s_0^2}{2} \frac{d^2 y_0}{dx^2} \sin \alpha,$$

$$\mathfrak{B} = \left( y_0 - c_0 \frac{a}{l} \right) \sin \alpha + \frac{s_0^2}{2} \frac{d^2 y_0}{dx^2} \cos \alpha,$$

und aus den beiden zweiten:

$$2\mathfrak{A} = \left( s_0 \frac{dy_0}{dx} - c_0 \frac{s_0}{l} \right) (\cos \alpha - \sin \alpha) - \frac{s_0^3}{2} \frac{d^3 y_0}{dx^3} (\cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$2\mathfrak{B} = \left( s_0 \frac{dy_0}{dx} - c_0 \frac{s_0}{l} \right) (\cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{s_0^3}{2} \frac{d^3 y_0}{dx^3} (\cos \alpha - \sin \alpha).$$

Indem wir die beiden Werte  $\mathfrak{A}$  einander gleichsetzen und ebenso die beiden Werte  $\mathfrak{B}$ , erhalten wir die Bedingungen

$$(33) \quad y_0 - s_0 \frac{dy_0}{dx} \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{s_0^2}{2} \frac{d^2 y_0}{dx^2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{s_0^3}{2} \frac{d^3 y_0}{dx^3} \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{2} \\ = \frac{c_0}{l} \left( a + s_0 \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{2} \right),$$

$$(34) \quad y_0 - s_0 \frac{dy_0}{dx} \frac{\operatorname{cotg} \alpha + 1}{2} + \frac{s_0^2}{2} \frac{d^2 y_0}{dx^2} \operatorname{cotg} \alpha - \frac{s_0^3}{2} \frac{d^3 y_0}{dx^3} \frac{\operatorname{cotg} \alpha + 1}{2} \\ = \frac{c_0}{l} \left( a + s_0 \frac{\operatorname{cotg} \alpha + 1}{2} \right).$$

Für den Teil *b* der Wand rechnen wir  $x$  vom Boden aus. Es gelten dann die Gleichungen

$$y_u = + (A_1 e^{\varphi} + A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi + (B_1 e^{\varphi} + B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + c_u \frac{l-x}{l} \\ s_u \frac{dy_u}{dx} = + (A_1 e^{\varphi} - A_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi + (B_1 e^{\varphi} + B_2 e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ - (A_1 e^{\varphi} + A_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi + (B_1 e^{\varphi} - B_2 e^{-\varphi}) \sin \varphi - \frac{c_u}{\lambda}.$$

Für  $x = 0$  muß  $y = 0$  und  $\frac{dy}{dx} = 0$  sein. Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_2 &= -A_1 - c_u \\ B_2 &= -2A_1 - B_1 - c_u \frac{\lambda - 1}{\lambda} \end{aligned}$$

und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_u &= +A_1[(e^\varphi - e^{-\varphi}) \cos \varphi - 2e^{-\varphi} \sin \varphi] + B_1(e^\varphi - e^{-\varphi}) \sin \varphi \\ &\quad - c_u e^{-\varphi} \left( \cos \varphi + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \sin \varphi \right) + c_u \frac{l - x}{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_u \frac{dy_u}{dx} &= +A_1[(e^\varphi - e^{-\varphi}) (\cos \varphi - \sin \varphi) + 2e^{-\varphi} \sin \varphi] \\ &\quad + B_1[(e^\varphi + e^{-\varphi}) \sin \varphi + (e^\varphi - e^{-\varphi}) \cos \varphi] \\ &\quad + c_u e^{-\varphi} \left( +\frac{2\lambda - 1}{\lambda} \sin \varphi + \frac{1}{\lambda} \cos \varphi \right) - \frac{c_u}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{dx^2} &= +A_1[-(e^\varphi - e^{-\varphi}) \sin \varphi + 2e^{-\varphi} \cos \varphi] + B_1(e^\varphi + e^{-\varphi}) \cos \varphi \\ &\quad + c_u e^{-\varphi} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cos \varphi - \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{s_u^3}{2} \frac{d^3 y_u}{dx^3} &= +A_1[-(e^\varphi + e^{-\varphi}) (\cos \varphi + \sin \varphi) - 2e^{-\varphi} \cos \varphi] \\ &\quad + B_1[(e^\varphi - e^{-\varphi}) \cos \varphi - (e^\varphi + e^{-\varphi}) \sin \varphi] \\ &\quad + c_u e^{-\varphi} \left( -\frac{2\lambda - 1}{\lambda} \cos \varphi + \frac{1}{\lambda} \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der beiden Konstanten  $A_1$  und  $B_1$  stehen die Gleichungen (33) und (34) zur Verfügung, wobei die folgenden vier Übergangsbedingungen für die Stelle  $x = a$  zu beachten sind:

$$\begin{aligned} y_o &= y_u, & \frac{dy_o}{dx} &= -\frac{dy_u}{dx}, \\ EJ_o \frac{d^2 y_o}{dx^2} &= EJ_u \frac{d^2 y_u}{dx^2}, & EJ_o \frac{d^3 y_o}{dx^3} &= -EJ_u \frac{d^3 y_u}{dx^3}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{J_u}{J_o} = \frac{\delta_u^3}{\delta_o^3}, \quad \frac{s_o^2}{s_u^2} = \frac{\delta_o}{\delta_u}, \quad \frac{c_o}{c_u} = \frac{\delta_u}{\delta_o},$$

und man erhält daher:

$$\begin{aligned} y_o &= y_u, & s_o \frac{dy_o}{dx} &= -s_u \frac{dy_u}{dx} \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta_u}} \\ \frac{s_o^2}{2} \frac{d^2 y_o}{dx^2} &= \frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{dx^2} \frac{\delta_u^2}{\delta_o^2} \\ \frac{s_o^3}{2} \frac{d^3 y_o}{dx^3} &= -\frac{s_u^3}{2} \frac{d^3 y_u}{dx^3} \sqrt{\frac{\delta_u^3}{\delta_o^3}}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (33), (34) gehen jetzt über in

$$(35) \quad y_u + s_u \frac{dy_u}{dx} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta_u}} (1 - \operatorname{tg} \alpha) - \frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{dx^2} \frac{\delta_u^2}{\delta_o^2} \operatorname{tg} \alpha \\ - \frac{s_u^3}{2} \frac{d^3 y_u}{dx^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta_u^3}{\delta_o^3}} (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \frac{c_u}{l} \left( a + s_o \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{2} \right) \frac{\delta_u}{\delta_o},$$

$$(36) \quad y_u + s_u \frac{dy_u}{dx} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta_u}} (\operatorname{cotg} \alpha + 1) + \frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{dx^2} \frac{\delta_u^2}{\delta_o^2} \operatorname{cotg} \alpha \\ + \frac{s_u^3}{2} \frac{d^3 y_u}{dx^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta_u^3}{\delta_o^3}} (\operatorname{cotg} \alpha - 1) = \frac{c_u}{l} \left( a + s_o \frac{\operatorname{cotg} \alpha + 1}{2} \right) \frac{\delta_u}{\delta_o}.$$

Hierin setze man, für  $\beta = \varphi$ , mit Benutzung der Hyperbelfunktionen:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_u = + 2 A_1 (\mathfrak{S} \operatorname{in} \beta \cos \beta - e^{-\beta} \sin \beta) + 2 B_1 \mathfrak{S} \operatorname{in} \beta \sin \beta \\ \quad - c_u e^{-\beta} \left( \cos \beta + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \sin \beta \right) + c_u \frac{a}{l} \\ s_u \frac{dy_u}{dx} = + 2 A_1 [\mathfrak{S} \operatorname{in} \beta (\cos \beta - \sin \beta) + e^{-\beta} \sin \beta] \\ \quad + 2 B_1 (\mathfrak{C} \operatorname{of} \beta \sin \beta + \mathfrak{S} \operatorname{in} \beta \cos \beta) \\ \quad + c_u e^{-\beta} \left( \frac{1}{\lambda} \cos \beta + \frac{2\lambda - 1}{\lambda} \sin \beta \right) - \frac{c_u}{\lambda} \\ \frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{dx^2} = - 2 A_1 (\mathfrak{C} \operatorname{of} \beta \sin \beta - e^{-\beta} \cos \beta) + 2 B_1 \mathfrak{C} \operatorname{of} \beta \cos \beta \\ \quad + c_u e^{-\beta} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cos \beta - \frac{1}{\lambda} \sin \beta \right) \\ \frac{s_u^3}{2} \frac{d^3 y_u}{dx^3} = - 2 A_1 [\mathfrak{C} \operatorname{of} \beta (\cos \beta + \sin \beta) + e^{-\beta} \cos \beta] \\ \quad + 2 B_1 (\mathfrak{S} \operatorname{in} \beta \cos \beta - \mathfrak{C} \operatorname{of} \beta \sin \beta) \\ \quad + c_u e^{-\beta} \left( \frac{-2\lambda + 1}{\lambda} \cos \beta + \frac{1}{\lambda} \sin \beta \right). \end{array} \right.$$

Hat man  $A_1$  und  $B_1$  berechnet, so findet man für  $\varphi = 0$

$$\frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{dx^2} = 2 A_1 + 2 B_1 + c_u \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

und hieraus folgt dann für die größte Biegungsspannung

$$\sigma_b = \frac{E \delta_u}{2} \frac{d^2 y_u}{dx^2}$$

der Wert

$$(38) \quad \sigma_{b \max} = \gamma \frac{r l \sqrt{3}}{\delta_u} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} + 2 \frac{A_1 + B_1}{c_u} \right).$$

*Zahlenbeispiel.* Es sei  $l = 1000$  cm,  $r = 2000$  cm,  $a = 900$  cm,  $b = 100$  cm,  $\delta_o = 1,8$  cm,  $\delta_u = 3,0$  cm. Man findet

$$s_o = \sqrt[4]{\frac{r^2 \delta_o^2}{3}} = 45,6 \text{ cm}, \quad \alpha = \frac{a}{s_o} = 19,74,$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } 51^\circ = 1,23, \quad \text{cotg } \alpha = 0,81,$$

$$\lambda = \frac{l}{s_u} = \sqrt[4]{3 \frac{l^2}{\gamma^2} \cdot \frac{l^2}{\delta_u^2}} = 17,0, \quad \beta = \frac{b}{s_u} = \frac{b}{l} \lambda = 1,7,$$

$$\cos \beta = \cos(90^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ) = -0,13, \quad \sin \beta = 0,99,$$

$$\text{Cof } \beta = 2,83, \quad \text{Sin } \beta = 2,65, \quad e^{-\beta} = 2,83 - 2,65 = 0,18.$$

Mit diesen Zahlenwerten gehen die Gleichungen (37) über in:

$$(I) \quad \begin{cases} y_u = -1,05 A_1 + 5,25 B_1 + 0,76 c_u \\ s_u \frac{d y_u}{d x} = -5,58 A_1 + 4,91 B_1 + 0,29 c_u \\ \frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{d x^2} = -5,65 A_1 - 0,74 B_1 - 0,03 c_u \\ \frac{s_u^3}{2} \frac{d^3 y_u}{d x^3} = -4,82 A_1 - 6,29 B_1 + 0,06 c_u, \end{cases}$$

und die Gleichungen (35) und (36) in:

$$(II) \quad \begin{cases} y_u - 0,09 s_u \frac{d y_u}{d x} - 3,42 \frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{d x^2} - 2,40 \frac{s_u^3}{2} \frac{d^3 y_u}{d x^3} = 1,49 c_u \\ y_u + 0,70 s_u \frac{d y_u}{d x} + 2,25 \frac{s_u^2}{2} \frac{d^2 y_u}{d x^2} - 0,20 \frac{s_u^3}{2} \frac{d^3 y_u}{d x^3} = 1,57 c_u. \end{cases}$$

Setzt man die Werte (I) in die Gleichungen (II) ein, so erhält man:

$$+ 30,34 A_1 + 22,44 B_1 = 0,80 c_u$$

$$- 16,70 A_1 + 8,28 B_1 = 0,69 c_u$$

und hieraus:

$$A_1 = -0,014 c_u, \quad B_1 = +0,055 c_u, \quad A_1 + B_1 = 0,04 c_u.$$

Es ist also — ohne Rücksicht auf die Schwächung der Platte durch Niete —

$$\sigma_{b \max} = \gamma \frac{r l \sqrt{3}}{\delta_u} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} + 2 \cdot 0,04 \right)$$

$$= \frac{1}{1000} \cdot \frac{2000 \cdot 1000 \sqrt{3}}{3,0} \left( \frac{16}{17} + 0,16 \right) = \text{rund } 1180 \text{ kg/cm}^2.$$

Im Falle  $\delta_o = \delta_u = 3,0$  würde

$$\sigma_{b \max} = \gamma \frac{r l \sqrt{3}}{\delta_u} \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 1090 \text{ kg/cm}^2$$

sein. Vereinfacht man die vorstehende Formel, indem man  $(\lambda - 1) : \lambda = 1$  setzt, so liefert sie

$$(39) \quad \sigma_{b \max} = \gamma \frac{rl}{\delta_u} \sqrt{3} = 1150 \text{ kg/cm}^2.$$

An der Grenze zwischen den beiden Platten ändert sich  $r$  um

$$y_u = (+ 1,05 \cdot 0,014 + 5,25 \cdot 0,055 + 0,76) c_u = 1,06 c_u.$$

Es herrscht daher an dieser Stelle in beiden Platten eine Ringspannung

$$\sigma_r = \frac{E y_u}{r} = 1,06 \gamma \frac{rl}{\delta_u} = 707 \text{ kg/cm}^2,$$

welche kleiner ist als die größte Biegungsspannung.

Wir haben in unserem Beispiele den Sprung  $\delta_u - \delta_o$  größer gewählt, als er in Wirklichkeit sein wird, und dürfen in Anbetracht dieser ungünstigen Annahme die Steigerung der Spannung  $\sigma_b$  als unwesentlich bezeichnen. Der Einfluß einer Verminderung der Wandstärke auf  $\sigma_b$  nimmt mit dem Abstände der Bahn, welche diese Schwächung erfährt, vom Boden sehr schnell ab. Die Abmessungen der oberen Bahnen sind bei den üblichen Abstufungen der Stärken  $\delta$  ohne merkbaren Einfluß. Der Verfasser pflegt deshalb die Spannung  $\sigma_b$  nach der Formel (39) auch im Falle verschieden starker Bahnen zu berechnen und führt als weiteren Grund für dieses Vorgehen noch an, daß die Annahme, es sei die Wand am unteren Ende lotrecht eingespannt, in Wirklichkeit nicht erfüllt wird. Der Boden des Behälters und der die Wand mit dem Boden verbindende Winkeleisenring erfahren Formveränderungen, deren einwandfreie Feststellung sehr schwierig ist, welche aber die Biegungsspannungen  $\sigma_b$  am unteren Rande des Behälters verkleinern. Verfasser ist sogar der Meinung, daß dieser günstigen Wirkung durch Zulassung einer höheren Beanspruchung für die unterste Bahn Rechnung getragen werden darf; er hat deshalb bei von ihm aufgestellten Entwürfen mit der Formel

$$(40) \quad \sigma_{b \max} = 1,7 \gamma \frac{rl}{\delta_u}$$

gerechnet und für Flußeisenbleche eine Zugspannung von etwa 1600 kg/cm<sup>2</sup> gestattet. Wird dann angenommen, daß der auf Biegung beanspruchte Querschnitt durch Nietlöcher um etwa 25 v. H. geschwächt wird, so ergibt sich für die unterste Bahn die Stärke

$$\delta_u = \frac{1,7 \gamma rl}{0,75 \cdot 1600}$$

oder, abgerundet

$$(41) \quad \delta_u = \frac{rl}{70} \text{ cm,}$$

wenn  $r$  und  $l$  in Metern ausgedrückt werden.

Für die übrigen, mittels der Formel

$$\sigma_x' = \gamma \frac{rx}{\delta}$$

zu berechnenden Bahnen pflegt Verfasser etwa  $\sigma = 1000 \text{ kg/cm}^2$  zu gestatten, Nietlöcher aber hierbei nicht abzuziehen.  $x$  bedeutet den Abstand des tiefsten Punktes der fraglichen Bahn vom höchsten Wasserspiegel. Werden  $x$  und  $r$  in Metern ausgedrückt, so muß sein

$$(42) \quad \delta = \frac{rx}{100} \text{ cm.}$$

Soll also der vorhin untersuchte Behälter mit  $r = 20 \text{ m}$  und  $l = 10 \text{ m}$  aus 9 Bahnen zusammengesetzt werden, so erhält die unterste Bahn nach der vorstehenden Regel die Stärke  $\frac{200}{70} = 2,8 \text{ cm}$ . Für die folgenden Bahnen findet man

$$\delta = 2 \cdot \frac{8}{9} = 1,8 \text{ cm}, \quad 2 \cdot \frac{7}{9} = 1,6 \text{ cm}, \quad 2 \cdot \frac{6}{9} = 1,3 \text{ cm},$$

$$2 \cdot \frac{5}{9} = 1,1 \text{ cm}, \quad 2 \cdot \frac{4}{9} = 0,9 \text{ cm}.$$

Für die drei obersten Bahnen wählt man zweckmäßig  $\delta = 0,8 \text{ cm}$ . Auch dürfte es sich empfehlen, den Sprung von  $\delta = 2,8$  auf  $\delta = 1,8$  durch eine Verstärkung der zweituntersten Bahn zu mindern.

Der Stärke  $\delta_u = 2,8 \text{ cm}$  entspricht

$$\lambda = \sqrt[4]{3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1000^2}{2,8^2}} = 17,6.$$

*Anmerkung.* In einer in der Zeitschrift f. Math. u. Physik, 1904, S. 254, erschienenen Abhandlung von C. Runge „Über die Formänderung eines zylindrischen Wasserbehälters durch den Wasserdruck“ wird ein beachtenswertes Verfahren für die Berechnung einer aus verschiedenen starken Bahnen gebildeten Behälterwand entwickelt, aus dem ebenfalls hervorgeht, daß die oberen Bahnen nach der Formel  $\sigma = \gamma \frac{rx}{\delta}$  berechnet werden dürfen. Als Beispiel dient ein Behälter von den Abmessungen  $r = 2030 \text{ cm}$  und  $l = 1003,5 \text{ cm}$ , aus neun Bahnen mit von oben nach unten hin 10,5, 9,5, 8,5, 10,2, 12,7, 15,3, 17,8, 20,4 und 23 mm Wandstärke. Die Behälterwand ist oben und unten lotrecht eingespannt angenommen. Am Boden wird für einen 1 cm breiten lotrechten Wandstreifen  $M = 1281 \text{ kgcm}$  erhalten. Das gibt — ohne Rücksicht auf Schwächung durch Niete —

$$\sigma = \frac{6 \cdot 1281}{1 \cdot 2,3^2} = 1430 \text{ kg/cm}^2.$$

Unsere einfache Formel liefert mit

$$\lambda = \sqrt[4]{3 \frac{l^4}{r^2 \delta^2}} = 19:$$

$$\sigma = \gamma \frac{rl \sqrt{3}}{\delta} \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{2030 \cdot 1003,5 \cdot \sqrt{3}}{2,3} \cdot \frac{18}{19} = 1450 \text{ kg/cm}^2.$$

Für den Unterschied zwischen dem Wasserdruck und dem der Formänderung  $y$  entsprechenden elastischen Druck findet Runge:

	$\gamma x - \frac{E y \delta}{R^2}$
Ende der ersten Bahn	— 0,01
Anfang der zweiten Bahn	0,00
Ende der zweiten Bahn	— 0,02
Anfang der dritten Bahn	+ 0,01
Ende der dritten Bahn	+ 0,02
Anfang der vierten Bahn	— 0,04
Ende der vierten Bahn	+ 0,04
Anfang der fünften Bahn	— 0,05
Ende der fünften Bahn	+ 0,06
Anfang der sechsten Bahn	— 0,05
Ende der sechsten Bahn	+ 0,05
Anfang der siebenten Bahn	— 0,05
Ende der siebenten Bahn	+ 0,04
Anfang der achten Bahn	— 0,07
Ende der achten Bahn	+ 0,07
Anfang der neunten Bahn	— 0,04
Ende der neunten Bahn	+ 1,00

In der Mitte der Platten, abgesehen von der untersten ist nahezu

$$y = \frac{\gamma x r^2}{E \delta} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\gamma r^2}{E \delta}.$$

Die oben mitgeteilte Untersuchung des Verfassers ist älter als die Abhandlung von Runge; sie wurde vor zehn Jahren gelegentlich der Bearbeitung eines größeren Entwurfes angestellt. Bei den ersten Zahlenrechnungen wurde der Verfasser durch seinen damaligen Assistenten, Herrn H. Reißner (jetzt Professor an der Technischen Hochschule in Aachen), unterstützt.

### III. Abschnitt.

## Nebenspannungen im Fachwerk infolge von steifen Knotenverbindungen.

#### § 17.

### Biegungsspannungen in Fachwerken, deren Gurtstäbe miteinander vernietet und deren Füllungsstäbe gelenkartig befestigt sind.

**79. Grundgleichungen.** Die in Bd. I u. Bd. II, Abt. 1 vorgetragene Theorie des Fachwerks setzt voraus, daß alle Stäbe in den Knotenpunkten durch reibungslose Gelenke miteinander befestigt sind. Lasten, welche in den Knotenpunkten angreifen, rufen dann in den Stäben Spannkkräfte hervor, die mit den Stabachsen zusammenfallen und die Stabquerschnitte nur auf Zug oder Druck beanspruchen. Werden nun die Stäbe in den Knoten miteinander vernietet oder verschraubt, so wird die freie Drehung der Stäbe durch Biegungswiderstände verhindert; es entstehen in den Stäben Biegungsspannungen, die man als *Nebenspannungen* zu bezeichnen pflegt, weil sie im allgemeinen — verglichen mit den von den Spannkkräften  $S$  herrührenden Zug- und Druckspannungen  $S|F$  — von untergeordneter Bedeutung sind. Es gibt aber Fälle, in denen diese Nebenspannungen eine unzulässige Höhe erreichen können; ihre Untersuchung gehört zu den wichtigsten Aufgaben der Fachwerktheorie, schon deshalb, weil sie zeigt, von welchen Umständen jene Biegungsspannungen abhängen und wie man zu konstruieren hat, damit die Abweichung des wirklichen Spannungszustandes von dem auf Grund der Gelenktheorie errechneten möglichst klein werde.

Wir wollen zunächst den Fall untersuchen: es seien nur die Gurtstäbe miteinander vernietet, die Füllungsstäbe seien mittels reibungsloser Gelenke befestigt. Die Lasten mögen ausschließlich in den Knotenpunkten angreifend angenommen werden. Es verbiegen sich nur die Gurtungen, die Füllungsstäbe bleiben gerade.

Wir setzen zunächst voraus, daß sich die Schwerlinien der an einem Knoten zusammentreffenden Stäbe in einem Punkte schneiden und bezeichnen mit

$s_m$  und  $s_{m+1}$  die Längen der dem Knoten  $m$  benachbarten Gurtstäbe,

$J_m$  und  $J_{m+1}$  die Trägheitsmomente der Querschnitte dieser Stäbe, bezogen auf die Schwerachse senkrecht zur Ebene des Fachwerks,

$\vartheta_m$  den Randwinkel bei  $m$  (Fig. 217),

$\mathfrak{M}_{m-1}$ ,  $\mathfrak{M}_m$ ,  $\mathfrak{M}_{m+1}$  die Biegemomente, welche die Gurtquerschnitte an den Stellen  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$  beanspruchen.

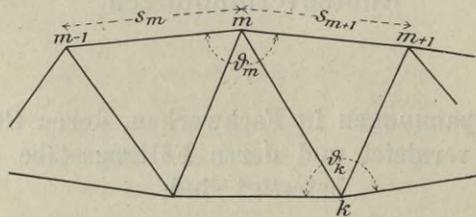


Fig. 217.

Wir nehmen die Momente  $\mathfrak{M}$  positiv an, wenn die verbogene Gurtung nach außen hohl liegt, so daß sich bei durchweg positiven Momenten die Gurtstäbe in der durch die Figur 218 veranschaulichten Weise verbiegen würden.

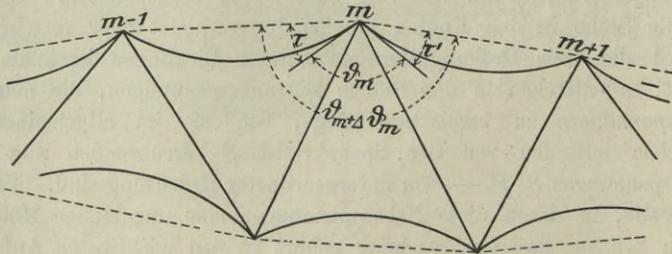


Fig. 218.

Bei der Formveränderung des Fachwerks, auf welches nur Kräfte wirken mögen, die in der Ebene des Fachwerks liegen, geht der Winkel  $\vartheta_m$  über in  $\vartheta_m + \Delta \vartheta_m$ ; die Enden der Gurtstäbe  $s_m$  und  $s_{m+1}$  drehen sich um  $\tau$  und  $\tau'$ , und es folgt

$$(1) \quad \tau + \tau' = \Delta \vartheta_m.$$

Wird nun vorausgesetzt, daß sämtliche Gurtquerschnitte eine in die Ebene des Fachwerks fallende Hauptachse besitzen und alle äußeren

Kräfte in den Knotenpunkten angreifen, wird also die Verbiegung der Stäbe durch ihr eigenes Gewicht vorderhand vernachlässigt, wird ferner der Einfluß der Scherkräfte außer acht gelassen und  $t_u - t_o = 0$  gesetzt, so wird nach Gleichung (7), Seite 28,

$$(2) \quad \tau = \frac{\mathfrak{M}_{m-1} + 2\mathfrak{M}_m}{6 EJ_m} s_m,$$

$$(3) \quad \tau' = \frac{\mathfrak{M}_{m+1} + 2\mathfrak{M}_m}{6 EJ_{m+1}} s_{m+1},$$

und es ergibt sich daher die Bedingung

$$\mathfrak{M}_{m-1} \frac{s_m}{J_m} + 2\mathfrak{M}_m \left( \frac{s_m}{J_m} + \frac{s_{m+1}}{J_{m+1}} \right) + \mathfrak{M}_{m+1} \frac{s_{m+1}}{J_{m+1}} = 6 E \Delta \mathfrak{S}_m$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem konstanten, beliebig großen Trägheitsmomente  $J_c$  und setzt zur Abkürzung

$$(4) \quad s_m \frac{J_c}{J_m} = l_m, \quad s_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1}} = l_{m+1},$$

so erhält man die Grundgleichung

$$(5) \quad \mathfrak{M}_{m-1} l_m + 2\mathfrak{M}_m (l_m + l_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+1} l_{m+1} = N_m,$$

wo

$$(6) \quad N_m = 6 EJ_c \Delta \mathfrak{S}_m.$$

Gleichung (5) hat die Form der Clapeyronschen Momentengleichungen. Die vorliegende Aufgabe ist also zurückgeführt auf die Berechnung eines Balkens auf starren Stützen, wobei aber vorausgesetzt werden muß, daß die Winkeländerungen  $\Delta \mathfrak{S}_m$  gegebene, von den zu berechnenden Momenten  $\mathfrak{M}$  unabhängige Werte besitzen.

Nun sind freilich die Spannkkräfte  $S$  und damit auch die die Winkeländerungen  $\Delta \mathfrak{S}$  bestimmenden Längenänderungen der Stäbe streng genommen Funktionen der Momente  $\mathfrak{M}$ . Der Einfluß der  $\mathfrak{M}$  auf die  $\Delta \mathfrak{S}$  ist aber in der Regel so gering, daß er vernachlässigt werden darf, und es empfiehlt sich daher, die Winkeländerungen genau so zu berechnen, wie für ein Fachwerk mit gelenkartigen Knoten. Nötigenfalls kann man nachträglich durch einen zweiten Rechnungsgang mit verbesserten Spannkkräften und Winkeländerungen den Einfluß der Momente auf die Winkeländerungen berücksichtigen.

Besteht das Fachwerk aus aneinander gereihten Dreiecken, so setzt sich jeder Winkel  $\mathfrak{S}$  aus Dreieckswinkeln zusammen. Für die Winkeländerungen eines Dreiecks haben wir mit den in Fig. 219 angegebenen Bezeichnungen, in Abt. I, § 2, die Formeln entwickelt:

$$(7) \quad \begin{cases} E\Delta \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cotg \alpha_2 \\ E\Delta \alpha_2 = (\sigma_2 - \sigma_3) \cotg \alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cotg \alpha_3 \\ E\Delta \alpha_3 = (\sigma_3 - \sigma_1) \cotg \alpha_2 + (\sigma_3 - \sigma_2) \cotg \alpha_1, \end{cases}$$

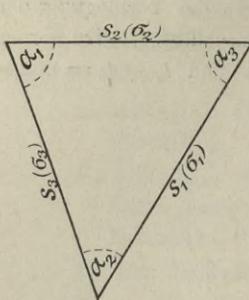


Fig. 219.

wo

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1}, \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{F_2}, \quad \sigma_3 = \frac{S_3}{F_3}$$

die durch die Spannkkräfte  $S$  erzeugten Spannungen bedeuten\*).

Die gleichförmige Änderung der Temperatur eines Stabes um  $t$  kann durch Vergrößerung der Spannung  $\sigma$  um  $\varepsilon Et$  berücksichtigt werden (siehe Einleitung von Abt. I, Seite 2).

Wir beginnen mit der Behandlung einfacher Sonderfälle.

**80. Es ist mindestens ein Knotenpunktmoment  $M$  gleich Null.** Nehmen wir zunächst an, es seien die Momente für den ersten und den letzten Knotenpunkt gleich Null, ein Fall, der bei Trägern mit Endvertikalen vorliegt, Fig. 220. Der stellvertretende Balken, Fig. 221, liegt dann an den Enden frei auf. Der Festpunkt  $L_1$  fällt mit Stütze 0.

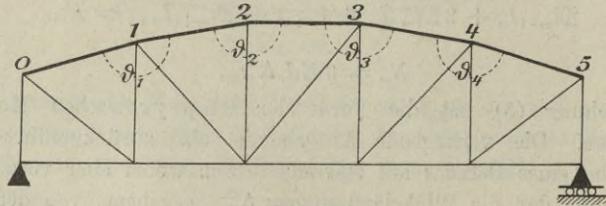


Fig. 220.

zusammen. Nach Ermittlung der Punkte  $L_2, L_3, \dots$ \*\*) werden auf den verschränkten Stützensenkrechten  $v_1, v_2, \dots$  die mittels der Formel

$$(8) \quad T_m = \frac{N_m}{3(l_m + l_{m+1})} = \frac{2 E J_c \Delta \zeta_m}{l_m + l_{m+1}}$$

berechneten Momente  $T_1, T_2, T_3, \dots$  aufgetragen, und nun wird der Linienzug  $L_1 L_2' L_3' L_4' L_5'$  gezeichnet, dessen Seiten durch die Endpunkte der in Fig. 221 durch die stärker ausgezogenen Strecken  $T_1, T_2, T_3, T_4$  gehen und dessen Ecken in den Senkrechten durch die Festpunkte  $L_2, L_3, L_4, L_5$  liegen.

\*) Ist das Fachwerk kein Dreieckssystem, so ergibt sich die Berechnung der  $\Delta \zeta$  aus der Lösung der 6. Aufgabe am Schluß von § 3 in Abt. I. Man kann auch Williot'sche Verschiebungspläne benutzen und aus diesen mit Hilfe des Stabzugverfahrens die  $\Delta \zeta$  bestimmen.

\*\*) Wir haben alle Hilfslinien fortgelassen und verweisen bezüglich der Bestimmung der Punkte  $L$  auf die Figuren 41 und 42, und bezüglich der rechnerischen Bestimmung auf Seite 116.

Die Punkte  $L'$  sind Punkte des gesuchten Momentenpolygons, und dieses Polygon ist nunmehr durch die Bedingung  $\mathfrak{M}_5 = 0$  vollständig bestimmt.

In derselben Weise könnte man, beim letzten Stützpunkte (5) beginnend, das Momentenpolygon mit Hilfe der Festpunkte  $R$  zeichnen. Bei symmetrischer Trägerform und symmetrischer Belastung hätte in Fig. 221 bereits die Bestimmung von  $L_2'$  und  $L_3'$  genügt.

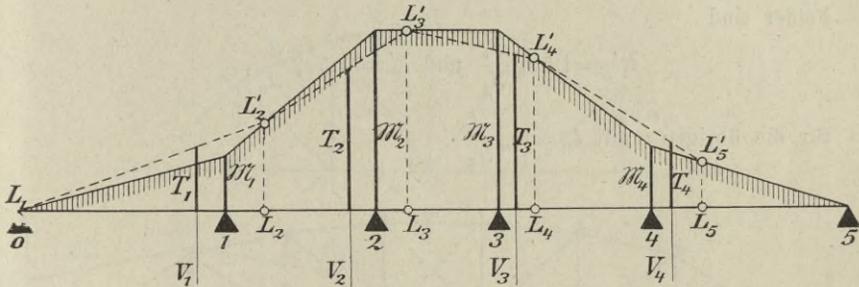


Fig. 221.

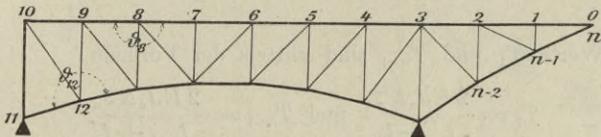


Fig. 222.

Die beschriebene Konstruktion des  $\mathfrak{M}$ -Polygons führt auch im Falle einer zusammenhängenden oberen und unteren Gurtung und bei dem in Fig. 222 dargestellten Fachwerke mit vernietetem Endständer zum Ziele, vorausgesetzt, daß mindestens ein Moment  $\mathfrak{M}$  gleich Null ist.

**81. Es ist kein Knotenpunktmoment  $\mathfrak{M}$  gleich Null. Form und Belastung des Trägers sind symmetrisch.** Die beiden Gurtungen mögen einen zusammenhängenden gelenklosen Stabzug bilden. Die Senkrechte durch die Trägermitte sei für Trägerform und Belastung Symmetrieachse. Wir unterscheiden folgende Fälle.

1. Fall. Die Symmetrieachse enthält keinen Knotenpunkt. Die Bezifferung der Knotenpunkte ist aus Fig. 223 zu ersehen. Zwischen den drei aufeinander folgenden Momenten  $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ , von denen  $\mathfrak{M}_0$  und  $\mathfrak{M}_1$  gleich groß sind, besteht die Beziehung

$$\mathfrak{M}_0 l_1 + 2 \mathfrak{M}_1 (l_1 + l_2) + \mathfrak{M}_2 l_2 = N_1;$$

sie läßt sich umformen in:

$$2\mathfrak{M}_1(l_1' + l_2) + \mathfrak{M}_2 l_2 = N_1,$$

wo  $l_1' = 1,5 l_1$  ist; und ebenso ergibt sich mit  $l_n' = 1,5 l_n$ :

$$\mathfrak{M}_{n-2} l_{n-1} + 2\mathfrak{M}_{n-1}(l_{n-1} + l_n') = N_{n-1}.$$

Diese Gleichungen lassen sich als die 1<sup>te</sup> bzw.  $(n-1)$ <sup>te</sup> Clapeyron'sche Gleichung eines an den Enden frei aufliegenden, durchgehenden Balkens 0 1 2 ...  $(n-1)$   $n$  deuten. Die Längen der beiden äußersten Felder sind

$$l_1' = 1,5 s_1 \frac{J_c}{J_1} \quad \text{und} \quad l_n' = 1,5 s_n \frac{J_c}{J_n},$$

für die übrigen  $l$  gilt  $l_m = s_m \frac{J_c}{J_m}$ .

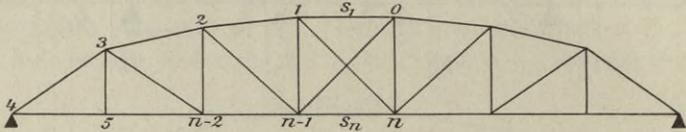


Fig. 223.

Die Werte  $T_1$  und  $T_{n-1}$  sind mittels der Formeln

$$(9) \quad T_1 = \frac{2 E J_c \Delta \mathfrak{S}_1}{l_1' + l_2} \quad \text{und} \quad T_{n-1} = \frac{2 E J_c \Delta \mathfrak{S}_{n-1}}{l_{n-1} + l_n'}$$

zu berechnen. Im übrigen stimmt der einzuschlagende Weg mit den in Nr. 80 angegebenen überein.

2. Fall. In der Symmetrieachse liegen zwei Knotenpunkte. Die Bezifferung zeigt Fig. 224. Zwischen den drei aufeinander folgenden Momenten  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_0$ ,  $\mathfrak{M}_1$  besteht die Gleichung

$$\mathfrak{M}_1 l_1 + 2\mathfrak{M}_0(l_1 + l_1) + \mathfrak{M}_1 l_1 = N_0,$$

aus welcher folgt:

$$\frac{2}{3} \mathfrak{M}_0 + \frac{1}{3} \mathfrak{M}_1 = \frac{N_0}{3(l_1 + l_1)} = T_0,$$

und ebenso ergibt sich

$$\frac{1}{3} \mathfrak{M}_{n-1} + \frac{2}{3} \mathfrak{M}_n = \frac{N_n}{3(l_n + l_n)} = T_n.$$

Die im ersten Felde des stellvertretenden Balkens im Abstände  $\frac{1}{3} l_1$  vom Stützpunkte 0 gelegene Ordinate des  $\mathfrak{M}$ -Polygons ist nun

$$\overline{L_1 L_1'} = \frac{2}{3} \mathfrak{M}_0 + \frac{1}{3} \mathfrak{M}_1 = T_0,$$

und die im letzten Felde im Abstände  $\frac{1}{3} l_n$  vom Stützpunkte  $n$  gelegene:

$$\overline{R_n R_n'} = \frac{2}{3} \mathfrak{M}_n + \frac{1}{3} \mathfrak{M}_{n-1} = T_n^*),$$

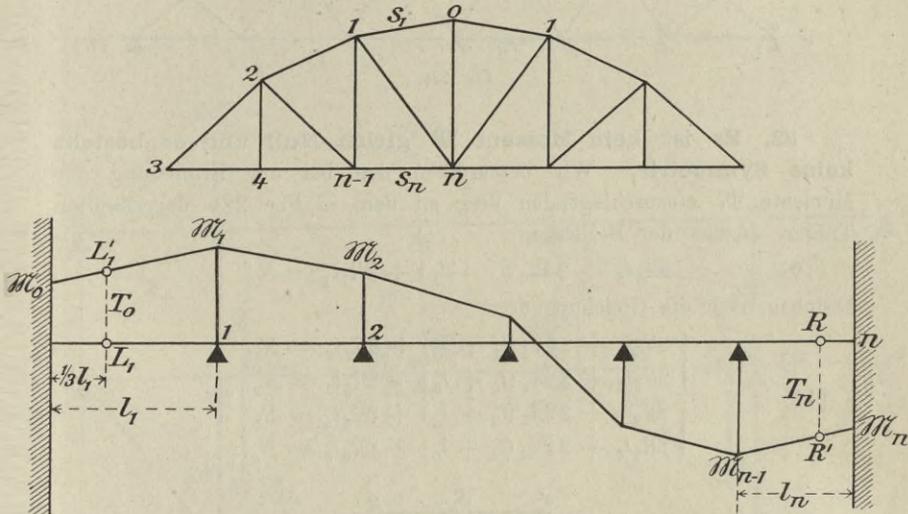


Fig. 224.

so daß zwei Punkte des  $\mathfrak{M}$ -Polygons von vornherein bekannt sind. Es sind deshalb  $L_1$  und  $R_n$  Festpunkte der Öffnungen  $l_1$  und  $l_n$ . Von ihnen ausgehend kann man alle übrigen Festpunkte finden. Der stellvertretende Balken ist also an den Enden eingespannt. Man vergleiche auch Seite 39, Fig. 45.

3. Fall. Die Symmetrieachse enthält nur einen Knotenpunkt. Es handelt sich hier um eine Verbindung der Fälle 1 und 2. Bei der in Fig. 225 gewählten Bezeichnung der Knotenpunkte ist der stellvertretende Balken bei 0 frei aufliegend, bei  $n$  eingespannt. Sein erstes Feld hat die Länge

$$l_1' = 1,5 s_1 \frac{J_c}{J_1};$$

\*) Fig. 224 setzt ein negatives  $T_n$  voraus.

für die übrigen Feldlängen gilt die Formel (4). Die im letzten Felde in der Entfernung  $\frac{1}{3}l_n$  vom Stützpunkte  $n$  gelegene Ordinate des  $\mathfrak{M}$ -Polygons ist

$$\overline{R_n R'_n} = T_n.$$

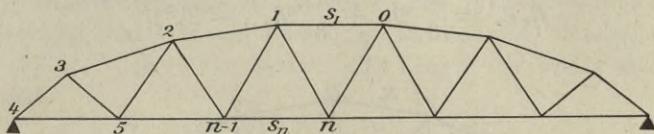


Fig. 225.

**82. Es ist kein Moment  $\mathfrak{M}$  gleich Null und es besteht keine Symmetrie.** Wir beschreiben den bei der Ermittlung der Momente  $\mathfrak{M}$  einzuschlagenden Weg an dem in Fig. 226 dargestellten Träger. Außer der Beziehung

$$(10) \quad \mathfrak{M}_4 l_5 + 2\mathfrak{M}_0(l_5 + l_1) + \mathfrak{M}_1 l_1 = N_0$$

bestehen noch die Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_0 l_1 + 2\mathfrak{M}_1(l_1 + l_2) + \mathfrak{M}_2 l_2 = N_1 \\ \mathfrak{M}_1 l_2 + 2\mathfrak{M}_2(l_2 + l_3) + \mathfrak{M}_3 l_3 = N_2 \\ \mathfrak{M}_2 l_3 + 2\mathfrak{M}_3(l_3 + l_4) + \mathfrak{M}_4 l_4 = N_3 \\ \mathfrak{M}_3 l_4 + 2\mathfrak{M}_4(l_4 + l_5) + \mathfrak{M}_0 l_5 = N_4. \end{cases}$$

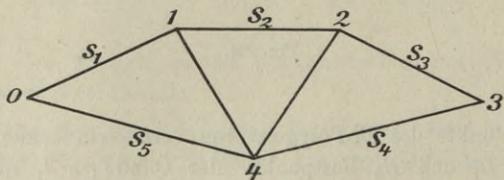


Fig. 226.

Wir betrachten zunächst nur die Gleichungen (11), sehen  $\mathfrak{M}_0$  als gegeben an, schaffen die Glieder  $\mathfrak{M}_0 l_1$  und  $\mathfrak{M}_0 l_5$  auf die rechte Seite und erhalten:

$$(12) \quad \begin{cases} 2\mathfrak{M}_1(l_1 + l_2) + \mathfrak{M}_2 l_2 = N_1 - \mathfrak{M}_0 l_1 \\ \mathfrak{M}_1 l_2 + 2\mathfrak{M}_2(l_2 + l_3) + \mathfrak{M}_3 l_3 = N_2 \\ \mathfrak{M}_2 l_3 + 2\mathfrak{M}_3(l_3 + l_4) + \mathfrak{M}_4 l_4 = N_3 \\ \mathfrak{M}_3 l_4 + 2\mathfrak{M}_4(l_4 + l_5) = N_4 - \mathfrak{M}_0 l_5. \end{cases}$$

Nun bezeichnen wir mit

$\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2, \mathfrak{M}'_3, \mathfrak{M}'_4$  diejenigen Werte, welche die Unbekannten  $\mathfrak{M}_1$  bis  $\mathfrak{M}_4$  annehmen würden, wenn  $\mathfrak{M}_0 = 0$  wäre,

und mit

$\mathfrak{M}_1'', \mathfrak{M}_2'', \mathfrak{M}_3'', \mathfrak{M}_4''$  die Werte jener Unbekannten für den Fall, daß sämtliche Glieder  $N$  der obigen Gleichungen verschwinden und  $\mathfrak{M}_0 = 1$  ist.

Die Momente  $\mathfrak{M}'$  lassen sich mit Hilfe des in Nr. 80 beschriebenen Verfahrens bestimmen; dieses ist ja brauchbar, sobald ein Moment  $\mathfrak{M}$  (hier  $\mathfrak{M}_0$ ) gleich Null ist. Aber auch die Werte  $\mathfrak{M}''$  erhält man mit Hilfe dieses Verfahrens, wenn man setzt:

$$(13) \quad T_1 = -\frac{l_1}{3(l_1+l_2)}, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \quad T_4 = 0, \quad T_5 = -\frac{l_5}{3(l_4+l_5)}.$$

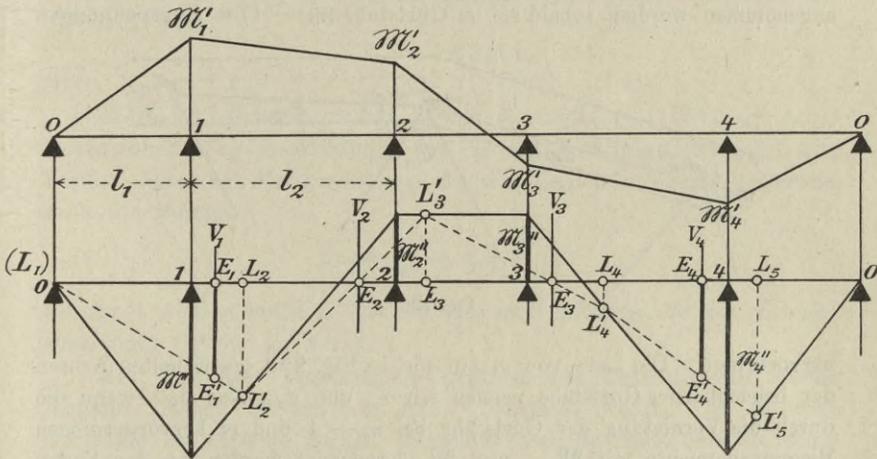


Fig. 227.

Die Darstellung des  $\mathfrak{M}''$ -Polygons zeigt Fig. 227. Auf den ver- schränkten Stützensenkrechten  $v_1$  und  $v_4$  werden die Ordinaten  $\overline{E_1 E_1'} = T_1$  und  $\overline{E_4 E_4'} = T_4$  aufgetragen. Hierauf wird der Linienzug  $L_1 L_2 L_3 L_4 L_5$  gezeichnet, dessen Seiten durch die Punkte  $E_1', E_2, E_3, E_4'$  gehen und dessen Ecken in den Senkrechten durch die Festpunkte  $L_2, L_3, L_4, L_5$  liegen. Diese Eckpunkte  $L'$  sind Punkte des gesuchten  $\mathfrak{M}''$ -Polygons, welches durch die äußersten Stützpunkte (0) des stellvertretenden Balkens geht, und dessen Eckpunkte in den Stützensenkrechten liegen.

Nach Ermittlung der  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}''$  findet man die wirklichen Mo- mente  $\mathfrak{M}$  mittels der Formel

$$(14) \quad \mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}'_m + \mathfrak{M}''_m \cdot \mathfrak{M}_0 \quad m = 1, 2, 3, 4,$$

und zur Berechnung von  $\mathfrak{M}_0$  steht die Gleichung (10) zur Verfügung; sie geht über in

$(\mathfrak{M}_4' + \mathfrak{M}_4'' \mathfrak{M}_0) l_5 + 2 \mathfrak{M}_0 (l_5 + l_1) + (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_1'' \mathfrak{M}_0) l_1 = N_0$   
und liefert:

$$(15) \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{N_0 - \mathfrak{M}_1' l_1 - \mathfrak{M}_4' l_5}{2(l_1 + l_5) + \mathfrak{M}_1'' l_1 + \mathfrak{M}_4'' l_5}.$$

**83. Exzentrische Knoten.** Ein Fachwerksknoten heißt exzentrisch, sobald sich die Achsen der an ihm angreifenden Stäbe nicht in einem Punkte schneiden. Als Knotenpunkt fassen wir in diesem Falle den Schnittpunkt der Füllungsstäbe auf (Fig. 228), und unter  $s_m$  verstehen wir den Abstand des Knotenpunktes  $m$  vom Knotenpunkte  $(m-1)$ . Die unter der Annahme gelenkartiger Knoten berechnete Spannkraft  $S_m$  fällt in die Verbindungslinie der Punkte  $m-1$  und  $m$  und soll positiv angenommen werden, sobald sie im Gurtstabe  $(m-1)$   $m$  Zugspannungen

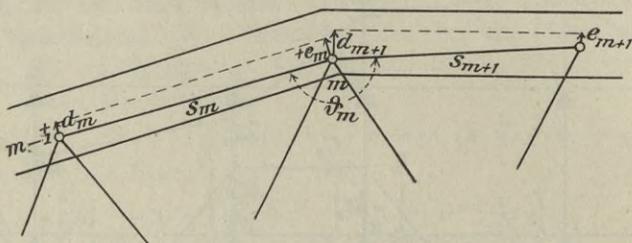


Fig. 228.

hervorbringt. Die Lote von  $m$  auf die in Fig. 228 gestrichelten Achsen der benachbarten Gurtstäbe nennen wir  $e_m$  und  $d_{m+1}$ , so daß, wenn die durch die Vernietung der Gurtstäbe bei  $m-1$  und  $m$  hervorgerufenen Biegemomente mit  $\mathfrak{M}_{m-1}$  und  $\mathfrak{M}_m$  bezeichnet werden, an den Enden des Gurtstabes  $s_m$  die Momente angreifen:

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_{m-1} + S_m d_m \text{ und} \\ \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_m + S_m e_m, \end{cases}$$

wobei  $e$  und  $d$  von den Knotenpunkten aus *nach außen positiv* gezählt werden. Aus diesen Momenten berechnen sich die Biegunnungsspannungen an den Stabenden:

$$\sigma_A = \pm \frac{\mathfrak{M}_A}{W}, \quad \sigma_B = \pm \frac{\mathfrak{M}_B}{W}.$$

Der Ausschlagwinkel am rechten Ende des Stabes  $s_m$  ist

$$(17) \quad \tau = \frac{2 \mathfrak{M}_B + \mathfrak{M}_A}{6 E J_m} s_m = \frac{2 \mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_{m-1} + S_m (2 e_m + d_m)}{6 E J_m} s_m,$$

und der Ausschlagwinkel am linken Ende des Stabes  $s_{m+1}$

$$(18) \quad \tau' = \frac{2 \mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_{m+1} + S_{m+1} (2 d_{m+1} + e_{m+1})}{6 E J_{m+1}} s_{m+1},$$

weshalb die Gleichung

$$\tau + \tau' = \Delta \mathfrak{S}_m$$

nach Multiplikation mit  $J_c$  und mit der Bezeichnung  $s_m \frac{J_c}{J_m} = l_m$  zu der Bedingung führt:

$$\mathfrak{M}_{m-1} l_m + 2 \mathfrak{M}_m (l_m + l_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+1} l_{m+1} = 6 E J_c \Delta \mathfrak{S}_m - S_m l_m (2 e_m + d_m) - S_{m+1} l_{m+1} (2 d_{m+1} + e_{m+1}).$$

Diese Gleichung hat wieder die Form

$$\mathfrak{M}_{m-1} l_m + 2 \mathfrak{M}_m (l_m + l_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+1} l_{m+1} = N_m.$$

Das in Nr. 80—82 angegebene Verfahren zur Darstellung der Momente  $\mathfrak{M}$  ist hiernach auch bei exzentrischen Knoten brauchbar. An die Stelle von

$$N_m = 6 E J_c \Delta \mathfrak{S}_m$$

tritt:

$$(19) \quad N_m = 6 E J_c \Delta \mathfrak{S}_m - S_m l_m (2 e_m + d_m) - S_{m+1} l_{m+1} (2 d_{m+1} - e_{m+1}).$$

Hervorzuheben bleibt allerdings, daß die auf die Winkeländerungen  $\Delta \mathfrak{S}_m$  Einfluß habenden Verlängerungen  $\Delta s$  der Gurtstäbe streng genommen nach der Formel

$$(20) \quad \Delta s = \frac{\sigma}{E} + \tau' d + \tau e$$

berechnet werden müßten. Es ist aber stets zulässig, die von  $\tau'$  und  $\tau$  abhängigen Glieder zu streichen.

**84. An den Gurtstäben greifen rechtwinklig zu deren Achsen Lasten  $P$  an** (Fig. 229). Zunächst werden die einzelnen Gurtstäbe als einfache Balken betrachtet und die ihnen entsprechenden einfachen Momentenflächen, die wir kurz mit  $\mathfrak{F}$  bezeichnen wollen, ermittelt. Bedeuten also

$\mathfrak{Q}_{0m}$  und  $\mathfrak{R}_{0m}$  die statischen Momente der Fläche  $\mathfrak{F}_m$ , bezogen auf die in  $(m-1)$  bzw.  $m$  auf der Achse des Stabes  $(m-1)$  m errichteten Lote,

so ist, wenn ganz allgemein exzentrische Knoten vorausgesetzt werden (s. Seite 28)

$$E J_m \tau = \frac{\mathfrak{Q}_{0m}}{s_m} + [2 \mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_{m-1} + S_m (2 e_m + d_m)] \frac{s_m}{6}$$

$$E J_{m+1} \tau' = \frac{\mathfrak{R}_{0(m+1)}}{s_{m+1}} + [2 \mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_{m+1} + S_{m+1} (2 d_{m+1} + e_{m+1})] \frac{s_{m+1}}{6},$$

und man gelangt mittels der Bedingung

$$\tau + \tau' = \Delta \mathfrak{S}_m$$

wieder zu der Gleichung

$$\mathfrak{M}_{m-1} l_m + 2 \mathfrak{M}_m (l_m + l_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+1} l_{m+1} = N_m,$$

wo nunmehr

$$(21) \quad N_m = 6 E J_c \Delta \zeta_m - S_m l_m (2 e_m + d_m) - S_{m+1} l_{m+1} (2 d_{m+1} + e_{m+1}) \\ - \frac{6 \mathfrak{R}_0}{s_m^2} l_m - \frac{6 \mathfrak{R}_0^{(m+1)}}{s_{m+1}^2} l_{m+1}.$$

Der Einfluß einer am Stabe  $s_m$  angreifenden Last  $P$  auf das Glied  $N_m$  ist (s. Seite 30, Gleich. 13)

$$(22) \quad N_m = - P s_m \left( \frac{\xi}{s_m} - \frac{\xi^3}{s_m^3} \right) l_m = - P s_m l_m \omega_D,$$

und der Einfluß einer am Stabe  $s_{m+1}$  angreifenden Last  $P$  ist

$$(23) \quad N_m = - P s_{m+1} \left( \frac{\xi'}{s_{m+1}} - \frac{\xi'^3}{s_{m+1}^3} \right) l_{m+1} = - P s_{m+1} l_{m+1} \omega_D'.$$

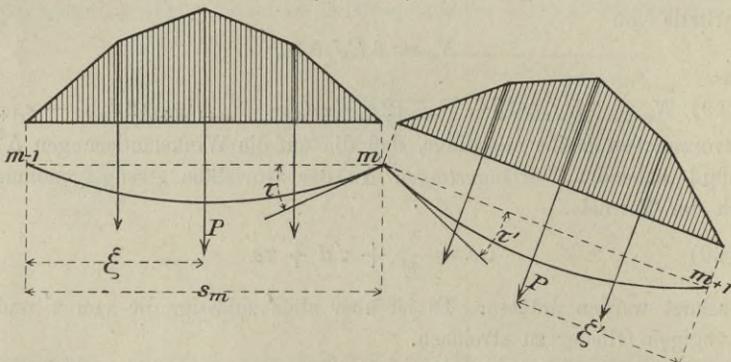


Fig. 229.

Werden die Stäbe  $s_m$  und  $s_{m+1}$  rechtwinklig zur Stabachse gleichförmig mit  $g_m$  bzw.  $g_{m+1}$  belastet, so liefert dies zu  $N_m$  den Beitrag

$$(24) \quad N_m = - \frac{1}{4} g_m s_m^2 l_m - \frac{1}{4} g_{m+1} s_{m+1}^2 l_{m+1}.$$

Die vorstehenden Untersuchungen sind wichtig für die genauere Berechnung der Spannungen in den Gurtungen von Dachbindern, welche auch zwischen den Knotenpunkten durch Pfetten belastet werden (Fig. 230). Die von den Pfetten auf die Gurtung ausgeübten Drücke zerlege man nach der Richtung der Gurtung und rechtwinklig hierzu. Es genügt, die rechtwinkligen Komponenten zu berücksichtigen.

Ein anderes sehr wichtiges Beispiel bieten die Hauptträger einer Eisenbahnbrücke, deren Querschwellen zur Ersparung der Querträger unmittelbar auf die Gurtungen gelegt werden (Fig. 231). Bei Berechnung der hierdurch in den Gurtstäben hervorgerufenen Biegungsspannungen braucht man sich auf keine allzugenaue Untersuchung der gefährlichsten Stellung des Eisenbahnzuges einzulassen, denn die Berechnung der Momente  $\mathfrak{M}$  infolge der Steifigkeit der Knoten gehört ja in das Gebiet

der bei den üblichen statischen Berechnungen außer acht gelassenen Nebenspannungen. \*Es empfiehlt sich, wie folgt vorzugehen.

Man berechne die Stabkräfte und die Winkeländerungen  $\Delta \vartheta_m$  für eine gleichförmige Verkehrslast  $p$ , die so groß gewählt wird, daß sie

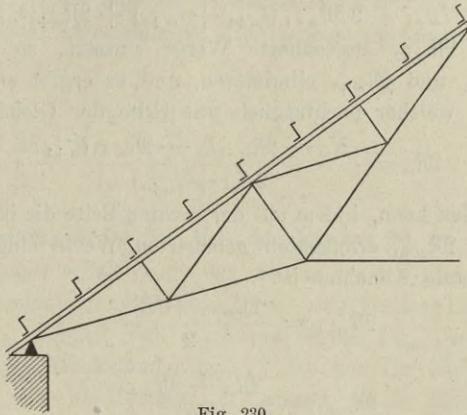


Fig. 230.

in der Mitte der Brücke dasselbe Angriffsmoment  $M_{p \max}$  erzeugt, wie der Eisenbahnzug, die also mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{pl^2}{8} = M_{p \max}$$

berechnet wird, wo  $l$  die Stützweite des Trägers bedeutet. Das Moment  $M_{p \max}$  kann den Tabellen im Anhang zu Band I entnommen werden.

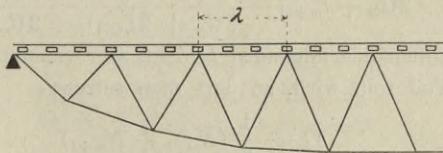


Fig. 231.

Die durch diese Belastung  $p$  und die ständige Belastung  $g$  erzeugten Spannkraften  $S$  erhält man, indem man die Spannkraften  $S_g$  infolge von  $g$  mit  $\frac{g+p}{g}$  multipliziert. Aus den zugehörigen Winkeländerungen  $\Delta \vartheta$

leite man nun die Momente  $\mathfrak{M}$  ab und addiere das größte dieser Momente zu dem Maximalmoment, das man erhält, wenn man den Gurtstab als einfachen Balken betrachtet und möglichst ungünstig belastet.

Es empfiehlt sich die Knotenpunkte exzentrisch anzuordnen. Positiven Hebelarmen  $d$  und  $e$  entsprechen im Druckgurte negative Momente  $Sd, Se$ .

**85. Näherungsformeln für die Momente  $\mathfrak{M}$ .** Wenn man in die drei aufeinanderfolgenden Gleichungen

$$(25) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{m-2}l_{m-1} + 2\mathfrak{M}_{m-1}(l_{m-1} + l_m) + \mathfrak{M}_m l_m = N_{m-1} \\ \mathfrak{M}_{m-1}l_m + 2\mathfrak{M}_m(l_m + l_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+1}l_{m+1} = N_m \\ \mathfrak{M}_m l_{m+1} + 2\mathfrak{M}_{m+1}(l_{m+1} + l_{m+2}) + \mathfrak{M}_{m+2}l_{m+2} = N_{m+1} \end{cases}$$

für  $\mathfrak{M}_{m-2}$  und  $\mathfrak{M}_{m+2}$  angenäherte Werte einsetzt, so lassen sich die Momente  $\mathfrak{M}_{m-1}$  und  $\mathfrak{M}_{m+1}$  eliminieren, und es ergibt sich für  $\mathfrak{M}_m$  ein Näherungswert, welcher nachträglich mit Hilfe der Gleichung

$$(26) \quad \mathfrak{M}_m = \frac{N_m - \mathfrak{M}_{m-1}l_m - \mathfrak{M}_{m+1}l_{m+1}}{2(l_m + l_{m+1})}$$

verbessert werden kann, indem auf der rechten Seite die in gleicher Weise für  $\mathfrak{M}_{m-1}$  und  $\mathfrak{M}_{m+1}$  ermittelten genäherten Werte eingeführt werden.

Eine passende Annahme ist

$$\mathfrak{M}_{m-1} = \frac{\mathfrak{M}_{m-2} + \mathfrak{M}_m}{2}$$

und

$$\mathfrak{M}_{m+1} = \frac{\mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_{m+2}}{2},$$

aus welcher sich

$$\mathfrak{M}_{m-2} = 2\mathfrak{M}_{m-1} - \mathfrak{M}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_{m+2} = 2\mathfrak{M}_{m+1} - \mathfrak{M}_m$$

ergibt. Führt man diese Werte in die Gleichungen (25) ein, so liefern diese für  $\mathfrak{M}_m$  den Ausdruck:

$$(27) \quad \mathfrak{M}_m = \frac{N_m - N_{m-1} \frac{l_m}{2(l_m + 2l_{m-1})} - N_{m+1} \frac{l_{m+1}}{2(l_{m+1} + 2l_{m+2})}}{2(l_m + l_{m+1}) - \frac{l_m(l_m - l_{m-1})}{2(l_m + 2l_{m-1})} - \frac{l_{m+1}(l_{m+1} - l_{m+2})}{2(l_{m+1} + 2l_{m+2})}}$$

Wenn die aufeinanderfolgenden  $l$  nicht sehr voneinander abweichen, was häufig der Fall sein wird, so darf man setzen:

$$(28) \quad \mathfrak{M}_m = \frac{N_m - \frac{1}{6}(N_{m-1} + N_{m+1})}{2(l_m + l_{m+1})}$$

Handelt es sich um eine Gurtung  $0 \ 1 \ 2 \ \dots \ m \ \dots \ n$ , für welche  $\mathfrak{M}_0 = 0$  und  $\mathfrak{M}_n = 0$  ist, so benutze man die Gleichung (27) bzw. (28) zur Berechnung von  $\mathfrak{M}_3$  bis  $\mathfrak{M}_{n-3}$  und hierauf setze man

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{N_2 - N_1 \frac{l_1}{2(l_1 + l_2)} - \mathfrak{M}_3 l_3}{2(l_2 + l_3) - \frac{l_1 l_2}{2(l_1 + l_2)}}$$

und

$$(29) \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{N_1 - \mathfrak{M}_2 l_2}{2(l_1 + l_2)}$$

Es entsprechen diese beiden Gleichungen den Bedingungen

$$2\mathfrak{M}_1(l_1 + l_2) + \mathfrak{M}_2 l_2 = N_1$$

$$\mathfrak{M}_1 l_1 + 2\mathfrak{M}_2(l_2 + l_3) + \mathfrak{M}_3 l_3 = N_2.$$

In gleicher Weise sind die Momente  $\mathfrak{M}_{n-2}$  und  $\mathfrak{M}_{n-1}$  zu berechnen.

Bei geringen Abweichungen der aufeinanderfolgenden  $l$  darf man auch setzen:

$$(30) \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{N_2 - \frac{1}{4} N_1 - \frac{1}{6} N_3}{\frac{15}{8}(l_2 + l_3)} *),$$

und ganz entsprechend ist der Bau der Formel  $\mathfrak{M}_{n-2}$ .

In der Regel erhält man von den in irgendeinem Knoten  $m$  auftretenden Biegungsspannungen ein ganz zutreffendes Bild, wenn man  $\mathfrak{M}_{m-2}$  oder  $\mathfrak{M}_{m-3}$  gleich Null setzt und ebenso  $\mathfrak{M}_{m+2}$  oder  $\mathfrak{M}_{m+3}$ , denn der Einfluß einer Winkeländerung  $\Delta \varphi$  ist nur für die nächstgelegenen Knotenpunkte von Bedeutung; er nimmt nach beiden Seiten hin rasch ab.

**86. Zahlenbeispiel.** Es sind die Biegemomente für die obere Gurtung des in Fig. 232 dargestellten Parallelträgers zu bestimmen. Jeder Knotenpunkt der unteren Gurtung ist mit 12,5 t belastet. In Fig. 232 geben die nicht eingeklammerten Zahlen die Spannkraften in Tonnen, die eingeklammerten Zahlen die Querschnittsinhalte  $F$  in qdm an.

Fig. 233 zeigt den Obergurtquerschnitt für das erste und zweite Feld, Fig. 234 für das dritte Feld und Fig. 235 für das vierte und fünfte Feld. Die Träg-

\*) Schreibt man die Gleichungen an

$$2\mathfrak{M}_1(l_1 + l_2) + \mathfrak{M}_2 l_2 = N_1$$

$$\mathfrak{M}_1 l_1 + 2\mathfrak{M}_2(l_2 + l_3) + \mathfrak{M}_3 l_3 = N_2$$

$$\mathfrak{M}_2 l_3 + 2\mathfrak{M}_3(l_3 + l_4) + \mathfrak{M}_4 l_4 = N_3,$$

setzt  $\mathfrak{M}_4 = 2\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_2$  und löst nach  $\mathfrak{M}_2$  auf, so folgt

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{N_2 - N_1 \frac{l_2}{2(l_1 + l_2)} - N_3 \frac{l_3}{2(l_3 + 2l_4)}}{2(l_2 + l_3) - \frac{l_2^2}{2(l_1 + l_2)} - \frac{l_3(l_3 - l_4)}{2(l_3 + 2l_4)}}.$$

Bei wenig voneinander abweichenden  $l$  darf

$$\frac{l_2}{2(l_1 + l_2)} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{l_3}{2(l_3 + 2l_4)} = \frac{1}{6}$$

gesetzt werden, ferner  $l_3 - l_4 = 0$  und

$$2(l_2 + l_3) - \frac{l_2^2}{2(l_1 + l_2)} = 4l - \frac{l}{4} = \frac{15}{4}l,$$

wobei  $l = \frac{1}{2}(l_2 + l_3)$  angenommen werden darf.

heitsmomente  $J$  und Widerstandsmomente  $W$  dieser Querschnitte sind der Reihe nach

$$\begin{array}{r} J = \\ W = \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1,605 & 1,733 \\ 1,070 & 1,155 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1,956 \text{ dm}^4 \\ 1,304 \text{ dm}^3. \end{array}$$

Die Längen der Gurtstäbe sind durchweg  $s = 40$  dm. Es ergibt sich also, wenn  $J_c = 2,0$  gewählt wird,

$$l_1 = l_2 = 40 \frac{2,0}{1,605} = 49,8 \text{ dm}$$

$$l_3 = 40 \frac{2,0}{1,733} = 46,2 \text{ dm}$$

$$l_4 = l_5 = 40 \frac{2,0}{1,956} = 40,9 \text{ dm.}$$

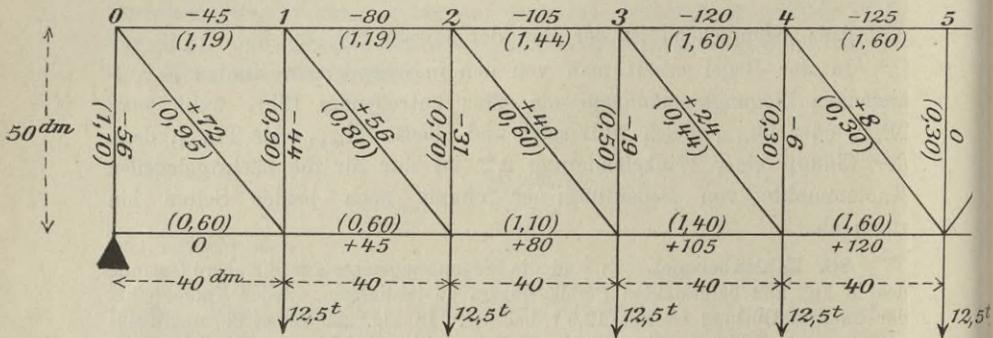


Fig. 232.

Für das Produkt  $E\Delta\zeta$  folgt aus den in Fig. 236 an die Stäbe geschriebenen Spannungen  $\sigma$ :

$$E\Delta\zeta_m = (\sigma_2 - \sigma_1) \cotg \varphi + (\sigma_2 - \sigma_3) \cotg \varphi_1 + (\sigma_4 - \sigma_5) \cotg \varphi + (\sigma_6 - \sigma_5) \cotg \varphi_1$$

und, wegen  $\cotg \varphi = \frac{\lambda}{h}$  und  $\cotg \varphi_1 = \frac{h}{\lambda}$ ,

$$E\Delta\zeta_m = \frac{h}{\lambda} (\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_5 + \sigma_6) + \frac{\lambda}{h} (\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_4 - \sigma_5).$$

Für den mittelsten Knotenpunkt erhält man nach Fig. 237

$$E\Delta\zeta_5 = 2 \frac{h}{\lambda} (\sigma_2 - \sigma_3) + 2 \frac{\lambda}{h} (\sigma_2 - \sigma_1).$$

In Fig. 238 sind die Spannungen  $\sigma = S|F$  in  $t/\text{dm}^2$  zusammengestellt worden. Ihnen entsprechen die Werte

$$E\Delta\zeta_1 = \frac{5}{4} (76 + 49 - 70 - 44) + \frac{4}{5} (76 + 38 + 75 - 70) = 109$$

$$E\Delta\zeta_2 = \frac{5}{4} (70 + 44 - 67 - 38) + \frac{4}{5} (70 + 67 + 73 - 67) = 126$$

$$E\Delta\zeta_3 = \frac{5}{4} (67 + 38 - 55 - 20) + \frac{4}{5} (67 + 73 + 75 - 55) = 166$$

$$E\Delta\zeta_4 = \frac{5}{4} (50 + 20 - 27) + \frac{4}{5} (55 + 75 + 75 - 27) = 202$$

$$E\Delta\zeta_5 = 2 \cdot \frac{5}{4} 27 + 2 \cdot \frac{4}{5} (27 + 78) = 236.$$

Die Momente  $T$  sind in Tonnen-Dezimetern:

$$T_1 = \frac{2 E J_c \Delta \mathfrak{S}_1}{l_1 + l_2} = \frac{4,0 \cdot 109}{2 \cdot 49,8} = 4,4, \quad T_2 = \frac{4,0 \cdot 126}{49,8 + 46,2} = 5,3,$$

$$T_3 = \frac{4,0 \cdot 166}{46,2 + 40,9} = 7,6, \quad T_4 = \frac{4,0 \cdot 202}{2 \cdot 40,9} = 9,9, \quad T_5 = \frac{4,0 \cdot 236}{2 \cdot 40,9} = 11,5.$$

Die Ausführung der in Nr. 80, Fig. 221 beschriebenen Konstruktion liefert die Knotenpunktmomente:

$$\mathfrak{M}_5 = 12,5 \text{ tdm}, \quad \mathfrak{M}_4 = 9,7 \text{ tdm}, \quad \mathfrak{M}_3 = 7,7 \text{ tdm},$$

$$\mathfrak{M}_2 = 4,7 \text{ tdm}, \quad \mathfrak{M}_1 = 5,4 \text{ tdm}.$$

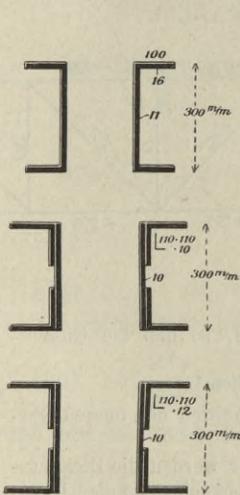


Fig. 233-235.

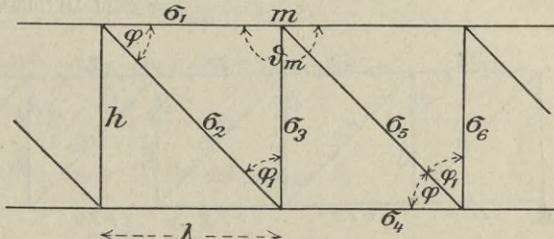


Fig. 236.

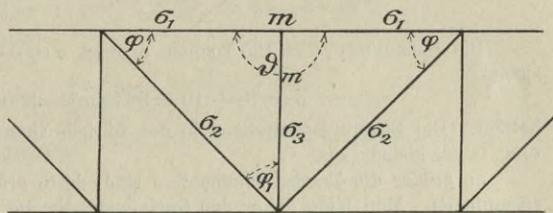


Fig. 237.

Mit diesen Ergebnissen sollen nun die nach den Näherungsformeln (28) bis (30) berechneten Werte verglichen werden.

Es ist  $N_m = 6 J_c E \Delta \mathfrak{S}_m = 12 E \Delta \mathfrak{S}_m$ ,  
und es ergibt sich

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nach Gleich. (28)} \\ \text{nach Gleich. (30)} \\ \text{nach Gleich. (29)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_5 = 12 \frac{236 - \frac{1}{6}(202 + 202)}{2(40,9 + 40,9)} = 12,4 \text{ tdm} \\ \mathfrak{M}_4 = 12 \frac{202 - \frac{1}{6}(166 + 236)}{2(40,9 + 40,9)} = 9,9 \text{ tdm} \\ \mathfrak{M}_3 = 12 \frac{166 - \frac{1}{6}(126 + 202)}{2(46,2 + 40,9)} = 7,7 \text{ tdm}, \\ \mathfrak{M}_2 = 12 \frac{126 - \frac{1}{4}109 - \frac{1}{6}166}{\frac{15}{8}(49,8 + 46,2)} = 4,7 \text{ tdm}, \\ \mathfrak{M}_1 = \frac{12 \cdot 109 - 4,7 \cdot 49,8}{2(49,8 + 49,8)} = 5,4 \text{ tdm}. \end{array} \right.$$

Diese Zahlen stimmen mit den oben angegebenen fast genau überein. Man darf sogar den Wert

$$M_m = T_m = \frac{2EJ_c \Delta S_m}{l_m + l_{m+1}}$$

als einen durchaus brauchbaren Näherungswert ansehen, der ein für die Erwägungen des Praktikers ausreichendes Bild von der ungefähren Größe der zu erwartenden Nebenspannungen gibt.

Die Biegungsspannung in der Gurtung ist bei Knotenpunkt 5, da hier  $W = 1,304$  ist,

$$\sigma = \pm \frac{12,5}{1,304} = \text{rund } 10 \text{ t/dm}^2.$$

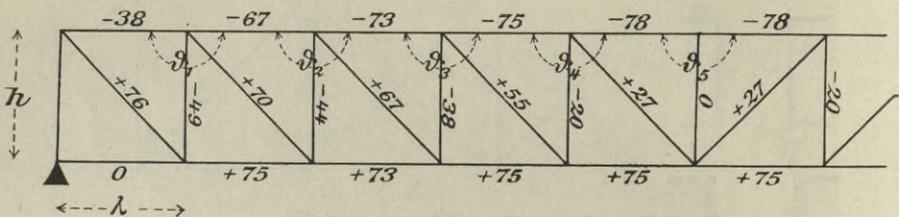


Fig. 238.

Die Spannkraft  $S = 125$  Tonnen erzeugt  $\sigma = -78$ , so daß die Gesamtspannung

$$\sigma = 78 + 10 = 88 \text{ t/dm}^2 = 880 \text{ kg/cm}^2$$

beträgt. Die Biegungsspannungen in den übrigen Querschnitten der oberen Gurtung fallen kleiner aus.

Je größer die Trägheitsmomente  $J$  sind, desto größer werden die Biegungsspannungen. Man bilde daher den Gurtquerschnitt im allgemeinen so niedrig wie möglich aus, gerade so hoch als erforderlich ist, um die nötige Sicherheit gegen Ausknicken in der Fachwerkebene zu erreichen.

**87. Einfluß der biegenden Wirkung der Spannkraft  $S$ .**

In den bisherigen Entwicklungen wurden die von den Durchbiegungen  $y$

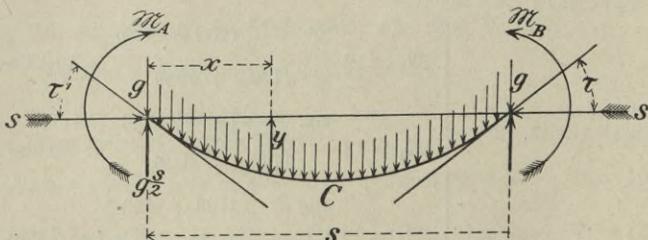


Fig. 239.

der Gurtstäbe herrührenden Biegemomente  $Sy$  (Fig. 239) vernachlässigt. Es bleibt also noch zu zeigen, wie unser Verfahren abzuändern ist, wenn eine genauere Rechnung verlangt wird. Die Lasten mögen in den Knotenpunkten angreifen. Vom Eigengewicht des Stabes möge

nur die zur Stabachse rechtwinklige Komponente berücksichtigt werden; sie betrage  $g$  für die Längeneinheit. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

1. *Die Stabkraft  $S$  ist ein Druck.* Wir betrachten zunächst einen gedrückten Stab der oberen Gurtung, bezeichnen die an seinen Enden wirksamen Biegemomente mit  $\mathfrak{M}_A$  und  $\mathfrak{M}_B$ , die Ausschlagwinkel der Stabenden mit  $\tau$  und  $\tau'$ , die zur Stabachse rechtwinklige Durchbiegung an der Stelle  $x$  mit  $y$  und erhalten bei  $x$  das Biegemoment

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_A + \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_A}{s} x + g \frac{s}{2} x - g \frac{x^2}{2} + Sy.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = - \mathfrak{M}.$$

Wir führen zur Abkürzung die Bezeichnungen ein

$$(31) \quad k = \sqrt{\frac{EJ}{S}},$$

$$(32) \quad D_1 = \mathfrak{M}_A + gk^2, \quad D_2 = \mathfrak{M}_B + gk^2,$$

und erhalten wir zunächst

$$(33) \quad k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = - \frac{1}{S} \left( \mathfrak{M}_A + \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_A}{s} x + g \frac{sx}{2} - g \frac{x^2}{2} \right),$$

und hieraus durch Integration

$$(34) \quad y = C_1 \cos \frac{x}{k} + C_2 \sin \frac{x}{k} - \frac{gk^2}{S} \\ - \frac{1}{S} \left( \mathfrak{M}_A + \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_A}{s} x + g \frac{sx}{2} - g \frac{x^2}{2} \right).$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  sind durch die Bedingungen bestimmt, daß  $y = 0$  sein muß für  $x = 0$  und  $x = s$ . Es ergibt sich:

$$(35) \quad C_1 = \frac{D_1}{S} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{1}{S} \left( \frac{D_2}{\sin \frac{s}{k}} - D_1 \cotg \frac{s}{k} \right).$$

Der Ausschlagwinkel  $\tau'$  am linken Stabende ist

$$(36) \quad \tau' = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\mathfrak{M}_A}{Ss} v' + \frac{\mathfrak{M}_B}{Ss} v'' + \frac{gs}{S} v''',$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$(37) \quad v' = 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$(38) \quad v'' = \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1,$$

$$(39) \quad v''' = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

$$(40) \quad \alpha = \frac{s}{k}.$$

Am anderen Stabende entsteht:

$$(41) \quad \tau = \frac{\mathfrak{M}_A}{Ss} v'' + \frac{\mathfrak{M}_B}{Ss} v' + \frac{gs}{S} v'''.$$

Das Biegemoment ist:

$$(42) \quad \mathfrak{M} = S \left( C_1 \cos \frac{x}{k} + C_2 \sin \frac{x}{k} \right) \mp \frac{1}{4} gk^2;$$

es wird ein Maximum oder Minimum, sobald

$$(43) \quad \operatorname{tg} \frac{x}{k} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\sin \frac{s}{k}} - \operatorname{cotg} \frac{s}{k}$$

ist. Man findet

$$(44) \quad \mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_{\frac{\max}{\min}} = \frac{D_1}{\cos \frac{x}{k}} \mp gk^2.$$

Gleichung (44) ist natürlich nur brauchbar, sobald sich aus (43) ein zwischen  $x=0$  und  $x=s$  liegender Wert  $x$  ergibt. Sonst ist  $\mathfrak{M}_C$  gleich dem größeren der beiden Momente  $\mathfrak{M}_A$  und  $\mathfrak{M}_B$ , mit denen  $\mathfrak{M}_C$  auch im Falle einer brauchbaren Lösung der Gleichung (43) verglichen werden muß.

Um nun die in den Ausdrücken

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_{m-1} + S_m d_m$$

$$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_m + S_m e_m \quad (\text{s. Seite 278})$$

vorkommenden, von der Vernietung der Gurte herrührenden Knotenmomente  $\mathfrak{M}_m$  zu bestimmen, schreiben wir die Ausschlagwinkel  $\tau$  und  $\tau'$  der beiden am Knoten  $m$  zusammentreffenden Stäbe (Fig. 228) an:

$$\tau = \frac{\mathfrak{M}_{m-1} + S_m d_m}{S_m s_m} v_m'' + \frac{\mathfrak{M}_m + S_m e_m}{S_m s_m} v_m' + \frac{g_m s_m}{S_m} v_m'''$$

$$\tau' = \frac{\mathfrak{M}_m + S_{m+1} d_{m+1}}{S_{m+1} s_{m+1}} v_{m+1}' + \frac{\mathfrak{M}_{m+1} + S_{m+1} e_{m+1}}{S_{m+1} s_{m+1}} v_{m+1}'' + \frac{g_{m+1} s_{m+1}}{S_{m+1}} v_{m+1}'''$$

und setzen

$$\tau + \tau' = \Delta \mathfrak{S}_m.$$

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$(45) \quad \psi' = \frac{\nu'}{Ss}, \quad \psi'' = \frac{\nu''}{Ss}, \quad \psi''' = \frac{\nu'''}{Ss}$$

erhalten wir die Bedingung

$$(46) \quad \mathfrak{M}_{m-1}\psi_m'' + \mathfrak{M}_m(\psi_m' + \psi_{m+1}') + \mathfrak{M}_{m+1}\psi_{m+1}'' \\ = \Delta \mathfrak{S}_m - g_m s^2 \psi_m''' - g_{m+1} s^2 \psi_{m+1}''' \\ = \frac{d_m \nu_m'' + e_m \nu_m'}{s_m} - \frac{d_{m+1} \nu_{m+1}' + e_{m+1} \nu_{m+1}''}{s_{m+1}}.$$

Es ergibt sich also eine Gruppe von Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{M}_{m-1}\alpha_m + \mathfrak{M}_m\beta_m + \mathfrak{M}_{m+1}\alpha_{m+1} = N_m,$$

deren rechnerische und zeichnerische Auflösung in Abt. 1, § 14, gezeigt worden ist.

Noch bemerken wir, daß man  $\tau'$  auch auf die Form bringen kann:

$$(47) \quad \tau' = \frac{s}{6EJ} (2\mathfrak{M}_A\mu' + \mathfrak{M}_B\mu'') + \frac{gs}{S} \nu''',$$

wo

$$(48) \quad \mu' = \frac{3}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right),$$

$$(49) \quad \mu'' = \frac{6}{\alpha^2} \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right).$$

Ist der Stab sehr steif und infolgedessen

$$\alpha = \frac{s}{k} = \sqrt{\frac{Ss^2}{EJ}}$$

so klein, daß man von den Reihen

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{3 \cdot 5} + \dots$$

$$\sin \alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots$$

nur die beiden ersten Glieder zu berücksichtigen braucht, so wird

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{3}, \quad \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha^2}{6}, \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{24},$$

und man erhält:

$$\mu' = \mu'' = 1, \quad \nu''' = \frac{\alpha^2}{24}, \quad \frac{gs\nu'''}{S} = \frac{gs^3}{24EJ}.$$

Der Einfluß der Biegemomente  $Sy$  ist daher vernachlässigbar, und es liegt der in Nr. 80 bis 86 behandelte Fall vor.

Für den vierten Obergurtstab des in Nr. 86 untersuchten Parallelträgers ist z. B.  $S = 120t$ ,  $s = 40\text{ dm}$ ,  $E = 200\,000\text{ t/dm}^2$ ,  $J = 1,956\text{ dm}^4$ , mithin

$$\alpha = \frac{s}{k} = \sqrt{\frac{Ss^2}{EJ}} = 0,70057.$$

Zu dieser Bogenlänge gehört der Winkel  $40^\circ 8'$ . Daher:

$$\text{tg } \alpha = 0,843, \quad \sin \alpha = 0,645, \quad \mu' = 1,033, \quad \mu'' = 1,053.$$

Genügt  $J$  mit fünffacher Sicherheit der Eulerschen Formel:

$$\frac{Ss^2}{EJ} = \frac{\pi^2}{5},$$

so erhält man  $\alpha = 1,4$  und  $\mu' = 1,16$ ,  $\mu'' = 1,29$ . Man könnte hier dem Einfluß der Momente  $Sy$  durch Verkleinerung des Trägheitsmomentes  $J$  des Stabes um etwa 20 v. H. Rechnung tragen, im übrigen aber die in Nr. 80 bis 86 beschriebenen Verfahren benutzen. Je größer nun  $J$  ist, desto größer fallen im allgemeinen die Nebenspannungen infolge der steifen Knoten aus. Vernachlässigt man also die  $Sy$  bei Berechnung der Momente  $\mathfrak{M}$ , so macht man eine Annahme zugunsten der Sicherheit des Tragwerks.

2. Die Stabkraft  $S$  ist ein Zug. Die Bezeichnungen sind aus der Figur 240 zu ersehen.  $g$  wird im entgegengesetzten Sinne der  $y$  positiv angenommen. Es folgt dann wenn rechts  $\mathfrak{M}_A$  und links  $\mathfrak{M}_B$  wirkt,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_A + \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_A}{s} x - \left( g \frac{sx}{2} - g \frac{x^2}{2} \right) - Sy,$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$(50) \quad k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - y = -\frac{1}{S} \left[ \mathfrak{M}_A + \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_A}{s} x - g \frac{sx}{2} + g \frac{x^2}{2} \right];$$

ihr Integral ist

$$(51) \quad -y = C_1 \text{Cot} \frac{x}{k} + C_2 \text{Sin} \frac{x}{k} - \frac{1}{S} \left[ \mathfrak{M}_A + \frac{\mathfrak{M}_B - \mathfrak{M}_A}{s} x - g \frac{sx}{2} + g \frac{x^2}{2} + gk^2 \right].$$

Die Integrationskonstanten sind

$$(52) \quad C_1 = \frac{1}{S} D_1 \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{1}{S} \left( D_1 \text{Cotang} \frac{s}{k} - \frac{D_2}{\text{Sin} \frac{s}{k}} \right),$$

wo  $k$ ,  $D_1$  und  $D_2$  durch die Gleichungen (31) und (32) bestimmt sind. Das Biegemoment

$$(53) \quad \mathfrak{M} = S \left( C_1 \text{Cot} \frac{x}{k} + C_2 \text{Sin} \frac{x}{k} \right) \mp gk^2$$

wird ein Maximum oder Minimum, sobald (mit  $\alpha = \frac{s}{k}$ )

$$(54) \quad \text{Tang } \frac{x}{k} = \text{Cotang } \alpha - \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\text{Sin } \alpha}$$

wird. Liefert diese Gleichung einen zwischen 0 und  $s$  liegenden Wert  $x$ , so ergibt sich

$$(55) \quad \mathfrak{M}_{\min}^{\max} = -\frac{D_1}{\text{Cof } \frac{x}{k}} + gk^2.$$

Dieses Moment muß mit dem größeren der beiden Momente  $\mathfrak{M}_A$  und  $\mathfrak{M}_B$  verglichen werden.

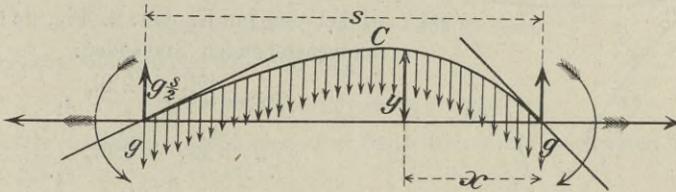


Fig. 240.

Die Ausschlagwinkel  $\tau$  und  $\tau'$  sind

$$(56) \quad \tau' = \frac{\mathfrak{M}_A}{Ss} v' + \frac{\mathfrak{M}_B}{Ss} v'' + \frac{gs}{S} v'''$$

$$(57) \quad \tau = \frac{\mathfrak{M}_A}{Ss} v'' + \frac{\mathfrak{M}_B}{Ss} v' + \frac{gs}{S} v''',$$

wo

$$(58) \quad v' = \frac{\alpha}{\text{Tang } \alpha} - 1$$

$$(59) \quad v'' = 1 - \frac{\alpha}{\text{Sin } \alpha}$$

$$(60) \quad v''' = \frac{\text{Cof } \alpha - 1}{\alpha \text{ Sin } \alpha} - \frac{1}{2} = \frac{\text{Tang } \frac{1}{2} \alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

Der weitere Verlauf der Untersuchung ist derselbe wie bei gedrückten Stäben.

§ 18.

**Fachwerke, deren sämtliche Stäbe in den Knoten durch Nieten befestigt sind.**

**88. Grundgleichungen für ein Stabdreieck mit steifen Ecken.**

Sind die Stäbe eines Dreiecks in den Ecken steif miteinander verbunden, so werden sie sich bei der Formveränderung des Dreiecks verbiegen.

Die Momente, durch welche hierbei die Stabenden beansprucht werden, bezeichnen wir

für den Stab  $s_1$  mit  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$   
 " " "  $s_2$  "  $\mathfrak{M}_3$  "  $\mathfrak{M}_4$   
 " " "  $s_3$  "  $\mathfrak{M}_5$  "  $\mathfrak{M}_6$ .

Diese Momente sollen positiv sein, wenn sich die Stäbe nach innen biegen. Werden die Stäbe gewichtslos gedacht, alle äußeren Kräfte in den Knotenpunkten angreifend vorausgesetzt, und die von den Durchbiegungen  $y$  abhängigen Momente  $Sy$  (vgl. Nr. 87) vernachlässigt, so sind die Ausschlagwinkel der im Knoten  $A$ , Fig. 241, zusammentreffenden Stabenden:

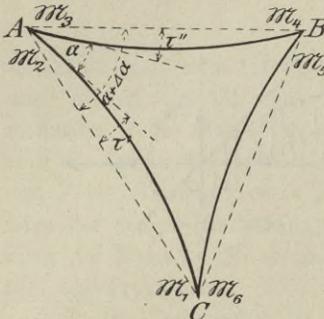


Fig. 241.

$$\tau' = \frac{\mathfrak{M}_1 + 2\mathfrak{M}_2}{6EJ_1} s_1$$

$$\tau'' = \frac{\mathfrak{M}_4 + 2\mathfrak{M}_3}{6EJ_2} s_2.$$

Bezeichnet man die Dreieckswinkel bei  $A, B, C$  mit  $\alpha, \beta, \gamma$ , setzt die vorstehenden Werte  $\tau'$  und  $\tau''$  in die Gleichung

$$\tau' + \tau'' = \Delta\alpha$$

ein und stellt ähnliche Gleichungen für die Ecken  $B$  und  $C$  auf, so gelangt man zu den Beziehungen

$$(1) \quad \begin{cases} (\mathfrak{M}_1 + 2\mathfrak{M}_2) \frac{s_1}{J_1} + (2\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4) \frac{s_2}{J_2} = 6E\Delta\alpha \\ (\mathfrak{M}_3 + 2\mathfrak{M}_4) \frac{s_2}{J_2} + (2\mathfrak{M}_5 + \mathfrak{M}_6) \frac{s_3}{J_3} = 6E\Delta\beta \\ (\mathfrak{M}_5 + 2\mathfrak{M}_6) \frac{s_3}{J_3} + (2\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \frac{s_1}{J_1} = 6E\Delta\gamma, \end{cases}$$

mit deren Hilfe man, sobald drei der Momente  $\mathfrak{M}_1$  bis  $\mathfrak{M}_6$  bekannt sind, die übrigen drei Momente berechnen kann.

An Stelle der Momente  $\mathfrak{M}$  führen wir nun zweckmäßiger die den einzelnen Stabenden entsprechenden Werte  $\mathfrak{M} \frac{s}{J}$ , welche wir mit  $\rho$  bezeichnen wollen, als Unbekannte ein. Wir setzen

$$\text{für den Stab } s_1: \quad \frac{\mathfrak{M}_1 s_1}{J_1} = \rho_1, \quad \frac{\mathfrak{M}_2 s_1}{J_1} = \rho_2,$$

$$\text{für den Stab } s_2: \quad \frac{\mathfrak{M}_3 s_2}{J_2} = \rho_3, \quad \frac{\mathfrak{M}_4 s_2}{J_2} = \rho_4,$$

$$\text{für den Stab } s_3: \quad \frac{\mathfrak{M}_5 s_3}{J_3} = \rho_5, \quad \frac{\mathfrak{M}_6 s_3}{J_3} = \rho_6$$

und formen die Gleichungen (1) um in

$$(2) \quad \rho_1 + 2(\rho_2 + \rho_3) + \rho_4 = 6E\Delta\alpha,$$

$$(3) \quad \rho_3 + 2(\rho_4 + \rho_5) + \rho_6 = 6E\Delta\beta,$$

$$(4) \quad \rho_5 + 2(\rho_6 + \rho_1) + \rho_2 = 6E\Delta\gamma.$$

Außerdem besteht noch, wegen  $\Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = 0$ , die Beziehung

$$(5) \quad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 = 0.$$

Gesetzt nun, es seien die Werte  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  bekannt, dann können mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen die Werte  $\rho_4, \rho_5, \rho_6$  berechnet werden. Man erhält aus Gleichung (2):

$$(6) \quad \rho_4 = 6E\Delta\alpha - \rho_1 - 2(\rho_2 + \rho_3),$$

sodann aus Gleichungen (3) und (4):

$$(7) \quad \rho_5 = 6E\Delta\beta + \rho_1 + \rho_2 - \rho_4.$$

Die letzte Gleichung prägt sich dem Gedächtnisse am leichtesten in der Form ein:

$$(8) \quad \rho_5 + \rho_4 = 6E\Delta\beta + \rho_1 + \rho_2.$$

Die Werte  $\rho$  auf der linken Seite der Gleichung (8) schließen in Fig. 242 den Winkel  $\beta$  ein, und die Werte  $\rho$  auf der rechten Seite liegen dem Winkel  $\beta$  gegenüber.

Ganz ebenso findet man

$$\rho_6 + \rho_1 = 6E\Delta\gamma + \rho_3 + \rho_4,$$

und hieraus

$$(9) \quad \rho_6 = 6E\Delta\gamma + \rho_3 + \rho_4 - \rho_1.$$

Durch die Werte  $\rho$  sind die Biegungsspannungen an den Stabenden bestimmt. Für den durch das Moment  $\mathcal{M}_1$  beanspruchten Stabquerschnitt erhält man z. B. die größten Biegungsspannungen

$$\sigma' = + \frac{\mathcal{M}_1}{J_1} e' = + \rho_1 \frac{e'}{s_1}$$

$$\sigma'' = - \frac{\mathcal{M}_1}{J_1} e'' = - \rho_1 \frac{e''}{s_1},$$

wo  $e'$  und  $e''$  die Abstände des stärkst gezogenen bzw. stärkst gedrückten Querschnittsteiles von der Schwerachse des Querschnitts bedeuten.

Die Anwendung der Gleichungen (2) bis (9) auf die einzelnen Dreiecke eines einfachen Fachwerkes (Fig. 245) gestattet, die in einem solchen Träger infolge steifer Knoten auftretenden Biegungsspannungen ohne übergroßen Zeitaufwand zu berechnen. Dabei erweist es sich als notwendig, für die einzelnen Dreiecke abwechselnd die in den Figuren 241

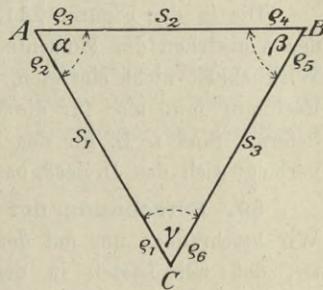


Fig. 242.

und 243 dargestellten Verbiegungen als diejenigen anzusehen, denen positive Momente und positive Werte  $\rho$  entsprechen. Will man nun ein nach Fig. 243 verbogenes Dreieck mit Hilfe der Gleichungen (2) bis (9) behandeln, so muß man die Vorzeichen der Winkeländerungen umkehren. Während also für das Dreieck Fig. 241 die Formeln gelten:

$$(10) \quad \begin{cases} E\Delta\alpha = (\sigma_3 - \sigma_1) \cotg \gamma + (\sigma_3 - \sigma_2) \cotg \beta \\ E\Delta\beta = (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \alpha + (\sigma_1 - \sigma_3) \cotg \gamma \\ \Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = 0, \end{cases}$$

hat man für das Dreieck Fig. 243 die Formeln:

$$(11) \quad \begin{cases} E\Delta\alpha = (\sigma_1 - \sigma_3) \cotg \gamma + (\sigma_2 - \sigma_3) \cotg \beta \\ E\Delta\beta = (\sigma_2 - \sigma_1) \cotg \alpha + (\sigma_3 - \sigma_1) \cotg \gamma \\ \Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = 0. \end{cases}$$

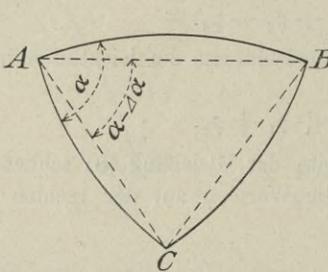


Fig. 243.

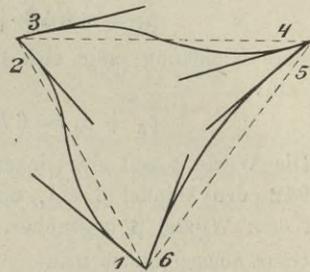


Fig. 244.

Die in den Figuren 241 und 243 behufs übersichtlicher Festsetzung der Vorzeichen der Momente angenommenen Formänderungen können in Wirklichkeit nicht eintreten, weil  $\Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = 0$  sein muß. Die Rechnung muß also für die Momente teils positive, teils negative Werte liefern. Sind z. B. für das Dreieck Fig. 241  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_3$  negativ, so verbiegt sich das Dreieck nach Fig. 244.

### 89. Berechnung der Werte $\rho$ eines einfachen Fachwerks.

Wir beschränken uns auf den Fall zentrischer Knotenpunkte und nehmen an, daß alle Lasten in den Knotenpunkten angreifen. Liegt das in Fig. 245 dargestellte Fachwerk vor, so werden zunächst die Werte  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , welche den die Ziffern 1 und 2 tragenden Stabenden entsprechen, als bekannt angenommen. Hierauf findet man  $\rho_3$  aus der Bedingung, daß die Summe der am Knotenpunkte A angreifenden Momente  $\mathfrak{M}_2$  und  $\mathfrak{M}_3$ , von denen das erste rechts drehend, das zweite links drehend angenommen ist, gleich Null sein muß. Es folgt  $\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = 0$ , und, wenn die  $\mathfrak{M}$  durch die  $\rho$  ausgedrückt werden:

$$\rho_3 \frac{J_2}{s_2} - \rho_2 \frac{J_1}{s_1} = 0.$$

Nach Berechnung von  $\rho_3$  erhält man mit Hilfe der Grundgleichungen (6), (7), (9) die Werte  $\rho_4, \rho_5, \rho_6$ .

Am Knotenpunkte  $B$  ergibt sich nun zur Bestimmung von  $\rho_7$  die Gleichung  $\mathfrak{M}_7 - \mathfrak{M}_6 + \mathfrak{M}_1 = 0$ , das ist:

$$\rho_7 \frac{J_4}{s_4} - \rho_6 \frac{J_3}{s_3} + \rho_1 \frac{J_1}{s_1} = 0,$$

und hierauf liefern die nach Gleichung (1) für das Dreieck II zu bildenden Grundgleichungen die Größen  $\rho_8, \rho_9, \rho_{10}$ .

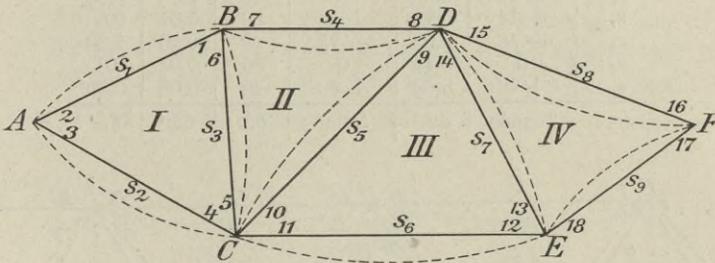


Fig. 245.

So fortfahrend findet man:

- am Knotenpunkte  $C$  den Wert  $\rho_{11}$ ,
- mittels Dreieckbedingungen die Werte  $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}$ ,
- am Knotenpunkte  $D$  den Wert  $\rho_{15}$ ,
- mittels Dreieckbedingungen die Werte  $\rho_{16}, \rho_{17}, \rho_{18}$ ,

und hat nunmehr alle Werte  $\rho_3$  bis  $\rho_{18}$  als Funktionen von  $\rho_1$  und  $\rho_2$  dargestellt. Zur Berechnung dieser beiden Werte aber stehen an den Knotenpunkten  $E$  und  $F$  noch die beiden Gleichungen zur Verfügung:

$$\rho_{18} \frac{J_9}{s_9} - \rho_{13} \frac{J_7}{s_7} + \rho_{12} \frac{J_6}{s_6} = 0,$$

$$\rho_{16} \frac{J_8}{s_8} - \rho_{17} \frac{J_9}{s_9} = 0.$$

Die gestellte Aufgabe ist somit gelöst. Unser Verfahren erfordert nur sehr einfache Rechnungen, weil die überwiegende Mehrzahl der zu benutzenden Gleichungen Dreieckbedingungen sind, bei deren Anwendung nur Additionen auszuführen sind. Die Werte  $J$  und  $s$  runde man gut ab. Dann verursachen auch die sehr einfachen Knotenpunktbedingungen nur wenig Rechenarbeit.

**90. Zahlenbeispiel.** Gesucht seien die Werte  $\rho$  für den in Fig. 246 dargestellten symmetrischen Parallelträger. Jeder Knotenpunkt der unteren Gurtung ist mit  $12 t$  belastet. Die Spannkraften  $S$ , Querschnittsinhalte  $F$ , Spannungen  $\sigma$ ,

Stab­längen  $s$ , Trägheitsmomente  $J$  und Abstände  $e' = e'' = e$  sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Stab	$S$	$F$	$\sigma = \frac{S}{F}$	$s$	$J$	$e$
$s_1$	-29	0,60	-48	36	0,09	0,85
$s_2$	+16	0,44	+36	40	0,04	0,65
$s_3$	+29	0,40	+73	36	0,03	0,50
$s_4$	-32	0,65	-49	40	0,40	1,20
$s_5$	-14	0,44	-32	36	0,04	0,65
$s_6$	+40	0,60	+67	40	0,08	0,80
$s_7$	+14	0,44	+32	36	0,04	0,65
$s_8$	-48	0,65	-74	40	0,40	1,20
$s_9$	0	0,44	0	36	0,04	0,65
$s_{10}$	+48	0,60	+80	40	0,08	0,80
	Tonnen	dm <sup>2</sup>	t/dm <sup>2</sup>	dm	dm <sup>4</sup>	dm

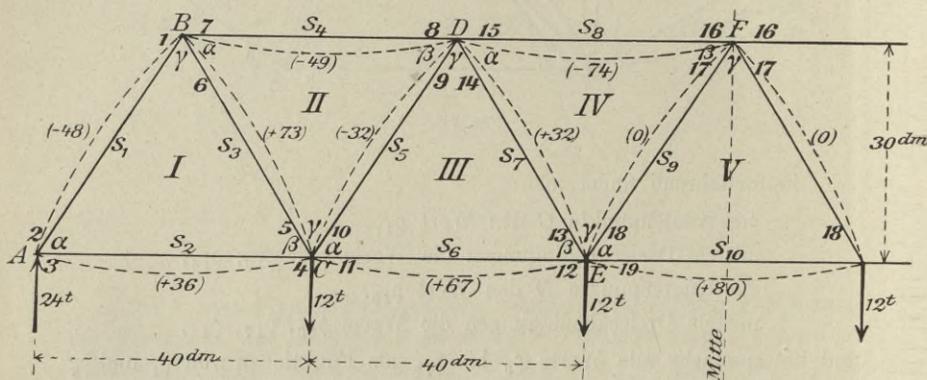


Fig. 246.

Wir beginnen mit der Berechnung der Winkeländerungen. Für die einzelnen Dreiecke nehmen wir abwechselnd die Verbiegungen nach Fig. 243 und 241 an. Für die Dreiecke I, III, V gelten die Gleichungen (11), für die Dreiecke II, IV die Gleichungen (10). Die an den Stäben stehenden eingeklammerten Zahlen geben die Spannungen  $\sigma$  an. Es ist  $\cotg \alpha = \cotg \beta = \frac{2}{3}$  und  $\cotg \gamma = \frac{5}{12}$ , mithin

für das Dreieck I:

$$6 E \Delta \alpha = 6 \left[ (+36 - 73) \frac{2}{3} + (-48 - 73) \frac{5}{12} \right] = -450$$

$$6 E \Delta \beta = 6 \left[ (+36 + 48) \frac{2}{3} + (+73 + 48) \frac{5}{12} \right] = +638$$

$$6 E \Delta \gamma = 6 \left[ (+73 - 36) \frac{2}{3} + (-48 - 36) \frac{2}{3} \right] = -188$$

$$\text{Probe: } 6 E (\Delta \alpha + \Delta \beta + \Delta \gamma) = 0;$$

für das Dreieck II:

$$6E\Delta\alpha = 6 \left[ (-32 + 49) \frac{2}{3} + (-32 - 73) \frac{5}{12} \right] = -194$$

$$6E\Delta\beta = 6 \left[ (+73 + 49) \frac{2}{3} + (+73 + 32) \frac{5}{12} \right] = +750$$

$$6E\Delta\gamma = 6 \left[ (-49 - 73) \frac{2}{3} + (-49 + 32) \frac{2}{3} \right] = -556$$

$$\text{Probe: } 6E(\Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma) = 0;$$

ebenso für die Dreiecke:

$$\text{III} \quad 6E\Delta\alpha = -20, \quad 6E\Delta\beta = +556, \quad 6E\Delta\gamma = -536;$$

$$\text{IV} \quad 6E\Delta\alpha = +216, \quad 6E\Delta\beta = +504, \quad 6E\Delta\gamma = -720;$$

$$\text{V} \quad 6E\Delta\alpha = +320, \quad 6E\Delta\beta = +320, \quad 6E\Delta\gamma = -640.$$

Nun stellen wir die Bedingungen für die Knotenpunkte zusammen. Es ergibt sich

$$\text{für Knoten A:} \quad \rho_3 \frac{J_2}{s_2} - \rho_2 \frac{J_1}{s_1} = 0, \text{ d. h.}$$

$$\rho_3 \frac{0,04}{40} = \rho_2 \frac{0,09}{36}, \text{ oder}$$

$$\rho_3 = 2,5\rho_2;$$

$$\text{für Knoten B:} \quad \rho_7 \frac{J_4}{s_4} - \rho_6 \frac{J_3}{s_3} + \rho_1 \frac{J_1}{s_1} = 0,$$

$$\rho_7 \frac{0,40}{40} - \rho_6 \frac{0,03}{36} + \rho_1 \frac{0,09}{36} = 0,$$

$$\rho_7 = \frac{1}{12} \rho_6 - \frac{1}{4} \rho_1;$$

$$\text{für Knoten C:} \quad \rho_{11} \frac{J_6}{s_6} - \rho_{10} \frac{J_5}{s_5} + \rho_5 \frac{J_3}{s_3} - \rho_4 \frac{J_2}{s_2} = 0,$$

$$\rho_{11} \frac{0,08}{40} - \rho_{10} \frac{0,04}{36} + \rho_5 \frac{0,03}{36} - \rho_4 \frac{0,04}{40} = 0,$$

$$\rho_{11} = \frac{10}{18} \rho_{10} + \frac{10}{24} \rho_5 + \frac{1}{2} \rho_4;$$

$$\text{für Knoten D:} \quad \rho_{15} \frac{J_8}{s_8} - \rho_{14} \frac{J_7}{s_7} + \rho_9 \frac{J_5}{s_5} - \rho_8 \frac{J_4}{s_4} = 0,$$

$$\rho_{15} \frac{0,40}{40} - \rho_{14} \frac{0,04}{36} + \rho_9 \frac{0,04}{36} - \rho_8 \frac{0,40}{40} = 0,$$

$$\rho_{15} = \frac{1}{9} (\rho_{14} - \rho_9) + \rho_8;$$

$$\text{für Knoten E:} \quad \rho_{19} \frac{J_{10}}{s_{10}} - \rho_{18} \frac{J_9}{s_9} + \rho_{13} \frac{J_7}{s_7} - \rho_{12} \frac{J_6}{s_6} = 0,$$

$$\rho_{19} \frac{0,08}{40} - \rho_{18} \frac{0,04}{36} + \rho_{13} \frac{0,04}{36} - \rho_{12} \frac{0,08}{40} = 0,$$

$$\rho_{19} = \frac{10}{18} (\rho_{18} - \rho_{13}) + \rho_{12}.$$

Die Darstellung der Werte  $\rho$  als Funktionen von  $\rho_1$  und  $\rho_2$  geschieht jetzt wie folgt. Man findet:

am Knoten A:

$$\rho_3 = 2,5\rho_2,$$

mittels der  
Bedingungen (6), (7),  
(9) für Dreieck I

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_4 = -450 - 2(\rho_3 + \rho_2) - \rho_1 \\ \quad = -\rho_1 - 7\rho_2 - 450 \\ \rho_5 = +638 + \rho_1 + \rho_2 - \rho_4 \\ \quad = 2\rho_1 + 8\rho_2 + 1088 \\ \rho_6 = -188 + \rho_3 + \rho_4 - \rho_1 \\ \quad = -2\rho_1 - 4,5\rho_2 - 638; \end{array} \right.$$

am Knoten B:

$$\rho_7 = -0,417\rho_1 - 0,375\rho_2 - 53,17,$$

Bedingungen für  
Dreieck II

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_8 = -194 - 2(\rho_7 + \rho_6) - \rho_5 \\ \quad = +2,834\rho_1 + 1,750\rho_2 + 100,34 \\ \rho_9 = +750 + \rho_5 + \rho_6 - \rho_8 \\ \quad = -2,834\rho_1 + 1,750\rho_2 + 1099,66 \\ \rho_{10} = -556 + \rho_8 + \rho_7 - \rho_5 \\ \quad = +0,417\rho_1 - 6,625\rho_2 - 1596,83; \end{array} \right.$$

am Knoten C:

$$\rho_{11} = -1,101\rho_1 - 10,514\rho_2 - 1565,46,$$

Bedingungen für  
Dreieck III

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{12} = -20 - 2(\rho_{11} + \rho_{10}) - \rho_9 \\ \quad = 4,202\rho_1 + 32,528\rho_2 + 5204,92 \\ \rho_{13} = 556 + \rho_9 + \rho_{10} - \rho_{12} \\ \quad = -6,619\rho_1 - 37,403\rho_2 - 5146,09 \\ \rho_{14} = -536 + \rho_{12} + \rho_{11} - \rho_9 \\ \quad = 5,935\rho_1 + 20,264\rho_2 + 2003,80; \end{array} \right.$$

am Knoten D:

$$\rho_{15} = +3,808\rho_1 + 3,807\rho_2 + 200,80,$$

Bedingungen für  
Dreieck IV

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{16} = +216 - 2(\rho_{15} + \rho_{14}) - \rho_{13} \\ \quad = -12,867\rho_1 - 10,739\rho_2 + 952,89 \\ \rho_{17} = +504 + \rho_{13} + \rho_{14} - \rho_{16} \\ \quad = +12,183\rho_1 - 6,400\rho_2 - 3591,18 \\ \rho_{18} = -720 + \rho_{16} + \rho_{15} - \rho_{13} \\ \quad = -2,440\rho_1 + 30,471\rho_2 + 5579,78; \end{array} \right.$$

am Knoten E:

$$\rho_{19} = 6,524\rho_1 + 70,236\rho_2 + 11163,74.$$

Nachdem nunmehr sämtliche  $\rho$  durch  $\rho_1$  und  $\rho_2$  ausgedrückt worden sind, werden für das Dreieck V die Gleichungen aufgestellt:

$$2\rho_{17} = 6E\Delta\gamma + 2\rho_{19},$$

$$\rho_{17} + \rho_{18} + \rho_{19} = 0.$$

Die erste Gleichung ist ebenso gebildet wie Gleich. (8); die zweite entspricht der Gleich. (5).

Man findet aus diesen Gleichungen:

$$\rho_1 = 198,487 \text{ und } \rho_2 = -173,700,$$

und hiermit sind alle Werte  $\rho$  bestimmt.

