



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000298503





TRÄGE ZUR KONSTRUKTIVEN LÖSUNG  
SPHÄRISCH-ASTRONOMISCHER AUFGABEN

VON

**CARL SCHOY**

OBERLEHRER AM STÄDTISCHEN GYMNASIUM ZU ESSEN (RUHR)

MIT 3 FIGUREN IM TEXT  
UND 8 TAFELN



LEIPZIG UND BERLIN  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER  
1910

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298503

# BEITRÄGE ZUR KONSTRUKTIVEN LÖSUNG SPHÄRISCH-ASTRONOMISCHER AUFGABEN

VON

**CARL SCHOY**

OBERLEHRER AM STÄDTISCHEN GYMNASIUM ZU ESSEN (RUHR)

MIT 3 FIGUREN IM TEXT  
UND 8 TAFELN

Æ

M 87



LEIPZIG UND BERLIN  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1910

Woy3  
44

31805



ALLE RECHTE,  
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Akc. Nr. \_\_\_\_\_ 4509/50

## Vorwort.

Wer in der Geschichte der Astronomie und Trigonometrie bis in die Zeiten der ältesten Kulturvölker zurückblättert, der wird finden, daß die Anfänge dieser Disziplinen rein geometrische Traktate sind, in denen sich noch keine Spur von einer Verbindung der Konstruktion mit der Rechnung findet. Die uns heute geläufigen Formeln der sphärischen Trigonometrie kannten weder die Griechen, noch die Inder und Araber. Die Aufgaben, welche ihnen insbesondere die sphärische Astronomie darbot, bewältigten sie anfangs meist auf rein graphischem Wege unter Benützung zweier Prinzipien: des Astrolabiums, welches auf der stereographischen Projektion beruht, und demjenigen des Analemmas, einer orthographischen Projektion der Himmelskugel. So sehr man noch im späteren Mittelalter mit Begeisterung das Astrolabium konstruierte und in zahlreichen Schriften lehrte, „wie solches herrliche und hochnützliche astronomische Instrument aufgerissen werden soll“, so wenig findet man heute mehr die Methoden der Alten in unseren modernen Lehr- und Schulbüchern erwähnt. Durchblättert man irgendein Kompendium der sphärischen Trigonometrie oder Astronomie, so stehen die bekannten Grundformeln in Gestalt des Sinus-, Kosinus- und Kotangentensatzes obenan, mit denen dann alle vorkommenden Probleme rechnerisch gelöst werden. Daß dies aber ebenso, nur weniger einförmig, graphisch geschehen kann und auch tatsächlich durch lange Zeiten geschah, davon sprechen nur wenige der erwähnten Schriften.<sup>1)</sup> Dies muß um so mehr als ein Mangel empfunden werden, als gerade der historische Weg am besten die Einsicht in eine Disziplin vermittelt und so dem Lernenden auf anschauliche Weise gezeigt werden kann, wie der menschliche Geist, nach und nach

erstarkend, schwierigere Aufgaben überwand. Man braucht nicht Anhänger der Zillerschen Forderung zu sein, daß ein Schüler in seinen Lernjahren alle Kulturstufen der Menschheit durchlaufen müsse, um ihm in dem speziellen Falle, wo es sich um den Unterricht in der mathematischen oder astronomischen Geographie handelt, beizupflichten. Wahr ist es freilich und bedauerlich, daß auch selbst in neunklassigen realistischen Anstalten kaum die nötige Zeit sich findet, um nur die allerbekanntesten Aufgaben der sphärischen Astronomie rechnerisch abzutun, während von einer Anwendung der Geometrie auf dieselben — vielleicht einer ihrer schönsten Anwendungen — keine Rede sein kann. Indessen fehlt es keineswegs ganz an Versuchen, die geometrische Behandlungsweise sphärischer Aufgaben der Schule näher zu bringen. So machte S. Günther im VII. u. X. Jahrgang der Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht darauf aufmerksam, daß der Lernende, wenn er die vorkommenden Größen wirklich konstruiert, einen tieferen Einblick in den Kern der Sache erhält, als wenn er sich an ein bloß mechanisches Manipulieren mit gewissen Kugeldreiecken gewöhnt. Zugleich gab Günther in genannter Zeitschrift die geometrische Lösung der zwei Aufgaben: Aus der Polhöhe eines Ortes und der Morgenweite oder Deklination eines Gestirns dessen Tagebogen und aus der Polhöhe eines Ortes, der Deklination und dem Stundenwinkel eines Sterns dessen Höhe und Azimut zu finden. Für den Schulgebrauch an solchen Anstalten, an denen sphärische Trigonometrie nicht gelehrt werden kann, ist eine Programmabhandlung Dr. A. Peins bestimmt: „Aufgaben der sphärischen Astronomie gelöst durch planimetrische Konstruktionen und mit Hilfe der ebenen Trigonometrie“ 1883. Die Schrift legt stereometrische Betrachtungen zugrunde, und die Umlegung aller Ebenen in die Meridianebene ist etwas umständlich.

Auch in manchen Lehrbüchern der Trigonometrie wird auf die große Bedeutung des geometrischen Prinzips hingewiesen, so von Reidt in der trigonometrischen Analysis und von Hammer in seinem Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, woselbst die Fundamentalformeln der letzteren auch durch Umklappen des Dreikants in die

Ebene bewiesen werden, eine Ableitung, die übrigens schon F. W. von Opperl, Oberberghauptmann in Freiberg (1720—1769), in der *Analysis triangulorum* 1746 gab, hiermit einen Gedanken systematisch durchführend, den man schon früher bei Caswell und R. I. Boscovich angedeutet findet. (Vgl. A. v. Braunnmühl: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*. Leipzig 1899—1903. II. Bd. Seite 99 ff.)

In der unserer Schrift vorangestellten historischen Einleitung soll die Entwicklung des geometrischen Prinzips in der sphärischen Astronomie etwas deutlicher skizziert werden; manche schöne Anwendung der Geometrie auf Astronomie ist namhaft zu machen. Eine solche geschichtliche Orientierung ist unbedingt notwendig, um nicht der Täuschung zu verfallen, etwas Neues zu Markte gebracht zu haben, was sich bei sorgfältiger Prüfung als längst dagewesen erweist, ein Fall, der in der Geschichte der Trigonometrie öfters vorkommt. Trotzdem glauben wir doch zur Komplettierung dieses Kapitels noch verschiedenes Neue zu bringen. Der erste Abschnitt der Arbeit gibt Lösungen mittels der Orthogonalprojektion, also der Methode des Analemmas; doch sind sie der unübersichtlichen Darstellung entkleidet und infolge ihrer Einfachheit ein trefflicher Übungsstoff für die Schule. Dem Sachkundigen wird aber nicht entgehen, daß hier nicht nur Reproduktionen der Alten vorliegen; so ist die Aufgabe der kürzesten Dämmerung, wie wir glauben zum erstenmal und in der denkbar einfachsten Art orthographisch gelöst, während die stereographische Behandlung doch weit unübersichtlicher ist.

Zuerst ist hier ferner im zweiten Teil die Zentralperspektive zur Verwendung gelangt, die auf weniger einfache Fragen angewandt, freilich praktisch nicht so einfach ist, aber theoretisch ein gewisses Interesse hat. Ferner gab der Verfasser, wie er glaubt, ebenfalls zum erstenmal eine rein geometrische Lösung der berühmten Douwesschen Aufgabe, deren analytische Ausgestaltung eine nicht uninteressante Geschichte hat. Den Vorwurf freilich will und kann die graphische Methode von sich nicht abwälzen, daß sie, besonders wo es sich um kleine Winkel handelt — der Dämmerungskreis liegt nur etwa  $6\frac{1}{2}^{\circ}$  unter dem Horizonte, und beim „Bestecknehmen“ des Kapitäns

erfolgen die zwei Messungen der Sonnenhöhen rasch aufeinander — entweder zu ungenaue Resultate für die Praxis liefert oder die Konstruktion in großer Ausführung erheischt. Allein in letzter Instanz handelt es sich bei dem rein geometrischen Verfahren doch weniger um große Präzision als vielmehr um einen tieferen Einblick in die Natur der Aufgabe, den die konstruktive Methode ja stets am besten vermittelt.

Baden-Baden, im Juli 1907.

**C. Schoy.**

# Inhaltsverzeichnis.

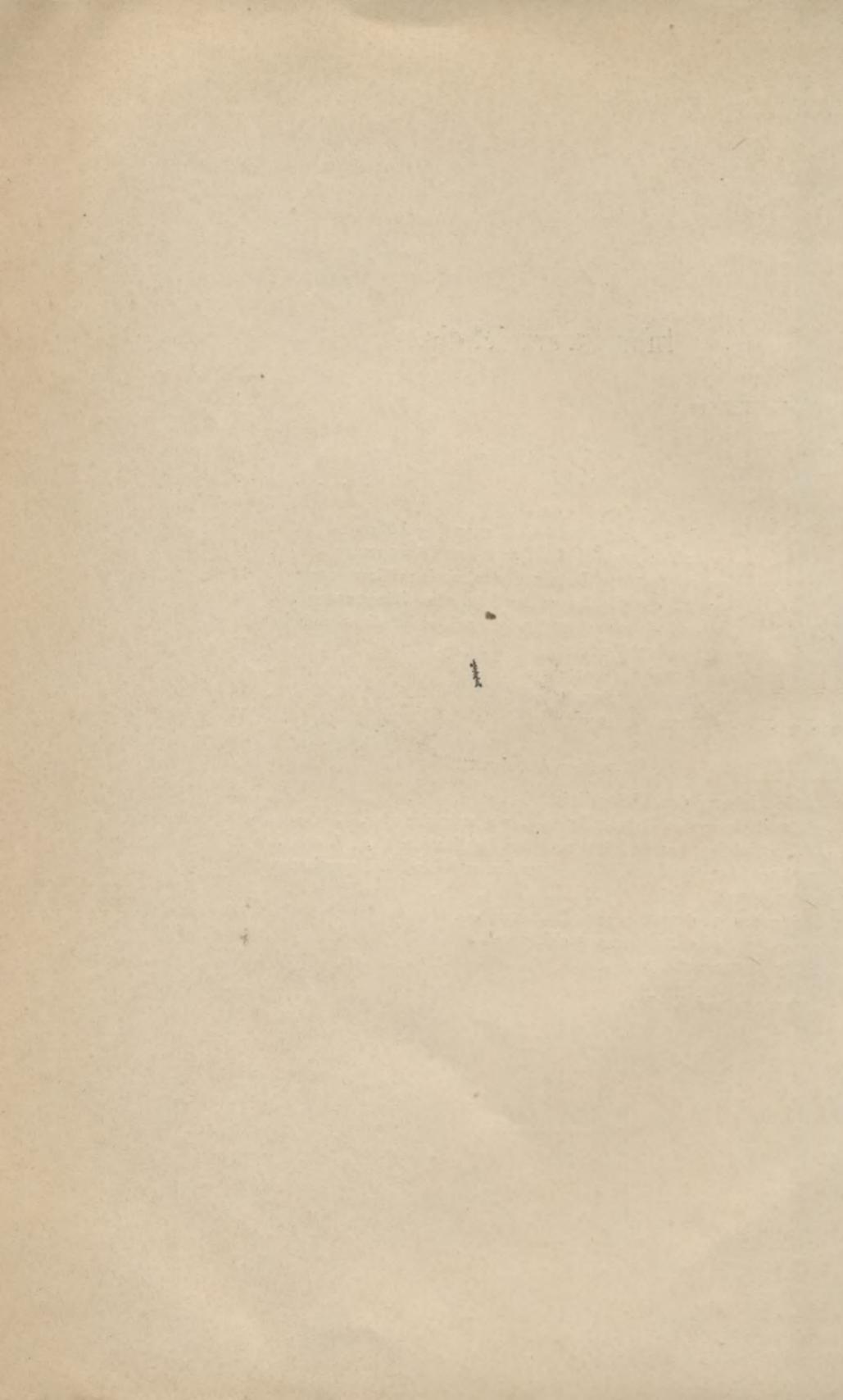
	Seite
Historische Einleitung . . . . .	1

## Erster Abschnitt.

I. Gegeben $\varphi$ und $\delta$ ; gesucht $s_0$ . . . . .	9
II. „ $\varphi$ und $m$ ; gesucht $s_0$ . . . . .	9
III. „ $\varphi$ , $\delta$ und $\rho$ ; gesucht die Dauer des Aufgangs . . . . .	9
IV. „ $\varphi$ und $\delta$ ; gesucht die Dauer der Dämmerung . . . . .	11
V. „ $\varphi$ ; gesucht das Datum der kürzesten Dämmerung . . . . .	12
VI. „ $\varphi$ ; gesucht die Dauer der kürzesten Dämmerung . . . . .	14
VII. „ $\varphi$ und $\delta$ ; wann und wie hoch steht die Sonne im ersten Vertikal . . . . .	15
VIII. „ $\varphi$ , $\delta$ und $h_1$ ; gesucht $s$ . . . . .	15
IX. „ $\delta$ , $h$ und $s$ ; gesucht $\varphi$ . . . . .	16
X. „ $\varphi$ , $\delta$ und $s$ ; gesucht $h$ . . . . .	17

## Zweiter Abschnitt.

I. Die Ziehung der Mittagslinie . . . . .	23
II. Ermittlung der Stundenlinien der Sonnenuhr . . . . .	25
III. Ermittlung der Polhöhe aus der Deklination $s$ , $s_1$ , $h$ und $h_1$ . . . . .	26
IV. Dauer der Besonnung einer vertikalen Wand bei gegebenem $\varphi$ und $\delta$ . . . . .	28
V. Gegeben $\varphi$ , $\delta$ und $s$ ; gesucht $h$ und $\omega$ . . . . .	30
VI. „ $\varphi$ , $\delta$ und $\omega$ ; gesucht $h$ und $s$ . . . . .	30
VII. Die Douwessche Aufgabe . . . . .	31
Anmerkungen und Zusätze . . . . .	33



## Einleitung.

Schon bei den Griechen treten uns mehrere bedeutende Leistungen konstruktiver Natur entgegen: Es sind dies das schon erwähnte Analemma, das sicher schon den ältesten Griechen bekannt war, ja, wie v. Braunmühl (Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I. Bd. pag. 11) vermutet, ägyptisch-chaldäischen Ursprungs ist; ferner das Astrolabium planisphärium, das als eine Erfindung Hipparchus, des Vaters der Astronomie, angesehen wird, und endlich die Ziehung der Mittagslinie aus drei kurz nacheinander gemessenen ungleichen Schattenlängen. Was das Analemma anbelangt, über dessen Geschichte und Anwendung sich Delambre's *Histoire de l'astronomie ancienne* tome II pag. 458—503 ausführlich verbreitet, so ist sein hohes Alter schon aus dem Umstande unzweifelhaft, daß die orthographische Projektion die einfachste Darstellung der Himmelskugel ist. (Vgl. v. Braunmühl: *Vorlesungen etc.* I. Bd. pag. 11, Anmerkung 1.) Von der Schrift des Claudius Ptolemaeus: *περὶ ἀναλήμματος* sind nur noch Bruchstücke vorhanden; wir besitzen aber eine lateinische Ausgabe von F. Commandinus: *Cl. Ptolemaei liber de Analemmate Romae 1562* nebst einem guten Kommentar. Delambre bemerkt a. a. O. 458 hierzu: „La traduction latine publiée par Commandin parait avoir été plus défectueuse que celle du Planisphère; car il s'en plaint avec amertume . . . Le mal est que souvent Ptolémée néglige de démontrer ce qui est connu avant lui; ensorte qu'on se trouve parfois très-embarrassé.“ Im wesentlichen ist danach das Analemma eine Orthogonalprojektion der Kugel auf die drei senkrecht zueinander stehenden Ebenen: Meridian, Horizont und ersten Vertikal. Dies Prinzip zieht sich nun durch alle Zeiten hin und gestattet tatsächlich auch eine reiche graphische Ausbeute und eine leichte Deduktion des Kosinussatzes der sphärischen Trigonometrie. Ptolemaeus selbst löste die Aufgabe: Aus der Deklination  $\delta$  der Sonne und ihrem Stunden-

winkel  $s$ , sowie der Polhöhe des Beobachtungsortes  $\varphi$  den Ort der Sonne zu ermitteln.

Auch die Astronomie der Inder basiert ganz auf dieser Methode; doch gingen die rein geometrischen Methoden der Hellenen bei der ausgesprochenen rechnerischen Veranlagung der ersteren bald in jene Formelsprache über, welche wir heute als indische Trigonometrie zu bezeichnen gewohnt sind. Ungemein interessant ist die Wiedergabe zweier Beispiele aus dem Surya-Siddhanta in v. Braurmühls Vorlesungen etc. I. Bd. pag. 38 ff., wo für die Berechnung des Tagebogens  $2s_0$  eines Gestirns aus  $\delta$  und  $\varphi$  eine der Formel  $\cos s_0 = -\text{Tang } \varphi \text{ Tang } \delta$  äquivalente angegeben wird, ja in der Lösung einer zweiten Aufgabe: die Höhe  $h$  der Sonne aus  $\delta$ ,  $\varphi$  und  $s$  zu finden, zum erstenmal der Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie angedeutet ist.

Die Errungenschaften dieser zwei Völker übernahmen nun die Araber; doch hinterließen uns erst die Westaraber schriftliche Dokumente über ihre Gnomonik und ihre graphischen Methoden. Der 2. Band von Abul Hassans Werk, welches der als Orientalist wie als Mathematiker gleich ausgezeichnete Sédillot (der Ältere) uns in einer trefflichen Übersetzung unter dem Titel: *Traité des instruments astronomiques des Arabes composé au treizième siècle par Aboul Hhassan* (Paris 1834) zugänglich gemacht hat, ist ganz unserm Gegenstand, d. h. der Konstruktion, gewidmet, und es beruhen demnach die Behandlungsweisen astronomischer Aufgaben auch bei den Arabern zum Teil auf dem Analemma; doch finden wir auch eine Menge anderer graphischer Methoden, die namentlich zur Verfertigung von Astrolabien, Quadranten etc. dienen, da ja dereinst alle diese Instrumente in der arabischen Astronomie eine große Rolle spielten.

