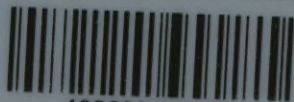




Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299555

1070/1

Vorträge

über

BRÜCKENBAU

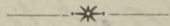
gehalten an den

technischen Hochschulen in Prag, Wien und Berlin

von

Dr. E. Winkler

Professor für Statik der Baukonstruktionen und Brückenbau an der königl. technischen Hochschule
in Berlin.



Theorie der Brücken.

I. Heft.

Aeussere Kräfte der Balkenträger.

Dritte Auflage.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1886.

THEORIE DER BRÜCKEN.

Aeussere Kräfte der Balkenträger

von

Dr. E. Winkler.



16507
Dritte Auflage.

VIII e 6

Mit 256 Holzschnitten und 6 lithographirten Tafeln.

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen ist vorbehalten.

A red handwritten signature, likely of the publisher Carl Gerold's Sohn, written in a cursive style.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1886.

500



II 7829

Holzschnitte aus der xylographischen Anstalt von C. Wiczek in Wien.

Lithogr. Tafeln aus der lithographischen Anstalt von C. Köke in Wien
und der artistischen Anstalt von R. v. Waldheim in Wien.

Akc. Nr. 5219 / 51

Vorwort.

Das vorliegende Werk behandelt insbesondere die „Theorie der äusseren Kräfte der Balkenträger“, also die Bestimmung der von einer gegebenen Belastung erzeugten Reaktionen, Transversalkräfte und Momente, durch welche die inneren Kräfte oder die Beanspruchung eines Balkenträgers bestimmt sind und im Anschlusse hieran die Bestimmung der ungünstigsten Belastungsweise. Es behandelt somit einen Haupttheil der „Statik der Baukonstruktionen“, insbesondere der „Theorie der Brücken“.

Die vorliegende dritte Auflage lässt gegenüber der vor dreizehn Jahren erschienenen ersten Auflage und der zwei Jahre später folgenden zweiten Auflage wesentliche Aenderungen, und wie ich hoffe, dem Fortschritte der Wissenschaft entsprechende Verbesserungen erkennen.

Obwohl der Titel „Theorie der Brücken“ der früheren Auflagen belassen ist, habe ich doch eine solche Behandlung gewählt, welche nicht nur eine Anwendung auf Brücken, sondern auch auf andere Baukonstruktionen gestattet, um das Werk meinen jetzigen Vorlesungen an der technischen Hochschule in Berlin, in denen ich die „Theorie der Brücken“ nicht gesondert, sondern eingeflochten in den Vortrag über allgemeine „Statik der Baukonstruktionen“ zum Vortrag bringe, mehr anzupassen, während die beiden ersten Auflagen durch meine Thätigkeit an der technischen Hochschule in Wien entstand, an welcher die Vorträge über die Statik der Baukonstruktionen nicht von mir gehalten wurden.

Ausserdem sind gegenüber den früheren Auflagen besonders die folgenden Aenderungen durchgeführt: 1. Vollständigere Besprechung der Eintheilung der Träger. 2. Einschaltung eines Kapitels über die Methode der Einflusslinien im Allgemeinen, da diese Methode die Anschauung, namentlich für die Bestimmung der ungünstigsten Belastung, wesentlich unterstützt. 3. Weitergehende Anwendung dieser Methode bei den einzelnen Aufgaben, auch beim kontinuierlichen Träger. 4. Ergänzungen in der Behandlung der einfachen oder Einzelträger. 5. Grafische Behandlung der kontinuierlichen Gelenkträger. 6. Berücksichtigung der Formänderung

durch die Schubspannungen bei der allgemeinen Behandlung der kontinuierlichen Träger. 7. Gleichzeitige Behandlung der kontinuierlichen Träger mit konstantem und veränderlichem Querschnitte statt der getrennten Behandlung in den früheren Auflagen, wodurch an Raum gewonnen wurde. 8. Einschaltung der Theorie der kontinuierlichen Träger mit veränderlicher Höhe der Stützen und zwar der Träger mit elastischen Stützen und mit Stützen, welche durch ein Stabpolygon (Hänge- oder Sprengwerk) gegeben sind, in beiden Fällen einschliesslich einer kontinuierlichen Unterstützung. 9. Einschaltung eines Kapitels über die Formänderung (Durchbiegung) der Balkenträger. 10. Hinzufügung eines Kapitels über die Bestimmung der einem Systeme von Einzellasten entsprechenden gleichmässigen Belastung. 11. Einflechtung von kurzen geschichtlichen Notizen.

Durch diese nicht unwesentliche Umgestaltung ist die Anzahl der in den Text eingedruckten Figuren auf das Doppelte erhöht worden.

Der grössere Theil des Werkes bezieht sich auf die kontinuierlichen Träger. Obwohl dieselben in neuerer Zeit an Bedeutung, hinsichtlich der Verwendung als Hauptträger der Brücken, verloren haben, so werden dieselben doch hinsichtlich der Verwendung zu mannigfachen Zwecken, auch im Hochbau, immer eine gewisse Bedeutung behalten, welche eine Behandlung in den Vorträgen rechtfertigt.

Möge denn auch dieser neuen Auflage eine gleich günstige Aufnahme, wie den früheren, zu Theil werden.

Berlin, Oktober 1885.

E. Winkler.

INHALT.

Einleitung	1
I. Kap. Belastung der Konstruktionen	7
II. " Eintheilung der Träger	17
III. " Methode der Einflusslinien	27
I. Abschnitt.	
Die äusseren Kräfte der Balkenträger	
A. Statisch bestimmte Träger.	
IV. Kap. Ständige Belastung	41
a) Einfache Träger	41
b) Ueberhängende Träger	48
V. " Verkehrsbelastung	53
a) Einfache Träger	53
b) Ueberhängende Träger	81
B. Kontinuirliche Träger.	
VI. Kap. Allgemeine analytische Behandlung	90
VII. " Belastung eines einzelnen Feldes	116
VIII. " Belastung durch Einzellasten	124
a) Eine einzige Einzellast	124
b) System von Einzellasten	134
IX. " Gleichmässige Belastung	142
X. " Einfluss der Stützen	166
XI. " Verbindung des Balkenträgers mit dem Stabpolygon	185
XII. " Träger mit einer Oeffnung	211
XIII. " Träger mit zwei Feldern	217
XIV. " Träger mit drei Feldern	237
XV. " Träger mit vier Feldern	262
XVI. " Träger mit unendlich vielen Feldern	273
XVII. " Grafische Behandlung der kontinuierlichen Träger	282
XVIII. " Grafische Behandlung bestimmter Belastungsweisen	302
C. Formänderung der Balkenträger.	
XIX. Kap. Formänderung der Balkenträger	313
XX. Kap. Anhang. Ersatz eines Systemes von Einzellasten durch eine gleichmässige Belastung	326

Berichtigungen.

I. (vorliegendes) Heft.

Seite 50, Zeile 17 von oben: §. 33 statt §. 32.

„ 115, zu Formel 42 ist hinzuzufügen:

$$M'' = \frac{p(l_1^2 - \xi_1^2)^2}{12l^2}$$

zu Formel 43 ist hinzuzufügen:

$$M'' = \frac{p(l^2 - \xi^2)^2}{12l^2}$$

„ 118, Zeile 22 von unten: $\frac{l}{l_1}$ statt $\frac{l}{l_2}$.

„ 122, „ 14 „ „ „Für unendlich viele gleiche Felder“ statt „Für unendlich viele Felder“.

„ 137, erste und zweite der Formeln 24: $1 + \nu$ statt $l + \nu$.

„ 182, Zeile 1 von unten, Formel 30: e^{-kx} statt e^{-kz} .

„ 189, Formel 18a: ll_1 statt ll .

„ 283, Zeile 4 von oben: $M \frac{I_0}{I}$ statt $M \frac{I}{I_0}$.

II. Heft, II. Auflage.

Seite 98, Zeile 6 von oben: II statt B.

„ 102. Nach Zeile 11 von oben ist einzuschalten: „mit der Richtung und Kraft Q“.

„ 126, erste der Formeln 36, letzter Faktor: $d \frac{h}{x}$ statt $d \frac{x}{h}$.

„ 172, Tabelle, Rubrik 4: α_2 statt β_2 .

„ 177, Formel 120: $\sqrt{1 + \frac{p}{g}}$ statt $\sqrt{1 + \frac{g}{p}}$.

„ 196, Formel 139: q statt g .

„ 197, Formel 140: q statt g .

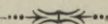
„ 198, Formel 143: in beiden Ausdrücken fehlt der Faktor l^2 .

„ 279, Formeln 11a: q statt r .

„ 290, Zeile 8 von oben: „auf den Gurt“ statt „den Gurt“; Zeile 1 von unten: „gesamnten“ statt „gespannten“.

„ 306, Zeile 15 von unten: 47 statt 45.

„ 307, Zeile 5 von oben und Zeile 13 von unten: 49 statt 47; Zeile 7 von unten: 45 statt 44a.



EINLEITUNG.

§. 1. Aufgabe der Statik der Baukonstruktionen. Die Statik der Baukonstruktionen hat die Aufgabe, aus den Grundsätzen der allgemeinen Mechanik Regeln für diejenige Anordnung eines Bauwerkes abzuleiten, welche demselben einen hinreichenden Widerstand gegen die einwirkenden äusseren Kräfte sichert, natürlich unter Einhaltung einer Reihe von anderweiten Bedingungen nicht mechanischer Natur, wie Minimum der Kosten, Raumbedürfniss, Schönheit u. s. w. Obwohl zur Beurtheilung von Baukonstruktionen nicht nur die Statik, sondern auch die Dynamik in Betracht kommt, so ist dennoch wohl der Name »Statik der Baukonstruktionen« gerechtfertigt, weil dabei doch die Statik die weitaus vorwiegende Rolle spielt, freilich theilweise deshalb, weil die in Betracht kommenden dynamischen Aufgaben oft unüberwindliche Schwierigkeiten bieten.

Die Theorie der Brücken ist eine spezielle Anwendung der Statik der Baukonstruktionen auf Brücken.

Eine bestimmte Begrenzung der »Statik der Baukonstruktionen« in dem grossen Gebiete der Mechanik lässt sich allerdings nicht leicht vornehmen. Es würde recht wohl möglich sein, die allgemeine Mechanik so speziell zu lehren, dass ein besonderer Unterricht in der Statik der Baukonstruktionen entfallen kann. Bei dem heutigen Umfange des hierbei zu bewältigenden Gebietes würde dies aber aus verschiedenen Gründen nicht zweckmässig sein. Zunächst wird man jedenfalls von der allgemeinen Mechanik die Festigkeitslehre entweder in ihrem ganzen Umfange oder nur in den speziell auf Baukonstruktionen angewendeten Theilen abtrennen; hierzu gehören dann bereits auch Steinkonstruktionen, wie Mauern, Pfeiler und Gewölbe. Zur Berechnung der Futtermauern, wohl auch der Gewölbe ist die Kenntniss des Erddruckes erforderlich, dessen Theorie man ebenfalls als einen speziellen Theil der Statik der Baukonstruktionen ansehen kann. Wenn man die allgemeine

Festigkeitslehre, wie dies im vorliegenden Werke geschehen soll, als bekannt ansieht, so würden als Theile der Statik der Baukonstruktionen verbleiben:

1. Theorie der ebenen vollwandigen und gegliederten Träger.
2. Theorie der räumlichen vollwandigen und gegliederten Träger.
3. Theorie des Erddruckes.
4. Theorie der Steinkonstruktionen, wie Mauer, Pfeiler und Gewölbe.

Anmerkung. Statt der Bezeichnung »Statik der Baukonstruktionen« sind vielfach andere Bezeichnungen für denselben Gegenstand in Gebrauch. Westphal nannte die deutsche Uebersetzung des bezüglichen französischen Werkes »Mécannique appliquée etc.« von Navier: Mechanik der Baukunst. Ritter, Professor an der technischen Hochschule in Achen, hat für sein bezügliches Werk das Wort: Ingenieurmechanik gebraucht. An den österreichischen technischen Hochschulen ist das Wort Baumechanik üblich. An der Bauakademie in Berlin war früher die Bezeichnung Mathematische Baukonstruktion üblich. Auch der Name Baustatik ist neuerdings aufgetaucht.

§. 2. Methoden. Die statische Untersuchung einer Konstruktion lässt sich entweder durch Rechnung oder auf grafischem Wege, d. h. durch geometrische Konstruktion, oder endlich durch eine aus beiden Methoden kombinierte Methode führen. Für die Entwicklung der zu dieser Untersuchung nöthigen Regeln können alle Theile der Mathematik in Anwendung kommen. Hauptsächlich unterscheidet man die Anwendung der Algebra im allgemeinsten Sinne des Wortes, auch die analytische Methode genannt, und die Anwendung der Geometrie; auch eine kombinierte Methode ist denkbar. Die Ergebnisse der analytischen Methoden sind hauptsächlich Formeln, welche entweder durch Rechnung oder durch Uebersetzung in geometrische Konstruktionen zur Verwendung kommen, während die Ergebnisse der geometrischen Untersuchung in der Regel nur auf grafischem Wege verwerthet werden. Die Zusammenfassung der geometrischen Untersuchungsmethode wurde von Culmann »grafische Statik« genannt; Reuleaux wendete statt dessen den Namen Graphostatik an.

Anmerkung. Keine der Methoden lässt sich in allen Fällen der anderen vorziehen; in einzelnen Fällen führt diese, in anderen jene einfacher, schneller oder belehrender zum Ziele, oder bietet sonst einen Vortheil gegen die andere, so dass es gerathen erscheint, im Vortrage keine der Methoden grundsätzlich auszuschliessen. Für gewisse Untersuchungen hat überhaupt die geometrische Methode bis jetzt keine Ausbildung erfahren. Wir werden öfters Gelegenheit haben, auf die Vorzüge der einen oder anderen Methode aufmerksam zu machen.

§. 3. Geschichtlicher Ueberblick. In dem folgenden geschichtlichen Ueberblicke haben wir die Statik der Baukonstruktion im allgemeinen Sinne, also einschliesslich der Festigkeitslehre, aufgefasst.

I. Alterthum. In welcher Weise die Baumeister der Alten die Stabilität ihrer Bauwerke untersuchten, ist uns nicht genau bekannt;

wahrscheinlich ist es, dass sie nur Erfahrungsregeln besaßen. Das erste Buch über Mechanik soll der Grieche Archytas (400 v. Chr.) geschrieben haben. Das erste uns erhaltene Werk hat der Grieche Aristoteles (384—322 v. Chr.) verfasst; in demselben werden bereits das Parallelogramm der Bewegungen, der Hebel und der Keil behandelt. Als den eigentlichen Begründer einer mehr wissenschaftlichen Statik sieht man indess den Griechen Archimedes (287—212 v. Chr.) an; er behandelt sämtliche sogenannte einfache Maschinen, den Schwerpunkt ebener Flächen und den Auftrieb des Wassers. Nach ihm schrieb der Alexandriner Heron (120 v. Chr.) mehrere Bücher über Mechanik, in denen er sämtliche einfache Maschinen auf den Hebel zurückführt, die Kombinationen einfacher Maschinen und hydrostatische Sätze behandelt. Der Alexandriner Pappus (360 n. Chr.) behandelt zuerst den Schwerpunkt der Körper. Als ältester Schriftsteller auf dem Gebiete des Bauwesens tritt der Römer Vitruv (um Chr. Geb.) auf; er gibt in seinen Werken (*Vitruvii de architectura libri decem* — deutsch von Rode) zwar einige Anwendungen der Mechanik auf Baumaschinen, nicht aber auf die Baukonstruktionen selbst.

II. Mittelalter. Von Vitruv bis zum Entstehen der Universitäten im Anfange des 13. Jahrhunderts ist ein Fortschritt in den Wissenschaften überhaupt kaum zu verzeichnen. Auch die Universitäten kultivierten anfangs die Mathematik und Mechanik nur wenig. Wesentlichen Einfluss musste die Erfindung der Buchdruckerkunst im 15. Jahrhundert üben. Bahnbrechend auf dem Gebiete der Statik waren erst die Arbeiten des Holländers Stevin (1548—1620), der nach Aufstellung der Theorie der schiefen Ebene zuerst den Satz vom Parallelogramm der Kräfte für den Fall rechtwinklig auf einander wirkender Kräfte nachwies, aber auch diesen Satz in seiner Allgemeinheit verwendet, z. B. zur Bestimmung der Spannungen im Seilpolygon. Die Begründung des Zusammenhanges zwischen Statik und Dynamik haben wir dem Italiener Galilei (1564 bis 1642) zu danken¹⁾. Ihm verdanken wir auch die ersten Anfänge einer Anwendung der Statik auf Baukonstruktionen, da er eine allerdings unrichtigerweise auf blosses Zerreißen beruhende Theorie der Bruchfestigkeit aufstellte. Seine Theorie wurde namentlich hinsichtlich der Form der Körper konstanter Festigkeit angewendet durch die Italiener Blondel, Marchotti, Fabri und Grandi (1660—1700). Jedoch erhielt die Festigkeitslehre überhaupt erst eine sichere Grundlage durch die Auffindung des Elastizitätsgesetzes durch den Engländer Hooke (1660). Dieses Gesetz wurde unabhängig hiervon auch von dem

¹⁾ Hinsichtlich der weiteren Entwicklung der allgemeinen Mechanik verweisen wir auf die Werke: Düring, kritische Geschichte der Prinzipien der Mechanik, Berlin 1873, II. Aufl. 1877. — Rühlmann, Vorträge über Geschichte der theoretischen Maschinenlehre, Braunschweig 1881 etc. — Mach, die Mechanik in ihrer Entwicklung, Leipzig 1883.

Franzosen Mariotte (1620—1684) gefunden und auf die Theorie der Biegungsfestigkeit angewendet, indem er dieselbe auf das Verlängern und Verkürzen der Fasern zurückführte. Diese Theorie wurde indess hinsichtlich der Lage der neutralen Axe erst durch den Franzosen Parent (1713) richtig gestellt.

Die erste primitive Theorie des Erddruckes stellten die Franzosen Bullet und Couplet (Ende des 17. Jahrhunderts) auf; sie wurde durch die Franzosen Sallonyer, Rondelet, Tersac de Montlong, Blaveau, Belidor, Gadroy, d'Antony und Gautthey (1700—1770) etwas weiter ausgebildet; alle nehmen aber das Abgleiten eines Erdprismas unter ganz bestimmtem Winkel an.

In diese Zeit fällt auch die Aufstellung der ersten primitiven Gewölbetheorie durch den Franzosen Lahire (1695), indem er die Gewölbsteine wie Keile wirkend ansieht.

Die vom Deutschen Leibnitz (1646—1716) und dem Engländer Newton (1643—1727) aufgestellte Infinitesimalrechnung gab Anlass zu neuen Fortschritten. Sie fand zunächst Anwendung auf die Theorie der Kettenlinie durch beide Bernoulli's, Leibnitz und Newton, und auf die Theorie der Biegung durch die Schweizer Jac. Bernoulli (1654—1705) und Euler (1707—1783), durch Leibnitz selbst und durch den Italiener Lagrange (1763—1813).

Wichtige Dienste sollte später auch das bereits von Stevin und Galilei für spezielle Fälle gefundene, von Joh. Bernoulli (1717) allgemein ausgesprochene und von Lagrange allgemein bewiesene Prinzip der virtuellen Verschiebungen oder das Prinzip der virtuellen Arbeiten leisten. Ebenso wurde die geometrische Auffassung der Mechanik durch Varignon (1654—1722), insbesondere durch die Behandlung des Kräfte- und Seilpolygons später von grosser Bedeutung, nachdem vorher Newton den Satz von Parallelogramm der Kräfte in seiner Allgemeinheit ausgesprochen hatte.

Die Versuche über die Festigkeit wurden insbesondere mit Holzstäben gemacht; so von Mariotte, Parent, Muschenbroek, Belidor, Buffon, Aubry. Versuche über die Festigkeit der Steine machten Gautthey, Soufflot, Perronet und Rondelet. Versuche mit Metallen, insbesondere Eisen, sind nur von Mariotte und Poleni bekannt.

III. Neuere Zeit. Eine weiter gehende Ausbildung fanden verschiedene Theile der Statik der Baukonstruktionen durch den Franzosen Coulomb (1736—1806). Er stellte die erste rationelle Theorie des Erddruckes durch Einführung eines Rutschprismas mit dem grössten Drucke und der Gewölbe durch Einführung eines Einsturzes durch Kanten, (statt durch Gleiten) auf, nachdem allerdings schon vorher Couplet (1730) hierauf bezügliche Bemerkungen gemacht hatte. Er

hatte ferner fruchtbare Gedanken auf dem Gebiete der Festigkeitslehre, indem er die Parent'sche Theorie der Biegungsfestigkeit vervollkommnet, das Auftreten von Schubspannungen hierbei erkennt und die erste primitive Theorie der Torsionselastizität aufstellt. Die Arbeiten Coulombs fanden erst spät die gebührende Anerkennung. Seine Theorie des Erddruckes erfuhr weitere Ausbildung durch die Franzosen Prony (1802), Mayniel (1808) und namentlich Francais (1820), während das Auftreten der Schubspannungen bei der Scheer- und Biegungsfestigkeit durch den Engländer Thom. Young (1807) in mathematische Form gebracht wurde.

Wichtige Dienste leistete Monge (1746—1818) durch seine synthetische Behandlung der Statik und Poinsot (1771—1859) durch Einführung eines neuen Begriffes, dem des Kräftepaares.

Die erste wissenschaftliche Behandlung der gesammten Statik der Baukonstruktionen gibt aber der Franzose Navier (1785—1836) in seinem berühmten Werke: *„Resumé des leçons sur l'application de la mécanique“*. Seine Lehren auf dem Gebiete der Festigkeitslehre fanden in verschiedener Richtung Ausbildung durch die Franzosen Persy, Poisson, De Saint-Venant und Bresse. Der Franzose Poncelet (1788—1867) beschäftigte sich ebenfalls mit der Festigkeitslehre; jedoch verdanken ihm besonders die Theorie des Erddruckes und der Gewölbe wichtige Neuerungen.

Ausser den genannten Franzosen waren zwei Deutsche, Eytelwein (1764—1848) und Gerstner (1797—1840) auf dem Gebiete der Festigkeitslehre und der Gewölbe thätig.

Neben den für die unmittelbare Anwendung in der Praxis bestimmten Festigkeitstheorien, die sämmtlich auf vereinfachenden, der Wirklichkeit aber nicht ganz entsprechenden Annahmen beruhen, entstand die strenge mathematische Behandlung, theils durch Anwendung der Molekulartheorie von Poisson, Navier und Cauchy, theils durch Anwendung des allgemeinen Elastizitätsgesetzes von Cauchy, Lamé, Clapeyron und De Saint-Venant.

Die Theorien wurden durch viele Versuche, namentlich auf dem Gebiete der Festigkeitslehre, mit Steinen durch Tredgold u. a., mit Holz durch Ardant, W. Barlow, Belidor, Bevan, Chevandier und Wertheim, Ebbels und Tredgold, Eytelwein, Houbotte, Lamarle, mit Metallen durch Brix, Burg, Clark, Duleau, Fairbairn, Hodgkinson, Lagerhjelm, Malberg, Napier, Telford, Vickers, Völkers, Weishaupt u. a. unterstützt. Versuche über den Erddruck wurden von Mayniel, Martony de Köszezh, Audé und Hagen angestellt.

IV. Neueste Zeit. Seit Navier haben alle Zweige der Statik der Baukonstruktionen eine weitgehende Ausbildung gefunden. Ein wesent-

licher Faktor ist hierbei die Einführung der Eisenbahnen, namentlich in Folge des hierdurch hervorgerufenen Bedürfnisses grosser Brücken und Hallen, sowie auch der hiermit allerdings ebenfalls zusammenhängende Aufschwung der technischen Hochschulen.

Bis in die neueste Zeit wurde insbesondere die analytische Methode gepflegt. Französische Autoren benützen hier und da geometrische Ableitungen oder sie leiten aus den entwickelten Regeln geometrische Konstruktionen ab. Namentlich macht Poncelet bei der Theorie des Erddruckes und der Gewölbe von der Geometrie zweckmässigen Gebrauch. Später verwendeten auch St. Guilhem, Cousinery und Mery die Geometrie. Die erste wissenschaftliche Bearbeitung der geometrischen Methoden im organischen Zusammenhange liefert aber Culmann (1821 bis 1882) in seinem Epoche machenden Werke: „Die grafische Statik“, 1864.

Auf dem Gebiete der Festigkeitslehre sind wesentliche Fortschritte zu verzeichnen, namentlich hat die Theorie der kontinuierlichen Träger und der Bogenträger durch Clapeyron, Bresse, Mohr, Culmann u. a. eine Ausbildung erfahren. Die Theorie der Stabsysteme, auf die in früheren Perioden noch kein Werth gelegt wurde, findet Ausbildung durch Ritter, Maxwell, Culmann, Cremona, Favero u. a. Die Theorie der auf blossem statischem Wege nicht mehr zu behandelnden sogenannten statisch unbestimmten Systeme wird im Zusammenhange mit der Bestimmung der Formänderung der Stabsysteme durch Benützung des Prinzipes der virtuellen Arbeit ausgebildet durch Maxwell, Mohr, Castigliano, Fränkel u. a. Durch die Anwendung bei Brücken musste besonders Werth auf die Ermittlung der ungünstigsten Belastung gelegt werden, was zu besonderen Untersuchungen Anlass gibt.

Die strenge Theorie der Elastizität fand Ausbildung durch Clebsch, Clausius, Kirchhoff und Pochhammer. Die grafische Theorie der inneren Kräfte behandeln Mohr, Canevazzi u. a.

Die Theorie des Erddruckes erfuhr eine Vervollkommnung durch St. Guilhem, Culmann und Rebhann. Auch hier suchte man eine strenge Theorie auszubilden, wie in den Arbeiten von Scheffler, Rankine, Levy, Considère, Mohr u. a.

Die Theorie der Gewölbe fand weitere Ausbildung durch Hagen, Scheffler, Drouets, Carvallo, Durand-Claye und Dupuit. Namentlich ist hier das Streben zu verzeichnen, die Gewölbe als Bögen zu betrachten, welche der Elastizitätslehre unterliegen, wie dies in den Arbeiten von Schwedler, Perrodil, Belpaire u. a. geschehen ist.

Auch die Versuche auf dem Gebiete der Festigkeitslehre wurden vervollständigt und vervollkommnet, insbesondere durch Styffe, Kirkaldy, Bauschinger, Thurston u. a. Der Einfluss wiederholter Beanspruchung wurde durch Wöhler studirt.

I. Kapitel.

Belastung der Konstruktionen.

§. 4. Eigengewicht. Das Eigengewicht der Konstruktion, auch ständige, ruhende oder dauernde (permanente) Belastung genannt, einer zu entwerfenden Konstruktion, ist vor der Fertigstellung des Entwurfes nicht bekannt. Dennoch aber ist dieses Gewicht für die statische Berechnung erforderlich. Wollte man das Eigengewicht bei der Berechnung als Unbekannte und zwar als Funktion der zu berechnenden Stärken einführen, so würde die Berechnung im Allgemeinen sehr weitläufig, vielleicht selbst unmöglich werden. Nur bei ganz einfachen Konstruktionen (z. B. einer Spannstange, einer Futtermauer, einem Widerlager) kann dies Verfahren zweckmässig erscheinen. Im Allgemeinen ist es üblich, das Eigengewicht im Voraus nach Massgabe bereits ausgeführter ähnlicher oder gleicher Konstruktionen oder theilweise auf Grund besonders anzustellender theoretischer Untersuchungen, angenähert anzunehmen. Ist der Entwurf auf Grundlage der so durchgeführten Berechnung vollendet, so kann man das Gewicht in bekannter Weise genauer bestimmen und hiernach die durchgeführte Berechnung berichtigen.

Das Eigengewicht wird in der Regel für die Längen- oder Flächeneinheit und zwar meistens konstant angenommen, bei Brückenträgern, bei Dachbändern, Decken u. s. w. für die horizontale Längen- oder Flächeneinheit, hinsichtlich der Dachdeckung für die Flächeneinheit der Dachfläche. In manchen Fällen indess erscheint es, um eine grössere Genauigkeit zu erreichen, geboten, das Eigengewicht für die Längen- oder Flächeneinheit veränderlich anzunehmen, z. B. bei steinernen Brücken.

Angaben über das Eigengewicht machen wir hier nicht, da dies viel besser in den Vorträgen über Hoch- und Brückenbau geschehen kann.

§. 5. Verkehrsbelastung der Brücken im Allgemeinen. Die Verkehrsbelastung, auch zufällige, variable oder mobile Belastung genannt, führt man entweder als eine auf die Längen- oder Flächeneinheit gleichmässig vertheilte Belastung oder als System von Einzellasten ein. Hinsichtlich einer Belastung durch Menschengedränge kommt man durch Einführung einer gleichmässigen Belastung der Wirklichkeit ziemlich nahe. Die Belastung durch Wagen indess wird besser als ein System von Einzellasten betrachtet. Auf den annähernden Ersatz durch eine gleichmässige Belastung wollen wir erst am Schlusse der Untersuchung der äusseren Kräfte eingehen.

Die Berücksichtigung der Verkehrsbelastung muss insofern eine ganz andere sein, als die des Eigengewichtes, als dieselbe hinsichtlich der belasteten Stellen oder Strecken eine veränderliche sein kann und weil deshalb unter allen möglichen Belastungsarten für jeden Konstruktions-theil die ungünstigste Belastung zu bestimmen und der statischen Berechnung zu Grunde zu legen ist.

Die Einwirkung der Stösse, welche durch die Unregelmässigkeit der Bahn u. s. w. beim Verkehre entstehen, pflegt man dadurch zu berücksichtigen, dass man die Verkehrsbelastung um einen bestimmten Theil vermehrt oder aber die bei einer Wirkung ohne Stösse zulässige Inanspruchnahme um einen bestimmten Theil vermindert. Das letztere ist das üblichere, obwohl das erste das prinzipiell richtigere ist. Man kann die Vermehrung der Belastung etwa bei Eisenbahnbrücken mit grosser Geschwindigkeit 30 Prozent, bei Strassenbrücken hinsichtlich der Wagen bei glatter Bahn 20 Prozent, hinsichtlich des Menschengedränges 10 Prozent annehmen, wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass Truppen nicht im Schritt über die Brücke marschiren dürfen. Streng genommen kann der Einfluss der Stösse allerdings nicht in so einfacher Weise berücksichtigt werden. Es müsste vielmehr eine entsprechende dynamische Untersuchung angestellt werden, die indess, abgesehen von der theoretischen Schwierigkeit, ebenfalls keine genaueren Resultate geben kann, weil die dabei in Betracht kommenden Umstände, wie Unregelmässigkeit der Bahn, Elastizität der Materialien u. s. w. sich schwer durch zuverlässige Zahlen angeben lassen.

§. 6. Verkehrsbelastung der Strassenbrücken.

1. Menschengedränge. Je nach der Dichtigkeit des Menschengedränges gehen auf 1 Quadratmeter 5 bis 6 Mann; rechnet man einen Mann zu 70 Klgr., so ist die Belastung

0,35 bis 0,42 Ton. pro \square Meter.

Hierbei ist immer noch vorausgesetzt, dass die Menschen nur so dicht an einander gedrängt sind, dass noch eine langsame Bewegung möglich ist. Bei Brücken in Landstrassen genügt es, die kleinere Zahl zu nehmen. In stark bevölkerten Orten wählt man besser die grössere Zahl. Vielfach hat man hier **0,40 Ton. pro \square Met.** angenommen. Wenn die Belastung durch Menschengedränge in der That oft eintritt, wird man sogar besser etwa **0,45 Ton. pro \square Met.** annehmen. In der deutschen Armee sind alle Feldbrücken auf die durch dicht aufgeschlossene Infanterie ohne Gepäck und Waffen oder auf **0,45 Ton. pro \square Met.** zu berechnen. Die Belastung durch Pferde (Kavallerie) beträgt, wenn die Pferde nur so dicht an einander gedrängt sind, dass sie sich nach vorwärts bewegen können, höchstens **0,25 Ton. pro \square Met.**, ist also geringer als die Belastung durch Menschengedränge.

Einzelne Theile der Brücke können indess durch stärkeres Aneinanderdrängen mehrerer Personen noch wesentlich stärker belastet werden; man kann solche örtliche Belastungen mit etwa **0,50** Ton. pro \square Met. bemessen. Schmale Theile, wie Bohlen, nimmt man besser pro Längeneinheit belastet an, etwa mit **0,16** Ton. pro Met., was bei $0,20$ $0,25$ $0,30^m$ breiten Bohlen bezüglich $0,80$ $0,64$ $0,53$ Ton. pro \square Met. geben würde.

2. **Wagenbelastung.** Bei einer bestimmten Brücke wird man natürlich die schwersten Wagen, welche auf der betreffenden Strasse nach der Beschaffenheit derselben verkehren können, voraussetzen. Man kann hiernach im Allgemeinen zwei- und vierspännige Wagen oder leichte und schwere Wagen unterscheiden. Das Belastungsschema derselben ist beispielsweise durch Fig. 1 und 2 gegeben. Für Brücken in Erd- und Kieswegen genügt die Annahme leichter Wagen; in Chausséen und gepflasterten Strassen sind im Allgemeinen schwere Wagen anzunehmen. In Fabriksstädten können besonders grosse Belastungen durch Maschinentheile, namentlich durch Lokomotiven entstehen; ein entsprechendes Belastungsschema zeigt Fig. 3. Es genügt aber in diesem Falle anzunehmen, dass die Brücke nur mit einem solchen sehr

schweren Wagen, im Uebrigen mit schweren Wagen belastet ist.

Bei der Vertheilung der Wagen der Breite nach kann man jeden Wagen etwa mit **2,3** Met. Breite bemessen und dabei die Spurweite mit **1,5** Met. annehmen.

In besonderen Fällen wird auf die Belastung durch sehr schwere Chausséewalzen oder Strassenlokomotiven Rücksicht zu nehmen sein. Die Belastung durch Feldgeschütz und selbst Belagerungsgeschütz ist geringer, als durch schwere Wagen.

Fig. 1.

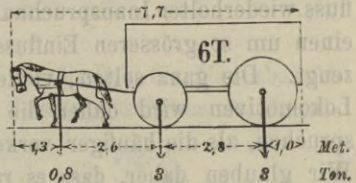


Fig. 2.

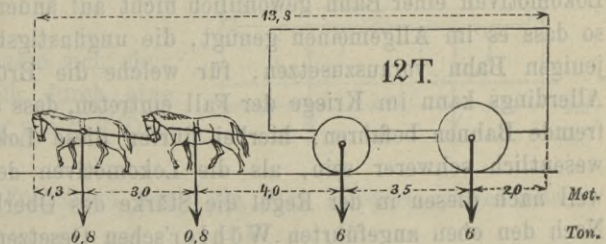
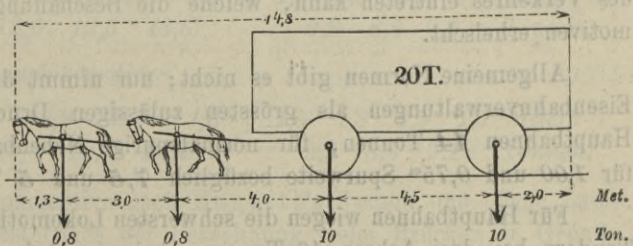


Fig. 3.



In einzelnen Fällen wird man eine Brücke dadurch leichter, also billiger konstruiren können, dass man durch Ueberwachung dafür sorgt, dass die Brücke nie vollständig belastet wird.

§. 7. Verkehrsbelastung der Eisenbahnbrücken. Eisenbahnbrücken nimmt man gewöhnlich mit einem Zuge besetzt an, welcher aus drei hinter einander gehenden Lokomotiven und ausserdem aus schweren Güterwagen besteht. Dabei nimmt man wohl auch zwei Lokomotiven mit den Schornsteinen gegen einander gekehrt an, wenn dadurch eine grössere Beanspruchung entsteht, als bei normaler Lage.

Nach den von Wöhler durch Versuche mit Eisen über den Einfluss wiederholter Inanspruchnahme gefundenen Gesetzen hat eine Belastung einen um so grösseren Einfluss, je häufiger sie eine Beanspruchung erzeugt. Die ganz selten, vielleicht nie vorkommende Belastung mit drei Lokomotiven wird daher die Brücke verhältnissmässig geringer beanspruchen, als die häufiger vorkommende Belastung mit zwei Lokomotiven. Wir glauben daher, dass es rationeller ist, nur zwei Lokomotiven anzunehmen, natürlich unter Voraussetzung einer entsprechenden zulässigen Inanspruchnahme des Materiales.

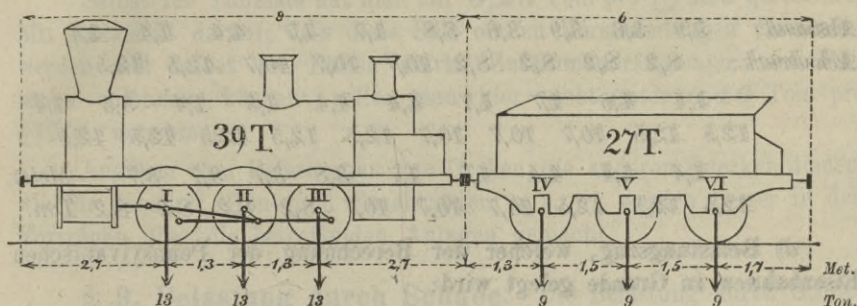
Bei der Wahl der Lokomotive ist zu berücksichtigen, dass die Lokomotiven einer Bahn gewöhnlich nicht auf andere Bahnen übergehen, so dass es im Allgemeinen genügt, die ungünstigsten Lokomotiven derjenigen Bahn vorauszusetzen, für welche die Brücke konstruirt wird. Allerdings kann im Kriege der Fall eintreten, dass die Lokomotiven auch fremde Bahnen befahren; hierbei dürfen diese Lokomotiven aber nicht wesentlich schwerer sein, als die Lokomotiven der betreffenden Bahn, weil nach diesen in der Regel die Stärke des Oberbaues bemessen wird. Nach den oben angeführten Wöhler'schen Gesetzen wird es auch der Brücke nichts schaden, wenn sie einigemale mit etwas schwereren Lokomotiven befahren wird. Natürlich wird man unter Umständen bei der Wahl der Lokomotiven berücksichtigen müssen, dass eine Vergrösserung des Verkehrs eintreten kann, welche die Beschaffung schwererer Lokomotiven erheischt.

Allgemeine Normen gibt es nicht; nur nimmt der Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen als grössten zulässigen Druck pro Achse für Hauptbahnen **14** Tonnen, für normalspurige Nebenbahnen **10** Tonnen, für 1,00 und 0,75^m Spurweite bezüglich **7,5** und **5** Tonnen an.

Für Hauptbahnen wiegen die schwersten Lokomotiven mit getrennten Tendern bei drei Achsen **40** Tonnen, bei vier Achsen **50** Tonnen, die schwersten Tenderlokomotiven etwa **68** Tonnen. Die schwersten Tender wiegen etwa **28** Tonnen. Der Radstand der Lokomotiven ist **1,15** bis **2,20** Meter; er ist hier natürlich möglichst klein zu wählen. Der

grösste Druck einer Lastwagenachse ist 8 Tonnen, der kleinste Radstand etwa 3 Meter.

Fig. 4.



Wir haben allgemeinen Berechnungen gewöhnlich für Hauptbahnen das in Fig. 4 und 5 dargestellte ideale Belastungsschema zu Grunde gelegt. Für normalspurige Nebenbahnen können dieselben Radstände und Achsdrücke der Lastwagen angenommen werden; dagegen würden die Achsdrücke der Lokomotive und des Tenders auf 10 und 7,5 Tonnen zu reduzieren sein.

Die Lastwagen lassen sich ohne zu grossen Fehler auch durch eine gleichmässige Belastung von 2,7 Ton. pro Met. ersetzen.

Wir geben im Folgenden noch ein Paar Beispiele angewandeter Belastungsschemen:

a) Normallokomotive nebst Tender der preussischen Staatsbahnen:

Güterzuglokomotive:

Abstand: 2,8 2,0 1,4 2,6 | 1,5 1,8 1,5 1,6 Meter
 Achsdruck: 12,6 12,5 13,6 9,9 8,6 9,1 Tonnen.

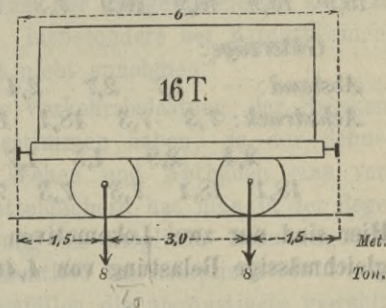
Personenzuglokomotive:

Abstand: 2,4 1,9 2,5 1,6 | 1,5 1,8 1,5 1,6 Meter
 Achsdruck: 12,6 12,2 12,4 9,9 8,6 9,1 Tonnen.

b) Semmeringlokomotive nach Engerth's System und offene Lastwagen, welche in Oesterreich der Berechnung vieler Brücken zu Grunde gelegt wurde.

Abstand: 2,53 1,16 1,16 1,16 2,52 2,22 | 1,89 3,47 1,89 Met.
 Achsdruck: 13,7 12,6 12,9 3,1 8,7 7,8 7,8 Ton.

Fig. 5.



c) Belastungszug, welcher den für die russischen Staatsbahnen nach einer Bestimmung von 1884 anzunehmenden gleichmässigen Belastungen zu Grunde gelegt ist:

Abstand:	3,9	3,6	3,9	3,6	3,8	1,7	1,7	4,4	1,4	1,4
Achsdruck:	8,2	8,2	8,2	8,2	10,7	10,7	10,7	12,5	12,5	
	1,4	4,6	1,7	1,7	4,4	1,4	1,3	1,4	5,5	1,4
	12,5	12,5	10,7	10,7	10,7	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5
	1,4	1,4	4,4	1,7	1,7	3,8	3,7	3,7	3,7	Meter
	12,5	12,5	12,5	10,7	10,7	10,7	8,2	8,2	8,2	8,2 Ton.

d) Belastungszug, welcher der Berechnung der Pennsylvanischen Eisenbahnen zu Grunde gelegt wird:

Lastzüge:

Abstand:	2,3	1,4	1,4	1,4	4,1	1,5	1,7	1,5	2,4	2,3
Achsdruck:	5,5	10,9	10,9	10,9	10,9	7,3	7,3	7,3	7,3	5,5
	1,4	1,4	1,4	4,1	1,5	1,7	1,5	0,9		
	10,9	10,9	10,9	10,9	7,3	7,3	7,3	7,3	4,46	Ton. pro Met.

Güterzüge:

Abstand:	1,7	2,7	2,4	2,9	1,5	1,7	1,5	2,4	1,7	2,7
Achsdruck:	7,3	7,3	18,1	18,1	7,3	7,3	7,3	7,3	7,3	7,3
	2,4	2,9	1,5	1,7	1,5	0,9				
	18,1	18,1	7,3	7,3	7,3	7,3	4,46	Ton. pro Met.		

Hier sind nur zwei Lokomotiven angenommen und für die Wagen eine gleichmässige Belastung von 4,46 Ton. pro Met. eingeführt.

§. 8. Zufällige Belastung der Decken. Wohnräume pflegt man für eine gleichmässige Belastung von etwa 0,15 bis 0,20 Ton. pro \square Met. zu berechnen, was hier wohl genügt, da die schweren Möbeln an den Wänden, also den Enden der Träger, aufgestellt zu werden pflegen und enges Menschengedränge im Allgemeinen nicht anzunehmen ist.

In Versammlungsräumen, in denen sich die Menschen stehend aufhalten können, wird man, wie bei Brücken, 0,45 Ton. pro \square Met. rechnen müssen, wobei ein ganz dichtes Aneinanderstehen noch immer nicht vorausgesetzt ist. Ist das Stehen durch feste Stühle ausgeschlossen, so wird die Annahme einer Belastung von 0,25 Ton. pro \square Met. einschliesslich Stühle genügen; für die nicht mit Stühlen besetzten Flächen muss indess die vorige höhere Ziffer angenommen werden. In Unterrichtsräumen für Kinder bis zu 14 Jahren würde statt 0,25 und 0,45 etwa 0,18 und 0,32 Ton. pro \square Met. gesetzt werden können. Wenn indess die Möglichkeit einer späteren anderen Verwendung des Raumes

vorliegt, so wird man doch wohl thun, durchgehends mit $0,45$ Ton. pro Met. zu rechnen.

Selbst für Tanzsäle hat man nur $0,25$ Ton. pro Met. gerechnet. Mit Rücksicht darauf, dass diese Säle oft zu Versammlungen verwendet werden und selbst bei Bällen starke Zusammendrängungen von Personen entstehen können, sollte man hier nicht unter $0,40$ Ton. pro Met. annehmen.

Angaben über Belastungen von Decken, die anderen Zwecken dienen, wie für Speicher, Heu- und Fruchtböden u. s. w., werden besser in den Vorträgen über die betreffenden Anlagen gemacht.

§. 9. Belastung durch Schnee. Die Belastung durch Schnee kommt hauptsächlich bei Dächern in Betracht. In unseren Gegenden wird man den Maximalschneedruck bei $0,8^m$ Höhe und $0,001$ Tonnen Gewicht pro Kubikmeter zu

$0,08$ Ton. pro Met.

Horizontalfläche annehmen können, wenn der Neigungswinkel kein zu grosser ist. Bei sehr steilen Dächern, insbesondere bei Kirchthürmen, wird man einen Schneedruck überhaupt nicht annehmen.

Man wird auch hier, wie bei der Verkehrsbelastung der Brücken, die ungünstigste Belastungsweise zu bestimmen haben, da der Schnee durch allmäliges Abschaufeln, durch Wehen und Abthauen eine verschiedene Lage annehmen kann. Bei Satteldächern hat man in der Regel nur halbe Belastung und totale Belastung als mögliche Belastungsfälle vorausgesetzt. Mehrfach hat man, namentlich bei komplizirteren Dachformen, unter allen denkbaren Belastungsfällen die ungünstigste gewählt.

Bei Brücken pflegt man den Schnee gar nicht zu berücksichtigen, weil auf denselben der Schnee gewöhnlich oft beseitigt wird, und bei starker Schneedecke kein sehr dichtes Menschen- und Wagengedränge möglich ist. Nur bei Drehbrücken kann in geöffnetem Zustande, jenachdem derselbe mehr oder minder lange Zeit anzudauern pflegt, eine mehr oder weniger dicke Schneedecke entstehen.

§. 10. Winddruck. Der grösste Winddruck w_0 auf eine zur Windrichtung senkrechte ebene Fläche wird bei uns zu

$w_0 = 0,10$ bis $0,27$ Ton. pro Met.

angenommen. Bei Dächern in geschützter Lage nimmt man bei uns $w_0 = 0,10$ bis $0,12$ an. Bei Brücken und Thürmen, die dem Winde mehr ausgesetzt zu sein pflegen, ist je nach der Lage $w_0 = 0,12$ bis $0,25$ anzunehmen. Bei Brücken über Thäler wird man den Winddruck senkrecht zum Thale hinsichtlich der durch die Thalwände geschützten Pfeiler im Allgemeinen kleiner annehmen können, als in Richtung des

Thales. Wenn die Brücke mit einem Zuge besetzt ist, wird man w_0 nicht grösser als **0,15** Ton. pro \square Met. anzunehmen brauchen, da ein stärkerer Winddruck die Wagen umwerfen würde.

Als vom Winde getroffene Fläche einer Brücke nimmt man am besten die Projektionsfläche an, welche sich ergibt, wenn man sich die einzelnen Träger der Brücke etwas gegen einander verschoben denkt, um dadurch einer etwas schiefen Richtung des Windes Rechnung zu tragen. Bei gegliederten Trägern ist hiernach die Fläche, welche zwei Träger bieten, ungefähr **1,6** von der Fläche eines Trägers und **0,50** bis **0,65** von der vollen Fläche eines Trägers. Zu genaueren Regeln kann man nur durch Versuche, die bis jetzt noch nicht in hinreichendem Masse angestellt sind, gelangen.

Die Wagen, sowohl Eisenbahn- als Strassenwagen, bieten dem Winde ungefähr eine Fläche von **3,2** \square Met. pro Meter, wenn die Bahn oben liegt. Bei tiefer liegender Bahn ist zu berücksichtigen, dass ein Theil der Wagenfläche von dem davor stehenden Träger verdeckt wird. Unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Winddruckes und der Vertikalbelastung kann die Beanspruchung möglicherweise grösser werden, wenn die Wagen möglichst leicht angenommen werden. Bei normalspurigen Eisenbahnen kann man die leeren geschlossenen Güterwagen mit etwa **0,7** Ton. pro lauf. Met. bemessen.

Bei Dächern ergibt sich theoretisch der normal zur Dachfläche gerichtete und für die statische Berechnung massgebende Winddruck w pro Flächeneinheit nach der Regel

$$w = w_0 \sin^2 (\alpha + \beta),$$

wenn α den Neigungswinkel des Daches, β den Neigungswinkel des Windes gegen die Horizontalfläche bedeutet, wobei man β zu etwa 10 Grad oder $\tan \beta$ zu etwa $\frac{1}{6}$ annimmt. Stellt in Fig. 6 BB die Dachfläche, CA die Windrichtung dar,

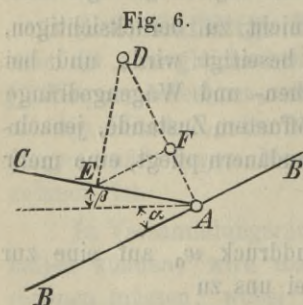


Fig. 6.

so mache man auf der Normalen zu BB $AD = w_0$, falle von D auf AC die Senkrechte DE und von E auf AD die Senkrechte AF ; alsdann ist, wie ohne Weiters zu übersehen ist, $AF = w_0 \sin^2 \angle CAB = w_0 \sin^2 (\alpha + \beta) = w$. Den gemachten Versuchen zu Folge gibt indess die Regel keine sehr gute Uebereinstimmung.

Weiteres hinsichtlich des Winddruckes siehe in des Verfassers: Vorträge über Brückenbau, Eiserne Brücken, Querkonstruktionen, II. Aufl., Wien 1884, S. 308–316.

§. 11. Andere äussere Kräfte. Ausser den besprochenen äusseren Kräften können auf die Baukonstruktionen noch die folgenden Kräfte wirken:

1. Seitendrucke der Wagen in Folge unregelmässiger Bewegung. Hinsichtlich dieser Kräfte, welche insbesondere bei der Berechnung der Wind- und Querverstrebungen in Betracht kommen, ist man noch sehr im Unklaren. Um einigermaßen diesen Seitendrücken Rechnung zu tragen, pflege ich an jeder Achse der Lokomotive einen Seitendruck anzunehmen, welcher gleich $0,08$ des Achsendruckes ist, wobei nur eine Lokomotive vorausgesetzt wird; Seitendrucke am Tender und den Wagen werden als sich gegenseitig aufhebend vorausgesetzt. Bei grösserer Spannweite genügt es, bei Berechnung der Windverstrebungen an der ungünstigsten Stelle eine Einzelkraft anzunehmen, welche gleich $0,08$ des Lokomotivgewichtes ist¹⁾.

2. Centrifugalkraft bei Eisenbahnbrücken mit in der Kurve liegender Bahn. Wenn sowohl die Vertikalbelastung, als die Centrifugalkraft eine Beanspruchung erzeugt, können hierbei sowohl Schnellzüge, als die wesentlich langsamer fahrenden, aber schwereren Güterzüge in Betracht kommen. Bei einer Windverstrebung, welche nur durch Horizontalkräfte beansprucht wird, kommt allerdings nur der Schnellzug in Betracht. Die Centrifugalkraft C für eine Achse mit dem Achsdrucke G ist

$$C = \frac{Gv^2}{gr},$$

wenn r den Radius, v die Geschwindigkeit, g die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Für v ist natürlich die in der betreffenden Strecke zulässige Maximalgeschwindigkeit zu setzen. Beispielsweise wird, wenn man für Schnellzüge $v = 18$, für Güterzüge $v = 10$ annimmt, und $g = 9,81$ setzt, bezüglich $C = \frac{33}{r} G$ und $C = \frac{10}{r} G$.

Bei den Lokomotiven und Tendern wird man am besten an jeder Achse eine Centrifugalkraft annehmen; bei den Wagen dagegen kann man sich die Centrifugalkraft gleichmässig vertheilt denken und im Maximum die Last für Personenzüge $1,5$, für Güterzüge $2,7$ Ton. pro Met. eines Gleises annehmen. Wenn gleichzeitig der Winddruck bei minimaler Vertikalbelastung, also leeren Wagen in Betracht kommt, kann man im Minimum die Last für Personenzüge $0,8$, für Güterzüge $0,7$ Ton. pro Met. eines Gleises annehmen.

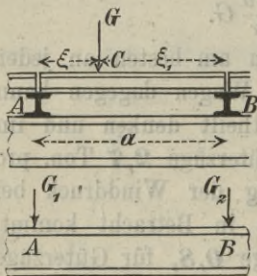
3. Wasserdruck. Der bei Aquädukten und Quaimauern als äussere Kraft in Betracht kommende Wasserdruck ist nach bekannten hydrostatischen Gesetzen leicht zu bestimmen.

4. Erddruck, welcher insbesondere bei Futtermauern, gewölbten Brücken und Tunneln in Betracht kommt. Wir betrachten die Bestimmung desselben als einen speziellen Theil der Statik der Baukonstruktionen und verzichten deshalb hier auf bestimmte Angaben.

¹⁾ Siehe des Verfassers Vorträge über Brückenbau, Eiserne Brücken, Querkonstruktionen, II. Aufl. Wien 1884, §. 149.

§. 12. Unmittelbare und mittelbare Belastung. Wir unterscheiden zwei Arten der Uebertragung der Belastung auf den Träger, nämlich die unmittelbare (direkte) Belastung, bei welcher die Belastung auf jeden beliebigen Punkt des Trägers wirken kann und die mittelbare (indirekte) Belastung, bei welcher sich die Belastung nur an bestimmten Punkten auf den Träger übertragen kann. Bei einem vollwandigen Träger bildet das Eigengewicht des Trägers selbst eine unmittelbare Belastung; das Gewicht der Bahn und die Verkehrslast können unmittelbar oder mittelbar wirken, letzteres dann, wenn die Belastung durch Querträger auf den in Frage stehenden Träger (Hauptträger) übertragen wird. Bei den gegliederten Trägern denkt man sich am besten die einzelnen Stäbe als gewichtslos und ohne Belastung, also die ganze Belastung in den Knotenpunkten wirkend; eine auf den Stab zwischen seinen beiden Enden wirkende Last würde hierbei in zwei auf die beiden die Enden stützenden Knotenpunkte wirkende Seitenkräfte zu zerlegen sein. Man erhält in dieser Weise die Axialspannungen der Stäbe, falls gelenkartige Knotenpunkte vorausgesetzt werden, vollkommen richtig; die zwischen den Enden eines Stabes wirkende Belastung, also auch das Eigengewicht, bringen Schub- und Biegungsspannungen hervor, die erforderlichenfalls besonders zu bestimmen sind, hinsichtlich des Eigengewichtes aber meistens vernachlässigt werden. Bei einem gegliederten Träger wird man es also immer mit mittelbarer Belastung zu thun haben.

Fig. 7.



Wir nehmen an, dass sich die Belastung auf die Querträger durch einfache Zwischenträger übertrage, ebenso, dass die Stäbe eines gegliederten Trägers hinsichtlich der Uebertragung einer Last als einfache Träger anzusehen sind, so dass eine im Abstände ξ und $\xi_1 = a - \xi$ wirkende Last G (Fig. 7) in die beiden Seitenlasten $G_1 = G \frac{\xi_1}{a}$ und $G_2 = G \frac{\xi}{a}$ zu zerlegen sein würde.

Die Lasten, welche nach dieser Zerlegung an den Querträgern oder Knotenpunkten wirken, nennen wir **Knotenlasten**.

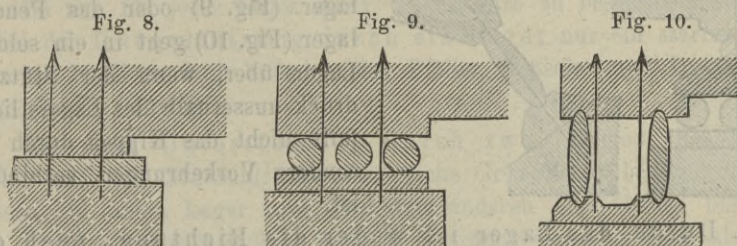
I. Ebene Träger.

II. Kapitel.

Eintheilung der Träger.

§. 13. **Arten der Auflagerung.** Die Belastung eines Trägers bewirkt Gegendrücke (Reaktionen) derjenigen Konstruktionstheile, welche den Träger unterstützen, der Lager; wir nennen dieselben Stützendrücke. Der Stützendruck ist, wie jede Kraft, bekannt, wenn die Richtung, Lage und Grösse desselben oder überhaupt drei auf den Stützendruck bezügliche Grössen, z. B. zwei Komponenten und das statische Moment für einen bestimmten Punkt gegeben sind. Ausser durch die Belastung werden die Stützendrücke namentlich durch die Konstruktion des Lagers bedingt. Wir unterscheiden in dieser Hinsicht die folgenden Konstruktionen:

1. Durch das Lager ist die Richtung des Stützendruckes gegeben. Dies ist der Fall bei einem sogenannten Rollenlager (Fig. 9), bei dem der Stützendruck senkrecht zur Bahn der Rollen ge-



richtet sein muss oder beim Pendellager mit parallelen Stelzen (Fig. 10), bei dem der Druck parallel den beiden Pendeln wirken muss, in beiden Fällen allerdings abgesehen von der geringen hier entstehenden Reibung. Diese Lager gestatten eine freie Verschiebung längs einer Fläche, der Lagerfläche. Beim Gleitlager (Fig. 8); bei welchem bei einer Verschiebung die gleitende Reibung zu überwinden ist, ist die Richtung nach dem Reibungsgesetz nur innerhalb gewisser Grenzen bestimmt.

2. Durch das Lager ist ein Punkt des Stützendruckes, also seine Lage, gegeben. Dies tritt bei einer gelenkartigen Unterstützung oder beim sogenannten Kipplager ein, wenn man von der Reibung, die sich durch Wahl eines möglichst kleinen Durchmessers des Zapfens (Fig. 11) oder durch Anwendung zweier sich mit cylindrischen Flächen gegenseitig abwälzenden Theile (Fig. 12) möglichst herabmindern lässt, absieht; ferner beim Pendellager mit zwei gegen einander

geneigten Stelzen (Fig. 13), bei welchem der Stützendruck durch den Durchschnittpunkt *A* gehen muss. Föppl nennt in seiner „Theorie des Fachwerkes“ (Leipzig 1880) *A* ein imaginäres Gelenk. Diese Lager gestatten eine freie Drehung um einen Punkt, den wir den Lagerpunkt nennen.

Fig. 11.

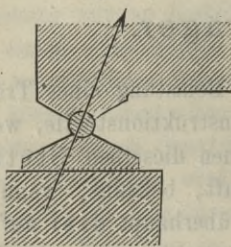


Fig. 12.

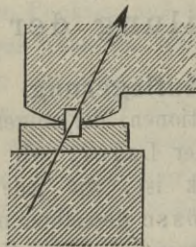
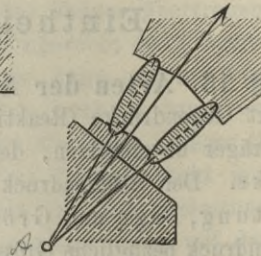


Fig. 13.



3. Durch das Lager ist die Richtung und die Lage des Stützendruckes gegeben. Dies tritt ein bei der Kombination des Rollen- und Kipplagers oder beim Rollen-Kipplager (Fig. 14) und beim Pendellager mit einer Stelze (Fig. 15), zu denen auch pendelnde Säulen und Pfeiler, Seilstücke und Kettenglieder zu rechnen sind. Auch das Walzenlager (Fig. 9) oder das Pendellager (Fig. 10) geht in ein solches Lager über, wenn der Stützendruck ausserhalb des Lagers liegt, falls nicht das Kippen durch besondere Vorkehrungen verhindert ist.

Fig. 14.

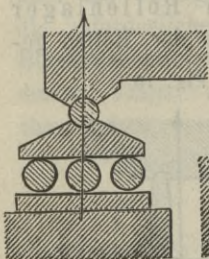
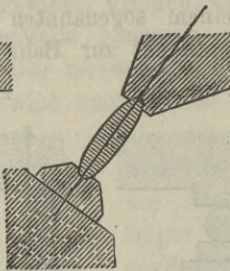


Fig. 15.



4. Durch das Lager ist weder die Richtung, noch die Lage des Stützendruckes gegeben. Dies tritt ein bei einer Berührung in einer Fläche innerhalb gewisser durch die Reibung bedingter Grenzen (Fig. 16), sowie bei starrer Verbindung. In gleicher Weise

Fig. 16.

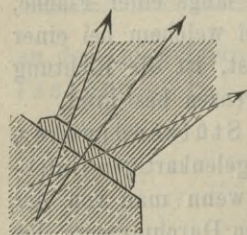
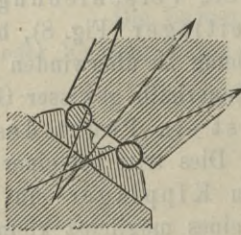


Fig. 17.



Wir wollen diese Konstruktion ein starres Lager nennen.

5. Durch das Lager ist die Grösse des Stützendruckes oder eine Komponente desselben gegeben. Die Grösse des Stützendruckes ist bei allen vorigen Konstruktionen durch die Belastung bestimmt. Durch Anwendung von Federn oder Hilfslasten (Gegengewichten)

ist es indess möglich, die Grösse zweier oder einer Komponente vorzuschreiben. Bisher ist diese Konstruktion, ausser bei der Elbebrücke bei Riesa, wo von Köpcke durch ein Gegengewicht ein bestimmter Horizontalschub erzeugt wurde, noch nicht zur Anwendung gelangt.

In derselben Weise, wie die Träger auf die Pfeiler aufgelagert werden, können auch verschiedene Träger oder Theile eines Trägers gegen einander gestützt werden. Insbesondere findet diejenige Verbindung Anwendung, bei welcher eine bestimmte Lage der von einem Theile auf den anderen ausgeübten Kraft gesichert wird oder die Verbindung durch Gelenke, wozu wir auch die imaginären Gelenke rechnen. Wir nennen Träger dieser Art im Allgemeinen Gelenkträger.

Die Auflagerbedingungen sind am vollständigsten von Föppl (Theorie des Fachwerkes, Leipzig 1880) der Eintheilung der Träger oder der Systemkunde zu Grunde gelegt worden.

§. 14. Bestimmung der Stützendrücke. Bei einem starren Träger, d. h. einem solchen, bei welchem keine Bedingungen für die von einem Theile auf den anderen geäusserte Kraft zu erfüllen sind, namentlich also keine Verbindung durch Gelenke angeordnet ist, sind für die äusseren Kräfte drei Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen.

Da nun für jedes Lager drei Unbekannte zu bestimmen sind, so ist bei der Unterstützung durch ein Lager nur ein starres Lager zulässig. In dieser Lage befinden sich Pfeiler, Konsolen und Drehbrücken in geöffnetem Zustande.

Bei einer Unterstützung durch zwei Lager, bei welcher sechs auf die Stützendrücke bezügliche Grössen zu bestimmen sind, müssen bei einem Lager zwei, bei dem anderen eine Grösse bestimmt sein, damit die Stützendrücke statisch bestimmt sind. Es kann also entweder das eine Lager ein festes Kipplager (Fig. 18) oder ein Walzen-

Fig. 18.

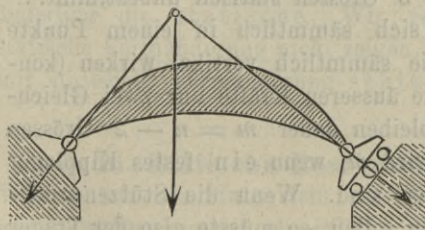
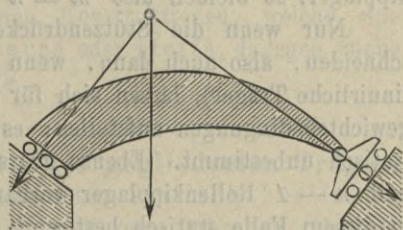


Fig. 19.

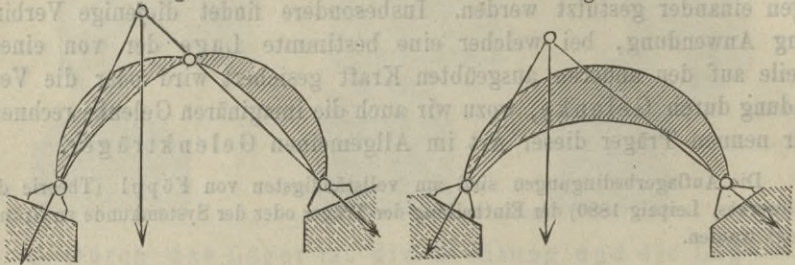


lager (Fig. 19) sein, wenn das andere ein Walzenkipplager ist. Bei Anwendung zweier fester Kipplager müsste der Träger noch ein Gelenk haben, damit die Stützendrücke statisch bestimmt sind; es ist dies beim Dreigelenkträger der Fall (Fig. 20).

Wenn zwei feste Kipplager bei einem Träger ohne Gelenk angewendet werden (Fig. 21), so bleibt eine auf die Stützendrücke bezügliche Grösse statisch unbestimmt. Die Bestimmung dieser Unbekannten muss hier durch das Elastizitätsgesetz erfolgen. Wir nennen einen derartigen Träger einen Zweigelenksträger.

Fig. 20.

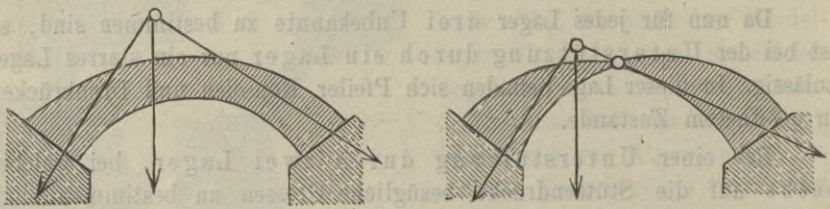
Fig. 21.



Wenn zwei starre Lager angewendet werden, so bleiben drei auf die Stützendrücke bezügliche Grössen unbestimmt (Fig. 23). Nur wenn der Träger ein Gelenk besitzt (Fig. 22), würden sich die statisch unbestimmten Grössen auf zwei einschränken.

Fig. 22.

Fig. 23.



Wenn der Träger durch n Lager unterstützt ist, so sind $3n$ auf die Stützendrücke bezügliche Grössen zu bestimmen, für welche sich drei Gleichgewichtsbedingungen ergeben. Sind sämtliche Lager Walzenkipplager, so bleiben also $m = n - 3$ Grössen statisch unbestimmt.

Nur wenn die Stützendrücke sich sämtlich in einem Punkte schneiden, also auch dann, wenn sie sämtlich vertikal wirken (kontinuierliche Träger), lassen sich für die äusseren Kräfte nur zwei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen; es bleiben daher $m = n - 2$ Grössen statisch unbestimmt. Ebenso gross wird m , wenn ein festes Kipplager und $n - 1$ Rollenkipplager vorhanden sind. Wenn die Stützendrücke in diesem Falle statisch bestimmt sein sollen, so müsste also der Träger $n - 2$ Gelenke haben (kontinuierliche Gelenkträger).

§. 15. Konstruktion des Trägers. Wir können zwei Hauptarten der Konstruktion unterscheiden: 1. Der Träger besteht aus einem einzigen vollen Stücke desselben Materiales oder aus verschiedenen so

mit einander verbundenen Theilen, dass sie hinsichtlich der Beanspruchung als ein einziges Stück angesehen werden könnten. Wir nennen diese Träger, die insbesondere als gegossene und gewalzte Träger, sowie als Blechträger auftreten, vollwandige Träger. 2. Der Träger besteht aus einzelnen an ihren Enden mit einander verbundenen Stäben; wir nennen einen solchen Träger einen gegliederten Träger. Die Verbindungsstellen der einzelnen Stäbe heissen Knoten, geometrisch genommen, Knotenpunkte. Die Knoten können hierbei wieder verschieden konstruirt sein: 1. Die einzelnen an einem Knoten zusammenstossenden Stäbe können sich um eine Axe frei, d. h. ohne Widerstand drehen, wenn man sie am anderen Ende frei macht oder durchschneidet; wir nennen eine solche Verbindung eine gelenkartige und den Knoten einen Gelenkknoten. Die freie Drehung ist allerdings nur ein idealer Zustand, dem man sich durch Verminderung der Reibung mehr oder weniger nähern kann. 2. Die Stäbe sind so mit einander verbunden, dass eine derartige Drehung nicht möglich ist; wir nennen einen solchen Knoten einen starren Knoten. Selbstverständlich kann hierbei an die Stelle der Verbindung zweier Stäbe auch die Herstellung aus dem Ganzen treten.

Natürlich sind auch Träger denkbar und es kommen solche in der That vor, welche aus vollwandigen und gegliederten Theilen zusammengesetzt sind.

Der Träger kann seine Form in doppelter Weise ändern. Zunächst durch die Elastizität der Materialien; wir nennen diese Formänderung die elastische. Bei einem vollwandigen Träger und einem gegliederten Träger mit starren Knoten ist eine andere Formänderung überhaupt nicht denkbar. Bei gegliederten Trägern mit Gelenkknoten ist es aber recht wohl denkbar, dass eine Bewegung bei einer Aenderung der Belastung eintritt, indem bei veränderter Belastung die Form des Trägers nicht mehr den Gleichgewichtsbedingungen entspricht; man nennt diese Formänderung die statische. Wir nennen Konstruktionen, welche eine statische Formänderung nicht zeigen, starre oder steife, dagegen solche mit statischer Formänderung schlaffe.

§. 16. Statische Bestimmtheit der gegliederten Träger.

Wir nennen ein Stabsystem mit Gelenkknoten statisch bestimmt, wenn die Spannungen sämtlicher Stäbe nach rein statischen Gesetzen bestimmbar sind. Die Bedingungen für ein statisch bestimmtes System lassen sich leicht aufstellen. Bezeichnen wir die Anzahl der Knoten mit n , so ist die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen, welche sich für die einzelnen Knoten aufstellen lassen, $= 2n$. Ist m die Anzahl der Stäbe, so hat man zunächst m unbekanntes Stabspannungen zu bestimmen;

ausserdem aber seien u auf die Stützendrücke bezügliche Unbekannte zu bestimmen. Alsdann muss

$$m + u = 2n$$

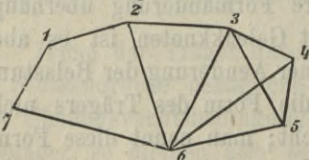
sein. Hierbei richtet sich nach dem oben Gesagten u nach der Konstruktion der Lager. Für die Unterstützung durch ein starres Lager ist $u = 3$. Für ein festes Kipplager und ein Rollenkipplager ist $u = 2 + 1 = 3$. Für zwei feste Kipplager ist $u = 2 + 2 = 4$. Für zwei starre Lager ist $u = 3 + 3 = 6$. Wir haben demnach als Bedingung für das statisch bestimmte System:

- I. Ein Lager oder ein festes und ein Rollenkipplager $m + 3 = 2n$,
- II. Zwei feste Kipplager $m + 4 = 2n$,
- III. Zwei starre Lager $m + 6 = 2n$.

Ist $m + u > 2n$, so nennen wir das System statisch unbestimmt. Ist dagegen $m + u < 2n$, so kann statische Bestimmtheit nur eintreten, wenn noch eine entsprechende Anzahl von Bedingungen hinsichtlich der Form des Stabsystemes hinzukommt. Aus diesem Grunde tritt immer eine Formänderung ein, wenn sich die Belastungsweise ändert. Wir nennen ein solches System, dem vorigen Paragrafe entsprechend, schlaff. Sowohl die statisch bestimmten als statisch unbestimmten Systeme sind starr. Umgekehrt lässt sich hiernach leicht schliessen, dass jedes starre System mit dem Minimum von Stäben statisch bestimmt ist.

Die alleinige Erfüllung der Bedingung $m + u = 2n$ genügt indess für das statisch bestimmte System noch nicht. Es kann diese Bedingung recht wohl erfüllt sein, während ein Theil des Systems schlaff, ein anderer

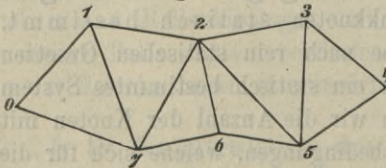
Fig. 24.



statisch unbestimmt ist (Fig. 24). Der statisch unbestimmte Theil $3\ 4\ 5\ 6$ verhält sich hinsichtlich der statischen Formänderung ebenso, als wenn dieser Theil statisch bestimmt wäre. Da aber alsdann im Ganzen zu wenig Stäbe vorhanden sind,

so wird eine statische Formänderung eintreten, das System also als schlaffes gelten müssen. Es dürfen also offenbar keine statisch unbestimmbaren Theile vorkommen. Um die Bedingungen für das statisch bestimmte System vollkommener zu erkennen, wollen wir verschiedene Bildungsweisen solcher Systeme näher untersuchen.

Fig. 25.



verschiedene Bildungsweisen solcher Systeme näher untersuchen.

1. Das Dreieck ist an sich starr.

Wenn man nun einzelne Dreiecke an einander reiht (Fig. 25), so kommen durch jedes neue Dreieck zwei neue Stäbe und ein neuer Knoten hinzu; durch diese beiden Stäbe wird der Knoten unverschieblich bestimmt, es entsteht also hierdurch ein starres,

mithin auch statisch bestimmtes System. Reiht man in dieser Weise s Dreiecke an einander, so wird $m = 3 + 2(s - 1) = 2s + 1$ und $n = 3 + (s - 1) = s + 2$, wonach in der That auch $m + 3 = 2n$ ist, wie es dem Falle *I* entspricht. Diese Bildungsweise ist für die Träger entschieden die wichtigste. Wir nennen ein solches System ein Dreieckssystem. Man kann hierbei zwei Gattungen von Stäben unterscheiden, nämlich die zu einem geschlossenen Polygone vereinigten Umfangsstäbe und die übrigen oder Diagonalstäbe. Bei den Fällen *II* und *III* würden bezüglich 1 und 3 Stäbe fehlen müssen, um das System statisch bestimmt zu machen. Fehlen Umfangsstäbe, so entstehen wirkliche Gelenke; fehlen Diagonalstäbe, so entstehen imaginäre Gelenke.

2. Ein statisch bestimmtes System entsteht, wie sich in ganz gleicher Weise nachweisen lässt, wenn man an ein Dreieck zwei neue Stäbe mit einem neuen Knoten, an zwei beliebige Knoten dieses Systems wieder zwei neue Stäbe mit einem neuen Knoten u. s. f. anschliesst (Fig. 26). Die vorige Bildungsweise ist nur ein spezieller Fall dieser weniger wichtigen Bildungsweise. Fig. 27 bis 29 geben drei Beispiele.

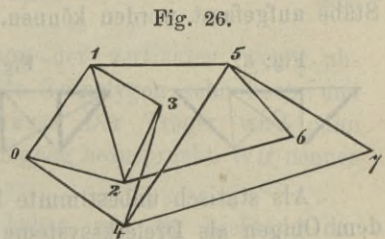


Fig. 26.



Fig. 27.

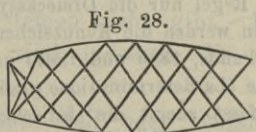


Fig. 28.

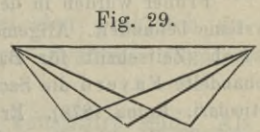


Fig. 29.

3. Wenn man k Scheiben durch s in einer Ebene liegende Stäbe mit einander verbindet, so hat man s unbekannte Spannungen, also mit den drei auf die äusseren Kräfte bezüglichen Grössen $s + 3$ Unbekannte. Da sich für jede Scheibe drei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen lassen, so hat man $3k$ Gleichungen. Für das statisch bestimmte System muss also $s + 3 = 3k$ oder

$$s = 3(k - 1)$$

sein. Das System wird statisch unbestimmt, wenn $s > 3(k - 1)$ ist. Auch einzelne Theile des Systems dürfen nicht statisch unbestimmt sein; je zwei Scheiben dürfen daher durch höchstens $3(2 - 1) = 3$, sich nicht in einem Punkte schneidende, also auch nicht

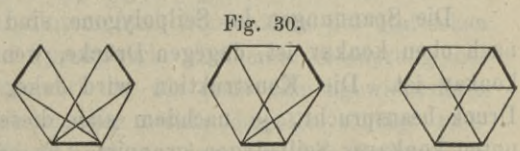


Fig. 30.

sämtlich parallele Stäbe verbunden sein. In dieser Weise lassen sich statisch bestimmte Systeme bilden, indem man statt der Scheiben einzelne

Stäbe oder statisch bestimmte Stabsysteme einführt. So zeigt Fig. 30 die statisch bestimmten Systeme, welche durch Verbindung dreier Stäbe

entstehen können und Fig. 31 die statisch bestimmten Systeme, welche durch Verbindung von drei Dreiecken entstehen können.

Fig. 32 kann als Verbindung von 3 Stäben durch 6 Stäbe oder von 2 Dreiecken durch 3 Stäbe gelten. Fig. 33 lässt sich als Verbindung von 2 Dreiecken und einem Stabe durch $3(3 - 1) = 6$ Stäbe betrachten. Fig. 34 würde als Verbindung von 6 Stäben durch $3(6 - 1) = 15$ Stäbe aufgefasst werden können.

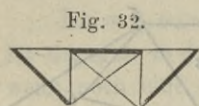


Fig. 32.

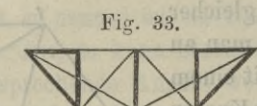
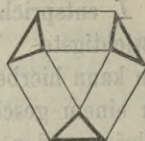


Fig. 33.

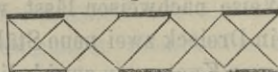


Fig. 34.

Als statisch unbestimmte Systeme kommen hauptsächlich die nach dem Obigen als Dreieckssysteme, aber mit überzähligen Diagonalstäben, gebildeten Systeme in Betracht. Das hauptsächlichste schlaffe System ist das einfache Polygon (Kettenhängewerk).

Früher wurden in der Regel nur die Dreieckssysteme als statisch bestimmte Systeme behandelt. Allgemein werden die Kennzeichen solcher Systeme durch Weyrauch (Zeitschrift für Baukunde, 1880 und 1881) untersucht. Am vollständigsten behandelte Favero die Sache (La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari. Roma 1878). Er fasst zuerst die statischen Systeme als Verbindung von starren Theilen (Scheiben) durch Stäbe auf.

§. 17. Beanspruchungsweise der Träger. Wenn man zwischen den Lasten, mit welchen der Träger belastet ist, Vertikalschnitte durch die Konstruktion legt und die Richtungen der Resultanten der in diesen Schnitten wirkenden Spannungen bestimmt, so bilden diese Richtungen ein den Lasten entsprechendes Seilpolygon. Bei den statisch bestimmten Systemen ist auch das Seilpolygon vollständig bestimmt. Bei den hinsichtlich der Stützdrücke statisch unbestimmten Systemen wird es erst durch das Elastizitätsgesetz bestimmt.

Die Spannungen im Seilpolygone sind Züge, wenn das Seilpolygon nach oben konkav ist, dagegen Drücke, wenn das Seilpolygon nach unten konkav ist. Die Konstruktion wird daher vorzugsweise auf Zug oder Druck beansprucht, je nachdem sich dieselbe um ein nach oben oder unten konkaves Seilpolygon gruppirt. Es entstehen hierdurch die beiden entgegengesetzt beanspruchten Konstruktionen: das Hängewerk (Fig. 35) und das Sprengwerk (Fig. 36).

Die Stützendrücke sind beim Hängewerke schief nach oben und aussen, beim Sprengwerke schief nach oben und innen gerichtet. Ausser den Vertikalreaktionen tritt also hier eine Horizontalreaktion auf, die beim Hängewerk als Horizontalzug, beim Sprengwerke als Horizontaldruck oder Horizontalschub wirkt.

Fig. 35.

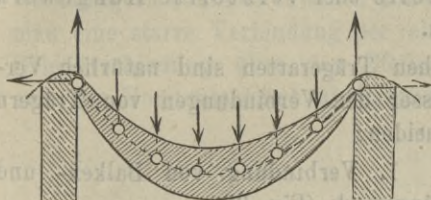
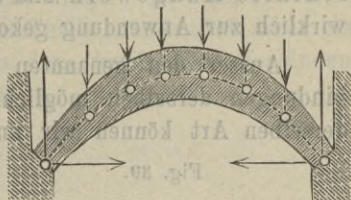


Fig. 36.



Haben beide Stützendrücke eine von der vertikalen wenig abweichende Richtung, so wird das genannte Seilpolygon sehr hoch und tritt also ganz aus der Konstruktion heraus. Der Träger wird dann sowohl auf Zug als auf Druck, das ist auf Biegung beansprucht. Wir nennen einen solchen Träger einen Balkenträger.

Durch die Anordnung der Lager haben wir die Richtung der Stützendrücke und hiermit die Form des Seilpolygons in unserer Gewalt; es wird dadurch möglich, die drei Systeme: Hängewerk, Balken- und Sprengwerk allmählig in einander überzuführen, so dass es bestimmte Grenzen zwischen diesen Systemen nicht gibt. Bei den praktisch angewendeten Konstruktionen sind indessen die drei Systeme ziemlich streng getrennt.

Der Träger selbst kann steif oder schlaff konstruiert sein. Als äusserste Form des schlaffen Trägers kann das Polygonal-Hänge- und Sprengwerk (Fig. 37 und 38) gelten, dessen Form unmittelbar durch

Fig. 37.

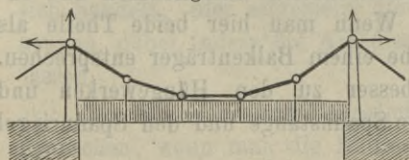
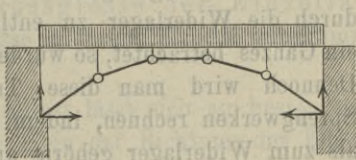


Fig. 38.



das der Belastung entsprechende Seilpolygon gegeben ist. Beim schlaffen Träger besteht ein wesentlicher Unterschied hinsichtlich der statischen Formänderung beim Hänge- und Sprengwerk. Bei einer Aenderung der Belastungsweise geht das Hängewerk in die neue Gleichgewichtsform von selbst über, das Sprengwerk dagegen nicht; dasselbe schlägt vielmehr in die entgegengesetzte Form über, so dass aus dem Sprengwerk ein Hängewerk wird, wenn dies überhaupt möglich ist; sind die Stäbe an den Knoten nicht derart verbunden, dass ein Zug übertragen werden

kann, so stürzt das Sprengwerk zusammen. Das schlaife Sprengwerk kann also nur labiles Gleichgewicht besitzen, während das schlaife Hängewerk stabiles Gleichgewicht besitzt, wie dies auch dem allgemeinen Maupertuis'schen Satze entspricht. Ein schlaifes Sprengwerk ist demnach überhaupt als Träger unbrauchbar. Wohl aber sind das schlaife Hängewerk und das steife oder versteifte Hängewerk wirklich zur Anwendung gekommen.

Ausser den genannten einfachen Trägerarten sind natürlich Verbindungen derselben möglich. Ausser den Verbindungen von Trägern derselben Art können wir unterscheiden:

Fig. 39.

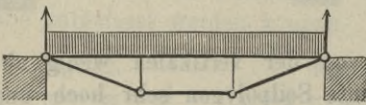


Fig. 40.

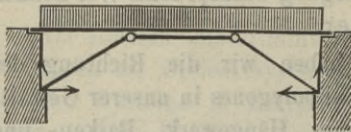
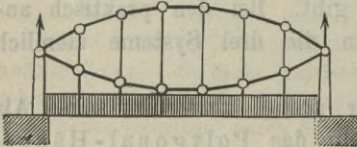


Fig. 41.



1. Verbindung von Balken- und Hängewerk (Fig. 39).

2. Verbindung von Balken- und Sprengwerk (Fig. 40).

3. Verbindung von Hänge- und Sprengwerk (Fig. 41).

Durch die Verbindung mit dem steifen Balkenträger wird auch das schlaife Hänge- und Sprengwerk steif. Bei der Verbindung von Hänge- und Sprengwerk sind eines der Theile oder beide steif zu konstruiren.

Ausser der Verbindung zweier Theile, von denen jeder für sich als Träger wirken kann, kommt die Verbindung eines Trägers mit einem geraden nur auf Zug oder Druck beanspruchten Theile, einer Spannstange oder einem Spannriegel vor,

um die vom Träger geäusserte Horizontalreaktion aufzunehmen und dadurch die Widerlager zu entlasten. Wenn man hier beide Theile als ein Ganzes betrachtet, so würde dasselbe einem Balkenträger entsprechen. Dennoch wird man diese Träger besser zu den Hängewerken und Sprengwerken rechnen, indem man die Spannstange und den Spannriegel als zum Widerlager gehörig ansieht.

§. 18. Eintheilung nach der Anzahl der Oeffnungen. Nach der Anzahl der durch Stützen getrennten Oeffnungen, über welche der Träger zusammenhängend hinwegreicht, unterscheidet man Träger über eine Oeffnung oder Einzelträger (einfache Träger) und Träger über mehrere Oeffnungen oder kontinuierliche Träger. Bei den kontinuierlichen Trägern kann eine starre Verbindung der einzelnen Theile vorhanden sein oder es kann eine Gelenkverbindung vorhanden sein, so dass man wirkliche kontinuierliche Träger und kontinuierliche

Gelenkträger unterscheiden kann. Die kontinuierlichen Träger kommen hauptsächlich nur bei den Balkenträgern vor. Bei den kontinuierlichen Gelenkträgern ordnet man die Gelenke innerhalb der Oeffnungen so an, dass jeder Theil nur durch zwei Punkte unterstützt wird, um den Träger statisch bestimmt zu machen. Auch bei den Hängewerks- und Sprengwerkträgern kommen zuweilen kontinuierliche Träger vor; auch hier findet man eine starre Verbindung der einzelnen Theile, namentlich aber eine Gelenkverbindung über den Pfeilern, so dass durch diese Verbindung nur der Horizontalschub übertragen wird.

III. Kapitel.

Methoden der Einflusslinien.

§. 19. **Bedeutung der Einflusslinie.** Um den Einfluss eines Lastensystemes auf einen beliebig konstruirten Träger zu untersuchen, erscheint es rathsam, zunächst den Einfluss einer einzigen vertikal gerichteten Einzellast in den verschiedenen Lagen, welche dieselbe annehmen kann, zu untersuchen. Man wird sich also eine Einzellast G über den Träger bewegt denken und für jede Lage derselben den Einfluss auf den Träger bestimmen. Dieser Einfluss kann ein sehr verschiedener sein; es kann sich dabei handeln um die von der Last erzeugten Reaktionen nach bestimmten Richtungen, um Transversalkräfte, Momente, Spannungen, Längenänderungen, Verschiebungen von bestimmten Punkten nach bestimmten Richtungen u. s. w. Wir wollen die Grösse, um die es sich handelt, hier allgemein die Einflussgrösse der Einzellast nennen, dabei indess die Art dieser Grösse in diesem Kapitel unbestimmt lassen.

Der Einfluss einer beweglichen Einzellast lässt sich am besten verständlichen, wenn man die Einflussgrösse Y in der Richtung der Einzellast von einer horizontalen Axe aus als Ordinate aufträgt. Die Endpunkte der Ordinaten bilden sodann eine Linie, welche man die Einflusslinie (Influenzlinie, Influenzkurve) nennt. Die von der Einflusslinie und der Axe eingeschlossene Fläche nennen wir die Einflussfigur.

Für die statische Untersuchung von Trägern sind die Einflusslinien im Allgemeinen von ausserordentlichem Werthe, weil aus der Form derselben auch auf den Einfluss eines ganzen Lastensystemes hinsichtlich der gefährlichsten Belastungsweise, der erzeugten Maximalspannungen

u. s. w. geschlossen werden kann und der hierbei auftretende statische Vorgang in übersichtlicher Weise zur Anschauung gelangt.

Die Einflusslinien wurden wohl zuerst vom Verfasser im Jahre 1868 bei der Untersuchung von Bogenträgern angewendet (Zeitschrift des böhmischen Ingen.- u. Arch.-Ver. 1868); sie sind dort „Spannungskurven“ genannt worden. Das Wort Influenzlinie ist zuerst von Weyrauch in seinem Werke: „Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger“, Leipzig 1873, gewählt. In neuerer Zeit sind die Einflusslinien vielfach bei statischen Untersuchungen zur Anwendung gekommen, so in Arbeiten von Fränkel, Krohn, Melan, Schäfer, Steiner, Stelzel, Thullie, Weyrauch u. a.

§. 20. Form der Einflusslinie. Die spezielle Form der Einflusslinie ist je nach der Art des Trägersystemes verschieden; etwas Allgemeines lässt sich nur für statisch bestimmte Systeme sagen.

An jedem Auflager eines Trägers entsteht ein Stützendruck, welcher nur vollständig bestimmt ist, wenn die Richtung, Grösse und Lage oder ein Punkt des Stützendruckes gegeben sind, so dass eine Reaktion durch drei Grössen bestimmt ist. Aus den Gleichgewichtsbedingungen eines Trägers lassen sich unter der Voraussetzung, dass alle Kräfte in einer Ebene wirken, nur drei auf die äusseren Kräfte bezügliche Grössen bestimmen. Bei zwei Auflagern müssen daher an einem Auflager ein Punkt und die Richtung (etwa durch ein Rollenkiplager), an dem anderen ein Punkt oder die Richtung (etwa durch ein Kiplager, bezüglich ein Rollenlager) gegeben sein. Nehmen wir an, es sei beim linken Lager ein Punkt A und die Richtung AE gegeben. Ist nun am rechten Lager ein Punkt B gegeben, so besteht, wenn man den linken Stützendruck mit R , den Abstand der Richtung AE von B mit a , den Abstand der Last G von A mit x und den Horizontalabstand von A und B mit l bezeichnet, die zu erfüllende Beziehung

$$Ra = G(l - x).$$

Bildet R mit der Vertikalen den Winkel α und hat der rechte Stützendruck die Vertikal- und Horizontalkomponente V , H , so ist $V + R \cos \alpha = G$, $H = R \sin \alpha$, mithin

$$V = G \left(1 - \frac{l-x}{a} \cos \alpha \right), \quad H = G \frac{x}{a} \sin \alpha.$$

Ist von dem rechten Stützendruck R_1 die Richtung gegeben, welche mit der Vertikalen den Winkel β bildet, so bestehen die Beziehungen

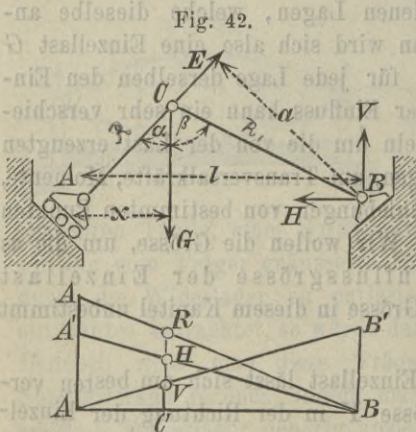


Fig. 42.

$R \cos \alpha + R_1 \cos \beta = G$, $R \sin \alpha = R_1 \sin \beta$ und wenn man den Abstand des rechten Stützdruckes von A mit y bezeichnet, $R_1 y = Gx$, mithin

$$R = \frac{G \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad R_1 = \frac{G \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad y = \frac{x \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

Da diese Anordnung keine gebräuchliche ist und für $\alpha = 0$ überhaupt unmöglich wird, so wollen wir in der Folge auf dieselbe keine weitere Rücksicht nehmen.

In allen Fällen sind hiernach die Stützdrücke, sowie ihre Horizontal- und Vertikalkomponente und ihr Moment für einen bestimmten Punkt in Beziehung auf x vom ersten Grade, die Einflusslinien für diese Grössen sind also Gerade.

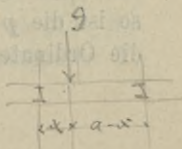
Theilt man den Träger durch einen Schnitt in zwei Theile, so wirkt auf einen der beiden Theile als äussere Kraft nur der Stützdruck, falls nicht durch die Konstruktion selbst die Last G auf beide Theile vertheilt wird; sowohl für diese selbst, als für ihr Moment hinsichtlich eines bestimmten Punktes wird die Einflusslinie eine Gerade.

Souach müssen also die auf einer Seite des Schnittes nach einer bestimmten Richtung wirkende Komponente der äusseren Kraft, sowie das Moment der äusseren Kraft für einen bestimmten Punkt ebenfalls vom ersten Grade sein. Proportional den äusseren Kräften oder ihren Momenten sind aber auch die inneren Spannungen nach bestimmten Richtungen, also sowohl die Normalspannungen, als die Schubspannungen für vollwandige und für statisch bestimmte gegliederte Träger, sobald die bezügliche Spannung durch einen nur drei Stäbe treffenden Schnitt bestimmt werden kann.

Bei Trägern mit statisch bestimmten Stützdrücken sind also die Einflusslinien für die Stützdrücke, für die nach bestimmten Richtungen wirkenden Komponenten der äusseren Kraft, für das Moment derselben in Beziehung auf einen bestimmten Punkt, für die Spannungen in vollwandigen Trägern und in statisch bestimmten gegliederten Trägern gerade Linien.

In dem Falle, dass wir es nicht mit unmittelbarer, sondern mit mittelbarer Belastung zu thun haben, liege bei einem statisch bestimmten oder unbestimmten Systeme die Last G zwischen zwei Querträgern E und F , von denen sie den Horizontalabstand x und $a - x$ hat, alsdann ist der Druck, welcher durch die Querträger E und F auf den in Frage stehenden Träger übertragen wird, bezüglich

$$G \frac{a-x}{a}, \quad G \frac{x}{a}.$$



Ist nun Y_1, Y_2 die Einflussgrösse, wenn dieselbe bezüglich in E und F auf den Träger wirkt, so ist für die Lage der Last G zwischen beiden Querträgern die Einflussgrösse offenbar

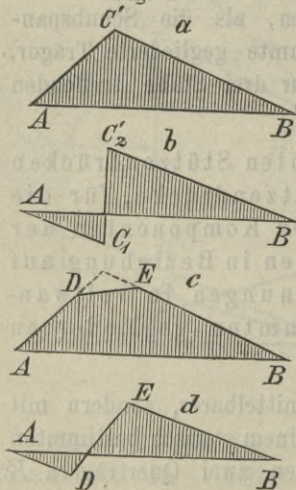
$$Y = Y_1 \frac{a-x}{a} + Y_2 \frac{x}{a}.$$

Somit ist die Einflusslinie zwischen je zwei Querträgern eine gerade Linie. Dies gilt sowohl vom statisch bestimmten, als statisch unbestimmten Systeme.

Bei Stabsystemen mit gelenkartigen Knotenpunkten verhalten sich die einzelnen Stäbe ganz wie die frei aufgelagerten Zwischenträger, die Knotenpunkte also wie die Querträger.

Wenn die Last unmittelbar auf den Träger wirkt, so entstehen in der geraden Einflusslinie da, wo die Last den Schnitt, der der Bestimmung der Spannungen zu Grunde gelegt wird, überschreitet, Brechpunkte (Knicke) oder eine Unterbrechung (Absatz). Sind Querträger vorhanden, so müssen an denjenigen beiden Querträgern, zwischen denen der Schnitt liegt, Brechpunkte (aber keine Unterbrechung) entstehen, weil in dem Momente, wo die Last, von einem Ende anrückend, einen dieser Querträger überschreitet, auf der anderen Seite ausser dem Stützendrucke noch eine durch den Querträger übertragene Komponente der Last G hinzukommt. Zwischen diesen beiden Querträgern ist die Einflusslinie nach dem obigen Satze eine Gerade.

Fig. 43.



Wenn die Last G vertikal über dem Punkte B liegt, durch welchen in Fig. 42 die rechte Reaktion geht, so ist $x = l$, also $R = 0, V = G$. Die Einflusslinie für R und auch für Spannungen, falls die Last auf der rechten Seite des Schnittes liegt, hat also am linken Ende die Ordinate 0. Dasselbe ist für das rechte Ende hinsichtlich der rechten Reaktion und für Spannungen der Fall, falls die Last auf der linken Seite des Schnittes liegt, wenn die Punkte A und B (Fig. 42) in einer Horizontalebene liegen, da alsdann für $x = 0$ auch $V = 0, H = 0$ wird. Bei der gewöhnlichen Auflagerung werden daher die Einflusslinien die in Fig. 43 dargestellten Formen zeigen.

§. 21. Einfluss einer gleichmässigen Belastung. Ist eine unendlich kleine Länge dx mit der Last p pro Längeneinheit belastet, so ist die $p dx$ die an der betreffenden Stelle wirkende Last. Ist nun y die Ordinate der für die Einzellast 1 konstruirten Einflusslinie, so ist

also $p dx \cdot y$ die Einflussgrösse. Sonach ist die von der Belastung einer beliebigen Strecke mit der gleichmässigen Belastung p pro Längeneinheit herrührende Einflussgrösse

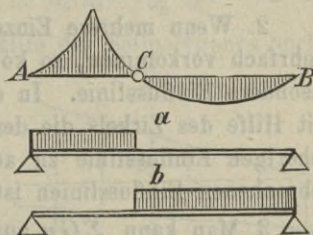
$$Y = p \int y dx = Fp,$$

wenn F die der belasteten Strecke entsprechende Fläche der Einflussfigur bezeichnet. Man erhält also die von einer gleichmässigen Belastung erzeugte Einflussgrösse, wenn man die entsprechende Fläche der Einflussfigur mit der Last pro Längeneinheit multipliziert.

Handelt es sich um den Einfluss einer gänzlichen Belastung des Trägers, so ist natürlich die gesammte Fläche mit der Last pro Längeneinheit zu multiplizieren, wobei natürlich die auf verschiedenen Seiten der Axe liegenden Theile der Einflussfigur mit entgegengesetztem Vorzeichen einzuführen sind.

Der grösstmögliche Einfluss der zufälligen Belastung im bestimmten Sinne entsteht hiernach offenbar, wenn die ganze Strecke belastet ist, in welcher die Einflussgrösse dasselbe Vorzeichen hat. Man erhält daher das positive und negative Maximum der Einflussgrösse, indem man bezüglich den positiven und negativen Theil der Fläche der Einflussfigur mit der Last pro Längeneinheit multipliziert. Die ungünstigste Belastung hinsichtlich des positiven und negativen Maximums ergänzen sich hiernach zur gänzlichen Belastung. Die Durchschnittspunkte C (Fig. 44) der Einflusslinie mit der Axe, welche dem Ende der ungünstigsten Belastung entsprechen, nennt man daher auch die Belastungsscheiden, neutralen Punkte oder Nullpunkte.

Fig. 44.



Anstatt die Einflusslinie für die Last 1 zu konstruieren, kann man dieselbe auch für eine Einzellast konstruieren, welche gleich ist der Last p pro Längeneinheit. In diesem Falle gibt die Fläche der Einflussfigur unmittelbar die Einflussgrösse.

§. 22. Einfluss eines unverrückbaren Systemes von Einzellasten. Die Methode der Einflusslinie hat hauptsächlich nur Werth bei vollständiger oder theilweiser grafischer Bestimmung. Man kann in diesem Falle die folgenden Methoden anwenden.

1. Sind sämmtliche Einzellasten gleich gross, und zwar $= G$, so addirt man die zugehörigen Ordinaten der Einflusslinie mit Hilfe des Zirkels. Wird die Einflusslinie für die Last G konstruirt, so gibt die erhaltene Summe der Ordinaten bereits die gesuchte Einflussgrösse Y .

Sonst muss diese noch durch Rechnung oder Konstruktion mit G multipliziert werden. Sind mehrere verschiedene Einzellasten $G_1, G_2, G_3 \dots$, jede derselben indess mehrfach wiederholt vorhanden, wie dies ja bei den Lastenzügen der Eisenbahn- und Strassenbrücken thatsächlich der Fall ist, so muss die vorige Operation mehrfach wiederholt werden, indem man

$$Y = G_1 \Sigma y_1 + G_2 \Sigma y_2 + \dots$$

setzt. Man kann hier aber auch

$$Y = G_1 \left[\Sigma y_1 + \frac{G_2}{G_1} \Sigma y_2 + \frac{G_3}{G_1} \Sigma y_3 + \dots \right]$$

setzen, wobei man die Multiplikation von $\Sigma y_2, \Sigma y_3 \dots$ mit den Verhältnissen $\frac{G_2}{G_1}, \frac{G_3}{G_1} \dots$ grafisch¹⁾ mit Hilfe des Reduktionswinkels ausführt, so dass die ganze in der Klammer stehende Summe grafisch gebildet werden kann. Die im Allgemeinen noch erforderliche Multiplikation von G_1 entfällt hierbei, wenn die Einflusslinie nicht für die Last 1, sondern für die Last G_1 konstruiert wird.

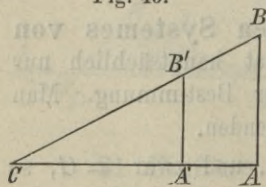
Bei gerader Einflusslinie kann eine Vereinfachung dann eintreten, wenn die n gleichen Lasten symmetrisch liegen; alsdann ist nämlich Σy gleich der n -fachen der Symmetrieaxe entsprechenden Ordinate.

2. Wenn mehrere Einzellasten $G_1, G_2, G_3 \dots$, jede derselben aber mehrfach vorkommen, so konstruiert man für jede der Einzellasten eine besondere Einflusslinie. In diesem Falle hat man natürlich nur nöthig, mit Hilfe des Zirkels die den Lasten entsprechenden Ordinaten der zugehörigen Einflusslinie zu addiren. Bei krummlinigen oder mehrfach gebrochenen Einflusslinien ist indess die vorige Methode bequemer.

3. Man kann $\Sigma G y$ auffassen als die Summe der Momente, die in Beziehung auf die Axe der Einflusslinie entstehen, wenn man sich die Lasten G am Ende der zugehörigen Ordinaten parallel zur Axe wirkend denkt. Konstruiert man nun das zugehörige Seilpolygon (Fig. 46), so

¹⁾ Die Multiplikation einer Linie y mit dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ lässt sich bekanntlich unter Benützung der Sätze von ähnlichen Dreiecken in verschiedener Weise durchführen. Wenn die Multiplikation mit demselben

Fig. 45.



Verhältnisse häufig vorkommt und $b > a$ ist, so ist die folgende Methode besonders bequem. Man konstruiert das rechtwinklige Dreieck ABC (Fig. 45) so, dass sich eine Kathete BA zur Hypotenuse CB wie $a : b$ verhält. Macht man nun $CB' = y$ und $B'A'$ senkrecht auf CA , so ist $A'B' = \frac{a}{b} y$. Diese Methode ist deshalb bequem,

weil die Länge von $B'A'$ mit dem Zirkel genau abgegriffen werden kann (indem man die eine Spitze in B' einsetzt und die andere so einstellt, dass eine aus B' geschlagener Kreis die Gerade CA tangirt), ohne die Gerade $B'A'$ selbst zu zeichnen.

ist $Y = \Sigma G y$ bekanntlich gleich dem Produkte aus der Polweite H und der zwischen den äussersten Seiten des Seilpolygones liegenden Strecke DE der Axe.

Wählt man $H=1$ (gleich der Kräfteinheit), so ist DE selbst $= Y$.

4. Ist die Einflusslinie eine Gerade, welche gegen die Axe unter dem Winkel α geneigt ist (Fig. 47) und sind x_1, x_2, \dots die Abstände der Lasten G_1, G_2, \dots vom Durchschnittspunkte O ,

so ist $y_1 = x_1 \tan \alpha, y_2 = x_2 \tan \alpha$, also

$$Y = \tan \alpha \Sigma G x.$$

Ist x_0 der Abstand des Mittelpunktes (Schwerpunktes) sämtlicher Lasten von O , so ist $\Sigma G x = x_0 \Sigma G$, also

$$Y = x_0 \tan \alpha \cdot \Sigma G = y_0 \Sigma G,$$

wenn y_0 die dem Mittelpunkte entsprechende Ordinate der Einflusslinie bezeichnet. Die

Lage des Mittelpunktes aber lässt sich mit Hilfe des Seilpolygones leicht

in bekannter Weise ermitteln. Man kann also auch das Moment $\Sigma G x$ grafisch bestimmen. Legt man durch O eine Vertikale, welche die äussersten Seilpolygonseiten in C und D schneidet (Fig. 48), so ist, wenn H die Polweite bezeichnet, $\Sigma G x = H \cdot CD$, also

$$Y = H \tan \alpha \cdot CD.$$

Legt man durch C eine Normale zur Einflusslinie, welche die durch D gelegte Horizontale in E schneidet, so ist $DE = CD \cdot \tan \alpha$, also $Y = H \cdot DE$, und, wenn man $H = 1$ wählt, $Y = DE$.

Fig. 46.

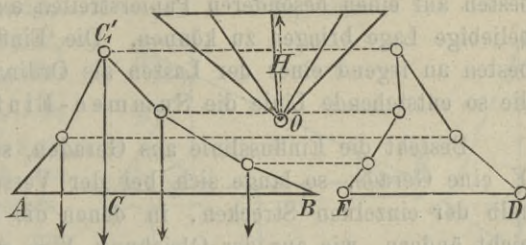


Fig. 47.

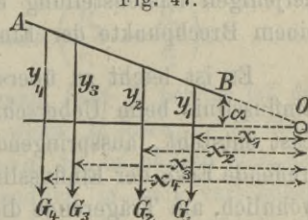
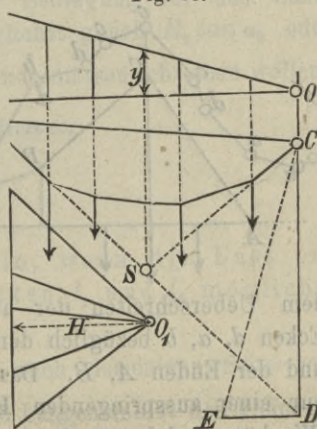


Fig. 48.



§. 23. Einfluss eines verschiebbaren Systemes von Einzellasten.

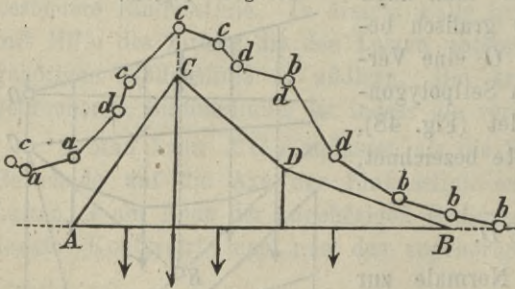
Hier wird es sich in der Regel darum handeln, die ungünstigste Stellung des Lastensystemes, bei welcher also die Einflussgrösse Y ein Maximum wird, zu bestimmen. Im Allgemeinen wird man diese Lage durch Probiren ermitteln müssen, indem man Y für verschiedene Lagen des Lastensystemes bestimmt. Für die Summierung der

Ordinaten mit Hilfe des Zirkels erscheint es hier rathsam, die Zeichnung auf vertikal liniirtem Papiere zu machen oder die Zeichnung mit einer vertikalen Bleistiftschraffur zu versehen. Den Lastenzug trägt man am besten auf einen besonderen Papierstreifen auf, um denselben leicht in beliebige Lage bringen zu können. Die Einflussgrösse Y wird man am besten an irgend einer der Lasten als Ordinate auftragen; wir nennen die so entstehende Linie die Summen-Einflusslinie.

Besteht die Einflusslinie aus Geraden, so bleibt auch die Linie für Y eine Gerade, so lange sich bei der Verschiebung die Lasten innerhalb der einzelnen Strecken, in denen die Einflusslinie geradlinig ist, nicht ändern, wie aus der Gleichung $Y = x_0 \tan \alpha \Sigma G$, in welcher bei der Verschiebung nur x_0 variabel ist, leicht hervorgeht. Demnach wird sich die Linie für Y als eine gebrochene Linie darstellen, deren Ecken derjenigen Lastenstellung entsprechen, bei welcher eine Einzellast an einem Brechpunkte der Einflusslinie oder an einem Trägerende liegt.

Es ist leicht zu übersehen, dass die Ecke, welche in der Summen-Einflusslinie beim Ueberschreiten einer Ecke der Einflusslinie durch eine Last entsteht, ausspringend oder einspringend ist, je nachdem die betreffende Ecke der Einflusslinie aus- oder einspringend ist. Wenn, wie gewöhnlich, am Trägerende die Ordinate der Einflusslinie gleich Null ist, so entspricht das Ende einer einspringenden Ecke, da man sich die Axe als

Fig. 49.



Teil der Einflusslinie nach aussen fortgesetzt denken kann; es wird also auch beim Ueberschreiten eines Trägerendes durch eine Last eine einspringende Ecke der Summen-Einflusslinie entstehen. So entsprechen in Fig. 49 die ausspringenden Ecken c

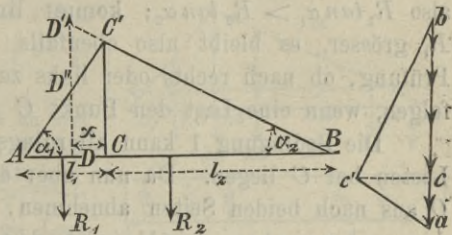
dem Ueberschreiten der ausspringenden Ecke C , die einspringenden Ecken d , a , b bezüglich dem Ueberschreiten der einspringenden Ecke D und der Enden A , B . Das Maximum der Einflussgrösse kann offenbar nur einer ausspringenden Ecke der Summen-Einflusslinie entsprechen. Wir können daher auch sagen: Das Maximum der Einflussgrösse Y tritt ein, wenn eine Einzellast an einer ausspringenden Ecke der Einflusslinie liegt.

Es kann allerdings zufällig der Fall eintreten, dass das Maximum von Y einer zur Axe parallelen Seite der Summen-Einflusslinie entspricht. In diesem Falle ist die Lage des Lastensystemes für das Maximum von Y innerhalb gewisser Grenzen gleichgiltig.

§. 24. Ungünstigste Belastung bei dreieckiger Einflussfigur.

Die Einflussfigur habe die dreieckige Form $A C' B$ (Fig. 50) und es sei $AC = l_1$, $BC = l_2$, $AB = l$, $CC' = h$. Die innerhalb der Strecken AC und BC liegenden Lasten mögen die Resultanten R_1 und R_2 haben, deren Angriffspunkten die Ordinaten y_1 , y_2 entsprechen, so dass $Y = R_1 y_1 + R_2 y_2$ ist. Verschiebt sich das Lastensystem um e nach rechts, so ändert sich y_1 und y_2 um bezüglich $+ e R_1 \tan \alpha_1$ und $- e R_2 \tan \alpha_2$, wenn $\angle C'AC = \alpha_1$, $\angle C'BC = \alpha_2$ gesetzt wird; die Aenderung von Y ist demnach

Fig. 50.



$$\Delta Y = e (R_1 \tan \alpha_1 - R_2 \tan \alpha_2) = e h \left(\frac{R_1}{l_1} - \frac{R_2}{l_2} \right).$$

Damit Y möglichst gross werde, wird man, falls Y positiv ist, das Lastensystem nach rechts schieben müssen, wenn $R_1 \tan \alpha_1 > R_2 \tan \alpha_2$ ist. Hierdurch nimmt $R_1 \tan \alpha_1$ ab und $R_2 \tan \alpha_2$ zu, es nähern sich also $R_1 \tan \alpha_1$ und $R_2 \tan \alpha_2$ immer mehr. Ist endlich so weit verschoben, dass $R_1 \tan \alpha_1 < R_2 \tan \alpha_2$, dann würde Y nicht mehr zu-, sondern abnehmen, man darf dann also nicht weiter nach rechts verschieben, muss vielmehr jetzt nach links verschieben. Die Bedingung für das Maximum von Y ist also, dass $R_1 \tan \alpha_1$ möglichst gleich $R_2 \tan \alpha_2$ oder $\frac{R_1}{l_1}$ möglichst gleich $\frac{R_2}{l_2}$ werde, was wir folgendermassen schreiben wollen:

$$1. \quad R_1 \tan \alpha_1 \asymp R_2 \tan \alpha_2$$

oder

$$2. \quad \frac{R_1}{l_1} \asymp \frac{R_2}{l_2}$$

oder: Das Maximum von Y tritt ein, wenn die Last pro Längeneinheit in den beiden Strecken l_1 und l_2 möglichst gleich ist.

Es muss hiernach das Lastensystem nach derjenigen Seite verschoben werden, in welcher die Last $\frac{R}{l}$ pro Längeneinheit den kleineren Werth hat. Bei diesem Verschieben kommt eine Last G nach C ; schiebt man das System noch weiter und ergibt sich dann, dass man das Lastensystem nach der anderen Seite schieben muss, so kommt die Last G offenbar nach C zu liegen; das Maximum von Y tritt also ein, wenn eine Last in C liegt, wie wir bereits im vorigen Paragrafe gesehen haben. Nur wenn zufällig genau $R_1 \tan \alpha_1 = R_2 \tan \alpha_2$ ist, ist die Lage des Systems gleichgiltig.

Die Verschiebung nach rechts oder links, jenachdem $R_1 \tan \alpha_1 \geq R_2 \tan \alpha_2$ hat zu erfolgen, auch wenn dabei eine Last vom Träger abläuft oder eine neue hinzukommt. Denn ist $R_1 \tan \alpha_1 > R_2 \tan \alpha_2$, so ist nach rechts zu verschieben; läuft die letzte Last rechts ab, so wird R_2 kleiner, es bleibt also $R_1 \tan \alpha_1 > R_2 \tan \alpha_2$; kommt links eine neue Last hinzu, so wird R_1 grösser, es bleibt also ebenfalls $R_1 \tan \alpha_1 > R_2 \tan \alpha_2$. Eine neue Prüfung, ob nach rechts oder links zu schieben ist, hat also nur zu erfolgen, wenn eine Last den Punkt C überschritten hat.

Die Bedingung 1 kann allerdings erfüllt werden, wenn verschiedene Lasten bei C liegen. Da nun aber die Ordinaten der Influenzlinie von O aus nach beiden Seiten abnehmen, so werden jedenfalls bei C die schwersten, vielleicht dichtesten Lasten konzentriert sein müssen.

Die Ungleichung 1 lässt sich auch schreiben:

$$3. \quad \frac{R_1}{R_2} \asymp \frac{l_1}{l_2}.$$

Theilt man hiernach die Gerade ab , welche der innerhalb AB liegenden Last $R_1 + R_2$ entspricht, im Punkte c in dem Verhältnisse $ac : bc = l_1 : l_2$, so muss diejenige Last G , welcher der Theilpunkt c angehört, bei C liegen. Denn liegt G links, so ist nach rechts zu schieben, weil alsdann $\frac{R_1}{R_2} > \frac{l_1}{l_2}$ ist; liegt G dagegen rechts, so ist nach links zu schieben, weil alsdann $\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2}$ ist. Die Theilung von ab in dem Verhältnisse $l_1 : l_2$ kann in verschiedener Weise erfolgen, z. B. dadurch, dass man durch a und b Normalen zu den Geraden AC und BC zieht, welche sich in c' schneiden; c liegt alsdann in der durch c' gehenden Horizontalen; die Höhe CC' der Einflusslinie $AC'B$ ist dabei vollkommen gleichgiltig.

Ehe man weiss, welche Last bei C liegen muss, kann man natürlich im Allgemeinen auch nicht bestimmt wissen, welche Lasten überhaupt auf den Träger fallen; man muss also vorläufig die ungünstigste Lage schätzungsweise annehmen; hat man unter der Voraussetzung dieser vorläufig angenommenen Belastung die bei C liegende Last bestimmt, so muss man natürlich untersuchen, ob jetzt nicht einzelne Lasten hinzukommen oder wegfallen; erforderlichenfalls hat man die Untersuchung von Neuem zu machen.

Beispiel. Es sei folgende Belastung gegeben:

Last Nr.	I	II	III	IV	V	VI	
Druck	12	13	12	9	9	9	Tonnen.
Abstand	1,3	1,3	4,0	1,5	1,5	1,5	Meter.

Es sei $l_1 = 3,0^m$, $l_2 = 7,0^m$. Legen wir die I Last nach l_1 , so können nur die Lasten II , III , IV , V in l_2 liegen. Es wird $\frac{R_1}{l_1} = \frac{12}{3} = 4,0$, $\frac{R_2}{l_2} = \frac{43}{7} = 6,1$, so dass nach links geschoben werden muss. Liegen jetzt I und II in l_1 , so können

zunächst die Lasten *III*, *IV*, *V* in l_2 liegen und es wird $\frac{R_1}{l_1} = \frac{25}{3} = 8,3$, $\frac{R_2}{l_2} = \frac{30}{7} = 4,3$, so dass jetzt nach rechts geschoben werden muss, es muss also die Last *II* bei *C* liegen (Fig. 51). Für diese Lage wird, wenn die Höhe des Dreiecks = 1 ist, $Y = 12 \cdot \frac{1,7}{3} + 13 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{5,7}{7} + 9 \cdot \frac{1,7}{7} + 9 \cdot \frac{0,2}{7} = 32,02$.

Nimmt man den Zug umgekehrt an und legt die Last *VI* nach l_1 , die Lasten *V*, *IV*, *III* *II* nach l_2 , so wird $\frac{R_1}{l_1} = \frac{9}{3} = 3,0$, $\frac{R_2}{l_2} = \frac{43}{7} = 6,1$, so dass nach links geschoben werden muss. Legt

man jetzt *VI* und *V* nach l_1 , *IV*, *III*, *II* nach l_2 , so wird $\frac{R_1}{l_1} = \frac{18}{3} = 6,0$, $\frac{R_2}{l_2} = \frac{34}{7} = 4,9$, so dass jetzt nach rechts verschoben werden muss. Es muss also die Last *V* nach *C* gelegt werden (Fig. 52).

Jedoch gibt diese Belastung kleinerer Werthe für *Y*, als die vorige Belastung, da bei *C* nicht nur kleinere Lasten, sondern auch Lasten mit grösserem Abstände liegen; die Rechnung gibt $Y = 9 \cdot \frac{1,5}{3} + 9 \cdot 1 + 9 \cdot \frac{5,5}{7} + 12 \cdot \frac{1,5}{7} + 13 \cdot \frac{0,2}{7} = 23,51$.

Um den Belastungszug gegen den Träger oder die Einflusslinie leicht in verschiedene Lagen bringen zu können, trägt man denselben, wie schon oben bemerkt, am besten auf einen besonderen verschiebbaren Papierstreifen (Fig. 51*b*), den wir Lastenstreifen nennen, auf und zwar so, dass man durch Umdrehen des Papierstreifens den Zug auch in der entgegengesetzten Richtung anlegen kann.

§. 25. Ungünstigste Belastung für das abgestumpfte Dreieck.

Das Dreieck *AC'B* (Fig. 53) sei durch die Seite *D'E'* abgestumpft und es sei die Projektion von *D'E'*, *D'C'*, *E'C'* auf die Axe *AB* bezüglich a , a_1 , a_2 . Die Resultanten der in den Strecken *AD*, *DE*, *EB* liegenden Lasten seien R_1 , R , R_2 , die Neigungswinkel der Seiten *AD'*, *D'E'*, *E'B* gegen *AB* bezüglich α_1 , α , α_2 . Bei einer Verschiebung des Lastensystems um e nach rechts wird alsdann die Aenderung von *Y*

$$\Delta Y = e [R_1 \tan \alpha_1 + R \tan \alpha - R_2 \tan \alpha_2].$$

Setzt man $CC' = h$, $DD' = h_1$, $EE' = h_2$, so wird $h_1 = h \left(1 - \frac{a_1}{l_1}\right)$,

$h_2 = h \left(1 - \frac{a_2}{l_2}\right)$, $\tan \alpha = \frac{h_2 - h_1}{a} = \frac{h}{a} \left(\frac{a_1}{l_1} - \frac{a_2}{l_2}\right)$, $\tan \alpha_1 = \frac{h}{l_1}$, $\tan \alpha_2 = \frac{h}{l_2}$,

mithin

Fig. 51.

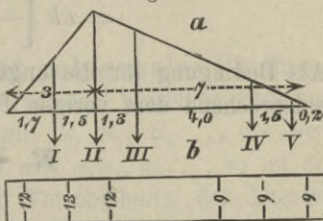


Fig. 52.

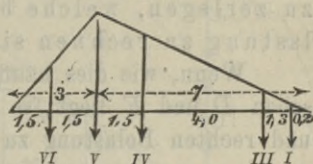
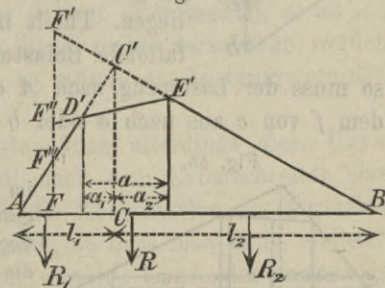


Fig. 53.



$$\begin{aligned} \Delta Y &= eh \left[\frac{R_1}{l_1} + \frac{R}{a} \left(\frac{a_1}{l_1} - \frac{a_2}{l_2} \right) + \frac{R_2}{l_2} \right] \\ &= eh \left[\frac{R_1 + R \frac{a_1}{a}}{l_1} - \frac{R_2 + R \frac{a_2}{a}}{l_2} \right], \end{aligned}$$

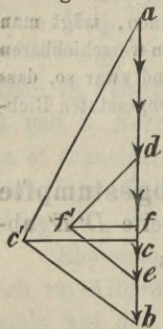
Als Bedingung für die ungünstigste Belastung ergibt sich hiernach ganz entsprechend dem vorigen Paragrafe:

$$4. \quad \frac{R_1 + R \frac{a_1}{a}}{l_1} \asymp \frac{R_2 + R \frac{a_2}{a}}{l_2}.$$

Das Maximum von Y tritt also wieder ein, wenn die Last pro Längeneinheit in den beiden Strecken l_1, l_2 möglichst gleich ist; hierbei ist aber die zwischen D und E liegende Last R nach dem Verhältnisse $a_1 : a_2$ in zwei Theile zu zerlegen, welche bezüglich zur linken und rechten Belastung zu rechnen sind.

Wenn, wie dies häufig vorkommt, der Punkt C in der Mitte zwischen D und E liegt, so ist demnach die Hälfte von R je zur linken und rechten Belastung zu rechnen.

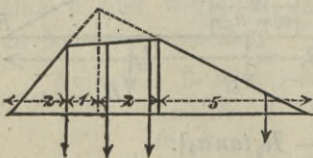
Fig. 54.



Je nachdem nun die linke oder rechte Last pro Längeneinheit die kleinere ist, muss der Lastenzug nach links oder rechts geschoben werden, wodurch sich entscheidet, ob eine Last bei D oder E liegen muss. Die im vorigen Paragrafe gezeigte grafische Bestimmung lässt sich auch auf den vorliegenden Fall ausdehnen. Theilt man die auf den Träger fallende Belastung ab (Fig. 54) in c in dem Verhältnisse $l_1 : l_2$, so muss diejenige Last, in welcher c liegt, in dem fraglichen Fache liegen. Theilt man nun noch die in das fragliche Fach fallende Belastung de in f in dem Verhältnisse $a_1 : a_2$,

so muss der Lastenzug nach A oder B hin geschoben werden, je nachdem f von c aus nach a oder b hin liegt.

Fig. 55.



Beispiel. Wir wählen dasselbe Beispiel wie im vorigen Paragrafe; nur sei das Dreieck abgestumpft mit $a_1 = 1^m, a_2 = 2^m, a = 3^m$ (Fig. 55). Legen wir zuerst die Lasten I und II nach DE , die Lasten III, IV nach EB , so wirkt pro Längeneinheit links $\frac{0,33(12 + 13)}{3} = 2,8$, rechts

$$\frac{0,67(12 + 13) + 12 + 9}{7} = 5,4; \text{ es muss also nach links geschoben werden. Legen}$$

$$\text{wir jetzt I, II, III nach DE, IV nach EB, so wirkt pro Längeneinheit links } \frac{0,33(12 + 13 + 12)}{3} = 4,1, \text{ rechts } \frac{0,67(12 + 13 + 12) + 9}{7} = 4,8, \text{ es muss also}$$

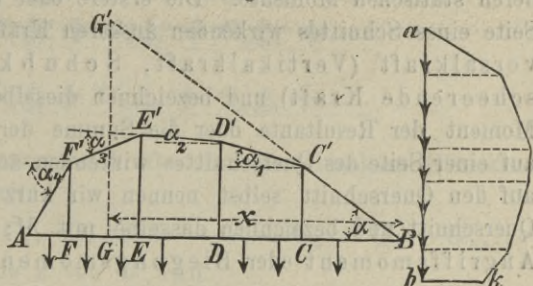
nochmals nach links geschoben werden. Legen wir nun I nach AD , II und III nach DE , IV nach EB , so wirkt pro Längeneinheit links $\frac{12 + 0,33(13 + 12)}{3} = 6,8$, rechts $\frac{0,67(13 + 12) + 9}{7} = 3,7$; es muss also nach rechts geschoben werden. Hier nach muss die Last I bei D liegen.

§. 26. Ungünstigste Belastung bei polygonaler Einflussfigur. Bezeichnen wir die Resultanten der in den einzelnen Strecken BC , CD , ... (Fig. 56) liegenden Strecken mit R , R_1 , R_2 , ..., die Neigungswinkel der Seiten AC' , $C'D'$, $D'E'$, ... mit α , α_1 , α_2 , ..., so ist die Aenderung der Einflussgrösse Y bei einer Verschiebung des Lastensystems um e nach links:

$$\Delta Y = e(R \tan \alpha + R_1 \tan \alpha_1 + R_2 \tan \alpha_2 + \dots).$$

Fig. 56.

Trägt man nun die einzelnen Lasten auf einer Vertikalen ab auf, so dass ab gleich der Gesamtlast $R + R_1 + \dots$ wird und legt durch a einen Linienzug aus Geraden, welche senkrecht auf den Seiten AC' , $C'D'$, ... stehen und



welchen wir Normalenzug nennen, derart, dass die Ecken desselben auf den die Lasten R , R_1 , R_2 , ... trennenden Horizontalen liegen, so erhält man auf der durch b gehenden Horizontalen einen Punkt k . Es ist alsdann $bk = R \tan \alpha + R_1 \tan \alpha_1 + R_2 \tan \alpha_2 + \dots$. Die Lage des Punktes k gegen b gibt daher an, in welcher Richtung der Lastenzug verschoben werden muss, damit Y wächst; denn liegt b auf derselben Seite, auf welcher der Normalenzug bei a liegt (hier rechts), so ist ΔY positiv, es muss also das Lastensystem nach rechts verschoben werden; liegt k dagegen auf der anderen Seite, so müsste das Lastensystem nach links verschoben werden.

Bei vielen Ecken und vielen Lasten kann allerdings diese Untersuchung sehr zeitraubend werden, weil nach dem Ueberschreiten einer Ecke durch eine Last beim Verschieben die Konstruktion des Normalenzuges vom Neuen wiederholt werden muss, so dass man dann vielleicht besser wegkommt, die Einflussgrösse für einzelne Lagen des Lastenzuges zu bestimmen, um die Summen-Einflusslinie auftragen zu können, wodurch gleichzeitig die ungünstigste Lage der Belastung, als auch das Maximum der Einflussgrösse selbst bestimmt sind.

I. Abschnitt.

Die äusseren Kräfte der Balkenträger.

§. 27. **Einleitung.** Bei dem Balkenträger im engeren Sinne, wie wir ihn hier voraussetzen, wirken sämtliche äussere Kräfte in vertikaler Richtung. Die Spannungen in irgend einem Schnitte hängen von zwei durch die äusseren Kräfte bedingten Grössen ab: nämlich von der Resultante der auf einer Seite des Schnittes wirkenden äusseren Kräfte und deren statischen Momente. Die erstere oder die Summe aller auf einer Seite eines Schnittes wirkenden äusseren Kräfte nennen wir die **Transversalkraft** (Vertikalkraft, Schubkraft, Scheerkraft, scheerende Kraft) und bezeichnen dieselbe mit Q ¹⁾. Das statische Moment der Resultante oder die Summe der statischen Momente aller auf einer Seite des Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte in Beziehung auf den Querschnitt selbst nennen wir kurz das **Moment** für diesen Querschnitt und bezeichnen dasselbe mit M ; dasselbe wird wohl auch **Angriffsmoment** oder **Bieugungsmoment** genannt.

Ausser dem auf den Querschnitt selbst bezogenen Momente kann noch das Moment für einen nicht im Querschnitte liegenden Punkt in Betracht kommen. In diesem Falle ist das Moment ausser von der Lage des Querschnittes natürlich auch noch von der Lage des Momentenpunktes abhängig.

Wir führen die Transversalkraft Q als positiv in Rechnung, wenn sie auf den linken Theil nach oben oder auf den rechten Theil nach unten wirkt. Wir führen ebenso das Moment M als positiv in Rechnung, wenn dasselbe auf den linken Theil rechts drehend oder auf den rechten Theil links drehend wirkt, oder wenn es den Träger nach oben hohl (—) zu biegen strebt.

¹⁾ Q soll an Querkraft erinnern, welche Bezeichnung wir wählen würden, wenn nicht das Wort „Transversalkraft“ in fast allgemeiner Anwendung stünde.

A. Statisch bestimmte Träger.

IV. Kapitel.

Ständige Belastung.

a) Einfache Träger.

§. 28. **Unmittelbar wirkende Einzellasten.** Der Träger sei durch beliebig viele Lasten $G_1, G_2, G_3 \dots$ belastet, welche von der linken Stütze B (Fig. 57) den Abstand $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$, von der rechten Stütze B' den Abstand $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3 \dots$ haben. Die Entfernung der Stützen sei l , der Druck auf dieselben D, D' .

a) Rechnung. Der Stützendruck D, D' ergibt sich durch Aufstellung der Momentengleichungen für die Punkte B' und B zu

$$1. \quad \begin{cases} D = \frac{G_1 \xi'_1 + G_2 \xi'_2 + G_3 \xi'_3 + \dots}{l}, \\ D' = \frac{G_1 \xi_1 + G_2 \xi_2 + G_3 \xi_3 + \dots}{l}. \end{cases}$$

Sind $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ die Transversalkräfte für die einzelnen Strecken $AC_1, C_1 C_2, C_2 C_3 \dots$, so wird

$$2. \quad Q_1 = D, \quad Q_2 = D - G_1, \quad Q_3 = D - G_1 - G_2 = Q_2 - G_2, \dots$$

Das Moment M im Abstände x von B wird

$$3. \quad M = D x - [G_1 (x - \xi_1) + G_2 (x - \xi_2) - \dots],$$

wobei sich die in Klammer gesetzte Summe auf alle links vom fraglichen Querschnitte wirkende Lasten zu erstrecken hat.

b) Konstruktion. Man trage die gegebenen Kräfte zur Bildung des geradlinigen Kräftepolygons der Reihe nach auf einer Geraden auf (Fig. 57) und ziehe nach den so erhaltenen Punkten von einem beliebig gewählten Pole O die Strahlen. Zu diesen Strahlen ziehe man zur Bildung des Seilpolygons zwischen den gegebenen Krafrichtungen Parallelen. Schliesst man jetzt das Seilpolygon durch die Gerade BB' , die sogenannte Schlusslinie und zieht durch O einen Strahl OE parallel zu BB' , so stellen $A_1 E$ und $A_6 E$ die beiden in B und B' wirkenden, den gegebenen Lasten das Gleichgewicht haltenden Kräfte, d. i. die beiden Stützendrücke D, D' dar. Sonach wird

$$Q_1 = D = EA_1, \quad Q_2 = D - G_1 = A_1 E - A_1 A_2 = EA_2,$$

$$Q_3 = D - G_1 - G_2 = A_1 E - A_1 A_2 - A_2 A_3 = EA_3 \text{ u. s. w.}$$

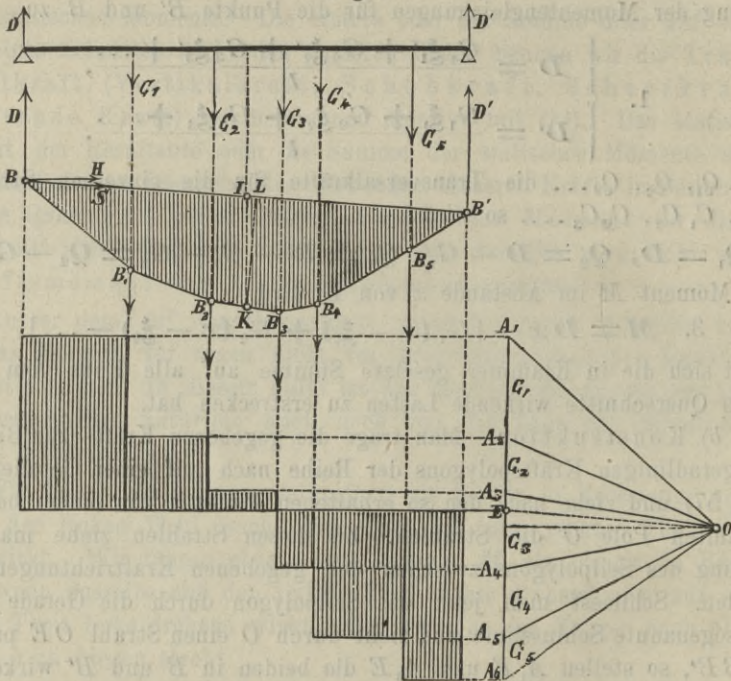
d. h. die Transversalkräfte werden durch die Abstände der Punkte des Kräftepolygons vom Punkte E dargestellt. Es ist nun leicht, die Transversalkräfte als Ordinaten in dem betreffenden Querschnitte aufzutragen, wodurch die Figur 57c entsteht. Die Transversalkräfte werden hiernach theilweise positiv, theilweise negativ.

Legen wir durch das Seilpolygon an beliebiger Stelle einen Vertikalschnitt IK , fällen von K auf BB' die Senkrechte KL , bezeichnen mit H die horizontale Seitenkraft der Spannung S des Seilstückes BB' , mit M , wie oben, die Summe der Momente aller äusseren, links von IK wirkenden Kräfte in Beziehung auf IK , so ist für das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt K die Bedingung zu erfüllen: $M = S \cdot KL$ oder $M = S \cdot IK \cos \angle IKL$, oder, weil $\angle IKL = \angle SBH$ und $S \cos \angle SBH = H$ ist, $M = H \cdot IK$ oder

$$M = H \cdot y,$$

wenn wir IK mit y bezeichnen. Hierbei ist H gleich dem normalen Abstände des Poles O von der Vertikalen, welche das Kräftepolygon

Fig. 57.



bildet oder gleich der Polweite. Das Moment ist also gleich dem Produkte aus der vertikalen Höhe des Seilpolygons in dem fraglichen Querschnitte und der Polweite. Hierbei ist natürlich H nach dem Kraftmassstabe, y nach dem Längenmassstabe zu messen. Wählt man H gleich der Kräfteinheit, so ist $M = y$, d. h. das Moment hat so viel Momenteneinheiten, als y Längeneinheiten. Das Seilpolygon liegt ganz auf derselben Seite der Schlusslinie, die Momente haben demnach sämtlich dasselbe Vorzeichen; der in §. 27 gemachten Festsetzung entsprechend, sind sie positiv.

Ist das Moment M_1 der links vom Schnitte IK wirksamen Kräfte für einen in der beliebigen Vertikalen NN (Fig. 58) liegenden Punkt zu bestimmen, so findet man, wenn I_1, K_1 die Durchschnittspunkte von NN mit der Verlängerung der Schlusslinie und der vom Schnitte getroffenen Seite $B_2 B_3$ sind, durch das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt K_1 in ganz gleicher Weise, dass

$$M_1 = H \cdot y_1$$

ist, wenn man $I_1 K_1 = y_1$ setzt. Für den Durchschnittspunkt V der Schlusslinie mit der Polygonseite $B_2 B_3$ wird hiernach $M_1 = 0$; je nachdem der Momentenpunkt rechts oder links von V liegt, wird M_1 positiv oder negativ.

Die Eigenschaft des Seilpolygons, dass das Produkt aus Polweite und Höhe das Moment darstellt, wurde zuerst von Culmann gefunden (Culmann, grafische Statik, Zürich 1864). Dies aber ist gerade die wichtigste Eigenschaft des Seilpolygons, welche dasselbe zu grafischen Untersuchungen im Gebiete der Statik so ausserordentlich tauglich macht. Dieser Satz allein würde fast genügt haben, Culmann als Begründer der grafischen Statik erscheinen zu lassen.

§. 29. Unmittelbare stetige Belastung. a) Rechnung. Ist q die Last pro Längeneinheit im Abstände x von der linken Stütze, so haben wir die bekannten Beziehungen

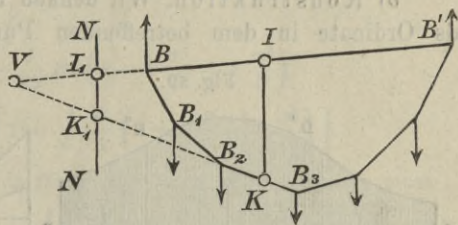
$$q = -\frac{dQ}{dx}, \quad Q = \frac{dM}{dx}.$$

Durch ein- und zweimalige Integration erhält man hiernach die Ausdrücke für Q und M , wobei die Konstanten durch die Bedingung zu bestimmen sind, dass das Moment an den Lagern gleich Null werden muss. Man findet aber auch unmittelbar:

$$4. \quad \begin{cases} D = \frac{1}{l} \int_0^l q (l-x) dx = \int_0^l q dx - \frac{1}{l} \int_0^l q x dx, \\ Q = D - \int_0^x q dx = \int_x^l q dx - \frac{1}{l} \int_0^l q x dx, \\ M = Dx - \int_0^x q (x-\xi) d\xi = x \int_x^l q dx + \int_0^x q x dx - \frac{x}{l} \int_0^l q x dx. \end{cases}$$

Bei symmetrischer Belastung kann zur Bestimmung der Integrationskonstanten auch die Bedingung, dass in der Mitte $Q = 0$ wird, benützt werden.

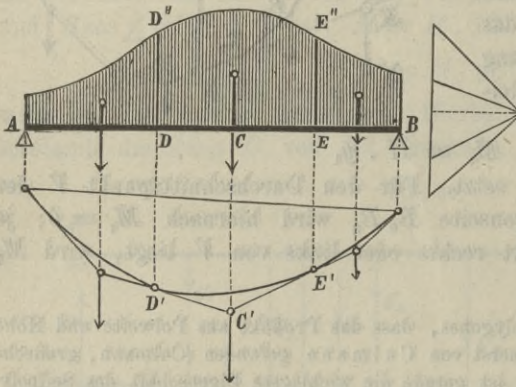
Fig. 58.



Nach der Gleichung $Q = \frac{dM}{dx}$ tritt das Maximum von M in demselben Querschnitte ein, für welchen $Q = 0$ wird.

b) Konstruktion. Wir denken uns die Last q pro Längeneinheit als Ordinate in dem betreffenden Punkte aufgetragen (Fig. 59) und nennen die so entstehende Fläche die Belastungsfläche.

Fig. 59.



Das Seilpolygon geht hier in eine Seilkurve über, für welche natürlich dieselben Gesetze gelten, wie für das Seilpolygon.

Legen wir an das Seilpolygon in den den Punkten D und E entsprechenden Punkten D' und E' Tangenten, welche sich in C' schneiden, so geht durch C' die Mittelkraft der in der Strecke DE liegenden Lasten oder C' liegt vertikal unter dem Schwerpunkte der Fläche $DD''E''E$.

Denkt man sich nun die Last in einzelne Theile zerlegt, so werden die diesen Theilen entsprechenden Mittelkräfte sämtlich durch die Durchschnittspunkte der Tangenten der Seilkurve für die den Trennungspunkten der Last entsprechenden Punkte gehen. Da die Tangenten den Strahlen, welche diesen Trennungslinien entsprechen, parallel sind, so bilden sie das Seilpolygon für die Einzellasten.

Wenn wir die stetige Belastung in beliebige Theile zerlegen und dieselben durch Einzelkräfte ersetzen, so sind die Seiten des entsprechenden Seilpolygons also Tangenten an die Seilkurve, wobei die Tangentialpunkte den Trennungslinien entsprechen. Hierdurch wird es möglich, beliebig viele Tangenten der Seilkurve zu konstruieren und mit Hilfe derselben die Seilkurve selbst zu verzeichnen.

Die Transversalkraft für irgend einen Querschnitt wird im Kraftpolygone von der zur Schlusslinie und der dem fraglichen Querschnitte entsprechenden Tangente der Seilkurve parallelen Strahlen abgeschnitten. Hinsichtlich der Momente ist das im vorigen Paragraphen Gesagte unmittelbar anwendbar.

Beispiel. Es sei q bestimmt durch die Gleichung

$$q = A - B \frac{x(l-x)}{l^2}.$$

Zunächst haben wir

$$Q = - \int q dx = - Ax + \frac{Bx^2}{2l} - \frac{Bx^3}{3l^2} + C.$$

Die Bedingung, dass der Symmetrie halber für $x = \frac{1}{2}l$ $Q = 0$ werden muss, gibt $C = \frac{1}{2}Al - \frac{1}{12}Bl$; mithin wird

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}Al \left(1 - 2\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{12}Bl \left(1 - 6\frac{x^2}{l^2} + 4\frac{x^3}{l^3}\right) \\ &= \frac{1}{2}Al \left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \left[1 - \frac{1}{6}\frac{B}{A} \left(1 + 2\frac{x}{l} - 2\frac{x^2}{l^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Es wird nun ferner $M = \int Q dx$, d. i. da für $x = 0$ auch $M = 0$ werden muss,

$$M = \frac{1}{2}Ax(l-x) \left[1 - \frac{1}{6}\frac{B}{A} \left(1 + \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)\right].$$

Anwendung auf Fälle, in denen man das Eigengewicht variabel annehmen will und auf Träger für Brücken in Kurven, bei denen sich eine gleichmässig über die Bahn vertheilt angenommene Verkehrslast auf die Träger des veränderlichen Abstandes der Gleismitte halber ungleichmässig vertheilt.

