



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299058

THEORIE UND BERECHNUNG

DER

WECHSELSTROMERSCHEINUNGEN

VON

CHARLES PROTEUS STEINMETZ.

DEUTSCHE, VOM VERFASSER AUTORISIERTE AUSGABE.

MIT 189 TEXTFIGUREN.

B. Nr. 22960

2872



BERLIN,

VERLAG VON REUTHER & REICHARD

1900.

26. 14
64

XX
154

Alle Rechte vorbehalten.

II 5378



Akc. Nr. _____ 5091/50

Vorwort zur ersten deutschen Auflage.

Im vorliegenden Werke habe ich mich bemüht, diejenigen verschiedenen Methoden zu beschreiben und ausführlich auseinanderzusetzen, die ich in der Erfahrung zur Untersuchung der mannigfachen in Wechselstromkreisen und Wechselstromapparaten auftretenden Erscheinungen und zur exakten Berechnung derselben als am besten geeignet gefunden habe.

Obwohl das Buch notwendigerweise eine gewisse Vorkenntnis der Wechselstromtechnik voraussetzt, habe ich dasselbe so elementar als möglich zu halten gesucht, und habe daher alle darin benutzten Untersuchungsmethoden allmählich eingeführt und ausführlich besprochen, mit Berechnung zahlreicher Beispiele.

Der erste Teil des Buches ist der Erläuterung der verschiedenen Untersuchungsmethoden und der Behandlung von Wechselstromerscheinungen allgemeiner Natur gewidmet, während im zweiten Teil spezielle Wechselstromapparate und Systeme behandelt sind.*)

Die vorliegende deutsche Ausgabe ist im wesentlichen eine Übersetzung der zweiten englischen Auflage; indes

*) In diesem zweiten praktischen Teile ist die deutsche Terminologie nach Möglichkeit der elektrotechnischen Praxis entlehnt, während im ersten allgemein-theoretischen Teil dies weniger der Fall ist. Beispielsweise ist „Magnetische Strömung“ durch „Kraftlinien“ und „Querströmung“ durch „Streuung“ ersetzt.

Der Übersetzer.

ist in derselben bereits ein grosser Teil des Materials verwendet, das bei der Vorbereitung der im Erscheinen begriffenen *dritten* englischen Auflage benutzt wurde.

Bei der Herausgabe der ersten englischen Auflage war die symbolische Methode der Untersuchung von Wechselstromerscheinungen mittels komplexer Grössen noch verhältnismässig neu und wenig bekannt. Seitdem hat, meiner Voraussage entsprechend, sich durch die praktische Erfahrung diese symbolische Methode allen früheren in solchem Grade überlegen erwiesen, dass die Methode der komplexen Grössen alle anderen Methoden der Untersuchung komplizierter Wechselstromerscheinungen fast vollständig aus der elektrotechnischen Praxis verdrängt hat.

Es bedarf daher keiner weiteren Begründung, dass der wesentlichste Teil des Buches Untersuchungen mittels komplexer Grössen gewidmet ist. Indes sind die anderen Untersuchungsmethoden, wo sie überhaupt zum Ziele führen können, gewöhnlich in einer zu ihrem Verständnis genügenden Ausführlichkeit angedeutet und besprochen.

In einem gewissen Grade kann vorliegendes Werk als eine Ausführung und Erweiterung meines auf dem internationalen Elektriker-Kongress zu Chicago 1893 gehaltenen Vortrages über die Anwendung komplexer Grössen in der Elektrotechnik betrachtet werden. Indes ist die komplexe Grösse bei ihrer Einführung ausführlich erläutert und die Algebra der komplexen Grössen nochmals im Anhang I zusammengestellt, so dass bei dem Leser keinerlei vorherige Vertrautheit mit der Algebra der komplexen Grössen vorausgesetzt ist.

Obwohl diejenigen Erscheinungen, die für Mehrphasensysteme charakteristisch sind, wie die Gesamtwirkung der Phasen, ihre gegenseitige Beeinflussung, die Transformation

von Mehrphasensystemen u. s. w. in den letzten Kapiteln besonders behandelt worden sind, so beziehen sich doch die meisten der im vorangegangenen Teil des Buches besprochenen Untersuchungen sowohl auf Einphasen-, als auch auf Mehrphasen-Systeme.

Den Herren *W. D. Weaver*, *A. E. Kennelly*, *Townsend Wolcott* statue ich auch an dieser Stelle für ihre Mithilfe bei der Herausgabe der englischen Ausgabe meinen verbindlichsten Dank ab.

Ferner danke ich dem Übersetzer dieser Ausgabe, Herrn *Julius Haacke* zu Berlin, für seine mühevollen Arbeit und Sorgfalt, um dem Werke eine sachgemässe Verdeutschung zu geben, sowie den Herren Verlegern, die keine Mühe gescheut haben, um dasselbe in einem würdigen Gewand in die deutsche elektrotechnische Litteratur einzuführen.

Schenectady, N. Y., U. S. A., September 1899.

Charles Proteus Steinmetz.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Kapitel I. Einleitung	I—II
§ 1. Fundamentalgesetze von Gleichstromstromkreisen.	
§ 2. Impedanz, Reaktanz, effektiver Widerstand.	
§ 3. Elektromagnetismus als Ursache der Reaktanz.	
§ 4. Kapazität als Ursache der Reaktanz.	
§ 5. Das Joule'sche Gesetz und die Arbeitsgleichung des Wechselstromstromkreises.	
§ 6. Fundamentalwelle und höhere harmonische Glieder, Wechselstromwellen mit und ohne geradzahlige harmonische Glieder.	
§ 7. Wechselstromwellen als Sinuswellen.	
Kapitel II. Momentan- und Integralwerte. . .	12—17
§ 8. Integralwerte der Welle.	
§ 9. Verhältnis des Mittelwertes zum Maximalwerte der Welle.	
Kapitel III. Gesetz der elektromagnetischen Induktion	18—21
§ 11. Induzierte elektromotorische Kraft; mittlerer Wert.	
§ 12. Induzierte elektromotorische Kraft; effektiver Wert.	
§ 13. Induktanz und Reaktanz.	
Kapitel IV. Graphische Darstellung.	22—36
§ 14. Polar-Charakteristik der Wechselstromwelle.	
§ 15. Polar-Charakteristik der Sinuswelle.	
§ 16. Parallelogramm der Sinuswellen; Kirchhoff'sche Gesetze und Arbeitsgleichung.	
§ 17. Induktionsfreier Stromkreis, gespeist durch eine nicht-induktionsfreie Leitung; Beispiel.	

§§ 18, 19.	Gegenelektromotorische Kraft und Komponente der Klemmenspannung.	
§ 20.	Nicht-induktionsfreier Stromkreis und Stromkreis mit voreilendem Strom, gespeist durch eine nicht-induktionsfreie Leitung. Wechselstrom-Generator.	
§§ 21, 22.	Polardiagramm des Wechselstromtransformators; Beispiel.	
Kapitel V.	Symbolische Methode.	37—46
§ 23.	Nachteil der graphischen Methode für numerische Rechnung.	
§ 24.	Trigonometrische Rechnung.	
§ 25.	Rechtwinkelige Komponenten der Vektoren.	
§ 26.	Einführung des j als Unterscheidungs-Index.	
§ 27.	Drehung des Vektors um 180° u. 90° ; $j = \sqrt{-1}$.	
§ 28.	Kombination von Sinuswellen in symbolischer Darstellung.	
§ 29.	Widerstand, Reaktanz und Impedanz in symbolischer Darstellung.	
§ 30.	Kapazitätsreaktanz in symbolischer Darstellung.	
§ 31.	Kirchhoff'sche Gesetze in symbolischer Darstellung.	
§ 32.	Stromkreis, gespeist durch eine nicht-induktionsfreie Leitung; Beispiel.	
Kapitel VI.	Topographische Methode.	47—56
§ 33.	Zweideutigkeit von Vektoren.	
§ 34.	Beispiel eines Dreiphasensystems.	
§ 35.	Dreiphasen-Generator bei gleicher Belastung.	
§ 36.	Dreiphasen-Generator bei ungleicher Belastung.	
§ 37.	Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung.	
Kapitel VII.	Admittanz, Konduktanz, Suszeptanz	57—63
§ 38.	Kombination von Widerständen und Konduktanzen in Hintereinander- und Parallelschaltung.	
§ 39.	Kombination von Impedanzen. Admittanz, Konduktanz, Suszeptanz.	

- § 40. Verhältnis zwischen Impedanz, Widerstand, Reaktanz und Admittanz, Konduktanz, Suszeptanz.
- § 41. Abhängigkeit der Admittanz, Konduktanz, Suszeptanz vom Widerstand und der Reaktanz. Kombination von Impedanzen und Admittanzen.

Kapitel VIII. Stromkreise mit Widerstand, Induktanz und Kapazität

64—90

- § 42. Einleitung.
- § 43. Widerstand in Hintereinanderschaltung mit dem Stromkreis.
- § 44. Diskussion von Beispielen.
- § 45. Reaktanz in Hintereinanderschaltung mit dem Stromkreis.
- § 46. Diskussion von Beispielen.
- § 47. Reaktanz in Hintereinanderschaltung mit dem Stromkreis.
- §§ 48, 49. Impedanz in Hintereinanderschaltung mit dem Stromkreis.
- § 50. Beispiel.
- § 51. Ausgleich phasenverspäteter Ströme durch Kondensanz im Nebenschluss.
- § 52. Vollständiger Ausgleich durch variable Kondensanz im Nebenschluss.
- § 53. Teilweiser Ausgleich durch konstante Kondensanz im Nebenschluss.
- § 54. Transformation von konstanter Spannung auf konstanten Strom.
- § 55. Transformation von konstantem Strom auf konstante Spannung
- § 56. Güteverhältnis konstanter Spannung zu konstantem Strom.

Kapitel IX. Widerstand und Reaktanz von Leitungen

91—97

- § 57. Einleitung
- § 58. Induktionsfreier Entnahmestromkreis, der über eine nicht-induktionsfreie Leitung führt.
- § 59. Beispiel.
- § 60. Maximaler über eine nicht-induktionsfreie Leitung gesandter Effekt.

Kapitel IX. Widerstand und Reaktanz von Leitungen. — Fortsetzung	98—112
§ 61. Abhängigkeit der Leistung von der Suszeptanz des Entnahmestromkreises.	
§ 62. Abhängigkeit der Leistung von der Konduktanz des Entnahmestromkreises.	
§ 63. Übersicht.	
§ 64. Beispiel.	
§ 65. Bedingung für den maximalen Wirkungsgrad.	
§ 66. Regulierung der Spannung im Entnahmestromkreis durch Suszeptanz im Nebenschluss.	
§ 67. Ausgleich für den Leitungsverlust durch Suszeptanz im Nebenschluss.	
§ 68. Maximale Leistung und Diskussion.	
§ 69. Beispiele.	
§ 70. Maximum des Anwachsens der Spannung in dem Entnahmestromkreis	
§ 71. Übersicht und Beispiele.	
Kapitel X. Effektiver Widerstand und Reaktanz.	113—142
§ 72. Effektiver Widerstand, Reaktanz, Konduktanz und Suszeptanz.	
§ 73. Ursachen der Effektverluste in Wechselstromstromkreisen.	
§ 74. Magnetische Hysterisis.	
§ 75. Hysterisis-Cyklen und entsprechende Stromwellen.	
§ 76. Wirkung des Luftzwischenraumes und des induzierten Stromes auf Hysterisis-Verzerrung.	
§ 77. Aequivalente Sinuswelle und wattlose höhere harmonische Glieder.	
§ 78. Wahre und scheinbare magnetische Charakteristik.	
§ 79. Phasenwinkel der Hysterisisvoreilung.	
§ 80. Effektverlust infolge molekularer magnetischer Reibung.	
§ 81. Effektive Konduktanz infolge magnetischer Hysterisis.	

- § 82. Absolute Admittanz von mit Eisen umgebenen Stromkreisen und Winkel der Hysteresis-Voreilung.
 § 83. Magnetischer Stromkreis, einen Luftzwischenraum enthaltend.
 §§ 84, 85. Elektrische Konstanten eines Eisen enthaltenden Stromkreises.

Kapitel XI. Foucault- oder Wirbelströme . . 143—166

- § 86. Effektive Konduktanz von Wirbelströmen.
 § 87. Winkel-Voreilung von Wirbelströmen.
 § 88. Effektverlust durch Wirbelströme und Koeffizient für Wirbelströme.
 § 89. Lamelliertes Eisen.
 § 90. Eisendraht.
 § 91. Vergleich zwischen Eisenblech und Eisendraht.
 §§ 92, 93. Entmagnetisierende Wirkung oder Schirmwirkung durch Wirbelströme.
 § 94. Grosse Wirbelströme.
 §§ 95, 96. Wirbelströme in Leitern und ungleichmässige Stromverteilung.
 § 97. Gegenseitige Induktanz.
 § 98. Dielektrische und elektrostatische Erscheinungen.
 § 99. Dielektrische Hysteresis - Admittanz, Impedanz, Verschiebung u. s. w.
 § 100. Elektrostatische Induktion oder Influenz.
 § 101. Energiekomponenten und wattlose Komponenten.

Kapitel XII. Verteilte Kapazität, Induktanz, Widerstand und Stromverlust . . 167—184

- § 102. Einleitung.
 § 103. Grösse des Ladungsstromes der Leitungen.
 § 104. Leitungs-Kapazität, dargestellt durch einen Kondensator, der in der Mitte der Leitung im Nebenschluss liegt.
 § 105. Leitungs-Kapazität, dargestellt durch drei Kondensatoren.
 §§ 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112. Genaue Untersuchung der verteilten Kapazität, der Induktanz, des Stromverlustes und des Widerstandes.

- § 113. Phasendifferenz an irgend einem Punkte der Leitung.
- § 114. Beispiel.
- § 115. Spezialfälle, offener Stromkreis am Ende der Leitung; Leitung an ihrem Ende mit der Erde verbunden; unendlich langer Leiter; Generator einen geschlossenen Stromkreis speisend.
- Kapitel XIII. Wechselstromtransformator . . . 185—213**
- § 116. Allgemeines.
- § 117. Gegenseitige Induktanz und Selbstinduktanz des Transformators.
- §§ 118, 119. Magnetischer Stromkreis des Transformators.
- § 120. Polardiagramm des Transformators.
- Kapitel XIII. Wechselstromtransformator. —**
Fortsetzung 191—213
- § 121. Beispiel.
- § 122. Diagramm für variierende Belastung.
- § 123. Beispiel.
- §§ 124, 125. Symbolische Methode, Gleichungen.
- §§ 126, 127. Scheinbare Impedanz des Transformators. Transformator, gleichwertig einem unterteilten Stromkreis.
- § 128. Transformator bei induktionsfreier Belastung.
- § 129. Konstanten des Stromkreises bei induktionsfreier Belastung.
- § 130. Numerisches Beispiel.
- Kapitel XIV. Allgemeiner Wechselstromtransformator 214—227**
- § 131. Einleitung.
- § 132. Magnetische Streuung oder Selbstinduktion des Transformators.
- § 133. Gegenseitige Induktion des Transformators.
- § 134. Differenz der Frequenz zwischen dem primären und dem sekundären Stromkreis eines gewöhnlichen Wechselstromtransformators.
- § 135. Allgemeine Wechselstromtransformator-Gleichungen.

§§ 136, 137.	Effekt, Leistung, Kraftaufwand (mechanisch und elektrisch).	
§ 138.	Geschwindigkeit und Leistung.	
§ 139.	Numerisches Beispiel.	
Kapitel XV. Induktionsmotor		228—255
§ 140.	Schlüpfung und sekundäre Frequenz.	
§ 141.	Induktionsmotoren-Gleichungen.	
§ 142.	Magnetisches Feld, Admittanz, Impedanz.	
§ 143.	Elektromotorische Kraft.	
§§ 144, 145.	Graphische Darstellung.	
§ 146.	Drehmoment und Effekt.	
§ 147.	Leistung von Induktionsmotoren.	
§§ 148, 149.	Maximales Drehmoment.	
§ 150.	Maximale Leistung.	
§ 151.	Drehmoment beim Anlassen.	
§ 152.	Synchronismus.	
§ 153.	Der Motor nahe dem Synchronismus.	
§ 154.	Induktionsgenerator.	
§ 155.	Vergleich zwischen Induktionsgenerator und synchronem Generator.	
§ 156.	Numerisches Beispiel für einen Induktionsmotor.	
Kapitel XV. Induktionsmotor. — Fortsetzung		256—265
§ 157.	Verkettung oder Doppelschaltung von Induktionsmotoren.	
§ 158.	Einphasiger Induktionsmotor.	
§ 159.	Synchroner Induktionsmotor.	
§ 160.	Hysteresis-Motor.	
Kapitel XVI. Wechselstromgenerator		266—281
§ 161.	Magnetische Rückwirkung bei Phasenvoreilung und -nacheilung.	
§ 162.	Selbstinduktanz und synchrone Reaktanz.	
§ 163.	Wechselstrommaschinen-Gleichungen.	
§ 164.	Numerisches Beispiel; Feldcharakteristik.	
§ 165.	Abhängigkeit der Klemmenspannung von dem Phasenverhältnis.	
§ 166.	Regulierung auf konstante Spannung.	
§ 167.	Regulierung auf konstanten Strom; maximale Leistung.	

Kapitel XVII. Parallelarbeiten von Wechselstrommaschinen 282—292

- § 168. Einleitung.
- § 169. Starre mechanische Verbindung.
- § 170. Ungleichförmigkeit der Geschwindigkeit.
- § 171. Synchronisierende Wirkung.
- § 172. Synchronismus.
- § 173. Hintereinanderschaltung von Wechselstrommaschinen.
- § 174. Gleichungen synchron laufender Wechselstrommaschinen; synchronisierende Leistung.
- § 175. Besonderer Fall von gleichen Wechselstrommaschinen bei gleicher Erregung.
- § 176. Numerisches Beispiel.

Kapitel XVIII. Synchronmotor 293—319

- §§ 177, 178. Graphische Methode.
- § 179. Beispiel.
- § 180. Konstante Klemmenspannung und konstanter Strom.
- § 181. Konstante Klemmenspannung und konstante genelektromotorische Kraft.
- § 182. Konstante Klemmenspannung und maximaler Wirkungsgrad.
- § 183. Konstante Klemmenspannung und konstante Leistung.
- § 184. Analytische Methode. Fundamental-Gleichungen und Leistungs-Charakteristik.
- § 185. Maximale Leistung.
- § 186. Leerlauf.

Kapitel XVIII. Synchronmotor. — Fortsetzung. 320—328

- § 187. Minimaler Strom.
- § 188. Maximale Phasenverschiebung.
- § 189. Konstante genelektromotorische Kraft.
- § 190. Numerisches Beispiel.
- § 191. Diskussion der Resultate.

Kapitel XIX. Kommutator-Motoren 329—346

- § 192. Typen dieser Motoren.
- § 193. Repulsionsmotor als Induktionsmotor.

- § 194. Zwei Typen von Repulsionsmotoren.
- § 195. Definition des Repulsionsmotors.
- §§ 196, 197. Repulsionsmotor-Gleichungen.
- § 198. Leistung des Repulsionsmotors. Beispiel.
- § 199. Hauptschluss-Motor, Nebenschluss-Motor.
- § 200. Hauptschluss-Motor-Gleichungen.
- § 201. Numerisches Beispiel.
- § 202. Nebenschluss-Motor.
- § 203. Leistungsfaktor des Hauptschluss-Motors.

Kapitel XX. Reaktions-Maschinen 347—359

- § 204. Allgemeine Diskussion.
- § 205. Energiekomponente der Reaktanz.
- § 206. Hysteresis-Energiekomponente der Reaktanz.
- § 207. Periodische veränderliche Reaktanz.
- § 208. Verzerrung der Wellenform.
- § 209. Unsymmetrische Verzerrung der Wellenform.
- § 210. Reaktionsmaschinen-Gleichungen.
- § 211. Numerisches Beispiel.

Kapitel XXI. Verzerrung der Wellen-(Kurven) form und ihre Ursachen 360—375

- § 212. Aequivalente Sinuswelle.
- § 213. Ursache der Verzerrung.
- §§ 214, 215. Ungleichmässiges und pulsierendes magnetisches Feld.
- § 216. Pulsation der Reaktanz.
- § 217. Pulsation der Reaktanz in Reaktionsmaschinen.
- § 218. Allgemeine Diskussion.
- § 219. Pulsation des Lichtbogenwiderstandes.
- § 220. Beispiel.
- § 221. Verzerrung der Wellenform durch den Lichtbogen.
- § 222. Diskussion.

Kapitel XXII. Wirkung höherer harmonischer Glieder 376—388

- § 223. Verzerrung der Wellenform durch dreifache und fünffache harmonische Glieder. Einige charakteristische Wellenformen.
- § 224. Wirkung der Selbstinduktion und Kapazität auf höhere harmonische Glieder.

- § 225. Resonanz infolge höherer harmonischer Glieder in Übertragungsleitungen.
- § 226. Effekt komplexer harmonischer Wellen.
- § 227. Dreiphasengenerator.
- § 228. Sinken der Hysteresis durch Verzerrung der Wellenform.
- § 229. Wachsen der Hysteresis durch Verzerrung der Wellenform.
- § 230. Wirbelströme.
- § 231. Wirkung verzerrter Wellen auf die Isolation.

Kapitel XXIII. Allgemeine Mehrphasen-Systeme 389—392

- § 232. Erklärung von Systemen (symmetrische und unsymmetrische Systeme).
- § 233. Effektströmung. Ausgegliche und nicht ausgeglichene Systeme. Unabhängige und verkettete Systeme. Sternschaltung und Ringschaltung.
- § 234. Klassifikation von Mehrphasensystemen.

Kapitel XXIV. Symmetrische Mehrphasen-Systeme 393—399

- § 235. Allgemeine Gleichungen symmetrischer Systeme.
- § 236. Besondere Systeme.
- § 237. Resultierende magnetomotorische Kraft eines symmetrischen Systems.
- § 238. Besondere Systeme.

Kapitel XXV. Ausgegliche und unausgegliche Mehrphasen-Systeme 400—412

- § 239. Effektströmung in Einphasensystemen.
- § 240. Effektströmung in Mehrphasensystemen; Ausgleichfaktor des Systems.
- § 241. Ausgleichfaktor.
- § 242. Dreiphasensystem, Vierphasensystem.
- § 243. Umgekehrtes Dreiphasensystem.
- § 244. Diagramme der Effektströmung.
- § 245. Monocyklische und polycyklische Systeme.
- § 246. Leistungs-Charakteristik des Wechselstromsystems.
- § 247. Dasselbe in rechtwinkligen Koordinaten.
- § 248. Haupteffektaxen des Wechselstromsystems.

	Seite
Kapitel XXVI. Verkettete Mehrphasen-Systeme	413—420
§ 249. Verkettete und unabhängige Systeme.	
§§ 250, 251. Sternschaltung und Ringschaltung. Y-Schaltung und Δ -Schaltung.	
§ 252. Sternspannung und Ringspannung. Sternstrom und Ringstrom. Y-Spannung und Y-Strom. Δ -Spannung und Δ -Strom.	
§§ 253, 254. Gleichungen verketteter Mehrphasensysteme.	
Kapitel XXVII. Transformation von Mehrphasensystemen	421—424
§ 255. Konstanz des Ausgleichfaktors.	
§ 256. Gleichungen der Transformation von Mehrphasensystemen.	
§ 257. Dreiphasen- und Vierphasen-Transformation.	
§ 258. Transformation mit Änderung des Ausgleichfaktors.	
Kapitel XXVIII. Kupfer - Wirkungsgrad der Systeme	425—435
§ 259. Allgemeine Diskussion.	
§ 260. Vergleich auf der Basis der Gleichheit der minimalen Spannungsdifferenz.	
§§ 261, 262. Vergleich auf der Basis der Gleichheit der maximalen Spannungsdifferenz.	
Kapitel XXIX. Dreiphasen-System	436—440
§ 263. Allgemeine Gleichungen.	
§ 264. Besondere Fälle: Ausgeglichenes System; eine Zweigleitung belastet; zwei Zweigleitungen belastet.	
Kapitel XXX. Vierphasen-System	441—444
§ 265. Allgemeine Gleichungen.	
§ 266. Besondere Fälle: Ausgeglichenes System; eine Zweigleitung belastet.	
Anhang I. Algebra komplexer imaginärer Grössen	447—454
§ 267. Einleitung.	
§ 268. Rechnungsweise, Addition, Multiplikation, Potenzierung.	

- § 269. Subtraktion, negative Zahl.
- § 270. Division, Bruch.
- § 271. Wurzelziehen und Logarithmierung.
- § 272. Imaginäre Einheit. Komplexe Zahl.
- § 273. Übersicht.
- §§ 274, 275. Algebraische Operationen mit komplexen Grössen
- § 276. Wurzeln der Einheit.
- § 277. Kreislauf.
- § 278. Komplexe Ebene.

Anhang II. Oscillierende Ströme. 455—471

- § 279. Einleitung.
- § 280. Allgemeine Gleichungen.
- § 281. Polarkoordinaten.
- § 282. Loxodrome.
- § 283. Impedanz und Admittanz.
- § 284. Induktanz.
- § 285. Kapazität.
- § 286. Impedanz.
- § 287. Admittanz.
- § 288. Konduktanz und Suszeptanz.
- §§ 289, 290. Stromkreise mit der Impedanz Null.
- § 291. Ursache oscillierender Ströme.
- § 292. Oscillierende Entladung.
- § 293. Oscillierende Entladung von Kondensatoren.
- § 294. Transformator mit oscillierendem Strom.
- § 295. Fundamentalgleichungen.

Anhang III. Effekt und sonstige Grössen doppelter Periodizität 472—485

- § 296. Einleitung.
- § 297. Wahrer und wattloser Effekt.
- § 298. Kommutatives Prinzip.
- § 299. Gesamteffekt.
- § 300. Drehmoment.
- § 301. Hintereinanderschaltung von Mehrphasenmotoren.

Anhang IV. Symbolische Darstellung allgemeiner Wechselstromwellen . 486—503

- § 302. Die allgemeine Wechselstromwelle.
- § 303. Effektivwert.

- § 304. Doppelperiodische Produkte.
 § 305. Erstes Beispiel.
 § 306. Zweites Beispiel.
 § 307. Drittes Beispiel.

Errata.

- | | | | | | | |
|-------|-----|-------|---------------|-----------------------------|-------------------------|--|
| Seite | 4 | Zeile | 5 v. o.: | „Induktanz“ | anstatt | „Selbstinduktion“. |
| „ | 5 | „ | 21 „ | „z“ | anstatt | „Z“. |
| „ | 18 | „ | 12 „ | „10 ⁸ “ | anstatt | „10 ⁻⁸ “. |
| „ | 27 | „ | 29 „ | „ | Die Formel muss lauten: | |
| | | | | | | $\sqrt{E_0^2 - (Ix)^2} - Ir.$ |
| „ | 28 | „ | 3 „ | „I _x “ | anstatt | „I _x “. |
| „ | 30 | „ | 2 v. u.: | „I _x “ | anstatt | „I _x “. |
| „ | 34 | „ | 17 v. o.: | „dem Winkel“ | anstatt | „den Winkel“. |
| „ | 45 | „ | 11 v. u.: | „Leistung“ | anstatt | „Kraft“. |
| „ | 45 | „ | 26 „ | „i“ | hinter dem Wort | „Teil“ fällt weg. |
| „ | 57 | „ | 2 „ | „Widerstand“ | anstatt | „Widerstandes“. |
| „ | 62 | „ | 5 v. u.: | $\frac{I}{2r}$ | und | $\frac{I}{2x}$ anstatt $\frac{r}{2}$ und $\frac{x}{2}$. |
| „ | 69 | „ | 8 v. o.: | „ | Die Formel muss lauten: | |
| | | | | | | $\sqrt{s^2 + 2xx_0 + x_0^2} = s.$ |
| „ | 80 | „ | 8 v. u.: | „x ₀ “ | anstatt | „x ₀ “. |
| „ | 81 | „ | 4 v. o.: | „x ₀ “ | anstatt | „r ₀ “. |
| „ | 84 | „ | 7 u. 8 v. u.: | „auf konstanten“ | anstatt | „zu konstantem“. |
| „ | 89 | „ | 8 u. 26 „ | „auf einen“ | anstatt | „zu einem“. |
| „ | 90 | „ | 6 u. 7 „ | „auf konstanten“ | anstatt | „zu konstantem“. |
| „ | 102 | „ | 2 v. o.: | „—“ | anstatt | „bis“. |
| „ | 108 | „ | 1 „ | „einem Spannungsverhältnis“ | anstatt | „einer Spannung“. |
| „ | 112 | „ | 16 „ | „Z ₀ “ | anstatt | „Z ⁰ “. |
| „ | 115 | „ | 20 „ | „magnetischem“ | anstatt | „magnetischen“. |
| „ | 129 | „ | 1 „ | „B ^{1,6} “ | anstatt | „B ^{6,1} “. |
| „ | 140 | „ | 23 „ | „sin α =“ | anstatt | „sin = α“. |
| „ | 145 | „ | 29 „ | „Stromkreises“ | anstatt | „kreises“. |
| „ | 158 | „ | 26 „ | „NL ₁ “ | anstatt | „NL“. |
| „ | 160 | „ | 9 v. u.: | „molekularer“ | anstatt | „molekuler.“ |
-

Theorie und Berechnung

von

Wechselstromerscheinungen.

Kapitel I.

Einleitung.

1. Bei der praktischen Anwendung von elektrischer Energie begegnen wir zwei Klassen von Erscheinungen, die durch Gleichstrom bezw. Wechselstrom hervorgebracht werden.

Die Gleichstromerscheinungen sind durch die exakte analytische Rechnung auf folgende Fundamentalgesetze zurückgeführt:

1. das Ohm'sche Gesetz: $i = \frac{e}{r}$, wo r den Widerstand, eine Konstante des Stromkreises, bedeutet.

2. das Joule'sche Gesetz: $P = i^2 r$, wo P den Energieverbrauch in einem Stromkreise, dessen Stromstärke i und dessen Widerstand r ist, darstellt.

3. die Arbeitsgleichung: $P_o = ei$, wo P_o die Arbeit ist, die in einem Stromkreise von der elektromotorischen Kraft e und dem Strom i verbraucht wird.

4. die Kirchhoff'schen Gesetze:

a) die Summe sämtlicher elektromotorischen Kräfte in einem geschlossenen Stromkreise ist gleich Null, wenn die in demselben durch seinen Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft ir auch als gegenelektro-

motorische Kraft betrachtet wird und alle elektromotorischen Kräfte ihrer wahren Richtung nach angenommen werden;

- b) an jedem Knotenpunkt ist die algebraische Summe sämtlicher Ströme gleich Null.

In Wechselstromstromkreisen, d. h. solchen Stromkreisen, in denen die Ströme schnell und periodisch ihre Richtung wechseln, haben diese Gesetze keine Gültigkeit. Energie wird nicht nur in dem Leiter infolge seines Ohm'schen Widerstandes verbraucht, sondern auch ausserhalb desselben; sie wird aufgespeichert und abgegeben, so dass infolge hoher elektromotorischer Kräfte ausgedehnte Ströme fließen können, ohne eine beträchtliche Menge verbrauchter Energie, sondern nur ein einfaches Steigen und Sinken derselben darzustellen. Der Ohm'sche Widerstand hört auf, der bestimmende Faktor für die Stromstärke zu sein. Ströme können sich in Komponenten teilen, von denen eine jede grösser ist, als der ungeteilte Strom u. s. w.

2. An Stelle der oben erwähnten Fundamentalgesetze für Gleichstrom finden wir in Wechselstromstromkreisen folgendes:

Das Ohm'sche Gesetz nimmt die Form $i = \frac{e}{z}$ an, wo z der scheinbare Widerstand oder die *Impedanz* ist; sie ist keine Konstante des Stromkreises, sondern sie ist abhängig von der Frequenz der Ströme, und auch von der elektromotorischen Kraft in Stromkreisen, die Eisenmassen u. s. w. enthalten.

Die Impedanz z hat im absoluten Maasssystem dieselben Dimensionen, als der Widerstand (nämlich LT^{-1} , eine Geschwindigkeit) und wird in Ohm ausgedrückt; sie besteht aus zwei Komponenten, dem Widerstand r und der Reaktanz x oder es ist

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Der Widerstand r ist in solchen Stromkreisen, in denen die Energie nur zur Erwärmung des Leiters verbraucht

wird, derselbe als der Ohm'sche Widerstand in Gleichstromstromkreisen. In solchen Stromkreisen, wo auch ausserhalb des Leiters Energie durch magnetische Hysterese, gegenseitige Induktanz, dielektrische Hysterese u. s. w. verbraucht wird, ist r grösser als der wahre Ohm'sche Widerstand, da er sich auf den gesamten Energieverbrauch bezieht; er kann darum auch der *effektive Widerstand* genannt werden und ist nicht mehr eine Konstante des Stromkreises.

Die Reaktanz x stellt nicht den Kraftverbrauch dar, wie es der effektive Widerstand r thut, sondern nur ein Steigen und Sinken der Energie. Sie ist keine Konstante des Stromkreises, sondern hängt von der Frequenz und häufig auch von der elektromotorischen Kraft ab, z. B. in Stromkreisen, die Eisen enthalten, oder in elektrolytischen Leitern. Während sich der effektive Widerstand r auf die Energiekomponente der elektromotorischen Kraft oder auf die elektromotorische Kraft in Phase mit dem Strom bezieht, bezieht sich die Reaktanz x auf die wattlose Komponente der elektromotorischen Kraft oder auf die elektromotorische Kraft senkrecht zu dem Strom.

3. Die Hauptquellen der Reaktanz sind der Elektromagnetismus und die Kapazität.

Elektromagnetismus.

Ein durch einen Leiter fliessender Strom i erzeugt eine magnetische Strömung, die jenen mit magnetischen Kraftlinien umgiebt (oder genauer ausgedrückt, von Linien magnetischer Induktion), von geschlossener, kreisförmiger oder irgend einer anderen Form, die mit den Änderungen des Stromes wechseln und so eine elektromotorische Kraft im Leiter induzieren. Da die magnetische Strömung mit dem Strom in Phase ist und die induzierte elektromotorische Kraft 90° oder eine viertel Periode hinter der Strömung zurückbleibt, so ist diese elektromotorische Kraft der *Selbstinduktion* 90° oder eine viertel Periode hinter dem Strom zurück, d. h. sie befindet sich senkrecht zu demselben und ist daher wattlos.

Wenn nun Φ die durch den Strom i erzeugte und mit ihm verkettete magnetische Strömung ist (wo die magnetischen Kraftlinien, die n -fach verkettet sind oder n Windungen des Leiters passieren, n mal gezählt werden), so wird das Verhältnis $\frac{\Phi}{i}$ mit L bezeichnet und *Selbstinduktion* oder *Selbstinduktionskoeffizient* des Stromkreises genannt. Dieser ist numerisch gleich (in absoluten Einheiten) den Verkettungen des Stromes mit der durch den Strom Eins erzeugten magnetischen Strömung; er ist in absoluten Einheiten von der Längendimension. Anstatt des Selbstinduktionskoeffizienten L wird manchmal sein Verhältnis zu dem Ohm'schen Widerstand r gebraucht. Dieses Verhältnis wird *Zeitkonstante* des Stromes genannt und ausgedrückt durch die Formel:

$$T = \frac{L}{r}.$$

Wenn ein Leiter mit n Windungen einen magnetischen Stromkreis von dem Widerstand R umgibt, so stellt der Strom i in dem Leiter die magnetomotorische Kraft von ni Ampèrewindungen dar und erzeugt dann eine magnetische Strömung von $\frac{ni}{R}$ Kraftlinien, die jede der n Windungen des Leiters umgeben und dadurch $\Phi = n^2 i R$ Verkettungen zwischen den magnetischen und elektrischen Strömen ergeben. Die Selbstinduktion ist daher: $L = \frac{\Phi}{i} = \frac{n^2}{R}$.

Das Grundgesetz der elektromagnetischen Induktion heisst: Die in einem Leiter durch ein veränderliches magnetisches Feld induzierte elektromotorische Kraft ist die Geschwindigkeit, mit der der Leiter die Kraftlinien schneidet.

Wenn daher i der Strom und L der Selbstinduktionskoeffizient eines Stromkreises ist, so ist die mit einem Strom i verkettete magnetische Strömung Li , und $4NLi$ ist demnach die mittlere Geschwindigkeit des Schneidens, d. i. die Zahl der Kraftlinien, die in der Sekunde von dem

Leiter geschnitten wird oder die mittlere elektromotorische Kraft; N ist die Frequenz oder die Zahl der Perioden in der Sekunde.

Da sich die maximale Geschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit des Schneidens, wie der vierte Teil des Kreisumfangs zu seinem Radius (eine sinusförmige Änderung vorausgesetzt), nämlich wie $\frac{\pi}{2} : 1$ verhält, so ist die maximale Schnittgeschwindigkeit $2\pi N$ und demnach auch der maximale Wert der elektromotorischen Kraft, die in einem Stromkreis von der maximalen Stromstärke i und der Selbstinduktion L induziert wird:

$$e = 2\pi NLi.$$

Da die maximalen Werte der Sinuswellen (mit dem Faktor $\sqrt{2}$) den effektiven Werten (der Quadratwurzel der mittleren Quadrate) proportional sind, so ist, wenn i der effektive Wert des Wechselstromes, $e = 2\pi NLi$ der effektive Wert der Selbstinduktion und das Verhältnis $\frac{e}{i} = 2\pi NL$ ist, die magnetische Reaktanz:

$$x_m = 2\pi NL.$$

Wenn daher r der Widerstand, x_m die Reaktanz und Z die Impedanz ist, so ist die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft $e_1 = ir$ und die durch die Reaktanz verbrauchte elektromotorische Kraft $e_2 = ix_m$ und da beide elektromotorischen Kräfte zu einander senkrecht stehen, so ist die gesamte elektromotorische Kraft

$$e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = i\sqrt{r^2 + x_m^2} = iz,$$

d. h. die Impedanz z nimmt in Wechselstromstromkreisen dieselbe Stelle ein als der Widerstand r in Gleichstromstromkreisen.

Kapazität.

4. Wenn auf einen Kondensator von der Kapazität C eine elektromotorische Kraft e wirkt, so erhält der Kondensator die elektrostatische Ladung Ce .

Wechselt die elektromotorische Kraft e mit der Frequenz N , so ist die mittlere Ladungs- und Entladungsgeschwindigkeit i N und die maximale Ladungs- und Entladungsgeschwindigkeit $2\pi N$, sinusförmige Wellen vorausgesetzt. Daher ist $i = 2\pi N C e$ der Strom, der in den Kondensator übergeht, voreilt und zu der elektromotorischen Kraft senkrecht steht.

Dann ist

$$x_c = \frac{e}{i} = \frac{1}{2\pi N C}$$

die *Kapazitätsreaktanz* oder *Kondensanz*.

Die *Polarisation* in elektrolytischen Leitern wirkt in gewissem Grade wie die Kapazität.

Die Kapazitätsreaktanz ist umgekehrt proportional der Frequenz und erzeugt eine phasenverfrühte Stromwelle. Die magnetische Reaktanz ist direkt proportional der Frequenz und erzeugt eine phasenverspätete Stromwelle. Daher sind beide in bezug auf einander von entgegengesetztem Vorzeichen und die gesamte Reaktanz des Stromkreises ist ihre Differenz

$$x = x_m - x_c.$$

Der Gesamtwiderstand eines Stromkreises ist gleich der Summe sämtlicher in Reihe geschalteten Widerstände; die gesamte Reaktanz eines Stromkreises ist gleich der algebraischen Summe aller in Reihe geschalteten Reaktanzen; die Gesamtimpedanz eines Stromkreises ist jedoch nicht gleich der Summe aller einzelnen Impedanzen, sondern im allgemeinen geringer; sie ist die Resultante des Gesamtwiderstandes und der Gesamtreaktanz. Deshalb ist es nicht zulässig, die Impedanzen direkt zu addieren wie die Widerstände oder Reaktanzen.

Weitere Untersuchungen über diese Grössen werden in späteren Kapiteln behandelt.

5. Im Joule'schen Gesetz $P = i^2 r$ ist r nicht mehr der wahre Ohm'sche Widerstand, sondern der effektive Widerstand, d. h. das Verhältnis der Energiekomponente der elektromotorischen Kraft zum Strom. Da in Wechsel-

stromstromkreisen ausser durch den Ohm'schen Widerstand des Leiters teils ausserhalb, teils innerhalb desselben durch magnetische Hysteresis, gegenseitige Induktion, dielektrische Hysteresis u. s. w., Energie verbraucht wird, so ist der effektive Widerstand r im allgemeinen grösser als der wahre Widerstand des Leiters, oft sogar um den mehrfachen Betrag, z. B. in Transformatoren bei offenem, sekundären Stromkreis, in welchem Falle er keine Konstante desselben ist. Näheres hierüber siehe Kapitel VII.

In Wechselstromstromkreisen erhält die Arbeitsgleichung ein drittes Glied, das bei Sinuswellen der Kosinus der Phasenverschiebung zwischen der elektromotorischen Kraft und dem Strom ist, nämlich

$$P_o = ei \cos \varphi.$$

Folglich kann, selbst wenn e und i gross sind, P_o sehr klein sein, wenn nur $\cos \varphi$ klein, d. h. φ nahezu 90° , ist.

Die Kirchhoff'schen Gesetze werden in ihrer ursprünglichen Form bedeutungslos, da sie die Ströme und die elektromotorischen Kräfte als Richtungsgrössen betrachten, positiv in der einen, negativ in der entgegengesetzten Richtung, während der Wechselstrom keine eigentliche bestimmte Richtung besitzt.

6. Die Wechselstromwellen können sehr verschieden gestaltet sein; einige der am meisten vorkommenden werden in einem späteren Kapitel behandelt.

Die einfachste Form indessen ist die Sinuswelle oder eine Welle, die der Sinusform sehr ähnelt, wie sie in Fig. 1 gezeigt ist. Man kann sie analytisch darstellen durch die Formel

$$i = I \sin \frac{2\pi}{T} (t - t_1) = I \sin 2\pi N (t - t_1),$$

wo I das Maximum der Welle oder ihre *Amplitude* ist; T bezeichnet die Zeit einer vollständigen cyklischen Wiederholung oder die *Periode* der Welle, oder es ist $N = \frac{1}{T}$

die *Frequenz* oder die Zahl der vollständigen Perioden pro Sekunde; t_1 bezeichnet die Zeit, in der die Welle gleich Null ist, oder die *Epoche* der Welle, gewöhnlich *Phase**) genannt.

Offenbar erlangt die Bezeichnung Phase oder Epoche nur dann eine praktische Bedeutung, wenn mehrere Wellen verschiedener Phasen betrachtet werden, als Phasendifferenz. Handelt es sich nur um *eine* Welle, so können wir die Zeit von dem Moment an zählen, wo die Welle gleich Null ist, oder wo sie ihr Maximum erreicht hat. Wir stellen sie dann dar durch den Ausdruck

$$i = I \sin 2 \pi N t$$

oder

$$i = I \cos 2 \pi N t.$$

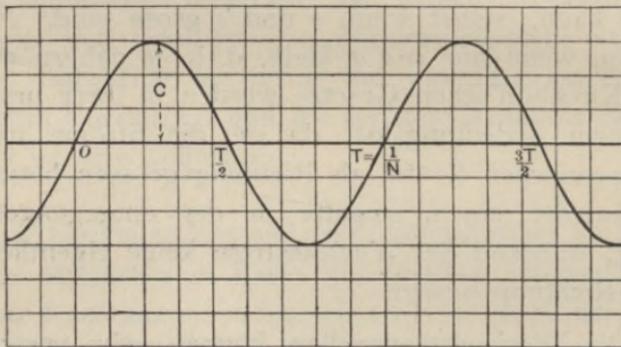


Fig. 1. Sinuswelle.

Da jede elektrische Grösse notwendiger Weise eine einwertige Funktion der Zeit ist, d. h. für einen gegebenen Zeitpunkt nur *einen* Wert ergibt, so kann jede beliebige Wechselstromwelle, ohne Unterschied der Form,

*) Epoche bezeichnet die Zeit, in der eine periodische Funktion einen bestimmten Wert, z. B. Null, erreicht, und Phase die Winkelstellung einer periodischen Funktion in einer gegebenen Zeit in bezug auf eine gegebene Lage. Beide sind bei den Wechselstromerscheinungen nur verschiedene Wege, um ein und dasselbe auszudrücken.

nach dem Fourier'schen Satze durch eine Reihe von Sinusfunktionen verschiedener Frequenz und verschiedener Phasen folgendermassen dargestellt werden

$$i = I_1 \sin 2\pi N(t - t_1) + I_2 \sin 4\pi N(t - t_2) + I_3 \sin 6\pi N(t - t_3) + \dots,$$

wo I_1, I_2, I_3, \dots die maximalen Werte der verschiedenen Komponenten der Welle und t_1, t_2, t_3, \dots die Zeiten sind, in denen die betreffenden Komponenten den Wert Null passieren.

Das erste Glied $I_1 \sin 2\pi N(t - t_1)$ heisst die *Fundamentalwelle* oder die *erste Harmonische*; die übrigen Glieder heissen die *höheren Harmonischen* oder die *Obertöne*, ganz analog den Obertönen in der Akustik. Das Glied $I_n \sin 2\pi n N(t - t_n)$ ist die n te Harmonische.

Indem wir die Sinusfunktionen von den Zeitdifferenzen $t - t_1, t - t_2, \dots$ trennen, reduzieren wir den allgemeinen Ausdruck für die Welle auf folgende Form:

$$i = A_1 \sin 2\pi Nt + A_2 \sin 4\pi Nt + A_3 \sin 6\pi Nt + \dots + B_1 \cos 2\pi Nt + B_2 \cos 4\pi Nt + B_3 \cos 6\pi Nt + \dots$$

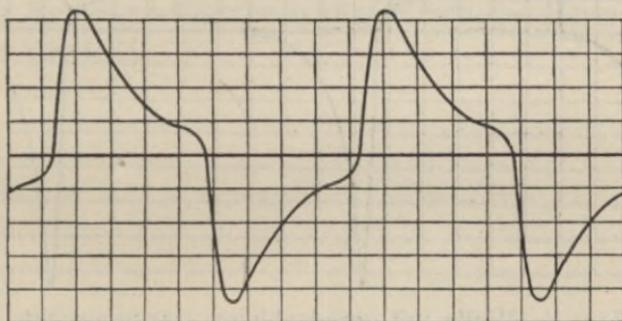


Fig. 2. Welle ohne geradzahlige Harmonische.

Die beiden halben Wellen (die positive und die negative) einer jeden Periode, die in einem Stromkreise nach einer bestimmten Richtung hin zählen, sind fast immer identisch. Die geradzahligen höheren Harmonischen, die

einen Unterschied in der Form der beiden halben Wellen verursachen, verschwinden hier und es bleiben nur die ungeraden Harmonischen bestehen, ausser in ganz speziellen Fällen.

Daher wird die gewöhnliche Wechselstromwelle durch folgende Formel ausgedrückt

$$i = I_1 \sin 2\pi N(t - t_1) + I_3 \sin 6\pi N(t - t_3) \\ + I_5 \sin 10\pi N(t - t_5) + \dots,$$

oder

$$i = A_1 \sin 2\pi Nt + A_3 \sin 6\pi Nt + A_5 \sin 10\pi Nt + \dots \\ + B_1 \cos 2\pi Nt + B_3 \cos 6\pi Nt + B_5 \cos 10\pi Nt + \dots$$

Eine solche Welle ist in Fig. 2 dargestellt, während Fig. 3 eine Welle zeigt, deren halbe Wellen verschieden sind. Fig. 2 und 3 stellen die sekundären Ströme eines Ruhmkorff'schen Funkeninduktors dar, dessen sekundäre Spule durch einen hohen äusseren Widerstand geschlossen ist.

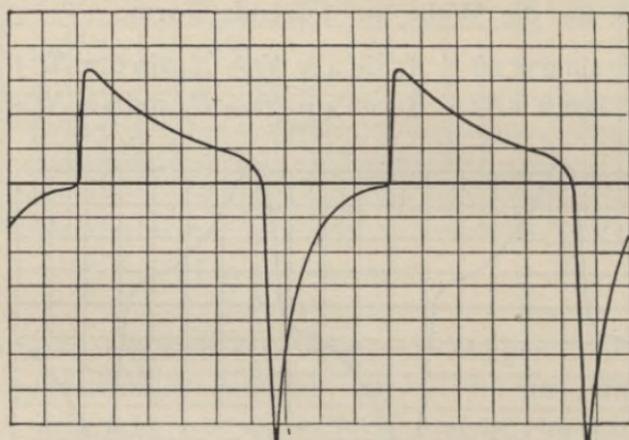


Fig. 3. Welle mit geradzahigen Harmonischen.

Fig. 3 bezeichnet die gewöhnliche Betriebsweise des Induktors durch einen Unterbrecher, der in den primären Stromkreis eingeschaltet ist; in Fig. 2 ist die Spule durch Batterieströme gespeist, die durch einen Kommutator umgekehrt werden.

7. Die Selbstinduktion, oder das elektromagnetische Moment, das in Wechselstromkreisen stets vorhanden ist — in hohem Grade in Generatoren, Transformatoren u. s. w., — pflegt die höheren Harmonischen von einer zusammengesetzten Harmonischen Welle mehr zu unterdrücken als die fundamentale Harmonische, und bewirkt dadurch eine allgemeine Neigung zur einfachen Sinusform. Dieses hat zur Folge, dass im allgemeinen die Wechselströme in unseren Licht- und Kraftstromkreisen den Sinuswellen genügend nahe kommen, so dass die Annahme der Sinusform zulässig ist.

Daher können wir bei der Berechnung von Wechselstromerscheinungen die Wechselstromwelle als eine Sinuswelle annehmen, ohne dadurch einen bedeutenden Fehler zu machen; es genügt, sich die Verzerrung der Sinusform als einen möglichen, obgleich unwahrscheinlichen Störungsfaktor vorzustellen, der im allgemeinen in der Praxis zu vernachlässigen ist, vielleicht mit der einzigen Ausnahme von solchen Stromkreisen, die einen niedrigen Widerstand mit grosser magnetischer Reaktanz und grossen mit einander in Reihe geschalteten Kondensanzen haben, so dass Resonanzeffekte von diesen höheren Harmonischen erzeugt werden.

Kapitel II.

Momentane und integrale Werte.

8. Bei einer periodisch veränderlichen Funktion, wie sie der Wechselstrom ist, haben wir zu unterscheiden zwischen dem *momentanen Wert*, der als Funktion der Zeit beständig variiert, und dem *integralen Wert*, der die Welle als ein Ganzes charakterisiert.

Als solcher integraler Wert wird fast ausschliesslich

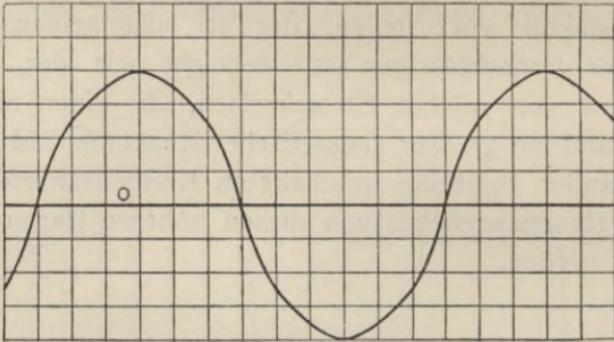


Fig. 4. Wechselstromwelle.

der *effektive Wert* gebraucht, nämlich die Quadratwurzel aus den mittleren Quadraten, und wo auch immer die Intensität einer elektrischen Welle ohne weitere Beziehung erwähnt wird, ist der effektive Wert gemeint.

Der *maximale Wert* der Welle ist nur in wenigen Fällen von praktischem Interesse; er kann ausserdem für die beiden halben Wellen verschieden sein, wie Fig. 3 zeigt.

Unter dem *arithmetischen Mittel* oder dem *Mittelwert* einer Welle (siehe Fig. 4 und 5) versteht man das arith-

metische Mittel aller momentanen Werte während einer vollständigen Periode.

Dieses arithmetische Mittel ist entweder gleich Null, wie in Fig. 4, oder es ist von Null verschieden, wie in Fig. 5. Im ersten Fall heisst die Welle eine *Wechselstromwelle*, im anderen eine *pulsierende Welle*.

Eine Wechselstromwelle ist daher eine solche Welle, bei der die Gesamtsumme der positiven Werte dieselbe Zahl ergibt als die Gesamtsumme der negativen Werte, d. h. im rechtwinkligen Koordinatensystem haben ihre beiden halben Wellen gleichen Flächeninhalt, wie Fig. 4 zeigt.

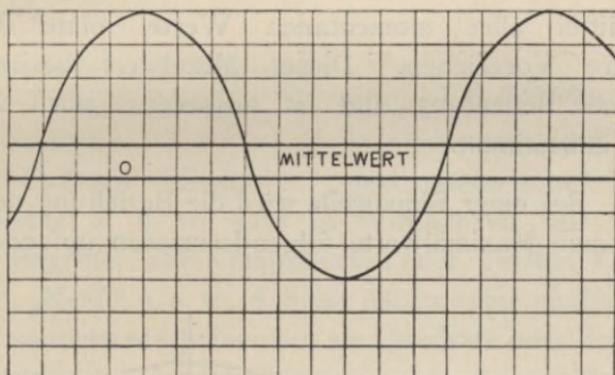


Fig. 5. Pulsierende Welle.

Eine pulsierende Welle ist eine solche, in der die eine der halben Wellen das Übergewicht hat (Fig. 5).

Pulsierende Wellen werden nur durch Maschinen mit Stromwender erzeugt, ferner durch Unipolarmaschinen oder durch das Aufeinanderschichten von Wechselstromwellen auf Gleichströme u. s. w.

Alle Induktionsapparate ohne Stromwender geben ausschliesslich Wechselstromwellen, da, gleichgiltig in welcher Weise der Stromkreis angeordnet ist, irgend eine magnetische Kraftlinie, die während einer vollständigen Periode vom Leiter durchschnitten wird und so eine elektro-

motorische Kraft induziert, während derselben Periode wieder in entgegengesetzter Richtung durchschnitten werden muss und dadurch denselben Betrag von elektromotorischer Kraft induziert (natürlich findet dies keine Anwendung auf Stromkreise, die aus verschiedenen sich in Beziehung zu einander bewegenden Teilen bestehen, wie auf Unipolarmaschinen).

Im folgenden werden wir fast ausschliesslich die Wechselstromwelle betrachten, d. h. die Welle, deren wahrer arithmetischer Mittelwert gleich Null ist.

Häufig wird als mittlerer Wert einer Wechselstromwelle das Mittel einer halben Welle bezeichnet, oder besser, das Mittel aller momentanen Werte, ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen. Dieser Mittelwert besitzt keine praktische Bedeutung und ist ausserdem noch in vielen Fällen unbestimmt.

9. Bei einer Sinuswelle wird die Beziehung des Mittelwertes zum Maximalwerte folgendermassen gefunden:

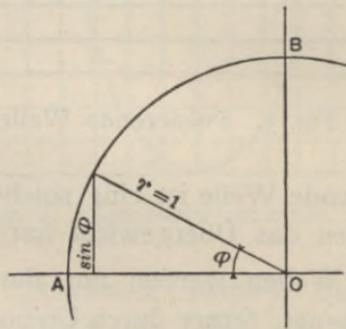


Fig. 6.

Es sei OAB in Fig. 6 der Quadrant eines Kreises mit dem Radius Eins.

Während der Winkel φ den Bogen $\frac{\pi}{2}$ von A nach B durchläuft, ändert sich sein Sinus von Null bis $OB = 1$.

Daher verhält sich das Mittel aus der Änderung des Sinus zu seinem Bogen wie $1 : \frac{\pi}{2}$ oder wie $\frac{2}{\pi} : 1$. Das Maximum der Änderung des Sinus findet um seinen Nullwert herum statt, wo der Sinus gleich dem Bogen ist. Daraus folgt, dass die grösste Änderung des Sinus gleich der Änderung des entsprechenden Bogens ist und folglich steht auch die maximale Änderung des Sinus zu seiner mittleren Änderung in demselben Verhältnis wie die mittlere Änderung des Bogens zu der des Sinus, d. h. wie $1 : \frac{\pi}{2}$, und da die Änderungen einer Sinusfunktion auch sinusartig sind, so erhalten wir:

$$\frac{\text{Mittelwert der Sinuswelle}}{\text{Maximalwert}} = \frac{2}{\pi} : 1 = 0,63663.$$

Die Grössen „Strom“, „elektromotorische Kraft“, „Magnetismus“ u. s. w. sind in Wirklichkeit nur mathematische Begriffe, als Komponenten der reellen Grössen „Energie“, „Kraft“ u. s. w., d. h. sie haben keine unabhängige Existenz, sondern erscheinen nur als Quadrate oder Produkte.

Folglich ist nur der mit den mechanischen Einheiten in Verbindung stehende integrale Wert einer Wechselstromwelle von praktischer Bedeutung, der dieselbe *Kraft* oder denselben *Effekt* darstellt als die periodische Welle. Dieser heisst der *effektive* Wert. Sein Quadrat ist gleich dem mittleren Quadrat der periodischen Funktion, d. h.:

Der effektive Wert einer Wechselstromwelle oder die Welle, die denselben Effekt darstellt wie die periodisch veränderliche Welle, ist die Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat.

Bei einer Sinuswelle wird ihre Beziehung zum maximalen Wert auf folgendem Wege gefunden:

Es sei *OAB* in Fig. 7 der Quadrant eines Kreises mit dem Radius Eins.

Da nun die Sinus irgend eines Winkels φ und seines Komplementes $90^\circ - \varphi$ die Bedingung erfüllen

$$\sin^2 \varphi + \sin^2 (90^\circ - \varphi) = 1,$$

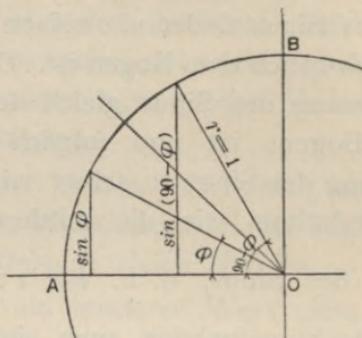


Fig. 7.

so können die Sinus in dem Quadranten OAB zu Paaren gruppiert werden, so dass die Summe der Quadrate eines jeden Paares gleich Eins ist, oder mit anderen Worten: das

mittlere Quadrat des Sinus ist $\frac{1}{2}$ und die Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat oder der effektive Wert des

Sinus ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h.

Der effektive Wert einer Sinusfunktion verhält sich zu seinem maximalen Werte wie

$$\frac{1}{\sqrt{2}} : 1 = 0,70711.$$

Daher haben wir für die Sinuskurve folgende Beziehungen:

Max. Wert	Eff. Wert	Arithm. Mittel	
		Halbe Periode	Ganze Periode
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\pi}$	0
1	0,7071	0,63663	0
1,4142	1	0,90034	0
1,5708	1,1107	1	0

10. Wenn wir nun zur allgemeinen Wechselstromkurve

$$i = A_1 \sin 2\pi Nt + A_2 \sin 4\pi Nt + A_3 \sin 6\pi Nt + \dots \\ + B_1 \cos 2\pi Nt + B_2 \cos 4\pi Nt + B_3 \cos 6\pi Nt + \dots$$

übergehen, so finden wir, wenn wir diesen Ausdruck quadrieren und alle Produkte, die als mittleres Quadrat Null ergeben, streichen, den *effektiven Wert*

$$I = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + \dots}$$

Der *mittlere Wert* giebt keinen einfachen Ausdruck; er ist auch von keinem besonderen Interesse.

Kapitel III.

Gesetz der elektromagnetischen Induktion.

11. Wenn ein elektrischer Leiter sich in Beziehung auf ein magnetisches Feld bewegt, so wird in dem Leiter eine elektromotorische Kraft induziert, die der Intensität des magnetischen Feldes, der Länge des Leiters und der Geschwindigkeit seiner zum magnetischen Felde und zur Richtung des Leiters senkrechten Bewegung proportional ist, oder mit anderen Worten: sie ist proportional der Zahl der magnetischen Kraftlinien, die in einer Sekunde von dem Leiter geschnitten werden.

Als praktische Einheit der elektromotorischen Kraft ist das *Volt* festgesetzt, d. i. die elektromotorische Kraft, die in einem Leiter induziert wird, der in der Sekunde 10^{-8} magnetische Kraftlinien schneidet.

Wenn der Leiter in sich geschlossen ist, so erzeugt die induzierte elektromotorische Kraft einen Strom.

Einen geschlossenen Leiter kann man eine Windung nennen. In einer solchen Windung ist die Zahl der in einer Sekunde geschnittenen magnetischen Kraftlinien gleich der Zunahme oder Abnahme der durch diese Windung hindurchgehenden Kraftlinien; sie ist n mal so gross bei n Windungen.

Daher ist die in n Windungen induzierte elektromotorische Kraft, ausgedrückt in Volt, n mal so gross als die Zunahme oder Abnahme der durch die Windungen in einer Sekunde hindurchgehenden magnetischen Strömung, multipliziert mit 10^{-8} .

Wenn die Änderung der durch eine Windung oder durch n Windungen hindurchgehenden Strömung nicht gleichförmig stattfindet, so giebt das Produkt aus der Windungszahl und der Änderung der Strömung pro Sekunde die mittlere elektromotorische Kraft.

Sobald die magnetische Strömung Φ sich in Beziehung auf n Windungen ändert — d. h. wenn die Windungen sich entweder in der Strömung drehen oder dieselbe während eines jeden vollständigen Wechsels oder Cyklus periodisch in die Windungen ein- und aus demselben austritt —, so wird die Gesamtströmung viermal durchschnitten, zweimal beim Ein- und zweimal beim Austritt.

Ist daher N die Zahl der ganzen Cyklen pro Sekunde oder die Frequenz des Wechsels der Strömung Φ , so ist die in n Windungen induzierte mittlere elektromotorische Kraft E im Mittel $= 4 n \Phi N 10^{-8}$ Volt. Dies ist die Grundgleichung in der Elektrotechnik; sie ist sowohl in Gleichstrom- als auch in Wechselstromapparaten gültig.

12. Bei Gleichstrommaschinen und auch bei vielen Wechselstrommaschinen rotieren die Windungen in einem konstanten magnetischen Felde, bei andern Wechselstrommaschinen hingegen und bei Induktionsmotoren rotiert das magnetische Feld; bei Transformatoren wechselt das Feld mit Rücksicht auf die stationären Windungen.

Es sei bei einer Gleichstrommaschine n die Zahl der von Bürste zu Bürste hintereinander geschalteten Windungen, Φ die durch eine Windung hindurchgehende Strömung und N die Frequenz; dann ist die in der Maschine induzierte elektromotorische Kraft, $E = 4 n \Phi N 10^{-8}$ Volt, unabhängig von der Zahl der Pole oder der Hintereinander- oder Parallelschaltung der Armatur, sei sie ein Ringanker, ein Trommelanker oder eine andere Type.

Ist bei einer Wechselstrommaschine oder bei einem Transformator n die Zahl der hintereinander geschalteten

Windungen, Φ die durch eine Windung hindurchgehende maximale Strömung und N die Frequenz, so ergibt obige Formel $E_{\text{im Mittel}} = 4 n \Phi N 10^{-8}$ Volt. Da aber die maximale

elektromotorische Kraft durch $E_{\text{max.}} = \frac{\pi}{2} E_{\text{im Mittel}}$ gegeben

ist, so erhalten wir $E_{\text{max.}} = 2 \pi n \Phi N 10^{-8}$ Volt. Da ferner die effektive elektromotorische Kraft durch den Ausdruck

$E_{\text{eff.}} = \frac{E_{\text{max.}}}{\sqrt{2}}$ gegeben ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{\text{eff.}} &= \sqrt{2} \pi n \Phi N 10^{-8} \\ &= 4,44 n \Phi N 10^{-8} \end{aligned}$$

Volt. Dies ist die Grundformel der Wechselstrominduktion durch Sinuswellen.

13. Wenn in einem Stromkreise von n Windungen die durch ihn hindurchgehende magnetische Strömung Φ von dem in diesem Stromkreise fließenden Strom hervorgebracht wird, so heisst das Verhältnis

$$\frac{\text{Strömung} \times \text{Zahl der Windungen} \times 10^{-8}}{\text{Stromstärke}}$$

die *Selbstinduktion* L des Stromkreises, gemessen in Henry.

Das Produkt aus der Windungszahl n und der maximalen Strömung Φ , die durch einen effektiven Strom von I Ampère oder durch den maximalen Strom von $I\sqrt{2}$ Ampère hervorgebracht wird, ist demnach $n \Phi = LI\sqrt{2} 10^8$ und folglich die effektive elektromotorische Kraft der Selbstinduktion

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{2} \pi n \Phi N 10^{-8} \\ &= 2 \pi NLI \text{ Volt.} \end{aligned}$$

Das Produkt $x = 2 \pi NL$ hat dieselbe Dimension als der Widerstand und heisst die *Reaktanz* des Stromkreises. Die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion des Stromkreises oder die Reaktanzspannung ist $E = Ix$. Sie bleibt 90° hinter dem Strom zurück, weil der Strom mit der durch sich erzeugten magnetischen Strömung in Phase ist und die elektromotorische Kraft 90° hinter der magnetischen

Strömung zurückbleibt. Die elektromotorische Kraft bleibt 90° hinter der magnetischen Strömung zurück, weil sie der Änderung der Strömung proportional ist. Sie ist Null, wenn der Magnetismus seinen maximalen Wert erreicht hat und ein Maximum, wenn die Strömung durch Null geht, wo sie sich am schnellsten ändert.

Graphische Darstellung

Die beiden Wellen in den Figuren 2 und 3 sind in Figuren 4 bzw. 5 in Polarkoordinaten als geschlossene elliptische Kurven dargestellt, die in ihrem Mittelpunkt mit dem Radius vector den momentanen Wert der Wellen angeben, entsprechend der Zeit, die durch die



Die beiden Wellen in den Figuren 2 und 3 sind in Figuren 4 bzw. 5 in Polarkoordinaten als geschlossene elliptische Kurven dargestellt, die in ihrem Mittelpunkt mit dem Radius vector den momentanen Wert der Wellen angeben, entsprechend der Zeit, die durch die

Kapitel IV.

Graphische Darstellung.

14. Häufig werden Wechselstromwellen graphisch in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt, in denen die Zeiten als Abscissen und die momentanen Werte der Welle als Ordinaten eingetragen werden. Den besten Einblick in Hinsicht auf die gegenseitige Beziehung verschiedener Wechselstromwellen erhält man aber durch ihre Darstellung in Polarkoordinaten, in denen die Zeit als Winkel oder Amplitude (eine vollständige Periode wird durch eine Umdrehung repräsentiert), die momentanen Werte dagegen als Radii vectores eingetragen werden.

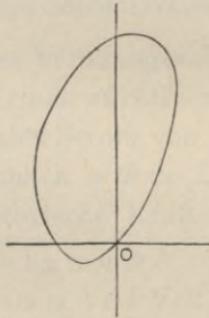


Fig. 8.

Die beiden Wellen in den Figuren 2 und 3 sind in Figur 8 bzw. 9 in Polarkoordinaten als geschlossene charakteristische Kurven dargestellt, die in ihrem Durchschnittspunkt mit dem Radius vector den momentanen Wert der Welle ergeben, entsprechend der Zeit, die durch die Amplitude des Radius vector repräsentiert wird.

Diese momentanen Werte sind positiv in der Richtung des Radius vector, negativ in entgegengesetzter Richtung. Daher werden die beiden halben Wellen in Figur 1 durch dieselbe polare charakteristische Kurve dargestellt, die den Durchschnittspunkt des Radius vector zweimal während einer Periode durchläuft, das eine Mal in der Richtung des Vectors die positive halbe Welle, das andere Mal in entgegengesetzter Richtung die negative ergebend. In den

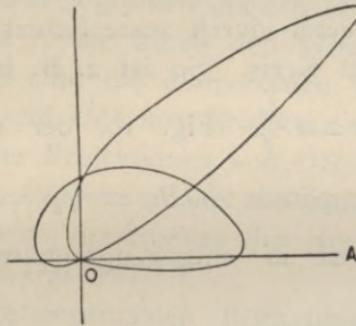


Fig. 9.

Figuren 3 und 9, in denen die beiden halben Wellen von einander verschieden sind, haben sie auch verschiedene polare Charakteristiken.

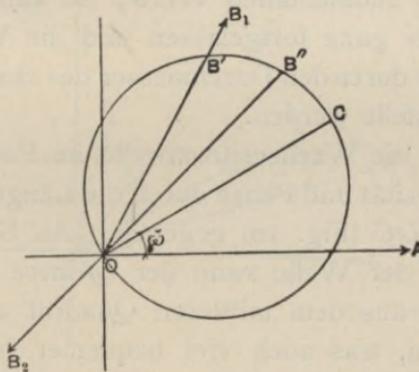


Fig. 10.

15. Die Sinuswelle in Figur 1 wird in Polarkoordinaten durch einen Kreis dargestellt (Figur 10). Der Durchmesser

der charakteristischen Kurve der Sinuswelle $I = OC$ stellt die *Intensität* der Welle vor; die Amplitude des Durchmessers OC , Winkel $\omega = AOC$ ist die *Phase* der Welle, die demnach analytisch durch die Funktion $i = I \cos(\varphi - \omega)$ dargestellt wird, wo $\varphi = \frac{2t}{T}$ der momentane Wert der Amplitude ist, der dem momentanen Werte i der Welle entspricht.

Die momentanen Werte erhält man aus dem beweglichen Radius vector durch seine Schnittpunkte mit dem charakteristischen Kreis. So ist z. B. bei der Amplitude $AOB_1 = \varphi_1 = 2\pi \frac{t_1}{T}$ (Fig. 10) der momentane Wert OB' ; bei der Amplitude $AOB_2 = \varphi_2 = 2\pi \frac{t_2}{T}$ ist er OB'' und negativ, weil in entgegengesetzter Richtung zum Vector OB_2 .

Der charakteristische Kreis der Wechselstromwelle wird durch die Länge seines Durchmessers (die Intensität der Welle) und durch die Amplitude des Durchmessers (die Phase der Welle) bestimmt.

Kommt der integrale Wert der Welle allein in Betracht, nicht aber die momentanen Werte, so kann der charakteristische Kreis ganz fortgelassen und die Welle in Intensität und Phase durch den Durchmesser des charakteristischen Kreises dargestellt werden.

Daher ist die Wechselstromwelle im Polarkoordinatensystem in Intensität und Phase durch die Länge und Richtung eines Vectors OC (Fig. 10) gegeben. An Stelle des maximalen Wertes der Welle kann der *effektive* Wert oder die Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat als Vector gebraucht werden, was auch viel bequemer ist. Der maximale Wert ist dann $\sqrt{2}$ multipliziert mit dem Vector OC , so dass die momentanen Werte, wenn sie dem Diagramm entnommen werden, mit dem Faktor $\sqrt{2}$ multipliziert werden müssen.

16. Um verschiedene Sinuswellen zu kombinieren, werden ihre graphischen Darstellungen oder ihre Vektoren nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte miteinander verbunden.

Wenn z. B. zwei Sinuswellen OB und OC (Fig. 11) übereinander gelagert sind, wie z. B. zwei elektromotorische Kräfte, die in einem und demselben Stromkreise wirken, so wird ihre resultierende Welle durch OD dargestellt, d. h. durch die Diagonale eines Parallelogramms mit OB und OC als Seiten.

Zu jeder Zeit t , die durch den Winkel $\varphi = AOX$ repräsentiert wird, sind die momentanen Werte der drei Wellen OB , OC und OD ihre Projektionen auf OX und da die Summe der Projektionen von OB und OC gleich der Projektion von OD ist, so sind die momentanen Werte der Welle OD gleich der Summe der momentanen Werte der beiden Wellen OB und OC .

Aus den vorangegangenen Betrachtungen schliessen wir folgendes:

Die Sinuswelle wird in Polarkoordinaten graphisch durch den Vector dargestellt, dessen Länge OC die Intensität und dessen Amplitude AOC die Phase der Sinuswelle bezeichnet.

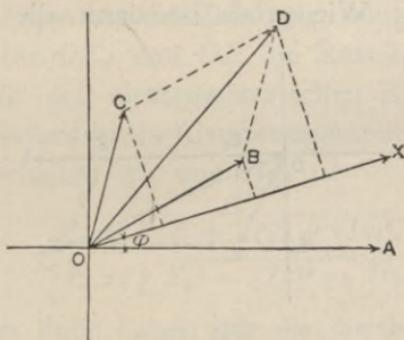


Fig. 11.

Sinuswellen werden in Polarkoordinaten graphisch durch das Gesetz des Parallelogramms oder Polygons der Sinuswellen zusammengesetzt oder aufgelöst.

Die Kirchhoff'schen Gesetze lassen sich nun für Wechselstromsinuswellen folgendermaassen ausdrücken:

a) Die Resultante aller elektromotorischen Kräfte in einem geschlossenen Stromkreis, wie sie durch das Parallelogramm der Sinuswellen gefunden wird, ist Null, wenn die gegenelektromotorischen Kräfte des Widerstandes und der Reaktanz mit einbegriffen sind.

b) Die Resultante sämtlicher Ströme, die nach einem Knotenpunkt hin fliessen, durch das Parallelogramm der Sinuswellen gefunden, ist gleich Null.

Die Energiegleichung wird graphisch so ausgedrückt:

Der Effekt in einem Wechselstromstromkreise wird in Polarkoordinaten dargestellt durch das Produkt aus dem Strom I und der Projektion der elektromotorischen Kraft E auf den Strom I , oder durch das Produkt aus der elektromotorischen Kraft E und der Projektion des Stromes I auf die elektromotorische Kraft, oder sie ist $IE \cos (I, E)$.

17. Es wird z. B. mittels einer Zuleitung, deren Widerstand r und deren Reaktanz $x = 2\pi NL$ ist (wo N die Frequenz und L die Selbstinduktion bedeutet), ein Strom von I Ampère durch einen induktionsfreien Stromkreis bei einer elektromotorischen Kraft von E Volt hindurchgeschickt. Wie gross ist dann die vom Generator

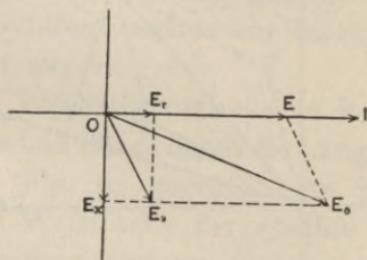


Fig. 12.

an dem einen Ende der Zuleitung geforderte elektromotorische Kraft?

Im Polardiagramm (Fig. 12) nehme man die Phase des Stromes OI als Anfangs- oder Nulllinie an. Da der Strom-

kreis induktionsfrei ist, so ist der Strom in Phase mit seiner elektromotorischen Kraft. Daher wird die elektromotorische Kraft E am Ende der Zuleitung an den Klemmen des Stromkreises durch den Vector OE dargestellt. Um den Widerstand r der Zuleitung zu überwinden, ist eine elektromotorische Kraft Ir , die in Phase mit dem Strom ist, erforderlich; sie ist im Diagramm mit OE_r bezeichnet. Die Selbstinduktion der Zuleitung induziert eine elektromotorische Kraft, die dem Strom I und der Reaktanz x proportional ist und eine viertel Periode oder 90° hinter ihm zurückbleibt. Um diese gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion zu überwinden, ist eine elektromotorische Kraft Ix erforderlich, die dem Strom in der Phase um 90° voreilt; sie wird durch den Vector OE_x dargestellt. Daher verbraucht der Widerstand eine elektromotorische Kraft in Phase mit dem Strom und die Reaktanz eine solche, die 90° dem Strom voreilt. Die elektromotorische Kraft des Generators E_0 muss die drei elektromotorischen Kräfte E , E_r und E_x ergeben, ist somit als deren Resultante bestimmt. Verbinden wir OE_r und OE_x miteinander nach dem Gesetz des Parallelogramms der Kräfte, so erhalten wir OE_s als die elektromotorische Kraft, die zur Überwindung der Impedanz der Zuleitung nötig ist, und ebenso erhalten wir für OE_s und OE die Resultante OE_0 als die zur Erzeugung der elektromotorischen Kraft E am Ende der Zuleitung erforderliche Klemmenspannung des Generators. Algebraisch erhalten wir aus Fig. 12

$$E_0 = \sqrt{(E + Ir)^2 + (Ix)^2},$$

oder

$$E = \sqrt{E_0^2 - (Ix)^2} - Ir.$$

In diesem Falle haben wir die durch den Widerstand (in Phase mit dem Strom) und die durch die Reaktanz (90° dem Strom voreilend) verbrauchte elektromotorische Kraft als Teile oder Komponenten der Klemmenspannung E_0 betrachtet; E_0 haben wir durch Kombination von E_r , E_x und E abgeleitet.

18. Indess können wir die Wirkung der Selbstinduktion direkt als eine elektromotorische Kraft E_x' einführen, die gegen elektromotorische Kraft I_x , welche 90° hinter dem Strom zurückbleibt; ferner können wir die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft als

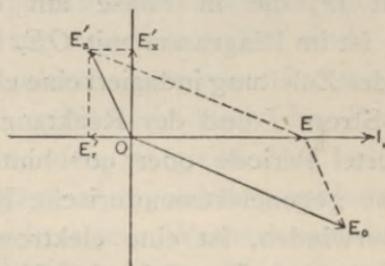


Fig. 13.

gegen elektromotorische Kraft $E_r' = Ir$ einführen, aber im entgegengesetzten Sinne zu dem Strom, wie in Fig. 13; dann müssen sich die drei elektromotorischen Kräfte E_0 , E_r' und E_x' zu einer resultierenden elektromotorischen Kraft E zusammensetzen, die am Ende der Zuleitung übrig bleibt. E_r' und E_x' ergeben E_s' als gegen elektromotorische Kraft der Impedanz. Da E_s' und E_0 die Resultante E bilden müssen, so wird E_0 als die eine Seite des

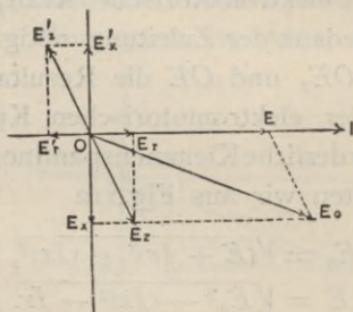


Fig. 14.

Parallelogramms OE_0EE_s' gefunden, dessen andere Seite OE_s' und die Diagonale OE gegeben sind.

Oder man kann sagen (Fig. 14), um die gegen elektromotorische Kraft der Impedanz der Zuleitung OE_s' zu überwinden, muss die Komponente OE_s der Klemmenspannung

mit der andern Komponente OE die Klemmenspannung OE_0 ergeben.

Wie bereits gezeigt, können wir die in einem Stromkreis hervorgerufenen elektromotorischen Kräfte auf zweierlei Art darstellen, entweder als gegenelektromotorische Kräfte, die sich mit der Klemmenspannung kombinieren lassen oder als Teile oder Komponenten der Klemmenspannung; im letzten Falle haben sie entgegengesetzte Phasen als im ersteren. Der Natur des Problems gemäss kann entweder die eine oder die andere Darstellung vorgezogen werden.

So ist z. B. die elektromotorische Kraft, die durch den Widerstand verbraucht wird $= Ir$ und in Phase mit dem Strom; die gegenelektromotorische Kraft des Widerstands ist dem Strom entgegengesetzt. Die durch die Reaktanz verbrauchte elektromotorische Kraft ist $= Ix$ und eilt dem Strom um 90° voraus, während die elektromotorische Kraft der Reaktanz 90° hinter dem Strom zurückbleibt, so dass wir, wenn OI (Fig. 15) der Strom ist, erhalten:

OE_r als die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft,

OE_r' als die gegenelektromotorische Kraft des Widerstandes,

OE_x als die durch Selbstinduktion verbrauchte elektromotorische Kraft,

OE_x' als die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion,

OE_z als die durch die Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft,

OE_z' als die gegenelektromotorische Kraft der Impedanz.

Offenbar sind diese gegenelektromotorischen Kräfte z. B. von der gegenelektromotorischen Kraft eines synchronen Motors verschieden, insofern sie keine unabhängige Existenz haben, sondern nur so lange existieren als der Strom fliesst. In dieser Hinsicht sind sie analog der Gegenkraft der Reibung in der Mechanik.

19. Wir kommen nun zurück auf die Gleichung für die elektromotorische Kraft an dem Generatorende der Zuleitung $E_0 = \sqrt{(E + Ir)^2 + (Ix)^2}$ und finden als Spannungsverlust in der Zuleitung

$$\Delta E = E_0 - E = \sqrt{(E + Ir)^2 + (Ix)^2} - E.$$

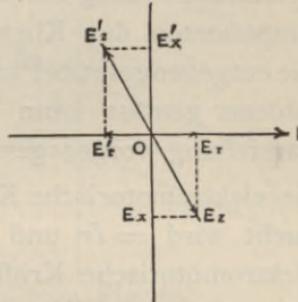


Fig. 15.

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem für die elektromotorische Kraft der Impedanz und ist kleiner als dieser: $E_s = I_s = I\sqrt{r^2 + x^2}$.

Daher ist es nicht richtig, wenn man den Spannungsverlust in einem Stromkreise durch Multiplikation der Stromstärke mit der Impedanz berechnet. Der Spannungsverlust in der Zuleitung hängt bei einem gegebenen Strom, der durch sie in einen induktionsfreien Stromkreis gesandt wird, nicht nur von den Konstanten der Zuleitung r und x , sondern auch von der elektromotorischen Kraft E am Ende derselben ab, wie aus den Diagrammen zu ersehen ist.

20. Ist der Stromkreis nicht induktionsfrei, d. h. wenn der Strom I hinter der elektromotorischen Kraft E um den Winkel ω zurückbleibt und wenn wir wiederum den Strom OI (Fig. 16) als Nulllinie wählen, so eilt die elektromotorische Kraft OE dem Strom um den Winkel ω voraus. Die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft Ir ist mit dem Strom in Phase und durch OE_r dargestellt, während die durch die Reaktanz I_x verbrauchte elektromotorische Kraft dem Strom um 90° voraus ist und

durch OE repräsentiert wird. Setzen wir OE , OE_r und OE_x zusammen, so erhalten wir OE_0 als die am Generatorende der Zuleitung erforderliche elektromotorische Kraft. Vergleichen wir die Figuren 16 und 13 miteinander, so sehen wir, dass in ersterer OE_0 grösser ist, oder umgekehrt, wenn E_0 gleich ist, so wird E bei induktiver Belastung kleiner sein. Mit anderen Worten: der Spannungsverlust in einer nicht induktionsfreien Zuleitung ist grösser, wenn der Stromkreis ebenfalls nicht induktionsfrei ist. Aus Figur 16 erhalten wir

$$E_0 = V \sqrt{(E \cos \omega + Ir)^2 + (E \sin \omega + Ix)^2}.$$

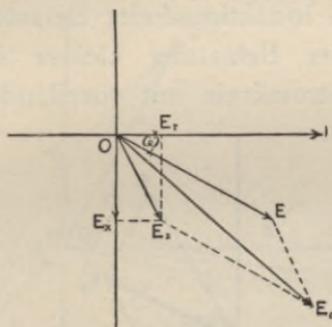


Fig. 16.

Wenn jedoch der Strom in dem Stromkreise voreilt, was der Fall ist, wenn Kondensatoren oder synchrone Motoren gespeist werden, deren gegenelektromotorische Kraft grösser als die Klemmenspannung ist, so wird die elektromotorische Kraft durch einen Vector OE dargestellt, der hinter dem Strom OI um den Winkel der Verschiebung ω' zurückbleibt (Fig. 17). In diesem Fall erhalten wir, wenn wir OE mit OE_r , in Phase mit dem Strom, und mit OE_x , 90° dem Strom voreilend, zusammensetzen, die elektromotorische Kraft des Generators OE_0 , die hier nicht nur kleiner als in den Figuren 16 und 13 ist, sondern auch noch kleiner als E sein kann, d. h. die Spannung steigt in der Zuleitung. Mit andern Worten: in einem Stromkreise mit voreilendem Strom erhöht die Selbstinduktion der Zuleitung die Spannung, so dass der Spannungsverlust

weniger beträgt als bei induktionsfreier Belastung; er kann sogar negativ sein; d. h. die Generatorspannung kann niedriger sein als die Spannung an dem andern Ende der Zuleitung.

Alle Diagramme in den Figuren 13 bis 17 können als Polardiagramme eines Wechselstromgenerators von der elektromotorischen Kraft E_0 mit der von dem Widerstand verbrauchten elektromotorischen Kraft $E_r = Ir$, mit der Reaktanz $E_x = Ix$ und mit der Spannungsdifferenz E an den Klemmen der Wechselstrommaschine angesehen werden. Wir sehen hier, dass bei nicht induktionsfreier Belastung die Spannungsdifferenz an den Klemmen der Wechselstrommaschine kleiner ist als bei induktionsfreier Belastung und dass sie bei induktionsfreier Belastung kleiner ist als wenn die Maschine einen Stromkreis mit voreilemendem Strom speist,

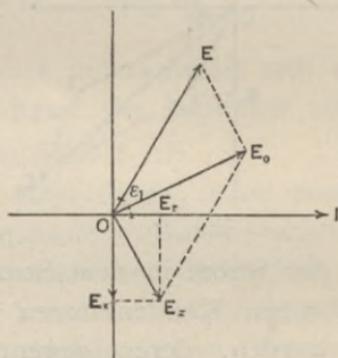


Fig. 17.

wie dies beispielsweise der Fall ist, wenn es sich um einen Stromkreis mit synchronen Motoren unter den oben angeführten Umständen handelt.

21. Als weiteres Beispiel können wir das Diagramm eines Wechselstromtransformators betrachten, dessen sekundärer Stromkreis nicht induktionsfrei belastet ist.

Der Einfachheit halber können wir hier die magnetische Hysteresis, deren Wirkung in einem besonderen Kapitel eingehend behandelt wird, vernachlässigen.

Wir zählen die Zeit von dem Augenblick an, wo die magnetische Strömung Null ist. Die Phase der Strömung,

nämlich die Amplitude ihres maximalen Wertes ist dann 90° und die Phase der induzierten elektromotorischen Kraft 180° , weil sie 90° hinter der induzierenden Strömung zurückbleibt. Daher wird die sekundäre induzierte elektromotorische Kraft E_1 durch einen Vektor OE_1 in der Phase von 180° dargestellt (Fig. 18). Der sekundäre Strom I_1 bleibt hinter der elektromotorischen Kraft E_1 um den Winkel ω_1 zurück, der durch den Widerstand und die Selbstinduktion des sekundären Stromkreises, d. h. durch seine Belastung, bestimmt wird. Er wird im Diagramm durch den Vektor OF_1 der Phase $180^\circ + \omega_1$ dargestellt.

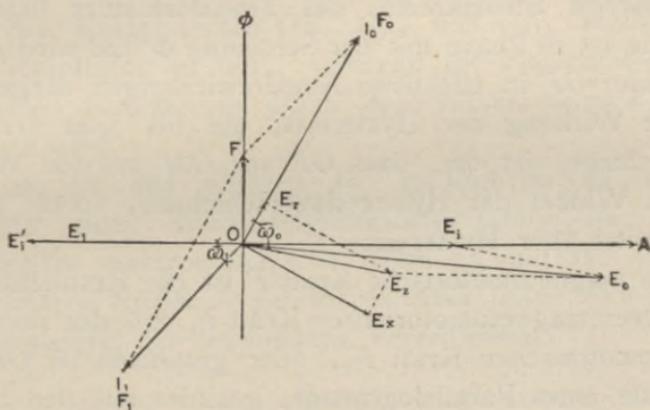


Fig. 18.

Anstatt des sekundären Stromes I_1 zeichnen wir die sekundäre magnetomotorische Kraft $F_1 = n_1 I_1$ auf, wo n_1 die Zahl der sekundären Windungen und F_1 die Ampèrewindungen bedeuten. Dies macht uns von dem Verhältnis der Transformation unabhängig.

Aus der sekundären induzierten elektromotorischen Kraft E_1 erhalten wir die Strömung Φ , die erforderlich ist, um diese elektromotorische Kraft zu erzeugen, aus der Gleichung

$$E_1 = \sqrt{2} \pi n_1 N \Phi 10^{-8},$$

wo

E_1 die sekundäre induzierte elektromotorische Kraft in effektiven Volt,

N die Frequenz in Cyklen pro Sekunde,
 n_1 die Zahl der sekundären Windungen,
 Φ der maximale Wert der magnetischen Strömung in
 Weber ist.

Die Ableitung dieser Gleichung wurde in einem früheren Kapitel gegeben.

Die magnetische Strömung Φ wird durch den Vektor $O\Phi$ in der Phase von 90° dargestellt und zu seiner Erzeugung ist eine magnetomotorische Kraft von der Grösse F erforderlich, die durch die magnetische Charakteristik des Eisens, durch den Querschnitt und durch die Länge des magnetischen Stromkreises des Transformators bestimmt wird; sie ist in Phase mit der Strömung Φ und wird durch den Vektor OF in effektiven Ampèrewindungen dargestellt.

Die Wirkung der Hysterisis, die bis jetzt vernachlässigt wurde, ist die, dass OF vor OM um den Winkel α , dem Winkel der Hysterisisverschiebung, voreilt (siehe das Kapitel über Hysterisis).

Die magnetomotorische Kraft F ist die Resultante der sekundären magnetomotorischen Kraft F_1 und der primären magnetomotorischen Kraft F_o , oder graphisch ist OF die Diagonale eines Parallelogramms, gebildet aus den Seiten OF_1 und OF_o . Weil OF_1 und OF bekannt sind, finden wir OF_o , die primären Ampèrewindungen, und hieraus und aus der Zahl der primären Windungen n_o den primären Strom $I_o = \frac{F_o}{n_o}$, der dem sekundären Strom I_1 entspricht.

Um den Widerstand der primären Spule r_o zu überwinden, ist eine elektromotorische Kraft $E_r = I_o r_o$ in Phase mit dem Strom I_o erforderlich; sie wird durch den Vektor OE_r dargestellt.

Um die Reaktanz der primären Spule $x_o = 2\pi n_o L_o$ zu überwinden, ist eine elektromotorische Kraft $E_x = I_o x_o$ erforderlich, die dem Strom I_o um 90° voreilt und die durch den Vektor OE_x bezeichnet wird.

Die resultierende magnetische Strömung Φ , die in der

sekundären Spule die elektromotorische Kraft E_1 induziert, induziert in der primären Spule eine elektromotorische Kraft E_1 , die nach dem Windungsverhältnis $\frac{n_0}{n_1}$ proportional E_1 und mit E_1 in Phase ist, oder es ist $E'_i = \frac{n_0}{n_1} E_1$, was durch den Vektor OE'_i dargestellt wird. Um diese gegenelektromotorische Kraft E'_i zu überwinden, ist eine primäre elektromotorische Kraft E_i erforderlich, die gleich E'_i , ihr aber entgegengesetzt gerichtet ist; sie wird durch den Vektor OE_i dargestellt.

Die primäre Klemmenspannung E_o muss daher aus den drei Komponenten OE_i , OE_r und OE_x bestehen und ihre Resultante ist OE_o , während die Phasendifferenz im primären Stromkreise durch den Winkel $\omega_o = E_oOI$ gefunden wird.

22. In den Figuren 18, 19 und 20 ist das Diagramm eines Wechselstromtransformators für dieselbe sekundäre elektromotorische Kraft E_1 und für denselben sekundären Strom I_1 gezeichnet, aber unter verschiedenen Bedingungen der sekundären Verschiebung.

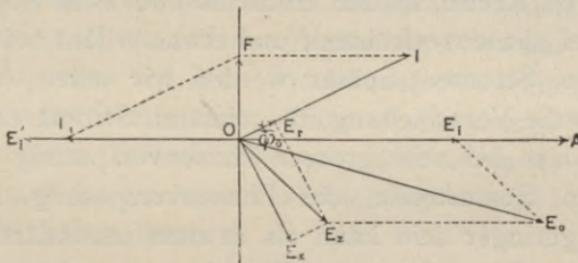


Fig. 19.

In Fig. 18 bleibt der sekundäre Strom I_1 hinter der sekundären elektromotorischen Kraft E_1 um 60° zurück.

In Fig. 19 ist der sekundäre Strom I_1 in Phase mit der sekundären elektromotorischen Kraft E_1 .

In Fig. 20 eilt der sekundäre Strom I_1 der sekundären elektromotorischen Kraft E_1 um 60° voraus.

Diese Diagramme zeigen, dass Phasenverspätung die erforderlichen Werte von primärem Strome und primärer elektromotorischer Kraft erhöht, Phasenverfrühung dieselben erniedrigt; oder es wird umgekehrt bei einer gegebenen primären Klemmenspannung E_o die sekundäre elektromotorische Kraft E_1 bei einer induktiven Belastung kleiner und bei einer Kondensatorbelastung (voreilendem Strom) grösser als bei einer induktionsfreien Belastung.

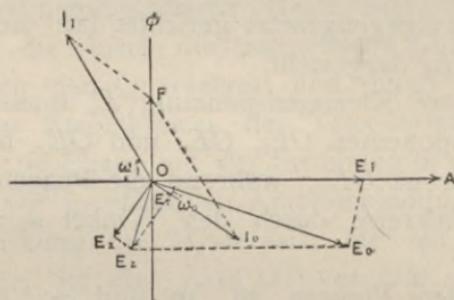


Fig. 20.

Gleichzeitig sehen wir, dass eine im sekundären Stromkreise eines Transformators vorkommende Phasendifferenz im primären Kreise wieder erscheint und zwar etwas vermindert bei phasenverfrühtem, und etwas erhöht bei phasenverspätetem Strome. Später werden wir sehen, dass die Hysteresis die Verschiebung im primären Stromkreise reduziert, so dass bei sehr grosser Phasenverspätung in dem sekundären Stromkreise die Phasenverspätung in dem primären geringer sein kann als in dem sekundären.

Hieraus folgt, dass der Transformator nicht geeignet ist, Phasenverschiebung zwischen Strömen zu erzeugen, da die primären und sekundären Ströme, ausgenommen bei sehr geringen Belastungen, beinahe in Phase oder vielmehr einander entgegengesetzt sind.

Kapitel V.

Symbolische Methode.

23. Die graphische Methode, die die Wechselstromerscheinungen durch Polarkoordinaten der Zeit darstellt, gewährt die besten Mittel, eine klare Einsicht in die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen Wechselstromsinuswellen zu erlangen. Für numerische Rechnungen aber ist die graphische Methode häufig nicht geeignet und zwar rührt dies von den sehr verschiedenen Grössen der Wechselstromsinuswellen her, die in demselben Diagramm dargestellt werden und die eine genaue Bestimmung aus diesem unmöglich machen. In den Diagrammen für Transformatoren z. B. (vgl. die Figuren 18—20) haben die verschiedenen Grössen in der Praxis z. B. numerische Werte wie $E_1 = 100$ Volt und $I_1 = 75$ Ampère, für eine induktionsfreie sekundäre Belastung, wie bei Glühlampen. Dann ist die einzige Reaktanz des sekundären Stromkreises die der sekundären Spule oder $x_1 = 0,08 \Omega$, die eine Verschiebung von $\omega_1 = 3,6^\circ$ ergibt. Wir haben ferner:

$$n_1 = 30 \text{ Windungen.}$$

$$n_o = 300 \text{ Windungen.}$$

$$F_1 = 2250 \text{ Ampèrewindungen.}$$

$$F = 100 \text{ Ampèrewindungen.}$$

$$E_r = 10 \text{ Volt.}$$

$$E_x = 60 \text{ Volt.}$$

$$E_i = 1000 \text{ Volt.}$$

Das entsprechende Diagramm ist in Fig. 21 gezeigt. Man kann keine genauen numerischen Werte aus einem

so flachen Parallelogramm als es OF_1FF_o ist, und aus der Zusammensetzung von Vektoren von den relativen Grössen 1 : 6 : 100 erhalten.

Daher liegt die Wichtigkeit der graphischen Methode nicht so sehr in ihrer Brauchbarkeit für die praktische Rechnung, als vielmehr in dem einfacheren Verständnis verwickelter Erscheinungen, die sie gewährt.

24. Wir können manchmal die numerischen Werte trigonometrisch mittelst des Diagramms berechnen, gewöhnlich wird dies aber zu kompliziert, wie leicht einzusehen ist,

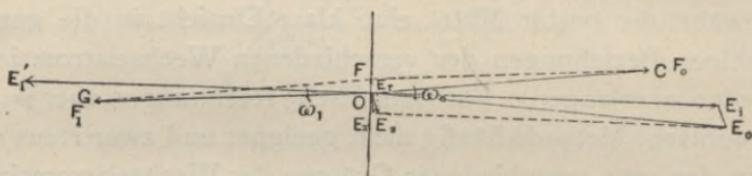


Fig. 21.

wenn wir das Verhältnis der Transformation aus dem oben abgebildeten Diagramm eines Transformators berechnen wollen. Die primäre magnetomotorische Kraft ist gegeben durch die Gleichung

$$F_o = \sqrt{F^2 + F_1^2 + 2FF_1 \sin \omega_1},$$

ein Ausdruck, der als Ausgangspunkt für die fernere Berechnung ungeeignet ist.

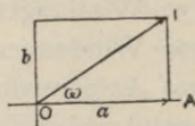


Fig. 22.

Deshalb ist eine Methode erwünscht, die die Genauigkeit der analytischen Rechnung mit der Klarheit der graphischen Darstellung vereinigt.

25. Wir haben gesehen, dass die Wechselstromsinuswelle sowohl in der Intensität als auch in der Phase durch den Vektor OI dargestellt ist, der analytisch durch zwei numerische Grössen, durch die Strecke OI als Intensität und durch die Amplitude $\angle AOI$ als Phase ω der Welle I bestimmt wird.

Anstatt den Vektor, der die Sinuswelle in dem Polar-
diagramm darstellt, durch die polaren Koordinaten I und ω zu bezeichnen, können wir ihn durch die rechtwinkligen Koordinaten a und b (Fig. 22) darstellen, wo

$a = I \cos \omega$ die horizontale Komponente der Sinuswelle,

$b = I \sin \omega$ die vertikale Komponente der Sinuswelle ist.

Diese Darstellung der Sinuswelle durch rechtwinklige Komponenten ist sehr bequem, insofern als sie den Gebrauch von trigonometrischen Funktionen in der Kombination oder Auflösung der Sinuswellen vermeidet.

Da die rechtwinkligen Komponenten a und b die horizontalen und vertikalen Projektionen des Vektors sind, die die Sinuswelle darstellen, und da die Projektion der Diagonale eines Parallelogramms gleich der Summe der Projektionen seiner Seiten ist, so wird die Kombination der Sinuswellen durch das Gesetz vom Parallelogramm auf die Addition oder Subtraktion ihrer rechtwinkligen Komponenten reduziert, d. h.

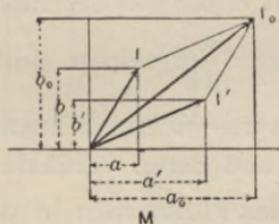


Fig. 23.

Die Sinuswellen werden mit einander kombiniert oder aufgelöst durch die Addition oder Subtraktion ihrer rechtwinkligen Komponenten.

Wenn z. B. a und b die rechtwinkligen Komponenten einer Sinuswelle I und wenn a' und b' die einer anderen I' sind (Fig. 23), so hat ihre resultierende Sinuswelle I_0 die rechtwinkligen Komponenten $a_0 = a + a'$ und $b_0 = b + b'$.

Um von den rechtwinkligen Komponenten a und b einer Sinuswelle ihre Intensität i und ihre Phase ω zu erhalten, können wir a und b mit Hilfe eines Parallelogramms kombinieren und erhalten dann

$$i = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}.$$

Daher können wir mit den Sinuswellen analytisch ebenso operieren als mit den Kräften in der Mechanik, indem wir sie in ihre rechtwinkligen Komponenten zerlegen.

26. Um bei längeren Rechnungen Verwechslungen zwischen den Komponenten zu vermeiden, können wir zur Unterscheidung der horizontalen und vertikalen Komponenten der Sinuswellen beispielsweise die vertikalen Komponenten mit einem Index versehen oder durch Hinzufügung eines sonst bedeutungslosen Symbols markieren, wie durch den Buchstaben j . Wir erhalten so für den Ausdruck der Sinuswelle $I = a + jb$, der jetzt bedeutet, dass a die horizontale und b die vertikale Komponente der Sinuswelle I ist und dass beide Komponenten in der resultierenden Welle von der Intensität $i = \sqrt{a^2 + b^2}$ und der Phase $\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}$ vereinigt sind.

Ebenso bedeutet $a - jb$ eine Sinuswelle, deren horizontale Komponente a und deren vertikale $-b$ ist, u. s. w.

Jedoch deutet das Pluszeichen in dem Ausdruck $a + jb$ nicht mehr eine einfache Addition an, da es ungleichwertige Grössen (horizontale und vertikale Komponenten) mit einander verbindet, sondern eine Kombination nach dem Gesetz vom Parallelogramm.

Zunächst ist j nichts weiter als ein Unterscheidungs-

index und kann daher noch willkürlich gewählt werden, nur darf es keine gewöhnliche Zahl sein.

27. Eine Welle von gleicher Intensität und in der Phase von der Welle $a + jb$ um 180° oder eine halbe Periode verschieden, wird in Polarkoordinaten durch einen Vektor von entgegengesetzter Richtung dargestellt und durch den Ausdruck $-a - jb$ bezeichnet, oder:

Wenn wir den symbolischen Ausdruck einer Sinuswelle $a + jb$ mit -1 multiplizieren, so bedeutet dieses die Umkehrung der Welle, oder ihre Drehung um 180° oder um eine halbe Periode.

Eine Welle von gleicher Intensität, die 90° oder eine viertel Periode hinter $a + jb$ zurückbleibt (Fig. 24), hat als horizontale Komponente $-b$ und als vertikale a ; sie wird symbolisch durch den Ausdruck $ja - b$ dargestellt.

Multiplizieren wir dagegen $a + jb$ mit j , so erhalten wir $ja + j^2b$. Definieren wir also das bis jetzt bedeutungslos gewesene Symbol j durch die Bedingung $j^2 = -1$, so erhalten wir $j(a + jb) = ja - b$. Hieraus folgt:

Die Multiplikation des symbolischen Ausdrucks einer Sinuswelle $a + jb$ mit j bedeutet die Drehung der Welle um 90° oder um eine viertel Periode, d. i. die Verzögerung der Welle um eine viertel Periode,

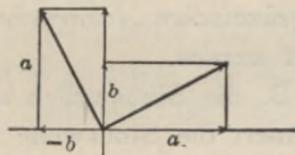


Fig. 24.

oder:

Die Multiplikation mit $-j$ giebt die Voreilung der Welle um eine viertel Periode an,

weil $j^2 = -1$, $j = \sqrt{-1}$ ist, d. h.

j ist die imaginäre Einheit und die Sinuswelle wird durch eine komplex imaginäre Grösse $a + jb$ dargestellt.

Da die imaginäre Einheit j im gewöhnlichen Zahlensystem keine numerische Bedeutung hat, so widerspricht die Erklärung von $j = \sqrt{-1}$ ihrer ursprünglichen Einführung als Unterscheidungsindex nicht. Zwecks einer genaueren Erklärung dieser komplex imaginären Grösse sei auf mathematische Lehrbücher hingewiesen.

28. In dem Polardiagramm der Zeit wird die Sinuswelle sowohl in der Intensität als auch in der Phase durch eine komplexe Grösse $a + jb$ dargestellt, wo a die horizontale und b die vertikale Komponente der Welle ist. Die Intensität ist gegeben durch $i = \sqrt{a^2 + b^2}$, die Phase durch

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a} \text{ und}$$

$$a = i \cos \omega,$$

$$b = i \sin \omega.$$

Daher kann die Welle $a + jb$ auch ausgedrückt werden durch

$$i (\cos \omega + j \sin \omega)$$

oder, wenn wir für $\cos \omega$ und $\sin \omega$ ihre Exponentialausdrücke einsetzen, so erhalten wir $ie^{j\omega}$.

Da wir gesehen haben, dass Sinuswellen durch Addition oder Subtraktion ihrer rechtwinkligen Komponenten mit einander vereinigt oder aufgelöst werden können, so folgt daraus:

Sinuswellen können durch Addition oder Subtraktion ihrer komplexen algebraischen Ausdrücke mit einander vereinigt oder aufgelöst werden.

Es ergeben z. B. die Sinuswellen $a + jb$ und $a' + jb'$ mit einander kombiniert die Sinuswelle

$$I = (a + a') + j(b + b').$$

Hieraus ergibt sich, dass die Kombination von Sinuswellen auf die elementare Algebra der komplexen Grössen reduziert ist.

29. Wenn $I = i + ji'$ eine Wechselstromsinuswelle und r der Widerstand ist, so ist die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft in Phase mit dem

Strom und gleich dem Produkt aus dem Strom und dem Widerstand, oder $rI = ri + jr i'$.

Wenn L die Selbstinduktion und $x = 2\pi NL$ die Reaktanz ist, so ist die durch die Reaktanz oder durch die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion erzeugte elektromotorische Kraft das Produkt aus dem Strom und der Reaktanz und bleibt 90° hinter dem Strom zurück; sie wird deshalb dargestellt durch den Ausdruck

$$jxI = jxi - xi'.$$

Die erforderliche elektromotorische Kraft zur Überwindung der Reaktanz eilt daher dem Strom um 90° voraus (oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt, der Strom bleibt hinter der elektromotorischen Kraft um 90° zurück) und wird dargestellt durch den Ausdruck

$$-jxI = -jxi + xi'.$$

Daher ist die elektromotorische Kraft, die zur Überwindung des Widerstandes r und der Reaktanz x erforderlich ist $(r - jx)I$, d. h.

$Z = r - jx$ ist der Ausdruck in komplexen Grössen für die Impedanz des Stromkreises.

Ist daher $I = i + ji'$ der Strom, so ist die elektromotorische Kraft, die zur Überwindung der Impedanz $Z = r - jx$ erforderlich ist,

$$E = ZI = (r - jx)(i + ji');$$

und da $j^2 = -1$, so erhalten wir

$$E = (ri + xi') + j(ri' - xi);$$

oder es ist, wenn $E = e + je'$ die Klemmenspannung und $Z = r - jx$ die Impedanz ist, der durch den Leiter fließende Strom

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{e + je'}{r - jx};$$

oder wir erhalten, wenn wir Zähler und Nenner mit $r + jx$ multiplizieren, um die Imaginäre aus dem Nenner zu bringen,

$$I = \frac{(e + je')(r + jx)}{r^2 + x^2} = \frac{er - e'x}{r^2 + x^2} + j \frac{e'r + ex}{r^2 + x^2};$$

oder es ist, wenn $E = e + je'$ die Klemmenspannung und

$I = i + ji'$ der durch den Leiter fließende Strom ist, seine Impedanz

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{e + je'}{i + ji'} = \frac{(e + je^1)(i - ji^1)}{i^2 + i'^2} = \frac{ei + e'i'}{i^2 + i'^2} + j \frac{e'i - ei'}{i^2 + i'^2}.$$

30. Wenn C die Kapazität eines Kondensators ist, der in einem Stromkreis, dessen Strom $I = i + ji'$, eingeschaltet ist, so ist die Klemmenspannung am Kondensator $E = \frac{I}{2\pi NC}$, die hinter dem Strom um 90° zurück-

bleibt; sie kann durch $\frac{jI}{2\pi NC}$ oder $jx_1 I$ dargestellt werden,

wo $x_1 = \frac{1}{2\pi NC}$ die *Kapazitätsreaktanz* oder *Kondensanz* des Kondensators genannt wird.

Die Kapazitätsreaktanz ist von entgegengesetztem Vorzeichen als die magnetische Reaktanz; beide können aber mit dem Namen Reaktanz bezeichnet werden.

Daraus folgt, dass $x = 2\pi NL$ die magnetische Reaktanz ist, wenn r den Widerstand und L die Selbstinduktion bedeuten.

Wenn C die Kapazität, so ist $x_1 = \frac{1}{2\pi NC}$ die Kapazitätsreaktanz oder Kondensanz und somit

$$Z = r - j(x - x_1)$$

die Impedanz des Stromkreises.

Das Ohm'sche Gesetz ist dann wiederhergestellt durch

$$E = ZI, \quad I = \frac{E}{Z}, \quad Z = \frac{E}{I}.$$

Die allgemeinere Form giebt nicht nur die Intensität der Welle, sondern auch ihre Phase an, wie sie in komplexen Größen ausgedrückt wird.

31. Da die Kombination von Sinuswellen durch die Addition ihrer symbolischen Ausdrücke stattfindet, so sind die Kirchhoff'schen Gesetze jetzt in ihrer ursprünglichen Form wiederhergestellt:

a) Die Summe sämtlicher elektromotorischen Kräfte, die in einem geschlossenen Stromkreise wirken, ist gleich Null, wenn sie durch komplexe Grössen ausgedrückt werden und wenn die elektromotorischen Kräfte des Widerstandes und der Reaktanz auch als gegenelektromotorische Kräfte betrachtet sind.

b) Die Summe aller Ströme, die nach einem Knotenpunkt hin fließen, ist Null, wenn die Ströme in komplexen Grössen ausgedrückt werden.

Wenn eine komplexe Grösse Null ist, so muss sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil i für sich Null sein, wenn

$$a + jb = 0, \quad a = 0, \quad b = 0$$

und es ergibt sich somit bei Auflösung der elektromotorischen Kräfte und Ströme in ihre Komponenten:

a) Die Summe der Komponenten (in irgend einer Richtung) aller elektromotorischen Kräfte in einem geschlossenen Stromkreis ist Null, wenn der Widerstand und die Reaktanz als gegenelektromotorische Kräfte betrachtet werden.

b) Die Summe der Komponenten (in beliebiger Richtung) aller Ströme, die nach einem Knotenpunkt hin fließen, ist Null.

Das Joule'sche Gesetz und die Energiegleichung geben keinen einfachen Ausdruck in komplexen Grössen, da der Effekt oder die Kraft eine Grösse von der doppelten Frequenz des Stromes oder der elektromotorischen Kraftwelle ist und somit nicht als Vektor in dem Diagramm dargestellt werden kann.

In der Folge bezeichnen wir komplexe Grössen durch grosse und absolute Grössen durch kleine Buchstaben.