Für den Stab  $s_8$  erhält man z. B.

$$\rho_{15} = +3,808 \cdot 198,487 - 3,807 \cdot 173,700 + 200,80 = 295,$$

$$\rho_{16} = -12,867 \cdot 198,487 + 10,739 \cdot 173,700 + 952,89 = 264.$$

Da nun für diesen Stab  $e = 1,2 \text{ dm}$  und  $s = 40 \text{ dm}$  ist, so ist seine größte Biegun-  
spannung:

$$\sigma' = \pm 295 \frac{1,2}{40} = \pm 8,85 \text{ t/dm}^2.$$

Hierzu tritt  $\sigma = \frac{S}{F} = -\frac{48}{0,65} = -73,8$ ; es entsteht also im ganzen

$$\sigma = -73,8 - 8,85 = 82,7 \text{ t/dm}^2 = 827 \text{ kg/cm}^2.$$

Wir geben noch an:

$$\rho_{17} = + 12,183 \cdot 198,487 + 6,400 \cdot 173,700 - 3591,18 = - 61,33$$

$$\rho_{18} = - 2,440 \cdot 198,487 - 30,471 \cdot 173,700 + 5579,78 = - 197,34$$

$$\rho_{13} = - 6,619 \cdot 198,487 + 37,403 \cdot 173,700 - 5146,09 = + 37,02$$

$$\rho_{14} = + 5,935 \cdot 198,487 - 20,264 \cdot 173,700 + 2003,80 = - 338,04,$$

und benutzen diese Werte, um die Zuverlässigkeit unserer Zahlenberechnungen zu prüfen. Es muß (für Dreieck IV) sein:

$$\rho_{17} + 2(\rho_{18} + \rho_{13}) + \rho_{14} = 6E\Delta\gamma = - 720.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird mit den oben angegebenen  $\rho$ -Werten gleich  $- 720,01$ .

Will man sämtliche  $\rho$  haben, so berechne man in der vorstehenden Weise nur die aus den Knotenpunktbedingungen folgenden Werte  $\rho_3, \rho_7, \rho_{11}, \rho_{15}, \rho_{19}$ ; die übrigen findet man schneller mit Hilfe der Dreieckbedingungen. Man rechne also z. B.

$$\rho_{18} = + 216 - 2(\rho_{15} + \rho_{14}) - \rho_{13}.$$

Es besteht dann die Hauptrechnung in der Ausführung von Additionen.

Werden die auf die Form

$$\rho = A\rho_1 + B\rho_2 + \rho_0$$

gebrachten Werte  $\rho$  für mehrere Stellungen der Verkehrslast gesucht, so sind die Koeffizienten  $A$  und  $B$  von  $\rho_1$  und  $\rho_2$  unabhängig von den Winkeländerungen  $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma$ ; sie brauchen deshalb nur einmal berechnet zu werden, gelten für sämtliche Belastungszustände und lassen sich als diejenigen Werte  $\rho$  deuten, welche man erhält, wenn man alle Winkeländerungen gleich Null setzt und  $\rho_1$  bzw.  $\rho_2$  den Wert 1 zuschreibt (Zustände  $\rho_1 = 1$  und  $\rho_2 = 1$ ). Die Spannungen  $\rho_0$  stellen die für den Fall  $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0$  sich ergebenden Werte  $\rho$  dar; sie müssen für jeden neuen Belastungszustand berechnet werden.

Kennt man die Werte  $\rho$  eines in bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischen Trägers  $AB$  für die in Fig. 247 mit 1 und 2 bezeichneten gleichförmigen Belastungen, so kann man aus ihnen ohne weiteres die Werte  $\rho$  für die Belastungsfälle 3, 4, 5, 6, 7, 8 zusammensetzen.

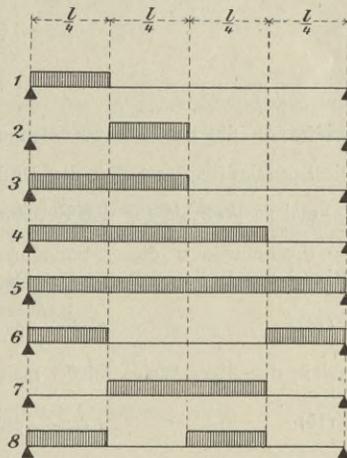


Fig. 247.

**91. Einflußlinien für die Werte  $\rho$  eines einfachen Balkens.** Wird eine genauere Berechnung der Grenzwerte der Spannungen  $\rho$  verlangt, so bedient man sich am zweckmäßigsten der Einflußlinien. Als Beispiel wählen wir den in Fig. 248 dargestellten Fachwerkbalken. Die Last 1 soll der Reihe nach in den Knotenpunkten I, II, III, IV der unteren Gurtung angreifen.

Man beginne mit der Berechnung der Werte  $\rho_3$  bis  $\rho_{27}$  für den Belastungszustand  $A=1$  und der Berechnung von  $\rho_{28}$ ,  $\rho_{27}$ ,  $\rho_{26}$ ,  $\dots$ ,  $\rho_4$  für den Zustand  $B=1$ . Der erste Zustand liefert für irgendeinen Wert  $\rho_m$ :

$$(12) \quad \rho_m = \rho_{am} + A_m' \rho_1 + A_m'' \rho_2,$$

der zweite liefert

$$(13) \quad \rho_m = \rho_{bm} + B_m' \rho_{29} + B_m'' \rho_{30}.$$

$$\rho_{am} \text{ ist der Wert von } \rho_m \text{ für } A=1, \quad \rho_1=0, \quad \rho_2=0$$

$$\rho_{bm} \text{ ist der Wert von } \rho_m \text{ für } B=1, \quad \rho_{29}=0, \quad \rho_{30}=0.$$

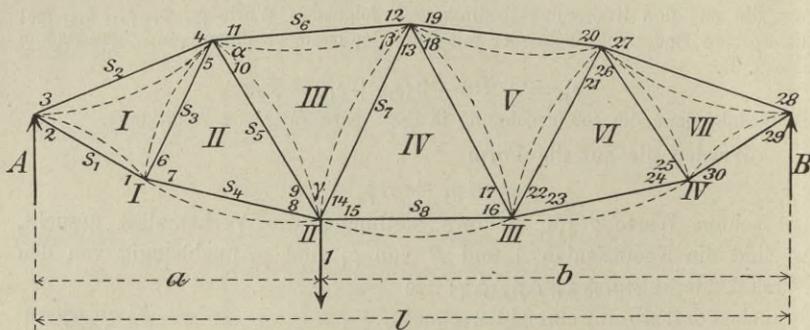


Fig. 248.

Greift nun die Last 1 im Knotenpunkte II an, so ist  $A=1 \frac{b}{l}$  und  $B=1 \frac{a}{l}$ . Die Spannkraften der Stäbe der Dreiecke I und II sind für diesen Belastungsfall  $\frac{b}{l}$ -mal so groß als für den Belastungsfall  $A=1$ , und das gleiche gilt auch für die Spannungen  $\sigma$  dieser Stäbe und die den  $\sigma$  proportionalen Änderungen der Winkel der Dreiecke I und II. Daraus folgt aber für  $\rho_3$  bis  $\rho_{10}$  die Formel

$$(14) \quad \rho_m = \frac{b}{l} \rho_{am} + A_m' \rho_1 + A_m'' \rho_2,$$

und in derselben Weise folgert man für  $\rho_{13}$  bis  $\rho_{28}$  die Formel

$$(15) \quad \rho_m = \frac{a}{l} \rho_{bm} + B_m' \rho_{29} + B_m'' \rho_{30}.$$

Die Koeffizienten  $A_m'$ ,  $A_m''$ ,  $B_m'$ ,  $B_m''$  sind von der Belastung unabhängig.

Da nun  $\rho_{11}$  aus der Gleichung

$$\rho_{11} \frac{J_6}{s_6} - \rho_{10} \frac{J_5}{s_5} + \rho_5 \frac{J_3}{s_3} - \rho_4 \frac{J_2}{s_2} = 0$$

hervorgeht, so darf es ebenfalls nach der Gleich. (14) berechnet werden und ebenso folgt, daß Gleich. (15) auch für  $\rho_{12}$  gilt.

Man erhält somit:

$$\rho_8 = \frac{b}{l} \rho_{a_8} + A_8' \rho_1 + A_8'' \rho_2$$

$$\rho_9 = \frac{b}{l} \rho_{a_9} + A_9' \rho_1 + A_9'' \rho_2$$

$$\rho_{10} = \frac{b}{l} \rho_{a_{10}} + A_{10}' \rho_1 + A_{10}'' \rho_2$$

$$\rho_{11} = \frac{b}{l} \rho_{a_{11}} + A_{11}' \rho_1 + A_{11}'' \rho_2,$$

und

$$\rho_{12} = \frac{a}{l} \rho_{b_{12}} + B_{12}' \rho_{29} + B_{12}'' \rho_{30}$$

$$\rho_{13} = \frac{a}{l} \rho_{b_{13}} + B_{13}' \rho_{29} + B_{13}'' \rho_{30}$$

$$\rho_{14} = \frac{a}{l} \rho_{b_{14}} + B_{14}' \rho_{29} + B_{14}'' \rho_{30}$$

$$\rho_{15} = \frac{a}{l} \rho_{b_{15}} + B_{15}' \rho_{29} + B_{15}'' \rho_{30}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die dem Dreieck III und dem Knoten II entsprechenden Bedingungen

$$(16) \quad \begin{cases} \rho_{10} + \rho_{11} = 6E\Delta\alpha_{III} + \rho_{13} + \rho_{14} \\ \rho_{12} + \rho_{13} = 6E\Delta\beta_{III} + \rho_9 + \rho_{10} \\ \rho_{14} + \rho_9 = 6E\Delta\gamma_{III} + \rho_{11} + \rho_{12} \\ \rho_{15} \frac{J_8}{s_8} - \rho_{14} \frac{J_7}{s_7} + \rho_9 \frac{J_5}{s_5} - \rho_8 \frac{J_4}{s_4} = 0 \end{cases}$$

erhält man vier Gleichungen zur Berechnung der Werte  $\rho_1, \rho_2, \rho_{29}, \rho_{30}$ , die einer im Knoten II angreifenden Last 1 entsprechen. Die in diese Gleichungen einzusetzenden Winkeländerungen  $\Delta\alpha_{III}, \Delta\beta_{III}, \Delta\gamma_{III}$  müssen für den vorliegenden Belastungsfall besonders berechnet werden.

Indem man nun die Last Eins der Reihe nach in den Knotenpunkten I, II, III, IV annimmt, gelangt man zunächst zu den Einflußlinien für  $\rho_1, \rho_2, \rho_{29}, \rho_{30}$  und ist dann imstande, mittels dieser Linien die Einflußlinie für ein beliebiges  $\rho_m$  zu ermitteln.

Handelt es sich z. B. um  $\rho_{18}$ , so benutze man, wenn die Last 1 beim Knoten III oder rechts hiervon liegt, die Gleichung

$$\rho_{18} = \frac{b}{l} \rho_{a_{18}} + A_{18}' \rho_1 + A_{18}'' \rho_2.$$

Liegt die Last bei II oder links von II, so gilt die Gleichung

$$\rho_{18} = \frac{a}{l} \rho_{b_{18}} + B_{18}' \rho_{29} + B_{18}'' \rho_{30}.$$

$a$  und  $b$  bedeuten die veränderlichen Abszissen der Einzellast.

**92. Graphische Ermittlung der Biegemomente.** Wir gehen wieder von dem Dreieck Fig. 241 aus, multiplizieren die Gleichungen (1) mit dem beliebig gewählten, konstanten Trägheitsmomente  $J_e$  und erhalten nach Division durch 3:

$$(17) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{3} \mathfrak{M}_1 + \frac{2}{3} \mathfrak{M}_2\right) l_1 + \left(\frac{2}{3} \mathfrak{M}_3 + \frac{1}{3} \mathfrak{M}_4\right) l_2 = 2 E J_c \Delta \alpha \\ \left(\frac{1}{3} \mathfrak{M}_3 + \frac{2}{3} \mathfrak{M}_4\right) l_2 + \left(\frac{2}{3} \mathfrak{M}_5 + \frac{1}{3} \mathfrak{M}_6\right) l_3 = 2 E J_c \Delta \beta \\ \left(\frac{1}{3} \mathfrak{M}_5 + \frac{2}{3} \mathfrak{M}_6\right) l_3 + \left(\frac{2}{3} \mathfrak{M}_1 + \frac{1}{3} \mathfrak{M}_2\right) l_1 = 2 E J_c \Delta \gamma, \end{cases}$$

wo

$$l_1 = s_1 \frac{J_c}{J_1}, \quad l_2 = s_2 \frac{J_c}{J_2}, \quad l_3 = s_3 \frac{J_c}{J_3}.$$

Nun reihen wir auf der Wagerechten  $CC$ , Fig. 249, die Strecken  $l_1, l_2, l_3$  aneinander, tragen in den Grenzpunkten  $C, A, B, C$  die Momente  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4, \mathfrak{M}_5, \mathfrak{M}_6$  als Ordinaten auf, verbinden deren Endpunkte paarweise durch die mit I, II, III bezeichneten Geraden und nennen die zwischen diesen Geraden und der  $CC$  gelegene Fläche die *Momentenfläche* des Dreiecks  $CABC$ .

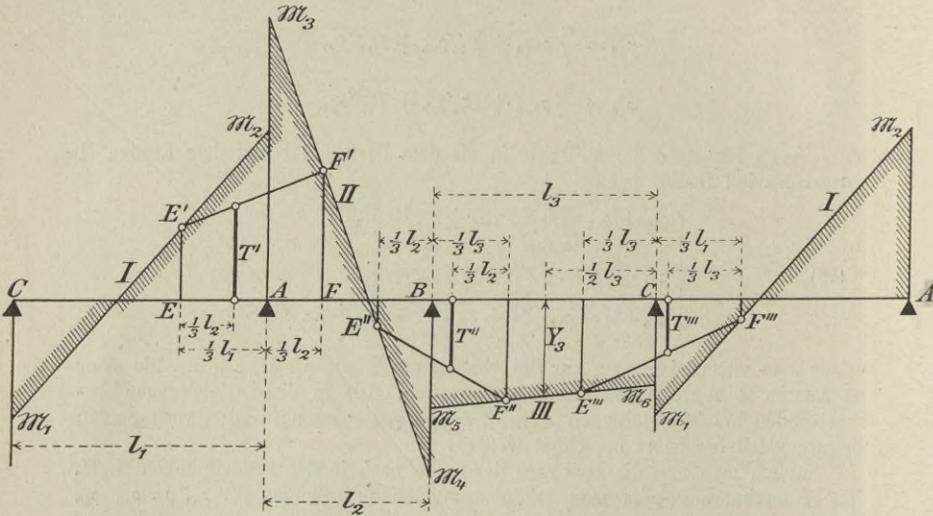


Fig. 249.

Die Verbindungsgerade  $E'F'$  der Punkte  $E'$  und  $F'$ , in denen die Geraden I und II von dem dem Punkte  $A$  benachbarten Drittelsenkrechten der Felder  $l_1$  und  $l_2$  getroffen werden, schneidet auf der zu  $A$  gehörigen verschränkten Stützensenkrechten\*) eine Strecke  $T'$  ab, für welche man leicht den Ausdruck findet:

$$T' = \frac{\left(\frac{1}{3} \mathfrak{M}_1 + \frac{2}{3} \mathfrak{M}_2\right) l_1 + \left(\frac{2}{3} \mathfrak{M}_3 + \frac{1}{3} \mathfrak{M}_4\right) l_2}{l_1 + l_2},$$

oder, wegen der ersten der Gleichungen (17),

$$(18) \quad T' = \frac{2 E J_c \Delta \alpha}{l_1 + l_2}.$$

\*) Wir bedienen uns der bei der zeichnerischen Untersuchung von Trägern auf mehreren Stützen geläufigen Benennungen.

Ebenso findet man, daß die in gleicher Weise eingetragene Gerade  $E''F''$  auf der zu  $B$  gehörigen verschränkten Stützensenkrechten die gegebene Strecke

$$T'' = \frac{2EJ_c \Delta \beta}{l_2 + l_3}$$

abschneiden muß. Kennt man also die drei Momente  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ , so kann man mit Hilfe die Geraden  $E'F'$  einen zweiten Punkt ( $F'$ ) der Geraden II bestimmen und das Moment  $\mathfrak{M}_4$  ermitteln und hierauf mittels der Geraden  $E''F''$  den Punkt  $F''$  der Geraden III finden. Einen zweiten Punkt von III erhält man in ähnlicher Weise, indem man die Wagerechte  $CC$  nach rechts um  $l_1$  verlängert, die Gerade I noch einmal zeichnet und von  $F'''$  aus die durch das Moment

$$T''' = \frac{2EJ_c \Delta \gamma}{l_3 + l_1}$$

bestimmte Gerade  $F'''E'''$  zieht. Man kann aber auch, um III festzulegen, die Bedingung  $\Delta \alpha + \Delta \beta + \Delta \gamma = 0$  benutzen; sie führt zu der Gleichung

$$(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) l_1 + (\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4) l_2 + (\mathfrak{M}_5 + \mathfrak{M}_6) l_3 = 0,$$

welche aussagt, daß der Inhalt der Momentenfläche des Dreiecks  $CABC$  gleich Null ist. Bezeichnet man also mit  $Y_1, Y_2, Y_3$  die Biegemomente für die Stabmitten, so erhält man zur Ermittlung von  $Y_3$  die Bedingung

$$Y_1 l_1 + Y_2 l_2 + Y_3 l_3 = 0.$$

Es leuchtet nun ein, daß man die Biegemomente  $\mathfrak{M}$  für die Stabenden in ähnlicher Weise bestimmen kann, wie vorhin die Werte  $\rho$ . Liegt z. B. das in Fig. 245 dargestellte Fachwerk vor, so nehme man zuerst  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  bekannt an, folgere aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knoten  $A$  das Moment  $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_2$ , ermittle zeichnerisch  $\mathfrak{M}_4, \mathfrak{M}_5, \mathfrak{M}_6$ , hierauf  $\mathfrak{M}_7 = \mathfrak{M}_5 - \mathfrak{M}_1$ , sodann wieder zeichnerisch  $\mathfrak{M}_8, \mathfrak{M}_9, \mathfrak{M}_{10}$  usw.

Da nun diese Momente auf die Form

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}' \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}'' \mathfrak{M}_2$$

gebracht werden können, wobei nur die  $\mathfrak{M}_0$  von den Winkeländerungen  $\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma$  abhängen, so ergibt sich das folgende Verfahren.

Man setze zuerst  $\mathfrak{M}_1 = 0$  und  $\mathfrak{M}_2 = 0$ , bestimme also diejenigen Momente, welche entstehen würden, wenn an den Enden des Stabes  $s_1$  Gelenke angeordnet wären.

Zweitens nehme man  $\mathfrak{M}_2 = 0$  und  $\mathfrak{M}_1 = 1$  an und setze alle Winkeländerungen, mithin auch alle Werte  $T$  gleich Null. Man erhält die Momente  $\mathfrak{M}'$ .

Drittens wird angenommen:  $\mathfrak{M}_1 = 0$  und  $\mathfrak{M}_2 = 1$  bei gleichzeitiger Nullsetzung aller Werte  $T$ . Es ergeben sich die Momente  $\mathfrak{M}''$ .

Schließlich werden die beiden Momente  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  mittels der Gleichgewichtsbedingungen  $\mathfrak{M}_{13} = \mathfrak{M}_{13} - \mathfrak{M}_{12}$  und  $\mathfrak{M}_{17} = \mathfrak{M}_{16}$  für die beiden letzten Knotenpunkte,  $E$  und  $F$  in Fig. 245, berechnet.

Zur Erzielung genügend genauer Zeichnungen kann für einzelne Dreiecke eine geringfügige Änderung des oben beschriebenen Verfahrens empfehlenswert werden. Für das Dreieck II des in Fig. 246 dargestellten Trägers, dessen Stäben  $s_3, s_4, s_5$  die Trägheitsmomente 0,03, 0,40, 0,04 entsprechen, wird mit  $J_c = 0,04$

$$l_3 = s_3 \frac{J_c}{J_3} = 36 \frac{0,04}{0,03} = 48 \text{ dm}, \quad l_4 = 40 \frac{0,04}{0,40} = 4 \text{ dm}, \quad l_5 = 36 \text{ dm}.$$

Die im Verhältnis zu  $l_3$  und  $l_5$  nur kleine Länge  $l_4$  führt leicht zu Ungenauigkeiten, und es empfiehlt sich,  $l_4$  mit einer runden Zahl, etwa mit 10, zu multiplizieren und  $l_4 = 40$  anzunehmen. Unsere Konstruktion liefert dann nicht

die an den Enden des Stabes  $s_4$  auftretenden Momente  $\mathfrak{M}_7$  und  $\mathfrak{M}_8$ , sondern die Momente  $\frac{1}{10} \mathfrak{M}_7$  und  $\frac{1}{10} \mathfrak{M}_8$ . Um dies einzusehen, beachte man, daß in den Gleichungen (17) die Produkte  $\mathfrak{M}l$  ersetzt werden dürfen durch die Produkte  $\frac{\mathfrak{M}}{\pi} \cdot \pi l$ , wo  $\pi$  eine beliebige Zahl bedeutet. Der Verfasser gibt dem in Nr. 88 entwickelten rechnerischen Verfahren den Vorzug.

**93. Näherungsverfahren.** Die einfachste Näherungsregel lautet: Man nehme nur den Knotenpunkt, für den man die Nebenspannungen berechnen will, steif an, alle übrigen hingegen gelenkig. Werden dann die Werte  $\rho$  für die den steifen Knoten bildenden Stabenden mit  $\rho_a$ ,

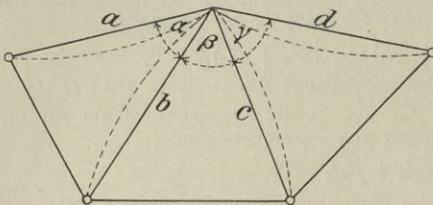


Fig. 250.

$\rho_b, \rho_c, \rho_a$  bezeichnet, Fig. 250, die Winkel mit  $\alpha, \beta, \gamma$ , so bestehen die Gleichungen:

$$2(\rho_a + \rho_b) = 6E\Delta\alpha$$

$$2(\rho_b + \rho_c) = 6E\Delta\beta$$

$$2(\rho_c + \rho_a) = 6E\Delta\gamma$$

und, wenn zur Abkürzung

$$\frac{J}{s} = \nu$$

gesetzt wird, außerdem noch die Bedingung

$$\rho_a \nu_a - \rho_b \nu_b + \rho_c \nu_c - \rho_a \nu_a = 0.$$

Setzt man in die letzte Gleichung die Werte ein:

$$\rho_c = 3E\Delta\gamma - \rho_a$$

$$\rho_b = 3E\Delta\beta - 3E\Delta\gamma + \rho_a$$

$$\rho_a = 3E\Delta\alpha - 3E\Delta\beta + 3E\Delta\gamma - \rho_a,$$

so liefert sie:

$$(19) \quad \rho_a = \frac{3E\Delta\alpha \cdot \nu_a - 3E\Delta\beta(\nu_a + \nu_b) + 3E\Delta\gamma(\nu_a + \nu_b + \nu_c)}{\nu_a + \nu_b + \nu_c + \nu_a},$$

und hierauf erhält man

$$(20) \quad \rho_c = 3E\Delta\gamma - \rho_a, \quad \rho_b = 3E\Delta\beta - \rho_c, \quad \rho_a = 3E\Delta\alpha - \rho_b.$$

Wendet man diese Gleichungen auf den Knotenpunkt  $D$  des in Fig. 246 dargestellten Trägers an, so hat man für die vier Stäbe  $s_4, s_5, s_7, s_8$  der Reihe nach zu setzen:

$$\nu = \frac{J}{s} = \frac{0,40}{40} = 0,010, \quad \frac{0,04}{36} = 0,001, \quad 0,001, \quad 0,010.$$

Die mit  $6E$  multiplizierten Winkeländerungen sind

$$+ 750 \quad - 536 \quad + 216$$

und man erhält daher (mit  $\Sigma \nu = 0,022$ )

$$\rho_a = \rho_{15} = \frac{750 \cdot 0,010 + 536 \cdot 0,011 + 216 \cdot 0,012}{2 \cdot 0,022} = 363$$

$$\rho_c = \rho_{14} = \frac{216}{2} - 363 = -255$$

$$\rho_b = \rho_9 = \frac{-536}{2} + 255 = -13$$

$$\rho_a = \rho_8 = \frac{750}{2} + 13 = 388.$$

Unsere frühere Rechnung lieferte

$$\rho_{15} = 295, \quad \rho_{14} = -338, \quad \rho_9 = 233, \quad \rho_8 = 358.$$

In Anbetracht der außerordentlichen Kürze des Näherungsverfahrens darf das Ergebnis, allerdings nur für die Gurtungen, noch als befriedigend bezeichnet werden. Jedenfalls ist eine derartige Schätzung der Nebenspannungen immer noch besser, als die völlige Nichtbeachtung dieser bisweilen recht erheblichen Zuschläge zu den gewöhnlich errechneten Beanspruchungen.

§ 19.

**Einfluß der Momente  $\mathcal{M}$  auf die Spannkkräfte in den Stäben.**

**94. Spannkraft in einem Gurtstabe.** Infolge der starren Knotenverbindungen möge die für gelenkartige Knoten berechnete Spannkraft  $S_m$  übergehen in  $S_m + \Delta S_m$ .

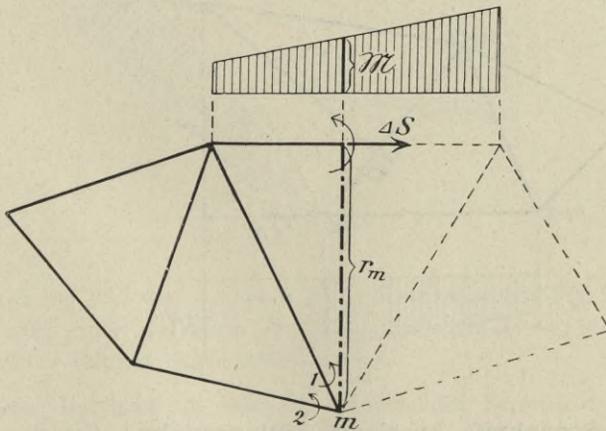


Fig. 251.

Wir führen durch das Fachwerk einen Schnitt, unmittelbar links neben dem Knotenpunkte  $m$  und rechtwinklig zu dem fraglichen Gurt-  
Müller-Breslau, Graphische Statik. II. 2. 20

stabe, Fig. 251, und untersuchen das Gleichgewicht des Fachwerkabschnittes links von  $m$ . Den Punkt  $m$  wählen wir zum Drehpunkte. In der aufzustellenden Momentengleichung kommen dann außer den äußeren Kräften nur vor: die Spannkraft  $S_m + \Delta S_m$  des durchgeschnittenen Gurtstabes und die von den starren Knoten herrührenden Momente  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$ . Die beiden letzteren entsprechen den mit 1 und 2 bezeichneten Stabenden; das Moment  $\mathfrak{M}$  für die Schnittstelle des fraglichen Gurtstabes entnehmen wir der Momentenlinie. Die zu  $\mathfrak{M}$  gehörige Querkraft geht durch den Drehpunkt. Werden für die vorliegende Untersuchung — in Übereinstimmung mit der beim einfachen Balken üblichen Annahme — die an den rechten Enden der Stäbe oder Stababschnitte angreifenden Momente positiv genommen, sobald sie links drehen, und wird beachtet, daß das Moment  $S_m r_m$  und das Moment der äußeren Kräfte sich gegenseitig aufheben, weil ja die  $S$  mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind, so ergibt sich die Momentengleichung

$$\Delta S_m r_m - \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = 0;$$

sie liefert

$$(1) \quad \Delta S_m = \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{r_m}.$$

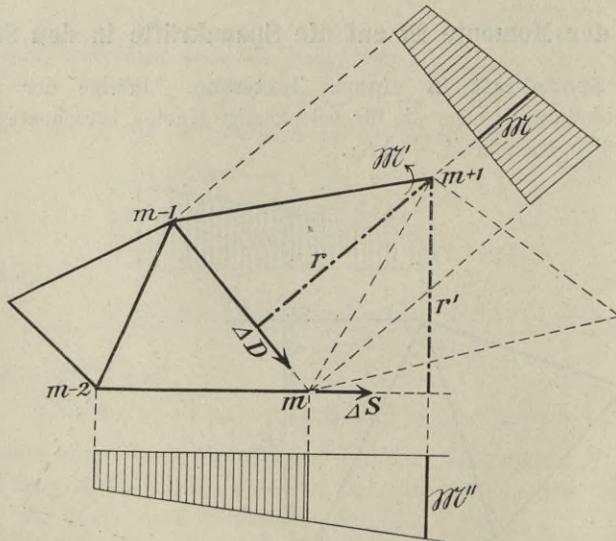


Fig. 252.

**95. Spannkraft in einem Füllungsstabe.** Gesucht sei die Zusatzspannkraft  $\Delta D$  für die Diagonale  $(m-1) - m$  in Fig. 252. Es wird durch das Fachwerk rechtwinklig zur Diagonale  $(m-1) - m$  und durch die rechten Enden der Gurtstäbe  $(m-2) - m$  und  $(m-1) - (m+1)$

ein Schnitt geführt und der Punkt  $m + 1$  zum Drehpunkte gewählt. Bedeutet dann  $\Delta S$  die Änderung der Spannkraft des Gurtstabes  $(m - 2) - m$ ,  $r'$  ihren Hebelarm und  $\mathfrak{M}'$  das Biegemoment am rechten Ende des Stabes  $(m - 1) - (m + 1)$ , so ist mit der aus der Figur zu ersehenden Bezeichnung  $\mathfrak{M}''$ :

$$\Delta D r + \Delta S r' + \mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = 0.$$

Hieraus folgt

$$(2) \quad \Delta D = \frac{-\Delta S r' - \mathfrak{M} - \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{r}.$$

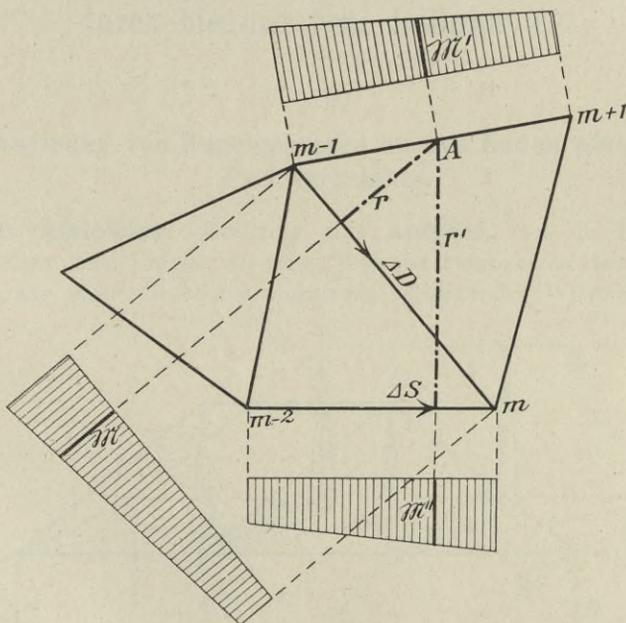


Fig. 253.

Die Fig. 252 darf man auch durch die allgemeinere Fig. 253 ersetzen. Der Punkt  $A$  darf auf einem der beiden Gurtstäbe  $(m - 1) - (m + 1)$  oder  $(m - 2) - m$  beliebig angenommen werden.

96. Hat man mit Hilfe der vorstehenden Formeln die zuerst für gelenkartige Knoten berechneten Spannkräfte verbessert, so kann man die genaueren Längenänderungen  $\Delta s$  und Winkeländerungen  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \beta$ ,  $\Delta \gamma$  ermitteln und schließlich auch die Momente  $\mathfrak{M}$  von neuem berechnen. Wichtiger als die Gewinnung genauerer Momente dürfte die mittels der

vorstehenden Untersuchung durchführbare Berücksichtigung der steifen Knoten bei der Berechnung der Durchbiegungen der Fachwerkträger sowie die Erforschung des Einflusses der starren Knoten auf die statisch unbestimmten Größen  $X$  der Fachwerke mit überzähligen Stäben und Stützen sein. Wir müssen uns aber in diesem Buche mit einem Hinweis auf diese Aufgaben begnügen.

#### IV. Abschnitt.

### Sicherung der oberen Gurtung einer Trogbrücke durch biegegeste Halbrahmen.

#### § 20.

#### Voraussetzung von Kugelfelenken an den Enden eines jeden Fachwerkstabes.

96. Einleitung. Stellung der Aufgabe. Ist die Höhe der Hauptträger einer Brücke mit unten liegender Fahrbahn so klein, daß die Anbringung einer die oberen Gurtungen verbindenden Windverstrebung

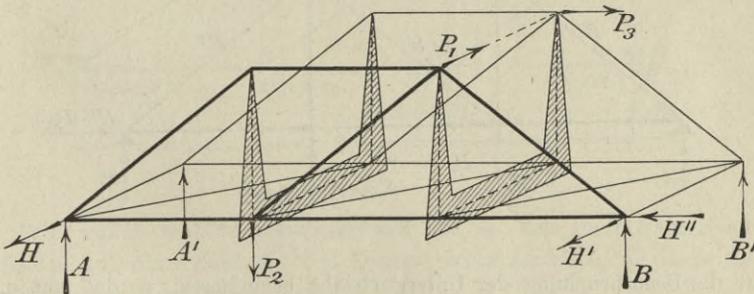


Fig. 254.

nicht möglich ist, so müssen die Hauptträger durch biegegeste Halbrahmen miteinander verbunden werden. Fig. 254 zeigt ein solches Bauwerk, eine sogenannte *Trogbrücke*, in isometrischer Darstellung; es besteht aus 19 Stäben und zwei vollwandigen steifen Scheiben, die man sich auch nach Fig. 255 durch Fachwerke aus je fünf Stäben ersetzt denken darf, wonach — bei der durch die Pfeile  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $H$ ,  $H'$ ,  $H''$  beschriebenen Stützung — die Anzahl der Fachwerkstäbe und Stützkkräfte zusammen  $19 + 10 + 7 = 36$  beträgt. Die Anzahl der Knotenpunkte ist 12; es stehen also  $3 \cdot 12 = 36$  Gleichgewichtsbedingungen

zur Verfügung. Die Umwandlung in ein reines Fachwerk erleichtert öfter die Berechnung der Stabkräfte; man findet z. B. für die in Fig. 254 und 255 angenommene Belastung mit Kräften  $P_1, P_2, P_3$  sofort die Spannkkräfte

$$S_1 = -P_1, \quad S_2 = +\frac{P_1}{\cos \varphi}, \quad S_3 = 0, \quad S_4 = 0$$

und erkennt, daß der vordere Hauptträger nach Fig. 256 belastet wird, der hintere nach Fig. 257. In jeder der unteren Gurtungen dieser Träger greifen drei wagerechte Kräfte an, deren Summe  $P_3$  ist und die

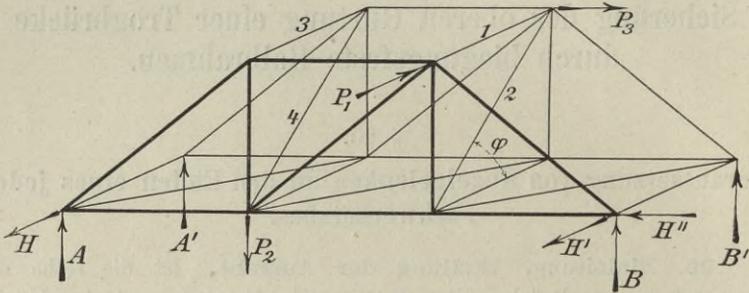


Fig. 255.

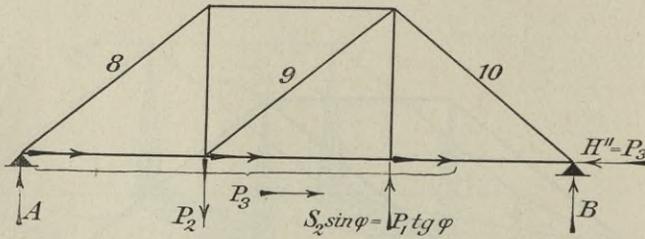


Fig. 256.

nur die Beanspruchung der Untergurtstäbe beeinflussen, so daß man u. a. die Spannkkräfte  $S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}$  angeben kann, ohne jene drei wagerechten Kräfte zu kennen. Damit sind sämtliche auf den Windträger, Fig 258, wirkenden Kräfte gegeben, und es lassen sich jetzt die Spannkkräfte in den Windstreben und den Gurtungen  $AB$  und  $A'B'$  ermitteln.

Die Ergebnisse dieser Rechnung bleiben auch nach Wiederherstellung der vollwandigen Scheiben für die Stabkräfte des in Fig. 254 abgebildeten Tragwerks gültig; die an jenen Scheiben angreifenden Kräfte sind nunmehr bekannt.

Hervorzuheben ist, daß an einer ebenen Scheibe äußere Kräfte, die nicht in der Scheibenebene liegen, nur in den Punkten angreifen dürfen,

von denen Stäbe ausgehen, deren Achsen außerhalb der Scheibenebene liegen. Bei den gebräuchlichen Anordnungen der Balkenbrücken, deren Querträger als lotrechte Scheiben aufgefaßt werden, wird diese Bedingung nicht immer erfüllt. Es gibt aber Fälle, in denen die seitliche Versteifung der Querträger

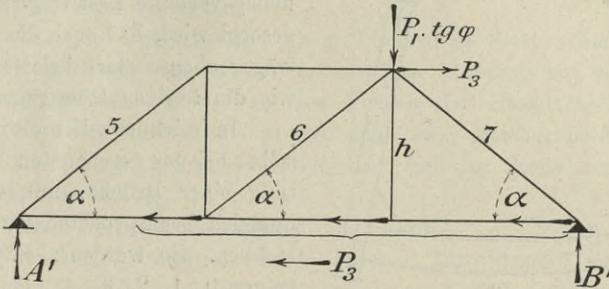


Fig. 257.

durch wagerechte Fachwerke ratsam ist, um größere wagerechte Kräfte zu den Knotenpunkten der Hauptträger hinüberzuleiten. Ein Beispiel zeigt der in Fig. 259 dargestellte Grundriß einer eingeleisigen Balkenbrücke.

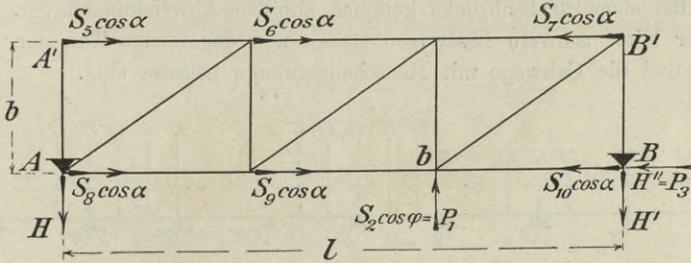


Fig. 258.

Wir wollen nun voraussetzen, daß alle an den Hauptträgern angreifenden äußeren Kräfte mit den Ebenen zusammenfallen, in denen die Stabachsen der Hauptträger liegen.

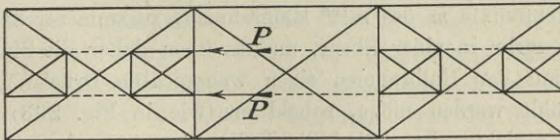


Fig. 259.

Die Querträger seien durch lotrechte Lasten auf Biegung beansprucht. Ihre Endquerschnitte A und B (Fig. 263) drehen sich um gewisse Winkel und um dieselben Winkel drehen sich auch die mit den Querträgern durch steife Ecken verbundenen Vertikalen.

Werden alle Querträger in gleicher Weise belastet, so bleiben die Hauptträger *eben*, Fig. 260. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn die Fahrbahn oder der Gehweg einer Brücke mit gleichlangen Feldern und gleichstarken Querträgern eine ganz gleichmäßig verteilte Last trägt und dafür gesorgt wird, daß auch die Endquerträger ebenso stark belastet werden, wie die übrigen Querträger.

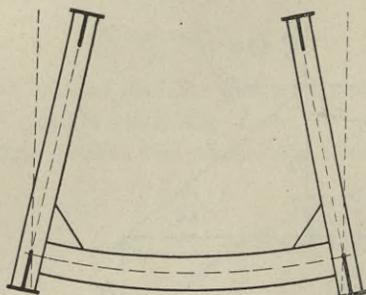


Fig. 260.

In Wirklichkeit muß man aber, selbst bei der sogenannten Vollbelastung einer Brücke, mit oft recht ungleich beanspruchten Querträgern rechnen. So werden z. B. die Querträger 0, 1, 2, 3, . . . einer Eisenbahnbrücke von 45 m Stützweite bei der in Fig. 261 angegebenen Zugstellung — außer durch das Eigengewicht der Fahrbahn — belastet mit:

17,3 17,3 21,7 30,3 21,3 51 17 34 45,3 18,7 26 Tonnen.

Bei einer Straßenbrücke kommen ähnliche Abweichungen vor, wenn in der Mitte schwere Lastwagen stehen und der übrige Teil der Fahrbahn und die Gehwege mit Menschengedränge belastet sind.

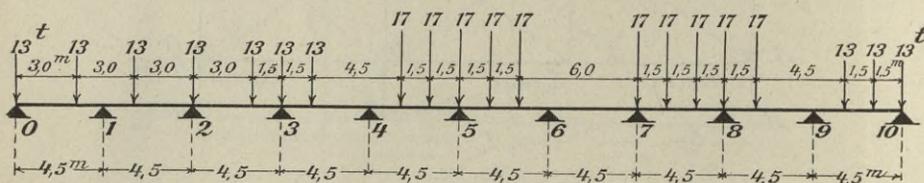


Fig. 261.

Die Vertikalen eines und desselben Hauptträgers drehen sich daher im allgemeinen um verschieden große Winkel  $\tau$ . Die Achsen der im oberen Knotenpunkte  $m$  des  $m^{\text{ten}}$  Halbrahmens zusammentreffenden Stäbe liegen nicht mehr in einer Ebene, und es üben daher die Stabkräfte im Punkte  $m$  auf den Halbrahmen einen wagerechten Druck  $X_m$  aus, der positiv gezählt werden möge, sobald er (wie in Fig. 263) von außen nach innen gerichtet ist. Sind die Halbrahmen zu schwach, so weicht die obere Gurtung seitlich aus. Handelt es sich, wie bei einer einfachen Balkenbrücke, um eine ausschließlich auf Druck beanspruchte Gurtung, so spricht man im Falle des Versagens der Halbrahmen von einer ungenügenden Knickfestigkeit der Gurtung. Es kann aber ein derartiges seitliches Ausweichen auch bei einem Zuggurt vorkommen, beispielsweise

über einer Mittelstütze eines auf mehreren Stützen ruhenden Balkens; hier können die Unterschiede zwischen den Winkeln  $\tau$  sogar besonders groß ausfallen, weil die Gurtkräfte — und von diesen hängen die Seitendrüce  $X_m$  hauptsächlich ab — nicht mehr bei voller Belastung der ganzen Brücke ihren größten Wert annehmen.

Die folgende Untersuchung einer Trogbücke setzt voraus, es sei Form und Belastung der Brücke symmetrisch in bezug auf eine durch die Querträgermitten parallel zu den Ebenen der Hauptträger gelegte Ebene. An jedem Halbrahmen greifen dann zwei gleichgroße Kräfte  $X_m$  an und die Knotenpunkte  $m$  verschieben sich im Sinne der  $X_m$  um gleichgroße Strecken  $\delta_m$ .

Ist diese Symmetriebedingung nicht erfüllt, so biegen sich die beiden Hauptträger ungleich stark durch. Die hiermit verbundene Drehung der Halbrahmen bildet dann eine neue Ursache, die Achsen der in einem Punkte  $m$  angreifenden Stäbe aus der lotrechten Ebene herauszudrängen.

**97. Ermittlung der Durchbiegungen  $\delta_m$  und Seitendrüce  $X_m$ .**

Die untere Gurtung sei wagerecht, Fig. 262. Es treten nur lotrechte Lasten auf. Der genau in der Höhe der unteren Gurtung angenommene

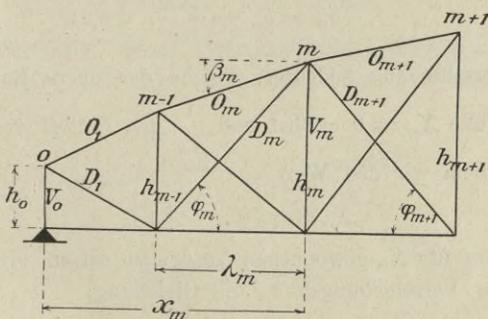


Fig. 262.

Windverband ist spannungslos. Die Verschiebungen der Untergurt-Knotenpunkte rechtwinklig zur Ebene des Hauptträgers sind Null.

Infolge der Verschiebungen  $\delta$  der Knotenpunkte der oberen Gurtung neigt sich der  $m^{\text{te}}$  Stab der oberen Gurtung gegen die lotrechte Ebene der Hauptträger um einen Winkel, dessen Sinus gleich  $(\delta_m - \delta_{m-1}) : o_m$  ist, wo  $o_m$  die Länge des Stabes bedeutet. Wird also die Spannkraft  $O_m$  als *Druck* positiv gerechnet und zur Abkürzung die Bezeichnung eingeführt:

$$(1) \quad z_m = \frac{O_m}{o_m} = \frac{O_m \cos \beta_m}{\lambda_m},$$

so ist der Beitrag von  $O_m$  zu  $X_m$  gleich  $z_m (\delta_m - \delta_{m-1})$  und der von  $O_{m+1}$  gleich  $z_{m+1} (\delta_m - \delta_{m+1})$ . Die Spannkkräfte  $D_m V_m D_{m+1}$  liefern, wenn der in  $m$  angreifende Teil der ständigen Belastung vernachlässigt wird, den Beitrag:

$$\begin{aligned} V_m \frac{\delta_m}{h_m} + D_m \frac{\delta_m}{d_m} + D_{m+1} \frac{\delta_m}{d_{m+1}} &= \frac{\delta_m}{h_m} (V_m + D_m \sin \varphi_m + D_{m+1} \sin \varphi_{m+1}) \\ &= \frac{\delta_m}{h_m} (O_m \sin \beta_m - O_{m+1} \sin \beta_{m+1}) \\ &= \frac{\delta_m}{h_m} [z_m (h_m - h_{m-1}) - z_{m+1} (h_{m+1} - h_m)]. \end{aligned}$$

Im ganzen entsteht also:

$$\begin{aligned} X_m &= z_m (\delta_m - \delta_{m-1}) - z_{m+1} (\delta_{m+1} - \delta_m) \\ &\quad - \frac{\delta_m}{h_m} [z_m (h_m - h_{m-1}) - z_{m+1} (h_{m+1} - h_m)], \\ (2) \quad X_m &= -z_m \delta_{m-1} + \left( z_m \frac{h_{m-1}}{h_m} + z_{m+1} \frac{h_{m+1}}{h_m} \right) \delta_m + z_{m+1} \delta_{m+1}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$(3) \quad \delta_m = \delta_m' + \frac{X_m}{v_m},$$

wo  $\delta_m'$  die Verschiebung bedeutet, welche der obere Endpunkt  $m$  des Rahmens im Falle  $X_m = 0$  erfährt und  $\frac{1}{v_m}$  den Einfluß von  $X_m = 1$  auf  $\delta_m$  angibt. Indem wir den Wert

$$(4) \quad X_m = v_m (\delta_m - \delta_m')$$

gleich dem oben für  $X_m$  gewonnenen Ausdrucke setzen, erhalten wir zur Berechnung der Verschiebungen  $\delta_m$  die Gleichung:

$$(5) \quad z_m \delta_{m-1} + \left( -z_m \frac{h_{m-1}}{h_m} + v_m - z_{m+1} \frac{h_{m+1}}{h_m} \right) \delta_m + z_{m+1} \delta_{m+1} = v_m \delta_m'.$$

Für den oberen Knotenpunkt 0 eines Endständers (Fig. 262) ergibt sich

$$(6) \quad X_0 = -O_1 \frac{\delta_1 - \delta_0}{o_1} - V_0 \frac{\delta_0}{h_0} - D_1 \frac{\delta_0}{d_1}$$

und wenn

$$V_0 + D_1 \sin \varphi_1 = -O_1 \sin \beta_1 = -z_1 (h_1 - h_0)$$

gesetzt wird,

$$X_0 = +z_1 \delta_0 \frac{h_1}{h_0} - z_1 \delta_1.$$

Es gilt also für den Knotenpunkt 0 die Gleichung:

$$(7) \quad \left( v_0 - z_1 \frac{h_1}{h_0} \right) \delta_0 + z_1 \delta_1 = v_0 \delta_0'$$

und für den letzten Knotenpunkt ( $n$ ):

$$(8) \quad z_n \delta_{n-1} + \left( -z_n \frac{h_{n-1}}{h_n} + v_n \right) \delta_n = v_n \delta_n'$$

Die Verschiebungen  $\delta_m'$  und  $1/v_m$  können mittels der im § 2 beschriebenen zeichnerischen Verfahren bestimmt werden. Der allgemeine rechnerische Weg ist der folgende:

Das Biegemoment für einen Querschnitt des Querträgers ist (Fig. 263)

$$M = M_0 - X_m h_m,$$

wo  $M_0$  den Einfluß der Lasten  $P$  bezeichnet. Bedeutet  $J_q$  das im allgemeinen veränderlich anzunehmende Trägheitsmoment des Querschnitts des Querträgers, so ist der Neigungswinkel der elastischen Linie des Querträgers am Ende  $A$

$$\tau_m = \int_0^{\frac{1}{2}c} \frac{M_0 dx}{E J_q} + X_m h_m \int_0^{\frac{1}{2}c} \frac{dx}{E J_q}.$$

Für die Vertikale, deren Querschnittsträgheitsmoment  $J_v$  sei, ist  $M = Xx$ . Es ergibt sich daher mit den in Fig. 263 angegebenen Bezeichnungen

$$\gamma_m = \int_0^{h_m} \frac{Mx dx}{E J_v} = X_m \int_0^{h_m} \frac{x^2 dx}{E J_v}.$$

Nun ist

$$\delta_m = \gamma_m + h_m \tau_m$$

also

$$\delta_m = X_m \left( \int_0^{h_m} \frac{x^2 dx}{E J_v} + h_m^2 \int_0^{\frac{1}{2}c} \frac{dx}{E J_q} \right) + h_m \int_0^{\frac{1}{2}c} \frac{M_0 dx}{E J_q}.$$

Dieser Ausdruck besitzt die Form

$$\delta_m = \delta_m' + \frac{X_m}{v_m},$$

wo

$$(9) \quad \delta_m' = h_m \int_0^{\frac{1}{2}c} \frac{M_0 dx}{E J_q} \text{ und}$$

$$(10) \quad v_m = \frac{1}{h_m^2 \int_0^{\frac{1}{2}c} \frac{dx}{EJ_q} + \int_0^{h_m} \frac{x^2 dx}{EJ_v}}$$

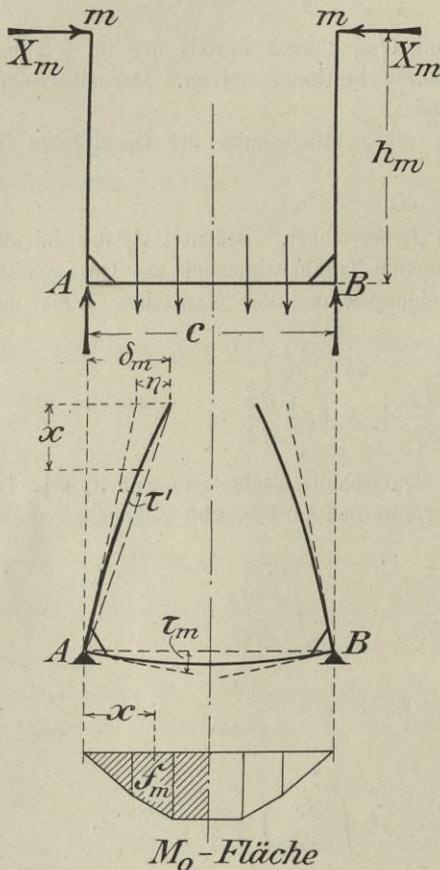


Fig. 263.

Die Integrale darf man stets durch Summen ersetzen. Man darf z. B. schreiben

$$\delta_m' = h_m \sum_0^{\frac{1}{2}c} \frac{M_0 \Delta x}{EJ_q}$$

Sind  $J_q$  und  $J_v$  unveränderlich und bezeichnet  $\mathfrak{F}_m$  den Inhalt der Hälfte der  $M_0$ -Fläche, so erhält man

$$(11) \quad \delta_m' = \frac{\mathfrak{F}_m h_m}{EJ_q}$$

$$(12) \quad v_m = \frac{1}{\frac{h_m^2 c}{2EJ_q} + \frac{h_m^3}{3EJ_v}}$$

Wird eine schlanke Vertikale auf Druck beansprucht, so muß der Einfluß des Druckes  $V_m$  auf den Winkel  $\tau'$  (Fig. 263) berücksichtigt werden. Das Biegemoment ist gleich Null für  $x=0$  und gleich  $X_m h_m$  für  $x=h_m$ . Mit der Bezeichnung

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{V_m h_m^2}{EJ_v}}$$

ist daher nach § 17, Gleich. (36) und (37):

$$(13) \quad \tau' = \frac{X_m v_m'}{V_m}$$

wo

$$v_m' = 1 - \alpha_m \cotg \alpha_m$$

Man findet

$$\delta_m = h_m \tau_m + h_m \tau' = \frac{\delta_m h_m}{E J_q} + X_m \left( \frac{h_m^2 c}{2 E J_q} + \frac{h_m v_m'}{V_m} \right).$$

An die Stelle von Gleichung (12) tritt also zur Berechnung von  $v_m$  die Gleichung

$$v_m = \frac{1}{\frac{h_m^2 c}{2 E J_q} + \frac{h_m v_m'}{V_m}}.$$

Bislang haben wir vorausgesetzt, die Achse des Querträgers falle mit der Ebene des unteren Windverbandes zusammen, auch haben wir die Höhe des Querträgers bei der Bestimmung der freien Länge der

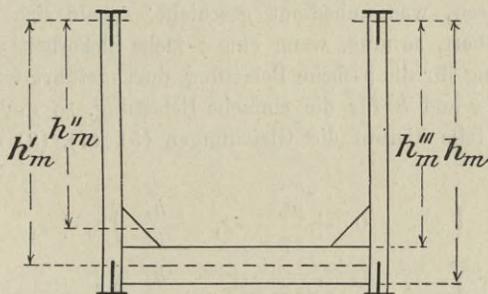


Fig. 264.

Vertikale vernachlässigt. Liegt der in Fig. 264 dargestellte Fall vor, so nennen wir

$h_m'$  den Abstand der Schwerachse der oberen Gurtung von der Schwerachse des Querträgers,

$h_m''$  die freie Länge der Vertikale, bei Anwendung von Eckblechen unter Hinzurechnung der halben Höhe dieser Bleche,

und rechnen mit

$$(14) \quad v_m = \frac{1}{\frac{h_m'^2 c}{2 E J_q} + \frac{h_m''^3}{3 E J_v}},$$

beziehungsweise mit

$$(15) \quad v_m = \frac{1}{\frac{h_m'^2 c}{2 E J_q} + \frac{h_m'' v_m'}{V_m}},$$

wo

$$(16) \quad v_m' = 1 - \alpha \cotg \alpha \quad \text{und} \quad \alpha = \sqrt{\frac{V_m h_m''^2}{E J_v}}.$$



Bildet man nun das Produkt  $h_0 h_1 h_2 h_3 \Delta$ , indem man die Zeilen der Determinante  $\Delta$  der Reihe nach mit  $h_0 h_1 h_2 h_3$  multipliziert, so erhält man eine Determinante, deren Spaltensummen gleich

$$(19) \quad \frac{v_0 h_0}{\rho}, \quad \frac{v_1 h_1}{\rho}, \quad \frac{v_2 h_2}{\rho}, \quad \frac{v_3 h_3}{\rho}$$

sind. Der Wert einer Determinante bleibt aber ungeändert, wenn man irgendeine Zeile durch eine Zeile ersetzt, deren Glieder gleich den entsprechenden Spaltensummen sind. Ersetzen wir also die zweite Zeile der Determinante  $h_0 h_1 h_2 h_3 \Delta$  durch die Zeile (19) und teilen wir sie dann durch  $h_0 h_2 h_3$ , indem wir die Zeilen 1, 3, 4 der Reihe nach durch  $h_0, h_2, h_3$  teilen, so erhalten wir, da die Glieder der Zeile (19) den gemeinsamen Teiler  $1 : \rho$  besitzen

$$h_1 \Delta = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \frac{v_0}{\rho} - z_1 \frac{h_1}{h_0} & z_1 & & 0 & & 0 \\ & v_0 h_0 & v_1 h_1 & & v_2 h_2 & & v_3 h_3 \\ & 0 & z_2 & -z_2 \frac{h_1}{h_2} + \frac{v_2}{\rho} - z_3 \frac{h_3}{h_2} & & z_3 & \\ & 0 & 0 & & z_3 & & -z_3 \frac{h_2}{h_3} + \frac{v_3}{\rho} \end{vmatrix}$$

Vertauschen wir schließlich noch die Spalten mit den Zeilen, was bekanntlich geschehen darf, ohne daß sich der Wert der Determinante ändert, so entsteht die Gleichung

$$h_1 \rho \Delta = \begin{vmatrix} \frac{v_0}{\rho} - z_1 \frac{h_1}{h_0} & v_0 h_0 & & 0 & & 0 \\ z_1 & v_1 h_1 & z_2 & & & 0 \\ 0 & v_2 h_2 & -z_2 \frac{h_1}{h_2} + \frac{v_2}{\rho} - z_3 \frac{h_3}{h_2} & & z_3 & z_3 \\ 0 & v_3 h_3 & & z_3 & & -z_3 \frac{h_2}{h_3} + \frac{v_3}{\rho} \end{vmatrix}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung geht über in die Zählerdeterminante des Wertes  $\delta_1$ , sobald die (hier wagerecht geschriebene) Spalte

$$v_0 h_0 \quad v_1 h_1 \quad v_2 h_2 \quad v_3 h_3$$

ersetzt wird durch die Spalte:

$$v_0 \delta_0' \quad v_1 \delta_1' \quad v_2 \delta_2' \quad v_3 \delta_3',$$

welche wir umformen in

$$(21) \quad v_0 h_0 \tau_{00} \quad v_1 h_1 \tau_{01} \quad v_2 h_2 \tau_{02} \quad v_3 h_3 \tau_{03},$$

wo

$$\tau_{0m} = \frac{\delta_m}{EJ_q} \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

den Neigungswinkel des Endquerschnittes des Querträgers infolge der Lasten  $P$  bedeutet.

Nehmen wir jetzt an, daß die Drehungswinkel  $\tau$  der Endquerschnitte sämtlicher Querträger, auch der in der Regel schwächer belasteten Querträger 0 und  $n$  gleichgroß sind, so besitzt die Spalte (21) den gemeinsamen Teiler  $\tau_0$ , und wir erhalten  $\delta_1 = \varrho \tau_0 h_1$  und ganz allgemein  $\delta_m = \varrho \tau_0 h_m$ . Die Hauptträger bleiben also eben und neigen sich um  $\tau_0 = \frac{\delta}{EJ_q}$ . Fehlen die Endvertikalen, so ist dieser Zustand auch dann möglich, wenn die Endquerträger eine andere Belastung erfahren, als die übrigen Querträger. Es genügt aber die geringste Änderung der Belastung eines einzigen Querträgers, um für  $\delta_m$  einen Ausdruck

$$\delta_m = \frac{\Delta_m}{\Delta}$$

zu erzielen, der einen unzulässig hohen Wert annimmt, wenn  $\Delta$  sich der Grenze Null nähert. Den Sicherheitsgrad  $\varrho$  der Gurtung gegen seitliches Knicken liefert die Gleichung  $\Delta = 0$ . Ist die Determinante  $\Delta$  von der  $k^{\text{ten}}$  Ordnung, so ist die aufzulösende Gleichung vom  $(k - 1)^{\text{ten}}$  Grade, weil die eine Wurzel  $\frac{1}{\varrho} = 0$  bereits bekannt ist. Diese Eigenschaft kann zur Prüfung der Zahlenrechnung verwertet werden. Stellt man nämlich  $\Delta$  als Funktion von  $\frac{1}{\varrho}$  dar, so darf sich kein von  $\frac{1}{\varrho}$  unabhängiges Glied ergeben.

Einen wichtigen Fall, der dem Falle gleichgroßer Winkel  $\tau_0$  an die Seite gestellt werden kann, zeigt Fig. 265. Die Sicherung der Zwischengurtung  $ACB$  gegen seitliches Ausknicken geschieht durch biegezugsfeste Vertikalen, die durch einen oberen und einen unteren Windverband gestützt werden. Der obere Windverband lehnt sich an den Enden gegen biegezugsfeste Rahmen. Die Querträger seien gelenkartig mit den Hauptträgern befestigt; sie übertragen also keine Biegemomente auf die Vertikalen. Mit der Bezeichnung

$$z_m = \frac{U_m \cos \gamma_m}{\lambda_m}$$

erhält man

$$\begin{aligned} X_m &= z_m (\delta_m - \delta_{m-1}) - z_{m+1} (\delta_{m+1} - \delta_m) \\ &- D_m \frac{\delta_m}{d_m} - V_m \frac{\delta_m}{h_m} - V'_m \frac{\delta_m}{y_m} = v_m \delta_m. \end{aligned}$$

Dabei ist  $v_m = \frac{1}{\eta_m}$ , wo  $\eta_m$  die Durchbiegung der Vertikale an der

Stelle  $m$  infolge  $X_m = 1$ . Bei unveränderlichem Querschnitt der Vertikale erhält man mit den in Fig. 265 angegebenen Bezeichnungen

$$v_m = \frac{3 EJ_v (h_m + y_m)}{l_m^2 y_m^2}.$$

Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen drücke man  $V_m$  und  $D_m$  durch die Werte  $U_m \cos \gamma_m = z_m \lambda_m$ ,  $U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} = z_{m+1} \lambda_{m+1}$  und die der Belastung des Knotenpunktes  $m'$  gleiche Spannkraft  $V'_m$  aus. Die am Knoten  $m$  angreifende Eigenlast darf vernachlässigt werden.

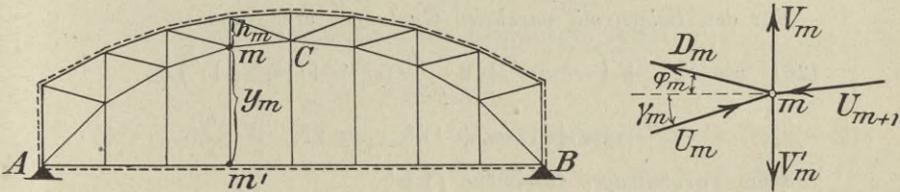


Fig. 265.

**98. Anwendung auf einfache Balkenbrücken.** Bei der Anwendung der Gleichungen (17) auf eine vollbelastete Brücke, deren Hauptträger einfache Balken sind, empfiehlt es sich, der Einfachheit wegen die Werte  $z$  für eine gleichmäßige Verkehrslast  $p$  für die Längeneinheit zu berechnen, und zu setzen

$$(22) \quad O_m \cos \beta_m = \frac{q x_m x'_m}{2 h_m}, \quad z_m = \frac{q x_m x'_m}{2 h_m \lambda_m} \quad x'_m = l - x_m,$$

wo  $q = g + p$  ist. Bei Eisenbahnbrücken findet man  $p$  aus dem größten, durch den Eisenbahnzug verursachten Momente  $M_{pmax}$  mittels der Formel

$$p = \frac{8 M_{pmax}}{l^2}.$$

Den Belastungsvorschriften für die preußischen Staatsbahnen entsprechen z. B. die folgenden Werte:

$l$	$p$	$l$	$p$	$l$	$p$	$l$	$p$	$l$	$p$	$l$	$p$
10	10.87	16	8.44	24	7.65	36	7.09	48	6.86	60	6.44
11	10.39	17	8.24	26	7.48	38	7.12	50	6.79	62	6.37
12	9.11	18	8.07	28	7.43	40	7.08	52	6.72	64	6.31
13	9.45	19	7.97	30	7.40	42	7.04	54	6.65	66	6.25
14	9.04	20	7.88	32	7.34	44	6.98	56	6.57	68	6.19
15	8.67	22	7.75	34	7.27	46	6.93	58	6.51	70	6.12
$m$	t/m	$m$	t/m	$m$	t/m	$m$	t/m	$m$	t/m	$m$	t/m

In der Regel sind die Feldweiten gleichgroß. Bedeutet dann  $n$  die Felderzahl, und führt man zur Abkürzung die Bezeichnung ein:



Bei symmetrisch gebauten einfachen Balken empfiehlt es sich, mit einer symmetrischen Belastung zu rechnen.

Handelt es sich dann um einen Parabelträger mit 10 Feldern, so hat man nur die folgenden fünf  $\delta$ -Gleichungen aufzustellen:

$$(32) \quad \begin{cases} a_1 \delta_1 + \delta_2 = A_1 \\ \delta_1 + a_2 \delta_2 + \delta_3 = A_2 \\ \delta_2 + a_3 \delta_3 + \delta_4 = A_3 \\ \delta_3 + a_4 \delta_4 + \delta_5 = A_4 \\ \delta_4 + a_5 \delta_5 + \delta_4 = A_5 \end{cases} \quad A_m = \frac{v_m}{z} \delta_m'$$

Die Nennerdeterminante dieser Gleichungen lautet

$$(33) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & a_5 \end{vmatrix} = [a_3(a_1 a_2 - 1) - a_1](a_4 a_5 - 2) - a_5(a_1 a_2 - 1).$$

**99. Zahlenbeispiel.** Fußgängerbrücke von 20 m Stützweite, 4 m Breite, 2,0 m Feldweite mit parabelförmigen Hauptträgern von 2,5 m Pfeilhöhe. Fig. 266. Für jeden Hauptträger sei  $g = 0,4$  t/m,  $p = 1,0$  t/m, also  $q = 1,4$  t/m. Es ist demnach

$$z = \frac{q l^2}{8 f \lambda} = \frac{q l}{\lambda} = q n = 14 \text{ t/m.}$$

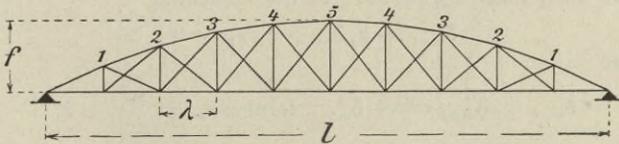


Fig. 266.

Die Querträger sind I-Eisen Nr. 30 mit  $J_q = 9785 \text{ cm}^4$ ; jede Vertikale besteht aus 4 Winkelleisen  $6 \times 6 \times 0,8$  cm (Fig. 267) und besitzt  $J_v = \text{rund } 3900 \text{ cm}^4$ . Es ist also mit  $E = 2150000 \text{ kg/cm}^2$  abgerundet

$$E J_v = 840 \text{ tm}^2 \quad E J_q = 2100 \text{ tm}^2,$$

$$v_m = \frac{1}{\frac{4,0 h_m'^2}{2 \cdot 2100} + \frac{h_m''^3}{3 \cdot 840}}, \text{ nach Gleich. (14)}$$

$$\frac{v_m}{z} = \frac{10000}{133 h_m'^2 + 56 h_m''^3}.$$

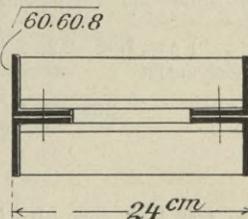


Fig. 267.

Es sei  $h_m' = h_m - 0,15$  und  $h_m'' = h_m - 0,30$ . Dann ergibt sich für

$m =$	1	2	3	4	5
$h_m =$	0,90	1,60	2,10	2,40	2,50 m
$h_m' =$	0,75	1,45	1,95	2,25	2,35 m
$h_m'' =$	0,60	1,30	1,80	2,10	2,20 m
$\frac{v_m}{z} =$	115	25	12	8	8

Der Einfachheit der Rechnung wegen schreiben wir den Rahmen 3, 4, 5 die gleichen Ziffern  $\frac{v_m}{z} = 9$  zu, vernachlässigen in der Formel (31) das unwesentliche Glied  $\frac{2}{mm}$  und setzen in (33):

$$a_1 = \frac{115}{\rho} - 2, \quad a_2 = \frac{25}{\rho} - 2, \quad a_3 = a_4 = a_5 = \frac{9}{\rho} - 2.$$

Es ergibt sich dann die Gleichung:

$$4183 - 3196\rho + 722\rho^2 - 51\rho^3 + \rho^4 = 0,$$

deren kleinste Wurzel  $\rho = 2,4$  ist\*). Die obere Gurtung besitzt also selbst dann  $2\frac{1}{2}$ -fache Sicherheit gegen seitliches Ausknicken, wenn bei der Berechnung des erforderlichen Trägheitsmomentes des Gurtquerschnitts die Stablänge  $o$  als freie Länge eingeführt wird. Da in Wirklichkeit an die Stelle der hier vorausgesetzten Kugelgelenke steife Knoten treten, so ist der Sicherheitsgrad wesentlich höher.

Setzt man, nach Engesser, in die Gleichung

$$\delta_{m-1} + a_m \delta_m + \delta_{m+1} = 0$$

die Werte

$$\delta_{m-1} = \delta_{m+1} = -\delta_m, \quad \text{ferner } a_m = \frac{v_m}{z\rho} - 2,$$

so erhält man für den Sicherheitsgrad  $\rho$  die Näherungsformel

$$(34) \quad \rho = \frac{v_m}{4z};$$

sie liefert im vorliegenden Falle  $\rho = 2$ .

\*)  $\rho = 1, 2, 2,2, 2,4$  liefert  $F(\rho) = +1649, +287, +127, -0,5$ . Man findet zuerst

$$2095875 \left(\frac{1}{\rho}\right)^5 - 1601370 \left(\frac{1}{\rho}\right)^4 + 361827 \left(\frac{1}{\rho}\right)^3 - 25586 \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + 501 \frac{1}{\rho} - 2 = 0,$$

also eine Gleichung 5ten Grades. Das Glied  $-2$  muß aber gestrichen werden; es ist eine Folge der Vernachlässigung der Glieder  $\frac{2}{mm}$ . Wird genau gerechnet, so hat die Gleichung nach Seite 318 den Teiler  $\frac{1}{\rho}$ .

Wird die prismatische Vertikale durch eine nach Fig. 268 sich verjüngende ersetzt, so tritt an die Stelle von  $\frac{h''^3}{3EJ_v}$  der Wert

$$\int_0^{h''} \frac{x^2 dx}{EJ_x} = \frac{1}{E} \int_0^{h''} \frac{x^2 dx}{4J_w + 4F_w \frac{y^2}{4}},$$

wo  $F_w$  den Querschnitt eines Winkeleisens und  $J_w$  das Trägheitsmoment dieses Querschnitts in bezug auf seine eigene Schwerachse bezeichnet.

Der Einfachheit wegen nehme man  $y = b \frac{x}{h''}$  an. Dann ergibt sich zur Berechnung des in die Formel 14 einzusetzenden Wertes  $J_v$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{h''^3}{3J_v} &= \int_0^{h''} \frac{x^2 dx}{4J_w + F_w \frac{b^2}{h''^2} x^2} \\ &= \frac{h''^3}{F_w b^2} - \frac{h''^3}{F_w b^2} \sqrt{\frac{4J_w}{F_w b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F_w b^2}{4J_w}}. \end{aligned}$$

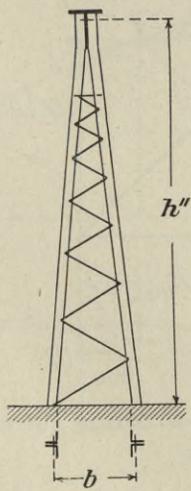


Fig. 268.

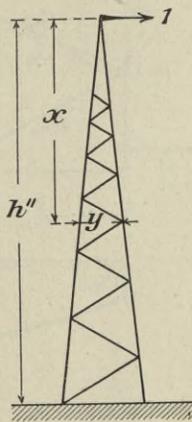


Fig. 269.

Man findet den von der Höhe  $h''$  unabhängigen Wert

$$(35) \quad J_v = \frac{F_w b^2}{3 \left( 1 - \frac{\operatorname{arctang} \alpha}{\alpha} \right)},$$

wo

$$(36) \quad \alpha = \frac{b}{2i} \quad \text{und} \quad i = \sqrt{\frac{J_w}{F_w}}.$$

Für das Winkelisen  $60 \cdot 60 \cdot 8$  mm ist  $J_w = 29 \text{ cm}^4$ ,  $F_w = 9 \text{ cm}^2$ ,  
 $i^2 = 3,22$ ,  $i = 1,8$  und für  $b = 33$  cm,

$$\alpha = \frac{33}{3,6} = 9,17 = \text{tg } 83^\circ 46'.$$

Zu diesem Winkel gehört die Bogenlänge 1,462, weshalb

$$J = \frac{9 \cdot 33^2}{3 \left(1 - \frac{1,462}{9,17}\right)} = \text{rund } 3900 \text{ cm}^4.$$

### § 21.

#### Gelenklose, durch Halbrahmen gestützte Gurtung.

100. Sind die Stäbe der oberen Gurtung einer Trogbücke (Fig. 270) in den Knotenpunkten miteinander vernietet, so werden die von den Stabkräften auf die Halbrahmen ausgeübten Drücke  $X_m$  durch den Biege-

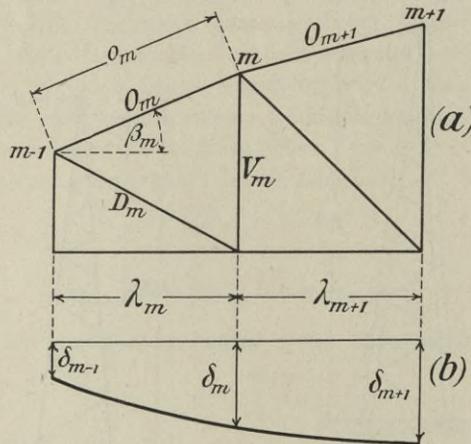


Fig. 270.

widerstand der Gurtung verkleinert. Der durch Gleich. (2), Seite 314, bestimmte Wert  $X_m$  geht über in

$$(1) X_m = -z_m \delta_{m-1} + \left( z_m \frac{h_{m-1}}{h_m} + z_{m+1} \frac{h_{m+1}}{h_m} \right) \delta_m - z_{m+1} \delta_{m+1} + \Delta X_m,$$

wo  $\Delta X_m$  den Einfluß der an den Enden der Stäbe  $o_m$  und  $o_{m+1}$  wirkenden Biegemomente bedeutet. Bezeichnen wir mit

$\mathfrak{M}'_m$  das Biegemoment am linken Ende des Stabes  $o_m$   
 $\mathfrak{M}''_m$  " " " " rechten " " " "  $o_m$ ,

so ist

$$(2) \quad \Delta X_m = \frac{\mathfrak{M}'_m - \mathfrak{M}''_m}{o_m} + \frac{\mathfrak{M}''_{m+1} - \mathfrak{M}'_{m+1}}{o_{m+1}}.$$

Die Momente  $\mathfrak{M}'_m$  und  $\mathfrak{M}''_m$  wirken in Ebenen, die durch die Stabachse  $o_m$  gehen und rechtwinklig zur lotrechten Tragwand sind, Fig. 271 a. Wir zerlegen  $\mathfrak{M}''_m$  nach wagerechter und lotrechter Richtung in  $\mathfrak{M}''_m \cos \beta_m$  und  $\mathfrak{M}''_m \sin \beta_m$  (Fig. 271 b), verfahren ebenso mit  $\mathfrak{M}'_{m+1}$  und nehmen an, es sei die Vertikale nicht in stande, ein wagerechtes Moment

$$\mathfrak{M}''_m \cos \beta_m - \mathfrak{M}'_{m+1} \cos \beta_{m+1}$$

aufzunehmen. Dann besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$(3) \quad \mathfrak{M}''_m \cos \beta_m = \mathfrak{M}'_{m+1} \cos \beta_{m+1} = \mathfrak{M}_m,$$

wo  $\mathfrak{M}_m$  die fortan für die beiden gleichgroßen wagerechten Momente gewählte Bezeichnung sein möge.

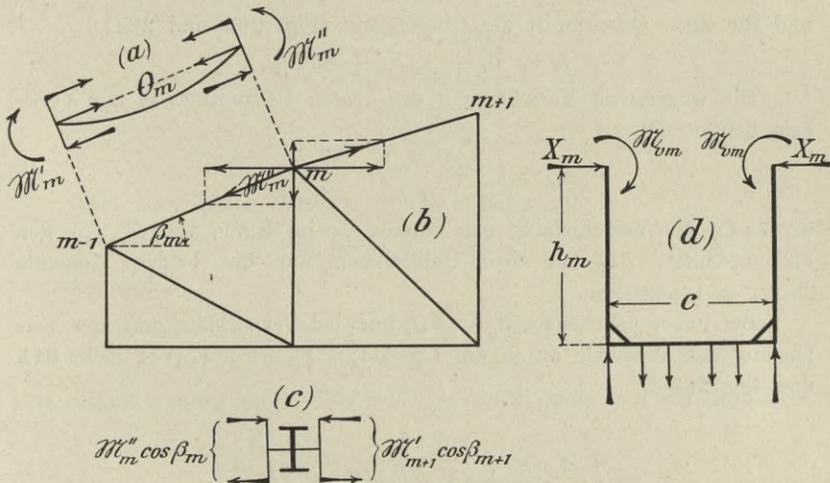


Fig. 271.

Wird in (2) gesetzt:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}'_m = \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\cos \beta_m}, & \mathfrak{M}''_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{\cos \beta_m}, \\ \mathfrak{M}''_{m+1} = \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}}, & \mathfrak{M}'_{m+1} = \frac{\mathfrak{M}_m}{\cos \beta_{m+1}} \end{cases}$$

und dabei beachtet, daß  $o_m \cos \beta_m = \lambda_m$  ist, so geht (1) über in

$$(5) \quad X_m = -z_m \delta_{m-1} + \left( z_m \frac{h_{m-1}}{h_m} + z_{m+1} \frac{h_{m+1}}{h_m} \right) \delta_m - z_{m+1} \delta_{m+1} + \frac{\mathfrak{M}_{m-1} - \mathfrak{M}_m}{\lambda_m} + \frac{\mathfrak{M}_{m+1} - \mathfrak{M}_m}{\lambda_{m+1}}.$$

Die Summe der am Knotenpunkte  $m$  angreifenden lotrechten Momente

$$\mathfrak{M}_m'' \sin \beta_m - \mathfrak{M}'_{m+1} \sin \beta_{m+1} = \mathfrak{M}_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1})$$

möge von dem Halbrahmen aufgenommen werden. Der Torsionswiderstand der biegungsfesten Gurtung werde also vernachlässigt. Die Figuren 270 und 271 beziehen sich auf den hinteren Hauptträger. Fig. 271 c gibt an, wie die Momente  $\mathfrak{M}_m'' \cos \beta_m$  und  $\mathfrak{M}'_{m+1} \cos \beta_{m+1}$  an der  $m^{\text{ten}}$  Vertikale angreifen. Man erkennt, daß das Moment  $\mathfrak{M}_m'' \sin \beta_m$  die Vertikale nach innen zu biegen sucht, das Moment  $\mathfrak{M}_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1})$  also in demselben Sinne wirkt wie das Moment  $X_m h_m$ .

Wird zur Abkürzung gesetzt

$$(6) \quad \operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1} = \gamma_m,$$

so ist das Biegemoment für den Querschnitt  $x$  der Vertikale (Fig. 263)

$$M = X_m x + \mathfrak{M}_m \gamma_m$$

und für einen Querschnitt des Querträgers (Fig. 263 und 264)

$$M = M_0 + X_m h_m' + \mathfrak{M}_m \gamma_m.$$

Die wagerechte Verschiebung des oberen Endpunktes  $m$  der Vertikale beträgt daher

$$(7) \quad \delta_m = \delta_m' + \frac{X_m}{v_m} + \frac{\mathfrak{M}_m \gamma_m}{C_m},$$

wo  $1 : C_m$  die Verschiebung des Punktes  $m$  im Sinne von  $X_m$  für den Fall bedeutet, daß an dem Halbrahmen nur die beiden Momente  $\mathfrak{M}_m \gamma_m = 1$  angreifen.

Bei unveränderlichem  $J_q$  und  $J_v$  und bei Vernachlässigung der Verbiegung der Vertikale durch die Längskraft  $V_m$  ist nun (vgl. Seite 315 und Fig. 263):

$$\begin{aligned} \tau_m &= \int_0^{\frac{1}{2}c} \frac{M_0 dx}{EJ_q} + (X_m h_m' + \mathfrak{M}_m \gamma_m) \int_0^{\frac{1}{2}c} \frac{dx}{EJ_q} \\ &= \frac{\delta_m}{EJ_q} + \frac{(X_m h_m' + \mathfrak{M}_m \gamma_m) c}{2EJ_q}, \text{ ferner} \\ \eta_m &= \int_0^{h_m''} \frac{Mx dx}{EJ_v} = X_m \int_0^{h_m''} \frac{x^2 dx}{EJ_v} + \mathfrak{M}_m \gamma_m \int_0^{h_m''} \frac{x dx}{EJ_v} \\ &= X_m \frac{h_m''^3}{3EJ_v} + \frac{\mathfrak{M}_m \gamma_m h_m''^2}{2EJ_v}. \end{aligned}$$

Bringt man also

$$\delta_m = \eta_m + h_m' \tau_m$$

auf die Form (7), so findet man

$$(8) \quad C_m = \frac{1}{\frac{h_m' c}{2 E J_q} + \frac{h_m''^2}{2 E J_v}}$$

Für  $\delta_m'$  und  $v_m$  gelten die im § 20 entwickelten Gleichungen (11) und (14).

Soll bei einer auf Druck beanspruchten Vertikale der Einfluß von  $V_m$  auf  $\delta_m$  berücksichtigt werden, so findet man, da die Vertikale am oberen Ende durch das Moment  $\mathfrak{M}_m \gamma_m$ , am unteren Ende durch  $\mathfrak{M}_m \gamma_m + X_m h_m''$  beansprucht wird, nach § 17, Gleich. (41):

$$\tau' = \frac{\mathfrak{M}_m \gamma_m}{V_m h_m''} \nu_v'' + \frac{\mathfrak{M}_m \gamma_m + X_m h_m''}{V_m h_m''} \nu_v' *$$

wo

$$\begin{aligned} \nu_v' &= 1 - \alpha_v \cotg \alpha_v \\ \nu_v'' &= \alpha_v \operatorname{cosec} \alpha_v - 1 \\ \alpha_v &= \sqrt{\frac{V_m h_m''^2}{E J_v}} \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert  $\tau'$  in die Gleichung

$$\delta_m = h_m' \tau_m + h_m'' \tau'$$

wo, wie vorhin

$$\tau_m = \frac{\mathfrak{F}_m}{E J_q} + \frac{(X_m h_m' + \mathfrak{M}_m \gamma_m) c}{2 E J_q},$$

und bringt man  $\delta_m$  auf die Form (7), so erhält man, wie auf Seite 317,

$$v_m = \frac{1}{\frac{h_m'^2 c}{2 E J_q} + \frac{h_m'' \nu_v'}{V_m}}$$

ferner findet man

$$(9) \quad C_m = \frac{1}{\frac{h_m' c}{2 E J_q} + \frac{\nu_v' + \nu_v''}{V_m}}$$

Aus (7) folgt nun

$$(10) \quad X_m = v_m \delta_m - v_m \delta_m' - \frac{v_m \gamma_m \mathfrak{M}_m}{C_m}$$

---

\*) Wir haben die Werte  $\nu$  mit dem Zeiger  $v$  versehen, weil wir noch Werte  $\nu$  brauchen werden, die sich auf die Gurtstäbe beziehen.

und man erhält daher die Gleichung

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} + z_m \delta_{m-1} + \left( -z_m \frac{h_{m-1}}{h_m} + v_m - z_{m+1} \frac{h_{m+1}}{h_m} \right) \delta_m + z_{m+1} \delta_{m+1} \\ - \frac{1}{\lambda_m} \mathfrak{M}_{m-1} + \left( + \frac{1}{\lambda_m} - \frac{v_m \gamma_m}{C_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}} \right) \mathfrak{M}_m - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \mathfrak{M}_{m+1} \\ \qquad = v_m \delta_m'. \end{array} \right.$$

Im Punkte 0 sei die Gurtung gelenkartig mit der Vertikale befestigt ( $\mathfrak{M}_0 = 0$ ). Dann gelten für den Knotenpunkt 0 die Gleichungen:

$$X_0 = z_0 \delta_0 \frac{h_1}{h_0} - z_1 \delta_1 - \frac{\mathfrak{M}_1}{\lambda_1},$$

$$X_0 = v_0 \delta_0 - v_0 \delta_0',$$

$$(12) \quad \left( v_0 - z_1 \frac{h_1}{h_0} \right) \delta_0 + z_1 \delta_1 + \frac{1}{\lambda_1} \mathfrak{M}_1 = v_0 \delta_0'$$

und für den Knotenpunkt 1:

$$X_1 = -z_1 \delta_0 + \left( z_1 \frac{h_0}{h_1} + z_2 \frac{h_2}{h_1} \right) \delta_1 - z_2 \delta_2 - \frac{\mathfrak{M}_1}{\lambda_1} + \frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{\lambda_2},$$

$$X_1 = v_1 \delta_1 - v_1 \delta_1' - \frac{v_1 \gamma_1}{C_1} \mathfrak{M}_1,$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 \delta_0 + \left( -z_1 \frac{h_0}{h_1} + v_1 - z_2 \frac{h_2}{h_1} \right) \delta_1 + z_2 \delta_2 \\ + \left( + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{v_1 \gamma_1}{C_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \mathfrak{M}_1 - \frac{1}{\lambda_2} \mathfrak{M}_2 = v_1 \delta_1'. \end{array} \right.$$

Ganz entsprechende Gleichungen lassen sich für die beiden letzten Knotenpunkte  $n$  und  $(n-1)$  aufstellen.

Zu den  $n+1$  unbekanntem Verschiebungen  $\delta$  sind  $n-1$  unbekanntem Momente  $\mathfrak{M}$  getreten. Es müssen also außer den Gleichungen (11), (12), (13), deren Anzahl gleich  $n+1$  ist, noch weitere  $n-1$  Gleichungen aufgestellt werden.

Der Grundriß der elastischen Linie der oberen Gurtung darf als eine Linie stetiger Krümmung angesehen werden, Fig. 270 b. Der Ausschlagwinkel  $\tau_m$  des rechten Endes des Stabes  $o_m$  ist nach Gleich. (41), Seite 288\*):

$$(14) \quad \tau_m' = \frac{\mathfrak{M}_m'}{O_m o_m} \nu_m'' + \frac{\mathfrak{M}_m''}{O_m o_m} \nu_m'$$

\*) Fallen die Kräfte  $S$  nicht mit den Stabachsen zusammen, so entstehen Momente  $Sd$  und  $Se$ , die sich mit Hilfe der auf Seite 288 aufgestellten Gleichungen leicht berücksichtigen lassen, da es sich um gegebene Größen handelt.

und der Ausschlagwinkel  $\tau_{m+1}$  des linken Endes des Stabes  $o_{m+1}$ :

$$(15) \quad \tau_{m+1} = \frac{\mathfrak{M}'_{m+1}}{O_{m+1}o_{m+1}} v'_{m+1} + \frac{\mathfrak{M}''_{m+1}}{O_{m+1}o_{m+1}} v''_{m+1}.$$

Für einen Druckstab ist

$$(16 a) \quad \begin{cases} v'_m = 1 - \alpha_m \cotg \alpha_m \\ v''_m = \alpha_m \operatorname{cosec} \alpha_m - 1 \\ \alpha_m = \sqrt{\frac{O_m o_m^2}{E J_m}} \end{cases}$$

und für einen Zugstab:

$$(16 b) \quad \begin{cases} v'_m = \alpha_m \operatorname{Cotg} \alpha_m - 1 \\ v''_m = 1 - \alpha_m \operatorname{Cosec} \alpha_m. \end{cases}$$

Zugstäbe kommen beispielsweise in den oberen Gurtungen von Balken auf mehreren Stützen vor.

Zwischen den Grundrissen  $\frac{\tau'_m}{\cos \beta_m}$  und  $\frac{\tau_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}}$  der Winkel  $\tau'_m$  und  $\tau_{m+1}$  und den Verschiebungen  $\delta_{m-1}$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_{m+1}$  besteht aber die Beziehung

$$(17) \quad \frac{\tau'_m}{\cos \beta_m} + \frac{\tau_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} = \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} + \frac{\delta_m - \delta_{m+1}}{\lambda_{m+1}}.$$

Setzt man (14) und (15) in diese Gleichung ein und beachtet hierbei die Gleichungen (4), so erhält man die Bedingung:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{v''_m}{H_m \lambda_m} \mathfrak{M}_{m-1} + \left( \frac{v'_m}{H_m \lambda_m} + \frac{v'_{m+1}}{H_{m+1} \lambda_{m+1}} \right) \mathfrak{M}_m + \frac{v''_{m+1}}{H_{m+1} \lambda_{m+1}} \mathfrak{M}_{m+1} \\ & + \frac{1}{\lambda_m} \delta_{m-1} - \left( \frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}} \right) \delta_m + \frac{1}{\lambda_{m+1}} \delta_{m+1} = 0, \end{aligned} \right.$$

in welcher

$$(19) \quad H_m = O_m \cos \beta_m \text{ und } H_{m+1} = O_{m+1} \cos \beta_{m+1}$$

die wagerechten Seitenkräfte von  $O_m$  und  $O_{m+1}$  bedeuten.

Dem Knotenpunkte 1 entspricht die Gleichung

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{v'_1}{H_1 \lambda_1} + \frac{v'_2}{H_2 \lambda_2} \right) \mathfrak{M}_1 + \frac{v''_2}{H_2 \lambda_2} \mathfrak{M}_2 \\ & + \frac{1}{\lambda_1} \delta_0 - \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \delta_1 + \frac{1}{\lambda_2} \delta_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Meistens haben alle Felder dieselbe Länge  $\lambda$ . Multipliziert man dann die Gleichungen (11) und (18) mit  $\lambda$  und setzt  $\varepsilon \lambda = O \cos \beta = H$ , so geht (11) über in:

$$(11') \quad \begin{cases} H_m \delta_{m-1} + \left( -H_m \frac{h_{m-1}}{h_m} + v_m \lambda - H_{m+1} \frac{h_{m+1}}{h_m} \right) \delta_m + H_{m+1} \delta_{m+1} \\ - \mathfrak{M}_{m-1} \quad + \left( 2 - \frac{v_m \gamma_m \lambda}{C_m} \right) \mathfrak{M}_m \quad - \mathfrak{M}_{m+1} = v_m \lambda \delta_m' \end{cases}$$

und (18) in:

$$(18') \quad \begin{cases} \frac{v_m''}{H_m} \mathfrak{M}_{m-1} + \left( \frac{v_m'}{H_m} + \frac{v_{m+1}'}{H_{m+1}} \right) \mathfrak{M}_m + \frac{v_{m+1}''}{H_{m+1}} \mathfrak{M}_{m+1} \\ + \delta_{m-1} \quad - 2 \delta_m \quad + \delta_{m+1} = 0. \end{cases}$$

In derselben Weise sind auch die Gleichungen (12), (13) und (20) umzuformen in Gleichungen (12') (13') (20'), welche hier niederzuschreiben, entbehrlich ist.

Die Spannkkräfte und Abmessungen zweier aufeinanderfolgenden Felder werden sich oft so wenig voneinander unterscheiden, daß es zulässig sein wird, die beiden Werte  $v_m'' | H_m$  und  $v_{m+1}'' | H_{m+1}$  durch einen Mittelwert zu ersetzen. Man teilt dann die Gleichung (18') durch diesen Mittelwert, addiert sie zu (11') und gewinnt eine Gleichung, in der nur noch das eine Moment  $\mathfrak{M}_m$  vorkommt, die also gestattet,  $\mathfrak{M}_m$  durch die Verschiebungen  $\delta_{m-1}$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_{m+1}$  auszudrücken. Setzt man schließlich die auf diese Weise für alle Momente gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen (11'), (12'), (13') ein, so erhält man eine Gruppe von  $n+1$  Gleichungen, in denen nur noch die Verschiebungen  $\delta$  als Unbekannte auftreten.

Diese Gleichungen haben eine ähnliche Form, wie die Gleichungen zur Berechnung der Biegemomente eines Balkens auf elastisch senkbaren Stützen. Die erste Gleichung enthält nur  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , die zweite nur  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , jede der übrigen enthält fünf aufeinanderfolgende  $\delta$ , mit Ausnahme der beiden letzten Gleichungen, die ähnlich gebaut sind wie die beiden ersten.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung für einen vollbelasteten *Parabelbalken*. Hier weichen — auch bei Eisenbahnbrücken, trotz verschieden großer Belastungen der Querträger — die Werte  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ , ... so wenig voneinander ab, daß es zulässig ist, mit einem festen Mittelwerte  $H$  zu rechnen.

Dividiert man dann die Gleichungen (11'), (12'), (13') durch  $H$ , so erhält man mit den zur Abkürzung eingeführten Bezeichnungen:

$$(21) \quad A_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{H_m},$$

$$(22) \quad \varphi_m = \frac{v_m \lambda}{H} - \frac{h_{m+1}}{h_m} - \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{v_m \lambda}{H} - 2 + \frac{2}{mm'},$$



$$(31) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ +\varphi_1 - \varepsilon_1 \omega_1 \right\} \delta_1 + \left\{ \frac{1 + \omega_2}{-\varepsilon_1 \varphi_1} \right\} \delta_2 + \varphi_2 \delta_3 = D_1 \\ \left\{ \frac{1 + \omega_1}{-\varepsilon_2 \varphi_2} \right\} \delta_1 + \left\{ +\varphi_2 - \varepsilon_2 \omega_2 \right\} \delta_2 + \left\{ \frac{1 + \omega_3}{-\varepsilon_2 \varphi_2} \right\} \delta_3 + \varphi_3 \delta_4 = D_2 \\ \varphi_2 \delta_1 + \left\{ \frac{1 + \omega_2}{-\varepsilon_3 \varphi_3} \right\} \delta_2 + \left\{ +\varphi_3 - \varepsilon_3 \omega_3 \right\} \delta_3 + \left\{ \frac{1 + \omega_4}{-\varepsilon_3 \varphi_3} \right\} \delta_4 + \varphi_4 \delta_5 = D_3 \\ \varphi_3 \delta_2 + \left\{ \frac{1 + \omega_3}{-\varepsilon_4 \varphi_4} \right\} \delta_3 + \left\{ +\varphi_4 - \varepsilon_4 \omega_4 \right\} \delta_4 + \left\{ \frac{1 + \omega_5}{-\varepsilon_4 \varphi_4} \right\} \delta_5 = D_4 \\ \varphi_4 \delta_3 + \left\{ \frac{1 + \omega_4}{-\varepsilon_5 \varphi_5} \right\} \delta_4 + \left\{ +\varphi_5 - \varepsilon_5 \omega_5 \right\} \delta_5 = D_5 \end{array} \right.$$

wo

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \quad + (1 - \varepsilon_1 \psi_1) B_1 + \psi_2 B_2 \\ D_2 = \psi_1 B_1 + (1 - \varepsilon_2 \psi_2) B_2 + \psi_3 B_3 \\ D_3 = \psi_2 B_2 + (1 - \varepsilon_3 \psi_3) B_3 + \psi_4 B_4 \\ D_4 = \psi_3 B_3 + (1 - \varepsilon_4 \psi_4) B_4 + \psi_5 B_5 \\ D_5 = \psi_4 B_4 + (1 - \varepsilon_5 \psi_5) B_5. \end{array} \right.$$

**101. Zahlenbeispiel.** Eine eingleisige Eisenbahnbrücke von 18 m Stützweite mit zwei parabelförmigen Hauptträgern von 2,52 m Höhe und 3,0 m Feldweite wird nach Fig. 272 mit einer Lokomotive belastet. Der Abstand von Mitte zu Mitte ist  $c = 4,8$  m. Die ständige Belastung eines Brückenfeldes sei  $g\lambda = 7,0$  t. Im ganzen kommen auf die Knotenpunkte 1, 2, 3 die Lasten:

$$P = \quad 7,0 \text{ t} \quad 32,5 \text{ t} \quad 41,0 \text{ t}.$$

Es entstehen die Momente

$$M = \quad 180 \text{ tm} \quad 339 \text{ tm} \quad 400,5 \text{ tm},$$

und es ergibt sich für jeden der beiden Hauptträger

$$H = \frac{M}{2h} = \quad 64 \text{ t} \quad 76 \text{ t} \quad 80 \text{ t}^*).$$

Das Trägheitsmoment des Gurtquerschnittes (Fig. 273a) ist ohne Abzug für Nietlöcher  $J = 3754 \text{ cm}^4$ . Mit  $E = 2150000 \text{ kg/qcm}$  erhält man

$$EJ = 0,215 \cdot 3750 = 810 \text{ tm}^2.$$

\*) Der Wert 80 t weicht nur wenig von  $\max \frac{M}{2h}$  ab. Man erhält nämlich nach Band I, Anhang, Seite 550, für  $l = 18$  m,  $\max M = 327,0$  tm. Hierzu kommt infolge der ständigen Belastung

$$\frac{gl^2}{8} = g\lambda \frac{36\lambda}{8} = 7 \cdot \frac{36 \cdot 3}{8} = 94,5,$$

weshalb  $\max \frac{M}{2h} = \frac{327,0 + 94,5}{2 \cdot 2,52} = 83,6 \text{ t}$ .

Für  $\rho$ -fache Belastung ist

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho O_m a_m^3}{EJ}} = \sqrt{\frac{\rho H_m a_m^3}{EJ\lambda}},$$

also für das erste und das mittelste Feld:

$$\alpha_1 = \sqrt{\rho \frac{64 \cdot 3,31^3}{810 \cdot 3}} = \sqrt{0,955 \rho},$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\rho \frac{80 \cdot 3,01^3}{810 \cdot 3}} = \sqrt{0,887 \rho}.$$

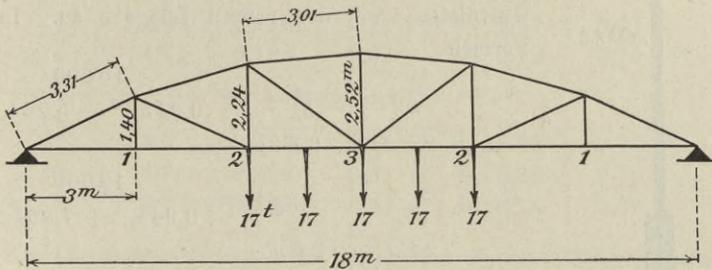


Fig. 272.

$\rho = 1$  liefert  $\alpha_1 = 0,98$ ,  $\alpha_3 = 0,94$  im Mittel  $\alpha = 0,96$ ,  $\alpha = 55^\circ$ ,  
 $\rho = 2$  „  $\alpha_1 = 1,38$ ,  $\alpha_3 = 1,33$  „ „  $\alpha = 1,36$ ,  $\alpha = 78^\circ$ ,  
 $\rho = 3$  „  $\alpha_1 = 1,69$ ,  $\alpha_3 = 1,63$  „ „  $\alpha = 1,66$ ,  $\alpha = 95^\circ$ .

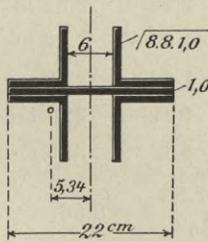


Fig. 273 b.

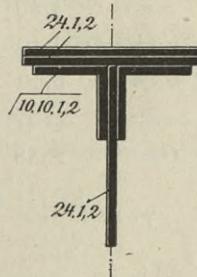


Fig. 273 a.

Hierzu gehören die folgenden Werte

$$v' = 1 - \alpha \cot \alpha \text{ und } v'' = \alpha \operatorname{cosec} \alpha - 1$$

$\rho$	$v'$	$v''$	$2 \frac{v'}{v''}$	$\frac{2}{v''}$	$1 + \frac{1}{v''}$
1	0,8278	0,1719	3,81	11,63	6,82
2	0,7109	0,3904	3,64	5,12	3,56
3	1,1452	0,6663	3,44	3,00	2,50

Den Querschnitt der Vertikalen zeigt Fig. 273 b; ihm entspricht, ohne Abzug für Nietlöcher,

$$J_v = 2960 \text{ cm}^4, \quad EJ_v = 0,215 \cdot 2960 = 636 \text{ tm}^2.$$

Für den Querträgerquerschnitt, Fig. 274, ist nach Abzug der Nietlöcher  $W_q = 3813$ . Trotzdem wir  $J_q$  ohne Rücksicht auf Nietverschwächung bilden dürfen, rechnen wir mit  $J_q = 3813 \cdot 31,2 = 119\,000 \text{ cm}^4$  und  $EJ_q = 25\,600 \text{ tm}^2$ . Die Wirkung der Versteifungsecken vernachlässigen wir. Dafür nehmen wir die Gurtplatten auf der ganzen Länge  $c$  an. In die Formeln

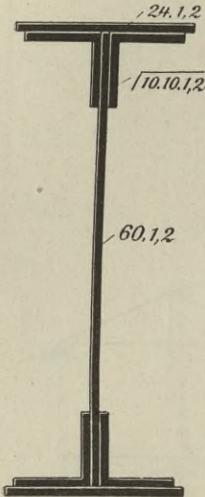


Fig. 274.

$$v_m = \frac{1}{\frac{c h_m'^2}{2 EJ_q} + \frac{h_m''^3}{3 EJ_v}} = \frac{10\,000}{0,94 h_m'^2 + 5,24 h_m''^3}$$

$$C_m = \frac{1}{\frac{c h_m'}{2 EJ_q} + \frac{h_m''^2}{2 EJ_v}} = \frac{10\,000}{0,94 h_m' + 7,86 h_m''^2}$$

setzen wir  $h_m' = h_m - 0,30$  und, etwas zu ungünstig gerechnet,  $h_m'' = h_m - 0,80$ . Für die Querrahmen 1, 2, 3 ergibt sich dann:

	1	2	3
$h =$	1,40	2,24	2,52
$h' =$	1,10	1,94	2,22
$h'' =$	0,60	1,44	1,72
$v =$	4407	521	320 t/m
$C =$	2588	552	395 t,

$$\gamma \lambda = \frac{8f}{n^2} = \frac{8 \cdot 2,52}{36} = 0,56, \quad \gamma = 0,187,$$

$$\frac{v \gamma \lambda}{C} = \begin{matrix} 0,95 & 0,53 & 0,45, \end{matrix}$$

$$\varepsilon = 2 - \frac{v \gamma \lambda}{C} = \begin{matrix} 1,05 & 1,47 & 1,55. \end{matrix}$$

Nun ist für die  $\rho$ -fache Belastung

$$\varphi_m = \frac{v_m \lambda}{\rho H} - 2 + \frac{2}{m m'}, \quad m' = 6 - m,$$

wo durchweg  $H = 80 \text{ t}$  gesetzt werden soll. Die Werte  $\varphi_m$  sowie die nach (28), (29), (30) zu berechnenden Zahlen  $\psi$ ,  $\mathfrak{Z}$ ,  $\omega$  sind:

$m$	$\varphi$	$\psi$	$\delta$	$\omega$	$1 - \varepsilon\psi$
für $\varphi = 1$					
1	164	0,206	1,40	+ 31,39	0,78
2	17,8	0,189	1,29	+ 1,17	0,72
3	10,1	0,187	1,28	- 0,29	0,71
für $\varphi = 2$					
1	81	0,213	0,76	+ 16,16	0,78
2	8,02	0,196	0,70	+ 0,57	0,71
3	4,11	0,193	0,69	- 0,19	0,70
für $\varphi = 3$					
1	53,5	0,223	0,56	+ 11,26	0,77
2	4,76	0,204	0,51	+ 0,36	0,70
3	2,11	0,200	0,50	- 0,18	0,69

Am Querträger greifen zwei Einzellasten  $P_m$  an. Ihr gegenseitiger Abstand ist 1,8 m; ihr Abstand vom benachbarten Hauptträger 1,5 m. Die halbe Momentenfläche hat den Inhalt

$$\mathfrak{F}_m = P_m 1,5 (1,5 + 1,8) \frac{1}{2} = 2,475 P_m.$$

Daher (unabhängig von dem sich weghebenden  $\varphi$ )

$$B_m = \frac{v_m \lambda \delta_m'}{\varphi H} = \frac{v_m \lambda \mathfrak{F}_m h_m \varphi}{\varphi H E J_g} = \frac{v_m P_m h_m 3 \cdot 2,475}{80 \cdot 25600}.$$

Die Lokomotive belastet die Querträger 1, 2, 3 der Reihe nach mit  $P = 0 - 12,75 - 17$  t. Für die ständige Last sind 2 t hinzuzurechnen. Man erhält für die Knoten 1, 2, 3

$P_m =$	2	14,75	19 t
$v_m h_m =$	6169,8	1167,04	808,4
$B_m =$	0,0444	0,0620	0,0552,

und mittels Gleichung (32)

für $\varphi = 1$	$D_m =$	0,04635	0,06411	0,06318
„ $\varphi = 2$	$D_m =$	0,04678	0,06413	0,06294
„ $\varphi = 3$	$D_m =$	0,04684	0,06434	0,06338.

Wir setzen für alle Werte  $\varphi$

$$D = 0,046 \quad 0,064 \quad 0,063$$

und erhalten die folgenden Gleichungen zur Berechnung der Verschiebungen  $\delta$ :

$$\rho = 1 \begin{cases} 132,2\delta_1 + 0,7\delta_2 + 1,3\delta_3 = 0,046 \\ 31,8\delta_1 + 18,8\delta_2 - 1,2\delta_3 = 0,064 \\ 2,6\delta_1 + 0,4\delta_2 + 14,1\delta_3 = 0,063 \\ \delta_1 = 0,289 \text{ mm}, \quad \delta_2 = 3,192 \text{ mm}, \quad \delta_3 = 4,324 \text{ mm}, \end{cases}$$

$$\rho = 2 \begin{cases} 64,7\delta_1 + 0,8\delta_2 + 0,7\delta_3 = 0,046 \\ 16,1\delta_1 + 9,3\delta_2 - 0,2\delta_3 = 0,064 \\ 1,4\delta_1 + 1,0\delta_2 + 5,8\delta_3 = 0,063 \\ \delta_1 = 0,530 \text{ mm}, \quad \delta_2 = 6,172 \text{ mm}, \quad \delta_3 = 9,670 \text{ mm}, \end{cases}$$

$$\rho = 3 \begin{cases} 42,2\delta_1 + 0,8\delta_2 + 0,5\delta_3 = 0,046 \\ 11,5\delta_1 + 5,8\delta_2 + 0,1\delta_3 = 0,064 \\ 1,0\delta_1 + 1,2\delta_2 + 3,4\delta_3 = 0,063 \\ \delta_1 = 0,735 \text{ mm}, \quad \delta_2 = 9,317 \text{ mm}, \quad \delta_3 = 15,025 \text{ mm}. \end{cases}$$

Die Nennerdeterminanten dieser Gleichungen sind:

$$\Delta = \quad 34\,743,974 \quad 3430,086 \quad 799,920,$$

sie nehmen mit wachsendem  $\rho$  ab. Für  $\rho = 4$  gab eine Überslagsrechnung rund  $\Delta = 200$ . Es besteht also hinreichende Sicherheit gegen das Verschwinden der Nennerdeterminante. Fig. 275 zeigt die Grund-

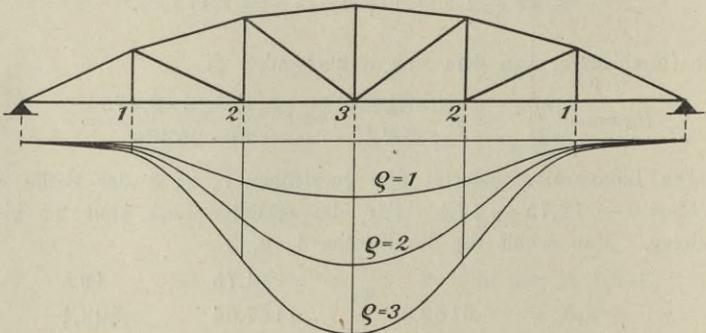


Fig. 275.

risse der verbogenen oberen Gurtung für  $\rho = 1, 2, 3$  in verzerrem Breitenmaßstabe.

Um die Biegungsspannung  $\sigma$  der oberen Gurtung festzustellen, berechnen wir die Momente

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \rho H [\psi_1 B_1 - \mathfrak{Z}_1 (0 + \delta_2) - \omega_1 \delta_1] \\ \mathfrak{M}_2 &= \rho H [\psi_2 B_2 - \mathfrak{Z}_2 (\delta_1 + \delta_3) - \omega_2 \delta_2] \\ \mathfrak{M}_3 &= \rho H [\psi_3 B_3 - \mathfrak{Z}_3 (\delta_2 + \delta_4) - \omega_3 \delta_3]. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$	$\mathfrak{M}_3$
$\rho = 1$	-0,036	+0,162	+0,269 tm
2	-0,621	+0,239	+0,656
3	-0,884	+0,339	+1,053

Die größte Beanspruchung findet in der Mitte statt. Dort darf  $\cos \beta = 1$  und  $_{max}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_3$  gesetzt werden\*). Für den Gurtquerschnitt ist nach Abzug der Nietlöcher  $J = 3754 - 720 = 3034 \text{ cm}^4$ ,  $W = \frac{3034}{12} = 250 \text{ cm}^3$ ,  $F = 113 \text{ qcm}$ . Die Biegungsspannung beträgt also

$$\text{für } \rho = 1 \quad \sigma = \frac{26900}{250} = 110 \text{ kg/qcm,}$$

$$\text{für } \rho = 2 \quad \sigma = \frac{65600}{250} = 260 \text{ kg/qcm,}$$

$$\text{für } \rho = 3 \quad \sigma = \frac{105300}{250} = 420 \text{ kg/qcm.}$$

Bei der angenommenen Belastung ist in der Mitte  $O = 81 \text{ t}$ , also die Druckspannung  $\sigma = \frac{81}{113} = 720 \text{ kg/qcm}$ . Bei doppelter Belastung liegt die gesamte Spannung  $\sigma = 1440 + 260 = 1700$  noch innerhalb der Proportionalitätsgrenze. Dreifache Belastung erzeugt in der Regel schon eine außerhalb der Proportionalitätsgrenze liegende Spannung  $3O | F$ .

Wir berechnen noch für die Vertikale 3 den Druck

$$X_m = v_m (\delta_m - \delta'_m) - \frac{v_m \gamma \mathfrak{M}_m}{C_m}, \text{ wo}$$

$$\delta'_m = \frac{\mathfrak{F}_m h_m \rho}{E J_q} = \frac{2,475 P_m h_m \rho}{25600}$$

Für  $\rho = 3$  und  $m = 3$  ergibt sich

$$\delta'_3 = \frac{2,475 \cdot 19 \cdot 2,52 \cdot 3}{25600} = 13,887 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{v \gamma}{C} = 0,15,$$

$$X_3 = 320 (15,025 - 13,887) - 0,15 \cdot 1,053 = 0,207 \text{ t.}$$

\*) Im allgemeinen müssen aus den Momenten  $\mathfrak{M}_m$  erst die Momente  $\mathfrak{M}_m'' = \mathfrak{M}_m \sec \beta_m$  und  $\mathfrak{M}_{m+1}' = \mathfrak{M}_m \sec \beta_{m+1}$  berechnet werden.

Der durch Niete geschwächte Querschnitt der Vertikale besitzt  
 $J_v = 2960 - 675 = 2285 \text{ cm}^4$ ,  $W_v = \frac{2285}{11} = 208 \text{ cm}^3$ ,  $F = 70 \text{ qcm}$ ;

er wird durch das Biegemoment

$$\mathfrak{M} = X_3 h_3'' + \gamma \mathfrak{M}_3 = 0,207 \cdot 1,72 + 0,187 \cdot 1,053 = 0,554 \text{ tm}$$

beansprucht. Die Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{55400}{208} = 270 \text{ kg/qcm}$$

darf in Anbetracht der Voraussetzung dreifacher Belastung als niedrig bezeichnet werden.

## V. Abschnitt.

### Versteifung des gelenkigen Stabzuges durch einen Balken.

#### § 22.

#### Hängewerke und Sprengwerke.

##### 1. Einfach statisch unbestimmte Hängewerke.

**102. Allgemeine Untersuchung.** Ein Balken  $AB$ , Fig. 276, sei durch lotrechte Stäbe mit einem Stabzuge verbunden, dessen Knotenpunkte Gelenke besitzen. Die Hängestangen sind mit dem Balken gelenkartig befestigt. Das Tragwerk ist einfach statisch unbestimmt. Am Balken möge eine lotrechte Last  $P_m$  angreifen. Kennt man den *Horizontalschub*  $X_a$ , das ist die konstante wagerechte Seitenkraft der in den Gliedern 1, 2, 3, 4 des Stabzuges auftretenden Drucke  $S$ , so kann man diese Drucke und die Spannkraften  $V_1, V_2, V_3$  in den Hängestangen nach Fig. 276 a ermitteln. Das den Balken an der Stelle  $x$  beanspruchende Biegemoment ist

$$(1) \quad M = M_0 - X_a y,$$

wo  $M_0$  das Biegemoment für den unversteiften, nur mit  $P$  belasteten Balken bedeutet.

Der Einfluß von  $P_m$  auf  $X_a$  ist

$$(2) \quad X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}},$$

wo

$$(3) \quad \delta_{aa} = \int_0^l \frac{M_a^2 dx}{EJ} + \sum S_a^2 \frac{s}{EF}.$$

Die Summe erstreckt sich über den Stabzug, die Hängestangen und den Balken, das Integral über den Balken.