§. 30. Unmittelbare gänzliche gleichmässige Belastung.

Ist der Träger über seine ganze Länge gleichmässig mit der Last g pro Längeneinheit belastet, so ist jeder Stützendruck $D = \frac{1}{2}gl$. Für irgend einen Querschnitt wird nun $Q = D - gx$ und $M = Dx - \frac{1}{2}gx^2$, d. i.

$$5. \quad Q = \frac{1}{2}g(l - 2x),$$

$$6. \quad M = \frac{1}{2}gx(l - x).$$

Q wird am grössten für $x = 0$ und $x = l$, M dagegen wird am grössten für $x = \frac{1}{2}l$ und zwar ist

$$7. \quad \text{Max } Q = \pm \frac{1}{2}gl, \quad \text{Max } M = \frac{1}{8}gl^2.$$

Die Transversalkraft wird durch eine Gerade dargestellt, welche die Axe in der Mitte schneidet (Fig. 60). Das Moment wird durch eine

Fig. 60.

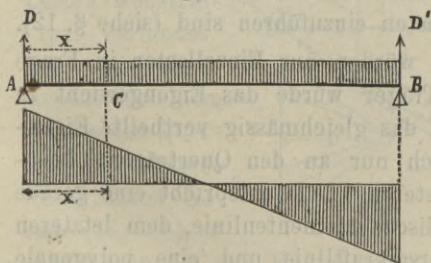
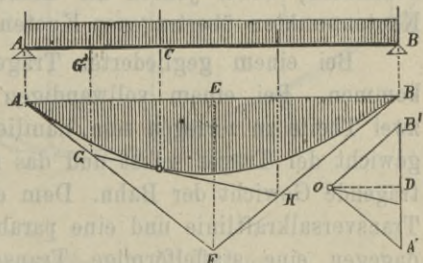


Fig. 61.



Parabel mit vertikaler Axe dargestellt, deren Scheitel in der Mitte liegt (Fig. 61). Die Momentenlinie lässt sich leicht mit Hilfe der Tangenten

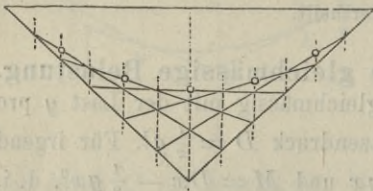
konstruieren. Macht man im Kraftpolygone $A'D = B'D = \frac{1}{2} gl$, so ist, wenn AF und BF die Endtangente der Seilkurve darstellen, $\triangle AEF \sim \triangle ODA'$, also

$$EF : AE = A'D : OD \quad \text{oder} \quad EF : \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} gl : H,$$

also $EF = \frac{gl^2}{4H}$. Sollen die Höhen der Seilkurve die Momente selbst darstellen, so ist $H=1$ zu nehmen; alsdann wird $EF = \frac{1}{4} gl^2 = 2 \text{ Max } M$.

Um für irgend einen Punkt C die Tangente GH der Seilkurve zu konstruieren, ist zu beachten, dass nach dem vorigen Paragrafe G und H vertikal unter der Mitte von AC und BC liegen. Hieraus ergibt sich leicht, dass sich, wenn man AF und BF in eine gleiche Anzahl gleicher Theile theilt und die Theilpunkte entsprechend mit einander verbindet,

Fig. 62.



eine Schaar von Tangenten der Seil- oder Momentenkurve entsteht (Fig. 62). In Fig. 61 ist $AC = 2 \cdot AG'$, der Tangentialpunkt hat also vom Ende einen doppelt so grossen Abstand, als das betreffende Ende G der Tangente, wonach in Fig. 62 leicht die Tangentialpunkte zu bestimmen sind; dieselben liegen vertikal über den abwechselnden Theilpunkten der Endtangente. Da die Durchschnittspunkte der Tangenten nach dem vorigen Paragraf in der Mitte zwischen den durch die Theilpunkte gehenden Vertikalen liegen, so werden auch die Durchschnittspunkte der Tangenten in Fig. 62 vertikal über den abwechselnden Theilpunkten der Endtangente und die Tangentenpunkte in der Mitte zwischen den Durchschnittspunkten liegen.

§. 31. Mittelbare Belastung. Die mittelbare Belastung ist ganz nach §. 28 wie eine unmittelbare Belastung durch Einzellasten zu behandeln, wobei jedoch als Einzellasten die in den Querträgern oder Knotenpunkten übertragenen Knotenlasten einzuführen sind (siehe §. 12).

Bei einem gegliederten Träger würden nur Einzellasten in Frage kommen. Bei einem vollwandigen Träger würde das Eigengewicht in zwei Theile zu zerlegen sein, nämlich das gleichmässig vertheilte Eigengewicht der Träger selbst und das sich nur an den Querträgern übertragende Gewicht der Bahn. Dem ersteren Theile entspricht eine gerade Transversalkraftlinie und eine parabolische Momentenlinie, dem letzteren dagegen eine staffelförmige Transversalkraftlinie und eine polygonale Momentenlinie. Die Addition beider Wirkungen gibt die in Fig. 63 dargestellten Linien.

Hinsichtlich der grafischen Behandlung ist nun noch das Folgende zu bemerken. Für irgend einen Querschnitt im Abstände F von der linken Stütze ist das Moment $M = Dx - R_1 \xi_1$, wenn R_1 die Mittelkraft aller auf der linken Seite wirkenden Lasten und ξ_1 ihr Abstand vom Querschnitte ist. Ist R die Mittelkraft aller Lasten, ξ ihr Abstand von der rechten Stütze, so ist $D = \frac{R\xi}{l}$. Nun aber ist das Moment $R\xi$ dasselbe, ob man die gegebenen Lasten oder aber die durch die Zerlegung derselben entstandenen Knotenlasten einführt, weil ja das statische Moment der Mittelkraft immer gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte ist. Es wird also auch der Stützdruck D sich gleich ergeben, ob man die gegebenen Lasten oder die Knotenlasten einführt. Legt man den Querschnitt an einen Querträger, so wird sich auch für $R_1 \xi_1$ derselbe Werth ergeben, man mag bei der Bestimmung von $R_1 \xi_1$ die gegebenen Lasten oder die durch ihre Zerlegung entstandenen Knotenlasten einführen. Man kann hiernach behaupten:

An den Querträgern sind die Momente dieselben, als bei unmittelbarer Belastung.

Hiernach wird man zunächst das Seilpolygon für die gegebenen Lasten konstruieren. Verbindet man diejenigen Punkte desselben, welche den Querträgern entsprechen, durch Gerade (Fig. 64), so erhält man das den Knotenlasten entsprechende Seilpolygon.

Zieht man im Kraftpolygone Strahlen parallel zu den Seiten dieses Seilpolygons und zur Schlusslinie, so schneiden dieselben, dem §. 28

Fig. 63.

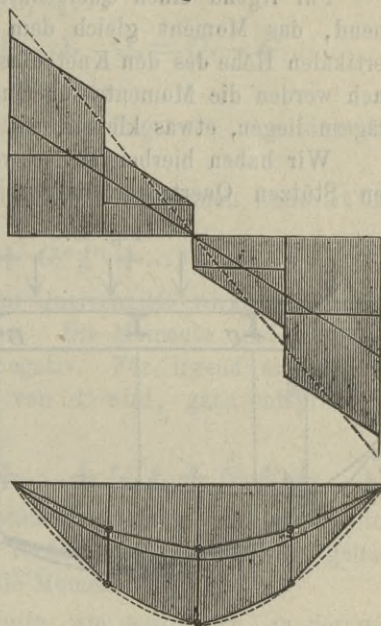
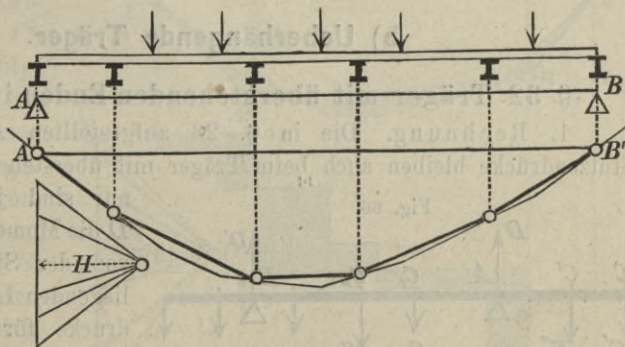


Fig. 64.

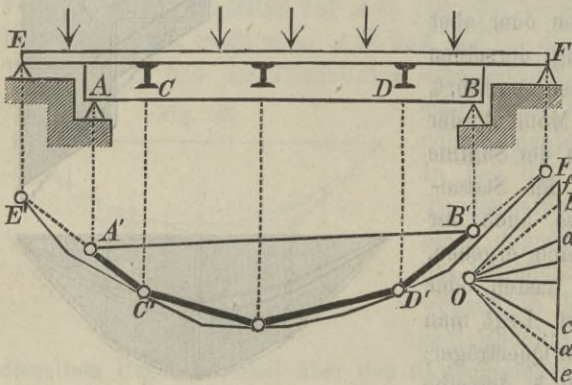


entsprechend, Strecken ab, welche den Transversalkräften in den einzelnen Fächern entsprechen.

Für irgend einen Querschnitt wird, ebenfalls dem §. 28 entsprechend, das Moment gleich dem Produkte aus der Poldistanz und der vertikalen Höhe des den Knotenlasten entsprechenden Seilpolygons. Hiernach werden die Momente für Querschnitte, welche zwischen den Querträgern liegen, etwas kleiner, als bei unmittelbarer Belastung.

Wir haben hierbei stillschweigend vorausgesetzt, dass auch über den Stützen Querträger liegen. Wenn dies nicht der Fall ist, aber

Fig. 65.



Querträger außerhalb der Stützen angeordnet sind, so kommen von den Lasten, welche innerhalb der Endfächer CE und DF (Fig. 65) liegen, natürlich nur diejenigen Seitenkräfte in Betracht, welche auf die durch den zu untersuchenden Träger unterstützten Querträger

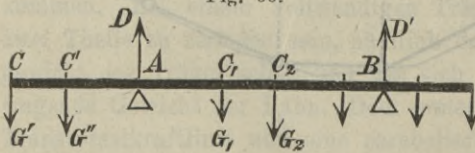
C und D wirken. Sind Oc , Oe die Strahlen, welche der zwischen C und E liegenden Last G entsprechen und zieht man den Strahl Oa parallel zu $C'E'$, so ist ac die in C wirkende Seitenkraft von G ; die Schlusslinie wird dementsprechend durch den Punkt A' zu ziehen sein, welcher in der Seite $C'E'$ vertikal unter der Stütze A liegt; ebenso verhält es sich auf der rechten Seite.

b) Ueberhängende Träger.

§. 32. Träger mit überstehenden Enden im Allgemeinen.

1. Rechnung. Die in §. 28 aufgestellten Ausdrücke für die Stützendrücke bleiben auch beim Träger mit überstehenden Enden gültig;

Fig. 66.



nur sind im Ausdrucke für D die Momente $G\xi'$ der rechts von der Stütze B (Fig. 66) liegenden Lasten und im Ausdrucke für D' die Momente $G\xi$ der links von A liegenden

Lasten negativ einzuführen. Sind G', G'', \dots die links von A liegenden Lasten, so sind die Transversalkräfte in den Strecken $CC', C'C'', \dots$

$$8. \quad Q' = -G', \quad Q'' = -(G' + G''), \dots$$

Das Vorzeichen — entspricht der in §. 27 gemachten Festsetzung. Sind G_1, G_2, \dots die innerhalb AB liegenden Lasten, so sind die Transversalkräfte in den einzelnen Strecken AC_1, C_1C_2, \dots

$$9. \quad Q_1 = D - (G' + G'' + \dots), \quad Q_2 = Q_1 - G_1, \\ Q_3 = Q_2 - (G_1 + G_2), \dots$$

Für das rechte überstehende Ende gelten die Regeln 8, nur sind die Transversalkräfte hier positiv.

Für irgend einen Querschnitt im linken überstehenden Ende ist das Moment

$$10. \quad M = - (G' \xi' + G'' \xi'' + \dots),$$

wenn ξ', ξ'' die Abstände der links vom Querschnitte wirkenden Lasten G', G'', \dots vom Querschnitte bezeichnen. Die Momente sind hier, der Festsetzung in §. 27 entsprechend, negativ. Für irgend einen Querschnitt innerhalb AB im Abstände x von A wird, ganz entsprechend der Formel 3:

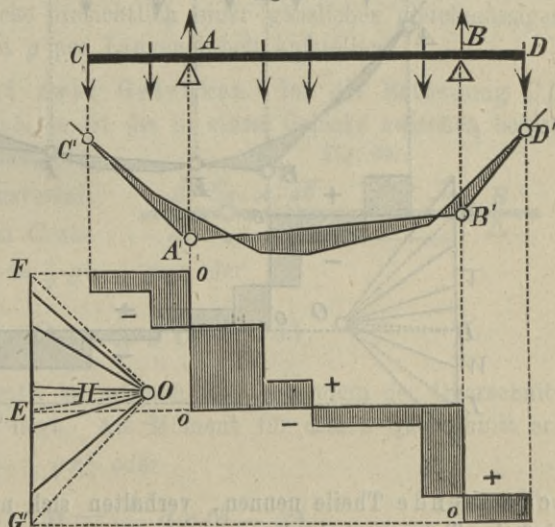
$$11. \quad M = Dx - (G' \xi' + G'' \xi'' + \dots + G_1 \xi_1 + G_2 \xi_2 + \dots),$$

wenn $\xi', \xi'', \dots, \xi_1, \xi_2, \dots$ wieder die Abstände der links vom Querschnitte liegenden Lasten bezeichnen. Für das rechte überstehende Ende gelten wieder die Regeln 10; auch hier sind die Momente negativ.

2. Konstruktion. Man konstruiere, wie gewöhnlich, zu der gegebenen Belastung das Seilpolygon (Fig. 67). Die äussersten Seiten

Fig. 67.

verlängere man nach innen bis zum Durchschnitte A' und B' mit den Stützenvertikalen, ziehe die Gerade $A'B'$ und betrachte das zwischen den Enden C', D' liegende Seilpolygon in Verbindung mit der gebrochenen Geraden $C'A'B'D'$ als geschlossenes Seilpolygon. Zieht man parallel zu $A'B'$ einen Strahl OE , so stellen EF und EG die Kräfte dar, welche im Seilpolygon in A' und B' nach aufwärts angebracht werden müssen, um das Gleichgewicht herzustellen; EF und EG stellen also die Stützendrücke dar. Die Transversalkräfte

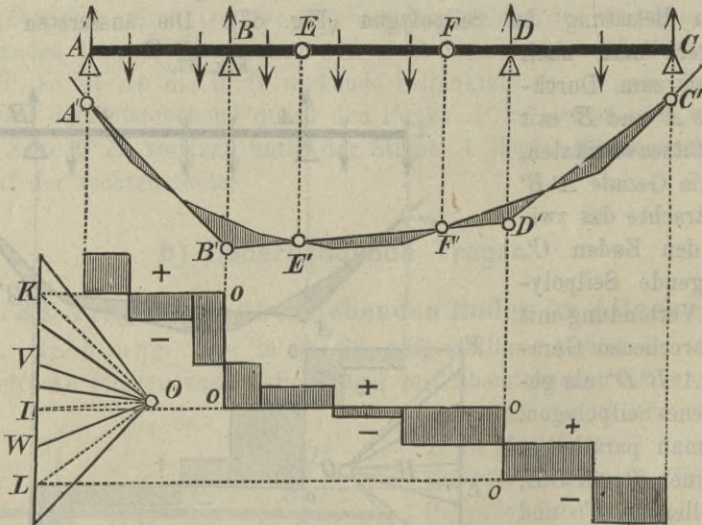


in den drei Strecken CA , AB und BD werden daher dargestellt durch die Abstände der einzelnen Punkte des Kraftpolygons bezüglich von den Punkten F , E und G . Ebenso lässt sich genau, wie im §. 28 nachweisen, dass das Moment M für irgend einen Querschnitt gleich ist dem Produkte aus der Polweite H und der dem Querschnitt entsprechenden vertikalen Höhe IK (Fig. 57) des Seilpolygons. Hierbei würden beim hängenden Seilpolygon die Momente positiv oder negativ zu nehmen sein, jenachdem IK unter oder über $C'A'B'D'$ liegt. Zeichnet man das Seilpolygon, indem man die Polweite umkehrt, stehend (nicht als Hängewerk, sondern als Sprengwerk), so findet das Umgekehrte statt. Hiernach sind die Momente ausserhalb AB nur negativ, innerhalb AB aber entweder theils negativ, theils positiv oder nur negativ.

Wir haben in Fig. 67 eine unmittelbare Belastung durch Einzellasten vorausgesetzt. Das in §. 29 und 31 über stetige Belastung und mittelbare Belastung Gesagte lässt sich natürlich ebenfalls auf den Träger mit überstehenden Enden übertragen.

§. 32. Kontinuierlicher Gelenkträger. Diejenigen Trägertheile EF (Fig. 68), welche an ihren Enden durch die überstehenden Enden der auf die Pfeiler gelagerten Theile unterstützt sind und die wir

Fig. 68.



schwebende Theile nennen, verhalten sich natürlich vollständig wie einfache Träger, sind also nach §. 28 bis 31 zu behandeln. Hierdurch ergeben sich auch die von diesen Theilen auf den überstehenden Enden E , F übertragenen Drücke. Sind diese aber bekannt, so sind auch die

auf den Pfeilern ruhenden Theile ganz nach dem vorigen Paragrafe als Träger mit überstehenden Enden zu behandeln.

Hinsichtlich der grafischen Behandlung ist hierbei noch das Folgende zu bemerken. Legt man zur Schlusslinie $E'F'$ des schwebenden Theiles einen parallelen Strahl OI und sind OV , OW die zu den äussersten Seiten des Seilpolygones des schwebenden Theiles parallelen Strahlen, so sind IV und IW die in E und F auf die überstehenden Enden anzubringenden Drücke. Demnach werden die äussersten Seiten des Seilpolygones für die gelagerten Theile AE und BF parallel zu OI zu legen sein oder dieselben werden die Verlängerungen von $E'F'$ bilden. Verlängert man dem entsprechend $E'F'$ bis zum Durchschnitte B' , D' der durch B , D gehenden Stützenvertikalen, so sind nach dem vorigen Paragrafe $A'B'$ und $C'D'$ die Schlusslinien für die Endfelder. Die Transversalkräfte und Momente sind nun durch den vorigen Paragraf bestimmt.

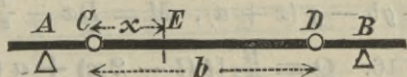
Anstatt das Seilpolygon für den ganzen kontinuierlichen Gelenkträger im Zusammenhange zu zeichnen, kann man natürlich auch das Seilpolygon für die einzelnen Theile gesondert zeichnen. Man muss dann zunächst die Stützendrücke der schwebenden Theile bestimmen, welche alsdann für die übrigen Theile als Endlasten anzunehmen sind.

§. 34. Gänzliche gleichmässige Belastung des kontinuierlichen Gelenkträgers. Wir wollen für den kontinuierlichen Gelenkträger noch die Ausdrücke hinsichtlich einer gänzlichen gleichmässigen Belastung durch die Last g pro Längeneinheit aufstellen.

1. Oeffnung mit zwei Gelenken. Ist die Entfernung CD (Fig. 69) der Gelenke $= b$, so ist die in einem Gelenke zwischen beiden Theilen wirkende Vertikalkraft

Fig. 69.

$= \frac{1}{2} gb$, daher ist die Transversalkraft für einen um x von C ab-



stehenden Querschnitt $Q = \frac{1}{2} gb - gx$ oder

$$12. \quad Q = \frac{1}{2} g (b - 2x),$$

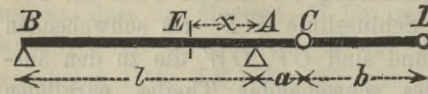
wobei x positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem der Querschnitt rechts oder links von C liegt. Als Moment für diesen Querschnitt ergibt sich $M = \frac{1}{2} gbx - \frac{1}{2} gx^2$ oder

$$13. \quad M = \frac{1}{2} gx (b - x),$$

wonach M positiv oder negativ ist, jenachdem der Querschnitt innerhalb oder ausserhalb der Gelenke liegt.

2. Endöffnung ohne Gelenk. Wir bezeichnen die Spannweite AB (Fig. 70) mit l , den Abstand AC des Gelenkes C von der Stütze B mit a ; wir haben zur Bestimmung des Stützendruckes D in B die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung um A :

Fig. 70.



$Dl + \frac{1}{2}gb \cdot a - \frac{1}{2}gl^2 + \frac{1}{2}ga^2 = 0$, daher

$$D = \frac{1}{2}gl - \frac{1}{2}g \frac{a(a+b)}{l}.$$

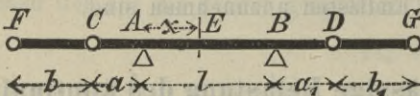
Für einen Querschnitt im Abstände x von B wird nun $Q = D - gx$, $M = Dx - \frac{1}{2}gx^2$, d. i.

$$14. \quad Q = \frac{1}{2}g(l - 2x) - \frac{1}{2}g \frac{a(a+b)}{l}.$$

$$15. \quad M = \frac{1}{2}gx(l - x) - \frac{1}{2}g \frac{a(a+b)x}{l}.$$

3. Mittelöffnung ohne Gelenk. Wir bezeichnen die Spannweite AB (Fig. 71) mit l , den Abstand der Gelenke C und D von A und B mit a und a_1 , die Längen der an C und D anstossenden schwebenden Theile mit b und b_1 . Alsdann wirkt in C und D

Fig. 71.



eine Last $\frac{1}{2}gb$ und $\frac{1}{2}gb_1$, also

ist die Gleichgewichtsbedingung für Drehung um B : $Dl - \frac{1}{2}gb(l+a) + \frac{1}{2}gb_1a_1 - g(l+a+a_1)\frac{1}{2}(l+a-a_1)$, daher

$$D = \frac{g}{2l} [(l+a)(l+a+b) - a_1(a_1+b_1)].$$

Für einen Querschnitt im Abstände x von A wird nun $Q = D - \frac{1}{2}gb - g(x+a)$, $M = Dx - \frac{1}{2}gb(x+a) - \frac{1}{2}g(x+a)^2$ oder

$$16. \quad Q = \frac{g}{2l} [l(l - 2x) + a(a+b) - a_1(a_1+b_1)],$$

$$17. \quad M = \frac{g}{2l} [lx(l-x) - a(a+b)(l-x) - a_1(a_1+b_1)x].$$

Wenn $a = a_1$, $b = b_1$ ist, so wird einfacher

$$18. \quad Q = \frac{1}{2}g(l - 2x), \quad M = \frac{1}{2}g[x(l-x) - a(a+b)].$$

Die grafischen Darstellungen von Q und M in diesen drei Fällen zeigen die Figuren 108 bis 110.

V. Kapitel.

Verkehrs-Belastung.

a) Einfache Träger.

§. 35. Einfluss einer Einzellast. Wir untersuchen zunächst den Einfluss einer beweglichen Einzellast G .

a) Transversalkräfte. Nehmen wir zuvörderst eine unmittelbare Belastung an, so ist die Transversalkraft für irgend einen Querschnitt, falls die Last rechts von demselben liegt, gleich dem linken Stützdrucke D , also der in §. 27 gemachten Festsetzung entsprechend, positiv. Liegt dagegen die Last links vom fraglichen Querschnitte, so ist die Transversalkraft $= D - G$, d. i., da D immer $< G$ ist, negativ. Die Transversalkraft ist daher positiv oder negativ, je nachdem die Einzellast rechts oder links vom Querschnitte liegt.

Hat die Einzellast G von der rechten Stütze den Abstand ξ , so ist $D = G \frac{\xi}{l}$, demnach ist bei rechts liegender Last

$$1. \quad Q = D = + G \frac{\xi}{l},$$

dagegen bei links liegender Last

$$2. \quad Q = D - G = -G \left(1 - \frac{\xi}{l}\right).$$

Die Einflusslinie besteht dementsprechend aus zwei parallelen Geraden BA' und AB' (Fig. 72 und 73), wobei $AA' = BB' = G$ ist. Bei unmittelbarer Belastung sind diese beiden Geraden durch eine durch den fraglichen Querschnitt gehende Vertikale CE verbunden. Bei mittelbarer Belastung hat die Gleichung 1 und 2 dagegen nur Giltigkeit, wenn sich die Last ausserhalb der beiden

Querträger C und E befindet, zwischen denen der fragliche Querschnitt liegt; die diesen Querträgern entsprechenden Punkte C' und E' der Einflusslinie sind nach §. 20 durch eine Gerade $C'E'$ zu verbinden.

b) Momente. Wenn die Last G rechts vom fraglichen Querschnitte, der von der linken Stütze den Abstand x habe, liegt, so ist

Fig. 72.

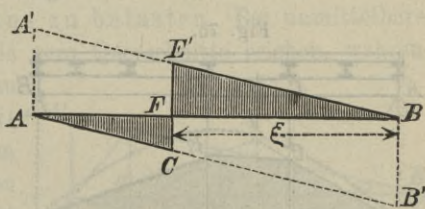
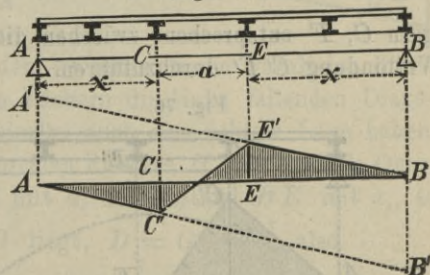


Fig. 73.



das Moment M gleich dem Momente Dx des linken Stützendruckes, d. i. rechts drehend oder positiv. Liegt dagegen die Last links vom Querschnitte, so ist das Moment M gleich dem Momente $D'(l-x)$ des rechten Stützendruckes, d. i. links drehend, also nach der Festsetzung in §. 27 ebenfalls positiv. Eine Einzellast erzeugt also stets ein positives Moment, wo sie auch liegen möge.

Hat die Einzellast von der rechten Stütze wieder den Abstand ξ , so ist $D = G \frac{\xi}{l}$, $D' = D \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)$, mithin bei rechts liegender Last

$$3. \quad M = Dx = + G \frac{x\xi}{l},$$

und bei links liegender Last

$$4. \quad M = D'(l-x) = + G \frac{(l-x)(l-\xi)}{l}.$$

Hiernach besteht die Einflusslinie aus zwei Geraden AF' und BF' (Fig. 74 und 75), welche sich in einem in der Querschnittsvertikalen liegenden Punkte F' schneiden. Hierbei wird

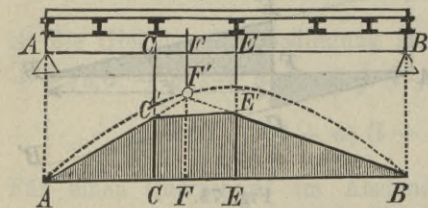
Fig. 74.

Punkte F' schneiden. Hierbei wird

$$FF' = G \frac{x(l-x)}{l}.$$

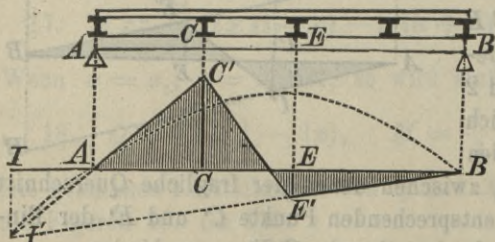
Es liegt somit der Punkt F' auf einer Parabel mit vertikaler Axe, deren Höhe in der Mitte $= \frac{1}{4} G l$ ist. Bei unmittelbarer Belastung (Fig. 74) reichen diese Geraden bis an die Querschnittsvertikale, bei mittelbarer Belastung (Fig. 75) dagegen nur bis an die Vertikalen, welche den den fraglichen Querschnitt einschliessenden Querträgern C, F entsprechen; zwischen diesen ist nach §. 20 eine geradlinige Verbindung $C'F'$ durchzuführen.

Fig. 75.



gern C, F entsprechen; zwischen diesen ist nach §. 20 eine geradlinige Verbindung $C'F'$ durchzuführen.

Fig. 76.



nehmen ist, je nachdem I rechts oder links von A liegt. Auch hier besteht die Einflusslinie aus zwei Geraden AC', BE' , welche durch einen

Die Gleichungen 3 und 4 gelten auch dann noch, wenn der Momentenpunkt nicht im fraglichen Querschnitte liegt; nur bedeutet in diesem Falle x den Abstand des Momentenpunktes I (Fig. 76) von der linken Stütze A , wobei x positiv oder negativ zu

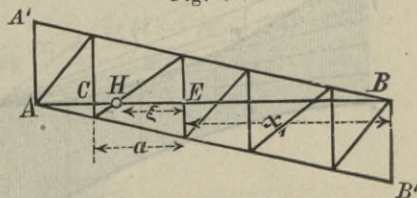
und denselben Punkt I' gehen, der in der Vertikalen des Momentenpunktes liegt. Liegt der Momentenpunkt innerhalb der Stützen A, B , so ist das Moment nur positiv; liegt er dagegen ausserhalb der Stützen, wie in Fig. 76, so ist das Moment theilweise positiv, theilweise negativ.

3. Ungünstigste Lage der Einzellast. Nach den Ausdrücken 1 bis 4 und den denselben entsprechenden Einflusslinien folgt, dass sowohl die Transversalkraft, als das Moment um so grösser werden, je näher die Einzellast bei unmittelbarer Belastung dem Querschnitte, bei mittelbarer Belastung dem Fache, welchem der Querschnitt angehört, liegt. Transversalkraft und Moment werden also am grössten, wenn die Last bei unmittelbarer Belastung am Querschnitte, bei mittelbarer Belastung an einem der das fragliche Fach begrenzenden Querträger liegt.

§. 36. Ungünstigste gleichmässige Belastung. Durch die im vorigen Paragraphen bestimmten Einflusslinien ist gleichzeitig die ungünstigste Belastungsweise gegeben.

Die Transversalkraft wird hiernach zum positiven und negativen Maximum bei theilweiser Belastung und zwar ist für das positive Maximum die rechte Seite von der rechten Stütze aus, für das negative Maximum die linke Seite von der linken Stütze aus zu belasten. Bei unmittelbarer Belastung muss hierbei die Last bis zum Querschnitte reichen, während sie bei mittelbarer Belastung bis zu dem entsprechenden neutralen Punkt H (Fig. 77) reichen muss. Dem vorigen Paragraphen entsprechend, lassen sich die neutralen Punkte H leicht konstruiren, indem man durch A und B zwei beliebige parallele Gerade AB' und BA' legt und in den zwischen diesen Parallelen durch die Querträgervertikalen abgetheilten Fächern die links fallenden Diagonalen zieht (Fig. 77). AB kann hierbei auch eine schiefe Lage haben. Bezeichnen wir den Abstand des neutralen Punktes H vom rechten Querträger E mit ξ , die Fachweite CE mit a , den Abstand BE mit x_1 , so

Fig. 77.



ist, wenn in H eine Einzellast G liegt, $D = G \frac{x_1 + \xi}{l}$, also

$$Q = G \frac{x_1 + \xi}{l} - G \frac{\xi}{a} = G \frac{ax_1 - (l-a)\xi}{al}$$

Da aber für den Punkt H $Q = 0$ werden muss, so wird

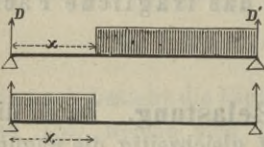
$$\xi = \frac{ax_1}{l-a}$$

Da das Moment (wenn der Momentenpunkt im Querschnitte liegt) stets positiv ist, wo auch die Einzellast liegt, so wird das Moment zum Maximum bei gänzlicher Belastung des Trägers.

Liegt der Momentenpunkt nicht im Querschnitte, so wird das Moment zum Maximum, 1. falls der Momentenpunkt zwischen den Stützen liegt, bei gänzlicher Belastung; 2. falls der Momentenpunkt ausserhalb der Stützen liegt, bei theilweiser Belastung (Fig. 76).

§. 37. Grösste Transversalkraft bei gleichmässiger Belastung. Die gleichmässige Belastung pro Längeneinheit sei p .

Fig. 78.



a) Unmittelbare Belastung. Wenn der Träger vom Querschnitte aus bis zur rechten oder linken Stütze belastet ist (Fig. 78), so wird die Transversalkraft bezüglich gleich dem linken oder negativen rechten Stützdrucke; demnach ist, wenn der Querschnitt von der linken Stütze den Abstand x hat,

Fig. 79.

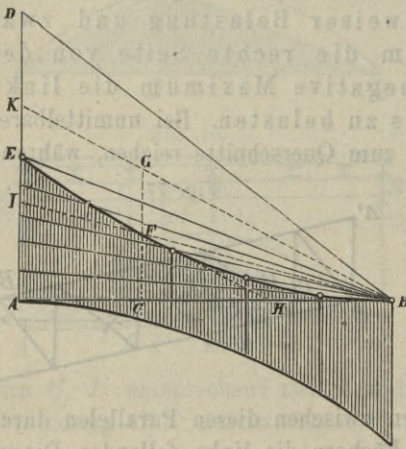
$$6. \begin{cases} \max(+Q) = + \frac{p(l-x)^2}{2l}, \\ \max(-Q) = + \frac{px^2}{2l}. \end{cases}$$

Hiernach lässt sich $\max(\pm Q)$ durch zwei Parabeln mit vertikaler Axe darstellen, deren Scheitel bezüglich an der rechten und linken Stütze liegen (Fig. 79).

Wirken das Eigengewicht und die Verkehrsbelastung gleichzeitig, so kommt noch der durch die Gleichung 5 (S. 45) bestimmte Ausdruck hinzu. Man hat also

$$7. \begin{cases} \max(+Q) = \frac{1}{2} g(l-2x) + \frac{p(l-x)^2}{2l}, \\ \max(-Q) = \frac{1}{2} g(l-2x) - \frac{px^2}{2l}. \end{cases}$$

Hiernach lässt sich auch unter Berücksichtigung des Eigengewichtes $\max(\pm Q)$ durch zwei Parabeln mit vertikaler Axe darstellen (Fig. 80), deren Scheitel indess nicht mehr den Stützen entsprechen. Die Stützweite theilt sich dementsprechend in drei Theile AC, CD, BD derart, dass Q im linken Theile nur positiv, im rechten Theile nur negativ, im mittleren Theile dagegen positiv und negativ werden kann. Setzt man



$AC = x_1$, so würde zur Bestimmung von x_1 in der zweiten der Gleichungen $Q = 0$, $x = x_1$ zu setzen sein; hierdurch ergibt sich

$$8. \quad \frac{x_1}{l} = -\frac{g}{p} + \sqrt{\frac{g^2}{p^2} + \frac{g}{p}}, \quad \text{Fig. 80.}$$

wonach x_1 um so grösser wird, je grösser das Eigengewicht gegen die zufällige Last ist.

b) Mittelbare Belastung.

Wenn der Träger von der rechten Stütze aus bis zu einem Punkte H (Fig. 81) des fraglichen Faches belastet ist, und wie im vorigen Paragraphen $AC = x$, $BE = x_1$, $EH = \xi$ gesetzt wird, so ist der linke Stützdruck $D = p \frac{(x_1 + \xi)^2}{2l}$, die in C wirkende Seitenkraft der Belastung des Faches $CE = p \frac{\xi^2}{2a}$, mithin

$$Q = \frac{1}{2} p \left[\frac{(x_1 + \xi)^2}{l} - \frac{\xi^2}{a} \right],$$

Um das Maximum von Q zu erhalten, ist für ξ der Ausdruck 5 einzusetzen. Dies gibt

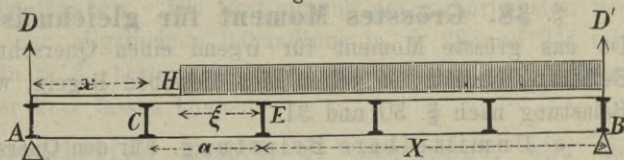


Fig. 81.

$$9. \quad \max(+Q) = +\frac{p x_1^2}{2(l-a)} = +\frac{p(l-a-x)^2}{2(l-a)}.$$

Für das Eigengewicht wird $Q = D - gx - \frac{1}{2} ga = \frac{1}{2} g(l-a-2x)$, also wird die Gesamtwirkung

$$10. \quad \max(+Q) = \frac{1}{2} g(l-a-2x) + \frac{p(l-a-x)^2}{2(l-a)}.$$

Das negative Maximum erhält man durch Vertauschung von x mit x_1 und Umkehrung des Vorzeichens in dem Gliede mit p . Hiernach ist das Maximum der Transversalkraft ebenso gross wie bei einem Träger mit der Stützweite $l-a$ bei unmittlbarer Belastung und zwar an einem [Querschnitte,

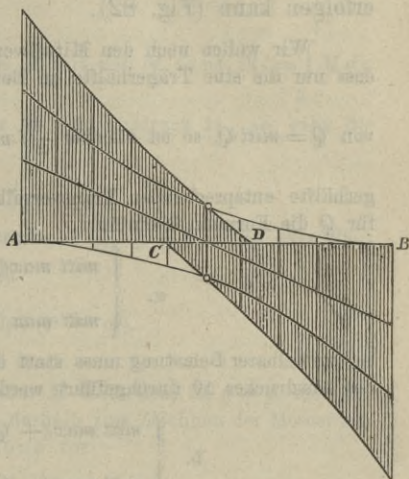
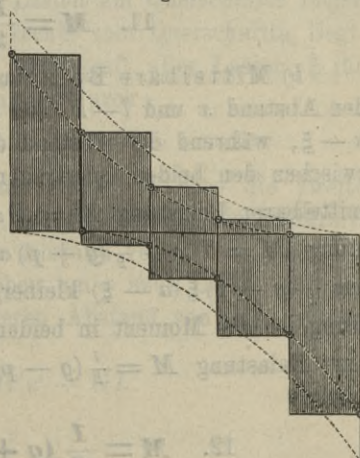


Fig. 82.



welcher für das positive und negative Maximum von der linken und rechten Stütze bezüglich den Abstand x und x_1 hat, wonach auch leicht die grafische Darstellung mit Hilfe der Parabel erfolgen kann (Fig. 82).

Wir wollen noch den Mittelwerth von Q feststellen unter der Voraussetzung, dass nur die eine Trägerhälfte in Betracht kommt. Setzen wir diesen Mittelwerth

von $Q = \text{mitt } Q$, so ist offenbar $\frac{1}{2} l \text{ mitt } Q = \int_0^{\frac{1}{2} l} Q dx$ oder gleich der der linken Trägerhälfte entsprechenden Transversalkraftfläche. Die Ausführung gibt, wenn man für Q die Formeln 7 einführt,

$$a. \quad \begin{cases} \text{mitt max}(+ Q) = \frac{1}{4} gl + \frac{7}{24} pl, \\ \text{mitt max}(- Q) = \frac{1}{4} gl - \frac{1}{24} pl. \end{cases}$$

Bei mittelbarer Belastung muss statt der Integration eine Summierung unter Benützung des Ausdruckes 10 durchgeführt werden. Hierdurch ergibt sich

$$b. \quad \begin{cases} \text{mitt max}(+ Q) = \frac{1}{4} gl + \frac{7}{24} p \left(l - \frac{2}{7} a \right) \\ \text{mitt max}(- Q) = \frac{1}{4} gl - \frac{1}{24} p (l - 2a). \end{cases}$$

§. 38. Grösstes Moment für gleichmässige Belastung.

Da das grösste Moment für irgend einen Querschnitt bei gänzlicher Belastung eintritt, so gelten hier dieselben Regeln, wie für die ständige Belastung nach §. 30 und 31.

a) Unmittelbare Belastung. Für den Querschnitt im Abstände x von der linken Stütze wird nach Formel 6 (S. 45) für das Eigengewicht $M = \frac{1}{2} gx(l-x)$, mithin für die Verkehrslast $M = \frac{1}{2} px(l-x)$, folglich als Gesamtwirkung

$$11. \quad M = \frac{1}{2} (g + p) x (l - x).$$

b) Mittelbare Belastung. Hat der Querschnitt von den Stützen den Abstand x und $l-x$, von den nächsten Querträgern den Abstand ξ , $a - \xi$, während der Abstand der Querträger $= a$ ist, so ist für die zwischen den beiden Querträgern liegende Last $(g + p) a$ allein bei unmittelbarer Belastung $M = Dx - \frac{1}{2} (g + p) \xi^2$, für mittelbare Belastung $M = Dx - \frac{1}{2} (g + p) a \xi$, also ist das Moment im letzteren Falle um $\frac{1}{2} (g + p) \xi (a - \xi)$ kleiner, als im ersteren. Für die übrige Belastung ist das Moment in beiden Fällen dasselbe. Da nun für unmittelbare Belastung $M = \frac{1}{2} (g + p) x (l - x)$, so ist für mittelbare Belastung

$$12. \quad M = \frac{1}{2} (g + p) [x (l - x) - \xi (a - \xi)].$$

Bei vollwandigen Trägern würde sich dieser Ausdruck indess nur auf die Verkehrslast und die Bahn beziehen; für das Gewicht der Träger selbst hat natürlich die Regel für unmittelbare Belastung in Anwendung zu kommen.

Bezeichnen wir wieder den Mittelwerth von M mit *mitt* M , so ist $Ml = \int_0^l M dx$ oder gleich der Momentenfläche. Setzt man für M den Ausdruck 11, so gibt die Ausführung

$$a. \text{ mitt } M = \frac{1}{12} (g + p) l^2.$$

Bei mittelbarer Belastung ist von der Momentenfläche $\frac{1}{12} (g + p) l^3$ für jedes Fach $\frac{1}{12} (g + p) a^3$ abziehen. Hierdurch ergibt sich

$$b. \text{ mitt } M = \frac{1}{12} (g + p) (l^2 - a^2).$$

Der Parameter der Parabel, deren Ordinaten M darstellen, ist $g + p$, also von der Spannweite unabhängig. Steiner schlägt deshalb zum Zeichnen der Momentenkurve die Anwendung einer Parabel-Schablone vor.

§. 39. Ungünstigste unmittelbare Belastung durch ein System von Einzellasten. Die Bestimmung der gefährlichsten Belastung kann nach der allgemeinen Behandlung in §. 23 und 24, mit Rücksicht auf die in §. 35 bestimmte Form der Einflusslinien erfolgen, so dass wir uns hier kurz fassen können.

a) Transversalkräfte. Dem §. 24 entsprechend, wird die grösste Transversalkraft dann entstehen, wenn eine der Einzellasten am fraglichen Querschnitte liegt. Da nur rechts vom Querschnitte liegende Lasten positive Transversalkräfte erzeugen, so wird für das positive Maximum eine der vorderen Lasten am Querschnitte liegen müssen. Wenn die vordere Last dicht rechts vom Querschnitte liegt, so ist die Transversalkraft, falls R die Mittelkraft aller Lasten, ξ ihr Abstand von der rechten Stütze ist, bestimmt durch

$$Ql = R\xi.$$

Verschiebt man nun das Lastensystem nach links, so dass die zweite Last dicht rechts vom Querschnitte liegt, so wird die Transversalkraft, wenn man die vordere Last mit G , ihren Abstand von der zweiten Last mit e bezeichnet und wenn beim Verschieben um e neue Lasten mit der Resultante G' auf den Träger rücken, deren Abstand von der rechten Stütze $= e'$ ist,

$$Q_1 l = R(\xi + e) + G'e' - Gl.$$

Hiernach wird $Q_1 > Q$, wenn

$$13. \quad Gl < Re + G'e'$$

ist. Wenn die grössten Lasten mit dem kleinsten Radstande vorausschreiten, so ist unbedingt $\frac{G}{e} > \frac{R + G'}{l - x + e}$, $G > \frac{Re + G'e}{l - x + e}$, mithin auch, da $e' < e$ und $l - x + e < l$ ist, $Gl > Re + G'e'$; in diesem Falle muss also unbedingt die vordere Last am Querschnitte liegen. Nur wenn leichte Lasten vorausschreiten, kann die zweite Last am Querschnitte liegen müssen. Es ergibt sich in gleicher Weise, dass die dritte Last am Querschnitte liegen müsste, wenn die Bedingung 13 und die folgende

$$G_1 l < Re_1 + G'e_1 + G''e''$$

erfüllt sind, wobei G_1 die zweite Last, e_1 ihren Abstand von der dritten Last bezeichnet, und wenn beim Verschieben um e_1 noch Lasten mit der Resultante G'' und dem Abstände e'' von der rechten Stütze auf den Träger rücken. Bei den üblichen Belastungen der Eisenbahn- und Strassenbrücken dürfen indess immer nur Lasten auf der rechten Seite des Querschnittes liegen. Bei Strassenbrücken hat hierbei das hintere Wagenrad am Querschnitt zu liegen, während die Pferde nach der rechten Seite gerichtet sind. Für das negative Maximum der Transversalkraft ist einfach das „rechts“ mit „links“ zu vertauschen.

b) Momente. Da die Einflusslinie nach §. 35 ein über die ganze Stützweite reichendes Dreieck ist, dessen grösste Höhe sich am fraglichen Querschnitte befindet, so folgt aus §. 24, dass eine der Einzellasten am fraglichen Querschnitte liegen muss und zwar diejenige, für welche

$$17. \quad \frac{R_1}{x} \asymp \frac{R_2}{l - x}$$

ist, wenn R_1 und R_2 die auf beiden Seiten des Querschnittes liegenden bezeichnen; es muss also die Last pro Längeneinheit auf beiden Seiten des Querschnittes möglichst gleich sein.

Die Art und Weise der Anwendung dieser Regeln, sowie die grafische Bestimmung der ungünstigsten Belastung ist in §. 24 gezeigt worden. In Fig. 91d ist noch eine andere Form der Konstruktion dargestellt. Man trägt auf einer Stützenvertikalen die Lasten in ihrer Reihenfolge auf und legt durch die Punkte dieses Kräftepolygones Horizontalen. Man zieht nun die Diagonale, welche sämtlichen auf den Träger liegenden Lasten entspricht, die allerdings für die einzelnen Querschnitte veränderlich sein kann. An einem bestimmten Querschnitte C muss alsdann diejenige Last liegen, in deren Fache der dem Querschnitte C entsprechende Punkt C' der Belastungs-Diagonale liegt, weil der Punkt C' die ganze Belastung $C_0 C_5$ in dem Verhältnisse $x' : l - x$ theilt.

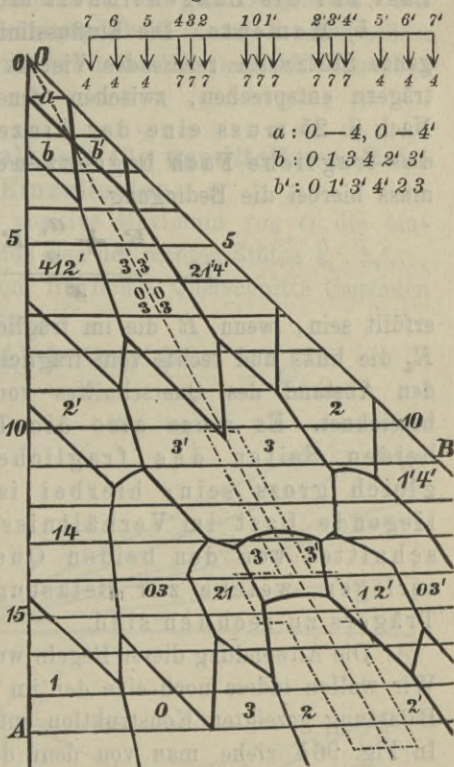
Die Querschnitte, für welche eine Aenderung der Belastungsart eintritt, können in dreifacher Weise entstehen: 1. Es bleibt dieselbe

Last am Querschnitte liegen, aber es ändert sich die Anzahl der Lasten; für diese Querschnitte liegt eine Last auf einer Stütze. In Fig. 91 sind dies die Querschnitte s und t , für welche die Last VI über der rechten Stütze liegt. 2. Es ändert sich die am Querschnitte liegende Last, aber es bleibt dieselbe Gesamtbelastung; diese Querschnitte entsprechen einem Durchschnitte der Belastungs-Diagonale mit einer Horizontalen; in Fig. 91 ist dies der Querschnitt k , welcher dem Durchschnittspunkte K entspricht. 3. Es ändert sich die am Querschnitte liegende Last, aber auch die auf dem Träger liegende Gesamtbelastung. In Fig. 91 ist v ein solcher Querschnitt. Die Bestimmung dieser Querschnitte, welche durch quadratische Gleichungen bestimmt sind, ist weniger einfach.

Göbel zeigt in der „Theorie der Maximalmomente einfacher Träger“ (Mainz 1883) die Konstruktion eines Netzes zur schnellen Bestimmung derjenigen Last, welche für $\max M$ am Querschnitte liegen muss. Diese „Tafel der Bereiche der massgebenden Lasten“, wie er das Netz nennt, wird dadurch erhalten, dass man die Stützweite so aufträgt, dass beide Enden auf den Schenkeln eines Winkels AOB (Fig. 83) liegen und in jeder Stützweite die Grenzpunkte markirt, innerhalb deren eine ganz bestimmte Last am Querschnitte liegen muss. Fig. 83 entspricht einer symmetrischen Belastung und OC der Mitte der Stützweite. Die dem absoluten Maximum von M entsprechenden Querschnitte sind durch strichpunktirte Linien angegeben. Ueber die Natur und Konstruktion der Linien des Netzes siehe das genannte Werk. Wenn für dieselbe Belastung die Momente bei sehr verschiedenen Stützweiten zu bestimmen sind, so kann dieses Netz in der That gute Dienste leisten.

Die Regel, dass die ungünstigste Belastung hinsichtlich der Momente diejenige ist, bei welcher die Last pro Längeneinheit auf beiden Seiten möglichst gleich gross ist, wurde zuerst vom Verfasser aufgestellt (Zeitschr. des österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1870), nachdem nachgewiesen worden war, dass bei einer stetigen Belastung genaue Gleichheit der Lasten pro Längeneinheit stattfinden müsse. Die auf demselben Satze beruhende Regel für die zur Herbeiführung der ungünstigsten Belastung nöthige Verschiebung eines Systemes von Einzellasten wurde zuerst von Schäffer (Erbkam's Zeitschr. für Bauw. 1870) aufgestellt. Die in Fig. 91 d vorgeführte, auf demselben Satze beruhende Darstellung wurde zuerst von Weyrauch (Zeitschr. des hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1875) angegeben.

Fig. 83.



§. 40. Ungünstigste mittelbare Belastung durch ein System von Einzellasten.

a) Transversalkräfte. Für das positive Maximum der Transversalkraft muss, dem §. 24 und 35 entsprechend, eine Einzelkraft am rechten Querträger E (Fig. 81) des fraglichen Faches liegen. Bezeichnet man die Mittelkraft aller rechts von E liegenden Lasten mit R_1 , den Abstand des neutralen Punktes H von E mit ξ und BE mit x_1 , so muss nach §. 24

$$14. \quad \frac{R}{\xi} \asymp \frac{R_1}{x_1} \quad \text{oder} \quad \frac{R_1}{\xi} \asymp \frac{R + R_1}{\xi + x_1}$$

sein. Da nach Formel 5 $\xi(l-a) = ax_1$ ist, so wird auch $R(l-a) \asymp R_1 a$ oder $Rl \asymp (R + R_1) a$ oder

$$15. \quad \frac{R}{a} \asymp \frac{R + R_1}{l}$$

Es soll also die in den Strecken AB und CE liegende Last auf die Längeneinheit möglichst gleich gross sein.

b) Momente. Die Einflusslinie ist hier nach §. 35 ein über die ganze Stützweite reichendes Viereck, von dem zwei Ecken den Querträgern entsprechen, zwischen denen der fragliche Querschnitt liegt. Nach §. 25 muss eine der Einzellasten an einem der beiden das fragliche Fach begrenzenden Querträger liegen und zwar muss hierbei die Bedingung

$$16. \quad \frac{R_1 + \frac{a_1}{a} R}{x} \asymp \frac{R_2 + \frac{a_2}{a} R}{l - x}$$

erfüllt sein, wenn R die im fraglichen Fache liegende Belastung, R_1 , R_2 die links und rechts vom fraglichen Fache liegende Belastung, a_1 , a_2 den Abstand des Querschnittes vom linken und rechten Querträger bezeichnet. Es muss also die Last pro Längeneinheit auf beiden Seiten des fraglichen Querschnittes möglichst gleich gross sein; hierbei ist die im fraglichen Fache liegende Last im Verhältnisse der Entfernung des Querschnittes von den beiden Querträgern in zwei Theile zu zerlegen, welche zur Belastung der bezüglichen Seite des Trägers zu rechnen sind.

Die Anwendung dieser Regeln wurde bereits in §. 24 und 25 gezeigt. Wir wollen indess noch eine der im vorigen Paragrafe für unmittelbare Belastung gezeigten Konstruktion entsprechende Bestimmung vorführen. In Fig. 96b ziehe man von dem dem fraglichen Fache CE entsprechenden neutralen Punkte H aus die entsprechende Belastungsdiagonale HB_4 ; schneidet dieselbe die dem Querträger E entsprechende Vertikale in e , so theilt e die Belastung $R + R_1$ im Verhältnisse $\xi : \xi + x_1$; nach der Beziehung 14 wird daher diejenige Last, welche der Punkt e

entspricht (hier die II. Last) für $\max Q$ bei E liegen müssen. Zur Bestimmung der ungünstigsten Belastung für $\max M$ ziehe man die Belastungsdiagonalen sowohl hinsichtlich der möglichen Gesamtbelastung, als der hierbei möglichen Belastung des fraglichen Faches CE . Die dem fraglichen Querschnitte F entsprechende Vertikale schneide die Diagonale $A_0 B_5$ für die Gesamtbelastung $A_0 B_5$ in f und die Diagonalen $C_1 E_3$ und $C_0 E_3$ für die Belastung des Faches CE in f_1 und f_2 . Alsdann ist $F_0 f : F_5 f = x : l - x$ und für die Belastung von CE durch die Lasten II und III: $F_0 f_1 = R_1 + R \frac{a_1}{a}$, $F_5 f_2 = R_2 + R \frac{a_2}{a}$, dagegen für die Belastung von CE durch die Lasten I, II, III: $F_0 f_2 = R_1 + R \frac{a_1}{a}$, $F_5 f_2 = R_2 + R \frac{a_2}{a}$. Der Bedingung 16 entsprechend, muss das Lastensystem bei der Belastung von CE mit II und III nach rechts, bei der Belastung von CE mit I, II, III nach links geschoben werden; in beiden Fällen kommt die Last I nach C zu liegen, welche Belastung also für den Querschnitt F die ungünstigste ist. Für die Querschnitte, welche den Durchschnittspunkten g und h entsprechen, ist die Lage der Belastung, so lange innerhalb AB und CE dieselben Lasten bleiben, gleichgiltig.

§. 41. Grösste Transversalkraft für unmittelbare Belastung durch ein System von Einzellasten.

a) Rechnung. Sind für das positive Maximum von Q die einzelnen Lasten G_1, G_2, \dots , ihre Abstände von der rechten Stütze ξ_1', ξ_2', \dots und ist G die Summe aller links vom fraglichen Querschnitte liegenden Lasten, so ist, dem §. 28 entsprechend,

$$17. \max (+ Q) = \frac{G_1 \xi_1' + G_2 \xi_2' + \dots}{l} - G,$$

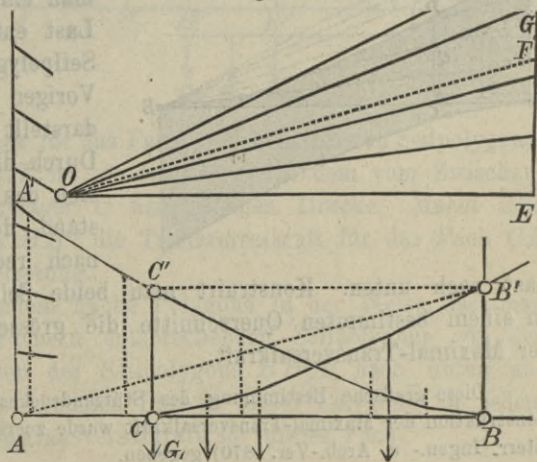
Für das negative Maximum ist rechts mit links zu vertauschen und das Vorzeichen umzukehren.

b) Konstruktion.

a) Stützendruck.

Der Belastungszug sei von rechts so weit vorgedrückt, dass die vordere Last in C liegt. Man konstruiere für diese Belastung das Kraftpolygon EG (Fig. 84) und das entsprechende Seilpolygon. Wir haben hierbei

Fig. 84.



den Pol O in der durch E gehenden Horizontalen, dementsprechend die erste Seilpolygonseite AC horizontal angenommen. Zieht man jetzt der Spannweite AB entsprechend die Schlusslinie AB' und parallel zu derselben den Strahl OF , so ist nach §. 28 EF der linke Stützendruck D . Nun aber ist $\triangle OEF \sim \triangle ABB'$, mithin $AB : BB' = OE : EF$. Setzt man $OE = H$, $BB' = y$, so wird, da $EF = D$, $AB = l$ ist,

$$l : y = H : D,$$

mithin

$$D = \frac{Hy}{l}.$$

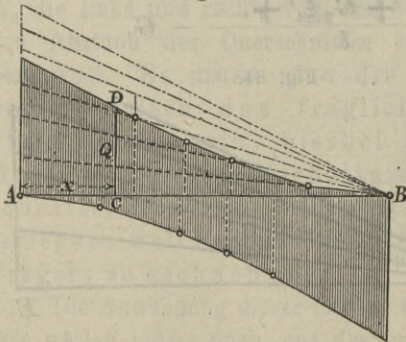
Hierbei sind l und y Längen, H und D Kräfte. Man erhält aber bei einem Produkte zweier Linien, von denen die eine eine Länge, die andere eine Kraft darstellt, denselben Werth, wenn man die Massstäbe vertauscht; man kann also auch H nach dem Längenmassstabe, y nach dem Kraftmassstabe messen. Macht man alsdann $H = l$, wie es in Fig. 84 geschehen ist, so wird sehr einfach

$$D = y.$$

Besonders bequem wird die Konstruktion, wenn man das Seilpolygon in umgekehrter Lage konstruirt, so dass die vordere Last in B liegt; es kann dann B als Pol, die Vertikale AA' als Kraftpolygon benützt werden. Alsdann ist die Ordinate CC' , welche der Lage der vorderen Last entspricht, der linke Stützendruck D .

β) Transversalkraft. Wenn für das Maximum von Q die vordere Last am Querschnitte liegen muss, so ist der linke Stützendruck gleichzeitig das positive Maximum der Transversalkraft. Die Konstruktion ist

Fig. 85.



in Fig. 85 nochmals durchgeführt.

Wenn dagegen die zweite Last am Querschnitte liegen muss, so zieht man einfach von der der vorderen Last entsprechenden Ordinate des Seilpolygons, welche nach dem Vorigen den linken Stützendruck darstellt, die vordere Last ab. Durch dieses Verfahren verschiebt sich das Seilpolygon um den Abstand der beiden ersten Lasten nach rechts und um die erste

Last nach unten. Konstruirt man beide Seilpolygone, so entspricht an einem bestimmten Querschnitte die grössere der beiden Ordinaten der Maximal-Transversalkraft.

Diese grafische Bestimmung des Stützendruckes und die darauf gegründete Konstruktion der Maximal-Transversalkraft wurde zuerst vom Verfasser (Zeitschr. des österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1870) gegeben.

§. 42. Grösste Transversalkraft für mittelbare Belastung durch ein System von Einzellasten.

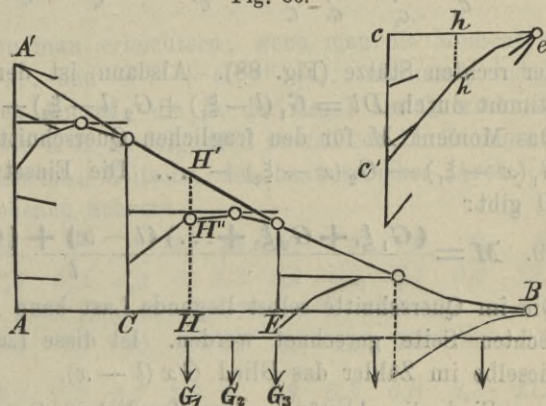
a) Rechnung. In dem für unmittelbare Belastung geltenden Ausdrücke 17 ist offenbar nur $G \frac{\xi}{a}$ für G zu setzen, wenn a den Abstand der Querträger bedeutet, zwischen denen der fragliche Schnitt liegt und ξ den Abstand der Resultante der zwischen diesen Querträgern liegenden Lasten vom rechten Querträger; es wird also

$$18. \max(+Q) = \frac{G_1 \xi_1' + G_2 \xi_2' + \dots}{l} - G \frac{\xi}{a}.$$

Natürlich kann auch für $G\xi$ die Summe der Momente der einzelnen zwischen beiden Querträgern liegenden Lasten in Beziehung auf den rechten Querträger genommen werden.

b) Konstruktion. Die im vorigen Paragraphen gezeigte Konstruktion des Stützdruckes, welcher von der Lage der Querträger unabhängig ist, bleibt natürlich auch hier gültig. Dieselbe Konstruktion aber macht man für jedes einzelne Fach, d. h. man bestimmt grafisch den Druck, welchen die Zwischenträger durch ihre Belastung durch Einzellasten auf die Querträger übertragen, indem man ein Seilpolygon konstruiert, für welches die

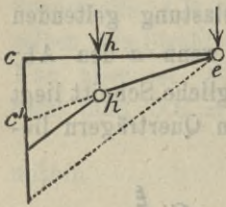
Fig. 86.



vordere Last am rechten Querträger liegt und für welches die Polweite gleich der Fachweite a ist (Fig. 86). Haben alle Fächer dieselbe Weite a , so ist selbstverständlich die Konstruktion nur einmal nöthig. Liegt nun die vordere Last im Fache CE bei H , so ist HH' der linke Stützdruck. Entspricht nun dem Punkte H die Höhe hh' des für das Fach CE konstruirten Seilpolygons $eh'c'$, wobei also $eh = EH$ ist, so ist hh' gleich dem vom Zwischenträger CE auf den Querträger C übertragenen Drucke. Macht man daher $H'H'' = hh'$, so ist HH'' die Transversalkraft für das Fach CE bei der angenommenen Belastung.

Konstruiert man in jedem Fache Polygone in der Weise, dass man die Ordinaten der den Fächern entsprechenden Seilpolygone von den oberen Enden der Ordinaten des Seilpolygons BHA' nach unten abträgt, so entsprechen die höchsten Punkte dieser Polygone in jedem Fache offenbar der Maximaltransversalkraft für dieses Fach.

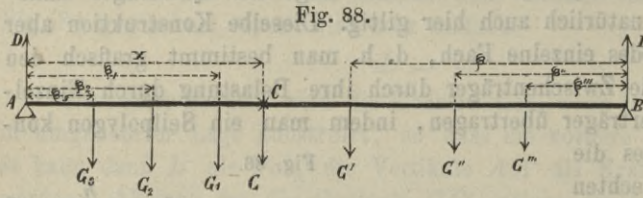
Liegt in dem Fache CE nur eine einzige Last G im Abstände ξ von E , so ist der vom Stützendrucke abzuziehende



Druck in $C = G \frac{\xi}{a}$; macht man in Fig. 87 $cc' = G$ und zieht die Gerade $c'e$, so ist $hh' = G \frac{\xi}{a}$. Es ist diese Konstruktion indess mit der vorigen übereinstimmend, da ceh' die erste Seite des Seilpolygons mit der Polweite a ist.

§. 43. Grösstes Moment für unmittelbare Belastung durch ein System von Einzellasten.

a) Rechnung. Es seien G_1, G_2, \dots die auf der linken Seite des im Abstände x von der linken Stütze liegenden Querschnittes liegenden Lasten, ξ_1, ξ_2, \dots ihre Abstände von der linken Stütze, ferner G', G'', \dots



die auf der rechten Seite des Querschnittes liegenden Lasten, ξ', ξ'', \dots ihre Abstände von

der rechten Stütze (Fig. 88). Alsdann ist der linke Stützendruck bestimmt durch $Dl = G_1(l - \xi_1) + G_2(l - \xi_2) + \dots + G' \xi' + G'' \xi'' + \dots$. Das Moment M für den fraglichen Querschnitt wird nun $M = Dx - G_1(x - \xi_1) - G_2(x - \xi_2) - \dots$. Die Einsetzung des Ausdruckes für D gibt:

$$19. \quad M = \frac{(G_1 \xi_1 + G_2 \xi_2 + \dots)(l - x) + (G' \xi' + G'' \xi'' + \dots)x}{l}$$

Die im Querschnitte selbst liegende Last kann entweder zur linken oder rechten Seite gerechnet werden. Ist diese Last G , so ergibt sich für dieselbe im Zähler das Glied $Gx(l - x)$.

Sind die Abstände vom fraglichen Querschnitte für die linken Lasten e_1, e_2, \dots , für die rechten Lasten e', e'', \dots und ist die Summe $G_1 + G_2 + \dots + G' + G'' + \dots$ aller Lasten $= R$, so lässt sich der vorige Ausdruck leicht in die Form

$$20. \quad M = \frac{Rx(l - x) - (G_1 e_1 + G_2 e_2 + \dots)(l - x) - (G' e' + G'' e'' + \dots)x}{l}$$

bringen. Die grafische Darstellung von M liefert hiernach als Momentenlinie eine Parabel. Kommt für das Maximum von M eine neue Last an den Querschnitt zu liegen oder vermehrt oder vermindert sich die Zahl der auf dem Träger ruhenden Lasten, so entsteht natürlich eine neue Parabel. Demnach wird die das Maximum von M enthaltende

Linie eine aus einzelnen Parabeln zusammengesetzte Kurve sein. Beispielsweise ergibt sich für zwei gleiche Lasten im Abstände a , je nachdem die linke oder rechte Last am Querschnitte liegt,

$$\begin{cases} Ml = G(2l - a - 2x)x \\ Ml = G(l - x)(2x - a), \end{cases}$$

wonach sich Fig. 89 (für $a = 0,5l$) ergibt. Für drei gleiche Lasten G , welche unter sich den Abstand a haben, wird, je nachdem die erste, zweite oder dritte Last am Querschnitte liegt,

$$\begin{cases} Ml = 3Gx(l - a - x) \\ Ml = G[3x(l - x) - a^2] \\ Ml = 3G(l - x)(x - a), \end{cases}$$

wonach in Fig. 90 (für $a = 0,3l$) die Darstellung erfolgt ist.

Fig. 89.

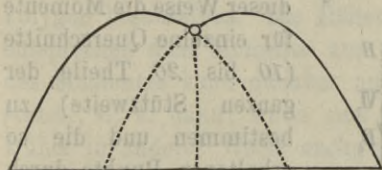
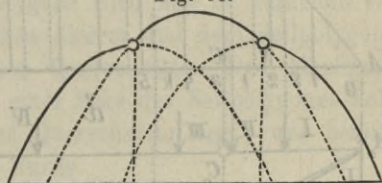


Fig. 90.



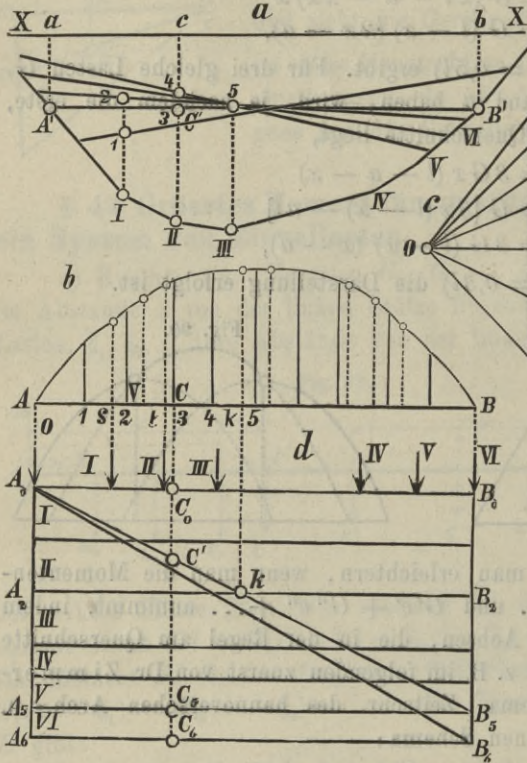
Die Berechnung kann man erleichtern, wenn man die Momentensummen $G_1 e_1 + G_2 e_2 + \dots$ und $G' e' + G'' e'' + \dots$ annimmt, indem man dabei von denjenigen Achsen, die in der Regel am Querschnitte liegen müssen, ausgeht, wie z. B. im folgenden zuerst von Dr. Zimmermann (Das Momentenschema, Zeitschr. des hannoverschen Arch.- u. Ingen.-Ver. 1877) angegebenen Schema:

$G =$	13	13	13	9	9	9	13	13	13	9	9	9	8
$e =$	14,0	12,7	11,4	7,4	5,9	4,4	0	1,3	2,6	6,6	8,1	9,6	12,8
$\Sigma G =$	72,5	59,5	46,5	33,5	24,5	15,5	6,5	6,5	19,5	32,5	41,5	50,5	59,5
$\Sigma G e =$	655	473	308	159	93	40	0	17	51	110	183	269	372
$e =$	15,3	14,0	12,7	8,7	7,2	5,7	1,3	0	1,3	5,3	6,8	8,3	11,5
$\Sigma G =$	85,5	72,5	59,5	46,5	37,5	28,5	19,5	6,5	6,5	19,5	28,5	37,5	46,5
$\Sigma G e =$	757	558	376	211	133	68	17	0	17	65	126	201	293
$e =$	16,6	15,3	14,0	10,0	8,5	7,0	2,6	1,3	0	4,0	5,5	7,0	10,2
$\Sigma G =$	98,5	85,5	72,5	59,5	50,5	41,5	32,5	19,5	6,5	6,5	15,5	24,5	33,5
$\Sigma G e =$	877	661	462	280	190	114	51	17	0	36	86	149	230

b) Konstruktion. Man konstruiere zunächst für das gegebene Lastensystem das Kraft- und Seilpolygon (Fig. 91). Um nun an irgend einem Querschnitte das Moment zu bestimmen, bestimmt man zuvörderst nach §. 39 diejenige Last, welche am Querschnitte liegen muss. Von dieser Last G aus trägt man auf einer horizontalen Axe XX' die Strecken

$ca = CA$ und $cb = CB$ auf und legt durch a und b Vertikalen, welche das Seilpolygon in A' und B' schneiden. Die Gerade $A'B'$ ist alsdann

Fig. 91.



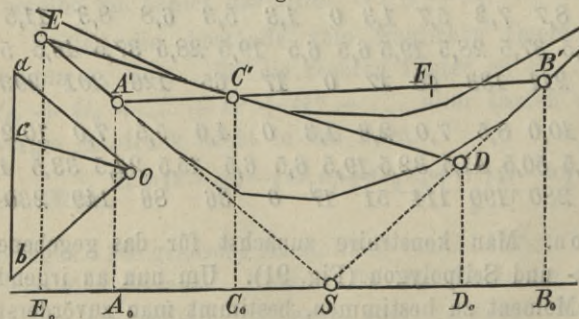
die Schlusslinie und das Moment M für den Querschnitt C ist jetzt gleich dem Produkte aus der Polweite H und der der Last G entsprechenden Höhe $C'II$. Zur Darstellung der Momentenlinie trägt man $C'II$ nochmals als Ordinate in C auf.

Bei grösseren Spannweiten genügt es, in dieser Weise die Momente für einzelne Querschnitte (10 bis 20 Theile der ganzen Stützweite) zu bestimmen und die so erhaltenen Punkte durch eine Kurve zu verbinden. Bei kleineren Spannweiten erscheint es rathsam, die einzelnen Parabeln, aus denen die Momentenlinie besteht, ein Stück über die Strecke, für

welche sie Giltigkeit haben, fortzusetzen, um die Schnitte dieser Parabeln sicherer zu erhalten.

Lassen wir die Schlusslinie auf zwei Polygonseiten, welche sich in S schneiden (Fig. 92),

Fig. 92.



gleiten, so beschreibt der Punkt C' , welcher von A, B den Horizontalabstand l_1, l_2 haben möge, eine Linie $E C' D$. Bezeichnen wir die Ordinaten der Punkte A', B', C' in Beziehung auf die durch S gehende Horizontale mit y_1, y_2, y und den Abstand SC_0 mit x , so ist $SA_0 = l_1 + x$,

$SB_0 = l_2 - x$, also, wenn man $\angle A'SA_0 = \alpha$, $\angle B'SB_0 = \beta$ setzt,

$y_1 = (l_1 + x) \tan \alpha$, $y_2 = (l_2 - x) \tan \beta$. Ferner wird nun $y = y_1 \frac{l_2}{l} + y_2 \frac{l_1}{l}$.

Die Einsetzung der Ausdrücke für y_1 und y_2 gibt zwischen x und y eine Gleichung ersten Grades, der Punkt E beschreibt also eine Gerade. Diese Gerade nennt Wittmann die Momentenabscisse für den Querschnitt C . Liegt der Punkt A' in S , so falle C' nach D ; liegt B' in S , so falle C' nach E . Alsdann ist offenbar DE die fragliche Gerade, wobei die Horizontalprojektion von SD und SE bezüglich l_1 und l_2 ist. Demnach ist die Momentenabscisse eine Schlusslinie für den symmetrisch zu C' gelegenen Querschnitt F . Legt man im Kraftpolygone eine Parallele oc zu DE , so theilt c die gesammte auf $A'B'$ liegende Belastung ab in dem Verhältnisse der Stützendrücke, welche in E und D entstehen, wenn diese Last in S liegt; es verhält sich demnach $ac : bc = l_1 : l_2$. Mit Rücksicht auf das Gleiten der Schlusslinie auf dem Seilpolygone wird nun C' natürlich ein Polygon beschreiben. Die Höhen zwischen diesem und dem Seilpolygone entsprechen dem Momente am fraglichen Querschnitte. Das Maximum des Momentes kann offenbar nur über einer Ecke des Seilpolygones entstehen, d. h. dann, wenn eine Last am Querschnitte liegt, was bereits früher in anderer Weise nachgewiesen wurde.

Die Konstruktion der Momente in der vorgeführten Weise (Fig. 91 a, c) zeigte zuerst Culmann (Gräfische Statik, I. Aufl. Zürich 1866). Culmann zog es indess vor, die ungünstigste Stellung des Lastenzuges durch Probiren zu finden. Man kann indess mit Benützung der in §. 24 und 39 aufgestellten Regeln zur Bestimmung der ungünstigsten Belastung doch schneller zum Ziele gelangen.

§. 44. Grösstes Moment für mittelbare Belastung durch ein System von Einzellasten.

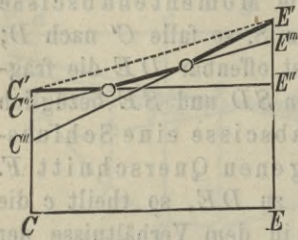
a) Rechnung. Die Berechnung des Momentes bleibt hinsichtlich derjenigen Lasten, welche ausserhalb des fraglichen Faches oder an den begrenzenden Querträgern liegen, ganz dieselbe. Haben die innerhalb des Faches liegenden Lasten die Resultante G_1 und ist ξ_1, ξ_2 deren Abstand von den beiden Querträgern, x_1, x_2 der Abstand dieser Querträger von den Stützen, so ergibt sich leicht als Ausdruck für das Moment M' dieser Lasten

$$M' = \frac{G}{la} [x_1(l - x) \xi_2 + x_2 x \xi_1].$$

Die Momentenlinie ist, so lange das Lastensystem seine Lage beibehält, eine Gerade. Da indess die ungünstigste Belastung für verschiedene Querschnitte des fraglichen Faches eine verschiedene sein kann, so wird sich das Maximalmoment innerhalb des fraglichen Faches durch eine gebrochene Linie darstellen lassen. Indessen kommen für alle Querschnitte eines Faches gewöhnlich nur zwei oder drei verschiedene Laststellungen in Betracht, so dass die Momentenlinie innerhalb eines Faches meist nur

eine oder zwei Ecken haben wird. Ist CC' das Maximalmoment bei C und für diese Lastenstellung EE'' das Moment bei E , so wird das Moment für diese Lastenstellung durch die Ordinaten der Geraden $C'E''$ dargestellt.

Fig. 93.



Ist nun EE' das Maximalmoment bei E und für diese Lastenstellung CC'' das Moment bei C , so entspricht dem Momente für diese Lastenstellung die Gerade $E'C''$. Da CC' und EE' die Maximalmomente bei C und E darstellen, so muss $CC'' < CC'$ und $EE'' < EE'$ sein, die beiden Geraden $C'E''$ und $E'C''$ werden sich also innerhalb CE schneiden.

Kommt noch eine dritte Stellung in Betracht, so wird dieser eine Gerade $C'''E'''$ entsprechen, welche die beiden vorigen Geraden ebenfalls innerhalb CE schneidet. Die Momente würden also immer kleiner sein, als sie der Sehne $C'E'$ entsprechen würden. Nur in einem Endfache muss das Moment an der Stütze immer Null sein, für alle Belastungen muss also die Momentenlinie immer durch den der Stütze entsprechenden Punkt der angenommenen Axe gehen; in einem Endfache kann also nur eine einzige Lastenstellung als die ungünstigste in Betracht kommen oder es wird das Maximalmoment nur durch eine einzige Gerade dargestellt. Als Beispiele sind in Fig. 94 und 95 die Momentenlinien für dasselbe Lastensystem, wie in Fig. 89 und 90, jedoch unter Voraussetzung von bezüglich drei und vier Fächern dargestellt.

Fig. 94.

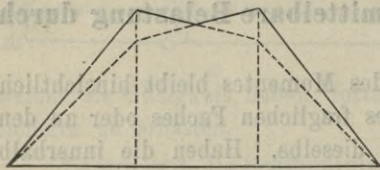
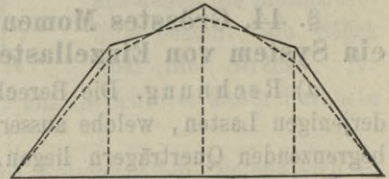


Fig. 95.



b) Konstruktion. Man konstruiert zunächst für jeden Querträger das Maximalmoment, wie im vorigen Paragraphen gezeigt; für dieselbe Lage des Lastenzuges, also mit Hilfe derselben Schlusslinie, bestimmt man aber noch das Moment am benachbarten linken und rechten Querträger. Durch geradliniges Verbinden der so aufgetragenen Punkte erhält man bereits die Momente in der Nähe der Querträger richtig. Es bliebe dann noch zu untersuchen, ob vielleicht für mittlere Querschnitte andere Laststellungen grössere Momente geben; im bejahenden Falle sind auch in gleicher Weise für diese Laststellungen die Schlusslinien einzutragen, die Momente an den Querträgern des fraglichen Faches zu bestimmen und die hiernach aufgetragenen Punkte geradlinig zu verbinden.

Die bereits im §. 37 und Fig. 96 b gezeigte grafische Bestimmung der ungünstigsten Belastung wird von Almquist in Stockholm (Civilingenieur 1884) in folgender Weise nachgewiesen. Lässt man auf dem Seilpolygone P (Fig. 97) die Schlusslinie und zwar sowohl für die Stützweite $AB = l$ des Hauptträgers, als auch für die Stützweite $CE = a$ des Zwischenträgers gleiten, so beschreiben die dem fraglichen Querschnitte F entsprechenden Punkte zwei Polygone P' und P'' .

Da $C'E'$ eine Seite des Polygons der Knotenlasten ist, so ist das Moment in $F = H \cdot F'F''$. Das grösste Moment in F kann nun offenbar nur über einer Ecke des Polygons P'' entstehen, d. h. wenn eine Last in C oder E liegt. Ausserdem aber erfordert das Entstehen des Maximums noch, dass

die an F'' anstossenden Seiten des Seilpolygons P'' mit der Seite des Polygons P' , in welcher F' liegt, nach beiden Seiten hin konvergieren. Legen wir durch den Pol O Parallelen Om, On zu den ersteren Seiten und eine Parallele Op zur letzteren Seite, so wird die Bedingung des Konvergirens erfüllt, wenn p zwischen m und n liegt. Nach dem vorigen Paragraphen aber

wird p die gesammte Last ab im Verhältnisse $ap : bp = x : l - x$ und m und n die bezüglichen im Fache CE liegenden Lasten in dem Verhältnisse $CF : EF = a_1 : a_2$ theilen. Auf demselben Gesetze aber beruht die in Fig. 96 b gezeigte Konstruktion. Die Punkte g, h , in denen sich die Diagonalen schneiden, entsprechen offenbar den Ecken der Momentenlinie. Diejenigen Ecken, welche einer Aenderung der Gesamtbelastung des Trägers und auch einer Umkehrung des Lastenzuges

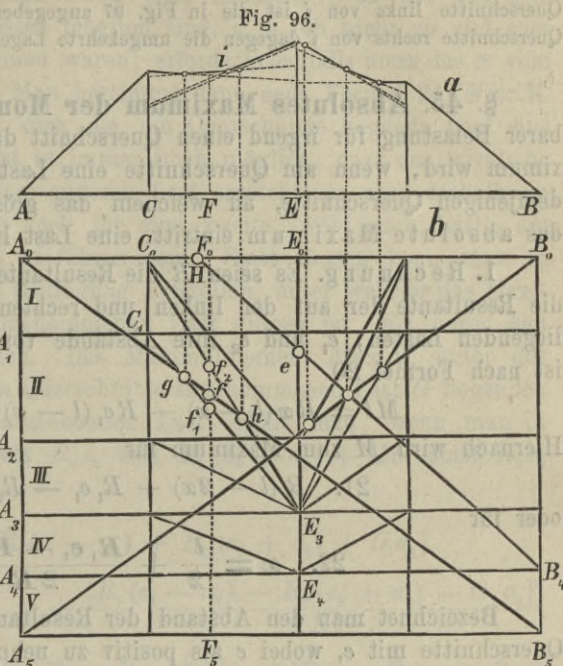
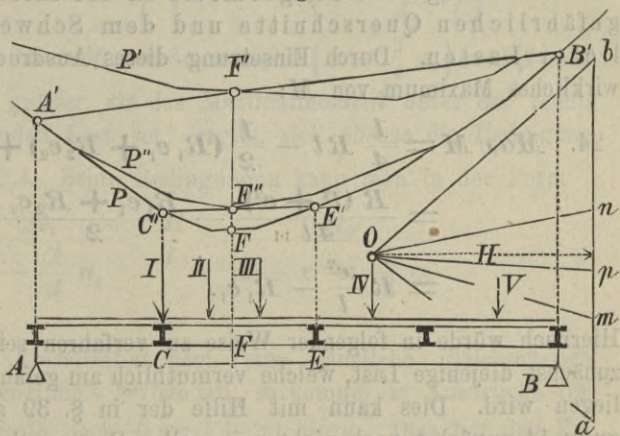


Fig. 97.



entstehen, entsprechen offenbar den Ecken der Momentenlinie. Diejenigen Ecken, welche einer Aenderung der Gesamtbelastung des Trägers und auch einer Umkehrung des Lastenzuges

entsprechen, sind indess nur durch die Konstruktion der Momentenlinien selbst zu bestimmen; so entspricht in Fig. 96 die Ecke i einer Umkehr des Lastenzuges; für Querschnitte links von i ist die in Fig. 97 angegebene Lage des Lastenzuges, für Querschnitte rechts von i dagegen die umgekehrte Lage die ungünstigste.

§. 45. Absolutes Maximum der Momente. Da bei unmittelbarer Belastung für irgend einen Querschnitt das Moment M zum Maximum wird, wenn am Querschnitte eine Last liegt, so wird auch an demjenigen Querschnitte, an welchem das grösste dieser Maxima oder das absolute Maximum eintritt, eine Last liegen müssen.

1. Rechnung. Es seien R die Resultante aller Lasten, R_1 und R_2 die Resultante der auf der linken und rechten Seite des Querschnittes liegenden Lasten, e_1 und e_2 ihre Abstände vom Querschnitte. Alsdann ist nach Formel 20

$$Ml = Rx(l - x) - Re_1(l - x) - R_2e_2x.$$

Hiernach wird M zum Maximum für

$$21. \quad R(l - 2x) + R_1e_1 - R_2e_2 = 0$$

oder für

$$22. \quad x = \frac{l}{2} + \frac{R_1e_1 - R_2e_2}{2R}.$$

Bezeichnet man den Abstand der Resultante R aller Lasten vom Querschnitte mit e , wobei e als positiv zu nehmen ist, wenn die Resultante auf der rechten Seite liegt, so ist $Re = R_2e_2 - R_1e_1$; mithin kann man auch schreiben:

$$23. \quad x = \frac{1}{2}(l - e).$$

Hiernach liegt die Trägermitte in der Mitte zwischen dem gefährlichen Querschnitte und dem Schwerpunkte sämtlicher Lasten. Durch Einsetzung dieses Ausdruckes erhält man als wirkliches Maximum von M :

$$\begin{aligned} 24. \quad \text{Max } M &= \frac{1}{4} Rl - \frac{1}{2} (R_1e_1 + R_2e_2) + \frac{(R_1e_1 - R_2e_2)^2}{4Rl} \\ &= \frac{R(l^2 + e^2)}{4l} - \frac{R_1e_1 + R_2e_2}{2} \\ &= R \frac{x^2}{l} - R_1e_1. \end{aligned}$$

Hiernach würde in folgender Weise zu verfahren sein: Man bestimmt zunächst diejenige Last, welche vermuthlich am gefährlichen Querschnitte liegen wird. Dies kann mit Hilfe der in §. 39 aufgestellten Bedingung 14 zunächst noch nicht mit voller Bestimmtheit geschehen, weil man x noch nicht genau kennt. Man wird zunächst annähernd $x = \frac{1}{2}l$ annehmen, also diejenige Last an den Querschnitt legen, für welche die

Last auf jeder Seite möglichst gleich gross ist. Sodann bestimmt man nach Formel 22 das x . Man kann jetzt nachsehen, ob die auf dem Träger angenommenen Lasten möglich sind, d. h. ob nicht zu viel oder zu wenig Lasten angenommen waren; erforderlichenfalls muss das x vom Neuen bestimmt werden. Man bestimmt dann nach Formel 24 $Max M$. Da nun für ein anderes x auch die am Querschnitte liegende Last eine andere werden kann, so ist es immer noch möglich, dass das wirkliche Maximum von M unter einer anderen Last entsteht; es wird deshalb im Allgemeinen die Rechnung noch für eine zweite, wohl auch dritte, am Querschnitte liegende Last zu führen sein. Statt dessen kann man in folgender Weise noch eine Bedingung aufstellen, unter welcher das Maximalmoment unter einer angenommenen Last grösser ist, als unter den beiden benachbarten Lasten. Das Maximalmoment $Max M_1$ unter der nächsten, links von der am Querschnitte angenommenen Last G liegenden und von dieser um a_1 abstehenden Last erhält man, wenn man in Formel 24 $R_1(e_1 - a_1)$ statt $R_1 e_1$ und $R_2(e_2 + a_1) + G a_1$ statt $R_2 e_2$ setzt. Dies gibt

$$\begin{aligned} Max M_1 &= \frac{1}{4} R l - \frac{1}{2} [R_1(e_1 - a_1) + R_2(e_2 + a_1) + G a_1] \\ &\quad + \frac{[R_1(e_1 - a_1) - R_2(e_2 + a_1) - G a_1]^2}{4 R l} \\ &= Max M + \frac{a_1}{4 l} [2(R_1 - R_2 - G)l - 2(R_1 e_1 - R_2 e_2) + R a_1] \end{aligned}$$

oder, wenn man $R_1 - R_2 - G = R_1 - (R - R_1) = 2R_1 - R$ und nach Formel 21 $R_1 e_1 - R_2 e_2 = R(2x - l)$ setzt,

$$Max M_1 = Max M - \frac{a_1}{l} \left[R_1 l - R \left(x - \frac{1}{4} a_1 \right) \right].$$

Damit nun $Max M > Max M_1$ werde, muss $R \left(x - \frac{1}{4} a_1 \right) > R_1 l$ sein.

Damit $Max M$ auch grösser, als das Maximalmoment unter der rechts von der Last G liegenden Last sei, ergibt sich ebenso die Bedingung

$R \left(l - x - \frac{1}{4} a_2 \right) > R_2 l$. Beide Bedingungen kann man in der Form

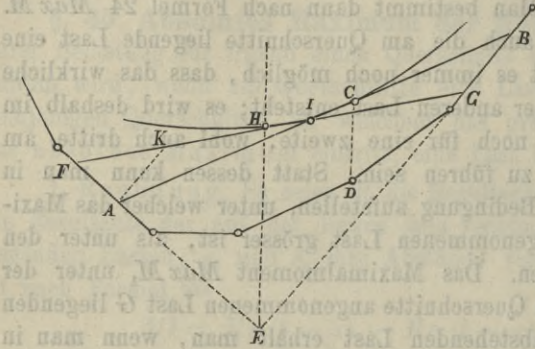
$$25. \quad \frac{R_1}{x - \frac{1}{4} a_1} < \frac{R}{l} > \frac{R_2}{l - x - \frac{1}{4} a_2}$$

zusammenfassen.

Ist ausser den Einzellasten noch eine gänzliche gleichmässige Belastung g pro Längeneinheit vorhanden, so kommt im Ausdrucke für M auf der rechten Seite noch $\frac{1}{2} g x (l - x)$ hinzu. Dies hat den Erfolg, dass in den für x und $Max M$ giltigen Ausdrücken 22 und 24 $R + \frac{1}{2} g l$ statt R zu setzen ist.

2. Konstruktion. Gleitet eine Schlusslinie auf dem Seilpolygone (Fig. 98), so umhüllt dieselbe, so lange ihre Enden auf denselben Seiten

Fig. 98.



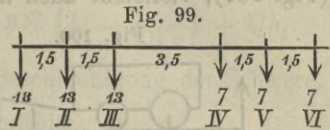
des Seilpolygons bleiben, eine Parabel mit vertikalen Durchmesser. Bei weiterer Bewegung wird sie eine aus Parabelstücken zusammengesetzte Linie umhüllen. Die vertikale Höhe DC von einer Ecke D bis zur Schlusslinie AB entspricht dem am Angriffspunkte der Last G wirkenden Momente. Am grössten wird nun offenbar DC , wenn die Gerade AB die erwähnte Umhüllungskurve in C tangirt, so dass das Maximum des bei D stattfindenden Momentes dem Vertikalstande des Seilpolygons und der Umhüllungskurve bei D entspricht. Die Konstruktion der Tangente AB ergibt sich durch folgende Betrachtung.

Die Verlängerung der Seiten, auf welchen AB gleitet, mögen sich in E schneiden. FG sei die Tangente für den Punkt H der Parabel, welcher in der durch E gehenden Vertikalen, also in der Mitte von FG liegt, und I der Durchschnittspunkt zwischen AB und FG . Ziehen wir durch A eine Parallele zu EB , welche FG in K schneidet, so sind die Horizontalprojektionen von AF und AK gleich, da diejenigen von EF und EG gleich sind. Da aber auch die Horizontalprojektionen von FG und AB , also auch die von AF und GB gleich sind, so muss $AK = GB$ sein. Da die Dreiecke AKI und BGI ausserdem in den Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent, also $AI = BI$. Da HI und CI Tangenten sind, so müssen die Horizontalprojektionen von HI und CI gleich sein. Der Mittelpunkt I der Tangente AB liegt also in der Mitte zwischen den durch die fragliche Seilecke D und den Durchschnittspunkt E der Verlängerungen der Seilpolygoneiten, auf welcher AB gleitet, gehenden Vertikalen. Dieser Satz ist übereinstimmend mit dem oben aufgestellten Satze, nach welchem der Querschnitt für $Max M$ und der Schwerpunkt sämtlicher Lasten gleich weit von der Mitte der Stützweite absteht. Da die Horizontalprojektion von $AB = l$ ist, so ist somit die Konstruktion von AB sehr leicht durchzuführen. Natürlich ist die Konstruktion für einige Ecken zu wiederholen, um diejenige zu bestimmen, für welche M wirklich zum absoluten Maximum wird.

Der Satz, dass die Mitte der Stützweite in der Mitte zwischen der Resultante sämtlicher Lasten und dem Querschnitte, an welchem M zum Maximum wird, liegt,

ist zuerst von Culmann (Grafsche Statik, Zürich 1866) aufgestellt worden. Die Bedingung 25 wurde zuerst von Scholin (Mittheilungen des Arch.- u. Ingen.-Ver. in Böhmen, 1877) entwickelt.

Beispiel. Ein Träger mit 12^m Stützweite sei durch das in Fig. 99 dargestellte Lastensystem belastet. Wir nehmen als erste Näherung den gefährlichen Querschnitt in der Mitte an. Legen wir die Lasten *I*, *II* links, so finden rechts nur die Lasten *III*, *IV*, *V* Platz; es liegt dann links $13 + 13 = 26$, rechts $13 + 7 + 7 = 27$, es muss also nach links geschoben werden; es muss demnach die Last *III* am Querschnitte liegen. Für diese Lage wird



$$e = \frac{7 \cdot 5,0 + 7 \cdot 3,5 - 13 \cdot 1,5 - 13 \cdot 3,0}{7 + 7 + 13 + 13 + 13} = \frac{1,0}{53} = 0,02,$$

$$x = \frac{12 - 0,02}{2} = 5,99, \quad l - x = 6,01.$$

Wenn wir jetzt wieder *I* und *II* auf die linke, *III*, *IV*, *V* auf die rechte Seite legen, so liegt pro Längeneinheit links $\frac{26}{5,99} = 4,34$, rechts $\frac{27}{6,01} = 4,48$, es muss also wieder nach links geschoben werden, die angenommene Lage des Lastensystemes ist also beizubehalten. Die Last *VI* findet auch für diesen Werth von x keinen Platz. Ferner wird nun

$$\frac{R_1}{x - \frac{1}{4} a_1} = \frac{26}{5,62} = 4,63, \quad \frac{R}{l} = \frac{53}{12} = 4,42, \quad \frac{R_2}{l - x - \frac{1}{4} a_2} = \frac{14}{5,14} = 2,73.$$

Die Bedingung 25 ist hiernach nicht erfüllt. Es wird daher noch nöthig, die Last *II* an den Querschnitt zu legen, wobei wir zunächst wieder annehmen, dass die Lasten *I* bis *V* Platz finden. Es wird jetzt:

$$e = \frac{7 \cdot 6,5 + 7 \cdot 5,0 + 13 \cdot 1,5 - 13 \cdot 1,5}{7 + 7 + 13 + 13 + 13} = \frac{80,5}{53} = 1,14,$$

$$x = \frac{12 - 1,14}{2} = 5,43, \quad l - x = 6,57.$$

Für diesen Werth von x finden, wenn die Last *II* am Querschnitte liegt, in der That die Lasten *I* bis *V* Platz. Wenn wir *I*, *II* auf die linke, *III*, *IV*, *V* auf die rechte Seite legen, so liegt pro Längeneinheit links $\frac{26}{5,43} = 4,8$, rechts $\frac{27}{6,57} = 4,1$, so dass nach rechts geschoben werden muss, wonach in der That die Last *II* am Querschnitte liegen muss. Es wird jetzt

$$\frac{R_1}{x - \frac{1}{4} a_1} = \frac{13}{5,05} = 2,57, \quad \frac{R}{l} = \frac{53}{12} = 4,42, \quad \frac{R_2}{l - x - \frac{1}{4} a_2} = \frac{27}{6,19} = 4,36.$$

Die Bedingung 25 ist somit erfüllt. Für diese Lage des Lastensystemes wird nun nach Formel 24:

$$\text{Max } M = \frac{53 \cdot 5,43^2}{12} - 13 \cdot 1,5 = 110,7.$$

Für die vorige Belastung, bei welcher die Last *III* am Querschnitte liegt, würde

$$\text{Max } M = \frac{53 \cdot 5,99^2}{12} - 13 \cdot 1,5 - 13 \cdot 3,0 = 100,0, \text{ also in der That kleiner.}$$

§. 46. Lastensystem aus Einzellasten und gleichmässiger Belastung. Es kommt bei Strassenbrücken vor, dass statt einzelner

Wagen nebst Pferden eine grössere Wirkung durch Menschengedränge entsteht. So kann hinsichtlich der Transversalkräfte an der einen Stütze statt der Achsendrücke Menschengedränge (Fig. 100) und hinsichtlich der Momente an der einen Stütze statt der Pferde Menschengedränge (Fig. 101), vielleicht auch an der anderen Stütze statt der Achsendrücke

Fig. 100.

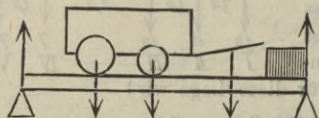
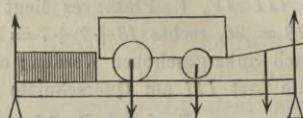


Fig. 101.



Menschengedränge voraussetzen sein. Hat diese gleichmässige Belastung p pro Längeneinheit auf der linken und rechten Seite bezüglich die Länge ξ und ξ_1 , so sind beide Stützendrücke

$$D = \frac{p}{2l} [\xi (2l - \xi) + \xi_1^2], \quad D' = \frac{p}{2l} [\xi^2 + \xi_1 (2l - \xi_1)].$$

Die Transversalkraft und das Moment für einen nicht durch die gleichmässige Belastung belasteten Querschnitt werden

$$26. \quad Q = \frac{p}{2l} (\xi_1^2 - \xi^2), \quad M = \frac{p}{2l} [\xi^2 (l - x) + \xi_1^2 x].$$

Handelt es sich um das absolute Maximum des Momentes, so ist $\xi = x - c_1$, $\xi_1 = l - x - c_2$ zu setzen, wenn c_1 und c_2 den Abstand des Endes der gleichmässigen Belastung vom Querschnitte bedeutet. Daher wird

$$27. \quad M = \frac{p}{2l} [(x - c_1)^2 (l - x) + (l - x - c_2)^2 x].$$

In Folge dessen kommt in der Gleichung 21 zur Bestimmung von x auf der linken Seite noch für die linke Belastung $\frac{1}{2} p (x - c_1) (2l + c_1 - 3x)$ und für die rechte Belastung $\frac{1}{2} p (l - x - c_2) (l - c_2 - 3x)$ hinzu. Die Gleichung zur Bestimmung von x wird dadurch allerdings eine quadratische.

Bei der grafischen Bestimmung ist im Seilpolygone für die gleichmässige Belastung die entsprechende Seilkurve anzuschliessen. Zeichnet man ausser dieser Seilkurve auch noch das Seilpolygon für den Fall, dass statt des Menschengedränges Wagen vorhanden sind, so ist von diesen beiden Linien alsdann an jeder Stelle nur diejenige beizubehalten, welche das grösste Q oder M gibt.

§. 47. Brücken mit krummliniger Bahn. Wir wollen eine in der Kurve liegende Eisenbahnbrücke mit zwei Trägern voraussetzen. An irgend einem Querträger oder einer Querschwelle sei der Achsendruck $= 2G$, der Druck auf den inneren und äusseren Träger D_1, D_2 , der

Abstand der Träger = b , der Abstand der Gleismitte von den beiden Trägern b_1, b_2 , die Gleisweite s , die Schienenüberhöhung h , die Höhe des Schwerpunktes der Wagen über der Bahn = h_1 , die Centrifugalkraft pro Achse = C . Alsdann ist

$$D_1 b = 2G \left(b_2 + h_1 \frac{h}{s} \right) - C h_1, \quad D_2 b = 2G \left(b_1 - h_1 \frac{h}{s} \right) + C h_1.$$

Ist r der mittlere Krümmungsradius, g die Beschleunigung der Schwere, c die Geschwindigkeit, so ist $C = 2G \frac{c^2}{gr}$, mithin

$$28. \quad D_1 = \frac{2G}{b} \left(b_2 + \frac{h_1 h}{s} - \frac{h_1 c^2}{gr} \right), \quad D_2 = \frac{2G}{b} \left(b_1 - \frac{h_1 h}{s} + \frac{h_1 c^2}{gr} \right).$$

Die Schienenüberhöhung h wird gewöhnlich so bemessen, dass für Schnellzüge $\frac{h}{s} = \frac{c^2}{gr}$ ist; alsdann aber ist

$$29. \quad D_1 = 2G \frac{b_2}{b}, \quad D_2 = 2G \frac{b_1}{b}.$$

Für Güterzüge ist die Geschwindigkeit ungefähr halb so gross; alsdann würde $\frac{c^2}{gr} = \frac{1}{4} \frac{h}{s}$, mithin

$$30. \quad D_1 = \frac{2G}{b} \left(b_2 + \frac{3h_1 h}{4s} \right), \quad D_2 = \frac{2G}{b} \left(b_1 - \frac{3h_1 h}{4s} \right).$$

Wir wollen hiernach allgemeiner

$$31. \quad D_1 = \frac{2G(b_2 + \beta_2)}{b}, \quad D_2 = \frac{2G(b_1 + \beta_1)}{b}$$

setzen, wobei nach dem Vorstehenden $\beta_2 = \frac{3h_1 h}{4s}$, $\beta_1 = 0$ zu setzen wäre. Da ungefähr $h_1 = 1,1s$ ist, so wird annähernd $\beta_2 = 0,83h$.

Das Verfahren zur statischen Berechnung kann nun ein verschiedenes sein.

1. Die Ordinaten

der Einflusslinien ändern sich gegenüber den geraden Brücken in dem Verhältnisse $\frac{2(b_2 + \beta_2)}{b}$

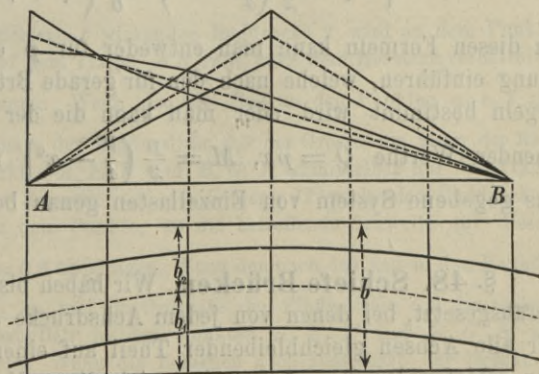
und $\frac{2(b_1 + \beta_1)}{b}$, wie dies

beispielsweise Fig. 102, hinsichtlich der Einflusslinien für einen Stützendruck und für das Moment in der Mitte zeigt.

Mit Hilfe der so geänder-

ten Einflusslinien kann man nun für das gegebene System von Einzellasten

Fig. 102.



in der allgemeinen Weise (§. 23) die Maxima von Q und M bestimmen.

2. Ist die gleichmässige Belastung für die gerade Brücke p , für die beiden Träger der in der Kurve liegenden Brücke p_1, p_2 , so ist

$$32. \quad p_1 = \frac{2p(l_2 + \beta_2)}{b}, \quad p_2 = \frac{2p(b_1 + \beta_1)}{b}.$$

Ist der Abstand der Gleismitte von den Trägern in der Mitte der Stützenweite $= a_1, a_2$, so ist im Abstände x von der Mitte $b_1 = a_1 - \frac{x^2}{2r}$, $b_2 = a_2 + \frac{x^2}{2r}$, also

$$33. \quad p_1 = \frac{2p}{b} \left(a_2 + \beta_2 + \frac{x^2}{2r} \right), \quad p_2 = \frac{2p}{b} \left(a_1 + \beta_1 - \frac{x^2}{2r} \right).$$

Die Transversalkraft wird nun nach der allgemeinen Beziehung $dQ = p dx$ mit Rücksicht auf den Umstand, dass in der Mitte $Q = 0$ sein muss,

$$Q_1 = \int_0^x p_1 dx, \quad Q_2 = \int_0^x p_2 dx, \quad \text{d. i.}$$

$$34. \quad Q_1 = px \cdot \frac{2}{b} \left(a_2 + \beta_2 + \frac{x^2}{6r} \right), \quad Q_2 = px \cdot \frac{2}{b} \left(a_1 + \beta_1 - \frac{x^2}{6r} \right).$$

Die Momente werden nach der allgemeinen Beziehung $dM = -Q dx$ mit Rücksicht auf den Umstand, dass an den Enden $M = 0$ werden

$$\text{muss, } M_1 = \int_x^l Q_1 dx, \quad M_2 = \int_x^l Q_2 dx, \quad \text{d. i.}$$

$$35. \quad \begin{cases} M_1 = \frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) \cdot \frac{2}{b} \left(a_2 + \beta_2 + \frac{l^2 + 4x^2}{48r} \right), \\ M_2 = \frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) \cdot \frac{2}{b} \left(a_1 + \beta_1 - \frac{l^2 + 4x^2}{48r} \right). \end{cases}$$

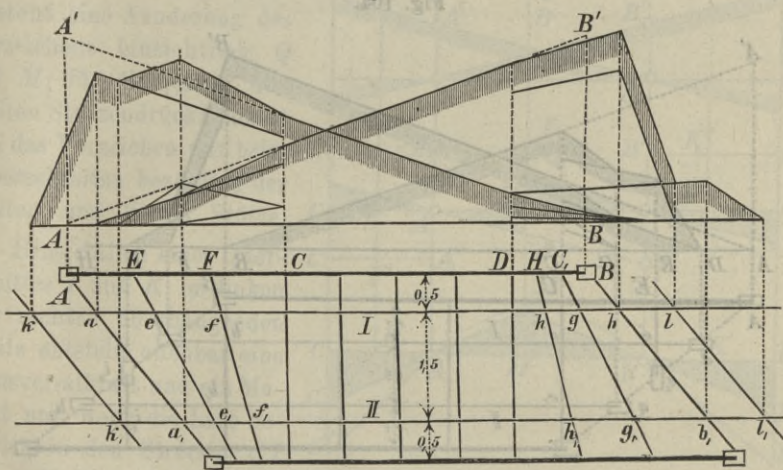
In diesen Formeln kann man entweder für p eine gleichwerthige Belastung einführen, welche nach den für gerade Brücken giltigen Näherungsregeln bestimmt wird oder man kann die der geraden Brücke entsprechenden Werthe $Q = px$, $M = \frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)$ in bekannter Weise für das gegebene System von Einzellasten genau bestimmen.

§. 48. Schiefe Brücken. Wir haben bisher nur normale Brücken vorausgesetzt, bei denen von jedem Achsdrucke sich ein ganz bestimmter, für alle Achsen gleichbleibender Theil auf einen Träger überträgt. Bei den schiefen Brücken aber ändert sich dieses Verhältniss an den schiefen Enden. Die hierbei eintretenden Veränderungen lassen sich ebenfalls am

übersichtlichsten durch Einflusslinien darstellen, wobei natürlich festzuhalten ist, dass die Einflussgrösse als Ordinate an der betreffenden Wagenachse aufzutragen ist. Im Allgemeinen wird die Konstruktion der Einflusslinie am bequemsten, wenn man dabei die Einflussgrösse für jedes der beiden Räder der Achse getrennt bestimmt und aufträgt, und sodann erst die Summirung vornimmt. Die Form der Einflusslinie wird natürlich durch die spezielle Konstruktion der Bahn (siehe des Verfassers: *Eiserne Brücken, Querkonstruktionen, II. Aufl., XX. Kapitel*) bedingt sein. Wir wollen dies nur an ein Paar Beispielen erläutern.

1. Bei einer Eisenbahnbrücke mit 7^m Stützweite werde der Raddruck von den Schienen durch Querschwellen auf die 2^m von einander entfernten Träger übertragen, wobei die Schwellen an den Enden eine immer mehr und mehr schief werdende Lage haben (Fig. 103). Wir konstruieren die Einflusslinie für den Träger *AB*, welche in der Strecke *CD* natürlich dieselbe sein wird, wie bei normaler Brücke. Von dem

Fig. 103.

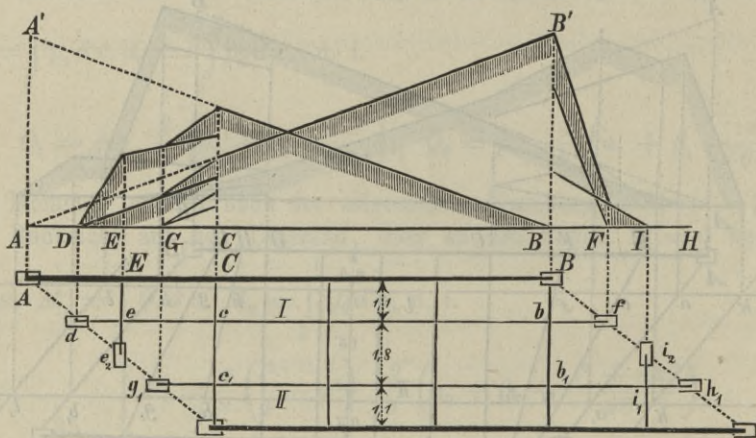


über einer Schwelle auf die Schiene I wirkenden Raddrucke 1 wird an dem Punkte, in welchem diese Schwelle auf dem Träger *AB* ruht, nach dem Hebelarmverhältnisse der Druck $\frac{2,0}{2,5} = 0,8$ übertragen. Wenn also das Rad an den Punkten *a, e, f* und *b, g, h* ruht, so hat die Ordinate der Einflusslinie $0,8$ der Grösse, als wenn der Raddruck 1 bezüglich in den Punkten *A, E, F* und *B, G, H* unmittelbar auf den Träger wirkt. Von dem über einer Schwelle auf die Schiene II wirkenden Raddrucke 1 wird auf den Träger *AB* in dem Punkte, wo die betreffende Schwelle auf diesem Träger ruht, der Druck $\frac{0,5}{2,5} = 0,2$ übertragen. Wenn demnach das Rad in den Punkten *a₁, e₁, f₁* und *b₁, g₁, h₁* ruht, so hat die Ordinate der Einflusslinie $0,2$ der Grösse, als wenn der Raddruck 1 bezüglich in den Punkten *A, E, F* und *B, G, H* unmittelbar auf den Träger wirkt. Wenn die Schienen noch ausserhalb der Brücke in *k, k₁, i, i₁* unterstützt sind und in den Strecken *ka, k₁a₁, ib, i₁b₁* frei schweben, so beginnen die von der Belastung der Schiene I herrührenden Theile in *k, i*, die von

der Belastung der Schiene II herrührenden Theile in k_1, i_1 . In der Figur ist hienach beispielsweise die Einflusslinie für beide Stützendrücke dargestellt. Für den in Fig. 99 angegebenen Lastenzug müsste die Vorderachse bezüglich bei a und b stehen, damit das Maximum eintritt.

2. Bei einer Eisenbahnbrücke mit 14^m Stützweite werde der Raddruck durch Zwischenträger mit $1,8^m$ Abstand auf die Querträger, von diesen auf die 4^m entfernten Hauptträger übertragen (Fig. 104). Die Hauptträger, die Endzwischensträger und der letzte halbe Querträger seien auf dem Widerlager in Punkten gelagert, welche in einer Geraden liegen. Für den Träger AB ist innerhalb der Strecke BC die Einflusslinie dieselbe, wie bei normaler Brücke. Von dem auf den Zwischenträgern I wirkenden Drucke 1 wird in der normalen Strecke der Druck $\frac{2,9}{4,0} = 0,725$ auf den Träger übertragen; der in den Punkten d und e wirkende Raddruck 1 erzeugt in D und E den Druck 0 und $\frac{0,9}{2,0} = 0,45$; demnach hat in D, E, C die Ordinate der Einflusslinie das 0 -, $0,450$ - und $0,725$ fache der Ordinate bei normaler Lage; ebenso

Fig. 104.



ist in B die Ordinate $0,725$ die Ordinate bei normaler Lage, während in F die Ordinate $= 0$ wird; in den Strecken DE, EC, CB, BF ist die Einflusslinie nach §. 20 eine Gerade. Von dem auf den Zwischenträgern II wirkenden Drucke 1 wird in der normalen Strecke auf den Träger AB der Druck $\frac{1,1}{4,0} = 0,275$ übertragen; der in Punkten g und i wirkende Raddruck wird auf den Träger AB überhaupt nicht übertragen; in G und I ist also die Ordinate der Einflusslinie 0 ; in C und B dagegen ist die Ordinate $0,275$ von der Ordinate der Einflusslinie bei normaler Anordnung. Hiernach sind wieder die Einflusslinien für beide Stützendrücke oder Transversalkräfte der Endfächer konstruirt. Für den in Fig. 99 angegebenen Lastenzug würde der linke und rechte Stützendruck am grössten, wenn bei dem bezüglich nach links und rechts gehenden Zuge bezüglich die II. Achse bei C , die I. Achse bei B liegt.

b) Ueberhängende Träger.

§. 49. Einfluss einer Einzellast.

1. Träger mit überstehenden Enden. Hinsichtlich der Transversalkraft und des Momentes für einen zwischen den beiden Stützen A und B liegenden Querschnitt, sowie für die beiden Stützendrücke ist die Einflusslinie zwischen den beiden Stützen natürlich ganz dieselbe, wie beim einfachen Träger (Fig. 105). Da sich aber der Ausdruck für D , Q , M durch das Ueberschreiten einer Stütze durch die Last nicht ändert, so sind die innerhalb

der Stützen erhaltenen geraden Linien auch nach aussen fortzusetzen. Dadurch entsteht eine Aenderung des Vorzeichens hinsichtlich Q und M ; für die linken und rechten Stützendrücke ändert sich das Vorzeichen nur beim Ueberschreiten bezüglich der rechten und linken Stütze.

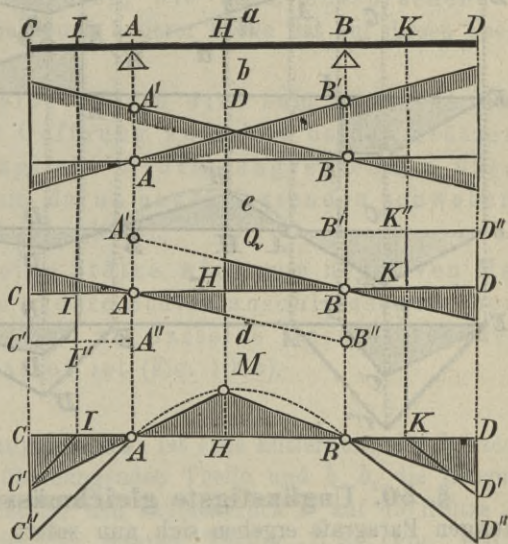
Hinsichtlich eines Querschnittes I und K im linken oder rechten überhängenden Theile entsteht offenbar eine Transversalkraft und ein Moment nur, wenn die Last bezüglich in den Strecken CI

und DK liegt. Alsdann ist für den Querschnitt I : $Q = -G$, $M = -G\xi$ und für den Querschnitt K : $Q = +G$, $M = -G\xi$, wenn ξ den Abstand der Last vom Querschnitte (absolut genommen) bezeichnet. Die bezüglichen Einflusslinien sind in der Figur angegeben.

In Fig. 105 ist unmittelbare Belastung angenommen; bei mittelbarer Belastung treten die in §. 35 für den einfachen Träger besprochenen Aenderungen ein.

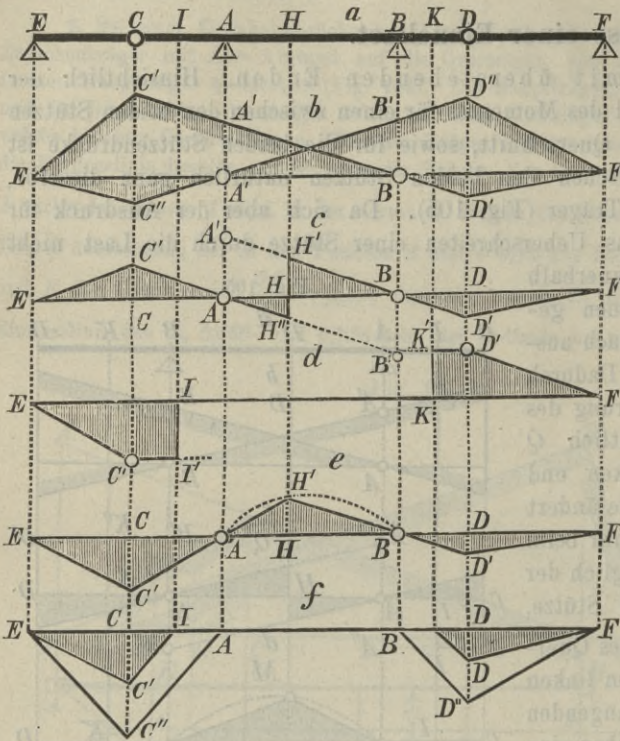
2. Kontinuirlicher Gelenkträger. Hinsichtlich eines ruhenden Theiles bleibt die Einflusslinie innerhalb dieses Theiles genau dieselbe, wie beim Träger mit überstehenden Enden. Ueber die anschließenden schwebenden Theile setzt sich die Einflusslinie ohne Absatz geradlinig fort; denn ist ξ die Entfernung der innerhalb des schwebenden Theiles CE (Fig. 106) liegenden Last G von E , b die Länge CE , so

Fig. 105.



ist der Druck in $C = G \frac{\xi}{b}$, es ist also auch die Einflussgrösse für den

Fig. 106.



Theil CD dem ξ proportional.

Liegt die Last in E , so ist der Einfluss $= 0$, ebenso natürlich, wenn die Last in dem etwa an E anstossenden ruhenden Theile liegt.

Für den schwebenden Theil ist die Einflusslinie natürlich ganz dieselbe, wie beim einfachen Träger und ein Einfluss einer auf dem ruhenden Theile liegenden Last auf den schwebenden Theil ist überhaupt nicht vorhanden.

§. 50. Ungünstigste gleichmässige Belastung. Aus dem vorigen Paragraphen ergeben sich nun sofort die folgenden Sätze für die ungünstigste Belastung durch eine gleichmässig vertheilte Last:

1. Für die Transversalkraft und das Moment für einen zwischen den beiden Stützen des ruhenden Theiles liegenden Querschnitt ist die Belastung zwischen den Stützen genau dieselbe, wie beim entsprechenden einfachen Träger.

2. Der ausserhalb der Stützen liegende Theil sammt dem anstossenden schwebenden Theile ist entweder gänzlich oder gar nicht zu belasten; je nachdem der ruhende Theil neben der angrenzenden Stütze nicht belastet oder belastet ist. So z. B. ist für $\max(+Q)$ für den Querschnitt H die Strecke BH belastet; deshalb ist der Theil BF nicht zu belasten; für $\max(-Q)$ dagegen ist die Strecke AH belastet, also BH unbelastet. Deshalb ist die Strecke BF gänzlich zu belasten (Fig. 106c). Für $\max(+M)$ ist die ganze Länge AB zu belasten; die äusseren Theile sind

deshalb nicht zu belasten. Für $\max(-M)$ darf innerhalb AB keine Last liegen; deshalb ist AE und BF gänzlich zu belasten (Fig. 106e).

3. Für einen Querschnitt des ruhenden Theiles ausserhalb der Stützen kann Q und M nur positiv oder nur negativ sein; das Maximum entsteht, wenn der ruhende Theil vom fraglichen Querschnitte bis zum Ende des bezüglichen überstehenden Theiles sammt dem anstossenden schwebenden Theile gänzlich belastet ist. Die übrigen Theile können belastet sein oder nicht, da eine Belastung derselben keinen Einfluss auf das fragliche Q (Fig. 106d) und M (Fig. 106f) hat.

4. Für den schwebenden Theil bleibt natürlich die ungünstigste Belastung dieselbe, wie beim entsprechenden einfachen Träger. Die Belastung anderer Theile hat auf diesen Theil keinen Einfluss.

5. Der Druck auf eine Stütze wird zum positiven Maximum, wenn die ganze Oeffnung zwischen beiden Stützen, sammt dem an die fragliche Stütze angrenzenden überstehenden Theil und dem daran anschliessenden schwebenden Theil belastet sind (Fig. 106b).

6. Der Druck auf eine Stütze wird zum negativen Maximum, wenn das an die andere Stütze anschliessende überstehende Ende sammt dem an dasselbe anschliessenden schwebenden Theil belastet ist (Fig. 106b).

§. 51. Grösste Stützendrucke. Ist l die Entfernung der Stützen, sind a, a_1 die Längen der überhängenden Theile und b, b_1 die Längen der schwebenden Theile, so ist für den Stützendruck D auf die Stütze A bei gleichmässiger Belastung des ganzen Theiles BE (Fig. 106):

$Dl = \frac{1}{2}pb \cdot (l + a) + \frac{1}{2}p(l + a)^2$, also

$$36. \quad \text{Max}(+D) = + \frac{p(l + a)(l + a + b)}{2l}.$$

Ebenso ergibt sich für den grössten negativen Stützendruck auf A , also bei Belastung des Theiles BF : $Dl + \frac{1}{2}pa_1^2 + \frac{1}{2}pb_1 \cdot a_1 = 0$ oder

$$37. \quad \text{Max}(-D) = - \frac{pa_1(a_1 + b_1)}{2l}.$$

Hinsichtlich des Druckes auf die Stütze B ist nur a, b mit a_1, b_1 zu vertauschen.

Für ein System von Einzellasten wird man für $\text{Max}(\pm D)$ am besten nach §. 24 die Einflussfiguren $EC'B$ und $BD'F$ (Fig. 106)

beachten, wobei $CC' = \frac{l+a}{l}$ und $DD' = \frac{a_1}{l}$ ist.

§. 52. Grösste Transversalkräfte.

1. Querschnitt zwischen den Stützen. Für die Belastung des Theiles AE (Fig. 106) ist $Dl = \frac{1}{2}pb(l+a) + pa(l + \frac{1}{2}a)$,
 $Q = D - \frac{1}{2}pb - pa = \frac{pa(a+b)}{2l}$. Für die Belastung der Strecke BH wird, wie beim einfachen Träger, $Q = \frac{p(l-x)^2}{2l}$, mithin

$$38. \max(+Q) = + \frac{p}{2l} [a(a+b) + (l-x)^2].$$

Für $\max(-Q)$ ist a, b, x mit $a_1, b_1, l-x$ zu vertauschen und $-$ statt $+$ zu setzen.

Bei einer Belastung durch ein System von Einzellasten wird die Einflussfigur zu beachten sein, die hier aus zwei von einander getrennten Theilen besteht. Bei einer Strassenbrücke ist in einem solchen Falle jeder Theil für sich in möglichst ungünstigster Weise zu belasten; bei Eisenbahnbrücken würde indess eine derartige Belastung nicht immer möglich sein; jedenfalls aber wird es zulässig sein, nur mögliche Belastungen zu berücksichtigen, worauf wir hier indess nicht näher eingehen wollen. Das der Belastung von BH entsprechende Q wurde wie in §. 41 u. 42 bestimmt. Das der Belastung von AE entsprechende Q kann nach der in §. 43 gezeigten Konstruktion für die Momente bestimmt werden. Man konstruirt der angenommenen Belastung entsprechend, die Schlusslinie mit der Horizontalprojektion AE ; ist die dem Punkte C entsprechende Höhe des Seilpolygones y , die Polweite H , so würde das Moment in C bei der Stützweite $AE = Hy$ sein. Da nun aber $CC' = 1 \cdot \frac{a+l}{l} - 1 = \frac{a}{l}$ ist, während in der Einflussfigur für das der Stützweite AE entsprechende Moment $CC' = \frac{ab}{a+b}$ sein würde, so wird für die Belastung von AE : $Q = Hy \cdot \frac{a}{l} \frac{a+b}{ab} = \frac{H(a+b)}{bl} y$. Wählt man $H = l$, so wird $Q = \frac{a+b}{b} y$, was leicht zu konstruiren ist. Wählt man $H = l \frac{b}{a+b}$, so wird $Q = y$.

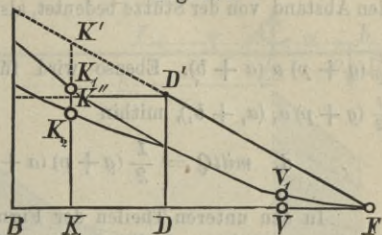
2. Querschnitt ausserhalb der Stützen. Wir nehmen einen Querschnitt K im rechten überstehenden Theile im Abstände x von der Stütze B an. Für die Belastung des Theiles KD ist $Q = p(a_1 - x)$ und für die Belastung von DF wird $Q = \frac{1}{2}pb_1$, somit ist

$$39. \max(+Q) = + \frac{1}{2} p [2(a_1 - x) + b_1], \quad \max(-Q) = 0.$$

Für einen Querschnitt I im linken überstehenden Theile ist $x = AI$ und a, b für a_1, b_1 zu setzen, sowie das Vorzeichen zu wechseln.

Für eine Belastung durch Einzellasten ist die Einflussfigur $KK''D'F$ (Fig. 107) zu beachten. Für einen Eisenbahnzug wird hierbei das vordere Lokomotivrad nach K zu legen sein. Dem §. 41 entsprechend, konstruiert man ein Seilpolygon mit der Polweite $FD=b_1$, wobei die vordere Last nach F verlegt wird. Macht man $FV=DK$, so ist $Q=KK_1 - VV_1$, da die Einflussfigur als Differenz der Dreiecke FKK' und $DK''K'$ angesehen werden kann, welchen die Einflussgrößen KK_1 und VV_1 entsprechen.

Fig. 107.



In Fig. 108 bis 110 sind die Transversalkräfte für ein Feld mit zwei Gelenken, sowie ein Endfeld und ein Mittelfeld ohne Gelenk grafisch dargestellt.

Mittlere Transversalkraft. Die mittlere Transversalkraft *mitt* Q für eine bestimmte Länge erhält man durch Bestimmung der entsprechenden Transversalkraftfläche oder des Integrales $\int Q dx$ und Division durch die entsprechende Länge. Wir wollen hier nur den absoluten Werth in Betracht ziehen und von $\max(+Q)$ und $\max(-Q)$ nur den absolut grösseren Werth beibehalten und in Ergänzung zu §. 34 auch das Eigengewicht berücksichtigen. Für den schwebenden Theil gilt die in §. 37 für *mitt* Q aufgestellte Regel.

Für das zwischen den Stützen liegende Stück des ruhenden Theiles ergibt sich, wenn wir den Abstand desjenigen Punktes, in welchem die absoluten Werthe von $\max(+Q)$ und $\max(-Q)$ gleich werden oder in welchem für das Eigengewicht $Q=0$ wird, von den Stützen mit ξ , ξ_1 bezeichnen, nach Formel 16 (S. 52) und 38:

$$l \text{ mitt } Q = \frac{g}{2} \left[\int_0^{\xi} (l+d-2x) dx - \int_{\xi}^l (l+d-2x) dx \right] \\ + \frac{p}{2l} \left[\int_0^{\xi} \{a(a+b) + (l-x)^2\} dx + \int_{\xi}^l \{a_1(a_1+b_1) + x^2\} dx \right],$$

wenn man zur Abkürzung $ld = a(a+b) - a_1(a_1+b_1)$ setzt. Für das Eigengewicht wird $Q = \frac{1}{2} g (l+d-2x)$, mithin

$$\xi = \frac{1}{2} (l+d), \quad \xi_1 = l - \xi = \frac{1}{2} (l-d).$$

Die Ausführung der Integration gibt, wenn man noch $ls = a(a+b) + a_1(a_1+b_1)$ setzt,

$$a. \quad l \text{ mitt } Q = \frac{1}{4} g (l^2 + d^2) + \frac{1}{24} p (7l^2 + 6ls + 3d^2).$$

Ist wie gewöhnlich $a = a_1$, $b = b_1$, so wird $d = 0$, $s = 2a(a+b)$, $\xi = \xi_1 = \frac{1}{2} l$ und

$$b. \quad l \text{ mitt } Q = \frac{1}{4} g l^2 + \frac{1}{24} p [7l^2 + 12a(a+b)].$$

Für ein linkes Endfeld wird $a = 0$, $b = 0$, also $ld = -a_1(a_1+b_1)$, $ls = +a_1(a_1+b_1)$; für ein rechtes Endfeld wird $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, also $ls = ld = a(a+b)$; in beiden Fällen wird

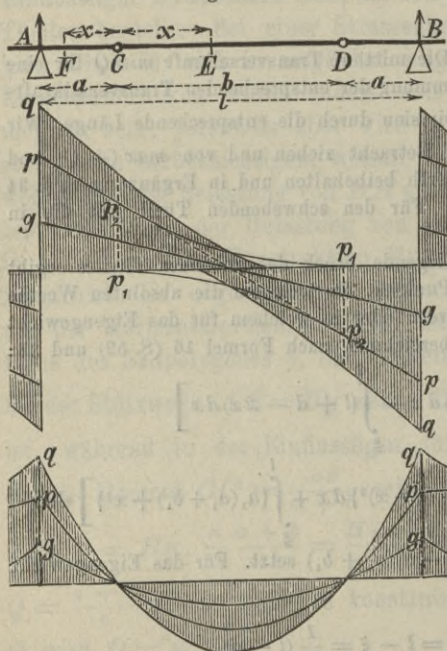
$$2. \text{ l mitt } Q = \frac{1}{4} g (l^2 + s^2) + \frac{1}{24} p (7l^2 + 6ls + 3s^2).$$

Für das linke überstehende Ende wird $Q = \frac{1}{2} (g + p)(2a + b - 2x)$, wenn x den Abstand von der Stütze bedeutet, also $a \text{ mitt } Q = \frac{1}{2} (g + p) \int_0^a (2a + b - 2x) dx = \frac{1}{2} (g + p) a (a + b)$. Ebenso wird für das rechte überstehende Ende $a_1 \text{ mitt } Q = \frac{1}{2} (g + p) a_1 (a_1 + b_1)$, mithin

$$d. \text{ mitt } Q = \frac{1}{2} (g + p) (a + b), \quad \text{mitt}_1 Q = \frac{1}{2} (g + p) (a_1 + b_1).$$

In den unteren Theilen der Figuren 112 und 113 sind die Transversalkraft für das Eigengewicht und die absoluten Werthe der Maximaltransversalkräfte für die Verkehrslast, sowie die Summe von beiden für die beiden möglichen Anordnungen

Fig. 108.



von drei Feldern (Gelenk im Mittel-feld oder in den äusseren Feldern) aufgetragen.

§. 53. Grösste Momente.

1. Querschnitt zwischen den Stützen. Das positive Maximum von M behält denselben Werth wie beim einfachen Träger. Für die Belastung des Theiles AE (Fig. 106) ist für den Stützendruck in B :

$$D_1 l = -\frac{1}{2} p b a - \frac{1}{2} p a^2 = -\frac{1}{2} p a (a + b), \quad \text{also } M l =$$

$$D_1 l (l - x) = -\frac{1}{2} p a (a + b) (l - x). \quad \text{Ebenso wird für die Belastung des Theiles } BF:$$

$$M l = -\frac{1}{2} p a_1 (a_1 + b_1). \quad \text{Somit haben wir}$$

$$40. \quad \begin{cases} \max (+M) = +\frac{1}{2} p x (l - x), \\ \max (-M) = -\frac{p}{2l} [a (a + b) (l - x) + a_1 (a_1 + b_1) x]. \end{cases}$$

Ist $a = a_1$, $b = b_1$, so wird wesentlich einfacher

$$41. \quad \max (-M) = -\frac{1}{2} p a (a + b).$$

Hier ist also $\max (-M)$ konstant.

Dementsprechend bleibt auch für ein System von Einzellasten $max(+M)$ dasselbe, wie beim einfachen Träger. Für $max(-M)$ sind die Strecken AE und BF den Einflussfiguren $AC'E$ und $BD'F$ (Fig. 106e) entsprechend zu belasten; wobei allerdings bei einer Eisenbahnbrücke die Möglichkeit einer derartigen Belastung in Betracht kommt. Bei den Einflussfiguren für das den Punkten C und D entsprechende Moment bei einem einfachen Träger mit der Stützweite AE und BF würde $CC' = \frac{ab}{a+b}$, $DD' = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1}$. Hier dagegen wird $CC' = \frac{a(l-x)}{l}$, $DD' = \frac{a_1 x}{l}$. Bezeichnet man daher die Höhen des Seilpolygones für die ungünstigste Belastung, den Stützweiten CC' , DD' entsprechend, mit y, y_1 , so würde das Moment in C und D für diese Stützweiten $Hy, H_1 y_1$ sein. Im vorliegenden Fall wird daher, der veränderten Höhe der Einflussfigur entsprechend,

$$M = \frac{Hy(a+b)(l-x)}{bl}, \quad M_1 = \frac{Hy(a_1 + b_1)x}{b_1 l}.$$

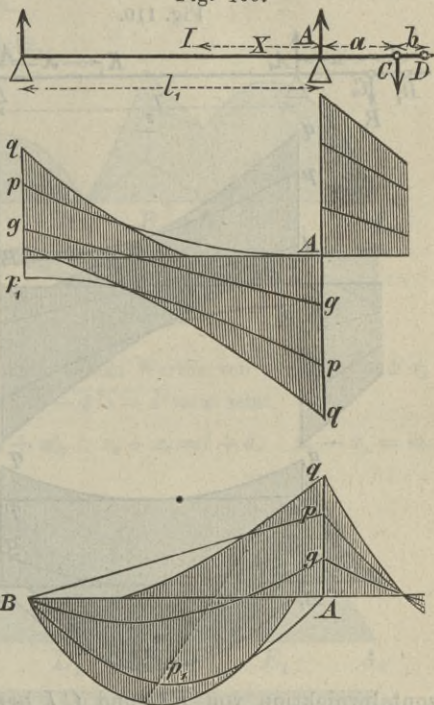
Für die Konstruktion genügt es, M für $x=0$, M_1 für $x=l$ zu konstruieren; diese Momente werden

$$M' = Hy \frac{a+b}{b}, \quad M_1' = H_1 y_1 \frac{a_1 + b_1}{b_1}.$$

Ist in Fig. 111 $CC' = y$, die Horizontalprojektion von EC und CI bezüglich $= b$ und a und legt man durch E und C' eine Gerade, welche die Vertikale von I in I' schneidet, so ist $II' = y \frac{a+b}{b}$, also $M' = H \cdot II'$, wonach M' und M_1' leicht zu konstruieren sind. Die Momentenfläche bildet nun ein Trapez, dessen Höhen in A und B bezüglich gleich M' und M_1' sind.

2. Querschnitt ausserhalb der Stützen. Bei der Belastung der Strecke IE (Fig. 106f) wird das Moment für den Querschnitt I : $M = -\frac{1}{2}pb \cdot (a-x) - \frac{1}{2}p(a-x)^2$, wenn man $AI = x$ setzt; es ist mithin:

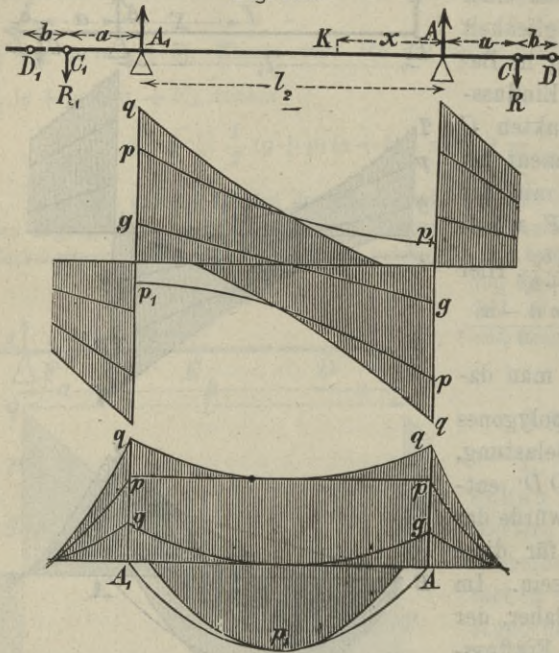
Fig. 109.



42. $\max(+M) = 0, \max(-M) = -\frac{1}{2} p (a-x)(a+b-x)$

Für ein System von Einzellasten ist wieder die Einflussfigur $EC'I$ (Fig. 106f) zu beachten. Trägt man in das Seilpolygon, der ungünstigsten Lage entsprechend, die Schlusslinie mit der

Fig. 110.



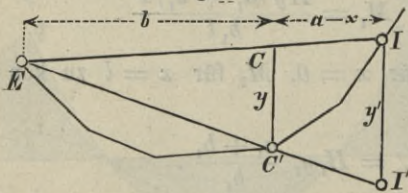
die Schlusslinie mit der Horizontalprojektion

EI ein, so würde, wenn y die dem Punkte C entsprechende Höhe des Seilpolygones ist, Hy das Moment in C bei der Stützweite EI sein. Für diese Stützweite würde aber $CC' = \frac{b(a-x)}{a+b-x}$, während hier $CC' = a-x$ ist. Diesem Verhältnisse der Höhen der Einflussfigur entsprechend, wird

$$M = Hy \frac{a+b-x}{b}$$

Ist nun in Fig. 111 $CC' = y$ und die Horizontalprojektion von EC und CI bezüglich $= b$ und $a-x$, und macht man dieselbe Konstruktion, wie

Fig. 111.



vorhin, so ist $II' = y \frac{a+b-x}{b}$, mithin $M = H \cdot II'$.

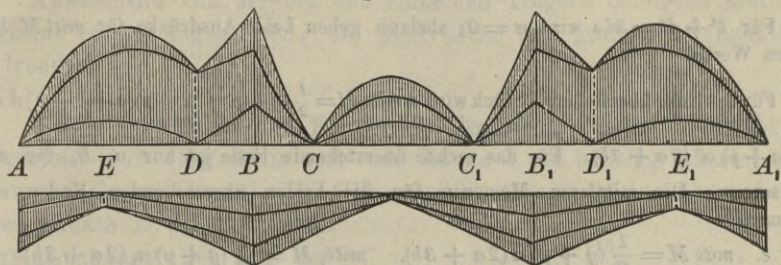
In Fig. 108 bis 110 sind die Momente für ein Feld mit zwei Gelenken, ein Endfeld ohne Gelenk, sowie ein Mittelfeld ohne Gelenk (für $l^2 + d^2 = 2ls$) grafisch dargestellt.

Mittleres Moment. Das mittlere Moment *mitt* Q für eine bestimmte Länge erhält man durch Bestimmung des Integrales $\int M dx$ für diese Länge und Division durch die letztere. Wir wollen auch hier nur die absoluten Werthe von $\max(+M)$ und $\max(-M)$ berücksichtigen. Diese beiden Werthe werden zwischen beiden Stützen, absolut genommen, einander gleich für $lx(l-x) = a(a+b)(l-x) + a_1(a+b_1)$. Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung der im vorigen Paragrafe benützten abgekürzten Bezeichnungen s und d

$$a. x = \frac{1}{2} [l + d - \sqrt{l^2 - 2ls + d^2}]$$

Hiernach können drei Fälle eintreten; es kann nämlich $l^2 + d^2 \geq 2ls$ sein. Für $l^2 + d^2 > 2ls$ gibt es wirklich zwei Werthe von x ; es hat also theilweise $\max(+M)$, theilweise $\max(-M)$ den grösseren absoluten Werth. Für $l^2 + d^2 = 2ls$ gibt es nur einen Werth für x . Für $l^2 + d^2 < 2ls$ wird x imaginär; hier hat durchgehends $\max(-M)$ den grösseren absoluten Werth.

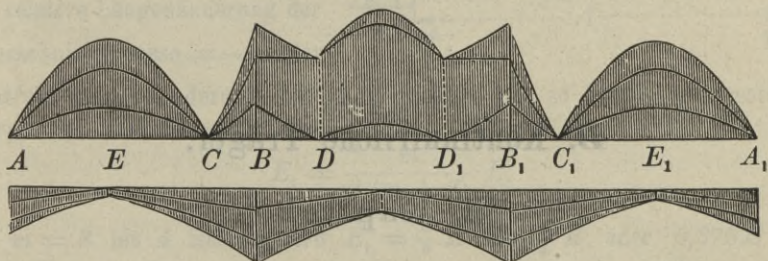
Fig. 112.



Für $l^2 + d^2 > 2ls$ wird, wenn man die beiden Werthe von x mit x_1 und x_2 bezeichnet und wenn man zur Abkürzung $\sqrt{l^2 - 2ls - d^2} = w$ setzt,

$$b. \quad x_1 = \frac{1}{2}(l + d - w), \quad x_2 = \frac{1}{2}(l + d + w), \quad x_1 + x_2 = l + d, \quad x_2 - x_1 = w.$$

Fig. 113.

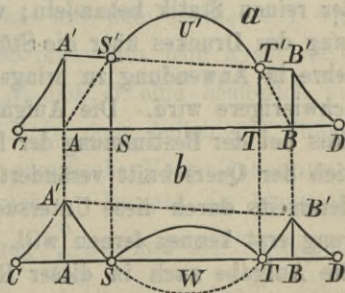


Für die zufällige Last besteht innerhalb beider Stützen die Momentenfläche aus einem Trapeze $AA'B'B$ (Fig. 114 a) mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2}(M' + M'')l = \frac{1}{4}psl^2$, wenn M' und M'' die Momente an den Stützen bedeuten und der Parabelfläche $S'U'T'$ mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{12}pw^3$,

Fig. 114.

da die Länge von $ST = x_2 - x_1 = w$ ist. Der gesammte Flächeninhalt ist also $\frac{1}{12}p(3sl^2 + w^3)$.

Für das Eigengewicht besteht die Momentenfläche aus drei Parabelstücken mit dem Gesamtinhalte $\text{Trapez } AA'B'B - \text{Parabel } A'WB' + 2 \text{ Parabel } SWT = \frac{1}{2}(M' + M'')l - \frac{1}{12}gl^3 + 2 \frac{1}{12}gw^3 = \frac{1}{4}gsl^2 - \frac{1}{12}gl^3 + \frac{1}{6}gw^3 = \frac{1}{12}g(3sl^2 - l^3 + 2w^3)$. Demnach wird



$$c. \quad l \text{ mitt } M = \frac{1}{4}(g + p)sl^2 - \frac{1}{12}gl^3 + \frac{1}{12}(2g + p)w^3.$$

Wenn $l^2 + d^2 < 2ls$ wird, so besteht für die zufällige Last die Momentenfläche nur aus dem Trapeze $AA'B'B$ mit dem Inhalte $\frac{1}{4} psl^2$ und für das Eigengewicht aus einer Parabelfläche mit dem Inhalte *Trapez $AA'B'B$ — Parabel $A'WB'$* $= \frac{1}{4} gsl^2 - \frac{1}{12} gl^3$; mithin wird hier

$$d. \text{ mitt } M = \frac{1}{4}(g+p)sl^2 - \frac{1}{12}gl^3.$$

Für $l^2 + d^2 = 2ls$ wird $w = 0$; alsdann geben beide Ausdrücke für *mitt M* denselben Werth.