Während Al-Battâni in einem speziellen Falle mittels des Analemmas einen Winkel aus den Seiten des sphärischen Dreiecks bestimmte, behandelt Regiomontan diese Aufgabe in sehr origineller Weise mit Hilfe der orthographischen Projektion im IV. Buche seiner berühmten Schrift: „*De triangulis omnimodis libri quinque*“, indem er die Aufgabe auf die Bestimmung eines Winkels aus den drei Seiten eines ebenen Dreiecks zurück-

führt, eine Leistung, die seinem geometrischen Talent alle Ehre macht; ebenso wandte sich Kopernikus bei Lösung der Aufgabe: Aus Breite, Deklination und Ekliptikschiefe die Länge eines Gestirns zu bestimmen, wieder ganz der Projektionsmethode des Analemmas zu. (II. Buch, Kap. 3 von *De revolutionibus orbium coelestium*.)

Es wäre nicht schwierig, noch weitere Verwendungen des Analemmas anzuführen; wir begnügen uns aber mit der Erwähnung, daß Clavius, Bürgi u. a. es auch zur prosthaphäretischen Umgestaltung des Kosinussatzes mit Erfolg anwandten.

Wir kehren jetzt nach dieser Digression zu dem zweiten, schon erwähnten Prinzip, dem Astrolabium, zurück, das in R. Wolfs Handbuch der Astronomie, ihre Geschichte und Literatur, II. Bd. pag. 70 ff. eine sehr ausführliche Darstellung erfährt. Eine Erfindung des „Altmeisters“ Hipparch, ist es im wesentlichen eine stereographische Projektion der Himmelskugel und setzt sich aus den vier Hauptteilen: der *Mater astrolabii*, dem eigentlichen Planisphaerium, dem *Rete* und dem *Dorsum* zusammen. Auch mittels dieser Methode fanden bekannte Aufgaben der praktischen Astronomie ihre Erledigung, besonders bei den Arabern, wo nach R. Wolf a. a. O. pag. 73 Aly Ibn den Ehrentitel „Al Asterlaby“, als berühmter Konstrukteur von Astrolabien, erhielt. Ein beliebiger Almicantarat  $h$  konnte leicht in das Planisphaerium eingetragen werden; für  $h = 0^\circ, 90^\circ$  und  $-18^\circ$  erhielt man dann speziell Horizont, Zenit und die *Linea crepusculi*. Auf dem *Dorsum* las man für irgendeinen Jahrestag die Länge der Sonne, an der *Mater* nach Eintragung der Sonnenhöhe  $h$  den Stundenwinkel derselben ab. Mittels des Horizontes und Dämmerungskreises erhielt man entsprechend die Zeiten des Auf- oder Unterganges der Sonne; des Anfangs, resp. Endes der Dämmerung etc. 1593 veröffentlichte Chr. Clavius auch eine Schrift „Astrolabium“, in der er die sämtlichen Fundamentalaufgaben des sphärischen Dreiecks geometrisch löste und eine Sammlung von Sätzen zur Lösung astronomischer Aufgaben anwandte (vgl. Dr. Haller: *Biblioth. math.* 1899 pag. 71 ff.), die er in stereographischer Methode gab.

Ehe wir die Bedeutung der stereographischen Projektion für die sphärische Astronomie vollends würdigen können, müssen wir der Ziehung der Mittagslinie aus drei ungleichen Schattenlängen Erwähnung tun. Über ihren Urheber wissen wir so gut wie nichts. Beschrieben ist sie uns durch Hyginus in dem Werke: „Die Schriften der römischen Feldmesser etc.“, trägt aber so entschieden griechischen Charakter, daß Cantor (Vorles. üb. Geschichte d. Mathem. I. Bd. pag. 453) von ihr, die nicht ein Praktiker, sondern nur ein sehr fachkundiger Mathematiker erdacht haben kann, sagt: „Es muß eine griechische Methode aus der Zeit hochentwickelter Stereometrie sein, wenn es auch nicht möglich gewesen ist, sie bei irgendeinem uns erhaltenen griechischen Astronomen nachzuweisen.“ Trotzdem Mollweide im 28. Band der „Monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ (v. Zach) von pag. 396—425 eine stereometrische, zwei graphische Lösungen und eine Auflösung dieses interessanten Problems mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie gab, so scheint es doch wenig gekannt zu sein, weshalb wir auf die rein graphische Lösung Mollweides im Text noch zurückkommen werden; auch er sagt: „Der Urheber der von Hygin gelehrten Methode ist unbekannt; von Hygin selbst rührt sie schwerlich her; höchstwahrscheinlich ist sie von einem griechischen Schriftsteller entlehnt, aber aus einem verloren gegangenen und unbekanntem.“

Einher mit diesen geometrischen Traktaten gingen Einrichtungen zur mechanischen Lösung solcher astronomischer Fragen, die für das tägliche Leben von praktischer Bedeutung sind. Wir denken außer dem mit immer mehr Geschick konstruierten Astrolabium vor allem an die aus grauer Vorzeit stammende Sonnenuhr, die bei keinem Kulturvolk fehlte; der Globus wurde später mit Horizontring zur Demonstration einfacherer Aufgaben versehen; jedoch spielte bis vor kurzer Zeit zur See die Gunterscale eine noch fast wichtigere, praktische Rolle. Ihr widmet Kapitän Jerrmann eine sehr interessante Schrift: „Die Gunterscale“ (Hamburg 1888), in der manche Aufgabe graphisch gelöst oder mit Hilfe der Tangenten- und Sinuslinie eine Proportion konstruiert wird.

Da die Sonnenuhr einem rein praktischen Bedürfnis entsprang, so mußte ihre Anfertigung populär werden; die Legion der gnomonischen Literatur führt alle diese Konstruktionen vor. Vom wissenschaftlichen Standpunkt aus schenkte zuerst Thabit ben Korra den vom Endpunkt des Stylus beschriebenen krummen Linien, welche bekanntlich Kegelschnitte sind, Aufmerksamkeit. Die Entwicklung der arabischen Gnomonik wurde durch religiöse Gebräuche bestimmt. Bekanntlich muß jeder Muselman beim Gebet sein Antlitz gen Mekka wenden, deshalb war in die horizontale Sonnenuhr die sog. Quibla (Kibleh) eingetragen, d. h. die nach der heiligen Stadt führende gerade Linie. Der Zeiger der Uhr war meist senkrecht stehend; ein eigener Beamter hatte dieselbe ständig zu bewachen und durch Ausruf bekannt zu geben, wann der Schatten des Gnomons gerade mit der Quibla koinzidierte; dann wies auch der eigene Körperschatten dem Gläubigen die Richtung gen Mekka.<sup>2)</sup>

Dieser senkrechte Zeiger, der nie eine beträchtliche Höhe besaß, nötigte nun den arabischen Astronomen, die Schattenlinien des Endpunktes desselben, die für jeden Tag sich ändern, zu bestimmen und dann die Stundenlinien jedesmal einzutragen. (Nur für einen Zeiger parallel der Weltachse sind die einmal eingezeichneten Stundenlinien das ganze Jahr brauchbar.) So ist es erklärlich, daß schon Thabit ben Korra die Schattenkurven, welche in der heißen und gemäßigten Zone bekanntlich Hyperbeln sind, eingehend studierte. Statt aber für eine große Hyperbelschar die Punkte aufzusuchen, in welche der Endpunkt des Gnomonschattens in entsprechenden Stunden fiel, und entsprechende Punkte dann durch eine stetige Kurve — Stundenlinie — zu verbinden, besorgte der Astronom dies nur für die zwei äußersten Schattenkurven; d. h. für die Solstitialtage, und verband dann entsprechende Punkte dieser zwei Hyperbeln durch gerade Linien, ein Verfahren, das natürlich nicht genau richtig ist. Wir werden hierauf im zweiten Teil unserer Schrift noch näher eingehen, hier sei nur erwähnt, daß Delambre a. a. O. Bd. II pag. 482 ff. nachweist, daß der Fehler in diesem Annäherungsverfahren nicht beträchtlich ist.

Mit dem großen Aufschwung der Trigonometrie durch Jobst Bürgi und John Napier, welcher besonders die sphärische

Trigonometrie durch seine Theorie der zirkulären Stücke und die Ableitung der bekannten Analogien für das schiefwinkelige Dreieck ganz neu organisiert hat, gehen bald auch Versuche graphischer Ableitungen der neu entdeckten Relationen Hand in Hand. So nennt v. Braunmühl a. a. O. Bd. II pag. 47 einen gewissen John Caswell, über dessen Persönlichkeit nichts bekannt zu sein scheint, der schon durch Umklappung des Dreikants in die Ebene den Kosinussatz verifiziert hat, während er zur Ableitung der Neperschen Analogien, deren Beweis dazumal mit großer Mühe geometrisch gegeben wurde<sup>3)</sup>, die stereographische und orthogonale Projektion miteinander verband.

Im 18. Jahrhundert hat sich ferner besonders der Jesuit Roger Joseph Boscovich (1711—1787) um die Förderung geometrischer Lösungen in der sphärischen Trigonometrie und Astronomie verdient gemacht. Nicht nur, daß er in seinen *Opp. ad Optic. et Astronom. pertinent*; Tomo IV pag. 243 eine treffliche graphische Lösung des Problems der Ziehung der Mittagslinie aus drei ungleichen Schattenlängen gab, die an Einfachheit der von Hygin angeführten kaum nachsteht, sind auch die konstruktiven Lösungen der sechs sphärischen Fundamentalaufgaben hervorzuheben, welche er in der *Trigonometriae sphaericae constructio*, Romae 1737, veröffentlichte.

Während in neuerer Zeit P. Serret (1855) eine einheitliche Ableitung aller Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie, auch der Neper'schen und Delambre'schen, vermittelt der stereographischen Projektion gab (vgl.: *Des méthodes en Géométrie*) und so die geometrische Theorie der Sphärik zu einem gewissen Abschluß brachte, sind speziell für unser Thema noch eine Anzahl origineller Arbeiten zu nennen, in denen nicht nur die üblichen Projektionsmethoden, sondern sogar die Prinzipien der synthetischen und darstellenden Geometrie zur Lösung sphärisch-astronomischer Probleme verwendet werden. Den Anfang hierzu machte de la Hire 1682 in „*La Gnomonique*“, in der sich unter manchen anderen rein geometrischen Lösungen von gnomonischen Fragen folgende Aufgabe findet: „*Six intervalles d'heure de suite estant données, tracer toutes les autres heures*“ (Chap. III pag. 139 ff.). Die Lösung ist nun folgende: Angenommen, es seien die sieben Stundenlinien X, XI, XII,

I, II, III und IV bekannt, so ziehe man durch einen Punkt  $f$  der Linie IV eine Transversale parallel der Stundenlinie X; sie möge die Tracen III, II, I, XII und XI in Punkten  $a, b, c, d, e$  treffen; auf dieser Transversalen trägt man zur anderen Seite von  $o$  die Stücke  $oa', ob', oc', od', oe'$  resp. gleich  $oa, ob, oc, od, oe$  ab, dann gehören die Punkte  $a', b', c', d', e'$  zu den fünf anderen Stundenlinien. Der kurze und strenge Beweis von de la Hire basiert darauf, daß die zwei Stundenebenen X und IV senkrecht aufeinander stehen, III und V dieselbe Neigung zu IV haben, also III und IV konjugiert harmonisch zu X und IV sind; also sind es auch die entsprechenden Stundenlinien, die daher von jeder Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten werden; da aber die Transversale durch  $o$  parallel zu X ist, so werden die beiden Punkte, in denen sie die Linien III und V trifft, gleichweit von dem entfernt sein, in welchem sie IV trifft.<sup>4)</sup>

Aber, fragt Chasles (Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke, 1839) mit Recht: „Sind alle diese Data notwendig? Und welches ist die kleinste Anzahl von Stundenlinien, die zur Konstruktion der anderen hinreichen?“ (pag. 653). Es genügen bekanntlich deren drei, um eine ebenso einfache Konstruktion für die Auffindung der andern zu geben, als es de la Hire für sieben aufeinanderfolgende tat. In der Tat, sind (nach Chasles)  $a, b, c$  die drei gegebenen Tracen, welche drei bestimmten, aber beliebigen Stunden entsprechen, und es sei  $d$  eine vierte gesuchte Linie, so wird sie mit  $a, b, c$  dasselbe Doppelverhältnis bilden, wie es zwischen den vier entsprechenden Stundenebenen  $A, B, C, D$  statthat; d. h. es muß sein:

$$\frac{\sin(c, a)}{\sin(c, b)} : \frac{\sin(d, a)}{\sin(d, b)} = \frac{\sin(C, A)}{\sin(C, B)} : \frac{\sin(D, A)}{\sin(D, B)} = \text{einer gegeb. Größe } n,$$

da ja die  $\sphericalangle$  der vier Stundenebenen bekannt sind. Diese schöne Konstruktion ist ein originelles Beispiel der Anwendung der Theorie des anharmonischen Verhältnisses auf astronomische Probleme.

In der beinahe unübersehbaren Literatur über das berühmte Problem der kürzesten Dämmerung finden sich auch zwei rein geometrische Lösungen desselben. Die eine, gegeben von

Monge (1746—1818), veröffentlicht in der *Correspondance sur l'école impériale polytechnique* par Hachette Nr. 5, 1806, lehrt das Datum der kürzesten Tagesverlängerung mittelst deskriptiver Geometrie finden. Zelbr hat sich mit dieser Lösung eingehender befaßt und sie durch Veröffentlichung im 108. Band Nr. 2575 der astronomischen Nachrichten einem größeren Leserkreis zugänglich gemacht.<sup>5)</sup> Im 109. Band der astr. Nachr. Nr. 2602 setzt Zelbr seine Studien fort. Danach ist die Fassung der Aufgabe von Monge ungefähr diese: Es werde eine gemeinsame Tangentialebene an zwei gerade Kegel gezogen, von denen der eine zur Achse die Vertikale des Ortes hat, für welchen man die kürzeste Dämmerung sucht, und zur Basis jenen Almucantar, in welchem die Sonne anfängt die Dämmerung zu bewirken; der andere Kegel hat zur Achse die Weltachse und ist die umhüllende Fläche des Raumes, welchen der Horizont bei der täglichen Bewegung beschreibt. Die Berührungslinie am ersten Kegel schneidet den Parallel der Basis in einem bestimmten Punkte; errichtet man in diesem Punkte eine senkrechte Ebene auf die Weltachse, so wird diese Ebene den Deklinationskreis der Sonne am Tage der kürzesten Dämmerung enthalten. Eine zweite geometrische Behandlung des Crepuscularproblems verdanken wir H. Cranz in einem Aufsätze „Zur geometrischen Theorie der Dämmerung“ (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, 31. Bd. pag. 158 ff.), wobei die stereographische Projektion zur Verwendung gelangt. Mit entschiedenem Vorteil endlich wandte R. Sonndorfer (*Theorie und Konstruktion der Sonnenuhren*, Wien 1864) die Methoden der darstellenden Geometrie zur Konstruktion der Stundenlinien einer Sonnenuhr auf gekrümmter Aufnahmeffäche (Zylinder- und Kegelmantel) an.

Dies in Kürze die wichtigsten Daten zur geometrischen Entwicklung der sphärischen Probleme. Einzelne Ergänzungen sind da und dort im Texte der Ausführung angefügt, zu der wir jetzt übergehen.

---

## Erster Abschnitt.

I. Gegeben die Polhöhe  $\varphi$  eines Ortes, sowie die Deklination  $\delta$  eines Sterns (oder der Sonne  $\delta_{\odot}$ ); gesucht der Tagebogen  $s_0$ .

## Auflösung.

In Fig. 1 sind unmittelbar in wahrer Größe abzulesen:  $\sphericalangle PMH = \sphericalangle \varphi$  und  $\sphericalangle BMH = \sphericalangle \delta$ , wenn  $BB_1$  der Durchmesser desjenigen Parallelkreises ist, in welchem das Gestirn sich gerade befindet. Ist  $V$  der Aufgangs-,  $U$  der Untergangspunkt desselben, so repräsentiert arc  $VB_1U$  den gesuchten Tagebogen  $s_0$ . Zieht man nun  $BB_1$  im Abstand  $\delta$  vom Äquator  $AQ$ , so erhält man auf dem Durchmesser  $HH_1$  des Horizontkreises den Schnittpunkt  $T$ , durch den, senkrecht zu  $HH_1$ , als der Mittagslinie (da  $P, Q, P_1, A$  der Meridian ist), und parallel zur Ost-Westlinie  $OW$ , die Sehne  $UV$  geht, die im Parallelkreis den Tagebogen  $VB_1U$  vom Nachtbogen  $VB_1U$  trennt.  $BB_1$ , also auch  $TB_1$  lassen sich unmittelbar in wahrer Größe aus Fig. 1 nach Fig. 2 übertragen.

II. Gegeben die Polhöhe  $\varphi$  eines Ortes und die Morgenweite  $m$  eines Gestirns; gesucht dessen Tagebogen  $s_0$ .

## Auflösung.

Im Horizonte seien  $O$  und  $W$  der Ost- und Westpunkt (Fig. 1 und 3). Von  $O$  aus trage man nun  $\sphericalangle m$  nach  $V$  und falle auf  $HH_1$  das Lot  $VTU$ . Durch  $T$  geht parallel zum Äquator  $AQ$ , dessen Richtung durch den  $\sphericalangle \varphi$  bestimmt ist, der Deklinationkreis  $BB_1$  des Gestirns, und arc  $VB_1U$  ist wieder der gesuchte Tagebogen  $s_0$  (Fig. 2).

III. Gegeben die Polhöhe  $\varphi$  eines Ortes, sowie die Deklination  $\delta$  und der Scheibenradius  $\rho$  eines Gestirns in Bogenmaß (Sonne und Mond); es ist die Dauer des Auf- oder Untergangs zu ermitteln.