32. Zurückkommend auf das in Kapitel IV gegebene Beispiel eines Stromkreises, dem unter einer elektromotorischen Kraft E ein Strom I über eine nicht induktionsfreie Zuleitung zugeführt wird, so können wir jetzt die Impedanz der Zuleitung durch $Z = r - jx$ dar-

stellen, wo r der Widerstand und x die Reaktanz der Zuleitung ist. Sodann erhalten wir als elektromotorische Kraft am Anfang der Zuleitung oder am Generator den Ausdruck

$$E_o = E + ZI.$$

Wenn wir nun wiederum den Strom als Nulllinie annehmen, nämlich $I = i$, so haben wir ganz allgemein

$$E_o = E + ir - jix;$$

daher bei induktionsfreier Belastung oder bei $E = e$

$$E_o = (e + ir) - jix$$

$$e_o = \sqrt{(e + ir)^2 + (ix)^2}$$

$$\operatorname{tg} \omega_o = \frac{ix}{e + ir}.$$

In einem Stromkreis mit verzögertem Strom, d. h. mit voreilender elektromotorischer Kraft, ist

$$E = e - je'$$

und

$$\begin{aligned} E_o &= e - je' + (r' - jx) i \\ &= (e + ir) - j(e' + ix), \end{aligned}$$

oder

$$e_o = \sqrt{(e + ir)^2 + (e' + ix)^2}$$

$$\operatorname{tg} \omega_o = \frac{e' + ix}{e + ir}.$$

In einem Stromkreise mit voreilem Strom, d. h. mit verzögerter elektromotorischer Kraft, ist

$$E = e + je'$$

und

$$\begin{aligned} E_o &= (e + je') + (r - jx) i \\ &= (e + ir) + j(e' - ix) \end{aligned}$$

$$e_o = \sqrt{(e + ir)^2 + (e' - ix)^2}$$

$$\operatorname{tg} \omega_o = \frac{e' - ix}{e + ir},$$

welche Werte eine einfache Rechnung gestatten.

Kapitel VI.

Topographische Methode.

33. Bei der Darstellung von Wechselstromsinuswellen in Polarkoordinaten durch Vektoren herrscht ein gewisser Doppelsinn, insofern als eine und dieselbe Grösse, z. B. eine elektromotorische Kraft, durch zwei Vektoren von entgegengesetzter Richtung dargestellt werden kann, je nachdem die elektromotorische Kraft entweder als ein Teil der Klemmenspannung oder als gegen elektromotorische Kraft betrachtet wird. Dieses ist analog dem Unterschiede zwischen Wirkung und Rückwirkung in der Mechanik.

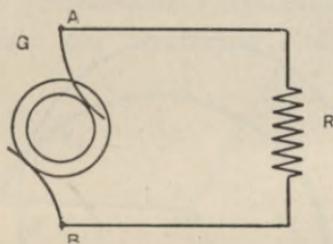


Fig. 25.

Es ist ferner klar, dass der Strom, der in dem Stromkreise eines Generators G (Fig. 25) von der Klemme A durch den Widerstand R zur Klemme B fließt, durch einen Vektor OI (Fig. 26) oder durch $I = i + ji'$ dargestellt wird; ebenso kann derselbe Strom nach entgegengesetzter Richtung hin fließend betrachtet werden, nämlich von der Klemme B zur Klemme A in entgegengesetzter Phase, und lässt sich dann durch den Vektor OI_1 (Fig. 26) oder durch $I_1 = -i - ji'$ darstellen.

Oder, wenn die Potentialdifferenz zwischen den Klemmen B und A mit $E = e + je'$ bezeichnet wird, so ist diejenige zwischen A und B

$$E_1 = -e - je'.$$

Wenn wir uns daher mit Wechselstromwellen befassen, so ist es erforderlich, sie in Beziehung auf den Stromkreis

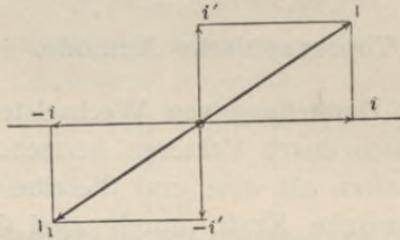


Fig. 26.

ihren wirklichen Richtungen nach zu betrachten. Besonders in komplizierten Stromkreisen, wie in verketteten mehrphasigen Systemen, muss diesem Punkt besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

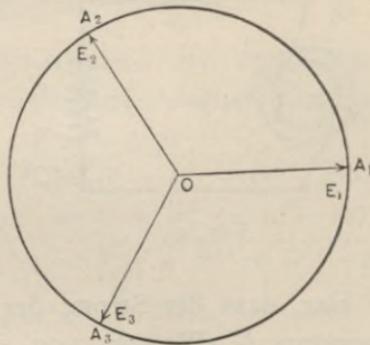


Fig. 27.

34. Angenommen in Fig. 27 wird ein verkettetes Dreiphasensystem durch das Diagramm dargestellt, das aus drei elektromotorischen Kräften von gleicher Intensität besteht, die in der Phase um eine drittel Periode verschoben sind; ferner, dass die elektromotorischen Kräfte der drei

Zweigkreise in der üblichen Verbindungsrichtung von dem Punkte O zu den Klemmen A_1, A_2, A_3 mit E_1, E_2, E_3 bezeichnet werden. Dann ist die Spannungsdifferenz zwischen A_2 und A_1 : $E_2 - E_1$, weil die beiden elektromotorischen Kräfte E_1 und E_2 zwischen den Klemmen A_1 und A_2 in diesem Stromkreise in der Richtung $A_1 - O - A_2$ verbunden sind; d. h. E_2 in der Richtung OA_2 , von neutralem Punkte nach Aussenleiter, und E_1 in entgegengesetzter Richtung A_1O , von Aussenleiter nach neutralem Punkte, und somit dargestellt durch $-E_1$. Umgekehrt ist die Spannungsdifferenz zwischen A_1 und A_2 : $E_1 - E_2$.

Es ist nun vorteilhaft, einen Schritt weiter zu gehen und in der Darstellung durch das Diagramm die Vektorlinie ganz fallen zu lassen, d. h. die Sinuswelle nur durch einen Punkt, den Endpunkt des entsprechenden Vektors, zu bezeichnen.

Wenn wir dies von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachten, so bedeutet es, dass wir einen Punkt des Systems, z. B. die gemeinsame Verbindung O als Nullpunkt oder als den Punkt der Spannung Null wählen und die

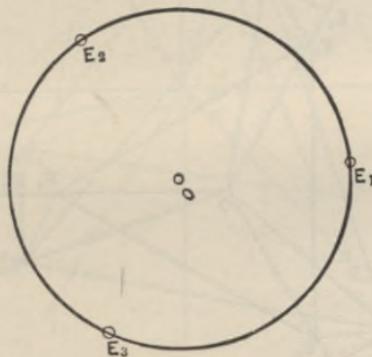


Fig. 28.

Spannungen aller anderen Punkte des Stromkreises durch Punkte in dem Diagramm in der Weise darstellen, dass ihre Entfernungen vom Nullpunkt die Intensität ergeben, ferner dass ihre Amplitude die Phase der Spannungsdifferenz

des betreffenden Punktes in Beziehung auf den Nullpunkt und dass ihre Entfernung und Amplitude in Beziehung auf andere Punkte des Diagramms ihre Spannungsdifferenz von diesen Punkten in Intensität und Phase ergibt.

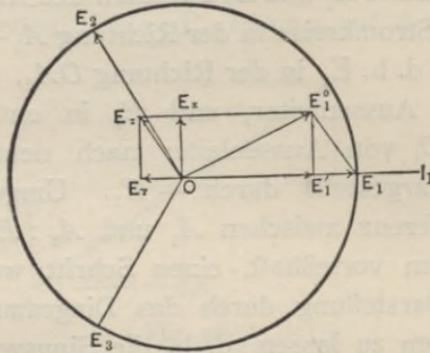


Fig. 29.

So können wir z. B. in einem verketteten Dreiphasensystem mit drei elektromotorischen Kräften von gleicher Intensität, die in der Phase um eine drittel Periode ver-

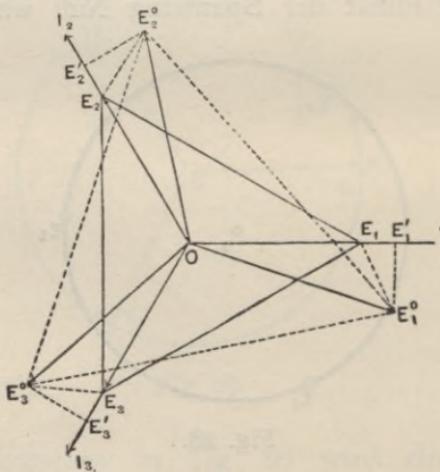


Fig. 30.

schoben sind, die gemeinsame Verbindung des in Stern verketteten Generators als Nullpunkt annehmen und (Fig. 28) eine der elektromotorischen Kräfte oder die Spannung an

einer der Dreiphasenklemmen durch den Punkt E_1 darstellen. Die Spannungen an den beiden anderen Klemmen werden dann durch die Punkte E_2 und E_3 dargestellt, die dieselbe Entfernung als E_1 von O haben und von einander gleich weit entfernt sind.

Die Spannungsdifferenz zwischen irgend einem Klemmenpaar, z. B. zwischen E_1 und E_2 , ist dann die Entfernung $E_2 E_1$ oder $E_1 E_2$, je nach der in Betracht kommenden Richtung.

35. Wenn nun (Fig. 29) ein Strom I_1 in Phase mit der elektromotorischen Kraft E_1 einen Stromkreis passiert, so ist die gegen elektromotorische Kraft des Widerstandes r $E_r = Ir$ entgegengesetzt gerichtet zu I_1 oder E_1 und daher im Diagramm durch den Punkt E_r und ihre Zusammensetzung mit E_1 durch E_1' dargestellt. Die gegen elektromotorische Kraft

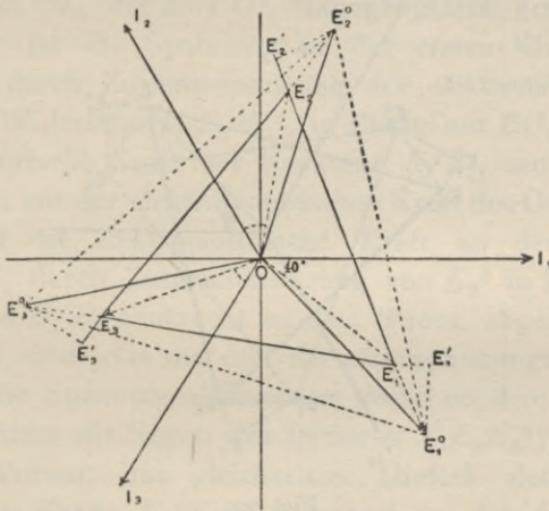


Fig. 31.

der Reaktanz x ist $E_x = Ix$ und bleibt 90° hinter dem Strom I_1 oder der elektromotorischen Kraft E_1 zurück und wird daher durch den Punkt E_x dargestellt. Sie ergibt bei ihrer Zusammensetzung mit E_1' die Klemmenspannung

des Generators E_1^0 , die, wie ersichtlich, kleiner als die elektromotorische Kraft E_1 ist.

Wenn alle drei Zweige durch drei Ströme, die durch einen induktionsfreien Stromkreis fließen, gleich belastet und daher mit den elektromotorischen Kräften an den Generator клемmen (in dem Diagramm Fig. 30 durch die Punkte E_1 , E_2 , E_3 , die unter einander und auch von dem Nullpunkt O gleich weit entfernt sind, bezeichnet) in Phase sind, so werden die gegen elektromotorischen Kräfte des Widerstandes Ir durch die Entfernungen EE' als E_1E_1' u. s. w. dargestellt und zwar in Phase mit den Strömen I ; die gegenelektromotorischen Kräfte der Reaktanz Ix werden durch die Entfernungen $E'E^0$ senkrecht zu den Strömen dargestellt und ergeben dadurch als die elektromotorischen Kräfte des Generators die Punkte E_1^0 , E_2^0 , E_3^0 .

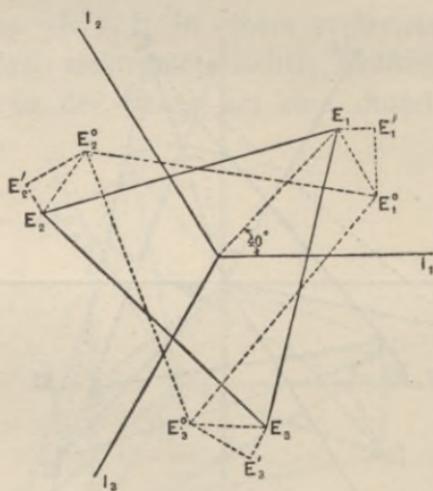


Fig. 32.

Daher stellt das aus den elektromotorischen Kräften des Generators gebildete Dreieck $E_1^0E_2^0E_3^0$ bei gleicher Belastung der drei Zweige und bei induktionsfreiem Stromkreise ein gleichseitiges Dreieck $E_1E_2E_3$ der Klemmenspannungen dar.

Wenn die Belastung nicht induktionsfrei ist und die Ströme I hinter den Klemmenspannungen E , sagen wir, um 40° zurückbleiben, so erhalten wir das Diagramm in Fig. 31, das sich von selbst erklärt und zeigt, dass der Spannungsverlust im Generator bei nicht induktionsfreier Belastung grösser ist als bei induktionsfreier Belastung.

Andererseits, wenn die Ströme den elektromotorischen Kräften an den Klemmen um, sagen wir, 40° voreilen, wie es Fig. 32 zeigt, so ist der Spannungsverlust im Generator geringer und die Spannung kann sogar durch die Belastung steigen.

36. Wird jedoch nur ein einzelner Zweig des Dreiphasenstromstromkreises belastet, wie z. B. $E_1^0 E_2^0$, so ist die elektromotorische Kraft, die den Strom (Fig. 33) erzeugt, $E_1 E_2$ und wenn der Strom um 20° zurückbleibt, so hat er die Richtung OI , wo OI mit $E_1 E_2$ den Winkel $\omega = 20^\circ$ bildet; d. h. der Strom in E_1 ist gleich OI_1 und derjenige in E_2 ist gleich OI_2 , der aber OI_1 entgegengesetzt gerichtet ist.

Daher ist die Spannung an der ersten Klemme E_1 , abgeleitet durch Zusammensetzung der elektromotorischen Kraft des Widerstandes $E_1^0 E_1'$, in Phase mit E_1^0 , und die elektromotorische Kraft der Reaktanz $E_1' E_1$, senkrecht zu dem Strom, mit der elektromotorischen Kraft des Generators. Ebenso ist die elektromotorische Kraft an der zweiten Klemme E_2 durch Zusammensetzung von E_2^0 in Phase mit $E_2^0 E_2'$ und $E_2' E_2$ senkrecht zu dem Strom, abgeleitet.

Daher sind jetzt die drei Klemmenspannungen E_1, E_2, E_3^0 und die Spannungsdifferenzen zwischen den Klemmen des Generators die Seiten des Dreiecks $E_1 E_2 E_3^0$; oder mit anderen Worten: das gleichseitige Dreieck der elektromotorischen Kräfte $E_1^0 E_2^0 E_3^0$ erzeugt an den Generatorklemmen das Spannungsdreieck $E_1 E_2 E_3^0$, dessen drei Seiten ungleich sind. Die eine der Seiten oder der belastete Zweig $E_1 E_2$ ist kleiner als die beiden unbelasteten Zweige $E_1 E_3^0$ und $E_2 E_3^0$, und von diesen ist die eine Seite kleiner geworden, während die andere grösser wurde und das System ist ausser Balance.

In derselben Weise finden wir, dass, wenn zwei Zweige $E_1^0 E_2^0$ und $E_2^0 E_3^0$ belastet sind und der dritte $E_1^0 E_3^0$ unbelastet, während die Ströme um 20° zurückbleiben, der Strom I_3 in E_1^0 um 20° hinter $E_1^0 E_2^0$ und der Strom I_1 in E_3^0 um 20° hinter $E_2^0 E_3^0$ zurückbleibt und der Strom

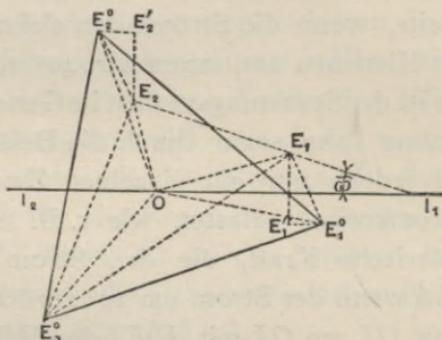


Fig. 33.

I_2 in E_2^0 die gemeinsame Rückleitung von I_1 und I_3 ist. Kombinieren wir wiederum die elektromotorischen Kräfte E^0 des Generators mit den elektromotorischen Kräften $E^0 E'$ des Widerstandes, die in Phase, und die elektromotorischen Kräfte $E' E$ der Reaktanz, die senkrecht zu den betreffenden Strömen sind, so erhalten wir die Klemmenspannung E . Wir sehen daher, dass das Spannungsdreieck $E_1^0 E_2^0 E_3^0$ durch Belastung zweier Kreise in das unbalancierte Klemmenspannungsdreieck $E_1 E_2 E_3$ verwandelt wird, wie es die Figur 34 zeigt.

Wenn alle drei Zweige des Dreiphasensystems gleichmäßig belastet sind, so sehen wir (Fig. 31), dass dieses System balanciert ist.

37. Als ein anderes Beispiel können wir ein Zweiphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung betrachten, das nicht balanciert ist.

Wenn wir in einem Zweiphasensystem die Spannung der gemeinsamen Rückleitung an den Generatorklemmen

mit Null bezeichnen, so werden die Spannungen der beiden äusseren Klemmen des Generators durch E_1^0 und E_2^0 , die rechtwinklig zu einander stehen und gleich weit von O entfernt sind, dargestellt (Fig. 35).

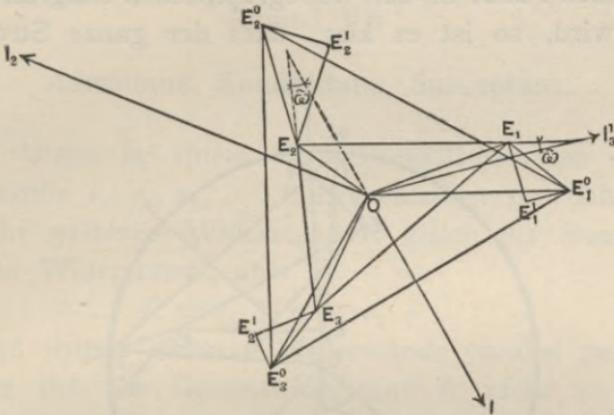


Fig. 34.

Nehmen wir jetzt an: beide Zweige seien gleichmässig durch Ströme belastet, die um 40° zurückbleiben. Es werden dann die Ströme in E_1^0 und E_2^0 durch I_1 und I_2 und ihr gemeinsamer Rückstrom durch I_3 dargestellt. Wenn nun diese Ströme durch Leitungen, die einen Widerstand haben und mit Reaktanz behaftet sind, gesandt werden, so erhalten wir die Spannungen am Ende der Leitung durch die Zusammensetzung der Generatorspannungen E_1^0, E_2^0 und O mit den gegenelektromotorischen Kräften des Widerstandes $E_1^0E_1', E_2^0E_2'$ und OE_3' , die in Phase mit den Strömen sind und mit den elektromotorischen Kräften $E_1'E_1, E_2'E_2, E_3'E_3$ der Reaktanz, die senkrecht zu den Strömen stehen, woraus sich die Punkte E_1, E_2, E_3 als Spannungen am Ende der Leitung ableiten, die weder ein gleichschenkliges noch ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Das heisst: das Zweiphasensystem mit einer gemeinsamen Rückleitung wird selbst bei gleichmässiger Belastungsverteilung in Intensität und Phase unbalanciert.

Diese Beispiele genügen, um die allgemeine Methode der topographischen Darstellung von Wechselstromsinuswellen zu erklären.

Da die Spannung eines jeden Punktes im Stromkreise durch einen Punkt in dem topographischen Diagramm dargestellt wird, so ist es klar, dass der ganze Stromkreis

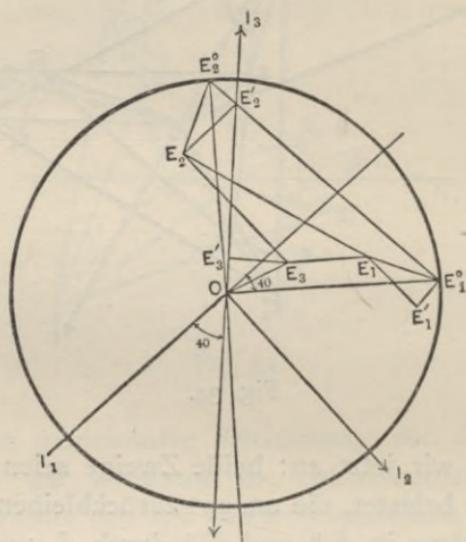


Fig. 35.

durch eine geschlossene Figur repräsentiert wird, die die topographische Charakteristik des Stromkreises genannt werden kann.

Eine solche Charakteristik ist z. B. $OE_1^0E_1'E_1E_2E_2'E_2^0$, in den Figuren 31 bis 34 dargestellt. Weitere Beispiele sind in den folgenden Kapiteln, und als Kurvencharakteristiken in dem Kapitel über verteilte Kapazität u. s. w. gegeben.

Kapitel VII.

Admittanz, Konduktanz, Suszeptanz.

38. Wenn in einem Gleichstromstromkreise mehrere Widerstände r_1, r_2, r_3, \dots hinter einander geschaltet sind, so ist ihr gesamter Widerstand R gleich der Summe der einzelnen Widerstände, also

$$R = r_1 + r_2 + r_3 + \dots$$

Sind jedoch mehrere Widerstände parallel geschaltet, so lässt sich ihr Gesamtwiderstand R nicht so einfach ausdrücken, sondern er wird durch den Ausdruck

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots}$$

dargestellt. In diesem Falle ist es vorzuziehen, an Stelle des *Widerstandes* seinen reciproken Wert oder die *Konduktanz* $g = \frac{1}{r}$ einzuführen. Sind mehrere Konduktanzen

g_1, g_2, g_3, \dots parallel geschaltet, so ist ihre gesamte Konduktanz gleich der Summe der einzelnen Konduktanzen, also

$$G = g_1 + g_2 + g_3 + \dots$$

Wenn wir die Bezeichnung Konduktanz gebrauchen, so wird die gesamte Konduktanz mehrerer hintereinander geschalteter Konduktanzen einen ähnlichen komplizierten Ausdruck wie oben geben, nämlich

$$G = \frac{1}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} + \dots}$$

Es ist daher bei Reihenschaltungen der Gebrauch des Begriffes Widerstandes und bei Parallelschaltungen der der Konduktanz vorzuziehen.

Daher ist der gesamte Widerstand mehrerer hintereinander geschalteter Widerstände gleich der Summe der einzelnen Widerstände.

Die gesamte Konduktanz mehrerer parallel geschalteter Konduktanzen ist gleich der Summe der einzelnen Konduktanzen.

39. In Wechselstromstromkreisen haben wir in der Formel des Ohm'schen Gesetzes $E = IZ$ an Stelle des Widerstandes die Impedanz $Z = r - jx$ mit ihren beiden Komponenten, dem Widerstand r und der Reaktanz x . Der Widerstand r ergibt die Komponente der elektromotorischen Kraft in Phase mit dem Strom, oder die Energiekomponente der elektromotorischen Kraft Ir , die Reaktanz x dagegen die Komponente der elektromotorischen Kraft senkrecht zu dem Strom, oder die wattlose Komponente der elektromotorischen Kraft Ix ; beide zusammen ergeben die gesamte elektromotorische Kraft

$$I\varepsilon = I\sqrt{r^2 + x^2}.$$

Da elektromotorische Kräfte durch Addition ihrer komplexen Ausdrücke miteinander kombiniert werden, so ist:

die gesamte Impedanz mehrerer hintereinander geschalteter Impedanzen gleich der Summe der einzelnen Impedanzen, ausgedrückt in komplexen Grössen.

Bei der graphischen Darstellung dürfen Impedanzen nicht addiert werden, sondern müssen in Phase nach dem Gesetz vom Parallelogramm in derselben Weise zusammengesetzt werden als ihre entsprechenden elektromotorischen Kräfte. Die Bezeichnung Impedanz wird jedoch unbequem, wenn es sich um parallel geschaltete Stromkreise handelt, oder mit anderen Worten, wenn mehrere Ströme durch dieselbe elektromotorische Kraft erzeugt werden, wie in den Fällen, wo das Ohm'sche Gesetz durch die Form

$I = \frac{E}{Z}$ dargestellt wird.

In diesem Falle ist es besser, den reciproken Wert der Impedanz einzuführen, den wir die Admittanz des Stromkreises nennen; sie ist $Y = \frac{1}{Z}$.

Als reciproker Wert der komplexen Grösse $Z = r - jx$ ist die Admittanz ebenfalls eine komplexe Grösse und ist also $Y = g + jb$; sie besteht aus der Komponente g , die den Stromkoefficienten in Phase mit der elektromotorischen Kraft oder den Arbeitsstrom gE in der Gleichung des Ohm'schen Gesetzes

$$I = YE = (g + jb)E$$

darstellt, und der Komponente b , die den Stromkoefficienten senkrecht zur elektromotorischen Kraft oder die wattlose Komponente des Stromes bE repräsentiert.

g nennen wir die *Konduktanz* und b die *Suszeptanz* des Stromkreises. Daher ist die Konduktanz g die Energiekomponente und die Suszeptanz b die wattlose Komponente der Admittanz $Y = g + jb$, während der numerische Wert der Admittanz

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

ist. Der Widerstand r ist die Energiekomponente und die Reaktanz x die wattlose Komponente der Impedanz $Z = r - jx$; der numerische Wert der Impedanz ist

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

40. Wie man sieht, deutet die Bezeichnung Admittanz die Zerlegung des Stromes in zwei Komponenten an, nämlich in den Arbeitsstrom und in den wattlosen Strom, in Phase und senkrecht zur elektromotorischen Kraft, während die Bezeichnung Impedanz die Zerlegung der elektromotorischen Kraft in zwei Komponenten, nämlich in die Energie — elektromotorische Kraft und in die wattlose elektromotorische Kraft, andeutet, die in Phase und senkrecht zum Strom sind.

Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Konduktanz nicht der reciproke Wert des Widerstandes ist, sondern dass sie sowohl von dem Widerstande als auch von der Reaktanz abhängt. Nur bei Gleichstromstromkreisen, oder wenn die Reaktanz x gleich Null ist, ist die Konduktanz der reciproke Wert des Widerstandes.

Nur in Stromkreisen mit dem Widerstand r gleich Null ist die Suszeptanz der reciproke Wert der Reaktanz; sonst hängt sie von der Reaktanz und dem Widerstande ab.

Die Konduktanz ist Null für zwei Werte des Widerstandes:

1. wenn $r = \infty$, oder $x = \infty$, weil in diesem Falle kein Strom fließt und jede Komponente des Stromes gleich Null ist;

2. wenn $r = 0$ ist, weil in diesem Falle der Strom, der durch den Stromkreis fließt, zur elektromotorischen Kraft senkrecht steht und daher keine Energiekomponente hat.

Ähnlich ist die Suszeptanz b für zwei Werte der Reaktanz Null:

1. wenn $x = \infty$, oder $r = \infty$;

2. wenn $x = 0$.

Aus der Definition der Admittanz $Y = g + jb$, als reciproken Wertes der Impedanz $Z = r - jx$, ergibt sich

$$Y = \frac{1}{Z}, \text{ oder } g + jb = \frac{1}{r - jx},$$

oder durch Multiplikation des Zählers und Nenners auf der rechten Seite mit $r + jx$:

$$g + jb = \frac{r + jx}{(r - jx)(r + jx)}.$$

und da:

$$(r - jx)(r + jx) = r^2 + x^2 = z^2,$$

so ist:

$$g + jb = \frac{r}{r^2 + x^2} + j \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{r}{z^2} + j \frac{x}{z^2},$$

oder

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2} = \frac{r}{z^2},$$

$$b = \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{x}{z^2};$$

und umgekehrt

$$r = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{g}{y^2},$$

$$x = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{b}{y^2}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können Konduktanz und Suszeptanz aus dem Widerstand und der Reaktanz berechnet werden und umgekehrt.

Durch Multiplikation der Gleichungen von g und r erhalten wir $gr = \frac{rg}{z^2 y^2},$

und weil $z^2 y^2 = (r^2 + x^2)(g^2 + b^2) = 1,$

so ist $z = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + b^2}}$ } der absolute Wert der Impedanz;

$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ } der absolute Wert der Admittanz.

41. Wenn in einem Stromkreise die Reaktanz x konstant ist und der Widerstand r von $r = 0$ bis $r = \infty$ variiert, so sinkt die Suszeptanz b von $b = \frac{1}{x}$ bei $r = 0$ bis zu $b = 0$ bei $r = \infty$, während die Konduktanz von $g = 0$ für $r = 0$ ansteigt und ein Maximum für $r = x$ erreicht, wo $g = \frac{1}{2}r$ und gleich der Suszeptanz, oder $g = b$ wird, und sinkt dann wieder, sodass g den Wert Null bei $r = \infty$ erreicht.

In Figur 36 sind für die konstante Reaktanz $x = 0,5$ Ohm die Änderungen der Konduktanz g und der Suszeptanz b als Funktionen des variierenden Widerstandes r gezeichnet. Wie man sieht, sind die absoluten Werte der Admittanz, der Suszeptanz und der Konduktanz in vollen Linien ausgedrückt, während der absolute Wert der Impedanz punktiert

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} = \frac{I}{y}$$

eingetragen ist.

Wenn der Widerstand r konstant ist und die Reaktanz x variiert, so werden die Werte der Konduktanz und die der Suszeptanz nur vertauscht, wobei die Konduktanz ständig

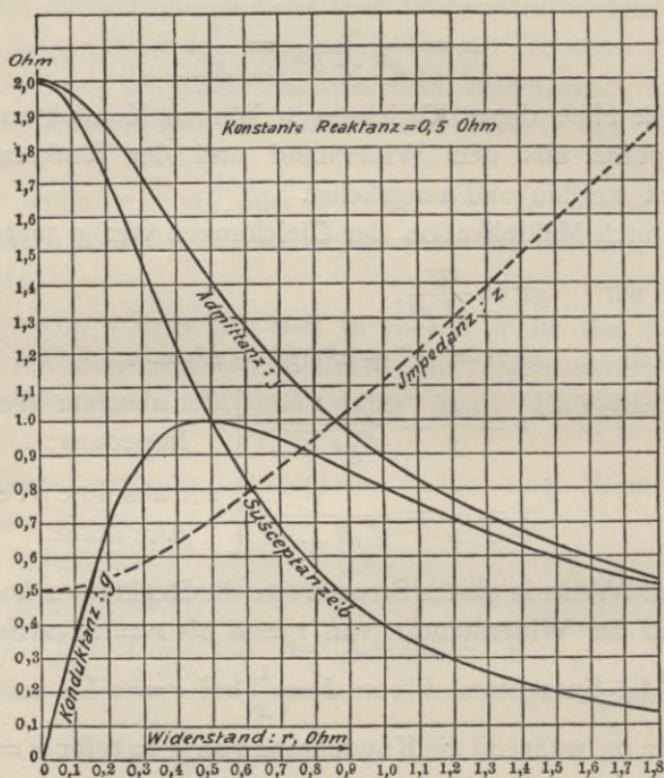


Fig. 36.

von $g = \frac{I}{r}$ bis $g = 0$ sinkt und die Suszeptanz von Null bei $x = 0$ bis zum Maximum $b = \frac{r}{2} = g = \frac{x}{2}$ bei $x = r$ ansteigt und dann wieder bis $b = 0$ bei $x = \infty$ sinkt.

Der Widerstand r und die Reaktanz x variieren als Funktionen der Konduktanz g und der Suszeptanz b in derselben Weise als g und b als Funktionen von r und x .

Das Vorzeichen in dem komplexen Ausdruck der Admittanz ist immer entgegengesetzt dem der Impedanz. Dies ist klar, da die elektromotorische Kraft, wenn der Strom hinter ihr zurückbleibt, ihm voreilt oder umgekehrt.

Wir können daher das Ohm'sche Gesetz auf zweierlei Weise ausdrücken:

$$E = IZ,$$

$$I = EY;$$

daher ist

die gesamte Impedanz mehrerer hinter einander geschalteter Impedanzen gleich der Summe der einzelnen Impedanzen und die gesamte Admittanz mehrerer parallel geschalteter Admittanzen, wenn sie in komplexen Grössen ausgedrückt sind, gleich der Summe der einzelnen Admittanzen. Bei der Darstellung durch ein Diagramm nimmt die Zusammensetzung mit Hilfe des Parallelogramms die Stelle der Addition der komplexen Grössen ein.

Kapitel VIII.

Stromkreise mit Widerstand, Induktanz und Kapazität.

42. Nachdem wir im vorigen Kapitel das Ohm'sche Gesetz und die Kirchhoff'schen Gesetze wieder als die Fundamentalgesetze der Wechselstromstromkreise nachgewiesen haben in ihrer komplexen Form

$$E = ZI \text{ oder } I = YE,$$

und $\sum E = 0$ in einem geschlossenen Stromkreise

$$\sum I = 0 \text{ bei einem Knotenpunkte,}$$

wo E , I , Z und Y die elektromotorische Kraft, den Strom, die Impedanz und die Admittanz in komplexen Grössen sind (diese Gesetze stellen nicht nur die Intensität, sondern auch die Phase der Wechselstromwelle dar), können wir nun, indem wir diese Gesetze in derselben Weise als bei Gleichstromstromkreisen anwenden, Wechselstromstromkreise und Leitungsnetze, die Widerstand, Induktanz und Kapazität in jeder beliebigen Zusammenstellung enthalten, berechnen, ohne auf grössere Schwierigkeiten zu stossen als bei Gleichstromstromkreisen.

Andererseits ist es nicht möglich, die unendlich vielen verschiedenen Kombinationen des Widerstandes, der Induktanz und der Kapazität, die man sich in einem Leitungsnetz denken kann und die in ihm vorkommen, zu diskutieren, sodass ich mich darauf beschränke, nur einige der wichtigsten dieser Kombinationen zu betrachten.

1) *Ein mit einem Stromkreise hintereinander geschalteter Widerstand.*

43. In einem Netz mit konstanter Spannung sei die Klemmenspannung

$$E_0 = e_0 + j e_0', \quad E_0 = \sqrt{e_0^2 + e_0'^2},$$

und der zu speisende Stromkreis habe die Impedanz

$$Z = r - jx, \quad z = \sqrt{r^2 + x^2},$$

die mit dem Widerstand r_0 hintereinandergeschaltet ist.

Alsdann ist die gesamte Impedanz des Stromkreises

$$Z + r_0 = r + r_0 - jx,$$

und der Strom

$$I = \frac{E_0}{Z + r_0} = \frac{E_0}{r + r_0 - jx} = \frac{E_0(r + r_0 + jx)}{(r + r_0)^2 + x^2},$$

und die elektromotorische Kraft des zu speisenden Stromkreises wird

$$\begin{aligned} E = IZ &= \frac{E_0(r - jx)}{r + r_0 - jx} = \frac{E_0[r(r + r_0) + x^2 - jr_0x]}{(r + r_0)^2 + x^2} \\ &= \frac{E_0(z^2 + rr_0 - jr_0x)}{z^2 + 2rr_0 + r_0^2}, \end{aligned}$$

oder wir erhalten in absoluten Werten die Klemmenspannung

$$E_0 = \sqrt{e_0^2 + e_0'^2},$$

den Strom

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{(r + r_0)^2 + x^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{z^2 + 2rr_0 + r_0^2}},$$

die elektromotorische Kraft an den Klemmen des Abnahmestromkreises

$$E = E_0 \sqrt{\frac{r^2 + x^2}{(r + r_0)^2 + x^2}} = \frac{E_0 z}{\sqrt{z^2 + 2rr_0 + r_0^2}},$$

die Phasendifferenz des Abnahmestromkreises

$$\cotg \omega = \frac{r}{x},$$

die Phasendifferenz in der Speiseleitung

$$\cotg \omega_0 = \frac{r + r_0}{x}.$$

a) Wenn x in Beziehung zu r , wie z. B. in einem induktionsfreien zu speisenden Stromkreise, vernachlässigt werden kann, so ist

$$I = \frac{E_0}{r + r_0}, \quad E = E_0 \frac{r}{r + r_0}$$

und der Strom und die elektromotorische Kraft an den Abnahmeklemmen nehmen ständig mit dem Wachsen von r_0 ab.

b) Wenn r im Verhältnis zu x , z. B. in einem wattlosen Stromkreise, vernachlässigt werden kann, so ist

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{r_0^2 + x^2}}, \quad E = E_0 \frac{x}{\sqrt{r_0^2 + x^2}};$$

oder für kleine Werte von r_0

$$I = \frac{E_0}{x}, \quad E = E_0;$$

d. h. der Strom und die elektromotorische Kraft an den Abnahmeklemmen bleiben für kleine Werte von r_0 annähernd konstant, sinken nachher aber sehr stark.

44. In den allgemeinen Gleichungen erscheint x in den Ausdrücken für I und E nur als x^2 , so dass I und E dieselben Werte annehmen, wenn x sowohl negativ als auch positiv ist; oder mit anderen Worten: hintereinandergeschaltete Widerstände wirken auf einen Stromkreis mit voreilendem Strom oder auf einen Kondensatorstromkreis in derselben Weise, wie auf einen Stromkreis mit zurückbleibendem Strom, oder auf einen nicht induktionsfreien Stromkreis.

Für eine gegebene Impedanz z des Abnahmestromkreises sind der Strom I und die elektromotorische Kraft E um so viel kleiner, je grösser r ist, d. h. je geringer die Phasendifferenz in diesem Stromkreise ist.

In Figur 37 ist die elektromotorische Kraft E an dem Abnahmestromkreis für ein konstantes $E_0 = 100$ Volt und $z = 1$ Ohm gegeben; daher ist $I = E$ und

$$\text{a) } r_0 = 0,2 \text{ Ohm} \quad (\text{Kurve I}),$$

$$\text{b) } r_0 = 0,8 \text{ Ohm} \quad (\text{Kurve II});$$

mit den Werten der Reaktanz $x = \sqrt{z^2 - r^2}$ für die Abscissen von $x = + 1,0$ bis $x = - 1,0$ Ohm.

Wie ersichtlich, sind I und E am kleinsten für $x = 0$ und $r = 1,0$, also für den induktionsfreien Abnahmestromkreis, und am grössten für $x = \pm 1,0$ und $r = 0$, also für den wattlosen Stromkreis, in welchem ein hintereinander geschalteter Widerstand nur einen geringen Spannungsverlust verursacht.

Daher hängt die Spannungsregulierung eines Stromkreises mittelst Widerständen von der Phasendifferenz in diesem Stromkreise ab.

Für $r_0 = 0,8$ und für $x = 0$ und $x = + 0,8$ sind die polaren Diagramme aus den Figuren 38 und 39 zu ersehen.

2. Reaktanz mit einem Stromkreis hintereinander geschaltet.

45. Es sei in einem Netz von konstanter Spannung mit der Klemmenspannung

$$E = e_0 + je'_0, \quad E_0 = \sqrt{e_0^2 + e'_0{}^2},$$

die Reaktanz x_0 mit dem Abnahmestromkreis von der Impedanz

$$Z = r - jx, \quad z = \sqrt{r^2 + x^2}$$

hintereinander geschaltet.

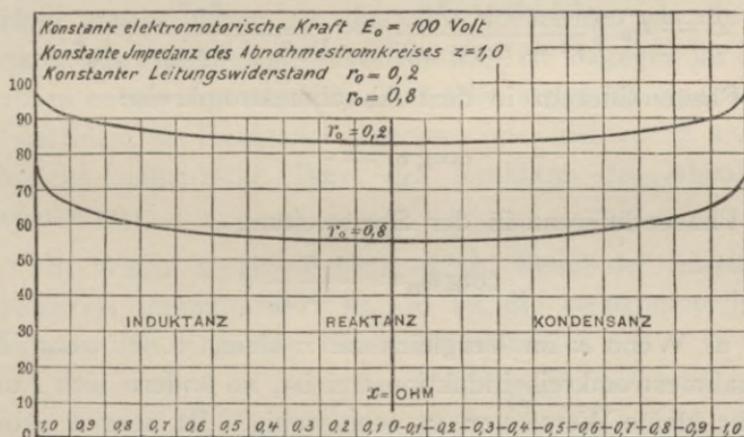


Fig. 37. Spannungsänderung bei hintereinander geschaltetem konstantem Widerstand in Phase mit dem Abnahmestromkreis.

Dann ist die gesamte Impedanz des Stromkreises

$$Z + x_0 = r - j(x + x_0)$$

und der Strom

$$I = \frac{E_0}{Z + x_0} = \frac{E_0}{r - j(x + x_0)},$$

während die Spannungsdifferenz an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises

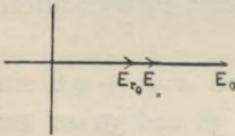


Fig. 38.

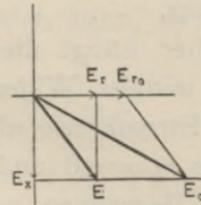


Fig. 39.

$$E = IZ = E_0 \frac{r - jx}{r - j(x + x_0)}$$

ist. Oder es sind in absoluten Einheiten der Strom

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + (x + x_0)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{z^2 + 2xx_0 + x_0^2}},$$

die elektromotorische Kraft an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises

$$E = E_0 \sqrt{\frac{r^2 + x^2}{r^2 + (x + x_0)^2}} = \frac{E_0 z}{\sqrt{z^2 + 2xx_0 + x_0^2}},$$

die Phasendifferenz in dem Abnahmestromkreise

$$\cotg \omega = \frac{r}{x},$$

die Phasendifferenz in der Speiseleitung

$$\cotg \omega_0 = \frac{r}{x + x_0}.$$

a) Wenn x im Vergleich zu r klein, d. h. wenn der Abnahmestromkreis induktionsfrei ist, so ändern sich I und E für kleine Werte von x_0 sehr wenig. Ist aber x gross, d. h. hat der Abnahmestromkreis grosse Reaktanz, so ändern sich I und E bedeutend bei einer Änderung von x_0 .

b) Ist x negativ, d. h. sind in den Abnahmestromkreis Kondensatoren, synchrone Motoren oder andere

Apparate geschaltet, die voreilende Ströme erzeugen, wenn x_0 einen bestimmten Wert übersteigt, so wird der Nenner in dem Ausdruck für E kleiner als z oder $E > E_0$; d. h. die Reaktanz x_0 erhöht die Spannung.

c) E ist gleich E_0 , oder die hintereinander geschaltete Induktanz x_0 wirkt nicht auf die Spannungsdifferenz an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises ein, wenn

$$\sqrt{z^2 + 2xx_0 + x_0^2} = z,$$

oder

$$x_0 = -2x$$

ist.

Ist also die Reaktanz, die mit dem Stromkreise hintereinander geschaltet ist, von entgegengesetztem Vorzeichen und doppelt so gross als die des Abnahmestromkreises, so bleibt die Spannung unverändert und es ist $E = E_0$ und $I = \frac{E_0}{z}$. Bei $x_0 > -2x$ steigt die Spannung und bei $x_0 < -2x$ sinkt sie.

Wir ersehen daraus, dass eine mit einem Wechselstromkreise hintereinander geschaltete Reaktanz die Spannung an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises nur dann sinken macht, wenn sie dasselbe Vorzeichen als die Reaktanz des Abnahmestromkreises hat; ist dagegen ihr Vorzeichen entgegengesetzt, so sinkt oder steigt die Spannung, je nachdem die Reaktanz x_0 grösser oder kleiner ist als der doppelte numerische Wert der Reaktanz des Abnahmestromkreises.

d) Wenn x gleich Null, d. h. wenn der Abnahmestromkreis induktionsfrei ist, so ist die elektromotorische Kraft an den Klemmen dieses Stromkreises

$$E = \frac{E_0 r}{\sqrt{r^2 + x_0^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{r}\right)^2}}$$

$$= E_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{r}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{x_0}{r}\right)^4 - + \dots \right\}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \right)$ wird nach dem binomischen Lehrsatz aufgelöst: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots$

Ist x_0 im Vergleich zu r klein, so haben wir

$$E = E_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{r} \right)^2 \right],$$

und
$$\frac{E_0 - E}{E_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{r} \right)^2.$$

Es ist also der prozentuale Spannungsverlust durch die Einschaltung einer Reaktanz, die mit einem induktionsfreien Stromkreise hintereinander geschaltet ist, für kleine Werte der Reaktanz unabhängig von dem Vorzeichen, aber

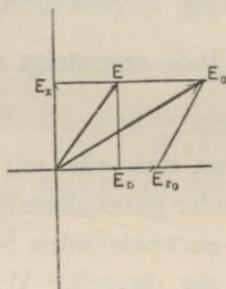


Fig. 40.

proportional dem Quadrat der Reaktanz, oder er bleibt derselbe, gleichviel ob man es mit Induktanz oder Kondensanzreaktanz zu thun hat.

46. In Figur 41 sind Beispiele für die Änderungen des Stromes I und der elektromotorischen Kraft E an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises bei der konstanten Klemmenspannung E_0 unter verschiedenen Zuständen des Abnahmestromkreises und für verschiedene Werte der hintereinander geschalteten Reaktanz gegeben.

Diese Figur zeigt für die verschiedenen Werte der Reaktanz x_0 (wenn die Induktanz positiv, die Kondensanz negativ ist) die elektromotorischen Kräfte E an den Klemmen

des zu speisenden Stromkreises bei der konstanten Klemmenspannung $E_0 = 100$ Volt und unter folgenden Bedingungen in dem Abnahmestromkreise:

$$z = 1,0, r = 1,0, x = 0 \quad (\text{Kurve I}).$$

$$z = 1,0, r = 0,6, x = 0,8 \quad (\text{Kurve II}).$$

$$z = 1,0, r = 0,6, x = -0,8 \quad (\text{Kurve III}).$$

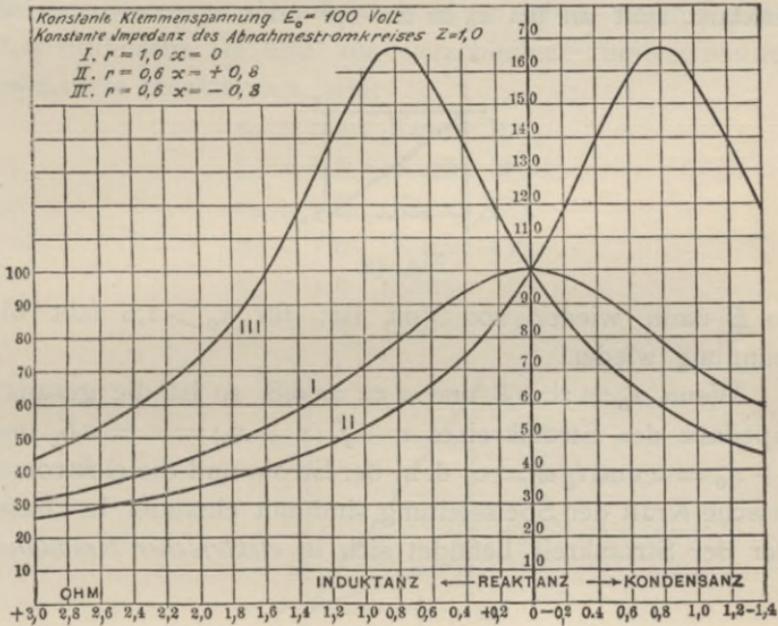


Fig. 41.

Man sieht, dass die Kurve I symmetrisch liegt und dass mit wachsendem x_0 die Spannung E zunächst fast konstant bleibt, um dann immer schneller und schneller zu fallen.

In einem nicht induktionsfreien oder in einem Kondensatorstromkreise verursacht die hintereinandergeschaltete Induktanz bzw. Kondensanz einen bei weitem schnelleren Spannungsabfall als in einem induktionsfreien Stromkreise.

Hintereinander geschaltete Induktanz in einem Kondensatorstromkreise und hintereinander geschaltete Kondensanz in einem nicht induktionsfreien Stromkreise verursachen ein

Anwachsen der Spannung. Die Spannungssteigerung ist ein Maximum für $x_0 = \pm 0,8$ oder für $x_0 = -x$ (Bedingung der Resonanz), und die elektromotorische Kraft erreicht dann den Wert $E = 167$ Volt, oder

$$E = E_0 \frac{z}{r}.$$

Dieses Steigen der Spannung bei hintereinander geschalteter Reaktanz hält an bis $x_0 = \pm 1,6$ oder $x_0 = -2x$ wird,

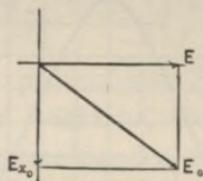


Fig. 42.

wo E dann wieder 100 Volt ist; für $x_0 > 1,6$ fällt die Spannung wieder.

Wenn $x_0 = \pm 0,8$ und $x = \mp 0,8$, so ist die gesamte Impedanz des Stromkreises $r - j(x + x_0) = r = 0,6$, und $x + x_0 = 0$ und $tg\omega = 0$; d. h. der Strom und die elektromotorische Kraft der Speiseleitung sind mit einander in Phase oder der Stromkreis befindet sich in *elektrischer Resonanz*.

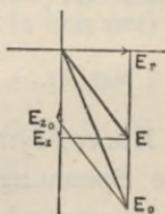


Fig. 43.

Da ein synchroner Motor während seines Betriebes als Kondensanz wirken kann, so erhalten wir das bemerkenswerte Resultat, dass in Stromkreisen mit angeschlossenen synchronen Motoren die Spannung mit Hilfe von rückwirkenden oder Drosselpulen erhöht werden kann.

In den Figuren 42 bis 44 sind polare Diagramme unter folgenden Bedingungen dargestellt:

$E_0 = 100, x_0 = 0,6, x = 0$ (Fig. 42)	$E = 85,7$
$x = + 0,4$ (Fig. 43)	$E = 73,7$
$x = - 0,4$ (Fig. 44)	$E = 106,6.$

47. Figur 45 zeigt in dem Abnahmestromkreis bei einer konstanten Klemmspannung $E_0 = 100$ die Abhängigkeit der Spannung E von der Phasendifferenz ω und zwar für eine konstante Impedanz $z = 1,0$ (aber veränderlicher Phasendifferenz ω) und für verschiedene hintereinandergeschaltete Reaktanzen, wie:

- $x_0 = 0,2$ (Kurve I).
- $x_0 = 0,6$ (Kurve II).
- $x_0 = 0,8$ (Kurve III).
- $x_0 = 1,0$ (Kurve IV).
- $x_0 = 1,6$ (Kurve V).
- $x_0 = 3,2$ (Kurve VI).

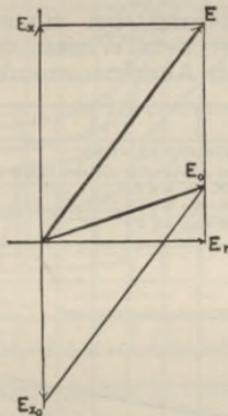


Fig. 44.

Der Strom I ist an allen diesen Kurven gleich E , weil $z = 1,0$.

In den Figuren 46 und 47 sind dieselben Kurven als in Figur 45 dargestellt, nur mit dem Unterschiede, dass in Figur 46 die Reaktanzen x des Abnahmestromkreises als Abscissen und in Figur 47 die Widerstände r dieses Stromkreises ebenfalls als Abscissen eingetragen sind.

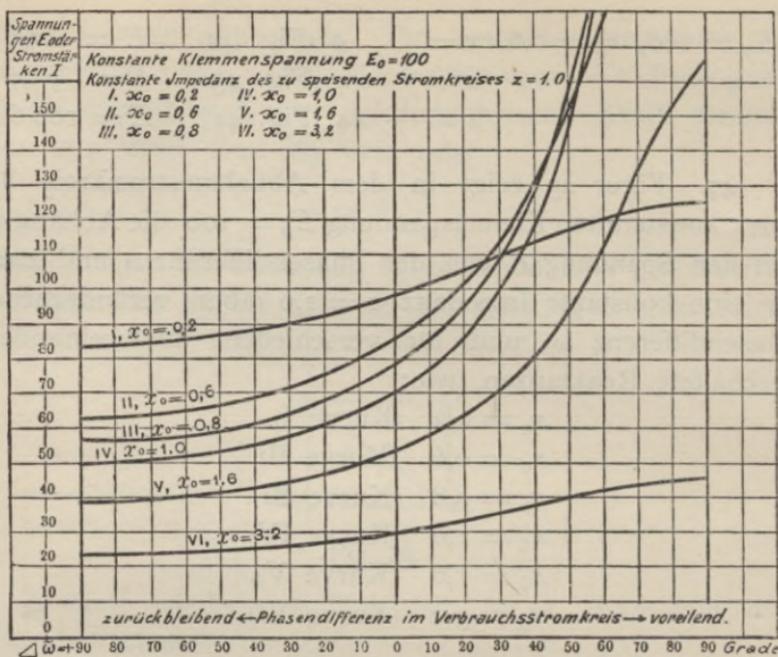


Fig. 45. Spannungsänderung bei hintereinander geschalteter konstanter Reaktanz mit dem Winkel der Phasenverschiebung in dem Abnahmestromkreis.

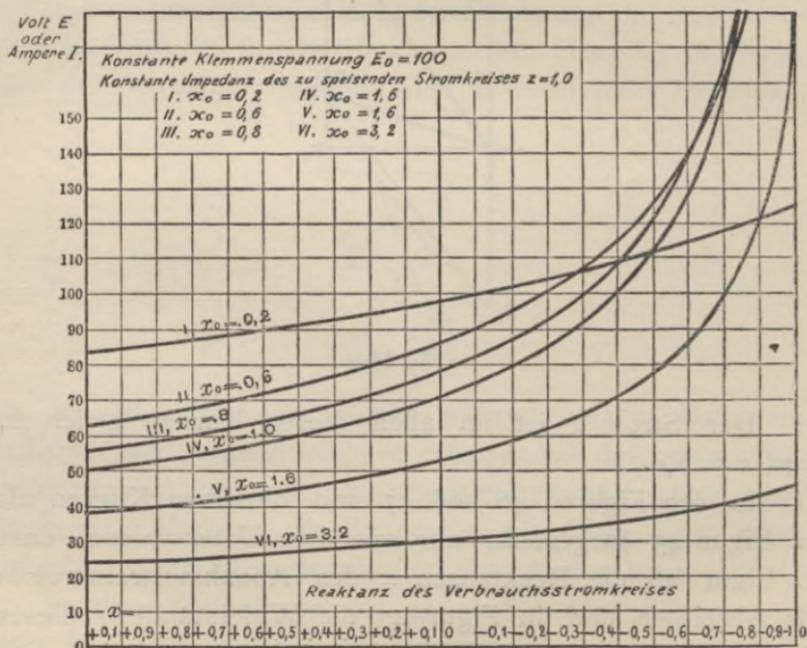


Fig. 46. Spannungsänderung bei hintereinander geschalteter konstanter Reaktanz mit der Reaktanz in dem Abnahmestromkreis.

Die Spannung E an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises ist am niedrigsten, wenn x_0 und x dasselbe Vorzeichen, und am höchsten, wenn x_0 und x entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Das Steigen der Spannung infolge der Änderungen von x_0 und x ist ein Maximum für $x_0 = +1,0$, $x = -1,0$ und $r = 0$, wo $E = \infty$ ist, d. h. es findet absolute Resonanz statt. Jedoch kann diese Bedingung in der Praxis nicht vollkommen erreicht werden.

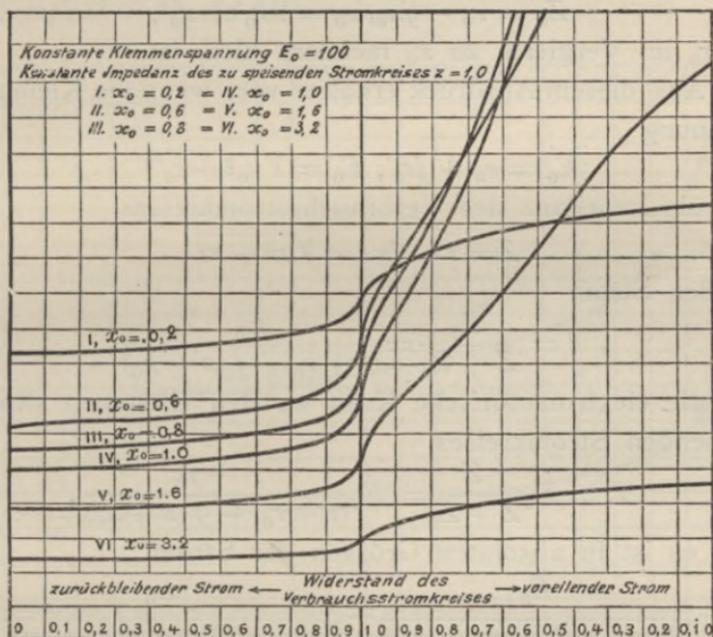


Fig. 47. Spannungsänderung bei hintereinander geschalteter konstanter Reaktanz mit dem Widerstand in dem Abnahmestromkreis.

Aus der Figur 47 kann man die interessante Tatsache wahrnehmen, dass der grösste Teil des Spannungsabfalls durch Induktanz und der Spannungssteigerung durch Kondensanz — oder umgekehrt — zwischen $r = 1,0$ und $r = 0,9$ stattfindet; oder mit anderen Worten: es giebt ein Stromkreis mit dem Leistungsfaktor $\cos \omega = 0,9$ einen um viele Male grösseren Verlust als ein induktionsfreier, und daher muss er als solcher mit hoher Selbstinduktion angesehen werden.

3. Impedanz mit einem Stromkreise hintereinander geschaltet.

48. Durch den Gebrauch der Reaktanz bei der Regulierung von elektrischen Stromkreisen wird notwendiger Weise ein gewisser Betrag von Widerstand infolge des Ohm'schen Widerstandes des Leiters und infolge des Hysteresisverlustes eingeführt, der, wie wir später sehen werden, als effektiver Widerstand dargestellt werden kann.

Daher kann die Impedanz einer Drosselspule folgendermassen ausgedrückt werden:

$$Z_0 = r_0 - jx_0, z_0 = \sqrt{r_0^2 + x_0^2},$$

wo r_0 im Vergleich zu x_0 meistens klein ist.

Aus diesem Ausdruck erhalten wir, wenn die Klemmenspannung

$$E_0 = e_0 + je_0', E_0 = \sqrt{e_0^2 + e_0'^2}$$

und die Impedanz des Verbrauchsstromkreises

$$Z = r - jxz = \sqrt{r^2 + x^2}$$

ist, den Strom

$$I = \frac{E_0}{Z + Z_0} = \frac{E_0}{(r + r_0) - j(x + x_0)}$$

und die elektromotorische Kraft an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises

$$E = E_0 \frac{Z}{Z + Z_0} = E_0 \frac{r - jx}{(r + r_0) - j(x + x_0)},$$

oder es ist in absoluten Grössen der Strom

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{(r + r_0)^2 + (x + x_0)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{z^2 + z_0^2 + 2(rr_0 + xx_0)}},$$

die elektromotorische Kraft an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises

$$E = \frac{E_0 z}{\sqrt{(r + r_0)^2 + (x + x_0)^2}} = \frac{E_0 z}{\sqrt{z^2 + z_0^2 + 2(rr_0 + xx_0)}},$$

die Phasendifferenz in dem Abnahmestromkreise

$$\cotg \omega_0 = \frac{r}{x}$$

und die Phasendifferenz in der Speiseleitung

$$\cotg \omega_0 = \frac{r + r_0}{x + x_0}.$$

49. In diesem Falle haben wir weder für $x = 0$ bei hintereinander geschaltetem Widerstand, noch für $r = 0$ bei hintereinander geschalteter Reaktanz einen maximalen Spannungsverlust; dieser liegt vielmehr an einem dazwischen liegenden Punkte. Der Spannungsverlust ist ein Maximum, wenn E ein Minimum wird, d. h. wenn sein Nenner ein Maximum, oder da z, z_0, r_0, x_0 konstant sind, wenn $rr_0 + xx_0$ ein Maximum ist, d. h. da $x = \sqrt{z^2 - r^2}$, wenn $rr_0 + x_0 \sqrt{z^2 - r^2}$ ein Maximum ist.

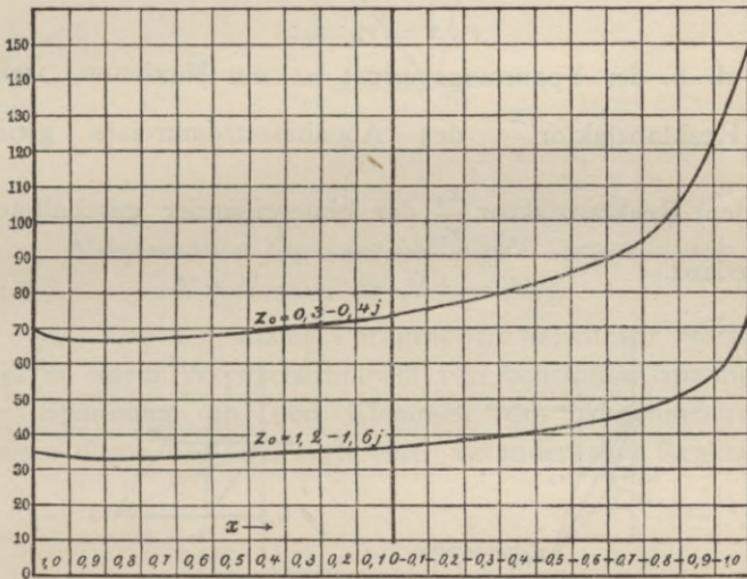


Fig. 48.

Eine Funktion $f = rr_0 + x_0 \sqrt{z^2 - r^2}$ ist ein Maximum, wenn ihr Differentialquotient Null ist. Zeichnen wir f als Kurve mit r als Abscissen, so ist an dem Punkte, wo f ein Maximum oder Minimum ist, diese Kurve für eine kurze Strecke horizontal, und die Tangentenfunktion ihrer Tangente ist Null. Die Tangentenfunktion einer Kurve ist das Verhältnis der Änderung der Ordinaten zu der Änderung der Abscissen, oder der Differential-Koeffizient der durch die Kurve dargestellten Funktion.

Wir erhalten demnach

$$f = r r_0 + x_0 \sqrt{z^2 - r^2} = \text{max. oder min.},$$

wenn

$$\frac{df}{dr} = 0.$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$r_0 + \frac{1}{2} \frac{x_0}{\sqrt{z^2 - r^2}} (-2r) = 0$$

und wenn wir entwickeln

$$r_0 \sqrt{z^2 - r^2} - x_0 r = r_0 x - x_0 r = 0,$$

oder

$$r : x = r_0 : x_0;$$

d. h. der Spannungsverlust ist ein Maximum, wenn der Reaktanzfaktor $\frac{x}{r}$ des Abnahmestromkreises gleich ist dem Reaktanzfaktor $\frac{x_0}{r_0}$ der hintereinander geschalteten Impedanz.

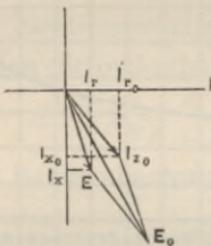


Fig. 49.

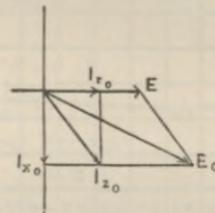


Fig. 50.

50. Figur 48 zeigt uns die elektromotorische Kraft E an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises bei der konstanten Klemmenspannung $E_0 = 100$, konstante Impedanz des Abnahmestromkreises $z = 1,0$ und hintereinander geschaltete konstante Impedanzen

$$Z_0 = 0,3 - 0,4j \text{ (Kurve I)}$$

$$Z_0 = 1,2 - 1,6j \text{ (Kurve II)}$$

als Funktionen der Reaktanz x in dem Abnahmestromkreise.

Die Figuren 49 bis 51 zeigen das Polardiagramm für $E_0 = 100$, $x = 0,9$, $x = 0$, $x = -0,9$ und $Z_0 = 0,3j - 0,4j$.

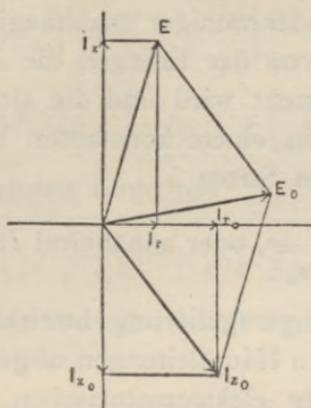


Fig. 51.

4. Kompensation für zurückbleibende Ströme durch Kondensanz im Nebenschluss.

51. Aus den letzten Paragraphen haben wir ersehen, dass in einem Wechselstromnetz von konstanter Spannung die Spannung an den Klemmen des Abnahmestromkreises durch den Gebrauch einer veränderlichen Reaktanz,

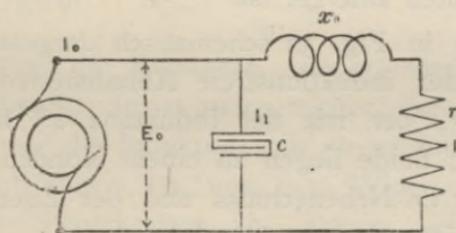


Fig. 52.

die mit dem Stromkreis hintereinander geschaltet ist, verändert werden kann, und zwar ohne Energieverlust; ausgenommen ist der unvermeidliche Verlust infolge des Widerstands und der Hysterisis der Reaktanz. Wir haben

ferner ersehen, dass, wenn die hintereinander geschaltete Reaktanz im Vergleich zu dem Widerstande des Abnahmestromkreises sehr gross ist, der Strom in dem Abnahmestromkreise mehr oder weniger unabhängig von dem Widerstand wird, d. h. von der Energie, die in dem Abnahmestromkreise verbraucht wird und die sich in diesem Falle den Bedingungen in einem konstanten Wechselstromstromkreis nähert, dessen Strom

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + x_0^2}}, \text{ oder annähernd } I = \frac{E_0}{x_0} \text{ ist.}$$

Diese Spannungsregulierung bewirkt aber, dass der Strom, der von den Hauptleitungen abgenommen wird, beträchtlich hinter der elektromotorischen Kraft zurückbleibt und viel grösser sein muss, als der in dem Abnahmestromkreise verbrauchten Energie entspricht.

Da ein Kondensator von den Hauptleitungen einen voreilenden Strom entnimmt, so wird er, wenn zu solchem Stromkreise mit zurückbleibendem Strom im Nebenschluss geschaltet, die Verschiebung aufheben, indem der voreilende und der zurückbleibende Strom mit einander vereinigt einen resultierenden Strom ergeben, der mehr oder weniger mit der elektromotorischen Kraft in Phase und daher proportional der verbrauchten Energie ist.

In einem in Fig. 52 schematisch dargestellten Stromkreise habe der induktionsfreie Abnahmestromkreis einen Widerstand r , der mit der Induktanz x_0 hintereinander geschaltet ist; beide liegen zu einem Kondensator von der Kondensanz c im Nebenschluss und der Energieverlust im Kondensator ist zu vernachlässigen.

Alsdann ist, wenn E_0 die Klemmenspannung ist, der Strom in dem Abnahmestromkreis

$$I = \frac{E_0}{r - jx_0}, \quad I = \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + x_0^2}},$$

der Strom im Kondensatorkreise

$$I_1 = \frac{E_0}{jc}, \quad I_1 = \frac{E_0}{c}$$

und der gesamte Strom

$$\begin{aligned} I_0 = I + I_1 &= E_0 \left\{ \frac{I}{r - jx_0} + \frac{I}{jc} \right\} \\ &= E_0 \left\{ \frac{r}{r^2 + x_0^2} + j \left(\frac{r_0}{r^2 + x_0^2} - \frac{I}{c} \right) \right\}, \end{aligned}$$

oder es ist in absoluten Einheiten

$$I_0 = E_0 \sqrt{\left(\frac{r}{r^2 + x_0^2} \right)^2 + \left(\frac{x_0}{r^2 + x_0^2} - \frac{I}{c} \right)^2},$$

während die elektromotorische Kraft an den Klemmen des zu speisenden Stromkreises

$$E = Ir = E_0 \frac{r}{r - jx_0}, \quad E = \frac{E_0 r}{\sqrt{r^2 + x_0^2}}$$

ist.

52. Der Hauptstrom I_0 ist in Phase mit der Klemmenspannung E_0 , oder der zurückbleibende Strom ist vollständig ausgeglichen oder durch die Kondensanz ersetzt, wenn die imaginäre Grösse aus dem Ausdruck I_0 verschwindet,

d. h. wenn
$$\frac{x_0}{r^2 + x_0^2} - \frac{I}{c} = 0,$$

woraus sich ergibt
$$c = \frac{r^2 + x_0^2}{x_0}.$$

Daher hängt die Kapazität, die erforderlich ist, um den zurückbleibenden Strom auszugleichen, der durch Hintereinanderschaltung der Induktanz mit einem induktionsfreien Stromkreis entstanden ist, von dem Widerstand und der Induktanz des Stromkreises ab. Da x_0 bei steigendem Widerstand r konstant ist, so muss entweder die Kondensanz wachsen oder die Kapazität fallen, damit das Gleichgewicht erhalten bleibt.

Setzen wir nun ein

$$c = \frac{r^2 + x_0^2}{x_0},$$

so erhalten wir folgende Gleichungen für einen nicht induktionsfreien Stromkreis, der durch Kondensanz ausgeglichen ist:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{E_0}{r - jx_0} = \frac{E_0(r + jx_0)}{r^2 + x_0^2}, & I &= \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + x_0^2}}; \\
 I_1 &= -\frac{jE_0x_0}{r^2 + x_0^2}, & I_1 &= \frac{E_0x_0}{r^2 + x_0^2}; \\
 I_0 &= \frac{E_0r}{r^2 + x_0^2}, & I_0 &= \frac{E_0r}{r^2 + x_0^2}; \\
 E &= \frac{E_0r}{r - jx_0}, & E &= \frac{E_0r}{\sqrt{r^2 + x_0^2}};
 \end{aligned}$$

und für die Energie, die in dem Abnahmestromkreise aufgewendet wird

$$I^2r = \frac{E_0^2r}{r^2 + x_0^2} = I_0E_0,$$

d. h. der Hauptstrom ist proportional dem Energieverbrauch.

Für $r = 0$ erhalten wir als Bedingung des Ausgleichs $x = x_0$.

Vollständiger Ausgleich der zurückbleibenden Komponente des Stromes durch Kapazität im Nebenschluss erfordert daher, dass sich die Kondensanz c mit dem Widerstande r ändert; d. h. mit wechselnder Belastung des Abnahmestromkreises.

Fig. 53 zeigt uns für eine konstante Klemmenspannung $E_0 = 1000$ Volt und für eine hintereinander geschaltete konstante Reaktanz $x_0 = 100$ Ohm die Werte für den ausgeglichenen Stromkreis

Kurve I den Strom in dem Abnahmestromkreis,
 Kurve II den Strom in dem Kondensatorstromkreis,
 Kurve III den Strom in dem Hauptstromkreis,
 Kurve IV die elektromotorische Kraft an den Klemmen des Abnahmestromkreises,

mit dem Widerstand r des Abnahmestromkreises als Abszissen.

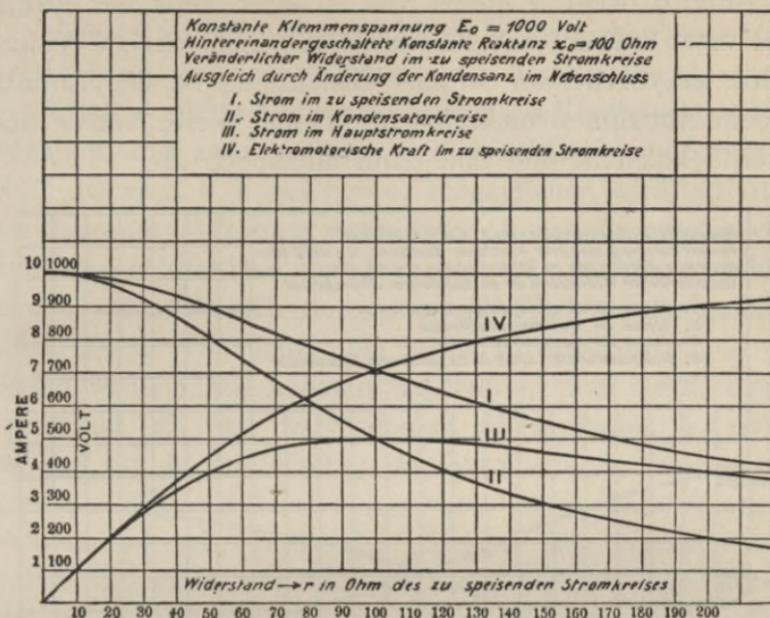


Fig. 53. Ausgleich phasenverspäteter Ströme in dem Abnahmestromkreis durch variable Kondensanz im Nebenschluss.

53. Lässt man die Kondensanz unverändert mit dem der Nullbelastung entsprechenden Werte $c = x_0$, so dass der Stromkreis für $r = 0$ ausgeglichen ist, dann ist er für $r > 0$ mehr als ausgeglichen und der Hauptstrom eilt vor. In diesem Falle erhalten wir

$$c = x_0;$$

$$I = \frac{E_0}{r - jx_0}, \quad I = \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + x_0^2}};$$

$$I_1 = -\frac{jE_0}{x_0}, \quad I_1 = \frac{E_0}{x_0};$$

$$I_0 = I + I_1 = \frac{E_0 r}{x_0(x_0 + jr)}, \quad I_0 = \frac{E_0 r}{x_0 \sqrt{r^2 + x_0^2}};$$

$$E = Ir = \frac{E_0 r}{r - jx_0}, \quad E = \frac{E_0 r}{\sqrt{r^2 + x_0^2}}.$$

Die Phasendifferenz im Hauptstromkreise ist

$$\operatorname{tg} \omega_0 = -\frac{x_0}{r}.$$

Sie ist $= 0$, wenn r gleich Null ist oder wenn der Stromkreis nicht belastet ist; sie wächst mit wachsendem Widerstande als voreilender Strom. Gleichzeitig ist der Strom I in dem Abnahmestromkreise für kleine Werte von r annähernd konstant und fällt dann allmählich ab.

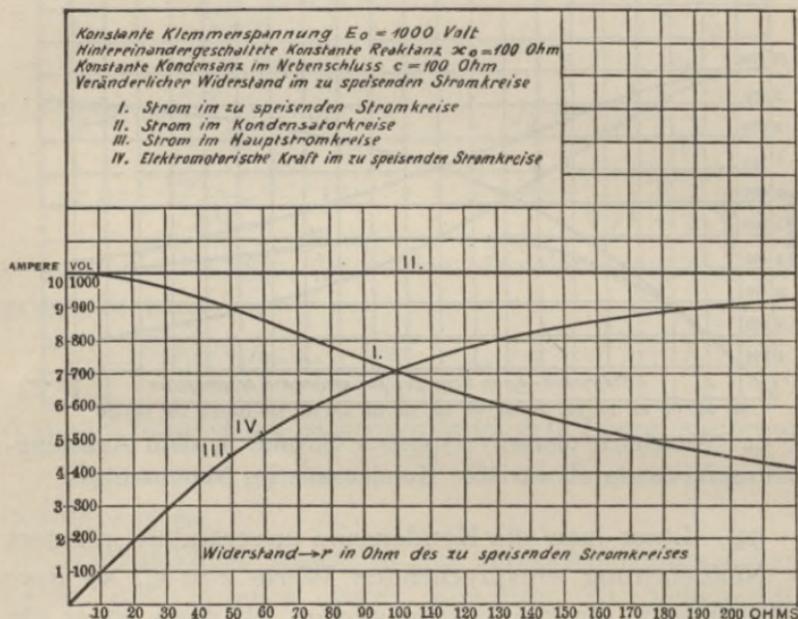


Fig. 54.

In Fig. 54 sind die Werte I , I_1 , I_0 , E durch die Kurven I, II, III und IV für $E_0 = 1000$ Volt, $c = x_0 = 100$ Ohm und mit r als Abscissen, ähnlich wie es in Fig. 50 geschehen ist, dargestellt.

5) Transformation von konstanter Spannung zu konstantem Strom.

54. In einem Stromkreise mit konstanter Spannung, der eine grosse und konstante Reaktanz x_1 und einen variablen Widerstand r enthält, ist der Strom annähernd konstant und fällt nur allmählich mit wachsendem Widerstand r (bei wachsender Belastung), aber er bleibt hinter der elektromotorischen Kraft bedeutend zurück.

Dieser zurückbleibende Strom in dem Abnahmestromkreise kann durch eine Kondensanz im Nebenschluss ausgeglichen werden. Lassen wir jedoch die Kondensanz $c = x_0$ konstant und zwar so, dass der zurückbleibende Strom bei Nullbelastung, d. h. bei $r = 0$, ausgeglichen wird, so ist er bei steigender Belastung, wenn r wächst, mehr als ausgeglichen und dann eilt der Hauptstrom voraus, während der Abnahmestrom, wenn die Klemmenspannung E_0 konstant gehalten wird, sinkt. Um daher den Strom in dem Abnahmestromkreise vollkommen konstant zu halten, muss die Klemmenspannung E_0 mit wachsendem Widerstande r erhöht werden, d. h. mit wachsender Voreilung im Hauptstromkreise. Wie wir bereits gesehen haben, lässt in einem Stromkreise mit voreilem Strome eine hintereinander geschaltete Induktanz die Spannung steigen, und um den Strom in dem Abnahmestromkreis bei allen Belastungen konstant zu erhalten, kann eine in den Hauptstromkreis eingeschaltete Induktanz x_2 (Fig. 55) dazu benutzt werden, um die Spannung E_0 bei steigender Belastung zu erhöhen.

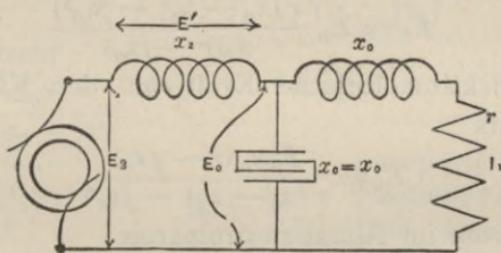


Fig. 55.

Es sei

$$E_2 = e_2 + j e_2', \quad E_0 = \sqrt{e_2^2 + e_2'^2}$$

die Klemmenspannung des Generators oder der Hauptleitungen und $x_c = x_0$ die Kondensanz; dann ist der Strom in dem Abnahmestromkreis

$$I = \frac{E_0}{r - j x_0},$$

und im Kondensatorstromkreis

$$I_1 = -\frac{jE_0}{x_0},$$

woraus sich ergeben der Gesamtstrom in der Hauptleitung

$$\begin{aligned} I_0 &= I + I_1 = E_0 \left\{ \frac{1}{r - jx_0} - \frac{j}{x_0} \right\} \\ &= \frac{E_0 r}{jx_0(r - jx_0)}, \end{aligned}$$

die elektromotorische Kraft an den Klemmen des Abnahmestromkreises

$$E = Ir = \frac{E_0 r^2}{r - jx_0},$$

die elektromotorische Kraft an den Klemmen des Kondensators

$$E_0,$$

und die elektromotorische Kraft in der Hauptleitung

$$E' = -jI_0 x_2 = -\frac{E_0 r x_2}{x_0(r - jx_0)}.$$

Daher ist die elektromotorische Kraft am Generator

$$E_2 = E_0 + E' = E_0 \left[1 - \frac{r x_2}{x_0(r - jx_0)} \right],$$

oder

$$E_2 = E_0 \frac{r(x_0 - x_2) - jx_0^2}{x_0(r - jx_0)}$$

und die elektromotorische Kraft an den Klemmen des Kondensators

$$E_0 = \frac{E_2 x_0 (r - jx_0)}{r(x_0 - x_2) - jx_0^2}$$

und der Strom im Abnahmestromkreis

$$I = \frac{E_0}{r - jx_0} = \frac{E_2 x_0}{r(x_0 - x_2) - jx_0^2}.$$

Dieser Wert von I enthält den Widerstand r nur als Glied der Differenz $x_0 - x_2$. Wird daher die Reaktanz x_2 so gewählt, dass sie gleich x_0 ist, so hebt sich r vollständig heraus und wir finden, dass, wenn $x_2 = x_0$ ist, der Strom in dem Abnahmestromkreis

$$I = j \frac{E_2}{x_0}$$

konstant und unabhängig von dem Widerstande r ist; d. h. von der Belastung.

Setzen wir $x_2 = x_0$, so erhalten wir als Spannung an den Klemmen des Generators

$$E_2 = e_2 + j e_2', \quad E_2 = \sqrt{e_2^2 + e_2'^2} = \text{konstant},$$

als Strom in dem Abnahmestromkreis

$$I = j \frac{E_2}{x_0} \quad I = \frac{E_2}{x_0} = \text{konstant},$$

als elektromotorische Kraft am Abnahmestromkreis

$$E = Ir = j \frac{E_2 r}{x_0}, \quad E = \frac{E_2 r}{x_0},$$

oder proportional der Belastung r ,

als elektromotorische Kraft an den Klemmen des Kondensators

$$E_0 = \frac{E_2(x_0 + jr)}{x_0}$$

$$= E_2 \left(1 + j \frac{r}{x_0} \right), \quad E_0 = E_2 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{x_0} \right)^2}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{also grösser} \\ \text{als } E_2, \end{array} \right\}$$

als Strom in dem Kondensatorstromkreis

$$I_1 = -j \frac{E_2(x_0 + jr)}{x_0^2}, \quad I_1 = \frac{E_2}{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{x_0} \right)^2},$$

als Hauptstrom

$$I_0 = \frac{E_0 r}{x_0(x_0 + jr)};$$

$$= \frac{E_2 r}{x_0^2},$$

$$I_0 = \frac{E_2 r}{x_0^2},$$

proportional der Belastung r und in Phase mit der elektromotorischen Kraft E_2 .

Daher ist die Energie in dem Abnahmestromkreis

$$I E = \frac{E_2^2 r}{x_0^2}$$

und die Energie in dem Hauptstromkreise

$$I_0 E_2 = \frac{E_2^2 r}{x_0^2} \text{ einander gleich.}$$

55. Diese Anordnung ist umkehrbar, wenn E_2 und I und I_0 und E konstant sind.

In diesem Falle erhalten wir, wenn alle Grössen durch I_0 ausgedrückt werden, für den Strom in der Hauptleitung

$$I_0 = \text{konstant},$$

für die elektromotorische Kraft an den Klemmen des Abnahmestromkreises

$$E = I_0 x_0 = \text{konstant},$$

für den Strom in dem Abnahmestromkreis

$$I = I_0 \frac{x_0}{r} \text{ proportional der Belastung } \frac{1}{r},$$

für den Strom im Kondensatorstromkreis

$$I = I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{r}\right)^2},$$

für die elektromotorische Kraft an den Klemmen des Kondensators

$$E_0 = x_0 I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{r}\right)^2},$$

und für die Spannung an den Klemmen des Generators

$$E_2 = \frac{x_0^2}{r} I_0, \text{ oder proportional der Belastung } \frac{1}{r}.$$

Aus dem oben Gesagten ziehen wir folgenden Schluss:

Schalten wir zwei Reaktanzen von dem gleichen Werte x_0 mit einem induktionsfreien Abnahmestromkreis, der einen variablen Widerstand r besitzt, hintereinander, und legen wir zu dem Stromkreise und zwar in der Mitte zwischen den Induktanzen einen Nebenschluss mittels der Kapazität von der Kondensanz $x_c = x_0$, so verwandelt sich ein Hauptstromkreis mit konstanter Spannung in einen Abnahmestromkreis mit konstantem Strom und umgekehrt ein Hauptstromkreis mit konstantem Strom in einen Abnahmestromkreis mit konstanter Spannung. Diese Kombination der Induktanz und Kapazität wirkt als Transformator und wandelt von konstanter Spannung in konstanten Strom um und umgekehrt, jedoch ohne eine Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der elektromotorischen Kraft herbeizuführen.

Hierbei bemerkt man die interessante Thatsache, dass ein Kurzschluss in dem Abnahmestromkreis wie ein Unterbrecher in der Speiseleitung und eine Unterbrechung in dem Abnahmestromkreis wie ein Kurzschluss in der Speiseleitung wirkt.

In Figur 56 sind als Beispiel die numerischen Werte einer Transformation von konstanter Spannung von 1000 Volt zu einem konstanten Strom von 10 Ampère angenommen.

Da $E_2 = 1000$ Volt und $I = 10$ Ampère, so erhalten wir $x_0 = 100$ und daraus ergeben sich folgende Konstanten des Stromkreises:

$$E_2 = 1000 \text{ Volt,}$$

$$I = 10 \text{ Ampère,}$$

$$E = 10r, \text{ als Kurve } I \text{ mit den Widerständen } r \text{ als Abscissen,}$$

$$E_0 = 1000 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{100}\right)^2} \text{ als Kurve II,}$$

$$I_1 = 10 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{100}\right)^2} \text{ als Kurve III,}$$

$$I_0 = 0,1 r \text{ als Kurve IV.}$$

56. In der Praxis wird die in der Hauptleitung verbrauchte Energie grösser als die in den Abnahmestromkreis übertragene Energie, was auf die unvermeidlichen Energieverluste infolge der Induktanzen und Kondensanzen zurückzuführen ist.

Es sei der effektive Widerstand der Kondensanz $r_1 = 2$ Ohm und der effektive Widerstand jeder einzelnen Induktanz $r_0 = 3$ Ohm; dann ist die von der Kondensanz verbrauchte Energie $I_1^2 r_1 = 200 + 0,02 r^2$, die von der ersten Induktanz verbrauchte Energie $I^2 r_0 = 300$ und die von der zweiten Induktanz verbrauchte Energie $I_0^2 r_0 = 0,03 r^2$. Daher beträgt der gesamte Energieverlust $500 + 0,05 r^2$, die Leistung in dem Netz $I^2 r = 100 r$, die in das Netz hineingeschickte Energie $500 + 100 r + 0,05 r^2$ und das Güteverhältnis

$$\frac{100r}{500 + 100r + 0,05r^2}$$

Hieraus folgt, dass der Hauptstrom I_0 , um die notwendigen Energieverluste in den Apparaten zu ersetzen, etwas zunimmt.

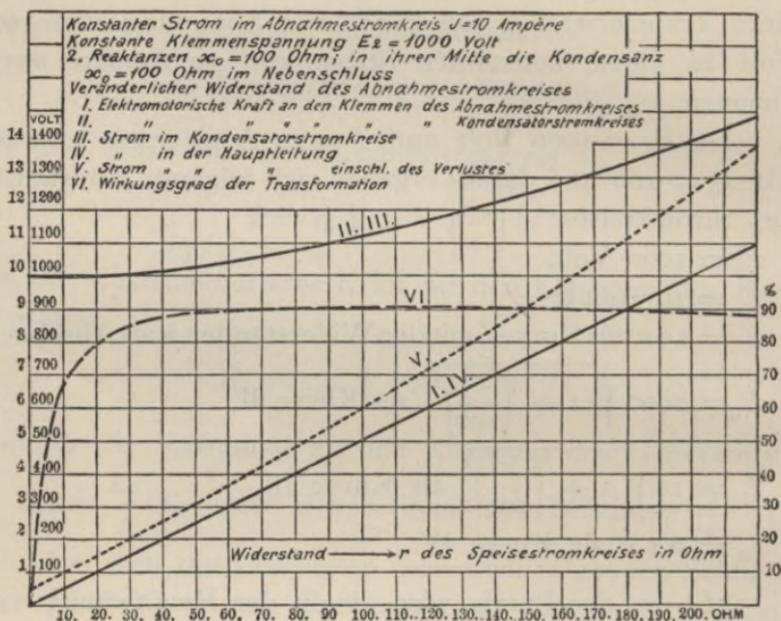


Fig. 56. Transformation von konstanter Spannung zu konstantem Strom.

Diese Stromkurve I_0 , einschliesslich der durch die Transformation hervorgerufenen Verluste, ist in der Figur 56 durch die Kurve V und das Güteverhältnis durch die Kurve VI dargestellt. Wie man sieht, ist das Güteverhältnis innerhalb weiter Grenzen konstant.

Kapitel IX.

Widerstand und Reaktanz von Leitungen.

57. In Wechselstromstromkreisen wird in den Speiseleitungen der Verteilungsnetze und ebenso in den Fernleitungen elektromotorische Kraft verbraucht und zwar nicht nur infolge des Widerstandes, sondern auch infolge der Reaktanz. Die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft ist in Phase mit dem Strom, während die durch die Reaktanz verbrauchte senkrecht zu diesem steht. Ihr Einfluss auf die elektromotorische Kraft in dem Abnahmestromkreis hängt daher von der Phasendifferenz zwischen dem Strom und der elektromotorischen Kraft in jenem Stromkreise ab. Wie bereits erörtert, ist der infolge des Widerstandes entstandene Spannungsverlust ein Maximum, wenn der Abnahmestromkreis mit der elektromotorischen Kraft in Phase ist und ein Minimum wenn er zu ihr senkrecht steht. Die in der Leitung, infolge der Reaktanz entstandene Spannungsänderung ist klein, wenn der Strom mit der elektromotorischen Kraft in Phase ist. Ein Spannungsverlust wird beim Zurückbleiben, eine Spannungserhöhung hingegen beim Voreilen des Stromes in dem Abnahmestromkreis erzeugt.

Daher hängt die in einer Leitung bei gegebenem Widerstand und bei gegebener Induktanz entstandene Spannungsänderung von der Phasendifferenz in dem Abnahmestromkreis ab und kann durch Änderung dieser Phasendifferenz geändert und bestimmt werden, d. h. durch Änderung der Admittanz $Y = g + jb$ des Abnahmestromkreises.

Die Konduktanz g des Abnahmestromkreises hängt von dem Energieverbrauch, d. h. von der Belastung in dem Stromkreise ab und lässt sich daher nicht für die Regulierung variieren. Die Suszeptanz b kann jedoch dadurch geändert werden, dass man den Stromkreis mit einer Reaktanz in den Nebenschluss bringt und wird durch eine Induktanz im Nebenschluss grösser, durch eine Kondensanz im Nebenschluss dagegen kleiner. Für die Untersuchung kann man den Abnahmestromkreis als aus zwei Zweigen bestehend annehmen, nämlich aus einer Konduktanz g (dem induktionsfreien Teil des Stromkreises) und einer Suszeptanz b im Nebenschluss zu g , die ohne einen Aufwand von Energie geändert werden kann. Die beiden Komponenten des Stromes können somit einzeln betrachtet werden: die Energiekomponente, bestimmt durch die Belastung im Stromkreise, und die wattlose Komponente, die sich zwecks Regulierung ändern lässt.

Andererseits kann in derselben Weise die elektromotorische Kraft des Abnahmestromkreises als aus zwei Komponenten bestehend angenommen werden, nämlich aus der Energiekomponente, die in Phase mit dem Strom ist, und aus der wattlosen Komponente, die senkrecht zu dem Strom ist. Es entspricht dies einer Reaktanz, die mit einem induktionsfreien Teil des Stromkreises hintereinander geschaltet ist. Da der Einfluss beider Auflösungen in Komponenten derselbe ist, sofern es sich um die Leitung handelt, so brauchen wir weiter keine Annahme machen, ob der wattlose Teil des Abnahmestromkreises mit dem Energieteil im Nebenschluss, oder hintereinander geschaltet ist.

Es sei

$Z_0 = r_0 - jx_0$ die Impedanz der Leitung,

$$z_0 = \sqrt{r_0^2 + x_0^2},$$

$Y = g + jb$ die Admittanz des Abnahmestromkreises,

$$y = \sqrt{g^2 + b^2},$$

$E_0 = e_0 + je_0'$ die Klemmenspannung am Generator-
ende der Leitung

$$E_0 = \sqrt{e_0^2 + e_0'^2},$$

$E = e + je'$ die elektromotorische Kraft am Ende der
Leitung

$$E = \sqrt{e^2 + e'^2},$$

$I_0 = i_0 + ji_0'$ der Strom in der Leitung

$$I_0 = \sqrt{i_0^2 + i_0'^2}.$$

Die einfachste Bedingung ist die eines induktionsfreien
Abnahmestromkreises, z. B. eines Beleuchtungsstromkreises.

1) *Induktionsfreier Abnahmestromkreis, der über eine
nicht induktionsfreie Leitung führt.*

58. In diesem Fall ist die Admittanz des Abnahme-
stromkreises $Y = g$, weil b gleich Null ist.

Wir erhalten dann für den Strom $I_0 = Eg$; für die
Klemmenspannung $E_0 = E + Z_0 I_0 = E(1 + Z_0 g)$.

Daraus erhalten wir die elektromotorische Kraft in
dem Abnahmestromkreis

$$E = \frac{E_0}{1 + Z_0 g} = \frac{E_0}{1 + gr_0 - jgx_0},$$

und den Strom

$$I_0 = \frac{E_0 g}{1 + Z_0 g} = \frac{E_0 g}{1 + gr_0 - jgx_0},$$

oder in absoluten Werten: die elektromotorische Kraft an
dem Abnahmestromkreis

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{(1 + gr_0)^2 + g^2 x_0^2}},$$

und den Strom

$$I_0 = \frac{E_0 g}{\sqrt{(1 + gr_0)^2 + g^2 x_0^2}}.$$

Das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte in dem Ab-
nahmestromkreis und am Generator (oder der Speiseleitung) ist

$$\alpha = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 + gr_0)^2 + g^2 x_0^2}},$$

und die Energie, die durch den induktionsfreien Abnahmestromkreis übertragen wird, oder Leistung

$$P = I_0 E = \frac{E_0^2 g}{(1 + g r_0)^2 + g^2 x_0^2}.$$

Als Funktion von g und bei gegebenem E_0 , r_0 und x_0 ist diese Energie ein Maximum, wenn $\frac{dP}{dg} = 0$, d. h. wenn $-1 + g^2 r_0^2 + g^2 x_0^2 = 0$; daher ist die Konduktanz des Abnahmestromkreises für das Maximum der Leistung

$$g_m = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + x_0^2}} = \frac{1}{z_0}$$

und der Widerstand des Abnahmekreises $r_m = \frac{1}{g_m} = z_0$.

Durch Einsetzung von P erhalten wir als maximale

Leistung
$$P_m = \frac{E_0^2}{2(r_0 + z_0)} = \frac{E_0^2}{2\{r_0 + \sqrt{r_0^2 + x_0^2}\}},$$

als Verhältnis zwischen der elektromotorischen Kraft an dem Abnahmestromkreis und am Generatorende

$$\alpha_m = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \frac{r_0}{x_0}\right)}}$$

und als Wirkungsgrad

$$\frac{r_m}{r_m + r_0} = \frac{z_0}{r_0 + z_0},$$

d. h. die Leistung, die durch eine nicht induktionsfreie Leitung mit dem Widerstande r_0 und der Reaktanz x_0 (d. h. der Impedanz z_0) in einen induktionsfreien Abnahmestromkreis gesandt werden kann, ist ein Maximum, wenn der Widerstand des Abnahmekreises gleich der Impedanz der Leitung, also $r = z_0$ ist; es ergibt sich dann

$$P_m = \frac{E_0^2}{2(r_0 + z_0)}.$$

Diese Leistung wird bei einem Wirkungsgrad $\frac{z_0}{r_0 + z_0}$ und bei dem Spannungsverhältnis an den beiden Enden der Leitung

$$\alpha_m = \frac{I}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{r_0}{z_0} \right)}}$$

übertragen.

59. Hieraus ersehen wir, dass die maximale Leistung, die durch eine nicht induktionsfreie Leitung gesandt werden kann, kleiner ist als die durch eine induktionsfreie Leitung

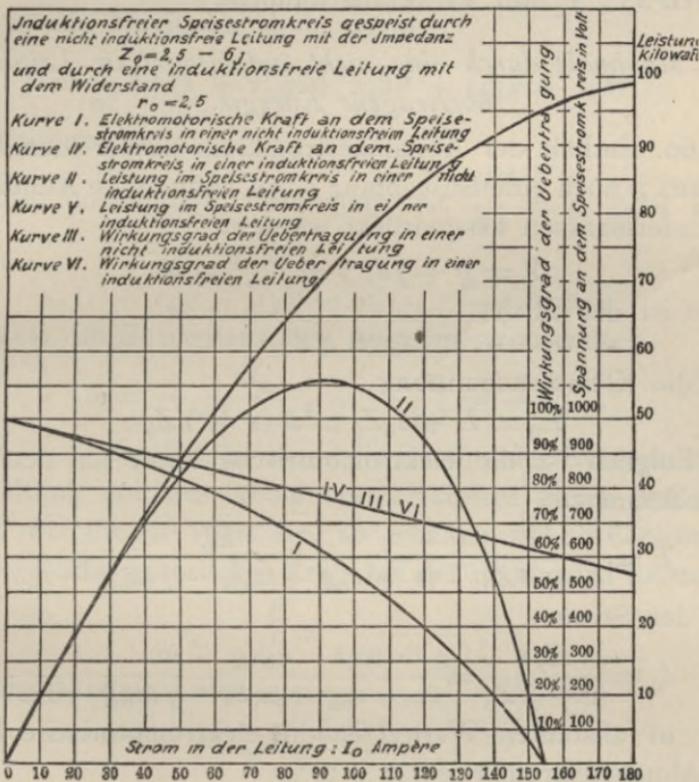


Fig. 57. Induktionsfreier Abnahmestromkreis durch eine nicht induktionsfreie Leitung gespeist.

gesandte Leistung, die denselben Widerstand als jene hat, d. h. die Leistung, die bei Gleichstrom bei derselben Generatorspannung abgegeben werden kann.

Fig. 57 zeigt folgende Werte für die Konstanten

$E_0 = 1000$ Volt,

$Z_0 = 2,5 - 6j$; d. h. $r_0 = 2,5$ Ohm, $x_0 = 6$ Ohm, $z_0 = 6,5$ Ohm,
mit dem Strom I_0 als Abscissen die Werte

Elektromotorische Kraft am Abnahmestromkreis E (Kurve I),

Leistung der Übertragung P (Kurve II),

Wirkungsgrad der Übertragung (Kurve III).

Dieselben Grössen E und P für einen induktionsfreien Leitungswiderstand $r_0 = 2,5$ Ohm und $x_0 = 0$ sind in den Kurven IV, V und VI veranschaulicht.

2) *Maximale durch eine nicht induktionsfreie Leitung übertragene Energie.*

60. Enthält der Abnahmestromkreis ausser der Konduktanz g noch eine Suszeptanz b , so kann seine Admittanz folgendermaassen ausgedrückt werden:

$$Y = g + jb, \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

Dann ist der Strom

$$I_0 = EY$$

und die Klemmenspannung

$$E_0 = E + I_0 Z_0 = E(1 + YZ_0).$$

Folglich ist die elektromotorische Kraft an den Abnahmeklemmen

$$E = \frac{E_0}{1 + YZ_0} = \frac{E_0}{(1 + r_0 g + x_0 b) - j(x_0 g - r_0 b)}$$

und der Strom

$$I_0 = \frac{E_0 Y}{1 + YZ_0} = \frac{E_0 (g + jb)}{(1 + r_0 g + x_0 b) - j(x_0 g - r_0 b)};$$

oder in absoluten Werten ist die elektromotorische Kraft am Abnahmestromkreis

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{(1 + r_0 g + x_0 b)^2 + (x_0 g - r_0 b)^2}},$$

der Strom

$$I_0 = E_0 \sqrt{\frac{g^2 + b^2}{(1 + r_0 g + x_0 b)^2 + (x_0 g - r_0 b)^2}},$$

das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte am Abnahmestromkreis und am Generatorende

$$\alpha = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 + r_0 g + x_0 b)^2 + (x_0 g - r_0 b)^2}};$$

und die Leistung in dem Abnahmestromkreis

$$P = E^2 g = E_0^2 \alpha^2 g.$$

61. a) *Abhängigkeit der Leistung von der Suszeptanz des Abnahmestromkreises.*

Bei einer gegebenen Konduktanz g des Abnahmestromkreises ist seine Leistung $P = E_0^2 \alpha^2 g$ ein Maximum, wenn α^2 ein Maximum, d. h. wenn

$$f = \frac{1}{\alpha^2} = (1 + r_0 g + x_0 b)^2 + (x_0 g - r_0 b)^2$$

ein Minimum ist.

Die notwendige Bedingung ist $\frac{df}{db} = 0$, oder entwickelt

$$x_0(1 + r_0 g + x_0 b) - r_0(x_0 g - r_0 b) = 0.$$

Somit ist die Suszeptanz des Abnahmestromkreises

$$b = -\frac{x_0}{r_0^2 + x_0^2} = -\frac{x_0}{z_0^2} = -b_0,$$

oder $b + b_0 = 0$, d. h. wenn die Summe der Suszeptanzen der Leitung und des Abnahmestromkreises gleich Null ist. Setzen wir diesen Wert ein, so erhalten wir die Gleichung für die elektromotorische Kraft bei der maximalen Leistung

$$\alpha_1 = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{z_0(g + g_0)},$$

für die maximale Leistung

$$P_1 = \frac{E_0^2 g^2}{z_0^2 (g + g_0)^2},$$

für den Strom

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{E_0 Y}{1 + Z_0 Y} = \frac{E_0 (g - j b_0)}{1 + (r_0 - j x_0)(g - j b_0)} \\ &= \frac{E_0 (g - j b_0)}{(1 + r_0 g - x_0 b_0) - j (r_0 b_0 + x_0 g)}, \end{aligned}$$

$$I_0 = E_0 \sqrt{\frac{g^2 + b_0^2}{(1 + r_0 g - x_0 b_0)^2 + (r_0 b_0 + x_0 g)^2}},$$

und entwickelt

$$I_0 = \frac{E_0 \sqrt{g^2 + b_0^2}}{z_0 (g + g_0)},$$

für die Phasendifferenz im Abnahmestromkreis

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{g} = -\frac{b_0}{g},$$

und für die Phasendifferenz im Generatorstromkreise

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{x + x_0}{r + r_0} = \frac{b_0(y^2 - y_0^2)}{g_0 y^2 + g y_0^2}.$$

62. b) *Abhängigkeit der Leistung von der Konduktanz des Abnahmestromkreises.*

Bei gegebener Suszeptanz b des Abnahmestromkreises ist seine Leistung $P = E_0^2 \alpha^2 g$ ein Maximum, wenn $\frac{dP}{dg} = 0$,

oder wenn

$$\frac{d}{dg} \left(\frac{1}{\alpha^2 g} \right) = \frac{d}{dg} \left(\frac{(1 + r_0 g + x_0 b)^2 + (x_0 g - r_0 b)^2}{g} \right) = 0;$$

und entwickelt

$$(1 + r_0 g + x_0 b)^2 + (x_0 g - r_0 b)^2 - 2g(r_0 + r_0^2 g + x_0^2 g) = 0;$$

$$\text{oder } (b + b_0)^2 = g^2 - g_0^2; \quad g = \sqrt{g_0^2 + (b + b_0)^2}.$$

Wenn wir diesen Wert in die Gleichung für α auf Seite 97 einsetzen, so erhalten wir als Gleichungen für die elektromotorischen Kräfte:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{z_0 \sqrt{2 \left\{ g_0^2 + (b + b_0)^2 + g_0 \sqrt{g_0^2 + (b + b_0)^2} \right\}}} \\ &= \frac{1}{z_0 \sqrt{2 g (g + g_0)}} = \frac{y_0}{\sqrt{2 g (g + g_0)}} \end{aligned}$$

für die Energie

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{E_0^2 y_0^2}{2 (g + g_0)} = \frac{E_0^2 y_0^2}{2 \left\{ g_0 + \sqrt{g_0^2 + (b + b_0)^2} \right\}} \\ &= \frac{E_0^2}{2 \left\{ r_0 + \sqrt{r_0^2 + \left(x_0 + x \frac{z_0^2}{z^2} \right)^2} \right\}}. \end{aligned}$$

Als Funktion der Suszeptanz b wird diese Leistung ein Maximum für $\frac{dP_2}{db} = 0$, d. h. gemäss § 61, wenn $b = -b_0$.

Setzen wir diesen Wert ein, so erhalten wir

$$b = -b_0, g = g_0, y = y_0, \text{ daher: } Y = g + jb = g_0 - jb_0;$$

$$x = -x_0, r = r_0, z = z_0, \quad Z = r - jx = r_0 + jx_0;$$

und durch Substitution dieses Wertes das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte

$$\alpha_m = \frac{y_0}{2g_0} = \frac{z_0}{2r_0},$$

und für die Leistung

$$P_m = \frac{E_0^2}{4r_0},$$

nämlich dieselbe als in einem Gleichstromstromkreise; oder mit anderen Worten: die Induktanz der Leitung und des Abnahmestromkreises kann in ihrer Wirkung durch die Leistung vollkommen balanciert werden.

63. Wenn wir das Gesamtergebn ziehen, so erhalten wir:

Die durch eine induktionsfreie Leitung mit der Impedanz $Z_0 = r_0 - jx_0$ in einen induktionsfreien Abnahmestromkreis gesandte Leistung ist ein Maximum für den Widerstand $r = z_0$, oder für die Konduktanz $g = y_0$ dieses Stromkreises, oder

$$P = \frac{E_0^2}{2(r_0 + z_0)},$$

bei dem Spannungsverhältnis

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \frac{r_0}{z_0}\right)}}.$$

Bei einem Abnahmestromkreis mit konstanter Suszeptanz b ist die Leistung, als eine Funktion der Konduktanz g , ein Maximum für die Konduktanz $g = \sqrt{g_0^2 + (b + b_0)^2}$, und

ist dann

$$P = \frac{E_0^2 y_0^2}{2(g + g_0)},$$

bei dem Spannungsverhältnis

$$\alpha = \frac{y_0}{\sqrt{2g(g+g_0)}}.$$

Bei einem Abnahmestromkreise mit konstanter Konduktanz g ist die Leistung, als eine Funktion der Reaktanz b , ein Maximum für die Reaktanz $b = -b_0$ und ist dann

$$P = \frac{E_0^2 g^2}{z_0^2 (g + g_0)^2},$$

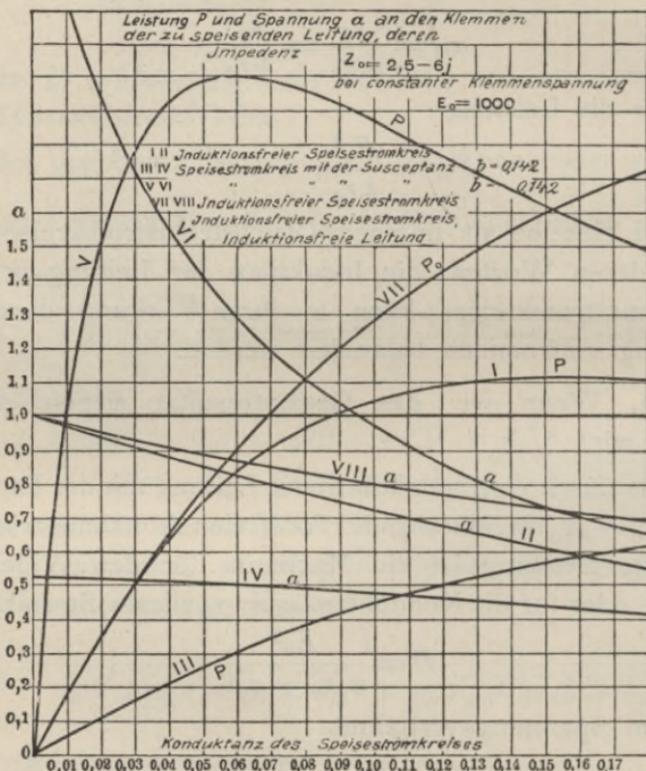


Fig. 58. Spannungsänderung in der Leitung bei verschiedener Belastung.

bei dem Spannungsverhältnis

$$\alpha = \frac{I}{y_0 (g + g_0)}.$$

Die maximale Leistung, die durch eine induktionsfreie Leitung als Funktion der Admittanz oder Impedanz des

Abnahmestromkreises übertragen werden kann, tritt ein, wenn $Z = r_0 + jx_0$, oder wenn $Y = g_0 - jb_0$ ist, d. h. wenn der Widerstand oder die Konduktanz des Abnahmestromkreises und der Leitung gleich sind, ferner wenn die Reaktanz oder Suszeptanz dieses Stromkreises und der Leitung gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind, und zwar ist dann

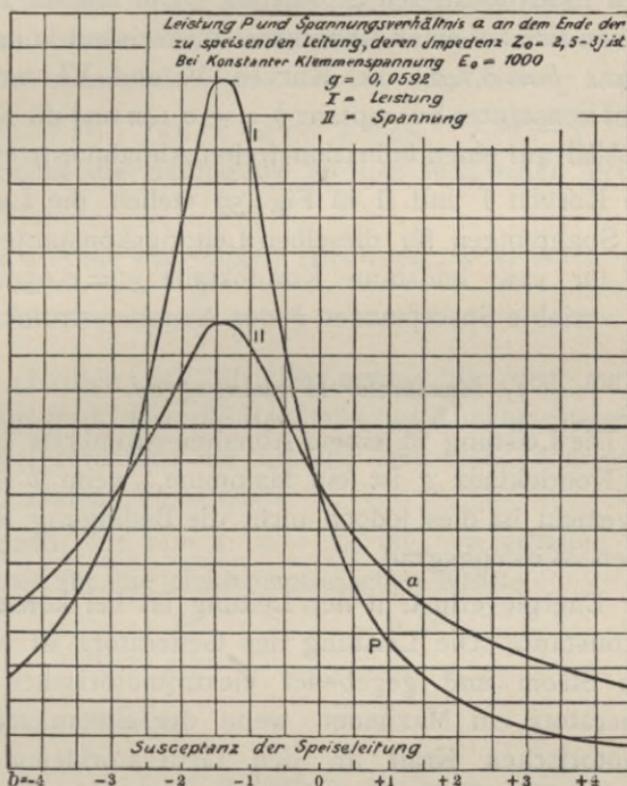


Fig. 59. Spannungsänderung in der Leitung bei verschiedener Belastung.

$P = \frac{E_0^2}{4r_0}$, oder unabhängig von den Reaktanzen, aber gleich der Leistung eines Gleichstromstromkreises von gleichem Leitungswiderstande. Das Spannungsverhältnis ist in diesem Falle $\alpha = \frac{z_0}{2r_0}$, während es in einem Gleichstromstromkreise $\frac{1}{2}$ ist. Der Nutzeffekt beträgt 50% .