Für das linke überstehende Stück wird $a \text{ mitt } M = \frac{1}{2}(g+p) \int_0^a (a-x)(a+b-x) dx = \frac{1}{6}(g+p)a^2(2a+3b)$. Für das rechte überstehende Ende ist nur a_1, b , für a, b zu setzen. Die mittleren Momente für die beiden überstehenden Enden sind demnach

$$e. \text{ mitt } M = \frac{1}{6}(g+p)a(2a+3b), \quad \text{mitt}_1 M = \frac{1}{6}(g+p)a_1(2a+3b).$$

Für den schwebenden Theil gilt natürlich die in §. 38 aufgestellte Regel.

In den oberen Theilen der Figuren 112 und 113 sind die Momente für das Eigengewicht und der absolute Werth der Maximalmomente für die Verkehrslast, sowie die Summe von beiden für die beiden möglichen Anordnungen von drei Feldern grafisch dargestellt.

B. Kontinuierliche Träger.

VI. Kapitel.

Allgemeine analytische Behandlung.

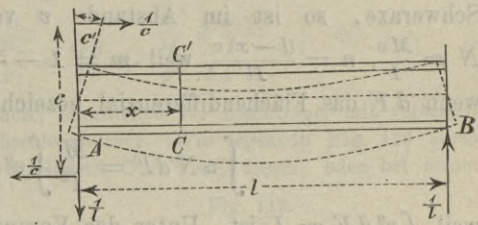
§. 54. **Einleitung.** Die wirklichen kontinuierlichen Träger oder die Träger, welche, ohne durch Gelenke unterbrochen zu sein, auf mehr als zwei Stützen liegen, lassen sich nicht mehr nach den Regeln der reinen Statik behandeln; vielmehr sind zur Ermittlung der Vertheilung des Druckes über die Stützen auch noch die Gesetze der Elastizitätslehre in Anwendung zu bringen, wodurch die Behandlung natürlich eine schwierigere wird. Die Aufgabe wird noch dadurch besonders erschwert, dass bei der Bestimmung der Druckvertheilung das Gesetz, nach welchem sich der Querschnitt verändert, mit in Frage kommt, während man andererseits durch diese Untersuchung das Gesetz der Querschnittsveränderung erst kennen lernen will. Für einzelne Fälle ist es wohl geglückt, die Aufgabe auch in dieser Richtung streng durchzuführen; im Allgemeinen aber bleibt wohl nichts übrig, als zunächst den Querschnitt konstant anzunehmen. Hat man auf Grundlage der sich hieraus ergebenden

Druckvertheilung die Veränderlichkeit des Querschnittes ermittelt, so ist es möglich, noch einmal, erforderlichenfalls noch ein weiteres Mal eine genauere Bestimmung der Druckvertheilung vorzunehmen. Wir werden indess zeigen, wie man von vornherein den Einfluss der Veränderlichkeit des Querschnittes wenigstens schätzungsweise berücksichtigen kann.

Abweichend von der bei den einfachen Trägern befolgten Methode erscheint es uns angemessen, die analytische und grafische Behandlung zu trennen.

§. 55. Drehung des Endquerschnittes. Das zu untersuchende Trägerfeld AB (Fig. 115) mit der Länge l sei beliebig belastet. In einem beliebigen Querschnitte CC' entsteht hierdurch in einem beliebigen Punkte D die spezifische Normalspannung N und die spezifische Schubspannung T . Der Elastizitätskoeffizient sei E , der Gleitungselastizitätskoeffizient E_1 . Wenn bei der Beanspruchung auf Zug oder Druck die relative Längenänderung der Querschnittsmaasse $= -\frac{1}{m}$ der

Fig. 115.



relativen Längenänderung der Längenmaasse ist, so besteht für isotrope Körper die Beziehung

$$E_1 = \frac{m}{2(m+1)} E.$$

Da $m = 3$ bis 4 ist, so wird $E_1 = \frac{3}{8} E$ bis $\frac{2}{5} E$ oder $0,375 E$ bis $0,400 E$.

Wir bestimmen zunächst die bei der Formänderung entstehende Verdrehung τ des Endquerschnittes AA' nach dem Principe der virtuellen Arbeit, das uns für den vorliegenden Fall als die geeignetste Methode erscheint. Wir denken uns zu diesem Zwecke auf den Querschnitt AA' ein rechts drehendes Kräftepaar mit dem Momente 1 wirkend; ist c der Abstand beider Kräfte, so muss also jede Kraft $= \frac{1}{c}$ sein (Fig. 115). Hierdurch entsteht in A und B eine bezüglich abwärts und aufwärts wirkende Reaktion $\frac{1}{c}$. In dem beliebigen Punkte D des Querschnittes möge hierdurch die spezifische Normalspannung n und die spezifische Schubspannung t entstehen. Da auf die Länge dx die Normalspannung N die Längenänderung $\frac{N}{E} dx$ und die Schubspannung T die Verschiebung $\frac{T}{E_1} dx$ bewirkt, so ist die virtuelle Arbeit für ein Volumenelement mit der Länge dx , der Breite dw und der

Höhe $dv = -\left(\frac{nN}{E} + \frac{tT}{E_1}\right) dx dv dw = -\left(\frac{nN}{E} + \frac{tT}{E_1}\right) dV$, wenn dV das Volumenelement bezeichnet¹⁾. Die virtuelle Arbeit des auf den Querschnitt AA' wirkenden Kräftepaars mit dem Momente 1 ist $1 \cdot \tau' = \tau'$. Da die Summe aller virtuellen Arbeiten Null sein muss, so wird

$$1. \quad \tau' = \int \left(\frac{nN}{E} + \frac{tT}{E_1}\right) dV,$$

wobei die Integration über den ganzen, das betreffende Feld des kontinuierlichen Trägers bildenden Körper auszudehnen ist.

Ist M das Moment, welches in Folge der Belastung auf den Querschnitt CC' wirkt und m das Moment, welches durch das angenommene Kräftepaar im Querschnitte CC' entsteht, ferner I das Trägheitsmoment dieses Querschnittes in Beziehung auf eine zur Kraftebene senkrechte Schweraxe, so ist im Abstände v von der Schweraxe bekanntlich $N = \frac{Mv}{I}$, $n = \frac{(l-x)v}{I}$, weil $m = 1 - \frac{1}{l}x = \frac{l-x}{l}$ ist; mithin wird, wenn dF das Flächendifferenzial bezeichnet,

$$\int nN dF = \frac{M}{I^2} \int v^2 dV = \frac{M}{I},$$

weil $\int v^2 dF = I$ ist. Unter der Voraussetzung eines konstanten Querschnittes ist ferner, wenn S das in Beziehung auf die genannte Schweraxe genommene statische Moment desjenigen Flächenstückes bezeichnet, welches auf jeder Seite einer im Querschnitte im Abstände v von der Schweraxe parallel zu dieser gezogenen Sehne liegt und wenn b die Länge dieser Sehne, Q die durch die Belastung im Querschnitte entstehende Transversalkraft bedeutet,

$$T = \frac{QS}{Ib}, \quad t = -\frac{S}{Ibl},$$

weil die Transversalkraft, welche durch das angenommene Kräftepaar mit dem Momente 1 entsteht, $= -\frac{1}{l}$ ist. Demnach wird

$$\int tT dF = -\frac{Q}{I^2 l} \int \frac{S^2}{b^2} dF = -\frac{Q}{I^2 l} \int \frac{S^2}{b} dv.$$

Die Integration lässt sich allgemein nicht ausführen. Wir setzen zur Abkürzung

$$2. \quad x = \frac{F}{I^2} \int \frac{S^2}{b} dv;$$

¹⁾ Denkt man sich das Körperelement beseitigt und statt dessen die entsprechenden inneren Kräfte n , t angebracht, um das Prinzip der virtuellen Arbeiten anwenden zu können, so wirken n und t in der entgegengesetzten Richtung, als die Längenänderung $\frac{N}{E} dx$ und die Verschiebung $\frac{T}{E_1} dx$, so dass die virtuelle Arbeit negativ einzuführen ist.

alsdann wird:

$$\int t T dF = -\frac{\alpha Q}{F l}.$$

Sonach haben wir jetzt:

$$3. \quad \tau' = \frac{1}{El} \int \frac{M(l-x)}{I} dx - \frac{1}{E_1 l} \int \frac{\alpha Q}{F} dx.$$

Das zweite Glied ist zwar nur bei konstantem Querschnitte richtig, abgesehen von den Mängeln, welche von den der Entwicklung des Ausdruckes von T zu Grunde gelegten Annahmen herrühren. Wir wollen indess dieses Glied auch auf wenig veränderliche Querschnitte als Näherung anwenden.

Für einen veränderlichen Querschnitt ergibt sich statt des Ausdruckes $T = \frac{QS}{Ib}$ der allerdings für die weitere Verwendung viel weniger bequeme Ausdruck

$$a. \quad T = \frac{d}{b dx} \frac{MS}{I} = \frac{QS}{Ib} + \frac{M}{b} \frac{d}{dx} \frac{S}{I}.$$

Indessen lässt sich eine einfachere, namentlich für Blechträger mit veränderlicher Höhe hinreichende Näherungstheorie angeben. Wir legen in Fig. 116 einen cylindrischen Schnitt, welcher an den Rändern C' , C'' auf diesen, oder bei einem Blechträger auf den Axen der Gurte senkrecht steht. Die Tangenten an den Rändern oder Gurtaxen mögen sich in L schneiden, so dass L der Krümmungsmittelpunkt des cylindrischen Schnittes ist. Wir nehmen nun an, dass die Schubspannungen, welche in diesem Schnitte wirken, in einem mittleren Theile mit der Fläche f_0 konstant, dagegen im übrigen, an den Rändern liegenden Theile = Null angenommen werden können. Bezeichnen wir das Moment der äusseren, auf einer Seite des Schnittes wirkenden Kräfte in Beziehung auf den Punkt L mit M_0 und den Abstand CL des Punktes L vom Schnitte mit x_0 , so ist $Tf_0x_0 = M_0$, weil die auf den cylindrischen Schnitt wirkenden Normalspannungen kein Moment haben. Demnach wird

$$b. \quad T = \frac{M_0}{f_0 x_0}.$$

Das Moment des Kräftepaars 1 und der linken Reaktion $\frac{1}{l}$ in Beziehung auf L ist

$1 - \frac{x_1}{l} = \frac{x_2}{l}$, wenn wir $AL = x_1$, $BL = x_2$ setzen. Folglich ist

$$c. \quad t = \frac{x_2}{f_0 x_0 l}.$$

Demnach wird

$$d. \quad \int t T dF = \frac{x_2}{f_0 x_0 l} \frac{M_0}{f_0 x_0} f_0 = \frac{M_0 x_2}{f_0 x_0^2 l}.$$

Es würde mithin hier $-\frac{M_0 x_2}{f_0 x_0^2}$ für $\frac{\alpha Q}{F}$ zu setzen sein.

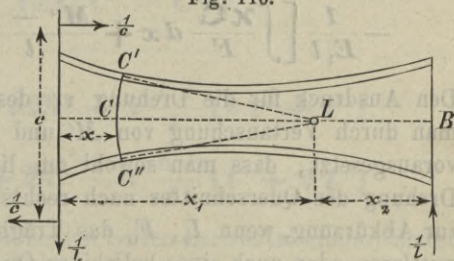


Fig. 116.

§. 56. Anwendung bei gegebener Belastung. Wir bezeichnen nun die Momente, welche am linken und rechten Ende entstehen, mit M' , M'' . Ist eine Belastung nicht vorhanden, so ist $M' = Q'a$, $M'' = Q'(a+l) = M' + Q'l$, wenn Q' die Transversalkraft für das linke Ende, a ihren Abstand von demselben bedeutet. Hiernach ist $Q' = \frac{M'' - M'}{l}$. Ferner wird für einen beliebigen Querschnitt $Q = Q'$, $M = Q'(a+x) = M' + Q'x$, d. i.

$$Q = \frac{M'' - M'}{l}, \quad M = M' \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M'' \frac{x}{l}.$$

Wir bezeichnen ferner die Transversalkraft und das Moment, welche im beliebigen Querschnitte entstehen, wenn der Träger als Einzelträger wirkt, wenn also M' und $M'' = 0$ sind, mit \mathfrak{Q} und \mathfrak{M} . Ist nun M' und M'' nicht $= 0$, so wird offenbar

$$4. \quad Q = \mathfrak{Q} + \frac{M'' - M'}{l}, \quad M = \mathfrak{M} + M' \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M'' \frac{x}{l}.$$

Demnach wird nun

$$5. \quad \tau' = \frac{1}{EI} \left[\int \frac{\mathfrak{M}(l-x)}{I} dx + \frac{M'}{l} \int \frac{(l-x)^2}{I} dx + \frac{M''}{l} \int \frac{x(l-x)}{I} dx \right] \\ - \frac{1}{E_1 l} \left[\int \frac{\mathfrak{X}\mathfrak{Q}}{F} dx + \frac{M'' - M'}{l} \int \frac{\mathfrak{X}}{F} dx \right].$$

Den Ausdruck für die Drehung τ'' des rechten Endquerschnittes erhält man durch Vertauschung von M' und M'' , x und $l-x$, $-\mathfrak{Q}$ und \mathfrak{Q} , vorausgesetzt, dass man sowohl am linken, als am rechten Ende eine Drehung des Querschnittes nach rechts positiv nimmt. Wir setzen nun zur Abkürzung, wenn I_0 , F_0 das Trägheitsmoment und die Fläche eines mittleren oder auch eines beliebigen Querschnittes bezeichnet und sich \mathfrak{x}_0 auf diesen Querschnitt bezieht,

$$6. \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{I} &= \frac{Cl^3}{3I_0}, \quad \int \frac{(l-x)^2 dx}{I} = \frac{C''l^3}{3I_0}, \quad \int \frac{x(l-x) dx}{I} = \frac{Cl^3}{6I_0}, \\ \int \frac{\mathfrak{M}x dx}{I} &= \frac{\mathfrak{M}l^2}{2I_0}, \quad \int \frac{\mathfrak{M}(l-x) dx}{I} = \frac{\mathfrak{M}''l^2}{2I_0}, \\ \int \frac{\mathfrak{X} dx}{F} &= \frac{\mathfrak{x}_0 Bl}{F_0}, \quad \int \frac{\mathfrak{X}\mathfrak{Q} dx}{F} = \frac{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{Q} l}{F_0}. \end{aligned} \right.$$

Alsdann wird:

$$7. \quad \left\{ \begin{aligned} +\tau' &= \frac{l}{6EI_0} (3\mathfrak{M}'' + 2C''M' + CM'') - \frac{\mathfrak{x}_0}{E_1 F_0 l} [\mathfrak{Q}'l + B(M'' - M)], \\ -\tau'' &= \frac{l}{6EI_0} (3\mathfrak{M}' + CM' + 2CM'') + \frac{\mathfrak{x}_0}{E_1 F_0 l} [\mathfrak{Q}'l + B(M'' - M)]. \end{aligned} \right.$$

Bei konstantem Querschnitte werden die nur von den Dimensionen abhängigen Koeffizienten C, C', C'' und B sämmtlich $= 1$. Für eine im Abstände ξ', ξ'' von beiden Stützen wirkende Einzellast G wird

$$\int \Omega dx = + G \frac{\xi''}{l} \cdot \xi' - G \frac{\xi'}{l} \xi'' = 0.$$

Demnach muss sich auch für jede beliebige Belastung $\int \Omega dx = 0$ ergeben; es wird also auch $\Omega' = 0$, mithin

$$8. \quad \begin{cases} +\tau' = \frac{l}{6EI} (3\mathfrak{M}'' + 2M' + M'') - \frac{\chi}{E_1 F l} (M'' - M'), \\ -\tau'' = \frac{l}{6EI} (3\mathfrak{M}' + M' + 2M'') + \frac{\chi}{E_1 F l} (M'' - M'). \end{cases}$$

Die Reduktion auf M' und M'' bei gegebenem τ' und τ'' ist hier nach leicht zu bewirken. Wenn man den Einfluss der Schubspannungen, also die Glieder mit dem Divisor F, F_0 vernachlässigen kann, so ergibt sich

$$9. \quad \begin{cases} M' = + \frac{3C\mathfrak{M}'l - 6C'\mathfrak{M}''l + 6EI_0(2C'\tau' + C\tau'')}{(4C'C'' - C^2)l}, \\ M'' = - \frac{6C''\mathfrak{M}'l - 3C\mathfrak{M}''l + 6EI_0(C\tau' + 2C''\tau'')}{(4C'C'' - C^2)l}, \end{cases}$$

und bei konstantem Querschnitte

$$10. \quad \begin{cases} M' = + \mathfrak{M}' - 2\mathfrak{M}'' + 2 \frac{EI}{l} (2\tau' + \tau''), \\ M'' = - 2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' - 2 \frac{EI}{l} (\tau' + 2\tau''). \end{cases}$$

Die Anwendung auf einen auf beiden Seiten horizontal eingespannten Träger ist ohne Weiteres zu machen, indem man $\tau' = \tau'' = 0$ setzt. Ist der Träger nur am linken Ende eingespannt, während er am rechten frei aufliegt, so ist $M'' = 0$ zu setzen. Alsdann aber wird bei Vernachlässigung der Glieder mit F sehr einfach

$$11. \quad M' = - \frac{3}{2C''} \mathfrak{M}'',$$

bei konstantem Querschnitte also $M' = - \frac{3}{2} \mathfrak{M}''$.

Bei veränderlichem Querschnitte würde der Anmerkung des vorigen Paragraphes entsprechend, das zweite Glied in der Formel 5 zu ersetzen sein durch

$$+ \frac{1}{E_1 l} \left[\int \frac{\mathfrak{M}_0 x_2}{f_0 x_0^2} dx + \frac{M'}{l} \int \frac{x_2^2}{f_0 x_0^2} dx + \frac{M''}{l} \int \frac{x_1 x_2}{f_0 x_0^2} dx \right].$$

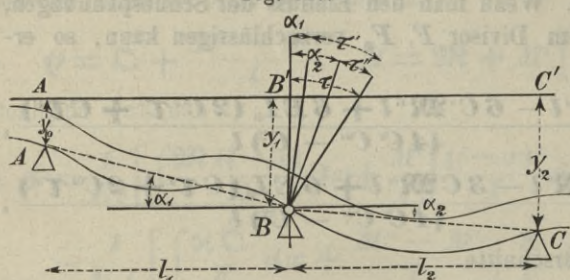
In den Formeln 7 sind dementsprechend die zweiten Glieder mit dem Faktor χ wegzulassen, den Grössen $C, C', C'', \mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$ dafür aber folgende Bedeutung zu geben:

$$\left. \begin{aligned}
 C' &= \frac{3 I_0}{l^3} \left[\int \frac{x^2 dx}{I} + \frac{E}{E_1} \int \frac{x_1^2 dx}{f_0 x_0^2} \right], & C'' &= \frac{3 I_0}{l^3} \left[\int \frac{(l-x)^2 dx}{I} + \frac{E}{E_1} \int \frac{x_2^2 dx}{f_0 x_0^2} \right] \\
 C &= \frac{6 I_0}{l^3} \left[\int \frac{x(l-x) dx}{I} + \frac{E}{E_1} \int \frac{x_1 x_2 dx}{f_0 x_0^2} \right], \\
 \mathfrak{M}' &= \frac{2 I_0}{l^2} \left[\int \frac{\mathfrak{M} x dx}{I} + \frac{E}{E_1} \int \frac{\mathfrak{M}_0 x_1 dx}{f_0 x_0^2} \right], \\
 \mathfrak{M}'' &= \frac{2 I_0}{l^2} \left[\int \frac{\mathfrak{M} (l-x) dx}{I} + \frac{E}{E_1} \int \frac{\mathfrak{M}_0 x_2 dx}{f_0 x_0^2} \right].
 \end{aligned} \right\} a.$$

Bei konstanter Höhe wird $x_1^2 = x_0^2$, $x_2^2 = x_0^2$, $x_1 x_2 = -x_0^2$ und $\mathfrak{M}_0 x_1 = \mathfrak{M}_0 x_0^2$, $\mathfrak{M}_0 x_2 = -\mathfrak{M}_0 x_0^2$.

§. 57. Anwendung auf den kontinuierlichen Träger. Die Momente an drei auf einander folgenden Stützen A, B, C (Fig. 117) seien M_0, M_1, M_2 ; diese

Fig. 117.



Stützen mögen um die kleinen Grössen y_0, y_1, y_2 unter einer beliebigen Horizontalen liegen; die Längen der beiden auf einander folgenden Felder seien l_1, l_2 .

Sind α_1, α_2 die Winkel, welche AB, BC mit der Horizontalen bilden, so ist

$$\alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{l_1}, \quad \alpha_2 = \frac{y_2 - y_1}{l_2}.$$

Der Querschnitt über B bilde nach der Formänderung mit der Vertikalen den Winkel τ , mit den Normalen zu AB und BC die Winkel τ'', τ' . Alsdann ist $\tau = \alpha_1 + \tau''$ und $\tau = \alpha_2 + \tau'$, also $\alpha_1 + \tau'' = \alpha_2 + \tau'$, $\tau'' - \tau' = \alpha_2 - \alpha_1$ oder

$$12. \quad \tau'' - \tau' = \frac{y_0 - y_1}{l_1} - \frac{y_1 - y_2}{l_2}.$$

Die Winkel τ'' und τ' sind durch die Gleichungen 7 bestimmt, wobei natürlich τ'' auf das linke, τ' auf das rechte Feld zu beziehen ist. Unterscheiden wir diese beiden Felder durch die Zeiger 1 und 2, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 13. \quad & (C_1 - k_1 B_1) l_1 M_0 + (2 C_1' l_1 + k_1 B_1 l_1 + 2 C_2'' l_2 + k_2 B_2 l_2) M_1 \\
 & + (C_2 - k_2 B_2) l_2 M_2 \\
 & = -3 l_1 \mathfrak{M}'_1 - 3 l_2 \mathfrak{M}''_2 - k_1 \mathfrak{D}'_1 l_1^2 + k_2 \mathfrak{D}''_2 l_2^2 \\
 & - 6 E I_0 \left(\frac{y_0 - y_1}{l_1} - \frac{y_1 - y_2}{l_2} \right),
 \end{aligned}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{6 E I_0 \alpha_0}{E_1 F_0 l_1^2} = k_1, \quad \frac{6 E I_0 \alpha_0}{E_1 F_0 l_2^2} = k_2$$

setzen. Wenn die Stützen in gleicher Höhe oder in einer Geraden liegen, und wenn wir ferner für ein bestimmtes Feld zur Abkürzung

$$\alpha = C' + \frac{1}{2} k B, \quad \beta = C'' + \frac{1}{2} k B, \quad \gamma = C - k B,$$

setzen und wenn wir die immer nur sehr kleinen Glieder mit Ω' vernachlässigen, so wird

$$14. \gamma l_1 M_0 + 2(\alpha_1 l_1 + \beta_2 l_2) M_1 + \gamma l_2 M_2 = -3(l_1 \mathfrak{M}_1' + l_2 \mathfrak{M}_2'').$$

Ist ausserdem der Querschnitt konstant, so wird bei Vernachlässigung der Glieder mit F

$$15. l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = -3(l_1 \mathfrak{M}_1' + l_2 \mathfrak{M}_2'').$$

Wir nennen die Momente an den Stützen die Stützenmomente. Indem man die eben aufgestellte Beziehung für die Stützenmomente an drei auf einander folgenden Stützen aufstellt, erhält man, da die Stützenmomente an den Endstützen Null sind, so viele Gleichungen, als Stützenmomente vorhanden sind.

Liegt der Träger auf der ersten Stütze mit dem Index 0 nicht frei auf, sondern ist er hier horizontal eingespannt, so wird hier $\tau' = 0$, daher, wenn die Stützen in gleicher Höhe liegen und wir die kleinen Glieder mit Ω' vernachlässigen,

$$16. 2\beta_1 M_0 + \gamma_1 M_1 = -3\mathfrak{M}_1''.$$

Nach demselben Schema ist auch die Gleichung für das letzte Feld aufzustellen, wenn der Träger auch an der letzten Stütze eingespannt ist.

Der kontinuierliche Träger mit drei und vier Stützen wird zuerst von Eytelwein (Statik fester Körper, III. Band 1808) behandelt und zwar für konstanten Querschnitt, eine gänzliche gleichmässige Belastung und eine Einzellast in jedem Felde. Eytelwein bestimmt unter Annahme unbekannter Stützendrücke, nachdem bereits von Bernoulli, Euler und Lagrange die Regeln zur Aufstellung der Gleichung der elastischen Linie gegeben waren, die Durchbiegung an den Stützen und setzt diese Null, wodurch er Gleichungen für die unbekanntenen Stützendrücke erhält. Später behandelt Navier (*Resumé des leçons sur l'application de la mécanique etc.* 1826) den an einem Ende und an beiden Enden eingespannten Stab, sowie den auf drei Stützen liegenden Stab konstanten Querschnittes und unter Voraussetzung einer Einzellast in jedem Felde unter Benützung der Gleichung $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{M}{EI}$ für die elastische Linie. Den eingespannten Stab behandelt er in der Weise, dass er statt der Einspannung eine Stütze annimmt, über welche der Stab hinausragt; das überstehende Ende belastet er mit einem Gewichte, welches er so bestimmt, dass die Tangente über der Stütze horizontal bleibt. Später ist der eingespannte Stab mehrfach unter willkürlichen Annahmen behandelt worden. Der gleichmässig belastete eingespannte Stab konstanten Querschnittes wurde zuerst von Rebhann (Förster's Bauzeitung 1853) richtig behandelt.

Mehrfach wird nun der kontinuierliche Träger konstanten Querschnittes mit gleichmässig und gänzlich, sowie durch unverrückbare Einzellasten belasteten Feldern behandelt, indem mit Hilfe der Gleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ die Neigung der Tangenten der elastischen Linie über den Pfeilern bestimmt, und diese Neigung für je zwei auf einander folgende Felder gleich gesetzt wird; dabei werden die Stützendrücke als Unbekannte eingeführt, so von Rebhann (Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, Wien 1856) und Scheffler (Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig 1857).

Clapeyron (*calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés. Comptes rendus, 1857*) behandelt den kontinuierlichen Träger konstanten Querschnittes mit gleichmässiger gänzlicher Belastung der Felder, indem er die Momente an den Stützen als Unbekannte einführt, wodurch eine wesentliche Vereinfachung erzielt wird, weil bei Einführung der Stützendrücke als Unbekannte es im Allgemeinen nicht möglich ist, Beziehungen zwischen nur drei Unbekannten aufzustellen.

Unter Annahme eines veränderlichen Querschnittes sind die kontinuierlichen Träger nach der Clapeyron'schen Methode zuerst von Culmann (Die grafische Statik I. Aufl. Zürich 1866), von Grashof (Die Festigkeitslehre, Berlin 1866) und dem Verfasser (Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867) behandelt worden.

Auf Grundlage der Clapeyron'schen Methode sind viele Arbeiten mit mehr oder minder abweichenden Einzelheiten entstanden. Wir nennen die Arbeiten von Bresse, Albarot, Renaudot, Collignon, Laissle und Schübler, Lippich, Pierre, Weyrauch etc.

Castigliano (*Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879*) ersetzt zum ersten Male die Anwendung der Gleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ durch den Satz, nach welchem die Drehung eines Querschnittes der Differenzialquotient der Formänderungsarbeit nach dem im Querschnitte wirkenden Momente ist und berücksichtigt hierbei gleichzeitig zum ersten Male den Einfluss der Schubspannungen.

§. 58. Auflösung der Gleichungen zwischen den Stützmomenten. Zur Auflösung kann man verschiedene Methoden anwenden:

1. Elimination. Bei nur wenigen Stützen kann man leicht die gewöhnliche Eliminationsmethode benutzen.

2. Clapeyron'sche Methode. Die Gleichungen für die Stützmomenten seien:

$$16 a. \quad \begin{cases} b_1 M_1 & + c_1 M_2 & = A_1 \\ c_1 M_1 & + b_2 M_2 & + c_2 M_3 & = A_2 \\ c_2 M_2 & + b_3 M_3 & + c_3 M_4 & = A_3 \\ & & & \dots \\ c_{n-3} M_{n-3} & + b_{n-2} M_{n-2} & + c_{n-2} M_{n-1} & = A_{n-2} \\ c_{n-2} M_{n-2} & + b_{n-1} M_{n-1} & & = A_{n-1} \end{cases}$$

Diese Gleichungen multipliziert man, von der letzten beginnend, mit den Zahlen k_1, k_2, \dots, k_{n-1} , welche man so bestimmt, dass bei Addition aller

$$25. D = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ c_1 & b_2 & c_2 & & \\ & & & & \\ & & & b_{m-2} & b_{m-1} & c_{m-1} \\ & & & & c_{m-1} & b_m + c_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_m - c_m & c_{m-1} & & & \\ c_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-2} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & c_2 & b_2 & c_1 \\ & & & & c_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

und für ein gerades n , wenn man $\frac{1}{2}n$ mit m bezeichnet,

$$26. D = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ c_1 & b_2 & c_2 & & \\ & & & & \\ & & & c_{m-2} & b_{m-1} & c_{m-1} \\ & & & & 2c_{m-1} & b_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{m-1} & b_{m-1} & & & \\ c_{m-1} & b_{m-2} & c_{m-2} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & c_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

Hierdurch wird also die Determinante D in ein Produkt zweier Determinanten zerlegt.

Unter den $(n - 1)^2$ Koeffizienten d werden hier von $n - 1$ Koeffizienten je 2, von den übrigen je 4 einander gleich.

4. Bei symmetrischer Anordnung des kontinuierlichen Trägers, in dessen beliebiger Belastung, lässt sich eine Vereinfachung dadurch herbeiführen, dass man die 1-ste und $(n - 1)$ -ste, die 2-te und $(n - 2)$ -te, die 3-te und $(n - 3)$ -te Gleichung u. s. w. addirt und subtrahirt. Setzt man dabei

$$\begin{aligned} M_1 + M_{n-1} &= X_1, & M_1 + M_{n-2} &= X_2, & \dots, \\ M_1 - M_{n-1} &= Y_1, & M_1 - M_{n-2} &= Y_2, & \dots, \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$27. \begin{cases} b_1 X_1 + c_1 X_2 & = A_1 + A_{n-1}, \\ c_1 X_1 + b_2 X_2 + c_2 X_3 & = A_2 + A_{n-2}, \\ c_2 X_2 + b_3 X_3 + c_3 X_4 & = A_3 + A_{n-3}, \\ \dots & \dots \\ b_1 Y_1 + c_1 Y_2 & = A_1 - A_{n-1}, \\ c_1 Y_1 + b_2 Y_2 + c_2 Y_3 & = A_2 - A_{n-2}, \\ c_2 Y_2 + b_3 Y_3 + c_3 Y_4 & = A_3 - A_{n-3}. \end{cases}$$

Man erhält hierdurch also zwei Gruppen von Gleichungen; die Anzahl der Unbekannten ist bei ungeradem n in jeder Gruppe $\frac{1}{2}(n - 1)$, bei geradem n dagegen in der ersten Gruppe $\frac{1}{2}n$, in der zweiten $\frac{1}{2}n - 1$. Setzt man im letzteren Falle $X_{\frac{n}{2}} = 2M_{\frac{n}{2}}$, so stimmen die Determinanten

D der Koeffizienten in den beiden Gruppen mit den Faktoren des Produktes überein, in welche sich D nach Formel 25 und 26 zerlegen lässt. Nach Auflösung beider Gruppen von Gleichungen wird $M_1 = \frac{1}{2}(X_1 + Y_1)$, $M_{n-1} = \frac{1}{2}(X_1 - Y_1)$, $M_2 = \frac{1}{2}(X_2 + Y_2)$, $M_{n-2} = \frac{1}{2}(X_2 - Y_2)$ u. s. w.

Beispiel. Träger konstanten Querschnittes mit gleich hohen Stützen und vier Feldern, deren Längen sich wie 8 : 10 : 10 : 8 verhalten. Die Gleichungen zwischen den Stützenmomenten werden

$$\begin{aligned} 36 M_1 + 10 M_2 &= -24 \mathfrak{M}_1' - 30 \mathfrak{M}_2'' = A_1, \\ 10 M_1 + 40 M_2 + 10 M_3 &= -30 \mathfrak{M}_2' - 30 \mathfrak{M}_3'' = A_2, \\ 10 M_2 + 36 M_3 &= -30 \mathfrak{M}_3' - 24 \mathfrak{M}_4'' = A_3. \end{aligned}$$

1. Clapeyron's Methode. Multiplizieren wir die Gleichungen mit $k_3, k_2, 1$, so erhalten wir, damit durch Addition M_2 und M_3 verschwinden, $36 + 10k_2 = 0$, $10 + 40k_2 + 10k_3 = 0$, daher $k_2 = -3,6$, $k_3 = -1 - 4k_2 = -1 + 14,4 = +13,4$. Die Multiplikation gibt

$$\begin{aligned} + 4824 M_1 + 1340 M_2 &= + 134 A_1 \\ - 360 M_1 - 1440 M_2 - 360 M_3 &= - 36 A_2 \\ + 100 M_2 + 360 M_3 &= + 10 A_3. \end{aligned}$$

Die Addition gibt $4464 M_1 = 134 A_1 - 36 A_2 + 10 A_3$ oder

$$\begin{aligned} M_1 &= + 0,03002 A_1 - 0,00807 A_2 + 0,00224 A_3 \\ &= - 0,720 \mathfrak{M}_1' - 0,901 \mathfrak{M}_2'' + 0,242 \mathfrak{M}_2' + 0,242 \mathfrak{M}_3'' - 0,067 \mathfrak{M}_3' - 0,054 \mathfrak{M}_4''. \end{aligned}$$

Es wird nun $M_2 = -3,6 M_1 + 0,1 A_1$ oder

$$\begin{aligned} M_2 &= - 0,00807 A_1 + 0,02905 A_2 - 0,00807 A_3 \\ &= + 0,194 \mathfrak{M}_1' + 0,242 \mathfrak{M}_2'' - 0,872 \mathfrak{M}_2' - 0,872 \mathfrak{M}_3'' + 0,242 \mathfrak{M}_3' + 0,194 \mathfrak{M}_4'', \end{aligned}$$

M_3 erhält man nun der symmetrischen Anordnung wegen ohne Weiteres durch Umkehr der Zeiger.

2. Determinantemethode. Es wird

$$D = \begin{vmatrix} 36 & 10 \\ 10 & 40 & 10 \\ & 10 & 36 \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} 40 & 10 \\ 10 & 36 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 10 \\ 10 & 36 \end{vmatrix} = \frac{36(40 \cdot 36 - 10 \cdot 10)}{-10(10 \cdot 36)} = 44640.$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} A_1 & 10 \\ A_2 & 40 & 10 \\ A_3 & 10 & 36 \end{vmatrix} = A_1 \begin{vmatrix} 40 & 10 \\ 10 & 36 \end{vmatrix} - A_2 \begin{vmatrix} 10 \\ 10 & 36 \end{vmatrix} + A_3 \begin{vmatrix} 10 \\ 40 & 10 \end{vmatrix} \\ &= A_1(40 \cdot 36 - 10 \cdot 10) - A_2(10 \cdot 36) + A_3(10 \cdot 10) = 1340 A_1 - 360 A_2 + 100 A_3, \end{aligned}$$

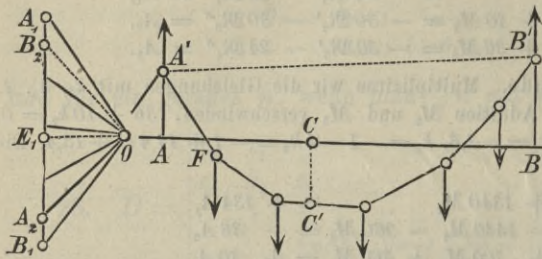
$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 36 & A_1 \\ 10 & A_2 & 10 \\ & A_3 & 37 \end{vmatrix} = -A_1 \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ & 36 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} 36 \\ & 36 \end{vmatrix} - A_3 \begin{vmatrix} 36 \\ & 10 & 10 \end{vmatrix} \\ &= -A_1(10 \cdot 36) + A_2(36 \cdot 36) - A_3(36 \cdot 10) = -360 A_1 + 1296 A_2 - 360 A_3. \end{aligned}$$

Setzt man nun $M_1 = \frac{D_1}{D}$, $M_2 = \frac{D_2}{D}$, so erhält man wieder die obigen Zahlen.

§. 59. Bestimmung der übrigen Grössen. Nachdem die Stützenmomente in der gezeigten Weise bestimmt sind, ergeben sich die Werthe für Q und M für beliebige Querschnitte nach den Formeln 4. Es ist in gewissen Fällen von Nutzen, die Rechnung mit der Konstruktion zu verbinden, indem man die Stützenmomente durch Rechnung, die übrigen Grössen aber auf grafischem Wege bestimmt. Man konstruirt zu diesem Zwecke das Seilpolygon für die gegebene Belastung (Fig. 118). In den Stützenvertikalen macht man sodann die Strecken AA' und BB' gleich den Stützenmomenten, dividirt durch die Polweite H . Zieht man sodann die Schlusslinie AB , so geben die Ordi-

naten des Seilpolygons von AB aus gerechnet, mit H multipliziert, die Momente. Man kann auch AB horizontal annehmen und sodann das

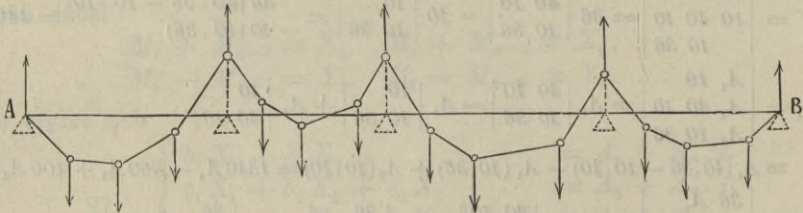
Fig. 118.



Seilpolygon in bekannter Weise durch die Punkte A' und B' legen wie in Fig 119. Legt man im Kraftpolygone parallel zur Schlusslinie AB einen Strahl OE_1 , so ist die zwischen OE_1 und dem zur letzten linken Poly-

goneseite $A'F$ parallelen Strahle EA_1 liegende Kraft E_1A_1 gleich der Summe aller auf der linken Seite von einem durch die letzte Polygonseite $A'F$ gelegten Schnitt wirkenden Kräfte, also gleich der Resultante der links von diesem Schnitte noch wirkenden Stützendrücke und Lasten, d. i. gleich der Transversalkraft Q' für die linke Stütze A . Ebenso stellt E_1B_1 die Transversalkraft für die rechte Stütze B dar. Die Transversalkräfte für andere Schnitte werden durch die Abstände der entsprechenden Punkte des Kraftpolygons von E_1 dargestellt.

Fig. 119.



Bezeichnen wir wieder die Normalmomente für drei auf einander folgende Stützen mit M_0, M_1, M_2 , die Längen der Felder mit l_1, l_2 , die Transversalkräfte in diesen Feldern an der mittleren Stütze bezüglich mit Q_1'', Q_2' und die hier unter der Voraussetzung von Einzelträgern entstehenden Transversalkräfte mit $\mathfrak{Q}_1'', \mathfrak{Q}_2'$, so ist nach der ersten der Formeln 4

$$Q_1'' = \mathfrak{Q}_1'' + \frac{M_1 - M_0}{l_1}, \quad Q_2' = \mathfrak{Q}_2' + \frac{M_2 - M_1}{l_2}.$$

Ist nun D_1 der Stützendruck auf die mittlere Stütze, so ist offenbar $Q_2' = Q_1'' + D_1$ oder $D_1 = Q_2' - Q_1''$. Da dementsprechend $\mathfrak{Q}_2' - \mathfrak{Q}_1''$ der Stützendruck \mathfrak{D}_1 ist, welcher auf die mittlere Stütze bei Annahme von Einzelträgern entsteht, so wird

$$28. \quad D_1 = Q_2' - Q_1'' = \mathfrak{D}_1 + \frac{M_0 - M_1}{l_1} - \frac{M_1 - M_2}{l_2}.$$

Der Druck D_0 auf die erste Stütze mit dem Zeiger 0 ergibt sich in gleicher Weise

$$29. \quad D_0 = Q_1' = \mathfrak{D}_0 + \frac{M_1}{l_1},$$

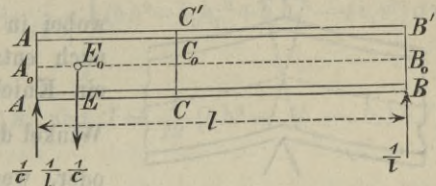
unter der Voraussetzung, dass der Träger auf dieser Stütze frei aufliegt, also $M_0 = 0$ ist.

Legt man im Kraftpolygone Strahlen OA_2 und OB_2 parallel zu den an A' und B' anschliessenden Seilpolygonseiten der Nachbarfelder, so wird A_1A_2 gleich der Summe der auf den beiden Seiten von A wirkenden Transversalkräfte, d. i. gleich dem Stützdrucke in A ; ebenso wird B_1B_2 gleich dem Stützdrucke in B .

§. 60. Drehung der Axen der Träger an den Stützen.

Wenn wir die durch die Formänderung veranlasste Drehung τ_1' des linken Endes der Axe des Stabes bestimmen wollen, so haben wir uns in der Axe in unendlich kleinem Abstände c vom linken Ende die vertikale Kraft $\frac{1}{c}$ wirkend zu denken (Fig. 120). Hierdurch entstehen die der Kraft $\frac{1}{c}$ entgegengesetzt gerichteten Reaktionen

Fig. 120.



$\frac{1}{c} - \frac{1}{l}$ und $\frac{1}{l}$. Innerhalb des Stückes B_0E_0 entstehen dieselben Spannungen n und t , wie in §. 55, wo wir ein auf den Querschnitt AA' wirkendes Kräftepaar mit dem Momente 1 annahmen. Innerhalb des Stückes A_0E_0 mögen durch die Kraft $\frac{1}{c}$ die spezifischen Schubspannungen t_0 entstehen, die wir, weil A_0E_0 unendlich klein ist, als mit x nicht veränderlich voraussetzen können. Die Normalspannungen, welche in diesem Stücke durch die Kraft $\frac{1}{c}$ entstehen, sind wegen des unendlich kleinen Hebelarmes der Kraft $\frac{1}{c} - \frac{1}{l}$ gegen t_0 unendlich klein, können also sofort weggelassen werden. Demnach wird hier nach dem Principe der virtuellen Arbeit, wenn dF das Flächendifferenzial des Querschnittes bezeichnet,

$$\tau_1' = \int \left(\frac{nN}{E} + \frac{tT}{E_1} \right) dV + \frac{c}{E_1} \int t_0 T dF,$$

wobei sich das erste Integral auf das Stück CE , das zweite auf die ganze Endquerschnittsfläche bezieht. Da aber c unendlich klein ist, so ist das erste Integral dasselbe, wie in Formel 1. Demnach ist

$$30. \quad \tau_1' = \tau' + \frac{c}{E_0} \int t_0 T dF.$$

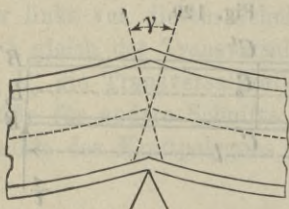
Nun aber ist, wenn Q' die am linken Ende durch die Belastung entstehende Transversalkraft bedeutet, $T = \frac{Q'S}{Ib}$, $ct_0 = c \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{l} \right) \frac{S}{Ib} = \left(1 - \frac{c}{l} \right) \frac{S}{Ib}$, oder, da c unendlich klein ist, $ct_0 = \frac{S}{Ib}$, mithin, wenn wir den Werth 2 für α berücksichtigen,

$$31. \tau_1' = \tau' + \frac{\alpha Q'}{E_1 F}.$$

Sonach bildet die Tangente an die deformirte Stabaxe in A mit der Sehne AA' des deformirten Endquerschnittes einen Winkel von $90^\circ + \frac{\alpha Q'}{E_1 F}$.

Ist A ein Stützpunkt eines kontinuierlichen Trägers und ist Q'' die links von diesem wirkende Transversalkraft, so bildet auf der linken Seite die Tangente an die Stabaxe mit der Sehne des Querschnittes den Winkel $90^\circ - \frac{\alpha Q''}{E_1 F}$,

Fig. 121.



wobei in Wirklichkeit Q'' negativ ist. Demnach entsteht an der Stütze in der Stabaxe ein Knick (Fig. 121). Bezeichnen wir den Winkel desselben mit ν , so ist $\nu = \frac{\alpha(Q' - Q'')}{E_1 F}$, oder, wenn wir den Stützendruck $Q' - Q''$

mit D bezeichnen,

$$32. \nu = \frac{\alpha D}{E_1 F}.$$

Die wirkliche Formänderung ist indess über der Stütze eine etwas andere, weil die Schubspannungen sich an denjenigen Stellen, wo Einzeldrücke angreifen, wesentlich anders vertheilen, als nach der bekannten Theorie. Wie Versuche an Gummimodellen zeigen, tritt statt des Knickes eine Abrundung ein; nur auf der Seite, an welcher sich der Stützendruck auf den Träger überträgt, also gewöhnlich unten, tritt eine wirkliche Knickbildung ein, wenn sich der Druck nicht auf eine grössere Breite vertheilt.

Für einen veränderlichen Querschnitt würde, der in der Anmerkung zu §. 55 gegebenen Näherungstheorie entsprechend, statt der Formel 31

$$a. \tau_1' = \tau' + \frac{M_0}{E_1 f_0 x_1}$$

zu schreiben sein, wobei sich M_0 , f_0 und x_1 auf den Endschnitt beziehen. Statt der Formel 32 ist zu schreiben

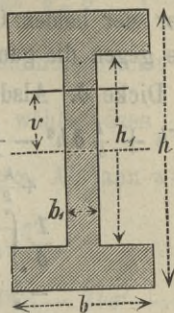
$$b. \nu = \frac{1}{E_1 f_0} \left[D + M_1 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \right],$$

wenn M_1 das Moment an der betreffenden Stütze, x_1 , x_2 die Abstände der Schnittpunkte der Randtangente von der Stütze bedeuten.

§. 61. Bestimmung des Koeffizienten α .

Fig. 122.

Wir wollen uns hierbei lediglich auf den symmetrischen I-förmigen Querschnitt beschränken (Fig. 122). Wir bezeichnen die ganze obere und untere Breite mit b , die Dicke des Steges mit b_1 , die ganze Höhe mit h , die Höhe zwischen den Flanschen mit h_1 . Alsdann ergibt sich, wenn wir das statische Moment S für einen oberen und unteren Theil mit S_1 , für den Steg mit S_2 bezeichnen,



$$S_1 = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - v^2 \right), \quad S_2 = \frac{1}{8} (b h^2 - b_1 h_1^2 + b_1 h_1^2) - \frac{1}{2} b_1 v^2.$$

Es wird nun

$$\int \frac{S^2}{b} dv = 2 \frac{1}{4} b \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - v^2 \right)^2 dv + \frac{1}{64 b_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}} (b h^2 - b_1 h_1^2 + b_1 h_1^2 - 4 b_1 v^2) dv.$$

Setzt man ferner $F = b h - (b - b_1) h_1$ und $I = \frac{1}{12} [b h^3 - (b - b_1) h_1^3]$, sowie zur Abkürzung

$$h_1 = m h, \quad b_1 = n b,$$

so gibt die Ausführung

$$33. \quad \alpha = \frac{3(1-m+mn)}{20n(1-m^3+m^3n)^2} [8n - 8n(1-n)m^5 + 15(1-n)m(1-m^2)^2].$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

m	α						$\frac{\alpha b_1 h}{F}$					
	n=0,1	n=0,2	n=0,3	n=0,4	n=0,5	n=1	n=0,1	n=0,2	n=0,3	n=0,4	n=0,5	n=1
0	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	1,20
0,5	4,79	2,76	2,07	1,74	1,55	1,20	0,87	0,92	0,95	0,99	1,03	1,20
0,6	4,32	2,54	1,95	1,66	1,50	1,20	0,94	0,98	1,01	1,04	1,07	1,20
0,7	3,65	2,23	1,78	1,56	1,43	1,20	0,99	1,01	1,05	1,08	1,10	1,20
0,8	2,84	1,88	1,57	1,44	1,34	1,20	1,02	1,04	1,07	1,10	1,12	1,20
0,9	1,96	1,49	1,35	1,28	1,25	1,20	1,03	1,07	1,09	1,11	1,14	1,20
1	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20

Für den rechteckigen Querschnitt wird hiernach $\alpha = \frac{6}{5} = 1,2$. Für die gewöhnlich vorkommenden Formen wird nach der Tabelle nahezu

$$\frac{\alpha}{F} = \frac{1}{b_1 h}.$$

Wir wollen nun noch voraussetzen, dass, wie bei einem Blechträger, jeder der beiden Gurte die Fläche f , dabei eine beliebige Form, aber eine gegen die ganze Höhe h nur sehr kleine Höhe habe; der Steg habe die Dicke δ . Alsdann ist $F = 2f + \delta h$, $I = \frac{1}{2} f h^2 + \frac{1}{12} \delta h^3$ und $S = \frac{1}{2} f h + \frac{1}{8} \delta h^2 - \frac{1}{2} \delta v^2$. Man erhält leicht

$$\frac{1}{\delta} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} S^2 dv = \frac{h^3}{120\delta} (30f^2 + 10f\delta h + \delta^2 h^2).$$

Hieraus folgt, wenn man zur Abkürzung $f = \nu \delta h$ setzt,

$$34. \quad \kappa = \frac{6(1 + 2\nu)(1 + 10\nu + 30\nu^2)}{5(1 + 6\nu)^2}.$$

Für grosse ν ergibt sich, wenn man $\nu = \frac{1}{\alpha}$ setzt und in eine Reihe verwandelt, $\kappa = \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{180} \alpha^2 + \dots \right)$ oder annähernd $\kappa = \frac{2}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \right) = \frac{2}{\alpha} + 1$ oder

$$34a. \quad \kappa = 2\nu + 1.$$

Diese Regel ist fast für jedes beliebige ν hinreichend genau. So erhält man für $\nu = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1, 2$ genau $\kappa = 1,20, 1,55, 2,03, 2,52, 3,01, 5,01$, nach der Näherungsregel $\kappa = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0, 5,0$. Bei den jetzigen Blechbrücken wird κ die Zahl 5 nicht überschreiten, in der Regel aber wesentlich kleiner sein. Da nun $F = 2f + h\delta = (2\nu + 1)h\delta$ ist, so wird sehr nahe

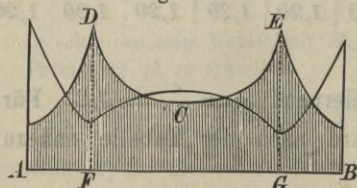
$$35. \quad \frac{\kappa}{F} = \frac{1}{h\delta},$$

in Uebereinstimmung mit obiger Näherungsregel.

Man kommt auf diese Regel unmittelbar, wenn man in naher Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit annimmt, dass in den Gurten gar keine Schubspannungen entstehen und dass die Schubspannungen im Querschnitte des Steges konstant sind, welche Annahme der in der Anmerkung zu §. 55 gegebenen Näherungstheorie zu Grunde liegt. Die Fläche f_0 würde hier $= h\delta$ zu setzen sein.

§. 62. Bestimmung der Hilfsgrössen B und C. Zur Bestimmung dieser Hilfsgrössen tragen wir den reciproken Werth des

Fig. 123.



Trägheitsmomentes an der betreffenden Stelle als Ordinate auf; die so erhaltene Fläche $ADCEB$ (Fig. 123) nennen wir die Krümmungsfläche, weil die Krümmung $\frac{d^2 y}{dy^2}$ von $\frac{1}{I}$ abhängt.

Es bedeutet nun $\int \frac{dx}{I}$ den Flächen-

inhalt φ , $\int \frac{x dx}{I}$ und $\int \frac{(l-x) dx}{I}$ das statische Moment σ' , σ'' , $\int \frac{x^2 dx}{I}$ und $\int \frac{(l-x)^2 dx}{I}$ das Trägheitsmoment η' , η'' der Krümmungsfläche in Beziehung auf die Endordinaten. Wenn man I_0 so wählt, dass $\frac{1}{I_0}$ den Mittelwerth von $\frac{1}{I}$ darstellt, so ist $\frac{l}{I_0} = \int \frac{dx}{I} = \varphi$. Alsdann wird

$$36. \quad C' = \frac{3\eta'}{\varphi l^2}, \quad C'' = \frac{3\eta''}{\varphi l^2}, \quad C = \frac{6(l\sigma' - \eta')}{\varphi l^2}.$$

Da $(l-x)^2 = l^2 - 2lx + x^2$ ist, so wird $\eta'' = l^2\varphi - 2l\sigma' + \eta'$, also $l\sigma' = \frac{1}{2}(l^2\varphi + \eta' - \eta'')$, mithin kann C auch in der Form

$$37. \quad C = \frac{3(\varphi l^2 - \eta' - \eta'')}{\varphi l^2} = 3 - C' - C''$$

ausgedrückt werden. Die Bestimmung von φ , σ , η kann auf verschiedene Weise erfolgen.

1. Durch Rechnung. Bei krummliniger Begrenzung wendet man zur Berechnung am besten die Simpson'sche Regel an. Aendert sich aber der Querschnitt, wie dies meist der Fall ist, staffelförmig, so besteht die Krümmungsfläche aus einzelnen Rechtecken, deren Flächen und Trägheitsmomente einzeln zu berechnen sind.

2. Durch Planimetrierung. Ein sehr geeignetes Mittel ist jedenfalls das Momentenplanimeter von Amsler, mit Hilfe dessen man durch blosses Umfahren der Fläche den Flächeninhalt, das statische und Trägheitsmoment in bekannter Weise erhält (siehe des Verfassers „Vorträge über Eisenbahnbau, Heft 1, III. Aufl., Seite 243^a“).

3. Durch Konstruktion. Man denkt sich die Krümmungsfläche als Belastungsfläche, d. h. die Ordinaten als Lasten pro Längeneinheit, und konstruirt hierzu die Seilkurve AGB (Fig. 124). Zieht man zwischen den Endvertikalen die Endtangenten AN und BM der Seilkurve, so ist bekanntlich, wenn man die Polweite des Kräftepolygons mit H bezeichnet, $\eta' = 2H$ Fläche $AGBM$, $\eta'' = 2H$ Fläche $AGBN$. Die Fläche φ ist gleich der Linie HI im Kräftepolygone. Macht man OK parallel MN , so ist $\triangle OIK \sim \triangle AMN$ und $\triangle OHK \sim \triangle BNM$, mithin ist $AM = IK \frac{l}{H}$, $BN = HK \frac{l}{H}$, folglich Fläche $ABNM = \frac{1}{2}(AB + BN)l = \frac{1}{2}(IK + HK) \frac{l^2}{H} = \frac{\varphi l^2}{2H}$ oder $\varphi l^2 = 2H$ Fläche $ABNM$. Sonach wird jetzt

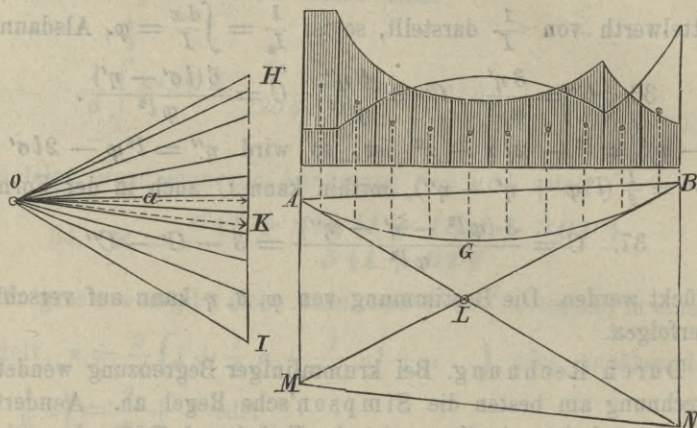
$$38. \quad C = 3 \cdot \frac{\text{Fläche } AGBN}{\text{Fläche } ABNM}, \quad C'' = 3 \cdot \frac{\text{Fläche } AGBM}{\text{Fläche } ABNM}.$$

Das statische Moment σ' wird durch das Produkt aus der Polweite H und der Strecke AM dargestellt. Es ist demnach $l\sigma' = 2H \triangle ABM$.

Demnach ist $l\sigma' - \eta' = 2H (\triangle ABM - \text{Fläche } AGBM) = 2H$
 Fläche AGB . Sonach wird

$$39. C = 6 \cdot \frac{\text{Fläche } AGB}{\text{Fläche } ABNM}.$$

Fig. 124.



Wenn man die zur Axe AB senkrechte Schweraxe der Krümmungsfläche als Abscissenaxe wählt und den Abstand eines Querschnittes von dieser mit x_0 , den Abstand dieser Schweraxe von den Enden mit e, e_1 bezeichnet, so ist $x = e + x_0$. Wenn man berücksichtigt, dass alsdann

$\int \frac{x_0 dx_0}{I} = 0$ ist, so ergeben sich die Beziehungen:

$$C' = 3 \frac{e^2}{l^2} A_0 + \frac{1}{4} A, \quad C'' = 3 \frac{e_1^2}{l^2} A_0 + \frac{1}{4} A, \quad C = 6 \frac{ee_1}{l^2} A_0 - \frac{1}{2} A,$$

$$40. 4 C' C'' - C^2 = 3 A A_0,$$

wenn man zur Abkürzung

$$41. A_0 = \frac{I_0}{l} \int \frac{dx_0}{I}, \quad A = \frac{12 I_0}{l^3} \int \frac{x_0^2 dx_0}{I}$$

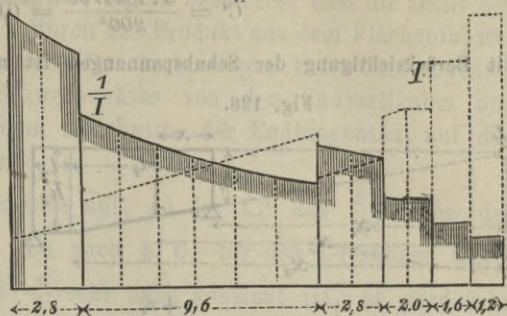
setzt. Der in den Ausdrücken 9 für M' und M'' auftretende Koeffizient $4 C' C'' - C^2$ ergibt sich leicht zu

$$42. 4 C' C'' - C^2 = 36 \frac{\text{Fläche } AGB}{\text{Fläche } ABNM}.$$

Trägt man noch $\frac{x}{F}$ als Ordinate auf, so ist der Flächeninhalt φ_1 der erhaltenen Figur $= \int \frac{x}{F} dx$. Wählt man, was zulässig ist, $\frac{x_0}{F_0}$ als Mittelwerth von $\frac{x}{F}$, so ist $\int \frac{x dx}{F} = \frac{x_0}{F_0} l$, mithin nach Formel 6 $B = 1$. Wird nach Formel 36 $\frac{x}{F} = \frac{1}{h\delta}$ gesetzt, so wird auch $\frac{x_0}{F_0} = \frac{1}{h\delta}$.

Beispiel. Drehbrücke mit zwei Oeffnungen von 20 und 18 Meter Stützweite mit Blechträgern, mit geradem Ober- und Untergurte, aber von den Enden nach dem Mittelpfeiler hin von 1,2 bis 1,8 Meter zunehmender Höhe. Die Querschnittsveränderung für die linke Oeffnung von 20m Stützweite ist durch Fig. 125 und durch die folgende Tabelle gegeben.

Fig. 125.



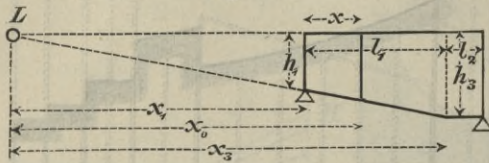
x	I	$\frac{1}{I}$	$\frac{1000}{\int \frac{dx}{I}}$	$\frac{I_0}{I}$	$\frac{I_0}{I} x^2$	$I_0 \int \frac{x^2 dx}{I}$
0	67,2	14,90		2,16	0	
14	73,6	13,60	381,3	1,98	3,9	9,2
28	80,4	12,40		1,81	14,2	
	114,2	8,77		1,27	10,0	
44	126,0	7,94		1,15	22,3	
60	138,4	7,25		1,06	38,2	
76	151,5	6,60	644,5	0,97	56,0	553,8
92	166,3	6,02		0,87	73,6	
108	179,8	5,56		0,81	94,5	
124	195,0	5,13		0,74	113,8	
	140,0	7,14		1,04	159,9	
138	150,0	6,67	187,3	0,97	184,7	517,5
152	160,1	6,25		0,91	210,2	
	222,1	4,50		0,66	152,5	
162	233,3	4,29	86,5	0,62	162,7	328,9
172	233,3	4,29		0,62	183,4	
	298,1	3,36		0,49	144,9	
188	298,1	3,36	53,8	0,49	173,2	254,5
	363,0	2,75		0,40	141,4	
200	363,0	2,75	33,0	0,40	160,0	180,8
Decimet.	Decimet.	$\frac{1}{1000}$	1386,4		. 100	1844,7 . 1000

Nach der 4. Rubrik wird $\int \frac{dx}{I} = 0,1386$. Wenn wir I_0 so wählen, dass $\frac{1}{I_0}$ der Mittelwerth von $\frac{1}{I}$ ist, so wird $\frac{20}{I_0} = 0,1386$, $\frac{1}{I_0} = 0,00693$, $I_0 = 145$. Hiernach ist sodann $\frac{I_0}{I}$ in der 5. Rubrik berechnet. Nach der 7. Rubrik wird $I_0 \int \frac{x^2 dx}{I} = 1844700$. Die Integrale sind hierbei hinsichtlich der 4 ersten Theile nach der Simpson'schen Regel, hinsichtlich der 2 letzten Theile nach der Regel für das Trapez berechnet. Sonach wird nun nach der ersten der Formeln 6:

$$C' = \frac{3 \cdot 1844700}{200^3} = 0,692.$$

Mit Berücksichtigung der Schubspannungen ist nach der ersten der Formeln a

Fig. 126.



(S. 96) noch $\frac{3 I_0 E}{E_1 l^3} \int \frac{x_1^2 dx}{f_0 x_0^2}$ hinzuzufügen. Für den vorliegenden Fall ist x_1 konstant und nach den in Fig. 126 angegebenen Bezeichnungen $f_0 = h \delta = \delta \frac{x_0 h_3}{x_3}$, daher

$$\begin{aligned} \int \frac{x_1^2 dx}{f_0 x_0^2} &= \frac{x_1^2 x_3}{\delta h_3} \int_{-x_1}^{+x_1} \frac{dx_0}{x_0^3} + \frac{l_2}{\delta h_3} = \frac{l_1 (x_3 + x_1)}{2 \delta h_3 x_3} + \frac{l_2}{\delta h_3} \\ &= \frac{1}{2 \delta h_3} \left[l_1 \left(1 + \frac{h_1}{h_3} \right) + 2 l_2 \right]. \end{aligned}$$

Hierbei ist in Decimetern $l_1 = 162$, $l = 38$, $h_1 = 12$, $h_3 = 18$, $\delta = 0,1$. Setzen wir noch $E = \frac{8}{9} E_1$, so ist obiger Werth von C_1 zu vermehren um

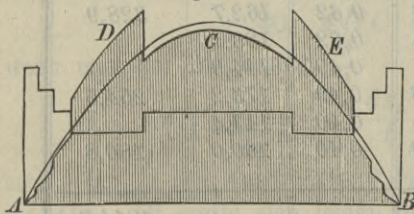
$$\frac{3 \cdot 148 \cdot 8}{3 \cdot 200^3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,1 \cdot 18} \left[162 \left(1 + \frac{12}{18} \right) + 2 \cdot 38 \right] = 0,014.$$

Sonach wird $C' = 0,692 + 0,014 = 0,706$. Die Vermehrung von C' durch die Schubspannungen beträgt hiernach 2 Prozent.

§. 63. Bestimmung der Grössen \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' und \mathfrak{C}' . Trägt

man die Grösse $\frac{I_0}{I} \mathfrak{M}$ an der betreffenden Stelle als Ordinate auf, so erhält man eine Fläche $ADCEF$ (Fig. 127), welche sich der Momentenfläche für den Einzelträger, die wir einfache Momentenfläche nennen, um so mehr nähert, je weniger veränderlich der Querschnitt ist; wir nennen daher diese Fläche die verzerrte Momentenfläche. Nach den Formeln 6 sind \mathfrak{M}' und \mathfrak{M}'' das

Fig. 127.



$\frac{2}{l^2}$ fache des statischen Momentes der verzerrten Momentenfläche in Beziehung auf die durch die Enden A und B gehenden Vertikalen. Die Bestimmung des statischen Momentes der verzerrten Momentenfläche kann nun, dem vorigen Paragrafe entsprechend, 1. durch Rechnung, 2. mit Hilfe des Momentenplanimeters und 3. durch Konstruktion erfolgen. Im ersten Falle wird man bei stetiger Veränderung des Querschnittes am besten die Simpson'sche Regel anwenden. Wenn sich indess der Querschnitt staffelförmig ändert, so wird man die Integration innerhalb der einzelnen Strecken ausführen

Die Bestimmung des statischen Momentes der verzerrten Momentenfläche kann nun, dem vorigen Paragrafe entsprechend, 1. durch Rechnung, 2. mit Hilfe des Momentenplanimeters und 3. durch Konstruktion erfolgen. Im ersten Falle wird man bei stetiger Veränderung des Querschnittes am besten die Simpson'sche Regel anwenden. Wenn sich indess der Querschnitt staffelförmig ändert, so wird man die Integration innerhalb der einzelnen Strecken ausführen

können. In Betreff der Konstruktion ist zu bemerken, dass die statischen Momente dargestellt werden 1. durch das Produkt aus dem Flächeninhalte und dem Abstände des (durch den Durchschnittspunkt der Endtangente der Seilkurve bestimmten) Schwerpunktes von den Endvertikalen und 2. durch das Produkt aus dem Abschnitte der Endtangente auf den Endvertikalen und der Polweite.

Trägt man $\frac{x \Omega}{F}$ als Ordinate auf, so ist Ω' das $\frac{F_0}{x_0 l}$ fache der Fläche der erhaltenen Figur. Da nach §. 61 für den I-förmigen Querschnitt mit konstanter Höhe $\frac{x}{F}$ sehr nahe konstant ist, so wird sehr nahe $\Omega' = 0$, so dass man das Glied mit Ω' in der Regel vernachlässigen können.

Beispiel. Wir wollen das Beispiel des vorigen Paragraphes noch um die Bestimmung von \mathfrak{M}' für eine gleichmässige Belastung mit der Last q pro Längeneinheit ergänzen. Für dieselbe ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} q x (l - x)$, $\mathfrak{M} x = \frac{1}{2} q x^2 (l - x)$.

x	$\frac{I_0}{I}$	$\frac{I_0 x^2 (l-x)}{I}$	$I_0 \int \frac{x^2 (l-x) dx}{I}$	x	$\frac{I_0}{I}$	$\frac{I_0 x^2 (l-x)}{I}$	$I_0 \int \frac{x^2 (l-x) dx}{I}$
0	2,16	0		124	1,04	1215	
14	1,98	73	250	138	0,97	1145	3171
28	1,81	244		152	0,91	1009	
	1,27	172			0,66	732	
44	1,15	348		162	0,62	618	1239
60	1,06	535			0,62	514	
76	0,97	694	6049	172	0,49	406	
92	0,87	795			0,49	208	491
108	0,81	869		188	0,40	170	
124	0,74	865		200	0,40	0	102
Decimeter		. 1000 Decimeter	6299 . 10000	Decimeter		. 1000 Decimeter	11302 . 10000

Nach der 4. Rubrik wird $\mathfrak{M}' = \frac{2}{200^2} \cdot \frac{q}{2} \cdot 11302 \cdot 10000$ oder

$$\mathfrak{M}' = 2825 q = 0,848 \cdot \frac{1}{12} q l^2,$$

Nach der 4. der Formeln a (S. 96) ist noch $-\frac{2 I_0 E}{E l^2} \int \frac{\mathfrak{M}_0 x, dx}{f_0 x^2}$ hinzuzufügen. Nun aber ist $\mathfrak{M}_0 = -\frac{1}{2} q l x_1 + q x \left(x_0 + \frac{1}{2} x\right) = -\frac{1}{2} q [x_1 (l + x_1) - x_0^2]$. Setzt man nun wieder $f_0 = \frac{\delta h_3 x_0}{x_3}$ und für den Theil mit konstanter Höhe $-\mathfrak{M}_0 \frac{x}{x_0^2}$ gleich der Transversalkraft $\frac{1}{2} q (l - 2x)$, so wird

$$\begin{aligned}
 - \int \frac{M_0 x_1 dx}{f_0 x_0^2} &= + \frac{q x_1 x_3}{2 \delta h_3} \int_{x_1}^{x_3} \left(\frac{x_1 (l + x_1)}{x_0^3} - \frac{1}{x_0} \right) dx_0 + \frac{q}{2 \delta h_3} \int_{l_1}^l (l - 2x) dx \\
 &= \frac{q l_1 l_2}{2 \delta h_3} \left[\frac{(l + x_1)(x_3 + x_1)}{2 x_3 l_2} - \frac{x_1 x_3}{l_1 l_2} \lognat \frac{x_3}{x_1} - 1 \right] \\
 &= \frac{q l_1 l_2}{2 \delta h_3} \left[\frac{\{l_1 h_3 + l_2 (h_3 - h_1)\} (h_3 + h_1)}{2 l_2 h_3 (h_3 - h_1)} - \frac{l_1 h_1 h_3}{l_2 (h_3 - h_1)^2} \lognat \frac{h_3}{h_1} - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Setzen wir $l_1 = 162$, $l_2 = 38$, $h_1 = 12$, $h_3 = 18$, $\delta = 0,1$, $I_0 = 145$ und $E = \frac{8}{3} E_1$, so wird die hinzufügende Grösse

$$\begin{aligned}
 &\frac{2 \cdot 145 \cdot 8}{3 \cdot 200^2} \cdot \frac{q \cdot 162 \cdot 38}{2 \cdot 0,1 \cdot 18} \left[\frac{(162 \cdot 18 + 38 \cdot 6) \cdot 30}{2 \cdot 38 \cdot 18 \cdot 6} - \frac{162 \cdot 12 \cdot 18}{38 \cdot 6^2} \lognat \frac{18}{12} - 1 \right] \\
 &= 33,06 (11,50 - 10,37 - 1) q = 33,06 \cdot 0,13 \cdot q = 4,30 \cdot q = 0,002 \cdot \frac{1}{12} q l^2,
 \end{aligned}$$

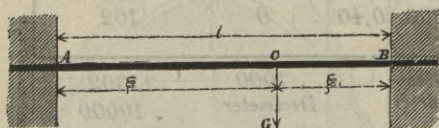
so dass jetzt $M' = (0,848 + 0,002) \cdot \frac{1}{12} q l^2 = 0,850 \cdot \frac{1}{12} q l^2$ ist. Die Schubspannungen vermehren den Werth von M' hiernach nur um 0,24 Prozent.

Wenn wir annehmen, dass sich für das zweite Feld mit der Spannweite $l_1 = 18^m$ und der gänzlichen Belastung mit q_1 pro Längeneinheit $C'' = 0,698$, $M'' = 0,847 \cdot \frac{1}{12} q_1 l_1^2$ ergibt, so wird die Gleichung zur Bestimmung des Stützmomentes M_1 : $2(0,706l + 0,698l_1) M_1 - \frac{1}{4} (0,850 q l^2 + 0,847 q_1 l_1^2)$ oder

$$M_1 = - \frac{0,1062 q l^2 + 0,1059 q_1 l_1^2}{0,706l + 0,698l_1}.$$

§. 64. Werthe von M' und M'' bei konstantem Querschnitte. Bei konstantem Querschnitte kann M' und M'' leicht durch eine Integration oder mit Hilfe des bekannten Flächeninhaltes und der bekannten Schwerpunktlage der Momentenfläche des Einzelträgers bestimmt werden.

Fig. 128.



1. Belastung durch eine Einzellast G (Fig. 128). Der Abstand der Last von beiden Stützen sei ξ , ξ_1 . Die einfache Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe $\frac{G \xi \xi_1}{l}$, also der

Fläche $\frac{1}{2} G \xi \xi_1$. Der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom linken und rechten Ende wird $\frac{1}{2} l + \frac{1}{3} (\xi - \frac{1}{2} l) = \frac{1}{3} (l + \xi)$ und $\frac{1}{2} l - \frac{1}{3} (\frac{1}{2} l - \xi_1) = \frac{1}{3} (l + \xi_1)$. Daher wird

$$43. \quad \begin{cases} M' = G \frac{\xi \xi_1 (l + \xi)}{3 l^2} = G \frac{\xi (l^2 - \xi^2)}{3 l^2}, \\ M'' = G \frac{\xi \xi_1 (l + \xi_1)}{3 l^2} = G \frac{\xi_1 (l^2 - \xi_1^2)}{3 l^2}. \end{cases}$$

2. Gänzliche gleichmässige Belastung (Fig. 129). Die einfache Momentenfläche ist eine Parabelfläche mit der Höhe $\frac{1}{8} q l$, wenn

q die Last pro Längeneinheit bezeichnet, also mit der Fläche $\frac{2}{3} l \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{12} q l^3$, deren Schwerpunkt in der Mitte liegt.

Demnach wird hier $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \frac{2}{l^2} \frac{1}{12} q l^3 \cdot \frac{l}{2}$, d. i.

$$44. \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \frac{1}{12} q l^2.$$

3. Theilweise gleichmässige Belastung mit der Last p pro Längeneinheit. Es sei zunächst der linke Theil AC (Fig. 130)

belastet; wir setzen $AC = \xi$, $BC = \xi_1$. Die einfache Momentenfläche besteht aus einem Dreieck $AC'B$ mit der Höhe $CC' = \frac{1}{2} p \frac{\xi^2}{l} \xi_1$, also der Fläche $\frac{1}{4} p \xi^2 \xi_1$ und einer Parabelfläche $AD'C'$ mit der Höhe $D'D'' = \frac{1}{8} p \xi^2$, also der Fläche $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} p \xi^2 \cdot \xi = \frac{1}{12} p \xi^3$. Der Abstand der Schwerpunkte dieser beiden Flächen von A ist $\frac{1}{3}(l + \xi)$ und $\frac{1}{2}\xi$, von B dagegen $\frac{1}{3}(l + \xi_1)$ und $\frac{1}{2}(l + \xi_1)$. Daher wird $\frac{1}{2}\mathfrak{M}'l^2 = \frac{1}{4} p \xi^2 \xi_1 \cdot \frac{1}{3}(l + \xi) + \frac{1}{12} p \xi^3 \cdot \frac{1}{2}\xi$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{M}''l^2 = \frac{1}{4} p \xi^2 \xi_1 \cdot \frac{1}{3}(l + \xi_1) + \frac{1}{12} p \xi^3 \cdot \frac{1}{2}(l + \xi_1)$ oder

$$45. \quad \mathfrak{M}' = \frac{p \xi^2 (2l^2 - \xi^2)}{12l^2}, \quad \mathfrak{M}'' = \frac{p \xi^2 (2l - \xi)^2}{12l^2}.$$

Wenn dagegen der rechte Theil BC belastet ist (Fig. 131), so ergibt sich durch Vertauschung von \mathfrak{M}' mit \mathfrak{M}'' und ξ mit ξ_1 in den vorigen Formeln

$$46. \quad \mathfrak{M}' = \frac{p \xi_1^2 (2l - \xi_1)^2}{12l^2}, \quad \mathfrak{M}'' = \frac{p \xi_1^2 (2l^2 - \xi_1^2)}{12l^2}.$$

Des häufigeren Vorkommens wegen ist hiernach für \mathfrak{M}' und \mathfrak{M}'' die folgende Tabelle berechnet:

Fig. 129.

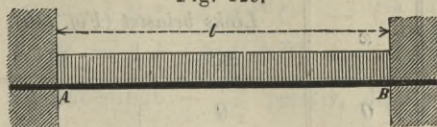


Fig. 130.

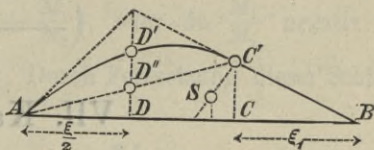
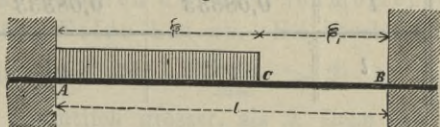
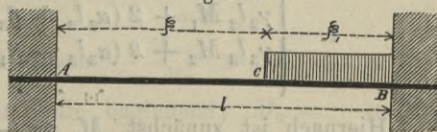


Fig. 131.



x	Links belastet (Fig. 130)		Rechts belastet (Fig. 131)	
	M'	M''	M'	M''
0	0	0	0,08333	0,08333
0,1	0,00166	0,00301	0,08168	0,08032
0,2	0,00653	0,01080	0,07680	0,07253
0,3	0,01433	0,02168	0,06901	0,06166
0,4	0,02453	0,03413	0,05880	0,04920
0,5	0,03646	0,04688	0,04688	0,03646
0,6	0,04920	0,05880	0,03413	0,02453
0,7	0,06166	0,06901	0,02168	0,01433
0,8	0,07253	0,07680	0,01080	0,00653
0,9	0,08032	0,08168	0,00301	0,00166
1	0,08333	0,08333	0	0
l	$\cdot pl^2$	$\cdot pl^2$	$\cdot pl^2$	$\cdot pl^2$

VII. Kapitel.

Belastung eines einzelnen Feldes.

§. 65. Beziehungen zwischen den Stützenmomenten der nicht belasteten Felder. Wir setzen in dem folgenden Kapitel voraus, dass die Stützen in einer Geraden liegen. Ist nun eine Reihe von Feldern, vom ersten angefangen, nicht belastet, so sind die Gleichungen für die Stützenmomente hinsichtlich der nicht belasteten Felder nach Formel 4 (S. 97):

$$1. \begin{cases} 2(\alpha_1 l_1 + \beta_2 l_2) M_1 + \gamma_2 l_2 M_2 = 0, \\ \gamma_2 l_2 M_1 + 2(\alpha_2 l_2 + \beta_3 l_3) M_2 + \gamma_3 l_3 M_3 = 0, \\ \gamma_3 l_3 M_2 + 2(\alpha_3 l_3 + \beta_4 l_4) M_3 + \gamma_4 l_4 M_4 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Hiernach ist zunächst $M_2 = -2 \left(\frac{\beta_2}{\gamma_2} + \frac{\alpha_1 l_1}{\gamma_1 l_2} \right) M_1$, M_1 und M_2 haben also entgegengesetzte Vorzeichen und es ist $-\frac{M_2}{M_1} > 2 \frac{\beta_2}{\gamma_2}$. Ferner ist

$$-\frac{M_3}{M_2} = 2 \frac{\beta_3}{\gamma_2} + \frac{l_2}{l_3} \left(2 \frac{\alpha_2}{\gamma_3} + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \frac{M_1}{M_2} \right).$$

Da nun aber $\frac{M_1}{M_2}$ negativ, indess $< \frac{\gamma_2}{2\beta_2}$ ist, so wird $-\frac{M_3}{M_2} > 2 \frac{\beta_3}{\gamma_3} + \frac{l_2 (\alpha_2 \beta_2 - \gamma_2^2)}{2 l_3 \beta_2 \gamma_3}$. Nach §. 57 wird aber für irgend ein Feld $4\alpha\beta - \gamma^2 =$

$4(C' + \frac{1}{2}kB)(C'' + \frac{1}{2}kB) - (C - kB)^2 = 4C'C'' - C^2 + 2(C + C' + C'')kB$, d. i. nach §. 62 $= 3A_0(A + kB)$, d. i. unter allen Umständen positiv. Sonach ist unbedingt $-\frac{M_3}{M_2}$ positiv, M_2 und M_3 haben also stets entgegengesetztes Vorzeichen und es ist $-\frac{M_3}{M_2} > 2 \frac{\beta_3}{\gamma_3}$. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse kommt man zu dem Resultate:

Die Stützenmomente in den nicht belasteten Feldern sind abwechselnd positiv und negativ und es ist

$$2. \quad -\frac{M_{m+1}}{M_m} > 2 \frac{\beta_{m+1}}{\gamma'_{m+1}}.$$

Da im Allgemeinen $2\beta > \gamma$ ist, so nehmen die Stützenmomente vom Ende nach dem belasteten Felde hin zu. Bei konstantem Querschnitte ist $\beta = 1$, $\gamma = 1$, hier wird also $-\frac{M_{m+1}}{M_m} > 2$; in der Regel aber hier dieses Verhältniss wesentlich grösser, als 2. Denn es ist nach Obigem: $-\frac{M_3}{M_2} = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 + \frac{M_1}{M_2}\right)$, oder da $\frac{M_1}{M_2}$ negativ und $-\frac{M_1}{M_2} > \frac{1}{2}$ ist, $-\frac{M_3}{M_2} > 2 + \frac{3}{2} \frac{l_2}{l_3}$. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse findet man:

$$3. \quad -\frac{M_{m+1}}{M_m} > 2 + \frac{3l_m}{2l_{m+1}},$$

so dass also beispielsweise bei konstanter Länge der Felder $-\frac{M_{m+1}}{M_m} > 3,5$ wird. Bei konstanter Höhe von Gitterträgern, aber variablem Querschnitte ergibt sich auf Grund spezieller Berechnungen $\frac{\beta_m}{\gamma_m} > 0,8$,

$\frac{\gamma_m}{\gamma'_{m+1}} < 1,2$, $\frac{\alpha_m}{\gamma'_{m+1}} > 0,8$. Hiernach ergibt sich

$$4. \quad -\frac{M_{m+1}}{M_m} > 1,6 + 0,9 \frac{l_m}{l_{m+1}}.$$

Bei konstanter Feldlänge würde hiernach $-\frac{M_{m+1}}{M_m} > 2,5$.

Wir wollen nun, vom linken Ende beginnend, $M_2 = -\mu_2 M_1$, $M_3 = -\mu_3 M_2$, $M_4 = -\mu_4 M_3, \dots$ und vom rechten Ende beginnend, $M_{n-2} = -\nu_{n-1} M_{n-1}$, $M_{n-1} = -\nu_{n-2} M_{n-2}, \dots$ setzen, wobei der Zeiger von μ und ν dem Felde entspricht, an dessen Stützen die Momente verglichen werden. Alsdann ergibt sich aus den Gleichungen 1:

$$5. \quad \mu_2 = \frac{2(\alpha_1 l_1 + \beta_2 l_2)}{\gamma_2 l_2}, \quad \mu_3 = \frac{2(\alpha_2 l_2 + \beta_3 l_3) - \frac{\gamma_2 l_2}{\mu_2}}{\gamma_3 l_3}, \dots,$$

wonach leicht die Verhältnisse μ_2, μ_3, \dots allmähig berechnet werden können. Nach denselben Regeln sind, vom rechten Ende beginnend,

allmählig die Verhältnisse ν zu berechnen. Bei symmetrischer Anordnung wird natürlich $\mu_2 = \nu_{n-1}$, $\mu_3 = \nu_{n-2} \dots$ oder allgemein

$$\mu_m = \nu_{n-m+1}.$$

Unter der Voraussetzung eines konstanten Querschnittes sind für den Fall, dass das erste Feld die Länge l_1 , alle übrigen die Länge l haben, die folgenden Werthe für μ berechnet worden:

$\frac{l}{l_1}$	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,9	4,22222	3,76316	3,73426	3,73221	3,73206
1,0	4,00000	3,75000	3,73333	3,73214	3,73206
1,1	3,81818	3,73810	3,73246	3,73208	3,73205
1,2	3,66667	3,72727	3,73171	3,73203	3,73205
1,3	3,53846	3,71739	3,73099	3,73197	3,73205

Der Grenzwert von μ für ein wachsendes m ergibt sich, wenn man $\mu_{m-1} = \mu_m$ setzt, also $l\mu_m = 2(l+l) - \frac{l}{\mu_m} = 4l - \frac{l}{\mu_m}$, $\mu_m^2 - 4\mu_m + 1 = 0$, woraus folgt:

$$6. \quad \mu_m = 2 + \sqrt{3} = 3,73205.$$

Ist $\frac{l}{l_2} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1,15470$, so werden sämtliche μ_m gleich gross und zwar $= 2 + \sqrt{3} = 3,73205$.

In weniger strenger Weise gelangt man folgendermassen zu diesen Resultaten: Wenn irgend ein Feld belastet wird, so werden sich offenbar alle Punkte dieses Feldes senken. In Folge des Zusammenhanges der Felder müssen sich dadurch offenbar alle Punkte der beiden benachbarten Felder heben, was wiederum eine Senkung aller Punkte der anstossenden Felder zur Folge hat u. s. f. Die unbelasteten Felder biegen sich also abwechselnd nach oben und unten durch (Fig. 132 a). Dies ist natürlich nur möglich, wenn konkave und konvexe Krümmungen, also positive und negative Momente wechseln, wobei die Wendepunkte nicht an den Stützen liegen können, weil die Momente proportional den Höhen des den Stützendrücken entsprechenden Seilpolygones (Fig. 132 c) sind. Da also in ein- und demselben Felde konkave und konvexe Krümmung auftritt, die deformirte Axe aber nach Obigem ganz auf ein- und derselben Seite der die Stützen verbindenden Sehne liegt, so muss in einem Felde der Krümmungsradius auf der dem belasteten Felde abgewendeten Seite grösser sein, als auf der dem belasteten Felde zugekehrten Seite, die Momente müssen also im Allgemeinen vom belasteten Felde aus nach beiden Seiten hin abnehmen.

§. 66. Transversalkräfte und Stützendrücke in den nicht belasteten Feldern. Nach der ersten der Gleichungen 4 (S. 94) wird für das m -te unbelastete Feld, wobei, falls das r -te Feld belastet ist, $m < r$ ist

$$7. \quad Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m}.$$

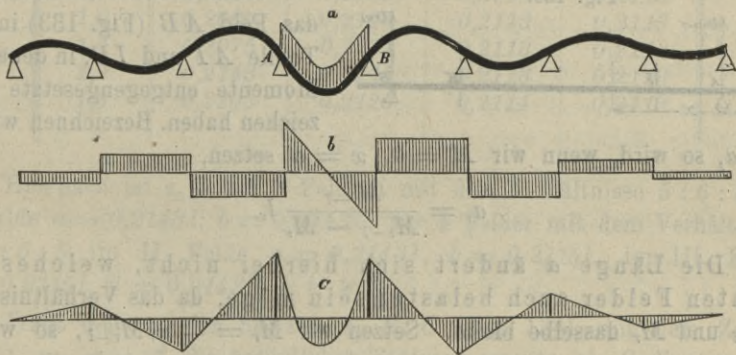
Da nun M_{m-1} und M_m entgegengesetztes Vorzeichen haben, so hat Q dasselbe Vorzeichen wie M_m ; die Transversalkräfte sind also ebenfalls abwechselnd positiv und negativ (Fig. 132b).

Da ebenso $Q_{m+1}l_{m+1} = M_{m+1} - M_m$ ist, so wird

$$8. \quad -\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{1 - \frac{M_{m+1}}{M_m} \frac{l_m}{l_{m+1}}}{1 - \frac{M_{m-1}}{M_m} \frac{l_m}{l_{m+1}}}$$

Nach dem vorigen Paragrafe ist nun im Allgemeinen $-\frac{M_{m+1}}{M_m} > 1$, $-\frac{M_{m-1}}{M_m} < 1$, daher wird $-\frac{Q_{m+1}}{Q_m} > \frac{l_m}{l_{m+1}}$ sein. Bei konstantem Querschnitte ist $-\frac{M_{m+1}}{M_m} > 2$, $\frac{M_{m-1}}{M_m} < \frac{1}{2}$, mithin $-\frac{Q_{m+1}}{Q_m} > 2 \frac{l_m}{l_{m+1}}$. Bei Parallelträgern überhaupt wird $-\frac{M_{m+1}}{M_m} > 1,6$, $-\frac{M_{m-1}}{M_m} < \frac{1}{1,6}$ oder $< 0,625$, daher $-\frac{Q_{m+1}}{Q_m} < 1,6 \frac{l_m}{l_{m+1}}$. In der Regel werden hier nach die Transversalkräfte nach dem belasteten Felde hin zunehmen.

Fig 132.



Ferner ist nach Gleichung 28 (S. 104) der Stützdruck an einer beliebigen Stütze zwischen den unbelasteten Feldern $D_m = -Q_m + Q_{m+1}$. Da Q_m und Q_{m+1} entgegengesetzte Vorzeichen haben, so hat D_m dasselbe Vorzeichen wie Q_{m+1} . Die Stützdrücke sind also ebenfalls abwechselnd positiv und negativ.

Setzt man die Ausdrücke für Q_m und Q_{m+1} ein, so findet man

$$9. \quad D_m = M_{m-1} \frac{1}{l_m} - M_m \left(\frac{1}{l_m} + \frac{1}{l_{m+1}} \right) + M_{m+1} \frac{1}{l_{m+1}}$$

Bei konstanter Länge der Felder wird $D_m l = M_{m-1} - 2M_m + M_{m+1}$; bei konstantem Querschnitte wird ausserdem $M_{m-1} + 4M_m + M_{m+1} = 0$, mithin

$$10. \quad D_m = -6 \frac{M_m}{l}.$$

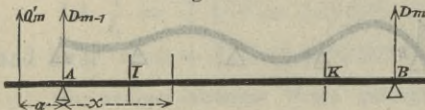
Hier ist also der Stützendruck dem Stützenmomente proportional. Für die Endstütze dagegen ergibt sich $D_1 l = +M_1$. Da nach der vorigen Gleichung $D_1 l = -6M_1$ ist, so wird $D_1 = -6D_0$. Die Stützendrücke werden hiernach nach dem belasteten Felde hin zunehmen. Auch in anderen Fällen wird dies in der Regel der Fall sein.

§. 67. **Momente in den nicht belasteten Feldern.** Für einen beliebigen Querschnitt im m -ten Felde ist nach §. 56 $M = M_{m-1} + Q'_m x = M_{m-1} - (M_{m-1} - M_m) \frac{x}{l}$, oder

$$11. \quad M = M_{m-1} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_m \frac{x}{l}.$$

Da M_{m-1} und M_m nach dem belasteten Felde hin zunehmen, so nimmt für dasselbe $\frac{x}{l}$ auch M nach dem belasteten Felde hin zu (Fig. 132 c).

Fig. 133.



Nach Formel 11 theilt sich das Feld AB (Fig. 133) in zwei Theile AI und IB , in denen die Momente entgegengesetzte Vorzeichen haben. Bezeichnen wir AI

mit a , so wird, wenn wir $M = 0$, $x = a$ setzen,

$$a_r = \frac{M_{r-1}}{M_{r-1} - M_r} l_r.$$

Die Länge a ändert sich hierbei nicht, welches der rechten Felder auch belastet sein möge, da das Verhältniss von M_{r-1} und M_r dasselbe bleibt. Setzen wir $M_r = -\mu_r M_{r-1}$, so wird

$$12. \quad a_r = \frac{l_r}{1 + \mu_r}.$$

Ist eines der links vom fraglichen Felde liegenden Felder belastet, so ergibt sich in gleicher Weise, dass sich das Feld in zwei Theile AK und KB theilt, in denen das Vorzeichen des Momentes verschieden ist. Setzen wir hierbei $BK = b_r$, $M_{r-1} = -\nu_r M_r$, so wird

$$13. \quad b_r = \frac{l_r}{1 + \nu_r}.$$

Wir nennen die Punkte I und K , welche ihre Lage nicht ändern, welches der bezüglich rechts oder links liegenden Felder auch belastet

sein möge, die Fixpunkte dieses Feldes. Aus der in §. 65 gezeigten Bestimmung der Verhältnisszahlen μ , ν geht hervor, dass μ_r und ν_r , also auch a_r und b_r nur von den Längen der bezüglich links und rechts vom fraglichen Felde liegenden Felder abhängen.

Jede rechts vom fraglichen Felde liegende Last erzeugt im linken Fixpunkte I kein Moment, verändert also auch das Moment, welches durch die Belastung des fraglichen Feldes oder der links liegenden Felder entsteht, nicht. Ebenso verändert jede links vom fraglichen Felde das Moment im rechten Fixpunkte K nicht. Wir können daher auch sagen:

Das Moment im linken Fixpunkte ist von der Belastung der rechten Felder, das Moment im rechten Fixpunkte dagegen von der Belastung der linken Felder unabhängig.

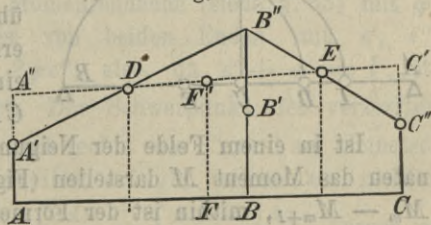
Wenn die Längen der mittleren Felder und ausserdem der beiden Endfelder gleich gross sind, so ergeben sich nach den in §. 65 aufgestellten Werthen für μ bei konstantem Querschnitte folgende Werthe für $\frac{a}{l}$:

$\frac{l}{l_1}$	II. Feld	III. Feld	IV. Feld	V. Feld
0,9	0,1915	0,2099	0,2112	0,2113
1,0	0,2000	0,2105	0,2113	0,2113
1,1	0,2075	0,2111	0,2113	0,2113
1,2	0,2143	0,2115	0,2113	0,2113
1,3	0,2203	0,2120	0,2114	0,2113

Hiernach ist z. B. bei 3 Feldern mit dem Verhältnisse 5 : 6 : 5 im II. Felde $a = 0,2143l$, $b = 0,2143l$; für 4 Felder mit dem Verhältnisse 5 : 6 : 6 : 5 im II. Felde $a = 0,2143l$, $b = 0,2115l$, im III. Felde $a = 0,2115l$, $b = 0,2143l$ u. s. w.

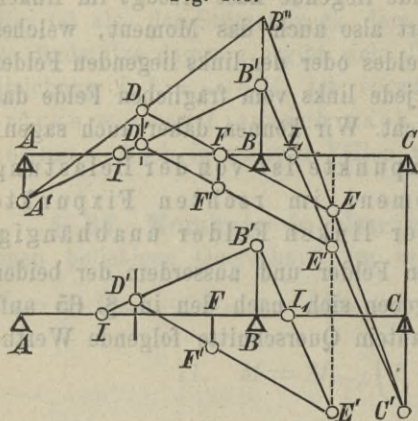
Trägt man an den Stützen A, B, C (Fig. 134) mit dem Zeiger $m - 1, m, m + 1$ die bezüglichen Stützenmomente als Ordinaten auf, macht also $AA' = M_{m-1}$, $BB' = M_m$, $CC' = M_{m+1}$, macht man hierauf $BB'' = 2BB'$ und zieht die Geraden $A'B''$, $B''C'$, so ist die Fläche $AA'B''C' = M_{m-1}l_m + 2M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}l_m$. Bei konstantem Querschnitte ist diese Fläche für die unbelasteten Felder = Null. Legt man durch die Mitte D und E von $A'B''$ und $C'B''$ eine Gerade $A''C''$, so wird die Fläche des Trapezes $AA''C''B'$ gleich

Fig. 134.



der Fläche $AA'B''C'$. Für die nicht belasteten Felder muss also die Höhe FF' des Trapezes in der Mitte von $AC = \text{Null}$ sein, es muss also F' mit F zusammenfallen, woraus sich die folgende Konstruktion der Fixpunkte ableiten lässt (Fig. 135):

Fig. 135.

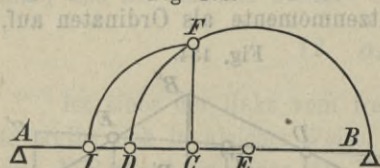


Man legt durch den Fixpunkt I eine beliebige Gerade, welche die Pfeilervertikalen von A und B in A' und B' schneidet, macht $B'B'' = BB'$ und zieht die Gerade $A'B''$, welche die durch die Mitte von AB gehende Vertikale in D schneidet. Durch D und die Mitte F von AC legt man eine Gerade, welche die durch die Mitte von BC gehende Vertikale in E schneidet. Legt man jetzt durch E und B'' eine Gerade, welche die Pfeilervertikale von C in C' schneidet, so schneidet

die Gerade $C'B'$ die Axe im Fixpunkte I_1 . Im ersten Felde ist die äusserste Stütze ein Fixpunkt; man kann daher mit Hilfe dieser Konstruktion die Fixpunkte in den einzelnen Feldern allmählig bestimmen. Zieht man die Gerade $D'E'$, welche die durch F gehende Vertikale in F' schneidet, so wird $DD' = EE' = FF' = \frac{1}{2} BB'$. Man kann daher die Konstruktion wesentlich vereinfachen, indem man $FF' = \frac{1}{2} BB'$ macht und durch D' und F' eine Gerade legt, welche den Punkt E' bestimmt; dadurch werden die Punkte A', B'', C', D, E mit den sie verbindenden Geraden ganz entbehrlich (Fig. 135b und Taf. I, Fig. 1).

Für unendlich viele Felder wird $\mu = 2 + \sqrt{3}$, daher $\frac{a}{l} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}$, woraus sich sofort die folgende Konstruk-

Fig. 136.



tion der Fixpunkte ergibt (Fig. 136). Man halbiere AB in C und dritttheile AB in D und E ; man schlage nun über BD aus E einen Halbkreis und errichte in demselben in C auf AB eine Senkrechte CF ; macht man jetzt $CI = CF$, so ist I ein Fixpunkt.

Ist in einem Felde der Neigungswinkel der Geraden, deren Ordinaten das Moment M darstellen (Fig. 132c) $= \alpha_m$, so ist $l_m \tan \alpha_m = M_m - M_{m+1}$, mithin ist der Formel 7 entsprechend, $Q_m = \tan \alpha_m$, die Transversalkräfte sind also der Tangente der Neigungswinkel in den einzelnen Feldern proportional.

Die hier erwähnten Eigenschaften der Fixpunkte wurden zuerst von Culmann (Die grafische Statik, I. Aufl. 1866) gefunden. Der Name Fixpunkt rührt von Mohr her (Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. des hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1868). — Nach Fig. 134 konstruirte zuerst Collignon (Cours de mecanique appliqué aux constructions, Paris 1869) ein Stützenmoment aus den beiden vorhergehenden, wobei er am Anfange $M_0 = 0$ setzte, M_1 aber berechnete. Dieselbe Konstruktion habe ich zur Konstruktion der Fixpunkte nach Fig. 135 verwendet.

§. 68. Stützenmomente für ein belastetes Feld. Es sei jetzt nur ein Feld, und zwar das r -te, belastet. Die Gleichungen für die Stützenmomente, welche sich auf das belastete Feld beziehen, sind nach 14 (S. 97):

$$\begin{cases} \gamma_{r-1} l_{r-1} M_{r-2} + 2(\alpha_{r-1} l_{r-1} + \beta_r l_r) M_{r-1} + \gamma_r l_r M_r + 3l_r \mathfrak{M}'' = 0, \\ \gamma_r l_r M_{r-1} + 2(\alpha_r l_r + \beta_{r+1} l_{r+1}) M_r + \gamma_{r+1} l_{r+1} M_{r+1} + 3l_r \mathfrak{M}' = 0. \end{cases}$$

Denkt man sich das r -te Feld nicht belastet, so wird $\gamma_{r-1} l_{r-1} M_{r-2} + 2(\alpha_{r-1} l_{r-1} + \beta_r l_r) M_{r-1} + \gamma_r M_r = 0$, oder, weil jetzt $M_r = -\mu_r M_{r-1}$ ist, $\gamma_{r-1} l_{r-1} M_{r-2} + 2(\alpha_{r-1} l_{r-1} + \beta_r l_r) M_{r-1} - \gamma_r \mu_r l_r M_{r-1} = 0$. Diese Gleichung bleibt aber auch noch erfüllt, wenn das r -te Feld belastet ist, weil sich durch diese Belastung das Verhältniss von M_{r-2} und M_{r-1} nicht ändert. Ebenso wird $-\gamma_r \nu_r l_r M_r + 2(\alpha_r l_r + \beta_{r+1} l_{r+1}) M_r + \gamma_{r+1} l_{r+1} M_{r+1} = 0$. Die Subtraktion dieser Gleichungen gibt, wenn man jetzt nur μ, ν, γ statt μ_r, ν_r, γ_r setzt,

$$14. \quad \begin{cases} \gamma (\mu M_{r-1} + M_r) = -3 \mathfrak{M}'' , \\ \gamma (M_{r-1} + \nu M_r) = -3 \mathfrak{M}' . \end{cases}$$

Die Auflösung gibt

$$15. \quad M_{r-1} = -3 \frac{\nu \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}'}{\gamma(\mu\nu - 1)}, \quad M_r = -3 \frac{\mu \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{\gamma(\mu\nu - 1)}.$$

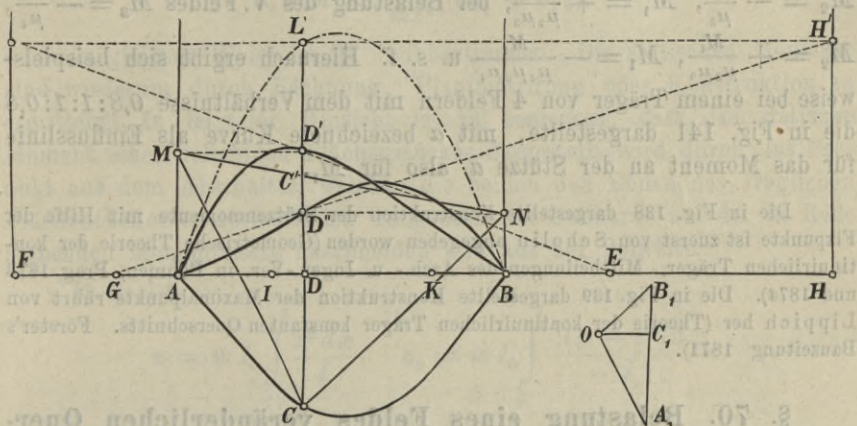
Setzen wir hierin $\mu = \frac{l}{a} - 1$, $\nu = \frac{l}{b} - 1$, $l - a - b = c$, so wird

$$16. \quad \begin{cases} M_{r-1} = -3 \frac{a}{\gamma c l} [(l - b) \mathfrak{M}'' - b \mathfrak{M}'], \\ M_r = -3 \frac{b}{\gamma c l} [(l - a) \mathfrak{M}' - a \mathfrak{M}'']. \end{cases}$$

Bezeichnet man die verzerrte Momentenfläche (siehe §. 63) mit φ , den Abstand ihres Schwerpunktes von beiden Enden mit e' , e'' , so ist $\mathfrak{M}' l^2 = 2\varphi e'$, $\mathfrak{M}'' l^2 = 2\varphi e''$, also, da $e' + e'' = l$ ist, $(l - b) \mathfrak{M}'' - b \mathfrak{M}' = \frac{2\varphi}{l} (e'' - b)$. Der Schwerpunkt der verzerrten Momentenfläche rückt am weitesten nach rechts oder e'' wird am kleinsten, wenn die Belastung durch eine Einzellast erfolgt, welche am rechten Ende liegt. In diesem Falle ist $e'' \int_I^x dx = \int_I^x \frac{x(l-x)}{I} dx$. Ferner ist $b = \frac{l}{l+\nu}$; nun aber ist nach §. 65 $\nu > 2 \frac{a}{\gamma}$, d. i.

den Einzelträger, d. i. $= G \frac{\xi \xi_1}{l}$. Macht man jetzt $FF' = DL$ und zieht die Gerade EF' , welche DL in D' schneidet, so ist DD' das Moment M' für die linke Stütze A . In gleicher Weise lässt sich das Moment $DD'' = M''$ für die rechte Stütze B konstruiren. In dieser Weise kann man leicht Punkte der Einflusslinien für beide Stützenmomente erhalten.

Fig. 138.

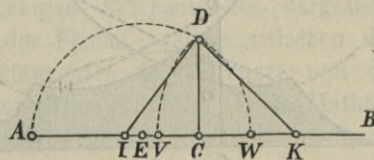


Das Stützenmoment M' wird zum Maximum für $3\xi^2 - 6(l-b)\xi + (2l - 3b)l = 0$ oder für

$$2. \quad \xi = l - b - \sqrt{\frac{1}{3} l^2 - b(l-b)}.$$

Da b zwischen 0 und $0,3l$ liegt, so liegt ξ für M' zwischen $0,35l$ und $0,42l$. Nach der eben aufgestellten Gleichung lassen sich die Punkte, in denen M' und M'' zum Maximum werden, leicht konstruiren: Man mache in Fig. 139 $AE = \frac{1}{3} AB$

Fig. 139.



und schlage aus E mit EA einen Kreisbogen, welcher die durch die Mitte von AB gehende Vertikale in D schneidet. Schlägt man jetzt aus den Fixpunkten K und I durch D Kreisbögen, welche AB in V und W schneiden, so muss die Last in V und W liegen, damit bezüglich das Moment an der linken und rechten Stütze zum Maximum werde. Denn es ist nach der Konstruktion

$$CD = \sqrt{\left(\frac{l}{3}\right)^2 - \left(\frac{l}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12} l^2}, \text{ also } KD = KV = \sqrt{\left(\frac{l}{2} - b\right)^2 + \frac{1}{12} l^2} \\ = \sqrt{\frac{1}{3} l^2 - b(l-b)} \text{ und } AV = l - b - \sqrt{\frac{1}{3} l^2 - b(l-b)}.$$

Ein Wendepunkt der Einflusslinie tritt ein für $\frac{d^2 M'}{dx^2}$, d. i. für $\xi = l - b$, d. h. den Fixpunkten entsprechen Wendepunkte der Einflusslinien für die Stützenmomente.

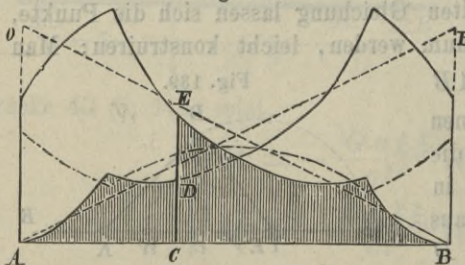
Die übrigen Stützenmomente sind nun nach §. 65 mit Hilfe der berechneten Verhältnisse μ und ν leicht zu bestimmen. So wird bei Belastung des III. Feldes $M_1 = -\frac{M_2}{\mu_2}$, bei Belastung des IV. Feldes $M_2 = -\frac{M_3}{\mu_3}$, $M_1 = +\frac{M_3}{\mu_2 \mu_3}$, bei Belastung des V. Feldes $M_3 = -\frac{M_4}{\mu_4}$, $M_2 = +\frac{M_4}{\mu_3 \mu_4}$, $M_1 = -\frac{M_4}{\mu_2 \mu_3 \mu_4}$ u. s. f. Hiernach ergibt sich beispielsweise bei einem Träger von 4 Feldern mit dem Verhältnisse 0,8:1:1:0,8 die in Fig. 141 dargestellte, mit a bezeichnete Kurve als Einflusslinie für das Moment an der Stütze a , also für M_1 .

Die in Fig. 138 dargestellte Konstruktion der Stützenmomente mit Hilfe der Fixpunkte ist zuerst von Scholin angegeben worden (Geometrische Theorie der kontinuierlichen Träger. Mittheilungen des Arch.- u. Ingen.-Ver. in Böhmen, Prag 1873 und 1874). Die in Fig. 139 dargestellte Konstruktion der Maximalpunkte rührt von Lippich her (Theorie der kontinuierlichen Träger konstanten Querschnitts. Förster's Bauzeitung 1871).

§. 70. Belastung eines Feldes veränderlichen Querschnittes durch eine Einzellast. Die Werthe von M' und M'' können nach §. 63 bestimmt werden; jedoch sind hier noch, wenn es sich um verschiedene Lagen der Einzellast handelt, Vereinfachungen möglich.

a) Man zieht durch A und B zwei Gerade AP und BO (Fig. 140), welche gegen AB unter einem Winkel geneigt sind, dessen Tangente eine beliebig angenommene einfache Zahl m ist. Die Ordinaten dieser Geraden werden

Fig. 140.



mit $\frac{I_0}{I}$ multipliziert und somit zwei Kurven I und II konstruiert. Man theilt die hierdurch begrenzten Flächen in Streifen und bestimmt die statischen Momente derselben in

Beziehung auf die beiden Endvertikalen durch Rechnung, Planimetrierung oder Konstruktion. Durch Summirung erhält man das statische Moment beliebiger Theile. Bezeichnet man nun für den Fall, dass die Einzellast in C liegt, die statischen Momente der schraffirten Flächen in Beziehung auf die durch A gehende Vertikale mit σ und σ_1 , so sind die statischen Momente der beiden entsprechenden Theile der verzerrten

Momentenfläche $\sigma \frac{y}{m\xi}$ und $\sigma_1 \frac{y}{m\xi_1}$, wenn ξ, ξ_1 den Abstand der Einzelast von den Enden A und B , und y das Moment am Angriffspunkte der Last bezeichnet. Sonach ist

$$\mathfrak{M}' = \frac{2y}{ml^3} \left(\frac{\sigma}{\xi} + \frac{\sigma_1}{\xi_1} \right).$$

Nun aber ist für die Einzellast G das Moment $y = G \frac{\xi\xi_1}{l}$, mithin wird

$$3. \quad \mathfrak{M}' = \frac{2G}{ml^4} (\sigma\xi_1 + \sigma_1\xi).$$

In gleicher Weise ist \mathfrak{M}'' zu bestimmen. Die statischen Momente sind wiederum durch Rechnung, Planimetrierung oder Konstruktion zu ermitteln. In letzterer Hinsicht ist zu bemerken, dass das statische Moment eines beliebigen Flächenstückes dargestellt wird durch das Produkt aus dem Abschnitte, welchen die beiden den Enden des fraglichen Flächentheiles entsprechenden Tangenten der Seilkurve auf der in Rede stehenden Momentenaxe abschneiden und aus der Polweite.

b) Es ist

$$\sigma = m I_0 \int_0^{\xi} \frac{x^2 dx}{I}, \quad \sigma_1 = m I_0 \int_{\xi}^l \frac{(lx - x^2) dx}{I}.$$

Nun aber ist $\int_{\xi}^l \frac{x dx}{I}$ das statische Moment des zwischen ξ und l liegenden Theiles der Krümmungsfläche in Beziehung auf das linke Ende; ferner sind $\int_0^{\xi} \frac{x^2 dx}{I}$ und $\int_{\xi}^l \frac{x^2 dx}{I}$ die Trägheitsmomente der zwischen 0 und ξ , ξ und l liegenden Theile der Krümmungsfläche in Beziehung auf das linke Ende. Sonach kann man σ und σ_1 durch Rechnung, Planimetrierung oder Konstruktion auch bestimmen, ohne die Kurven in Fig. 140 zu konstruieren. In Betreff der Konstruktion ist zu bemerken, dass das Trägheitsmoment eines beliebigen Flächentheiles dargestellt wird durch das doppelte Produkt aus der Fläche, welche zwischen den dem Flächentheile entsprechenden Endtangente der Seilkurve und der Momentenaxe enthalten ist, und der doppelten Polweite. Diese Methode dürfte der vorigen vorzuziehen sein, weil sie die Konstruktion neuer Kurven unnöthig macht.

Die Stützenmomente sind nach Bestimmung von \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' nach den Formeln 16 (S. 123) zu ermitteln, nämlich

$$4. \quad \begin{cases} \mathfrak{M}' = -\frac{3a}{\gamma c l} [(l-b)\mathfrak{M}'' - b\mathfrak{M}'] \\ \mathfrak{M}'' = -\frac{3b}{\gamma c l} [(l-a)\mathfrak{M}' - a\mathfrak{M}''] \end{cases}$$

Die übrigen Stützenmomente sind nun, wie im vorigen Paragrafe, durch die Verhältnisse μ und ν bestimmt. Die hierdurch bestimmte Einflusslinie hat im Allgemeinen die Form der in Fig. 141 mit a bezeichneten Kurve.

Nach Formel 3 wird, wenn sich ξ um $d\xi$, also ξ_1 und $-\xi_2$ ändert, $dM' = \frac{2G}{ml^4} (-\sigma d\xi + \xi_1 d\sigma + \sigma_1 d\xi + \xi_2 d\sigma_1)$. Nun aber ist $d\sigma = \frac{mI_0}{I} \xi_2 d\xi$, $d\sigma_1 = -\frac{mI_0}{I} \xi_1 d\xi$, mithin $\xi_1 d\sigma + \xi_2 d\sigma_1 = 0$, also

$$\frac{dM'}{d\xi} = \frac{2G}{ml^4} (\sigma_1 - \sigma), \quad \frac{dM''}{d\xi} = \frac{2G}{ml^4} (\sigma_1' - \sigma'),$$

wenn σ' und σ_1' die statischen Momente der Flächen ACD , BCE in Beziehung auf die durch B gehende Vertikale bedeuten. Da nun ferner

$d\sigma = \frac{mI_0}{I} \xi_2 d\xi$, $d\sigma_1 = -d\sigma' = -\frac{mI_0}{I} \xi_1 d\xi$, $d\sigma_1' = -\frac{mI_0}{I} \xi_1' d\xi$ wird, so ergibt sich

$$\frac{d^2 M'}{d\xi^2} = -\frac{2I_0 G \xi}{Il^3}, \quad \frac{d^2 M''}{d\xi^2} = -\frac{2I_0 G \xi_1}{Il^3}.$$

Sonach wird

$$\frac{d^2 M'}{d\xi^2} = \frac{6I_0 G a}{\gamma c Il^4} [(l-b)\xi_1 - b\xi] = \frac{6I_0 G a}{\gamma c Il^3} (l-b-\xi).$$

Der Wendepunkt der Einflusslinie für M' liegt also bei $\xi = l-b$. Den Fixpunkten entsprechen also allgemein Wendepunkte der Einflusslinien für die Stützenmomente.

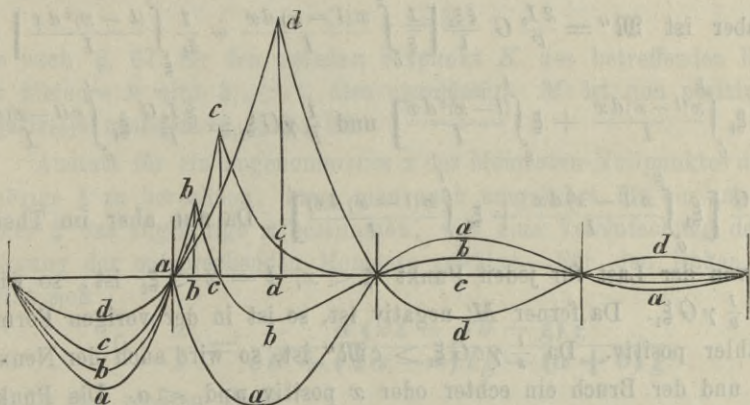
Da man nach dem Vorigen das Moment an einer links von dem belasteten Felde liegenden Stütze durch Multiplikation von M' mit einem ganz bestimmten positiven und negativen echten Bruche erhält, so werden die Einflusslinien in demselben Felde für die Momente an den links liegenden Stützen, ebenso an allen rechts liegenden Stützen affine Figuren.

Wenn eine Last unendlich nahe neben einer Stütze liegt, so bilden diese Last und der gleich grosse Stützendruck ein Kräftepaar, welches bei gleich grosser Last und gleichem Abstände von der Stütze mit gleichem Momente nach links oder rechts dreht, je nachdem die Last auf der linken oder rechten Seite der Stütze liegt. Die Einflusslinien für ein Stützenmoment werden dementsprechend an den Stützen für die beiden benachbarten Oeffnungen dieselbe Tangente haben oder stetig in einander übergehen, natürlich mit Ausnahme der Stütze, deren Moment in Frage steht.

§. 71. Momente für einen beliebigen Querschnitt. Nach Bestimmung der Stützenmomente für das belastete Feld sind die Momente für beliebige Querschnitte des belasteten Feldes durch die zweite der

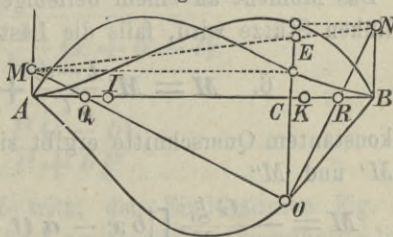
Gleichungen 14 (S. 94), in welcher $M = G \frac{\xi \xi_1}{l}$ zu setzen ist, bestimmt. In der in Fig. 138 gezeigten Weise, in welcher $CC' = DL = G \frac{\xi \xi_1}{l}$ ist und die Momente durch die Ordinaten der gebrochenen Linie MCN dargestellt werden, lassen sich die Momente leicht konstruieren; auch in den übrigen Feldern sind die Momente nach Fig. 132 mit Hilfe der Fixpunkte leicht durch Konstruktion zu bestimmen. Die Form der sich hierdurch ergebenden Einflusslinien zeigt Fig. 141 beispielsweise für einen Träger mit konstantem Querschnitte, dessen Felder sich wie 4:5:5:4 verhalten, für die Querschnitte a, b, c, d des II. Feldes.

Fig. 141.



Wir wollen die Punkte Q und R (Fig. 142), in denen das Moment, wenn die Last im beliebigen Punkte C liegt, Null wird, näher betrachten. Liegt die Last im Nachbarfelde links von A , so ist das Moment im Fixpunkte $K=0$. Wenn nun die Last unendlich nahe bei A liegt, aber einmal links, sodann rechts von A , so wirkt in A auf den Träger, wie schon oben bemerkt, ein unendlich kleines Kräftepaar einmal links, sodann rechts drehend. Der Zustand des Trägers bleibt also derselbe, nur wechseln die, allerdings unendlich kleinen Momente, das Vorzeichen. In K wird das Moment Null bleiben; ebenso ist das Moment in A selbst Null. Liegt umgekehrt die Last unendlich nahe bei B , so ist das Moment im Fixpunkte I und B Null. Wenn also die Last von A nach B rückt,

Fig. 142.



so rückt der linke Nulppunkt des Momentes von A nach I , der rechte Nullpunkt von K nach B .

Setzen wir $AC = \xi$, $BC = \xi_1$, $AQ = x$, das Moment CO bei $C = M_1$, so wird $x = \frac{M' \xi}{M' - M_1}$ oder, da $M_1 = M' - (M' - M'') \frac{\xi}{l} + G \frac{\xi \xi_1}{l}$ ist,

$$x = \frac{M' l}{M' - M'' - G \xi_1}.$$

Setzen wir für M' und M'' die Ausdrücke 4, so ergibt sich

$$5. \quad x = \frac{a \mathfrak{M}'' - b \mathfrak{M}' + c \mathfrak{M}''}{a \mathfrak{M}'' - b \mathfrak{M}' + \frac{1}{3} \gamma c G \xi_1} a.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun aber ist } \mathfrak{M}'' &= \frac{2 I_0}{l^2} G \frac{\xi \xi_1}{l} \left[\frac{1}{\xi_1} \int_0^{\xi} \frac{x(l-x) dx}{I} + \frac{1}{\xi} \int_{\xi_1}^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} \right] = \\ &= \frac{2 I_0 G}{l^3} \left[\xi_1 \int_0^{\xi} \frac{x(l-x) dx}{I} + \xi \int_{\xi_1}^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} \right] \text{ und } \frac{1}{3} \gamma c G \xi_1 = \frac{2 I_0 G}{l^3} \xi_1 \int_0^l \frac{x(l-x) dx}{I} \\ &= \frac{2 I_0 G}{l^3} \left[\xi_1 \int_0^{\xi} \frac{x(l-x) dx}{I} + \xi_1 \int_{\xi_1}^l \frac{x(l-x) dx}{I} \right]. \end{aligned}$$

Da nun aber im Theile rechts von der Last für jeden Punkt $\xi < x$, $l - x < \xi_1$ ist, so wird $\mathfrak{M}'' < \frac{1}{3} \gamma c G \xi_1$. Da ferner M' negativ ist, so ist in der vorigen Formel der Zähler positiv. Da $\frac{1}{3} \gamma c G \xi_1 > c \mathfrak{M}''$ ist, so wird auch der Nenner positiv und der Bruch ein echter oder x positiv und $< a$. Die Punkte M und O liegen hiernach auf verschiedenen Seiten von AB oder M' und M_1 haben verschiedenes Vorzeichen. Hiernach lässt sich behaupten:

Das Moment am Angriffspunkte der Last ist stets positiv. Die Punkte, in denen das Moment Null wird, liegen stets ausserhalb der Fixpunkte.

Das Moment an einem beliebigen Querschnitte im Abstände x von der linken Stütze wird, falls die Last rechts vom Querschnitte liegt,

$$6. \quad M = M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l} + G \frac{x \xi_1}{l}.$$

Bei konstantem Querschnitte ergibt sich durch Einsetzung der Ausdrücke für M' und M''

$$7. \quad M = - \frac{G \xi_1}{c l^3} [\{b x - a(l-x)\} \xi^2 + \{b(l-3a)x + a(2l-3b)(l-x)\} \xi - c l^2 x].$$

Hiernach wird $M = 0$ für

$$8. \quad [b x - a(l-x)] \xi^2 + [b(l-3a)x + a(2l-3b)(l-x)] \xi - c l^2 x = 0.$$

Die zulässige Wurzel dieser quadratischen Gleichung sei ξ_x . Für $x = 0$ ergibt sich $\xi_x = 0$. Ferner wird $\xi_x = l$ für

$$x = a,$$

d. i. nach §. 67 für den linken Fixpunkt I des betreffenden Feldes. Für noch grössere x wird $\xi_x > l$, also unzulässig. M ist nun positiv oder negativ, je nachdem $\xi \leq \xi_x$ ist.

Liegt dagegen die Last links vom fraglichen Querschnitte, so wird $M = 0$ für

$$9. [a(l-x) - bx] \xi^2 - 3al(l-x-b) \xi - l^2(l-3a)(l-b-x) = 0.$$

Diese Gleichung ergibt sich aus der Gleichung 8 durch Vertauschung von a mit b , x mit $l-x$ und ξ mit ξ_1 . Die zulässige Wurzel sei ξ_{1x} . Für $x = l$ wird $\xi_{1x} = 0$. Ferner wird $\xi_{1x} = l$ für

$$l - x = b,$$

also nach §. 67 für den rechten Fixpunkt K des betreffenden Feldes. Für kleinere x wird $\xi_{1x} > l$, also unzulässig. M ist nun positiv oder negativ, je nachdem $\xi_1 \leq \xi_{1x}$ ist.

Anstatt für ein angenommenes x des Momenten-Nullpunktes das zugehörige ξ zu berechnen, kann man auch umgekehrt für ein angenommenes ξ das zugehörige x bestimmen, was eine Vereinfachung der Berechnung der entsprechenden Momente gewährt. Für den linken Theil ergibt sich

$$10. \frac{x}{l} = \frac{a(2l - 3b - \xi) \xi}{cl^2 + (2a - b)l\xi - (a + b)\xi^2}$$

und für den rechten Theil

$$11. \frac{x}{l} = \frac{(l - b)(3a\xi - 3al + l^2) - a\xi^2}{l^2(l - 3a) + 3al\xi - (a + b)\xi^2}.$$

Dieselben Regeln gelten natürlich auch für die Endfelder; nur ist im ersten Felde $a = 0$, im letzten $b = 0$ zu setzen. Für das erste Feld gibt die Gleichung 9:

$$12. \xi = l \sqrt{\frac{l}{bx} (x + b - l)}$$

oder umgekehrt

$$13. \frac{x}{l} = \frac{l^2(l - b)}{l^3 + b\xi^2}.$$

Das positive Maximum von M tritt, den Einflusslinien Fig. 141 entsprechend, immer ein, wenn die Last am fraglichen Querschnitte liegt, wenn also $\xi = x$ ist. Demnach wird

$$14. \max(+M) = + \frac{Gx(l-x)}{cl^2} [(l-b)(l-3a)l + (3a-b)lx - (a+b)x^2].$$

Zum negativen Maximum wird M für $\frac{dM}{d\xi} = 0$, also, falls die Last auf der rechten Seite des Querschnittes liegt, für

$$15. \quad 3[bx - a(l-x)]\xi^2 + 6(l-b-x)al\xi - [a(2l-3b) + (l-3a)x]l^2 = 0.$$

Für $x = a$ ergibt sich hiernach $\xi = l$. Setzt man den sich hieraus ergebenden Ausdruck für $[bx - a(l-x)]\xi^2$ in den Ausdruck für M ein, so erhält man

$$16. \quad \max(-M) = -\frac{G(a-x)\xi_1}{3cl^2} [(2l-3b)l - 3b\xi].$$

Die übrigen Felder müssen für $\max M$ nach Massgabe der Einflusslinie abwechselnd belastet sein und zwar so, dass das Moment an der dem fraglichen Felde zugekehrten Stütze zum Maximum wird.

§. 72. **Transversalkräfte und Stützendrucke.** Sind Q' und Q'' die Transversalkräfte auf beiden Seiten der Last, M_1 das Moment am Angriffspunkte der Last, so ist $M_1 = M' + Q'\xi$, $M_1 = M'' - Q''\xi_1$, also

$$Q' = \frac{M_1 - M'}{\xi}, \quad Q'' = \frac{M'' - M_1}{\xi_1}.$$

Da wir nachgewiesen haben, dass M' und M'' stets negativ, M_1 dagegen stets positiv ist, so können wir behaupten, dass die Transversalkraft auf der linken Seite der Last stets positiv, auf der rechten Seite der Last stets negativ ist.

Zur Bestimmung von Q' und Q'' setzt man besser:

$$17. \quad Q' = G \frac{\xi_1}{l} - \frac{M' - M''}{l}, \quad Q'' = -G \frac{\xi}{l} - \frac{M' - M''}{l}.$$

Für einen konstanten Querschnitt ergibt sich durch die Einsetzung der Ausdrücke für M' und M''

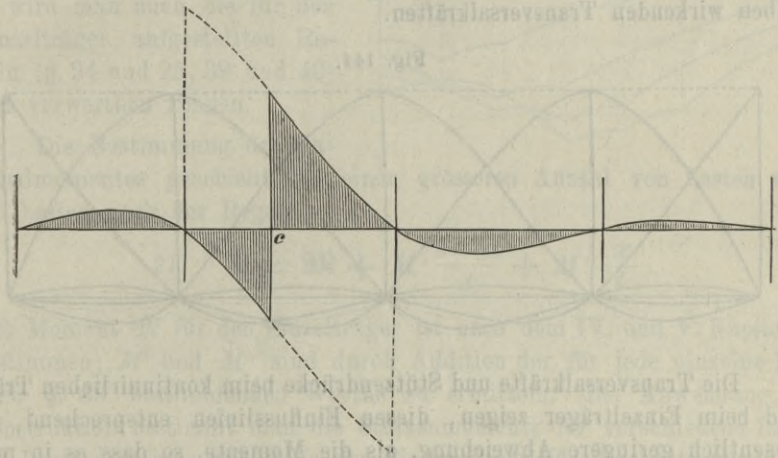
$$18. \quad \begin{cases} Q' = + \frac{G\xi_1}{cl^3} [cl^2 + (2a-b)l\xi - (a+b)\xi^2], \\ Q'' = - \frac{G\xi}{cl^3} [cl^2 + (2b-a)l\xi_1 - (a+b)\xi_1^2]. \end{cases}$$

Die Form der Einflusslinie zeigt Fig. 143, beispielsweise für den Querschnitt c des II. Feldes eines kontinuierlichen Trägers mit 4 Oeffnungen, deren Verhältniss 4 : 5 : 5 : 4 ist. Wendepunkte im Felde, in welchem der fragliche Querschnitt liegt, treten sowohl für Q' , als für Q'' bei $x = \frac{a}{a+b}l$ auf. Behufs Konstruktion konstruirt man zunächst die Einflusslinien für M' , M'' in einem solchen Massstabe, dass das Moment $G l$ gleich der Last G wird. Alsdann stellt die Differenz der Ordinaten

beider Linien das Glied $\frac{M' - M''}{l}$ dar. Die Glieder $G \frac{\xi}{l}$ und $-G \frac{\xi}{l}$ entsprechen der Transversalkraft für den Einzelträger. Ist für die Belastung eines rechts liegenden Feldes das Moment an der linken Stütze dieses Feldes M_m und das fragliche Feld das r -te, so wird $\pm \mu_{m-1} \mu_{m-2} \dots \mu_r M' = M_m$, $\mp \mu_{m-1} \mu_{m-2} \dots \mu_{r+1} M'' = M_m$, also

$$19. \quad M' - M'' = \pm \frac{\mu_{r+1} + 1}{\mu_{m-1} \mu_{m-2} \dots \mu_r} M_m.$$

Fig. 143.



Für Fig. 143 wird beispielsweise $\mu_2 = 3,60$, $\mu_3 = 3,72$, also bei Belastung des IV. Feldes $M_2 = -\frac{M_3}{3,72} = -0,269 M_3$, $M_1 = +\frac{M_3}{3,72 \cdot 3,60} = +0,075 M_3$, also $Ql = -(0,075 M_3 + 0,269 M_3) = -0,344 M_3$ und bei Belastung des III. Feldes $M_1 = -\frac{M_2}{3,60} = -0,278 M_2$, also $Ql = -(-0,278 M_2 - M_2) = +1,278 M_2$.

Das Maximum von Q tritt für einen Querschnitt ein, wenn die Last dicht rechts oder links neben dem Querschnitte liegt und wenn die übrigen Felder abwechselnd belastet sind, derart, dass in den belasteten Feldern die Last eine solche Lage hat, dass das Moment an der dem fraglichen Felde zugekehrten Stütze zum Maximum wird.

Der Stützendruck D an einer Stütze ist, wenn M' , M'' , M''' die Momente an der linken, der fraglichen und der rechten Stütze der beiden an einander stossenden Felder mit den Spannweiten l und l_1 bezeichnet, falls die Last im linken Felde im Abstände ξ , ξ_1 von den beiden Stützen dieses Feldes liegt, nach Formel 28 (S. 104):

$$D = G \frac{\xi}{l} + \frac{M' - M''}{l} - \frac{M'' - M'''}{l_1},$$

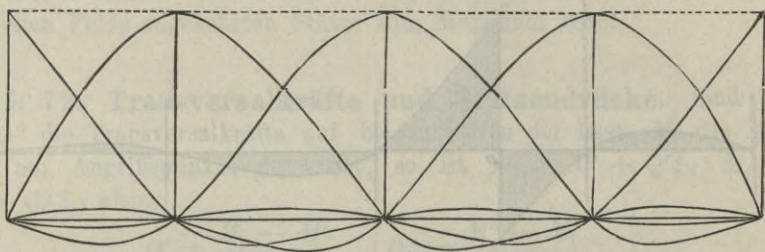
oder, wenn wir $M''' = -\frac{b_1}{l_1 - b_1} M''$ setzen,

$$20. \quad D = G \frac{\xi}{l} + \frac{M'}{l} - \frac{M''(l + l_1 - b_1)}{l(l_1 - b_1)}.$$

Wenn die Last im rechten Felde liegt, so ist natürlich M' mit M''' , l mit l_1 , b_1 mit a und ξ mit ξ_1 zu vertauschen.

Die Form der Einflusslinien zeigt Fig. 144, beispielsweise für 4 Felder mit dem Verhältnisse 8:10:10:8. Die Stützendrücke an den äusseren Stützen sind natürlich gleichbedeutend mit den neben denselben wirkenden Transversalkräften.

Fig. 144.



Die Transversalkräfte und Stützendrücke beim kontinuierlichen Träger und beim Einzelträger zeigen, diesen Einflusslinien entsprechend, eine wesentlich geringere Abweichung, als die Momente, so dass es in manchen Fällen wohl gestattet sein wird, die Transversalkräfte und Stützendrücke unter der vereinfachenden Annahme von Einzelträgern zu berechnen.

Der Einfluss einer Einzellast auf die Momente und Transversalkräfte, insbesondere zum Zwecke der Ermittlung der ungünstigsten Belastungsweise, wurde wohl zuerst vom Verfasser untersucht (Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückentragwerk, Civilingenieur 1860). — Die grafische Darstellung der Beanspruchung der kontinuierlichen Träger durch Einflusslinien gibt zuerst Weyrauch (Allgem. Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873).

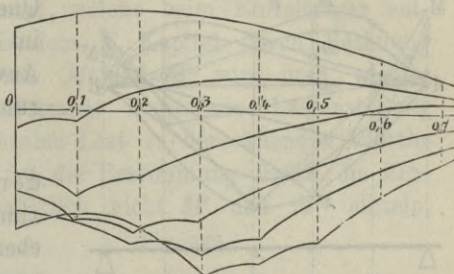
B. System von Einzellasten.

§. 73. Momente in Folge der Belastung des fraglichen Feldes.

1. Querschnitte zwischen den Fixpunkten. Durch die Belastung des fraglichen Feldes können hier nach §. 71 nur positive Momente entstehen. Die Einflusslinie (Fig. 141) ist im Allgemeinen einspringend und nur dem fraglichen Querschnitte entspricht eine auspringende Ecke. Die Summeneinflusslinie muss deshalb nach §. 23 aus

Linien bestehen, welche nur an den Stellen ausspringende Ecken haben, welche einer Ueberschreitung des fraglichen Querschnittes durch eine Last entsprechen (Fig. 145). Demnach muss jedenfalls eine Einzellast am fraglichen Querschnitte liegen. Da die Einflusslinien im Allgemeinen nicht viel von denjenigen des Einzelträgers abweichen (Dreieck für unmittlere, abgestumpftes Dreieck für mittelbare Belastung), so wird man auch die für den Einzelträger aufgestellten Regeln (§. 24 und 25, 39 und 40) hier verwerthen können.

Fig. 145.

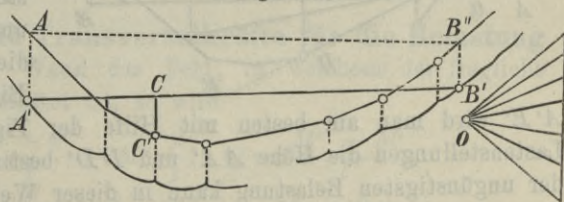


Die Bestimmung des Maximalmomentes geschieht bei einer grösseren Anzahl von Lasten wohl am besten nach der Regel:

$$21. \quad M = \mathfrak{M} + M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l}.$$

Das Moment \mathfrak{M} für den Einzelträger ist nach dem IV. und V. Kapitel zu bestimmen; M' und M'' sind durch Addition der für jede einzelne Last nach §. 68 bestimmenden Werthe zu ermitteln. Bei Anwendung der Konstruktion bestimmt man die Stützenmomente für verschiedene Lagen des Lastensystemes mit Hilfe der Einflusslinien für die Stützenmomente nach einer der in §. 22 und 23 besprochenen Methoden. Die so erhaltenen Stützenmomente, dividirt durch die Polweite, trägt man vom Seilpolygone des Lastensystemes aus an der bezüglichen Stelle als Vertikale auf, wodurch sich auf der ausspringenden Seite des Seilpolygons zwei Kurven ergeben (Fig.

Fig. 146.

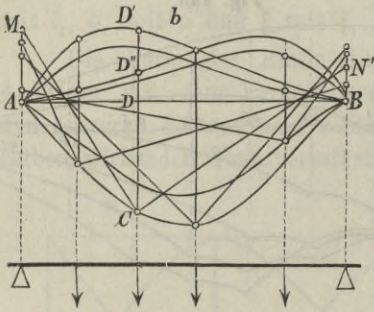


146). Für die in Frage kommende Lage des Lastensystemes bestimmt man nun die auf diesen Kurven liegenden Enden der Schlusslinie und kann jetzt in bekannter Weise (§. 59) das Moment bestimmen.

Bei einer kleineren Anzahl von Lasten kann man auch in folgender Weise verfahren. Man konstruirt die Einflusslinie für die Stützenmomente und die Kurve für das Moment am Angriffspunkte der Einzellast (Fig. 147) nach §. 69 und 70, und zwar für jede verschiedene der vorkommenden Einzellasten. Mit Hilfe dieser Kurven zieht man die Momentenlinien für alle einzelnen Lasten bei der in Frage kommenden

Lage. Man kann dann das Moment an einem bestimmten Querschnitte durch die Summirung der an diesem Querschnitte abzugreifenden Momente der einzelnen Lasten bestimmen.

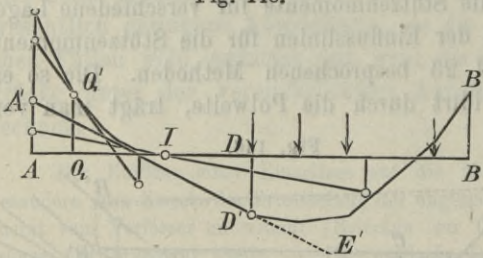
Fig. 147.



Die Anwendung der Einflusslinie für die Momente an den einzelnen Querschnitten nach §. 22 und 23 ist im Allgemeinen umständlicher, als die Anwendung der genannten Verfahrensweisen.

2. Querschnitte ausserhalb der Fixpunkte. Die positiven Maximalmomente kann man ganz in der eben gezeigten Weise bestimmen. Die ungünstigste Belastung bestimmt man hierbei entweder mit Zuhilfenahme des positiven Theiles der Einflusslinie oder durch Probiren mit verschiedenen Laststellungen, wobei eine Einzellast am fraglichen Querschnitte liegen muss. Das negative Maximum $Q Q'$ (Fig. 148) an einem Querschnitte Q entspricht unter allen Lastenstellungen derjenigen, bei welcher die äusserste linke Seilpolygonseite die durch Q gelegte Vertikale im höchsten Punkte schneidet; diese Seilpolygonseite muss hier offenbar die Kurve

Fig. 148.



für die negativen Maximalmomente tangiren. Wenn man daher die äusserste Seilpolygonseite $A'E'$ für verschiedene Lagen des Lastensystemes konstruirt, so umhüllen alle diese Seiten die Momentenkurve. Zum Einzeichnen der Geraden

$A'E'$ wird man am besten mit Hilfe der Fig. 146 für verschiedene Lastenstellungen die Höhe AA' und DD' bestimmen. Die Bestimmung der ungünstigsten Belastung kann in dieser Weise ganz entfallen.

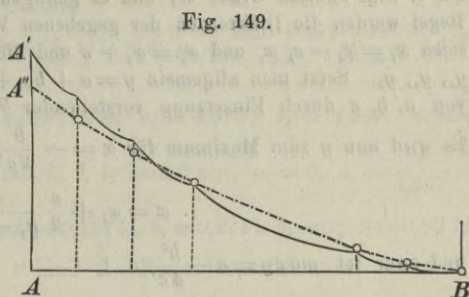
Bei mittelbarer Belastung wird es wohl meist genügen, wenn man in der gezeigten Weise die Momente an den Querträgern oder Knotenpunkten bestimmt und die so erhaltenen Punkte geradlinig verbindet. Es hat indess keinen Anstand, ganz dem §. 44 entsprechend, auch für zwischenliegende Querschnitte die Maximalmomente genau zu bestimmen. Hierbei ist natürlich zu beachten, dass nach §. 20 die Einflusslinien zwischen den Querträgern geradlinig, dass aber an den Querträgern die Ordinaten der Einflusslinien ganz dieselben sind, wie bei unmittelbarer Belastung.

§. 74. **Transversalkräfte in Folge der Belastung des fraglichen Feldes.** Die Bestimmung der Maximaltransversalkräfte erfolgt am besten durch die Regel 4 (S. 94), nämlich

$$22. \quad Q = \Omega - \frac{M' - M''}{l},$$

worin Ω die Transversalkraft bedeutet, welche beim Einzelträger entstehen würde und welche ganz nach dem V. Kapitel durch Rechnung oder Konstruktion zu bestimmen ist. M' und M'' wird man, wie im vorigen Paragrafe, für jede in Betracht kommende Lastenstellung durch Summirung der für jede einzelne Last zu berechnenden Werthe bestimmen. Wesentlich bequemer ist die Bestimmung durch die Einflusslinien für M' und M'' , wobei natürlich nicht M' und M'' einzeln, sondern sogleich die Differenz

$M' - M''$ abgegriffen und bei der Summirung das Vorzeichen von $M' - M''$ beachtet wird. Man kann aber auch das Glied $\frac{1}{l}(M' - M'')$ mit Hilfe der Fig. 146 bestimmen, indem man für die bei einem bestimmten Querschnitte in



Betracht kommende Lastenstellung im Kraftpolygone zwei Strahlen parallel der Schlusslinie $A''B''$ für die Einzelträger und parallel der Schlusslinie $A'B'$ für den kontinuierlichen Träger zieht; diese Parallelen schneiden auf der Kräfteinie eine Strecke $C'C''$ ab, welche unmittelbar das Glied $\frac{1}{l}(M' - M'')$ gibt.

§. 75. **Momente und Transversalkräfte für die Belastung der übrigen Felder.** Wenn das Feld, in welchem der fragliche Querschnitt liegt, nicht belastet ist, so wird

$$23. \quad M = M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l}, \quad Q = \frac{M'' - M'}{l}.$$

Ist ein linkes Feld belastet, so wird $\nu M'' = -M'$, mithin

$$24. \quad M = M' \left(1 - \frac{l+\nu}{\nu} \frac{x}{l} \right), \quad Q = -\frac{l+\nu}{\nu} \frac{M'}{l}.$$

Ist dagegen ein rechtes Feld belastet, so wird $\mu M' = -M''$, folglich

$$24a. \quad M = M'' \left(1 - \frac{1+\mu}{\mu} \frac{l-x}{l} \right), \quad Q = +\frac{1+\mu}{\mu} \frac{M''}{l}.$$

Nun aber ist nach §. 65 im ersten Falle M' proportional dem Momente M_0'' an der rechten Stütze des belasteten Feldes und im zweiten Falle M'' proportional dem Momente M_0' an der linken Stütze

des belasteten Feldes. Es wird also darauf ankommen, die Maxima von M_0' und M_0'' zu finden, was am besten mit Hilfe der Einflusslinien in bekannter Weise geschieht. Auch kann man diese Maxima unmittelbar aus der Fig. 146 entnehmen. Aus M_0' und M_0'' kann man mit Hilfe der Fixpunkte nach §. 65 bis 67 (Fig. 132) leicht M' , M'' , sowie M und Q konstruiren.