## Auflösung.

Der Scheibenradius  $\rho$  läßt sich auf dem Meridian in wahrer Größe abtragen, wie es in Fig. 4 geschehen ist. Befindet sich nun der Mittelpunkt des scheibenförmigen Himmelskörpers in

$\Sigma_1$ , so daß dieser mit seinem oberen Rande den Horizont  $HH_1$  berührt, so beginnt der Aufgang oder ist der Untergang vollendet. In  $\Sigma_2$  findet eine Berührung des unteren Randes der Scheibe mit  $HH_1$  statt; dann ist der Aufgang vollendet, resp. der Untergang beginnt. Diese zwei Positionen des Himmelskörpers schneiden aus dem Durchmesser  $BB_1$  des Parallels ein Stück  $\Sigma_1\Sigma_2$  aus, und der hierzu gehörige Parallelkreisbogen  $U_1U_2$  oder  $V_1V_2$  ist proportional der Zeit des Unter- oder Aufganges. Die Strecke  $\Sigma_1\Sigma_2$  läßt sich wieder in wahrer Größe aus Fig. 4 nach Fig. 5 übertragen. Arc  $V_1V_2$  oder arc  $U_1U_2$  fällt bei gleichem  $\varrho$  verschieden aus, je nach Polhöhe und Deklination (vgl. ein Zahlenbeispiel bei S. Günther: Handbuch der mathemat. Geographie pag. 163).

Ebenda, pag. 162, findet sich auch eine Lösung mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie in Form der biquadratischen Gleichung:

$$\frac{\sin^2 \delta \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2 \delta \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \frac{s_2 - s_1}{2}} + \frac{\sin^2 \varrho}{\cos^2 \delta \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \frac{s_2 - s_1}{2}} = 1,$$

wo  $\sphericalangle s_1 - s_2$  der der Dauer des Auf- oder Unterganges proportionale Bogen ist. Setzt man jetzt

$$\frac{s_2 - s_1}{2} = x; \quad \frac{\sin^2 \delta \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2 \delta \cdot \cos^2 \varphi} = A; \quad \frac{\sin^2 \varrho}{\cos^2 \delta \cdot \cos^2 \varphi} = B,$$

wo  $A$  und  $B$  zwei positive Größen sind, so wird die Gleichung:

$$\frac{A}{\cos^2 x} + \frac{B}{\sin^2 x} = 1$$

oder

$$\sin^4 x + (A - B - 1) \sin^2 x + B = 0,$$

so daß sie hiermit auf den zweiten Grad heruntergebracht ist. Die Auflösung nach  $\sin x$  ergibt:

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{B+1-A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-B-1}{2}\right)^2 - B}},$$

so daß  $\sin x$  vier Werte entsprechen würden, während die Konstruktion nur eine eindeutige Lösung liefert. In der Tat ist auch

$$\frac{B+1-A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A-B-1}{2}\right)^2 - B} < 0,$$

da

$$\frac{B+1-A}{2} > \sqrt{\left(\frac{B+1-A}{2}\right)^2 - B}$$

ist. Somit liefert die Berücksichtigung des Minuszeichens unter der großen Wurzel zwei komplexe, also unbrauchbare Lösungen; es bleiben also nur zwei entgegengesetzt gleiche Werte für  $x = \frac{s_2 - s_1}{2}$ , welche offenbar der Dauer des Auf-, resp. Untergangs zukommen.<sup>6)</sup>

IV. Gegeben die Polhöhe  $\varphi$  eines Ortes und die Deklination der Sonne  $\delta_{\odot}$ ; gesucht die Dauer der Dämmerung, die bei einer Höhe der Sonne von  $-h^{\circ}$  beginnen, resp. endigen soll.

#### Auflösung.

Man trage von  $HH_1$  aus (Fig. 6) im Meridian  $h^{\circ}$  nach unten ab und ziehe den Durchmesser  $H_2H_3$  des sogenannten Dämmerungskreises (linea crepusculi). Die Dämmerung beginnt oder endigt, wenn die Sonne diesen passiert. Zieht man den Äquator unter der Neigung  $90^{\circ} - \varphi$  zum Horizont und im Abstand  $\delta$  den Parallel der Sonne  $BB_1$ , so läuft die Lösung der Aufgabe auf die Ermittlung jenes Bogenstücks in dem genannten Parallel hinaus, das zwischen  $HH_1$  und  $H_2H_3$  liegt. Man zeichne daher (Fig. 7) den Parallel  $BB_1$  in seiner wahren Größe mit dem Radius  $\cos \delta_{\odot}$ , ermittle wie in Aufgabe I den Untergangs- und Aufgangspunkt  $U$  und  $V$  und ziehe die Sehne  $VTU$  und durch  $Y$ , den Schnittpunkt von  $BB_1$  mit dem Dämmerungskreis  $H_2H_3$ , parallel zu  $VTU$  die Sehne  $XYZ$ ; dann ist  $\text{arc } VZ = \text{arc } UX$  proportional der Dauer der Dämmerung. Fällt  $Y$  nach  $B$ , so treten damit für einen gegebenen Ort die sogenannten „hellen Nächte“ ein, in welchen sich bekanntlich Morgen- und Abenddämmerung die Hand reichen. Fig. 9 ist mit anderen Werten von  $\varphi$  und  $\delta$  entworfen, und in Figg. 7 und 8 sind die Figg. 6 und 9 zusammengestellt, woselbst sich die Differenz der Dauer der Dämmerungen in beiden Fällen in dem schraffierten Winkel  $\sigma - \sigma_1$  präsentiert. Hält man nun  $\varphi$  fest und variiert  $\delta$ , so kommt man notwendig zu einem Wert von  $\delta$ , für welchen  $\text{arc } VZ$  ein Minimum wird, d. h. zu der Frage:

V. Für welche Sonnendeklination  $\delta_{\odot}$  wird an einem Ort unter der gegebenen Breite  $\varphi$  die Dämmerung oder Tagesverlängerung am kürzesten?

Auflösung.

Die Literatur über dieses in der Geschichte der Mathematik berühmte Problem ist außerordentlich groß; entsprechend auch die Arten der Lösung dieser Aufgabe. Gestellt wurde dieselbe zum erstenmal von dem Portugiesen Nuñez in dem Werke: *De crepusculis* (Lissabon 1542), jedoch ohne Lösung. Die berühmten Mathematiker Jak. Bernoulli, D'Alembert und Fuß wandten auf diese Minimumsaufgabe den Differentialkalkül an, gelangten jedoch auf sehr komplizierte Formeln; auch Kästner (*Astron. Abhandlungen* 2. Bd. 1774) glaubte, daß die Lösung einer biquadratischen Gleichung unumgänglich sei. In Nr. 1085 der astronomischen Nachrichten gab D'Arrest zuerst eine einigermaßen einfache Lösung, während Stoll: „Das Problem der kürzesten Dämmerung“ (*Zeitschrift f. Math. und Phys.* 28. Bd. S. 150 ff.) die Aufgabe völlig elementar und ohne Hilfe der höheren Analysis löste. Sein Verfahren wird in S. Günthers Handbuch der mathematischen Geographie S. 154 ff. ausführlich mitgeteilt. Im Anschluß hieran ließ H. Cranz im 31. Band derselben Zeitschrift S. 158 ff. die schon erwähnte geometrische Theorie der Dämmerung folgen, die auf dem 1811 von Bohnenberger bewiesenen Satz fußt, daß zur Zeit der kürzesten Dämmerung der Parallelkreis der Sonne den Dämmerungskreis und den Horizont unter demselben Winkel schneidet, und ferner darauf, daß die Vertikalkreise, welche die Sonne zu Anfang und zu Ende der kürzesten Dämmerung passiert, symmetrisch zum ersten Vertikal liegen.

Eine ausführliche Übersicht über die ältere und moderne Literatur des Problems gewinnt man bei Zelbr in Schlömilchs bekannter Zeitschrift Jahrg. 41. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Höhe der Sonne sich am raschesten ändert auf einem Parallel, der die schon erwähnten Eigenschaften hat, läßt sich auch die trigonometrische Lösung sehr einfach geben. Da der Bogen, den die Sonne während der kürzesten Dämmerung durchläuft, vom ersten Vertikal halbiert wird, so muß die Abend-

weite der Sonne zu dieser Zeit gen Süden liegen, mithin das Phänomen bei negativem  $\delta_{\odot}$ , also vor dem 21. März und nach dem 23. September eintreten. Diese Abendweite sei  $\omega_1$ , so daß das Azimut der Sonne beim wahren Untergang des Sonnenmittelpunktes  $90^\circ - \omega_1$  und beim Ende der Dämmerung  $90^\circ + \omega_1$  ist. Dann findet man aus dem astronomischen Dreieck Zenit — Pol — Sonne für beide Positionen der Sonne:

$$\sin \delta_{\odot} = -\cos \varphi \cdot \sin \omega_1$$

$$\sin \delta_{\odot} = -\sin h \cdot \sin \varphi + \cos h \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega_1,$$

woraus durch Elimination von  $\sin \omega_1$ :

$$\sin \delta_{\odot} = -\sin \varphi \cdot \text{Tang } \frac{h}{2}$$

oder

$$\sin(-\delta_{\odot}) = \sin \varphi \cdot \text{Tang } \frac{h}{2}$$

folgt. Man nimmt  $h$  für die bürgerliche Dämmerung zu  $6\frac{1}{2}^\circ$ , für die astronomische zu  $16^\circ - 18^\circ$  an.

Zur graphischen Lösung des Problems sei in orthographischer Projektion (Fig. 10) der Meridian, der Horizont und der Dämmerungskreis, sowie die Lage des Äquators verzeichnet, die ja durch die Polhöhe  $\varphi$  gegeben ist. Dann handelt es sich um die Bestimmung des Punktes  $X$ , durch den der Durchmesser  $BB_1$  des Sonnenparallels parallel zum Äquator  $AQ$  im gesuchten Abstand  $(-\delta_{\odot})$  gehen muß. Die Lage von  $X$  ergibt sich nun leicht auf folgende Weise: Wir zeichnen den Horizontkreis in der Ebene des Papiers mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt  $M$  und ebenso den Dämmerungskreis mit dem Radius  $\cos h$  und dem Mittelpunkt  $M_1$  so, daß  $MM_1 = \sin h$  ist (Fig. 11), ziehen  $HH_1$ ,  $H_2H_3$  durch  $M$ , resp.  $M_1$  und senkrecht dazu  $WW_1$ . Auf dem Horizontkreis tragen wir den (beliebigen) Winkel  $\omega_1 = (-\omega_1)$  nach rechts von  $MW$ , so daß  $-\omega_1 = \sphericalangle WMU$  ist, und auf dem Dämmerungskreis  $+\omega_1 = \sphericalangle W_1M_1U_1$  nach links von  $M_1W_1$  ab, fällen auf die Durchmesser  $HH_1$  und  $H_2H_3$  die Lote  $UT$  und  $U_1T_1$ , verbinden  $T$  mit  $T_1$  und erhalten im Schnittpunkt mit  $WW_1$  den gesuchten Punkt  $X$ . Zum Beweise stelle man in den zwei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken  $TMX$  und  $T_1M_1X$  die Proportion auf:

$$MX : MT = M_1X : M_1T_1,$$

woraus

$$MX = \frac{MT \cdot M_1X}{M_1T_1}.$$

Nun ist:

$$MT = \sin \omega_1; \quad M_1X = \sin h - MX; \quad M_1T_1 = \sin \omega_1 \cdot \cos h,$$

also

$$MX = \frac{\sin \omega_1 (\sin h - MX)}{\sin \omega_1 \cdot \cos h}$$

$$(1 + \cos h) MX = \sin h$$

$$MX = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{h}{2}}{2 \cos^2 \frac{h}{2}} = \text{Tang} \frac{h}{2}.$$

Mit Hilfe dieses Wertes für  $MX$  liest man aber aus dem rechtwinkligen Dreieck  $MXC$  (Fig. 10) folgende Relation ab:

$$\sin \varphi = \frac{MC}{MX} = \frac{\sin (-\delta_{\odot})}{\text{Tang} \frac{h}{2}},$$

d. i. die schon vorhin rechnerisch gefundene Gleichung:  $\sin (-\delta_{\odot}) = \sin \varphi \cdot \text{Tang} \frac{h}{2}$ . Daher die einfache Konstruktion: Halbiere Bogen  $H_1H_3 = h^{\circ}$  im Punkte  $H_{\frac{1}{2}}$ , ziehe  $MH_{\frac{1}{2}}$  und verlängere es; errichte in  $H_1$  das Lot, welches dem Strahl  $MH_{\frac{1}{2}}$  in  $Y$  begegnet, ziehe  $YX \parallel HH_1$  und durch  $X \parallel$  zu  $AQ$  den gesuchten Parallel  $BB_1$ , dann ist  $\sphericalangle QMB_1 = \sphericalangle (-\delta_{\odot})$ .

**VI. Man soll für eine gegebene Polhöhe  $\varphi$  die Dauer der kürzesten Dämmerung ermitteln.**

#### Auflösung.

Diese Aufgabe erledigt sich wie IV, wenn das zugehörige  $\delta_{\odot}$  bei gegebenen  $\varphi$  und  $h$  ermittelt ist, wie es soeben in V geschehen ist. Durch Entwerfen mehrerer Figuren unter Annahme verschiedener Werte von  $\varphi$  findet man, daß die Dauer und der Eintritt des Crepuscularphänomens wesentlich von der Polhöhe  $\varphi$  abhängt.

VII. Gegeben die Polhöhe  $\varphi$  eines Ortes und die Deklination der Sonne  $\delta_{\odot}$ :

- a) Wann steht die Sonne im ersten Vertikal?  
 b) Wie hoch steht sie im ersten Vertikal?

**Auflösung.**

a) Unter Laien herrscht vielfach die irrige Meinung, daß die Sonne stets morgens 6<sup>h</sup> im ersten Vertikal stehe; dies trifft nur zur Zeit der Äquinoktien zu und ist an jedem anderen Tage anders. Ebenso wenig steht sie im allgemeinen um 9<sup>h</sup> a. m. in Südost und um 3<sup>h</sup> p. m. in Südwest. (Vgl. hierzu die Fig. 7 pag. 52 in Wagners Lehrbuch der Geographie I. Bd.) In Fig. 12 ist nun  $ZN$  die Projektion des Premiervertikals, falls  $PHNP_1H_1Z$  den Meridian vorstellt. Dann hat die Sonne seit ihrem Aufgang bis zum Durchgang durch den ersten Vertikal den zur Sehne  $TI$  gehörigen Bogen ihres Parallelkreises  $BB_1$  durchlaufen, wenn  $I$  der Schnittpunkt von  $ZN$  und  $BB_1$  ist. Es ist also zuerst die Zeit des Aufganges zu ermitteln, was wie in Aufgabe I geschieht, indem ja der halbe Tagebogen vom Aufgang bis zum Mittag reicht, und dann arc  $VS$  in Zeitmaß dazu zu zählen (Fig. 13).

b) Um die Höhe der Sonne beim Passieren des ersten Vertikals zu finden, ziehe man durch  $I \parallel HH_1$  den Höhenkreis  $H_4H_5$ , dann ist arc  $H_1H_5$  gleich dem gesuchten Höhenwinkel der Sonne. In der Tat liest man auch aus der Fig. 12 ohne weiteres ab:  $\frac{IL}{IM} = \sin \varphi$ ;  $IL = \sin \delta$ ;  $IM = \sin h$ , d. h.  $\sin h = \sin \delta \cdot \operatorname{cosec} \varphi$ , welche Formel vollständig mit der durch Rechnung gefundenen übereinstimmt.

VIII. Gegeben die Polhöhe  $\varphi$  eines Ortes und die Deklination  $\delta_{\odot}$  der Sonne. Zu welcher Zeit war die Höhe der Sonne  $h^{\circ}$ ?

**Auflösung.**

Zur graphischen Lösung dieser Aufgabe sei auf Fig. 14 verwiesen. Nachdem der Sonnenparallel  $BB_1$  durch die Daten  $\delta_{\odot}$  und  $\varphi$  festgelegt ist, trage man die Höhe  $h$  auf dem Meridian auf und ziehe den Höhenkreis  $H_3H_4$ , welcher  $BB_1$  in  $I$  schneidet;

errichte in  $I$  auf dem Durchmesser  $BB_1$  (vgl. Fig. 15) das Lot  $IF$ , so repräsentiert arc  $B_1F$  den gesuchten Stundenwinkel  $s$ . Da es zwei gleiche (korrespondierende) Sonnenhöhen vor- und nachmittags gibt, so ist auch arc  $B_1E = (-s)$  eine Lösung der Aufgabe.

Aus Fig. 14 läßt sich auch leicht trigonometrisch die Richtigkeit unserer Konstruktion und damit der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie dartun. Fällt man nämlich  $IG \perp HH_1$ , so hat man die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke  $ICK$  und  $KGM$  und demnach die Proportion:

$$IK : CK = KM : KG$$

oder

$$z : y = (\sin \delta - y) : (\sin h - z).$$

Es ist aber

$$y = \cos s \cdot \cos \delta \cdot \text{Tang } \varphi$$

$$z = \frac{\cos s \cdot \cos \delta}{\cos \varphi},$$

mithin

$$\frac{\cos s \cdot \cos \delta}{\cos \varphi \cdot \cos s \cdot \cos \delta \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} = \frac{\sin \delta - \cos s \cdot \cos \delta \cdot \text{Tang } \varphi}{\sin h - \frac{\cos s \cdot \cos \delta}{\cos \varphi}}$$

$$\cos \varphi \cdot \sin h - \cos s \cdot \cos \delta = \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \delta - \cos \delta \cos s (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$\cos \varphi \cdot \sin h - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta = \cos \delta \cdot \cos s \cdot \cos^2 \varphi,$$

und, indem sich  $\cos \varphi$  rechts und links weghebt:

$$\sin h - \sin \varphi \sin \delta = \cos s \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi$$

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos s,$$

d. i. eben die bekannte Relation der räumlichen Trigonometrie, woraus sofort folgt:

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi \cdot \sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}.$$

Da  $\cos s = \cos(-s)$  ist, so erklären sich eben dadurch die zwei gleichen und entgegengesetzten Werte für den Stundenwinkel  $s$ .

**IX.** Aus der Höhe  $h$  eines Gestirns, der Deklination  $\delta$  und dem Stundenwinkel  $s$  desselben die geographische Breite  $\varphi$  des Beobachtungsortes zu ermitteln.