Die Spannkkräfte  $S_a$  liefert der für  $X_a = -1$  zu zeichnende Kräfteplan Fig. 276 a. Für den Balken ist  $S_a = -1$ . Weiter ist

$$(4) \quad M_a = y.$$

Die  $\delta_{m_a}$ -Linie ist die zur  $M_a$ -Fläche gehörige Biegungslinie.

Wird der Balkenquerschnitt konstant angenommen, was für die Folge geschehen möge, so entsteht

$$(5) \quad X_a = P_m \frac{EJ \delta_{m_a}}{l} \nu, \quad \int_0^l M_a^2 dx$$

wo

$$(6) \quad \frac{1}{\nu} = 1 + \frac{EJ \Sigma S_a^2 \varphi}{\int_0^l M_a^2 dx}, \quad \varphi = \frac{s}{EF}.$$

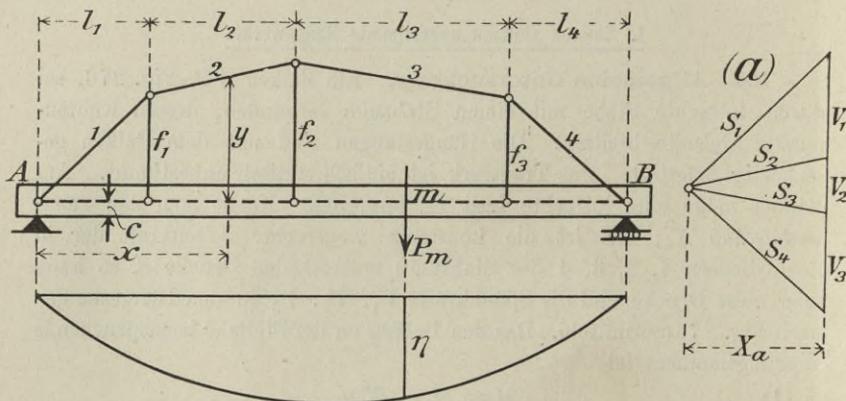


Fig. 276.

Bei drei Hängestangen, deren Längen  $f_1, f_2, f_3$  seien, erhält man beispielsweise

$$(7) \quad \int_0^l M_a^2 dx = \frac{1}{3} [f_1^2(l_1 + l_2) + f_2^2(l_2 + l_3) + f_3^2(l_3 + l_4) + f_1 f_2 l_2 + f_2 f_3 l_3].$$

Die  $EJ \delta_{m_a}$ -Linie ist die Momentenlinie eines Balkens  $AB$ , dessen Belastungsfläche die  $M_a$ -Fläche ist. Zeichnet man also zur  $M_a$ -Fläche mit der Polweite  $\mathfrak{S}$  eine Seillinie, und ist deren Ordinate an der Stelle  $m$  gleich  $\eta$ , so ergibt sich

und

$$EJ\delta_{ma} = \mathfrak{S}\eta$$

$$X_a = P_m \frac{\mathfrak{S}\eta}{\int_0^l M_a^2 dx} \nu.$$

Wird die Zahl 1 durch eine Strecke von der Länge  $a$  (gemessen mit dem Längenmaßstabe der Trägerzeichnung) dargestellt, so erhält man

$$X_a = P_m \eta,$$

sobald man die Polweite

$$\mathfrak{S} = \frac{\int_0^l M_a^2 dx}{a\nu}$$

annimmt. Wählt man das Meter zur Einheit, so sind die Inhalte der Streifen, in die man die  $M_a$ -Fläche zerlegt,  $m^2$ , und ebenso erhält man die Polweite in  $m^2$ .

Aus der  $X_a$ -Linie lassen sich die Einflußlinien der Kernpunkt-momente  $M^o$  und  $M^u$  in derselben Weise ableiten, wie die Einflußlinien der Angriffsmomente für die Knotenpunkte des Zweigelenkbogens. Wir verweisen auf Abteilung I, § 7 und § 8. In Figur 277 ist die Einflußfläche für das Moment  $M^o$  unter der Voraussetzung gezeichnet worden, daß die Lasten unmittelbar am Balken angreifen. Der Multiplikator ist  $\mu = y_o$ .

Der Einfluß einer Temperaturänderung auf  $X_a$  ist

$$(8) \quad X_a = \frac{EJ\delta_{at}\nu}{\int_0^l M_a^2 dx},$$

wo

$$(9) \quad \delta_{at} = \sum S_a \varepsilon t s + \frac{\Delta t}{h} \int_0^l M_a dx.$$

Die Summe erstreckt sich wieder über den Stabzug, die Hängestangen und den Balken, dessen in der Achse auftretende Temperaturänderung sie berücksichtigt. Das zweite Glied der Gleichung trägt dem Unterschiede  $\Delta t = t_u - t_o$  der Wärmegrade der unteren und oberen Balkengurtung Rechnung. Es ist

$$(10) \quad 2 \int_0^l M_a dx = f_1(l_1 + l_2) + f_2(l_2 + l_3) + f_3(l_3 + l_4).$$

Greifen in den Knotenpunkten der oberen Gurtung beliebig gerichtete Lasten  $P_m$  an, ein für Dachstühle wichtiger Belastungsfall, so sind die Horizontalschübe der einzelnen Gurtstäbe verschieden groß. Man weise dann  $X_a$  einem bestimmten Stabe, der aber frei gewählt werden darf, zu und ermittle diese Unbekannte wieder mittels der Gleichung (2). Die Verschiebungen  $\delta_{ma}$  der Knotenpunkte der oberen Gurtung lassen sich auf dem folgenden Wege leicht bestimmen.

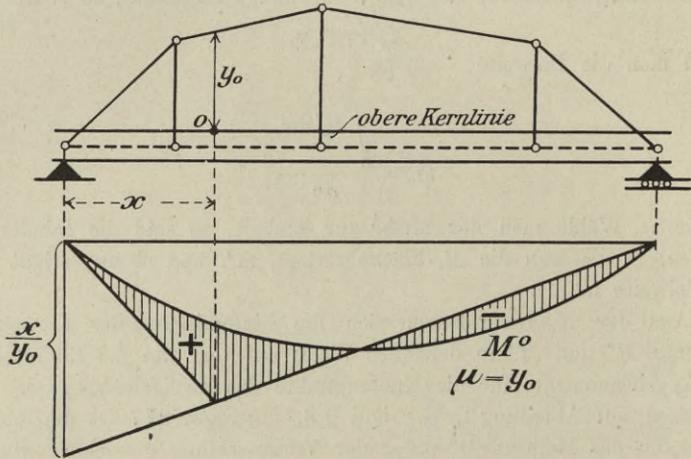


Fig. 277.

Liegt der feste Stützpunkt im Abstände  $c$  unter der Balkenachse, so erfährt der untere Endpunkt  $A$  des ersten Obergurtstabes eine wagerechte Verschiebung von der Größe  $c\tau_0$ , wo  $\tau_0$  den Neigungswinkel der im Punkte 0 an die  $\delta_{ma}$ -Linie des Balkens gelegten Tangente bedeutet. Die Knotenpunkte des Balkens, das sind die Punkte, in denen die Hängestangen angreifen, verschieben sich gegen  $A$  in wagerechter Richtung um die Verkürzungen, welche die zugehörigen Balkenstücke infolge des Druckes  $S_a = -1$  erfahren. Da nun ihre lotrechten Verschiebungen bereits durch die  $\delta_{ma}$ -Linie gegeben sind, so lassen sich ihre Gesamtverschiebungen leicht angeben und hierauf lassen sich auch die Verschiebungen der schrittweise zweistöbig an den Balken angegliederten Knotenpunkte der oberen Gurtung nach dem Williot'schen Verfahren bestimmen.

An Stelle der  $\delta_{ma}$ -Linie benutzt man zweckmäßiger die  $X_a$ -Linie. Die Längenänderungen der Stäbe müssen dann mit  $\frac{EJ\nu}{\int M_a^2 dx}$  multipliziert werden.

**103. Das unsymmetrische zweifache Hängewerk mit schrägem Spannriegel** (Fig. 278). Das zweifache Hängewerk möge wegen seiner Wichtigkeit für den Hochbau etwas ausführlicher behandelt werden. Die elastischen Längenänderungen der Stäbe dürfen vernachlässigt werden; es ist also gestattet,  $\nu = 1$  zu setzen. Sodann empfiehlt es sich, die im Balken entstehenden Spannungen nicht aus den Kernpunktmomenten  $M^o$  und  $M''$ , sondern mittels der Formel

$$(11) \quad \sigma = \pm \frac{M}{W} + \frac{X_a}{F}$$

aus dem auf die Schwerachse des Balkenquerschnitts bezogenen Momente  $M$  zu folgern, weil sich die Darstellung der  $M$  besonders einfach gestaltet.

Die Berechnung der gleichzeitig mit dem maßgebenden Momente  $M$  auftretenden Kraft  $X_a$  kann dadurch gespart werden, daß für  $X_a$  der größte überhaupt entstehende Wert eingesetzt wird. Diese bequeme Rechnungsweise kommt der Sicherheit des Bauwerks zugute; sie ist auch nicht zu ungünstig, weil das Glied  $X_a/F$  ohnehin nur von untergeordneter Bedeutung ist.

Wir beginnen mit dem in Fig. 278 dargestellten Falle und führen die Rechnung zum Teil in Buchstaben, zum Teil in Zahlen durch. Es sei  $l_1 = 2,4$  m,  $l_0 = l_2 = 4,8$  m,  $l_1' = 9,6$  m,  $l_2' = 7,2$  m,  $l = 12,0$  m,  $f_1 = 3,0$  m,  $f_2 = 3,6$  m,  $u_1 = 4,5$  m,  $u_2 = 7,5$  m.

Wir betrachten das Viereck  $ACDB$  als Belastungsfläche des Balkens  $AB$  und denken diese Last zunächst durch Zwischenträger auf die Knotenpunkte  $A, 1, 2, B$  übertragen. Auf 1 und 2 entfallen

$$(12) \quad \begin{cases} Z_1 = f_1 \frac{l_1 + l_0}{3} + f_2 \frac{l_0}{6} = 10,08 \\ Z_2 = f_2 \frac{l_2 + l_0}{3} + f_1 \frac{l_0}{6} = 13,92. \end{cases}$$

Diese beiden Lasten erzeugen die Stützenwiderstände  $A = 13,632$ ,  $B = 10,368$  und bei 1 und 2 die Momente

$$A \cdot 2,4 = 32,7168, \quad B \cdot 4,8 = 49,7664.$$

Da nun

$$(13) \quad \int_0^l M_a^2 dx = f_1^2 \frac{l_1 + l_0}{3} + f_2^2 \frac{l_0 + l_2}{3} + f_1 f_2 \frac{l_0}{3} = 80,352$$

ist, so besitzt die Einflußlinie für  $X_a$  bei 1 und 2 die Ordinaten

$$\eta_1 = \frac{32,7168}{80,352} = 0,407$$

$$\eta_2 = \frac{49,7664}{80,352} = 0,619.$$

Setzen wir zunächst den oft vorkommenden Fall voraus, daß die gesamte Belastung des Hängewerks durch Unterzüge auf die Punkte 1 und 2 übertragen wird,

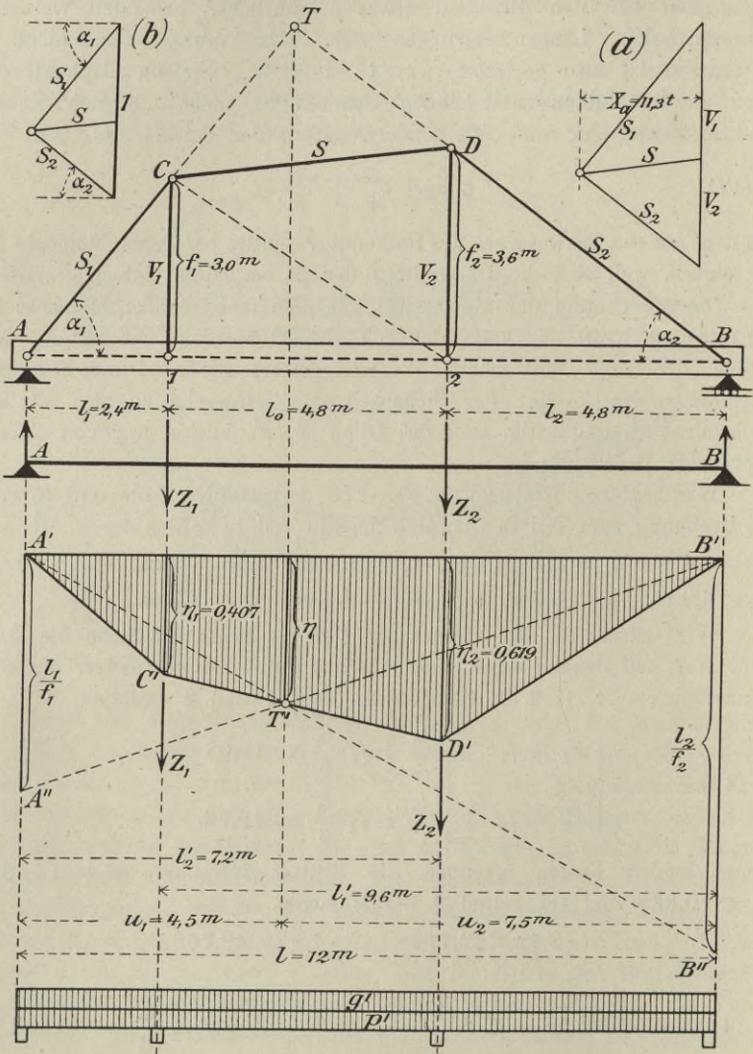


Fig. 278.

und 2 übertragen wird, so besteht die  $X_a$ -Linie aus den drei Geraden  $A'C'$ ,  $C'D'$ ,  $D'B'$ . Der Inhalt der  $X_a$ -Fläche ist

$$(14) \quad \mathfrak{F} = \frac{1}{2} (\eta_1 l_2' + \eta_2 l_1') = 4,44,$$

und es erzeugt daher eine gleichmäßige Belastung

$$q' = g' \text{ (ständig) } + p' \text{ (veränderlich)}$$

den Druck

$$(15) \quad \max X_a = q' \mathfrak{F}' = 4,44 g'.$$

Ehe wir zu den Momenten  $M$  übergehen, machen wir noch auf eine wichtige Eigenschaft der  $X_a$ -Linie aufmerksam.

Wir denken uns den Spannriegel  $CD$  mit einer lotrechten Last 1 belastet, welche durch den Schnittpunkt  $T$  der Streben  $S_1$  und  $S_2$  geht, verteilen diese Last auf die Knotenpunkte  $C$  und  $D$  und erhalten auf diese Weise zwei äußere Kräfte, denen die Gurtung  $ACDB$  als Seilpolygon zugewiesen werden darf. Da nun die Längenänderungen der Stäbe vernachlässigt worden sind, so sind die Verschiebungen der Knotenpunkte  $C$  und  $D$  gleich Null, die Hängesäulen bleiben spannungslos. Es entsteht der durch die Figur 278 b nachgewiesene Horizontalschub

$$X_a = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} = \eta,$$

der auch auf die Form gebracht werden kann

$$(16) \quad \eta = \frac{u_2}{l} \operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{u_2 l_1}{l f_1} = \frac{u_1 l_2}{l f_2},$$

woraus dann folgt, daß die durch den Punkt  $T'$  der  $X_a$ -Linie von  $B'$  und  $A'$  aus gezogenen Geraden auf den Lotrechten durch  $A'$  und  $B'$  die Strecken

$$\overline{A'A''} = \frac{l_1}{f_1} \quad \text{und} \quad \overline{B'B''} = \frac{l_2}{f_2}$$

abschneiden. Die Lage des Punktes  $T'$  ist also von vornherein gegeben. Durch Lösung der bekannten Aufgabe, ein Seilpolygon durch drei gegebene Punkte  $A'$ ,  $T'$ ,  $B'$  zu legen, kann man nach Berechnung von  $Z_1$  und  $Z_2$  die  $X_a$ -Linie auch zeichnerisch bestimmen\*).

Wir wenden uns jetzt zu den Biegemomenten. Bei Übertragung der Belastung auf die Punkte 1 und 2 können die größten Momente nur an den Stellen 1 und 2 auftreten.

Infolge der ständigen Belastung entsteht

$$(17) \quad \begin{cases} M_1 = M_{1.0} - X_a f_1 = g' \frac{l_1 l_1'}{2} - g' \mathfrak{F}' f_1 = -1,80 g' \\ M_2 = g' \frac{l_2 l_2'}{2} - g' \mathfrak{F}' f_2 = +1,30 g'. \end{cases}$$

Die Einflußflächen für  $M_1$  und  $M_2$  werden mittels der Geraden  $B'A''$  und  $A'B''$  bestimmt. In Fig. 279 gilt die dunkler schraffierte Fläche für  $M_1$ , die heller schraffierte für  $M_2$ . Für  $M_1$  ist im vor-

\*) Verfasser gibt der Berechnung der Strecken  $\eta_1$  und  $\eta_2$  den Vorzug.

liegenden Falle der negative Teil der Einflußfläche größer als der positive; für  $M_2$  gilt das umgekehrte. Es folgt dies bereits aus dem Einflusse der ständigen Belastung. Wir berechnen daher nur

$$(18) \quad \begin{cases} \min M_1 = -p' \frac{u_2 \eta_o}{2} f_1 = -\frac{1}{2} p' u_2 \left( \eta_2 f_1 - \frac{l_1 l_2}{l} \right) = -3,36 p' \\ \max M_2 = +p' \frac{u_2 \eta_u}{2} f_2 = +\frac{1}{2} p' u_2 \left( \frac{l_2 l_2'}{l} - \eta_2 f_2 \right) = +2,44 p'. \end{cases}$$

Das maßgebende Moment ist im vorliegenden Falle  $\min M_1$ .

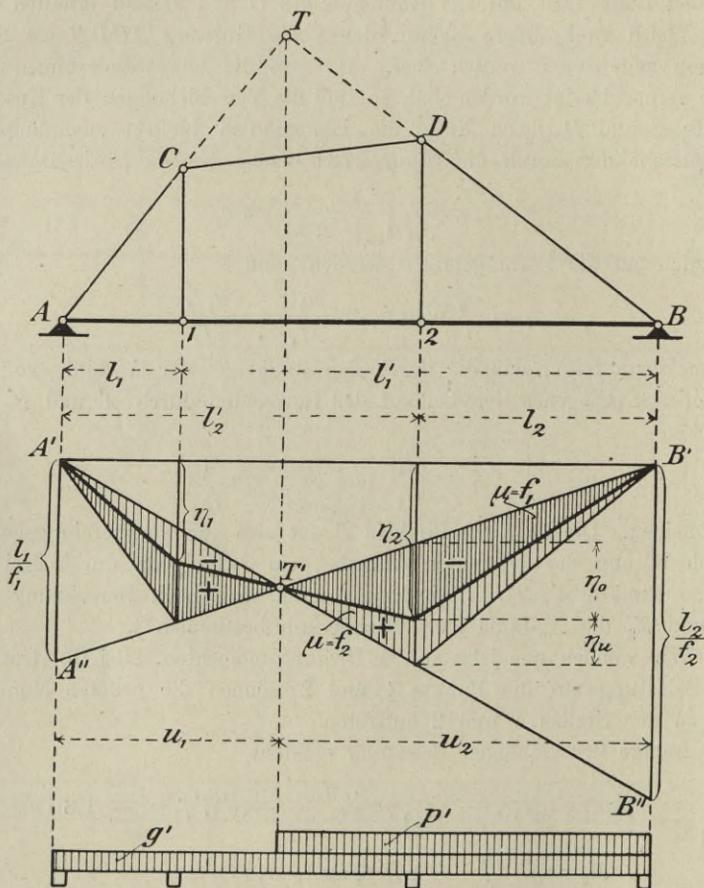


Fig. 279.

Nun gehen wir zur *Untersuchung des Einflusses einer unmittelbar am Balken angreifenden gleichförmigen Belastung*

$$q = g + p$$

über. Die  $X_a$ -Linie ist die Momentenlinie für eine Belastungsfläche, welche durch die Ordinaten

$$(19) \quad \begin{cases} z_1 = \frac{f_1}{\int M_a^2 dx} = \frac{3,0}{80,4} = 0,0373 \\ z_2 = \frac{f_2}{\int M_a^2 dx} = \frac{3,6}{80,4} = 0,0448 \end{cases}$$

bestimmt ist, Fig. 280. Zu den Ordinaten der Geraden  $A'C'$ ,  $B'D'$  und  $C'D'$  treten noch die Ordinaten

$$(20) \quad \begin{cases} \eta'_1 = \omega_D \frac{z_1 l_1^2}{6}, & \eta''_1 = \omega_D \frac{z_2 l_2^2}{6} \\ \eta''' = \omega_R \frac{z_1 l_0^2}{2} + \omega_D (z_2 - z_1) \frac{l_0^2}{6}. \end{cases}$$

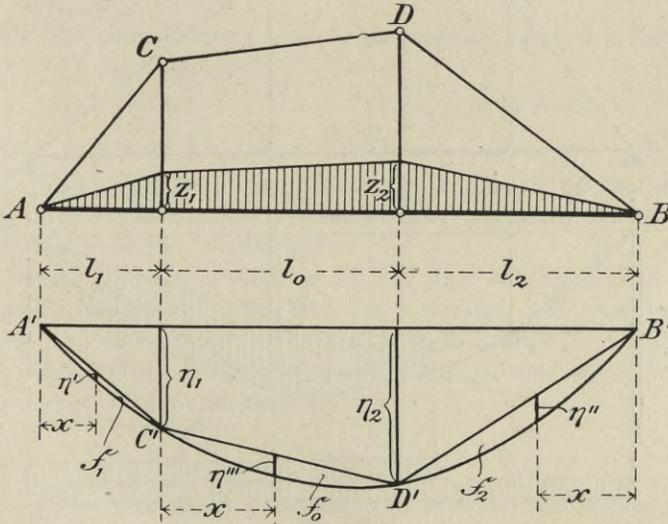


Fig. 280.

In dem hier vorliegenden Falle gleichförmiger Belastung wird sich die Aufzeichnung dieser Kurven als entbehrlich erweisen. Es genügt, die Inhalte der zur Fläche  $\mathfrak{F}' = 4,44$  hinzutretenden drei Flächen zu berechnen. Man findet nach Gleichung (38), Seite 106:

$$(21) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}_1 = \frac{z_1 l_1^3}{24} = 0,02, & \mathfrak{F}_2 = \frac{z_2 l_2^3}{24} = 0,21, \\ \mathfrak{F}_0 = \frac{(z_1 + z_2) l_0^3}{24} = 0,38 \end{cases}$$

und es ist daher der Inhalt der  $X_a$ -Fläche für unmittelbare Belastung

$$\mathfrak{F} = 4,44 + 0,61 = 5,05.$$

Es entsteht also bei voller Belastung

$$X_a = q \mathfrak{F} = 5,05 q.$$

Der Einfluß der ständigen Belastung auf die Momente  $M_1$  und  $M_2$  ist

$$(22) \quad \begin{cases} M_1 = g \frac{l_1 l_1'}{2} - g \mathfrak{F} f_1 = -3,63 g \\ M_2 = g \frac{l_2 l_2'}{2} - g \mathfrak{F} f_2 = -0,90 g. \end{cases}$$

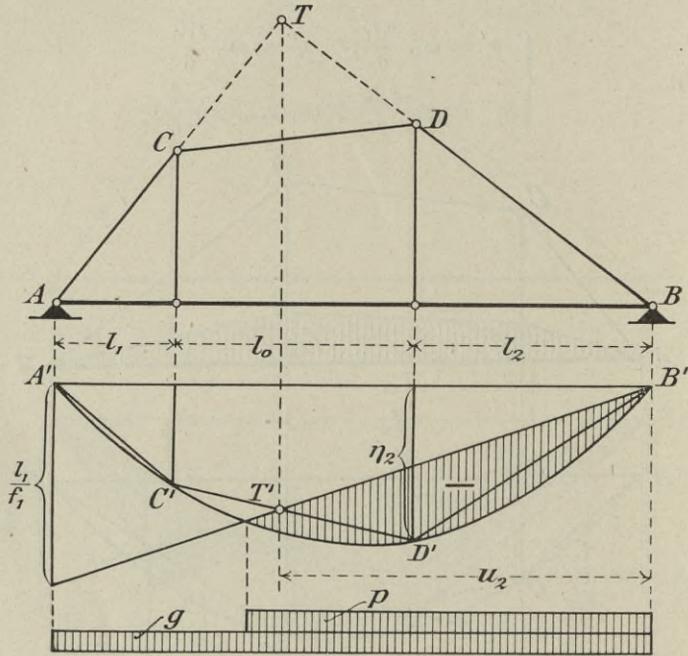


Fig. 281.

Für die Querschnittsberechnung des Balkens kommt nur das Moment  $\min M_1$  in Frage. Die positiven Momente treten noch mehr zurück als bei mittelbarer Belastung. Fig. 281 zeigt den negativen Teil der Einflußfläche für  $M_1$ . Um recht kurz zu rechnen, führen wir für den Inhalt dieser Fläche einen etwas zu großen Wert ein, indem wir die ganze Fläche  $\mathfrak{F}_0$  in Rechnung stellen. Wir setzen

$$(23) \quad \begin{aligned} \min M_1 &= -\frac{1}{2} p u_2 \left( \eta_2 f_1 - \frac{l_1 l_2}{l} \right) - p (\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_0) \\ &= -3,36 p - 0,59 p = -3,95 p. \end{aligned}$$

Die mittelbare und die unmittelbare Belastung erzeugen also zusammen:

$$\max X_a = 4,44 q' + 5,05 q$$

$$\min M_1 = -1,80 g' - 3,63 g - 3,36 p - 3,95 p.$$

Ist z. B. für ein hölzernes Hängewerk  $g' = 0,60$  t/m,  $p' = 0,80$  t/m,  $g = 0,40$  t/m,  $p = 0,60$  t/m, also  $q' = 1,40$  t/m und  $q = 1,0$  t/m, so entsteht

$$\max X_a = 11,3 \text{ t}, \quad \min M_1 = -7,59 \text{ tm}.$$

Ein Doppelbalken von  $24 \cdot 30$  cm besitzt  $F' = 2 \cdot 24 \cdot 30 = 1440 \text{ cm}^2$  und  $W = 2 \cdot 3600 = 7200 \text{ cm}^3$  und wird beansprucht mit

$$\sigma = \frac{759000}{7200} + \frac{11300}{1440} = 105 + 8 = 113 \text{ kg/cm}^2.$$

Der geringe Einfluß des Gliedes  $X_a/F$  rechtfertigt die gleichzeitige Einführung der bei verschiedenen Laststellungen entstehenden Werte  $\min M_1$  und  $\max X_a$ .

Für die obere Gurtung und die Hängesäulen liefert der Kräfteplan in Fig. 276 a die Spannkraften

$$S_1 = -18,1 \text{ t}, \quad S = -11,4 \text{ t}, \quad S_2 = -14,1 \text{ t},$$

$$V_1 = +12,8 \text{ t}, \quad V_2 = +9,9 \text{ t}.$$

Es bleibt jetzt noch der Einfluß von Lasten zu untersuchen, die in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen, ein bei Dachstühlen vorkommender Belastungsfall.

Gesucht sei beispielsweise der Einfluß einer beliebig gerichteten, in  $D$  angreifenden Last  $P$ . Fig. 282. Man zerlege  $P$  in eine lotrechte Kraft  $P'$  und eine in die Gerade  $DB$  fallende Kraft  $P''$ . Letztere ist, da der Stab  $DB$  starr vorausgesetzt wird, ohne Einfluß auf  $X_a$  \*). Hin-gegen erzeugt  $P'$  den Horizontalschub

$$X_a = P' \frac{\eta_2}{1},$$

der nach Fig. 282 durch Zerlegung von  $P'$  nach den Richtungen  $X_a$  und  $I$  erhalten wird. Damit ist aber auch der Spannriegeldruck  $S$ , dessen wagerechte Komponente gleich  $X_a$  ist, gegeben, und es lassen sich nun die Kräftepolygone für die Knotenpunkte  $D$  und  $C$  zeichnen.

Der Einfluß von  $P$  auf  $M_1$  ist

$$M_1 = -P' \eta_0 f_1,$$

wobei allerdings vorausgesetzt wird, daß der feste Stützpunkt  $A$  in der Balkenachse liegt. In der Regel befindet sich dieser Stützpunkt in einem

\*) Der Einfluß der Drehungen der Endquerschnitte des Balkens, darf ebenfalls vernachlässigt werden.

Abstände  $c$  unterhalb der Balkenachse, und es erzeugt dann der wagerechte Stützenwiderstand  $P_w$  das Zusatzmoment

$$M_1 = -P_w c.$$

Wird an die Knotenpunkte  $C$  und  $D$  ein Firstknoten  $E$  zweistäbig angeschlossen, und in  $E$  eine Last  $P$  angebracht, so findet man deren Einfluß auf  $X_a$  wie folgt. Man zerlegt  $P$  nach den Richtungen  $EC$  und

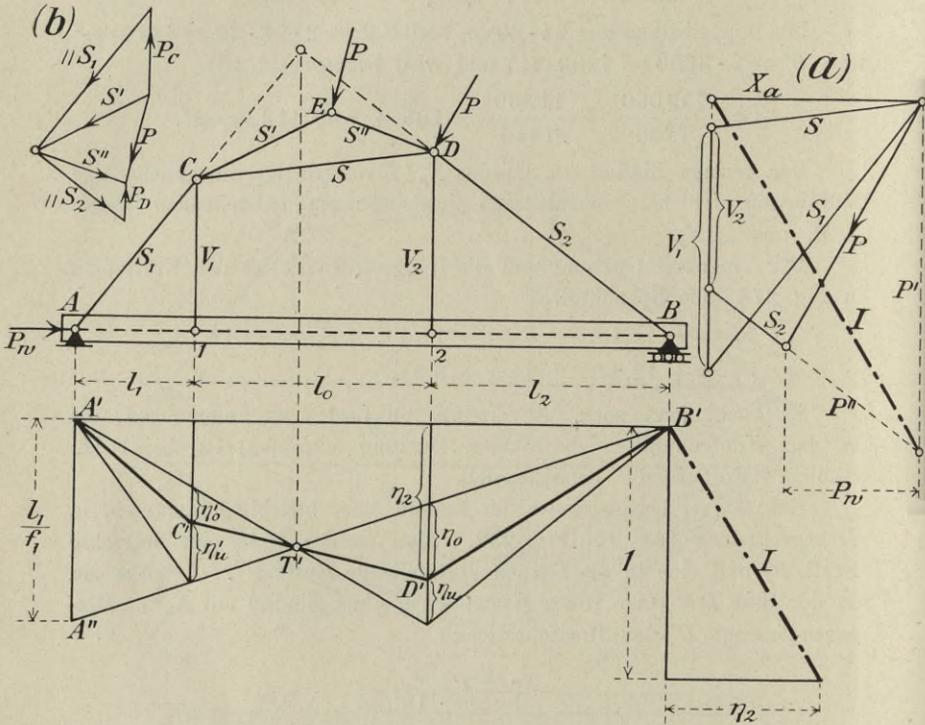


Fig. 282.

$ED$  in  $S'$  und  $S''$ , hierauf  $S'$  nach der Richtung  $CA$  und nach lotrechter Richtung,  $S''$  nach der Richtung  $DB$  und nach lotrechter Richtung. Die lotrechten Seitenkräfte seien  $P_c$  und  $P_D$ ; sie sind im vorliegenden Falle beide nach oben gerichtet und erzeugen daher

$$X_a = -P_c \eta_1 - P_D \eta_2.$$

Nun kann man  $S$  angeben und die Kräftepolygone für die Knotenpunkte  $C$  und  $D$  zeichnen.

Der Einfluß auf  $M_1$  ist

$$M_1 = f_1 (-P_c \eta_u' + P_D \eta_u).$$

Um den Einfluß einer in irgendeinem Punkte  $J$  des Stabes  $DB$  angreifenden, beliebig gerichteten Kraft  $P$  zu finden, Fig. 283, zerlege man  $P$  in zwei in den Punkten  $D$  und  $B$  angreifende zu  $P$  parallel gerichtete Kräfte  $P_o$  und  $P_u$  und bestimme den Einfluß von  $P_o$  auf  $X_a$ ,  $V_2$  und  $S$  auf die vorhin beschriebene Weise. Projiziert man nun den Kräftezug  $V_2S$  auf die Stabachse  $DB$ , so erhält man die das Stab-

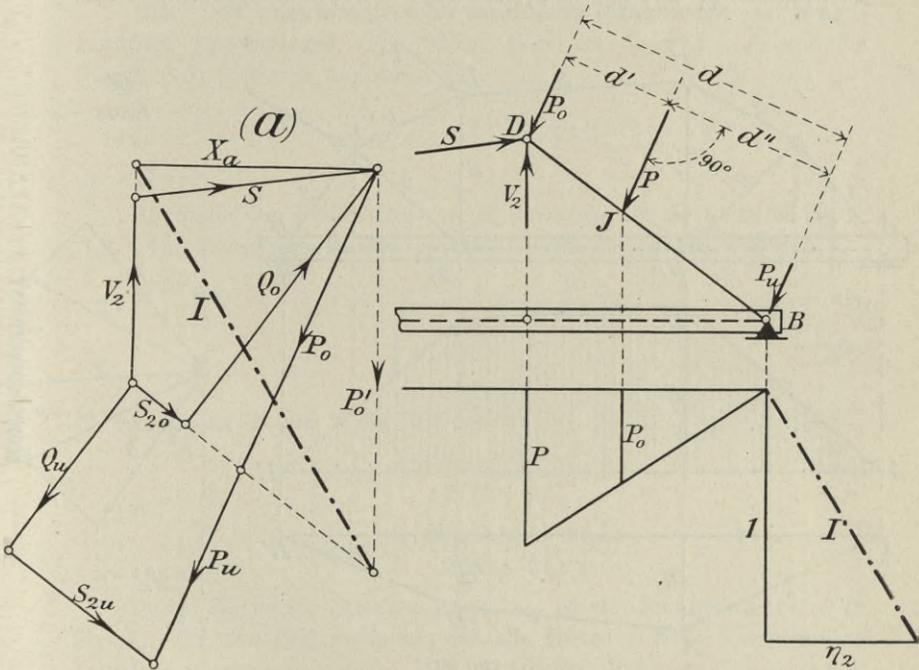


Fig. 283.

stück  $DJ$  auf Zug oder Druck beanspruchende Längskraft  $S_{2,o}$ . Die Projektion des Kräftezuges  $V_2SP$  liefert  $S_{2,u}$  für das Stabstück  $JB$ . Im vorliegenden Falle sind  $S_{2,o}$  und  $S_{2,u}$  Drücke. Fig. 283a gibt noch Aufschluß über die Querkräfte  $Q_o$  und  $Q_u$ , welche die Querschnitte der Stabstücke  $DJ$  und  $JB$  auf Abscherung beanspruchen. Wir haben sie nur der Vollständigkeit wegen eingetragen; bei der Querschnittsberechnung bleiben sie unberücksichtigt. Das den Stab  $DB$  beanspruchende Biegemoment ist mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen:

$$M = \frac{Pd' d''}{d}$$

104. Es möge noch die in Fig. 284 dargestellte Anordnung eines unsymmetrischen doppelten Hängewerks mit schrägem Spannriegel untersucht werden.  $X_a$  ist wieder die wagerechte Seitenkraft des im Riegel (3) auftretenden Druckes. Den Kräfteplan für  $X_a = -1$  zeigt Fig. 284 a. Die Stäbe 6, 7, 8, 9 werden gedrückt, die Gurtstäbe gezogen. Im Mittelstück des Balkens (Stab 11) herrscht ein Druck von der Größe Eins; die Seitenstücke (10 und 12) werden durch die wagerechten Seitenkräfte  $\psi_1$  und  $\psi_2$  von  $S_{1a}$  und  $S_{5a}$  auf Druck beansprucht. Durch

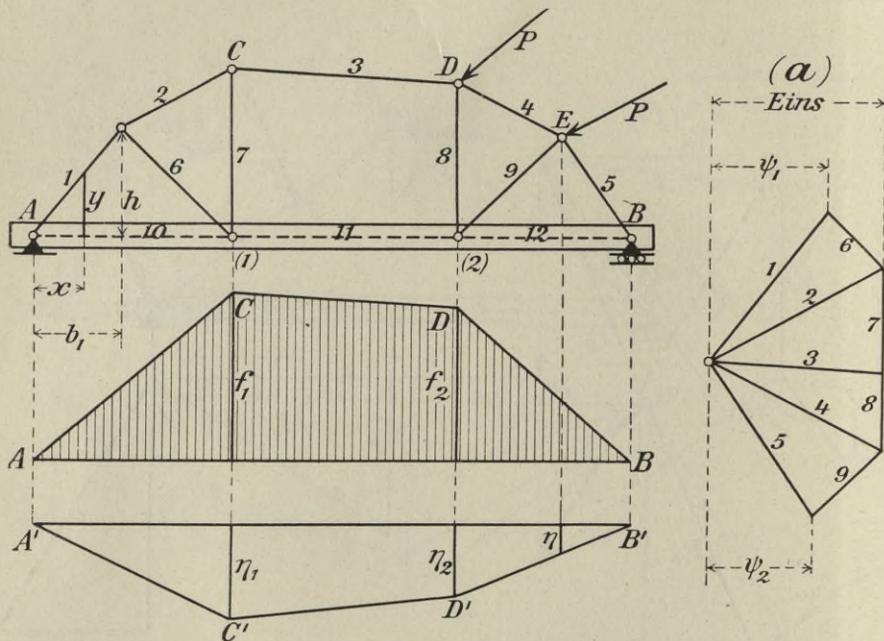


Fig. 284.

diese Angaben ist der Wert  $\sum S_a^2 \rho$  bestimmt. Für das praktische Anwendungsgebiet dieses Tragwerkes ist es aber immer erlaubt,  $\nu = 1$  zu setzen.

Das Angriffsmoment für einen Querschnitt des Mittelstückes des Balkens ist  $M = M_0 - X_a y$ . Dagegen erhält man für einen den Stab 1 treffenden Schnitt

$$M = M_0 - X_a \psi_1 y,$$

weil die wagerechte Seitenkraft von  $S_{1a}$  gleich  $\psi_1$  ist. Im Abstände  $b_1$  von A ist also  $M_a = \psi_1 h$ . Nun ist aber  $\psi_1 h = f_1 \frac{b_1}{l_1}$ , und es ist deshalb, genau wie bei dem in Nr. 103 untersuchten Hängewerke, das Viereck ACDB die  $M_a$ -Fläche; man erhält also dieselben Werte  $\eta_1$  und  $\eta_2$  wie in Nr. 103.

Eine im Punkte  $E$  angreifende Last  $P$  wird nach lotrechter Richtung und nach der Richtung  $EB$  zerlegt, eine in  $D$  angreifende Last  $P$  nach lotrechter Richtung und nach der Richtung  $DB$ . Die lotrechten Seitenkräfte  $P_D'$  und  $P_E'$  erzeugen

$$X_a = P_D' \eta_2 + P_E' \eta,$$

die anderen Seitenkräfte sind ohne Einfluß. Ist  $X_a$  bekannt, so kann man die Kräftepolygone für die einzelnen Knotenpunkte zeichnen.

**105. Das unsymmetrische zweifache Hängewerk mit waagrechttem Spannriegel** (Fig. 285). Hier ist  $f_1 = f_2 = f$  und die Gleich. (13) läßt sich umformen in

$$(24) \quad \int_0^l M_a^2 dx = \frac{f^2(l + 2l_0)}{3}.$$

An Stelle der Einflußlinie für  $X_a$  zeichnen wir die Einflußlinie für  $X_a f$ . Die zugehörige Belastungsfläche ist ein Trapez von der Höhe

$$(25) \quad z = \frac{f^2}{\int_0^l M_a^2 dx} = \frac{3}{l + 2l_0};$$

sie erzeugt bei 1 und 2 die Momente

$$(26) \quad \begin{cases} e_1 = \frac{l_1(2ll'_1 + l_0^2 + 2l_0l_2)}{2l(l + 2l_0)} \\ e_2 = \frac{l_2(2ll'_2 + l_0^2 + 2l_0l_1)}{2l(l + 2l_0)}. \end{cases}$$

Durch die beiden Strecken  $e_1$  und  $e_2$  ist die Einflußlinie  $A'C'D'B'$  für  $X_a f$  für den Fall bestimmt, daß alle Lasten auf die Knotenpunkte 1 und 2 übertragen werden. Die mittels des Punktes  $T'$  bestimmten Strecken  $A'A''$  und  $B'B''$  sind gleich  $l_1$  und  $l_2$ .

Die lotrecht unter  $T$  gemessene Ordinate der  $X_a$ -Linie ist

$$(27) \quad e_0 = l_1 \frac{a_2}{l} = l_1 \frac{a_2}{l_0} = l_2 \frac{a_1}{l_0}.$$

Da nun andererseits

$$e_0 = e_1 \frac{a_2}{l_0} + e_2 \frac{a_1}{l_0}$$

ist, so besteht zwischen  $e_1$  und  $e_2$  die Beziehung

$$(28) \quad \frac{e_1}{l_1} + \frac{e_2}{l_2} = 1,$$

die sich auch mittels der Gleichungen (26) beweisen läßt.

Die Lage des Schnittpunktes  $R''$  der Geraden  $A'C'$  und  $B'D'$  ist durch die Gleichung

$$\overline{R'R''} = e_1 \frac{w_1}{l_1} = e_2 \frac{w_2}{l_2} = \frac{e_2(l - w_1)}{l_2}$$

bestimmt. Man findet mit Beachtung von Gleichung (28)

$$w_1 = \frac{e_2 l}{l_2}$$

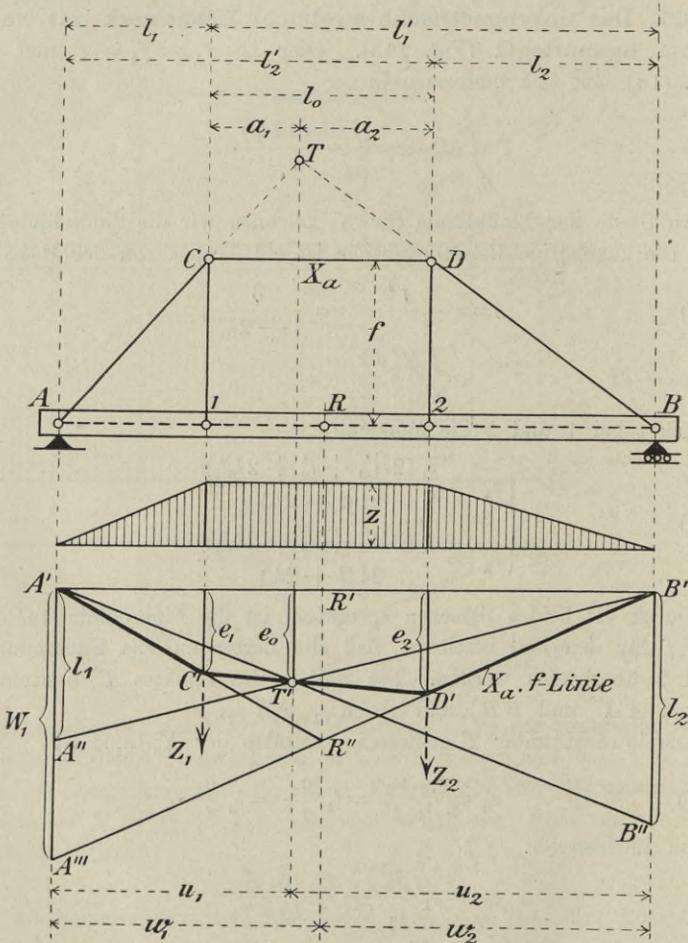


Fig. 285.

und hieraus folgt dann, daß die Gerade  $B'R''$  auf der Lotrechten durch  $A$  die Strecke

$$\overline{A'A'''} = w_1$$

abschneidet. Nun läßt sich aber die Lage des Punktes  $R$  und damit auch die Strecke  $w_1$  auch auf einem anderen Wege bestimmen. Verteilt man nämlich, wie dies auf Seite 345 geschehen ist, die Belastungsfläche auf die Knotenpunkte, so kommen auf die Punkte 1 und 2 die Lasten

$$Z_1 = z \left( \frac{l_1}{3} + \frac{l_0}{2} \right) \text{ und } Z_2 = z \left( \frac{l_2}{3} + \frac{l_0}{2} \right);$$

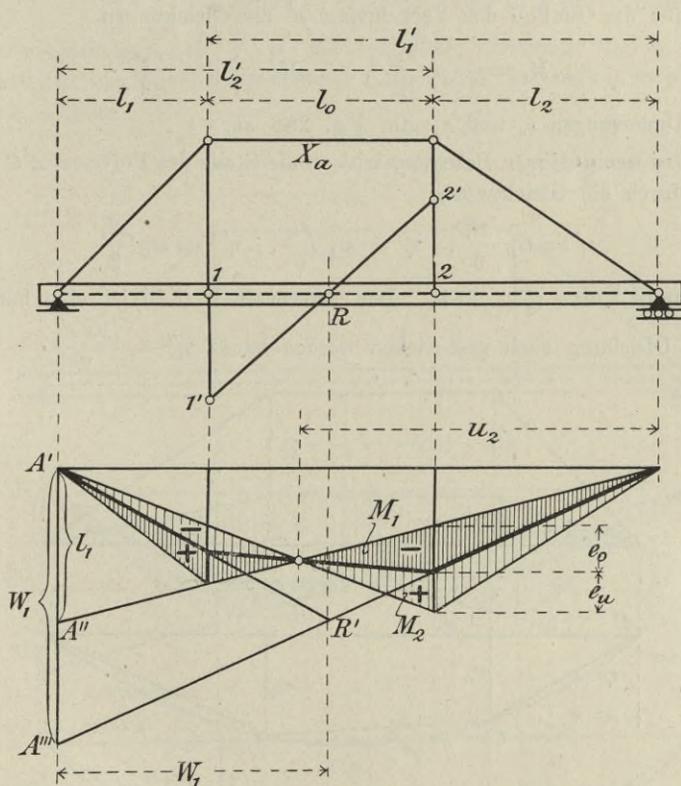


Fig. 286.

ihre Mittelkraft geht durch den Punkt  $R''$  und daraus folgt zwischen den Strecken  $R-1$  und  $R-2$  der Balkenachse die Beziehung

$$\frac{R-1}{R-2} = \frac{\frac{1}{3} l_2 + \frac{1}{2} l_0}{\frac{1}{3} l_1 + \frac{1}{2} l_0}.$$

Man gelangt also schließlich zu der folgenden Darstellung (Fig. 286).

Mache  $1-1' = \frac{1}{3} l_2 + \frac{1}{2} l_0$ ,  $2-2' = \frac{1}{3} l_1 + \frac{1}{2} l_0$  (in unserer Figur

wählen wir hierfür einen kleineren Maßstab), bestimme  $R$  mittels der Geraden  $1'2'$ , mache  $A'A''' = w_1$ , zeichne die  $X_\alpha f$ -Linie und bestimme mit Hilfe der Strecke  $\overline{A'A''} = l_1$  die Einflußflächen für  $M_1$  und  $M_2$ . Die weitere Untersuchung geschieht genau so wie in dem in Nr. 103 vorgetragenen Zahlenbeispiele; nur achte man darauf, daß für  $M_1$  und  $M_2$  der Multiplikator  $\mu = 1$  gilt. Man erhält z. B. statt der Gleichungen (18) jetzt für den Einfluß der Verkehrslast  $p'$  die Gleichungen

$$\min M_1 = -p' \frac{u_2 e_o}{2}, \quad \max M_2 = +p' \frac{u_2 e_u}{2}.$$

Die Abmessungen  $e_o$  und  $e_u$  gibt Fig. 286 an.

Bei *unmittelbarer Belastung* tritt an die Stelle des Polygons  $A'C'D'B'$  eine durch die Gleichungen

$$\eta' = \omega_D \frac{z l_1^2}{6}, \quad \eta'' = \omega_D \frac{z l_2^2}{6}, \quad \eta''' = \omega_R \frac{z l_0^2}{2}$$

bestimmte Kurve (Fig. 287). Das Kurvenstück  $C'D'$  ist eine Parabel, deren Gleichung auch geschrieben werden kann:  $\eta''' = \frac{z x x'}{2}$ .

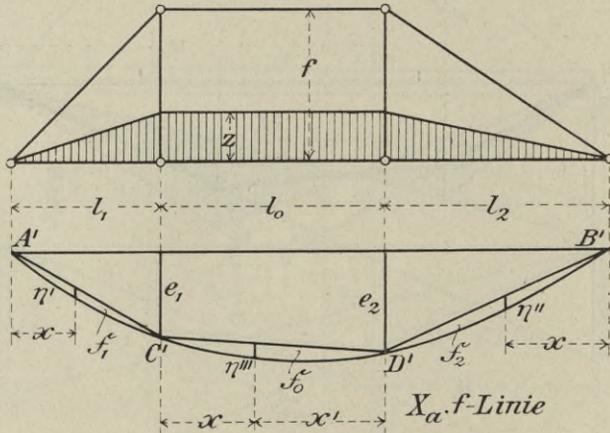


Fig. 287.

Es ist

$$\mathfrak{F}_0 = \frac{z l_0^3}{12}.$$

Auf dem in Nr. 103 angegebenen Wege gelangt man schließlich zu den folgenden Formeln für die beiden maßgebenden Werte  $X_\alpha$  und  $\min M_1$ .

Berechne:

$$(29) \quad \mathfrak{F}' = \frac{1}{2} (e_1 l_2' + e_2 l_1'), \quad \mathfrak{F}_1 = \frac{l_1^3}{8(l + 2l_0)}, \quad \mathfrak{F}_2 = \frac{l_2^3}{8(l + 2l_0)},$$

$$(30) \quad \mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_2 = \frac{l_1^3 + 2l_0^3 + l_2^3}{8(l + 2l_0)},$$

$$(31) \quad \max X_a = (g + g') \mathfrak{F}' + g \mathfrak{F}'';$$

$$(32) \quad \min M_1 = -(g + g') \left( \mathfrak{F}' - \frac{l_1 l_1'}{2} \right) - g \mathfrak{F}'' - (p + p') \frac{e_0 u_2}{2} - p [\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_0].$$

Wir wiederholen, daß  $g'$ ,  $p'$  die mittelbar wirkenden und  $g$ ,  $p$  die unmittelbar am Balken angreifenden Lasten sind, und daß  $q' = g' + p'$ ,  $q = g + p$  ist.

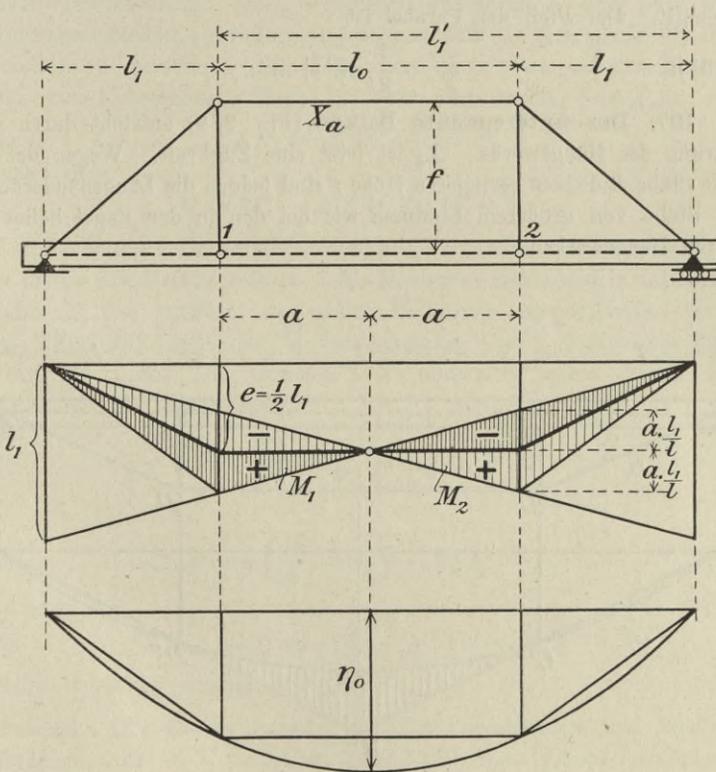


Fig. 288.

**106. Das symmetrische Hängewerk** (Fig. 288). Ist  $l_1 = l_2$ , so wird  $e_1 = e_2 = \frac{1}{2} l_1$  und  $e_0 = e_u = \frac{l_1 a}{l}$ , und es ergeben sich die folgenden einfachen Werte:

$$(33) \quad \mathfrak{F}' = \frac{1}{2} l_1 l_1',$$

$$(34) \quad \delta_1 = \frac{l_1^2}{8(l + 2l_0)}, \quad \delta_0 = \frac{l_0^2}{4(l + 2l_0)},$$

$$(35) \quad \delta'' = 2\delta_1 + \delta_0,$$

$$(36) \quad \max X_a = (q + q') \delta' + q \delta'',$$

$$(37) \quad \min M_1 = -g \delta'' - (p + p') \frac{l_1 l_0}{8} - p (\delta_0 + \delta_1).$$

Handelt es sich um eine Hängewerkbrücke und wird der Balken durch unmittelbar an ihm angreifende Einzellasten beansprucht, deren Wirkung am zweckmäßigsten mittels Einflußlinien verfolgt wird, so ersetze man die Einflußfläche für  $X_a f$  durch einen gleich großen Parabelabschnitt. Der Pfeil der Parabel ist

$$(38) \quad \gamma_0 = \frac{3}{2l} (\delta' + \delta'').$$

**107. Der unterspannte Balken** (Fig. 289) entsteht durch Umkehrung des Hängewerks.  $X_a$  ist jetzt eine Zugkraft. Wegen der für diese Stäbe üblichen geringeren Höhe  $f$  sind jedoch die Längenänderungen der Stäbe von größerem Einflusse wie bei den in der Regel höher gebauten Hängewerken.

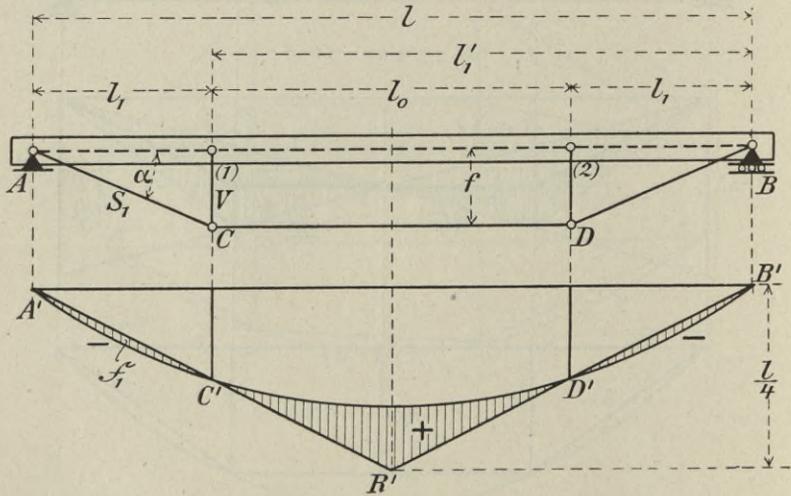


Fig. 289.

Der Träger sei symmetrisch. Es entsprechen den Stäben

	$AB$	$AC$	$CD$	$1C$
die Werte $S_a^2 =$	1	$\sec^2 \alpha$	1	$\operatorname{tg}^2 \alpha$
$\rho = \frac{s}{EF} =$	$\frac{l}{EF}$	$\frac{l_1 \sec \alpha}{E'F'}$	$\frac{l_0}{E'F'}$	$\frac{f}{E''F''}$

und es ergibt sich daher nach Gleich. (6), Seite 342,

$$(39) \quad \frac{1}{\nu} = 1 + \frac{3}{f^2(l + 2l_0)} \left[ l \frac{J}{F} + \frac{E}{E'} \frac{J}{F'} (2l_1 \sec^3 \alpha + l_0) + 2 \frac{E}{E''} \frac{J}{F''} l_1 \operatorname{tg}^3 \alpha \right].$$

Die Längenänderungen der Stäbe verkleinern den Zug  $X_a$ , sie vermindern die negativen und vergrößern die positiven Momente. Bleibt also  ${}_{\min}M_1$  das für die Querschnittsberechnung maßgebende Moment, so bedeutet die Annahme  $\nu = 1$  eine zugunsten der Sicherheit des Bauwerks gemachte Voraussetzung. Ist  $l_0$  wesentlich größer als  $l_1$  und greift die Belastung unmittelbar am Balken an, so empfiehlt es sich,  ${}_{\max}M$  für die Trägermitte zu berechnen und dabei den Wert  $\nu$  zu berücksichtigen. Der für  $\nu = 1$  berechnete Wert  $X_a f$  geht über in  $(X_a - \Delta X_a) f$ , wo

$$(40) \quad \Delta X_a = X_a (1 - \nu),$$

und man erhält

$${}_{\max}M = M_0 - X_a f + X_a f (1 - \nu).$$

Die Rechnung gestaltet sich sehr einfach, wenn man die Summen der beiden ersten Glieder für sich zu einem Maximum macht und in das letzte Glied für  $X_a$  den größten, der vollen Belastung entsprechenden Wert einsetzt. Fig. 289 zeigt die bei der Annahme  $\nu = 1$  entstehende Einflußfläche für  ${}_{\max}M$ . Die Geraden  $A'R'$  und  $B'R'$  gehen durch die Punkte  $C'$  und  $D'$ . Man erhält

$$(41) \quad \mathfrak{F}_+ = \frac{l_0^2}{8} - \mathfrak{F}_0, \quad \mathfrak{F}_- = 2\mathfrak{F}_1,$$

also

$$(42) \quad {}_{\max}M = q \left( \frac{l_0^2}{8} - \mathfrak{F}_0 \right) - 2g\mathfrak{F}_1.$$

Hierzu tritt

$$(43) \quad X_a f (1 - \nu) = q (\mathfrak{F}' + \mathfrak{F}'') (1 - \nu).$$

Mittelbare Belastung erzeugt  $M = 0$ .

*Beispiel.* Der Balken bestehe aus Holz, Spannstange und Pfosten aus Flußeisen. Es sei  $l_1 = 2,4$  m,  $l_1' = 7,2$  m,  $l_0 = 4,8$  m,  $l = 9,6$  m,  $l + 2l_0 = 19,2$  m,  $f = 1,0$  m,  $g = 0,4$  t/m,  $p = 0,8$  t/m,  $q = 1,2$  t/m. Wir nehmen zunächst  $\nu = 1$  an, berechnen mittels Gleich. (33) bis (37):

$$\mathfrak{F}' = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 7,2 = 8,64, \quad \mathfrak{F}_1 = \frac{2,4^3}{8 \cdot 19,2} = 0,09,$$

$$\mathfrak{F}_0 = \frac{4,8^3}{4 \cdot 19,2} = 1,44,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}'' &= 2 \cdot 0,09 + 1,44 = 1,62, & \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}' + \mathfrak{F}'' = 10,26, \\ \max X_{af} &= 1,2 \cdot 10,26 = 12,31 \text{ tm}, & X_a &= 12,3 \text{ t}, \\ S_1 &= X_a \sec \alpha = 12,3 \cdot 1,08 = 13,3 \text{ t}, \\ V &= X_a \operatorname{tg} \alpha = 5,1 \text{ t}, \\ \min M_1 &= -0,4 \cdot 1,62 - 0,8 \frac{2,4 \cdot 4,8}{8} - 0,8(1,44 + 0,09) = -3,02 \text{ tm}.\end{aligned}$$

Ein Balken von 26/28 cm besitzt abgerundet  $W = 3400$ ,  $J = 41000$ ,  $F = 730$  und wird beansprucht mit

$$\sigma = \frac{302000}{3400} + \frac{12300}{730} = 89 + 17 = 106 \text{ kg/cm}^2.$$

In der Mitte des Balkens entsteht, mit  $\nu = 1$ , nach Gleich. (42)

$$\max M = 1,2 \left( \frac{4,8^2}{8} - 1,44 \right) - 2 \cdot 0,4 \cdot 0,09 = 1,66 \text{ tm}.$$

Nun sei der Querschnitt der Zugstange  $F' = 13 \text{ cm}^2$ , des Pfostens  $F'' = 10 \text{ cm}^2$ , also

$$\frac{J}{F} = \frac{41000}{730} = 56 \text{ cm}^2 = 0,0056 \text{ m}^2,$$

$$\frac{J}{F'} = 0,32 \text{ m}^2, \quad \frac{J}{F''} = 0,41 \text{ m}^2.$$

Mit  $\frac{E}{E'} = \frac{E}{E''} = \frac{1}{20}$  ergibt sich  $\nu = 0,96$ , und man erhält daher

$$\max M = 1,66 + 12,3(1 - 0,96) = + 2,15 \text{ tm}.$$

Dieser Wert ist zwar um 30 v. H. größer als das für  $\nu = 1$  berechnete Moment  $\max M$ ; er ist aber kleiner als das für  $\nu = 1$  erhaltene  $\min M_1$ .

## 2. Zweifach statisch unbestimmte Hängewerke.

**108. Unsymmetrisches dreifaches Hängewerk mit wagemachtem Spannriegel.** Fig. 290. Die Spannkraft  $X_b$  in der mittelsten Hängesäule soll mit Hilfe der Gleichung

$$(44) \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

berechnet werden. Es wird also das in Nr. 105 behandelte doppelte Hängewerk als statisch unbestimmtes Hauptsystem eingeführt. Die elastischen Änderungen der Stablängen sollen gleich von vornherein vernachlässigt werden. Der Balken habe konstanten Querschnitt. Wir setzen  $EJ = 1$  und schreiben

$$\delta_{bb} = \int_0^l M_b^2 dx.$$

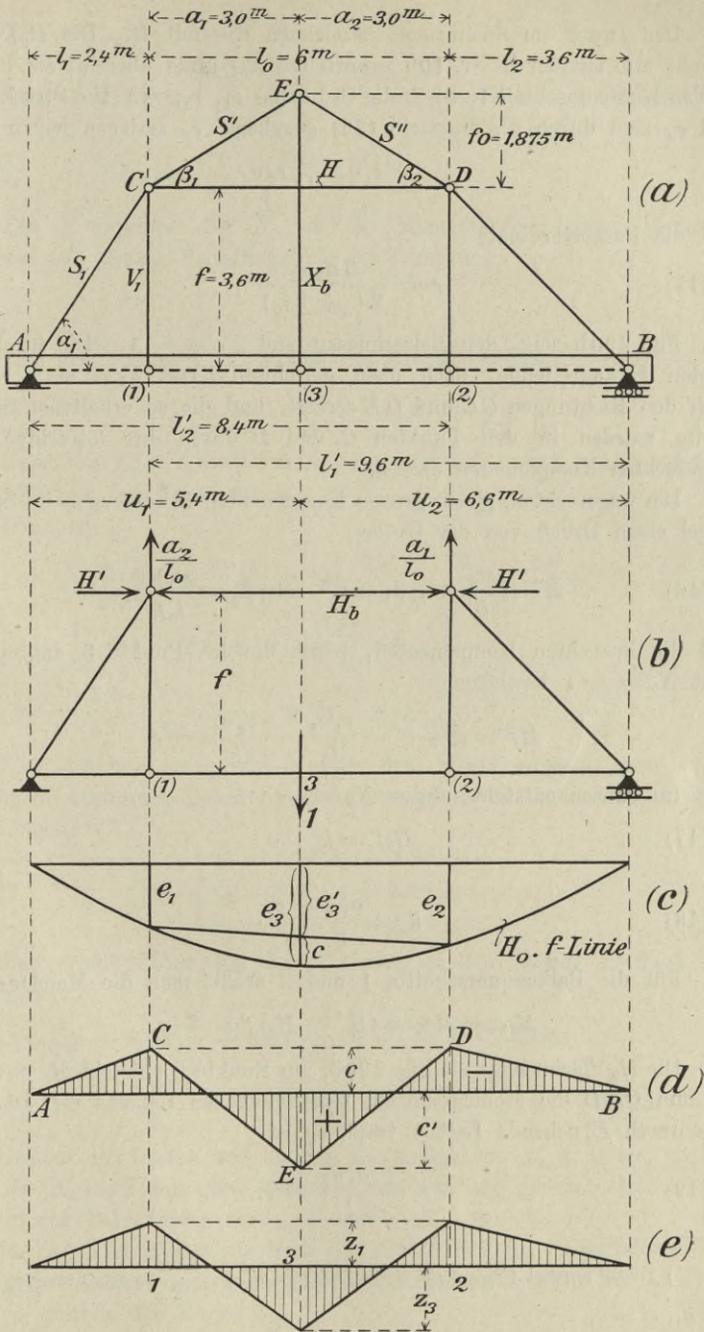


Fig. 290.

Den Druck im Spannriegel bezeichnen wir mit  $H$ . Die  $H_0f$ -Linie stimmt also mit der in Nr. 105 ermittelten  $X_a f$ -Linie überein; sie besitzt in den Knotenpunkten 1, 3, 2 die Ordinaten  $e_1, e_3, e_2$ . Die Strecken  $e_1$  und  $e_2$  sind durch die Formeln (26) gegeben.  $e_3$  zerlegen wir in

$$e_3' = \frac{e_1 a_2}{l_0} + \frac{e_2 a_1}{l_0}$$

und die Parabelordinate

$$(45) \quad c = \frac{3 a_1 a_2}{2 (l + 2 l_0)} *).$$

Fig. 290 b zeigt den Belastungszustand  $X_b = -1$ . Die im Firstknoten  $E$  angreifende, nach oben gerichtete Kraft  $X_b = -1$  wurde nach den Richtungen  $CE$  und  $DE$  zerlegt, und die so erhaltenen Seitenkräfte wurden in den Punkten  $C$  und  $D$  durch ihre lotrechten und wagerechten Komponenten ersetzt.

Die wagerechten, gleich großen Komponenten  $H'$  erzeugen im Spannriegel einen Druck von der Größe

$$(46) \quad H' = \frac{a_2}{l_0} \cotg \beta_1 = \frac{a_1}{l_0} \cotg \beta_2 = \frac{a_1 a_2}{l_0 f_0},$$

und die lotrechten Komponenten, sowie die im Punkte 3 angreifende Last  $X_b = -1$  bewirken

$$Hf = c + e_3' - \frac{e_1 a_2}{l_0} - \frac{e_2 a_1}{l_0} = c.$$

Im ganzen entsteht infolge  $X_b = -1$ :

$$(47) \quad H_b f = k + c$$

wo

$$(48) \quad k = \frac{a_1 a_2}{l_0} \frac{f}{f_0}.$$

Für die Balkenquerschnitte 1 und 2 erhält man die Momente

$$M_{1b} = M_{2b} = (H' - H_b) f = -c.$$

Die  $M_b$ -Fläche zeigt die Fig. 290 d. Im Punkte 3 entsteht  $M_b = +c'$ . Da nun  $CED$  die Momentenfläche eines einfachen Balkens  $CD$  ist, der eine durch  $E$  gehende Last 1 trägt, so ist

$$(49) \quad c' = \frac{a_1 a_2}{l_0} - c.$$

---

\*) Diese Formel folgt nach Seite 358 aus  $\eta''' = \frac{z z x'}{2}$ , wo  $z = \frac{3}{(l + 2 l_0)}$ ,  
 $x = a_1, x' = a_2$ .

Es ergibt sich jetzt

$$\delta_{bb} = \int_0^l M_b^2 dx = \frac{c^2 l_1}{3} + \frac{l_0}{3} (c^2 - cc' + c'^2) + \frac{c^2 l_2}{2}, \text{ das ist}$$

$$(50) \quad \delta_{bb} = \frac{c^2 l}{3} + \frac{c'(c' - c)l_0}{3}.$$

Die Einflußlinie für  $X_b$  ist die Momentenlinie eines einfachen Balkens  $AB$ , dessen Belastungslinie die Gleichung

$$z = \frac{M_b}{\delta_{bb}}$$

hat. An den Stellen 1, 2, 3 sind die Belastungshöhen

$$(51) \quad z_1 = z_2 = -\frac{c}{\delta_{bb}}, \quad z_3 = +\frac{c'}{\delta_{bb}}.$$

Es sei  $l = 12$  m,  $l_1 = 2,4$  m,  $a_1 = a_2 = 3,0$  m,  $l_2 = 3,6$  m,  $f = 3,6$  m,  $f_0 = 1,875$  m,  $l + 2l_0 = 24$  m.

Dann ist:

$$c = \frac{3 \cdot 3,0^2}{2 \cdot 24,0} = \frac{9}{16} \text{ m}, \quad c' = \frac{3,0^2}{6,0} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16} \text{ m},$$

$$\delta_{bb} = \frac{1}{16^2} (81 + 15 \cdot 6 \cdot 2) = \frac{63}{32} \text{ m}^3,$$

$$z_1 = -\frac{32}{63} \cdot \frac{9}{16} = -\frac{2}{7} \text{ m}^{-2}, \quad z_3 = \frac{32}{63} \cdot \frac{15}{16} = +\frac{10}{21} \text{ m}^{-2}.$$

Eine durch  $z_1 = z_2$  und  $z_3$  (alle drei Werte zunächst positiv angenommen) bestimmte Belastungsfläche erzeugt für die Querschnitte 1, 3, 2 die Momente

$$(52) \quad \begin{cases} \eta_1 = 6,36 z_1 + 3,96 z_3 \\ \eta_3 = 8,91 z_1 + 7,41 z_3 \\ \eta_2 = 8,46 z_1 + 4,86 z_3, \end{cases}$$

und man erhält daher für die  $X_b$ -Linie an den Stellen 1, 2, 3 die Ordinaten

$$\eta_1 = -6,36 \frac{2}{7} + 3,96 \frac{10}{21} = \frac{0,48}{7} = +0,069$$

$$\eta_3 = +\frac{6,88}{7} = +0,983; \quad \eta_2 = \frac{-0,72}{7} = -0,103.$$

Greifen die Lasten nur in den Knotenpunkten 1, 3, 2 an, so besteht die  $X_b$ -Linie aus drei Geraden, und die angegebenen drei Werte genügen zur Berechnung von  $_{max}X_b$  und  $_{min}X_b$ .

In Fig. 291 haben wir noch die Einflußlinie für unmittelbare Belastung des Balkens  $AB$  gezeichnet; die Ordinaten wurden für die Teile  $l_1, l_2, l_0$  mittels der Formeln

$$(53) \quad \begin{cases} \eta' = \omega_D z_1 \frac{l_1^2}{6}, & \eta'' = \omega_D z_1 \frac{l_2^2}{6} \\ \eta''' = \omega_D (z_3 - z_1) \frac{a^2}{6} + \omega_R \frac{z_1 a^2}{6} \end{cases}$$

berechnet. Es genügt die Berechnung weniger Zwischenpunkte.

Noch sei auf eine Rechenprobe aufmerksam gemacht. Greifen in den Knotenpunkten 1 und 2 zwei Lasten an, die sich zueinander verhalten wie  $l_2 : l_1$ , so muß bei starr angenommenen Stäben  $X_b = 0$  sein,

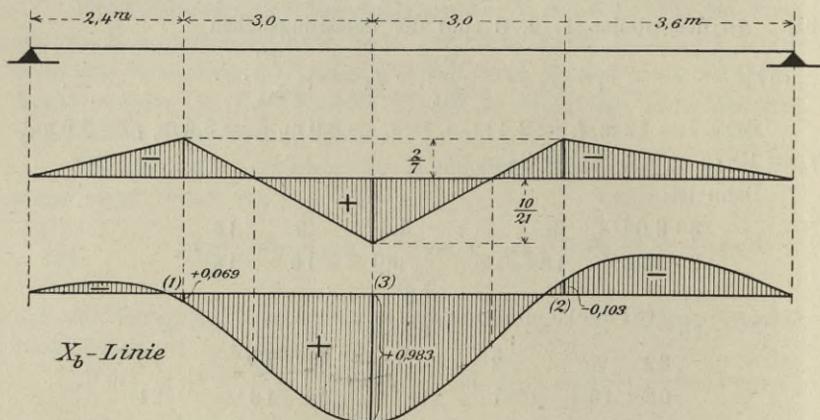


Fig. 291.

weil diese Lasten von dem Hängewerk  $ACDB$ , dessen Gurtung ein diese Lasten verbindendes Seilpolygon bildet, allein aufgenommen werden. Daraus folgt aber, daß sich verhalten muß

$$\eta_2 : \eta_1 = -l_2 : l_1 = -3,6 : 2,4 = -3 : 2.$$

$$\text{In der Tat ist } \eta_2 = -\frac{3}{2} \eta_1.$$

*Einflußlinie für den Spannriegeldruck H.* Aus der Gleichung

$$(55) \quad Hf = H_0 f - H_b X_b = H_0 f - (k + c) X_b$$

ergeben sich für die Ordinaten  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$  der  $Hf$ -Linie an den Stellen 1, 2, 3 die Werte

$$(56) \quad \begin{cases} \bar{\eta}_1 = e_1 - (k + c) \eta_1 \\ \bar{\eta}_3 = e_3 - (k + c) \eta_3 \\ \bar{\eta}_2 = e_2 - (k + c) \eta_2. \end{cases}$$

Die Strecken  $e$  findet man, wenn man in die Gleich. (52) für  $z_1$  und  $z_3$  die Belastungshöhe  $\frac{3}{l+2l_0} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$  einsetzt. Es ergibt sich

$$e_1 = \frac{6,36 + 3,96}{8} = 1,290, \quad \text{ebenso } e_3 = 2,040, \quad e_2 = 1,665.$$

Weiter ist nach Gleich. (48), wegen  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}l_0$ ,

$$k = \frac{a_1 f}{2f_0} = 2,88, \quad c = \frac{9}{16}, \quad k + c = 3,4425$$

und man erhält daher

$$\bar{\eta}_1 = 1,052, \quad \bar{\eta}_3 = -1,344, \quad \bar{\eta}_2 = +2,020.$$

Rechenprobe  $\frac{\bar{\eta}_1}{l_1} + \frac{\bar{\eta}_2}{l_2} = 0,439 + 0,561 = 1.$

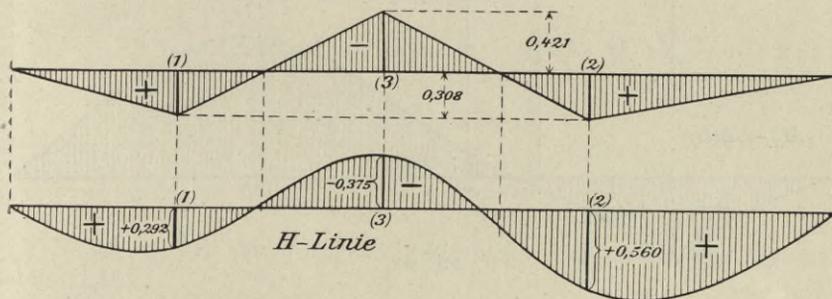


Fig. 292.

Mit Hilfe der Formel  $\bar{\eta} = e - (k + c) \eta$  kann man aus den Ordinaten der  $H_0f$ -Linie und der  $X_b$ -Linie auch die übrigen Ordinaten der  $Hf$ -Linie berechnen. Man kann aber auch in der Weise vorgehen, daß man die Belastungslinie der  $Hf$ -Linie bestimmt und dann die Formeln (53) anwendet. Da die Belastungslinie der  $H_0f$ -Linie in den drei Punkten 1, 2, 3 die gleiche Höhe  $\frac{3}{l+2l_0} = \frac{1}{8}$  besitzt, so findet man für die  $Hf$ -Linie

$$(57) \quad \begin{cases} \bar{z}_1 = \frac{3}{l+2l_0} - (k+c) z_1 = \frac{1}{8} + 3,4425 \frac{2}{7} = +1,109 \\ \bar{z}_3 = \frac{3}{l+2l_0} - (k+c) z_3 = \frac{1}{8} - 3,4425 \frac{10}{21} = -1,514. \end{cases}$$

In Fig. 292 haben wir die  $H$ -Linie nebst zugehöriger Belastungslinie dargestellt. Die vorstehend angegebenen Werte sind also durch  $f = 3,6$  dividiert worden.

*Einflußlinie für  $M_1$ .* Aus der Formel

$$(58) \quad M_1 = M_{1.0} - H_0 f + c X_b$$

ergeben sich für die Stellen 1, 3, 2 die Ordinaten

$$(59) \quad \begin{cases} \eta_{1'} = \frac{l_1}{l} l_1' - e_1 + c \eta_1 = 1,920 - 1,251 = + 0,669 \\ \eta_{3'} = \frac{l_1}{l} u_2 - e_3 + c \eta_3 = 1,320 - 1,487 = - 0,167 \\ \eta_{2'} = \frac{l_1}{l} l_2 - e_2 + c \eta_2 = 0,720 - 1,723 = - 1,003. \end{cases}$$

Die ersten Glieder geben die Ordinaten der  $M_{1.0}$  Linie an.

Probe:  $\eta_{1'} : \eta_{2'} = - l_1 : l_2 = - 2 : 3$ .

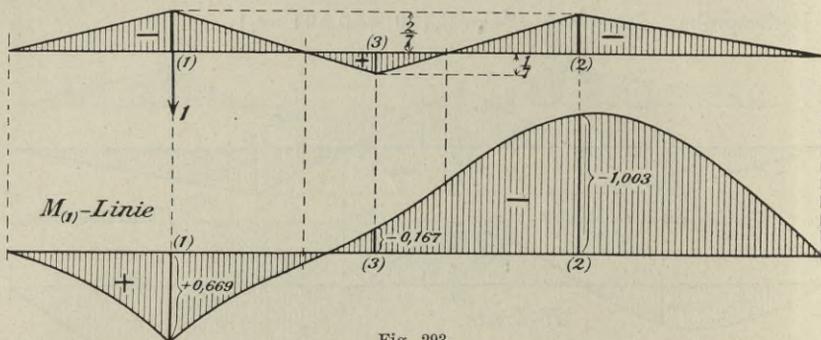


Fig. 293.

Die Höhen der Belastungslinie sind

$$(60) \quad \begin{cases} z_1' = -\frac{3}{l + 2l_0} + cz_1 = -\frac{1}{8} - \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{7} = -\frac{2}{7} \\ z_3' = -\frac{3}{l + 2l_0} + cz_3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{16} \cdot \frac{10}{21} = +\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Will man die  $M_1$ -Linie als Seillinie darstellen, so hat man zu der Belastungslinie noch im Punkte 1 eine Einzellast von der Größe 1 zu fügen. Vgl. Fig. 293.

*Einflußlinie für  $M_2$ .* Es ist

$$(61) \quad M_2 = M_{2.0} - H_0 f + c X_b$$

Man erhält

$$\eta_{1''} = \frac{l_2 l_1}{l} - 1,251 = - 0,531$$

$$\eta_{3''} = \frac{l_2 u_1}{l} - 1,487 = + 0,133$$

$$\eta_{2''} = \frac{l_2 l_2'}{l} - 1,723 = + 0,797.$$

Probe  $\eta_1'' : \eta_2'' = -l_1 : l_2 = -2 : 3$ .

Die Belastungshöhen sind dieselben wie für die  $M_1$ -Linie.

$$z_1'' = -\frac{2}{7}, \quad z_3'' = +\frac{1}{7}.$$

Im Punkte 2 tritt die Einzellast 1 hinzu.

*Einflußlinie für  $M_3$ .* Es ist

$$(62) \quad M_3 = M_{3 \cdot 0} - H_0 f - c' X_b, \text{ wo } c' = \frac{15}{16}.$$

Man findet

$$(63) \quad \begin{cases} \eta_1''' = \frac{u_2 l_1}{l} - e_1 - c' \eta_1 = -0,035 \\ \eta_3''' = \frac{u_1 u_2}{l} - e_3 - c' \eta_3 = +0,008 \\ \eta_2''' = \frac{u_1 l_2}{l} - e_2 - c' \eta_2 = +0,052, \quad \eta_1''' : \eta_2''' = -2 : 3. \end{cases}$$

$$(64) \quad \begin{cases} z_1''' = -\frac{3}{l + 2l_0} - c' z_1 = +\frac{1}{7} \\ z_3''' = -\frac{3}{l + 2l_0} - c' z_3 = -\frac{4}{7}. \end{cases}$$

$M_3$  ist von untergeordneter Bedeutung. Das maßgebende Moment ist  $\min M_1$ .

Solange die obere Gurtung des Hängewerkes unbelastet ist, gelten für die Spannkraften  $S'$  und  $S''$  der Stäbe  $EC$  und  $ED$  die Formeln

$$(65) \quad S' \sin \beta_1 = -X_b \frac{a_2}{l_0}, \quad S'' \sin \beta_2 = -X_b \frac{a_1}{l_0}.$$

Setzt man am Knotenpunkte  $C$  die Summe der wagerechten Kräfte gleich Null, so erhält man

$$(66) \quad \begin{aligned} S_1 \cos \alpha_1 &= S' \cos \beta_1 - H = -X_b \frac{a_2}{l_0} \cotg \beta_1 - H \\ S_1 \cos \alpha_1 &= -X_b \frac{a_1 a_2}{l_0 f_0} - H = -0,8 X_b - H. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Ordinaten der Einflußlinie für  $S_1 \cos \alpha_1$  mit  $y$  und erhalten nach der Formel

$$y = -0,8 \eta - \frac{\bar{\eta}}{f}$$

$$y_1 = -0,347, \quad y_3 = -0,413, \quad y_2 = -0,479.$$

Die zugehörigen Belastungshöhen sind

$$-0,8 z_1 - \frac{\bar{z}_1}{f} = +0,8 \frac{2}{7} - \frac{1,108}{3,6} = -0,080 \text{ bei 1 und 2}$$

$$-0,8 z_3 - \frac{\bar{z}_3}{f} = -0,8 \frac{10}{21} + \frac{1,514}{3,6} = +0,040 \text{ bei 3.}$$

Die Spannkraft  $S_1$  (Druck) nimmt bei voller Belastung den größten Wert an.

Setzt man im Punkte  $C$  die Summe der lotrechten Kräfte gleich Null, so findet man

$$V_1 = S' \sin \beta_1 - S_1 \sin \alpha_1 = S' \sin \beta_1 - S_1 \cos \alpha_1 \frac{f}{l_1}, \text{ das ist}$$

$$(67) \quad V_1 = \frac{a_2}{l_0} \left( \frac{a_1}{l} \frac{f}{f_0} - 1 \right) X_b + \frac{Hf}{l_1} = +0,7 X_b + \frac{Hf}{l_1}.$$

Für die Ordinaten  $y'$  der  $V_1$ -Linie gilt also

$$y' = +0,7 \eta + \frac{\bar{\eta}}{l_1}, \text{ woraus}$$

$$y_1' = +0,487, \quad y_3' = +0,128, \quad y_2' = +0,770.$$

Die Belastungshöhen sind

$$+0,7 z_1 + \frac{\bar{z}_1}{l_1} = -0,7 \frac{2}{7} + \frac{1,109}{2,4} = +0,262 \text{ bei 1 und 2}$$

$$+0,7 z_3 + \frac{\bar{z}_3}{l_1} = +0,7 \frac{10}{21} - \frac{1,514}{2,4} = -0,298 \text{ bei 3.}$$

Die  $V_1$ -Linie ist in Fig. 294 dargestellt worden.

Über die praktische Verwertung der vorstehenden Untersuchung für den hier wohl allein in Betracht kommenden Fall eines gleichmäßig mit  $g'$  und  $p'$  bzw.  $g$  und  $p$  belasteten Streckbalkens  $AB$  ist folgendes zu sagen.

Greifen die Lasten nur in den Knotenpunkten an, so braucht man die Werte  $z$  nicht. Es genügt, die Ordinaten  $\eta$ ,  $y$ ,  $y'$  für die Knotenpunkte 1, 3, 2 zu berechnen, die aus je vier Geraden bestehenden Einflußlinien zu zeichnen und die Flächeninhalte  $\bar{\mathfrak{F}}$  und  $\bar{\mathfrak{F}}'$  der positiven und negativen Einflußflächen zu berechnen; diese Inhalte bestimmen die größten Spannkräfte und Momente. Diese ganze Rechnung ist schnell erledigt.

Kommen unmittelbar am Balken angreifende Lasten vor, so braucht man im allgemeinen auch die Belastungshöhen  $z$ . Mit ihrer Hilfe kann man zunächst den Einfluß der ständigen Belastung  $g$  feststellen, ohne daß man nötig hat, die Einflußlinien zu zeichnen. Ist  $\bar{\mathfrak{F}}$  der Inhalt der Einflußfläche für irgendeine Größe, so ist der Einfluß von  $g$  auf diese

Größe gleich  $g\mathfrak{F}$ . Zur Berechnung von  $\mathfrak{F}$  aber dient die in Nr. 37 auf Seite 106 angegebene Formel (38), in welcher  $z' = 0$  zu setzen ist, da die Belastungslinien gerade Linien sind. Für die Berechnung der Inhalte  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{F}$  zur Bestimmung des Einflusses der Nutzlast sind bei den hier ausschließlich in Frage kommenden Dachstühlen Vereinfachungen zulässig, welche darauf hinzielen, das Zeichnen der Einflußlinien möglichst zu sparen. So darf man, um den größten Zug in der mittelsten Hängesäule zu berechnen,  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$  und  $\eta_3 = 1$  setzen und erhält dann den etwas zu großen Wert (Fig. 291):

$$(68) \quad \begin{aligned} \max X_b &= q \left[ a + \frac{a^3}{24} (z_3 + z_1) 2 \right] \\ &= q \left[ 3,0 + \frac{3,0^3}{12} \left( \frac{10}{21} - \frac{2}{7} \right) \right] = 3,43 q. \end{aligned}$$

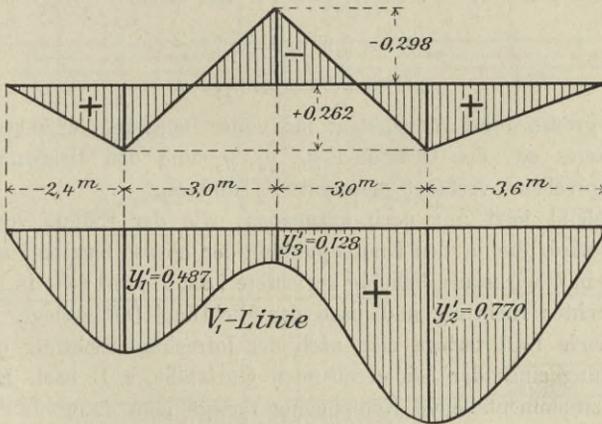


Fig. 294.

Um das für die Berechnung des Balkenquerschnitts maßgebende Moment  $\min M_1$  zu ermitteln, nehme man den Balken links vom Knotenpunkte 3 mit  $g$ , rechts davon mit  $q$  belastet an. Der Inhalt der Einflußfläche links von 3 ist (Fig. 293)

$$(69) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_2 &= \frac{1}{2} l_1 \eta_1' + \frac{1}{24} z_1' l_1^3 + \frac{1}{2} (\eta_1' + \eta_3') a_1 + \frac{1}{24} (z_1' + z_3') a_1^3 \\ &= \frac{1}{2} 2,4 \cdot 0,669 - \frac{1}{24} \cdot \frac{2}{7} 2,4^3 + \frac{1}{2} (0,669 - 0,167) 3,0 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left( -\frac{2}{7} + \frac{1}{7} \right) 3,0^3 = +1,23. \end{aligned}$$

Der Inhalt der Einflußfläche rechts von 3 ist

$$(70) \quad \mathfrak{F}_r = -\frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 1,003 - \frac{1}{24} \cdot \frac{2}{7} 3,6^3 - \frac{1}{2} (1,003 + 0,167) 3,0 \\ + \frac{1}{24} \left( \frac{1}{7} - \frac{2}{7} \right) 3,0^3 = -4,28.$$

Nun runde man  $\mathfrak{F}_i$  nach unten ab,  $\mathfrak{F}_r$  nach oben und setze

$$\min M_1 = -4,3 q + 1,2 q.$$

Die Einflußlinien für  $X_b$ ,  $V_1$  und  $M_1$  braucht man also nicht zu zeichnen. Die größten Werte von  $M_3$  und  $M_2$  sind kleiner als  $\min M_1$ . Die Berechnung des Balkens ist also, soweit die am Balken selbst angreifenden Lasten in Frage kommen, erledigt.

Zur Berechnung des größten Spannriegeldruckes  $H$  muß die  $H$ -Linie durch Berechnung einiger Ordinaten bestimmt werden. Man findet, absolut genommen,  $\mathfrak{F} = 2,81$ ,  $\mathfrak{F} = 0,77$  und erhält:

$$\max H = 2,81 q - 0,77 q$$

$$\min H = 2,81 q - 0,77 q.$$

Der größte Wert  $S_1$  entsteht bei voller Belastung, ergibt sich also ohne weiteres aus den Ordinaten  $y_1$ ,  $y_3$ ,  $y_2$  und den Belastungshöhen. Ganz entsprechend verfährt man mit  $V_2$  und  $S_2$ .

Es bleibt jetzt nur noch anzugeben, wie der Einfluß von Lasten bestimmt wird, die in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen.

Eine in  $D$  wirksame, beliebig gerichtete Last  $P$  wird (wie in Fig. 282) nach lotrechter Richtung und nach der Richtung  $DB$  zerlegt. Eine in  $E$  angreifende Last zerlege man nach der lotrechten Richtung und nach der Richtung eines der beiden obersten Gurtstäbe, z. B. nach  $ED$ . Die mit  $ED$  zusammenfallende Komponente zerlege man dann im Punkte  $D$  nach den Richtungen  $\overline{D2}$  und  $\overline{DB}$ . Einfluß auf  $X_b$ ,  $H$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  üben nur die lotrechten Seitenkräfte aus. Ihre Wirkung wird mit Hilfe der den Knotenpunkten entsprechenden Ordinaten der Einflußlinien festgestellt.

**109.** Besteht die obere Gurtung des Hängewerkes aus den beiden Geraden  $ACT$  und  $BDT$ , Fig. 295, so wird, starre Stäbe vorausgesetzt, eine im Knotenpunkte 3 angreifende Last  $P$  vom Hängewerk  $ATB$  allein aufgenommen; sie erzeugt  $X_b = P$ ,  $H = 0$ ,  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 0$ ,  $M_3 = 0$ ,  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 0$ . Man braucht jetzt auch die  $X$ -Linie nicht zu zeichnen und kann den Inhalt der  $X$ -Fläche mit Hilfe der für die Knotenpunkte ermittelten Werte  $\eta$  und  $z$  berechnen. Der größte Druck  $H$  entsteht bei voller Belastung.

Beachtenswert ist, daß man die Knotenpunktswerte  $\eta$  und  $z$  für alle

in Betracht kommenden Größen  $X_b, H, \dots$  aus den Biegemomenten berechnen kann, welche an den Stellen 1, 3, 2 durch die zunächst beliebig groß gedachten Belastungen  $z_1 z_3$  erzeugt werden.

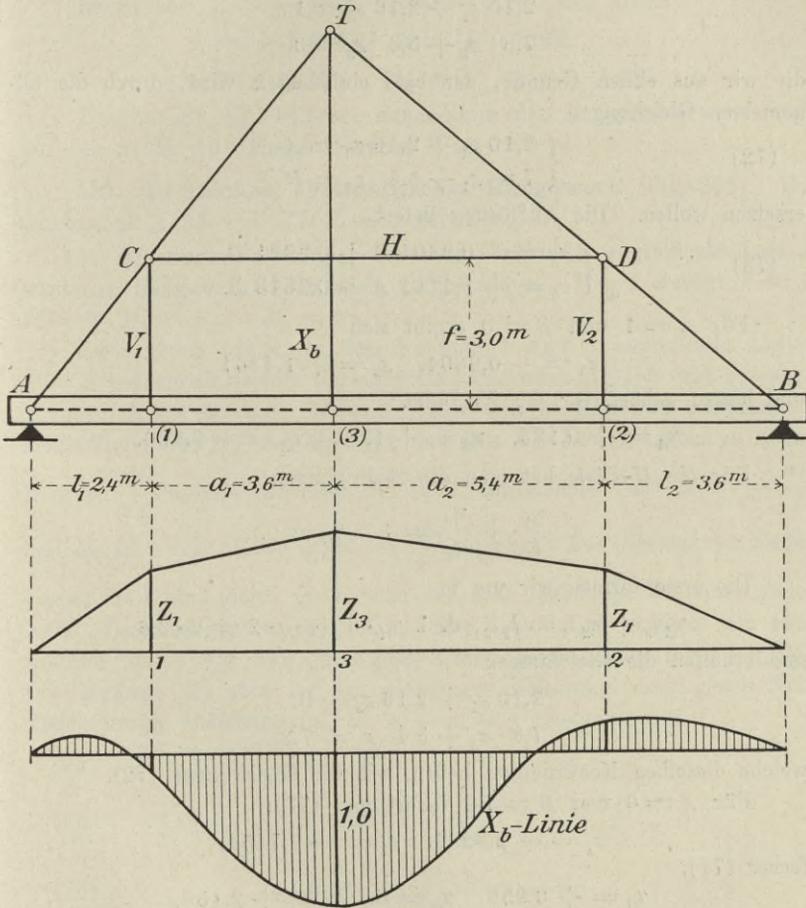


Fig. 295.

Ist z. B.

$$l_1 = 2,4 \text{ m}, \quad a_1 = 3,6 \text{ m}, \quad a_2 = 5,4 \text{ m}, \quad l_2 = 3,6 \text{ m}, \quad l = 15,0 \text{ m},$$

so entstehen infolge beliebig gewählter  $z_1$  und  $z_3$  die Momente

$$(71) \quad \begin{cases} \eta_1 = 1,32 z_1 + 1,008 z_3 \\ \eta_3 = 2,10 z_1 + 2,16 z_3 \\ \eta_2 = 1,92 z_1 + 1,188 z_3. \end{cases}$$

Für die  $X_b$ -Linie muß nun sein

$$\eta_3 = 1; \quad \eta_2 : \eta_3 = -l_2 : l_1 = -3 : 2, \text{ d. i. } 3\eta_1 + 2\eta_2 = 0.$$

Es ergeben sich die Gleichungen

$$2,10 z_1 + 2,16 z_3 = 1$$

$$7,8 z_1 + 5,4 z_3 = 0,$$

die wir aus einem Grunde, der bald einleuchten wird, durch die allgemeinen Gleichungen

$$(72) \quad \begin{cases} 2,10 z_1 + 2,16 z_3 = A \\ 7,8 z_1 + 5,4 z_3 = B \end{cases}$$

ersetzen wollen. Die Auflösung liefert

$$(73) \quad \begin{cases} z_1 = -0,9804 A + 0,3921 B \\ z_3 = +1,4161 A - 0,3813 B. \end{cases}$$

Für  $A = 1$  und  $B = 0$  ergibt sich

$$z_1 = -0,9804, \quad z_3 = +1,4161$$

und hierzu gehört, für die  $X_b$ -Linie,

$$\eta_1 = +0,133, \quad \eta_3 = +1,00, \quad \eta_2 = -0,200.$$

Für die  $H$ -Linie hat man die Bedingungen

$$\frac{\eta_1}{l_1} + \frac{\eta_2}{l_2} = 1, \quad \eta_3 = 0.$$

Die erste formen wir um in

$$\eta_1 l_2 + \eta_2 l_1 = l_1 l_2, \text{ d. i. } \eta_1 \cdot 3 + \eta_2 \cdot 2 = 2 \cdot 3,6$$

und erhalten die Gleichungen

$$2,10 z_1 + 2,16 z_3 = 0$$

$$7,8 z_1 + 5,4 z_3 = 7,2,$$

welche dieselben Koeffizienten haben, wie die Gleichungen (72).

Für  $A = 0$  und  $B = 7,2$  liefert nun (73):

$$z_1 = +2,8231, \quad z_3 = -2,7454,$$

ferner (71):

$$\eta_1 = +0,959, \quad \eta_3 = 0, \quad \eta_2 = +2,159.$$

Um die Werte für die  $M_1$ -Linie zu ermitteln, beachte man, daß eine im Punkte 1 wirksame Last 1 die Querschnitte 1, 3, 2 durch die Biegemomente

$$M_0 = 2,016, \quad 1,44, \quad 0,576$$

beansprucht. Es wird also

$$\eta_1 = 2,016 + 1,32 z_1 + 1,008 z_3$$

$$\eta_3 = 1,44 + 2,10 z_1 + 2,16 z_3$$

$$\eta_2 = 0,576 + 1,92 z_1 + 1,188 z_3.$$

Die Bedingungen  $3\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0$  und  $\gamma_3 = 0$  liefern die Gleichungen

$$2,10 z_1 + 2,16 z_3 = -1,44$$

$$7,8 z_1 + 5,4 z_3 = -7,2.$$

Es ist also  $A = -1,44$ ,  $B = -7,2$ . Man erhält

$$z_1 = -1,4113, \quad z_3 = +0,7062,$$

$$\gamma_1 = +0,865, \quad \gamma_3 = 0, \quad \gamma_2 = -1,295.$$

Hinsichtlich der weiteren Behandlung der Aufgabe verweisen wir auf den in Nr. 108 eingeschlagenen Weg.

**110. Dreifaches, symmetrisches Hängewerk** (Fig. 296). Die Gurtungen  $ACT$  und  $BDT$  seien geradlinig.

1. *Mittelbare Belastung.* Eine im Punkte 3 angreifende Last  $P$  wird vom Hängewerk  $ATB$  allein aufgenommen.  $P = 1$  erzeugt  $V = 1$ ,  $H = 0$ ,  $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ .

Zwei gleich große, in den Punkten 1 und 2 angreifende Lasten  $P = 1$  beanspruchen nur das doppelte Hängewerk  $ACDB$  und erzeugen  $V = 0$ ,  $M_1 = M_2 = 0$ ,  $M_3 = 0$ . Aus den in Fig. 296 gezeichneten Einflußlinien für  $Hf$  und  $M_1$  folgt, daß jede der beiden Lasten zu  $H$  den Beitrag  $\frac{l_1}{2f}$  liefert, während die in 1 angreifende Last  $M_1 = +\frac{al_1}{l}$  und die in 2 angreifende  $M_1 = -\frac{al_1}{l}$  erzeugt. Die Beiträge der beiden

Lasten zu  $V$  sind gleich groß, jeder für sich genommen ist daher gleich Null. Dasselbe gilt für  $M_3$ . Aus dieser Betrachtung ergeben sich ohne weiteres die in Fig. 296 a, b, c gezeichneten Einflußlinien für  $V$ ,  $H$ ,  $M_1$ . Das Moment  $M_3$  aber ist bei mittelbarer Belastung stets gleich Null. Gleichförmige Belastung ( $q'$ ,  $p'$ ,  $q' + p' = q'$ ) erzeugt also

$$(74) \quad \max V = q' a,$$

$$(75) \quad \max H = q' \frac{l_1 l}{4f},$$

$$(76) \quad \max M_1 = p' \frac{al_1}{4} = -\min M_1.$$

Eine in  $T$  angreifende Last wird von den Streben  $AT$  und  $BT$  allein aufgenommen. Von einer in  $D$  angreifenden Last  $P$  bilde man die Seitenkraft  $P'$ . Man findet dann

$$(77) \quad V = 0, \quad H = \frac{P'l_1}{2f}, \quad M_1 = -\frac{P'al_1}{l} = -M_2.$$

2. *Unmittelbare Belastung des Balkens.* An Stelle der aus Geraden bestehenden Einflußlinien treten die in der Figur 296 d, e, f dargestellten Kurven. Auf ihre ungefähre Form kann man ohne weiteres aus der in

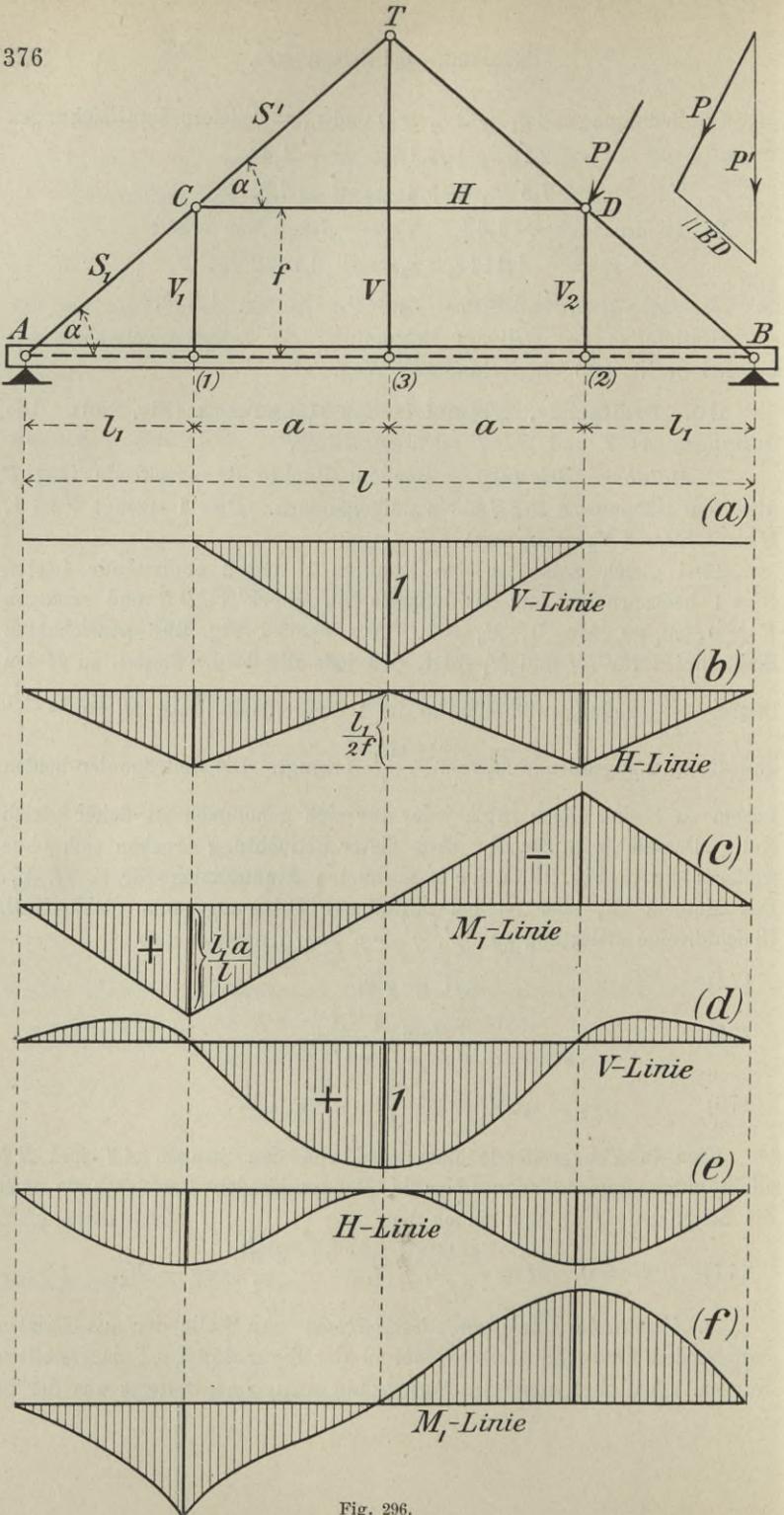


Fig. 296.

Nr. 109 durchgeführten Untersuchung schließen. Kommen aber nur gleichförmige Belastungen  $g$  und  $p$  vor, so braucht man diese Linien nicht weiter zu untersuchen. Es empfiehlt sich dann der folgende einfache Rechnungsgang.

Da die Änderungen der Stablängen vernachlässigt werden, so verhält sich der Stab  $AB$  bei jeder symmetrischen Belastung wie ein auf fünf gleich hohen starren Stützen ruhender Balken. Belastet man die Felder  $l_1$  mit  $g$  und die Felder  $a$  mit  $q$ , so erhält man  $_{max}V$  und  $_{min}M_3$ . Zwischen den Stützenmomenten bestehen die Beziehungen

$$2M_1(l_1 + a) + M_3a = -\frac{gl_1^3}{4} - \frac{qa^3}{4}$$

$$M_1a + 2M_3(a + a) + M_2a = -\frac{qa^3}{4} - \frac{qa^3}{4},$$

und man erhält, wegen  $M_2 = M_1$ ,

$$M_1 = \frac{-qa^3 - 2gl_1^3}{4(2l - a)},$$

$$(78) \quad M_3 = \frac{-qa^2(l - a) + gl_1^3}{4(2l - a)} =_{min}M_3.$$

Weiter findet man

$$V = qa + 2\frac{M_1 - M_3}{a}, \text{ das gibt}$$

$$(79) \quad_{max}V = \frac{qa^2(5l - 4a) - 3gl_1^3}{2a(2l - a)}.$$

Vertauscht man  $g$  mit  $q$ , so gelangt man zu

$$_{max}M_3 = \frac{-ga^2(l - a) + ql_1^3}{4(2l - a)},$$

$$(80) \quad_{min}V = \frac{ga^2(5l - 4a) - 3ql_1^3}{2a(2l - a)}.$$

Der Einfluß des Eigengewichts auf  $M_1$  und  $V$  ist

$$(81) \quad M_1 = -g\frac{a^3 + 2l_1^3}{4(2l - a)}$$

$$(82) \quad V = +g\frac{a^2(5l - 4a) - 3l_1^3}{2a(2l - a)}.$$

Um nun den bei voller Belastung seinen größten Wert annehmenden Spannriegeldruck  $H$  zu berechnen, gehe man von der Gleichung aus

$$(83) \quad M_1 = M_{1.0} - Hf - \frac{V}{2}l_1,$$

wo  $M_{1.0} = \frac{gl_1l_1'}{2}$  ist, und setze für  $M_1$  und  $V$  die Werte, die sich aus

den Formeln (81) und (82) ergeben, wenn  $g$  durch  $q$  ersetzt wird. Man erhält dann

$$(84) \quad \max Hf = \frac{ql_1 l_1'}{2} + qd^2 - \frac{qc l_1}{2},$$

wo

$$(85) \quad d^2 = \frac{a^3 + 2l_1^3}{4(2l - a)},$$

$$(86) \quad c = \frac{a^2(5l - 4a) - 3l_1^2}{2a(2l - a)}.$$

Das Moment  $\min M_1$  entsteht, wenn die Nutzlast  $p$  nur auf der rechten Hälfte des Balkens aufgebracht wird. Die zu diesem Belastungs-falle gehörenden Werte  $V$  und  $Hf$  erhält man, wenn man die durch die Gleich. (82) und (84) gegebenen Werte halbiert und hierauf  $p$  an die Stelle von  $g$  bzw.  $q$  setzt. Es entsteht

$$V = \frac{pc}{2} \quad \text{und} \quad Hf = \frac{pl_1 l_1'}{4} + \frac{pd^2}{2} - \frac{pc l_1}{4}.$$

Da nun  $M_{1.0}$  für den fraglichen Belastungsfall gleich  $\frac{pl}{8} l_1$  ist, so ergibt sich nach Gleich. (83)

$$\min M_1 = \frac{pl l_1}{8} - \frac{pl_1 l_1'}{4} - \frac{pd^2}{2}, \quad \text{das ist}$$

$$\min M_1 = -\frac{pl_1 a}{4} - \frac{pd^2}{2}.$$

Wird der Einfluß des Eigengewichts hinzugerechnet, so entsteht

$$(87) \quad \min M_1 = -\frac{pl_1 a}{4} - \left(\frac{p}{2} + g\right) d^2,$$

und hieraus folgt dann

$$(88) \quad \max M_1 = +\frac{pl_1 a}{4} + \left(\frac{p}{2} - g\right) d^2,$$

weil  $\min M_1 + \max M_1$  gleich dem Momente für volle Belastung mit  $g + g$  sein muß. Das maßgebende Moment ist  $\min M_1$ .

Für die Spannkkräfte in den seitlichen Hängestangen und in den Gurtstäben liefern die Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte  $C$  und  $T$  die Formeln

$$(89) \quad V_1 = H \operatorname{tg} \alpha,$$

$$(90) \quad S' = -\frac{V}{2 \sin \alpha},$$

$$S_1 - S' = -H \sec \alpha.$$

Die größten Werte  $V_1$  und  $S'$  ergeben sich ohne weiteres aus den größten Werten  $H$  und  $V$ . Die Formel für  $S_1$  läßt sich umformen in

$$S_1 f \cos \alpha = -\frac{1}{2} V f \cotg \alpha - H f = -\frac{1}{2} V l_1 - H f,$$

und hieraus und aus Gleich. (83) folgt

$$(91) \quad S_1 f \cos \alpha = -M_1 \cdot 0 + M_1.$$

Dieser Wert wird am größten bei voller Belastung. Es entsteht

$$(92) \quad S_1 f \cos \alpha = -\frac{q l_1 l_1'}{2} - q d^2.$$

### 3. Sprengwerke.

III. Das doppelte Sprengwerk (Fig. 297).  $X_\alpha$  bedeutet wieder den Druck im Spannriegel. Die Achsen der Streben werden mit den

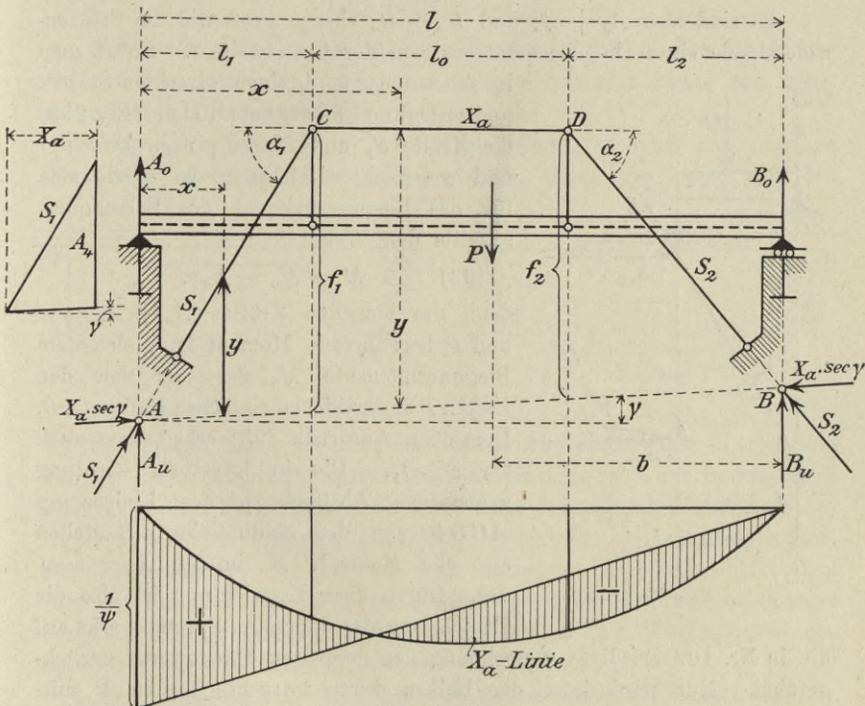


Fig. 297.

durch die Balkenstützen gehenden Lotrechten in  $A$  und  $B$  zum Schnitt gebracht. In den Punkten  $A$  und  $B$  werden die Stützenwiderstände  $S_1$  und  $S_2$  in die lotrechten Komponenten  $A_u$  und  $B_u$  und in die mit der

Geraden  $AB$  zusammenfallenden Seitenkräfte  $X_a \sec \gamma$  zerlegt. Die Widerstände der Balkenstützen seien  $A_o$  und  $B_o$ , ferner werde

$$A_o + A_u = A, \quad B_o + B_u = B$$

gesetzt. Am Balken oder in den Knotenpunkten  $C$  und  $D$  greifen lotrechte Lasten an. Die Momentengleichung in bezug auf den Punkt  $B$  lautet

$$Al - \Sigma Pb = 0,$$

sie liefert

$$A = \frac{\Sigma Pb}{l}.$$

In derselben Weise entsteht

$$B = \frac{\Sigma P}{l} (l - b).$$

Es sind also  $A_o + A_u$  und  $B_o + B_u$  ebenso groß wie die Stützenwiderstände eines einfachen

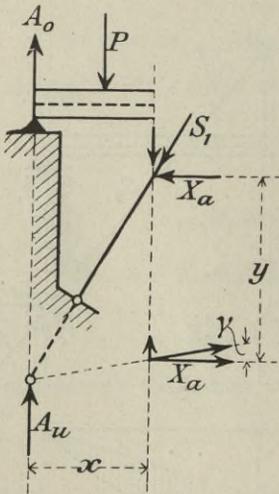


Fig. 298.

Balkens von der Spannweite  $l$ . Führt man im Abstände  $x < l_1$  einen lotrechten Schnitt und zerlegt man an der Schnittstelle (Fig. 298) die Kräfte  $S_1$  und  $X_a \sec \gamma$  nach lotrechter und wagerechter Richtung, so erhält man für das Biegemoment des Balkenquerschnitts den Wert

$$(93) \quad M = M_0 - X_a y,$$

denn das von den Kräften  $A_o + A_u = A$  und  $P$  herrührende Moment ist gleich dem Biegemomente  $M_0$  des nur von den Lasten  $P$  angegriffenen einfachen Balkens  $AB$ . Denselben Ausdruck (93) erhält man auch für  $x > l_1$ . Die in lotrechter Richtung gemessenen Abstände  $y$  des Linienzuges  $ACDB$  von der Schlußlinie  $AB$  stellen also die Momente  $M_a$  infolge  $X_a = -1$  vor. Durch diese Entwicklung ist also die Berechnung des doppelten Sprengewerks auf

die in Nr. 103 erledigte Berechnung des doppelten Hängewerks zurückgeführt. Nur wird jetzt der Balken durch lotrechte Lasten  $P$  ausschließlich auf Biegung beansprucht. Es ist also

$$\sigma = \pm \frac{M}{W}.$$

Auch hat der Balken keinen Einfluß auf die Ziffer  $\nu$ .