Nicht selten ist bei den von uns zu behandelnden Aufgaben, wie im vorliegenden Falle, die Bestimmung des Maximums einer Funktion y für den Fall vorzunehmen, dass nicht das Gesetz, welchem diese Funktion folgt, durch einen analytischen Ausdruck gegeben ist, sondern, dass nur die Werthe der Funktion für bestimmte Werthe der Variablen x gegeben sind. Oft wird man hierbei annehmen können, wenn die Differenzen der gegebenen Werthe der Variablen x nur klein sind, dass y in Beziehung auf x vom zweiten Grade sei und es genügen alsdann drei Werthe von y . In der Regel werden die Differenzen der gegebenen Variablen gleich sein; diese Variablen seien $x_1 = x_2 - e$, x_2 und $x_3 = x_2 + e$ und die zugehörigen Werthe von y bezüglich y_1, y_2, y_3 . Setzt man allgemein $y = a + bx + cx^2$, so ergeben sich zur Bestimmung von a, b, c durch Einsetzung vorstehender Werthe von x und y drei Gleichungen.

Es wird nun y zum Maximum für $x = -\frac{b}{2c}$, d. i. für

$$x = x_2 + \frac{e}{2} \frac{y_1 - y_3}{y_1 - 2y_2 + y_3}$$

und zwar ist $max y = a - \frac{b^2}{4c}$, d. i.

$$max y = y_2 - \frac{(y_1 - y_3)^2}{8(y_1 - 2y_2 + y_3)}$$

Hiernach lassen sich verschiedene geometrische Konstruktionen angeben; eine einfache Konstruktion ist folgende (Fig. 150): A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 seien bezüglich $= y_1, y_2, y_3, A_1A_2 = A_2A_3 = e$. Man ziehe die Gerade B_1B_3 , welche die mittlere Ordinate in C schneidet, mache $B_2D = B_2C$ und lege durch D eine Parallele zur Abscissenaxe, welche die äusseren Ordinaten in E_1 und E_3 schneidet. Zieht man jetzt die Geraden B_1E_3 und E_1B_3 , so schneiden sich dieselben im Maximalpunkte G .

Fig. 150.

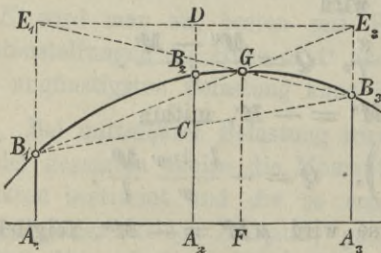
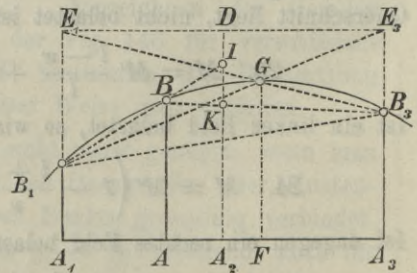


Fig. 151.

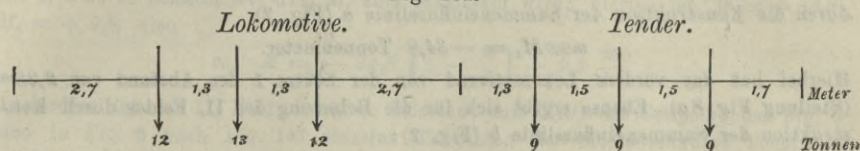


Wenn statt der Ordinate A_2B_2 in der Mitte eine beliebige andere Ordinate AB gegeben ist (Fig. 151), so findet man, wie sich leicht nachweisen lässt, den Punkt D dadurch, dass man die Gerade B_1B und B_3B zieht, welche die mittlere Ordinate in I und K schneiden; alsdann ist $ID = CK$ oder $KD = IC$ zu machen.

§. 76. Beispiel. Taf. I.

Kontinuierlicher Träger mit drei Feldern von 10, 12, 10 Meter Stützweite, konstantem Querschnitte und unmittlbarer Belastung. Das System von Einzellasten sei durch Fig. 152 gegeben:

Fig. 152.



Es soll vorausgesetzt werden, dass jedes Feld für sich durch Lokomotive und Tender oder durch die Lokomotive allein belastet sein könne und dass zwei Lokomotiven auch Brust an Brust stehen können.

1. Fixpunkte. Nach den Formeln 5 (S. 117) wird $\mu_2 = \frac{2(10+12)}{12} = \frac{11}{3} = 3,667$,

$$\mu_3 = \frac{2(12+10) - 12 \cdot \frac{3}{11}}{10} = \frac{224}{55} = 4,073, \text{ also } \nu_1 = 4,073, \nu_2 = 3,667. \text{ Sonach}$$

wird, wenn wir die drei Stützweiten mit l_1, l, l_1 bezeichnen, $a_1 = 0, a_2 = \frac{l}{4,667} = \frac{3}{14} l = 0,214l, a_3 = \frac{l_1}{5,073} = 0,197l; b_1 = 0,197l_1, b_2 = 0,214l, b_3 = 0; c_1 = 0,803l, c_2 = 0,571l, c_3 = 0,803l_1$. In Fig. 1 sind die Fixpunkte nach §. 67 konstruirt worden.

2. Stützenmomente für eine Einzellast. Nach Formel 1 (S. 124) ergibt sich für die Belastung des I. Feldes durch eine Einzellast G :

$$M_1 = -0,2455 \frac{\xi}{l_1} \left(1 - \frac{\xi^2}{l_1^2}\right) Gl_1,$$

und für die Belastung des II. Feldes

$$M_1 = -0,375 \frac{\xi}{l} \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2}\right) \left(1,3571 - \frac{\xi}{l}\right) Gl.$$

Wenn wir die Theilung der Stützweiten so durchführen, dass die Fixpunkte Theilpunkte werden, so ergeben sich folgende Werthe für M_1 :

Belastung des I. Feldes				Belastung des II. Feldes			
ξ	M_1	ξ	M_1	ξ	M_1	ξ	M_1
0	0	0,602	0,0942	0	0	0,595	0,0689
0,100	0,0243	0,703	0,0873	0,107	0,0448	0,691	0,0534
0,201	0,0474	0,803	0,0700	0,214	0,0722	0,786	0,0360
0,301	0,0673	0,902	0,0413	0,309	0,0839	0,893	0,0166
0,402	0,0827	1	0	0,405	0,0860	1	0
0,502	0,0922			0,500	0,0804		
$\cdot l_1$	$\cdot Gl_1$	$\cdot l_1$	$\cdot Gl_1$	$\cdot l$	$\cdot Gl$	$\cdot l$	$\cdot Gl$

In Fig. 2 sind diese Stützenmomente auch noch nach §. 69 (Fig. 138) konstruiert worden. Nach dem Maassstabe II erhält man M_1 für eine Last von 12 Tonnen in Tonnenmetern. Für die Lasten von 13 und 9 Tonnen sind die Ordinaten erst mit Hilfe der Reduktionswinkel Fig. 9 mit $\frac{13}{12} = \frac{1}{12} + 1$ und $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ zu multiplizieren.

3. Maximale Stützenmomente. Für die Belastung des I. Feldes ergibt sich durch die Konstruktion der Summeneinflusslinie a (Fig. 2)

$$\max M_1 = -34,8 \text{ Tonnenmeter.}$$

Hierbei hat das vordere Lokomotivrad von der Stütze 1 den Abstand von $2,28^m$ (Stellung Fig. 8a). Ebenso ergibt sich für die Belastung des II. Feldes durch Konstruktion der Summeneinflusslinie b (Fig. 2):

$$\max M_1 = -42,1 \text{ Tonnenmeter.}$$

Hierbei hat das vordere Lokomotivrad von der Stütze 1 den Abstand von $1,89^m$ (Stellung Fig. 8b).

Wenn man jedes der Felder I und II für sich möglichst ungünstig belastet, so würde hiernach $\max M_1 = -34,8 - 42,1 = -76,9$ werden. Die Vorderräder der Lokomotiven erhalten hierbei einen Abstand von $2,28 + 1,89 = 4,17^m$, während derselbe, dem Schema Fig. 152 zufolge, nicht kleiner als $2 \cdot 2,7 = 5,4^m$ werden kann. Gibt man den Vorderrädern diesen Abstand, so ergibt sich mit Hilfe die Summeneinflusslinie c (halber Maassstab):

$$\max M_1 = -76,1 \text{ Tonnenmeter,}$$

also nicht wesentlich kleiner. Dieses Maximum entspricht der Stellung Fig. 8c.

4. Momente. I. Feld. Das positive Maximum tritt ein, wenn das III. Feld so belastet ist, dass M_2 zum Maximum wird; da alsdann $M_2 = -34,8$, so wird $M_1 = + \frac{3}{11} 34,8 = +9,5$ und

$$a. \quad M = +9,5 \frac{x}{l_2}.$$

Ausserdem ist das I. Feld zu belasten. Die Maximalmomente sind in Fig. 3 nach §. 73 (Fig. 146) konstruiert und in Fig. 5 zu den Momenten für die Belastung des III. Feldes addirt worden. Fig. 8, d und e zeigen die Laststellungen für die Querschnitte bei $x = 0,402l_1$ und $x = 0,902l_1$. Für Querschnitte rechts vom Fixpunkte ist nur der rechte Theil des I. Feldes zu belasten.

Das negative Maximum des Momentes tritt ein, wenn das II. Feld so belastet ist, dass M_1 zum Maximum wird. Da alsdann $M_1 = -42,1$ ist, so wird

$$b. \quad M = -42,1 \frac{x}{l_1}.$$

Für Querschnitte links vom Fixpunkte ist das I. Feld nicht zu belasten (Laststellung Fig. 8b). Für Querschnitte rechts vom Fixpunkte sind nach Fig. 148 mit Hilfe des Seilpolygons Fig. 4 in Fig. 6 einzelne Tangenten der Momentenkurve konstruiert worden.

II. Feld. Wir bestimmen nur das Moment für Querschnitte in der linken Hälfte. Das positive Maximum tritt hier ein, wenn das I. Feld gar nicht belastet ist und das III. Feld darf nur für Querschnitte links vom Fixpunkte belastet sein und zwar ist es so zu belasten, dass M_2 zum Maximum wird. Da hierbei $M_2 = -34,8$, $M_1 = +9,5$ ist, so wird

$$c. \quad M = 9,5 \left(1 - \frac{x}{l}\right) - 34,8 \frac{x}{l}.$$

Für die Belastung des II. Feldes selbst sind die Maximalmomente in Fig. 4 nach §. 73 (S. 145) konstruiert und in Fig. 5 aufgetragen worden. Für Querschnitte links vom Fixpunkte ist nur der linke Theil zu belasten; Fig. 8f zeigt die Belastung für den Querschnitt bei $x = 0,107l$.

Das negative Maximum tritt für Querschnitte rechts vom Fixpunkte ein, wenn das I. und III. Feld so belastet sind, dass M_1 und M_2 zum Maximum werden (Laststellung Fig. 8g). Hierbei wird $M_1 = M_2 = -34,8 + 9,5 = -25,3$, also konstant

$$d. \quad M = -25,3.$$

Für Querschnitte links vom Fixpunkte tritt das negative Maximum ein, wenn das I. Feld so belastet ist, dass M_1 zum Maximum wird; hierbei ist $M_1 = -34,8$, $M_2 = +9,5$, also

$$e. \quad M = -34,8 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + 9,5 \frac{x}{l}.$$

Ausserdem ist das II. Feld rechts zu belasten; mit Hilfe des Seilpolygones Fig. 5 sind in Fig. 6 nach Fig. 147 einzelne Tangenten der Momentenkurve konstruiert worden.

In folgender Tabelle sind die erhaltenen Maximalmomente zusammengestellt:

I. F e l d			II. F e l d		
x	$\max(+M)$	$\max(-M)$	x	$\max(+M)$	$\max(-M)$
	+	-		+	-
0	0	0	0	9,5	76,2
0,100	30,2	4,2	0,107	12,0	42,0
0,201	46,9	8,4	0,214	33,6	25,3
0,301	61,1	12,7	0,309	50,8	25,3
0,402	66,8	16,8	0,405	60,1	25,3
0,502	65,3	21,1	0,500	61,8	25,3
0,602	60,2	25,3	0,595	60,1	25,3
0,703	48,7	29,6	0,691	50,8	25,3
0,803	32,7	33,8	0,786	33,6	25,3
0,902	10,3	48,0	0,893	12,0	42,0
1	9,5	76,2	1	9,5	76,2
$\cdot l_1$	Tonnenmeter		$\cdot l$	Tonnenmeter	

5. Transversalkräfte. I. Feld. Ausser dem I. Felde muss für das positive und negative Maximum bezüglich das III. und II. Feld so belastet sein, dass bezüglich M_2 und M_1 zum Maximum wird. Im ersten Falle wird $M_2 = -34,8$, $M_1 = -42,2$, $Q = +\frac{9,5}{10} = 0,95t$, im zweiten wird $M_1 = -42,1$, $Q = -\frac{42,1}{10} = -4,21t$. Für die Belastung des I. Feldes wird nach Formel 22

$$Q = \mathcal{Q} + \frac{M_1}{l_1}.$$

In Fig. 7 ist \mathcal{Q} durch das Seilpolygon mit der Polweite l_1 konstruiert worden; $\frac{M_1}{l_1}$ wurde durch das Seilpolygon Fig. 4 und zugehörige Kraftpolygon 4a erhalten.

II. Feld. Ausser dem II. Felde muss für das positive Maximum das I. Feld so belastet sein, dass M_1 zum Maximum wird. Hierbei wird $M_1 = -34,8$, $M_2 = +9,5$, also $Q = +\frac{34,8 + 9,5}{12} = +3,69$. Für die Belastung des II. Feldes selbst wird nach Formel 22

$$Q = \mathcal{Q} - \frac{M_1 - M_2}{l}.$$

In Fig. 7 ist wieder Ω mit Hilfe des Seilpolygones mit der Polweite l konstruiert worden, während $\frac{M_1 - M_2}{l}$ mit Hilfe des Seilpolygones Fig. 5 und zugehörige Kraftpolygon 5a bestimmt worden ist. Die negativen Maxima von Q wurden einfach durch entgegengesetzt symmetrische Umkehr erhalten.

In folgender Tabelle sind die erhaltenen Maxima von Q zusammengestellt worden:

I. Feld			II. Feld		
x	$\max(+Q)$	$\max(-Q)$	x	$\max(+Q)$	$\max(-Q)$
	+	-		+	-
0	35,5	4,2	0	44,7	3,7
0,100	29,8	6,3	0,107	38,5	4,5
0,201	23,5	8,5	0,214	32,2	7,3
0,301	19,6	12,3	0,309	27,0	10,3
0,402	15,1	16,2	0,405	21,9	13,7
0,502	11,8	20,4	0,500	17,5	17,5
0,602	8,1	24,7	0,595	13,7	21,9
0,703	5,1	29,1	0,691	10,3	27,0
0,803	2,7	33,6	0,786	7,3	32,2
0,902	1,0	38,0	0,893	4,5	38,5
1	1,0	43,5	1	3,7	44,7
l	Tonnen		l	Tonnen	

6. Stützendrücke. Der Druck auf die äusseren Stützen 0 und 3 ist gleichbedeutend mit den dort wirksamen Transversalkräften; es kann also dieser Druck zwischen $+35,5^t$ und $-4,2^t$ schwanken. Für den Stützendruck D_1 ist in Fig. 2 die Einflusslinie für die Belastung des I. und II. Feldes mit einer Einzellast von 12^t (strichpunktirt) und mit Hilfe derselben die Summeneinflusslinie d konstruiert worden und zwar unter der Voraussetzung, dass das I. und II. Feld durch zwei Brust an Brust stehende Lokomotiven belastet sind. Hiernach wird $\max(+D_1) = +63,0^t$; dasselbe tritt ein, wenn das Vorderrad der rechten Lokomotive über der Stütze 1 ruht. D_1 wird zum negativen Maximum, wenn das III. Feld so belastet ist, dass M_2 um Maximum wird. Bei dieser Belastung wird $D_1 = \frac{0 - 9,5}{10} + \frac{-34,8 - 9,5}{12} = -0,95 - 3,69 = -4,64^t$.

IX. Kapitel.

Gleichmässige Belastung.

§. 77. Gänzliche gleichmässige Belastung.

1. Stützenmomente. Zur Bestimmung der Stützenmomente kann man die Clapeyeon'sche Methode mit Benützung der Gleichung 14 (S. 97)

anwenden, nachdem man für die einzelnen Felder die Koeffizienten α , β , γ , sowie die Grössen \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' durch die Gleichungen 6 (S. 94) bestimmt hat.

Bei konstantem Querschnitte wird $\alpha = \beta = \gamma = 1$ und nach §. 64 $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \frac{1}{12} g l^2$, wenn g die Last pro Längeneinheit bezeichnet, mithin

$$1. \quad M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = - \frac{1}{4} g (l_1^3 + l_2^3).$$

Anstatt dessen kann man aber auch die für die einzelnen Felder bereits bestimmten Verhältnisse μ , ν oder Längen a , b , c benützen, indem man nach den Formeln 16 (S. 123) und §. 35 für die Belastung jedes einzelnen Feldes die Stützenmomente bestimmt. Bei konstantem Querschnitte ergibt sich, wenn man $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = - \frac{1}{12} g l^2$ setzt,

$$2. \quad \begin{cases} M_{r-1} = - \frac{\nu - 1}{4(\mu\nu - 1)} g l^2 = - \frac{g l a (l - 2b)}{4c}, \\ M_r = - \frac{\mu - 1}{4(\mu\nu - 1)} g l^2 = - \frac{g l b (l - 2a)}{4c}. \end{cases}$$

Bei eisernen Gitterträgern mit geradlinigen parallelen Gurten mit veränderlichem Querschnitte ergeben sich die Stützenmomente bis zu 3 Prozent grösser, als bei konstantem Querschnitte.

2. Transversalkräfte. Sind M' und M'' die Stützenmomente für die Enden eines beliebigen Feldes mit der Länge l , so ist $M'' = M' + Q'l - gl \frac{l}{2}$, $Q'' = Q' - gl$, mithin

$$3. \quad Q' = + \frac{1}{2} g l - \frac{M' - M''}{l}, \quad Q'' = - \frac{1}{2} g l - \frac{M' - M''}{l}.$$

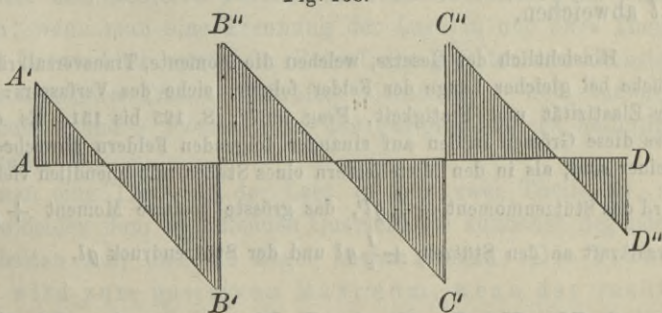
Für einen beliebigen Querschnitt wird

$$4. \quad Q = Q' - gx = \frac{1}{2} g (l - 2x) - \frac{M' - M''}{l}.$$

Die Transversalkräfte in den einzelnen Feldern lassen sich hiernach durch parallele Gerade darstellen (Fig. 153).

Die Stützendrücke sind nunmehr durch die Gleichung 28 (S. 104) bestimmt. In der Figur wird der Stützendruck durch die Höhen AA' , $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ dargestellt.

Fig. 153.



3. Momente. Das Moment M für einen beliebigen Querschnitt ist $M = Q'(a + x) - gx \cdot \frac{1}{2}x$, oder

$$M = M' + Q'x - \frac{1}{2}gx^2.$$

Setzt man nach Formel 3 $Q' = \frac{1}{2}gl - \frac{M' - M''}{l}$, so wird

$$5. \quad M = \frac{1}{2}gx(l - x) + M' \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M'' \frac{x}{l}.$$

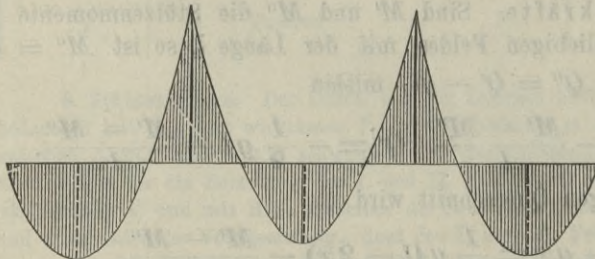
Hiernach lassen sich die Momente in den einzelnen Feldern durch Parabeln mit vertikaler Axe darstellen, welche sämmtlich denselben Parameter haben (Fig. 154). M wird zum Maximum für $\frac{dM}{dx} = 0$, d. i. für $-Q' + gx = 0$, oder für

$$6. \quad x = \frac{Q'}{g} = \frac{1}{2}l - \frac{M' - M''}{gl}.$$

und zwar wird $Max M = M' + Q' \frac{Q'}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{Q'}{g}\right)^2$, d. i.

$$7. \quad Max M = M' + \frac{Q^2}{2g} = \frac{1}{8}gl^2 + \frac{1}{2}(M' + M'') + \frac{(M' - M'')^2}{2gl^2}.$$

Fig 154.



Das zweite Glied in dem Ausdrucke für x ist gegen das erste nur klein, so dass M nahezu für $x = \frac{1}{2}l$ zum Maximum wird. In praktischen Fällen wird x in den äusseren

Feldern höchstens um $0,12l$, in den mittleren höchstens um $0,04l$ von $\frac{1}{2}l$ abweichen.

Hinsichtlich der Gesetze, welchen die Momente, Transversalkräfte und Stützendrucke bei gleicher Länge der Felder folgen, siehe des Verfassers: „Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867“, S. 125 bis 131. Es ergibt sich dort, dass diese Grössen in den auf einander folgenden Feldern abwechselnd grösser und kleiner sind, als in den Mittelfeldern eines Stabes mit unendlich vielen Feldern; hier wird das Stützmoment $-\frac{1}{12}ql^2$, das grösste positive Moment $+\frac{1}{24}ql^2$, die Transversalkraft an den Stützen $\pm \frac{1}{2}gl$ und der Stützendruck gl .

§. 78. Ungünstigste Belastungsweise hinsichtlich der Transversalkräfte. Die ungünstigste Belastungsweise ergibt sich ohne Weiters aus dem in §. 72 behandelten Einflusse einer Einzellast

und der in Fig. 143 dargestellten Einflusslinie. Hieraus folgt nun unmittelbar für die Belastung des fraglichen Feldes:

Die Transversalkraft wird für irgend einen Querschnitt zum positiven oder negativen Maximum, wenn sich die Last vom Querschnitte aus bis zum rechten oder linken Ende des betreffenden Feldes erstreckt.

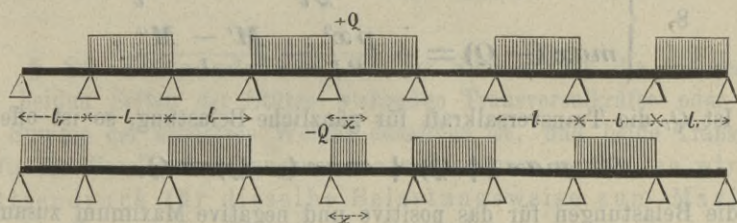
Ganz dasselbe Gesetz gilt bekanntlich auch für Einzelträger.

Ferner folgt aus §. 66 für die Belastung der übrigen Felder:

Die Transversalkraft wird zum Maximum, wenn die Felder abwechselnd belastet sind, und zwar zum positiven, wenn das rechte Feld nicht belastet, das linke belastet, zum negativen dagegen, wenn das rechte Feld belastet, das linke nicht belastet ist.

In Fig. 155 ist diese ungünstigste Belastungsweise dargestellt.

Fig. 155.



Es lässt sich gegen diesen Satz allerdings einwenden, dass eine derartige Belastung in Wirklichkeit eigentlich nie vorkommen, namentlich dass eine Trennung der zufälligen Last in sehr viele Theile nie eintreten wird. Dagegen lässt sich aber wiederum erwidern, 1. dass nach obigem Gesetze bei Trägern mit zwei und drei Feldern die Last ohnehin nur in zwei Theile getrennt erscheint, und 2. dass sich bei Trägern mit vier und mehreren Feldern die Transversalkräfte nur wenig kleiner ergeben, wenn man eine Trennung der Last in nur zwei Theile annimmt. Der Unterschied beträgt in Betreff der grössten und kleinsten in Betracht kommenden Transversalkräfte höchstens in den äusseren Feldern bezüglich 3 und 1 Prozent, in den übrigen Feldern bezüglich 11 und 4 Prozent.

Nimmt man eine Trennung der Last in nur zwei Theile an, so würden nur die beiden dem betreffenden Querschnitte zunächst liegenden Theile beizubehalten sein und die Regel hiesse alsdann: Die Transversalkraft wird zum positiven Maximum, wenn der rechts vom fraglichen Querschnitte liegende Theil des fraglichen Feldes und das links neben diesem liegende Feld ganz belastet, zum negativen Maximum, wenn der links vom frag-

lichen Querschnitte liegende Theil des fraglichen Feldes und das rechts neben diesem liegende Feld ganz belastet sind.

In der Verordnung des k. k. österreichischen Handelsministeriums von 1870, betreffend die bei der Erbauung eiserner Brücken für Eisenbahnen zu beobachtenden Sicherheitsrücksichten, heisst es in der That in Nr. 2: „Bei kontinuierlichen Trägern muss darauf Rücksicht genommen werden, dass die gleich vertheilte Probelast in zwei (aber nicht mehrere) Stücke getrennt sein kann, so zwar, dass z. B. das zweite und vierte Brückenfeld belastet sind, während die drei andern dazwischen liegenden Felder unbelastet bleiben.“

§. 79. Bestimmung der grössten Transversalkräfte. Für die Einzelträger ergibt sich nach §. 37: $2l \max(+Q) = +p(l-x)^2$ und $2l \max(-Q) = -px^2$. Daher wird für den kontinuierlichen Träger nach Formel 4, S. 94:

$$8. \quad \begin{cases} \max(+Q) = +\frac{p(l-x)^2}{2l} - \frac{M' - M''}{l}, \\ \max(-Q) = -\frac{px^2}{2l} - \frac{M' - M''}{l}. \end{cases}$$

Ist Q_t die Transversalkraft für gänzliche Belastung, so ist offenbar

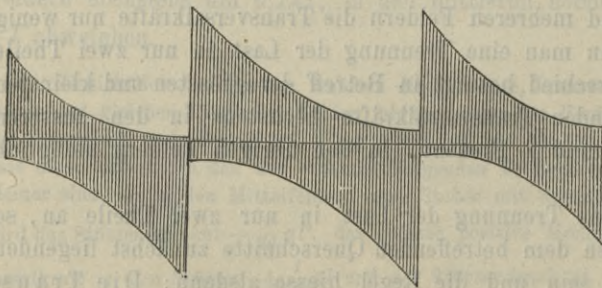
$$9. \quad \max(+Q) + \max(-Q) = Q_t,$$

weil die Belastungen für das positive und negative Maximum zusammen die gänzliche Belastung ausmachen. Man kann diese Regel benützen, um nach Bestimmung des einen Maximums das andere zu erhalten.

Das Glied $\frac{M' - M''}{l}$ ist natürlich mit x veränderlich; jedoch ist dasselbe gegen das erste Glied in den Formeln 8 überhaupt nur klein,

so dass sich die Maximaltransversalkräfte durch Kurven darstellen lassen, welche wenig von Parabeln abweichen, deren vertikale Axen durch die Stützen gehen (Fig. 156).

Fig. 156.



Die Einflusslinie für Q ist für alle Querschnitte desselben Feldes dieselbe (Fig. 143); nur der Uebergang vom positiven zum negativen Q erfolgt an dem veränderlichen Querschnitte. Demnach wird die positive und negative Fläche der Einflussfigur um so grösser, je näher der

Querschnitt bezüglich an der linken und rechten Stütze liegt. Man kann sonach behaupten:

Die Transversalkraft wird zum absoluten Maximum, an den Stützen und zwar bei abwechselnder Belastung der Felder, wobei die auf den beiden Seiten der fraglichen Stütze liegenden Felder mitbelastet sind. Für diese Belastung wird

$$10. \quad \begin{cases} \text{Max (+ Q)} = + \frac{1}{2} pl - \frac{M' - M''}{l}, \\ \text{Max (- Q)} = - \frac{1}{2} pl - \frac{M' - M''}{l}. \end{cases}$$

Bei veränderlichem Querschnitte werden die Transversalkräfte nur sehr wenig grösser oder kleiner, als bei konstantem. Bei Parallelträgern ist die Abweichung bei den absolut grössten Transversalkräften höchstens 3 Prozent, in der Regel aber wesentlich kleiner.

§. 80. Stützendrucke. Da der Stützendruck die Differenz der auf beiden Seiten der Stütze wirkenden Transversalkräfte oder gleich der Summe der absoluten Werthe desselben ist, und beide Transversalkräfte für dieselbe Belastungsweise zum Maximum werden, so wird der Stützendruck für dieselbe Belastungsweise zum Maximum, wie die Transversalkraft an der Stütze.

Bei gewissen Belastungen können in Folge der zufälligen Last auch entgegengesetzt gerichtete oder negative Stützendrucke eintreten. Wenn der vom Eigengewichte erzeugte positive Stützendruck grösser ist, als der von der zufälligen Last erzeugte negative Stützendruck, so tritt in Wirklichkeit kein negativer Stützendruck auf. Bei gewissen Verhältnissen aber kann der negative Stützendruck wirklich zur Ausbildung kommen; alsdann gelten die für den kontinuierlichen Träger aufgestellten Gesetze nur, wenn der Träger durch besondere Vorkehrungen am Abheben von der Stütze gehindert wird.

Das Maximum eines negativen Stützendruckes tritt offenbar ein, wenn diejenigen Stellen des Trägers belastet sind, welche für das positive Maximum des Druckes auf dieselbe Stütze nicht belastet sind, d. h. der negative Stützendruck wird zum Maximum bei abwechselnder Belastung der Felder, wenn die auf beiden Seiten der fraglichen Stütze liegenden Felder nicht belastet sind.

Man erhält den von der zufälligen Last erzeugten negativen Maximal-Stützendruck am einfachsten durch Subtraktion des positiven Maximal-Stützendruckes von dem bei gänzlicher Belastung entstehenden Stützendrucke.

§. 81. Ungünstigste Belastung hinsichtlich der Momente.

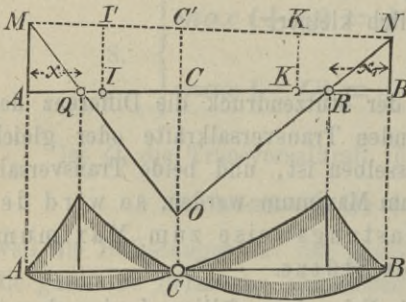
1. Belastung des fraglichen Feldes.

a) Querschnitt zwischen den Fixpunkten. Wir haben in §. 71 gesehen, dass jede im fraglichen Felde liegende Last in einem zwischen den Fixpunkten liegenden Querschnitte nur ein positives Moment erzeugen kann. Daraus folgt unmittelbar:

Für einen zwischen den Fixpunkten liegenden Querschnitt tritt das grösste positive Moment ein, wenn das betreffende Feld gänzlich, dagegen das grösste negative Moment, wenn das betreffende Feld gar nicht belastet ist.

b) Querschnitt ausserhalb der Fixpunkte. Wenn eine Einzellast in einem beliebigen Punkte *C* liegt (Fig. 157), so wird das Moment in zwei Punkten *Q* und *R*, welche nach §. 71 ausserhalb der Fixpunkte liegen, Null. Im Querschnitte *Q* erzeugt nach §. 71 eine zwischen *A* und *C* liegende Last ein positives, eine zwischen *B* und *C* liegende Last ein negatives Moment, wie auch der Einflusslinie Fig. 141*b* entspricht. Ebenso erzeugt im Querschnitte *R* eine zwischen *B* und *C* liegende Last ein positives, eine zwischen *A* und *C* liegende Last ein negatives Moment. Wir nennen *C* den zum Querschnitte *Q* oder *R* gehörigen Nullpunkt und können dann behaupten:

Fig. 157.



Moment in zwei Punkten *Q* und *R*, welche nach §. 71 ausserhalb der Fixpunkte liegen, Null. Im Querschnitte *Q* erzeugt nach §. 71 eine zwischen *A* und *C* liegende Last ein positives, eine zwischen *B* und *C* liegende Last ein negatives Moment, wie auch der Einflusslinie Fig. 141*b* entspricht. Ebenso erzeugt im Querschnitte *R* eine zwischen *B* und *C* liegende Last ein positives, eine zwischen *A* und *C* liegende Last ein negatives Moment. Wir nennen *C* den zum Querschnitte *Q* oder *R* gehörigen Nullpunkt und können dann behaupten:

Für einen ausserhalb der Fixpunkte liegenden Querschnitt tritt das grösste positive Moment ein, wenn die Strecke des betreffenden Feldes, in welchem der Querschnitt liegt, bis zum zugehörigen Nullpunkt, dagegen das grösste negative Moment, wenn die andere Strecke des Feldes bis zum zugehörigen Nullpunkt belastet ist.

Setzen wir $AQ = x$, $BR = x_1$, $AC = \xi$, $BC = \xi_1$ und die Momente in *A*, *B* und *C* bezüglich $= M'$, M'' und M_1 , so ergibt sich, entsprechend dem §. 71:

$$11. \quad x = \frac{M' \xi}{M' - M_1}, \quad x_1 = \frac{M'' \xi_1}{M'' - M_1}$$

oder auch, da $M_1 = M' \frac{\xi_1}{l} + M'' \frac{\xi}{l} + G \frac{\xi \xi_1}{l}$ ist,

$$12. \quad x = \frac{M' l}{M' - M'' - G \frac{\xi \xi_1}{l}}, \quad x_1 = \frac{M'' l}{M'' - M' - G \frac{\xi \xi_1}{l}}$$

Sind für verschiedene Lagen der Einzellast die Stützenmomente M' , M'' berechnet, so kann man mit Hilfe dieser Gleichungen leicht für ein gegebenes ξ , ξ_1 die Abstände x , x_1 der zugehörigen Querschnitte von den Stützen bestimmen. Für einen konstanten Querschnitt gibt die Einsetzung der Ausdrücke 1 (S. 124) für M' , M'' :

$$13. \quad \begin{cases} \frac{x}{l} = \frac{a(2l - 3b - \xi)\xi}{cl^2 + (2a - b)l\xi - (a + b)\xi^2}, \\ \frac{x_1}{l} = \frac{b(2l - 3a - \xi_1)\xi_1}{cl^2 + (2b - a)l\xi_1 - (a + b)\xi_1^2}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 8 und 9 (S. 130 und 131) lässt sich bei konstantem Querschnitte auch ξ , ξ_1 bei gegebenem x , x_1 berechnen. Bei veränderlichem Querschnitte kann man, nachdem man die Einflusslinien für die Stützenmomente gezeichnet hat, nach Fig. 142 leicht die zu einem angenommenen Nullpunkte gehörigen Querschnitte konstruieren. Bei konstantem Querschnitte ergibt sich in folgender Weise eine wesentlich einfachere Konstruktion: Setzen wir in Fig. 157 $II' = y$, $KK' = y_1$, so wird $y = -M' + (M' - M'')\frac{a}{l}$ und $y_1 = -M'' + (M'' - M')\frac{b}{l}$, d. i. nach Einsetzung der Ausdrücke 1 (S. 124):

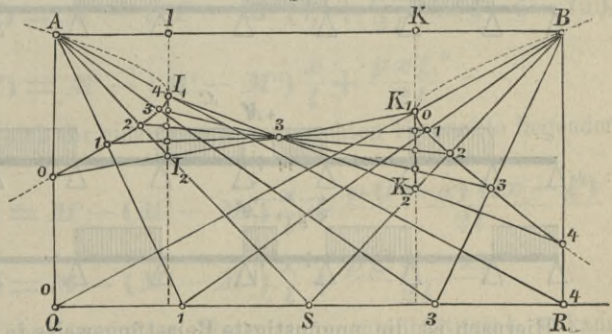
$$y = \frac{G\xi\xi_1(2l - \xi)a}{l^3}, \quad y_1 = \frac{G\xi\xi_1(2l - \xi_1)b}{l^3}.$$

Setzen wir nach $OC' = z$, so ist $zl = G\xi\xi_1$, mithin

$$14. \quad \frac{y}{z} = \frac{a(2l - \xi)}{l^2}, \quad \frac{y_1}{z} = \frac{b(2l - \xi_1)}{l^2}.$$

In Fig. 158 seien A , B die Stützpunkte, I , K die Fixpunkte des fraglichen Feldes und die Vertikalen $AQ = BR =$ dem beliebig wähl-

Fig. 158.



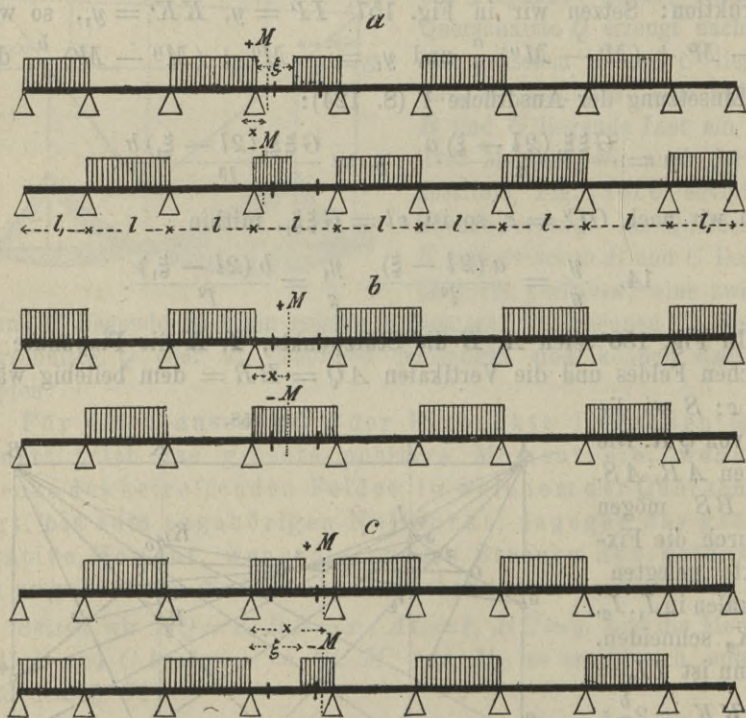
bar z ; S sei die Mitte von QR . Die Geraden AR , AS , BQ , BS mögen die durch die Fixpunkte gelegten Vertikalen in I_1, I_2, K_1, K_2 schneiden. Alsdann ist $II_2 = 2\frac{a}{l}z$, $KK_2 = 2\frac{b}{l}z$, $I_1I_2 = \frac{a}{l}z$, $K_1K_2 = \frac{b}{l}z$. Wählt man in I_1I_2 und K_1K_2 die Punkte i , k so, dass $iI_2 : I_1I_2 = \xi : l$, $kK_2 : K_1K_2 = \xi_1 : l$ ist, so ist nach den vorigen Formeln $Ii = y$, $Kk = y_1$. Wählt man ξ , ξ_1 so, dass dadurch die

Feldlänge $QR = l$ in gleiche Theile getheilt wird, so werden $I_1 I_2$ und $K_1 K_2$ durch die Punkte i und k in ebenso viel gleiche Theile getheilt, woraus sich sofort die in Fig. 158 dargestellte Konstruktion ergibt. Die Durchschnittspunkte der die Theilpunkte von $I_1 I_2$ und $K_1 K_2$ in umgekehrter Reihenfolge verbindenden Geraden mit den von A und B aus nach den Theilpunkten von QR gezogenen Geraden entsprechen den zu den Theilpunkten von QR als Nullpunkten gehörigen Querschnitten.

2. Belastung der übrigen Felder. Aus dem in §. 67 Gesagten und den in Fig. 141 dargestellten Einflusslinien lässt sich ohne Weiteres schliessen:

Das Moment wird zum Maximum, wenn die Felder abwechselnd belastet sind und zwar derart, dass an das belastete Ende des fraglichen Feldes ein unbelastetes Feld, an das unbelastete Ende desselben ein belastetes Feld stösst.

Fig. 159.



Hiernach ist die ungünstigste Belastungsweise in Fig. 159 dargestellt und zwar in a für den linken, in b für den mittleren und in c für den rechten Theil eines beliebigen (hier des vierten) Feldes.

Die in §. 78 gemachte Bemerkung hinsichtlich der Theilung der Last in mehrere Theile lässt sich natürlich auch hier anwenden.

Die allgemeine Bestimmung der ungünstigsten Belastungsweise für Transversalkräfte und Momente wurde, allerdings unter Voraussetzung eines konstanten Querschnittes zuerst vom Verfasser durchgeführt (Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger, Civilingenieur 1862). Hier wurde wohl auch zuerst von dem Einflusse einer Einzellast Gebrauch gemacht zur Bestimmung der ungünstigsten Belastungsweise. Vordem pflegte man jedes Feld entweder ganz oder gar nicht belastet anzunehmen und die ungünstigste Kombination von ganz belasteten und unbelasteten Feldern durch Probiren aufzusuchen.

Die in Fig. 158 dargestellte grafische Bestimmung der zu einem Nullpunkte gehörigen Querschnitte hat zuerst Mohr gezeigt. Er leitet dieselbe auf grafischem Wege ab in: Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, Zeitschr. des hannoverschen Arch.- und Ingen.-Ver. 1868.

§. 82. Bestimmung der grössten Momente. Für einen zwischen den Fixpunkten liegenden Querschnitt ist das Feld hinsichtlich des positiven Maximums ganz, hinsichtlich des negativen gar nicht belastet; dementsprechend ergibt sich nach der zweiten der Formeln 4 (S. 94):

$$15. \quad \begin{cases} \max (+ M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{1}{2} p x (l - x), \\ \max (- M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l}, \end{cases}$$

wobei natürlich in beiden Fällen M' und M'' nach §. 58 unter der Voraussetzung der ungünstigsten Belastung zu bestimmen ist. Hiernach ist das negative Maximum durch eine Gerade, das positive durch eine Parabel darstellbar, die sich nach dem Auftragen der Stützenmomente leicht nach §. 59 konstruiren lässt.

Für einen links vom linken Fixpunkte liegenden Querschnitt ist für das positive Maximum der linke Theil, in der Länge ξ , für das negative Maximum der rechte Theil in der Länge ξ_1 zu belasten. Es ergibt sich leicht

$$16. \quad \begin{cases} \max (+ M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{p x}{2l} (2l \xi - \xi^2 - lx), \\ \max (- M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{p x \xi_1^2}{2l}. \end{cases}$$

Ebenso ergibt sich für einen rechts vom rechten Fixpunkte liegenden Querschnitt

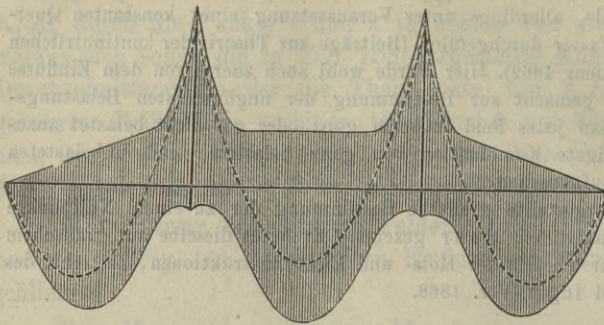
$$17. \quad \begin{cases} \max (+ M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{p (l - x) (lx - \xi^2)}{2l}, \\ \max (- M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{p \xi^2 (l - x)}{2l}. \end{cases}$$

Hat man das eine der beiden Maximalmomente bestimmt, so kann man nach Bestimmung des Momentes M_i für gänzliche Belastung des Trägers das andere durch die Beziehung

$$18. \quad \max (+ M) + \max (- M) = M_i$$

bestimmen.

Fig. 160.



Hiernach ergibt sich die in Fig. 160 dargestellte Form der Kurven für die Maximalmomente (unten positiv, oben negativ).

Nach der zweiten der Formeln 15 wird am rechten Fixpunkte, wenn man

beachtet, dass hier $\xi = 0$ wird,

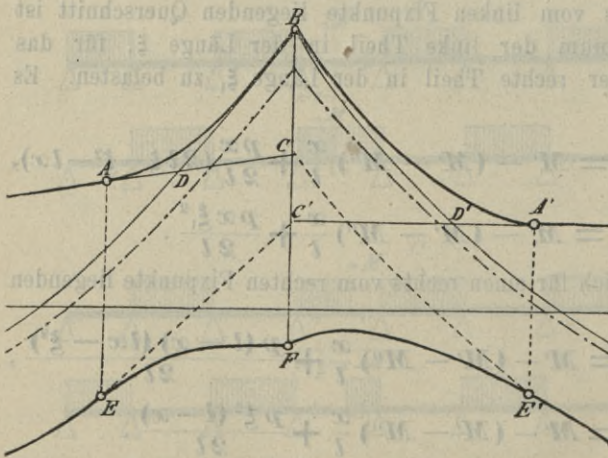
$$\frac{d \max(-M)}{dx} = \frac{dM'}{dx} - \left(\frac{dM'}{dx} - \frac{dM''}{dx} \right) \frac{x}{l} - \frac{M' - M''}{l}.$$

M' und M'' lassen sich darstellen durch einen Ausdruck von der Form $A + B\mathfrak{M}' + C\mathfrak{M}''$; nun aber wird $\frac{d\mathfrak{M}'}{dx}$ und $\frac{d\mathfrak{M}''}{dx}$ nach Formel 3 (S. 127) für $\xi_1 = 0$ ebenfalls $= 0$, mithin ist

$$\frac{d \max(-M)}{dx} = \frac{M' - M''}{l}.$$

Im ersten Felde ist die Belastung für $\max(-M)$ für Querschnitte links vom Fixpunkte, sowie für Querschnitte unmittelbar rechts vom

Fig. 161.



Fixpunkte dieselbe, es hat also auch $M' - M''$ denselben Werth. In den äusseren Feldern geht also in der Momentenlinie für

$\max(-M)$ die Kurve in die Gerade tangential über; somit findet auch in der Kurve für $\max(+M)$ ein tangentialer

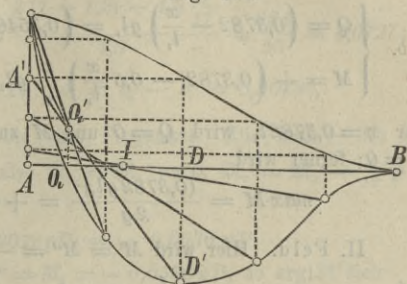
Uebergang der beiden Theile statt. In den mittleren Fel-

dern dagegen findet ein tangentialer Uebergang nicht statt (Fig. 161, links I. Feld, rechts Mittelfeld).

Bei theilweiser Anwendung der Konstruktion kann man ganz entsprechend dem §. 73 für ein System von Einzellasten verfahren. Für

Querschnitte zwischen den Fixpunkten sind die Momentenkurven Seilkurven, welche sich nach dem Auftragen der berechneten Stützenmomente leicht konstruieren oder mit Hilfe der Parabelschablone (siehe Anmerkung zu §. 38) verzeichnen lassen. Für Querschnitte im linken Theile AB würde man am besten zunächst die negativen Maximalmomente konstruieren; die Geraden, welche die Momentenlinien im unbelasteten Theile darstellen, sind, dem §. 73 entsprechend, die Umhüllungslinien der Momentenkurve. Diese Geraden $A'D'$ (Fig. 162) werden, wie dort, am besten verzeichnet, indem man das Moment

Fig. 162.



M' an der linken Stütze A und das Moment M'' am Ende D der Belastung aufträgt. Allgemein ist im Theile AI : $Ml = M'l + (M'' - M')x + \frac{1}{2} px \xi_1^2$, also, wenn man $x = l - \xi$, $M = M''$ setzt,

$$19. \quad M''' = M'' - (M'' - M') \frac{\xi}{l} + \frac{p(l - \xi) \xi^2}{2l}.$$

Bei Bestimmung von M' und M'' kann man gleichzeitig auch die ungünstigste Belastung der übrigen Felder berücksichtigen. Nach Fig. 158 kann man zu jedem angenommenen Punkte C auch noch den entsprechenden Querschnitt Q , hiermit also auch den entsprechenden Punkt Q' der Momentenkurve konstruieren; indess genügen zum Einzeichnen der Momentenkurve auch schon die umhüllenden Tangenten. Das positive Maximum von M findet man jetzt nach Konstruktion der Momentenkurve für Belastung des ganzen Trägers nach der Beziehung 18.

§. 83. Beispiel für einen konstanten Querschnitt.

Kontinuierlicher Träger mit drei Feldern, deren Längen l , l , l_1 das Verhältniss $5:6:5$ haben, so dass $l = 1,2l_1$ wird. Ist λ die mittlere Länge, so wird $3\lambda = 2l + l = \frac{5}{3}l + l = \frac{8}{3}l$, also $\lambda = \frac{8}{9}l = \frac{16}{15}l_1$ oder

$$l_1 = \frac{15}{16} \lambda = 0,9375 \lambda, \quad l_1^2 = 0,8789 \lambda^2,$$

$$l = \frac{9}{8} \lambda = 1,1250 \lambda, \quad l^2 = 1,2656 \lambda^2.$$

Die beiden Gleichungen zur Bestimmung der Stützenmomente werden nach der Gleichung 14 (S. 97):

$$4,4 M_1 + 1,2 M_2 + 3,0 M_1' + 3,6 M_2'' = 0,$$

$$1,2 M_1 + 4,4 M_2 + 3,6 M_1' + 3,0 M_2'' = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$a. \quad \begin{cases} M_1 = -0,7365 M_1' + 0,2412 M_1'' - 0,8841 M_2'' + 0,2010 M_3'', \\ M_2 = -0,2010 M_1' - 0,8841 M_2' + 0,2412 M_2'' - 0,7365 M_3'', \\ M_1 - M_2 = -0,9375 (M_1' - M_3'') + 1,1253 (M_1'' - M_2''). \end{cases}$$

1. Eigengewicht. Setzen wir $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_3'' = \frac{1}{12} g l_1^2$, $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = \frac{1}{12} g l^2$, so wird

$$M_1 = M_2 = -0,1218 g l_1^2 = -0,0846 g l^2 = -0,1070 g \lambda^2.$$

I. Feld. Hier ist $M' = 0$, $M'' = -0,1218 g l_1^2$ zu setzen; daher wird nach Formel 4 und 5

$$b. \begin{cases} Q = \left(0,3782 - \frac{x}{l_1}\right) g l_1 = \left(0,3546 - 0,9378 \frac{x}{l_1}\right) g \lambda, \\ M = + \left(0,3782 - 0,5 \frac{x}{l_1}\right) \frac{x}{l_1} g l_1^2 = + \left(0,3324 - 0,4394 \frac{x}{l_1}\right) \frac{x}{l_1} g \lambda^2. \end{cases}$$

Für $x = 0,3782 l_1$ wird $Q = 0$ und M zum Maximum und für $x = 0,7564 l_1$ wird $M = 0$; ferner wird

$$\max M = \frac{(0,3782 g l_1)^2}{2g} = +0,0715 g l_1^2 = +0,0629 g \lambda^2.$$

II. Feld. Hier wird $M' = M'' = -0,0846 g l^2$; daher wird

$$c. \begin{cases} Q = \frac{1}{2} g (l - 2x) = 0,5625 \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) g \lambda, \\ M = - \left(0,0846 - 0,5 \frac{x}{l} + 0,5 \frac{x^2}{l^2}\right) g l^2 = - \left[0,1070 - 0,6328 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l}\right] g \lambda^2. \end{cases}$$

Für $x = 0,5l$ wird $Q = 0$ und M zum Maximum und zwar wird

$$\max M = +0,0404 g l^2 = +0,0512 g \lambda^2.$$

Ferner wird $M = 0$ für

$$x^2 - lx + 0,1691 l^2 = 0.$$

$$x = (0,5 \mp \sqrt{0,0809}) l = (0,5 \mp 0,2843) l$$

$$= 0,2157 l \text{ und } 0,7843 l.$$

Für das I. Feld wird $Q' = +0,3546 g \lambda$, $Q'' = -0,5829 g \lambda$; für das II. Feld wird $Q' = +0,5625 g \lambda$, $Q'' = -0,5625 g \lambda$. Daher wird

$$d. D_0 = 0,3546 g \lambda, \quad D_1 = (0,5829 + 0,5625) g \lambda = 1,1454 g \lambda$$

In Fig. 153 und 154 sind hiernach Q und M grafisch dargestellt.

2. Verkehrslast. Bei gänzlicher Belastung ist in den vorigen Formeln nur p für g zu setzen.

I. Feld. a) Transversalkräfte. Nach Formel 8 wird, wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,

$$\max (+Q) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 p l_1 + \frac{M_1}{l}.$$

Für $\max (+Q)$ aber ist das I. Feld vom Querschnitte bis zur Stütze 1 und das III. Feld ganz zu belasten. Daher wird nach Formel 41 und 43 (S. 115)

$$\mathfrak{M}_1' = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{x^2}{l_1^2}\right)^2 p l_1^2, \quad \mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = 0, \quad \mathfrak{M}_3'' = \frac{1}{12} p l_1^2,$$

mithin

$$M_1 = +0,0168 p l_1^2 - 0,0614 \left(1 - \frac{x^2}{l_1^2}\right)^2 p l_1^2,$$

folglich

$$\begin{aligned} \max (+Q) &= + \left[0,5 \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 - 0,06138 \left(1 - \frac{x^2}{l_1^2}\right)^2 + 0,01675\right] p l_1 \\ &= + \left[\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 \left\{0,4688 - 0,0576 \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^2\right\} + 0,0157\right] p \lambda. \end{aligned}$$

Für gänzliche Belastung ist Q durch die erste der Formeln a bestimmt. Daher ergibt sich nach Formel 9:

$$\max(-Q) = - \left[\frac{x^2}{l_1^2} \left(0,5839 - 0,0576 \frac{x^2}{l_1^2} \right) + 0,0723 \right] p \lambda.$$

b) Momente. Nach §. 65 wird

$$v_2 = 2 \cdot \frac{1 + 1,2}{1,2} = \frac{11}{3} = 3,6667, \quad v_1 = \frac{2(1 + 1,2) - 1,2 \frac{3}{11}}{1,0} = \frac{2,24}{55} = 4,0727;$$

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{l_1}{5,0727} = 0,1971l_1, \quad c_1 = l_1 - b_1 = 0,8029l_1.$$

Erster Theil von der Stütze O bis zum Fixpunkte. Für $\max(-M)$ ist nur das II. Feld ganz zu belasten. Es ist also $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_3'' = 0$, $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = \frac{1}{12} p l^2$ zu setzen. Daher wird

$$M_1 = - (0,0737 - 0,0201) p l^2 = - 0,0536 p l^2.$$

Setzen wir nun in Formel 15 $M' = 0$, $M'' = M_1 = - 0,0536 p l^2$, so ergibt sich

$$\max(-M) = - 0,0536 \frac{p l^2 x}{l_1} = - 0,0678 \frac{x}{l} p l^2.$$

Bei gänzlicher Belastung ist M durch die Formel a bestimmt. Daher wird nach Formel 18:

$$\max(+M) = + \left(0,4002 \frac{x}{l_1} - 0,4395 \frac{x^2}{l_1^2} \right) p l^2.$$

Zweiter Theil. Für $\max(-M)$ muss das II. Feld ganz und vom I. Felde nur der linke Theil, dessen Länge nach Formel 12 (S. 131) bestimmt ist durch

$$\frac{\xi}{l_1} = \sqrt{5,0727 - 4,0727 \frac{l_1}{x}},$$

belastet sein. Setzen wir daher in Formel a) $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_2'' = \frac{1}{12} p l^2$, so wird

$$M_1 = - 0,7365 \mathfrak{M}_1' - 0,0536 p l^2 = - \left(0,6474 \frac{\mathfrak{M}_1'}{p l_1^2} + 0,0678 \right) p l^2.$$

Hierbei wird nach Formel 42 (S. 115)

$$\frac{\mathfrak{M}_1'}{p l_1^2} = \frac{1}{12} \frac{\xi^2}{l_1^2} \left(2 - \frac{\xi^2}{l_1^2} \right) = \frac{1}{12} \left[1 - 16,5871 \left(1 - \frac{l_1}{x} \right)^2 \right],$$

$$M_1 = + \left(0,7731 - 1,7898 \frac{l_1}{x} + 0,8949 \frac{l_1^2}{x^2} \right) p l^2.$$

Nach Formel 17 wird nun, wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,

$$\max(-M) = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{p \xi^2 (l_1 - x)}{2 l_1},$$

d. i. wenn man für M_1 und ξ die gefundenen Ausdrücke setzt,

$$\max(-M) = - \left(1,4561 \frac{x}{l_1} - 2,2292 + 0,8949 \frac{l_1}{x} \right) p l^2.$$

Für gänzliche Belastung ist M durch Formel b bestimmt; daher wird nach Formel 18:

$$\max(+M) = + \left(1,7885 \frac{x}{l_1} - 0,4395 \frac{x^2}{l_1^2} - 2,2292 + 0,8949 \frac{l_1}{x} \right) p l^2.$$

II. Feld. a) Transversalkräfte. Nach Formel 8 wird

$$\max(+Q) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 p l + \frac{M_1 - M_2}{l}.$$

Für $\max(+Q)$ ist das I. Feld ganz und das II. Feld vom Querschnitte bis zur Stütze 2 zu belasten. Daher ist nach Formel 41 und 42 (S. 115):

$$\mathfrak{M}_1' = \frac{1}{12} p l_1^2, \quad \mathfrak{M}_2' = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 p l^2,$$

$$\mathfrak{M}_2'' = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) p l^2, \quad \mathfrak{M}_3'' = 0.$$

$$M_2 - M_1 = 0,0781 p l_1^2 - 0,1876 \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 p l^2$$

$$= \left[0,0543 - 0,1876 \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\right] p l^2.$$

Dies eingesetzt gibt, wenn wir dabei gleichzeitig $p l = 1,125 p \lambda$ setzen,

$$\max(+Q) = + \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(0,5625 - 0,2109 \frac{x^2}{l^2}\right) + 0,0610 \right] p \lambda.$$

Für gänzliche Belastung ist nach Formel c: $Q l = 0,0625 (l - 2x) p \lambda$; daher wird nach Formel 9:

$$\max(-Q) = - \left[\frac{x^2}{l^2} \left\{ 0,5625 - 0,2109 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \right\} + 0,0611 \right] p \lambda.$$

b) Momente. Da $v_2 = \frac{11}{8}$ ist, so wird

$$b = \frac{l}{1 + v_2} = \frac{3}{14} l = 0,2143 l.$$

Mittlerer Theil. Im mittleren Theile wird M zum positiven Maximum bei Belastung des ganzen I. und III. Feldes. Setzen wir dementsprechend $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_3'' = \frac{1}{12} p l_1^2$, $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = 0$, so ergibt sich $M_1 = M_2 = -0,04463 p l_1^2 = -0,03924 p \lambda^2$, daher wird nach Formel 15, wenn wir $M' = M_1$, $M' - M'' = 0$ setzen,

$$\max(-M) = -0,0392 p \lambda^2.$$

Bei Belastung des ganzen Trägers ist M durch Formel c bestimmt; mithin wird nach Formel 18:

$$\max(+M) = + \left[0,0678 - 0,6328 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] p \lambda^2.$$

Erster Theil. Für $\max(-M)$ muss das I. Feld ganz belastet sein und im II. Felde nur der rechte Theil, welcher durch Formel 8 (S. 130) bestimmt ist. Setzen wir hierin $a = b = \frac{3}{14} l$, so wird

$$(l - 2x) \xi^2 - (1,3571l - x) l \xi + 2,6667 l^2 x = 0$$

oder auf x reduziert

$$d. \quad x = \frac{(1,3571l - \xi) l \xi}{2,6667 l^2 + l \xi - 2 \xi^2}.$$

Setzen wir in den Formeln a. $\mathfrak{M}_1' = \frac{1}{12} p l_1^2$, $\mathfrak{M}_3'' = 0$, so wird

$$e. \quad \begin{cases} M_1 = - \left(0,0540 + 1,1187 \frac{\mathfrak{M}_2''}{p l^2} - 0,3051 \frac{\mathfrak{M}_1'}{p l^2} \right) p \lambda^2, \\ M_1 - M_2 = - \left(0,0687 - 1,4241 \frac{\mathfrak{M}_2' - \mathfrak{M}_2''}{p l^2} \right) p \lambda^2. \end{cases}$$

Nach Formel 43 (S. 115) ist hierin

$$\frac{\mathfrak{M}_2''}{p l^2} = \frac{1}{12} \frac{\xi_1^2}{l^2} \left(2 - \frac{\xi_1^2}{l^2} \right), \quad \frac{\mathfrak{M}_2'}{p l^2} = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2} \right)^2 = \frac{1}{12} \frac{\xi_1^2}{l^2} \left(2 - \frac{\xi_1}{l} \right)^2,$$

zu setzen; daher

$$M_1 = - \left[0,0540 + \left(0,0848 + 0,1017 \frac{\xi_1}{l} - 0,1187 \frac{\xi_1^2}{l^2} \right) \frac{\xi_1^2}{l_1} \right] p \lambda^2.$$

$$M_1 - M_2 = - 0,0687 \left(1 - 3,456 \frac{\xi^2 \xi_1^2}{l^4} \right) p \lambda^2.$$

Demnach wird nun nach Formel 16:

$$\begin{aligned} \max(-M) = & - \left[0,0540 + \left(0,0848 + 0,1017 \frac{\xi_1}{l} - 0,1187 \frac{\xi_1^2}{l^2} \right) \frac{\xi_1^2}{l^2} \right] p \lambda^2 \\ & + \left[0,0687 \left(1 - 3,456 \frac{\xi^2 \xi_1^2}{l^4} \right) + 0,6328 \frac{\xi_1^2}{l^2} \right] \frac{x}{l} p \lambda^2. \end{aligned}$$

Beispielsweise wird für $x = 0,1l$: $\xi^2 - 1,5714l\xi + 0,3333l^2 = 0$, $\xi = 0,2528l$, $\xi_1 = 0,7472l$, daher nach der vorigen Formel $\max(-M) = -(0,0540 + 0,0528 - 0,0060 - 0,0353)p\lambda^2 = -0,0654p\lambda^2$.

Nach Formel 18 ist jetzt $\max(+M)$ zu bestimmen, nachdem man M_1 nach Formel c bestimmt hat. Beispielsweise ist für $x = 0,1l$: $M_1 = -[0,1070 - 0,6328 \cdot 0,9 \cdot 0,1]g\lambda^2 = -0,0501p\lambda^2$, mithin $\max(+M) = (0,0654 - 0,0501)p\lambda^2 = +0,0153p\lambda^2$.

Statt dessen könnte man auch ξ und ξ_1 annehmen, und nach Formel d das zugehörige x berechnen. Man kann dann auch zur Bestimmung von \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' die Tabellen zu §. 64 benützen. Beispielsweise wird für $\xi = 0,5l$: $\mathfrak{M}' = 0,4218p\lambda^2$, $\mathfrak{M}'' = 0,3282p\lambda^2$, daher nach e : $M_1 = -0,0805p\lambda^2$, $M_1 - M_2 = -0,0539p\lambda^2$. Für $\xi = 0,5l$ aber wird nach Formel d :

$$x = \frac{(1,3571 - 0,5) 0,5}{2,6667 + 0,5 - 2 \cdot 0,5^2} = \frac{0,4286}{2,6667} = 0,1607,$$

also nach Formel 17:

$$\begin{aligned} \max(-M) = & - \left[0,0805 - \left(0,0539 + \frac{1}{2} \cdot 0,5^3 \cdot 1,125^2 \right) 0,1607 \right] p \lambda^2 \\ = & - 0,0464p\lambda^2. \end{aligned}$$

In den Figuren 156 und 160 sind hiernach die Maxima von Q und M grafisch dargestellt.

§. 84. Beispiel für einen veränderlichen Querschnitt.

Taf. II.

Wir wählen als Beispiel einen kontinuierlichen Parallelgitterträger mit drei Öffnungen von 50, 60, 50 Meter Stützweite; hierbei sei das Eigengewicht pro Meter $g = 0,3q$, also die zufällige Last pro Meter $p = 0,7q$. Die Berechnung unter Annahme eines konstanten Querschnittes gibt für die Gurte die in Fig. 1 dargestellten und mit Zahlen eingeschriebenen Querschnitte; diesen proportional sind die Trägheitsmomente. Den Einfluss des Gitterwerkes vernachlässigen wir.

1. Bestimmung von α , β , γ . Multipliziert man die reciproken Werthe der Querschnitte mit den Längen der einzelnen Theile, so ergibt sich als Gesamtsumme $0,006187l_1 + 0,006237l + 0,006187l_1 = 0,005800\lambda + 0,007016\lambda + 0,005800\lambda = 0,018616\lambda$. Der mittlere reciproke Werth ist daher $= \frac{0,018616\lambda}{3\lambda} = 0,006205$, die entsprechende mittlere Querschnittsfläche also $\frac{1}{0,006205} = 161,1$. Multipliziert man hier-

mit die reciproken Querschnittsflächen, so erhält man die Verhältnisse $\frac{I_n}{I}$, welche in Fig. 2 grafisch dargestellt und mit Zahlen eingeschrieben sind.

I. Feld. Der Inhalt $Al_1 = \int \frac{dx}{I}$ der Krümmungsfläche ergibt sich zu $0,9965l_1$,

Als Trägheitsmoment der Krümmungsfläche für die beiden Enden ergibt sich $0,3022l_1^3$ und $0,3800l_1^3$; nach §. 62 wird daher $\alpha = 3 \cdot 0,3022$, $\beta = 3 \cdot 0,3800$, $\gamma = 3A - \alpha - \beta$, d. i.

$$\alpha = 0,9066, \quad \beta = 1,1400, \quad \gamma = 0,9429.$$

II. Feld. In ganz gleicher Weise ergibt sich für das II. Feld $A = 1,0046$ und

$$\alpha = 0,9943, \quad \beta = 0,9943, \quad \gamma = 1,0252.$$

2. Bestimmung von M' und M'' für eine Einzellast. In folgender Tabelle sind die statischen und Trägheitsmomente der einzelnen Theile der Krümmungsfläche, sowie die hieraus durch allmälige Addition abgeleiteten statischen und Trägheitsmomente der vom Ende bis zu einer bestimmten Ordinate reichenden Flächenstücke in Beziehung auf die beiden Enden zusammengestellt:

Erstes Feld.

x	Trägheitsmoment für das linke Ende			Statisches Moment für das linke Ende		$T = S_2 l_1 - T_2$
	einzel	von 0 bis x T_1'	von x bis l_1 T_2'	einzel	von x bis l_1 S_2'	
0		0	30218		45994	15776
0,119	92	92	30126	1147	44847	14721
0,173	143	235	29983	945	43902	13999
0,250	328	563	29655	1548	42354	12699
0,426	1621	2184	28034	4702	37652	9618
0,602	3701	5885	24333	7150	30502	6169
0,679	3005	8890	21328	4688	25814	4486
0,853	12277	21167	9051	15979	9835	784
0,898	3192	24359	5859	3643	6192	333
0,931	2082	26441	3777	2277	3915	138
0,962	1767	28208	2010	1865	2050	40
1	2010	30218	0	2050	0	0
l_1		$0,00001l_1^3$		$0,00001l_1^2$		$0,00001l_1^3$

Zweites Feld.

x	Trägheitsmoment für das linke Ende			Statisches Moment für das linke Ende		$T = S_2 l - T_2$
	einzel	von 0 bis x T_1	von x bis l T_2	einzel	von x bis l S_2	
0	1	0	33143	25	50240	17097
0,030	4	1	33142	78	50215	17073
0,058	12	5	33138	172	50137	16999
0,089	37	17	33126	345	49965	16839
0,124	103	54	33089	711	49620	16231
0,165	514	157	32986	2497	48909	15923
0,241	477	671	32472	1769	46412	13940
0,296	903	1148	31995	2663	44643	12748
0,379	1855	2051	31092	4188	41980	10888
0,500	3008	3906	29237	5342	37790	8555
0,621	3466	6914	26229	5227	32450	6201
0,704	3526	10380	22763	4821	27223	4460
0,759	7821	13906	19237	9803	22402	3165
0,835	3594	21727	11416	4209	12599	1183
0,876	2586	25321	7822	2895	8390	568
0,911	2008	27907	5236	2168	5495	259
0,942	1628	29915	3228	1702	3327	99
0,970	1600	31543	1600	1585	1625	25
1		33143	0		0	0
. l		. 0,00001 ³		. 0,00001 ²		. 0,00001 ³

Die grafische Bestimmung der statischen und Trägheitsmomente ist in Fig. 3 nach §. 63 und 70 durchgeführt.

Mit Hilfe der so erhaltenen Zahlen lassen sich nun nach Formel 3 (S. 127) die Werthe von \mathfrak{M}' und \mathfrak{M}'' berechnen. So z. B. ist im II. Felde für $x=0,835l$: $\mathfrak{M}' = 2(0,165 \cdot 0,2173 + 0,835 \cdot 0,0118) = 0,0915 \text{ Gl}$ und für $x=0,165l$: $\mathfrak{M}'' = 2(0,835 \cdot 0,0016 + 0,165 \cdot 0,1592) = 0,0552 \text{ Gl}$. Der Symmetrie halber ist für $x=0,165l$ das \mathfrak{M}'' gleich dem \mathfrak{M}' für $0,835l$, also $= 0,0915 \text{ Gl}$. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Erstes Feld		Zweites Feld		
x	\mathfrak{M}_1'	x	\mathfrak{M}_2'	\mathfrak{M}_2''
0	0	0	0	0
0,119	0,0366	0,030	0,0103	0,0194
0,173	0,0520	0,058	0,0198	0,0365
0,250	0,0714	0,089	0,0303	0,0544
0,426	0,1068	0,124	0,0420	0,0727
0,602	0,1210	0,165	0,0552	0,0915
0,679	0,1178	0,241	0,0772	0,1151
0,853	0,0755	0,296	0,0909	0,1242
0,898	0,0557	0,379	0,1079	0,1296
9,931	0,0391	0,500	0,1245	0,1245
0,962	0,0222			
1	0			
. l_1	. Gl_1	. l	. Gl	. Gl

3. Lage der Fixpunkte. Nach Formel 5 (S. 117) wird

$$\mu_2 = \frac{2(0,9066 + 0,9943 \cdot 1,2)}{1,0252 \cdot 1,2} = 3,4138,$$

$$\mu_3 = \frac{2(0,9943 \cdot 1,2 + 0,9066) - \frac{1,0252 \cdot 1,2}{3,4138}}{0,9429} = 4,0717.$$

Demnach wird $a_2 = \frac{l}{4,4138} = 0,2266l$, $a_3 = \frac{l_1}{5,0717} = 0,1972l_1$. Wir haben somit

I. Feld: $a = 0$ $c = 0,8028l_1$, $b = 0,1972l_1$,

II. Feld: $a = 0,2266l$, $c = 0,5468l$, $b = 0,2266l$.

4. Bestimmung der Maximalmomente für eine Einzellast. I. Feld. Nach den Formeln 4 (S. 127) wird

$$M_1 = -3 \frac{b}{\gamma c} \mathfrak{M}' = -\frac{3 \cdot 0,1972}{0,9429 \cdot 0,8028} \mathfrak{M}' = -0,7815 \mathfrak{M}'.$$

Das Moment am Angriffspunkte der Last wird jetzt

$$\mathfrak{M}'' = -\frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) Gl_1 + \frac{x}{l_1} M_1 = -\frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) Gl - 0,7815 \frac{x}{l_1} \mathfrak{M}'.$$

II. Feld. Ebenso wird für die Belastung des II. Feldes

$$M_1 = -3 \frac{a}{\gamma c l} [(l-a) \mathfrak{M}'' - a \mathfrak{M}'], \quad M_2 = -3 \frac{a}{\gamma c l} [(l-a) \mathfrak{M}' - a \mathfrak{M}''], \quad \text{d. i.}$$

$$M_1 = -0,9378 \mathfrak{M}'' + 0,2748 \mathfrak{M}', \quad M_2 = -0,9378 \mathfrak{M}' + 0,2748 \mathfrak{M}''.$$

Das Moment M'' am Angriffspunkte der Last wird nun

$$M'' = M_1 - \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) Gl - \frac{x}{l} (M_1 - M_2).$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

Erstes Feld			Zweites Feld			
x	M_1	M''	x	M_1	M_2	M''
	—	+		—	—	+
0	0	0	0	0	0	0
0,119	0,0286	0,1014	0,030	0,0154	0,0043	0,0141
0,173	0,0406	0,1360	0,058	0,0298	0,0085	0,0260
0,250	0,0558	0,1736	0,089	0,0426	0,0135	0,0410
0,426	0,0835	0,2090	0,124	0,0566	0,0194	0,0569
0,602	0,0946	0,1827	0,165	0,0699	0,0268	0,0750
0,679	0,0921	0,1554	0,241	0,0867	0,0408	0,1073
0,853	0,0589	0,0751	0,296	0,0915	0,0511	0,1289
0,898	0,0435	0,0525	0,379	0,0919	0,0655	0,1535
0,931	0,0305	0,0358	0,500	0,0825	0,0825	0,1675
0,962	0,0173	0,0199				
1	0	0				
$\cdot l_1$	$\cdot Gl_1$	$\cdot Gl_1$	$\cdot l$	$\cdot Gl$	$\cdot Gl$	$\cdot Gl$

5. Stützenmomente für teilweise gleichmässige Belastung. Die Stützenmomente für eine Einzellast wurden in Fig. 4 grafisch dargestellt. Durch Bestim-

mung des Flächeninhaltes der von $x=0$ bis $x=x$ und $x=x$ bis $x=l$ reichenden Flächenstücke mit Hilfe des Planimeters wurden die in folgender Tabelle zusammengestellten Stützenmomente für theilweise Belastung erhalten.

Belastung des I. Feldes			Belastung des II. Feldes		
x	von 0 bis x M_1	von x bis l M_1	x	von x bis l	
				M_1	M_2
0	0	0,0609	0	0,0566	0,0566
0,1	0,0012	0,0597	0,1	0,0542	0,0558
0,2	0,0047	0,0561	0,2	0,0479	0,0533
0,3	0,0102	0,0506	0,3	0,0392	0,0490
0,4	0,0174	0,0434	0,4	0,0300	0,0430
0,5	0,0260	0,0349	0,5	0,0212	0,0354
0,6	0,0353	0,0255	0,6	0,0136	0,0266
0,7	0,0446	0,0162	0,7	0,0076	0,0174
0,8	0,0528	0,0081	0,8	0,0033	0,0088
0,9	0,0586	0,0022	0,9	0,0008	0,0024
1	0,0609	0	1	0	0
$\cdot l_1$	$\cdot pl_1^2$	$\cdot pl_1^2$	$\cdot l$	$\cdot pl^2$	$\cdot pl^2$

6. Einfluss des Eigengewichtes. Bei Belastung des ganzen I. Feldes ist nach dem eben erhaltenen Resultate $M_1 = -0,0609 pl_1^2 = -0,0535 p l^2$, $M_2 = -\frac{1}{\mu_2} M_1 = -0,293 M_2 = +0,0127 pl_1^2 = +0,0157 p l^2$. Bei Belastung des ganzen II. Feldes ist $M_1 = M_2 = -0,0566 pl^2 = -0,0717 p l^2$. Hieraus folgt nun für eine gänzliche Belastung aller drei Oeffnungen $M_1 = M_2 = -(0,0535 + 0,0717 - 0,0157) p l^2 = -0,1095 p l^2$, also ist für das Eigengewicht

$$M_1 = -0,1095 gl^2.$$

Hieraus ergibt sich nun leicht in bekannter Weise

$$\begin{aligned}
 \text{a. I. Feld} & \left\{ \begin{aligned} Q &= + \left(0,3519 - 0,9375 \frac{x}{l_1} \right) gl, \\ M &= + \left(0,32994 - 0,4395 \frac{x}{l_1} \right) gl^2. \end{aligned} \right. \\
 \text{b. II. Feld} & \left\{ \begin{aligned} Q &= + \left(0,5625 - 1,1250 \frac{x}{l} \right) gl, \\ M &= - \left(0,10952 - 0,6328 \frac{x}{l} + 0,6328 \frac{x^2}{l^2} \right) gl^2. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

7. Transversalkräfte in Folge der zufälligen Last. I. Feld. Q wird zum positiven Maximum bei Belastung des rechten Theiles des I. Feldes und bei Belastung des ganzen III. Feldes. Für die Belastung des ganzen III. Feldes wird $M_1 = +0,293 \cdot 0,0609 pl_1^2 = +0,0178 pl_1^2$. Setzen wir für die Belastung des I. Feldes $M_1 = -k pl_1^2$, wobei k aus der Tabelle zu Nr. 5 zu entnehmen ist, so ist $M_1 = -(k - 0,0178) pl_1^2 = l \max (+Q) - \frac{1}{2} p (l_1 - x)^2$, also

$$\begin{aligned} \max(+Q) &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1} \right)^2 + 0,0178 - k \right] p l_1 \\ &= 0,9375 \left[0,5 \left(1 - \frac{x}{l_1} \right)^2 + 0,0178 - k \right] p \lambda. \end{aligned}$$

Das negative Maximum von Q berechnet man am besten nach der Regel 9.

II. Feld. Q wird zum positiven Maximum bei Belastung des rechten Theiles des II. Feldes und bei Belastung des ganzen I. Feldes. Für die Belastung des ganzen I. Feldes ist $M_1 = -0,0609 p l_1^2 - 0,0423 p l^2$, $M_2 = -0,293 M_1 = +0,0124 p l^2$. Setzen wir für die Belastung des II. Feldes $M_1 = -k_1 p l^2$, $M_2 = -k_2 p l^2$, wobei k_1 und k_2 wieder aus der Tabelle zu Nr. 5 zu entnehmen sind, so ist $M_1 = -(k_1 + 0,0423) p l^2$, $M_2 = -(k_2 - 0,0124) p l^2$. Es wird nun $l \max(+Q) = \frac{1}{2} p (l-x)^2 - M_1 + M_2$ oder

$$\begin{aligned} \max(+Q) &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 + 0,0546 + k_1 - k_2 \right] p l \\ &= 1,1250 \left[0,5 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 + 0,0546 + k_1 - k_2 \right] p \lambda. \end{aligned}$$

Das negative Maximum ist dadurch bestimmt, dass die absoluten Werthe von $\max(+Q)$ für x und von $\max(-Q)$ für $l-x$ einander gleich sind.

Hiernach ist nun die folgende Tabelle berechnet:

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	$\max(+Q)$
I. Feld		+	-
0	+ 0,352	0,428	0,076
0,1	+ 0,258	0,340	0,082
0,2	+ 0,165	0,264	0,099
0,3	+ 0,061	0,199	0,138
0,4	- 0,023	0,145	0,168
0,5	- 0,117	0,101	0,218
0,6	- 0,211	0,068	0,278
0,7	- 0,304	0,044	0,348
0,8	- 0,398	0,028	0,426
0,9	- 0,492	0,019	0,511
1	- 0,586	0,017	0,602
II. Feld			
0	+ 0,562	0,624	0,061
0,1	+ 0,450	0,515	0,065
0,2	+ 0,337	0,415	0,078
0,3	+ 0,225	0,326	0,101
0,4	+ 0,112	0,249	0,137
0,5	0	0,186	0,186
	$\cdot g \lambda$	$\cdot p \lambda$	$\cdot p \lambda$

8. Momente in Folge der Verkehrsbelastung. I. Feld. Im ersten Theile, d. i. von $x=0$ bis $x=0,8023 l_1$, wird M bei Belastung des ganzen II. Feldes zum negativen Maximum. Hierbei ist $M_1 = -0,0566 p l^2 = -0,0717 p \lambda^2$,

$$\max(-M) = -0,0717 \frac{x}{l_1} p \lambda^2.$$

Da bei gänzlicher Belastung aller drei Felder M durch Formel a bestimmt ist, so wird nach Formel 18:

$$\max(+M) = + \left(0,4016 - 0,4395 \frac{x}{l_1} \right) \frac{x}{l_1} p l^2.$$

Im zweiten Theile, d. i. von $x = 0,8023l_1$ bis $x = l_1$ wird M zum negativen Maximum, wenn der linke Theil des I. Feldes auf eine gewisse Länge ξ belastet ist. Die nach §. 82 durchgeführte Konstruktion (Fig. 4) gibt für

$$\begin{array}{cccccccc} \xi = & 0 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 0,9 & 1 \cdot l_1. \\ x = & 0,802 & 0,813 & 0,838 & 0,863 & 0,910 & 0,951 & 1 \cdot l_1. \end{array}$$

Das entsprechende Moment M_1 ist durch die Tabelle zu Nr. 8 bestimmt, natürlich unter Zuhilfenahme einer Interpolation. Ausserdem muss das ganze II. Feld belastet sein; für diese Belastung ist $M_1 = -0,0566 p l^2 = -0,0816 p l_1^2$, was dem aus der Tabelle zu entnehmenden Momente hinzuzufügen ist. Alsdann wird nach Formel 17 $\max(-M) = \frac{M_1 x}{l_1} + \frac{p \xi^2 (l_1 - x)}{2l_1}$, d. i.

$$\begin{array}{cccccccc} \xi = & 0 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 0,9 & 1 \cdot l_1 \\ M_1 = & -0,0816 & 0,0863 & 0,0990 & 0,1169 & 0,1344 & 0,1402 & 0,1424 \cdot p l_1^2 \\ \max(-M) = & -0,0654 & 0,0664 & 0,0700 & 0,0762 & 0,0935 & 0,1135 & 0,1424 \cdot p l_1^2 \\ & = -0,0575 & 0,0584 & 0,0615 & 0,0670 & 0,0822 & 0,0997 & 0,1252 \cdot p l_1^2. \end{array}$$

II. Feld. Im ersten Theile, d. i. von $x = 0$ bis $x = 0,2256l$ wird M zum negativen Maximum, wenn der rechte Theil des II. Feldes auf eine gewisse Länge ξ belastet ist. Durch die Konstruktion (Fig. 4) ergibt sich für den Abstand ξ des Zugendes vom linken Ende des Feldes:

$$\begin{array}{cccccccc} \xi = & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1 \cdot l, \\ x = & 0 \cdot & 0,050 & 0,093 & 0,144 & 0,175 & 0,200 & 0,226 \cdot l. \end{array}$$

Die entsprechenden Momente M_1 und M_2 sind durch die Tabelle zu Nr. 5 bestimmt. Ausserdem muss das ganze I. Feld belastet sein; für diese Belastung ist nach Nr. 6 $M_1 = -0,0609 p l_1^2 = -0,0423 p l^2$, $M_2 = +0,0124 p l^2$. Es wird nun nach Formel 17 $\max(-M) = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} + \frac{p x (l - \xi)^2}{2l}$. Hiernach wird

$$\begin{array}{cccccccc} \xi = & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1 \cdot l, \\ M_1 = & -0,0989 & -0,0965 & -0,0901 & -0,0723 & -0,0559 & -0,0456 & -0,0423 \cdot p l^2, \\ M_2 = & -0,0442 & -0,0433 & -0,0408 & -0,0305 & -0,0142 & +0,0037 & +0,0125 \cdot p l^2, \\ \max(-M) = & -0,0989 & -0,0736 & -0,0558 & -0,0403 & -0,0346 & -0,0318 & -0,0299 \cdot p l^2, \\ & = -0,1252 & -0,0931 & -0,0706 & -0,0510 & -0,0438 & -0,0403 & -0,0378 \cdot p l^2. \end{array}$$

Im zweiten Theile, d. i. von $0,2256l$ bis $0,7744l$ wird M zum negativen Maximum bei Belastung des ganzen I. und III. Feldes. Für diese Belastung wird $M_1 = M_2 = -0,0423 p l^2 + 0,0124 p l^2 = -0,0299 p l^2 = -0,0378 p l^2$. Wir haben daher an jeder Stelle

$$\max(-M) = -0,0378 p l^2.$$

Das positive Maximum findet man nun leicht durch Subtraktion des negativen vom Momente für gänzliche Belastung. Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

$\frac{x}{l_1}$	$\frac{x}{l}$	Moment		
		Einfluss von g	Einfluss von p	
			M	max (+ M)
I. Feld			+	-
0		0	0	0
0,1		+ 0,0286	0,0358	0,0072
0,2		+ 0,0484	0,0627	0,0143
0,3		+ 0,0594	0,0809	0,0215
0,4		+ 0,0617	0,0903	0,0287
0,5		+ 0,0551	0,0909	0,0358
0,6		+ 0,0397	0,0828	0,0430
0,7		+ 0,0156	0,0658	0,0502
0,8		- 0,0173	0,0400	0,0574
0,802	0	- 0,0181	0,0394	0,0574
0,813	0,2	- 0,0222	0,0361	0,0584
0,838	0,4	- 0,0321	0,0294	0,0616
0,863	0,6	- 0,0426	0,0244	0,0670
0,910	0,8	- 0,0637	0,0185	0,0822
0,951	0,9	- 0,0837	0,0164	0,0997
1	1	- 0,1095	0,0157	0,1252
II. Feld				
0	0	- 0,1095	0,0157	0,1252
0,050	0,1	- 0,0795	0,0137	0,0931
0,093	0,2	- 0,0562	0,0144	0,0706
0,144	0,4	- 0,0313	0,0197	0,0510
0,175	0,6	- 0,0182	0,0256	0,0438
0,200	0,8	- 0,0083	0,0320	0,0403
0,226	1	+ 0,0011	0,0389	0,0403
0,3		+ 0,0233	0,0611	0,0378
0,4		+ 0,0428	0,0801	0,0378
0,5		+ 0,0486	0,0865	0,0378
		$\cdot g \lambda^2$	$\cdot p \lambda^2$	$\cdot p \lambda^2$

Die Transversalkräfte und Momente sind hiernach in Fig. 5 und 6 grafisch dargestellt. Die Momente ausserhalb der Fixpunkte lassen sich wesentlich einfacher nach §. 73 (Fig. 148) darstellen, indem man eine Schaar umhüllender Tangenten verzeichnet. Hierzu ist für die bezügliche ungünstigste Belastung noch das Moment M''' am Ende der theilweisen Belastung zu bestimmen. Für das I. Feld ist

$$M''' = M_1 \frac{\xi}{l_1} + \frac{p \xi^2 (l_1 - \xi)}{2l}$$

Nach den oben angegebenen Werthen von M_1 wird:

$$\begin{aligned} \xi = 0 & \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1,0 \cdot l_1 \\ M''' = 0 & \quad -0,0023 + 0,0084 + 0,0019 - 0,0435 - 0,0857 - 0,1424 \cdot p l_1^2, \\ & = 0 \quad -0,0011 + 0,0074 + 0,0017 - 0,0382 - 0,0753 - 0,1252 \cdot p l^2. \end{aligned}$$

Für das II. Feld wird:

$$M'' = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{\xi}{l} + \frac{p \xi (l - \xi)^2}{2l}$$

und hiernach ergibt sich:

$$\begin{aligned} \xi &= 0 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1,0 & l, \\ M'' &= -0,0987 & -0,0507 & -0,0162 & +0,0164 & +0,0171 & +0,0098 & +0,0125 & \cdot pl^2, \\ &= -0,1250 & -0,0642 & -0,0205 & +0,0207 & +0,0216 & +0,0124 & +0,0158 & \cdot pl^2. \end{aligned}$$

Hiernach sind in Fig. 5 die Tangenten eingetragen. Bei Anwendung dieses Verfahrens kann die in Fig. 4 durchgeführte Konstruktion natürlich unterbleiben.

§. 85. Mittlere Transversalkraft und mittleres Moment.

Für die Bestimmung der zu einem Träger erforderlichen Materialmenge ist noch die Kenntniss der mittleren Transversalkraft *mitt* Q und des mittleren Momentes *mitt* M erforderlich. Es genügt hierbei, vom positiven und negativen Maximum nur das absolut grössere in Betracht zu ziehen.

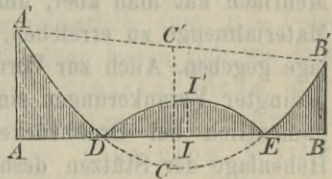
Ist in einem Felde der Abstand des Punktes, in welchem für das Eigengewicht $Q = 0$ wird, von beiden Stützen x' , x'' und die Transversalkraft an den Stützen, absolut genommen, Q' , Q'' , so ist die Transversalkraftfläche $= \frac{1}{2} (Q' x' + Q'' x'')$. Setzen wir dieselbe $= l$ *mitt* Q und hierbei $g x' = Q'$, $g x'' = Q''$, so wird $2gl$ *mitt* $Q = Q'^2 + Q''^2$ oder, da $Q' l = -M' + M'' + \frac{1}{2} gl^2$, $Q'' l^2 = M' - M'' + \frac{1}{2} gl^2$ ist,

$$20. \quad \text{mitt } Q = \frac{(M' - M'')^2}{gl^3} + \frac{1}{4} gl.$$

Für die Momente wird hinsichtlich des Eigengewichtes, der Anmerkung zu §. 53 entsprechend, l *mitt* $M = \text{Trapez } AA'B'B + 2 \text{ Parabel } DIE - \text{Parabel } A'CB'$. Da $CC' = \frac{1}{8} gl^2$ und, wenn wir $DE = w$ setzen, $II' = \frac{1}{8} gw^2$ ist, so wird $\text{Trapez } AA'B'B = \frac{1}{2} (M' + M'')l$, $\text{Parabel } DIE = \frac{1}{12} gw^3$, $\text{Parabel } A'CB' = \frac{1}{12} gl^3$, mithin

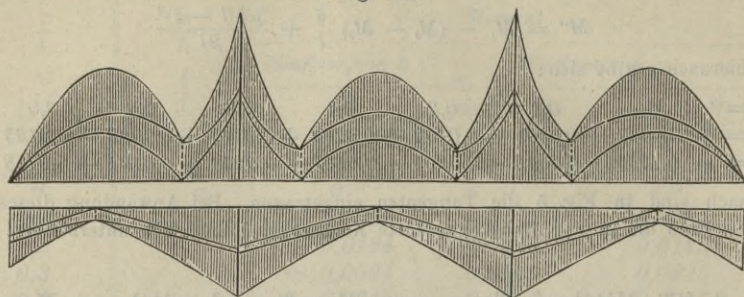
$$21. \quad \text{mitt } M = \frac{1}{2} (M' + M'') - \frac{g(l^3 - 2w^3)}{12l}.$$

Fig. 163.



Für die zufällige Last bestimmt man *mitt* Q und *mitt* M am besten durch Berechnung der Transversalkraft- und Momentenfläche mit Hilfe der für gleichweit abstehende Querschnitte berechneten Werthe von $\max Q$ und $\max M$. Nur der zwischen den Fixpunkten liegende parabolische Theil der Momentenfläche lässt sich einfacher nach der Formel $\frac{1}{2} (M_1 + M_2) w_1 + \frac{1}{12} gw_1^3$ berechnen, wenn w_1 die Länge dieses Theiles und M_1 , M_2 die Momente an den Enden desselben bezeichnen. Für einen Träger mit

Fig. 164.



drei Feldern ist die Momenten- und Transversalkraftfläche in dem hier vorausgesetzten Sinne in Fig. 164 dargestellt.

X. Kapitel.

Einfluss der Stützen.

§. 86. **Einleitung.** Die Stützen sind in der Regel in einer solchen Höhenlage angeordnet, dass keinerlei Spannungen, also auch keine Stützendrücke und Stützenmomente entstehen, falls die Wirkung des Eigengewichtes durch eine Unterstüzung aufgehoben wird; wir haben diesen Fall der Einfachheit halber als einen solchen bezeichnet, bei welchem die Stützen in einer Geraden oder in gleicher Höhe liegen. Mehrfach hat man aber, um gewisse Vortheile hinsichtlich der nöthigen Materialmenge zu erreichen, den Stützen eine andere gegenseitige Höhenlage gegeben. Auch zur Vermeidung negativer Stützendrücke und dadurch bedingter Verankerungen sind ungleiche Höhenlagen angewendet worden, namentlich bei Drehbrücken. Ausserdem aber ist das Studium der Höhenlage der Stützen deshalb nöthig, um den Einfluss einer unbeabsichtigten Veränderung der Höhenlage, sowie den Einfluss der Bewegung elastischer Stützen oder durch schlaife Stabsysteme gewonnener Stützpunkte durch die Belastung kennen zu lernen.

In der Regel wird vorausgesetzt, dass sich der Träger auf jeder Stütze frei drehen kann; wir haben aber auch Fälle, wo sich dieser Drehung ein Widerstand entgegengesetzt. Wir können hierzu auch die Fälle rechnen, in denen der Träger durch breite Lager oder an jedem Pfeiler durch zwei Lager unterstüzt ist.

In gleicher Weise, wie verschieden hohe Lager, wirkt auch eine ungleiche Erwärmung der oberen und unteren Theile der Träger, die wir deshalb hier gleichzeitig mit besprechen wollen.

Die allgemeine Gleichung 13 (S. 96) enthält auch den Einfluss der Höhenlage der Stützen in den Gliedern mit y_0, y_1, y_2 . Nach dieser Gleichung kann man den Einfluss der Belastung und der Höhenlage der Stützen getrennt bestimmen und sodann durch Addition vereinigen, falls die Stützeu feste sind, d. h. falls dieselben eine unveränderliche, also von der Belastung unabhängige Höhenlage haben. Der blosse Einfluss der Höhenlage der Stützen wird hiernach ausgedrückt durch die Gleichung

$$1. \quad \gamma_1 l_1 M_0 + 2(\alpha_1 l_1 + \beta_2 l_2) M_1 + \gamma_2 l_2 M_2 = 6EI_0 z \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right),$$

wenn z den Abstand der Stütze 1 von der die Stützen 0 und 2 verbindenden Geraden bezeichnet, nach unten als positiv gerechnet, da sich $\frac{y_0 - y_1}{l_1} - \frac{y_1 - y_2}{l_2}$ leicht in der Form $-z \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)$ ausdrücken lässt. Ist r der Radius eines durch die drei Stützen gelegten Kreises, so ergibt sich leicht

$$2. \quad 2rz = l_1 l_2;$$

man kann daher auch $\frac{3(l_1 + l_2)}{r}$ für $6z \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)$ setzen.

Hiernach wird bei festen Stützen auch die Höhenlage derselben auf die ungünstigste Belastungsweise ohne Einfluss sein.

§. 87. Einfluss der Hebung und Senkung einer einzigen Stütze. Wir denken uns von sämtlichen Stützen nur die eine und zwar die r -te Stütze C (Fig. 165) um y in vertikaler Richtung verrückt (nach unten positiv, nach oben negativ). Die $r-2$ ersten Gleichungen für die Stützenmomente bleiben alsdann dieselben, als bei gleich hoher Lage der Stützen. Die in §. 65 bis 67 gefundenen Gesetze für die unbelasteten Felder bleiben daher bis einschliesslich zum $r-1$ -ten Felde oder der $r-1$ -ten Stütze gültig. Dieselben lassen sich wie folgt zusammenfassen: Die Stützenmomente, Stützendrücke und Transversalkräfte in den einzelnen Feldern sind abwechselnd positiv und negativ und ihre absoluten Werthe nehmen im Allgemeinen nach der verschobenen Stütze hin zu. Die auf einander folgenden Stützenmomente stehen in einem ganz bestimmten, von der Grösse der Verschiebung der Stütze und der Lage der verschobenen Stütze unabhängigen Verhältnisse. In den einzelnen Feldern lassen sich die Momente durch Gerade darstellen, welche auf der linken und rechten Seite der verschobenen Stütze bezüglich durch die linken und rechten Fixpunkte gehen (Fig. 132).

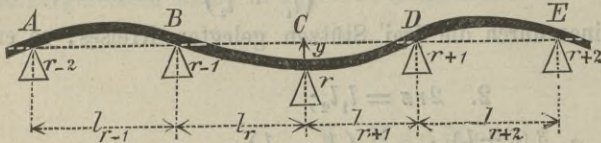
Wenden wir nun die Gleichung 1 auf die vier die verschobenen Stützen enthaltenden Felder an und setzen dabei $\mu M_{r-2} = -M_{r-1}$ und $\nu M_{r+2} = -M_{r-1}$, so erhalten wir

$$3. \begin{cases} 2 \left[\left(\alpha_{r-1} - \frac{\gamma_{r-1}}{\mu} \right) l_{r-1} + \beta_r l_r \right] M_{r-1} + \gamma_r l_r M_r = -6EI_0 y \frac{1}{l_r}, \\ \gamma_r l_r M_{r-1} + 2(\alpha_r l_r + \beta_{r+1} l_{r+1}) M_r + \gamma_{r+1} l_{r+1} M_{r+1} = +6EI_0 y \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right), \\ 2 \left[\alpha_{r+1} l_{r+1} + \left(\beta_{r+2} - \frac{\gamma_{r+2}}{\nu} \right) l_{r+2} \right] M_{r+1} + \gamma_{r+1} l_{r+1} M_r = -6EI_0 y \frac{1}{l_{r+1}}, \end{cases}$$

durch welche Gleichungen M_{r-1} , M_r und M_{r+1} bestimmt sind.

Ist y positiv, also die Stütze C (Fig. 165) gesenkt, so verhält sich der Stab offenbar genau so, als wenn der gerade, also in der Strecke BD frei liegende Stab in C mit einer Last G belastet wird, welche eine Senkung ihres Angriffspunktes um y bewirkt. Nach §. 71 entsteht

Fig. 165.



hierdurch aber in C ein positives, in B und D ein negatives Moment. Ist dagegen y negativ, so wird natürlich ein Zeichenwechsel eintreten. Dasselbe kann man auch mit Hilfe der vorigen Gleichungen nachweisen. Das Vorzeichen der Transversalkräfte und Stützendrücke ist nun durch die Formeln 7 und 9 (S. 118 und 119) bestimmt. Man kann also sagen:

Die Senkung einer Stütze veranlasst an derselben ein positives Moment und einen negativen Stützendruck, an den Nachbarstützen ein negatives Moment und einen positiven Stützendruck. Links von der gesenkten Stütze entsteht eine positive, rechts von derselben eine negative Transversalkraft. Die Hebung einer Stütze bewirkt das Umgekehrte.

Die Vorzeichen der übrigen Momente, Transversalkräfte und Stützendrücke sind nun durch den vorigen Satz bestimmt.

§. 88. Wahl der Höhenlage der Stützen bei konstantem Querschnitte. Bei einem konstanten, gegen die horizontale Schweraxe symmetrischen Querschnitte würde zur Berechnung des Querschnittes nur das absolute Maximum aller Momente massgebend sein. Bei gleich hohen Stützen sind im Allgemeinen die Stützenmomente grösser, als die grössten positiven Momente, so dass das grösste Stützenmoment massgebend wäre. Nun aber lassen sich die Stützenmomente vermindern, indem man dem ganzen Stabe eine nach oben konkave Krümmung gibt, d. h. die Stützen so anordnet, dass jede Stütze unter der Geraden liegt, welche die benachbarten Stützen verbindet. Dadurch werden natürlich auch die positiven Maximalmomente vergrössert. Bei einer grossen Veränderung

der Höhenlage würden dann die positiven Maximalmomente massgebend werden. Man wird daher die Höhenlage der Stützen am zweckmässigsten so bestimmen, dass die positiven und negativen Maximalmomente gleich werden. Bei n Feldern erhält man durch Gleichsetzung der $n-1$ Stützenmomente $n-2$ Gleichungen, durch Gleichsetzung der n positiven Maximalmomente $n-1$ Gleichungen und durch Gleichsetzung der Stützenmomente und positiven Maximalmomente 1 Gleichung, also zusammen $2(n-2)$ Gleichungen. Ist die Feldweite gegeben, so sind nur $n-1$ Stützenordinaten unbekannt, es würden also nicht sämtliche Gleichungen zu erfüllen sein. Ist dagegen nur die Gesamtlänge gegeben, das Verhältniss der einzelnen Feldlängen aber wählbar, so sind noch $n-1$ Verhältnisse der Feldlängen unbekannt und dadurch wird die Aufgabe vollständig bestimmt.

Auf eine allgemein mathematische Behandlung wollen wir nicht eingehen, da die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit keine besondere Wichtigkeit besitzt.

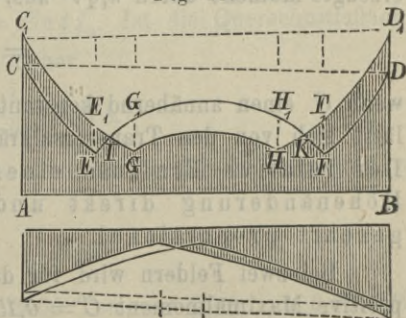
Eine Senkung der Mittelstützen auf Grund dieser Thatsachen wurde zuerst von Scheffler (Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig 1857) in Vorschlag gebracht. Scheffler behandelt daselbst den Träger mit 2 und 3 Feldern, indess nur für eine gänzliche gleichmässige Belastung aller Felder. Ebenso wird der Gegenstand von Grashof (Zeitschr. des deutschen Ingen.-Ver. 1857 bis 1859) und Mohr (Zeitschr. des hannoverschen Arch.- und Ingen.-Ver. 1860) behandelt.

§. 89. Wahl der Höhenlage der Stützen bei variablem Querschnitte.

Bei variablem Querschnitte würde die Materialmenge für die günstigste Höhenlage der Stützen massgebend sein. Bei Gitterträgern von konstanter Höhe sind die Gurtquerschnitte dem Momente und die Gitterstabquerschnitte der Transversalkraft proportional, die Gesamtvolumina der Gurte und der Gitterstäbe sind daher bezüglich der Momenten- und Transversalkraftfläche im Sinne des §. 85 proportional.

Diese Flächen oder die Mittelwerthe der Momente und Transversalkräfte sind nach §. 85 zu ermitteln. Es sei in Fig. 166 $CEFD$ die Momentenkurve für eine horizontale Lage der Stützen, C_1GHD_1 dieselbe für eine ungleiche Höhenlage der Stützen. Die Momentenfläche für die ungleiche Höhenlage wird um die Fläche $CEIC_1$ und $DFKD_1$ grösser und um die Fläche GIG_1H_1KH kleiner. Die Flächen CEE_1C_1 , DDF_1D_1 und GHH_1G_1 sind als Trapeze zu berechnen, deren Höhen gleich der Horizontalprojektion dieser Flächen und deren

Fig. 166.



parallele Seiten bezüglich CC_1 und EE_1 , DD_1 und FF_1 , GG_1 und HH_1 sind. Die übrigen dreieckähnlichen Flächen sind besonders zu berechnen; jedoch gleichen sich dieselben nahezu aus, so dass sie meist vernachlässigt werden können. In gleicher Weise würden die Flächen für die Transversalkräfte zu bestimmen sein.

Eine wesentliche Veränderung tritt durch eine Veränderung der Höhenlage der Stützen weder in der Grösse der Momentenfläche, noch in der der Transversalkraftfläche ein, so dass auch für die Materialmenge die gewählte Höhenlage der Stützen ohne grossen Einfluss ist.

Wenn man aus praktischen Gründen die Höhenlage der Stützen so wählen will, dass sich die Querschnittsflächen der Gurte eines Parallelträgers möglichst wenig ändern, so müsste die Höhenlage wie im vorigen Paragrafe bestimmt werden.

§. 90. Einfluss einer zufälligen Aenderung der Höhenlage. Die Anwendung kontinuierlicher Träger setzt voraus, dass die Höhenlage der Stützen, welche der Berechnung zu Grunde gelegt wurde, auch möglichst genau ausgeführt und erhalten werde. Nach dem Vorstehenden ist es leicht, die Aenderung der Momente, Transversalkräfte und Stützdrücke zu bestimmen, welche eintritt, wenn sich die Höhenlage der Stützen um ein gewisses Maass in unbeabsichtigter Weise ändert.

Die Momente, welche durch eine Höhenänderung erzeugt werden, lassen sich ausdrücken in der allgemeinen Form $A \frac{E I y}{l^2}$. Bezeichnen wir das mittlere Moment mit *mitt* M , so kann man bei Parallelträgern I ausdrücken durch die Form $B l$ *mitt* M , vorausgesetzt, dass man die Höhe des Trägers der Stützweite proportional macht. Setzt man *mitt* $M = k q l^2$, so wird $I = B k q l^3$, folglich das durch die Höhenänderung erzeugte Moment $= A B k E q l y$. Drücken wir das an derselben Stelle durch das Eigengewicht und die zufällige Last bei horizontaler Lage der Stützen erzeugte Moment durch $k_1 q l^2$ aus, so wird das Verhältniss der Aenderung

$$= C \frac{y}{l},$$

wenn C einen annähernd konstanten Koeffizienten bezeichnet. Dasselbe lässt sich von den Transversalkräften und Stützdrücken nachweisen. Der relative Einfluss einer Höhenänderung ist also der Höhenänderung direkt und der Stützweite nahezu umgekehrt proportional.

Bei zwei Feldern wird für das Stützenmoment $C = 0,25$, für das positive Maximalmoment $C = 0,15$. Bei drei Feldern wird ungefähr für das Stützenmoment an der Stütze 1: $C = 0,18$, an der Stütze 2: $C = 0,11$, wenn nur die Stütze 1 ihre Höhenlage ändert und für beide Mittelstützen

$C = 0,11$, wenn beide ihre Höhenlage ändern; ferner für das positive Maximalmoment im I. Felde $C = 0,11$, im II. Felde $C = 0,05$, wenn nur die Stütze 1 ihre Höhenlage ändert und im I. Felde $C = 0,07$, im II. Felde $C = 0,17$, wenn beide Mittelstützen ihre Höhenlage ändern. Hierbei ist die Höhenänderung in Millimetern, die Stützweite in Metern zu nehmen.

§. 91. Einfluss der Wärme. Wir betrachten einen Gitterträger mit parallelen Gurten mit der Höhe h , dessen beide Gurte durch verschiedenen Einfluss der Sonne oder Bodenwärme einen Temperaturunterschied t annehmen mögen. Ist α der Ausdehnungskoeffizient für 1 Grad Temperaturunterschied, so ändert sich die Länge l der Gurte gegen einander um αlt . Wenn die Träger ganz frei wären, so würden sie hierbei eine Krümmung annehmen; der Radius derselben sei r . Offenbar verhält sich nun $r : h = l : \alpha lt$, es ist mithin

$$4. \quad r = \frac{h}{\alpha t}.$$

Da aber der Träger durch die Verbindung mit den Stützen mit Rücksicht auf das eigene Gewicht verhindert ist, sich frei zu krümmen, so werden durch die Temperaturänderung Stützenmomente entstehen, welche ebenso gross sind, als wenn die drei in einer geraden Linie liegenden Stützen in einem Kreise mit dem Radius r liegen würden. Nach den Gleichungen 1 und 2 wird daher:

$$5. \quad \gamma_1 l_1 M_0 + 2(\alpha_1 l_1 + \beta_2 l_2) M_1 + \gamma_2 l_2 M_2 = \frac{3 E \alpha t I_0 (l_1 + l_2)}{h}.$$

Hierbei ist t positiv einzuführen, wenn der Obergurt eine höhere Temperatur hat als der Untergurt.

Nehmen wir bei einer grösseren Anzahl von Feldern bei konstantem Querschnitte die mittlere Stützweite und dementsprechend auch die Stützenmomente und damit die Momente M überhaupt als gleich an, so wird $6 M l h = 6 E \alpha t I_0 l$, also $M h = E \alpha t I_0$. Ist die Querschnittsfläche eines Gurtes f , so wird $I_0 = \frac{1}{2} f h^2$, daher

$$6. \quad M = \frac{1}{2} E \alpha t f h.$$

Ist N die hierdurch in den Gurten entstehende spezifische Spannung, so ist $N f h = M$, folglich

$$7. \quad N = \frac{1}{2} E \alpha t.$$

Für Schmiedeeisen ist ungefähr $E = 2000$ Ton. pro \square^{cm} , $\alpha = 0,000012$, $\frac{1}{2} E \alpha = 0,012$, $N = 0,012 t$, also z. B. für $t = 10^0$ $N = 0,12$, d. i. ungefähr 16 Prozent der Beanspruchung durch die Belastung.

Sind die Stützenmomente bestimmt, so können die übrigen Grössen leicht nach §. 66 und 67 bestimmt werden.

Bei Pfeilern aus verschiedenem Material oder von verschiedener Höhe ändern sich bei einer Temperaturänderung auch die Höhen der Stützen. Bei hohen Pfeilern sind die hierdurch entstehenden Aenderungen der Beanspruchung so gross (bis zu 20 Prozent), dass darauf bei der Berechnung Rücksicht zu nehmen ist. Bei der Bestimmung der Verschiebung der Stützen kann aber hierbei in der Regel die elastische Längenänderung der Pfeiler in Folge der Veränderung des Stützendruckes vernachlässigt werden.

§. 92. Doppelte Lager. Die kontinuierlichen Träger sind, namentlich in früherer Zeit, oft auf einem Pfeiler durch zwei Lager unterstützt worden. Als zwei Lager wirken aber eigentlich auch schon sehr breite Lager, die eine Drehung um einen bestimmten Punkt nicht gestatten.

Eine derartige Unterstützung kann in doppelter Weise wirken. Es kann sich nämlich, wenn eine Verankerung nicht vorhanden ist, der Träger von dem einen Lager abheben (Fig. 167 und 168), so dass dasselbe bei

Fig. 167.



Fig. 168.



der Berechnung natürlich als nicht vorhanden anzusehen ist; oder der Träger kann wirklich auf beiden Lagern aufrufen (Fig. 169 und 170), so dass der zwischen den Lagern liegende Theil als eine besondere Oeffnung mit kleiner Stützweite anzusehen ist. Der zweite Fall wird

Fig. 169.



Fig. 170.

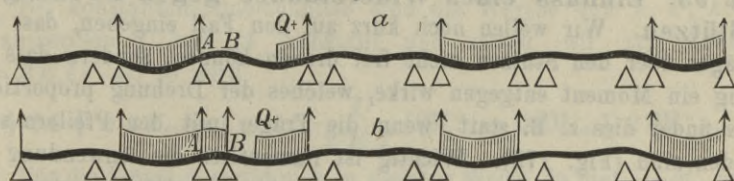


immer dann eintreten, wenn sich beide Stützendrucke positiv ergeben; der erste dagegen dann, wenn sich der eine Stützendruck negativ ergibt. Die Anordnung so zu treffen, dass bei allen Belastungen ein Aufrufen auf beiden Lagern eintritt, ist theoretisch wohl möglich, lässt sich aber praktisch im Allgemeinen nicht durchführen, da sie zu grosse Pfeilerbreiten erfordern würde.

Auf eine allgemeinere Untersuchung wollen wir der geringeren Wichtigkeit halber verzichten und nur im Folgenden noch die Ergebnisse einer solchen Untersuchung mittheilen.

1. Die Transversalkraft wird zum positiven oder negativen Maximum, wenn das fragliche Feld von dem fraglichen Querschnitte aus auf der rechten oder linken Seite belastet ist und wenn die übrigen Hauptfelder abwechselnd derart belastet sind, dass an das belastete Ende des fraglichen Feldes ein unbelastetes, an das unbelastete Ende ein belastetes Feld stösst, wobei der Träger auf denjenigen Stützen, welche die nicht belasteten Hauptfelder begrenzen, nicht aufruhet (Fig. 171). Hierbei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden: Das zwischen dem fraglichen und dem nächsten belasteten Hauptfelde liegende Zwischenfeld AB ist entweder unbelastet und der Träger auf der Stütze B nicht aufruhend (Fig. 171 a), oder es ist belastet und der Träger auf der Stütze B aufruhend (Fig. 171 b) anzunehmen.

Fig. 171.



2. Das Moment wird in den mittleren Theilen der Mittelfelder und in den Endtheilen der Endfelder zum positiven oder negativen Maximum, wenn das fragliche Feld gar nicht oder ganz, die übrigen Hauptfelder abwechselnd belastet sind, wobei der Träger auf denjenigen Stützen, welche die nicht belasteten Hauptfelder begrenzen, nicht aufruhet.

In den zunächst den Mittelstützen liegenden Theilen der Hauptfelder wird das Moment zum positiven Maximum, wenn das fragliche Feld von der am weitesten vom Querschnitte abstehenden Stütze des Feldes aus theilweise belastet ist, und wenn die übrigen Hauptfelder abwechselnd derart belastet sind, dass an das belastete Ende des fraglichen Feldes ein unbelastetes, an das unbelastete Ende ein belastetes Feld stösst (Fig. 171). Hierbei sind dieselben zwei Fälle zu untersuchen, wie bei den Transversalkräften (Fig. 171 a und b). Die Länge der belasteten Strecke des fraglichen Feldes ist durch §. 71 bestimmt.

Endlich wird das Moment in den mittleren Theilen der Mittelfelder und in den Endtheilen der Endfelder zum positiven Maximum, wenn das fragliche Feld ganz und die übrigen Felder abwechselnd belastet sind, wobei nur ein Aufruhen an denjenigen Mittelstützen anzunehmen ist, welche die belasteten

Hauptfelder begrenzen. In den zunächst den Mittelstützen liegenden Theilen kommt das positive Moment in der Regel nicht in Frage.

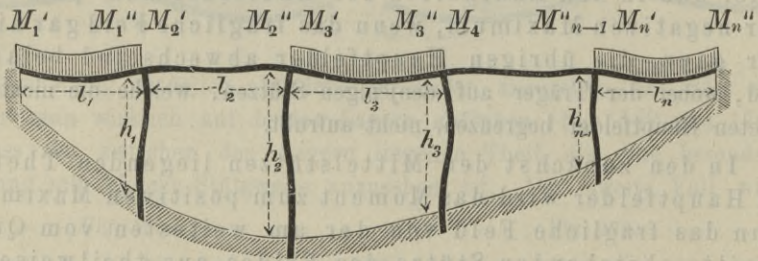
In den Zwischenfeldern kann die Momentenfläche als geradlinig begrenzt angenommen werden.

Man erhält nahezu richtige Werthe für die Momente, welche durchschnittlich ein wenig zu gross sind, wenn man sich die Zwischenfelder ganz herausgeschnitten denkt.

Bei Anordnung von doppelten Lagern mit dem Abstände λ fallen ungefähr durchschnittlich die Transversalkräfte um $64 \frac{\lambda}{l}$ Prozent, die Momente um $250 \frac{\lambda}{l}$ kleiner aus, als bei Anordnung einfacher in der Mitte liegender Lager.

§. 93. Einfluss eines Widerstandes gegen Drehung an den Stützen. Wir wollen noch kurz auf den Fall eingehen, dass sich die Träger über den Stützen nicht frei drehen können, sondern dass der Drehung ein Moment entgegen wirke, welches der Drehung proportional ist. Es findet dies z. B. statt, wenn die Träger mit den Pfeilern starr verbunden sind (Fig. 172). Wichtig ist namentlich die Anwendung auf kontinuierliche Zwischenträger, welche mit den Querträgern starr verbunden sind.

Fig. 172.



Wir wollen voraussetzen, dass die Stützen in einer Geraden liegen. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die Tangente an die elastische Linie mit der ursprünglichen Axe bildet oder den sogenannten Ausschlagwinkel an drei auf einander folgenden Stützen mit τ_{m-1} , τ_m und τ_{m+1} , die Momente, welche an der mittleren Stütze in den unmittelbar links und rechts von derselben liegenden Querschnitten wirken, mit M_m'' und M_{m+1}'' und die Werthe der Grössen \mathfrak{M} (§. 56) bezüglich mit \mathfrak{M}'_m , \mathfrak{M}''_m , \mathfrak{M}'_{m+1} , \mathfrak{M}''_{m+1} , so ist nach den Gleichungen 9 (S. 95):

$$8. \begin{cases} M''_m = -[2k'_m \mathfrak{M}'_m - k_m \mathfrak{M}''_m + 2EI_0(k_m \tau_{m-1} + 2k''_m \tau_m)] l_m, \\ M'_{m+1} = +[k_{m+1} \mathfrak{M}'_{m+1} - 2k'_{m+1} \mathfrak{M}''_{m+1} \\ \quad + 2EI_0(2k'_{m+1} \tau_m + k_{m+1} \tau_{m+1})] l_{m+1}, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$8a. \quad k = \frac{3C}{4C'C'' - C^2}, \quad k' = \frac{3C'}{4C'C'' - C^2}, \quad k'' = \frac{3C''}{4C'C'' - C^2}$$

setzt. Auf die Mittelstütze wirkt, wenn wir rechts drehende Momente positiv nehmen, das Moment $M''_m - M'_{m+1}$ und proportional diesem Momente ist der Winkel τ_m , so dass wir

$$9. \quad M''_m - M'_{m+1} = A_m \tau_m$$

setzen können, wobei A_m von der Konstruktion der Stütze abhängt. Die Einsetzung obiger Ausdrücke für M''_m und M'_{m+1} gibt:

$$10. \quad k_m l_m \tau_{m-1} + 2 \left(k''_m l_m + \frac{A_m}{4EI_0} + k'_{m+1} l_{m+1} \right) \tau_m + k_{m+1} l_{m+1} \tau_{m+1} \\ = \frac{1}{2EI_0} [k_m l_m \mathfrak{M}''_m - 2k'_m l_m \mathfrak{M}'_m + 2k'_{m+1} l_{m+1} \mathfrak{M}''_{m+1} - k_{m+1} l_{m+1} \mathfrak{M}'_{m+1}].$$

Bei konstantem Querschnitte sind die Werthe von k , k' , $k'' = 1$; ist ausserdem l und A konstant und setzen wir zur Abkürzung $A = 2EI l$, so wird

$$11. \quad \tau_{m-1} + (4+m) \tau_m + \tau_{m+1} = \frac{1}{2EI} [\mathfrak{M}''_m - 2\mathfrak{M}'_m + 2\mathfrak{M}''_{m+1} - \mathfrak{M}'_{m+1}].$$

Für die Stütze 0 ergibt sich in gleicher Weise, da hier $-M'_1 = A_0 \tau_0$ sein muss,

$$12. \quad \left(2k'_1 l_1 + \frac{A_0}{4EI_0} \right) \tau_0 + k_1 l_1 \tau_1 = \frac{1}{2EI_0} (2k'_1 l_1 \mathfrak{M}''_1 - k_1 l_1 \mathfrak{M}'_1)$$

und bei konstantem I , A und l :

$$13. \quad (2+m) \tau_0 + \tau_1 = \frac{1}{2EI} (2\mathfrak{M}''_1 - \mathfrak{M}'_1).$$

Durch Anwendung dieser Gleichungen auf sämmtliche Stützen erhält man so viele Gleichungen, als unbekannte Winkel vorhanden sind. Nach Auflösung dieser Gleichungen sind die Stützenmomente durch die Formeln 8 bestimmt.

Unter der Voraussetzung der Belastung eines einzigen Feldes lassen sich nun dieselben Schlussfolgerungen anwenden, wie in §. 65. Es ergibt sich hieraus:

Die Ausschlagwinkel in den nicht belasteten Feldern sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen vom Ende aus nach dem belasteten Felde hin zu und zwar in noch stärkerem Verhältnisse, als die Stützenmomente bei freier Auflagerung. Es ist allgemein

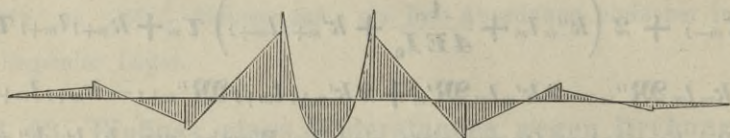
$$14. \quad -\frac{\tau_{m+1}}{\tau_m} > 2 \frac{k'_{m+1}}{k_{m+1}} + \frac{A_m}{2EI_0 k_{m+1} l_{m+1}}$$

Bei konstantem I , A und l wird

$$15. \quad -\frac{\tau_{m+1}}{\tau_m} > \frac{7}{2} + m.$$

Es ist $M'_{m+1} = +2EI_0 l_{m+1} (2k'_{m+1} \tau_m + k_{m+1} \tau_{m+1})$. In Folge der Beziehung 14 hat hiernach M'_{m+1} das Vorzeichen von τ_{m+1} und zwar wird der absolute Werth von M'_{m+1} in Folge der Beziehung 14 grösser, als der von $A_m \tau_m$. Der Gleichung 9 zu Folge hat dann aber auch M''_m das Vorzeichen von τ_{m+1} , es ist aber der absolute Werth von M''_m kleiner, als der von M'_{m+1} . Die Stützenmomente neben ein und derselben Stütze haben also dasselbe Vorzeichen; beide Stützenmomente sind aber abwechselnd positiv und negativ (Fig. 173).

Fig. 173.



Nach den Gleichungen 8 wird für irgend ein Feld, wenn wir $-M''_{m+1} = \mu M'_{m+1}$ und $-\tau_{m+1} = \mu' \tau_m$ setzen,

$$16. \quad \mu = \frac{2k' \mu' - k}{k \mu' - 2k'}$$

Da hier μ' grösser ist, als bei freier Auflagerung, so wird μ kleiner, als bei dieser. Aber immerhin bleibt noch $\mu > 2 \frac{k'}{k}$, wenn $k' > \frac{1}{2} k$ ist. Es werden also die Momente nach dem belasteten Felde hin zunehmen.

Die Fixpunkte in der in §. 67 angegebenen Bedeutung bestehen auch hier; sie haben indess eine etwas andere Lage. Da das Verhältniss μ etwas grösser ist, als bei freier Auflagerung, so wird die Entfernung der Fixpunkte von den Stützen etwas grösser.

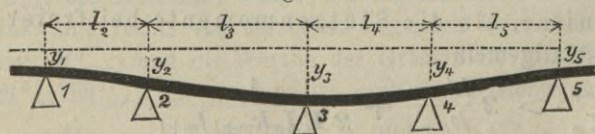
Hieraus lässt sich schliessen, dass alle im VIII. und IX. Kapitel hinsichtlich der ungünstigsten Belastungsweise entwickelten Regeln auch hier gelten.

§. 94. Kontinuierlicher Träger mit elastischen Stützen.

Der Stützendruck auf fünf auf einander folgenden Stützen sei $D_1 \dots D_5$;

der auf diese Stützen geübte Druck in dem Falle, dass der Träger über den Stützen getrennt ist, sei $\mathcal{D}_1 \dots \mathcal{D}_5$; die Mo-

Fig. 174.



mente an diesen Stützen seien $M_1 \dots M_5$. Sind $l_2 \dots l_5$ die Längen der Felder (Fig. 174), so wird nach Formel 28 (S. 104):

$$17. \begin{cases} D_2 = \mathfrak{D}_2 + \frac{M_1 - M_2}{l_2} - \frac{M_2 - M_3}{l_3}, \\ D_3 = \mathfrak{D}_3 + \frac{M_2 - M_3}{l_3} - \frac{M_3 - M_4}{l_4}, \\ D_4 = \mathfrak{D}_4 + \frac{M_3 - M_4}{l_4} - \frac{M_4 - M_5}{l_5}. \end{cases}$$

Nach der Gleichung 13 (Seite 96) wird, wenn wir den Einfluss der Schubspannungen vernachlässigen und den Vertikalabstand der Stützen von einer über ihnen liegenden Horizontalen mit y_1, \dots, y_5 bezeichnen,

$$18. \gamma_3 l_3 M_2 + 2(\alpha_3 l_3 + \beta_4 l_4) M_3 + \gamma_4 l_4 M_4 + 3l_3 \mathfrak{W}'_3 + 3l_4 \mathfrak{W}''_4 + 6EI_0 \left(\frac{y_2 - y_3}{l_3} - \frac{y_3 - y_4}{l_4} \right) = 0.$$

Wir machen nun die spezielle Annahme, dass die Ordinaten y_1, y_2, \dots den entsprechenden Stützendrücken D_1, D_2, \dots proportional seien und setzen allgemein $y_n = k_n D_n$. Alsdann ist $y_2 = k_2 D_2, y_3 = k_3 D_3, y_4 = k_4 D_4$. Setzt man diese Ausdrücke in die vorige Gleichung und dabei für D_2, D_3, D_4 die obigen Werthe, so erhält man die Gleichung:

$$19. \frac{k_2 M_1}{l_2 l_3} + \left\{ \frac{\gamma_3 l_3}{6EI_0} - \frac{1}{l_3} \left(\frac{k_2}{l_2} + \frac{k_2 + k_3}{l_3} + \frac{k_3}{l_4} \right) \right\} M_2 + \left\{ \frac{\alpha_3 l_3 + \beta_4 l_4}{3EI_0} + \frac{k_2 + k_3}{l_3^2} + \frac{2k_3}{l_3 l_4} + \frac{k_3 + k_4}{l_4^2} \right\} M_3 + \left\{ \frac{\gamma_4 l_4}{6EI_0} - \frac{1}{l_4} \left(\frac{k_3}{l_3} + \frac{k_3 + k_4}{l_4} + \frac{k_4}{l_5} \right) \right\} M_4 + \frac{k_4 M_5}{l_4 l_5} = - \frac{l_3 \mathfrak{W}'_3 + l_4 \mathfrak{W}''_4}{2EI_0} - \frac{k_2 \mathfrak{D}_2}{l_3} + \frac{k_3 (l_3 + l_4) \mathfrak{D}_3}{l_3 l_4} - \frac{k_4 \mathfrak{D}_4}{l_4}.$$

An den ersten Stützen tritt eine Abweichung ein, weil hier $M_0 = 0$ und

$$D_0 = \mathfrak{D}_0 + \frac{M_1}{l_1}, \quad D_1 = \mathfrak{D}_1 - \frac{M_1}{l_1} - \frac{M_1 - M_2}{l_2}$$

wird. Dementsprechend ergibt sich die erste Gleichung aus der vorigen, wenn man die Zeiger um 2 vermindert und links die beiden ersten Glieder weglässt; es ergibt sich ebenso die zweite Gleichung aus der vorigen, wenn man die Zeiger um 1 vermindert und links das erste Glied weglässt. In gleicher Weise ist natürlich die Aenderung für die beiden letzten Gleichungen vorzunehmen.

Bei konstantem Querschnitte werden die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma = 1$. Sind ausserdem die Längen der Felder gleich gross und die von der Elastizität der Stützen abhängigen Koeffizienten k , mit Ausnahme derjenigen für die Endstützen, ebenfalls gleich, so gehen die Gleichungen über in

$$20. \begin{cases} (4 + \kappa_0 + 5\kappa)M_1 + (1 - 4\kappa)M_2 + \kappa M_3 = Z_1, \\ (1 - 4\kappa)M_1 + (4 + 6\kappa)M_2 + (1 - 4\kappa)M_3 + \kappa M_4 = Z_2, \\ \kappa M_1 + (1 - 4\kappa)M_2 + (4 + 6\kappa)M_3 + (1 - 4\kappa)M_4 + \kappa M_5 = Z_3, \\ \kappa M_2 + (1 - 4\kappa)M_3 + (4 + 6\kappa)M_4 + (1 - 4\kappa)M_5 + \kappa M_6 = Z_4, \\ \dots \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$21. \begin{cases} \kappa_0 = \frac{6EI k_0}{l^3}, \quad \kappa = \frac{6EI k}{l^3}, \\ Z_1 = -3(M'_1 + M''_2) - \kappa_0 l \mathfrak{D}_0 + \kappa l (2\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2), \\ Z_m = -3(M'_m + M''_{m+1}) - \kappa l (\mathfrak{D}_{m-1} - 2\mathfrak{D}_m + \mathfrak{D}_{m+1}) \end{cases}$$

setzt.

Nach Bestimmung der Stützenmomente sind die übrigen Grössen in bekannter Weise zu ermitteln.

Beispiel. Ein Träger A konstanten Querschnittes mit sechs Feldern von gleicher Länge l sei an den Enden durch unbewegliche Stützen, in der Mitte durch vier ebenso starke Träger B mit der Länge $2l$ unterstützt und zwar möge der Träger A in der Mitte der Träger B aufruhem.

1. Allgemeine Auflösung. Es wird $y = \frac{(2l)^3}{48EI} D = \frac{l^3}{6EI} D$, also $k = \frac{l^3}{6EI}$, $\kappa = \frac{6EI}{l^3} \cdot \frac{l^3}{6EI} = 1$ und $\kappa_0 = 0$. Nur für die Endstützen wird $k = 0$, $\kappa = 0$. Die Gleichungen 11 geben

$$\begin{cases} 9M_1 - 3M_2 + M_3 = Z_1, \\ -3M_1 + 10M_2 - 3M_3 + M_4 = Z_2, \\ M_1 - 3M_2 + 10M_3 - 3M_4 + M_5 = Z_3, \\ M_2 - 3M_3 + 10M_4 - 3M_5 = Z_4, \\ M_3 - 3M_4 + 9M_5 = Z_5. \end{cases}$$

Wenn wir die 1. und 5., 2. und 4. Gleichung addiren und subtrahiren und $M_1 + M_5 = X_1$, $M_2 + M_4 = X_2$, $2M_3 = X_3$, $M_1 - M_5 = Y_1$, $M_2 - M_4 = Y_2$ setzen, so erhalten wir

$$\begin{cases} +9X_1 - 3X_2 + X_3 = Z_1 + Z_5, \\ -3X_1 + 11X_2 - 3X_3 = Z_2 + Z_4, \\ +X_1 - 3X_2 + 5X_3 = Z_3; \\ \begin{cases} +9Y_1 - 3Y_2 = Z_1 - Z_5, \\ -3Y_1 + 9Y_2 = Z_2 - Z_4. \end{cases} \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert

$$\begin{cases} 188X_1 = +23Z_1 + 6Z_2 - Z_3 + 6Z_4 + 25Z_5, \\ 188X_2 = +6Z_1 + 22Z_2 + 12Z_3 + 22Z_4 + 6Z_5, \\ 188X_3 = -Z_1 + 12Z_2 + 39Z_3 + 12Z_4 - Z_5, \\ \begin{cases} 24Y_1 = 3Z_1 + Z_2 - Z_4 - 3Z_5, \\ 24Y_2 = Z_1 + 3Z_2 - 3Z_4 - Z_5. \end{cases} \end{cases}$$

Es wird nun $2M_1 = X_1 + Y_1$, $2M_2 = X_2 + Y_2$, $2M_3 = X_3$, $2M_4 = X_2 - Y_2$, $2M_5 = X_1 - Y_1$, mithin

$$\begin{cases} 2256 M_1 = + 279 Z_1 + 83 Z_2 - 6 Z_3 - 11 Z_4 - 3 Z_5, \\ 2256 M_2 = + 83 Z_1 + 273 Z_2 + 72 Z_3 - 9 Z_4 - 11 Z_5, \\ 2256 M_3 = - 6 Z_1 + 72 Z_2 + 234 Z_3 + 72 Z_4 - 6 Z_5, \\ 2256 M_4 = - 11 Z_1 - 9 Z_2 + 72 Z_3 + 273 Z_4 + 83 Z_5, \\ 2256 M_5 = - 3 Z_1 - 11 Z_2 - 6 Z_3 + 83 Z_4 + 279 Z_5. \end{cases}$$

Nach der 3. und 4. der Formeln 12 wird nun:

$$\begin{cases} Z_1 = - 3 (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_2'') + (2 \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) l, \\ Z_2 = - 3 (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_3'') - (\mathfrak{D}_1 - 2 \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3) l, \\ Z_3 = - 3 (\mathfrak{M}_3' + \mathfrak{M}_1'') - (\mathfrak{D}_2 - 2 \mathfrak{D}_3 + \mathfrak{D}_4) l, \\ Z_4 = - 3 (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_5'') - (\mathfrak{D}_3 - 2 \mathfrak{D}_4 + \mathfrak{D}_5) l, \\ Z_5 = - 3 (\mathfrak{M}_5' + \mathfrak{M}_6'') - (\mathfrak{D}_4 - 2 \mathfrak{D}_5) l. \end{cases}$$

Wir wollen nun hieran einige weitere Bestimmungen knüpfen.

2. Einflusslinie für das Stützenmoment M_3 . Wenn die Einzellast G in einem beliebigen (dem m -ten) Mittelfelde im Abstände ξ , ξ_1 von der linken und rechten Stütze liegt, so wird nach den Gleichungen 40 (S. 114), wenn man $\mathfrak{D}_m l = G \xi$ und $\mathfrak{D}_{m-1} l = G \xi_1$ setzt,

$$Z_{m-2} = - G \xi_1, \quad Z_m l^2 = - G (l^3 - 2 l^2 \xi - \xi^3), \quad Z_{m+1} = - G \xi.$$

$$Z_{m-1} l^2 = - G (l^3 - 3 \xi_1^3) = + G (2 l^3 - 9 l^2 \xi + 9 l \xi^2 - 3 \xi^3).$$

Wenn die Last im I. Felde liegt, so wird

$$Z_1 l^2 = + G \xi (l^2 + \xi^2), \quad Z_2 l^2 = - G \xi,$$

und wenn die Last im VI. Felde liegt,

$$Z_4 l^2 = - G \xi_1, \quad Z_5 l^2 = + G \xi_1 (l^2 + \xi_1^2) = + G (l - \xi) (2 l^2 - 2 l \xi + \xi^2).$$

Wenn also die Last im I. Felde liegt, so wird Z_3 bis $Z_5 = 0$; es wird demnach $376 M_1 = - Z_1 + 12 Z_2$ oder

$$376 M_3 l^2 = - G \xi (13 l^2 + \xi^2).$$

Wenn die Last im II. Felde liegt, so wird $376 M_3 l = - Z_1 + 12 Z_2 + 39 Z_3$ oder

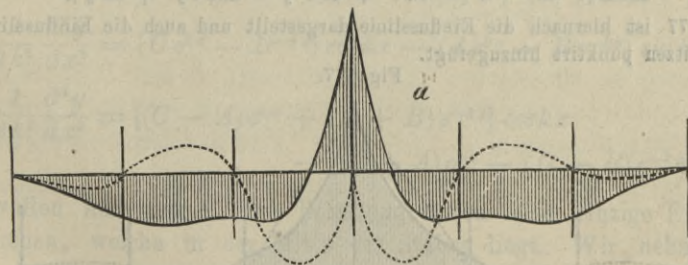
$$376 M_3 l^2 = - G (14 l^3 + 6 l^2 \xi + 9 l \xi^2 - 15 \xi^3).$$

Wenn die Last im III. Felde liegt, so wird $376 M_3 l^2 = - Z_1 + 12 Z_2 + 39 Z_3 + 12 Z_4$ oder

$$376 M_3 l^2 = - G (14 l^3 + 43 l^2 \xi - 108 l \xi^2 - 3 \xi^3).$$

Hiernach ist in Fig. 175 die Einflusslinie dargestellt. Zum Vergleich ist auch die Einflusslinie bei festen Stützen (punktirt) eingetragen.

Fig. 175.



3. Einflusslinie für das Moment M in der Mitte des III. Feldes.

Wenn das III. Feld nicht belastet wird, so wird $M = \frac{1}{2} (M_2 + M_3)$ oder

$$4512 M = 77 Z_1 + 345 Z_2 + 306 Z_3 + 63 Z_4 - 17 Z_5.$$

Wie vorhin ergibt sich für die Belastung des

- I. Feldes: $4572 M l^2 = - G (268 l^2 \xi - 77 \xi^3)$,
 II. " $4572 M l^2 = - G (191 l^3 + 309 l^2 \xi - 693 l \xi^2 - 114 \xi^3)$,
 IV. " $4572 M l^2 = - G (-204 l^3 + 2283 l^2 \xi - 2754 l \xi^2 + 838 \xi^3)$,
 V. " $4572 M l^2 = - G (163 l^3 + 295 l^2 \xi - 567 l \xi^2 + 206 \xi^3)$,
 VI. " $4572 M l^2 = - G (97 l^3 - 131 l^2 \xi + 51 l \xi^2 - 17 \xi^3)$.

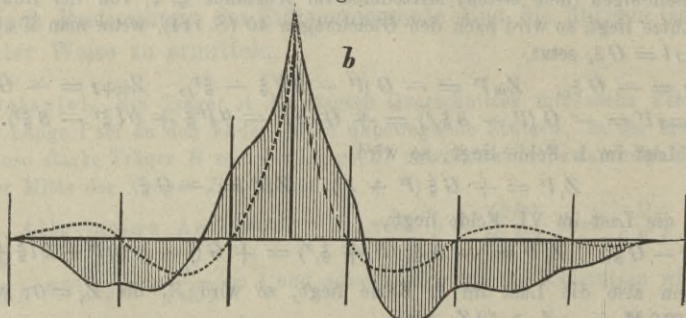
Wenn das III. Feld belastet ist, so wird $M = \frac{1}{2} (M_2 + M_3) + \frac{1}{2} G \xi$, wenn die Last links liegt und $M = \frac{1}{2} (M_2 + M_3) + \frac{1}{2} G \xi_1$, wenn die Last rechts liegt; dies gibt

$$\text{Last links: } 4572 M l^2 = + G (307 l^3 - 160 l^2 \xi + 3105 l \xi^2 - 792 \xi^3),$$

$$\text{Last rechts: } 4572 M l^2 = + G (2563 l^3 - 4672 l^2 \xi + 3105 l \xi^2 - 792 \xi^3).$$

Hiernach ist in Fig. 176 die Einflusslinie dargestellt. Auch hier ist die Einflusslinie bei festen Stützen punktirt eingetragen.

Fig. 176.



4. Einflusslinie für den Stützendruck D_3 . Wenn die Last im I., II., V. oder VI. Felde liegt, so wird nach den Formeln 8: $D_3 l = M_2 - 2M_3 + M_4$, d. i.

$$188 D_3 l = + 5 Z_1 + 34 Z_2 + 51 Z_3 + 34 Z_4 + 5 Z_5.$$

Hiernach wird bei Belastung des I. Feldes:

$$188 D_3 l^3 = - G (29 l^2 \xi - 5 \xi^3)$$

und bei Belastung des II. Feldes:

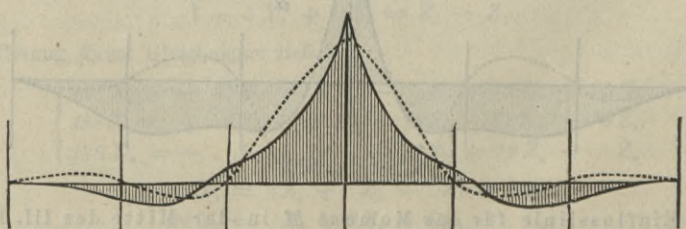
$$188 D_3 l^3 = - G (24 l^3 + 28 l^2 \xi - 45 l \xi^2 - 19 \xi^3).$$

Wenn das III. Feld belastet ist, so wird $D_3 l = G \xi + M_2 - 2M_3 + M_4$, d. i.

$$188 D_3 l^3 = - G (-12 l^3 + 45 l^2 \xi - 306 l \xi^2 + 51 \xi^3).$$

In Fig. 177 ist hiernach die Einflusslinie dargestellt und auch die Einflusslinie bei festen Stützen punktirt hinzugefügt.

Fig. 177.



Anwendungen bei Unterstüzungen von kontinuierlichen Zwischenträgern durch Querträger, bei der Bestimmung des Einflusses der Belastung offener Brücken

auf die seitliche Ausbiegung des Obergurtes (siehe des Verfassers: „Eiserne Brücken, Querkonstruktionen, S. 525^a), auf Unterstützung von Trägern durch Dreieckshängewerke (System Ordish-Lefevre) u. s. w. Anwendung auf die Unterstützung von Trägern durch Pontons, deren Einsenkung in das Wasser ebenfalls dem Stützdrucke proportional ist, machte Kupferschmid (Zeitschr. des österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1880). Anwendung auf die Beanspruchung der Eisenbahnschienen mit Rücksicht auf die Eindrückung der Querschwellen in den Schotter machte Löwe (Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1883).