#### Auflösung.

Man ziehe mittelst der Höhe  $h$   $H_3H_4 \parallel HH_1$  (Fig. 16), mache  $CM = C_1M = \sin \delta$  und in Fig. 17  $CF = \cos \delta$ , also  $IC = \cos \delta \cdot \cos s$ . Damit ist  $MI$  gegeben als Hypotenuse des

rechtwinkligen Dreiecks  $IMC$  (Fig. 17). Hiermit beschreibe man von  $M$  (Fig. 16) aus einen Kreisbogen, der  $H_3H_4$  in  $I$  und  $I_1$  schneidet. Auf dem Halbkreis über  $MI$ , resp.  $MI_1$  (Mittelpunkte  $M_1$ , resp.  $M_2$ ) liegt der Punkt  $C$ , resp.  $C_1$ , welche Punkte man durch Abtragen von  $\sin \delta$  von  $M$  aus erhält. Durch  $C$  und  $C_1$  gehen die Weltachsen  $PP_1$  und  $P_2P_3$ , welche mit  $HH_1$  zwei Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bilden. Die Lösung liefert also zwei Werte, weil sich  $\varphi$  aus einer quadratischen Gleichung errechnet. Auf  $PP_1$  steht senkrecht der Äquator  $AQ$  und in der Distanz  $\delta$  der Parallel  $BB_1$ , ebenso auf der zweiten möglichen Weltachse  $P_2P_3$  der Äquator  $A_1Q_1$  und Parallel  $B_2B_3$  (gestrichelt).

Auch hier ergibt sich ganz wie in der vorhergehenden Aufgabe aus den zwei rechtwinkligen ähnlichen Dreiecken  $CKM$  und  $LIK$  eine trigonometrische Lösung mit Hilfe der Proportion:

$$MK:CK = KI:LK$$

$$z:x = (\cos s \cdot \cos \delta - x) : (\sin h - z).$$

Für  $z$  und  $x$  liest man aber aus Fig. 16 ab:

$$x = \sin \delta \cdot \cotg \varphi$$

$$z \cdot \sin \varphi = \sin \delta; \quad z = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi};$$

mit diesen Werten für  $x$  und  $z$  wird obige Proportion zu

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varphi \cdot \sin \delta \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}} = \frac{\cos s \cdot \cos \delta - \sin \delta \cdot \cotg \varphi}{\sin h - \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}},$$

woraus

$$\sin h \cdot \sin \varphi - \sin \delta = \cos \varphi \cdot \cos s \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi - \sin \delta \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\sin h \cdot \sin \varphi = \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos s + \sin \delta \cdot \sin^2 \varphi$$

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s$$

d. h. wieder der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie folgt.

**X. Gegeben die Deklination  $\delta$  und der Stundenwinkel  $s$  eines Gestirns, sowie die Polhöhe  $\varphi$  des Beobachtungsortes; in welcher Höhe  $h$  befindet sich das Gestirn?**

#### Auflösung.

Diese ergibt sich ohne weiteres aus Fig. 14 und 15, indem man  $I$  auf  $BB_1$  bestimmt und zu  $HH_1$  eine Parallele  $H_3H_4$  zieht, die auf dem Meridian die gesuchte Höhe  $h = \text{arc } H_1H_4$  abschneidet.



Den hier vorgeführten 10 Aufgaben ließen sich natürlich noch mehrere an die Seite stellen, allein sie zeigen zur Genüge, wie lehrreich und zugleich wie einfach die geometrische Behandlung sich gestaltet. Man kann nun noch das Azimut  $\omega$  hinzunehmen und dann aus den fünf Stücken  $h, \varphi, \delta, \omega, s$  zehn neue Aufgaben bilden. Dieselben sind alle geometrisch gelöst in Dr. A. Peins schon erwähnter Schrift. Bemerkt sei hier nur noch, daß konstruktive Lösungen derselben sich auch leicht durch Umklappung des diese Elemente enthaltenden Dreikants ergeben, womit sich wiederum eine ganz nette Verbindung der darstellenden Geometrie, resp. Stereometrie, mit der mathematischen Erdkunde herstellen ließe.

## Zweiter Abschnitt.

Zähl' wie die Sonnenuhr  
die heitern Stunden nur.

Falls man die Deklination der Sonne ( $\delta_{\odot}$ ) für einen Tag als konstant ansieht, ist die scheinbare Sonnenbahn ein Parallelkreis, der zugleich als Grundkreis eines Kegels erscheint, dessen Spitze  $M$  (Fig. 18) im Erd- oder Himmelmittelpunkt liegt und dessen Achse die Weltachse ist. Dieser Kegel ändert den Winkel  $\delta$ , den die Mantellinien zum Grundkreis  $BVB_1U$  bilden, keineswegs, wenn man seine Spitze aus dem wahren Horizont in den scheinbaren und dort noch in das Ende eines senkrecht aufgestellten Stabes von endlicher Höhe  $h$  verlegt, da ja alle irdischen Entfernungen bei unendlich fern angenommener Sonne nicht in Betracht kommen; somit darf die Stabspitze mit dem Mittelpunkt des Himmelsgewölbes identifiziert werden. Zieht man durch diese Spitze  $O$  hindurch die Mantellinien (Sonnenstrahlen) und verlängert diese bis zum Horizont, so entsteht dort als Schnittkurve ein Kegelschnitt (Schattenlinie). Es liegt also hier der Fall der Zentralprojektion eines Kreises oder der Zentralkollineation vor, wobei der Parallelkreis das Original, die Schattenkurve das Abbild ist. Der Stab oder das Gnomon wirft natürlich so lange einen Schatten, als die Sonne über dem Horizonte steht. Beim Auf- und Untergang

der Sonne sind ihre Strahlen der Horizontalebene parallel und damit die Schattenbilder von sehr niedrigen Gegenständen — streng genommen nur von solchen mit der Höhe  $h = 0$  — gleichzeitig unendlich lang. Demnach liefert eine auf- und untergehende Sonne zwei unendlich ferne Punkte der Schattenkurve; d. h. dieselbe ist eine Hyperbel, und gleichzeitig ist einleuchtend, daß die Strahlenrichtungen vom Auf- und Untergangspunkt, welche beide symmetrisch zur Nord-Südrichtung oder Mittagslinie liegen, die Asymptoten, als Verbindungslinie des Fußpunktes des Gnomons mit den unendlich fernen Punkten der Hyperbel, darstellen (eigentlich nur dann, wenn Spitze und Fußpunkt des Stabes zusammenfallen). Bleibt die Sonne gerade 24 Stunden über dem Horizonte und berührt denselben nur bei der unteren Kulmination, so liegen alle Punkte der Schattenkurve, mit Ausnahme dieses einen, im Endlichen: dieselbe ist eine Parabel. Bleibt endlich die Sonne bei ihrer oberen und unteren Kulmination über dem Horizonte, so verläuft die Projektion ihrer Bahn ganz im Endlichen: die Schattenkurve ist dann eine Ellipse.<sup>7)</sup>

Nimmt man für den Augenblick die Höhe  $h$  des Stabes  $= 0$ , so schneidet die Horizontalebene den Kegel durch die Spitze längs zweier Geraden, in welche dann die Hyperbel zerfällt. Dann kann von einer eigentlichen Schattenkurve nicht mehr die Rede sein; doch ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Hyperbel im Winkel dieser Geraden liegen wird, sobald  $h$  eine auch noch so geringe endliche Ausdehnung hat; d. h. daß man zur Diskussion ihrer Gestalt sie als Asymptoten nehmen kann. Ist nun die Morgen- und Abendweite der Sonne positiv und beträchtlich, so bilden die Asymptoten einen sehr spitzen Winkel, in welchem dann die am Scheitel sehr konvexe Hyperbel liegt (d. h. immer nur der eine Ast, der vom Tagbogen der Sonne herrührt; der dem Nachtbogen entsprechende Ast ist imaginär). Diese Form wird besonders in Gegenden nahe dem Polarkreis bei größerem  $\delta_{\odot}$  vorkommen. Mit abnehmendem positiven und negativen  $\delta_{\odot}$  werden auch die entsprechenden Morgen- und Abendweiten kleiner, damit der Winkelraum der Asymptoten größer und die Hyperbeln flacher (Fig. 19); ist dann  $\delta_{\odot} = 0$ , d. h. bewegt sich die Sonne

im Äquator, so geht sie genau im Osten auf und im Westen unter; Auf- und Untergangspunkt liegen sich dann diametral gegenüber; der Winkelraum der Asymptoten beträgt nunmehr  $180^\circ$ , womit sich der Hyperbelast bis zur geraden Linie verflacht, welche die Ost-Westlinie ist. Sehr flache Hyperbeln finden sich bei kleinem  $\delta_\odot$  in allen Teilen der heißen und gemäßigten Zone und das ganze Jahr, mit Ausnahme der Äquinoktien, am Äquator. Tritt nun die Sonne auf die Südseite des Himmelsäquators oder ist  $\delta_\odot < 0^\circ$ , so treten zunächst wieder sehr flache und mit wachsendem  $\delta_\odot$  allmählich stärker gebogene Hyperbeläste auf, allein sie liegen jetzt auf der anderen Seite der Ost-Westlinie, welcher sie den Scheitel zukehren. So überdeckt sich der Horizont diesseits und jenseits der Ost-Westlinie mit einer Schar von Hyperbelästen, als Projektionen der Parallelkreise von  $-23\frac{1}{2}^\circ$  bis  $+23\frac{1}{2}^\circ$ , ähnlich wie es bei der gnomonischen Kartenprojektion der Fall ist. Der Äquator selbst bildet sich dabei als gerade Linie ab (Ost-Westlinie) (Fig. 19).

Wie schon in der Einleitung erwähnt, verzeichneten die Araber die Stunden nur auf den zwei äußersten Hyperbeln und verbanden dann die Punkte gleichnamiger Stunden durch gerade Linien, welche dann auch auf allen anderen dazwischenliegenden Hyperbeln dieselben Stunden ausschnitten. Das Verfahren war, wie man auf den ersten Anblick sieht, nicht streng richtig, aber immerhin eine für die Praxis sehr bequeme und ganz brauchbare Annäherung.<sup>8)</sup> Um aber den wahren Charakter dieser Verbindungslinien kennen zu lernen, bedenke man, daß eine solche Stundenlinie die Projektion eines Stundenkreises mit dem Stabende als Projektionszentrum auf den Horizont, also sicher eine Kurve zweiten Grades ist. Auch sie hat zwei unendlich ferne Punkte: nämlich die Projektionen der Schnittpunkte des betreffenden Stundenkreises mit dem Horizonte, ist also, da der Horizont im allgemeinen den Stundenkreis immer schneidet, eine Hyperbel<sup>9)</sup>, die nur für den Meridian und den Sechsstundenkreis jeweils in eine Gerade, die Nord-Südrichtung, resp. Ost-Westlinie, ausartet. Auf der Mittagslinie liegen selbstverständlich alle Scheitel des Hyperbelsystems der Parallelkreise, aber auch die Scheitel unserer „Stundenhyperbeln“

liegen, als Projektionen des Pols, durch welchen ja alle Stundenkreise gehen, und der selbst im Meridian liegt, ebenfalls auf der Nord-Südlinie, und zwar alle in einem Punkte  $O'$  im Abstand  $h \cdot \cotg \varphi$  vom Fußpunkte des Gnomons, während die Scheitel  $O''$  der erstgenannten Hyperbelschar um  $h \cdot \cotg \delta$  von diesem Punkte abstehen. Nun schneiden sich im Pol alle Stundenkreise, also muß auch  $O'$  der Schnittpunkt aller Stundenhyperbeln sein; wir haben es also immer nur mit halben Hyperbeln zu tun, die sich umgekehrt symmetrisch jenseits des Scheitels fortsetzen (in Fig. 18 und 20 der gestrichelte Ast); den zweiten symmetrischen Ast liefert die Projektion jenes Stundenkreises, dessen Neigung zum Meridian einen gleich großen entgegengesetzten Betrag hat wie der andere dazugehörige (z. B. IX<sup>h</sup> und III<sup>h</sup>). Jede Stundenhyperbel hat mit der Projektion desjenigen Parallelkreises den unendlich fernen Punkt gemeinsam, für welchen die Sonne eben zu der Stunde auf- oder untergeht, welche der Stundenkreis repräsentiert.

Was nun weiter die Frage nach dem von den arabischen Astronomen begangenen Fehler angeht, so sehen wir zunächst, daß, indem ja nur das zwischen  $-\varepsilon$  bis  $+\varepsilon$  ( $23\frac{1}{2}^{\circ}$ ) liegende (in Fig. 18 kräftig ausgezogene) Stück des Stundenkreises auf den Horizont projiziert wird, der Scheitel der Hyperbel und die ihm nächsten Teile stärkster Krümmung gar nicht in Betracht kommen; dies wäre anders gewesen, wenn die Ekliptikschiefe  $\varepsilon$  für die Erde einen sehr großen Betrag hätte oder erreichen könnte. Nur jene Teile der Hyperbel werden mit geraden Linien, oder jene Hyperbelbögen mit ihren Sehnen vertauscht, die bereits abseits vom Scheitel liegen und mehr oder weniger flach verlaufen. Ferner ist aus Fig. 20 ersichtlich, daß sich die einzelnen Stundenlinien gegen den Scheitel der stark gebogenen Hyperbel hin mehr und mehr zusammendrängen; solche Hyperbeln kommen aber nur in der „Parabelnähe“, d. h. in höheren Breiten vor, in welche sich das Reich der Araber bekanntlich nicht erstreckte; innerhalb niedriger Breiten (Arabien, Nordafrika, Südspanien usw.) weichen die Stundenlinien noch weniger von der geraden Linie ab. Auch die Frage, für welche Stunden diese Abweichung bei gegebener Polhöhe ein Maximum beträgt, beantwortet sich mit Hilfe von

Fig. 20 leicht dahin, daß dies für die mittlere Stunde zwischen  $6^h a \cdot$  oder  $p \cdot m$  und  $12^h$  der Fall sein muß; d. h. um  $9^h a \cdot m$  und  $3^h p \cdot m$ ; denn um  $12^h$  und  $6^h$  sind die Stundenlinien ja wirklich Gerade, werden sich also auch in der Nähe dieser Zeitpunkte der geraden Linie am meisten anschmiegen, um sich um  $9^h$  und  $3^h$  am meisten von ihr zu entfernen. Auch dies Resultat, das so durch ganz einfache geometrische Überlegungen gewonnen wurde und natürlich mit Delambres sehr ausgedehnten Rechnungen und Tabellen übereinstimmt, besitzt ebensoviel Beweiskraft als der trigonometrische Kalkül.<sup>10)</sup> (Vgl. Anmerkung 4.)

Die oben gemachte Bemerkung, daß zwischen dem Parallel der Sonne und der Schattenkurve, welche die Spitze eines senkrecht stehenden Stabes auf einer Horizontalebene beschreibt, Zentralkollineation stattfindet, soll jetzt weiter ausgeführt und an Fig. 21 näher erläutert werden. Dort ist ein Doppelkegel mit der Spitze 0 verzeichnet;  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  bedeuten zwei Sonnenstände im Parallel der Sonne, die sich auf der Auffangfläche als zwei Punkte der Schattenlinie  $\Sigma_1'$  und  $\Sigma_2'$  darstellen. Die Ebene des Parallelkreises  $K$ , der ja ebensogut als Sonnenbahn betrachtet werden kann wie der nicht gezeichnete mit den Sonnenörtern  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ , ist natürlich parallel zur Äquator ebene, bildet also mit der Horizontalebene den Winkel  $90^\circ - \varphi$ . Die Schnittlinie von Parallelkreis- und Horizontalebene ist die Kollineationsachse  $S$ , während die Gegenachse oder Fluchtlinie  $R$  der Schnitt der Ebene, durch die Spitze 0 parallel zum Horizont, mit der Parallelkreisebene ist; d. h. der Ort der unendlich fernen Punkte der Schattenlinie  $K'$ . (Die Fluchtgerade  $Q$  ist ebenso die Projektion der unendlich fernen Punkte des Parallelkreises (Originals)  $K$ .) Bekanntlich hat nun der Kegelschnitt  $K'$  zwei unendlich ferne Punkte, einen Punkt in unendlicher Ferne oder verläuft ganz im Endlichen, je nachdem die Gegenachse  $R$  den Parallelkreis durchschneidet, berührt oder ganz außerhalb desselben liegt. Unendlich ferne Punkte der Schattenlinie entsprechen aber dem Auf- und Untergangspunkt der Sonne; mithin schneidet die Fluchtlinie den Parallel der Sonne in diesen zwei Punkten; teilt ihn also in den Tag- und Nachtbogen. Da, wie schon erwähnt, die Höhe  $h$  des

Gnomons im Vergleich zur unendlich fern gedachten Sonne verschwindend klein ist, so müssen Kollineations- und Gegenachse in unserm Falle unendlich nahe aneinanderliegen, ja, die eine kann ohne weiteres für die andere gesetzt werden, und nie rastend legt *ἡλιος* selbst jeden Tag im Auf- und Untergangspunkt eine „Fluchtspur“ fest.

An der Hand von Fig. 21 ist es nun leicht, auch Aufgaben des ersten Abschnittes mit der reinen Zentralprojektion zu lösen. Um z. B. hiernach aus  $\delta_{\odot}$  und  $\varphi$  den Tagebogen  $2s_0$  zu ermitteln, hätte man in der Ebene des Papiers das rechtwinkelige Dreieck  $CB_1O$ , das bei  $B_1$  den Winkel  $\delta_{\odot}$  enthält, zu verzeichnen, hierauf um  $C$  mit dem Radius  $CB_1$  den Parallel der Sonne  $K$  in derselben Ebene zu beschreiben, an  $O$  den  $\sphericalangle \varphi$  anzutragen, um so den Schnittpunkt  $r$  des verlängerten Radius  $CB_1$  mit dem geneigten Schenkel des Winkels  $\varphi$  zu erhalten;  $r$  wäre dann offenbar ein Punkt der Gegenachse, welche senkrecht auf  $BB_1$  steht und den Kreis  $K$  entweder schneidet oder nicht. (In Fig. 21 schneidet sie ihn nicht, deshalb ist der Tag länger als 24 Stunden und  $K'$  eine Ellipse.) Für  $\varphi = 0^\circ$  halbiert die Gegenachse den Parallel  $K$ , d. h. am Äquator währt der Tag stets 12 Stunden (sphaera recta).