64. Als Beispiel dient Fig. 58 für die Konstanten $E_0 = 1000$ Volt und $Z_0 = 2,5$ bis $6j$, d. h. für $r_0 = 2,5$ Ohm, $x_0 = 6$ Ohm und $Z_0 = 6,5$ Ohm mit den variablen Konduktanzen als Abscissen. Die Werte der Leistungen sind in Kurve I, III und V, die der Spannungen in Kurve II, IV und VI dargestellt. Die Kurven I und II beziehen sich auf einen induktionsfreien Stromkreis. Die Kurven III und IV beziehen sich auf einen Abnahmestromkreis mit konstanter Suszeptanz $b = 0,142$, die Kurven V und VI auf eine solche mit konstanter Suszeptanz $b = -0,142$ und die Kurven VII und VIII auf einen induktionsfreien Abnahmestromkreis.

Die Kurven I und II in Fig. 59 stellen die Leistung und die Spannungen für dieselben Leitungskonstanten dar, nämlich für eine konstante Konduktanz $g = 0,0592$ Ohm und für variable Suszeptanzen b des Abnahmestromkreises.

3) Maximaler Wirkungsgrad.

65. Die Leistung in einem Abnahmestromkreis bei gegebener Konduktanz g ist ein Maximum, wenn $b = -b_0$ ist. Allgemein ist dies jedoch nicht die Bedingung für den maximalen Wirkungsgrad.

Der Energieverlust in der Leitung ist bei konstantem Strom konstant. Die Leistung des Generators ist bei gegebenem Strom und gegebener elektromotorischer Kraft des Generators ein Maximum, wenn der Strom mit der elektromotorischen Kraft an den Generatorklemmen in Phase ist. Die Bedingung für die maximale Leistung bei gegebenem Energieverlust oder bei maximalem Wirkungsgrade ist daher $tg \omega_0 = 0$. Die Stromintensität beträgt

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{E_0 Y}{1 + Z_0 Y} = \frac{E_0 (g + jb)}{1 + (r_0 - jx_0) (g + jb)} \\ &= \frac{E_0 (g + jb)}{(1 + r_0 g + x_0 b) - j(x_0 g - r_0 b)}. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir Zähler und Nenner mit $(1 + r_0 g + x_0 b)$

+ $j(x_0g - r_0b)$, um die imaginäre Grösse aus dem Nenner zu bringen, so erhalten wir

$$I = E_0 \frac{\left\{ g(1 + r_0g + x_0b) - b(x_0g - r_0b) \right\} + j \left\{ b(1 + r_0g + x_0b) + g(x_0g - r_0b) \right\}}{(1 + r_0g + x_0b)^2 + (x_0g - r_0b)^2}.$$

Der Strom I_0 ist mit der elektromotorischen Kraft E_0 in Phase, wenn seine senkrechte Komponente (d. h. der imaginäre Ausdruck) verschwindet, oder wenn

$$b(1 + r_0g + x_0b) + g(x_0g - r_0b) = 0$$

ist, welches die Bedingung für den maximalen Wirkungsgrad ist.

Entwickeln wir obigen Ausdruck, so erhalten wir

$$x_0 = -\frac{b}{g^2 + b^2} = -x, \text{ oder: } x = -x_0.$$

Daher erhalten wir als Bedingung für den maximalen Wirkungsgrad, dass die Reaktanz des Abnahmestromkreises gleich der Reaktanz der Leitung sein soll, aber von entgegengesetztem Vorzeichen.

Setzen wir nun $x = -x_0$ ein, so erhalten wir als Verhältnis für die elektromotorischen Kräfte

$$a = \frac{E}{E_0} = \frac{z}{(r + r_0)} = \frac{\sqrt{r^2 + x_0^2}}{(r + r_0)},$$

und für die Energie

$$P = E_0^2 g a^2 = \frac{E_0^2 r}{(r + r_0)^2},$$

die nur vom Widerstand und nicht von der Reaktanz abhängt.

Die Energie P ist, wie wir bereits gezeigt haben, ein Maximum, wenn $g = g_0$ ist. Setzen wir daher $g = g_0$ und $r = r_0$ ein, so ist die maximale Energie bei maximalem Wirkungsgrad

$$P_m = \frac{E_0^2}{4 r_0},$$

bei einem Spannungsverhältnis

$$a_m = \frac{z_0}{2 r_0},$$

oder dasselbe Resultat als in § 62.

In Figur 60 sind für die Konstanten $E_0 = 1000$ Volt, $Z_0 = 2,5 - 6j$, $r_0 = 2,5$ Ohm, $x_0 = 6$ Ohm, $z_0 = 6,5$ Ohm und für die variablen Konduktanzen g des Abnahmestromkreises als Abscissen dargestellt:

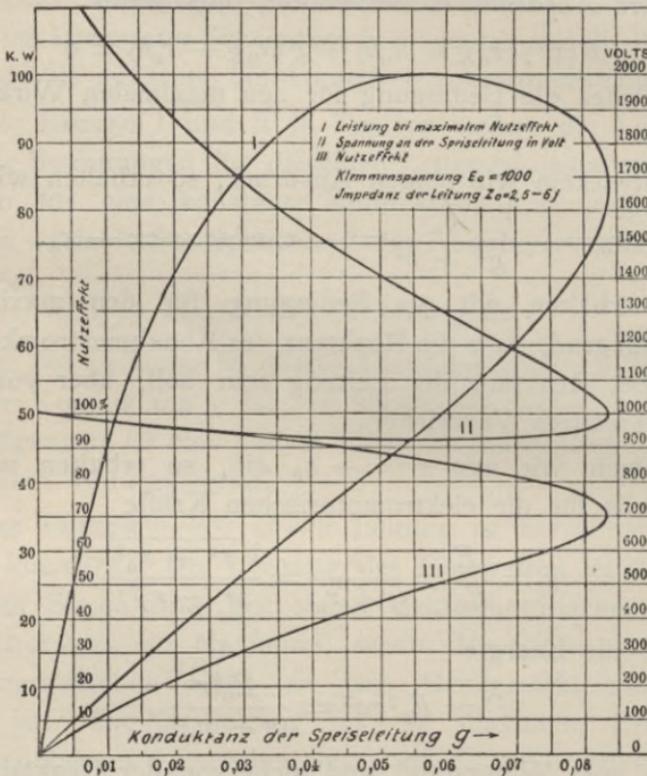


Fig. 60. Charakteristische Belastung einer Übertragungsleitung.

die Leistung bei maximalem Wirkungsgrad

in Kurve I,

die Spannung am Ende der zu speisenden Leitung

in Kurve II

und der Wirkungsgrad $\frac{r}{r+r_0}$ in Kurve III.

4) *Regulierung der Spannung im Abnahmestromkreis durch Suszeptanz im Nebenschluss.*

66. Durch eine Änderung der Suszeptanz in dem Abnahmestromkreis ändert sich die Spannung an den Abnahmeklemmen mehr oder weniger. Da die Suszeptanz des Abnahmestromkreises beliebig geändert werden kann, so ist es bei konstanter elektromotorischer Kraft des Generators möglich, die Suszeptanz des Abnahmestromkreises so zu regulieren, dass die Spannung an dem Ende der Speiseleitung entweder konstant bleibt, oder innerhalb bestimmter Grenzen unabhängig von der Generatorspannung geändert wird.

Das Verhältnis für die elektromotorischen Kräfte ist

$$a = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 + r_0g + x_0b)^2 + (x_0g - r_0b)^2}}.$$

Soll bei der konstanten Spannung E_0 des Generators die Spannung im Abnahmestromkreis E konstant sein, so muss a konstant sein, also

$$(1 + r_0g + x_0b)^2 + (x_0g - r_0b)^2 = \frac{1}{a^2},$$

oder entwickelt

$$b = -b_0 + \sqrt{\left(\frac{y_0}{a}\right)^2 - (g + g_0)^2}.$$

Dies ist der Wert der Suszeptanz b als Funktion der Konduktanz des Abnahmestromkreises (d. i. der Belastung), der erforderlich ist, um am Abnahmestromkreis die konstante Spannung aE_0 zu halten.

Um g , d. h. um die Belastung zu erhöhen, erreicht man einen Punkt, wo in dem Ausdruck

$$b = -b_0 + \sqrt{\left(\frac{y_0}{a}\right)^2 - (g + g_0)^2},$$

die Bezeichnung unter dem Wurzelzeichen imaginär wird; es ist daher unmöglich, die konstante Spannung aE_0 aufrecht zu erhalten. Die maximale Leistung, die bei einer Spannung aE übertragen werden kann, ist durch folgende Formel gegeben:

$$\sqrt{\left(\frac{y_0}{a}\right)^2 - (g + g_0)^2} = 0;$$

daraus folgt $b = -b_0$, als Suszeptanz des Abnahmestromkreises,

und $g = -g_0 + \frac{y_0}{a}$, als Konduktanz des Abnahmestromkreises,

$$P = E_0^2 g a^2 \\ = a^2 E_0^2 \left(\frac{y_0}{a} - g_0 \right), \text{ als Leistung.}$$

67. Ist $a = 1$, d. h. ist die Spannung am Abnahmestromkreis gleich der am Generator, so ist

$$g = y_0 - g_0; \\ P = a^2 E_0^2 (y_0 - g_0).$$

Wenn $a = 1$, wenn $g = 0$, $b = 0$

wenn $g > 0$, $b < 0$;

wenn $a > 1$, wenn $g = 0$ oder $g > 0$, $b < 0$,

d. i. Kondensanz,

wenn $a < 1$, wenn $g = 0$, $b > 0$,

$$\text{wenn } g = -g_0 + \sqrt{\left(\frac{y_0}{a}\right)^2 - b_0^2}, b = 0,$$

$$\text{wenn } g > -g_0 + \sqrt{\left(\frac{y_0}{a}\right)^2 - b_0^2}, b < 0;$$

oder mit anderen Worten: Ist $a < 1$, so muss die Phasendifferenz in der Hauptleitung mit wachsender Belastung sich von Phasenverspätung zu Phasenverfrühung ändern.

68. Der Wert von a , der die maximale Leistung in einem Abnahmestromkreis ergibt, wird durch den Ausdruck

$\frac{dP}{da} = 0$ bestimmt; entwickelt erhalten wir

$$2 a \left(\frac{y_0}{a} - g_0 \right) - \frac{a^2 y_0}{a^2} = 0,$$

daher

$$y_0 = 2 a g_0$$

und

$$a = \frac{y_0}{2 g_0} = \frac{1}{2 \sqrt{g_0 r_0}} = \frac{z_0}{2 r_0}.$$

Die maximale Leistung wird durch

$$g = -g_0 + \frac{y_0}{a} = g_0$$

bestimmt und ist

$$P = \frac{E_0^2}{4r}$$

Aus der Formel

$$a = \frac{y_0}{2g_0} = \frac{z_0}{2r_0}$$

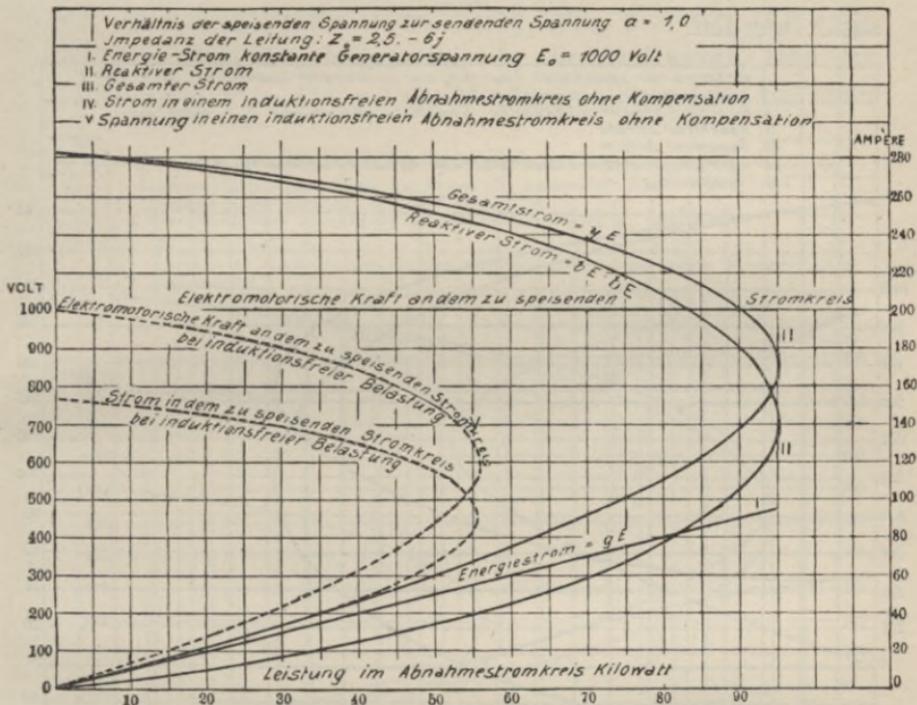


Fig. 61. Spannungsänderung in den Übertragungsleitungen.

kann die Reaktanz der Leitung gefunden werden, die eine maximale Leistung in dem Abnahmestromkreis bei dem Spannungsverhältnis a ergibt; es ist

$$x_0 = r_0 \sqrt{4a^2 - 1}; \quad z_0 = 2r_0 a$$

und für $a = 1$,

$$z_0 = 2r_0$$

$$x_0 = r_0 \sqrt{3}.$$

Ist die Impedanz der Leitung $2a$ mal so gross als ihr Widerstand, so erhalten wir als maximale Leistung

$P = \frac{E_0^2}{4 r_0}$, die bei einer Spannung a in den Abnahmestromkreis übertragen wird.

Ist $z_0 = 2 r_0$, oder $x_0 = r_0 \sqrt{3}$, so kann, ohne dass die Spannung an den Klemmen der Speiseleitung geändert wird, durch diese die maximale Leistung $P = \frac{E_0^2}{4 r_0}$ gesandt werden.

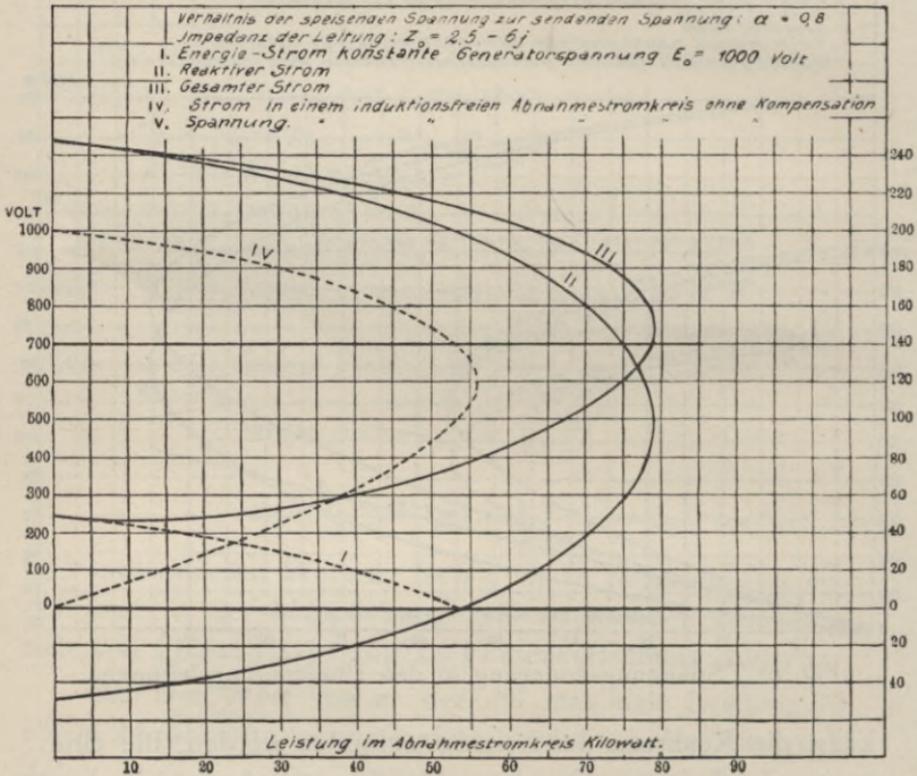


Fig. 62. Spannungsänderung in den Übertragungsleitungen.

Analog kann das Gesetz für die Änderung der Suszeptanz des Abnahmestromkreises gefunden werden, die erforderlich ist, um die Spannung an der Speiseleitung proportional der Belastung zu erhöhen, oder die nötig ist, um eine Änderung der Spannung an dem Abnahmestromkreis unabhängig von der Änderung der Generatorspannung

zu bewirken, z. B. um die Spannung eines Abnahmestromkreises konstant zu halten, selbst wenn die Spannung des Generators stark schwankt.

69. In den Figuren 61, 62 und 63 werden die Energiekomponente des Stromes gE in Kurve I, die wattlose Stromkomponente bE in Kurve II und der gesamte Strom yE in Kurve III für $a = 1$ (Fig. 58), $a = 0,7$ (Fig. 59), $a = 1,3$ (Fig. 60) dargestellt. In diesen Kurven sind die Leistungen $P = E_0^2 ga^2$ als Abscissen eingetragen bei einer

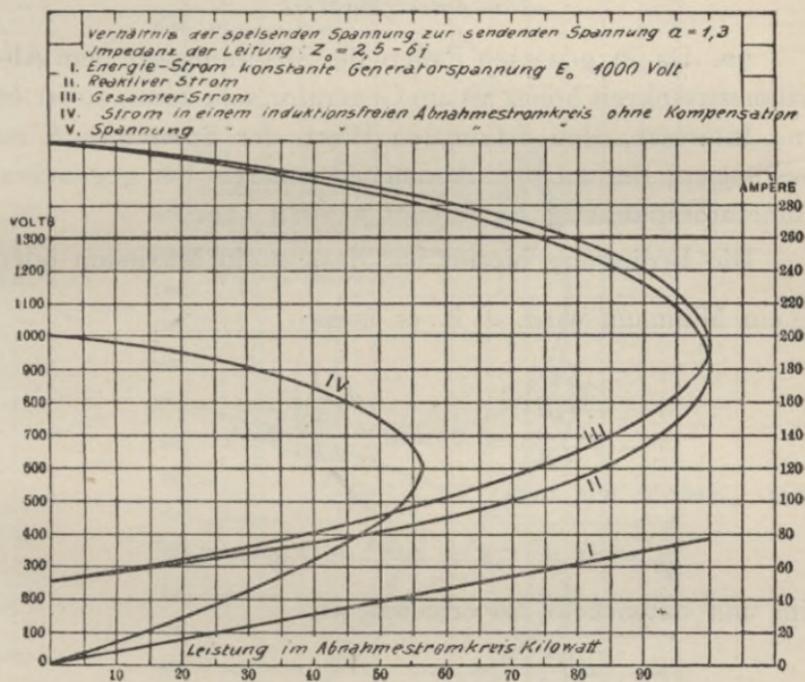


Fig. 63. Spannungsänderung in den Übertragungsleitungen.

konstanten Klemmenspannung $E_0 = 1000$ Volt, einer konstanten Impedanz der Leitung $Z_0 = 2,5 - 6j$, oder $r_0 = 2,5$ Ohm, $x_0 = 6$ Ohm und $z = 6,5$ Ohm.

Zum Vergleich sind in den drei Diagrammen die Kurven für die elektromotorische Kraft E und die für den Strom $I = gE$ für den Fall eines induktionsfreien Abnahme-

stromkreises als Kurven IV und V in punktierten Linien eingetragen.

Die Leistung kann also, während man die Spannung konstant hält, durch die richtige Anwendung parallel geschalteter Reaktanz bedeutend gesteigert werden, so dass ohne Spannungsverlust oder sogar bei wachsender Spannung eine weit grössere Energiemenge durch eine Leitung übertragen werden kann.

5) *Maximum des Anwachsens der Spannung in dem Abnahmestromkreis.*

70. Da in gewissen Fällen die Spannung an dem Abnahmestromkreis höher als am Generator sein kann, so ist es von Interesse, den maximalen Wert der Spannung E zu bestimmen, der an dem Abnahmestromkreis bei gegebener Generatorspannung E_0 erzeugt werden kann.

Die Bedingung hierfür ist, dass a ein Maximum oder $\frac{1}{a^2}$ ein Minimum wird, d. h. es muss

$$\frac{d\left(\frac{1}{a^2}\right)}{dg} = 0 \text{ und } \frac{d\left(\frac{1}{a^2}\right)}{db} = 0$$

sein. Setzen wir nun

$$\frac{1}{a^2} = (1 + r_0g + x_0b)^2 + (x_0g - r_0b)^2,$$

ein, und entwickeln, so erhalten wir

$$\frac{d\left(\frac{1}{a^2}\right)}{dg} = 0, \text{ oder } g = -\frac{r_0}{z_0^2},$$

ein Wert, der unmöglich ist, weil weder r_0 noch g negativ sein kann. Der am nächsten liegende mögliche Wert ist $g = 0$, ein wattloser Stromkreis.

Setzen wir diesen Wert ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{a^2} = (1 + x_0b)^2 + r_0^2b^2,$$

und durch Substitution in dem Ausdruck

$$\frac{d\left(\frac{I}{a^2}\right)}{db} = 0,$$

$$b = -\frac{x_0}{z_0^2} = -b_0$$

$$b + b_0 = 0;$$

d. h. die Summe aller Suszeptanzen ist Null, oder die Bedingung für die Resonanz ist erfüllt.

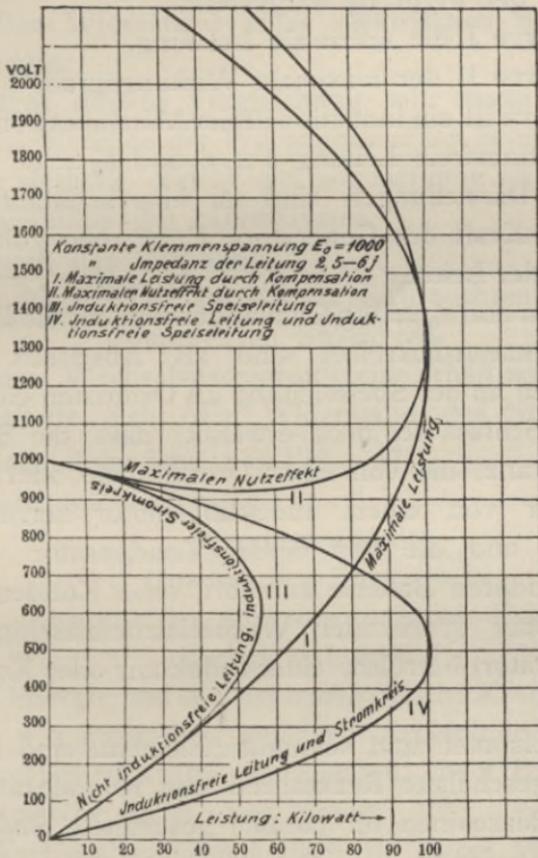


Fig. 64. Wirkungsgrad und Leistung der Übertragungsleitung.

Setzen wir $b = -b_0$, so erhalten wir

$$a = \frac{I}{\sqrt{r_0 g_0}} = \frac{z_0}{r_0} = \frac{y_0}{b_0}.$$

Der Strom ist in diesem Falle

$$I = E_0 g_0 = \frac{E_0}{r_0},$$

oder derselbe, als ob der Widerstand der Leitung ohne jedwede Induktanz kurz geschlossen ist.

Dies ist die Bedingung für vollkommene Resonanz, wobei Strom und elektromotorische Kraft mit einander in Phase sind.

71. Als summarische Übersicht über dieses Kapitel werden in der Figur 64 dargestellt:

in Kurve I die maximale Leistung,

in Kurve II der maximale Wirkungsgrad,

in Kurve III ein induktionsfreier Abnahmestromkreis und eine induktionsfreie Leitung $b = 0$ und $b_0 = 0$.

Diese Darstellungen sind für eine konstante elektromotorische Kraft des Generators $E_0 = 1000$ Volt, für eine Impedanz der Leitung $Z^0 = 2,5 - 6j$, oder $r_0 = 2,5$ Ohm, $x_0 = 6$ Ohm und $z_0 = 6,5$ Ohm angenommen; die Leistungen des Abnahmestromkreises sind als Abscissen und die Spannungen an der Speiseleitung als Ordinaten eingetragen.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die Suszeptanz oder Reaktanz, die von einer Drosselspule oder reaktiven Spule oder von einem Induktionsmotor herrührt, einer Induktanz, und die von einem Kondensator oder von einer sekundären Batterie herrührt, einer Kondensanz und die von einer synchronen Wechselstrommaschine (Motor oder Generator) herrührt, einer Induktanz oder Kondensanz entspricht.

Drosselspulen und sekundäre Elemente sind für hintereinander geschaltete Reaktanzen und Kondensatoren und synchrone Maschinen für parallel geschaltete Suszeptanzen besonders geeignet.

Kapitel X.

Effektiver Widerstand und Reaktanz.

72. Der Widerstand eines elektrischen Stromkreises wird bestimmt:

1) Durch direkte Vergleichung mit einem bekannten Widerstand (Methode der Wheatstone'schen Brücke u. s. w.).

Diese Methode ergibt den sogenannten wahren Ohm'schen Widerstand des Stromkreises.

2) Durch das Verhältnis:

$$\frac{\text{Die durch einen Stromkreis verbrauchten Volt}}{\text{Ampères im Stromkreis}}$$

In einem Wechselstromstromkreise erhält man mit Hilfe dieser Methode nicht den Widerstand des Stromkreises, sondern seine Impedanz $z = \sqrt{r^2 + x^2}$.

3) Durch die Gleichung

$$r = \frac{\text{Energieverbrauch}}{\text{Quadrat der Stromstärke}} \\ = \frac{\text{Quadrat der elektromotorischen Kraft}}{\text{Energieverbrauch}},$$

in der die Energie und die elektromotorische Kraft aber nicht die durch den Stromkreis gelieferte Arbeit und die gegen elektromotorischen Kräfte einschliessen, wie z. B. die gegen elektromotorische Kraft eines Motors.

In Wechselstromstromkreisen ist dieser Widerstandswert der Energiekoeffizient der elektromotorischen Kraft, also

$$r = \frac{\text{Energiekomponente der elektromotorischen Kraft}}{\text{Gesamtstrom}}$$

Er heisst der *effektive Widerstand* des Stromkreises, weil er den durch den Stromkreis verbrauchten Effekt oder die durch ihn verbrauchte Leistung darstellt.

Der Energiekoeffizient des Stromes

$$g = \frac{\text{Energiekomponente des Stromes}}{\text{gesamte elektromotorische Kraft}}$$

heisst die *effektive Konduktanz* des Stromkreises.

Ebenso ist der Wert

$$x = \frac{\text{wattlose Komponente der elektromotorischen Kraft}}{\text{Gesamtstrom}}$$

die *effektive Reaktanz* und

$$b = \frac{\text{wattlose Komponente des Stromes}}{\text{gesamte elektromotorische Kraft}}$$

die *effektive Suszeptanz* des Stromkreises.

Während der wahre Ohm'sche Widerstand den Energieverbrauch als Wärmewirkung innerhalb eines elektrischen Leiters durch einen Strom von gleichmässiger Dichte darstellt, stellt der effektive Widerstand den gesamten Energieverbrauch dar.

Da im allgemeinen in einem Wechselstromstromkreise nicht nur in dem Leiter selbst, sondern auch ausserhalb desselben, Energie verbraucht wird, und zwar durch Hysteresis, sekundäre Ströme u. s. w., weicht der effektive Widerstand von dem wahren Ohm'schen Widerstand häufig ab, in sofern als er einen grösseren Energieaufwand darstellt.

Bei der Betrachtung von Wechselstromstromkreisen ist es erforderlich, überall die Werte des effektiven Widerstandes, der effektiven Reaktanz, der effektiven Konduktanz und der effektiven Suszeptanz einzusetzen, um die Rechnung auf allgemeine Wechselstromstromkreise, wie z. B. auf Induktanzen, die durch Eisen hervorgerufen sind u. s. w., anwenden zu können.

Während der wahre Ohm'sche Widerstand eine Konstante des Stromkreises ist, die nur von der Temperatur, aber nicht von der elektromotorischen Kraft u. s. w. abhängt, sind der effektive Widerstand und die effektive

Reaktanz im allgemeinen keine Konstanten; sie hängen vielmehr von der elektromotorischen Kraft, von dem Strom u. s. w. ab. Diese Abhängigkeit verursacht die meisten Schwierigkeiten bei der analytischen Behandlung von Wechselstromstromkreisen, die Eisen enthalten.

73. In erster Linie hängt der Energieverlust in Wechselstromstromkreisen ausser von dem durch den wahren Ohm'schen Widerstand bedingten Verlust noch von folgendem ab:

1. Von der molekularen Reibung, wie
 - a) der magnetischen Hysterese,
 - b) der dielektrischen Hysterese.
2. Von primären elektrischen Strömen, wie
 - a) dem Stromverlust oder der Stromentweichung durch die Isolation, oder durch Bürstenentladung;
 - b) den Wirbelströmen in dem Leiter oder der ungleichmässigen Stromverteilung.
3. Von sekundären oder induzierten Strömen, wie
 - a) den Foucault'schen oder Wirbelströmen in in der Nähe befindlichem magnetischen Material;
 - b) den Foucault'schen oder Wirbelströmen in in der Nähe befindlichen Leitern;
 - c) den sekundären Strömen gegenseitiger Induktion mit benachbarten Stromkreisen.
4. Von induzierten elektrischen Ladungen, wie der elektrostatischen Influenz.

Während alle diese Verluste in dem Begriffe „effektiver Widerstand“ u. s. w., eingeschlossen sind, sollen nur die magnetische Hysterese und die Wirbelströme in dem Eisen den Gegenstand der folgenden Abhandlung bilden, als wichtigste und am häufigsten auftretende Ursache eines Effektverlustes ausserhalb des Ohm'schen Widerstandes.

Magnetische Hysterese.

74. In einem von Eisen oder magnetischem Material umgebenen Wechselstromstromkreise wird ausserhalb des

Leiters in dem Eisen durch eine Art Molekularreibung Energie verbraucht, die, wenn dem elektrischen Stromkreise entnommen, als magnetische Hysteresis erscheint, verursacht durch cyklische Umdrehungen der magnetischen Strömung in dem Eisen im magnetischen Wechselstrom kraftfeld.

Um diese Erscheinung zu untersuchen, wollen wir zunächst einen Strom von hoher Induktanz betrachten, d. h. einen vollständig von Eisen umgebenen Stromkreis, wie z. B. den primären Strom eines Wechselstromtransformators mit offenem sekundären Stromkreis, also ein Fall, wo der wahre Ohm'sche Widerstand zu vernachlässigen ist.

Die Stromwelle erzeugt in dem Eisen eine wechselnde magnetische Strömung, die in dem elektrischen Stromkreise eine elektromotorische Kraft induziert, — nämlich die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion. Kann der Ohm'sche Widerstand vernachlässigt werden, so ist die gegenelektromotorische Kraft gleich der Klemmenspannung; wenn nun die Klemmenspannung eine Sinuswelle ist, so müssen die gegenelektromotorische Kraft und deswegen auch die magnetische Strömung, die die gegenelektromotorische Kraft induziert, ebenfalls Sinuswellen sein. Die Welle des Wechselstromes ist in diesem Fall keine Sinuswelle, sondern eine durch Hysteresis verzernte Welle. Indessen ist es in diesem Fall möglich, die Stromwelle aus dem Hysteresiszyklus der magnetischen Strömung zu konstruieren.

Aus der Windungszahl n des elektrischen Stromkreises wird die effektive gegenelektromotorische Kraft E und aus der Frequenz N des Stromes die maximale magnetische Strömung Φ durch folgende Formel gefunden:

$$E = \sqrt{2} \pi n N \Phi 10^{-8};$$

folglich
$$\Phi = \frac{E 10^8}{\sqrt{2} \pi n N}.$$

Die maximale Strömung Φ und der magnetische Querschnitt S geben die maximale magnetische Induktion

$$B = \frac{\Phi}{S}.$$

Bei periodischer Schwankung der magnetischen Induktion zwischen $+B$ und $-B$ schwankt entsprechend die magnetomotorische Kraft zwischen $+F$ und $-F$, die als Kurve eine Schleife, den Cyklus der Hysteresis, beschreibt.

Sind die magnetischen Kraftlinien als Ordinaten und zehntel Ampèrewindungen als Abscissen gezeichnet, so ist die Fläche der Schleife gleich der während eines Cyklus durch Hysteresis verbrauchten Energie, ausgedrückt in Ergs.

Aus der Hysteresisschleife wird der augenblickliche Wert der magnetomotorischen Kraft, der dem augenblicklichen Werte der magnetischen Strömung entspricht, gefunden, d. h. der Wert der induzierten elektromotorischen Kraft. Aus der magnetomotorischen Kraft F , die in Ampèrewindungen pro Längeneinheit für den magnetischen Stromkreis ausgedrückt wird, aus der Länge l des magnetischen Stromkreises und der Windungszahl n des elektrischen Stromkreises werden die augenblicklichen Werte des Stromes i , die einer magnetomotorischen Kraft F entsprechen, gefunden und zwar als magnetische Induktion B und induzierte elektromotorische Kraft e , also $i = \frac{Fl}{n}$.

75. In der Figur 65 sind vier magnetische Cyklen für die maximalen Werte der magnetischen Induktion $B = 2000, 6000, 10000$ und 16000 mit den entsprechenden maximalen magnetomotorischen Kräften $F = 1,8; 2,8; 4,3; 20,0$ gezeichnet. Sie zeigen die bekannten Hysteresisschleifen, die nahe der magnetischen Sättigung in eine Spitze auslaufen.

Diese magnetischen Cyklen entsprechen einem Durchschnittseisenblech oder Stahlblech, mit einem Hysteresis-Koeffizienten $\eta = 0,0033$. Die Ampèrewindungen pro cm

sind als Abscissen und die Tausende der magnetischen Kraftlinien als Ordinaten eingetragen.

In den Figuren 66, 67, 68 und 69 ist die Kurve der magnetischen Induktion, wie sie aus der induzierten elektromotorischen Kraft abgeleitet wird, eine Sinuswelle. Für die verschiedenen Werte der magnetischen Induktion dieser Sinuskurven werden die entsprechenden Werte der magneto-

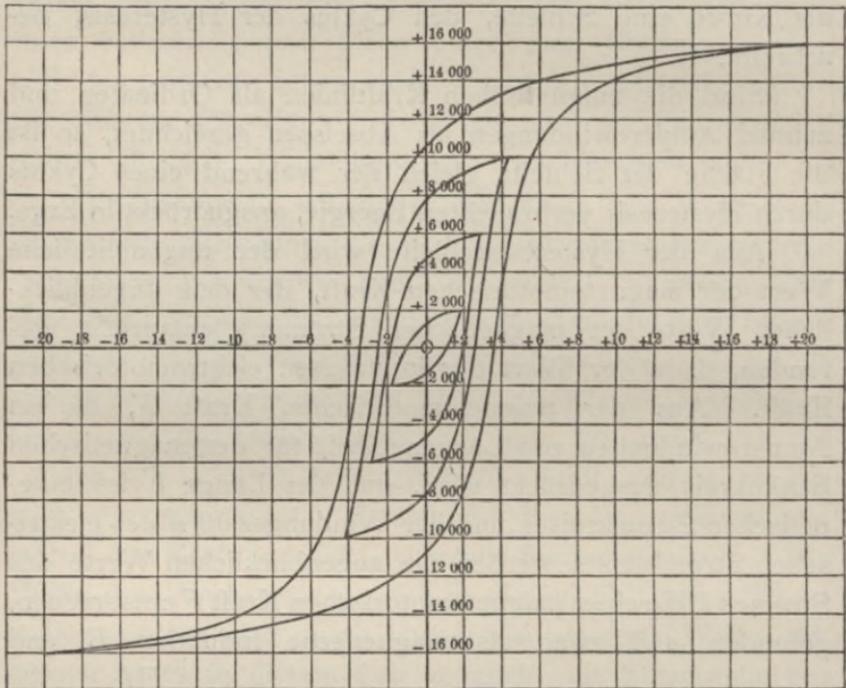
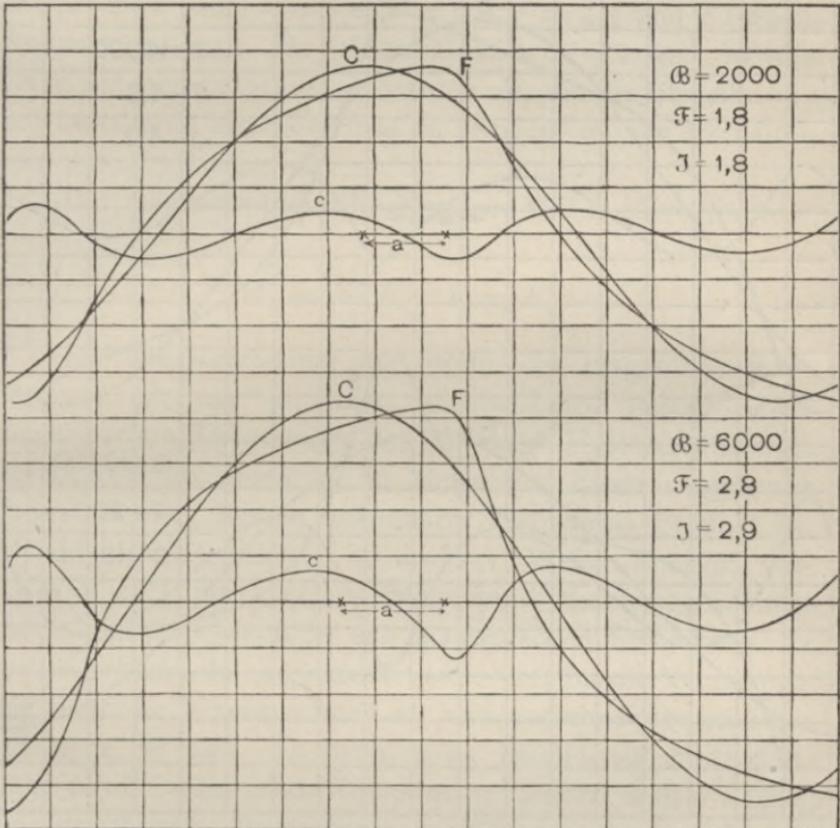


Fig. 65. Hysteresiszyklus von Eisenblech.

motorischen Kraft, und also auch die des Stromes, aus der Figur 66 genommen und gezeichnet; sie ergeben so den Erregerstrom, der erforderlich ist, um die Sinuswelle des Magnetismus zu erzeugen; d. i. die Stromwelle, die eine Sinuswelle mit Klemmenspannung durch den Stromkreis sendet.

Wie in den Figuren 66, 67, 68 und 69 gezeigt ist, sind diese Wellen des Wechselstromes keine Sinuswellen, sondern sie sind durch das Übereinanderlagern von

höheren Harmonischen verzerrt und daher komplexe harmonische Wellen. Sie erreichen ihr Maximum gleichzeitig mit dem Maximum des Magnetismus, d. h. 90° vor der maximalen induzierten elektromotorischen Kraft; sie bleiben daher ungefähr 90° hinter der maximalen Klemmen-

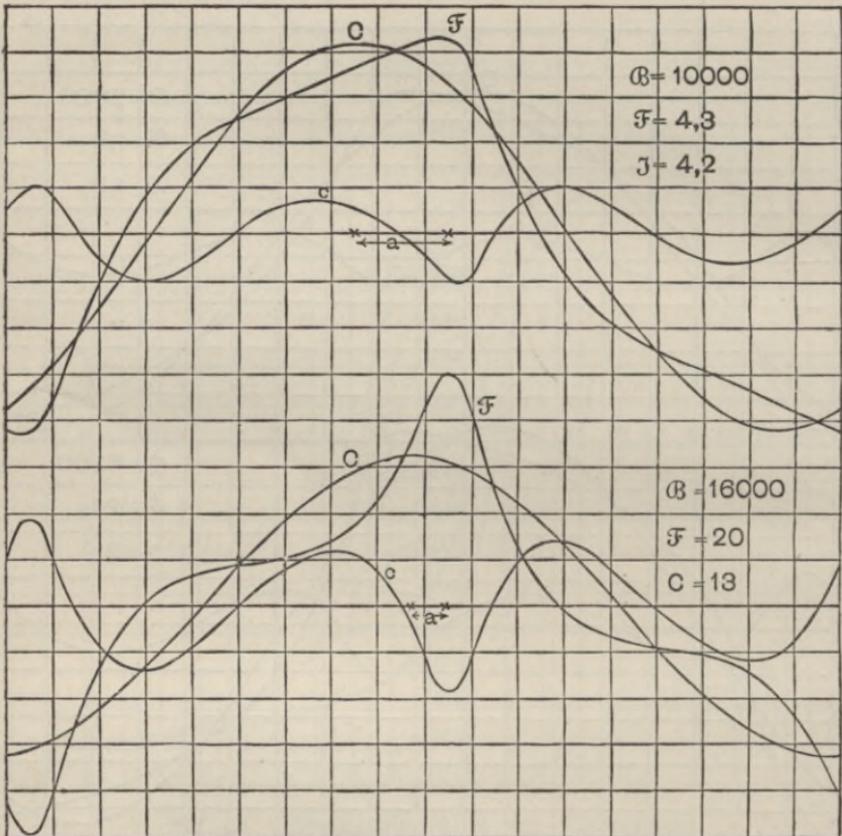


Figg. 66 und 67. Verzerrung einer Stromwelle durch Hysteresis.

spannung zurück, gehen aber bedeutend früher durch die Nulllinie, als der Magnetismus seinen Nullwert erreicht, bei 42° , 52° , 50° und 41° .

Der allgemeine Charakter dieser Stromwellen ist der, dass das Maximum der Welle mit dem Maximum der Sinuswelle des Magnetismus zusammentrifft. Die Stromwelle ist auf der ansteigenden Seite stark nach aussen

gekrümmt, während sie auf der abfallenden Seite nach aussen konkav ist. Mit wachsender Magnetisierung wird die Stromwelle nach ihrem Maximum zu immer spitzer (siehe Figur 68, die Kurve für $B = 10000$) und bei noch



Figg. 68 und 69. Verzerrung der Stromwelle durch Hysterisis.

grösserer Sättigung bildet sich im Maximum eine Spitze, die in der Figur 69 für $B = 16000$ veranschaulicht ist. Dieses ist der Fall, wenn die Magnetisierungskurve in das Gebiet der magnetischen Sättigung steigt, denn in der Nähe der Sättigung steigt der Strom nahe dem Maximum der Magnetisierung anormal an, um nur ein kleines Wachsen der Magnetisierung hervorzurufen.

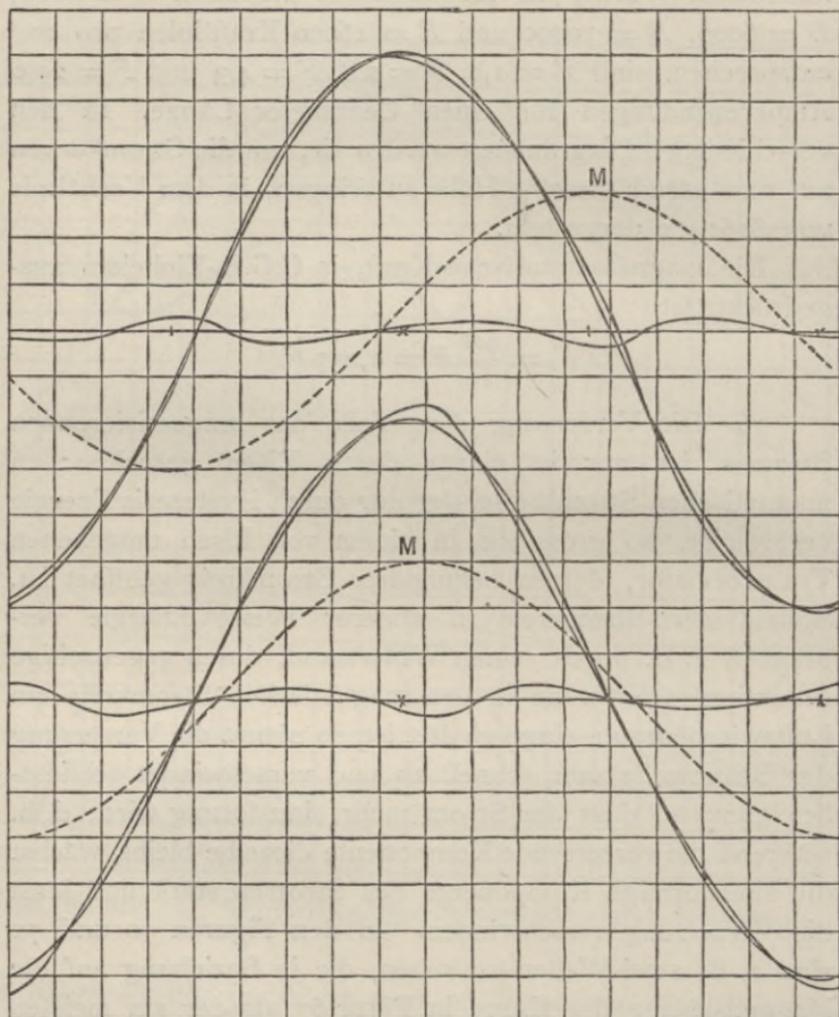
Die vier Kurven in den Figuren 66, 67, 68 und 69 sind nicht in demselben Massstab gezeichnet. Die maximalen Werte der magnetomotorischen Kraft, die den maximalen Werten der magnetischen Induktion $B = 2000$, $B = 6000$, $B = 10000$ und $B = 16000$ Kraftlinien pro cm^2 entsprechen, sind $F = 1,8$, $F = 2,8$, $F = 4,3$ und $F = 20,0$ Ampèrewindungen für einen Centimeter Länge. In den verschiedenen Diagrammen werden sie, um die Stromkurven auf annähernd dieselbe Höhe zu bringen, in dem Verhältnis von 8:6:4:1 dargestellt.

Die magnetomotorische Kraft, in C.G.S.-Einheiten ausgedrückt, ist

$$F_c = \frac{4\pi}{10} F = 1,257 F.$$

76. Die Verzerrung der Welle des magnetisierenden Stromes ist nur in einem durch Eisen geschlossenen magnetischen Stromkreise, der nur durch Hysteresis Energie verbraucht, so gross als in einem von Eisen umgebenen Transformator, dessen sekundärer Stromkreis geöffnet ist. Sobald der Stromkreis in anderer Weise Energie verbraucht, z. B. durch seinen Widerstand, durch gegenseitige Induktion, oder wenn in den magnetischen Stromkreis ein Luftzwischenraum eingeschaltet ist, so nimmt die Verzerrung der Stromwelle sehr schnell ab und verschwindet schliesslich ganz, so dass der Strom mehr sinusförmig wird; d. h. während die verzerrende Komponente dieselbe bleibt, wächst die sinusförmige Komponente des Stromes stark und lässt die Verzerrung verschwinden. In den Figuren 70 und 71 sind z. B. zwei Wellen zu sehen, die in Beziehung auf die Magnetisierung der Kurve in Figur 67 als der am meisten verzerrten entsprechen. Die Kurve in Figur 70 stellt die Stromwelle eines Transformators bei einem Zehntel seiner normalen Belastung dar. Bei grösseren Belastungen ist die Verzerrung entsprechend geringer. Die Kurve in Figur 71 zeigt uns den Erregerstrom eines magnetischen Stromkreises mit einem Luftzwischenraum, der den vier-

hundertsten Teil der Länge des ganzen magnetischen Stromkreises ausmacht. Die Figuren 70 und 71 sind in ein Drittel der Grösse der Figur 67 gezeichnet. Wie wir



Figg. 70 und 71. Verzerrung der Stromwelle durch Hysteresis.

gezeigt haben, sind beide Kurven fast vollständig Sinuswellen.

77. Die verzerrte Stromwelle kann in zwei Komponenten zerlegt werden, und zwar in eine wahre Sinuswelle, die die

gleiche effektive Intensität und die gleiche Energie als die verzerrte Welle besitzt und die äquivalente Sinuswelle genannt wird, und in die wattlose höhere Harmonische, die hauptsächlich aus einem Gliede von dreifacher Frequenz besteht.

In den Figuren 66 bis 71 sind die äquivalenten Sinuswellen und die wattlosen komplexen höheren Harmonischen eingetragen, die zusammen die verzerrte Stromwelle bilden. Die äquivalente Sinuswelle (Figuren 66 bis 69) der magnetomotorischen Kraft oder der magnetischen Strömung eilt dem Magnetismus um 34° , 44° , 38° und $15,5^\circ$ vor. In Figur 71 koinzidiert die äquivalente Sinuswelle beinahe mit der verzerrten Kurve und eilt dem Magnetismus nur 9° voraus.

Bemerkenswert ist, dass selbst in den sehr verzerrten Kurven der Figuren 66 bis 68 der maximale Wert der äquivalenten Sinuswelle beinahe dem maximalen Werte der ursprünglichen verzerrten Welle der magnetomotorischen Kraft gleichkommt, so lange als die magnetische Sättigung noch nicht erreicht ist, vom Werte 1,8, 2,9 und 4,2, gegen 1,8, 2,8 und 4,3 der maximalen Werte der verzerrten Welle. Da nach der Definition der effektive Wert der äquivalenten Sinuswelle gleich dem der verzerrten Welle ist, so folgt, dass die verzerrte Welle des Erregerstromes und die Sinuswelle die gemeinsame Eigenschaft haben, dass der maximale Wert sich zum effektiven Werte verhält wie $\sqrt{2}:1$. Daher kann unterhalb magnetischer Sättigung der maximale Wert der verzerrten Welle aus dem effektiven Werte, der durch die Ablesung eines Elektrodynamometers gegeben ist, nach derselben Gleichung als in einer wahren Sinuswelle berechnet werden; die magnetische Charakteristik kann also durch Wechselströme mit genügender Genauigkeit nach der elektrodynamometrischen Methode bestimmt werden.

78. In Figur 72 sieht man die wahre magnetische Charakteristik eines guten Durchschnittseisenblechs, wie sie mit Hilfe des Magnetometers gefunden wird. Zum Ver-

gleich ist dieselbe Charakteristik, wie sie mittels Wechselströmen durch das Elektrodynamometer bestimmt wird, durch punktierte Linien dargestellt. Die Ampèrewindungen

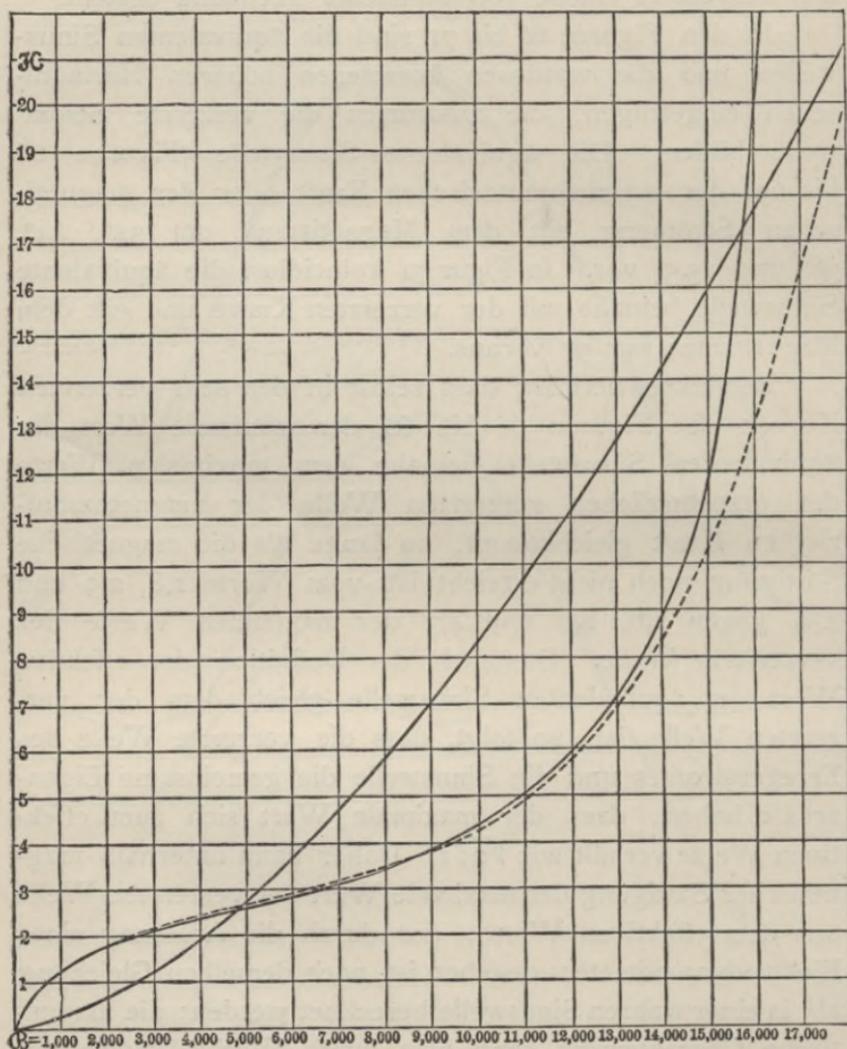


Fig. 72. Magnetisierungs- und Hysteresiskurve.

für einen Centimeter Länge sind als Ordinaten und die magnetischen Induktionen als Abscissen eingetragen. Die beiden Kurven fallen in der That bis zu $B = 13\,000$, d. h.

bis zu den höchsten in Wechselstromapparaten anwendbaren Induktionen, zusammen. Für höhere Sättigungen wird die Differenz der Kurven immer grösser; die Elektrodynamometerkurve zeigt verhältnismässig kleine magnetomotorische Kräfte, die scheinbar sehr hohe Magnetisierungen hervorbringen.

In Figur 72 ist auch noch die Kurve des Hystereseverlustes in Erg. für einen Kubikcentimeter und Cyklus als Ordinate und für die magnetischen Induktionen als Abscissen dargestellt.

Beim Gebrauch von Wechselstromapparaten ist zur Bestimmung der magnetischen Charakteristik die elektrodynamometrische Methode vorzuziehen, weil sie durch die Erscheinung des magnetischen Schlüpfens nicht beeinflusst wird. Bei magnetometrischen Untersuchungen ergibt diese Erscheinung bei geringer Kraftliniendichte einen höheren Magnetismus oder eine niedrigere magnetomotorische Kraft, als sie mittels Wechselstromapparaten gefunden werden.

Soweit Stromstärke und Energieverbrauch in Frage kommen, kann die verzerrte Welle durch die äquivalente Sinuswelle ersetzt werden, während die höhere Harmonische vernachlässigt werden kann.

Alle Messungen von Wechselströmen, mit Ausnahme von augenblicklichen Ablesungen, ergeben nur die äquivalente Sinuswelle und unterdrücken die höhere Harmonische, weil alle Messinstrumente entweder das mittlere Quadrat der Stromwelle oder das mittlere Produkt der augenblicklichen Werte des Stromes und der elektromotorischen Kraft ergeben, die der Definition gemäss sowohl in der äquivalenten Sinuswelle als auch in der verzerrten Welle einander gleich sind.

Daher ist es praktisch überall zulässig, die höhere Harmonische ganz zu vernachlässigen und die verzerrte Welle durch ihre äquivalente Sinuswelle zu ersetzen, wobei wir aber nicht vergessen dürfen, dass das Vorhandensein einer höheren Harmonischen möglicherweise ein störender Faktor

werden kann, was sich in jenen seltenen Fällen bemerkbar machen kann, wo die Frequenz der höheren Harmonischen nahezu dieselbe ist, als die der Resonanz-Frequenz des Stromkreises.

79. Die äquivalente Sinuswelle des Erregerstromes eilt der Sinuswelle des Magnetismus um den Winkel α voraus, den man den Winkel der Hysteresisvoreilung in der Phase nennt. Der Strom bleibt daher hinter der elektromotorischen Kraft um den Winkel $90^\circ - \alpha$ zurück und es ergibt sich daraus die Energie:

$$P = IE \cos(90^\circ - \alpha) = IE \sin \alpha.$$

Daher besteht der Erregerstrom I aus einer Energiekomponente $I \sin \alpha$, die der *Hysteresis-Energiestrom*, oder *magnetische Energiestrom*, und aus einer wattlosen Komponente $I \cos \alpha$, die der *magnetisierende Strom* heisst; oder umgekehrt: die elektromotorische Kraft besteht aus einer Energiekomponente $E \sin \alpha$, der *elektromotorischen Kraft der Hysteresis-Energie* und aus einer wattlosen Komponente $E \cos \alpha$, der *elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion*.

Bezeichnet man den absoluten Wert der Impedanz des Stromkreises $\frac{E}{I}$ mit z , wo z durch die magnetische Charakteristik des Eisens und durch die Form der magnetischen und elektrischen Stromkreise bestimmt wird, so wird die Impedanz in Intensität und Phase durch den Ausdruck

$$Z = r - jx = z \sin \alpha - jz \cos \alpha$$

und die Admittanz durch

$$Y = g + jb = \frac{1}{z} \sin \alpha + j \frac{1}{z} \cos \alpha = y \sin \alpha + jy \cos \alpha$$

dargestellt.

Die Grössen z , r , x und y , g , b sind jedoch keine Konstanten, wie es bei einem Stromkreise ohne Eisen der Fall wäre, sondern sie hängen von der Intensität der Magnetisierung B , also von der elektromotorischen Kraft ab.

Diese Abhängigkeit macht die Untersuchung von Stromkreisen, die Eisen enthalten, kompliziert.

In einem von Eisen ganz umgebenen Stromkreise ist α ganz beträchtlich und variiert für Werte unterhalb der magnetischen Sättigung von 30° bis 50° . Daher kann selbst bei einem zu vernachlässigenden wahren Ohm'schen Widerstand keine grosse Verzögerung in Wechselstromstromkreisen, die von Eisen umgeben sind, erzeugt werden.

80. Der durch Hysterese infolge molekularer Reibung herbeigeführte Energieverlust ist annähernd der 1,6. Potenz der magnetischen Induktion B proportional. Der Verlust kann daher durch die Formel

$$W_H = \eta B^{1,6}$$

ausgedrückt werden, wo

W_H den Energieverlust pro Cyklus in Erg. oder C.G.S.-

Einheiten ($= 10^{-7}$ Joule) für einen Kubikcentimeter,

B die maximale magnetische Induktion, ausgedrückt in Kraftlinien für einen Quadratcentimeter, und

η den Hysteresiskoэффициenten bedeutet.

Ich fand, dass dieser Koeffizient beim Eisen zwischen 0,00124 und 0,0055 schwankt; bei gutem ausgeglühtem Eisen oder Stahlblech kann als Mittelwert 0,0033^{*)} genommen werden. Bei grauem Gusseisen ist η im Mittel 0,013; bei Gussstahl schwankt es von 0,0032 bis 0,028, je nach seiner chemischen und physikalischen Beschaffenheit und erreicht den Wert 0,08 bei gehärtetem Stahl (Tungstein und Manganstahl). Weiches Nickel und Kobalt haben ungefähr denselben Hysteresiskoэффициenten als graues Gusseisen; für Magnetisenerz fand ich $\eta = 0,023$.

In den Kurven der Figuren 62 bis 69 ist $\eta = 0,0033$.

Bei der Frequenz N ist nach dieser Formel der Energieverlust in dem Volumen V

^{*)} In dem gegenwärtig (1899) bei sorgfältiger Auswahl verfügbaren Materiale entspricht $\eta = 0,0025$ etwa dem Mittelwerte.

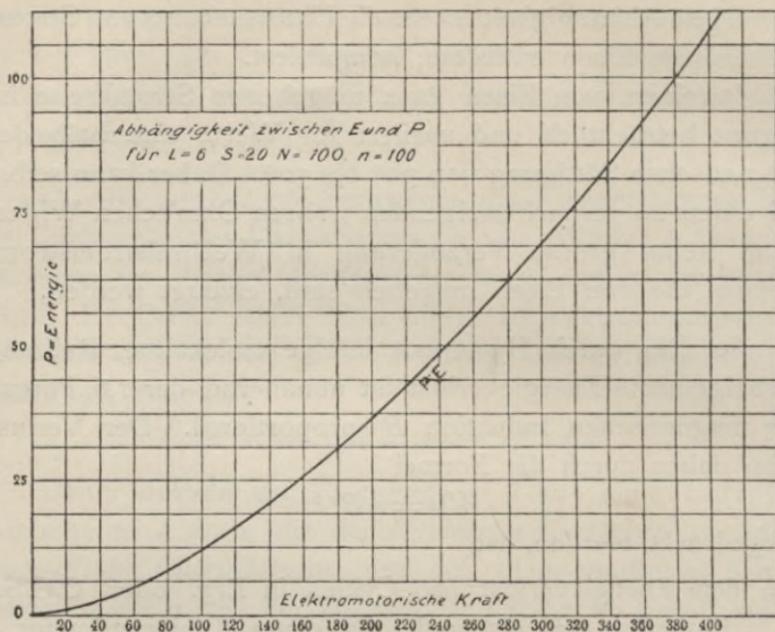


Fig. 73. Hysteresisverlust als Funktion der elektromotorischen Kraft.

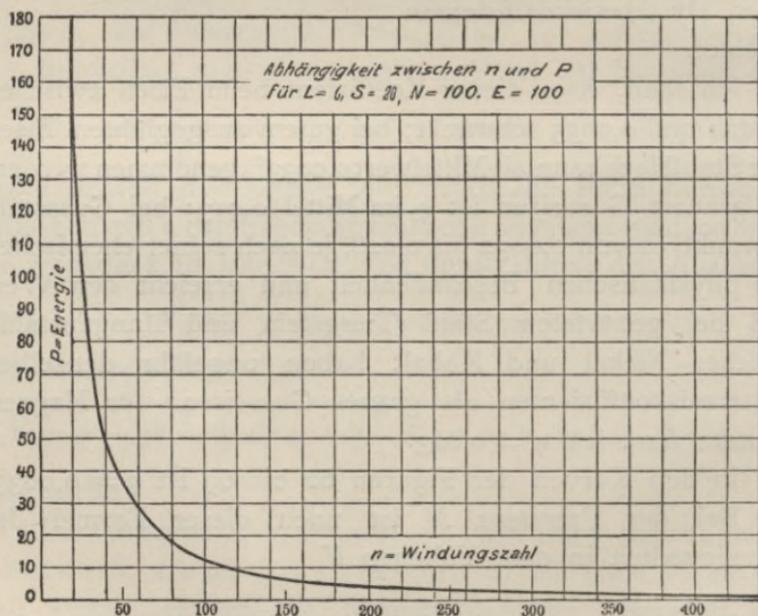


Fig. 74. Hysteresisverlust als Funktion der Windungszahl.

$$P = \eta NV B^{6,1} 10^{-7} \text{ Watt}$$

$$= \eta NV \left(\frac{\Phi}{S} \right)^{1,6} 10^{-7} \text{ Watt,}$$

wo S der Querschnitt der gesamten magnetischen Strömung Φ ist.

Die maximale magnetische Strömung Φ hängt von der genelektromotorischen Kraft der Selbstinduktion

$$E = \sqrt{2} \pi N n \Phi 10^{-8}$$

ab; oder es ist

$$\Phi = \frac{E 10^8}{\sqrt{2} \pi N n},$$

wo n die Zahl der Windungen des elektrischen Stromkreises ist.

Setzen wir dies in die Gleichung für den Effekt P ein, so erhalten wir

$$P = \eta \frac{E^{1,6}}{N^{0,6}} \frac{V 10^{5,8}}{2^{0,8} \pi^{1,6} S^{1,6} n^{1,6}} = 58 \eta \frac{E^{1,6}}{N^{0,6}} \frac{V 10^3}{S^{1,6} n^{1,6}},$$

oder

$$P = \frac{AE^{1,6}}{N^{0,6}},$$

wo

$$A = \eta \frac{V 10^{5,8}}{2^{0,8} \pi^{1,6} S^{1,6} n^{1,6}} = 58 \eta \frac{V 10^3}{S^{1,6} n^{1,6}},$$

oder wenn wir für η den Wert 0,0033 einsetzen, so erhalten wir

$$A = 191,4 \frac{V}{S^{1,6} n^{1,6}};$$

oder wenn wir $V = SL$ setzen, wo L die Länge des magnetischen Stromkreises ist, so erhalten wir

$$A = \frac{\eta L 10^{5,8}}{2^{0,8} \pi^{1,6} S^{0,6} n^{1,6}} = \frac{58 \eta L 10^3}{S^{0,6} n^{1,6}} = 191,4 \frac{L}{S^{0,6} n^{1,6}}$$

und

$$P = \frac{58 \eta E^{1,6} L 10^3}{N^{0,6} S^{0,6} n^{1,6}} = \frac{191,4 E^{1,6} L}{N^{0,6} S^{0,6} n^{1,6}}.$$

In den Figuren 73, 74 und 75 sind die Hysteresisverluste mit den Kraftverlusten als Abscissen dargestellt, und zwar

in der Figur 73 mit der elektromotorischen Kraft E als Ordinaten, für $L = 6$, $S = 20$, $N = 100$ und $n = 100$,

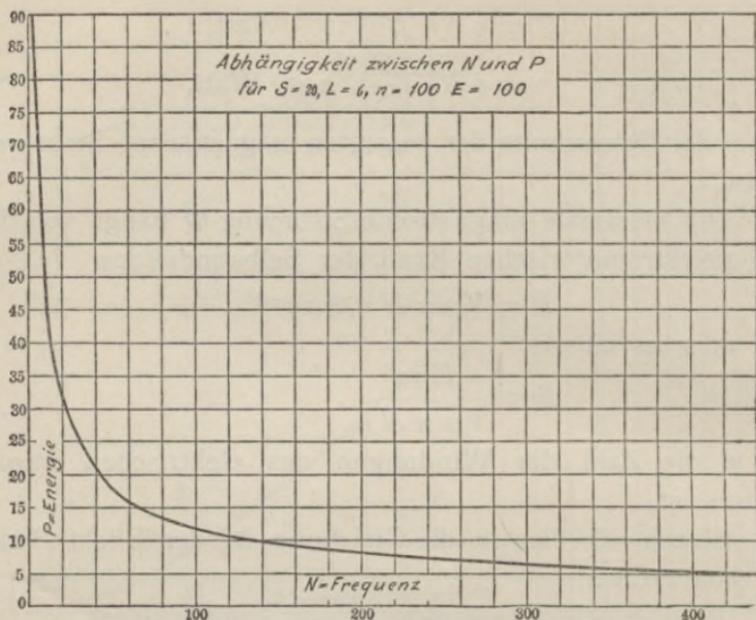


Fig. 75. Hysteresisverlust als Funktion der Zyklen.

in der Figur 74 mit der Windungszahl als Ordinaten, für $L=6, S=20, N=100$ und $E=100$;

in der Figur 75 mit der Frequenz N , oder dem Querschnitt S als Ordinaten, für $L=6, n=100$ und $E=100$.

Wir sehen also, dass der Hysteresisverlust proportional der 1,6^{ten} Potenz der elektromotorischen Kraft und umgekehrt proportional der 1,6^{ten} Potenz der Windungszahl und der 0,6^{ten} Potenz der Frequenz und der 0,6^{ten} Potenz des Querschnittes ist.

81. Ist g die effektive Konduktanz, so ist Eg die Energiekomponente eines Stromes $I = Eg$ und die durch die Konduktanz g verbrauchte Energie $P = IE = E^2g$.

Da aber

$$P = A \frac{E^{1,6}}{N^{0,6}}$$

ist, so erhalten wir

$$A \frac{E^{1,6}}{N^{0,6}} = E^2 g;$$

oder

$$g = \frac{A}{N^{0,6} E^{0,4}} = \frac{58 \eta L 10^3}{E^{0,4} N^{0,6} S^{0,6} n^{1,6}} = 191,4 \frac{L}{E^{0,4} N^{0,6} S^{0,6} n^{1,6}}.$$

Hieraus folgt:

Die infolge magnetischer Hysterese hervorgerufene effektive Konduktanz ist dem Hysteresekoeffizienten η und der Länge L des magnetischen Stromkreises proportional, aber umgekehrt proportional der 0,4^{ten} Potenz der elektromotorischen Kraft, der 0,6^{ten} Potenz der Frequenz N , der 0,6^{ten} Potenz des Querschnitts des magnetischen Stromkreises S und der 1,6^{ten} Potenz der Windungszahl n .

Daher wächst die durch Hysterese hervorgerufene effektive Konduktanz mit fallender elektromotorischer Kraft

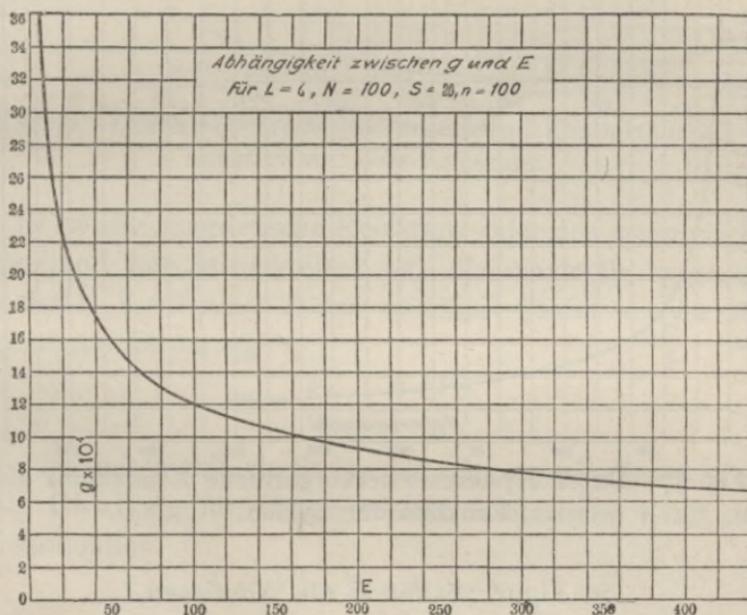


Fig. 76. Durch Hysterese hervorgerufene Konduktanz als Funktion der elektromotorischen Kraft.

und fällt mit wachsender elektromotorischer Kraft; sie variiert aber viel langsamer als die elektromotorische Kraft, so dass, wenn die durch Hysterese erzeugte Konduktanz

nur einen Teil des gesamten Energieverbrauchs darstellt, sie innerhalb einer bestimmten Grenze (z. B. bei Transformatoren mit konstanter Spannung), ohne dass man einen grossen Fehler begeht, als konstant angenommen werden kann.

In den Figuren 76, 77 und 78 ist die durch Hysterese erzeugte Konduktanz g für $L=6$, $E=100$, $N=100$, $S=20$ und $n=100$ angenommen und zwar mit der Konduktanz g als Ordinaten und

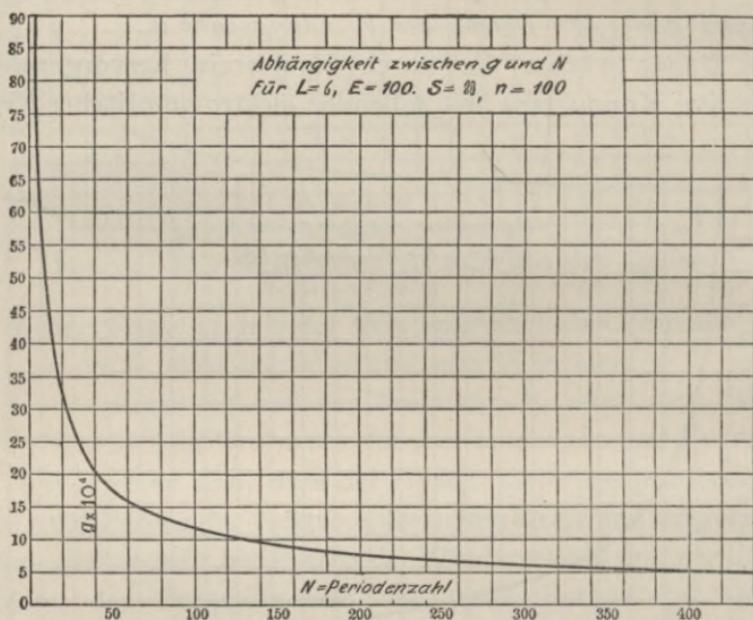


Fig. 77. Durch Hysterese hervorgerufene Konduktanz als Funktion der Cycles.

in Figur 76 mit E als Abscissen,
in Figur 77 mit N als Abscissen,
in Figur 78 mit n als Abscissen.

Wir sehen, dass bei einer Änderung der elektromotorischen Kraft um 50 % g sich nur um 14 % ändert, während bei einer Änderung von N oder S um 50 % g sich um 21 % ändert.

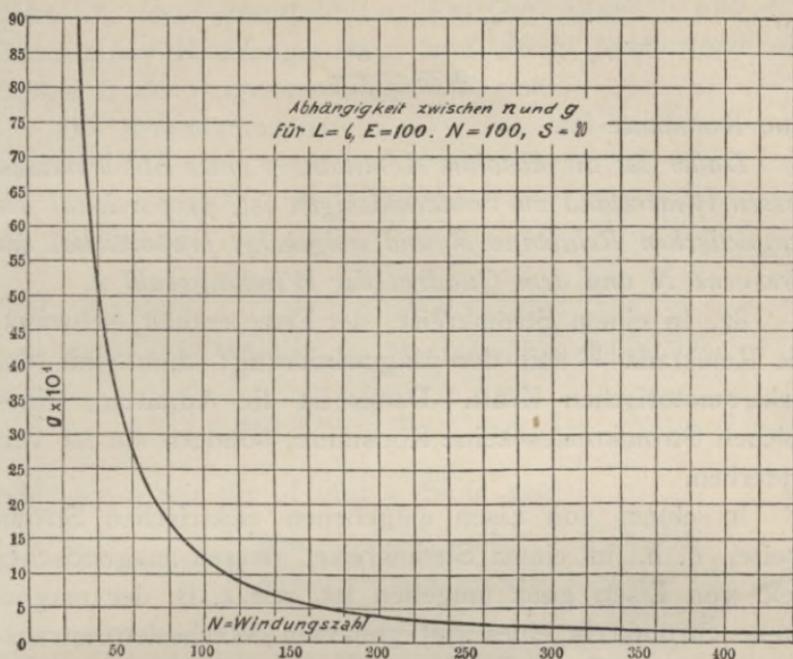


Fig. 78. Durch Hysterese hervorgerufene Konduktanz als Funktion der Windungszahl.

Ist \mathcal{R} die magnetische Reluktanz oder der magnetische Widerstand des Stromkreises, \mathcal{F}_A die maximale magnetomotorische Kraft und I der effektive Strom so ist die magnetische Strömung

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}_A}{\mathcal{R}} = \frac{n I \sqrt{2}}{\mathcal{R}},$$

weil $I\sqrt{2}$ der maximale Strom ist. Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion

$$E = \sqrt{2} \pi N n \Phi 10^{-8},$$

ein, so erhalten wir

$$E = \frac{2 \pi n^2 N L 10^{-8}}{\mathcal{R}}$$

und die absolute Admittanz des Stromkreises ist daher

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{I}{E} = \frac{\mathcal{R} 10^8}{2 \pi n^2 N} = \frac{a \mathcal{R}}{N},$$

wo

$$a = \frac{10^8}{2\pi n^2}$$

eine Konstante ist.

Daher ist die absolute Admittanz y eines Stromkreises, dessen Widerstand zu vernachlässigen ist, proportional der magnetischen Reluktanz \mathcal{R} und umgekehrt proportional der Frequenz N und dem Quadrat der Windungszahl n .

82. In einem Stromkreise, der Eisen enthält, schwankt die Reluktanz \mathcal{R} mit der Magnetisierung; d. h. mit der elektromotorischen Kraft. Daher ist die Admittanz eines solchen Stromkreises keine Konstante, sondern sie ist veränderlich.

In einem von Eisen umgebenen elektrischen Stromkreise, d. h. in einem Stromkreise, dessen magnetisches Feld von Eisen ganz umgeben ist, wie z. B. der magnetische Stromkreis eines gut gebauten Wechselstromtransformators, ist \mathcal{R} die Reluktanz des Eisenstromkreises. Bezeichnen wir mit μ die Permeabilität und ist

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}_A}{\Phi},$$

$$\mathcal{F}_A = L F = \frac{10}{4\pi} L \mathcal{H} \text{ die magnetomotorische Kraft,}$$

$$\Phi = S B = \mu S \mathcal{H} \text{ die magnetische Strömung}$$

$$\text{und } \mathcal{R} = \frac{10 L}{4\pi\mu S},$$

so erhalten wir durch Einsetzung dieses Wertes in die Gleichung der Admittanz

$$y = \frac{\mathcal{R} 10^8}{2\pi n^2 N}$$

$$\frac{L 10^9}{8\pi^2 n^2 \mu S N} = \frac{z}{N \mu},$$

wo

$$z = \frac{L 10^9}{8\pi^2 n^2 S} = \frac{127 L 10^6}{n^2 S}.$$

Daher ist in einem von Eisen umgebenen Stromkreise die absolute Admittanz y umgekehrt proportional der Fre-

quenz N , der Permeabilität μ , dem Querschnitt S und dem Quadrat der Windungszahl n und direkt proportional der Länge L des magnetischen Stromkreises.

Die Konduktanz ist

$$g = \frac{A}{N^{0,6} E^{0,4}}$$

die Admittanz

$$y = \frac{z}{N \mu}$$

und daher der Winkel der Hysteresisvoreilung

$$\sin a = \frac{g}{y} = \frac{A \mu N^{0,4}}{z E^{0,4}};$$

oder wenn wir für A und z (Seite 129)

$$\begin{aligned} \sin a &= \mu \frac{N^{0,4}}{E^{0,4}} \frac{\mu L 10^{5,8}}{2^{0,8} \pi^{1,6} S^{0,6} n^{1,6}} \frac{8 \pi^2 n^2 S}{L 10^9}; \\ &= \frac{\mu \eta N^{0,4} n^{0,4} S^{0,4} \pi^{0,4} 2^{2,2}}{E^{0,4} 10^{3,2}}, \end{aligned}$$

oder

$$E = 2^{0,5} \pi N n S B 10^{-8},$$

einsetzen, so erhalten wir

$$\sin a = \frac{4 \mu \eta}{B^{0,4}},$$

unabhängig von der Frequenz, von der Windungszahl und von der Form und Grösse des magnetischen und elektrischen Stromkreises.

Daher hängt in einer von Eisen umgebenen Induktanz der Winkel α der Hysteresisvoreilung von den magnetischen Konstanten, der Permeabilität und dem Hysteresiskoeffizienten und von der maximalen magnetischen Induktion ab, aber er ist von der Frequenz, von der Form und von anderen Bedingungen des magnetischen und elektrischen Stromkreises ganz unabhängig. Deshalb geben alle von Eisen umgebenen magnetischen Stromkreise bei gleicher Beschaffenheit des Eisens und bei gleicher magnetischer Dichte denselben Winkel der Hysteresisvoreilung.

Der Winkel α der Hysteresisvoreilung hängt in einem geschlossenen Transformatorstromkreise nur von der Beschaffenheit des Eisens und von der magnetischen Dichte ab.

Der Sinus des Winkels der Hysteresisvoreilung ist viermal so gross als das Produkt aus der Permeabilität und dem Koeffizienten der Hysteresis, dividiert durch die $0,4^{\text{te}}$ Potenz der magnetischen Dichte.

83. Wenn der magnetische Stromkreis nicht ganz von Eisen umgeben ist, also die magnetische Struktur Luftzwischenräume enthält, so ist die gesamte Reluktanz gleich der Summe der Eisen- und Luft-Reluktanz, oder

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_a;$$

daher ist die Admittanz

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{a}{N} (\mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_a).$$

In einem Stromkreise der Eisen enthält, ist die Admittanz gleich der Summe der Admittanz des Eisenteils in

dem Stromkreise $y_i = \frac{a}{N \mathfrak{R}_i}$ und der Admittanz der in

dem Stromkreis enthaltenen Luft $y_a = \frac{a}{N \mathfrak{R}_a}$, wenn sowohl Eisen als auch Luft in dem magnetischen Stromkreise hintereinander geschaltet sind.

Die Konduktanz g stellt den Energieverlust in dem Eisen dar und da Luft keine magnetische Hysteresis besitzt, so wird sie durch Einführung eines Luftraumes nicht verändert. Daher ist der Winkel der Hysteresisvoreilung der Phase

$$\sin \alpha = \frac{g}{y} = \frac{g}{y_i + y_a} = \frac{g}{y_i} \frac{\mathfrak{R}_i}{\mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_a},$$

und ein Maximum für $\frac{g}{y}$ für den von Eisen umgebenen Stromkreis, sinkt aber mit wachsender Grösse des Luft-

raumes. Die Einführung eines Luftzwischenraumes von der Reluktanz \mathcal{R}_a macht $\sin \alpha$ in dem Verhältnis

$$\frac{\mathcal{R}_i}{\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_a}$$

sinken.

Da in der Praxis eine Kraftlinienzahl B zwischen 2000 und 12000 pro Flächeneinheit angewendet wird, so variiert die Permeabilität des Eisens ungefähr zwischen 900 und 2000, während $\sin \alpha$ in einem von Eisen umgebenen Stromkreise von 0,51 bis 0,69 variiert. In der Luft ist $\mu = 1$.

Wird 1 % von der Länge des Eisens durch einen Luftzwischenraum ersetzt, so variiert die gesamte Reluktanz nun von $1^{1/9}$ bis $1^{1/20}$, also um rund 6 %; d. h. sie bleibt praktisch konstant, während der Winkel der Hysteresisvoreilung von $\sin \alpha = 0,035$ bis zu $\sin \alpha = 0,064$ variiert. Deshalb ist g im Vergleich zu b zu vernachlässigen und b ist praktisch gleich y .

Daher ist die Suszeptanz in einem elektrischen Stromkreise, der Eisen enthält, aber einen offenen magnetischen Stromkreis bildet, dessen Luftzwischenraum nicht kleiner als $1/100$ der Länge des Eisens ist, praktisch konstant und gleich der Admittanz, so lange noch nicht die Sättigung erreicht ist, oder so lange noch nicht

$$b = \frac{\mathcal{R}_a}{N},$$

oder

$$x = \frac{N}{\mathcal{R}_a}$$

ist.

Der Winkel der Hysteresisvoreilung ist klein, unter 4° , und die Hysteresis-Konduktanz

$$g = \frac{A}{E^4 N^{0,6}}.$$

Die Stromwelle ist praktisch eine Sinuswelle.

Als Beispiel ist in der Figur 71 durch die Kurve II die Stromwelle eines Stromkreises, die einen Luftzwischenraum von nur $\frac{1}{400}$ der Länge des Eisens enthält, dargestellt; sie ergibt eine Welle, die der Sinusform sehr ähnelt, und zwar bei einer Hysteresisvoreilung von 9^0 .

84. Um die elektrischen Konstanten eines Stromkreises, der Eisen enthält, zu bestimmen, verfahren wir auf folgende Weise:

Ist E die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion, dann erhalten wir aus der Gleichung

$$E = \sqrt{2} \pi n N \Phi 10^{-8},$$

wo

N die Frequenz und

n die Zahl der Windungen

bedeutet, den Magnetismus Φ und mittels des magnetischen Querschnitts S die maximale magnetische Induktion

$$\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{S}.$$

Aus \mathfrak{B} erhalten wir mittels der magnetischen Charakteristik des Eisens die magnetomotorische Kraft F als Ampèrewindungen für die Länge eines Centimeters, wo

$$F = \frac{10}{4\pi} \mathcal{H},$$

ist, wenn \mathcal{H} die magnetomotorische Kraft in C. G. S. ist.

Ist daher

L_i die Länge des Eisenstromkreises, so sind

$$\mathcal{F}_i = L_i F$$

die Ampèrewindungen, die in dem Eisen erforderlich sind.

Ist ferner

L_a die Länge des Luftstromkreises, so sind

$$\mathcal{F}_a = \frac{10 L_a \mathfrak{B}}{4 \pi}$$

die Ampèrewindungen, die in der Luft erforderlich sind.

Wir erhalten daher für die gesamten Ampèrewindungen als maximalen Wert

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_i + \mathcal{F}_a$$

und als effektiven Wert

$$\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{2}}.$$

Der Erregerstrom ist

$$I = \frac{\mathcal{F}}{n\sqrt{2}},$$

und die absolute Admittanz

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{I}{E}.$$

Kann \mathcal{F} im Vergleich zu \mathcal{F}_a nicht vernachlässigt werden, so variiert diese Admittanz y mit der elektromotorischen Kraft E .

Bezeichnet V das Volumen des Eisens und η den Hysteresiskoeffizienten, so ist der durch Hysteresis infolge der molekularen und magnetischen Reibung entstandene Energieverlust

$$W = \eta NV \mathfrak{B}^{1,6};$$

daraus ergibt sich als Hysteresis-Konduktanz

$$g = \frac{W}{E^2},$$

die mit der elektromotorischen Kraft E variiert.

Es sind der Winkel der Hysteresisvoreilung

$$\sin \alpha = \frac{g}{y},$$

die Suszeptanz

$$b = \sqrt{y^2 - g^2},$$

der effektive Widerstand

$$r = \frac{g}{y^2}$$

und die Reaktanz

$$x = \frac{b}{y^2}.$$

85. Aus dem letzten Kapitel ergeben sich die Schlussfolgerungen:

1. In einem von Eisen umgebenen Wechselstromstromkreise ist der durch eine Sinuswelle von elektromotorischer

Kraft erzeugte Strom keine wahre Sinuswelle, sondern sie ist durch Hysterisis verzerrt.

2. Diese Verzerrung ist nur bei einem geschlossenen magnetischen Stromkreise, der in einem sekundären Stromkreise durch gegenseitige Induktanz keine Energie überträgt, bedeutend.

3. Die verzerrte Stromwelle kann durch die äquivalente Sinuswelle ersetzt werden — d. h. eine Sinuswelle von gleicher effektiver Intensität und Energie, und die darüber gelagerte höhere Harmonische, die hauptsächlich aus einer dreifachen Frequenz besteht, kann ausser in Stromkreisen mit Resonanz vernachlässigt werden.

4. In der Nähe der Sättigung haben die verzerrte Stromkurve und ihre äquivalente Stromwelle annähernd denselben maximalen Wert.

5. Der Winkel der Hysterisisvoreilung, d. h. die Phasendifferenz zwischen der magnetischen Strömung und der äquivalenten Sinuswelle der magnetomotorischen Kraft, ist für den geschlossenen magnetischen Stromkreis ein Maximum und hängt hier nur von den magnetischen Konstanten des Eisens, von der Permeabilität μ , von dem Koeffizienten der Hysterisis η und von der maximalen magnetischen Induktion ab, wie es sich aus der Gleichung

$$\sin = \alpha \frac{4\mu\eta}{\beta^{0,4}}$$

ergibt.

6. Der durch die Hysterisis hervorgebrachte Effekt kann durch die Admittanz

$$Y = g + jb$$

oder durch die Impedanz

$$Z = r - jx$$

dargestellt werden.

7. Die Hysterisis-Admittanz, oder die Impedanz, variiert mit der magnetischen Induktion, also mit der elektromotorischen Kraft u. s. w.

8. Die Hysterisis-Konduktanz g ist dem Hysterisiskoeffizienten η und der Länge des magnetischen Strom-

kreises L direkt proportional, umgekehrt proportional dagegen der $0,4^{\text{ten}}$ Potenz der elektromotorischen Kraft E , der $0,6^{\text{ten}}$ Potenz der Frequenz N , der $0,6^{\text{ten}}$ Potenz des Querschnitts des magnetischen Stromkreises S und der $1,6^{\text{ten}}$ Potenz der Zahl der Windungen n des elektrischen Stromkreises, was sich durch folgende Gleichung ausdrücken lässt

$$g = \frac{58\eta L 10^3}{E^{0,4} N^{0,6} S^{0,6} n^{1,6}}.$$

9. Der absolute Wert der Hysteresis-Admittanz

$$y = \sqrt{g^2 + b^2},$$

ist proportional der magnetischen Reluktanz $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_a$ und umgekehrt proportional der Frequenz N und dem Quadrat der Windungszahl n , wie es durch die Gleichung

$$y = \frac{(\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_a) 10^8}{2\pi N n^2}$$

ausgedrückt wird.

10. In einem von Eisen umschlossenen Stromkreise ist der absolute Wert der Admittanz proportional der Länge des magnetischen Stromkreises und umgekehrt proportional dem Querschnitt S , der Frequenz N , der Permeabilität μ und dem Quadrat der Windungszahl n , oder es ist

$$y_i = \frac{127 L 10^5}{n^2 S N \mu}.$$

11. In einem offenen magnetischen Stromkreise ist die Konduktanz g gleich der in einem geschlossenen magnetischen Stromkreise mit demselben Eisen.

12. In einem offenen magnetischen Stromkreise ist die Admittanz y praktisch konstant, wenn die Länge des Luftzwischenraumes wenigstens ein Hundertstel der Länge des magnetischen Stromkreises beträgt und die Sättigung nicht erreicht werden kann.

13. In einem geschlossenen magnetischen Stromkreise können die Konduktanz, die Suszeptanz und die Admittanz

nur innerhalb bestimmter Grenzen als konstant angenommen werden.

14. Aus der Form und den Dimensionen der Stromkreise und aus den magnetischen Konstanten des Eisens können die elektrischen Konstanten g, b, y und r, x, z berechnet werden.

Kapitel XI.

Foucault- oder Wirbelströme.

86. Während die magnetische Hysteresis oder molekulare Reibung eine magnetische Erscheinung ist, können Wirbelströme eher als eine elektrische Erscheinung bezeichnet werden. Bewegt man Eisen durch ein magnetisches Feld, so wird durch die Hysteresis ein Energieverlust verursacht, der auf das Feld nicht magnetisch einwirkt. Wenn ein elektrischer Leiter das magnetische Feld schneidet, so wird in ihm ein Strom induziert. Die magnetomotorische Kraft dieses Stromes wirkt mehr oder weniger auf das magnetische Feld zurück. Aus diesem Grunde kann ein magnetisches Wechselstromfeld auf einen massiven Leiter nicht stark einwirken; es wird vielmehr eine Art Schirmwirkung erzeugt, die massive Eisenmassen für Wechselstromfelder ungeeignet und die die Anwendung lamellierten Eisens oder Eisendrahtes für die Leitung der magnetischen Strömung notwendig macht.

Wirbelströme sind wirkliche elektrische Ströme, obgleich sie in kleinen Stromkreisen fließen; sie befolgen sämtliche Gesetze der elektrischen Stromkreise.

Ihre elektromotorische Kraft ist proportional der Intensität der Magnetisierung \mathfrak{B} und der Frequenz N . Wirbelströme sind proportional der Magnetisierung \mathfrak{B} , der Frequenz N und der elektrischen Leitungsfähigkeit des Eisens γ ; sie lassen sich durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$i = \beta \gamma \mathfrak{B} N.$$

Die durch Wirbelströme verbrauchte Energie ist ihrem Quadrat proportional, umgekehrt proportional dagegen der

elektrischen Leitungsfähigkeit: sie wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$P = \beta \gamma \mathfrak{B}^2 N^2.$$

Da $\mathfrak{B}N$ gemäss der Gleichung

$$E = \sqrt{2\pi} S n N \mathfrak{B} 10^{-8}$$

der induzierten elektromotorischen Kraft E proportional ist, so folgt, dass der durch Wirbelströme hervorgebrachte Energieverlust dem Quadrat der elektromotorischen Kraft und der elektrischen Leitungsfähigkeit des Eisens proportional ist, oder

$$W = a E^2 \gamma.$$

Daher ist die Komponente der effektiven Konduktanz der Wirbelströme

$$g = \frac{W}{E^2} = a \gamma,$$

d. h., die äquivalente Konduktanz der in dem Eisen auftretenden Wirbelströme ist eine Konstante des magnetischen Stromkreises, die von der elektromotorischen Kraft, von der Frequenz u. s. w. unabhängig ist, die aber der elektrischen Leitungsfähigkeit des Eisens γ proportional ist.

87. Wirbelströme verursachen eine Voreilung der Phase des Stromes um den Winkel β , ähnlich wie Hysteresis; aber im Gegensatze zur Hysteresis verzerren die Wirbelströme die Stromwelle im allgemeinen nicht.

Der Winkel der Phasenvoreilung infolge der Wirbelströme ist

$$\sin \beta = \frac{g}{y},$$

wo y die absolute Admittanz des Stromkreises und g die Konduktanz der Wirbelströme ist.

Während die äquivalente Konduktanz g der Wirbelströme eine Konstante des Stromkreises und unabhängig von der elektromotorischen Kraft, von der Frequenz u. s. w. ist, so ist der durch die Wirbelströme bedingte Energieverlust proportional dem Quadrat der elektromotorischen

Kraft der Selbstinduktion und deshalb auch proportional dem Quadrat der Frequenz und dem Quadrat der Magnetisierung.

Nur die Energiekomponente der Wirbelströme gE ist von Interesse, weil die wattlose Komponente mit der der Hysteresis, die in einem früheren Kapitel behandelt wurde, identisch ist.

88. Um den durch Wirbelströme erzeugten Energieverlust zu bestimmen, sei

V das Volumen des Eisens,

\mathcal{B} die maximale magnetische Induktion,

N die Frequenz,

γ die elektrische Leitungsfähigkeit des Eisens,

ε der Koeffizient von Wirbelströmen.

Der Energieverlust für einen Kubikcentimeter, ausgedrückt in Erg., ist für einen Cyklus

$$W = \varepsilon \gamma N \mathcal{B}^2;$$

daher ist der gesamte durch Wirbelströme hervorgebrachte Effektverlust

$$W = \varepsilon \gamma V N^2 \mathcal{B}^2 10^{-7} \text{ Watt}$$

und die äquivalente Konduktanz infolge der Wirbelströme

$$g = \frac{W}{E^2} = \frac{10 \varepsilon \gamma l}{2 \pi^2 S n^2} = \frac{0,507 \varepsilon \gamma l}{S n^2},$$

wo:

l die Länge des magnetischen Stromstromkreises,

S den Durchschnitt des magnetischen kreises,

n die Zahl der Windungen des elektrischen Stromkreises

bedeuten.

Der Koeffizient der Wirbelströme ε hängt lediglich von der Form der Bestandteile des magnetischen Strom-

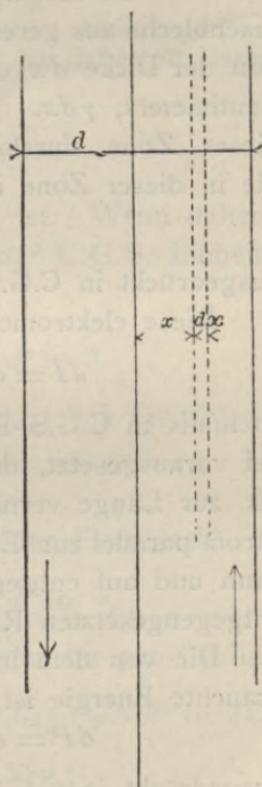


Fig. 79.

kreises ab, nämlich ob sie aus Eisenplatten oder aus Draht bestehen; ferner von der Dicke der Platten oder dem Durchmesser des Drahtes u. s. w.

Die beiden wichtigsten Fälle sind:

- a) Eisenlamellen,
- b) Eisendraht.

89. a) Eisenlamellen.

In Figur 79 seien

d die Dicke der Eisenplatten,

\mathfrak{B} die maximale magnetische Induktion,

N die Frequenz,

γ die elektrische Leitungsfähigkeit des Eisens.

Ist x die Entfernung einer Zone dx , von der Mitte des Eisenblechs aus gerechnet, so ist die Konduktanz einer Zone von der Dicke dx und von der Länge und Breite je eines Centimeters, γdx . Die magnetische Strömung, die von dieser Zone durchschnitten wird, ist $\mathfrak{B}x$. Daher ist die in dieser Zone induzierte elektromotorische Kraft

$$\delta E = \sqrt{2} \pi N \mathfrak{B} x$$

ausgedrückt in C.G.S.-Einheiten.

Diese elektromotorische Kraft erzeugt den Strom

$$dI = \delta E \gamma dx = \sqrt{2} \pi N \mathfrak{B} \gamma x dx,$$

ebenfalls in C.G.S.-Einheiten ausgedrückt; jedoch ist hierbei vorausgesetzt, dass die Dicke des Bleches im Verhältnis zur Länge vernachlässigt werden kann, so dass der Strom parallel zum Eisenblech fließend angenommen werden kann und auf entgegengesetzten Seiten des Eisenbleches in entgegengesetzten Richtungen.

Die von dem induzierten Strom in der Zone dx verbrauchte Energie ist

$$dP = \delta E dI = 2 \pi^2 N^2 \mathfrak{B}^2 \gamma x^2 dx,$$

ausgedrückt in C.G.S.-Einheiten, oder Ergs. pro Sekunde; daher ist die gesamte von einem Quadratcentimeter bei

einer Dicke des Eisenblechs d verbrauchte Energie in C.G.S.-Einheiten

$$\begin{aligned} \delta P &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dP = 2\pi^2 N^2 \mathfrak{B}^2 \gamma \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} x^2 dx \\ &= \frac{\pi^2 N^2 \mathfrak{B}^2 \gamma d^3}{6}. \end{aligned}$$

Die von einem Kubikcentimeter Eisen verbrauchte Energie ist in C.G.S.-Einheiten

$$p = \frac{\delta P}{d} = \frac{\pi^2 N^2 \mathfrak{B}^2 \gamma d^2}{6},$$

und die pro Cyclus und pro einem Kubikcentimeter Eisen verbrauchte Energie

$$h = \frac{p}{N} = \frac{\pi^2 \gamma d^2 N \mathfrak{B}^2}{6} \text{ Erg.}$$

Der Koeffizient der Wirbelströme ist daher für lamelliertes Eisen

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 d^2}{6} = 1,645 d^2,$$

wo γ in C.G.S.-Einheiten ausgedrückt ist. Wenn daher γ in praktischen Einheiten oder in 10^{-9} C.G.S.-Einheiten ausgedrückt wird, so ist

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 d^2 10^{-9}}{6} = 1,645 d^2 10^{-9}.$$

Setzen wir für die Leitungsfähigkeit des Eisenbleches den Näherungswert

$$\gamma = 10^5$$

ein, so erhalten wir als Koeffizienten für Eisenblech

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{6} d^2 10^{-9} = 1,645 d^2 10^{-9},$$

als Energieverlust für einen Kubikcentimeter pro Cyclus

$$W = \varepsilon \gamma N \mathfrak{B}^2 = \frac{\pi^2}{6} d^2 \gamma N \mathfrak{B}^2 10^{-9} = 1,645 d^2 \gamma N \mathfrak{B}^2 10^{-9} \text{ Erg.}$$

$$= 1,645 d^2 N \mathfrak{B}^2 10^{-4} \text{ Erg.};$$

oder $W = \varepsilon \gamma N \mathfrak{B}^2 10^{-7} = 1,645 d^2 N \mathfrak{B}^2 10^{-11} \text{ Joule};$

als Effektverlust für ein Kubikcentimeter bei der Frequenz N
 $p = NW = \varepsilon \gamma N^2 \mathfrak{B}^2 10^{-7} = 1,645 d^2 N^2 \mathfrak{B}^2 10^{-11}$ Watt;
 als totalen Verlust bei einem Volumen V

$$P = Vp = 1,645 V d^2 N^2 \mathfrak{B}^2 10^{-11} \text{ Watt.}$$

Beispiel:

$d = 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$; $N = 100$; $\mathfrak{B} = 5000$; $V = 1000 \text{ cm}^3$.

$$\varepsilon = 1,645 \times 10^{-11};$$

$$W = 4110 \text{ Erg.}$$

$$= 0,000411 \text{ Joule;}$$

$$p = 0,0411 \text{ Watt;}$$

$$P = 41,1 \text{ Watt.}$$

90. b) *Eisendraht.*

Es sei in Figur 80 d der Durchmesser eines Stückes Eisendrahtes, x der Radius einer kreisförmigen Zone von der Dicke dx , dessen Länge 1 cm beträgt.

Die Konduktanz dieser

Zone ist $\frac{\gamma dx}{2\pi x}$ und die

durch sie eingeschlossene magnetische Strömung $\mathfrak{B} x^2 2\pi$.

Daher ist die in dieser Zone induzierte elektromotorische Kraft in C.G.S.-Einheiten

$$\delta E = \sqrt{2} \pi^2 N \mathfrak{B} x^2 \text{ in C.G.S.-Einheiten}$$

und der durch sie erzeugte Strom

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\gamma dx}{2\pi x} \times \sqrt{2} \pi^2 N \mathfrak{B} x^2 \\ &= \frac{\sqrt{2} \pi}{2} \gamma N \mathfrak{B} x dx. \end{aligned}$$

Die in dieser Zone verbrauchte Energie ist in C.G.S.-Einheiten

$$dP = \delta E dI = \pi^3 \gamma N^2 \mathfrak{B}^2 x^3 dx$$

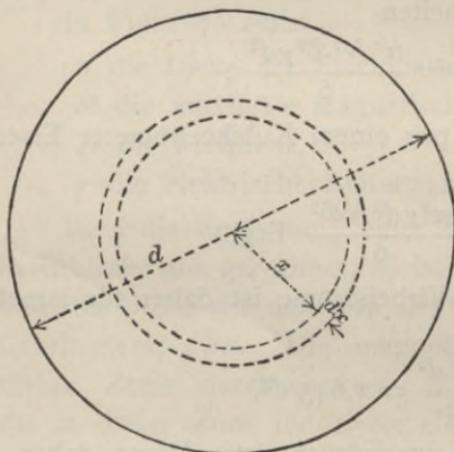


Fig. 80.

und folglich die in einem Centimeter Drahtlänge verbrauchte gesamte Energie in C.G.S.-Einheiten

$$\begin{aligned} \delta P &= \int_0^{\frac{d}{2}} dW = \pi^3 \gamma N^2 \mathfrak{B}^2 \int_0^{\frac{d}{2}} x^3 dx \\ &= \frac{\pi^3}{6^4} \gamma N^2 \mathfrak{B}^2 d^4. \end{aligned}$$

Da das Volumen eines Drahtes von einem Centimeter Länge

$$v = \frac{d^2 \pi}{4}$$

ist, so ist die pro Kubikcentimeter Eisen verbrauchte Energie in C.G.S.-Einheiten oder in Erg. pro Sekunde

$$p = \frac{\delta P}{v} = \frac{\pi^2}{16} \gamma N^2 \mathfrak{B}^2 d^2$$

und die pro Cyklus und pro Kubikcentimeter Eisen verbrauchte Energie

$$W = \frac{p}{N} = \frac{\pi^2}{16} \gamma N \mathfrak{B}^2 \text{ Erg.}$$

Daher ist der Koeffizient der Wirbelströme für Eisendraht

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{16} d^2 = 0,617 d^2$$

oder, wenn γ in praktischen Einheiten, oder in 10^{-9} C.G.S.-Einheiten ausgedrückt wird,

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{16} d^2 10^{-9} = 0,617 d^2 10^{-9}.$$

Setzen wir $\gamma = 10^5$

ein, so erhalten wir als Koeffizienten der Wirbelströme für Eisendraht

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{16} d^2 10^{-9} = 0,617 d^2 10^{-9}.$$

Der Energieverlust für einen Kubikcentimeter Eisen ist bei einem Cyklus

$$\begin{aligned} W &= \varepsilon \gamma N \mathfrak{B}^2 = \frac{\pi^2}{16} d^2 \gamma N \mathfrak{B}^2 10^9 = 0,617 d^2 \gamma N \mathfrak{B}^2 10^{-9} \\ &= 0,617 d^2 N \mathfrak{B}^2 10^{-4} \text{ Erg.} \\ &= \varepsilon \gamma N \mathfrak{B}^2 10^{-7} = 0,617 d^2 N \mathfrak{B}^2 10^{-11} \text{ Joule;} \end{aligned}$$

der Effektverlust pro Kubikcentimeter bei der Frequenz N
 $p = N h = \varepsilon \gamma N^2 \mathfrak{B}^2 10^{-7} = 0,617 d^2 N^2 \mathfrak{B}^2 10^{-11}$ Watt;
 der gesamte Effektverlust des Volumens V

$$P = Vp = 0,617 V d^2 N^2 \mathfrak{B}^2 10^{-11} \text{ Watt.}$$

Beispiel:

Es sei $d = 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$, $N = 100$, $\mathfrak{B}^2 = 5000$, $V = 1000 \text{ cm}^3$;
 dann ist

$$\varepsilon = 0,617 \times 10^{-11},$$

$$W = 1540 \text{ Erg.} = 0,000154 \text{ Joule,}$$

$$p = 0,0154 \text{ Watt,}$$

$$P = 15,4 \text{ Watt,}$$

also weit geringer als in Eisenblech gleicher Dicke.

91. Vergleich von Eisenblech und Eisendraht.

Bezeichnen wir mit d_1 die Dicke des Eisenbleches und mit d_2 den Durchmesser des Eisendrahtes, wobei der Wirbelstrom-Koeffizient des Eisenbleches

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi^2}{6} d_1^2 10^{-9}$$

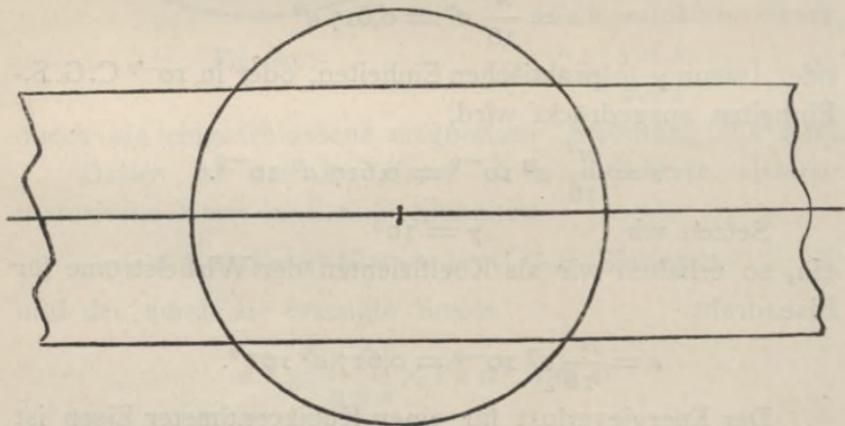


Fig. 81.

und der des Eisendrahtes

$$\varepsilon_2 = \frac{\pi^2}{16} d_2^2 10^{-9}$$

ist, so ist der Energieverlust, falls $\epsilon_1 = \epsilon_2$, in beiden gleich,

$$d_2^2 = \frac{8}{3} d_1^2,$$

oder

$$d_2 = 1,63 d_1.$$

Hieraus folgt, dass der Durchmesser von Eisendraht 1,63- oder rund $1\frac{2}{3}$ mal so gross sein kann als die Dicke von Eisenblech, um den gleichen Energieverlust durch Wirbelströme zu erzeugen.

92. Entmagnetisierende oder Schirmwirkung durch Wirbelströme.

Die abgeleiteten Formeln des Koeffizienten der Wirbelströme für Eisenblech und Eisendraht gelten nur, wenn diese Ströme so klein sind, dass ihre magnetisierende Kraft vernachlässigt werden kann. In anderen Fällen wird diese Erscheinung ziemlich kompliziert; die magnetische Strömung in dem Innern des Bleches oder Drahtes ist mit der Strömung auf deren Oberfläche nicht in Phase, sondern bleibt zurück. Die magnetische Strömung auf der Oberfläche ist durch die äussere magnetomotorische Kraft hervorgerufen, während die Strömung in dem Innern von der Resultante der äusseren magnetomotorischen Kraft und der magnetomotorischen Kraft der Wirbelströme abhängt und da die magnetomotorische Kraft der Wirbelströme hinter der magnetischen Strömung 90° zurückbleibt, so bleibt die Resultante aus ihr und der äusseren magnetomotorischen Kraft, und daher der Magnetismus im Innern des Eisens hinter dem an der Oberfläche zurück. Gehen wir also von der Oberfläche allmählich in das Innere hinein, so bleibt die magnetische Strömung immer mehr in der Phase zurück und nimmt gleichzeitig in ihrer Intensität ab.

Die vollständige Lösung dieses Problems auf analytischem Wege fällt ausserhalb des Rahmens dieses Buches. Eine annähernde Bestimmung der Grössenordnung der entmagnetisierenden Wirkung der Wirbelströme, genügend zur Entscheidung, ob dieselbe vernachlässigt werden kann,

oder ob die Unterteilung des Eisens weiter geführt werden muss, ergibt sich aus der Bestimmung der theoretisch möglichen Maximalwerte der entmagnetisierenden Wirkung der Wirbelströme, unter Annahme gleichmässiger magnetischer Wirkung.

Nehmen wir die Dichte der magnetischen Kraftlinien über den ganzen Querschnitt als homogen und sämtliche Wirbelströme in Phase mit einander an, so stellt ihre gesamte magnetomotorische Kraft den überhaupt möglichen maximalen Wert dar, weil durch die Phasendifferenz und durch die geringere magnetische Dichte im Mittelpunkt die resultierende magnetomotorische Kraft reduziert wird. Bei Eisenblech, dessen Dicke l ist, ist der Strom in einer Zone von der Dicke dx bei ihrer Entfernung x vom Mittelpunkt des Bleches

$$\begin{aligned} dI &= \sqrt{2} \pi N \mathfrak{B} j x dx \quad (C.G.S.) \\ &= \sqrt{2} \pi N \mathfrak{B} j x dx 10^{-8} \text{ Ampère;} \end{aligned}$$

woraus sich der gesamte Strom im Eisenblech

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{l}{2}} dI = \sqrt{2} \pi N \mathfrak{B} j 10^{-8} \int_0^{\frac{l}{2}} x dx \\ &= \frac{\sqrt{2} \pi}{8} N \mathfrak{B} j l^2 10^{-8} \text{ Ampère} \end{aligned}$$

ergibt. Daher ist das überhaupt mögliche Maximum von entmagnetisierenden Ampèrewindungen, das auf den Mittelpunkt des Bleches wirkt,

$$I = \frac{\sqrt{2} \pi}{8} N \mathfrak{B} j l^2 10^{-8} = 0,555 N \mathfrak{B} j l^2 10^{-8}$$

$$= 0,555 N \mathfrak{B} l^2 10^{-8} \text{ Ampèrewindungen pro Centimeter.}$$

Beispiel: $d = 0,1$ cm, $N = 100$, $\mathfrak{B} = 5000$,

oder $I = 2,775$ Ampèrewindungen pro Centimeter.

93. In einem Eisendraht von dem Durchmesser l ist der Strom in einer röhrenförmigen Zone von der Dicke dx und dem Radius x

$$dI = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi N \mathfrak{B} j x dx 10^{-8} \text{ Ampère;}$$

daraus ergibt sich der gesamte Strom

$$I = \int_0^l dI \frac{\sqrt{2}}{2} \pi N \mathfrak{B} j 10^{-8} \int_0^l x dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16} \pi N \mathfrak{B} j l^2 10^{-8} \text{ Ampère.}$$

Daraus erhalten wir das überhaupt mögliche Maximum von entmagnetisierenden Ampèrewindungen, das auf den Mittelpunkt des Drahtes wirkt,

$$I = \frac{\sqrt{2} \pi}{16} N \mathfrak{B} j l^2 10^{-8} = 0,2775 N \mathfrak{B} j l^2 10^{-8}$$

= 0,2775 $N \mathfrak{B} l^2 10^{-8}$ Ampèrewindungen pro Centimeter.