§. 95. Kontinuierlich unterstützter Stab. Wir setzen jetzt einen Stab mit konstantem Querschnitte voraus, welcher kontinuierlich durch ein elastisches Mittel unterstützt ist. An einem beliebigen Punkte sei der Druck pro Längeneinheit zwischen beiden Theilen q , die Eindrückung y und es sei

$$22. \quad q = \kappa y.$$

Die Differenzialgleichung der elastischen Linie wird alsdann

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = - \kappa y.$$

oder

$$23. \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = - 4k^4 y,$$

wenn wir zur Abkürzung

$$24. \quad k = \sqrt[4]{\frac{\kappa}{4EI}}$$

setzen. Das Integral dieser Differenzialgleichung ist, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet,

$$25. \quad y = (Ae^{kx} + Be^{-kx}) \cos kx + (Ce^{kx} + De^{-kx}) \sin kx.$$

Die dreimalige Differenziation gibt

$$26. \quad \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{dy}{dx} = [(A + C)e^{kx} - (B - D)e^{-kx}] \cos kx \\ \quad \quad \quad - [(A - C)e^{kx} + (B - D)e^{-kx}] \sin kx, \\ \frac{1}{2k^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = (C e^{kx} - D e^{-kx}) \cos kx - (A e^{kx} - B e^{-kx}) \sin kx, \\ \frac{1}{2k^3} \frac{d^3 y}{dx^3} = [(C - A)e^{kx} + (D + B)e^{-kx}] \cos kx \\ \quad \quad \quad - [(C + A)e^{kx} - (D - B)e^{-kx}] \sin kx. \end{cases}$$

Wir wollen nun speziell eine Belastung durch eine einzige Einzellast untersuchen, welche in der Mitte des Stabes liegt. Wir nehmen die Mitte als Anfang der x an. Alsdann muss für $x = 0$ natürlich $\frac{dy}{dx} = 0$ werden. Dies gibt die Bedingung

$$A - B + C + D = 0.$$

Ferner wird, wenn der Stab die Länge $2l$ hat,

$$G = 2 \int_0^l q \, dx = 2\alpha \int_0^l y \, dx = -\frac{\alpha}{2k^4} \int_0^l \frac{d^4 y}{dx^4} \, dx.$$

Nun aber ist $\int \frac{d^4 y}{dx^4} \, dx = \frac{d^3 y}{dx^3}$. Für $x = l$ muss die Transversalkraft $Q = 0$ werden; da aber $Q = \frac{dM}{dx} = EI \frac{d^3 y}{dx^3}$ ist, so muss für $x = l$ $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$ werden. Sonach ist $G = \frac{\alpha}{2k^4} \frac{d^3 y}{dx^3}$ für $x = 0$, d. i.

$$A - B - C - D = -K,$$

wenn wir zur Abkürzung $\frac{Gk}{\alpha} = K$ setzen. Hiernach wird

$$27. \quad B = A + \frac{1}{2} K, \quad D = \frac{1}{2} K - C.$$

Es wird nun ferner für $x = l$ das Moment $M = 0$, daher auch $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$; ferner wird für $x = l$, wie bereits bemerkt, auch $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$. Dies gibt:

$$(C e^{kl} - D e^{-kl}) \cos kl = (A e^{kl} - B e^{-kl}) \sin kl,$$

$$[(C - A) e^{kl} + (D + B) e^{-kl}] \cos kl = [(C + A) e^{kl} - (D - B) e^{-kl}] \sin kl$$

oder, wenn wir obige Ausdrücke für B und D einsetzen,

$$A (e^{kl} - e^{-kl}) \sin kl - C (e^{kl} + e^{-kl}) \cos kl = -\frac{1}{2} K e^{-kl} (\cos kl - \sin kl),$$

$$A [(e^{kl} - e^{-kl}) \cos kl + (e^{kl} + e^{-kl}) \sin kl]$$

$$- C [(e^{kl} - e^{-kl}) \cos kl - (e^{kl} + e^{-kl}) \sin kl] = K e^{-kl} \cos kl.$$

Hieraus ergibt sich

$$28. \quad \begin{cases} A = + \frac{Gk}{2\alpha} \frac{2 + e^{-2kl} + \cos 2kl - \sin 2kl}{e^{2kl} - e^{-2kl} + \sin 2kl}, \\ C = - \frac{Gk}{2\alpha} \frac{e^{-2kl} - \cos 2kl - \sin 2kl}{e^{2kl} - e^{-2kl} + 2 \sin 2kl}. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen 18 sind jetzt auch B und D bestimmt. Wir wollen indess nur den Fall näher betrachten, in welchem l gross ist, so dass A und C gegen K nur sehr klein, also annähernd $= 0$ sind; dementsprechend wird also nahezu $B = D = \frac{1}{2} K = \frac{Gk}{2\alpha}$. Sonach wird sehr nahe

$$29. \quad y = \frac{Gk}{2\alpha} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx),$$

$$30. \quad M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{G}{4k} e^{-kx} (\cos kx - \sin kx).$$

Die Maxima von y und M treten für $x=0$ ein; es wird sonach

$$31. \max y = \frac{Gk}{2\kappa} = \frac{G}{2\kappa} \sqrt[4]{\frac{\kappa}{4EI}},$$

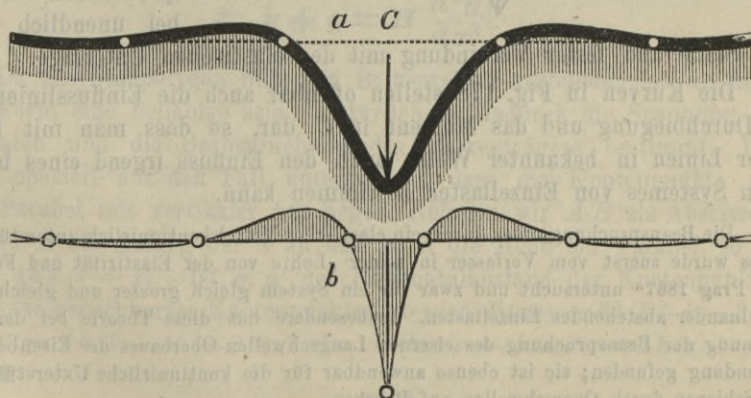
$$32. \max M = \frac{G}{4k} = \frac{1}{4} G \sqrt[4]{\frac{4EI}{\kappa}}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Zahlen:

kx	y	M	kx	y	M
0	+ 1	+ 1	$\frac{7}{4}\pi$	0	+ 0,0058
$\frac{1}{4}\pi$	+ 0,6448	0	2π	+ 0,0019	+ 0,0019
$\frac{1}{2}\pi$	+ 0,2079	- 0,2079	$\frac{9}{4}\pi$	+ 0,0012	0
$\frac{3}{4}\pi$	0	- 0,1340	$\frac{5}{2}\pi$	+ 0,0004	- 0,0004
π	- 0,0432	- 0,0432	$\frac{11}{4}\pi$	0	- 0,0003
$\frac{5}{4}\pi$	- 0,0279	0	3π	- 0,0001	- 0,0001
$\frac{3}{2}\pi$	- 0,0090	+ 0,0090	$\frac{13}{4}\pi$	- 0,0000	0
	$\frac{Gk}{2\kappa}$	$\frac{G}{4k}$		$\frac{Gk}{2\kappa}$	$\frac{G}{4k}$

Hiernach sind die elastische Linie und die Momentenkurve in Fig. 178 dargestellt. Von $kx = \frac{3}{4}\pi$ bis $kx = \frac{7}{4}\pi$ wird y negativ. Wenn

Fig. 178.



der Träger mit der elastischen Unterlage nicht fest verbunden ist, so tritt von einem gewissen Werthe von kx ab ein Abheben des Trägers ein

(Fig. 179); die Verhältnisse gestalten sich hierbei gerade so, als wenn der Stab nur die Länge AB hätte. Es ergibt sich für diese Länge genau

$$33. \quad kl = \frac{1}{2} \pi = 1,571.$$

Für dieselbe wird

$$A = -C = \frac{1 + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = 0,045, \quad B = D = \frac{1 + e^{\pi}}{e^{\pi} + e^{-\pi}} = 1,045$$

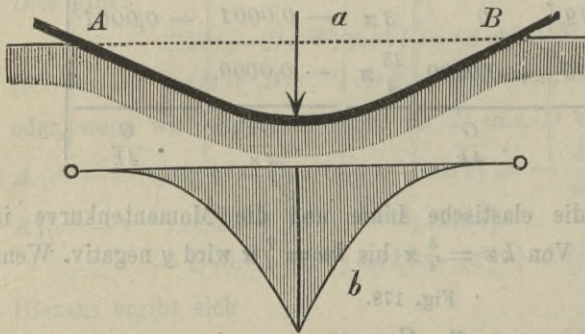
und dementsprechend

$$34. \quad y = \frac{Gk}{2x(e^{\pi} - e^{-\pi})} [(e^{kx} + e^{-\pi+kx})(\cos kx - \sin kx) + (e^{-kx} + e^{\pi-kx})(\cos kx + \sin kx)],$$

$$35. \quad M = \frac{G}{4k(e^{\pi} - e^{-\pi})} [(e^{kx} + e^{-\pi+kx})(\cos kx + \sin kx) + (e^{-kx} + e^{\pi-kx})(\cos kx - \sin kx)].$$

Hieraus ergibt sich für $kx = 0 \quad \frac{1}{8} \pi \quad \frac{1}{4} \pi \quad \frac{3}{8} \pi \quad \frac{1}{2} \pi$ bezüglich $y = 1,090 \quad 0,958 \quad 0,827 \quad 0,342 \quad 0$, $\frac{Gk}{2x}$ und $M = 1,090 \quad 0,500 \quad 2,140 \quad 0,018 \quad 0$, $\frac{G}{4k}$;

Fig. 179.



hiernach sind in Fig. 179 die Kurven für y und M dargestellt. Die grösste Durchbiegung und das grösste Moment werden hier das

$$\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = 1,090-$$

fache von den entsprechenden Werthen bei unendlich langem Stabe und fester Verbindung mit der elastischen Unterlage.

Die Kurven in Fig. 178 stellen offenbar auch die Einflusslinien für die Durchbiegung und das Moment in C dar, so dass man mit Hilfe dieser Linien in bekannter Weise auch den Einfluss irgend eines beliebigen Systemes von Einzellasten bestimmen kann.

Die Beanspruchung eines durch ein elastisches Mittel kontinuierlich unterstützten Stabes wurde zuerst vom Verfasser in seiner „Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867“ untersucht und zwar für ein System gleich grosser und gleich weit von einander abstehender Einzellasten. Insbesondere hat diese Theorie bei der Bestimmung der Beanspruchung des eisernen Langschwelen-Oberbaues der Eisenbahnen Anwendung gefunden; sie ist ebenso anwendbar für die kontinuierliche Unterstützung von Schienen durch Querschwellen auf Brücken.

der Träger mit der elastischen Unterlage nicht fest verbunden ist, so tritt ein Abheben des Trägers ein, was zu einem gewissen Grade ein

XI. Kapitel.

Verbindung des Balkenträgers mit dem Stabpolygon.

§. 96. Gleichgewichtsbedingungen des Stabpolygons.

Wir wollen als Anwendung der Theorie der kontinuierlichen Träger noch die Verbindung eines Balkenträgers mit einem schlaffen Hänge- oder Sprengwerke, welche letztere wir unter dem Namen Stabpolygon zusammenfassen, behandeln. Beide seien durch vertikale Stäbe mit einander verbunden.

Bezeichnen wir die Spannungen der von einem Knotenpunkte E ausgehenden Stäbe mit S, S' , die Neigungswinkel derselben gegen die Horizontale mit τ, τ' , so muss zunächst $S \cos \tau = S' \cos \tau'$ sein, es ist somit die Horizontalkomponente H der Spannungen konstant. Ist nun V die Spannung der von E ausgehenden Vertikalen, \mathfrak{G} die in E wirkende Knotenlast, so muss ferner $V + \mathfrak{G} = S \sin \tau - S' \sin \tau'$ sein; da nun $S = H \sec \tau, S' = H \sec \tau'$ ist, so wird

$$1. \quad V + \mathfrak{G} = H (\tan \tau - \tan \tau').$$

Denkt man sich die Knotenpunkte unendlich nahe und dem entsprechend das Stabpolygon kontinuierlich gekrümmt, so ist, wenn V die Spannung der Vertikalen, g die Knotenlast auf die horizontale Längeneinheit bezeichnen, $(v + g) dx$ für $V + \mathfrak{G}$, $d \frac{dy}{dx}$ für $\tan \tau' - \tan \tau$ zu setzen. Da $\tan \tau = \frac{dy}{dx}$ ist, so wird

$$2. \quad v + g = H \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Da das Stabpolygon mit dem Balkenträger verbunden ist, so kann seine Form eine beliebige sein; natürlich ist dadurch die Spannung der Vertikalen und die Beanspruchung des Balkenträgers bestimmt. Wir wollen speziell nur den Fall untersuchen, dass die Knotenpunkte auf einer Parabel mit vertikaler Axe liegen. Nehmen wir AB als Abscissenaxe und A als Anfang der x an und ist h die Höhe der Parabel, so ist $l^2 y = 4hx(l - x)$. Ist a, a' der Horizontalabstand des Knotenpunktes E von den benachbarten Knotenpunkten, so wird $l^2 \tan \tau = 4h(l + a - 2x)$, $l^2 \tan \tau' = 4h(l - a' - 2x)$, also $l^2 (\tan \tau - \tan \tau') = 4h(a + a')$, folglich

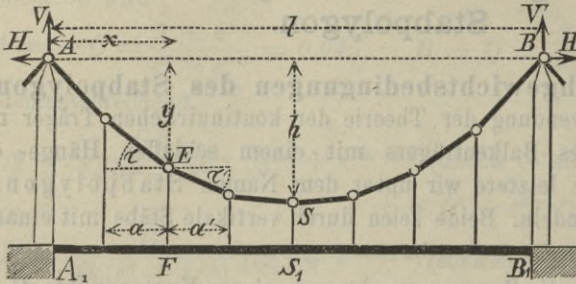
$$3. \quad V + \mathfrak{G} = \frac{4Hh(a + a')}{l^2},$$

und bei kontinuierlicher Krümmung

$$4. \quad v + g = 8 \frac{Hh}{l^2},$$

da hier $(v + g) dx$ für $V + \mathfrak{G}$ und $2dx$ für $a + a'$ zu setzen ist.

Fig. 180.



Je stärker der Balkenträger konstruirt ist, je kleiner also seine Formänderung ist, mit desto grösserer Genauigkeit wird man annehmen können, dass die Gleichungen 1 bis 4 auch nach der Formänderung gültig seien, dass also bei ursprünglich parabolischer Kette $v + g$ auch nach der Formänderung konstant ist. Wenn wir aber die Formänderung berücksichtigen, so haben wir, wenn sich der Knotenpunkt E um Δy , die links und rechts von E liegenden Knotenpunkte um $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$ senken und wenn wir die allerdings nicht ganz richtige, bei flachem Stabpolygone indess zulässige Annahme machen, dass sich die Horizontalprojektion der Stäbe bei der Formänderung nicht ändern, $\tan \tau' = \frac{\Delta y - \Delta_2 y}{a'}$ für $\tan \tau'$ und $\tan \tau + \frac{\Delta y - \Delta_1 y}{a}$ für $\tan \tau$ zu setzen; es wird somit

5. $V + \mathfrak{G} = H \left[\tan \tau - \tan \tau' - \frac{\Delta_1 y - \Delta y}{a} + \frac{\Delta y - \Delta_2 y}{a'} \right]$

und bei kontinuierlicher Krümmung

$$6. \quad v + g = -H \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} \right).$$

Hierin ist bei parabolischer Kette, wie oben $l^2 (\tan \tau - \tan \tau') = 4h(a + a')$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{8h}{l^2}$ zu setzen.

Bei der Untersuchung der Belastung des Balkenträgers, die wir im Folgenden allein durchführen wollen, ist natürlich $\mathfrak{G} = 0$, $g = 0$ zu setzen.

§. 97. Formänderung des Stabpolygons. Bezeichnen wir die Längen der Stäbe des Stabpolygons mit λ , so wird

$$x = \Sigma (\lambda \cos \tau), \quad y = \Sigma (\lambda \sin \tau),$$

wobei die Summirung von A bis zu dem betreffenden Knotenpunkte E zu erstrecken ist. Hiernach wird, wenn sich λ um $\Delta \lambda$, τ um $\Delta \tau$

ändert, die Aenderung von x und y unter der Voraussetzung, dass die Aenderungen nur sehr klein sind,

$$7. \quad \begin{cases} \Delta x = \Sigma (-\lambda \sin \tau \Delta \tau + \cos \tau \Delta \lambda), \\ \Delta y = \Sigma (\lambda \cos \tau \Delta \tau + \sin \tau \Delta \lambda). \end{cases}$$

Wenn man die letzte Gleichung für zwei benachbarte Knotenpunkte, deren vertikale Verschiebungen Δy , $\Delta y'$ seien, anwendet und die Differenz bildet, so erhält man

$$\Delta y - \Delta y' = \lambda \cos \tau \Delta \tau + \sin \tau \Delta \lambda,$$

also

$$8. \quad \Delta \tau = \frac{\Delta y - \Delta y'}{\lambda \cos \tau} - \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \tan \tau.$$

Dies in den Ausdruck für Δx eingesetzt, gibt $\Delta x = -\Sigma (\Delta y - \Delta y') \tan \tau + \Sigma \left(\Delta \lambda \frac{\sin^2 \tau}{\cos \tau} + \Delta \lambda \cos \tau \right)$ oder

$$9. \quad \Delta x = -\Sigma [(\Delta y - \Delta y') \tan \tau] + \Sigma (\Delta \lambda \sec \tau).$$

Zwei auf einander folgende Glieder der Summe enthalten die Größen $-\Delta y \tan \tau$ und $\Delta y' \tan \tau'$, wenn τ und τ' die Neigungswinkel der an den Knotenpunkten E anstossenden Stäbe bezeichnen. Daher kann man auch schreiben

$$10. \quad \Delta x = -\Sigma [\Delta y (\tan \tau - \tan \tau')] + \Sigma (\Delta \lambda \sec \tau).$$

Für den Punkt B muss sich $\Delta x = 0$ ergeben, falls die Lagerpunkte A und B als unverschieblich angesehen werden können. Setzt man ausserdem für das parabolische Stabpolygon $l^2 (\tan \tau - \tan \tau') = 4h(a + a')$, so erhält man

$$11. \quad \frac{4h}{l^2} \Sigma [(a + a') \Delta y] - \Sigma (\Delta \lambda \sec \tau) = 0.$$

Ist F die Querschnittsfläche des Stabes mit der Länge λ , so ist $\Delta \lambda = \frac{S\lambda}{EF} = H \frac{\lambda \sec \tau}{EF}$. Ist nun $\Delta_0 y$ die vertikale Senkung des Punktes F des Balkenträgers, η die Länge der Vertikalen EF , $\Delta \eta$ ihre Längenänderung, f ihre Querschnittsfläche, so ist $\Delta y = \Delta_0 y - \Delta \eta = \Delta_0 y - \frac{V\eta}{EF}$, d. i. nach der Gleichung 3 für $\mathcal{G} = 0$: $\Delta y = \Delta_0 y - \frac{4Hh(a + a')\eta}{El^2 f}$.

Dies eingesetzt, gibt

$$12. \quad \Sigma [(a + a') \Delta_0 y] = \frac{Cl}{4Eh} H,$$

wenn man zur Abkürzung

$$13. \quad C = l \Sigma \left(\frac{\lambda}{F} \sec^2 \tau \right) + \frac{16h^2}{l^3} \Sigma \frac{(a + a')^2 \eta}{f}$$

setzt. Berücksichtigt man nur die statische, nicht aber die elastische Formänderung, so wird wesentlich einfacher

$$14. \quad \Sigma [(a + a') \Delta_0 y] = 0$$

und, wenn a konstant ist, $\Sigma \Delta_0 y = 0$.

Die Gleichungen 12 bis 14 können auch noch bei Benützung der Gleichungen 5 und 6 beibehalten werden, da bei Benützung dieser Gleichungen nur der ohnehin geringe Einfluss der Längenänderung der Vertikalen eine Aenderung erfahren würde.

Sind die Lager bei A und B in horizontaler Richtung ohne Widerstand verschieblich und sind dieselben durch Spannketten mit den Längen λ_1, λ_2 und den Neigungswinkeln τ_1, τ_2 festgehalten, so entsteht durch die Verlängerung $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2$ der Spannketten eine Verkürzung $\Delta\lambda_1 \sec \tau_1 + \Delta\lambda_2 \sec \tau_2$ der Spannweite AB . Die Spannungen der Spannketten sind $H \sec \tau_1$ und $H \sec \tau_2$. Daher wird, wenn F_1, F_2 die Querschnittsflächen der Spannketten sind, die Längenänderung Δl der Spannweite

$$15. \quad \Delta l = -\frac{H}{E} \left[\frac{\lambda_1}{F_1} \sec^2 \tau_1 + \frac{\lambda_2}{F_2} \sec^2 \tau_2 \right].$$

Dies hat zur Folge, dass in Gleichung 11 auf der rechten Seite $-\Delta l$ statt 0 zu schreiben ist. Die Gleichung 12 bleibt dann richtig, wenn man

$$16. \quad C = l \left[\Sigma \frac{\lambda \sec^2 \tau}{F} + \frac{\lambda_1 \sec^2 \tau_1}{F_1} + \frac{\lambda_2 \sec^2 \tau_2}{F_2} \right] + \frac{16h^2}{l^3} \Sigma \frac{(a+a')^2 \eta}{f}$$

setzt.

Bei kontinuierlicher Krümmung ist $2 \int_0^l \Delta_0 y dx$ für $\Sigma [(a+a') \Delta_0 y]$ zu setzen. Bezeichnen wir eine mittlere Senkung mit $\Delta_m y$, so ist

$$l \Delta_m y = \int_0^l \Delta_0 y dx, \text{ folglich wird}$$

$$17. \quad \Delta_m y = \frac{C}{8Eh} H.$$

Hierin wird

$$18. \quad C = l \int_0^l \frac{dx \sec^3 \tau}{F} + \frac{l \lambda_1}{F_1} \sec^2 \tau_1 + \frac{l \lambda_2}{F_2} \sec^2 \tau_2 + \frac{64h^2}{l^3} \int_0^l \eta \frac{dx}{\varphi},$$

wenn φ den Querschnitt der Vertikalen für die horizontale Längeneinheit bezeichnet. Wenn der Querschnitt F proportional der Spannung $H \sec \tau$ ist, so wird $F = F_0 \sec \tau$, wenn F_0 den Querschnitt im Scheitel bezeichnet. Alsdann wird

$$\begin{aligned} l \int_0^l \frac{dx \sec^3 \tau}{F} &= \frac{l}{F_0} \int_0^l dx \sec^2 \tau \\ &= \frac{l}{F_0} \int_0^l dx \left[1 + \frac{16h^2}{l^4} (l - 2x)^2 \right] = \frac{l^2}{F_0} \left(1 + \frac{16h^2}{3l^2} \right). \end{aligned}$$

Ferner wird, wenn η_0 den Abstand des Scheitels vom Balkenträger bezeichnet, $\eta = \eta_0 + h - \frac{4}{l^2} x(l-x)$, daher, falls φ konstant ist,

$$\int_0^l \frac{\eta dx}{\varphi} = \frac{l}{\varphi} \left(\eta_0 + \frac{1}{3} h \right), \text{ somit}$$

$$18a. \quad C = \frac{l^2}{F_0} \left(1 + \frac{16h^2}{3l^2} \right) + \frac{l\lambda}{F_1} \sec^2 \tau_1 + \frac{l\lambda_2}{F_2} \sec^2 \tau_2 + \frac{64h^2}{3l^2\varphi} (3\eta_0 + h).$$

Bei konstantem Querschnitte F ergibt sich, dass $1 + 8\frac{h^2}{l^2} + \frac{96h^4}{5l^4} + \dots$ statt $1 + \frac{16h^2}{3l^2}$ zu setzen ist. Bei blosser Berücksichtigung der statischen Formänderung würde

$$19. \quad \Delta_m y = 0$$

zu setzen sein.

§ 98. Bestimmung der Horizontalspannung H . Wir unterscheiden bei dieser Bestimmung die folgenden beiden Fälle:

1. Der Balkenträger ist in der Mitte getrennt. In diesem Falle ist die Konstruktion statisch bestimmt. Liegen in den beiden Trägerhälften die Lasten G' , G'' in den Abständen ξ' , ξ'' von den Stützen, so ergeben sich für die Vertikalreaktionen in A und B die Bedingungen $D'l = G'(l - \xi') + G''\xi''$ und $D''l = G'\xi' + G''(l - \xi'')$. Für den Scheitel erhält man die Momentengleichung $Hh = \frac{1}{2} D'l - G'(\frac{1}{2}l - \xi')$ und hieraus

$$20. \quad H = \frac{G'\xi' + G''\xi''}{2h}.$$

Hierbei ist in G' und G'' das Gewicht des Stabpolygons der Vertikalen und Balkenträger mit einzurechnen. Durch die Formeln 1 bis 4 sind jetzt die Spannungen V , v der Vertikalen bestimmt.

Ist nur eine einzige Einzellast G vorhanden, welche vom linken Ende den Abstand ξ hat, so wird, je nachdem dieselbe auf der linken oder rechten Hälfte liegt,

$$21. \quad H = \frac{G\xi}{2h}, \quad H = \frac{G(l - \xi)}{2l}.$$

Die Einflussfigur ist hiernach ein gleichschenkliges Dreieck. Bei kontinuierlicher Krümmung wird nach Formel 4 die Spannung der Vertikalen:

$$22. \quad v = \frac{G\xi}{l^2}, \quad v = \frac{G(l - \xi)}{l^2}.$$

Bei gänzlicher Belastung mit der Last p pro Längeneinheit wird hiernach $H = \frac{1}{2} \frac{l}{4h} \cdot lp = \frac{pl^2}{8h}$ und $v = p$.

2. Kontinuierlicher Balkenträger. I. Verfahren. Nach der Gleichung 13 (S. 96) wird, wenn wir die Zeiger von drei auf einander folgenden Knotenpunkten des Balkenträgers mit $m-1, m, m+1$, die Senkung derselben entsprechend mit $\Delta y_{m-1}, \Delta y_m, \Delta y_{m+1}$ bezeichnen,

$$23. \quad \gamma_m a_m M_{m-1} + 2(\alpha_m a_m + \beta_{m+1} a_{m+1}) M_m + \gamma_{m+1} a_{m+1} M_{m+1} \\ + 3 a_m \mathfrak{M}'_m + 3 a_{m+1} \mathfrak{M}'_{m+1} \\ = - \frac{6 E I_0}{a_m a_{m+1}} [a_{m+1} \Delta y_{m-1} - (a_{m+1} + a_m) \Delta y_m + a_m \Delta y_{m+1}].$$

Nachdem man bei n Feldern die $n-1$ Gleichungen nach diesem Schema aufgestellt hat, bestimmt man diejenigen Koeffizienten c_1, c_1, \dots, c_{n-1} , mit welchen diese Gleichungen multipliziert werden müssen, damit bei der Addition sämtlicher Gleichungen auf der rechten Seite die Summe $(a_1 + a_2) \Delta y_1 + (a_2 + a_3) \Delta y_2 + \dots = \Sigma [(a + a') \Delta y]$ erscheint. Bei gleichen Längen ergibt sich leicht, dass man allgemein

$$24. \quad c_m = - \frac{m(n-m)}{2}$$

setzen kann. So wird beispielsweise für $n=6$: $c_1 = -\frac{5}{2}$, $c_2 = -4$, $c_3 = -\frac{9}{2}$, $c_4 = -4$, $c_5 = -\frac{5}{2}$. Durch Addition sämtlicher Gleichungen erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung 12 eine Gleichung von der Form

$$25. \quad \frac{ClH}{4Eh} = m_1 M_1 + m_2 M_2 + \dots + m_{n-1} M_{n-1} \\ + \mu_1 \mathfrak{M}'_1 + \mu'_2 \mathfrak{M}'_2 + \mu''_2 \mathfrak{M}''_2 + \dots + \mu_{n-1} \mathfrak{M}''_{n-1}.$$

Nach der Gleichung 28 (S. 104) wird, wenn man beachtet, dass hier nach Gleichung 3 $D_m = V_m = \frac{4Hh}{l^2} (a_m + a_{m+1})$ ist,

$$26. \quad M_{m-1} a_{m+1} - M_m (a_m + a_{m+1}) + M_{m+1} a_m \\ = \left[\frac{4Hh}{l^2} (a_m + a_{m+1}) - \mathfrak{D}_m a_m a_{m+1} \right].$$

Die $n-1$ nach diesem Schema gebildeten Gleichungen reduziert man auf M_1, M_2, \dots und setzt die erhaltenen Ausdrücke in die vorige Gleichung ein. Man erhält hierdurch einen Ausdruck für H in der Form

$$27. \quad H = \delta_1 \mathfrak{D}_1 + \delta_2 \mathfrak{D}_2 + \dots + \delta_{n-1} \mathfrak{D}_{n-1} \\ + \mu \mathfrak{M}'_1 + \mu'_2 \mathfrak{M}'_2 + \mu''_2 \mathfrak{M}''_2 + \dots + \mu_{n-1} \mathfrak{M}''_{n-1}.$$

3. Kontinuierlicher Balkenträger. II. Verfahren. Anstatt die Theorie der kontinuierlichen Träger zu Hilfe zu nehmen, kann man auch eine mehr unmittelbare Bestimmung durchführen. Wir wollen hierzu nur eine Belastung durch eine an beliebiger Stelle C im Abstände ξ, ξ_1 von beiden Enden liegende Einzellast G voraussetzen. Wir setzen $\Sigma [(a + a') \Delta_0 y] = 2l \Delta_m y$, wobei, wie oben, $\Delta_m y$ eine mittlere Durch-

biegung bezeichnet, welche sich zusammensetzt aus der von der Einzelast G hervorgerufenen mittleren Durchbiegung $\Delta'_m y$ und aus der von den nach oben wirkenden Kräften V hervorgerufenen mittleren Durchbiegung $\Delta''_m y$.

Wir denken uns nun, um zunächst $\Delta'_m y$ zu bestimmen, in jedem Knotenpunkte des Balkenträgers die Kraft $c(a+a')$ nach unten wirkend, wobei c beliebig, auch $=1$, gewählt werden kann. Diese Belastung erzeuge in einem beliebigen Querschnitte das Moment m . Das Moment M , welches in demselben Querschnitte die Einzellast G erzeugt, ist auf der linken Seite der Einzellast $=\frac{G\xi_1}{l}x$, auf der rechten Seite $=\frac{G\xi}{l}x_1$, wenn x und x_1 den Abstand des Querschnittes vom linken und rechten Ende bedeutet. Nach dem Prinzipie der virtuellen Arbeit ergibt sich entsprechend dem §. 55:

$$28. \quad c \Sigma [(a+a') \Delta_0 y] = 2cl \Delta'_m y = \frac{G}{El} \left[\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{m x}{I} dx + \xi \int_0^{\xi_1} \frac{m x_1}{I} dx_1 \right],$$

wobei natürlich m eine im Allgemeinen unstetige Funktion von x und x_1 ist.

Wir denken uns jetzt jeden Knotenpunkt des Balkenträgers mit der Last $c_1(a+a')$ belastet und bestimmen die Durchbiegung Δy des Punktes C , in welchem vorhin die Einzellast G angenommen wurde. Diese Belastung wird offenbar in einem beliebigen Querschnitte das Moment $m \frac{c_1}{c}$ erzeugen. Eine in C gedachte Last 1 erzeugt in diesem Querschnitte das Moment $\frac{\xi_1}{l}x$ auf der linken, das Moment $\frac{\xi}{l}x_1$ auf der rechten Seite von C . Daher ist nach dem Prinzipie der virtuellen Arbeit

$$\Delta y = \frac{c_1}{Ec l} \left[\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{m x}{I} dx + \xi \int_0^{\xi_1} \frac{m x_1}{I} dx_1 \right].$$

Hiernach wird $\Delta'_m = \Delta y$, wenn man $c_1 = \frac{G}{2l}$ setzt, wenn man also in jedem Knotenpunkte die Last $\frac{a+a'}{2} \frac{G}{l}$ wirken lässt, was einer gleichmässigen Vertheilung der Last G über die ganze Länge l entsprechen würde. Wir können hiernach den Satz aussprechen: Die mittlere Durchbiegung $\Delta'_m y$ bei der Belastung durch eine Einzellast ist gleich der Durchbiegung des Angriffspunktes der Einzellast in dem Falle, dass man die Last über die Knotenpunkte gleichmässig vertheilt¹⁾.

¹⁾ Dieser Satz bildet eine spezielle Anwendung des allgemeinen Castigliano'schen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Da $V = \frac{4Hh}{l^2} (a + a')$ ist, so ist $\Delta''_m y$ gleich dem $8 \frac{Hh}{Gl}$ fachen der mittleren Durchbiegung in dem Falle, dass jeder Knotenpunkt mit der Last $\frac{a+a'}{2} \frac{G}{l}$ belastet ist. Setzt man für diese Belastung die Senkung Δy des Punktes $C = A \frac{G}{El}$, die mittlere Senkung $\Delta_m y$ der Knotenpunkte $= B \frac{G}{El}$, so ist $\Delta_m y = A \frac{G}{El} - 8 \frac{Hh}{Gl} \cdot B \frac{G}{El}$, also nach Formel 12:

$$28. \quad H = G \frac{8A}{64 \frac{h}{l} B + \frac{l}{h} C}.$$

Vernachlässigt man das Glied mit C , so wird $H = \frac{Al}{8Bh} G$ oder

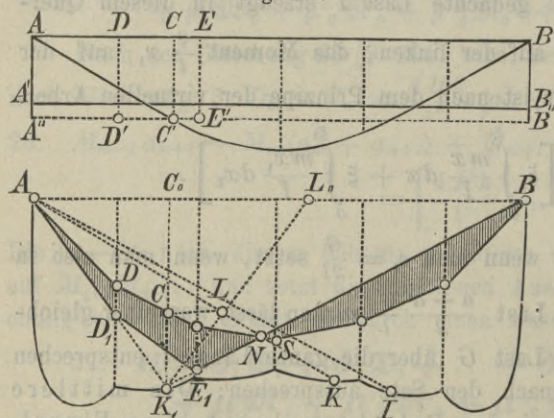
$$29. \quad H = \frac{1}{8} G \frac{l \Delta y}{h \Delta_m y},$$

$$30. \quad V = G \frac{\Delta y}{\Delta_m y} \frac{a + a'}{2l}.$$

Mit Rücksicht auf das Glied C sind diese Werthe noch durch den konstanten Werth $1 + \frac{Cl^2}{64Bh^2}$ zu dividiren.

Man kann hieran auch die grafische Bestimmung knüpfen. Bestimmt man die Senkungen der Knotenpunkte des Balkenträgers unter der Annahme, dass in jedem

Fig. 181.



Knotenpunkte die Last $\frac{a+a'}{2} \frac{G}{l}$ liegt, durch Rechnung oder Konstruktion (die letztere werden wir später behandeln) und wählt den Massstab so, dass die Fläche $ABB'A'$ (Fig. 181), d. i. die Fläche $l \Delta_m y = G$ wird, so wird $V = \frac{1}{2}(a+a') \Delta y$, es entspricht also V für den Punkt C

der Fläche $DEE'D'$, H dagegen der Fläche $l \Delta y \cdot \frac{l}{8h}$, also dem $\frac{l}{8h}$ fachen der Fläche $ABB'A''$.

Die Linie $AC'B$ ist offenbar die Einflusslinie für H . Mit Hilfe derselben kann man nun den Werth von H für jede beliebige Belastung in bekannter Weise bestimmen.

Diese Methode ist ebenso gut bei polygonalem als stetig gekrümmtem Stabpolygone anwendbar.

4. Kontinuierlicher Balkenträger konstanten Querschnittes, parabolisch stetig gekrümmtes Stabpolygon. Eine gleichmässig über einen Balkenträger mit der Länge l vertheilte Belastung p pro Längeneinheit erzeugt das Moment $\frac{1}{2} p x (l - x)$. Eine im Abstände ξ vom linken Ende gedachte Einzellast 1 erzeugt in einem linken und rechten Querschnitte bezüglich das Moment $\frac{l-\xi}{l} x$ und $\frac{\xi}{l} (l - x)$; daher wird nach dem Principe der virtuellen Arbeit die Senkung im Abstände x vom linken Ende

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{p}{2EI} \left[(l-x) \int_0^x x^2 (l-x) dx + x \int_0^{l-x} x (l-x)^2 d(l-x) \right] \\ &= \frac{p}{24EI} x (l-x) (l^2 + lx - x^2). \end{aligned}$$

Nach dem Vorigen ist also die mittlere Durchbiegung, welche eine im Abstände ξ vom linken Ende liegende Einzellast G erzeugt, $\Delta'_m y = \frac{G}{24EI} \xi (l - \xi) (l^2 + l\xi - \xi^2)$. Die mittlere Durchbiegung, welche die nach oben wirkende Belastung v pro Längeneinheit bewirkt, ist ferner

$$\Delta''_m y = - \frac{v}{24EI} \int_0^l x (l-x) (l^2 + lx - x^2) = - \frac{vl^4}{120EI}. \text{ Sonach wird}$$

$$30a. \quad \Delta_m y = \frac{G}{24EI} \xi (l - \xi) (l^2 + l\xi + \xi^2) - \frac{vl^4}{120EI}.$$

Die mittlere Senkung, welche durch die Senkung $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$ der Endvertikalen entsteht, ist $\frac{1}{2} (\Delta_1 y + \Delta_2 y)$. Bei der Länge h_1 und der

Querschnittsfläche f_1 der Endvertikalen wird $\Delta_1 y = \frac{D_1 h}{E f_1} = \frac{h_1}{E f_1} \left(G \frac{\xi}{l} - \frac{1}{2} v l \right)$

$\Delta_2 y = \frac{D_2 h_1}{E f_1} = \frac{h_1}{E f_1} \left(G \frac{\xi}{l} - \frac{1}{2} v l \right)$, also $\frac{1}{2} (\Delta_1 y + \Delta_2 y) = \frac{h_1}{E f_1} \left(G - \frac{1}{2} v l \right)$.

Dieser Ausdruck ist zu dem vorigen Ausdrucke von $\Delta_m y$ noch hinzuzufügen. Setzen wir nun nach 4: $vl^2 = 8Hh$, so geben die Gleichungen 17 und 18a:

$$31. \quad H = G \frac{5\xi(l-\xi)(l^2+l\xi-\xi^2) + 120 \frac{I l h_1}{f_1}}{8l^3 h (1 + \alpha)},$$

wenn man zur Abkürzung

$$32. \quad \alpha = \frac{15I}{8l^3 h} \left[\frac{l^3}{F_0 h} + \frac{16lh}{3F_0} + \frac{l^2 \lambda_1}{F_1 h} \sec^2 \tau_1 + \frac{l^2 \lambda_2}{F_2 h} \sec^2 \tau_2 \right. \\ \left. + \frac{2h h_1}{f_1} + \frac{64h}{3l\varphi} (3\eta_0 + h) \right]$$

setzt. Ist statt der Spannketten ein Spannriegel mit der Querschnittsfläche F_3 vorhanden, so ist $\frac{l^3}{F_3 h}$ statt der Summe der Glieder mit τ_1, τ_2 zu setzen. Sind die Auflagerpunkte A und B , sowie die Enden des Balkenträgers in vertikaler Richtung unverschieblich, so werden die Glieder mit f_1 Null. Bei blosser Berücksichtigung der statischen Formänderung ergibt sich

$$33. H = \frac{5G\xi(l-\xi)(l^2+l\xi-\xi^2)}{8l^3h}$$

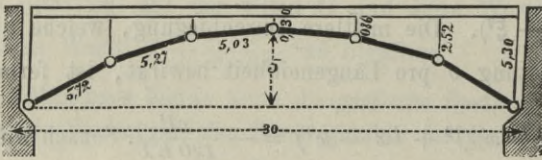
Bei gänzlicher gleichmässiger Belastung wird hiernach $H =$

$$\frac{5p}{8l^3h} \int_0^l x(l-x)(l^2+lx-x^2) dx = \frac{pl^2}{8h} \text{ und allgemeiner}$$

$$34. H = \frac{pl^2}{8h(1+\alpha)} \left(1 + 120 \frac{Ih_1}{f_1 l^3} \right)$$

Beispiel. Eiserner Polygonal-Sprengwerksträger mit 30m Stützweite mit Versteifung durch einen Blechträger (Fig. 182). Es seien für die Stäbe des Sprengwerkes $\lambda = 572, 527, 503$

Fig. 182.



Cent., $F = 103, 95, 90 \square \text{cm}$, $\sec \tau = 1,144, 1,054, 1,006$, $\sec^2 \tau = 1,309, 1,111, 1,012$, für die Vertikalen (mit Ausschluss der Endvertikalen) $\eta = 252, 86, 30 \text{ Cent.}$, $f = 250 \square \text{cm}$. Es wird hiernach

$$\sum \frac{\lambda \sec^2 \tau}{F} = 38,2, \quad \frac{16h^2}{l^4} \sum \frac{(a+a')^2 \eta}{f} = 3,5, \quad C = 3000(38,2 + 3,5) = 124500,$$

also, wenn wir $E = 2000 \text{ Ton. pro } \square \text{cm}$ setzen,

$$\sum [(a + a') \Delta y] = \frac{124500 \cdot 3000}{4 \cdot 2000 \cdot 500} H = 93,4 H.$$

Die Gleichung 23 gibt bei konstantem Querschnitte des Balkenträgers

$$a. \begin{cases} (4M_1 + M_2 + 3W'_1 + 3W''_2) a^2 + 6EI(\Delta y_0 - 2\Delta y_1 + \Delta y_2) = 0, \\ (M_1 + 4M_2 + M_3 + 3W'_2 + 3W''_3) a^2 + 6EI(\Delta y_1 - 2\Delta y_2 + \Delta y_3) = 0, \\ (M_2 + 4M_3 + M_4 + 3W'_3 + 3W''_4) a^2 + 6EI(\Delta y_2 - 2\Delta y_3 + \Delta y_4) = 0, \\ (M_3 + 4M_4 + M_5 + 3W'_4 + 3W''_5) a^2 + 6EI(\Delta y_3 - 2\Delta y_4 + \Delta y_5) = 0, \\ (M_4 + 4M_5 + 3W'_5 + 3W''_6) a^2 + 6EI(\Delta y_4 - 2\Delta y_5 + \Delta y_6) = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Formel 24 entsprechend, mit $-5, -8, -9, -8, -5$ und addirt sie sodann, so erhält man, da $2a(\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4 + \Delta y_5) = 93,4 H$ sein muss,

$$b. (28M_1 + 46M_2 + 52M_3 + 46M_4 + 28M_5) a^3 + 3(5W'_1 + 8W'_2 + 5W''_2 + 9W'_3 + 8W''_3 + 8W'_4 + 9W''_4 + 5W'_5 + 8W''_5 + 5W''_6) a^3 = -EI(30a\Delta y_0 + 30a\Delta y_6 - 560,4H).$$

Hierin ist

$$30EI(\Delta y_0 + \Delta y_6) a = \frac{30I(D_0 + D_6) h_1 a}{f_1} = \frac{30Ih_1}{f_1 l^3} (M_1 + M_5 + D_0 a + D_6 a) a^2$$

und, wenn wir $h_1 = 530, f_1 = 40$ setzen

$$c. 30EI(\Delta y_0 + \Delta y_6) a = 0,168 (M_1 + M_5 + D_0 a + D_6 a) a^3.$$

Nach der Gleichung 26 wird

$$d. \begin{cases} -2M_1 + M_2 = \left(\frac{2}{9}H - \mathfrak{D}_1\right)a, \\ M_1 - 2M_2 + M_3 = \left(\frac{2}{9}H - \mathfrak{D}_2\right)a, \\ M_2 - 2M_3 + M_4 = \left(\frac{2}{9}H - \mathfrak{D}_3\right)a, \\ M_3 - 2M_4 + M_5 = \left(\frac{2}{9}H - \mathfrak{D}_4\right)a, \\ M_4 - 2M_5 = \left(\frac{2}{9}H - \mathfrak{D}_5\right)a. \end{cases}$$

Die Auflösung gibt

$$e. \begin{cases} 18M_1 = 3(5\mathfrak{D}_1 + 4\mathfrak{D}_2 + 3\mathfrak{D}_3 + 2\mathfrak{D}_4 + \mathfrak{D}_5)a - 10Ha, \\ 18M_2 = 6(2\mathfrak{D}_1 + 4\mathfrak{D}_2 + 3\mathfrak{D}_3 + 2\mathfrak{D}_4 + \mathfrak{D}_5)a - 16Ha, \\ 18M_3 = 9(\mathfrak{D}_1 + 2\mathfrak{D}_2 + 3\mathfrak{D}_3 + 2\mathfrak{D}_4 + \mathfrak{D}_5)a - 18Ha, \\ 18M_4 = 6(\mathfrak{D}_1 + 2\mathfrak{D}_2 + 3\mathfrak{D}_3 + 4\mathfrak{D}_4 + 2\mathfrak{D}_5)a - 16Ha, \\ 18M_5 = 3(\mathfrak{D}_1 + 2\mathfrak{D}_2 + 3\mathfrak{D}_3 + 4\mathfrak{D}_4 + 5\mathfrak{D}_5)a - 10Ha. \end{cases}$$

Dies in die Gleichung *b* gesetzt, gibt unter Berücksichtigung der Gleichung *c*:

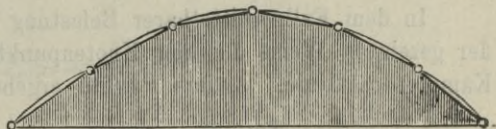
$$\begin{aligned} \left(164,9 - 560,4 \frac{EI}{a^3}\right) H &= 99\mathfrak{D}_1 + 171\mathfrak{D}_2 + 197\mathfrak{D}_3 + 171\mathfrak{D}_4 + 99\mathfrak{D}_5 - 0,17(\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_6) \\ &+ \frac{3}{a}(5\mathfrak{M}_1' + 8\mathfrak{M}_2' + 5\mathfrak{M}_2'' + 9\mathfrak{M}_3' + 8\mathfrak{M}_3'' + 8\mathfrak{M}_4' + 9\mathfrak{M}_4'' + 5\mathfrak{M}_5' + 8\mathfrak{M}_5'' + 5\mathfrak{M}_6''). \end{aligned}$$

Setzen wir $I = 52800$, so wird $560,4 EI = 0,611^4$, der Einfluss der elastischen Formänderung also nur gering. Hiernach ergibt sich nun

$$\begin{aligned} f. H &= -0,001(\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_6) + 0,600(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_5) + 1,038(\mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_4) + 1,197\mathfrak{D}_3 \\ &+ \frac{1}{a}[0,0912(\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_6'') + 0,1458(\mathfrak{M}_2' + \mathfrak{M}_5'') + 0,0912(\mathfrak{M}_2'' + \mathfrak{M}_5') \\ &+ 0,1638(\mathfrak{M}_3' + \mathfrak{M}_4'') + 0,1458(\mathfrak{M}_3'' + \mathfrak{M}_4')]. \end{aligned}$$

In dem Falle mittelbarer Belastung und unter der Voraussetzung, dass die Querträger mit den Hauptträgern an denselben Punkten verbunden sind, wie die Vertikalen, werden die Grössen \mathfrak{M} sämtlich Null. In Fig. 183 ist hiernach die Einflusslinie für H dargestellt und zwar entspricht das Polygon der mittelbaren, die krumme Linie der unmittelbaren Belastung.

Fig. 183.



§. 99. Kämpferdrucklinie. Die Reaktionen in den Stützpunkten A und B , welche durch eine Einzellast G erzeugt werden, schneiden sich mit dieser letzteren in ein und demselben Punkte K . Bei einer Verschiebung der Einzellast beschreibt der Punkt K eine Linie, welche wir Kämpferdrucklinie nennen.

Ist der Balkenträger in der Mitte unterbrochen, so muss die rechte Reaktion, falls die Last auf der linken Hälfte liegt, durch B und den Scheitel S gehen, da in B und C das Moment Null sein muss; ebenso muss die linke Reaktion, falls die Last auf der rechten Hälfte liegt, durch A und S gehen. Die Kämpferdrucklinie besteht daher

aus zwei Geraden, welche die Verlängerungen der Geraden AS und BS bilden.

Bei kontinuierlichem Balkenträger sei die Ordinate C_0K_1 (Fig. 181) $= \eta$. Alsdann ist $\eta = \xi \tan \angle K_1AC_0 = \xi \frac{D}{H}$, wenn D der vertikale Stützendruck in A ist. Nun aber ist $Dl = G(l - \xi)$, mithin

$$35. \quad \eta = \frac{G}{H} \frac{\xi(l - \xi)}{l},$$

wobei H nach dem vorigen Paragrafe zu bestimmen ist. Bei konstantem Querschnitte des Balkenträgers und stetig gekrümmtem Stabpolygon, wird, wenn man nur die statische Formänderung berücksichtigt, nach Formel 33

$$36. \quad \eta = \frac{8l^2h}{5(l^2 + l\xi - \xi^2)}.$$

Setzen wir in dem Ausdrucke 35 für H den Ausdruck 29, so erhalten wir

$$\eta = 8 \frac{\xi(l - \xi)}{l^2} \frac{\Delta_m y}{\Delta y} h,$$

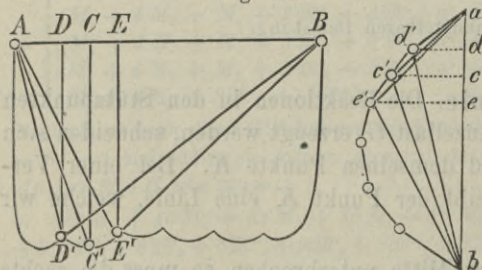
oder, da in Fig. 181 $y = C_0C = 4 \frac{\xi(l - \xi)}{l^2} h$ ist,

$$37. \quad \eta = 2 \frac{\Delta_m y}{\Delta y} y = C_0C \cdot \frac{2AA'}{CC'},$$

wonach sich verschiedene Konstruktionen angeben lassen; z. B. man macht C_0L_0 und CL parallel und bezüglich $= 2\Delta_m y$ und $2\Delta_m y - y$, d. i. $= 2AA'$ und $2AA' - CC'$; eine durch L_0 und L gelegte Gerade bestimmt sodann den Punkt K_1 .

In dem Falle mittelbarer Belastung bestimmt man am besten in der gezeigten Weise die den Knotenpunkten entsprechenden Punkte der Kämpferdrucklinie. Andere Punkte ergeben sich sodann durch folgende

Fig. 184.



Betrachtung. Ist ab (Fig. 184) gleich der Einzellast G , sind D', C', E' Punkte der Kämpferdrucklinie und die von a und b ausgehenden Strahlen mit den Durchschnittspunkten d', c', e' parallel den von A und B nach D', C', E' gezogenen Strahlen, so sind ad, ac, ae und bd, bc, be die in A und

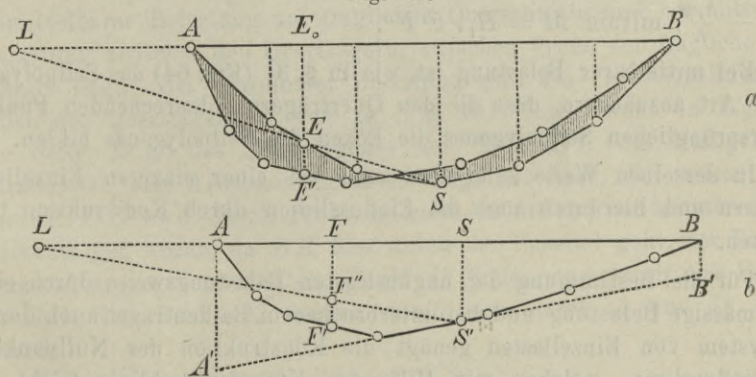
B bei der Lage der Last in D, C, E wirkenden Vertikalreaktionen, ad', cc', ee' die bezüglichlichen Horizontalreaktionen. Da sich nun, wenn die Last von A und B den Abstand ξ und ξ_1 hat, die Vertikalreaktionen in A und B wie $\xi : \xi_1$ verhalten, so müssen die Punkte d, c, e die

Gerade ab in demselben Verhältnisse theilen, wie die Punkte D, C, E die Gerade AB . Die Figur $ad'e'b$ wird somit eine zur Einflussfigur für die Horizontalspannung H affine Figur sein. Entsprechen die Punkte D und E Querträgern, so wird also nach §. 20 $d'e'e'$ eine Gerade sein, so dass sich der Punkt e' leicht bestimmen lässt. Legt man sodann durch A und B Parallelen zu ac', bc' , so erhält man den Punkt C' . Die einzelnen Theile der Kämpferdrucklinie ergeben sich hiernach als Hyperbeln; in den äussersten Fächern entstehen, wenn die Horizontalspannung H für die Lage der Last an den Enden $= 0$ wird, Gerade, welche bezüglich durch B und A gehen.

§. 100. Bestimmung der Momente und Transversalkräfte bei beliebiger Belastung. Nach Bestimmung der Horizontalspannung H sind durch die Formeln 1 bis 4 die Spannungen der Vertikalen bestimmt. Da hierdurch die auf den Balkenträger wirkenden Vertikalkräfte gegeben sind, kann man auch die auf denselben wirkenden Momente und Transversalkräfte bestimmen. Wir wollen hier noch auf die grafische Bestimmung dieser Grössen eingehen.

1. Momente. Zur grafischen Bestimmung der Momente bei einer beliebigen Belastung konstruirt man für die gegebene Belastung ein Seilpolygon mit der Polweite H , welches durch die Stützpunkte A und B geht. Alsdann ist das Moment der nach unten wirkenden Lasten in

Fig. 185.



$F = H \cdot E_0 E'$ (Fig. 185), das Moment der nach oben wirkenden Spannungen dagegen $H \cdot E_0 E$, mithin das wirkliche in F wirkende Moment $= H (E_0 E' - E_0 E) = H \cdot EE'$. Das Moment ist also proportional dem Vertikalabstande des Seilpolygones von der Axe des Stabpolygones.

Wenn der Balkenträger in der Mitte unterbrochen ist, so geht das Seilpolygon ausser durch die Punkte A und B auch noch durch den Scheitel S .

Um bei verschiedenen Belastungen die Konstruktion neuer Seilpolygone zu umgehen, kann man auch ein Seilpolygon mit einer beliebigen angenommenen Polweite H_1 konstruieren (Fig. 185b). Macht man in demselben $FF'' = \frac{H}{H_1} y = \frac{H}{H_1} E_0 E$, so wird offenbar $M = H_1 \cdot F'F''$; nach Bestimmung von H ist es aber leicht, $\frac{H}{H_1} y$ zu konstruieren. Wenn der Balkenträger in der Mitte unterbrochen ist, so sei die Höhe des Seilpolygons mit der Polweite H_1 in der Mitte der Schlusslinie $= SS' = h_1$, an dem dem Punkte F entsprechenden Punkte $= FF' = y_1$. Alsdann ist $M = H_1 y_1 - Hy$. Nun aber ist nach Formel 20: $Hh = \frac{1}{2} \Sigma (G' \xi' + G'' \xi'')$. Die Momente $\Sigma G' \xi'$ und $\Sigma G'' \xi''$ für die Enden werden aber nach den Regeln für das Seilpolygon durch $H_1 \cdot AA'$ und $H_1 \cdot BB'$ dargestellt; somit ist $Hh = H_1 \cdot SS' = H_1 h_1$, $H = H_1 \frac{h_1}{h}$, also

$$38. \quad M_1 = H_1 \left(y_1 - \frac{h_1}{h} y \right),$$

wonach sich die folgende Konstruktion ergibt: In Fig. 185a lege man durch S und E eine Gerade, welche die Verlängerung von AB in L schneidet. In Fig. 185b habe L von S denselben Horizontalabstand, wie in Fig. 185a; zieht man hier die Gerade LS' , so erhält man den Durchschnittspunkt F'' und es ist nun offenbar $FF'' = \frac{h_1 y}{h}$, also $F'F'' = y_1 - \frac{h_1 y}{h}$, mithin $M = H_1 \cdot F'F''$.

Bei mittelbarer Belastung ist, wie in §. 31 (Fig. 64) das Seilpolygon in der Art abzuändern, dass die den Querträgern entsprechenden Punkte des ursprünglichen Seilpolygons die Ecken des Seilpolygons bilden.

In derselben Weise kann man auch bei einer einzigen Einzellast verfahren und hierdurch auch die Einflusslinien durch Konstruktion bestimmen.

Für die Bestimmung der ungünstigsten Belastungsweise durch eine gleichmässige Belastung und bei unterbrochenem Balkenträger auch durch ein System von Einzellasten genügt die Konstruktion des Nullpunktes der Einflusslinie, welcher mit Hilfe der Kämpferdrucklinie leicht zu finden ist. Legt man durch den Punkt N (Fig. 181) des Seilpolygons, welcher dem fraglichen Querschnitte des Balkenträgers entspricht, zwei Gerade durch A und B , welche die Einflusslinie in K und K_1 schneiden, so wird das Moment in N offenbar Null, wenn die Einzellast G in K oder K_1 liegt, den Punkten K und K_1 entsprechen also die Nullpunkte der Einflusslinie. Bei unterbrochenem Balkenträger ist nur ein Nullpunkt vorhanden; auch bei kontinuierlichem Balkenträger gibt es nur für Querschnitte in der Nähe des Scheitels zwei Nullpunkte.

2. **Transversalkräfte.** Legt man im Kraftpolygone mit der Polweite H parallele Strahlen zu der dem fraglichen Querschnitte entsprechenden Seilpolygonseite und dem entsprechenden Stabe des Stabpolygons, so schneidet die erstere die Transversalkraft für die Lasten, die letztere die Transversalkraft für die Spannung der Vertikalen ab; die zwischen beiden Strahlen liegende Kraft des Kraftpolygons ist also die wirkliche Transversalkraft für den fraglichen Querschnitt. Hiernach ist die Transversalkraft die Vertikalkomponente der Spannung der bezüglichen Seilpolygonseite, wenn die andere Komponente die Richtung des entsprechenden Stabes des Stabpolygons hat.

Um das Seilpolygon mit der beliebig angenommenen Polweite H_1 benützen zu können, kann man durch dieses die Transversalkraft Q' für die Lasten in bekannter Weise bestimmen, während die Transversalkraft Q'' für die Spannungen der Vertikalen $= H \tan \tau$ durch die der in Rede stehenden Belastung entsprechende Horizontalspannung H zu bestimmen ist; sodann ist $Q = Q' - Q''$.

Um für eine Einzellast den Nullpunkt der Einflusslinie zu bestimmen, legt man durch die Stützpunkte A und B Parallelen zu dem Stabe des Stabpolygons, welche dem in Frage stehenden Querschnitte F des Balkenträgers entspricht. Schneiden diese Parallelen die Kämpferdrucklinie in I und I_1 , so wird offenbar die Transversalkraft in N Null, wenn eine Last in I oder I_1 liegt. Von den Punkten I und I_1 ist immer nur der eine vorhanden; dagegen schneidet die Einflusslinie die Axe bei unmittelbarer Belastung am fraglichen Querschnitte und bei mittelbarer Belastung zwischen den Querträgern, zwischen denen der fragliche Querschnitt liegt. Bei mittelbarer Belastung wird die Transversalkraft zwischen den Querträgern D und E (Fig. 181) Null, wenn in Fig. 181b die Seite $D'E'$ des Seilpolygons der Seite DE des Stabpolygons parallel ist. Im Allgemeinen ist die Lage der Last, bei welcher $D'E'$ parallel DE wird, durch Probieren leicht zu finden; bei unterbrochenem Balkenträger würde, da BK hier durch den Scheitel geht, der Punkt E' unmittelbar gegeben sein; den Punkt D' findet man durch eine Parallele zu DE , den Punkt K sodann durch eine durch A und D' gelegte Gerade.

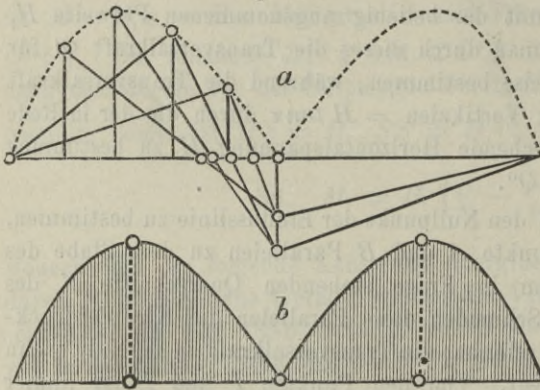
§. 101. Unterbrochener Balkenträger mit parabolischem Stabpolygon.

1. **Momente.** Eine auf der linken Hälfte im Abstände ξ von A liegende Einzellast G erzeugt in einem auf der rechten oder linken Seite der Einzellast liegenden Querschnitt bezüglich das Moment $G \frac{2\xi}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right)$ und $G \frac{l - 2\xi}{l} x$. Die nach oben wirkenden Spannungen der Vertikalen erzeugen bei stetig gekrümmtem Stabpolygone in der linken

Hälfte das Moment $-\frac{1}{2}vx\left(\frac{l}{2}-x\right)$, wobei nach Formel 22 $v = 4\frac{G\xi}{l^2}$ oder $v = 4\frac{G(l-\xi)}{l^2}$ zu setzen ist, je nachdem die Last auf der linken oder rechten Hälfte liegt. Die Summierung gibt als Moment für eine auf der linken Seite des Querschnittes, auf der rechten Seite desselben und auf der rechten Hälfte liegende Last bezüglich

$$39. \quad \begin{cases} Ml^2 = + G\xi(l-x)(l-2x), \\ Ml^2 = + Gx(l^2-3l\xi+2x\xi), \\ Ml^2 = - G(l-\xi)x(l-2x). \end{cases}$$

Fig. 186.



Hiernach sind in Fig. 186 a die Einflusslinien dargestellt. Das Moment wird Null für

$$40. \quad \xi = \frac{2l(l-x)}{3l-2x}$$

Für eine gleichmässige Last ergibt sich hiernach, wenn man $p d\xi$ für G setzt, durch eine Integration zwischen 0 und ξ oder ξ und l als Maximum des Momentes

$$41. \quad \max(\pm M) = \pm \frac{px(l-x)(l-2x)}{2(3l-2x)}$$

Fig. 186 b zeigt die hiernach aufgetragene Momentenlinie. Das absolute Maximum tritt bei $x = 0,235l$ ein; dasselbe ist

$$42. \quad \text{Max } M = 0,0188 pl^2.$$

Das mittlere Moment ergibt sich zu $0,0124 pl^2$.

Bei mittelbarer Belastung und wenn die Vertikalen an denselben Punkten angeordnet sind, wie die Querträger, ist zu den Ausdrücken 39 noch $+\frac{G\xi e e'}{4h}$ hinzuzufügen, wenn der Querschnitt von den nächsten Querträgern den Abstand e, e' hat und zwischen diesen Querträgern die Einflusslinie als Gerade anzunehmen.

2. Transversalkräfte. Eine auf der linken Hälfte liegende Einzellast erzeugt an einem auf der rechten oder linken Seite der Last liegenden Querschnitt bezüglich die Transversalkräfte $-G\frac{2\xi}{l}$ und $+G\frac{l-2\xi}{l}$. Die nach oben wirkenden Spannungen der Vertikalen erzeugen in einem Querschnitte auf der linken Hälfte die Transversalkraft $-\frac{1}{4}v(l-4x)$. Die Summierung gibt, wenn man für v den Ausdruck 22 setzt, als Transversalkraft für eine auf der linken Seite des Querschnittes,

auf der rechten Seite desselben und auf der rechten Hälfte liegenden Last bezüglich

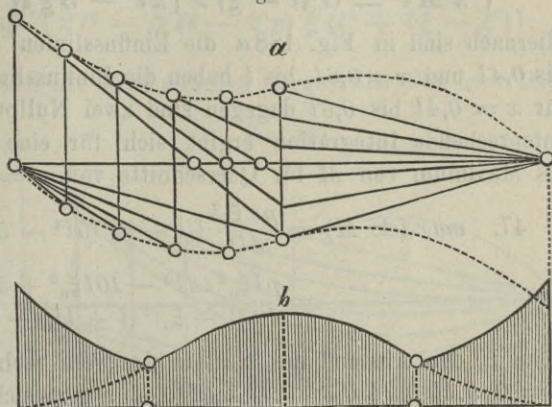
$$43. \quad \begin{cases} Ql^2 = -G\xi(3l-4x), \\ Ql^2 = +G(l^2-3l\xi+4x\xi), \\ Ql^2 = -G(l-\xi)(l-4x). \end{cases}$$

Hiernach sind in Fig. 187a die Einflusslinien dargestellt. Für

$$44. \quad \xi = \frac{l^2}{3l-4x}$$

wird $Q = 0$; ausserdem tritt ein Wechsel des Vorzeichens auch am Querschnitte ein. Für $x = 0,25l$ wird hiernach $\xi = \frac{1}{2}l$; für grössere Werthe von x tritt ein Zeichenwechsel nur am Querschnitte ein.

Fig. 187.



Für eine gleichmässige Belastung ergibt sich hiernach durch eine entsprechende Integration

$$45. \quad \begin{cases} x = 0 \text{ bis } \frac{1}{4}l: & \max(\pm Q) = \pm \frac{1}{2} p x^2 (3l-4x), \\ x = \frac{1}{4}l \text{ bis } \frac{1}{2}l: & \max(\pm Q) = \pm \frac{p(l^2-3lx+4x^2)^2}{2l^2(3l-4x)}. \end{cases}$$

In Fig. 187b ist hiernach $\max Q$ grafisch dargestellt. Am grössten wird $\max Q$ für $x = 0$ und $x = 0,5l$ und zwar wird hier bezüglich $\max Q = \frac{1}{6}pl = 0,167pl$ und $\frac{1}{8}pl = 0,125pl$; am kleinsten wird $\max Q$ für $x = 0,25l$; hier wird $\max Q = \frac{1}{16}pl = 0,063pl$. Im Mittel wird $\max Q = 0,100pl$.

Für den Fall mittelbarer Belastung ergibt sich leicht, dass die Einflusslinie für irgend ein Fach dieselbe ist, wie für einen Querschnitt in der Mitte des Faches bei unmittelbarer Belastung; in dem fraglichen Fache ist natürlich ein geradliniger Uebergang statt des Absatzes einzuführen.

§. 102. Kontinuierlicher Balkenträger mit parabolischem Stabpolygon.

1. Momente. Das Moment M wird für einen Querschnitt auf der rechten Seite der Last bei stetig gekrümmtem Stabpolygon

$$M = \frac{G\xi(l-x)}{l} - \frac{1}{2}v(l-x) = \frac{G\xi(l-x)}{l} - \frac{4Hhx(l-x)}{l^2}.$$

Für einen Querschnitt auf der linken Seite ist ξ mit $l-\xi$, x mit $l-x$ zu vertauschen. Unter Einführung des Näherungsausdruckes 33 für H erhält man bezüglich für eine links oder rechts vom Querschnitte liegende Last:

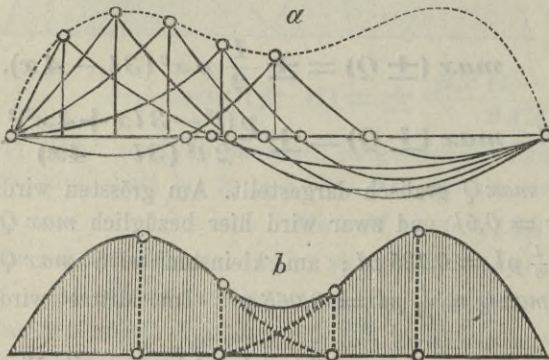
$$46. \quad \begin{cases} 2M^l = G\xi(l-x)[2l^3 - 5(l-\xi)x(l^2 + l\xi - \xi^2)], \\ 2M^r = G(l-\xi)x[2l^3 - 5\xi(l-x)(l^2 + l\xi - \xi^2)]. \end{cases}$$

Hiernach sind in Fig. 188a die Einflusslinien dargestellt. Für $x=0$ bis $0,4l$ und $x=0,6l$ bis l haben die Einflusslinien nur einen Nullpunkt; für $x=0,4l$ bis $0,6l$ dagegen sind zwei Nullpunkte vorhanden. Durch entsprechende Integration ergibt sich für eine gleichmässige Belastung als Maximum von M für Querschnitte von $x=0$ bis $0,4l$:

$$47. \quad \begin{aligned} \max(\pm M) &= \frac{px\xi_0^2}{4l^3} [(l-x)(5l^3 - 5l\xi_0^2 + 2\xi_0^3) - 2l^4] \\ &= \frac{pl\xi_0^4(3l^3 - 10l\xi_0^2 + 5\xi_0^3)}{10(l-\xi_0)^2(l+l\xi_0-\xi_0^2)^2}, \end{aligned}$$

wenn ξ_0 den Abstand des Nullpunktes vom rechten Ende bedeutet. Für $x=0,1l, 0,2l, 0,3l, 0,4l, 0,5l, 0,6l$ ergibt sich $\xi_0 = l, 0,636l, 0,596l, 0,535l, 0,460l, 0,339l, 0$. Für Querschnitte von $x=0,4l$ bis $0,6l$ ist

Fig. 188.



zu dem hiernach berechneten Werthe noch der dem linken Nullpunkte entsprechende Werth hinzuzufügen, wobei $l-x$ für x und für ξ_0 der Abstand des linken Nullpunktes vom linken Ende zu setzen ist. Hiernach ist die Momentenlinie in Fig. 188b dargestellt. Das absolute Maximum tritt

für $x=0,244l$ und $x=0,756l$ ein, wobei $\xi_0 = 0,575l$ ist. Das absolute Maximum ist

$$48. \quad \text{Max } M = 0,0166 pl^2,$$

d. i. nur 13 Prozent des Maximalmomentes bei einem Einzelträger mit derselben Spannweite. Das Maximalmoment in der Mitte wird nur $0,00678 pl^2$. Das mittlere Moment ergibt sich durch Flächenberechnung der Momentenfläche zu $0,0123 pl^2$.

2. Transversalkräfte. Für einen Querschnitt auf der rechten Seite der Einzellast G wird $Ql = -G\xi - \frac{1}{2}v(l-2x)$ und für einen Querschnitt auf der linken Seite der Last $Ql = G(l-\xi) - \frac{1}{2}v(l-2x)$.

Setzt man hierin $vl^2 = 8Hh$ und für H den Näherungsausdruck 33, so erhält man für eine links und rechts vom Querschnitte liegende Einzelast bezüglich

$$49. \begin{cases} Q = -\frac{G\xi}{2l^5} [2l^4 + 5(l-2x)(l-\xi)(l^2 + l\xi - \xi^2)], \\ Q = +\frac{G(l-\xi)}{2l^5} [2l^4 - 5(l-2x)\xi(l^2 + l\xi - \xi^2)]. \end{cases}$$

Hiernach sind in Fig. 189a die Einflusslinien dargestellt. Für $x = 0,3l$ tangirt die Einflusslinie die Axe am rechten Ende; für kleinere x schneidet die Einflusslinie die Axe.

Für eine gleichmässige Belastung ergibt sich für Querschnitte von $x=0$ bis $x = 0,3l$ durch Integration zwischen $x=x$ und $x = \xi_0$, wenn ξ_0 den Werth von ξ bezeichnet, für welchen $Q = 0$ wird,

$$50. \max(\pm Q) = \pm \frac{p}{4l^5} [4l^5(\xi_0 - x) - l^3(7l - 10x)(\xi_0^2 - x^2) + 5l(l-2x)(\xi_0^4 - x^4) - 2(l-2x)(\xi_0^5 - x^5)].$$

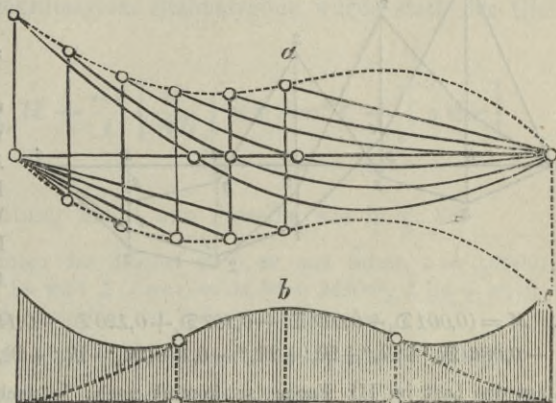
Hierbei wird für $x = 0, 0,1l, 0,2l, 0,3l$ bezüglich $\xi_0 = 0,331l, 0,404l, 0,540l, l$. Für Querschnitte zwischen $x = 0,3l$ und $0,7l$ erhält man durch Integration zwischen $x=x$ und $x=l$:

$$51. \max(\pm Q) = \pm \frac{p x^2}{4l^5} (7l^4 - 10l^3x - 5l^2x^2 + 12lx^3 - 4x^4).$$

In Fig. 189b ist die Kurve für $\max Q$ dargestellt. Das absolute Maximum erreicht Q für $x = 0$ und $x = l$, dasselbe ist $0,153pl$. In der Mitte wird $\max Q = 0,125pl$. Für $x = 0,216l$ wird $\max Q$ am kleinsten; hier ist $\max Q = 0,0744pl$. Im Mittel wird $\max Q = 0,100pl$. Der Mittelwerth von $\max Q$ ist also fast ebenso gross, wie bei getrenntem Balkenträger.

Bei mittelbarer Belastung würde für die angenommene Belastung nach §. 98 die Bestimmung von H vorzunehmen sein; durch die Formeln 1 bis 4 ist sodann V bestimmt. Die Bestimmung der Momente und Transversalkräfte kann hierauf in bekannter Weise erfolgen.

Fig. 189.

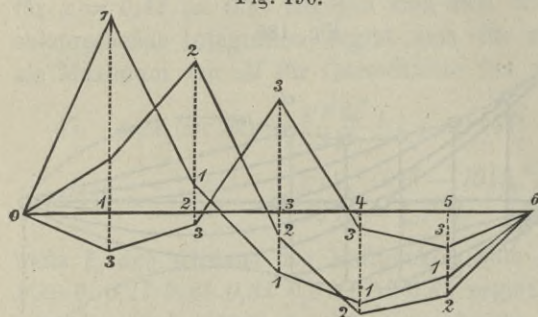


Beispiel. Wir wollen das bereits in §. 98 behandelte Beispiel weiter führen. Setzt man den gewonnenen Ausdruck f für H in die Gleichungen e ein, so ergibt sich für den Fall, dass nur Lasten in den Knotenpunkten des Balkenträgers wirken,

$$a. \begin{cases} M_1 = [+0,500 \mathfrak{D}_1 + 0,090 \mathfrak{D}_2 - 0,165 \mathfrak{D}_3 - 0,243 \mathfrak{D}_4 - 0,167 \mathfrak{D}_5 + 0,0006 (\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1)] a, \\ M_2 = [+0,133 \mathfrak{D}_1 + 0,411 \mathfrak{D}_2 - 0,064 \mathfrak{D}_3 - 0,256 \mathfrak{D}_4 - 0,200 \mathfrak{D}_5 + 0,0009 (\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1)] a, \\ M_3 = [-0,100 \mathfrak{D}_1 - 0,038 \mathfrak{D}_2 + 0,303 \mathfrak{D}_3 - 0,038 \mathfrak{D}_4 - 0,100 \mathfrak{D}_5 + 0,0010 (\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1)] a. \end{cases}$$

Bei unmittelbarer Belastung kommen noch die Glieder mit \mathfrak{M} im Ausdrucke für H , aber bezüglich mit $-\frac{5}{9} a$, $-\frac{8}{9} a$, $-a$ multipliziert, hinzu. Die entsprechenden Einflusslinien für mittelbare Belastung sind in Fig. 190 dargestellt.

Fig. 190.



Es lassen sich nun leicht auch die Momente und Transversalkräfte für beliebige Querschnitte bestimmen. Wir wollen nur beispielsweise das M und Q in der Mitte des III. Faches in Betracht ziehen. Wenn die Last nicht im III. Fache liegt, so wird

$$M = \frac{1}{2} (M_2 + M_3), \text{ d. i.}$$

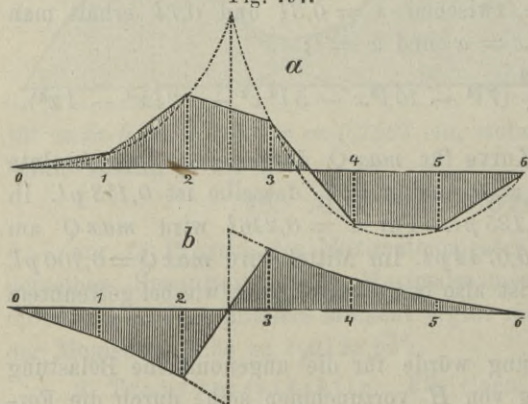
$$b. M = (0,001 \mathfrak{D}_0 + 0,017 \mathfrak{D}_1 + 0,187 \mathfrak{D}_2 + 0,120 \mathfrak{D}_3 - 0,147 \mathfrak{D}_4 - 0,150 \mathfrak{D}_5 + 0,001 \mathfrak{D}_6) a - 0,086 (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_2'' + \mathfrak{M}_3' + \mathfrak{M}_6'') - 0,138 (\mathfrak{M}_2' + \mathfrak{M}_3'' + \mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_5'') - 0,155 (\mathfrak{M}_3' + \mathfrak{M}_4'').$$

Liegt die Last im III. Fache, so kommt noch, je nachdem sie in der linken oder rechten Hälfte liegt, das Glied $+\frac{1}{2} G \xi$, $+\frac{1}{2} G (l - \xi)$ hinzu.

Ferner wird, wenn die Last nicht im III. Fache liegt, $Q a = M_3 - M_2$, d. i.

$$Q = 0,0001 \mathfrak{D}_0 - 0,233 \mathfrak{D}_1 - 0,449 \mathfrak{D}_2 + 0,367 \mathfrak{D}_3 + 0,218 \mathfrak{D}_4 + 0,100 \mathfrak{D}_5 + 0,0001 \mathfrak{D}_6 - 0,0101 (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_2'' + \mathfrak{M}_5' + \mathfrak{M}_6'') - 0,0162 (\mathfrak{M}_2' + \mathfrak{M}_3'' + \mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_5'') - 0,0182 (\mathfrak{M}_3' + \mathfrak{M}_4'').$$

Fig. 191.



Liegt die Last nicht im III. Fache, so kommt noch, je nachdem die Last in der linken oder rechten Hälfte liegt, bezüglich das Glied $-G \frac{\xi}{l}$ und $+G \frac{l - \xi}{l}$ hinzu. Die Einflusslinie für M und Q ist hiernach in Fig. 191 dargestellt und zwar entsprechen wieder die geraden Linien der mittelbaren, die krummen Linien der unmittelbaren Belastung.

§. 103. Einfluss der Wärme. Um den Einfluss einer Temperaturveränderung t zu bestimmen, ist in Gleichung 11 $\Delta \lambda = \alpha t \lambda +$

$\frac{H \lambda \sec \tau}{EF}$ zu setzen, wenn α den Ausdehnungskoeffizienten bezeichnet.

Ausserdem ist $\Delta y = \Delta_0 y - \Delta \eta = \Delta_0 y - \alpha t \eta - \frac{4H(a+a')\eta}{Efl^2}$ zu setzen. Dies gibt statt der Gleichung 12:

$$52. \Sigma[(a+a')\Delta_0 y] = \frac{Cl}{4Eh} H + \alpha t \left\{ \frac{l^2}{4h} \Sigma(\lambda \sec \tau) + \Sigma[(a+a')\eta] \right\},$$

wobei C durch Formel 13 bestimmt ist. Sind Spannketten vorhanden, so ist C durch Formel 16 bestimmt; ausserdem ist in vorstehender Formel $\Sigma(\lambda \sec \tau) + \lambda_1 \sec \tau_1 + \lambda_2 \sec \tau_2$ statt $\Sigma(\lambda \sec \tau)$ zu setzen.

Bei kontinuierlich gekrümmtem Stabpolygone würde statt der Gleichung 17

$$53. \Delta_m y = \frac{C}{8Eh} H + \frac{\alpha t}{l} \left[\frac{l^2}{8h} \int_0^l dx \sec^2 \tau + \int_0^l \eta dx \right]$$

zu schreiben sein.

Die weitere Behandlung bleibt nun dieselbe wie in §. 98.

Beispiel. Wir ergänzen das Beispiel zu §. 89 und setzen $\alpha = 0,000012$, $t = 30^\circ$, also $\alpha t = 0,00036$. Es wird $\Sigma(\lambda \sec \tau) = 34,3^m = 3430^cm$, $\Sigma[(a+a')\eta] = 70,6 \square^m = 706000 \square^cm$ (mit Ausschluss der Endvertikalen), also

$$\alpha t \left\{ \frac{l^2}{4h} \Sigma(\lambda \sec \tau) + \Sigma[(a+a')\eta] \right\} = 0,00036 (4500 \cdot 3430 + 706000) \\ = 0,00036 \cdot 16141000 = 5811 \text{ Centim.}$$

Statt der Gleichung b in §. 98 erhält man jetzt

$$(28 M_1 + 46 M_2 + 52 M_3 + 46 M_4 + 28 M_5) a^3 \\ = -EI \{ 30 a (\Delta y_0 + \Delta y_6) - 560,4 H \} - 34866 EI.$$

Hierbei wird $30 E I a (\Delta y_0 + \Delta y_6) = 0,17 (M_1 + M_5) a^3 + 30 E I a (0,00036 \cdot 2 \cdot 530) = 0,17 (M_1 + M_5) a^3 + 5724 E I$. Hierdurch geht die vorige Gleichung über in

$$(28,17 M_1 + 46 M_2 + 52 M_3 + 46 M_4 + 28,17 M_5) a^3 = + (560,4 H = 40590) E I.$$

Nach den Gleichungen e wird $M_1 = M_5 = -\frac{5}{9} H a$, $M_2 = M_4 = -\frac{8}{9} H a$, $M_3 = -H a$.

Dies eingesetzt gibt

$$165,08 H a^4 = (40590 - 560,4 H) E I.$$

Für $E = 2000$, $I = 52800$, $a = 500$ wird $165,08 H = 69,0 - 0,95 H$, also

$$H = 0,416 \text{ Tonnën.}$$

Dementsprechend wird $M_1 = M_5 = 1,16$, $M_2 = M_4 = 1,85$, $M_3 = 2,08$ Tonnen und zwar $+$ bei Erhöhung, $-$ bei Erniedrigung der Temperatur. Die übrigen Grössen sind jetzt leicht zu bestimmen.

§. 104. Strengere Theorie. In den vorigen Paragraphen haben wir angenommen, dass bei Bestimmung der Spannungen V der Vertikalen die Vertikalverschiebung Δy zu vernachlässigen sei und haben dementsprechend für V , v die Formeln 1 bis 4 benützt, während statt derselben die Formeln 5 und 6 anzuwenden wären. Die Bestimmung der Unbekannten wird hierdurch allerdings eine wesentlich umständlichere

und die Theorie wird noch dadurch erschwert, dass es hier nicht mehr möglich ist, den Einfluss einer beliebigen Belastung durch die Summierung der Einflüsse der entsprechenden Einzellasten zu bestimmen, so dass die Methode der Einflusslinien nicht anwendbar ist. Wir wollen hier nur den anzuwendenden Weg andeuten, da eine weitere Durchführung mehr in die Theorie der Hänge- und Sprengwerksträger gehört.

Bei der allgemeinen Bestimmung der Horizontalspannung H in §. 98 bleibt die Gleichung 23 unverändert. Dagegen geht die Gleichung 26, mit Berücksichtigung der Gleichung 5 (S. 186), wenn wir die Werthe von Δy für das Seilpolygon und den Balkenträger gleich setzen, also die Längenänderung der Vertikalen vernachlässigen, über in

$$54. \quad M_{m-1} a_{m+1} - M_m (a_m + a_{m+1}) + M_{m+1} a_m \\ = \left[\frac{4 H h}{l^2} (a_m + a_{m+1}) - (\mathfrak{D}_m + \mathfrak{G}) \right] a_m a_{m+1} \\ - H [a_{m+1} \Delta y_{m-1} - (a_{m+1} + a_m) \Delta y_m + a_m \Delta y_{m+1}].$$

Setzt man nun die Ausdrücke von $a_m \Delta y_{m-1} - (a_{m+1} + a_m) \Delta y_m + a_m \Delta y_{m+1}$ aus dieser und der Gleichung 23 einander gleich, so erhält man $n-1$ Gleichungen mit den $n-1$ Unbekannten $M_1, M_2 \dots$ und der Unbekannten H . Zwischen denselben Unbekannten besteht noch die auch hier richtige Gleichung 26. Indessen gestattet die Form der Gleichungen nur ein Auflösen durch Probiren. Am besten führt man wohl H in der Gleichung 54 als Faktor von $[a_m \Delta y_{m-1} - \dots]$ näherungsweise ein und bestimmt dann H wie in §. 98, 2; bei zu grosser Abweichung würde jetzt dieselbe Rechnung noch einmal mit dem genaueren Werthe von H zu führen sein.

Die Differenzialgleichung der elastischen Linie des Balkenträgers wird in einem stetig mit der nach oben und unten wirkenden Last v und q pro Längeneinheit belasteten Punkte

$$55. \quad EI \frac{d^4 \Delta y}{dx^4} = q - v,$$

wenn wir die Längenänderung der Vertikalen wieder vernachlässigen, also $\Delta_0 y = \Delta y$ setzen. Nach Gleichung 6 aber wird für das parabolische Stabpolygon

$$56. \quad H \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = \frac{8 H h}{l^2} - q - v.$$

Die Subtraktion beider Gleichungen gibt

$$57. \quad EI \frac{d^4 \Delta y}{dx^4} = H \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} - \frac{8 H h}{l^2} + q + v,$$

oder, wenn wir unter Annahme eines konstanten Werthes von I, q und g

$$58. \quad k^2 = \frac{H}{EI}, \quad z = \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} - \frac{8h}{l^2} + \frac{q+g}{H}$$

setzen,

$$59. \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = k^2 z.$$

Das Integral dieser Differenzialgleichung ist

$$60. \quad z = A e^{kx} + B e^{-kx},$$

wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Nun aber lässt sich in dem konstant pro Längeneinheit belasteten Theile des Balkenträgers das Moment M in der Form $a + bx + cx^2 - H(y + \Delta y)$ ausdrücken, wobei $a + bx + cx^2$ das vom Eigengewichte g des Balkenträgers, dem Eigengewichte g des Stabpolygones und der zufälligen Last p herrührende Moment, $-H(y + \Delta y)$ das von der Spannung v der Vertikalen und dem Eigengewichte g herrührende Moment bedeutet; da g in beiden Gliedern enthalten ist, so hebt sich, wie es erforderlich ist, der Einfluss von g auf. Es wird daher

$$61. \quad \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{a + bx + cx^2}{EI} + k^2(y + \Delta y).$$

Da aber nach dem Obigen $\frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = z + \frac{8h}{l^2} - \frac{q+g}{H}$ ist, so gibt die Gleichsetzung, wenn wir hierbei $y l^2 = 4hx(l-x)$ setzen,

$$62. \quad \Delta y = \frac{A}{k^2} e^{kx} + \frac{B}{k^2} e^{-kx} + \frac{8h}{k^2 l^2} - \frac{4hx(l-x)}{l^2} + \frac{a + bx + cx^2}{H} - \frac{q+g}{Hk^2}.$$

Wenn wir nun den Balkenträger durchgehends mit dem Eigengewichte g pro Längeneinheit und ausserdem von $x = \xi$ bis $x = l = \xi + \xi_1$ mit der zufälligen Last p pro Längeneinheit belastet annehmen, so wird bei kontinuierlichem Balkenträger $a + bx + cx^2$ im linken Theile $\frac{1}{2}(g+g)x(l-x) + \frac{p\xi_1^2 x}{2l}$, im rechten Theile $= \frac{1}{2}(g+g)x(l-x) + \frac{p(l-x)}{2l}(lx - \xi^2) = \frac{1}{2}(g+g)x_1(l-x_1) + \frac{px_1}{2l}(2l\xi_1 - \xi_1^2 - lx_1)$, wenn wir $l-x = x_1$ setzen. Es wird somit bezüglich im linken und rechten Theile

$$63. \quad \begin{cases} \Delta y = \frac{A}{k^2} e^{kx} + \frac{B}{k^2} e^{-kx} + \left(\frac{g+g}{2H} - \frac{4h}{l^2} \right) x(l-x) \\ \quad \quad \quad + \frac{8h}{k^2 l^2} - \frac{g+g}{Hk^2} + \frac{p(l-\xi)^2 x}{2Hl}, \\ \Delta y = \frac{A_1}{k^2} e^{kx_1} + \frac{B_1}{k^2} e^{-kx_1} + \left(\frac{g+g}{2H} - \frac{4h}{l^2} \right) x_1(l-x_1) \\ \quad \quad \quad + \frac{8h}{k^2 l^2} - \frac{g+p+g}{Hk^2} + \frac{px_1(2l\xi_1 - \xi_1^2 - lx_1)}{2Hl}. \end{cases}$$

Für $x = 0$ und $x_1 = 0$ wird $\Delta y = 0$; für $x = \xi$, $x_1 = \xi_1$ werden die Werthe von Δy auf beiden Seiten gleich und $\frac{d\Delta y}{dx} = -\frac{d\Delta y}{dx}$. Dies gibt zur Bestimmung der Konstanten die vier Gleichungen:

$$64. \begin{cases} A + B + \frac{8h}{l^2} - \frac{g + g}{H} = 0, \\ A_1 + B_1 + \frac{8h}{l^2} - \frac{g + p + g}{H} = 0, \\ Ae^{k\xi} + Be^{-k\xi} - A_1e^{k\xi_1} - B_1e^{-k\xi_1} + \frac{p}{H} = 0, \\ Ae^{k\xi} - Be^{-k\xi} + A_1e^{k\xi_1} - B_1e^{-k\xi_1} = 0. \end{cases}$$

Die Auflösung gibt:

$$65. \begin{cases} A(e^{kl} - e^{-kl}) = -\frac{p}{2H}(e^{k\xi_1} + e^{-k\xi_1} - 2) - \left(\frac{8h}{l^2} - \frac{g + g}{H}\right)(1 - e^{-kl}), \\ B(e^{kl} - e^{-kl}) = +\frac{p}{2H}(e^{k\xi_1} + e^{-k\xi_1} + 2) + \left(\frac{8h}{l^2} - \frac{g + g}{H}\right)(1 - e^{kl}), \\ A_1(e^{kl} - e^{-kl}) = +\frac{p}{2H}(e^{k\xi} + e^{-k\xi} - 2e^{-kl}) - \left(\frac{8h}{l^2} - \frac{g + g}{H}\right)(1 - e^{-kl}), \\ B_1(e^{kl} - e^{-kl}) = -\frac{p}{2H}(e^{k\xi} + e^{-k\xi} - 2e^{-kl}) + \left(\frac{8h}{l^2} - \frac{g + g}{H}\right)(1 - e^{kl}). \end{cases}$$

Nach der Gleichung 17 ist nun

$$66. \frac{CH}{SEh} = \Delta_m y - \frac{1}{l} \left[\int_0^{\xi} \Delta y dx + \int_0^{\xi_1} \Delta y dx_1 \right].$$

Die Ausführung der Integration gibt

$$\frac{CHl}{SEh} = \frac{1}{h^3} [A(e^{k\xi} - 1) - B(e^{-k\xi} - 1) + A_1(e^{k\xi_1} - 1) - B_1(e^{-k\xi_1} - 1)] \\ + \left[\frac{(g + g)l^3}{H} - 8lh \right] \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{(kl)^2} \right] + \frac{p(l - \xi)}{H} \left[\frac{(l - \xi)(l + 2\xi)}{H} - \frac{l^2}{(kl)^2} \right].$$

Die Einsetzung der Ausdrücke für A , B , A_1 , B_1 gibt:

$$67. \frac{CHl}{SEh} = \left[\frac{(2g + p + 2g)l^3}{H} - 16lh \right] \frac{e^{kl} + e^{-kl} - 2}{(kl)^3(e^{kl} - e^{-kl})} \\ + \frac{pl^3}{H} \frac{e^{k\xi_1} + e^{-k\xi_1} - e^{k\xi} - e^{-k\xi}}{(kl)^3(e^{kl} - e^{-kl})} + \left[\frac{(g + g)l^3}{H} - 8lh \right] \left[\frac{1}{12} - \frac{l}{(kl)^2} \right] \\ + \frac{p(l - \xi)}{H} \left[\frac{(l - \xi)(l + 2\xi)}{12} - \frac{l^2}{(kl)^2} \right].$$

Diese Gleichung würde nach H durch Probiren aufzulösen sein, wobei man als ersten Näherungswerth für H den der früheren Näherungstheorie entsprechenden Werth annehmen kann.

Für einen sehr schwachen Balkenträger wird kl sehr gross; wenn man in diesem Falle behufs Annäherung die Glieder, welche kl im Divisor haben, vernachlässigt, so erhält man

$$68. H = \frac{(g + \mathfrak{g}) l^3 + p(l - \xi)^2 (l + 2\xi)}{8lh(1 + \alpha)},$$

wenn man zur Abkürzung $\alpha = \frac{3CH}{16Eh^2}$ setzt. Für einen sehr starken Balkenträger dagegen wird kl sehr klein. Wenn man $e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \dots\right)$, $e^x - e^{-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \dots\right)$ setzt, so heben sich sämtliche Glieder bis zur vierten Potenz von x und es bleibt, wenn man nur die zwei ersten der verbleibenden Glieder berücksichtigt und wenn man zur Abkürzung $\xi_1 = nl$ setzt,

$$69. H \left[16lh \left(1 - \frac{17}{168} \frac{Hl^2}{EI} + \dots \right) + \frac{30CI}{lh} \right] = 2(g + \mathfrak{g}) l^3 \left(1 - \frac{17}{168} \frac{Hl^2}{EI} + \dots \right) + p l^3 \left[5 - 5n^2 + 2n^3 - \frac{1}{48} (42 - 35n^2 + 14n^4 - 4n^5) \frac{Hl^2}{EI} + \dots \right].$$

Vernachlässigt man hierin die Glieder mit kl , so wird in Uebereinstimmung mit dem aus Formel 33 durch Integration zwischen $\alpha = \xi$ und $x = l$ abzuleitenden Ausdrucke

$$70. H = \frac{2(g + \mathfrak{g}) l^3 + p(5l^3 - 5l\xi_1^2 + 2\xi_1^3)}{16lh(1 + \beta)},$$

wenn man zur Abkürzung $\beta = \frac{15CI}{8l^2h^2}$ setzt.

Nach Bestimmung von H wird $M = -EI \frac{d^2 \Delta y}{dx^2}$, d. i. bezüglich für den linken und rechten Theil:

$$71. \begin{cases} M = -EI \left(Ae^{kx} + Be^{-kx} + \frac{8h}{l^2} - \frac{g + \mathfrak{g}}{H} \right), \\ M = -EI \left(A_1 e^{kx_1} + B_1 e^{-kx_1} + \frac{8h}{l^2} - \frac{g + p + \mathfrak{g}}{H} \right). \end{cases}$$

Die Transversalkraft wird nun $Q = -\frac{dM}{dx}$, d. i. bezüglich für den linken und rechten Theil:

$$72. \begin{cases} Q = EIk (Ae^{kx} - Be^{-kx}), \\ Q = EIk (A_1 e^{kx_1} - B_1 e^{-kx_1}). \end{cases}$$

Es wird genügen, hierbei als Belastung diejenige anzunehmen, welche sich nach der früheren Näherungstheorie als die ungünstigste ergeben hatte.

Ist der Balkenträger in der Mitte unterbrochen, so würden ausser den vier Konstanten A, B, A_1, B_1 noch zwei neue Konstante anzunehmen sein. Zur Bestimmung der Konstanten und der Grösse H

kommen dafür zwei neue Bedingungen hinzu; es muss nämlich in der Mitte $\Delta y = 0$ und M oder $\frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = 0$ sein. Auf eine speziellere Behandlung wollen wir indess nicht eingehen.

In obiger Entwicklung wurde vorausgesetzt, dass der Anfangszustand, von welchem aus der Werth von Δy gerechnet wird, ein spannungsloser für den Balkenträger sei. Setzen wir indess voraus, dass in den Vertikalen die künstliche Spannung v_1 pro Längeneinheit des Trägers erzeugt werde, dass derselben unter der Wirkung des Eigengewichtes eine Durchbiegung $\Delta_1 y$ des Balkenträgers nach oben entspreche, und dass Δy von der Axe des Balkenträgers in dieser durchgeboenen Form aus gerechnet werde, so ist in Formel 55 $\Delta y - \Delta_1 y$ statt Δy zu schreiben, wobei $EI \frac{d^4 y_1}{dx^4} = v_1 - g$ zu setzen ist; die rechte Seite von 55 lautet alsdann $q - v + v_1 - g = p - v + v_1$ statt $q - v$. In den Gleichungen 57 und 58 ist daher $p + v_1$ statt q zu schreiben. In der Formel 61 wird wieder $\Delta y - \Delta_1 y$ statt Δy zu schreiben sein, wobei, falls v_1 konstant ist, $EI \frac{d^2 \Delta_1 y}{dx^2} = -\frac{1}{2}(v_1 - g)x(l - x)$ zu setzen ist. Hierdurch ergibt sich, dass in den Formeln 63 bis 70 v_1 statt g zu setzen ist.

Die Theorie der Verbindung von Balkenträger und Seilpolygon ist erst in neuerer Zeit aufgestellt worden; zwar macht bereits Rankine (*A manual of civil engineering*, London, I. Aufl. 1862) die Angabe, dass das grösste Moment bei unterbrochenem Balkenträger $\frac{1}{64} p l^2 = 0,0156 p l^2$, bei kontinuierlichem Balkenträger $\frac{1}{56} p l^2 = 0,0179 p l^2$ (in §. 101 und 102 hat sich bezüglich $0,0188 p l^2$ und $0,0166 p l^2$ ergeben) und im ersten Falle die grösste Transversalkraft $\frac{1}{8} p l$ (was mit dem in §. 101 gefundenen Resultate stimmt) sei. Langer gibt für den speziellen Fall, dass der Balkenträger in der Mitte unterbrochen und als Sprengwerk angeordnet ist, eine weniger strenge Theorie (Die Eisenkonstruktionen für Brücken und Dachstühle von Jos. Langer. Wien 1862). Die erste durchgeführte Theorie unter der Annahme einer auf die Längeneinheit konstanten Spannung v der Vertikalen für einen kontinuierlichen Balkenträger gab zuerst Ritter (Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen, Hannover, II. Aufl. 1870). Buschmann (Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Gitter- und Hängebrücken, Wien, 1873) ergänzt zwar die vorige Arbeit in einigen Punkten hinsichtlich des Eigengewichtes, macht aber ohne näheren Nachweis die falsche Behauptung, dass auch für die zufällige Last eine gänzliche Belastung die ungünstigste sei. Unter Einführung von Einzellasten hat zuerst Müller-Breslau (Theorie der durch einen Balken versteiften Kette, Zeitschr. des hannoverschen Arch.- u. Ingen.-Ver. 1881) die Theorie entwickelt. Diese Arbeit enthält auch für eine Einzellast die erste genauere Theorie unter Berücksichtigung des Einflusses der Formänderung der Kette auf die Spannung der Vertikalen. In ähnlicher Weise löst auch Du Bois (*A new theory of the suspension system with stiffening truss. Journal of the Franklin institute, 1882*) die Aufgabe.

XII. Kapitel.

Träger mit einer Oeffnung.

§. 105. **Eingespannter Träger mit elastisch drehbaren Widerlagern.** Wir wollen jetzt einen an den Enden derart eingespannten Träger untersuchen, dass die Stützen oder Widerlager, welche den Träger festhalten, in dem Sinne elastisch sind, dass sie sich drehen können und dass die Drehung dem Momente an dem bezüglichen Ende proportional ist. Hierzu lassen sich auch die an einem oder an beiden Enden fest eingespannten Träger rechnen.

1. Allgemeiner Fall. Die Gleichungen 7 bis 10 (S. 94 und 95) können ohne Weiteres in Anwendung kommen, wenn man darin

$$1. \quad \tau' = - A' M', \quad \tau'' = + A'' M''$$

setzt, worin A' , A'' Konstanten bezeichnen, deren Grösse von der Art der Widerlager abhängen. Dieses Verhalten zeigen offenbar alle geradlinigen Stäbe irgend einer elastischen Konstruktion, z. B. die einzelnen Oeffnungen eines kontinuierlichen Trägers, die Querträger einer Brücke, welche mit den Vertikalen der Hauptträger starr verbunden sind u. s. w. Wenn die Stützen ausser der Drehung noch eine Verschiebung annehmen können, so behalten die Gleichungen 1 ihre Giltigkeit, wenn τ' und τ'' die Winkel, welche die Endtangenten der elastischen Linie nach der Formänderung mit der die Enden verbindenden Sehne bilden oder die sogenannten Ausschlagwinkel bezeichnen.

Die Gleichungen 7 (S. 94) geben, wenn man $\Omega' = 0$ setzt, die Ausdrücke für α , β , γ (S. 97) beachtet und $6EI_0 A' = \alpha_1 l$, $6EI_0 A'' = \beta_1 l$ setzt,

$$\begin{cases} -\alpha_1 M' = \beta M' + \gamma M'' + 3\mathfrak{M}, \\ -\beta_1 M'' = \gamma M' + 2\alpha M'' + 3\mathfrak{M}'. \end{cases}$$

Die Auflösung gibt

$$2. \quad \begin{cases} M' = 3 \frac{\gamma \mathfrak{M}' - (2\alpha + \beta_1) \mathfrak{M}''}{(2\alpha + \beta_1)(2\beta + \alpha_1) - \gamma^2}, \\ M'' = 3 \frac{\gamma \mathfrak{M}'' - (2\beta + \alpha_1) \mathfrak{M}'}{(2\alpha + \beta_1)(2\beta + \alpha_1) - \gamma^2}. \end{cases}$$

Bei konstantem Querschnitte wird $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Ist das Feld gar nicht belastet, also $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = 0$, so wird in dem Falle, dass am rechten Ende ein bestimmtes Moment M'' durch äussere Kräfte erzeugt wird, $M' = -\frac{\gamma}{2\beta + \alpha_1} M''$. Ebenso wird in dem Falle, dass am linken Ende ein bestimmtes Moment M' erzeugt wird,

$M'' = -\frac{\gamma}{2\alpha + \beta_1} M'$. Da M' und M'' entgegengesetztes Vorzeichen haben, so wird in beiden Fällen das Moment in einem bestimmten, von der Grösse des wirksamen Momentes unabhängigen Punkte, dem Fixpunkte, Null. Sind a und b die Abstände der beiden Fixpunkte bezüglich vom linken und rechten Ende, so wird $a:l = M':M'' - M'$ und $b:l = M'':M'' - M'$, folglich

$$3. \quad a = \frac{\gamma l}{\gamma + 2\beta + \alpha_1}, \quad b = \frac{\gamma l}{\gamma + 2\alpha + \beta_1}.$$

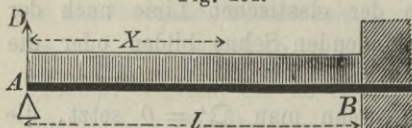
Hieraus folgt $(2\beta + \alpha_1)b = \gamma(l - b)$, $(2\alpha + \beta_1)a = \gamma(l - a)$. Dies in die Gleichungen 2 eingesetzt, gibt, wenn man noch $l - a - b = c$ setzt,

$$4. \quad \begin{cases} M' = -\frac{3a}{\gamma c l} [(l - b) \mathfrak{M}'' - b \mathfrak{M}'], \\ M'' = -\frac{3b}{\gamma c l} [(l - a) \mathfrak{M}' - a \mathfrak{M}''] \end{cases}$$

in Uebereinstimmung mit den Formeln 16 (S. 123) und 4 (S. 127). Die aus diesen Formeln gezogenen Folgerungen der Kapitel VIII und IX hinsichtlich der Belastung durch eine Einzellast und der ungünstigsten Belastung lassen sich natürlich hier unmittelbar anwenden.

2. Träger, welcher an einem Ende frei aufliegt, am anderen eingespannt ist. Wenn der Träger in B (Fig. 192) so eingespannt ist, dass der Träger im unbelasteten Zustande keine Formänderung zeigt, so ist $\tau'' = 0$, also $A'' = 0$, $\beta_1 = 0$. Wenn der Träger ferner in A frei aufliegt, so wird bei jeder Belastung $M' = 0$, mithin $A' = \infty$, $\alpha_1 = \infty$. Nach den Formeln 3 wird folglich

Fig. 192.



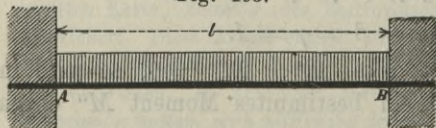
$$5. \quad b = \frac{\gamma l}{2\alpha + \gamma}, \quad a = 0.$$

Dies in die Gleichungen 4 eingesetzt, gibt

$$6. \quad M'' = -\frac{3b \mathfrak{M}'}{\gamma c} = -\frac{3 \mathfrak{M}'}{2\alpha}, \quad M' = 0.$$

Bei konstantem Querschnitte wird $b = \frac{1}{3} l$, $M'' = -\frac{3}{2} \mathfrak{M}'$.

Fig. 193.



3. Träger, welcher an beiden Enden eingespannt ist. Wenn der Träger an beiden Enden so eingespannt ist (Fig. 193), dass er in unbelastetem Zustande keine Formänderung zeigt, so wird $A' = A'' = 0$, also auch $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Mithin wird

$$7. \quad a = \frac{\gamma l}{2\beta + \gamma}, \quad b = \frac{\gamma l}{2\alpha + \gamma}.$$

Bei symmetrischer Form wird $\alpha = \beta$, also auch $a = b$ und alsdann

$$8. \quad M' = -\frac{3(2\alpha M'' - \gamma M')}{4\alpha^2 - \gamma^2}, \quad M'' = -\frac{3(2\alpha M' - \gamma M'')}{4\alpha^2 - \gamma^2}.$$

Bei konstantem Querschnitte wird

$$9. \quad a = b = \frac{1}{3} l,$$

$$10. \quad M' = -2M'' + M', \quad M'' = -2M' + M''.$$

Bei symmetrischer Belastung wird hier $M' = M''$, mithin $M' = M'' = -M' = -M''$.

§. 106. Belastung durch eine Einzellast.

1. Stützenmomente. Die Formeln 1 bis 4 (S. 124 bis 127) sind ohne Weiteres anwendbar. Bei konstantem Querschnitte wird, wenn der Träger nur an einem Ende eingespannt ist, $M'' = -\frac{3}{2} M'$, d. i.

$$11. \quad M'' = -G \frac{\xi (l^2 - \xi^2)}{2l^2},$$

und wenn er an beiden Enden eingespannt ist, nach obiger Formel 10 und nach Formel 40 (S. 114):

$$12. \quad M' = -\frac{G\xi(l-\xi)^2}{l^2}, \quad M'' = -\frac{G\xi^2(l-\xi)}{l^2}.$$

2. Moment für einen beliebigen Querschnitt. Wenn der Träger nur am rechten Ende eingespannt ist, so wird der linke Stützendruck $D = \frac{M''}{l} + G \frac{l-x}{l}$, d. i. für einen konstanten Querschnitt $= \frac{G(l-\xi)}{2l^2} (2l^2 - l\xi - \xi^2)$. Wenn die Last links liegt, wird $M = Dx - G(x-\xi)$, wenn die Last rechts liegt, $M = Dx$, d. i.

$$13. \quad \begin{cases} \text{Last links: } M = \frac{G\xi}{2l^3} (2l^3 - 3l^2x + \xi^2x), \\ \text{Last rechts: } M = \frac{G(l-\xi)x}{2l^3} (2l^2 - l\xi - \xi^2). \end{cases}$$

Wenn der Träger an beiden Enden eingespannt ist, so wird nach der zweiten der Formeln 4 (S. 94), wenn die Last links liegt, $Ml = G\xi(l-x) + M'(l-x) + M''x$ und wenn die Last rechts liegt, $Ml = G(l-\xi)x + M'(l-x) + M''x$, d. i. nach Einsetzung der Ausdrücke 12:

$$14. \quad \begin{cases} \text{Last links: } M = \frac{G\xi^2}{l^3} (2l^2 - l\xi - 3lx + 2\xi x), \\ \text{Last rechts: } M = \frac{G(l-\xi)^2}{l^3} (lx + 2\xi x - l\xi). \end{cases}$$

Die Einflusslinien sind hiernach in Fig. 194a für einen nur am rechten Ende und in Fig. 195a für einen an beiden Enden eingespannten Träger dargestellt.

Fig. 194.

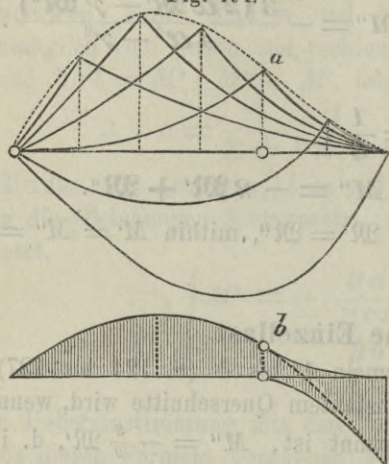
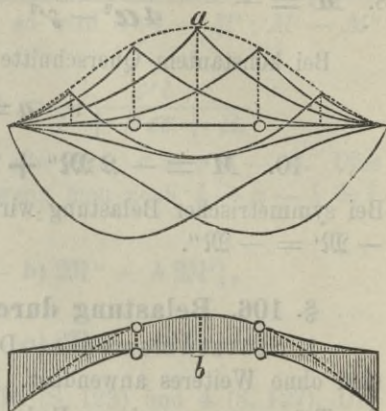


Fig. 195.



3. Transversalkraft. Bei dem nur am rechten Ende eingespannten Träger wird, wenn die Last links vom Querschnitte liegt $Q = D - G$ und wenn sie rechts liegt, $Q = D$, d. i.

$$15. \quad \begin{cases} \text{Last links: } Q = - \frac{G \xi (3l^2 - \xi^2)}{2l^3}, \\ \text{Last rechts: } Q = + \frac{G (l - \xi) (2l^2 - l\xi - \xi^2)}{2l^3}. \end{cases}$$

Wenn beide Enden eingespannt sind, so wird nach der ersten der Formeln 4: $Ql = \Omega l + M'' - M'$. Hierbei wird $(M'' - M')l^2 = -G\xi(l - \xi)(2\xi - l)$ und bei links liegender Last $\Omega l = -G\xi$, bei rechts liegender Last $\Omega l = +G(l - \xi)$, mithin

$$16. \quad \begin{cases} \text{Last links: } Q = - \frac{G \xi^2 (3l - 2\xi)}{l^3}, \\ \text{Last rechts: } Q = + \frac{G (l - \xi)^2 (l + 2\xi)}{l^3}. \end{cases}$$

Die Einflusslinien haben bei einem eingespannten Ende keinen Wendepunkt und tangiren die Axe am eingespannten Ende; wenn beide Enden eingespannt sind, so haben sie einen in der Mitte liegenden Wendepunkt und tangiren die Axe an beiden Enden.

§. 107. Einfluss des Eigengewichtes. Wir wollen nur den Fall eines konstanten Querschnittes voraussetzen.

a) Träger mit einem eingespannten Ende. Ist nur das rechte Ende eingespannt, so wird nach dem Obigen $M' = 0$,

$M'' = -\frac{g}{2} M' = -\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{12} g l^2 = -\frac{1}{8} g l^2$. Es ist nun $M'' = D l - \frac{1}{2} g l^2$, also $D l = \frac{1}{2} g l^2 + M'' = \frac{3}{8} g l^2$, mithin

$$17. \quad D = \frac{3}{8} g l.$$

Für einen beliebigen Querschnitt wird nun $M = D x - \frac{1}{2} g x^2$ und $Q = D - g x$, d. i.

$$18. \quad M = \frac{1}{8} g x (3l - 4x),$$

$$19. \quad Q = \frac{1}{8} g (3l - 8x).$$

M wird hiernach Null für $x = \frac{3}{4} l$, zum positiven Maximum für $x = \frac{3}{8} l$ und zum negativen für $x = l$. Das erstere ist $= +\frac{9}{128} g l^2 = +0,0703 g l^2$, das letztere $= -\frac{1}{8} g l^2 = -0,1250 g l^2$. Die Maxima von Q sind für $x = 0$: $Q = \frac{3}{8} g l$, für $x = l$: $Q = -\frac{5}{8} g l$. Die Mittelwerthe von M und Q im Sinne des §. 85 sind *mitt* $M = \frac{19}{384} g l^2 = 0,0495 g l^2$ und *mitt* $Q = \frac{17}{64} g l = 0,266 g l$.

b) Träger, dessen beide Enden eingespannt sind. Hier wird $M' = M'' = -M' = -M'' = -\frac{1}{12} g l^2$ und $Q' = \frac{1}{2} g l$, $Q'' = -\frac{1}{2} g l$. Für einen beliebigen Querschnitt wird nun $M = M' + \frac{1}{2} g l x - \frac{1}{2} g x^2$, $Q = Q' - g x$, d. i.

$$20. \quad M = -\frac{1}{12} g (l^2 - 6lx + 6x^2),$$

$$21. \quad Q = \frac{1}{2} g (l - 2x).$$

Hiernach wird $M = 0$ für $x^2 - lx + \frac{1}{6} l^2 = 0$ oder für $x = \frac{1}{6} (3 \mp \sqrt{3}) l = 0,2113l$ und $0,7887l$. Das positive Maximum von M oder der Werth von M für $x = \frac{1}{2} l$ wird $+\frac{1}{24} g l^2$, das negative Maximum oder der Werth von M für $x = 0$ und $x = l$ dagegen $= -\frac{1}{12} g l^2$; das negative Maximum von M ist also doppelt so gross, als das positive. Die Transversalkraft Q ist genau ebenso gross, wie beim Einzelträger. Die Mittelwerthe von M und Q im Sinne des §. 85 sind *mitt* $M = \frac{\sqrt{3}}{54} g l^2 = 0,0321 g l^2$ und $\frac{1}{4} g l = 0,250 g l$.

§. 108. Einfluss einer gleichmässigen Verkehrsbelastung unter der Voraussetzung eines konstanten Querschnittes.

a) Träger mit einem eingespannten Ende. Für einen Querschnitt, dessen $x < \frac{2}{3} l$ ist, kann nach §. 106 M nur positiv werden;

das Maximum tritt ein, wenn der Träger ganz belastet ist. Der Formel 18 entsprechend wird

$$22. \max(+M) = \frac{1}{8} p x (3l - 4x), \quad \max(-M) = 0.$$

Wenn $x > \frac{2}{3} l$ ist, so wird M der ersten der Gleichungen 13 entsprechend, zum negativen Maximum, wenn der Träger von $\xi = 0$ bis zu einem der Gleichung $x\xi^2 = l^2(3x - 2l)$ entsprechenden Punkt belastet ist. Hieraus folgt

$$23. \xi = l \sqrt{3 - 2 \frac{l}{x}}.$$

Ferner wird ebenfalls nach der ersten der Gleichungen 13

$$\begin{aligned} \max(-M) &= \frac{p}{2l^3} \int_0^{\xi} \xi (2l^3 - 3l^2 x + x\xi^2) d\xi \\ &= \frac{p\xi^2}{8l^3} [2(2l^3 - 3l^2 x) + x\xi^2], \end{aligned}$$

d. i. nach Einsetzung des Ausdruckes von ξ

$$24. \max(-M) = - \frac{pl(3x - 2l)^2}{8x}.$$

Es ist nun ferner $\max(+M) + \max(-M)$ gleich dem Werthe von M bei gänzlicher Belastung $= \frac{1}{8} p x (3l - 4x)$. Hieraus ergibt sich jetzt leicht

$$25. \max(+M) = + \frac{p(l-x)^3}{2x}.$$

Fig. 194b zeigt die entsprechende Momentenkurve.

Die Transversalkraft Q wird für dieselbe Belastung zum Maximum, wie beim Einzelträger. Aus den Formeln 15 ergibt sich leicht durch Integration

$$26. \begin{cases} \max(+Q) = + \frac{p(l-x)^3(3l+x)}{8l^3}, \\ \max(-Q) = - \frac{px^2(6l^2-x^2)}{8l^3}. \end{cases}$$

Als Mittelwerthe der Maxima von M und Q im Sinne des §. 85 ergeben sich $\text{mitt } M = 0,0505pl^2$, $\text{mitt } Q = 0,295pl$.

b) Träger, dessen beide Enden eingespannt sind. Für einen innerhalb des mittleren Drittheiles liegenden Querschnitt kann nach §. 106 M nur positiv werden und zwar tritt das Maximum bei gänzlicher Belastung ein. Entsprechend der Formel 20 wird

$$27. \max(+M) = + \frac{1}{12} p (6lx - 6x^2 - l^2), \quad \max(-M) = 0.$$

Für einen im rechten Drittel liegenden Querschnitt tritt nach der ersten der Gleichungen 14 das negative Maximum von M ein, wenn der Träger von $\xi = 0$ bis

reicht und zwar wird

$$28. \quad \xi = l \frac{3x - 2l}{2x - l}$$

$$\max(-M) = \frac{p}{7^3} \int_0^{\xi} [(2l^2 - 3lx)\xi^2 + (2x - b)\xi^3] d\xi$$

$$= \frac{p\xi^3}{12l^3} [4(2l - 3x)l + 3(2x - l)\xi].$$

Die Einsetzung des Ausdruckes von ξ gibt

$$29. \quad \max(-M) = -\frac{pl(3x - 2l)^4}{12(2x - l)^3}.$$

Das positive Maximum von M bestimmt man jetzt am besten nach der Regel $\max(+M) + \max(-M) = M_i$, wenn M_i das Moment für gänzliche Belastung bezeichnet. In Fig. 195b ist die entsprechende Momentenkurve dargestellt.

Die Transversalkraft Q wird auch hier zum Maximum bei derselben Belastung, wie beim Einzelträger. Die Formeln 16 geben durch entsprechende Integration:

$$30. \quad \begin{cases} \max(+Q) = +\frac{p(l-x)^3(l+x)}{2l^3}, \\ \max(-Q) = -\frac{px^3(2l-x)}{2l^3}. \end{cases}$$

Als Mittelwerthe der Maxima von M und Q im Sinne des §. 85 ergeben sich $\max M = 0,0335 pl^2$, $\max Q = 0,275 pl$.

XIII. Kapitel.

Träger mit zwei Feldern.

§. 109. **Stützenmoment.** Bei zwei Feldern ist nur ein Stützenmoment M_1 zu bestimmen. Wir bezeichnen die beiden Stützweiten mit l und l_1 , die vertikale Entfernung der Mittelstütze von der Geraden, welche die beiden äusseren Stützen verbindet (nach unten als positiv) mit y . Alsdann wird nach der Gleichung 13 (S. 96), wenn wir die Glieder mit Ω vernachlässigen,

$$2(\alpha l + \beta_1 l_1) M_1 = -3W'l - 3W_1 l_1 + 6EI_0 y \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} \right);$$

da sich das in dieser Gleichung vorkommende Glied $-\frac{y_0}{l_1} + y_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) - \frac{y_2}{l_2}$ ausdrücken lässt durch $y \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1}\right)$. Es wird somit

$$1. \quad M_1 = -\frac{3(\mathfrak{M}'l + \mathfrak{M}_1''l_1)}{2(\alpha l + \beta_1 l_1)} + \frac{3EI_0 y (l + l_1)}{(\alpha l + \beta_1 l_1) l l_1}.$$

Bei symmetrischer Anordnung wird $l_1 = l$ und $\beta_1 = \alpha$, mithin

$$2. \quad M_1 = -\frac{3(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_1'')}{4\alpha} + \frac{3EI_0 y}{\alpha l^2}.$$

Bei konstantem Querschnitte ist $\alpha = 1$ zu setzen.

Zur Bestimmung der Fixpunkte sind auch in den äusseren Stützen Momente anzunehmen, so dass die Gleichung bei gleich hohen Stützen und bei unbelastetem Träger lautet: $\gamma l M_0 + 2(\alpha l + \beta_1 l_1) M_1 + \gamma_1 l_1 M_2 = 0$. Ist $M_2 = 0$, so wird $\nu = -\frac{M_0}{M_1} = 2 \frac{\alpha l + \beta_1 l_1}{\gamma l}$; ist $M_0 = 0$, so wird

$\mu_1 = -\frac{M_2}{M_1} = 2 \frac{\alpha l + \beta_1 l_1}{\gamma_1 l_1}$. Ist b und a_1 der Abstand der Fixpunkte im linken und rechten Felde, so wird $b = \frac{l}{1 + \nu}$ und $a_1 = \frac{l_1}{1 + \mu_1}$ oder

$$3. \quad b = \frac{\gamma l^2}{(2\alpha + \gamma)l + 2\beta_1 l_1}, \quad a_1 = \frac{\gamma_1 l_1^2}{2\alpha l + (2\beta_1 + \gamma_1) l_1}.$$

Bei konstantem Querschnitte wird

$$4. \quad b = \frac{l^2}{3l + 2l_1}, \quad a_1 = \frac{l_1^2}{2l + 3l_1}.$$

Hiernach ist unter allen Umständen $b < \frac{1}{3} l$ und $a_1 < \frac{1}{3} l_1$. Wenn $l = l_1$ ist, so wird $b = a_1 = \frac{1}{5} l$.

§. 110. Belastung durch eine Einzellast bei konstantem Querschnitte. Bei gleich hohen Stützen und konstantem Querschnitte wird bei Belastung des ersten Feldes, wenn wir nach Formel 40 (S. 114)

$$\mathfrak{M}' = G \frac{\xi(l^2 - \xi^2)}{3l} \text{ setzen,}$$

$$5. \quad M_1 = -G \frac{\xi(l^2 - \xi^2)}{2l(l + l_1)}.$$

Hiernach wird M_1 zum Maximum für $\xi = \frac{1}{3} l \sqrt{3} = 0,5774l$ und zwar wird

$$6. \quad \max M_1 = -\frac{\sqrt{3}}{9} \frac{G l^2}{l + l_1} = -0,1926 \frac{G l^2}{l + l_1}.$$

Transversalkräfte. Im ersten Felde ist $M_1 = D_0 l - G(l - \xi)$, also $D_0 = \frac{M_1}{l} + G \left(l - \frac{\xi}{l}\right)$. Da nun, je nachdem die Last links oder rechts vom Querschnitte liegt, $Q = D_0 - G$ oder $= D_0$ ist, so wird

$$7. \begin{cases} \text{Last links: } Q = -G \frac{\xi}{l} \left[1 + \frac{l}{2(l+l_1)} \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2} \right) \right], \\ \text{Last rechts: } Q = +G \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \left[1 - \frac{l}{2(l+l_1)} \frac{\xi}{l} \left(1 + \frac{\xi}{l} \right) \right]. \end{cases}$$

Wenn die Last im II. Felde im Abstände ξ_1 von der rechten äusseren Stütze liegt, so wird im I. Felde $Ql = D_0l = M_1$, d. i.

$$8. \quad Q = -G \frac{\xi_1 (l_1^2 - \xi_1^2)}{2ll_1(l+l_1)}.$$

In Fig. 196a sind hier- nach die Einflusslinien für $l_1 = l$ dargestellt.

Der Stützendruck D_0 ist gleichbedeutend mit Q für eine rechts vom Quer- schnitte liegende Last. Den Stützendruck D_1 auf die Mittelstütze findet man leicht durch die Beziehung $D_0 + D_1 + D_2 = G$, wobei $M_1 = D_0l - G(l - \xi)$, $M_1 = D_2l_1$ ist. Hier- nach wird

$$D_1 = G \frac{\xi}{l} - \frac{M_1}{l} - \frac{M_1}{l_1},$$

oder

$$9. \quad D_1 = G \frac{\xi}{l} \left(1 + \frac{l^2 - \xi^2}{2ll_1} \right).$$

In Fig. 196a ist auch die Einflusslinie für D_1 (für $l=l_1$) punktiert dargestellt. Die Einflusslinien für beide Oeffnungen haben an der Mittelstütze eine gemeinschaftliche Tangente.

Momente. Wenn die Last im ersten Felde links oder rechts vom Querschnitte liegt, so wird bezüglich $M = D_0x - G(x - \xi)$ und $M = D_0x$, d. i.

Fig. 196.

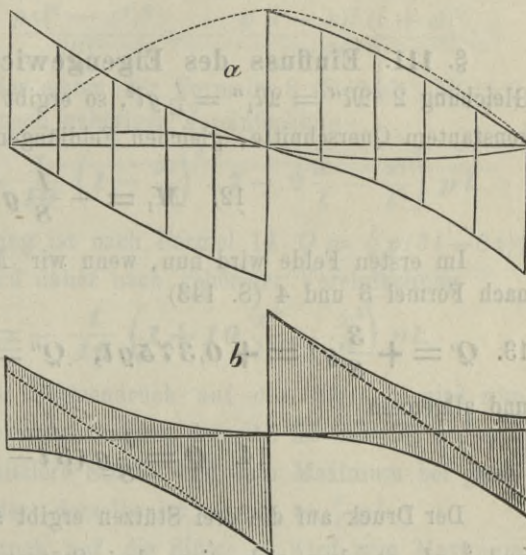
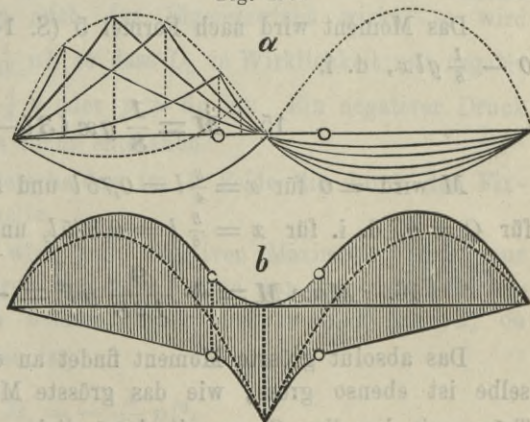


Fig. 197.



$$10. \begin{cases} \text{Last links: } M = G\xi \left[1 - \frac{x}{l} - \frac{l}{2(l+l_1)} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{\xi^2}{l^2} \right) \right], \\ \text{Last rechts: } M = Gx \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \left[1 - \frac{l}{2(l+l_1)} \frac{\xi}{l} \left(1 + \frac{\xi}{l} \right) \right]. \end{cases}$$

Wenn die Last im II. Felde im Abstände ξ_1 von der rechten äusseren Stütze liegt, so wird $M = D_0 x$, d. i.

$$11. M = -G \frac{x \xi_1 (l^2 - \xi_1^2)}{2ll_1 (l + l_1)}.$$

Die Einflusslinien sind hiernach für $l = l_1$ in Fig. 197a dargestellt.

§. 111. Einfluss des Eigengewichtes. Setzen wir in der Gleichung 2 $M'' = M_1'' = \frac{1}{2} gl^2$, so ergibt sich als Stützenmoment bei konstantem Querschnitte, gleichen Feldlängen und gleich hohen Stützen

$$12. M_1 = -\frac{1}{8} gl^2.$$

Im ersten Felde wird nun, wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen, nach Formel 3 und 4 (S. 143)

$$13. Q' = +\frac{3}{8} gl = +0,375 gl, \quad Q'' = -\frac{5}{8} gl = -0,625 gl,$$

und allgemein

$$14. Q = \frac{1}{8} g(3l - 8x).$$

Der Druck auf die drei Stützen ergibt sich hiernach zu $\frac{3}{8} gl$, $\frac{5}{4} gl$ und $\frac{3}{8} gl$, so dass sich diese drei Stützendrücke wie 3:10:3 verhalten.

Das Moment wird nach Formel 5 (S. 144) $M = \frac{1}{2} gx(l - x) - 0 - \frac{1}{8} glx$, d. i.

$$15. M = \frac{1}{8} gx(3l - 4x).$$

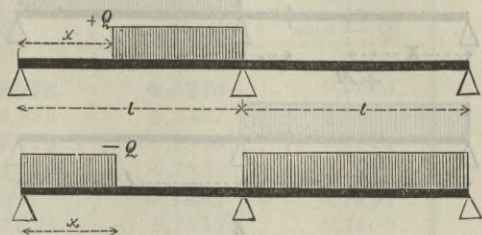
M wird = 0 für $x = \frac{3}{4} l = 0,75l$ und zum analytischen Maximum für $Q = 0$, d. i. für $x = \frac{3}{8} l = 0,375l$, und zwar ist

$$16. \text{Max } M = +\frac{9}{128} gl^2 = +0,07036 gl^2.$$

Das absolut grösste Moment findet an der Mittelstütze statt; dasselbe ist ebenso gross, wie das grösste Moment bei einem einfachen Träger mit derselben Spannweite l , nämlich $-\frac{1}{8} gl^2$.

§. 112. Einfluss der zufälligen Last. Wir setzen auch hier nur einen konstanten Querschnitt, gleiche Feldlängen und gleich hohe Stützen voraus.

Fig. 198.



a) **Transversalkräfte.**
Das positive Maximum von Q tritt im I. Felde ein, wenn nur der rechte Theil des I. Feldes belastet ist (Fig. 198). Für diese Belastungsweise wird nach Formel 2 und nach 43 (S. 115)

$$M_1 = -\frac{3}{4} \mathfrak{M}' = -\frac{p(l^2 - x^2)^2}{16l^2} = -\frac{p(l-x)^2(l+x)^2}{16l^2}.$$

Setzen wir nun in der ersten der Formeln 8 (S. 146) $M' = 0$, $M'' = M_1$, so ergibt sich nach gehöriger Vereinfachung:

$$17. \max(+Q) = +\frac{1}{16} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(7 - 2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) pl.$$

Bei gänzlicher Belastung ist nach Formel 14 $Q = \frac{1}{8} p(3l - 8x)$; nach Formel 9 (S. 146) wird daher nach gehöriger Vereinfachung

$$18. \max(-Q) = -\frac{1}{16} \left(1 + 10\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^4}{l^4}\right) pl.$$

b) **Stützendrücke.** Der Stützendruck auf die Stütze o wird zum Maximum bei Belastung des ersten Feldes; derselbe ist $\max D_0 = \frac{7}{16} pl$. Der Stützendruck auf die mittlere Stütze wird zum Maximum bei gänzlicher Belastung beider Felder; derselbe ist $\max D_1 = \frac{5}{4} pl$.

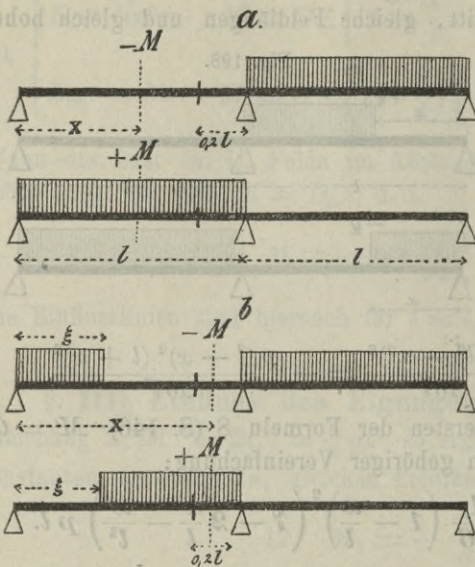
Der negative Stützendruck auf die Stütze o wird zum Maximum bei Belastung des zweiten Feldes; derselbe ist $\max(-D_0) = \frac{3}{8} pl - \frac{7}{16} pl = -\frac{1}{16} pl$. Wenn auch das Eigengewicht wirkt, so wird $\max(-D_0) = +\frac{3}{8} gl - \frac{1}{16} pl$, so dass D_0 in Wirklichkeit nur negativ werden kann, wenn $\frac{1}{16} p > \frac{3}{8} g$ oder $p > 6g$ ist. Ein negativer Druck auf die mittlere Stütze kann nicht entstehen.

c) **Momente.** Wir unterscheiden im I. Felde die durch den Fixpunkt getrennten beiden Theile.

Erster Theil. M wird zum negativen Maximum, wenn nur das zweite Feld, zum positiven Maximum, wenn nur das erste Feld belastet ist (Fig. 199a). In beiden Fällen wird nach Formel 2, da $\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_1' = \frac{1}{12} pl^2$ zu setzen ist,

$$M_1 = -\frac{1}{16} pl^2.$$

Fig. 199.



belastet (Fig. 199b). Daher ist $M_1' = \frac{p\xi^2(2l^2 - \xi^2)}{12l^2}$, $M_1'' = \frac{1}{12} p l^2$ zu setzen. Nach Formel 2 wird daher

$$M_1 = -\frac{p}{16l^2} (l^4 + 2l^2\xi^2 - \xi^4)$$

und nun nach der zweiten der Formeln 17 (S. 151):

$$\max(-M) = -\frac{p}{16l^3} (l^4 + 2l^2\xi^2 - \xi^4)x + \frac{p}{2l} \xi^2(l-x).$$

Setzen wir nach Formel 21 $\xi^2 = l^2 \left(5 - 4 \frac{l}{x}\right)$, so ergibt sich nach gehöriger Vereinfachung:

$$22. \max(-M) = -\frac{1}{8} \left(13 \frac{x}{l} - 20 + 8 \frac{l^2}{x^2}\right) p l^2.$$

Für gänzliche Belastung beider Felder wird nach Formel 15 $M = -\frac{1}{8} p x (4x - 3l)$; daher ist $\max(+M) = -\frac{1}{8} p x (4x - 3l) + \frac{1}{8} p l \left(13x - 20l + 8 \frac{l^2}{x}\right)$, oder

$$23. \max(+M) = +\frac{1}{8} \left(16 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^2}{l^2} - 20 + 8 \frac{l}{x}\right) p l^2.$$

§. 113. Tabellen. Nach den in den beiden vorigen Paragraphen aufgestellten Formeln sind die folgenden Tabellen berechnet.

Daher wird nach den Formeln 15 (S. 151):

$$19. \max(-M) = -\frac{1}{16} \frac{x}{l} p l^2.$$

$$20. \max(+M) = +\frac{1}{16} p \frac{x}{l} \left(7 - 8 \frac{x}{l}\right) p l^2.$$

Zweiter Theil. Nach Formel 12 (S. 131) wird, wenn wir $b = \frac{1}{5} l$ setzen:

$$21. \xi_x = l \sqrt{5 - 4 \frac{l}{x}}.$$

Für das negative Maximum ist der linke Theil des ersten Feldes bis zu $x = \xi_x$ und das ganze zweite Feld

Transversalkräfte.

x	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	$\max(+Q)$
		+	-
0	+ 0,375	0,4375	0,0625
0,1	+ 0,275	0,3437	0,0687
0,2	+ 0,175	0,2624	0,0874
0,3	+ 0,075	0,1932	0,1182
0,375	0	0,1491	0,1491
0,4	- 0,025	0,1359	0,1609
0,5	- 0,125	0,0898	0,2148
0,6	- 0,225	0,0544	0,2794
0,7	- 0,325	0,0287	0,3537
0,8	- 0,425	0,0119	0,4369
0,9	- 0,525	0,0027	0,5277
1	- 0,625	0	0,6250
l	gl	pl	pl

Stützendruck.

$$\max(+D_0) = 0,3750gl + 0,4375pl; \quad \max(+D_1) = 1,25(g + p)l.$$

$$\max(-D_0) = 0,3750gl - 0,0625pl.$$

Momente.

x	σ	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
			M	$\max(+M)$
			+	-
0	—	0	0	0
0,1	—	+ 0,0325	0,03875	0,00625
0,2	—	+ 0,0550	0,06750	0,01250
0,3	—	+ 0,0675	0,08625	0,01875
0,4	—	+ 0,0700	0,09500	0,02500
0,5	—	+ 0,0625	0,09375	0,03125
0,6	—	+ 0,0450	0,08250	0,03750
0,7	—	+ 0,0175	0,06125	0,04375
0,75	—	0	0,04688	0,04688
0,8	0	- 0,0200	0,03000	0,05000
0,85	0,5423	- 0,0425	0,01523	0,05773
0,9	0,7454	- 0,0675	0,00611	0,07361
0,95	0,8885	- 0,0950	0,00138	0,09638
1	1	- 0,1250	0	0,12500
l	l	gl^2	pl^2	pl^2

Eigengewicht: $\max(+M) = +0,07031 gl^2$ für $x = 0,3750l$.

Zufällige Last: $\max(+M) = +0,09566 pl^2$ für $x = 0,4374l$.

Mittlere Transversalkraft $\text{mitt } Q = 0,2656 gl + 0,3287 pl$.

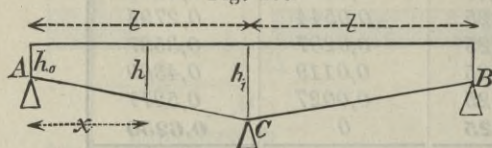
Mittleres Moment . . $\text{mitt } M = 0,04948 gl^2 + 0,07666 pl^2$.

In den Figuren 196b und 197b sind die Transversalkräfte und Momente bei gänzlicher Belastung beider Felder, sowie die Maxima von Q und M dargestellt.

§. 114. Trapezträger mit konstantem Gurtquerschnitt.

Um ein Beispiel für die allgemeine analytische Behandlung bei variablem

Fig. 200.



Trägheitsmoment des Querschnittes zu geben, behandeln wir einen Gitterträger mit zwei gleichen Feldern mit geraden, aber nicht parallelen

Gurten konstanten Querschnittes (Fig. 200). Ist die Höhe an den Enden $= h_0$, an der Mittelstütze h_1 , so ist allgemein $hl = h_0l + (h_1 - h_0)x$ und bei dem Gurtquerschnitte f

$$24. \quad I = \frac{1}{2} f h^2 = \frac{1}{2} f \left[h_0 + (h_1 - h_0) \frac{x}{l} \right]^2.$$

Für das mittlere Trägheitsmoment I_0 wird zunächst¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_0} &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{dx}{I} = \frac{2l}{f} \int_0^l \frac{dx}{[h_0l + (h_1 - h_0)x]^2} \\ &= -\frac{2}{f(h_1 - h_0)} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) = \frac{2}{f h_0 h_1}, \end{aligned}$$

folglich

$$25. \quad I_0 = \frac{1}{2} f h_0 h_1.$$

Der Koeffizient α wird nun unter Vernachlässigung des Einflusses der Schubspannungen nach §. 56 und 57:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3 I_0}{l^3} \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} = \frac{3 h_0 h_1}{2l} \int_0^l \frac{x^2 dx}{[h_0l + (h_1 - h_0)x]^2} \\ &= \frac{3 h_0 h_1}{2 (h_1 - h_0)^2} \left[\frac{h_1}{h_1 - h_0} - \frac{h_0}{h_1 - h_0} + \frac{h_0}{h_1} - \frac{2 h_0}{h_1 - h_0} (\lognat h_1 l - \lognat h_0 l) \right] \end{aligned}$$

¹⁾ Es ist allgemein:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a + bx)^2} &= -\frac{1}{b(a + bx)} + \text{Const.} \\ \int \frac{x^2 dx}{(a + bx)^2} &= \frac{1}{b^2} \left[\frac{a + bx}{b} + \frac{ax}{a + bx} - \frac{2a}{b} \lognat(a + bx) \right] + \text{Const.} \end{aligned}$$

oder

$$26. \quad \alpha = \frac{3h_0h_1}{(h_1 - h_0)^2} \left[\frac{h_0 + h_1}{h_1} - \frac{2h_0}{h_1 - h_0} \operatorname{lognat} \frac{h_1}{h_0} \right].$$

Für eine gänzliche gleichmässige Belastung eines Feldes wird nach der vierten der Formeln 6 (S. 94), da $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} qx(l-x)$ zu setzen ist¹⁾

$$\mathfrak{M}' = \frac{I_0 q}{l^2} \int_0^l \frac{x^2(l-x) dx}{I} = \frac{qh_0h_1}{l^2} \int_0^l \frac{x^2(l-x) dx}{[h_0l + (h_1 - h_0)x]^2},$$

d. i. nach Ausführung der Integration

$$27. \quad \mathfrak{M}' = ql^2 \frac{h_0h_1}{2(h_1 - h_0)^3} \left[5h_0 + h_1 - \frac{2h_0(h_0 + 2h_1)}{h_1 - h_0} \operatorname{lognat} \frac{h_1}{h_0} \right].$$

In folgender Tabelle sind die hiernach für einige Verhältnisse von h_0 zu h_1 berechneten Werthe von α , \mathfrak{M}' und M_1 zusammengestellt.

$\frac{h_0}{h_1}$	α	\mathfrak{M}' +	M_1 -	D_0	D_1
0	0	0	0,1250	0,3750	0,7500
0,1	0,2171	0,02918	0,1008	0,3992	0,7016
0,2	0,3706	0,04485	0,0907	0,4093	0,6814
0,3	0,4923	0,05530	0,0843	0,4157	0,6686
0,4	0,5943	0,06284	0,0794	0,4206	0,6588
0,5	0,6822	0,06853	0,0754	0,4246	0,6508
0,6	0,7596	0,07290	0,0720	0,4280	0,6440
0,7	0,8287	0,07643	0,0692	0,4308	0,6384
0,8	0,8911	0,07922	0,0667	0,4333	0,6334
0,9	0,9479	0,08162	0,0646	0,4354	0,6292
1	1	0,08333	0,0625	0,4375	0,6250
		. ql^2	. ql^2	. ql	. ql

Die Stützendrücke werden bei gänzlicher Belastung des linken Feldes $D_0 = \frac{1}{2} ql + \frac{M_1}{l}$, $D_1 = \frac{1}{2} ql - \frac{2M_1}{l}$, $D_2 = \frac{M_1}{l}$. Die Werthe von D_0 und D_1 sind in der vorigen Tabelle mit angegeben. Bei gänzlicher Belastung beider Felder werden M_1 und D_1 doppelt so gross.

Bei Belastung durch eine Einzellast G , welche im linken Felde im Abstände ξ von der Stütze 0 liegt, wird für die linke Seite $\mathfrak{M}l = G(l - \xi)x$, für die rechte Seite $= \mathfrak{M}l = G\xi(l - x)$, daher

¹⁾ Es ist allgemein:

$$\int \frac{x^2 dx}{(a + bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{x^2}{x} - \frac{a^2 x}{b(a + bx)} - \frac{2a}{b^2} \frac{a + bx}{b^2} + \frac{3a^2}{b^2} \operatorname{lognat}(a + bx) \right] + \text{Const.}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= \frac{2GI_0}{l^3} \left[(l - \xi) \int_0^\xi \frac{x^2 dx}{I} + \xi \int_\xi^l \frac{x(l-x) dx}{I} \right] \\ &= \frac{2GI_0}{l^3} \left[l \int_0^\xi \frac{x^2 dx}{I} - \xi \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} + l\xi \int_\xi^l \frac{x dx}{I} \right]. \end{aligned}$$

Setzt man $I_0 = \frac{1}{2} f h_0 h_1$, $Il^2 = \frac{1}{2} f [h_0 l + (h_1 - h_0) x]^2$, so gibt die Ausführung der Integration:

$$28. \mathfrak{M}' = \frac{2Glh_0 h_1}{(h_1 - h_0)^3} \left[2h_0 \frac{\xi}{l} \operatorname{lognat} \frac{h_1}{h_0} - 2h_0 \operatorname{lognat} \frac{h}{h_0} - (h_1 - h_0) \frac{\xi}{l} \operatorname{lognat} \frac{h}{h_1} \right],$$

wenn h die Trägerhöhe an der Stelle bezeichnet, an welcher die Einzelast liegt. Nach der Formel 2 wird jetzt, wenn man auch den Ausdruck für α einsetzt,

$$29. M_1 = -Gl \frac{2h_0}{h_1 - h_0} \frac{\xi}{l} \operatorname{lognat} \frac{h_1}{h_0} + \frac{\xi}{l} \operatorname{lognat} \frac{h_1}{h} - \frac{2h_0}{h_1 - h_0} \operatorname{lognat} \frac{h}{h_0} - 2 \left(\frac{h_0 + h_1}{h_1} - \frac{2h_0}{h_1 - h_0} \operatorname{lognat} \frac{h_1}{h_0} \right).$$

Die Tabelle auf folgender Seite enthält die Werthe von M_1 für einige Verhältnisse von h_0 zu h_1 und ξ zu l .