Nach diesen einleitenden Worten beginnen wir mit der Lösung neuer Aufgaben auf perspektivem Wege und erledigen

### I. Das Problem der Ziehung der Mittagslinie,

dessen wir schon im Vorwort gedachten und über dessen Geschichte man Näheres bei S. Günther: Handbuch d. math. Geographie, pag. 81 ff., sowie in dem schon in der Einleitung genannten Artikel von Mollweide erfährt. Besondere Berücksichtigung erfuhr die Methode der drei ungleichen Schattenlängen, die noch später vornehmlich von italienischen Mathematikern, so Muzio Oddi und von Boscovich, auf verschiedene Arten behandelt wurde, während Mollweide selbst das Problem in folgender Fassung gab: Es ist die Lage der Durchschnitte dreier Vertikalkreise mit dem Horizonte gegeben und die Höhen, welche die Sonne in jedem der Vertikalkreise über dem Hori-

zonte hatte; man soll die Lage der Mittagslinie finden<sup>11)</sup> (Fig. 22).

Aus unserer Fig. 21 ist nun ersichtlich, daß die Kollineationsachse  $S$  senkrecht auf der großen Achse des Kegelschnittes  $K'$ , d. i. der Mittagslinie, steht. Sobald also diese Achse ermittelt ist, ist das Problem auf kollinearem Wege erledigt. Sind nun (Fig. 24) 1, 2, 3 im Sonnenparallel  $K$  drei Sonnenörter, welche durch das Gnomon  $00_1$  drei ungleich lange Schatten  $0_11'$ ,  $0_12'$ ,  $0_13'$  auf der Horizontalebene liefern, so liefern die drei rechtwinkligen Dreiecke  $00_11'$ ,  $00_12'$ ,  $00_13'$  die entsprechenden Sonnenhöhen:  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$ . Verlängert man in Fig. 24b die Sonnenstrahlen  $1'0$ ,  $2'0$ ,  $3'0$  um ein gleiches Stück  $s$  nach rückwärts (um die Mantellinie des Kegels (Fig. 24a)  $BB_1O$ ) und beschreibt um  $O$  mit dem Radius  $s$  einen Kreisbogen, so erhält man in den Strecken  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  die wahren senkrechten Abstände der drei Sonnenörter im Raume von der Horizontalebene (Fig. 24a). Damit sind die drei rechtwinkligen Dreiecke (Durchschnittsebenen durch den Kegel der Fig. 24a)  $1''1''$ ,  $2''2''$ ,  $3''3''$  vollständig bestimmt, somit auch die Lage der drei Projektionspunkte  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  auf den verlängerten drei Schattenlinien gegeben. Jetzt ist die Spur  $S$  der Parallelkreisebene  $K$  bestimmbar aus den senkrechten Abständen und Horizontalprojektionen dreier ihrer Punkte. Dies ist aber eine Fundamentalaufgabe der darstellenden Geometrie, die in Fig. 24 gelöst ist: Die drei Abstände  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  sind in der Ebene des Papiers parallel zueinander abgetragen, wodurch das schraffierte Dreieck 1, 2, 3 entsteht; die Verbindungslinien  $1''3''$  und 1, 3, sowie  $2''3''$  und 2, 3 liefern in ihren Schnittpunkten  $S_1$  und  $S_2$  dann bekanntlich die Spur (Kollineationsachse) der Ebene  $K$  auf der Horizontalebene  $K'$ . Auf dieser Achse  $S$  liegt natürlich auch der Schnittpunkt von  $1''2''$  und 1, 2 ( $S_3$  in der Figur nicht mehr sichtbar, aber angedeutet). Die Mittagslinie geht nun durch den Fußpunkt  $0_1$  des Gnomons und steht, wie gesagt, senkrecht auf  $S$ . Hiermit ist, wie der Verfasser glaubt, eine ebenfalls sehr durchsichtige Lösung dieser merkwürdigen Aufgabe gegeben.

## II. Es liegen drei Stundenlinien (Tracen) einer Sonnenuhr gezeichnet vor; man soll die übrigen ermitteln.

### Lösung.

Diese wurde, wie in der Einleitung bereits erwähnt, geometrisch zuerst von De la Hire und Chasles gegeben; hier wird von der Tatsache ausgegangen, daß die Endpunkte dreier Stundenlinien ein Dreieck bilden (in Fig. 25 das schraffierte Dreieck  $1' 2' 3'$ ), durch dessen Ecken die vom Stylus beschriebene Schattenlinie  $K'$  hindurchgehen muß, und dem zentrisch-kollinear im Sonnenparallel  $K$  das Dreieck  $1, 2, 3$  entspricht. Sind nun I, II, III drei Tracen, die äquidistanten Punkten in  $K$  entsprechen, so ist Dreieck  $1, 2, 3$  gleichschenkelig (in Fig. 25 ebenfalls schraffiert.). Durch diese zwei zugeordneten Dreiecke:  $1', 2', 3'$  und  $1, 2, 3$  ist aber eine zentrische Kollineation vollständig bestimmt, und die weiteren Stundenlinien IV, V, VI usw. ergeben sich aus derselben dadurch, daß man weitere, den ebenfalls äquidistanten Kreispunkten 4, 5, 6 usw. entsprechende Punkte  $4', 5', 6'$  usw. der Schattenkurve  $K'$  konstruiert und sie dann mit dem Fußpunkt  $O_1$  des Gnomons verbindet. Um nun das gleichschenkelige Dreieck  $1, 2, 3$  mit Dreieck  $1', 2', 3'$  in kollineare Lage zu bringen, was eine Aufgabe mit unendlich vielen Lösungen ist, kann man etwa so verfahren, daß man zunächst den Sonnenparallel  $K$  in 24 gleiche Teile teilt und aus drei sukzessiven Teilpunkten ein Originaldreieck bildet<sup>12)</sup>; dieses werde nun in dem Winkelraum  $1, 0, 3$  so plaziert, daß  $O$  die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundlinie  $1, 3$  wird, auf dessen Mittelsenkrechter der Punkt  $2$  liegt. Dann ist  $1', 2', 3'$  zu  $1, 2, 3$  kollinear, wenn die Strecken  $1', 2'$  und  $2', 3'$  unter demselben Winkel  $\alpha$  von  $O$  aus gesehen werden, wie dies für  $1, 2$  und  $2, 3$  der Fall ist. Dies erreicht man aber bekanntlich dadurch, daß man den Ort der Schnittpunkte zweier Kreise mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  sucht ( $O$ ), die über den Sehnen  $1', 2'$  und  $2', 3'$  den beliebigen Winkel  $\alpha$  als Peripheriewinkel enthalten. Da zwei Schnittpunkte möglich sind, so gibt es für jedes  $\alpha$  auch zwei Kollineationszentra, in Fig. 25 wurde nur eines berücksichtigt. Die Achse  $S$  der Kollineation ergibt sich bekanntlich als Ort der Schnittpunkte ver-

längerter, entsprechender Seiten der zugeordneten Figuren. Nun lassen sich ohne weiteres beliebig viele Kurvenpunkte der Schattenlinie und damit die zugehörigen Stundenlinien konstruieren.

Unsere Figur und Darstellungsweise gibt auch eine Antwort auf die Frage, wie lange die Sonnenuhr sich täglich als Zeitmeßwerk eignet. Dazu bedarf es nur der Konstruktion der Fluchtlinie  $R$ , da ja nach Früherem die Fluchtgerade den Kreis  $K$  in seinen Tag- und Nachtbogen zerfällt. Sie schneidet  $K$  in den Punkten  $c$  und  $d$ ;  $K'$  ist daher eine Hyperbel, von der jedoch nur der dem Tagebogen entsprechende Ast gezeichnet ist. Die Ermittlung der Gegenachse  $R$  aus den vier Punkten  $1, 1', s_1, 0$  ist eine bekannte Aufgabe der Zentralperspektive, die sich dadurch, daß man die Charakteristik oder den Modul der Kollineation  $\mathcal{A} = (11' s_1 0)$  in ein einfaches Verhältnis verwandelt, leicht löst. (Vgl. z. B. das Lehrbuch der synthetischen Geometrie von Dr. Wenck pag. 142 ff., sowie die folgende Aufgabe.)

In Fig. 26 sind auch die Asymptoten der Hyperbel gezeichnet, die den Kreistangenten in den Durchschnittspunkten  $c$  und  $d$  mit der Gegenachse  $R$  kollinear entsprechen. Sie ergeben sich als Parallele durch  $\gamma$  und  $\delta$ , die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der Achse  $S$ , zu den Verbindungslinien der Punkte  $c$  und  $d$  mit  $O$ . Die Winkelhalbierende des Scheitelraums der Asymptoten ist die Mittagslinie, in der auch der Fußpunkt  $O_1$  des schattenwerfenden Stabes liegt.

Diese, nach der Meinung des Verfassers, völlig neue Durchführung der bekannten Fundamentalaufgabe der Gnomonik ist schon deswegen die natürlichste, wenn auch nicht einfachste Lösung derselben, weil sie den Projektionsvorgang, der ja de facto vorhanden ist, genau wiedergibt.

III. Nach Verlauf der Zeiten  $t$  und  $t_1$  (in Bogenmaß) von dem Augenblicke der Kulmination an gerechnet, waren die betreffenden Höhen der Sonne  $= h^0$  und  $h^{0'}$ ; welches ist die Deklination der Sonne  $\delta_{\odot}$  und die geographische Breite des Beobachtungsortes  $\varphi$ ?

#### Lösung.

Man verschaffe sich mit dem Gnomon  $OO_1$  die zwei Schattenpunkte  $1', 2'$  zu den Zeiten  $t$  und  $t'$ , denen zentrisch-kollinear

die zwei Punkte 1 und 2 im Sonnenparallel  $K$  entsprechen. Außerdem ist, da die Zeiten  $t$  und  $t'$  gegeben sind, auch die Lage der Mittagslinie bezüglich der zwei Sonnenörter 1 und 2 bekannt (Fig. 26). Auf ihr liegen nach der Umlegung in die Zeichnungsebene der Sonnenparallel  $K$  mit dem Mittelpunkt  $C$  und den Sonnenpositionen 1 und 2, das Gnomon  $00_1$  in seiner wahren Länge, wobei 0 als Kollineationszentrum erscheint. Plaziert man nun zunächst 0 auf der Nord-Südlinie willkürlich und zieht die Strahlen 10 und 20, so müssen die entsprechenden Punkte der Schattenkurve  $1', 2'$  ebenfalls auf ihnen liegen; man erhält die Orte für sie, indem man von  $0_1$  die gemessenen Schattenlängen  $0_1 1'$  und  $0_1 2'$  auf den Projektionsstrahlen abträgt. Ein Punkt  $s_2$  der Achse der Kollineation ist der Schnittpunkt der Verbindungslinien 1, 2 und  $1', 2'$ .  $S$  selbst repräsentiert sich als Lot auf der Mittagslinie. Auf einem beliebigen Strahl, z. B.  $1'01$ , schneidet  $S$  einen entsprechenden Punkt ( $s_1$ ) aus, der mit den drei ersteren ein konstantes Doppelverhältnis, den Modul oder die Charakteristik  $\mathcal{A} = (0s_1 11')$  der Kollineation, bildet. Hierdurch ist uns nun die Konstruktion der Gegenachse  $R$  ermöglicht, die uns die gesuchten Winkel  $\varphi$  und  $\delta_\odot$  liefert. Um zunächst  $\mathcal{A}$  als einfaches Verhältnis darzustellen, lege man durch das Kollineationszentrum 0 eine Parallele zur Achse  $S$ , nehme auf der letzteren einen willkürlichen Punkt  $n$  an und konstruiere aus  $n$  das Strahlenbüschel  $n0, n1', ns_1, n1$ . Diese Strahlen schneiden die Parallele zu  $S$  durch 0 so, daß auf dieser eine Punktreihe entsteht, welche mit der Punktreihe  $01's_1 1$  in perspektiver Lage sich befindet, denn der Punkt 0 entspricht sich selber, dem Punkt  $1'$  entspricht  $k'$ , dem Punkte 1 der Punkt  $k$  und dem Punkte  $s_1$  der unendlich ferne Punkt  $s_\infty$ . Wir haben daher die gleichen Doppelverhältnisse

$$(0s_1 11') = (0s_\infty k k')$$

oder

$$\frac{01}{1s_1} : \frac{01'}{1's_1} = \frac{0k}{ks_\infty} : \frac{0k'}{k's_\infty} = \frac{0k}{0k'} \cdot \frac{k's_\infty}{ks_\infty}$$

und weil

$$\frac{k's_\infty}{ks_\infty} = 1,$$

so ist

$$(0s_1 11') = \frac{0k}{0k'} = \mathcal{A},$$

also = dem Verhältnis der beiden Strecken  $Ok$  und  $Ok'$ . Die Konstruktion der Gegenachse  $R$  ist nun folgende: Man lege durch  $k'$  eine Parallele zu  $OB_1B$ , verbinde also  $k'$  mit dem unendlich fernen Punkt des ersten Systems, so schneidet diese die Kollineationsachse in  $l$ ; die Verbindung von  $k$  mit  $l$  liefert im Schnitt mit dem Strahle  $OB_1B$  einen Punkt  $r$  der gesuchten Gegenachse  $R$ , die parallel zu  $S$  ist. Um nun hiermit  $\varphi$  und  $\delta_\odot$  zu eruieren, bemerke man an Fig. 21, daß das Gnomon mit der Höhe  $\overline{OO_1}$  senkrecht auf den beiden Strahlen  $Or$  und  $O_1s$  steht; mithin gibt es, in senkrechte Lage zu diesen zwei Strahlen gebracht, die Neigung dieser zwei parallelen Linien zur Horizontalebene  $= 90^\circ - \varphi$  an. Man beschreibe daher über  $rs$  einen Halbkreis und trage von  $s$  aus die Länge des Gnomons auf der Peripherie desselben ab, wodurch man den Punkt  $m$  erhält (Fig. 26); dann ist  $\sphericalangle msr = \sphericalangle \varphi$ . Ferner ist aus Fig. 21 ersichtlich, daß  $\sphericalangle OCr$  bei  $C$  rechteckig ist, man also durch Verlängerung von  $rm$  (Fig. 26) im Schnitt mit dem in  $C$  errichteten Lote die Spitze  $O$  des Kegels erhält, worauf  $\delta_\odot$  sich als Basiswinkel des Kegels  $OK$  ergibt. In Fig. 26 ist der durch die Fluchtlinie  $R$  abgeschnittene Tagebogen  $< 180^\circ$ , daher die Deklination der Sonne bei positivem  $\varphi$  negativ zu nehmen oder umgekehrt.

IV. Gegeben die Polhöhe  $\varphi$  eines Ortes und die Sonnen-deklination  $\delta_\odot$ . Wie lange dauert dann die Besonnung einer vertikalen Wand, deren Spur  $W'$  auf dem Horizonte zu irgend-einer festen Richtung (z. B. zur Nord-Südlinie) den Winkel  $\beta$  bildet?

#### Lösung.

Eine ungemein gründliche Diskussion dieser einfachen Frage findet sich in einer Schrift Adams: „Bruchstück aus der mathematischen Geographie mit besonderer Berücksichtigung einiger Beleuchtungsverhältnisse“, Wien 1885; eine rechnerische Lösung findet sich auch bei S. Günther: „Handbuch der math. Geogr.“ pag. 270 und 271. Um die Aufgabe auch zentralperspektivisch zu lösen, fassen wir ein Lot in der Wand, deren Höhe  $= \overline{OO_1}$  sei, als Gnomon auf, dessen Schattenenden dann auf einem Kegel-

schnitt  $K'$  liegen, der von der Spur  $W'$  der Wand, als einer Sehne, durchschnitten wird. Diese teilt offenbar die Schattenkurve in zwei Teile, wovon einer eben jener Zeitdauer entspricht, während welcher die Wand beleuchtet wird, der andere aber die Dauer der Beschattung ebenderselben Seite repräsentiert. Den Schnittpunkten  $l'$  und  $k'$  von  $W'$  mit  $K'$  entsprechen kollinear die Punkte  $l$  und  $k$  auf  $K$ , wo die Zeit im Winkelmaß direkt abzulesen ist. Nennen wir den so gefundenen Winkel  $\sphericalangle lck = \sigma$ , so ist  $\frac{\sigma}{15}$  die Dauer der täglichen Besonnung in Stunden (Fig. 28).

Zugleich ist aus der Lage des Winkels  $\sigma$  zur Mittagslinie ersichtlich, welche Zeitdauer der Besonnung auf den Vormittag und welche auf den Nachmittag fällt. Da mit  $\delta_{\odot}$  und  $\varphi$  auch der Tagebogen  $2s_0$  gegeben ist, so stellt sich die Dauer der Beschattung durch  $\frac{2s_0 - \sigma}{15}$  Stunden für einen gegebenen Tag dar.

Die eigentliche Konstruktion beginnt nun damit, daß man zunächst für eine bestimmte Gnomonhöhe  $OO_1$  bei gegebenem  $\delta_{\odot}$  und  $\varphi$  die Schattenlinie  $K'$  konstruiert. Zu dem Zweck wählt man den Radius des Kreises  $K$  beliebig mit dem Zentrum  $C$  auf der Mittagslinie; alsdann stellt man das rechtwinklige Dreieck  $C_0B_1$  mit dem Basiswinkel  $\delta_{\odot}$  des Kegels her; durch Abtragen von  $\sphericalangle \varphi$  an  $OC$  erhält man (Fig. 21) auf der Nord-Südrichtung  $r$  und damit die Gegenachse  $R$ , worauf sich, ganz wie in der vorhergehenden Aufgabe, mit Hilfe der Stablänge, oder in unserem Falle, der Mauerhöhe  $OO_1$  auch die Kollineationsachse  $S$  ergibt. Legt man endlich noch das Gnomon in die Zeichnungsebene um, so daß dessen Spitze nach  $O_0$  fällt, so läßt sich aus  $R$ ,  $S$  und  $O_0$  auch die Charakteristik  $\mathcal{A}$  der Kollineation ermitteln, indem man umgekehrt wie bei der vorhergehenden Aufgabe verfährt (wo aus  $\mathcal{A}$ ,  $O_0$  und  $S$  die Fluchtlinie bestimmt wurde), womit es dann ein leichtes ist, beliebig viele Punkte des Kegelschnitts, der in Fig. 28 eine Hyperbel ist, festzulegen. Jetzt erübrigt noch die Bestimmung der Geraden  $W$ , die als Kreissehne der Kegelschnittsehne  $W'$  entspricht, was ebenfalls auf zentrisch-kollinearem Wege am besten geschieht; die Schnittpunkte von  $W$  mit  $K$ , nämlich  $l$  und  $k$ , liefern dann ohne weiteres den Winkel  $\sphericalangle lck = \sigma$ .