Sodann tritt die Aufgabe der Ermittlung der Stützenwiderstände  $A_o$  und  $B_o$  hinzu. Aus

$$A_u = X_a (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \gamma) \text{ und } A_o = A - A_u$$

folgt

$$(94) \quad A_o = A - \psi X_a = \psi \left( \frac{A}{\psi} - X_a \right),$$

wenn zur Abkürzung

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \gamma = \psi$$

gesetzt wird. Die Einflußfläche für  $A_o$  zeigt Fig. 297; sie ist der Unterschied der Einflußfläche für  $A/\psi$  und für  $X_a$ . Ihr Multiplikator ist  $\psi$ .

Ist  $f_1 = f_2 = f$  und  $\gamma = 0$ , Fig. 301, so wird

$$A_u = X_a \operatorname{tg} \alpha_1 = X_a \frac{f}{l_1},$$

und man erhält

$$A_o l_1 = A l_1 - X_a f.$$

An Stelle der  $X_a$ -Linie wird die  $X_a f$ -Linie benutzt. Die  $A_o l_1$ -Fläche ist bestimmt durch die Strecke  $A'A'' = l_1$ ; sie stimmt rechts vom Querschnitte 1 mit der  $M_1$ -Fläche überein.

Liegt der Spannriegel unter dem Balken, so muß man zwischen Spannriegel und Balken eine Lücke lassen, wenn man haben will, daß

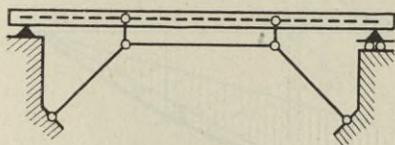


Fig. 299.

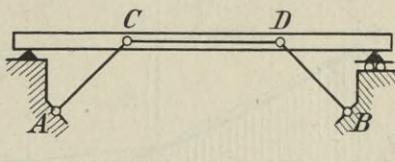


Fig. 300.

der Spannriegel nicht auf Biegung beansprucht wird. Die Übertragung der für das Hängewerk aufgestellten Berechnung auf das Sprengwerk setzt in diesem Falle streng genommen sogar voraus, daß zwischen Spannriegel und Balken lotrechte Gelenkstäbe (Fig. 299) eingeschaltet werden. Der Verfasser hat bei der von sehr schweren Einzellasten befahrenen Rüstung für den Berliner Dom hölzerne Sprengwerke ohne Spannriegel ausgeführt\*). In diesem Falle sind C und D die Schnittpunkte der Strebenachsen und der Balkenachse. Fig. 300.

Besonders wichtig ist, daß die Stützenwiderstände auch negativ werden können. Tritt dieser Fall ein, was von dem Verhältnis  $l_1 : l_0 : l_1$  und dem Verhältnis der ständigen Belastung zur veränderlichen Nutz-

\*) Angaben über die Belastung der Domrüstung findet man in Band I (1905), Seite 513.

last abhängt, so muß das Balkenende verankert werden. Fehlt diese Verankerung, so muß die folgende Untersuchung angestellt werden.

Es sei  $l_1 < l_2$ . Die Möglichkeit, daß das Auflager druckfrei wird, ist also bei  $A_o$  größer als bei  $B_o$ . Man berechne das von der ständigen Belastung herrührende Moment

$$M_{1g} = -g \tilde{\mathfrak{F}}'' \quad [\text{siehe Formel (32), Seite 359}]$$

und den zugehörigen Auflagerwiderstand

$$A_{og} = \frac{gl_1}{2} + \frac{M_{1g}}{l_1} = g \left( \frac{l_1}{2} - \frac{\tilde{\mathfrak{F}}''}{l_1} \right).$$

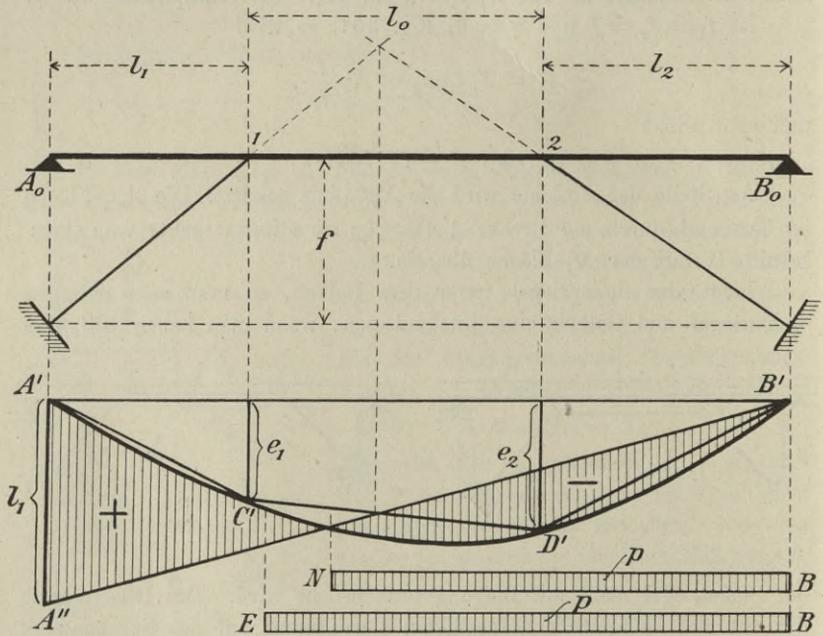


Fig. 301.

Die Felderteilung wird man stets so wählen, daß dieser Wert positiv ist. Nun schiebt man die Verkehrslast von  $B$  aus bis zum Nullpunkte  $N$  der  $A_o l_1$ -Fläche vor, Fig. 301, und prüft, ob  $A_o$  positiv oder negativ ist. Durch den Inhalt  $\tilde{\mathfrak{F}}$  des negativen Teiles der Einflußfläche ist

$$A_{op} = -\frac{p \tilde{\mathfrak{F}}}{l_1} \quad \text{bestimmt, und man erhält}$$

$$A_o = A_{og} - \frac{p \tilde{\mathfrak{F}}}{l_1}.$$

Ist dieser Wert positiv, so ist  $\min M_{1p} = -p \tilde{\mathfrak{F}}$ .

Wir wollen nun aber annehmen, es habe sich

$$A_{og} < \frac{p \delta}{l_1}$$

herausgestellt, und es müsse die Verkehrslast von  $B$  aus bis  $E$  vorgehoben werden, um mindestens den Wert  $A_o = 0$  zu erzielen, wobei

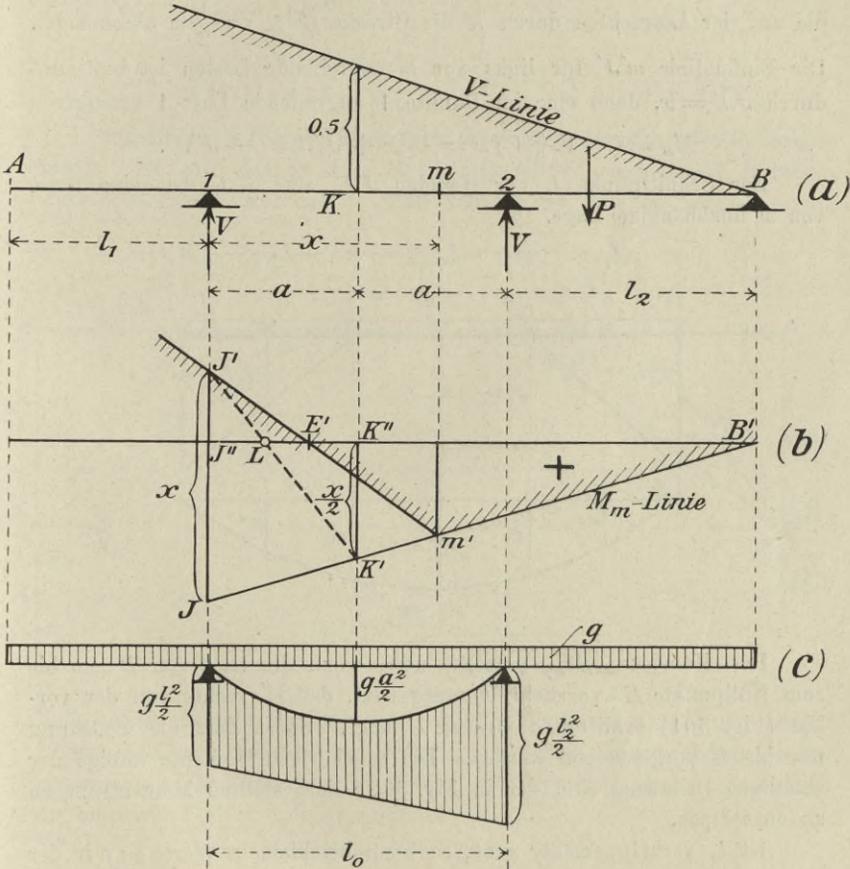


Fig. 302.

wir aber betonen, daß bei dieser Untersuchung die Ziffer  $\nu$  in der Regel nicht gleich 1 angenommen werden darf. Je kleiner  $f$  ist, desto größer ist ihr Einfluß.

Solange das Lastende rechts von  $E$  liegt, hebt sich der Balken vom Auflager  $A_o$  ab; er wird nur in den drei Punkten 1, 2,  $B$  gestützt, so zwar, daß in 1 und 2 gleichgroße Stützenwiderstände  $V$  entstehen;

ihre Mittelkraft halbiert die Strecke  $l_0$ . Liegt also die Lasteinheit im Mittelpunkte  $K$  von  $l_0$ , so entsteht bei dieser Stützung  $V = 0,5$ . Durch diese Angabe ist die  $V$ -Linie (Fig. 302 a) bestimmt.

Das Angriffsmoment für den im Abstände  $x$  vom Knoten 1 gelegenen Querschnitt  $m$  ist  $M_m = Vx$ , solange die Last rechts von  $m$  liegt. Die Einflußlinie für diesen Ausdruck ist eine Gerade  $B'K'$  (Fig. 302 b), die auf der Lotrechten durch  $K$  die Strecke  $K''K' = \frac{1}{2}x$  abschneidet. Die Einflußlinie  $m'J'$  für links von  $m$  angreifende Lasten ist bestimmt durch  $\overline{JJ'} = x$ , denn eine im Punkte 1 angreifende Last 1 erzeugt

$$M_m = (-1 + V)x = -x + \overline{J''J} = -\overline{J''J'}.$$

Der Schnittpunkt  $L$  der Geraden  $J'K'$  und  $B'J''$  hat eine feste, von  $x$  unabhängige Lage.

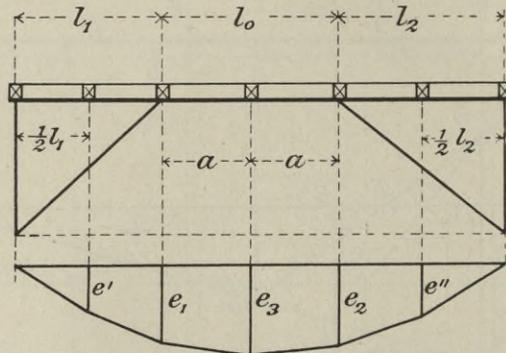


Fig. 303.

Das Moment  $_{max}M_{mp}$  entsteht nun, wenn die Last von  $B$  aus bis zum Nullpunkte  $E'$  vorrückt, vorausgesetzt, daß  $E'$  rechts von der vorhin (Fig. 301) ermittelten Grenze  $E$  liegt. Sonst darf die Belastung nur bis  $E$  vorgeschoben werden. Die zugehörigen Momente infolge der ständigen Belastung sind der in Fig. 302 c dargestellten Momentenfläche zu entnehmen.

Ist  $l_0$  verhältnismäßig groß, so kann bei kleinem Werte  $g:p$  in der Mitte der Strecke  $l_0$  ein positives Moment entstehen, das erheblich größer ist, als das für den Fall verankerter Balkenenden in der Regel maßgebende Moment  $_{min}M_1$ . Umgekehrt kann es aber vorkommen, daß die Beanspruchung des Balkens durch Weglassung der Verankerung vermindert wird. Das Auf- und Abschwingen der Balkenenden ist allerdings eine störende Zugabe.

Zu den in den vorstehenden Untersuchungen aufgestellten fertigen Formeln bemerken wir noch, daß außer den dort berücksichtigten beiden

Fällen: mittelbare, auf die Knoten  $A, 1, 2$  und  $B$  übertragene Belastung des Balkens und unmittelbar am Balken angreifende Belastung noch der Fall vorkommen kann, daß die mittelbare Belastung auch auf zwischen den Knoten  $A, 1, 2, B$ , liegende feste Punkte übertragen wird. Fig. 303 zeigt ein Beispiel. Die  $X_{af}$ -Linie ist hier bestimmt durch die Ordinaten:

$$e_1 = \frac{1}{2} l_1, \quad e_2 = \frac{1}{2} l_2, \quad e_3 = \frac{l_1 + l_2}{4} + \frac{3 a^2}{2(l + 2l_0)},$$

$$e' = \frac{1}{4} l_1 + \frac{3}{16} \frac{l_1^2}{l + 2l_0}, \quad e'' = \frac{1}{4} l_2 + \frac{3}{16} \frac{l_2^2}{l + 2l_0} *).$$

**112. Beispiel für ein mehrfach statisch unbestimmtes Sprengwerk.** Es soll das in Fig. 304 dargestellte symmetrische Sprengwerk untersucht werden\*\*). Die Achsen der Streben schneiden die

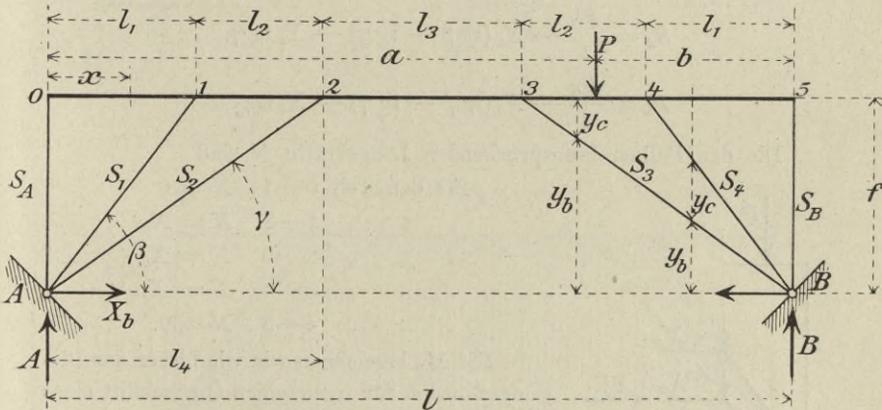


Fig. 304.

Balkenachse in den Punkten 1, 2, 3, 4. Die Streben und die beiden Pfosten  $0A$  und  $5B$  seien gelenkartig mit dem Balken verbunden angenommen. Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Als statisch unbestimmte Größen seien eingeführt:

- der Horizontalschub  $X_a$  der Strebe 1  $A$ ,
- „ „ „  $X_c$  „ „ 4  $B$ ,

und der wagerechte Widerstand  $X_b$  der Stütze  $A$ . Solange nur lotrechte Lasten  $P$  wirken, ist der wagerechte Widerstand der anderen Stütze:

$$*) x = \frac{1}{2} l_2 \text{ liefert } \omega_D \frac{x l_2^2}{6} = \frac{3}{16} \frac{l_2^2}{l + 2l_0}.$$

\*\*\*) Ein ähnliches Sprengwerk ohne Spannriegel hatte der Verfasser bei der Rüstung des Berliner Domes angewendet. Die Balkenenden waren mit den Gerüststielen verankert.

$H = X_b$ . Die lotrechten Stützenwiderstände  $A$  und  $B$  sind dieselben wie bei einem einfachen Balken. Es ist also

$$A = P \frac{b}{l}, \quad B = P \frac{a}{l}.$$

Die Spannkkräfte  $S$  in den Pfosten und Streben und die den Balken beanspruchenden Längskräfte  $N$  sollen positiv angenommen werden, sobald sie *Druck* erzeugen. Es ist also

$$S_1 = X_a \sec \beta, \quad S_4 = X_c \sec \beta,$$

und weiter ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte  $A$  und  $B$  zunächst

$$S_2 = (X_b - X_a) \sec \gamma,$$

$$S_3 = (X_b - X_c) \sec \gamma,$$

und hierauf

$$S_A = \frac{Pb}{l} - X_a (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) - X_b \operatorname{tg} \gamma,$$

$$S_B = \frac{Pa}{l} - X_c (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) - X_b \operatorname{tg} \gamma.$$

Die den Balken beanspruchenden Längskräfte  $N$  sind

für den Teil 0—1  $N = 0$

" " " 1—2  $N = X_a$

" " " 2—3  $N = X_b$

" " " 3—4  $N = X_c$

" " " 4—5  $N = 0$ .

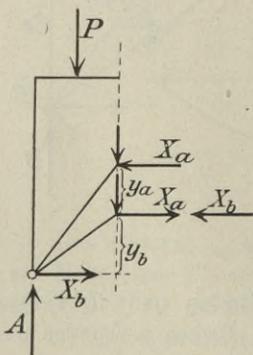


Fig. 305.

Mit  $M_0$  bezeichnen wir wie bisher das Biegemoment für irgendeinen Querschnitt eines nur in den Punkten 0 und 5 gestützten, mit  $P$  belasteten einfachen Balkens. Sodann führen wir durch das Feld 0—1 einen lotrechten Schnitt, zerlegen die Strebendrucke  $S_1$  und  $S_2$  an den Schnittstellen nach wagerechter und lotrechter Richtung (Fig. 305) und finden, da

$A$  und  $P$  das Moment  $M_0$  erzeugen, für das wirkliche Biegemoment  $M$  den Ausdruck

$$M = M_0 - X_a y_a - X_b y_b,$$

und in derselben Weise erhalten wir

$$\text{für das Feld 1—2} \quad M = M_0 - X_a y_a - X_b y_b \quad (\text{Fig. 306})$$

$$\text{" " " 2—3} \quad M = M_0 \quad - X_b y_b \quad (\text{Fig. 307})$$

$$\text{" " " 3—4} \quad M = M_0 - X_c y_c - X_b y_b \quad (\text{Fig. 304})$$

$$\text{" " " 4—5} \quad M = M_0 - X_c y_c - X_b y_b \quad (\text{Fig. 304}).$$

Es ist also  $M_a = y_a$ ,  $M_b = y_b$ ,  $M_c = y_c$ .

In Figur 308 ist die  $M_b$ -Fläche durch hellere Schraffierung hervorgehoben worden. Die  $M_a$ -Fläche und die  $M_c$ -Fläche sind dunkler schraffiert.

Bezeichnet man den Inhalt und das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts mit  $F$  und  $J$ , ferner die Querschnitte der Stäbe  $0A$ ,  $1A$ ,

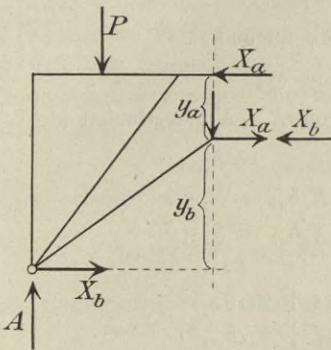


Fig. 306.

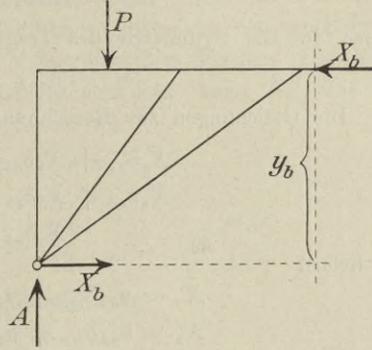


Fig. 307.

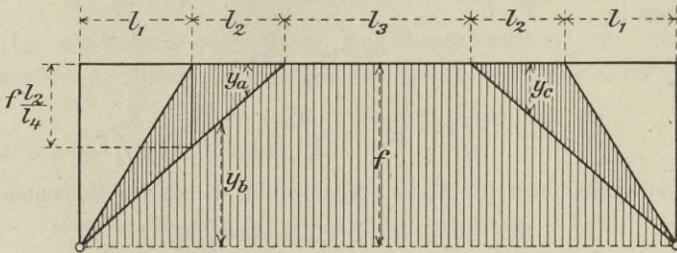


Fig. 308.

2A mit  $F_0, F_1, F_2$  und die Längen dieser Stäbe mit  $f, s_1, s_2$ , so findet man

$$\begin{aligned}
 EJ\delta_{aa} &= \int M_a^2 dx + \int N_a^2 \frac{J}{F} dx + \sum S_a^2 \frac{J}{F} s \\
 &= \frac{f^2 l_2^2}{3 l_4} + \frac{l_2 J}{F} + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)^2 \frac{f J}{F_A} + \frac{s_1 J}{F_1} \sec^2 \beta + \frac{s_2 J}{F_2} \sec^2 \gamma,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EJ\delta_{bb} &= \int M_b^2 dx + \int N_b^2 \frac{J}{F} dx + \sum S_b^2 \frac{J}{F} s \\
 &= \frac{f^2 (2l_4 + 3l_3)}{3} + \frac{l_3 J}{F} + 2f \frac{J}{F_0} \operatorname{tg}^2 \gamma + 2 \frac{s_2 J}{F_2} \sec^2 \gamma,
 \end{aligned}$$

25\*

$$\begin{aligned}
 EJ\delta_{ab} &= \int M_a M_b dx + \int N_a N_b \frac{J}{F} dx + \Sigma S_a S_b \frac{J}{F} s \\
 &= \frac{f^2 l_2 (2l_1 + l_2)}{6l_4} + f \frac{J}{F_0} \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) - \frac{s_2 J}{F_2} \sec \beta \sec \gamma,
 \end{aligned}$$

$$EJ\delta_{ac} = 0;$$

ferner, aus der Symmetrie des Tragwerks folgend,

$$\delta_{cc} = \delta_{aa}, \quad \delta_{cb} = \delta_{ab}.$$

Die Gleichungen zur Berechnung von  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  lauten also

$$X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = \delta_{ma},$$

$$X_a \delta_{ab} + X_b \delta_{bb} + X_c \delta_{cb} = \delta_{mb},$$

$$X_b \delta_{ab} + X_c \delta_{ca} = \delta_{mc};$$

sie liefern

$$X_a = \alpha_{aa} \delta_{ma} + \alpha_{ab} \delta_{mb} + \alpha_{ac} \delta_{mc},$$

$$X_b = \alpha_{ab} \delta_{ma} + \alpha_{bb} \delta_{mb} + \alpha_{bc} \delta_{mc}^* )$$

wo, mit der zur Abkürzung eingeführten Bezeichnung

$$D = \delta_{aa} \delta_{bb} - 2\delta_{ab}^2,$$

zu setzen ist

$$\alpha_{aa} = \frac{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}{D};$$

$$\alpha_{ab} = -\frac{\delta_{ab}}{D}, \quad \alpha_{ac} = \frac{\delta_{ab}^2}{\delta_{aa} D}, \quad \alpha_{bb} = \frac{\delta_{aa}}{D}.$$

Die Einflußlinien für  $X_a$  und  $X_b$  sind nun die zu den Momentenlinien

$$M' = \alpha_{aa} M_a + \alpha_{ab} M_b + \alpha_{ac} M_c,$$

beziehungsweise

$$M'' = \alpha_{ab} (M_a + M_c) + \alpha_{bb} M_b$$

gehörigen Biegungslinien des Balkens 0—5, wobei zu beachten ist, daß bei den die Momente  $M'$  und  $M''$  erzeugenden Belastungszuständen in den Pfosten die Spannkraften

$$S_A' = \alpha_{aa} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) + \alpha_{ab} \operatorname{tg} \gamma$$

$$S_B' = \alpha_{ab} \operatorname{tg} \gamma + \alpha_{ac} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma)$$

$$S_A'' = \alpha_{ab} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) + \alpha_{bb} \operatorname{tg} \gamma = S_B''$$

entstehen. Die Längenänderungen

$$\Delta s_A' = \frac{S_A' f}{EF_0} \quad \text{und} \quad \Delta s_B' = \frac{S_B' f}{EF_0}$$

\*) Die  $X_c$ -Linie ist das Spiegelbild der  $X_a$ -Linie; ihre Gleichung braucht also nicht angeschrieben zu werden.

bestimmen die Lage der Schlußlinie für die zur  $M'$ -Linie gehörige Biegungslinie. Zu den  $M''$  gehört in derselben Weise

$$\Delta s_A'' = \Delta s_B'' = \frac{S_A'' f}{EF_0}.$$

Wir wollen die Rechnung noch etwas weiter durchführen unter der oft (wenigstens für den ersten Rechnungsgang) zulässigen Vernachlässigung der von den Längskräften  $S$  und  $N$  herrührenden Glieder. Die Rechnungsergebnisse werden dann unabhängig vom Werte  $EJ$ , und wir dürfen daher  $EJ = 1$  annehmen. Indem wir

$$l_1 = l_2 = l_3 = u$$

setzen, erhalten wir

$$\delta_{aa} = 2 \frac{f^2 u}{12}, \quad \delta_{bb} = 28 \frac{f^2 u}{12}, \quad \delta_{ab} = 3 \frac{f^2 u}{12}$$

und, wenn wir zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\nu = \frac{3}{19 f^2 u}$$

einführen,

$$\alpha_{aa} = 47 \nu, \quad \alpha_{ab} = -6 \nu, \quad \alpha_{ac} = 9 \nu, \quad \alpha_{bb} = 4 \nu.$$

Die *Einflußlinie* für  $X_a$  ist die Momentenfläche eines einfachen Balkens 0—5, dessen Belastungsfläche die  $M'$ -Fläche ist. Die Formel

$$M' = \alpha_{aa} y_a + \alpha_{ab} y_b + \alpha_{ac} y_c$$

liefert für die Knotenpunkte

$$M' = \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ + 20,5 \nu f, & - 6 \nu f, & - 6 \nu f, & + 1,5 \nu f. \end{matrix}$$

Durch diese Werte ist die in Fig. 309 dargestellte Belastungsfläche bestimmt. Nun ergeben sich nach der auf Seite 104 abgeleiteten Formel (34) für den Sonderfall in Fig. 310 die Ausdrücke

$$M_1 = \frac{u^2}{5} \left( \frac{19}{6} z_1 + 3 z_2 + 2 z_3 + z_4 \right)$$

$$M_2 = \frac{u^2}{5} \left( 3 z_1 + \frac{31}{6} z_2 + 4 z_3 + 2 z_4 \right)$$

$$M_3 = \frac{u^2}{5} \left( 2 z_1 + 4 z_2 + \frac{31}{6} z_3 + 3 z_4 \right)$$

$$M_4 = \frac{u^2}{5} \left( z_1 + 2 z_2 + 3 z_3 + \frac{19}{6} z_4 \right),$$

und man erhält daher für die Punkte (1), (2), (3), (4) die folgenden Ordinaten der  $X_a$ -Linie.

$$\eta_{(1)} = \frac{u^2}{5} \left( \frac{19}{6} \cdot 20,5 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 + 1 \cdot 1,5 \right) \nu f = + 1,150 \frac{u}{f}$$

$$\eta_{(2)} = \frac{u^2}{5} \left( 3 \cdot 20,5 - \frac{31}{6} \cdot 6 - 4 \cdot 6 + 2 \cdot 1,5 \right) \nu f = + 0,300 \frac{u}{f}$$

$$\eta_{(3)} = \frac{u^2}{5} \left( 2 \cdot 20,5 - 4 \cdot 6 - \frac{31}{6} \cdot 6 + 3 \cdot 1,5 \right) \nu f = - 0,300 \frac{u}{f}$$

$$\eta_{(4)} = \frac{u^2}{5} \left( 1 \cdot 20,5 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 6 + \frac{19}{6} \cdot 1,5 \right) \nu f = - 0,150 \frac{u}{f}$$

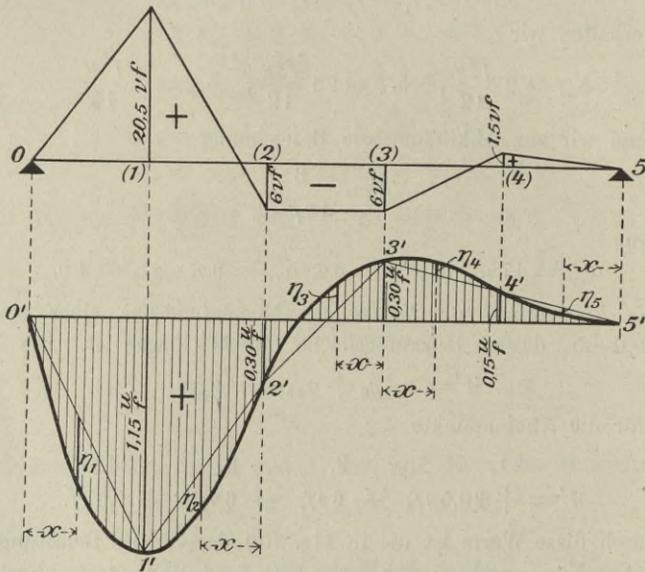


Fig. 309.

Um die vollständige  $X_a$ -Linie zu erhalten, braucht man zu den Ordinaten des Linienzuges  $0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5'$  nur noch die Ordinaten der Momentenlinien einfacher Balken  $0 - (1)$ ,  $(1) - (2)$ , ... hinzuzufügen oder in Abzug zu bringen, deren Belastungsflächen sich aus Dreiecken und Rechtecken zusammensetzen. Für das erste Feld erhält man an der Stelle  $x$  den Zuschlag

$$\eta_1 = \omega_D 20,5 \nu f \frac{u^2}{6} = 539 \omega_D \frac{u}{f},$$

für die übrigen Felder ist der Reihe nach, mit Hinweis auf Fig. 309

$$\eta_2 = \omega_D 26,5 \nu f \frac{u^2}{6} - \omega_R 6 \nu f \frac{u^2}{2} = (0,697 \omega_D - 0,473 \omega_R) \frac{u}{f}$$

$$\eta_3 = \omega_R 6 \nu f \frac{u^2}{2} = 0,473 \omega_R \frac{u}{f}$$

$$\eta_4 = \omega_R 6 \nu f \frac{u^2}{2} - \omega_D 7,5 \nu f \frac{u^2}{2} = (0,473 \omega_R - 0,197 \omega_D) \frac{u}{f}$$

$$\eta_5 = \omega_D 1,5 \nu f \frac{u^2}{2} = 0,039 \omega_D \frac{u}{f}$$

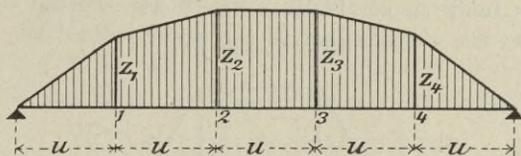


Fig. 310.

Die Einflußlinie für  $X_b$  ist die Momentenfläche eines einfachen Balkens, dessen Belastungsfläche die  $M''$ -Fläche ist. Die Formel

$$M'' = \alpha_{ab} (y_a + y_b) + \alpha_{bb} y_b$$

liefert für die Knotenpunkte 1, 2 (Fig. 311)

$$M'' = -\nu f \text{ bzw. } +4\nu f.$$

Die  $M''$ -Fläche ist symmetrisch. Die Gleichungen für die Momente  $M_1$ ,  $M_2$  gehen über in

$$M_1 = u^2 \left( \frac{5}{6} z_1 + z_2 \right)$$

$$M_2 = u^2 \left( z_1 + \frac{11}{6} z_2 \right)$$

und man erhält an den Stellen (1) und (2) die folgenden Ordinaten der  $X_b$ -Linie

$$\eta_{(1)} = u^2 \left( -\frac{5}{6} \cdot 1 + 4 \right) \nu f = 0,5 \frac{u}{f}$$

$$\eta_{(2)} = u^2 \left( -1 + \frac{11}{6} \cdot 4 \right) \nu f = 1,0 \frac{u}{f}.$$

Weiter findet man

$$\eta_1 = \omega_D \nu f \frac{u^2}{6} = 0,026 \omega_D \frac{u}{f}$$

$$\eta_2 = \omega_D 5 \nu f \frac{u^2}{6} - \omega_R \nu f \frac{u^2}{2} = (0,131 \omega_D - 0,079 \omega_R) \frac{u}{f}$$

$$\eta_3 = \omega_R 4 \nu f \frac{u^2}{2} = 0,316 \omega_R \frac{u}{f}.$$

Nach Ermittlung der Einflußlinien für  $X_a$  und  $X_b$  gestaltet sich die weitere Untersuchung des vorliegenden Sprengwerks sehr einfach. Man zeichnet zunächst mittels der Formel

$$S_A = P \frac{b}{l} - X_a (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) - X_b \operatorname{tg} \gamma$$

$$= \frac{Pb}{l} - (X_a + X_b) \frac{f}{2u}$$

die Einflußlinie für  $S_A$  und findet dann für das Biegemoment  $M$  des Balkenstückes 0—1 an der Stelle  $x$  den Wert

$$M = S_A x - Pc,$$

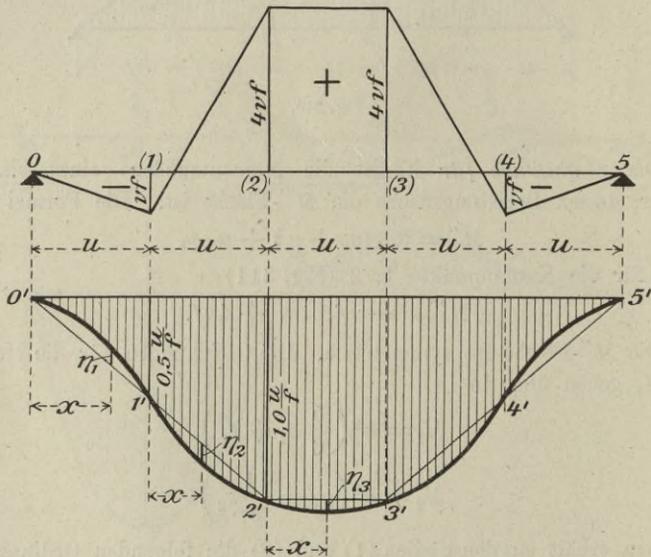


Fig. 311.

wo  $P$  eine links vom Querschnitte und im Abstände  $c$  vom Querschnitte ruhende Last bedeutet. Solange die Last  $P$  rechts vom Querschnitte liegt, ist  $M = S_A x$  und die  $S_A$ -Linie darf als Einflußlinie für  $M$ , unter Einführung des Multiplikators  $\mu = x$ , benutzt werden. Es liegt hier dieselbe Aufgabe vor, wie bei der Darstellung der Momente für die Querschnitte der Endöffnung eines Balkens auf mehreren Stützen und es darf deshalb auf die erste Abteilung dieses Bandes, § 13, Nr. 152 verwiesen werden.

Die Querschnitte der Balkenstücke 1—2 und 2—3 werden durch Momente und Längskräfte beansprucht; es sind also die auf die Kernpunkte der Querschnitte bezogenen Momente darzustellen.

Es handele sich um das Moment  $M^o$  für einen *oberen*, im Abstände  $k_o$  von der Balkenachse liegenden Kernpunkt  $o$ . Der Querschnitt gehöre dem Balkenstücke 2—3 an. Man findet

$$M^o = M_0 - X_b (y_b + k_o) = (y_b + k_o) \left[ \frac{M_0}{y_b + k_o} - X_b \right].$$

Von der  $M_0$ :  $(y_b + k_o)$ -Linie wird die  $X_b$ -Linie in Abzug gebracht. Der Multiplikator ist  $\mu = y_b + k_o$ .  $M_0$  ist das Biegemoment für den Querschnitt eines einfachen Balkens von der Spannweite  $0-5 = l$ . Es genügt ein Hinweis auf die ganz ähnliche Darstellung der Angriffsmomente für die Knotenpunkte des Fachwerkbogens mit zwei Gelenken in Abteilung I, § 7, Nr. 84.

Für einen Querschnitt des Balkenstückes 1—2 findet man

$$M^o = M_0 - X_a (y_a + k_o) - X_b y_b.$$

### § 23.

#### Kette, versteift durch einen vollwandigen Balken.

113. Wir knüpfen an die in Abteilung 1, § 9 durchgeführte Untersuchung einer durch einen Fachwerkbalken versteiften Kette an. Das Biegemoment für den Balken ist an der Stelle  $x$  (Fig. 312),

$$(1) \quad M = M_0 - Hy,$$

wo  $H$  den Horizontalzug der Kette bedeutet. Für den Zustand  $H = -1$  entsteht das Moment  $M' = y$ . Ist also  $\delta'$  die Ordinate der zu den Momenten  $M'$  gehörigen Biegelinie des Balkens, so ist der Einfluß einer Last  $P = 1$ :

$$(2) \quad H = \frac{\delta'}{\sum S'^2 \frac{s}{EF} + \int_0^l M'^2 \frac{dx}{EJ}} = \frac{\delta'}{\sum S'^2 \frac{s}{EF} + \int_0^l y^2 \frac{dx}{EJ}}.$$

Die Durchbiegungen  $\delta'$  werden nach § 2 der vorliegenden Abteilung ermittelt. Die im Nenner stehende Summe erstreckt sich über die Tragketten, die Rückhaltketten und die Hängestangen. Das Integral bezieht sich auf den Versteifungsbalken, dessen Querschnitt das Trägheitsmoment  $J$  haben möge. Es ist stets zulässig, an die Stelle des Integrales die Summe  $\sum y^2 \frac{\Delta dx}{EJ}$  zu setzen, wobei man etwa  $\Delta dx$  gleich der Feldweite nehmen darf.

Der Einfluß einer Temperaturänderung ist\*)

\*) Vgl. Seite 99.

$$(3) \quad H_t = \frac{\Sigma \varepsilon t S' s + \int_0^l \varepsilon \frac{\Delta t}{h} M' dx}{\Sigma S'^2 \frac{s}{EF} + \int_0^l y^2 \frac{dx}{EJ}} = \frac{\Sigma \varepsilon t S' s + \int_0^l \varepsilon \frac{\Delta t}{h} y dx}{\Sigma S'^2 \frac{s}{EF} + \int_0^l y^2 \frac{dx}{EJ}}$$

$h$  bedeutet die Höhe des Versteifungsbalkens. Bei gleichmäßiger Erwärmung des ganzen Tragwerks wird

$$(4) \quad H_t = \frac{\varepsilon t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 \frac{s}{EF} + \int_0^l y^2 \frac{dx}{EJ}}$$

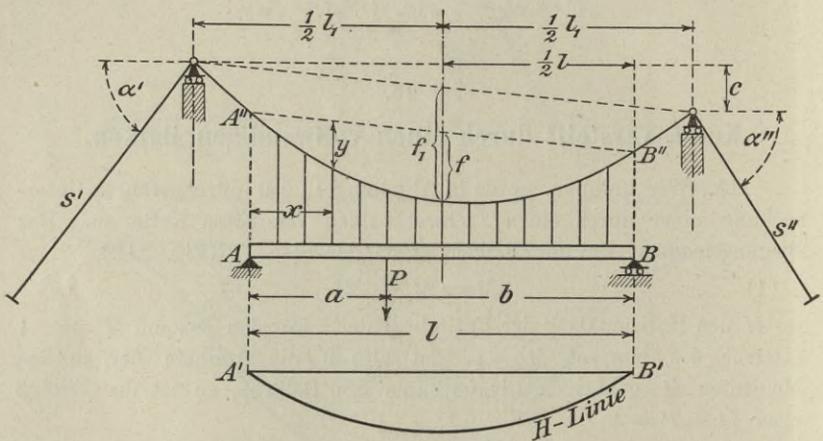


Fig. 312.

Wird der Kettenquerschnitt so abgestuft, daß die Spannung  $\sigma = \frac{S}{F}$  in allen Gliedern der Tragkette und der Rückhaltketten gleichgroß ist, und werden die Längenänderungen der Hängestangen vernachlässigt, so ist nach Abt. 1, § 9

$$(5) \quad \Sigma S'^2 \frac{s}{EF} = \frac{l_1}{EF_k} \frac{s_0}{l_1},$$

wo  $F_k$  den Querschnitt der Kette im Scheitel bedeutet und

$$(6) \quad \frac{s_0}{l_1} = 1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2} + \frac{s'}{l_1} \sec \alpha' + \frac{s''}{l_1} \sec \alpha''.$$

Hinsichtlich der Bezeichnungen wird auf Fig. 312 verwiesen.

In der Regel ist es erlaubt, die Kettenlinie als Parabel anzusehen und  $J$  unveränderlich anzunehmen. Dann ist

$$\int_0^l \frac{y^2 dx}{EJ} = \frac{8f^2 l}{15EJ}$$

und

$$EJ\delta' = \omega_P'' \frac{fl^2}{3},$$

denn die Werte  $EJ\delta'$  sind gleich den zu einer parabelförmigen Belastungslinie vom Pfeil  $f$  gehörenden Biegemomenten. Die Zahlen  $\omega_P''$  stehen auf Seite 105\*). Gleich. (2) geht über in

$$H = \frac{\omega_P'' \frac{fl^2}{3} \cdot \frac{1}{EJ}}{\frac{s_0}{l_1} \frac{l_1}{EF_k} + \frac{8}{15} f^2 l \frac{1}{EJ}}$$

Man erhält

$$(7) \quad H = \frac{5}{8} \omega_P'' \frac{l}{f} \nu,$$

wo

$$(8) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J}{F_k f^2} \frac{s_0}{l}}$$

Die durch die Gleichung (8) bestimmte Einflußlinie für  $H$  darf man nach Abteilung 1, § 9 stets durch eine Parabel von der Pfeilhöhe  $\frac{3l}{16f} \nu$  ersetzen. Man erhält dann

$$(9) \quad H = \frac{3Pab}{4fl} \nu.$$

Eine in Nr. 104 durchgeführte Untersuchung wird zeigen, daß diese Formel sogar genauere Werte für  $H$  liefert als Formel (7).

Da nun die der Last  $P$  entsprechende  $M_0$ -Fläche ein Dreieck von der Grundlinie  $l$  und der Höhe  $\frac{Pab}{l}$  ist, so läßt sich (9) auch wie folgt schreiben

$$(10) \quad H = \frac{\frac{Pab}{l} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{2}{3} fl} \nu = \frac{\int_0^l M_0 dx}{\int_0^l y dx} \nu$$

\*) In der letzten Spalte muß es heißen:

$$\omega_P'' = \frac{x^4}{l^4} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} = 2\omega_D - \omega_P = \omega_E (1 + \omega_E)$$

ferner

$$\frac{\pi l^3}{15} \text{ statt } \frac{\pi l^3}{30}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist gleich dem Inhalte der  $M_0$ -Fläche, der Nenner gleich dem Inhalte der von der Schlußlinie  $A''B''$  und der Kettenlinie begrenzten Fläche. Hiernach erhält man für eine gleichförmig über eine Strecke  $c$  verteilte Belastung  $pc$ , mit den in Fig. 313 angegebenen Abmessungen der  $M_0$ -Fläche:

$$\int M_0 dx = pc \frac{ab}{l} \frac{l}{2} - \frac{1}{3} \frac{pc^2}{8} c = \frac{pc}{2} \left( ab - \frac{c^2}{12} \right)$$

und

$$H = \frac{3}{4} \frac{pc}{fl} \left( ab - \frac{c^2}{12} \right) \nu.$$

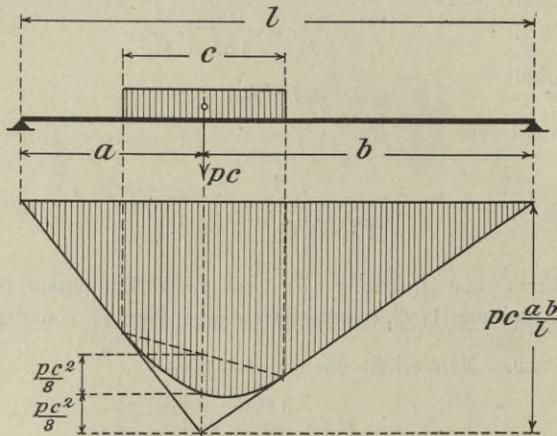


Fig. 313.

Der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung ist für eine Kette gleicher Festigkeit, versteift durch einen Balken mit unveränderlichem Querschnitt

$$H_t = -\varepsilon E F_k t (1 - \nu)^*.$$

Wird der vollwandige Balken durch ein Fachwerk mit parallelen Gurtungen ersetzt und mit  $F_c$  der Querschnitt einer Gurtung bezeichnet, so ist zu setzen

$$(13) \quad J = 2 F_c \left( \frac{h}{2} \right)^2 = F_c \frac{h^2}{2}.$$

Man erhält, übereinstimmend mit Abt. 1, § 9, Gleich. (8),

$$(14) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{F_c}{F_k} \frac{h^2}{f^2} \frac{s_0}{l}}.$$

\*) Abt. 1, § 9, Gleich. (12).

Kettenbrücken mit zwei oder drei Öffnungen mit durchgehendem Versteifungsbalken behandeln die §§ 15 u. 16 der Abt. 1. Die Anwendung der dort für fachwerkartige Versteifungsbalken entwickelten Verfahren auf vollwandige Balken bietet keine Schwierigkeit. Die dort verwendeten Biegelinien werden, statt nach den für das Fachwerk aufgestellten Regeln, nunmehr nach § 2 der vorliegenden Abteilung ermittelt. Sodann ist zu beachten, daß die Formel

$$\delta_{ik} = \sum S_i S_k \frac{s}{EF}$$

übergeht in

$$\delta_{ik} = \sum S_i S_k \frac{s}{EF} + \int N_i N_k \frac{s}{EF} + \int M_i M_k \frac{s}{EJ},$$

wobei sich die Integrale auf den vollwandigen Balken beziehen. Die für unendlich kleine Feldlängen und Fachwerke mit parallelen Gurtungen abgeleiteten geschlossenen Formeln lassen sich mit Hilfe der Gleich. (13) ohne weiteres für vollwandige Balken verwerten. Wird z. B. bei der in Abt. 1, § 16 untersuchten Kettenbrücke der Versteifungsbalken vollwandig gebaut, so tritt an die Stelle von Gleichung (4) die Gleichung

$$\frac{8}{15} (2f^2 l_1 + f^2 l) - \frac{c^2}{3} (2l_1 + 3l) + \frac{s_0 J}{F_k} = k^3,$$

und an Stelle von (8):

$$X_{ct} = - \frac{\varepsilon EJ t s_0}{k^3}.$$

#### Genauere Untersuchung einer durch einen einfachen Balken versteiften Kette.

##### 114. Elastische Linie, Momente und Querkräfte des Balkens.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den Einfluß der Formänderungen  $\Delta y$  auf die Beanspruchung des Versteifungsbalkens einer Kette festzustellen und gehen von dem Belastungszustande aus, dem ein spannungsloser Versteifungsbalken  $AB$  entspricht. (Abt. 1, § 9, Nr. 98.)

Für diesen Anfangszustand sei der Horizontalzug der Kette  $H_a$  und die Spannkraft in irgendeiner Hängestange  $Z_a$ . Denken wir uns den Balken  $AB$  mit abwärts gerichteten Kräften  $Z_a$  und dem Gewichte der Kette belastet und die hierdurch hervorgerufenen Biegemomente  $M'$  bestimmt, so besteht die Beziehung

$$(1) \quad M' = H_a y.$$

Nun mögen auf den an der Kette hängenden Balken lotrechte Lasten  $P$  gebracht werden. Es wächst  $Z_a$  um  $Z$ ,  $H_a$  um  $H$ ,  $y$  um  $\Delta y$ . Der bislang spannungslose Balken wird durch Biegemomente

$$(2) \quad M = M_0 - M''$$

beansprucht, wobei  $M_0$  den Einfluß der Lasten  $P$  und  $(-M'')$  den Einfluß der Spannkkräfte  $Z$  bedeutet. An der Kette greifen außer ihrem Eigengewichte nunmehr Lasten  $Z + Z_a$  an und es geht daher Gleichung (1) über in

$$(3) \quad M' + M'' = (H_a + H)(y + \Delta y).$$

Aus (1) und (3) folgt

$$M'' = Hy + (H_a + H)\Delta y,$$

und es geht daher (2) über in

$$(4) \quad M = M_0 - Hy - (H_a + H)\Delta y.$$

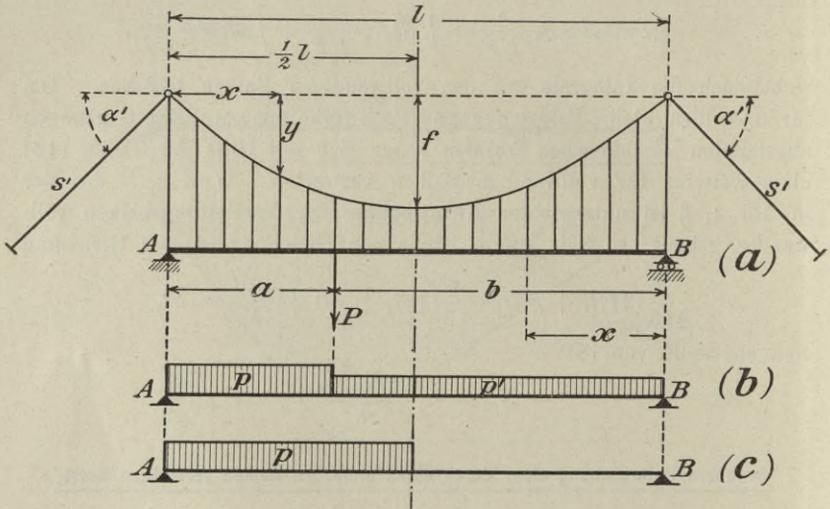


Fig. 314.

Zu dem bisher benutzten Näherungswerte

$$M = M_0 - Hy$$

ist der Wert  $(H_a + H)\Delta y$  getreten, der bei weitgespannten, schweren Kettenbrücken infolge des großen Anfangszuges  $H_a$  von merkbarem Einflusse auf die Beanspruchung des Versteifungsbalkens sein kann.

Wir nehmen die Stützweiten der Kette und des Balkens gleichgroß an, vernachlässigen die Längenänderungen der Hängestangen, rechnen mit unendlich kleinen Feldlängen und erhalten für die elastische Linie des Balkens die Differentialgleichung

$$(5) \quad EJ \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = -M = -M_0 + Hy + (H_a + H)\Delta y,$$

oder, kürzer geschrieben:

$$(6) \quad k^2 \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} - \Delta y = \frac{H}{H + H_a} f(x),$$

wo

$$(7) \quad k = \sqrt{\frac{EJ}{H + H_a}},$$

$$(8) \quad f(x) = y - \frac{M_0}{H}.$$

Wird vorausgesetzt, daß  $f(x)$  eine ganze rationale Funktion ist, so entspricht der Gleichung (6) bei unveränderlichem Querschnitte, also konstantem  $k$ , das allgemeine Integral

$$(9) \quad \Delta y = \frac{H}{H + H_a} \left\{ C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} - f(x) - k^2 f''(x) - k^4 f''''(x) - \dots \right\}.$$

Durch zweimaliges Differenzieren von (9) entsteht

$$(10) \quad k \frac{d \Delta y}{dx} = \frac{H}{H + H_a} \left\{ C_1 e^{\frac{x}{k}} - C_2 e^{-\frac{x}{k}} - k f'(x) - k^3 f'''(x) - \dots \right\},$$

$$(11) \quad k^2 \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = \frac{H}{H + H_a} \left\{ C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} - k^2 f''(x) - k^4 f''''(x) - \dots \right\} \\ = \Delta y + \frac{H}{H + H_a} f(x).$$

Aus (5) und (11) folgt für das Biegemoment die Formel:

$$(12) \quad M = -H \left[ C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} - k^2 f''(x) - k^4 f''''(x) - \dots \right],$$

und für die Querkraft:

$$(13) \quad Q = -\frac{H}{k} \left[ C_1 e^{\frac{x}{k}} - C_2 e^{-\frac{x}{k}} - k^3 f'''(x) - k^5 f''''(x) - \dots \right].$$

Wir berücksichtigen nur Einzellasten und gleichförmig verteilte Lasten, und nehmen an, es weiche die Kettenlinie so wenig von einer Parabel ab, daß es zulässig ist

$$y = 4f \frac{x(l-x)}{l^2}$$

zu setzen\*). Bezeichnet dann ganz allgemein  $z$  die gleichförmige Belastung an der Stelle  $x$ , so ist

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{d^2 M_0}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2} + \frac{z}{H}.$$

\*) Will man die genaue Form der Kettenlinie berücksichtigen, so bringe man deren Gleichung auf die Form

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots,$$

was sich stets ohne Schwierigkeit ausführen läßt.

Die höheren Ableitungen von  $f(x)$  werden gleich Null. Führen wir also zur Abkürzung die Bezeichnung

$$(14) \quad u = \left( \frac{z}{H} - \frac{8f}{l^2} \right) k^2$$

ein, so erhalten wir

$$(15) \quad \Delta y = \frac{H}{H + H_{\alpha}} \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} - y + \frac{M_0}{H} - u \right),$$

$$(16) \quad M = -H \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} - u \right),$$

$$(17) \quad Q = -\frac{H}{k} \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} - C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right).$$

Die Integrationskonstanten  $C_1, C_2$  besitzen auf den Strecken, in welche die Balkenachse durch die Einzellasten und die Stellen, an denen die Größe der gleichförmigen Belastung sich ändert, zerlegt wird, verschiedene Werte. Ist der Balkenquerschnitt sprungweise veränderlich, so sind auch die Längen  $k$  und  $u$  für die einzelnen Abschnitte verschieden groß. In der Folge beschränken wir uns aber auf den Fall eines unveränderlichen Balkenquerschnitts.

**115. Berechnung des Horizontalzuges  $H$ .** Aus der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

folgt für verschwindend kleine Formänderungen

$$2ds \Delta ds = 2dx \Delta dx + 2dy \Delta dy.$$

Es ist also

$$d(\Delta x) = d(\Delta s) \frac{ds}{dx} - d(\Delta y) \frac{dy}{dx}.$$

Die Widerlager nehmen wir starr an. Dann ist die gegenseitige wagerechte Verschiebung der Endpunkte der Kette gleich Null, und es folgt die Bedingung

$$(18) \quad \int d(\Delta s) \frac{ds}{dx} = \int_0^l d(\Delta y) \frac{dy}{dx}.$$

Das auf der linken Seite stehende Integral ist über die Tragkette und beide Ankerketten auszudehnen. Es ergibt sich

$$(19) \quad \int d(\Delta s) \frac{ds}{dx} = \Sigma \frac{Ss}{EF} \sec \alpha.$$

Wird nun durch entsprechende Abstufung der Querschnitte der Kette dafür gesorgt, daß alle Glieder der Tragkette und der Ankerketten die gleiche Beanspruchung  $\sigma = \frac{S}{F}$  erfahren, so ist

$$(20) \quad \int d(\Delta s) \frac{ds}{dx} = s_0 \frac{H}{EF_k},$$

wo  $F_k$  den Querschnitt der Kette im Scheitel bedeutet und

$$(21) \quad \frac{s_0}{l} = 1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} + \frac{2s'}{l} \sec \alpha'$$

ist. Weiter erhält man durch teilweise Integration:

$$\int_0^l d(\Delta y) \frac{dy}{dx} = \int_0^l \Delta y \frac{dy}{dx} - \int_0^l \Delta y \frac{d^2y}{dx^2} dx.$$

Das erste Glied ist Null weil  $\Delta y$  für  $x = 0$  und  $x = l$  verschwindet; das zweite Glied enthält unter dem Integralzeichen den konstanten Wert

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2}.$$

Es geht also (18) über in

$$(22) \quad \frac{Hs_0}{EF_k} = \frac{8f}{l^2} \int_0^l \Delta y dx,$$

und wegen (15) und (14) in:

$$(23) \quad \frac{H + H_a}{EF_k} \frac{s_0 l^2}{8f} = \int_0^l \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) dx - \frac{2}{3} fl \\ + \frac{1}{H} \int_0^l M_0 dx - \frac{1}{H} k^2 \int_0^l z dx + \frac{8fk^2}{l}.$$

Damit haben wir zur Berechnung von  $H$  eine transzendente Gleichung erhalten, deren Auflösung nur mittels eines Annäherungsverfahrens möglich ist. Wir setzen zur Abkürzung:

$$(24) \quad \mathfrak{S} = -\frac{1}{k^2} \int_0^l \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) dx + \frac{1}{H} \int_0^l z dx,$$

teilen (23) durch  $\frac{2}{3} fl$  und erhalten

$$(25) \quad \frac{3}{2flH} \int_0^l M_0 dx = 1 + \frac{3}{16} \frac{H + H_a}{EF_k} \frac{s_0 l}{f^2} + \frac{3k^2}{2fl} \left( \mathfrak{S} - 8 \frac{f}{l} \right).$$

Für den transzendenten Ausdruck  $\mathfrak{S}$  läßt sich ein Näherungswert angeben.

Bezeichnet  $z' dx$  die Belastung der Horizontalprojektion des Ketten-  
teilchens  $ds$ , so ist die Belastung des Balkenteilchens  $dx$  gleich  $(z - z') dx$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie des Balkens kann auch geschrieben werden:

$$(26) \quad EJ \frac{d^4 \Delta y}{dx^4} = z - z'.$$

Nun folgt aber aus (11)

$$k^4 \frac{d^4 \Delta y}{dx^4} = \frac{H}{H + H_a} \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right),$$

wobei zu beachten ist, daß die Differentialquotienten von  $f(x)$ , die höher als von der zweiten Ordnung sind, in dem hier behandelten Falle verschwinden. Setzt man noch  $EJ = k^2 (H + H_a)$ , so geht (26) über in

$$\frac{H}{k^2} \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) = z - z',$$

folglich ist

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{k^2} \int_0^l \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) dx + \frac{1}{H} \int_0^l z dx = \frac{1}{H} \int_0^l z' dx.$$

Wird nun ein Balken vorausgesetzt, der so steif ist, daß die Kette nur geringe Formänderungen erleidet, so ist  $z'$  nahezu unveränderlich und angenähert  $H = \frac{z' l^2}{8f}$ . Wir erhalten also für  $\mathfrak{S}$  den Näherungswert

$$\mathfrak{S} = \frac{z' l}{H} = \frac{8f}{l}.$$

Damit geht (25) in bezug auf die Unbekannte  $H$  in eine quadratische Gleichung über, die einen ersten Näherungswert für  $H$  liefert. Auf Grund dieses Näherungswertes erfolgt nun die Berechnung der transzendenten Funktion  $\mathfrak{S}$  und hierauf kann ein verbesserter Wert für  $H$  wiederum mittels der quadratischen Gleichung berechnet werden. Noch kürzer aber verfährt man wie folgt. Man setzt

$$(27) \quad H = \frac{\int_0^l M_0 dx}{\frac{2}{3} fl} v',$$

wo

$$(28) \quad v' = \frac{1}{1 + \frac{3}{16} \frac{H + H_a}{EF_k} \frac{s_0 l}{f^2} + \frac{3k^2}{2fl} \left( \mathfrak{S} - 8 \frac{f}{l} \right)}$$

ist. Gleichung (27) unterscheidet sich von der Gleich. (10), Seite 395, nur dadurch, daß an die Stelle von

$$(29) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J}{F_k f^2} \frac{s_0}{l}}$$

der Wert  $\nu'$  getreten ist. Man wird also zweckmäßig in der Weise vorgehen, daß man  $H$  zuerst in der gewöhnlichen Weise nach Nr. 113 berechnet, den so gefundenen Wert zur Ermittlung von  $\nu'$  benutzt und nötigenfalls die Berechnung von  $\nu'$  mit einem verbesserten Werte  $H$  wiederholt. Die folgenden Zahlenrechnungen werden aber zeigen, daß diese Wiederholung nicht nötig ist, weil  $\nu'$  nur sehr wenig von  $\nu$  abweicht.

In (28) setzen wir noch  $H + H_a = \frac{EJ}{k^2}$  und, aus (29) folgend,

$$\frac{J s_0}{F_k f^2} = \frac{8l}{15} \frac{1 - \nu}{\nu}.$$

Wir erhalten dann

$$(30) \quad \nu' = \frac{1}{1 + 0,1 \frac{l^2}{k^2} \frac{1 - \nu}{\nu} + 1,5 \frac{l}{f} \frac{k^2}{l^2} \left( \mathfrak{S} - 8 \frac{f}{l} \right)}.$$

**116. Einfluß einer Einzellast.** Die Einzellast  $P$  zerlegt den Balken in die Abschnitte  $a$  und  $b$ . Im Abschnitte  $a$  zählen wir die  $x$  von  $A$ , im Abschnitte  $b$  von  $B$  aus. Wir erhalten dann für den Abschnitt  $a$

$$M = -H \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} - u \right),$$

$$Q = -\frac{H}{k} \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} - C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right),$$

und für den Abschnitt  $b$

$$M = -H \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} + C_2' e^{-\frac{x}{k}} - u \right),$$

$$Q = -\frac{H}{k} \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} - C_2' e^{-\frac{x}{k}} \right).$$

$x = 0$  muß  $M = 0$  geben. Daher

$$C_1 + C_2 = u = C_1' + C_2'.$$

Nun muß aber sein

$$M_{x=a} = M_{x=b}$$

und

$$Q_{x=a} + Q_{x=b} = -P.$$

Folglich:

$$(31) \quad C_1 e^{\frac{a}{k}} + C_2 e^{-\frac{a}{k}} - C_1' e^{\frac{b}{k}} - C_2' e^{-\frac{b}{k}} = 0,$$

$$(32) \quad C_1 e^{\frac{a}{k}} - C_2 e^{-\frac{a}{k}} + C_1' e^{\frac{b}{k}} - C_2' e^{-\frac{b}{k}} = -\frac{Pk}{H}.$$

Wenn man diese beiden Gleichungen einmal zusammenzählt, ein zweites Mal voneinander abzieht und hierauf  $C_2 = u - C_1$  und  $C_2' = u - C_1'$  setzt, so erhält man

$$\begin{aligned} + C_1 e^{\frac{a}{k}} + C_1' e^{-\frac{b}{k}} &= -\frac{Pk}{2H} + u e^{-\frac{b}{k}} \\ - C_1 e^{-\frac{a}{k}} - C_1' e^{\frac{b}{k}} &= +\frac{Pk}{2H} - u e^{-\frac{a}{k}}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, wegen  $u = -\frac{8fk^2}{l^2}$ ,

$$(33) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{-\frac{Pk}{2H} \left( e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}} \right) - \frac{8fk^2}{l^2} \left( 1 - e^{-\frac{l}{k}} \right)}{e^{\frac{l}{k}} - e^{-\frac{l}{k}}} \\ C_1' = \frac{-\frac{Pk}{2H} \left( e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}} \right) - \frac{8fk^2}{l^2} \left( 1 - e^{-\frac{l}{k}} \right)}{e^{\frac{l}{k}} - e^{-\frac{l}{k}}}. \end{cases}$$

Der zur Berechnung von  $\mathfrak{S}$  erforderliche Wert  $\mathfrak{S}$  ist, wegen  $z = 0$ , nach Gleich. (24)

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= -\frac{1}{k^2} \int_0^a \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) dx - \frac{1}{k^2} \int_0^b \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} + C_2' e^{-\frac{x}{k}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{k} \left\{ C_1 \left( e^{\frac{a}{k}} - 1 \right) - C_2 \left( e^{-\frac{a}{k}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + C_1' \left( e^{\frac{b}{k}} - 1 \right) - C_2' \left( e^{-\frac{b}{k}} - 1 \right) \right\}, \end{aligned}$$

wofür man mit Rücksicht auf Gleich. (32) auch schreiben darf

$$(34) \quad \mathfrak{S} = -\frac{1}{k} \left\{ -\frac{Pk}{H} - C_1 + C_2 - C_1' + C_2' \right\}.$$

Setzt man

$$(35) \quad C_2 = -\frac{8fk^2}{l^2} - C_1 \quad \text{und} \quad C_2' = -\frac{8fk^2}{l^2} - C_1',$$

so erhält man

$$(36) \quad \mathfrak{S} = \frac{P}{H} + 2 \left( C_1 + C_1' + \frac{8fk^2}{l^2} \right) \frac{1}{k}$$

und nach Einführung von  $C_1$  und  $C_1'$ :

$$(37) \quad \mathfrak{S} = \frac{P}{H} \left[ \left( e^{\frac{l}{k}} - e^{-\frac{l}{k}} \right) - \left( e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}} \right) - \left( e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}} \right) \right] + \frac{16fk}{l^2} \left( e^{\frac{l}{k}} + e^{-\frac{l}{k}} - 2 \right) \\ \frac{1}{e^{\frac{l}{k}} - e^{-\frac{l}{k}}}$$

Stehen Tafeln der Hyperbelfunktionen zur Verfügung\*), so forme man die vorstehenden Gleichungen mit den abkürzenden Bezeichnungen:

$$\alpha = \frac{a}{k}, \quad \beta = \frac{b}{k}, \quad \lambda = \frac{l}{k}, \quad \xi = \frac{x}{k},$$

um in:

$$(38) \quad C_1 = -\frac{Pk}{2H} \frac{\text{Sin } \beta}{\text{Sin } \lambda} - 4f \frac{k^2}{l^2} \left(1 - \text{Dg } \frac{\lambda}{2}\right),$$

$$(39) \quad C_1' = -\frac{Pk}{2H} \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } \lambda} - 4f \frac{k^2}{l^2} \left(1 - \text{Dg } \frac{\lambda}{2}\right),$$

$$(40) \quad \mathfrak{S} = \frac{P}{H} \left(1 - \frac{\text{Sin } \alpha + \text{Sin } \beta}{\text{Sin } \lambda}\right) + 16 \frac{fk}{l^2} \text{Dg } \frac{\lambda}{2},$$

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{M}{H} = u(1 + \text{Sin } \xi - \text{Cos } \xi) - 2C_1 \text{Sin } \xi & \text{für Teil } a, \\ \frac{M}{H} = u(1 + \text{Sin } \xi - \text{Cos } \xi) - 2C_1' \text{Sin } \xi & \text{für Teil } b. \end{cases}$$

Bei der Ausführung dieser Umformungen beachte man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{Sin } \varphi &= \frac{1}{2}(e^\varphi - e^{-\varphi}), & \text{Cos } \varphi &= \frac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi}), \\ e^\varphi &= \text{Cos } \varphi + \text{Sin } \varphi, & e^{-\varphi} &= \text{Cos } \varphi - \text{Sin } \varphi, \\ \frac{\text{Cos } \varphi - 1}{\text{Sin } \varphi} &= \text{Dg } \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung von (41) ist (35) zu beachten.  $u$  besitzt den Wert

$$u = -8f \frac{k^2}{l^2}.$$

Im Angriffspunkte der Last  $P$ , d. i. für  $x = a$ , geht (41) über in

$$(42) \quad M = Pk \frac{\text{Sin } \alpha \text{ Sin } \beta}{\text{Sin } \lambda} - H \frac{8fk^2}{l^2} \left(1 - \text{Cos } \alpha + \text{Sin } \alpha \cdot \text{Dg } \frac{\lambda}{2}\right).$$

**Zahlenbeispiel.** Es sei  $l = 100$  m,  $f = \frac{1}{8} l = 12,5$  m,  $\frac{s' \sec \alpha'}{l} = \frac{1}{2}$  \*\*). Querschnitt der Kette im Scheitel:  $F_k = 0,056$  qm. Trägheitsmoment des Querschnitts des Versteifungsbalkens (Parallelträger von 2,5 m Höhe mit  $F_e = 0,030$  qm Gurtquerschnitt):  $J = \frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot 0,030$ ,

\*) Die Anmerkung am Fuße der Seite 240 ergänzen wir durch einen Hinweis auf Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen und Kreisfunktionen, Berlin 1890, Verlag von Ernst & Sohn.

\*\*)  $s'$  = Länge,  $\alpha'$  = Neigungswinkel der Ankerkette, Fig. 314.

weshalb

$$EJ = 21500000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \cdot 0,030 = 2015625 \text{ tm}^2.$$

Es ist also

$$\frac{s_0}{l} = 1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} + 2 \frac{s' \sec \alpha'}{l} = \frac{25}{12},$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{h^2}{f^2} \frac{s_0}{l} \frac{F_c}{F_k}} = \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{25}{12} \cdot \frac{30}{56}} = 0,960, \quad \frac{1-\nu}{\nu} = \frac{1}{24}.$$

Die gesamte ständige Belastung sei vor der Versteifung der Kette aufgebracht worden und betrage  $g = 6 \text{ t/m}$ . Daher ist

$$H_a = \frac{gl^2}{8f} = gl = 600 \text{ t}.$$

Gesucht ist der Einfluß einer Last  $P = 15 \text{ t}$  an der Stelle  $a = 25 \text{ m}$ . Die gewöhnliche Berechnung liefert

$$H = \frac{3Pab}{4fl} \nu = \frac{3 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 75}{50 \cdot 100} \nu = 16,875 \nu = 16,2 \text{ t}.$$

Wir setzen also  $H + H_a = 616,2 \text{ t}$ ,

$$\frac{l^2}{k^2} = \frac{(H + H_a)l^2}{EJ} = 3,057116, \quad k^2 = \frac{EJ}{H + H_a} = 3271, \quad k = 57,193,$$

$$\lambda = \frac{l}{k} = 1,748, \quad \alpha = \frac{a}{k} = \frac{1}{4} \lambda = 0,437, \quad \beta = \frac{b}{k} = \frac{3}{4} \lambda = 1,311,$$

$$\sin \lambda = 2,785, \quad \sin \alpha = 0,451, \quad \sin \beta = 1,720,$$

$$\operatorname{Tg} \frac{\lambda}{2} = 0,703, \quad \operatorname{Cof} \alpha = 1,097,$$

$$\frac{16fk}{l^2} = 2 \frac{k}{l} = 1,144, \quad \frac{8fk^2}{l^2} = \frac{k^2}{100} \cdot 32,71,$$

und erhalten nach (40)

$$\mathfrak{S} = \frac{15,0}{16,2} \left( 1 - \frac{0,451 + 1,720}{2,785} \right) + 1,144 \cdot 0,703 = 1,0084;$$

$$\mathfrak{S} - \frac{8f}{l} = 0,0084,$$

und nach (30)

$$\nu' = \frac{1}{1 + 0,1 \cdot 3,057 \frac{1}{24} + 1,5 \cdot 8 \cdot 0,327 \cdot 0,0084} = 0,956,$$

$$H = 16,875 \nu' = 16,1 \text{ t (statt } 16,2 \text{ t)}.$$

Im Angriffspunkte von  $P$  ergibt sich nun nach (42)

$$M = 15 \cdot 57,193 \frac{0,451 \cdot 1,720}{2,785} - 16,2 \cdot 32,71 (1 - 1,097 + 0,451 \cdot 0,703) = 122,3 \text{ tm.}$$

Die gewöhnliche Rechnung liefert

$$M = M_0 - Hy = \frac{Pab}{l} - Hy = \frac{15 \cdot 25 \cdot 75}{100} - 16,2 \cdot 9,375 = 129,4 \text{ tm.}$$

Während also für  $H$  die genäherte und die genauere Rechnung nahezu gleiche Werte geben, ist der für  $M$  nach dem gewöhnlichen Verfahren erhaltene Wert um etwa 5 v. H. zu groß.

Liegt  $P$  in der Mitte,  $a = b = \frac{1}{2}l$ , so gibt die gewöhnliche Berechnung

$$H = \frac{3Pl}{16f} \nu = 22,5\nu = 21,6 \text{ t}, \quad H + H_a = 621,6 \text{ t.}$$

Man erhält:

$$\frac{l^2}{k^2} = 3,083907, \quad k^2 = 3242,6, \quad k = 56,944, \quad \lambda = \frac{l}{k} = 1,756,$$

$$\text{Sin } \lambda = 2,808, \quad \text{Sin } \frac{\lambda}{2} = 0,995, \quad \text{Cos } \frac{\lambda}{2} = 1,411, \quad \text{Tg } \frac{\lambda}{2} = 0,705,$$

$$\frac{16fk}{l^2} = 1,139, \quad \frac{8fk^2}{l^2} = 32,426,$$

$$\nu - \frac{8f}{l} = 0,0053, \quad \nu' = 0,968, \quad H = 21,8 \text{ t (statt 21,6 t).}$$

An der Angriffsstelle von  $P$  ist

$$M = 15 \cdot 56,944 \frac{0,995^2}{2,808} - 21,6 \cdot 32,43 (1 - 1,411 + 0,995 \cdot 0,705) = 98 \text{ tm,}$$

während die gewöhnliche Rechnung das um etwa 7 v. H. größere Moment liefert

$$M = \frac{Pl}{4} - Hf = 105 \text{ tm.}$$

**117. Einfluß einer teilweisen gleichmäßigen Belastung.** Wird die Strecke  $a$  (Fig. 314 b) gleichmäßig mit  $p$  für die Längeneinheit belastet, die Strecke  $b$  mit  $p'$ , so ist für die Strecke  $a$ :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = -H \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} - u \right) \\ Q = -\frac{H}{k} \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} - C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) \\ u = \left( \frac{p}{H} - \frac{8f}{l^2} \right) k^2 \end{array} \right.$$

und für die Strecke  $b$ :

$$(44) \quad \begin{cases} M = -H \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} + C_2' e^{-\frac{x}{k}} - u' \right) \\ Q = -\frac{H}{k} \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} - C_2' e^{-\frac{x}{k}} \right) \\ u' = \left( \frac{p'}{H} - \frac{8f}{l^2} \right) k^2. \end{cases}$$

Beide Gleichungen für  $M$  müssen für  $x=0$ ,  $M=0$  liefern, weshalb

$$(45) \quad C_1 + C_2 = u, \quad C_1' + C_2' = u'.$$

Weiter muß sein

$$M_{x=0} = M_{x=b}$$

$$Q_{x=0} = -Q_{x=b},$$

mithin:

$$(46) \quad C_1 e^{\frac{a}{k}} + C_2 e^{-\frac{a}{k}} - u = C_1' e^{\frac{b}{k}} + C_2' e^{-\frac{b}{k}} - u'$$

$$(47) \quad C_1 e^{\frac{a}{k}} - C_2 e^{-\frac{a}{k}} = -C_1' e^{\frac{b}{k}} + C_2' e^{-\frac{b}{k}}.$$

Werden diese beiden Gleichungen einmal zusammengezählt, dann voneinander abgezogen, und wird hierbei  $C_2 = u - C_1$  und  $C_2' = u' - C_1'$  gesetzt, so entsteht:

$$C_1 e^{\frac{a}{k}} + C_1' e^{-\frac{b}{k}} = \frac{u - u'}{2} + u' e^{-\frac{b}{k}}$$

$$C_1 e^{-\frac{a}{k}} + C_1' e^{\frac{b}{k}} = \frac{u' - u}{2} + u e^{-\frac{a}{k}}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$(48) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{\frac{u - u'}{2} \left( e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}} \right) + u' - u e^{-\frac{b}{k}}}{e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}} \\ C_1' = \frac{\frac{u' - u}{2} \left( e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}} \right) + u - u' e^{-\frac{a}{k}}}{e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}}} \end{cases}$$

Der zur Berechnung von  $v'$  erforderliche Wert  $\mathfrak{S}$  ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= -\frac{1}{k^2} \int_0^a \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) dx - \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \int_0^b \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} + C_2' e^{-\frac{x}{k}} \right) dx + \frac{pa + p'b}{H} \\ &= -\frac{1}{k} \left\{ C_1 \left( e^{\frac{a}{k}} - 1 \right) - C_2 \left( e^{-\frac{a}{k}} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_1' \left( e^{\frac{b}{k}} - 1 \right) - C_2' \left( e^{-\frac{b}{k}} - 1 \right) \right\} + \frac{pa + p'b}{H}, \end{aligned}$$

und wegen (47) und (45):

$$(49) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{k} (2C_1 + 2C_1' - u - u') + \frac{pa + p'b}{H}.$$

Die Einführung der Hyperbelfunktionen liefert:

$$(50) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{(u - u') \operatorname{Coj} \beta + u' - u (\operatorname{Coj} \lambda - \operatorname{Sin} \lambda)}{2 \operatorname{Sin} \lambda} \\ C_1' = \frac{(u' - u) \operatorname{Coj} \alpha + u - u' (\operatorname{Coj} \lambda - \operatorname{Sin} \lambda)}{2 \operatorname{Sin} \lambda}, \end{cases}$$

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{M}{H} = u (1 + \operatorname{Sin} \xi - \operatorname{Coj} \xi) - 2C_1 \operatorname{Sin} \xi & \text{für Teil } a \\ \frac{M}{H} = u' (1 + \operatorname{Sin} \xi - \operatorname{Coj} \xi) - 2C_1' \operatorname{Sin} \xi & \text{für Teil } b. \end{cases}$$

Für den Sonderfall  $a = b = \frac{1}{2}l$ ,  $p' = 0$  (Fig. 314c) ergibt sich aus (49) und (50)

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{pl}{2H} - (u + u') \frac{\operatorname{Coj} \lambda - 1}{k \operatorname{Sin} \lambda} \\ &= \frac{pl}{2H} - \frac{u + u'}{k} \mathfrak{Tg} \frac{\lambda}{2}, \end{aligned}$$

wo

$$u + u' = k^2 \left( \frac{p}{H} - 16 \frac{f}{l^2} \right).$$

Die Annäherungsrechnung liefert

$$(52) \quad H = \frac{pl^2 \nu}{16f}.$$

Mit diesem Werte ergibt sich

$$u + u' = 16f \frac{k^2}{l^2} \frac{1 - \nu}{\nu}$$

und

$$\mathfrak{S} - 8 \frac{f}{l} = \frac{8f}{l} \left( 1 - 2 \frac{k}{l} \mathfrak{Tg} \frac{\lambda}{2} \right) \frac{1 - \nu}{\nu}.$$

Gleichung (30) geht also über in

$$(53) \quad \nu' = \frac{1}{1 + 0,1 \frac{l^2}{k^2} \frac{1 - \nu}{\nu} + 12 \frac{k^2}{l^2} \left( 1 - 2 \frac{k}{l} \mathfrak{Tg} \frac{\lambda}{2} \right) \frac{1 - \nu}{\nu}}.$$

Beachtet man, daß

$$Hu = \left( p - 8 \frac{Hf}{l^2} \right) k^2 = p \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) k^2,$$

$$H(u - u') = pk^2 \quad \text{und} \quad Hu' = -p \frac{\nu}{2} k^2$$

ist, so findet man aus (48) nach Einführung der Hyperbelfunktionen:

$$(54) \quad 2HC_1 = pk^2 \frac{+ 2 \operatorname{Co}f \frac{\lambda}{2} - \nu - (2 - \nu) (\operatorname{Co}f \lambda - \operatorname{Sin} \lambda)}{2 \operatorname{Sin} \lambda},$$

$$(55) \quad 2HC_1' = pk^2 \frac{- 2 \operatorname{Co}f \frac{\lambda}{2} + (2 - \nu) + \nu (\operatorname{Co}f \lambda - \operatorname{Sin} \lambda)}{2 \operatorname{Sin} \lambda},$$

und hierauf

$$(56) \quad M = p \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) k^2 (1 + \operatorname{Sin} \xi - \operatorname{Co}f \xi) - 2HC_1 \operatorname{Sin} \xi \text{ für Teil } a,$$

$$(57) \quad M = -p \frac{\nu}{2} k^2 (1 + \operatorname{Sin} \xi - \operatorname{Co}f \xi) - 2HC_1' \operatorname{Sin} \xi \text{ für Teil } b.$$

**Zahlenbeispiel.** Für die in Nr. 116 untersuchte Brücke sei  $p = 3 \text{ t/m}$ ; also nach (52), wegen  $l = 8f$ , für Belastung der linken Hälfte der Brücke:

$$H = \frac{pl}{2} \nu = 150 \cdot 0,960 = 144 \text{ t},$$

$$H + H_a = 144 + 600 = 744 \text{ t}, \quad EJ = 2015625,$$

$$\frac{l^2}{k^2} = \frac{(H + H_a)l^2}{EJ} = 3,6912, \quad k^2 = \frac{EJ}{H + H_a} = 2709,$$

$$k = 52,05, \quad \lambda = \frac{l}{k} = 1,921, \quad \frac{\lambda}{2} = 0,961,$$

$$\operatorname{Co}f \lambda = 3,487, \quad \operatorname{Sin} \lambda = 3,341, \quad \operatorname{Co}f \frac{\lambda}{2} = 1,498, \quad \operatorname{Tg} \frac{\lambda}{2} = 0,745,$$

$$\nu' = \frac{1}{1 + 0,1 \cdot 3,6912 \frac{1}{24} + 12 \cdot 0,2709 (1 - 2 \cdot 0,5205 \cdot 0,745) \frac{1}{24}} = 0,957.$$

Es weicht also wieder  $\nu'$  nur sehr wenig von  $\nu = 0,960$  ab.

Wir berechnen noch das Moment in der Mitte der belasteten Strecke.

$$\xi = \frac{\lambda}{4} = 0,480, \quad \operatorname{Sin} \xi = 0,499, \quad \operatorname{Co}f \xi = 1,117,$$

$$1 + \operatorname{Sin} \xi - \operatorname{Co}f \xi = 0,382.$$

Gleichung (54) liefert:

$$2HC_1 = 3 \cdot 2709 \frac{2,996 - 0,960 - 1,040 \cdot 0,146}{2 \cdot 3,341} = 2291,$$

und Gleichung (56):

$$M = 3 \cdot 0,520 \cdot 2709 \cdot 0,382 - 2291 \cdot 0,499 = 471 \text{ tm.}$$

Die angenäherte Rechnung gibt:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{pl^2}{16} - H \frac{3}{4} f = \frac{pl^2}{16} \left( 1 - \frac{3}{4} \nu \right) \\
 &= \frac{30\,000 \cdot 0,280}{16} = 525 \text{ tm.}
 \end{aligned}$$

Der genauere Wert ist um etwa 10 v. H. kleiner als der Näherungswert.

118. Es möge noch der in Fig. 315 dargestellte Belastungsfall untersucht werden.

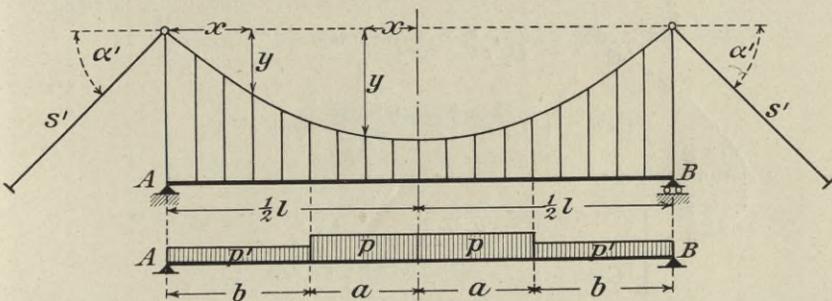


Fig. 315.

Für die Strecke  $a$  gilt:

$$(58) \quad \begin{cases} M = -H \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} - u \right) \\ Q = -\frac{H}{k} \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} - C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) \\ u = \left( \frac{p}{H} - \frac{8f}{l^2} \right) k^2 \end{cases}$$

und für Strecke  $b$ :

$$(59) \quad \begin{cases} M = -H \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} + C_2' e^{-\frac{x}{k}} - u' \right) \\ Q = -\frac{H}{k} \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} - C_2' e^{-\frac{x}{k}} \right) \\ u' = \left( \frac{p'}{H} - \frac{8f}{l^2} \right) k^2. \end{cases}$$

Gleichung (58) liefert für  $x=0$ ,  $Q=0$ ; daher ist:

$$(60) \quad C_1 = C_2 = C.$$

Gleichung (59) gibt für  $x=0$ ,  $M=0$ , und daraus folgt:

$$(61) \quad C_2' = u' - C_1'.$$

Ferner muß sein:

$$M_{x=a} = M_{x=b} \quad \text{und} \quad Q_{x=a} = -Q_{x=b};$$

also:

$$(62) \quad C_1 e^{\frac{a}{k}} + C_2 e^{-\frac{a}{k}} - u = C_1' e^{\frac{b}{k}} + C_2' e^{-\frac{b}{k}} - u'$$

$$(63) \quad C_1 e^{\frac{a}{k}} - C_2 e^{-\frac{a}{k}} = -C_1' e^{\frac{b}{k}} + C_2' e^{-\frac{b}{k}}.$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen entsteht mit Rücksicht auf (60) und (61):

$$C e^{-\frac{a}{k}} - C_1' e^{\frac{b}{k}} = \frac{u - u'}{2}$$

$$C e^{\frac{a}{k}} + C_1' e^{-\frac{b}{k}} = \frac{u - u'}{2} + u' e^{-\frac{b}{k}}.$$

Daraus folgen:

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{\frac{u - u'}{2} \left( e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}} \right) + u'}{e^{\frac{l}{2k}} + e^{-\frac{l}{2k}}} \\ C_1' = \frac{\frac{u - u'}{2} \left( e^{-\frac{a}{k}} - e^{\frac{a}{k}} \right) + u' e^{-\frac{l}{2k}}}{e^{\frac{l}{2k}} + e^{-\frac{l}{2k}}} \end{array} \right.$$

Der Wert  $\mathfrak{S}$  ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= -\frac{2}{k^2} \int_0^a \left( C_1 e^{\frac{x}{k}} + C_2 e^{-\frac{x}{k}} \right) dx - \frac{2}{k^2} \int_0^b \left( C_1' e^{\frac{x}{k}} + C_2' e^{-\frac{x}{k}} \right) dx \\ &\quad + \frac{2}{H} \left( \int_0^a p dx + \int_0^b p' dx \right) \\ &= -\frac{2}{k} \left\{ C_1 \left( e^{\frac{a}{k}} - 1 \right) - C_2 \left( e^{-\frac{a}{k}} - 1 \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{2}{k} \left\{ C_1' \left( e^{\frac{b}{k}} - 1 \right) - C_2' \left( e^{-\frac{b}{k}} - 1 \right) \right\} + \frac{2}{H} (pa + p'b) \end{aligned}$$

und wegen (60) und (61):

$$(65) \quad \mathfrak{S} = \frac{2}{k} (2C_1' - u') + \frac{2}{H} (pa + p'b).$$

Nach Einführung der Hyperbelfunktionen erhält man:

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{(u - u') \operatorname{Cof} \beta + u'}{2 \operatorname{Cof} \frac{\lambda}{2}} \\ C_1' = \frac{(u' - u) \operatorname{Sin} \alpha + u' \left( \operatorname{Cof} \frac{\lambda}{2} - \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2} \right)}{2 \operatorname{Cof} \frac{\lambda}{2}}, \end{array} \right.$$

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{M}{H} = u - 2C \operatorname{Cof} \xi \quad \text{für Teil } a \\ \frac{M}{H} = u' (1 + \operatorname{Sin} \xi - \operatorname{Cof} \xi) - 2C_1' \operatorname{Sin} \xi \quad \text{für Teil } b. \end{array} \right.$$

### Zahlenbeispiel.

$$\begin{aligned} l &= 100 \text{ m}, & a &= 20 \text{ m}, & b &= 30 \text{ m}, & p &= 3 \text{ t/m}, \\ p' &= 0, & f &= \frac{l}{8}, & \nu &= 0,960, & \frac{1-\nu}{\nu} &= \frac{1}{24}, \\ EJ &= 2015625 \text{ tm}^2. \end{aligned}$$

Die Annäherungsrechnung in Nr. 113 gibt für den vorliegenden Fall:

$$\begin{aligned} H &= \frac{pa}{8fl} (3l^2 - 4a^2) \nu \\ &= \frac{3 \cdot 20}{10000} (3 \cdot 10000 - 4 \cdot 400) \cdot 0,960 = 164 \text{ t}. \end{aligned}$$

$$H + H_a = 164 + 600 = 764 \text{ t},$$

$$\frac{l^2}{k^2} = \frac{764 \cdot 10000}{2015625} = 3,7904, \quad k^2 = \frac{2015625}{764} = 2638,$$

$$k = 51,36, \quad u' - u = -\frac{k^2 p}{H} = -\frac{2638 \cdot 3}{164} = -48,256,$$

$$u' = -\frac{k^2}{l} = -26,383, \quad u = +21,873,$$

$$\alpha = \frac{20}{51,36} = 0,389, \quad \beta = \frac{30}{51,36} = 0,584,$$

$$\lambda = \frac{100}{51,36} = 1,947, \quad \frac{\lambda}{2} = 0,974,$$

$$\operatorname{Sin} \alpha = 0,399, \quad \operatorname{Cof} \beta = 1,175,$$

$$\operatorname{Cof} \frac{\lambda}{2} = 1,513, \quad \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2} = 1,135,$$

nach (66):

$$C_1' = \frac{-48,256 \cdot 0,399 - 26,383(1,513 - 1,135)}{2 \cdot 1,513} = -9,659,$$

nach (65):

$$\mathfrak{S} = \frac{2}{51,36} (-2 \cdot 9,659 + 26,383) + \frac{2}{164} 3 \cdot 20 = 1,007,$$

$$\nu' = \frac{1}{1 + 0,1 \cdot 3,7904 \frac{1}{24} + 1,5 \cdot 8 \cdot 0,2638(1,007 - 1)} = 0,963.$$

$\nu'$  weicht auch hier nur sehr wenig von  $\nu = 0,960$  ab.

Das Moment in der Mitte der belasteten Strecke, also in Balkenmitte, ist wegen  $x = 0$  und  $\xi = 0$ :

nach (67)  $M = H(u - 2C).$

$$\text{Nun ist nach (66) } C = \frac{48,256 \cdot 1,175 - 26,383}{2 \cdot 1,513} = 10,019,$$

$$\text{folglich } M = 164(21,873 - 2 \cdot 10,019) = 301 \text{ tm.}$$

Die Näherungsrechnung gibt:

$$\begin{aligned} M &= \frac{pa}{2}(l - a) - H \cdot f \\ &= \frac{3 \cdot 20}{2}(100 - 20) - \frac{164 \cdot 100}{8} = 350 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Der genauere Wert ist um 14 v. H. kleiner als der Näherungswert.

## VI. Abschnitt.

### Parabelförmige Einflußlinien.

§ 24.

#### Formeln und Tabellen.

119. Die Einflußlinie  $ACB$ , Fig. 316, einer Größe  $Y$  sei innerhalb der Strecke  $AB = u$  eine Parabel von der Pfeilhöhe  $z$ . Auf  $AB$  stehe ein Lastzug  $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ , dessen Mittelkraft

$$(1) \quad \mathfrak{P}_n = \sum_1^n P$$

in den Abständen  $a'$  und  $b'$  von  $A$  bzw.  $B$  liegen möge. Irgendeine Last  $P$  habe

von $A$	den Abstand	$a$
"	$B$	"
"	$\mathfrak{P}_n$	"
"	$P_n$	"

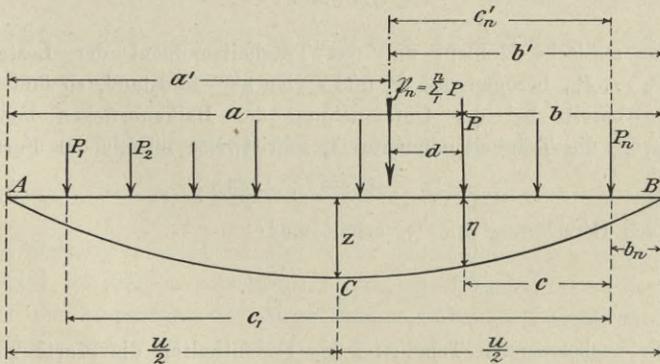


Fig. 316.

Dann ist der Einfluß des Lastzuges auf  $Y$ :

$$(2) \quad Y = \sum_1^n P r_1 = \frac{4z}{u^2} \sum_1^n P a b = \frac{4z}{u^2} \sum_1^n P (a' + d) (b' - d).$$

Bezeichnet man das Trägheitsmoment des Lastzuges  $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$  in bezug auf die Mittelkraft  $\mathfrak{F}_n$  mit

$$(3) \quad \mathfrak{T}_n = \Sigma P d^2$$

und beachtet man, daß  $\Sigma P d = 0$  ist, so geht Gleichung (2) über in

$$(4) \quad Y = \frac{4z}{u^2} (\mathfrak{F}_n a' b' - \mathfrak{T}_n).$$

Dieser Wert wird für den Lastzug  $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$  am größten, sobald

$$a' = b' = \frac{u}{2}$$

ist. Man erhält

$$(5) \quad Y_{max} = P_i z,$$

wo

$$(6) \quad P_i = \mathfrak{F}_n - \frac{\mathfrak{T}_n}{\left(\frac{u}{2}\right)^2}$$

diejjenige Einzellast vorstellt, die, in der Mitte der Strecke  $u$  angreifend, dieselbe Wirkung  $Y_{max}$  hervorbringt, wie die Lastgruppe  $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ .

Die Werte  $\mathfrak{F}_n$  und  $\mathfrak{T}_n$  können nun für einen bestimmten Lastzug ein für allemal berechnet werden.

Bezeichnen

$$\mathfrak{S}_n = \sum_1^n P c$$

$$\mathfrak{J}_n = \sum_1^n P c^2$$

bzw. das statische Moment und das Trägheitsmoment der Lastgruppe  $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ , bezogen auf  $P_n$  und  $e_n$  den  $n^{\text{ten}}$  Radstand, so findet man aus den bereits bei der Untersuchung der Balkenbrücken benutzten Werten  $\mathfrak{S}_n$  die Trägheitsmomente  $\mathfrak{J}_n$  schrittweise mittels der Formel

$$(7) \quad \mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}_{n-1} + (\mathfrak{S}_{n-1} + \mathfrak{S}_n) e_{n-1} \quad \mathfrak{J}_1 = 0.$$

Nach Berechnung von  $\mathfrak{J}_n$  erhält man:

$$(8) \quad \mathfrak{T}_n = \mathfrak{J}_n - \frac{\mathfrak{S}_n^2}{\mathfrak{F}_n}.$$

Die nachstehenden Tabellen I bis IV enthalten die Werte  $\mathfrak{F}_n$ ,  $\mathfrak{S}_n$ ,  $\mathfrak{J}_n$  und  $\mathfrak{T}_n$  für die in den preussischen Vorschriften für die Berechnung von Eisenbahnbrücken vorgesehenen Lastzüge, ferner die Zuglänge  $c_1$  und den Abstand

$$(9) \quad c_n' = \frac{\mathfrak{S}_n}{\mathfrak{F}_n}$$

der Mittelkraft  $\mathfrak{F}_n$  von der Last  $P_n$ . Die Achslasten und Radstände zeigt Fig. 317. Die Reihenfolge der Fahrzeuge ist über jeder Tabelle angegeben worden. Bei der Zusanordnung I wurde darauf Rücksicht genommen, daß die Belastung einer Lokomotivachse gesetzt werden soll

- = 18 t wenn nur 4 Achsen auf der Brücke stehen,
- = 19 t " " 3 " " " " " "
- = 20 t " " 1 oder 2 Achsen auf der Brücke stehen.

Die Zusanordnung IV kann im Falle einer an das Landwiderlager grenzenden Strecke in Betracht kommen, sobald die erste Lokomotive rückwärts fährt und der Tender die Brücke bereits verlassen hat. Die Gründe, welche dafür sprechen, sich mit der ungünstigen Belastung IV auch dann abzufinden, wenn an die Strecke  $u$  eine negative Beitragstrecke stößt, auf der nur der erste Tender steht, sind im I. Bande, § 21, Nr. 99 erörtert worden.

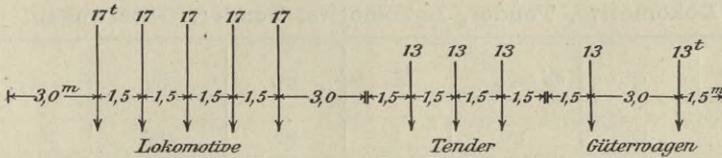


Fig. 317.

Mit Hilfe unserer Tafeln läßt sich nun die zu einer gegebenen Strecke  $u$  gehörige Last  $P_i$  schnell berechnen. Ist z. B.  $u = 32$  m, so gehört zu  $\frac{u}{2} = 16$  m bei der Zusanordnung II als nächstgelegener Wert:  $c'_n = 15,91$  m. Diesem entspricht  $\mathfrak{F}_n = 235$ ,  $\mathfrak{T}_n = 20817$ ,  $n = 15$  und

$$P_i = 235 - \frac{20817}{16^2} = 153,7 \text{ t.}$$

Zu  $c'_n = 15,34$  m gehört bei derselben Zusanordnung  $n = 14$  und

$$P_i = 222 - \frac{17332}{16^2} = 154,3 \text{ t.}$$

Die Stellung  $n = 14$  ist also etwas ungünstiger als  $n = 15$ . Der Unterschied ist freilich unwesentlich und verschwindet im vorliegenden Falle bei der Abrundung auf ganze Tonnen. Für die Zusanordnung IV erhält man  $c'_n = 15,72$  m und

$$P_i = 222 - \frac{17495}{16^2} = 153,7 \text{ t.}$$

Die Zusanordnung I liefert ebenfalls ein kleineres  $P_i$  als II, weil die  $\mathfrak{F}_n$  der Züge I und II für  $n = 14$  und  $n = 15$  gleichgroß sind, während das zugehörige Trägheitsmoment  $\mathfrak{T}_n$  für I größer ist als für II.

Aus dem gleichen Grunde ist auch die Zugstellung III für  $n = 14$  und  $n = 15$  nicht maßgebend; diese Zugstellung kommt erst von  $n = 25$  an zur Geltung. Zu  $u = 32$  m gehört also rund  $P_i = 154$  t.

Die auf diese Weise berechneten Lasten  $P_i$  sind in der Tabelle V für eine große Reihe von Längen zwischen  $u = 5$  m und  $u = 300$  m zusammengestellt worden. Für die dazwischen liegenden Längen  $u$  darf geradlinig eingeschaltet werden. Hierzu dienen die in der dritten Spalte stehenden Werte  $\Delta P_i : u$ . Die vierte und fünfte Spalte geben Auskunft über die Zugstellungen; sie erleichtern die Nachprüfung der Größen  $P_i$ . Von etwa  $u = 40$  m an darf  $P_i$  mit genügender Genauigkeit durch den linearen Ausdruck

$$(10) \quad \overline{P}_i = 2,7 u + 85$$

ersetzt werden. Die Werte  $\overline{P}_i$  haben wir in der letzten Spalte angegeben.

## I.

**Lokomotive, Tender, Lokomotive, Tender, Güterwagen.**

$n$	$e_1$	$e_n' = \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{P}_n}$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathcal{E}_n$	$\mathfrak{Z}_n$	$\mathfrak{Z}_n$
	m	m	t	tm	tm <sup>2</sup>	tm <sup>2</sup>
1	0	0	20	0	0	0
2	1,5	0,75	40	30	45	22,5
3	3,0	1,50	57	85,5	213,75	85,5
4	4,5	2,25	72	162	567	202,5
5	6,0	3,00	85	255	1 147,5	382,5
6	10,5	6,51	98	637,5	5 163,75	1 017
7	12,0	7,07	111	784,5	7 296,75	1 752
8	13,5	7,67	124	951	9 900	2 606
9	18,0	10,70	141	1 509	20 970	4 820
10	19,5	10,89	158	1 720,5	25 814,25	7 079
11	21,0	11,19	175	1 957,5	31 331,25	9 435
12	22,5	11,56	192	2 220	37 597,5	11 929
13	24,0	12,00	209	2 508	44 689,5	14 594
14	28,5	15,53	222	3 448,5	71 493,75	17 925
15	30,0	16,09	235	3 781,5	82 338,75	21 489
16	31,5	16,67	248	4 134	94 212	25 301
17	34,5	18,69	261	4 878	121 248	30 080
18	37,5	20,66	274	5 661	152 865	35 905
19	40,5	22,59	287	6 483	189 297	42 853
20	43,5	24,48	300	7 344	230 778	50 997
21	46,5	26,34	313	8 244	277 542	60 406
22	49,5	28,17	326	9 183	329 823	71 150
23	52,5	29,97	339	10 161	387 855	83 295
24	55,5	31,76	352	11 178	451 872	96 907
25	58,5	33,52	365	12 234	522 108	112 051

## II.

## Tender, Lokomotive, Lokomotive, Tender, Güterwagen.

$n$	$c_1$	$c_n' = \frac{\mathfrak{E}_n}{\mathfrak{P}_n}$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{E}_n$	$\mathfrak{Z}_n$	$\mathfrak{I}_n$
	m	m	t	tm	tm <sup>2</sup>	tm <sup>2</sup>
1	0	0	13	0	0	
2	1,5	0,75	26	19,5	29,25	
3	3,0	1,50	39	58,5	146,25	
4	7,5	4,18	56	234	1 462,5	
5	9,0	4,36	73	318	2 290,5	
6	10,5	4,75	90	427,5	3 408,75	
7	12,0	5,26	107	562,5	4 893,75	
8	13,5	5,83	124	723	6 822	2 606
9	19,5	10,40	141	1 467	19 962	4 699
10	21,0	10,62	158	1 678,5	24 680,25	6 849
11	22,5	10,95	175	1 915,5	30 071,25	9 105
12	24,0	11,34	192	2 178	36 211,5	11 505
13	25,5	11,80	209	2 466	43 177,5	14 081
14	30	15,34	222	3 406,5	69 603,75	17 332
15	31,5	15,91	235	3 739,5	80 322,75	20 817
16	33	16,50	248	4 092	92 070	24 552
17	36	18,53	261	4 836	118 854	29 249
18	39	20,51	274	5 619	150 219	34 988
19	42	22,44	287	6 441	186 399	41 847
20	45	24,34	300	7 302	227 628	49 897
21	48	26,20	313	8 202	274 140	59 211
22	51	28,04	326	9 141	326 169	69 856
23	54	29,85	339	10 119	383 949	81 901
24	57	31,63	352	11 136	447 714	95 411
25	60	33,40	365	12 192	517 698	110 452

## III.

## Tender, Lokomotive, Tender, Lokomotive, Güterwagen.

$n$	$c_1$	$c_n' = \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{P}_n}$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathcal{E}_n$	$\mathfrak{J}_n$	$\mathcal{T}_n$
	m	m	t	tm	tm <sup>2</sup>	tm <sup>2</sup>
21	48	26,07	313	8 160	272 250	59 516
22	51	27,91	326	9 099	324 027	70 064
23	54	29,73	339	10 077	381 555	82 009
24	57	31,52	352	11 094	445 068	95 418
25	60	33,29	365	12 150	514 800	110 355
26	63	35,04	378	13 245	590 985	126 885
27	66	36,77	391	14 379	673 857	145 070
28	69	38,50	404	15 552	763 650	164 975
29	72	40,20	417	16 764	860 598	186 661
30	75	41,90	430	18 015	964 935	210 190
31	78	43,78	443	19 305	1 076 895	235 624
32	81	45,25	456	20 634	1 196 712	263 024
33	84	46,91	469	22 002	1 324 620	292 449
34	87	48,57	482	23 409	1 460 853	323 962
35	90	50,21	495	24 855	1 605 645	357 623
36	93	51,85	508	26 340	1 759 230	393 491
37	96	53,48	521	27 864	1 921 842	431 626
38	99	55,11	534	29 427	2 093 715	472 089
39	102	56,73	547	31 029	2 275 083	514 939
40	105	58,34	560	32 670	2 466 180	560 236
41	108	59,95	573	34 350	2 667 240	608 038
42	111	61,55	586	36 069	2 878 497	658 407
43	114	63,15	599	37 827	3 100 185	711 401
44	117	64,75	612	39 624	3 332 538	767 078
45	120	66,34	625	41 460	3 575 790	825 500
46	123	67,95	638	43 335	3 830 175	886 723
47	126	69,51	651	45 249	4 095 927	950 809
48	129	71,09	664	47 202	4 373 280	1 017 815
49	132	72,66	677	49 194	4 662 468	1 087 801
50	135	74,24	690	51 225	4 963 725	1 160 826
51	138	75,81	703	53 295	5 277 285	1 236 948
52	141	77,37	716	55 404	5 603 382	1 316 227
53	144	78,95	729	57 552	5 942 250	1 398 721
54	147	80,51	742	59 739	6 294 123	1 484 490
55	150	82,06	755	61 965	6 659 235	1 573 591
56	153	83,63	768	64 230	7 037 820	1 666 084
57	156	85,19	781	66 534	7 430 112	1 762 029
58	159	86,75	794	68 877	7 836 345	1 861 482
59	162	88,30	807	71 252	8 256 753	1 964 504
60	165	89,85	820	73 680	8 691 570	2 071 153

$n$	$c_1$	$c_n' = \frac{\mathfrak{E}_n}{\mathfrak{P}_n}$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{E}_n$	$\mathfrak{I}_n$	$\mathfrak{I}_n$
	m	m	t	tm	tm <sup>2</sup>	tm <sup>2</sup>
61	168	91,40	833	76 140	9 141 030	2 181 487
62	171	92,95	846	78 639	9 605 357	2 295 565
63	174	94,50	859	81 177	10 084 815	2 413 447
64	177	96,05	872	83 754	10 579 608	2 535 190
65	180	97,59	885	86 370	11 089 980	2 660 854
66	183	99,14	898	89 025	11 616 165	2 790 496
67	186	100,68	911	91 719	12 158 397	2 924 176
68	189	102,22	924	94 452	12 716 910	3 061 953
69	192	103,76	937	97 224	13 291 938	3 203 884
70	195	105,30	950	100 035	13 883 715	3 350 029
71	198	106,84	963	102 885	14 492 475	3 500 447
72	201	108,38	976	105 774	15 118 452	3 655 195
73	204	109,91	989	108 702	15 761 880	3 814 332
74	207	111,45	1002	111 669	16 422 993	3 977 918
75	210	112,98	1015	114 675	17 102 025	4 146 011
76	213	114,51	1028	117 720	17 799 210	4 318 667
77	216	116,05	1041	120 804	18 514 782	4 494 998
78	219	117,58	1054	123 927	19 248 975	4 677 911
79	222	119,11	1067	127 089	20 002 023	4 864 615
80	225	120,64	1080	130 290	20 774 160	5 056 119
81	228	122,17	1093	133 530	21 565 620	5 252 481
82	231	123,70	1106	136 809	22 376 637	5 453 760
83	234	125,23	1119	140 127	23 207 445	5 660 013
84	237	126,75	1132	143 484	24 058 278	5 871 301
85	240	128,28	1145	146 880	24 929 370	6 087 681
86	243	129,81	1158	150 315	25 820 955	6 309 211
87	246	131,33	1171	153 789	26 733 267	6 535 951
88	249	132,86	1184	157 302	27 666 540	6 767 960
89	252	134,38	1197	160 854	28 621 008	7 005 294
90	255	135,90	1210	164 445	29 596 905	7 248 014
91	258	137,43	1223	168 075	30 594 465	7 496 177
92	261	138,95	1236	171 744	31 613 922	7 749 843
93	264	140 47	1249	175 452	32 655 510	8 009 069
94	267	142,00	1262	179 199	33 719 463	8 273 915
95	270	143,52	1275	182 985	34 806 015	8 544 438
96	273	145,04	1288	186 810	35 915 400	8 820 698
97	276	146,56	1301	190 674	37 047 852	9 102 753
98	279	148,08	1314	194 577	38 203 605	9 390 661
99	282	149,60	1327	198 519	39 382 893	9 684 481
100	285	151,12	1340	202 500	40 585 950	9 984 271

## IV.

## Lokomotive, Lokomotive, Tender, Güterwagen.

$n$	$c_1$	$c_n' = \frac{\mathfrak{E}_n}{\mathfrak{P}_n}$	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{E}_n$	$\mathfrak{J}_n$	$\mathfrak{L}_n$
	m	m	t	tm	tm <sup>2</sup>	tm <sup>2</sup>
6	12,0	7,50	102	765	7 267,5	1 530
7	13,5	7,71	119	918	9 792	2 710
8	15,0	8,06	136	1 096,5	12 813,75	3 973
9	16,5	8,50	153	1 300,5	16 409,25	5 355
10	18,0	9,00	170	1 530	20 655	6 885
11	22,5	12,54	183	2 295	37 867,5	9 086
12	24,0	13,11	196	2 569,5	45 164,25	11 479
13	25,5	13,70	209	2 863,5	53 313,75	14 081
14	28,5	15,72	222	3 490,5	72 375,75	17 495
15	31,5	17,69	235	4 156,5	95 316,75	21 800

## V.

$u$	$P_i$	$\frac{\Delta P_i}{\Delta u}$	Last- zug	$n$	$u$	$P_i$	$\frac{\Delta P_i}{\Delta u}$	Last- zug	$n$	$\bar{P}_i$
m	t				m	t				
5	43,3	6,2	I	3	25	126	3	IV	10	
6	49,5	6,0	I	4	26	129	4	IV	11	
7	55,5	5,6	I	4	27	133	4	IV	11	
8	61,1	5,0	I	5	28	137	6	IV	12	
9	66,1		I	5	29	143		IV	13	
		3,6					3			
10	69,7	2,7	I	5	30	146		IV	13	
11	72,4	2,0	I	5	32	154	4	II	14	
12	74,4	1,5	I	5	34	163	4,5	II	15	
13	75,9	1,3	I	5	36	172	4,5	II	16	
14	77,2		I	6	38	180	4,0	II	16	
		2,7					4,0			
15	79,9	3,7	I	6	40	188		II	17	193
16	83,6	4,3	I	7	42	195	3,5	II	17	198
17	87,9	3,9	I	8	44	202	3	II	18	204
18	91,8	3,3	I	8	46	208	3	II	19	209
19	95,1		I	8	48	214	3	II	19	215
		6					3			
20	101	7	IV	10	50	220		II	20	220
21	108	5	IV	10	52	226	3	II	20	225
22	113	5	IV	10	54	232	3	II	21	231
23	118	4	IV	10	56	238	3	II	21	236
24	122	4	IV	10	58	243	2,5	II	22	242
25	126		IV	10	60	248	2,5	II	22	247

$u$	$P_i$	$\frac{\Delta P_i}{\Delta u}$	Last- zug	$n$	$\bar{P}_i^*$	$u$	$P_i$	$\frac{\Delta P_i}{\Delta u}$	Last- zug	$n$	$\bar{P}_i$
m	t					m	t				
60	248	3	II	22	247	140	457	2,5	III	47	463
62	254	2,5	II	23	252	142	462	3,0	III	47	468
64	259	3	II	23	258	144	468	2,5	III	48	474
66	265	3	II	24	263	146	473	2,5	III	49	479
68	270	3	III	25	269	148	478	2,5	III	49	485
		2,5						3,0			
70	275	2,5	III	26	274	150	484	2,5	III	50	490
72	280	2,5	III	26	279	152	489	2,5	III	51	495
74	285	3	III	26	285	154	494	3,0	III	51	501
76	291	2,5	III	27	290	156	500	2,5	III	52	506
78	296	2,5	III	27	296	158	505	2,5	III	53	512
		2,5						2,5			
80	301	2,5	III	28	301	160	510	3,0	III	53	517
82	306	2,5	III	29	306	162	516	2,5	III	54	522
84	311	2,5	III	29	312	164	521	2,5	III	54	528
86	316	3	III	30	317	166	527	3,0	III	55	533
88	322	3	III	30	323	168	532	2,5	III	56	539
		2,5						2,5			
90	327	2,5	III	31	328	170	537	3,0	III	56	544
92	332	2,5	III	32	333	172	543	2,5	III	57	549
94	337	2,5	III	32	339	174	548	3,0	III	58	555
96	342	2,5	III	33	344	176	554	2,5	III	58	560
98	347	2,5	III	33	350	178	559	2,5	III	59	566
		2,5						2,5			
100	352	3,0	III	34	355	180	564	3,0	III	60	571
102	358	2,5	III	35	360	182	570	2,5	III	60	576
104	363	2,5	III	36	366	184	575	3,0	III	61	582
106	368	2,5	III	36	371	186	581	2,5	III	62	587
108	373	2,5	III	37	377	188	586	2,5	III	62	593
		2,5						3,0			
110	378	3,0	III	37	384	190	592	2,5	III	63	598
112	384	2,5	III	38	387	192	597	3,0	III	63	603
114	389	2,5	III	39	393	194	603	2,5	III	64	609
116	394	2,5	III	39	398	196	608	3,0	III	65	614
118	399	2,5	III	40	404	198	614	2,5	III	65	620
		2,5						2,5			
120	404	3,0	III	41	409	200	619	2,5	III	66	625
122	410	2,5	III	41	414	202	624	3,0	III	67	630
124	415	2,5	III	42	420	204	630	2,5	III	67	636
126	420	2,5	III	42	425	206	635	3,0	III	68	641
128	425	2,5	III	43	431	208	641	2,5	III	69	647
		2,5						2,5			
130	430	3,0	III	44	436	210	646	3,0	III	69	652
132	436	2,5	III	44	441	212	652	2,5	III	70	657
134	441	2,5	III	45	447	214	657	3,0	III	71	663
136	446	3,0	III	46	452	216	663	2,5	III	71	668
138	452	2,5	III	46	458	218	668	3,0	III	72	674
140	457	2,5	III	47	463	220	674	3,0	III	73	679

$u$	$P_i$	$\frac{\Delta P_i}{\Delta u}$	Last- zug	$n$	$\overline{P_i}$	$u$	$P_i$	$\frac{\Delta P_i}{\Delta u}$	Last- zug	$n$	$\overline{P_i}$
m	t				t	m	t				t
220	674	2,5	III	73	679	260	785	2,5	III	86	787
222	679	3,0	III	73	684	262	790	3,0	III	86	792
224	685	2,5	III	74	690	264	796	2,5	III	87	798
226	690	3,0	III	75	695	266	801	3,0	III	88	803
228	696	2,5	III	75	701	268	807	3,0	III	88	809
230	701	3,0	III	76	706	270	813	2,5	III	89	814
232	707	3,0	III	76	711	272	818	3,0	III	90	819
234	713	2,5	III	77	717	274	824	2,5	III	90	825
236	718	3,0	III	78	722	276	829	3,0	III	91	830
238	724	2,5	III	78	728	278	835	3,0	III	92	836
240	729	3,0	III	79	733	280	841	2,5	III	92	841
242	735	2,5	III	80	738	282	846	3,0	III	93	846
244	740	3,0	III	80	744	284	852	2,5	III	94	852
246	746	2,5	III	81	749	286	857	3,0	III	94	857
248	751	3,0	III	82	755	288	863	2,5	III	95	863
250	757	3,0	III	82	760	290	869	3,0	III	95	868
252	762	2,5	III	83	765	292	874	2,5	III	96	873
254	768	3,0	III	84	771	294	880	3,0	III	97	879
256	774	2,5	III	84	776	296	885	2,5	III	97	884
258	779	3,0	III	85	782	298	891	3,0	III	98	890
260	785	2,5	III	86	787	300	897	2,5	III	99	895

120. Zwischen zwei Beitragstrecken  $u'$ ,  $u''$  (Fig. 318), deren Einflußlinien Parabeln von den Pfeilhöhen  $z'$  und  $z''$  sind, liege eine Beitrag-

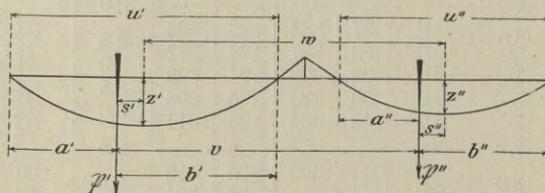


Fig. 318.

strecke von entgegengesetztem Vorzeichen, die so kurz ist, daß die Strecken  $u'$ ,  $u''$  durch einen zusammenhängenden Eisenbahnzug belastet werden können, ohne daß die dazwischenliegende Strecke eine Belastung erfährt. Die Mittelkräfte  $\mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}''$  der auf den Strecken  $u'$  und  $u''$  ruhenden Lasten haben voneinander den Abstand  $v$  und von den zugehörigen Parabelscheiden die Abstände  $s'$ ,  $s''$ . Die Parabelscheiden seien um  $w$  voneinander entfernt. Man erhält nach Gleichung (4)

$$Y = \frac{4z'}{u'^2} (\mathfrak{P}' a' b' - \mathfrak{T}') + \frac{4z''}{u''^2} (\mathfrak{P}'' a'' b'' - \mathfrak{T}'')$$

und, wenn man setzt

$$a' = \frac{u'}{2} - s' \quad b' = \frac{u'}{2} + s'$$

$$a'' = \frac{u''}{2} - s'' \quad b'' = \frac{u''}{2} + s'',$$

$$(11) \quad Y = z' \left[ \mathfrak{P}' - \frac{\mathfrak{P}' s'^2 + \mathfrak{T}'}{\left(\frac{u'}{2}\right)^2} \right] + z'' \left[ \mathfrak{P}'' - \frac{\mathfrak{P}'' s''^2 + \mathfrak{T}''}{\left(\frac{u''}{2}\right)^2} \right].$$

Damit  $Y$  ein Maximum wird, muß

$$\frac{\mathfrak{P}' s'}{u'} + \frac{\mathfrak{P}'' s''}{u''} = 0$$

sein. Setzt man  $s'' = s' + w - v$ , so erhält man

$$(12) \quad s' = \frac{v - w}{1 + \frac{\mathfrak{P}' z' u''^2}{\mathfrak{P}'' z'' u'^2}}.$$

Im Falle  $u' = u'' = u$ ,  $z' = z'' = z$  gehen (11) und (12) über in

$$(13) \quad Y = z \left[ \mathfrak{P} - \frac{\mathfrak{P}' s'^2 + \mathfrak{P}'' s''^2 + \mathfrak{T}' + \mathfrak{T}''}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \right],$$

$$(14) \quad s' = (v - w) \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}, \quad \text{wo } \mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}''.$$

Es sei z. B.  $u' = u'' = 5,65$  m und die dazwischen liegende Strecke = 3,70 m, also  $w = 9,35$  m, Fig. 319. Bei der Zuganordnung (a) — Lastzug der preußischen Verordnung — ist  $v = 9,75$  m, ferner

$$\mathfrak{P}' = 51 \text{ t}, \quad \mathfrak{P}'' = 68 \text{ t}, \quad \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'' = 119 \text{ t},$$

$$\mathfrak{T}' + \mathfrak{T}'' = 2 \cdot 17 \cdot 1,5^2 \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] = 268 \text{ tm}^2$$

$$s' = (9,75 - 9,35) \frac{51}{119} = 0,17 \text{ m}, \quad s'' = -0,23 \text{ m}$$

und mit  $\left(\frac{1}{2}u\right)^2 = 7,98$

$$\max Y = z \left( 119 - \frac{268}{7,98} \right) = 85 z.$$

Die von  $s'$  und  $s''$  abhängigen Glieder dürfen gestrichen werden. Es ist also gleichgültig, ob der Abstand  $2k$  der Vorderachsen der gegeneinander gekehrten Lokomotiven 6 m oder 5,6 m beträgt.