Für $h_0 = 0$ ergibt sich sehr einfach

$$30. M_1 = \frac{1}{2} Gl \frac{\xi}{l} \operatorname{lognat} \frac{l}{\xi},$$

wenn man beachtet, dass $\frac{\operatorname{lognat} x}{x}$ für $x = \infty$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt;

es wird daher $\frac{\operatorname{lognat} x}{x} = \frac{d \operatorname{lognat} x}{dx} = \frac{1}{x} = 0$. In Fig. 201a sind die

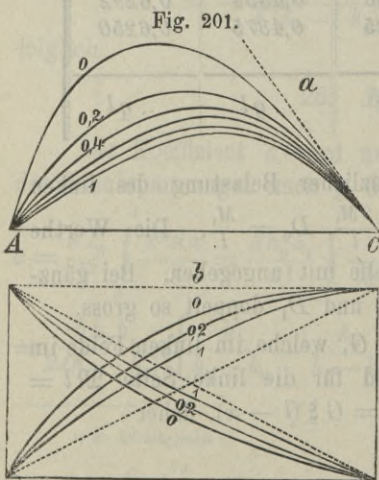


Fig. 201.

Einflusslinien für M_1 dargestellt und zwar für $h_0 = 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1 \cdot h_1$. Alle Linien haben an der Mittelstütze C eine gemeinschaftliche Tangente, da sich nach dem Ausdrucke 29 für $\xi = l$ $\frac{dM_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} G$ ergibt. Für die Stützendrücke ergibt sich jetzt: $D_0 l = G(l - \xi) + M_1$, $D_1 l = G\xi + 2M_1$, $D_3 l = M_1$. Die Einflusslinien für D_0 und D_1 sind in Fig. 201b dargestellt und zwar für $h_0 = 0, 0,2, 1 \cdot h_1$. Alle Einflusslinien für D haben an der Mittelstütze eine gemeinschaftliche horizontale Tangente.

Die weitere Behandlung, auch die Untersuchung des Einflusses der Höhenlage der Stützen, ist jetzt ohne Schwierigkeit durchzuführen.

$\frac{h_0}{h_1}$	M_1 für $\frac{\xi}{l} =$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	0	0,1609	0,1833	0,1532	0,0892	0
0,2	0	0,0902	0,1337	0,1291	0,0826	0
0,4	0	0,0710	0,1137	0,1172	0,0796	0
0,6	0	0,0601	0,1007	0,1086	0,0767	0
0,8	0	0,0532	0,0913	0,1018	0,0756	0
1	0	0,0480	0,0840	0,0960	0,0720	0

. Gl

Die von uns vorausgesetzte Trägerform wurde zuerst von Baensch für eine gänzliche gleichmässige Belastung untersucht (Zeitschr. für Bauw. 1857). Eine Trägerform, bei welcher sich die Trägerhöhe nach dem Gesetze $h l^2 = h_0 l^2 + (h_1 - h_0) x (2l - x)$ ändert (parabolische Gurte) wurde von Michaelis untersucht (Verhandelingen van het k. Institut. van Ingenieurs, 1867—1868).

§. 115. Träger von konstanter Höhe, aber veränderlichem Querschnitte. Bei konstanter Höhe h kann man für einen Gitterträger

$$I = \frac{1}{2} f h^2$$

setzen. Wenn man nun unter irgend einer Annahme, etwa eines konstanten Trägheitsmomentes, die Spannungen in den Gurten und hier nach f bestimmt, so kann man nach §. 62 und 63 die genauere Behandlung durchführen. Wir wollen hier noch eine allgemeinere Behandlung durch Einführung eines Näherungsgesetzes für I geben.

Wir setzen unter Annahme zweier symmetrischer Oeffnungen bei gänzlicher gleichmässiger Belastung mit $g + p$ pro Längeneinheit

$$31. \quad M_1 = -k(g + p) l^2.$$

Alsdann ist bei blosser gänzlicher Belastung der linken Oeffnung

$$32. \quad M_1 = -k \left(g + \frac{1}{2} p \right) l^2.$$

Bei dieser Belastung entsteht innerhalb der Fixpunkte der linken Oeffnung (zu denen die linke Stütze gehört) das grösste positive Moment.

Dasselbe ist $M = \frac{1}{2} (g + p) x (l - x) + M_1 \frac{x}{l}$ oder

$$33. \quad \max (+ M) = \frac{1}{2} [(1 - 2k) g l + (1 - k) p l - (g + p) x] x.$$

Dieser Ausdruck gilt bis zu dem Punkte, in welchem für eine gänzliche Belastung beider Felder oder für das Eigengewicht $M = 0$ wird.

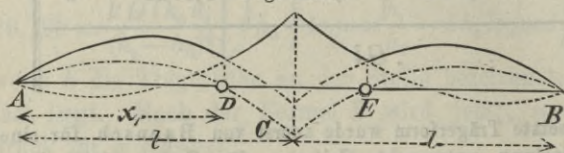
Bezeichnen wir das x dieses Punktes mit x_1 , so wird $0 = (1 - 2k)l - x_1$, also

$$34. \quad x_1 = (1 - 2k)l.$$

Für $x > x_1$ ist das negative Maximum von M grösser, als das positive. Der genaue Ausdruck für dasselbe ist indess weniger einfach. Wir wollen deshalb annähernd

$$\max(-M) = \frac{1}{2} (Al - Bx)x$$

Fig. 202.



setzen. Wir bestimmen die Konstanten A und B so, dass der Werth von $\max(-M)$ für $x = x_1$ und $x = l$ richtig wird. Für

$x = x_1$ wird $\max(-M) = -\max(+M) = -\frac{1}{2} p [(1 - k)l - x_1] x_1 = -\frac{1}{2} k p l x_1$ und für $x = l$ wird $\max(-M) = -k(g + p)l^2$. Demnach ist zu setzen $\frac{1}{2} (A - B + 2k B) l x_1 = -\frac{1}{2} k p l x_1$ und $\frac{1}{2} (A - B) l^2 = -k(g + p)l^2$ oder

$$\begin{aligned} A - B + 2k B &= -k p, \\ A - B &= -2k(g + p). \end{aligned}$$

Hieraus folgt $A = (1 - 2k)g + \frac{1}{2}(1 - 4k)p$ und $B = g + \frac{1}{2}p$, mithin

$$35. \quad \max(-M) = \frac{1}{4} [2(1 - 2k)gl + (1 - 4k)pl - (2g + p)x].$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$36. \quad \begin{cases} a = (1 - 2k)\frac{g}{q} + (1 - k)\frac{p}{q}, & b = 1, \\ a_1 = (1 - 2k)\frac{g}{q} + \frac{1}{2}(1 - 4k)\frac{p}{q}, & b_1 = \frac{g}{q} + \frac{p}{2q} \end{cases}$$

und $f = \pm \frac{M}{Kh}$, also $I = \frac{1}{2} f h^2 = \mp \frac{M h}{2K}$, wobei das Zeichen $-$ für $x < x_1$, das Zeichen $+$ für $x > x_1$ gilt, so wird, wenn wir noch $\frac{qk}{4K} = C$ setzen (Fig. 202):

$$37. \quad x < x_1: I = C(al - bx)x; \quad x > x_1: I = -C(a_1 l - b_1 x_1)x_1.$$

Hiernach wird nun ¹⁾

¹⁾ Es ist

$$\int \frac{x dx}{al - bx} = -\frac{x}{b} - \frac{al}{a^2} \lognat(al - bx) + Const.$$

$$\int \frac{(l-x) dx}{al - bx} = \frac{x}{b} + \frac{(a-b)l}{b^2} \lognat(al - bx) + Const.$$

$$\int \frac{x(l-x) dx}{al - bx} = \frac{(a-b)lx}{b^2} + \frac{x^2}{2b} + \frac{a(a-b)l^2}{b^2} \lognat(al - bx) + Const.$$

$$\alpha = \frac{3I_0}{Cl^3} \left[\int_0^{x_1} \frac{x dx}{al - bx} - \int_{x_1}^l \frac{x dx}{a_1 l - b_1 x_1} \right], \text{ d. i.}$$

$$38. \alpha = \frac{3I_0}{Cl^3} \left[-\frac{x_1}{b} - \frac{al}{b^2} \operatorname{lognat} \frac{al - bx_1}{al} + \frac{l - x_1}{b_1} - \frac{a_1 l}{b_1^2} \operatorname{lognat} \frac{a_1 l - b_1 x_1}{(a_1 - b_1) l} \right]$$

und für gänzliche gleichmässige Belastung des ersten Feldes

$$\mathfrak{M}' = \frac{I_0 q}{Cl^2} \left[\int_0^{x_1} \frac{x(l-x) dx}{al - bx} - \int_{x_1}^l \frac{x(l-x) dx}{a_1 l - b_1 x_1} \right], \text{ d. i.}$$

$$39. \mathfrak{M}' = \frac{I_0 q}{Cl^2} \left[\frac{(a-b)lx_1}{b^2} + \frac{x_1^2}{2b} + \frac{a(a-b)l^2}{b^3} \operatorname{lognat} \frac{al - bx_1}{al} - \frac{(a_1 - b_1)l(l - x_1)}{b_1^2} - \frac{l^2 - x_1^2}{2b_1} + \frac{a_1(a_1 - b_1)l^2}{b_1^3} \operatorname{lognat} \frac{a_1 l - b_1 x_1}{(a_1 - b_1) l} \right].$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{2g+p}{y} = m$, $\frac{p}{q} = n$, so wird $a = 1 - km$, $a_1 = \frac{1}{2}m - 2k$, $b_1 = \frac{1}{2}m$. Für gänzliche Belastung beider Felder wird nun $M_1 = -\frac{3\mathfrak{M}'}{2\alpha}$, d. i.

$$40. M_1 =$$

$$-\frac{ql^2}{2} \cdot \frac{A + km(1 - km) \operatorname{lognat} \frac{1 - km}{kn} + \frac{8k(m - 4k)}{m^3} \operatorname{lognat} \frac{2}{2 - m}}{B + (1 - km) \operatorname{lognat} \frac{1 - km}{kn} + \frac{2(m - 4k)}{m^2} \operatorname{lognat} \frac{2}{2 - m}},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$41. \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{m^2} \left[16k^2 - 4km + \frac{1}{2}m^2 - km^2(2+m) + 2k^2m(2+m+m^2) \right], \\ B &= \frac{1}{m} [2k(2+m) - m]. \end{aligned} \right.$$

Da nun $M_1 = -kql^2$ werden muss, so erhält man zur Bestimmung von k die folgende Gleichung:

$$42. 2kB - A + k(2 - m)(1 - km) \operatorname{lognat} \frac{1 - km}{kn} - \frac{4k(2 - m)(m - 4k)}{m^3} \operatorname{lognat} \frac{2}{2 - m} = 0,$$

die natürlich durch Probiren aufzulösen ist.

Wenn $p = 0$ ist, also das Eigengewicht allein wirkt, so wird $m = 2$, $n = 0$. Die beiden Glieder mit den natürlichen Logarithmen erscheinen dann in der Form $0 \cdot \infty$; in bekannter Weise findet man, dass diese Glieder 0 werden. Es bleibt also $2kB - A = 0$. Für $m = 2$ aber wird $A = \frac{1}{2} - 6k + 12k^2$, $B = -1 + 4k$. Dies eingesetzt, gibt $8k^2 - 8k + 1 = 0$ oder

$$43. \quad k = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = 0,1464.$$

Für $g = p$ oder $m = 1,5$, $n = 0,5$ ergibt sich $k = 0,1392$. Für $g = 0$ oder $m = 1$, $n = 1$ wird $k = 0,1346$. Allgemein wird hiernach nahezu

$$44. \quad k = 0,1458 \frac{g}{q} + 0,1340 \frac{p}{q}.$$

In dem Falle ungleicher Höhenlagen der Stützen tritt nur der Unterschied ein, dass nicht mehr der Ausdruck 40 für $M_1 = -kql^2$, sondern der Gleichung 2 entsprechend, dieser Ausdruck $= -kql^2 - \frac{3EI_0y}{\alpha l^2}$ zu setzen und aus dieser Gleichung k zu bestimmen ist. In der Gleichung 42 ist dementsprechend auf der linken Seite $+2CEly = \frac{Ekqly}{2K}$ hinzuzufügen. Für $p = 0$ ergibt sich, wenn man zur Abkürzung $Ekqly = 8K\varepsilon$ setzt,

$$45. \quad k = \frac{2 + 2\varepsilon - \sqrt{2 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2}}{4}.$$

Wenn sich die Gurte durch staffelförmige Anordnung und durch Verstärkungen der zu schwach erscheinenden theoretischen Querschnitte mehr dem konstanten Gurte nähern, so nähert sich natürlich k mehr dem betreffenden Werthe für einen konstanten Querschnitt, bei gleicher Höhenlage der Stützen also mehr der Zahl $0,1250$. Namentlich bringt die Verstärkung der Stelle D und E , an welcher für das Eigengewicht $M = 0$ wird, eine wesentliche Veränderung von k hervor.

Hat man den Werth von k und damit die Werthe von a , b , a_1 , b_1 bestimmt, so kann man auch leicht den Einfluss einer Einzellast untersuchen, da die vorkommenden Integrale $\int \frac{x dx}{al - bx}$ und $\int \frac{(l-x) dx}{al - bx}$ leicht zu behandeln sind.

Die Träger konstanter Festigkeit bei konstanter Höhe und bei gänzlicher gleichmässiger Belastung aller Felder wurden zuerst von Grashof (Die Elastizitätslehre, I. Aufl., Berlin 1866) behandelt; etwas vervollständigt wurde diese Behandlung vom Verfasser (Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867). Angaben von Koeffizienten für derartige und andere Träger bei Drehbrücken macht Fränkel im Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II. Band, Brückenbau, II. Abth., Leipzig 1882.

§. 116. Günstigste Höhenlage der Stützen bei konstanter Trägerhöhe. Wir wollen nur zwei gleiche Felder voraussetzen.

1. Günstigste Höhenlage bei konstantem Querschnitte. Das absolute positive Maximum des Momentes tritt im ersten Felde bei gänzlicher Belastung dieses Feldes ein, während das zweite Feld unbelastet ist. Hier ist in Formel 2: $M' = \frac{1}{12}(g+p)l^2$, $M_1'' = \frac{1}{12}gl^2$ zu setzen; es wird sonach

$$46. M_1 = -\frac{(2g+p)l^2}{16} + \frac{3EIy}{l^2}.$$

Für einen beliebigen Querschnitt ist das Moment $M = D_0 x - \frac{1}{2}(g+p)x^2$; M wird daher zum Maximum für $x = \frac{D_0}{g+p}$; dasselbe ist $Max(+M) = \frac{D_0^2}{2(g+p)}$. Nun aber ist $M_1 = D_0 l - \frac{1}{2}(g+p)l^2$, also

$$D_0 = \frac{1}{2}(g+p)l + \frac{M_1}{l} = \frac{(6g+7p)l}{16} + \frac{3EIy}{l^3},$$

folglich

$$47. Max(+M) = +\frac{1}{2(g+p)} \left[\frac{(6g+7p)l}{16} - \frac{3EIy}{l^3} \right]^2.$$

Das absolute negative Maximum von M tritt an der Mittelstütze bei gänzlicher Belastung beider Felder ein. Da hier $M' = M_1'' = \frac{1}{12}(g+p)l^2$ zu setzen ist, so wird

$$48. Max(-M) = M_1 = -\frac{1}{8}(g+p)l^2 + \frac{3EIy}{l^2}.$$

Setzt man die absoluten Werthe beider Momente gleich und ordnet nach Potenzen von y , so erhält man als Gleichung für den zweckmässigsten Werth von y

$$\frac{9E^2I^2y^2}{l^6} + \frac{3EI(22g+23p)y}{8l^2} - \frac{(28g^2+44gp+15p^2)l^2}{256} = 0.$$

oder

$$49. y = \frac{(-22g-23p+4\sqrt{32g^2+66gp+34p^2})l^4}{48EI}.$$

Hiernach wird y stets positiv, so dass eine Senkung der Mittelstütze anzuordnen wäre. Für die beiden Grenzen $g=0$ und $p=0$ wird hiernach:

$$g=0: y = \frac{4\sqrt{34}-23}{48} \frac{ql^4}{EI} = 0,00675 \frac{ql^4}{EI},$$

$$Max M = 0,1048ql^2,$$

$$p=0: y = \frac{8\sqrt{2}-11}{24} \frac{ql^4}{EI} = 0,01307 \frac{ql^4}{EI},$$

$$Max M = 0,0858ql^2.$$

Die Vergrößerung des positiven Maximalmomentes beträgt hiernach 9,5 bis 22,1 Prozent, die Verminderung des negativen Maximalmomentes 16,2 bis 31,3 Prozent. Die Transversalkräfte verändern sich hierbei um 0,0203ql bis 0,0392ql, wobei sich im I. Felde die positiven vergrößern, die negativen vermindern; die Änderung der positiven Maxima von Q beträgt 4,6 bis 10,5 Prozent, die Änderung der negativen Maxima 3,3 bis 6,3 Prozent.

geführt wurde. Durch dieselbe ergibt sich, dass sowohl bei einer Hebung, als bei einer Senkung der Mittelstütze eine Vermehrung der Materialmenge eintritt, dass also die kleinste Materialmenge für $y = 0$ entsteht (Winkler's Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867).

§. 117. Einfluss der Wärme. Setzen wir eine symmetrische Anordnung beider Oeffnungen voraus, so wird $l_1 = l$, $\beta_1 = \alpha$ und die Gleichung 5 (S. 171) gibt

$$52. \quad M_1 = \frac{3EI\epsilon t}{2\alpha h}.$$

Jeder Stützendruck auf eine Endstütze ist nun $D_0 = D_2 = \frac{M_1}{l}$, der Druck auf die Mittelstütze $D_1 = -2\frac{M_1}{l}$. Das Moment in einem beliebigen Querschnitte des ersten Feldes wird

$$M = D_0 x = M_1 \frac{x}{l}.$$

Bei konstantem Querschnitte jedes Gurtes eines Gitterträgers würde $I_0 = \frac{1}{2} f h^2$. Da hier $\alpha = 1$ ist, so wird $M_1 = \frac{3}{4} E \epsilon t f h$. Die grösste spezifische Spannung N wird hiernach

$$53. \quad N = \frac{M}{f h} = \frac{3}{4} E \epsilon t.$$

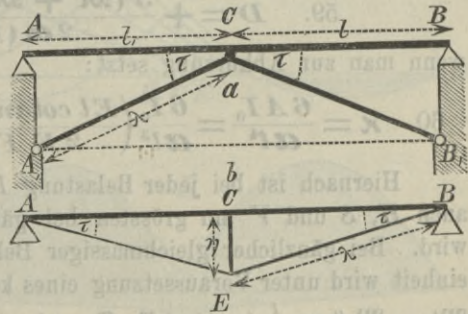
Für $E = 2000$ Ton. pro \square^{cm} , $\epsilon = 0,000012$ wird hiernach $N = 0,018t$, also für $t = 10^6$: $N = 0,18$, d. i. ungefähr 24 Prozent der Beanspruchung durch die Belastung.

§. 118. Verbindung mit einem Dreiecks-Hänge- oder Sprengwerk. Das Dreiecks-Hänge- oder Sprengwerk, durch welches

der Balkenträger in seiner Mitte unterstützt werde, bestehe aus einem Spannriegel AB (Fig. 203) mit der Querschnittsfläche F_0 , zwei Zugbändern oder Streben mit der Querschnittsfläche F , der Länge λ und dem Neigungswinkel τ und einer Vertikalen CE mit der Länge η und der Querschnittsfläche f .

Der Balkenträger kann hierbei auch gleichzeitig als Spannriegel wirken. Die Spannung sei bezüglich H, S, V , also die Längenänderungen bei gleichem Elastizitätskoeffizienten E bezüglich $\frac{2Hl}{EF_0}$, $\frac{S\lambda}{EF}$, $\frac{V\eta}{Ef}$. Ein in C auf CE geübter Druck 1 erzeugt bezüglich die

Fig. 203.



Spannungen $-\frac{1}{2} \cotan \tau$, $+\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \tau$ und -1 . Die Senkung y des Punktes D findet man somit nach dem Principe der virtuellen Arbeit durch die Beziehung $1 \cdot y = -\frac{2Hl}{2E_1 F_0} \cotan \tau + \frac{2S\lambda}{2E_2 F} \operatorname{cosec} \tau - \frac{Vy}{E_3 f}$, wenn E_1, E_2, E_3 die bezüglichen Elastizitätskoeffizienten bedeuten. Wenn der vom Balkenträger in C geübte Druck $= D$ ist, so wird

$$54. \quad H = -\frac{1}{2} D \cotan \tau, \quad S = +\frac{1}{2} D \operatorname{cosec} \tau, \quad V = -D.$$

Dies eingesetzt gibt

$$55. \quad y = \frac{A}{El} D,$$

wenn man zur Abkürzung

$$56. \quad A = El \left(\frac{l \cotan^2 \tau}{2E_1 F_0} + \frac{\lambda \operatorname{cosec}^2 \tau}{2E_2 F} + \frac{y}{E_3 f} \right)$$

setzt, worin E den Elastizitätskoeffizienten des Balkenträgers bedeuten soll. Bei der Konstruktion Fig. 203b ist natürlich $E_1 = E$. Nach der Gleichung 28 (S. 104) wird nun

$$57. \quad D = \mathfrak{D} - \frac{2M_1}{l},$$

wenn \mathfrak{D} den auf C geübten Druck für den Fall bezeichnet, dass statt des kontinuierlichen Trägers AB zwei Einzelträger AC und BC vorhanden wären. Die Gleichung 2 geht hierdurch über in

$$M_1 = -\frac{3(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_1'')}{4\alpha} + \frac{3AI_0 \mathfrak{D}}{\alpha l^3} - \frac{6AI_0 M_1}{\alpha l^4}.$$

Somit wird

$$58. \quad M_1 = -\frac{3(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_1'') - 2\chi\alpha \mathfrak{D} l}{4\alpha(1+\chi)},$$

$$59. \quad D = +\frac{3(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_1'') + 2\alpha \mathfrak{D} l}{2\alpha(1+\chi)l},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$60. \quad \chi = \frac{6AI_0}{\alpha l^4} = \frac{6I_0}{\alpha l^3} \left(\frac{El \cotan^2 \tau}{2E_1 F_0} + \frac{E\lambda \operatorname{cosec}^2 \tau}{2E_2 F} + \frac{E\eta}{E_3 f} \right).$$

Hiernach ist bei jeder Belastung D positiv, so dass D und hiermit auch H, S und V am grössten bei gänzlicher Belastung beider Felder wird. Bei gänzlicher gleichmässiger Belastung mit $g+p$ pro Längeneinheit wird unter Voraussetzung eines konstanten Querschnittes ($\alpha = l$): $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1'' = \frac{1}{12}(g+p)l^2$, $\mathfrak{D} = (g+p)l$, folglich

$$61. \quad M_1 = \frac{(1-4\chi)(g+p)l^2}{8(1+\chi)}, \quad D = \frac{5(g+p)l}{4(l+\chi)}.$$

Für das Moment in einem beliebigen Querschnitte wird $Ml = \frac{1}{2}(g+p)lx(l-x) + M_1$, d. i.

$$62. \quad M = \frac{(g+p)x}{8(1+\kappa)} [(3+8\kappa)l - 4(1+\kappa)x].$$

Für $\kappa = 0,25$ wird $M_1 = 0$. Hier verhält sich also der kontinuierliche Träger bei gänzlicher Belastung beider Felder ebenso, als wenn er bei C getrennt wäre.

Liegt im linken Felde eine Einzellast G im Abstände ξ von der Stütze A , so wird $M'l = \frac{1}{8} G \xi (l^2 - \xi^2)$, $M_1'' = 0$, $\mathcal{D}l = G\xi$, folglich

$$63. \quad M_1 = -\frac{G\xi}{4l^2(1+\kappa)} [(1-2\kappa)l^2 - \xi^2], \quad D = \frac{G\xi(3l^2 - \xi^2)}{2l^3(1+\kappa)}.$$

Dieselben Ausdrücke gelten auch noch, wenn die Einzellast G im zweiten Felde im Abstände ξ von der Stütze B liegt.

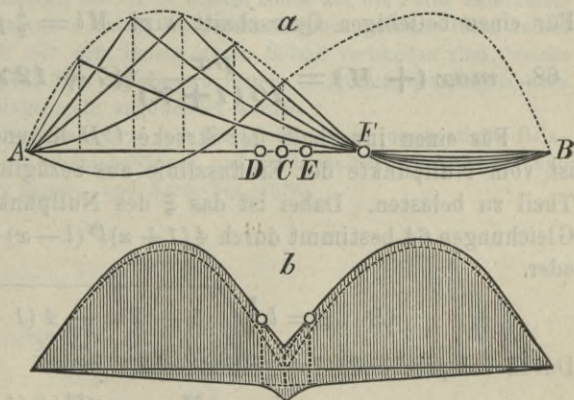
Für einen Querschnitt des ersten Feldes im Abstände x von der Stütze A wird nun, wenn die Last auf der linken Seite des Querschnittes liegt, $Ml = G\xi(l-x) + M_1x$ und wenn sie im ersten Felde auf der rechten Seite des Querschnittes oder im zweiten Felde liegt, $Ml = Gx(l-\xi) + M_1x$. Demnach wird

$$64. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Last links:} \dots \dots \dots M = \frac{G\xi(l-x)}{l} - \frac{Gx\xi[(1-2\kappa)l^2 - \xi^2]}{4(1+\kappa)l^3}, \\ \text{Last rechts:} \dots \dots \dots M = \frac{G(l-\xi)x}{l} - \frac{Gx\xi[(1-2\kappa)l^2 - \xi^2]}{4(1+\kappa)l^3}, \\ \text{Last im zweiten Felde: } M = -\frac{Gx\xi[(1-2\kappa)l^2 - \xi^2]}{4(1+\kappa)l^3}, \end{array} \right.$$

wobei im zweiten Felde ξ den Abstand von B bedeutet. In Fig. 204 a

sind hiernach die Einflusslinien für $\kappa = 0,25$ dargestellt (für $\kappa = 0$ zeigt Fig. 197 a die Einflusslinien). Für die Lage der Last im I. Felde wird M nur positiv, wenn der Querschnitt innerhalb der Strecke AD liegt, wobei der Punkt D durch die Bedingung bestimmt

Fig. 204.



ist, dass für die Lage der Last auf der linken Seite $\frac{dM}{d\xi}$ (für $\xi=0$) = 0 sein muss. Dies gibt

$$65. \quad AD = x_1 = \frac{4(1+\kappa)l}{5+2\kappa}.$$

Im zweiten Felde gehen alle Einflusslinien durch denselben Punkt F . Nach der dritten der Gleichungen 64 wird

$$66. BF = \xi_1 = l \sqrt{1 - 2\kappa}.$$

Wenn $\kappa = \frac{1}{2}$ ist, so wird $BF = 0$ und $AD = l$. Ist $\kappa > \frac{1}{2}$, so kann für jeden Querschnitt eines Feldes bei Belastung dieses Feldes M nur positiv werden.

Für eine gleichmässige Verkehrsbelastung ist für das positive Maximum von M die Strecke CF , für das negative Maximum die Strecke BF des rechten Feldes zu belasten. Für die blosse Belastung des rechten Feldes ergibt sich leicht durch entsprechende Integration des dritten der Ausdrücke 64:

$$\max(+M) = + \frac{px(l^2 - \xi_1^2)[(4\kappa - 1)l^2 + \xi_1^2]}{16(1 + \kappa)l^3},$$

$$\max(-M) = - \frac{px\xi_1^2[2(1 - 2\kappa)l^2 - \xi_1^2]}{16(1 + \kappa)l^3},$$

oder, wenn man den Ausdruck 66 für ξ_1 einsetzt,

$$67. \max(+M) = + \frac{\kappa^2 plx}{4(1 + \kappa)}, \quad \max(-M) = - \frac{(1 - 2\kappa)^2 plx}{16(1 + \kappa)}.$$

Für einen innerhalb der Strecke AD liegenden Querschnitt ist hinsichtlich des positiven Maximalmomentes das linke Feld ganz zu belassen. Für diese Belastung ist $\mathfrak{M}' = \frac{1}{12}pl^2$, $\mathfrak{M}_1'' = 0$, $\mathfrak{D} = \frac{1}{2}pl$, also nach Formel 58

$$M_1 = - \frac{(1 - 4\kappa)pl^2}{16(1 + \kappa)}.$$

Für einen beliebigen Querschnitt wird $Ml = \frac{1}{2}plx(l - x) + M_1x$, d. i.

$$68. \max(+M) = \frac{px}{16(1 + \kappa)} [(7 + 12\kappa)l - 8(1 + \kappa)x].$$

Für einen innerhalb der Strecke CD liegenden Querschnitt dagegen ist vom Nullpunkte der Einflusslinie aus bezüglich der rechten oder linken Theil zu belasten. Dabei ist das ξ des Nullpunktes nach der ersten der Gleichungen 64 bestimmt durch $4(1 + \kappa)l^2(l - x) - x[(1 - 2\kappa)l^2 - \xi^2] = 0$ oder

$$69. \xi = l \sqrt{(5 + 2\kappa) - 4(1 + \kappa) \frac{l}{x}}.$$

Durch entsprechende Integration erhält man

$$\max(-M) = \frac{p(l - x)\xi^2}{2l} - \frac{px\xi^2[2(1 - 2\kappa)l^2 - \xi^2]}{16(1 + \kappa)l^3}$$

oder nach Einsetzung des Ausdruckes von ξ

$$70. \max(-M) = - \frac{plx}{16(1 + \kappa)} \left[(5 + 2\kappa) - 4(1 + \kappa) \frac{l}{x} \right]^2.$$

Das positive Maximalmoment erhält man jetzt am besten nach der Regel $\max(+M) + \max(-M) = M_t$, wenn M_t das Moment für die Belastung des ganzen ersten Feldes (nach Formel 68) bezeichnet.

Die Kurve für die Maximalmomente ist hiernach in Fig. 204b für $\alpha = 0,25$ dargestellt.

Das wirkliche positive Maximum von M unter Berücksichtigung des Eigengewichtes und der Verkehrsbelastung erhält man durch Addition der Ausdrücke 62 ($p = 0$), 67 und 68 zu

$$71. \max(+M) = \frac{x}{16(1+\alpha)} \left[\{(6+16\alpha)g + (7+12\alpha+4\alpha^2)p\} l - 8(1+\alpha)(g+p)x \right].$$

Das absolute Maximum ergibt sich hiernach zu

$$72. \text{Max}(+M) = \frac{[(6+16\alpha)g + (7+12\alpha+4\alpha^2)p]^2 l^2}{512(1+\alpha)^2(g+p)}.$$

Durch Bestimmung von $\text{Max}(+M)$ für einige Werthe von α ergibt sich, dass sich annähernd, indess ziemlich genau, setzen lässt:

$$73. \text{Max}(+M) = [(0,0703 + 0,216\alpha)g + (0,0957 + 0,144\alpha)p] l^2.$$

Das absolute negative Maximum von M findet an der Mittelstütze statt. Nach den Ausdrücken 61 und 67 wird dasselbe

$$74. \text{Max}(-M) = - \frac{[(1-4\alpha)g + (1-2\alpha)^2 p] l^2}{8(1+\alpha)}.$$

Indess ist der absolute Werth von $\text{Max}(-M)$ in der Regel kleiner, als der von $\text{Max}(+M)$.

Bei der Untersuchung ist die bei der Konstruktion Fig. 203b im Balkenträger wirkende Axialkraft vernachlässigt, da wir in diesem Hefte auf die Fälle, dass ausser den Normalkräften auch Axialkräfte thätig sind, nicht eingehen wollten. Wenn indess die Zugbänder AE und BE mit dem Balken durch Bolzen verbunden sind, welche in der Axe des Balkens vertikal über den Lagern liegen, so können die aufgestellten Regeln immerhin als Näherungsregeln angewendet werden.

Diese Konstruktionen wurden zuerst mit Rücksicht auf die ungünstigste Belastung behandelt von Fränkel (Schiebebahnen und Drehscheiben, Prag 1872) und Melan (Zeitschr. des österr. Ingen.- und Arch.-Ver. 1876).

XIV. Kapitel.

Träger mit drei Feldern.

§. 119. **Stützenmomente.** Wir wollen eine symmetrische Anordnung des Trägers voraussetzen, so dass die Länge l_1 der beiden äusseren Felder gleich ist. Die Länge l des inneren Feldes sei $= n l_1$. Die

Gleichung 14 (S. 97) gibt sodann, da der Symmetrie halber $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1$ ist,

$$1. \quad \begin{cases} 2(\alpha_1 + n\alpha_2)M_1 + n\gamma_2 M_2 = -3(\mathfrak{M}'_1 + n\mathfrak{M}''_2), \\ n\gamma_2 M_1 + 2(n\alpha_2 + \alpha_1)M_2 = -3(n\mathfrak{M}'_2 + \mathfrak{M}''_3). \end{cases}$$

Die Auflösung gibt:

$$2. \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{6(\mathfrak{M}'_1 + n\mathfrak{M}''_2)(\alpha_1 + n\alpha_2) - 3(n\mathfrak{M}'_2 + \mathfrak{M}''_3)n\gamma_2}{4(\alpha_1 + n\alpha_2)^2 - n^2\gamma_2^2}, \\ M_2 = +\frac{3(\mathfrak{M}'_1 + n\mathfrak{M}''_2)n\gamma_2 - 6(n\mathfrak{M}'_2 + \mathfrak{M}''_3)(\alpha_1 + n\alpha_2)}{4(\alpha_1 + n\alpha_2)^2 + n^2\gamma_2^2}. \end{cases}$$

Bei konstantem Querschnitte wird $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_2 = 1$, mithin

$$3. \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{6(\mathfrak{M}'_1 + n\mathfrak{M}''_2)(1+n) - 3(n\mathfrak{M}'_2 + \mathfrak{M}''_3)n}{(2+n)(2+3n)}, \\ M_2 = +\frac{3(\mathfrak{M}'_1 + n\mathfrak{M}''_2)n - 6(n\mathfrak{M}'_2 + \mathfrak{M}''_3)(1+n)}{(2+n)(2+3n)}. \end{cases}$$

Wenn behufs Bestimmung der Fixpunkte die Felder unbelastet angenommen werden und das Moment an der Stütze 0 zu Null, das Moment M_3 an der Stütze 3 dagegen nicht $= 0$ angenommen wird, so ist $2(\alpha_1 + n\alpha_2)M_1 + n\gamma_2 M_2 = 0$ und $n\gamma_2 M_1 + 2(\alpha_1 + n\alpha_2)M_2 + \gamma_1 M_3 = 0$. Hieraus folgt, da $\mu_2 M_1 = -M_2$, $\mu_3 M_2 = -M_3$ ist,

$$\mu_2 = \frac{2(\alpha_1 + n\alpha_2)}{n\gamma_2}, \quad \mu_3 = \frac{4(\alpha_1 + n\alpha_2)^2 - n^2\gamma_2^2}{2(\alpha_1 + n\alpha_2)\gamma_1}.$$

Da nun $(1 + \mu_2)a_2 = l$, $(1 + \mu_3)a_3 = l$ und $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$ ist, so wird

$$4. \quad \begin{cases} \frac{a_3}{l_1} = \frac{b_1}{l_1} = \frac{2(\alpha_1 + n\alpha_2)\gamma_1}{2(\alpha_1 + n\alpha_2)\gamma_1 + 4(\alpha_1 + n\alpha_2)^2 - n^2\gamma_2^2}, \\ \frac{a_2}{l} = \frac{b_2}{l} = \frac{n\gamma_2}{2(\alpha_1 + n\alpha_2) + n\gamma_2^2}. \end{cases}$$

Bei konstantem Querschnitte wird

$$5. \quad \begin{cases} \frac{b_1}{l_1} = \frac{b_3}{l_1} = \frac{2(1+n)}{6+10n+3n^2}, \\ \frac{a_2}{l} = \frac{b_2}{l} = \frac{n}{2+3n}. \end{cases}$$

Hiernach liegen diese Verhältnisse stets zwischen 0 und $\frac{1}{8}$.

§. 120. Einfluss des Eigengewichtes bei konstantem Querschnitte. Setzen wir in den Gleichungen 2: $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}'_3 = \frac{1}{12}gl^2$, $\mathfrak{M}''_2 = \mathfrak{M}''_3 = \frac{1}{12}gl^2$, so erhalten wir

$$6. \quad M_1 = M_2 = -\frac{g(l_1^3 + l^3)}{4(2l_1 + 3l)} = -\frac{1+n^3}{4(2+3n)}gl^3.$$

Die Transversalkraft wird im I. Felde nach Formel 3 (S. 143), wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,

$$7. Q_1' = + \frac{3 + 6n - n^3}{4(2 + 3n)} gl_1, \quad Q_1'' = - \frac{5 + 6n + n^3}{4(2 + 3n)} gl_1$$

und sodann für einen beliebigen Querschnitt $Q = Q_1' - gx$. Im II. Felde wird $M_1 = M_2$, daher

$$8. Q_1' = + \frac{1}{2} gl, \quad Q_1'' = - \frac{1}{2} gl$$

und für einen beliebigen Querschnitt $Q = Q_2' - gx = \frac{1}{2} g(l - 2x)$ wie beim Einzelträger.

Der Stützendruck D_0 auf die Stütze 0 ist $= Q_1'$. Der Stützendruck D_1 auf die Stütze 1 ist nach Formel 28 (S. 104): $D_1' = Q_2' - Q_1''$, d. i.

$$9. D_1 = \frac{5 + 10n + 6n^2 + n^3}{4(2 + 3n)} gl_1.$$

Das Moment wird für einen beliebigen Querschnitt nach Formel 5 (S. 144) im I. Felde, wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,

$$10. M = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} gx(l_1 - x)$$

und im II. Felde, wenn wir $M' = M'' = M_1$ setzen.

$$11. M = M_1 + \frac{1}{2} gx(l - x).$$

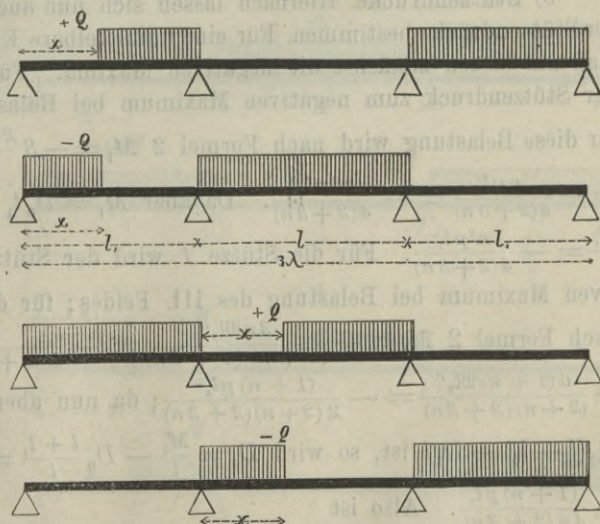
Transversalkräfte und Momente sind in Fig. 153 und 154 für $l = 1,2l_1$ grafisch dargestellt.

§. 121. Einfluss der gleichmässigen zufälligen Belastung bei konstantem Querschnitte.

a) Transversalkräfte. I. Feld. Das positive Maximum von Q tritt ein, wenn der rechte Theil des I. Feldes und das III. Feld ganz belastet ist (Fig. 205).

Als dann ist in Formel 2 $\mathfrak{M}_1' = \frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{12l_1^2}$, $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = 0$, $\mathfrak{M}_3'' = \frac{1}{12} pl_1^2$ zu setzen. Daher wird, wenn wir noch zur Abkürzung $\frac{x}{l_1} = m$ setzen,

Fig. 205.



$$12. M_1 = - \frac{2(1+m)(1-m^2)^2 - n}{4(2+n)(2+3n)} pl_1^2.$$

In den Formeln 8 (Seite 146) ist nun $M' = 0$, $M'' = M_1$ zu setzen, daher wird

$$13. \max(+Q) = \frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 pl_1.$$

Für gänzliche Belastung ist Q durch den vorigen Paragraph bestimmt; bezeichnen wir dieses Q mit Q_t , so ist $\max(-Q) = Q_t - \max(+Q)$.

II. Feld. Nach den Gleichungen 3 wird allgemein

$$M_2 - M_1 = 3 \frac{\mathfrak{M}_1' + n(\mathfrak{M}_2'' - \mathfrak{M}_2') - \mathfrak{M}_3''}{2+n}.$$

Das positive Maximum von Q tritt bei der Belastung des II. Feldes ein (Fig. 205). Für diese Belastung ist $\mathfrak{M}_1' = \frac{l}{12} pl_1^2$, $\mathfrak{M}_3' = 0$ und nach 43 (S. 115) $\mathfrak{M}_2'' - \mathfrak{M}_2' = \frac{px^2(l-x)^2}{6l^2}$, daher

$$M_2 - M_1 = \frac{1 - 2n^3 m^2 (1-m)^2}{4(2+m)} pl_2^2.$$

Nach 8 (Seite 146) wird demnach

$$14. \max(+Q) = + \frac{1 + 2n^2(1-m)^2(2+n - nm^2)}{4n(2+n)} pl_1.$$

Hieraus ergibt sich $\max(-Q)$ ohne Weiteres durch Verwechslung von m mit $1-m$ und Veränderung des Vorzeichens; also ist

$$15. \max(-Q) = - \frac{1 + 2n^2 m^2 [2+n - n(1-m)^2]}{4n(2+n)} pl_1.$$

b) Stützendrücke. Hiernach lassen sich nun auch leicht die Maxima der Stützendrücke bestimmen. Für eine unmittelbare Ermittlung bestimmt man am besten zunächst die negativen Maxima. Für die Stütze 0 wird der Stützendruck zum negativen Maximum bei Belastung des II. Feldes; für diese Belastung wird nach Formel 2 $M_1 = -3 \frac{2n(1+n)\mathfrak{M}_2'' - n^2\mathfrak{M}_2'}{(2+n)(2+3n)}$
 $= - \frac{npl^2}{4(2+3n)} = - \frac{n^3 pl_1^2}{4(2+3n)}$. Da aber $M_1 = D_0 l_1$ ist, so wird $D_0 = \frac{M_1}{l_1} = - \frac{n^3 pl_1}{4(2+3n)}$. Für die Stütze 1 wird der Stützendruck zum negativen Maximum bei Belastung des III. Feldes; für diese Belastung wird nach Formel 2 $M_1 = - \frac{3n\mathfrak{M}_3''}{(2+n)(2+3n)} = + \frac{npl_1^2}{4(2+n)(2+3n)}$, $M_2 = - \frac{6(1+n)\mathfrak{M}_2''}{(2+n)(2+3n)} = - \frac{(1+n)pl_1^2}{2(2+n)(2+3n)}$; da nun aber $M_1 = D_0 l_1$, $M_2 = D_0(l+l_1) + D_1 l$ ist, so wird $D_1 = \frac{M_2}{l} - D_0 \frac{l+l_1}{l} = \frac{M_2}{l} - \frac{M_1(l+l_1)}{ll_1} = - \frac{(1+n)pl_1}{4n(2+3n)}$. Also ist

$$16. \begin{cases} \max (-D_0) = -\frac{n^3}{4(2+3n)} p l_1, \\ \max (-D_1) = -\frac{1+n}{4n(2+3n)} p l_1. \end{cases}$$

Durch Subtraktion dieser Ausdrücke von den Stützendrücken für gänzliche Belastung ergeben sich die positiven Maxima der Stützendrücke, u. zw.:

$$17. \begin{cases} \max (+D_0) = \frac{3(2+5n+2n^2)}{4(2+n)(2+3n)} p l_1, \\ \max (+D_1) = \frac{1+6n+10n^2+6n^3+n^4}{4(2+3n)} p l_1. \end{cases}$$

Wenn das Eigengewicht und die zufällige Last gleichzeitig wirken, so werden die negativen Maxima:

$$18. \begin{cases} \max (-D_0) = \frac{(3+6n-n^3)g - n^3 p}{4(2+3n)} l_1, \\ \max (-D_1) = \frac{n(5+10n+6n^2+n^3)g - (1+n)p}{4n(2+3n)} l_1. \end{cases}$$

Hiernach kann D_0 nur negativ werden, wenn

$$19. \frac{p}{g} > \frac{3+6n-n^3}{n^3}.$$

ist; ebenso kann D_1 nur negativ werden, wenn

$$20. \frac{p}{g} > \frac{n(5+10n+6n^2+n^3)}{1+n}$$

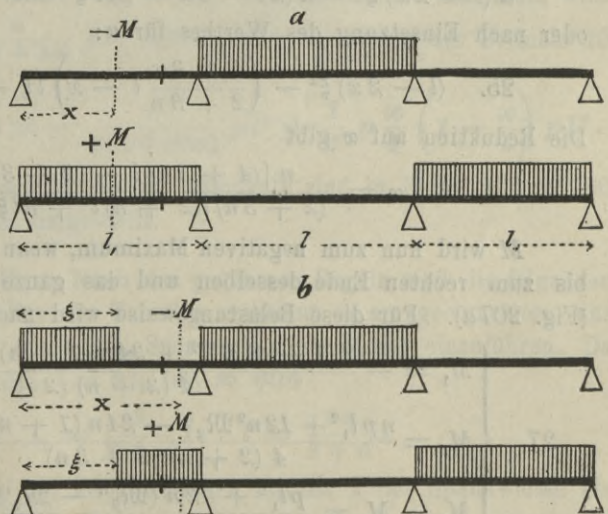
ist. Hiernach ergibt sich für einige Werthe von n :

	$n = 0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$2,670$
für D_0 :	$p > 47,00$	$8,00$	$2,56$	$0,88$	$0,15$	0
für D_1 :	$p > 3,88$	$11,00$	$22,12$	$38,00$	$59,37$	$68,04$
						$.g.$

c) Momente.

Fig. 206.

I. Feld. Erster Theil. M wird zum positiven Maximum bei Belastung des II., und zum negativen bei Belastung des I. und III. Feldes (F. 206 a). Nach Formel 2 wird bezüglich $M_1 = -\frac{n^3}{4(2+3n)} p l_1^2$, $M_1 = -\frac{1}{4(2+3n)} p l_1^2$; daher wird nach Formel 15 (Seite 151), wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,



$$21. \begin{cases} \max(-M) = -\frac{n^3}{4(2+3n)} \frac{x}{l_1} p l_1^2, \\ \max(+M) = + \left[\frac{1}{4(2+3n)} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \right] \frac{x}{l_1} p l_1^2. \end{cases}$$

Zweiter Theil. M wird zum positiven Maximum, wenn der Zug von der linken Stütze bis zu

$$22. \xi_x = l_1 \sqrt{\frac{l_1}{b_1} \left(1 - \frac{l_1 - b_1}{x}\right)}$$

reicht und das II. Feld ganz belastet ist (Fig. 206 b). Nach Formel 2 wird für diese Belastungsweise, wenn wir $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = \frac{1}{12} p l^2$ und $\mathfrak{M}_3'' = 0$ setzen,

$$M_1 = -\frac{24(1+n)\mathfrak{M}_1' + (2+n)n^3 p l_1^2}{4(2+n)(3+2n)}.$$

Hierbei ist nach Formel 42 (Seite 115):

$$23. \mathfrak{M}_1' = \frac{p \xi^2 (2l_1^2 - \xi^2)}{12l_1^2} = \frac{1}{12} \left[1 - \frac{(l_1 - b_1)^2 (l_1 - x)^2}{b_1^2 x^2} \right] p l_1^2.$$

Nach der zweiten der Formeln 17 (Seite 151) wird nun

$$24. \max(-M) = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \frac{\xi^2}{l_1^2} p l_1^2.$$

Das $\max(+M)$ berechnet man am besten nach der Regel $\max(+M) = M_t - \max(-M)$.

II. Feld. Erster Theil. Setzen wir in Gleichung 8 (S. 130) $a = b$, so wird

$$a(l - 2x)\xi^2 - a(2l - 3a - x)l\xi - (l - 2a)l^2x = 0,$$

oder nach Einsetzung des Werthes für a :

$$25. (l - 2x)\xi^2 - \left(\frac{4+3n}{2+3n}l - x\right)l\xi + \frac{2+n}{n}l^2x = 0.$$

Die Reduktion auf x gibt

$$26. x = \frac{n[(4+3n)l - (2+3n)\xi]l\xi}{(2+3n)[(2+n)l^2 + n l \xi - 2n\xi^2]}.$$

M wird nun zum negativen Maximum, wenn das II. Feld von $x = \xi$ bis zum rechten Ende desselben und das ganze I. Feld belastet sind (Fig. 207 a). Für diese Belastungsweise wird nach 2:

$$27. \begin{cases} M_1 = -\frac{2(1+n)p l_1^2 + 24n(1+n)\mathfrak{M}_2'' - 12n^2\mathfrak{M}_2'}{4(2+n)(2+3n)}, \\ M_2 = \frac{n p l_1^2 + 12n^2\mathfrak{M}_2'' - 24n(1+n)\mathfrak{M}_2'}{4(2+n)(2+3n)}, \\ M_2 - M_1 = \frac{p l_1^2 + 12n(\mathfrak{M}_2'' - \mathfrak{M}_2')}{4(2+n)}. \end{cases}$$

Nach der zweiten der Formeln 16 (Seite 151) wird nun

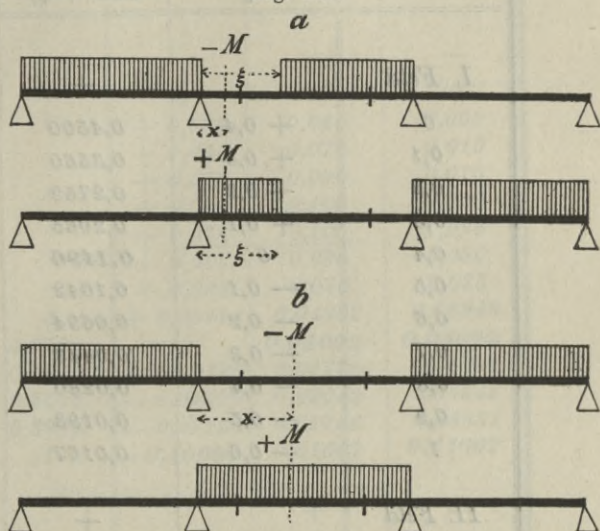
$$28. \max(-M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 p l^2.$$

Das positive Maximum wird man wieder am besten nach der Regel $\max(+M) = M_t - \max(-M)$ berechnen.

Mittlerer

Fig. 207.

Theil. Im mittleren Theile wird M zum negativen Maximum bei Belastung der beiden äusseren Felder, zum positiven Maximum aber bei Belastung des mittleren Feldes (Fig. 207b). Für die erstere Belastungsweise wird nach Formel 2, wenn wir in derselben $M_1'' = M_3'' = -\frac{1}{12} p l_1^2$, $M_2' = M_2'' = 0$ setzen,



$$29. M_1 = M_2 = -\frac{1}{4(2+3n)} p l_1^2.$$

Da in der zweiten der Formeln 15 (Seite 151) $M' = M''$ zu setzen ist, so wird einfach $\max(-M) = M_1$. Für das positive Maximum wird $M_1 = M_2 = -\frac{n}{4(2+3n)} p l^2$, mithin nach der ersten der Formeln 15 (Seite 151)

$$30. \max(+M) = -\frac{n}{4(2+3n)} p l^2 + \frac{1}{2} p \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) p l^2.$$

Die Maximal-Transversalkräfte und Momente sind in Fig. 156 und 160 für $l = 1, 2l_1$ grafisch dargestellt.

§. 122. Tabellen. Nach den gegebenen Regeln sind die folgenden Tabellen berechnet. Für die Tabellen erscheint es am geeignetsten, das arithmetische Mittel λ der drei Spannweiten als Maass einzuführen. Da alsdann $2l_1 + l = 3\lambda$, $l = n l_1$ ist, so wird

$$31. l_1 = \frac{3}{2+n} \lambda, \quad l = \frac{3n}{2+n} \lambda.$$

Die Einführung des arithmetischen Mittels λ der Spannweiten als Maass erscheint deshalb als zweckmässig, weil in einem gegebenen

1 : 1 : 1.

$\frac{x}{l_1}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	$\max(+Q)$
I. Feld		+	-
0	+ 0,4	0,4500	0,0500
0,1	+ 0,3	0,3560	0,0563
0,2	+ 0,2	0,2752	0,0752
0,3	+ 0,1	0,2065	0,1065
0,4	0	0,1496	0,1496
0,5	- 0,1	0,1042	0,2042
0,6	- 0,2	0,0694	0,2694
0,7	- 0,3	0,0443	0,3443
0,8	- 0,4	0,0280	0,4280
0,9	- 0,5	0,0193	0,5191
1	- 0,6	0,0167	0,6167
II. Feld		+	-
0	+ 0,5	0,5833	0,0833
0,1	+ 0,4	0,4870	0,0870
0,2	+ 0,3	0,3991	0,0991
0,3	+ 0,2	0,3210	0,1210
0,4	+ 0,1	0,2537	0,1537
0,5	0	0,1979	0,1979
	$\cdot g\lambda$	$\cdot p\lambda$	$\cdot p\lambda$

Stützendrücke.

$$\max(+D_0) = 0,40 g\lambda + 0,45 p\lambda,$$

$$\max(+D_1) = 1,10 g\lambda + 1,20 p\lambda.$$

$$\max(-D_0) = 0,40 g\lambda - 0,05 p\lambda,$$

$$\max(-D_1) = 1,10 g\lambda - 0,10 p\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\text{mitt } Q = 0,2567 g\lambda + 0,3425 p\lambda.$$

$$1 : 1 : 1.$$

$$b_1 = a_3 = 0,2105l_1, \quad a_2 = b_2 = 0,2000l.$$

$\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
			M	$\max(+M)$
I. Feld				
0		0	+	—
0,1		+ 0,035	0,040	0,005
0,2		+ 0,060	0,070	0,010
0,3		+ 0,075	0,090	0,015
0,4		+ 0,080	0,100	0,020
0,5		+ 0,075	0,100	0,025
0,6		+ 0,060	0,090	0,030
0,7		+ 0,035	0,070	0,035
0,7895	0	+ 0,00414	0,04362	0,03948
0,8	0,2500	0	0,04022	0,04022
0,85	0,5816	— 0,02125	0,02773	0,04898
0,9	0,7638	— 0,04500	0,02042	0,06542
0,95	0,8959	— 0,07125	0,01706	0,08831
1	1	— 0,10000	0,01667	0,11667
II. Feld				
0	0	— 0,10000	0,01667	0,11667
0,05	0,1209	— 0,07625	0,01408	0,09033
0,1	0,2785	— 0,05500	0,00748	0,06248
0,15	0,5000	— 0,03625	0,02053	0,05678
0,2	1	— 0,020	0,030	0,050
0,2764		0	0,050	0,050
0,3		+ 0,005	0,055	0,050
0,4		+ 0,020	0,070	0,050
0,5		+ 0,025	0,075	0,050
		$\cdot g l^2$	$\cdot p l^2$	$\cdot p l^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $\max(+M) = + 0,080 g l^2$ für $x = 0,4l_1$,

II. " " $(+M) = + 0,025 g l^2$ " $x = 0,5l_1$.

Zufällige Last: I. Feld. $\max(+M) = + 0,10125 p l^2$ für $x = 0,45l_1$,

II. " " $(+M) = + 0,07500 p l^2$ " $x = 0,50l_1$.

Mittleres Moment.

$$\text{mitt } M = 0,04519 g l^2 + 0,07068 p l^2.$$

1:1,1:1.

$$l_1 = \frac{30}{31} \lambda = 0,96774\lambda, \quad l = \frac{33}{31} \lambda = 1,06451\lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	$\max(+Q)$
<i>I. Feld</i>		+	-
0	+ 0,3775	0,4382	0,0607
0,1	+ 0,2807	0,3475	0,0668
0,2	+ 0,1839	0,2689	0,0850
0,3	+ 0,0871	0,2021	0,1150
0,3900	0	0,1519	0,1519
0,4	- 0,0096	0,1468	0,1564
0,5	- 0,1064	0,1024	0,2088
0,6	- 0,2032	0,0683	0,2715
0,7	- 0,3000	0,0437	0,3437
0,8	- 0,3967	0,0275	0,4242
0,9	- 0,4935	0,0188	0,5123
1	- 0,5903	0,0162	0,6065
<i>II. Feld</i>		+	-
0	+ 0,5323	0,6032	0,0709
0,1	+ 0,4258	0,5005	0,0747
0,2	+ 0,3194	0,4068	0,0876
0,3	+ 0,2129	0,3234	0,1105
0,4	+ 0,1065	0,2517	0,1452
0,5	0	0,1922	0,1922
	. $g\lambda$. $p\lambda$. $p\lambda$

Stützdruck.

$$\max(+D_0) = 0,3775 g\lambda + 0,4382 p\lambda,$$

$$\max(+D_1) = 1,1226 g\lambda + 1,2097 p\lambda.$$

$$\max(-D_0) = 0,3775 g\lambda - 0,0607 p\lambda,$$

$$\max(-D_1) = 1,1226 g\lambda - 0,0871 p\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\text{mitt } Q = 0,2580 g\lambda + 0,3425 p\lambda.$$

1: 1,1: 1.

$$b_1 = a_3 = 0,2036l_1, \quad a_2 = b_2 = 0,2075l.$$

$\frac{x}{l_1}$	$\frac{gr}{l_1}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
			M	max (+ M)
I. Feld			+	-
0		0	0	0
0,1		+ 0,03185	0,03773	0,00588
0,2		+ 0,05433	0,06609	0,01176
0,3		+ 0,06744	0,08508	0,01764
0,4		+ 0,07119	0,09470	0,02351
0,5		+ 0,06558	0,09497	0,02939
0,6		+ 0,05060	0,08587	0,03527
0,7		+ 0,02626	0,06740	0,04114
0,7801		0	0,04586	0,04586
0,7964	0	- 0,00161	0,04075	0,04683
0,8	0,1483	- 0,00761	0,03945	0,04706
0,85	0,5565	- 0,02782	0,02704	0,05486
0,9	0,7519	- 0,05053	0,01960	0,07013
0,95	0,8911	- 0,07558	0,01613	0,09171
1	1	- 0,10297	0,01568	0,11865
II. Feld			+	-
0	0	- 0,10297	0,01568	0,11865
0,05	0,1155	- 0,07606	0,01370	0,08976
0,1	0,2644	- 0,05198	0,01525	0,06723
0,15	0,4709	- 0,03073	0,02159	0,05232
0,2	0,8288	- 0,01231	0,03247	0,04478
0,2075	1	- 0,00992	0,03427	0,04417
0,2368		0	0,04417	0,04417
0,3		+ 0,01701	0,06118	0,04417
0,4		+ 0,03301	0,07718	0,04417
0,5		+ 0,03868	0,08285	0,04417
		. $g\lambda^2$. $p\lambda^2$. $p\lambda^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. max (+ M) = + 0,07124 $g\lambda^2$ für $x = 0,3901l_1$,II. " max (+ M) = + 0,03868 $g\lambda^2$ " $x = 0,5l$.Zufällige Last: I. Feld. max (+ M) = + 0,09602 $g\lambda^2$ für $x = 0,4528l_1$,II. " max (+ M) = + 0,08285 $g\lambda^2$ " $x = 0,5l$.

Mittleres Moment.

$$\text{mitt } M = 0,04344g\lambda^2 + 0,07011p\lambda^2.$$

1 : 1,2 : 1.

$$l_1 = \frac{15}{16} \lambda = 0,9375 \lambda, \quad l = \frac{9}{8} \lambda = 1,1250 \lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	max (+ Q)
I. Feld		+	-
0	+ 0,3546	0,4269	0,0723
0,1	+ 0,2608	0,3390	0,0782
0,2	+ 0,1671	0,2627	0,0956
0,3	+ 0,0733	0,1977	0,1244
0,3728	0	0,1547	0,1547
0,4	- 0,0204	0,1438	0,1612
0,5	- 0,1142	0,1005	0,2147
0,6	- 0,2079	0,0671	0,2750
0,7	- 0,3017	0,0429	0,3446
0,8	- 0,3954	0,0270	0,4224
0,9	- 0,4892	0,0183	0,5075
1	- 0,5829	0,0157	0,5986
II. Feld		+	-
0	+ 0,5625	0,6235	0,0610
0,1	+ 0,4500	0,5150	0,0650
0,2	+ 0,3375	0,4156	0,0781
0,3	+ 0,2250	0,3274	0,1024
0,4	+ 0,1125	0,2514	0,1389
0,5	0	0,1885	0,1885
	. $g \lambda$. $p \lambda$. $p \lambda$

Stützendruck.

$$\max (+ D_0) = 0,3546 g \lambda + 0,4269 p \lambda,$$

$$\max (+ D_1) = 1,1454 g \lambda + 1,2221 p \lambda.$$

$$\max (- D_0) = 0,3546 g \lambda - 0,0723 p \lambda,$$

$$\max (- D_1) = 1,1454 g \lambda - 0,0767 p \lambda.$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\text{mitt } Q = 0,2607 g \lambda + 0,3450 p \lambda.$$

1 : 1,2 : 1.

$$b_1 = a_3 = 0,1971l_1, \quad a_2 = b_2 = 0,2143l.$$

$\frac{x}{l_1}$	$\frac{\xi}{l_1}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
			M	$\max(+M)$
I. Feld				
0		0	+	0
0,1		+ 0,02885	0,03563	0,00678
0,2		+ 0,04890	0,06246	0,01356
0,3		+ 0,06017	0,08051	0,02034
0,4		+ 0,06265	0,08975	0,02710
0,5		+ 0,05634	0,09024	0,03390
0,6		+ 0,04124	0,08193	0,04069
0,7		+ 0,01736	0,06482	0,04746
0,7564		0	0,05127	0,05127
0,8		- 0,01532	0,03892	0,05424
0,8029	0	- 0,01639	0,03804	0,05443
0,85	0,5304	- 0,03496	0,02520	0,06016
0,9	0,7399	- 0,05679	0,01879	0,07558
0,95	0,8864	- 0,08082	0,01524	0,09606
1	1	- 0,10704	0,01472	0,12176
II. Feld				
0	0	- 0,10704	0,01472	0,12176
0,05	0,1104	- 0,07698	0,01297	0,08995
0,1	0,2528	- 0,05009	0,01527	0,06536
0,15	0,4475	- 0,02637	0,02245	0,04882
0,2	0,7619	- 0,00579	0,03460	0,04039
0,2143	1	- 0,00050	0,03875	0,03923
0,2157		0	0,03923	0,03923
0,3		+ 0,02585	0,06508	0,03923
0,4		+ 0,04483	0,08406	0,03923
0,5		+ 0,05116	0,09040	0,03923
		$\cdot g \lambda^2$	$\cdot p \lambda^2$	$\cdot p \lambda^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $\max(+M) = + 0,06286 g \lambda^2$ für $x = 0,378 l_1$,II. " $\max(+M) = + 0,05116 g \lambda^2$ " $x = 0,5 l$.Zufällige Last: I. Feld. $\max(+M) = + 0,09111 p \lambda^2$ " $x = 0,456 l_1$,II. " $\max(+M) = + 0,09040 p \lambda^2$ " $x = 0,5 l$.

Mittleres Moment.

mitt $M = 0,04242 g \lambda^2 + 0,06997 p \lambda^2$.

1:1,3:1.

$$l_1 = \frac{10}{11} \lambda = 0,90909 \lambda, \quad l = \frac{13}{11} \lambda = 1,18182 \lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	max (+ Q)
<i>I. Feld</i>		+	-
0	+ 0,3314	0,4160	0,0846
0,1	+ 0,2405	0,3307	0,0902
0,2	+ 0,1496	0,2566	0,1070
0,3	+ 0,0587	0,1934	0,1347
0,3646	0	0,1583	0,1583
0,4	- 0,0322	0,1409	0,1731
0,5	- 0,1232	0,0986	0,2218
0,6	- 0,2141	0,0659	0,2800
0,7	- 0,3050	0,0421	0,3471
0,8	- 0,3959	0,0264	0,4223
0,9	- 0,4868	0,0178	0,5046
0	- 0,5777	0,0152	0,5929
<i>II. Feld</i>		+	-
1	+ 0,5909	0,6439	0,0530
0,1	+ 0,4727	0,5298	0,0571
0,2	+ 0,3545	0,4252	0,0707
3,3	+ 0,2364	0,3323	0,0959
0,4	+ 0,1182	0,2523	0,1341
0,5	0	0,1862	0,1862
	. $g \lambda$. $p \lambda$. $p \lambda$

Stützendruck.

$$\max (+ D_0) = 0,3314 g \lambda + 0,4160 p \lambda,$$

$$\max (+ D_1) = 1,1686 g \lambda + 1,2368 p \lambda.$$

$$\max (- D_0) = 0,3314 g \lambda - 0,0846 p \lambda,$$

$$\max (- D_1) = 1,1686 g \lambda - 0,0682 p \lambda.$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\text{mitt } Q = 0,2642 g \lambda + 0,3487 p \lambda.$$

1 : 1,3 : 1.

$$b_1 = a_3 = 0,1911l_1, \quad a_2 = b_2 = 0,2203l.$$

$\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
			M	max (+ M)
I. Feld			+	-
0		0	0	0
0,1		+ 0,02599	0,03369	0,00769
0,2		+ 0,04373	0,05911	0,01539
0,3		+ 0,05319	0,07627	0,02308
0,4		+ 0,05439	0,08517	0,03077
0,5		+ 0,04733	0,08580	0,03847
0,6		+ 0,03200	0,07816	0,04616
0,7		+ 0,00841	0,06226	0,05385
0,7291		0	0,05609	0,05609
0,8		- 0,02341	0,03810	0,06155
0,8089	0	- 0,02668	0,03556	0,06224
0,85	0,5031	- 0,04247	0,02557	0,06805
0,9	0,7278	- 0,06356	0,01799	0,08155
0,95	0,8816	- 0,08673	0,01435	0,10108
1	1	- 0,11196	0,01380	0,12575
II. Feld			+	-
0	0	- 0,11196	0,01380	0,12575
0,05	0,1067	- 0,07878	0,01246	0,09124
0,1	0,2429	- 0,04910	0,01523	0,06433
0,15	0,4282	- 0,02357	0,02253	0,04610
0,2	0,7152	- 0,00022	0,03650	0,03672
0,2005	0,7207	0	0,03644	0,03644
0,2203	1	+ 0,00802	0,04305	0,03503
0,3		+ 0,03469	0,06972	0,03503
0,4		+ 0,05566	0,09069	0,03503
0,5		+ 0,06264	0,09767	0,03503
		. $g \lambda^2$. $p \lambda^2$. $p \lambda^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. max (+ M) = + 0,05491 $g \lambda^2$ für $x = 0,365l_1$,II. n max (+ M) = + 0,06263 $g \lambda^2$ n $x = 0,5l$.Zufällige Last: I. Feld. max (+ M) = + 0,08654 $p \lambda^2$ für $x = 0,458l_1$,II. n max (+ M) = + 0,09767 $p \lambda^2$ n $x = 0,5l$.

Mittleres Moment.

$$\text{mitt } M = 0,04243 g \lambda^2 + 0,07075 p \lambda^2.$$

praktischen Falle die Gesamtlänge 3λ , also auch das arithmetische Mittel λ der Spannweiten gegeben ist, mithin für verschiedene Verhältnisse der Spannweiten konstant bleibt.

Für Verhältnisse der Spannweiten, welche in den Tabellen nicht berücksichtigt sind, lassen sich die Grössen mit einer für die praktische Anwendung hinreichenden Genauigkeit durch Interpolation bestimmen.

§. 123. Einfluss ungleich hoher Stützen.

1. Liegen die beiden Mittelstützen um y, y_2 unter der Geraden, welche die Endstützen verbindet, so ergibt sich bei konstantem Querschnitte aus den Gleichungen 13 (S. 96) zunächst unter der Voraussetzung, dass keine Belastung vorhanden ist,

$$32. \quad M_1 = \frac{6EI[y_1(l_1 + 2l) - y_2(l_1 + l)]}{l_1 l (2l_1 + 3l)}.$$

M_2 erhält man durch Vertauschung von y_1 und y_2 . Die Stützendrücke D_0 und D_3 erhält man durch die Beziehungen $M_1 = D_0 l$, $M_2 = D_3 l$. Nach Formel 28 (S. 104) ergibt sich ferner $D_1 l_1 = M_1(l_1 + l) + M_2 l_1$, d. i.

$$33. \quad D_1 = -\frac{6EI[2y_1(l_1 + l)^2 - y_2(2l_1^2 + 4l_1 l + l^2)]}{l_1^2 l^2 (2l_1 + 3l)}.$$

D_2 erhält man wieder durch Vertauschung von y_1 und y_2 . Ist $y_1 = y_2 = y$, so wird, wenn wir $l = n l_1$ setzen,

$$34. \quad M_1 = M_2 = \frac{6EIy}{l_1(2l_1 + 3l)} = \frac{6EIyn^2}{(2 + 3n)l^2}.$$

$$35. \quad D_0 = -D_1 = -D_2 = D_3 = \frac{6EIy}{l_1^2(2l_1 + 3l)} = \frac{6EIn^3}{(2 + 3n)l^3}.$$

Bei veränderlichem Querschnitte würde für $y_1 = y_2$

$$36. \quad M_1 = M_2 = \frac{6EI_0 y n^2}{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 n + \gamma_2 n)l^2}.$$

Endlich ist im I. Felde $Q = D_0$, $M = D_0 x$, im II. Felde $Q = D_0 + D_1 = 0$, M konstant $= M_1$.

2. Das absolute negative Maximum von M tritt an einer Mittelstütze ein, wenn die beiden Felder neben dieser Stütze belastet sind. Setzt man in Formel 3: $\mathfrak{M}_1' = \frac{1}{12}(g+p)l_1^2$, $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = \frac{1}{12}(g+p)l^2$, $\mathfrak{M}_3'' = \frac{1}{12}gl_1^2$, so ergibt sich, wenn man noch $g = mq$, $p = (1-n)q$ setzt, unter Berücksichtigung der verschiedenen Höhenlage der Stützen

$$37. \quad M_1 = -\frac{2(1+n) + (2+n)n^3 - mn}{4n^2(2+n)(2+3n)} ql^2 + \frac{6EIyn^2}{(2+3n)l^2}.$$

Das absolute positive Maximum von M tritt im I. Felde bei Belastung des I. und III. Feldes ein. Setzen wir daher in Formel 3: $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_3'' = \frac{1}{12}(g+p)l_1^2$, $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_2'' = \frac{1}{12}gl^2$, so ergibt sich

$$M_1 = \frac{1 + mn^3}{4(2 + 3n)} ql_1^2 + \frac{6EIq}{(2 + 3n)l_1^2},$$

$$D_0 = \frac{1}{2} ql_1 - \frac{M_1}{l_1} = \frac{3 + 6n - mn^3}{4(2 + 3n)} ql_1 - \frac{6EIy}{(2 + 3n)l_1^2}.$$

Es ist nun $M = -D_0x + \frac{1}{2} qx^2$, wonach M zum Maximum für $qx = D_0$ wird; bezeichnen wir dasselbe mit M_1' , so wird $qM_1' = -D_0^2$, d. i.

$$38. \quad M_1' = -\frac{ql_1^2}{32(2 + 3n)^2} \left[(3 + 6n - mn^3) - \frac{24EIy}{ql_1^4} \right]^2.$$

Endlich wird im II. Felde M zum absoluten negativen Maximum bei blosser Belastung des II. Feldes. Setzen wir in Formel 3 $M_1' = M_2'' = \frac{1}{12} gl_1^2$, $M_2' = M_2'' = \frac{1}{12} (g + p) l^2$, so ergibt sich

$$M_1 - M_2 = \frac{m + n^3}{4(2 + 3n)n^2} ql^2 + \frac{6EIyn^2}{(2 + 3n)l^2}.$$

Es ist nun $M = M_1 - \frac{1}{2} qx(l - x)$. Das Maximum von M tritt der Symmetrie wegen in der Mitte ein; bezeichnen wir dasselbe mit M_2' , so wird $M_2' = M_1 - \frac{1}{8} ql^2$, d. i.

$$39. \quad M_2' = + \frac{(2 + n)n^2 - 2m}{8(2 + 3n)n^2} ql^2 + \frac{6EIyn^2}{(2 + 3n)l^2}.$$

3. Ein mehr oder minder konstanter Querschnitt kommt namentlich bei kleineren Wegüberbrückungen vor, bei denen die beiden Seitenöffnungen wesentlich kleiner sind, als die Mittelöffnung. Die spezielle Berechnung ergab für einige Werthe von n und für $y = 0$:

	$n = 1$	2	3	4	5	6	
$m = 1$	$M_1' = +0,0800$	$+0,0060$	—	—	—	—	ql^2
	$M_1 = -0,1000$	$-0,0703$	$-0,0707$	$-0,0726$	$-0,0741$	$-0,0753$	
	$M_2' = +0,0250$	$+0,0547$	$+0,0543$	$+0,0525$	$+0,0509$	$+0,0496$	
$m = 0$	$M_1' = +0,0101$	$+0,0028$	$+0,0013$	$+0,0007$	$+0,0005$	$+0,0003$	ql^2
	$M_1 = -0,1167$	$-0,0742$	$-0,0727$	$-0,0733$	$-0,0745$	$-0,0756$	
	$M_2' = +0,0750$	$+0,0625$	$+0,0568$	$+0,0536$	$+0,0515$	$+0,0500$	

Im I. Felde wird das x für $\max M$ bei $m = 1$ und bei grösseren Werthen von n negativ, also ohne Bedeutung. Aber auch bei positiven Werthen von x wird M_1' für grössere Werthe von n so klein, dass es nicht in Betracht kommt. M_1 ergibt sich stets grösser als M_2' . Setzt man in dem Ausdrücke 24 $l = \frac{3n}{2 + n} \lambda$ und differenziert nach n , so wird der Differenzialquotient $= 0$, also M_1 bei gleichem λ oder gleicher Gesamtlänge zum Minimum für

$$40. \quad 16 + 32n - 6n^2 - 40n^3 - 14n^4 + 4m - 4mn - 9mn^2 = 0.$$

Die Auflösung gibt für $m = 0$: $n = 0,913$, für $m = 1$: $n = 0,858$, also allgemein annähernd

$$41. \quad n = 0,858 \frac{g}{q} + 0,913 \frac{p}{q},$$

wonach das Mittelfeld eine etwas kleinere Länge haben müsste, als die äusseren Felder.

4. Bei einer Ueberhöhung der Mittelstützen wird das absolute Maximalmoment am kleinsten, wenn die Ueberhöhung so gewählt wird, dass $-M_1 = M_2'$ wird. Die Gleichsetzung gibt

$$42. \quad y = \frac{4n^2 - 4 - 4n - n^4 - 4m}{96(2+n)n^4} \frac{ql^4}{EI}.$$

Die spezielle Berechnung ergibt

	$n =$	1	2	3	4	5	6	
$m = 1$:	$-y =$	0,0313	0,00260	0,00167	0,00146	0,00132	0,00119	} $\frac{ql^4}{EI}$
$m = 0$:	$-y =$	0,0174	0,00195	0,00162	0,00144	0,00131	0,00119	
$m = 1$:	$-M_1 = M_2' =$	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	} ql^2
$m = 0$:	$-M_1 = M_2' =$	0,0959	0,0683	0,0648	0,0635	0,0630	0,0628	

Die Differenz der Maximalmomente für den Träger mit und ohne Ueberhöhung beträgt für $m = 1$ 2 3 4 5 6 bezüglich für $m = 1$: 37,5 11,6 11,6 13,9 15,7 17,0 und für $m = 0$: 17,8 7,9 10,9 13,4 15,4 16,9 Prozent.

5. Wenn das Verhältniss n wählbar ist, so wird das grösste Moment am kleinsten, wenn $M_1' = -M_1 = M_2'$ gesetzt wird. Setzt man zunächst $-M_1 = M_2'$, so ergibt sich

$$43. \quad y = \frac{4 + 4n - 4n^2 + n^4 + 2m - mn}{96(2+n)n^4} \frac{ql^4}{EI}.$$

Die Momente M_1' , M_1 , M_2' sind jetzt durch die Formeln 37 bis 39 bestimmt. Setzt man $M_1 = -M_1'$, so ergibt sich eine Gleichung achten Grades. Am besten aber erscheint es wohl, M_1 und M_1' für einige Werthe von n zu berechnen und sodann durch Interpolation denjenigen zu bestimmen, für welchen $(-M_1) - M_1' = 0$ wird. Hiernach ergibt sich für n die Näherungsregel

$$44. \quad n = 1,174 \frac{g}{q} + 1,131 \frac{p}{q}.$$

$$45. \quad y = \left(0,0266 \frac{g}{p} + 0,0142 \frac{p}{q} \right) \frac{q\lambda^4}{EI}.$$

Hiernach wird also die Länge des inneren Feldes etwas grösser, als die der äusseren Felder.

Für Träger, deren Stützen in einer Geraden liegen, ergibt sich bei der Wahl des zweckmässigsten Verhältnisses der Spannweiten das grösste Moment $M_1 = 0,1161q\lambda^2$ bis $0,1028q\lambda^2$, während sich bei gesenkten

Mittelstützen unter den günstigsten Bedingungen das grösste Moment $= 0,1024q\lambda^2$ bis $0,0830q\lambda^2$, also um 11,8 bis 19,2 Prozent kleiner ergibt.

6. Die für verschiedene Höhenlagen der Stützen nach §. 85 berechneten mittleren Transversalkräfte und Momente sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

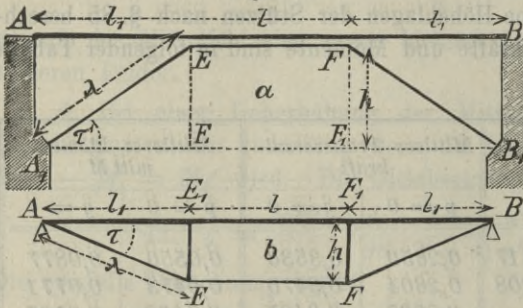
$\frac{l}{l_1}$	y		Mittlere Transversalkraft		Mittleres Moment mitt M			
			$p = 0$	$g = 0$	$p = 0$	$g = 0$		
1,0	+	0,050	+	0,0417	0,2650	0,3530	0,0550	0,0877
	+	0,025	+	0,0208	0,2604	0,3470	0,0473	0,0771
	0	0	0,2567	0,3425	0,0452	0,0707		
	-	0,025	-	0,0208	0,2540	0,3398	0,0499	0,0778
	-	0,050	-	0,0417	0,2559	0,3392	0,0595	0,0931
1,1	+	0,050	+	0,0414	0,2667	0,3425	0,0521	0,0842
	+	0,025	+	0,0207	0,2618	0,3367	0,0454	0,0735
	0	0	0,2580	0,3325	0,0434	0,0701		
	-	0,025	-	0,0207	0,2550	0,3301	0,0487	0,0764
	-	0,050	-	0,0414	0,2530	0,3263	0,0574	0,0911
1,2	+	0,050	+	0,0410	0,2707	0,3600	0,0475	0,0867
	+	0,025	+	0,0205	0,2653	0,3517	0,0424	0,0735
	0	0	0,2607	0,3450	0,0424	0,0700		
	-	0,025	-	0,0205	0,2570	0,3400	0,0468	0,0757
	-	0,050	-	0,0410	0,2545	0,3370	0,0555	0,0908
1,3	+	0,050	+	0,0406	0,2750	0,3580	0,0463	0,0871
	+	0,025	+	0,0203	0,2689	0,3526	0,0419	0,0722
	0	0	0,2642	0,3487	0,0424	0,0708		
	-	0,025	-	0,0203	0,2604	0,3464	0,0462	0,0775
	-	0,050	-	0,0406	0,2585	0,3457	0,0546	0,0924
	$\frac{q l_1 (2 l_1 + 3 l) \lambda^4}{6 E I}$	$\frac{q l^4}{E I}$	$\cdot q \lambda$	$\cdot q \lambda$	$\cdot q \lambda^2$	$\cdot q \lambda^2$		

Hiernach müssen die Mittelstützen ein wenig gehoben werden, damit das mittlere Moment zu einem Minimum werde. Das mittlere Moment lässt sich aber um höchstens 1 Prozent vermindern. Hierbei wächst indess die mittlere Transversalkraft ein wenig, wodurch der Vortheil noch vermindert wird, so dass man durch eine verschiedene Höhenlage der Stützen in der Materialmenge keinen besonderen Vortheil erzielen kann.

§. 124. Verbindung des Balkenträgers mit einem Sprengwerke. Wir bezeichnen den ursprünglichen Neigungswinkel der beiden Streben $A_1 E$ und $B_1 F$ (Fig. 208a) oder Zugbänder $A E$ und $B F$

(Fig. 208b) mit τ , die Höhe $EE_1 = FF_1$ mit h , so dass $h = l_1 \tan \tau$ ist. Ist τ_1' , τ' der Neigungswinkel der Streben oder Zugbänder F nach

Fig. 208.



der Formänderung, so ist die Spannung derselben $= H \sec \tau_1'$ und $H \sec \tau'$, also fordert das Gleichgewicht des Punktes E gegen Verschiebung in vertikaler Richtung die Erfüllung der Bedingung $D_1 = H (\tan \tau_1' - \tan \tau)$, wobei $\tan \tau_1' = \frac{h - y_1}{l_1}$,

$\tan \tau' = \frac{y_1 - y_2}{l}$ zu setzen ist. In gleicher Weise ist die Gleichgewichtsbedingung für den Punkt F aufzustellen. Wir haben demnach

$$46. \quad D_1 = H \left(\frac{h - y_1}{l_1} - \frac{y_1 - y_2}{l} \right), \quad D_2 = H \left(\frac{h - y_2}{l_1} + \frac{y_1 - y_2}{l} \right).$$

Vernachlässigt man die Verschiebungen y_1 und y_2 gegen h , so wird

$$47. \quad D_1 = D_2 = H \frac{h}{l}.$$

Ist λ die Länge von AE , bezüglich A_1E , $\Delta \lambda$ die Längenänderung von λ , $\Delta_1 \xi$ die Verschiebung des Punktes E nach rechts, so ist $(\lambda - \Delta \lambda)^2 = (l_1 + \Delta_1 \xi)^2 + (h - y_1)^2$ oder, wenn man auflöst, dabei die Quadrate von $\Delta \lambda$, $\Delta_1 \lambda$ und y_1 vernachlässigt und beachtet, dass $\lambda^2 = l_1^2 + h^2$ ist: $h y_1 = l_1 \Delta_1 x + \lambda \Delta \lambda$. Ebenso erhält man für den Punkt F : $h y_2 = l_1 \Delta_2 x + \lambda \Delta \lambda$. Die Addition beider Gleichungen gibt, da $\Delta_1 x + \Delta_2 x$ die Verkürzung Δl des Riegels EF ist,

$$h (y_1 + y_2) = l_1 \Delta l + 2 \lambda \Delta \lambda.$$

Setzen wir hierin $\Delta l = \frac{Hl}{EF}$, $\Delta \lambda = \frac{H \sec \tau \cdot l_1 \sec \tau}{E f_1}$, indem wir die Querschnitte des Riegels und der Streben bezüglich mit f und f_1 bezeichnen, so erhalten wir

$$48. \quad y_1 + y_2 = \frac{Hl}{EF} \left(\frac{l}{f} + \frac{2l_1 \sec^3 \tau}{f_1} \right).$$

Diese Gleichung ist in Uebereinstimmung mit den Gleichungen 12 und 13 (S. 187), wenn man in diesen für h die Höhe der durch A, E, D, B zu legenden Parabel, d. i. $\frac{h(2l_1 + l)^2}{4l_1(l_1 + l)}$ setzt. Bei Vernachlässigung der Längenänderung des Riegels und der Streben wird

$$49. \quad y_1 + y_2 = 0,$$

also $y_2 = -y_1$, d. h. bei einer Formänderung des Sprengwerkes verschieben sich die beiden Punkte E und F um gleich viel nach oben und unten.

Bezeichnen wir die Stützendrücke in E und F , welche entstehen, wenn alle vier Stützen in gleicher Höhe liegen, mit D_1' , D_2' , so ist bei konstantem Querschnitte des Balkens nach Formel 33:

$$50. \quad D_1 = D_1' - \frac{6EI}{l_1^2 l^2 (2l_1 + 3l)} [2y_1 (l_1 + l)^2 - y_2 (2l_1^2 + 4l_1 l + l^2)].$$

D_2 erhält man, indem man D_2' für D_1' , y_2 für y_1 setzt. Hiernach wird

$$51. \quad D_1 + D_2 = D_1' + D_2' - \frac{6EI(y_1 + y_2)}{l_1^2 (2l_1 + 3l)}.$$

Setzt man für D_1 und D_2 den Ausdruck 47 und für $y_1 + y_2$ den Ausdruck 48, so erhält man

$$52. \quad H = \frac{(D_1' + D_2') l}{2h(1 + \alpha)},$$

wenn man zur Abkürzung

$$53. \quad \alpha = \frac{3I}{(2l_1 + 3l) h^2} \left(\frac{l}{f} + \frac{2l_1 \sec^3 \tau}{f_1} \right)$$

setzt. Da D_1' und D_2' durch die Belastung gegeben sind, so ist durch Gleichung 52 H bestimmt. Bei Vernachlässigung der Längenänderung des Riegels und der Streben wird

$$54. \quad D_1 = D_2 = H \frac{h}{l_1} = \frac{1}{2} (D_1' + D_2').$$

Sind M_1' , M_2' die Momente, welche in E und F entstehen, wenn die Stützen in einer Horizontalen liegen, so ist nach Gleichung 32:

$$55. \quad M_1 = M_1' + \frac{6EI[y_1(l_1 + 2l) - y_2(l_1 + l)]}{ll_1(2l_1 + 3l)}.$$

Setzt man in Gleichung 50 und in dem in gleicher Form, für D_2 gebildeten Ausdrücke $D_1 = D_2 = \frac{D_1' + D_2'}{2(1 + \alpha)}$, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung von y_1 und y_2 . Setzt man diese Ausdrücke sodann in die Gleichung 55, so erhält man nach entsprechender Vereinfachung

$$56. \quad M_1 = M_1' + \frac{(D_1' - D_2') l_1 l + 2\alpha l_1 [2D_1'(l_1 + l) + D_2' l_1]}{2(1 + \alpha)(2l_1 + l)}.$$

Durch Vertauschung von M_1' mit M_2' , D_2' mit D_1' erhält man M_2 . Hierbei ist

$$57. \quad D_1 = \mathfrak{D}_1 - \frac{M_1'(l_1 + l)}{l_1 l} + \frac{M_2'}{l}, \quad D_2 = \mathfrak{D}_2 + \frac{M_1'}{l} - \frac{M_2'(l_1 + l)}{l_1 l}$$

zu setzen, wenn \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 die bei Anwendung von drei Einzelträgern entstehenden Stützendrücke bedeuten. Die Einsetzung gibt

$$58. \quad M_2 = \frac{(\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) l_1 l + 2\alpha l_1 [2\mathfrak{D}_1 (l_1 + l) + \mathfrak{D}_2 l_1]}{2(1 + \alpha)(2l_1 + l)} + \frac{M_1' + M_2'}{2(1 + \alpha)} - \frac{\alpha (l_1 + l) [M_1' (l_1 + l) - M_2' l_1]}{(1 + \alpha)(2l_1 + l)}.$$

Die weitere Durchführung bietet keine Schwierigkeit; wir wollen indess nur den Fall weiter behandeln, dass $l_1 = l$ ist und zwar unter der Annahme, dass α vernachlässigt werden kann. Die unmittelbare Entwicklung ist dann sehr einfach. Zunächst ist nach Gleichung 33: $D_1 l^3 = D_1' l^3 - \frac{6}{5} EI (8y_1 - 7y_2)$, also für $y_2 = -y_1$: $D_1 l^3 = D_1' l^3 - 18 EI y_1$. Ebenso wird $D_2 l^3 = D_2' l^3 - \frac{6}{5} EI (8y_2 - 7y_1)$, also für $y_2 = -y_1$: $D_2 l^3 = D_2' l^3 + 18 EI y_1$. Das Gleichgewicht des Sprengwerkes verlangt, dass $D_1 = D_2$ ist; daher wird $36 EI y_1 = (D_1' - D_2') l^3$. Nach Formel 32 ist $M_1 l^2 = M_1' l^2 + \frac{6}{5} EI (3y_1 - 2y_2)$, also für $y_2 = -y_1$: $M_1 l^2 = M_1' l^2 + 6 EI y_1$, d. i.

$$M_1 = M_1' + \frac{1}{6} (D_1' - D_2') l.$$

Setzen wir $D_1' l = \mathfrak{D} l - 2M_1' + M_2'$, $D_2' l = \mathfrak{D}_2 l + M_1' - 2M_2'$, so wird

$$59. \quad \begin{cases} M_1 = \frac{1}{2} (M_1' + M_2') + \frac{1}{6} (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) l, \\ M_2 = \frac{1}{2} (M_1' + M_2') - \frac{1}{6} (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) l. \end{cases}$$

Setzen wir ferner nach Formel 3 (S. 238): $M_1 + M = -\frac{3}{5} (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_2'' + \mathfrak{M}_2' + \mathfrak{M}_3'')$, so wird

$$60. \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{3}{10} (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_2'' + \mathfrak{M}_2' + \mathfrak{M}_3'') + \frac{1}{6} (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) l, \\ M_2 = -\frac{3}{10} (\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_2'' + \mathfrak{M}_2' + \mathfrak{M}_3'') - \frac{1}{6} (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) l. \end{cases}$$

Liegen in den drei Feldern Einzellasten G_1, G_2, G_3 in den Abständen $\xi_1, \xi_2, \xi_2', \xi_3$ bezüglich von der Stütze 0, 1, 2 und 3, so ergibt sich unter Benützung der Ausdrücke 40 (S. 114) leicht

$$(\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) l = G_1 \xi_1 - G_2 (\xi_2 - \xi_2') - G_3 \xi_3,$$

$$3(\mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_2'' + \mathfrak{M}_2' + \mathfrak{M}_3'') l^2 = G_1 \xi_1 (l^2 - \xi_1^2) + 3G_2 l \xi_2 \xi_2' + G_3 \xi_3 (l^2 - \xi_3^2).$$

Dies eingesetzt gibt

$$61. \quad M_1 = \frac{G_1 \xi_1 (2l^2 + 3\xi_1^2)}{30l^2} - \frac{G_2 (9\xi_2 \xi_2' + 5l\xi_2 - 5l\xi_2')}{30l} - \frac{G_3 \xi_3 (8l^2 - 3\xi_3^2)}{30l^2}.$$

Der Ausdruck für M_2 ergibt sich durch entsprechende Vertauschung.

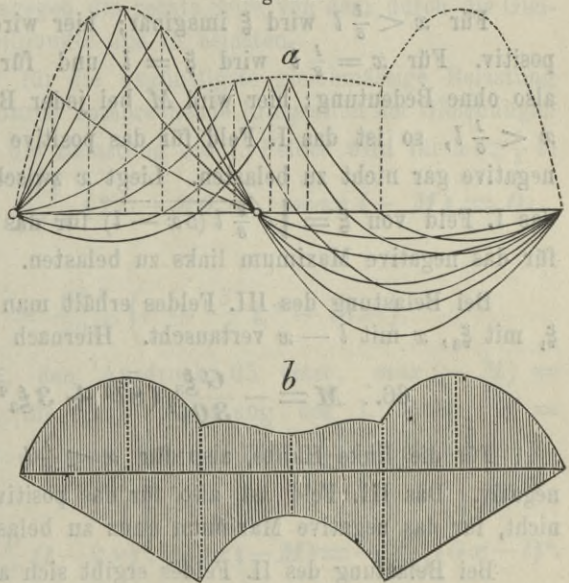
Liegt die Last im I. Felde, so ist hiernach M_1 positiv, M_2 negativ; liegt sie im III. Felde, so findet das Umgekehrte statt. Liegt die Last im II. Felde, so wird M_1 positiv, M_2 negativ, wenn $\xi_2 < \frac{19 - \sqrt{181}}{18} l$ oder $< 0,308l$ ist; ist $\xi_2 > 0,308l$, aber $< \frac{-1 + \sqrt{181}}{18} l$ oder $< 0,692l$, so werden M_1 und M_2 negativ.

Hiernach sind nun auch leicht die Momente für beliebige Querschnitte zu bestimmen. Die bezüglichen Einflusslinien zeigt Fig. 209 a.

Für die Bestimmung der ungünstigsten Belastung hinsichtlich der Momente unterscheiden wir folgende Fälle:

a) Der Querschnitt liegt im I. Felde. Wenn die Last im I. Felde liegt, so ist M_1 stets positiv, mithin auch M . Das I. Feld muss also für das positive Maximum gänzlich, für das negative Maximum gar nicht belastet sein. Wenn die Last im II. Felde liegt, so ist M_1 nur positiv, wenn $\xi_2 < 0,308l$ ist; das II. Feld muss also von $\xi_2 = 0,308l$ für das positive Maximum links, für das negative Maximum rechts belastet sein. Wenn das III. Feld belastet ist, so ist M_1 negativ, also auch M . Das III. Feld ist also für das positive Maximum gar nicht, für das negative Maximum ganz zu belasten.

Fig. 209.



Durch entsprechende Integration ergibt sich bei Belastung des ganzen I. Feldes $M_1 = + \frac{7}{120} p l^2 = + 0,0583 p l^2$, bei Belastung des II. Feldes von $x = 0$ bis $x = 0,308l$: $M_1 = + 0,0242 p l^2$, also bei Belastung beider Strecken $M_1 = + 0,0825 p l^2$. Bei gänzlicher Belastung aller drei Felder ergibt sich $M_1 = + \frac{1}{120} (7 - 6 - 13) p l^2 = - \frac{1}{10} p l^2$, also bei der Belastung für das negative Maximum von M : $M_1 = - 0,1 p l^2 - 0,0825 p l^2 = - 0,1825 p l^2$. Sonach ergibt sich jetzt $\max(+M) = M_1 \frac{x}{l} + \frac{1}{2} p x(l-x)$, $\max(-M) = M_1 \frac{x}{l}$ oder

$$62. \quad \begin{cases} \max(+M) = +px(0,5825l - 0,5x), \\ \max(-M) = -0,1825px. \end{cases}$$

Zum absoluten positiven Maximum wird M hiernach für $x = 0,5825l$ und zwar wird

$$63. \quad \max(+M) = +0,1696pl^2.$$

b) Der Querschnitt liegt im II. Felde. Bei Belastung des I. Feldes wird $Ml = M_1(l-x) + M_2x$, d. i.

$$64. \quad M = \frac{G\xi_1}{30l^2}(2l^2 + 3\xi_1^2 - 10lx).$$

M wird Null für $3\xi_1^2 + 2l^2 = 10lx$ oder

$$65. \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}l(5x - l)}.$$

Für $x < \frac{1}{5}l$ wird ξ imaginär; hier wird M bei jeder Belastung positiv. Für $x = \frac{1}{5}l$ wird $\xi = l$ und für $x > \frac{1}{5}l$ wird $\xi > l$, also ohne Bedeutung; hier wird M bei jeder Belastung negativ. Ist also $x < \frac{1}{5}l$, so ist das I. Feld für das positive Maximum ganz, für das negative gar nicht zu belasten. Liegt x zwischen $\frac{1}{5}l$ und $\frac{1}{2}l$, so ist das I. Feld von $\xi = \sqrt{\frac{2}{3}l(5x - l)}$ für das positive Maximum rechts, für das negative Maximum links zu belasten.

Bei Belastung des III. Feldes erhält man M aus 64, wenn man ξ_1 mit ξ_3 , x mit $l-x$ vertauscht. Hiernach wird

$$66. \quad M = -\frac{G\xi_3}{30l^2}(8l^2 + 3\xi_3^2 - 10lx).$$

Für die linke Hälfte, also für $x < \frac{1}{2}l$ wird hiernach M stets negativ. Das III. Feld ist also für das positive Maximum von M gar nicht, für das negative Maximum ganz zu belasten.

Bei Belastung des II. Feldes ergibt sich aus Formel 61:

$$M_1 = +\frac{G}{30l}(5l^2 - 19l\xi_2 + 9\xi_2^2),$$

$$M_2 = -\frac{G}{30l}(5l^2 - l\xi_2 - 9\xi_2^2),$$

$$M_1 - M_2 = +\frac{1}{3}G(l - 2\xi_2).$$

Liegt nun die Last links vom Querschnitte, so wird $Ml = G\xi_2(l-x) + M_1(l-x) + M_2x$, d. i.

$$67. \quad M = +\frac{G}{30l}[5l^2 + 11l\xi_2 + 9\xi_2^2 - 10(l + \xi_2)x].$$

Für $x < \frac{1}{2}l$ wird hiernach M stets positiv. Liegt die Last dagegen rechts vom Querschnitte, so wird $Ml = G(l - \xi_2)x + M_1(l - x) + M_2x$, d. i.

$$68. M = + \frac{G}{30l} [5l^2 - 19l\xi_2 + 9\xi_2^2 + 10(2l - \xi_2)x].$$

Sonach wird $M = 0$ für

$$69. 9\xi_2^2 - (19l + 10x)\xi_2 + 5l(l + 4x) = 0.$$

Hiernach ergibt sich:

$$\begin{array}{cccccc} x = & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \cdot l \\ \xi_2 = & 0,308 & 0,435 & 0,566 & 0,701 & 0,844 & 1,000 \cdot l \end{array}$$

M wird nun positiv, je nachdem ξ_2 kleiner oder grösser ist, als dieser Werth. Für das positive Maximum von M ist also die linke Seite, für das negative Maximum dagegen die rechte Seite von dem durch die Gleichung 69 bestimmten Nullpunkte aus zu belasten.

Die Werthe von M für die ungünstigste gleichmässige Belastung ergeben sich nun leicht durch entsprechende Integration der Gleichungen 64, 66, 67 und 68. Für die Belastung des I. Feldes wird für $x < \frac{1}{5}l$:

$$70. \max(+M) = \frac{pl}{120} (7l - 20x), \quad \max(-M) = 0.$$

Für $x > \frac{1}{5}l$ wird

$$\max(-M) = \frac{p\xi_1^2}{30l^2} \left(l^2 + \frac{3}{4}\xi_1^2 - 5lx \right),$$

oder, wenn man für ξ_1 den Ausdruck 65 setzt, $\max(-M) = -\frac{1}{90}p(5x - l)^2$. Da für ganze Belastung des I. Feldes $M = \frac{1}{120}pl(7l - 2x)$ wird, so wird $\max(+M) = \frac{1}{120}pl(7l - 2x) + \frac{1}{90}p(5x - l)^2$ oder

$$71. \max(+M) = + \frac{5p}{72} (l - 2x)^2, \quad \max(-M) = - \frac{p}{90} (5x - l)^2.$$

Für die Belastung des III. Feldes ergibt sich

$$72. \max(+M) = 0, \quad \max(-M) = - \frac{pl}{120} (13l - 20x).$$

Für die Belastung des II. Feldes wird zunächst

$$73. \max(-M) = - \frac{p(l - \xi_2)}{60l} [3l^2 + 13l\xi_2 - 6\xi_2^2 - 10(3l - \xi_2)x],$$

wobei ξ_2 durch die Gleichung 69 bestimmt ist. Bei gänzlicher Belastung des II. Feldes wird $M = -\frac{1}{20}pl^2 + \frac{1}{2}px(l - x)$; daher wird

$$74. \max(+M) = - \frac{1}{20}pl^2 + \frac{1}{2}px(l - x) - \max(-M).$$

Die spezielle Berechnung ergibt hiernach für die ungünstigste Belastung aller drei Felder:

$$\begin{array}{rcccccc}
 x = & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \cdot l \\
 \max(+M) = & +0,0825 & 0,0834 & 0,0808 & 0,0774 & 0,0756 & 0,0750 \cdot pl^2 \\
 \max(-M) = & -0,1825 & 0,1374 & 0,1008 & 0,0724 & 0,0556 & 0,0500 \cdot pl^2
 \end{array}$$

In Fig. 209b ist hiernach $\max M$ grafisch dargestellt.

Die sachgemässe Behandlung der Verbindung eines kontinuierlichen Trägers mit drei Feldern mit einem Hänge- oder Sprengwerke erfolgte wohl zuerst von Fränkel (Civilingenieur 1876), sodann von Holzhey (Vorträge über Baumechanik, 1879) und Melan (Zeitschr. des österr. Ingen.- und Arch.-Ver. 1876).

XV. Kapitel.

Träger mit vier Feldern.

§. 125. Stützenmomente. Wir setzen eine symmetrische Anordnung voraus und bezeichnen die Längen der Felder mit l_1, l, l, l_1 , die Abweichungen der Stützen 1, 2, 3 von der durch die äusseren Stützen 0 und 4 gehenden Geraden nach unten mit y_1, y, y_1 . Die Gleichungen für die Stützenmomente sind alsdann unter Voraussetzung eines konstanten Querschnittes und unter Vernachlässigung des Einflusses der Schubspannungen

$$\begin{cases}
 2M_1(l+l_1) + M_2l + 3M_1'l_1 + 3M_2''l - \frac{6EI}{ll_1}[y_1l - (y-y_1)l_1] = 0, \\
 M_1l + 4M_2l + M_3l + 3M_2'l + 3M_3''l - \frac{12EI}{ll_1}(y-y_1)l_1 = 0, \\
 M_2l + 2M_3(l+l_1) + 3M_3'l + 3M_4''l_1 - \frac{6EI}{ll_1}[y_1l - (y-y_1)l_1] = 0.
 \end{cases}$$

Die Auflösung gibt, wenn wir $l = n l_1$ setzen, falls $y = y_1 = 0$ ist,

$$\begin{cases}
 M_1 = -3 \frac{(8+7n)(M_1'+nM_2'') - 2n(1+n)(M_2'+M_3'') + n^2M_3'+nM_4''}{4(1+n)(4+3n)}, \\
 M_2 = +3 \frac{M_1' - nM_2'' - 2(1+n)(M_2'+M_3'') + nM_3'+M_4''}{2(4+3n)}, \\
 M_3 = -3 \frac{nM_1' + n^2M_2'' - 2n(1+n)(M_2'+M_3'') + (8+7n)(nM_3'+M_4'')}{4(1+n)(4+3n)}.
 \end{cases}$$

Ist nur das Eigengewicht zu berücksichtigen, so ist $M_1' = M_4'' = \frac{1}{18} g l_1^2$, $M_2' = M_2'' = M_3' = M_3'' = \frac{1}{12} g l^2$, mithin

$$3. \quad M_1 = M_3 = - \frac{2 + n^3}{4(4 + 3n)} g l_1^2, \quad M_2 = + \frac{l - 2n^2 - n^3}{4(4 + 3n)} g l^2.$$

Liegen die Stützen nicht in gleicher Höhe, so kommt noch hinzu:

$$4. \quad \begin{cases} M_1 = M_3 = \frac{6EI}{l_1^2} \frac{(2 + 3n) y_1 - (2 + n) y}{n(4 + 3n)}, \\ M_2 = \frac{6EI}{l_1^2} \frac{(2 + 3n) y_1 - (3 + 2n) y}{n(2 + n)}. \end{cases}$$

Für die Lage der Fixpunkte ergibt sich nach §. 65 und 67:

$$5. \quad \begin{cases} b_1 = a_4 = \frac{l_1^2 (7l + 8l_1)}{12l^2 + 35ll_1 + 24l_1^2}, \\ a_2 = b_3 = \frac{l^2}{3l + 2l_1}, \quad b_2 = a_3 = \frac{2l(l + l_1)}{9l + 10l_1}. \end{cases}$$

Auf eine Aufstellung der Ausdrücke für die übrigen Grössen wollen wir verzichten, da sich gegen die entwickelten allgemeinen Regeln keine besonderen Vereinfachungen ergeben.

§. 126. Tabellen. In den folgenden Tabellen ist wiederum, wie in §. 122, das arithmetische Mittel λ der vier Spannweiten als Maass eingeführt. Hierbei ist, da $2(l + l_1) = 4\lambda$ oder, da $l = nl_1$ ist;

$$6. \quad l_1 = \frac{2}{1 + n} \lambda, \quad l = \frac{2n}{1 + n} \lambda.$$

Bei diesen Tabellen ist vorausgesetzt, dass sich die Verkehrslast nicht nur in zwei, sondern auch in drei einzelne Theile trennen könne. Wenn man voraussetzt, dass sich die Verkehrslast nur in zwei Theile trennen könne, so ist eine Verminderung einzelner Grössen um die auf Seite 272 angegebenen Werthe vorzunehmen, wobei die Verminderung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gedacht ist.

1:1:1:1.

$$b_1 = a_4 = 0,2113l, \quad a_2 = b_3 = 0,2000l, \quad b_2 = a_2 = 0,2105l.$$

$\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	$\max(+Q)$
<i>I. Feld</i>		+	-
0	+ 0,3929	0,4464	0,0535
0,1	+ 0,2929	0,3528	0,0599
0,2	+ 0,1929	0,2717	0,0788
0,3	+ 0,0929	0,2029	0,1101
0,3929	0	0,1498	0,1498
0,4	- 0,0071	0,1461	0,1533
0,5	- 0,1071	0,1007	0,2079
0,6	- 0,2071	0,0660	0,2731
0,7	- 0,3071	0,0410	0,3481
0,8	- 0,4071	0,0247	0,4319
0,9	- 0,5071	0,0160	0,5231
1	- 0,6071	0,0134	0,6205
<i>II. Feld</i>		+	-
0	+ 0,5357	0,6027	0,0670
0,1	+ 0,4357	0,5064	0,0707
0,2	+ 0,3357	0,4187	0,0830
0,3	+ 0,2357	0,3410	0,1153
0,4	+ 0,1357	0,2742	0,1385
0,5	+ 0,0357	0,2190	0,1833
0,5357	0	0,2028	0,2028
0,6	- 0,0643	0,1755	0,2398
0,7	- 0,1643	0,1435	0,3078
0,8	- 0,2643	0,1222	0,3865
0,9	- 0,3643	0,1106	0,4749
1	- 0,4633	0,1071	0,5714
	$\cdot g l$	$\cdot p l$	$\cdot p l$

Stützendrücke.

$$\begin{aligned} \max(+D_0) &= 0,3929 g l + 0,4464 p l, & \max(-D_0) &= 0,3929 g l - 0,0535 p l, \\ \max(+D_1) &= 1,1428 g l + 1,2232 p l, & \max(-D_1) &= 1,1428 g l - 0,0804 p l, \\ \max(+D_2) &= 0,9286 g l + 1,1428 p l, & \max(-D_2) &= 0,9285 g l - 0,2142 p l. \end{aligned}$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\text{mitt } Q + 0,2564 g l + 0,3512 p l.$$

1 : 1 : 1 : 1.

$\frac{x}{l_1}$	$\frac{\xi}{l_1}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
			M	$\max(+M)$
I. Feld			+	-
0		0	0	0
0,1		+ 0,03429	0,03964	0,00536
0,2		+ 0,05857	0,06929	0,01071
0,3		+ 0,07286	0,08893	0,01607
0,4		+ 0,07714	0,09857	0,02143
0,5		+ 0,07143	0,09822	0,02679
0,6		+ 0,05572	0,08786	0,03214
0,7		+ 0,03000	0,06750	0,03750
0,7857		0	0,04209	0,04209
0,7887	0	- 0,00117	0,04108	0,04225
0,8	0,2582	- 0,00571	0,03738	0,04309
0,85	0,5841	- 0,02732	0,02484	0,05216
0,9	0,7650	- 0,05143	0,01629	0,06772
0,95	0,8964	- 0,07803	0,01393	0,09197
1,0	1	- 0,10714	0,01340	0,12054
II. Feld			+	-
0	0	- 0,10714	0,01340	0,12054
0,05	0,1216	- 0,08160	0,01163	0,09323
0,1	0,2732	- 0,05857	0,01455	0,07212
0,15	0,5037	- 0,03803	0,02537	0,06340
0,2	1	- 0,02000	0,03000	0,05000
0,2661		0	0,04882	0,04882
0,3		+ 0,00857	0,05678	0,04821
0,4		+ 0,02714	0,07357	0,04643
0,5		+ 0,03572	0,08036	0,04464
0,6		+ 0,03429	0,07715	0,04286
0,7		+ 0,02286	0,06393	0,04107
0,7895	1	+ 0,00416	0,04363	0,03947
0,8	0,7927	+ 0,00143	0,04170	0,04027
0,8053	0,7625	0	0,04092	0,04092
0,85	0,4569	- 0,01303	0,03451	0,04754
0,9	0,2574	- 0,03000	0,03105	0,06105
0,95	0,1124	- 0,04947	0,03173	0,08120
1,0	0	- 0,07143	0,03571	0,10714
		$\cdot g \lambda^2$	$\cdot p \lambda^2$	$\cdot p \lambda^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $\max(+M) = + 0,0771 g \lambda^2$ für $x = 0,393 l_1$,II. " $\max(+M) = + 0,0363 g \lambda^2$ " $x = 0,536 l_1$.Zufällige Last: I. Feld. $\max(+M) = + 0,0997 p \lambda^2$ für $x = 0,446 l_1$,II. " $\max(+M) = + 0,0805 p \lambda^2$ " $x = 0,512 l_1$.

Mittleres Moment.

mitt $M = 0,04158 g \lambda^2 + 0,07031 p \lambda^2$.

$1:1,1:1,1:1.$

$$l_1 = \frac{20}{21} \lambda = 0,95238 \lambda, \quad l = \frac{22}{21} \lambda = 1,04762 \lambda.$$

$$b_1 = a_4 = 0,2038 l_1, \quad a_2 = b_3 = 0,2075 l, \quad b_2 = a_3 = 0,2111 l.$$

$\frac{x}{l_1}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	$\max(+Q)$
I. Feld		+	-
0	+ 0,3676	0,4313	0,0637
0,1	+ 0,2723	0,3420	0,0697
0,2	+ 0,1771	0,2646	0,0875
0,3	+ 0,0818	0,1989	0,1171
0,3859	0	0,1515	0,1515
0,4	- 0,0134	0,1444	0,1578
0,5	- 0,1087	0,1008	0,2094
0,6	- 0,2039	0,0672	0,2711
0,7	- 0,2991	0,0430	0,3421
0,8	- 0,3943	0,0272	0,4215
0,9	- 0,4896	0,0186	0,5082
1	- 0,5848	0,0160	0,6009
II. Feld		+	-
0	+ 0,5410	0,6112	0,0702
0,1	+ 0,4362	0,5102	0,0740
0,2	+ 0,3315	0,4180	0,0865
0,3	+ 0,2267	0,3361	0,1094
0,4	+ 0,1219	0,2657	0,1437
0,5	+ 0,0172	0,2073	0,1901
0,5164	0	0,1990	0,1990
0,6	- 0,0876	0,1613	0,2489
0,7	- 0,1924	0,1274	0,3198
0,8	- 0,2971	0,1049	0,4020
0,9	- 0,4019	0,0926	0,4945
1	- 0,5066	0,0890	0,5956
	$\cdot g \lambda$	$\cdot p \lambda$	$\cdot p \lambda$

Stützendrücke.

$$\begin{aligned} \max(+D_0) &= 0,3676 g \lambda + 0,4313 p \lambda, & \max(-D_0) &= 0,3676 g \lambda - 0,0637 p \lambda, \\ \max(+D_1) &= 1,1259 g \lambda + 1,2121 p \lambda, & \max(-D_1) &= 1,1259 g \lambda - 0,0862 p \lambda, \\ \max(+D_2) &= 1,0132 g \lambda + 1,1912 p \lambda, & \max(-D_2) &= 1,0132 g \lambda - 0,1780 p \lambda. \end{aligned}$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\text{mitt } Q = 0,2566 g \lambda + 0,3518 p \lambda.$$

1:1,1:1,1:1.

$\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
			M	$\max(+M)$
I. Feld				
0		0	+	-
0,1		+ 0,03047	0,03654	0,00607
0,2		+ 0,05187	0,06400	0,01213
0,3		+ 0,06421	0,08241	0,01820
0,4		+ 0,06745	0,09172	0,02427
0,5		+ 0,06164	0,09198	0,03034
0,6		+ 0,04676	0,08316	0,03640
0,7		+ 0,02281	0,06528	0,04247
0,7718		0	0,04683	0,04683
0,7962	0	- 0,00883	0,03947	0,04830
0,8	0,1535	- 0,01022	0,03836	0,04858
0,85	0,5574	- 0,03013	0,02637	0,05650
0,9	0,7523	- 0,05230	0,01931	0,07161
0,95	0,8913	- 0,07675	0,01603	0,09278
1,0	1	-0,10347	0,01525	0,11872
II. Feld				
0	0	-0,10347	+	-
0,05	0,1154	- 0,07651	0,01337	0,08988
0,1	0,2651	- 0,05229	0,01358	0,06587
0,15	0,4722	- 0,03081	0,02794	0,05875
0,2	0,8300	- 0,01206	0,03196	0,04402
0,2075	1	- 0,00947	0,03331	0,04278
0,2369		0	0,04278	0,04278
0,3		+ 0,01718	0,05996	0,04278
0,4		+ 0,03544	0,07821	0,04277
0,5		+ 0,04274	0,08550	0,04276
0,6		+ 0,03905	0,08181	0,04276
0,7		+ 0,02439	0,06714	0,04275
0,7889	1	+ 0,00213	0,04487	0,04274
0,7959	0,8998	0	0,04317	0,04317
0,8	0,7900	- 0,00124	0,04241	0,04365
0,85	0,4573	- 0,01819	0,03320	0,05139
0,9	0,2577	- 0,03786	0,02836	0,06622
0,95	0,1124	- 0,06028	0,00978	0,07006
1,0	0	-0,08544	0,03107	0,11651
		$. g \lambda^2$	$. p \lambda^2$	$. p \lambda^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $\max(+M) = + 0,0672 g \lambda^2$ für $x = 0,385 l$,II. " $\max(+M) = + 0,0424 g \lambda^2$ " $x = 0,517 l$.Zufällige Last: I. Feld. $\max(+M) = + 0,0925 p \lambda^2$ für $x = 0,453 l$,II. " $\max(+M) = + 0,0852 p \lambda^2$ " $x = 0,517 l$.

Mittleres Moment.

mitt $M = 0,04005 g \lambda^2 + 0,06843 p \lambda^2$.

$$1 : 1,2 : 1,2 : 1.$$

$$l_1 = \frac{10}{11} \lambda = 0,90909 \lambda, \quad l = \frac{12}{11} \lambda = 1,09091 \lambda.$$

$$b_1 = a_4 = 0,1969 l_1, \quad a_2 = b_3 = 0,2143 l, \quad b_2 = a_3 = 0,2115 l.$$

$\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	$\max (+ Q)$
I. Feld		+	-
0	+ 0,3431	0,4176	0,0746
0,1	+ 0,2521	0,3324	0,0802
0,2	+ 0,1612	0,2583	0,0971
0,3	+ 0,0703	0,1954	0,1251
0,3774	0	0,1541	0,1541
0,4	- 0,0206	0,1431	0,1637
0,5	- 0,1115	0,1011	0,2126
0,6	- 0,2024	0,0687	0,2711
0,7	- 0,2933	0,0452	0,3385
0,8	- 0,3842	0,0298	0,4140
0,9	- 0,4751	0,0213	0,4965
1	- 0,5660	0,0188	0,5848
II. Feld		+	-
0	+ 0,5484	0,6215	0,0731
0,1	+ 0,4393	0,5160	0,0767
0,2	+ 0,3302	0,4198	0,0896
0,3	+ 0,2211	0,3341	0,1130
0,4	+ 0,1120	0,2603	0,1483
0,5	+ 0,0030	0,1991	0,1961
0,5027	0	0,1976	0,1976
0,6	- 0,1061	0,1508	0,2569
0,7	- 0,2152	0,1151	0,3303
0,8	- 0,3243	0,0914	0,4157
0,9	- 0,4334	0,0785	0,5119
1	- 0,5425	0,0747	0,6172
	. $g \lambda$. $p \lambda$. $p \lambda$

Stützendrücke.

$$\begin{aligned} \max(+D_0) &= 0,3431 g \lambda + 0,4176 p \lambda, & \max(-D_0) &= 0,3431 g \lambda - 0,0745 p \lambda, \\ \max(+D_1) &= 1,1144 g \lambda + 1,2063 p \lambda, & \max(-D_1) &= 1,1144 g \lambda - 0,0919 p \lambda, \\ \max(+D_2) &= 1,0850 g \lambda + 1,2344 p \lambda, & \max(-D_2) &= 1,0850 g \lambda - 0,1494 p \lambda. \end{aligned}$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\text{mitt } Q = 0,2583 g \lambda + 0,3509 p \lambda.$$

1 : 1,2 : 1,2 : 1.

$\frac{x}{l_1}$	$\frac{\xi}{l_1}$	Moment		
		Einfluss v. g.	Einfluss von p	
			M	max (+ M)
I. Feld			+	-
0		0	0	0
0,1		+ 0,02706	0,03383	0,00678
0,2		+ 0,04585	0,05940	0,01356
0,3		+ 0,05637	0,07671	0,02033
0,4		+ 0,05863	0,08574	0,02711
0,5		+ 0,05263	0,08652	0,03389
0,6		+ 0,03836	0,07903	0,04067
0,7		+ 0,01583	0,06328	0,04745
0,7547		0	0,05114	0,05114
0,8		- 0,01497	0,03926	0,05422
0,8031	0	- 0,01604	0,03839	0,05443
0,85	0,5295	- 0,03346	0,02754	0,06100
0,9	0,7395	- 0,05403	0,01961	0,07364
0,95	0,8862	- 0,07666	0,01742	0,09408
1,0	1	- 0,10135	0,01709	0,11844
II. Feld			+	-
0	0	- 0,10135	0,01709	0,11844
0,05	0,1102	- 0,07292	0,01469	0,08761
0,1	0,2521	- 0,04747	0,01608	0,06355
0,15	0,4466	- 0,02499	0,03048	0,05547
0,2	0,7608	- 0,00549	0,03260	0,03809
0,2143	1	- 0,00047	0,03642	0,03689
0,2157		0	0,03698	0,03698
0,3		+ 0,02459	0,06281	0,03822
0,4		+ 0,04277	0,08253	0,03976
0,5		+ 0,04905	0,09036	0,04131
0,6		+ 0,04343	0,08628	0,04285
0,7		+ 0,02590	0,07030	0,04440
0,7885		+ 0,00046	0,04623	0,04577
0,7898	1	0	0,04590	0,04590
0,8	0,7877	- 0,00352	0,04328	0,04680
0,85	0,4577	- 0,02270	0,03242	0,05512
0,9	0,2579	- 0,04485	0,02624	0,07109
0,95	0,1125	- 0,06998	0,02465	0,09463
1,0	0	- 0,09809	0,02718	0,12527
		. $g\lambda^2$. $p\lambda^2$. $p\lambda^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. max (+ M) = + 0,0590 $g\lambda^2$ für $x = 0,377l_1$,II. " " (+ M) = + 0,0491 $g\lambda^2$ " $x = 0,501l_1$.Zufällige Last: I. Feld. max (+ M) = + 0,0872 $p\lambda^2$ für $x = 0,401l_1$,II. " " (+ M) = + 0,0895 $p\lambda^2$ " $x = 0,514l_1$.

Mittleres Moment.

mitt $M = 0,03941g\lambda^2 + 0,06928p\lambda^2$.

$$1 : 1,3 : 1,3 : 1.$$

$$l_1 = \frac{20}{23} \lambda = 0,869571 \lambda, \quad l = \frac{26}{23} \lambda = 1,13044 \lambda.$$

$$b_1 = a_4 = 0,1905 l, \quad a_2 = b_3 = 0,2203 l, \quad b_2 = a_3 = 0,2120 l.$$

$\frac{x}{l_1}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
		Q	$\max(+Q)$
I. Feld		+	-
0	+ 0,3193	0,4053	0,0860
0,1	+ 0,2323	0,3237	0,0914
0,2	+ 0,1454	0,2528	0,1074
0,3	+ 0,0584	0,1924	0,1340
0,3672	0	0,1588	0,1588
0,4	- 0,0285	0,1421	0,1707
0,5	- 0,1155	0,1016	0,2171
0,6	- 0,2025	0,0703	0,2728
0,7	- 0,2894	0,0475	0,3369
0,8	- 0,3764	0,0324	0,4088
0,9	- 0,4633	0,0242	0,4875
1	- 0,5503	0,0217	0,5720
II. Feld		+	-
1	+ 0,5572	0,6329	0,0757
0,1	+ 0,4441	0,5236	0,0795
0,2	+ 0,3311	0,4235	0,0924
0,3	+ 0,2181	0,3332	0,1162
0,4	+ 0,1050	0,2573	0,1523
0,4929	0	0,1981	0,1981
0,5	- 0,0080	0,1934	0,2015
0,6	- 0,1211	0,1430	0,2641
0,7	- 0,2341	0,1059	0,3400
0,8	- 0,3472	0,0810	0,4282
0,9	- 0,4602	0,0675	0,5277
1	- 0,5733	0,0635	0,6368
	. $g\lambda$. $p\lambda$. $p\lambda$

Stützendrücke.

$$\begin{aligned} \max(+D_0) &= 0,3193 g\lambda + 0,4053 p\lambda, & \max(-D_0) &= 0,3193 g\lambda - 0,0860 p\lambda, \\ \max(+D_1) &= 1,1075 g\lambda + 1,2049 p\lambda, & \max(-D_1) &= 1,1075 g\lambda - 0,0974 p\lambda, \\ \max(+D_2) &= 1,1466 g\lambda + 1,2736 p\lambda, & \max(-D_2) &= 1,1466 g\lambda - 0,1270 p\lambda. \end{aligned}$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\text{mitt } Q = 0,2677 g\lambda + 0,3538 p\lambda.$$

1: 1,3 : 1,3 : 1.

$\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
			M	max (+ M)
I. Feld				
0		0	+	-
0,1		+ 0,02398	0,03146	0,00748
0,2		+ 0,04041	0,05535	0,01496
0,3		+ 0,04927	0,07171	0,02244
0,4		+ 0,05057	0,08049	0,02992
0,5		+ 0,04430	0,08171	0,03741
0,6		+ 0,03048	0,07537	0,04489
0,7		+ 0,00909	0,06146	0,05237
0,7344		0	0,05494	0,05494
0,8		- 0,01985	0,04000	0,05985
0,8095	0	- 0,02301	0,03756	0,06056
0,85	0,5000	- 0,03716	0,02979	0,06595
0,9	0,6872	- 0,05636	0,02199	0,07835
0,95	0,8811	- 0,07745	0,01905	0,09550
1,0	1	- 0,10043	0,01885	0,11928
II. Feld				
0	0	- 0,10043	0,01885	0,11928
0,05	0,1058	- 0,07053	0,01627	0,08680
0,1	0,2416	- 0,04384	0,01738	0,06122
0,15	0,2456	- 0,02023	0,03305	0,05338
0,2	0,7158	0	0,03529	0,03529
0,2203	1	+ 0,00732	0,03936	0,03204
0,3		+ 0,03101	0,06538	0,03437
0,4		+ 0,04927	0,08655	0,03728
0,5		+ 0,05475	0,09494	0,04019
0,6		+ 0,04744	0,09055	0,04311
0,7		+ 0,02738	0,07341	0,04603
0,7857		0	0,04844	0,04844
0,7880	1	- 0,00048	0,04774	0,04858
0,8	0,7858	- 0,00548	0,04423	0,04973
0,85	0,4580	- 0,02671	0,03079	0,05750
0,9	0,2581	- 0,05111	0,02448	0,07559
0,95	0,1125	- 0,07811	0,02211	0,10082
1,0	0	- 0,10952	0,02410	0,13362
		. $g\lambda^2$. $p\lambda^2$. $p\lambda^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. max (+ M) = + 0,0510 $g\lambda^2$ für $x = 0,367l$,II. " max (+ M) = + 0,0548 $g\lambda^2$ " $x = 0,493l$.Zufällige Last: I. Feld. max (+ M) = + 0,0959 $p\lambda^2$ für $x = 0,413l$,II. " max (+ M) = + 0,0963 $p\lambda^2$ " $x = 0,513l$.

Mittleres Moment.

mitt $M = 0,03947 g\lambda^2 + 0,07107 p\lambda^2$.

$\frac{l}{l_1}$	Verminderung der Transversalkräfte	
	I. Feld	II. Feld
	$\max(-Q)$	$\max(+Q)$
1,0	0,0045	0,0223
1,1	0,0043	0,0187
1,2	0,0041	0,0159
1,3	0,0039	0,0136
	$\cdot p\lambda$	$\cdot p\lambda$

$\frac{l}{l_1}$	Verminderung des Momentes		
	I. Feld. Zweiter Theil	II. Feld. Erster Theil	II. Feld. Dritter Theil,
	$\max(-Q)$	$\max(-M)$	$\max(+M)$
1,0	$0,00893 \frac{x}{l}$	$0,00893 - 0,02679 \frac{x}{l}$	$0,02679 \frac{x}{l} - 0,00893$
1,1	$0,00854 \frac{x}{l}$	$0,00854 - 0,02407 \frac{x}{l}$	$0,02407 \frac{x}{l} - 0,00854$
1,2	$0,00816 \frac{x}{l}$	$0,00816 - 0,02175 \frac{x}{l}$	$0,02175 \frac{x}{l} - 0,00816$
1,3	$0,00778 \frac{x}{l}$	$0,00778 - 0,01974 \frac{x}{l}$	$0,01974 \frac{x}{l} - 0,00778$
	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Die Verminderung ist nur insoweit vorzunehmen, als hierdurch das Moment nicht kleiner wird, als das durch eine Gerade darstellbare negative Maximalmoment, bezüglich das durch eine Parabel darstellbare positive Maximalmoment.

XVI. Kapitel.

Träger mit unendlich vielen Feldern.

§. 127. **Vorbemerkungen.** Wenn die Anzahl der Felder über vier bis fünf hinaus geht, so kann die Beanspruchung des Trägers für die praktische Anwendung gleich derjenigen angesehen werden, welche sich bei unendlich grosser Anzahl der Felder ergibt. Wir wollen daher noch den Träger konstanten Querschnittes mit unendlich vielen gleich langen Feldern unter Annahme gleich hoher Stützen untersuchen. Die Stütze 0 sei eine Endstütze; rechts von derselben mögen unendlich viele Stützen liegen.

Bei Belastung eines beliebigen Feldes verhalten sich die Stützmomente auf der linken Seite des belasteten Feldes wie die Clapeyron'schen Zahlen $k_0, k_1, k_2 \dots$ (siehe §. 58). Das Verhältniss μ (§. 65) wird hiernach:

$$\mu_1 = \frac{1}{0} = \infty, \quad \mu_2 = \frac{4}{1} = 4, \quad \mu_3 = \frac{15}{4} = 3,75, \quad \mu_4 = \frac{56}{15} = 3,7333, \\ \mu_5 = \frac{209}{56} = 3,7322, \quad \mu_6 = \frac{780}{209} = 3,7321, \quad \mu_7 = \frac{2911}{780} = 3,7321, \dots$$

Der Abstand a des linken Fixpunktes von der linken Stütze des betreffenden Feldes wird allgemein $a = \frac{1}{1 + \mu} l$, d. i.

$$\frac{a_1}{l} = 0, \quad \frac{a_2}{l} = \frac{1}{5} = 0,2, \quad \frac{a_3}{l} = \frac{4}{19} = 0,21052, \quad \frac{a_4}{l} = \frac{15}{71} = 0,21127, \\ \frac{a_5}{l} = \frac{56}{265} = 0,21132, \quad \frac{a_6}{l} = \frac{209}{989} = 0,21132, \dots$$

Das Verhältniss der Momente auf der rechten Seite des belasteten Feldes ist konstant und zwar wird das Verhältniss ν (§. 65):

$$1. \quad \nu = 2 + \sqrt{3} = 3,732058,$$

dementsprechend der Abstand b des rechten Fixpunktes von der rechten Stütze $b = \frac{1}{1 + \nu} l$, d. i.

$$2. \quad b = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} l = 0,211324 l.$$

Für ein mittleres Feld wird $a = b = \frac{1}{6} (3 - \sqrt{3}) l$, $c = l - a - b = \frac{1}{3} \sqrt{3} l$.

Der Einfluss eines Systems von Einzellasten und einer gleichmässigen Belastung sind nun durch die Kapitel VIII und IX bestimmt. Hier wollen wir nur voraussetzen, dass in jedem Felde höchstens eine Einzellast liegen könne, wie es beim Querschwellen-Oberbau der Eisen-

bahnen, sowie bei Zwischenträgern der Brücken bei kleinem Abstände der Querträger vorkommen kann. Wir wollen hierbei nur ein Endfeld und ein mittleres Feld untersuchen.

§. 128. **Stützenmomente.** Bei Belastung eines beliebigen Feldes (des r ten) wird nach Formel 15 (S. 123)

$$M_{r-1} = - \frac{3(\nu M'' - M')}{\mu\nu - 1} = \frac{3k_{r-1}[(2 + \sqrt{3})M'' - M']}{k_{r-1} + (2 + \sqrt{3})k_r}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $k_{r-1} + (2 - \sqrt{3})k_r$, so erhält man im Nenner $k_{r-1}^2 + 4k_{r-1}k_r + k_r^2$, d. i. aber $= 1$ (siehe des Verfassers Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867, S. 122). Somit wird

$$M_{r-1} = -3k_{r-1}[k_{r-1} + (2 - \sqrt{3})k_r][(2 + \sqrt{3})M'' - M']$$

Setzt man nach Formel 40 (S. 114) $3M'l^2 = G\xi(l^2 - \xi^2)$, $3M''l^2 = G\xi(l - \xi)(2l - \xi)$ und ausserdem $M_1 = \frac{1}{k_{r-1}}M_{r-1}$, so erhält man

$$3. M_1 = -[(3 + 2\sqrt{3})k_{r-1} + \sqrt{3}k_r][l - (\sqrt{3} - 1)\xi] \frac{G\xi(l - \xi)}{l^2}$$

Zum Maximum wird hiernach $M_1, M_2 \dots M_{r-1}$ für

$$4. \xi = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3} - \sqrt{6})l = 0,3804l$$

und zwar ist

$$\begin{aligned} 5. \max M_1 &= -\frac{1}{18}[(3 + 2\sqrt{3})k_{r-1} + \sqrt{3}k_r](3 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6})Gl \\ &= -\frac{1}{6}[k_{r-1} + (2 - \sqrt{3})k_r](1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})Gl \\ &= -1,0993(k_{r-1} + 0,2679k_r)Gl. \end{aligned}$$

Zum positiven Maximum wird M_1 , wenn man von der Belastung des ersten Feldes noch absieht, bei Belastung des 3ten, 5ten, ... Feldes, zum negativen Maximum bei Belastung des 2ten, 4ten, ... Feldes. Sonach wird

$$6. \begin{cases} \max(+M_1) = \\ -\frac{1}{6}[k_2 + k_4 + \dots + (2 - \sqrt{3})(k_3 + k_5 + \dots)](1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})Gl, \\ \max(-M_1) = \\ -\frac{1}{6}[k_1 + k_3 + \dots + (2 - \sqrt{3})(k_2 + k_4 + \dots)](1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})Gl. \end{cases}$$

Die in der Klammer stehenden unendlichen Reihen ergeben sich leicht durch Berechnung einiger der schnell abnehmenden Glieder $k_2 + (2 - \sqrt{3})k_3, k_4 + (2 - \sqrt{3})k_5, \dots$. Durch analytische Summirung (siehe des Verfassers „Lehre von der Elastizität und Festigkeit“, S. 122)

ergibt sich die Klammer des ersten Ausdruckes zu $2 - \frac{7}{6}\sqrt{3}$ und die Klammer des zweiten Ausdruckes zu $\frac{1}{6}(2\sqrt{3} - 3)$. Somit wird

$$7. \begin{cases} \max(+M_1) = \\ +\frac{1}{36} [9(1+\sqrt{2}) - 5(\sqrt{3}+\sqrt{6})] Gl = +0,02277 Gl, \\ \max(-M_1) = \\ -\frac{1}{36} [3(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{3}+\sqrt{6})] Gl = -0,08503 Gl. \end{cases}$$

Wenn das erste Feld selbst belastet ist, so wird, wenn wir in den Formeln 1 (S. 124) $a = 0$, $b = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})l$, $c = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})l$ setzen,

$$8. M_1 = - (2 - \sqrt{3}) \frac{G\xi(l^2 - \xi^2)}{l^2}.$$

Hiernach wird M_1 zum negativen Maximum für $\xi = \frac{1}{3}\sqrt{3}l = 0,5774l$ und zwar ist

$$9. \max(-M_1) = -\frac{2}{9}(2\sqrt{3} - 3) Gl = 0,10313 Gl.$$

Bei der ungünstigsten Belastung aller Felder würde sonach $\max(-M_1) = 0,18816 Gl$.

Bei Belastung eines mittleren Feldes wird nach den Gleichungen 1 (S. 124), wenn man für a , b , c obige Werthe setzt,

$$10. \begin{cases} M_{r-1} = -\frac{G\xi(l-\xi)}{2l^2} [l - (\sqrt{3}-1)\xi], \\ M_r = -\frac{G\xi(l-\xi)}{2l^2} [(2-\sqrt{3})l - (\sqrt{3}-1)\xi], \\ M_{r-1} - M_r = -\frac{G\xi(l-\xi)}{2l^2} (\sqrt{3}-1)(l-2\xi). \end{cases}$$

Zum negativen Maximum wird M_{r-1} ebenfalls für

$$11. \xi = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3} - \sqrt{6})l = 0,3804l$$

und zwar ist

$$12. \max(-M_{r-1}) = -\frac{1}{36} [3(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{3}+\sqrt{6})] Gl = -0,08503 Gl.$$

Hinsichtlich der rechten Felder wird M_{r-1} zum negativen Maximum bei Belastung des r ten, $(r+2)$ ten, $(r+4)$ ten, ... Feldes bei $\xi = 0,3804l$. In Folge der Belastung des r ten Feldes ist $M_{r-1} = -\kappa Gl$, wenn wir $\frac{1}{6}(3 + \sqrt{3} - \sqrt{6}) = 0,3804 = \kappa$ setzen. In Folge der Belastung des $(r+2)$ ten Feldes ist, wenn wir

$$\alpha = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} = 0,2679$$

setzen, $M_{r+1} = -\alpha Gl$, $M_r = -\alpha M_{r+1}$, $M_{r-1} = -\alpha M_r = +\alpha^2 M_{r+1} = -\alpha \alpha^2 Gl$. Für die Belastung des $(r+4)$ ten Feldes wird ebenso $M_{r-1} = -\alpha \alpha^4 Gl$ u. s. f. Sonach wird

$$\max(-M_{r-1}) = -\alpha(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) Gl = -\frac{\alpha Gl}{1 - \alpha^2}.$$

Die Einsetzung der Werthe für α und α gibt:

$$13. \max(-M_{r-1}) = -\frac{1}{72}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) Gl = -0,09161 Gl.$$

Zum positiven Maximum wird M_{r-1} hinsichtlich der rechten Felder bei Belastung des $(r+1)$ sten, $(r+3)$ ten, ... Feldes. Für diese Belastung wird M_r ebenso gross, wie $\max(-M_{r-1})$, folglich $M_{r-1} = -\alpha \max(-M_{r-1}) = -(2 - \sqrt{3}) \max(-M_{r-1})$ oder

$$14. \max(+M_{r-1}) = +\frac{1}{72}(-1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) Gl = +0,02455 Gl.$$

Sind beide Seiten der fraglichen Stütze möglichst ungünstig belastet, so werden die Maxima doppelt so gross, also $\max(-M_{r-1}) = -0,18322 Gl$, $\max(+M_{r-1}) = +0,04910 Gl$; der erstere Werth setzt allerdings voraus, dass die Lasten in den benachbarten Feldern den Abstand $2 \cdot 0,3804l = 0,7608l$ haben. Bei Anwendung auf Eisenbahnschienen wird indess ein so enger Radstand nicht anzunehmen sein.

§. 129. Momente für beliebige Querschnitte. Für das Moment für einen beliebigen Querschnitt wird, wenn die Last auf der rechten Seite liegt, $Ml = M_{r-1}l - (M_{r-1} - M_r)x + Gx(l - \xi)$ und wenn sie auf der linken Seite liegt, $Ml = M_{r-1}l - (M_{r-1} - M_r)x + G\xi(l - x)$. Im ersten Felde ist $M_{r-1} = 0$, $M_r = M_1$ zu setzen. Dies gibt, wenn die Last auf der rechten Seite liegt:

$$15. \left\{ \begin{array}{l} \text{Erstes Feld, Last rechts:} \\ \quad Ml^3 = Gx(l - \xi)[l^2 - (2 - \sqrt{3})\xi(l + \xi)]. \\ \text{Erstes Feld, Last links:} \\ \quad Ml^3 = G\xi[l^2\{l - (3 - \sqrt{3})x\} + (2 - \sqrt{3})x\xi^2]. \\ \text{Mittleres Feld, Last rechts:} \\ \quad Ml^3 = \frac{1}{2}G(l - \xi)[2l^2x - \{l - (\sqrt{3} - 1)x\}l\xi - (\sqrt{3} - 1)(l - 2x)\xi^2]. \end{array} \right.$$

1. Positive Momente. Das positive Moment tritt immer ein, wenn die Last am fraglichen Querschnitte liegt, also für $\xi = x$. Dies gibt für die Belastung des fraglichen Feldes:

$$16. \begin{cases} \text{Erstes Feld:} \\ \max(+M) = +\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[1 - (2 - \sqrt{3}) \frac{x}{l} \left(1 + \frac{x}{l}\right)\right] Gl. \\ \text{Mittleres Feld:} \\ \max(+M) = +\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[\frac{1}{2} + (\sqrt{3} - 1) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] Gl. \end{cases}$$

Für das positive Maximum von M im ersten Felde muss ausserdem das 3te, 5te, ... Feld belastet sein. Für diese Belastung ist M_1 durch die erste der Formeln 7 bestimmt; M ist alsdann $= M_1 \frac{x}{l}$ oder:

$$17. \max(+M) = + \frac{9(1 + \sqrt{2}) - 5(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{36} Gx.$$

Für ein mittleres Feld muss für einen Querschnitt links vom linken Fixpunkte das $(r-2)$ te, $(r-4)$ te, ... sowie das $(r+1)$ ste, $(r+3)$ te, ... Feld belastet sein. Für einen Querschnitt zwischen beiden Fixpunkten sind dieselben linken Felder, dagegen auf der rechten Seite das $(r+2)$ te, $(r+4)$ te, ... Feld zu belasten. Diese Felder sind in einem Punkte zu belasten, welcher von der dem fraglichen Felde zugekehrten Stütze den Abstand $0,3804l$ hat.

Für die Belastung des $(r-2)$ ten, $(r-4)$ ten, ... Feldes wird $M_{r-1} = +\alpha x(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) Gl = +\frac{\alpha x}{1 - \alpha^2} Gl$, $M_r = -\alpha M_{r-1} = -\frac{\alpha^2 x}{1 - \alpha^2} Gl$. Für die Belastung des $(r+1)$ sten, $(r+3)$ ten, ... Feldes

wird $M_r = -x(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = -\frac{x}{1 - \alpha^2} Gl$, $M_{r-1} = -\alpha M_r = +\frac{\alpha x}{1 - \alpha^2} Gl$; folglich wird für die Belastung aller übrigen Felder

$$M_{r-1} = +\frac{2\alpha x}{1 + \alpha^2} Gl, \quad M_r = -\frac{x(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} Gl, \quad M_{r-1} - M_r = \frac{x(1 + \alpha)^2}{1 - \alpha^2} Gl.$$

Es wird nun für $x < \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})l$: $\max(+M) = M_{r-1} - (M_{r-1} - M_r) \frac{x}{l}$
 $= \frac{2x Gl}{1 - \alpha^2} \left[\alpha - (1 + \alpha) \frac{x}{l} \right]$, d. i.

$$18. \max(+M) = + \frac{-1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{36} \left(1 - 3\frac{x}{l}\right) Gl \\ = + 0,0491 G(l - 3x).$$

Für die Belastung des $(r+2)$ ten, $(r+4)$ ten, ... Feldes wird M_{r-1} und M_r ebenso gross, als bezüglich M_r und M_{r-1} für die Belastung des $(r-2)$ ten, $(r-4)$ ten, ... Feldes. Für beide Belastungen zusammen wird daher $M_{r-1} = M_r = \left(\frac{\alpha x}{1 - \alpha^2} - \frac{\alpha^2 x}{1 - \alpha^2}\right) Gl = \frac{\alpha x}{1 + \alpha} Gl$. Ebenso gross wird $\max(+M)$ für $x > \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})l$, d. i.

$$19. \max(+M) = + \frac{2 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}}{36} Gl \\ = + 0,01796 Gl.$$

Zum absoluten positiven Maximum wird M , wenn man die ungünstigste Belastung sämtlicher Felder berücksichtigt, im ersten Felde für $x = 0,418l$, in einem mittleren Felde für $x = \frac{1}{2}l$ und zwar ist

$$20. \begin{cases} \text{Erstes Feld:} & \max(+M) = + 0,2142 Gl. \\ \text{Mittleres Feld:} & \max(+M) = + 0,1888 Gl. \end{cases}$$

2. Negative Momente. Für einen innerhalb beider Fixpunkte, im ersten Felde also links vom Fixpunkte, liegenden Querschnitt darf das fragliche Feld für $\max(-M)$ gar nicht belastet sein.