Setzen wir z. B. $l = 0,1$ cm, $N = 100$, $\mathfrak{B} = 5000$, so ist $I = 1338$ Ampèrewindungen pro Centimeter, d. h. halb so viel als in einem Blech der Dicke l .

94. Ausser den Wirbel- oder Foucault-Strömen im eigentlichen Sinne, die als parasitische Ströme im Innern der Eisenbleche oder Drähte fließen, fließen unter gewissen Umständen auch in grösseren Stromkreisen von Blech zu Blech durch die gesamte magnetische Struktur Wirbelströme. Natürlich ist eine Berechnung dieser Wirbelströme nur in Spezialfällen möglich. Sie sind meistens Oberflächenströme, und zwar infolge von Kurzschlüssen zwischen den Blechen an der Oberfläche der magnetischen Struktur.

Ferner werden Wirbelströme ausserhalb des magnetischen Eisenstromkreises durch das magnetische Streufeld, das elektrische Leiter in der Nachbarschaft schneidet, induziert, besonders wenn es gegen diese durch dahinter gelegene Eisenmassen abgelenkt wird. Alle diese Erscheinungen lassen sich nur in besonderen Fällen berechnen und sind von geringem Interesse, weil sie vermieden werden können.

Wirbelströme in dem Leiter und ungleichmässige Stromverteilung.

95. Hat der elektrische Leiter eine bedeutende Dicke, so kann das magnetische Wechselstromfeld, wenn es den Leiter schneidet, Spannungs-Differenzen zwischen seinen verschiedenen Teilen bewirken, sodass lokale Ströme oder Wirbelströme in dem Kupfer entstehen. Diese Erscheinung kann nur in Beziehung auf einen besonderen Fall studiert werden, nämlich dort, wo die Form des Leiters und die Verteilung des magnetischen Feldes bekannt sind. Nur in dem Falle, wo das magnetische Feld durch den in dem Leiter fliessenden Strom erzeugt wird, kann eine allgemeine Lösung gegeben werden. Der durch den Leiter fliessende Wechselstrom erzeugt ein magnetisches Feld, und zwar nicht nur ausserhalb, sondern auch innerhalb desselben. Die magnetischen Kraftlinien, die innerhalb des Leiters liegen, induzieren nur in ihrem Innern elektromotorische Kräfte. Daher ist die gegen elektromotorische Kraft der Selbstinduktion in der Nähe der Achse des Leiters am grössten, an seiner Oberfläche dagegen am kleinsten. Die Stromdichte ist daher an der Oberfläche grösser als an der Achse, und im äussersten Falle kann der Strom überhaupt nicht bis zur Mitte vordringen, oder aber es fliesst dort ein entgegengesetzt gerichteter Strom. Daraus folgt, dass nur der äussere Teil des Leiters für die Stromleitung gebraucht werden kann, sodass also eine scheinbare Erhöhung des Ohm'schen Widerstandes infolge der ungleichen Stromverteilung stattfindet.

Die allgemeine Lösung dieses Problems für runde Leitungen führt zu komplizierten Gleichungen, die anderswo nachzusuchen sind.

In der Praxis wird diese Erscheinung nur bei Strömen von hoher Frequenz (bei Blitzableitern u. s. w.) beobachtet; bei Kraftverteilungsleitungen muss diese entweder dadurch vermieden werden, dass man mit einer genügend niedrigen Frequenz arbeitet, oder dass dem Leiter eine solche Form gegeben wird, durch die eine ungleichmässige Stromdichte

im Leiter nicht auftritt, wie z. B. durch den Gebrauch eines röhrenförmigen oder verseilten Leiters, oder durch mehrere parallel geschaltete Leiter.

96. Es genügt desshalb, die maximale Grösse von runden Leitungen oder die höchste Frequenz, wo diese Erscheinung noch vernachlässigt werden kann, zu bestimmen.

Im Innern des Leiters ist die Stromdichte nicht nur kleiner als an der Oberfläche, sondern der Strom im Innern bleibt auch hinter dem der Oberfläche zurück, und zwar infolge der erhöhten Wirkung der Selbstinduktion. Dieses Zurückbleiben des Stromes bewirkt, dass die magnetischen Strömungen im Leiter gegenseitig ausser Phase sind und daher ihre Resultante kleiner als ihre Summe wird, während die kleinere Stromdichte in der Mitte die gesamte Strömung innerhalb des Leiters verringert. Nehmen wir nun als Basis für die Berechnung eine gleichförmige Stromdichte und keine Phasendifferenz zwischen den Strömen in den verschiedenen Schichten des Leiters an, so ist der Unterschied der Selbstinduktion zwischen Oberfläche und Mitte des Leiters grösser als in der Wirklichkeit. Demnach versetzt uns diese Annahme in eine sichere Lage und vereinfacht gleichzeitig die Berechnung.

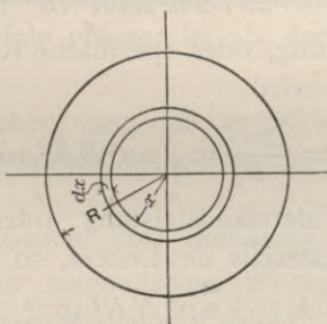


Fig. 82.

Figur 82 sei der Querschnitt eines Leiters mit dem Radius R und mit der homogenen Stromdichte

$$i = \frac{I}{R^2 \pi},$$

wo I der gesamte Strom ist, der durch den Leiter fliesst.

Die magnetische Reluktanz einer röhrenförmigen Zone von der Länge Eins und der Dicke dx mit dem Radius x ist

$$\mathcal{R}_x = \frac{2x\pi}{dx}.$$

Der durch diese Zone eingeschlossene Strom ist

$$I_x = ix^2\pi,$$

die auf diese Zone wirkende magnetomotorische Kraft

$$\mathcal{F}_x = \frac{4\pi}{10} I_x = \frac{4\pi^2 ix^2}{10},$$

und die magnetische Strömung in dieser Zone

$$d\Phi = \frac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{R}_x} = \frac{2\pi ix dx}{10}.$$

Daher ist die gesamte magnetische Strömung innerhalb des Leiters

$$\Phi = \int_0^R d\Phi = \frac{2\pi}{10} i \int_0^R x dx = \frac{\pi i R^2}{10} = \frac{I}{10}.$$

Hieraus erhalten wir als Überschuss der gegen-elektromotorischen Kraft an der Achse des Leiters über der an der Oberfläche

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{2}\pi N \Phi 10^{-8} = \sqrt{2}\pi N I 10^{-9}, \text{ pro Längeneinheit,} \\ &= \sqrt{2}\pi^2 N i R^2 10^{-9}; \end{aligned}$$

und die Rückwirkung, oder spezifische Reaktanz am Mittelpunkt des Leiters wird

$$k = \frac{\Delta E}{i} = \sqrt{2}\pi^2 N R^2 10^{-9}.$$

Ist q die Widerstandsleistung oder der spezifische Widerstand des Materials des Leiters, so erhalten wir

$$\frac{k}{q} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 N R^2 10^{-9}}{q};$$

und

$$\frac{k}{\sqrt{k^2 + q^2}}$$

den prozentualen Verlust der Stromdichte in der Mitte, bezogen auf den an der Peripherie;

oder auch

$$\frac{\rho}{\sqrt{k^2 + \rho^2}},$$

das Verhältnis zwischen den Stromdichten in der Mitte und an der Peripherie.

Wenn z. B. in Kupfer $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6}$ und der prozentuale Verlust der Stromdichte im Zentrum nicht 5 % überschreiten soll, so verhält sich

$$\rho : \sqrt{k^2 + \rho^2} = 0,95 : 1,$$

und wir erhalten

$$k = 0,51 \cdot 10^{-6};$$

folglich $0,51 \cdot 10^{-6} = \sqrt{2} \pi^2 N R^2 10^{-9},$

oder $N R^2 = 36,6$

und wenn $N = 125 \quad 100 \quad 60 \quad 33,3$

$$R = 0,541 \quad 0,605 \quad 0,781 \quad 1,05 \text{ cm}$$

$$D = 2 R = 1,08 \quad 1,21 \quad 1,56 \quad 2,1 \text{ cm.}$$

Daher kann, selbst bei einer Frequenz von 125 Cyklen, der Effekt der ungleichen Stromverteilung bei einem Leiter von einem Centimeter Durchmesser vernachlässigt werden. Leiter von diesem Durchmesser sind indessen bei solcher Frequenz vom Gebrauch wegen der äusseren Selbstinduktion, die um mehrere Male grösser ist als der Widerstand, ausgeschlossen.

Wir sehen daher, dass eine ungleiche Stromverteilung in der Praxis gewöhnlich vernachlässigt werden kann.

Gegenseitige Induktanz.

97. Wenn ein magnetisches Wechselstromfeld einen sekundären elektrischen Leiter umgibt, so induziert es in ihm eine elektromotorische Kraft, die einen Strom erzeugt und dadurch Energie verbraucht, falls der Stromkreis des sekundären Leiters geschlossen ist.

Einen speziellen Fall solcher induzierter sekundärer Ströme bilden die Wirbel- oder Foucault-Ströme, die bereits

früher erwähnt worden sind. Ein anderer wichtiger Fall ist die Induktion sekundärer elektromotorischer Kräfte in benachbarten Stromkreisen, also das Vorhandensein einander parallel laufender Stromkreise.

Im allgemeinen ist es besser, diese Erscheinung gegenseitiger Induktion nicht nur als eine Energiekomponente und wattlose Komponente der elektromotorischen Kraft in dem primären Leiter anzunehmen, sondern auch sowohl den sekundären als auch den primären Stromkreis besonders zu betrachten, wie wir es auch in dem Kapitel über den Wechselstromtransformator thun werden.

Nur in den Fällen, wo die Energie, die in einen sekundären Stromkreis übertragen wird, einen kleinen Teil der gesamten primären Energie ausmacht, wie bei der Betrachtung der durch einen Stromkreis auf einem parallelen Stromkreis verursachten Störung, kann die Wirkung auf den primären Stromkreis analog betrachtet werden, wie in dem Kapitel über Wirbelströme, nämlich durch die Einführung einer Energiekomponente, die den Effektverlust und durch eine wattlose Komponente, die die Verminderung der Selbstinduktion darstellt.

Es sei $x = 2\pi NL$ die Reaktanz des Hauptstromkreises oder L die gesamte Zahl von Verkettungen mit dem Hauptleiter, erzeugt von magnetischen Kraftlinien durch den Strom Eins, der durch diesen Leiter fließt.

$x_1 = 2\pi N L_1$ sei die Reaktanz des sekundären Stromkreises, oder L_1 die gesamte Zahl der Verkettungen mit dem sekundären Leiter, erzeugt von magnetischen Kraftlinien durch den Strom Eins, der durch diesen Leiter fließt.

$x_m = 2\pi N L_m$ sei die gegenseitige Induktanz der Stromkreise oder L_m die gesamte Zahl der Verkettungen mit dem sekundären Leiter, erzeugt von magnetischen Kraftlinien durch den Strom Eins, der durch den Hauptleiter fließt, oder die gesamte Zahl der Verkettungen mit dem Hauptleiter, erzeugt von magnetischen Kraftlinien

durch den Strom Eins, der durch den sekundären Leiter fließt. Daher ist $x_m^2 \leq x x_1$.*)

Es sei r_1 der Widerstand des sekundären Stromkreises. Dann ist die Impedanz des sekundären Stromkreises

$$Z_1 = r_1 - jx_1, \quad z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_1^2}$$

und die in dem sekundären Stromkreise induzierte elektromotorische Kraft $E_1 = jx_m I$,

wo I den primären Strom bedeutet. Daher ist der sekundäre Strom

$$I_1 = \frac{E_1}{z_1} = \frac{jx_m}{r_1 - jx_1} I$$

*) Als Koeffizient der Selbstinduktion L , L' ist hier die gesamte den Leiter umgebende Strömung gemeint. Sehr häufig wird bei der Diskussion von Induktions-Apparaten und besonders bei Transformatoren derjenige Teil der magnetischen Strömung als Selbstinduktion des Stromkreises bezeichnet, welcher diesen Stromkreis umgibt, aber nicht der andere Stromkreis, d. h. der, welcher zwischen beiden Stromkreisen fließt. Daher ist die gesamte Selbstinduktion in diesem Falle gleich der Summe aus der Selbstinduktion L' und der gegenseitigen Induktanz L_m .

Der Grund dieser Unterscheidung ist, den wattlosen Teil L' der gesamten Selbstinduktion L von dem Teil L_m zu trennen, der die Übertragung der elektromotorischen Kraft in den sekundären Stromkreis darstellt, da die Wirkung dieser beiden Komponenten wesentlich verschieden ist.

Daher ist es in Wechselstromstromkreisen üblich — und dieses wird später in diesem Werk geschehen —, die Selbstinduktion L eines jeden Stromkreises nur als den durch den Stromkreis erzeugten Teil der magnetischen Strömung zu bezeichnen, der zwischen beiden Stromkreisen hindurchgeht, und der daher nur „hemmend“ wirkt, aber nicht Effekt übertragend, während die Strömung, die beide Stromkreise umgibt, gegenseitige Induktanz oder nutzbare magnetische Strömung heisst. Bei dieser Bezeichnung ist in Transformatoren die gegenseitige Induktanz L_m gewöhnlich viel grösser als die Selbstinduktion L' und L_1' , während, wenn die Selbstinduktion L und L_1 die gesamte Strömung darstellen, ihr Produkt grösser ist als das Quadrat der gegenseitigen Induktanz L_m ; oder

$$LL_1 \geq L_m^2; \quad (L' + L) (L_1' + L_m) \geq L_m^2.$$

und die in dem primären Stromkreise durch den sekundären Strom I , induzierte elektromotorische Kraft

$$E = j x_m I_1;$$

$$E = \frac{-x_m^2}{r_1 - jx_1} I;$$

oder entwickelt

$$E = \left\{ \frac{-x_m^2 r_1}{r_1^2 + x_1^2} - \frac{j x_m^2 x_1}{r_1^2 + x_1^2} \right\} I.$$

Daher ergibt sich

$$g = \frac{x_m^2 r_1}{r_1^2 + x_1^2}$$

als effektive Konduktanz der gegenseitigen Induktanz,

$$b = \frac{-x_m^2 x_1}{r_1^2 + x_1^2},$$

als effektive Suszeptanz der gegenseitigen Induktanz.

Die Suszeptanz der gegenseitigen Induktanz ist negativ oder von entgegengesetztem Vorzeichen als die Suszeptanz der Selbstinduktion, oder:

die wechselseitige Induktanz verbraucht Energie und vermindert die Selbstinduktion.

Dielektrische oder elektrostatische Erscheinungen.

98. Während magnetische Hysterisis und Wirbelströme als die Energie-Komponenten der Induktanz betrachtet werden können, besitzt die Kondensanz ebenfalls eine Energie-Komponente, die dielektrische Hysterisis genannt wird. In einem magnetischen Wechselstromfelde wird durch Hysterisis infolge molekuler Reibung Energie verbraucht und analog wird in einem elektrostatischen Wechselstromfelde in dem dielektrischen Medium durch dielektrische Hysterisis Energie verbraucht.

Während die Gesetze des Energieverlustes durch magnetische Hysterisis und die Grösse der Wirkung wohl bekannt sind, ist die Erscheinung der dielektrischen Hysterisis, was ihre Gesetze und die Grösse ihrer Wirkung betrifft, fast noch unbekannt.

Es ist ganz wahrscheinlich, dass der Energieverlust im Dielektrikum in einem elektrostatischen Wechselstromfelde aus zwei verschiedenen Komponenten besteht, wovon die eine direkt proportional der Frequenz, analog der magnetischen Hysterisis und daher ein konstanter Energieverlust pro Cyklus, unabhängig von der Frequenz ist, während die andere Komponente proportional dem Quadrat der Frequenz, analog dem Energieverlust infolge von Wirbelströmen in dem Eisen und daher ein Energieverlust pro Cyklus proportional der Frequenz ist.

Das Vorhandensein eines Energieverlustes in dem Dielektrikum, proportional dem Quadrat der Frequenz, habe ich vor einiger Zeit in mit Paraffin getränktem Papier in einem hohen elektrostatischen Felde und bei hoher Frequenz mittels der elektrodynamometrischen Methode beobachtet, und auch andere Beobachter haben unter ähnlichen Bedingungen dieselben Resultate gefunden.

Arno in Turin hat bei geringen Frequenzen und niedriger Feldstärke bei einer grossen Zahl Dielektrika einen Energieverlust pro Cyklus unabhängig von der Frequenz gefunden, aber proportional der 1,6^{ten} Potenz der Feldstärke —, d. h. also demselben Gesetz folgend, als die magnetische Hysterisis

$$W_{\frac{1}{2}} = \eta \mathcal{E}^{1,6}.$$

Dieser Verlust, wahrscheinlich die wahre dielektrische statische Hysterisis, wurde unter solchen Bedingungen beobachtet, dass ein Verlust, der proportional dem Quadrat der Dichte und Frequenz ist, klein sein muss, während bei grossen Dichten und Frequenzen, z. B. bei Kondensatoren, die wahre dielektrische Hysterisis durch einen ausgedrückten Verlust durch $W_{\frac{1}{2}} = e N \mathcal{E}^2$ verdeckt wird.

99. Wenn der Energieverlust durch elektrostatische Hysterisis proportional dem Quadrat der Frequenz und der Intensität des Feldes ist — wie dies beinahe wahr-

scheinlich bei den Arbeitsbedingungen der Wechselstromkondensatoren der Fall ist —, dann ist er proportional dem Quadrat der elektromotorischen Kraft; d. h. die effektive Konduktanz g ist infolge der dielektrischen Hysterese eine Konstante und da die Kondensatorsuszeptanz $-b = b'$ auch eine Konstante ist — ungleich der magnetischen Induktanz —, so ist das Verhältnis zwischen der Konduktanz und Suszeptanz, d. h. der Winkel der Phasendifferenz infolge der dielektrischen Hysterese, eine Konstante. Dies habe ich durch Experimente als erwiesen gefunden.

Dies würde heissen, dass die dielektrische Hystereseadmittanz eines Kondensators

$$Y = g + jb = g - jb',$$

wo g die Hystereseleitfähigkeit und b' die Hysterese-suszeptanz bedeuten, und die dielektrische Hystereseimpedanz eines Kondensators

$$Z = r - jb' = r + jx_c,$$

wo r der Hysterese-widerstand und x_c die Hysterese-kondensanz, und der Winkel der dielektrischen Hystereseverzögerung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b'}{g} = \frac{x_c}{r}$$

Konstanten des Stromkreises sind, unabhängig von der elektromotorischen Kraft und der Frequenz. Die elektromotorische Kraft ist umgekehrt proportional der Frequenz.

Die wahre statische dielektrische Hysterese, von Arno als proportional der 1,6^{ten} Potenz der Dichte beobachtet, lässt die Admittanz und Impedanz als einen Ausdruck zu, der variabel und abhängig von der elektromotorischen Kraft und Frequenz ist, in derselben Weise wie in dem Kapitel über magnetische Hysterese erörtert worden ist.

Der magnetischen Hysterese entspricht in dem elektrostatischen Felde die statische Komponente der dielektrischen Hysterese, die wahrscheinlich demselben Gesetz der 1,6^{ten} Potenz folgt.

Den Wirbelströmen im Eisen entspricht im elektrostatischen Feld die zähe Komponente der dielektrischen Hysteresis, die demselben Gesetze folgt. Der gegenseitigen Induktanz entspricht in dem elektrostatischen Felde die elektrostatische Induktion oder die Influenz.

100. Das elektrostatische Wechselstromfeld eines elektrischen Stromkreises induziert in Leitern innerhalb des Kraftfeldes elektrostatische Ladungen durch die Influenz. Diese Ladungen sind proportional der Stärke des Feldes, d. h. proportional der elektromotorischen Kraft in dem Hauptstromkreise.

Wird durch induzierte Ladungen ein Strom erzeugt, so wird proportional dem Quadrat der Ladung oder proportional dem Quadrat der elektromotorischen Kraft Energie verbraucht. Diese induzierten Ladungen, die auf den Hauptleiter zurück wirken, beeinflussen Ladungen gleicher aber entgegengesetzter Phase und bleiben hinter der elektromotorischen Kraft im Hauptleiter um den Verschiebungswinkel zwischen der induzierten Ladung und dem induzierenden Feld zurück. Sie erfordern einen Ladungsstrom im Hauptleiter, der senkrecht zu der in ihm induzierten Ladung ist, d. h. beinahe senkrecht zur elektromotorischen Kraft und der daher aus einer Energiekomponente in Phase mit der elektromotorischen Kraft besteht, die die durch Influenz verbrauchte Energie darstellt, und aus einer wattlosen Komponente, die die Kapazität des Leiters erhöht, oder, mit anderen Worten, die seine Kapazitätssuszeptanz erhöht oder seine Kondensanz reduziert.

Daher führt die Influenz eine effektive Konduktanz g und eine effektive Suszeptanz b , die jedoch von gleichen Vorzeichen als die Kondensatorsuszeptanz ist, in die Gleichungen des elektrischen Stromkreises ein.

Während g und b theoretisch Konstanten des Stromkreises sein sollten, ist dies häufig gar nicht der Fall, und zwar infolge der Entladungs-Erscheinungen, die bei diesen hohen Dichten beginnen.

Sogar die Kapazitätskondensanz ändert sich bei sehr hohen Spannungen, und es findet ein Entweichen der Elektrizität in die Luft und über die Oberflächen der stützenden Isolatoren hin statt, und zwar durch Bürsten-Entladung oder elektrostatisches Leuchten. Soweit diese elektrostatische Corona reicht, ist der Raum mit dem Leiter elektrisch verbunden und die Kapazität des Stromkreises wird nicht durch die Oberfläche des metallischen Leiters, sondern durch die äussere Oberfläche des den Leiter umgebenden elektrostatischen Leuchtens bestimmt. Mit steigender Spannung erhöht sich also die Kapazität, sobald die elektrostatische Corona erscheint. Die Kondensanz nimmt daher ab und zu gleicher Zeit erscheint eine Energiekomponente, die den Energieverlust in der Corona darstellt. Diese Erscheinung ist in gewissem Sinne analog dem Sinken der magnetischen Induktanz infolge der Sättigung. Bei mässigen Spannungen kann die auf die Kapazität zurückzuführende Kondensanz als eine Konstante betrachtet werden, die aus der wattlosen Komponente (der Kondensanz im eigentlichen Sinne) und einer Energiekomponente (der dielektrischen Hysteresis) besteht.

Indessen fängt die Kondensanz einer sekundären Zelle bei sehr niedrigen Spannungen zu zu sinken an, sobald die gegenelektromotorische Kraft der chemischen Trennung erreicht wird.

Die Kondensanz einer synchronen Wechselstrommaschine ist eine variable Grösse, d. h. die synchrone Reaktanz ändert sich allmählich, entsprechend dem Verhältnis zwischen Klemmenspannung und gegenelektromotorischer Kraft, von Induktanz über Null zu Kondensanz.

Ausser den vorhin erörterten Erscheinungen als Ursachen der Energiekomponenten und wattlosen Komponenten des Stromes und der elektromotorischen Kraft muss das Entweichen der Elektrizität ebenfalls als eine Energiekomponente betrachtet werden, d. h. das direkte Entweichen des Stromes vom Leiter zur Rückleitung durch das umgebende

Medium, infolge ungenügender Isolierungsfähigkeit. Der entweichende Strom stellt eine effektive Konduktanz g dar, die theoretisch von der elektromotorischen Kraft unabhängig ist, aber in Wirklichkeit häufig mit der elektromotorischen Kraft und zwar infolge des Sinkens des Isolationswiderstandes des Mediums stark steigt, sobald die Grenze der Isolierfähigkeit erreicht ist.

101. Im Vorangegangenen sind die Erscheinungen, die in einem Wechselstromstromkreise Energieverluste verursachen, erörtert worden und es wurde erklärt, dass das gegenseitige Verhältnis zwischen dem Strom und der elektromotorischen Kraft durch zwei der folgenden vier Konstanten ausgedrückt werden kann:

1. durch die Energiekomponente der elektromotorischen Kraft in Phase mit dem Strom, und gleich Strom multipliziert mit dem effektiven Widerstande r ;
2. durch die wattlose Komponente der elektromotorischen Kraft senkrecht zu dem Strom, und gleich Strom multipliziert mit der effektiven Reaktanz x ;
3. durch die Energiekomponente des Stromes in Phase mit der elektromotorischen Kraft, und gleich elektromotorischer Kraft multipliziert mit der effektiven Konduktanz g ;
4. durch die wattlose Komponente des Stromes senkrecht zur elektromotorischen Kraft, und gleich elektromotorischer Kraft multipliziert mit der effektiven Suszeptanz b .

In vielen Fällen ist die genaue Berechnung der Grössen r , x , g und b nicht möglich.

Im allgemeinen sind r , x , g und b nicht Konstanten des Stromkreises, sondern hängen, ausser von der Frequenz, mehr oder weniger von der elektromotorischen Kraft, von dem Strom u. s. w. ab. Daher ist es in jedem einzelnen Falle notwendig, die Änderung von r , x , g und b zu ermitteln, oder zu untersuchen, ob und durch welches

Bereich hindurch sie als Konstanten angenommen werden können.

Im folgenden werden die Grössen r , x , g und b immer als die Koeffizienten der Energie und der wattlosen Komponenten des Stromes und der elektromotorischen Kraft angenommen, d. h. als die effektiven oder äquivalenten Werte, so dass die Resultate direkt auf den elektrischen Stromkreis, der Eisen und dielektrische Verluste enthält, angewendet werden können.

Indem wir nun in den Kapiteln VII—IX anstatt des Ohm'schen Widerstandes den effektiven Widerstand u. s. w. einführen, wie bereits in dem vorangegangenen Kapitel erörtert wurde, finden die Resultate innerhalb des in dem vorangegangenen Kapitel erörterten Bereichs auch auf Stromkreise Anwendung, die Eisen und solches Material enthalten, das ausserhalb des elektrischen Leiters Energieverluste verursacht.

Kapitel XII.

Verteilte Kapazität, Induktanz, Widerstand und Stromverlust.

102. Soweit die Kapazität in den vorigen Kapiteln behandelt wurde, ist angenommen worden, dass der Kondensator oder im allgemeinen die Quelle negativer Reaktanz an einem bestimmten Punkte zu dem Stromkreise im Nebenschluss liegt. In vielen Fällen ist jedoch die Kapazität über die ganze Länge des Leiters verteilt, so dass der Stromkreis als eine unendliche Zahl von unendlich kleinen Kondensatoren, die unendlich nahe zusammen und im Nebenschluss zu ihm liegen, angenommen werden kann, wie das Diagramm in der Figur 83 zeigt.

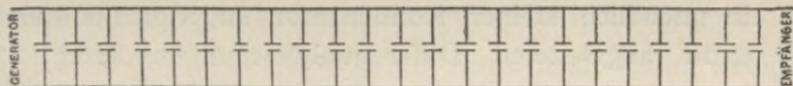


Fig. 83. Verteilte Kapazität.

In diesem Falle ändert sich sowohl die Intensität als auch die Phase des Stromes und infolgedessen auch die gegen elektromotorische Kraft der Induktanz und des Widerstandes von Punkt zu Punkt und es ist daher nicht mehr möglich, den Stromkreis in der gewöhnlichen Weise mittels des Vectordiagramms zu behandeln.

Diese Erscheinung ist besonders bei Fernleitungen bei unterirdischen Kabeln, namentlich bei konzentrischen Kabeln und bis zu einem gewissen Grade in den Hochspannungsspulen der Wechselstromtransformatoren bemerkenswert. Sie bewirkt, dass nicht nur die elektromotorischen

Kräfte, sondern auch die Ströme am Anfang und am Ende und an verschiedenen Punkten des Leiters in Intensität und Phase von einander verschieden sind.

Wo der Kapazitätseffekt der Leitung klein ist, kann er annähernd durch einen Kondensator von derselben Kapazität wie die Leitung und zu dieser im Nebenschluss dargestellt werden. Häufig macht es gar keinen Unterschied, ob dieser Kondensator am Generatorende, oder an dem Abnahmeende, oder in der Mitte der Leitung dieser parallel geschaltet gedacht wird. Am genauesten verfährt man, wenn man am Generator und am Motorende zwei Kondensatoren von je $\frac{1}{6}$ der Kapazität der Leitung und in der Mitte einen Kondensator von $\frac{2}{3}$ der Kapazität der Leitung im Nebenschluss zu dieser betrachtet. Unter diesem Gesichtspunkte, der auf der Simpson'schen Regel basiert, variieren die elektrischen Grössen in der Leitung parabolisch.

Ist aber die Kapazität der Leitung eine bedeutende und der Kondensatorstrom von derselben Grössenordnung als der Hauptstrom, dann ist eine derartige approximative Methode nicht zulässig; es muss vielmehr jedes Leitungselement als ein unendlich kleiner Kondensator angenommen und die dann abgeleiteten Differentialgleichungen integriert werden.

103. Daher ist es wünschenswert, zunächst die Grenzen festzustellen, innerhalb deren sich die annäherungsweise Ermittlung der Leitung durch einen oder durch drei Kondensatoren ergibt.

Wir nehmen z. B. an, dass die Leiter einen Durchmesser von einem Centimeter haben und 50 cm von einander entfernt sind und dass ferner die Länge der Übertragung 50 km beträgt. Dann erhalten wir die Kapazität der Übertragungsleitung aus der Formel

$$C = \frac{1,11 \times 10^{-6} kl}{4 \log \text{nat} \frac{2d}{\delta}} \text{ Mikrofara d,}$$

wo k die dielektrische Konstante des umgebenden Mediums, also in der Luft Eins, wo l die Länge des Leiters, also $5 \cdot 10^6$ cm, wo d die Entfernung der Leiter von einander, also 50 cm, und wo δ der Durchmesser des Leiters, also 1 cm ist.

Da $C = 0,3$ Mikrofarad,
so ist die Kapazitätsreaktanz

$$x = \frac{10^6}{2\pi NC} \text{ Ohm,}$$

wo N die Frequenz ist; also bei $N = 60$ Cyklen ergibt sich $x = 8,900$ Ohm und der Ladestrom der Leitung bei $E = 20,000$ Volt wird

$$i_0 = \frac{E}{x} = 2,25 \text{ Ampère.}$$

Der Widerstand einer Leitung von 100 km Länge und einem Centimeter Durchmesser beträgt 22 Ohm, so dass der durch die Leitung gesandte Hauptstrom bei einem Verlust von 10 % gleich 2,000 Volt

$$I = \frac{2,000}{22} = 91 \text{ Ampère}$$

beträgt, was einer Energie von ungefähr 1,800 Kilowatt entspricht.

In diesem Falle beträgt der Kondensatorstrom weniger als 2,5 % und er kann daher annäherungsweise durch einen Kondensator, der zur Leitung parallel geschaltet ist, dargestellt werden.

Wenn aber die Länge der Übertragung 150 km und die Spannung 30,000 Volt beträgt, so ist die Kapazitätsreaktanz x bei 60 Cyklen = 2,970 Ohm, der Ladestrom $i_0 = 10,1$ Ampère, der Leitungswiderstand $r = 66$ Ohm und der Hauptstrom I bei 10 % Verlust = 45,5 Ampère.

Daher macht der Kondensatorstrom ungefähr 22 % des Hauptstromes aus.

Bei einer Länge der Übertragung von 300 km steigt er bei einem Verlust von 10 % und bei denselben Dimensionen des Leiters auf nahezu 90 % des Haupt-

stromes; es wird daher eine genaue Untersuchung der Erscheinungen in der Leitung erforderlich.

In den meisten Fällen der Praxis ist der Kapazitätseffekt klein genug, um annäherungsweise durch einen respektive drei Kondensatoren im Nebenschluss zur Leitung dargestellt zu werden.

104. *A. Leitungskapazität, dargestellt durch einen Kondensator, der in der Mitte der Leitung im Nebenschluss liegt.*

Es sei:

$Y = g + jb$ die Admittanz des zu speisenden Stromkreises, $z = r - jx$ die Impedanz der Leitung, b_c die Kondensatorsuszeptanz der Leitung.

Es sei in Fig. 84 die elektromotorische Kraft und der Strom in dem zu speisenden Stromkreis mit E , bzw. I , die elektromotorische Kraft in der Mitte der Leitung mit E' und die elektromotorische Kraft und der Strom des Generators mit E_o , bzw. I_o bezeichnet.

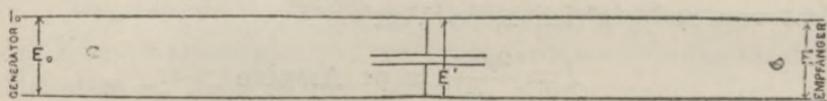


Fig. 84. Kapazität in der Mitte der Leitung im Nebenschluss.

Wir erhalten

$$I = E(g + jb);$$

$$E' = E + \frac{r - jx}{2} I$$

$$= E \left\{ 1 + \frac{(r - jx)(g + jb)}{2} \right\};$$

$$I_o = I - j b_c E_c'$$

$$= E \left\{ g + jb - jx \left[1 + \frac{(r - jx)(g + jb)}{2} \right] \right\};$$

$$E_o = E' + \frac{r - jx}{2} I_o$$

$$= E \left\{ 1 + \frac{(r - jx)(g + jb)}{2} + \frac{(r - jx)(g + jb)}{2} - \frac{j b_c (r - jx)}{2} - j b_c \frac{(r - jx)^2 (g + jb)}{4} \right\};$$

oder entwickelt

$$I_o = E \{ [g + b_c (r b - x g)] + j [(b - b_c) - (r g + x b)] \};$$

$$E_o = E \left\{ 1 + (r - j x) (g + j b) - \frac{j b_c}{2} (r - j x) \right. \\ \left. \left[1 + \frac{(r - j x) (g + j b)}{2} \right] \right\} \\ = E \left\{ 1 + (r - j x) \left(g + j b - \frac{j b_c}{2} \right) - \frac{j b_c}{4} (r - j x)^2 \right. \\ \left. (g + j b) \right\}.$$

105. *B. Leitungskapazität, dargestellt durch drei Kondensatoren in der Mitte und an den Enden der Leitung.*

In der Figur 85 bezeichnen wir die elektromotorische Kraft und den Strom in dem zu speisenden Stromkreis mit E , bzw. I , die elektromotorische Kraft in der Mitte der Leitung mit E' , den Strom am Ende der Leitung mit I' , den Strom am Generatorende der Leitung mit I'' und die elektromotorische Kraft und den Strom am Generator mit E_o , bzw. I_o . Im übrigen behalten wir dieselben Bezeichnungen bei, wie unter *A*.

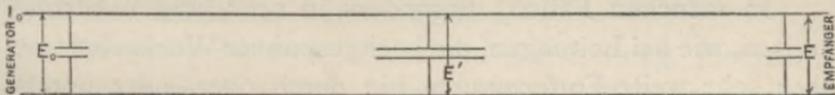


Fig. 85. Verteilte Kapazität.

Wir erhalten

$$I = E (g + j b);$$

$$I' = I - \frac{j b_c}{6} E$$

$$= E \left\{ g + j b - \frac{j b_c}{6} \right\};$$

$$E' = E + \frac{r - j x}{2} I'$$

$$= E \left\{ 1 + \frac{r - j x}{2} \left(g + j b - \frac{j b_c}{6} \right) \right\};$$

$$I'' = I' - \frac{4jb_c}{6} E'$$

$$= E \left\{ g + jb - \frac{5jb_c}{6} - \frac{jb_c}{3} (r - jx) \left(g + jb - \frac{jb_c}{6} \right) \right\};$$

$$E_o = E' + \frac{r - jx}{2} I'';$$

$$E_o = E \left\{ 1 + (r - jx) \left(g + jb - \frac{jb_c}{2} \right) - \frac{jb_c}{6} (r - jx)^2 \right. \\ \left. \left(g + jb - \frac{jb_c}{6} \right) \right\};$$

$$I_o = I'' - \frac{jb_c}{6} E_o;$$

$$I_o = E \left\{ (g + jb - jb_c) - \frac{jb_c}{6} (r - jx) \left(3g + 3jb - \frac{5jb_c}{6} \right) \right. \\ \left. - \frac{b_c^2}{36} (r - jx)^2 \left(g + jb - \frac{jb_c}{6} \right) \right\}.$$

Wie wir sehen, sind die Bezeichnungen in dem Ausdruck für E_o und I_o dieselben als bei A und B .

106. C. *Genaue Untersuchung der verteilten Kapazität, der Induktanz, des Stromverlustes und des Widerstandes.*

In manchen Fällen, besonders in sehr langen Stromkreisen, wie bei Leitungen, die hochgespannte Wechselströme über sehr weite Entfernungen hin durch ober- oder unterirdische Leitungen führen, oder die sehr schwache Ströme bei hoher Frequenz leiten, wie Telephonströme, ist die Betrachtung des *Leitungswiderstandes*, welcher elektromotorische Kräfte in Phase mit dem Strom verbraucht, und die Betrachtung der *Leitungsreaktanz*, welche elektromotorische Kräfte senkrecht zum Strom verbraucht, für die Erklärung der in der Leitung vorkommenden Erscheinungen nicht genügend; es müssen auch noch andere Faktoren dabei in Betracht gezogen werden.

In langen Leitungen, besonders bei hohen Spannungen, verzehrt die *elektrostatische Kapazität* der Leitung beträchtliche Ströme. Der Ladestrom des Leitungskondensators

ist proportional der Spannungsdifferenz und eilt der elektromotorischen Kraft um eine viertel Periode voraus. Entweder erhöht er den Hauptstrom oder er erniedrigt ihn, entsprechend dem Phasenverhältnis zwischen Hauptstrom und elektromotorischer Kraft.

Infolgedessen ändert sich der Strom in der Leitung von Punkt zu Punkt sowohl in Intensität als auch in Phase und die durch den Widerstand und die Induktanz verbrauchten elektromotorischen Kräfte ändern sich daher ebenfalls von Punkt zu Punkt in Phase und Intensität, weil sie von dem Strom abhängig sind.

Da kein Isolator einen unendlich grossen Widerstand besitzt und da bei hohen Spannungen nicht nur Stromverlust sondern sogar ein direktes *Entweichen von Elektrizität* in die Luft durch „stille“ Entladung stattfindet, so müssen wir das Vorhandensein eines Stromes annähernd proportional und in Phase mit der elektromotorischen Kraft der Leitung annehmen. Dieser Strom stellt den Energieverbrauch dar und ist analog der von dem Widerstand verbrauchten elektromotorischen Kraft, während der Kondensatorstrom und die elektromotorische Kraft der Induktanz wattlos sind.

Ferner induziert der durch eine Leitung fließende Wechselstrom in allen benachbarten Leitern sekundäre Ströme, die auf den primären Stromkreis zurückwirken und so elektromotorische Kräfte von *gegenseitiger Induktanz* in den primären Stromkreis einführen. Gegenseitige Induktanz ist weder in Phase, noch senkrecht zu dem Strom und kann deshalb in eine *Energiekomponente* von gegenseitiger Induktanz in Phase mit dem Strom aufgelöst werden, die wie eine Erhöhung des Widerstandes wirkt, und in eine *wattlose Komponente* senkrecht zum Strom, die die Selbstinduktanz vermindert.

Diese gegenseitige Induktanz darf keineswegs vernachlässigt werden, wie dies z. B. ihre störende Wirkung in Telephonleitungen zeigt.

Die wechselnde Spannung der Leitung induziert durch *elektrostatische Influenz* elektrische Ladungen in benachbarten Leitern ausserhalb des Stromkreises, die entsprechende entgegengesetzte Ladungen in den Leitungsdrähten bilden. Diese elektrostatische Influenz erfordert einen Stromaufwand proportional der elektromotorischen Kraft, der aus einer *Energiekomponente*, in Phase mit der elektromotorischen Kraft, und aus einer *wattlosen Komponente*, senkrecht zu ihr, besteht.

Das elektromagnetische Wechselstromkraftfeld, das durch den Strom in der Leitung hervorgerufen wird, erzeugt in gewissen Materialien durch magnetische Hysterese einen Energieverlust oder einen Verbrauch von elektromotorischer Kraft in Phase mit dem Strom, der wie eine Erhöhung des Widerstandes wirkt. Dieser elektromagnetische Hystereseverlust findet in dem Leiter selbst statt, wenn Eisendrähte gebraucht werden; er wird bei hohen Frequenzen ganz bedeutend, z. B. bei Telephonströmen.

Die Wirkung der *Wirbelströme* ist bereits bei der gegenseitigen Induktanz erwähnt worden, von der sie eine Energiekomponente ist.

Das elektrostatische Wechselstromkraftfeld verbraucht in Dielektriken durch die sogenannte *dielektrische Hysterese* Energie. In konzentrischen Kabeln, wo die elektrostatische Ladung im Dielektrikum relativ gross ist, kann die dielektrische Hysterese bei hohen Spannungen bei weitem mehr Energie verbrauchen, als der Widerstand.

Die dielektrische Hysterese erscheint in einem Stromkreise als Stromverbrauch, dessen Komponente in Phase mit der elektromotorischen Kraft der *dielektrische Energiestrom* ist, der als die Energiekomponente des Kapazitätsstromes bezeichnet werden kann.

Ausserdem entsteht eine Erhöhung des Ohm'schen Widerstandes durch *ungleiche Stromverteilung*, die man jedoch gewöhnlich nicht weiter zu beachten hat.

107. Es ergibt sich also allgemein pro Längeneinheit der Leitung:

Elektromotorische Kräfte in Phase mit dem Strom, und $= Ir$, somit Energieverbrauch darstellend, und verursacht durch:

Widerstand und seine Zunahme durch ungleichmäßige Stromverteilung im Leiter, Energiekomponente der *wechselseitigen Induktion*, *induzierte Ströme*, Energiekomponente der Selbstinduktion oder *magnetische Hysteresis*.

Elektromotorische Kräfte senkrecht zu dem Strom, und $= Ix$, somit wattlos, und verursacht durch:

Selbstinduktion, *wechselseitige Induktion*.

Ströme in Phase mit der elektromotorischen Kraft, und $= Eg$, somit Energieverbrauch darstellend, und verursacht durch:

Stromentweichung durch die Isolierung und „*stille*“ *Entladung*, Energiekomponente der *elektrostatischen Influenz*, Energiekomponente der Kapazität oder *dielektrische Hysteresis*.

Ströme senkrecht zur elektromotorischen Kraft, und $= Eb$, somit wattlos, und verursacht durch:

Kapazität, *elektrostatische Influenz*.

Wir erhalten daher vier Konstanten:

1. den effektiven Widerstand r ,
2. die effektive Reaktanz x ,
3. die effektive Konduktanz g ,
4. die effektive Suszeptanz $b = -b_c$,

für die Länge Eins der Leitung, die für die Längeneinheit der Leitung die Koeffizienten der in Phase mit dem Strom und der senkrecht zu ihm verbrauchten elektromotorischen Kraft und des in Phase mit der elektromotorischen Kraft und senkrecht zu ihr verbrauchten Stromes darstellen.

108. Diese Leitung wollen wir als ein Stromnetz irgend welcher Art speisend annehmen und den Strom und die elektromotorische Kraft an irgend einem Punkte dieser Leitung bestimmen.

D. h., die elektromotorische Kraft, die Stromstärke und ihre Phasendifferenz seien am Ende der Leitung gegeben. Zu bestimmen sind die elektromotorische Kraft und der Strom an irgend einem Punkte der Leitung, z. B. an den Generatorklemmen.

Oder es ist $Z_1 = r_1 - jx_1$ als Impedanz, oder $Y_1 = g_1 + jb_1$ als Admittanz des Abnahmestromkreises und die elektromotorische Kraft E_0 an den Generatorklemmen gegeben und es sollen der Strom und die elektromotorische Kraft an irgend einem Punkte der Leitung bestimmt werden u. s. w.

109. Zählen wir nun die Entfernung x von einem Punkte o der Leitung, welche die elektromotorische Kraft

$$E_1 = e_1 + je_1', \text{ und den Strom } I_1 = i_1 + ji_1',$$

hat, und zählen wir ferner x positiv in der Richtung der steigenden Energie und negativ in der Richtung der sinkenden Energie, so haben wir in einem Längendifferential dx der Leitung den Stromverlust

$$Eg dx,$$

den Kapazitätsstrom

$$-jEb_c dx;$$

daher ist der gesamte von dem [Leitungselement dx verbrauchte Strom

$$dI = E(g - jb_c) dx,$$

oder

$$\frac{dI}{dx} = E(g - jb_c). \quad (1)$$

Die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft ist $Irdx$, die durch die Reaktanz verbrauchte elektromotorische Kraft $-jIx dx$. Daher ist die gesamte in einem Leitungselement dx verbrauchte elektromotorische Kraft

$$dE = I(r - jx) dx,$$

oder

$$\frac{dE}{dx} = I(r - jx). \quad (2)$$

Diese *fundamentalen Differentialgleichungen*

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= E (g - j b_c), \\ \frac{dE}{dx} &= I (r - j x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 I}{dx^2} &= \frac{dE}{dx} (g - j b_c), \\ \frac{d^2 E}{dx^2} &= \frac{dI}{dx} (r - j x); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

sind in Beziehung auf I und E symmetrisch.

Durch Differentiation dieser Gleichungen erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 I}{dx^2} &= \frac{dE}{dx} (g - j b_c), \\ \frac{d^2 E}{dx^2} &= \frac{dI}{dx} (r - j x); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und durch Substitution von (1) und (2) in (3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 E}{dx^2} &= E (g - j b_c) (r - j x), \\ \frac{d^2 I}{dx^2} &= I (g - j b_c) (r - j x), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 E}{dx^2} &= E (g - j b_c) (r - j x), \\ \frac{d^2 I}{dx^2} &= I (g - j b_c) (r - j x), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

als *Differentialgleichungen* von E und I .

110. *Diese Differentialgleichungen sind identisch und I und E daher Funktionen, die nur durch ihre Grenzwerte verschieden sind.*

Die Gleichungen (4) und (5) sind von der Form

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = w (g - j b_c) (r - j x), \quad (6)$$

und ergeben durch Integration

$$w = a \varepsilon^{v x},$$

wo ε die Basis der natürlichen Logarithmen ist, denn differenziert erhalten wir

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = v^2 a \varepsilon^{v x} = v^2 w;$$

folglich

$$v^2 = (g - j b_c) (r - j x),$$

oder

$$v = \pm \sqrt{(g - j b_c) (r - j x)}; \quad (7)$$

Das allgemeine Integral ist daher

$$w = a \varepsilon^{+v x} + b \varepsilon^{-v x}, \quad (8)$$

wo a und b die beiden Integrationskonstanten sind.

Setzen wir in (7) für

$$v = \alpha - j \beta \quad (9)$$

ein, so erhalten wir

$$(\alpha - j\beta)^2 = (g - jb_c)(r - jx);$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= gr - xb_c; \\ 2\alpha\beta &= gx + b_cr; \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

und daraus $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(g^2 + b_c^2)(r^2 - x^2)}$; (10)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2}\{V(g^2 + b_c^2)(r^2 + x^2) + (gr - b_c x)\}}; \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2}\{V(g^2 + b_c^2)(r^2 + x^2) - (gr - b_c x)\}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Indem wir (9) in (8) einsetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned} w &= a\varepsilon^{(\alpha - j\beta)x} + b\varepsilon^{(-\alpha + j\beta)x}, \\ &= a\varepsilon^{\alpha x}(\cos\beta x - j\sin\beta x) + b\varepsilon^{-\alpha x}(\cos\beta x + j\sin\beta x); \\ w &= (a\varepsilon^{\alpha x} + b\varepsilon^{-\alpha x})\cos\beta x - j(a\varepsilon^{\alpha x} - b\varepsilon^{-\alpha x})\sin\beta x. \end{aligned} \quad (12)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (4) und (5).

Durch Differentiation von (8) erhalten wir

$$\frac{dw}{dx} = v(a\varepsilon^{\alpha x} - b\varepsilon^{-\alpha x});$$

und daraus, wenn wir (9) einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= (\alpha - j\beta)\{a\varepsilon^{\alpha x} - b\varepsilon^{-\alpha x}\}\cos\beta x - j(a\varepsilon^{\alpha x} \\ &\quad + b\varepsilon^{-\alpha x})\sin\beta x. \end{aligned} \quad (13)$$

Setzen wir nun I für w und (13) in (1) ein und bezeichnen $(\alpha - j\beta)a$ mit A und $(\alpha - j\beta)b$ mit B , so erhalten wir

$$\left\{ \begin{aligned} I &= \frac{1}{\alpha - j\beta} \{ (A\varepsilon^{\alpha x} + B\varepsilon^{-\alpha x})\cos\beta x - j(A\varepsilon^{\alpha x} - B\varepsilon^{-\alpha x}) \\ &\quad \sin\beta x \}; \\ E &= \frac{1}{g - jb_c} \{ (A\varepsilon^{\alpha x} - B\varepsilon^{-\alpha x})\cos\beta x - j(A\varepsilon^{\alpha x} + B\varepsilon^{-\alpha x}) \\ &\quad \sin\beta x \}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wo A und B die Integrationskonstanten sind.

Dies sind die allgemeinen Integralgleichungen des Problems.

111. Ist $I_1 = i_1 + j i'_1$ der Strom, $E_1 = e_1 + j e'_1$ die elektromotorische Kraft an dem Punkt $x = 0$ und setzen (15) wir (15) in (14) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} 2A &= \{(\alpha i_1 + \beta i'_1) + (g e_1 + b_c e'_1)\} \\ &\quad + j \{(\alpha i'_1 - \beta i_1) + (g e'_1 - b_c e_1)\}, \\ 2B &= \{(\alpha i_1 + \beta i'_1) - (g e_1 + b_c e'_1)\} \\ &\quad + j \{(\alpha i'_1 - \beta i_1) - (g e'_1 - b_c e_1)\}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wo α und β durch die Gleichungen (11) bestimmt sind.

112. Ist $Z = R - j X$ die Impedanz des Abnahmestromkreises $E_o = e_o + j e'_o$ (17)

die elektromotorische Kraft an den Klemmen der dynamoelektrischen Maschine und l die Länge der Leitung, so erhalten wir für $x = 0$

$$I = \frac{A + B}{\alpha - j\beta},$$

$$E = \frac{A - B}{g - j b_c};$$

folglich
$$Z = \frac{E}{I} = \frac{A - B}{A + B} \frac{\alpha - j\beta}{g - j b_c};$$

oder
$$\frac{A - B}{A + B} = Z \frac{g - j b_c}{\alpha - j\beta}, \quad (18)$$

und für $x = l$

$$E_o = \frac{1}{g - j b_c} \{A \varepsilon^{\alpha l} - B \varepsilon^{-\alpha l}\} \cos \beta l - j \{A \varepsilon^{\alpha l} + B \varepsilon^{-\alpha l}\} \sin \beta l. \quad (19)$$

Die Gleichungen (18) und (19) bestimmen die Konstanten A und B , die, in (14) eingesetzt, die bestimmten Integralgleichungen ergeben.

Die Länge
$$x_o = \frac{2\pi}{\beta} \quad (20)$$

ist eine ganze Wellenlänge, d. h. in der Entfernung $\frac{2\pi}{\beta}$ wiederholen sich die Phasen des Stromes und der elektromotorischen Kraft und in der halben Entfernung sind sie entgegengesetzt.

Daraus ergibt sich die bemerkenswerte Bedingung, dass an verschiedenen Punkten sehr langer Leitungen die Ströme in entgegengesetzten Richtungen fließen und die elektromotorischen Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind.

113. Die Phasendifferenz ω zwischen dem Strom I und der elektromotorischen Kraft E an irgend einem Punkte x der Leitung wird durch die Gleichung

$$D (\cos \omega + j \sin \omega) = \frac{E}{I}$$

bestimmt, in der D eine Konstante ist.

Daher ändert sich ω von Punkt zu Punkt und oscilliert um einen Grenzwert ω_∞ , den es für $x = \infty$ erreicht. Diese Phasendifferenz ω_∞ , die der Strom und die elektromotorische Kraft im Unendlichen erreichen, wird durch den Ausdruck

$$D (\cos \omega_\infty + j \sin \omega_\infty) = \left[\frac{E}{I} \right]_{x=\infty}$$

bestimmt oder, wenn wir für E und I ihre Werte einsetzen, und weil $\varepsilon^{-\alpha x} = 0$ und $A \varepsilon^{\alpha x} (\cos \beta x - j \sin \beta x)$ herausfällt, so ist

$$\begin{aligned} D (\cos \omega_\infty + j \sin \omega_\infty) &= \frac{\alpha - j\beta}{g - j b_c} \\ &= \frac{(\alpha g + \beta b_c) - j(\alpha b_c - \beta g)}{b_c^2 + g^2}; \end{aligned}$$

damit folgt $\operatorname{tg} \omega_\infty = \frac{-\alpha b_c + \beta g}{\alpha g + \beta b_c}$. (21)

Der Winkel ω_∞ wird Null, d. h. Strom und elektromotorische Kraft kommen mehr und mehr in Phase überein, wenn

$$\alpha b_c - \beta g = 0;$$

d. h. wenn

$$\alpha : \beta = g : b_c,$$

oder

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{g^2 - b_c^2}{2gb_c};$$

wenn wir (10) einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{gr - b_c x}{gx + b_c r} = \frac{g^2 - b_c^2}{2gb_c};$$

und wenn wir entwickeln

$$r : x = g : b_c; \quad (22)$$

d. h. der Widerstand verhält sich zur Induktanz wie der Elektrizitätsverlust zur Kapazität.

Der Winkel ω_∞ beträgt 45° ; d. h. Strom und elektromotorische Kraft weichen um eine achte Periode von einander ab, wenn $-\alpha b_c + \beta g = \alpha g + \beta b_c$; oder wenn

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{b_c + g}{b_c + g}$$

ist, woraus sich $rg + xb_c = 0$ (23)

ergibt; d. h. zwei der vier Leitungskonstanten müssen Null sein und zwar entweder g und x oder g und b_c .

114. In Figur 86 ist das Diagramm einer Leitung dargestellt, mit der Entfernung von der Speiseleitung als Abscisse. Das Diagramm stellt anderthalb vollständige Wellen dar und giebt den gesamten effektiven Strom, die gesamte elektromotorische Kraft und die Phasendifferenz zwischen beiden als Funktionen der Entfernung von dem Abnahmestromkreis, und zwar unter den Bedingungen, dass die elektromotorische Kraft an dem zu speisenden Ende 10000 Volt, also $E_1 = e_1 = 10000$ Volt, und der Strom = 65 Ampère bei einem Energiekoeffizienten von 0,385 beträgt; daher ist

$$I = i_1 + j i_1' = 25 + 60 j;$$

die Leitungskonstanten für die Längeneinheit sind:

$$\left. \begin{array}{l} r = 1, \\ k = 4, \end{array} \right\} \begin{array}{l} g = 2 \cdot 10^{-5}; \\ b_c = 20 \cdot 10^{-5}; \end{array}$$

folglich sind

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 4,95 \cdot 10^{-3}, \\ \beta = 28,36 \cdot 10^{-3}, \\ \alpha^2 + \beta^2 = 0,829 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right\}$$

$$x_0 = L = \frac{2\pi}{\beta} = 221,5$$

die Länge der Leitung, entsprechend einer vollständigen Periode der Fortpflanzungswelle und

$$\left. \begin{array}{l} A = 1,012 - 1,206 j, \\ B = 0,812 + 0,794 j. \end{array} \right\}$$

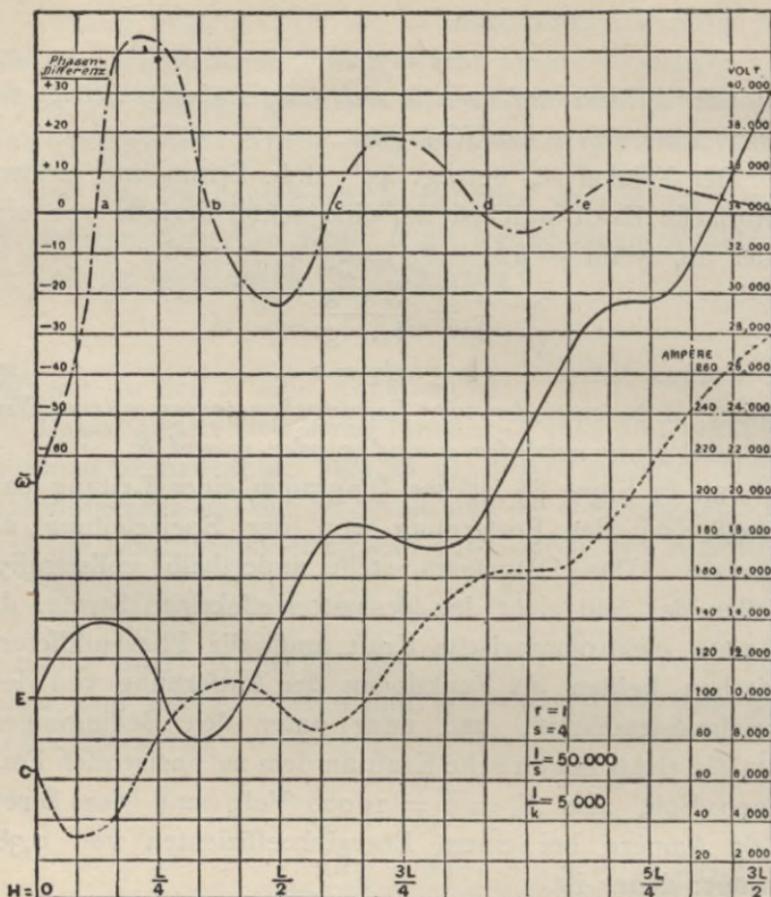


Fig. 86.

Diese Werte eingesetzt, ergeben

$$I = \{ \varepsilon^{\alpha x} (47,3 \cos \beta x + 27,4 \sin \beta x) \\ - \varepsilon^{-\alpha x} (22,3 \cos \beta x + 32,6 \sin \beta x) \} \\ + j \{ \varepsilon^{\alpha x} (27,4 \cos \beta x - 47,3 \sin \beta x) \\ + \varepsilon^{-\alpha x} (32,6 \cos \beta x - 22,3 \sin \beta x) \};$$

$$E = \{ \varepsilon^{\alpha x} (6450 \cos \beta x + 4410 \sin \beta x) \\ + \varepsilon^{-\alpha x} (3530 \cos \beta x + 4410 \sin \beta x) \} \\ + j \{ \varepsilon^{\alpha x} (4410 \cos \beta x - 6450 \sin \beta x) \\ - \varepsilon^{-\alpha x} (4410 \cos \beta x + 3530 \sin \beta x) \};$$

$$\operatorname{tg} \omega_{\infty} = \frac{-\alpha b_c + \beta g}{\alpha g + \beta b_c} = -0,073, \quad \omega_{\infty} = -4,2^{\circ}.$$

115. Im Folgenden seien einige besondere Fälle angeführt:

A. *Offener Stromkreis am Ende der Leitung:*

$$x=0 \quad I_1=0.$$

$$A=(g e_1 + b_c e'_1) + j(g e'_1 - b_c e_1) = -B;$$

folglich

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{g-jb_c} A \{(\varepsilon^{\alpha x} + \varepsilon^{-\alpha x}) \cos \beta x - j(\varepsilon^{\alpha x} - \varepsilon^{-\alpha x}) \sin \beta x\}; \\ I &= \frac{1}{\alpha - j\beta} A \{(\varepsilon^{\alpha x} - \varepsilon^{-\alpha x}) \cos \beta x - j(\varepsilon^{\alpha x} + \varepsilon^{-\alpha x}) \sin \beta x\}. \end{aligned} \right\}$$

B. *Leitung, die an ihrem Ende mit der Erde verbunden ist:*

$$x=0 \quad E_1=0.$$

$$A=(\alpha i_1 + \beta i'_1) + j(\alpha i'_1 - \beta i_1) = B$$

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{g-jb_c} A \{(\varepsilon^{\alpha x} - \varepsilon^{-\alpha x}) \cos \beta x - j(\varepsilon^{\alpha x} + \varepsilon^{-\alpha x}) \sin \beta x\}; \\ I &= \frac{1}{\alpha - j\beta} A \{(\varepsilon^{\alpha x} + \varepsilon^{-\alpha x}) \cos \beta x - j(\varepsilon^{\alpha x} - \varepsilon^{-\alpha x}) \sin \beta x\}. \end{aligned} \right\}$$

C. *Unendlich langer Leiter:*

Wenn wir x durch $-x$ ersetzen, d. h. die Entfernung positiv in der Richtung der abnehmenden Energie nehmen, so erhalten wir für $x=\infty$

$$I=0, \quad E=0;$$

folglich

$$B=0,$$

und

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{g-jb_c} A \varepsilon^{-\alpha x} (\cos \beta x + j \sin \beta x); \\ I &= \frac{1}{\alpha - j\beta} A \varepsilon^{-\alpha x} (\cos \beta x + j \sin \beta x), \end{aligned} \right\}$$

somit einen allmählichen Verfall der elektrischen Welle.

Die gesamte Impedanz des unendlich langen Leiters ist

$$\begin{aligned} Z &= \frac{E}{I} \\ &= \frac{\alpha - j\beta}{g - jb_c} \\ &= \frac{(\alpha - j\beta)(g + jb_c)}{g^2 + b_c^2} = \frac{(\alpha g + \beta b_c) - j(\beta g - \alpha b_c)}{g^2 + b_c^2}. \end{aligned}$$

Der unendlich lange Leiter wirkt wie eine Impedanz

$$Z = \frac{\alpha g + \beta b_c}{g^2 + b_c^2} = j \frac{\beta g - \alpha b_c}{g^2 + b_c^2};$$

also wie ein Widerstand

$$R = \frac{\alpha g + \beta b_c}{g^2 + b_c^2},$$

der mit einer Reaktanz

$$X = \frac{\beta g - \alpha b_c}{g^2 + b_c^2}$$

kombiniert ist.

Wir erhalten also als Phasendifferenz zwischen der elektromotorischen Kraft und dem Strom

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{X}{R} = \frac{\beta g - \alpha b_c}{\alpha g + \beta b_c},$$

die an allen Punkten der Leitung konstant ist.

Ist $g = 0$ und $x = 0$, so erhalten wir

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{b_c r}{2}};$$

folglich

$$\operatorname{tg} \omega = 1,$$

$$\omega = 45^\circ;$$

d. h. Strom und elektromotorische Kraft weichen um eine achte Periode von einander ab.

D. Generator, der einen geschlossenen Stromkreis speist:

Es sei $x = 0$ der Mittelpunkt des Stromkreises: dann ist

$$E_x = -E_{-x},$$

also

$$E = 0 \text{ bei } x = 0$$

und

$$I_x = I_{-x}.$$

Diese Gleichungen sind dieselben wie bei *B*, wo die Leitung bei $x = 0$ mit der Erde verbunden ist.

Kapitel XIII.

Der Wechselstromtransformator.

116. Der einfachste Wechselstrom-Apparat ist der Transformator. Er besteht aus einem magnetischen Stromkreise, der mit zwei elektrischen Stromkreisen, einem primären und einem sekundären, verkettet ist. Der primäre Stromkreis wird durch eine zugeführte elektromotorische Kraft erregt, während in dem sekundären eine elektromotorische Kraft induziert wird. Im primären Stromkreise wird also Energie verbraucht und im sekundären eine entsprechende Energie erzeugt.

Da der magnetische Stromkreis mit beiden elektrischen Stromkreisen verkettet ist, so muss die im sekundären und primären Stromkreise pro Windung induzierte elektromotorische Kraft dieselbe sein. Da die primäre induzierte elektromotorische Kraft annähernd gleich der Klemmenspannung ist, so stehen die elektromotorischen Kräfte an den primären und sekundären Klemmen annähernd in demselben Verhältnis wie ihre Windungen. Da die in dem sekundären Stromkreise erzeugte Energie annähernd gleich der in dem primären verbrauchten ist, so verhalten sich die primären und sekundären Ströme annähernd umgekehrt wie die Windungszahlen.

117. Ausser dem mit beiden elektrischen Stromkreisen verketteten Kraftlinienfluss (welcher Fluss in einem geschlossenen magnetischen Transformatorstromkreise niedrige Reluktanz besitzt), geht zwischen den primären und sekundären Spulen ein magnetischer Streulinienfluss hindurch, der nur eine Spule umgibt, ohne mit der anderen verkettet zu sein. Dieser magnetische Streulinienfluss ist

proportional dem in dem elektrischen Stromkreise fließenden Strom; oder besser die sie erzeugenden Ampèrewindungen, oder die magnetomotorische Kraft, wachsen mit wachsender Belastung des Transformators und machen seine sogenannte Selbstinduktion aus, während die beide Spulen umgebenden Kraftlinien als gegenseitige Induktanz betrachtet werden können. Jenes Kraftlinienfeld der Streuung oder Selbstinduktion erzeugt in dem sekundären Stromkreise keine elektromotorische Kraft und ist daher nicht wünschenswert, da es einen Spannungsverlust und eine Verminderung der Leistung verursacht. Daher werden bei Transformatoren für konstante Spannung die primären und sekundären Spulen so nahe als möglich aneinander gebracht, um die Streuung zu reduzieren.

Somit ist unter der Selbstinduktion eines Stromkreises nicht der gesamte durch ihn erzeugte und mit ihm verkettete Magnetismus zu verstehen, sondern nur der (gewöhnlich kleine) Teil des magnetischen Feldes, das einen Stromkreis umgibt, ohne sich mit dem anderen Stromkreis zu verketteten.

118. Der wechselnde Kraftlinienfluss des magnetischen Stromkreises, der beide elektrische Stromkreise umgibt, wird durch die resultierende magnetisierende Wirkung des primären und sekundären Stromkreises erzeugt.

Dieses magnetische Feld wird durch die elektromotorische Kraft des Transformators, durch die Windungszahl und durch die Frequenz bestimmt.

Ist Φ der maximale Kraftlinienfluss, N die Frequenz und n die Zahl der Windungen der Spule, so ist die in dieser Spule induzierte elektromotorische Kraft

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{2} \pi N n \Phi 10^{-8} \text{ Volt,} \\ &= 4,44 N n \Phi 10^{-8} \text{ Volt;} \end{aligned}$$

und wenn die elektromotorische Kraft, die Frequenz und die Windungszahl bestimmt sind, so ist der maximale Kraftlinienfluss

$$\Phi = \frac{E 10^8}{\sqrt{2} \pi N n}.$$

Um in dem Transformator den Magnetismus Φ hervorzubringen, ist eine magnetomotorische Kraft von \mathcal{F} Ampèrewindungen erforderlich, die durch die Form und die magnetische Charakteristik des Eisens und zwar in der in dem Kapitel X beschriebenen Weise bestimmt wird.

In dem Transformator mit geschlossenem magnetischem Kreislauf ist z. B. die maximale magnetische Induktion

$$\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{S},$$

wo S den Querschnitt des magnetischen Stromkreises bedeutet.

119. Um eine Felddichte \mathfrak{B} zu induzieren, sind \mathcal{H}_m Ampèrewindungen als maximale magnetomotorische Kraft oder $\frac{\mathcal{H}_m}{\sqrt{2}}$ effektive Ampèrewindungen pro Längeneinheit des magnetischen Stromkreises erforderlich, also für den gesamten magnetischen Stromkreis von der Länge l

$$\mathcal{F} = \frac{l \mathcal{H}_m}{\sqrt{2}} \text{ Ampèrewindungen,}$$

oder

$$I = \frac{\mathcal{F}}{n} = \frac{l \mathcal{H}_m}{n\sqrt{2}} \text{ Ampère,}$$

wo n die Zahl der Windungen bezeichnet.

Bei Leerlauf oder offenem sekundärem Stromkreise wird diese magnetomotorische Kraft \mathcal{F} durch den *Erregerstrom* I_{00} erzeugt, d. i. durch jenen kleinen Betrag des primären Stromes, der durch den Transformator bei offenem sekundärem Stromkreis hindurchgeht.

In einem Transformator mit offenem magnetischem Stromkreis, z. B. in einem Igeltransformator, ist die magnetomotorische Kraft \mathcal{F} gleich der Summe der magnetomotorischen Kräfte, die in dem Eisen- und Luftteil des magnetischen Stromkreises verbraucht werden. (Siehe Kapitel X.)

Die Energie des Erregerstromes ist gleich der Energie, die von der Hysteresis und den Wirbelströmen und von dem Ohm'schen Widerstand verbraucht wird.

Der Erregerstrom stellt keine Sinuswelle dar, sondern er ist wenigstens in dem Transformator mit geschlossenem magnetischem Kreislauf sehr durch Hysteresis verzerrt, weniger in dem Transformator mit offenem magnetischem Kreislauf. Der Erregerstrom kann durch eine aequivalente Sinuswelle I_{00} von gleicher Intensität und Energie mit der verzerrten Welle und durch eine wattlose höhere harmonische von wesentlich dreifacher Frequenz dargestellt werden.

Da die höhere harmonische Welle im Vergleich zu dem gesamten Erregerstrom klein ist und der Erregerstrom nur einen Bruchteil des gesamten primären Stromes ausmacht, so kann die höhere harmonische Welle für die meisten praktischen Zwecke vernachlässigt und der Erregerstrom durch die aequivalente Sinuswelle ersetzt werden.

Diese aequivalente Sinuswelle I_{00} eilt der Welle Φ des Magnetismus um den Winkel α voran, dem Winkel der Hysteresisvoreilung, und besteht aus zwei Komponenten, aus dem hysteretischen Energiestrom senkrecht zur magnetischen Strömung und daher in Phase mit der induzierten elektromotorischen Kraft, $I_{00} \sin \alpha$, und aus dem magnetisierenden Strom in Phase mit dem magnetischen Feld und infolgedessen senkrecht zu der induzierten elektromotorischen Kraft, $I_{00} \cos \alpha$, einer Komponente, die wattlos ist.

Der Erregerstrom I_{00} wird durch die Form und durch die magnetische Charakteristik des Eisens und durch die Zahl der Windungen bestimmt. Der hysteretische Energiestrom ist

$$I_{00} \sin \alpha = \frac{\text{in dem Eisen verbrauchte Energie}}{\text{induzierte elektromotorische Kraft}}.$$

120. Graphisch wird das Polardiagramm der magnetomotorischen Kräfte eines Transformators auf folgende Weise dargestellt:

Es sei in der Figur 87 $O\Phi$ das magnetische Feld in Intensität und Phase (der Bequemlichkeit halber werden als Intensitäten durchweg die effektiven Werte gebraucht), wobei wir ihre Phase vertikal annehmen, d. h. wenn wir

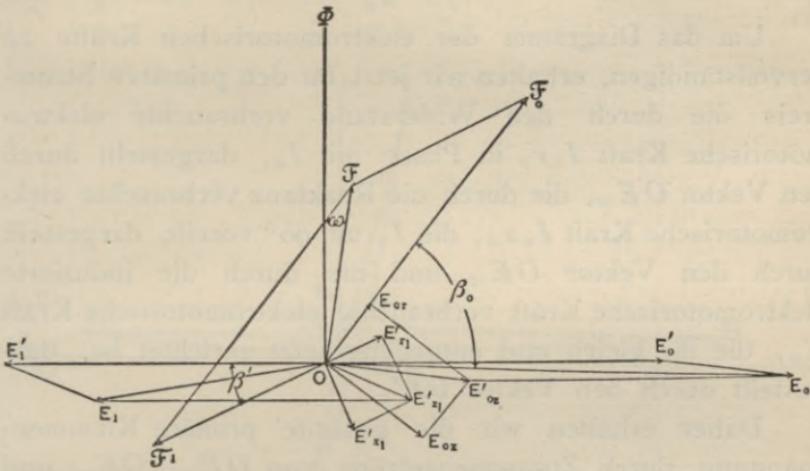


Fig. 87.

die Zeit von dem Moment an zählen, wo der steigende Magnetismus seinen Nullwert erreicht. Alsdann wird die resultierende magnetomotorische Kraft durch den Vektor $O\mathcal{F}$ dargestellt, der $O\Phi$ um den Winkel $\mathcal{F}O\Phi = \omega$ voreilt.

Die induzierten elektromotorischen Kräfte haben die Phase 180^0 ; sie werden also in der Richtung nach links eingetragen und durch die Vektoren OE_0' und OE_1' dargestellt.

Ist nun β' der Phasenwinkel in dem sekundären Stromkreise infolge der gesamten (inneren und äusseren) sekundären Reaktanz, so verschiebt sich der sekundäre Strom I_1 und auch die sekundäre magnetomotorische Kraft $\mathcal{F}_1 = n_1 I_1$ hinter E_1' um den Winkel β' und hat somit die Phase $180^0 + \beta'$, die durch den Vektor $O\mathcal{F}_1$ repräsentiert wird. Konstruieren wir ein Parallelogramm der magnetomotorischen Kräfte mit $O\mathcal{F}$ als Diagonale und $O\mathcal{F}_1$ als Seite, so ist die andere Seite oder $O\mathcal{F}_0$ die primäre

magnetomotorische Kraft in Intensität und Phase, und als primären Strom erhalten wir, wenn wir durch die Zahl n_0 der primären Windungen dividieren,

$$I_0 = \frac{\mathcal{F}_0}{n_0}.$$

Um das Diagramm der elektromotorischen Kräfte zu vervollständigen, erhalten wir jetzt für den primären Stromkreis die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft $I_0 r_0$ in Phase mit I_0 , dargestellt durch den Vektor OE_{or} , die durch die Reaktanz verbrauchte elektromotorische Kraft $I_0 x_0$, die I_0 um 90° voreilt, dargestellt durch den Vektor OE_{ox} und die durch die induzierte elektromotorische Kraft verbrauchte elektromotorische Kraft E_0 , die ihr gleich und entgegengesetzt gerichtet ist, dargestellt durch den Vektor OE'_0 .

Daher erhalten wir die gesamte primäre Klemmenspannung durch Zusammensetzung von OE_{or} , OE_{ox} und OE'_0 mittels des Parallelogramms der elektromotorischen Kräfte

$$E_0 = OE_0,$$

und die Phasendifferenz zwischen der primären Klemmenspannung und dem primären Strom

$$\beta_0 = E_0 O \mathcal{F}_0.$$

In dem sekundären Stromkreise erhalten wir als gegen elektromotorische Kraft des Widerstandes $I_1 r_1$ entgegengesetzt gerichtet zu I_1 , dargestellt durch den Vektor $OE_1 r'$, als gegen elektromotorische Kraft der Reaktanz $I_1 x_1$, die 90° hinter I_1 zurückbleibt, dargestellt durch den Vektor $OE'_1 x_1$ und als induzierte elektromotorische Kräfte E'_1 , dargestellt durch den Vektor OE'_1 .

Daher ist die durch Zusammensetzung von $OE_1 r'$, $OE_1 x'$ und OE'_1 mittels des Parallelogramms der elektromotorischen Kräfte erhaltene sekundäre Klemmenspannung

$$E_1 = OE_1,$$

und die Phasendifferenz zwischen dieser und dem sekundären Strom

$$\omega_1 = E_1 O \mathcal{F}_1.$$

Für den primären Stromkreis sind der Bequemlichkeit halber die Komponenten der Klemmenspannung, die zur Überwindung der gegen elektromotorischen Kräfte erforderlich ist, benutzt, und im sekundären Stromkreise die gegen elektromotorischen Kräfte.

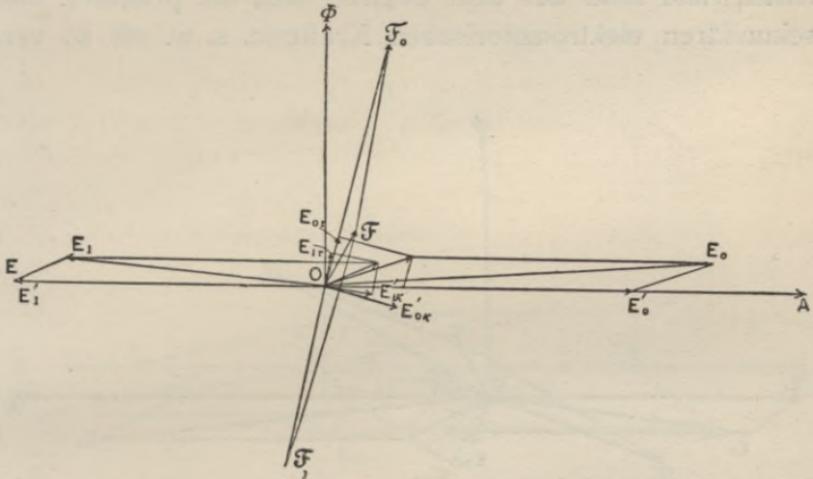


Fig. 88. Transformator diagramm mit einer Phasennacheilung von 80° im sekundären Stromkreise.

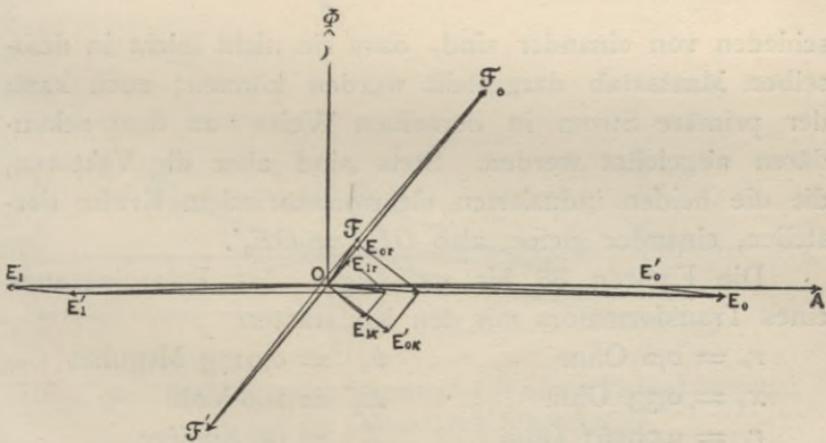


Fig. 89. Transformator diagramm mit einer Phasennacheilung von 50° im sekundären Stromkreise.

121. Bei der Konstruktion des Transformatoridiagramms ist es meistens vorzuziehen, die sekundären Grössen, den Strom und die elektromotorische Kraft nicht direkt einzuzichnen, sondern entsprechend aus dem primären Stromkreis durch Multiplikation mit dem Windungsverhältnis $a = \frac{n_0}{n_1}$ abzuleiten, und zwar aus dem Grunde, weil die primären und sekundären elektromotorischen Kräfte u. s. w. oft so ver-

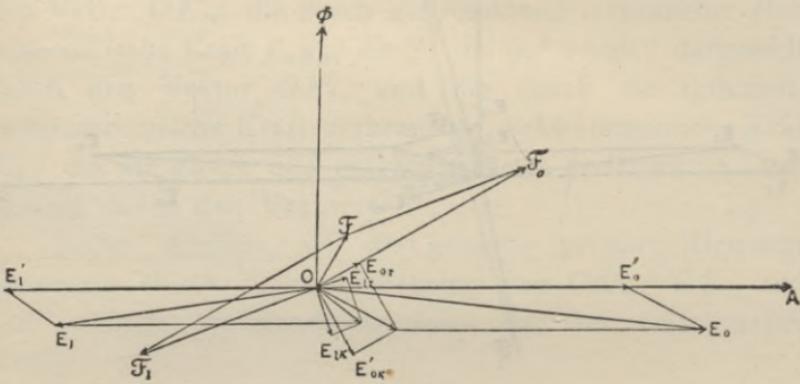


Fig. 90. Transformatoridiagramm mit einer Phasennacheilung von 20° im sekundären Stromkreise.

schieden von einander sind, dass sie nicht leicht in demselben Maassstab dargestellt werden können; auch kann der primäre Strom in derselben Weise von dem sekundären abgeleitet werden. Stets sind aber die Vektoren, die die beiden induzierten elektromotorischen Kräfte darstellen, einander gleich, also $OE'_1 = OE'_0$.

Die Figuren 88 bis 94 zeigen das Polardiagramm eines Transformators mit den Konstanten

$r_0 = 0,2$ Ohm	$b_0 = 0,0173$ Megohm
$x_0 = 0,33$ Ohm	$E'_1 = 100$ Volt
$r_1 = 0,00167$ Ohm	$I_1 = 60$ Ampère
$x_1 = 0,0025$ Ohm	$a = 10$
$g_0 = 0,0100$ Megohm	

für folgende Bedingungen im sekundären Stromkreise:

β_1' bei 80° Nacheilung in Fig. 88.

50° " " " 89.

20° " " " 90.

0° , oder in Phase " " 91.

β_1' bis 20° Voreilung in Fig. 92.

50° " " " 93.

80° " " " 94.

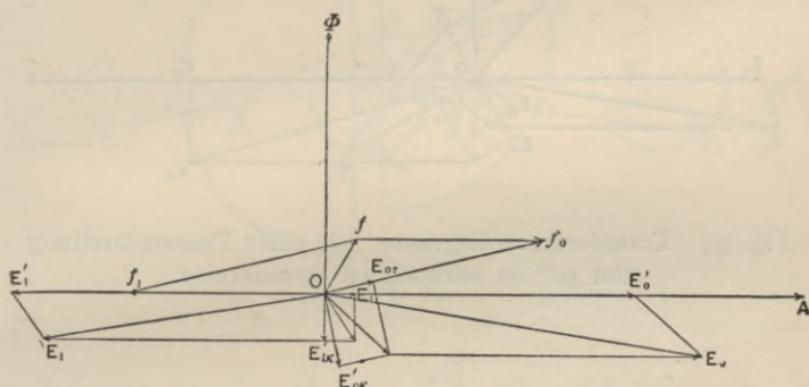


Fig. 91. Transformatoridiagramm, dessen sekundärer Strom in Phase mit der elektromotorischen Kraft ist.

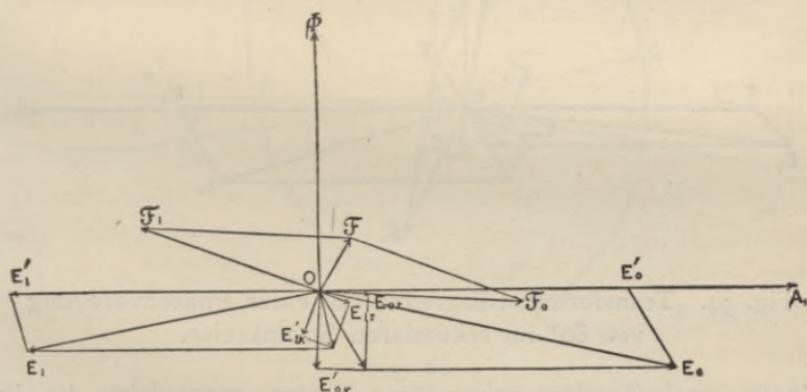


Fig. 92. Transformatoridiagramm mit einer Phasenvoreilung von 20° im sekundären Stromkreise.

Wir sehen, dass sich mit β_1 die Werte E_o , g_1 , g_o u. s. w. in Intensität und Richtung ändern. Die von diesen

Werten beschriebenen Örtter sind Kreise und werden in der Figur 95 durch den entsprechenden Punkt der induktionsfreien Belastung markiert. Der Teil des Ortes, der

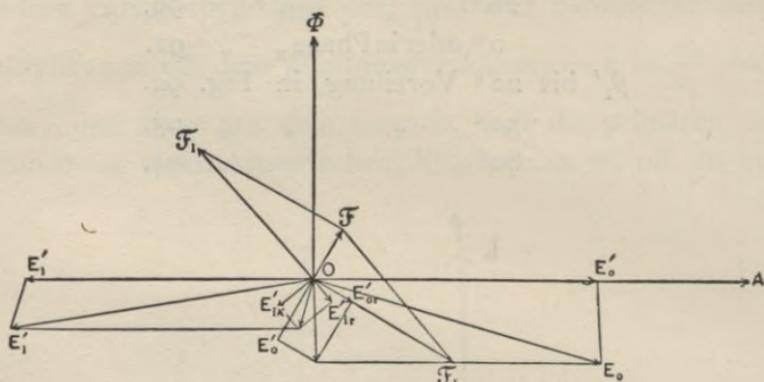


Fig. 93. Transformator diagramm mit einer Phasenvoreilung von 50° im sekundären Stromkreise.

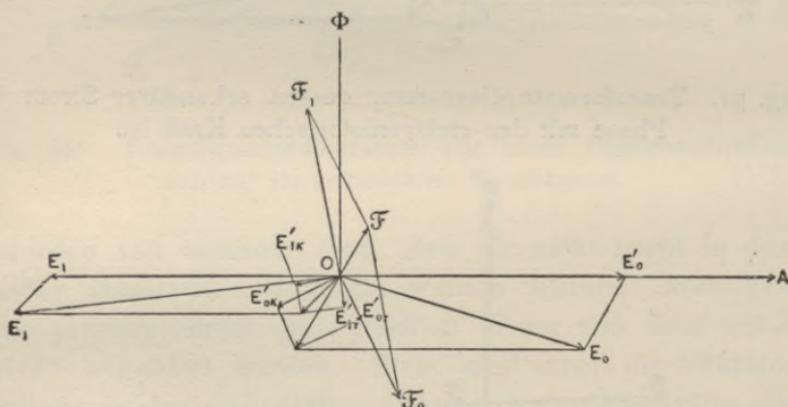


Fig. 94. Transformator diagramm mit einer Phasenvoreilung von 80° im sekundären Stromkreise.

einem nacheilenden sekundären Strom entspricht, ist in vollen dicken Linien ausgezogen und der dem voreilenden Strom entsprechende Teil in vollen dünnen Linien.

122. Dieses Diagramm stellt die Bedingung für die konstante induzierte sekundäre elektromotorische Kraft E_2'

dar, entsprechend einem konstanten maximalen Kraftlinienfluss.

Ändern wir alle Grössen in dem Diagramm, Figur 95,

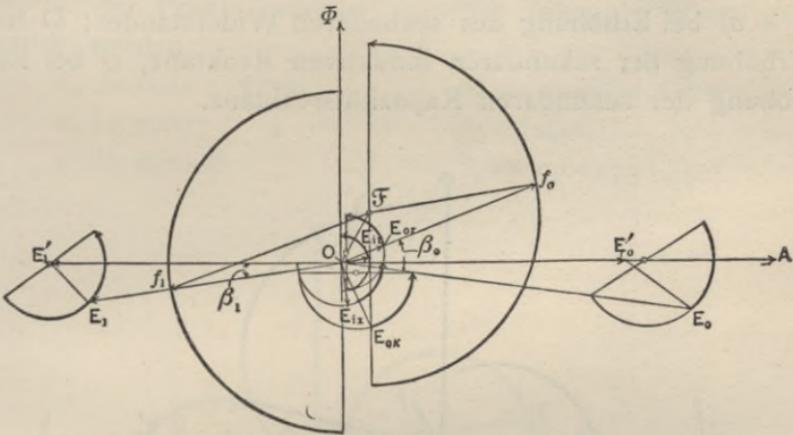


Fig. 95.

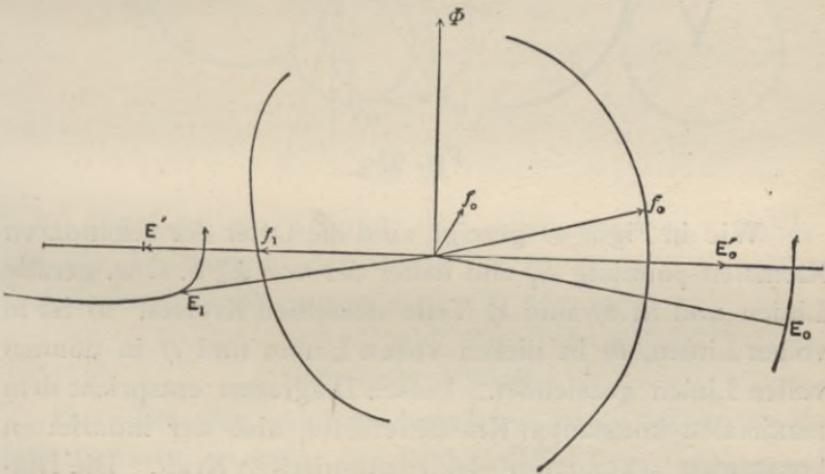


Fig. 96.

proportional, so erhalten wir das Diagramm für die konstante primäre (Fig. 96) und für die konstante sekundäre Klemmenspannung (Fig. 97), wo die Örter Kurven höherer Ordnung ergeben.

Figur 98 zeigt den Ort der verschiedenen Grössen, wenn die Belastung in einem induktionsfreien sekundären äusseren Stromkreise von ihrem Maximum $I_1 = 60$ Ampère zum Leerlauf oder offenen Stromkreis übergeht und zwar

a) bei Erhöhung des sekundären Widerstandes; b) bei Erhöhung der sekundären induktiven Reaktanz; c) bei Erhöhung der sekundären Kapazitätsreaktanz.

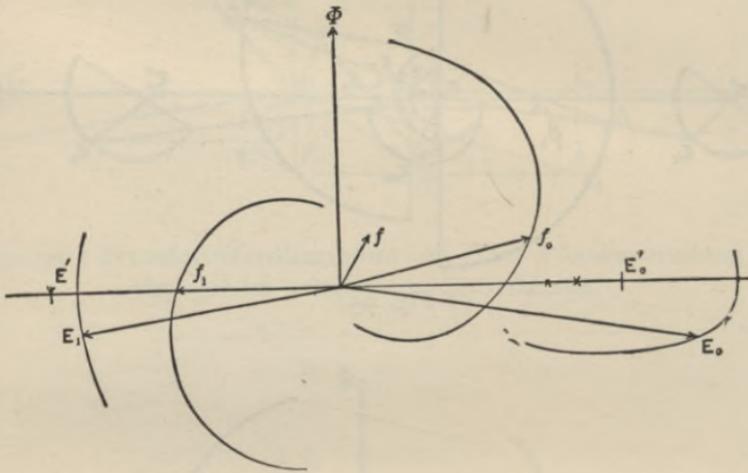


Fig. 97.

Wie in Figur a) gezeigt, sind die Örter der sekundären Klemmenspannung E_1 und daher der von E_0 u. s. w. gerade Linien und in b) und c) Teile desselben Kreises. a) ist in vollen Linien, b) in dicken vollen Linien und c) in dünnen vollen Linien gezeichnet. Dieses Diagramm entspricht dem maximalen konstanten Kraftlinienfluss, also der induzierten konstanten sekundären elektromotorischen Kraft. Die Diagramme, die die konstante primäre elektromotorische Kraft und die konstante sekundäre Klemmenspannung darstellen, können aus obigem durch Proportionalität abgeleitet werden.

123. Um die Diagramme deutlicher zu machen, sind die verschiedenen Werte möglichst gleich gross gemacht

worden; dabei ist wohl zu beachten, dass die für diese Diagramme gewählten Konstanten nicht die in den wirklichen Transformatoren gefundenen Grössen darstellen, sondern sich auf sehr grosse innere Verluste beziehen.

In der Praxis würden ungefähr folgende Werte gefunden werden:

$$\begin{array}{lll} r_0 = 0,01 & \text{Ohm} & x_1 = 0,00025 \text{ Ohm} \\ x_0 = 0,033 & \text{''} & g_0 = 0,001 \text{ ''} \\ r_1 = 0,0008 & \text{''} & b_0 = 0,00173 \text{ ''} \end{array}$$

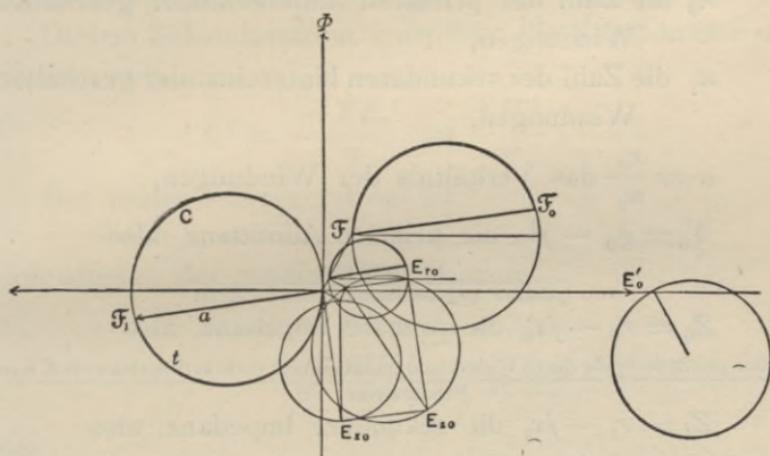


Fig. 98.

d. h. ungefähr ein Zehntel der angenommenen. Daher sind die Änderungen der Werte für E_0 , E_1 u. s. w. unter verschiedenen Bedingungen sehr viel kleiner.

Symbolische Methode.

124. Bei der symbolischen Darstellung durch komplexe Grössen erscheint das Problem der Transformatoren folgendermassen:

Der Erregerstrom I_{00} des Transformators hängt von der primären elektromotorischen Kraft ab und diese Abhängigkeit kann durch eine Admittanz dargestellt werden, nämlich durch die primäre Admittanz des Transformators $Y_0 = g_0 + jb_0$.

Der Widerstand und die Reaktanz des primären und sekundären Stromkreises werden in der Impedanz durch

$$Z_0 = r_0 - jx_0 \quad \text{und} \quad Z_1 = r_1 - jx_1$$

dargestellt.

Innerhalb der Grenzen der Änderung der magnetischen Induktion in einem Transformator mit konstanter Spannung können Admittanz und Impedanz mit genügender Genauigkeit im allgemeinen als konstant betrachtet werden.

Es sei

n_0 die Zahl der primären hintereinander geschalteten Windungen,

n_1 die Zahl der sekundären hintereinander geschalteten Windungen,

$\alpha = \frac{n_0}{n_1}$ das Verhältnis der Windungen,

$Y_0 = g_0 - jb_0$ die primäre Admittanz, also

Erregerstrom
primäre gegenelektromotorische Kraft'

$Z_0 = r_0 - jx_0$ die primäre Impedanz, also

in der primären Spule durch Widerstand und Reaktanz verbrauchte elektromot. Kraft
Primärstrom,

$Z_1 = r_1 - jx_1$ die sekundäre Impedanz, also

in der sekundären Spule durch Widerstand und Reaktanz verbrauchte elektromot. Kraft
Sekundärstrom,

wo sich die Reaktanzen x_0 und x_1 nur auf die wahre Selbstinduktion, oder auf die Streuung, die zwischen den primären und sekundären Spulen hindurchgeht, beziehen, d. h. nur mit der einen Spule verkettet sind.

Ferner sei

$Y = g + jb$ die gesamte Admittanz des sekundären Stromkreises, einschliesslich der inneren Impedanz,

E_0 die primäre Klemmenspannung,

E_0' die elektromotorische Kraft, die durch die primäre gegenelektromotorische Kraft verbraucht wird,

E_1' die sekundäre Klemmenspannung,

E_1'' die sekundär induzierte elektromotorische Kraft,

I_0 der gesamte Primärstrom,

I_{oo} der primäre Erregerstrom,

I_1 der sekundäre Strom.

Da die primäre gegenelektromotorische Kraft E_o' und die sekundär induzierte elektromotorische Kraft E_1' proportional dem Windungsverhältnis α ist, so ist

$$E_o' = \alpha E_1'. \quad (1)$$

Der sekundäre Strom ist

$$I_1 = Y E_1'; \quad (2)$$

er besteht aus einer Energiekomponente $g E_1'$ und einer rückwirkenden Komponente $b E_1'$.

Diesem Sekundärstrom entspricht die Komponente des Primärstromes

$$I_o' = \frac{-Y E_1'}{\alpha} = \frac{Y E_o'}{\alpha^2}. \quad (3)$$

Der primäre Erregerstrom ist

$$I_{oo} = Y_o E_o'; \quad (4)$$

infolgedessen der gesamte Primärstrom

$$\begin{aligned} I_o &= I_o' + I_{oo} \\ &= \frac{Y E_o'}{\alpha^2} + Y_o E_o', \end{aligned} \quad (5)$$

oder

$$\begin{aligned} I_o &= \frac{E_o'}{\alpha^2} (Y + \alpha^2 Y_o) \\ &= -\frac{E_1'}{\alpha} (Y + \alpha^2 Y_o). \end{aligned} \quad (6)$$

Die in der sekundären Spule durch die innere Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft ist $Z_1 I_1$ und die in der sekundären Spule durch den Kraftlinienfluss induzierte elektromotorische Kraft E_1' .

Folglich ist die sekundäre Klemmenspannung

$$E_1 = E_1' - Z_1 I_1,$$

oder, wenn wir (2) einsetzen,

$$E_1 = E_1' (1 - Z_1 Y). \quad (7)$$

Die in der primären Spule durch die innere Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft ist $Z_o I_o$ und die in

der primären Spule durch die gegenelektromotorische Kraft verbrauchte elektromotorische Kraft E_o' .

Folglich ist die primäre Klemmenspannung

$$E_o = E_o' + Z_o I_o,$$

oder wenn wir (6) einsetzen,

$$\left. \begin{aligned} E_o &= E_o' \left\{ 1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2} \right\} \\ &= -a E_1' \left\{ 1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

125. Daher erhalten wir

die primäre elektromotorische Kraft

$$E_o = -a E_1' \left\{ 1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2} \right\}, \quad (8)$$

die sekundäre elektromotorische Kraft

$$E_1 = E_1' (1 - Z_1 Y), \quad (7)$$

den primären Strom

$$I_o = -\frac{E_1'}{a} (Y + a^2 Y_o), \quad (6)$$

den sekundären Strom

$$I_1 = Y E_1' \quad (2)$$

als Funktionen der induzierten sekundären elektromotorischen Kraft E_1' als Parameter.

Aus obigem leiten wir das Verhältnis der Transformation der elektromotorischen Kräfte

$$\frac{E_o}{E_1} = -a \frac{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}}{1 - Z_1 Y} \quad (9)$$

und das Verhältnis der Transformationen der Ströme

$$\frac{I_o}{I_1} = -\frac{1}{a} \left\{ 1 + a^2 \frac{Y_o}{Y} \right\} \quad (10)$$

ab.

Hieraus erhalten wir bei konstanter primärer Klemmenspannung

$$E_o = \text{konstant}$$

und als sekundäre induzierte elektromotorische Kraft

$$E_1' = -\frac{E_o}{a} \frac{1}{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}};$$

als elektromotorische Kraft, induziert pro Windung

$$\delta E = -\frac{E_o}{n_o} \frac{1}{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}};$$

als sekundäre Klemmspannung

$$E_1 = -\frac{E_o}{a} \frac{1 - Z_o Y}{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}};$$

als primären Strom

$$I_o = \frac{E_o}{a^2} \frac{Y + a^2 Y_o}{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}} = E_o \frac{\frac{Y}{a^2} + Y_o}{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}};$$

als sekundären Strom

$$I_1 = -\frac{E_o}{a} \frac{Y}{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}}.$$

(11)

Bei konstanter sekundärer Klemmspannung ist

$$E_1 = \text{konstant};$$

die sekundär induzierte elektromotorische Kraft

$$E_1' = \frac{E_1}{1 - Z_1 Y};$$

die elektromotorische Kraft induziert pro Windung

$$\delta E = \frac{E_1}{n_1} \frac{1}{1 - Z_1 Y};$$

die primäre Klemmspannung

$$E_o = -a E_1 \frac{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}}{1 - Z_1 Y};$$

der primäre Strom

$$I_o = -\frac{E_1}{a} \frac{Y + a^2 Y_o}{1 - Z_1 Y};$$

der sekundäre Strom

$$I_1 = E_1 \frac{Y}{1 - Z_1 Y}.$$

(12)

126. Aus diesen Gleichungen können wir interessante Folgerungen ziehen:

Die scheinbare gesamte Impedanz des Transformators ist

$$Z_t = \frac{E_o}{I_o} = a^2 \frac{1 + Z_o Y_o + \frac{Z_o Y}{a^2}}{Y + a^2 Y_o} \quad (13)$$

$$= \frac{1 + Z_o \left(Y_o + \frac{Y}{a^2} \right)}{Y_o + \frac{Y}{a^2}};$$

$$Z_t = \frac{1}{Y_o + \frac{Y}{a^2}} + Z_o. \quad (14)$$

Wenn wir nun die gesamte sekundäre Admittanz $\frac{Y}{a^2} = Y'$ setzen, die in Beziehung auf den primären Stromkreis durch das Windungsverhältnis festgesetzt wurde, so ist

$$Z_t = \frac{1}{Y_o + Y'} + Z_o. \quad (15)$$

$Y_o + Y'$ ist die gesamte Admittanz eines Teilstromkreises mit dem Erregerstrom von der Admittanz Y_o und dem sekundären Strome von der Admittanz Y' (bezogen auf den primären Strom) als Zweige.

Daher ist

$$\frac{1}{Y_o + Y'} = Z_o' \quad (16)$$

die Impedanz dieses Teilstromes und

$$Z_o = Z_o' + Z_o. \quad (17)$$

Das heisst:

Der Wechselstromtransformator mit der primären Admittanz Y_o , mit der gesamten sekundären Admittanz Y und mit der primären Impedanz Z_o kann folgendermassen ersetzt werden: er ist äquivalent einem verzweigten Stromkreis mit den Zweigen von der Admittanz Y_o , dem Erregerstrom, und von der Admittanz $Y' = \frac{Y}{a^2}$ dem Sekun-

därstrom, welch' letzterer durch die Hauptleitungen von der Impedanz Z_0 der primären inneren Impedanz gespeist wird.

Dies zeigt diagrammatisch die Figur 99.

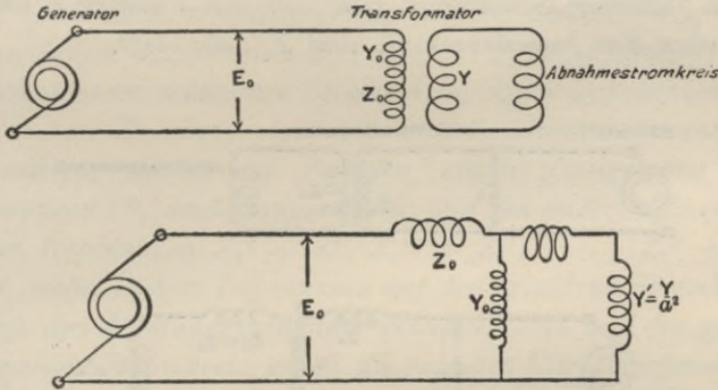


Fig. 99.

127. Wenn wir nun die sekundäre innere Impedanz von der sekundären äusseren Impedanz oder der Impedanz des Verbrauchsstromkreises trennen, so ist

$$\frac{I}{Z} = Z_1 + Z, \quad (18)$$

wo Z die sekundäre äussere Impedanz, also

$$Z = \frac{E_1}{I_1} \quad (19)$$

ist.

Auf den primären Stromkreis reduziert ist sie

$$\begin{aligned} \frac{I}{Y'} &= \frac{a^2}{Y} = a^2 Z_1 + a^2 Z \\ &= Z_1' + Z'. \end{aligned} \quad (20)$$

Das heisst:

Ein Wechselstromtransformator mit der primären Admittanz Y_0 , der primären Impedanz Z_0 , der sekundären Impedanz Z_1 und dem Windungsverhältnis a kann, wenn der sekundäre Stromkreis durch eine Impedanz Z (die Impedanz des Abnahmestromkreises) geschlossen wird, folgendermassen

ersetzt werden. Er ist äquivalent einem Stromkreise mit der Impedanz $Z' = a^2 Z$, der durch die Hauptleitung von der Impedanz $Z_0 = Z_1'$, wo $Z_1' = a^2 Z_1$ ist, gespeist wird, im Nebenschluss zu einem Stromkreise von der Admittanz Y_0 , welch' letzterer Stromkreis sich von den Punkten a und b zwischen den Impedanzen Z_0 und Z_1' abzweigt.

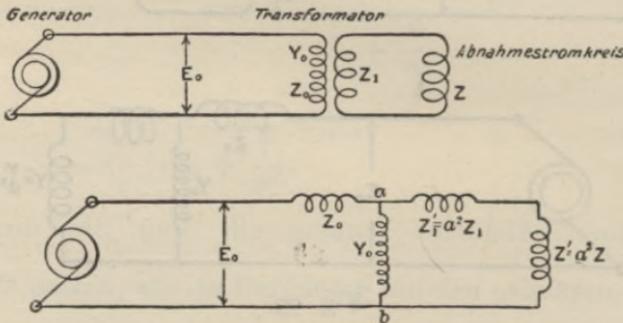


Fig. 100.

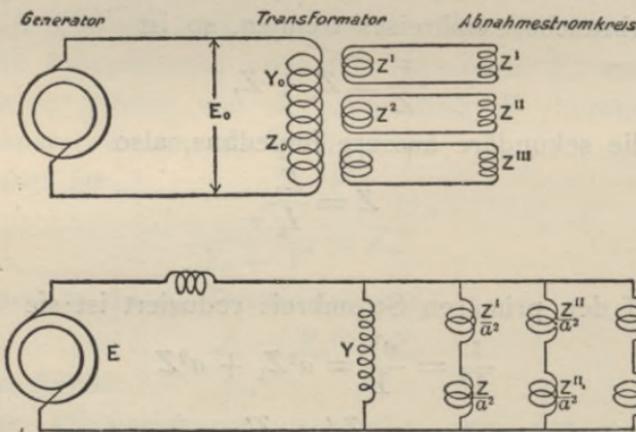


Fig. 101.

Dieses wird diagrammatisch durch die Figur 100 dargestellt.

Es ist klar, dass, falls der Transformator mehrere unabhängige sekundäre Stromkreise enthält, diese an den

Punkten *ab* in dem Diagramm in der Figur 100 und in dem Diagramm Figur 101 als abgezweigt angenommen werden müssen.

Daraus folgt:

Ein Wechselstromtransformator mit x sekundären Spulen, deren innere Impedanzen $Z_1^I, Z_1^{II}, \dots Z_1^x$ sind, geschlossen durch äussere sekundäre Stromkreise, deren Impedanzen $Z^I, Z^{II}, \dots Z^x$ sind, ist äquivalent einem verzweigten Stromkreis von $x + 1$ Zweigen, einem Zweige von der Admittanz Y^0 , dem Erregerstrom, und den anderen Zweigen, deren Impedanzen $Z_1^I + Z^I, Z_1^{II} + Z^{II}, \dots Z_1^x + Z^x$ sind, wobei letztere Impedanzen auf den primären Stromkreis durch das Windungsverhältnis reduziert sind und der ganze verzweigte Stromkreis durch die primäre Klemmenspannung E_0 mittels der Hauptleitungen von der Impedanz Z_0 gespeist wird.

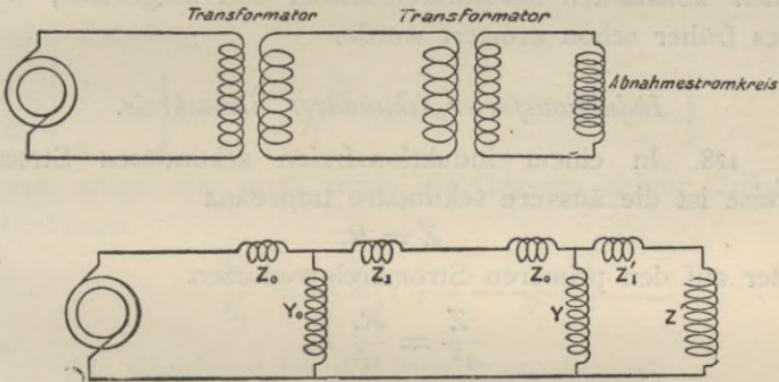


Fig. 102.

Daher ändert die Transformation eines Stromkreises alle Grössen nur proportional und führt in die Hauptleitungen die Impedanz $Z_0 + Z_1'$ und einen Abzweigkreis zwischen Z_0 und Z_1' von der Admittanz Y_0 ein.

Die doppelte Transformation wird durch das Diagramm in Figur 102 dargestellt.

Hierdurch ist die Diskussion über den Wechselstromtransformator erledigt, weil sie mit der eines Teilstrom-

kreises, welcher Widerstände und Reaktanzen enthält, identisch ist.

Solche Stromkreise sind in dem Kapitel VIII ausführlich behandelt worden und die dort erhaltenen Resultate lassen sich jetzt direkt auf den Transformator anwenden, weil sie die Aenderung und die Regulierung der sekundären Klemmenspannung, die Resonanzerscheinungen u. s. w. behandeln.

Wenn z. B. $Z_1' = Z_0$ ist und der Transformator eine sekundäre Spule enthält, die durch eine hinreichende Kondensatorreaktanz konstant so geschlossen ist, dass dieser Hilfskreis, in Verbindung mit dem Erregerstromkreis, die Reaktanz $-x_0$ in einem induktionsfreien sekundären Stromkreise $Z_1 = r_1$ ergibt, so erhalten wir die Bedingung für die Transformation der konstanten primären Spannung in einen konstanten sekundären Strom und umgekehrt, wie dies früher schon erörtert wurde.

Induktionsfreier sekundärer Stromkreis.