Ermäßigt man die Achslast auf 16 t, den Radstand auf 1,3 m und den Pufferabstand  $k$  auf 2,725 m, so entsteht der Belastungsfall (b). Man erhält  $s' = s'' = 0$ ,  $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'' = 64$  t,

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}'' = 2 \cdot 16 \cdot 1,3^2 \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{3}{2} \right)^2 \right] = 80 \cdot 1,3^2 = 135,2 \text{ tm}^2$$

und

$$\max Y = 2z \left( 64 - \frac{135,2}{7,98} \right) = 94z.$$

Für den Radstand 1,2 m ergibt sich

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}'' = 80 \cdot 1,2^2 = 115,2, \quad \max Y = 99z.$$

In Fällen der vorliegenden Art hat also der Radstand einen verhältnismäßig großen Einfluß. Kürzere, wenn auch leichtere Lokomotiven können ungünstigere Wirkungen hervorbringen als längere Lokomotiven

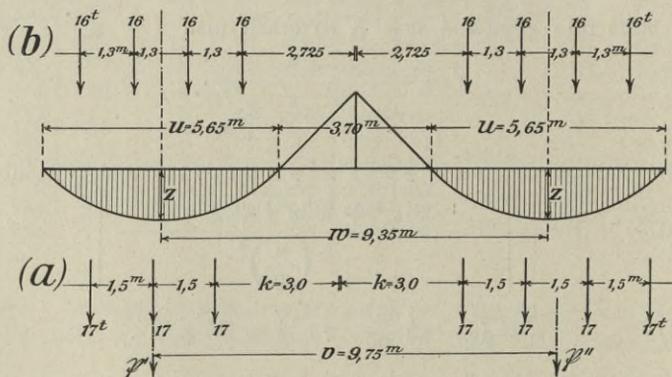


Fig. 319.

von größerem Gewicht. Bleibt man also bei einem Lastenzuge, so rechnet man möglichst ungünstig und belastet jede der beiden Strecken für sich so, daß  $\Sigma P\eta$  ein Maximum wird, unbekümmert darum, ob die so gefundenen Zugstellungen überhaupt möglich sind. Im vorliegenden Falle wird man, wegen  $u' = u''$ ,

$$\max Y = 2z P_i$$

setzen, wobei allerdings zu beachten ist, daß die in den preussischen Vorschriften für eine nur durch eine, zwei, drei oder vier Achsen belastete Brücke geforderte Erhöhung der Achslast nicht notwendig ist, da ja im ganzen mehr als vier Lasten auf der Brücke stehen. Die für  $u = 5$  m, 6 m, 7 m angegebenen Werte  $P_i = 43,3$  t, 49,5 t, 55,5 t müssen also der Reihe nach mit  $\frac{17}{19}$ ,  $\frac{17}{18}$ ,  $\frac{17}{18}$  multipliziert werden.

Man erhält

$$P_i = 39 \text{ t, } 47 \text{ t, } 52 \text{ t und } \frac{\Delta P_i}{\Delta u} = 8 \text{ t, } 5 \text{ t.}$$

Zu  $u = 5,65 \text{ m}$  gehört demnach

$$P_i = 39 + 0,65 \cdot 8 = 44 \text{ t,}$$

und es ergibt sich

$${}_{max} Y = 88 \cdot z.$$

**121.** Die in Nr. 119 und 120 gegebenen Formeln und Tabellen sind auch dann noch brauchbar, wenn die Einflußlinie keine genaue Parabel ist. Die Bildung eines Urteils über die zulässige Abweichung von der Parabelform wird oft dadurch erleichtert, daß jede Einflußlinie als die Momentenlinie eines einfachen Balkens aufgefaßt werden darf. Die Parabel ist die Momentenlinie für gleichförmige volle Belastung. Je weniger also die zu einer Einflußlinie gehörige Belastungsfläche von einem Rechtecke abweicht, ein desto genaueres Ergebnis liefert die Formel  $Y_{max} = P_i z$ , wo  $z$  die Pfeilhöhe des Parabelabschnittes bedeutet, der denselben Inhalt besitzt, wie die fragliche Einflußfläche. Wir wählen ein Beispiel, in welchem die Belastungsfläche der Einflußlinie ein Dreieck ist.

Gesucht sei der Widerstand  ${}_{min} X_a$  der Endstütze  $a$  eines über zwei Öffnungen gestreckten Balkens von unveränderlichem Querschnitte, Fig. 320. Die  $M_a$ -Fläche ist ein Dreieck von der Höhe  $1 \cdot l_1$ . Man findet

$$EJ\delta_{aa} = \int M_a^2 dx = 2(l_1 + l_2) \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3}.$$

Die Gleichung der  $X_a$ -Linie ist für die erste Öffnung

$$\eta_1 = 1 \frac{x'}{l_1} - \omega_D \cdot \frac{l_1 l_1^2}{6 \cdot EJ\delta_{aa}} = \frac{x'}{l_1} - \omega_D \frac{l_1}{2(l_1 + l_2)}$$

und für die zweite Öffnung

$$\eta_2 = -\omega_D \cdot \frac{l_1 l_2^2}{6 EJ\delta_{aa}} = -\omega_D \frac{l_2^2}{2 l_1 (l_1 + l_2)}.$$

${}_{min} X_a$  entsteht bei ausschließlicher Belastung der Öffnung  $l_2$ . Ist  $l_1 = 7,0 \text{ m}$ ,  $l_2 = 9,0 \text{ m}$ , so ergibt sich

$$\eta_2 = -\omega_D \cdot 0,362$$

und man findet für die in Fig. 320 a angegebene Zugstellung

$${}_{min} X_a = \Sigma P \eta_2 = -9,00 \text{ t.}$$

Der Inhalt der Einflußfläche ist für die zweite Öffnung, wegen

$$\int_0^{l_2} \omega_D dx = \int_0^{l_2} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) dx = \frac{l_2}{4}$$

$$\delta = \frac{l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)}.$$

Die Pfeilhöhe der gleichwertigen Parabel beträgt

$$z = \frac{3}{2} \frac{\delta}{l_2} = \frac{3l_2^2}{16l_1(l_1 + l_2)} = 0,136.$$

Zu  $l_2 = 9$  m gehört  $P_i = 66$  t. Man erhält demnach

$$\min X_a = -P_i z = -66 \cdot 0,136 = 8,98 \text{ t,}$$

also fast genau denselben Wert wie oben, trotzdem die Belastungsfläche erheblich von einem Rechtecke abweicht.

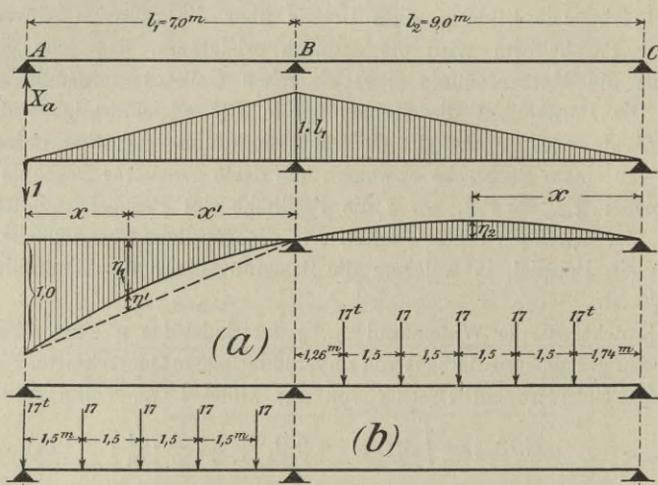


Fig. 320.

Es ist nun die Frage, ob sich auch für  $\max X$  ein einfacher Näherungswert angeben läßt. Die Einflußlinie

$$\eta_1 = \frac{x'}{l_1} - \omega_D \cdot 0,219$$

liefert für die in Fig. 320b angegebene Zugstellung

$$\max X_a = \Sigma P \eta_1 = +44 \text{ t.}$$

Setzen wir

$$\frac{x'}{l_1} - \eta_1 = \eta',$$

so erhalten wir

$$X_a = A_0 - \Sigma P \eta',$$

wo  $A_0$  den Widerstand der Endstütze A eines einfachen Balkens AB bedeutet. Die Summe  $\Sigma P \eta'$  ersetzen wir durch den einer gleichmäßigen Belastung  $p$  entsprechenden Wert

$$p \int_0^{l_1} \eta' dx = p \frac{l_1}{2(l_1 + l_2)} \int_0^{l_1} \omega_D dx = \frac{pl_1^2}{8(l_1 + l_2)}$$

und wählen  $p$  so groß, daß

$$p \frac{l_1}{2} = A_0$$

ist. Dann erhalten wir die Formel

$$X_a = A_0 \left( 1 - \frac{l_1}{4(l_1 + l_2)} \right) = A_0 \frac{3l_1 + 4l_2}{4(l_1 + l_2)}.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$A_0 = 85 \frac{4}{7} = 49 \text{ t und } \max X_a = 49 \frac{57}{64} = 44 \text{ t.}$$

Weitere Beispiele für Balken auf mehreren Stützen findet man im § 26.

## § 25.

### Stabbogen mit darüberliegendem Versteifungsbalken.

**122. Berechnung des größten Horizontalschubes.** Der Stabbogen mit darüberliegendem Versteifungsbalken kann als die Umkehrung einer durch einen Balken versteiften Kette angesehen werden. Seine Knotenpunkte mögen in einer Parabel liegen; es sei also

$$y = \frac{4fx'}{l^2}.$$

Zur Aufnahme der am Balken angreifenden wagerechten Lasten diene das lotrechte Gleitlager  $B_0$ , Fig. 321. Vgl. Abteilung 1, § 9, Nr. 104. Die Einflußlinie für den Horizontalschub  $H$  ist eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$(1) \quad z_0 = \frac{3l}{16f} \nu, \text{ wo}$$

$$(2) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{s_0}{l} \frac{J}{F_k f^2}},$$

$$(3) \quad \frac{s_0}{l} = 1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2}.$$

$F_k$  bedeutet den Querschnitt des Stabbogens im Scheitel,  $J$  das unveränderlich angenommene Trägheitsmoment des Versteifungsbalkens. Ist der Balken ein Fachwerk mit parallelen Gurtungen und  $h$  seine

Höhe, was in dem folgenden Zahlenbeispiele vorausgesetzt werden möge, so darf  $J = F \frac{h^2}{2}$  gesetzt werden, wo  $F$  den Gurtquerschnitt bedeutet. Dann ist

$$(4) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{h^2}{f^2} \frac{s_0}{l} \frac{F}{F_k}}$$

Es handele sich um eine zweigleisige Eisenbahnbrücke von  $l = 80$  m Spannweite und  $f = \frac{l}{8} = 10$  m Pfeilhöhe. Balkenhöhe  $h = 2,0$  m. Wir schätzen  $F = 0,5 F_k$  und erhalten

$$\nu = 0,98 \text{ und } z_0 = 1,47.$$

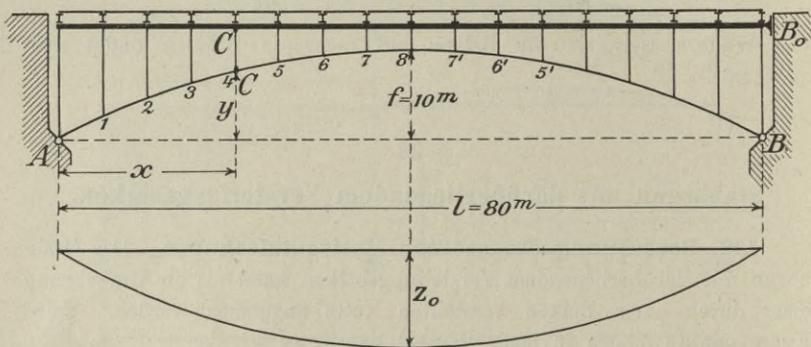


Fig. 321.

Zu  $l = 80$  m gehört  $P_t = 301$  t; es ist also

$${}_{\max} H_p = 301 \cdot 1,47 = 442,5 \text{ t.}$$

Das Eigengewicht betrage  $g = 4$  t/m, weshalb

$$(5) \quad H_g = \frac{gl^2}{8f} \nu = gl\nu = 313,6 \text{ t.}$$

Eine Erhöhung der Aufstellungstemperatur um  $t = 45^\circ$  erzeugt

$$(6) \quad H_t = \varepsilon E F_k t (1 - \nu) = 250 \cdot F_k \cdot 45 \cdot 0,02 = 225 F_k.$$

Im ganzen entsteht:

$${}_{\max} H = 756 + 225 F_k.$$

Die Spannung im Scheitelquerschnitte des Bogens beträgt

$$\sigma = \frac{H}{F_k} = \frac{756}{F_k} + 225.$$

Wird  $\sigma = 1000$  kg/qcm = 10 000 t/qm gestattet, so ist der erforderliche nutzbare Querschnitt  $F_k = 0,0774$  qm und der volle Quer-

schnitt (ohne Abzug der Nietlöcher) etwa  $F_k = 0,0774 \cdot 1,09 = 0,0844$ , weshalb

$$H_t = 250 \cdot 0,0844 \cdot t \cdot 0,02.$$

Schwankt  $t$  zwischen  $-25^\circ$  und  $+45^\circ$ , so liegt  $H_t$  zwischen den Grenzen

$$H_t = -10,6 \text{ und } +19 \text{ Tonnen.}$$

**123. Biegemomente  $\min M$  für den Versteifungsbalken,** Fig. 322 und 323. Die Kämpferdrucklinie ist eine wagerechte Gerade in der Höhe

$$(7) \quad y_k = \frac{4f}{3\nu} = \frac{40}{3 \cdot 0,98} = \frac{20}{1,47} = 13,605 \text{ m.}$$

In gleicher Höhe haben wir in den Figuren 322 und 323 die Achse des Versteifungsbalkens, deren Abstand vom Bogen für unsere Untersuchung gleichgültig ist, gezeichnet.

Die Einflußfläche für das Biegemoment des Balkenquerschnittes  $C$  ist der Unterschied der  $H$ -Linie und eines Dreieckes  $ABC$  von der Höhe

$$(8) \quad \eta_c = \frac{xx'}{yl} = \frac{l}{4f} = 2,0.$$

Ihr Multiplikator ist  $y$ .

Wir rechnen mit einer stetig gekrümmten Achse des Stabbogens. Dann liegen die Nullpunkte  $E$  und  $E'$  lotrecht unter den Punkten  $E$  und  $E'$ , in denen die Kämpferdrucklinie von den Kämpfergelenke  $A$  und  $B$  mit dem Bogenpunkte  $C$  verbindenden Geraden geschnitten wird.

In Figur 322 liegen beide Punkte  $E$  und  $E'$  innerhalb der Spannweite; es sind also zwei negative Beitragstrecken  $BE = \xi$  und  $AE' = \xi'$  vorhanden. Der negative Teil der Einflußfläche des Momentes besteht aus zwei Parabelabschnitten von den Pfeilhöhen

$$(9) \quad z = z_0 \frac{\xi^2}{l^2} = 1,47 \frac{\xi^2}{l^2} \text{ und } z' = 1,47 \frac{\xi'^2}{l^2}.$$

Entsprechen den Weiten  $\xi$  und  $\xi'$  die Lasten  $P_{i,1}$  und  $P_{i,2}$ , so ist der Einfluß der Verkehrslast auf  $\min M$ :

$$\min M_y = -(P_{i,1} z + P_{i,2} z') y.$$

Die ständige Belastung erzeugt

$$(10) \quad M_g = g \frac{xx'}{2} (1 - \nu),$$

also für den  $m^{\text{ten}}$  Knotenpunkt des Balkens, wenn  $\lambda$  die Feldweite bedeutet:

$$M_g = g \frac{\lambda^2}{2} (1 - \nu) m \cdot m' = \frac{4 \cdot 25}{2} \cdot 0,02 \cdot m \cdot m' = 1,0 m (16 - m).$$

Der Einfluß der Temperaturerhöhung ( $t = + 45^\circ$ ) ist

$$M_t = - 19 y.$$

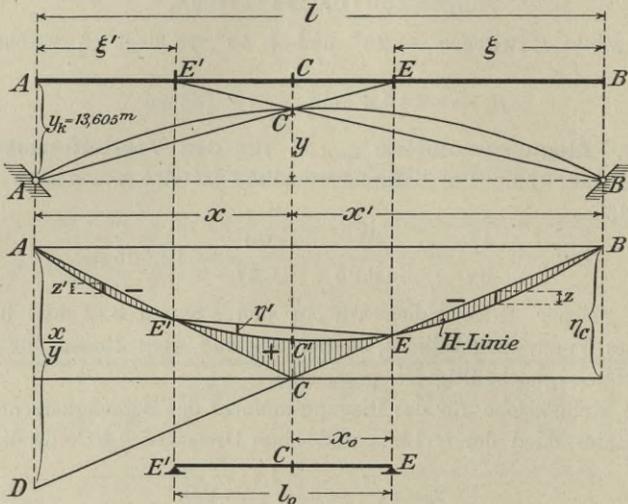


Fig. 322.

In Figur 323 liegt  $E'$  außerhalb der Stützweite. Es ist nur eine negative Beitragstrecke  $\xi$  vorhanden und man erhält

$$\min M_p = - P_1 z y.$$

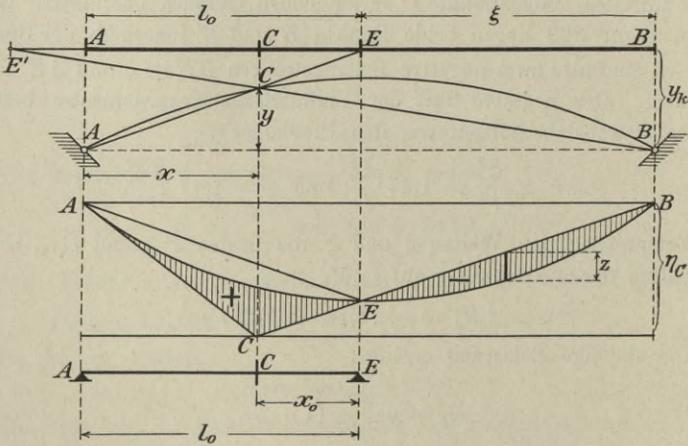


Fig. 323.

Wir berechnen zunächst:

$$\overline{AE} = x \frac{y_k}{y} = m \lambda \frac{y_k}{y} = \frac{m}{y} \cdot \frac{100}{1,47}.$$

Die folgende Tabelle enthält die Ordinaten  $y$ , die Strecken  $\overline{AE}$  und  $l - \overline{AE} = \xi$ , sowie die in Nr. 124 gebrauchten Strecken

$$(11) \quad s = \frac{ly_k}{y} = \frac{1600}{1,47y} = \frac{1088,44}{y}.$$

Die zu den rechtsseitigen Bogenpunkten  $7', 6', 5'$  gehörigen Strecken  $\xi$  sind gleich den Strecken  $\xi'$ , die zu den entsprechenden linksseitigen Bogenpunkten 7, 6, 5 gehören. Für die Balkenquerschnitte 6, 7 und 8 sind also je zwei Lastscheiden ( $E$  und  $E'$ ) vorhanden.

I.

$m$	$y$	$\overline{AE}$	$\xi$	$s$
1	2,344	29,02	50,98	464,35
2	4,375	31,10	48,90	248,79
3	6,094	33,49	46,51	178,61
4	7,500	36,28	43,72	145,13
5	8,594	39,58	40,42	126,65
6	9,375	43,54	36,46	116,10
7	9,844	48,37	31,63	110,57
8	10,000	54,42	25,58	108,84
7'	9,844	62,19	17,81	
6'	9,375	72,56	7,44	
5'	8,594	87,07	-7,07	
	m	m	m	m

Tabelle II enthält die den Strecken  $\xi$  entsprechenden Parabelhöhen  $z$  und Lasten  $P_i$ , sowie die Momente  ${}_{min}M_p, M_g, M_t$  und

$${}_{min}M = {}_{min}M_p + M_g + M_t.$$

II.

$m$	$\xi$	$z$	$P_i$	$\xi'$	$z'$	$P_i$	${}_{min}M_p$	$M_t$	$M_g$	${}_{min}M$
1	51,0	0,597	223				-312	-45	+15	-342
2	48,9	0,549	217				-521	-83	+28	-576
3	46,5	0,497	210				-636	-116	+39	-713
4	43,7	0,439	201				-662	-143	+48	-757
5	40,4	0,375	189				-609	-163	+55	-717
6	36,5	0,306	174	7,4	0,013	58	-506	-178	+60	-624
7	31,6	0,229	152	17,8	0,073	91	-409	-187	+63	-533
8	25,6	0,151	128	25,6	0,151	128	-387	-190	+64	-513
	m		t	m		t	tm	tm	tm	tm

124. Biegemomente  $\max M$ . Auf der positiven Beitragstrecke  $E'E$  (Fig. 324) befinde sich eine Lastgruppe  $P_1 P_2 \dots P_n$ . Die an der Stelle  $C$  stehende Last sei  $P_r$ . Die Mittelkraft  $\mathfrak{P}_n$  der Lastgruppe habe

von  $A$  den Abstand  $a'$   
 „  $B$  „ „  $b'$   
 „  $E'$  „ „  $a''$   
 „  $E$  „ „  $b''$ .

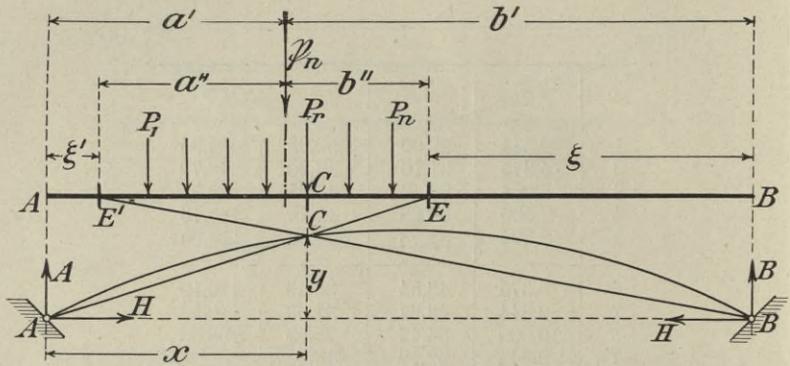


Fig. 324.

Sind  $A$  und  $B$  die lotrechten Seitenkräfte der Kämpferwiderstände, so ist das Biegemoment  $M$  des Balkenquerschnitts  $C$ :

$$M = Ax - Hy - \mathfrak{E}_r,$$

wo

$$A = \mathfrak{P}_n \frac{b'}{l}$$

und

$$(12) \quad H = \frac{3\nu}{4fl} (\mathfrak{P}_n a' b' - \mathfrak{I}_n) = \frac{1}{ly_k} [\mathfrak{P}_n b' (l - b') - \mathfrak{I}_n].$$

Man erhält

$$M = \frac{y}{ly_k} \left[ \frac{xy_k}{y} \mathfrak{P}_n b' - \mathfrak{P}_n b' (l - b') + \mathfrak{I}_n \right] - \mathfrak{E}_r$$

und mit Beachtung der Beziehungen:

$$\xi = l - \frac{xy_k}{y} \quad \text{und} \\ b'' = b' - \xi$$

kürzer:

$$(13) \quad M = \frac{1}{s} (\mathfrak{F}_n b' b'' + \mathfrak{T}_n) - \mathfrak{E}_r$$

wo

$$(14) \quad s = \frac{ly_k}{y}$$

Um nun zu erkennen, ob die angenommene Laststellung die ungünstigste ist, rücken wir den Zug um  $db$  nach links. Dann wächst  $b'b'' = b'(b' - \xi)$  um  $(2b' - \xi) db = (b' + b'') db$ . Das Moment der Lasten  $P_1 \dots P_r$  in bezug auf den Querschnitt  $C$  ändert sich um  $\mathfrak{F}_r db$ . Es ergibt sich daher

$$\frac{dM}{db} = \frac{1}{s} \mathfrak{F}_n (b' + b'') - \mathfrak{F}_r$$

Soll die angenommene Zugstellung das größte Moment erzeugen, so muß  $\frac{dM}{db}$  negativ sein. Es folgt hieraus die Bedingung

$$(15) \quad \leftarrow \frac{\mathfrak{F}_n}{\mathfrak{F}_r} < \frac{s}{b' + b''},$$

und ebenso führt die Untersuchung des Einflusses einer Verschiebung des Lastzuges nach rechts zu der Bedingung

$$(16) \quad \Rightarrow \frac{\mathfrak{F}_n}{\mathfrak{F}_{r-1}} > \frac{s}{b' + b''}.$$

Gleichung (13) darf auch ersetzt werden durch

$$(13') \quad M = \frac{1}{s} (\mathfrak{F}_n a' a'' + \mathfrak{T}_n) - \mathfrak{E}_r.$$

Die Lasten werden dann von rechts nach links fortschreitend mit  $P_1, P_2, \dots, P_n$  bezeichnet. Die Bedingungen (15) und (16) sind zu ersetzen durch

$$(15') \quad \Rightarrow \frac{\mathfrak{F}_n}{\mathfrak{F}_r} < \frac{s}{2a' - \xi},$$

$$(16') \quad \leftarrow \frac{\mathfrak{F}_n}{\mathfrak{F}_{n-1}} > \frac{s}{2a' - \xi}.$$

Den Bedingungen (15), (16), (15'), (16') können im allgemeinen verschiedene Laststellungen genügen, deren Wirkungen miteinander zu vergleichen sind.

Für unser Zahlenbeispiel kommen die in den Figuren 325 bis 332 dargestellten Belastungsfälle in Betracht. Die Lage der Mittelkraft  $\mathfrak{P}_n$  wurde mittels der in den Tabellen I bis IV des § 24 angegebenen Werte  $c_n'$  bestimmt. Man erhält, mit den vorhin berechneten Werten  $s$ , die folgenden Ansätze:

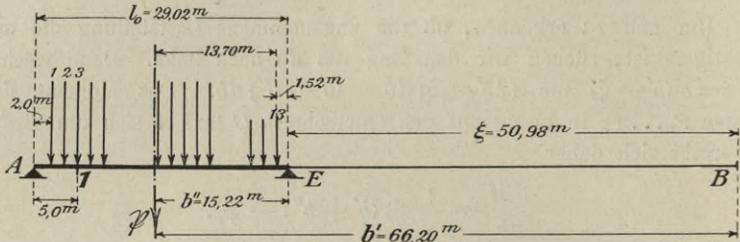


Fig. 325.

$$\max M_{p1}, \text{ Fig. 325.} \quad \frac{s}{b' + b''} = \frac{464,35}{81,42} = 5,70$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{13}}{\mathfrak{P}_3} = \frac{209}{51} < 5,70 \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{13}}{\mathfrak{P}_2} = \frac{209}{34} > 5,70$$

$$\max M_{p1} = \frac{1}{464,35} (209 \cdot 66,20 \cdot 15,22 + 14081) - 51 \cdot 1,5 = 407 \text{ tm.}$$

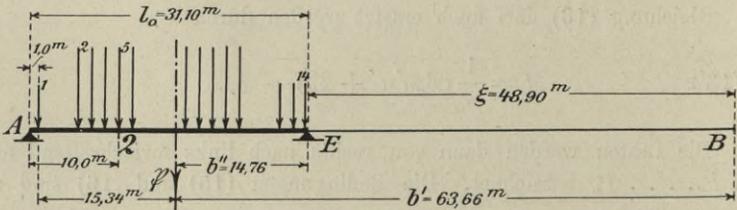


Fig. 326.

$$\max M_{p2}, \text{ Fig. 326.} \quad \frac{s}{b' + b''} = \frac{248,79}{78,42} = 3,17$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{14}}{\mathfrak{P}_3} = \frac{222}{81} < 3,17 \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{14}}{\mathfrak{P}_1} = \frac{222}{64} > 3,17$$

$$\max M_{p2} = \frac{1}{248,79} (222 \cdot 63,66 \cdot 14,76 + 17332) - 51 \cdot 3 - 13 \cdot 9 = 638 \text{ tm.}$$

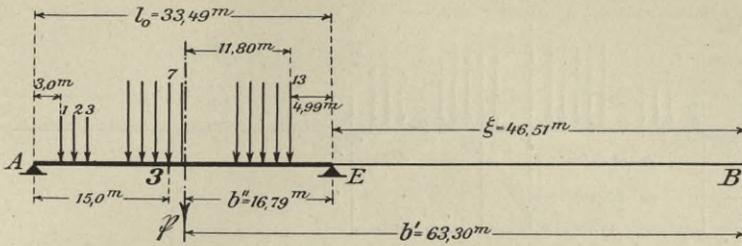


Fig. 327.

$$\max M_{p3}, \text{ Fig. 327. } \quad \frac{s}{b' + b''} = \frac{178,61}{80,09} = 2,23$$

$$\leftarrow \frac{\Phi_{13}}{\Phi_7} = \frac{209}{107} < 2,23 \Rightarrow \frac{\Phi_{13}}{\Phi_6} = \frac{209}{90} > 2,23$$

$$\max M_{p3} = \frac{1}{178,61} (209 \cdot 63,30 \cdot 16,79 + 14081) - 562,5 = 760 \text{ tm.}$$

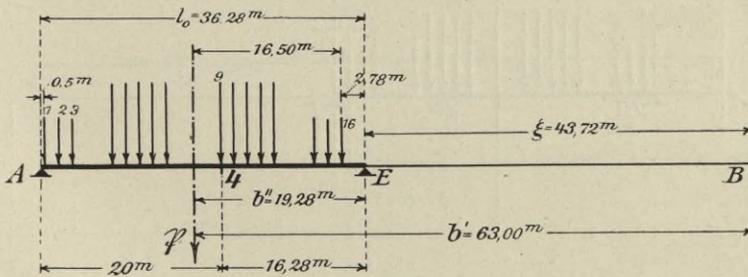


Fig. 328.

$$\max M_{p4}, \text{ Fig. 328. } \quad \frac{s}{b' + b''} = \frac{145,13}{82,28} = 1,764$$

$$\leftarrow \frac{\Phi_{16}}{\Phi_9} = \frac{248}{141} = 1,757 < 1,764 \Rightarrow \frac{\Phi_{16}}{\Phi_8} = \frac{248}{124} > 1,764$$

$$\max M_{p4} = \frac{1}{145,13} (248 \cdot 63,00 \cdot 19,28 + 24552) - 1467 = 778 \text{ tm.}$$

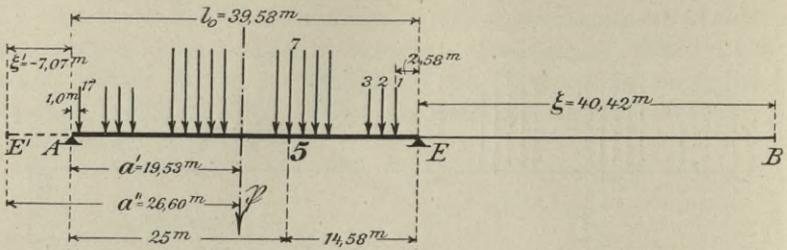


Fig. 329.

$$\max M_{p5}, \text{ Fig. 329. } \quad \frac{s}{a' + a''} = \frac{126,65}{46,13} = 2,75^*)$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{17}}{\mathfrak{P}_7} = \frac{261}{107} < 2,75 \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{17}}{\mathfrak{P}_6} = \frac{261}{90} > 2,75$$

$$\max M_{p5} = \frac{1}{126,65} (261 \cdot 19,53 \cdot 26,60 + 29249) - 562,5 = 739 \text{ tm.}$$

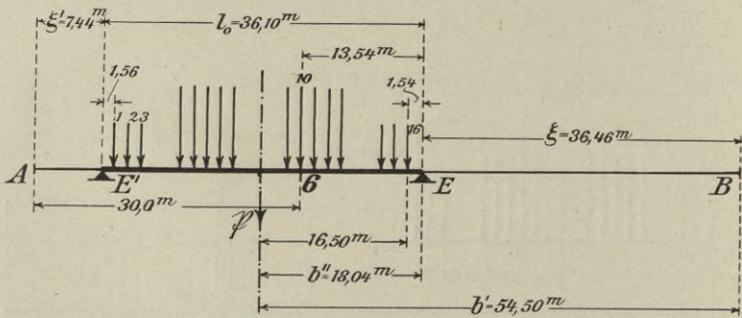


Fig. 330.

$$\max M_{p6}, \text{ Fig. 330. } \quad \frac{s}{b' + b''} = \frac{116,10}{72,54} = 1,60$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{16}}{\mathfrak{P}_{10}} = \frac{248}{158} < 1,60 \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{16}}{\mathfrak{P}_9} = \frac{248}{141} > 1,60$$

$$\max M_{p6} = \frac{1}{116,10} (248 \cdot 54,50 \cdot 18,04 + 24552) - 1678,5 = 633 \text{ tm.}$$

\*) Hier wurden die Gleichung (13') und die Bedingungen (15'), (16') benutzt.

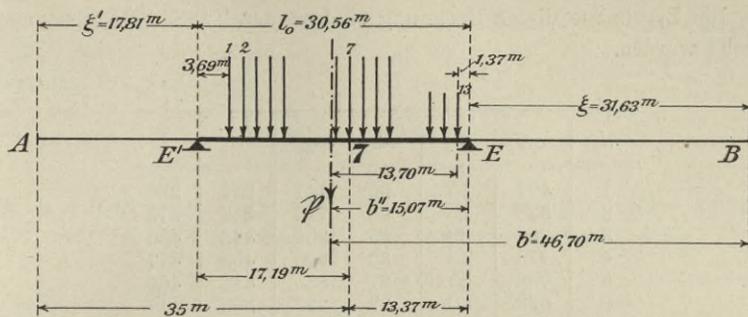


Fig. 331.

$\max M_{p7}$ , Fig. 331.  $\frac{s}{b' + b''} = \frac{110,57}{61,77} = 1,79$

$\left\langle \frac{\mathfrak{F}_{13}}{\mathfrak{F}_7} = \frac{209}{119} < 1,79 \right\rangle \Rightarrow \frac{\mathfrak{F}_{13}}{\mathfrak{F}_6} = \frac{209}{102} > 1,79$

$\max M_{p7} = \frac{1}{110,57} (209 \cdot 46,70 \cdot 15,07 + 14081) - 918 = 540 \text{ tm.}$

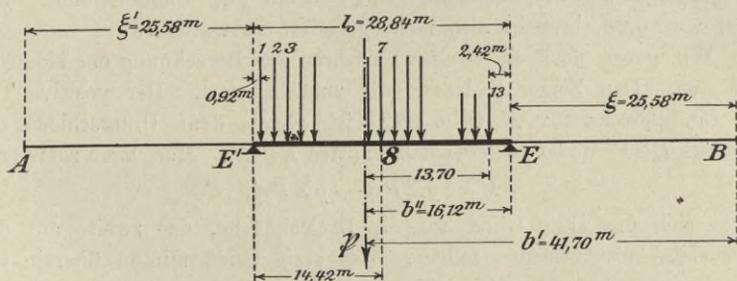


Fig. 332.

$\max M_{p8}$ , Fig. 332.  $\frac{s}{b' + b''} = \frac{108,84}{57,82} = 1,88$

$\left\langle \frac{\mathfrak{F}_{13}}{\mathfrak{F}_7} = \frac{209}{119} < 1,88 \right\rangle \Rightarrow \frac{\mathfrak{F}_{13}}{\mathfrak{F}_6} = \frac{209}{102} > 1,88.$

$\max M_{p8} = \frac{1}{108,84} (209 \cdot 41,70 \cdot 16,12 + 14081) - 918 = 502 \text{ tm.}$

Zu den Momenten  $\max M_p$  treten noch die vorhin berechneten  $M_y$  sowie die infolge der Temperaturänderung  $t = -25^\circ$  entstehenden Momente

$M_t = + 10,6 \text{ y.}$

Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in der Tabelle III zusammengestellt worden.

## III.

$m$	$\max M_p$	$M_g$	$M_t$	$\max M$	$S$	$F$
1	407	15	25	447	224	236
2	638	28	46	712	356	375
3	760	39	65	864	432	455
4	778	48	80	906	453	477
5	739	55	91	885	443	466
6	633	60	99	792	396	417
7	540	63	104	707	354	373
8	502	64	106	672	336	354
	tm	tm	tm	tm	t	qcm

Die Momente  $\max M$  sind durchweg größer als die Momente  $\min M$ . Die zugehörigen Gurtkräfte  $S = \frac{M}{h} = \frac{M}{2,0}$  und die erforderlichen Gurtquerschnitte  $F = \frac{S}{0,95}$  qcm sind in den beiden letzten Spalten angegeben worden. Der Mittelwert von  $F$  ist 394 qcm, weshalb  $F : F_k = 394 : 774 = 0,51$ , was mit der Schätzung  $F : F_k = 0,5$  gut übereinstimmt. Der Wert  $\nu = 0,98$ , braucht also nicht geändert zu werden.

Wir geben noch ein zweites Verfahren zur Berechnung der Momente  $\max M_p$  an. Den Zeiger  $p$  lassen wir zunächst fort. Der positive Teil der Einflußfläche für  $M$  (Fig. 322) ist gleich dem Unterschiede des Dreiecks  $ECE'$  und des Parabelabschnittes  $EC'E'$ . Man kann schreiben:

$$M = y \Sigma P \eta - y \Sigma P \eta',$$

wobei sich das erste Glied auf die Dreiecksfläche, das zweite auf den Parabelabschnitt beziehen mögen. Das erste Glied stimmt überein mit dem Biegemomente  $M_{0C}$  des Querschnittes  $C$  eines einfachen Balkens von der Stützweite  $l_0 = \overline{E'E}$ . Das zweite Glied möge unter der Annahme berechnet werden, daß die Strecke  $E'E$  eine gleichförmige Belastung  $p$  trägt, welche der Bedingung

$$\frac{p l_0^2}{8} = \max M_0$$

genügt, wo  $\max M_0$  das größte Biegemoment für einen Balken von der Spannweite  $l_0$  infolge der Verkehrslast bedeutet. Ist dann  $\delta$  der Inhalt des Parabelabschnittes  $EC'E'$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \max M &= \max M_{0C} - p y \delta \\ &= \max M_{0C} - \max M_0 \cdot \frac{8 y \delta}{l_0^2}. \end{aligned}$$

Zwischen dem Momente  ${}_{max}M_{0C}$  an der Stelle  $C$  und dem Momente  ${}_{max}M_0$  besteht nach Band I, Anhang Seite 551, mit genügender Annäherung die Beziehung

$$(17) \quad \frac{{}_{max}M_{0C}}{{}_{max}M_0} = \frac{x_0(2d - x_0)}{d^2},$$

wo  $d = 0,44 l_0$  ist. Unter  $x_0$  ist der kleinere der beiden Abstände  $E'C$  und  $CE$  zu verstehen. Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(18) \quad \gamma = \frac{x_0(0,88 l_0 - x_0)}{(0,44 l_0)^2}$$

ergibt sich dann

$$(19) \quad {}_{max}M = {}_{max}M_0 \left( \gamma - \frac{8y\mathfrak{F}}{l_0^2} \right).$$

Der Inhalt der  $H$ -Fläche ist

$$\mathfrak{F}_H = \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{16f} \nu \cdot l = \frac{l^2}{8f} \nu,$$

mithin

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_H \frac{l_0^3}{l^3} = \frac{l_0^3 \nu}{8fl}$$

und

$$(20) \quad {}_{max}M = {}_{max}M_0 \left( \gamma - \frac{y l_0 \nu}{lf} \right).$$

Nun verhält sich aber

$$\frac{l_0}{l} = \frac{y_k - y}{y}.$$

Es ist also

$$\frac{y l_0}{l} = y_k - y = \frac{4f}{3\nu} - y,$$

und man findet schließlich

$$(21) \quad {}_{max}M = {}_{max}M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} + \frac{y}{f} \nu \right).$$

Gleichung (21) gilt nur für den Fall, daß beide Punkte  $E$  und  $E'$  innerhalb der Stützweite  $AB$  liegen, Fig. 322. Liegt  $E'$  links von  $A$  (Fig. 323), so ist

$$l_0 = x \frac{y_k}{y} = \frac{x 4f}{y 3\nu},$$

und es entsteht die noch einfachere Formel

$$(22) \quad \text{max} M = \text{max} M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} \frac{x}{l} \right).$$

Die Tabelle A enthält die Momente  $\text{max} M_0$  für den Lastzug der preußischen Bestimmungen und für verschiedene Stützweiten  $l_0$ . Die Tabelle B gibt die den Zahlen  $\frac{x_0}{l_0}$  entsprechenden Werte  $\gamma$  an. Sobald  $\frac{x_0}{l_0} > 0,44$  wird, ist  $\gamma = 1$  zu setzen.

Tabelle A.

$l_0$	$M_0 \text{ max}$	$\frac{\Delta M_0 \text{ max}}{\Delta l_0}$	$l_0$	$M_0 \text{ max}$	$\frac{\Delta M_0 \text{ max}}{\Delta l_0}$	$l_0$	$M_0 \text{ max}$	$\frac{\Delta M_0 \text{ max}}{\Delta l_0}$
m	tm	t	m	tm	t	m	tm	t
1,0	5,00	5,00	15	243,9	26,1	60	2 900	81,5
1,2	6,00	5,00	16	270,0	27,8	62	3 063	84,5
1,4	7,00	5,00	17	297,8	29,2	64	3 232	85,0
1,6	8,00	5,00	18	327,0	32,8	66	3 402	86,5
1,8	9,00	5,00	19	359,8	34,2	68	3 575	88,0
2,0	10,00	5,00	20	394,0	37,5	70	3 751	88,0
2,2	11,00	5,00	22	469,0	40,8	72	3 927	91,0
2,4	12,00	5,80	24	550,5	40,8	74	4 109	93,0
2,6	13,16	9,25	26	632,0	48,1	76	4 295	94,5
2,8	15,01	9,30	28	728,2	52,1	78	4 484	95,0
3,0	16,88	9,40	30	832,3	53,5	80	4 674	97,0
3,2	18,76	9,50	32	939,2	55,4	82	4 868	97,5
3,5	21,61	13,8	34	1050	57,5	84	5 063	100
4,0	28,50	14,2	36	1165	60,5	86	5 263	101
4,5	35,63	14,2	38	1286	65,0	88	5 464	103
5,0	42,75	14,3	40	1416	68,0	90	5 669	104
6	57,00	16,4	42	1552	68,5	92	5 876	107
7	73,45	20,1	44	1689	71,5	94	6 089	107
8	93,50	21,2	46	1832	72,0	96	6 303	109
9	114,7	21,2	48	1976	73,5	98	6 520	110
10	135,9	21,2	50	2123	75,0	100	6 740	118
11	157,1	21,3	52	2273	75,0	110	7 918	126
12	178,4	21,3	54	2423	77,0	120	9 176	134
13	199,7	21,3	56	2577	80,0	130	10 520	144
14	221,6	22,9	58	2737	81,5	140	11 965	144
15	243,9		60	2900		150	13 510	155

Tabelle B.

$\frac{x_0}{l_0}$	$\gamma$	$\frac{\Delta\gamma^*)}{\Delta\frac{x_0}{l_0}}$	$\frac{x_0}{l_0}$	$\gamma$	$\frac{\Delta\gamma}{\Delta\frac{x_0}{l_0}}$	$\frac{x_0}{l_0}$	$\gamma$	$\frac{\Delta\gamma}{\Delta\frac{x_0}{l_0}}$
0,00	0,0000		0,15	0,5656		0,30	0,8988	
0,01	0,0449	4,49	0,16	0,5950	2,94	0,31	0,9127	1,39
0,02	0,0888	4,39	0,17	0,6235	2,84	0,32	0,9256	1,29
0,03	0,1317	4,29	0,18	0,6508	2,74	0,33	0,9375	1,19
0,04	0,1736	4,18	0,19	0,6772	2,63	0,34	0,9483	1,08
0,05	0,2144	4,08	0,20	0,7025	2,53	0,35	0,9582	0,98
		3,98			2,43			0,88
0,06	0,2541	3,87	0,21	0,7268	2,32	0,36	0,9669	0,77
0,07	0,2929	3,77	0,22	0,7500	2,22	0,37	0,9747	0,67
0,08	0,3306	3,67	0,23	0,7722	2,12	0,38	0,9814	0,57
0,09	0,3673	3,56	0,24	0,7934	2,01	0,39	0,9871	0,46
0,10	0,4029	3,46	0,25	0,8135	1,91	0,40	0,9917	0,36
0,11	0,4375	3,36	0,26	0,8326	1,81	0,41	0,9954	0,26
0,12	0,4711	3,25	0,27	0,8507	1,70	0,42	0,9979	0,16
0,13	0,5036	3,15	0,28	0,8678	1,60	0,43	0,9995	0,05
0,14	0,5351	3,05	0,29	0,8838	1,50	0,44	1,0000	
0,15	0,5656		0,30	0,8988				

Die Tabellen A und B sind zur größeren Bequemlichkeit des Lesers aus Band I hierher übernommen worden. Tabelle B wurde erweitert.

In unserem Zahlenbeispiele gilt für  $m = 1$  bis  $m = 5$  wegen  $l = 16 \lambda$  und  $f = 10 m$  die aus (22) folgende Formel:

$$\max M_p = \max M_0 \left( \gamma - \frac{1}{12} m \right)$$

und für  $m = 6, 7, 8$  die aus (21) folgende Formel

$$\max M_p = \max M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} + 0,098 y \right).$$

Es ergeben sich die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Werte  $\max M_p$ , deren Abweichungen von den früher gefundenen, praktisch genommen, belanglos sind. Der große Vorzug dieses zweiten Verfahrens besteht wohl darin, daß man von der vergleichenden Untersuchung verschiedener Laststellungen entoben ist.

\*) Die Werte  $\frac{\Delta\gamma}{\Delta\frac{x_0}{l_0}}$  wurden aus den auf 6 Dezimalstellen berechneten  $\gamma$  ermittelt.

## IV.

$m$	$l_0$	$M_0 \max$	$x_0$	$\frac{x_0}{l_0}$	$\gamma$	$\gamma - \frac{m}{12}$	$\max M_p$	vorhin $\max M_p$	Unter- schied
1	29,02	781	5,0	0,172	0,629	0,546	426	407	4,5 v. H.
2	31,10	891	10,0	0,322	0,928	0,761	678	638	5,9 „ „
3	33,49	1022	15,0	> 0,44	1,000	0,750	767	760	0,9 „ „
4	36,28	1182	16,28	> 0,44	1,000	0,667	788	778	1,3 „ „
5	39,58	1389	14,58	0,368	0,973	0,556	772	739	4,3 „ „
						$\gamma - \frac{4}{3} + 0,098 y$			
6	36,10	1171	13,54	0,375	0,978	0,563	659	633	3,9 „ „
7	30,56	862	13,37	0,438	1,000	0,631	544	540	0,7 „ „
8	28,84	772	14,42	> 0,44	1,000	0,650	502	502	0 „ „

125. Die Querkräfte  $\max Q$  des Versteifungsbalkens. Bedeutet  $Q_0$  die Querkraft für ein Feld eines nur auf zwei Stützen  $A$  und  $B$  ruhenden Balkens, so ist die Querkraft für dasselbe Feld des Versteifungsbalkens  $AB$ :

$$(23) \quad Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \alpha_m,$$

wo  $\alpha_m$  der Neigungswinkel der zu dem fraglichen Felde gehörigen Seite des Stabbogens ist. Die Einflußfläche für die Querkraft des  $m^{\text{ten}}$  Feldes zeigt Fig. 333. Der Multiplikator ist  $\mu = \operatorname{tg} \alpha_m$ . Der Nullpunkt  $E$  ist bestimmt durch den Schnittpunkt  $E$  der Kämpferdrucklinie mit der zum Stabe  $(m-1) - m$  parallelen Geraden  $AE$ . Die Abszissen des Punktes  $E$  sind

$$(24) \quad s' = \frac{y_k}{\operatorname{tg} \alpha_m} \quad \text{und} \quad \xi = l - s'.$$

Um  $\max Q$  zu erzeugen, schieben wir einen Lastzug von  $B$  aus bis in das fragliche Feld hinein und lassen die Strecke  $EB$  wenn möglich unbelastet. Wir erhalten, wenn  $P'$  den auf den Knotenpunkt  $(m-1)$  entfallenden Druck bezeichnet

$$Q_0 = A - P' = \mathfrak{F}_n \frac{b'}{l} - P',$$

ferner nach Gleich. (12)

$$H = \frac{1}{ly_k} (\mathfrak{F}_n a' b' - \mathfrak{T}_n),$$

mithin

$$Q = \frac{\mathfrak{F}_n b'}{l} - \frac{1}{s'l} (\mathfrak{F}_n a' b' - \mathfrak{T}_n) - P'$$

und, wenn wir  $s' - a' = b''$  setzen,

$$(25) \quad Q = \frac{1}{s'l} (\mathfrak{F}_n b' b'' + \mathfrak{T}_n) - P'$$

Da nun  $P' = \frac{\mathfrak{S}_r}{\lambda}$  ist, so kann man hierfür auch schreiben

$$Q\lambda = \frac{\lambda}{s'l} (\mathfrak{F}_n b' b'' + \mathfrak{T}_n) - \mathfrak{S}_r$$

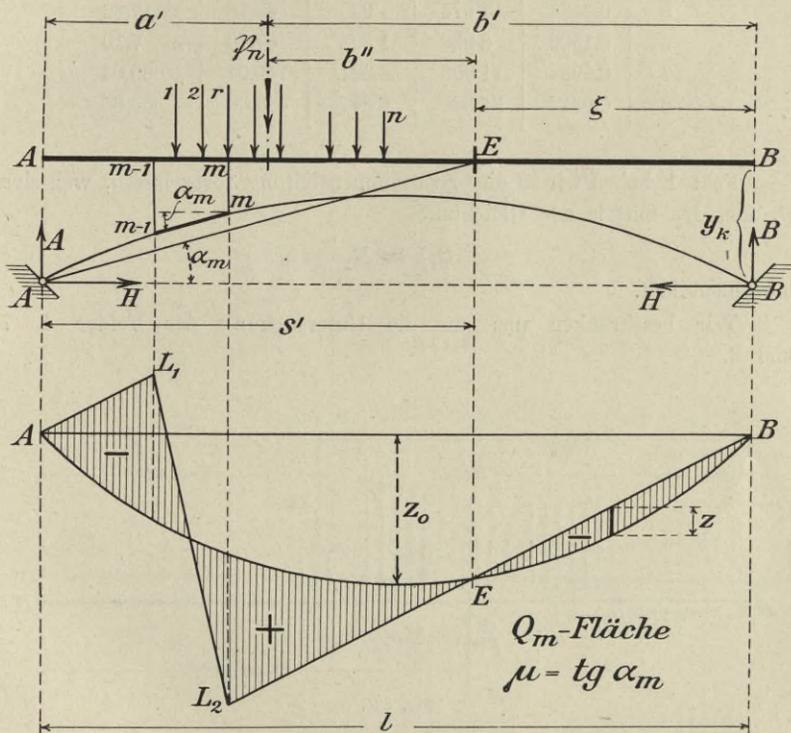


Fig. 333.

und findet durch Vergleichung dieser Formel mit der Formel (13) ohne weiteres, daß die ungünstigste Laststellung den Bedingungen genügen muß

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \frac{\mathfrak{F}_n}{\mathfrak{F}_r} < \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{b' + b''} \\ \rightarrow \frac{\mathfrak{F}_n}{\mathfrak{F}_{r-1}} > \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{b' + b''} \end{array} \right.$$

Für unser Zahlenbeispiel ergibt sich:

$m$	$\operatorname{tg} \alpha_m$	$s'l$	$s' \frac{l}{\lambda}$	$s'$	$\xi$
2	0,4062	2 679	536	33,49	46,51
3	0,3438	3 166	633	39,57	40,43
4	0,2812	3 870	774	48,38	31,62
5	0,2188	4 974	995	62,18	17,82
6	0,1562	6 968	1 394	87,10	— 7,10
7	0,0938	11 603	2 321	145,04	— 65,04
8	0,0312	34 885	6 977	436,06	— 356,06

Feld 1 haben wir in dieser Zusammenstellung fortgelassen, weil sich  $Q_1$  aus  $M_1$  mittels der Gleichung

$$Q_1 \lambda = M_1$$

berechnen läßt.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung der Felder 4, 7 und 8.

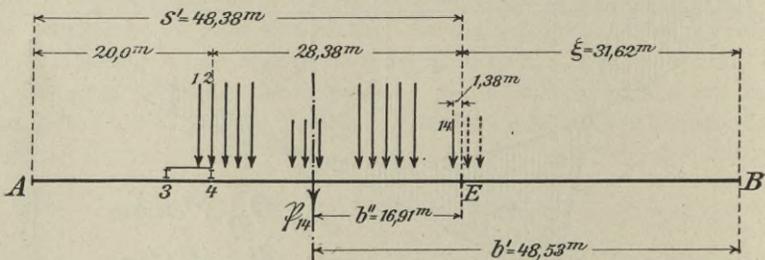


Fig. 334.

Für Feld 4 ist nach Fig. 334

$$\frac{s' \frac{l}{\lambda}}{b' + b''} = \frac{774}{65,44} = 11,83 \quad P' = 17 \frac{1,5}{5,0} = 5,1 \text{ t}$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{F}_{14}}{\mathfrak{F}_2} = \frac{222}{34} < 11,83 \quad \rightarrow \frac{\mathfrak{F}_{14}}{\mathfrak{F}_1} = \frac{222}{17} = 13,1 > 11,83$$

$$\max Q_{4p} = \frac{1}{3870} (222 \cdot 16,91 \cdot 48,53 + 17 \cdot 925) - 5,1 = 46,6 \text{ t.}$$

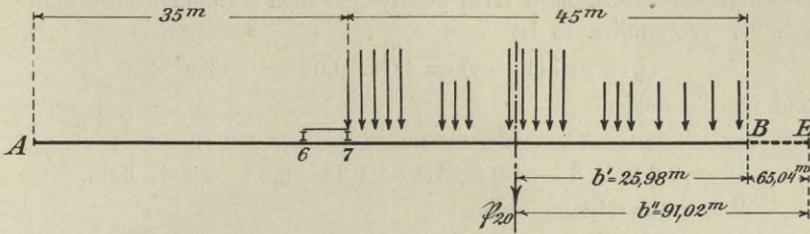


Fig. 335.

Für Feld 7 ist nach Fig. 335

$$\frac{s' \frac{l}{\lambda}}{b' + b''} = \frac{2321}{117,00} = 19,8$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{20}}{\mathfrak{P}_1} = \frac{300}{17} = 17,6 < 19,8$$

$$\max Q_{1p} = \frac{1}{11603} (300 \cdot 25,98 \cdot 91,02 + 50997) = 65,5 \text{ t.}$$

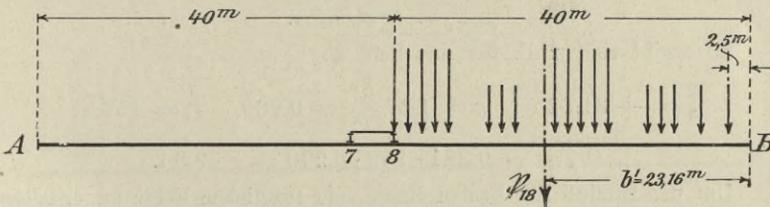


Fig. 336.

Feld 8, Fig. 336.  $b'' = b' - \xi = 23,16 + 356,06 = 379,22$

$$\frac{s' \frac{l}{\lambda}}{b' + b''} = \frac{6977}{402,38} = 17,3$$

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{18}}{\mathfrak{P}_1} = \frac{274}{17} = 16,1 < 17,3$$

$$\max Q_{8p} = \frac{1}{34885} (274 \cdot 23,16 \cdot 379,22 + 35905) = 70 \text{ t.}$$

Die Querkräfte infolge der ständigen Belastung erhält man, indem man die Querkräfte  $Q_{0g}$  eines einfachen Balkens mit  $(1 - \nu)$  multipliziert.

Bedeutet also  $x''$  den nach links positiv gezählten Abstand der Feldmitte von der Trägermitte, so ist

$$Q_g = g x'' (1 - \nu) = 4,0 x'' 0,02 = 0,08 x'',$$

und für die Felder

$$Q_g = 0,2 \text{ t} \quad 0,6 \text{ t} \quad 1,0 \text{ t} \quad 1,4 \text{ t} \quad 1,8 \text{ t} \quad 2,2 \text{ t} \quad 2,6 \text{ t} \quad 3,0 \text{ t}.$$

Temperaturänderung erzeugt

$$Q_t = -H_t \operatorname{tg} \alpha_m.$$

Zu den von den Lasten herrührenden Querkraften  $_{\max} Q$  tritt mithin der einer Abkühlung um  $25^\circ$  entsprechende Wert

$$Q_t = +10,6 \operatorname{tg} \alpha_m.$$

**126. Die Querkraft  $_{\min} Q$  des Versteifungsbalkens.** Liegt  $E$  innerhalb der Stützweite, so ist rechts vom fraglichen Felde eine negative Beitragstrecke  $EB$  vorhanden. Die zugehörige Einflußfläche ist ein Parabelabschnitt von der Pfeilhöhe

$$z = z_0 \frac{\xi^2}{l^2}$$

und man erhält, da die Einflußfläche den Multiplikator  $\operatorname{tg} \alpha_m$  besitzt, für den Einfluß der Belastung der Strecke  $EB$  den Wert

$$_{\max} Q_y = \operatorname{tg} \alpha_m \cdot P_i z.$$

So ergibt sich z. B. für das Feld 4:

$$\xi = +31,62 \text{ m}, \quad z = 1,47 \frac{\xi^2}{l^2} = 0,230, \quad P_i = 152,$$

$$_{\min} Q_{4,y} = -0,281 \cdot 152 \cdot 0,230 = -9,8 \text{ t}.$$

Um den Einfluß der Lasten links vom fraglichen Felde zu erhalten, schieben wir den Lastzug von  $A$  aus bis in das fragliche Feld vor, Fig. 337, bezeichnen die Belastung des Knotens  $m$  mit  $P'$  und finden

$$Q_0 = -B + P', \quad B = \mathfrak{F}_n \frac{a'}{l},$$

$$H = \frac{1}{ly_k} (\mathfrak{F}_n a' b' - \mathfrak{T}_n),$$

$$Q = -\frac{\mathfrak{F}_n a'}{l} - \frac{1}{s'l} (\mathfrak{F}_n a' b' - \mathfrak{T}_n) + P'.$$

Wird  $b' = l - a'$  gesetzt und die Bezeichnung eingeführt

$$a'' = s' + l - a',$$

so entsteht:

$$-Q = \frac{1}{s'l} (\mathfrak{F}_n a' a'' - \mathfrak{T}_n) - P'.$$

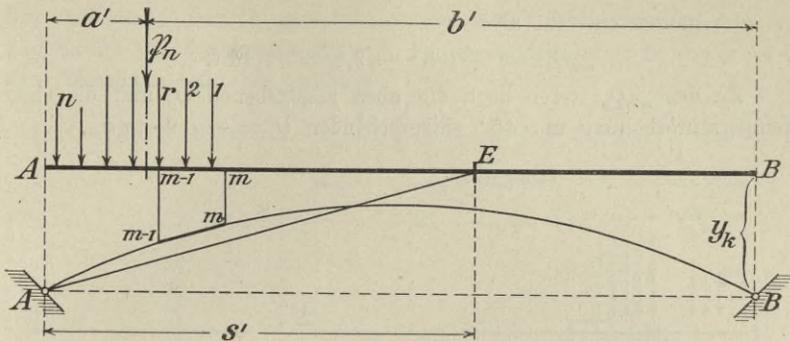


Fig. 337.

Die Strecke  $a''$  könnte man auch nach Fig. 338 als den Abstand der Mittelkraft  $\mathfrak{P}_n$  von einem Punkte  $E'$  deuten, in welchem die Kämpferdrucklinie von einer durch  $B$  zum Stabe  $(m-1) - m$  gezogenen Parallelen geschnitten wird. Die Bedingungen, denen die Laststellung zu genügen hat, lauten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_r} &< \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{a'' - a'} \\ \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{r-1}} &> \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{a'' - a'}. \end{aligned}$$

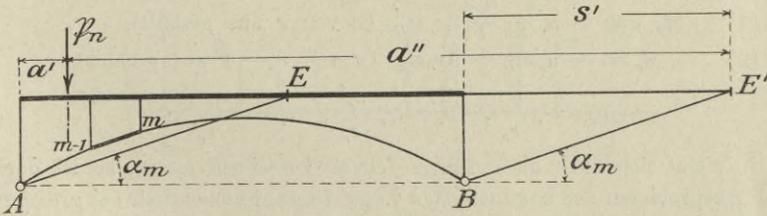


Fig. 338.

Für Feld 4 ist nach Fig. 339:

$$a'' = 48,38 + 80 - 10,67 = 117,71 \text{ m}$$

$$\frac{s' \frac{l}{\lambda}}{a'' - a'} = \frac{774}{107,04} = 7,23$$

$$\Rightarrow \frac{\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_2} = \frac{124}{34} < 7,23 \quad \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_1} = \frac{124}{17} = 7,29 > 7,23$$

$$- \min Q_{4p} = \frac{1}{3870} (124 \cdot 10,67 \cdot 117,71 - 2606) - 5,1 = 34,5 \text{ t.}$$

Im ganzen entsteht also

$$\min Q_{t_p} = -34,5 - 9,8 = -44 \text{ t.}$$

Zu den  $\min Q_p$  treten noch die oben angegebenen  $Q_g$  und die einer Temperaturerhöhung um  $45^\circ$  entsprechenden  $Q_t = -19 \cdot \text{tg } \alpha_m$ .

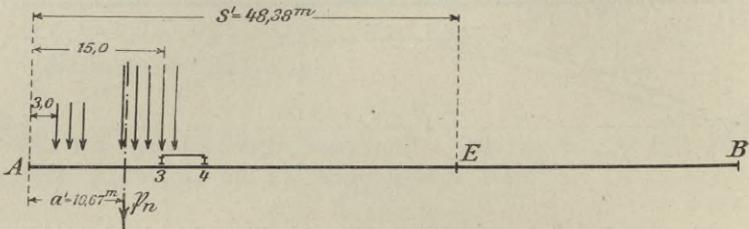


Fig. 339.

### § 26.

#### Benutzung der Tabellen für parabelförmige Einflußlinien bei der Berechnung mehrfach gestützter Balken.

##### 127. Einfluß der vollen Belastung einer einzelnen Öffnung.

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit Balken von unveränderlichem Querschnitte auf starren Stützen. In der Öffnung  $l_r$  sind die Gleichungen der Einflußlinien der Stützenmomente  $M_{r-1}$  und  $M_r$  nach Seite 117:

$$(1) \quad M_{r-1} = -u_r \omega_D + 3v_r \omega_R \quad (x \text{ von } r \text{ aus gezählt),}$$

$$(2) \quad M_r = -u'_r \omega_D + 3v_r \omega_R \quad (x \text{ von } r - 1 \text{ aus gezählt).}$$

$$u_r = l_r \frac{a_r}{c_r}, \quad u'_r = l_r \frac{a'_r}{c_r}, \quad v_r = \frac{a_r a'_r}{c_r}.$$

Wenn sich auch diese Linien schnell berechnen lassen, so ist doch das Ausprobieren der ungünstigsten Zugstellungen namentlich bei größeren Stützweiten eine etwas umständliche Arbeit, weshalb weitere Vereinfachungen erwünscht sind. Die Belastungsfläche, deren Seillinie die  $M_0$ -Linie ist, weicht zwar erheblich vom Rechteck ab — sie hat die Form der in Fig. 340 schraffierten Fläche —\*). Trotzdem wird sich zeigen, daß die Formel  $Y_{max} = P_i z$  auch hier brauchbare Ergebnisse liefert.

Zunächst möge gezeigt werden, wie man die Tabellen des § 24 zur Auffindung der gefährlichsten Laststellung benutzen kann, wenn mit

\*) Diese Fläche wird Belastungsfläche, sobald man die Höhen mit  $\frac{1}{6} l_r^2$  dividiert.

den Formeln (1) und (2) gerechnet werden soll. Es handle sich um  $M_r$ . Auf  $l_r$  ruhe eine Lastgruppe  $P_1 P_2 \dots P_n$ , deren Mittelkraft  $\mathfrak{P}_n$  von  $(r - 1)$  den Abstand  $e$  hat. Es entsteht

$$(3) \quad M_r = \Sigma P \eta = -u_r' \Sigma_1^n P \left( \frac{x}{l_r} - \frac{x^3}{l_r^3} \right) + 3v_r \Sigma_1^n P \left( \frac{x}{l_r} - \frac{x^2}{l_r^2} \right).$$

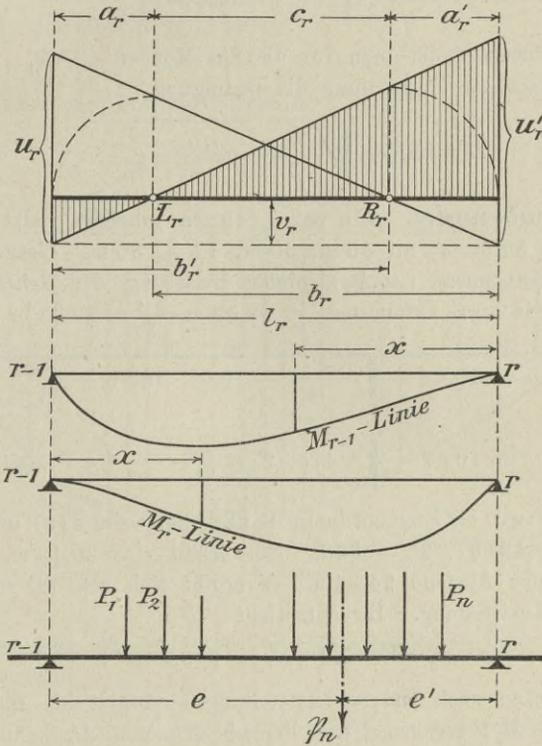


Fig. 340.

Soll  $(-M_r)$  den größten Wert annehmen, so muß

$$(4) \quad -u_r' \Sigma_1^n P \left( 1 - 3 \frac{x^2}{l_r^2} \right) + 3v_r \Sigma_1^n P \left( 1 - 2 \frac{x}{l_r} \right) = 0$$

sein. Dividiert man diese Gleichung mit  $u_r' \mathfrak{P}_n$  und beachtet man, daß nach Seite 117, Gleich. (11) u. (14):  $\frac{u_r'}{v_r} = \frac{a_r}{l_r}$  ist, setzt man ferner

$$\Sigma_1^n P x = \mathfrak{P}_n e, \quad \Sigma_1^n P x^2 = \mathfrak{T}_n + \mathfrak{P}_n e^2,$$

so geht Gleichung (4) über in

$$-1 + \frac{3}{l_r^2} \left( \frac{\mathfrak{I}_n}{\mathfrak{P}_n} + e^2 \right) + 3 \frac{a}{l_r} \left( 1 - 2 \frac{e}{l_r} \right) = 0,$$

und es ergibt sich mit  $l_r - a_r = b_r$ :

$$(5) \quad e = a_r + \sqrt{\frac{l_r^2}{3} - a_r b_r - \frac{\mathfrak{I}_n}{\mathfrak{P}_n}}.$$

Ganz ebenso findet man für die das Moment ( $-M_{r-1}$ ) zu einem Maximum machende Zugstellung die Bedingung

$$(6) \quad e' = a_r' + \sqrt{\frac{l_r'^2}{3} - a_r' b_r' - \frac{\mathfrak{I}_n}{\mathfrak{P}_n}}.$$

**Zahlenbeispiel.** Ein auf 7 Stützen ruhender Balken habe die Spannweiten 30 m, 42 m, 50 m, 50 m, 42 m, 30 m. Gesucht ist das größte Stützenmoment ( $-M_2$ ) infolge Belastung der *dritten* Öffnung. Man findet für diese Öffnung  $a_3' = 10,62$  m,  $b_3' = 39,38$  m, also

$$\begin{aligned} e' &= 10,62 + \sqrt{\frac{50^2}{3} - 10,62 \cdot 39,38 - \frac{\mathfrak{I}_n}{\mathfrak{P}_n}} \\ &= 10,62 + \sqrt{415,12 - \frac{\mathfrak{I}_n}{\mathfrak{P}_n}}. \end{aligned}$$

Wählen wir die Zusanordnung II (Tabelle, Seite 419) und  $n = 20$ , so ist  $\mathfrak{I}_n = 49897$ ,  $\mathfrak{P}_n = 300$ ; man erhält  $e' = 26,40$  m. Nun hat  $\mathfrak{P}_n$  von  $P_n$  den Abstand 24,34 m; es ergibt sich also die in Fig. 341 gezeichnete Laststellung. Ihr entspricht

$$M_2 = -\Sigma P\eta = -983,4 \text{ tm}^*.$$

Es wurden noch andere Laststellungen untersucht, die aber ein kleineres ( $-M_2$ ) ergaben. Aus dem berechneten  $M_r$  kann man den Einfluß der Belastung der dritten Öffnung auf die Momente und Querkräfte der beiden ersten Öffnungen verfolgen.

Wir nehmen die allgemeine Untersuchung wieder auf und ersetzen die  $M_r$ -Linie durch eine Parabel, deren Pfeilhöhe  $z$  wir einmal gleich  $\eta_{max}$  wählen wollen, ein zweites Mal so, daß die  $M_r$ -Fläche und der Parabelabschnitt inhaltsgleich sind.

\*) Dieser Wert läßt sich auch schnell rechnen. Man findet mit  $\Sigma Px = \mathfrak{P}_n e'$  und  $\Sigma Px^2 = \mathfrak{I}_n + \mathfrak{P}_n e'^2$

$$M_r = -2488,98 + 0,0001604 \cdot \Sigma Px^3, \quad \text{wo } \Sigma Px^3 = 1505,56.$$

Bei Ermittlung von  $\Sigma Px^3$  wurde das Maß 2,06 m in Fig. 341 auf 2,1 m abgerundet.

Die Ordinate  $\eta_{max}$  liegt bei

$$(7) \quad x = a_r + \sqrt{\frac{l_r^2}{3} - a_r b_r},$$

was man sofort erkennt, wenn man die Gleichung (5) auf eine Einzelast anwendet. Für diese ist nämlich  $\mathfrak{X}_n = 0$ . Es genügt nun, in (7) die runden Werte  $a_r = 0,2 l_r$ ,  $b_r = 0,8 l_r$  einzusetzen. Dann ergibt sich  $x = 0,62 l$  und, absolut genommen,

$$(8) \quad z = 0,38 u_r' - 0,72 v_r.$$

Der Inhalt der ( $-M_r$ )-Fläche ist

$$(9) \quad \mathfrak{F} = \frac{1}{4} (u_r' - 2 v_r) l_r.$$

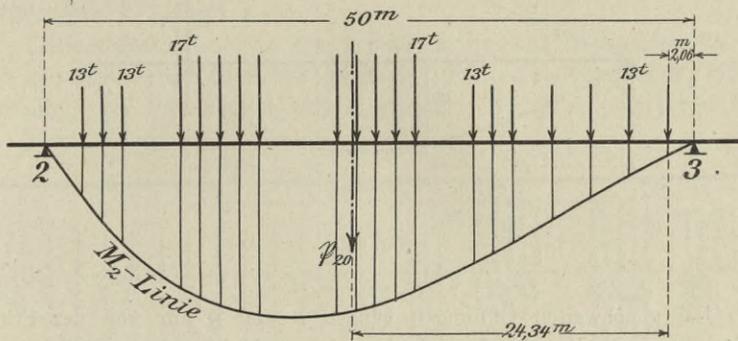


Fig. 341.

Werden also die  $M_r$ -Fläche und der Parabelabschnitt inhaltsgleich gemacht, so folgt

$$(10) \quad z = \frac{3}{8} (u_r' - 2 v_r) = 0,375 u_r' - 0,750 v_r.$$

Ersetzt man in den Gleichungen (8), (9), (10)  $u_r'$  durch  $u_r$ , so gelten sie für die  $M_{r-1}$ -Linie der Öffnung  $l_r$ .

Die Ergebnisse der Formeln (8) und (10) weichen nur wenig voneinander ab. Immerhin ist zu bedenken, daß die Werte  $z$  bei längeren Öffnungen mit großen Zahlen  $P_i$  multipliziert werden.

Wird nur eine einzelne Öffnung belastet, so empfiehlt es sich, mit dem größeren  $z$ , also mit Gleich. (8) zu rechnen.

In unserem Zahlenbeispiele ist für die dritte Öffnung  $u_3 = 20,05\text{m}$ ,  $v_3 = 4,26\text{m}$ . Gleich. (8) liefert  $z = -4,552$ . Zu  $l = 50\text{m}$  gehört  $P_i = 220\text{t}$ ; folglich ist

$$-M_2 = 220 \cdot 4,552 = 1001\text{tm}.$$

Die Einflußlinie lieferte 983 tm; die Abweichung beträgt nur 1,8 v. H.

Einen Ausnahmefall bildet die *erste Öffnung*, Fig. 342. Hier ist  $a_1 = 0$  und  $v_1 = 0$ . Die Ordinate  $\eta_{max}$  liegt im Abstände  $x = \frac{l_1}{\sqrt{3}}$  von Stütze 0. Man erhält

$$(11) \quad z = 0,385 u_1' \text{ bzw. } z = 0,375 u_1', \quad \mathfrak{F} = \frac{1}{4} a_1' l_1.$$

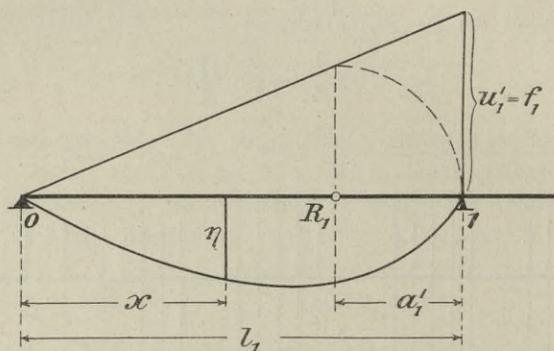


Fig. 342.

Bei gleichweiten Öffnungen hängen  $z$  und  $\mathfrak{F}$  nur von der Stützweite  $l$  und der Anzahl der Öffnungen ab. Für 5 Öffnungen ist z. B. (s. Seite 203):

$$\begin{aligned} x_2 &= 4 & x_3 &= \frac{15}{4} & x_4 &= \frac{56}{15} & x_5 &= \frac{209}{56} \text{ *)} \\ a_2 &= \frac{1}{5} l = a_4', & a_3 &= \frac{4}{19} l = a_3', & a_4 &= \frac{15}{71} l = a_2', & a_5 &= \frac{56}{265} l = a_1' \\ b_2 &= \frac{4}{5} l = b_4', & b_3 &= \frac{15}{19} l = b_3', & b_4 &= \frac{56}{71} l = b_2', & b_5 &= \frac{209}{265} l = b_1' \\ c_1 &= \frac{209}{265} l, & c_2 &= \frac{209}{5 \cdot 71} l, & c_3 &= \frac{11}{19} l, \\ u_1' &= \frac{56}{209} l, & u_2 &= \frac{71}{209} l, & u_2' &= \frac{75}{209} l, & u_3 &= u_3' = \frac{4}{11} l = \frac{76}{209} l \\ v_2 &= \frac{15}{209} l, & v_3 &= \frac{16}{209} l, \end{aligned}$$

\*) Auf Seite 203 steht versehentlich  $x_5 = \frac{224}{56}$ .

mithin

$$\begin{aligned}
 M_1\text{-Linie} & \left\{ \begin{array}{l} \text{erste Öffnung} \quad \frac{z}{l} = 0,10316 (0,10048), \quad \mathfrak{F} = 0,06699 l^2 \\ \text{zweite Öffnung} \quad \frac{z}{l} = 0,07742 (0,07356), \quad \mathfrak{F} = 0,04904 l^2 \end{array} \right. \\
 M_2\text{-Linie} & \left\{ \begin{array}{l} \text{erste Öffnung} \quad \frac{z}{l} = 0,08469 (0,08074), \quad \mathfrak{F} = 0,05383 l^2 \\ \text{zweite Öffnung} \quad \frac{z}{l} = 0,08306 (0,07895), \quad \mathfrak{F} = 0,05263 l^2. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Die eingeklammerten Zahlen gelten für die den  $M$ -Flächen inhaltsgleichen Parabelabschnitte.

**128. Stützenmoment  $M_r$  infolge voller Belastung der beiden Öffnungen  $l_{r-1}$  und  $l_r$ .**

*Erstes Beispiel.* Für den bereits in Nr. 127 behandelten Balken mit den Stützweiten 30 m, 42 m, 50 m, 50 m, 42 m, 30 m sei  $M_2$  infolge Belastung der Öffnungen  $l_2$  und  $l_3$  gesucht. Nach der preußischen Vor-

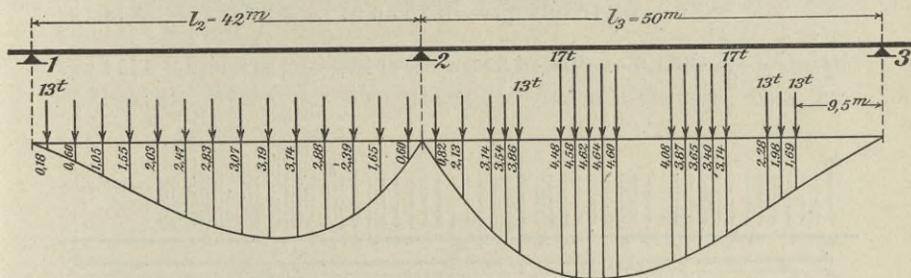


Fig. 343.

schrift sind Güterwagen nur an der einen Seite der beiden Lokomotiven anzunehmen. Die Güterwagen werden über die Öffnung  $l_2 = 42$  m gestellt, die Lokomotiven über die Öffnung  $l_3 = 50$  m. Man erkennt, ohne erst zu rechnen, daß der Schwerpunkt der beiden Lokomotiven nicht mehr so nahe bei der Ordinate  $\eta_{max}$  liegt, wie bei der in Fig. 341 angenommenen Laststellung, wo die Güterwagen rechts von den Lokomotiven stehen. In diesem und ähnlichen Fällen genügt es, den kleineren Wert  $z$  zu nehmen. Wir setzen also nach (10) für die dritte Öffnung

$$z = 0,375 \cdot 20,05 - 0,75 \cdot 4,26 = 4,324 \text{ und } P_i = 220 \text{ t.}$$

An Stelle der Güterwagen mit 13 t Achslast und 3 m Radstand führen wir die gleichförmige Belastung  $\frac{13}{3}$  t/m ein. Da nun  $u_2' = 14,39$  m,  $v_2 = 3,25$  ist, so hat die  $M_2$ -Fläche der Öffnung  $l_2$  den Inhalt

$$\bar{\delta} = \frac{1}{4} \cdot (14,39 - 2 \cdot 3,25) 42 = 82,85,$$

und es ergibt sich daher

$$M_2 = -\frac{13}{3} \cdot 82,85 - 220 \cdot 4,324 = -359 - 951 = -1310 \text{ tm.}$$

Die Benutzung der mit Hilfe der Gleichungen

$$\text{Öffnung } l_2 \quad \eta = -14,39 \omega_D + 3 \cdot 3,25 \omega_R,$$

$$\text{Öffnung } l_3 \quad \eta = -20,05 \omega_D + 3 \cdot 4,26 \omega_R,$$

aufgetragenen Einflußlinien, Fig. 343, lieferte zufällig genau denselben Wert  $359 + 951 = 1310 \text{ tm.}$  Die erste Tenderachse steht im Abstände 9,5 m von der Stütze 3.

*Zweites Beispiel.* Fünf Öffnungen von 60 m, 80 m, 80 m, 80 m, 60 m Weite. Gesucht  $M_2$  infolge Belastung der Öffnungen  $l_2$  und  $l_3$ .

$$u_2' = 29,86 \text{ m, } v_2 = 6,64 \text{ m, } \bar{\delta} = 331,6,$$

$$u_3 = 29,53 \text{ m, } v_3 = 6,27 \text{ m,}$$

$$z = 0,375 \cdot 29,53 - 0,75 \cdot 6,27 = 6,371, \quad P_i = 301 \text{ t,}$$

$$M_2 = -\frac{13}{3} \cdot 331,6 - 301 \cdot 6,371 = -1436 - 1918 = -3354 \text{ tm.}$$

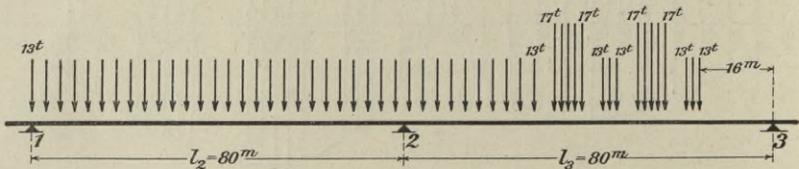


Fig. 344.

Die Einflußlinie:

$$\text{Öffnung } l_2 \quad \eta = -29,86 \omega_D + 3 \cdot 6,64 \omega_R,$$

$$\text{Öffnung } l_3 \quad \eta = -29,53 \omega_D + 3 \cdot 6,27 \omega_R,$$

liefert bei der Zugstellung in Fig. 344

$$M_2 = -1439 - 1893 = -3332 \text{ tm.}$$

Der Unterschied beträgt 0,7 v. H.

*Drittes Beispiel.* Fünf gleiche Öffnungen von  $l = 18 \text{ m}$  Weite. Gesucht  $M_2$  infolge Belastung der Öffnungen  $l_2$  und  $l_3$ . Bei so geringen Stützweiten liegen ähnliche Verhältnisse vor, wie bei der Belastung einer einzelnen Öffnung. Wir nehmen den größeren Wert  $z$  und finden nach der am Schluß von Nr. 127 durchgeführten Berechnung

für die zweite Öffnung  $z = 0,08469 \quad l = 1,524$

für die dritte Öffnung  $z = 0,08306 \quad l = 1,495$

$$P_i = 91,8 \qquad \text{Summe} \quad \underline{3,019}$$

$$M_2 = - 91,8 \cdot 3,019 = - 277 \text{ tm.}$$

Die Einflußlinie\*):

Öffnung  $l_2$   $\eta = - 6,46 \omega_D + 3 \cdot 1,29 \omega_R,$

Öffnung  $l_3$   $\eta = - 6,55 \omega_D + 3 \cdot 1,38 \omega_R$

liefert bei der Zugstellung in Fig. 345  $M_2 = - 277 \text{ tm.}$

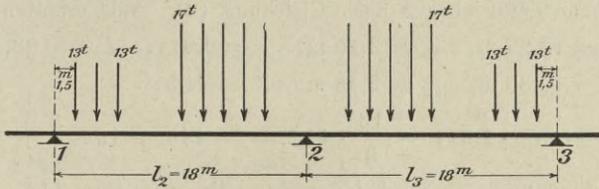


Fig. 345.

*Viertes Beispiel.* Fünf gleiche Öffnungen von  $l = 24 \text{ m}$  Weite. Gesucht  $M_2$  infolge Belastung von  $l_2$  und  $l_3$ . Zu  $l = 24 \text{ m}$  gehört  $P_i = 122 \text{ t}$ , hervorgerufen durch die ersten 10 Achsen der Zuganordnung IV (Seite 422). Wenn wir über jeder der beiden Öffnungen diese un-

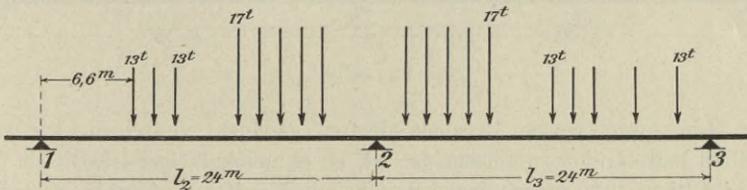


Fig. 346.

günstige Zugstellung annehmen, dafür aber den kleineren Wert  $z$  einführen, so gehen wir immer noch sehr sicher. Wir setzen also

$$z = \frac{3}{8} (u - 2v)$$

Öffnung  $l_2$   $u_2' = 8,61 \text{ m}, \quad v_2 = 1,72 \text{ m}, \quad z = 1,939$

Öffnung  $l_3$   $u_3 = 8,73 \text{ m}, \quad v_3 = 1,84 \text{ m}, \quad z = 1,894$

$$P_i = 122 \qquad \text{Summe} \quad \underline{3,833}$$

$$M_2 = - 122 \cdot 3,833 = - 468 \text{ tm.}$$

\*) Nach Seite 454 ist  $u_2' = \frac{75 \cdot 18}{209} = 6,46 \text{ m}, \quad v_2 = \frac{15 \cdot 18}{209} = 1,29 \text{ m},$

$u_3 = \frac{76 \cdot 18}{209} = 6,55, \quad v_3 = \frac{16 \cdot 18}{209} = 1,38 \text{ m.}$

Die Einflußlinie liefert bei der ungünstigsten Zugstellung (Fig. 346) nur  $M_2 = -426$  tm. Der Näherungswert ist um 9 v. H. größer als der genauere.

*Fünftes Beispiel.* Fünf Öffnungen von 21 m, 33 m, 30 m, 24 m, 21 m Weite. Gesucht  $M_2$  infolge Belastung von  $l_2$  und  $l_3$ . Die Länge  $l_2$  genügt nicht zur Unterbringung der beiden Lokomotiven; der eine Tender liegt bei der ungünstigsten Laststellung über der Öffnung  $l_3$ .

Trotzdem nehmen wir die Öffnung  $l_3$  gleichmäßig mit  $\frac{13}{3}$  t/m belastet an, berechnen dafür aber  $z$  nach Gleichung (8). Wir erhalten:

$$u_2' = 13,27 \text{ m}, \quad v_2 = 3,10 \text{ m}, \quad z = 2,811, \quad P_i = 158,5 \text{ t},$$

$$u_3 = 10,89 \text{ m}, \quad v_3 = 2,48 \text{ m}, \quad \delta = 44,5,$$

$$M_2 = -158,5 \cdot 2,811 - \frac{13}{3} \cdot 44,5 = -446 - 193 = -639 \text{ tm.}$$

Die Einflußlinie liefert bei der Zugstellung in Fig. 347

$$M_2 = -424 - 210 = -634 \text{ tm.}$$

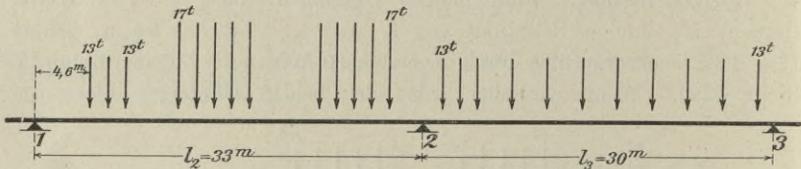


Fig. 347.

Die vorgetragenen Beispiele dürften genügen, zu zeigen, wie von Fall zu Fall darüber zu entscheiden ist, ob es zweckmäßiger ist, Gleich. (8) oder Gleich. (9) anzuwenden. Besteht ein Zweifel, so wähle man den größeren Wert (8). Wir bemerken noch, daß zur Aufstellung beider Lokomotiven über einer Öffnung etwa  $l = 40$  m erforderlich sind; die kleinere der beiden Öffnungen ist dann nur mit Güterwagen belastet.

**129. Momente  $\max M$  für die Querschnitte zwischen den beiden Festpunkten  $L$  und  $R$  einer Öffnung, Fig. 348.** Das Biegemoment  $M_m$  für einen Querschnitt  $m$  der Öffnung  $l_r$  ist

$$(12) \quad M_m = M_{0m} + \frac{M_{r-1}}{l_r} x_m' + \frac{M_r}{l_r} x_m,$$

wo  $M_{0m}$  das Moment für den Querschnitt  $m$  eines einfachen Balkens  $l_r$  bedeutet. Liegt  $m$  zwischen den Festpunkten  $L_r$  und  $R_r$ , so erzeugen alle über der Öffnung  $l_r$  aufgebrauchten Lasten ein positives Moment  $M_m$ . Den von den Stützenmomenten  $M_{r-1}$  und  $M_r$  abhängigen Teil von  $M_m$  berechnen wir unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Belastung  $p$ ,

die wir so groß annehmen, daß sie dasselbe Moment  $M_{0m}$  hervorbringt, wie der Eisenbahzug. Wir wählen also

$$(13) \quad p = \frac{2 M_{0m}}{x_m x'_m}$$

und schreiben

$$(14) \quad M_m = M_{0m} \left( 1 + \frac{2}{x_m x'_m} \mathfrak{F}_m \right),$$

wo  $\mathfrak{F}_m$  den Inhalt des von den Stützenmomenten abhängigen Teiles der  $M_m$ -Fläche bezeichnet. Mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) finden wir

$$\mathfrak{F}_m = \frac{x'_m}{l_r} \int_0^{l_r} (-u_r \omega_D + 3 v_r \omega_R) dx + \frac{x_m}{l_r} \int_0^{l_r} (-u'_r \omega_D + 3 v_r \omega_R) dx$$

und, da  $\int_0^l \omega_D dx = \frac{1}{4} l$ ,  $\int_0^l \omega_R dx = \frac{1}{6} l$  ist,

$$\mathfrak{F}_m = -\frac{1}{4} (u_r x'_m + u'_r x_m) + \frac{1}{2} v_r l.$$

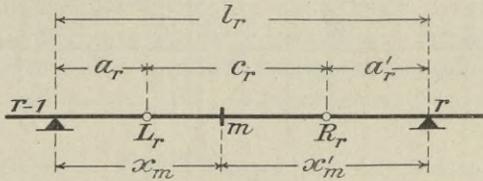


Fig. 348.

$\mathfrak{F}_m$  ist stets negativ; je größer es ausfällt, desto kleiner ist  $M_m$ . Vergleichende Rechnungen haben nun gelehrt, daß es sich empfiehlt, ein um etwa 5 v. H. kleineres  $\mathfrak{F}_m$  anzunehmen, d. i.:

$$(15) \quad \mathfrak{F}_m = \left( -\frac{1}{4} (u_r x'_m + u'_r x_m) + \frac{1}{2} v_r l \right) 0,95.$$

Setzen wir dann ferner, nach Seite 441,

$$\max M_{0m} = \max M_0 \gamma_m,$$

so erhalten wir die Formel

$$(16) \quad \max M_m = \max M_0 \gamma_m \gamma'_m,$$

wo

$$(17) \quad \gamma'_m = 1 - 0,475 \left( \frac{u_r}{x_m} + \frac{u'_r}{x'_m} \right) + \frac{0,95 v_r l}{x_m x'_m}.$$

Für die erste Öffnung ist  $u = 0$  und  $v = 0$ , also

$$(17a) \quad \gamma' = 1 - 0,475 \frac{u'_r}{x'}$$

Die Werte  $_{max}M_0$  stehen in Tabelle A, Seite 442, die Werte  $\gamma$  in Tabelle B, Seite 443. Es läßt sich also  $_{max}M_0$  schnell angeben.

In den folgenden Zahlenbeispielen haben wir die Stützweite  $l_r$  in 10 Teile geteilt. Die Teilpunkte 1, 2, 8, 9 liegen außerhalb der

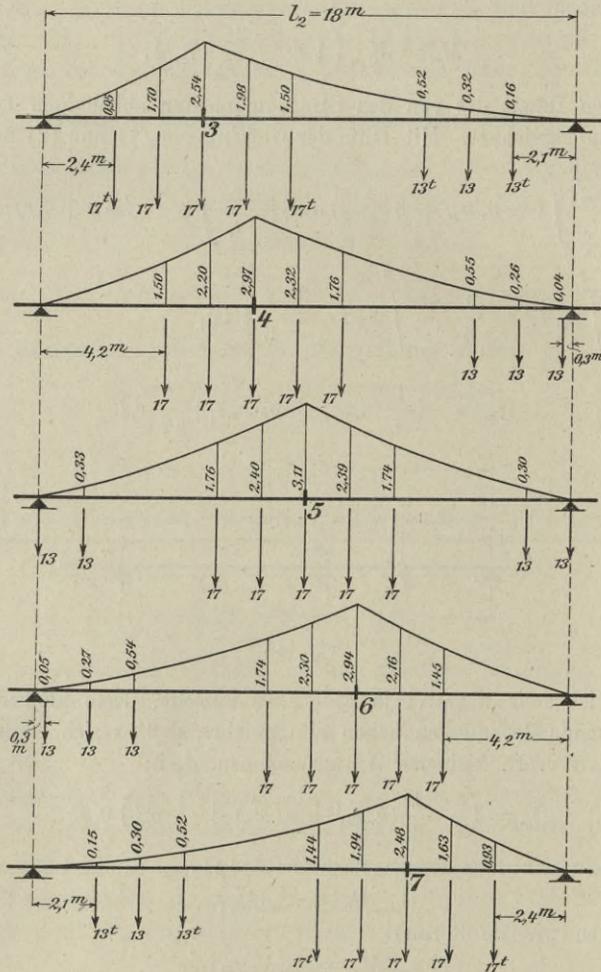


Fig. 349.

Strecke  $L_r R_r$ . Für die den Teilpunkten 3, 4, 5, 6, 7 entsprechenden Querschnitte wurden die Momente mittels der Formel (17) berechnet und mit denen verglichen, die sich mit Hilfe der Einflußlinien ergaben.

Für die Querschnitte 3 4 5 6 7  
 ist  $\gamma =$  0,899 0,992 1,000 0,992 0,899.

*Erstes Beispiel.* Fünf gleichlange Öffnungen von 18 m Spannweite. Gesucht werden die Momente  $M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$  der zweiten Öffnung. Es ist nach Seite 454

$$u_2 = \frac{71}{209}l, \quad u_2' = \frac{75}{209}l, \quad v_2 = \frac{15}{209}l,$$

$$x_m = m \cdot 1,8, \quad x_m' = m' \cdot 1,8, \quad l = 10 \cdot 1,8, \quad m' = 10 - m,$$

$$(18) \quad \gamma_m' = 1 - \frac{4,75}{lm m'} [10(u_r - 2v_r) + m(u_r' - u_r)]$$

$$\max M_0 = 327 \text{ tm.}$$

$m$	$\max M_m$ mittels Einflußlinien	$\gamma'$	$\gamma\gamma'$	$\max M_m$ $= \gamma\gamma' \max M_0$
3	160 tm	0,543	0,488	160 tm
4	194	0,596	0,591	193
5	201	0,609	0,609	199
6	191	0,589	0,584	191
7	156	0,526	0,473	155

Bei Ermittlung der Werte der ersten Spalte wurde die positive Beitragstrecke  $l_2$  möglichst ungünstig belastet und der Einfluß der hierbei auf den benachbarten negativen Beitragstrecken stehenden Teile der Fahrzeuge vernachlässigt. Die angenommenen Laststellungen zeigt Figur 349.

*Zweites Beispiel.* Fünf Öffnungen von den Weiten 21 m, 33 m, 30 m, 24 m, 21 m; gesucht  $M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$  für die dritte Öffnung.

$$u_3 = 10,89 \text{ m}, \quad u_3' = 12,07 \text{ m}, \quad v_3 = 2,48 \text{ m},$$

$$x_m = m \cdot 3,0, \quad x_m' = m' \cdot 3,0, \quad l = 10 \cdot 3,0, \quad m' = 10 - m,$$

$$\max M_0 = 832,3 \text{ tm.}$$

$m$	$\max M_m$ mittels Einflußlinien	$\gamma'$ nach Gleich. (18)	$\gamma\gamma'$	$\max M_m$ $= \gamma\gamma' \max M_0$	Unterschied
3	369 tm	0,526	0,473	394 tm	6,3 v. H.
4	459	0,578	0,573	477	3,8 „ „
5	475	0,587	0,587	489	2,9 „ „
6	447	0,562	0,558	464	3,7 „ „
7	342	0,491	0,441	367	6,8 „ „

*Drittes Beispiel.* Sechs Öffnungen von den Weiten 30 m, 42 m, 50 m, 50 m, 42 m, 30 m; gesucht  $M_3$  bis  $M_7$  für die dritte Öffnung.

$$u_3 = 20,05 \text{ m}, \quad u_3' = 18,89 \text{ m}, \quad v_3 = 4,26 \text{ m}, \quad l = 10 \lambda = 50,$$

$$\max M_0 = 2123 \text{ tm.}$$

$m$	$\max M_m$ mittels Einflußlinien	$\gamma'$ nach Gleich. (18)	$\gamma\gamma'$	$\max M_m$ $= \gamma\gamma' \max M_0$	Unterschied
3	873 tm	0,494	0,444	943 tm	7,4 v. H.
4	1126	0,562	0,558	1185	5,0 „ „
5	1215	0,584	0,584	1240	2,0 „ „
6	1142	0,571	0,566	1202	5,0 „ „
7	905	0,515	0,463	983	7,9 „ „

*Viertes Beispiel.* Fünf Öffnungen von den Weiten 60 m, 80 m, 80 m, 80 m, 60 m; gesucht  $M_3$  bis  $M_7$  für die zweite Öffnung.

$$u_2 = 31,40 \text{ m}, \quad u_2' = 29,86 \text{ m}, \quad v_2 = 6,64 \text{ m}, \quad l = 10 \lambda = 80 \text{ m},$$

$$\max M_0 = 4674 \text{ tm}.$$

$m$	$\max M_m$ mittels Einflußlinien	$\gamma'$ nach Gleich. (18)	$\gamma\gamma'$	$\max M_m$ $= \gamma\gamma' \max M_0$	Unterschied
3	2008 tm	0,501	0,450	2103 tm	4,5 v. H.
4	2573	0,567	0,562	2627	2,1 „ „
5	2744	0,588	0,588	2748	
6	2609	0,575	0,570	2664	2,1 „ „
7	2075	0,518	0,466	2178	4,7 „ „

Ist die Anzahl der Öffnungen ungerade und der Balken symmetrisch, so ist für die mittelste Öffnung  $u = u'$  und

$$\gamma' = 1 - 0,475 \frac{ul}{xx'} + 0,95 \frac{vl}{xx'},$$

$$(19) \quad \gamma' = 1 - \frac{0,475(u - 2v)l}{xx'}.$$

Diese Formel liefert selbst dann noch brauchbare Werte, wenn zwar  $u$  und  $u'$  verschieden groß sind, aber doch so wenig voneinander abweichen, daß sie durch einen Mittelwert ersetzt werden dürfen. Nimmt man rund  $a = a' = 0,21 l$  an, so erhält man  $c = l - 2a = 0,58 l$

$$u = u' = \frac{a}{c} l = 0,362 l, \quad v = \frac{aa}{c} = 0,076 l$$

und

$$(20) \quad \gamma' = 1 - 0,10 \frac{l^2}{xx'}.$$

Hiernach gehört zu

$$\begin{array}{rcccccc} \frac{x}{l} = & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ \gamma' = & \frac{11}{21} & \frac{14}{24} & \frac{15}{25} & \frac{14}{24} & \frac{11}{21} \\ \gamma\gamma' = & 0,47 & 0,58 & 0,60 & 0,58 & 0,47. \end{array}$$

Für unsere vier Beispiele liefern diese Ziffern die folgenden Momente:

m	$l = 18^m$	$l = 30^m$	$l = 50^m$	$l = 80^m$
3 u. 7	154 tm	391 tm	998 tm	2197 tm
4 „ 6	190	483	1231	2711
5	196	499	1274	2804

130. Ein zweites Verfahren zur Berechnung von  $\max M_m$ .

Wir gehen wieder von der Gleichung

$$M_m = M_{0m} + M_{r-1} \frac{x_m'}{l} + M_r \frac{x_m}{l}$$

aus und ersetzen den von den Stützenmomenten abhängigen Teil der Einflußfläche durch einen Parabelabschnitt gleichen Inhalts. Der Pfeil dieser Parabel ist

$$(21) \quad z_m = \frac{3}{8} \left( u \frac{x_m'}{l} + u' \frac{x_m}{l} \right) - \frac{3}{4} v.$$

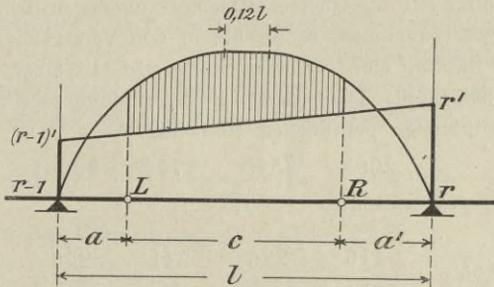


Fig. 350.

Es ist dann angenähert:

$$(22) \quad \max M_m = \max M_0 \gamma_m - P_i z_m,$$

wobei sich  $P_i$  auf die Stützweite  $l$  bezieht.

Handelt es sich z. B. um die Momente  $M_3, M_4 \dots M_7$  der dritten Öffnung eines Balkens mit fünf Öffnungen von 21 m, 33 m, 30 m, 24 m, 21 m Weite, so ist

$u = 10,89$  m,  $u' = 12,07$  m,  $v = 2,48$  m,  $x_m = 3,0 \cdot m$ ,  $x_m' = 3,0 \cdot m'$  und man erhält, wegen  $P_i = 146$  t,

$$\begin{aligned} P_i z_m &= \frac{3}{8} 146 \left( 10,89 \frac{m'}{10} + 12,07 \frac{m}{10} \right) - \frac{3}{4} 146 \cdot 2,48 \\ &= 59,623 m' + 66,083 m - 271,56 \\ \max M_m &= 832,3 \gamma_m - P_i z_m. \end{aligned}$$

Das gibt für

$m =$	3	4	5	6	7
${}_{max}M_m =$	404	475	475	462	378 tm*).

Die Linie der größten Momente  $M_{0_m}$  wird nach Bd. I, Anhang, Seite 550, genau genug durch zwei Parabelstücke und eine gerade Linie, deren Länge gleich 0,12 l ist, dargestellt. Zieht man von den Momenten  ${}_{max}M_{0_m}$  die Ordinaten einer Geraden ab, Fig. 351, die auf den Stützensenkrechten die Strecken

$$\overline{(r-1) - (r-1)'} = P_i \frac{3}{8} (u - 2v) \text{ und}$$

$$\overline{r - r'} = P_i \frac{3}{8} (u' - 2v)$$

abschneidet, so erhält man die der Gleichung (22) entsprechenden Näherungswerte  ${}_{max}M_m$ .

*Anmerkung.* Um den Unterschied zwischen den Ergebnissen einer genaueren und einer angenäherten Formel beurteilen zu können, muß man seinen Einfluß auf die Querschnittsabmessungen prüfen. Zu diesem Zwecke wollen wir annehmen, es sei die in den vorstehenden Beispielen u. a. behandelte Öffnung von  $l = 80$  m Stützweite mit einem 12 m hohen Parallelträger überspannt. Die zulässige Beanspruchung sei  $\sigma = 0,95$  t/cm<sup>2</sup>. Die mittels Einflußlinien gefundenen Momente

2008	2573	2744	2609	2075 tm
------	------	------	------	---------

verlangen die Gurtquerschnitte

$$F = \frac{M}{12 \cdot 0,95} = \begin{array}{ccccc} 176 & 226 & 241 & 229 & 182 \text{ cm}^2. \end{array}$$

Die am Schluß von Nr. 129 mittels der bequemen Gleich. (20) berechneten, von den genaueren Momenten am meisten abweichenden Momente

2197	2711	2804	2711	2197 tm
------	------	------	------	---------

erfordern

$$F = \begin{array}{ccccc} 192 & 238 & 246 & 238 & 192 \text{ cm}^2. \end{array}$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Zahlenreihen, deren größte Abweichung 16 cm<sup>2</sup> beträgt, ist nicht sehr groß; er verliert erheblich an Gewicht, wenn beachtet wird, daß die vorstehenden Zahlen nur den Einfluß von  ${}_{max}M_p$  angeben. Es tritt noch hinzu der Einfluß der ständigen Belastung sowie die von vielen Ingenieuren ganz außer acht gelassene, keineswegs aber vernachlässigbare Wirkung einer ungleichmäßigen Erwärmung und einer, wenn auch noch so geringen Änderung der Stützlage. Bei der Untersuchung der letztgenannten Einflüsse ist man auf

\*) Man vergleiche hiermit die in Nr. 129 gefundenen Ergebnisse.

Schätzungen angewiesen. Wer sich dann noch vor Augen hält, daß die wirklichen Achslasten und Radstände von den in Rechnung gestellten oft erheblich abweichen, wer außerdem an die verschiedenen, bei der Ermittlung der Einflußlinien üblichen Annahmen denkt, als da sind:

*beim Blechbalken:* Annahme eines unveränderlichen Querschnitts, Vernachlässigung der Schubkräfte,

*beim Fachwerk:* Vernachlässigung der Längenänderungen der Wandglieder, Annahme eines unveränderlichen Gurtquerschnitts, Voraussetzung reibungsloser Gelenke in allen Knotenpunkten,

*bei beiden:* Vernachlässigung des Zusammenhanges der Hauptträger mit der meistens in hohem Grade statisch unbestimmten Fahrbahn,

dem dürfte die Entscheidung nicht schwer fallen, was den Vorzug verdient — die trotz aller erzielten Vereinfachungen immer noch zeitraubende Berechnung, Auftragung und Verwertung der Einflußlinien oder die sehr viel schneller zum Ziele führende Benutzung einfacher Näherungsformeln und Tabellen.

**131. Druck  $C_r$  auf die Mittelstütze  $r$  infolge Belastung der Öffnungen  $l_r$  und  $l_{r+1}$ .** Wir ersetzen die Einflußfläche für  $C_r$  durch einen Parabelabschnitt gleichen Inhalts. Die Gleichung der  $C_r$ -Linie lautet innerhalb der Öffnung  $l_r$  nach Seite 129\*):

$$\eta = \frac{x}{l_r} + \left( \frac{a_r + a'_r}{c_r} + \frac{u'_r}{b'_{r+1}} \right) \omega_D - 3 \left( \frac{a_r}{c_r} + \frac{v_r}{b'_{r+1}} \right) \omega_R$$

und innerhalb der Öffnung  $l_{r+1}$ :

$$\eta = \frac{x}{l_{r+1}} + \left( \frac{a_{r+1} + a'_{r+1}}{c_{r+1}} + \frac{u_{r+1}}{b_r} \right) \omega_D - 3 \left( \frac{a'_{r+1}}{c_{r+1}} + \frac{v_{r+1}}{b_r} \right) \omega_R.$$

In der Öffnung  $l_r$  zählen hierbei die  $x$  von  $r-1$  aus, in der Öffnung  $l_{r+1}$  von  $r+1$  aus.

Der Inhalt der Einflußfläche ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{l_r + l_{r+1}}{2} + \frac{l_r}{4} \left( \frac{a_r + a'_r}{c_r} + \frac{u'_r}{b'_{r+1}} \right) - \frac{l_r}{2} \left( \frac{a_r}{c_r} + \frac{v_r}{b'_{r+1}} \right) \\ &\quad + \frac{l_{r+1}}{4} \left( \frac{a_{r+1} + a'_{r+1}}{c_{r+1}} + \frac{u_{r+1}}{b_r} \right) - \frac{l_{r+1}}{2} \left( \frac{a'_{r+1}}{c_{r+1}} + \frac{v_{r+1}}{b_r} \right). \end{aligned}$$

Aus der Bedingung

$$\frac{2}{3} z (l_r + l_{r+1}) = \mathfrak{F}$$

\*) Auf Seite 129 steht in Gleich. (25) u. (26) versehentlich  $d'_r$  und  $d_{r+1}$  statt  $u'_r$  und  $u_{r+1}$ , in Gleich. (26) außerdem noch  $l_r$  statt  $l_{r+1}$ .

folgt die Pfeilhöhe der die  $C_r$ -Linie ersetzenden Parabel

$$(23) \quad z = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \frac{h_r' + h_{r+1}''}{l_r + l_{r+1}}$$

wo

$$(24) \quad \begin{cases} h_r' = u_r' - u_r + (u_r' - 2v_r) \frac{l_r}{b_{r+1}'} \\ h_{r+1}'' = u_{r+1} - u_{r+1}' + (u_{r+1} - 2v_{r+1}) \frac{l_{r+1}}{b_r}. \end{cases}$$

Im Falle gleicher Spannweiten  $l$  sind die Höhen  $z$  nur von der Anzahl der Öffnungen abhängig. Bei 5 gleichen Öffnungen ergibt sich z. B. mit den am Schluß von Nr. 127 ermittelten Werten  $u$ ,  $v$ ,  $b$  für den Stützendruck  $C_1^*$ ):

$$h_1' = u_1' + \frac{u_1' l}{b_2'} = u_1' \frac{l + b_2'}{b_2'} = \frac{56}{209} \cdot \frac{71 + 56}{56} l = \frac{127}{209} l$$

$$h_2'' = 2(u_2 - v_2) - u_2' = \frac{37}{209} l$$

$$z = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{164}{209} = 0,897$$

und für den Stützendruck  $C_2$ :

$$h_2' = u_2' - u_2 + (u_2' - 2v_2) \frac{l}{b_3'} = \frac{4}{209} l + \frac{45}{209} \cdot \frac{19}{15} l = \frac{61}{209} l$$

$$h_3'' = (u_3 - 2v_3) \frac{l}{b_2} = \frac{44}{209} \cdot \frac{5}{4} l = \frac{55}{209} l$$

$$z = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{116}{209} = 0,854.$$

Wir geben noch zwei Zahlenbeispiele für ungleiche Öffnungen.