Man kann aber auch mit Hilfe der Doppelemente (Steinersche Konstruktion) zuerst die Schnittpunkte  $l'$  und  $k'$  von  $W'$  mit  $R'$  ermitteln und diese dann von  $O_0$  aus auf  $K$  nach  $l$  und  $k$  projizieren.

Am Schlusse des ersten Abschnitts wurde erwähnt, daß sich aus den fünf Stücken  $\varphi$ ,  $\delta$ ,  $s$ ,  $h$  und  $\omega$  zehn Aufgaben bilden lassen, derart, daß immer drei Elemente gegeben und die übrigen zwei gesucht sind. Diese Aufgaben gestatten ebenfalls Lösungen mittelst der reinen Zentralperspektive. Wir geben hiervon ein Beispiel in der Aufgabe:

### V. Gegeben $\varphi$ , $\delta$ und $s$ ; gesucht $h$ und $\omega$ .

#### Lösung.

Man konstruiert wieder, wie in Nr. IV aus  $\delta_{\odot}$  und  $\varphi$ , sowie der Höhe des Gnomons  $\overline{OO_1}$  die Schattenkurve  $K'$ . Das Azimut  $\omega$  ist nun identisch mit der Neigung der Spur der vertikalen Wand  $W'$  zur Mittagslinie, d. h.  $\omega = \beta$ . Trägt man jetzt im Kreise  $K$  in  $C$  den Stundenwinkel  $s$  an die Mittagslinie an, so erhält man auf dessen Peripherie den Punkt  $l$ , dem im Kegelschnitt zentrisch-kollinear der Punkt  $l'$  entspricht. Dieser, mit dem Fußpunkte  $O_1$  des Gnomons verbunden (Fig. 28), liefert die Gerade  $W'$ , welche eben die Nord-Südrichtung unter dem gesuchten Azimut  $\omega$  schneidet. Den augenblicklichen Höhenwinkel  $h$  liefert uns stets das rechtwinklige Dreieck: Gnomon  $OO_1$ , Schattenlänge  $O_1l'$  und Sonnenstrahl  $O'l'$  (vgl. auch Fig. 24).

### VI. Gegeben $\varphi$ , $\delta$ und $\omega$ ; gesucht $h$ und $s$ .

Hier gestaltet sich die Lösung ganz ähnlich wie in Aufgabe V und ist mit Fig. 28 ohne weiteres gegeben.

Zum Schlusse geben wir noch eine rein geometrische Auflösung der berühmten Douwesschen Aufgabe, die bekanntlich in der Nautik eine wichtige Rolle spielt. Sie lautet:

VII. Man kennt die Deklination der Sonne  $\delta_{\odot}$ ; gemessen wurden zwei Sonnenhöhen  $h$  und  $h'$ , wobei die Zwischenzeit der Beobachtungen  $t' - t$  bekannt ist; welches ist die geographische Breite  $\varphi$  des Beobachtungsortes?

### Lösung.

Obwohl die Aufgabe trigonometrisch ohne die geringsten Schwierigkeiten gelöst werden kann, so haben sich doch um die analytische Ausgestaltung eine Reihe von Mathematikern und Astronomen, so v. Littrow, Ligowski, Weyer, Matern u. a. bemüht. Zur See begnügt man sich in der Regel mit einer angenäherten Lösung. Über den Stand der ganzen Frage orientiert in trefflicher Weise das Handbuch der mathematischen Geographie von S. Günther pag. 547 ff., woselbst auch die strenge Lösung von Matern gegeben ist, die jedoch immerhin das Aufschlagen von 13 Logarithmen erfordert. Zur rein geometrischen Behandlung wird man am zweckmäßigsten mittelst eines Gnomons der Höhe  $\overline{00_1}$  sich zwei Schattenpunkte  $\Sigma_1'$  und  $\Sigma_2'$  (Fig. 21) verschaffen, die den zwei Sonnenpositionen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  der Höhen  $h$  und  $h'$  entsprechen ( $\text{Tang } h = \frac{00_1}{0_1\Sigma_1'}$ ;  $\text{Tang } h' = \frac{00_1}{0_1\Sigma_2'}$ ). Verzeichnet man jetzt einen geraden Kreiskegel von beliebiger Höhe, doch mit dem gegebenen Basiswinkel  $\delta_{\odot}$ , so sind sofort die zwei schraffierten Dreiecke  $\Sigma_1\Sigma_1'\Sigma_1''$  und  $\Sigma_2\Sigma_2'\Sigma_2''$  bekannt, denn es ist  $\sphericalangle \Sigma_1'\Sigma_1\Sigma_1'' = \sphericalangle \delta_{\odot}$ , ebenso  $\sphericalangle \Sigma_2'\Sigma_2\Sigma_2'' = \sphericalangle \delta_{\odot}$  und  $\Sigma_1\Sigma_1' = 0\Sigma_1 - 0\Sigma_1'$ ;  $\Sigma_2\Sigma_2' = 0\Sigma_2 - 0\Sigma_2'$ , also auch  $\Sigma_1'\Sigma_1'' = \Sigma_1\Sigma_1' \cdot \text{Tang } \delta_{\odot}$ ,  $\Sigma_2'\Sigma_2'' = \Sigma_2\Sigma_2' \cdot \text{Tang } \delta_{\odot}$ , während die Neigung dieser zwei Dreiecke  $= \text{arc } \Sigma_1\Sigma_2 =$  der Zwischenzeit  $t' - t$  der beiden Beobachtungen ist. Mit Berücksichtigung all dieses läßt sich jetzt der Inhalt der Douwesschen Aufgabe geometrisch dahin präzisieren: Man kennt die Lage zweier Punkte des Raumes in Grund- und Aufriß ( $\Sigma_1''$ ,  $\Sigma_2''$  und  $\Sigma_1'$ ,  $\Sigma_2'$ ), die Raumpunkte bilden mit dem Fußpunkt  $O$  eines Stabes der Höhe  $\overline{00_1}$  ein gegebenes Dreieck  $0_1\Sigma_1'\Sigma_2'$ ; außerdem ist durch  $C$  und  $O$  Grund- und Aufriß der Spitze des Gnomons, resp. Kegels in bezug auf die Ebene des Sonnenparallels (Äquatorialebene) gegeben;

gesucht ist die Neigung  $= 90^\circ - \varphi$  der Ebene  $\Sigma_1 C \Sigma_2$  zur Ebene  $\Sigma_1' O_1 \Sigma_2'$  (Horizontalebene), wenn außerdem  $O O_1$  auf  $\Sigma_1' O_1 \Sigma_2'$  senkrecht steht.

Zum Zweck der Darstellung wählen wir jetzt die Bezeichnungen der darstellenden Geometrie, wie sie in Fig. 29, welche die stereometrische Lösung des Problems enthält, sich finden. Es ist also jetzt  $\Sigma_1'' = a_1$ ;  $\Sigma_2'' = b_1$ ;  $C = c_1$ ;  $\Sigma_1' = a_2$ ;  $\Sigma_2' = b_2$ ;  $O_1 = d$ ;  $O = c$ . Wäre nun der Punkt  $d$  im Raume bekannt, so ließe sich damit die Spur der Ebene  $a_2 b_2 d$  auf  $a_1 b_1 c_1$  ermitteln, was aber nach Fig. 21 die Kollineationsachse  $S$  ist, die senkrecht auf der Mittagslinie steht. Nun liegt  $d$  aber einerseits auf einer zu  $a_2 b_2$  senkrechten Kreislinie  $K$ , deren Mittelpunkt der Fußpunkt der zu  $a_2 b_2$  gehörigen Dreieckshöhe und deren Halbmesser gleich der Länge dieser Höhe ist; andererseits liegt  $d$  aber auch auf einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte  $c$  und einem Halbmesser gleich dem Abstände der Punkte  $c$  und  $d$ .

Zur weiteren Ausführung wählt man die Aufrißebene am besten parallel  $a_2 b_2$  und verschiebe die Grundrißebene um den senkrechten Abstand  $a_1 a_2$ , so daß sie, statt durch  $C$  (Fig. 21), jetzt durch  $a_2$  geht; hierdurch wird der Grundriß von  $c$  nach  $c_1$  gelegt, und es ist jetzt der vertikale Abstand  $cc_1 = cC - a_1 a_2$ . Jetzt konstruiere man im Aufriß das Dreieck  $a_2 d b_2$  gleich dem gegebenen Dreieck  $\Sigma_1' O_1 \Sigma_2'$ . Die durch  $d$  zu  $a_2 b_2$  geführte Senkrechte  $V_2$  (Fig. 29 und 30) stellt dann die Aufrißspur der Kreisebene  $K$  dar, in welcher  $d$  liegen muß. Eine Kugel um  $c$  als Mittelpunkt mit dem gegebenen Abstände  $cd$  als Halbmesser liefert in der Ebene  $V_2$  eine Kreislinie  $N$ , welche den Punkt  $d$  gleichfalls enthält. Durch Umlegung der Ebene  $V_2$  um ihre Grundrißspur  $U_1$ , welche senkrecht auf  $a_1 b_1$  stehen muß, ergibt sich zunächst der Kreis  $K_3$  mit dem Mittelpunkt  $e_3$  und dem Radius  $e_3 d' = e_2 d$ , ferner die Kreislinie  $N_3$  mit  $f_3$  als Mittelpunkt und  $f_3 g_3 = cd$  als Halbmesser.  $K_3$  und  $N_3$  liefern nun zwei Schnittpunkte  $d_3$  und  $d_3'$ , denen in Grund- und Aufriß  $d_1$ ,  $d_2$ , bzw.  $d_1'$ ,  $d_2'$  entsprechen. Damit sind aber auch zwei Dreiecksebenen im Raume möglich, deren Spuren  $S_1$  und  $S_1'$  auf der Horizontalebene (Äquatoralebene) in bekannter Weise ermittelt sind. Jetzt ist es leicht, die Neigungen dieser zwei Dreiecksebenen darzustellen: Ein vertikaler Schnitt

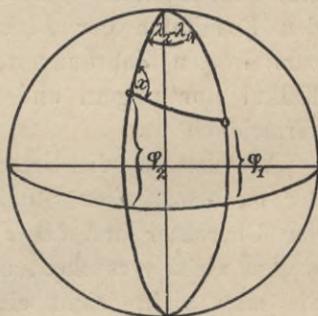
z. B. durch  $b_2$  (Fig. 21), der auch auf  $S$  senkrecht steht, liefert uns ein rechtwinkliges Dreieck  $b_1 b_2 b_3$  oder in Fig. 21:  $\Sigma_1' \Sigma_1'' \Sigma_1'''$ , dessen spitze Winkel eben  $90^\circ - \varphi$  und  $\varphi$  sind. Da die Konstruktion zwei Spuren  $S_1$  und  $S_1'$  liefert, mithin die Aufgabe quadratisch ist, so erhalten wir als Lösung zwei Werte für die geographische Breite des Beobachtungsortes, nämlich  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  (Fig. 28).

Dies, wie wir glauben, eine erste graphische Auflösung der Aufgabe von Douwes.<sup>13)</sup> Doch ist zu bemerken, daß sie nicht mit zwei sehr benachbarten Schattenpunkten  $a_1$  und  $b_1$ , resp.  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ , welche den zwei Sonnenpositionen beim „Bestecknehmen“ entsprechen, durchgeführt ist, da es, wie schon gesagt, nicht Zweck der Konstruktion sein kann, mit der Rechnung zu konkurrieren.

### Anmerkungen und Zusätze.

1. Eine rühmliche Ausnahme machen vor allen die Werke von R. Wolf, so sein Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur, 1891—93, und das Handbuch der mathematischen Geographie von S. Günther, 1890, auch in E. Hammers Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie begegnet man schätzbaren historischen Notizen.

2. Die Eintragung der Quibla ist eine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie, die auch bei den Arabern rechnerisch bewerkstelligt wurde. Unter der Voraussetzung, daß die Polhöhe des fraglichen Ortes =  $\varphi_2$  und diejenige von Mekka =  $\varphi_1$ , sowie die Längendifferenz  $\lambda_2 - \lambda_1$  der beiden Orte gegeben ist, findet sich der gesuchte Winkel  $x$ , den die Quibla zum Meridian bildet — es war also zuerst die Bestimmung der Mittagslinie nötig — leicht mittels des Cotangentensatzes



$$\cos(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \sin \varphi_2 = \text{Tang } \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \cotg x$$

$$\cotang x = \frac{\text{Tang } \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \sin \varphi_2}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

3. Wohl zum erstenmal von William Oughtred mit Hilfe der Orthogonalprojektion; er sagt, daß er diesen Beweis auf Veranlassung von C. Cavendish, 1632, erdacht habe. (Vgl. v. Braunmühl a. a. O. II. Bd. pag. 42 ff.)

4. Dieses einfache geometrische Raisonement von De la Hire hält Delambre für nicht genügend beweiskräftig, sondern nimmt in seiner *Histoire de l'astronomie du moyen âge* pag. 634 ff. Veranlassung, durch ausgedehnte Rechnungen das zu erhärten, was uns die Geometrie in diesem Falle so einfach gibt. Hierdurch wurde Chasles (a. a. O., pag. 652 Anmerkung) zu einer Bemerkung veranlaßt, die durchaus nicht auf Delambre zielt, „sondern“, heißt es dort, „unsere Bemerkung gehört wesentlich zu dem Geiste, der bei Verfassung unseres Werkes vorgeherrscht hat, weil sie einerseits ein handgreifliches Beispiel von den Vorteilen liefert, welche häufig der geometrische Weg oder das einfache Raisonement vor dem Kalkul hat und weil sie außerdem die Richtung zeigt, welchen die mathematischen Studien genommen haben, daß man nämlich klare und überzeugende Beweise von einer geometrischen Wahrheit und die „démonstration en forme“ nur in der Verifikation durch den algebraischen Kalkul findet. Diese neue Richtung ist der entgegengesetzt, welche zu allen Zeiten war: bei den Griechen, wo die Geometrie wegen der Strenge ihrer Beweise berühmt war; bei den Indern und Arabern, welche sich durch einen geometrischen Beweis Rechenschaft von den Resultaten der Algebra ablegten; bei den neueren bis zum letzten Jahrhundert, wo Newton und Maclaurin den Kalkul nur ungern und nur dann anwandten, wenn er unvermeidlich war.

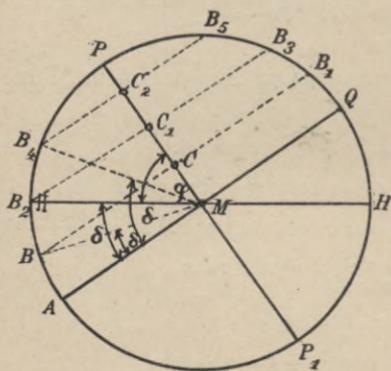
Welches ist die Ursache dieser ausschließlichen Richtung der mathematischen Studien? Welches war ihr Einfluß auf den Charakter und die Fortschritte der Wissenschaft? Wir wollen nicht versuchen, auf diese Fragen zu antworten, über die man nicht leicht einstimmig sein dürfte. Welche aber auch die Meinungen in bezug hierauf sein mögen, so wird man wenigstens nicht in Abrede stellen, daß es nützlich wäre, wenn die alte Methode, die bis zum letzten Jahrhundert befolgt wurde, weiter angeregt und neben der



6. Auf den Trabanten der größeren Planeten dauern die Auf- und Untergänge des Hauptkörpers, falls der Trabant rotiert, oft wohl ganz beträchtliche Zeiten. — Man könnte schließlich auch auf der Erde von der Dauer des Auf- und Unterganges derjenigen Planeten sprechen, die sich uns in der Erdnähe als deutliche Scheibchen präsentieren (Venus und Jupiter). Allein die Extinktion des Lichtes durch die Erdatmosphäre ist am Horizonte so bedeutend — in viel höherem Grade muß dies bei der dichten Jupiteratmosphäre der Fall sein —, daß ein deutlicher Untergang der immerhin lichtschwachen Planeten kaum sichtbar ist. Schilderungen von Auf- und Untergangspänomenen der Venus in den Tropen, wonach sie den Reisenden wie eine Fackel hinter dem Walde oder einem Berge hervorleuchtete, so daß man an einen Brand denken könnte, scheinen dem Schreiber dieses entschieden übertrieben.

7. Es ist nicht schwer, die Bedingungen für das Zustandekommen einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse als Schattenlinie aufzustellen. Die Sonne geht auf und unter, wenn

(s. d. Fig.)



$\delta + \varphi < 90^\circ$  (Hyperbel),  
sie berührt in der unteren  
Kulmination den Horizont,  
wenn

$\delta + \varphi = 90^\circ$  (Parabel);  
sie ist immer über dem Hori-

zont, wenn

$\delta + \varphi > 90^\circ$  (Ellipse)

ist. Dies ist dasselbe Resultat, welches die Lehrbücher der Gnomonik in umständlicher Weise aus der Gleichung der Schattenlinie deduzieren. (Vgl. z. B. R. Wolf: Handbuch d. Mathematik, Physik, Geodäsie u. Astronomie, II. Bd. S. 84 und R. Sondorfer: Theorie u. Konstruktion d. Sonnenuhren S. 59.)