128. In einem induktionsfreien sekundären Stromkreise ist die äussere sekundäre Impedanz

$$Z = R_1$$

oder auf den primären Stromkreis reduziert

$$\frac{Z}{a^2} = \frac{R_1}{a^2} R.$$

Nehmen wir an, dass die sekundäre Impedanz auf den primären Stromkreis reduziert, also gleich der primären Impedanz

$$a^2 Z_1 = Z_0 = r_0 - jx_0$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{Y}{a^2} = \frac{1}{a^2(Z + Z_1)} = \frac{1}{R + r_0 - jx_0}.$$

Wenn wir diese Werte in die Gleichungen (9), (10) und (13) einsetzen, so haben wir folgendes Verhältnis zwischen den elektromotorischen Kräften:

$$\frac{E_o}{E_1} = -a \frac{1 + \frac{r_o - jx_o}{R + r_o - jx_o} + (r_o - jx_o)(g_o + jb_o)}{1 - \frac{(r_o - jx_o)}{R + r_o - jx_o}}$$

$$= -a \left[1 + \frac{r_o - jx_o}{R + r_o - jx_o} + (r_o - jx_o)(g_o + jb_o) \right]$$

$$\left[1 + \frac{r_o - jx_o}{R + r_o - jx_o} + \left(\frac{r_o - jx_o}{R + r_o - jx_o} \right)^2 + \dots \right];$$

oder wenn wir entwickeln und die Grössen von der vierten Ordnung ab vernachlässigen

$$\frac{E_o}{E_1} = -a \left[1 + 2 \frac{r_o - jx_o}{R + r_o - jx_o} + 2 \left(\frac{r_o - jx_o}{R + r_o - jx_o} \right)^2 + (r_o - jx_o)(g_o + jb_o) \right];$$

oder aufgelöst

$$\frac{E_o}{E_1} = -a \left[1 + 2 \frac{r_o - jx_o}{R} + (r_o - jx_o)(g_o + jb_o) \right]$$

und wenn wir auch noch die Grössen dritter Ordnung fortlassen

$$\frac{E_o}{E_1} = -a \left(1 + 2 \frac{r_o - jx_o}{R} \right).$$

Als Gleichung für die Ströme erhalten wir

$$\frac{I_o}{I_1} = -\frac{1}{a} [1 + (g_o + jb_o)R + r_o - jx_o];$$

und entwickelt

$$\frac{I_o}{I_1} = -\frac{1}{a} [1 + R(g_o + jb_o) + (r_o - jx_o)(g_o + jb_o)],$$

und wenn wir auch die Grössen dritter Ordnung vernachlässigen

$$\frac{I_o}{I_1} = -\frac{1}{a} [1 + R(g_o + jb_o)],$$

so ist die gesamte scheinbare primäre Admittanz

$$Z_t \equiv \frac{E_0}{I_0} = \frac{1 + \frac{r_0 - jx_0}{R + r_0 - jx_0} + (r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0)}{\frac{1}{R + r_0 - jx_0} + g_0 + jb_0}$$

$$= [R + (r_0 - jx_0) + R(r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0)] [1 - (g_0 + jb_0)(R + r_0 - jb_0) + (g_0 + jb_0)^2(R + r_0 - jb_0)^2 + \dots]$$

$$= [R + 2(r_0 - jx_0) - R^2(g_0 + jb_0) - 2R(r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0) + R^3(g_0 + jb_0)^2];$$

oder

$$Z_t = R \left[1 + 2 \frac{r_0 - jx_0}{R} - R(g_0 + jb_0) - 2(r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0) + R^2(g_0 + jb_0)^2 \right].$$

Vernachlässigen wir auch die Grössen dritter Ordnung, so ergibt sich

$$Z_t = R \left[1 + 2 \frac{r_0 - jx_0}{R} - R(g_0 + jb_0) \right].$$

Der Phasenwinkel in dem primären Stromkreise ist

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{x_t}{r_t},$$

folglich

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{2 \frac{x_0}{R} + Rb_0 + 2r_0b_0 - 2x_0g_0 - 2R^2g_0b_0}{1 + \frac{2r_0}{R} - Rg_0 - 2r_0g_0 - 2x_0b_0 + R^2g_0^2 + R_1^2b_0^2},$$

und wenn wir auch hier die Grössen dritter Ordnung vernachlässigen, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{2 \frac{x_0}{R} + Rb_0}{1 + 2 \frac{r_0}{R} - Rg_0}$$

129. Wenn wir jetzt den äusseren Widerstand des sekundären Stromkreises bei voller Belastung (reduziert auf den primären Stromkreis) mit R_0 darstellen und

$$\frac{2 r_0}{R_0} = p = \frac{\text{Innerer Widerstand des Transformators}}{\text{Äusserer Widerstand des sekundären Stromkreises}} \\ = \text{prozentualer innerer Widerstand,}$$

$$\frac{2 x_0}{R_0} = q = \frac{\text{Innere Reaktanz des Transformators}}{\text{Äusserer Widerstand des sekundären Stromkreises}} \\ = \text{prozentuale innere Reaktanz,}$$

$$R_0 g_0 = h = \frac{\text{Hysteretischer Energiestrom}}{\text{Gesamter sekundärer Strom}} = \text{prozentuale Hysterese,}$$

$$R_0 b_0 = g = \frac{\text{Magnetisierender Strom}}{\text{Gesamter sekundärer Strom}} = \text{prozentualer magnetisierender Strom}$$

bezeichnen und wenn ferner d die Belastung des Transformators als Teil der vollen Belastung bezeichnet, so erhalten wir

$$R = \frac{R_0}{d}$$

und

$$\frac{2 r_0}{R} = p d,$$

$$\frac{2 x_0}{R} = q d,$$

$$R g_0 = \frac{h}{d},$$

$$R b_0 = \frac{g}{d}.$$

Wenn wir diese Werte einsetzen, so erhalten wir folgende Gleichungen für den Transformator bei induktionsfreier Belastung:

Verhältnis der elektromotorischen Kräfte

$$\frac{E_0}{E_1} = - a \left[1 + d(p - j q) + \frac{(p - j q)(h + j g)}{2} \right] \\ \cong - a [1 + d(p - j q)]$$

oder durch Elimination der imaginären Grössen

$$\begin{aligned} \frac{e_0}{e_1} &= a \sqrt{\left(1 + dp + \frac{ph + qg'}{2}\right)^2 + \left(dq - \frac{pq - qh}{2}\right)^2} \\ &\cong a \sqrt{(1 + dp)^2 + d^2 q^2} \\ &\cong a \left(1 + dp + \frac{ph + qg' + d^2 q^2}{2}\right) \\ &\cong a (1 + dp). \end{aligned}$$

Verhältnis der Ströme

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{I_1} &= -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{(h + jg)}{d} + \frac{(p - jq)(h + jg)}{2} \right] \\ &\cong -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{(h + jg)}{d} \right]; \end{aligned}$$

oder durch Elimination der imaginären Grössen

$$\begin{aligned} \frac{i_0}{i_1} &= \frac{1}{a} \sqrt{\left(1 + \frac{h}{d} + \frac{ph + qg}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{d} + \frac{pg - qh}{2}\right)^2} \\ &\cong \frac{1}{a} \sqrt{\left(1 + \frac{h}{d}\right)^2 + \left(\frac{g}{d}\right)^2} \\ &\cong \frac{1}{a} \left(1 + \frac{h}{d} + \frac{ph + qg + g^2}{2d^2}\right) \\ &\cong \frac{1}{a} \left(1 + \frac{h}{d}\right). \end{aligned}$$

Gesamte scheinbare primäre Impedanz

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{R_0}{d} \left[1 + d(p - jg) - \frac{h + jg}{d} - (p - jg)(h + jg) + \left(\frac{h + jg}{d^2}\right)^2 \right] \\ &\cong \frac{R_0}{d} \left[1 + d(p - jg) - \frac{h + jg'}{d} \right]; \end{aligned}$$

oder durch Elimination der imaginären Grössen

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{R_0}{d} \sqrt{\left(1 + dp - \frac{h}{d} - ph - qg + \frac{h^2 - g^2}{d^2}\right)^2 + \left(dq - \frac{g}{d} - pg + gh + 2\frac{hg}{d^2}\right)^2} \\ &\cong \frac{R_0}{d} \sqrt{\left(1 + dp - \frac{h}{d}\right)^2 + \left(dq - \frac{g}{d}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong \frac{R_0}{d} \left(1 + dp - \frac{h}{d} - ph - 2qg + \frac{h^2 - g^2}{d^2} + \frac{d^2 q^2}{2} + \frac{g^2}{2d^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 p^2}{2} + \frac{h^2}{2d^2} \right) \\ &\cong \frac{R_0}{d} \left(1 + dp - \frac{h}{d} \right). \end{aligned}$$

Phasenwinkel im primären Stromkreise

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \omega_0 &= \frac{dq + \frac{g}{d} + ph - gh - 2\frac{hg}{d^2}}{1 + dp - \frac{h}{d} - ph - qg + \frac{hg}{d} \frac{h^2 + g^2}{d^2}} \\ &\cong \frac{dg + \frac{g}{d}}{1 + dp - \frac{h}{d}}. \end{aligned}$$

Das heisst: ein Wechselstromtransformator, der einen induktionsfreien sekundären Stromkreis speist, ist durch folgende Konstanten gegeben:

durch R_0 als sekundären äusseren Widerstand bei voller Belastung,

durch p als prozentualen Widerstand,

durch q als prozentuale Reaktanz,

durch h als prozentuale Hysterisis,

durch g als prozentualen magnetisierenden Strom und durch d als sekundäre prozentuale Belastung.

Alle diese Grössen werden durch das Quadrat des Windungsverhältnisses a^2 auf den primären Stromkreis reduziert.

130. Als Beispiel mag ein Transformator mit folgenden Konstanten gegeben sein:

$$\begin{array}{lll} e_0 = 1,000; & R_0 = 120; & q = 0,06; \\ a = 10; & p = 0,02; & h = 0,02; \\ & & g = 0,04; \end{array}$$

Durch Einsetzung dieser Werte erhalten wir

$$e_1 = \frac{100}{\sqrt{(1,0014 + 0,02 d)^2 + (0,0002 + 0,06 d)^2}};$$

$$c_1 = \frac{e_1 d a^2}{R_0} = \frac{e_1 d}{1,2};$$

$$c_0 = 0,1 c_1 \sqrt{\left(1,0014 + \frac{0,02}{d}\right)^2 + \left(\frac{0,04}{d} - 0,0002\right)^2};$$

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{0,06 d + \frac{0,04}{d} - 0,0004 - \frac{0,0016}{d^2}}{1,9972 + 0,02 d + \frac{0,002}{d^2} - \frac{0,02}{d}}.$$

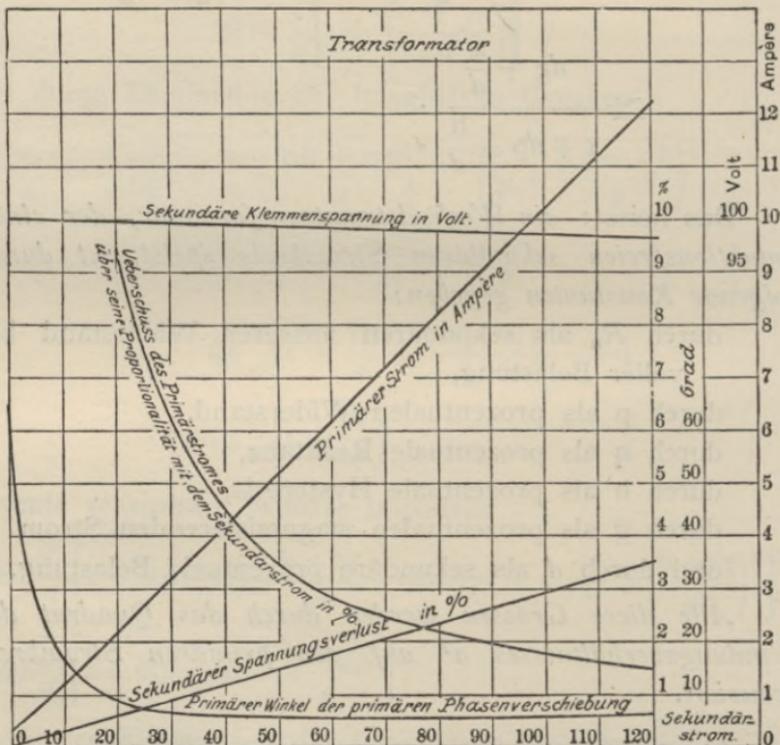


Fig. 103. Belastungsdiagramm des Transformators.

In der Figur 103 werden für die Werte von $d = 0$ bis zu $d = 1,5$ mit dem sekundären Strome c_1 als Abscissen folgende Werte dargestellt.

1. die sekundäre Klemmenspannung in Volt,
2. der sekundäre Spannungsverlust in Procenten,
3. der primäre Strom in Ampère,
4. der Überschuss des Primärstromes über seine Proportionalität mit dem Sekundärstrom in Procenten,
5. der Winkel der primären Phasenverschiebung.

Der Leistungsfaktor $\cos \omega_0$ des Transformators ist 0,45 bei offenem sekundärem Stromkreise und ist grösser als 0,99 von 25 Ampère an aufwärts, bis er sein Maximum 0,995 bei voller Belastung erreicht.

Kapitel XIV.

Der allgemeine Wechselstromtransformator.

131. Der einfachste Wechselstromapparat ist der Wechselstromtransformator. Er besteht aus einem magnetischen Stromkreise, der mit zwei oder mehreren elektrischen Stromkreisen verkettet ist. Der eine, der primäre Stromkreis, wird durch eine bestimmte Klemmenspannung erregt, während in dem anderen, dem sekundären Stromkreise, elektrische Energie induziert wird. Daher wird in dem primären Stromkreise Kraft verbraucht, während in dem sekundären eine entsprechende Energiemenge erzeugt wird. Mit anderen Worten: vom primären zum sekundären Stromkreise wird durch den Raum Energie übertragen. Diese Energieübertragung findet ihr mechanisches Aequivalent in einer Abstossung, die zwischen dem primären und dem sekundären Stromkreise wirkt. Wenn nun die sekundäre Spule nicht festgehalten wird, wie dies in dem stationären Transformator der Fall ist, so wird sie von der primären Spule abgestossen. Diese mechanische Wirkung wird bei dem Induktionsmotor benutzt, der einen Transformator darstellt, dessen sekundäre Spule in Bezug auf die primäre beweglich ist und zwar so, dass sie während ihrer Rotation noch in dem primären Kraftlinienfelde bleibt.

Die Bedingung, dass der sekundäre Stromkreis, während er sich in Bezug auf den primären bewegt, das primäre magnetische Kraftlinienfeld nicht verlässt, erfordert, dass dieses Feld seine Richtung nicht beibehält, sondern dass nach und nach in jeder Richtung hin ein aktives Feld auftritt. Ein Mittel zur Erzeugung eines solchen magnetischen Feldes besteht da-

rin, dass man verschiedene primäre Stromkreise, die verschiedene Winkel mit einander bilden, durch Ströme verschiedener Phase erregt. Ein zweites Mittel ist, dass man das primäre Feld nur nach einer Richtung hin ändert und ein Streufeld oder ein im Winkel stehendes Magnetfeld durch Rückwirkung des sekundären Stromes erzeugt.

Wir sehen, dass der stationäre Transformator und der Induktionsmotor nur verschiedene Anwendungen eines Apparates sind, der einen mit zwei elektrischen Stromkreisen verketteten magnetischen Stromkreis bildet. Ein solcher Apparat kann passend ein *allgemeiner Wechselstromtransformator* genannt werden.

Die Gleichungen des stationären Wechselstromtransformators und die des Induktionsmotors sind nur Spezialisierungen der allgemeinen Wechselstromtransformatorgleichungen.

Quantitativ sind die Hauptunterschiede zwischen dem Induktionsmotor und dem stationären Transformator solche, die durch den Luftzwischenraum zwischen der primären und der sekundären Wicklung erzeugt werden, was erforderlich ist, um der sekundären die mechanische Beweglichkeit zu geben. Dieser Luftzwischenraum bedingt einen grösseren magnetisierenden Strom als in einem Transformator mit geschlossenem magnetischem Stromkreis und erfordert für die primäre und sekundäre Wicklung, um den magnetisierenden Strom innerhalb annehmbarer Grenzen zu halten, einen eingeschlossenen Aufbau.

Dieser eingeschlossene Aufbau erhöht auf der anderen Seite die Selbstinduktion des primären und sekundären Stromkreises beträchtlich. Infolgedessen ist der Induktionsmotor ein Transformator mit grossem magnetisierendem Strom und grosser Selbstinduktion, also mit verhältnismässig grosser primärer Suszeptanz und grosser Reaktanz.

Der allgemeine Wechselstromtransformator transformiert elektrische und mechanische Kraft und ändert

nicht nur die elektromotorischen Kräfte und Ströme, sondern auch die Frequenz.

132. Ausser dem Kraftlinienfluss, der mit dem primären und sekundären elektrischen Stromkreise verkettet ist, verläuft ein Streulinienfluss durch den Transformator und zwar zwischen der primären und sekundären Spule und umgibt nur eine Spule, ohne mit der anderen verkettet zu sein. Dieser magnetische Streulinienfluss ist proportional dem Strom, der in dem elektrischen Stromkreise fliesst und bedingt die sogenannte Selbstinduktion des Transformators. Wie ersichtlich, wird als Selbstinduktion eines Transformatorstromkreises nicht das gesamte Kraftlinienfeld verstanden, das durch diesen Stromkreis erzeugt und mit demselben verkettet ist, sondern nur ein für gewöhnlich kleiner Theil des Feldes, der den einen Stromkreis umgibt, ohne mit dem anderen verkettet zu sein, und er wird daher durch die magnetomotorische Kraft nur eines einzelnen Stromkreises hervorgebracht.

133. Der gemeinsame Kraftlinienfluss des Transformators wird durch die resultierende magneto-motorische Kraft beider elektrischer Stromkreise dargestellt. Sie wird durch die gegenelektromotorische Kraft, durch die Windungszahl und durch die Frequenz im elektrischen Stromkreise durch folgende Gleichung bestimmt:

$$E = \sqrt{2} \pi N n \Phi 10^{-8},$$

wo E die effektive elektromotorische Kraft, N die Frequenz, n die Zahl der Windungen und Φ den maximalen Kraftlinienfluss bedeuten.

Die dieses Feld erzeugende magnetomotorische Kraft, oder die resultierende magnetomotorische Kraft des primären und sekundären Stromkreises, wird durch die Gestalt und die magnetische Charakteristik desjenigen Materials bestimmt, aus dem der magnetische Stromkreis zusammengesetzt ist, und ferner noch durch die magnetische Induktion. Bei offenem sekundärem Stromkreise ist diese magneto-

motorische Kraft gleich der des primären Stromes, die in diesem Falle Erregerstrom heisst, und aus einer Energiekomponente, dem magnetischen Energiestrom und einer rückwirkenden Komponente, dem magnetisierenden Strom, besteht.

134. In dem allgemeinen Wechselstromtransformator, wo die sekundäre Wicklung in Bezug auf die primäre beweglich ist, ist die Geschwindigkeit, mit der der sekundäre elektrische Stromkreis durch den gemeinsamen Kraftlinienfluss geschnitten wird, von derjenigen der primären verschieden. Daher sind die Frequenzen beider Stromkreise verschieden und die induzierten elektromotorischen Kräfte sind der Zahl der Windungen nicht proportional, wie in dem stationären Transformator, sondern proportional dem Produkt aus der Windungszahl und der Frequenz.

135. In einem allgemeinen Wechselstromtransformator sei s das Verhältnis der sekundären zur primären Frequenz, oder die Schlüpfung, d. h. wenn N die primäre Frequenz oder die Frequenz der Klemmenspannung ist, so ist sN die sekundäre Frequenz und die in einer sekundären Windung durch das gemeinsame Feld induzierte elektromotorische Kraft steht mit der in einer primären Windung induzierten elektromotorischen Kraft in dem Verhältnis s .

Es bedeutet

$s = 0$ die synchrone Bewegung der sekundären Wicklung,

$s < 0$ die übersynchrone Bewegung infolge der äusseren mechanischen Kraft,

$s = 1$ den Stillstand und

$s > 1$ die Rückwärtsbewegung der sekundären Wicklung, d. h. die Bewegung entgegengesetzt der mechanischen Kraft, die zwischen der primären und sekundären Wicklung wirkt.

Es sei n_0 die Zahl der in *einem* Stromkreise hintereinander geschalteten primären Windungen, n_1 die Anzahl der in *einem* Stromkreise hintereinander geschalteten sekundären Windungen, $a = \frac{n_0}{n_1}$ das Windungsverhältnis,

$Y_0 = g_0 + jb_0$ die primäre Admittanz in einem Stromkreise, wo g_0 die effektive Konduktanz, b_0 die Suszeptanz, $Z_0 = r_0 - jx_0$ die innere primäre Impedanz eines Stromkreises ist, wo r_0 der effektive Widerstand, x_0 die Reaktanz des primären Stromkreises, $Z_{11} = r_1 - jx_1$ die innere sekundäre Impedanz eines Stromkreises beim Stillstand ist oder für $s = 1$, wobei r_1 der effektive Widerstand der sekundären Spule, x_1 die Reaktanz der sekundären Spule beim Stillstand oder bei voller Frequenz $s = 1$ ist.

Da die Reaktanz proportional der Frequenz bei der Schlüpfung s oder der sekundären Frequenz sN ist, so ist die sekundäre Impedanz

$$Z_1 = r_1 - jsx_1.$$

Es sei der sekundäre Stromkreis durch einen äusseren Widerstand r und durch eine äussere Reaktanz geschlossen und wir bezeichnen diese mit x bei der Frequenz N ; dann ist sie bei der Frequenz sN , oder der Schlüpfung s , = sx . Folglich ist

$$Z = r - jsx \text{ die äussere sekundäre Impedanz.}^*)$$

Es sei E_0 die primäre Klemmenspannung pro Stromkreis,
 E_0' die für die primäre gegenelektromotorische Kraft
 verbrauchte elektromotorische Kraft,
 E_1 die sekundäre Klemmenspannung,
 E_1' die sekundäre induzierte elektromotorische Kraft,

*) Dies bezieht sich auf den Fall, wo die sekundäre Impedanz nur induktive Reaktanz enthält, oder besser diejenige Reaktanz, die der Frequenz proportional ist. In einem Kondensator ist die Reaktanz umgekehrt proportional der Frequenz, in einem synchronen Motor unter Umständen unabhängig von der Frequenz. Daher haben wir im allgemeinen zu setzen $x = x' + x'' + x'''$, wo x' derjenige Teil der Reaktanz ist, der der Frequenz proportional ist, x'' derjenige Teil der Reaktanz, der von der Frequenz unabhängig und x''' derjenige Teil der Reaktanz, der der Frequenz umgekehrt proportional ist. Wir erhalten folglich bei der Schlüpfung s , oder der Frequenz sN , als äussere sekundäre Reaktanz $sx' + x'' + \frac{x'''}{s}$.

e die pro Windung durch das gemeinsame magnetische Feld induzierte elektromotorische Kraft bei der vollen Frequenz N ,

I_0 der primäre Strom,

I_{00} der primäre Erregerstrom,

I_1 der sekundäre Strom.

Dann ist die sekundäre induzierte elektromotorische Kraft

$$E_1' = sn_1 e,$$

die gesamte sekundäre Impedanz

$$Z_1 + Z = (r_1 + r) - js(x_1 + x);$$

folglich der sekundäre Strom

$$I_1 = \frac{E_1'}{Z_1 + Z} = \frac{kn_1 e}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)},$$

die sekundäre Klemmenspannung

$$E_1 = E_1' - I_1 Z_1 = I_1 Z \\ = sn_1 e \left[1 - \frac{r_1 - jsx_1}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)} \right] = \frac{sn_1 e (r - jsx)}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)},$$

die für die primäre gegenelektromotorische Kraft verbrauchte elektromotorische Kraft

$$E_0' = -n_0 e;$$

folglich der primäre Erregerstrom

$$I_{00} = E_0' Y_0 = -n_0 e (g_0 + jb_0),$$

die Komponente des primären Stromes, entsprechend dem sekundären Strome I_1

$$I_1' = -\frac{I_1}{a}$$

$$= -\frac{n_0 s e}{a^2 [(r_1 + r) - js(x_1 + x)]};$$

folglich der gesamte primäre Strom

$$I_0 = I_{00} + I_1' \\ = -sn_0 e \left[\frac{1}{a_2} \frac{1}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)} + \frac{g_0 + jsb_0}{s} \right]$$

und die primäre Klemmenspannung

$$E_0 = E_0' + I_0 Z_0 \\ = -n_0 e \left[I + \frac{s}{a^2} \frac{r_0 - jx_0}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)} + (r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0) \right]$$

Daher erhalten wir als *Gleichungen für den allgemeinen Wechselstromtransformator* bei dem Windungsverhältnis a und dem Verhältnis der Frequenzen s mit der bei voller Frequenz pro Windung induzierten elektromotorischen Kraft e als Parameter folgende Werte:

Für die primäre Klemmenspannung

$$E_0 = -n_0 e \left[I + \frac{s}{a^2} \frac{r_0 - jx_0}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)} + (r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0) \right].$$

Für die sekundäre Klemmenspannung

$$E_1 = sn_1 e \left[I - \frac{r_1 - jsx_1}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)} \right] = sn_1 e \frac{r - jsx}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)}.$$

Für den primären Strom

$$I_0 = -sn_0 e \left[\frac{I}{a^2} \frac{1}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)} + \frac{g_0 + jsb_0}{s} \right].$$

Für den sekundären Strom

$$I_1 = \frac{sn_1 e}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)}.$$

Hieraus erhalten wir das Verhältnis der Ströme

$$\frac{I_0}{I_1} = -\frac{1}{a} \left(I + \frac{a^2}{s} (g_0 + jb_0) [(r_1 + r) - j(x_1 + x)] \right),$$

das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte

$$\frac{E_0}{E_1} = -\frac{a}{s} \left[\frac{I + \frac{s}{a^2} \frac{r_0 - jx_0}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)} + (r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0)}{I - \frac{r_1 - jsx_1}{(r_1 + r) - js(x_1 + x)}} \right],$$

die gesamte scheinbare primäre Impedanz

$$Z_t = \frac{E_0}{I_0} = \frac{a^2}{s} [(r_1 + r) - j(x_1 + x)] \left\{ \frac{1 + \frac{s}{a^2} \frac{r_0 - jx_0}{(r_1 + r) + js(x_1 + x)} + (r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0)}{1 + \frac{a^2}{s} (g_0 + jb_0) [(r_1 + r) - js(x_1 + x)]} \right\},$$

wo in dem allgemeinen sekundären Stromkreise

$$x = x' + \frac{x''}{s} + \frac{x'''}{s^2}$$

ist.

Wenn wir in diese Gleichung

$$s = 1$$

einsetzen, so erhalten wir die allgemeinen Gleichungen des stationären Wechselstromtransformators

$$E_0 = -n_0 e \left(1 + \frac{1}{a^2} \frac{Z_0}{Z_1 + Z} + Z_0 Y_0 \right).$$

$$E_1 = n_1 e \left(1 - \frac{Z_1}{Z_1 + Z} \right) = n_1 e \frac{Z}{Z_1 + Z}.$$

$$I_0 = -n_0 e \left[\frac{1}{a^2 (Z_1 + Z)} + Y_0 \right].$$

$$I_1 = \frac{n_1 e}{Z_1 + Z}$$

$$\frac{I_0}{I_1} = -\frac{1}{a} \left[1 + a^2 Y_0 (Z_1 + Z) \right].$$

$$\frac{E_0}{E_1} = -a \left[\frac{1 + \frac{Z_0}{a^2 (Z_1 + Z)} + Z_0 Y_0}{1 - \frac{Z_1}{Z_1 + Z}} \right].$$

$$Z_t = \frac{E_0}{I_0} = a^2 (Z_1 + Z) \left[\frac{1 + \frac{Z_0}{a^2 (Z_1 + Z)} + Z_0 Y_0}{1 + a^2 Y_0 (Z_1 + Z)} \right].$$

Setzen wir in die Gleichungen des allgemeinen Wechselstromtransformators

$$Z = 0$$

ein, so erhalten wir die allgemeinen Gleichungen des Induktionsmotors:

$$E_0 = -n_0 e \left[1 + \frac{s}{a^2} \frac{r_0 - jx_0}{r_1 - jsx_1} + (r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0) \right].$$

$$E_1 = 0.$$

$$I_0 = -sn_0 e \left[\frac{1}{a^2 (r_1 - jsx_1)} + \frac{g_0 + jb_0}{s} \right].$$

$$I_1 = \frac{sn_1 e}{r_1 - jsx_1}.$$

$$\frac{I_0}{I_1} = -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{a^2}{s} (g_0 + jb_0) (r_1 - jsx_1) \right].$$

$$Z_t = \frac{a^2}{s} (r_1 - jsx_1) \left[\frac{1 + \frac{s}{a^2} \frac{r_0 - jx_0}{r_1 - jsx_1} + (r_0 - jx_0)(g_0 + jb_0)}{1 + \frac{a^2}{s} (r_1 - jsx_1) (g_0 + jb_0)} \right].$$

Wenn wir nun zu dem allgemeinen Wechselstromtransformator zurückkehren, so erhalten wir durch Einsetzung von

$$(r_1 + r)^2 + s^2 (x_1 + x)^2 = z_k^2,$$

und wenn wir die reellen und imaginären Grössen von einander trennen,

$$E_0 = -n_0 e \left\{ \left[1 + \frac{s}{a^2 z_k^2} [r_0(r_1 + r) + sx_0(x_1 + x)] + (r_0 g_0 + x_0 b_0) \right] + j \left[\frac{s}{a^2 z_k^2} [sr_0(x_1 + x) - x_0(r_1 + r)] + (r_0 g_0 - x_0 b_0) \right] \right\}$$

$$I_0 = -sn_0 e \left\{ \left[\frac{r_1 + r}{a^2 z_k^2} + \frac{g_0}{s} \right] + j \left[\frac{s(x_1 + x)}{a^2 z_k^2} + \frac{b_0}{s} \right] \right\}.$$

$$I_1 = \frac{sn_1 e}{z_k^2} [(r_1 + r) + js(x_1 + x)].$$

Wenn wir den Erregerstrom vernachlässigen oder besser ihn als einen besonderen und unabhängigen Neben-

schlussstromkreis ausserhalb des Transformators bezeichnen, wie dies annähernd geschehen kann, und wenn wir ferner die primäre auf den sekundären Stromkreis reduzierte Impedanz gleich der sekundären Impedanz annehmen, so haben wir

$$Y_0 = 0,$$

$$\frac{Z_0}{a^2} = Z_{11}.$$

Setzen wir dieses in die Gleichungen für den allgemeinen Wechselstromtransformator ein, so erhalten wir

$$E_0 = -n_0 e \left\{ 1 + \frac{s}{z_k^2} [r_1(r_1 + r) + s x_1(x_1 + x)] \right. \\ \left. + \frac{j s}{z_k^2} [s r_1(x_1 + x) - x_1(r_1 + r)] \right\}.$$

$$E_1 = \frac{s n_1 e}{z_k^2} \{ [r(r_1 + r) + s^2 x(x_1 + x)] + j s [r x_1 - x r_1] \}.$$

$$I_0 = -\frac{s n_1 e}{a z_k^2} [(r_1 + r) j s (x_1 + x)].$$

$$I_1 = \frac{s n_1 e}{z_k^2} [(r_1 + r) j s (x_1 + x)].$$

136. Ist $E = a + j\beta$ die elektromotorische Kraft in komplexen Grössen und $I = c + jd$ der Strom in komplexen Grössen, so ist der Effekt

$$P = EI \cos (E, I) = a c + \beta d.$$

Machen wir hiervon Gebrauch und bezeichnen wir $\frac{s n_1^2 e^2}{z_k^2}$ mit w , so erhalten wir als sekundäre Leistung des Transformators

$$P_1 = [E_1, I_1] = \left(\frac{s n_1 e}{z_k} \right)^2 r = s r w,$$

als inneren Verlust in dem sekundären Stromkreise

$$P_1^1 = i_1^2 r_1 = \left(\frac{s n_1 e}{z_k} \right)^2 r_1 = s r_1 w,$$

als gesamten sekundären Effekt

$$P_1 + P_1' = \left(\frac{s n_1 e}{z_k} \right)^2 (r + r_1) = s w (r + r_1),$$

als inneren Verlust in dem primären Stromkreise

$$P_0' = i_0^2 r_1 = \left(\frac{s n_1 e}{z_k} \right)^2 r_1 = s r_1 w,$$

als gesamte elektrische Leistung, einschliesslich des Verlustes

$$P^1 = P_1 + P_1' + P_0' = \left(\frac{s n_1 e}{z_k} \right)^2 (r + 2r_1) = s w (r + 2r_1),$$

als gesamten zugeführten elektrischen Effekt des primären Stromkreises

$$P_0 = s \left[E_0 I_0 \right] = \left(\frac{n_1 e}{z_k} \right)^2 (r + r_1 + s r_1) = w (r + r_1 + s r_1).$$

Daher ist die mechanische Leistung des Transformators

$$P = P_0 - P^1 = w (1 - s) (r + r_1),$$

und das Verhältnis

$$\frac{\text{mechanische Leistung}}{\text{gesamter sekundärer Effekt}} = \frac{P}{P_1 + P_1'} = \frac{1 - s}{s} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Schlüpfung}}.$$

137. Daher ist in einem allgemeinen Wechselstromtransformator mit dem Windungsverhältnis a und dem Verhältnis der Frequenzen s , wenn wir den Erregerstrom vernachlässigen, die elektrische Leistung in dem primären Stromkreise

$$P_0 = \frac{s n_1^2 e^2 (r + r_1 + s r_1)}{(r_1 + r)^2 + s^2 (x_1 + x)^2},$$

die mechanische Leistung

$$P = \frac{s (1 - s) n_1^2 e^2 (r + r_1)}{(r_1 + r)^2 + s^2 (x_1 + x)^2},$$

die elektrische Leistung des sekundären Stromkreises

$$P_1 = \frac{s^2 n_1^2 e^2 r}{(r_1 + r)^2 + s^2 (x_1 + x)^2}$$

und der Verlust in dem Transformator

$$P_0' + P_1' = P' = \frac{2 s^2 n_1^2 e^2 r_1}{(r_1 + r)^2 + s^2 (x_1 + x)^2}.$$

Von diesen Grössen sind P^1 und P_1 immer positiv; P_0 und P können positiv oder negativ, entsprechend dem Werte von s , sein. Daher kann der Apparat entweder mechanische Energie erzeugen, indem er als ein Motor wirkt, oder mechanische Energie verbrauchen; oder er kann als Generator entweder elektrische Energie verbrauchen oder erzeugen.

138. Bei Synchronismus ist $s = 0$ und $P_0 = 0$, $P = 0$; $P_1 = 0$ bei $0 < s < 1$ zwischen Synchronismus und Stillstand.

P_1 , P und P_0 sind positiv; d. h. der Apparat verbraucht den elektrischen Effekt P_0 in dem primären Stromkreise und erzeugt eine mechanische Leistung P und eine elektrische $P_1 + P_1^1$ in dem sekundären Stromkreise; sie wird teils durch den inneren sekundären Widerstand als P_1^1 verbraucht, teils ist sie an den sekundären Klemmen nutzbar als P_1 .

In diesem Falle ist

$$\frac{P_1 + P_1^1}{P} = \frac{s}{1 - s};$$

d. h. von der in dem primären Stromkreise P_0 verbrauchten elektrischen Leistung wird ein Teil P_0^1 durch den inneren primären Widerstand verbraucht und der Rest auf den sekundären übertragen und verteilt sich auf die elektrische Leistung $P_1 + P_1^1$ und in die mechanische Leistung P , und zwar in dem Verhältnis der Schlüpfung s unter dem Synchronismus zur Geschwindigkeit $1 - s$.

In diesem Bereich ist der Apparat ein Motor.

Bei $s > 1$ oder beim Rückwärtstreiben ist $P < 0$, oder negativ; d. h. der Apparat erfordert mechanische Kraft zum Betrieb.

Es ist dann: $P_0 - P_0^1 - P_1^1 < P_1$;

d. h. der sekundäre elektrische Effekt wird teils durch den primären elektrischen Effekt, teils durch die mechanische Leistung erzeugt, und der Apparat wirkt gleichzeitig als Transformator und als Wechselstromgenerator, mit der sekundären Wicklung als Armatur.

Das Verhältnis der mechanischen Leistung zur elektrischen ist gleich dem der Geschwindigkeit zum Synchronismus. In diesem Falle ist die sekundäre Frequenz grösser als die primäre.

Bei $P < 0$,
über Synchronismus muss der Apparat durch mechanische

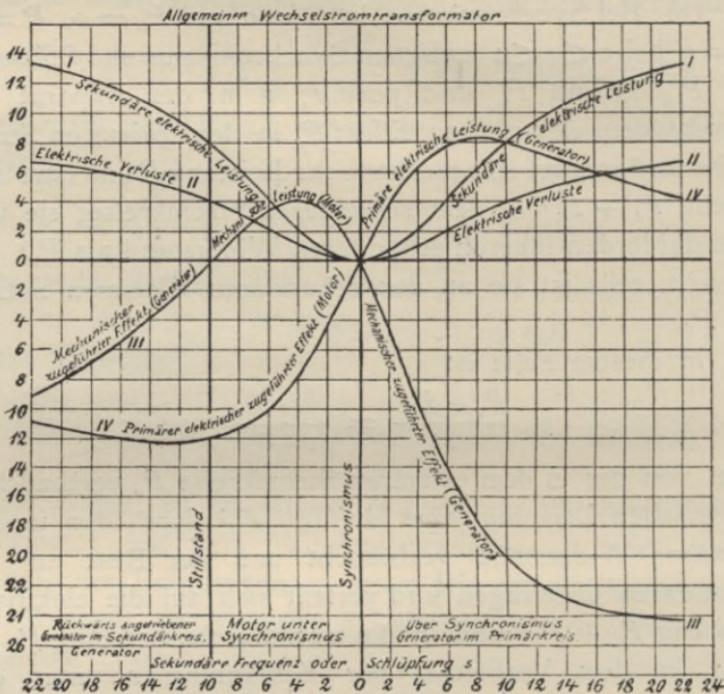


Fig. 104.

Kraft betrieben werden, bei $P^0 < 0$ erzeugt der primäre Stromkreis elektrische Energie aus mechanisch zugeführter.

Ist $r + r_1 + s r_1 = 0$, oder $s < -\frac{r + r_1}{r}$, so wird die in dem primären Stromkreis erzeugte elektromotorische Kraft kleiner als diejenige, die erforderlich ist, um die Energieverluste zu decken, und P_0 wird wieder positiv.

Folglich bei

$$s < -\frac{r+r_1}{r}$$

wird mechanische und primäre elektrische Energie verbraucht und sekundäre elektrische Energie erzeugt.

Bei

$$-\frac{r+r_1}{r} < s < 0,$$

wird mechanische verbraucht und elektrische Energie in dem primären und in dem sekundären Stromkreise erzeugt.

Bei

$$0 < s < 1,$$

wird primäre elektrische Energie verbraucht und mechanische und sekundäre elektrische Energie erzeugt.

Bei

$$1 < s,$$

wird mechanische und primäre elektrische Energie verbraucht und sekundäre elektrische Energie erzeugt.

139. Als Beispiele sind in der Figur 1 für die Werte $n_1 e = 100,0$, $r_1 = 0,1$, $k_1 = 0,2$, $r = 0,4$ und $s = 0,3$ in Kurve I die sekundäre elektrische Leistung, in Kurve II der gesamte innere Verlust, in Kurve III die mechanische Leistung und in Kurve IV der zugeführte primäre elektrische Effekt dargestellt, und zwar mit der Schlüpfung s als Abscissen.

Folglich

$$P_1 = \frac{16000 s^2}{1 + s^2};$$

$$P_0^1 + P_1^1 = \frac{8000 s^2}{1 + s^2};$$

$$P_0 = \frac{4000 s + (5 + s)}{1 + s^2};$$

$$P = \frac{20000 s (1 - s)}{1 + s^2}.$$

Kapitel XV.

Der Induktionsmotor.

140. Als Spezialfall des allgemeinen Wechselstromtransformators ist der Induktionsmotor anzusehen. Er unterscheidet sich vom stationären Wechselstromtransformator insofern als die beiden elektrischen Stromkreise (der primäre oder erregte, und der sekundäre oder induzierte) in Beziehung aufeinander beweglich sind und auch noch dadurch, dass im allgemeinen eine Anzahl primärer und sekundärer Stromkreise gebraucht wird, die auf der Peripherie des Motors um bestimmte Winkel versetzt und elektromotorische Kräfte enthalten, die in gleicher Weise um denselben Winkel phasenverschoben sind. Diese Anordnung vieler Stromkreise bewirkt, dass die sekundären Stromkreise andauernd durch die primären induziert werden, trotz deren relativer Bewegung.

Die Wirkung der relativen Bewegung der primären gegenüber der sekundären Wicklung ist, dass die elektromotorischen Kräfte, die in dem sekundären Stromkreise oder in dem Motoranker erzeugt werden, nicht dieselbe Frequenz haben wie die Klemmenspannungen des primären Stromkreises, sondern eine Frequenz, die gleich der Differenz zwischen der primären Frequenz und der Frequenz der Rotation ist, oder gleich der Schlüpfung, d. h. der Differenz zwischen dem Synchronismus und der Geschwindigkeit (in Cyklen).

Ist nun N die Frequenz der primären elektromotorischen Kraft und s die Schlüpfung in Prozenten, so ist demnach sN die Frequenz des Ankers oder der sekundären elektromotorischen Kraft und $(1 - s)N$ die Frequenz der Rotation der Armatur.

Bei seiner Rückwirkung auf den primären Stromkreis

hat der Ankerstrom jedoch dieselbe Frequenz, wie der primäre Strom, weil er mechanisch gedreht wird und zwar mit einer solchen Frequenz, dass er in derselben Lage immer dasselbe Phasenverhältnis in Beziehung auf den primären Strom hat.

141. Angenommen das primäre System bestehe aus p gleichen Stromkreisen, die um Winkel, deren jeder $\frac{1}{p}$ einer Periode ist, versetzt sind, d. h. also jeder Stromkreis habe die Breite $\frac{1}{p}$ des Polabstandes und werde von p elektromotorischen Kräften erregt, die in der Phase um $\frac{1}{p}$ einer Periode verschoben sind, oder mit anderen Worten: die Feldstromkreise mögen aus einem symmetrischen p -Phasensystem bestehen.

Ganz analog nehmen wir an, dass der Anker oder die sekundären Stromkreise aus einem p_1 -Phasensystem bestehen. Nun sei n die Zahl der primären Windungen eines Stromkreises oder einer Phase, n_1 die Zahl der sekundären Windungen eines Stromkreises oder einer Phase, $a = \frac{n p}{n_1 p_1}$ das Verhältnis der gesamten primären Windungen zu den gesamten sekundären Windungen, oder das Übersetzungsverhältnis.

Da die Zahl der sekundären Stromkreise und die Windungszahl der sekundären Stromkreise bei dem Induktionsmotor ebenso wie bei dem stationären Transformator ganz ohne Bedeutung ist, so zieht man es vor, alle sekundären Grössen auf den Primärkreis mittels des Übersetzungsverhältnisses a zu reduzieren.

Ist also E_1' die sekundäre elektromotorische Kraft eines Stromkreises, so ist $E_1 = a E_1'$ die sekundäre elektromotorische Kraft eines Stromkreises, auf den Primärkreis reduziert; ist I_1' der sekundäre Strom eines Stromkreises, so ist $I_1 = \frac{I_1'}{a}$ der sekundäre Strom eines Strom-

kreises, reduziert auf den Primärkreis; ist r_1' der sekundäre Widerstand *eines* Stromkreises, so ist $r_1 = a^2 r_1'$ der sekundäre Widerstand *eines* Stromkreises auf den Primärkreis reduziert; ist x_1' die sekundäre Reaktanz *eines* Stromkreises, so ist $x_1 = a^2 x_1'$ die sekundäre Reaktanz *eines* Stromkreises, auf den *Primärkreis* reduziert; ist endlich z_1' die sekundäre Impedanz *eines* Stromkreises, so ist $z_1 = a^2 z_1'$ die sekundäre Impedanz *eines* Stromkreises, auf den *Primärkreis* reduziert; d. h. die Zahl der sekundären Stromkreise und die der Windungen *eines* sekundären Stromkreises ist gleich der in dem Primärkreis angenommen.

In der nun folgenden Diskussion werden als sekundäre Grössen ausschliesslich Werte, die auf den Primärkreis reduziert sind, gebraucht, so dass zur Ableitung der wahren sekundären Werte diese Grössen wieder rückwärts mit Hülfe des Faktors

$$a = \frac{n p}{n_1 p_1}$$

reduziert werden müssen.

142. Ist Φ die maximale Kraftlinienzahl *eines* Motorpoles, dann ist $E = \sqrt{2} \pi n N \Phi 10^{-8}$ die durch das magnetische Feld *eines* primären Stromkreises induzierte effektive elektromotorische Kraft. Zählen wir die Zeit von dem Moment an, wo die wachsende Kraftlinienzahl der gemeinsamen Induktion Φ (ein Feld, das sowohl mit dem primären als auch mit dem sekundären Stromkreise verkettet ist) durch Null geht, und zwar in komplexen Grössen, so wird der Kraftlinienfluss durch

$$\Phi = j \Phi$$

bezeichnet und die primäre induzierte elektromotorische Kraft durch

$$E = -e,$$

wo

$e = \sqrt{2} \pi n N \Phi 10^{-8}$ als die treibende elektromotorische Kraft des Motors angesehen werden kann.

Da die sekundäre Frequenz gleich sN ist, so ist die sekundäre induzierte elektromotorische Kraft (auf den Primärkreis reduziert)

$$E_1 = -se.$$

Es sei I_0 der Erregerstrom oder der einen primären Stromkreis des Motors durchfließende Strom, wenn er keine Arbeit zu leisten hat (wie beim Synchronismus), und $Y = g + jb$ die primäre Admittanz eines Stromkreises $= \frac{I_0}{e}$.

Dann ist der magnetische Energiestrom ge , der Effektverlust durch Hysteresis (und Wirbelströme) einer primären Spule ge^2 . Folglich ist pge^2 der gesamte Energieverlust durch Hysteresis und Wirbelströme, wie im Kapitel X berechnet wurde.

be ist der magnetisierende Strom und nbe die effektive magnetomotorische Kraft eines primären Stromkreises, folglich $\frac{p}{2}nbe$ die gesamte effektive magnetomotorische Kraft und $\frac{p}{\sqrt{2}}nbe$ die gesamte maximale magnetomotorische Kraft, als Resultante der magnetomotorischen Kräfte der p Phasen, zusammengesetzt nach dem Parallelogramm der magnetomotorischen Kräfte.*)

Wenn \mathcal{R} die Reluktanz des magnetischen Stromkreises pro Pol ist, wie in Kapitel X bereits erörtert wurde, so ist

$$\frac{\Phi}{\sqrt{2}}nbe = \mathcal{R}\Phi.$$

Derart werden aus dem Hysteresisverlust und der Reluktanz die Konstanten g und b und damit die Admittanz Y abgeleitet.

Ist r der Widerstand und x die Reaktanz eines primären Stromkreises, so ist $Z = r - jx$ die Impedanz eines primären Stromkreises, r_1 der Widerstand eines sekundären

*) Vollständige Diskussion siehe Kapitel XXIII.

Stromkreises auf den Primärkreis reduziert und x_1 die Reaktanz eines sekundären Stromkreises, reduziert auf den Primärkreis, bei voller Frequenz N .

Folglich ist $s x_1$ die Reaktanz eines sekundären Stromkreises bei der Schlüpfung s und $Z_1 = r_1 - j s x_1$ die innere sekundäre Impedanz.

143. Wir erhalten nun für die primär induzierte elektromotorische Kraft

$$E = -e,$$

für die sekundär induzierte elektromotorische Kraft

$$E_1 = -s e,$$

folglich für den sekundären Strom

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1} = - \frac{s e}{r_1 - j s x_1},$$

für die entsprechende Komponente des primären Stromes

$$I_1' = -I_1 = \frac{s e}{r_1 - j s x_1},$$

für den primären Erregerstrom

$$I_0 = e Y = e (g + j b);$$

also für den gesamten primären Strom

$$I = I_1' + I_0 = e \left[\frac{s}{r_1 - j s x_1} + (g + j b) \right],$$

für die durch die primäre Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft

$$E_s = Z I = e (r - j x) \left[\frac{s}{r_1 - j s x} + (g + j b) \right],$$

für die zur Überwindung der primär induzierten elektromotorischen Kraft erforderliche elektromotorische Kraft

$$-E = e,$$

folglich für die primäre Klemmenspannung

$$E_0 = e + E_s$$

$$= e \left[1 + \frac{s (r - j x)}{r_1 - j s x} + (r - j x) (g + j b) \right].$$

Folglich erhalten wir in einem Induktionsmotor bei der Schlüpfung s und der treibenden elektromotorischen Kraft e als primäre Klemmenspannung

$$E_0 = e \left[1 + \frac{s(r - jx)}{r_1 - jsx_1} (r - jx)(g + jb) \right],$$

als primären Strom

$$I = e \left[\frac{s}{r_1 - jsx_1} + (g + jb) \right];$$

oder in komplexen Grössen ausgedrückt für die primäre Klemmenspannung

$$E_0 = e \left(1 + s \frac{Z}{Z_1} + ZY \right),$$

für den primären Strom

$$I = e \left(\frac{s}{Z_1} + Y \right).$$

Durch Division eliminieren wir e und erhalten dann für den primären Strom bei der Schlüpfung s und für die Klemmenspannung E_0

$$I = \frac{s + Z_1 Y}{Z_1 + sZ + ZZ_1 Y} E_0,$$

oder

$$I = \frac{s + (r_1 - jsx_1)(g + jb)}{(r_1 - jsx_1) + s(r - jx) + (r - jx)(r_1 - jsx_1)(g + jb)} E_0.$$

Vernachlässigen wir im Nenner die kleine Grösse $ZZ_1 Y$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \frac{s + Z_1 Y}{Z_1 + sZ} E_0 \\ &= \frac{s + (r_1 - jsx_1)(g + jb)}{(r_1 - jsx_1) + s(r - jx)} E_0 \\ &= \frac{(s + r_1 g + sx_1 b) + j(r_1 g - sx_1 b)}{(r_1 + sr) - js(x_1 + x)} E_0; \end{aligned}$$

oder entwickelt

$$I = \frac{[(sr_1 + s^2 r) + r_1^2 g + sr_1 (rg - xb) + s^2 x_1 (xg + x_1 g + rb)] + j[s^2 (x + x_1) + r_1^2 b + sr_1 (xg + rb) + s^2 x_1 (xb + x_1 b - rg)]}{(r_1 + sr)^2 + s^2 (x_1 + x)^2} E_0.$$

Daher ist die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der elektromotorischen Kraft

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{s^2(x+x_1) + r_1^2 b + sr_1(xg+rb) + s^2 x_1(xb+x_1 b - rg)}{(sr_1 + s^2 r) + r_1^2 g + sr_1(rg - xb) + s^2 x_1(xg + x_1 g + rg)}$$

Wenn wir den Erregerstrom I_0 gänzlich vernachlässigen, d. h. wenn wir $Y=0$ setzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= s E_0 \frac{(r_1 + sr) + js(x + x_1)}{(r_1 + sr)^2 + s^2(x + x_1)^2} \\ &= \frac{s E_0}{(r_1 + sr) - s(x + x_1)}; \\ \operatorname{tg} \omega_0 &= \frac{s(x + x_1)}{r_1 + sr}. \end{aligned}$$

144. Graphisch sieht das Diagramm des Induktionsmotors folgendermassen aus:

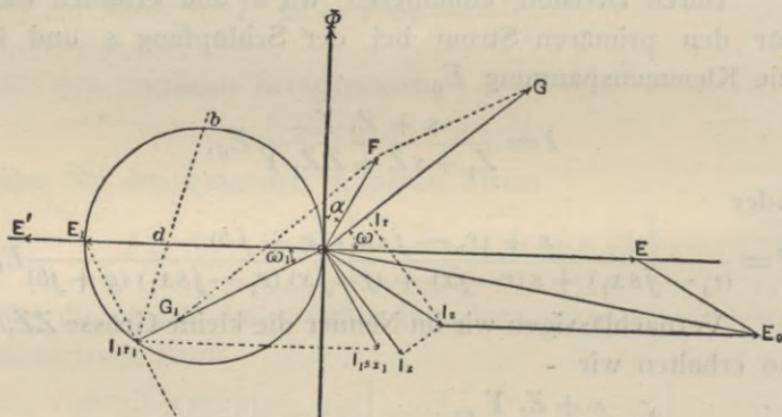


Fig. 105.

Bezeichnen wir in Figur 105 den Magnetismus durch den vertikalen Vektor $O\Phi$, so wird die magnetomotorische Kraft in Ampèrewindungen pro Stromkreis durch den Vektor OF dargestellt, der dem Magnetismus $O\Phi$ um den Winkel der Hysteresisvoreilung α vorausleitet. Die in dem sekundären Stromkreise induzierte elektromotorische Kraft ist der Schlüpfung s proportional und wird durch OE , bei

einer Amplitude von 180^0 dargestellt. Wenn wir OE_1 durch a im Verhältnis $r_1:sx_1$ teilen und a mit der Mitte b des oberen Bogens des Kreises OE_1 verbinden, so schneidet diese Linie den unteren Bogen des Kreises in dem Punkte I_1r_1 . Daher ist OI_1r_1 die durch den sekundären Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft und OI_1x_1 , das $E_1I_1r_1$ gleich und parallel, ist die durch die sekundäre Reaktanz verbrauchte elektromotorische Kraft. Der Winkel $E_1OI_1r_1 = \omega_1$ ist der sekundäre Phasenwinkel.

Die sekundäre magnetomotorische Kraft OG_1 läuft in der Richtung des Vektors OI_1r_1 . Vervollständigen wir das Parallelogramm der magnetomotorischen Kräfte mit OF als Diagonale und OG_1 als eine Seite, so erhalten wir die primäre magnetomotorische Kraft OG als andere Seite. Der primäre Strom und die durch den primären Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft, dargestellt durch OIr , fällt in die Richtung von OG , die durch die primäre Reaktanz verbrauchte elektromotorische Kraft eilt um 90^0 OG voraus und wird durch OIx dargestellt, und ihre Resultante OIs ist die durch die primäre Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft. Die in dem primären Stromkreise induzierte elektromotorische Kraft ist OE_1 und die zur Ueberwindung dieser gegenelektromotorischen Kraft erforderliche elektromotorische Kraft ist OE , gleich und entgegengesetzt gerichtet OE_1 . Wenn wir OE und OIs zusammensetzen, so erhalten wir die primäre Klemmenspannung, die durch den Vektor OE_0 und den Winkel der primären Phasenverschiebung $E_0 OG = \omega_0$ dargestellt wird.

145. Soweit ist das Diagramm im wesentlichen dasselbe wie das des stationären Wechselstromtransformators.

Wenn wir die Abhängigkeit von der Schlüpfung des Motors betrachten, so wird der geometrische Ort der verschiedenen Grössen für verschiedene Werte der Schlüpfung s folgendermassen bestimmt:

Ist $E_1 = sE_1'$,
 so verhält sich $OA : I_1 r_1 = E_1 : I_1 s x_1$

$$OA = \frac{I_1 r_1 \times E_1}{I_1 s x_1} = \frac{I_1 r_1 \times s E_1'}{I_1 s x_1} = \frac{r_1}{x_1} E_1' = \text{konstant},$$

d. h. $I_1 r_1$ liegt auf einem Halbkreise mit $\frac{r_1}{x_1} E_1'$ als Durchmesser.

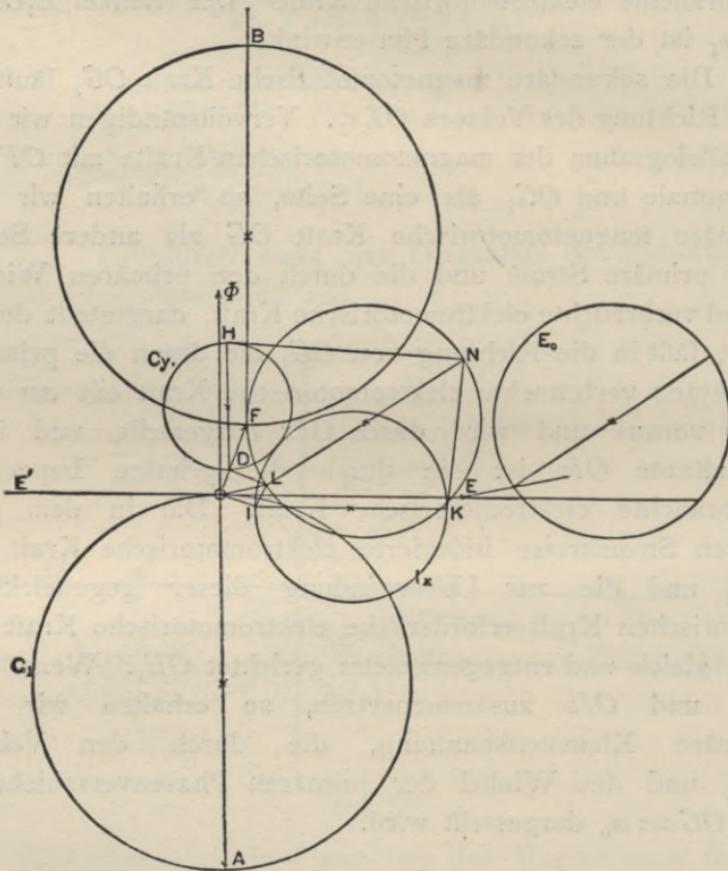


Fig. 106.

Dies bedeutet, dass G_1 auf einem Halbkreise g_1 mit OA als Durchmesser liegt. (Fig. 106.) Deshalb liegt G_0 auf dem Halbkreise g_0 und FB ist gleich und parallel OA als Durchmesser.

Ir liegt auf einem Halbkreise mit DH als Durchmesser, welcher Kreis die Perspektive des Kreises FB ist. Ix liegt auf einem Halbkreise mit IK als Durchmesser und Iz ebenfalls auf einem Halbkreise mit LN als Durchmesser, welcher Kreis durch Kombination der Kreise Ir und Ix abgeleitet ist.

Die primäre Klemmenspannung E_0 liegt auf einem Halbkreise eo , der gleich dem Halbkreise Iz ist und der zu dem Punkt E dieselbe Lage hat wie der Halbkreis Iz zu dem Punkte o .

Dieses Diagramm entspricht einer konstanten Intensität des maximalen Magnetismus $O\Phi$. Wenn die primäre Klemmenspannung E_0 konstant gehalten wird, so geht der Kreis eo der primären Klemmenspannung in einen Bogen mit O als Mittelpunkt über und alle entsprechenden Punkte der anderen Kreise müssen dementsprechend reduziert werden, so dass sich als Örter der anderen Grössen Kurven höherer Ordnung ergeben, die am bequemsten Punkt für Punkt durch Reduktion des zugehörigen Kreises in Fig. 106 konstruiert werden.

Drehmoment.

146. Das von einem Motor pro Pol entwickelte Drehmoment ist gleich dem Produkt aus dem effektiven Magnetismus $\frac{\Phi}{\sqrt{2}}$, und der effektiven magnetomotorischen Kraft des Ankers $\frac{F}{\sqrt{2}}$ mal dem Sinus des Winkels, den beide mit einander einschliessen, also

$$v' = \frac{\Phi F}{2} \sin(\Phi F_1).$$

Wenn n_1 die Zahl der Windungen, I_1 der Strom eines Stromkreises bei p -Ankerstromkreisen ist, so ist die

gesamte maximale magnetomotorische Kraft des Ankers

$$F_1 = \frac{p n_1 I_1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich ist das Drehmoment pro Pol

$$\tau' = \frac{p n_1 \Phi I_1}{2 \sqrt{2}} \sin (\Phi I_1).$$

Ist a die Zahl der Pole des Motors, so beträgt das gesamte Drehmoment des Motors

$$\tau = \frac{d p n_1 \Phi I_1}{2 \sqrt{2}} \sin (\Phi I_1).$$

Die sekundär induzierte elektromotorische Kraft E_1 bleibt 90° hinter dem induzierenden Magnetismus zurück und erreicht daher ein Maximum, das im Raum gegen die Stellung der maximalen Magnetisierung um 90° verschoben ist. Wenn daher der sekundäre Strom I_1 hinter der elektromotorischen Kraft E_1 um den Winkel ω zurückbleibt, so ist die räumliche Verschiebung zwischen dem Ankerstrom und dem Feldmagnetismus

$$\angle (I_1 \Phi) = 90^\circ + \omega_1,$$

folglich

$$\sin (\Phi I_1) = \cos \omega_1.$$

Es ist aber

$$\cos \omega_1 = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + s^2 x_1^2}},$$

$$I_1 = \frac{e s}{\sqrt{r_1^2 + s^2 x_1^2}},$$

$$e = \sqrt{2} \pi n_1 \Phi N 10^{-8};$$

folglich

$$\Phi = \frac{e 10^8}{\sqrt{2} \pi N}.$$

Wenn wir diese Werte in die Gleichung für das Drehmoment einsetzen, so ist

$$\tau = \frac{d p s r_1 e^2 10^8}{4 \pi N (r_1^2 + s^2 x_1^2)}$$

oder in C. G. S.-Einheiten

$$\tau = \frac{d p s r_1 e^2}{4\pi N (r_1^2 + s^2 x_1^2)}.$$

Drehmoment und Leistung.

Bei der Schlüpfung s , der Frequenz N und der Polzahl d ist die lineare Geschwindigkeit für den Radius Eins

$$v = \frac{4\pi N}{d} (1 - s);$$

folglich die Leistung des Motors

$$P = \tau v;$$

oder eingesetzt

$$P = \frac{p r_1 e^2 s (1 - s)}{r_1^2 + s^2 x_1^2}.$$

Leistung des Induktionsmotors.

147. Wir können zu diesen Resultaten auch auf andere Weise gelangen:

Von der genelektromotorischen Kraft e des primären Stromkreises mit dem Strom $I = I_0 + I_1$ wird der Effekt $eI = eI_0 + eI_1$ verbraucht. Der Effekt eI_0 ist derjenige, welcher durch die primäre Hysteresis und durch die Wirbelströme verbraucht wird. Der Effekt eI_1 verschwindet in dem primären Stromkreise, indem er auf das sekundäre Netz übertragen wird.

Daher ist der gesamte in die sekundäre Wicklung hineingeschickte Effekt pro Stromkreis

$$P_1 = e I_1.$$

Hiervon wird ein Teil $E_1 I_1$ in dem sekundären Stromkreise durch den Widerstand verbraucht. Der Rest

$$P' = I_1 (e - E_1)$$

verschwindet als elektrische Energie vollständig und muss infolge des Gesetzes von der Erhaltung der Energie als eine andere Form von Energie erscheinen und zwar in diesem Falle als mechanische Kraft oder als Leistung des Motors

(einschliesslich mechanischer und sekundärer magnetischer Reibung).

Daher ist die mechanische Leistung eines Motorstromkreises

$$P' = I_1 (e - E_1).$$

Setzen wir

$$E_1 = s e$$

$$I_1 = \frac{s e}{r_1 - j s x_1},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} P' &= \frac{e^2 s (1 - s)}{r_1 - s j x_1} \\ &= \frac{e^2 s (1 - s) (r_1 + j s x_1)}{r_1^2 + s^2 x_1^2}, \end{aligned}$$

folglich, weil der imaginäre Teil als Energie keine Bedeutung hat,

$$P' = \frac{r_1 e^2 s (1 - s)}{r_1^2 + s^2 x_1^2},$$

und ferner als den gesamten Effekt des Motors

$$P = \frac{p r_1 e^2 s (1 - s)}{r_1^2 + s^2 x_1^2}.$$

Bei der linearen Geschwindigkeit

$$v = \frac{4 \pi N}{d} (1 - s),$$

für den Radius Eins ist das Drehmoment

$$\tau = \frac{d p r_1 e^2 s}{4 \pi N (r_1^2 + s^2 x_1^2)}.$$

Oben haben wir gefunden

$$E_0 = e \left(1 + s \frac{Z}{Z_1} + Z Y \right),$$

oder annähernd

$$E_0 = e \left(1 + s \frac{Z}{Z_1} \right),$$

oder

$$e = \frac{E_0 Z_1}{s Z + Z_1};$$

entwickelt

$$e = E_0 \frac{r_1 - jsx_1}{(r_1 + sr) - js(x_1 + x)}$$

oder, wenn wir die imaginären Grössen eliminieren,

$$e = E_0 \sqrt{\frac{r_1^2 + s^2 x_1^2}{(r_1 + sr)^2 + s^2 (x_1 + x)^2}}$$

Wenn wir diesen Wert in die Gleichungen für das Drehmoment und für die Leistung einsetzen, so ist das Drehmoment

$$\tau = \frac{d p r_1 E_0^2 s}{4 \pi N [(r_1 + sr)^2 + s^2 (x_1 + x)^2]},$$

die Leistung

$$P = \frac{p r_1 E_0^2 s (1 - s)}{(r_1 + sr)^2 + s^2 (x_1 + x)^2}.$$

Maximales Drehmoment.

148. Das Drehmoment des Induktionsmotors ist ein Maximum bei der Schlüpfung s , wenn

$$\frac{d \tau}{d s} = 0,$$

oder da

$$\tau = \frac{d p r_1 E_0^2 k}{4 \pi N [(r_1 + sr)^2 + s^2 (x_1 + x)^2]},$$

ergibt

$$\frac{d}{d s} \left[\frac{(r_1 + sr)^2 + s^2 (x_1 + x)^2}{s} \right] = 0$$

entwickelt

$$-\frac{r_1^2}{s^2} + r^2 + (x_1 + x)^2 = 0,$$

oder

$$s_t = \frac{r_1}{\sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2}}.$$

Wenn wir dieses in die Gleichung des Drehmomentes einsetzen, so ergibt sich als Wert des maximalen Drehmomentes

$$r_t = \frac{d p E_0^2}{8 \pi N [r + \sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2}]},$$

d. h. unabhängig von dem sekundären Widerstand r_1 .

Der entsprechende Effekt, den man durch Substitution von s_t in P erhält, ist

$$P_t = \frac{p E_0^2 [\sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2} - r_1]}{2 \sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2} [\sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2} + r]}.$$

Dieser Effekt ist nicht die maximale Leistung des Motors, sondern geringer als diese. Die maximale Leistung erhält man bei kleinerer Schlüpfung oder grösserer Geschwindigkeit, während an dem Punkte des maximalen Drehmomentes die Leistung schon infolge der verminderten Geschwindigkeit abnimmt.

Bei wachsender Schlüpfung oder abnehmender Geschwindigkeit wächst das Drehmoment des Induktionsmotors; und umgekehrt bei wachsender Belastung sinkt die Geschwindigkeit des Motors und es steigt das Drehmoment, so dass die Belastung bis zur Schlüpfung s_t , entsprechend dem maximalen Drehmoment, sinkt. Bei dieser Belastung und Schlüpfung fängt das Drehmoment an zu sinken; d. h. bei wachsender Belastung und daher wachsender Schlüpfung erreicht der Motor das maximale Drehmoment s_t , d. h. er fällt aus dem Tritt und steht still.

Umgekehrt wächst das Drehmoment des Motors beim Anlassen aus seiner Ruhelage mit steigender Geschwindigkeit, bis der Punkt seines maximalen Drehmomentes erreicht ist. Von da ab fällt das Drehmoment wieder bis zum Synchronismus. Infolgedessen ist der Teil der Geschwindigkeitskurve des Drehmomentes unter dem Punkt des maximalen Drehmomentes im allgemeinen labil und kann nur dadurch beobachtet werden, dass man den Motor mittelst eines Apparates belastet, dessen Gegendrehmoment mit der Geschwindigkeit schneller steigt, als das Drehmoment des Induktionsmotors.

Im allgemeinen liegt der Punkt s_t des maximalen Drehmomentes zwischen dem Synchronismus und dem Stillstand näher dem Synchronismus. Nur bei Motoren von sehr hohem Ankerwiderstand, d. h. niedrigem Wirkungsgrad, ist $s_t > 1$, d. h. das maximale Drehmoment liegt unter dem Stillstand und das Drehmoment wächst ständig vom Synchronismus bis zum Stillstand.

Es ist klar, dass die Lage des Punktes s_t des maximalen Drehmomentes dadurch verändert werden kann, dass man den Widerstand des sekundären Stromkreises oder den des Motorankers ändert. Da die Schlüpfung bei dem Punkt des maximalen Drehmomentes s_t direkt proportional dem Ankerwiderstande r_1 ist, so folgt, dass eine hohe konstante Geschwindigkeit und ein hoher Wirkungsgrad den Punkt des maximalen Drehmoments dem Synchronismus nähert und ein kleines Anzugsdrehmoment giebt, während ein gutes Anzugsmoment den Punkt des maximalen Drehmoments bei niedriger Geschwindigkeit bedeutet, d. h. einen Motor mit schlechter Geschwindigkeitsregulierung und niedrigem Wirkungsgrad.

Um daher einen hohen Wirkungsgrad und eine gute Geschwindigkeitsregulierung bei grossem Anzugsmoment zu erhalten, muss der Ankerwiderstand während des Betriebes des Motors geändert und der Motor mit hohem Ankerwiderstand angelassen und mit steigender Geschwindigkeit dieser Widerstand soweit als möglich ausgeschaltet werden.

149. Ist

$$s_t = 1,$$

so ist

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2}.$$

In diesem Falle läuft der Motor mit maximalem Drehmoment an, und wenn er überlastet ist, fällt er nicht aus dem Tritt, sondern läuft immer langsamer, bis er schliesslich still steht.

Bei

$$s_t > 1$$

ist

$$r_1 > \sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2}.$$

In diesem Falle wird der Punkt des maximalen Drehmomentes nur dadurch erreicht, dass man den Motor in entgegengesetztem Sinne durch ein Gegenmoment antreibt.

Wie aus obigem zu ersehen, ist das maximale Drehmoment τ_t ganz unabhängig von dem Widerstand des Ankers und dem in diesem fließenden Strom. Nur die Geschwindigkeit des Motors hängt von dem Widerstand des Ankers ab.

Daher ändert die Einschaltung eines Widerstandes in den Ankerkreis das maximale Drehmoment und den ihm entsprechenden Strom nicht, sondern erniedrigt nur die Geschwindigkeit, bei der das maximale Drehmoment erreicht wird.

Die Wirkung des in den Induktionsmotor eingeschalteten Widerstandes ist die, nur die elektromotorische Kraft zu verbrauchen, die sonst ihr mechanisches Aequivalent in erhöhter Geschwindigkeit finden würde, ganz analog dem Widerstande in dem Ankerstromkreise eines Gleichstromnebenschlussmotors.

Weitere Abhandlungen über die Wirkung des Ankerwiderstandes sind unter „Anzugsmoment“ zu finden.

Maximale Leistung.

150. Die Leistung eines Induktionsmotors ist ein Maximum für die Schlüpfung s_p , wo

$$\frac{dP}{ds} = 0;$$

oder da

$$P = \frac{pr_1 E_0^2 s (1-s)}{(r_1 + sr)^2 + s^2 (x_1 + x)^2},$$

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{(r_1 + sr)^2 + s^2 (x_1 + x)^2}{s (1-s)} \right] = 0,$$

entwickelt, ergibt dieses

$$s_p = \frac{r_1}{r_1 + \sqrt{(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2}};$$

in die Gleichung für P eingesetzt, erhalten wir die maximale Leistung

$$P_p = \frac{\rho E_0^2}{2[(r_1 + r) + \sqrt{(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2}]}$$

Dieses Resultat hat eine einfache physikalische Bedeutung: $(r_1 + r) = R$ ist der gesamte primäre und sekundäre Widerstand des Motors, wobei der sekundäre auf den primären reduziert ist. $(x_1 + x)$ ist die gesamte Reaktanz, folglich $\sqrt{(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2} = Z$ die gesamte Impedanz des Motors. Daher ist

$$P_p = \frac{\rho E_0^2}{2(R + Z)}$$

die maximale Leistung des Induktionsmotors bei der Schlüpfung

$$s_p = \frac{r_1}{r_1 + Z}$$

Derselbe Wert ist im Kapitel IX für die maximale Leistung, die in einen induktionsfreien Stromkreis durch eine Leitung mit dem Widerstand R und der Impedanz Z gesandt werden kann, oder für die maximale Leistung eines Generators oder eines stationären Transformators abgeleitet worden. Daher wird:

die maximale Leistung eines Induktionsmotors durch dieselbe Formel ausgedrückt wie die eines Generators, oder eines stationären Transformators, oder wie diejenige Leistung, die durch eine nicht-induktionsfreie Leitung in einen induktionsfreien Stromkreis geschickt werden kann.

Das der maximalen Leistung P_p entsprechende Drehmoment ist

$$\tau_p = \frac{d\rho E_0^2 (r_1 + Z)}{8\pi N Z (R + Z)}$$

Dies ist nicht das maximale Drehmoment, sondern dieses Drehmoment τ_t findet bei niedrigerer Geschwindigkeit, also bei grösserer Schlüpfung

$$s_t = \frac{r_1}{\sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2}}$$

statt, folglich

$$\frac{r_1}{\sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2}} > \frac{r_1}{r^2 + \sqrt{(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2}};$$

d. h. $s_t > s_p$.

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass zur Erreichung einer möglichst grossen Leistung R und Z so klein als möglich zu wählen sind, d. h. die Widerstände $r_1 + r$, die Impedanzen Z und daher die Reaktanzen $x_1 + x$ müssen klein sein. Da $r_1 + r$ im Vergleich zu $x_1 + x$ meistens klein ist, so folgt daraus, dass das Problem des Induktionsmotors darin besteht, ihn so zu konstruieren, dass er sehr kleine Reaktanzen $x_1 + x$ ergibt.

Anzugsmoment.

151. In dem Augenblick, wo ein Induktionsmotor angelassen wird, ist

$$s = 1,$$

und der Anlassstrom

$$I = \frac{1 + (r_1 - jx_1)(g - jb)}{(r_1 - jx_1) + (r - jx) + (r_1 - jx_1)(r - jx)(g + jb)} E_0,$$

oder entwickelt, unter Vernachlässigung des letzten Faktors im Nenner, als unbedeutend,

$$I = \frac{\{ (r_1 + r) + g[r_1(r_1 + r) + x_1(x_1 + x)] + b(rx_1 - xr_1) \} + j\{ (x_1 + x) + b[r_1(r_1 + r) + x_1(x_1 + x)] - g(rx_1 - xr_1) \}}{(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2} E_0,$$

und die Phasenverschiebung oder der Phasenwinkel

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{(x_1 + x) + b[r_1(r_1 + r) + x_1(x_1 + x)] - g(rx_1 - xr_1)}{(r_1 + r) + g[r_1(r_1 + r) + x_1(x_1 + x)] + b(rx_1 - xr_1)}.$$

Vernachlässigen wir den Erregerstrom $g = 0 = b$, so nehmen diese Gleichungen die Form

$$I = \frac{(r_1 + r) + j(x_1 + x)}{(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2} E_0 = \frac{E_0}{(r_1 + r) - j(x_1 + x)}$$

an, oder wenn wir die imaginären Grössen eliminieren,

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2}} = \frac{E_0}{Z}$$

und

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{x_1 + x}{r_1 + r}.$$

D. h. beim Anlassen des Induktionsmotors ohne Zusatzwiderstand in dem Ankerstromkreise, in welchem Falle $x_1 + x$ im Vergleich zu $r_1 + r$ gross und die gesamte Impedanz Z klein ist, nimmt der Motor überwiegende und in hohem Maasse phasenverschobene Ströme auf.

Das Anzugsmoment ist

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{d p r_1 E_0^2}{4 \pi N [(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2]} \\ &= \frac{d p E_0^2}{4 \pi N} \frac{r_1}{Z^2}, \end{aligned}$$

d. h., es ist proportional dem Ankerwiderstande und umgekehrt proportional dem Quadrat der gesamten Impedanz des Motors.

Es ist klar, dass zur Erreichung eines grossen Anzugsmoments die Impedanz möglichst klein und der Widerstand des Ankers möglichst gross sein muss. Erstere Bedingung ist diejenige zur Erreichung einer grossen maximalen Leistung, eines hohen Wirkungsgrades und einer guten Regulierung der Geschwindigkeit; letztere hingegen bedeutet schlechten Wirkungsgrad und schlechte Regulierung und kann daher durch den inneren Widerstand des Motors nicht erfüllt werden, sondern nur durch Einschalten eines Zusatzwiderstandes, der während des Betriebes des Motors kurz geschlossen ist.

Da also notwendig

$$r_1 < Z$$

ist, so ist

$$\tau_0 < \frac{d p E_0^2}{4 \pi N Z};$$

und da der Anlassstrom annähernd

$$I = \frac{E_0}{Z}$$

ist, so ist

$$\tau_0 < \frac{d\dot{p}}{4\pi N} E_0 I.$$

$$\tau_{00} = \frac{d\dot{p}}{4\pi N} E_0 I$$

würde das theoretische bei 100 % Nutzeffekt und Leistungsfaktor entwickelte Drehmoment sein, bei der elektromotorischen Kraft E_0 und dem Strom I bei synchroner Geschwindigkeit.

Daher ist $\tau_0 < \tau_{00}$,

und das Verhältnis zwischen dem Anzugsmoment τ_0 und dem theoretischen maximalen Moment τ_{00} gibt ein Mittel an die Hand, um die Vollkommenheit eines Motors in Bezug auf sein Anzugsmoment zu beurteilen.

Dieses Verhältnis $\frac{\tau_0}{\tau_{00}}$ erreicht bei den besten Motoren

Werte, die zwischen 0,8 und 0,9 liegen.

Setzen wir $I = \frac{E}{Z}$ in die Gleichung des Anzugsmomentes ein, so nimmt sie die Form

$$\tau_0 = \frac{d\dot{p}}{4\pi N} I^2 Z r_1$$

an.

Da $\frac{4\pi N}{d}$ die synchrone Geschwindigkeit ist, so ist das Anzugsmoment des Induktionsmotors gleich dem Verlust in dem Widerstande des Motorankers, dividiert durch die synchrone Geschwindigkeit.

Der Widerstand des Ankers, der die maximale Zugkraft beim Anlassen erzeugt, ist

$$\frac{d\tau_0}{dr_1} = 0;$$

oder da

$$\tau_0 = \frac{d\dot{p} E_0^2}{4\pi N} \frac{r_1}{(r_1 + r)^2 + (x_1 + x)^2}$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{(r_1 + r^2 + (x_1 + x)^2)}{r_1} \right] = 0$$

ist, so erhalten wir durch Entwicklung dieser Formel

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2},$$

denselben Wert, der in dem Paragraphen, der von dem maximalen Drehmoment handelt, abgeleitet worden ist.

Wenn wir nun vor den inneren Widerstand r_1' des Ankers beim Anlassen den Zusatzwiderstand

$$r_1'' = \sqrt{r^2 + (x_1 + x)^2} - r_1'$$

schalten, so läuft der Motor mit seinem maximalen Drehmoment an, während mit wachsender Geschwindigkeit das Drehmoment beständig sinkt und bei Synchronismus den Wert Null erreicht.

Unter diesen Umständen gleicht der Induktionsmotor ungefähr dem Gleichstrom-Hauptschlussmotor, dessen Geschwindigkeit mit der Belastung variiert, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Induktionsmotor eine bestimmte Geschwindigkeit bei Leerlauf erreicht, während die Geschwindigkeit des Hauptschlussmotors mit abnehmender Belastung bis ins Unendliche wächst.

Der zusätzliche Ankerwiderstand r_1'' , der erforderlich ist, um ein bestimmtes Drehmoment beim Anlassen hervorzubringen, wird aus der Gleichung des Drehmoments beim Anlassen gefunden.

Bezeichnen wir den inneren Widerstand des Ankers mit r_1' , so ist der gesamte Widerstand des Ankers $r_1 = r_1' + r_1''$; daher

$$\tau_0 = \frac{d p E_0^2}{4 \pi N} \frac{r_1' + r_1''}{(r_1' + r_1'' + r)^2 + (x_1 + x)^2};$$

folglich

$$r_1'' = -r_1' - r + \sqrt{\left(\frac{d p E_0^2}{8 \pi N \tau_0}\right)^2 - \frac{d p E_0^2 r}{4 \pi N \tau_0} - (x_1 + x)^2}.$$

Man erhält dadurch zwei Werte, von denen der eine über, der andere unter dem Punkt des maximalen Drehmoments liegt.

Wählen wir das positive Vorzeichen der Wurzel, so erhalten wir einen grösseren Ankerwiderstand und einen geringeren Strom beim Anlassen, während das Drehmoment beständig mit der Geschwindigkeit sinkt.

Wählen wir das negative Vorzeichen, so erhalten wir einen kleineren Widerstand und eine hohe Stromstärke beim Anlassen, und bei wachsender Geschwindigkeit steigt zunächst das Drehmoment, erreicht dann sein Maximum und fällt schliesslich wieder bis zum Synchronismus ab.

Diese beiden Punkte entsprechen den beiden Punkten in der Kurve des Drehmoments in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Induktionsmotors in der Figur 107 und ergeben das gewünschte Drehmoment T_0 .

Der kleinere Wert von r_1'' ergibt eine ziemlich gute Konstanz der Geschwindigkeit, und es kann bei kleinen Motoren, wo die verhältnismässig hohe Stromstärke beim Anlassen keinen wichtigen Punkt bildet, der permanente Widerstand des Ankers als Darstellung dieses Wertes angesehen werden.

Der grössere Wert von r_1'' erlaubt ein Anlassen bei kleiner Stromstärke, erfordert aber die Ausschaltung des Widerstandes nach dem Anlassen, um die Regulierung der Geschwindigkeit und einen annehmbaren Wirkungsgrad zu erreichen.

Synchronismus.

152. Bei Synchronismus $s = 0$ ist

$$I_s = E_0 (g + jb),$$

oder ohne komplexe Grössen

$$I_s = E_0 \sqrt{g^2 + b^2},$$

$$P = 0, \tau = 0;$$

Leistung und Drehmoment sind also Null. Daher kann der Induktionsmotor niemals vollständigen Synchronismus erreichen, sondern muss etwas schlüpfen, um das durch die Reibung verbrauchte Drehmoment zu ergeben.

Betriebsverhältnisse nahe dem Synchronismus.

153. In der Nähe des Synchronismus, bei der Schlüpfung s über dem Punkte der maximalen Leistung, wo s klein ist und zwischen 0,02 bis 0,05 bei voller Belastung

liegt, können die Gleichungen durch Vernachlässigung der mit s bezeichneten Glieder als solche höherer Ordnung vereinfacht werden.

Der Strom ist

$$I = \frac{s + r_2(g + jb)}{r_1} E_0,$$

oder wenn wir die imaginären Grössen eliminieren

$$I = \sqrt{\left(\frac{s}{r_1} + g\right)^2 + b^2} E_0,$$

der Phasenwinkel

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{s^2(x_1 + x) + r_1^2 b}{s r_1 + r_1^2 g} = \frac{s^2 \frac{x_1 + x}{r_1} + r_1 b}{s + r_1 g},$$

$$P = \frac{p E_0^2 s}{r_1},$$

$$\tau = \frac{d p E_0^2 s}{4\pi N r_1}$$

oder umgekehrt

$$s = \frac{r_1 P}{p E_0^2},$$

$$s = \frac{4\pi N r_1 \tau}{d p E_0^2},$$

d. h. nahe dem Synchronismus ist die Schlüpfung s oder der Verlust der Geschwindigkeit bei einem Induktionsmotor proportional dem Widerstand r_1 des Ankers und der Leistung P oder dem Drehmoment.

Induktionsgenerator.

154. Im Vorhergehenden ist der Bereich der Geschwindigkeit von $s = 1$, dem Stillstand, bis zu $s = 0$, dem Synchronismus, erörtert worden. In diesem Bereich verrichtet der Motor mechanische Arbeit.

Er verbraucht mechanische Arbeit, wenn er als Generator oder als Bremse ausserhalb dieses Bereiches läuft.

Für $s > 1$, rückwärts treibend, wird P negativ und stellt einen Effektverbrauch dar, während s positiv bleibt.

Da sich die Drehrichtung geändert hat, so stellt auch dies einen Effektverbrauch dar. Dieser ganze Effekt wird in dem Motor verbraucht, der daher als Bremse wirkt.

Für $s < 0$, oder negativ, werden P und τ negativ, und die Maschine wird zu einem elektrischen Generator, der mechanische Energie in elektrische Energie umwandelt.

Setzen wir in diesem Falle $s_1 = -s$ ein, wo s_1 die Beschleunigung oder die Schlüpfung der Maschine über Synchronismus ist, so leiten wir die Gleichungen eines Induktionsgenerators daraus ab, die dieselben sind wie die des Induktionsmotors, ausgenommen, dass das Zeichen vor der Schlüpfung entgegengesetzt ist.

Es wird wiederum ein Punkt des maximalen Drehmoments und ein Punkt der maximalen Leistung gefunden, und Drehmoment und Effekt wachsen von Null bei Synchronismus bis zu einem Maximum und fallen dann wieder ab, während der Strom beständig steigt.

155. Der Induktionsgenerator unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Wechselstromgenerator im wesentlichen dadurch, dass er keine eigentliche bestimmte Frequenz hat, aber bei einer beliebigen Frequenz über derjenigen, die seiner Geschwindigkeit entsprechen muss, arbeiten kann. Elektrische Energie kann er nur dann erzeugen, wenn er sich in einem Stromkreise mit einem Wechselstromapparat von bestimmter Frequenz befindet, wie z. B. einer Wechselstrommaschine oder einem synchronen Motor.

D. h. der Induktionsgenerator erfordert eine besondere Vorrichtung zur Festlegung seiner Frequenz, wenn er überhaupt arbeiten soll.

Bei Parallelbetrieb mit gewöhnlichen Wechselstrommaschinen hängt das Phasenverhältnis des Stromes, der aus dem Induktionsgenerator kommt, ausser von der Schlüpfung, hauptsächlich von der Selbstinduktion des Induktionsgenerators ab und kann dadurch geändert werden.

Daher kann der Induktionsgenerator zur Regulierung der Phasenverschiebung in einem Wechselstromkreise gebraucht werden.

Im Falle der Hintereinanderschaltung in einem Stromkreise ist die elektromotorische Kraft des Induktionsgenerators annähernd proportional dem Strom. Daher kann er als Zusatzmaschine gebraucht werden, um einer Leitung eine höhere Spannung zu erteilen, die proportional dem durch sie fließenden Strom ist.

Beispiel.

156. Als Beispiel werden in der Figur 107 charakteristische Kurven eines 20pferdigen Dreiphasen-Induktions-

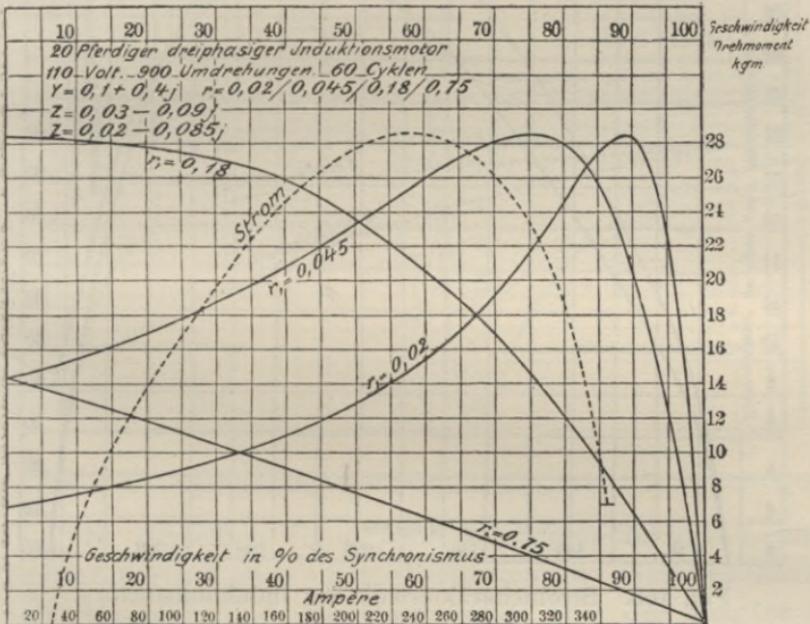


Fig. 107. Geschwindigkeitscharakteristik des Induktionsmotors.

motors von 900 Umdrehungen bei synchroner Geschwindigkeit bei 8 Polen und einer Frequenz von 60 Cyklen gegeben.

Die Klemmenspannung zwischen den Leitungen beträgt 110 Volt und der Motor hat Sternschaltung. Daher ist die Phasenspannung eines jeden Stromkreises

$$E_o = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63,5.$$

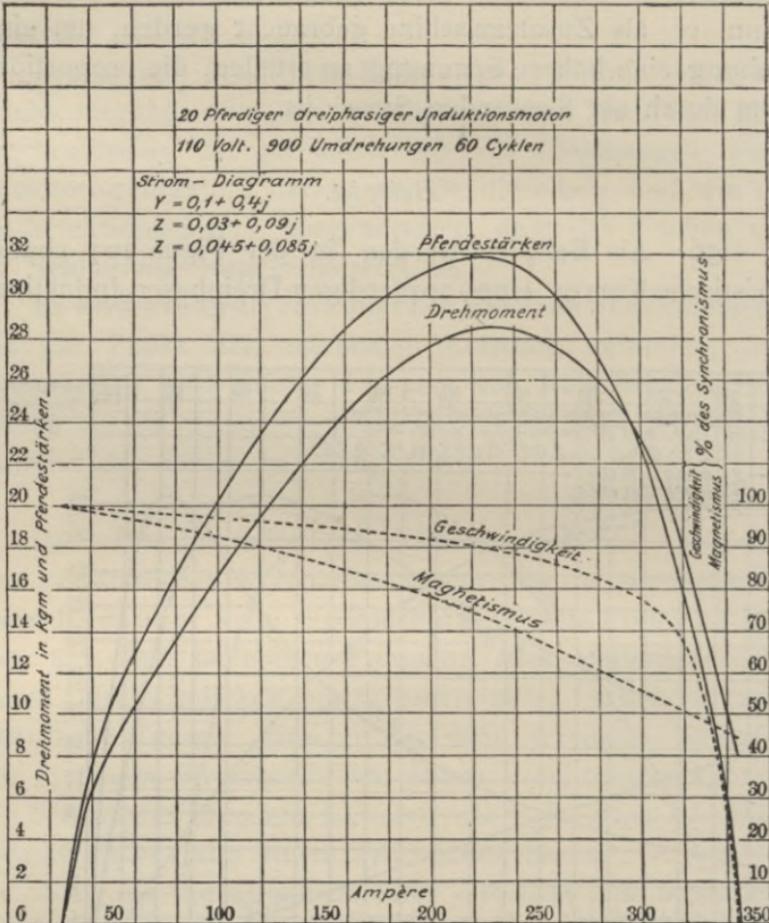


Fig. 108. Stromcharakteristik des Induktionsmotors.

Die Konstanten des Motors sind: die primäre Admittanz $Y = 0,1 + 0,4j$, die primäre Impedanz $Z = 0,03 + 0,09j$ und die sekundäre Impedanz $Z_1 = 0,02 - 0,085j$.

In Fig. 107 wird mit der Geschwindigkeit des Synchronismus in Prozenten als Abscissen das Drehmoment in

Kilogrammmetern als Ordinaten in ausgezogenen Linien für folgende Werte des Widerstandes des Ankers dargestellt:

Für $r_1 = 0,02$: Kurzschluss des Ankers, volle Geschwindigkeit.

Für $r_1 = 0,045$: 0,025 Ohm Zusatzwiderstand.

Für $r_1 = 0,18$: 0,16 Ohm Zusatzwiderstand, maximales Drehmoment beim Anlassen.

Für $r_1 = 0,75$: 0,73 Ohm Zusatzwiderstand; dasselbe Drehmoment beim Anlassen wie für $r_1 = 0,045$.

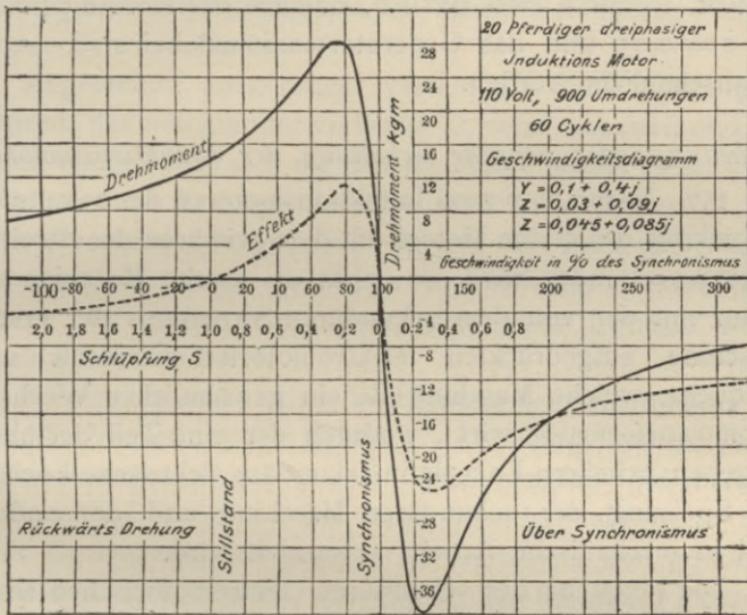


Fig. 109. Geschwindigkeitscharakteristik des Induktionsmotors.

In derselben Figur wird der Strom für jede Leitung in punktierten Linien mit den Vertikalen oder dem Drehmoment als Abscissen und den Horizontalen oder den Ampère als Ordinaten gegeben. Demselben Drehmoment entspricht immer derselbe Strom, ohne Rücksicht auf die Geschwindigkeit.

In der Figur 108 wird mit dem jeder Leitung zugeführten Strom als Abscissen das Drehmoment in Kilogrammmetern und die Leistung in Kilowatt als Ordinaten in ausgezogenen

Linien dargestellt, und die Geschwindigkeit und der Magnetismus in Prozenten ihrer synchronen Werte als Ordinaten in punktierten Linien für den Ankerwiderstand $r_1 = 0,02$ Ohm, oder für den Kurzschluss.

In der Figur 109 wird mit der Geschwindigkeit in Prozenten des Synchronismus als Abscissen das Drehmoment in ausgezogener Linie und die Leistung in punktierter Linie für den Wert des Ankerwiderstandes $r_1 = 0,045$ Ohm für das ganze Bereich der Geschwindigkeit von $120 \frac{0}{0}$ Rückwärtsbewegung bis $220 \frac{0}{0}$ über dem Synchronismus dargestellt, wodurch zwei Maxima, nämlich das Motormaximum bei $s = 0,25$ und das Generatormaximum bei $s = -0,25$ veranschaulicht werden.

Verkettung oder doppelte Schaltung der Induktionsmotoren.

157. Wenn von zwei Induktionsmotoren der sekundäre Stromkreis des ersten Motors mit dem primären des zweiten Motors verbunden wird, so wirkt die zweite Maschine als Motor mit der von dem sekundären Stromkreis der ersten Maschine aufgedrückten elektromotorischen Kraft und Frequenz, welche Maschine als ein gewöhnlicher Wechselstromtransformator wirkt, wodurch der eine Teil der übertragenen primären Energie in sekundäre elektrische Energie zur Speisung der sekundären Maschine und der andere Teil in mechanische Arbeit verwandelt wird.

Die Frequenz der sekundären elektromotorischen Kraft des ersten Motors und folglich die auf den zweiten Motor übertragene Frequenz ist gleich der Frequenz der Schlüpfung s unter dem vollkommenen Synchronismus. Die Frequenz der sekundär induzierten elektromotorischen Kraft des zweiten Motors ist gleich der Differenz zwischen seiner übertragenen Frequenz s und seiner Geschwindigkeit. Wenn daher beide Motoren miteinander mechanisch verbunden sind und mit gleicher Geschwindigkeit $1 - s$ laufen, so ist die sekundäre Frequenz des zweiten Motors $2s - 1$ und daher gleich Null bei $s = 0,5$; d. h. der zweite Motor erreicht seinen

Synchronismus bei halber Geschwindigkeit. Bei dieser Geschwindigkeit wird sein Drehmoment Null und der Energiestrom verschwindet; daher wird die Energiekomponente des sekundären Stromes des ersten Motors und folglich sein Drehmoment ebenfalls Null, wenn die Hysteresis des zweiten Motors vernachlässigt wird.

D. h. ein System verketteter Motoren mit kurzgeschlossener sekundärer Wicklung des zweiten Motors nähert sich dem halben Synchronismus in derselben Weise wie der gewöhnliche Induktionsmotor dem Synchronismus. Mit steigender Belastung wächst seine Schlüpfung unter halbem Synchronismus.

Allgemeiner ausgedrückt verteilt ein Paar Induktionsmotoren, das miteinander verkettet ist, seine Geschwindigkeit in der Weise, dass sich die Summe dieser beiden Geschwindigkeiten beim Leerlauf dem Synchronismus nähert; oder noch allgemeiner ausgedrückt: irgend eine Zahl verketteter Motoren läuft mit einer solchen Geschwindigkeit, dass die Summe der Geschwindigkeiten sich beim Leerlauf dem Synchronismus nähert.

Bei einer mechanischen Verbindung der beiden Motoren giebt die Verkettung ein Mittel an die Hand, um ein Paar Induktionsmotoren bei vollem Wirkungsgrad bei halber Geschwindigkeit zu zweien hintereinander, als auch bei voller Geschwindigkeit parallel zu betreiben, und gewährt daher denselben Vorteil wie die Serien-Parallel-Schaltung von Gleichstrommotoren.

Beim Anlassen wird ein verkettetes System durch den Widerstand des Ankers des zweiten Motors reguliert.

Da bei steigender Geschwindigkeit die übertragene Frequenz des sekundären Motors proportional dem Sinken der Spannung sinkt, wenn innere Verluste in dem ersten Motor vernachlässigt werden, so bleibt die magnetische Dichte des zweiten Motors praktisch konstant und das Drehmoment daher dasselbe wie beim Betrieb mit der vollen Spannung und vollen Frequenz unter denselben Bedingungen.

Bei halbem Synchronismus wird das Drehmoment des verketteten Paares Null, und über dem halben Synchronismus läuft der sekundäre Motor über seiner aufgedrückten Frequenz; d. h. er wird ein Generator. In diesem Falle wird infolge der Umkehrung des Stromes in der sekundären Wicklung des ersten Motors sein Drehmoment ebenfalls negativ; d. h. das verkettete Paar wird über dem halben Synchronismus ein Induktionsgenerator. Bei ungefähr zwei Dritteln des Synchronismus bei kleinem Widerstande des Ankers wird das Drehmoment des Paares wiederum Null und wieder positiv zwischen ungefähr zwei Dritteln des Synchronismus und dem vollen Synchronismus, und wiederum negativ über dem vollen Synchronismus.

Bei hohem Widerstand in der sekundären Wicklung des zweiten Motors verschwindet das zweite positive Drehmoment unter dem vollen Synchronismus.

Zwecks einer vollständigen Untersuchung und Diskussion der Verkettungserscheinung muss auf ein Buch über den Induktionsmotor verwiesen werden.

Einphasiger Induktionsmotor.

158. Der magnetische Stromkreis des Induktionsmotors bei oder nahe dem Synchronismus besteht aus zwei Kraftlinienflüssen, die sowohl im Raume als auch ihrer Lage nach senkrecht zu einander liegen. Beim mehrphasigen Motor werden diese Felder durch die in der Phase verschobene elektromotorische Kraft erzeugt. Bei dem monocyclischen Motor ist das eine der Felder auf den primären Energiestromkreis und das andere auf den primären Erregerstrom zurückzuführen. Bei dem einphasigen Motor wird das eine Feld durch den primären Stromkreis und das andere durch Ströme, die in der sekundären Wicklung oder in dem Anker induziert werden, erzeugt, die beide durch die Drehung des Ankers senkrecht zu einander gestellt werden. Da bei allen diesen Motoren die

magnetische Verteilung dieselbe ist oder doch nahe dem Synchronismus liegt und durch ein rotierendes Feld von gleicher Intensität und gleicher Geschwindigkeit dargestellt werden kann, so bleibt sie infolgedessen auch bei mehrphasigen und monocyclischen Motoren dieselbe. Bei dem einphasigen Motor hingegen sinkt bei steigender Schlüpfung, d. h. sinkender Geschwindigkeit, das senkrechte Feld, weil die induzierten Ankerströme nicht vollständig senkrecht bewegt werden; daher ist nur eine Komponente zur Erzeugung des senkrechten Kraftlinienflusses nutzbar. Folglich kann das senkrechte Feld eines einphasigen Motors annähernd proportional seiner Geschwindigkeit gesetzt werden, und ist beim Stillstand Null.

Da das Drehmoment des Motors proportional dem Produkt aus dem sekundären Strome mal dem senkrecht stehenden magnetischen Felde ist, so folgt, dass das Drehmoment des einphasigen Motors gleich dem eines einphasigen Motors ist, unter denselben Betriebsbedingungen wie bei einem mehrphasigen Stromkreis, multipliziert mit der Geschwindigkeit; d. h. gleich Null beim Stillstand.

Während daher einphasige Induktionsmotoren bei oder nahe dem Synchronismus sehr gut arbeiten, sinkt ihr Drehmoment proportional der Geschwindigkeit und wird beim Stillstand Null; d. h. sie laufen nicht von selbst an, sondern bedürfen einer Anlassvorrichtung.

Eine solche Anlassvorrichtung kann entweder mechanischer oder elektrischer Art sein. Sämtliche elektrischen Anlassvorrichtungen bestehen im wesentlichen darin, dass sie in dem Motor bei Stillstand ein senkrecht Kraftlinienfeld schaffen. Dieses kann entweder durch eine aussen liegende elektromotorische Kraft erreicht werden, z. B. durch eine monocyclische Anlassvorrichtung, oder durch Verschiebung der Stromkreise zweier oder mehrerer primärer Spulen gegen einander, entweder durch gegenseitige Induktion der einzelnen Spulen, d. h. durch Benutzung der einen als sekundäre zur anderen, oder durch Impedanzen

von verschiedenem Induktionsfaktor, die mit den verschiedenen primären Spulen verbunden sind.

Synchroner Induktionsmotor.

159. Der im Vorangegangenen besprochene Induktionsmotor besteht aus einem oder mehreren primären Stromkreisen, die auf den beweglichen Anker einwirken, die eine Anzahl von geschlossenen sekundären Stromkreisen umfasst, welche von einander im Raume so verschoben sind, dass nach jeder Richtung hin ein resultierender Stromkreis entsteht. Infolgedessen kann der Motor als Transformator betrachtet werden, der zu jedem primären Stromkreise einen entsprechenden sekundären Stromkreis hat, eine sekundäre Spule, die sich aus dem Felde der primären Spule herausbewegt und durch eine andere sekundäre Spule, die sich in das Feld hineinbewegt, ersetzt wird.

Bei einem solchen Motor ist das Drehmoment beim Synchronismus Null, positiv unter und negativ über dem Synchronismus.

Wenn aber der bewegliche Anker nur einen geschlossenen Kreis enthält, so giebt er nur in der Richtung der Achse der Ankerspule einen geschlossenen sekundären Stromkreis, aber keinen sekundären Stromkreis, der mit ihm einen rechten Winkel bildet; d. h. mit der Drehung des Ankers ändert sich der sekundäre Stromkreis entsprechend dem primären Stromkreise vom Kurzschluss beim Zusammentreffen der Achse der Ankerspule mit der Achse der primären Spule bis zum offenen Stromkreis senkrecht zu demselben, mit der Periodizität der Geschwindigkeit des Ankers. Das heisst, die scheinbare Admittanz des primären Stromkreises variiert periodisch von der Admittanz des offenen Stromkreises bis zur kurzgeschlossenen Transformator-Admittanz.

Beim Synchronismus stellt ein solcher Motor einen elektrischem Stromkreis von einer Admittanz dar, die mit

der doppelten der Periodizität der primären Frequenz variiert, weil die Achse der Ankerspule und die der primären Spule pro Periode zweimal zusammentreffen. Eine variierende Admittanz ist andererseits thatsächlich mit der variierenden Reluktanz, die in dem Kapitel über Reaktions-Maschinen behandelt werden wird, identisch. D. h. der Induktionsmotor mit einem geschlossenen Ankerstromkreise ist beim Synchronismus weiter nichts als eine Reaktionsmaschine und giebt daher kein Drehmoment beim Synchronismus, wenn die Maxima und Minima der periodisch variierenden Admittanz mit dem Maximum und den Nullwerten des primären Stromkreises zusammenfallen, sondern er giebt ein bestimmtes Drehmoment, wenn sie hiervon verschoben sind. Dieses Drehmoment kann positiv oder negativ sein, entsprechend der Phasenverschiebung zwischen der Admittanz und dem primären Stromkreise, nämlich der Verzögerung oder Voreilung der maximalen Admittanz in Bezug auf die maximale primäre. Daher wirkt ein Induktionsmotor mit einem einzigen Ankerstromkreise beim Synchronismus entweder als Motor oder als Wechselstrom-generator, entsprechend der relativen Lage des Ankerstromkreises zum primären Stromkreise. Er kann daher synchroner Induktionsmotor oder synchroner Induktions-generator genannt werden, da er eine Induktionsmaschine ist, die beim Synchronismus Drehmoment giebt.

Der Leistungsfaktor und der scheinbare Nutzeffekt des synchronen Induktionsmotors als Reaktionsmaschinen sind sehr niedrig, und daher nur in solchen Fällen praktisch anwendbar, wo ein kleiner Betrag von Energie bei synchroner Drehung erforderlich und Gleichstrom für Felderregung nicht anwendbar ist.

Der in dem Anker des synchronen Induktionsmotors induzierte Strom hat die doppelte Frequenz von derjenigen, welche auf den primären Teil aufgedrückt wird.

Unter und über dem Synchronismus ist das Drehmoment des gewöhnlichen Induktionsmotors oder Induktions-

generators über dem Drehmoment der synchronen Induktionsmaschine gelagert. Da mit der Frequenz oder Schlüpfung die relative Lage der primären und der sekundären Spulen wechselt, so wechselt auch das Drehmoment der synchronen Induktionsmaschine periodisch mit der Frequenz oder Schlüpfung. D. h. über das konstante positive oder negative Drehmoment unter oder über Synchronismus ist ein wechselndes Drehmoment der Frequenz der Schlüpfung gelagert und daher pulsiert das resultierende Drehmoment, um einen positiven Mittelwert unter Null und um einen negativen Mittelwert über dem Synchronismus.

Wenn der Motor vom Stillstand aus angelassen wird, so ist die Bewegung eines synchronen Induktionsmotors wie die eines gewöhnlichen einphasigen Induktionsmotors eine beschleunigte, aber jener nähert sich nicht nur dem Synchronismus, wie es letzterer thut, sondern er läuft bis zum vollständigen Synchronismus unter Belastung. Wenn er sich dem Synchronismus nähert, so macht er bestimmte Schwingungen mit der Frequenz der Schlüpfung, die aber wieder verschwinden, sobald der Synchronismus erreicht ist.

Der Hysteresis-Motor.

160. In einem sich drehenden magnetischen Felde wird eine kreisförmige eiserne Scheibe oder ein eiserner Cylinder von gleichmässiger magnetischer Reluktanz in der Richtung des sich drehenden Feldes in Rotation versetzt, selbst wenn soweit unterteilt, dass die Induktion von Wirbelströmen ausgeschlossen ist. Diese Rotation ist auf die Wirkung der Hysteresis der sich drehenden Scheiben oder des Cylinders zurückzuführen und daher kann man einen solchen Motor einen Hysteresis-Motor nennen.

Angenommen die Eisenscheibe I werde einem rotierenden magnetischen Felde oder einer resultierenden magneto-motorischen Kraft ausgesetzt. Die Achse der resultierenden

Magnetisierung in der Scheibe I trifft nicht mit der Achse des rotierenden Feldes zusammen, sondern bleibt hinter derselben zurück, indem sie auf diese Weise ein Kräftepaar hervorbringt; d. h. die Komponente des Magnetismus in der Richtung der rotierenden Scheibe I , die der Achse der rotierenden magnetomotorischen Kraft vorausschneidet, steigt und in einer Richtung hinter der Achse der rotierenden magnetomotorischen Kraft sinkt sie entsprechend und zwar über der Proportionalität der magnetomotorischen Kraft infolge der Verschiebung des Magnetismus in der Hysteresisschleife. Daher fällt die Achse des resultierenden Magnetismus der Eisenscheibe I nicht mit der Achse der rotierenden magnetomotorischen Kraft zusammen, sondern wird durch einen Winkel α , der der Winkel der Hysteresisvoreilung (Kapitel X, § 79) ist, rückwärts verschoben.

Der induzierte Magnetismus giebt mit der resultierenden magnetomotorischen Kraft ein mechanisches Kräftepaar

$$T = m F \Phi \sin \alpha,$$

wo F die resultierende magnetomotorische Kraft, Φ der resultierende Magnetismus, α der Phasenwinkel der Hysteresisvoreilung und m eine Konstante sind.

Die scheinbar aufgewandte Arbeit des Motors in Voltampère ist

$$Q = m F \Phi.$$

Daher ist der scheinbare Wirkungsgrad des Drehmomentes

$$\frac{T}{Q} = \sin \alpha$$

und der Effekt des Motors

$$P = (1 - s) T = (1 - s) m F \Phi \sin \alpha,$$

wo s die Schlüpfung als Bruchteil des Synchronismus ist.

Der scheinbare Wirkungsgrad ist

$$\frac{P}{Q} = (1 - s) \sin \alpha.$$

Da in einem magnetischen, einen Luftzwischenraum enthaltenden Stromkreise der Winkel α sehr klein ist,

nämlich nur wenige Grade beträgt, so folgt daraus, dass der scheinbare Wirkungsgrad des Hysteresismotors sehr niedrig ist und der Motor sich daher nicht zur Leistung grösserer mechanischer Arbeiten eignet.

Aus der Gleichung des Drehmomentes folgt, dass bei konstanter Klemmenspannung oder bei konstantem Strom, d. h. konstantem F , das Drehmoment konstant und unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Daher wird eine solche Anordnung eines Motors hin und wieder als Wechselstromzähler angewandt.

Dasselbe Resultat erreicht man, wenn man von einem anderen Gesichtspunkte ausgeht. In einem magnetischen Systeme, das eine bewegliche eiserne Scheibe I von gleichförmiger magnetischer Reluktanz in einem sich drehenden Felde umfasst, ist die magnetische Reluktanz und daher die Verteilung des Magnetismus unabhängig von der Geschwindigkeit und es ist der Strom und der Energieaufwand der übertragenen magnetomotorischen Kraft daher von der Geschwindigkeit ebenfalls unabhängig. Wenn nun

V das Volumen des Eisens des beweglichen Teils, B die magnetische Dichte und η der Hysteresiskoeffizient ist, dann ist die durch Hysteresis in der beweglichen Scheibe I pro Cyklus verbrauchte Arbeit

$$W_0 = V\eta B^{1,6}.$$

Wenn daher N die Frequenz ist, so ist der durch die magnetomotorische Kraft in der rotierenden Eisenscheibe vermittelt der Hysteresisschleife erzeugte Effekt

$$P_0 = NV\eta B^{1,6}.$$

Bei der Schlüpfung s N , d. h. bei der Geschwindigkeit $(1 - s)N$ ist der durch die Hysteresis in der rotierenden Scheibe verbrauchte Effekt

$$P_1 = s NV\eta B^{1,6}.$$

Folglich ist der durch die Übertragung von dem stationären zum drehenden Teil verbrauchte magnetische Effekt

$$P = P_0 - P_1 = (1 - s) NV\eta B^{1,6}.$$

verschwunden und erscheint so als mechanische Arbeit, und das Drehmoment ist

$$F = \frac{P}{(1-s)N} = V\eta B^{1,6},$$

d. h. unabhängig von der Geschwindigkeit.