Für das erste Feld wird nach der zweiten der Gleichungen 15 M zum Maximum für

$$21. \xi = l \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{3} - \frac{2 + \sqrt{3}}{3} \frac{l}{x}} \\ = l \sqrt{1,5774 - 1,2440 \frac{l}{x}}.$$

Für ein mittleres Feld wird nach der dritten der Gleichungen 15 M zum Maximum für

$$22. \xi^2 - \frac{(3 + \sqrt{3})l - 6x}{3(l - 2x)} l\xi + \frac{(\sqrt{3} + 1)l + 2\sqrt{3}x}{6(l - 2x)} l^2 = 0,$$

oder, wenn man auf x reduziert, für

$$23. x = \frac{1}{2}l - \frac{(\sqrt{3} + 1)l - \sqrt{3}\xi}{2[\sqrt{3}l^2 + 6\xi(l - \xi)]} l^2.$$

Setzt man den Ausdruck für ξ^2 aus 21 und von $(l - 2x)\xi^2$ aus 22 in 15 ein, so erhält man

$$24. \begin{cases} \text{Erstes Feld:} \\ \max(-M) = - \frac{2G\xi}{3l} [(3 - \sqrt{3})x - l]. \\ \text{Mittleres Feld:} \\ \max(-M) = - \frac{G(l - \xi)}{6l^2} [l - (3 + \sqrt{3})x] [l - (2\sqrt{3} - 3)\xi]. \end{cases}$$

Für das erste Feld muss ausserdem das 2te, 4te, ... Feld belastet sein. Für diese Belastung ist M_1 durch die zweite der Formeln 7 bestimmt. Es wird also

$$25. \max(-M) = - \frac{1}{36} [3(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} + \sqrt{6})] Gx \\ = - 0,0850 Gx.$$

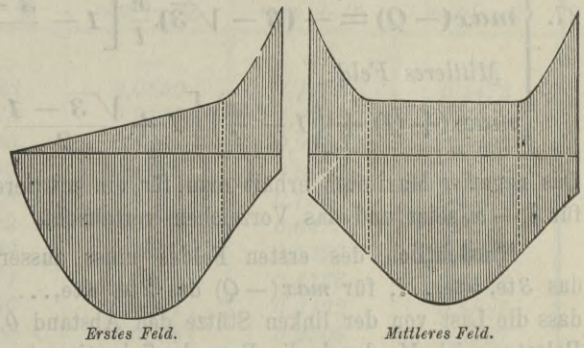
Für ein mittleres Feld muss ausserdem noch für einen links vom linken Fixpunkte liegenden Querschnitt das $(r - 1)$ ste, $(r - 3)$ te, ..., sowie das $(r + 2)$ te, $(r + 4)$ te, ... Feld, für einen zwischen beiden Fixpunkten liegenden Querschnitt das $(r - 1)$ ste, $(r - 3)$ te, ..., sowie das $(r + 1)$ ste, $(r + 3)$ te, ... Feld so belastet sein, dass die Last von der dem fraglichen Felde zugekehrten Stütze den Abstand $0,3804l$ hat. Für diese Belastung ergibt sich leicht, wie oben:

$$\begin{cases}
 x < \frac{3 - \sqrt{3}}{6} l: \max(-M) = -\frac{-1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{18} \left(1 - \frac{3x}{2l}\right) Gl \\
 \qquad \qquad \qquad = -0,0982 G (l - 1,5x); \\
 x > \frac{3 - \sqrt{3}}{6} l: \max(-M) = -\frac{1 + \sqrt{2}}{36} Gl = -0,0671 Gl.
 \end{cases}$$

Das absolute negative Maximum tritt im ersten Felde an der Stütze 1, in einem mittleren Felde an jeder der beiden Stützen ein und ist im ersten Felde $-0,1882 Gl$, in einem mittleren Felde $-0,1832 Gl$.

Wir geben hier-nach in Fig. 210 die grafische Darstellung und im Folgenden eine Tabelle der Maximalmomente:

Fig. 210.



x	Erstes Feld		Mittleres Feld	
	$\max(+M)$	$\max(-M)$	$\max(+M)$	$\max(-M)$
0	+	-	+	-
0	0	0	0,0490	0,1832
0,1	0,0896	0,0085	0,0852	0,1137
0,2	0,1543	0,0170	0,1183	0,0695
0,2113	—	—	0,1216	0,0671
0,3	0,1949	0,0255	0,1552	0,0671
0,4	0,2131	0,0340	0,1800	0,0671
0,5	0,2112	0,0425	0,1887	0,0671
0,6	0,1919	0,0510	0,1800	0,0671
0,7	0,1590	0,0595	0,1552	0,0671
0,7887	0,1216	0,0670	0,1216	0,0671
0,8	0,1165	0,0694	0,1183	0,0695
0,9	0,0693	0,1181	0,0852	0,1137
1	0,0228	0,1882	0,0490	0,1832
. l	. Gl		. Gl	

Für Querschnitte in der Nähe der Stütze können die Lasten im ersten und zweiten, bezüglich im r ten und $(r - 1)$ sten Felde so nahe rücken, dass eine praktisch unmögliche Laststellung eintritt. In diesem Falle ist das Maximum durch die Einflusslinie mit Rücksicht auf den gegebenen Abstand der Lasten besonders zu bestimmen.

§. 130. **Transversalkräfte.** Die grösste positive oder negative Transversalkraft tritt ein, wenn die Last dicht rechts, bezüglich links neben dem Querschnitte liegt. Für diese Belastung ist $\max(+Q)l = G(l - x) - (M_{r-1} - M_r)$, $\max(-Q)l = -Gx - (M_{r-1} - M_r)$; im ersten Felde wird hiernach $\max(+Q)l = G(l - x) + M_1$, $\max(-Q)l = -Gx + M_1$. Dies gibt:

$$27. \begin{cases} \text{Erstes Feld:} \\ \max(+Q) = + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[1 - (2 - \sqrt{3}) \frac{x}{l} \left(1 + \frac{x}{l}\right)\right] G, \\ \max(-Q) = - (2 - \sqrt{3}) \frac{x}{l} \left[1 - \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \frac{x^2}{l^2}\right] G. \\ \text{Mittleres Feld:} \\ \max(+Q) = + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \frac{x}{l} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)\right] G. \end{cases}$$

Das negative Maximum erhält man für ein mittleres Feld, indem man x für $l - x$ setzt und das Vorzeichen vertauscht.

Hinsichtlich des ersten Feldes muss ausserdem für $\max(+Q)$ das 3te, 5te, ..., für $\max(-Q)$ das 2te, 4te, ... Feld so belastet sein, dass die Last von der linken Stütze den Abstand $0,3804l$ hat. Für diese Belastung ist M_1 durch die Formeln 7 bestimmt. Da $Ql = M_1$ ist, so wird demnach

$$28. \begin{cases} \max(+Q) = + 0,02277G, \\ \max(-Q) = - 0,08503G. \end{cases}$$

Für $\max(+Q)$ in einem mittleren Felde muss ausserdem das $(r - 1)$ ste, $(r - 3)$ te, ... sowie das $(r + 2)$ te, $(r + 4)$ te, ... Feld so belastet sein, dass die Last von der dem fraglichen Felde zugekehrten Stütze den Abstand $0,3804l$ hat. Für diese Belastung ergibt sich leicht $M_{r-1} = -x(1 + \alpha^2)(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots)Gl$, $M_r = +2x\alpha(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots)Gl$, $Ql = M_r - M_{r-1} = x(1 + \alpha^2)(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots)Gl = \frac{x(1 + \alpha)}{1 - \alpha}Gl$, d. i.

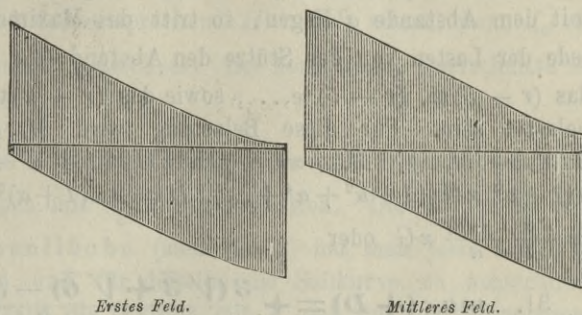
$$29. \max(+Q) = + \frac{1}{12} (-1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) G = + 0,1473G.$$

Als absolutes Maximum ergibt sich hiernach für das erste Feld $\max(+Q) = + 1,0228G$, $\max(-Q) = - 1,0850G$ und für ein

mittleres Feld $Max(+Q) = -Max(-Q) = 1,1473 G$. Untersucht man in gleicher Weise auch noch die übrigen Felder, so findet man, dass die grösste Transversalkraft überhaupt im II. Felde an der Stütze 1 entsteht; dieselbe ist $1,1624 G$.

Fig. 211.

In Fig. 211 ist hiernach $max Q$ grafisch dargestellt. Die folgende Tabelle enthält die bezüglichen Zahlenwerthe:



x	Erstes Feld		Mittleres Feld	
	$max(+Q)$	$max(-Q)$	$max(+Q)$	$max(-Q)$
	+	-	+	-
0	1,0228	0,0850	1,1473	0,1473
0,1	0,8963	0,2115	1,0737	0,2209
0,2	0,7713	0,3364	0,9825	0,3122
0,3	0,6496	0,4185	0,8781	0,4166
0,4	0,5328	0,5750	0,7649	0,5297
0,5	0,4223	0,6855	0,6473	0,6473
0,6	0,3199	0,7879	0,5297	0,7647
0,7	0,2271	0,8806	0,4166	0,8781
0,8	0,1456	0,9621	0,3122	0,9825
0,9	0,0770	1,0308	0,2209	1,0737
1	0,0228	1,0850	0,1473	1,1473
l	G		G	

Wenn die Lasten im ersten und zweiten, bezüglich $(r-1)$ sten und r ten Felde näher rücken, als dies praktisch möglich ist, so wird natürlich wieder eine besondere Bestimmung zu treffen sein, wobei indess stets eine Last am Querschnitte anzunehmen ist.

§. 131. Stützendruck. Der Druck auf die linke Endstütze ist gleichbedeutend mit der Transversalkraft Q daselbst. Wir wollen ausserdem nur noch den Druck auf eine mittlere Stütze bestimmen.

Wenn im r ten Felde eine Last liegt, so ist für den Stützendruck auf die $(r-1)$ ste Stütze: $Dl = G(l - \xi) + M_{r-2} - 2M_{r-1} + M_r = G(l - \xi) - (\alpha + 2)M_{r-1} + M_r$. Setzt man für M_{r-1} und M_r die Ausdrücke 10 und $\alpha + 2 = 4 - \sqrt{3}$, so erhält man

$$30. \quad D = G \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \left[1 + \frac{\xi}{l} - (3\sqrt{3} - 4) \frac{\xi^2}{l^2}\right].$$

Wenn in den neben dieser Stütze liegenden Feldern gleiche Lasten mit dem Abstände a liegen, so tritt das Maximum von D_r ein, wenn jede der Lasten von der Stütze den Abstand $\frac{1}{2} a$ hat. Ausserdem muss das $(r - 3)$ te, $(r - 5)$ te, ..., sowie das $(r + 2)$ te, $(r + 4)$ te, ... Feld belastet sein. Für diese Belastung wird $M_{r-2} = M_r$, also $Dl = 2(M_r - M_{r-1})$, $M_{r-1} = -2\alpha^2 \times Gl(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots)$, $M_r = \alpha(1 + \alpha^2) \times Gl(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots)$, $D = 2\alpha(1 + \alpha)^2 \times G(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = \frac{2\alpha(1 + \alpha)}{1 - \alpha} \times G$ oder

$$31. \quad \max(+D) = + \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{6}) - 5(1 + \sqrt{2})}{6} G \\ = + 0,0790 G.$$

Das negative Maximum von D , welches bei Belastung der übrigen Felder eintritt, ergibt sich in gleicher Weise zu $-\frac{1}{\alpha} \max(+D)$ oder zu

$$32. \quad \max(-D) = - \frac{-1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} G \\ = - 0,2946 G.$$

XVII. Kapitel.

Grafische Behandlung der kontinuierlichen Träger.

§. 132. Grafische Darstellung der elastischen Linie. Die Differenzialgleichung der elastischen Linie oder der deformirten Axe eines Stabes ist, wenn man von dem Einflusse der Schubspannungen absieht,

$$1. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

Die Differenzialgleichung einer Seilkurve mit der vertikalen Belastung q pro horizontale Längeneinheit und der Horizontalspannung H ist

$$2. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H}.$$

Hiernach ist die elastische Linie eine Seilkurve, für welche die Last pro Längeneinheit gleich dem durch das Trägheitsmoment I dividirten Momente M und die Horizontal-

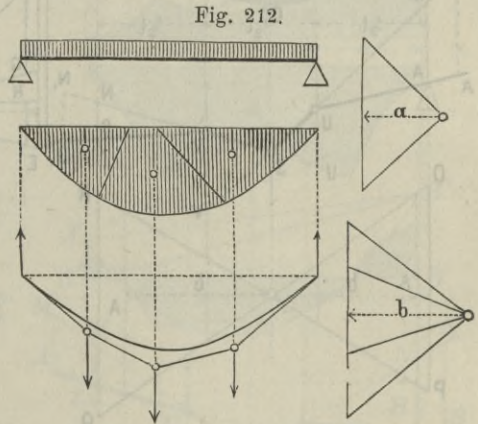
spannung gleich dem Elastizitätskoeffizienten E ist. Statt dessen würde man bei konstantem I auch $q = M$ und $H = EI$ setzen können. Wir wollen in der Folge in Uebereinstimmung mit §. 56 und 63 $q = M \frac{I}{I_0}$ und dementsprechend $H = EI_0$ setzen, wenn I_0 ein mittleres Trägheitsmoment bezeichnet. Bei konstantem Querschnitte ist dann $\frac{I_0}{I} = 1$.

Man hat also das Seilpolygon der gegebenen Kräfte zu konstruieren und die Höhen desselben mit $\frac{I_0}{I}$ zu multiplizieren. Die so entstandene verzerrte Momentenfläche (siehe §. 63) hat man jetzt als Belastungsfläche anzusehen und für dieselbe die Seilkurve zu konstruieren. Bei konstantem I entfällt die Division mit I_0 und die vom Seilpolygone gebildete Momentenfläche ist jetzt unmittelbar als Belastungsfläche anzusehen.

Wenn man die Momentenfläche durch Vertikalen in mehrere Flächenstücke theilt und die Flächen derselben in ihren Schwerpunkten wirkend denkt, so bestimmen diese Kräfte ein Seilpolygon, welches die elastische Linie in der Vertikalen, welche die einzelnen Flächen von einander trennen, tangirt, wodurch sich beliebig viele Tangenten der elastischen Linie konstruieren lassen. Flächen, welche positiven oder negativen Momenten entsprechen, sind natürlich im Kräftepolygone im entgegengesetzten Sinne aufzutragen.

Nimmt man eine Theilung durch nicht vertikale Linien vor (Fig. 212), so sind die Richtungen der äusseren Polygonseiten mit denen für die vertikale Theilung übereinstimmend, weil die vertikale Höhe zwischen den entsprechenden Strahlen des Kräftepolygones der Gesamtlast entspricht. Die äusseren Polygonseiten werden also auch in diesem Falle Tangenten an die elastische Linie in den Endpunkten des in Rede stehenden Stückes derselben bilden. Hierbei können natürlich auch einzelne Flächentheile negativ sein.

Die Darstellung der elastischen Linie als Seilkurve auf Grund der Gleichungen 1 und 2 erfolgte zuerst von Mohr im „Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen“, Zeitschr. des Hannov. Arch.- und Ingen.-Ver. 1868.



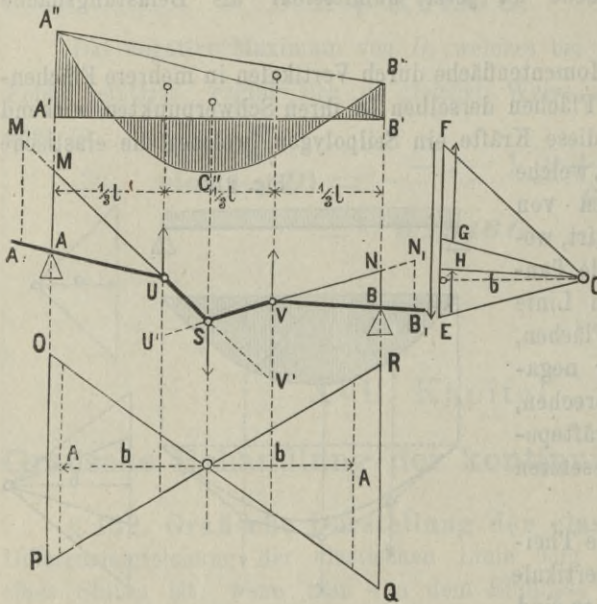
§. 133. **Das elastische Polygon.** Handelt es sich nicht um die wirkliche Form der elastischen Linie, sondern nur um die äusseren Kräfte und ihre Momente, so genügt die Kenntniss der Lage der Tangenten der elastischen Linie an den Stützen, welche wir Stützentangenten nennen.

Bei konstantem Querschnitte denkt man sich hier die Momentenfläche am besten als Differenz der einfachen Momentenfläche $A''C''B''$ und des Trapezes $A'A''B''B'$ (Fig. 213), setzt also die Momentenfläche

$$= \text{Fläche } A''C''B'' - \triangle A'A''B' - \triangle A''B''B'.$$

Bei variablem Querschnitte multipliziert man die Ordinaten aller drei Flächen mit $\frac{I_0}{I}$. Hierdurch mögen die beiden Dreiecke, die wir Momentendreiecke

Fig. 213.



nennen, in die verzerrten Momentendreiecke, die einfache Momentenfläche in die verzerrte einfache Momentenfläche übergehen. Alsdann ist die verzerrte Momentenfläche gleich der verzerrten einfachen Momentenfläche weniger der Summe der beiden verzerrten Momentendreiecke.

Die Inhalte dieser drei Flächen denken wir uns nun in ihren

Schwerpunkten als Vertikalkräfte wirkend; das denselben entsprechende Seilpolygon $AUSVB$ nennen wir das elastische Polygon.

Bei konstantem Querschnitte theilen die durch die Schwerpunkte beider Dreiecke gehenden Vertikalen die Spannweite in drei gleiche Theile; wir nennen dieselben daher die Drittelvertikalen. Aber auch bei variablem Querschnitte lässt sich die Lage der durch Schwerpunkte der verzerrten Momentendreiecke gehenden Vertikalen, die wir auch hier Drittelvertikalen nennen wollen, bestimmen, auch wenn man die Stützenmomente noch nicht kennt. Bezeichnen a' , a'' die Abstände der Schwerpunkte von den nächsten Stützenvertikalen, so wird

$$3. \quad a' = \frac{\int \frac{x(l-x)}{I} dx}{\int \frac{(l-x)d(l-x)}{I}}, \quad a'' = \frac{\int \frac{x(l-x)}{I} dx}{\int \frac{x dx}{I}}.$$

oder

$$4. \quad a' = \frac{C}{3B''} l, \quad a'' = \frac{C}{3B'} l,$$

wenn man ausser den Bezeichnungen von §. 56 noch

$$5. \quad B' = \frac{2I_0}{l^2} \int_0^l \frac{x dx}{I}, \quad B'' = \frac{2I_0}{l^2} \int_0^l \frac{(l-x)d(l-x)}{I}$$

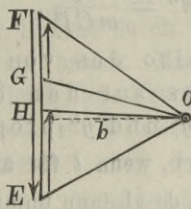
setzt. Unter Einführung der Beziehungen von §. 56 wird auch $B' = \frac{1}{3}(C + 2C'') = \frac{1}{3}(3 + C' - C'')$, $B'' = \frac{1}{3}(C + 2C') = \frac{1}{3}(3 - C' + C'')$. In der grafischen Bestimmung von §. 62 (Fig. 124) wird hiernach

$$6. \quad \begin{cases} B' = 2 \frac{\triangle ABN}{\text{Trapez } ABNM}, \\ B'' = 2 \frac{\triangle ABM}{\text{Trapez } ABNM} \end{cases}$$

und

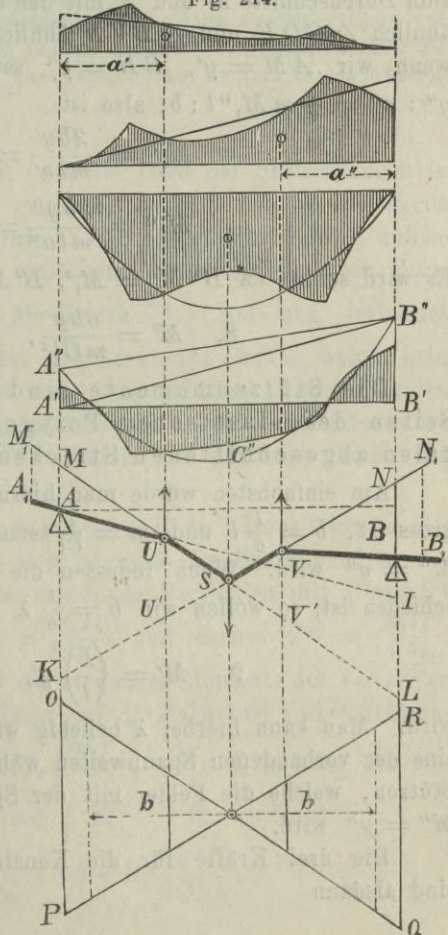
$$7. \quad \begin{cases} \frac{a'}{l} = \frac{\text{Fläche } AGB}{\triangle ABN}, \\ \frac{a''}{l} = \frac{\text{Fläche } AGB}{\triangle ABM}, \end{cases}$$

so dass die Lage der Drittelvertikalen durch die Form des Trägers gegeben ist.



Wir verwandeln nun die beiden verzerrten Momentendreiecke in Dreiecke mit der Länge l und bezeichnen die Höhen an den Enden mit M_1' und M_1'' . Bei konstantem Querschnitte, wo die Flächenverwandlung wegfällt, ist $M_1' = M'$, $M_1'' = M''$. Bei variablem Querschnitte wird das Verhältniss von M_1' und M_1'' zu M' und M'' dasselbe bleiben, wie gross auch M' und M'' sein möge. Dieses

Fig. 214.



Verhältniss erhalten wir durch die Flächenverwandlung. Offenbar wird

$$M_1' = B' M', \quad M_1'' = B'' M''.$$

Wir verwandeln ferner die verzerrte einfache Momentenfläche in ein Rechteck mit der Länge l und bezeichnen die Höhe desselben, oder das mittlere Moment des Einzelträgers mit derselben Belastung mit \mathfrak{M}_0 .

Die drei Kräfte zur Konstruktion des elastischen Polygons würden alsdann $\mathfrak{M}_0 l$, $\frac{1}{2} M_1' l$ und $\frac{1}{2} M_1'' l$ zu wählen sein, während die Polweite $b = EI_0$ zu setzen sein würde. Statt dessen aber können wir auch die Kräfte $= m \mathfrak{M}_0 l$, $\frac{1}{2} m M_1' l$, $\frac{1}{2} m M_1'' l$ und die Polweite $b = m EI_0$ annehmen, wenn m einen beliebigen Faktor bezeichnet. Um m möglichst günstig wählen zu können, bestimmen wir zunächst die Stützenmomente M' und M'' .

Verlängert man die mittleren Seiten des elastischen Polygons bis zum Durchschnitte M und N mit den Stützenvertikalen, so ist $\triangle AUM$ ähnlich $\triangle GOF$ und $\triangle BVN$ ähnlich $\triangle HOE$; folglich verhält sich, wenn wir $AM = y'$, $BN = y''$ setzen, $y' : a' = \frac{l}{2} m M_1' l : b$ und $y'' : a'' = \frac{1}{2} m M_1'' l : b$, also ist

$$M_1' = \frac{2by'}{mla'} = \frac{6B''by'}{mCl^2},$$

$$M_1'' = \frac{2by''}{mla''} = \frac{6B'by''}{mCl^2}.$$

Es wird somit, da $B'' M' = M_1'$, $B' M'' = M_1''$ ist,

$$8. \quad M' = \frac{6by'}{mCl^2}, \quad M'' = \frac{6by''}{mCl^2}.$$

Die Stützenmomente sind also den von den inneren Seiten des elastischen Polygons auf den Stützenvertikalen abgeschnittenen Strecken y' und y'' proportional.

Am einfachsten würde man hiernach, wenn l für alle Felder gleich gross ist, $b = \frac{1}{6} l$ und $m = \frac{1}{Cl}$ setzen, da alsdann unmittelbar $M' = y'$, $M'' = y''$ wird. Wenn indessen die Länge der einzelnen Felder verschieden ist, so wollen wir $b = \frac{1}{6} \lambda$, $m = \frac{1}{Cl}$ setzen, so dass

$$9. \quad M' = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 y', \quad M'' = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 y''$$

wird. Man kann hierbei λ beliebig wählen; am besten wird man für λ eine der vorhandenen Spannweiten wählen, da dann wenigstens für die Stützen, welche die Felder mit der Spannweite λ begrenzen, $M' = y'$, $M'' = y''$ wird.

Die drei Kräfte für die Konstruktion des elastischen Polygons sind alsdann

$$10. P = + \frac{\mathfrak{M}_0 l}{C \lambda}, \quad P' = - \frac{M_1' l}{2C\lambda}, \quad P'' = - \frac{M_1'' l}{2C\lambda}.$$

Zieht man in den Abständen $a' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 = \frac{Cl}{3B''} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$ und $a'' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 = \frac{Cl}{3B'} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$ von U und V Vertikalen, so sind die Strecken A, M_1 und B, N_1 , welche auf diesen Vertikalen von den Verlängerungen der inneren Seiten des elastischen Polygons abgeschnitten werden, gleich M' und M'' und zwar nach demjenigen Momentenmaassstabe, nach dem im Kraftpolygone die Kräfte P, P', P'' aufgetragen wurden.

Das elastische Polygon wurde zur grafischen Behandlung des kontinuierlichen Trägers konstanten Querschnittes unter Einführung der obigen Zerlegung der Momentenfläche in die einfache Momentenfläche und zwei Dreiecke zuerst von Mohr angewendet (Zeitschr. des Hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1868). Die Ausdehnung auf den veränderlichen Querschnitt erfolgte zuerst vom Verfasser (vorliegendes Werk, I. Aufl. 1872). Die Bezeichnung „elastisches Polygon“ wurde in Uebereinstimmung mit der längst üblichen Bezeichnung „elastische Linie“ zuerst von v. Ott (Die grafische Statik, II. Theil, Prag 1885) angewendet. Ritter (Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken, Zürich 1871) gebrauchte dafür die Bezeichnung zweites Seilpolygon; diese Bezeichnung ist auch in den früheren Auflagen dieses Buches benützt.

§. 134. Die Kreuzlinien. Ist die Lage der Stütz tangenten AU und BV (Fig. 213 und 214) gegeben, so lässt sich das elastische Polygon in folgender Weise konstruiren: Auf zwei Vertikalen, welche vom Schwerpunkte der verzerrten einfachen Momentenfläche den Horizontalabstand b haben, trägt man die Grösse $\frac{\mathfrak{M}_0 l}{C \lambda}$ auf und verbindet die so erhaltenen Punkte durch zwei sich kreuzende Gerade, welche man die Kreuzlinien nennt. Macht man jetzt auf den Drittelvertikalen UU' und VV' gleich dem Vertikalabstande der Kreuzlinien in denselben Vertikalen, so bilden UV' und VU' offenbar die mittleren Seiten des elastischen Polygons.

Bezeichnen wir den Abstand OP und QR der Kreuzlinien in den Stützenvertikalen mit T' und T'' , den Abstand des Schwerpunktes der verzerrten einfachen Momentenfläche von diesen Vertikalen mit ξ' und ξ'' , so ist $T' : \frac{\mathfrak{M}_0 l}{C \lambda} = \xi' : b$, also $T' = \frac{\mathfrak{M}_0 l \xi'}{Cb \lambda}$ und ebenso $T'' = \frac{\mathfrak{M}_0 l \xi''}{Cb \lambda}$. Nun aber sind $\mathfrak{M}_0 l \xi'$ und $\mathfrak{M}_0 l \xi''$ die statischen Momente der verzerrten einfachen Momentenfläche in Beziehung auf die linke und rechte Stützenvertikale, d. i. $= I_0 \int \frac{\mathfrak{M} x dx}{I}$ und $I_0 \int \frac{\mathfrak{M} (l-x) dx}{I}$, d. i. nach der Bezeichnung von §. 56 $= \frac{1}{2} \mathfrak{M}' l^2$ und $\frac{1}{2} \mathfrak{M}'' l^2$. Es wird somit

$$11. T' = \frac{\mathfrak{M}' l^2}{2Cb \lambda}, \quad T'' = \frac{\mathfrak{M}'' l^2}{2Cb \lambda}.$$

Man kann sonach zur Konstruktion der Kreuzlinien auch die Grössen \mathfrak{M}' und \mathfrak{M}'' verwenden, deren Bestimmung durch Rechnung und Konstruktion in §. 63 gezeigt wurde. Wenn man $b = \frac{1}{6} \lambda$ wählt, so wird

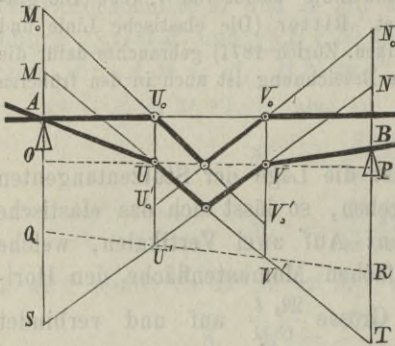
$$12. \quad T' = \frac{3}{C} \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2, \quad T'' = \frac{3}{C} \mathfrak{M}'' \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2;$$

für $\lambda = l$ wird also $T' = 3\mathfrak{M}'$, $T'' = 3\mathfrak{M}''$.

Die Einführung der Kreuzlinien rührt von Culmann her (Ritter, Die elastische Linie u. s. w., Zürich 1871).

§. 135. Beiderseitig und einseitig horizontal eingespannter Träger. Die gezeigte Konstruktion ist unmittelbar anwendbar auf die Bestimmung der Stützenmomente beim beiderseitig und einseitig horizontal eingespannten Träger.

Fig. 215.



Beim beiderseitig horizontal eingespannten Träger werden die äußeren Seiten AU_0 und BV_0 (F. 215) des elastischen Polygons horizontal. Durch die Kreuzlinien sind dann die Punkte U_0' und V_0' und durch diese die Punkte M_0 und N_0 bestimmt. Es ist alsdann, wenn man $\lambda = l$, $b = \frac{1}{6} l$ wählt, $M' = AM_0$, $M'' = B_0N_0$ und bei konstantem Querschnitte $M' = AV_0V_0'$, $M'' = B_0N_0 = U_0U_0'$.

Im Kraftpolygone fallen hier die Punkte G und H zusammen; es wird also $\frac{1}{2} (M' + M'') = \mathfrak{M}_0$. Im ersten Seilpolygone werden demnach bei konstantem Querschnitte die auf beiden Seiten der Schlusslinie liegenden Momentenflächen einander gleich. Bei symmetrischer Belastung würde hiernach $M' = M'' = \mathfrak{M}_0$.

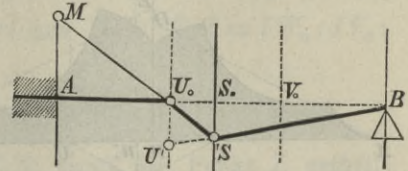
Zieht man in Fig. 215 durch die Punkte U und V , welche dem schief eingespannten Träger entsprechen, eine Gerade, welche die Stützenvertikalen in O und P schneidet, so ist $OM = AM_0$, $PN = B_0N_0$; demnach wird für $\lambda = l$, $b = \frac{1}{6} l$: $AO = M_0' - M'$, $BP = M_0'' - M''$, wenn M_0' , M_0'' die Endmomente für den horizontal eingespannten Träger bedeuten. AO und BP sind also der Differenz der Endmomente beim horizontal und schief eingespannten Träger proportional.

Ist der Träger nur auf der linken Seite horizontal eingespannt, während er auf der rechten frei auf der Stütze B ruht, so ist nur die linke Seite AU (Fig. 216) des zweiten Seilpolygones horizontal. In B muss das Moment Null sein, es muss also $BN = 0$ sein oder es müssen

die Seiten SV und BV des zweiten Seilpolygones zusammenfallen. Man bestimmt demnach den Punkt U' durch die Kreuzlinien; durch diesen Punkt ist also die Seite BS , also auch der Punkt S und durch diesen der Punkt M bestimmt; es ist alsdann $M' = \frac{1}{C} AM$ und bei konstantem Querschnitte $M' = AM$. Im letzteren Falle würde bei symmetrischer Belastung für $l = \lambda$, $b = \frac{1}{6}l$: $U_0 S_0 = \frac{1}{6}l = b$,

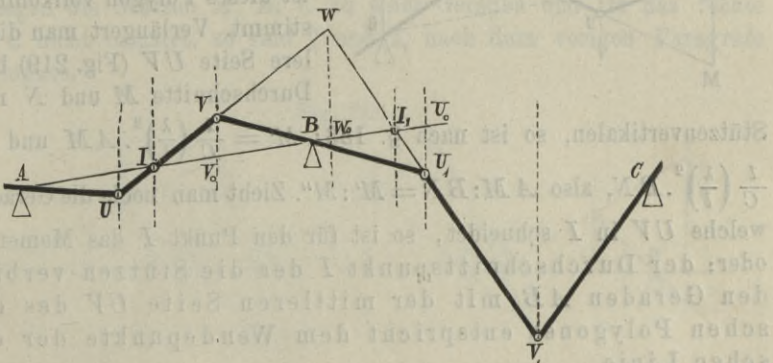
$$U_0 U' = \mathfrak{M}_0, S_0 S = \frac{3}{4} \mathfrak{M}_0, AM = 2 S_0 S = \frac{3}{2} \mathfrak{M}_0, \text{ also } M' = \frac{3}{2} \mathfrak{M}_0.$$

Fig. 216.



§. 136. **Verschränkte Stützenvertikale.** Verlängern wir die mittleren Seiten UV und $U_1 V_1$ (Fig. 217) der elastischen Polygone zweier auf einander folgender beliebig belasteter Felder mit den Längen l und l_1 , so schneiden sich die Verlängerungen in einem Punkte W , welcher in der Richtung der Mittelkraft der in V und U_1 wirkenden Kräfte liegt. Diese Kräfte sind nach §. 133: $\frac{1}{2C} B'' M_1 \frac{l}{\lambda}$ und $\frac{1}{2C} B_1' M_1 \frac{l_1}{\lambda}$, wenn M_1 das Stützenmoment in B bedeutet und wenn sich B'' auf das linke, B_1' auf das rechte Feld bezieht. Es verhält sich also $W_0 V_0 : W_0 U_0 = B_1' l_1 : B'' l$. Hiernach hat die durch W gehende Vertikale eine konstante, von der Belastung unabhängige Lage.

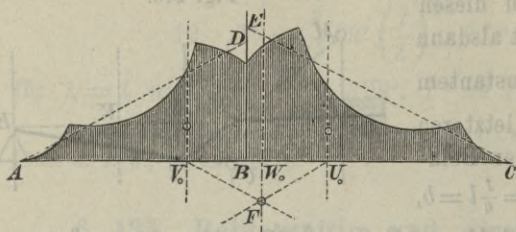
Fig. 217.



Bei konstantem Querschnitte ist die Horizontalprojektion von $V_0 U_0 = \frac{1}{3}(l + l_1)$. Da sich nun hier $W_0 V_0 : W_0 U_0 = l_1 : l$ verhält, so wird die Horizontalprojektion von $V_0 W_0 = \frac{1}{3} l_1$, die von $U_0 W_0 = \frac{1}{3} l$ und die von $B W_0 = \frac{1}{3}(l_1 - l)$. Wir nennen daher die durch W_0 gehende Vertikale, deren Lage sich hiernach leicht angeben lässt, die **verschränkte Stützenvertikale**.

Wir wollen diesen Namen aber auch bei variablem Querschnitte beibehalten. Hier lässt sich diese Vertikale in folgender Weise bestimmen.

Fig. 218.

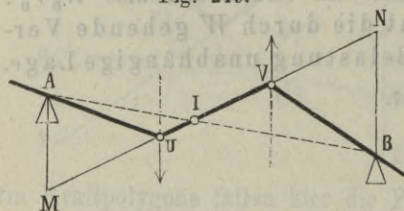


Sind in Fig. 218 die Dreiecke ABD und CEB gleich den entsprechenden verzerrten Momentendreiecken, so ist nach §. 133 $BD = B'' M_1$ und $BE = B' M_1$. Legt man durch U_0 und V_0 Parallelen bezüglich zu AD und CE , welche sich in F schneiden, so geht, wie leicht nachweisbar, die verschränkte Stützenvertikale durch F .

Für einen konstanten Querschnitt wurde der aufgestellte Satz zuerst von Mohr (Zeitschr. des hannov. Arch.- und Ingen.-Ver. 1868) nachgewiesen. Culmann nannte die verschränkte Stützenvertikale das verschränkte Drittel (Ritter, die elastische Linie u. s. w., Zürich 1871).

§. 137. Unbelastetes Feld. Wenn es sich um eine Oeffnung handelt, welche nicht belastet ist, so ist das elastische Polygon nur aus

Fig. 219.



den beiden Kräften $\frac{1}{2} M'l$ und $\frac{1}{2} M''l$ zu konstruieren. Ist die Lage der Stützentangenten gegeben, so ist dieses Polygon vollkommen bestimmt. Verlängert man die mittlere Seite UV (Fig. 219) bis zum Durchschnitte M und N mit den

Stützenvertikalen, so ist nach §. 133: $M' = \frac{1}{C} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot AM$ und $M'' = \frac{1}{C} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot BN$, also $AM:BN = M':M''$. Zieht man noch die Gerade AB , welche UV in I schneidet, so ist für den Punkt I das Moment Null oder: der Durchschnittspunkt I der die Stützen verbindenden Geraden AB mit der mittleren Seite UV des elastischen Polygons entspricht dem Wendepunkte der elastischen Linie.

Die Transversalkraft ist im ganzen Felde konstant. Ist α der Neigungswinkel der Momentenlinie gegen die horizontale Schlusslinie, so folgt aus dem Kräftepolygone mit der Polweite H sofort $Q = H \tan \alpha$.

§. 138. Unbelastetes und belastetes Feld. Wir untersuchen die gegenseitige Lage der Punkte I und I_1 (Fig. 217), in welchen die durch die Stützen A und B eines unbelasteten Feldes gehende Gerade von den

mittleren Seiten des elastischen Polygons dieses unbelasteten Feldes und der linken inneren Seite des elastischen Polygons des anschliessenden, beliebig belasteten Feldes BC geschnitten wird. Es verhält sich $I_1 U_0 : I_1 W_0 = U_0 U_1 : W_0 W$; nun aber verhält sich auch $U_0 U_1 : V_0 V = B U_0 : B V_0 = \frac{l_1}{B_1} : \frac{l}{B} = B' l_1 : B_1 l$ und $W_0 W : V_0 V = I W_0 : I V_0$; hieraus folgt leicht:

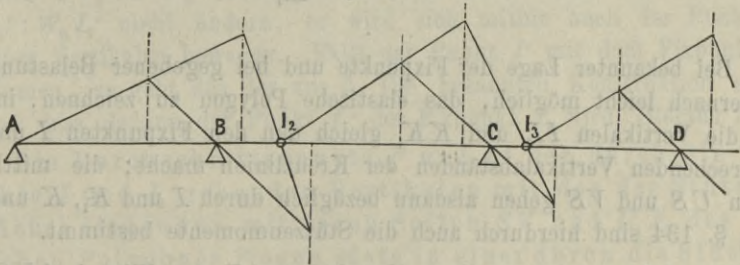
$$I_1 U_0 : I_1 W_0 = I V_0 \cdot B' l_1 : I W_0 \cdot B_1 l.$$

Das Verhältniss, in welchem $W_0 U_0$ durch den Punkt I_1 getheilt wird, hängt also bei gegebenen Spannweiten nur von dem Verhältnisse $I V_0 : I W_0$ oder von der Lage des Punktes I ab. Legt man also durch den Punkt I verschiedene elastische Polygone, so bleibt auch der Punkt I_1 derselbe oder noch allgemeiner: Bewegt sich der Punkt I bei verschiedener Höhenlage der Stützen und bei beliebigen elastischen Polygonen in ein und derselben Vertikalen, so bewegt sich auch der Punkt I_1 in ein und derselben Vertikalen.

Aus dem Punkte I lässt sich leicht der Punkt I_1 konstruiren. Man hat nur nöthig, durch I eine beliebige Gerade zu ziehen, welche die Vertikale durch V_0 und die verschränkte Stützenvertikale in V und W schneidet. Durch V und B zieht man eine Gerade, welche die Vertikale durch U_0 in U_1 schneidet. Verbindet man jetzt U_1 mit W , so schneidet $U_1 W$ die Verlängerung von AB im Punkte I_1 .

Liegen die Stützen A, B, C in einer Geraden und ist das rechte Feld BC nicht belastet, so sind I und I_1 nach dem vorigen Paragrafe Wendepunkte.

Fig. 220.



Es seien nun vom linken Ende A (Fig. 221) aus mehrere Felder unbelastet. Das Ende A bildet alsdann, weil hier das Moment stets Null sein muss, einen Wendepunkt. Aus diesem lässt sich nach dem eben Gesagten der Wendepunkt I_0 für das zweite Feld BC konstruiren; aus diesem wieder der Wendepunkt I_3 für das dritte Feld u. s. f. Diese Wendepunkte wurden unter der Voraussetzung, dass sämt-

liche Stützen in einer Geraden liegen, in §. 67 als Fixpunkte bezeichnet.

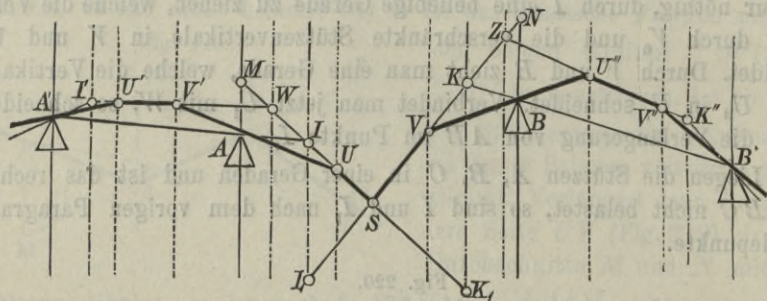
Eine zweite Reihe von Fixpunkten lässt sich in gleicher Weise konstruieren, wenn mehrere Felder vom rechten Endfelde aus unbelastet sind. In den Endfeldern bilden die Endstützen Fixpunkte.

Aus der Konstruktion geht unmittelbar hervor, dass die Fixpunkte stets ausserhalb der äusseren Drittelvertikalen der Felder liegen müssen.

Taf. II zeigt die vollständige Konstruktion der Fixpunkte für einen Träger mit vier Feldern.

Ist nur ein Feld belastet, so lässt sich nach dem Gesagten der Satz aufstellen: Die Verlängerungen der mittleren Seiten US und VS (Fig. 221) des elastischen Polygons des belasteten Feldes schneiden die Verlängerungen der die Stützen der anstossenden Felder verbindenden Geraden AA' und BB' in den Fixpunktvertikalen.

Fig. 221.



Bei bekannter Lage der Fixpunkte und bei gegebener Belastung ist es hiernach leicht möglich, das elastische Polygon zu zeichnen, indem man die Vertikalen II_1 und KK_1 gleich den den Fixpunkten I und K entsprechenden Vertikalabständen der Kreuzlinien macht; die mittleren Seiten US und VS gehen alsdann bezüglich durch I und K_1 , K und I_1 . Nach §. 134 sind hierdurch auch die Stützenmomente bestimmt.

Da $AI < a'$ ist, so liegt U rechts von I , der Winkel AUS ist demnach konkav, mithin die in U wirkende Kraft $\frac{1}{2} M_1' l$ nach oben gerichtet oder M' negativ. Dasselbe gilt für den Punkt V . Die Stützenmomente des belasteten Feldes sind daher stets negativ.

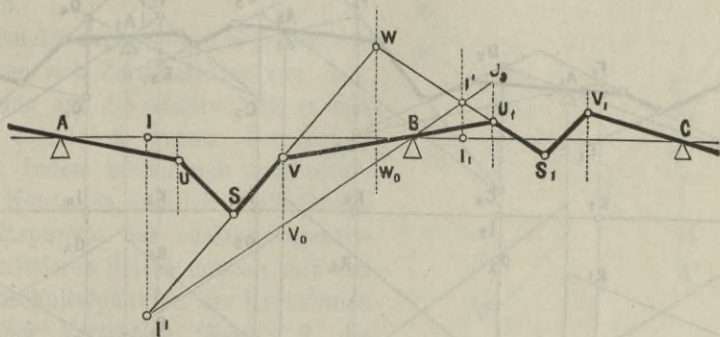
Der in diesem Paragrafe entwickelte Hauptsatz und die darauf gegründete Konstruktion der Fixpunkte wurde zuerst von Mohr (Zeitschr. des hannov. Arch.-u. Ingen.-Ver. 1868) aufgestellt.

§. 139. Zwei auf einander folgende belastete Felder. (Fig. 222.) Wir ziehen durch die Stütze B eine beliebige Gerade, welche die Seiten SV und U_1S_1 in I' und I_1' und die durch V, W und U_1 gehenden Vertikalen in V_0, W_0 und U_0 schneidet. Alsdann verhält sich

$$U_0 U_1 : V_0 V = U_0 B : V_0 B = B_1'' l : B' l_1$$

$$V_0 V : W_0 W = I' V_0 : I' W_0.$$

Fig 222.



Die Zusammensetzung dieser Proportionen gibt:

$$U_0 U_1 : W_0 W = I' V_0 \cdot B_1'' l : I W_0 \cdot B' l_1$$

oder weil $U_0 U_1 : W_0 W = U_0 I_1' : W_0 I_1'$ ist,

$$U_0 I_1' : W_0 I_1' = I' V_0 \cdot B_1'' l : I W_0 \cdot B' l_1.$$

Bewegt sich der Punkt I' in einer Vertikalen, so ändert sich das Verhältniss $I' V_0 : I' W_0$ nicht; es wird sich also auch das Verhältniss $U_0 I_1' : W_0 I_1'$ nicht ändern, es wird sich mithin auch der Punkt I_1' in einer Vertikalen bewegen. Fällt der Punkt I' mit dem Fixpunkte I zusammen, so geht aus der aus §. 138 bekannten Konstruktion sofort hervor, dass alsdann der Punkt I_1' der Fixpunkt I_1 wird. Hieraus folgt:

Die Durchschnittspunkte I' und I_1' der durch die Fixpunkte I und I_1 gehenden Vertikalen mit den der Stütze B zunächst liegenden mittleren Seiten SV und U_1S_1 des elastischen Polygons liegen stets in einer durch die Stütze B gehenden Geraden.

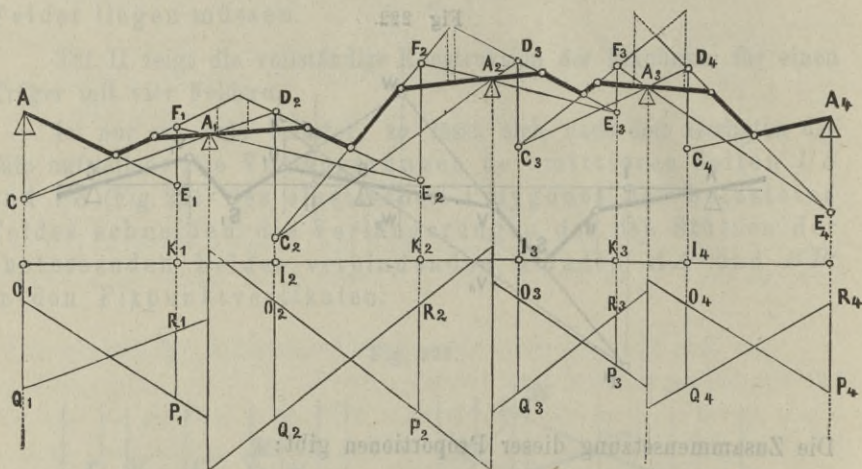
Auch dieser Satz wurde zuerst von Mohr (Zeitschr. des hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1868) aufgestellt.

Derselbe bildet eine unmittelbare Anwendung des geometrischen Satzes: „Wenn sich die Ecken eines Dreieckes (VU_1W) in drei parallelen Geraden bewegen, so drehen sich die Seiten des Dreieckes um drei Punkte (I_1', I' und B), welche in einer Geraden liegen.“

§. 140. **Beliebige Belastung der Felder.** Der aus den nachgewiesenen Eigenschaften des elastischen Polygons hervorgehende, in einem beliebigen Belastungsfalle anzuwendende Gang der Konstruktion ist folgender (Fig. 223).

1. Man konstruiere nach §. 138 sämtliche Fixpunkte $A, I_2, I_3 \dots K_1, K_2 \dots$ und lege durch sämtliche Fixpunkte Vertikalen.

Fig. 223.



2. Man konstruiere in sämtlichen Oeffnungen nach §. 134 die Kreuzlinien.

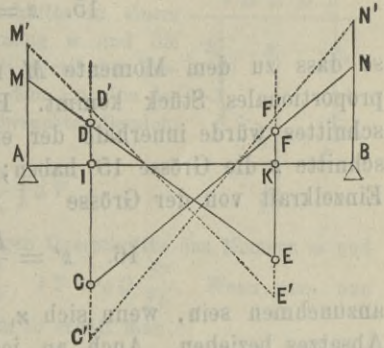
3. Man mache AC gleich dem entsprechenden Vertikalabstände $O_1 Q_1$ der Kreuzlinien und ziehe durch C und A_1 eine Gerade, welche die durch den Fixpunkt I_2 gehende Vertikale in D_2 schneidet. Man mache jetzt $D_2 C_2$ gleich dem entsprechenden Vertikalabstände $O_2 Q_2$ der Kreuzlinien und ziehe wiederum durch C_2 und A_2 eine Gerade, welche die durch den Fixpunkt I_3 gehende Vertikale in D_3 schneidet u. s. w. Ganz dieselbe Konstruktion wiederhole man vom rechten Ende aus, mache also $A_4 E_4 = R_4 P_4$ u. s. f.

4. Hierdurch hat man für jede der mittleren Seiten des elastischen Polygons zwei Punkte C und F_1, C_2 und F_2 etc. A und E_1, D_2 und E_2 u. s. f. festgesetzt, so dass sich jetzt diese mittleren Seiten wirklich ziehen lassen.

5. Die Abstände der Durchschnittspunkte dieser Linien mit den Stützenvertikalen von den Stützen bestimmen nach §. 133 die Stützenmomente. Für diejenigen Oeffnungen, deren Länge $= \lambda$ gewählt wurde, stellen diese Abstände unmittelbar die Stützenmomente dar; für andere Oeffnungen ist erforderlichenfalls die in §. 133 gezeigte Konstruktion

anzuwenden. Unter Umständen kann auch die folgende einfache Konstruktion vorzuziehen sein (Fig. 224); I, K seien die Durchschnittspunkte der Vertikalen durch die Fixpunkte mit der Verbindungsgeraden AB der Stützen. Macht man $ID' = ID \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, $KF' = KF \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, $C'D' = OQ \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, $E'F' = RP \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$ und zieht durch C' und F' , E' und D' Gerade, so schneiden dieselben offenbar auf den Stützenvertikalen die Strecken AM' und BN' ab, welche unmittelbar die Stützenmomente darstellen.

Fig. 224.



Bei der angegebenen Konstruktion pflanzen sich Zeichenfehler von einer Öffnung auf die andere fort, so dass man möglichst genau konstruieren muss. Indess bieten sich auch mehrfache Kontrollen, nämlich: 1. die Durchschnittspunkte der zusammengehörigen mittleren Seiten müssen mit den Durchschnittspunkten der Kreuzlinien in einer Vertikalen liegen; 2. die Verlängerungen der mittleren Polygonseiten müssen sich in den verschränkten Stützenvertikalen schneiden; 3. die entsprechenden Durchschnittspunkte der mittleren Seiten mit den Drittelvertikalen müssen in Geraden liegen, welche durch die Stützen gehen.

Sind einzelne Öffnungen nicht belastet, so ist der Abstand der Kreuzlinien natürlich als Null anzunehmen.

Diese Konstruktion bleibt auch in dem Falle gültig, wenn die Stützen nicht in einer Geraden liegen. Trägt man hierbei die Ordinaten der elastischen Linie, also auch die Höhenunterschiede der Stützpunkte in $\frac{1}{m}$ der wirklichen Grösse auf, so muss die Einheit für den Momentenmaassstab $= \frac{\lambda}{6mEI}$ gewählt werden, wie sich aus §. 133 leicht ergibt.

In dieser Form wurde die Konstruktion zuerst von Culmann (Ritter, die elastische Linie u. s. w., Zürich 1871) angegeben. Die von Mohr angegebene Konstruktion ist eine etwas abweichende, indem derselbe für die nach unten und oben gerichteten Kräfte des elastischen Polygons zwei getrennte Polygone konstruiert.

§. 141. Grafische Darstellung der elastischen Linie unter Berücksichtigung der Schubspannungen. Bei Berücksichtigung der Schubspannungen ergibt sich statt der Gleichung 1 die Gleichung

$$13. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} + \frac{d}{E_1} \frac{xQ}{dx} = \frac{M}{EI} + \frac{xq}{E_1 F} - \frac{x^2 Q d}{E_1 F^2 dx},$$

worin Q , E_1 , F , \varkappa die Bedeutung wie in §. 55 haben und worin $dQ = q dx$ gesetzt ist. Die Ordinaten der verzerrten Momentenfläche würden demnach die Grösse

$$14. \quad z = M \frac{I_0}{I} + \frac{EI_0}{E_1} \frac{d \frac{\varkappa Q}{F}}{dx} = M \frac{I_0}{I} + \frac{EI_0}{I} \left(\frac{\varkappa q}{F} - \frac{\varkappa^2 Q}{F^2} \frac{d \frac{F}{\varkappa}}{dx} \right)$$

zu erhalten haben. Bei konstantem Querschnitte würde also

$$15. \quad z = M + \frac{\varkappa EI}{E_1 F} q,$$

so dass zu dem Momente M noch ein der Last q pro Längeneinheit proportionales Stück kommt. Bei sprungweiser Aenderung des Querschnittes würde innerhalb der einzelnen Theile mit konstantem Querschnitte z die Grösse 15 haben; an jedem Abschnitte aber würde eine Einzelkraft von der Grösse

$$16. \quad z' = \frac{EI_0 Q}{E_1} \left(\frac{\varkappa}{F} - \frac{\varkappa_1}{F_1} \right)$$

anzunehmen sein, wenn sich \varkappa , F und \varkappa_1 , F_1 auf die beiden Seiten des Absatzes beziehen. Auch an jeder Einzellast G ist von der verzerrten Momentenfläche eine Einzellast von der Grösse

$$17. \quad z'' = \frac{\varkappa EI_0}{E_1 F} G$$

anzunehmen.

Konstruirt man ausser der elastischen Linie noch eine Kurve, deren Tangente auf dem entsprechenden Querschnitte senkrecht steht und bezeichnet die Ordinaten dieser Kurve mit η , so ist, ganz dem §. 60 entsprechend, der Winkel zwischen Querschnitt und Normalen zur elastischen Linie

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{dx} = \frac{\varkappa Q}{E_1 F},$$

also wird

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{1}{E_1} \frac{d \frac{\varkappa Q}{F}}{dx}.$$

Die Subtraktion von der Gleichung 13 gibt

$$18. \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{M}{EI},$$

so dass also die Querschnitte mit den Normalen der ohne Rücksicht auf die Schubspannungen konstruirten elastischen Linie zusammenfallen.

Legt man beide Kurven durch ein und denselben Punkt der linken Stützenvertikalen, so haben die Kurven in der rechten Stützenvertikalen einen Abstand v , welcher bestimmt ist durch

$$19. \quad v = \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{dx} \right) dx = \frac{1}{E_1} \int_0^l \frac{xQ}{F} dx.$$

Wir geben im Folgenden die Entwicklung der Gleichung 13 auf Grundlage des Prinzips der virtuellen Arbeit und in Uebereinstimmung mit der Entwicklung in §. 55. Wir denken uns in drei benachbarten Punkten A, B, C (Fig. 225) mit dem Horizontalabstande a die im Gleichgewichte befindlichen Vertikalkräfte $-1, +2, -1$ wirkend, also in A und C die Last 1 nach oben, in B die Kraft 2 nach unten. Diese drei Kräfte mögen in einem beliebigen Querschnitte in einem beliebigen Punkte desselben die Normalspannung n und die Schubspannung t erzeugen. Sind y_0, y_1, y_2 die vertikalen Verschiebungen der Punkte A, B, C , so ist nach dem Principe der virtuellen Arbeit bei Benützung der in §. 55 gebrauchten Bezeichnungen

$$-y_0 + 2y_1 - y_2 = \int \left(\frac{nN}{E} + \frac{tT}{E_1} \right) dV.$$

Erzeugen die drei Kräfte in dem beliebigen Querschnitte das Moment m und die Transversalkraft q , so wird $nN = mM \frac{v^2}{I}$, $tT = qQ \frac{S^2}{Ib}$. Wenn man nun die Integration über den Querschnitt durchführt, so erhält man

$$-y_0 + 2y_1 - y_2 = \frac{1}{E} \int \frac{mM}{I} dx + \frac{1}{E_1} \int \frac{xqQ}{F} dx.$$

Da die in A, B, C wirkenden Kräfte für sich im Gleichgewicht sind, so wird ausserhalb der Strecke AC offenbar $m=0, q=0$. In den Punkten A, B, C selbst wird bezüglich $m=0, 1 \cdot a$ und 0 , der Mittelwerth von m ist also $\frac{1}{2}a$. Wenn $\frac{M}{I}$ in der Strecke AC konstant ist, so wird also $\int \frac{mM}{I} dx = 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{M}{I} a = \frac{Ma^2}{I}$. Ferner wird in der Strecke AB : $q=+1$, in der Strecke BC : $q=-1$. Ist nun $\frac{Q}{F}$ in der Strecke $AB = z_1 \frac{Q_1}{F_1}$, in der Strecke $BC = z_2 \frac{Q_2}{F_2}$, so ist demnach

$$\int \frac{xqQ}{F} dx = \left(\frac{z_1 Q_1}{F_1} - \frac{z_2 Q_2}{F_2} \right) a. \text{ Somit wird}$$

$$\frac{y_1 - y_0}{a} - \frac{y_2 - y_1}{a} = \frac{Ma}{EI} + \frac{1}{E_1} \left(\frac{z_1 Q_1}{F_1} - \frac{z_2 Q_2}{F_2} \right).$$

Nimmt man nun a unendlich klein an, so wird $\frac{y_1 - y_0}{a} - \frac{y_2 - y_1}{a} = \frac{d^2 y}{dx^2} dx$ und $\frac{Q_1}{F_1} - \frac{Q_2}{F_2} = d \frac{Q}{F}$. Die vorige Gleichung geht hierdurch aber in die Gleichung 13 über.

§. 142. Das elastische Polygon unter Berücksichtigung der Schubspannungen. Die Momentenfläche, deren Ordinaten bei konstantem Querschnitte durch die Gleichung 15 ausgedrückt sind, wird man hier wohl am besten aus den drei Theilen (Fig. 226):

$$+ \text{Fläche } A''A'''C'''B'''B = \Phi, \quad - \triangle A'A''B, \quad - \triangle B''B'A''$$

Fig. 225.

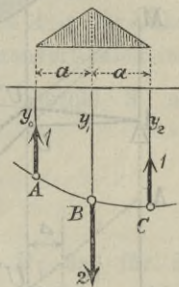
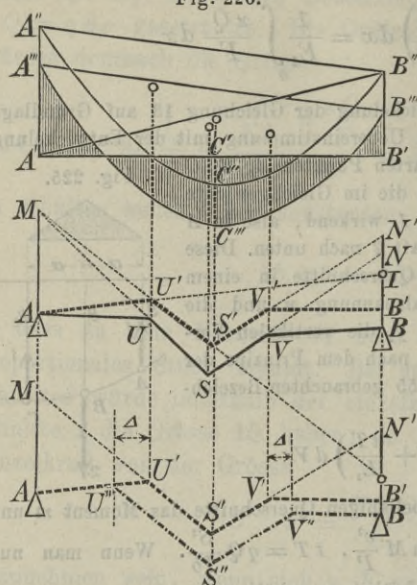


Fig. 226.



zusammensetzen. Die Fläche Φ besteht aus der eigentlichen Momentenfläche $A''C''B''$ und der Fläche $A''A'''C'''B'''B''C'''$. Der Formel 15 entsprechend wird

$$20. \quad \Phi = \int_0^l \mathfrak{M} dx + \frac{\kappa EI}{E_1 F} L,$$

wenn L die Belastung des ganzen Feldes bezeichnet. Die Kreuzlinien werden auch hier so zu konstruieren sein, dass auf Vertikalen im Abstände b vom Schwerpunkte der Fläche Φ die Grösse $\mathfrak{M}_0 \frac{l}{\lambda}$ aufgetragen wird, wobei \mathfrak{M}_0 die Höhe des Rechteckes mit der Länge l bedeutet, dessen Fläche $= \Phi$

ist. Es wird alsdann, den Formeln 11 entsprechend,

$$21. \quad \begin{cases} T' = \frac{\mathfrak{M}_0 l \xi'}{b \lambda} = \frac{1}{b \lambda} \left[\int_0^l \mathfrak{M} x dx + \frac{\kappa EI}{E_1 F} \int_0^l q x dx \right], \\ T'' = \frac{\mathfrak{M}_0 l \xi''}{b \lambda} = \frac{1}{b \lambda} \left[\int_0^l \mathfrak{M} (l-x) dx + \frac{\kappa EI}{E_1 F} \int_0^l q (l-x) dx \right] \end{cases}$$

oder

$$22. \quad \begin{cases} T' = \frac{l^2}{2b\lambda} \left[\mathfrak{M}' + \frac{2\kappa EI}{E_1 Fl} (\mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}_0'') \right], \\ T'' = \frac{l^2}{2b\lambda} \left[\mathfrak{M}'' + \frac{2\kappa EI}{E_1 Fl} (\mathfrak{Q}_0' - \mathfrak{Q}') \right], \end{cases}$$

wenn \mathfrak{Q}_0' und \mathfrak{Q}_0'' die Transversalkräfte an den Enden des Feldes für den Einzelträger bezeichnen. Bei Einzellasten werden zu $\int q x dx$ und $\int q (l-x) dx$ noch die bezüglichen statischen Momente der Einzellasten hinzuzufügen sein.

Konstruiert man ein zweites elastisches Polygon $AU'S'V'B'$ ohne Rücksicht auf die Schubspannungen, so stehen die Stützentangenten desselben senkrecht auf den Querschnitten über den Stützen, diese Tangenten sind also zwei benachbarten Feldern gemeinschaftlich. Legt man beide Polygone durch ein und denselben Punkt A der linken Stützenvertikalen, so ist der Abstand $BB' = v$ derselben in der rechten Stützenvertikalen bei konstantem Querschnitte nach Formel 19: $v = \frac{\kappa}{E_1 F} \int Q dx$, d. i., weil nach §. 56 $Ql = \mathfrak{Q}l + M'' - M'$ und $\int \mathfrak{Q} dx = 0$ ist,

$$23. \quad v = \frac{\varkappa}{E_1 F} (M'' - M').$$

Hierbei liegt B' über B , wenn $M'' - M'$ positiv ist.

Verschieben wir den Angriffspunkt der Kräfte $P' = -\frac{M'l}{2\lambda}$ und $P'' = -\frac{M''l}{2\lambda}$, ohne die Grösse der Kräfte P, P', P'' zu ändern, um \mathcal{A} nach aussen, so rückt unter Beibehaltung des Punktes \mathcal{A} in der linken Stützenvertikalen der Punkt B' in der rechten Stützenvertikalen um $AM \frac{3\mathcal{A}}{l} - B'N \frac{3\mathcal{A}}{l} = \frac{3\mathcal{A}}{l} (y' - y'')$, d. i. nach Formel 8 um $\frac{l\mathcal{A}}{2b\lambda} (M'' - M')$ nach unten. Wählt man

24. $\mathcal{A} = \frac{2b\lambda}{l} \frac{\varkappa}{E_1 F} = \frac{2EI\varkappa}{E_1 F l^2} l$,
so rückt der Punkt B' um v nach unten, also nach B ; das für die Kräfte P, P', P'' ohne Rücksicht auf die Schubspannungen konstruirte Seilpolygon wird also dann sowohl durch den Stützpunkt \mathcal{A} , als den Stützpunkt B gelegt werden können.

Die in §. 140 gezeigte Konstruktion bleibt also anwendbar, nur sind die Drittelvertikalen um den Werth 24 nach aussen zu rücken. Die Kreuzlinien sind hierbei ohne Rücksicht auf die Schubspannungen zu bestimmen. Die gezeigte Bestimmung der Stützenmomente bleibt dann auch hier bestehen, wobei indess die Abschnitte $y' = AM$ und $y'' = B'N'$ der Seiten des ohne Verschiebung der Kräfte P', P'' (ohne Rücksicht auf die Schubspannungen) konstruirten elastischen Polygons $AU'SVB'$ auf den Stützenvertikalen in Betracht kommen.

Die wirklichen Stützentangenten AU und BV der elastischen Linie würden durch Konstruktion des elastischen Polygons $AUSVB$ oder nach Konstruktion der Transversalkräfte durch Antragen der Winkel $\tau'_1 - \tau', \tau''_1 - \tau''$ (§. 60) an die Seiten AU'' und BV'' erhalten werden können.

§. 143. Zusammenhang mit der analytischen Theorie.

Der Zusammenhang der gezeigten Konstruktion mit den in §. 56 entwickelten Formeln lässt sich leicht erkennen. Der Winkel τ' zwischen dem linken Stützenquerschnitte und der Normalen zur Sehne AB ist in Fig. 226: $\tau' = \frac{BI}{l}$. Hierbei ist $BI = N'L - LI - N'B' - BB'$ und hierbei für einen konstanten Querschnitt

$$N'L = T'' = \frac{M'' l^2}{2b\lambda}, \quad BB' = v = \frac{\varkappa (M'' - M')}{E_1 F},$$

$$LI = 2y' = -\frac{M'l^2}{3b\lambda}, \quad N'B' = y'' = -\frac{M'' l^2}{6b\lambda},$$

folglich, da $6b\lambda = 6EI$ zu setzen ist,

$$25. \tau_1' = \frac{l}{6EI} (3M'' + 2M' + M'') - \frac{\kappa}{E_1 F l} (M'' - M'),$$

in voller Uebereinstimmung mit der ersten der Gleichungen 8 (S. 95). In gleicher Weise würde die Uebereinstimmung mit der zweiten dieser Gleichungen nachzuweisen sein.

Umgekehrt würde man aus den auf analytischem Wege gefundenen Ausdrücken für τ' und τ'' leicht die Konstruktion ableiten können.

In gleicher Weise lässt sich der Zusammenhang auch für einen variablen Querschnitt nachweisen.

Eine vollständige konstruktive, der Hauptsache nach mit der hier gegebenen zusammenfallende Behandlung des kontinuierlichen Trägers auf Grundlage einer analytischen Entwicklung gibt Lippich (Theorie des kontinuierlichen Trägers konstanten Querschnittes, Förster's Bauzeitung 1871).

§. 144. Verbindung des kontinuierlichen Trägers mit dem Trapezsprengwerke. Der im §. 124 behandelte Fall lässt sich auch leicht grafisch lösen. Wir bezeichnen hierbei die Drücke auf die Mittelstützen, welche entstehen, wenn die Stützen in gleicher Höhe liegen, mit D_1' , D_2' . Alsdann ist offenbar, eine symmetrische Konstruktion vorausgesetzt,

$$D_1 = D_1' + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad D_2 = D_2' + \alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_1,$$

wenn α_1 , α_2 von der Belastung unabhängige Koeffizienten bezeichnen. Hiernach wird $D_1 + D_2 = D_1' + D_2' + (\alpha_1 + \alpha_2)(y_1 + y_2)$. Da aber nach Gleichung 49 (S. 251) $y_1 + y_2 = 0$ ist, so wird $D_1 + D_2 = D_1' + D_2'$. Da nach Gleichung 47 (S. 256) $D_1 = D_2$ ist, so wird

$$26. D_1 = D_2 = \frac{1}{2} (D_1' + D_2').$$

Es sei nun in Fig. 228 die punktirte Linie $AE'F'B$ das Seilpolygon für den Fall, dass die Stützen in gleicher Höhe liegen. Es seien $E'C$, $E'G$, $F'D$, $F'H$ die Verlängerungen der von E' , F' ausgehenden Seilpolygonseiten, bezüglich der Tangenten der Seilkurve in E' und F' . Legt man im Kraftpolygone parallele Strahlen zu diesen Geraden, so schneiden dieselben auf der Kraftlinie Strecken cg und dh ab, welche die Stützendrücke D_1' und D_2' darstellen. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $E'CG$ und Ocg , $F'DH$ und Odh wird deshalb

$$D_1' = CG' \cdot \frac{H}{l_1}, \quad D_2' = DH' \cdot \frac{H}{l_1}.$$

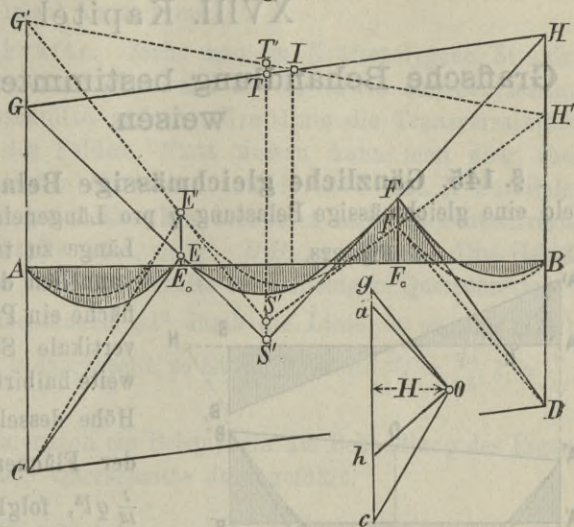
Ist nun die ausgezogene Linie $AEFB$ das Seilpolygon für die vorliegende Trägerkonstruktion, so werden im ersten und dritten Felde

die Verlängerungen der Seilpolygonseiten in E und F durch C und D gehen, weil die Höhe

Fig. 227.

AC und BD von den Stützenmomenten unabhängig ist. Verlängert man auch im zweiten Felde die Seilpolygonseiten in E und F , so erhält man in den äusseren Stützenvertikalen die Punkte G' und H' und es ist nun wie oben

$$\begin{cases} D_1 = CG \cdot \frac{H}{l_1}, \\ D_2 = DH \cdot \frac{H}{l}. \end{cases}$$



Nach der Gleichung 24 muss nun $CG = DH = \frac{1}{2} (CG' + DH')$ sein. Hiernach findet man die Punkte G und H leicht, indem man durch die Mitte I von $G'H'$ eine Parallele GH zu CD legt.

Die Verlängerungen von EG und FH , sowie von $E'G'$ und $F'H'$ schneiden sich in Punkten S und S' , welche in der vertikalen Schweraxe der Belastung des mittleren Feldes liegen; schneidet die Axe die Geraden GH und $G'H'$ in T und T' , so ist $ST = S'T'$, da dies die Höhe der einfachen Momentenfläche wäre, wenn die ganze im Mittelfelde liegende Last im Punkte S auf einen Träger mit den Stützen A und B wirken würde. Hierdurch aber sind auch die Punkte E' , F' , also die Stützenmomente und hiermit alles Uebrige bestimmt.

Hiermit ist also die grafische Behandlung der Verbindung des kontinuierlichen Trägers mit dem Trapezsprengwerke auf die grafische Behandlung des blossen kontinuierlichen Trägers mit gleich hohen Stützen zurückgeführt.

Die hier behandelte Aufgabe wurde grafisch zuerst von Steiner gelöst (Kontinuierliche Träger auf balansirten Stützen in Zeitschr. des österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1876).

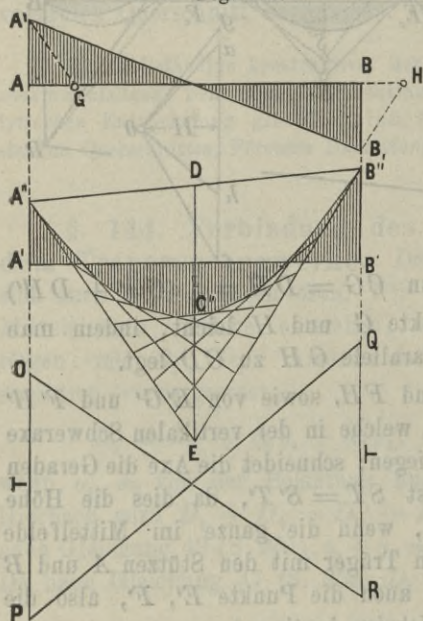
XVIII. Kapitel.

Grafische Behandlung bestimmter Belastungsweisen.

§. 145. Gänzliche gleichmässige Belastung. 1. Wenn ein

Feld eine gleichmässige Belastung q pro Längeneinheit in seiner ganzen

Fig. 228.



Länge zu tragen hat, so ist bekanntlich die einfache Momentenfläche ein Parabelabschnitt, dessen vertikale Schweraxe die Spannweite halbirt (Fig. 228). Die grösste Höhe desselben ist $\frac{1}{8} q l^2$, mithin der Flächeninhalt $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} q l^2 \cdot l = \frac{1}{12} q l^3$, folglich wird bei konstantem Querschnitte

$$1. \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{1}{12} q l^2.$$

Nimmt man als Einheit des Momentenmaassstabes $q l^2$ an, so hat man allgemein

$$2. \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{1}{12} q l^2 \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2.$$

Der vertikale Abstand der Kreuzlinien wird bei konstantem Querschnitte im Abstände b von

der Mitte $= \mathfrak{M}_0 \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{12} q l^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^3$ und in den Stützenvertikalen $\frac{1}{2b}$ mal so gross, d. i. für $b = \frac{1}{6} \lambda$:

$$3. \quad T' = T'' = \frac{1}{4} q l^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^4.$$

Bei veränderlichem Querschnitte genügt es für die Konstruktion, den Flächeninhalt $\mathfrak{M}_0 l$ der verzerrten Momentenfläche und bei unsymmetrischer Trägerform ausserdem die Lage des Schwerpunktes der verzerrten Momentenfläche zu bestimmen.

2. Momente. Sind nun durch das elastische Polygon die Stützmomente $A'A''$ und $B'B''$ bestimmt, so erhält man die Endtangenten $A''E$ und $B''E$ der Seilkurve, indem man auf der Mittelvertikalen vom Durchschnittspunkte D mit der Geraden $A''B''$ aus die Länge

$DE = 2 \cdot \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{4} ql^2 = \frac{1}{4} q \lambda^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$ aufträgt. Mit Hilfe derselben lässt sich die Parabel leicht konstruieren.

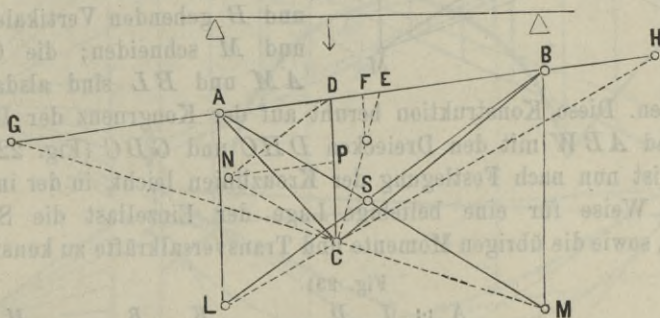
3. Transversalkräfte. Zieht man im Kräftepolygone Strahlen parallel zu den Endtangenten $A''E$ und $B''E$, sowie zur Schlusslinie $A'B'$, so sind die Abschnitte auf der Kraftlinie die Transversalkräfte Q' , Q'' an den Enden des Feldes. Statt dessen kann man aber auch $AG = BH =$ der Polweite H machen und durch G und H Parallelen zu den Endtangenten ziehen; dieselben schneiden auf den Stützenvertikalen die Transversalkräfte $AA_1 = Q'$, $BB_1 = Q''$ ab. Die Gerade A_1B_1 gibt alsdann die Transversalkräfte im beliebigen Querschnitte.

Wird die Momenteneinheit $q\lambda^2$ durch die Linie $=m$, die Kräfteinheit durch die Linie n dargestellt, so ist die Polweite $H = \frac{q\lambda}{q\lambda^2} \lambda = \frac{n}{m} \lambda$ zu wählen.

Auf Taf. III ist hiernach ein Beispiel für die Behandlung des Eigengewichtes bei konstantem Querschnitte durchgeführt.

§. 146. **Einzellast bei konstantem Querschnitte.** Die einfache Momentenfläche wird hier ein Dreieck ACB (Fig. 229) mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2} lh$, wenn h die grösste vertikale Höhe CD bedeutet. Demnach ist $\mathfrak{M}_0 = \frac{1}{2} h$. Theilt man den Abstand DE des Angriffs-

Fig. 229.



punktes D der Einzellast von der Mitte E der Geraden AB in drei gleiche Theile, so geht die vertikale Schweraxe der einfachen Momentenfläche durch den E zunächst liegenden Theilpunkt F .

Da die Höhe CD dem \mathfrak{M}_0 proportional ist, so kann CD als Kräftepolygon für das elastische Polygon gelten; da $h = 2\mathfrak{M}_0$ ist, so würde der Abstand des Poles N von $CD = 2 \cdot \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} l$ zu machen sein, wenn man hier $\lambda = l$ wählt. Zieht man NP parallel AB , so würde $NP = \frac{1}{3} AB$.

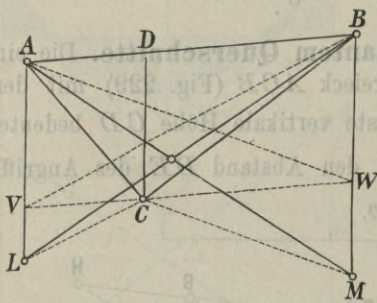
Parallel zu NC und ND können die Kreuzlinien gezogen werden. Eine einfache Konstruktion lässt sich für dieselben angeben, wenn man sie durch die Punkte A und B legt. AM und BL seien die Kreuzlinien; alsdann ist $\triangle SBM \sim \triangle NCD$, mithin $BM:CD = BF:NP$. Nun aber ist $BF = BE + \frac{1}{s} ED = \frac{1}{s} AB + \frac{1}{s} (\frac{1}{s} AB - AD) = \frac{1}{s} (2AB - AD)$ und $NP = \frac{1}{s} AB$, mithin:

$$BM:CD = (2AB - AD) : AB.$$

Macht man $DG = AB$, so wird $BG = 2AB - AD$. Der Punkt M ergibt sich sonach, indem man durch G und C eine Gerade legt. Macht man ebenso $DH = AB$ und legt durch H und C eine Gerade, so ergibt sich der Punkt L .

Die Verlängerungen von MC und LC schneiden also die Verlängerungen von AB in den Punkten G und H , welche von D einen der Länge AB gleichen Abstand haben.

Fig. 230.

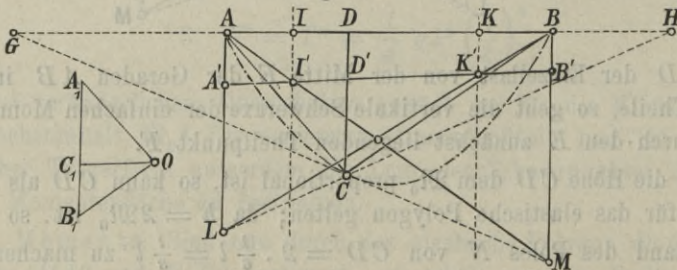


Statt dessen kann man auch die folgende Konstruktion anwenden (Fig. 230). Durch C lege man zu AB eine Parallele, welche die durch A und B gehenden Vertikalen in V und W schneidet; ferner lege man durch C Parallelen zu BV und AW , welche die durch A und B gehenden Vertikalen in L und M schneiden; die Geraden AM und BL sind alsdann die Kreuzlinien.

Diese Konstruktion beruht auf der Kongruenz der Dreiecke ABV und ABW mit den Dreiecken DHC und GDC (Fig. 229).

Es ist nun nach Festlegung der Kreuzlinien leicht, in der in §. 133 gezeigten Weise für eine beliebige Lage der Einzellast die Stützmente, sowie die übrigen Momente und Transversalkräfte zu konstruieren.

Fig. 231.



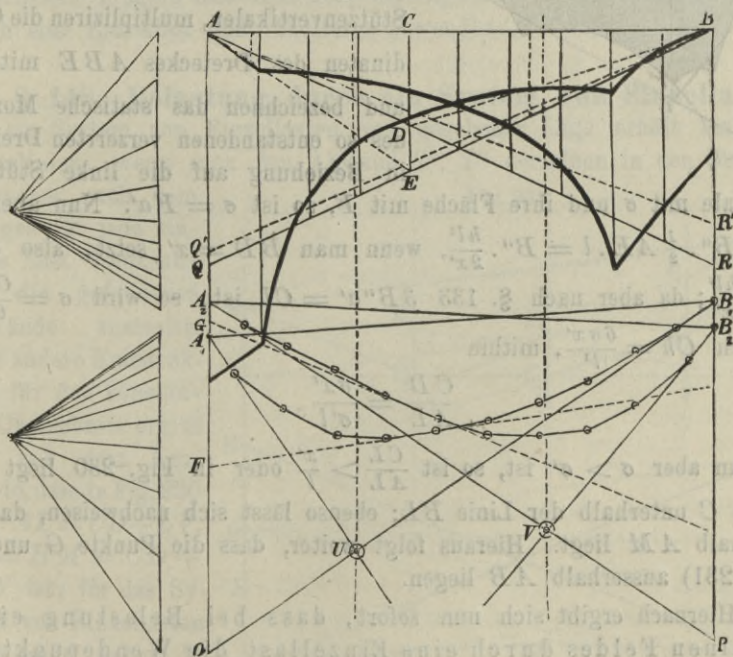
Kommen verschiedene Lagen der Einzellast in Frage, so konstruiert man am besten zunächst das Moment DC (Fig. 231) am Angriffspunkte

der Last für den einfachen Träger. CD ist $= G \frac{\xi \xi_1}{l}$, wenn $AD = \xi$, $BD = \xi_1$ ist; der Punkt C liegt also auf einer Parabel von der Höhe $\frac{1}{4} Gl$. Nach einer der vorhin angegebenen beiden Methoden lassen sich sodann für die verschiedenen Lagen der Last die Punkte L und M konstruiren; die Geraden AM und BL sind sodann die Kreuzlinien. Legt man durch die Durchschnittspunkte P und K' derselben mit den Fixpunktvertikalen eine Gerade, so schneiden dieselben auf den Stützenvertikalen die Stützenmomente AA' und BB' ab. Die Vertikalabstände der Geraden $A'B'$ und der Linie ACB stellen die Momente an beliebigen Punkten dar, also z. B. CD' das Moment am Angriffspunkte der Last. Zieht man im Kräftepolygone die Strahlen OA_1 , OB_1 und OC_1 parallel den Geraden AC , BC und $A'B'$, so sind $C_1 A_1$ und $C_1 B_1$ die Transversalkräfte für die Strecken AD und BD .

Die Konstruktion der Kreuzlinien nach Fig. 229 wurde zuerst von Lippich (Förster's Bauzeitung 1871) angegeben.

§. 147. Einzellast bei veränderlichem Querschnitte. Handelt es sich um verschiedene Lagen der Einzellast, so dürfte es wohl

Fig. 232.



am zweckmässigsten sein, M' und M'' nach der in §. 70 unter a) gezeigten Methode zu bestimmen, indem man für jedes Feld die beiden

verzerrten Momentendreiecke und sodann zu jeder das entsprechende Seilpolygon konstruiert (Fig. 232). Bei Anwendung des Momentenplanimeters ist indess die in §. 60 unter b) gezeigte Methode einfacher. Ist σ und σ_1 bestimmt, so bestimmt man \mathfrak{M}' und \mathfrak{M}'' nach der Regel 3 (Seite 127); die Multiplikation mit ξ und ξ_1 kann grafisch oder numerisch erfolgen; da man ξ und ξ_1 in einfachem Verhältnisse zu l annimmt, so ist die Multiplikation sehr einfach.

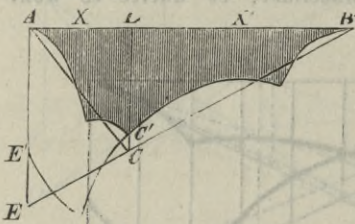
Man erhält hierbei zugleich die Lage der Schwerpunkte der verzerrten Momentenfläche, hierdurch also die Lage der Drittelvertikalen und hieraus die Lage der verschränkten Stützenvertikalen.

Macht man auch hier die Konstruktion Fig. 231, wobei $AL = T'$, $BM = T''$ und CD gleich dem Momente h am Angriffspunkte der Last für den einfachen Träger ist, so ist (wenn wir $\lambda = l$ wählen),

$$\frac{CD}{AL} = \frac{h}{T'} = \frac{Ch}{3\mathfrak{M}'}$$

Ist das statische Moment der verzerrten einfachen Momentenfläche (in Fig. 233 schraffirt) in Beziehung auf die linke Stützenvertikale = σ' ,

Fig. 233.



so ist $\mathfrak{M}' = \frac{2}{l} \sigma'$. Verlängern wir BC bis zum Durchschnitte E mit der linken Stützenvertikalen, multiplizieren die Ordinaten des Dreiecks ABE mit $\frac{l_0}{l}$

und bezeichnen das statische Moment des so entstandenen verzerrten Dreiecks in Beziehung auf die linke Stützenvertikale mit σ und ihre Fläche mit F , so ist $\sigma = Fa'$. Nun aber ist $F = B'' \cdot \frac{1}{2} AE \cdot l = B'' \cdot \frac{hl^2}{2x'}$, wenn man $BD = x'$ setzt, also $\sigma = B'' \frac{a'hl^2}{2x'}$; da aber nach §. 133 $3B''a' = Cl$ ist, so wird $\sigma = \frac{Cl^2h}{6x'}$, folglich $Ch = \frac{6\sigma x'}{l^2}$, mithin

$$\frac{CD}{AL} = \frac{\sigma x'}{\sigma' l}$$

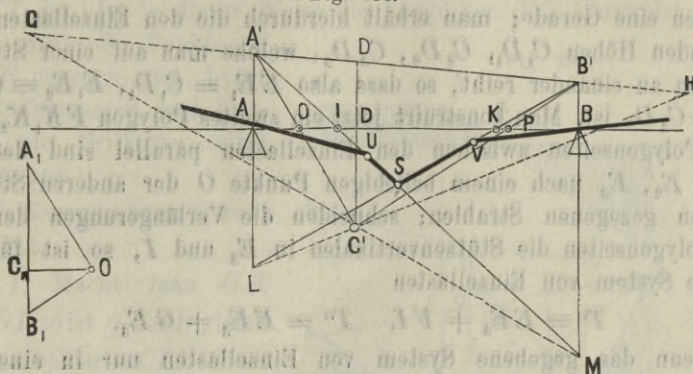
Da nun aber $\sigma > \sigma'$ ist, so ist $\frac{Cl}{AL} > \frac{x'}{l}$ oder in Fig. 230 liegt der Punkt C unterhalb der Linie BL ; ebenso lässt sich nachweisen, dass C unterhalb AM liegt. Hieraus folgt weiter, dass die Punkte G und H (Fig. 231) ausserhalb AB liegen.

Hiernach ergibt sich nun sofort, dass bei Belastung eines einzelnen Feldes durch eine Einzellast die Wendepunkte O und P (Fig. 234) ausserhalb der Fixpunkte I und K liegen.

Hieraus folgt wieder, dass die Punkte A' , B' einerseits und der Punkt C' andererseits auf verschiedenen Seiten der Schlusslinie AB

liegen, dass also das Moment am Angriffspunkte der Einzel-
last positiv ist, während die Stützenmomente negativ sind.

Fig. 234.



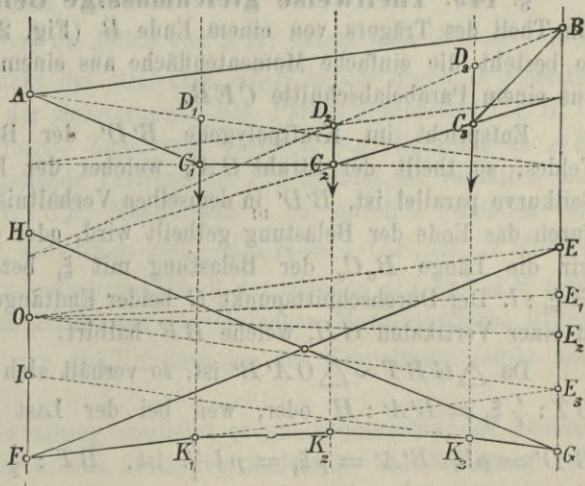
Hinsichtlich des Weiteren, insbesondere der Konstruktion der Ein-
flusslinien für Momente und Transversalkräfte können wir auf §. 67 bis
71 verweisen.

Die in §. 144 gegebene Konstruktion für die Verbindung des kon-
tinuirlichen Trägers mit dem Trapezsprengwerke ist auf eine Belastung
durch eine Einzellast ohne Weiteres anwendbar.

§. 148. Belastung durch ein System von Einzellasten.

Für ein System von Einzellasten von gegebener Lage erhält man die
Kreuzlinien, wenn man den Abstand T' , T'' derselben in den Stützen-

Fig. 235.



vertikalen nach dem
Vorigen für jede ein-
zelne Last konstruiert
und die gefundenen
Abstände summiert.
Eine andere Konstruk-
tion für den konstan-
ten Querschnitt ergibt
sich aus dem Um-
stande, dass in Fig. 230
 $T' = AL = CD + LV$,
 $T'' = BM = CD +$
 MW ist; für das Sys-
tem von Einzellasten
wird man daher T'
und T'' erhalten, wenn

man für die Einzellasten die Grössen von CD , sowie von LV und MW
einzeln ermittelt und sodann summiert. Dies geschieht am besten in

folgender Weise. Im Seilpolygone (Fig. 235), welches dem gegebenen Systeme entspricht, verlängert man je zwei an einander stossende Polygonseiten und legt durch den Durchschnitt derselben mit den Stützenvertikalen eine Gerade; man erhält hierdurch die den Einzellasten entsprechenden Höhen C_1D_1 , C_2D_2 , C_3D_3 , welche man auf einer Stützenvertikalen an einander reiht, so dass also $EE_1 = C_1D_1$, $E_1E_2 = C_2D_2$, $E_2E_3 = C_3D_3$ ist. Man konstruirt jetzt ein zweites Polygon $FK_1K_2K_3G$, dessen Polygonseiten zwischen den Einzellasten parallel sind den von E_1 , E_1 , E_2 , E_3 nach einem beliebigen Punkte O der anderen Stützenvertikalen gezogenen Strahlen; schneiden die Verlängerungen der äusseren Polygonseiten die Stützenvertikalen in E_3 und I , so ist für das gegebene System von Einzellasten

$$T' = EE_3 + FI, \quad T'' = EE_3 + GE_3.$$

Wenn das gegebene System von Einzellasten nur in einer bestimmten Lage in Frage kommt, so würde man am besten in der soeben gezeigten Weise die Kreuzlinien und sodann in der in §. 133 gezeigten Weise die Stützenmomente konstruiren; die Einzeichnung des Seilpolygones gibt sodann alle übrigen Momente, das zugehörige Kraftpolygon die Transversalkräfte.

Wenn es sich indess um die Bestimmung der Maximalmomente und Transversalkräfte für alle Querschnitte handelt, so wird man wohl am besten nach §. 73 bis 75 verfahren.

Die in Fig. 235 gezeigte Konstruktion wurde zuerst von Lippich (Förster's Bauzeitung 1871) angegeben.

§. 149. Theilweise gleichmässige Belastung. Wenn nur ein Theil des Trägers von einem Ende B (Fig. 236) aus belastet ist, so besteht die einfache Momentenfläche aus einem Dreiecke ABC und aus einem Parabelabschnitte CEB .

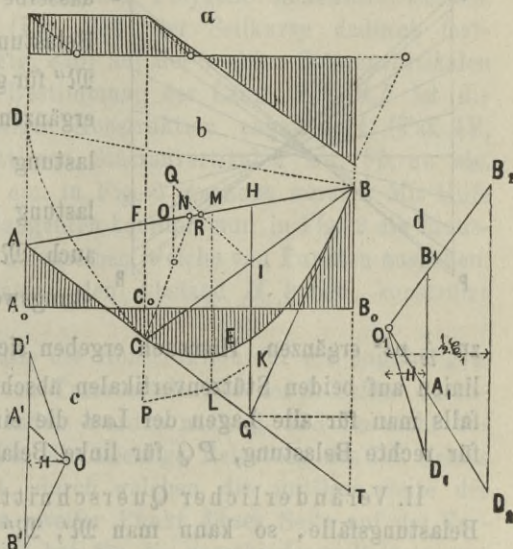
Entspricht im Kraftpolygone $B'D'$ der Belastung des ganzen Feldes, so theilt der Strahl OA' , welcher der Endtangente AG der Seilkurve parallel ist, $B'D'$ in demselben Verhältnisse, als die Spannweite durch das Ende der Belastung getheilt wird, oder es verhält sich, wenn wir die Länge B_0C_0 der Belastung mit ξ_1 bezeichnen, $B'A' : B'D' = \xi_1 : l$. Der Durchschnittspunkt G beider Endtangenteu liegt ausserdem in einer Vertikalen GH , welche BF halbirt.

Da $\triangle GBT \sim \triangle OA'B'$ ist, so verhält sich bei der Polweite H : $BT : \frac{1}{2} \xi_1 = B'A' : H$ oder, weil bei der Last p pro Längeneinheit $B'D' = pl$, $B'A' = p\xi_1 = pl \frac{\xi_1}{l}$ ist, $BT : \frac{1}{2} \xi_1 = pl \frac{\xi_1}{l} : H$ oder

$$BT = pl \frac{\xi_1}{l} \frac{\xi_1}{2H}.$$

Hiernach ist es leicht, die Länge von BT zu konstruieren, wie in Fig. 236 *d* gezeigt ist, worin $B_1D_1 = pl$, $A_1B_1 = \frac{\xi_1}{l} B_1D_1$, $D_2B_2 = BT$ ist. Ist in dieser Weise die Länge von BT konstruirt, so kann man, wenn die Punkte A und B gegeben sind, leicht die Endtangenten und hiernach die Seilkurve selbst konstruieren.

Fig. 236.



I. Konstanter Querschnitt.

1. Macht man $GK = \frac{1}{2} GI$, so ist $\triangle CKB$ gleich der Parabelfläche CEB . Zieht man daher durch K eine Parallele zu CB , welche CG in L schneidet, und durch L bis zum Durchschnitte mit AB die Vertikale LM , so ist $\triangle ALB$ gleich der ganzen einfachen Momentenfläche, die letztere also der Höhe LM proportional, oder

bestimmter $M_0 l = \frac{1}{2} l \cdot LM$ oder $M_0 = \frac{1}{2} LM$. Es lässt sich leicht nachweisen, dass $FM = \frac{1}{3} FB$ ist, so dass sich die Höhe LM leicht unmittelbar zeichnen lässt.

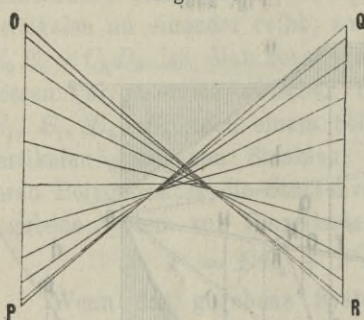
2. Der Punkt N sei die Mitte von AB ; macht man $NO = \frac{1}{3} NF$, so liegt der Schwerpunkt des Dreieckes ACB in der durch O gehenden Vertikalen, während der Schwerpunkt des Parabelabschnittes CEB in der Vertikalen HG liegt. Zieht man durch L eine Parallele zu AB , welche die durch C gehende Vertikale in P schneidet, so verhalten sich beide Flächen wie $FC : CP$. Macht man in der durch O gehenden Vertikalen $OQ = \frac{1}{2} CP$, so verhält sich, da $IH = \frac{1}{2} CF$ ist, $IH : OQ = FC : CP$; der Durchschnittspunkt R der Geraden QI und AB muss daher in der vertikalen Schweraxe der einfachen Momentenfläche liegen.

Hiernach würde nun die Konstruktion der Kreuzlinien leicht ausführbar sein.

3. Für die Anwendung erscheint es am bequemsten, den Abstand T' , T'' der Kreuzlinien in den Stützenvertikalen für die Belastung verschiedener Theile der ganzen Oeffnung ein- für allemal zu konstruieren oder zu berechnen. Die bezüglichen Formeln lassen sich leicht unmittelbar

oder aus der gezeigten Konstruktion ableiten. Die Formeln für \mathfrak{M}' und \mathfrak{M}'' sind in §. 64 aufgestellt. Die Werthe von T' und T'' ergeben sich hieraus nach §. 134 einfach durch Multiplikation mit $\beta \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$.

Fig. 237.



Die Werthe von \mathfrak{M}' oder \mathfrak{M}'' für dasselbe $\frac{\xi}{l}$, aber für linke und rechte Belastung, müssen sich zu dem \mathfrak{M}' oder \mathfrak{M}'' für gänzliche Belastung, d. i. zu $\frac{1}{12} p l^2$ ergänzen. Da offenbar \mathfrak{M}' bei rechter Belastung für $\frac{\xi}{l}$ gleich \mathfrak{M}'' bei linker Belastung für $1 - \frac{\xi}{l}$ ist, so müssen sich auch \mathfrak{M}' und \mathfrak{M}'' für dieselbe Belastungsweise, aber für $\frac{\xi}{l}$ und $1 - \frac{\xi}{l}$,

zu $\frac{1}{12} p l^2$ ergänzen. Hiernach ergeben sich die Theile, welche die Kreuzlinien auf beiden Stützenvertikalen abschneiden, gleich gross (Fig. 237), falls man für alle Lagen der Last die eine Kreuzlinie (in Fig. 237 OR für rechte Belastung, PQ für linke Belastung) beibehält.

II. Veränderlicher Querschnitt. Handelt es sich nur um wenige Belastungsfälle, so kann man \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' leicht durch Konstruktion der verzerrten Momentenfläche und des entsprechenden Seilpolygones oder Anwendung des Momentenplanimeters bestimmen. Bei einer grösseren Zahl von Belastungsfällen geht man besser von der Einzellast aus und bestimmt sodann \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' durch die entsprechenden Flächen der Einflussfiguren.

§. 150. Maximal-Transversalkräfte. Die ungünstigste Belastungsweise hinsichtlich der Transversalkräfte ist durch §. 78 bestimmt. Für diese Belastung bestimmt man nach dem vorigen Paragraphen die Lage der Momentenlinie für die nicht belastete Strecke des betreffenden Feldes. Ist α der Neigungswinkel derselben gegen die Horizontale, so ist die bezügliche Transversalkraft $Q = H \tan \alpha$, was leicht zu konstruieren ist.

Auf Tafel IV ist ein Beispiel durchgeführt, wozu nur wenig zu bemerken ist:

1. Im III. und IV. Felde ist die Konstruktion für gänzliche Belastung in derselben Weise wie in Tafel III durchgeführt. Die erhaltenen Transversalkräfte sind alsdann in das I. und II. Feld übertragen.

2. Im II. Felde ist die Konstruktion für die ungünstigste Belastung in Betreff der positiven Transversalkräfte des II. Feldes durchgeführt.

Für die Belastung des I. und IV. Feldes sind die Punkte D und F konstruirt, welche den mittleren Seiten des elastischen Polygons für alle Belastungsweisen des II. Feldes gemeinschaftlich sind. Nachdem nun für die Belastung des rechten Theiles des II. Feldes vom fraglichen Querschnitte aus nach der Tabelle in §. 64 die Kreuzlinien und hier-nach die mittleren Seiten der elastischen Polygone konstruirt wurden, wurde die Endtangente AT (Fig. 236) der Seilkurve dadurch festgelegt, dass die Längen BT (Fig. 236) auf der rechten Stützenvertikalen aufgetragen wurden. Für die Bestimmung der Länge von BT ist die im vorigen Paragrafe, 1. gezeigte Konstruktion angewendet (Taf. IV, Fig. 6). Es ist auf den mittleren Stützenvertikalen aa , bb , cc etc. gleich den Längen aa , bb , cc etc. in Fig. 6 gemacht worden. Mit Hilfe der so festgelegten linken Endtangente konnten nun in Fig. 2 die Transversalkräfte durch Parallelen zu denselben, welche von Punkten ausgehen, die von den betreffenden Ordinaten den Abstand H haben, konstruirt werden.

3. Im I. Felde ist ebenfalls die Konstruktion für die ungünstigste Belastung in Betreff der positiven Transversalkräfte des I. Feldes durchgeführt. Die Stützenmomente indess wurden nach §. 133 im nicht belasteten II. Felde konstruirt. Für die alleinige Belastung des III. Feldes wurde der Punkt F_1 konstruirt, durch welchen die mittlere Seite des Seilpolygons gehen muss. Ein zweiter Punkt dieser Seite auf der Vertikalen durch den linken Fixpunkt hat für die verschiedenen Belastungen des I. Feldes eine veränderliche Lage, ist aber mit Hilfe der Kreuzlinien leicht zu konstruiren. Im Uebrigen ist die Konstruktion wie im II. Felde, wobei Fig. 5 an die Stelle von Fig. 6 tritt.

4. Die negativen Maxima der Transversalkräfte ergeben sich nun leicht durch Subtraktion der positiven Maxima von den Transversalkräften für gänzliche Belastung.

§. 151. Maximalmomente. Die ungünstigste Belastung ist durch §. 81 bestimmt. Man konstruirt am besten nach §. 149 die Lage der Momentenlinie der nicht belasteten Strecke für die ungünstigste Belastung hinsichtlich des negativen Momentes. Da hierbei der bezügliche Querschnitt in der nicht belasteten Strecke liegt, so ist hiermit das negative Maximalmoment bestimmt. Man kann hierbei nach §. 82 entweder die negativen Maximalmomente für einzelne Querschnitte bestimmen oder einfacher nur die Umhüllungslinien der bezüglichen Momentenkurve konstruiren. Die positiven Maximalmomente findet man dann durch Subtraktion von den Momenten für gänzliche Belastung. Eine unmittelbare Bestimmung der positiven Maximalmomente ist deshalb schwieriger, weil die Seilkurve am fraglichen Querschnitte nicht geradlinig, sondern parabolisch ist.

Auf Tafel V ist ein Beispiel durchgeführt, zu welchem wir noch das Folgende bemerken.

1. Im III. und IV. Felde sind die Momente konstruirt, welche einer gänzlichen Belastung und der ungünstigsten Belastung für die negativen Momente innerhalb der Fixpunkte entsprechen. Für beide Fälle ist das betreffende Feld ganz belastet.

2. Im I., II. und III. Felde ist die Konstruktion der Momente für die ungünstigste Belastung in Betreff der negativen Momente auf der rechten Seite des betreffenden Feldes durchgeführt. Die Konstruktion ist genau dieselbe wie für die Transversalkräfte. Es kommt nur noch die Konstruktion der ungünstigsten Belastungsweise hinzu, welche in Fig. 7 nach §. 81, Fig. 158 ausgeführt ist. Diese Figur kann indess entfallen, wenn man sich mit den Umbüllungslinien der Kurve der negativen Maximalmomente begnügt. Diese Umbüllungslinien sind die Endtangenten der Seilkurve, welche ebenfalls wie im vorigen Paragrafe konstruirt wurden (sie sind punktirt angegeben). Man kann demnach, falls Fig. 7 vorhanden ist, die negativen Maximalmomente unmittelbar aus Fig. 3 entnehmen.

Im I. Felde ist zur Konstruktion der Stützenmomente das in §. 140 gezeigte Verfahren angewendet. Es ist nämlich der Punkt F' so bestimmt, dass $KF' = KF_1 \left(\frac{l}{l_1}\right)^2$ (Fig. 224) wurde. Ausserdem sind auf der linken Stützenvertikalen nicht die Höhen der Kreuzlinien im I. Felde, sondern die Höhen der Kreuzlinien im II. Felde in den Stützenvertikalen, multipliziert mit $\left(\frac{l}{l_1}\right)$ aufgetragen. Die Multiplikation ist grafisch mit Hilfe des Proportionalwinkels durchgeführt.

3. Die positiven Maxima der Momente sind durch Subtraktion der negativen Maxima von den Momenten für gänzliche Belastung bestimmt worden.

§. 152. Bemerkungen. Für die praktische Anwendung ergeben sich gegen die auf Taf. III, IV, V ausgeführten Konstruktionen manche Vereinfachungen, die wir nur der grösseren Deutlichkeit wegen nicht angewendet haben.

1. Die von uns der Deutlichkeit wegen auf drei Blätter vertheilten Konstruktionen lassen sich auf ein und demselben Blatte ausführen, indem man Fig. 4 auf Taf. III, Fig. 3 auf Taf. IV und Fig. 3 auf Taf. V in eine Figur vereinigen kann. Ja die zur Konstruktion der grössten Transversalkräfte nöthigen Linien können ohne Weiteres zur Konstruktion der grössten Momente verwendet werden. Es würde sonach nicht einmal zweckmässig sein, die Konstruktion in verschiedene Figuren zu trennen. Auf Taf. VI ist ein Beispiel in dieser Weise auf einem Blatte durch-

geführt. Die Transversalkräfte und Momente für die zufällige Last sind hier im II., III. und IV. Felde konstruirt und zwar unmittelbar nur die positiven Transversalkräfte, also für die Belastung des rechten Theiles des fraglichen Feldes und für dieselbe Belastung auch die Momente.

2. Die Kreuzlinien in den Endfeldern kann man ganz entbehren, da hier die Kenntniss der Höhe der Kreuzlinien an den Endstützen genügt, die man im elastischen Polygone unmittelbar auftragen kann.

3. Man kann dann das elastische Polygon benützen, um die Linien für die Momente in Betreff des Eigengewichtes und der zufälligen Last einzuzeichnen, so dass das Uebertragen der Ordinaten aus einer Figur in die andere wegfällt.

4. Selbstverständlich wird man die zur Konstruktion nöthigen Geraden nicht ganz durchziehen, sondern nur die nöthigen Schnitte machen.

5. Eine weitere Vereinfachung lässt sich dadurch erzielen, dass man Eigengewicht und zufällige Last in der Konstruktion nicht trennt, sondern vereinigt lässt.

C. Formänderung.

XIX. Kapitel.

Durchbiegung der Träger.

§. 153. **Durchbiegung im Allgemeinen.** Die Formänderung der Träger soll hier nur insoweit behandelt werden, als man sie bei Belastungsproben zu beobachten pflegt; insbesondere soll also die durch die Belastung hervorgebrachte Verschiebung von Punkten der Axe des Trägers in vertikaler Richtung bestimmt werden.

Am einfachsten gelangt man zu der vertikalen Verschiebung y eines beliebigen Punktes C der Axe nach dem Principe der virtuellen Arbeit. Eine in C wirkende Last 1 erzeuge in einem beliebigen Querschnitte an einem beliebigen Punkte die Normalspannung n und Schubspannung t , während in demselben Punkte durch die Belastung die Normalspannung N und Schubspannung T erzeugt wird. Alsdann ist der Entwicklung in §. 55 entsprechend, wenn sich die Punkte des Trägers, an denen derselbe aufrucht, in vertikaler Richtung nicht verschieben,

$$1. \quad y = \int \left(\frac{nN}{E} + \frac{tT}{E_1} \right) dV.$$

Wird in dem beliebigen Querschnitte durch die in C wirkende Last 1 das Moment m und die Transversalkraft q , durch die gegebene Belastung das Moment M und die Transversalkraft Q erzeugt, so ist $n = \frac{mv}{I}$, $N = \frac{Mv}{I}$, $t = \frac{qS}{Ib}$, $T = \frac{QS}{Ib}$, wenn v , b , S , I die Bedeutung wie in §. 55 haben. Die Einsetzung gibt:

$$y = \int \left[\frac{mM}{EI^2} \int v^2 dF + \frac{qQ}{E_1 I^2} \int \frac{S^2}{b^2} dF \right] dx.$$

Da aber $\int v^2 dF = I$ und $\int \frac{S^2}{b^2} dF = \frac{I^2 \alpha}{F}$ ist, wenn α die Bedeutung 2 (S. 92) hat, so wird

$$2. \quad y = \int \left(\frac{mM}{EI} + \frac{\alpha q Q}{E_1 F} \right) dx,$$

wobei die Integration über den ganzen Träger zu erstrecken ist.

Bei veränderlichem Querschnitte lässt sich unter den in der Anmerkung zu §. 55 gemachten Voraussetzungen besser $t = \frac{m_0}{f_0 x_0}$, $T = \frac{M_0}{f_0 x_0}$ setzen. Alsdann aber wird

$$y = \int \left(\frac{mM}{EI} + \frac{m_0 M_0}{E_1 f_0 x_0^2} \right) dx.$$

Bei konstanter Höhe geht dieser Ausdruck über in

$$y = \int \left(\frac{mM}{EI} + \frac{qQ}{E_1 f_0} \right) dx.$$

§. 154. Durchbiegung des Einzelträgers. Wenn wir beim Einzelträger im Abstände $AC = \xi$ von der linken Stütze die Last 1 annehmen, so werden die beiden Stützendrucke $1 - \frac{\xi}{l}$ und $\frac{\xi}{l}$, also auf der linken Seite von C : $q = + \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)$, $m = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) x$ und auf der rechten Seite $q = - \frac{\xi}{l}$, $m = \frac{\xi}{l} x_1$, wenn man den Abstand eines Querschnittes von der linken und rechten Stütze mit x und x_1 bezeichnet. Daher wird nach Formel 2 die Senkung des Punktes C :

$$3. \quad y = \frac{1}{E} \left[\left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \int_0^{\xi} \frac{Mx}{I} dx + \frac{\xi}{l} \int_0^{l-\xi} \frac{Mx_1}{I} dx_1 \right] \\ + \frac{1}{E_1} \left[\left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \int_0^{\xi} \frac{\alpha Q}{F} dx - \frac{\xi}{l} \int_0^{l-\xi} \frac{\alpha Q}{F} dx_1 \right].$$

Die beiden Integrale im ersten Gliede bedeuten die statischen Momente σ und σ_1 der durch den fraglichen Punkt getrennten Theile der verzerrten Momentenfläche (§. 63) in Beziehung auf die Stützenvertikalen.

Bei symmetrischem Träger und symmetrischer Belastung ist eine Vereinfachung möglich. Bezeichnen wir den Theil der verzerrten

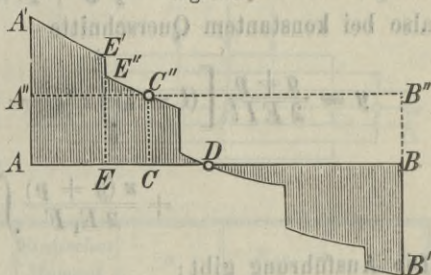
Momentenfläche, welcher zwischen $x = \xi$ und $x = l - \xi$ liegt, mit φ , so ist offenbar $\sigma_1 = \sigma + \frac{1}{2} \varphi l$, also $(l - \xi) \sigma + \xi \sigma_1 = (l - \xi) \sigma + \xi \sigma + \frac{1}{2} \varphi l \xi = l \left(\sigma + \frac{1}{2} \varphi \xi \right)$, mithin die Senkung ohne Berücksichtigung der Schubspannungen

$$4. \quad y_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma + \frac{1}{2} \varphi \xi \right).$$

Um auch das zweite Glied in geometrischer Form darzustellen, tragen wir $\frac{xQ}{F}$ in dem betreffenden

Fig. 238.

Punkte als Ordinate auf (Fig. 238) und legen durch den dem Punkte C entsprechenden Punkt C'' der so erhaltenen Linie eine Parallele $A''B''$ zur Axe. Setzen wir Fläche $A'A''C'' = f$, Fläche $B'B''C''$, absolut genommen $= f_1$ und $AA'' = z$, so ist



$\int_0^{l-\xi} \frac{xQ}{F} dx = f + \xi z$, $\int_0^{l-\xi} \frac{xQ}{F} dx_1 = (l - \xi) z - f_1$; daher wird in Formel 3 das zweite Glied oder die Senkung des Punktes C in Folge der Schubspannungen:

$$y_2 = \frac{1}{E_1} \left[\left(1 - \frac{\xi}{l} \right) f + \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \xi z - \frac{\xi}{l} (l - \xi) z + \frac{\xi}{l} f_1 \right], \text{ d. i.}$$

$$5. \quad y_2 = \frac{1}{E_1} \left(\frac{l - \xi}{l} f + \frac{\xi}{l} f_1 \right).$$

Bei symmetrischem Träger und symmetrischer Belastung wird $f_1 = f + lz$, also $(l - \xi) f + \xi f_1 = (l - \xi) f + \xi (f + lz) = l (f + \xi z)$, mithin

$$6. \quad y_2 = \frac{f + \xi z}{E_1} = \frac{f_0}{E_1},$$

wenn f_0 die Fläche $AA'C''C$ bedeutet.

An jeder Einzellast entsteht ein Absatz, z. B. bei E der Absatz $E'E''$. Für die Senkung des Punktes E ist es gleichgültig, durch welchen Punkt des Absatzes $E'E''$ die Gerade $A''B''$ gelegt wird.

Für die Senkung der Mitte eines symmetrischen Trägers, welcher symmetrisch belastet ist, wird hiernach

$$7. \quad y = \frac{1}{E} \int_0^{l/2} \frac{Mx}{I} dx + \frac{1}{E_1} \int_0^{l/2} \frac{xQ}{F} dx.$$

Bei konstantem Querschnitte wird allgemein, indem man beachtet, dass $\int_0^{\xi} \frac{xQ}{F} dx + \int_0^{l-\xi} \frac{xQ}{F} dx_1 = \frac{x}{F} \int_0^l Q dx = 0$ wird,

$$8. \quad y = \frac{1}{EI} \left[(l - \xi) \int_0^{\xi} Mx dx + \xi \int_0^{l-\xi} Mx_1 dx_1 \right] + \frac{x}{E_1 F} \int_0^{\xi} Q dx.$$

Bei gänzlicher gleichmässiger Belastung mit der Last $g + p$ pro Längeneinheit wird $M = \frac{1}{2} (g + p) x (l - x)$, $Q = \frac{1}{2} (g + p) (l - 2x)$, also bei konstantem Querschnitte

$$y = \frac{g+p}{2EI} \left[(l - \xi) \int_0^{\xi} x^2 (l - x) dx + \xi \int_0^{l-\xi} x_1^2 (l - x_1) dx_1 \right] + \frac{x(g+p)}{2E_1 F} \int_0^{\xi} (l - 2x) dx.$$

Die Ausführung gibt:

$$9. \quad y = \frac{(g+p)\xi(l-\xi)(l^2 + l\xi - \xi^2)}{24EI} + \frac{x(g+p)\xi(l-\xi)}{2E_1 F}.$$

Für die Mitte wird demnach

$$10. \quad y = \frac{5}{384} \frac{(g+p)l^4}{EI} + \frac{x(g+p)l^2}{8E_1 F}.$$

Die relative Vergrößerung ε der Senkung in der Mitte durch die Schubspannungen ist hiernach

$$11. \quad \varepsilon = \frac{48xEI}{5E_1 Fl^2} = \frac{96(m+1)xI}{5mFl^2},$$

wenn m die Bedeutung von §. 55 hat. Setzen wir $m = 3$, für Blechträger nach §. 61 annähernd $xh\delta = F$ und $I = \frac{1}{2} fh^2 + \frac{1}{12} h^3\delta$, so wird

$$12. \quad \varepsilon = \frac{128I}{5l^2 h \delta} = \frac{32(6f + h\delta)h}{15l^2 \delta}.$$

Für $h = \frac{1}{10} l$ und $f=0, 0,5h\delta, h\delta, 1,5h\delta, 2h\delta$ wird hiernach bezüglich $\varepsilon = 0,021, 0,085, 0,149, 0,213, 0,277$. Für den rechteckigen Querschnitt wird genauer, wenn man $x = 1,2$, $I = \frac{1}{12} bh^3$, $F = bh$ setzt,

$$13. \quad \varepsilon = \frac{576(m+1)h^2}{25ml^2}.$$

Beispiel. Ein Blechträger mit $10^m = 100^{\text{dc}}m$ Stützweite hat in den fünf Strecken mit 9, 12, 58, 12, 9 Decim. Länge das Trägheitsmoment $I = 17,8, 32,4, 47,7, 32,4, 17,8$ Decim. Er ist symmetrisch durch eine Lokomotive mit drei Achsen von $6,5^t$ Raddruck und $13^{\text{dc}}m$ Radstand belastet. Es ist die durch diese Belastung

erzeugte Durchbiegung zu bestimmen. Für die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 (Fig. 239) ergibt sich $M = 0, 87,8 204,8 360,8 403,0$ Tonnendecim.; ferner für

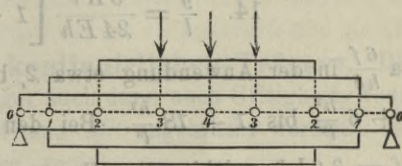
$$\frac{M}{I} = \begin{array}{cccccc} \text{Punkt} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 0 & 4,93 & 6,32 & 7,56 & 8,43 \\ & & 2,71 & 4,29 & & \end{array}$$

Wenn h_1, h_2 die beiden ein Trapez begrenzenden Ordinaten, b der Abstand derselben, x_1, x_2 die bezüglichen Abscissen sind, so ist das statische Moment des Trapezes

$$\sigma = \frac{1}{6} b [(2x_1 + x_2)h_1 + (x_1 + 2x_2)h_2].$$

Hiernach ergeben sich leicht die statischen Momente der einzelnen Trapeze für die linke Stützenvertikale. Die weitere Berechnung auf Grund der Formel 4 ist in folgender Tabelle zusammengestellt, wobei sich alle Zahlen auf Decimeter beziehen; nur die letzte Rubrik gibt y_1 in Millimetern für $E = 200000$ Ton. pro \square Decim.

Fig. 239.



Punkt	ξ	Fläche	$\frac{1}{2} \varphi$	$\frac{1}{2} \varphi \xi$	Statisches Moment	σ	$E y_1$	y_1
0	0		273,3	0	133,1	0	0	0
1	9	22,2	251,1	2260	856,0	133	2393	1,20
2	21	54,2	196,9	4135	2786,0	989	5124	2,56
3	37	93,8	103,1	3815	4498,5	3775	7590	3,80
4	50	103,1	0	0		8274	8274	4,14

Die Blechwand habe eine Höhe von 10^{dec} und eine Dicke von $0,08^{dec}$; alsdann wird annähernd $F = x h \delta = 0,8$, also $\frac{x}{F} = \frac{1}{1,8} = 1,25$. Die weitere Berechnung von y_2 nach Formel 6 enthält folgende Tabelle; hierbei sind Tonnen und Decimeter zu Grunde gelegt; nur die letzte Rubrik gibt y_2 in Millimetern für $E_1 = \frac{8}{8} E = 75000$ Ton. pro \square Decim.

Punkt	Q	$\frac{xQ}{F}$	Fläche	$f_0 = E_1 y_1$	y_2
0				0	0
1	9,75	12,19	109,7	109,7	0,15
2	9,75	12,19	146,3	256,0	0,34
3	9,75	12,19	195,0	451,0	0,60
4	3,25	4,06	52,8	503,8	0,67

Die Senkung in der Mitte würde hiernach $4,14 + 0,67 = 4,81$ Millim. Die Vermehrung durch die Schubspannungen beträgt daher 16 Prozent.

§. 155. Näherungsregeln für Träger konstanter Höhe.

Ist der Einzelträger gleichmässig belastet und von konstantem, sym-

métrischem Querschnitte, so ist derselbe bei der Höhe h zu berechnen nach der Regel $KI = \frac{1}{8} q l^2 \cdot \frac{1}{2} h$, wenn K die zulässige Inanspruchnahme bedeutet. Setzen wir nun in Formel 9: $q l^2 y = 16 IK$ und nach Formel 35 (S. 108) $\kappa h \delta = F$, so erhalten wir

$$\frac{y}{l} = \frac{5 Kl}{24 E h} + \frac{2 IK}{E_1 l h^2 \delta},$$

oder, wenn wir noch $I = \frac{1}{2} f h^2 + \frac{1}{12} h^3 \delta$ und $E_1 = \frac{3}{8} E$ setzen,

$$14. \quad \frac{y}{l} = \frac{5 Kl}{24 E h} \left[1 + \frac{32 h^2}{15 l^2} \left(1 + \frac{6 f}{h \delta} \right) \right],$$

Da $\frac{6 f}{h \delta}$ in der Anwendung etwa 2, bis 8 beträgt, so ist die Klammer $1 + 6 \frac{h^2}{l^2}$ bis $1 + 18 \frac{h^2}{l^2}$. Bei den gewalzten I-Trägern ist ungefähr $6 f = 3,9 h \delta$, mithin die Klammer $1 + 10 \frac{h^2}{l^2}$.

Hat der Träger konstante Festigkeit, so wird in jedem Querschnitte $KI = \frac{1}{2} M h$ oder $\frac{M}{I} = \frac{2 K}{h}$. Nach Gleichung 7 ergibt sich hiernach als erstes Glied des Ausdruckes für die Durchbiegung in der Mitte $\frac{K l^2}{4 E h}$. Als zweites Glied ergibt sich bei gleichmässiger Belastung nach Gleichung 10 $\frac{\kappa q l^2}{8 E_1 F}$. Ist I_1 das Trägheitsmoment in der Mitte, so ist zu setzen $K I_1 = \frac{1}{8} q l^2 \cdot \frac{1}{2} h$. Setzen wir ausserdem auch hier $\kappa h \delta = F$, so wird

$$\frac{y}{l} = \frac{K l}{4 E h} + \frac{2 I_1 K}{E_1 l h^2 \delta},$$

oder, wenn wir $I_1 = \frac{1}{2} f_1 h^2 + \frac{1}{12} h^3 \delta$ und $E_1 = \frac{3}{8} E$ einführen,

$$15. \quad \frac{y}{l} = \frac{K l}{4 E h} \left[1 - \frac{16 h^2}{9 l^2} \left(1 + \frac{6 f_1}{h \delta} \right) \right].$$

Blechträger haben entweder einen konstanten oder einen sprungweise veränderlichen Querschnitt. Man kann für dieselben nach den Gleichungen 14 und 15 allgemein

$$16. \quad \frac{y}{l} = A \frac{K l}{E h} \left[1 + B \frac{h^2}{l^2} \left(1 + \frac{6 f_1}{h \delta} \right) \right]$$

setzen. A würde nach Formel 14 und 15 zwischen $\frac{5}{24} = 0,21$ und $\frac{1}{4} = 0,25$ liegen. Wenn indess K die bei Berechnung des Querschnittes angenommene zulässige Inanspruchnahme bedeutet, so ist mit Rücksicht auf die Schwächung durch die Nietlöcher A etwas kleiner, etwa 0,18 bis 0,22, während $B = \frac{32}{15} = 2,13$ bis $\frac{16}{9} = 1,78$ zu setzen ist. Durchschnittlich wird ungefähr

$$17. \quad \frac{y}{l} = 0,2 \frac{Kl}{Eh} \left[1 + 2 \frac{h^2}{l^2} \left(1 + \frac{6f_1}{h\delta} \right) \right].$$

Hiernach erhält man die gesammte von der zufälligen Last und dem Eigengewichte erzeugte Durchbiegung. Die von der zufälligen Last allein erzeugte Durchbiegung ist $\frac{p}{q} y$ und bei Belastung durch ein System von Einzellasten annähernd $\frac{M_p}{M_q} y$, wenn M_p und M_q die von der zufälligen Last allein und von der Gesamtlast erzeugten Maximalmomente bedeuten.

§. 156. Durchbiegung des kontinuierlichen Trägers. Die Gleichung 3 behält für den Einzelträger auch dann noch Giltigkeit, wenn an den Enden A und B Momente M' und M'' angebracht werden. Ist hierbei eine Belastung nicht vorhanden, so ist

$$M = M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l}, \quad Q = \frac{M'' - M'}{l}$$

zu setzen. Man erhält alsdann als Abweichung y_0 eines beliebigen Punktes mit den Abständen ξ , $l - \xi$ von A und B von der die Stützen A und B verbindenden Geraden

$$18. \quad y_0 = \frac{1}{El^2} \left[M' \left\{ (l - \xi) \int_0^\xi \frac{x(l-x)}{I} dx + \xi \int_0^{l-\xi} \frac{x^2}{I} dx \right\} \right. \\ \left. + M'' \left\{ (l - \xi) \int_0^\xi \frac{x^2}{I} dx + \xi \int_0^{l-\xi} \frac{x(l-x)}{I} dx \right\} \right] \\ + \frac{M'' - M'}{E_1 l^2} \left[(l - \xi) \int_0^\xi \frac{x}{F} dx - \xi \int_0^{l-\xi} \frac{x}{F} dx \right].$$

Ist eine Belastung vorhanden, so ist zu y_0 noch der durch die Gleichung 3 bestimmte Werth der Abweichung hinzuzufügen, wobei für M , Q lediglich nur die durch die Belastung bedingten Werthe von M und Q einzuführen sind.

Dieses Verfahren ist natürlich auch beim kontinuierlichen Träger anzuwenden, wenn für M' , M'' die beiden Stützenmomente eingeführt werden, welche für die gegebene Belastung nach dem Früheren zu bestimmen sind. Wenn die Schubspannungen berücksichtigt werden sollen, so sind dieselben natürlich auch bei Bestimmung von M' und M'' zu berücksichtigen, es hat also hierbei die Gleichung 13 (S. 96) als Grundlage zu dienen.

Bei konstantem Querschnitte ergibt sich durch die Ausführung der Integration

$$19. \quad y_0 = \frac{1}{6EI\ell} [M'(2\ell - \xi) + M''(\ell + \xi)] \xi(\ell - \xi).$$

Die von den Schubspannungen herrührenden Glieder heben sich hier.

§. 157. **Durchbiegung des kontinuierlichen Trägers mit zwei Oeffnungen.** Wir wollen als Beispiel die Durchbiegung eines kontinuierlichen Trägers konstanten Querschnittes mit zwei gleich langen Oeffnungen bestimmen und zwar für eine gänzliche gleichmässige Belastung jeden Feldes; das erste Feld sei mit $g + p$, das zweite mit g pro Längeneinheit belastet. Bei gleich hohen Stützen wird das Moment M_1 an der Mittelstütze nach Formel 13 (S. 96), wenn man $C = 1$, $B = 1$, $\Omega_1' = \Omega' = 0$, $l_1 = l_2 = \ell$, $k_1 = k_2 = \frac{6EI\alpha}{E_1 F \ell^2}$, $M' = \frac{1}{12}(g + p)\ell^2$, $M'' = \frac{1}{12}g\ell^2$ setzt,

$$20. \quad M_1 = -\frac{(2g + p)\ell^2}{16(1 + \delta)},$$

wenn man zur Abkürzung

$$\delta = \frac{3EI\alpha}{E_1 F \ell^2}$$

einführt. Wenn man nun für das erste Feld $M' = 0$, $M'' = M_1$, für das zweite $M' = M_1$, $M'' = 0$ setzt, so erhält man nach Formel 19:

$$\text{Erstes Feld: } y_0 = -\frac{(2g + p)\ell\xi(\ell - \xi)(\ell + \xi)}{96EI(1 + \delta)},$$

$$\text{Zweites Feld: } y_0 = -\frac{(2g + p)\ell\xi(\ell - \xi)(2\ell - \xi)}{96EI(1 + \delta)}.$$

Die Durchbiegung in Folge der blossen Belastung, wenn man sich also den Träger über der Mittelstütze unterbrochen denkt, ist nach Formel 9

$$\text{Erstes Feld: } y_1 = \frac{(g + p)\xi(\ell - \xi)(\ell^2 + \ell\xi - \xi^2)}{24EI} + \frac{\alpha(g + p)\xi(\ell - \xi)}{2E_1 F},$$

$$\text{Zweites Feld: } y_1 = \frac{g\xi(\ell - \xi)(\ell^2 + \ell\xi - \xi^2)}{24EI} + \frac{\alpha g\xi(\ell - \xi)}{2E_1 F}.$$

Die Addition gibt als wirkliche Durchbiegung

$$21. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Erstes Feld:} \\ y = \frac{\xi(\ell - \xi)}{96EI(1 + \delta)} [2g(\ell^2 + \ell\xi - 2\xi^2) + p(3\ell^2 + 3\ell\xi - 4\xi^2)] \\ \quad + \frac{\alpha(g + p)\xi(\ell - \xi)}{8E_1 F \ell^2(1 + \delta)} [\ell^2 + \ell\xi - \xi^2 + 4(1 + \delta)\ell^2]. \\ \text{Zweites Feld:} \\ y = \frac{\xi(\ell - \xi)(2\ell - \xi)}{96EI(1 + \delta)} (4g\xi - p\ell) \\ \quad + \frac{\alpha g\xi(\ell - \xi)}{8E_1 F \ell^2(1 + \delta)} [\ell^2 + \ell\xi - \xi^2 + 4(1 + \delta)\ell^2]. \end{array} \right.$$

Der Winkel ν zwischen den Tangenten der elastischen Linien im ersten und zweiten Felde an der Mittelstütze ergibt sich hiernach leicht zu

$$22. \quad \nu = \frac{(5 + 4\delta)}{8(1 + \delta)} \frac{(2g + p) \kappa}{E_1 F}.$$

Ebenso gross ergibt sich ν nach der Formel 32 (S. 106), wenn man

$$23. \quad D = \frac{1}{2} (2g + p) l - \frac{2M_1}{l} = \frac{(5 + 4\delta)(2g + p) l}{8(1 + \delta)}$$

setzt.

Sind beide Felder gänzlich mit $g + p$ pro Längeneinheit belastet, so hat man nur in den vorstehenden Formeln $g + p$ für g und $p = 0$ zu setzen.

Hat die Mittelstütze von der Geraden, welche die äusseren Stützen verbindet, den Abstand η , so entsteht durch diesen Abstand allein nach Formel 13 (S. 96) das Stützenmoment

$$24. \quad M_1 = \frac{3EI\eta}{(1 + \delta)l^2},$$

folglich in einem beliebigen Punkte nach Formel 19 die Abweichung

$$25. \quad \begin{cases} \text{Erstes Feld:} & y_0 = \frac{\xi(l^2 - \xi^2)}{2(1 + \delta)l^3} \eta. \\ \text{Zweites Feld:} & y_0 = \frac{\xi(l - \xi)(2l - \xi)}{2(l + \delta)l^3} \eta. \end{cases}$$

Diese Abweichung ist zu der durch die Formeln 21 bestimmten hinzuzufügen, um die Abweichung von den die Mittelstütze mit den äusseren Stützen verbindenden Geraden zu erhalten.

§. 158. Durchbiegung des kontinuierlichen Gelenkträgers.

Die Durchbiegung in einem Felde ohne Gelenk lässt sich ganz nach §. 156 bestimmen, wobei die Stützenmomente M , M'' nach den Paragraphen 33, 34 und 53 zu bestimmen sind.

Um die Abweichung eines Punktes I (Fig. 106, S. 82) eines überhängenden Theiles AC zu bestimmen, denken wir uns in Anwendung der Formel 2 in I die Last 1 wirkend. Dieselbe erzeugt nur in den Strecken AI und AB ein Moment und eine Transversalkraft und zwar im Abstände x von A im Theile AI das Moment $-(\xi - x)$ und die Transversalkraft -1 , im Theile AB das Moment $-\frac{\xi}{l}(l - x)$ und die Transversalkraft $+\frac{\xi}{l}$, wenn man $AB = l$, $AI = \xi$ setzt. Demnach wird

$$26. \quad y = -\frac{1}{E} \left[\int_0^{\xi} \frac{M(\xi-x) dx}{I} + \frac{\xi}{l} \int_0^l \frac{M(l-x) dx}{I} \right] \\ - \frac{1}{E_1} \left[\int_0^{\xi} \frac{\chi Q dx}{F} - \frac{\xi}{l} \int_0^l \frac{\chi Q dx}{F} \right].$$

Für den Punkt C ist $\xi = AC = a$ zu setzen.

Wir wollen beispielsweise einen konstanten Querschnitt und eine gleichmässige Belastung voraussetzen. Letztere sei innerhalb der Felder AE , BF und AB bezüglich q , q_1 , q_2 . Alsdann ist, wenn wir noch $CE = b$, $DF = b_1$, $BD = a_1$ setzen, innerhalb des Theiles AC : $M = -\frac{1}{2} q(a-x)(a+b-x)$, innerhalb des Theiles AB : $M = -\frac{1}{2l} qa(a+b)(l-x) - \frac{1}{2l} q_1 a_1(a+b_1)x + \frac{1}{2} q_2 x(l-x)$. Daher wird unter Vernachlässigung der Schubspannungen

$$2EI l^2 y = q l^2 \int_0^{\xi} (a-x)(a+b-x)(\xi-x) dx + qa(a+b) \xi \int_0^l (l-x)^2 dx \\ + q_1 a_1(a+b_1) \xi \int_0^l x(l-x) dx - q_2 l \xi \int_0^l x(l-x)^2 dx.$$

Die Ausführung gibt

$$27. \quad EI y = \frac{1}{24} q \xi^2 [6a(a+b) - 2(2a+b)\xi + \xi^2] \\ + \frac{1}{6} q l a(a+b) \xi + \frac{1}{12} q_1 l a_1(a_1+b_1) \xi - \frac{1}{24} q_2 l^3 \xi.$$

Als Abweichung y' des Punktes C erhält man, indem man $\xi = a$ setzt,

$$28. \quad EI y' = \frac{1}{24} q a^2 [a(3a+4b) + 4l(a+b)] \\ + \frac{1}{12} q_1 l a a_1(a_1+b_1) - \frac{1}{24} q_2 l^3 a.$$

Für den schwebenden Theil geben die Regeln von §. 154 die Abweichung von der die beiden Enden dieses Theiles verbindenden Sehne. Sind die Abweichungen dieser Enden von der ursprünglichen Axe y' , y'' , so erhält man, dem in §. 153 angewendeten Prinzipie entsprechend, die Abweichung eines beliebigen Punktes von der ursprünglichen Axe, wenn man zur Abweichung von der Sehne noch $y' \frac{l-\xi}{l} + y'' \frac{\xi}{l}$ hinzufügt, da $\frac{l-\xi}{l}$, $\frac{\xi}{l}$ die Stützendrücke der im beliebigen Punkte wirkenden Last 1, also $y' \frac{l-\xi}{l}$ und $y'' \frac{\xi}{l}$ die Arbeiten derselben sind.

§. 159. Einflusslinie für die Durchbiegung. Das Vorstehende lässt sich natürlich auch auf die Abweichung eines beliebigen Punktes C in Folge der Belastung durch eine Einzellast von beliebiger Lage anwenden, wodurch sich die Einflusslinie für die Abweichung des Punktes C ergibt. Die Anwendung der Formel 3 gibt für einen Einzelträger als Abweichung eines Punktes, welcher von den Stützen den Abstand ξ , $l - \xi$ hat durch eine auf der rechten Seite des Punktes liegende Last G , welche von den Stützen den Abstand x , $l - x$ hat:

$$29. y = \frac{G}{E l^2} \left[(l - \xi)(l - x) \int_0^{\xi} \frac{x^2 dx}{I} + \xi(l - x) \int_{\xi}^x \frac{x(l - x) dx}{I} + \xi x \int_x^l \frac{(l - x)^2 dx}{I} \right] \\ + \frac{G}{E_1 l^2} \left[(l - \xi)(l - x) \int_0^{\xi} \frac{x dx}{F} - \xi(l - x) \int_{\xi}^x \frac{x dx}{F} + \xi x \int_x^l \frac{x dx}{F} \right].$$

Für einen konstanten Querschnitt gibt die Ausführung der Integration nach entsprechender Vereinfachung:

$$30. y = \frac{G}{6 E I l} \xi (l - x) (2lx - x^2 - \xi^2) + \frac{x G}{E_1 F l} \xi (l - x).$$

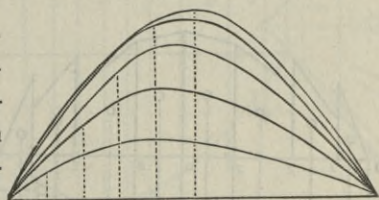
Liegt die Last auf der linken Seite des Punktes, so ist ξ mit $l - \xi$, x mit $l - x$ zu vertauschen und man erhält alsdann

$$30a. y = \frac{G}{6 E I l} (l - \xi) x (2l\xi - x^2 - \xi^2) + \frac{x G}{E_1 F l} (l - \xi) x.$$

In Fig. 240 sind hiernach die Einflusslinien für $\xi = 0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,5 \cdot l$ bei Vernachlässigung des Gliedes mit x dargestellt.

Fig. 240.

Die auf beiden Seiten des fraglichen Punktes liegenden Aeste der Einflusslinie gehen, wie sich leicht nachweisen lässt, allgemein tangential in einander über, wenn man die Schubspannungen vernachlässigt.



Beim kontinuierlichen Träger und kontinuierlichen Gelenkträger liegen die Einflusslinien, deren Ordinaten sich nach §. 156 und 158 bestimmen lassen, in zwei benachbarten Feldern auf verschiedenen Seiten der Axe.

Mit Hilfe der Einflusslinien würde sich nach §. 23 diejenige Lage eines Lastensystems bestimmen lassen, bei welcher die Abweichung eines beliebigen Punktes am grössten wird. Beim kontinuierlichen Träger und kontinuierlichen Gelenkträger wird dies bei abwechselnder Belastung der Felder stattfinden. Indess ist die Kenntniss der grössten Abweichungen der einzelnen Punkte im Allgemeinen nicht von Wichtigkeit. In der Regel wird die Durchbiegung nur bestimmt, um die Wirkung einer Probelastung einer Beurtheilung unterziehen zu können; die Probe-

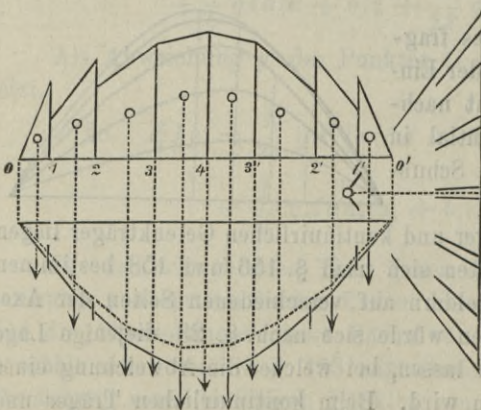
belastung aber pflegt man hinsichtlich der Lage des Lastenzuges entweder mehr oder weniger willkürlich anzunehmen oder so, dass in bestimmten Theilen die Maximalspannung eintritt. Nur bei der Beurtheilung der Wirkung einer bewegten Probelastung, bei welcher der Lastenzug nach einander alle möglichen Lagen einnimmt, kann es erwünscht sein, die theoretische Maximalabweichung bestimmter Punkte zu kennen.

§. 160. Grafische Bestimmung der Durchbiegung. Die geometrische Konstruktion der elastischen Linie als Seilkurve ist bereits in §. 132 und 141 behandelt worden, so dass hier nur noch wenig zu bemerken ist.

Wenn man die Ordinaten der Belastungsfläche bei Vernachlässigung der Schubspannungen $= M \frac{I_0}{I}$ annimmt, so ist die Polweite für die der elastischen Linie entsprechende Seilkurve $= EI_0$ anzunehmen. Ist das Verjüngungsverhältniss für den Längenmaasstab $\frac{1}{n}$, so erhält man hierbei auch die Ordinaten der Seilkurve in $\frac{1}{n}$ natürlicher Grösse. Um dieselben in m facher natürlicher Grösse zu erhalten, müsste die Polweite $= \frac{EI_0}{m n}$ angenommen werden.

Statt dessen aber können die Ordinaten der Belastungsfläche bei Vernachlässigung der Schubspannungen auch $= M$ angenommen werden.

Fig. 241.



Die Polweite ist alsdann $= EI$, bei variablem I also ebenfalls variabel anzunehmen. Insbesondere empfiehlt sich dies dann, wenn sich der Querschnitt sprunghaft ändert, so dass nur einzelne verschiedene Polweiten in Anwendung zu kommen haben. Nimmt man als Belastungsfläche die Fläche des mit der Polweite H konstruirten Seilpolygons an, so würde die Polweite für die elastische Linie $\frac{EI}{H}$ anzunehmen sein.

In gleicher Weise kann die Konstruktion beim kontinuierlichen Träger und kontinuierlichen Gelenkträger erfolgen, wobei die Belastungsfläche natürlich theilweise positiv, theilweise negativ vorauszusetzen ist.

Bei ersterem ist die elastische Linie in jedem Felde tangential an die nach §. 140 und 142 zu konstruierenden Stützentangenten anzuschliessen, wodurch die Lage des Poles bestimmt ist.

Beispiel. In Fig. 241 und 242 ist die elastische Linie für das bereits in §. 154 berechnete Beispiel durchgeführt und zwar in Fig. 241 mit konstanter, in Fig. 242 mit variabler Polweite.