Hieraus ist ersichtlich, daß dieselbe in der heißen und gemäßigten Zone stets eine Hyperbel und auch jenseits des Polarkreises nur dann eine Ellipse wird, wenn die Sonne einen

demselben zugewandten Parallel durchläuft, während die Parabel zwischen Pol und Polarkreis hin- und herwandert. Da die Ellipse sich unmittelbar an die Parabel anschließt, so wird sie im allgemeinen sehr langgestreckt sein.

8. Diese Fehler werden von Delambre: *Histoire de l'astronomie ancienne* tome II pag. 476—482 genau festgestellt durch Berechnung ausführlicher Tabellen und für so klein gefunden, daß sie für die Praxis kaum in Betracht kommen: „Ainsi, à 50° de latitude, l'erreur ne va pas à une minute de tems équinoxial, elle serait beaucoup moindre à 40° et surtout à 30°, qui était à peu près la latitude d'Alexandrie.“

9. Auffallend ist, daß man bei Delambre vergeblich nach Aufschluß über die wahre Natur der Stundenlinie sucht, sondern darüber (pag. 476) nur die Worte findet: „Voyons maintenant, s'il est vrai que les lignes des heures temporaires sont toujours des lignes droites, ou, ce qui revient au même, si les courbes horaires sur la sphère sont toujours des arcs du grand cercle, ainsi que tous les auteurs le supposent tacitement.

Commandin et Clavius ont essayé de démontrer qu'en effet les arcs horaires appartiennent à des grands cercles. Montucla a dit, et Lalande a répété d'après lui, que les lignes horaires sont des courbes assez bizarres, et qu'on ne peut décrire exactement qu'en déterminant un grand nombre de points.“

10. Auch analytisch läßt sich die Gleichung der Stundenlinien, als der Schnitte des „Stundenkegels“ mit der Horizontebene, leicht entwickeln. Zu dem Zweck sei in Fig. 18 das Koordinatensystem folgendermaßen orientiert: Die  $XY$ -Ebene falle mit dem Horizont  $HH_1$  zusammen, so daß  $MH_1$  die positive  $X$ -Achse sei, während  $MZ$  die  $Z$ -Achse repräsentiert. Die Koordinaten der Stabspitze  $O$  sind dann  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$ ;  $z_0 = h$ . Für die Gleichung der Geraden  $PP_1$ , d. i. der Weltachse, liest man, wenn

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2 \dots \dots \dots I)$$

jene der Himmelskugel ist, unmittelbar aus der Figur dann ab:

$$z_1 = x_1 \cdot \text{Tang } \varphi$$

oder

$$-x_1 \sin \varphi + z_1 \cdot \cos \varphi = 0;$$

was in Verbindung mit  $y_1 = 0$  zugleich die Gleichung des Meridians darstellt. Versteht man aber unter  $m$  einen variablen Parameter, so wird das Ebenenbündel der Stundenkreise durch

$$m \cdot y_1 + x_1 \cdot \text{Tang } \varphi - z_1 = 0 \dots \dots \dots \text{ II)}$$

dargestellt, wo sich für  $m$  nach bekannten Formeln der Raumgeometrie, falls  $\sigma$  der Stundenwinkel ist, aus

$$\cos \sigma = \frac{0 + m}{\sqrt{1 \cdot (\text{Tang}^2 \varphi + m^2 + 1)}} = \frac{m}{\sqrt{\text{Tang}^2 \varphi + m^2 + 1}}$$

$$m = \frac{1}{\cos \varphi \cdot \text{Tang } \sigma}$$

ergibt. Ferner sind die Gleichungen einer Geraden durch Stundenkreis und Stabspitze:

$$x = \frac{x_1}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_0}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_0}{1 + \lambda}; \dots \dots \dots \text{ III)}$$

Durch Elimination von  $\lambda$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  aus I), II) und III) entsteht die Gleichung des Kegels:

$$h^2 x^2 + h^2 y^2 + h^2 (my + z \text{Tang } \varphi)^2 = r^2 (my + x \text{Tang } \varphi - z + h)^2 \text{ IV)}$$

Der Schnitt des Stundenkegels mit der Horizontalebene liefert nun eben die Gleichung der gesuchten Stundenlinien. Zu dem Zweck setzt man in IV)  $z = 0$  und findet:

$$x^2 (h^2 - r^2 \text{Tang}^2 \varphi + h^2 \text{Tang}^2 \varphi) + y^2 (h^2 + h^2 m^2 - r^2 m^2)$$

$$+ 2x \cdot y (mh^2 \text{Tang } \varphi - mr^2 \text{Tang } \varphi) - 2mh^2 y$$

$$- 2h \text{Tang } \varphi r^2 x - h^2 r^2 = 0 \dots \dots \dots \text{ V)}$$

Soll diese mit der allgemeinen Kegelschnittsgleichung

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

übereinstimmen, so muß

$$a_{11} = h^2 - r^2 \text{Tang}^2 \varphi + h^2 \text{Tang}^2 \varphi$$

$$a_{22} = h^2 + h^2 m^2 - r^2 m^2$$

$$a_{12} = mh^2 \text{Tang } \varphi - mr^2 \text{Tang } \varphi$$

sein. Die Determinante aus diesen Koeffizienten, nämlich

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ist dann  $> 0$ , wann die Kurve V) eine Hyperbel darstellt. In der Tat wird nach einigen Ausrechnungen und Vereinfachungen:

$$A = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = h^2 \{ (r^2 - h^2) (m^2 + \text{Tang}^2 \varphi) - h^2 \} \cdot \cdot \cdot \text{VI),}$$

womit bewiesen ist, daß die Stundenlinien im allgemeinen immer Hyperbeln sind, da ja  $h$  gegen  $r$  (Radius der Himmelskugel) sehr klein, somit  $r^2 - h^2$  sehr groß ist und  $m^2 + \text{Tang}^2 \varphi$  stets eine positive Größe bleibt.

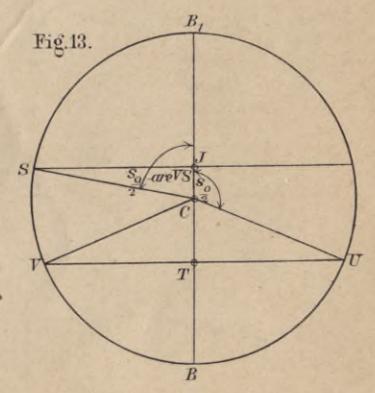
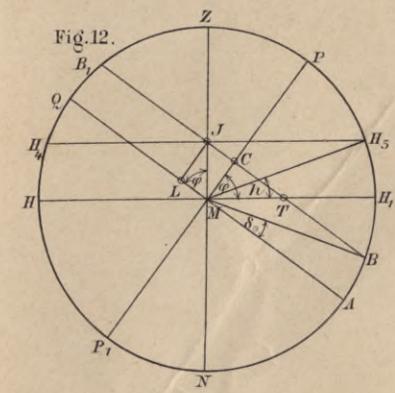
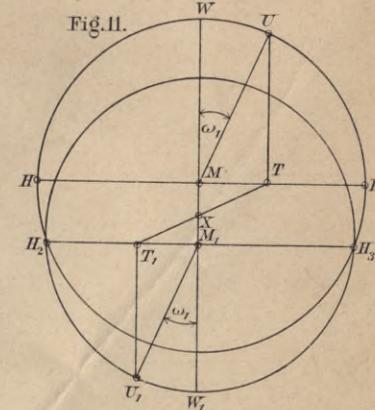
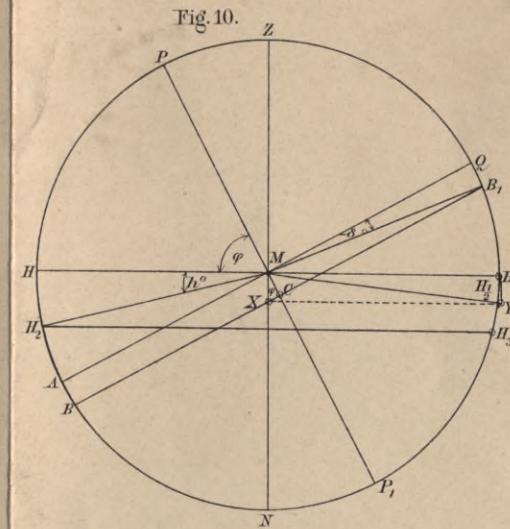
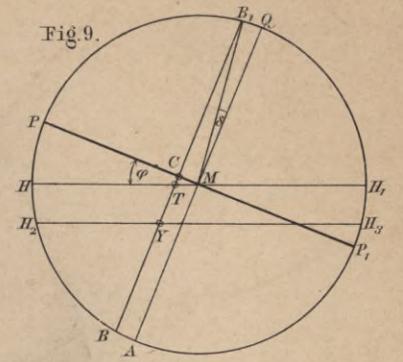
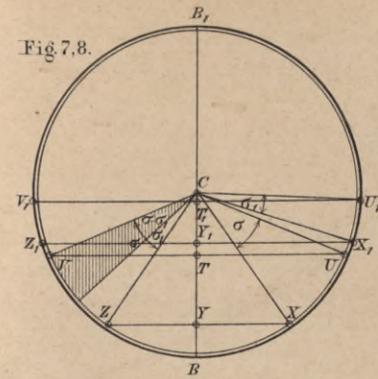
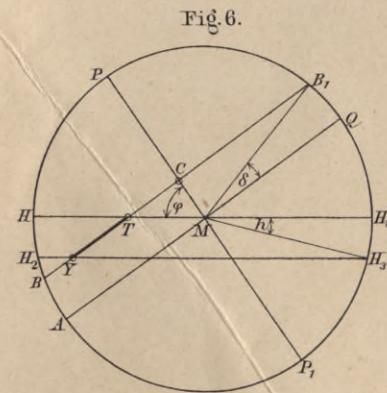
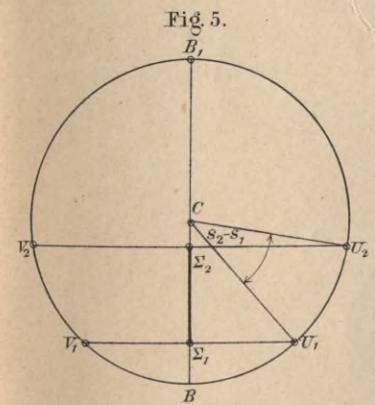
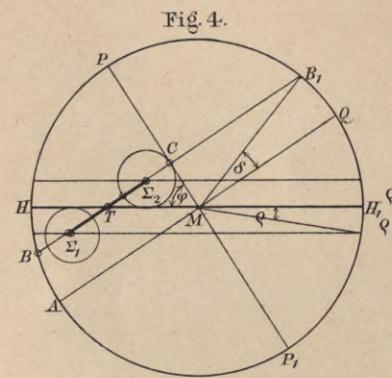
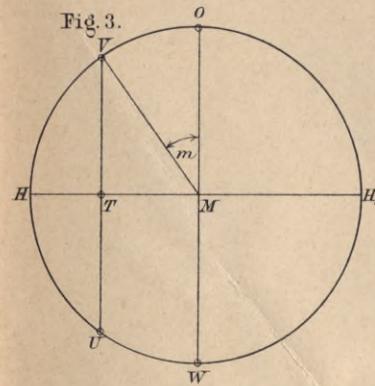
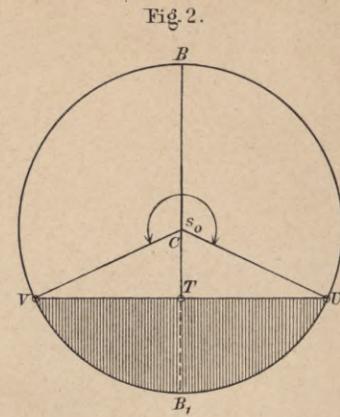
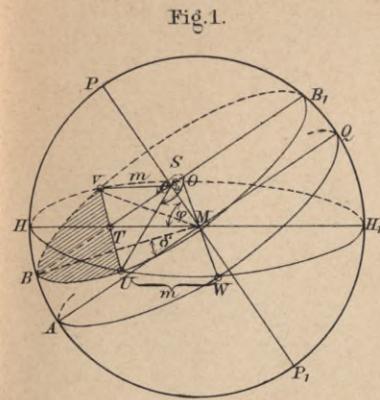
11. Die rein graphische Lösung Mollweides ist folgende (Figg. 22 und 23): Es seien  $ACa$ ,  $A'Ca'$  und  $A''Ca''$  die in die Horizontalebene fallenden Durchmesser der drei Vertikalkreise der Sonne. Man beschreibe aus dem gemeinschaftlichen Durchschnitt derselben  $C$  mit beliebigem Halbmesser den Kreis  $AA'aa'$  und gebe den Bogen  $AB$ ,  $A'B'$ ,  $A''B''$  so viele Grade als den gegebenen Höhen der Sonne  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$  zukommen. Von den Punkten  $B$ ,  $B'$ ,  $B''$  falle man auf die Durchmesser  $ACa$ ,  $A'Ca'$   $A''Ca''$  die Perpendikel  $BD$ ,  $B'D'$ ,  $B''D''$  und verbinde  $D$  mit  $D'$ , sowie  $D'$  mit  $D''$ , mache durch  $D'$  die  $D'E$  und  $D'E'$  den  $DB$  und  $D''B''$  parallel und der  $D'B'$  gleich, ziehe  $EB$  und  $E'B''$ , welche den Linien  $DD'$  und  $D'D''$  in den Punkten  $F$  und  $F''$  begegnen, so ist  $FF'$  der Ost-Westrichtung parallel, so daß ein Perpendikel auf  $FF'$  die verlangte Nord-Südrichtung gibt.

12. Falls die drei Stundenlinien nicht drei aufeinanderfolgende (z. B. I, II, III), sondern drei beliebige sind (z. B. I, III, IV), verallgemeinert sich die Aufgabe dahin, zwei beliebige kollineare Dreiecke in zentrische Lage zu bringen. Eine einfache Lösung hierfür ist folgende: Sind  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $a'b'c'$  (Figg. 27a und 27b) die beiden Dreiecke, so zeichnet man zunächst ein dem Dreieck  $a'b'c'$  ähnliches Dreieck  $a'b''c''$  (Fig. 27a) und legt die beiden Dreiecke  $abc$  und  $a'b''c''$  mit einer gemeinsamen Ecke aneinander (Fig. 27b), was auf unendlich viele Arten geschehen kann; in jeder Lage sind die beiden Dreiecke  $abc$  und  $ab''c''$  zentrisch-kollinear mit einem Zentrum  $O'$ . Trägt man nun auf  $ac''$  von  $a$  aus die Strecke  $ac''' = a'c'$  (Fig. 27b) ab, so liefert die Parallele zu  $O'a$  durch  $c'''$  auf  $O'c$  den Punkt  $c'$  und damit eine Ecke des schraffierten Dreiecks  $a'b'c'$ , dessen Ecken auf den Verbindungs-

linien  $O'a$ ,  $O'b$  und  $O'c$  liegen und dessen Seiten zu jenen des Dreiecks  $ab''c''$  parallel laufen. Die Dreiecke  $abc$  und  $a'b'c'$  liegen nun ebenfalls zentrisch-kollinear mit  $O'$  als Zentrum.  $S$  ist die Achse der Kollineation. Die Zentren  $O'$  liegen, wenn das Dreieck  $ac''b''$  um  $a$  in der Ebene  $abc$  gedreht wird, auf einer Kurve vierter Ordnung, welche also die unendlich vielen Lösungen der Aufgabe repräsentiert. Diese Ortskurve ist von Herrn Prof. F. Kölmel, Baden-Baden, eingehend untersucht worden, und seine diesbezügliche Abhandlung wird demnächst im „Archiv der Mathematik und Physik“ erscheinen.

13. Die Methode von Capitain Sumner, den Ort eines Schiffes vermittelst des Durchschnittspunktes zweier projizierter Höhenparallele — Linien gleicher Höhen — zu finden, die für den Nautiker deshalb so praktisch ist, weil jede Beobachtung sofort mit Erfolg verwendbar ist, hat durch Navigationslehrer Preuß zu Elsfleth nach der geometrischen Seite hin eine sehr gründliche und interessante Förderung erfahren in seiner Abhandlung: „Homographische Nautik“ (Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, 4. Jahrg. 1876 s. pag. 387—393, 431—438; 478—484). Die Betrachtung der Höhenkurven geschieht unter Verwendung der stereographischen Polarprojektion und der Projektion Mercators. Eine analytische Studie über denselben Gegenstand, unter Verwendung der Hyperbelfunktionen, findet sich bei Yvon Villarceau: „Nouvelle Navigation Astronomique“, Paris 1877, pag. 43—84, einem ganz eigenartigen und sehr bemerkenswerten Buche.