*Erstes Beispiel.* Fünf Öffnungen von 21 m, 33 m, 30 m, 24 m, 21 m Weite; gesucht  $C_2$ .

$$u_2 = 14,13 \text{ m}, \quad u_2' = 13,27 \text{ m}, \quad v_2 = 3,10 \text{ m}, \quad b_2 = 25,28 \text{ m},$$

$$u_3 = 10,89 \text{ m}, \quad u_3' = 12,07 \text{ m}, \quad v_3 = 2,48 \text{ m}, \quad b_3' = 23,16 \text{ m}.$$

$$h_2' = 13,27 - 14,13 + (13,27 - 2 \cdot 3,10) \frac{33}{23,16} = 9,2138 \text{ m},$$

$$h_3'' = 10,89 - 12,07 + (10,89 - 2 \cdot 2,48) \frac{30}{25,28} = 5,8572 \text{ m}.$$

$$z = 0,840, \quad P_i = 256,5 \text{ t}, \quad C_2 = 0,84 \cdot 256,5 = 215 \text{ t}.$$

Die in Fig. 351 dargestellte Einflußlinie liefert  $C = 223 \text{ t}$ .

\*) Man beachte, daß  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = l$ ,  $u_1 = 0$ ,  $v_1 = 0$  und  $u_3' = u_3$  ist.



das in Abzug zu bringende Glied. Eine große Zahl vergleichender Rechnungen hat gezeigt, daß es genügt, die Ziffer  $\frac{3}{8}$  durch  $\frac{1}{3}$  zu ersetzen, womit dann entsteht

$$(25) \quad A = A_0 - \frac{a_1'}{3c_1} P_i.$$

Um die Prüfung dieses Ausdruckes zu erleichtern, führen wir die genauere Berechnung von  $A$  etwas weiter aus.

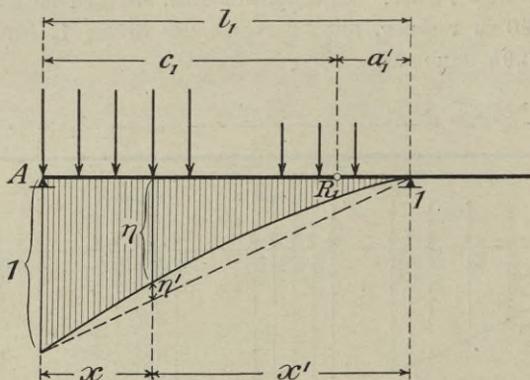


Fig. 352.

Auf  $l_1$  möge die Lastgruppe  $P_1 P_2 \dots P_n$  stehen. Sie erzeugt

$$A = A_0 - \frac{a_1'}{c_1} \sum P \omega_D = A_0 - \frac{a_1'}{c_1} \sum_1^n P \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right),$$

wo

$$\sum_1^n P \frac{x}{l} = \mathfrak{P}_n - A_0.$$

Mit den Bezeichnungen

$$(26) \quad \mathfrak{D}_n = \sum_1^n P x^3$$

und

$$(27) \quad A' = \mathfrak{P}_n - A_0 - \frac{\mathfrak{D}_n}{l^3}$$

erhalten wir

$$(28) \quad A = A_0 - \frac{a_1'}{c_1} A'.$$

Die auf die *erste* Last bezogenen Momente dritter Ordnung  $\mathfrak{D}_n$  haben wir für den Lastzug der preußischen Verordnung berechnet und in den beiden folgenden Tabellen zusammengestellt. Die erste Tabelle ist für Stützweiten bis zu etwa 35 m maßgebend; sie entspricht der Tabelle IV auf Seite 422.

1.

## Lokomotive, Lokomotive, Tender.

$n$	$\mathbb{P}_n$	$\mathcal{D}_n$	$n$	$\mathbb{P}_n$	$\mathcal{D}_n$
1	17	0	11	183	457 903,125
2	34	57,375	12	196	637 615,125
3	51	516,375	13	209	853 173,000
4	68	2 065,500	14	222	1 154 111,625
5	85	5 737,500	15	235	1 560 438,000
6	102	35 113,500	16	248	2 094 265,125
7	119	76 939,875	17	261	2 779 812,000
8	136	134 314,875	18	274	3 643 403,625
9	153	210 681,000	19	287	4 713 471,000
10	170	309 825,000	20	300	6 020 551,125

2.

## Lokomotive, Tender, Lokomotive, Tender.

$n$	$\mathbb{P}_n$	$\mathcal{D}_n$	$n$	$\mathbb{P}_n$	$\mathcal{D}_n$
1	17	0	26	378	17 711 703,000
2	34	57,375	27	391	21 200 072,625
3	51	516,375	28	404	25 198 182,000
4	68	2 065,500	29	417	29 753 416,125
5	85	5 737,500	30	430	34 915 266,000
6	98	20 786,625	31	443	40 735 328,625
7	111	43 250,625	32	456	47 267 307,000
8	124	75 235,500	33	469	54 567 010,125
9	141	174 379,500	34	482	62 692 353,000
10	158	300 432,375	35	495	71 703 356,625
11	175	457 869,375	36	508	81 662 148,000
12	192	651 510,000	37	521	92 632 960,125
13	209	886 518,000	38	534	104 682 132,000
14	222	1 187 456,625	39	547	117 878 108,625
15	235	1 538 456,625	40	560	132 291 441,000
16	248	1 944 783,000	41	573	147 994 786,125
17	261	2 478 610,125	42	586	165 062 907,000
18	274	3 164 157,000	43	599	183 572 672,625
19	287	4 027 748,625	44	612	203 603 058,000
20	300	5 097 816,000	45	625	225 235 144,125
21	313	6 404 896,125	46	638	248 552 118,000
22	326	7 981 632,000	47	651	273 639 272,625
23	339	9 862 772,625	48	664	300 584 007,000
24	352	12 085 173,000	49	677	329 475 826,125
25	365	14 687 794,125	50	690	360 406 341,000

Für einen Balken mit 5 gleichlangen Öffnungen ist z. B.

$$a_1' = \frac{56}{265} l, \quad c_1 = \frac{209}{265} l, \quad \text{also } A = A_0 - \frac{56}{209} A'.$$

Ist nun  $l = 30$  m, so findet man mittels der Tabelle IV auf Seite 422

$$A_0 = \frac{3490,5 + 222(30 - 28,5)}{30} = 127,45 \text{ t}, \quad n = 14,$$

und mittels Tabelle 1, Seite 469:

$$A' = 222 - 127,45 - \frac{1154111,625}{30^3} = 51,81 \text{ t};$$

mithin ist  $A = 127,45 - \frac{56}{209} \cdot 51,81 = 113,6 \text{ t}.$

Gleichung (25) liefert

$$A = A_0 - \frac{56}{3 \cdot 209} P_i = A_0 - 0,089 P_i.$$

Zu  $l = 30$  m gehört  $P_i = 146$  t und  $A = 114,4$  t.

Ist  $l = 60$  m, so liefert Tabelle I, Seite 418

$$A_0 = \frac{12234 + 1,5 \cdot 365}{60} = 213,025 \text{ t}, \quad n = 25,$$

sodann Tabelle 2, Seite 469:

$$A' = 365 - 213,025 - \frac{14687794}{60^3} = 83,98 \text{ t}.$$

Es wird also

$$A = 213,025 - \frac{56}{209} \cdot 83,98 = 190,5 \text{ t}.$$

Gleichung (25) gibt mit  $P_i = 248$  t:

$$A = 213,025 - 0,089 \cdot 248 = 191,0 \text{ t}.$$

In gleicher Weise erhält man — immer für fünf gleichweite Öffnungen —

für	$l = 10$ m	40 m	80 m	120 m,
	$A_0 = 59,5$ t	158,65 t	261,825 t	354,01 t,
	$A' = 19,76$ t	65,91 t	101,86 t	140,65 t,
nach Gleich. (28)	$A = 54,2$ t	141,0 t	234,5 t	316,3 t,
	$P_i = 69,7$ t	188 t	301 t	404 t,
nach Gleich. (25)	$A = 53,3$ t	141,9 t	235,0 t	318,0 t.

Die Übereinstimmung der beiden Reihen für  $A$  ist eine sehr gute. Wir lassen noch zwei Beispiele für ungleiche Öffnungen folgen.

1. Sechs Öffnungen von 30 m, 42 m, 50 m, 50 m, 42 m, 30 m Weite.

$$a_1' = 5,50 \text{ m}, \quad c_1' = 24,50 \text{ m}, \quad A' = 51,81 \text{ t (wie vorhin);}$$

$$\text{nach (28)} \quad A = 127,45 - \frac{5,50}{24,50} \cdot 51,81 = 115,8 \text{ t,}$$

$$\text{nach (25)} \quad A = 127,45 - \frac{5,50}{3 \cdot 24,50} \cdot 146 = 116,5 \text{ t.}$$

2. Fünf Öffnungen von 60 m, 80 m, 80 m, 80 m, 60 m Weite.

$$a_1' = 11,30 \text{ m}, \quad c_1' = 48,70 \text{ m}, \quad A' = 83,98 \text{ t}, \quad P_i = 248 \text{ t;}$$

$$\text{nach (28): } A = 193,5 \text{ t,} \quad \text{nach (25): } A = 194,0 \text{ t.}$$

Es ist übrigens sehr nahe

$$A = 0,91 A_0.$$

Diese Formel liefert für

$l = 10 \text{ m}$	$30 \text{ m}$	$40 \text{ m}$	$60 \text{ m}$	$80 \text{ m}$	$120 \text{ m}$ ,
$A = 54 \text{ t}$	$116 \text{ t}$	$144 \text{ t}$	$194 \text{ t}$	$238 \text{ t}$	$322 \text{ t.}$

Die größte Abweichung von den genauen Werten beträgt nur 2 v. H.

### 133. Querkräfte $max Q$ der Endöffnung, infolge Belastung der Endöffnung.

*Erstes Verfahren.* Bei unmittelbarer Belastung des Balkens ist die in Fig. 353 schraffierte, von der A-Linie  $A'C'C$  begrenzte Fläche

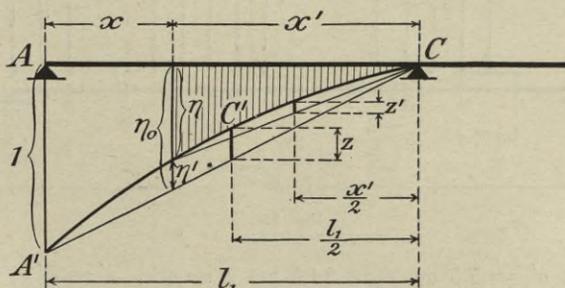


Fig. 353.

der positive Teil der Einflußfläche der Querkraft  $Q$ . Wir ersetzen die A-Linie durch eine Parabel, deren Pfeilhöhe

$$z = \frac{3}{8} \frac{a_1'}{c_1}$$

ist und nehmen, mit den aus Fig. 353 zu ersehenden Bezeichnungen, für  $Q$  den Näherungswert an:

$$Q = Q_0 \frac{\eta}{\eta_0} - P_i z',$$

wo

$$\eta_0 = 1 \frac{x'}{l_1}, \quad \eta = \eta_0 - \eta' = 1 \frac{x'}{l_1} - 4\varepsilon \frac{xx'}{l_1^2} = \eta_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{a_1'}{l_1} \frac{x}{l_1} \right)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon \frac{x'^2}{l_1^2} = \frac{3}{8} \frac{a_1'}{c_1} \frac{x'^2}{l_1^2}.$$

Indem wir noch — aus dem auf Seite 468 angeführten Grunde — in der letzten Gleichung  $\frac{3}{8}$  durch den etwas kleineren Wert  $\frac{1}{3}$  ersetzen, erhalten wir

$$(29) \quad Q = \alpha Q_0 - \beta P_i,$$

wo

$$(30) \quad \alpha = 1 - \frac{3}{2} \frac{a_1'}{c_1} \frac{x}{l_1},$$

$$(31) \quad \beta = \frac{1}{3} \frac{a_1'}{c_1} \frac{x'^2}{l_1^2}.$$

Gleich. (29) liefert auch bei mittelbarer Belastung brauchbare Werte.

*Beispiel.* Balken mit sechs Öffnungen von 30 m, 42 m, 50 m, 50 m, 42 m, 30 m Weite. Die Endöffnung enthalte 10 gleichlange Felder.

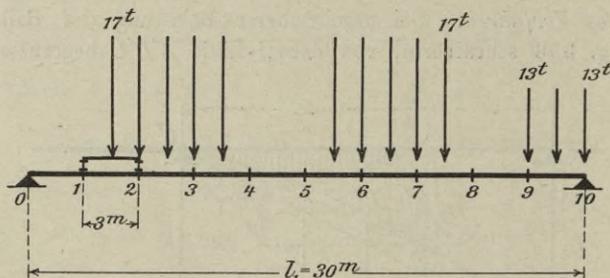


Fig. 354.

Es ist  $a_1' = 5,5$  m,  $c_1 = 24,5$  m,  $x = m\lambda$ ,  $x' = m'\lambda$ ,  $l = 10\lambda$ , mithin

$$\alpha = 1 - 0,03367 m,$$

$$\beta = 0,0007483 m'^2.$$

Betrachtet man  $l_1$  als einfachen Balken, so erhält man für das zweite Feld die Querkraft  $_{max}Q_0$  bei der in Fig. 354 angegebenen Laststellung, denn es ist

$$\leftarrow \frac{\mathfrak{P}_{13}}{\mathfrak{P}_2} = \frac{209}{34} < \frac{l}{\lambda} = 10,0,$$

$$\rightarrow \frac{\mathfrak{P}_{13}}{\mathfrak{P}_1} = \frac{209}{17} > \frac{l}{\lambda} = 10,0.$$

Man findet (nach Tabelle IV, Seite 422)  $A = \frac{1}{30} \cdot 2863,5 = 95,45$  t und, da Knotenpunkt 1 mit 8,5 t belastet wird,

$$\max Q_0 = 95,45 - 8,50 = 87 \text{ t.}$$

Nun ist für  $m = 2$  und  $m' = 8$ ,  $\alpha = 0,933$ ,  $\beta = 0,048$ . Zu  $x' = 24$  m gehört  $P_i = 122$  t, folglich nach Gleich. (29)

$$\max Q = 0,933 \cdot 87 - 0,048 \cdot 122 = 75,3 \text{ t.}$$

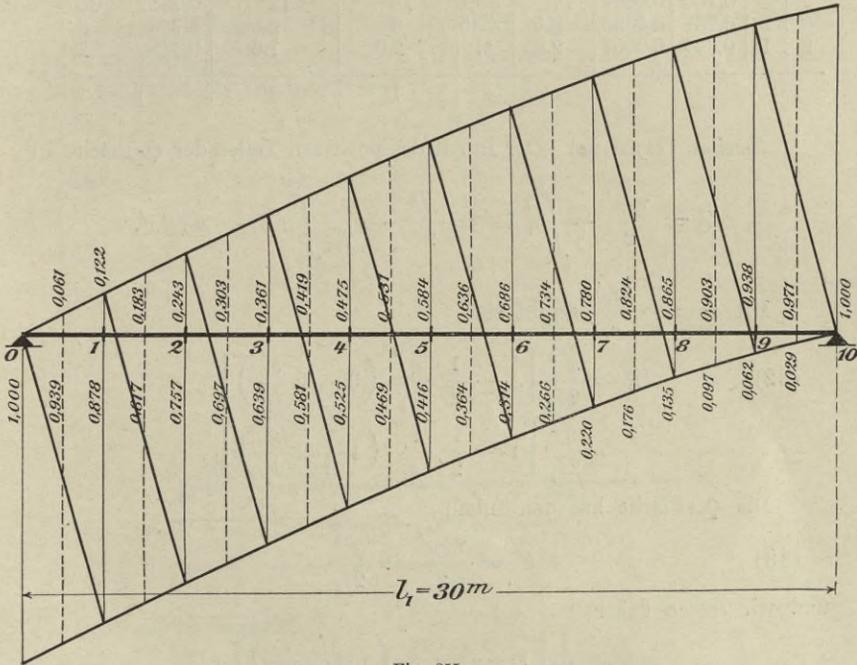


Fig. 355.

Mit Hilfe der durch die Gleichung

$$\eta = \frac{x'}{l_1} - \frac{a_1'}{c_1} \omega_D = \frac{m'}{10} - 0,22449 \omega_D$$

bestimmten, in Fig. 355 dargestellten Einflußlinie findet man  $\max Q = 75$  t.

Die auf diese Weise berechneten Werte  $\max Q$  sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Die achte Spalte enthält die mittels der Einflußlinie erhaltenen Querkräfte.

$Q_1$  und  $Q_2$  entstehen bei der Zugfolge IV, die übrigen  $Q$  bei Zugfolge I (Seite 418). Für  $Q_4$  bis  $Q_9$  ist die Grundstellung maßgebend. Die ersten drei Querkräfte entstehen, wenn die zweite Achse in  $m$  angreift.

$m$	$m'$	$\alpha$	$\beta$	$\max Q_0$	$P_i$	Gleich. (29) $\max Q$	Mittels Einflußlinie $\max Q$	$\psi$	Gleich. (34) $\max Q$
1	9	0,966	0,061	107,85	133	96	96	0,892	96
2	8	0,933	0,048	87	122	75	75	0,874	76
3	7	0,899	0,037	65,5	108	55	55	0,856	56
4	6	0,865	0,027	50,3	91,8	41	41	0,838	42
5	5	0,832	0,019	37,9	79,9	30	29	0,820	31
6	4	0,798	0,012	26,15	74,4	20	19	0,802	21
7	3	0,764	0,0067	17	66,1	13	12	0,784	13
8	2	0,731	0,0030	8,5	49,5	6	6	0,766	6,5
9	1	0,697	0,0007	2,85	*)	2,0	1,6	0,748	2,1

Zweites Verfahren. Der Inhalt des positiven Teiles der  $Q$ -Fläche ist

$$\mathfrak{F} = \frac{\eta_0 x'}{2} - \int_0^{x'} \eta' dx' = \frac{x'^2}{2l} - \frac{4z}{l_1^2} \int_0^{x'} x'(l_1 - x') dx'.$$

Mit  $z = \frac{3}{8} \frac{a_1'}{c_1}$  ergibt sich

$$(32) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{x'^2}{2l_1} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{a_1'}{c_1} \left( 3 - 2 \frac{x'}{l_1} \right) \right] \\ &= \frac{x'^2}{2l_1} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{a_1'}{c_1} \left( 1 + 2 \frac{x}{l_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die  $Q_0$ -Fläche hat den Inhalt

$$(33) \quad F_0 = \frac{\eta_0 x'}{2} = \frac{x'^2}{2l_1}$$

und wir setzen daher

$$Q = Q_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{a_1'}{c_1} \left( 1 + 2 \frac{x}{l_1} \right) \right],$$

oder noch besser, indem wir den negativen Teil der Klammergröße etwas verkleinern,

$$(34) \quad \begin{cases} Q = \psi Q_0, \text{ wo} \\ \psi = 1 - 0,4 \frac{a_1'}{c_1} \left( 1 + 2 \frac{x}{l_1} \right). \end{cases}$$

Für  $x=0$  folgt hieraus  $A = A_0 \left( 1 - 0,4 \frac{a_1'}{c_1} \right)$  und, wenn rund  $a_1' = 0,2 l_1$ ,  $c_1 = 0,8 l_1$  gesetzt wird,  $A = 0,9 A_0$ , ein Näherungswert, der sich in Nr. 132 als recht brauchbar erwiesen hat.

\*) Der Einfluß von  $P_i$  ist schon für  $m=7$  und  $8$  unwesentlich.

*Beispiel.* Für die 10-feldrige Endöffnung des vorhin untersuchten Balkens ist

$$\psi = 1 - 0,4 \cdot \frac{5,5}{24,5} \left( 1 + 2 \frac{m}{10} \right) = 0,9102 - 0,0180 m.$$

Man erhält für  $\psi$  und  $Q$  die in den beiden letzten Spalten der vorstehenden Tabelle angegebenen Werte.

**134. Querkräfte  $\min Q$  der Endöffnung infolge Belastung der Endöffnung.**

*Erstes Verfahren.* Fig. 356 zeigt den negativen Teil der  $Q$ -Fläche für unmittelbare Belastung. Die Gleichungen (29), (30), (31) auf Seite 472 sind zu ersetzen durch

$$(35) \quad Q = \alpha' Q_0 + \beta' P_i,$$

$$(36) \quad \alpha' = 1 + \frac{3}{2} \frac{a_1'}{c_1} \frac{x'}{l_1},$$

$$(37) \quad \beta' = \frac{1}{3} \frac{a_1'}{c_1} \frac{x^2}{l_1^2}.$$

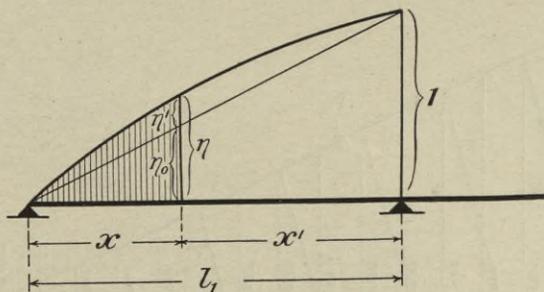


Fig. 356.

Für unser Beispiel ist

$$\alpha' = 1 + 0,03367 m', \quad \beta' = 0,0007483 m^2.$$

Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der Rechnung.

$m$	$m'$	$\alpha'$	$\beta'$	$\min Q_0$	nach Gleich. (35) $\min Q$	Mittels Einflußlinie $\min Q$	$\psi'$	nach Gleich. (40) $\min Q$
1	9	1,303	0,0007	— 2,85	— 3,7	— 3,1	1,314	— 3,7
2	8	1,269	0,0030	— 8,50	— 11	— 10,4	1,292	— 11
3	7	1,236	0,0067	— 17,00	— 21	— 21	1,269	— 22
4	6	1,202	0,012	— 26,15	— 32	— 31	1,247	— 33
5	5	1,168	0,019	— 37,9	— 46	— 45	1,224	— 46
6	4	1,135	0,027	— 50,3	— 60	— 59	1,202	— 60
7	3	1,101	0,037	— 65,5	— 76	— 76	1,180	— 77
8	2	1,067	0,048	— 87	— 99	— 99	1,157	— 101
9	1	1,034	0,061	— 107,85	— 120	— 120	1,135	— 122
				t	t	t		t

*Zweites Verfahren.* An die Stelle der Formeln (32) und (33) treten die Formeln

$$(38) \quad \delta = \frac{x^2}{2l_1} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{a_1'}{c_1} \left( 3 - 2 \frac{x}{l_1} \right) \right]$$

und

$$(39) \quad \delta_0 = \frac{x^2}{2l_1}.$$

Folglich ist

$$(40) \quad \begin{cases} \min Q = \min Q_0 \psi', \text{ wo} \\ \psi' = 1 + \frac{1}{2} \frac{a_1'}{c_1} \left( 3 - 2 \frac{x}{l_1} \right). \end{cases}$$

Für unser Beispiel ist

$$\psi' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5,5}{24,5} \left( 3 - 2 \frac{m}{10} \right) = 1,3367 - 0,02245 m.$$

Die hiermit berechneten Werte  $Q$  gibt die letzte Spalte der vorstehenden Tabelle an.

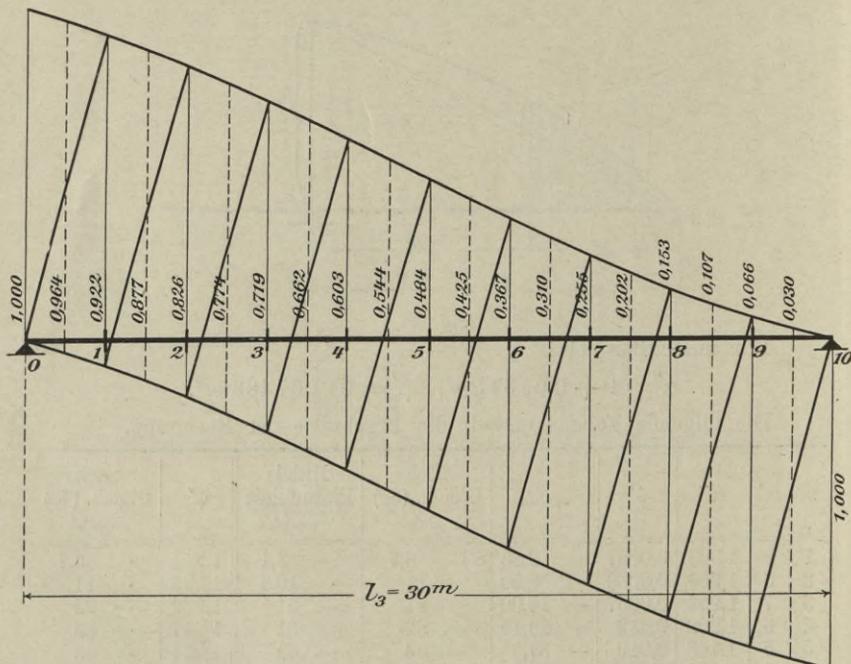


Fig. 357.

**135. Querkräfte einer Mittelöffnung infolge Belastung dieser Öffnung.** Die Einflußflächen für  $Q$  und  $Q_0$  unterscheiden sich so wenig

voneinander, daß es für die Praxis erlaubt ist,  $Q = Q_0$  zu setzen. So erhält man z. B. für die dritte, 10-feldrige Öffnung  $l_3 = 30$  m eines Balkens auf 6 Stützen mit den Öffnungen: 21 m, 33 m, 30 m, 24 m, 21 m

für $m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$max Q_0 =$	108	87	65,5	50	38	26	17	8,5	2,55	Tonnen
$max Q =$	106	85	63	47	34	22	13	6	1,6	„

## VII. Abschnitt.

### Der biegungsfeste Stabzug.

§ 27.

#### Darstellung der Verschiebungen der Knotenpunkte.

136. Die allgemeine Darstellung der Verschiebungen der Knotenpunkte eines *biegungsfesten Stabzuges* (Fig. 358) unterscheidet sich von der in Abteilung 1, § 2 und § 3 beschriebenen Darstellung der Formveränderung eines *Stabzuges mit gelenkartigen Knoten* nur durch die Bestimmung der Winkeländerungen  $\Delta \mathcal{S}$ .

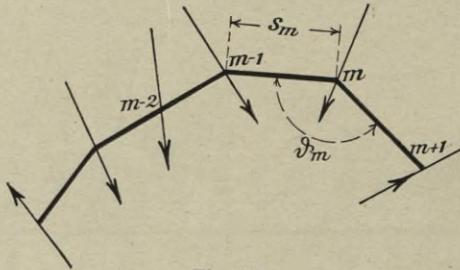


Fig. 358.

Wir setzen prismatische Stäbe voraus und nehmen an, der Stabzug sei durch Einzellasten beansprucht, die in den Knotenpunkten angreifen.

Beide Voraussetzungen lassen sich stets mit genügender Genauigkeit erfüllen. Ein Stab veränderlichen Querschnitts wird in kurze, als Prismen anzusehende Stücke zerlegt; die Trennungspunkte der einzelnen Stücke zählen als Knotenpunkte. Ebenso zählt der Angriffspunkt einer zwischen zwei Eckpunkten angreifenden Einzellast als Knotenpunkt. Stetige Lasten können durch in kurzen Abständen wirkende Einzellasten ersetzt werden.

Bogenträger dürfen in den im Brückenbau und Hochbau vorkommenden Fällen mit hinreichender Annäherung durch Stabzüge ersetzt werden. Bei einer Blechbogenbrücke genügt es in der Regel, die Schnitt-

punkte der Mittellinien der die Fahrbahn stützenden Vertikalen mit der Bogenachse zu Knotenpunkten zu wählen. Bei Dachbindern sind die Angriffspunkte der Pfetten die Knotenpunkte.

Die Folge unserer Voraussetzungen ist, daß die Momentenfläche eines Stabes ( $m - 1$ ) —  $m$  ein Trapez mit den Endordinaten  $M_{m-1}$  und  $M_m$  ist, Fig. 359. Die Ausschlagwinkel der in  $m$  zusammentreffenden Stabenden sind mit Berücksichtigung der Wirkung der Schubkräfte und einer ungleichmäßigen Temperaturänderung nach Gleich. (7), Seite 28,

$$(1) \quad \tau_m = \frac{M_{m-1} + 2M_m}{6EJ_m} s_m + \frac{\chi_m(M_m - M_{m-1})}{GF_m s_m} + \varepsilon(t_{um} - t_{om}) \frac{s_m}{2h_m},$$

$$(2) \quad \tau'_{m+1} = \frac{M_{m+1} + 2M_m}{6EJ_{m+1}} s_{m+1} + \frac{\chi_{m+1}(M_m - M_{m+1})}{GF_{m+1} s_{m+1}} + \varepsilon(t_{u(m+1)} - t_{o(m+1)}) \frac{s_{m+1}}{2h_{m+1}};$$

und man erhält daher

$$(3) \quad \Delta s_m = \tau_m + \tau'_{m+1}.$$

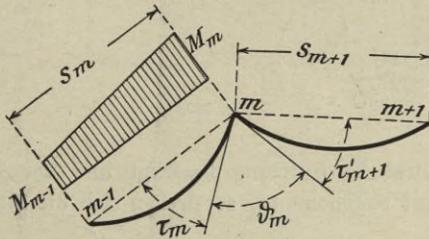


Fig. 359.

Bezeichnet  $N_m$  die den Stab  $s_m$  beanspruchende Längskraft, als Zug positiv genommen, und  $t_m$  die Temperaturänderung für die Stabachse, so ist

$$(4) \quad \Delta s_m = \frac{N_m s_m}{EF_m} + \varepsilon t_{sm} s_m.$$

Die Werte  $t_{sm}$ ,  $t_{um}$ ,  $t_{om}$  sind für alle Punkte des Stabes  $s_m$  gleich groß gedacht.  $h_m$  bedeutet die Höhe des Stabquerschnittes.

Die von den Schubkräften herrührenden zweiten Glieder der Ausdrücke für  $\tau_m$  und  $\tau'_{m+1}$  werden meistens als unwesentlich vernachlässigt; ihre Berücksichtigung bietet zwar keine Schwierigkeit, vermehrt aber die Rechenarbeit. Beim Blechbogen darf man nach Seite 12 den Wert  $F_m | \chi_m$  ersetzen durch den Stehblechquerschnitt  $F_{sm}$ .

Kennt man die Winkeländerungen  $\Delta \vartheta$ , so kann man die Drehungswinkel  $\psi$  der einzelnen Stäbe und die Werte  $\rho = s\psi$  berechnen und den Verschiebungsplan des Stabzuges durch Aneinanderreihung der Strecken  $\Delta s$  und  $\rho$  bilden. Zuerst wird der Stabzug an irgendeiner Stelle fest eingespannt angenommen und schließlich werden die wirklichen Auflagerbedingungen in derselben Weise erfüllt wie bei den im § 1 der Abteilung 1 untersuchten Fachwerken.

Es liege z. B. ein Stabzug 0 1 2 3 ... 6 vor, der bei 0 ein ruhendes, bei 6 ein auf wagerechter Bahn geführtes Auflagergelenk besitzt und durch eine in 6 angreifende wagerechte Last 1 beansprucht wird, Fig. 360. Bezeichnet  $\varphi_m$  den Neigungswinkel des Stabes  $s_m$  gegen die Wagerechte und  $y_m$  die Ordinate von  $m$ , so ist

$$N_m = 1 \cdot \cos \varphi_m, \quad M_m = 1 \cdot y_m.$$

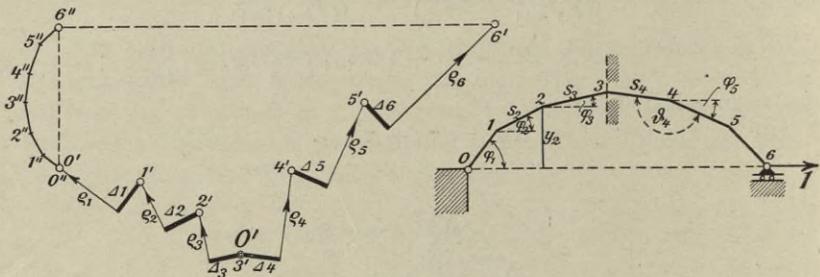


Fig. 360.

Wird die wirkliche Stützung beseitigt und der Stabzug an der Stelle 3 eingespannt angenommen, so drehen sich die Stäbe  $s_3$  und  $s_4$  um

$$\psi_3 = \tau_3 \quad \text{bzw.} \quad \psi_4 = \tau_4',$$

die Stäbe  $s_2$  und  $s_1$  um

$$\psi_2 = \psi_3 + \Delta \vartheta_2, \quad \psi_1 = \psi_2 + \Delta \vartheta_1,$$

die Stäbe  $s_5$  und  $s_6$  um

$$\psi_5 = \psi_4 + \Delta \vartheta_4, \quad \psi_6 = \psi_5 + \Delta \vartheta_5.$$

Nach Berechnung der Werte  $\rho = s\psi$  werden vom Pole  $O'$  aus nach der einen Seite die Strecken aneinandergereiht:

$$\Delta s_3, \quad \rho_3, \quad \Delta s_2, \quad \rho_2, \quad \Delta s_1, \quad \rho_1,$$

nach der anderen Seite die Strecken:

$$\Delta s_4, \quad \rho_4, \quad \Delta s_5, \quad \rho_5, \quad \Delta s_6, \quad \rho_6.$$

Die Verschiebungen der Knotenpunkte 0, 1, 2 ... sind dann für die angenommene Stützung durch die Strecken  $O'O'$ ,  $O'1'$ ,  $O'2'$ , ... der Größe und Richtung nach bestimmt. Nun wird die wirkliche Stützung

wiederhergestellt und die der Stabzugfigur 0 1 2 3 ... 6 ähnliche Figur 0'' 1'' 2'' 3'' ... 6'' (auch kurz Figur  $F''$  genannt) gezeichnet\*); sie ist durch die Bedingungen bestimmt, daß die Verschiebung 6'' 6' des Punktes 6 wagerecht sein muß, daß 0'' mit 0' zusammenfällt, weil der Punkt 0 festliegt und daß drittens 0'' 6''  $\perp$  06 ist. Die Strecken 1'' 1', 2'' 2', ... geben nunmehr Größe und Richtung der Verschiebungen der Knotenpunkte 1, 2, ... an.

**137. Die Biegungslinie** eines Stabzuges ist nach Abteilung 1, § 3, Nr. 46, Gleich. (3), das Seilpolygon der Gewichte

$$(5) \quad \omega_m = \Delta s_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \varphi_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1}.$$

Fig. 361 gibt die lotrechten Durchbiegungen  $\eta_m$  eines Stabzuges mit zwei Stützpunkten  $A$  und  $B$  an. Es bedeutet dann  $\varphi_m$  den Neigungswinkel des Stabes  $s_m$  gegen die Wagerechte.

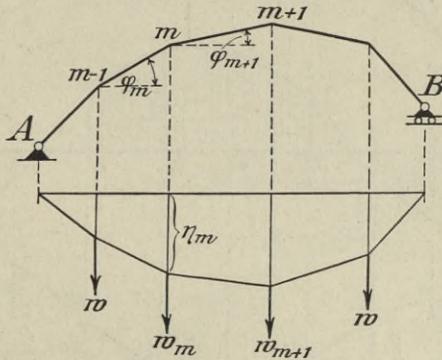


Fig. 361.

Aus der Biegungslinie läßt sich der vollständige Verschiebungsplan in derselben Weise herleiten wie beim Fachwerk. Wir verweisen auf Abteilung 1, § 3, Nr. 51.

**138. Zeichnerische Ermittlung der Strecken  $\rho$ .** Außer dem in Abteilung 1, § 2, Nr. 43, beschriebenen Verfahren, die Strecken  $\rho$  zeichnerisch zu bestimmen, kann auch das folgende von der Biegungslinie eines geraden Stabes ausgehende Verfahren benutzt werden.

Es liege der Stabzug 0 1 2 ... 8 (Fig. 362a) vor. Er sei zunächst bei 4 eingespannt gedacht.

Man ersetze den gebrochenen Stabzug nach Fig. 362b durch einen geraden Stabzug und zeichne für den letzteren die Biegungs-

\*) Siehe Abteilung 1, § 1, Nr. 33 u. 34.

linie  $0'1'2' \dots 8'$  nach dem im § 2 angegebenen Verfahren, wobei man natürlich den Knotenpunkten des geraden Stabzuges dieselben Angriffsmomente  $M$  zuweisen muß, die sich für die Knotenpunkte des gebrochenen Stabzuges ergeben haben. Die Winkel, welche die Geraden  $0'1', 1'2', 2'3', \dots$  mit der geraden Stabachse  $0123 \dots$  bilden, stimmen mit den in Nr. 136 durch Rechnung gefundenen Winkeln  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  überein, und es geben deshalb die Unterschiede der aufeinanderfolgenden, den Knotenpunkten  $0, 1, 2, 3, \dots$  entsprechenden Ordinaten die Strecken  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$  an; sie wurden in Fig. 362b kräftig ausgezogen. Für  $\rho_1$  wurde in Fig. 362b ein negativer Wert erhalten; alle anderen Werte  $\rho$  sind positiv.

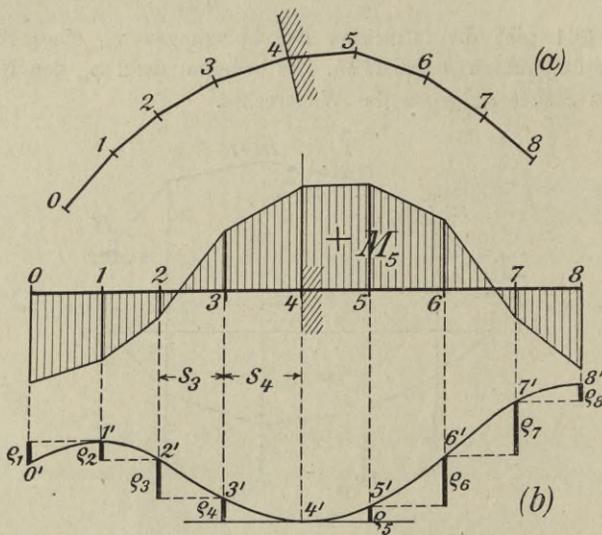


Fig. 362.

Wird zunächst vorausgesetzt, es sei  $t_u - t_o = 0$ , wird ferner der Einfluß der Schubspannungen vorderhand vernachlässigt, so kann man entweder die Momentenfläche als Belastungsfläche auffassen und die Biegelinie nach Fig. 13, Seite 17, als Seillinie mit veränderlicher Polweite  $EJ$  auffassen, oder man ersetzt die  $M$ -Fläche nach Seite 15 durch die  $M \frac{J_c}{J}$ -Fläche, wo  $J_c$  ein beliebig großes konstantes Trägheitsmoment ist und findet dann die Biegelinie als Seillinie mit der unveränderlichen Polweite  $EJ_c$ . Sollen die Durchbiegungen in  $\nu$ -facher Vergrößerung gewonnen werden, so ist die Polweite  $EJ$  zu ersetzen durch  $\frac{EJ}{\nu}$ .

Es soll nun gezeigt werden, daß es nur einer geringen Abänderung der Belastungsfläche bedarf, wenn der Einfluß der Schubspannungen berücksichtigt werden soll. Wir haben offenbar nur nötig, die an den Endquerschnitten des Stabes  $s_m$  angreifenden Momente  $M_{m-1}$  und  $M_m$  durch zwei Momente  $M'_{m-1}$  und  $M''_m$  zu ersetzen, welche den Gleichungen genügen:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{M'_{m-1} + 2M''_m}{6EJ_m} s_m = \frac{M_{m-1} + 2M_m}{6EJ_m} s_m + \frac{\chi_m (M_m - M_{m-1})}{GF_m s_m} \\ \frac{M''_m + 2M'_{m-1}}{6EJ_m} s_m = \frac{M_m + 2M_{m-1}}{6EJ_m} s_m + \frac{\chi_m (M_{m-1} - M_m)}{GF_m s_m} \end{cases}$$

weil dann die Ausschlagwinkel  $\tau_m$  und  $\tau'_m$  der beiden Stabenden die durch die Formeln (1) und (2) vorgeschriebenen Werte annehmen. Aus (6) folgt aber

$$(7) \quad \begin{cases} M'_{m-1} = M_{m-1} + \beta_m (M_{m-1} - M_m) \\ M''_m = M_m + \beta_m (M_m - M_{m-1}), \end{cases}$$

wo

$$(8) \quad \beta_m = 6\chi_m \frac{E}{G} \cdot \frac{J_m}{F_m s_m^2}.$$

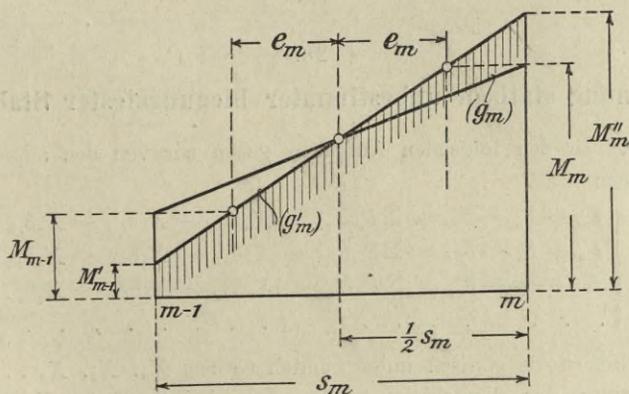


Fig. 363.

Da nun

$$M'_{m-1} + M''_m = M_{m-1} + M_m$$

ist, so wird die Verbindungsline  $(g'_m)$  der Ordinaten  $M'_{m-1}$  und  $M''_m$  von der Verbindungsline  $(g_m)$  der Ordinaten  $M_{m-1}$  und  $M_m$  in ihrem Mittelpunkte geschnitten, Fig. 363.

Die Ordinate  $Y'$  der Geraden  $(g'_m)$  ist im Abstände  $x$  rechts von der Stabmitte

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{1}{2} (M_m'' + M'_{m-1}) + (M_m'' - M'_{m-1}) \frac{x}{s_m} \\ &= \frac{1}{2} (M_m + M_{m-1}) + (M_m - M_{m-1}) (1 + 2\beta_m) \frac{x}{s_m}. \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung

$$(9) \quad e_m = \frac{s_m}{2(1 + 2\beta_m)}$$

gibt dies

$$Y' = \frac{1}{2} M_{m-1} \left(1 - \frac{x}{e_m}\right) + \frac{1}{2} M_m \left(1 + \frac{x}{e_m}\right).$$

Hieraus folgt:

*Die Gerade ( $g_m'$ ) besitzt bei  $x = +e_m$  die Ordinate  $M_m$  und bei  $x = -e_m$  die Ordinate  $M_{m-1}$ .*

Der Abstand  $e_m$  ist nur von den Abmessungen des Stabes abhängig; er bleibt also für alle zu untersuchenden Belastungsfälle derselbe.

Der Einfluß von  $t_u - t_o$  wird nach Seite 15 bestimmt. Die Belastungshöhe beträgt  $6EJ_c \frac{t_u - t_o}{h}$ , wenn die Polweite gleich  $EJ_c$  gemacht wird.

## § 28.

### Berechnung statisch unbestimmter biegungsfester Stabzüge.

139. In den folgenden Aufgaben gehen wir von den allgemeinen Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} L_a + \delta_a - \delta_{at} = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ba} - X_c \delta_{ca} - \dots \\ L_b + \delta_b - \delta_{bt} = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{cb} - \dots \\ L_c + \delta_c - \delta_{ct} = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ac} - X_b \delta_{bc} - X_c \delta_{cc} - \dots \\ \dots \end{cases}$$

aus; sie liefern die statisch unbestimmten Größen  $X_a, X_b, X_c \dots$  nach Aufzeichnung der Verschiebungspläne für die Zustände  $X_a = -1, X_b = -1, X_c = -1 \dots$  und des Verschiebungsplanes, der die von den Temperaturänderungen herrührenden Verrückungen  $\delta_{at}, \delta_{bt}, \delta_{ct} \dots$  bestimmt.

140. **Stabbogen mit zwei Gelenken**, Fig. 364. Als statisch unbestimmte Größe führen wir den Horizontalschub  $X_a$  des rechten Auflagers ein. Der Einfluß einer Einzellast  $P_m$  auf  $X_a$  ist

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

Der Verschiebungsplan für  $X_a = -1$  ist bereits in Nr. 136, Fig. 360, ganz allgemein für einen unsymmetrischen Träger beschrieben worden. In Fig. 364 haben wir Symmetrie angenommen. Wird dann der Stabzug zunächst im Scheitel  $C$  eingespannt gedacht, so schrumpft die Figur  $F''$  zu einem Punkte zusammen und man braucht zur Erfüllung der wirklichen Auflagebedingungen nur den Pol von  $O'$  nach dem Punkte  $O'$  zu verlegen. Es empfiehlt sich, mit den  $EJ_c$ -fachen Verschiebungen zu arbeiten, wo  $J_c$  ein beliebiges Trägheitsmoment ist.

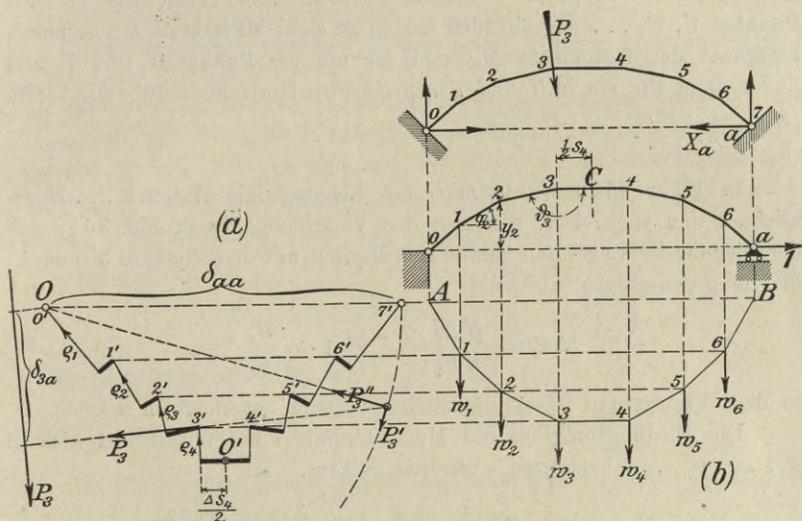


Fig. 364.

Haben mehrere Stäbe gleiche Querschnitte, so wählt man deren  $J$  zum Trägheitsmomente  $J_c$ . Bei der Berechnung der  $\Delta \zeta$  und  $\psi$  ist der Scheitel  $C$  als Knotenpunkt aufzufassen. Dem Stabstücke  $C3$  entspricht also

$$\psi_4 = \frac{J_c}{J_4} (M_3 + 2M_C) \frac{s_4}{2}, \quad \varphi_4 = \psi_4 \cdot \frac{s_4}{2}, \quad M_3 = M_C = y_3,$$

ferner ist

$$\tau_3' = \frac{J_c}{J_4} (2M_3 + M_C) \frac{s_4}{2}.$$

Die Einzellast  $P_3$  erzeugt

$$X_a = P_3 \frac{\delta_{3a}}{\delta_{aa}}.$$

Dreht man  $P_3$  um  $90^\circ$  nach rechts und weist man ihm den Punkt  $3'$  des Verschiebungsplanes als Angriffspunkt zu, so ist  $P_3 \delta_{3a}$  das Moment

der Kraft  $P_3^*$  um den Pol  $O$ . Beschreibt man um  $O$  einen Kreis vom Halbmesser  $\delta_{aa}$ , bringt  $P_3$  mit dem Kreise zum Schnitt und zerlegt es dann in die zueinander rechtwinkligen Seitenkräfte  $P_3'$  und  $P_3''$ , deren erstere den Kreis berührt, so erhält man  $X_a = P_3'$ . Dieser Wert ist positiv, wenn  $P_3'$  rechts um  $O$  dreht. Will man den am linken Kämpfergelenke angreifenden Horizontalschub haben, so muß man den Pol  $O$  von  $O'$  nach  $7'$  verlegen. Die Übertragung der um  $90^\circ$  gedrehten Lasten  $P$  in den Verschiebungsplan ist von Vorteil, wenn es sich um die Wirkung einer ganzen Gruppe von Lasten handelt. Man setzt die an den Punkten  $1', 2', \dots$  angreifenden Lasten zu einer Mittelkraft  $R$  zusammen, berechnet deren Momente  $M_{0'}$  und  $M_{7'}$  um die Punkte  $0'$  und  $7'$  und findet dann für die in  $0'$  und  $7'$  angreifenden Horizontalschübe die Werte  $\frac{M_{7'}}{\delta_{aa}}$  bzw.  $\frac{M_{0'}}{\delta_{aa}}$ .

In Figur 364 b wurde noch die Biegungslinie  $A 1 2 3 \dots B$  gezeichnet und angegeben, wie man den Verschiebungsplan Fig. 364 a aus der Biegungslinie herleiten kann. Man beginnt mit den Punkten  $3'$  und  $4'$ , die im gegenseitigen Abstände

$$\Delta s_4 = \frac{N_4 s_4}{E F_4} E J_c = 1 \cdot s_4 \frac{J_c}{F_4}$$

in der Wagerechten 3—4 an beliebiger Stelle angenommen werden.

Die Biegungslinie ist die Momentenlinie eines mit den Gewichten  $w_1, w_2, w_3, \dots$  belasteten einfachen Balkens. Mit

$$M_m = y_m, \quad N_m = \cos \varphi_m \quad \text{und} \quad \frac{\Delta s_m}{s_m} = \frac{\cos \varphi_m}{E F_m}$$

ergibt sich nach den Formeln (1), (2), (3), (4) Seite 479 mit  $F | x = F_s$ :

$$w_m = \frac{y_{m-1} + 2y_m}{6 E J_m} s_m + \frac{y_{m+1} + 2y_m}{6 E J_{m+1}} s_{m+1} + \frac{y_m - y_{m-1}}{G F_{s_m} s_m} + \frac{y_m - y_{m+1}}{G F_{s_{(m+1)}} s_{m+1}} \\ - \frac{\sin \varphi_m}{E F_m} + \frac{\sin \varphi_{m+1}}{E F_{m+1}},$$

wofür man auch schreiben kann

$$(2) \quad w_m = \frac{y_{m-1} + 2y_m}{6 E J_m} s_m + \frac{y_{m+1} + 2y_m}{6 E J_{m+1}} s_{m+1} + \sin \varphi_m \left( \frac{1}{G F_{s_m}} - \frac{1}{E F_m} \right) \\ - \sin \varphi_{m+1} \left( \frac{1}{G F_{s_{(m+1)}}} - \frac{1}{E F_{m+1}} \right).$$

Es empfiehlt sich die  $E J_c$ -fachen Durchbiegungen darzustellen und zu diesem Zwecke die Werte  $w_m$  mit  $E J_c$  zu multiplizieren, wo  $J_c$  ein

beliebiges unveränderliches Trägheitsmoment bedeutet. In der Regel sind auch die Feldweiten  $\lambda$  gleich groß. Dann multipliziere man  $w_m$  mit  $\frac{EJ_c}{\lambda}$ , um die  $\frac{EJ_c}{\lambda}$ -fachen Durchbiegungen zu erhalten. Mit der Bezeichnung

$$J'_m = J_m \cos \varphi_m$$

erhält man im letzteren Falle

$$(3) \quad w_m = (y_{m-1} + 2y_m) \frac{J_c}{6J'_m} + (y_{m+1} + 2y_m) \frac{J_c}{6J'_{m+1}} + \frac{\sin \varphi_m}{\lambda} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_{s_m}} - \frac{J_c}{F_m} \right) - \frac{\sin \varphi_{m+1}}{\lambda} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_{s(m+1)}} - \frac{J_c}{F_{m+1}} \right).$$

Für die den Stäben  $s_m$  und  $s_{m+1}$  entsprechenden Werte  $J'_m$  und  $J'_{m+1}$  darf man stets einen Mittelwert einführen, dem wir den Zeiger  $m$  beilegen wollen, weil es sich um das Gewicht des Knotenpunktes  $m$  handelt. Dasselbe geschehe mit den Werten  $F_s$  und  $F$ . Dann entsteht

$$(4) \quad w_m = \frac{1}{6} (y_{m-1} + 4y_m + y_{m+1}) \frac{J_c}{J'_m} + \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{m+1}}{\lambda} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_{s_m}} - \frac{J_c}{F_m} \right),$$

wofür man auch schreiben darf

$$(5) \quad w_m = y_m \frac{J_c}{J'_m} + \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{m+1}}{\lambda} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_{s_m}} - \frac{J_c}{F_m} \right).$$

Im Verschiebungsplane, Fig. 364 a, muß man an Stelle der  $\Delta s_m$  die

$$(6) \quad \frac{EJ_c}{\lambda} \Delta s_m = \frac{EJ_c}{\lambda} \frac{N_m s_m}{EF_m} = \frac{J_c}{F_m}$$

auftragen. Hinsichtlich der Einheiten sei folgendes bemerkt. Rechnet man mit Tonnen und Metern, so erhält man  $\frac{EJ_c}{\lambda}$  in tm. Die Einheit der  $EJ_c$ -fachen Durchbiegungen ist daher tm<sup>2</sup>, und ebenso erhält man

$$\frac{EJ_c}{\lambda} \Delta s_m = 1 \cdot \frac{J_c}{F_m} = \text{tm}^2.$$

Die Momente  $M = 1 \cdot y_m$  und die Gewichte  $w_m$  besitzen dieselbe Einheit tm.

Liegen die Knotenpunkte eines Stabzuges in einem Kreisbogen vom Halbmesser  $r$ , so weicht der gegenseitige wagerechte Abstand der Mittelpunkte der beiden Bogenstücke  $(m-1) - m$  und  $m - (m+1)$  so wenig von  $\lambda$  ab, daß man setzen darf

$$(7) \quad \sin \varphi_m - \sin \varphi_{m+1} = \frac{\lambda}{r}.$$

Die Gleichung (5) geht dann über in

$$(8) \quad w_m = y_m \frac{J_c}{J_m'} + \frac{1}{r} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_{sm}} - \frac{J_c}{F_m} \right).$$

In der Regel ist es zulässig, für  $J_m'$  einen konstanten Mittelwert, den man dann zum Trägheitsmomente  $J_c$  wählen wird, einzusetzen und für  $F_m$  und  $F_{sm}$  ebenfalls unveränderliche Durchschnittswerte  $F_s$  und  $F$  anzunehmen. Dann ergibt sich sehr einfach

$$(9) \quad w_m = y_m + \frac{1}{r} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_s} - \frac{J_c}{F} \right),$$

wo abgerundet

$$\frac{E}{G} = 2,6.$$

Die Ordinaten der Biegelinie werden am schnellsten durch Rechnung gefunden.

Infolge gleichmäßiger Erwärmung verschiebt sich der Punkt  $a$  des statisch bestimmten Hauptsystems gegen den festgehaltenen Endpunkt 0 um

$$\delta_{at} = \varepsilon tl.$$

Gleichmäßige Erwärmung des Zweigelenkbogens erzeugt also

$$X_{at} = 1 \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} = \frac{\varepsilon tl}{\delta_{aa}}.$$

Wird  $\delta_{aa}$  einem die  $\frac{EJ_c}{\lambda}$ -fachen Verschiebungen liefernden Plane entnommen, so muß

$$X_{at} = \frac{\varepsilon EJ_c tl}{\delta_{aa} \lambda}$$

gesetzt werden.

**141. Stabbogen mit einem gelenkartigen und einem eingespannten Kämpfer**, Fig. 365. Als statisch unbestimmte Größen führen wir 2 Seitenkräfte  $X_a$  und  $X_b$  des Kämpfergelenkes ein.  $X_a$  sei wagerecht angenommen. Die Richtung von  $X_b$  soll so gewählt werden, daß  $\delta_{ab} = 0$  wird. Das statisch bestimmte Hauptsystem ist ein am rechten Ende eingespannter Freitragler. Das Kämpfergelenk, dem wir die Bezeichnung  $a$  oder  $b$  beilegen, je nachdem wir es als Angriffspunkt von  $X_a$  oder  $X_b$  besonders hervorheben wollen, verschiebe sich gegen das ruhend angenommene rechte Widerlager im Sinne  $X_a = -1$  um  $\delta_a$  und im Sinne  $X_b = -1$  um  $\delta_b$ . Dann ergibt sich

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at} - \delta_a}{\delta_{aa}}$$

$$X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb} + \delta_{bt} - \delta_b}{\delta_{bb}}.$$

Für den Zustand  $X_a = -1$  ist  $M_m = 1 \cdot y_m$  und  $N_m = 1 \cdot \cos \varphi_m$ . Nach Berechnung der  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $\Delta S$ ,  $\psi$ ,  $\rho$  wird der Verschiebungsplan Fig. 365a gezeichnet und nun wird  $X_b$  rechtwinklig zu der Verschiebung  $Oa'$  angenommen, die der Punkt  $a$  im Belastungsfalle  $X_a = -1$  erfährt. Dann wird  $\delta_{ba}$  gleich Null. Last  $P_5$  erzeugt

$$X_a = P_5 \frac{\delta_{5a}}{\delta_{aa}}$$

Dieser Wert ist negativ, weil  $\delta_{aa}$  denselben Sinn hat wie die Last  $X_a = -1$ , während  $\delta_{5a}$  den entgegengesetzten Sinn hat wie  $P_5$ .

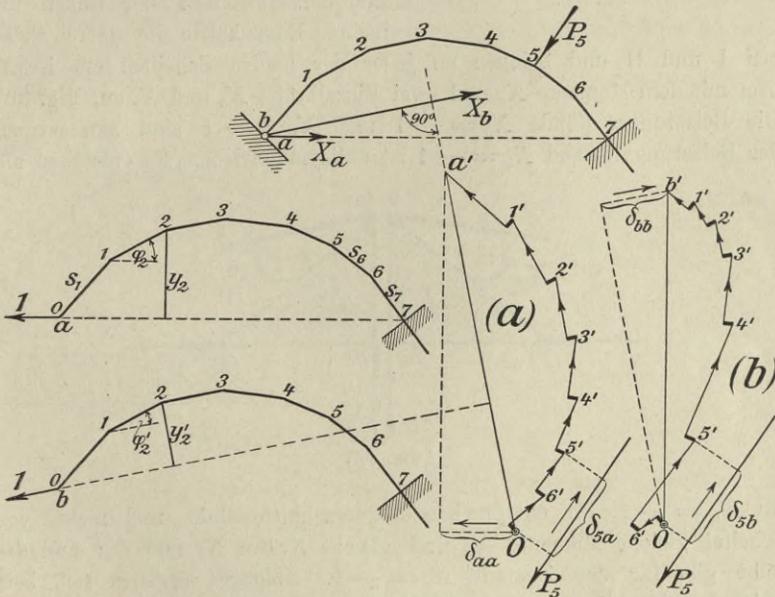


Fig. 365.

Nun berechnet man für den Zustand  $X_b = -1$  die Momente  $M_m = 1 \cdot y'_m$  und Längskräfte  $N_m = 1 \cdot \cos \varphi'_m$ , zeichnet den Verschiebungsplan Fig. 365b und findet

$$X_b = P_5 \frac{\delta_{5b}}{\delta_{bb}}$$

Dieser Wert ist positiv, weil  $\delta_{bb}$  den entgegengesetzten Sinn von  $X_b = -1$  und  $\delta_{5b}$  den entgegengesetzten Sinn von  $P_5$  hat.

Die beiden Verschiebungspläne lassen sich auch, wie in dem vorigen Beispiele, aus Biegelinien herleiten.

**142. Der an beiden Enden eingespannte biegungsfeste Stabzug.** Wir betrachten zunächst den symmetrischen Stabzug 0 1 2 3 . . . 8 in Fig. 366. Durch geeignete Wahl der drei statisch unbestimmten

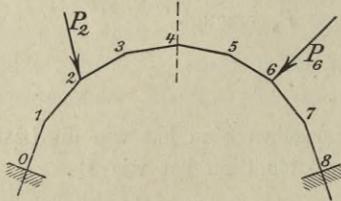


Fig. 366.

Größen  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  soll erreicht werden, daß  $\delta_{ab} = \delta_{ac} = \delta_{bc} = 0$  wird. Man vergleiche die entsprechenden Untersuchungen in Abteilung 1, § 11.

Wir schneiden den Stabbogen im Scheitel durch, befestigen mit den Endquerschnitten 4 der linken und rechten Bogenhälfte die starren Scheiben I und II und bringen an jeder der beiden Scheiben ein Kräftepaar mit dem Momente  $X_a$  und zwei Einzelkräfte  $X_b$  und  $X_c$  an, Fig. 367.

Die Belastungszustände  $X_a = -1$  und  $X_c = -1$  sind symmetrisch, der Belastungszustand  $X_b = -1$  ist antisymmetrisch. Es entstehen also

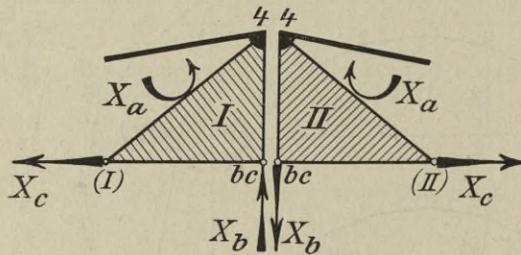


Fig. 367.

für  $X_a = -1$ , für entsprechende Querschnitte links und rechts vom Scheitel gleiche Momente  $M_a$  und gleiche Kräfte  $N_a$  und  $Q_a$ ; und dasselbe gilt für den Zustand  $X_c = -1$ . Dagegen ergeben sich beim Belastungsfalle  $X_b = -1$  für beide Bogenhälften entgegengesetzt gleiche Momente  $M_b$  und Kräfte  $N_b$ ,  $Q_b$ . Daraus folgt aber, daß

$$\delta_{ab} = \int M_a M_b \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_b \frac{ds}{EF} + \int Q_a Q_b \frac{\times ds}{GF} = 0$$

ist, und ebenso verschwindet  $\delta_{bc}$ .

Damit nun auch  $\delta_{ac} = 0$  wird, muß der Angriffspunkt  $b$ ,  $c$  von  $X_b$  und  $X_c$  die Verbindungsstrecke der Pole (I) und (II) halbieren, um welche sich die Scheiben I und II im Belastungsfalle  $X_a = -1$  drehen.

Wir beginnen mit dem Verschiebungsplane für den Belastungszustand  $X_a = -1$ , Fig. 368. Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht aus zwei bei 0 bzw. 8 eingespannten Freitragern. Den Stabzug 0 1 2 3 4 verlängern wir um einen starren Stab  $s_1$ , welcher den Knoten-

punkt 4 mit dem vorläufig noch unbekanntem Pole (I) der Scheibe I verbindet. Sodann strecken wir den Stabzug aus und leiten aus seiner Momentenfläche — einem Rechtecke von der Höhe ( $-1$ ) — auf dem in Nr. 138 beschriebenen Wege die Strecken  $\rho$  her\*). Durch Aneinanderreihung der Strecken  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  bestimmen wir die Verschiebungen  $O1', O2', O3', O4'$  der Knotenpunkte 1, 2, 3, 4 und finden aus der Bedingung, daß die Verschiebung des Punktes (I) gleich Null sein soll, die dem Stabe  $s_i$  entsprechende Strecke  $\rho_i$ . Die Länge des Stabes  $s_i$  bestimmen wir mit Hilfe der zwischen 4 und (I) geradlinig verlaufenden Biegelinie des ausgestreckten Stabzuges und können jetzt die Lage des Punktes (I) mit Hilfe der Bedingung  $s_i \perp \rho_i$  angeben, ferner den Winkel  $\delta_{aa}$ , um den sich die Scheiben I und II im Belastungsfalle  $X_a = -1$  gegeneinander drehen. Es ist nämlich

$$\delta_{aa} = 2\psi_i = 2 \frac{\rho_i}{s_i}.$$

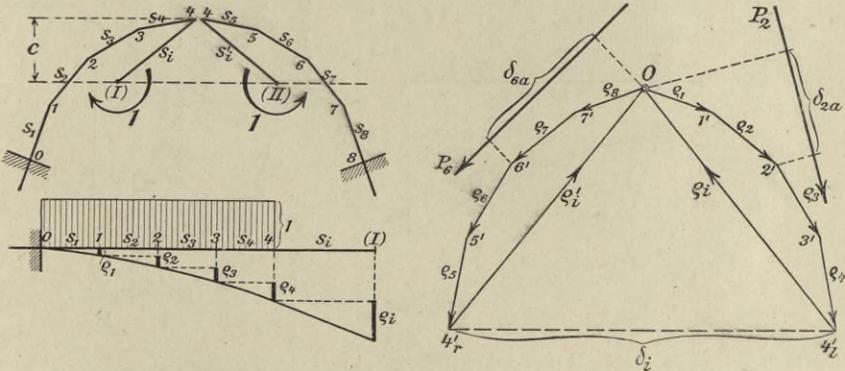


Fig. 368.

Die andere Hälfte des Verschiebungsplanes ergibt sich aus der Symmetrie\*\*). Eine Last  $P_m$  erzeugt

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

Bildet man das Kräftepaar, dessen Moment  $X_a$  ist, aus zwei waagrechten, in den Punkten 4 und (b, c) angreifenden Kräften  $Z$ , so ergibt sich, wenn  $c$  den Abstand des Bogenseitels von den Geraden (I)—(II) bezeichnet,

\*) Die Eintragung der Geraden ( $g_m$ ) und ( $g_m'$ ), vergleiche Figur 363, haben wir in Figur 368 bis 370 unterlassen.

\*\*\*) In Fig. 368 wurde der Verschiebungsplan in größerem Maßstabe gezeichnet wie die Biegelinie.

$$Z = P_m \frac{\delta_{ma}}{c \delta_{aa}} = P_m \frac{\delta_{ma} s_i}{2 c \rho_i}$$

und dieser Ausdruck läßt sich mit der aus der Figur 368 zu ersiehenden Bezeichnung  $\delta_i$  umformen in

$$Z = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_i}.$$

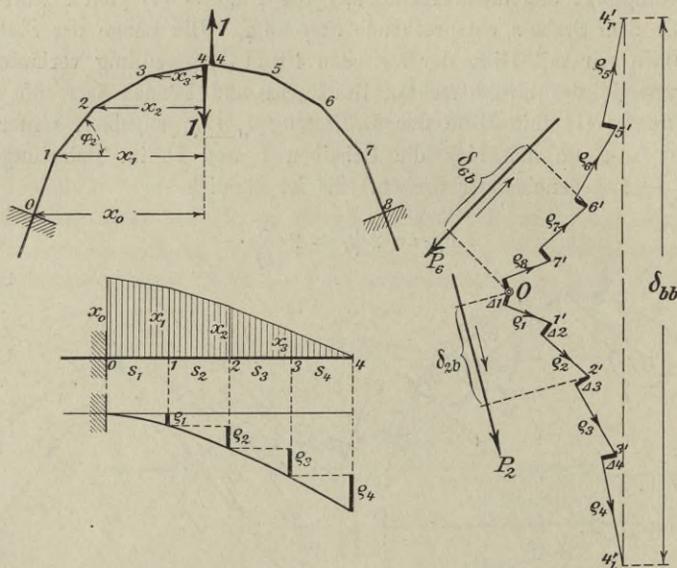


Fig. 369.

Nun werden die in den Figuren 369 und 370 dargestellten Verschiebungspläne für die Zustände  $X_b = -1$  und  $X_c = -1$  gezeichnet und die Kräfte

$$X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}} \text{ und}$$

$$X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}$$

gefunden. Im Belastungsfalle  $X_b = -1$  entstehen links von der Mitte Momente  $M_m = -1 \cdot x_m$  und Längskräfte  $N_m = -1 \cdot \sin \varphi_m$ , rechts von der Mitte gleichgroße positive Werte  $M$  und  $N$ . Dem Belastungsfalle  $X_c = -1$  entsprechen Momente  $1 \cdot y_m$  und Längskräfte  $+1 \cdot \cos \varphi_m$ .

Als Zeichenprobe dient die Bedingung, daß sich  $\delta_{ca} = 0$  ergeben muß. Es dürfen sich also im Belastungsfalle  $X_c = -1$  die beiden Scheiben I und II nicht gegeneinander drehen. Da nun beim sym-

metrischen Bogen  $\delta_{ac} = 2\zeta$  ist, so folgt  $\varphi = 0$ , es müssen also die beiden äußersten Tangenten der elastischen Linie in Fig. 370 parallel sein. Dies ist nur der Fall, wenn der Inhalt der Belastungsfläche gleich Null ist. Hieraus folgt

$$\int y \frac{J_c}{J} ds = 0.$$

Schreibt man also den Stabzugteilchen  $ds$  die Gewichte  $ds \frac{J_c}{J}$  zu, so ist die Wirkungslinie der Kraft  $X_c$  die wagerechte Schwerachse des Stabzuges.

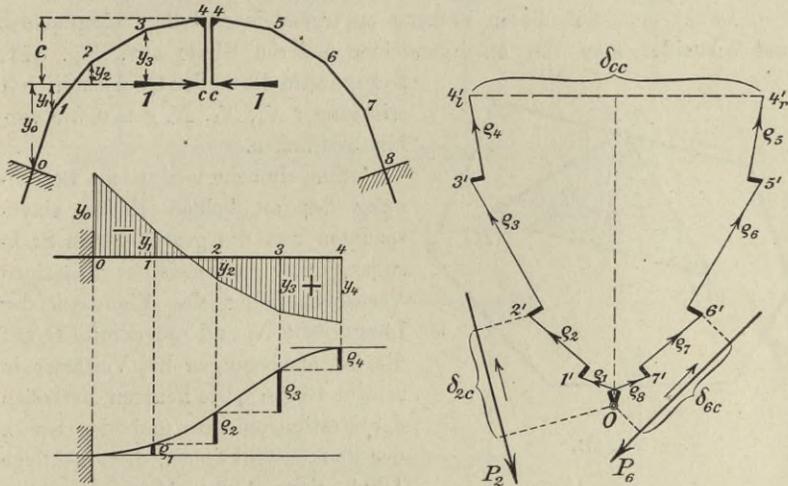


Fig. 370.

Infolge gleichmäßiger Erwärmung entsteht  $\delta_{at} = 0, \delta_{bt} = 0, \delta_{ct} = \varepsilon tl$ , wo  $l$  die Stützweite bedeutet. Mithin ist

$$X_{at} = 0, \quad X_{bt} = 0, \quad X_{ct} = 1 \frac{\varepsilon tl}{\delta_{ca}}$$

Das linke Widerlager drehe sich gegen das ruhend angenommene rechte Widerlager um  $\delta_a$ , es verschiebe sich in lotrechter Richtung um  $\delta_b$  nach unten und in wagerechter Richtung um  $\delta_c$  nach links. Dann entsteht

$$X_a = 1 \frac{\delta_a}{\delta_{aa}}, \quad X_b = 1 \frac{\delta_b}{\delta_{bb}}, \quad X_c = 1 \frac{\delta_c}{\delta_{cc}}$$

Ist der Bogen unsymmetrisch, so braucht der Schnitt, an dem  $X_a, X_b, X_c$  angreifen, nicht im Scheitel geführt zu werden. Es müssen die Biegelinien für beide durch den Schnitt getrennten Bogenteile

gezeichnet werden. Nach Ermittlung der beiden Pole (I) und (II) für den Zustand  $X_a = -1$  bestimmt man den Pol von I gegen II auf die in Abteilung 1, § 11, Nr. 117, beschriebene Weise und wählt diesen Pol zum Angriffspunkte  $b, c$  von  $X_b$  und  $X_c$ . Hat man willkürlich über die Richtung der einen dieser beiden Kräfte verfügt, z. B. über die Richtung von  $X_b$ , so wählt man die Richtung von  $X_c$  rechtwinklig zu der Verschiebung, welche der Punkt  $b, c$  im Belastungsfalle  $X_b = -1$  erfährt. Hierdurch erreicht man, daß  $\delta_{b,c} = 0$  wird\*).

Das zur Untersuchung des an beiden Enden eingespannten Stabzuges angewandte Verfahren ist auch für den geschlossenen Stabzug, an dem sich gegebene äußere Kräfte das Gleichgewicht halten, brauchbar.

Denkt man sich diesen Stabzug an irgendeiner Stelle  $C$  eingespannt und schneidet man ihn an irgendeiner anderen Stelle auf, Fig. 371,

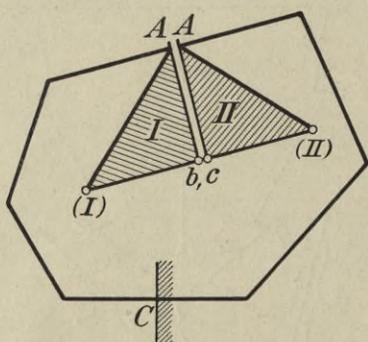


Fig. 371.

so kann man die an den Querschnitten  $A$  wirksamen  $X_a, X_b, X_c$  genau wie vorher bestimmen.

Eine einfache analytische Berechnung des an beiden Enden eingespannten und des geschlossenen Stabzuges, unter der meistens zulässigen Vernachlässigung des Einflusses der Längskräfte  $N$  und Querkkräfte  $Q$  auf die Formänderungen hat Verfasser in seinem Buche „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, dritte Auflage 1904, Seite 119—139“ mitgeteilt.

**143. Der Eingelenkbogen,** Fig. 372, kann als Sonderfall des in Nr. 142 untersuchten Bogenträgers aufgefaßt werden. Man hat nur

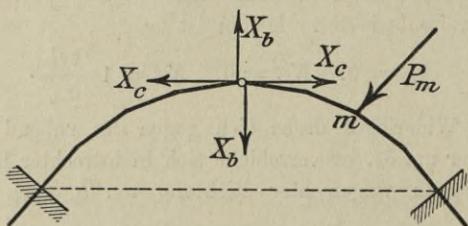


Fig. 372.

nötig,  $X_a = 0$  zu setzen und den Angriffspunkt von  $X_b$  und  $X_c$  nach dem Bogenscheitel zu verlegen.

\*) Abteilung 1, § 5, Nr. 64.

144. Die Darstellungen in Nr. 141, 142, 143 gelten für beliebig geformte Stabzüge, lassen sich also auch für die Berechnung der in den Figuren 373, 374, 375 abgebildeten Tragwerke verwerten, welche der Reihe nach aufzufassen sind als Zweigelenkbogen, als an beiden Enden eingespannter Bogen, und als Eingelenkbogen. Die Ausleger bleiben in den Belastungsfällen  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ ,  $X_c = -1$  spannungslos.

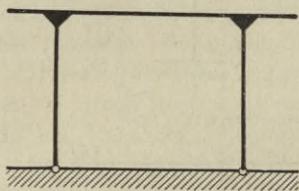


Fig. 373.

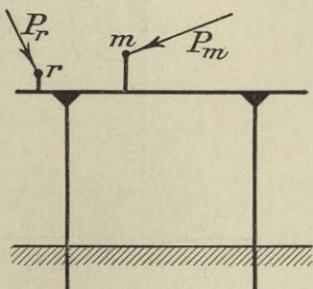


Fig. 374.

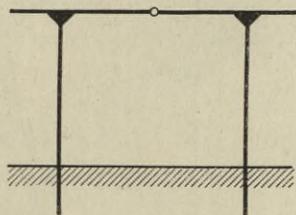


Fig. 375.

Als Beispiel haben wir in Fig. 376 den Verschiebungsplan für den Belastungszustand  $X_a = -1$  der linken Hälfte des an beiden Enden eingespannten Stabzuges vorgeführt. Die Strecken  $\rho_1 \rho_2 \dots$  bis  $\rho_7$  wurden mit Hilfe der elastischen Linie des ausgestreckten Stabzuges bestimmt und aneinandergereiht. Die  $\Delta s$  sind gleich Null. Greift in einem Punkte  $m$  des Querschnittes 6, im Abstände  $k$  von Punkt 6, eine Last  $P_m$  an, so findet man den Punkt  $m'$  im Verschiebungsplan mittels der Bedingungen:  $\overline{6'm'} \perp \overline{6m}$  und

$$\overline{6'm'} = \rho_m = k \tau_6,$$

wo  $\tau_6$  den als verschwindende Größe aufzufassenden Neigungswinkel der Tangente der elastischen Linie des ausgestreckten Stabzuges im

Punkte 6 bedeutet. Ebenso findet man für die Punkte 8, 9 und  $r$  des Auslegers

$$\rho_8 = s_8 \tau_4, \quad \rho_9 = s_9 \tau_4, \quad \rho_r = e \tau_4.$$

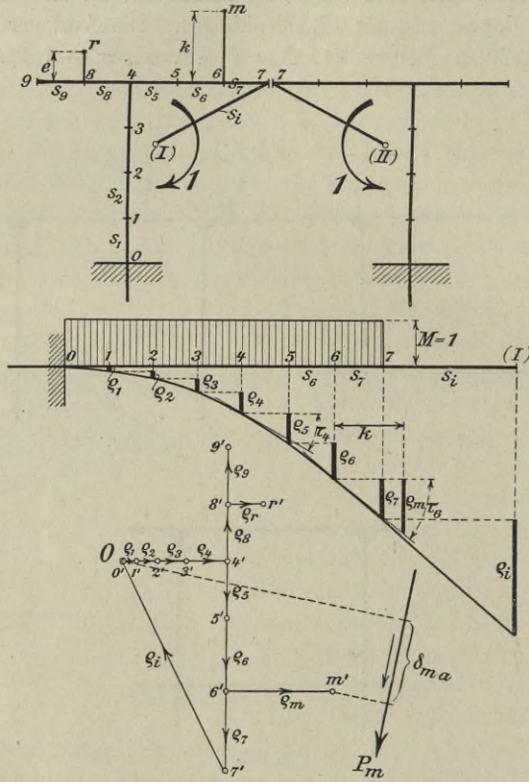


Fig. 376.

**145. Ein gelenkloser Rahmen** (Fig. 377) besitze ein festes und ein wagerecht verschiebbares Auflager und sei durch beliebig gerichtete Lasten  $P$ , deren Angriffspunkte zum Teil außerhalb der Stabachse liegen mögen, beansprucht; er sei symmetrisch in bezug auf die Senkrechte durch die Mitte\*). Wir schneiden den Rahmen im Scheitel auf, bringen, genau wie bei dem an beiden Enden eingespannten Bogen, an den beiden Querschnitten 13 die starren Scheiben I und II an und belasten sie nach Fig. 367 mit  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ .

\*) Wir machen diese Annahme, um einfache Figuren zu erzielen. Die geringe Abänderung des Verfahrens beim unsymmetrischen Rahmen, ergibt sich ohne weiteres aus der Untersuchung des unsymmetrischen gelenklosen Bogens.

Figur 378 zeigt den Verschiebungsplan für den Zustand  $X_u = -1$ . Die Angriffsmomente sämtlicher Querschnitte sind gleich 1. Es ist durchweg  $N = 0$ , also  $\Delta s = 0$ . Die Punkte der Achse des unteren wagerechten Balkens verschieben sich nur in lotrechttem Sinne. Es genügt also für diesen Balken, die elastische Linie zu zeichnen. Der Stabzug 0 19 18 17 16 15 14 13 wurde ausgestreckt; seine elastische Linie bildet im Punkte 0 mit der Lotrechten denselben Winkel  $\alpha$ , den die elastische Linie des Balkens 0—6 im Punkte 0 mit der Wagerechten einschließt. Nach Ermittlung der Werte  $\rho$  wurden die Punkte 19', 18', 17', 16', 15', 14', 13' des Verschiebungsplanes festgelegt. Die linke Hälfte des Verschiebungsplanes ist das Spiegelbild der rechten Hälfte.

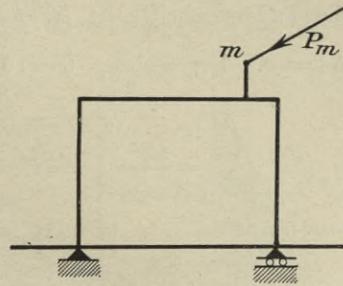


Fig. 377.

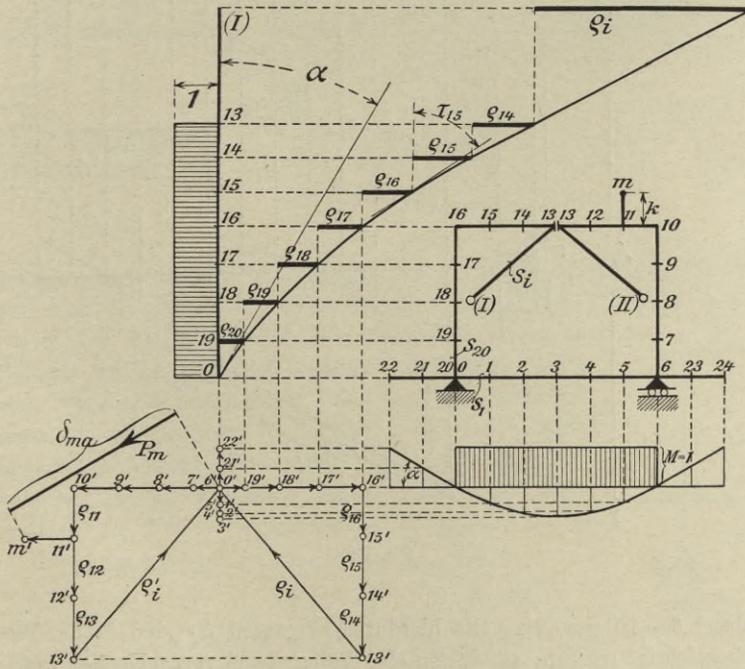


Fig. 378.

Punkt  $m'$  wurde mittels der Strecke  $11'm' = k\tau_{11}$  bestimmt, wo  $\tau_{11} = \tau_{15}$ . Die Ermittlung der Punkte (I) und (II) und die Berechnung von  $X_u$  geschieht wie in Nr. 142.

Fig. 379 stellt den Verschiebungsplan für  $X_b = -1$  dar. Die Momentenfläche des Balkens 0—6 besteht aus zwei Dreiecken. Für die Endquerschnitte ist  $M_b = \mp \frac{1}{2}l$ . Für die wagerechten Stäbe ist  $\Delta_s = 0$ . Der Stabzug 0—16 wird durch die Kraft 1 gedrückt, der

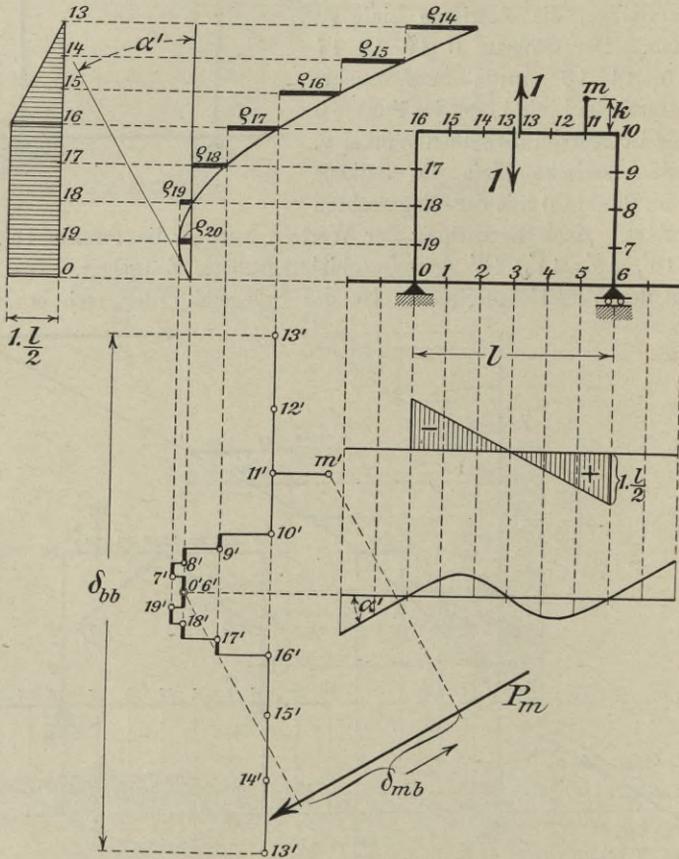


Fig. 379.

Stabzug 6—10 gezogen. Die hierdurch erzeugten  $\Delta_s$  sind in der Figur berücksichtigt worden; sie dürfen aber in der Regel vernachlässigt werden.

Fig. 380 zeigt den Verschiebungsplan für  $X_c = -1$ . Der untere Balken 0—6 erfährt einen Druck von der Größe 1, der obere einen gleichgroßen Zug. Die entsprechenden  $\Delta_s$  sind berücksichtigt worden, dürfen aber in der Regel vernachlässigt werden.

Die vorstehende Aufgabe ist wichtig für die Berechnung der Quer-  
rahmen eiserner Brücken. Liegt der Stützpunkt *A* unterhalb des  
Punktes *O* im Abstände *e* von *O*, Fig. 381, so ist die Verschiebung des  
Punktes *O* nicht mehr gleich Null. Die Verkürzung der auf Druck

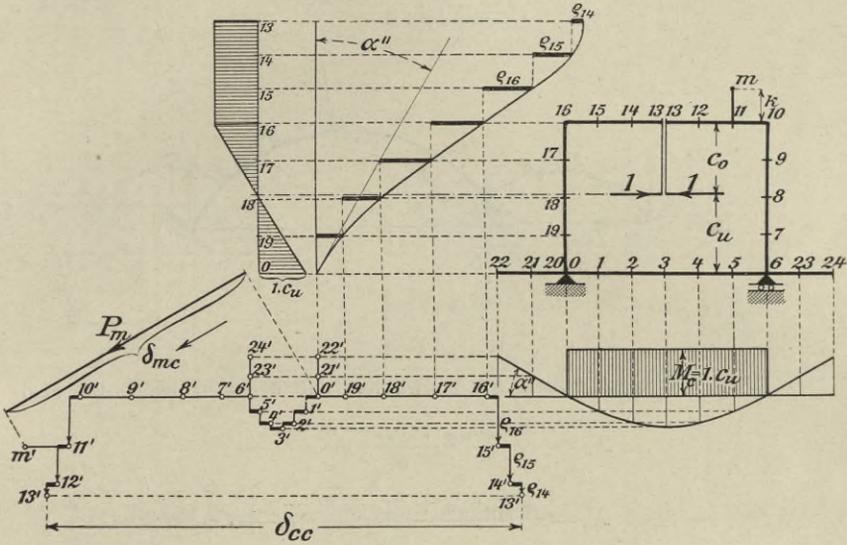


Fig. 380.

beanspruchten Strecke *AO* darf man stets außer acht lassen; es bleibt  
also nur die wagerechte Verschiebung des Punktes *O*; sie beträgt  $e\alpha$ ,  
wo  $\alpha$  den Neigungswinkel der elastischen Linie des  
Balkens *06* im Punkte *O* bedeutet, und kann durch  
eine Verlegung des Poles des Verschiebungsplanes  
berücksichtigt werden. Je nachdem sich *O* nach rechts  
oder links bewegt, muß der Pol um  $e\alpha$  nach links  
oder nach rechts wagerecht verschoben werden. Hier-  
nach ist der Pol zu verschieben

- im Falle  $X_a = -1$  um  $e\alpha$  nach links,
- „ „  $X_b = -1$  „  $e\alpha'$  „ rechts,
- „ „  $X_c = -1$  „  $e\alpha''$  „ links.

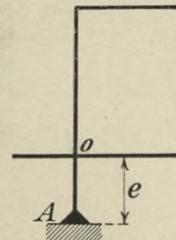


Fig. 381.

**146. Zweifach statisch unbestimmter Stabbogen mit zwei  
Öffnungen.** Es liege das in Fig. 382 dargestellte unsymmetrische  
Tragwerk vor. Als statisch unbestimmte Größen  $X_a$  und  $X_b$  führen wir  
zwei Seitenkräfte der aus den Stützenwiderständen *C* und *H* gebildeten

Mittelkraft ein und übertragen die Kräfte  $X_a$  und  $X_b$  auf die in Figur 383 beschriebene Weise durch starre Stäbe auf die Stützpunkte 4 und 10. Wir erzeugen dadurch

$$H = X_a - X_b \cos \alpha$$

und

$$C = X_b \sin \alpha.$$

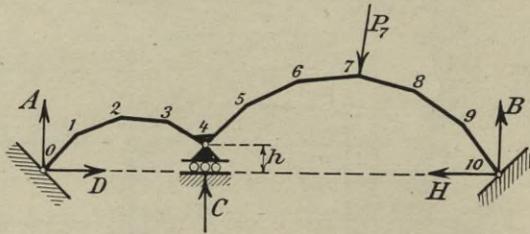


Fig. 382.

Den Winkel  $\alpha$  wollen wir so wählen, daß  $\delta_{ab} = 0$  wird, daß also

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at} - \delta_a - L_a}{\delta_{aa}}$$

$$X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb} + \delta_{bt} - \delta_b - L_b}{\delta_{bb}}.$$

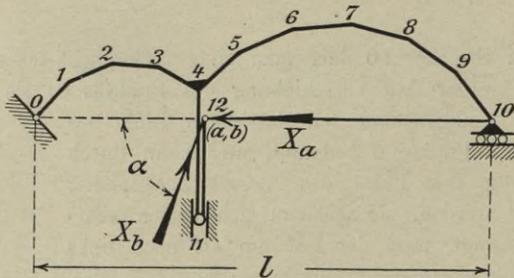


Fig. 383.

Den Belastungszustand  $X_a = -1$  zeigt Fig. 384, den Zustand  $X_b = -1$  Fig. 385. Beziehen wir die Verschiebungen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen Ursprung im Punkte 0 liegt und dessen eine Achse durch den Punkt 10 geht, so sind die Arbeiten  $L_a$  und  $L_b$  der am statisch bestimmten Hauptssysteme angreifenden Stützkkräfte gleich Null. Ändern sich nun infolge des Nachgebens der Widerlager die in der Figur mit  $l$  und  $h$  bezeichneten Abmessungen um  $\Delta l$  und  $\Delta h$ , so

verschieben sich die Angriffspunkte  $a$  und  $b$  von  $X_a$  und  $X_b$  im Sinne von  $X_a = -1$  bzw.  $X_b = -1$  um

$$\delta_a = \Delta l, \quad \delta_b = -\Delta h \sin \alpha - \Delta l \cos \alpha^*)$$

und es beträgt daher der Einfluß der Verschiebungen der Stützpunkte:

$$X_a = \frac{-\Delta l}{\delta_{aa}} \cdot 1, \quad X_b = \frac{+\Delta h \sin \alpha + \Delta l \cos \alpha}{\delta_{bb}} \cdot 1.$$

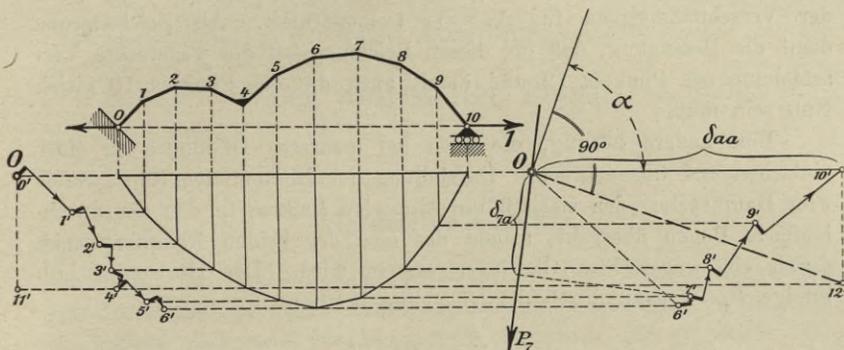


Fig. 384.

Der Einfluß einer gleichförmigen Erwärmung ist, wegen  $\Delta h = \varepsilon t h$  und  $\Delta l = \varepsilon t l$ ,

$$X_{at} = \frac{+\varepsilon t l}{\delta_{aa}} \cdot 1, \quad X_b = \frac{-\varepsilon t h \sin \alpha - \varepsilon t l \cos \alpha}{\delta_{bb}} \cdot 1.$$

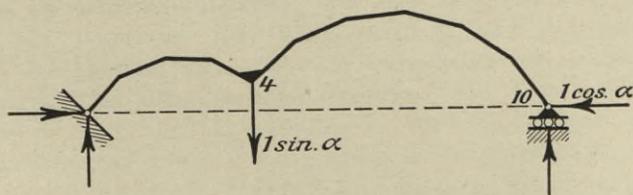


Fig. 385.

Der Einfluß der Lasten

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

wird wieder mit Hilfe der Verschiebungspläne für  $X_a = -1$  und  $X_b = -1$  gewonnen.

\*) Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte im Falle  $X_a = -1$  bzw.  $X_b = -1$  ist  $1 \cdot \Delta l$  bzw.  $-\Delta h \sin \alpha - \Delta l \cos \alpha$ .

Fig. 384 zeigt den Verschiebungsplan für  $X_a = -1$ . Die Verschiebungen der Punkte  $1'2'3' \dots 10'$  wurden aus der Biegelinie hergeleitet. Punkt 11 bewegt sich in lotrechter Richtung, seine Verschiebung ist ebenso groß wie die des Punktes 4. Die Verschiebung von 12 wurde mittels  $10'12' \perp 1012$  und  $12'4' \perp 124$  erhalten. Der Strahl  $O12'$  gibt die Verschiebung des Punktes  $a, b$  an. Nimmt man  $X_b \perp O12'$  an, so erzielt man  $\delta_{ab} = 0$ . Nun wird in derselben Weise der Verschiebungsplan für  $X_b = -1$  konstruiert. Als Zeichenprobe dient die Bedingung, daß für diesen Belastungsfall die wagerechte Verschiebung des Punktes 12 und damit auch die des Punktes 10 gleich Null sein muß.

Eine andere Lösung, die auch bei mehreren Öffnungen zu einer einfachen und übersichtlichen Darstellung der Einflußlinien führt, wählt zum Hauptsystem den statisch unbestimmten Balken, in den der durchlaufende Bogen übergeht, sobald das eine der beiden Kämpfergelenke durch ein wagerechtes Gleitlager ersetzt wird. Der Horizontalschub infolge  $P_m$  ist dann durch die Gleichung bestimmt:

$$H = X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

Wir verweisen auf die verwandten Aufgaben in Abteilung 1, § 16.

## VIII. Abschnitt.

### Der vollwandige Bogen.

#### § 29.

#### Allgemeine Gesetze.

147. Im Hochbau und Brückenbau ist es fast immer zulässig, einen vollwandigen Bogen durch aneinandergereihte kurze gerade Stäbe zu ersetzen und nach den im vorigen Abschnitte für gelenklose Stabzüge entwickelten Verfahren zu berechnen. Besonders bei unsymmetrischen, auch von schrägen Lasten beanspruchten Bogen zeichnet sich dieser Weg vor anderen durch Übersichtlichkeit und große Allgemeinheit aus. Aufgabe der folgenden Untersuchungen ist es nun, einerseits die Eigenschaft der stetigen Krümmung der Bogenachse zur Herleitung von Formeln für Bogenträger, deren Querschnitte sich nach einfachen Gesetzen ändern, zu verwerten, andererseits aber auch zu prüfen, wie die Krümmung der Bogenachse das Gesetz beeinflusst, nach dem sich die auf Grund der Annahme eben bleibender Querschnitte berechneten Normalspannungen über den Querschnitt verteilen. Mit dieser zweiten Frage werden wir uns in Nr. 149 beschäftigen. Vorderhand nehmen wir an, es sei der Krümmungsradius der Bogenachse so groß, daß die Spannungen  $\sigma$  nach den für den geraden Stab gültigen Formeln berechnet werden dürfen.

148. **Angenäherte Bestimmung der Biegelinie.** Die Stabachse sei auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit nach oben positiver senkrechter  $y$ -Achse bezogen.  $\varphi$  bedeute den Neigungswinkel der im Punkte  $xy$  an die Stabachse gelegten Tangente gegen die  $x$ -Achse, Fig. 386.

Wir gehen von der für den Stabzug gültigen Formel

$$(1) \quad w_m = \Delta \mathfrak{S}_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \varphi_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1}$$

aus und führen in dieser die durch die Formeln (1) bis (4) auf Seite 479 bestimmten Werte  $\Delta \mathfrak{S}$  und  $\Delta s$  ein. Sodann setzen wir

$$\frac{M_m - M_{m-1}}{s_m} = Q_m, \quad \frac{M_{m+1} - M_m}{s_{m+1}} = Q_{m+1}$$

$$t_u - t_o = \Delta t, \quad \frac{\alpha}{F'} = \frac{1}{F_s}$$

und erhalten

$$(2) \quad w_m = \frac{M_{m-1} + 2M_m}{6EJ_m} s_m + \frac{M_{m+1} + 2M_m}{6EJ_{m+1}} s_{m+1} \\ + \frac{Q_m}{GF_{s_m}} - \frac{Q_{m+1}}{GF_{s(m+1)}} - \frac{N_m}{EF_m} \operatorname{tg} \varphi_m + \frac{N_{m+1}}{EF_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} \\ + \varepsilon \Delta t_m \frac{s_m}{2h_m} + \varepsilon \Delta t_{s(m+1)} \frac{s_{m+1}}{2h_{m+1}} + \varepsilon t_{s_m} \operatorname{tg} \varphi_m - \varepsilon t_{s(m+1)} \operatorname{tg} \varphi_{m+1}.$$

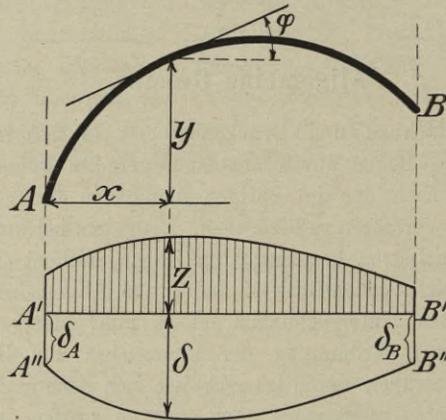


Fig. 386.

Jetzt nehmen wir die Stablängen unendlich klein an, setzen also  $s_m = s_{m+1} = ds$ ,  $J_m = J_{m+1} = J$ ,  $M_{m-1} = M_m = M_{m+1} = M$  und finden, zunächst für stetig sich ändernde Längskräfte  $N$  und Querkräfte  $Q$ ,

$$dw = \frac{M}{EJ} ds - \frac{1}{G} d\left(\frac{Q}{F_s}\right) + \frac{1}{E} d\left(\frac{N}{F} \operatorname{tg} \varphi\right) \\ + \frac{\varepsilon \Delta t}{h} ds + \varepsilon d(t_s \operatorname{tg} \varphi).$$

Die gesuchte Biegelinie  $A''B''$  ist nun die mit der Polweite 1 gezeichnete Seillinie für eine Belastungsfläche, die an der Stelle  $x$  die Höhe

$$(3) \quad z = \frac{dw}{dx} = \frac{M}{EJ \cos \varphi} - \frac{d\left(\frac{Q}{F_s}\right)}{G dx} + \frac{d\left(\frac{N \operatorname{tg} \varphi}{F}\right)}{E dx} \\ + \varepsilon \frac{\Delta t}{h \cos \varphi} + \varepsilon t_s \frac{d^2 y}{dx^2}$$

besitzt, wobei allerdings vorausgesetzt wird, daß  $N|F$  und  $Q|F_s$  stetige Funktionen von  $x$  sind. In den Punkten, in denen sich diese Werte sprungweise ändern, tritt zu der Belastungsfläche noch eine Einzellast

$$(4) \quad w = -\frac{1}{G} \Delta \left( \frac{Q}{F_s} \right) + \frac{1}{E'} \Delta \left( \frac{N \operatorname{tg} \varphi}{F} \right).$$

Greifen z. B. in  $m$  (Fig. 387) eine senkrechte, abwärts gerichtete Last  $P$  und eine im Sinne der negativen  $x$  gerichtete wagerechte Last  $P'$  an, so ist für diesen Punkt

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta N = +P \sin \varphi + P' \cos \varphi \\ \Delta Q = -P \cos \varphi + P' \sin \varphi. \end{cases}$$

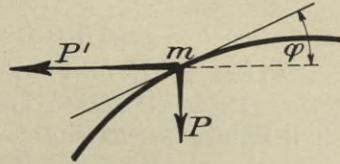


Fig. 387.

Für  $\varphi = 0$  ergeben sich aus den vorstehenden Entwicklungen die in § 2 für den geraden Stab gefundenen Gesetze.

Meistens wird der Einfluß der  $N$  und  $Q$  auf  $z$  vernachlässigt. Dann entsteht

$$(6) \quad z = \frac{M}{EJ \cos \varphi} + \frac{\varepsilon \Delta t}{h \cos \varphi} + \varepsilon t_s \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Es muß aber hervorgehoben werden, daß die Streichung der von den  $N$  und  $Q$  abhängigen Glieder nur dann zulässig ist, wenn die Biegelinie zur Berechnung statisch unbestimmter Größen benutzt wird. Bei der Untersuchung der Durchbiegungen empfiehlt es sich, die  $N$  und  $Q$  zu berücksichtigen.

**149. Genauere Ermittlung der Spannungen und Formänderungen sowie des Wertes  $\delta_{ik}$ .\*** Es werde zunächst nur der Einfluß der senkrecht zum Querschnitte wirkenden Spannungen  $\sigma$  berücksichtigt und wie beim geraden Stabe die Annahme eben bleibender Querschnitte gemacht.

Der Querschnitt sei auf zwei durch seinen Schwerpunkt gehende rechtwinklige Koordinatenachsen ( $u$  und  $v$ ) bezogen, deren eine (die  $u$ -Achse) senkrecht zur Stabebene ist. Die  $v$ -Achse sei Symmetrieachse des Querschnitts. In allen von der  $u$ -Achse gleichweit abgelegenen Querschnitten mögen außer gleichgroßen Spannungen  $\sigma$  auch gleichgroße Temperaturänderungen  $t$  entstehen.

Sind in Fig. 388  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  zwei unendlich nahe Querschnitte,  $C_1 C_2 = ds$  das Element der Stabachse,  $C_1 D_1 = C_2 D_2 = +v$ ,  $D_1 D_2 = ds_v$

\*) Zum Teil übernommen aus des Verfassers: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, § 21.

und  $\sphericalangle A_1 O A_2 = -d\varphi$ , so ist vor Eintreten einer Verbiegung des Stabes, wenn  $r$  den Krümmungsradius der Stabachse bedeutet,

$$C_1 C_2 = ds = -r d\varphi$$

$$D_1 D_2 = ds_v = -(r - v) d\varphi = ds + v d\varphi$$

und nach einer kleinen Verbiegung

$$C_1 C_2 = ds + \Delta ds$$

$$\sphericalangle A_1 O A_2 = -(d\varphi + \Delta d\varphi)$$

$$D_1 D_2 = ds_v + \Delta ds_v = ds + \Delta ds + (v + \Delta v) (d\varphi + \Delta d\varphi),$$

woraus nach Streichung der kleinen Größe zweiter Ordnung  $\Delta v \Delta d\varphi$  und mit Beachtung von  $ds = ds_v - v d\varphi$ :

$$(7) \quad \Delta ds_v = \Delta ds + \Delta v d\varphi + v \Delta d\varphi,$$

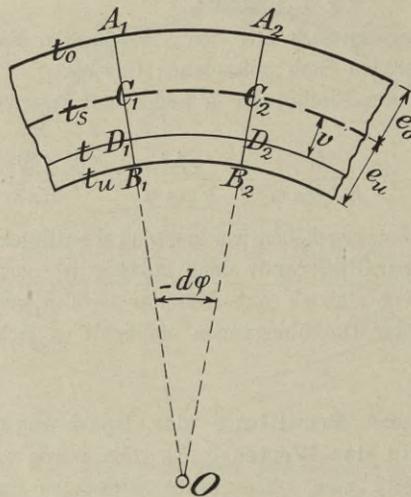


Fig. 388.

während andererseits entsteht

$$(8) \quad \Delta ds_v = \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right) ds_v,$$

so daß sich ergibt

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{\Delta ds + \Delta v d\varphi + v \Delta d\varphi}{ds + v d\varphi}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung durch  $\frac{ds}{r} = -d\varphi$ , so erhält man

$$(9) \quad \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{\frac{\Delta ds}{ds} r - \Delta v - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} v}{r - v},$$

worein zu setzen

$$\Delta v = \int_0^v \Delta dv = \int_0^v \left( \varepsilon t - \frac{\sigma}{mE} \right) dv,$$

wo  $\frac{1}{m}$  die Wertziffer der Querdehnung ( $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{3}$  für Schweißeisen, Flußeisen und Stahl) bezeichnet.

Den von  $\sigma$  abhängigen Teil von  $\Delta v$  vernachlässigen wir und setzen  $\Delta dv = \varepsilon t dv$ , sodann wollen wir, wie beim geraden Stabe nur solche Temperaturzustände in Betracht ziehen, die keinen unmittelbaren Einfluß auf die Spannungen  $\sigma$  haben.

Beim geraden Stabe verschwinden die Spannungen  $\sigma$ , sobald  $t$  eine Funktion ersten Grades der Querschnittskordinaten  $u$  und  $v$  ist. Es können dann durch Temperaturänderungen zwar beachtenswerte *Formänderungen*, aber nur im Falle statischer Unbestimmtheit *Spannungen* hervorgerufen werden, sobald nämlich infolge jener Temperaturänderungen äußere Kräfte entstehen. Es fragt sich nun:

welchem Gesetze  $t = F(v)$  muß die Temperaturänderung innerhalb des Querschnittes eines krummen Stabes folgen, damit auch für diesen mit den äußeren Kräften die Spannungen  $\sigma$  verschwinden.

Wir gehen von der Gleichung

$$\Delta ds_v = \Delta ds + \Delta v d\varphi + v \Delta d\varphi$$

aus, setzen, da auf den Stab keine äußeren Kräfte wirken sollen und  $\sigma = 0$  sein soll,

$$\Delta ds_v = \varepsilon t ds_v = -\varepsilon t (r - v) d\varphi$$

$$\Delta ds = \varepsilon t_s ds = -\varepsilon t_s r d\varphi$$

und erhalten die Bedingung

$$-\varepsilon t (r - v) = -\varepsilon t_s r + \Delta v + v \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}.$$

Wird diese Gleichung differenziert, so entsteht mit  $\Delta dv = \varepsilon tv$

$$(10) \quad -\varepsilon (r - v) dt = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} dv,$$

und hieraus folgt

$$t = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{dv}{r-v} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln (r-v) + C.$$

Da für  $v = 0$   $t = t_s$  ist, so ergibt sich

$$C = t_s - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln r \text{ und}$$

$$t = t_s + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln \left(1 - \frac{v}{r}\right).$$

Weiter ist  $t = t_u$  bzw.  $t = t_o$  für  $v = +e_u$  bzw.  $v = -e_o$ , also

$$t_u = t_s + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln \left(1 - \frac{e_u}{r}\right)$$

$$t_o = t_s + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln \left(1 + \frac{e_o}{r}\right) \text{ und}$$

$$t_o - t_u = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln \left(\frac{r + e_o}{r - e_u}\right),$$

woraus sich mit der Bezeichnung  $t_u - t_o = \Delta t$  ergibt:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = - \frac{\varepsilon \Delta t}{\ln \left(\frac{r + e_o}{r - e_u}\right)}$$

und hierfür darf, mit  $e_o + e_u = h$ , stets genügend genau gesetzt werden

$$(11) \quad \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = - \varepsilon \Delta t \frac{r}{h},$$

so daß schließlich folgt

$$(12) \quad t = t_u - \Delta t \frac{r}{h} \ln \left(1 - \frac{v}{r}\right).$$

Im Falle  $r = \infty$  entsteht, wegen  $\ln \left(1 - \frac{v}{r}\right) = - \frac{v}{r}$ ,

$$(13) \quad t = t_u + \Delta t \frac{v}{h},$$

das ist die früher beim geraden Stabe vorausgesetzte Funktion.

In der Regel werden die Ergebnisse von (12) und (13) nur wenig voneinander abweichen.

Indem wir in der Folge annehmen, daß sich  $t$  nach dem durch die Gleichung (12) dargestellten Gesetze ändert, erhalten wir

$$\Delta ds = \varepsilon t_o ds$$

und, angenähert,

$$(14) \quad \Delta d\varphi = - \varepsilon \Delta t \frac{r}{h} d\varphi = + \varepsilon \Delta t \frac{ds}{h}.$$

Um nun die durch äußere Kräfte erzeugten  $\sigma$ ,  $\Delta ds$  und  $\Delta d\varphi$  zu ermitteln, setzen wir, indem wir  $t=0$  und mithin auch  $\Delta v=0$  annehmen,

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\frac{\Delta ds}{ds} r - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}}{r-v} = \frac{\Delta ds}{ds} - \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \frac{v}{r-v},$$

führen diesen Wert in die Gleichgewichtsbedingungen

$$N = \int \sigma dF$$

$$M = \int \sigma v dF$$

ein und erhalten die Beziehungen

$$\frac{N}{E} = \frac{\Delta ds}{ds} \int dF - \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \int \frac{v dF}{r-v}$$

$$\frac{M}{E} = \frac{\Delta ds}{ds} \int v dF - \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \int \frac{v^2 dF}{r-v}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, wenn

$$(15) \quad \int v^2 \frac{r}{r-v} dF = Z$$

gesetzt und beachtet wird, daß

$$\int v dF = 0, \quad \int \frac{v dF}{r-v} = \int \left( \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} \frac{r}{r-v} \right) dF = \frac{Z}{r^2}$$

ist, die Ausdrücke

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} = - \frac{Mr}{EZ}$$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} - \frac{M}{EFr}.$$

Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(16) \quad \mathfrak{N} = N - \frac{M}{r}$$

findet man schließlich

$$(17) \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\mathfrak{N}}{EF},$$

$$(18) \quad \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\mathfrak{N}}{EF} - \frac{Mr}{EZ},$$

$$(19) \quad \sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r-v}.$$

Fügt man zu  $\Delta ds$  und  $\Delta d\varphi$  die vorhin gefundenen, unmittelbar von  $t_s$  und  $\Delta t$  abhängigen Werte, so erhält man für den durch die Gleichung (12) beschriebenen Temperaturzustand

$$(20) \quad \Delta ds = \frac{\mathfrak{N} ds}{EF} + \varepsilon t_o ds,$$

$$(21) \quad \Delta d\varphi = -\frac{\mathfrak{N} ds}{EFr} + \frac{M ds}{EZ} + \varepsilon \Delta t \frac{ds}{h}.$$

Im Falle  $r = \infty$  ist

$$\frac{r}{r-v} = 1, \quad Z = \int v^2 dF = J, \quad \mathfrak{N} = N, \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$$

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EF} + \varepsilon t_o ds, \quad \Delta d\varphi = \frac{M ds}{EJ} + \Delta t \frac{ds}{h};$$

es entstehen die früher für den geraden Stab abgeleiteten Gleichungen, welche auch dann noch anwendbar sind, wenn  $r$  zwar einen endlichen, aber, verglichen mit dem größten  $v$ , sehr großen Wert besitzt.