Da, wie aus Kapitel X zu ersehen, $\sin \alpha$ das Verhältnis der Energie der Hysteresisschleife zur gesamten scheinbaren Energie in Voltampère des magnetischen Cyklus ist, so folgt daraus, dass der scheinbare Wirkungsgrad eines solchen Motors niemals den Wert $(1-s) \sin \alpha$, oder einen Bruchteil der primären Hysteresis-Energie überschreiten kann.

Da die primäre Hysteresis-Energie eines Induktionsmotors durch seine Konduktanz g dargestellt, einen Teil des Verlustes in dem Motor und daher nur einen kleinen Teil seiner Leistung bildet, so folgt, dass die Leistung eines Hysteresis-Motors nur ein kleiner Bruchteil der Leistung ist, die dasselbe magnetische Gestell mit sekundärer kurzgeschlossener Wickelung als regulärer Induktionsmotor geben könnte.

Als sekundäre Wirkung erscheint aber das rotierende Bestreben des magnetischen Gestells als Hysteresis-Motor mehr oder weniger bei allen Induktionsmotoren, obgleich sie im allgemeinen so klein ist, dass sie vernachlässigt werden kann.

Wenn in einem Hysteresismotor das rotierende Eisen-gestell nicht nach allen Richtungen hin gleichmässige Reluktanz besitzt, sondern wenn es z. B. stab- oder spindel-förmig ist, so ist über den Effekt des Hysteresismotors der Effekt der variierenden magnetischen Reluktanz darüber gelagert, der danach strebt, den Motor zum Synchronismus hin zu beschleunigen und ihn darin zu erhalten. Dieses wird näher im Kapitel XX unter „Reaktionsmaschine“ er-örtert werden.

Kapitel XVI.

Der Wechselstromgenerator.

161. Bei dem Wechselstromgenerator wird die elektromotorische Kraft in den Ankerleitern infolge ihrer relativen Bewegung durch ein konstantes oder annähernd konstantes magnetisches Feld induziert.

Wird Strom geliefert, so wirken zwei ganz verschiedene magnetomotorische Kräfte auf den Wechselstromanker, nämlich die magnetomotorische Kraft des Feldes infolge der das Feld erregenden Spulen und die magnetomotorische Kraft des Ankerstromes. Erstere ist konstant oder annähernd konstant, während letztere wechselt und in synchroner Bewegung zu ersterer ist; daher ist sie im Raume in Beziehung auf die magnetomotorische Kraft des Feldes festgelegt, oder von bestimmter Richtung, aber in einer einphasigen Wechselstrommaschine pulsierend. In einer mehrphasigen, gleichmässig belasteten oder elektrisch ausgeglichenen Wechselstrommaschine ist die resultierende magnetomotorische Kraft des Ankerstromes mehr oder weniger konstant.

Die in dem Anker induzierte elektromotorische Kraft wird durch das Feld erzeugt, das die Ankerleiter schneidet und mit denselben verkettet ist. Dieses Feld wird durch die Resultante der beiden magnetomotorischen Kräfte, nämlich der des Feldes und der des Anker gebildet.

Bei offenem Stromkreise ist die magnetomotorische Kraft des Ankers Null und die elektromotorische Kraft des Ankers nur auf die magnetomotorische Kraft der

Feldspulen zurückzuführen. In diesem Falle ist die elektromotorische Kraft im allgemeinen ein Maximum in dem Augenblicke, wo die Ankerspule die Mittellage zwischen den angrenzenden Feldspulen einnimmt (Fig. 110) und keine Kraftlinien einschliesst. Die Kurve der elektromotorischen Kraft ist in diesem Falle meistens symmetrisch.

Eine Ausnahme hiervon kann nur bei den Typen von Wechselstrommaschinen stattfinden, wo die magnetische Reluktanz des Ankers nach verschiedenen Richtungen hin verschieden ist; hierdurch wird während der synchronen Rotation des Ankers eine Pulsation des durch den Anker gehenden Kraftlinienflusses erzeugt. Diese Pulsation des magnetischen Feldes induziert in den Feldspulen eine elektromotorische Kraft und verursacht einen pulsierenden Feldstrom. Daher haben wir selbst bei offenem Stromkreise keine Rotation durch ein konstantes magnetisches

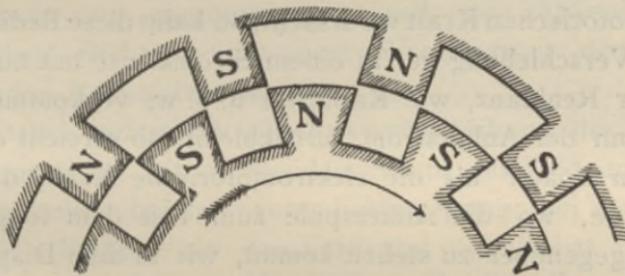


Fig. 110.

Feld, sondern eine solche durch ein pulsierendes Feld, das die Kurve der elektromotorischen Kraft unsymmetrisch macht und den Punkt des Maximums von seiner theoretischen Lage gegen die Mitte der Feldpole bringt. Im allgemeinen kann diese sekundäre Rückwirkung vernachlässigt und die magnetomotorische Kraft des Feldes als konstant angenommen werden.

Die relative Lage der magnetomotorischen Kraft des Ankers hängt in Bezug auf die magnetomotorische Kraft

des Feldes von dem in dem elektrischen Stromkreise herrschenden Phasenverhältnis ab. Wenn zwischen Strom und elektromotorischer Kraft keine Phasenverschiebung stattfindet, so erreicht der Strom sein Maximum in dem Moment, wo ihn die elektromotorische Kraft erreicht, oder in der Lage des Ankers, die die Figur 110 in der Mitte zwischen den Feldpolen zeigt. In diesem Falle wird der Ankerstrom weder das Feld magnetisieren noch entmagnetisieren, sondern nur verzerren; d. h. er entmagnetisiert die Ecke des hinteren Poles *a* und magnetisiert die Ecke des vorderen Poles *b*. Ein Wechsel der gesamten Strömung und deshalb der resultierenden elektromotorischen Kraft findet in diesem Falle nur statt, wenn die magnetischen Dichten sich der Sättigung so nahe befinden, dass das Wachsen der Dichte an der Ecke des vorderen Poles niedriger ist, als das Sinken an der Ecke des hinteren Poles. Da die innere Selbstinduktion der Wechselstrommaschine allein schon eine gewisse Phasenschiebung des Stromes hinter der induzierten elektromotorischen Kraft verursacht, so kann diese Bedingung keiner Verschiebung nur in einem Stromkreise mit äusserer negativer Reaktanz, wie Kapazität u. s. w. vorkommen.

Wenn der Ankerstrom zurückbleibt, so erreicht er sein Maximum später als die elektromotorische Kraft, d. h. in einer Lage, wo die Ankerspule zum Teil dem folgenden Feldpol gegenüber zu stehen kommt, wie in dem Diagramm Figur 111. Da der Ankerstrom in entgegengesetzter

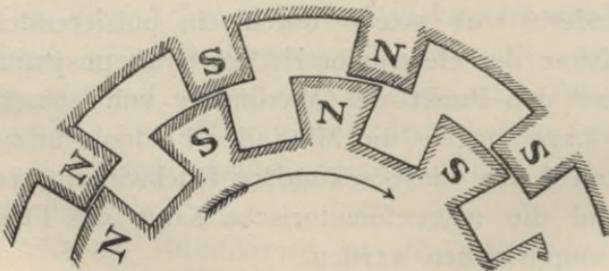


Fig. 111.

Richtung zum Strom in dem folgenden Feldpol (in einem Generator) fließt, so wird der Anker in diesem Falle darnach streben, das Feld zu entmagnetisieren.

Wenn aber der Ankerstrom voreilt, d. h. wenn er sein Maximum erreicht, während die Ankerspule zum Teil noch dem vorhergehenden Feldpol gegenüber zu stehen kommt, wie in Figur 112, so wird er bestrebt sein, diese

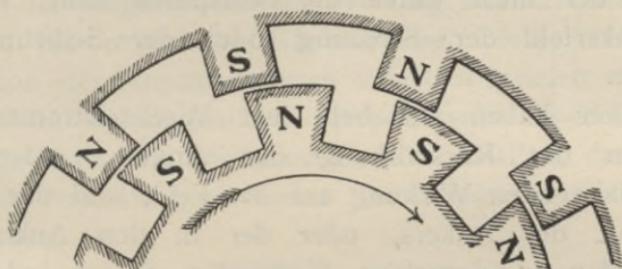


Fig. 112.

Feldspule zu magnetisieren, weil der Ankerstrom in derselben Richtung mit dem Erregerstrom der vorhergehenden Feldspulen fließt.

Daher unterstützt die Ankerrückwirkung der Wechselstrommaschine mit voreilendem Strom das Feld und erhöht die Spannung bei konstanter Felderregung; bei verspätetem Strom schwächt sie das Feld und vermindert die Spannung im Generator. Umgekehrt gilt dasselbe von einem synchronen Motor, in dem die Richtung der Drehung entgegengesetzt ist. Daher wird ein verspäteter Strom immer danach streben, das Feld zu magnetisieren, während ein voreilender Strom dasselbe entmagnetisiert.

162. Die in der Armatur durch die resultierende magnetische Strömung induzierte elektromotorische Kraft, die durch die resultierende magnetomotorische Kraft des Feldes und des Ankers erzeugt wird, ist nicht die Klemmenspannung der Maschine. Die Klemmenspannung ist die Resultante dieser induzierten elektromotorischen Kraft, und der

elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion und der elektromotorischen Kraft, die den Energieverlust durch den Widerstand in dem Anker der Wechselstrommaschine darstellt. Mit anderen Worten: Der Ankerstrom ist nicht nur der magnetomotorischen Kraft des Feldes entgegengesetzt, oder unterstützt sie, indem er das resultierende magnetische Feld erzeugt, sondern sendet einen zweiten Kraftlinienfluss in einen örtlichen Stromkreis durch den Anker, der nicht durch die Feldspulen läuft; er wird das Ankerfeld der Streuung oder der Selbstinduktion genannt.

Daher haben wir bei einer Wechselstrommaschine zwischen der Rückwirkung des Ankers, oder ihrer magnetisierenden Wirkung auf das Feld, und der Selbstinduktion des Ankers, oder der in den Ankerleitern durch den in denselben fließenden Strom induzierten elektromotorischen Kraft zu unterscheiden. Diese elektromotorische Kraft der Selbstinduktion liegt (vorausgesetzt die magnetische Reluktanz und folglich die Reaktanz des Ankerstromkreises wird als konstant angenommen) senkrecht hinter dem Ankerstrom und setzt sich daher in Bezug auf das richtige Phasenverhältnis mit der induzierten elektromotorischen Kraft zusammen. Dies bedeutet, dass, wenn der Ankerstrom verspätet ist, die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion um mehr als 90° hinter der induzierten elektromotorischen Kraft zurückbleibt und infolgedessen zum Teil entgegengesetzter Richtung ist, sodass die Klemmenspannung vermindert wird. Auf der anderen Seite bleibt, wenn der Ankerstrom voreilt, die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion weniger als 90° hinter der induzierten elektromotorischen Kraft zurück, oder ist zum Teil gleichgerichtet und die Klemmenspannung steigt. Dies bedeutet, dass die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion die Klemmenspannung mit voreilem Strom erhöht und mit verspätetem erniedrigt, oder in derselben Weise wirkt, als die Rückwirkung des Ankers.

Aus diesem Grunde können beide Wirkungen zu einer kombiniert und durch die sogenannte *synchrone Reaktanz* einer Wechselstrommaschine dargestellt werden.

Im Folgenden werden wir die gesamte Rückwirkung des Ankers einer Wechselstrommaschine durch einen Ausdruck, nämlich durch die Bezeichnung „*synchrone Reaktanz*“ darstellen. Obwohl dies, wie oben erwähnt, nicht korrekt ist, weil die Reaktanz in die magnetische Rückwirkung infolge der magnetisierenden Wirkung des Armaturstromes und in die elektrische Rückwirkung infolge der Selbstinduktion des Armaturstromes aufgelöst werden muss, so genügt es im allgemeinen für praktische Zwecke und ist wohl geeignet, die Erscheinungen darzustellen, die bei der Wechselstrommaschine unter verschiedenen Belastungen stattfinden.

Diese synchrone Reaktanz x ist häufig nicht konstant, sondern pulsierend, und zwar infolge der synchron variierenden Reluktanz des magnetischen Stromkreises der Armatur und des des Feldes. Sie kann aber nach dem Folgenden als konstant betrachtet werden, nämlich die dadurch induzierten elektromotorischen Kräfte können durch ihre gleichwertigen Sinuswellen dargestellt werden. Eine besondere Diskussion der Verzerrungen der Wellenform infolge der Pulsation der synchronen Reaktanz ist im Kapitel XX gegeben. Die synchrone Reaktanz x ist keine wahre Reaktanz im gewöhnlichen Sinne, sondern eine *äquivalente* oder *effektive* Reaktanz.

163. Es sei E_0 die induzierte elektromotorische Kraft der Wechselstrommaschine, oder die in den Armaturspulen infolge ihrer Rotation durch das konstante magnetische Feld induzierte elektromotorische Kraft, hervorgebracht durch den Strom in den Feldspulen, oder durch die Spannung an den Enden des offenen Stromkreises der Wechselstrommaschine.

Dann ist

$$E_0 = \sqrt{2 \pi n N M 10^{-8}},$$

wo n die Zahl der gesamten auf dem Anker hintereinander geschalteten Windungen, N die Frequenz und M die gesamte magnetische Strömung eines Feldpoles ist.

Es sei x_0 die synchrone Reaktanz und r_0 der innere Widerstand einer Wechselstrommaschine. Dann ist die innere Impedanz $Z_0 = r_0 - jx_0$.

Wenn der Stromkreis der Wechselstrommaschine durch die äussere Impedanz

$$Z = r - jx$$

geschlossen ist, so ist der Strom

$$I = \frac{E_0}{Z_0 + Z} = \frac{E_0}{(r_0 + r) - j(x_0 + x)},$$

oder

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2}};$$

und die Klemmenspannung

$$\begin{aligned} E &= IZ = E_0 - IZ_0 \\ &= \frac{E_0 (r - jx)}{(r_0 + r) - j(x_0 + x)}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0 \sqrt{r^2 + x^2}}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2}} \\ &= E_0 \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{r_0 r + x_0 x}{r^2 + x^2} + \frac{r_0^2 + x_0^2}{r^2 + x^2}}}; \end{aligned}$$

oder zu einer Reihe entwickelt

$$E = E_0 \left[1 - \frac{r_0 r + x_0 x}{r^2 + x^2} + \frac{2(r_0 r + x_0 x) - (r_0 x + x_0 r)}{2(r^2 + x^2)} \pm \dots \right].$$

Wie bereits gezeigt, ändert sich die Klemmenspannung entsprechend den Bedingungen des äusseren Stromkreises.

164. Als Beispiel werden in den Figuren 113 bis 118 bei der konstanten induzierten elektromotorischen Kraft

$$E_0 = 2500 \text{ Volt}$$

und die Werte der inneren Impedanz

$$Z_0 = r_0 + jx_0 = 1 - 10j$$

gegeben.

Mit dem Strome I als Abscissen, den Klemmenspannungen E als Ordinaten in der vollen Linie und der Leistung I^2r in Kilowatt in punktierten Linien, der Kilo-Volt-Ampère-Leistung IE in punktierten Linien erhalten

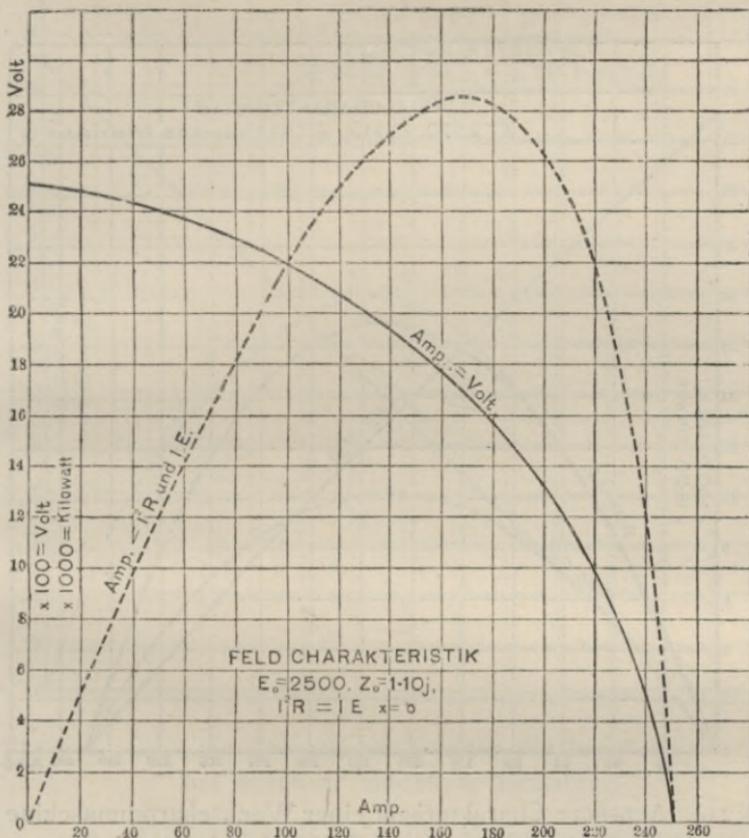


Fig. 113. Aeussere Charakteristik einer Wechselstrommaschine bei induktionsfreier Belastung.

wir für die folgenden Bedingungen des äusseren Stromkreises in Figur 113 den induktionsfreien äusseren Stromkreis für $x = 0$, in Figur 114 den induktiven äusseren Stromkreis für $\frac{r}{x} = + 0,75$ mit dem Leistungs-

faktor 0,6; in Figur 115 den induktiven äusseren Stromkreis für $r = 0$ mit dem Leistungsfaktor 0; in Figur 116 den äusseren Stromkreis mit dem voreilenden Strom für $\frac{r}{x} = -0,75$ mit dem Leistungsfaktor 0,6 und in Figur 117 den äusseren Stromkreis mit dem voreilenden Strom für $r = 0$ mit dem Leistungsfaktor 0.

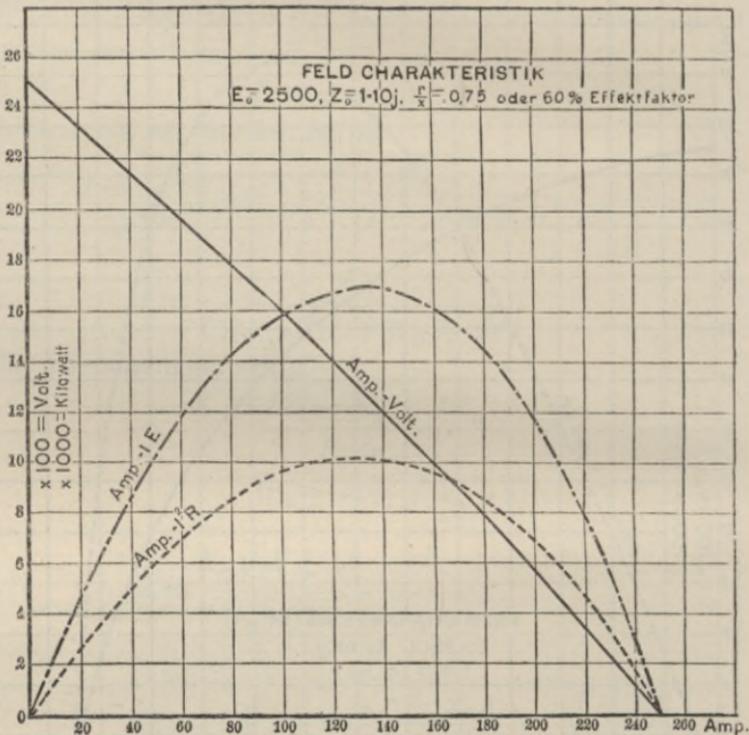


Fig. 114. Aeussere Charakteristik einer Wechselstrommaschine bei einem Leistungsfaktor von 60% bei induktiver Belastung.

Eine solche Kurve heisst eine *äussere Charakteristik*.

Wir sehen, dass die Kurve der elektromotorischen Kraft bei induktionsfreier Belastung beinahe horizontal wie bei einem offenen Stromkreise und bei Kurzschluss fast vertikal und daher einen Bogen beschreibt, der einer Ellipse ähnlich ist.

Bei rückwirkender Belastung nähern sich die Kurven einer geraden Linie.

Die Spannung fällt sehr schnell bei induktiver Belastung, während sie bei einer Kapazitätsbelastung steigt.

Die Leistung steigt von Null bei offenem Stromkreise bis zum Maximum und sinkt dann beim Kurzschluss bis auf Null.

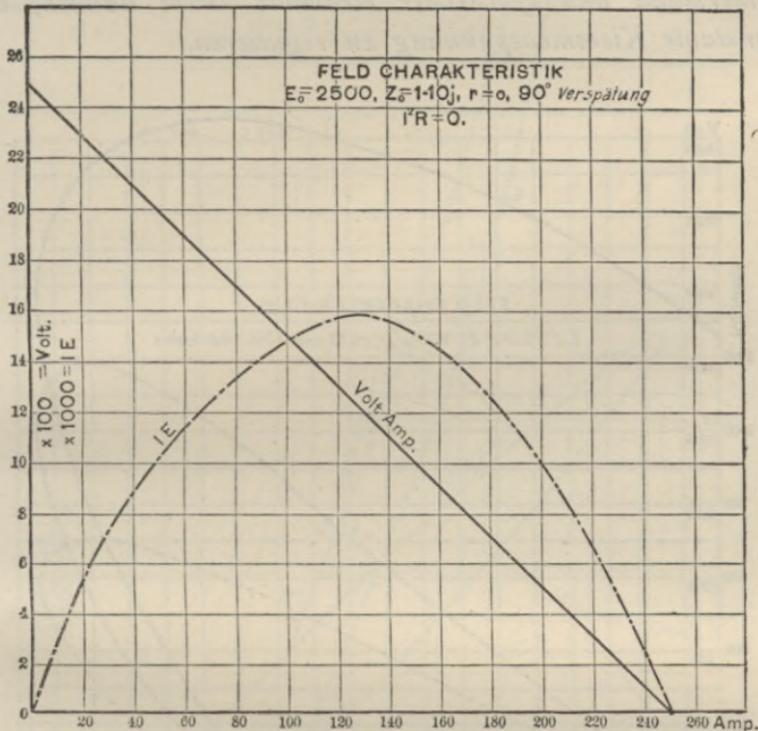


Fig. 115. Aeussere Charakteristik einer Wechselstrommaschine bei wattloser induktiver Belastung.

165. Die Abhängigkeit der Klemmenspannung E von dem Phasenverhältnis des äusseren Stromkreises ist in Figur 119 veranschaulicht, die bei der Klemmenspannung von $E_0 = 2500$ Volt für die Ströme $I = 50, 100, 150, 200, 250$ Ampère, die Klemmenspannungen E als Ordinaten mit dem Induktanzfaktor des äusseren Stromkreises

$$\frac{s}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

als Abscissen ergibt.

166. Wenn die innere Impedanz im Vergleich zur äusseren vernachlässigt werden kann, so ist näherungsweise

$$E = \frac{E_0 \sqrt{r^2 + x^2}}{\sqrt{(r_0 + r)^2 + (x_0 + x)^2}} = E_0;$$

d. h. eine Wechselstrommaschine mit kleinem innerem Widerstand und synchroner Reaktanz strebt danach, auf konstante Klemmenspannung zu regulieren.

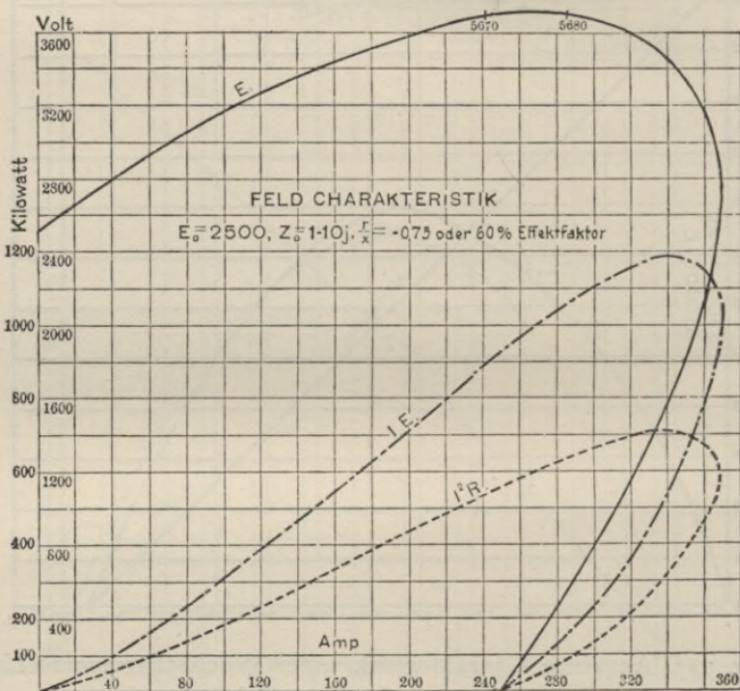


Fig. 116. Aeussere Charakteristik einer Wechselstrommaschine bei einem Leistungsfaktor von 60% und bei Kondensatorbelastung.

Jede Wechselstrommaschine thut dies, wenn der Stromkreis beinahe offen ist, besonders bei induktionsfreier Belastung.

Selbst wenn die synchrone Reaktanz x_0 nicht vollständig zu vernachlässigen ist, findet diese Regulierung bis

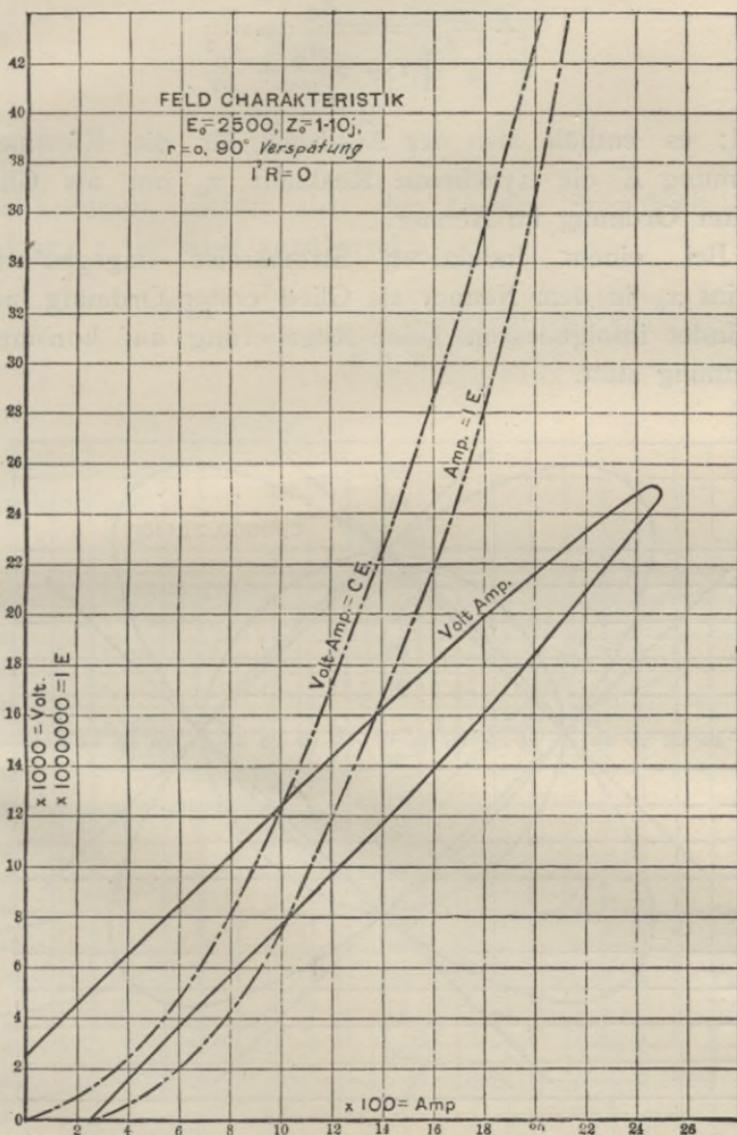


Fig. 117. Aeußere Charakteristik einer Wechselstrommaschine bei einer wattlosen Kondensatorbelastung.

zu einem gewissen Grade bei einem induktionsfreien Stromkreis statt, da für $x = 0$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 + 2 \frac{r_0}{r} + \frac{x_0^2}{r^2}}}$$

wird; es enthält also der Ausdruck für die Klemmenspannung E die synchrone Reaktanz x_0 nur als Glied zweiter Ordnung im Nenner.

Bei einem induktiven Stromkreise dagegen erscheint x_0 in dem Nenner als Glied erster Ordnung und es findet infolgedessen keine Regulierung auf konstante Spannung statt.

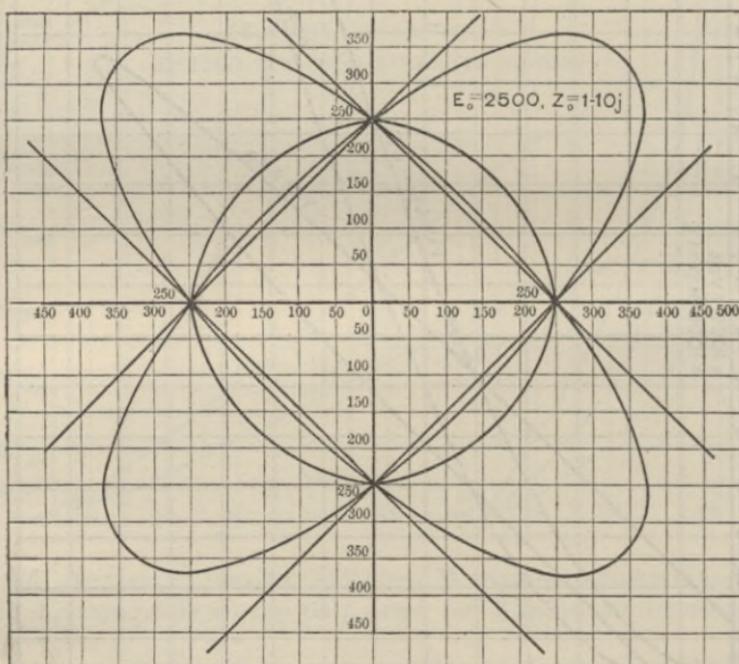


Fig. 118. Aeussere Charakteristik einer Wechselstrommaschine.

In einem induktionsfreien äusseren Stromkreise ist, wenn die synchrone Reaktanz x_0 der Wechselstrommaschine

im Vergleich zu dem äusseren Widerstande r sehr gross ist, der Strom annähernd

$$I = \frac{E_0}{x_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_0 + r}{x_0}\right)^2}}$$

$$= \frac{E_0}{x_0},$$

oder konstant enthält aber der äussere Stromkreis die Reaktanz x , so wird annähernd

$$I = \frac{E_0}{x_0 + x} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_0 + r}{x_0 + x}\right)^2}}$$

$$= \frac{E_0}{x_0 + x},$$

oder konstant

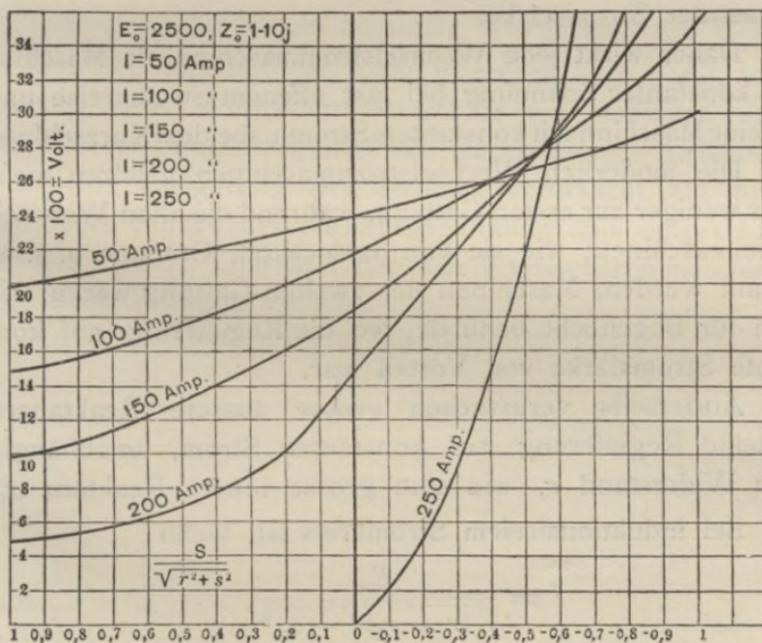


Fig. 119. Regulierung einer Wechselstrommaschine bei verschiedener Belastung.

Die Klemmenspannung eines induktionsfreien Stromkreises ist annähernd

$$E = \frac{E_0}{x_0} r,$$

oder proportional dem äusseren Widerstande.

In einem induktiven Stromkreise ist

$$E = \frac{E_0}{x_0 + x} \sqrt{r^2 + x^2},$$

annähernd proportional der äusseren Impedanz.

167. Bei induktionsfreiem äusserem Stromkreise reguliert eine Wechselstrommaschine mit sehr niedriger synchroner Reaktanz auf konstante Klemmenspannung, genau so wie eine Maschine mit konstanter Spannung. Eine Wechselstrommaschine mit sehr hoher synchroner Reaktanz reguliert auf eine Klemmenspannung, die dem äusseren Widerstande proportional ist, genau so wie eine Maschine mit konstanter Stromstärke.

Daher wirkt jede Wechselstrommaschine als Maschine mit konstanter Spannung bei fast offenem Stromkreise und als eine Maschine mit konstantem Strom nahe dem Kurzschluss.

Die modernen Wechselstrommaschinen gehören mehr oder weniger zur ersten Gattung, während die alten Wechselstrommaschinen; wie sie von Jablockkoff, Gramme u. s. w. gebaut wurden, Maschinen der zweiten Gattung waren, die man für Bogenlicht benutzte, wo die Regulierung auf konstante Stromstärke von Vorteil war.

Andererseits verursachen grosse äussere Reaktanzen dieselbe Regulierung auf konstanten Strom, unabhängig vom Widerstand r , wie eine grosse innere Reaktanz x_0 .

Bei induktionsfreiem Stromkreis ist, wenn

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{(r + r_0)^2 + x_0^2}},$$

$$E = \frac{E_0 r}{\sqrt{(r + r_0)^2 + x_0^2}},$$

die Leistung $P = IE = \frac{E_0^2 r}{(r + r_0)^2 + x_0^2};$

und $\frac{dP}{dr} = \frac{x_0^2 - r^2 + r_0^2}{[(r + r_0)^2 + x_0^2]^2} E_0^2;$

folglich wenn $x_0 = \sqrt{r^2 - r_0^2},$

oder $r = \sqrt{r_0^2 + x_0^2} = z_0;$

so ist $\frac{dP}{dr} = 0.$

D. h. der Effekt ist ein Maximum, und

$$P = \frac{E_0^2}{2(z_0 + r_0)},$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2\left(1 + \frac{r_0}{z_0}\right)}},$$

$$\text{und } I = \frac{E_0}{\sqrt{2z_0(z_0 + r_0)}}.$$

Daher ist bei einem äusseren Widerstand, der gleich der inneren Impedanz ist, oder $r = z_0 = \sqrt{r_0^2 + x_0^2}$, die Leistung einer Wechselstrommaschine ein Maximum und nahe diesem Punkte reguliert sie auf konstante Leistung, d. h. eine Steigerung des Stromes verursacht ein proportionales Sinken der Klemmenspannung und umgekehrt.

Die äussere Charakteristik der Wechselstrommaschine zeigt diese Wirkung deutlich.

Kapitel XVII.

Das Parallelarbeiten von Wechselstrommaschinen.

168. Alle Wechselstrommaschinen arbeiten, wenn sie auf Synchronismus gebracht werden, mehr oder weniger zufriedenstellend parallel. Dies ist auf die Umkehrbarkeit der Wechselstrommaschine zurückzuführen, d. h. auf ihre Fähigkeit, als Synchronmotor zu arbeiten. Wenn nun die treibende Kraft eines oder mehrerer parallel arbeitender Generatoren entfernt wird, so bleibt dieser Generator im Synchronismus als ein Synchronmotor, und der Effekt, mit dem er danach strebt, im Synchronismus zu bleiben, ist der maximale Effekt, den er als Synchronmotor unter den Betriebsbedingungen liefern kann.

169. Das Prinzip und die Grundbedingung des Parallelbetriebes von Wechselstrommaschinen ist die Gleichheit der Frequenz; d. h. die Kraftübertragung von den Antriebsmotoren auf die Wechselstrommaschinen muss derart sein, dass sie bei derselben Frequenz ohne Schlüpfung oder übermässige Beanspruchung der Riemen oder Transmissionen laufen.

Eine starre mechanische Verbindung der Wechselstrommaschinen kann nicht als synchronisierend angesehen werden, da sie keine Anpassung oder Phasenregulierung zwischen den Wechselstrommaschinen gestattet, sondern sie im wesentlichen zu *einer* Maschine macht. In diesem Falle muss bei Parallelbetrieb ein Unterschied in der Felderregung und daher in der induzierten elektromotorischen Kraft der Maschinen grosse Ausgleichsströme verursachen, weil eine Phasenregulierung der Maschinen nicht möglich ist.

Daher ist eine starre mechanische Verbindung für den Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen nicht geeignet.

170. Die zweite wichtige Bedingung beim Parallelbetrieb ist eine gleichförmige Geschwindigkeit, d. i. eine konstante Frequenz.

Wenn z. B. zwei Wechselstrommaschinen durch voneinander unabhängige eincylindrige Dampfmaschinen angetrieben werden und ihre Kurbeln sich zufällig kreuzen, so wird die eine Maschine ziehen, während die andere dem toten Punkte nahe ist, und umgekehrt. Infolgedessen wird die eine Wechselstrommaschine bestrebt sein, schneller zu laufen, während die andere ihren Gang verlangsamt. Wenn diesem Übelstande nicht durch ein Schwungrad abgeholfen wird, so entsteht eine pendelnde oder eine pumpenartige Bewegung, d. h. ein Schwanken des Lichtes entsprechend den Umdrehungsperioden der Betriebsmaschine und zwar infolge der wechselnden Übertragung der Belastung von einer Betriebsmaschine zur anderen. Dies kann so überhand nehmen, dass die Maschinen aus dem Tritt fallen. Diese Schwierigkeit findet bei einem Antrieb durch Turbinen oder Wasserräder nicht statt.

171. Beim Parallelarbeiten von Wechselstrommaschinen haben wir erstens den Vorgang zu unterscheiden, der stattfindet, wenn die Maschinen parallel geschaltet und wenn sie aus der Parallelschaltung herausgenommen werden und zweitens die Arbeitsweise, wenn die Maschinen im Synchronismus laufen.

Wenn Wechselstrommaschinen parallel geschaltet werden, werden sie zuerst annähernd auf gleiche Frequenz und Spannung gebracht, während sie in dem Moment annähernder Phasengleichheit, die an einer Phasenlampe oder einer ähnlichen Einrichtung zu erkennen ist, parallel geschaltet werden.

Gleiche Spannung ist weit weniger wichtig bei den modernen Wechselstrommaschinen als Gleichheit der Frequenz, und Phasengleichheit ist gewöhnlich nur von Wichtigkeit, um ein augenblickliches Flackern des Lichtes

zu vermeiden. Wenn zwei Wechselstrommaschinen parallel geschaltet werden, so fließen zwischen den Maschinen Ströme, die die eine Maschine beschleunigen und die andere verlangsamen, solange bis beide gleiche Frequenz und ein richtiges Phasenverhältnis besitzen.

Bei den modernen eisengeschlossenen Wechselstrommaschinen ist dieser Austausch mechanischer Arbeit sogar ohne genaue Einstellung vor dem Synchronismus gewöhnlich so begrenzt, dass die Maschinen mechanisch nicht in Gefahr gebracht werden, weil die Ausgleichsströme und daher der Energieaustausch infolge der Selbstinduktion und der Ankerrückwirkung begrenzt sind.

Bei Maschinen mit sehr geringer Ankerrückwirkung, d. h. bei Maschinen, die eine sehr gute konstante Spannungsregulierung besitzen, muss auf die Einstellung der Gleichheit der Frequenz, Spannung und Phase viel mehr Sorgfalt verwandt werden, oder der Ausgleichsstrom wird so gross, dass die Maschine durch den eintretenden mechanischen Stoss zerstört wird. Manchmal sind nämlich die Maschinen in dieser Hinsicht so empfindlich, dass es vorzuziehen ist, sie nicht parallel laufen zu lassen. Dasselbe bezieht sich auch auf das Aussertrittfallen.

172. Bei Synchronismus arbeiten fast alle Typen befriedigend. Nichtsdestoweniger ist bei den modernen Wechselstrommaschinen ein gewisser Betrag von Ankerückwirkung vorzuziehen, der weder so gross ist, dass die synchronisierende Kraft zu hoch wird, noch so niedrig ist, dass die Maschine im Falle eines Unfalls unsicher arbeitet, z. B. wenn sie aus dem Tritt fällt.

Wenn die Ankerrückwirkung sehr niedrig ist, so kann ein Unfall, z. B. ein Kurzschluss, oder ein Aussertrittfallen, oder das Öffnen des Feldstromkreises u. s. w. die Maschine unter Umständen zerstören. Wenn die Ankerrückwirkung sehr gross ist, so muss die Triebkraft genau auf Konstanz eingestellt werden, da die synchronisierende Kraft der Wechselstrommaschinen zu

schwach ist, diese im Tritt zu erhalten und die Unregelmässigkeiten der Triebkraft zu überwinden.

173. Die Hintereinanderschaltung von Wechselstrommaschinen ist nur durch starre mechanische Verbindung möglich, oder durch Vorrichtungen, bei denen die Maschinen in Bezug auf ihre synchronisierende Kraft hauptsächlich parallel wirken, z. B. bei der Verbindung, wie sie die Figur 120 veranschaulicht, wo die beiden Wechselstrommaschinen A_1 und A_2 hintereinandergeschaltet, aber durch die beiden Spulen eines grossen Transformators T verkettet

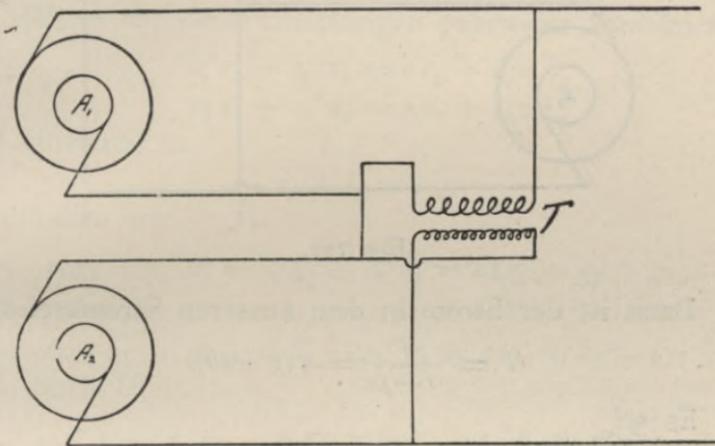


Fig. 120.

sind, wovon die eine mit den Klemmen der einen Wechselstrommaschine und die andere mit den Klemmen der anderen Wechselstrommaschine so verbunden ist, dass beim Betrieb durch Hintereinanderschaltung die Spulen des Transformators stromlos sind.

In diesem Falle wird durch den Energieaustausch durch die Transformatoren die Reihenschaltung stabil erhalten.

174. Es sei bei zwei parallel geschalteten Wechselstrommaschinen (Fig. 121) die Spannung an den Sammelschienen als Nulllinie oder Koordinatenaxe der komplexen Methode angenommen; ferner e als Spannungsdifferenz an

den Sammelschienen der beiden Wechselstrommaschinen, $Z = r - jx$ als Impedanz des äusseren Stromkreises und $Y = g + jb$ als Admittanz des äusseren Stromkreises.

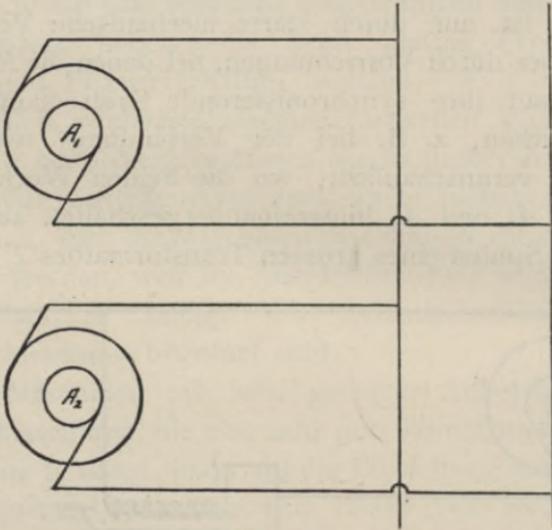


Fig. 121.

Dann ist der Strom in dem äusseren Stromkreise

$$I = \frac{e}{r - jx} = e(g + jb).$$

Es sei

$E_1 = e_1 - je_1' = a_2 (\cos \omega_1 - j \sin \omega_1)$ die induzierte elektromotorische Kraft der ersten Maschine, $E_2 = e_2 - je_2' = a_2 (\cos \omega_2 - j \sin \omega_2)$ die induzierte elektromotorische Kraft der zweiten Maschine, $I_1 = i_1 + ji_1'$ der Strom der ersten Maschine, $I_2 = i_2 + ji_2'$ der Strom der zweiten Maschine, $Z_1 = r_1 - jx_1$ die innere Impedanz, $Y_1 = g_1 + jb_1$ die innere Admittanz der ersten Maschine, $Z_2 = r_2 - jx_2$ die innere Impedanz und $Y_2 = g_2 + jb_2$ die innere Admittanz der zweiten Maschine.

Dann ist

$$e_1^2 + e_1'^2 = a_1^2;$$

$$e_2^2 + e_2'^2 = a_2^2;$$

$$E_1 = e + I_1 Z_1, \text{ oder } e_1 - je_1' = (e + i_1 r_1 + i_1' x_1) - j(i_1 x_1 - i_1' r_1);$$

$$E_2 = e + I_2 Z_2, \text{ oder } e_2 - je_2' = (e + i_2 r_2 + i_2' x_2) - j(i_2 x_2 - i_2' r_2);$$

$$I = I_1 + I_2, \text{ oder } eg + jeb = (i_1 + i_2) + j(i_1' + i_2').$$

Dieses ergibt die Gleichungen

$$e_1 = e + i_1 r_1 + i_1' x_1;$$

$$e_2 = e + i_2 r_2 + i_2' x_2;$$

$$e_1' = i_1 x_1 - i_1' r_1;$$

$$e_2' = i_2 x_2 - i_2' r_2;$$

$$e g = i_1 + i_2;$$

$$e b = i_1' + i_2';$$

$$e_1^2 + e_1'^2 = a_1^2;$$

$$e_2^2 + e_2'^2 = a_2^2;$$

diese acht Gleichungen mit neun Variablen, nämlich $e_1, e_1', e_2, e_2', i_1, i_1', i_2, i_2', e$.

Wenn wir diese Gleichungen paarweise kombinieren

$$e_1 r_1 + e_1' x_1 = e r_1 + i_1 z_1^2;$$

$$e_2 r_2 + e_2' x_2 = e r_2 + i_2 z_2^2;$$

und einsetzen in

$$i_1 + i_2 = e g,$$

so erhalten wir

$$e_1 g_1 + e_1' b_1 + e_2 g_2 + e_2' b_2 = e (g_1 + g_2 + g);$$

und analog

$$e_1 b_1 - e_1' g_1 + e_2 b_2 - e_2' g_2 = e (b_1 + b_2 + b);$$

und durch Division

$$\frac{g + g_1 + g_2}{b + b_1 + b_2} = \frac{e_1 g_1 + e_2 g_2 + e_1' b_1 + e_2' b_2}{e_1 b_1 + e_2 b_2 - e_1' g_1 - e_2' g_2},$$

und setzen wir für

$$g = v \cos \alpha \quad e_1 = \alpha_1 \cos \omega_1 \quad e_2 = \alpha_2 \cos \omega_2$$

$$b = v \sin \alpha \quad e_1' = \alpha_1 \sin \omega_1 \quad e_2' = \alpha_2 \sin \omega_2$$

so erhalten wir

$$\frac{g + g_1 + g_2}{b + b_1 + b_2} = \frac{\alpha_1 v_1 \cos(\alpha_1 - \omega_1) + \alpha_2 v_2 \cos(\alpha_2 - \omega_2)}{\alpha_1 v_1 \sin(\alpha_1 - \omega_1) + \alpha_2 v_2 \sin(\alpha_2 - \omega_2)}$$

als Gleichungen zwischen den Phasenverschiebungswinkeln ω_1 und ω_2 beim Parallelbetrieb.

Der dem äusseren Stromkreise zugeführte Effekt ist

$$p = e^2 g,$$

wovon der durch die erste Maschine gelieferte

$$p_1 = e i_1,$$

und der durch die zweite Maschine gelieferte

$$p_2 = e i_2$$

ist.

Der ganze von beiden Maschinen gelieferte elektrische Effekt ist

$$P = P_1 + P_2,$$

wovon der von der ersten Maschine gelieferte

$$P_1 = e_1 i_1 - e_1' i_1',$$

und der von der zweiten Maschine gelieferte

$$P_2 = e_2 i_2 - e_2' i_2'$$

ist.

Die Differenz der Leistungen beider Maschinen ist

$$\Delta p = p_1 - p_2 = e(i_1 - i_2),$$

wenn man für

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \varepsilon \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \delta$$

setzt.

$\frac{\Delta p}{\Delta \delta}$ kann der synchronisierende Effekt der Maschinen, oder der Effekt, der von einer Maschine zur anderen durch die Änderung des relativen Phasenwinkels übertragen wird, genannt werden.

175. Spezieller Fall. — Gegeben sind zwei gleiche Wechselstrommaschinen mit gleicher Erregung. Es ist dann

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \\ Z_1 = Z_2 = Z_0.$$

Setzen wir dieses in die acht früheren Gleichungen ein, so nehmen sie die Form

$$\begin{aligned} e_1 &= e + i_1 r_0 + i_1' x_0 \\ e_2 &= e + i_2 r_0 + i_2' x_0 \\ e_1' &= i_1 x_0 - i_1 r_0 \\ e_2' &= i_2 x_0 - i_2' r_0. \\ e g &= i_1 + i_2 \\ e b &= i_1' + i_2' \\ e_1^2 + e_1'^2 &= e_2^2 + e_2'^2 = \alpha^2 \end{aligned}$$

an.

Fassen wir diese Gleichungen zu zweien zusammen, so erhalten wir

$$e_1 + e_2 = 2e + e(r_0g + x_0b)$$

$$e_1' + e_2' = e(x_0g - r_0b);$$

setzen wir

$$e_1 = \alpha \cos \omega_1$$

$$e_1' = \alpha \sin \omega_1$$

$$e_2 = \alpha \cos \omega_2$$

$$e_2' = \alpha \sin \omega_2$$

ein, so erhalten wir

$$\alpha (\cos \omega_1 + \cos \omega_2) = e (2 + r_0g + x_0b)$$

$$\alpha (\sin \alpha_1 + \sin \omega_2) = e (x_0g - r_0b).$$

Entwickeln wir und setzen

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2},$$

oder
$$\alpha \cos \varepsilon \cos \delta = e \left(1 + \frac{r_0g + x_0b}{2} \right)$$

$$\alpha \sin \varepsilon \cos \delta = e \frac{x_0g - r_0b}{2};$$

so ergibt sich
$$\text{tang } \varepsilon = \frac{x_0g - r_0b}{2 + r_0g + x_0b} = \text{konstant.}$$

Das heisst

$$\omega_1 + \omega_2 = \text{konstant};$$

und
$$\cos \delta = \frac{e}{\alpha} \sqrt{\left(1 + \frac{r_0g + x_0b}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_0g - r_0b}{2} \right)^2};$$

oder
$$e = \frac{\alpha \cos \delta}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_0g + x_0b}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_0g - r_0b}{2} \right)^2}};$$

bei keiner Phasenverschiebung zwischen den Wechselstrommaschinen, oder setzen wir

$$\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 0;$$

so erhalten wir
$$e = \frac{\alpha}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_0g + x_0b}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_0g - r_0b}{2} \right)^2}}.$$

Aus den acht Gleichungen erhalten wir durch Kombination

$$e_1 r_0 + e_1' x_0 = e (r_0 + x_0) + i_1 (r_0^2 + x_0^2)$$

$$e_2 r_0 + e_2' x_0 = e (r_0 + x_0) + i_2 (r_0^2 + x_0^2);$$

diese beiden Gleichungen von einander subtrahiert und aufgelöst, ergeben

$$i_1 - i_2 = \frac{r_0(e_1 - e_2) + x_0(e_1' - e_2')}{Z_0^2},$$

oder weil

$$e_1 - e_2 = \alpha (\cos \omega_1 - \omega_2) = -2 \alpha^2 \sin \varepsilon \sin \delta$$

$$e_1' - e_2' = \alpha (\sin \omega_1 - \omega_2) = 2 \alpha \cos \varepsilon \sin \delta;$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 &= \frac{2 \alpha \sin \delta}{z_{02}} (x_0 \cos \varepsilon - r_0 \sin \varepsilon) \\ &= 2 \alpha y_0 \sin \delta \cos (\varepsilon + \alpha), \end{aligned}$$

wo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0}{r_0}.$$

Die Differenz der Leistungen beider Wechselstrommaschinen ist

$$\Delta p = p_1 - p_2 = e (i_1 - i_2);$$

wenn wir dieses einsetzen, so erhalten wir

$$\Delta p = \frac{2 \alpha e \sin \delta}{z_0^2} \{x_0 \cos \varepsilon - r_0 \sin \varepsilon\};$$

und wenn wir für

$$e = \frac{\alpha \cos \delta}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_0 g + x_0 b}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0 g - r_0 b}{2}\right)^2}};$$

$$\sin \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_0 g + x_0 b}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0 g - r_0 b}{2}\right)^2}};$$

$$\cos \varepsilon = \frac{1 + \frac{r_0 g + x_0 b}{2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{r_0 g + x_0 b}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0 g - r_0 b}{2}\right)^2}}$$

einsetzen, so erhalten wir

$$A p = \frac{2 \alpha^2 \sin \delta \cos \delta \left[x_0 \left(1 + \frac{r_0 g + x_0 b}{2} \right) - r_0 \left(\frac{x_0 g - r_0 b}{2} \right) \right]}{\varepsilon^2 \left[\left(1 + \frac{r_0 g + x_0 b}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_0 g - r_0 b}{2} \right)^2 \right]}$$

und aufgelöst

$$A p = \frac{a^2 \sin 2 \delta \left(x_0 + \frac{g z_0^2}{2} \right)}{\varepsilon_0^2 (1 + r_0 g + x_0 b + \varepsilon_0^2 v^2)};$$

oder

$$A p = \frac{a^2 \sin 2 \delta \left(b_0 + \frac{b}{2} \right)}{y_0^2 + g g_0 + b b_0 + v^2};$$

$$\frac{A p}{A \delta} = \frac{2 \alpha^2 \cos 2 \delta \left(b_0 + \frac{b}{2} \right)}{y_0^2 + g g_0 + b b_0 + y^2}.$$

Daher ist die Übertragung des Effektes $A p$ bei den Wechselstrommaschinen ein Maximum, wenn $\delta 45^\circ$ oder wenn $\omega_1 - \omega_2 = 90^\circ$ ist, d. h. wenn die Wechselstrommaschinen senkrecht zu einander geschaltet sind.

Der synchronisierende Effekt $\frac{A p}{A \delta}$ ist ein Maximum, wenn δ gleich Null ist, d. h. die Wechselstrommaschinen sind in Phase miteinander.

176. Als Beispiel werden Kurven gezeichnet für

$$a = 2500, Z_0 = r_1 - j x_0 = 1 - 10 j; \text{ oder}$$

$$Y_0 = g_0 + j b_0 = 0,01 + 0,1 j;$$

mit dem Winkel $\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ als Abscissen. Sie geben

den Wert e der Klemmenspannung, den Wert des Stromes $i = e y$ in dem inneren Stromkreise, den Wert $i_1 - i_2$ des Stromaustausches zwischen den Wechselstrommaschinen, den Wert $A p = p_1 - p_2$ des Effektaustausches zwischen

den Wechselstrommaschinen, den Wert $\frac{A p}{A \delta}$ d. h. den synchronisierenden Effekt, in der strichpunktirten Linie Kurve V.

Für den äusseren Stromkreis gelte dabei

$g = 0,$	$b = 0,$	$v = 0,$
0,05,	0,	0,05,
0,08,	0,	0,08,
0,03,	+ 0,04,	0,05,
0,03,	- 0,04,	0,05.

Kapitel XVIII.

Der Synchronmotor.

177. In dem Kapitel über das Parallelarbeiten von Wechselstrommaschinen haben wir gesehen, dass, wenn eine im Synchronismus laufende Wechselstrommaschine mit einem Netz von gegebener elektromotorischer Kraft verbunden ist, die von einer Wechselstrommaschine gelieferte Arbeit entweder positiv oder negativ sein kann. In letzterem Falle verbraucht die Wechselstrommaschine elektrische Energie, und erzeugt also mechanische Leistung, d. h. sie läuft als Synchronmotor, so dass die Untersuchung eines Synchronmotors im wesentlichen bereits in den Gleichungen der parallel laufenden Wechselstrommaschinen enthalten ist.

Da wir in dem Vorangegangenen meistens von der symbolischen Methode Gebrauch gemacht haben, können wir im Folgenden als Beispiel der graphischen Methode die Wirkung des Synchronmotors diagrammatisch behandeln.

Es sei eine Wechselstrommaschine mit der elektromotorischen Kraft E_1 als Synchronmotor mit einem Netze von der elektromotorischen Kraft E_0 über einen Stromkreis von der Impedanz Z verbunden.

Wenn E_0 die Klemmenspannung am Motor ist, so ist Z die Impedanz des Motors von der induzierten elektromotorischen Kraft E_1 . Wenn E_0 die elektromotorische Kraft an den Generatorklemmen ist, so ist Z die Impedanz des Motors und der Leitung, einschliesslich der Transformatoren und anderer Zwischenapparate. Wenn E_0 die induzierte elektromotorische Kraft des Generators ist, so ist Z gleich der Summe der Impedanzen des Motors, der Leitung und des Generators und daher haben

wir das Problem: Generator mit induzierter elektromotorischer Kraft E_0 und Motor mit induzierter elektromotorischer Kraft E_1 ; oder allgemeiner ausgedrückt, zwei Wechselstrommaschinen mit den induzierten elektromotorischen Kräften E_0 und E_1 , die miteinander durch einen Stromkreis von der gesamten Impedanz Z verbunden sind.

Da in diesem Falle mehrere elektromotorische Kräfte in dem Stromkreise mit demselben Strom wirken, so kann man bequem den Strom I als Nulllinie OI des Polar-diagramms gebrauchen.

Wenn $I = i$ der Strom, Z die Impedanz, r der effektive Widerstand, x die effektive Reaktanz und $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ der absolute Wert der Impedanz ist, dann ist die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft $E_1 = rz$ und in Phase mit dem Strom. Sie wird daher durch den Vektor OE_1 dargestellt. Die durch die Reaktanz verbrauchte elektromotorische Kraft ist $E_2 = xi$ und eilt dem Strom um 90° voraus. Daher ist die durch die Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft $E = \sqrt{(E_1)^2 + (E_2)^2}$, oder $= i \sqrt{r^2 + x^2} = iz$, und eilt dem Strom um den Winkel δ voraus, wo $\text{tg } \delta = \frac{x}{r}$ ist. Es wirken jetzt die elektromotorischen Kräfte E , E_1 und E_0 , in dem Stromkreise, oder E_1 und E sind die Komponenten von E_0 ; d. h. E_0 ist die Diagonale des Parallelogramms, mit E_1 und E als Seiten.

Da die elektromotorischen Kräfte E_1 , E_2 , E in dem Diagramm in Fig. 122 durch die Vektoren OE_1 , OE_2 , OE dargestellt sind, so ziehen wir, um das Parallelogramm von E_0 , E_1 , E zu bekommen, einen Bogen um O mit E_0 und um E mit E_1 . Ihr Schnittpunkt giebt die Klemmenspannung $OE_0 = E_0$ und wenn wir das Parallelogramm OE , E_0 , E_1 vervollständigen, so erhalten wir $OE_1 = E_1$ als induzierte elektromotorische Kraft des Motors.

$\angle IOE_0$ ist die Phasendifferenz zwischen Strom und Klemmenspannung, oder die induzierte elektromotorische Kraft im Generator.

$\angle IOE_1$ ist die Phasendifferenz zwischen dem Strom und der induzierten elektromotorischen Kraft des Motors, und der Effekt ist gleich dem Strom i , multipliziert mit der Projektion der elektromotorischen Kraft auf den Strom, oder auf die Nulllinie OI .

Wenn wir die Lote $E_0 E_0^1$ und $E_1 E_1^1$ von E_0 und E_1 auf OI fällen, so erhalten wir

$P_0 = i \times OE_0^1$ als den durch die induzierte elektromotorische Kraft des Generators gelieferten Effekt,

$P_1 = i \times OE_1^1$ als den durch den Motor in mechanische

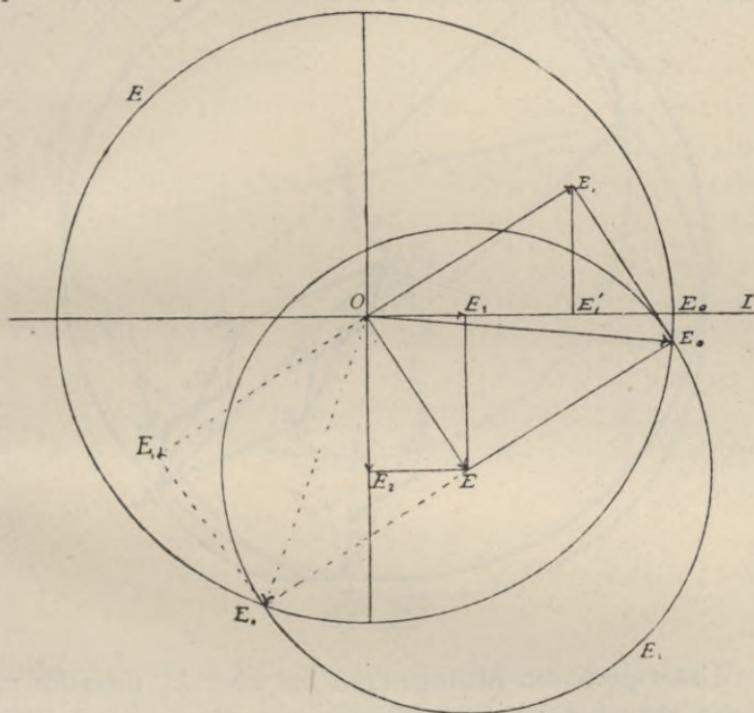


Fig. 122

Energie umgewandelten elektrischen Effekt und $P = i \times OE_1$ als den durch den effektiven Widerstand in dem Stromkreise verbrauchten Effekt.

Daher ist $P_0 = P_1 + P$.

Da die mit E_0 und E_1 um O und E gezogenen Kreise sich zweimal schneiden, so entstehen zwei Diagramme.

Im allgemeinen laufen in einem dieser Diagramme (Fig. 122, die ausgezogenen Linien) der Strom und die elektromotorische Kraft in derselben Richtung und stellen die von der Maschine als Motor verrichtete Leistung dar. In dem anderen punktiert ausgezogenem Diagramm laufen der Strom und die elektromotorische Kraft in entgegengesetzten Richtungen und stellen den von der Maschine als Generator verbrauchten mechanischen Effekt dar.

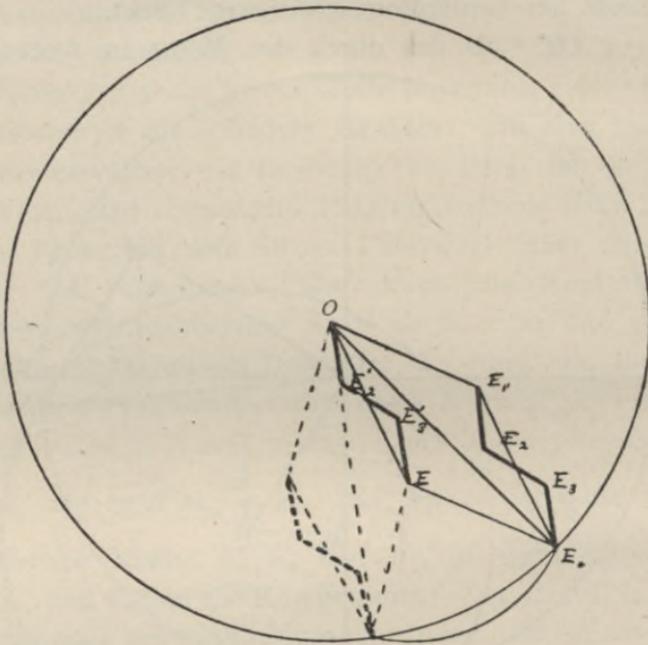


Fig. 123.

Unter gewissen Bedingungen hat aber E_0 dieselbe und E_1 die entgegengesetzte Richtung zum Strom, d. h. beide Maschinen sind Generatoren.

178. Man sieht, dass in diesen Diagrammen die elektromotorischen Kräfte auf den Motor bezogen sind, d. h. der als Synchronmotor gelieferte Effekt wird positiv und der als Generator gelieferte Effekt negativ. In dem Kapitel über das Parallelarbeiten von Generatoren gingen wir von dem entgegengesetzten Gesichtspunkt, nämlich von dem Generator aus.

Bei einer Einzelkraftübertragung, d. h. dann, wenn ein Generator einen Synchronmotor allein speist, besteht die durch die Impedanz $E = OE$ (Fig. 123—125) verbrauchte elektromotorische Kraft aus drei Komponenten, nämlich aus der elektromotorischen Kraft $OE_2' = E_2$, die durch die Impedanz des Motors verbraucht wird, aus der elektromotorischen Kraft $E_2' E_3' = E_3$, die durch die Impedanz der

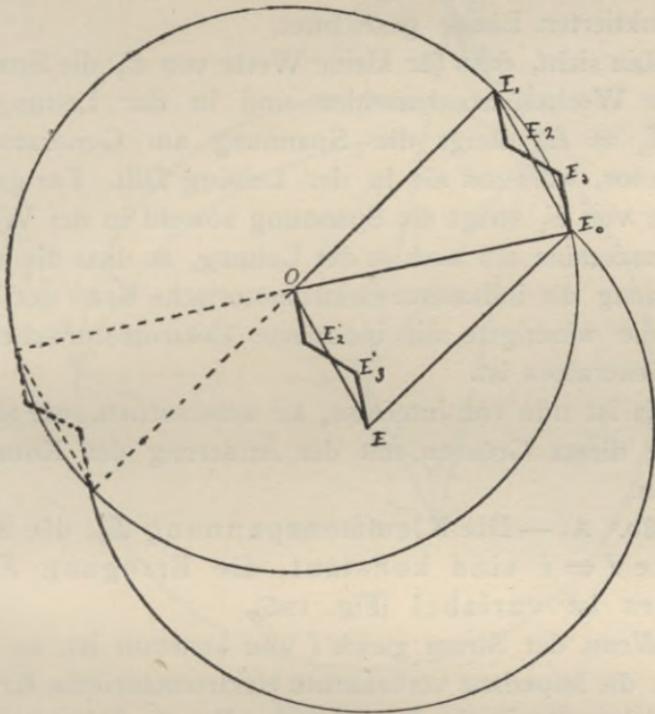


Fig. 124.

Leitung verbraucht wird und aus der elektromotorischen Kraft $E_3' E = E_4$, die durch die Impedanz des Generators verbraucht wird. Wenn wir nun die entgegengesetzte Seite $E_1 E_0$ des Parallelogramms in derselben Weise zerlegen, so erhalten wir: $OE_1 = E_1$ als induzierte elektromotorische Kraft des Motors, $OE_2 = E_2$ als elektromotorische Kraft an den Motorklemmen oder am Ende der Leitung, $OE_3 = E_3$ als elektromotorische Kraft an den Klemmen des Generators oder am Anfang der Leitung und $OE_0 = E_0$ als induzierte elektromotorische Kraft des Generators.

Das Phasenverhältnis zwischen dem Strom und den elektromotorischen Kräften E_1 und E_0 hängt von der Stromstärke und den elektromotorischen Kräften E_1 und E_0 ab.

179. Die Figuren 123 bis 125 stellen mehrere solcher Diagramme für verschiedene Werte von E_1 , aber für die gleichen Werte von I und E_0 dar. Das Diagramm des Motors ist in ausgezogenen und das des Generators in punktierten Linien gezeichnet.

Man sieht, dass für kleine Werte von E_1 die Spannung in der Wechselstrommaschine und in der Leitung fällt. Für $E_1 = E_0$ steigt die Spannung am Generator und am Motor, während sie in der Leitung fällt. Für grössere Werte von E_1 steigt die Spannung sowohl in der Wechselstrommaschine als auch in der Leitung, so dass die höchste Spannung die induzierte elektromotorische Kraft des Motors und die niedrigste die induzierte elektromotorische Kraft des Generators ist.

Es ist nun von Interesse, zu untersuchen, wie sich die Werte dieser Grössen mit der Änderung der Konstanten ändern.

180. A. — Die Klemmenspannung E_0 , die Stromstärke $I = i$ sind konstant, die Erregung E_1 des Motors ist variabel (Fig. 126).

Wenn der Strom gleich i und konstant ist, so ist die durch die Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft OE und daher der Punkt E konstant. Da die Intensität, nicht aber die Phase von E_0 konstant ist, so liegt E_0 auf einem Kreis e_0 mit E_0 als Radius. Aus dem Parallelogramm $OE E_0 E_1$ folgt, weil $E_1 E_0$ parallel und gleich OE ist, dass E_1 auf einem Kreise e_1 mit Ei , dem Spiegelbilde von E als Mittelpunkt liegt, also $OEi = OE$. Dieser Kreis e_1 ist dem Kreise e_0 kongruent.

Wir können nun die Änderung des Diagramms mit Hilfe der Änderung von E_1 konstruieren. In dem Parallelogramm $OE E_0 E_1$ sind O und E fest und E_0 und E_1 bewegen sich auf den Kreisen e_0 und e_1 , sodass $E_0 E_1$ parallel OE ist.

Der kleinste Wert von E_1 bei der Stromstärke I ist $oI_1 = E_1$ und $oI = E_0$. In diesem Falle ist die Leistung des Motors $oI_1 \times I$, also schon bedeutend. Wenn wir E_1 zu $o2_1, o3_1$ u. s. w. wachsen lassen, so bewegen sich die Klemmenspannungen nach $o2, o3$ u. s. w. fort. Die Leistung ist $I \times o2_1, I \times o3_1$ u. s. w. und steigt zuerst,

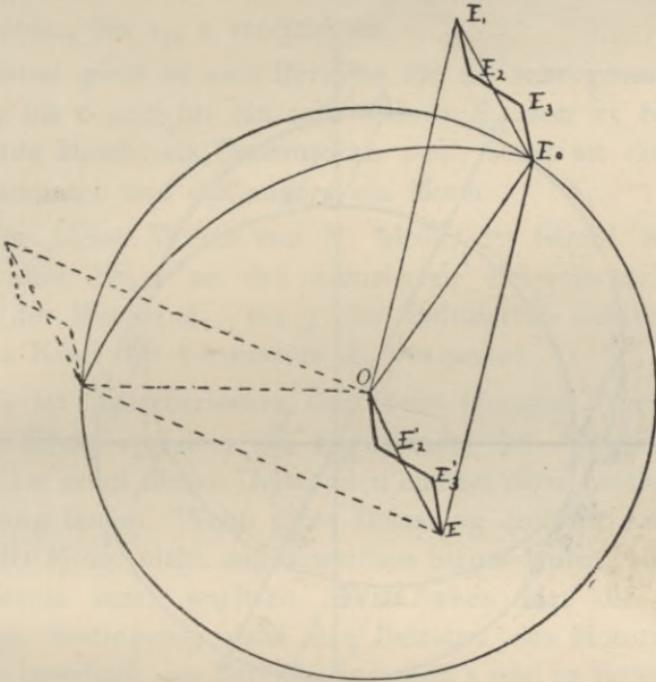


Fig. 125.

erreicht dann ihr Maximum an dem Punkt $3_1, 3$, dem allerhöchsten Punkt rechts, wobei die Klemmenspannung in Phase mit dem Strom ist und fällt dann wieder, während die induzierte elektromotorische Kraft des Motors E_1 steigt und E_0 bei $4_1, 4$ wird. Bei $5_1, 5$ wird die Leistung Null und wird dann negativ, d. h. der Motor hat sich in eine Dynamomaschine verwandelt und erzeugt elektrische Energie, während die Klemmenspannung E_0 elektrische Energie liefert, d. h. beide Maschinen als Generatoren

speisen eine Leitung, bis bei $6_1, 6$ die Klemmenspannung E_0 Null wird und dann beginnt die Energie zurückzufließen, d. h. der Motor hat sich in einen Generator verwandelt und der Generator in einen Motor; wir sind also

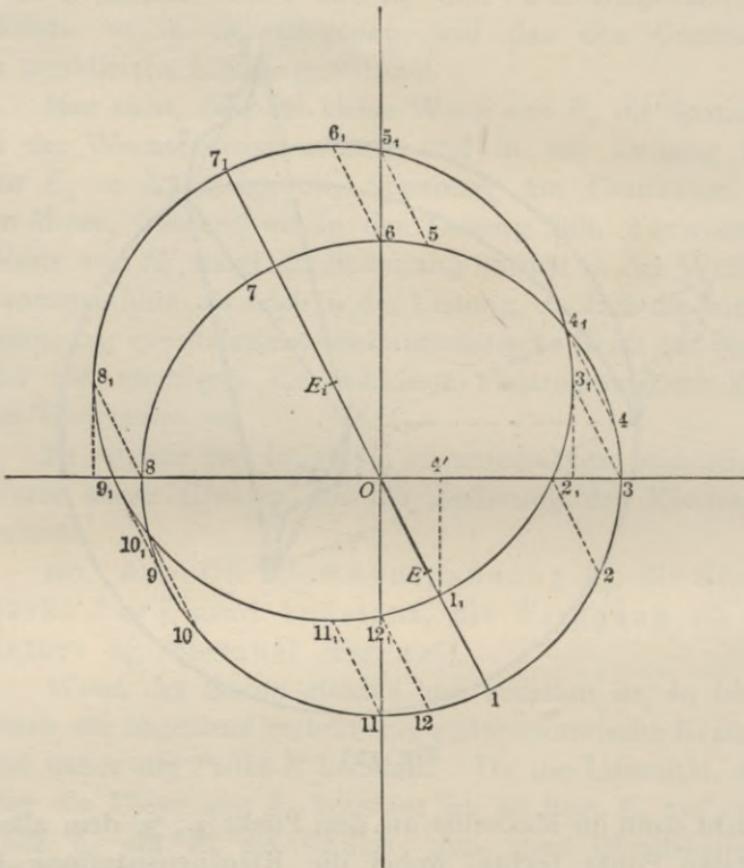


Fig. 126.

auf der Generatorseite des Diagramms angelangt. Bei $7_1, 7$ ist der maximale Wert von E_1 bei dem Strom I erreicht worden und wenn wir noch weiter gehen, so sinkt die elektromotorische Kraft E_1 wieder, während die Energie noch bis zu ihrem Maximum bei $8_1, 8$ steigt; sodann sinkt

sie wieder, aber E_1 bleibt noch Generator, E_0 Motor, bis bei 11₁, 11 die Energie von E_0 Null wird, d. h. E_0 verwandelt sich wieder in einen Generator und beide Maschinen sind Generatoren, bis bei 12₁, 12, wo die Leistung von E_1 Null ist, E_1 sich aus einem Generator in einen Motor verwandelt und wir wieder zur Motorseite des Diagramms kommen, und während E_1 noch steigt, steigt die Leistung des Motors, bis 1₁, 1 erreicht ist.

Daher giebt es zwei Bereiche für ein sehr grosses E_1 , von 5 bis 6 und für ein sehr kleines E_1 , von 11 bis 12, wo beide Maschinen Generatoren sind, sonst ist die eine ein Generator und die andere ein Motor.

Für kleine Werte von E_1 bleibt der Strom zurück, fängt aber bei 2 an der induzierten elektromotorischen Kraft des Motors E_1 , bei 3 der induzierten elektromotorischen Kraft des Generators E_0 vorzueilen.

Es ist bemerkenswert, dass beim kleinsten Werte von E_1 der Effekt 1₁ schon ein bedeutender ist. Daher kann der Motor unter diesen Umständen nur bei einer bestimmten Belastung laufen. Wenn diese Belastung entfernt wird, so kann der Motor nicht mit demselben Strom laufen, sondern der Strom muss wachsen. Wir haben hier die merkwürdige Bedingung, dass das Belasten des Motors den Strom innerhalb des Bereichs zwischen 1 und 12 vermindert und das Nichtbelasten denselben erhöht.

Die Bedingung der maximalen Leistung ist 3, wo der Strom in Phase mit der Klemmenspannung ist. Da bei konstantem Strom der Verlust konstant ist, so ist folgendes zu gleicher Zeit die Bedingung des maximalen Wirkungsgrades: Keine Phasenverschiebung der Klemmenspannung, oder die Selbstinduktion des Stromkreises ist ausgeglichen durch die Vorcilung des Motorstromes. Diese Bedingung des maximalen Wirkungsgrades eines Stromkreises haben wir bereits im Kapitel VIII bei der Betrachtung der Induktanz und der Kapazität gefunden.

181. E_0 und E_1 sind konstant und I variabel.

E_0 liegt wieder auf dem Kreise e_0 mit E_0 als Radius und O als Mittelpunkt.

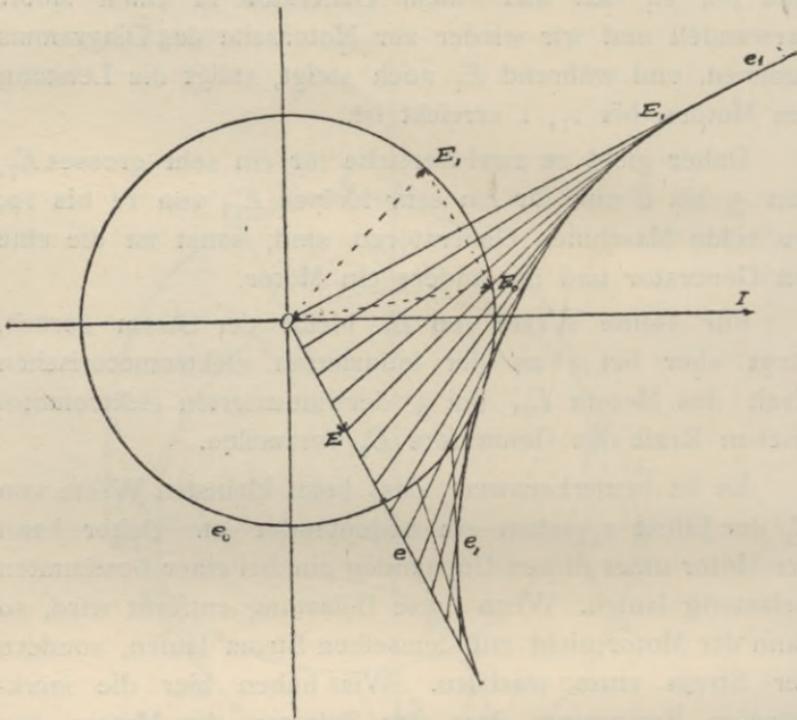


Fig. 127.

E liegt auf einer geraden Linie e , die von dem Anfangspunkte ausgeht.

Da in dem Parallelogramm $OE E_0 E_1$ $EE_0 = E_1$ ist, so leiten wir E_0 ab, indem wir eine Gerade $EE_0 = E_1$ von irgend einem Punkte E in dem Kreise e_0 ziehen und das Parallelogramm vervollständigen.

Die Endpunkte aller dieser Linien EE_0 liegen auf einer Kurve e_1 die als die charakteristische Kurve dieses Problems angesehen werden kann, gerade so wie der Kreis e_1 bei dem früheren Problem.

Diese Kurven sind in den Figuren 127, 128, 129 für drei Fälle gezogen, nämlich: 1. für $E_1 = E_0$, 2. für $E_1 < E_0$, 3 für $E_1 > E_0$.

Im ersteren Falle (Fig. 127) sehen wir, dass bei sehr geringem Strom, d. h. sehr kleinem OE , der Strom I

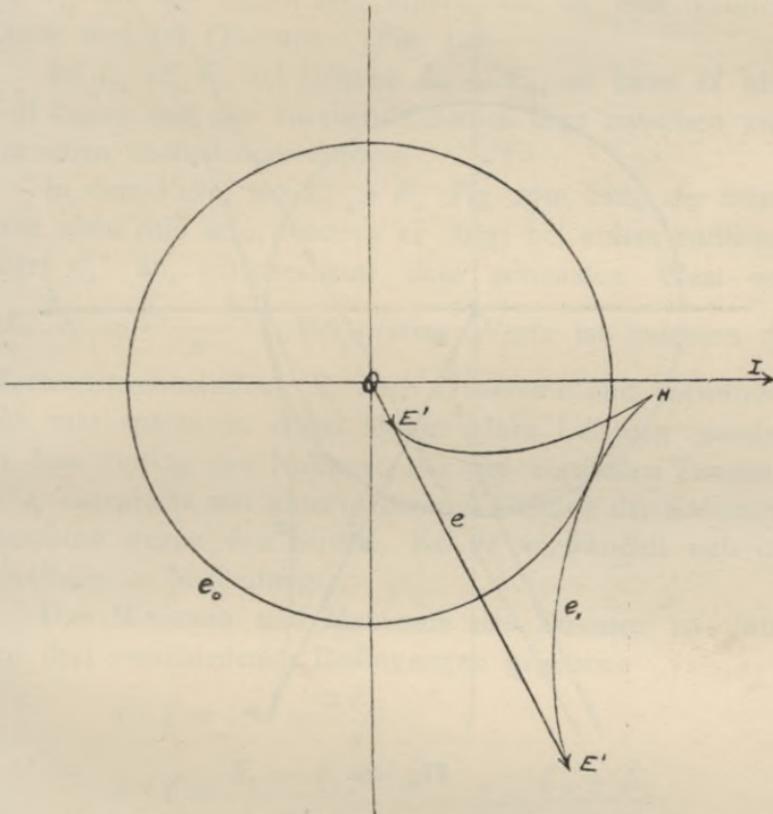


Fig. 128.

der Klemmenspannung E_0 um den Winkel $E_0OI = \omega_0$ voreilt. Diese Voreilung sinkt mit wachsendem Strom, wird dann Null und schliesslich eilt der Strom bei seinen grösseren Werten vor. Nehmen wir nun irgend ein Paar entsprechender Punkte $E E_0$ und ziehen wir die Strecke EE_0 bis sie e_i in E_i schneidet, so haben wir $\sphericalangle E_i OE = 90^\circ$, $E_1 = E_0$, folglich $OE_1 = EE_0 = OE_0 =$

$E_0 E_i$; d. h. $EE_i = 2E_0$. D. h. die charakteristische Kurve e_1 ist von der Linie EE_i eingeschlossen; sie hat eine konstante Länge $2E_0$, die Kurve liegt zwischen den Schenkeln des rechten Winkels $E_i OE$, und daher ist sie

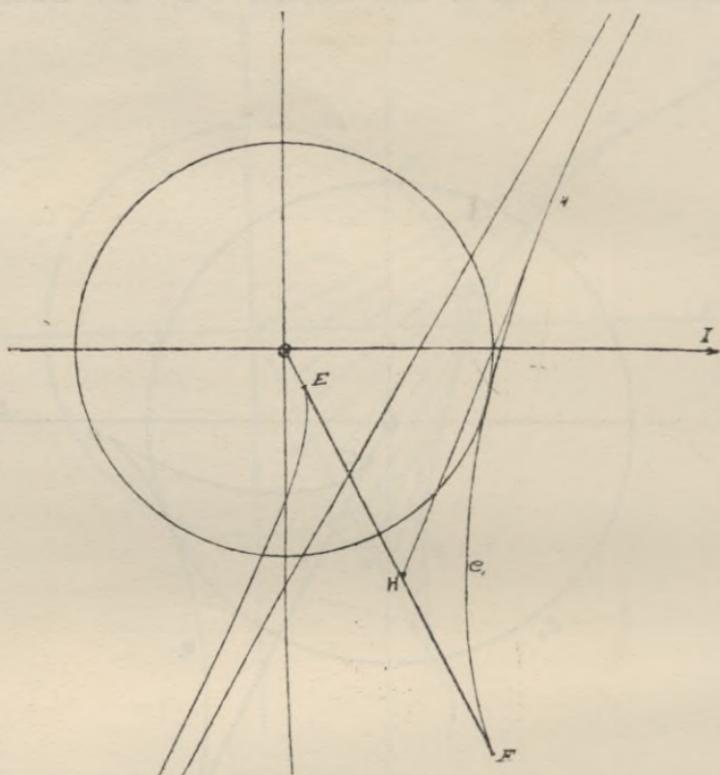


Fig. 129.

eine Hypocycloide sechster Ordnung, die den Kreis e_0 berührt, deren allgemeine Gleichung mit $e e_1$ als Koordinatenachsen

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{4E_0^2}$$

ist.

Im zweiten Falle, wo $E_1 < E_0$ (Fig. 128), sehen wir, dass der Strom niemals Null werden kann, wie im ersten Falle, wo $E_1 = E_0$, sondern dass er einen minimalen Wert, entsprechend dem minimalen Wert von

$OE_1: I_1' = \frac{E_0 - E_1}{z}$ und einen maximalen Wert $I_1'' = \frac{E_0 + E_1}{z}$

hat. Ferner kann der Strom niemals der Klemmenspannung E_0 voreilen, sondern er bleibt immer hinter ihr zurück. Die minimale Verzögerung liegt an dem Punkt H . Der Ort e_1 , der die Linien EE_0 einschliesst, ist eine endliche Kurve sechster Ordnung. (Fig. 128).

Ist $E_1 < E_0$ bei kleinem $E_0 - E_1$, so kann H über Null liegen und der voreilende Strom liegt zwischen zwei Bereichen nacheilender Ströme.

In dem Falle, wo $E_1 > E_0$ (Fig. 129), kann der Strom auch nicht Null sein, sondern er fängt bei einem endlichen Wert C_1' an, entsprechend dem minimalen Wert von $OE_0: I_1' = \frac{E_1 - E_0}{z}$. Bei diesem Werte ist indessen die Wechselstrommaschine E_1 noch Generator und verwandelt sich erst später in einen Motor. Ihre Leistung passiert an dem Punkte den Nullwert, der der vertikalen Tangente zu e_1 entspricht, mit einer grossen Voreilung der Klemmenspannung gegen den Strom. Bei H verwandelt sich die Voreilung in Nacheilung.

Das Minimum und Maximum des Stromes ist unter den drei verschiedenen Bedingungen gegeben:

$$1. \quad I = 0, \quad I = \frac{2E_0}{z}.$$

$$2. \quad I = \frac{E_0 - E_1}{z}, \quad I = \frac{E_0 + E_1}{z}.$$

$$3. \quad I = \frac{E_1 - E_0}{z}, \quad I = \frac{E_0 + E_1}{z}.$$

Da bei $E_1 = 0$ der durch die Leitung fliessende Strom, d. h. wenn der Motor zum Stillstand kommt, $I_0 = E_0/z$ ist, so sehen wir, dass in einer solchen Synchronmotoranlage bei Synchronismus der Strom weit über den Wert steigen kann, den er bei Stillstand des Motors hat, bis auf den doppelten Wert bei 1, etwas weniger bei 2, aber mehr bei 3.

182. C. E_0 ist konstant, E_1 variiert, sodass der Wirkungsgrad für alle Ströme ein Maximum wird. (Fig. 130.)

Wir haben gesehen, dass die Leistung bei gegebener Stromstärke, d. h. bei gegebenem Verlust ein Maximum und der Wirkungsgrad auch ein Maximum wird, wenn der Strom mit der induzierten elektromotorischen Kraft E_0 des Generators in Phase ist. Wir haben dann als Ort für

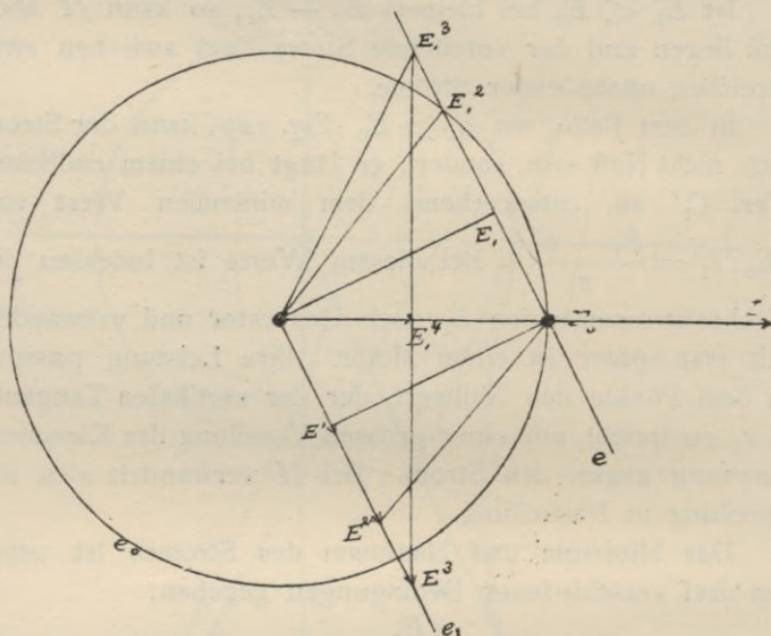


Fig. 130.

E_0 den Punkt E_0 (Fig. 130) und wenn E mit wachsendem Strome in Beziehung auf e variiert, so muss E_1 auf der geraden Linie e_1 parallel zu e variieren.

Daher sinkt $E_1 = E_0$ bei Leerlauf oder Nullstrom mit wachsender Belastung, erreicht ein Minimum bei OE_1^1 senkrecht zu e_1 und wächst dann wieder, erreicht aber noch einmal $E_1 = E_0$ bei E_1^2 und steigt dann über E_0 . Der Strom eilt immer der induzierten elektromotorischen Kraft E_1 des Motors voraus und infolgedessen bewirkt er für die Selbstinduktion des Systems einen Ausgleich und macht den gesamten Stromkreis induktionsfrei.

Die Leistung ist ein Maximum bei E_1^3 , wo $OE_1^4 = E_1^4 E_0 = 1/2 \times OE_0$ und ist dann $= I \times EO/2$ und wenn $OE_1^4 = I = E_0/2$, $I = E_0/2 r$ und $P = E_0^2/4 r$, gleich der maximalen Leistung, die durch eine induktionsfreie Leitung des Widerstandes r bei 50 % Wirkungsgrad in einen induktionsfreien Stromkreis übertragen werden kann.

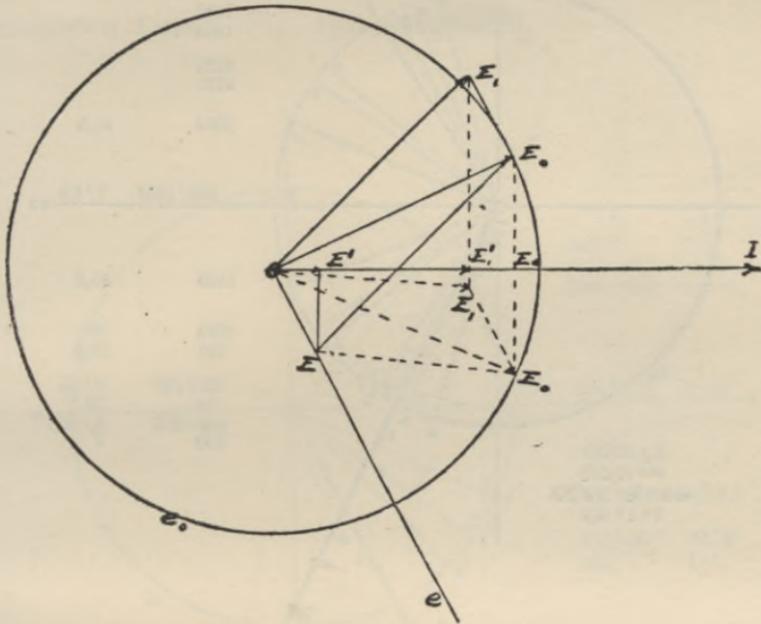


Fig. 131.

In diesem Falle ist

$$E_1^3 = \frac{z}{r} \times \frac{E_0}{2} = \frac{E_0}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2}.$$

Im allgemeinen wird aus dem Diagramm unter der Bedingung des maximalen Wirkungsgrades

$$E_1 = \sqrt{(E_0 - Ir)^2 + I^2 x^2}$$

entnommen.

Vergleichen wir diese Resultate mit denen der Selbstinduktion und der Kapazität in Kapitel IX, so sehen wir, dass die Bedingung des maximalen Wirkungsgrades des Synchron-

motorsystems dieselbe ist, wie in dem System, das nur Induktion und Kapazität enthält, wobei die Voreilung des Stromes gegen die induzierte elektromotorische Kraft E_1 hier in derselben Weise wirkt, wie die Kapazität des Kondensators im Kapitel IX.

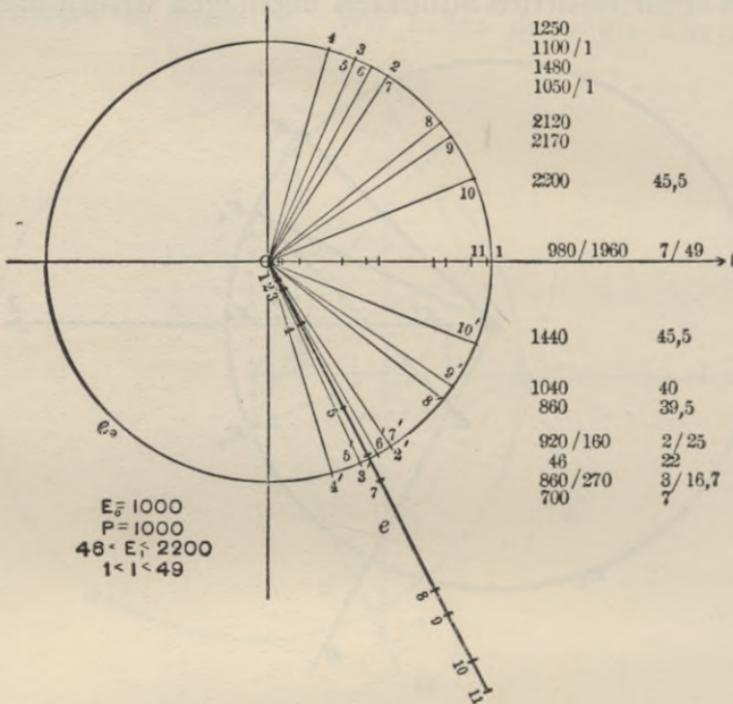


Fig. 132.

183. D. E_0 una P sind konstant.

Wenn die Leistung eines Synchronmotors konstant bleibt, so ist (Fig. 31) $I \times OE_1^1$ konstant, oder da $OE^1 = Ir$, $I = OE^1/r$ und $OE^1 \times OE_1^1 = OE^1 \times E^1 E_0^1 =$ konstant.

Daher erhalten wir das Diagramm für irgend einen Wert des Stromes I bei konstanter Leistung P_1 , indem wir $OE^1 = Ir$, $E^1 E_0^1 = P_1/I$ machen und in E_0^1 eine Senkrechte errichten, die den Kreis e_0 E_0 zweimal schneidet, einmal bei der Voreilung, das andere Mal bei der Nacheilung.

Daher kann bei gegebener Klemmenspannung E_0 dieselbe Leistung P_1 durch denselben Strom I mit zwei verschiedenen induzierten elektromotorischen Kräften E_1 des Motors übertragen werden; die eine $OE_1 = EE_0$ ist klein, entsprechend einem nacheilenden Strom und die andere $OE_1 = EE_0$ ist gross, entsprechend einem voreilenden Strom. Jene ist in punktierten Linien, diese in ausgezogenen Linien (Fig. 131) dargestellt.

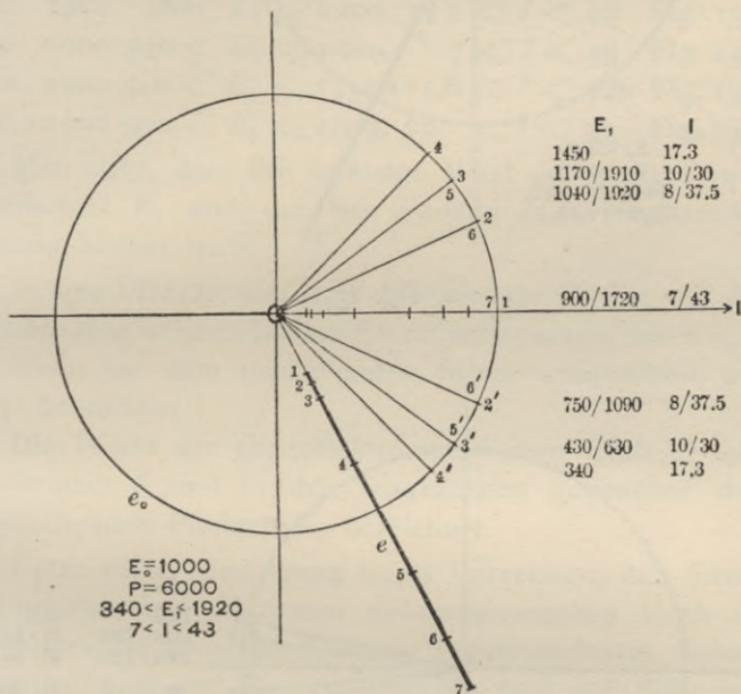


Fig. 133.

Folglich kann ein Synchronmotor bei gegebener Leistung mit dem gleichen Strome, aber bei zwei verschiedenen gegenelektromotorischen Kräften E_1 arbeiten. In einem dieser Fälle ist der Strom voreilend, in dem anderen nacheilend.

In den Figuren 132 bis 135 sind Diagramme unter folgenden Bedingungen dargestellt: die Klemmenspannung

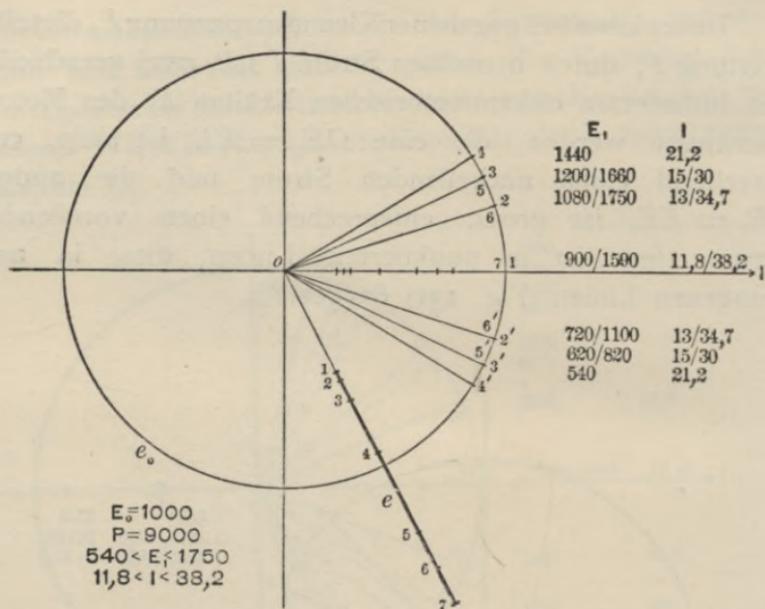


Fig. 134.

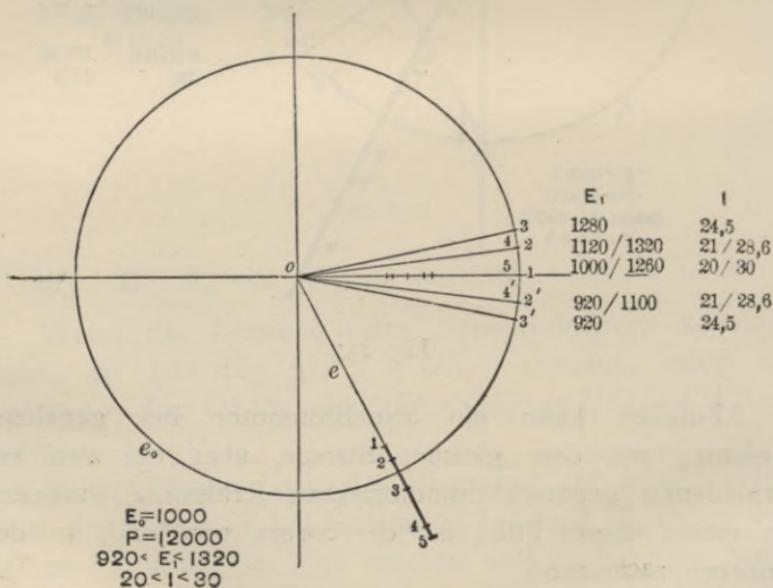


Fig. 135.

E_0 ist konstant und zwar 1000 Volt, die durch die Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft ist E , die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft ist E' .

Die genelektromotorische Kraft E_1 des Motors ist OE_1 gleich und parallel EE_0 . Aus dem Diagramm ist dies nicht zu ersehen, um einer Verwirrung vorzubeugen.

Die vier Diagramme entsprechen den Werten der Motorleistung

$P = 1000$ 6000 9000 12000 Watt und ergeben:
 $P = 1000$ $46 < E_1 < 2200$, $1 < I < 49$ Fig. 132.
 $P = 6000$ $340 < E_1 < 1920$, $7 < I < 43$ Fig. 133.
 $P = 9000$ $540 < E_1 < 1750$, $11,8 < I < 38,2$ Fig. 134.
 $P = 12000$ $920 < E_1 < 1320$, $20 < I < 30$ Fig. 135.

Man sieht, dass der zulässige Wert der genelektromotorischen E_1 und der des Stromes I bei wachsender Leistung kleiner wird.

In den Diagrammen sind verschiedene Punkte von E_0 , wenn sie dem vorauseilenden Strom entsprechen, mit 1, 2, 3 und wenn sie dem nacheilenden Strom entsprechen, mit 2^1 , 3^1 bezeichnet.

Die Werte der genelektromotorischen Kraft E_1 und des Stromes I sind in den Diagrammen gegenüber den entsprechenden Punkten E_0 bezeichnet.

Unter dieser Bedingung ist es interessant, den Strom als Funktion der induzierten elektromotorischen Kraft E_1 des Motors für konstante Leistung P_1 anzunehmen. Solche Kurven sind in der Fig. 139 gegeben und auf Seite 278 erklärt.

184. Während die graphische Methode sehr bequem ist, um einen klaren Einblick in die Abhängigkeit der verschiedenen Grössen von einander zu erhalten, so ist es für die numerische Rechnung vorzuziehen, die Diagramme analytisch auszudrücken.

Zu diesem Zwecke sei $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ die Impedanz eines Stromkreises mit dem (äquivalenten) Widerstand r

und der (aequivalenten) Reaktanz $x = 2 \pi N L$, die die Klemmenspannung e_0 *) und die gegenelektromotorische Kraft e_1 des Synchronmotors enthält, d. h. die in dem Motoranker infolge der Rotation durch das (resultierende) magnetische Feld induzierte elektromotorische Kraft.

i sei der Strom in dem Stromkreise (effektiver Wert).

Die durch den Synchronmotor (einschliesslich der Reibung und des Verlustes im Eisen) gelieferte mechanische Leistung ist der durch die gegenelektromotorische Kraft e_1 verbrauchte elektrische Effekt; folglich ist

$$p = i e_1 \cos(i_1, e_1),$$

daher

$$\left. \begin{aligned} \cos(i_1, e_1) &= \frac{p}{i e_1} \\ \sin(i_1, e_1) &= \sqrt{1 - \left(\frac{p}{i e_1}\right)^2} \end{aligned} \right\}$$

Die Phasenverschiebung zwischen dem Strom i und der durch die Impedanz z verbrauchten elektromotorischen Kraft $e = z i$ ist

$$\left. \begin{aligned} \cos(i e) &= \frac{r}{z} \\ \sin(i e) &= \frac{x}{z} \end{aligned} \right\}$$

Da die folgenden drei in dem geschlossenen Stromkreise wirkenden elektromotorischen Kräfte e_0 als elektromotorische Kraft des Generators, e_1 als gegenelektromotorische Kraft des Synchronmotors und $e = z i$ als die durch die Impedanz verbrauchte elektromotorische Kraft ein

* Wenn e_0 die elektromotorische Kraft an den Motorklemmen ist, so ist z die Impedanz des Motors; ist e_0 die Klemmenspannung des Generators, so ist z die gesamte Impedanz der Leitung und des Motors; wenn e_0 die elektromotorische Kraft des Generators, d. h. die infolge der Rotation durch das magnetische Feld in dem Anker des Generators induzierte elektromotorische Kraft ist, so enthält z auch die Impedanz des Generators.

Dreieck bilden, d. h. da e_1 und e Komponenten von e_0 sind, so ist (Fig. 136)

$$e_0^2 = e_1^2 + e^2 + 2 e e_1 \cos (e_1, e), \quad (4)$$

folglich

$$\cos (e_1, e) = \frac{e_0^2 - e_1^2 - e^2}{2 e_1 e} = \frac{e_0^2 - e_1^2 - z^2 i^2}{2 z i e_1}, \quad (5)$$

da aber in dem Diagramm

$$\begin{aligned} \cos (e_1, e) &= \cos (i, e - i, e_1) \\ &= \cos (i, e) \cos (i, e_1) + \sin (i, e) \sin (i, e_1) \end{aligned} \quad (6)$$

ist, ergibt die Einsetzung von (2), (3) und (5) in (6) mit Hilfe einiger Umformungen

$$e_0^2 - e_1^2 - z^2 i^2 - 2 r p = 2 x \sqrt{i^2 e_1^2 - p^2}, \quad (7)$$

als die fundamentale Gleichung des Synchronmotors in Beziehung auf die Klemmenspannung e_0 , die gegenelektromotorische Kraft e_1 , den Strom i , den Effekt p , den Widerstand r , die Reaktanz x und die Impedanz z .

Diese Gleichung zeigt, dass bei gegebener Klemmenspannung e_0 und bei gegebener Impedanz $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ drei Variable e_1 , i , p vorhanden sind, von denen zwei unabhängig sind. Daher wird bei gegebenem e_0 und z der Strom i nicht nur durch die Belastung p bestimmt, sondern auch durch die Erregung, und es kann daher der Strom i je nach der Erregung verschiedene Belastungen p darstellen; bei gleicher Belastung kann sich der Strom i in weiten Grenzen ändern, indem man die Felderregung e_1 ändert.

Die Bedeutung der Gleichung (7) wird noch deutlicher durch einige Transformationen, die e_1 und i als Funktionen von p und eines Winkelparameters φ von einander trennen.

Setzen wir in (7) die neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{e_1^2 + z^2 i^2}{\sqrt{2}} & e_1^2 &= \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \\ \beta &= \frac{e_1^2 - z^2 i^2}{\sqrt{2}} & z^2 i^2 &= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \text{oder} \quad (8)$$

ein, so erhalten wir

$$e_0^2 - \alpha \sqrt{2} - 2 r p = 2 \frac{x}{z} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta}{2} - z^2 p^2}; \quad (9)$$

substituieren wir wiederum

$$\left. \begin{aligned} e_0^2 &= a \\ 2 z p &= b \\ r &= \varepsilon z \\ s &= z \sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ 2 r p &= \varepsilon b \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

folglich

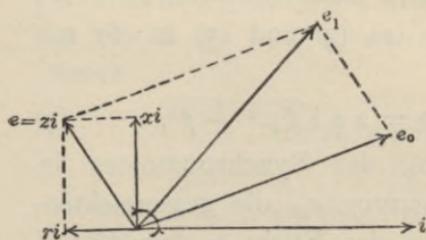


Fig. 136.

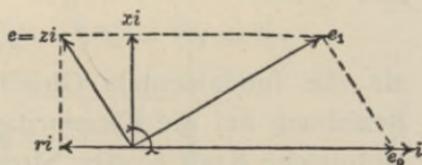


Fig. 137.

so erhalten wir

$$a - \alpha \sqrt{2} - \varepsilon b = \sqrt{(1 - \varepsilon^2) (2\alpha^2 - 2\beta^2 - b^2)}, \quad (11)$$

und in's Quadrat erhoben

$$\varepsilon^2 \alpha^2 + (1 - \varepsilon^2) \beta^2 - \alpha \sqrt{2} (a - \varepsilon b) + \frac{b^2 (1 - \varepsilon^2)}{2} + \frac{(a - \varepsilon b)^2}{2} = 0, \quad (12)$$

setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \alpha - \frac{(a - \varepsilon b) \sqrt{2}}{2 \varepsilon} &= v, \\ \beta \sqrt{1 - \varepsilon^2} &= w, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ein, so erhalten wir mit Hilfe einige Umformungen

$$v^2 + w^2 = \frac{(1 - \varepsilon^2)}{2 \varepsilon^2} a (a - 2 \varepsilon b), \quad (14)$$

folglich, wenn

$$R = \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon^2) a - 2 \varepsilon b}{2 \varepsilon^2}}, \quad (15)$$

gesetzt wird, so ist

$$v^2 + w^2 = R^2 \quad (16)$$

die Gleichung eines Kreises mit dem Radius R .

Substituieren wir nun rückwärts wieder, so erhalten wir mit Hilfe einiger Umformungen

$$\begin{aligned} [r^2(e_1^2 + z^2 i^2) - z^2(e_0^2 - 2rp)]^2 + [rx(e_1^2 - z^2 i^2)]^2 \\ = s^2 z^2 e_0^2 (e_0^2 - 4rp) \end{aligned} \quad (17)$$

als *Fundamentalgleichung des Synchronmotors* in modifizierter Form.