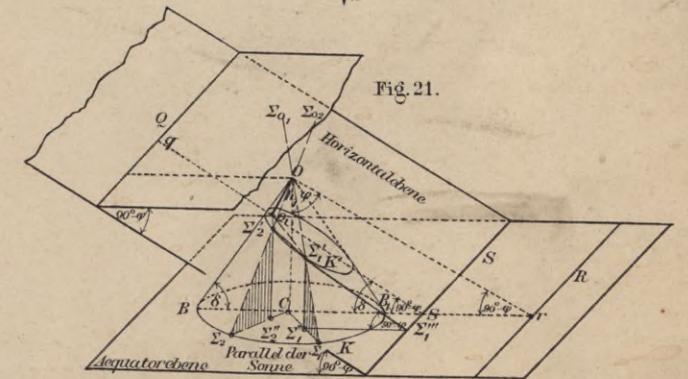
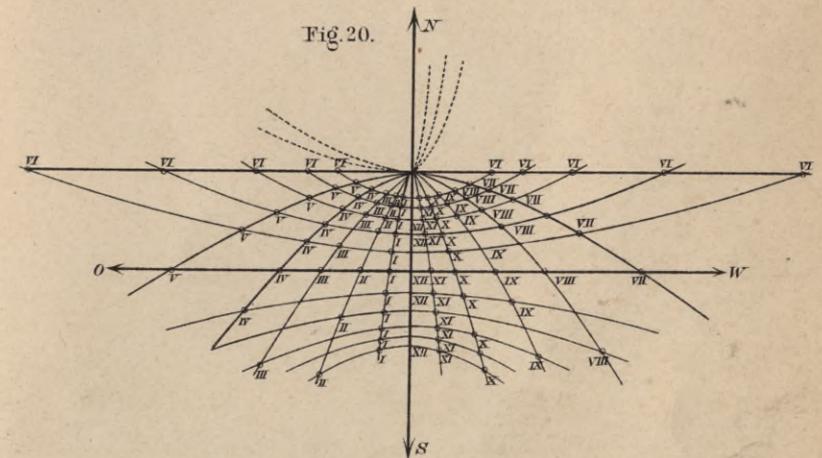
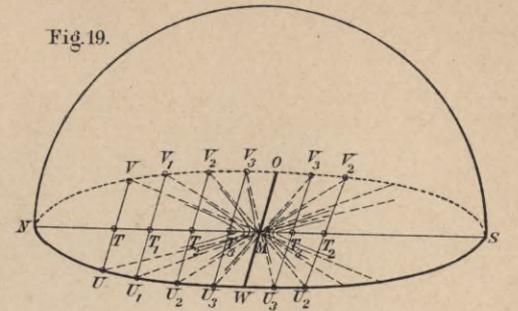
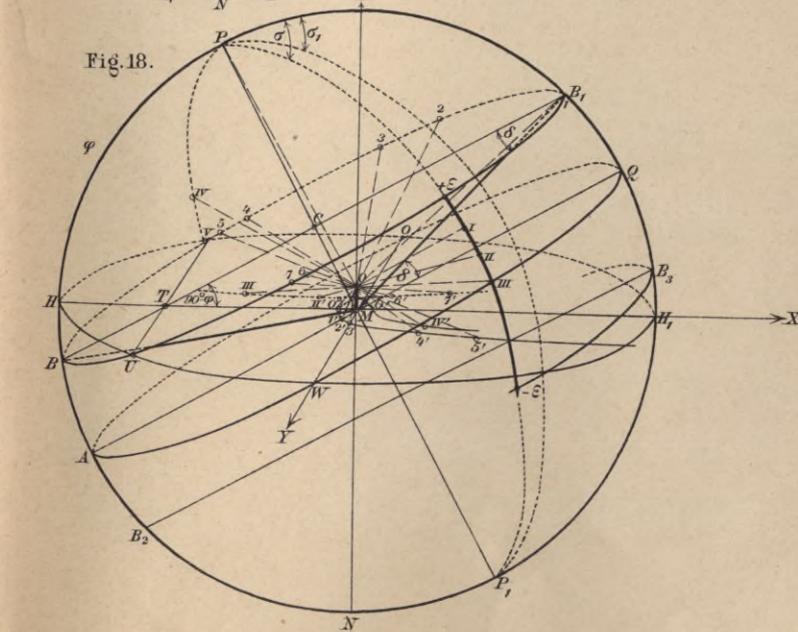
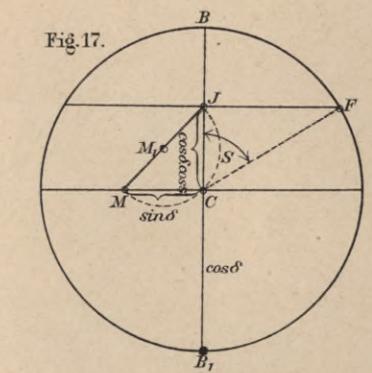
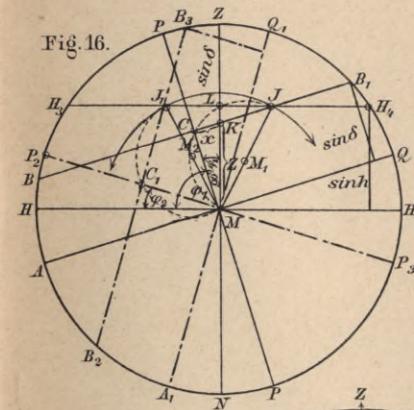
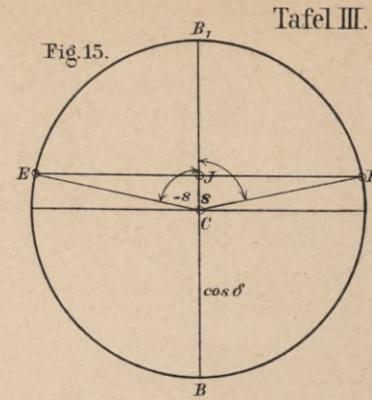
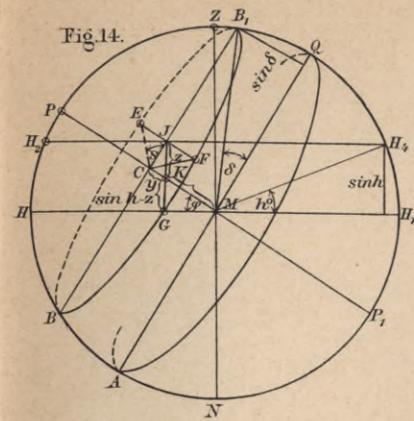




Fig. 22.

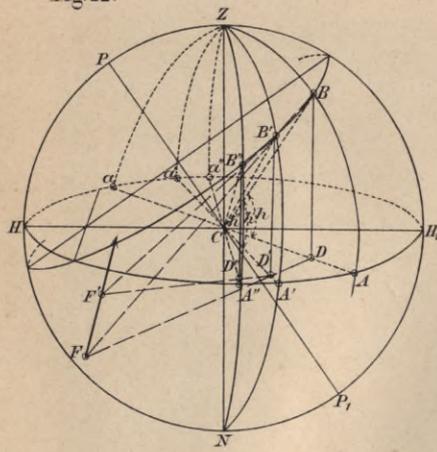


Fig. 23.

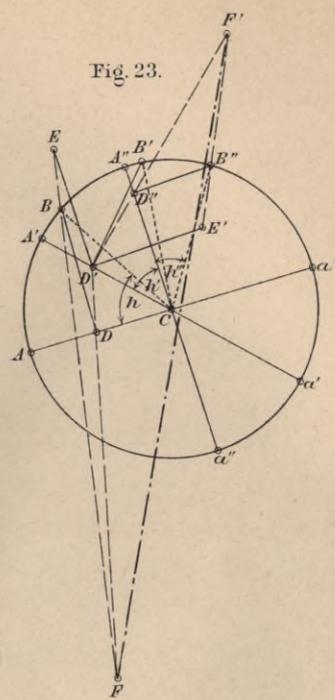


Fig. 24.

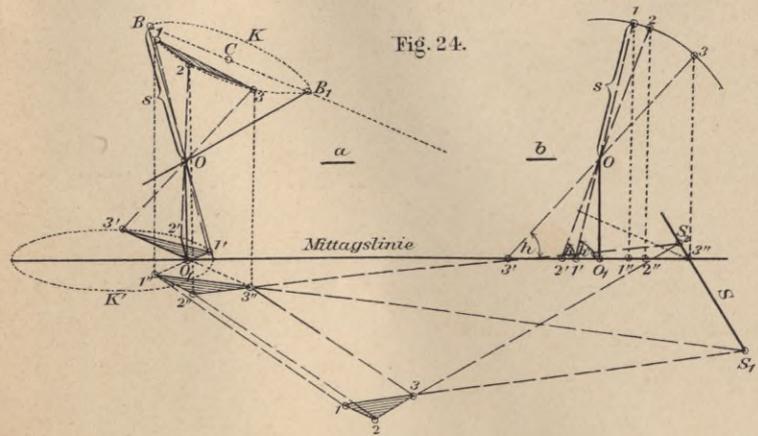


Fig. 25.

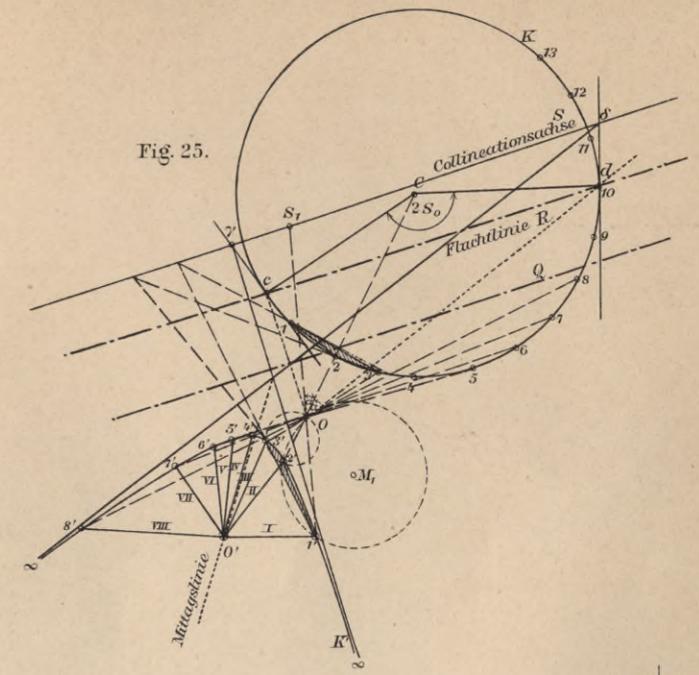
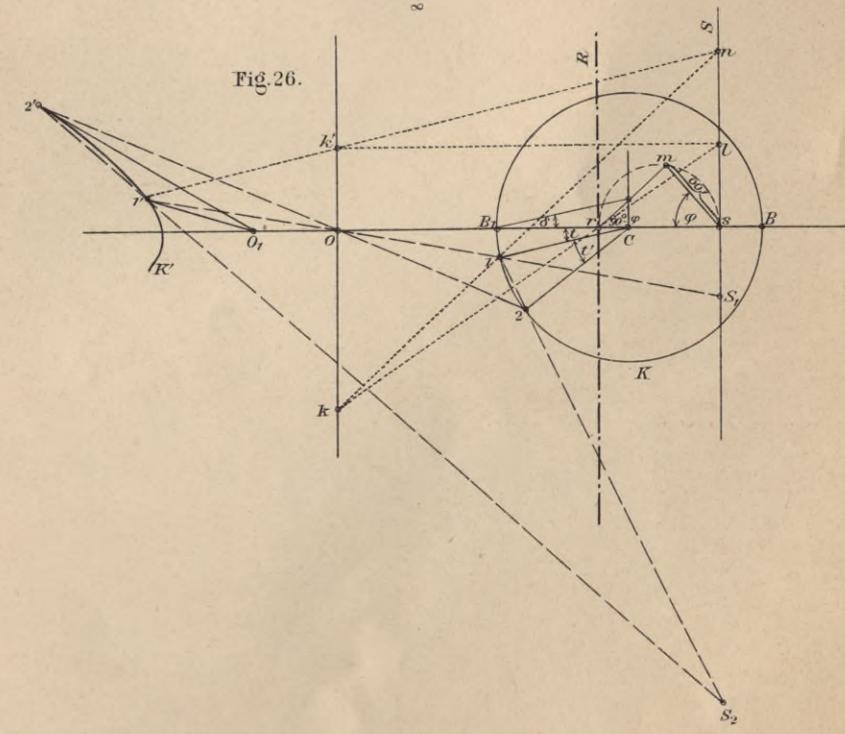


Fig. 26.





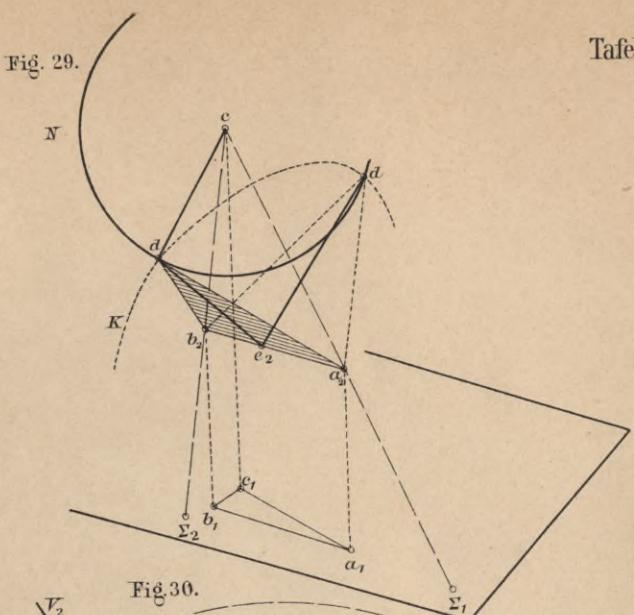
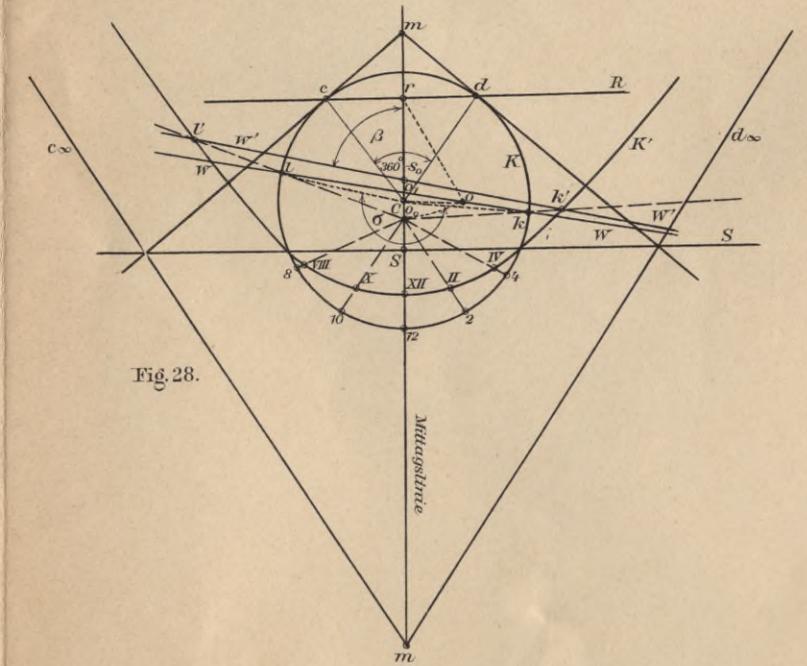
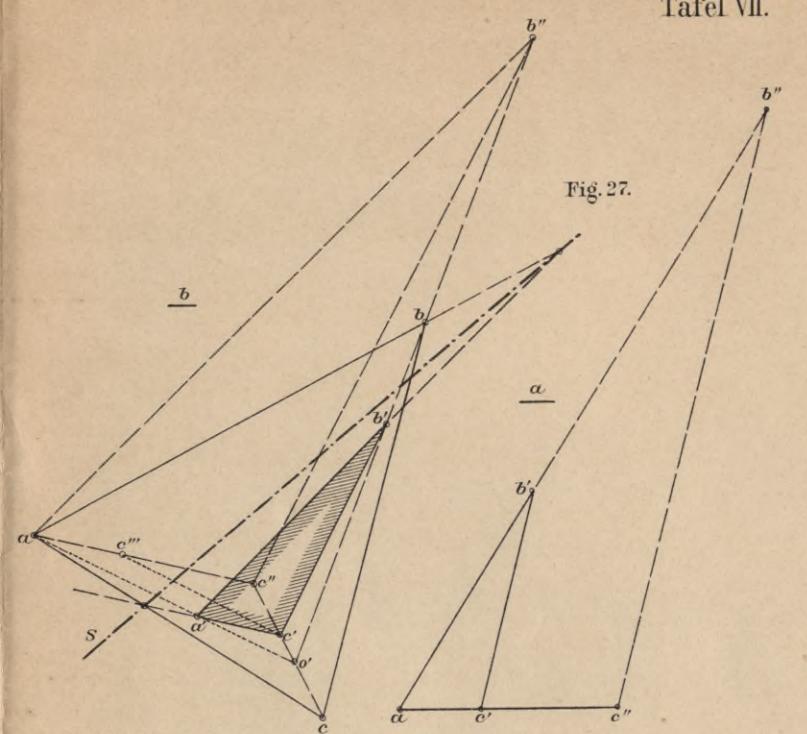
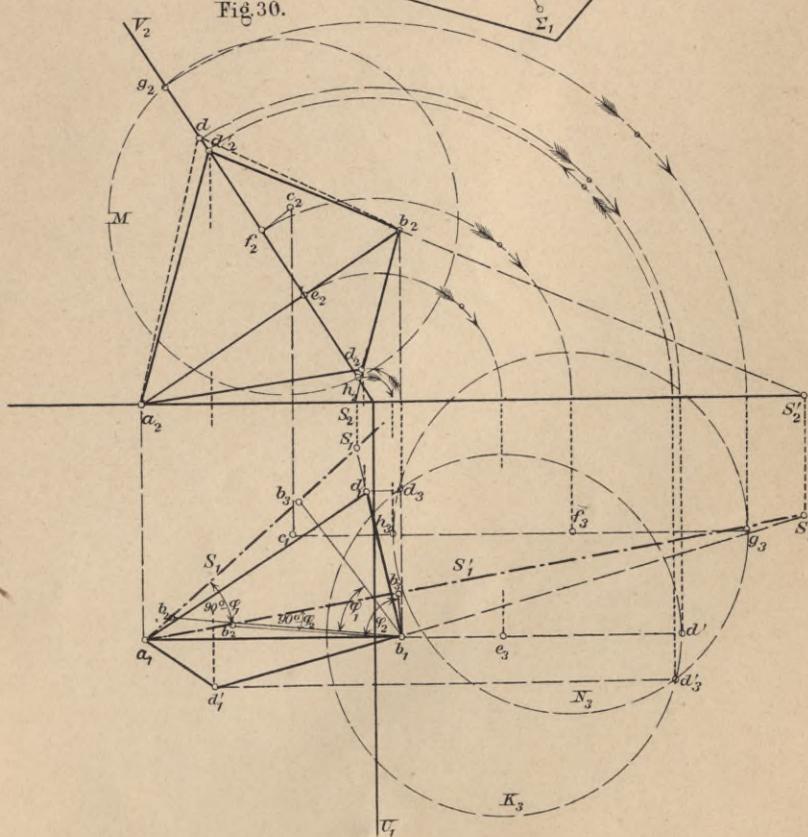


Fig. 30.





19.5







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



**II-31805**

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



**100000298503**