Es bleibt noch anzugeben, welchen Einfluß der endliche Wert  $r$  auf die virtuelle innere Arbeit

$$A_v = \int \bar{N} \Delta ds + \int \bar{M} \Delta d\varphi$$

ausübt. Wir erhalten

$$A_v = \int \bar{N} \left( \frac{\mathfrak{N}}{EF} ds + \varepsilon t_o ds \right) + \int \bar{M} \left( \frac{M ds}{EZ} - \frac{\mathfrak{N} ds}{EFr} + \varepsilon \Delta t \frac{ds}{h} \right)$$

und nach einfacher Umformung

$$(23) \quad A_v = \int \frac{\bar{\mathfrak{N}} \mathfrak{N} ds}{EF} + \int \frac{\bar{M} M ds}{EZ} + \int \bar{N} \varepsilon t_o ds + \int \frac{\bar{M}}{h} \varepsilon \Delta t ds.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem für den geraden Stab auf Seite 99 abgeleiteten Ausdrucke

$$A_v = \int \frac{\bar{N} N dx}{EF} + \int \frac{\bar{M} M dx}{EJ} + \int \bar{N} \varepsilon t_o dx + \int \frac{\bar{M}}{h} \varepsilon \Delta t dx$$

nur dadurch, daß an Stelle von  $N$ ,  $J$ ,  $dx$  getreten sind:  $\mathfrak{N}$ ,  $Z$ ,  $ds$ . Es folgt also für  $\delta_{ik}$  ohne weiteres die Formel

$$(24) \quad \delta_{ik} = \int \frac{\mathfrak{N}_i \mathfrak{N}_k ds}{EF} + \int \frac{M_i M_k ds}{EZ},$$

und für die von den Temperaturänderungen abhängige Verschiebung  $\delta_{it}$  der Ausdruck

$$(25) \quad \delta_{it} = \int N_i \varepsilon t_o ds + \int \frac{M_i}{h} \varepsilon \Delta t ds.$$

Soll auch der Einfluß der Querkkräfte berücksichtigt werden, so empfiehlt es sich, die beim geraden Stabe gemachten Annahmen beizubehalten und die Gleich. (24) zu ersetzen durch

$$(26) \quad \delta_{ik} = \int \frac{N_i N_k ds}{EF} + \int \frac{M_i M_k ds}{EJ} + \int \frac{\times Q_i Q_k ds}{GF}.$$

Um uns schnell ein Urteil über den Unterschied der Größen  $Z$  und  $J$  bilden zu können, setzen wir

$$\frac{r}{r-v} = 1 + \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^3}{r^3} + \dots$$

und erhalten

$$Z = J + \frac{1}{r} \int v^3 dF + \frac{1}{r^2} \int v^4 dF + \frac{1}{r^3} \int v^5 dF + \dots$$

und für den Fall eines bezüglich der  $u$ -Achse symmetrischen Querschnitts

$$Z = J + \frac{1}{r^2} \int v^4 dF + \frac{1}{r^4} \int v^6 dF + \dots$$

Für das Rechteck von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ergibt sich mit  $dF = b dv$  und  $J = \frac{bh^3}{12}$ :

$$\int v^4 dF = 2b \int_0^{\frac{1}{2}h} v^4 dv = \frac{bh^5}{5 \cdot 2^4} = \frac{3}{5} \frac{Jh^2}{2^2}$$

$$\int v^6 dF = 2b \int_0^{\frac{1}{2}h} v^6 dv = \frac{bh^7}{7 \cdot 2^6} = \frac{3}{7} \frac{Jh^4}{2^4} \text{ usw.}$$

$$Z = J \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r} \right)^4 + \frac{3}{9} \left( \frac{h}{2r} \right)^6 + \dots \right].$$

Ist z. B.  $r = 5h$ , so wird  $Z = 1,006 J$ , und es leuchtet wohl ein, daß bei der Berechnung der im Brückenbau und Hochbau vorkommenden Bogenträger stets  $Z = J$  gesetzt werden darf. Für die Spannungen  $\sigma_o$  und  $\sigma_u$  in dem obersten bzw. untersten Punkte des Querschnittes ergeben sich dann mit  $v = -e_o$  bzw.  $v = +e_u$  die Werte

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma_o = \frac{N}{F} - \frac{M}{rF} - \frac{Me_o}{J} \frac{r}{r+e_o} \\ \sigma_u = \frac{N}{F} - \frac{M}{rF} + \frac{Me_u}{J} \frac{r}{r-e_u} \end{cases}$$

welche sich auch auf die Form bringen lassen

$$(23) \quad \begin{cases} \sigma_o = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_o'} \\ \sigma_u = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_u'} \end{cases}$$

wo

$$(24) \quad \begin{cases} W_o' = \frac{W_o}{\frac{r}{r+e_o} + \frac{k_u}{r}} \\ W_u' = \frac{W_u}{\frac{r}{r-e_u} - \frac{k_o}{r}} \end{cases}$$

$$(25) \quad W_o = \frac{J}{e_o}, \quad W_u = \frac{J}{e_u}, \quad k_o = \frac{W_u}{F}, \quad k_u = \frac{W_o}{F}.$$

Durch die Gleichungen (23) sind die Spannungen  $\sigma_o$  und  $\sigma_u$  auf dieselbe Form gebracht worden, wie beim geraden Stabe. An die Stelle der Widerstandsmomente  $W_o$  und  $W_u$  treten die Werte  $W_o'$  und  $W_u'$ . Bestimmt man also in der  $v$ -Achse des Querschnitts zwei Punkte  $o'$  und  $u'$  in den Abständen

$$k_o' = \frac{W_u'}{F} \quad \text{und} \quad k_u' = \frac{W_o'}{F}$$

vom Schwerpunkte, Fig. 389, und bezeichnet mit  $M^{o'}$  und  $M^{u'}$  die auf die Punkte  $o'$  und  $u'$  bezogenen Angriffsmomente, so findet man

$$(26) \quad \sigma_o = -\frac{M^{u'}}{W_o'}, \quad \sigma_u = +\frac{M^{o'}}{W_u'}.$$

Es liege z. B. ein Blechbogen von 48 m Spannweite, 6 m Pfeilhöhe und folgenden Querschnittsabmessungen vor: Stehblech 1240 · 12 mm, vier Winkeleisen 140 · 140 · 15 mm, sechs Gurtplatten (drei in jeder Gurtung) 440 · 15 mm. Nietstärke 26 mm. Die Mittellinie sei ein Kreisbogen, also

$$r = \frac{24^2 + 6^2}{2 \cdot 6} = 51 \text{ m}.$$

Man findet nach Abzug der Nietlöcher

$$J = 2111097 \text{ cm}^4, \quad W_o = W_u = 31746 \text{ cm}^3, \quad F = 642 \text{ cm}^2,$$

$$e_o = e_u = 66,5 \text{ cm}, \quad k_o = k_u = \frac{W}{F} = 49,4 \text{ cm}$$

$$W_o' = 1,003 W_o, \quad W_u' = 0,997 W_u$$

$$k_u' = 1,003 k_u, \quad k_o' = 0,997 k_o.$$

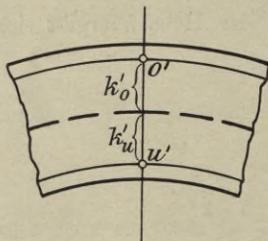


Fig. 389.

An Stelle der Punkte  $o'$  und  $u'$  darf man in den im Brückenbau und Hochbau vorkommenden Fällen die Kernpunkte  $o$  und  $u$  benutzen und ebenso  $W_o$  und  $W_u$  an Stelle von  $W_o'$ ,  $W_u'$ .

**150. Genauere Bestimmung der Biegungslinie.** Die auf Seite 504 entwickelte Gleichung (3) ist durch die folgende zu ersetzen:

$$(27) \quad z = \left( \frac{M}{EJ} - \frac{\mathfrak{N}}{EFr} \right) \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{1}{G} \frac{d \left( \frac{Q}{F_s} \right)}{dx} + \frac{1}{E} \frac{d \left( \frac{\mathfrak{N} \operatorname{tg} \varphi}{F} \right)}{dx} \\ + \varepsilon \frac{\Delta t}{h \cos \varphi} + \varepsilon t_s \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Zu der hierdurch bestimmten Belastungsfläche treten bei Unstetigkeiten der Werte  $\mathfrak{N}/F$  und  $Q/F_s$  noch die durch Gleichung (4) auf Seite 505 bestimmten Gewichte  $w$ , an deren Angriffstellen sich Spitzen in der Biegungslinie bilden, die zwar sehr stumpf sind, immerhin aber daran erinnern, daß unsere gegenwärtige Spannungsberechnung in der Nähe von Einzellasten und sprungweisen Querschnittsänderungen nur als ein Notbehelf anzusehen ist\*).

Die Differentialgleichung der Biegungslinie ist

$$(28) \quad \frac{d^2 \delta}{dx^2} = -z,$$

wobei die Durchbiegungen  $\delta$  nach unten positiv zu nehmen sind.

## § 30.

### Der Zweigelenkbogen.

#### a) Ermittlung der Einflußlinie des Horizontalschubes $H = X_a^{**}$ .

**151.** Gesucht sei die Einflußlinie für  $X_a$  infolge lotrechter Belastung, Fig. 390. Das Biegemoment an der Stelle  $x$  ist

$$M = M_0 - X_a y,$$

wo  $M_0$  das Biegemoment für den Querschnitt  $x$  eines einfachen Balkens  $AB$  bedeutet. Für den Zustand  $X_a = -1$  ist

$$(1) \quad M_a = y, \quad N_a = \cos \varphi, \quad Q_a = \sin \varphi, \quad \mathfrak{N}_a = \cos \varphi - \frac{y}{r}.$$

\*) Vgl. auch Seite 14.

\*\*\*) Wir benutzen bald die eine bald die andere Bezeichnung. Die Bezeichnung  $X_a$  ist zweckmäßig, solange mit  $\delta_{m_a}$  und  $\delta_{a_a}$  gerechnet wird.

Hat man mit Hilfe dieser Werte die Biegelinie für den Zustand  $X_a = -1$  bestimmt, so findet man für  $P = 1$

$$X_a = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}},$$

wo

$$(2) \quad \delta_{aa} = \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \int \frac{\mathcal{N}_a^2 ds}{EF} + \int \frac{Q_a^2 ds}{GF_s}.$$

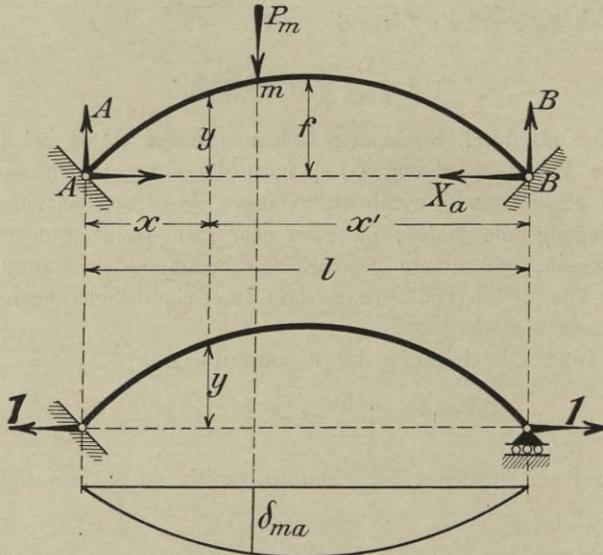


Fig. 390.

Soll die  $\delta_{ma}$ -Linie für eine beliebige Bogenform und mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Querschnittes ermittelt werden, so empfiehlt sich der folgende Weg. In Gleich. (27), Seite 513, streiche man auf der rechten Seite zunächst das zweite und dritte Glied, multipliziere das erste Glied mit  $EJ_c$ , wo  $J_c$  ein beliebiges Trägheitsmoment ist und fasse die  $EJ_c \delta_{ma}$ -Linie als die mit der Polweite  $EJ_c$  gezeichnete Seillinie einer Belastungsfläche auf, die an der Stelle  $x$  die Höhe

$$\frac{MJ_c}{J \cos \varphi} - \frac{\mathcal{N} J_c}{r F \cos \varphi} = y \frac{J_c}{J \cos \varphi} - \left( \cos \varphi - \frac{y}{r} \right) \frac{J_c}{r F \cos \varphi}$$

besitzt. Will man die Biegelinie in einem verzerren größeren Höhenmaßstabe erhalten, so muß man die Polweite entsprechend verkleinern\*).

\*) Ist z. B. der Längenmaßstab 1 : 75 und sollen die  $\delta_{ma}$  im Maßstab 3 : 1 dargestellt werden, so ist die Polweite  $\frac{EJ_c}{3 \cdot 75}$  zu wählen.

Nun zerlege man den Bogen in kurze Stücke  $s_1, s_2, s_3 \dots s_m \dots$ , berechne für die einzelnen Stücke die Mittelwerte

$$(3) \quad \mathfrak{A}_m = \frac{EJ_c Q_m}{GF_{s_m}} = \frac{EJ_c \sin \varphi_m}{GF_{s_m}} \quad \text{und}$$

$$(4) \quad \mathfrak{B}_m = \frac{J_c \mathfrak{N}_m \operatorname{tg} \varphi_m}{F_m} = \frac{J_c \operatorname{tg} \varphi_m}{F_m} \left( \cos \varphi_m - \frac{y_m}{r_m} \right)$$

und zeichne mit derselben Polweite eine Seillinie zu der in den Trennungspunkten der Stücke  $s$  angreifenden Einzelgewichten

$$(5) \quad w_m = -(\mathfrak{A}_{m+1} - \mathfrak{A}_m) + (\mathfrak{B}_{m+1} - \mathfrak{B}_m).$$

Die Zusammenzählung der Ordinaten der beiden Seillinien gibt die Durchbiegungen  $\delta_{m\alpha}$ .

Den Wert  $\delta_{m\alpha}$  bestimmt man am zweckmäßigsten durch Rechnung. Es ist hierbei nicht nötig, die Integrale mittels der Simpsonschen Regel auszuwerten, es genügt vielmehr, den Bogen in kurze Stücke  $s_1, s_2, s_3 \dots$  zu zerlegen und die Formel anzuwenden:

$$(6) \quad \delta_{m\alpha} = \Sigma \frac{y^2 s J_c}{J \cos \varphi} + \Sigma \left( \cos \varphi - \frac{y}{r} \right)^2 \frac{s J_c}{F} + \Sigma \frac{EJ_c s \sin^2 \varphi}{GF_s}.$$

**152.** Wir gehen jetzt dazu über, für die im Brückenbau und Hochbau besonders wichtigen, nach der Parabel oder dem Kreisbogen geformten Bogenträger geschlossene Formeln abzuleiten. Als die einfachste Annahme für das Gesetz, welchem die Querschnittswerte  $J, F, F_s$  folgen, empfiehlt sich hierbei entweder die Annahme unveränderlicher Werte  $J, F, F_s$  oder die Voraussetzung, es seien  $J \cos \varphi, F \cos \varphi, F_s \cos \varphi$  unveränderlich. Sodann sei vorausgeschickt, daß der Einfluß von  $\mathfrak{N}$  und  $Q$  gegenüber dem Einflusse der Momente von so untergeordneter Bedeutung ist, daß es sich empfiehlt, die Berechnung der von den  $\mathfrak{N}$  und  $Q$  abhängigen Glieder so einfach wie möglich zu gestalten. Bei den hier hauptsächlich in Betracht kommenden Stichbogen ist die Abweichung des Parabelbogens vom Kreisbogen so gering, daß ihr Einfluß auf die von  $\mathfrak{N}$  und  $Q$  abhängigen Glieder unwesentlich ist. Es soll deshalb bei der Berücksichtigung des Einflusses von  $\mathfrak{N}$  und  $Q$  hinsichtlich der Bogenform jedesmal die bequemste Annahme gemacht werden.

Die Gleichung der elastischen Linie lautet, wenn die  $EJ_c$ -fachen Durchbiegungen für den Zustand  $X_\alpha = -1$  der Kürze wegen mit  $\delta_{\alpha m}$  bezeichnet werden,

$$(7) \quad \frac{d^2 \delta_{m\alpha}}{dx^2} = \frac{M_\alpha J_c}{J \cos \varphi} - \frac{EJ_c}{G} \frac{d \left( \frac{Q_\alpha}{F_s} \right)}{dx} + \frac{J_c d \left( \frac{\mathfrak{N}_\alpha \operatorname{tg} \varphi}{F} \right)}{dx} - \frac{\mathfrak{N}_\alpha J_c}{Fr \cos \varphi}.$$

Nun ist für den Kreisbogen mit den aus Fig. 391 ersichtlichen Bezeichnungen:

$$y = r \cos \varphi - c, \quad x'' = r \sin \varphi, \quad \frac{d \sin \varphi}{d x''} = - \frac{d \sin \varphi}{d x} = \frac{1}{r},$$

$$(8) \quad \mathfrak{N}_a = \cos \varphi - \frac{y}{r} = \frac{c}{r}, \quad \overline{Q}_a = \sin \varphi.$$

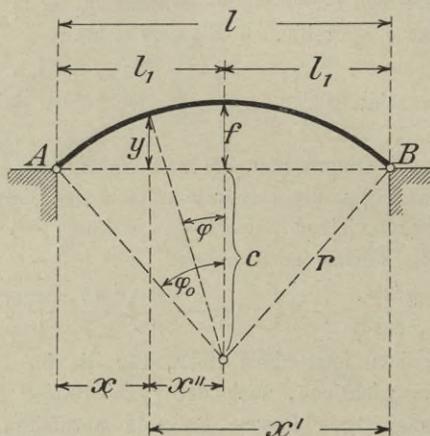


Fig. 391.

Nimmt man also  $F_s$  unveränderlich an und ersetzt man  $F \cos \varphi$  durch den Mittelwert  $F'$ , so erhält man

$$\begin{aligned} & - \frac{EJ_c}{G} \frac{d \left( \frac{Q_a}{F_s} \right)}{dx} + J_c \frac{d \left( \frac{\mathfrak{N}_a \sin \varphi}{F \cos \varphi} \right)}{dx} - \frac{\mathfrak{N}_a J_c}{F r \cos \varphi} \\ & = \frac{EJ_c}{G F_s} \frac{1}{r} - 2 \frac{J_c}{F'} \frac{c}{r^2} \end{aligned}$$

und die Gleichung der elastischen Linie geht, wegen  $M_a = y$ , über in

$$(9) \quad \frac{d^2 \delta_{ma}}{dx^2} = y \frac{J_c}{\cos \varphi} + \frac{1}{r} \left( \frac{EJ_c}{G F_s} - 2 \frac{J_c}{F'} \frac{c}{r} \right).$$

Wir zerlegen  $\delta_{ma}$  in

$$\delta_{ma} = \delta'_{ma} + \delta''_{ma}.$$

Der erste Teil,  $\delta'_{ma}$ , hängt von den Momenten  $M_a = y$  ab, der zweite,  $\delta''_{ma}$ , von den  $\mathfrak{N}$  und  $Q$ . Die  $\delta''_{ma}$ -Linie ist die Momentenlinie eines gleichmäßig mit

$$\frac{1}{r} \left( \frac{EJ_c}{G F_s} - 2 \frac{J_c}{F'} \frac{c}{r} \right)$$

belasteten einfachen Balkens; sie ist also eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$\frac{l^2}{8} \frac{1}{r} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_s} - 2 \frac{J_c}{F'} \frac{c}{r} \right).$$

Ihre Gleichung lautet

$$(10) \quad \delta''_{ma} = \frac{xx'}{2r} \left( \frac{EJ_c}{GF_s} - 2 \frac{J_c}{F'} \frac{c}{r} \right),$$

wo

$$(11) \quad r = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + f^2}{2f}.$$

Die Formeln (10) und (11) sind auch für flache Parabelbogen brauchbar.

Ersetzen wir nun die  $\delta'_{ma}$ -Linie durch eine inhaltsgleiche Parabel, ein Vorgehen, das sich namentlich im Hinblick auf die im § 23, Nr. 114—117, durchgeführte Untersuchung empfiehlt, so erhalten wir als Einflußlinie für  $X_a$  eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$(12) \quad z_0 = \frac{\frac{3}{2l} \int_0^l \delta'_{ma} dx + \frac{l^2}{8r} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_s} - 2 \frac{J_c}{F'} \frac{c}{r} \right)}{\delta_{aa}}.$$

Der Einfluß von  $\mathfrak{N}$  auf  $\delta_{aa}$  ist

$$J_c \int_0^l \frac{\mathfrak{N}_a^2 ds}{F} = \frac{J_c}{F'} \int_0^l \mathfrak{N}_a^2 dx = \frac{J_c}{F'} \frac{c^2 l}{r^2}.$$

Der Einfluß von  $Q$  beträgt

$$\frac{EJ_c}{G} \int_0^l \frac{Q^2 ds}{F_s} = \frac{EJ_c}{GF_s} 2r \int_0^{\varphi_0} \sin^2 \varphi d\varphi = \alpha \frac{EJ_c}{GF_s} l,$$

wo

$$(13) \quad \alpha = \frac{r}{l} \varphi_0 - \frac{1}{2} \cos \varphi_0.$$

Bei flachen Bogen darf man auch schreiben

$$\int_0^l \sin^2 \varphi ds = \int_0^l \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi dx = (\text{angenähert}) \int_0^l \operatorname{tg}^2 \varphi dx$$

und erhält, indem man den Bogen als Parabelbogen betrachtet,

$$\int_0^l \operatorname{tg}^2 \varphi dx = \frac{16}{3} \frac{f^2}{l},$$

also

$$(14) \quad \alpha = \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2}.$$

Ist z. B.  $\frac{f}{l} = \frac{1}{8}$ , so liefern die Gleichungen (13) und (14) die nur wenig voneinander abweichenden Werte  $\alpha = 0,080$  und  $0,083$ . Der Unterschied ist unwesentlich. In der Regel darf man also setzen

$$(15) \quad \delta_{aa} = \int_0^l y^2 \frac{J_c}{J \cos \varphi} ds + \frac{E J_c}{G F_s} l \left( 1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} \right) + \frac{J_c}{F'} l \frac{c^2}{r^2}.$$

Bei der weiteren Entwicklung wollen wir zwischen Parabelbogen und Kreisbogen unterscheiden.

**153. Parabelbogen.** Es empfiehlt sich die Annahme eines unveränderlichen  $J \cos \varphi$ . Wird dann das bisher beliebige Trägheitsmoment  $J_c$  gleich dem Mittelwerte der  $J \cos \varphi$  gemacht, so entsteht

$$\frac{d^2 \delta'_{ma}}{dx^2} = -y = -\frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Die  $\delta'_{ma}$ -Linie ist die zur  $y$ -Fläche gehörige Momentenlinie eines einfachen Balkens; ihre Gleichung ist

$$(16) \quad \delta'_{ma} = \omega_p'' \frac{fl^2}{3} = \left( \frac{x^4}{l^4} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right) \frac{fl^2}{3}.$$

Man erhält

$$(17) \quad \frac{3l}{2} \int_0^l \delta'_{ma} dx = \frac{fl^2}{10},$$

ferner

$$(18) \quad \int_0^l y^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l.$$

Die Pfeilhöhe der  $X_a$ -Parabel ist also nach Gleich. (12)

$$(19) \quad z_0 = \frac{\frac{1}{10} fl^2 + \frac{l^2}{8r} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_s} - 2 \frac{J_c}{F'} \frac{c}{r} \right)}{\frac{8}{15} f^2 l + \frac{16}{3} \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_s} \frac{f^2}{l} + \frac{J_c}{F_c} l \frac{c^2}{r^2}}$$

und dieser Wert läßt sich auf die Form bringen

$$(20) \quad z = \frac{3l}{16f} \nu,$$

wo

$$(21) \quad \nu = \frac{1 + \frac{5}{4fr} \left( \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_s} - 2 \frac{J_c}{F_c} \frac{c}{r} \right)}{1 + \frac{10}{l^2} \frac{E}{G} \frac{J_c}{F_s} + \frac{15}{8f^2} \frac{c^2}{r^2} \frac{J_c}{F_c}}.$$

Hierbei muß  $r$  nach Gleich. (11) berechnet und  $c = r - f$  gesetzt werden.

Die Kämpferdrucklinie ist eine wagerechte Gerade in der Höhe

$$(22) \quad y_k = \frac{4f}{3\nu}.$$

Vgl. Abteilung 1, § 7, Nr. 86.

Vernachlässigt man, wie dies gewöhnlich geschieht, den Einfluß der  $\mathfrak{R}$  und  $Q$  auf  $\delta_{ma}$  und nimmt man (mit  $N_a = 1$ )

$$\delta_{aa} = \int_0^l M_a^2 dx + \frac{J_c}{F_c} \int_0^l N_a^2 dx = \int_0^l y^2 dx + \frac{J_c l}{F_c} = \frac{8}{15} f^2 l + \frac{J_c l}{F_c}$$

an, so erhält man

$$(23) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J_c}{F_c f^2}}.$$

Die Ergebnisse der Formeln (21) und (23) weichen nur wenig voneinander ab. Es ist auch gleichgültig, ob man bei der Berechnung von  $\nu$  die Werte  $J \cos \varphi$  und  $F \cos \varphi$  durch  $J$  und  $F$  ersetzt. Daß die Ziffer  $\nu$  in dieser Beziehung wenig empfindlich ist, wird die folgende Zahlenrechnung zeigen.

Es sei  $l = 48$  m,  $f = \frac{1}{8} l = 6$  m, also

$$r = \frac{24^2 + 6^2}{2 \cdot 6} = 51 \text{ m}^*), \quad c = r - f = 45 \text{ m}.$$

Mit  $E = 2,6 G$  liefert Gleichung (21), wenn  $J_c$  und  $F_c$  durch  $J$  und  $F$  ersetzt werden,

$$(I) \quad \nu = \frac{1 + 0,01062 \frac{J}{F_s} - 0,00721 \frac{J}{F}}{1 + 0,01128 \frac{J}{F_s} + 0,04055 \frac{J}{F}}.$$

\*) Für den Parabelbogen ist  $r$  ein mittlerer Krümmungsradius.

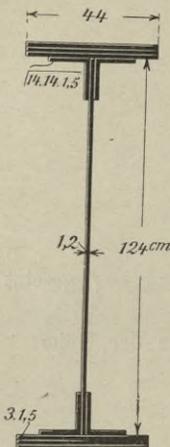


Fig. 392.

Gleichung (23) gibt

$$(II) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{10J}{192F}}$$

Der Bogen besitze an der stärkst beanspruchten Stelle den in Fig. 392 dargestellten Querschnitt. Der Inhalt des Stehblechquerschnitts beträgt ohne Abzug für Nietlöcher  $F_s = 149$  qcm. Die ebenfalls ohne Nietabzug gerechneten Werte  $J$  und  $F$  der Querschnitte mit 3 oder 2 Platten oder einer Platte in jeder Gurtung und die zugehörigen Werte  $\nu$  und

$$z_0 = \frac{3l}{16f} \nu = 1,5 \nu$$

sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

Anzahl der Gurtplatten	$J$ cm <sup>4</sup>	$F$ cm <sup>2</sup>	$\frac{J}{F}$ m <sup>2</sup>	$\frac{J}{F_s}$ m <sup>2</sup>	nach Gleich. (I)		nach Gleich. (II)	
					$\nu$	$z$	$\nu$	$z$
3	2362897	705	0,335	1,586	0,9835	1,475	0,9829	1,474
2	1792228	573	0,313	1,203	0,9847	1,477	0,9840	1,476
1	1247299	441	0,283	0,837	0,9862	1,479	0,9855	1,478

Sämtliche gewonnene Zahlen  $\nu$  und  $z$  sind praktisch gleichwertig. Man wird im vorliegenden Falle  $z_0 = 1,477$  wählen. Auch kann es sich empfehlen, zur Sicherheit mit zwei verschiedenen Werten  $\nu$  zu rechnen. So werden z. B. die weiteren Untersuchungen zeigen, daß die Kernpunktmomente  $M^o$  um so größer ausfallen, je größer  $\nu$  ist, während für die Momente  $M^u$  ein kleineres  $\nu$  ungünstiger ist.

Aus den Gleichungen (20) und (23) folgt für  $X_\alpha$  auch der Ausdruck

$$(24) \quad X_\alpha = \frac{\int_0^l M_o dx}{\int_0^l y dx} \nu,$$

was aus der auf Seite 395 für die durch einen Balken versteifte Kette durchgeführten Entwicklung hervorgeht.

**154. Der Kreisbogen.** Hier empfiehlt sich die Annahme unveränderlicher Werte  $J$  und  $F$ . Mit den aus Fig. 391 ersichtlichen Bezeichnungen erhält man für die  $EJ_o$ -fachen Durchbiegungen  $\delta_{m\alpha}$  die Gleichung

$$\frac{d^2 \delta_{ma}}{dx''^2} = -\frac{y}{\cos \varphi} = -r + \frac{c}{\cos \varphi}$$

und, da  $dx'' = r \cos \varphi d\varphi$  ist,

$$\frac{d\delta_{ma}}{dx''} = -rx'' + cr\varphi.$$

Die Integrationskonstante ist gleich Null, weil für  $\varphi = 0$  auch  $\frac{d\delta_{ma}}{dx''} = 0$  sein muß.

Nun ist weiter

$$\begin{aligned} \delta_{ma} &= -\frac{rx''^2}{2} + \int cr^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + C \\ &= -\frac{rx''^2}{2} + cr^2(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) + C \\ &= -\frac{rx''^2}{2} + cr(\varphi x'' + y') + C. \end{aligned}$$

$x'' = l_1$  muß liefern  $\delta_{ma} = 0$ , daher

$$C = +\frac{rl_1^2}{2} - cr(\varphi_0 l_1 + c)$$

und

$$(25) \quad \delta_{ma} = \frac{r(l_1^2 - x''^2)}{2} - cr(\varphi_0 l_1 - \varphi x'') + cry.$$

Man erhält also

$$\int_0^l \delta_{ma} dx = 2 \int_0^{l_1} \delta_{ma} dx'' = \frac{2}{3} rl_1^3 - 2cr\varphi_0 l_1^2 + 2cr \int_0^{l_1} \varphi x'' dx'' + 2cr \int_0^{l_1} y dx.$$

Da nun

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{l_1} \varphi x'' dx'' &= 2r^2 \int_0^{\varphi_0} \varphi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{r^2}{4} \int_0^{\varphi_0} 2\varphi \sin 2\varphi d2\varphi \\ &= \frac{r^2}{4} (-2\varphi_0 \cos 2\varphi_0 + \sin 2\varphi_0) \\ &= -\frac{r^2 \varphi_0}{2} (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0) + \frac{r^2}{2} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\ &= -\frac{\varphi_0}{2} (c^2 - l_1^2) + \frac{1}{2} cl_1, \end{aligned}$$

ferner

$$2 \int_0^{l_1} y dx = r^2 \varphi_0 - l_1 c$$

ist, so folgt

$$2 \int_0^{l_1} \delta_{ma} dx = \frac{1}{2} r l_1 \left( \frac{4}{3} l_1^2 - c^2 \right) + \frac{1}{2} \varphi_0 c r (c^2 - l_1^2).$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^l y^2 ds &= 2 r^3 \int_0^{\varphi_0} (\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi_0 \cos \varphi + \cos^2 \varphi_0) d\varphi \\ &= r^3 (\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \varphi_0 - 4 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + 2 \cos^2 \varphi_0 \varphi_0) \end{aligned}$$

und nach Einführung von  $l_1$  und  $c$ :

$$(26) \quad \int_0^l y^2 ds = \varphi_0 r^3 - 3 r c l_1 + 2 r c^2 \varphi_0.$$

Man erhält daher mittels Gleich. (12) für den Pfeil der  $X_a$ -Parabel den Wert:

$$(27) \quad z_0 = \frac{\varphi_0 \frac{3cr}{8l_1} (c^2 - l_1^2) - \frac{3r}{8} \left( c^2 - \frac{4}{3} l_1^2 \right) + \frac{l_1^2}{2r} \left( \frac{EJ}{GF_s} - 2 \frac{Jc}{Fr} \right)}{\varphi_0 r (r^2 + 2c^2) - 3cr l_1 + \frac{8}{3} \frac{EJ}{F_s} \frac{f^2}{l_1} + 2 \frac{J}{F} l_1 \frac{c^2}{r^2}}.$$

Für  $l_1 = 24$  m,  $f = 6$  m,  $r = 51$  m,  $c = 45$  m,  $\varphi_0 = 0,489958$  ( $28^\circ 4' 21''$ ) ergibt sich

$$z_0 = \frac{1418,21 + 14,682 \frac{J}{F_s} - 9,965 \frac{J}{F}}{954,24 + 10,400 \frac{J}{F_s} + 37,370 \frac{J}{F}}.$$

Wird wieder der in Fig. 392 dargestellte Querschnitt angenommen, so erhält man

bei	3 Gurtplatten	2 Gurtplatten	1 Gurtplatte
	$z_0 = 1,463$	$1,464$	$1,467$ .

Man wird etwa  $z_0 = 1,465$  wählen. Die Abweichung zwischen diesem Werte und dem für den Parabelbogen gewonnenen  $z_0 = 1,477$  ist unerheblich.

**155. Beliebig geformter Bogen.** Wir gehen von der Formel

$$(28) \quad X_a = \frac{\delta_{0a}}{\delta_{aa}}$$

aus, vernachlässigen den Einfluß der Querkräfte  $Q$ , ebenso den Einfluß der  $N$  auf  $\delta_{0a}$ , rechnen also mit

$$(29) \quad \delta_{0a} = \int \frac{M_0 M_a ds}{EJ} = \int \frac{M_0 y dx}{J \cos \varphi}$$

und setzen

$$(30) \quad \delta_{aa} = \int_0^l \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \int_0^l \frac{N_a^2 ds}{EF} = \int_0^l \frac{y^2 dx}{EJ \cos \varphi} + \int_0^l \frac{\cos \varphi dx}{EF}$$

Nun machen wir die Annahme, es seien  $\frac{y}{J \cos \varphi}$  und  $\frac{\cos \varphi}{F}$  konstant, nämlich gleich  $\frac{f}{J_c}$  bzw.  $\frac{1}{F_c}$ , wo  $J_c$  und  $F_c$  das Trägheitsmoment und den Inhalt des Scheitelquerschnitts bedeuten, und erhalten

$$(31) \quad X_a = \frac{\int_0^l M_0 dx}{\int_0^l y dx + \frac{J_c l}{F_c f}}$$

Der Inhalt der  $M_0$ -Fläche für eine im Abstände  $x$  von  $A$  angreifende Last 1 ist

$$\int_0^l M_0 dx = \frac{x x'}{2}$$

Mit der Bezeichnung

$$\int_0^l y dx = \mathfrak{F}_y$$

erhält man

$$(32) \quad X_a = \frac{x x'}{2 \left( \mathfrak{F}_y + \frac{J_c l}{F_c f} \right)}$$

Die  $X_a$ -Linie ist hiernach eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$(33) \quad z_0 = \frac{l^2}{8 \left( \mathfrak{F}_y + \frac{J_c l}{F_c f} \right)}$$

Für den Parabelbogen ist

$$(34) \quad \mathfrak{F}_y = \frac{2lf}{3},$$

für den Kreisbogen

$$(35) \quad \mathfrak{F}_y = r^2 \varphi_0 - l_1 c.$$

Für den vorhin untersuchten Bogenträger ( $l = 48 \text{ m}$ ,  $f = 6 \text{ m}$ ) erhält man:

$$\text{Parabelbogen} \quad \mathfrak{F}_y = \frac{2}{3} \cdot 48 \cdot 6 = 192 \text{ m}^2,$$

$$\text{Kreisbogen} \quad \mathfrak{F}_y = 51^2 \cdot 0,489958 - 24 \cdot 45 = 194,3808 \text{ m}^2.$$

Also bei	3 Gurtplatten	2 Gurtplatten	1 Gurtplatte
$\frac{J_c}{F_c} =$	0,335	0,313	0,283
Parabelbogen $z_0 =$	1,479	1,481	1,483
Kreisbogen $z_0 =$	1,461	1,463	1,465.

Diese Werte  $z_0$  weichen von den vorhin berechneten nur wenig ab. Man erkennt, daß das Gesetz, nach dem sich  $J$  und  $F$  ändern, innerhalb ziemlich weiter Grenzen geändert werden darf, ohne daß eine wesentliche Änderung von  $z_0$  entsteht.

Ist die Bogenachse ein Halbkreis, so ist  $y \frac{ds}{dx}$  gleich dem Halbmesser  $r$  und die Formel (31) setzt dann ein konstantes  $J$  voraus.

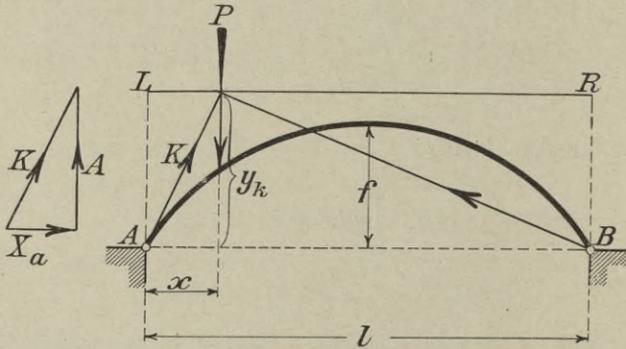


Fig. 393.

**156. Die Kämpferdrucklinie  $LR$ ,** Fig. 393, ist durch die Gleichung

$$y_k = \frac{A}{X_a} x$$

bestimmt; sie ist für den Fall einer parabelförmigen  $X_a$ -Linie eine wagerechte Gerade. Zu  $x = \frac{l}{2}$  gehört  $A = 0,5$  und  $X_a = z_0$ , weshalb

$$(36) \quad y_k = \frac{l}{4z_0}.$$

Berechnet man  $z_0$  mittels Gleichung (31), und streicht man das Glied  $\frac{J_c l}{F_c f}$ , so erhält man

$$(37) \quad y_k = \frac{2 \mathfrak{F}_y}{l}.$$

Der Inhalt des Rechtecks  $ALRB$  ist dann doppelt so groß wie der Inhalt der Fläche  $\mathfrak{F}_y$ .

Dem durch die Formeln (20) und (23) bestimmten Werte  $z_0$  entspricht

$$(38) \quad y_k = \frac{4f}{3v}.$$

### 157. Zweigelenbogen mit aufgehobenem Horizontalschube.

Wird das eine feste Auflager durch ein wagerechtes Gleitlager ersetzt und der Horizontalschub  $X_a$  durch eine wagerechte Zugstange vom Querschnitte  $F_z$  aufgenommen, Fig. 394, so wächst  $\delta_{aa}$  um den der Zugstange entsprechenden Wert

$$\frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{1 l}{EF_z}.$$

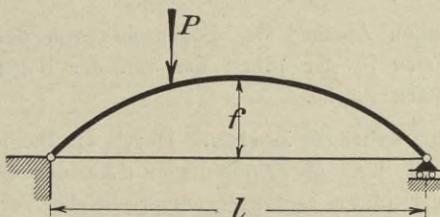


Fig. 394.

Es geht dann z. B. Gleich. (33) über in

$$(39) \quad z_0 = \frac{l^2}{8 \left( \mathfrak{F}_y + \frac{J_c}{F_c} \frac{l}{f} + \frac{J_c}{F_z} \frac{l}{f} \right)}.$$

Bei Dachbindern erhält die Zugstange zuweilen eine leichte Sprengung  $f_u$  (Fig. 395). Der Zuwachs von  $\delta_{aa}$  beträgt dann

$$\Sigma \frac{S_a^2 s}{EF} = \Sigma \frac{s \sec^2 \alpha}{EF},$$

wofür man auch setzen darf

$$(40) \quad \Sigma \frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{l}{EF_z} \left( 1 + \frac{16}{3} \frac{f_u^2}{l^2} \right).$$

Verfasser rechnet bei Dachbindern mit dem einfachen Werte

$$(41) \quad z_0 = \frac{l^2}{8 \mathfrak{F}_y},$$

weil die Bestimmung der Hauptlasten, Schnee und Winddruck, auf größeren Schätzungen beruht und bei den üblichen Pfeilhöhen der Dachbinder der Einfluß der von den Querschnitten  $F_c$  und  $F_z$  abhängigen Glieder des Nenners von  $X_a$  verhältnismäßig gering ist.

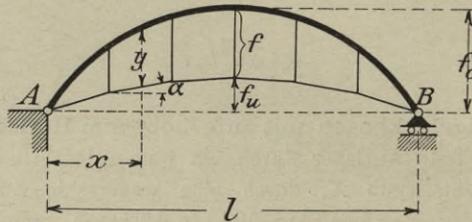


Fig. 395.

Das Biegemoment für den Querschnitt eines Bogens mit gespannter Zugstange ist

$$M = M_0 - X_a y,$$

wo  $y$  den lotrechten Abstand der Bogenachse von der Zugstange bedeutet. Es ist also  $\mathfrak{F}_y$  der Inhalt der von der Bogenachse und der Zugstange begrenzten Fläche.

**158. Einfluß schräger Lasten.** Durch die Biegelinie für den Zustand  $X_a = -1$  und die Änderungen  $d\Delta s$  der Bogenstückchen  $ds$  sind die beliebig gerichteten Lasten  $P_m$  entsprechenden Verschiebungen  $\delta_{ma}$  bestimmt. Es ist hierbei zulässig, den Bogen durch einen Stabzug zu ersetzen und das im § 28, Nr. 140 beschriebene Verfahren anzuwenden, mit dem Unterschiede, daß strenggenommen die  $\Delta s$  nicht nur von den Längskräften  $N$ , sondern auch von den Momenten  $M$  abhängig sind. Für den Halbkreis ist z. B. im Belastungsfalle  $X_a = -1$

$$N_a = + \cos \alpha, \quad M_a = y = r \cos \alpha, \quad \mathfrak{N} = N - \frac{M}{r} = 0,$$

also  $\Delta s = 0$ .

Die Untersuchung des Einflusses schräger Lasten ist besonders wichtig für die durch Winddruck beanspruchten Dachbinder. Hier handelt es sich aber um Lasten, deren Feststellung, wie schon oben hervorgehoben wurde, auf ziemlich groben Schätzungen beruht. Eine allzu peinliche Ermittlung der  $\delta_{ma}$  besitzt daher nur geringen Wert. Es empfiehlt sich die Vernachlässigung der Längenänderungen  $\Delta s$ . Beachtet man dann, daß die  $X_a$ -Linie, das ist die Linie  $A_0 1_0 2_0 3_0 \dots B_0$

der Figur 396, als die im Maßstabe  $\delta_{aa} = 1$  gezeichnete Biegelinie für den Zustand  $X_a = -1$  aufgefaßt werden kann, so gelangt man zu dem folgenden, durch große Einfachheit und Übersichtlichkeit sich auszeichnenden Verfahren.

Wird der wagerechte Widerstand  $H_B$  des rechten Auflagers  $B$  gesucht, so besitzt das statisch bestimmte Hauptssystem bei  $B$  ein wagerechtes Gleitlager. Punkt  $A$  liegt fest; der ihm im Verschiebungsplane für

$$X_o = H_B = -1$$

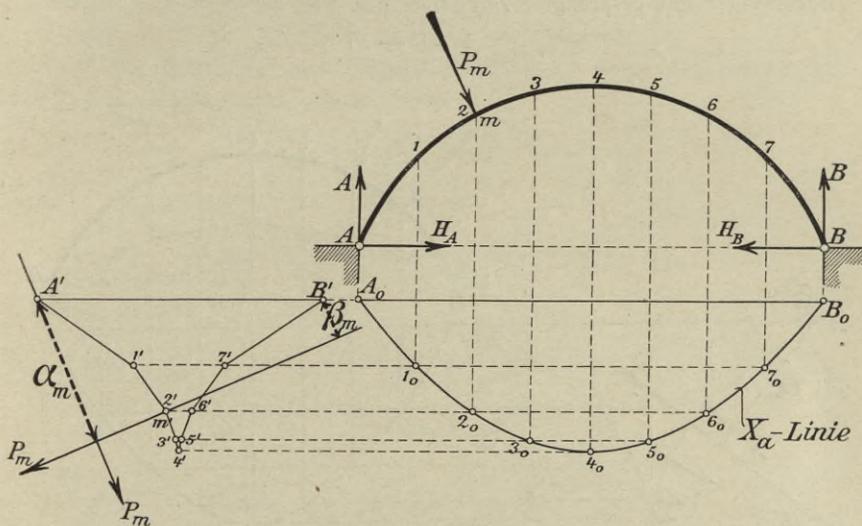


Fig. 396.

entsprechende, irgendwo in der Geraden  $A_0B_0$  angenommene Punkt  $A'$  ist der Pol des Verschiebungsplanes. Von  $A'$  aus wird der Normalenzug  $A'1'2'3'4'5' \dots B'$  gezeichnet, dessen Seiten  $A'1', 1'2', 2'3', \dots$  rechtwinklig zu den Sehnen  $A1, 12, 23, \dots$  sind, und dessen Eckpunkte  $1', 2', 3', \dots$  in den Wagerechten durch die entsprechenden Punkte  $1_0, 2_0, 3_0, \dots$  der  $X_a$ -Linie liegen. Greift nun in  $m$  eine schräg gerichtete Last  $P_m$  an, so gibt die Projektion  $\alpha_m$  der Strecke  $A'm$  auf die Richtung von  $P_m$  den durch eine Last  $P_m = 1$  erzeugten Horizontalschub  $H_B$  an. Wird der Widerstand  $H_A$  des linken Auflagers  $A$  gesucht, so ersetze man den Pol  $A'$  durch den Pol  $B'$ . Man erhält:

$$H_B = P_m \alpha_m, \quad H_A = P_m \beta_m.$$

Eine in  $B$  angreifende, nach rechts gerichtete wagerechte Last  $1$  erzeugt  $H = 1$ . Es müßte also Strecke  $A'B' = 1$  sein. Das ist nun

wegen der Vernachlässigung der  $\Delta s$  nicht der Fall; der begangene Fehler ist aber belanglos. Bringt man die um  $90^\circ$  nach rechts gedrehte Last  $P_m$  im Punkte  $m'$  an, so ist  $H_B$  gleich dem Momente von  $P_m$  in bezug auf  $A'$  und  $H_A$  gleich dem Momente von  $P_m$  in bezug auf  $B'$ ; wobei die Rechtsdrehung als die positive anzunehmen ist. Greift am Bogen eine Gruppe von Lasten an, so werden die auf die beschriebene Weise in den Verschiebungsplan übertragenen Lasten zu einer Mittelkraft zusammengesetzt.

Figur 397 stellt einen durch linksseitigen Winddruck beanspruchten Bogenträger mit gesprengter Zugstange dar. Es sei

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

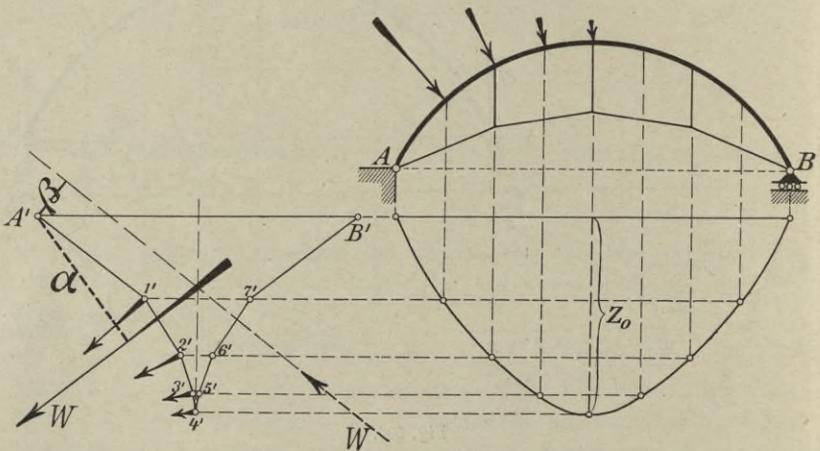


Fig. 397.

Als  $X_a$ -Linie darf eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$z = \frac{3l}{16f}$$

angenommen werden. Die Mittelkraft der um  $90^\circ$  gedrehten Windlasten ist  $W$ . Das wagerechte Gleitlager liege bei  $B$ . Es entsteht in der Zugstange der Horizontalschub

$$X_a = W\alpha.$$

Kommt der Wind von der rechten Seite, so erzeugt er

$$X_a = W\beta.$$

In der Folge führen wir für den Horizontalschub die bequemere Bezeichnung  $H$  ein.

**159. Einfluß der Formänderungen  $\Delta y$  auf die Biegemomente und den Horizontalschub.** Ein Zweigelenkbogen trage die ständige Belastung und habe unter ihrem Einflusse eine bestimmte Form angenommen, die als gegeben angesehen werden möge; sein Horizontalschub sei  $H_g$ . Nun werden weitere Lasten  $P$  aufgebracht. Die Ordinaten  $y$  gehen über in  $y + \Delta y$ . Sollen die  $\Delta y$  bei der Berechnung der von den Lasten  $P$  hervorgerufenen Biegemomente berücksichtigt werden, so muß der Ausdruck

$$M = M_0 - Hy$$

ersetzt werden durch

$$(42) \quad M = M_0 - Hy - (H + H_g) \Delta y.$$

Die Gleichung der Biegelinie lautet, wenn der Einfluß der  $\mathfrak{N}$  und  $Q$  außer acht gelassen wird,

$$\frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = + \frac{M}{EJ'}, \quad \text{wo } J' = J \cos \phi.$$

Bei konstantem  $EJ'$  entsteht

$$EJ' \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} + (H + H_g) \Delta y = M_0 - Hy$$

und, mit der Bezeichnung

$$(43) \quad k = \sqrt{\frac{EJ'}{H + H_g}},$$

$$(44) \quad k^2 \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} + \Delta y = \frac{H}{H + H_g} f(x),$$

wo

$$(45) \quad f(x) = \frac{M_0}{H} - y.$$

Ist  $f(x)$  eine ganze rationale Funktion, so entspricht der Gleichung (44) das allgemeine Integral

$$(46) \quad \Delta y = \frac{H}{H + H_g} \left( C_1 \sin \frac{x}{k} + C_2 \cos \frac{x}{k} + f(x) - k^2 f''(x) + k^4 f''''(x) - + \dots \right).$$

Durch zweimaliges Differenzieren von (46) entsteht

$$k \frac{d \Delta y}{dx} = \frac{H}{H + H_g} \left( + C_1 \cos \frac{x}{k} - C_2 \sin \frac{x}{k} + k f'(x) - k^3 f'''(x) + k^5 f''''(x) - + \dots \right),$$

$$k^2 \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = \frac{H}{H + H_g} \left( - C_1 \sin \frac{x}{k} - C_2 \cos \frac{x}{k} + k^2 f''(x) - k^4 f''''(x) + - \dots \right).$$

Nun ist:

$$M = EJ' \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = (H + H_y) k^2 \frac{d^2 \Delta y}{dx^2},$$

$$(47) \quad M = -H \left( C_1 \sin \frac{x}{k} + C_2 \cos \frac{x}{k} - k^2 f''(x) \right. \\ \left. + k^4 f''''(x) - + \dots \right).$$

Bei sehr flachen Bogenbrücken — und nur für diese ist die Untersuchung des Einflusses der  $\Delta y$  wichtig — darf man die Annahme machen, es sei die Bogenachse eine Parabel, es sei also

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Für *Einzellasten* ist  $M_0$  vom ersten Grade und

$$f''(x) = -\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{8f}{l^2}.$$

Mit der Bezeichnung

$$(48) \quad u = k^2 f''(x) = \frac{8fk^2}{l^2}$$

ergibt sich

$$(49) \quad \Delta y = \frac{H}{H + H_y} \left( C_1 \sin \frac{x}{k} + C_2 \cos \frac{x}{k} + \frac{M_0}{H} - y + u \right),$$

$$(50) \quad M = -H \left( C_1 \sin \frac{x}{k} + C_2 \cos \frac{x}{k} - u \right),$$

$$(51) \quad Q = -H \left( C_1 \cos \frac{x}{k} - C_2 \sin \frac{x}{k} \right).$$

Die Integrationskonstanten nehmen innerhalb der verschiedenen Strecken, in welche der Bogen durch die Einzellasten zerlegt wird, verschiedene Werte an.

Greift am Bogen nur eine Last  $P$  an, so erhält man mit den aus Fig. 398 ersichtlichen Bezeichnungen für den Teil a:

$$M = -H \left( C_1 \sin \frac{x}{k} + C_2 \cos \frac{x}{k} - u \right)$$

$$Q = -\frac{H}{k} \left( C_1 \cos \frac{x}{k} - C_2 \sin \frac{x}{k} \right),$$

für den Teil b:

$$M = -H \left( C_1' \sin \frac{x}{k} + C_2' \cos \frac{x}{k} - u \right)$$

$$Q = -\frac{H}{k} \left( C_1' \cos \frac{x}{k} - C_2' \sin \frac{x}{k} \right).$$

In beiden Teilen wird  $M = 0$  für  $x = 0$ . Diese Bedingung liefert

$$C_2 = C_2' = u.$$

Schreiben wir also kürzer  $C$  und  $C'$  statt  $C_1$  und  $C_1'$ , so erhalten wir für den Teil a:

$$M = -H \left[ C \sin \frac{x}{k} - u \left( 1 - \cos \frac{x}{k} \right) \right]$$

$$Q = -\frac{H}{k} \left[ C \cos \frac{x}{k} - u \sin \frac{x}{k} \right],$$

für den Teil b:

$$M = -H \left[ C' \sin \frac{x}{k} - u \left( 1 - \cos \frac{x}{k} \right) \right]$$

$$Q = -\frac{H}{k} \left[ C' \cos \frac{x}{k} - u \sin \frac{x}{k} \right].$$

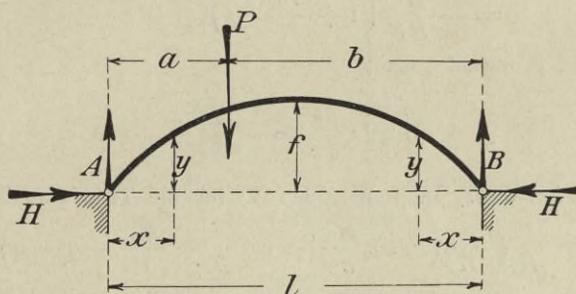


Fig. 398.

Nun muß aber sein:

$$M_{x=a} = M_{x=b}$$

$$Q_{x=a} + Q_{x=b} = P$$

mithin:

$$(52) \quad C \sin \frac{a}{k} - C' \sin \frac{b}{k} = u \left( 1 - \cos \frac{a}{k} \right) - u \left( 1 - \cos \frac{b}{k} \right)$$

$$= -u \cos \frac{a}{k} + u \cos \frac{b}{k}$$

$$(53) \quad C \cos \frac{a}{k} + C' \cos \frac{b}{k} = +u \sin \frac{a}{k} + u \sin \frac{b}{k} - P \frac{k}{H}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$(54) \quad C = \frac{-\frac{Pk}{H} \sin \frac{b}{k} + u \left( 1 - \cos \frac{l}{k} \right)}{\sin \frac{l}{k}},$$

$$(55) \quad C' = \frac{-\frac{Pk}{H} \sin \frac{a}{k} + u \left( 1 - \cos \frac{l}{k} \right)}{\sin \frac{l}{k}}.$$

Zur Berechnung von  $H$  ergibt sich aus der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

genau wie in Nr. 115 die Bedingung

$$(56) \quad \int_0^l \Delta ds \frac{ds}{dx} = \frac{8f}{l^2} \int_0^l \Delta y dx^*.$$

Wir rechnen rund mit  $N = -H$ , nehmen  $F$  konstant an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^l \Delta ds \frac{ds}{dx} &= \int_0^l \frac{\Delta ds}{ds} \cdot \frac{ds^2}{dx^2} dx = -\frac{H}{EF} \int_0^l \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx \\ &= -\frac{Hl}{EF} \left( 1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} \right), \end{aligned}$$

wofür auch, genügend genau,

$$(57) \quad \int_0^l \Delta ds \frac{ds}{dx} = -\frac{Hl}{EF}$$

gesetzt werden darf. Da nun nach (49) für die Teile a und b:

$$\Delta y = \frac{H}{H + H_g} \left( C \sin \frac{x}{k} + u \cos \frac{x}{k} + \frac{M_0}{H} - y - u \right) \text{ bzw.}$$

$$\Delta y = \frac{H}{H + H_g} \left( C' \sin \frac{x}{k} + u \cos \frac{x}{k} + \frac{M_0}{H} - y - u \right)$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{H + H_g}{H} \int_0^l \Delta y dx &= k \left[ -C \left( \cos \frac{a}{k} - 1 \right) + u \sin \frac{x}{k} - C' \left( \cos \frac{b}{k} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + u \sin \frac{b}{k} \right] + \frac{1}{H} \int_0^l M_0 dx - \int_0^l y dx - ul, \end{aligned}$$

wofür mit Rücksicht auf (53) auch geschrieben werden darf

$$\frac{H + H_g}{H} \int_0^l \Delta y dx = k \left( \frac{Pk}{H} + C + C' \right) - ul + \frac{1}{H} \int_0^l M_0 dx - \int_0^l y dx.$$

Gleich. (56) geht über in

$$\begin{aligned} \frac{(H + H_g) l^3}{8EFf} &= \frac{H + H_g}{H} \int_0^l \Delta y dx \\ &= k^2 \left( \frac{P}{H} + \frac{C + C'}{k} - \frac{8f}{l} \right) + \frac{1}{H} \int_0^l M_0 dx - \int_0^l y dx. \end{aligned}$$

\*) Nach Formel (20) und (22) Seite 401.

Setzt man zur Abkürzung

$$(58) \quad \frac{P}{H} + \frac{C + C'}{k} = \mathfrak{S},$$

so findet man mit  $\int_0^l y dx = \frac{2fl}{3}$

$$(59) \quad H = \frac{\int_0^l M_0 dx}{\int_0^l y dx} \quad \nu' = \frac{3Pab}{4fl} \nu'$$

wo

$$\nu' = \frac{1}{1 - \frac{3}{16} \frac{(H + H_g) l^2}{EFf^2} + \frac{3k^2}{2fl} \left( \frac{8f}{l} - \mathfrak{S} \right)}$$

Gleichung (59) unterscheidet sich von der auf Seite 520 abgeleiteten Formel (24) nur dadurch, daß an Stelle von

$$(60) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J'}{Ff^2}}$$

der Wert  $\nu'$  getreten ist. Wird

$$\frac{H + H_g}{EFf^2} = \frac{J'}{k^2 Ff^2}$$

gesetzt und mittels Gleich. (60)  $J'/Ff^2$  durch  $\nu$  ausgedrückt, so geht  $\nu'$  über in

$$(61) \quad \nu' = \frac{1}{1 - 0,1 \frac{l^2}{k^2} \frac{1 - \nu}{\nu} + 1,5 \frac{k^2}{fl} \left( \frac{8f}{l} - \mathfrak{S} \right)}$$

Setzt man noch für  $C$  und  $C'$  die durch die Gleichungen (54) und (55) gegebenen Werte, so entsteht

$$(62) \quad \mathfrak{S} = \frac{P}{H} \left( 1 - \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \lambda} \right) + 16 \frac{fk}{l^2} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2},$$

wo

$$\alpha = \frac{a}{k}, \quad \beta = \frac{b}{k}, \quad \lambda = \frac{l}{k}.$$

Die Gleichungen (61) und (62) haben eine ähnliche Form, wie die für die versteifte Kette abgeleiteten Gleichungen (30) (Seite 403) und

(40) (Seite 405). Man berechnet  $H$  zuerst nach der Näherungsformel  $H = \frac{3Pab}{4fl} \nu$  und verbessert diesen Wert mit Hilfe der Gleichung (59).

Bei flachen Bogen darf man  $J'$  durch  $J$  ersetzen.

**Zahlenbeispiel.** Es sei  $l = 48$  m,  $f = 6$  m,  $P = 19$  t,  $a = b = \frac{l}{2} = 24$  m. Jeder der beiden Hauptträger habe den in Fig. 392 dargestellten Querschnitt mit  $J = 2363000$  cm<sup>4</sup>. Für beide Hauptträger zusammen ist  $EJ = 2 \cdot 2150000 \cdot 2363000$  kgcm<sup>2</sup> = 1016000 tm<sup>2</sup>. Mit  $F = 705$  cm<sup>2</sup> ergibt sich

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J}{Ff^2}} = 0,983 \text{ und}$$

$$H = \frac{3Pl}{16f} \nu = 1,5 P \nu = 1,5 \cdot 19 \cdot 0,983 = 28,0 \text{ t.}$$

Einer ständigen Belastung  $g = 3$  t/m entspricht

$$H_g = \frac{gl^2}{8f} \nu = gl \nu = 3 \cdot 48 \cdot 0,983 = 141,6 = 142 \text{ t.}$$

Es ist also

$$H + H_g = 170 \text{ t, } k^2 = \frac{EJ}{H + H_g} = 5976,47, \quad k = 77,308.$$

Für  $a = b = \frac{1}{2} l$  geht Gleichung (62) über in

$$(63) \quad \mathfrak{D} = 16 \frac{fk}{l^2} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} - \frac{P}{H} \left( \sec \frac{\lambda}{2} - 1 \right).$$

$$\text{Zu } \frac{\lambda}{2} = \frac{l}{2k} = \frac{24}{77,308} = 0,3104465 \text{ gehört der Winkel } 17^\circ 47' 14'',$$

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = 0,32082, \quad \sec \frac{\lambda}{2} = 1,05020.$$

Nun ist  $16 \frac{f}{l^2} = \frac{2}{l} = \frac{1}{24}$ , also

$$\mathfrak{D} = \frac{77,308 \cdot 0,32082}{24} - \frac{19 \cdot 905020}{28} = 0,999351$$

$$\frac{8f}{l} - \mathfrak{D} = 1,0 - \mathfrak{D} = 0,000649,$$

$$\nu' = \frac{1}{1 - 0,1 \cdot 0,621^2 \frac{0,017}{0,983} + \frac{5976,47}{192} 0,000649} = 0,981$$

$$H = 1,5 P \nu' = 28,5 \nu' = 28,0 \text{ t.}$$

Das Biegemoment für den Querschnitt, in welchem  $P$  angreift, ist

$$M = -H \left[ C \sin \frac{\lambda}{2} - u (1 - \cos \lambda) \right].$$

Der Wert  $C$  geht für  $\alpha = \beta = \frac{\lambda}{2}$  über in

$$(64) \quad C = -\frac{Pk}{2H \cos \frac{\lambda}{2}} + u \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}$$

und liefert mit  $u = \frac{8fk^2}{l^2}$  das Moment

$$(65) \quad M = \frac{Pk}{2} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} - \frac{8fk^2}{l^2} H \left( \sec \frac{\lambda}{2} - 1 \right) \\ = 9,5 \cdot 77,308 \cdot 0,32082 - \frac{28}{48} 0,05020 = 60,6 \text{ tm.}$$

Die gewöhnliche Rechnung gibt

$$M = M_0 - Hy = 9,5 \cdot 24 - 28,0 \cdot 6,0 = 60,0 \text{ tm.}$$

Der genauere Wert  $M$  weicht im vorliegenden Falle nur wenig von dem gewöhnlichen Näherungswerte ab. Je flacher aber der Bogen und je größer die ständige Last ist, desto größer ist der Einfluß des Gliedes  $(H + H_g) \Delta y$ .

Ist die Strecke  $a$  gleichförmig mit  $p$ , die Strecke  $b$  gleichförmig mit  $p'$  belastet, Fig. 399, so erhält man für

$$\text{Strecke a:} \quad u = k^2 f''(x) = k^2 \left( \frac{8f}{l^2} - \frac{p}{H} \right)$$

$$\text{Strecke b:} \quad u' = k^2 \left( \frac{8f}{l^2} - \frac{p'}{H} \right),$$

ferner für die Strecke a:

$$(66) \quad \begin{cases} M = -H \left[ C \sin \frac{x}{k} - u \left( 1 - \cos \frac{x}{k} \right) \right] \\ Q = -\frac{H}{k} \left[ C \cos \frac{x}{k} - u \sin \frac{x}{k} \right] \\ \Delta y = \frac{H}{H + H_g} \left[ C \sin \frac{x}{k} + u \cos \frac{x}{k} + \frac{M_0}{H} - y - u \right] \end{cases}$$

und für die Strecke b:

$$(67) \quad \begin{cases} M = -H \left[ C' \sin \frac{x}{k} - u' \left( 1 - \cos \frac{x}{k} \right) \right] \\ Q = -\frac{H}{k} \left[ C' \cos \frac{x}{k} - u' \sin \frac{x}{k} \right] \\ \Delta y = \frac{H}{H + H_g} \left[ C' \sin \frac{x}{k} + u' \cos \frac{x}{k} + \frac{M_0}{H} - y - u' \right]. \end{cases}$$

Zur Berechnung von  $C$  und  $C'$  dienen die Bedingungen

$$M_{x=a} = M_{x=b}$$

$$Q_{x=a} = -Q_{x=b};$$

diese lauten:

$$(68) \quad C \sin \alpha - C' \sin \beta = u(1 - \cos \alpha) - u'(1 - \cos \beta)$$

$$(69) \quad C \cos \alpha + C' \cos \beta = u \sin \alpha + u' \sin \beta.$$

Man findet

$$(70) \quad C = \frac{u(\cos \beta - \cos \lambda) + u'(1 - \cos \beta)}{\sin \lambda},$$

$$(71) \quad C' = \frac{u(1 - \cos \alpha) + u'(\cos \alpha - \cos \lambda)}{\sin \lambda}.$$

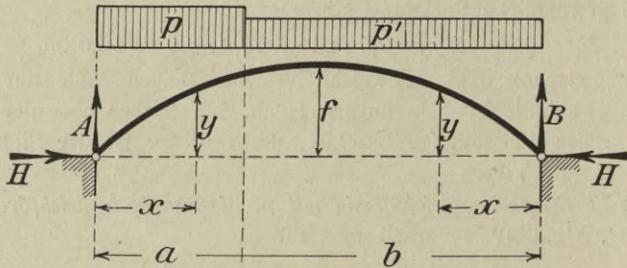


Fig. 399.

Zur Berechnung von  $H$  dient die Gleichung

$$-\frac{Hl}{EF} = \frac{8f}{l^2} \int_0^l \Delta y dx,$$

oder anders geschrieben

$$\frac{(H + H_g)l^3}{8EFf} = \frac{H + H_g}{H} \int_0^l \Delta y dx.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{H + H_g}{H} \int_0^l \Delta y dx &= k [-C(\cos \alpha - 1) + u \sin \alpha - C'(\cos \beta - 1) + u' \sin \beta] \\ &\quad - ua - u'b + \frac{1}{H} \int_0^l M_0 dx - \int_0^l y dx, \end{aligned}$$

oder wegen Gleichung (69)

$$\begin{aligned} \frac{H + H_y}{H} \int_0^l \Delta y dx &= k(C + C') - ua - u'b + \frac{1}{H_0} \int_0^l M_0 dx - \int_0^l y dx \\ &= k^2 \left( \mathfrak{S} - \frac{8f}{l} \right) + \frac{1}{H_0} \int_0^l M_0 dx - \int_0^l y dx, \end{aligned}$$

wo

$$(72) \quad \mathfrak{S} = + \frac{pa + p'b}{H} + \frac{C + C'}{k}.$$

Man erhält wieder

$$(73) \quad H = \frac{\int_0^l M_0 dx}{\int_0^l y dx} v',$$

wo

$$(74) \quad v' = \frac{1}{1 - 0,1 \frac{l^2}{k^2} \frac{1-v}{v} + 1,5 \frac{k^2}{fl} \left( \frac{8f}{l} - \mathfrak{S} \right)}.$$

Für den Sonderfall  $a = b = \frac{1}{2}l$ ,  $p' = 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{pl}{2H} + \frac{u + u'}{k} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \\ u + u' &= k^2 \left( -\frac{p}{H} + 16 \frac{f}{l^2} \right). \end{aligned}$$

Die Annäherungsrechnung liefert

$$H = \frac{pl^2 v}{16f} \quad \text{also} \quad \frac{p}{H} = \frac{16f}{l^2} \frac{1}{v}.$$

Daher ist

$$u + u' = 16f \frac{k^2}{l^2} \frac{1-v}{v}$$

und

$$(75) \quad \mathfrak{S} = \frac{8f}{l} \left( 1 - 2 \frac{k}{l} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \right) \frac{1-v}{v}.$$

Man findet schließlich

$$(76) \quad v' = \frac{1}{\left[ 1 - 0,1 \frac{l^2}{k^2} \frac{1-v}{v} + 12 \frac{k^2}{l^2} \left( 2 \frac{k}{l} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} - 1 \right) \frac{1-v}{v} \right]}.$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche Form wie die auf Seite 409 für die versteifte Kette gefundene Gleichung (53).

Während bei der Kette der Einfluß des Gliedes  $(H + H_g) \Delta y$  ein günstiger ist, insofern die genaueren Momente kleiner sind als die genäherten, liegt beim Bogen der umgekehrte Fall vor. Bringt man nämlich die Belastung auf, die für irgendeinen Querschnitt das Moment  $_{max}M$  erzeugt, so senkt sich der fragliche Querschnitt; sein  $\Delta y$  ist negativ und der Hebelarm des dem positiven Balkenmomente  $M_0$  entgegenwirkenden Horizontalschubes nimmt ab. Bei der das Moment  $_{min}M$  erzeugenden Laststellung wächst  $y$  und der negative Bestandteil von  $M$  nimmt zu.

Bei sehr flachen Bogenbrücken empfiehlt es sich, mindestens für den in Fig. 400 dargestellten Fall bei  $x = \frac{1}{4}l$  das genauere Moment zu berechnen und festzustellen, um wieviel v. H. das genauere Moment größer ist als das genäherte.

Die vorstehenden Ansätze liefern für die  $\Delta y$  etwas zu kleine Werte wegen der Vernachlässigung des Einflusses der  $\mathfrak{H}$  und  $Q$ . In Wirklichkeit sind also die Abweichungen zwischen den genaueren und den genäherten Momenten noch etwas größer.

**160. Einfluß einer Temperaturänderung.** Wir nehmen eine gleichmäßige Erwärmung des Bogens an und erhalten für einen Bogen zwischen festen Kämpfern

$$H_t = X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} = \frac{\varepsilon t l}{\delta_{aa}}.$$

Wir rechnen ungünstig und setzen

$$\delta_{aa} = \int_0^l \frac{M_a^2 ds}{EJ} = \int_0^l \frac{y^2 dx}{EJ'}, \quad J' = J \cos \varphi.$$

Dann erhalten wir für einen Parabelbogen mit konstantem  $EJ'$

$$(77) \quad \begin{aligned} \delta_{aa} &= \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{EJ'} \\ H_t &= \frac{15}{8} \frac{\varepsilon EJ' t}{f^2}. \end{aligned}$$

Diese Formel darf auch bei flachen Kreisbogen angewendet werden. Allgemein ist  $\int y^2 dx$  das doppelte statische Moment der zwischen Bogenachse und Schlußlinie  $AB$  gelegenen Fläche, bezogen auf die Schlußlinie. Es empfiehlt sich,  $J'$  durch  $J$  zu ersetzen.



Gelenken. Auch die im § 25 der vorliegenden Abteilung für den durch einen Balken versteiften Stabbogen entwickelten Formeln können ohne weiteres benutzt werden. An die Stelle des Knotenpunktes  $m$  treten die Punkte  $o$  und  $u$ .

Fig. 400 zeigt die Einflußfläche für  $M^u$ . Der Multiplikator ist  $\mu = y_u$ . Soll die Übertragung der Lasten durch Zwischenträger be-

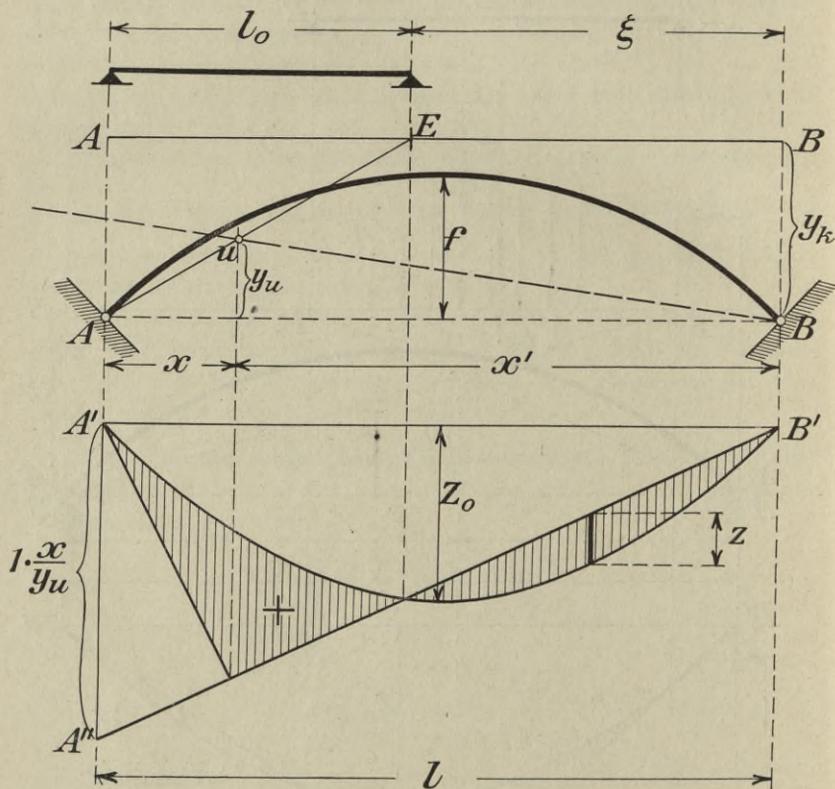


Fig. 401.

rücksichtigt werden, so tritt an die Stelle der  $H$ -Parabel ein in die Parabel einbeschriebenes Polygon, dessen Ecken in den Lotrechten durch die Querträger liegen (Abt. I, § 7, Fig. 220). Die Festlegung des Dreiecks  $A'C'B'$  geschieht dann mit Hilfe der Strecke  $\overline{A'A''} = 1 \frac{x}{y_u}$ .

Rechnet man mit unmittelbar am Bogen angreifenden Lasten, was sich bei analytischen Untersuchungen der größeren Einfachheit wegen empfiehlt, so bestimmt man die Lastscheiden  $E$  und  $E'$  mittels der Kämpferdrucklinie.

**162. Eisenbahnbrücken.** Für die Momente infolge der Verkehrslast empfiehlt sich die Benutzung der Tafeln für parabolische Einflußlinien. Um z. B.  ${}_{\min}M^u$  zu bestimmen, berechne man die Pfeilhöhen

$$z_1 = z_0 \frac{\xi^2}{l^2} \quad \text{und} \quad z_2 = z_0 \frac{\xi'^2}{l^2}$$

der negativen Teile der Einflußfläche, entnehme der Tafel V des § 24 die zu den Weiten  $\xi$  und  $\xi'$  gehörigen Lasten  $P_i$  und  $P_i'$  und setze

$$(78) \quad {}_{\min}M_p^u = -y_u \left( z_0 \frac{\xi^2}{l^2} P_i + z_0 \frac{\xi'^2}{l^2} P_i' \right) *.$$

Für das Maximalmoment gilt die auf Seite 435 abgeleitete Formel

$$(79) \quad {}_{\max}M_p^u = \frac{1}{s} [\mathfrak{P}_n b' b'' + \mathfrak{T}_n] - \mathfrak{S}_r,$$

wo

$$(80) \quad s = l \frac{y_k}{y_u}.$$

Der Lastzug muß so aufgestellt werden, daß die Bedingungen erfüllt werden

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_r} < \frac{s}{2b' - \xi} \\ \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{r-1}} > \frac{s}{2b' - \xi} \end{array} \right.$$

Noch schneller führt die Anwendung der im § 25 abgeleiteten Gleichungen (19) bis (21) bei der Berechnung von  ${}_{\max}M^u$  zum Ziele. Man entnimmt der Tabelle A, Seite 442, das Maximalmoment  $M_0$  eines einfachen Balkens von der Spannweite  $l_0$  und findet dann

$$(82) \quad {}_{\max}M_p^u = {}_{\max}M_0 \left( \gamma - \frac{8y_u \delta}{l_0^2} \right),$$

wo

$$\delta = \delta_H \frac{l_0^3}{l^3}$$

ist und  $\delta_H$  den Inhalt der  $H$ -Parabel bedeutet. Die Zahl

$$\gamma = \frac{x_0(0,88l_0 - x_0)}{(0,44l_0)^2}$$

wird der Tabelle auf Seite 443 entnommen.  $x_0$  ist der kleinere der beiden Abstände  $CE$  und  $CE'$  in Fig. 400.

\*) Wir verweisen auch auf § 25, Nr. 123.

Für den Fall daß die  $H$ -Parabel die Pfeilhöhe

$$z_0 = \frac{3l}{16f} \nu \quad (\text{vgl. Seite 429})$$

besitzt, ist der Ausdruck für  $\max M_p^u$  auf Seite 441 umgeformt worden in

$$(83) \quad \max M_p^u = \max M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} + \frac{y_u}{f} \nu \right).$$

Es möge aber noch eine andere Umformung dieses Wertes gezeigt werden. Setzt man

$$\tilde{\mathfrak{F}}_H = \frac{2}{3} z_0 l \quad \text{und} \quad z_0 = \frac{l}{4y_k} \quad (\text{nach (36), Seite 524}),$$

so findet man

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \frac{1}{6} \frac{l_0^3}{y_k l}$$

und

$$\max M_p^u = \max M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} \frac{y_u}{y_k} \frac{l_0}{l} \right).$$

Nun ist aber

$$\frac{y_k - y_u}{y_u} = \frac{l_0}{l}, \quad \text{mithin} \quad \frac{y_k}{y_u} = \frac{l + l_0}{l}$$

und man erhält daher

$$(84) \quad \max M_p^u = \max M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} \frac{l_0}{l + l_0} \right).$$

Die Formeln (83) und (84) setzen voraus, daß beide Punkte  $E$  und  $E'$  innerhalb der Spannweite  $AB$  liegen. Für den in Fig. 401 dargestellten Fall gilt die auf Seite 442 gewonnene Formel

$$(85) \quad \max M_p^u = \max M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} \frac{x}{l} \right).$$

In derselben Weise werden auch die Momente  $M^o$  berechnet.

**163. Ständige Belastung.** Eine gleichförmige ständige Last  $g$  für die Einheit der Stützweite  $l$  erzeugt

$$(86) \quad H_g = g \tilde{\mathfrak{F}}_H = \frac{2gz_0 l}{3}.$$

Ist

$$z_0 = \frac{3l}{16f} \nu,$$

so erhält man

$$(87) \quad H_g = \frac{gl^2}{8f} \nu.$$

Nun findet man mittels der allgemeinen Formel

$$M = M_0 - Hy$$

die Werte

$$(88) \quad \begin{cases} M_g^u = g \frac{xx'}{2} - H_g y_u, \\ M_g^o = g \frac{xx'}{2} - H_g y_o. \end{cases}$$

**164. Gleichförmige Verkehrslast.** Die beiden negativen Teile der in Fig. 400 dargestellten  $M^u$ -Fläche haben zusammen den Inhalt

$$\delta = \delta_H \frac{\xi^3 + \xi'^3}{l^3},$$

und es entsteht daher

$$(89) \quad \min M_p^u = -p y_u \delta_H \frac{\xi^3 + \xi'^3}{l^3}, \quad \text{wo } \delta_H = \frac{2z_0 l}{3}.$$

Für den in Fig. 401 dargestellten Fall ist

$$\min M_p^u = -p y_u \delta_H \frac{\xi^3}{l^3}.$$

Hat man  $M_g^u$  und  $\max M_p^u$  in der Form dargestellt:

$$M_g^u = Cg, \quad \min M_p^u = -C'p,$$

so findet man

$$\min M^u = Cg - C'p,$$

und nunmehr ohne weiteres

$$\max M^u = Cg + C'p, \quad \text{wo } q = g + p,$$

denn die Zusammenzählung der die Momente  $\min M^u$  und  $\max M^u$  erzeugenden Belastung gibt volle Belastung des Trägers mit

$$2g + p = g + q.$$

Es muß also sein:

$$\min M^u + \max M^u = C(g + q).$$

In derselben Weise werden auch die Momente  $M^o$  berechnet.

**c. Zahlenbeispiel. Berechnung der Momente  $M^o$  und  $M^u$  für eine eingeleisige Eisenbahnbrücke von 48 m Spannweite und 6 m Pfeilhöhe.**

**165. Vorläufige Ermittlung des Querschnitts.** Den Pfeil der  $H$ -Parabel setzen wir zunächst

$$z_0 = \frac{3}{16} \frac{l}{f} v = \frac{3}{16} \cdot 8v = 1,5v,$$

$$v = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J}{Ff^2}} = \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{Wh}{Ff^2}},$$

wo  $W$  das Widerstandsmoment und  $h$  die Höhe des Querschnitts bedeuten, und schätzen die Kernweite  $k = \frac{W}{F}$  gleich  $\frac{5}{12}$  der Stehblechhöhe  $h_0$ . Dann erhalten wir

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{25}{64} \frac{h_0 h}{f^2}}.$$

Nun wählen wir  $h_0$  etwa  $\frac{1}{40}$  der Stützweite, d. i. 1,2 m, schätzen  $h = 1,3$  m und finden  $\nu = 0,983$  und  $z_0 = 1,475$ . Hierzu gehört

$$y_k = \frac{l}{4z_0} = 8,14 \text{ m.}$$

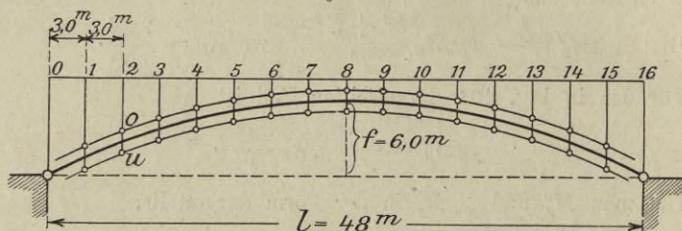


Fig. 402.

Die Bogenachse sei ein Kreisbogen; ihr Halbmesser ist  $r = 51$  m. Die Radien der oberen und unteren Kernlinie sind mit  $k = \frac{5}{12} h_0 = 0,5$  m,  $r_o = 51,5$  m,  $r_u = 49,5$  m. Die größten Momente  $M^o$  und  $M^u$  entstehen in der Regel in der Nähe von  $x = \frac{1}{4} l$ . Maßgebend für die Querschnittsberechnung sind die Momente  $_{min}M^o$  und  $_{max}M^u$ . Wir beginnen mit der Berechnung von  $_{min}M^o$  an der Stelle  $x = 12$  m. Es ist

$$y_o = 5,08 \text{ m, } l - \xi = x \frac{y_k}{y_o} = 12 \frac{8,14}{5,08} = 19 \text{ m, } \xi = 29 \text{ m.}$$

Zu 29 m gehört nach Tafel V, Seite 422,  $P_i = 143$  t; folglich ist

$$_{min}M_p^o = -y_o z_0 \frac{\xi^2}{l^2} P_i = -5,08 \cdot 0,54 \cdot 143 = -392 \text{ tm.}$$

Die ständige Last der Brücke sei  $g = 3$  t/m; sie erzeugt

$$H_g = \frac{gl^2}{8f} \nu = gl\nu = 3 \cdot 48 \cdot 0,983 = 142 \text{ t,}$$

$$M_g^o = g \frac{xx'}{2} - H_g y_o = \frac{3 \cdot 12 \cdot 36}{2} - 142 \cdot 5,08 = -73 \text{ tm.}$$

Es ist mithin  $_{min}M^o = -392 - 73 = -465$  tm.

Dieser Wert muß mit  $_{max}M^u$  verglichen werden. Für  $x = \frac{1}{4}l = 12$  m ist

$$y_u = 4,05 \text{ m}, \quad l - \xi = l_0 = x \frac{y_{\xi}}{y_u} = 12 \frac{8,14}{4,05} = 24 \text{ m},$$

$$x_0 = 12 \text{ m}, \quad \frac{x_0}{l_0} = 0,5, \quad \gamma = 1, \quad _{max}M_0 = 551 \text{ tm (Tabelle A, S. 442),}$$

$$_{max}M_x^u = _{max}M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} \frac{x}{l} \right) = 551 \left( 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = 367 \text{ tm},$$

$$M_y^u = g \frac{x x'}{2} - H_g y_u = \frac{3 \cdot 12 \cdot 36}{2} - 142 \cdot 4,05 = 73 \text{ tm},$$

$$_{max}M^u = 367 + 73 = 440 \text{ tm}.$$

Das Moment  $_{min}M^o$  ist also maßgebend; es erfährt auch infolge von Temperaturänderungen eine größere Steigerung wie  $_{max}M^u$ .

Wir nehmen eine gleichmäßige Temperaturänderung an und setzen

$$H_t = \frac{15}{8} \frac{\varepsilon E J t}{f^2}, \quad M_t^o = - \frac{15}{8} \frac{\varepsilon E J y_o t}{f^2}.$$

Das Moment  $M_t^o$  erzeugt die Biegungsspannung

$$\sigma_t = \frac{15}{8} \frac{\varepsilon E J y_o t}{W f^2} = \frac{15}{16} \varepsilon E \frac{h y_o}{f^2} t.$$

Für Flußeisen ist  $\varepsilon E = 25$  kg/qcm, mithin

$$\sigma_t = \frac{15}{16} 25 \frac{1,3 \cdot 5,08}{6^2} t = 4,3 t.$$

Es soll  $t$  zwischen  $-25^\circ$  und  $+45^\circ$  schwankend angenommen werden. Für die negativen Momente  $_{min}M^o$  kommt die obere Grenze in Betracht. Wir erhalten  $\sigma_t = 4,3 \cdot 45 = 194$  kg/qcm und finden, wenn etwa  $\sigma = 950$  kg/qcm zugelassen werden sollen\*), das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{46500000}{950 - 194} = 61500 \text{ cm}^3,$$

also für jeden der beiden Hauptträger  $W = 30750$ . Der in Fig. 392 dargestellte Querschnitt besitzt nach Abzug der Nietlöcher  $W = 31746 \text{ cm}^3$ ,  $F = 642 \text{ cm}^2$  und  $k = W/F = 49,4 \text{ cm} = \text{rund } 0,5 \text{ m}$ . Nach Feststellung dieses Querschnitts kann die Verbesserung des Wertes  $z_0$  mit Hilfe der in Nr. 152 bis 155 entwickelten Formeln vorgenommen werden. Die dort mitgeteilten Zahlenrechnungen, die sich auf den Querschnitt Fig. 392 bezogen, ergeben für den Kreisbogenträger einen zwischen den Grenzen 1,46 und 1,47 liegenden Wert  $z_0$ . Wir rechnen die Momente  $_{min}M^o$  mit  $z_0 = 1,47$ , die Momente  $_{max}M^u$  mit  $z_0 = 1,46$ . Die Anzahl der Felder sei 16, die Feldweite 3 m.

\*) Die Belastungsvorschriften für die preußischen Staatsbahnen gestatten

für $l =$	20	40	80	120	160	200 m,
$\sigma =$	850	900	950	1000	1050	1100 kg/qcm.

166. Momente  $\min M^o$ . Zu  $z_0 = 1,47$  gehört

$$y_k = \frac{l}{4z} = 8,16 \text{ m}, \quad l - \xi = x \frac{y_k}{y_0} = m \frac{\lambda y_k}{y_0} = \frac{24,48}{y_0} m.$$

Die Werte  $\xi$  sind positiv für  $m = 1$  bis  $m = 11$ . Daraus folgt, daß die den Querschnitten 8, 7, 6, 5 entsprechenden Punkte  $E'$ , Fig. 400, innerhalb der Spannweite des Bogens liegen. Zu 5 gehört allerdings  $AE' = 1 \text{ m}$ , d. i. eine vernachlässigbare negative Beitragstrecke. Nach Ermittlung von  $\xi$ ,  $\xi'$ ,  $P_i$  und  $P'_i$  findet man

$$\min M_p^o = -y_0 \left( P_i z_0 \frac{\xi^2}{l^2} + P'_i z_0 \frac{\xi'^2}{l^2} \right).$$

Hierzu tritt

$$M_g^o = g \frac{x x'}{2} - H_y y_0 = g \frac{\lambda^2}{2} m m' - H_y y_0, \quad m' = 16 - m,$$

wo  $H_y = g \frac{2 z_0 l}{3} = 2 \cdot 1,47 \cdot 48 = 141 \text{ t}$ ,

ferner der Einfluß der Temperaturerhöhung

$$M_t = -H_t y_0 = -\frac{15}{8} \varepsilon E t \frac{J}{l^2} y_0.$$

Das Trägheitsmoment des in Fig. 392 dargestellten Querschnitts ist ohne Nietabzug  $J = \text{rund } 2360000 \text{ cm}^4$ . Man erhält also mit  $t = 45^\circ$  und  $\varepsilon E = 25 \text{ kg/qcm}$  für beide Hauptträger zusammen:

$$H_t = \frac{15}{8} \cdot 25 \cdot \frac{2360000 \cdot 2}{600^2} t = 614,6 \cdot t = 27657 \text{ kg} = 27,7 \text{ t},$$

$$M_t = -27,7 y_0.$$

Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden\*).

		$z_0 = 1,47$											
$m$	$y_0$	$l - \xi$	$\xi$	$\xi'$	$z_0 \frac{\xi^2}{l^2}$	$z_0 \frac{\xi'^2}{l^2}$	$P_i$	$P'_i$	$-M_p^o$	$\frac{g \lambda^2 m m'}{2}$	$-M_g^o$	$-M_t^o$	$-\min M^o$
	m	m	m				t	t	tm	tm	tm	tm	tm
1	2,02	12	36	0	0,83		172		288	202,5	82	56	426
2	3,25	15	33	0	0,695		159		359	378	80	90	529
3	4,27	17	31	0	0,615		150		394	526,5	76	118	588
4	5,08	19	29	0	0,54		143		392	648	68	141	601
5	5,71	21	27	0	0,465		133		353	742,5	63	158	574
6	6,15	23,5	24,5	8,5	0,385	0,05	124	64	313	810	57	170	540
7	6,41	26,5	21,5	14	0,295	0,125	111	77	272	850,5	53	178	503
8	6,50	30	18	18	0,21	0,21	92	92	251	864	53	180	484
	9,6,41	34	14										
	10,6,15	39,5	8,5										
	11,5,71	47	1										

$$\min M^o = M_p^o + M_g^o + M_t^o.$$

\*) Die Abrundungen erfolgten in ungünstigem Sinne. Z. B. ist für  $m = 6$ ,  $l - \xi = 23,88$ , wofür 23,5 gesetzt wurde.

167. Momente  $\max M^u$ .  $z_0 = 1,46$  m,  $y_k = \frac{l}{4z_0} = 8,22$  m,

$$l - \xi = x \frac{y_k}{y_u} = \frac{m \lambda y_k}{y_u} = \frac{24,66}{y_u} m,$$

wofür wir um ungünstig zu rechnen  $l - \xi = \frac{25m}{y_u}$  setzen. Wir erhalten dann reichliche Längen  $l_0$ . Die Werte  $\xi$  sind positiv für  $m = 1$  bis  $m = 9$ . Für die Querschnitte 7 und 8 erhält man also innerhalb der Stützweite liegende Punkte  $E'$ , Fig. 400. Für  $m = 1$  bis  $m = 6$  gilt die Formel

$$\max M_p^u = \max M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} \frac{x}{l} \right) = \max M_0 \left( \gamma - \frac{m}{12} \right),$$

für  $m = 7$  und  $m = 8$  die Formel

$$\max M_p^u = \max M_0 \left( \gamma - \frac{4}{3} \frac{l_0}{l + l_0} \right).$$

Der Einfluß der ständigen Belastung ist

$$M_g^u = g \frac{\lambda^2}{2} m m' - H_g y_u,$$

wo

$$H_g = g \frac{2}{3} z_0 l = 2 \cdot 1,46 \cdot 4,8 = 140 \text{ t.}$$

Die Temperaturänderung  $t = -25^\circ$  erzeugt

$$H_t = -614,6 \cdot t = -15365 \text{ kg} = -15,4 \text{ t}, \quad M_t^u = +15,4 y_u.$$

$m$	$y_u$ m	$l - \xi$ m	$l_0$ m	$x_0$ m	$\frac{x_0}{l_0}$	$\gamma$	$\max M_0$ tm	$M_p^u$ tm	$M_g^u$ tm	$M_t^u$ tm	$\max M^u$ tm
1	0,93	27	27*)	3	0,11	0,44	680	243	72	14	329
2	2,18	23	23	6	0,26	0,83	510	338	73	34	445
3	3,22	23,5	23,5	9	0,38	0,98	530	387	76	50	513
4	4,05	25	25	12	> 0,44	1,00	591	394	81	62	537
5	4,69	27	27	12	> 0,44	1,00	680	397	86	72	555
6	5,14	29,5	29,5	11,5	0,39	0,99	806	395	90	79	564
7	5,41	32,5	26**)	11,5	> 0,44	1,00	632	336	93	83	512
8	5,50	36,5	25	12,5	> 0,44	1,00	591	321	94	85	500
9	5,41	41,5					$\max M^u = M_p^u + M_g^u + M_t^u.$				

Das größte aller Momente ist  $-M_t^u = 601$  tm. Für einen Hauptträger ist mit Nietabzug  $W = 31746$ . Es entsteht also

$$\sigma_u = \frac{M^o}{W} = \frac{60100000}{2 \cdot 31746} = 950 \text{ kg/qcm.}$$

\*) Siehe Fig. 403.

\*\*\*) Siehe Fig. 404.

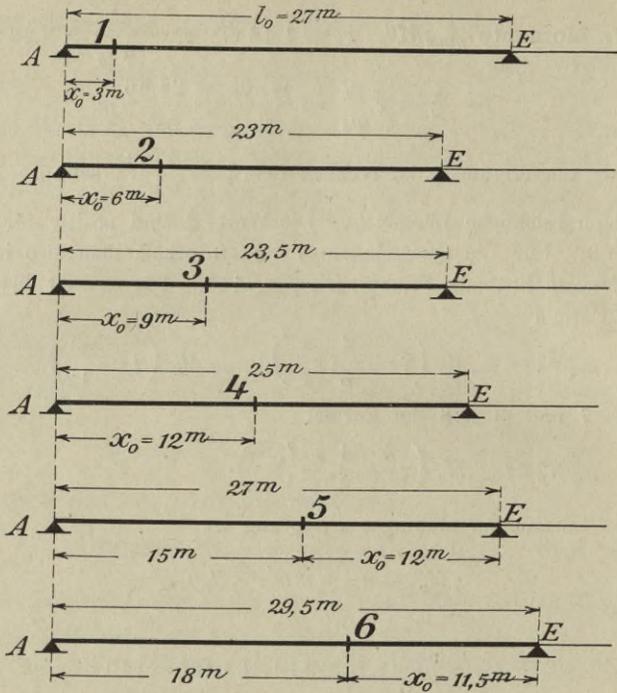


Fig. 403.

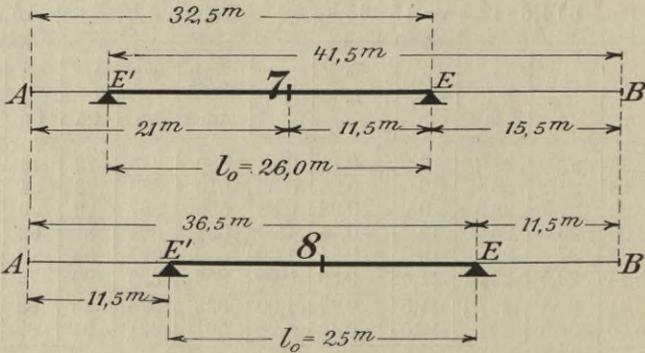


Fig. 404.

Je nachdem die Anzahl der Gurtplatten 2 oder 1 oder 0 ist, ergibt sich

$$W = 24736, \quad 17753, \quad 10790.$$

Die zulässigen Angriffsmomente sind

$$M = 470 \quad 337 \quad 205 \text{ tm.}$$

Hiernach kann die Länge der einzelnen Platten bemessen werden. Bei größeren Unterschieden der Momente  $M^o$  und  $M''$  empfiehlt es sich, die beiden Gurtungen ungleich stark zu machen. Die Berechnung der Gurtplattenquerschnitte für diesen Fall ist in Bd. I, § 24, unter  $e$  beschrieben worden.

d. Die Querkräfte.

**168. Einflußlinien.** Die Querkraft  $Q$  für einen Bogenquerschnitt ist gleich der Summe der Projektionen der auf der einen Seite des

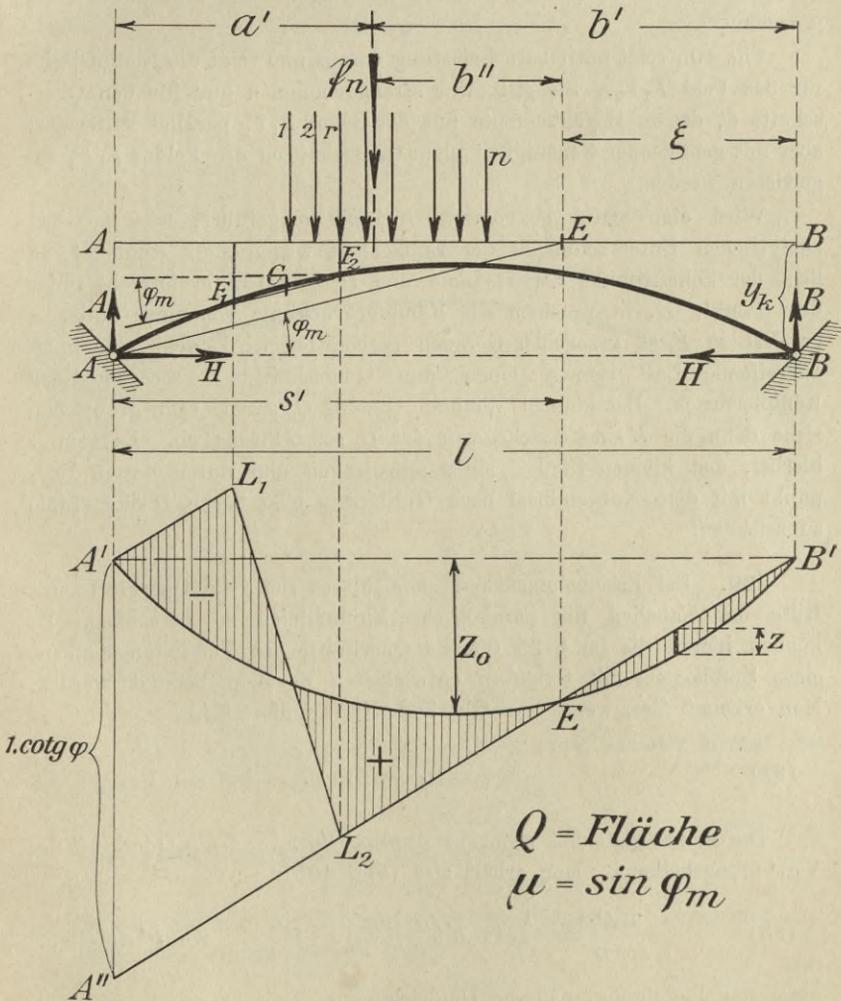


Fig. 405.

Querschnittes angreifenden äußeren Kräfte auf den Querschnitt. Bei lotrechten Lasten ergibt sich

$$(90) \quad Q = Q_0 \cos \varphi - H \sin \varphi,$$

wo  $Q_0$  die Querkraft für den Querschnitt eines einfachen Balkens  $AB$  bedeutet. Wir schreiben

$$(91) \quad Q = \sin \varphi (Q_0 \cotg \varphi - H)$$

und bilden die Einflußfläche (Fig. 405), indem wir die  $H$ -Fläche von der Einflußfläche für  $Q_0 \cotg \varphi$  in Abzug bringen. Der Multiplikator ist  $\mu = \sin \varphi$ .

Fig. 405 setzt mittelbare Belastung voraus und zeigt die Einflußfläche für das Feld  $F_1F_2$ . Sie gilt zwar strenggenommen nur für den Querschnitt  $C$ , dessen Bogentangente mit der Sehne  $F_1F_2$  parallel läuft, darf aber mit genügender Genauigkeit allen Querschnitten des Feldes  $F_1F_2$  zugewiesen werden.

Wird eine stetig gekrümmte  $H$ -Linie eingeführt, was sich bei analytischen Untersuchungen der Einfachheit wegen stets empfiehlt, so liegt der Schnittpunkt der  $H$ -Linie und  $Q_0 \cotg \varphi$ -Linie lotrecht unter dem Punkte  $E$ , in welchem die Kämpferdrucklinie von einer durch  $A$  parallel zu  $F_1F_2$  gezogenen Geraden geschnitten wird, denn eine in  $E$  angreifende Last erzeugt einen zum Querschnitt  $C$  rechtwinkligen Kämpferdruck. Bei kleinen Winkeln  $\varphi$  wird  $Q_0 \cotg \varphi$  sehr groß; man ziehe dann die  $H \sin \varphi$ -Fläche von der  $Q_0 \cos \varphi$ -Fläche ab. Es genügt hierbei, den kleinen Pfeil  $z_0 \sin \varphi$  aufzutragen und durch dessen Endpunkt mit dem Kurvenlineal nach Gutdünken eine flache  $H \sin \varphi$ -Linie zu zeichnen.

**169.** Bei Eisenbahnbrücken empfiehlt es sich, die Querkräfte mit Hilfe der Tabellen für parabolische Einflußlinien zu berechnen. Es können hierzu die im § 25 für die Querkräfte des Versteifungsbalkens eines Stabbogens mit Gelenken entwickelten Formeln benutzt werden. Man erkennt dies, wenn man Gleichung (90) umformt in

$$(92) \quad \frac{Q}{\cos \varphi} = Q_0 - H \tg \varphi.$$

Die rechte Seite hat nunmehr dieselbe Form wie die Querkraft des Versteifungsbalkens. Man erhält also (Fig. 405):

$$(93) \quad \frac{\max Q}{\cos \varphi} = \frac{1}{s'l} (\mathfrak{B}_n b' b'' + \mathfrak{T}_n) - P', \quad \text{wo } P' = \frac{\mathfrak{E}_r}{\lambda},$$

unter der Bedingung, daß die Ungleichungen

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_r} < \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{b' + b''} \\ \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{r-1}} > \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{b' + b''} \end{array} \right.$$

erfüllt werden.

Zur Querkraft  $_{\min} Q$  liefert die Belastung links vom Querschnitte den Beitrag (Fig. 406):

$$(95) \quad -\frac{Q}{\cos \varphi} = \frac{1}{s'l} (\mathfrak{P}_n a' a'' - \mathfrak{T}_n) - P', \quad a'' = s' + l - a',$$

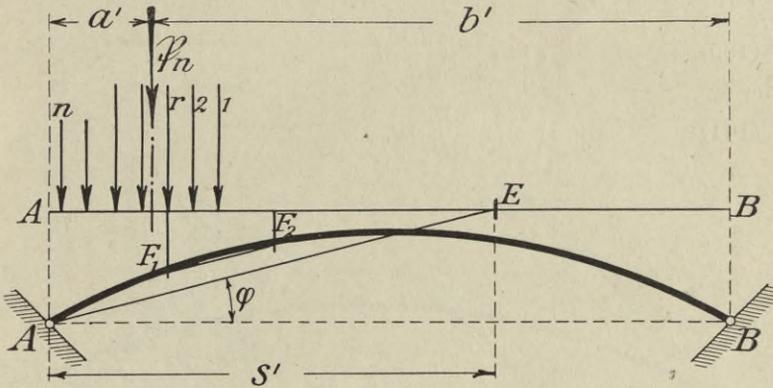


Fig. 406.

wobei sich herausstellen muß:

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_r} < \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{a' + a''} \\ \leftarrow \frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{r-1}} > \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{a' + a''} \end{array} \right.$$

Liegt der Punkt E innerhalb der Stützweite, so tritt hierzu noch der Einfluß der Belastung der Strecke EB:

$$Q = -\sin \varphi P_t z.$$

Der Einfluß der ständigen Last beträgt

$$(97) \quad Q_g = g x'' \cos \varphi - H_g \sin \varphi,$$

wo  $x''$  den Abstand der Feldmitte von der Trägermitte bezeichnet.

Eine Temperaturänderung erzeugt

$$(98) \quad Q_t = -H_t \sin \varphi.$$

170. Die größten Querkräfte braucht man zur Berechnung der Nietteilung  $e$  (Fig. 407). Bedeutet  $S$  das statische Moment eines Gurtquerschnittes in bezug auf die Schwerachse des ganzen Querschnittes, so hat ein Niet die Schubkraft

$$(99) \quad T = \frac{QS}{J} e$$

aufzunehmen. Die Niete sind doppelschnittig. Die zulässige Scherspannung ist gleich der zulässigen Normalspannung  $\sigma$ , der zulässige Lochleibungsdruck gleich  $2\sigma$ , daher, wenn  $d$  die Nietstärke und  $\delta$  die Stehblechstärke bedeutet,

$$T = 2 \frac{\pi d^2}{4} \sigma \text{ bzw. } T = 2\sigma d\delta$$

und

$$(100) \quad e = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma d J}{QS} d$$

oder

$$(101) \quad e = 2 \frac{\sigma \delta J}{QS} d.$$

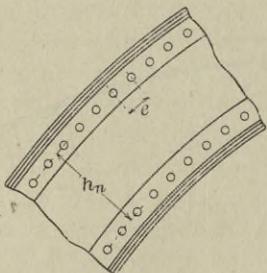


Fig. 407.

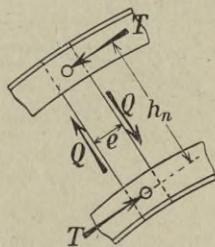


Fig. 408.

Die kleinere Teilung  $e$  muß ausgeführt werden. Es gilt also Formel (101), sobald

$$\frac{\pi d}{2} > 2\delta, \text{ d. i. } d > \frac{4\delta}{\pi} = 1,27 \delta,$$

was wohl immer der Fall sein wird. Zur Erzielung einer genügend dichten Nietung darf  $e$  nicht größer als  $6d$  gewählt werden.

Zu einer sehr einfachen Näherungsformel für die Schubkraft  $T$  gelangt man mittels der Annahme, es werde die Querkraft  $Q$  allein vom Stehbleche aufgenommen. Dann erhält man nämlich (Fig. 408)

$$(102) \quad Th_n = Qe, \text{ also } T = Q \frac{e}{h_n},$$

wo  $h_n$  den Abstand der beiden Nietreihen bedeutet. Es ergibt sich

$$(103) \quad e = 2 \frac{\sigma \delta h_n}{Q} d.$$

Für den in Fig. 392 dargestellten Querschnitt ist z. B.

$$S = 44 \cdot 4,5 \cdot 64,25 + 2 \cdot 40 \cdot 58 = 17361$$

$$\frac{J}{S} = \frac{2111097}{17361} = 122,$$

während  $h_n = 109$  cm ist. Die Anwendung der einfachen Formel (103) erhöht also den Sicherheitsgrad.

**171. Zahlenbeispiel.** Berechnung der Nietteilung für die in Nr. 173—175 untersuchte Eisenbahnbrücke. Wir nehmen rund  $y_k = 8,2$  m an und erhalten für das erste Feld, Fig. 409,

$$s' = x \frac{y_k}{y_1} = 3 \frac{8,2}{1,476} = 16,7 \text{ m}, \quad \xi = 31,3 \text{ m}.$$

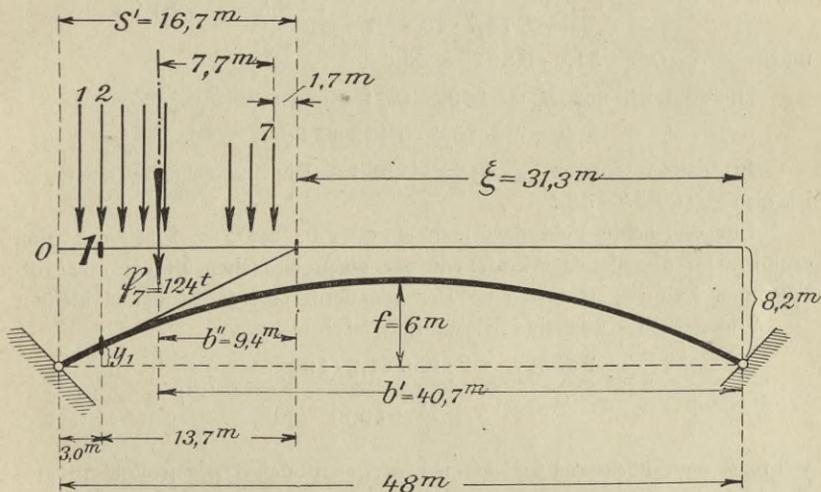


Fig. 409.

Zu diesem  $\xi$  gehört  $P_i = 146 + 1,3 \cdot 4 = 151$  t und

$$z = z_0 \frac{\xi^2}{l^2} = 1,47 \frac{979,69}{2304} = 0,63;$$

mithin ist

$$\min Q_{1y} = -\sin \varphi_1 P_i z = -0,442 \cdot 151 \cdot 0,63 = -42 \text{ t}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} Q_{1y} &= g x'' \cos \varphi_1 - H_g \sin \varphi_1 \\ &= 3 \cdot 22,5 \cdot 0,897 - 141 \cdot 0,442 = -1,8 \text{ t}, \end{aligned}$$

$$Q_t = -H_t \sin \varphi_1 = -27,7 \cdot 0,442 = -12,2 \text{ t},$$

im ganzen also

$$\min Q = -56 \text{ t}.$$

Die Querkraft  ${}_{\max}Q_p$  entsteht bei der in Fig. 409 angegebenen Laststellung, denn es ist

$$\begin{aligned} \leftarrow \frac{\mathfrak{F}_n}{\mathfrak{F}_r} &= \frac{124}{34} < \frac{s' \frac{l}{\lambda}}{b' + b''} = \frac{16,7 \cdot 16}{40,7 + 9,4} = \frac{267,2}{50,1} \\ \rightarrow \frac{\mathfrak{F}_n}{\mathfrak{F}_{r-1}} &= \frac{124}{17} > \frac{267,2}{50,1}. \end{aligned}$$

Die Belastung des Knotenpunktes  $o$  beträgt  $P' = 8,5$  t; es ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} \frac{{}_{\max}Q_p}{\cos \varphi} &= \frac{1}{s'l} (\mathfrak{F}_n b' b'' + \mathfrak{T}_n) - P' \\ &= \frac{124 \cdot 40,7 \cdot 9,4 + 2606}{16,7 \cdot 48} - 8,5 = + 51,9 \text{ t} \end{aligned}$$

und:  ${}_{\max}Q_p = 51,9 \cdot 0,897 = 46,6$  t.

Hierzu tritt, mit  $H_g = 140$ ,  $Q_{1g} = -1,8$  und

$$Q_t = + 15,4 \cdot 0,442 = 6,8 \text{ t.}$$

Im ganzen entsteht  ${}_{\max}Q_1 = + 52$  t. Die maßgebende Querkraft ist also  ${}_{\min}Q_1 = - 56$  t.

Für das achte Feld darf man  $\sin \varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  setzen. Man erhält dann dieselbe Querkraft wie für einen einfachen Balken, im vorliegenden Falle:  ${}_{\max}Q_8 = 57$  t. Der genauere Wert  $Q_8$  ist etwas kleiner.

Die gesuchte zulässige Nietteilung ist nun

$$e = \frac{2 \sigma \delta h_n}{Q} = \frac{2 \cdot 950 \cdot 1,2 \cdot 109}{\frac{1}{2} 57000} = 8,7 \text{ d,}$$

während man höchstens  $6d$  nehmen darf. In den übrigen Feldern entstehen kleinere Querkräfte.

#### e. Ungleichohe Kämpfergelenke.

172. Liegen die Kämpfergelenke nicht gleichhoch, so werden die Kämpferdrücke in die senkrechten Seitenkräfte  $A$  und  $B$  und die mit der Verbindungslinie der Kämpfergelenke zusammenfallenden Seitenkräfte  $H_A'$ ,  $H_B'$  zerlegt. Bei senkrechter Belastung ist  $H_A' = H_B' = H'$  (Fig. 410); es stimmen dann  $A$  und  $B$  mit den Auflagerdrücken eines einfachen Balkens von der Spannweite  $l$  überein, und man erhält für den Querschnitt an der Stelle  $x$  das Biegemoment

$$M = M_0 - Hy,$$

wo  $H = H' \cos \alpha$  und  $y$  den senkrechten Abstand des Querschnittschwerpunktes von der Geraden  $AB$  bedeutet.

In gleicher Weise bildet man

$$M^o = M_0 - Hy_o \text{ und } M^u = M_0 - Hy_u.$$

Ist der Winkel  $\alpha$  klein, so dürfen hinsichtlich des Gesetzes, dem das Trägheitsmoment  $J$  folgt, dieselben Annahmen gemacht werden, wie beim Bogen mit gleichhoch liegenden Kämpfern. Für die  $H$ -Linie erhält man eine Parabel von der Pfeilhöhe

$$z_0 = \frac{l^2}{8 \left( \mathfrak{F}_y + \frac{J_c l}{F_c f} \right)}$$

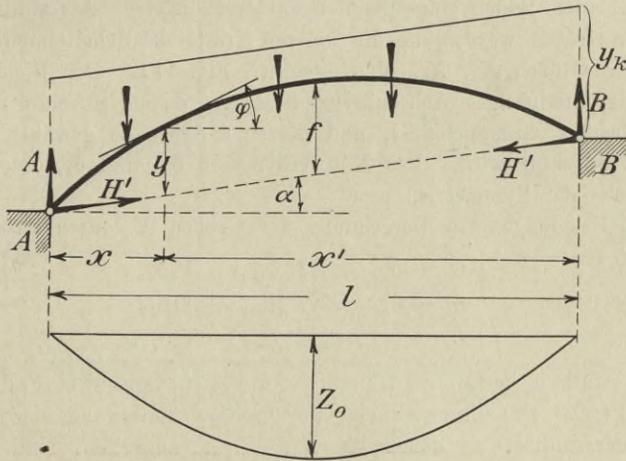


Fig. 410.

Die Kämpferdrucklinie ist parallel zu  $AB$  und hat von  $AB$  den senkrechten Abstand

$$y_k = \frac{l}{4z_0}$$

Hinsichtlich der Momente verhält sich also der Bogen genau wie ein solcher mit gleichhohen Kämpfergelenken.

Bei der Berechnung der Querkräfte muß man beachten, daß

$$(104) \quad Q = Q_0 \cos \varphi - H \sin (\varphi - \alpha)$$

ist; vgl. Bd. I, § 24, d. Führt man also den Multiplikator  $\mu = \sin (\varphi - \alpha)$

ein, so tritt an die Stelle der  $Q_0 \cotg \varphi$ -Fläche die  $Q_0 \frac{\cos \varphi}{\sin (\varphi - \alpha)}$ -Fläche.

## § 31.

**Der an beiden Enden eingespannte Bogen.**

173. Die allgemeine Untersuchung eines beliebig geformten, durch irgendwie gerichtete Lasten beanspruchten, an beiden Enden eingespannten Bogens ist im Abschnitt VII, § 28, vorgeführt worden. Nunmehr sollen geschlossene Formeln für einen symmetrischen Bogen mit lotrechten Lasten entwickelt werden. Der hierbei eingeschlagene Weg deckt sich mit der in Abteil. 1, § 11, unter d und e beschriebenen Berechnung eines an beiden Enden eingespannten Fachwerkbogens. Als statisch unbestimmte Größen werden die die inneren Kräfte des Scheitelquerschnitts ersetzenden Größen  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  eingeführt, Fig. 411. Der Bogen wird auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogen, dessen  $y$ -Achse mit der Symmetrieachse zusammenfällt, und dessen  $x$ -Achse so gewählt werden soll, daß  $\delta_{ac} = 0$  wird. Das Nullwerden von  $\delta_{ab}$  und  $\delta_{bc}$  folgt ohne weiteres aus der Symmetrie.