Für die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 ergibt sich $M = 0 \quad 87,8 \quad 204,8 \quad 360,8 \quad 403,0$ Tonnen-Decimeter. Für die drei Strecken 0 1, 1 2, 2 4 ist $I = 17,8 \quad 32,4, \quad 47,7$; wenn wir $I_0 = 47,7$ wählen, so wird $\frac{I_0}{I} = 2,680 \quad 1,472 \quad 1,000$, daher wird

Punkt	0	1	2	3	4
$M \frac{I_0}{I} = 0$	0	235,3	301,5	360,8	403,0.
		129,2	204,8		

Die Belastungsflächen ergeben sich hiernach (Tonnen-Decimeter \times Decimeter):

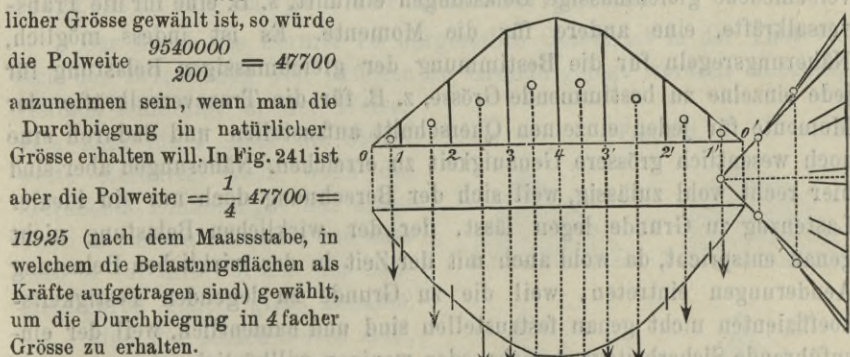
Punkt	0	1	2	3	4
Belastungsfläche	1059	2584	4525	4965	

Diese Flächen sind in den durch Konstruktion bestimmten Schwerpunkten als Vertikalkräfte wirkend angenommen. Ausserdem ist zur Berücksichtigung der Schubspannungen in jedem der Punkte 3, 4, 3' nach Formel 17 (S. 296) die Einzellast

$$\frac{\times E I_0}{E_1 F} G = \frac{1,25 \cdot 8 \cdot 47,7}{3} \cdot 6,5 = 1034$$

angenommen. Wenn man die Zeichnung in natürlicher Grösse durchführte, so würde die Polweite $= EI_0 = 200000 \cdot 47,7 = 9540000$ anzunehmen sein. Da aber der Längenmaassstab $= \frac{1}{200}$ natürlicher Grösse gewählt ist, so würde die Polweite $\frac{9540000}{200} = 47700$

Fig. 242.



anzunehmen sein, wenn man die Durchbiegung in natürlicher Grösse erhalten will. In Fig. 241 ist aber die Polweite $= \frac{1}{4} 47700 = 11925$ (nach dem Maassstabe, in welchem die Belastungsflächen als Kräfte aufgetragen sind) gewählt, um die Durchbiegung in 4facher Grösse zu erhalten.

In Fig. 242 sind die Ordinaten der Belastungsfläche $= M$ angenommen, dementsprechend ergeben sich als Belastungsflächen

Punkt	0	1	2	3	4
Belastungsfläche	391	1756	4525	4965	

In jedem der Punkte 3 4 3' ist wieder die Einzellast 1034 angenommen. Die Polweiten sind, da der Längenmaassstab wieder $\frac{1}{200}$ natürlicher Grösse gewählt ist

und die Durchbiegung wieder in 4facher Grösse erhalten werden soll, $= \frac{E}{4 \cdot 200} I = \frac{200000}{4 \cdot 200} I = 250 I$, d. i. 4450, 8100, 11925 anzunehmen.

D. Anhang.

XX. Kapitel.

Ersatz eines Systemes von Einzellasten durch eine gleichmässige Belastung.

§. 161. **Zweck des Ersatzes.** Aus dem bisher über die Behandlung eines Systemes von Einzellasten Gesagten geht zur Genüge hervor, dass es nicht möglich ist, eine aus einem Systeme von Einzellasten bestehende Verkehrsbelastung durch eine gleichmässige Belastung zu ersetzen, welche für alle nöthigen Grössen, also z. B. hinsichtlich der Transversalkräfte und Momente für sämtliche Querschnitte ein und denselben Werth hat. Wenn dies bisher dennoch vielfach geschehen ist, so konnte es nur auf Kosten der Genauigkeit geschehen. Eine wesentlich grössere Genauigkeit lässt sich bereits erreichen, wenn man mehrere verschiedene gleichmässige Belastungen einführt, z. B. eine für die Transversalkräfte, eine andere für die Momente. Es ist indess möglich, Näherungsregeln für die Bestimmung der gleichmässigen Belastung für jede einzelne zu bestimmende Grösse, z. B. für die Transversalkräfte oder Momente für jeden einzelnen Querschnitt aufzustellen und dadurch eine noch wesentlich grössere Genauigkeit zu erreichen. Näherungen aber sind hier recht wohl zulässig, weil sich der Berechnung doch nur ein idealer Lastenzug zu Grunde legen lässt, der der wirklichen Belastung nicht genau entspricht, da wohl auch mit der Zeit in der wirklichen Belastung Aenderungen eintreten, weil die zu Grunde zu legenden Festigkeitskoeffizienten nicht genau festzustellen sind und namentlich, weil der einzuführende Sicherheitsgrad mehr oder weniger willkürlich ist.

Eine einfache Methode zur annähernden Bestimmung der einem Lastensysteme entsprechenden gleichmässigen Belastung ergibt sich durch die Methode der Einflusslinien. Durch die Einflusslinie ist die Einflussgrösse Y (siehe §. 19) bestimmt. Da nun aber, wenn F den Flächeninhalt der Einflussfigur, p die gleichwerthige gleichmässige Belastung bezeichnet, nach §. 21 $Y = Fp$ ist, so ist durch die Einflusslinie bei gegebenem Lastensysteme auch p bestimmt. Die Form und Dimensionen der Einflussfigur bestimmen also die einzuführende gleichmässige Belastung. Die Annäherung erhält man insbesondere durch einen Ausgleich der durch das unregelmässige Lastensystem bedingten Unregelmässigkeiten.

§. 162. Näherungsregeln unter Annahme einer gleichmässigen Belastung und einer Einzellast. Man erhält die einfachsten, wenn auch noch zu wenig genauen Näherungsregeln, wenn man den Lastenzug ersetzt durch eine gleichmässig vertheilte Belastung p' pro Längeneinheit und ausserdem durch eine für sich verschiebbare Einzellast G , weil durch letztere einigermassen den an die ungünstigste Stelle zu schiebenden schweren Lasten Rechnung getragen wird. Wir wollen einige Anwendungen behandeln.

Wir denken uns zunächst zwei affine Einflussflächen mit den Längen l, l_1 und den grössten Höhen h, h_1 ; zwei entsprechende Abscissen verhalten sich dann ebenfalls wie $l : l_1$, zwei entsprechende Ordinaten wie $h : h_1$; Die Flächen F, F_1 verhalten sich wie $lh : l_1 h_1$; wir können also, wenn A einen von der Form der Einflussfigur abhängigen Faktor bezeichnet, $F = A lh, F_1 = A l_1 h_1$ setzen. Es wird daher für beide Fälle $Fp = Fp' + Gh$, also

$$1. \quad p = p' + \frac{Gh}{F}$$

oder

$$1 a. \quad p = p' + \frac{G}{Al}$$

Sonach wird die gleichwerthige Belastung um so kleiner, je grösser die Länge l der Einflussfigur ist.

Das durch die Formel 1 a dargestellte Gesetz ist in der That vielfach der Berechnung von Brücken zu Grunde gelegt worden, allerdings vielfach fehlerhaft in der Weise, dass man für l stets die Stützweite einfuhrte, auch wenn die betreffende Einflussfigur nur einen Theil derselben einnahm und dass man A für alle Formen der Einflussfiguren gleich gross annahm.

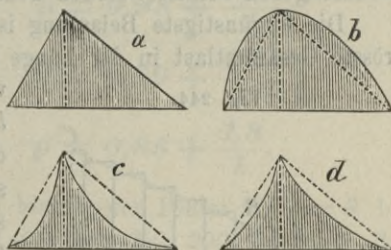
Sind die beiden Seiten AC', BC' (Fig. 243 d) der dreieckig krummlinigen Einflussfigur Parabeln, welche in der Mitte der Sehnen AC', BC' von diesen den Vertikalabstand $c = mh$ haben, so ist $F = \frac{1}{2} lh - \frac{2}{3} lc - \frac{1}{6} (3 - 4m)lh$, mithin nach Formel 1:

$$2. \quad p = p' + \frac{6}{3 - 4m} \frac{G}{l}$$

Für das wirkliche Dreieck (Fig. 243 a) wird $m = 0$, mithin

$$3. \quad p = p' + 2 \frac{G}{l}$$

Fig. 243.



Tangiren die Parabeln die Axe AB (Fig. 243 c), so ist $m = 0,25$, also

$$4. \quad p = p' + 3 \frac{G}{l}.$$

Tangiren die Parabeln eine Parallele zur Axe AB in C' (Fig. 243 b), so ist $m = -0,25$, mithin

$$5. \quad p = p' + \frac{3}{2} \frac{G}{l}.$$

Nehmen wir hierzu noch das Rechteck, so ist für dasselbe $F = lh$, mithin

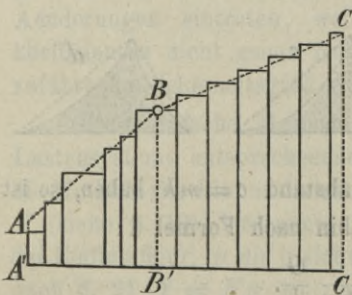
$$6. \quad p = p' + \frac{G}{l}.$$

Hiernach wird die gleichwerthige Belastung um so grösser, je schneller die Einflusslinie von einem bestimmten Punkte C' aus abfällt. Die Lage des höchsten Punktes C' oder des Scheitels würde hiernach ohne Einfluss auf die Grösse der gleichwerthigen Belastung sein, was allerdings nicht ganz der Wirklichkeit entspricht. Wir wollen deshalb unter Zugrundelegung der wirklichen Belastung die hauptsächlichsten vorkommenden Formen der Einflussfläche untersuchen.

§. 163. Rechteckige Einflussfigur. Das Rechteck kommt zwar als Einflussfigur nur untergeordnet vor; jedoch wollen wir dasselbe mit in Betracht ziehen, weil sich für dasselbe die gleichwerthige Belastung für ein gegebenes Belastungsschema sehr leicht bestimmen lässt und diese sodann leicht zur rohen Schätzung für andere Formen der Einflussfiguren benutzt werden können.

Die ungünstigste Belastung ist hier diejenige, bei welcher sich die grösste Gesamtlast in der Länge des Rechteckes befindet. Die Werthe

Fig. 244.



von Y lassen sich hier bei variablem l nicht durch eine stetige, sondern durch eine staffelförmige Linie darstellen (Fig. 244). Annähernd lässt sich dieselbe durch eine gebrochene Gerade ABC ersetzen, für welche sich die Gleichung leicht aufstellen lässt. Ist die Summe der Gewichte der Lokomotiven nebst Tender $= G$, der Achsendruck eines Wagens $= G_1$, der Achsenstand der Wagen e_1 , und

$a = A'B'$ gleich der Länge von der Vorderachse bis zu einem Punkte, welcher $\frac{1}{2} e_1$ vor der ersten Wagenachse liegt, so ist offenbar, $BB' = G$, $CC' = BB' + B'C' \frac{G_1}{e_1}$ zu setzen. AA' ist so zu bemessen,

dass die Fläche $AA'B'B$ gleich der wirklichen Fläche zwischen der Staffellinie und $A'B'$ wird. Diese Fläche aber ergibt sich leicht als Summe der statischen Momente S der einzelnen Achsendrücke innerhalb $A'B'$ in Beziehung auf B' . Ist die Summe der statischen Momente der Achsendrücke innerhalb $A'B'$ in Beziehung auf $A' = S_0$, so ist $S = Ga - S_0$, $S_0 = Ga - S$. Hiernach lässt sich setzen:

$$7. \quad \begin{cases} l \leq a: & p = \frac{2S_0}{a^2} + \frac{Ga - 2S_0}{al}, \\ l > a: & p = \frac{G_1}{e_1} + \frac{Ge_1 - G_1a}{e_1l}. \end{cases}$$

Bei den Strassenbrücken würde sich, wenn nur ein sehr schwerer, im Uebrigen nur schwere Wagen vorhanden sind, G und S_0 auf den ersteren beziehen, während G_1 die ganze Last, e_1 die ganze Länge der schweren Wagen bedeutet. Für lauter gleiche Wagen ergibt sich

$$8. \quad p = \frac{G}{e} + \frac{Ge - 2S_0}{2el}.$$

Für unsere Belastungsschemen (§. 7 und 6) und wenn man bei den Eisenbahnbrücken zwei nach vorn gerichtete Lokomotiven voraussetzt, ergeben sich hiernach die folgenden Ausdrücke (p in Tonnen pro Met., l in Meter):

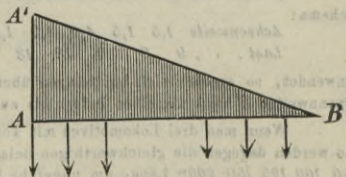
$$9. \quad \text{Eisenbahnbrücken} \quad \begin{cases} l \leq 25: & p = 4,68 + \frac{15,0}{l}, \\ l > 25: & p = 2,67 + \frac{65,3}{l}. \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} \text{Sehr schwere Wagen:} & p = 0,98 + \frac{10,0}{l}, \\ \text{Schwere Wagen:} \dots & p = 0,99 + \frac{4,2}{l}, \\ \text{Leichte Wagen:} \dots & p = 0,88 + \frac{1,8}{l}. \end{cases}$$

Bei den Eisenbahnbrücken kann hierbei der Fehler für $l = 8$ bis 20^m 6 bis 8 Prozent, für $l = 25, 50, 75, 100, 150, 200^m$ bezüglich 3,4 2,0 1,5 1,2 0,9 0,7 Prozent betragen.

§. 164. Rechtwinkliges Dreieck als Einflussfigur. Bei der ungünstigsten Belastung sind die schwersten Lasten an das Ende A (Fig. 245) und die vordere Last nach A selbst zu bringen. Bezeichnet x den Abstand einer Last G von B , h die Höhe AA' , so ist für die

Fig. 245.

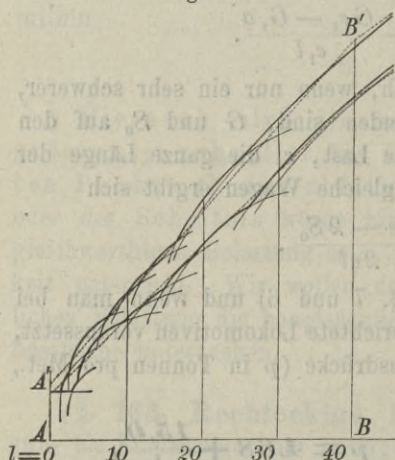


Einflussgrösse Y : $Yl = h \Sigma Gx$. Da $F = \frac{1}{2} hl$ ist, so wird die gleichwerthige Belastung, die wir für das rechtwinklige Dreieck mit p_0 bezeichnen wollen,

$$p_0 = \frac{2}{l^2} \Sigma Gx.$$

Das Resultat der für den in §. 7 angegebenen Eisenbahnzug angestellten Berechnung zeigt Fig. 246 (obere Linie) bis zu einer Länge von 45^m, in welcher l als Abscisse,

Fig. 246.



$p_0 l$ als Ordinate aufgetragen ist. Die einzelnen Kurven, aus denen diese Linie besteht, sind Hyperbeln, welche die Axe der y zur Asymptote haben. Angenähert lässt sich diese Linie durch zwei Gerade ersetzen. Für Strassenbrücken mit einer Wagengattung lässt sich für alle Längen eine einzige Gerade als Näherung einführen. Man kann diese Geraden leicht so bestimmen, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum wird.

Für unsere Belastungsschemen ergeben sich unter derselben Voraussetzung, wie im vorigen Paragraphen folgende Ausdrücke (p Tonnen pro Meter, l Meter)¹⁾:

$$11. \text{ Eisenbahnbrücken } \begin{cases} l \leq 40: & p_0 = 4,54 + \frac{30,6}{l}, \\ l \geq 40: & p_0 = 2,84 + \frac{98,6}{l}. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \text{Sehr schwere Wagen:} & p_0 = 1,02 + \frac{20,0}{l}, \\ \text{Schwere Wagen:} & \dots & p_0 = 1,00 + \frac{9,5}{l}, \\ \text{Leichte Wagen:} & \dots & p_0 = 0,90 + \frac{3,6}{l}. \end{cases}$$

¹⁾ Wenn man die vordere Lokomotive nebst Tender umkehrt, dementsprechend das Belastungsschema:

Achsenweite 1,5 1,5 4,0 1,3 1,3 5,2 1,3 1,3 4,0 1,5 1,5 3,0 3,0 3,0 Meter
Last . . . 9 9 9 13 13 13 13 13 13 9 9 9 8 8 8 Ton.

anwendet, so ergeben sich bei Längen über 25^m die gleichwerthigen Belastungen kleiner. Bei kleineren Spannweiten können dieselben indess bis zu 5 Prozent grösser werden.

Wenn man drei Lokomotiven mit Tendern und mit nach vorn gerichteten Schornsteinen voraussetzt, so werden dagegen die gleichwerthigen Belastungen bei Längen über 25^m grösser und zwar bei 40 50 60 80 100 125 150 200^m Länge um ungefähr bezüglich 5 8 9 9 8 8 7 Prozent.

Man könnte sich der wirklichen Linie noch viel besser anschmiegen, wenn man für p_0 nicht das Gesetz $p_0 = A + \frac{B}{l}$, sondern das Gesetz $p_0 = A + \frac{B}{l} + \frac{C}{l^2}$ wählen würde. So ergibt sich für Eisenbahnbrücken bei Längen über 25^m , wenn man die Lastwagen durch eine gleichmässige Belastung von $2\frac{2}{3}$ Tonnen pro Meter ersetzt, ziemlich genau

$$13. \quad p_0 = 2,67 + \frac{130}{l} - \frac{1245}{l^2}.$$

Indess kann die Regel 11 recht wohl angewendet werden, da keine grössere Differenz als ungefähr 4 Prozent für $l=10$ bis 40^m und 3 Prozent für $l > 40$ entsteht.

Hiernach ergibt sich p_0 stets grösser, als p für das Rechteck; der Unterschied beträgt bei Eisenbahnbrücken, sehr schweren, schweren und leichten Wagen bezüglich bei 10^m Länge 23, 51, 38, 20 Prozent, bei 20^m Länge 12, 43, 23, 11 Prozent, bei 30^m Länge 15, 24, 16, 9 Prozent, bei 50^m Länge 21, 20, 11, 6 Prozent, bei 100^m Länge 15, 12, 6, 4 Prozent. Bei Eisenbahnbrücken kann man durchschnittlich p für das rechtwinklige Dreieck 16 Prozent grösser annehmen, als für das Rechteck.

Die Maximaltransversalkraft für einen Einzelträger ist durch die Formeln 6 (S. 56) bestimmt. Wenn man den Formeln 11 und 12 entsprechend, allgemein

$$14. \quad p = A + \frac{B}{l}$$

setzt, so würde hier, wenn L die Spannweite bezeichnet, bezüglich $p(L-x) = A(L-x) + B$ und $px = Ax + B$ zu setzen sein; es wird demnach¹⁾

$$15. \quad \begin{cases} \max(+Q) = \frac{A(L-x)^2}{2L} + \frac{B(L-x)}{2L}, \\ \max(-Q) = \frac{Ax^2}{2L} + \frac{Bx}{2L}. \end{cases}$$

Setzt man für die Strecke AB (Fig. 246) $y = y_0 - A(a-x)$, für die nächste Strecke BC : $y = y_0 + B(x-a)$, wobei $BB' = y_0$ ist, so ergibt sich nach der Methode der kleinsten Quadratsummen

$$y_0 = \frac{4F}{c} - \frac{6}{c} \left(\frac{S_1}{a} + \frac{S_2}{b} \right), \quad A = \frac{3y_0}{2a} - \frac{3S_1}{a^2}, \quad B = -\frac{3y_0}{2b} + \frac{3S_2}{b^2},$$

wenn man $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$ und zur Abkürzung

¹⁾ Die mittlere Transversalkraft ergibt sich in dem Sinne der Anmerkung zu §. 37:

$$\text{mitt } \max(+Q) = \frac{7}{24} AL + \frac{3}{8} B, \quad \text{mitt } \max(-Q) = -\frac{1}{24} AL - \frac{1}{8} B.$$

$$F = \int_0^c y dx, \quad S_1 = \int_0^a y (a - x) dx, \quad S_2 = \int_a^c y (x - a) dx$$

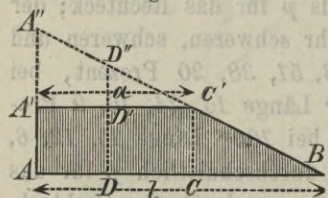
setzt. Hierin bedeutet F die Fläche, S_1, S_2 das statische Moment der betreffenden Flächenstücke in Beziehung auf die Axe BB' .

Wenn nur eine einzige Gerade vorausgesetzt wird, so wird $a=0, b=c, S_1=0, \frac{S_1}{a}=0$, mithin

$$y = \frac{3F}{c} - \frac{6S}{c^2} + \frac{6}{c^2} \left(\frac{2S}{c} - F \right) x.$$

§. 165. Trapezförmige Einflussfigur. Die Einflussfigur sei ein Trapez (Fig. 247), dessen Seite AA' auf der Grundlinie AB senkrecht steht. Diese Figur tritt beim kontinuierlichen Gelenkträger auf (Fig. 106, S. 82). Bei der ungünstigsten Belastung liegt eine Last bei A oder C . Wir nehmen zunächst das vordere Ende des Zuges in A an. Das Trapez $AA'C'B$ können wir als Differenz der rechtwinkligen Dreiecke $AA''B$ und $A'A''C'$ auffassen. Wir setzen der Formel 14 entsprechend, für das Dreieck $AA''B$: $pl = Al + B$, für das Dreieck $A'A''C'$ dagegen $pa = A_1 a + B_1$, wenn wir $A'C'$ mit a bezeichnen. Die Flächen dieser Dreiecke sind, $AA' = h$ gesetzt, bezüglich $\frac{l^2 h}{2(l-a)}$ und $\frac{a^2 h}{2(l-a)}$; der Flächeninhalt des Trapezes ist $= \frac{1}{2} (l + a) h$. Demnach ist für die gleichwerthige Belastung p :

Fig. 247.



bezüglich $\frac{l^2 h}{2(l-a)}$ und $\frac{a^2 h}{2(l-a)}$; der Flächeninhalt des Trapezes ist $= \frac{1}{2} (l + a) h$. Demnach ist für die gleichwerthige Belastung p :

$$\frac{1}{2} p (l + a) h = \left(A + \frac{B}{l} \right) \frac{l^2 h}{2(l-a)} - \left(A_1 + \frac{B_1}{a} \right) \frac{a^2 h}{2(l-a)}.$$

Hiernach wird

$$16. \quad p = \frac{(Al + B)l - (A_1 a + B_1) a}{l^2 - a^2}.$$

Kann man $A_1 = A, B_1 = B$ setzen, so wird sehr einfach:

$$17. \quad p = A + \frac{B}{l + a}.$$

Hiernach wird p kleiner, als für das rechtwinklige Dreieck mit derselben Länge l . Für $a = l$ geht das Trapez in das Rechteck über; in diesem Falle wird nach Formel 17: $p = A + \frac{B}{2l}$, was mit den Regeln 9 und 10 im Vergleich zu den Regeln 11 und 12 nahezu übereinstimmt.

Wenn der Zug nur die Länge $BD = \xi$ einnimmt, so ergibt sich in gleicher Weise:

$$p (l^2 - a^2) = A \xi^2 + B \xi - A_1 (\xi_1 - b)^2 - B_1 (\xi_1 - b),$$

wenn man $BC = l - a = b$ setzt. Hiernach wird p zum Maximum für

$$18. \quad \xi = \frac{B - B_1 + 2A_1 b}{2(A_1 - A)}.$$

Die Einsetzung gibt

$$19. \quad p = \frac{(B - B_1)^2 + 4(AA_1 b + A_1 B - AB_1) b}{4(A_1 - A) b (l + a)}.$$

Für $A = A_1$, $B = B_1$, also für Strassenbrücken und kleinere Längen der Eisenbahnbrücken würde sich $\xi = \infty$ ergeben; dafür ist $\xi = l$ zu setzen, so dass die Formeln 16 und 17 Giltigkeit behalten. Für $A = 2,84$, $A_1 = 4,54$, $B = 98,6$, $B_1 = 30,6$ wird

$$\xi = 20 + 2,67b,$$

$$p = \frac{68 + 212b + 7,6b^2}{b(l + a)}.$$

Ergibt sich hiernach $\xi > l$, so ist natürlich wieder $\xi = l$ zu setzen.

§. 166. Gleichschenkliges Dreieck als Einflussfigur. Als ungünstigste Belastung ergibt sich hier diejenige, bei welcher die schwersten Lasten mehr in der Mitte konzentriert sind, die Gesamtlast in jeder Hälfte möglichst gleich gross ist und eine Last über der Mitte C liegt. Liegen auf der linken und rechten Hälfte die Lasten G_1 , G_2 im Abstände x_1 , x_2 von den Enden, so wird, wenn speziell p_1 die gleichwerthige Belastung für das gleichschenklige Dreieck bedeutet,

$$Y = \frac{2h}{l} [\Sigma(G_1 x_1) + \Sigma(G_2 x_2)], \quad p_1 = \frac{4}{l^2} [\Sigma(G_1 x_1) + \Sigma(G_2 x_2)].$$

Das Resultat der Rechnung zeigt Fig. 246 (untere Linie) für Eisenbahnbrücken. Hiernach wird p_1 wesentlich kleiner, als p_0 . Es findet dies besonders darin seine Erklärung, dass bei gleicher Höhe des Dreieckes die Ordinaten in gleichem Abstände vom Scheitel beim rechtwinkligen Dreiecke grösser sind, als beim gleichschenkligen. Man kann auch hier wieder die Kurve durch zwei Geraden ersetzen. Das Verhältniss $\frac{p_1}{p_0}$ ergibt sich bei Eisenbahnbrücken innerhalb der Längen von 75^m bis 200^m zu $0,835$ bis $0,855$; bei kleineren Längen ist dieses Verhältniss allerdings mehr veränderlich; indess zwischen 4 und 75^m schwankt $\frac{p_1}{p_0}$ auch nur zwischen $0,83$ und $0,89$, so dass es sich der Einfachheit wegen wohl empfiehlt, ein konstantes Verhältniss einzuführen. Man kann durchschnittlich etwa

$$20. \quad \begin{cases} \text{Eisenbahnbrücken:} & p_1 = 0,86 p_0, \\ \text{Strassenbrücken:} & p_1 = 0,94 p_0 \end{cases}$$

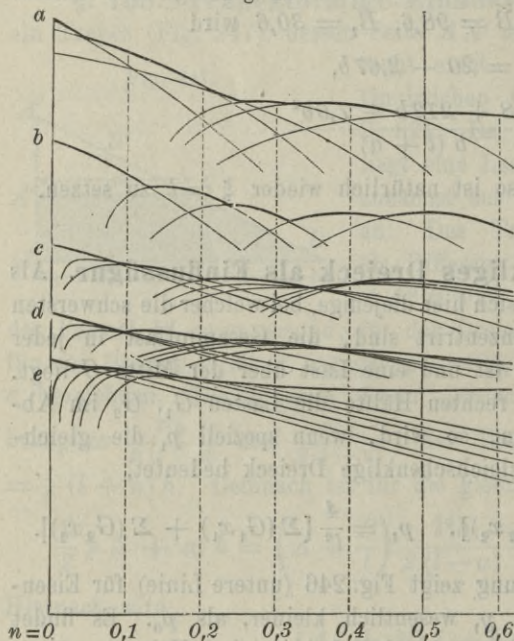
setzen¹⁾. Bestimmt man hierbei p_0 bei Eisenbahnbrücken nach Formel 11, so ist der Fehler bei kleinen und grossen Längen höchstens 3 Prozent.

Bei Längen über 99^m ergibt sich für Eisenbahnbrücken, wenn man wieder die Lastwagen durch eine Last von $2\frac{2}{3}$ Tonnen pro Meter ersetzt, genau

$$21. \quad p_1 = \frac{8}{3} + \frac{5666}{l^2}.$$

§. 167. Dreieckige Einflussfigur im Allgemeinen. Die ungünstigste Belastung ist durch §. 24 bestimmt. Die sich ergebenden

Fig. 248.



gleichwerthigen Belastungen sind in Fig. 248 für Eisenbahnbrücken dargestellt und zwar beziehen sich die Kurven a, b, c, d, e auf 10, 20, 50, 100, 200^m Länge. Die betreffenden Kurven sind Linien dritten Grades; nur dann, wenn nur auf einer Seite des Scheitels Lasten liegen, entstehen Hyperbeln. Diese grafische Darstellung zeigt, dass es allerdings nicht wohl möglich ist, die gleichwerthige Belastung durch ein einfaches Gesetz darzustellen. Jedoch dürfte das Gesetz

$$22. \quad p' = p_0 - 4(p_0 - p_1) \frac{l_1 l_2}{l^2}$$

für die praktische Anwendung genügen, wobei p', p_0, p_1 die gleichwerthige Belastung für das Dreieck im Allgemeinen, das rechtwinklige und gleichschenklige Dreieck, l_1 und l_2 die Längen AC und BC (Fig. 50, S. 35) bedeuten. Setzt man hierin $l_1 = nl$, $l_2 = (1-n)l$ und für p_1 die Werthe 20, so ergibt sich

$$23. \quad \begin{cases} \text{Eisenbahnbrücken:} & p' = p_0 [1 - 0,56n(1-n)], \\ \text{Strassenbrücken:} & p' = p_0 [1 - 0,24n(1-n)]. \end{cases}$$

¹⁾ Wenn man bei den Eisenbahnbrücken die vordere Lokomotive umkehrt, so wird p_1 nur wenig grösser und zwar höchstens 2,5 Prozent, bei Längen über 100^m höchstens 0,5 Prozent.

Wenn man drei nach vorn gerichtete Lokomotiven voraussetzt, so würde p_1 bei Längen über 30^m grösser und zwar bei 40 50 60 80 100 125 150 200^m um bezüglich 6 13 13 16 15 12 9 5 Prozent. Das Verhältniss $\frac{p_1}{p_0}$ wird hier durchschnittlich 0,88.

Bei Anwendung dieser Näherungsregeln ergeben sich die grössten Fehler bei Längen von 10, 20, 30, 50, 75, 100, 150, 200 Met. bei Eisenbahnbrücken bezüglich 2,8 5,3 2,0 2,3 3,2 2,3 1,8 2,6 Prozent.

Das grösste Moment für einen beliebigen Querschnitt eines Einzelträgers wird hiernach unter Berücksichtigung der Regel 11 (S. 58)¹⁾, wenn wir $l_1 = x$, $l_2 = l - x$ setzen,

$$24. \quad M = \frac{1}{2} \left[p_0 + 4(p_0 - p_1) \frac{x(l-x)}{l^2} \right] x(l-x).$$

In der folgenden Weise lassen sich indess noch genauere Regeln aufstellen.

Ein mit den Näherungsregeln 11 vollkommen im Einklange stehender Ausdruck für p' lässt sich in folgender Weise entwickeln. Der Belastungszug bedecke in Fig. 50 die Strecke BD . Die für die Dreiecke BDD' und $C'D'D''$ nach der für das rechtwinklige Dreieck aufgestellten Regel anzunehmende gleichwerthige Belastung sei p_1, p_2 ; alsdann ist $Y = p_1 \cdot \triangle BDD' - p_2 \cdot \triangle C'D'D''$. Setzen wir $CD = x$, $CC' = h$, so ergibt sich leicht

$$\triangle BDD' = \frac{h(l_2 + x)^2}{2l_2}, \quad \triangle C'D'D'' = \frac{hlx^2}{2l_1l_2}.$$

Setzt man nun den Formeln 11 entsprechend $p_1 = A + \frac{B}{l_1 + x}$, $p_2 = A_1 + \frac{B_1}{x}$ und $Y = \frac{1}{2} plh$, so wird

$$25. \quad p' = \frac{l_2 + x}{l_2} [A(l_2 + x) + B] - \frac{x}{l_1 l_2} [A_1 x + B_1].$$

Hierin ist nun x so zu wählen, dass p' zum Maximum wird. Indem man den Differentialquotienten von p' nach $x = 0$ setzt, erhält man

$$26. \quad \begin{cases} x = \frac{2A \ln(1-n) + Bn - B_1}{2(A_1 - An)}, \\ l_2 + x = \frac{2A_1 l(1-n) + Bn - B_1}{2(A_1 - An)}. \end{cases}$$

Die Einsetzung gibt

$$27. \quad p' = \frac{A_1 B - AB_1 + AA_1 l(1-n)}{(A_1 - An)l} + \frac{(B_1 - Bn)^2}{4(A_1 - An) \ln(1-n)}.$$

Es ist möglich, dass sich bei Eisenbahnbrücken nach Formel 26 der Werth von $l_2 + x$ kleiner ergibt, als der Werth a desjenigen l , für welches sich nach beiden der Formeln 11 gleiche Werthe ergeben ($l = 40^m$); in diesem Falle ist a für $l_2 + x$ oder $x = a - l_2$ zu

¹⁾ Das mittlere Maximalmoment ergibt sich hiernach in dem Sinne der Anmerkung zu §. 38: $\text{mitt max } M = \frac{1}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{30} (p_0 - p_1) l^2 = \frac{1}{60} (3p_0 + 2p_1) l^2$, d. i. für Eisenbahnbrücken $= 0,0787 p_0 l^2 = 0,0917 p_1 l^2$, für Strassenbrücken $= 0,0813 p_0 l^2 = 0,0865 p_1 l^2$.

setzen und p' nach Formel 25 zu berechnen. Setzt man hierin $A + \frac{B}{a} = A_1 + \frac{B_1}{a}$, so ergibt sich

$$28. \quad p' = A_1 - [A_1(l - a) - B_1] \frac{l - a}{l^2 n}.$$

Für kleine Werthe von l_1 ergibt sich x negativ; statt dessen ist $x = 0$ zu setzen. Dies gibt einfach

$$29. \quad p' = A(1 - n) + \frac{B}{l}.$$

Wenn x und $l_2 + x$ innerhalb der Grenzen liegen, für welche sich pl durch eine einzige gerade Linie darstellen lässt, so ist $A = A_1$, $B = B_1$ zu setzen. Es wird dann wesentlich einfacher

$$30. \quad x = nl - \frac{B_1}{2A_1}, \quad l_2 + x = l - \frac{B_1}{2A_1},$$

$$31. \quad p' = A_1 + \frac{B_1^2}{4A_1 n l^2}$$

und für kleine Werthe von x , für welche sich nach Formel 30 x negativ ergeben würde,

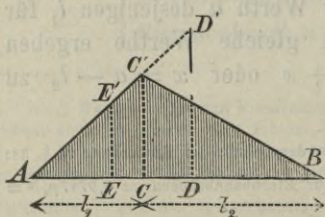
$$32. \quad p' = A_1(1 - n) + \frac{B_1}{l}.$$

Bei kleinen Längen kann indess bei Eisenbahnbrücken hiernach eine zu grosse Abweichung von der Wahrheit eintreten, weil in dieser Entwicklung angenommen wurde, dass die schweren Lokomotivräder vorausschreiten, während in Wahrheit zu beiden Seiten der Lokomotivräder noch Tenderräder anzunehmen sind.

Obwohl man durch diese Methode im Allgemeinen p' genauer bestimmen kann, als durch die Formeln 22 und 23, so wird man bei Eisenbahnbrücken doch wohl die einfachere Anwendung dieser letzteren Regeln vorziehen. Es kommen indess bei Bestimmung der Spannungen im Gitterwerke oft Dreiecke vor, bei denen n nur klein ist, so dass sich diese Dreiecke dem rechtwinkligen nähern. Für diese Dreiecke sind die Formeln 29 und 32, die für Strassen- und Eisenbahnbrücken passen, bequem anzuwenden.

Für Strassenbrücken lassen sich indess leicht allgemeinere Regeln

Fig. 249.



mit grösserer Genauigkeit entwickeln. Hier ist im Allgemeinen diejenige Belastung die ungünstigste, bei welcher (falls in Fig. 249 $BC > AC$ oder $l_2 > l_1$ ist) in C ein hinteres Wagenrad steht und die Wagen nach B hin fahren. In einzelnen Fällen kann allerdings Y noch grösser werden, wenn bei derselben Fahrriichtung in C ein

vorderes Wagenrad liegt; jedoch tritt dies seltener ein und in diesem Falle ist Y bei beiden Stellungen nicht viel verschieden. Wenn nur ein sehr schwerer Wagen vorausgesetzt wird, so ist dieser mit seinem hinteren Rade nach C zu stellen. Zunächst wollen wir Y für das Dreieck ACC' bestimmen, und zwar für den Fall, dass nach rechts fahrende Wagen vorhanden sind, wobei der erste so dicht an dem rechts von C befindlichen Wagen steht, als dies möglich ist. Machen wir CD gleich dem Radstande a und legen wir nach C und D zwei Achsen, jede mit dem Drucke G , so hat das Dreieck ADD' nahezu die ungünstigste Belastung mit links fahrenden Wagen; der geringfügige Unterschied liegt nur in einer etwas anderen Stellung der Pferde. Für das Dreieck ADD' werde nun $p = A_1 + \frac{B_1}{l_1 + a}$. Ist p_1 die gleichwerthige Belastung für das Dreieck ACC' , so haben wir, wenn $CC' = 1$, also $DD_1 = 1 + \frac{a}{l_1}$ ist, $\frac{1}{2} p_1 l_1 + G + G \left(1 + \frac{a}{l_1}\right) = (l_1 + a) \frac{l_1 + a}{2l_1} \left(A + \frac{B_1}{l_1 + a}\right)$ und hiernach

$$34. \quad p_1 = A_1 - \frac{4G - 2A_1 a - B_1}{l_1} - \frac{(2G - A_1 a - B_1) a}{l_1^2}.$$

Setzen wir für schwere Wagen $A_1 = 1,0$, $B_1 = 9,5$, $G = 6,0$, $a = 3,5$, für leichte Wagen $A_1 = 0,9$, $B_1 = 3,6$, $G = 3,0$, $a = 2,8$, so wird

$$35. \quad \begin{cases} \text{Schwere Wagen:} & p_1 = 1,0 - \frac{7,5}{l_1} + \frac{3,50}{l_1^2}, \\ \text{Leichte Wagen:} & p_1 = 0,9 - \frac{3,4}{l_1} + \frac{0,34}{l_1^2}, \end{cases}$$

Setzen wir allgemein für das Dreieck BCC' : $p = A + \frac{B}{l_2}$, für das Dreieck ACC' aber $p_1 = A - \frac{B_1}{l_1} + \frac{C_1}{l_1^2}$, so wird $\frac{1}{2} p' l = \frac{1}{2} l_1 \left(A - \frac{B_1}{l_1} + \frac{C_1}{l_1^2}\right) + \frac{1}{2} l_2 \left(A + \frac{B}{l_2}\right)$, mithin

$$36. \quad p' = A + \frac{B - B_1}{l} + \frac{C_1}{nl^2}.$$

Hiernach ergibt sich

$$37. \quad \begin{cases} \text{Sehr schwere Wagen:} & p' = 1,02 + \frac{12,5}{l} + \frac{3,5}{nl^2}, \\ \text{Schwere Wagen:} & \dots \quad p' = 1,00 + \frac{2,0}{l} + \frac{3,5}{nl^2}, \\ \text{Leichte Wagen:} & \dots \quad p' = 0,90 + \frac{0,2}{l} + \frac{0,3}{nl^2}. \end{cases}$$

Es ist nun aber recht wohl möglich, dass die Belastung der Strecke AE , wobei CE etwa 1^m beträgt, mit Menschengedränge noch ungünstiger

wirkt. Setzen wir die Belastung durch Menschengedränge pro Längeneinheit $= p_3$ und $CE = b$, so wird $\frac{1}{2} p' l = \frac{(l_1 - b)^2}{2l_1} p_3 + \frac{1}{2} l_2 \left(A + \frac{B}{l_1} \right)$, mithin

$$38. \quad p' = A + (p_3 - A)n + \frac{B - 2p_3 b}{l} + \frac{p_3 b^2}{nl^2}.$$

Setzen wir $p' = 0,92$ ($0,4^t$ pro \square^m auf $2,3^m$ Breite), $b = 1^m$, so wird

$$39. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sehr schwere Wagen: } p' = 1,02 - 0,10n + \frac{18,2}{l} + \frac{0,92}{nl^2}, \\ \text{Schwere Wagen:} \dots \quad p' = 1,00 - 0,08n + \frac{7,7}{l} + \frac{0,92}{nl^2}, \\ \text{Leichte Wagen:} \dots \quad p' = 0,90 + 0,02n + \frac{1,8}{l} + \frac{0,92}{nl^2}. \end{array} \right.$$

Bei sehr schweren und schweren Wagen wird für die Mitte ($n = 0,5$) die einseitige Belastung mit Menschengedränge ungünstiger, wenn bezüglich $l < 94^m$ und 114^m ist; bei anderen Querschnitten ($n < 0,5$) würde die Grenze noch höher liegen. Bei leichten Wagen ist die einseitige Belastung mit Menschengedränge immer ungünstiger. Dies kann sich ändern, wenn die Belastung durch Menschengedränge kleiner als $0,4^t$ pro \square Met. angenommen wird.

An den Enden, an denen in der Strecke AC keine Belastung liegen kann, bleibt die Formel 29 gültig; nach derselben wird:

$$40. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sehr schwere Wagen: } p' = 1,02(1 - n) + \frac{20,0}{l}, \\ \text{Schwere Wagen:} \dots \quad p' = 1,00(1 - n) + \frac{9,5}{l}, \\ \text{Leichte Wagen:} \dots \quad p' = 0,90(1 - n) + \frac{3,6}{l}. \end{array} \right.$$

Für $l_1 = 1^m$ oder $n = \frac{1}{l}$ geben die Ausdrücke 39 und 40 gleiche Werthe für p' ; an dieser Stelle geht die Hyperbel, welche p' nach Formel 38 darstellt, tangential in die Gerade, welche p' nach Formel 40 darstellt, über. In folgender Tabelle sind hiernach die Werthe p_0 und p_1 für p' an den Enden und in der Mitte, sowie die Verhältnisse $\frac{p_1}{p_0}$ zusammengestellt:

l	Sehr schwere Wagen			Schwere Wagen			Leichte Wagen		
	p ₀	p ₁	$\frac{p_1}{p_0}$	p ₀	p ₁	$\frac{p_1}{p_0}$	p ₀	p ₁	$\frac{p_1}{p_0}$
10	3,02	2,81	0,93	1,95	1,75	0,90	1,26	1,11	0,88
15	2,35	2,19	0,93	1,63	1,48	0,91	1,14	1,04	0,91
20	2,02	1,93	0,94	1,48	1,35	0,91	1,08	1,01	0,93
30	1,69	1,60	0,95	1,32	1,22	0,92	1,02	0,97	0,95
40	1,52	1,44	0,95	1,24	1,15	0,93	0,99	0,96	0,97
60	1,35	1,28	0,95	1,16	1,09	0,94	0,96	0,94	0,98
80	1,27	1,20	0,95	1,12	1,06	0,95	0,95	0,93	0,99
100	1,22	1,15	0,95	1,10	1,04	0,95	0,94	0,93	0,99
150	1,15	1,09	0,95	1,06	1,01	0,95	0,92	0,92	1,00

§. 169. Das abgestumpfte Dreieck als Einflussfigur.

Wir wollen hier zunächst die im vorigen Falle angewendete Methode der Zurückführung auf das rechtwinklige Dreieck anwenden. Wir nehmen an, dass das vordere Rad bei F (Fig. 53, S. 37) stehen müsse. Alsdann können wir

$$Y = p_1 \cdot \triangle BFF' - p_2 \cdot \triangle E'F'F'' - p_3 \cdot \triangle D'F''F'''$$

setzen, wenn wir die für die drei genannten Dreiecke nach dem Gesetze des rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmenden gleichwerthigen Belastungen mit p_1, p_2, p_3 bezeichnen. Wir wollen nach den Formeln 11 und 12 für $CF = x$

$$p_1 = A + \frac{B}{l_2 + x}, \quad p_2 = A_1 + \frac{B_1}{x + e_2}, \quad p_3 = A_1 + \frac{B_1}{x - e_1}$$

setzen. Es ergibt sich ferner leicht, wenn man $e_1 + e_2 = e$ einführt,

$$\triangle BFF' = \frac{(l_2 + x)^2 h}{2l_2}, \quad \triangle E'F'F'' = \frac{(x + e_2)^2 l h e_1}{2l_1 l_2 e}$$

$$\triangle D'F''F''' = \frac{(x - e_1)^2 l h e_2}{2l_1 l_2 e}$$

Die Einsetzung gibt

$$\frac{2Yl_1 l_2}{h} = [A(l_2 + x)^2 + B(l_2 + x)]l_1 - [A_1(x^2 + e_1 e_2) + B_1 x]l$$

Setzt man den Differentialquotienten von Y nach $x = 0$, so erhält man denselben Werth von x , wie für die dreieckige Einflussfigur nach Formel 27. Bezeichnet man den Werth von Y für die dreieckige Einflussfigur mit Y' , so wird demnach sehr einfach

$$41. \quad Y = Y' - A_1 \frac{e_1 e_2}{l_1 l_2} \frac{lh}{2}$$

Es ergibt sich ferner

$$42. \quad F = \frac{1}{2} lh \left(1 - \frac{e_1 e_2}{l_1 l_2} \right),$$

mithin, wenn man $Y' = \frac{1}{2} lh p'$ setzt,

$$43. \quad p = p' - \frac{(A_1 - p') e_1 e_2}{l_1 l_2 - e_1 e_2}.$$

Für $e_1 = e_2 = \frac{1}{2} e$, $l_1 = nl$, $l_2 = (1-n)l$ wird

$$44. \quad p = p' - \frac{(A_1 - p') e^2}{An(1-n)l^2 - e^2}.$$

Die Abweichung von p gegen p' , welche theils positiv, theils negativ ausfallen kann, ergibt sich hiernach bei den in der Regel vorhandenen kleinen Werthen von $\frac{e}{l}$ nur klein, so dass für die praktische Anwendung wohl $p = p'$ gesetzt werden kann. In der Regel wird es sich nicht um die Bestimmung von p , sondern von Y handeln, welche am besten nach Formel 41 erfolgen wird. Ist dies Moment für einen beliebigen Querschnitt eines Einzelträgers unter Voraussetzung von Querträgern zu bestimmen, so wird man, der Formel 41 entsprechend, von dem nach der Formel 24 berechneten Werthe von M noch $\frac{1}{2} A_1 e_1 e_2$ abziehen haben, da hier $h = \frac{l_1 l_2}{l}$ zu setzen ist.

§. 170. Vieleckige Einflussfigur. Beim beliebigen Vielecke kann die Bestimmung der gleichwerthigen Belastung auf Grundlage des rechtwinkligen Dreiecks in gleicher Weise erfolgen, wie beim Dreieck. Man wird hier zunächst diejenige Seite DE (Fig. 56, S. 39), innerhalb welcher der Kopf H des Zuges liegen wird, durch Schätzung zu bestimmen haben. Bezeichnen wir nun die Längen BH , FH , GH ,... mit ξ , x_1 , x_2 ,... die Neigungswinkel der Seiten BC , CD , DE ,... gegen AB mit α , α_1 , α_2 ,... und nehmen wir an, dass beim rechtwinkligen Dreiecke bei den Längen ξ , x_1 , x_2 ,... bezüglich $p\xi = A\xi + B$, $p_1 x_1 = A_1 x_1 + B_1$, $p_2 x_2 = A_2 x_2 + B_2$,... zu setzen sei und setzen wir noch $\tan \alpha = \tau$, $\tan \alpha - \tan \alpha_1 = t_1$, $\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2 = t_2$,... so ergibt sich leicht, dass das Maximum von Y eintritt für

$$45. \quad x = - \frac{B\tau - B_1 t_1 - B_2 t_2 - \dots + 2(A_1 a_1 t_1 + A_2 a_2 t_2 + \dots)}{2(A\tau - A_1 t_1 - A_2 t_2 - \dots)}$$

und zwar wird das Maximum von Y

$$46. \quad Y = \frac{1}{2} (A_1 a_1^2 t_1 + A_2 a_2^2 t_2 + \dots) + \frac{1}{2} (B_1 a_1 t_1 + B_2 a_2 t_2 + \dots) - \frac{[B\tau - B_1 t_1 - B_2 t_2 - \dots + 2(A_1 a_1 t_1 + A_2 a_2 t_2 + \dots)]^2}{8(A\tau - A_1 t_1 - A_2 t_2 - \dots)}$$

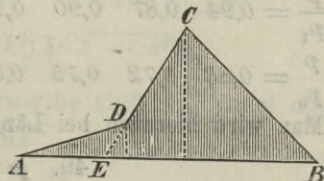
Indess wird wohl selten von diesen Formeln Anwendung zu machen sein.

Bei gewissen Trägerformen (Dreigelenkträger) kann die viereckige Einflussfigur in der Form Fig. 250 vorkommen. Bei kleinen Längen

wird hier die Bestimmung in der eben gezeigten Weise zu ungenau und bei grossen Längen wird der Kopf des Zuges gewöhnlich in die Seite CD fallen; dann aber hat Y ganz denselben Werth, wie für das Dreieck BCE . Ist die gleichwerthige Belastung für die Flächen $ADCB$ und BCE bezüglich p, p' , der Flächeninhalt dieser Figuren F, F' , so ist dann also $Y = F' p' = F p$, also

$$47. \quad p = p' \frac{F'}{F}.$$

Fig. 250.



Wenn das Polygon in eine Kurve übergeht, so ist $t = \frac{d^2 y}{dx^2} dx$ zu setzen und es wird alsdann, wenn A und B in der ganzen Ausdehnung denselben Werth hat,

$$48. \quad Y = \frac{1}{2} \xi (A \xi + B) t - \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \frac{d^2 y}{dx^2} x (A x + B) dx.$$

Haben A und B zwei verschiedene Werthe, so müsste das Integral in die entsprechenden zwei Theile zerlegt werden.

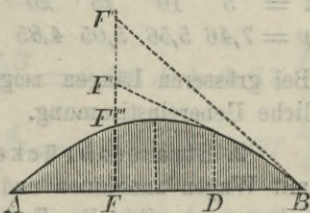
Bei statisch unbestimmten Systemen bildet die Einflusslinie nach §. 20 ebenfalls ein Polygon, wenn sich die Last nur an bestimmten Punkten (durch Querträger) auf die Konstruktion übertragen kann. Allein hier kann man die Polygone in der Regel mit grosser Annäherung durch Kurven vertauschen, die wir im Folgenden noch behandeln werden.

Die Polygone, welche bei mehrtheiligen Gittersystemen vorkommen, bedürfen einer besonderen Behandlung, auf welche wir hier indess nicht eingehen wollen.

§. 171. Symmetrische Parabelfläche als Näherungsform der bei verschiedenen statisch unbestimmten Systemen vorkommenden Einflussfiguren. Bei der ungünstigsten Belastung liegt hier der Schwerpunkt der Belastung in der Mitte, oder, falls dies bei der gegebenen Belastung nicht möglich ist, der Mitte möglichst nahe. Es wird hier, wenn x den Abstand einer Last von der Mitte bezeichnet (Fig. 251)

$$Y = h \left[\Sigma G - \frac{4}{l^2} \Sigma (G x^2) \right], \quad p = \frac{3 Y}{2 l h}.$$

Fig. 251.



1. Eisenbahnbrücken. Für den von uns angenommenen Eisenbahnzug ergibt sich bei Längen über 50^m die ungünstigste Entfernung der vorderen Last vom nächsten Ende $= 0,17l$ bis $0,12l$, genauer $0,09l + 4^m$. Bei einigen Längen ergibt sich durch genaue Berechnung das folgende Verhältniss der gleichwerthigen Belastung

p zu den gleichwerthigen Belastungen p_1 und p_0 für das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck:

$$l = 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 30 \quad 50 \quad 75 \quad 100 \quad 150 \quad 200 \text{ Met.}$$

$$\frac{p}{p_1} = 0,94 \quad 0,87 \quad 0,90 \quad 0,94 \quad 1,00 \quad 0,96 \quad 0,97 \quad 0,99 \quad 1,01 \quad 1,01$$

$$\frac{p}{p_0} = 0,83 \quad 0,72 \quad 0,75 \quad 0,80 \quad 0,85 \quad 0,85 \quad 0,83 \quad 0,83 \quad 0,86 \quad 0,86.$$

Man wird hiernach bei Längen von 15 bis 150^m durchschnittlich

$$49. \quad p = 0,96 p_1 = 0,82 p_0$$

setzen können.

Wenn man hier die im vorigen Paragrafe befolgte Bestimmung anwendet, so ergibt sich, falls man für $l < a$: $pl = A_1 l + B_1$, für $l > a$ aber $pl = Al + B$ setzen kann und wenn der Kopf des Zuges vom rechten Ende den Abstand ξ hat, indem man $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{8h}{l^2}$ setzt,

$$\frac{Yl^2}{h} = 2l(A\xi^2 + B\xi) - 4 \int_0^a (A_1 x^2 + B_1 x) dx - 4 \int_a^\xi (Ax^2 + Bx) dx.$$

Die Ausführung gibt, wenn man $Y = \frac{2}{3} plh$ setzt,

$$50. \quad p = -2(A_1 - A) \frac{a^3}{l^3} + 3(B - B_1) \frac{a^2}{l^3} + 3B \frac{\xi}{l^2} + 3A \frac{\xi^2}{l^2} - 3B \frac{\xi^2}{l^3} - 2A \frac{\xi^3}{l^3}.$$

Für kleine Längen ist $a = 0$ und A_1, B_1 für A, B einzuführen. Setzt man die den Formeln 11 entsprechenden Werthe von a, A, B, A_1, B_1 ein, so findet man, dass p zum Maximum wird für

$$51. \quad \begin{cases} \text{kleine Längen:} & \xi^2 - (l - 6,74) \xi = 3,37l, \\ \text{grosse Längen:} & \xi^2 - (l - 34,72) \xi = 17,36l. \end{cases}$$

Annähernd ergibt sich hiernach für kleinere Längen $l - \xi = 3,37 - \frac{10}{l}$, für grössere Längen $l - \xi = 17,3 - \frac{276}{l}$; hiernach wird $l - \xi = 0,14l$ bis $0,24l$. Die spezielle Berechnung gibt:

$$l = 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 30 \quad 50 \quad 75 \quad 100 \quad 150 \quad 200 \text{ Meter}$$

$$p = 7,46 \quad 5,56 \quad 5,05 \quad 4,85 \quad 4,69 \quad 4,38 \quad 3,43 \quad 3,15 \quad 2,97 \quad 2,91 \text{ Ton. pro Met.}$$

Bei grösseren Längen zeigt sich mit den genauen Werthen eine leidliche Uebereinstimmung.

2. Strassenbrücken. Wenn wir zunächst eine blosse Besetzung mit Wagen annehmen und für das rechtwinklige Dreieck $pl = Al + B$ setzen, so gibt die Formel 50, wenn man $A_1 = A, B_1 = B$ und $\xi = l - \xi_1$ setzt,

$$52. \quad p = A + \frac{3(B - A\xi_1)\xi_1}{l^2} - \frac{(3B - 2A\xi_1)\xi_1^2}{l^3}.$$

Sonach wird p zum Maximum für

$$53. \quad \xi_1 = \frac{1}{2} \left[l + \frac{B}{A} - \sqrt{l^2 + \left(\frac{B}{A}\right)^2} \right].$$

Die Einsetzung gibt nach entsprechender Zusammenziehung, wenn man zur Abkürzung $B = k \cdot Al$ setzt,

$$54. \quad p = \frac{1}{2} [1 - k^3 + (1 + k^2) \sqrt{1 + k^2}].$$

Indem man für k verschiedene Zahlenwerthe einführt, findet man als Näherungsregel $p = \frac{1}{2} A (1,94 + k)$ oder

$$55. \quad p = 0,97A + 0,50 \frac{B}{l}.$$

Wenn man dagegen annimmt, dass auf der linken Seite die Strecke $\xi_1 - b$ mit Menschengedränge und auf der rechten Seite die Strecke $\xi = l - \xi_1$ mit Wagen besetzt ist, so kommt zu dem Ausdrucke 52 noch $\frac{p_3}{7^3} (\xi_1 - b)^2 (3l - 2\xi_1 + 2b)$ hinzu. Es wird alsdann p zum Maximum für

$$- 2A\xi_1(l - \xi_1) + B(l - 2\xi_1) + 2p_3(\xi_1 - b)(l - \xi_1 + b) = 0$$

oder

$$\xi_1^2 - \left(b + \frac{B - 2F_3 b}{A - p_3} \right) \xi_1 + \frac{Bl - 2p_3 b (l + b)}{2(A - p_3)} = 0.$$

Hiernach wird für $p_3 = 0,92$ und $b = 1,0$:

$$56. \quad \begin{cases} \text{Sehr schwere Lasten:} & \xi_1^2 - (l + 182)\xi_1 + (90,8l - 9,2) = 0, \\ \text{Schwere Lasten:} & \dots & \xi_1^2 - (l + 97)\xi_1 + (48,5l - 11,5) = 0, \\ \text{Leichte Lasten:} & \dots & \xi_1^2 - (l - 88)\xi_1 - (44,0l - 46,0) = 0. \end{cases}$$

Hierdurch ergeben sich als Näherungsregeln durch numerische Anwendung auf einzelne Werthe für l bezüglich $\xi_1 = 2,2 + 0,36l$, $\xi_1 = 2,4 + 0,29l$, $\xi_1 = -3,7 + 0,73l$ oder weniger genau $\xi_1 = 0,42l$, $\xi_1 = 0,37l$, $\xi_1 = 0,62l$. Diese letzteren Zahlen kann man recht wohl einführen, da der Werth von p sich nur wenig verändert, wenn man ξ_1 in der Nähe des ungünstigsten Werthes von ξ_1 etwas ändert. Man erhält hierdurch als Näherungsregeln

$$57. \quad \begin{cases} \text{Sehr schwere Lasten:} & p = 0,98 + \frac{13,3}{l} = 0,96A + 0,67 \frac{B}{l}, \\ \text{Schwere Lasten:} & \dots & p = 0,98 + \frac{5,4}{l} = 0,98A + 0,57 \frac{B}{l}, \\ \text{Leichte Lasten:} & \dots & p = 0,92 + \frac{1,3}{l} = 1,02A + 0,36 \frac{B}{l}. \end{cases}$$

Bei sehr schweren und schweren Lasten würde hiernach die theilweise Besetzung mit Menschengedränge immer ungünstiger sein; bei leichten Lasten ist dieselbe nur bei Längen über etwa 10^m ungünstiger.

Ein bestimmtes Verhältniss von p zu dem p_1 für das gleichschenklige Dreieck lässt sich hier weniger gut angeben, wie bei Eisenbahnbrücken, da dasselbe etwa zwischen 0,83 und 1,00 schwankt.

In Fig. 252 sind vier Kurven mit den Gleichungen:

$$1. \quad y = h \left(1 - 4 \frac{x^2}{l^2} \right), \quad 2. \quad y = \frac{1}{5} h \left(1 - 4 \frac{x^2}{l^2} \right) \left(5 - 4 \frac{x^2}{l^2} \right),$$

$$3. \quad y = h \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) \left(1 + 2 \frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right), \quad 4. \quad y = h \left(1 - 4 \frac{x^2}{l^2} \right)^2$$

dargestellt. Dieselben entsprechen 1. einer Parabel, 2. dem Horizontalschube eines flachen parabolischen Bogen konstanten Querschnittes mit Kämpfergelenken; 3. der Durchbiegung eines Einzelträgers konstanten Querschnittes in der Mitte; 4. dem Horizontalschube eines flachen parabolischen Bogens konstanten Querschnittes ohne Gelenk. Für dieselben ergibt sich beispielsweise bei einer Länge von 20^m für den von uns angenommenen Eisenbahzug:

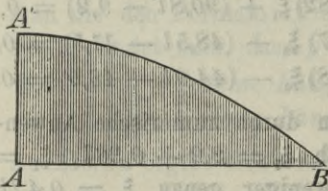
Fig. 252.



1. $F = 13,33 h$, $p = 4,897$, 2. $F = 12,80 h$, $p = 4,908$, 3. $F = 12,50 h$, $p = 4,925$, 4. $F = 10,67 h$, $p = 4,964$.

Die Abweichung von p bei 2, 3, 4 gegen den der Parabel entsprechenden Werth beträgt nur 0,2 0,5 1,3 Prozent. Man wird daher die für die Parabel aufgestellten Regeln mit ziemlich grosser Näherung auch bei andern ähnlichen Kurven verwenden können.

Fig. 253.



§. 172. Einseitige Parabelfläche. Wir betrachten diese Figur (Fig. 253) nur, weil sie die Grenzform einer unsymmetrischen Parabelfläche bildet. Die ungünstigste Belastung ist hier dieselbe, wie beim entsprechenden rechtwinkligen Dreieck $AA'B$. Es ergibt sich hier

$$Y = h \left[\Sigma G - \frac{1}{l^2} \Sigma (G x^2) \right], \quad p = \frac{3 Y}{2 l h}.$$

1. Eisenbahnbrücken. Für den angenommenen Lastenzug gibt die genaue Berechnung für einige Längen:

$$l = 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 30 \quad 50 \quad 75 \quad 100 \quad 150 \quad 200 \text{ Met.}$$

$$\frac{p}{p_0} = 0,90 \quad 0,90 \quad 0,91 \quad 0,93 \quad 0,95 \quad 0,94 \quad 0,94 \quad 0,95 \quad 0,96 \quad 0,96$$

Für $l =$ etwa 18 bis 125 Met. kann man hiernach durchschnittlich setzen:

$$58. \quad p = 0,94 p_0.$$

Unter Anwendung der für das rechtwinklige Dreieck aufgestellten Näherungsregeln ergibt sich hier leicht, wenn A, A_1, B, B_1, a die Bedeutung wie im vorigen Paragrafe haben,

$$59. \quad p = A + \frac{3B}{4l} - \frac{1}{2}(A_1 - A) \frac{a^3}{l^3} + \frac{3}{4}(B - B_1) \frac{a^2}{l^3}$$

und wenn $l \leq a$ ist,

$$60. \quad p = A_1 + \frac{3B_1}{4l}.$$

Die Einsetzung der den Formeln 11 entsprechenden Zahlenwerthe gibt

$$61. \quad \begin{cases} l \leq 40^m: & p = 4,54 + \frac{23,0}{l}, \\ l > 40^m: & p = 2,84 + \frac{94,0}{l} + \frac{27200}{l^3}. \end{cases}$$

Kleinere Längen ausgenommen, ist die Uebereinstimmung mit den genauen Werthen eine leidliche.

2. Strassenbrücken. Die Regel 60 gilt auch hier, wenn man nur Besetzung mit Wagen annimmt, welche hier im Allgemeinen die ungünstigste ist; es wird also

$$62. \quad p = A + \frac{3B}{4l}.$$

Der Vergleich mit den Regeln 57 zeigt, dass p im Allgemeinen etwas grösser wird, als für die symmetrische Parabel. Der Unterschied ergibt sich für $l = 10 \ 20 \ 50 \ 100 \ 150^m$ bezüglich für sehr schwere Lasten 9 7 6 5 4, für schwere Lasten 12 8 5 4 3 und für leichte Lasten 20 9 2 1 0 Prozent.

§. 173. Unsymmetrische Parabelfläche. Wie für die symmetrische Parabelfläche würde man die Behandlung auch für eine durch zwei Parabeln mit verschiedenem Parameter und gemeinschaftlicher Tangente begrenzte Fläche (Fig. 254) durchführen können, um damit Näherungsregeln für ähnliche, bei statisch unbestimmten Systemen vorkommende Figuren zu erhalten. Zwei Grenzfälle dieser Figur bilden die in den beiden vorigen Paragraphen behandelte symmetrische und einseitige Parabelfläche. Da die gleichwerthigen Belastungen bei diesen Grenzfällen nicht sehr verschieden sind, jedenfalls viel weniger verschieden, als bei dem entsprechenden Dreieck ACB und ausserdem der Punkt C bei den vorkommenden Fällen von der Mitte nicht viel abweicht (AC beträgt etwa 0,31 bis 0,51), so wird man in allen Fällen diejenige gleichwerthige Belastung einführen können, welche der symmetrischen Parabelfläche entspricht, man wird also die Regeln 49, 55 und 57 auch hier als Näherungsregeln anwenden können.

Beispiele.

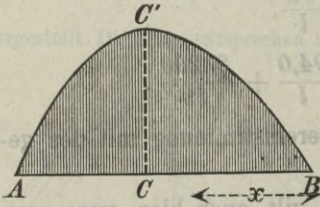
1. Die Einflusslinie für das Moment im ersten Felde eines kontinuierlichen Trägers konstanten Querschnittes mit zwei gleichen Feldern in Beziehung auf den

Querschnitt mit der Abscisse $x = 0,9b$ hat auf der linken Seite des Querschnittes für die Last 1 und die Spannweite b nach §. 110 die Gleichung (Fig. 254):

$$y = \frac{1}{8} A \frac{x}{b} \left(1 - \frac{9}{5} \frac{x^2}{b^2} \right).$$

Hiernach wird $y = 0$ für $x = \frac{1}{3} \sqrt{5} b = 0,745 b$ und y zum Maximum für $x = \frac{1}{9} \sqrt{15} b = 0,430 b$. Der Flächeninhalt bis zum Nullpunkte ergibt sich zu

Fig. 254.



Für die symmetrische Parabel mit der Gleichung

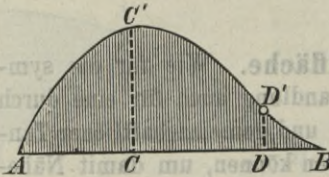
$$y = 4h \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

ergibt sich bei derselben Länge $l = 29,80^m$ das Maximum der Einflussgrösse $= 95,64h$. Da $F = \frac{2}{3} lh = 19,87h$ ist, so wird $p = \frac{95,64}{19,87} = 4,813$, also nur $0,4$ Prozent grösser.

$F = \frac{5}{288} Ab$. Für $b = 40^m$ wird die Länge dieser Einflussfigur $l = 0,745 \cdot 40 = 29,80$. Für den von uns angenommenen Eisenbahnzug ergibt sich durch genaue Bestimmung das Maximum der Einflussgrösse zu $3,329 A$ und $F = \frac{25}{36} A = 0,694 A$; daher wird die gleichwerthige Belastung pro Meter: $p = \frac{3,329}{0,694} = 4,797$.

2. Die Gleichung der Einflusslinie für das Stützenmoment eines kontinuierlichen Trägers konstanten Querschnittes ist nach §. 69, wenn der Abstand beider Fixpunkte von den Stützen $= 0,2l$ ist (Fig. 255):

Fig. 255.



$$y = A \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1,4 - \frac{x}{l} \right).$$

Hiernach wird y zum Maximum für $x = 0,384l$; bei $x = 0,8l$ liegt ein Wendepunkt. Der Flächeninhalt ist $F = 0,15 Al$. Die genaue Bestimmung gibt für unseren Eisenbahnzug bei einigen Spannweiten folgende Resultate:

	$l = 5$	10	20	30	50	75	100	150 Met.
Symmetrische Parabel:	$p = 9,59$	$5,70$	$4,91$	$4,79$	$4,05$	$3,49$	$3,20$	$2,94$
Stützenmoment:	$p = 9,69$	$6,21$	$5,10$	$4,84$	$4,22$	$3,62$	$3,33$	$3,03$
Unterschied	$1,0$	$8,8$	$3,7$	$1,0$	$4,1$	$3,7$	$3,9$	$3,5$ Proz.,

so dass auch hier der Unterschied im Allgemeinen nur klein ist.

§. 174. **Parabeldreieck** mit einer geraden Grundlinie und zwei parabolischen Seiten als Näherungsform für verschiedene bei statisch unbestimmten Systemen auftretende Einflusslinien.

1. **Tangirende Parabeln.** Wir setzen zunächst voraus, dass die Parabeln die Axe A und B (Fig. 256) mit ihren in A und B liegenden Scheiteln tangire. Bei der gefährlichsten Belastung sind die schwersten Lasten in der Nähe von C zu konzentriren und eine Last nach C zu verlegen. Man kann ausserdem noch den Satz aufstellen, dass die sta-

tischen Momente der in AC und BC liegenden Lasten für A und B , dividirt durch die Quadrate von AC und BC möglichst gleich sein sollen; gewöhnlich ist die ungünstigste Belastung dieselbe, wie beim entsprechenden Dreiecke $AC'B$. Es wird nun

$$Y = \frac{h}{l_1^2} \Sigma (G_1 x_1^2) + \frac{h}{l_2^2} \Sigma (G_2 x_2^2), \quad p = \frac{3Y}{lh},$$

wenn die in AC und BC liegenden Lasten G_1, G_2 von A und B die Abstände x_1, x_2 haben.

a) Eisenbahnbrücken. Die für einzelne Längen durch genaue Berechnung unter Voraussetzung unseres Eisenbahnzuges bestimmten Verhältnisse der Werthe von p gegen die Werthe von p' für das entsprechende Dreieck $A'CB$ sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

l Meter	$\frac{p}{p'}$ für $\frac{l_1}{l} =$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
5	1,20	1,18	1,17	1,16	1,13	1,12
7,5	1,29	1,25	1,23	1,21	1,20	1,22
10	1,20	1,22	1,24	1,18	1,23	1,26
15	1,19	1,19	1,13	1,16	1,17	1,19
20	1,12	1,14	1,11	1,12	1,14	1,11
30	1,10	1,09	1,08	1,06	1,06	1,08
50	1,12	1,10	1,10	1,07	1,09	1,09
75	1,12	1,11	1,10	1,09	1,11	1,13
100	1,11	1,11	1,09	1,10	1,12	1,14
150	1,11	1,09	1,09	1,09	1,07	1,07

Hiernach kann man für Längen von 20 bis 150^m durchschnittlich

$$63. \quad p = 1,10 p'$$

setzen und zwar erhält man hierdurch p bis auf mindestens 3,5 Prozent genau. Für kleinere Werthe von l erhält man hiernach aber p etwas zu klein. Eine einfache Gesetzmässigkeit ist hier überhaupt nicht aufzustellen. Berechnet man p nach der Regel

$$64. \quad p = (1,36 - 0,013l) p',$$

so erhält man p für Längen über 7,5^m bis auf mindestens 4,5 Prozent genau.

b) Strassenbrücken. Ganz entsprechend den für das Dreieck giltigen Regeln 34 und 38 ergibt sich hier mit Berücksichtigung der Formel 48, wenn $A, B, B_1, C_1, n, p_3, b$ dieselbe Bedeutung haben, wie dort und wenn ein hinteres Wagenrad, betreffendenfalls das des

schwersten Wagens, in C liegt und zwar 1. wenn der Theil AC auch mit Wagen besetzt ist,

$$65. \quad p = A + \frac{3(B - B_1)}{2l} + \frac{3C}{nl^2},$$

wonach in den Formeln 37 18,8 3,0 0,3 statt 12,5 2,0 0,2 und 10,5 10,5 0,9 statt 3,5 3,5 0,3 zu setzen sein würde; und 2. wenn die Strecke $AC - b = l_1 - b_1$ mit Menschengedränge besetzt ist,

$$66. \quad p = A + (A - p_3)n + \frac{3(B - 2p_3b)}{2l} + \frac{3p_3b^2}{nl^2} - \frac{p_3b^3}{n^2l^3},$$

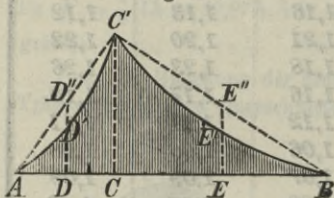
wonach in den Formeln 39 27,3 11,6 2,7 statt 18,2 7,7 1,8 und 2,76 $(1 - \frac{1}{3nl})$ statt 0,92 zu setzen sein würde.

Für die Enden, an denen in der Strecke AC keine Belastung liegen kann, ergibt sich entsprechend den Regeln 40:

$$67. \quad p = A(1 - n) + \frac{3B}{2l}.$$

2. Nichttangirende Parabeln. Wenn nun die Parabeln die Axe AB nicht tangiren (Fig. 256), so lässt sich die gleichwerthige Belastung annähernd durch Interpolation

Fig. 256.



zwischen dem Dreieck $AC'B$ und der Parabelfläche mit tangirenden Parabeln bestimmen. Bezeichnen wir die vertikale Höhe der Parabeln in der Mitte von AC und BC bis zur Sehne AC' , BC' gemessen, indem wir diese Höhe auf beiden Seiten als gleich voraussetzen, mit c , den

Werth von Y für das Dreieck $AC'B$ mit Y' , für die tangirenden Parabeln mit Y'' , so ist annähernd

$$Y = Y' - 4(Y' - Y'')\frac{c}{h},$$

weil für $c = 0$ $Y = Y'$ und für $c = \frac{1}{4}h$ $Y = Y''$ werden muss. Setzen wir $Y' = \frac{1}{2}lh p'$, $Y'' = \frac{1}{3}lh p''$, $Y = Fp = \frac{1}{6}lh(3 - 4\frac{c}{h})p$, so erhält man

$$68. \quad p = p' + p'' \frac{8c}{3h - 4c},$$

oder, wenn wir $F = \frac{1}{6}lh(3 - 4\frac{c}{h})$, also $\frac{c}{h} = \frac{3}{4} - \frac{3F}{2lh}$ setzen,

$$69. \quad p = 3p' - 2p'' + \frac{lh}{F}(p'' - p').$$

Setzt man für Eisenbahnbrücken, entsprechend der Formel 63: $p'' = 1,1p'$, so wird

$$70. \quad p = p' \left(1 + \frac{8,8c}{3h - 4c}\right) = p' \left(0,8 + 0,1 \frac{lh}{F}\right).$$

Es passt diese Regel selbst noch für den Fall, dass c negativ ist. Für die Form Fig. 254 wird $F = \frac{2}{3} l h$, also nach Formel 70 $p = 0,95p'$, was mit der Formel 49 nahezu übereinstimmt.

Beispiel. Das im vorigen Paragrafe hinsichtlich des negativen Theiles der Einflussfigur durchgeführte Beispiel 1 wollen wir noch hinsichtlich des positiven Theiles durchführen. Die Gleichung der Einflusslinie ist für die linke Seite des Querschnittes (von $x = 0,745b$ bis $x = 0,9b$):

$$y = -0,125 A \frac{x}{b} \left(1 - 1,8 \frac{x^2}{b^2}\right)$$

und für die rechte Seite (von $x = 0,9b$ bis $x = b$):

$$y = A \left(0,9 - 1,125 \frac{x}{b} + 0,225 \frac{x^2}{b^2}\right).$$

Die grösste Höhe (für $x = 0,9b$) wird $0,0515 A$. Der Flächeninhalt ergibt sich durch Integration zu $F = 0,00612 A b = 0,2448 A$. Die Länge der Einflussfigur ist $(1 - 0,745) 40 = 10,20m$.

Das Maximum von Y tritt ein, wenn eine Last von je 13 Ton. bei $x = 34,7$ 36,0 37,3^m und eine Last von 9 Ton. bei $x = 30,7m$ liegt. Der entsprechende Werth von Y ist $= 1,656 A$. Daher wird der entsprechende Werth von $p = \frac{1,656}{0,2448} = 6,76$.

Nach Formel 11 und 23 wird

$$p_0 = 4,54 + \frac{30,6}{10,2} = 7,54,$$

$$p' = 7,54 \left(1 - 0,56 \cdot \frac{4,0}{10,2} \cdot \frac{6,2}{10,2}\right) = 6,53,$$

also nach Formel 70:

$$p = 6,53 \left(0,8 + 0,1 \cdot \frac{10,20 \cdot 0,0515}{0,2448}\right) = 6,63,$$

d. i. nur 2 Prozent kleiner, als der genaue Werth.



(Bezeichnungen,)

welche gewöhnlich gebraucht sind.

- A, B, C* (*A, B, C, D* in §. 95) Koeffizienten.
C, C', C'' von der Form des Trägers abhängige Koeffizienten (Formel 6, S. 94).
D Stützendruck.
E Elastizitätskoeffizient.
F Querschnittsfläche, Flächeninhalt der Einflussfigur.
G Einzellast.
H Polweite, Horizontalspannung.
I Trägheitsmoment des Querschnittes für die auf der Kraftebene senkrechte Schweraxe.
M Moment der äusseren Kräfte für einen Querschnitt (§. 27).
M₁, M₂, ... M', M'' Stützenmomente.
Q Transversalkraft (§. 27).
R Resultante mehrerer Lasten.
S Statisches Moment einer Fläche (§. 55).
T Spezifische Schubspannung (§. 55).
Y Einflussgrösse (§. 19–26).
- ⓓ Stützendruck für den Fall einer Unterbrechung des Trägers an den Stützen.
ⓓ Moment der äusseren Kräfte beim statisch bestimmten Träger.
ⓓ', ⓓ'' von ⓓ abhängige Grössen (Formel 6, S. 94).
ⓓ Transversalkraft beim statisch bestimmten Träger.
- a* Abstand der Gelenke beim Gelenkträger von den Stützen.
b Abstand der Gelenke beim Gelenkträger unter sich.
a, b Abstand der Fixpunkte von den Stützen (§. 67).
c Abstand der Fixpunkte unter sich.
g Eigengewicht pro Längeneinheit.
h Höhe des Querschnittes; Höhe der Einflussfigur.
k Koeffizient (§. 57, 93, 95).
l Stützweite, im XX. Kap. Länge der Einflussfigur.
m, n Zeiger (Indices) und Verhältnisse.
p Verkehrslast oder zufällige Last pro Längeneinheit.
q Beliebige Last oder Gesamtlast (*g + p*) pro Längeneinheit.
t Temperaturänderung.
x Abscisse.

- y Höhe des Seilpolygons, Ordinate der elastischen Linie, Abstand der Stützen von einer Horizontalen.
- α, β, γ von der Form des Trägers abhängige Koeffizienten (§. 97).
- δ Dicke des Stoges beim I-förmigen Querschnitt (§. 61).
- ε Ausdehnungskoeffizient für die Wärme.
- κ Koeffizient (§§. 55 und 95).
- μ, ν Verhältniss der auf einander folgenden Stützenmomente bei unbelasteten Öffnungen (§. 65).
- σ Statisches Moment einer Fläche (§. 70).
- τ Neigung der Stützenquerschnitte gegen die Vertikale.
- τ' Neigung der Stützentangente gegen die Horizontale.
- ξ Abstand einer Einzellast oder des Endes einer gleichmässigen Belastung von einem Punkte.
- Δ Differenzzeichen.
- Σ Summenzeichen.
- \times Zeichen für „möglichst gleich“ (§. 24, 25, 39, 40).

I. Einzelne Werke

1. Robbans Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Wien 1850.
2. Scherzer Theorie der Geraden, Kettenträger und anderen Brücken. Braunschweig 1857.
3. Molinos et Pronier. Traité théorique et pratique de la construction des ponts suspendus. Paris 1857.
4. Laisné und Schöbler. Der Bau der Brücken mit besonderer Rücksicht auf Eisenkonstruktionen. Stuttgart. I. Aufl. 1857. IV. Aufl. 1878.
5. Bresse. Cours de mécanique appliquée. Professeur à l'école impériale des ponts et chaussées. Secondé partie. Paris 1862.
6. Culmann. Die graphische Statik. I. Aufl. Zürich 1866.
7. Grasshof. Die Festigkeitslehre. I. Aufl. Berlin 1868. — II. Aufl. unter dem Titel: Theorie der Elastizität und Festigkeit. Berlin 1878.
8. Winkler. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prag 1867.
9. Collignon. Cours de mécanique appliquée aux constructions. Paris 1869.
10. Oh v. Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. I. Aufl. 1870. IV. Aufl. 1885.
11. Leygues. Traité sur les ponts suspendus à cordons et câbles de fer. Paris 1871.
12. Ritter W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den Bau eisernen Balken. Ein Beitrag zur graphischen Statik. Zürich. I. Aufl. 1871. II. Aufl. 1888.

Literatur.

Nach der Zeit geordnet. Bei Werken mit mehreren Auflagen ist die erste Auflage als massgebend für die Reihenfolge anzusehen.

I. Einzelne Werke.

1. **Rebhann.** Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Wien 1856.
2. **Scheffler.** Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.
3. **Mollinos et Pronnier.** *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques.* Paris 1857.
4. **Laissle und Schübler.** Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rücksicht auf Eisenkonstruktionen. Stuttgart, I. Aufl. 1857. IV. Aufl. 1876.
5. **Bresse.** *Cours mécanique appliquée professé à l'école impériale des ponts et chaussées. Seconde partie.* Paris 1862.
6. **Culmann.** Die grafische Statik. I. Aufl. Zürich 1866.
7. **Grashof.** Die Festigkeitslehre. I. Aufl. Berlin 1866. — II. Aufl. unter dem Titel: Theorie der Elastizität und Festigkeit. Berlin. 1878.
8. **Winkler.** Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prag. 1867.
9. **Collignon.** *Cours de mécanique appliquée aux constructions.* Paris 1869.
10. **Ott v.** Die Grundzüge des grafischen Rechnens und der grafischen Statik. I. Aufl. 1870. IV. Aufl. 1885.
11. **Leygue.** *Etude sur les surgarges à considérer dans les calculs des tabliers métalliques d'après des conditions générales d'exploitation des chemins de fer.* Paris 1871.
12. **Ritter W.** Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken. Ein Beitrag zur grafischen Statik. Zürich. I. Aufl. 1871. II. Aufl. 1883.

13. **Bauschinger.** Elemente der grafischen Statik. München. I. Aufl. 1871. II. Aufl. 1880.
14. **Ott v.** Vorträge über Baumechanik. II. Theil. Prag. I. Aufl. 1872. II. Aufl. 1878.
15. **Weyrauch.** Allgemeine Theorie der kontinuierlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
16. **Levy.** *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Paris 1874.
17. **Greene.** *Graphical method for the analysis of bridge trusses extended to continuous girders and draw span.* New-York 1875.
18. **Tetmayer.** Die äusseren und inneren Kräfte statisch bestimmter Brücken und Dachstuhlkonstruktionen. Zürich 1875.
19. **Jay du Bois.** *The elements of graphical statics and their application to framed structures.* New-York. I. ed. 1875. II. ed. 1877.
20. **Ritter A.** Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik. Hannover 1876.
21. **Merriman.** *On the theory and calculation of continuous bridges.* New-York 1876.
22. **Böhlk.** Statische Berechnung der Balkenbrücken einer Oeffnung. Hannover 1877.
23. **Loewe.** Grundzüge zu Vorlesungen über eiserne Balkenbrücken. München 1877.
24. **Eddy.** *Researches in graphical statics.* New-York 1878. (X. *The continuous girder with variable cross section.*)
25. **Holzhey.** Vorträge über Baumechanik. Wien 1872—1879.
26. **Krohn.** Resultate aus der Theorie des Brückenbaues und deren Anwendung, erläutert durch Beispiele. I. Theil. Balkenbrücken. Aachen 1879.
27. **Müller-Breslau.** Elemente der grafischen Statik der Baukonstruktionen. Berlin 1879.
28. **Castigliano.** *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications.* Turin 1879.
29. **Stelzel.** Theorie einfacher, statisch bestimmter Brückenträger. Wien 1880.
30. **Chalmers.** *Graphical determination of forces in engineering structures.* London 1881.
31. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. II. Bd. Der Brückenbau. Herausgegeben von Schäffer und Sonne. Leipzig 1882. (**Fränkel**, bewegliche Brücken. **Steiner**, Konstruktion der eisernen Balkenbrücken.)
32. **Herrmann.** Die Statik der Bauwerke. (V. Aufl. von Weisbach's Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, I. Abth. des II. Theiles.) Braunschweig 1882.

33. **Landsberg.** Die Statik der Hochbaukonstruktionen. Im Handbuche der Architektur. I. Th. I. Bd. Darmstadt 1883.
34. **Göbel.** Theorie der Maximalmomente einfacher Träger. Mainz 1883.
35. **Wittmann.** Statik der Hochbaukonstruktionen, II. und III. Theil. München 1882 und 1884.
36. **Nehls.** Der einfache Balken auf zwei Endstützen unter ruhender und beweglicher Last. Auf Grundlage der Methode der grafischen Differenziation und Integration. Hamburg 1885.
37. **Weyrauch.** Aufgaben zur Theorie elastischer Körper. Leipzig 1885.

II. Artikel in Zeitschriften.

a) Statisch bestimmte Träger.

1. **Schmidt H.** Ueber die Bestimmung der äusseren auf ein Brückensystem wirkenden Kräfte. Förster's Bauz. 1866.
2. **Heinzerling.** Das Vertheilungsgesetz der grössten einseitigen Belastung über Brückenträger. Zeitschr. f. Bauw. 1867.
3. **Vojacek.** Grafische Bestimmung der Biegemomente an kurzen Trägern. Zeitschr. des Ver. deutscher Ingen. 1868.
4. **Cotteril.** *On the graphical construction of bending moments.* *Engineering* 1869. (VII)
5. **Schäffer.** Hilfssätze zur Berechnung der Fachwerkträger. Zeitschr. f. Bauw. 1870.
6. **Winkler.** Theorie der äusseren Kräfte gerader Träger. Zeitschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1870.
7. **Housselle.** Zur Eintheilung der Balken mit freiliegenden Stützpunkten. Deutsche Bauz. 1872.
8. **Loewe.** Ueber variable Belastung der Eisenbahnbrücken. Zeitschr. d. bair. Arch.- und Ingen.-Ver. 1874.
9. **Schuster.** Bestimmung der Maximalmomente von Eisenbahnbrücken für concentrirte Belastung. Zeitschr. f. Bauw. 1875.
10. **Heinzerling.** Belastungsäquivalente zur Bestimmung der durch fortschreitende Eisenbahnzüge erzeugten grössten Vertikalscheerkräfte. Zeitschr. f. Bauw. 1875.
11. **Weyrauch.** Die Maximalmomente einfacher Träger bei festen und mobilen Lastsystemen. Zeitschr. d. hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1875.
12. **Schäffer.** Vergleich der Brückenbelastungen durch Lokomotivzüge mit gleichförmigen Belastungen. Deutsche Bauz. 1876.
13. **Asimont.** Die Berechnung des Tragbalkens mit concentrirter Verkehrslast. Zeitschr. der bair. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1876.
14. **Ritter W.** Die zufällige Belastung bei Eisenbahnbrücken. Rigaer Industrie-Zeit, 1877.
15. **Wittmann.** Die grafische Bestimmung der Maximalmomente einfacher Träger. Zeitschr. d. bair. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1877.
16. **Kleitz.** *Sur la substitution dans les calculs de stabilité de travées métalliques supportent de voies de terre, de surcharges uniformément réparties à celles qui résultent du passage des plus lourdes voitures.* *Ann. des ponts et chauss.* 1877. (XIV.)
17. **Stahl.** Die Maximalmomentenkurve eines mobilen Lastsystemes. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingen. 1877.

18. **Zimmermann.** Das Momentenschema; ein Hilfsmittel zur Abkürzung der statischen Berechnung von Brückenträgern. Zeitschr. d. hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1877.
19. **Bresse.** *Note sur la détermination graphique des moments fléchissants qui se produisent dans une poutre à deux appuis simples, pendant le passage d'un convoi.* Ann. des ponts et chauss. 1877. II.
20. **Scholin.** Analytische Bestimmung des absoluten Maximalmomentes einfacher vollwandiger Brückenträger. Wochenschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1878.
21. **Stelzel.** Ueber gefährlichste Belastung einfacher Träger. Zeitschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1878.
22. **Lachner.** Beitrag zur grafischen Berechnung von Brückenträgern. Deutsche Bauz. 1879.
23. **Baldermann.** Die grafische Integration und ihre Anwendung auf die Statik der äusseren Kräfte am einfachen Balken. Förster's Bauz. 1881.
24. **Almquist.** Ueber die grafische Bestimmung der Maximalmomente bei indirekter Belastung. Civilingenieur 1884.

b) Kontinuierliche Träger.

1. **Köpke.** Ueber die Dimensionen von Balkenlagern, besonders in Lagerhäusern. Zeitschr. d. hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1856.
2. **Scheffler.** Ueber die Vermehrung der Tragfähigkeit der Träger durch angemessene Bestimmung der Höhe und Entfernung der Stützpunkte. Organ für Eisenbahnw. 1857.
3. **Baensch.** Zur Theorie der Brückenbalkensysteme. Zeitschr. f. Bauw. 1857.
4. **Clapeyron.** *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés.* Comptes rendus 1857.
5. **Grashof.** Ueber die relative Festigkeit mit Rücksicht auf deren möglichste Vergrösserung durch angemessene Unterstützung und Einmauerung der Träger bei konstantem Querschnitte. Zeitschr. d. deutschen Ingen.-Ver. 1857. 1858. 1859.
6. **Mohr.** Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. d. hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1860.
7. **H.** Kontinuierliche Brückenträger. Civilingenieur 1860.
8. **Winkler.** Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger. Civilingenieur 1862.
9. **Quensell.** Beitrag zur statischen Berechnung kontinuierlicher Balken und Anwendung auf die Berechnung der Drehscheiben. Zeitschr. f. Bauw. 1865.
10. **Albaret.** *Etude des ponts métalliques à poutres droites reposant sur plus de deux appuis.* Ann. des ponts et chauss. 1866.
11. **Renaudot.** *Mémoire sur le calcul et le contrôle de la résistance des poutres droites à plusieurs travées.* Ann. des ponts et chauss. 1866.
12. **Fränkel.** Ueber die ungünstigste Stellung eines Systemes von Einzellasten auf Trägern über eine und über zwei Oeffnungen, speziell über Trägern von Drehscheiben. Civilingenieur 1868.
13. **Mohr.** Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. d. hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver. 1868.
14. **Schmidt H.** Betrachtungen über Brückenträger, welche auf zwei und mehr Stützpunkten frei aufliegen, sowie über den Einfluss der ungleichen Höhenlage der Stützpunkte. Förster's Bauz. 1868.
15. **Lippich.** Theorie des kontinuierlichen Trägers konstanten Querschnittes. Elementare Darstellung der von Clapeyron und Mohr begründeten analytischen und grafischen Methoden und ihres Zusammenhanges. Förster's Bauz. 1871. Auch als Separatabdruck.
16. **Pierre.** *Note sur l'application sur laquelle on peut compter dans la méthode actuelle de calcul des poutres à plusieurs travées.* Ann. des ponts et chauss. 1876.

17. **Renoust des Orgeries.** *Mémoire sur les poutres droites.* Ann. des ponts et chauss. 1871. II.
18. **Poulet.** *Du soulèvement des poutres métalliques un-dessus des culées.* Ann. des ponts et chauss. 1872. II.
19. **Winkler.** Theorie der kontinuierlichen Träger. Zeitschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1872.
20. **Scholin.** Geometrische Theorie der kontinuierlichen Träger. Mittheil. d. Arch.- u. Ingen.-Ver. in Böhmen, 1873. 1874.
21. **Schlösser.** Ueber kontinuierliche Träger von konstantem Querschnitte mit ungleichförmiger Belastung. Deutsche Bauz. 1874.
22. **Lavoinne.** *De la répartition des charches sur les tabliers des ponts.* Ann. des ponts et chauss. 1874. I.
23. **Chorou.** *Calcul des moments flechissants et de flèches dans les poutres droites métalliques à plusieurs travées.* Ann. des ponts et chauss. 1874. II.
24. **Gaudard.** *Influence des dénivellations d'appuis dans les poutres à plusieurs travées solidaires.* Ann. du genie civil 1875.
25. **Schäffer.** Belastungsgesetze für den geraden stabförmigen Körper von konstantem Querschnitte. Zeitschr. f. Bauw. 1876.
26. **Bender.** *Application of the theory of continuous girders to economy in bridge building.* Transact. of the amer. soc. of civ. engin. 1876.
27. **Fouret.** *Détermination graphique des moments de flexion d'une poutre à plusieurs travées solidaires.* Ann. des ponts et chauss. 1876. I.
28. **Kleititz.** *Note sur les calculs de stabilité des poutres continues, ayant des moments d'inertie variables.* Ann. des ponts et chauss. 1876. I. 1877. I.
29. **Böhlke.** Beitrag zur Theorie der kontinuierlichen Träger. Deutsche Bauz. 1877.
30. **Steiner.** Einfluss der Temperatur auf kontinuierliche Träger. Wochenschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1877. 1878.
31. **Engesser.** Zur Theorie der kontinuierlichen Träger. Zeitschr. f. Baukunde 1878.
32. **Brick.** Beitrag zur Berechnung der Balkenträger. Zeitschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1878.
33. **Krohn.** Einfluss der Querträger auf kontinuierliche Balken. Förster's Bauz. 1879.
34. **Weyrauch.** Temperatureinflüsse bei kontinuierlichen Trägern. Zeitschr. f. Baukunde 1879.
35. **Schleck.** Berechnung eines kontinuierlichen Trägers mit fünf Oeffnungen nach Lippich's Methode. Förster's Bauz. 1880.
36. **Kupferschmied.** Ueber eine allgemeine Form der Clapeyron'schen Momentengleichungen. Zeitschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1880.
37. **Hulewicz.** *Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées.* Ann. des ponts et chauss. 1882. I.
38. **Könen.** Vereinfachung der Berechnung der kontinuierlichen Balken mit Hilfe des Satzes von der Arbeit. Wochenbl. für Arch. u. Ingen. 1882.
39. **Könen.** Abgekürztes Verfahren für die analytische Behandlung kontinuierlicher Balken. Centralbl. der Bauverw. 1882.
40. **Rytirsch.** Der kontinuierliche Balken. Förster's Bauz. 1882.
41. **Scholin.** Zur Theorie des kontinuierlichen Trägers veränderlichen Querschnitts. Civilingenieur 1885.

Fig. 1. Fixpunkte

II. Momentenmaasstab zu Fig. 2.

10 5 0 10 20 30 Tonnenmeter

III. Kraftmaasstab zu Fig. 2. Stützendrucke

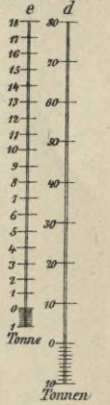


Fig. 2. Stützmomente

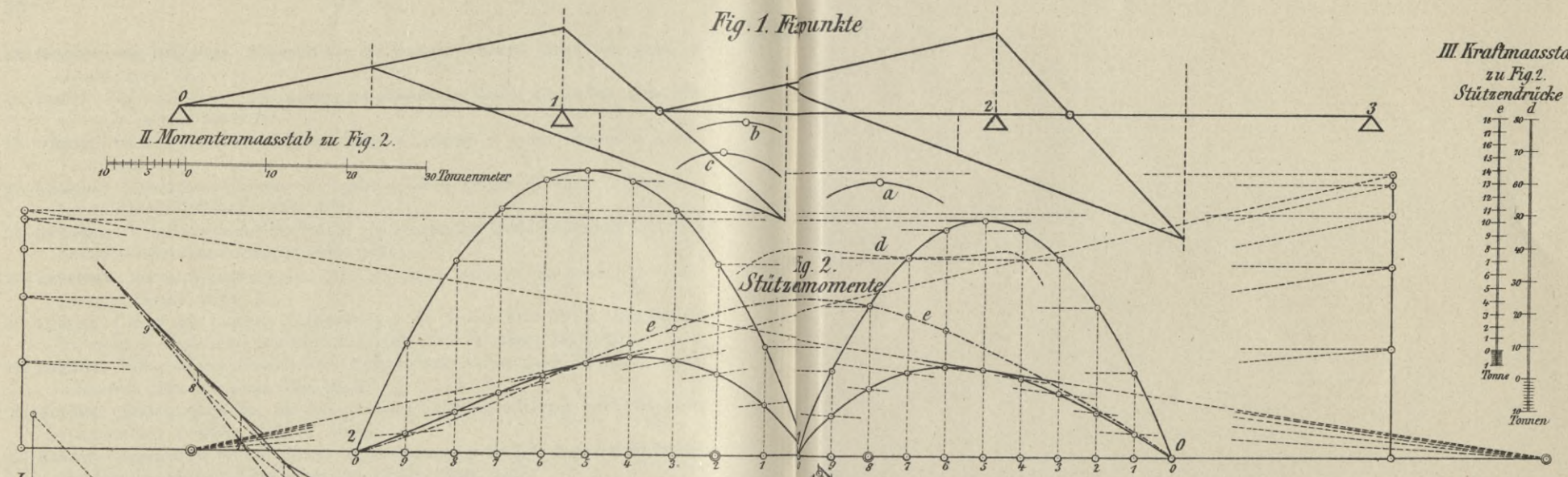


Fig. 8.

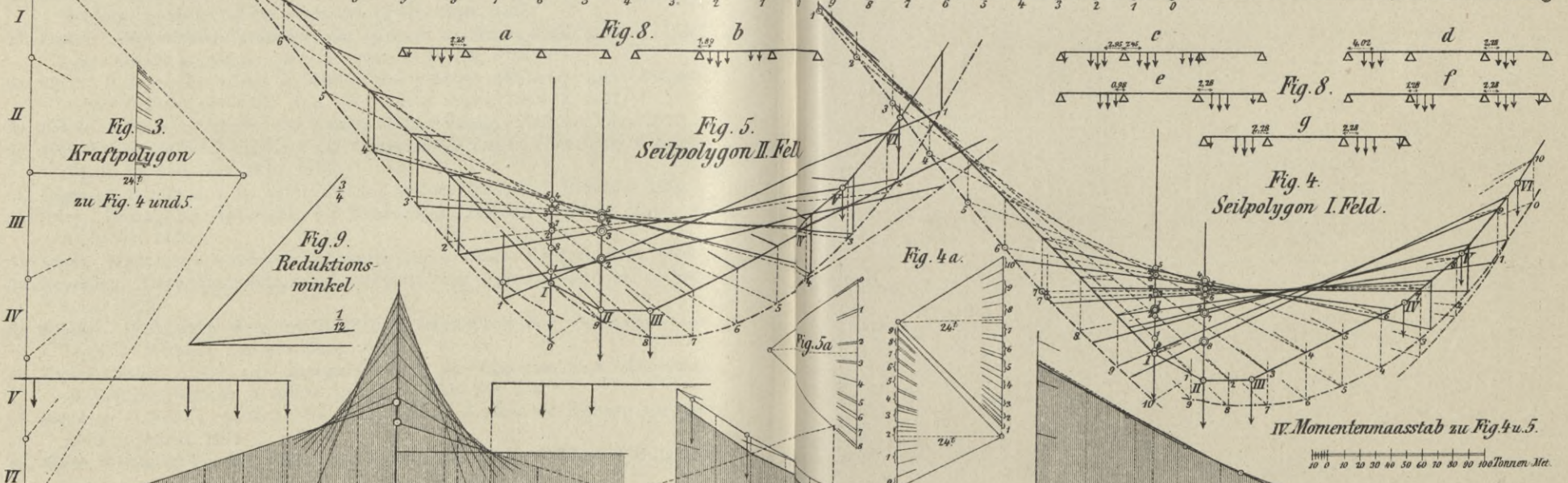


Fig. 5. Seilpolygon II. Feld

Fig. 4. Seilpolygon I. Feld

Fig. 3. Kraftpolygon zu Fig. 4 und 5.

Fig. 9. Reduktionswinkel



IV. Momentenmaasstab zu Fig. 4 u. 5.

10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 Tonnen-Met.

Fig. 6. Maximalmomente

Fig. 7. Maximal Transversalkräfte

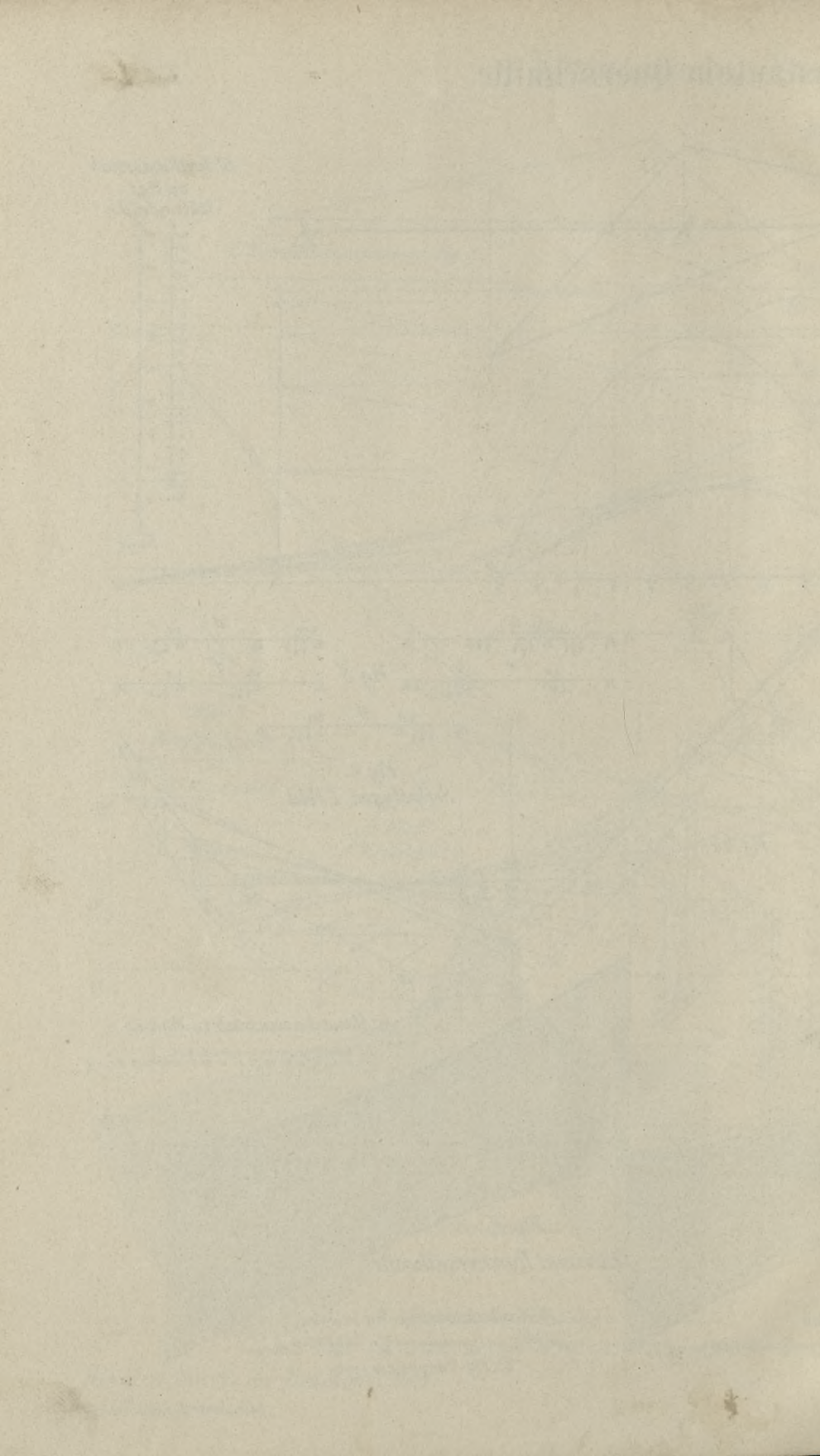
V. Momentenmaasstab zu Fig. 6.

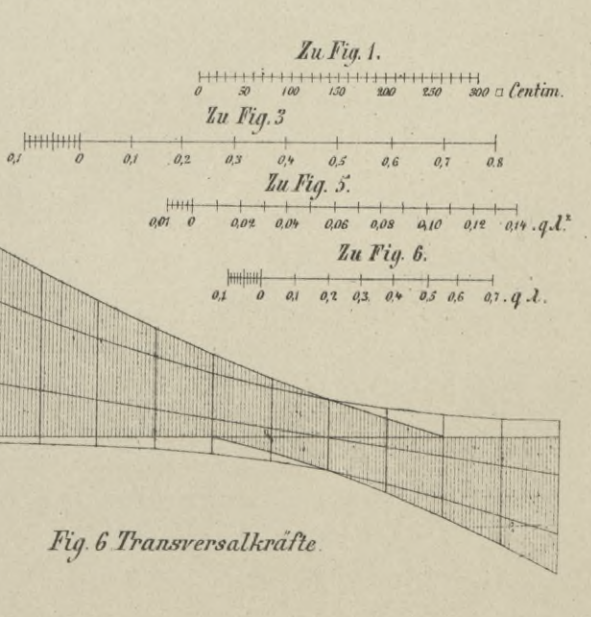
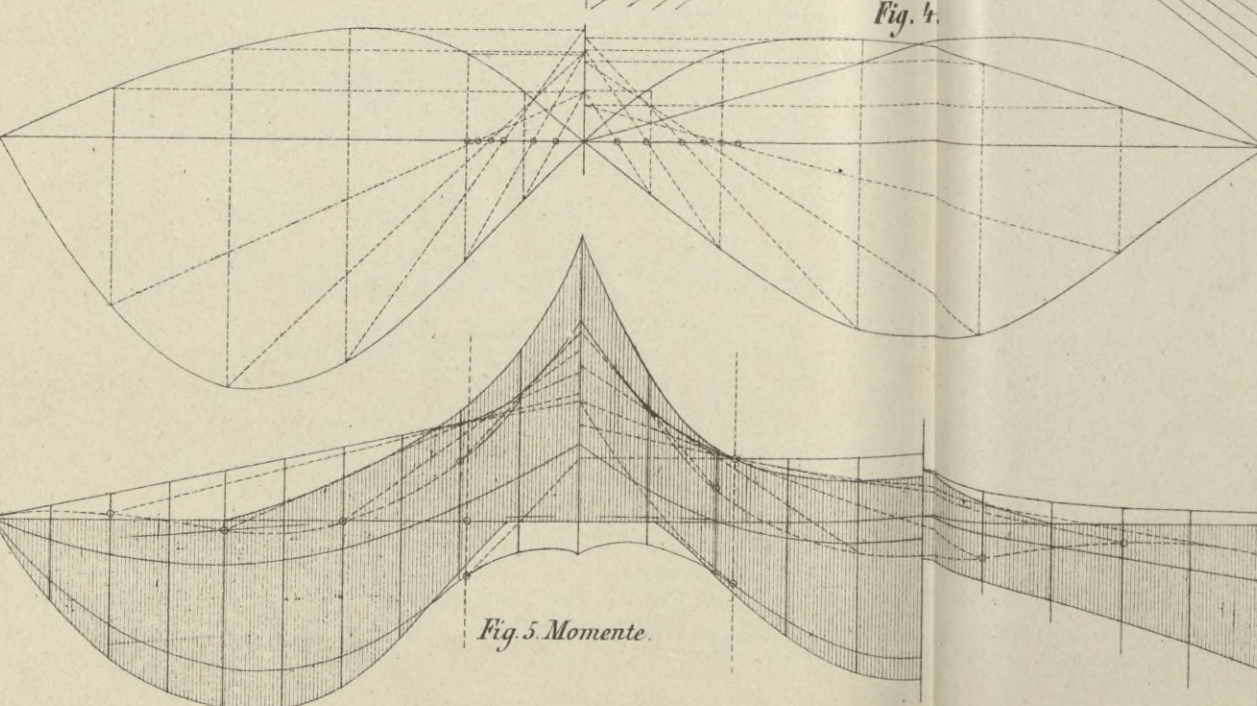
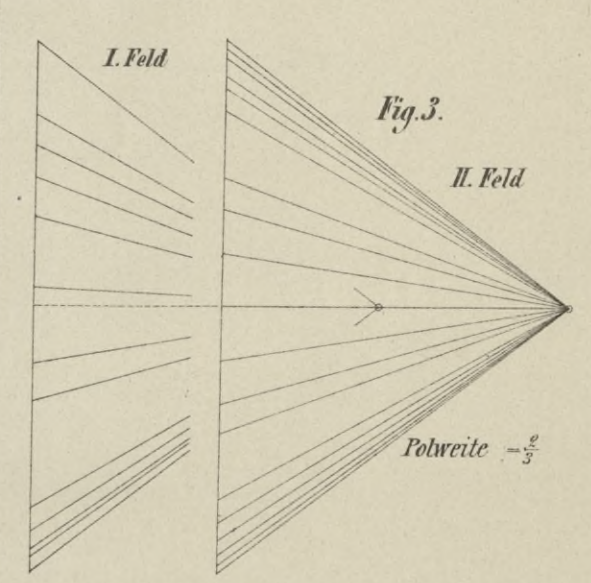
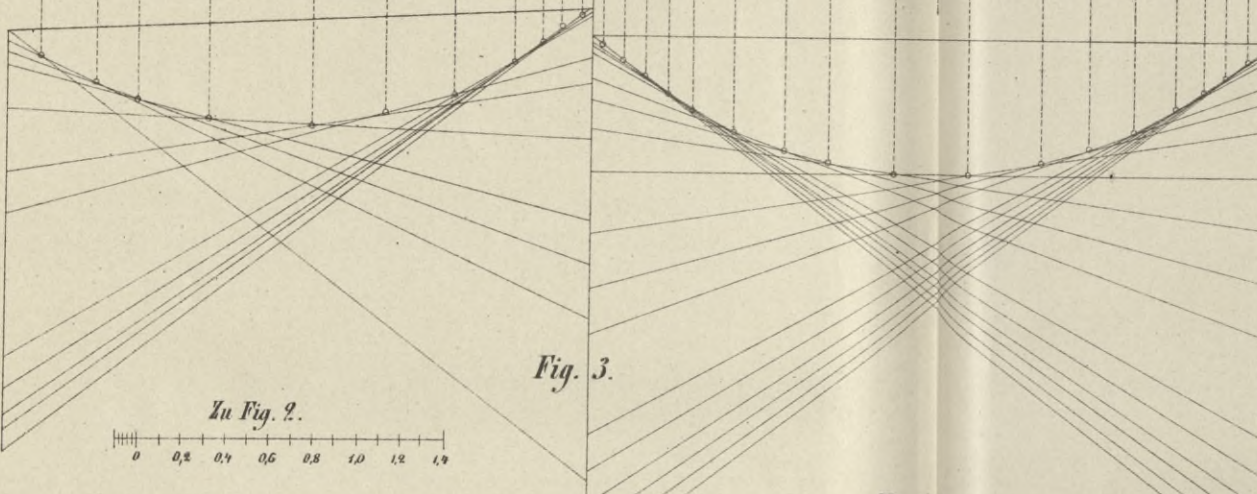
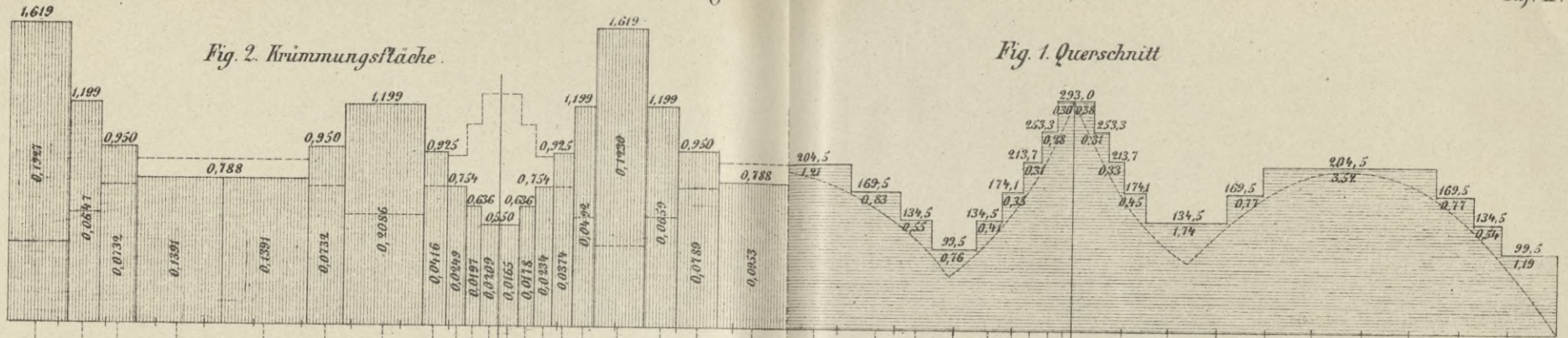
I. Längenmaasstab

VI. Kraftmaasstab zu Fig. 4a. Sa. u. 7

10 5 0 10 20 30 40 50 Tonnen

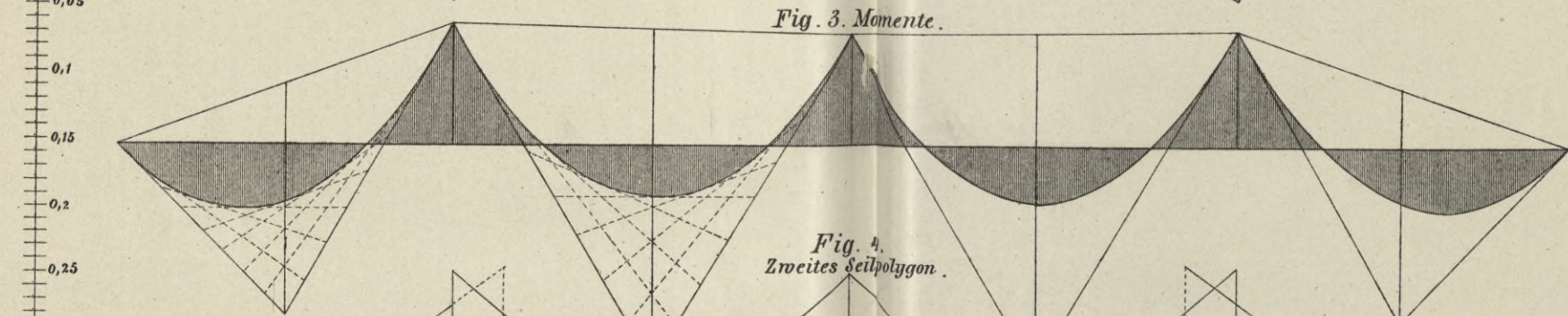
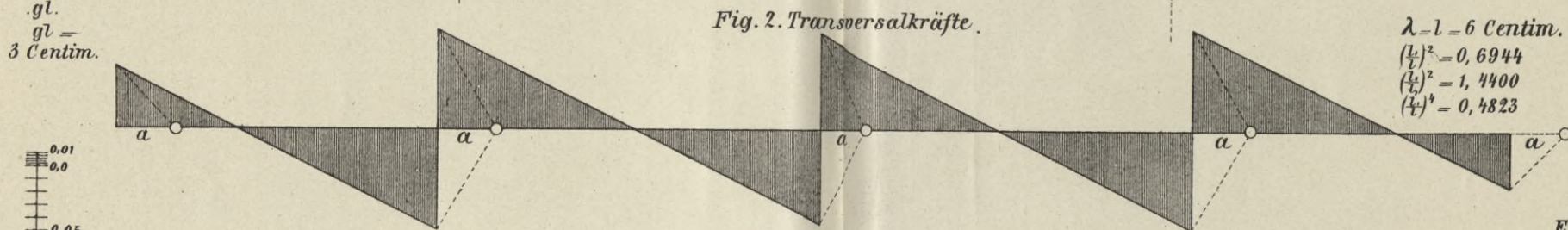
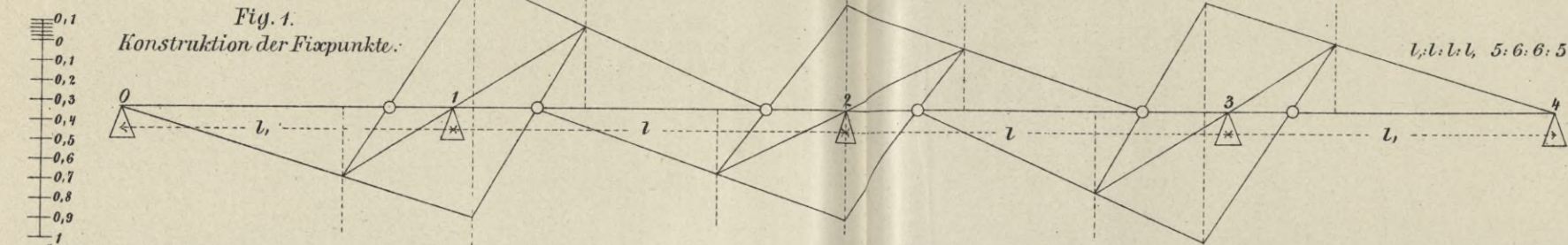
Zu Fig. 3. doppelt so gross





Kontinuierlicher Träger mit konstantem Querschnitte.

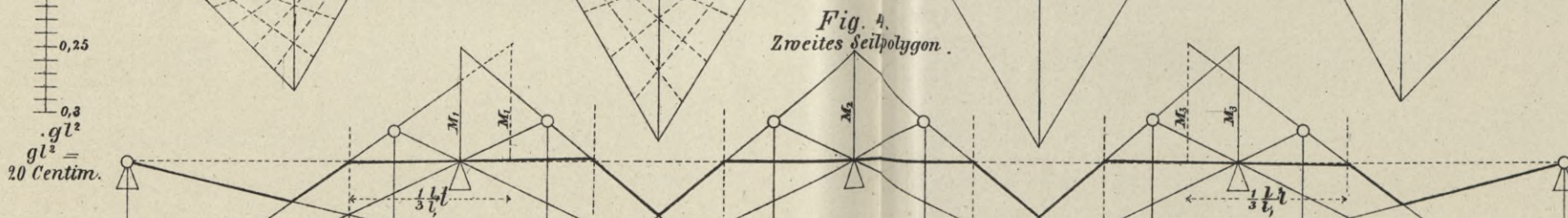
A. Einfluss des Eigengewichtes.



Erste Poldistanz a

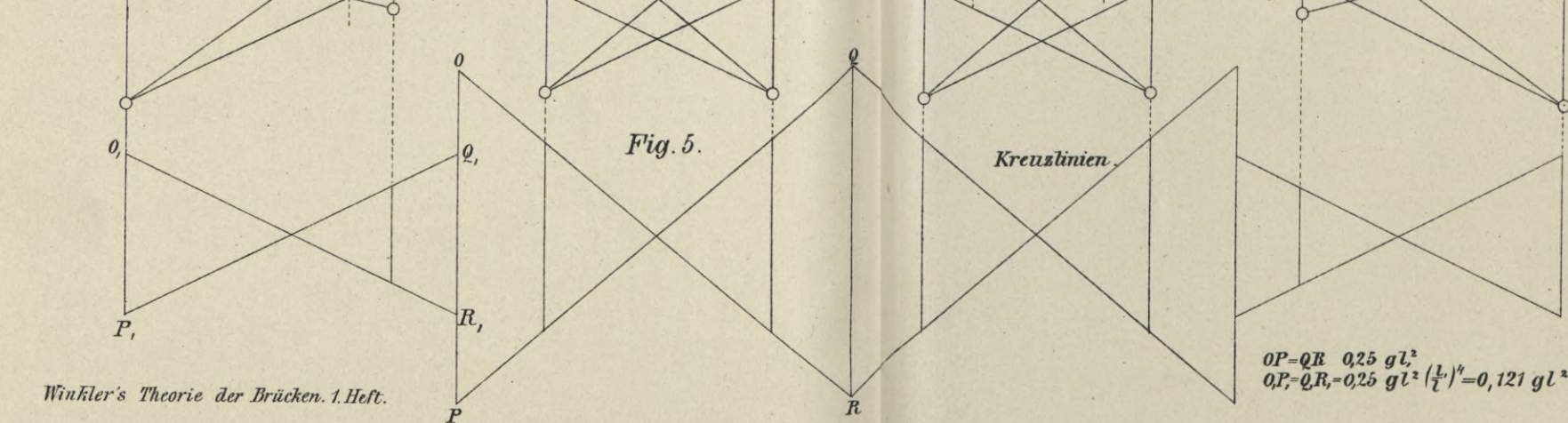
$$a = \frac{5}{20} l = 0,9 \text{ Cent.}$$

Fig. 4. Zweites Seilpolygon.



Zweite Poldistanz b

$$b = \frac{1}{6} l = 1 \text{ Cent.}$$



Kontinuierlicher Träger mit konstantem Querschnitte.

B. Transversalkräfte in Folge der zufälligen Last.

Erste Kräfte-Polygone.

Fig. 5.

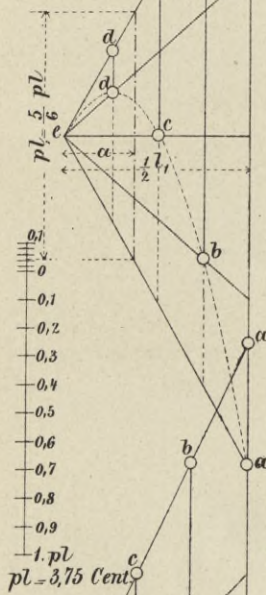


Fig. 6.

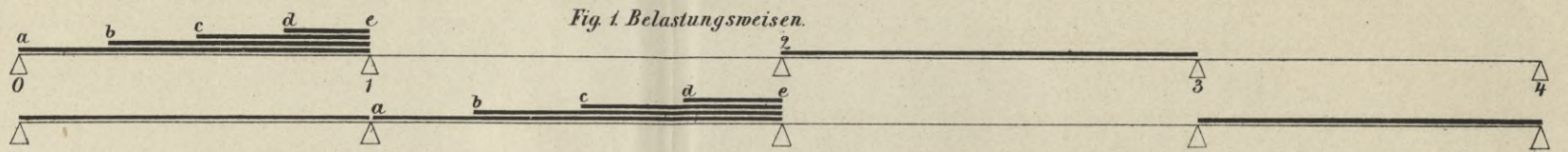
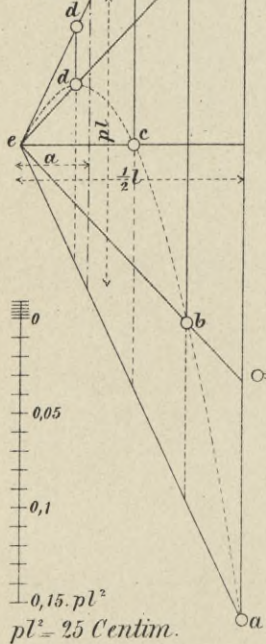
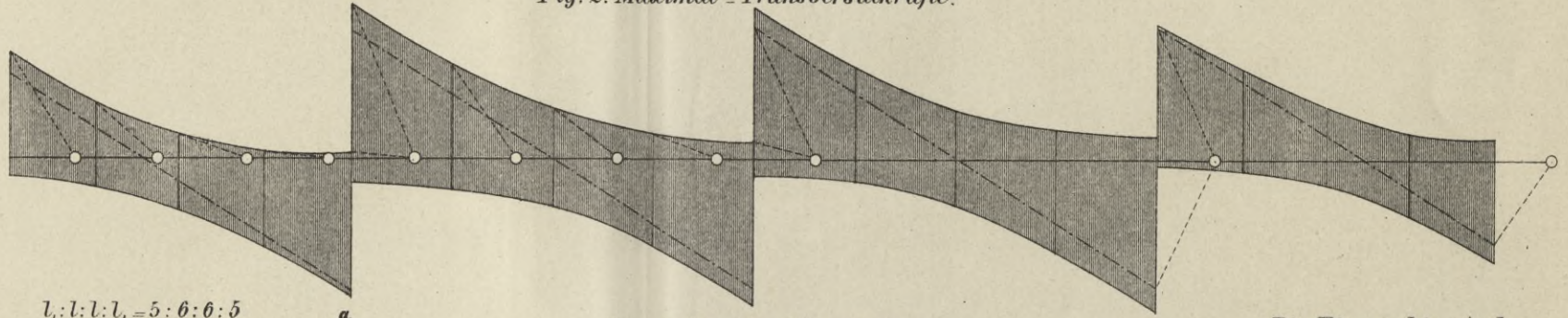


Fig. 2. Maximal - Transversalkräfte.



$l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 5 : 6 : 6 : 5$
 $\lambda = l = 6 \text{ Centim.}$

Fig. 3. Zweites Seilpolygon.

Die Fixpunkte sind von Taf. III übertragen.

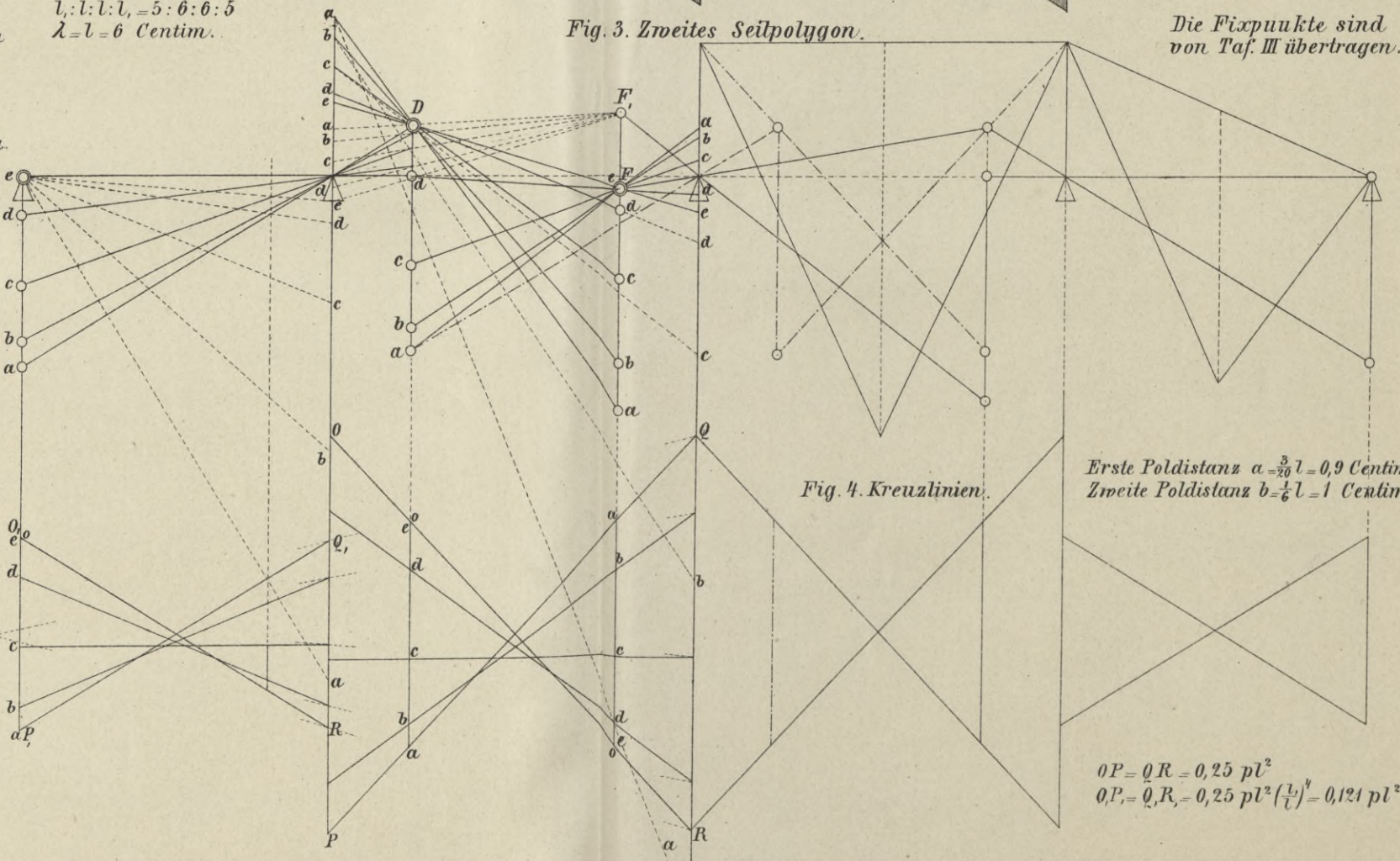


Fig. 4. Kreuzlinien.

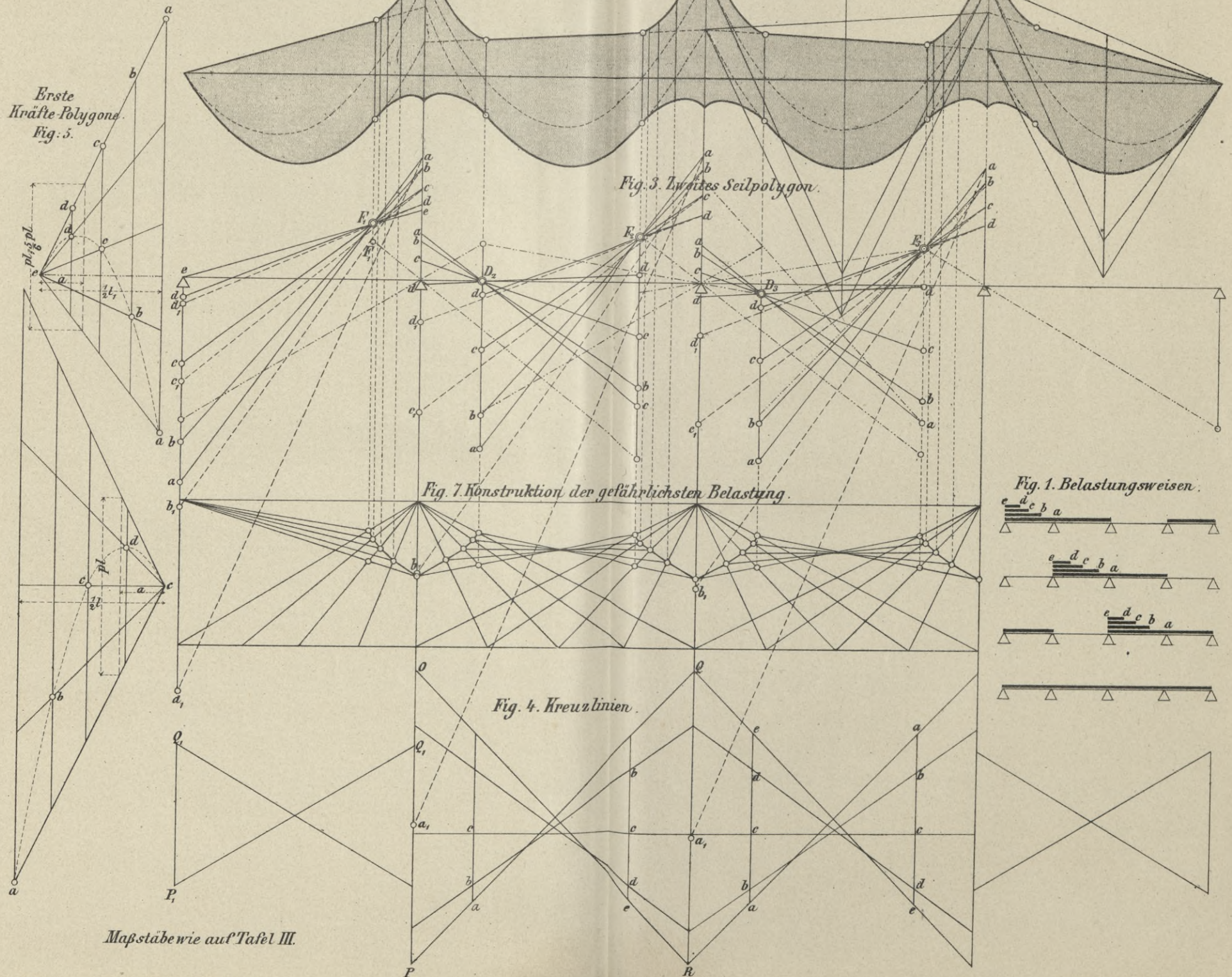
Erste Poldistanz $a = \frac{5}{20} l = 0,9 \text{ Centim.}$
 Zweite Poldistanz $b = \frac{1}{6} l = 1 \text{ Centim.}$

$$\begin{aligned}
 0P = 0Q = 0R &= 0,25 pl^2 \\
 0P = 0Q, R &= 0,25 pl^2 \left(\frac{1}{l}\right)^2 = 0,121 pl^2
 \end{aligned}$$

C. Momente in Folge der zufälligen Last.

Fig. 2.

Maximalmomente.



Erste Kräfte-Polygone. Fig. 5.

Fig. 3. Zweites Seilpolygon.

Fig. 7. Konstruktion der gefährlichsten Belastung.

Fig. 4. Kreuzlinien.

Fig. 1. Belastungsweisen.

Maßstäbe wie auf Tafel III.

$l_1:l_2:l_3 = 5:6:5$
 Erste Poldistanz
 $a = \frac{42}{280} l = \frac{3}{20} l$

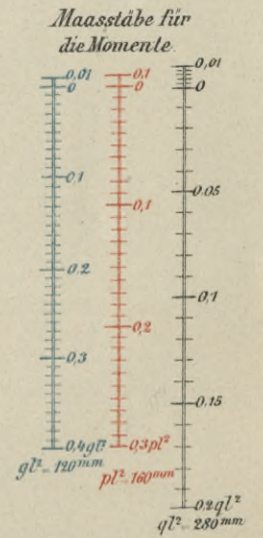
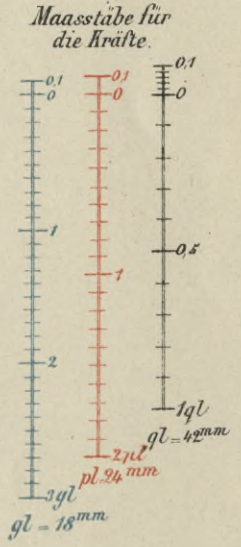


Fig. 7.
Erste Kräfte-Polygone.

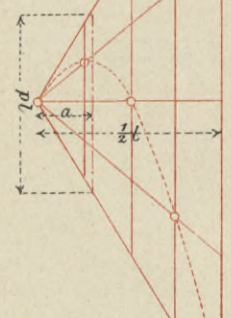


Fig. 5.
Zweites Seilpolygon.

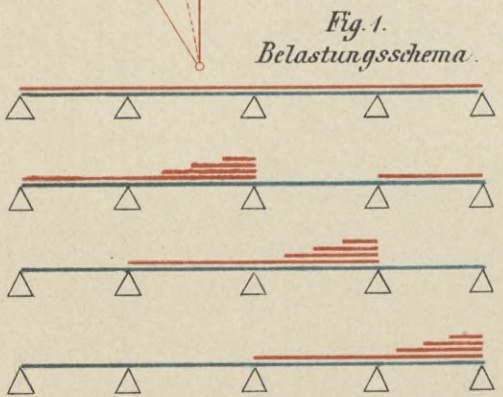


Fig. 1.
Belastungsschema.

Eigengewicht
Zufällige Last
Gesamt Last

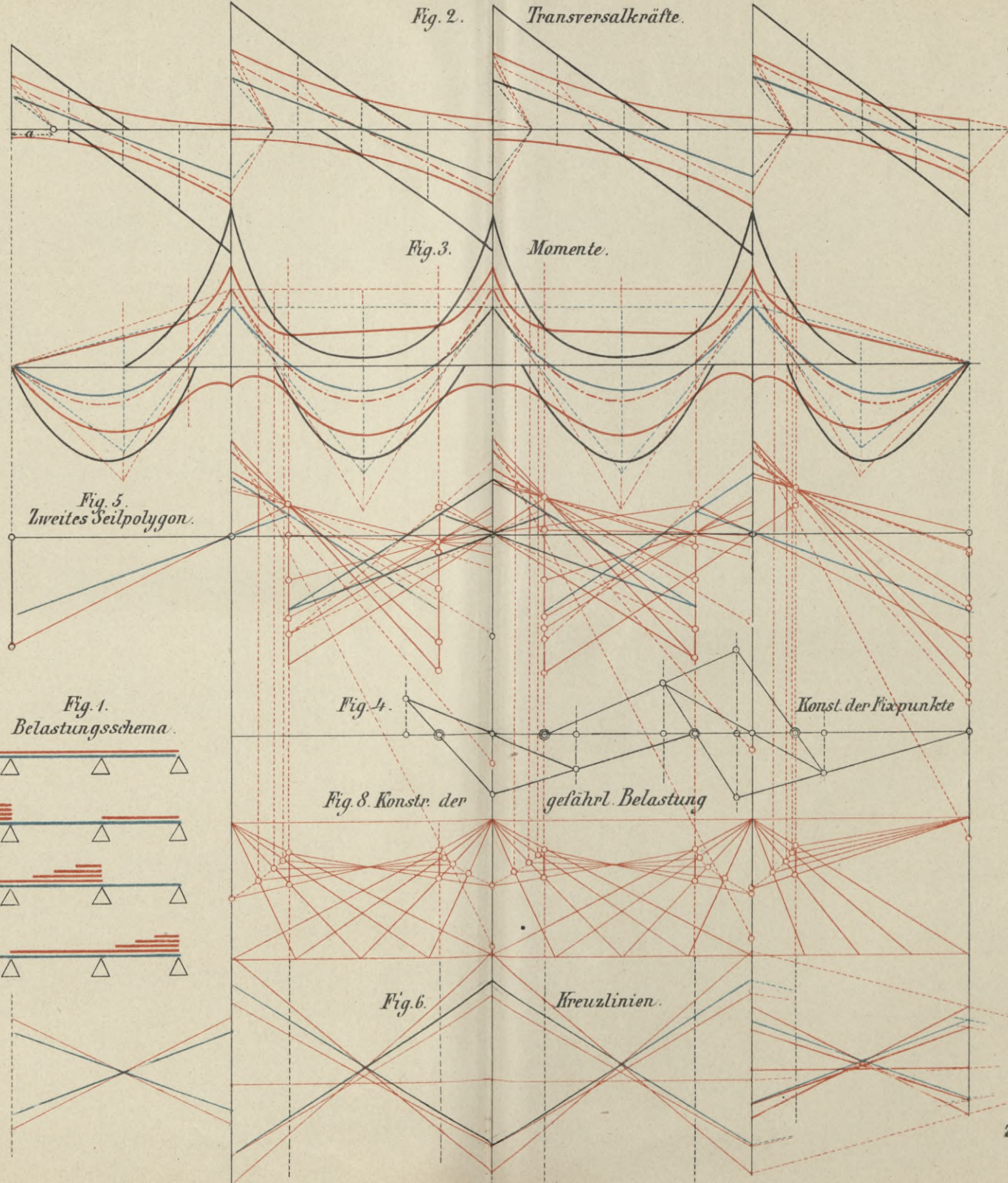


Fig. 2. Transversalkräfte.

Fig. 3. Momente.

Fig. 4.

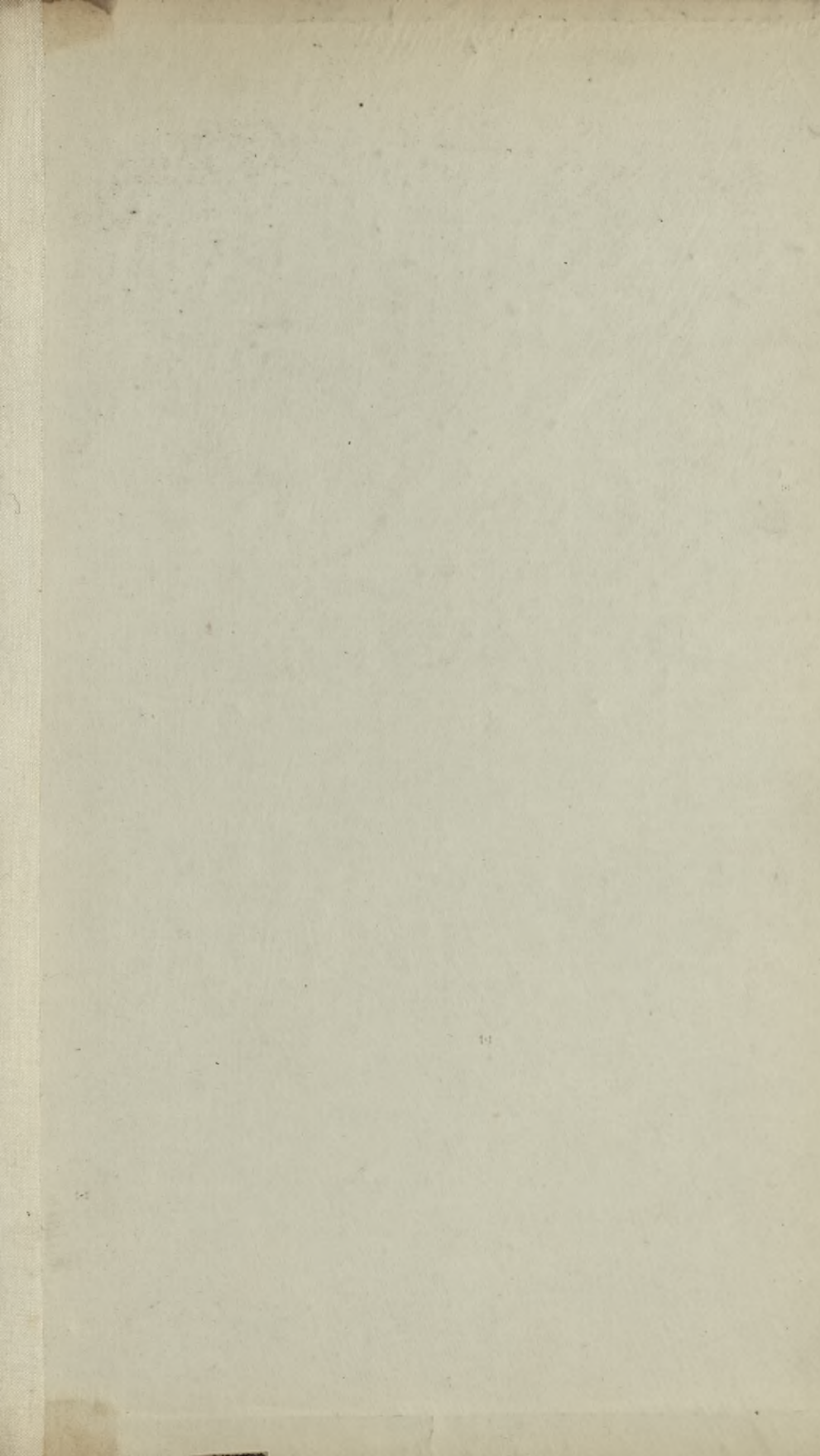
Konst. der Fixpunkte

Fig. 8. Konstr. der gefährl. Belastung

Fig. 6. Kreuzlinien.

Zweite Poldistanz
 $b = \frac{1}{6} l$

S. 61



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRA

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



7828

L. inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299555