Die Trennung von e_1 und i kann durch Einführung eines Parameters φ mittelst nachstehender Gleichungen bewirkt werden:

$$\left. \begin{aligned} r^2(e_1^2 - z^2 i^2) - z^2(e_0^2 - 2rp) &= xz e_0 \sqrt{e_0^2 - 4rp} \cos \varphi \\ rx(e_1^2 - z^2 i^2) &= xz e_0 \sqrt{e_0^2 - 4rp} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Werden diese Gleichungen (18) umgeformt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} e_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{r^2} (e_0^2 - 2rp) + \frac{z e_0}{r} \left(\frac{x}{r} \cos \varphi + \sin \varphi \right) \sqrt{e_0^2 - 4rp} \right]} \\ &= \frac{e_0 z}{r} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2rp}{e_0^2} \right) + \left(\frac{x}{z} \cos \varphi + \frac{r}{z} \sin \varphi \right) \sqrt{1 - \frac{4rp}{e_0^2}} \right]}. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} (e_0^2 - 2rp) + \frac{e_0}{rz} \left(\frac{x}{r} \cos \varphi - \sin \varphi \right) \sqrt{e_0^2 - 4rp} \right]} \\ &= \frac{e_0}{r} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2rp}{e_0^2} \right) + \left(\frac{x}{z} \cos \varphi - \frac{r}{z} \sin \varphi \right) \sqrt{1 - \frac{4rp}{e_0^2}} \right]}. \end{aligned} \quad (20)$$

Der Parameter φ hat offenbar keine direkte physikalische Bedeutung. Dadurch, dass diese Gleichungen 19 und 20 die Werte von e_1 und i als Funktionen von p und dem Parameter φ ergeben, machen sie es möglich, dass man die *Charakteristiken des Effektes des Synchronmotors* als Kurven in Bezug auf e_1 und i für einen gegebenen Effekt p konstruieren kann, wenn man nämlich φ alle möglichen Werte giebt.

Da die Variablen v und w in der Gleichung 16 des Kreises quadratische Funktionen von e_1 und i sind, so sind die *Charakteristiken des Effektes des Synchronmotors Kurven vierten Grades*.

Sie stellen die Arbeitsweise des Synchronmotors unter allen Bedingungen der Belastung und Erregung als ein Element der Kraftübertragung, wobei sogar die Leitung u. s. w. mit einbegriffen ist, dar.

Bevor wir diese Charakteristiken des Effektes weiter erörtern, mögen einige bestimmte Bedingungen betrachtet werden.

185. A. Die maximale Leistung.

Da die Ausdrücke von e_1 und i in den Gleichungen 19 und 20 die Quadratwurzel $\sqrt{e_0^2 - 4rp}$ enthalten, so ist es klar, dass der maximale Wert von p dem Betrag entspricht, wo die Quadratwurzel beim Durchgang von dem reellen zum imaginären Teil verschwindet, d. h. bei

$$e_0^2 - 4rp = 0,$$

oder

$$p = \frac{e_0^2}{4r}. \quad (21)$$

Dieser Wert ist derselbe, der den maximalen, durch die elektromotorische Kraft e_0 in einer induktionsfreien Leitung mit dem Widerstand r übertragbaren Effekt darstellt, oder allgemeiner ausgedrückt, der maximale Effekt, der durch eine Leitung mit der Impedanz $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ in einen Stromkreis geleitet werden kann, der im Nebenschluss auf einen Kondensator von passender Kapazität geschlossen ist.

Setzen wir 21 in 19 und 20 ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{z}{2r} e_0 \\ i &= \frac{e_0}{2r} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

und als Phasenverschiebung in dem Synchronmotor

$$\cos (e_1, i) = \frac{p}{ie_1} = \frac{r}{z};$$

mithin

$$\operatorname{tang}(e_1, i) = -\frac{x}{r}, \quad (23)$$

d. h. der Winkel der inneren Verschiebung in dem Synchronmotor ist gleich, aber entgegengesetzt dem Winkel der Verschiebung der Impedanz der Leitung, also

$$\begin{aligned} (e_1, i) &= -(e, i), \\ &= -(z, r), \end{aligned} \quad (24)$$

und daher

$$(e_0, i) = 0; \quad (25)$$

d. h. der Strom i ist in Phase mit der Klemmenspannung e_0 .

Ist $z < 2r$ und $e_1 < e_0$, so ist die elektromotorische Kraft des Motors kleiner als die elektromotorische Kraft des Generators; ist $z = 2r$ und $e_1 = e_0$, so ist die elektromotorische Kraft des Motors gleich der elektromotorischen Kraft des Generators; ist $z > 2r$ und $e_1 > e_0$, so ist die elektromotorische Kraft des Motors grösser als die elektromotorische Kraft des Generators.

In jedem einzelnen Falle eilt der Strom in dem Synchronmotor vor.

186. B. Leerlauf, d. h. $p = 0$.

Bei Leerlauf, oder für $p = 0$, erhalten wir, wenn wir in 19 und 20 einsetzen

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{e_0 z}{r} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{z} \cos \varphi + \frac{z}{r} \sin \varphi \right)} \\ i &= \frac{e_0}{r} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{z} \cos \varphi - \frac{z}{r} \sin \varphi \right)} \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Natürlich kann diese Bedingung niemals erfüllt werden, weil p mindestens der durch Reibung u. s. w. verbrauchten Leistung u. s. w. gleich sein muss und deshalb nähert sich die wahre Leerlaufkurve nur der Kurve $p = 0$, die aber abgerundet ist, wohingegen die Kurve 26 scharfe Ecken bildet.

Setzen wir $p = 0$ in die Gleichung 7 ein, so erhalten wir durch Quadrieren und Umformung:

$$\begin{aligned} e_1^2 + e_0^2 + z^2 i^4 - 2e_1^2 e_0^2 - 2z^2 i^2 e_0^2 + 2r^2 i^2 e_1^2 \\ - 2x^2 i^2 e_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Diese Gleichung vierten Grades kann in das Produkt der folgenden beiden quadratischen Gleichungen zerlegt werden

$$\left. \begin{aligned} e_1^2 + z^2 i^2 - e_0^2 + 2 x i e_1 &= 0 \\ e_1^2 + z^2 i^2 - e_0^2 - 2 x i e_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

welches die Gleichungen der beiden Ellipsen sind, von denen die eine das Spiegelbild der anderen ist. Beide Ellipsen haben schiefe Axen.

Der minimale Wert der gegenelektromotorischen Kraft e_i ist $e_1 = 0$ bei $i = \frac{e_0}{z}$. (29)

Der minimale Wert des Stromes i ist $i = 0$ bei $e_1 = e_0$. (30)

Der maximale Wert der elektromotorischen Kraft e_1 ist durch die Gleichung 28

$$f = e_1^2 + z^2 i^2 - e_0^2 \pm 2 x i e_1 = 0$$

gegeben unter der Bedingung, dass

$$\frac{de_1}{di} = - \frac{\frac{df}{di}}{\frac{df}{de_1}} = 0, \text{ und da } z^2 i \pm x e_1 = 0,$$

so folgt

$$i = e_0 \frac{x}{r z}, \quad e_1 = \mp e_0 \frac{z}{r}. \quad (31)$$

Der maximale Wert des Stromes i ist durch die Gleichung 28 und zwar bei

$$\frac{di}{de_1} = 0 \text{ und}$$

$$i = \frac{e_0}{r} \text{ und } e_1 = \mp e_0 \frac{x}{r}$$

gegeben.

Wenn e_1 als Abscissen und $z i$ als Ordinaten gewählt werden, so geht die Axe dieser Ellipsen durch die Punkte des durch die Gleichung 22^r gegebenen maximalen Effektes.

Daraus ersieht man, dass in den Kurven der Synchronmotoren bei Leerlauf die beiden Seiten der V-förmigen Kurven nicht gerade Linien sind, wie dies gewöhnlich

angenommen wird, sondern Ellipsenbogen, von denen der eine konkav und der andere konvex ist.

Diese beiden Ellipsen sind in der Fig. 138 dargestellt und teilen die ganze Fläche in sechs Teile — die beiden

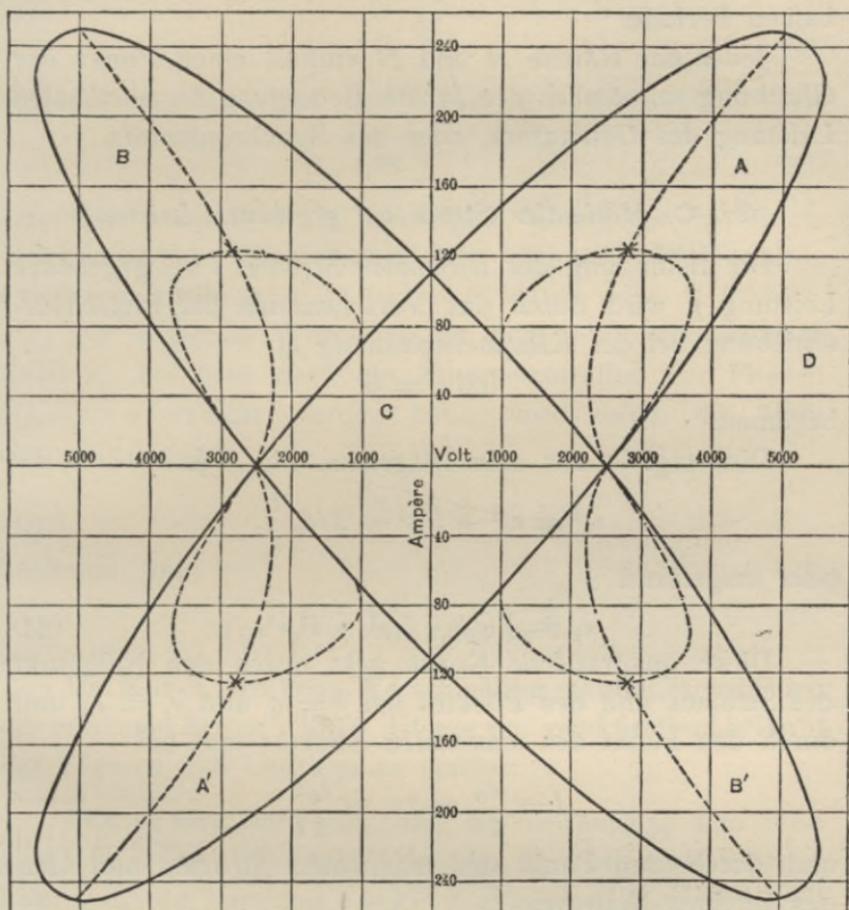


Fig. 138.

Teile A und A' , deren Flächen die Kurven vierten Grades der Gleichungen 19 und 20 des Synchronmotors enthalten, die beiden Teile B und B' , deren Flächen die Kurven vierten Grades des Generators enthalten und der innere und äussere Raum C und D , deren Punkte keine wirkliche Bedingung des Maschinenstromkreises darstellen, sondern die e_1 und i imaginär machen.

A und A' und B und B' sind identische Bedingungen für den Wechselstromstromkreis, die nur durch gleichzeitige Umkehrung des Stromes und der elektromotorischen Kraft sich von einander unterscheiden, d. h. um die Zeit einer halben Periode.

Jeder der Räume A und B enthält einen Punkt der Gleichung 22, nämlich den für die Bedingung der maximalen Leistung des Generators, oder des Synchronmotors.

187. C. Minimaler Strom bei gegebener Leistung.

Die Bedingung des minimalen Stromes i bei gegebener Leistung p wird durch das Verschwinden der Phasenverschiebung bei der Klemmenspannung e_0

$$(e_0, i) = 0$$

bestimmt.

Dies ergibt aus dem Diagramm Fig. 132

$$e_1^2 = e_0^2 + i^2 z^2 - 2 i e_0 \frac{r}{z}, \quad (33)$$

oder umgeformt

$$e_1 = \sqrt{(e_0 - ir)^2 + i^2 x^2}. \quad (34)$$

Diese quadratische Kurve geht durch den Nullpunkt des Stromes und des Effektes bei $i = 0$ und $e_1 = e_0$ und durch den Punkt des maximalen Effektes (22) bei

$$i = \frac{e_0}{2r} \text{ und } e_1 = \frac{e_0 z}{2r},$$

und durch den Punkt des maximalen Stromes und den des Effektes Null, bei

$$i = \frac{e_0}{r} \text{ und } e_1 = \frac{e_0 x}{r}, \quad (35)$$

und teilt jede der Kurven oder Effektcharakteristiken vierter Ordnung in zwei Teile, einen mit voreilendem und den anderen mit nacheilendem Strom, die durch die beiden Punkte der Gleichung 34 getrennt werden, einmal dem minimalen Strom und das andere Mal dem maximalen Strom entsprechend.

Es ist sehr interessant, dass an letzterem Punkte der Strom viele Male grösser sein kann, als derjenige, welcher durch den Motor bei Stillstand hindurchgehen würde; dieser wäre

$$i = \frac{e_0}{z}, \quad (36)$$

während bei Leerlauf der Strom den maximalen Wert

$$i = \frac{e_0}{r} \quad (35)$$

erreichen würde; d. h. denselben Wert, der in einem induktionsfreien Stromkreise mit gleichem Widerstande existieren würde.

Der minimale Wert bei der genelektromotorischen Kraft e_1 , bei dem noch ein Zusammentreffen der Phasen (e_0, i) = 0 erreicht werden kann, wird durch die Gleichung (34) durch

$$\frac{de_1}{di} = 0$$

bestimmt, als

$$i = e_0 \frac{r}{z^2} \quad \text{und} \quad e_1 = e_0 \frac{x}{z}.$$

Die Kurve, wo keine Verschiebung stattfindet, oder wo der minimale Strom auftritt, ist aus den punktierten Linien *) der Figuren 138 und 139 zu ersehen.

*) Es ist sehr interessant, dass die Gleichung 34 dem Wert $e_1 = \sqrt{(e_0 - ir)^2 - i^2 x^2}$ ähnlich ist, der die über eine induktive Leitung mit der Impedanz $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ in einen induktionsfreien Stromkreis übertragene Leistung darstellt.

Gleichung 34 ist identisch mit der Gleichung, die die maximale Spannung e_1 beim Strom i ergibt, die dadurch erzeugt werden kann, dass man den Stromverbraucher durch einen Kondensator nebenschliesst, d. h. die Bedingung der „kompletten Resonanz“ der Leitung $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ mit dem Strom i . Folglich, zurückkommend auf die Gleichung 35, ist $e_1 = e_0 \frac{x}{r}$ die maximale Resonanzspannung der Leitung, die erreicht wird, wenn sie durch einen Kondensator mit der Reaktanz $-x$ geschlossen ist.

188. D. Maximale Phasenverschiebung.

$$(e_0, i) = \text{Maximum.}$$

Bei gegebenem Effekt p ist die zugeführte Leistung

$$p_0 = p + i^2 r = e_0 i \cos(e_0, i); \quad (38)$$

folglich

$$\cos(e_0, i) = \frac{p + i^2 r}{e_0 i}. \quad (39)$$

Bei gegebenem Effekt p ist dieser Wert als Funktion des Stromes i ein Maximum, wenn

$$\frac{d}{di} \left(\frac{p + i^2 r}{e_0 i} \right) = 0,$$

dies ergibt

$$p = i^2 r; \quad (40)$$

oder

$$i = \sqrt{\frac{p}{r}}. \quad (41)$$

D. h. die Phasenverschiebung, die Voreilung oder die Nacheilung, ist ein Maximum, wenn der Effekt des Motors dem durch den Widerstand verbrauchten Effekt gleich ist; d. h. bei einem elektrischen Wirkungsgrad von 50 %.

Setzen wir die Gleichung (40) in die Gleichung (7) ein, so erhalten wir, wenn wir in's Quadrat erheben und umformen, die Gleichung vierter Ordnung der maximalen Verschiebung

$$(e_0^2 - e_1^2)^2 + i^4 z^2 (z^2 + 8 r^2) + 2 i^2 e_1^2 (5 r^2 - z^2) - 2 i^2 e_0^2 (z^2 + 3 r^2) = 0. \quad (42)$$

Die Kurve der maximalen Verschiebung ist in punktierten Linien in den Figg. 138 und 139 gezeichnet.

Sie läuft durch den Nullpunkt des Stromes als singulärer Punkt oder Knotenpunkt und durch den Punkt des maximalen Effektes, wo die maximale Verschiebung Null ist und schneidet die Kurve der Verschiebung Null.

189. E. Konstante gegenelektromotorische Kraft.

Bei konstanter gegenelektromotorischer Kraft ist e_1 konstant.

Wenn
$$e_1 < e_0 \sqrt{1 - \frac{r^2 x^2}{\varrho^4}},$$

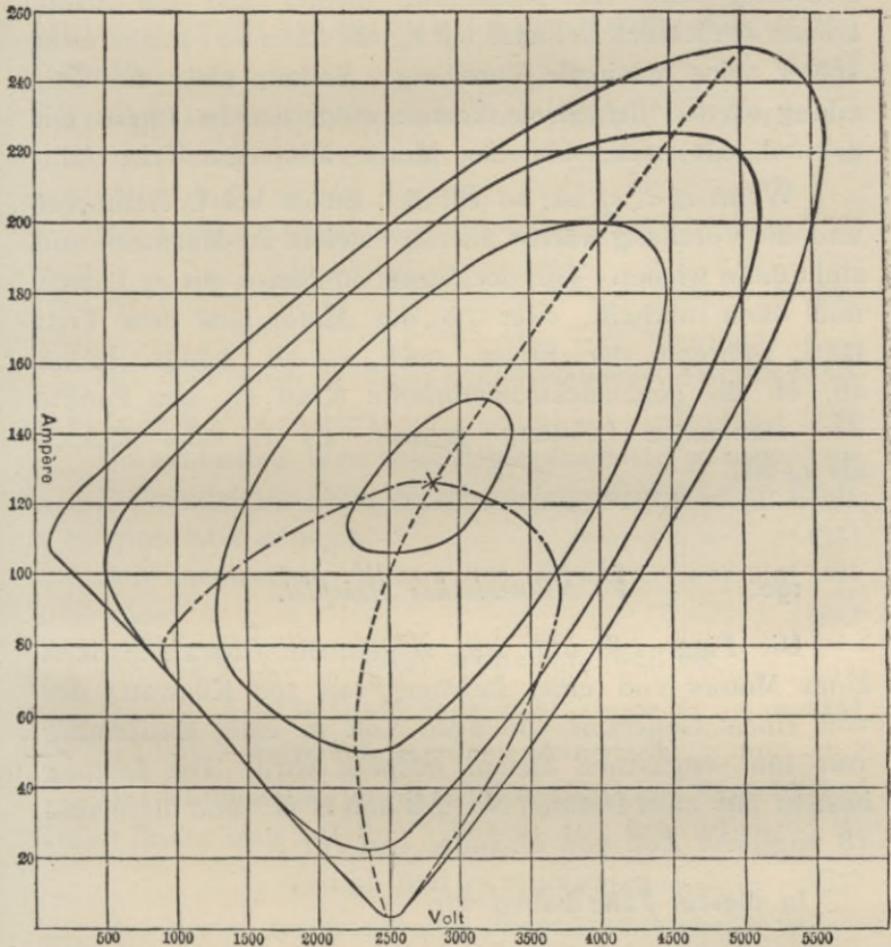


Fig. 139.

so ist der Strom bei Leerlauf kein Minimum und eilt nach. Bei steigender Belastung sinkt die Nacheilung, erreicht ein Minimum und steigt dann wieder, bis der Motor aus dem Tritt fällt, ohne je Phasenübereinstimmung zu erreichen.

Wenn

$$e_0 \sqrt{1 - \frac{r^2 x^2}{z^4}} < e_1 < e_0,$$

so eilt sich der Strom bei Leerlauf nach; bei wachsender Belastung wird die Nacheilung kleiner und der Strom kommt schliesslich in Phase mit e_0 , eilt dann vor und erreicht später seine maximale Voreilung. Sodann sinkt die Voreilung wieder, der Strom kommt wiederum in Phase mit e_0 und eilt nach, bis der Motor aus dem Tritt fällt.

Wenn $e_0 < e_1$ ist, so eilt der Strom bei Leerlauf vor und die Voreilung wächst zuerst, erreicht ihr Maximum und sinkt dann wieder. Ob der Strom in Phase mit e_0 kommt und dann nacheilt, oder ob der Motor aus dem Tritt fällt, während der Strom noch voreilt, hängt davon ab, ob die gegenelektromotorische Kraft an dem Punkte der maximalen Leistung grösser als e_0 oder kleiner als e_0 ist.

190. F. Numerisches Beispiel.

Die Figg. 138 und 139 zeigen die Charakteristiken eines Motors von einer Leistung von 100 Kilowatt, der von einem Generator von 2500 Volt in einer Entfernung von fünf englischen Meilen gespeist wird. Die Leitung besteht aus zwei Drähten No. 2 B und S. G., und diese sind 18 englische Zoll von einander entfernt.

In diesem Falle haben wir

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= 2500 \text{ Volt konstant an den Generator-} \\ &\quad \text{klemmen;} \\ r &= 10 \text{ Ohm, einschliesslich Leitung und} \\ &\quad \text{Motor;} \\ x &= 20 \text{ Ohm, einschliesslich Leitung und} \\ &\quad \text{Motor;} \\ \text{folglich } z &= 22,36 \text{ Ohm.} \end{aligned} \right\} (43)$$

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir

$$2500^2 - e_1^2 - 500 i^2 - 20 p = 40 \sqrt{i^2 e_1^2 - p^2} \quad (7)$$

$$(e_1^2 + 500 i^2 - 31,25 \cdot 10^6 + 100 p)^2 + (2 e_1^2 - 1000 i^2)^2 = 7,8125 \cdot 10^{15} - 5 + 10^9 p. \quad (17)$$

$$e_1 = 5590 \quad (19)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(1 - 3,2 \cdot 10^{-6} p) + (0,894 \cos \varphi + 0,447 \sin \varphi) \sqrt{1 - 6,4 \cdot 10^{-6} p}]} \\ i = 559 \quad (20)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(1 - 3,2 \cdot 10^{-6} p) + (0,894 \cos \varphi - 0,447 \sin \varphi) \sqrt{1 - 6,4 \cdot 10^{-6} p}]}.$$

Die maximale Leistung p ist 156,25 Kilowatt, bei 2795 Volt und $i = 125$ Ampère.

Bei Leerlauf haben wir

$$\left. \begin{aligned} e_1^2 + 500 i^2 - 6,25 \cdot 10^4 \mp 40 i e_1 &= 0 \\ e_1 &= 20 i \pm \sqrt{6,25 \cdot 10^4 - 100 i^2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Bei minimalem Wert der gegenelektromotorischen Kraft

$$e_1 = e_1 = 0 \text{ ist } i = 112, \quad (29)$$

Bei minimalem Wert des Stromes $i = 0$ ist $e_1 = 2500$, (30)

Bei maximalem Wert der gegenelektromotorischen Kraft

$$e_1 = 5590 \text{ ist } i = 223,5, \quad (31)$$

Bei maximalem Wert des Stromes $i = 250$ ist

$$e_1 = 5000. \quad (32)$$

Die Kurve der Phasenverschiebung Null ist

$$\begin{aligned} e_1 &= 10 \sqrt{(250 - i)^2 + 4 i^2} \\ &= 10 \sqrt{6,25 \cdot 10^4 - 500 i + 5 i^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Das Minimum der gegenelektromotorischen Kraft dieser Kurve findet statt bei

$$i = 50 \text{ und } e_1 = 2240 \quad (35)$$

Die Kurve der maximalen Phasenverschiebung ist

$$p = 10 i^2 (6,25 \cdot 10^6 - e_1^2)^2 + 0,65 \cdot 10^6 i^4 - 10^{10} i^2 = 0. \quad (42)$$

Die Fig. 138 zeigt die beiden Ellipsen des Effektes Null in ausgezogenen Linien mit den Kurven der Verschiebung Null in punktierten Linien, ferner die Kurven der maximalen Verschiebung in kurzen Linien und die Punkte des maximalen Effektes mit Kreuzen bezeichnet.

Die Fig. 139 gibt die Leistungscharakteristiken des Motors für

$$p = 10 \quad \text{Kilowatt}$$

$$p = 50 \quad \text{Kilowatt}$$

$$p = 100 \quad \text{Kilowatt}$$

$$p = 150 \quad \text{Kilowatt}$$

$$p = 156,25 \quad \text{Kilowatt}$$

zusammen mit den Kurven der Verschiebung Null und der maximalen Verschiebung.

191. G. Diskussion der Resultate.

Die charakteristischen Kurven des Synchronmotors (Fig. 139) in ihren Hauptzügen sind häufig beobachtet worden, und zwar die V-Kurve bei Leerlauf mit abgerundeter Spitze und den beiden leicht gekrümmten Schenkeln, von denen der eine konkav, der andere konvex ist; die zunehmende Abrundung und die Zusammenziehung der Kurven bei wachsender Belastung; ferner die Verschiebung des Punktes des minimalen Stromes bei wachsender Belastung, der sich zuerst gegen niedrige und dann gegen höhere Werte der genelektromotorischen Kraft e_1 fortbewegt.

Die oberen Teile der Kurven habe ich indessen niemals experimentell beobachten können, und ich halte es für wahrscheinlich, dass sie einem Zustand des synchron laufenden Motors entsprechen, der labil ist. Die experimentellen Beobachtungen erstrecken sich gewöhnlich ungefähr über denjenigen Teil der Kurven (Fig. 139), der in der Figur 140 gegeben ist, und wenn man versucht, die Kurven auf jeder Seite weiter zu verlängern, so wird der Motor aus dem Synchronismus gebracht.

Es ist selbstverständlich, dass diese Effektcharakteristiken des Synchronmotors (Fig. 139) nur als Annäherungen betrachtet werden können, weil viele Annahmen gemacht worden sind, die nicht, oder nur teilweise in der Praxis erfüllt werden.

Hervorzuheben sind:

1. Es wurde angenommen, dass e_1 sich unbeschränkt ändern lässt, während in Wirklichkeit das Anwachsen von e_1 durch die magnetische Sättigung begrenzt ist. So steigt in Figur 139 bei einer Klemmenspannung $e_0 = 2500$ Volt e_1 bis zu 5590 Volt, was über oder unter derjenigen Klemmenspannung sein kann, die der Motor erzeugen kann. Sicher liegt dieser Wert von e_1 aber höher als derjenige, welcher vom Motor dauernd erzeugt werden kann.

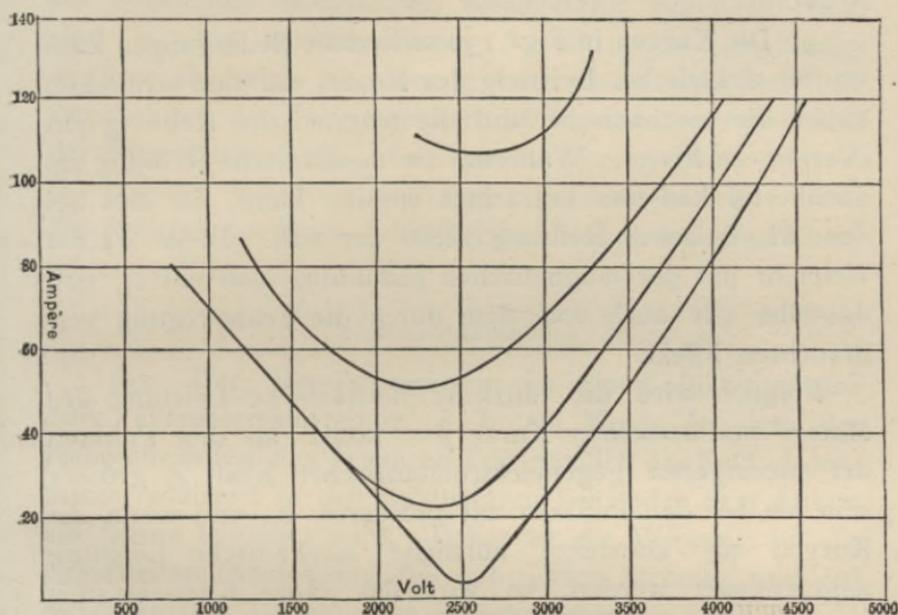


Fig. 140.

2. Die Reaktanz x ist als konstant angenommen. Während die Reaktanz der Leitung konstant ist, ist diejenige des Motors nicht konstant, sondern sie ändert sich mehr oder weniger mit der Sättigung und sinkt für höhere Werte. Das Sinken von x lässt den Strom i wachsen, entsprechend der höheren Werte von e , und biegt daher die Kurven nach oben bei einem niedrigeren Wert von e_1 als in der Figur 139 dargestellt ist.

Es ist einleuchtend, dass die Reaktanz des Motors keine einfache Grösse ist, sondern den kombinierten Effekt der Selbstinduktion, d. h. der in den Ankerleitern durch den darin fliessenden Strom, induzierten elektromotorischen Kraft und der Ankerrückwirkung darstellt, oder die Änderung der gegenelektromotorischen Kraft des Motors durch die Änderung des resultierenden Feldes, infolge der Über-einanderlagerung der magnetomotorischen Kraft des Ankerstromes auf die Felderregung; d. h. sie ist die synchrone Reaktanz.

3. Die Kurven in Fig. 139 stellen die Bedingungen konstanter elektrischer Leistung des Motors dar und schliessen daher die mechanische und die magnetische Reibung ein (Verlust im Eisen). Während die mechanische Reibung als annähernd konstant betrachtet werden kann, ist dies bei der magnetischen Reibung nicht der Fall. Diese wächst vielmehr mit der magnetischen Induktion, also mit e_1 , und dasselbe gilt auch von dem durch die Felderregung verbrauchten Effekt.

Folglich wird die nützliche mechanische Leistung des Motors bei derselben Kurve $p = \text{konst.}$ an den Punkten der niedrigeren gegenelektromotorischen Kraft e_1 grösser sein als bei den Punkten mit grösserem e_1 , und wenn die Kurven als konstante nützliche mechanische Leistung angenommen werden, so wird das ganze Kurvensystem etwas gegen die niedrigeren Werte e_1 verschoben. Folglich entsprechen die Punkte der maximalen Leistung des Motors auch einer niedrigeren elektromotorischen Kraft.

Es ist klar, dass die wahren Charakteristiken der mechanischen Leistung des Synchronmotors nur bestimmt werden können, wenn man die speziellen Bedingungen der in Betracht gezogenen Anlage kennt.

Kapitel XIX.

Kommutator-Motoren.

192. Kommutator-Motoren, d. h. Motoren, bei denen der Strom dem Anker mittelst Bürsten durch einen aus Segmenten bestehenden Kommutator zugeführt wird, sind in den verschiedensten Ausführungen angefertigt worden; sie haben aber wenig Anwendung gefunden, und zwar wegen der Ueberlegenheit der Induktionsmotoren und der Synchronmotoren, die keinen Kommutator besitzen.

Zu den Kommutator-Motoren gehören in erster Linie die Repulsionsmotoren, die Reihenschluss- und die Nebenschlussmotoren.

Repulsionsmotor.

193. Der Repulsionsmotor ist ein Induktionsmotor oder Transformatormotor, d. h. ein Motor, in dem der Hauptstrom nur den primären Teil, nämlich das Feld, durchfließt, während in dem sekundären Teil, oder dem Anker, ein Strom induziert wird. Daher ist die Wirkung auf die gegenseitige Abstossung des induzierten Stromes und des induzierenden Magnetismus zurückzuführen.

Wie bei den Induktionsmotoren erwähnt, ist ein Anker mit mehrfachem Stromkreis deshalb erforderlich, um immer während der Rotation sekundäre Stromkreise in induktiver Beziehung zum primären Stromkreis zu haben. Wenn bei einem einzigen Spulenfeld diese Stromkreise beständig in sich geschlossen bleiben, wie bei dem Induktionsmotor, so wird der primäre Stromkreis keine rotierende Wirkung auf den Anker bei Stillstand ausüben, da in der einen Hälfte der Ankerspulen der Strom so induziert wird, dass er eine rotierende Bestrebung in der

einen Richtung ergibt, während in der anderen Hälfte ein Strom induziert wird, der eine rotierende Wirkung in der entgegengesetzten Richtung ergibt, wie in der Pfeilrichtung der Fig. 141 veranschaulicht wird.

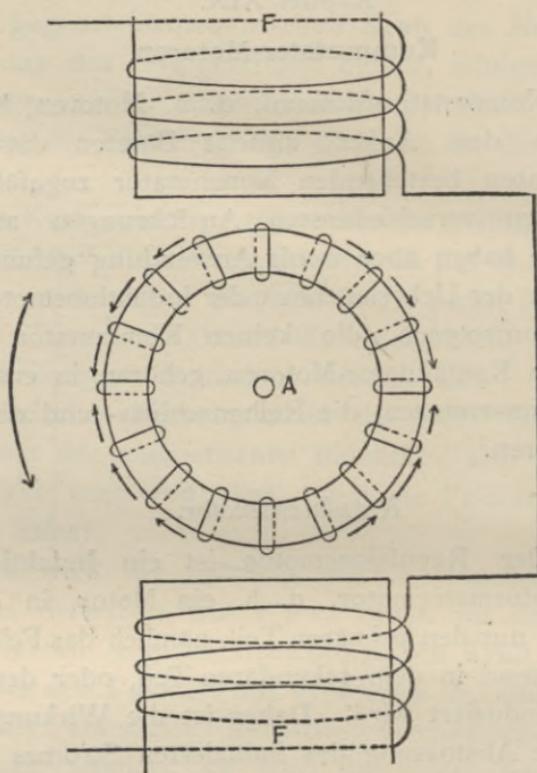


Fig. 141.

Bei einem Induktionsmotor wird ein zweites magnetisches Feld gebraucht, das auf die durch das erste Feld induzierten Ströme wirkt, oder ein induzierendes magnetisches Feld, das eine Drehung verursacht, d. h. der Motor besteht aus einem primären elektrischen Stromkreise, der in dem Anker die sekundären Ströme erzeugt und aus einem primären magnetisierenden Stromkreise, der den auf die sekundären Ströme wirkenden Magnetismus erzeugt.

Bei dem mehrphasigen Induktionsmotor sind im allgemeinen beide Funktionen des primären Stromkreises in denselben Spulen kombiniert, d. h. jede primäre Spule induziert sekundäre Ströme und erzeugt ein magnetisches Feld, das auf sekundäre, durch eine andere primäre Spule induzierte Ströme wirkt.

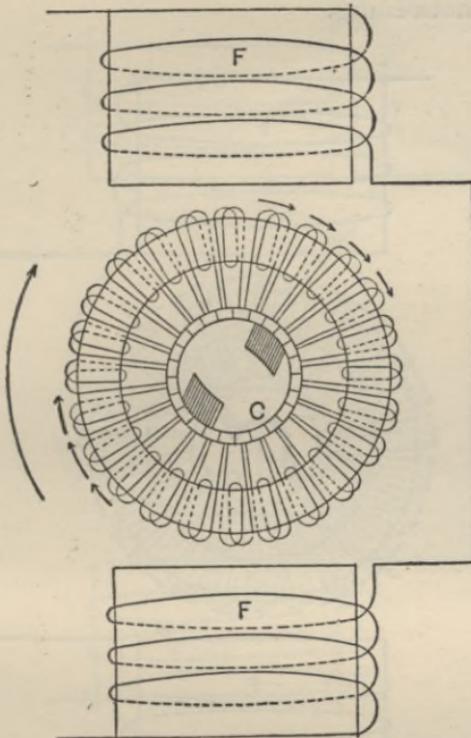


Fig. 142.

194. Bei dem Repulsionsmotor wird die infolge der gleichen und entgegengesetzten Drehungsbestrebungen entstandene Schwierigkeit, verursacht durch die induzierten Ankerströme, wenn auf sie das induzierende magnetische Feld wirkt, dadurch beseitigt, dass die Anker-
spulen in sich geschlossen werden und zwar entweder im Kurzschluss oder durch Widerstand in jener Stellung, wo die induzierten Ströme eine rotierende Wirkung

nach der gewünschten Richtung hin geben, während die Ankerspulen in der Stellung, wo die rotierende Wirkung der induzierten Ströme in entgegengesetzter Richtung zur gewünschten Drehung sein würde, nicht geschlossen werden. Da dies die Forderung stellt, den Stromkreis der Ankerspulen zu öffnen oder zu schliessen, so wird der Kommutator notwendig.

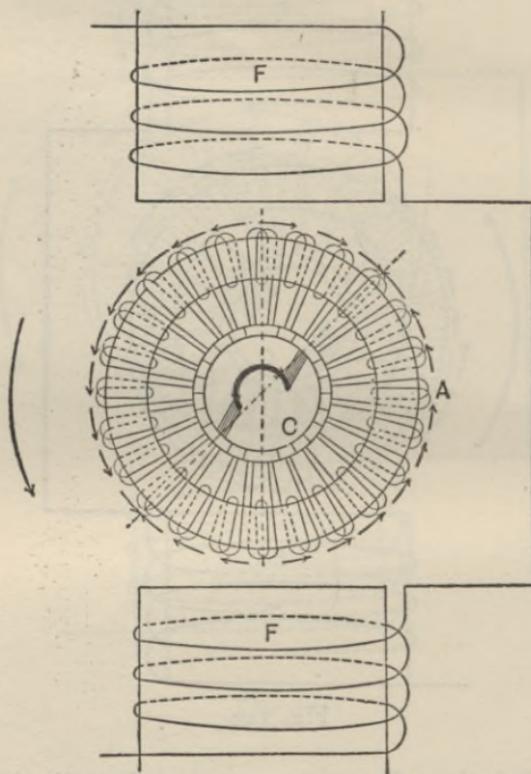


Fig. 143.

Die gewöhnliche Konstruktion der Repulsionsmotoren ist in den Figg. 142 und 143 schematisch für einen zweipoligen Motor dargestellt. Das Feld ist ein einphasiges Wechselstromfeld F . Der Anker ist in dem Schema in Ringschaltung A gezeichnet, der aus einer Anzahl Spulen besteht, die zu einem aus einzelnen Segmenten bestehenden Kommutator C

geführt werden, der analog denen der Gleichstrommaschinen konstruiert ist. Bürsten, die mit der Richtung des magnetischen Feldes einen Winkel von ungefähr 45° bilden, schliessen entweder einen Teil der Ankerspulen (Fig. 142) oder den ganzen Anker durch eine Verbindung von Bürste zu Bürste (Fig. 143) kurz.

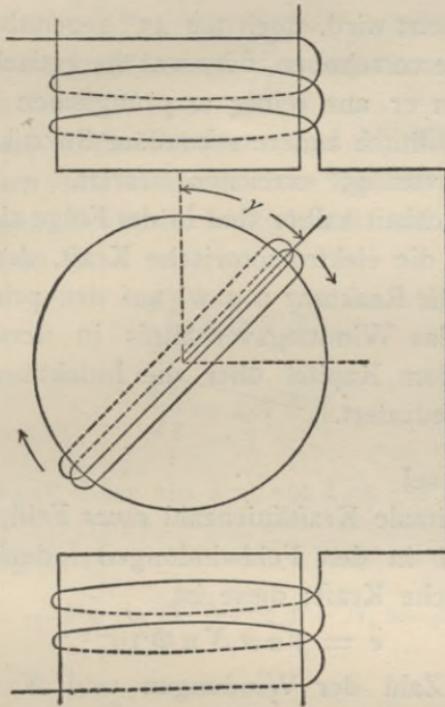


Fig. 144.

Die erste Anordnung hat den Nachteil, dass nur ein Teil der Ankerspulen wirksam ist.

Die zweite Anordnung hat den Nachteil, dass beim Durchgang der Bürste von Segment zu Segment individuelle Ankerspulen kurz geschlossen werden und dadurch ein Drehmoment in entgegengesetzter Richtung ergeben, das durch den induzierten Hauptstrom, welcher durch den ganzen Anker von Bürste zu Bürste fließt, entwickelt wird.

195. Aus diesem Grunde besteht der Repulsionsmotor aus einem primären elektrischen Stromkreise, einem mit demselben verketteten, magnetischen Stromkreise und einem sekundären Stromkreise, der in sich selbst geschlossen und um 45^0 (bei einem zweipoligen Motor) aus der Richtung des magnetischen Feldes verschoben ist (Fig. 144).

Dieser sekundäre Stromkreis bleibt, während er in Bewegung gesetzt wird, noch um 45^0 gegenüber dem magnetischen Felde verschoben, oder was theoretisch dasselbe ist, er wird, wenn er aus seiner ursprünglichen Lage herausgebracht wird, durch andere sekundäre Stromkreise, die die Verschiebung von 45^0 erreichen, ersetzt.

Der Einfachheit halber sind in der Folge alle sekundären Grössen, wie die elektromotorische Kraft, der Strom, der Widerstand, die Reaktanz u. s. w. auf den primären Stromkreis durch das Windungsverhältnis in derselben Weise, wie dies in dem Kapitel über die Induktionsmotoren geschehen ist, reduziert.

196. Es sei

Φ = die maximale Kraftlinienzahl eines Feldpoles,
 e die durch Φ in den Feldwindungen induzierte effektive elektromotorische Kraft; diese ist

$$e = \sqrt{2} \pi N n \Phi 10^{-8},$$

wobei n die Zahl der Windungen und N die Frequenz bedeuten.

Daher ist

$$\Phi = \frac{e 10^8}{\sqrt{2} \pi n N}.$$

Der momentane Wert des Magnetismus ist

$$\varphi = \Phi \sin \beta$$

und das mit dem Ankerstromkreis verkettete Feld

$$\varphi_1 = \Phi \sin \beta \sin \lambda,$$

wobei λ der Winkel zwischen der Ebene der Ankerspule und der Richtung des magnetischen Feldes ist.

Die in einem Ankerstromkreise mit n Windungen induzierte elektromotorische Kraft ist folglich auf den primären Stromkreis reduziert

$$\begin{aligned} e_1 &= -n \frac{d\Phi_1}{dt} 10^{-8}, \\ &= -n \Phi \frac{d}{dt} \sin \beta \sin \lambda 10^{-8}, \\ &= -n \Phi \left(\sin \lambda \cos \beta \frac{d\beta}{dt} + \sin \beta \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} \right) 10^{-8}. \end{aligned}$$

Bezeichnet N die Frequenz und N_1 die Geschwindigkeit in Cyklen pro Sekunde (die Zahl der gleichen Umdrehungen pro Sekunde multipliziert mit der Zahl der Polpaare), dann ist

$$\frac{d\beta}{dt} = 2\pi N;$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = 2\pi N_1;$$

und da $\lambda = 45^\circ$, oder $\sin \lambda = \cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so erhalten wir, dies eingesetzt:

$$e_1 = -\sqrt{2} \pi n \Phi (N \cos \beta + N_1 \sin \beta) 10^{-8}$$

oder, weil

$$\Phi = \frac{e 10^8}{\sqrt{2} \pi n N};$$

$$e_1 = -e (\cos \beta + k \sin \beta),$$

wo

$$k = \frac{N_1}{N} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Frequenz}};$$

ist, oder effektiven Wert der sekundären induzierten elektromotorischen Kraft

$$e_1 = e \sqrt{\frac{1 + k^2}{2}}.$$

197. Führen wir nun komplexe Grössen ein und zählen die Zeit von dem Wert Null des wachsenden Magnetismus an, so wird der Magnetismus durch $j\Phi$ dargestellt und die primäre induzierte elektromotorische Kraft durch $E = -e$ und die sekundäre induzierte elektromotorische Kraft durch

$$E_1 = -\frac{e}{\sqrt{2}}(1 + jk);$$

folglich, wenn $Z_1 = r_1 - jx_1$ die sekundäre Impedanz, reduziert auf den primären Strom, $Z = r - jx$ die primäre Impedanz, $Y = g + jb$ die primäre Admittanz ist, so ist der sekundäre Strom

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1} = -\frac{e}{\sqrt{2}} \frac{1 + jk}{r_1 - jx_1};$$

der primäre Erregerstrom

$$I_0 = e Y = e(g + jb);$$

und infolgedessen der gesamte primäre Strom

$$I = I_0 - I_1;$$

oder

$$I = e \left(g + jb + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + jk}{r_1 - jx_1} \right).$$

Die primäre Klemmenspannung ist

$$E_0 = -E + IZ;$$

oder

$$E_0 = e \left[1 + \frac{1 + jk}{\sqrt{2}} \frac{r - jx}{r_1 - jx_1} + (g + jb)(r - jx) \right].$$

Vernachlässigen wir in dieser Gleichung für E_0 den letzten Ausdruck als solchen höherer Ordnung, so erhalten wir

$$E_0 = e \left(1 + \frac{1 + jk}{\sqrt{2}} \frac{r - jx}{r_1 - jx_1} \right);$$

oder durch Elimination der imaginären Grössen

$$e_0 = \frac{e \sqrt{(r + r_1 \sqrt{2} + kx)^2 + (x + x_1 \sqrt{2} - kr)^2}}{\sqrt{2}(r_1^2 + x_1^2)}.$$

198. Der von der primären gegenelektromotorischen Kraft e verbrauchte Effekt, der in den sekundären Stromkreis übertragen wird, ist

$$\begin{aligned} P' &= e I_1 \\ &= \frac{e^2}{\sqrt{2}} \frac{1 + jk}{r_1 - jx_1}; \end{aligned}$$

oder nach Elimination der imaginären Grössen

$$P' = \frac{e^2}{\sqrt{2}} \frac{r_1 + kx_1}{r_1^2 - x_1^2}.$$

Der durch den sekundären Widerstand verbrauchte Effekt ist

$$\begin{aligned} P_1 &= I_1^2 r_1 \\ &= \frac{e^2}{2} \frac{(1 + k^2) r_1}{r_1^2 + x_1^2}. \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir als Differenz oder als mechanische Leistung an der Axe des Motors

$$\begin{aligned} P &= P' - P_1 \\ &= \frac{e^2}{2(r_1^2 + x_1^2)} \left[r_1(\sqrt{2} - 1) + kx_1\sqrt{2} - k^2 r_1 \right], \end{aligned}$$

und dies für e eingesetzt

$$P = \frac{e_0^2 [r_1(\sqrt{2} - 1) + kx_1\sqrt{2} - k^2 r_1]}{(r + r_1\sqrt{2} + kx)^2 + (x + x_1\sqrt{2} - kr)^2}.$$

Wenn r und r_1 im Vergleich zu x und x_1 klein sind, so ist näherungsweise

$$P = \frac{e_0^2 kx_1\sqrt{2}}{(x + x_1\sqrt{2})^2 + k^2 x^2}.$$

Daher ist der Effekt ein Maximum für $\frac{dP}{dk} = 0$; d. h.

$$k = \frac{x + x_1\sqrt{2}}{x}.$$

Als Beispiel werden in der Fig. 145 die Leistungen als Ordinaten und die Geschwindigkeiten $k = \frac{N_1}{N}$ als Abszissen eines Repulsionsmotors mit den Konstanten

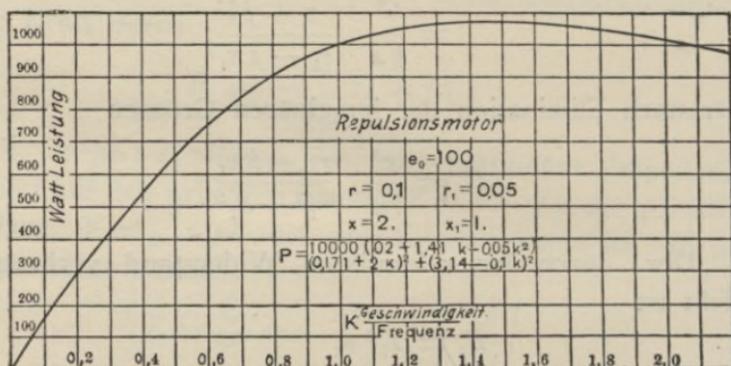


Fig. 145. Repulsions-Motor.

$$e_0 = 100$$

$$r = 0,1 \quad r_1 = 0,05$$

$$x = 2,0 \quad x_1 = 1,0$$

dargestellt, die die Leistung

$$P = \frac{10000 (0,02 + 1,41k - 0,05k^2)}{(0,171 + 2k)^2 + (3,14 - 0,1k)^2}$$

ergeben.

Reihenschlussmotor. Nebenschlussmotor.

199. Wenn in einem Gleichstrommotor, sowohl in einem Reihenschluss- als auch in einem Nebenschlussmotor, der Strom kommutiert wird, so bleibt die Drehungsrichtung dieselbe, weil der Feldmagnetismus und der Ankerstrom entgegengesetzte Vorzeichen haben und das Produkt jener, nämlich das Drehmoment, dasselbe Vorzeichen hat. Daher wird ein solcher Motor, wenn er mit Wechselstrom gespeist wird, ebenfalls arbeiten, unter der Voraussetzung, dass die Umkehrungen im Felde und im Anker gleichzeitig

stattfinden. In einem Reihenschlussmotor ist dies notwendigerweise der Fall, weil derselbe Strom durch das Feld und durch den Anker fließt.

Offenbar muss das Feld bei Wechselstrom zur Vermeidung von Wirbelströmen lamelliert werden.

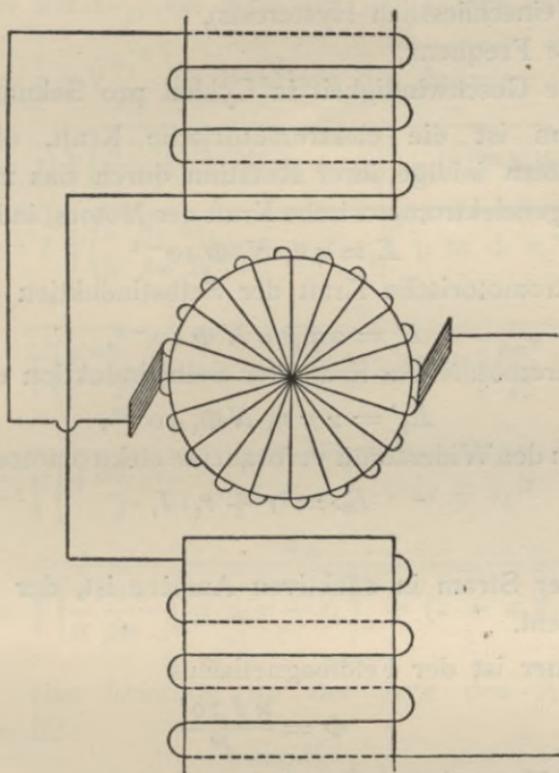


Fig. 146. Reihenschlussmotor.

Es sei für einen Reihenschlussmotor (Fig. 146).

Φ = der effektive Magnetismus pro Pol,

n = die Zahl der hintereinandergeschalteten Feldwicklungen,

n_1 = die Zahl der zwischen den Bürsten hintereinandergeschalteten Ankerwicklungen,

p = die Zahl der Pole,

R = die magnetische Reluktanz des Feldstromkreises,

R_1 = die magnetische Reluktanz des Ankerstromkreises,
 Φ_1 = die durch den Ankerstrom (Quermagnetisierung)
 hervorgebrachte effektive Kraftlinienzahl,

r = der Widerstand des Feldes (effektiver Widerstand,
 einschliesslich Hysterese),

r_1 = der Widerstand des Ankers (effektiver Widerstand,
 einschliesslich Hysterese),

N = die Frequenz,

N_1 = die Geschwindigkeit in Zyklen pro Sekunde.

Dann ist die elektromotorische Kraft, die in den Ankerleitern infolge ihrer Rotation durch das magnetische Feld (gegenelektromotorische Kraft des Motors) induziert wird

$$E = 4 n_1 N_1 \Phi 10^{-8}$$

die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion des Feldes

$$E' = 2\pi p n N \Phi 10^{-8},$$

die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion des Ankers

$$E_1' = 2\pi n_1 N \Phi_1 10^{-8},$$

die durch den Widerstand verbrauchte elektromotorische Kraft

$$E_r = (r + r_1) I,$$

wobei

I der Strom in effektiven Ampère ist, der durch den Motor geht.

Ferner ist der Feldmagnetismus

$$\Phi = \frac{n I 10^8}{P}$$

und der Magnetismus des Ankers

$$\Phi_1 = \frac{n_1 I 10^8}{P_1}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir

$$E = \frac{4 n n_1 N_1 I}{P};$$

$$E' = \frac{2\pi p n^2 N I}{P};$$

$$E_1' = \frac{2\pi n_1^2 N I}{P_1};$$

$$E_r = (r + r_1) I.$$

Folglich ist die Klemmenspannung

$$E_0 = \sqrt{(E + E_r)^2 + (E' + E_1')^2}$$

$$= I \sqrt{\left(\frac{4nn_1N_1}{P} + r + r_1\right)^2 + 4\pi^2N^2\left(\frac{\rho n^2}{P} + \frac{n_1^2}{P_1}\right)^2};$$

oder, weil

$$x = 2\pi N \frac{\rho n^2}{P} \text{ die Reaktanz des Feldes und}$$

$$x_1 = 2\pi N \frac{n_1^2}{P_1} \text{ die Reaktanz des Ankers,}$$

$$E_0 = I \sqrt{\left(\frac{4nn_1N_1}{P} + r + r_1\right)^2 + (x + x_1)^2}$$

$$= I \sqrt{\left(\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N} x + r + r_1\right)^2 + (x + x_1)^2};$$

und

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{4nn_1N_1}{P} + r + r_1\right)^2 + 4\pi^2N^2\left(\frac{\rho n^2}{P} + \frac{n_1^2}{P_1}\right)^2}}$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{4nn_1N_1}{P} + r + r_1\right)^2 + (x + x_1)^2}}$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N} x + r + r_1\right)^2 + (x + x_1)^2}}.$$

200. Die Leistung an der Axe des Ankers ist

$$P = EI$$

$$= \frac{4nn_1N_1}{P} E_0^2$$

$$= \frac{\frac{4nn_1N_1}{P} E_0^2}{\left(\frac{4nn_1N_1}{P} + r + r_1\right)^2 + 4\pi^2N^2\left(\frac{\rho n^2}{P} + \frac{n_1^2}{P_1}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4nn_1N_1}{P} E_0^2}{\left(\frac{4nn_1N_1}{P} + r + r_1\right)^2 + (x + x_1)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N} \cdot x E_0^2}{\left(\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N} x + r + r_1\right)^2 + (x + x_1)^2}$$

und die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der elektromotorischen Kraft

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \omega &= \frac{E' + E_1'}{E + E_r} \\ &= \frac{2\pi N \left(\frac{\rho n^2}{P} + \frac{n_1^2}{P_1} \right)}{\frac{4nn_1 N_1}{P} + r + r_1} \\ &= \frac{x + x_1}{\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N} x + r + r_1}. \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir bei näherungsweise Rechnung den Widerstand $r + r_1$, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \omega &= \frac{1 + \frac{x_1}{x}}{\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N}} \\ P &= \frac{E_0^2}{\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N} + \frac{\left(1 + \frac{x_1}{x} \right)^2}{\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N}}} \end{aligned}$$

daher ein Maximum für

$$\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N} = \frac{\left(1 + \frac{x_1}{x} \right)^2}{\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n} \frac{N_1}{N}},$$

oder

$$\frac{N_1}{N} = \frac{1 + \frac{x_1}{x}}{\frac{2}{\pi} \frac{n_1}{\rho n}}.$$

Dieses eingesetzt in $\operatorname{tang} \omega$

$$\operatorname{tang} \omega = 1, \text{ oder } \omega = 45^\circ.$$

201. Als Beispiel für einen solchen Wechselstrommotor setzen wir

$$\begin{aligned} E_0 &= 100 & N &= 60 & p &= 2. \\ r &= 0,03 & r_1 &= 0,12 \\ x &= 0,9 & x_1 &= 0,5 \\ n &= 10 & n_1 &= 48 \end{aligned}$$

Es werden besondere Vorkehrungen getroffen, die Reaktanz des Ankers auf ein Minimum zu reduzieren und die Verzerrung des Feldes durch die magnetomotorische Kraft des Ankers mittelst einer Spule zu verhindern, die den Anker eng umgiebt und die durch einen Strom gleicher Phase, aber in entgegengesetzter Richtung des Ankerstromes erregt ist. Hierdurch wurde es möglich, einen doppelten Stromkreis in Thätigkeit zu versetzen und zwar 96 Windungen des Ankers in einem bipolarem Felde von 20 Windungen, bei einem Verhältnis der

$$\frac{\text{Ampère-Windungen des Ankers}}{\text{Ampère-Windungen des Feldes}} = 2,4.$$

In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} I &= \frac{100}{\sqrt{(0,023 N_1 + 0,15)^2 + 1,96}} \\ P &= \frac{230 N_1}{(0,023 N_1 + 0,15)^2 + 1,96} \\ \text{tang } \omega &= \frac{1,4}{0,023 N_1 + 0,15} \text{ oder } \cos \omega \\ &= \frac{0,023 N_1 + 0,15}{\sqrt{(0,023 N_1 + 0,15)^2 + 1,96}}. \end{aligned}$$

In der Fig. 147 sind mit der Geschwindigkeit N_1 als Abscissen die Werte des Stromes I , der Effekt P und der Leistungsfaktor $\cos \omega$ dieses Motors gegeben.

202. Der Nebenschlussmotor mit Schenkeln aus Eisenblechen wird in einem Wechselstromkreis nicht zur Zufriedenheit funktionieren. Er wird mit gutem Drehmoment anlaufen, weil der Strom beim Anlaufen sowohl in dem Anker als auch im Felde sehr zurückbleibt und beide

Ströme annähernd in Phase miteinander sind. Bei wachsender Geschwindigkeit müsste indessen der Ankerstrom mit der Klemmenspannung mehr in Phase kommen, um einen Effekt darzustellen. Weil aber der Feldstrom und infolgedessen der Feldmagnetismus beinahe um 90^0 zurück bleibt, so wird die

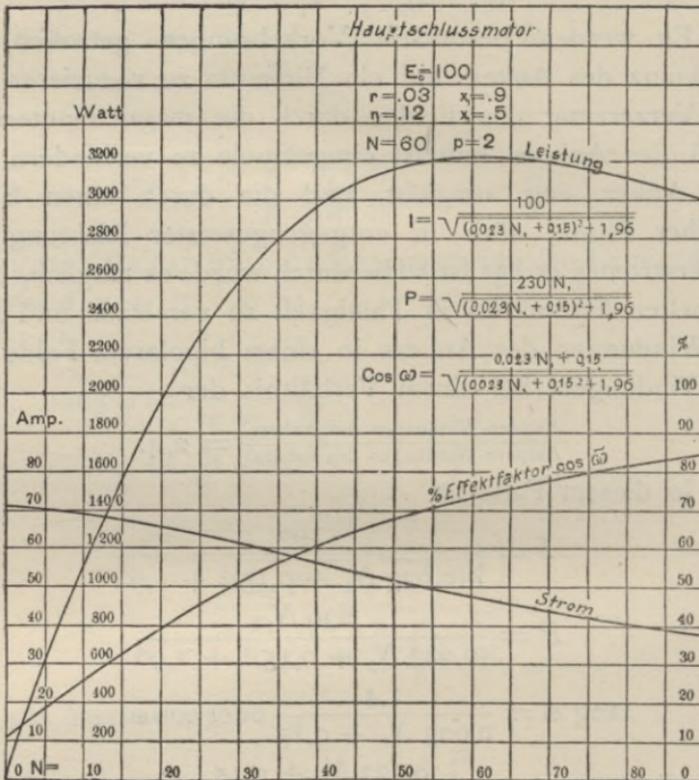


Fig. 147. Reihenschlussmotor.

durch die Rotation des Ankers in diesem induzierte elektromotorische Kraft beinahe 90^0 zurückbleiben und keinen Effekt darstellen.

Um also einen Nebenschlussmotor in Wechselstromkreisen zu betreiben, muss der Magnetismus des Feldes annähernd mit der elektromotorischen Kraft in Phase sein, d. h. die Reaktanz des Feldes müsste vernachlässigt werden. Da die Selbstinduktion des Feldes weit grösser

ist als der entsprechende Widerstand, so ist die Einschaltung einer negativen Reaktanz oder einer Kapazität in dem Felde erforderlich.

Ist die Selbstinduktion des Feldstromkreises durch Kapazität ausgeglichen, so wird der Motor arbeiten, sofern der Anker geringe Reaktanz besitzt und beim Anlassen in den Ankerstromkreis genügend Widerstand eingeschaltet wird, um den Ankerstrom annähernd in Phase mit der elektromotorischen Kraft zu halten. Unter diesen Umständen werden die Gleichungen des Motors denen des Reihenschlussmotors ähnlich sein.

Solche Motoren sind jedoch nicht eingeführt worden und zwar infolge der Schwierigkeit, die Ausgleichung zwischen Kapazität und Selbstinduktion in dem Feldstromkreis aufrecht zu erhalten, die von dem Quadrat der Frequenz abhängt und die durch die geringste Änderung der Frequenz gestört wird.

Den Haupteinwand gegen den Reihen- und Nebenschlussmotor giebt die Funkenbildung am Kommutator, die infolge der Induktion sekundärer Ströme in den Ankerspulen, die unter den Bürsten hindurchgehen, entstehen. Aus der Fig. 146 ersieht man, dass bei normaler Bürstenlage zwischen den Feldpolen die Ankerspule, die unter der Bürste hindurchläuft, das gesamte magnetische Feld einschliesst. Es wird in diesem Augenblick keine elektromotorische Kraft in der Ankerspule durch ihre Rotation induziert, sondern die durch den Wechsel des magnetischen Feldes induzierte elektromotorische Kraft erreicht in diesem Moment ihr Maximum und die Spule wirkt, wenn sie durch die Bürste kurzgeschlossen ist, als kurzgeschlossene sekundäre Spule in Beziehung auf die Feldspulen als primäre, d. h. es fließt ein starker Strom durch diese Ankerspule, der sie entweder zerstört, oder nach Unterbrechung durch die Bewegung des Ankers die Bildung schädlicher Funken verursacht.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, sind verschiedene Anordnungen vorgeschlagen worden, die aber alle nicht praktisch verwendet wurden.

203. Im Vergleich mit dem Synchronmotor, der praktisch keine nachteiligen Ströme besitzt, und dem Induktionsmotor, der sehr hohe Leistungsfaktoren aufweist, ist der Leistungsfaktor des Reihenschlussmotors (Fig. 147), der noch dazu eine der besten Typen dieser Art darstellt, niedrig.

Bei dem Reihenschlusswechselstrommotor, und auch bei dem Nebenschlussmotor gibt es keine tote Stellung einer Ankerspule. Es wird aber bei jeder Stellung der Ankerspule in dieser eine elektromotorische Kraft induziert und zwar in der zur Feldströmung parallelen Lage eine elektromotorische Kraft in Phase mit dem Strom, in der rechtwinkligen Lage zur Feldströmung eine elektromotorische Kraft senkrecht zu dem Strom und dazwischen liegende elektromotorische Kräfte in den Zwischenstellungen.

Bei der Geschwindigkeit $\frac{\pi N}{2}$ sind die beiden induzierten elektromotorischen Kräfte in Phase und senkrecht zu dem Strom gleich und die Ankerspulen sind der Sitz eines kompletten Systems symmetrischer und ausgeglichener mehrphasiger elektromotorischer Kräfte. Daher können mittels feststehender Bürsten aus einem solchen Motor mehrphasige Ströme entnommen werden.

Kapitel XX.

Reaktionsmaschinen.

204. In den Kapiteln über Wechselstrom-Generatoren und Induktionsmotoren wurde angenommen, dass die Reaktanz x der Maschine konstant ist. Während dies mehr oder weniger bei vielen Wechselstrommaschinen der Fall ist, ist bei anderen, und besonders bei Maschinen, die eine grosse Rückwirkung des Ankers besitzen, die Reaktanz x variabel und in den verschiedenen Lagen der Ankerspulen in dem magnetischen Stromkreise verschieden. Diese Verschiedenheit der Reaktanz verursacht Erscheinungen, die durch die analytische Berechnung, die unter der Annahme konstanter Reaktanz angestellt worden ist, keine Erklärung finden.

Es ist bekannt, dass Synchronmotoren von grosser und variabler Reaktanz im Synchronismus bleiben und imstande sind, bedeutende Arbeit zu verrichten und dass sie sogar unter Umständen mit voller Belastung arbeiten, wenn der Erregerkreis des Stromkreises unterbrochen ist, und dadurch die genelektromotorische Kraft E_1 auf Null gebracht ist, Manchmal laufen sie sogar mit voller Belastung, wenn der Feldstromkreis kommutiert und die genelektromotorische Kraft E_1 negativ gemacht wird.

Andererseits verschwinden unter gewissen Belastungsbedingungen Strom und elektromotorische Kraft eines Generators nicht, wenn das Generatorfeld unterbrochen oder wenn es bis auf einen kleinen negativen Wert kommutiert ist, in welchem Falle der Strom gegen die elektromotorische Kraft E_0 des Generators fliesst.

Ferner wird sich ein Doppel „T“ Anker ohne Wicklung in einem magnetischen Wechselstromfelde drehen, sobald er erst einmal zum Synchronismus gebracht ist und wird als Motor bedeutende Arbeit leisten.

Diese Erscheinungen sind weder auf remanenten Magnetismus, noch auf die magnetisierende Wirkung der Wirbelströme zurückzuführen, weil sie auch in Maschinen mit Magneten aus Eisenblechen auftreten und ferner wenn die Wechselstrommaschine durch äussere Mittel zum Synchronismus gebracht und der remanente Magnetismus der Feldpole vorher durch einen Wechselstrom beseitigt wird.

205. Diese Erscheinungen können nicht durch die Annahme einer konstanten synchronen Reaktanz erklärt werden, weil dann, wenn keine Felderregung stattfindet, die elektromotorische Kraft oder die gegenelektromotorische Kraft der Maschine Null und die einzige in der Wechselstrommaschine vorkommende elektromotorische Kraft die der Selbstinduktion ist, d. h. die durch den Wechselstrom selbst induzierte elektromotorische Kraft. Ist aber die synchrone Reaktanz konstant, so ist die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion senkrecht zum Strom und wattlos; d. h. sie kann weder Energie erzeugen, noch verbrauchen.

In einem Synchronmotor, der ohne Felderregung läuft, herrscht stets eine grosse Verzögerung des Stromes in Beziehung auf die Klemmenspannung, und ein Wechselstromgenerator wird eine elektromotorische Kraft ohne Felderregung nur dann erzeugen, wenn er durch einen äusseren Stromkreis von grosser negativer Reaktanz geschlossen wird; d. h. wenn er durch einen Stromkreis, in dem der Strom der elektromotorischen Kraft voreilt, wie bei einem Kondensator oder bei einem zu stark erregten Synchronmotor u. s. w., geschlossen wird.

Die Selbsterregung einer Wechselstrommaschine in Folge der Rückwirkung des Ankers kann daraus erklärt werden, dass die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion weder wattlos noch senkrecht zum Strome ist, sondern dass sie eine Energiekomponente enthält; d. h. dass die Reaktanz von der Form $X = h - jx$ ist, wo x die wattlose Komponente der Reaktanz und h die Energiekomponente der Reaktanz bedeutet und h positiv ist, wenn die Reaktanz Energie verbraucht. In diesem Falle bleibt die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion mehr als 90° hinter dem Strom zurück, während bei negativem h die Reaktanz Energie erzeugt, in welchem Falle die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion weniger als 90° hinter dem Strom zurückbleibt.

206. Ein ähnlicher Fall ist bereits in dem Kapitel über Hysterisis, jedoch von einem anderen Gesichtspunkte aus, erörtert worden.

Es wurde dabei gefunden, dass die Wirkung der magnetischen Hysterisis die Stromwelle derartig verzerrt, dass die äquivalente Sinuswelle, d. h. die Sinuswelle von gleicher effektiver Stärke und gleicher Leistung mit der verzerrten Welle, der Welle des Magnetismus um den Winkel der Hysterisisvoreilung a voraus eilt. Da die durch den Magnetismus oder durch die gegenelektromotorische Kraft der Selbstinduktion induzierte elektromotorische Kraft um 90° hinter dem Magnetismus zurückbleibt, so bleibt sie um $90^{\circ} + a$ hinter dem Strom zurück. D. h. die Selbstinduktion in einem Stromkreise, der Eisen enthält, ist nicht senkrecht zum Strom und folglich nicht wattlos, sondern sie bleibt um mehr als 90° zurück und verbraucht daher Energie, sodass die Reaktanz durch $X = h - jx$ dargestellt werden muss, wo h , wie oben gesagt, der effektive hysteretische Widerstand ist.

Eine ähnliche Erscheinung findet bei veränderlicher Reaktanz oder, was dasselbe ist, bei veränderlicher magnetischer Reluktanz statt.

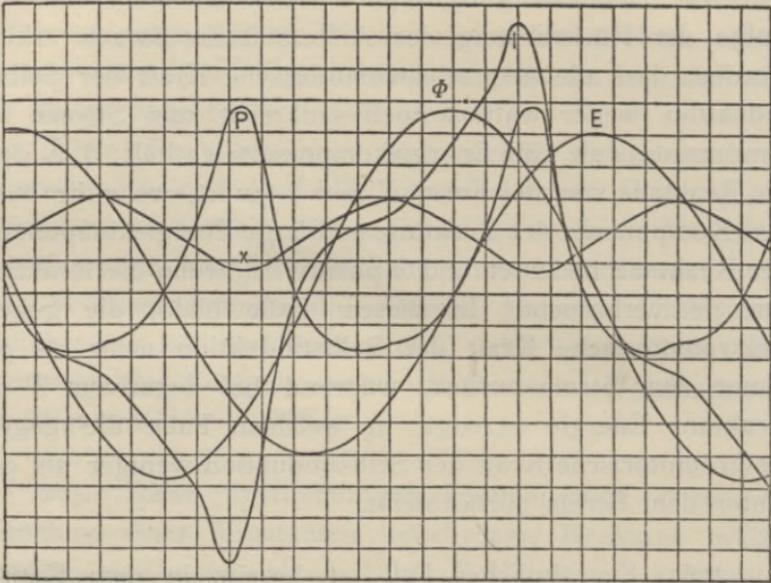


Fig. 148. Variable Reaktanz der Reaktionsmaschine.

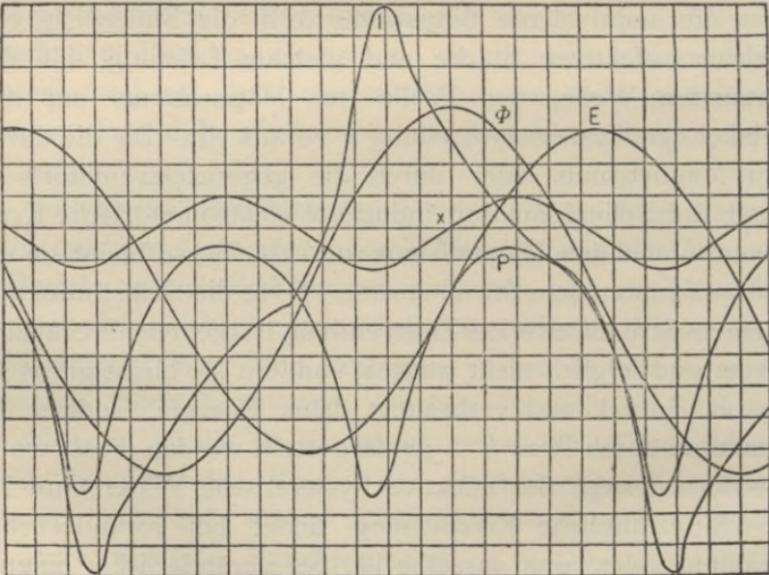


Fig. 149. Variable Reaktanz der Reaktionsmaschine.

207. Es ist klar, dass, wenn die Reaktanz oder Reluktanz variabel ist, sie einen vollständigen Cyklus in der Zeit durchläuft, wo die Ankerspule von einem Feldpol zum nächsten läuft; d. h. während einer halben Welle des Hauptstromes. Mit anderen Worten: die Reluktanz und die Reaktanz variieren mit der doppelten Frequenz des Wechselstromes. Ein solcher Fall ist in den Figg. 148 und 149 veranschaulicht. Es sind die Klemmenspannung

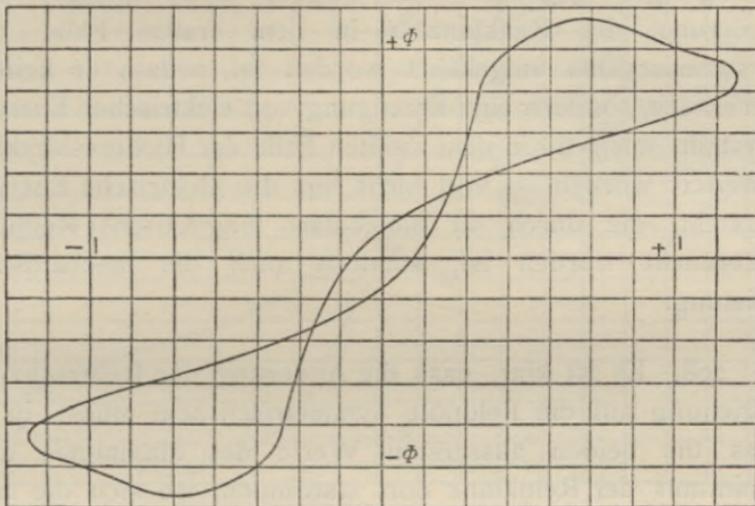


Fig. 150. Hysteresisschleife der Reaktionsmaschine.

und folglich bei zu vernachlässigendem Widerstande die gegen-
elektromotorische Kraft durch die Sinuswelle E dargestellt, und
daher ist der dadurch erzeugte Magnetismus eine Sinuswelle Φ ,
die um 90° E vorausgeht. Die Reaktanz wird durch die
Sinuswelle x dargestellt, die mit der doppelten Frequenz
von E variiert und in Fig. 148 gezeichnet ist, wo sie in
dieser Figur während des Wachsens des Magnetismus und in
Fig. 149 während des Sinkens des Magnetismus den maxi-
malen Wert erreicht. Der Strom I , der erforderlich
ist, um den Magnetismus Φ zu erzeugen, wird aus Φ
und x und aus dem Cyklus der molekularen magnetischen
Reibung des Materials gefunden und die Leistung P

ist das Produkt IE . Wie aus der Fig. 148 zu ersehen, ist der positive Teil von P grösser als der negative Teil; d. h. die Maschine erzeugt als Generator elektrische Energie. In der Fig. 149 ist der negative Teil von P grösser als der positive; d. h. die Maschine verbraucht elektrische Energie und erzeugt als Synchronmotor mechanische Energie. In den Figg. 150 und 151 sind die beiden hysteretischen Cyklen, oder Schleifen Φ, I unter zwei Bedingungen gegeben. Sie zeigen, dass infolge der Änderung der Reaktanz x in dem ersten Falle der Hysteresiszyklus umgekehrt worden ist, sodass er keinen Verbrauch, sondern eine Erzeugung von elektrischer Energie darstellt, während in dem zweiten Falle der Hysteresiszyklus erweitert worden ist und nicht nur die elektrische Energie darstellt, die durch die molekulare magnetische Reibung verbraucht worden ist, sondern auch die mechanische Leistung.

208. Es ist klar, dass die Änderung der Reluktanz in Beziehung auf die Feldpole symmetrisch sein muss; d. h. dass die beiden äussersten Werte des Maximums und Minimums der Reluktanz dort stattfinden, wo sich die Ankerspule auf der Vorderseite des Feldpols und wo sie sich zwischen den Feldpolen befindet.

Die Wirkung dieser periodischen Änderung der Reluktanz ist eine Verzerrung der Welle der elektromotorischen Kraft oder der Stromwelle, oder auch beider. Hier kann die verzerrte Welle wiederum durch die äquivalente Sinuswelle oder durch die Sinuswelle gleicher effektiver Intensität und gleicher Leistung ersetzt werden.

Der augenblickliche durch den Ankerstrom hervorbrachte Wert des Magnetismus, der in dem Ankerleiter die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion induziert, ist proportional dem augenblicklichen Wert des Stromes, dividiert durch den augenblicklichen Wert der Reluktanz. Da die äussersten Werte der Reluktanz mit den symme-

trischen Lagen des Ankers in Beziehung auf die Feldpole zusammentreffen, d. h. mit Null und dem Maximum der induzierten elektromotorischen Kraft E_0 der Maschine, so folgt, dass, wenn der Strom mit der elektromotorischen Kraft E_0 in Phase oder senkrecht dazu steht, die Reluktanzwelle symmetrisch zur Stromwelle und die Magnetismuswelle auch symmetrisch zur Stromwelle sein muss.

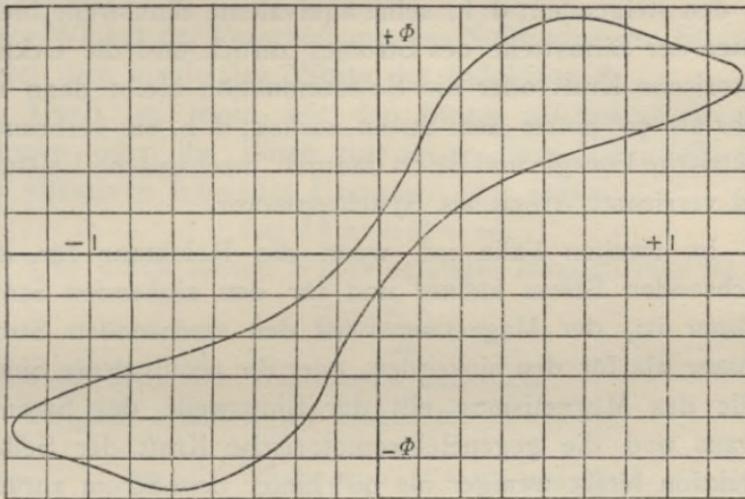


Fig. 151. Hysteresisschleife der Reaktionsmaschine.

Daher ist die äquivalente Sinuswelle des Magnetismus in Phase mit der Stromwelle; d. h. die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion bleibt 90° , hinter dem Strom zurück und ist wattlos.

Daher kann, wenn entweder keine Phasenverschiebung stattfindet, oder bei einer Phasenverschiebung von 90° eine Reaktionsmaschine weder elektrische noch mechanische Energie erzeugen.

209. Weicht dagegen die Stromwelle in der Phase von der elektromotorischen Kraftwelle um weniger als 90° , aber um mehr als Null ab, so ist sie in Beziehung auf die Reluktanzwelle unsymmetrisch und die Reluktanz

ist für den wachsenden Strom grösser als für den sinkenden, oder sie ist für den sinkenden Strom grösser als für den wachsenden, je nach dem Phasenverhältnis des Stromes zur induzierten elektromotorischen Kraft E_0 .

Im ersten Falle ist, wenn die Reluktanz für den wachsenden Strom grösser und für den sinkenden kleiner ist, der dem Strome proportionale Magnetismus, dividiert durch die Reluktanz, für den sinkenden Strom grösser als für den steigenden; d. h. seine äquivalente Sinuswelle bleibt hinter der Sinuswelle des Stromes zurück und die elektromotorische Kraft oder die Selbstinduktion bleibt dann um mehr als 90° hinter dem Strom zurück; d. h. sie verbraucht elektrische Energie und liefert dadurch mechanische Leistung und verrichtet Arbeit als Synchronmotor.

Im zweiten Falle ist, wenn die Reluktanz für den wachsenden Strom kleiner und für den sinkenden Strom grösser ist, der Magnetismus für den wachsenden Strom grösser als für den sinkenden, oder die äquivalente Sinuswelle des Magnetismus eilt der Sinuswelle des Stromes voraus und die gegen elektromotorische Kraft der Selbstinduktion bleibt weniger als 90° hinter dem Strom zurück; d. h. sie liefert als Generator elektrische Energie und verbraucht dabei mechanischen Effekt.

In dem ersten Falle wird die Reaktanz durch $X = h - jx$, ähnlich wie bei der Hysterese, dargestellt, während sie in dem zweiten Falle durch $X = -h - jx$ dargestellt wird.

210. Der Einfluss der periodischen Änderung der Reaktanz hängt offenbar von der Natur der Änderung ab, d. h. von der Gestalt der Reaktanzkurve. Da die Welle ohne Unterschied ihrer Form immer in eine Reihe von Sinuswellen doppelter Frequenz und ihrer höheren harmonischen Glieder aufgelöst werden kann, so kann bei der ersten Annäherung vorausgesetzt werden, dass die Reaktanz oder die Reluktanz

mit der doppelten Frequenz des Hauptstromes variiert, d. h. sie werden folgendermassen ausgedrückt:

$$x = a + b \cos 2\varphi.$$

Es sei die Induktanz oder der Koeffizient der Selbstinduktion dargestellt durch

$$\begin{aligned} L &= l + \varphi \cos 2\varphi \\ &= l(1 + \gamma \cos 2\varphi) \end{aligned}$$

wo γ die Amplitude der Änderung der Induktanz ist.

Es sei

ω der Winkel der Verschiebung des Nullwertes des Stromes hinter dem maximalen Werte der Induktanz L .

Dann ist, wenn wir den Strom als Sinuswelle annehmen oder ihn durch eine äquivalente Sinuswelle von der effektiven Intensität I ersetzen, der Strom

$$i = I\sqrt{2} \sin(\beta - \omega).$$

Der durch diesen Strom erzeugte Magnetismus ist

$$\Phi = \frac{L i}{n},$$

wo n die Zahl der Windungen bedeutet.

Folglich erhalten wir eingesetzt

$$\Phi = \frac{l I \sqrt{2}}{n} \sin(\beta - \omega) (1 + \gamma \cos 2\beta),$$

oder entwickelt

$$\Phi = \frac{l I \sqrt{2}}{n} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \cos \omega \sin \beta - \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \sin \omega \cos \beta \right],$$

wenn wir das Glied von dreifacher Frequenz als wattlos vernachlässigen.

Daher ist die durch diesen Magnetismus induzierte elektromotorische Kraft

$$\begin{aligned} e &= -n \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -2\pi N n \frac{d\Phi}{d\beta} \end{aligned}$$

und entwickelt

$$e = -2\pi N l I \sqrt{2} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \cos \omega \cos \beta + \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \sin \omega \sin \beta \right]$$

und der effektive Wert der elektromotorischen Kraft

$$E = 2 \pi N l I \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 \cos^2 \omega + \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \sin^2 \omega}$$

$$= 2 \pi N l I \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2 \omega}.$$

Daher ist der scheinbare Effekt, oder die Voltampère

$$P_0 = I E = 2 \pi N l I^2 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2 \omega}$$

$$= \frac{E^2}{2 \pi N l \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2 \omega}}.$$

Der augenblickliche Wert des Effektes ist

$$p = e i$$

$$= -4 \pi N l I^2 \sin(\beta - \omega) \left[\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \cos \omega \cos \beta + \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \sin \omega \sin \beta \right]$$

und entwickelt

$$p = -2 \pi N l I^2 \left[\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \sin 2 \omega \sin^2 \beta - \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \sin 2 \omega \cos^2 \beta + \sin 2 \beta \left(\cos 2 \omega - \frac{\gamma}{2} \right) \right].$$

Durch Integration erhalten wir als effektiven Wert der Leistung

$$P = -\pi N l I^2 \gamma \sin 2 \omega;$$

also negativ, wenn $\omega > 0$ (bei zurückbleibendem Strome), d. h. die Maschine verbraucht als Synchronmotor elektrische Energie und erzeugt mechanische, und positiv, wenn $\omega < 0$ (bei voreilendem Strome), d. h. die Maschine erzeugt als Generator elektrische Energie und verbraucht mechanische.

Der Leistungsfaktor ist

$$f = \frac{P}{P_0} = \frac{\gamma \sin 2 \omega}{2 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2 \omega}};$$

folglich ein Maximum, wenn

$$\frac{df}{d\omega} = 0;$$

oder entwickelt

$$\cos 2\omega = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{8 + \gamma^2}.$$

Die Leistung P ist ein Maximum bei gegebenem Strom I , wenn

$$\sin 2\omega = 1;$$

d. h.

$$\omega = 45^\circ.$$

Bei gegebener elektromotorischer Kraft E ist die Leistung

$$P = - \frac{E^2 \gamma \sin 2\omega}{4\pi Nl \left(1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2\omega \right)}$$

und ein Maximum bei

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} = 0;$$

oder entwickelt

$$\cos 2\omega = \frac{\pm \gamma}{1 + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

211. Daher erhalten wir bei der Klemmenspannung E und bei einem zu vernachlässigendem Widerstand, wenn wir den mittleren Wert der Reaktanz mit

$$x = 2\pi Nl$$

bezeichnen, für den Strom

$$I = \frac{E}{x \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2\omega}}$$

die Voltampère

$$P_0 = \frac{E^2}{x \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2\omega}}$$

für die Leistung

$$P = - \frac{E^2 \gamma \sin 2\omega}{2x \left(1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2\omega \right)},$$

für den Leistungsfaktor

$$f = \cos(E, I) = \frac{\gamma \sin 2\omega}{2 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \cos 2\omega}},$$

für die maximale Leistung bei

$$\cos 2\omega = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma^2}{4}},$$

für den maximalen Leistungsfaktor bei

$$\cos 2\omega = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{8 + \gamma^2}$$

$\omega > 0$ beim Synchronmotor mit zurückbleibendem Strom,

$\omega < 0$ beim Generator mit voreilem Strom.

Als Beispiel werden in der Fig. 152 mit dem Winkel ω als Abscissen die Werte des Stromes, der Leistung, des Leistungsfaktors für die Konstanten

$$E = 110$$

$$x = 3$$

$$\gamma = 0,8$$

gezeigt. Folglich

$$I = \frac{41}{\sqrt{1,45 - \cos 2\omega}}$$

$$P = \frac{-2017 \sin 2\omega}{1,45 - \cos 2\omega}$$

$$f = \cos(E, I) = \frac{0,447 \sin 2\omega}{\sqrt{1,45 - \cos 2\omega}}$$

Wie sich aus Fig. 152 ergibt, ist der Leistungsfaktor einer solchen Maschine sehr niedrig und im vorliegenden Falle nicht über 40%.

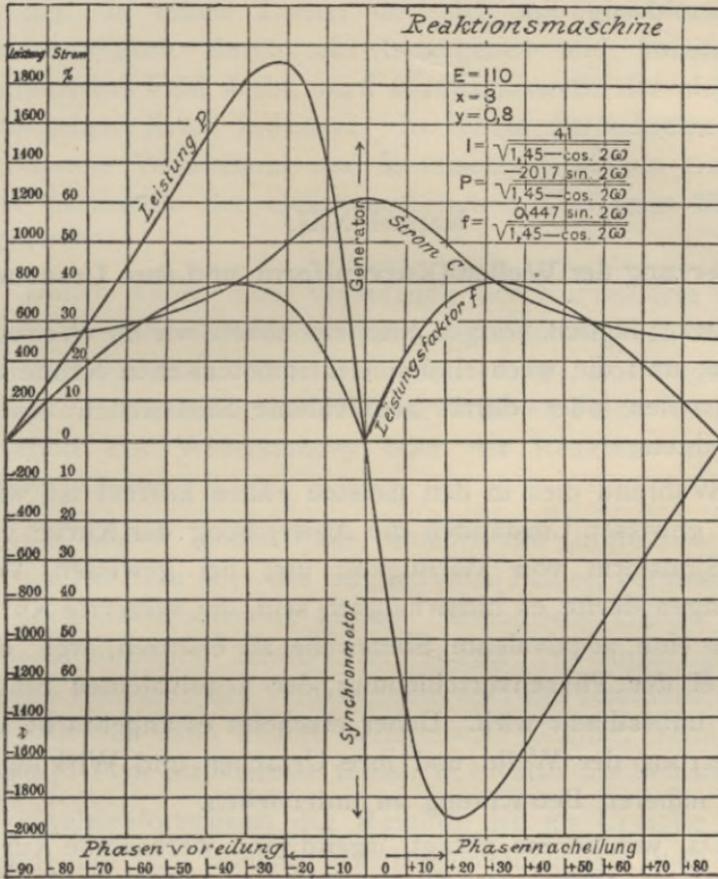


Fig. 152. Reaktionsmaschine.

Kapitel XXI.

Verzerrung der Wellen-(Kurven)form und ihre Ursachen.

212. In den vorigen Kapiteln haben wir die Wechselströme und die wechselnden elektromotorischen Kräfte als Sinuswellen oder durch äquivalente Sinuswellen ersetzt betrachtet.

Während dies in den meisten Fällen korrekt ist, wird unter gewissen Umständen die Abweichung der Kurve von der Sinusform von Wichtigkeit und bei gewissen Verzerrungen dürfte es nicht möglich sein, die verzerrte Kurve durch eine äquivalente Sinuswelle zu ersetzen, weil der Winkel der Phasenverschiebung der äquivalenten Sinuswelle unbestimmt wird. Daher erscheint es angebracht, die Verzerrung der Welle und ihre Ursachen und Wirkungen einer näheren Betrachtung zu unterziehen.

Da, wie bereits gesagt, irgend eine wechselnde Kurve durch eine Reihe von Sinusfunktionen ungraden Grades dargestellt werden kann, so löst sich die Untersuchung der Verzerrung der Wellenform in die Untersuchung der höheren harmonischen Glieder der wechselnden Kurve auf.

Im allgemeinen haben wir zwischen höheren harmonischen Gliedern der elektromotorischen Kraft und höheren harmonischen Gliedern des Stromes zu unterscheiden. Beide hängen von einander insofern ab, als bei einer Sinuswelle der Klemmenspannung eine verzerrende Wirkung eine Verzerrung der Stromkurve verursacht, während bei einer Sinusstromkurve, die durch den Stromkreis hindurchgeht, eine verzerrende Wirkung höhere harmonische Glieder in der elektromotorischen Kraft verursacht.

213. In einem Leiter, der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch ein homogenes und konstantes magnetisches Feld dreht, wird eine Sinuswelle der elektromotorischen Kraft induziert. In einem Stromkreise mit konstantem Widerstand und konstanter Reaktanz erzeugt diese Sinuswelle der elektromotorischen Kraft eine Sinusstromwelle.

Daher kann eine Verzerrung der Kurvenform oder können die höheren harmonischen Glieder auf ungleichförmige Geschwindigkeit des sich drehenden Leiters, auf Ungleichförmigkeit oder Pulsation des magnetischen Feldes und auf Pulsation des Widerstandes oder der Reaktanz zurückgeführt werden.

Die ersten beiden Fälle, nämlich die Ungleichförmigkeit der Rotation oder des magnetischen Feldes, verursachen bei offenem Stromkreise höhere harmonische Glieder der elektromotorischen Kraft. Die zuletzt erwähnten Fälle, nämlich Pulsation des Widerstandes und der Reaktanz, verursachen nur dann höhere harmonische Glieder, wenn ein Strom in dem Stromkreise fließt, d. h. also bei Belastung.

Ungleichförmigkeit der Rotation ist als Ursache der Verzerrung von keinem praktischem Interesse, weil bei Wechselstrommaschinen infolge des mechanischen Momentes die Geschwindigkeit während einer Periode beinahe immer gleichförmig ist. Daher bleiben folgende Ursachen für höhere harmonische Glieder übrig:

1. Ungleichförmigkeit und Pulsation des magnetischen Feldes, das eine Verzerrung der induzierten elektromotorischen Kraft sowohl bei offenem Stromkreise als auch bei Belastung erzeugt.

2. Pulsation der Reaktanz, die unter Belastung höhere harmonische Glieder erzeugt.

3. Pulsation des Widerstandes, der ebenfalls bei Belastung höhere harmonische Glieder erzeugt.

Fassen wir die verschiedenen Ursachen der höheren harmonischen Glieder zusammen, so sind diese zurückzuführen auf die *Ungleichförmigkeit und die Pulsation des magnetischen Feldes*.

214. Da die meisten Wechselstromgeneratoren bestimmte und scharf definierte Feldpole besitzen, die bei den verschiedenen Typen verschiedene Dimensionen haben, so wird im allgemeinen das magnetische Feld, das mit der Ankerspule verkettet ist, nicht als einfache Sinuswelle von der Form $\Phi \cos \beta$, sondern als eine komplexe harmonische Funktion variieren.

Bei einem Anker von gleichförmiger magnetischer Reluktanz ist im allgemeinen die durch die Gestalt der Feldpole verursachte Verzerrung klein und kann vernachlässigt werden, wie z. B. die Kurven in den Figg. 153 und 154, die die Kurve des Leerlaufs und der vollen Belastung der elektromotorischen Kraft einer vielnutigen Dreiphasen-Wechselstrommaschine darstellen.

Selbst wo diese harmonischen Glieder zu beachten sind, können sie mit den harmonischen Gliedern zusammen betrachtet werden, die auf die variierende Reluktanz des magnetischen Stromkreises zurückzuführen sind.

Bei eisengeschlossenen Wechselstromgeneratoren mit wenigen Nuten und Zähnen pro Pol verursacht das Passieren der Nuten an den Feldpolen eine Pulsation der magnetischen Reluktanz oder ihrer Reciproken, nämlich der magnetischen Induktanz des Stromkreises.

Infolgedessen wird der Magnetismus pro Feldpol, oder mindestens der Teil des Magnetismus, der durch den Anker geht, mit einer Frequenz 2γ pulsieren, wenn γ die Zahl der Nuten pro Pol ist.

Daher kann bei einer Maschine mit einer Nute pro Pol das augenblickliche magnetische Feld, das mit den Ankerleitern verkettet ist, durch die Gleichung

$$\varphi = \Phi \cos \beta [1 + \varepsilon \cos (2 \beta - \omega)]$$

ausgedrückt werden, wo φ das mittlere magnetische Feld, ε die Amplitude der Pulsation und ω die Phase der Pulsation ist.

In einer Maschine mit γ Nuten pro Pol ist das augenblickliche mit den Ankerleitern verkettete Feld annähernd

$$\varphi = \Phi \cos \beta [1 + \varepsilon \cos (2\gamma\beta - \omega)],$$

wenn angenommen wird, dass die Pulsation des magnetischen Feldes dem einfachen Sinusgesetz folgt.

Im allgemeinen ist das mit den Ankerleitern verkettete magnetische Feld

$$\varphi = \Phi \cos \beta [1 + \varepsilon_1 \cos (2\beta - \omega_1) + \varepsilon_2 \cos (4\beta - \omega_2) + \dots],$$

wo das Glied $\varepsilon\gamma$ vorherrscht, wenn γ die Zahl der Anker-nuten pro Pol bedeutet.

Die allgemeine Gleichung schliesst auch die Wirkung der Ungleichförmigkeit des magnetischen Feldes ein.

Bei der Pulsation des magnetischen Feldes mit der Frequenz 2γ , wenn der Anker pro Pol γ Nuten besitzt, ist der mit der Ankerspule verkettete augenblickliche Wert als Magnetismus

$$\varphi = \Phi \cos \beta [1 + \varepsilon \cos (2\gamma\beta - \omega)].$$

Folglich ist die dadurch induzierte elektromotorische Kraft

$$\begin{aligned} e &= -n \frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\sqrt{2}\pi N n \Phi \frac{d}{d\beta} \{\cos \beta [1 + \varepsilon \cos (2\gamma\beta - \omega)]\}. \end{aligned}$$

Entwickelt erhalten wir:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{2}\pi N n \Phi \left\{ \sin \beta + \varepsilon \frac{2\gamma - 1}{2} \sin [(2\gamma - 1)\beta - \omega] \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \frac{2\gamma + 1}{2} \sin [(2\gamma + 1)\beta - \omega] \right\}. \end{aligned}$$

Folglich führt die Pulsation des magnetischen Feldes mit der Frequenz 2γ , herrührend von γ Nuten pro Pol, zwei harmonische Glieder der Ordnung $(2\gamma - 1)$ und $(2\gamma + 1)$ ein.

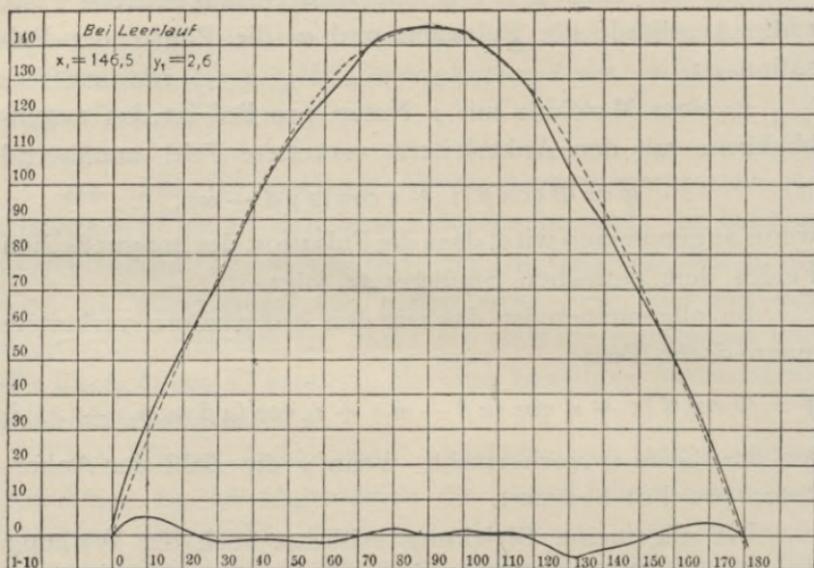


Fig. 153. Kurve der elektromotorischen Kraft einer vielnutigen dreiphasigen Maschine bei Leerlauf.

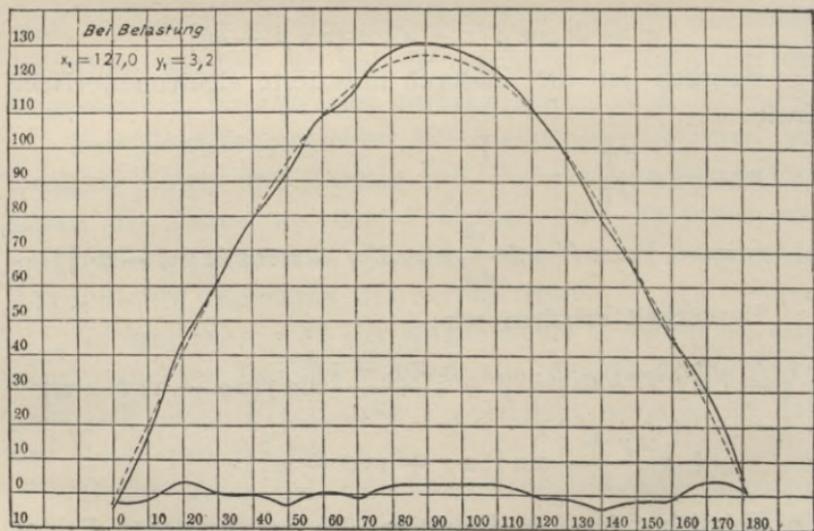


Fig. 154. Kurve der elektromotorischen Kraft einer vielnutigen dreiphasigen Maschine bei voller Belastung.

215. Wenn $\gamma = 1$, so ist

$$e = \sqrt{2} \pi N n \Phi \left[\sin \beta + \frac{\varepsilon}{2} \sin (\beta - \omega) + \frac{3\varepsilon}{2} \sin (3\beta - \omega) \right];$$

d. h. bei einer einnutigen Einphasen-Maschine kann man nur ein dreifaches harmonisches Glied, aber keine höheren harmonischen Glieder erwarten.

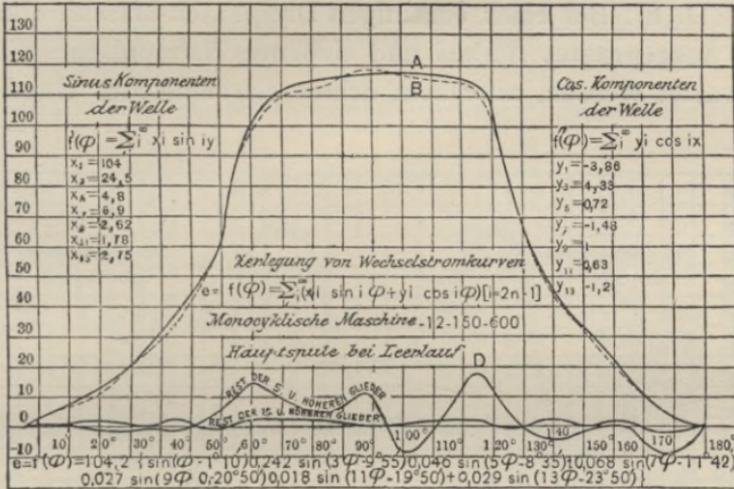


Fig. 155. Kurve der elektromotorischen Kraft bei Leerlauf einer einnutigen monocyclischen Wechselstrommaschine.

Fig. 155 stellt die Kurve der elektromotorischen Kraft der Hauptspule einer normalen monocyclischen Wechselstrommaschine bei Leerlauf dar. Diese Kurve wird durch folgende Formel dargestellt:

$$e = E \left[\sin \beta - 0,242 \sin (3\beta - 6,3) - 0,046 \sin (5\beta - 2,6) + 0,068 \sin (7\beta - 3,3) - 0,027 \sin (9\beta - 10,0) - 0,018 \sin (11\beta - 6,6) + 0,029 \sin (13\beta - 8,2) \right].$$

Es ergibt sich, wie man es auch nicht anders erwarten konnte, ein ausgesprochenes drittes harmonisches Glied.

Wenn $\gamma = 2$, so ist

$$e = \sqrt{2} \pi N n \Phi \left[\sin \beta + \frac{3\varepsilon}{2} \sin (3\beta - \omega) + \frac{5\varepsilon}{2} \sin (5\beta - \omega) \right],$$

wobei die Kurve für den Leerlauf einer einnutigen vierphasigen Maschine ein ausgeprägtes drittes und fünftes harmonisches Glied enthält.

Wenn $\gamma = 3$, so ist

$$e = \sqrt{2} \pi N n \Phi \left[\sin \beta + \frac{5\varepsilon}{2} \sin(5\beta - \omega) + \frac{7\varepsilon}{2} \sin(7\beta - \omega) \right].$$

D. h.: Bei einer einnutigen Dreiphasen-Maschine kann ein ausgeprägtes fünftes und siebentes harmonisches Glied erwartet werden, aber kein drittes harmonisches Glied.

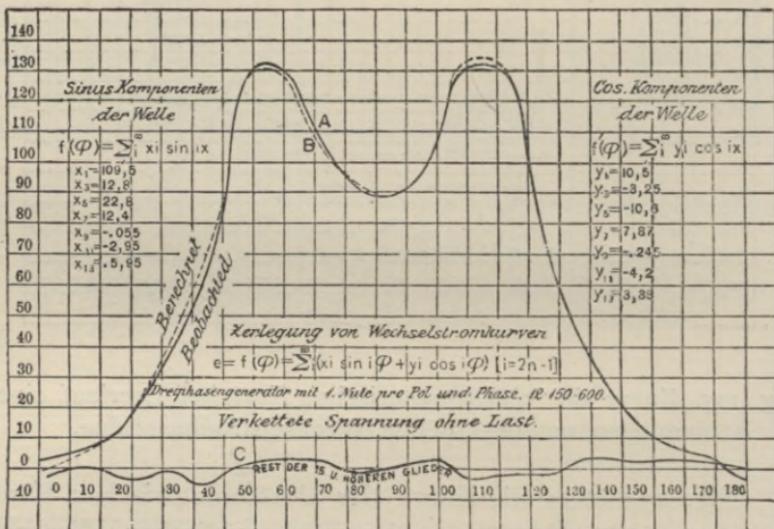


Fig. 156. Kurve der elektromotorischen Kraft einer einnutigen Dreiphasen-Wechselstrommaschine bei Leerlauf.

Fig. 156 stellt die Kurve einer normalen einnutigen Dreiphasen-Maschine bei Leerlauf dar, die durch folgende Formel ausgedrückt wird;

$$e = E [\sin \beta - 0,12 \sin(3\beta - 2,3) - 0,23 \sin(5\beta - 1,5) + 0,134 \sin(7\beta - 6,2) - 0,002 \sin(9\beta + 27,7) - 0,046 \sin(11\beta - 5,5) + 0,031 \sin(13\beta - 61,5)].$$

Diese zeigt ein ausgesprochenes fünftes und siebentes, dagegen weniger ein drittes harmonisches Glied, wahrscheinlich infolge der Ungleichförmigkeit des Feldes und der Abweichung der Pulsation der Reluktanz von der Sinusform.

Wenn ganz allgemein die Pulsation der magnetischen Induktanz durch die Gleichung

$$I + \sum_I^{\infty} \varepsilon_{\gamma} \cos (2\gamma\beta - \omega\gamma),$$

ausgedrückt wird, so ist das augenblickliche magnetische Feld

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi \cos \beta \left[I + \sum_I^{\infty} \varepsilon_{\gamma} \cos (2\gamma\beta - \omega\gamma) \right] \\ &= \Phi \left\{ \cos \beta + \frac{\varepsilon_1}{2} \cos (\beta - \omega_1) + \sum_I^{\infty} \left[\frac{\varepsilon_{\gamma}}{2} \cos ((2\gamma + 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \beta - \omega\gamma) + \frac{\varepsilon_{\gamma+1}}{2} \cos ((2\gamma + 1) \beta - \omega_{\gamma+1}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

folglich die elektromotorische Kraft

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{2\pi} N n \Phi \left\{ \sin \beta + \frac{\varepsilon_1}{2} \sin (\beta - \omega_1) + \sum_I^{\infty} \frac{2\gamma + 1}{2} \right. \\ &\quad \left. \left[\varepsilon_{\gamma} \sin ((2\gamma + 1) \beta - \omega_{\gamma}) + \varepsilon_{\gamma+1} \sin ((2\gamma + 1) \beta - \omega_{\gamma+1}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Pulsation der Reaktanz.

216. Die Hauptursachen einer Pulsation der Reaktanz sind erstens die magnetische Sättigung und die Hysteresis und zweitens die synchrone Bewegung.

Da in einem eisengeschlossenen Stromkreise der Magnetismus der magnetomotorischen Kraft nicht proportional ist, so unterscheidet sich die Kurve des Magnetismus und infolgedessen auch die Kurve der elektromotorischen Kraft von der Stromwelle. Soweit diese Verzerrung auf die Änderung der Permeabilität zurückzuführen ist, ist die Verzerrung eine symmetrische und die Kurve der induzierten elektromotorischen Kraft stellt keine Energie dar. Die

durch Hysteresis verursachte Verzerrung oder die Verzögerung des Magnetismus hinter der magnetomotorischen Kraft verursacht eine unsymmetrische Verzerrung der Kurve, die die Kurve der induzierten elektromotorischen Kraft um mehr als 90^0 von der Stromwelle abweichen lässt; sie stellt somit Energie dar, nämlich die durch die Hysteresis verbrauchte Energie. In der Praxis liegen beide Wirkungen stets übereinander; d. h. bei einer durch Eisenmassen erzeugten Induktanz findet infolge des Mangels an Proportionalität zwischen dem Magnetismus und der magnetomotorischen Kraft eine Verzerrung der Wellenform statt, wie dies bei dem Hysteresiszyklus zum Ausdruck gekommen ist.

Diese Pulsation der Reaktanz giebt zu einer Verzerrung Veranlassung, die hauptsächlich aus einem dreifachen harmonischen Gliede besteht. Solche Stromwellen, die durch Hysteresis verzerrt sind, nebst einer Sinuswelle der Klemmenspannung, sind in den Figg. 66 bis 69, in dem Kapitel X über Hysteresis, vor Augen geführt. Ist andererseits der Strom eine Sinuswelle, so weichen Magnetismus und elektromotorische Kraft von der Sinusform ab.

Weitere Erörterungen über diese Verzerrung der Wellenform durch die Hysteresis sind in dem Kapitel X erwähnt.

217. Eine Verzerrung der Wellenform findet auch noch durch die Pulsation der Reaktanz infolge der synchronen Rotation statt, wie dies bereits in dem Kapitel über Reaktionsmaschinen besprochen worden ist.

In den Figg. 148 und 149 sind neben einer Sinuswelle der Klemmenspannung noch die verzerrten Stromwellen konstruiert worden.

Wenn eine Sinuswelle des Stromes

$$i = I \cos \beta$$

durch einen Stromkreis mit synchron variierender Reaktanz fließt, wie z. B. bei dem Anker einer einnutigen Wechselstrommaschine, oder eines Synchronmotors; oder allgemeiner, wenn eine Wechselstrommaschine, deren Reluktanz des Ankers in den verschiedenen Lagen

in Beziehung auf die Feldpole verschieden gross ist, und die Reaktanz ausgedrückt wird durch

$$X = x [1 + \varepsilon \cos (2\beta - \omega)];$$

oder allgemeiner durch

$$X = x \left[1 + \sum_1^{\infty} \varepsilon_\gamma \cos 2\gamma\beta - \omega_\gamma \right];$$

so ist die Kurve des Magnetismus

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{X}{2\pi N n} \cos \beta = \frac{x}{2\pi N n} \left[\cos \beta + \sum_1^{\infty} \varepsilon_\gamma \cos \beta \right. \\ &\quad \left. \cos (2\gamma\beta - \omega_\gamma) \right] \\ &= \frac{x}{2\pi N n} \left\{ \cos \beta + \frac{\varepsilon_1}{2} \cos (\beta - \omega_1) + \sum_1^{\infty} \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\varepsilon_\gamma}{2} \cos ((2\gamma + 1)\beta - \omega_\gamma) + \frac{\varepsilon_\gamma + 1}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos ((2\gamma + 1)\beta - \omega_\gamma + 1) \right] \right\}; \end{aligned}$$

folglich die Kurve der induzierten elektromotorischen Kraft

$$\begin{aligned} e &= -n \frac{d\varphi}{dt} = -2\pi N n \frac{d\varphi}{d\beta} \\ &= x \left\{ \sin \beta + \frac{\varepsilon_1}{2} \sin (\beta - \omega_1) + \sum_1^{\infty} \frac{2\gamma + 1}{2} \left[\varepsilon_\gamma \sin ((2\gamma + 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \beta - \omega_\gamma) + \varepsilon_\gamma + 1 \sin ((2\gamma + 1)\beta - \omega_\gamma + 1) \right] \right\}; \end{aligned}$$

d. h. die Pulsation der Reaktanz führt mit der Frequenz 2γ zwei höhere harmonische Glieder von der Ordnung $(2\gamma - 1)$ und $(2\gamma + 1)$ ein.

Wenn

$$X = x [1 + \varepsilon \cos (2\beta - \omega)],$$

so ist

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{x}{2\pi N n} \left[\cos \beta + \frac{\varepsilon}{2} \cos (\beta - \omega) + \frac{\varepsilon}{2} \cos (3\beta - \omega) \right]; \\ e &= x \left[\sin \beta + \frac{\varepsilon}{2} \sin (\beta - \omega) + \frac{3\varepsilon}{2} \sin (3\beta - \omega) \right]. \end{aligned}$$

Da die Pulsation der Reaktanz infolge der magnetischen Sättigung und der Hysteresis im wesentlichen die Frequenz $2N$ besitzt, d. h. einen kompletten Cyklus für jede halbe Stromkurve beschreibt, so sieht man daraus, warum die Verzerrung der Wellenform infolge der Hysteresis hauptsächlich aus einem dritten harmonischen Gliede besteht.