Die Gleichungen zur Berechnung der Größen  $X$  lauten also\*):

$$(1) \quad \begin{cases} L_a - \delta_{at} = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} \\ L_b - \delta_{bt} = \sum P_m \delta_{mb} - X_b \delta_{bb} \\ L_c - \delta_{ct} = \sum P_m \delta_{mc} - X_c \delta_{cc} \end{cases}$$

Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht aus zwei Freitragern  $AC$  und  $CB$ . Da die wirkliche gegenseitige Bewegung der beiden Scheitelquerschnitte, an denen die  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  angreifen, Null ist, so sind die Werte  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$  gleich Null; sie wurden daher in den Gleichungen (1) fortgelassen. Behufs Ermittlung von  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $L_c$  geben wir die an den Widerlagern des statisch bestimmten Hauptsystems angreifenden Auflagerkräfte an.

Im Belastungsfalle  $X_a = -1$  greift am linken Auflager ein linksdrehendes, am rechten ein rechtsdrehendes Kräftepaar an, dessen Moment  $= 1$  ist.

Im Belastungsfalle  $X_b = -1$  greift in  $A$  ein aufwärtsgerichteter, in  $B$  ein abwärtsgerichteter Widerstand von der Größe 1 an, ferner am linken und rechten Widerlager je ein linksdrehendes Kräftepaar, dessen Moment gleich  $1 \cdot l_1$  ist.

Im Belastungsfalle  $X_c = -1$  greift am linken Auflager ein linksgerichteter, am rechten ein rechtsgerichteter Widerstand 1 an, ferner links ein linksdrehendes, rechts ein rechtsdrehendes Kräftepaar von der Größe  $1 \cdot c_u$ .

\*) Nach § 8, Gleich. (1).

Erfahren also die Widerlager  $A$  und  $B$  eine Rechtsdrehung um  $\varphi_A$  bzw.  $\varphi_B$ , senken sie sich um  $\eta_A$  und  $\eta_B$ , und werden sie nach rechts um  $\xi_A$  bzw.  $\xi_B$  verschoben, so ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} L_a = \varphi_B - \varphi_A \\ L_b = -l_1(\varphi_B + \varphi_A) + \eta_B - \eta_A \\ L_c = c_u(\varphi_B - \varphi_A) + \xi_B - \xi_A. \end{cases}$$

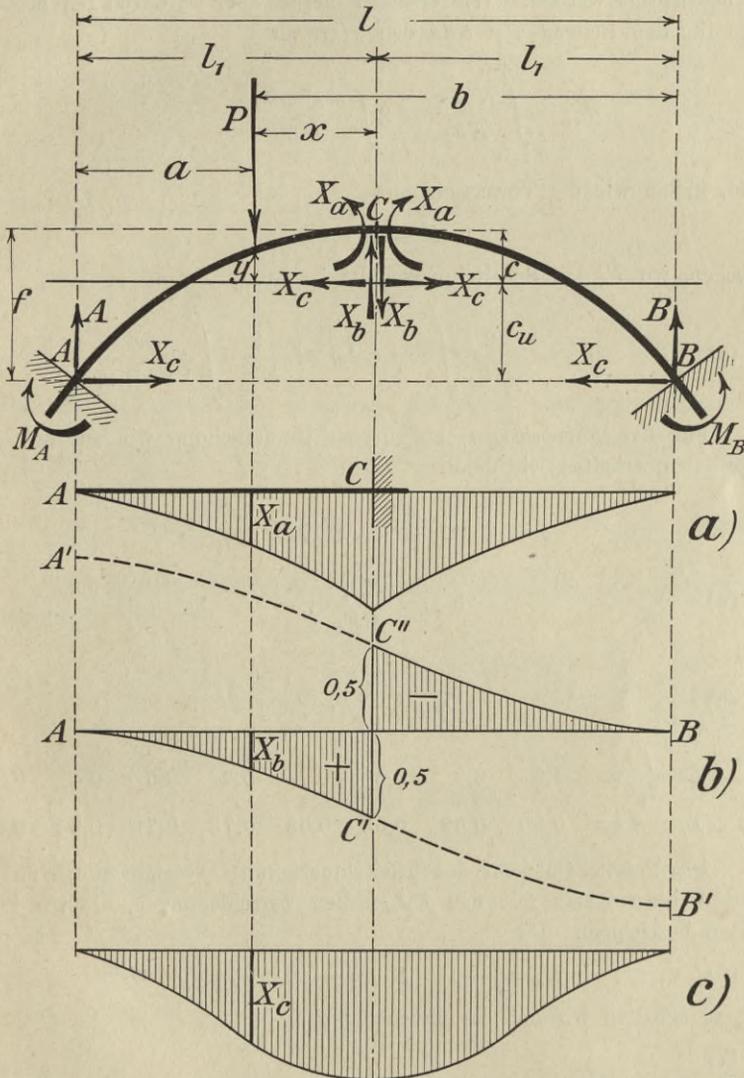


Fig. 411.

Infolge einer gleichmäßigen Erwärmung entsteht:

$$\delta_{at} = 0, \quad \delta_{bt} = 0, \quad \delta_{ct} = \varepsilon t l = 2 \varepsilon t l_1.$$

Bei der Berechnung der Biegungslinien  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$ ,  $\delta_{mc}$  und der Verschiebungen  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{bb}$ ,  $\delta_{cc}$  vernachlässigen wir die Querkräfte  $Q$  und die Kräfte  $\mathcal{R}$ . Nur bei der Ermittlung von  $\delta_{cc}$  soll die Längenänderung  $\Delta ds$  berücksichtigt werden. Wir ersetzen hierbei aber  $\mathcal{R}_c$  durch  $N_c$ , nehmen also für den Beitrag von  $\Delta ds$  den Wert an

$$\delta_{cc} = \int_{-l_1}^{+l_1} \frac{N_c^2 ds}{EF} = 2 \int_0^{l_1} \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF}$$

und, indem wir die Voraussetzung

$$F = F_c \sec \varphi$$

machen, wo  $F_c$  den Scheitelquerschnitt bedeutet,

$$(3) \quad \delta_{cc} = \frac{2}{EF_c} \int_0^{l_1} \cos^2 \varphi dx = \frac{2}{EF_c} \int_0^{l_1} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Für den *Parabelbogen*, auf dessen Untersuchung wir uns hier beschränken, erhalten wir dann:

$$y = c - f \frac{x^2}{l_1^2}, \quad \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{4f^2 x^2}{l_1^4},$$

$$(4) \quad \delta_{cc} = \frac{2l_1}{EF_c} \tau,$$

wo

$$(5) \quad \tau = \frac{l_1}{2f} \operatorname{arctang} \frac{2f}{l_1}.$$

Für  $\frac{f}{l_1} =$  1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3  
 ist z. B.  $\tau =$  0,55 0,59 0,63 0,68 0,73 0,79 0,84 0,90.

Das Trägheitsmoment des Scheitelquerschnitts bezeichnen wir mit  $J_c$  und rechnen fortan mit den  $EJ_c$ -fachen Verschiebungen, die wir kurz mit  $\delta$  bezeichnen. Da

$$(6) \quad M_a = -1, \quad M_b = -x, \quad M_c = y$$

ist, so erhalten wir mit der Bezeichnung

$$(7) \quad J' = J \cos \varphi$$

die Werte

$$(8) \quad \delta_{aa} = \int_{-l_1}^{+l_1} M_a^2 \frac{J_c}{J} ds = 2 \int_0^{l_1} \frac{J_c}{J'} dx,$$

$$(9) \quad \delta_{bb} = \int_{-l_1}^{+l_1} M_b^2 \frac{J_c}{J} ds = 2 \int_0^{l_1} x^2 \frac{J_c}{J'} dx,$$

$$(10) \quad \delta_{cc} = \int_{-l_1}^{+l_1} M_c^2 \frac{J_c}{J} ds + 2l_1 \frac{J_c}{F_c} \tau = 2 \int_0^{l_1} y^2 \frac{J_c}{J'} dx + 2l_1 \frac{J_c}{F_c} \tau,$$

$$(11) \quad \delta_{ac} = \int_{-l_1}^{+l_1} M_a M_c \frac{J_c}{J} ds = 2 \int_0^{l_1} y \frac{J_c}{J'} dx.$$

Für den Kämpferquerschnitt sei

$$(12) \quad \left( \frac{J_c}{J'} \right)_{x=l_1} = \alpha,$$

ferner werde angenommen, es ändere sich  $J_c | J'$  nach dem Gesetze

$$(13) \quad \frac{J_c}{J'} = 1 - (1 - \alpha) \frac{x^\rho}{l_1^\rho},$$

wo  $\rho$  eine beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist.

Wir erhalten dann zur Bestimmung der Lage der  $x$ -Achse die Gleichung

$$0 = \delta_{ac} = 2 \int_0^{l_1} y \frac{J_c}{J'} dx = 2 \int_0^{l_1} \left( c - f \frac{x^2}{l_1^2} \right) \left[ 1 - (1 - \alpha) \frac{x^\rho}{l_1^\rho} \right] dx,$$

aus der sich ergibt

$$(14) \quad c = \frac{f}{3} \frac{\rho + 1}{\rho + \alpha} \frac{\rho + 3\alpha}{\rho + 3}.$$

Weiter folgt:

$$(15) \quad \delta_{aa} = 2l_1 \frac{\rho + \alpha}{\rho + 1},$$

$$(16) \quad \delta_{bb} = \frac{2}{3} l_1^3 \frac{\rho + 3\alpha}{\rho + 3},$$

$$(17) \quad \delta_{cc} = 2fl_1 \left( \frac{1}{5} f \frac{\rho + 5\alpha}{\rho + 5} - \frac{1}{3} c \frac{\rho + 3\alpha}{\rho + 3} \right) + 2l_1 \frac{J_c}{F_c} \tau.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (1) ein, so muß man die  $L$  und  $\delta_i$  mit  $EJ_c$  multiplizieren. Eine Änderung der Stützlage erzeugt also

$$(18) \quad X_a = \frac{EJ_c}{\delta_{aa}} (\varphi_A - \varphi_B),$$

$$(19) \quad X_b = \frac{EJ_c}{\delta_{bb}} [l_1(\varphi_A + \varphi_B) + \eta_A - \eta_B],$$

$$(20) \quad X_c = \frac{EJ_c}{\delta_{cc}} [c_u(\varphi_A - \varphi_B) + \xi_A - \xi_B],$$

und der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung beträgt

$$(21) \quad X_a = 0, \quad X_b = 0, \quad X_c = \frac{2\varepsilon EJ_c l_1 t}{\delta_{cc}}.$$

Am häufigsten wird die freilich wenig empfehlenswerte Annahme eines konstanten Wertes  $J'$  gemacht. Dann bedeutet  $J_c$  einen Mittelwert der Veränderlichen  $J'$ , und  $\alpha$  wird gleich 1. Man erhält für diesen Fall:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1}{3} f \\ \delta_{aa} = 2l_1, \quad \delta_{bb} = \frac{2}{3} l_1^3, \quad \delta_{cc} = \frac{8}{45} f^2 l_1 - 2l_1 \frac{J_c}{F_c} \tau. \end{array} \right.$$

**174. Einfluß einer Einzellast.** Eine Einzellast  $P = 1$  erzeugt

$$X_a = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}.$$

Die  $\delta_{ma}$ -Linie der linken Trägerhälfte ist die Momentenlinie eines Freitragers, der bei  $C$  eingespannt ist (Fig. 411a) und dessen Belastungslinie die Gleichung

$$M_a \frac{J_c}{J'} = 1 \cdot \frac{J_c}{J'} = 1 - (1 - \alpha) \frac{x^{\rho}}{l_1^{\rho}}$$

besitzt. Die Differentialgleichung der  $\delta_{ma}$ -Linie lautet

$$\frac{d^2 \delta_{ma}}{dx^2} = 1 - (1 - \alpha) \frac{x^{\rho}}{l_1^{\rho}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d \delta_{ma}}{dx} = x - \frac{1 - \alpha}{\rho + 1} \frac{x^{\rho+1}}{l_1^{\rho}} + C_1,$$

$$\delta_{ma} = \frac{x^2}{2} - \frac{1 - \alpha}{(\rho + 1)(\rho + 2)} \frac{x^{\rho+2}}{l_1^{\rho}} + C_1 x + C_2.$$

Die Integrationskonstanten sind durch die Bedingungen gegeben, daß für  $x = l_1$  sowohl  $\frac{d\delta_{ma}}{dx}$  als auch  $\delta_{ma}$  Null werden muß.

Man findet

$$C_1 = -l_1 \frac{\rho + \alpha}{\rho + 1}, \quad C_2 = \frac{1}{2} l_1^2 \frac{\rho + 2\alpha}{\rho + 2},$$

und erhält schließlich für  $X_a = \delta_{ma} | \delta_{aa}$  die Formel:

$$(23) \quad \frac{X_a}{l_1} = \frac{1}{4} \frac{\rho + 1}{\rho + \alpha} \frac{\rho + 2\alpha}{\rho + 2} - \frac{1}{2} \frac{x}{l_1} + \frac{1}{4} \frac{\rho + 1}{\rho + \alpha} \frac{x^2}{l_1^2} - \frac{1 - \alpha}{2(\rho + 2)(\rho + \alpha)} \frac{x^{\rho+2}}{l_1^{\rho+2}}.$$

Ganz in derselben Weise werden die  $\delta_{mb}$ -Linie und die  $\delta_{mc}$ -Linie der linken Trägerhälfte als Momentenlinien eines Freitragers  $AC$  aufgefaßt. Die Gleichungen der Belastungslinien lauten

$$M_b \frac{J_c}{J'} = x - (1 - \alpha) \frac{x^{\rho+1}}{l_1^\rho} \quad \text{bzw.}$$

$$M_c \frac{J_c}{J'} = y - (1 - \alpha) y \frac{x^\rho}{l_1^\rho}.$$

Man erhält:

$$\frac{d^2 \delta_{mb}}{dx^2} = x - (1 - \alpha) \frac{x^{\rho+1}}{l_1^\rho},$$

$$\frac{d\delta_{mb}}{dx} = \frac{x^2}{2} - \frac{1 - \alpha}{\rho + 2} \frac{x^{\rho+2}}{l_1^\rho} + C_1,$$

$$\delta_{mb} = \frac{x^3}{6} - \frac{1 - \alpha}{(\rho + 2)(\rho + 3)} \frac{x^{\rho+3}}{l_1^\rho} + C_1 x + C_2;$$

$x = l_1$  liefert  $\frac{d\delta_{mb}}{dx} = 0$  und  $\delta_{mb} = 0$ , folglich ist

$$C_1 = -\frac{1}{2} l_1^2 \frac{\rho + 2\alpha}{\rho + 2}, \quad C_2 = \frac{1}{3} l_1^3 \frac{\rho + 3\alpha}{\rho + 3},$$

und es ergibt sich für  $X_b = \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$  der Wert

$$(24) \quad X_b = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{\rho + 3}{\rho + 3\alpha} \frac{\rho + 2\alpha}{\rho + 2} \frac{x}{l_1} + \frac{1}{4} \frac{\rho + 3}{\rho + 3\alpha} \frac{x^3}{l_1^3} - \frac{3(1 - \alpha)}{2(\rho + 2)(\rho + 3\alpha)} \frac{x^{\rho+3}}{l_1^{\rho+3}}.$$

Die Differentialgleichung der  $\delta_{mc}$ -Linie lautet

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta_{mc}}{dx^2} &= y \left[ 1 - (1 - \alpha) \frac{x^{\rho}}{l_1^{\rho}} \right] \\ &= c \left[ 1 - (1 - \alpha) \frac{x^{\rho}}{l_1^{\rho}} \right] - f \left[ \frac{x^2}{l_1^2} - (1 - \alpha) \frac{x^{\rho+2}}{l_1^{\rho+2}} \right]. \end{aligned}$$

Da nun für  $x = 0$  auch  $\frac{d\delta_{mc}}{dx} = 0$  sein muß, so folgt

$$\frac{d\delta_{mc}}{dx} = c \left[ x - \frac{1 - \alpha}{\rho + 1} \frac{x^{\rho+1}}{l_1^{\rho}} \right] - f \left[ \frac{x^3}{3l_1^2} - \frac{1 - \alpha}{\rho + 3} \frac{x^{\rho+3}}{l_1^{\rho+2}} \right],$$

und

$$\begin{aligned} \delta_{mc} &= c \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1 - \alpha}{(\rho + 1)(\rho + 2)} \frac{x^{\rho+2}}{l_1^{\rho}} \right] \\ &\quad - f \left[ \frac{x^4}{12l_1^2} - \frac{1 - \alpha}{(\rho + 3)(\rho + 4)} \frac{x^{\rho+4}}{l_1^{\rho+2}} \right] + C. \end{aligned}$$

Für  $x = l_1$  muß  $\delta_{mc} = 0$  sein. Man findet daher

$$\begin{aligned} \delta_{mc} &= cl_1^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right) - \frac{1 - \alpha}{(\rho + 1)(\rho + 2)} \left( 1 - \frac{x^{\rho+2}}{l_1^{\rho+2}} \right) \right] \\ &\quad - fl_1^4 \left[ \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{x^4}{l_1^4} \right) - \frac{1 - \alpha}{(\rho + 3)(\rho + 4)} \left( 1 - \frac{x^{\rho+4}}{l_1^{\rho+4}} \right) \right], \end{aligned}$$

und

$$(25) \quad X_c = \frac{cl_1}{s^2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right) - \frac{1 - \alpha}{(\rho + 1)(\rho + 2)} \left( 1 - \frac{x^{\rho+2}}{l_1^{\rho+2}} \right) \right] \\ - \frac{fl_1}{s^2} \left[ \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{x^4}{l_1^4} \right) - \frac{1 - \alpha}{(\rho + 3)(\rho + 4)} \left( 1 - \frac{x^{\rho+4}}{l_1^{\rho+4}} \right) \right],$$

wo

$$(26) \quad s^2 = 2f \left( \frac{1}{5} f \frac{\rho + 5\alpha}{\rho + 5} - \frac{1}{3} c \frac{\rho + 3\alpha}{\rho + 3} \right) + 2 \frac{J_c}{F_c} \tau, \\ c = \frac{f}{3} \frac{\rho + 1}{\rho + \alpha} \frac{\rho + 3\alpha}{\rho + 3}.$$

Eine ähnliche Untersuchung ist bereits in Abteilung 1, § 11, unter e, für den an beiden Enden eingespannten Fachwerkbogen durchgeführt worden, aber nur für  $\rho = 1$ . Für diesen Sonderfall ergibt sich

$$(27) \quad \frac{X_a}{l_1} = \frac{1 + 2\alpha}{6(1 + \alpha)} - \frac{1}{2} \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2(1 + \alpha)} \frac{x^2}{l_1^2} - \frac{1 - \alpha}{6(1 + \alpha)} \frac{x^3}{l_1^3},$$

$$(28) \quad X_b = \frac{1}{2} - \frac{1 + 2\alpha}{1 + 3\alpha} \frac{x}{l_1} + \frac{1}{1 + 3\alpha} \frac{x^2}{l_1^2} - \frac{1 - \alpha}{2(1 + 3\alpha)} \frac{x^3}{l_1^3},$$

$$(29) \quad X_c = \frac{cl_1}{k^2} \left[ 1 - \frac{x^2}{l_1^2} - \frac{1 - \alpha}{3} \left( 1 - \frac{x^3}{l_1^3} \right) \right] \\ - \frac{fl_1}{2k^2} \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{x^4}{l_1^4} \right) - \frac{1 - \alpha}{5} \left( 1 - \frac{x^5}{l_1^5} \right) \right],$$

wo

$$(30) \quad k^2 = \frac{f^2}{90} \frac{7 + 42\alpha + 15\alpha^2}{1 + \alpha} + 4 \frac{J_c}{F_c} \tau,$$

$$(31) \quad c = f \frac{1 + 3\alpha}{6(1 + \alpha)}.$$

Die Formeln (27) und (28) werden etwas einfacher, wenn man den Abstand  $a$  der Last  $P = 1$  vom linken Kämpfer einführt; sie gehen dann über in

$$(32) \quad X_a = \frac{l_1}{6(1 + \alpha)} \left[ 3\alpha \frac{a^2}{l_1^2} + (1 - \alpha) \frac{a^3}{l_1^3} \right],$$

$$(33) \quad X_b = \frac{1}{3\alpha + 1} \frac{a^2}{l_1^2} \left[ 3\alpha + (1 - 2\alpha) \frac{a}{l_1} - 0,5(1 - \alpha) \frac{a^2}{l_1^2} \right]^*.$$

Die für  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  abgeleiteten Formeln gelten im allgemeinen nur für eine links vom Scheitel des Bogens angreifende Last, also nur für positive Werte  $x$ . Wird die Last im gleichen Abstände  $x$  rechts vom Scheitel aufgebracht, so bleiben  $X_a$  und  $X_c$  ungeändert, während  $X_b$  das Vorzeichen wechselt.

Die lotrechten Seitenkräfte der Kämpferdrücke sind für eine links vom Scheitel angreifende Last

$$(34) \quad B = X_b, \quad A = 1 - X_b.$$

Eine rechts vom Scheitel liegende Last erzeugt

$$(35) \quad B = 1 + X_b, \quad A = -X_b.$$

Verschiebt man also den Zweig  $C''B$  der  $X_b$ -Linie in senkrechter Richtung um die Strecke 1 in die gestrichelte Lage  $C'B'$ , so ist die Linie  $AC'B'$  die  $B$ -Linie; ihre Ordinaten sind durchweg positiv. Ganz ebenso erhält man die  $A$ -Linie  $A'C''B$ .

Zur Bestimmung der Lagen der Kämpferdrücke eignen sich am besten die Schnittpunkte  $L$  und  $R$  der Kämpferdrücke mit der  $x$ -Achse und der Punkt  $E$  der Kämpferdrucklinie. Die Strecken  $v$ ,  $v'$ ,  $y_k$  (Fig. 412) ergeben sich aus den Momentengleichungen

$$X_a + X_b v - P(v - x) = 0, \quad P = 1$$

$$X_a - X_b v' = 0$$

$$X_a + X_b x - X_c y_k = 0.$$

\*) Vgl. Abteilung 1, § 11, Nr. 135, Gleich. (2) und Nr. 136, Gleich. (3).

Man erhält

$$(36) \quad v = \frac{X_a + x}{1 - X_b},$$

$$(37) \quad v' = \frac{X_a}{X_b},$$

$$(38) \quad y_k = \frac{X_b x + X_a}{X_c}.$$

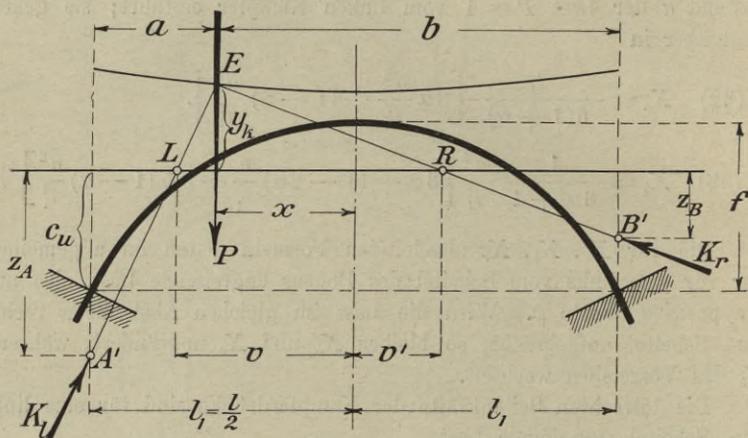


Fig. 412.

Die Biegemomente für die Kämpferquerschnitte, die sogenannten Einspannungsmomente, sind:

$$(39) \quad M_A = X_c (c_u - z_A) = X_c c_u - X_c z_A,$$

$$(40) \quad M_B = X_c c_u - X_c z_B,$$

wo

$$(41) \quad X_c z_A = 1 \cdot a - X_b l_1 - X_a,$$

$$(42) \quad X_c z_B = X_b l_1 - X_a.$$

Das Biegemoment für den Scheitelquerschnitt ist

$$(43) \quad M_S = X_a - X_c c.$$

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung für den Sonderfall  $\alpha = 1$ . Man findet dann

$$(44) \quad X_a = \frac{1}{4} \frac{a^2}{l_1},$$

$$(45) \quad X_b = \frac{1}{4} \frac{a^2}{l_1^2} \left( 3 - \frac{a}{l_1} \right),$$

$$c = \frac{f}{3}, \quad k^2 = \frac{16}{45} f^2 \left( 1 + \frac{45}{4} \frac{J_c}{F_c f^2} \tau \right),$$

$$(46) \quad X_c = \frac{15}{32} \frac{l_1}{f} \nu \left( 1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right)^2 = \frac{15}{32} \frac{a^2 b^2}{f l_1^3} \nu,$$

wo

$$(47) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \frac{J_c}{F_c f^2} \tau},$$

$$(48) \quad y_k = \frac{8f}{15\nu}, \quad v = \frac{l_1^2}{l_1 + a}, \quad v' = \frac{l_1^2}{l_1 + b},$$

$$(49) \quad X_c z_A = \frac{b^2 a}{4 l_1^2}, \quad X_c z_B = \frac{a^2 b}{4 l_1^2}.$$

Vgl. Abt. 1, § 11, Nr. 140. Dort ist auch eine einfache zeichnerische Bestimmung der Lagen der Kämpferdrücke angegeben worden. Weiter ist

$$M_A = X_c \left( \frac{2f}{3} - z_A \right) = \frac{ab^2}{4l_1^2} \left( \frac{5}{4} \frac{a}{l_1} \nu - 1 \right),$$

oder mit  $2l_1 = l$ :

$$(50) \quad M_A = \frac{ab^2}{l^2} \left( \frac{5}{2} \frac{a}{l} \nu - 1 \right),$$

$$(51) \quad M_B = \frac{ba^2}{l^2} \left( \frac{5}{2} \frac{b}{l} \nu - 1 \right),$$

$$(52) \quad B = X_b = \frac{1}{4} \frac{a^2}{l_1^2} \left( 3 - \frac{a}{l_1} \right),$$

$$(53) \quad A = 1 - B = \frac{1}{4} \frac{b^2}{l_1^2} \left( 3 - \frac{b}{l_1} \right).$$

Die für  $A$ ,  $B$ ,  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $X_c$  gefundenen Formeln gelten für jede Lage der Last 1, gleichgültig ob links oder rechts vom Scheitel.

Das Biegemoment  $M_S$  für den Scheitelquerschnitt ist

$$M_S = X_a - X_c \frac{f}{3},$$

$$(54) \quad M_S = \frac{a^2}{2l} \left( 1 - \frac{5}{2} \frac{b^2}{l^2} \nu \right).$$

**Zahlenbeispiel.** Es sei  $l_1 = 30$  m,  $f = 15$  m,  $\alpha = 0,25$  m. Die Stehblechhöhe des Scheitelquerschnitts sei zu  $h_o = 1,0$  m angenommen und die ganze Höhe dieses Querschnitts zu  $h = 1,10$  m geschätzt. Die Kernweite darf dann  $k = \frac{5}{12} 1,0$  gesetzt werden, womit

$$\frac{J_c}{F_c} = \frac{J_c}{W_c} \cdot \frac{W_c}{F_c} = \frac{h}{2} k = \frac{5 h h_o}{24} = \frac{5,5}{24}.$$

Zu  $f|l_1 = 0,5$  gehört nach Seite 558 rund  $\tau = 0,8$ , weshalb

$$\frac{J_c}{F_c} \tau = \frac{5,5}{30}.$$

Die Einflußlinien für  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  sollen für  $\rho = 1$  und  $\rho = 2$  berechnet werden, außerdem noch für den der Voraussetzung eines konstanten  $J' = J \cos \varphi$  entsprechenden Fall  $\alpha = 0$ .

*Erster Fall:*  $\rho = 1$ . Nach (32) und (33) ist

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{5}{1,25} \left( 0,75 \frac{a^2}{l_1^2} + 0,75 \frac{a^3}{l_1^3} \right) = 3 \left( \frac{a^2}{l_1^2} + \frac{a^3}{l_1^3} \right) \\ X_b &= \frac{4}{7} \frac{a^2}{l_1^2} \left( 0,75 + 0,5 \frac{a}{l_1} - 0,375 \frac{a^2}{l_1^2} \right) \\ &= \frac{1}{7} \frac{a^2}{l_1^2} \left( 3 + 2 \frac{a}{l_1} - 1,5 \frac{a^2}{l_1^2} \right), \end{aligned}$$

nach (31)

$$c = f \frac{1 + 3\alpha}{6(1 + \alpha)} = 3,50 \text{ m}$$

und nach (29)

$$X_c = \gamma_1 - \frac{x^2}{l_1^2} \left\{ \gamma_2 - \frac{x}{l_1} \left[ \gamma_3 + \frac{x}{l_1} \left( \gamma_4 - \gamma_5 \frac{x}{l_1} \right) \right] \right\},$$

wo

$$\gamma_2 = \frac{cl_1}{k^2}, \quad \gamma_3 = \frac{cl_1}{k^2} \frac{1 - \alpha}{3},$$

$$\gamma_4 = \frac{fl_1}{6k^2}, \quad \gamma_5 = \frac{fl_1}{k^2} \frac{1 - \alpha}{10},$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 + \gamma_5$$

$$k^2 = \frac{f^2}{90} \frac{7 + 42\alpha + 15\alpha^2}{1 + \alpha} + 4 \frac{J_c}{F_c} \tau$$

$$= 36,8750 + \frac{22}{30} = 37,6,$$

mithin

$$X_c = 0,99734 - \frac{x^2}{l_1^2} \left\{ 2,79255 - \frac{x}{l_1} \left[ 0,69814 + \frac{x}{l_1} \left( 1,99468 - 0,89761 \frac{x}{l_1} \right) \right] \right\}.$$

*Zweiter Fall:*  $\rho = 2$ . Die Gleichungen (23) und (24) liefern

$$X_a = 6,25 - 15 \frac{x}{l_1} + 10 \frac{x^2}{l_1^2} - 1,25 \frac{x^4}{l_1^4}$$

$$X_b = 0,5 - \frac{1}{44} \left( 37,5 \frac{x}{l_1} - 20 \frac{x^3}{l_1^3} + 4,5 \frac{x^5}{l_1^5} \right).$$

Nach (14) und (26) wird

$$c = 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2,75}{2,25} = \frac{11}{3} = 3,67 \text{ m}$$

$$s^2 = 30 \left( 3 \frac{3,25}{7} - \frac{11}{9} \frac{2,75}{5} \right) + 2 \frac{5,5}{30} = 21,986,$$

und nach (25)

$$X_c s^2 = 55 \left( 1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right) - 6,875 \left( 1 - \frac{x^4}{l_1^4} \right) - 37,5 \left( 1 - \frac{x^4}{l_1^4} \right) \\ + 11,25 \left( 1 - \frac{x^6}{l_1^6} \right)$$

$$X_c = \gamma_1 - \frac{x^2}{l_1^2} \left[ \gamma_2 - \frac{x^2}{l_1^2} \left( \gamma_3 - \gamma_4 \frac{x^2}{l_1^2} \right) \right],$$

wo

$$\gamma_1 = 0,99495, \quad \gamma_2 = 2,50159, \quad \gamma_3 = 2,01833, \quad \gamma_4 = 0,51169.$$

*Dritter Fall:*  $\alpha = 1$ .

$$X_a = \frac{l_1}{4} \frac{a^2}{l_1^2} = 7,5 \frac{a^2}{l_1^2}$$

$$X_b = \frac{1}{4} \frac{a^2}{l_1^2} \left( 3 - \frac{a}{l_1} \right)$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \frac{J_c}{F_c f^2} \tau} = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{5,5}{30 \cdot 15^2}} = 0,9909$$

$$X_c = \frac{15}{32} \frac{l_1}{f} \nu \left( 1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right)^2 = 0,9290 \left( 1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right)^2.$$

Die Ergebnisse der Rechnung sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt worden.

$X_a$ -Linie

$\frac{x}{l_1}$	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 1$
	$\rho = 1$	$\rho = 2$	
0	6,0000	6,2500	7,5000
0,2	3,4560	3,6480	4,8000
0,4	1,7280	1,8180	2,7000
0,6	0,6720	0,6880	1,2000
0,8	0,1440	0,1380	0,3000

$X_b$ -Linie

$\frac{x}{l_1}$	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 1$
	$\rho = 1$	$\rho = 2$	
0	0,5000	0,5000	0,5000
0,2	0,3328	0,3331	0,3520
0,4	0,1882	0,1872	0,2160
0,6	0,0814	0,0789	0,1040
0,8	0,0191	0,0174	0,0280

 $X_c$ -Linie

$\frac{x}{l_1}$	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 1$
	$\rho = 1$	$\rho = 2$	
0	0,9973	0,9950	0,9290
0,2	0,8941	0,8981	0,8562
0,4	0,6371	0,6443	0,6555
0,6	0,3315	0,3321	0,3805
0,8	0,0904	0,0865	0,1204
$e =$	3,50 m	3,67 m	5,00 m

Die Unterschiede der für  $\rho = 1$  und  $\rho = 2$  gewonnenen Zahlen sind für die Praxis belanglos. Daß die bequeme Annahme  $\alpha = 1$  nur für Überschlagsrechnungen zu empfehlen ist, haben wir bereits am Schluß des § 11 der Abteilung 1 gezeigt.

Die folgende Tabelle enthält noch die zur Festlegung der Kämpferdrücke dienenden Strecken  $y_k$ ,  $v$ ,  $v'$  für  $\rho = 1$  und  $\rho = 2$ . Die Kämpferdruckrichtungen des Falles  $\alpha = 1$  werden am schnellsten zeichnerisch bestimmt. Ein Beispiel hierzu findet sich in Abteilung 1 auf Tafel 6.

$\frac{x}{l_1}$	$\alpha = 0,25$					
	$\rho = 1$			$\rho = 2$		
	$y_k$	$v$	$v'$	$y_k$	$v$	$v'$
0	6,02	12,00	12,00	6,28	12,50	12,50
0,2	6,10	14,17	10,38	6,29	14,47	10,95
0,4	6,26	16,91	9,18	6,31	17,00	9,71
0,6	6,45	20,33	8,26	6,35	20,29	8,72
0,8	6,66	24,61	7,54	6,42	24,57	7,93
	m	m	m	m	m	m

Für den Fall  $\rho = 1$  haben wir noch die Ordinaten der Einflußlinien für  $M_A$ ,  $M_B$  und  $M_S$  in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

$\frac{x}{l_1}$	$M_A$	$M_B$	$M_S$
0,2	-4,243	+0,611	-0,173
0,4	-5,074	+2,042	-0,488
0,6	-3,299	+3,409	-0,502
0,8	-0,278	+3,754	+0,327
1,0	+2,469	+2,469	+2,509

Die Zahlen der mit  $M_B$  überschriebenen Spalte geben, von unten nach oben gelesen, die Ordinaten der  $M_A$ -Linie rechts vom Scheitel an.

Für  $\alpha = 1$  erhält man die folgenden Werte  $M_S$ :

$\frac{a}{l_1} =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$M_S =$	-0,301	-0,703	-0,577	+0,519	+2,855.

**175. Die Einflußlinie für die Kernpunktmomente  $M^o$  und  $M^u$**  findet man nach Festlegung der den verschiedenen Lagen der Last  $P = 1$  entsprechenden Kämpferdruckrichtungen  $A'E$  und  $B'E$  (Fig. 413) mit Hilfe der Formeln

$$(55) \quad M^o = X_c \eta_o, \quad M^u = X_c \eta_u,$$

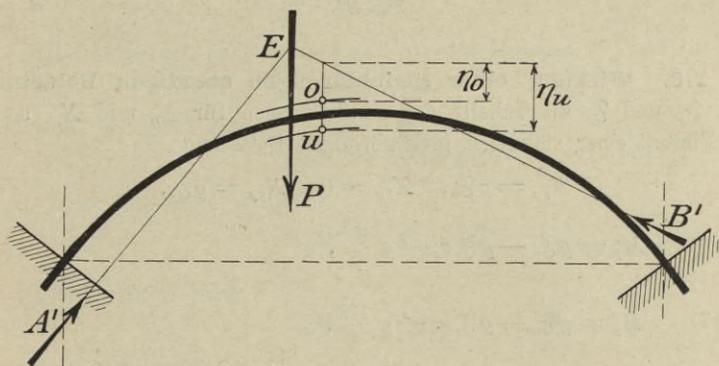


Fig. 413.

wo  $\eta_o$  und  $\eta_u$  die in senkrechter Richtung gemessenen Abstände der Punkte  $o$  und  $u$  vom Linienzuge  $A'E B'$  sind. Unterhalb dieses Linienzuges liegenden Punkten  $o$  und  $u$  entsprechen positive Momente  $M^o$  und  $M^u$ .

Die Querkraft  $Q$  für einen Querschnitt links oder rechts von  $P$  ist gleich der Projektion des Kämpferdruckes  $K$ , bzw. des Kämpferdruckes  $K$ , auf den Querschnitt.

Die von den Kämpferdrücken  $K_l$  und  $K_r$  umhüllte Linie heißt die *Kämpferdruck-Umhüllungslinie*; Fig. 414.

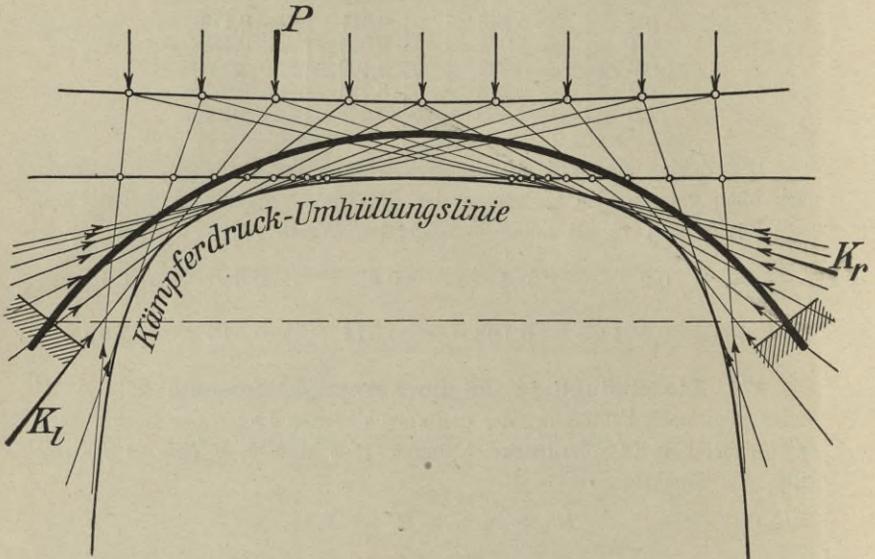


Fig. 414.

### 176. Wirkung einer gleichförmigen ständigen Belastung.

Sind  $\mathfrak{F}_a$  und  $\mathfrak{F}_c$  die Inhalte der Einflußflächen für  $X_a$  und  $X_c$ , so ist der Einfluß einer ständigen gleichförmigen Belastung

$$X_{ag} = g \mathfrak{F}_a, \quad X_{bg} = 0, \quad X_{cg} = g \mathfrak{F}_c,$$

$$(56) \quad M_g^o = g \mathfrak{F}_a - g \mathfrak{F}_c y_o - g \frac{x^2}{2},$$

$$(57) \quad M_g^u = g \mathfrak{F}_a - g \mathfrak{F}_c y_u - g \frac{x^2}{2},$$

$$(58) \quad Q_g = Q_{og} \cos \varphi - X_{cg} \sin \varphi = g x \cos \varphi - g \mathfrak{F}_c \sin \varphi.$$

Greift die Belastung unmittelbar am Bogen an, so ist nach (23):

$$(59) \quad \mathfrak{F}_a = 2l_1^2 \left[ \frac{1}{4} \frac{\rho+1}{\rho+\alpha} \frac{\rho+2\alpha}{\rho+2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \frac{\rho+1}{\rho+\alpha} - \frac{1-\alpha}{2(\rho+2)(\rho+3)(\rho+\alpha)} \right],$$

$$\mathfrak{F}_a = \frac{l_1^2}{12} \frac{\rho+3\alpha}{\rho+3} \frac{2+\rho(\rho+3)}{(\rho+2)(\rho+\alpha)}$$

und nach (25)

$$(60) \quad \mathfrak{F}_c = \frac{2l_1^2}{s^2} \left[ c \left( \frac{1}{3} - \frac{1-\alpha}{(\rho+1)(\rho+3)} \right) - f \left( \frac{1}{15} - \frac{1-\alpha}{(\rho+3)(\rho+5)} \right) \right];$$

$c$  und  $s^2$  sind bestimmt durch die Gleich. (14) und (26).

Man kann aber auch die zur Darstellung der Einflußlinien für  $X_a$  und  $X_c$  gerechneten Ausdrücke zur Gewinnung von  $\mathfrak{F}_a$  und  $\mathfrak{F}_b$  verwenden. So fanden wir für  $l_1 = 30$  m,  $f = 15$  m,  $\alpha = 0,25$  und  $\rho = 2$ :

$$X_c = 0,99495 - 2,50189 \frac{x^2}{l_1^2} + 2,01833 \frac{x^4}{l_1^4} - 0,51169 \frac{x^6}{l_1^6}$$

und erhalten

$$\mathfrak{F}_c = 2l_1 \left( 0,99495 - \frac{2,50189}{3} + \frac{2,01833}{5} - \frac{0,51169}{7} \right) = 29,5 \text{ m.}$$

**177. Einfluß einer gleichförmigen Verkehrslast.** Ist  $\mathfrak{F}^o$  der Inhalt des positiven Teiles der  $M^o$ -Fläche, so erzeugt eine gleichförmige Verkehrslast  $p$ :

$$\max M_p^o = p \mathfrak{F}_+^o.$$

Hat man nun mit Hilfe von (56) das Moment  $M_g^o$  auf die Form

$$M_g^o = gC$$

gebracht, so erhält man

$$\max M^o = gC + p \mathfrak{F}_+^o$$

und findet nun ohne weiteres

$$\min M^o = qC - p \mathfrak{F}_+^o, \quad q = g + p.$$

Man könnte auch zuerst

$$\min M_p^o = -p \mathfrak{F}_-^o$$

bestimmen, hierauf

$$\min M^o = gC - p \mathfrak{F}_-^o$$

und würde dann erhalten

$$\max M^o = qC + p \mathfrak{F}_-^o.$$

Auf dieselbe Weise berechnet man die  $M^u$  und  $Q$ .

Die Einführung einer gleichförmigen Verkehrslast geschieht stets auf Grund einer Schätzung. Aus diesem Grund zieht es Verfasser vor, mit einer unmittelbar am Bogen angreifenden Belastung zu rechnen. Die ganze Untersuchung gewinnt dann an Einfachheit und Übersichtlichkeit.

Man berechne zunächst  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  für eine von  $B$  aus eine beliebige Strecke  $\xi$  bedeckende Last und trage diese Werte unter dem Lastende  $E$  als Ordinaten auf. In derselben Weise verfähre man mit

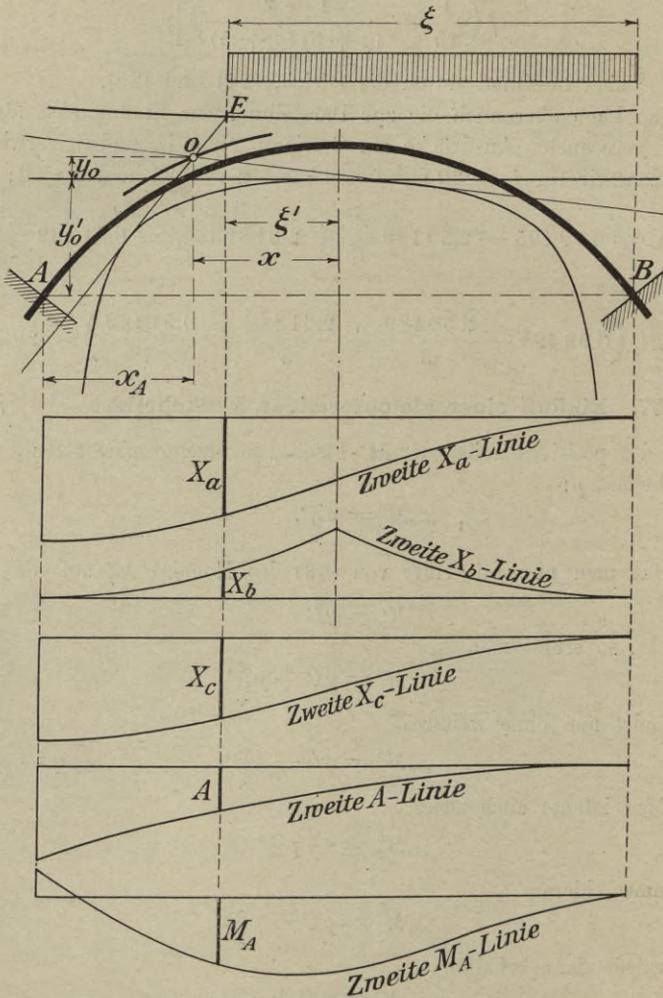


Fig. 415.

dem Stützenwiderstande  $A$ . Man erhält vier Kurven, welche die zweite  $X_a$ -Linie, die zweite  $X_b$ -Linie, die zweite  $X_c$ -Linie und die zweite  $A$ -Linie genannt und zunächst als gegeben angesehen werden mögen. Weiter zeichne man die Kämpferdruck-Umhüllungslinie.

Werden nun die Grenzwerte des Momentes  $M^o$  gesucht, so lege man durch den Punkt  $o$  zwei Tangenten an die Kämpferdruck-Umhüllungslinie und bestimme deren Schnittpunkte  $E$  und  $E'$  mit der Kämpferdrucklinie. Lasten, welche durch  $E$  oder  $E'$  gehen, erzeugen  $M^o = 0$ . Wird nur die Strecke  $EE'$  mit  $p$  belastet, so entsteht  ${}_{max}M_p^o$ . Die außerhalb  $EE'$  aufgebrachte Belastung erzeugt  ${}_{min}M_p^o$ .

In dem in Fig. 415 dargestellten Falle gibt es nur eine Belastungsscheide  $E$ . Nach Ermittlung der zur belasteten Strecke  $\xi$  gehörigen Werte  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  findet man, wenn der Punkt  $E$  links vom Scheitel liegt, im Abstände  $\xi'$  vom Scheitel,

$$(61) \quad {}_{min}M_p^o = X_a + X_b x - X_c y_o - p \xi' \left( x - \frac{\xi'}{2} \right).$$

Liegt  $E$  rechts vom Scheitel des Bogens, so entsteht

$$(62) \quad {}_{min}M_p^o = X_a + X_b x - X_c y_o.$$

Man könnte auch die zweite  $M_A$ -Linie zeichnen und würde dann

$$(63) \quad {}_{min}M_p^o = A x_A - X_c y_o' + M_A$$

erhalten, gleichgültig ob der Punkt  $E$  rechts oder links vom Scheitel liegt. Die Berechnung der zweiten  $M_A$ -Linie ist aber umständlicher wie die Berechnung der zweiten  $X_a$ -Linie.

In derselben Weise bestimmt man den Einfluß der Belastung einer etwa links von  $o$  auftretenden negativen Beitragstrecke.

Hat man

$${}_{min}M_p^o = -C'p$$

und nach Nr. 176

$$M_g^o = Cg$$

gefunden, so findet man

$${}_{min}M^o = Cg - C'p,$$

und hierauf ohne weiteres

$${}_{max}M^o = Cq + C'p, \quad q = g + p.$$

Ganz ebenso werden die  $M''$  berechnet.

Um die Querkraft  ${}_{max}Q$  für den mittleren Querschnitt  $C$  des Feldes  $F_1 F_2$  zu ermitteln, legt man parallel mit  $F_1 F_2$  an die Kämpferdruckumhüllungslinie eine Tangente. Schneidet diese die Kämpferdrucklinie in einem innerhalb der Stützweite gelegenen Punkte  $E$ , Fig. 416, so entsteht  ${}_{max}Q_p$ , wenn der Bogen nur zwischen  $C$  und  $E$  mit  $p$  belastet wird. Man bestimmt die zu dieser Belastung gehörigen Widerstände  $A$  und  $X_c$  des linken Widerlagers mit Hilfe der gezeichneten Kurven und findet

$${}_{max}Q_p = A \cos \varphi - X_c \sin \varphi.$$

Hierzu fügt man  $Q_g$ . Man erhält  $Q$  in der Form

$$\max Q = Cg + C'p,$$

und hierauf

$$\min Q = Cg - C'p.$$

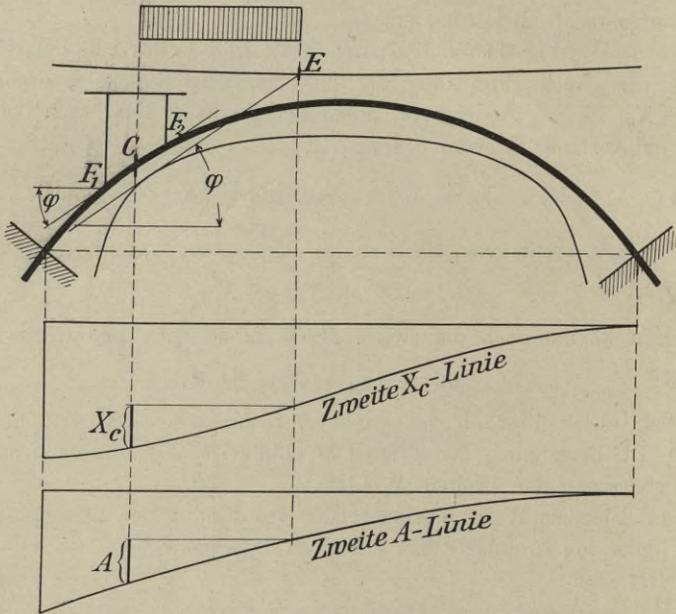


Fig. 416.

Liegt  $E$  außerhalb der Stützweite, so reicht die die Querkraft  $\max Q$  erzeugende Belastung vom Querschnitte  $C$  bis zum rechten Wiederlager.

Es erübrigt noch, die Berechnung von  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  infolge der gleichmäßigen Belastung der Strecke  $\xi$ , Fig. 417, zu zeigen. Hierbei ist zu beachten, daß die in Nr. 174 abgeleiteten Formeln für eine links vom Scheitel im Abstände  $x$  vom Scheitel angreifende Last 1 gelten und nicht etwa in der Weise ganz allgemein auf Lasten rechts vom Scheitel übertragen werden dürfen, daß  $+x$  durch  $-x$  ersetzt wird.

Wir nehmen deshalb zunächst an, es sei links vom Scheitel  $S$  eine Strecke  $\xi'$  gleichförmig mit  $p$  f. d. Längeneinheit belastet, bezeichnen die hierbei hervorgerufenen Werte von  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  mit  $X'_a$ ,  $X'_b$ ,  $X'_c$  und berechnen diese Werte durch Integration der für den Einfluß einer Einzellast gewonnenen Ausdrücke.

So erhielten wir z. B. für  $l_1 = 30$  m,  $f = 15$  m,  $\rho = 2$  und  $\alpha = 0,25$ :

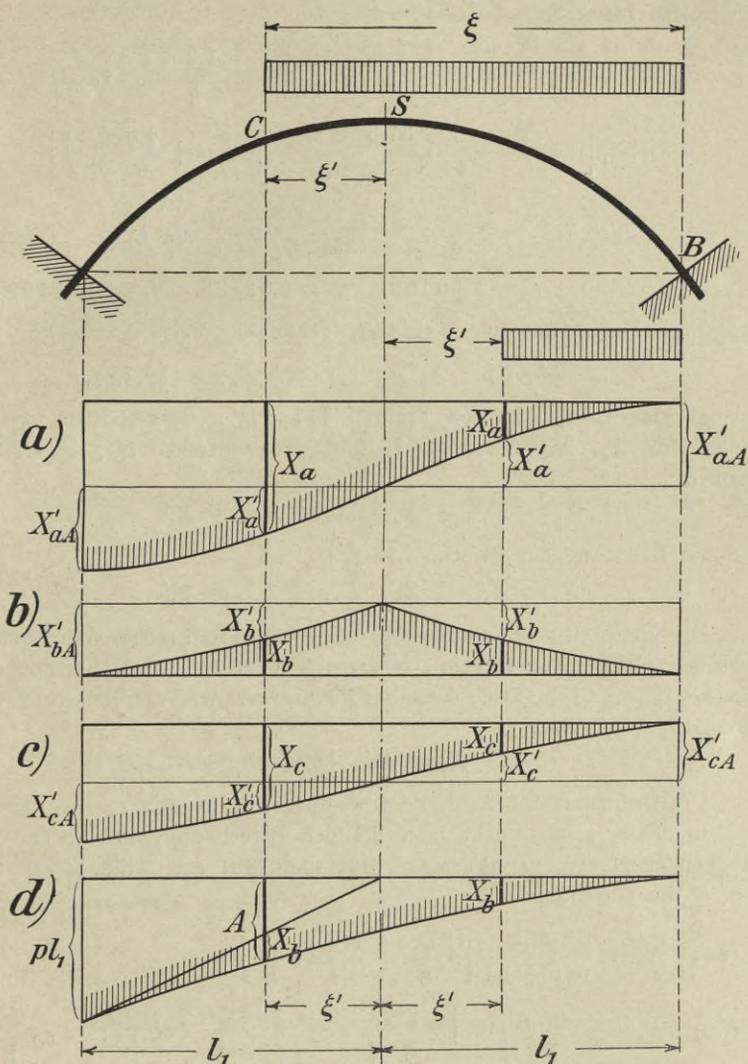


Fig. 417.

$$X_a = 6,25 - 15 \frac{x}{l_1} + 10 \frac{x^2}{l_1^2} - 1,25 \frac{x^4}{l_1^4},$$

$$X_b = 0,5 - \frac{1}{44} \left( 37,5 \frac{x}{l_1} - 20 \frac{x^3}{l_1^3} + 4,5 \frac{x^5}{l_1^5} \right),$$

$$X_c = \gamma_1 - \gamma_2 \frac{x^2}{l_1^2} + \gamma_3 \frac{x^4}{l_1^4} - \gamma_4 \frac{x^6}{l_1^6},$$

und finden hieraus

$$X_a' = p l_1 \left( 6,25 \frac{\xi'}{l_1} - \frac{15}{2} \frac{\xi'^2}{l_1^2} + \frac{10}{3} \frac{\xi'^3}{l_1^3} - \frac{1,25}{5} \frac{\xi'^5}{l_1^5} \right),$$

$$X_b' = p l_1 \left[ 0,5 \frac{\xi'}{l_1} - \frac{1}{44} \left( \frac{37,5}{2} \frac{\xi'^2}{l_1^2} - \frac{20}{4} \frac{\xi'^4}{l_1^4} + \frac{4,5}{6} \frac{\xi'^6}{l_1^6} \right) \right],$$

$$X_c' = p l_1 \left( \gamma_1 \frac{\xi'}{l_1} - \frac{\gamma_2}{3} \frac{\xi'^3}{l_1^3} + \frac{\gamma_3}{5} \frac{\xi'^5}{l_1^5} - \frac{\gamma_4}{7} \frac{\xi'^7}{l_1^7} \right).$$

$$\gamma_1 = 0,99495, \quad \gamma_2 = 2,50159, \quad \gamma_3 = 2,01833, \quad \gamma_4 = 0,51169.$$

Nach Berechnung der zu  $\xi' = l_1$  gehörigen Werte

$$X_{a'A} = 55,00 p, \quad X_{b'A} = 5,11 p, \quad X_{c'A} = 14,75 p,$$

gelangt man zu den in den Figuren 417 a, b, c dargestellten zweiten Linien für  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ . Die Belastung der Strecke  $l_1 + \xi'$  erzeugt nämlich

$$X_a = X_{a'A} + X_a', \quad X_c = X_{c'A} + X_c',$$

und die Belastung der Strecke  $l_1 - \xi'$ :

$$X_a = X_{a'A} - X_a', \quad X_c = X_{c'A} - X_c'.$$

Die gleichzeitige Belastung der beiden links und rechts vom Scheitel liegenden gleichlangen Strecken  $\xi'$  erzeugt  $X_b = 0$ . Die Belastung der Strecke  $l_1 - \xi'$  ruft also dasselbe  $X_b$  hervor, wie die Belastung der Strecke  $l_1 + \xi'$ , nämlich

$$X_b = X_{b'A} + X_b'.$$

Die Ordinaten der  $X_b$ -Linie sind durchweg negativ.

Im Falle  $\rho = 1$  geht man bei der Berechnung von  $X_a$  und  $X_b$  zweckmäßiger von den Formeln (32) und (33) aus. Sie liefern für  $\xi < l_1$  die Gleichungen

$$(64) \quad X_a = \frac{p l_1^2}{6(1+\alpha)} \left[ \alpha \frac{\xi^3}{l_1^3} + \frac{1-\alpha}{4} \frac{\xi^4}{l_1^4} \right],$$

$$(65) \quad X_b = -\frac{p l_1}{3\alpha + 1} \left[ \alpha \frac{\xi^3}{l_1^3} + \frac{1-2\alpha}{4} \frac{\xi^4}{l_1^4} - 0,1(1-\alpha) \frac{\xi^5}{l_1^5} \right].$$

Diese Formeln gelten auch für  $\alpha = 1$ .

Der lotrechte Widerstand  $A$  der linken Stütze ist, solange nur die rechte Trägerhälfte belastet wird,

$$A = -X_b.$$

Ist  $\xi > l_1$ , so wird

$$A = p \xi' - X_b.$$

Hieraus folgt die in Fig. 417 d dargestellte zweite  $A$ -Linie.

**Sonderfall**  $\alpha = 1$ . Zur Berechnung der Momente  $M^o$  und  $M^u$  benutzt man zweckmäßig Gleich. (63), weil sich für die zweite  $M_A$ -Linie aus (50) die einfache Formel

$$M_A = p \int_0^{\xi} \frac{(l-b) b^2 [5\nu(l-b) - 2l]}{2l^3} db,$$

$$(66) \quad M_A = \frac{pl^2}{12} \cdot \frac{\xi^3}{l^3} \left[ \left( 10 - 15 \frac{\xi}{l} + 6 \frac{\xi^2}{l^2} \right) \nu - 4 + 3 \frac{\xi}{l} \right]$$

ableiten läßt.

Zu  $\xi = l$  gehört  $M_A = \frac{pl^2}{12} (\nu - 1)$ . Der Einfluß einer gleichförmigen ständigen Belastung  $g$  ist daher

$$(67) \quad M_{Ag} = - \frac{gl^2}{12} (1 - \nu).$$

Für die zweite  $A$ -Linie erhält man durch Integration von (53) die Gleichung

$$(68) \quad A = pl \frac{\xi^3}{l^3} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\xi}{l} \right),$$

und für die zweite  $X_c$ -Linie aus (46)

$$(69) \quad X_c = \frac{pl^2}{8f} \nu \left( 10 - 15 \frac{\xi}{l} + 6 \frac{\xi^2}{l^2} \right) \frac{\xi^3}{l^3}.$$

Eine gleichförmige ständige Belastung  $g$  erzeugt

$$(70) \quad X_c = \frac{gl^2}{8f} \nu.$$

Bei Berechnung des Einflusses einer gleichmäßigen Temperaturänderung setze man  $\nu = 1$ . Man erhält

$$X_{ct} = \frac{45}{4} \frac{\varepsilon EJ_c t}{f^2}.$$

**178. Beliebig geformter symmetrischer Bogen.** Die Querschnitte seien bekannt, die Werte  $\frac{J_c}{J}$  also gegebene Größen.

Man nimmt die wagerechte  $x$ -Achse zunächst willkürlich an, legt sie z. B. durch die Endpunkte  $A$  und  $B$  des Bogens, Fig. 418, berechnet — am besten mittels der Simpsonschen Formel — die Integrale

$$\int_0^{l_1} y' \frac{J_c}{J} dx \quad \text{und} \quad \int_0^{l_1} \frac{J_c}{J} dx,$$

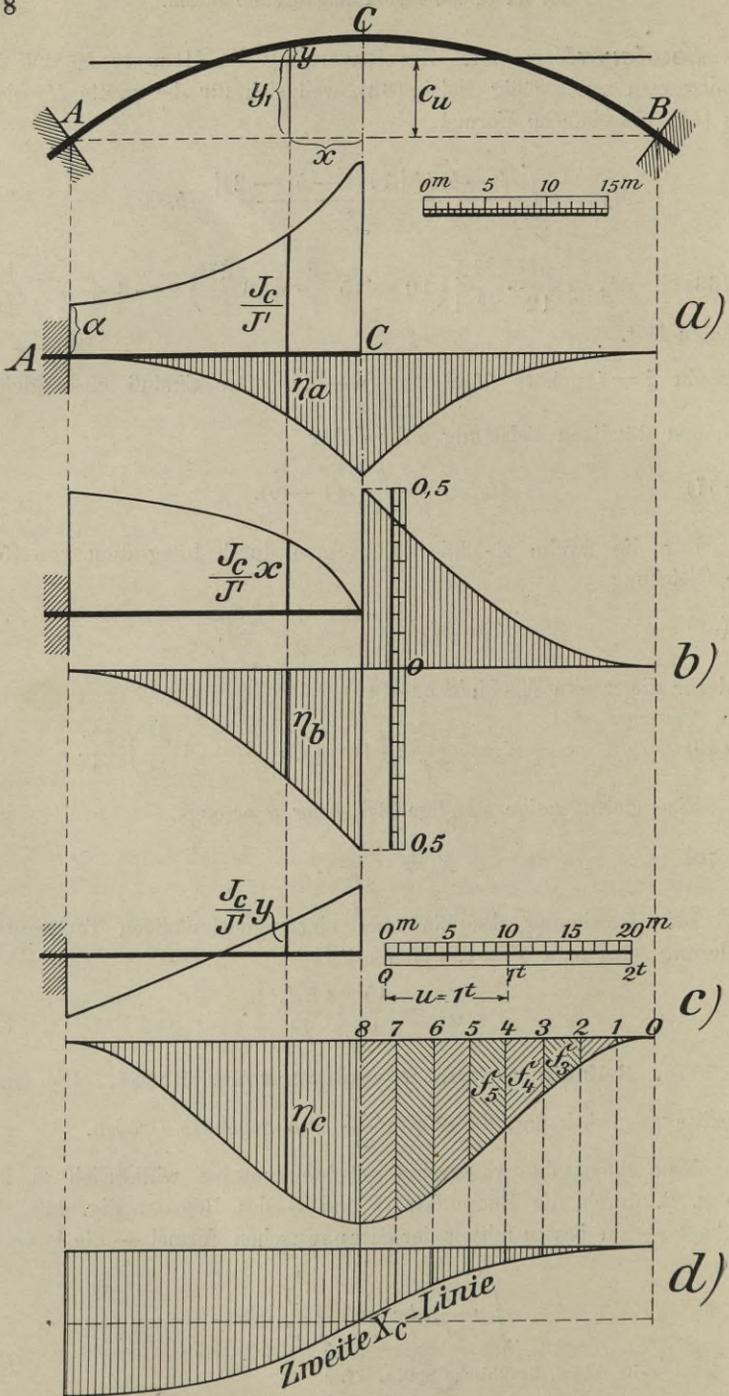


Fig. 418.

und findet dann

$$c_u = \frac{\int_0^{l_1} y' \frac{J_c}{J'} dx}{\int_0^{l_1} \frac{J_c}{J'} dx}.$$

Damit ist das der Bedingung  $\delta_{ac} = \int y \frac{J_c}{J'} dx = 0$  genügende Achsenkreuz  $(xy)$  bestimmt. Nun berechnet man

$$\delta_{cc} = 2 \int_0^{l_1} y^2 \frac{J_c}{J'} dx + 2 \int_0^{l_1} \frac{J_c dx}{F \sec \varphi}.$$

Für das zweite, nebensächliche Glied wird man meistens den auf Seite 599 für den Parabelbogen gefundenen Wert  $2l_1 \frac{J_c}{F_c} \tau$  setzen dürfen. Sonst kann man auch dieses Glied mit der Simpsonschen Formel berechnen.

Nun werden die Biegelinien  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$ ,  $\delta_{mc}$  für die linke Trägerhälfte als Seillinien gezeichnet. Das statisch bestimmte Hauptsystem ist ein bei  $A$  eingespannter Freitrag  $AC$ . Zur  $\delta_{ma}$ -Linie gehört die  $\frac{J_c}{J'}$ -Linie als Belastungslinie. Die Polweite sei  $\mathfrak{H}_a$ , die Ordinate der Seillinie  $\eta_a$ . Dann ist

$$\delta_{ma} = \mathfrak{H}_a \eta_a$$

und

$$X_a = \frac{1 \cdot \delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{1 \cdot \mathfrak{H}_a \eta_a}{\delta_{aa}},$$

wo

$$\delta_{aa} = 2 \int_0^{l_1} \frac{J_c}{J'} dx.$$

Wählt man  $\mathfrak{H}_a = \varepsilon \delta_{aa}$ , so erhält man das Moment

$$X_a = 1 \cdot \eta_a \cdot \varepsilon.$$

Die Zahl  $\varepsilon$  darf beliebig gewählt werden. Die  $\eta_a$  sind Längen und werden mit dem Maßstabe der Trägerzeichnung gemessen. Auch die Polweite  $\mathfrak{H}_a$  und die Inhalte der Streifen, in welche man die Belastungsfläche zerlegt, sind Längen; sie dürfen in einem beliebigen Maß-

stabe aufgetragen werden. Führt man die Streifenhöhen als Lasten ein, so muß man die Polweite durch die Streifenbreite teilen.

Nun wird die  $\frac{J_c}{J'} x$ -Linie als Belastungslinie aufgefaßt. Die zugehörige Seillinie ist die  $X_b$ -Linie; ihr Maßstab ist durch die Bedingung bestimmt, daß für  $x = 0$  sich  $X_b = 0,5$  ergeben muß.

Die zur  $\frac{J_c}{J'} y$ -Linie gehörige Seillinie, deren Polweite  $\mathfrak{H}_c$  und deren Ordinate  $\eta_c$  sei, liefert

$$X_c = \frac{1 \cdot \delta_{mc}}{\delta_{cc}} = \frac{\mathfrak{H}_c \cdot 1 \cdot \eta_c}{\delta_{cc}}$$

Soll die  $X_c$ -Linie im Maßstabe

$$\text{Krafteinheit} = \text{Strecke } u$$

dargestellt werden, so muß man, um

$$X_c = \eta_c$$

zu erhalten,

$$\mathfrak{H}_c = \frac{\delta_{cc}}{u}$$

wählen. Die Einheit von  $\mathfrak{H}_c$  ist das Quadrat einer Länge, z. B.  $\text{m}^2$ ; dies ist auch die Einheit des Inhaltes der Streifen, in welche man die Belastungsfläche zerlegt. Werden die Streifenhöhen als Gewichte aufgefaßt, so muß  $\mathfrak{H}_c$  durch die Streifenbreite geteilt werden.

Die weitere Untersuchung des Trägers erfolgt nach den in Nr. 174 bis 177 beschriebenen Verfahren. Selbstverständlich kann man aus den zeichnerisch gewonnenen Einflußlinien nicht Formeln für die einer gleichförmigen Belastung entsprechenden zweiten Linie für  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  ableiten. Diese Linien müssen durch Bestimmung der Flächeninhalte der Einflußlinien gewonnen werden. Zerlegt man z. B. die rechte Hälfte der  $X_c$ -Linie in Streifen, deren Inhalte gleich  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathfrak{F}_2$ ,  $\mathfrak{F}_3$ , . . . sind, so erhält man als Ordinaten der zweiten  $X_c$ -Linie für  $p = 1$  (Fig. 418 d) in den Teilpunkten 1, 2, 3, . . . der Reihe nach

$$X_c = \mathfrak{F}_1, \quad X_c = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2, \quad X_c = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3, \text{ usw.}$$

Hat man die Linie für die rechte Trägerhälfte gezeichnet, so findet man die Linie für die linke Hälfte nach dem in Figur 417 dargestellten Verfahren.

**Zahlenbeispiel.** Wir teilen noch die Zahlenrechnung für ein gelenkloses, zwischen starre Widerlager gespanntes Tonnengewölbe mit, dessen Breite, senkrecht zur Bildfläche gemessen, gleich 1 ist. Die Ab-

messungen sind in die Figur 419 eingetragen worden. Die Gewölbekstärke sei  $d$ , im Scheitel  $d_c$ . Daher ist

$$\frac{J_c}{J'} = \frac{J_c}{J \cos \varphi} = \frac{d_c^3}{d^3} \sec \varphi = \frac{1,728 \sec \varphi}{d^3},$$

$$\frac{J_c}{F \sec \varphi} = \frac{d_c^3}{12 d \sec \varphi} = \frac{0,144}{d \sec \varphi}.$$

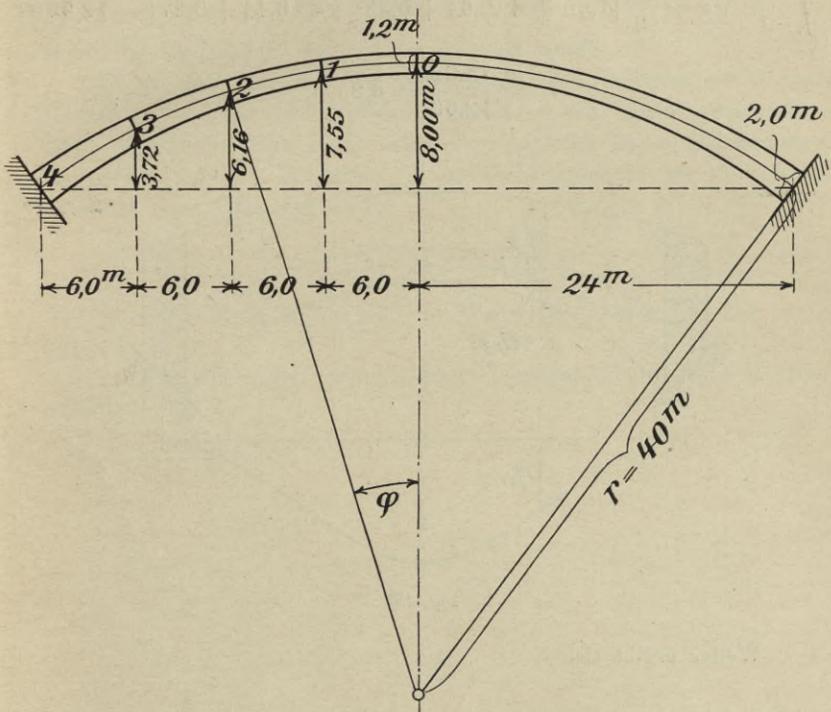


Fig. 419.

Den Teilpunkten 0, 1, 2, 3, 4 entsprechen die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte.

	$d$	$\sec \varphi$	$\frac{J_c}{J'}$	$y'$	$y' \frac{J_c}{J'}$	$y$	$y \frac{J_c}{J'}$	$y^2 \frac{J_c}{J'}$	$x$	$x \frac{J_c}{J'}$	$d \sec \varphi$	$\frac{J_c}{F \sec \varphi}$
0	1,2	1,000	1,00	8,00	8,000	+ 1,75	+ 1,75	3,06	0	0	1,20	0,120
1	1,4	1,011	0,64	7,55	4,832	+ 1,30	+ 0,83	1,08	6	3,84	1,42	0,101
2	1,6	1,048	0,44	6,16	2,710	- 0,09	- 0,04	0,00	12	5,28	1,68	0,086
3	1,8	1,120	0,33	3,72	1,228	- 2,53	- 0,83	2,10	18	5,94	2,02	0,071
4	2,0	1,250	0,27	0	0	- 6,25	- 1,69	10,56	24	6,48	2,50	0,058
	m			m		m						

Nach Ermittlung der Werte  $y' \frac{J_c}{J'}$  findet man

$$\int_0^{l_1} y' \frac{J_c}{J'} dx = \frac{6,0}{3} [8,000 + 4(4,832 + 1,228) + 2 \cdot 2,710] = 75,32 \text{ m}^2,$$

$$\int_0^{l_1} \frac{J_c}{J'} dx = \frac{6,0}{3} [1,00 + 4(0,64 + 0,33) + 2 \cdot 0,44 + 0,27] = 12,06 \text{ m},$$

$$c_u = \frac{75,32}{12,06} = 6,25 \text{ m}, \quad y = c_u - y'.$$

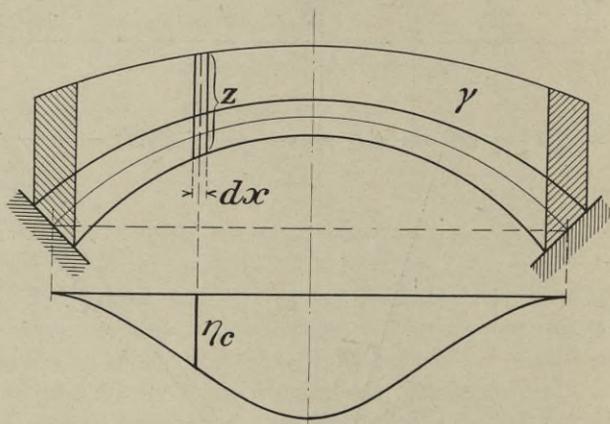


Fig. 420.

Weiter ergibt sich

$$2 \int_0^{l_1} y^2 \frac{J_c}{J'} dx = 2 \cdot \frac{6,0}{3} [3,06 + 4(1,08 + 2,10) + 10,56] = 105,36 \text{ m}^3,$$

$$2 \int_0^{l_1} \frac{J_c}{F \sec \varphi} dx = 2 \cdot \frac{6,0}{3} [0,120 + 4(0,101 + 0,071) + 2 \cdot 0,086 + 0,058] = 4,15 \text{ m}^3,$$

$$\delta_{c,c} = 105,36 + 4,15 = 109,51 \text{ m}^3.$$

Die in der Tabelle angegebenen Werte  $\frac{J_c}{J'}$ ,  $x \frac{J_c}{J'}$  und  $y \frac{J_c}{J'}$  genügen zur Festlegung der drei Belastungslinien, deren Seillinien die Einflußlinien für  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  sind.

Die zu unserer allgemeinen Untersuchung gehörenden Figuren 418 a, b, c sind maßstäblich für das vorliegende Zahlenbeispiel gezeichnet. Die Polweiten sind:

$$\delta_a = \frac{1}{2} \delta_{aa} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12,06 = 12,06 \text{ m}$$

und

$$\delta_c = \frac{1}{10} \delta_{cc} = \frac{1}{10} 109,51 = 10,951 \text{ m}^2,$$

wobei die Kräfteinheit  $1 \text{ t} = 10 \text{ m}$  gewählt wurde.

Es sei noch erwähnt, daß man das über den Kämpferfugen stehende Mauerwerk einfach zur lotrechten Belastung des Widerlagers rechnen darf. Bezeichnet dann  $z$  die Höhe der gesamten durch gleichschweres Mauerwerk ersetzten Belastung,  $\gamma$  das Einheitsgewicht des Mauerwerks, so erhält man z. B. (Fig. 420):

$$X_c = \gamma \int z \eta_c dx.$$

Das Integral ist dabei nur für die Weite der inneren Laibung zu berechnen.

Ausführliche Untersuchungen über Tonnengewölbe wird der III. Band enthalten.

## Anhang.

**Tabelle der Zahlen\*)**

$$\omega_R = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} = \frac{m}{n} - \frac{m^2}{n^2}$$

$$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} = \frac{m}{n} - \frac{m^3}{n^3}$$

$$\omega_P = \frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4} = \frac{m}{n} - \frac{m^4}{n^4}$$

$$\omega_P'' = \omega_R (1 + \omega_R).$$

$$l = n\lambda \quad x = m\lambda.$$

Knoten- punkte <i>m</i>	$\omega_R$	$\omega_D$	$\omega_P$	$\omega_P''$	Knoten- punkte <i>m</i>
<i>n</i> = 5					
1	0,1600	0,1920	0,1984	0,1856	1
2	0,2400	0,3360	0,3744	0,2976	2
3	0,2400	0,3840	0,4704	0,2976	3
4	0,1600	0,2880	0,3904	0,1856	4
<i>n</i> = 6					
1	0,1389	0,1620	0,1659	0,1582	1
2	0,2222	0,2963	0,3210	0,2716	2
3	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125	3
4	0,2222	0,3704	0,4691	0,2716	4
5	0,1389	0,2546	0,3511	0,1582	5
<i>n</i> = 7					
1	0,1224	0,1399	0,1424	0,1374	1
2	0,2041	0,2624	0,2791	0,2457	2
3	0,2449	0,3499	0,3948	0,3049	3
4	0,2449	0,3848	0,4648	0,3049	4
5	0,2041	0,3499	0,4540	0,2457	5
6	0,1224	0,2274	0,3174	0,1374	6

\*) Ergänzung der Tabelle auf Seite 105 für Träger mit gleichlangen Feldern.

Knoten- punkte <i>m</i>	$\omega_R$	$\omega_D$	$\omega_P$	$\omega_P''$	Knoten- punkte <i>m</i>
<i>n</i> = 8					
1	0,1094	0,1230	0,1248	0,1213	1
2	0,1875	0,2344	0,2461	0,2227	2
3	0,2344	0,3223	0,3552	0,2893	3
4	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125	4
5	0,2344	0,3809	0,4724	0,2893	5
6	0,1875	0,3281	0,4336	0,2227	6
7	0,1094	0,2051	0,2888	0,1213	7
<i>n</i> = 9					
1	0,0988	0,1097	0,1110	0,1085	1
2	0,1728	0,2112	0,2198	0,2027	2
3	0,2222	0,2963	0,3210	0,2716	3
4	0,2469	0,3567	0,4054	0,3079	4
5	0,2469	0,3841	0,4603	0,3079	5
6	0,2222	0,3704	0,4691	0,2716	6
7	0,1728	0,3073	0,4118	0,2027	7
8	0,0988	0,1866	0,2646	0,1085	8
<i>n</i> = 10					
1	0,0900	0,0990	0,0999	0,0981	1
2	0,1600	0,1920	0,1984	0,1856	2
3	0,2100	0,2730	0,2919	0,2541	3
4	0,2400	0,3360	0,3744	0,2976	4
5	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125	5
6	0,2400	0,3840	0,4704	0,2976	6
7	0,2100	0,3570	0,4599	0,2541	7
8	0,1600	0,2880	0,3904	0,1856	8
9	0,0900	0,1710	0,2439	0,0981	9
<i>n</i> = 11					
1	0,0826	0,0902	0,0908	0,0895	1
2	0,1488	0,1758	0,1807	0,1709	2
3	0,1983	0,2524	0,2672	0,2377	3
4	0,2314	0,3156	0,3462	0,2850	4
5	0,2479	0,3606	0,4119	0,3094	5
6	0,2479	0,3832	0,4569	0,3094	6
7	0,2314	0,3787	0,4724	0,2850	7
8	0,1983	0,3426	0,4475	0,2377	8
9	0,1488	0,2705*)	0,3701	0,1709	9
10	0,0826	0,1578	0,2261	0,0895	10

\*) Die schräggedruckte 5 ist durch Erhöhung aus 4 entstanden.

Knoten- punkte $m$	$\omega_R$	$\omega_D$	$\omega_P$	$\omega_P''$	Knoten- punkte $m$
$n = 12$					
1	0,0764	0,0828	0,0833	0,0822	1
2	0,1389	0,1620	0,1659	0,1582	2
3	0,1875	0,2344	0,2461	0,2227	3
4	0,2222	0,2963	0,3210	0,2716	4
5	0,2431	0,3443	0,3865	0,3021	5
6	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125	6
7	0,2431	0,3848	0,4675	0,3021	7
8	0,2222	0,3704	0,4691	0,2716	8
9	0,1875	0,3281	0,4336	0,2227	9
10	0,1389	0,2546	0,3511	0,1582	10
11	0,0764	0,1464	0,2106	0,0822	11
$n = 13$					
1	0,0710	0,0765	0,0769	0,0760	1
2	0,1302	0,1502	0,1533	0,1471	2
3	0,1775	0,2185	0,2279	0,2090	3
4	0,2130	0,2786	0,2987	0,2584	4
5	0,2367	0,3277	0,3627	0,2927	5
6	0,2485	0,3632	0,4162	0,3103	6
7	0,2485	0,3823	0,4544	0,3103	7
8	0,2367	0,3823	0,4720	0,2927	8
9	0,2130	0,3605	0,4626	0,2584	9
10	0,1775	0,3141	0,4191	0,2090	10
11	0,1302	0,2403	0,3335	0,1471	11
12	0,0710	0,1365	0,1971	0,0760	12
$n = 14$					
1	0,0663	0,0711	0,0714	0,0707	1
2	0,1224	0,1399	0,1424	0,1374	2
3	0,1684	0,2044	0,2122	0,1967	3
4	0,2041	0,2624	0,2791	0,2457	4
5	0,2296	0,3116	0,3409	0,2823	5
6	0,2449	0,3499	0,3948	0,3049	6
7	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125	7
8	0,2449	0,3848	0,4648	0,3049	8
9	0,2296	0,3772	0,4721	0,2823	9
10	0,2041	0,3499	0,4540	0,2457	10
11	0,1684	0,3007	0,4046	0,1967	11
12	0,1224	0,2274	0,3174	0,1374	12
13	0,0663	0,1279	0,1851	0,0707	13

Knoten- punkte <i>m</i>	$\omega_R$	$\omega_D$	$\omega_P$	$\omega_P''$	Knoten- punkte <i>m</i>
<i>n</i> = 15					
1	0,0622	0,0664	0,0666	0,0661	1
2	0,1156	0,1310	0,1330	0,1289	2
3	0,1600	0,1920	0,1984	0,1856	3
4	0,1956	0,2477	0,2616	0,2338	4
5	0,2222	0,2963	0,3210	0,2716	5
6	0,2400	0,3360	0,3744	0,2976	6
7	0,2489	0,3650	0,4192	0,3108	7
8	0,2489	0,3816	0,4524	0,3108	8
9	0,2400	0,3840	0,4704	0,2976	9
10	0,2222	0,3704	0,4691	0,2716	10
11	0,1956	0,3390	0,4441	0,2338	11
12	0,1600	0,2880	0,3904	0,1856	12
13	0,1156	0,2157	0,3025	0,1289	13
14	0,0622	0,1203	0,1745	0,0661	14
<i>n</i> = 16					
1	0,0586	0,0623	0,0625	0,0620	1
2	0,1094	0,1230	0,1248	0,1213	2
3	0,1523	0,1809	0,1863	0,1756	3
4	0,1875	0,2344	0,2461	0,2227	4
5	0,2148	0,2820	0,3030	0,2610	5
6	0,2344	0,3223	0,3552	0,2893	6
7	0,2461	0,3538	0,4009	0,3067	7
8	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125	8
9	0,2461	0,3845	0,4624	0,3067	9
10	0,2344	0,3809	0,4724	0,2893	10
11	0,2148	0,3625	0,4641	0,2610	11
12	0,1875	0,3281	0,4336	0,2227	12
13	0,1523	0,2761	0,3767	0,1756	13
14	0,1094	0,2051	0,2888	0,1213	14
15	0,0586	0,1135	0,1650	0,0620	15
<i>n</i> = 17					
1	0,0554	0,0586	0,0588	0,0584	1
2	0,1038	0,1160	0,1175	0,1146	2
3	0,1453	0,1710	0,1755	0,1664	3
4	0,1799	0,2223	0,2322	0,2123	4
5	0,2076	0,2687	0,2866	0,2507	5
6	0,2284	0,3090	0,3374	0,2805	6
7	0,2422	0,3419	0,3830	0,3009	7
8	0,2491	0,3664	0,4215	0,3112	8
9	0,2491	0,3810	0,4509	0,3112	9
10	0,2422	0,3847	0,4685	0,3009	10

Knoten- punkte <i>m</i>	$\omega_R$	$\omega_D$	$\omega_P$	$\omega_P''$	Knoten- punkte <i>m</i>
<i>n</i> = 17					
11	0,2284	0,3761	0,4718	0,2805	11
12	0,2076	0,3542	0,4576	0,2507	12
13	0,1799	0,3175	0,4227	0,2123	13
14	0,1453	0,2650	0,3636	0,1664	14
15	0,1038	0,1954	0,2762	0,1146	15
16	0,0554	0,1075	0,1565	0,0584	16
<i>n</i> = 18					
1	0,0525	0,0554	0,0555	0,0552	1
2	0,0988	0,1097	0,1110	0,1085	2
3	0,1389	0,1620	0,1659	0,1582	3
4	0,1728	0,2112	0,2198	0,2027	4
5	0,2006	0,2563	0,2718	0,2409	5
6	0,2222	0,2963	0,3210	0,2716	6
7	0,2377	0,3301	0,3660	0,2941	7
8	0,2469	0,3567	0,4054	0,3079	8
9	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125	9
10	0,2469	0,3841	0,4603	0,3079	10
11	0,2377	0,3829	0,4716	0,2941	11
12	0,2222	0,3704	0,4691	0,2716	12
13	0,2006	0,3455	0,4502	0,2409	13
14	0,1728	0,3073	0,4118	0,2027	14
15	0,1389	0,2546	0,3511	0,1582	15
16	0,0988	0,1866	0,2646	0,1085	16
17	0,0525	0,1020	0,1488	0,0552	17
<i>n</i> = 19					
1	0,0499	0,0525	0,0526	0,0523	1
2	0,0942	0,1041	0,1051	0,1031	2
3	0,1330	0,1540	0,1573	0,1506	3
4	0,1662	0,2012	0,2086	0,1938	4
5	0,1939	0,2449	0,2584	0,2315	5
6	0,2161	0,2843	0,3058	0,2628	6
7	0,2327	0,3184	0,3500	0,2868	7
8	0,2438	0,3464	0,3896	0,3032	8
9	0,2493	0,3674	0,4233	0,3115	9
10	0,2493	0,3805	0,4496	0,3115	10
11	0,2438	0,3849	0,4666	0,3032	11
12	0,2327	0,3796	0,4725	0,2868	12
13	0,2161	0,3639	0,4651	0,2628	13
14	0,1939	0,3368	0,4421	0,2315	14

Knoten- punkte <i>m</i>	$\omega_R$	$\omega_D$	$\omega_P$	$\omega_{P''}$	Knoten- punkte <i>m</i>
<i>n</i> = 19					
15	0,1662	0,2974	0,4010	0,1938	15
16	0,1330	0,2449	0,3392	0,1506	16
17	0,0942	0,1785	0,2539	0,1031	17
18	0,0499	0,0971	0,1418	0,0523	18
<i>n</i> = 20					
1	0,0475	0,0499	0,0500	0,0498	1
2	0,0900	0,0990	0,0999	0,0981	2
3	0,1275	0,1466	0,1495	0,1438	3
4	0,1600	0,1920	0,1984	0,1856	4
5	0,1875	0,2344	0,2461	0,2227	5
6	0,2100	0,2730	0,2919	0,2541	6
7	0,2275	0,3071	0,3350	0,2793	7
8	0,2400	0,3360	0,3744	0,2976	8
9	0,2475	0,3589	0,4090	0,3088	9
10	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125	10
11	0,2475	0,3836	0,4585	0,3088	11
12	0,2400	0,3840	0,4704	0,2976	12
13	0,2275	0,3754	0,4715	0,2793	13
14	0,2100	0,3570	0,4599	0,2541	14
15	0,1875	0,3281	0,4336	0,2227	15
16	0,1600	0,2880	0,3904	0,1856	16
17	0,1275	0,2359	0,3280	0,1438	17
18	0,0900	0,1710	0,2439	0,0981	18
19	0,0475	0,0926	0,1355	0,0498	19

## Literatur zu den Abschnitten I und II.

- Clapeyron**, *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*. Comptes rendus 1857.
- Winkler**, *Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger*. Zivilingenieur 1862.
- Bresse**, *Cours de Mécanique appliquée*. Troisième Partie. Paris 1865.
- Culmann**, *Graphische Statik*. Zürich 1866.
- E. Winkler**, *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Prag 1867.
- Mohr**, *Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen*. Behandlung der elastischen Linie als Seillinie; zeichnerische Untersuchung des kontinuierlichen Balkens. Zeitschr. d. Architekt.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1868.
- W. Ritter**, *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken*. Zürich 1871.
- Lippich**, *Theorie des kontinuierlichen Balkens konstanten Querschnitts*. Försters Bauzeitung 1871.
- E. Winkler**, *Theorie der Brücken*. Erstes Heft, 1. Auflage 1873, 3. Auflage. Wien 1886.
- Solin**, *Geometrische Theorie der kontinuierlichen Träger*. Mitteil. des Arch. u. Ing.-Ver. in Böhmen 1873 u. 1874.
- Weyrauch**, *Allgemeine Theorie der kontinuierlichen und einfachen Träger*. Leipzig 1873.
- , *Temperatur-Einflüsse bei kontinuierlichen Trägern*. Zeitschr. f. Baukunde 1879, S. 437.
- Krohn**, *Resultate aus der Theorie des Brückenbaus*. Leipzig 1879.
- Castigliano**, *Theorie de l'équilibre des systèmes élastiques*. Turin 1879.
- Landsberg**, *Beitrag zur graphischen Berechnung kontinuierlicher Träger*. Zentralbl. d. Bauverw. 1881, S. 164.
- Stelzel**, *Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den kontinuierlichen Träger*. Graz 1882.
- Koenen**, *Abgekürztes Verfahren für die analytische Behandlung kontinuierlicher Balken*. Zentralbl. d. Bauverwaltung 1882, S. 190.
- Müller-Breslau**, *Influenzlinien für kontinuierliche Träger mit 3 Stützpunkten*. Wochenblatt für Architekten und Ingenieure 1883, S. 353.
- , *Über kontinuierliche Bogen und Balken*. Wochenblatt für Architekten und Ingenieure 1884.
- , *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*. Leipzig 1886 (erste Auflage), 1904 (dritte Auflage).
- Claxton Fidler, T.**, *A Practical Treatise of Bridge-Construction*. London 1893, erste Auflage 1887.
- H. Zimmermann**, *Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues*. Berlin 1888.
- J. W. Schwedler**, *Beiträge zur Theorie des Eisenbahnoberbaues*. Zeitschr. f. Bauw. 1889.

- Land**, *Über die Ermittlung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflußlinien für Träger*. Zeitschr. f. Bauwesen 1890, S. 165.
- Müller-Breslau**, *Über einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen*. Zeitschr. f. Bauwesen 1891.
- Thullie**, *Einflußlinien für die inneren Kräfte eines kontinuierlichen Trägers mit 3 Stützpunkten*. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1891.
- L. Freitag**, *Vereinfachung der Berechnung elastischer Balkenträger*. Leipzig 1892.
- Zschetzsche**, *Einfluß der Schubkräfte auf die Biegung einfacher Vollwandträger*. Zentralbl. d. Bauverw. 1893.
- F. de Fontviolant**, *Ponts métalliques à travées continues*. Paris 1893.
- Zschetzsche**, *Beitrag zur Berechnung durchgehender Balkenträger*. Zeitschr. f. Bauw. 1894, S. 597.
- Kriemler**, *Tabellen zur schnellen Ermittlung der Deformation und des Gleichgewichtszustandes beliebiger massiver Träger von konstantem Trägheitsmomente*. Vevey 1894.
- Land**, *Einfluß der Schubkräfte auf die Biegung statisch bestimmter und die Berechnung statisch unbestimmter gerader vollwandiger Träger*. Zeitschr. f. Bauw. 1894.
- Franke**, *Die elastische Linie des Balkens*. Zeitschr. f. Bauw. 1895, S. 439.
- H. Zimmermann**, *Berechnung des Oberbaues*. Handbuch der Ingenieurwissenschaften V. 2. III. Kapitel. 1896.
- Dietz**, *Einfache Formeln für den durchlaufenden Träger auf einheitlicher Grundlage*. Anhang zu dem Hefte: „Bewegliche Brücken“ der Fortschritte der Ingenieurwissenschaften II. 5. Leipzig 1897.
- W. Ritter**, *Anwendungen der Graphischen Statik*. III. Teil, *Der kontinuierliche Balken*. Zürich 1900.
- Fr. Steiner**, *Theorie der eisernen Balkenbrücken*. Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Bd. II. 3. Auflage, 1901, S. 364.
- Niedner**, *Beitrag zur Berechnung von Schiffbrücken*. Leipzig 1904.
- L. Vianello**, *Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen*. Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1904, S. 128 und 161.
- Vianello**, *Der Eisenbau*. München und Berlin 1905.
- Ostenfeld**, *Graphische Behandlung der kontinuierlichen Träger mit festen, elastisch senkbaren oder drehbaren, und elastisch senk- und drehbaren Stützen*. Zeitschr. für Architektur und Ingenieurwesen 1905.
- Müller-Breslau**, *Über die Berechnung von Schiffbrücken mit Gelenken*. Zeitschr. f. Bauw. 1906, S. 151.
- H. Reifner**, *Über die Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden*. Beton und Eisen 1908.
- Vlachos**, *Zeichnerische Behandlung der durchgehenden Träger auf festen, auf elastisch drehbaren, elastisch senkbaren, sowie auf elastisch dreh- und senkbaren Stützen*. Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst 1908.

---

### Literatur zu Abschnitt III.

- Engesser**, *Über die Durchbiegung von Fachwerkträgern und die hierbei auftretenden zusätzlichen Spannungen*. Zeitschr. f. Baukunde 1879.
- Manderla**, *Die Berechnung der Sekundärspannungen im einfachen Fachwerk infolge starrer Knotenverbindungen*. Allgemeine Bauzeitung 1880.

- Asimont**, *Hauptspannung und Sekundärspannung*. Zeitschr. f. Baukunde 1880.
- E. Winkler**, *Vorträge über Brückenbau*. Theorie der Brücken, Heft II, Theorie der gegliederten Balkenträger. Wien 1881, S. 276, 343.
- Allievi**, *Equilibrio interno delle pile metalliche*. Roma 1882. (Deutsch von Totz, Wien 1888.)
- Fr. Ritter**, *Über die Druckfestigkeit stabförmiger Körper mit besonderer Rücksicht auf die im steifen Fachwerk auftretenden Nebenspannungen*. Schweiz. Bauz. 1884, I. S. 37, 43, 47.
- Th. Landsberg**, *Beitrag zur Theorie der Fachwerke (graphische Ermittlung der Sekundärspannungen infolge fester Knotenverbindung der Gurtstäbe)*. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1885 u. 1886.
- Müller-Breslau**, *Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern*. Allg. Bauz. 1885.
- Th. Landsberg**, *Ebene Fachwerksysteme mit festen Knotenpunkten und das Prinzip der Deformationsarbeit*. Zentralbl. d. Bauverw. 1885.
- Manderla**, *Über die Wirkungsweise gelenkförmiger Knotenverbindungen*. Allg. Bauz. 1886, S. 9.
- Müller-Breslau**, *Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern*. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1886, S. 399.
- Engesser**, *Über die Nebenspannungen der Fachwerkstäbe bei steifen Knotenverbindungen*. Zeitschr. d. Ver. Deutscher Ingenieure 1888.
- W. Ritter**, *Anwendungen der Graphischen Statik*, I. Teil. Zürich 1890.
- Engesser**, *Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken*. Berlin 1892.
- Mohr**, *Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen*. Ziviling. 1892, S. 577; 1893, S. 67.

---

### Literatur zu Abschnitt IV.

- Engesser**, *Die Sicherung offener Brücken gegen Ausknicken*. Zentralbl. d. Bauverw. 1884, S. 415; 1885, S. 71; 1892, S. 349.
- H. Zimmermann**, *Der gerade Stab auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längsgerichtete Kräfte*. Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften 1907.
- , *Das Stabeck auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längsgerichtete Kräfte*. Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften 1907.

---

### Literatur zu Abschnitt V.

- Fränkel**, *Theorie des einfachen Sprengwerkes*. Ziviling. 1876, S. 22.
- Melan**, *Theorie des Sprengwerkes*. Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1876, S. 245.
- Müller-Breslau**, *Theorie der durch einen Balken versteiften Kette*. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1881, S. 57; 1883, S. 347.
- E. Winkler**, *Theorie der Brücken*. I. Teil. *Äußere Kräfte der Balkenträger*. Wien 1886, S. 185, 233, 256.

- Müller-Breslau**, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*. 1886, 1904, § 15.
- , *Zur Frage der Berücksichtigung der Anfangsspannungen bei der Berechnung von Trägern*. Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1887, S. 107.
- Höch**, *Berechnung doppelter Hänge- und Sprengwerke bei einseitiger Belastung*. Zentralbl. d. Bauverw. 1888, S. 474.
- Melan**, *Theorie der eisernen Bogenbrücken und der Hängebrücken*. Handb. d. Ingenieurwissenschaften, Band II, Abt. V, 1888—1906.
- Müller-Breslau**, *Graphische Statik der Baukonstruktionen*. Bd. II, erste Abteil. Leipzig 1892, 1904; § 8.
- W. Ritter**, *Anwendungen der graphischen Statik*. III. Teil, S. 201. Zürich 1900.
- S. Müller**, *Beiträge zur Theorie hölzerner Tragwerke des Hochbaues. I. Hänge- und Sprengwerke*. Zeitschr. f. Bauw. 1906.

---

### Literatur zu Abschnitt VI.

- Müller-Breslau**, *Über parabelförmige Einflußlinien*. Zentralbl. d. Bauverw. 1904.
- *Über die Berechnung von Zweigelenkbogen*. Zentralbl. d. Bauverw. 1904.

---

### Literatur zu den Abschnitten VII u. VIII.

- E. Winkler**, *Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe*. Ziviling. 1856.
- Sternberg**, *Theorie der Bogen mit zwei Gelenken*. Zeitschr. f. Bauw. 1864.
- Fränkel**, *Berechnung eiserner Bogenbrücken*. Ziviling. 1867.
- *Berechnung eiserner Bogenbrücken*. Ziviling. 1867, S. 95.
- E. Winkler**, *Über den Einfluß der Temperatur bei Bogenbrücken*. Ziviling. 1867.
- *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Prag 1867, S. 268—272.
- *Vortrag über die Berechnung von Bogenbrücken*. Mitteilungen d. Arch.- u. Ing.-Ver. f. Böhmen 1868, 1869.
- Engesser**, *Bogenträger mit zwei Gelenken*. Jahrbuch des polyt. Ver. Karlsruhe 1869.
- Mohr**, *Beitrag zur Theorie elastischer Bogenträger*. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1870, S. 239.
- E. Winkler**, *Theorie der Bogenträger*. Zeitschr. d. Österr. Arch.- u. Ing.-Ver. 1872.
- Fränkel**, *Über die ungünstigste Belastung von Bogenträgern mit zwei Gelenken*. Ziviling. 1875, S. 585.
- Steiner**, *Über graphische Behandlung des Bogenträgers von konstantem Querschnitt ohne Gelenk*. Allg. Bauzeitung 1878, S. 21.
- Weyrauch**, *Theorie der elastischen Bogenträger*. Zeitschr. f. Baukunde 1878.
- E. Winkler**, *Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger*. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1879.
- Müller-Breslau**, *Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken*. Berlin 1880.
- Müller-Breslau, *Graphische Statik*. II. 2.

- Krohn**, *Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger*. Zeitschr. f. Baukunde. 1880, S. 219.
- Müller-Breslau**, *Über kontinuierliche Bogen und Balken*. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 1884.
- , *Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger*. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 575.
- W. Ritter**, *Der elastische Bogen, berechnet mit Hilfe der graphischen Statik*. Zürich 1886.
- Levy**, *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paris, zweite Aufl. 1886—1888.
- Müller-Breslau**, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*. Leipzig 1886—1904, § 17—21.
- , *Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger*. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 605.
- Melan**, *Theorie der eisernen Bogenbrücken*. Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Bd. II, Abt. IV, 1888—1906.
- Müller-Breslau**, *Beiträge zur Theorie der ebenen elastischen Träger*. Zentralblatt d. Bauverw. 1890.
- , *Berechnung statisch unbestimmter Auslegerbogenbrücken*. Zentralbl. d. Bauverw. 1898.
- W. Ritter**, *Anwendungen der graphischen Statik*. IV. Teil, Zürich 1907.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

Stützweiten  $10^m, 12^m, 12^m, 10^m$

Längenmaßstab 1:250.

Fig. 62.

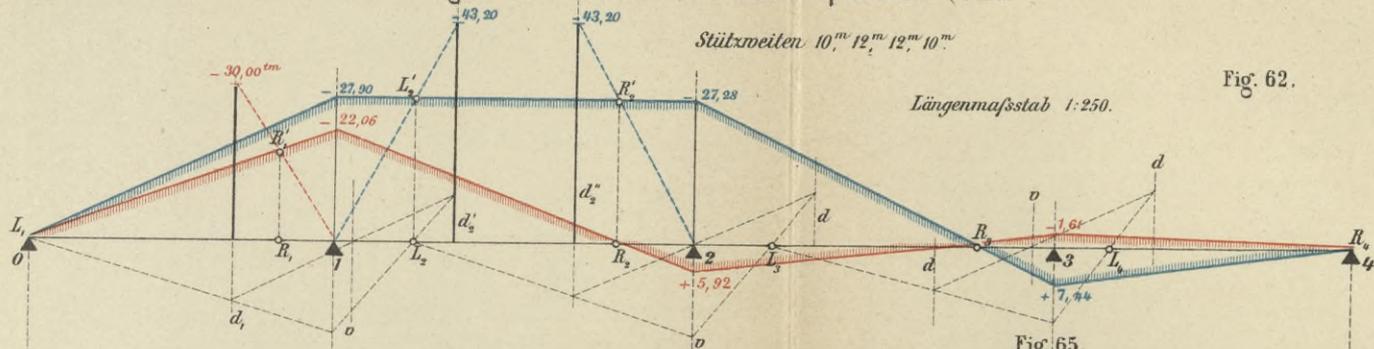


Fig. 63. Momente infolge der beweglichen Belastung  $p = 3.6^t$  f. d. m.

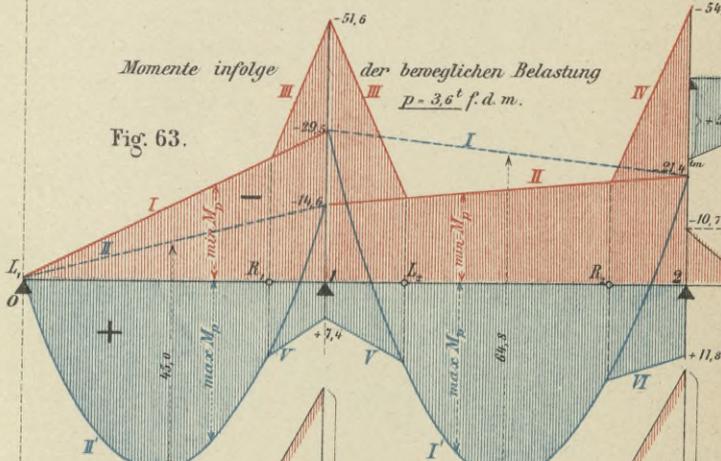


Fig. 65. Querkräfte infolge der ständigen Belastung.

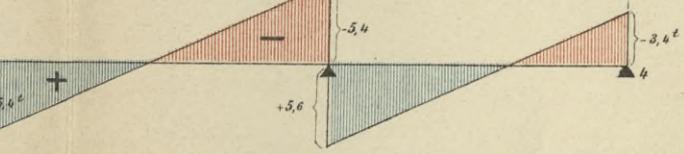


Fig. 64. Momente infolge der ständigen Belastung,  $g = 0.9^t$  f. d. m.

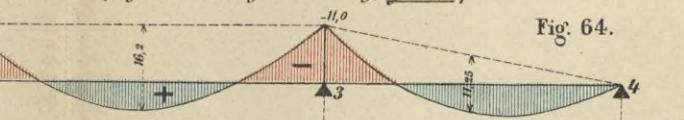
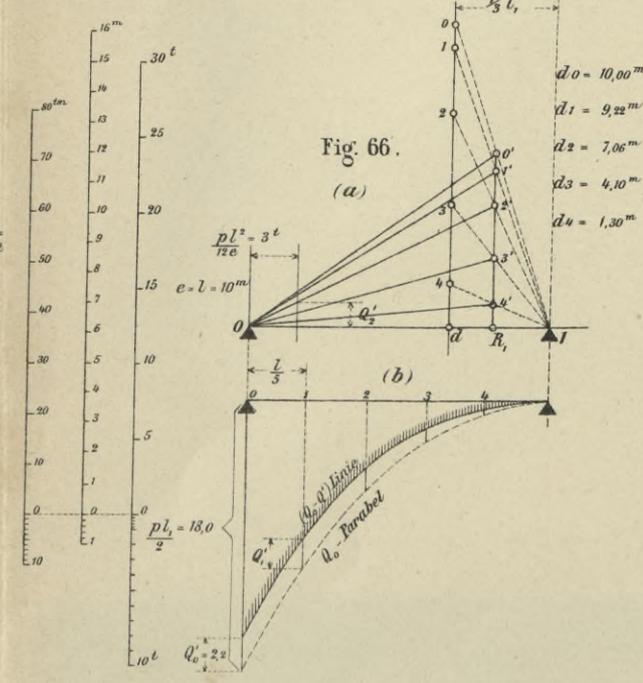
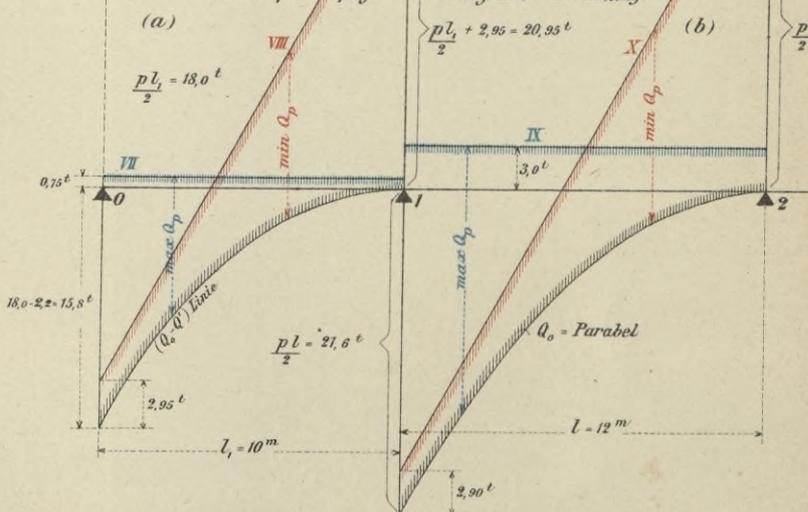


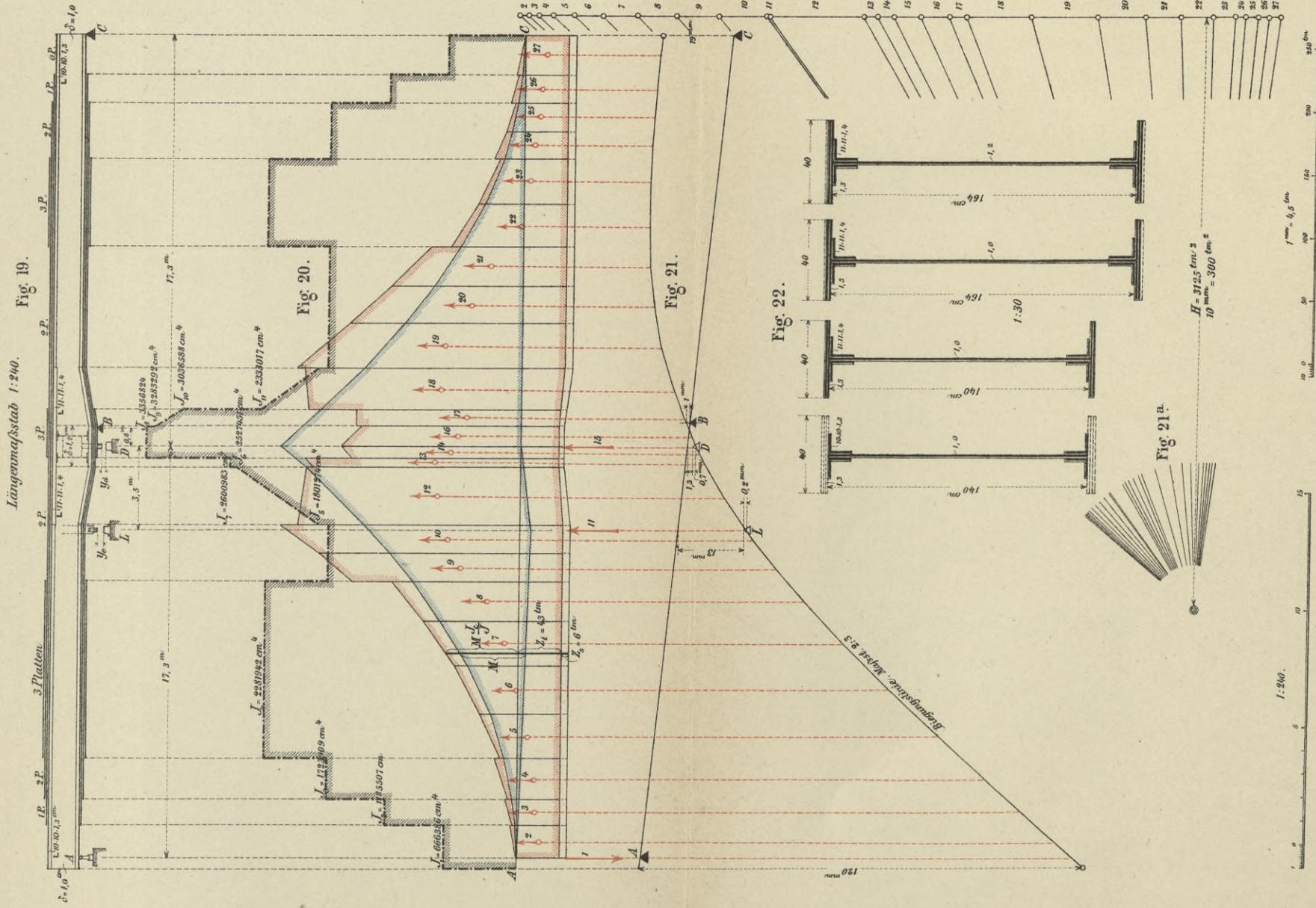
Fig. 67. Querkräfte infolge der beweglichen Belastung.



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

# Untersuchung der Durchbiegungen einer geöffneten Schwedlerschen Drehbrücke.

(Seite 20)



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

Alfred Kröner Verlag in Leipzig.

---

---

# Die graphische Statik der Baukonstruktionen

von

**Dr.-Ing. H. Müller-Breslau**

Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule in Berlin.

Hiervon erschienen bisher:

## **Band I.**

**Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene.  
— Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte; Spannungen in geraden Stäben. — Theorie der statisch bestimmten Träger.**

4. Auflage. Mit 585 Abbildungen im Text und 7 Tafeln.

Preis geheftet 18 Mark. In Halbfranz gebunden 20 Mark.

---

## **Band II. Abteilung I.**

**Formänderung ebener Fachwerke. — Untersuchung der ebenen, statisch unbestimmten Fachwerke.**

4. Auflage. Mit 383 Abbildungen im Text und 7 Tafeln.

Preis geheftet 16 Mark. In Halbfranz gebunden 18 Mark.

---

## **Band II. Abteilung II.**

**Formveränderung des geraden Stabes. — Der Balken auf mehreren Stützen.**

Mit 420 Abbildungen im Text und 2 Tafeln.

Preis geheftet 18 Mark. In Halbfranz gebunden 20 Mark.

---

# Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen

von

**Dr.-Ing. H. Müller-Breslau**

Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule in Berlin.

3. Auflage. Mit 259 Abbildungen.

Preis geheftet 8 Mark. In Halbfranz gebunden 10 Mark.

---

Zu beziehen durch die meisten Buchhandlungen.

160,00  
Alfred Kröner Verlag in Leipzig

# Der Eisenbeton in Theorie und Konstruktion

Ein Leitfaden durch die neueren Bauweisen in Stein und Metall

Für Studium und Praxis verfaßt von

Dr.-Ing. Rudolf Saliger

Oberlehrer an der Baugewerkschule in Kassel.

Zweite Auflage. Mit 354 Abbildungen im Text.

Preis geheftet 5 M. 40 Pf. In Weinwand gebunden 6 Mark.

Die Aufnahme, welche dieser Leitfaden gleich bei seinem ersten Erscheinen gefunden hat, ist ein Beweis dafür, daß er einem vorhandenen Bedürfnis entgegenkommt. In der vollständig neu bearbeiteten zweiten Auflage sind die Fortschritte der neuesten Zeit berücksichtigt. Bei den vorgenommenen Änderungen war hauptsächlich der Gesichtspunkt maßgebend: den Anforderungen der Praxis noch mehr als in der ersten Auflage zu entsprechen.

Über die  
Festigkeit veränderlich elastischer Konstruktionen,  
insbesondere von

## Eisenbeton-Bauten

Ein Beitrag zur Erforschung der inneren Kräfte und Deformationen sowie zum Gebrauch bei der Berechnung und Ausführung armerter Beton-Balken, -Stützen und -Gewölbe.

Von

Dr.-Ing. Rudolf Saliger

Oberlehrer an der Baugewerkschule in Kassel.

Mit 63 Abbildungen im Text und 5 Tafeln.

Preis geheftet 4 Mark.

Dieses Buch, welches sich durch Übersichtlichkeit der Beispiele und Deutlichkeit der Figuren auszeichnet, dürfte für den mit der Berechnung und Ausführung von Eisenbeton-Hochbauten beschäftigten Techniker und Ingenieur eine gute Hilfe sein.

→ Zu beziehen durch die meisten Buchhandlungen. ←

S - 96

S. 61







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-348994

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297081