Die Phasenverschiebung zwischen e und i und die in dem elektrischen Stromkreise verbrauchte oder erzeugte Energie hängt daher, wie bereits früher gezeigt, von dem Winkel ω ab.

218. Im Falle einer Verzerrung der Wellenform durch Reaktanz können die verzerrten Kurven durch ihre äquivalenten Sinuswellen ersetzt werden und die Untersuchung kann in den meisten Fällen unter der Annahme von Sinuswellen, wie dies in den früheren Kapiteln bereits geschehen ist, mit genügender Genauigkeit ausgeführt werden. Ähnliche Erscheinungen finden in Stromkreisen statt, die Polarisationszellen, durchlässige Kondensatoren, oder andere Apparate enthalten, die eine synchron variierende negative Reaktanz ergeben. Es ist auch möglich, dass die dielektrische Hysteresis bei den Kondensatoren eine Verzerrung verursacht, die ähnlich jener ist, die auf magnetische Hysteresis zurückzuführen ist.

Pulsation des Widerstandes.

219. Die Untersuchung der Wirkung einer synchronen Pulsation des Widerstandes fällt bis zu einem gewissen Grade mit der der Reaktanz zusammen, weil eine Pulsation der Reaktanz, wenn sie in Beziehung auf die Stromkurve unsymmetrisch ist, eine Energie-Komponente einführt, die durch einen effektiven Widerstand dargestellt werden kann. Wiederum führt eine unsymmetrische Pulsation des Ohm'schen Widerstandes eine wattlose Komponente ein, die als „effektive Reaktanz“ bezeichnet wird.

Ein typisches Beispiel eines synchron pulsierenden Widerstandes wird durch den Wechselstromlichtbogen dargestellt.

Der scheinbare Widerstand eines Lichtbogens hängt von dem durch diesen laufenden Strom ab; d. h. der scheinbare Widerstand des Lichtbogens $\frac{\text{Spannungsdifferenz zwischen Elektroden}}{\text{Strom}}$, ist für kleine Ströme gross und für grosse Ströme klein. Daher variiert in einem Wechselstromlichtbogen der scheinbare Widerstand während jeder halben Stromwelle zwischen einem maximalen Werte bei dem Strom Null und einem minimalen Werte bei dem maximalen Strome und beschreibt in Folge dessen einen kompletten Cyklus während einer halben Stromwelle.

Es sei der effektive Wert des Stromes, der durch den Lichtbogen fliesst, mit I bezeichnet.

Dann wird der augenblickliche Wert des Stromes, wenn man die Stromwelle als Sinuswelle annimmt, durch

$$i = \sqrt{2} \sin \beta$$

und der scheinbare Widerstand des Lichtbogens näherungsweise durch

$$R = r (1 + \varepsilon \cos 2 \varphi)$$

dargestellt; daher ist die Spannungsdifferenz am Lichtbogen

$$\begin{aligned} e &= iR = I\sqrt{2} r \sin \varphi (1 + \varepsilon \cos 2 \varphi) \\ &= r I \sqrt{2} \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin 3 \varphi \right], \end{aligned}$$

folglich der effektive Wert der Spannungsdifferenz

$$\begin{aligned} E &= r I \sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}} \\ &= r I \sqrt{1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}} \end{aligned}$$

und der scheinbare Widerstand des Lichtbogens

$$r_0 = \frac{E}{I} = r \sqrt{1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Daher ist der von dem Lichtbogen augenblickliche verbrauchte Effekt

$$p = ie = 2rI^2 \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin^2 \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin \varphi \sin 3\varphi \right],$$

folglich die effektive Leistung

$$P = rI^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Der scheinbare durch den Bogen verbrauchte Effekt, ausgedrückt in Voltampère, ist

$$IE = rI^2 \sqrt{1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}},$$

folglich der Leistungsfaktor des Lichtbogens

$$f = \frac{P}{IP} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}}},$$

also kleiner als die Einheit.

220. Wir haben hier einen Fall, in dem der Leistungsfaktor oder das Verhältnis $\frac{\text{Watt}}{\text{Voltampère}}$ ohne irgendwelche Phasenverschiebung von der Einheit abweicht; d. h. während der Strom und die elektromotorische Kraft in Phase miteinander aber verzerrt sind, kann die Wechselstromwelle nicht durch eine äquivalente Sinuswelle ersetzt werden, weil die Annahme einer solchen eine Phasenverschiebung $\cos \omega = f$ herbeiführen würde, wo das Vorzeichen des Winkels ω unbestimmt ist.

Als Beispiel werden in der Fig. 157 für $I = 12$, $r = 3$ und $z = 0,9$, der Widerstand $R = 3(1 + 0,9 \cos 2\beta)$, der Strom $i = 17 \sin \beta$ und die Spannungsdifferenz $e = 28(\sin \beta + 0,82 \sin 3\beta)$ dargestellt.

In diesem Falle ist die effektive elektromotorische Kraft $E = 25,5$,

der scheinbare Widerstand

$$r_0 = 2,13,$$

der Effekt

$$P = 244,$$

der scheinbare Effekt

$$E I = 307$$

und der Leistungsfaktor

$$f = 0,796.$$

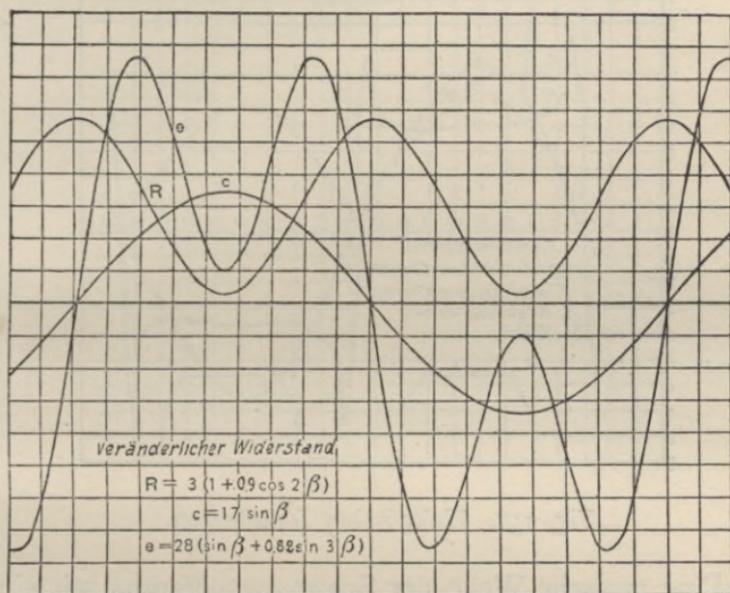


Fig. 157. Periodisch variierender Widerstand.

Man sieht, dass bei einer sinusförmigen Stromwelle die Kurve der elektromotorischen Kraft eines Wechselstromlichtbogens zwei Spitzen besitzt und sehr steil bis nahe auf die Nullwerte des Stromes steigt. Andererseits gestaltet sich bei einer Sinuswelle der elektromotorischen Kraft die Stromwelle eines Wechselstromlichtbogens spitz und wird sehr flach in der Nähe der Nullwerte der elektromotorischen Kraft.

221. In Wirklichkeit ist die Verzerrung mehr komplexer Natur, weil die Pulsation des Widerstandes in dem Lichtbogen nicht dem einfachen Gesetz der doppelten Frequenz folgt, sondern weil sie nahe dem Nullwert des Stromes stärker variiert, indem dadurch das Variieren der elektromotorischen Kraft nahe dem Nullwert des Stromes jüher, oder umgekehrt, das Variieren des Stromes allmählicher stattfindet.

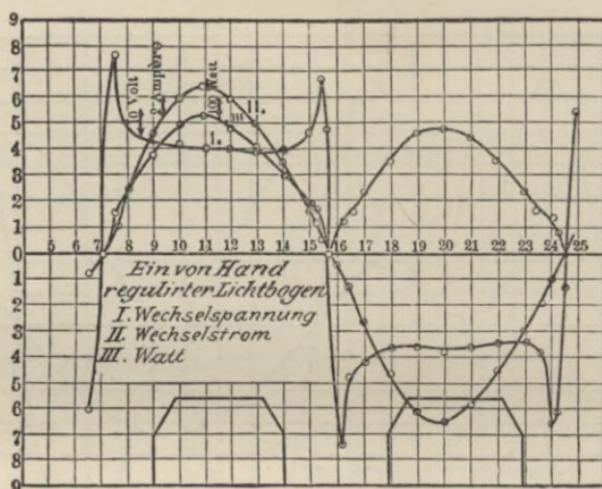


Fig. 158. Elektrischer Lichtbogen.

Eine typische Welle der Spannungsdifferenz mit einer Sinuswelle des Stromes, der durch den Lichtbogen fließt, ist in der Fig. 158*) dargestellt.

222. Der Wert ε , die Amplitude der Pulsation des Widerstandes hängt grösstenteils von der Beschaffenheit der Elektroden und von der Beständigkeit des Lichtbogens ab und ist bei weichen Kohlen und beständigem

*) Aus: „American Institute of Electrical Engineers, Transactions.“ 1890, Seite 376. Tobey and Walbridge, on the Stanley Alternate Arc Dynamo.

Lichtbogen klein und der Leistungsfaktor f des Lichtbogens ist nahezu eins. Bei harten Kohlen und unruhigem Lichtbogen wächst ε . Es erscheinen dann höhere harmonische Glieder bei der Pulsation des Widerstandes, während der Leistungsfaktor f sinkt, der manchmal nicht grösser als 0,6 ist.

Die Folge davon ist, dass photometrische Versuche eines Wechselstromlichtbogens nur geringen Wert haben, wenn ausser dem Strom und der Spannung nicht auch die Energie mittelst eines Elektrodynamometers bestimmt wird.



Kapitel XXII.

Wirkungen höherer harmonischer Glieder.

223. Um das Variieren der Form von Wechselstromwellen, verursacht durch verschiedene harmonische Glieder, zu erklären, werden in den Figg. 159 und 160 die Kurven dargestellt, die durch das Übereinanderlagern der dritten

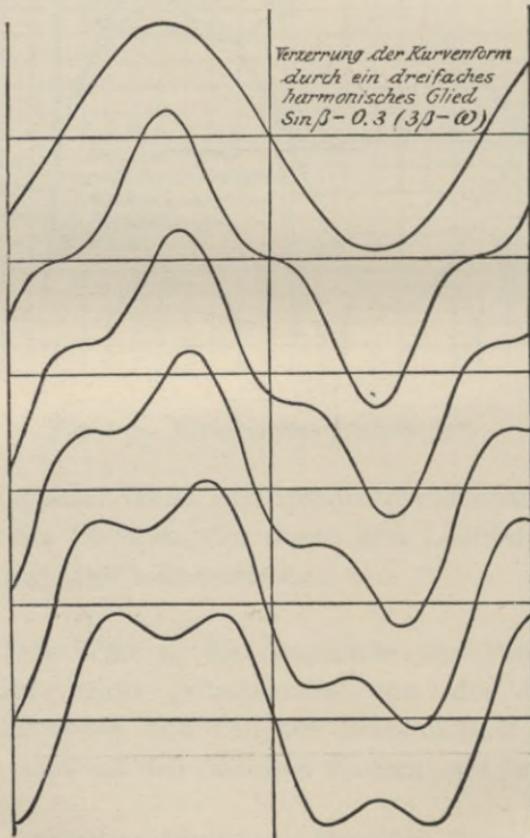


Fig. 159. Wirkung eines dritten harmonischen Gliedes

und fünften harmonischen Glieder über die fundamentale Sinuswelle erzeugt werden.

In der Fig. 159 werden die fundamentale Sinuswelle und die komplexen Wellen, die durch die Übereinanderlagerung eines dritten harmonischen Gliedes von 30% der Amplitude der Fundamentalwelle unter den relativen Phasenverschiebungen von 0° , 45° , 90° , 135° und 180° hervorgebracht werden, dargestellt durch:

$$\begin{aligned} & \sin \beta \\ & \sin \beta - 0,3 \sin 3 \beta \\ & \sin \beta - 0,3 \sin (3 \beta - 45^\circ) \\ & \sin \beta - 0,3 \sin (3 \beta - 90^\circ) \\ & \sin \beta - 0,3 \sin (3 \beta - 135^\circ) \\ & \sin \beta - 0,3 \sin (3 \beta - 180^\circ). \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Wirkung des dritten harmonischen Gliedes in der ersten Figur die, dass die Nullwerte abgeflacht und die maximalen Werte der Welle zugespitzt sind, sodass wir eine sogenannte spitze Welle erhalten. Bei wachsender Phasenverschiebung des dritten harmonischen Gliedes steigt die Abflachung von Null und verwandelt sich allmählich zu einer zweiten Spitze, indem sie schliesslich eine Welle mit breitem erhöhten Anlauf, oder sogar eine Welle mit zwei Spitzen mit steilem Nullpunkt ergibt. Die Zwischenlagen stellen eine zackige Welle dar.

In der Fig. 160 sind die fundamentale Sinuswelle und die komplexen Wellen gezeichnet, die durch Übereinanderlagerung eines fünften harmonischen Gliedes von 20% der Amplitude der Fundamentalwelle unter der relativen Phasenverschiebung von 0° , 45° , 90° , 135° , 180° erzeugt und durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \sin \beta \\ & \sin \beta - 0,2 \sin 5 \beta \\ & \sin \beta - 0,2 \sin (5 \beta - 45^\circ) \\ & \sin \beta - 0,2 \sin (5 \beta - 90^\circ) \\ & \sin \beta - 0,2 \sin (5 \beta - 135^\circ) \\ & \sin \beta - 0,2 \sin (5 \beta - 180^\circ). \end{aligned}$$

dargestellt werden.

Das fünfte harmonische Glied verursacht eine oben flache Welle oder sogar eine mit zwei Spitzen, die beim Wert Null abgeflacht ist. Bei wachsender Phasenverschiebung wird die Welle ebenfalls eine zackige Welle.

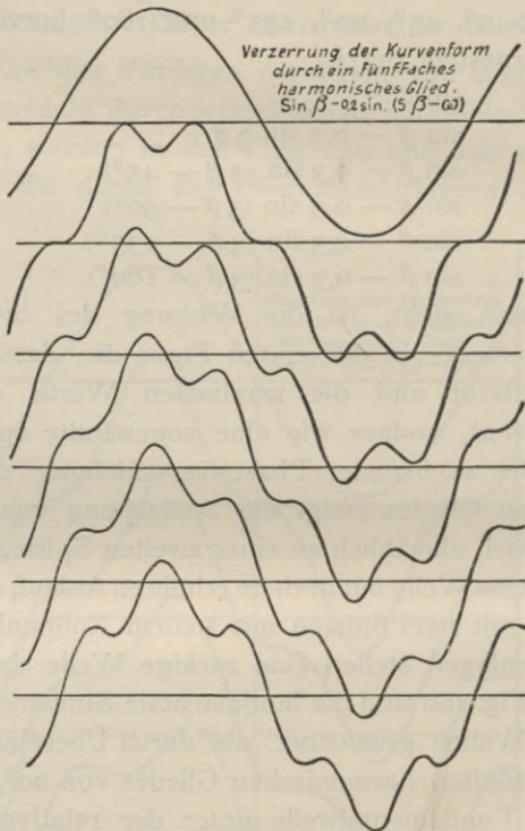


Fig. 160. Wirkung des fünften harmonischen Gliedes.

Der abgeflachte Verlauf bei Null wird steiler und es bildet sich eine dritte Spitze, während von den beiden früheren Spitzen die eine steigt und die andere sinkt.

Die Welle verwandelt sich allmählich zu einer dreifachen, zugespitzten, mit einer Hauptspitze und einem steilen Durchgang durch Null.

Wie man sieht, zeigt das dritte harmonische Glied oben einen flachen Verlauf, oder die doppelte Spitze und zugleich steilen Durchgang durch Null, während bei dem

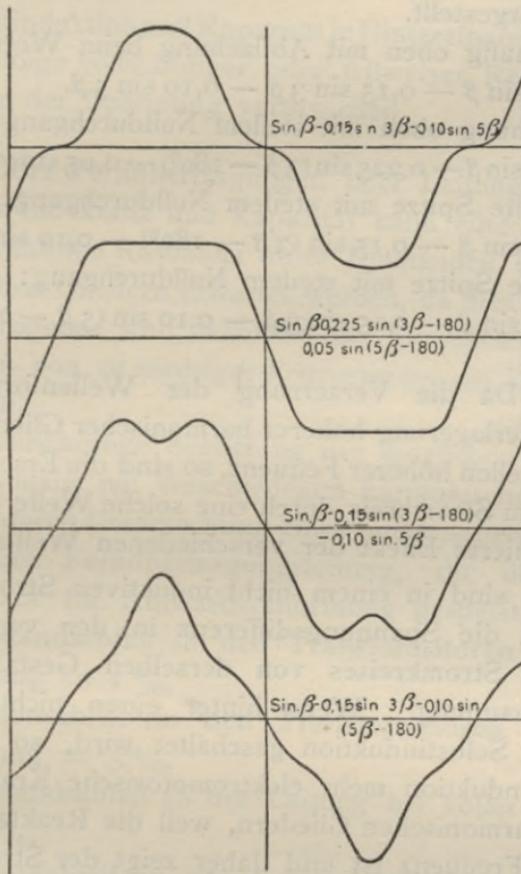


Fig. 16I. Einige charakteristische Wellenformen.

fünften harmonischen Glied ein flacher Verlauf oben, oder die doppelte Spitze mit einer Abflachung beim Werte Null zusammenfällt.

Eine scharfe Spitze stösst mit einer Abflachung des Nullwertes bei der dritten und mit steilem Verlauf beim Werte Null bei dem fünften harmonischen Gliede zusammen.

Daher kann im allgemeinen aus der einfachen Betrachtung der Wellenform das Bestehen dieser ersten harmonischen Glieder gefunden werden.

Einige charakteristische Kurvenformen sind in der Fig. 161 dargestellt.

Abflachung oben mit Abflachung beim Wert Null:

$$\sin \beta - 0,15 \sin 3\beta - 0,10 \sin 5\beta.$$

Abflachung oben mit steilem Nulldurchgang:

$$\sin \beta - 0,225 \sin(3\beta - 180^0) - 0,05 \sin(5\beta - 180^0).$$

Doppelte Spitze mit steilem Nulldurchgang:

$$\sin \beta - 0,15 \sin(3\beta - 180^0) - 0,10 \sin 5\beta.$$

Scharfe Spitze mit steilem Nulldurchgang:

$$\sin \beta - 0,15 \sin 3\beta - 0,10 \sin(5\beta - 180^0).$$

224. Da die Verzerrung der Wellenform in der Übereinanderlagerung höherer harmonischer Glieder besteht, d. h. von Wellen höherer Frequenz, so sind die Erscheinungen, die in einem Stromkreis durch eine solche Welle stattfinden, der kombinierte Effekt der verschiedenen Wellen.

Daher sind in einem nicht-induktiven Stromkreis der Strom und die Spannungsdifferenz in den verschiedenen Teilen des Stromkreises von derselben Gestalt wie die Klemmenspannung. Wenn hinter einen nicht-induktiven Stromkreis Selbstinduktion geschaltet wird, so verbraucht die Selbstinduktion mehr elektromotorische Kraft von den höheren harmonischen Gliedern, weil die Reaktanz proportional zur Frequenz ist und daher zeigt der Strom und die elektromotorische Kraft in dem nicht-induktiven Teil des Stromkreises die höheren harmonischen Glieder in einer reduzierten Amplitude. D. h. Selbstinduktion in Hintereinanderschaltung zu einem nicht-induktiven Stromkreis reduziert bzw. dämpft die höheren harmonischen Glieder oder macht die Welle mehr der Sinusgestalt ähnlich. Umgekehrt verbraucht Kapazität in Hintereinanderschaltung zu einem nicht-induktiven Stromkreis bei höherer Frequenz weniger elektromotorische Kraft, als bei niedriger und macht

daher die höheren harmonischen Glieder des Stromes und der Spannungsdifferenz in dem nicht-induktiven Teil des Stromkreises mehr ausgesprochen — d. h. verstärkt die harmonischen Glieder.

Selbstinduktion und Kapazität in Hintereinanderschaltung können infolge vollständiger oder teilweiser Resonanz eine Steigerung der Spannung verursachen.

225. Bei Fernübertragungen über Leitungen von beträchtlicher Induktanz und Kapazität kann eine Spannungssteigerung infolge Resonanz unter Umständen bei höheren harmonischen Gliedern erwartet werden, da dies Wellen von höherer Frequenz sind, während die Fundamentalwelle im allgemeinen von zu niedriger Frequenz ist, um Resonanz zu verursachen.

Eine annähernde Schätzung der möglichen Steigerung infolge Resonanz mit verschiedenen harmonischen Gliedern erhält man durch Untersuchung eines numerischen Beispiels.

In einer Fernübertragungsleitung, die durch einen Transformator für Aufwärtsumformung gespeist wird, sei:

$$\text{der Widerstandsabfall in den Transformatoren bei voller Belastung} = 1\%,$$

der Induktionsabfall in den Transformatoren bei voller Belastung = 5%,

der Widerstandsabfall in der Leitung bei voller Belastung = 10%,

der Induktionsabfall in der Leitung bei voller Belastung = 20% in der Fundamentalwelle,

die Kapazität oder der Ladestrom der Leitung = 20% des vollen Belastungsstromes I bei der Frequenz der Fundamentalwelle.

Die Leitungskapazität kann annähernd dargestellt werden durch einen Kondensator, der in der Mitte der Leitung im Nebenschluss liegt. Die elektromotorische Kraft an den Generatorklemmen E wird als konstant angenommen.

Die durch den Widerstand des Stromkreises von den Generatorklemmen zum Kondensator verbrauchte elektromotorische Kraft ist

$$Ir = 0,06 E,$$

oder
$$r = 0,06 \frac{E}{I}.$$

Die elektromotorische Kraft der Reaktanz zwischen den Generatorklemmen und dem Kondensator ist für die fundamentale Frequenz

$$Ix = 0,15 E,$$

oder
$$x = 0,15 \frac{E}{I};$$

daher ist die Reaktanz, entsprechend der Frequenz $(2k - 1) N$ der höheren harmonischen Glieder:

$$x(2k - 1) = 0,15(2k - 1) \frac{E}{I}.$$

Der Kapazitätsstrom bei der fundamentalen Frequenz ist

$$i = 0,2 I,$$

folglich bei der Frequenz: $(2k - 1) N$:

$$i = 0,2(2k - 1) e' \frac{I}{E},$$

wenn

e' = elektromotorische Kraft der $(2k - 1)^{\text{ten}}$ harmonischen Glieder am Kondensator,

e = elektromotorische Kraft der $(2k - 1)^{\text{ten}}$ harmonischen Glieder an den Generatorklemmen ist.

Die elektromotorische Kraft am Kondensator ist:

$$e' = \sqrt{e^2 - i^2 r^2} + ix(2k - 1)^2;$$

folglich eingesetzt:

$$a = \frac{e'}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,059856(2k - 1)^2 + 0,0009(2k - 1)^4}},$$

Spannungssteigerung durch Induktanz und Kapazität.

Setzen wir ein:

	$k =$	1	2	3	4	5	6
oder	$2k - 1 =$	1	3	5	7	9	11
so ist	$a =$	1,03	1,36	3,76	2,18	0,70	0,38.

D. h. die Fundamentalwelle steigt bei offenem Stromkreis um 3%, das dritte harmonische Glied um 36%, das fünfte harmonische Glied um 276%, das siebente harmonische Glied um 118%, während die noch höheren harmonischen Glieder reduziert werden.

Die maximale Steigerung findet statt für

$$\frac{da}{d(2k-1)} = 0,$$

oder

$$k = 5,77,$$

d. h. bei einer Frequenz

$$N = 346$$

und ist:

$$a = 14,4.$$

D. h. vollständige Resonanz erscheint bei einer Frequenz zwischen dem fünften und siebenten harmonischen Gliede und würde die Spannung bei dieser Frequenz um das 14,4fache erhöhen.

Soll die Spannung die Klemmenspannung um nicht mehr als 100% überschreiten, selbst bei Zusammentreffen des maximalen harmonischen Gliedes mit der maximalen Fundamentalwelle, so muss das dritte harmonische Glied weniger als 70%, das fünfte harmonische Glied weniger als 26,5% und das siebente harmonische Glied weniger als 46% der Fundamentalwelle betragen.

Die Spannung wird nicht das zweifache der normalen überschreiten, selbst bei einer Frequenz vollständiger Resonanz mit den höheren harmonischen Gliedern, wenn keine der höheren harmonischen Glieder mehr als 7% der Fundamentalwelle beträgt.

Hieraus folgt, dass die Gefahr der Resonanz in Hochspannungsleitungen im allgemeinen sehr überschätzt wird.

226. Der von einer komplexen harmonischen Welle in einem nicht-induktiven Stromkreis entwickelte Effekt ist die Summe der Effekte der einzelnen harmonischen Glieder. Wenn daher über eine Wechselstrom-Sinuswelle höhere harmonische Wellen gelagert sind, so werden die effektive elektromotorische Kraft und der durch diese Welle erzeugte Effekt in einem gegebenen Stromkreis oder bei einem gegebenen effektiven Strom erhöht. Infolgedessen geben Wechselstrommaschinen und Synchronmotoren von eisen-geschlossener einnutziger Konstruktion — d. h. Maschinen, die Wellen mit ausgesprochenen höheren harmonischen Gliedern ergeben — bei derselben Windungszahl auf dem Anker und derselben Kraftlinienzahl pro Feldpol bei derselben Frequenz eine höhere Leistung als Maschinen, die gebaut werden, um Sinuswellen zu erzeugen.

227. Dieses erklärt ein scheinbares Paradoxon:

Wenn in einem dreiphasigen Generator mit Sternschaltung, dessen magnetisches Feld so konstruiert ist, wie diagrammatisch in der Fig. 162 dargestellt, die Kraftlinienzahl pro Pol = Φ , die Windungszahl in Hintereinanderschaltung pro Stromkreis = n , die Frequenz = N ist, so ist die elektromotorische Kraft zwischen irgend zwei Schleifringen

$$E = \sqrt{2} \pi N 2n \Phi 10^{-8},$$

da $2n$ Ankerwindungen gleichzeitig mit der Kraftlinienzahl Φ verkettet sind.

Die elektromotorische Kraft pro Ankerstromkreis ist:

$$e = \sqrt{2} \pi N n \Phi 10^{-8};$$

folglich die elektromotorische Kraft zwischen den Schleifringen als Resultante der beiden elektromotorischen Kräfte e , die um 60° gegen einander verschoben sind

$$E = e\sqrt{3} = \sqrt{2} \pi N \sqrt{3} n \Phi 10^{-8},$$

während dieselbe elektromotorische Kraft durch direkte Berechnung aus der Windungszahl, aus der Kraftlinienzahl

und aus der Frequenz gleich $2e$ gefunden wurde, d. h. die beiden für dieselbe elektromotorische Kraft gefundenen Werte haben das Verhältnis $\sqrt{3}:2 = 1:1,154$.

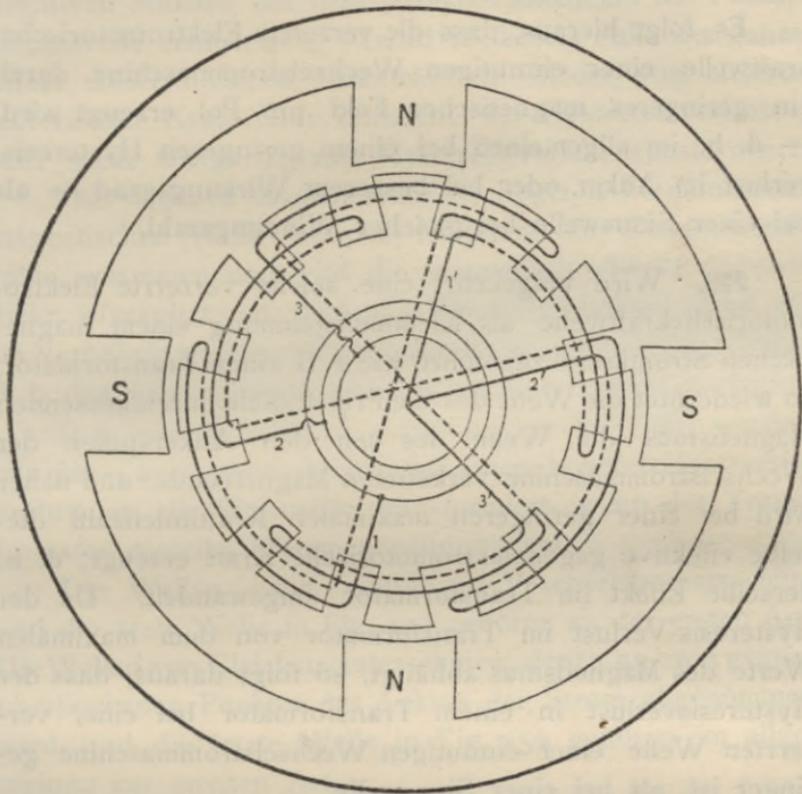


Fig. 162. Dreiphasen-Generator in Sternschaltung.

Diese Verschiedenheit ist auf das Vorhandensein ausgesprochenerer höherer harmonischer Glieder in der Welle e als in der Welle $E = e \times \sqrt{3}$ zurückzuführen, die in der Gleichung

$$e = \sqrt{2} \pi N n \Phi 10^{-8}$$

vernachlässigt worden sind.

Hieraus folgt, dass, während die elektromotorische Kraft zwischen zwei Schleifringen in der Maschine, die in der Fig. 162 diagrammatisch dargestellt ist, nur $e \times \sqrt{3}$ ist,

man dadurch, dass man dieselbe Windungszahl in einer, statt in zwei Nuten unterbringt, die elektromotorische Kraft $2e$, oder einen 15,4% höheren Wert, d. h. eine grössere Leistung erhält.

Es folgt hieraus, dass die verzerrte Elektromotorischekraftwelle einer einnutigen Wechselstrommaschine durch ein geringeres magnetisches Feld pro Pol erzeugt wird, — d. h. im allgemeinen bei einem geringeren Hysteresisverlust im Anker oder bei besserem Wirkungsgrad — als bei einer Sinuswelle bei gleicher Windungszahl.

228. Wird umgekehrt eine solche verzerrte Elektromotorischekraftwelle als Klemmenspannung einem magnetischen Stromkreise zugeführt; wie z. B. einem Transformator, so wiederholt die Welle des die Primärspule durchfliessenden Magnetismus die Welle des mit den Ankerspulen der Wechselstrommaschine verketteten Magnetismus, und daher wird bei einer geringeren maximalen Kraftlinienzahl dieselbe effektive gegenelektromotorische Kraft erzeugt; d. h. derselbe Effekt im Transformator umgewandelt. Da der Hysteresis-Verlust im Transformator von dem maximalen Werte des Magnetismus abhängt, so folgt daraus, dass der Hysteresisverlust in einem Transformator bei einer verzerrten Welle einer einnutigen Wechselstrommaschine geringer ist, als bei einer Sinuswelle.

Bei verzerrten Wellen einnutiger Maschinen arbeiten Generatoren, Transformatoren und Synchronmotoren — und Induktionsmotoren, insofern sie Transformatoren sind — mit besserem Wirkungsgrad.

229. Dasselbe Problem lässt sich noch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten:

Wird einem Transformator eine Sinuswelle der elektromotorischen Kraft zugeführt, so ist die Welle des Magnetismus gleichfalls eine Sinuswelle. Wenn nun über die Sinuswelle der elektromotorischen Kraft höhere harmonische Glieder, wie Wellen von dreifacher, fünffacher u. s. w. Frequenz so

gelagert werden, dass die entsprechenden höheren harmonischen Sinuswellen des Magnetismus den Maximalwert nicht erhöhen, oder ihn sogar durch Zusammenfallen ihrer negativen Maxima mit dem positiven Maximum der Fundamentalwelle erniedrigen, so wird in diesem Falle der ganze Effekt dieser höheren harmonischen Glieder von elektromotorischer Kraft ohne Zunahme des Hysteresisverlustes, oder sogar mit geringerem Hysteresisverlust transformiert.

Fällt dagegen das Maximum der höheren harmonischen magnetischen Welle mit dem Maximum der Fundamentalwelle zusammen und wird die magnetische Welle dadurch mehr zugespitzt, so wird der Hysteresisverlust mehr als im Verhältnis zu dem erhöhten transformierten Effekt erhöht; d. h. das Güteverhältnis des Transformators wird niedriger.

D. h. manche verzerrte elektromotorische Wellen werden mit einem geringeren, manche bei einem höheren Hysteresisverlust als die Sinuswelle transformiert, wenn der Transformator dieselbe Klemmenspannung hat.

Die Wellen einer einnutigen Wechselstrommaschine und die erste Welle in Fig. 159 gehören zu der ersten Art. Die Wellen von Gleichstrommaschinen, denen an zwei gegenüberliegenden Punkten des Ankers der Strom abgenommen wird, und die letzte Welle in Fig. 159 gehören im allgemeinen zur zweiten Art.

230. Was den Energieverlust durch Wirbel- oder Foucault-Ströme betrifft, so wird dieser durch die Verzerrung der Wellenform nicht beeinflusst, da die elektromotorische Kraft der Wirbelströme, als induzierte elektromotorische Kraft, zur sekundären elektromotorischen Kraft proportional ist. Daher steht bei konstanter primärer Klemmenspannung der durch Wirbelströme verbrauchte Effekt in einem konstanten Verhältnis zur Leistung des sekundären Stromkreises, da die Teilung des Effektes zwischen den beiden sekundären Stromkreisen — dem Wirbelstromkreis und dem nutzbaren oder Verbrauchstromkreis — von der Wellenform oder der Intensität des Magnetismus nicht beeinflusst wird.

231. In Hochspannungsleitungen sind verzerrte Wellen, deren Maxima weit über dem effektiven Werte liegen, also spitze Wellen, nicht wünschenswert, da die Beanspruchung der Isolation erhöht wird. Es ist indessen noch nicht über allen Zweifel festgestellt, ob die Schlagweite einer schnell wechselnden Spannung von dem maximalen Werte oder von dem effektiven Wert abhängt. Da plötzliche Erscheinungen nicht immer sofort nach der Einwirkung der Spannung stattfinden, sondern da die Zeitdauer eine wichtige Rolle spielt, so ist es möglich, dass Isolationsbeanspruchung und Schlagweite in gewissem Grade von der effektiven Spannung abhängig und daher von der Wellenform unabhängig ist.

Im allgemeinen kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die Wichtigkeit einer richtigen Wellenform gewöhnlich überschätzt wird, aber dass in gewissen Fällen Sinuswellen wünschenswert, in anderen Fällen wiederum gewisse verzerrte Wellen vorzuziehen sind.

Kapitel XXIII.

Allgemeine Mehrphasen-Systeme.

232. Ein Mehrphasensystem ist ein Wechselstromsystem, in dem eine Anzahl gegeneinander phasenverschobener elektromotorischer Kräfte derselben Frequenz eine Anzahl gegeneinander phasenverschobener Ströme gleicher Frequenz erzeugen.

Ein solches Mehrphasensystem kann als aus einer Anzahl einzelner Stromkreise oder Zweige des Mehrphasensystems, die mehr oder minder mit einander verkettet sein können, betrachtet werden.

Die Untersuchung eines Mehrphasensystems kann somit im allgemeinen durch Betrachtung der einphasigen Zweigsysteme unabhängig durchgeführt werden.

Alle Diskussionen über Generatoren, Synchronmotoren, Induktionsmotoren u. s. w. in den vorangegangenen Kapiteln gelten gleichzeitig sowohl für Einphasen- als auch für Mehrphasen-Systeme und in letzterem Falle ist der Gesamt-Effekt die Summe der Effekte der einzelnen oder Zweigstromkreise.

Besteht das Mehrphasensystem aus n gleichen um $1/n$ Periode gegen einander verschobenen elektromotorischen Kräften, so wird es ein *symmetrisches System* genannt, im anderen Falle ein *unsymmetrisches System*.

Daher ist das Dreiphasensystem, welches aus drei gleichen, um eine drittel Periode von einander verschobenen elektromotorischen Kräften besteht, ein *symmetrisches System*. Das Vierphasensystem, welches aus zwei gleichen um 90° , oder eine viertel Periode, verschobenen elektromotorischen Kräften besteht, ist ein *unsymmetrisches System*.

233. Der Effektfluss eines Einphasensystems ist pulsierend, d. h. die Wattkurve des Stromkreises ist eine Sinuswelle doppelter Frequenz, die zwischen einem Maximum und Null oder einem negativen Maximum wechselt. In einem Mehrphasensystem sind die Wattkurven der einzelnen Zweigsysteme in gleicher Weise pulsierend, ihre Summe da-

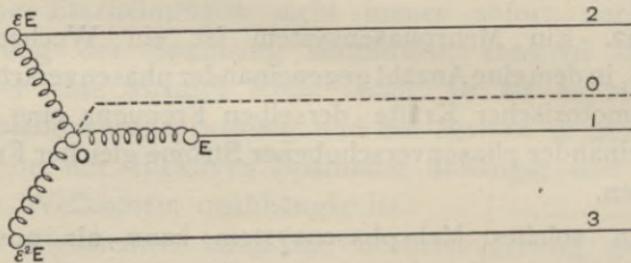


Fig. 163.

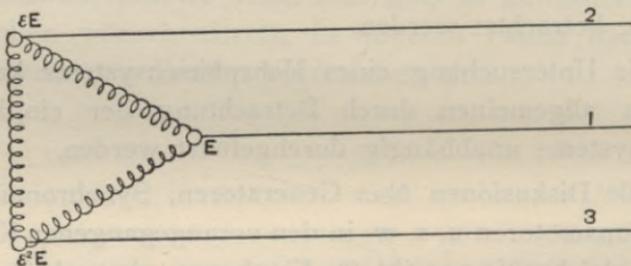


Fig. 164.

gegen, oder der Gesamteffekt des Systems kann entweder konstant oder pulsierend sein. Im ersteren Falle ist das System ein *ausgeglichenes*, im letzteren ein *unausgeglichenes*.

Das Dreiphasensystem und das Vierphasensystem bei gleicher Belastung der verschiedenen Zweige sind ausgeglichene Systeme; bei ungleicher Belastung in den einzelnen Zweigen sind beide Systeme unausgeglichene Systeme.

Die verschiedenen Zweige eines Mehrphasensystems können entweder von einander unabhängig, d. h. ohne elektrische Verbindung mit einander sein, oder sie können

mit einander verkettet sein. Im ersteren Falle wird das Mehrphasensystem ein *unabhängiges System*, im letzteren ein *verkettetes System* genannt.

Das Dreiphasensystem mit stern- oder ringgeschaltetem Generator, wie in Figg. 163 und 164 gezeigt, ist ein verkettetes System.

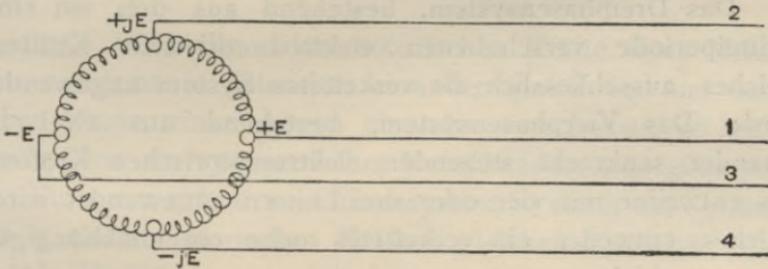


Fig. 165.

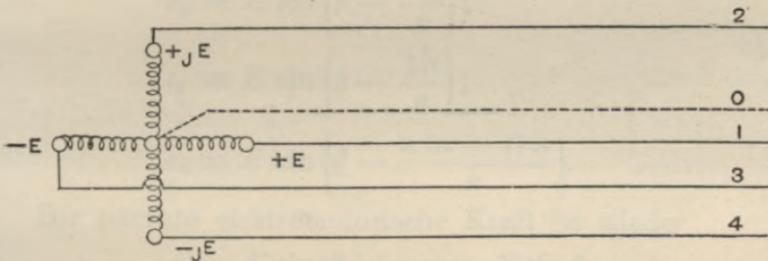


Fig. 166.

Das Vierphasensystem, das man erhält, wenn man vier gleichweit von einander abstehende Punkte eines Gleichstromankers mit vier Schleifringen verbindet, ist gleichfalls ein verkettetes System, wie in Fig. 165 gezeigt. Das von einem Generator mit zwei unabhängigen Ankerspulen, oder mit zwei einphasigen fest mit einander verbundenen, um 90° versetzten Generatoren erzeugte Vierphasensystem mit vier Drähten ist ein unabhängiges System. Als verkettetes, sterngeschaltetes Vierphasensystem ist es in Fig. 166 veranschaulicht.

234. Die Mehrphasensysteme lassen sich somit einteilen in:

Symmetrische und unsymmetrische Systeme.

Ausgeglichene und unausgeglichene Systeme.

Verkettete und unabhängige Systeme.

Die einzigen Mehrphasensysteme, welche praktische Anwendung gefunden haben, sind:

Das Dreiphasensystem, bestehend aus drei um eine Drittelperiode verschobenen elektromotorischen Kräften, welches ausschliesslich als verkettetes System angewendet wird. Das Vierphasensystem, bestehend aus zwei zu einander senkrecht stehenden elektromotorischen Kräften, das entweder mit vier oder drei Leitern angewendet wird, welches entweder ein verkettetes oder ein unabhängiges System sein kann.

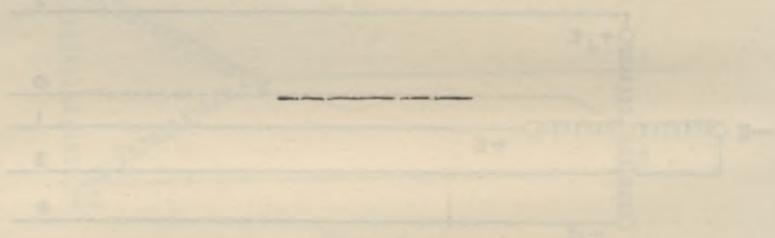


Fig. 106

Das Dreiphasensystem, bestehend aus drei um eine Drittelperiode verschobenen elektromotorischen Kräften, welches ausschliesslich als verkettetes System angewendet wird. Das Vierphasensystem, bestehend aus zwei zu einander senkrecht stehenden elektromotorischen Kräften, das entweder mit vier oder drei Leitern angewendet wird, welches entweder ein verkettetes oder ein unabhängiges System sein kann.

Kapitel XXIV

Symmetrische Mehrphasen-Systeme.

235. Sind alle elektromotorischen Kräfte eines Mehrphasensystems in Intensität einander gleich und um denselben Phasenwinkel gegen einander verschoben, so wird das System ein symmetrisches Mehrphasensystem genannt.

Ein symmetrisches n -Phasensystem ist somit ein System von n elektromotorischen Kräften gleicher Intensität, die um $1/n$ Periode gegen einander verschoben sind.

$$e_1 = E \sin \beta;$$

$$e_2 = E \sin \left(\beta - \frac{2\pi}{n} \right);$$

$$e_3 = E \sin \left(\beta - \frac{4\pi}{n} \right);$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$e_n = E \sin \left(\beta - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right).$$

Die nächste elektromotorische Kraft ist wieder

$$e_1 = E \sin (\beta - 2\pi) = E \sin \beta.$$

Im Polardiagramm werden n elektromotorische Kräfte des symmetrischen n -Phasensystems durch n gleiche Vektoren dargestellt, die einander unter gleichen Winkeln folgen.

Da in symbolischer Darstellung die Verschiebung um $1/n$ Periode, oder $2\pi/n$ Winkel durch Multiplikation mit

$$\cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n} = \varepsilon$$

dargestellt wird, so sind die elektromotorischen Kräfte des symmetrischen Mehrphasensystems:

$$E; \quad \quad \quad \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
 E \left(\cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n} \right) &= E \varepsilon; \\
 E \left(\cos \frac{4\pi}{n} + j \sin \frac{4\pi}{n} \right) &= E \varepsilon^2; \\
 \vdots & \\
 E \left(\cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + j \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) &= E \varepsilon^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Die nächste elektromotorische Kraft ist wieder:

$$E (\cos 2\pi + j \sin 2\pi) = E \varepsilon^n = E.$$

Es ist somit

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n} = \sqrt[n]{1}.$$

Oder mit anderen Worten:

In einem symmetrischen n -Phasensystem wird irgend eine elektromotorische Kraft des Systems ausgedrückt durch

$$\varepsilon^i E;$$

wo

$$\varepsilon = \sqrt[n]{1}.$$

236. Setzt man dies nun für n -verschiedene Werte ein, so ergeben sich die verschiedenen symmetrischen Mehrphasensysteme, dargestellt durch

$$\varepsilon^i E,$$

wo
$$\varepsilon = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n}.$$

1. $n = 1$ $\varepsilon = 1$ $\varepsilon^i E = E,$

das gewöhnliche Einphasensystem.

2. $n = 2$ $\varepsilon = -1$ $\varepsilon^i E = E$ und $-E.$

Da $-E$ die Rückleitung von E ist, so ergibt $n = 2$ wieder das Einphasensystem.

3. $n = 3$ $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}$

$$\varepsilon^2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}.$$

Die drei elektromotorischen Kräfte des Dreiphasensystems sind

$$\varepsilon^i E = E, \quad \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} E, \quad \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} E.$$

Das Dreiphasensystem ist somit das niedrigste symmetrische Mehrphasensystem.

$$4. \quad n = 4, \quad \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{4} + j \sin \frac{2\pi}{4} = j, \quad \varepsilon^2 = -1, \quad \varepsilon^3 = -j.$$

Die vier elektromotorischen Kräfte des Vierphasensystems sind

$$\varepsilon^i = E, \quad jE, \quad -E, \quad -jE.$$

Sie sind paarweise einander entgegengesetzt gerichtet.

$$E \text{ und } -E; \quad jE \text{ und } -jE$$

lassen sich somit durch zwei senkrecht gegen einander verstellte Ankerspulen erzeugen, analog wie das Zweiphasensystem, oder gewöhnliche Wechselstromsystem durch eine Spule erzeugt werden kann.

Höhere Systeme, wie das symmetrische Vierphasensystem, sind nicht angewendet worden, und sind somit von geringem praktischem Interesse.

237. Eine charakteristische Eigenschaft des symmetrischen n -Phasensystems ist, dass es unter Umständen eine magnetomotorische Kraft von konstanter Intensität erzeugen kann.

Wirken n gleiche Magnetisierungsspulen auf einen Punkt unter gleichwinkliger Verschiebung im Raum und werden sie von n elektromotorischen Kräften eines symmetrischen n -Phasensystems erregt, so wird eine magnetomotorische Kraft von konstanter Intensität an demjenigen Punkt erzeugt, dessen Richtung synchron mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotiert.

Es sei

n' = Windungszahl jeder Magnetisierungsspule,
 E = effektiver Wert der Klemmenspannung,
 I = effektiver Wert des Stromes.

Dann ist

$\mathcal{F} = n' I$ = effektive magnetomotorische Kraft einer Magnetisierungsspule.

Der momentane Wert der magnetomotorischen Kraft der in der Richtung $\frac{2\pi i}{n}$ wirkenden Spule ist alsdann:

$$\begin{aligned} f i_s &= \mathcal{F} \sqrt{2} \sin \left(\beta - \frac{2\pi i}{n} \right) \\ &= n' I \sqrt{2} \sin \left(\beta - \frac{2\pi i}{n} \right). \end{aligned}$$

Die beiden rechtwinkligen Komponenten dieser magnetomotorischen Kraft sind

$$\begin{aligned} f i' &= f i \cos \frac{2\pi i}{n} \\ &= n' I \sqrt{2} \cos \frac{2\pi i}{n} \sin \left(\beta - \frac{2\pi i}{n} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f i'' &= f i \sin \frac{2\pi i}{n} \\ &= n' I \sqrt{2} \sin \left(\beta - \frac{2\pi i}{n} \right) \end{aligned}$$

Die magnetomotorische Kraft dieser Spule kann somit durch die symbolische Gleichung

$$f i = n' I \sqrt{2} \sin \left(\beta - \frac{2\pi i}{n} \right) \left(\cos \frac{2\pi i}{n} + j \sin \frac{2\pi i}{n} \right).$$

ausgedrückt werden.

Die gesamte oder resultierende magnetomotorische Kraft der unter n gleichen Winkeln gegeneinander verschobenen Spulen ist somit

$$f = \sum_i^n f i = n' I \sqrt{2} \sum_i^n \sin \left(\beta - \frac{2\pi i}{n} \right) \left(\cos \frac{2\pi i}{n} + j \sin \frac{2\pi i}{n} \right)$$

oder entwickelt

$$f = n' I \sqrt{2} \left\{ \sin \beta \sum_I^n \left(\cos^2 \frac{2\pi i}{n} + j \sin \frac{2\pi i}{n} \cos \frac{2\pi i}{n} \right) - \right. \\ \left. \cos \beta \sum_I^n \left(\sin \frac{2\pi i}{n} \cos \frac{2\pi i}{n} + j \sin^2 \frac{2\pi i}{n} \right) \right\}.$$

Es ist aber:

$$\cos^2 \frac{2\pi i}{n} + j \sin \frac{2\pi i}{n} \cos \frac{2\pi i}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi i}{n} + j \sin \frac{4\pi i}{n} \right) \\ = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^{2i})$$

$$\sin \frac{2\pi i}{n} \cos \frac{2\pi i}{n} + j \sin^2 \frac{2\pi i}{n} = \frac{j}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi i}{n} - j \sin \frac{4\pi i}{n} \right) \\ = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^{2i}),$$

und da

$$\sum_I^n \varepsilon^{2i} = 0, \quad \sum_I^n \varepsilon^{-2i} = 0,$$

als Summe aller Wurzeln von $\sqrt[n]{1}$,

$$\text{so ist} \quad f = \frac{n n' I \sqrt{2}}{2} (\sin \beta + j \cos \beta),$$

$$\text{oder} \quad f = \frac{n n' I}{\sqrt{2}} (\sin \beta + j \cos \beta) \\ = \frac{n \mathcal{F}}{\sqrt{2}} (\sin \beta + j \cos \beta)$$

der symbolische Ausdruck der von den n -Stromkreisen des symmetrischen n -Phasensystems erzeugten magnetomotorischen Kraft, wenn diese Stromkreise n gleiche und unter gleichen Winkeln gegen einander verstellte Magnetisierungsspulen ergeben.

Der absolute Wert dieser magnetomotorischen Kraft ist

$$F = \frac{n n' I}{\sqrt{2}} = \frac{n \mathcal{F}}{\sqrt{2}} = \frac{n F_{\max}}{2}.$$

somit konstant und gleich $\frac{2}{\sqrt{n}}$ mal der effektiven magnetomotorischen Kraft jeder Spule, oder $\frac{n}{2}$ mal der maximalen magnetomotorischen Kraft jeder Spule.

Die Phase der resultierenden magnetomotorischen Kraft zu der durch den Winkel β repräsentierten Zeit ist:

$$\text{tang } \omega = \cot \beta;$$

d. h. die vom symmetrischen n -Phasensystem erzeugte magnetomotorische Kraft rotiert mit konstanter Intensität:

$$F = \frac{n\mathcal{F}}{\sqrt{2}};$$

und konstanter Geschwindigkeit im Synchronismus mit der Frequenz des Systems; und wenn die Reluktanz der magnetischen Stromkreise konstant ist, so rotiert der Magnetismus gleichfalls mit konstanter Geschwindigkeit und konstanter Intensität an dem Punkte, der von n magnetomotorischen Kräften des n -Phasensystems symmetrisch beeinflusst wird.

Dieses ist eine charakteristische Eigenschaft des symmetrischen Mehrphasensystems.

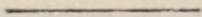
238. Im Dreiphasensystem ist $n = 3$, $F = 1,5 \mathcal{F}_{max}$, wo \mathcal{F}_{max} die maximale magnetomotorische Kraft jeder der Magnetisierungsspulen ist.

In einem symmetrischen Vierphasensystem ist $n = 4$, $F = 2 \mathcal{F}_{max}$, wo \mathcal{F}_{max} die maximale magnetomotorische Kraft jeder der vier Magnetisierungsspulen ist, oder wenn nur zwei Spulen gebraucht werden, da die Vierphasen-Magnetomotorischen Kräfte paarweise in Phase und $F = \mathcal{F}_{max}$, wo \mathcal{F}_{max} die maximale magnetomotorische Kraft jeder der beiden Magnetisierungsspulen des Vierphasensystems ist.

Obwohl das Vierphasensystem, das aus zwei um eine Viertelperiode verschobenen elektromotorischen Kräften

besteht, seiner Natur nach ein unsymmetrisches System ist, hat es doch eine Anzahl Eigenschaften mit den symmetrischen Systemen gemeinsam, z. B. die Eigenschaft, eine magnetomotorische Kraft von konstanter resultierender Intensität erzeugen zu können.

Solche Systeme von geradzahligem Phasenzahl, die aus der Hälfte eines symmetrischen Systems bestehen, werden halbsymmetrische Systeme genannt.



Kapitel XXV.

Ausgeglichene und unausgeglichene Mehrphasen-Systeme.

239. Wenn eine wechselnde elektromotorische Kraft

$$e = E\sqrt{2} \sin \beta$$

einen Strom erzeugt:

$$i = I\sqrt{2} \sin(\beta - \omega),$$

wo ω der Phasenverschiebungswinkel ist, so ist der Effekt:

$$\begin{aligned} p &= e i = 2 E I \sin \beta \sin(\beta - \omega) \\ &= E I (\cos \omega - \sin(2\beta - \omega)), \end{aligned}$$

und der Mittelwert des Effektes:

$$P = E I \cos \omega.$$

Dies eingesetzt, ergibt als Momentanwert des Effektes:

$$p = P \left(1 - \frac{\sin(2\beta - \omega)}{\cos \omega} \right).$$

Der Effekt oder der Energiefluss eines gewöhnlichen Einphasen-Wechselstromstromkreises ist somit pulsierend und wechselt mit der doppelten Frequenz der elektromotorischen Kraft und Stromstärke, ungleich dem Effekt eines Gleichstromstromkreises, der konstant ist,

$$p = e i.$$

Ist der Phasenverschiebungswinkel $\omega = 0$, so ist

$$p = P(1 - \sin 2\beta);$$

der Energiefluss wechselt somit zwischen 0 und $2P$, wo P der mittlere Energiefluss oder der Effekt des Stromkreises ist.

Wenn der Strom der elektromotorischen Kraft um den Winkel ω vor- oder nachhinkt, so wechselt der Effekt zwischen

$$P \left(1 - \frac{1}{\cos \omega} \right) \text{ und } P \left(1 + \frac{1}{\cos \omega} \right);$$

d. h. er wird für einen gewissen Teil jeder Halbwelle negativ. D. h. während jeder halben Welle fließt eine Zeitlang Energie in den Generator zurück; während des anderen Teils der halben Welle giebt der Generator Energie ab, und die Differenz zwischen beiden ist der effektive Effekt des Stromkreises.

Ist $\omega = 90^\circ$, so ist

$$p = E I \cos 2\beta;$$

d. h., der effektive Effekt ist $P = 0$ und die Energie fließt zwischen dem Generator und dem Speisestromkreis hin und her.

In jedem Falle ist jedoch der Energiefluss im Einphasen-Wechselstromstromkreis pulsierend, zum mindesten zwischen 0 und dem Maximum, häufig sogar negativ werdend.

240. Ist in einem Mehrphasensystem:

$e_1, e_2, e_3, \dots =$ Momentanwert der elektromotorischen Kraft,

$i_1, i_2, i_3, \dots =$ Momentanwert des dadurch erzeugten Stromes,

so ist der gesamte Energiefluss des Systems:

$$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 + \dots$$

Der mittlere Energiefluss ist

$$P = E_1 I_1 \cos \omega_1 + E_2 I_2 \cos \omega_2 + \dots$$

Das Mehrphasensystem wird ein ausgeglichenes System genannt, wenn der Energiefluss

$$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 + \dots$$

konstant ist und ein unausgeglichenes System, wenn der Energiefluss periodisch variiert, ähnlich wie im Einphasensystem, und das Verhältnis des Minimalwertes zum Maximalwert des Energieflusses wird der Ausgleichsfaktor des Systems genannt.

Im Einphasensystem mit induktionsfreiem Stromkreis, d. h. wo keine Phasenverschiebung stattfindet, ist der Ausgleichsfaktor somit Null, und ist negativ im Einphasen-

system mit zurückbleibendem oder voreilendem Strom und wird $= -1$, wenn die Phasenverschiebung 90° ist; d. h. wenn der Stromkreis wattlos ist.

241. Augenscheinlich ist im Mehrphasensystem der Ausgleich des Systems eine Funktion der Belastungsverteilung zwischen den einzelnen Zweigstromkreisen.

Ein ausgeglichenes System im speziellen wird ein Mehrphasen-System genannt, in dem der Energiefluss konstant ist, wenn alle Stromkreise gleiche Belastung und gleiche Phasenverschiebung haben.

242. Alle symmetrischen Systeme vom Dreiphasensystem aufwärts sind ausgeglichene Systeme. Eine grosse Anzahl unsymmetrischer Systeme sind gleichfalls ausgeglichene Systeme.

1. Dreiphasensystem:

Es seien

$$\begin{aligned} e_1 &= E\sqrt{2} \sin \beta, & \text{und } i_1 &= I\sqrt{2} \sin(\beta - \omega), \\ e_2 &= E\sqrt{2} \sin(\beta - 120), & i_2 &= I\sqrt{2} \sin(\beta - \omega - 120), \\ e_3 &= E\sqrt{2} \sin(\beta - 240), & i_3 &= I\sqrt{2} \sin(\beta - \omega - 240) \end{aligned}$$

die elektromotorischen Kräfte eines Dreiphasensystems und die dadurch erzeugten Ströme.

Der gesamte Energiefluss ist sodann:

$$\begin{aligned} p &= 2EI(\sin \beta \sin(\beta - \omega) + \sin(\beta - 120) \sin(\beta - \omega - 120) \\ &\quad + \sin(\beta - 240) \sin(\beta - \omega - 240)) \\ &= 3EI \cos \omega = P, \text{ oder konstant.} \end{aligned}$$

Das symmetrische Dreiphasensystem ist somit ein ausgeglichenes System.

2. Vierphasensystem:

Es seien

$$\begin{aligned} e_1 &= E\sqrt{2} \sin \beta, & i_1 &= I\sqrt{2} \sin(\beta - \omega), \\ e_2 &= E\sqrt{2} \cos \beta, & i_2 &= I\sqrt{2} \cos(\beta - \omega), \end{aligned}$$

die elektromotorischen Kräfte des Vierphasensystems und die dadurch erzeugten Ströme.

Dies ist ein unsymmetrisches System; der momentane Energiefluss ist indess:

$$\begin{aligned} p &= 2 E I (\sin \beta \sin (\beta - \omega) + \cos \beta \cos (\beta - \omega)) \\ &= 2 E I \cos \omega = P, \text{ oder konstant.} \end{aligned}$$

Das Vierphasensystem ist somit ein unsymmetrisches ausgeglichenes System.

3. Das symmetrische n -Phasensystem mit gleicher Belastung und gleicher Phasenverschiebung aller n -Zweige ist ein ausgeglichenes System. Denn wenn

$$\begin{aligned} e_i &= E \sqrt{2} \sin \left(\beta - \frac{2\pi i}{n} \right) = \text{elektromotor. Kraft,} \\ i_i &= I \sqrt{2} \sin \left(\beta - \omega - \frac{2\pi i}{n} \right) = \text{Strom,} \end{aligned}$$

so ist der momentane Energiefluss:

$$\begin{aligned} p &= \sum_1^n e_i i_i \\ &= 2 E I \sum_1^n \sin \left(\beta - \frac{2\pi i}{n} \right) \sin \left(\beta - \omega - \frac{2\pi i}{n} \right) \\ &= E I \left\{ \sum_1^n \cos \omega - \sum_1^n \cos \left(2\beta - \omega - \frac{4\pi i}{n} \right) \right\}, \end{aligned}$$

oder

$$p = n E I = P, \text{ oder konstant.}$$

243. Ein unausgeglichenes Mehrphasensystem ist das sogenannte umgekehrte Dreiphasensystem. Dasselbe lässt sich aus zwei Zweigen eines Dreiphasensystems durch Transformation mittels zweier Transformatoren ableiten, deren Sekundärspulen in gegenüberliegender Richtung in Bezug auf ihre Primärspulen verbunden sind. Ein solches System nimmt eine Mittelstellung zwischen dem Edison-Dreileitersystem und dem Dreiphasensystem ein. Es hat mit dem letzteren die Mehrphasennatur gemein und mit dem Edison-

Dreileitersystem, dass die Spannungsdifferenz zwischen den Aussenleitern höher ist als zwischen Mittelleiter und Aussenleiter.

Vermittelst zweier solcher Transformatoren werden die beiden um 120° gegeneinander verschobenen primären elektromotorischen Kräfte in zwei um 60° gegeneinander verschobene sekundäre elektromotorische Kräfte umgewandelt. Die Spannungsdifferenz zwischen den Aussenleitern in dem sekundären Stromkreis ist somit $= \sqrt{3}$ mal die Spannungsdifferenz zwischen Mittelleiter und Aussenleiter. Bei gleicher Belastung der beiden Zweige sind die drei Ströme einander gleich und um 120° gegeneinander verschoben, genau so wie im Dreiphasen-System. Bleibt die Belastung eines Zweiges konstant, während die des anderen von Gleichheit mit der ersteren allmählich bis auf 0 reduziert ist, so nimmt der Strom im Mittelleiter zunächst ab, erreicht einen Minimalwert von 87% des ursprünglichen Wertes und nimmt alsdann wieder zu und erreicht bei 0 Belastung denselben Wert wie bei voller Belastung.

Der Ausgleichsfaktor des umgekehrten Dreiphasensystems bei induktionsfreier Belastung ist 0,333.

244. In Figg. 167 bis 174 sind die elektromotorischen Kräfte als e und die Ströme als i in ausgezogenen Linien und der Effekt als p in punktierten Linien aufgetragen, für:

Fig. 167. Einphasensystem bei induktionsfreier Belastung.

Fig. 168. Einphasensystem bei induktiver Belastung von 60° Phasenverschiebung.

Fig. 169. Vierphasensystem bei induktionsfreier Belastung.

Fig. 170. Vierphasensystem bei induktiver Belastung von 60° Phasenverschiebung.

Fig. 171. Dreiphasensystem bei induktionsfreier Belastung.

Fig. 172. Dreiphasensystem bei induktiver Belastung von 60° Phasenverschiebung.

Fig. 173. Umgekehrtes Dreiphasensystem bei induktionsfreier Belastung.

Fig. 174. Umgekehrtes Dreiphasensystem bei induktiver Belastung von 60° Phasenverschiebung.

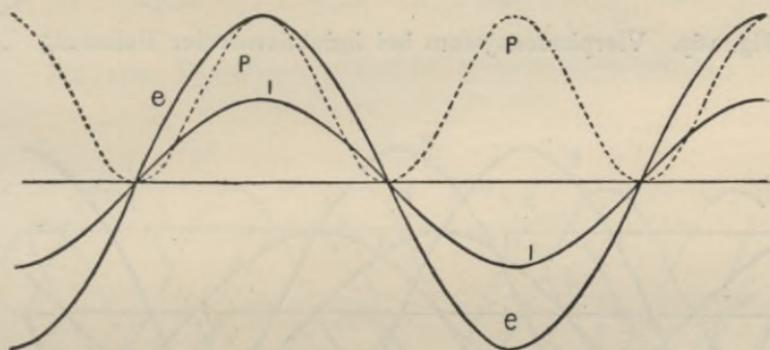


Fig. 167. Einphasensystem bei induktionsfreier Belastung.

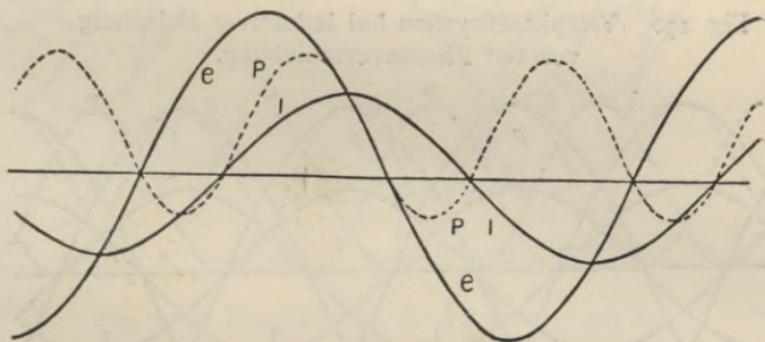


Fig. 168. Einphasensystem bei induktiver Belastung von 60° Phasenverschiebung.

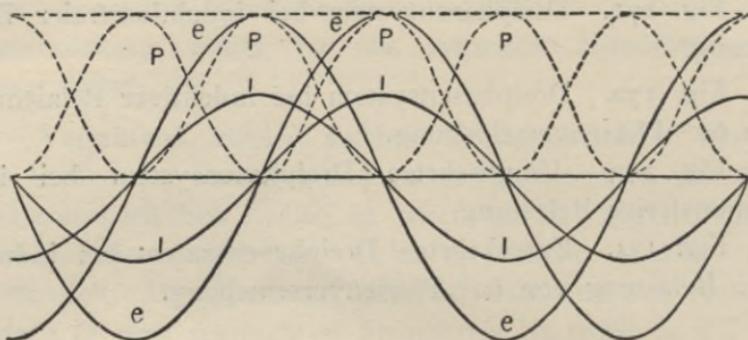


Fig. 169. Vierphasensystem bei induktionsfreier Belastung.

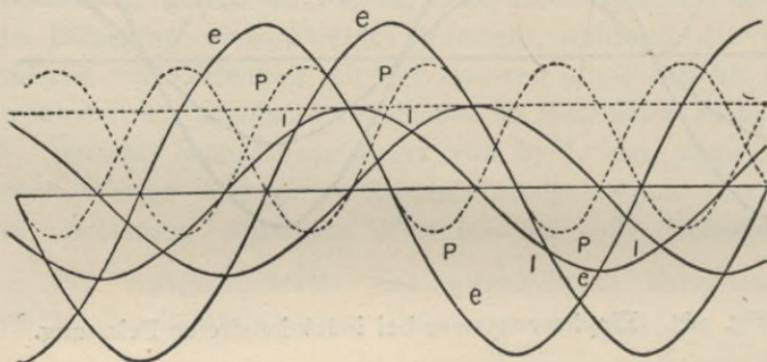


Fig. 170 Vierphasensystem bei induktiver Belastung von 60° Phasenverschiebung.

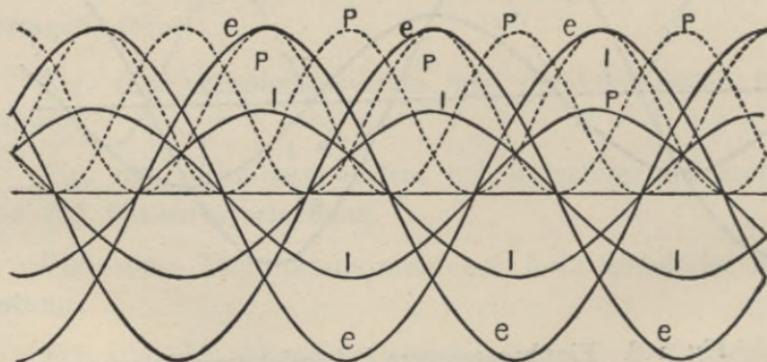


Fig. 171. Dreiphasensystem bei induktionsfreier Belastung.

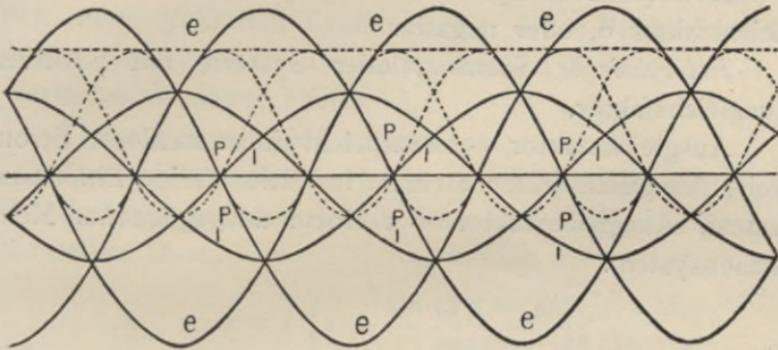


Fig. 172. Dreiphasensystem bei induktiver Belastung von 60° Phasenverschiebung.

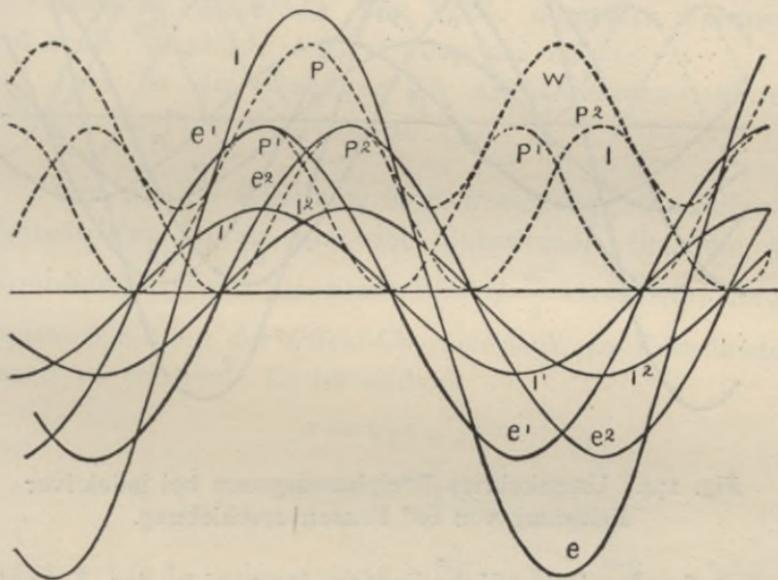


Fig. 173. Umgekehrtes Dreiphasensystem bei induktionsfreier Belastung.

245. Der Energiefluss in einem Wechselstromnetz ist eine der wichtigsten und charakteristischsten Eigenschaften und nach ihr werden die Systeme eingeteilt in:

Monocyklische Systeme, oder Systeme mit dem Ausgleichsfaktor 0, oder negativ.

Polycyklische Systeme, oder Systeme mit positivem Ausgleichsfaktor.

Ausgleichsfaktor -1 entspricht einem wattlosen Stromkreis, Ausgleichsfaktor 0 einem induktionsfreien Einphasensystem, Ausgleichsfaktor $+1$ einem ausgeglichenen Mehrphasensystem.

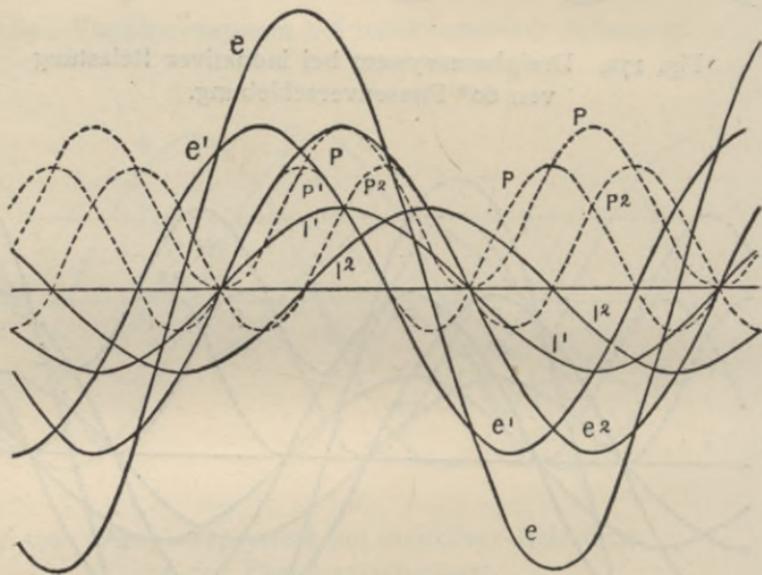


Fig. 174. Umgekehrtes Dreiphasensystem bei induktiver Belastung von 60° Phasenverschiebung.

246. In Polar-Koordinaten lässt sich der Energiefluss eines Wechselstromsystems darstellen mittels des Momentanwertes des Energieflusses als Radiusvektor mit dem Winkel β , entsprechend der Zeit als Amplitude, wobei eine volle Periode durch eine Umdrehung repräsentiert wird.

In dieser Weise wird der Effekt eines Wechselstromsystems durch eine geschlossene symmetrische Kurve

dargestellt, die den o-Punkt als vierfachen Punkt hat. In den monocyclischen Systemen ist der o-Punkt ein vierfacher Knotenpunkt; im polycyclischen System ist er ein vierfacher isolierter Punkt.

Diese Kurven sind somit sechsten Grades.

Da der Energiefluss jedes der Einphasenzweige eines Wechselstromsystems sich als Sinuswelle doppelter Frequenz darstellen lässt,

$$p = P \left(1 - \frac{\sin(2\beta - \omega)}{\cos \omega} \right),$$

so ergibt sich für den gesamten Energiefluss durch Addition der Energieflüsse der Einzelzweige

$$p = P (1 + \varepsilon \sin(2\beta - \omega)).$$

Dies ist gleichfalls eine Welle doppelter Frequenz, mit ε als Amplitude der Pulsation des Effekts.

Dies ist die Gleichung der Effekt-Charakteristik des Systems in Polar-Koordinaten.

247. Um die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten darzustellen, führen wir eine Substitution ein, die das Koordinatensystem um einen Winkel $\frac{\omega}{2}$ verschiebt, um die Symmetrie-Axen der Effekt-Charakteristik zu Koordinaten-Axen zu machen. Es ist alsdann

$$p = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\text{tang} \left(\beta - \frac{\omega}{2} \right) = \frac{y}{x},$$

somit, $\sin(2\beta - \omega) = 2 \sin \left(\beta - \frac{\omega}{2} \right) \cos \left[\beta - \frac{\omega}{2} \right] = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$,
eingesetzt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = P \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon xy}{x^2 + y^2} \right\},$$

oder entwickelt:

$$(x^2 + y^2)^3 - P^2 (x^2 + y^2 + 2\varepsilon xy)^2 = 0$$

die Gleichung sechsten Grades der Effekt-Charakteristik.

Führt man ein:

$a = (1 + \varepsilon) P =$ Maximalwert des Effektes,

$b = (1 - \varepsilon) P =$ Minimalwert des Effektes,

so ist

$$P = \frac{a + b}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{a - b}{a + b};$$

somit eingesetzt und entwickelt:

$$(x^2 + y^2)^3 - \frac{1}{4} \{ a(x + y)^2 + b(x - y)^2 \}^2,$$

die Gleichung der Effekt-Charakteristik mit den *Haupt-Effekt-Axen* a und b und dem Ausgleichsfaktor b/a .

Es ist alsdann:

Einphasen-Stromkreis bei induktionsfreier Belastung:

$$p = P(1 + \sin 2\varphi), \quad b = 0, \quad a = 2P -$$

$$(x^2 + y^2)^3 - P^2 + (x + y)^4 = 0, \quad b/a = 0.$$

Einphasen-Stromkreis bei 60° Phasennacheilung $p =$

$$P(1 + 2 \sin 2\varphi), \quad b = -P, \quad a = +3P -$$

$$(x^2 + y^2)^3 - P^2(x^2 + y^2 + 4xy)^2 = 0, \quad b/a = -\frac{1}{3}.$$

Einphasen-Stromkreis bei 90° Phasennacheilung $p =$

$$EI \sin 2\varphi, \quad b = -EI, \quad a = +EI$$

$$(x^2 + y^2)^3 - (EI)^3(x^2 - y^2)^2, \quad b/a = -1.$$

Dreiphasen-Stromkreis bei induktionsfreier Belastung:

$$p = P, \quad b = 1, \quad a = 1$$

$$x^2 + y^2 - P^2 = 0: \text{Kreis. } b/a = +1.$$

Dreiphasen-Stromkreis bei 60° Phasennacheilung $p =$

$$P, \quad b = 1, \quad a = 1$$

$$x^2 + y^2 - P^2 = 0: \text{Kreis. } b/a = +1.$$

Vierphasen-Stromkreis bei induktionsfreier Belastung:

$$p = P, \quad b = 1, \quad a = 1$$

$$x^2 + y^2 - P^2 = 0: \text{Kreis. } b/a = +1.$$

Vierphasen - Stromkreis bei 60° Phasennacheilung:

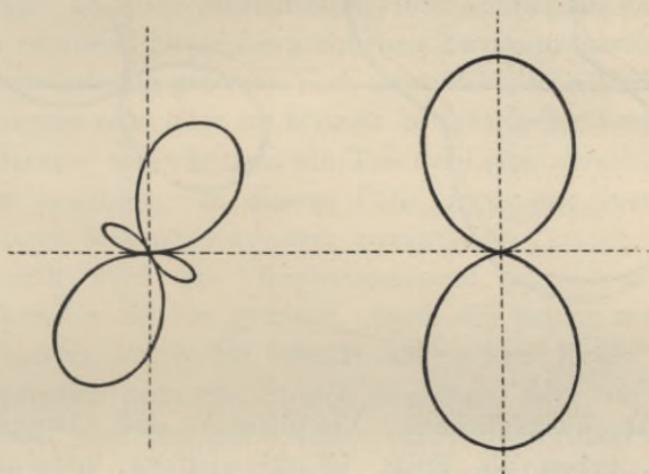
$$p = P, \quad b = 1, \quad a = 1$$

$$x^2 + y^2 - P^2 = 0: \text{Kreis. } b/a = +1.$$

Umgekehrtes Dreiphasensystem bei induktionsfreier Belastung:

$$p = P \left(\frac{1 + \sin 2\varphi}{2} \right), \quad b = \frac{1}{2}P, \quad a = \frac{3}{2}P$$

$$(x^2 + y^2)^3 - P^2(x^2 + y^2 + xy)^2 = 0. \quad b/a = + \frac{1}{3}.$$



Figg. 175 und 176.

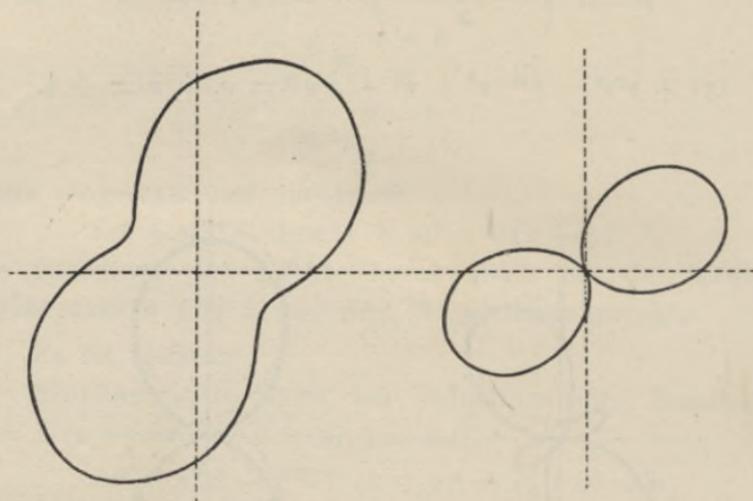
Umgekehrtes Dreiphasensystem bei 60° Phasennach-eilung: $p = P(1 + \sin 2\varphi)$, $b = 0$, $a = 2P$

$$(x^2 + y^2)^3 - P^2(x + y)^4 = 0. \quad b/a = 0.$$

a und b werden die Haupt-Effekt-Axen des Wechselstromstromkreises genannt und das Verhältnis b/a ist der Ausgleichsfaktor des Systems.

248. Wie ersichtlich, ist somit der Effektfluss eines Wechselstromsystems vollständig charakterisiert durch seine beiden Haupt-Effekt-Axen a und b .

Die Effekt-Charakteristiken in Polar-Koordinaten, entsprechend den Figg. 167, 168, 173 und 174, sind in Fig. 175, 176, 177 und 178 dargestellt.



Figg. 177 und 178.

Das ausgeglichene Vierphasen- und Dreiphasensystem geben als Polar-Charakteristiken konzentrische Kreise.

Kapitel XXVI.

Verkettete Mehrphasen-Systeme.

249. In einem Mehrphasensystem können die einzelnen gegen einander phasenverschobenen Zweigstromkreise entweder vollständig getrennt und ohne elektrische Verkettung mit einander sein, oder sie können in elektrischer Verkettung mit einander sein, so dass ein Teil der Leiter verschiedenen Phasen angehört. In diesem Falle wird das System ein verkettetes Mehrphasensystem genannt.

Somit wird das Vierphasensystem beispielsweise ein unverkettetes System genannt, wenn die beiden senkrecht zu einander stehenden elektromotorischen Kräfte durch zwei gänzlich getrennte Spulen desselben, oder durch verschiedene, aber fest mit einander verbundene Anker erzeugt werden und mit vier Leitern versehen sind, welche unabhängigen Stromkreisen von Motoren oder anderen Vorrichtungen Energie zuführen. Wird das Vierphasensystem durch Verbindung von vier gleich weit entfernten Punkten eines Trommel- oder Ringankers mit geschlossenem Stromkreis mit vier Schleifringen abgeleitet, so ist das System ein verkettetes Vierphasensystem.

Ähnlich ist dies beim Dreiphasensystem. Da jeder der drei Ströme, die um eine dritte Periode von einander verschoben sind, dem resultierenden der beiden anderen Ströme gleich ist, so kann er als eine Rückleitung der anderen beiden Ströme angesehen werden. Daher besteht ein verkettetes Dreiphasensystem aus drei Leitern, welche Ströme führen, die um eine dritte Periode gegen einander verschoben sind, so dass jeder der drei Ströme eine gemeinsame Rückleitung der anderen beiden bildet, und umgekehrt.

250. In einem verketteten Mehrphasen-System giebt es zwei Wege, um Apparate in das System einzuschalten.

1. Die Sternschaltung, diagrammatisch in Fig. 179 dargestellt. In dieser Schaltung sind die vom Strom erregten n -Stromkreise um $\frac{1}{n}$ Periode gegen einander ver-

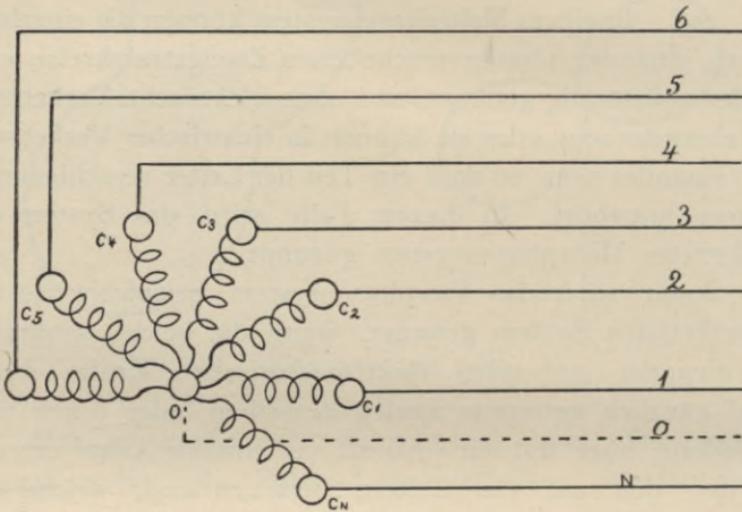


Fig. 179.

schohen und sind mit ihrem einen Ende zu einem neutralen Punkt oder gemeinsamen Verbindungspunkt verbunden, der entweder geerdet oder mit anderen entsprechenden neutralen Punkten verbunden, oder isoliert sein kann.

Im Dreiphasensystem wird diese Schaltung gewöhnlich Y-Schaltung genannt, wegen der Ähnlichkeit der diagrammatischen Darstellung mit dem Buchstaben Y, wie Fig. 163 zeigt.

2. Die Ringschaltung, diagrammatisch in Fig. 180 dargestellt. In dieser Schaltung liegen die n -Stromkreise des Apparates miteinander in einem geschlossenen Strom-

kreis und die Verbindungsstellen benachbarter Stromkreise sind mit den n -Leitungen des Mehrphasensystems verbunden. Im Dreiphasensystem wird diese Schaltung Δ -Schaltung genannt, wegen der Ähnlichkeit der diagrammatischen Darstellung mit dem griechischen Buchstaben Δ , wie Fig. 164 zeigt.

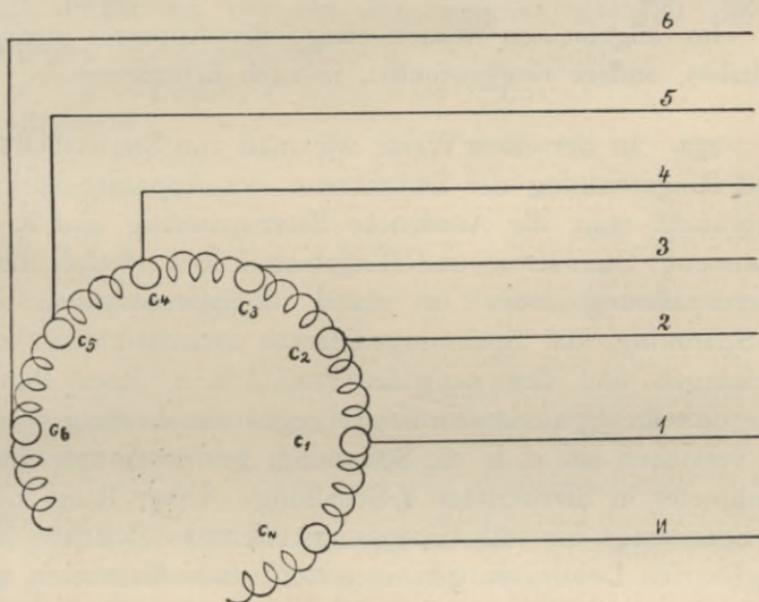


Fig. 180.

Infolgedessen unterscheidet man zwischen sterngeschalteten und ringgeschalteten Generatoren, Motoren u. s. w. oder im Dreiphasensystem zwischen Y - und Δ -Schaltungen.

251. Augenscheinlich besteht beim Mehrphasensystem, als Ganzem, kein Unterschied, ob Generatoren oder andere Apparate Stern- oder Ringschaltung haben, und die Übertragungsleitung eines symmetrischen n -Phasensystems besteht stets aus n -Leitungen, die Strom von gleicher Intensität führen, und wenn sie ausgeglichen, um $\frac{1}{n}$ Periode

in ihrer Phase gegen einander verschoben sind. Da die Leiter von n -Generatorklemmen ausgehen, so können die Leitungen als sterngeschaltet angesehen werden.

Die Stromkreise aller Apparate, Generatoren, Motoren u. s. w. können entweder sterngeschaltet sein, d. h. zwischen einer Leitung und einem neutralen Punkte liegen, oder ringgeschaltet, d. h. zwischen zwei Leitungen.

Im allgemeinen werden einige der Apparate sterngeschaltet, andere ringgeschaltet, je nach Erfordernis.

252. In derselben Weise wie man von Sternschaltung und Ringschaltung der Stromkreise der Apparate spricht, gebraucht man die Ausdrücke Sternspannung und Ringspannung, Sternstrom und Ringstrom u. s. w., wobei unter Sternspannung, oder in einem Dreiphasensystem die Y -Spannung, die Spannungsdifferenz zwischen einer der Leitungen und dem neutralen Punkt, d. h. einem Punkt, der dieselbe Spannungsdifferenz gegen alle Leitungen hat, zu verstehen ist; d. h. die Spannung, gemessen von einem Voltmeter in Stern- oder Y -Schaltung. Unter Ring- oder A -Spannung ist die Spannungsdifferenz zwischen benachbarten Leitungen, gemessen von einem Voltmeter, das zwischen benachbarten Leitungen liegt, in Ring- oder A -Schaltung, zu verstehen.

In derselben Weise ist der Stern- oder Y -Strom derjenige Strom, welcher von einer Leitung zu einem neutralen Punkt fließt. Der Ring- oder A -Strom ist ein Strom, welcher von einer Leitung zur andern fließt.

Der Strom in der Übertragungsleitung ist immer der Stern- oder Y -Strom und die Spannungsdifferenz zwischen den Leitungsdrähten die Ring- oder A -Spannung.

Da die Sternspannung und die Ringspannung von einander verschieden sind, so können Apparate für verschiedene Spannungen in dasselbe Mehrphasensystem geschaltet werden, und zwar in Stern- oder Ringschaltung.

Der Gesamteffekt des Mehrphasensystems ist gleich der Summe aller Stern- oder **Y**-Effekte, oder gleich der Summe aller Ring- oder **A**-Effekte.

253. Ist in einem Generator mit sterngeschalteten Stromkreisen die elektromotorische Kraft pro Stromkreis $= E$ und wird die gemeinsame Verbindung, oder der neutrale Punkt als o-Punkt angenommen, so sind die Spannungen der n -Klemmen

$$E, \varepsilon E, \varepsilon^2 E \dots \varepsilon^{n-1} E;$$

oder allgemein

$$\varepsilon^i E,$$

an der Klemme i , wo

$$i = 0, 1, 2 \dots n - 1, \quad \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n} = \sqrt[n]{1}.$$

Die elektromotorische Kraft im Stromkreis von der Klemme i zur Klemme k ist somit

$$E^{ki} = \varepsilon^k E - \varepsilon^i E = (\varepsilon^k - \varepsilon^i) E.$$

Die elektromotorische Kraft zwischen den benachbarten Klemmen i und $i + 1$ ist

$$(\varepsilon^{i+1} - \varepsilon^i) E = \varepsilon^i (\varepsilon - 1) E.$$

In einem Generator mit ringgeschalteten Stromkreisen ist die elektromotorische Kraft pro Stromkreis:

$$\varepsilon^i E$$

die ringelektromotorische Kraft und tritt an Stelle von

$$\varepsilon^i (\varepsilon - 1) E,$$

während die elektromotorische Kraft zwischen Klemme und neutralem Punkt, oder die sternelektromotorische Kraft

$$\frac{\varepsilon^i}{\varepsilon - 1} E$$

ist.

Im sterngeschalteten Generator mit der elektromotorischen Kraft E pro Stromkreis ist somit:

die sternelektromotorische Kraft: $\varepsilon^i E$,

die ringelektromotorische Kraft: $\varepsilon^i (\varepsilon - 1) E$,

die elektromotorische Kraft zwischen den Klemmen i und k : $(\varepsilon^k - \varepsilon^i) E$.

Im ringgeschalteten Generator mit der elektromotorischen Kraft E pro Stromkreis ist:

die sternelektromotorische Kraft: $\frac{\varepsilon^i}{\varepsilon - 1} E$,

die ringelektromotorische Kraft: $\varepsilon^i E$,

die elektromotorische Kraft zwischen den Klemmen i und k :

$$\frac{\varepsilon^k - \varepsilon^i}{\varepsilon - 1} E.$$

In sterngeschalteten Apparaten müssen die elektromotorische Kraft und der Strom pro Stromkreis die sternelektromotorische Kraft und der Sternstrom sein. In ringgeschalteten Apparaten müssen die elektromotorische Kraft und der Strom pro Stromkreis die ringelektromotorische Kraft und der Ringstrom sein.

Wenn im Generator eines symmetrischen Mehrphasensystems

ε^i die elektromotorischen Kräfte zwischen n -Klemmen und dem neutralen Punkte, oder die sternelektromotorischen Kräfte,

I_i = die Ströme, die von Klemme i über eine Leitung von der Impedanz Z_i fließen (einschliesslich der Generatorimpedanz in Sternschaltung), so ist

die Spannung am Ende der Leitung i :

$$\varepsilon^i E - Z_i I_i;$$

die Spannungsdifferenz zwischen den Klemmen k und i :

$$(\varepsilon^k - \varepsilon^i) E - (Z_k I_k - Z_i I_i),$$

wo I_i der Sternstrom, Z_i die Sternimpedanz des Systems ist.

Die Ringspannung am Ende der Leitung zwischen den Klemmen i und k ist E_{ik} , und es ist:

$$E_{ik} = -E_{ki}.$$

Bezeichnet I_{ik} den Strom, der von der Klemme i zur Klemme k fließt, und Z_{ik} die Impedanz des Stromkreises zwischen den Klemmen i und k , wo

$$I_{ik} = -I_{ki},$$

$$Z_{ik} = Z_{ki},$$

so ist:

$$E_{ik} = Z_{ik} I_{ik}.$$

Bezeichnet I_{io} den Strom, der von der Klemme i nach einem neutralen Punkte oder zur Erde fliesst und Z_{io} die Impedanz dieses Stromkreises zwischen der Klemme i und dem neutralen Punkte, so ist:

$$E_{io} = \varepsilon^i E - Z_i I_i = Z_{io} I_{io}.$$

254. Wir erhalten somit vermittelt der Ohm'schen und Kirchhoff'schen Gesetze:

Wenn $\varepsilon^i E$ die elektromotorische Kraft pro Generatorstromkreis zwischen der Klemme i und dem neutralen Punkte, oder die sternelektromotorische Kraft,

$I_i =$ der von der Klemme i des Generators fließende Strom oder Sternstrom,

$Z_i =$ die Impedanz der mit der Generatorklemme i verbundenen Leitung, einschliesslich der Generatorimpedanz,

$E_i =$ die elektromotorische Kraft am Ende der mit der Generatorklemme i verbundenen Leitung,

$E_{ik} =$ die Spannungsdifferenz zwischen den Enden der Leitung i und k ,

$I_{ik} =$ der von der Leitung i zur Leitung k fließende Strom,

$Z_{ik} =$ die Impedanz des Stromkreises zwischen der Leitung i und k ,

$I_{io}, I_{ioo} \dots =$ der Strom, der von der Leitung i nach den neutralen Punkten o, oo, \dots

$Z_{io}, Z_{ioo} \dots =$ die Impedanz der Stromkreise zwischen der Leitung i und den neutralen Punkten o, oo fliesst, so ist:

$$1. \quad E_{ik} = -E_{ki}, \quad I_{ik} = -I_{ki}, \quad Z_{ik} = Z_{ki}, \quad I_{io} = -I_{oi}, \\ Z_{io} = Z_{oi}, \text{ etc.}$$

$$2. \quad E_i = \varepsilon_i E - Z_i I_i,$$

$$3. \quad E_i = Z_{io} I_{io} = Z_{ioo} I_{ioo} \dots$$

$$4. \quad E_{ik} = E_k - E_i = (\varepsilon^k - \varepsilon^i) E - (Z_k I_k - Z_i I_i).$$

$$5. \quad E_{ik} = Z_{ik} I_{ik}.$$

$$6. \quad I_i = \sum_k^n I_{ik}.$$

7. Existiert kein neutraler Punkt im Generator, wie bei der Ringschaltung, oder ist derselbe von den anderen neutralen Punkten isoliert, so ist;

$$\begin{aligned}\sum_{\text{I}}^n I_i &= 0, \\ \sum_{\text{I}}^n I_{i0} &= 0, \\ \sum_{\text{I}}^n I_{i00} &= 0, \text{ u. s. w.},\end{aligned}$$

wo 0, 00 u. s. w. die verschiedenen neutralen Punkte sind, die von einander isoliert sind.

Sind der neutrale Punkt des Generators und alle anderen neutralen Punkte mit einander verbunden oder geerdet, so ist:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{I}}^n I_i &= \sum_{\text{I}}^n (I_{i0} + I_{i00} + \dots) \\ &= \sum_{\text{I}}^n I_{i0} + \sum_{\text{I}}^n I_{i00} + \dots\end{aligned}$$

Sind der neutrale Punkt des Generators und alle anderen neutralen Punkte geerdet, so wird das System ein geerdetes System genannt. Sind die neutralen Punkte nicht geerdet, so ist das System ein isoliertes Mehrphasensystem, und ein isoliertes Mehrphasensystem mit Ausgleichsleiter, wenn alle neutralen Punkte mit einander verbunden sind.

8. Der Effekt des Mehrphasensystems ist

$$P = \sum_{\text{I}}^n \varepsilon^i E I_i \cos \varphi_i \text{ im Generator.}$$

$$P = \sum_{\text{O}}^n \sum_{\text{O}}^n E_{ik} I_{ik} \cos \varphi_{ik} \text{ in den Entnahmestrom-$$

kreisen.

Kapitel XXVII.

Transformation von Mehrphasensystemen.

255. Bei der Transformation eines Mehrphasensystems in ein anderes Mehrphasensystem ist es klar, dass mit Vernachlässigung der Transformationsverluste das primäre System denselben Energiefluss haben muss, wie das sekundäre System und dass somit ein ausgeglichenes System wieder in ein ausgeglichenes System und ein unausgeglichenes System in ein unausgeglichenes System mit demselben Ausgleichsfaktor transformiert wird, weil ein Transformator kein Apparat ist, der Energie aufspeichern und somit den Energiefluss nicht ändern kann. Die als Magnetismus aufgespeicherte Energie beträgt in einem guten Transformator nur einen ganz geringen Prozentsatz der gesamten Energie. Dies zeigt die Nutzlosigkeit der Versuche, symmetrische ausgeglichene Mehrphasensysteme durch Transformation aus unausgegliehenen Einphasensystemen zu erhalten, ohne Apparate, die wirksam Energie aufspeichern können, wie rotierende Maschinen.

Da jede elektromotorische Kraft in zwei Komponenten von gegebenen Richtungen zerlegt, oder aus Komponenten von zwei gegebenen Richtungen zusammen gesetzt werden kann, so können die elektromotorischen Kräfte irgend eines Mehrphasensystems in Komponenten aufgelöst oder aus Komponenten von zwei gegebenen Richtungen zusammengesetzt werden. Dies führt zur Transformation irgend eines Mehrphasensystems in ein anderes Mehrphasensystem mit demselben Ausgleichsfaktor mittels nur zweier Transformatoren.

256. Es seien $E_1, E_2, E_3 \dots$ die elektromotorischen Kräfte des primären Systems, die in

$E_1', E_2', E_3' \dots$ elektromotorische Kräfte des sekundären Systems transformiert werden sollen.

Wählt man zwei magnetische Kraftlinienflüsse $\overline{\varphi}$ und $\overline{\overline{\varphi}}$ von verschiedenen Phasen als magnetische Kraftlinienflüsse zweier Transformatoren, welche die elektromotorischen Kräfte \overline{e} und $\overline{\overline{e}}$ pro Windung induzieren, so können nach dem Gesetz vom Parallelogramm die elektromotorischen Kräfte $E_1, E_1 \dots$ in zwei Komponenten \overline{E}_1 und $\overline{\overline{E}}_1$; \overline{E}_2 und $\overline{\overline{E}}_2 \dots$ der Phasen \overline{e} und $\overline{\overline{e}}$ aufgelöst werden.

Es sind alsdann

$\overline{E}_1, \overline{E}_2, \dots$ die gegenelektromotorischen Kräfte, die in den Primärwindungen des ersten Transformators der Mehrphasenstromkreise induziert werden.

Somit ist

$\overline{E}_1 / \overline{e}, \overline{E}_2 / \overline{e} \dots$ die Windungszahl der Primärspulen des ersten Transformators

und analog

$\overline{\overline{E}}_1 / \overline{\overline{e}}, \overline{\overline{E}}_2 / \overline{\overline{e}} \dots$ die Windungszahl der Primärspulen des zweiten Transformators.

In derselben Weise, wie die elektromotorischen Kräfte des primären Systems in Komponenten zerlegt wurden, in Phase mit \overline{e} und $\overline{\overline{e}}$, werden die elektromotorischen Kräfte des sekundären Systems, E_1', E_2' zusammengesetzt aus den Komponenten \overline{E}_1' und $\overline{\overline{E}}_1'$, \overline{E}_2' , $\overline{\overline{E}}_2'$, \dots , in Phase mit \overline{e} und $\overline{\overline{e}}$, und geben als Zahl der sekundären Windungen

$\overline{E}_1^1 / \overline{e}, \overline{E}_2^1 / \overline{e}, \dots$ im ersten Transformator,

$\overline{\overline{E}}_1^1 / \overline{\overline{e}}, \overline{\overline{E}}_2^1 / \overline{\overline{e}}, \dots$ im zweiten Transformator.

D. h. jeder der beiden Transformatoren \overline{m} und $\overline{\overline{m}}$ enthält im allgemeinen Primärwindungen jeder der primären Phasen und Sekundärwindungen jeder der sekundären Phasen. Wird nun das sekundäre Mehrphasensystem in irgend einer Weise belastet, so fließen entsprechend den Sekundärströmen Primärströme in solcher Weise, dass der gesamte Energiefluss in dem primären Mehrphasensystem gleich dem sekundären Energiefluss ist, plus dem Effektverlust in den Transformatoren.

257. Als Beispiel kann die Transformation des symmetrischen ausgeglichenen Dreiphasensystems

$$E \sin \beta, \quad E \sin (\beta - 120), \quad E \sin (\beta - 240)$$

in ein unsymmetrisches ausgeglichenes Vierphasensystem

$$E' \sin \beta, \quad E' \sin (\beta - 90)$$

angenommen werden.

Es sei der magnetische Kraftlinienfluss der beiden Transformatoren

$$\varphi \cos \beta \text{ und } \varphi \cos (\beta - 90).$$

Die pro Windung in den Transformatoren induzierten elektromotorischen Kräfte sind alsdann:

$$e \sin \beta \text{ und } e \sin (\beta - 90).$$

Im primären Stromkreis ergibt somit die erste Phase $E \sin \beta$ im ersten Transformator $\frac{E}{e}$ Primärwindungen; im zweiten Transformator 0 Primärwindungen.

Die zweite Phase $E \sin (\beta - 240)$ ergibt im ersten Transformator $-\frac{E}{2e}$ Primärwindungen; im zweiten Transformator $\frac{E \times \sqrt{3}}{2e}$ Primärwindungen.

Die dritte Phase $E \sin (\beta - 120)$ ergibt im ersten Transformator $-\frac{E}{2e}$ Primärwindungen; im zweiten Transformator $-\frac{E \sqrt{3}}{2e}$ Primärwindungen.

Im Sekundärstromkreise ergibt die erste Phase $E' \sin \beta$ im ersten Transformator $\frac{E'}{e}$ Sekundärwindungen; im zweiten Transformator 0 Sekundärwindungen.

Die zweite Phase $E' \sin (\beta - 90)$ giebt im ersten Transformator 0 Sekundärwindungen; im zweiten Transformator $\frac{E'}{e}$ Sekundärwindungen.

Oder, wenn

$$E = 5,000 \quad E' = 100, \quad e = 10$$

	Primär.			Sekundär.		Phase.
	1.	2.	3.	1.	2.	
erster Transformator	+ 500	— 250	— 250	10	0	
zweiter Transformator	0	+ 433	— 433	0	10	Windungen.

Dass heisst: *Jedes ausgeglichene Mehrphasensystem kann mittels zweier Transformatoren ohne Energie-Aufspeicherung in jedes andere ausgeglichene Mehrphasensystem transformiert werden.*

258. Transformation unter Änderung des Ausgleichsfaktors des Systems ist nur möglich mittels solcher Apparate, die Energie aufzuspeichern imstande sind, da die Differenz des Effektes zwischen dem primären und dem sekundären Stromkreis zu der Zeit, wo der Sekundäreffekt unter dem primären ist, aufgespeichert und zu der Zeit, wo der primäre Effekt unter dem sekundären Effekt liegt, wieder zurückgegeben werden muss. Die wirksamste Aufspeicherungsvorrichtung elektrischer Energie ist das mechanische Moment in Rotationsmaschinen, hat aber den Nachteil, dass es Bedienung erfordert.

Kapitel XXVIII.

Kupfer-Wirkungsgrad der Systeme.

259. Wenn in elektrischen Kraftübertragungs- und Verteilungs-Leitungen die Verbrauchsstelle vom Erzeugungs-orte weit entfernt liegt, so machen die Leitungen, welche den Strom übertragen, einen so grossen Teil der Gesamtkosten aus, dass eine besondere Untersuchung in Bezug auf die Art des Systems und die Spannung notwendig ist.

Im allgemeinen ist bei Übertragung eines bestimmten Effektes über eine gegebene Entfernung bei gegebenem Verluste die in den Leitungen notwendige Kupfermenge umgekehrt proportional dem Quadrat der benutzten Spannung. Da der gesamte übertragene Effekt dem Produkte aus Strom und elektromotorischer Kraft proportional ist, so variiert bei gegebenem Effekt der Strom umgekehrt proportional zur elektromotorischen Kraft und da der Effektverlust dem Produkte aus dem Quadrat des Stromes und dem Widerstand proportional ist, so muss bei gegebenem Verluste der Widerstand umgekehrt proportional dem Quadrat des Stromes variieren, d. h. proportional dem Quadrat der elektromotorischen Kraft, und da die Kupfermenge umgekehrt proportional dem Widerstand ist, so variiert dieselbe umgekehrt proportional dem Quadrat der elektromotorischen Kraft.

Dies gilt für jedes System.

Beim Vergleich der verschiedenen Systeme, wie Zweileiter-Einphasen-, Dreileiter-Einphasen-, Dreiphasen- und Vierphasen-Systeme, muss als Basis Gleichheit der Spannung vorausgesetzt werden.

Manche Systeme indessen, wie z. B. das Edison-Dreileitersystem, oder das umgekehrte Dreiphasensystem, besitzen verschiedene Spannungsdifferenzen in den verschiedenen Stromkreisen, die das System ausmachen, und der Vergleich lässt sich daher entweder

1. auf Grund der Gleichheit der maximalen Spannungsdifferenz in dem System, oder

2. auf Grund der minimalen Spannungsdifferenz in dem System, oder der Spannungsdifferenz pro Stromkreis, oder Phase des Systems durchführen.

In Stromkreisen mit niedriger Spannung, wie sekundären Leitungsnetzen, wo die Spannung nicht durch die Isolationsbeanspruchung begrenzt ist, sondern durch die Spannung der in das System eingeschalteten Apparate, wie z. B. Glühlampen, wird die korrekte Basis der Vergleichsmethode in der Gleichheit der Spannung pro Leitungszweig des Systems, oder pro Phase, bestehen.

In Fernleitungen dagegen, in denen die Spannung nicht nur aus Rücksicht auf die maximale Spannung der eingeschalteten Apparate, sondern durch die Schwierigkeit der Isolierung der Leitung für höhere Spannung begrenzt ist, ist die korrekte Vergleichsgrundlage dagegen die Gleichheit der maximalen Spannungsdifferenz in dem System.

Dasselbe gilt für Kraftverteilung bei mässiger Spannung, bei Berücksichtigung eventueller Lebensgefahr durch Drähte oder Hochspannungsleitungen.

Der Vergleich verschiedener Systeme von Hochspannungs-Fernleitungen, oder Kraftverteilung für Motoren ist daher auf Grund der Gleichheit der maximalen Spannungsdifferenz, die in dem System herrscht, vorzunehmen, und der Vergleich verschiedener Verteilungsleitungen von niedriger Spannung für Lichtzwecke auf Grund der Gleichheit der minimalen Spannungsdifferenz der Leiterpaare, die mit dem Stromverbraucher verbunden sind.

260. *Vergleich auf Grund der Gleichheit der minimalen Spannungsdifferenz in Stromkreisen mit niedriger Spannung für Lichtzwecke.*

Ist im Einphasen-Wechselstromsystem $e =$ elektromotorische Kraft, $i =$ Strom, $r =$ Widerstand pro Leitung, so ist der Gesamteffekt $= ei$, der Effektverlust $= 2i^2r$.

Bei Benutzung eines Dreileitersystems mit der gegebenen Spannung e zwischen den Aussenleitern und dem neutralen Leiter ist die Spannung zwischen den Aussenleitern $= 2e$; d. h. die Verteilung findet bei der doppelten Spannung statt; oder es wird nur der vierte Teil der Kupfermenge zur Übertragung desselben Effektes bei gleichem Verlust gebraucht, wenn, wie dies theoretisch möglich ist, der neutrale Leiter keinen Querschnitt besitzt. Wenn daher der neutrale Leiter denselben Querschnitt hat, wie jeder der Aussenleiter, so ist $\frac{3}{4}$ der Kupfermenge des Einphasensystems erforderlich. Wenn der neutrale Leiter $\frac{1}{2}$ des Querschnittes eines jeden der Aussenleiter beträgt, so ist $\frac{5}{8}$ der Kupfermenge erforderlich. In derselben Weise ist ein Einphasen-Fünfleitersystem ein Verteilungssystem bei der Spannung $4e$ und erfordert daher nur $\frac{1}{16}$ der Kupfermenge des Einphasensystems in den Aussenleitern, und wenn jeder der drei neutralen Leiter $\frac{1}{2}$ des Querschnitts der Aussenleiter beträgt, so ist $\frac{1}{16} = 10,93\%$ der Kupfermenge eines Einphasensystems erforderlich.

Im Dreiphasensystem mit der Spannung e zwischen den Leitungen als Δ -Spannung, und mit dem Strom i pro Leitung oder Y-Strom ist $\frac{i_1}{\sqrt{3}}$ der Strom von Leitung zu Leitung, oder der Δ -Strom; und da drei Zweige gebraucht werden, so ist $\frac{3ei_1}{\sqrt{3}} = ei_1\sqrt{3}$ der Gesamteffekt. Wird der gleiche Effekt von dem Dreiphasensystem wie von dem Einphasensystem übertragen, so muss somit der Strom

eines Dreiphasensystems $i_1 = \frac{i}{\sqrt{3}}$ sein. Folglich, wenn r_1 der Widerstand jeder der drei Leiter ist, so ist der Verlust pro Leitung $i_1^2 r = i^2 \frac{r_1}{3}$ und der Gesamtverlust $i^2 r_1$, während er in dem Einphasensystem $2 i^2 r$ ist. Bei gleichem Verluste folgt daraus $r_1 = r$; d. h. jeder der drei Dreiphasensysteme hat den doppelten Widerstand; d. h. die Hälfte der Kupfermenge eines jeden der beiden Einphasensysteme. Oder mit anderen Worten: Das Dreiphasensystem erfordert $\frac{1}{3}$ der Kupfermenge des Einphasensystems derselben Spannung.

Bei Einführung eines vierten neutralen Leiters in das Dreiphasensystem und Schaltung der Lampen zwischen den neutralen- und die drei Aussenleiter, d. h. in Y-Schaltung, ergibt sich als Spannung zwischen den Aussenleitern oder A -Spannung, $e \times \sqrt{3}$, da e die Y-Spannung ist, und die Spannung des Systems ist somit von e auf $e \sqrt{3}$ erhöht; d. h. es ist nur $\frac{1}{3}$ soviel Kupfer in den Aussenleitern wie im obigen Falle erforderlich; d. h. $\frac{1}{3}$ soviel Kupfer, als im Einphasen-Zweileitersystem erforderlich ist. Ist der neutrale Leiter von demselben Querschnitt wie die Aussenleiter, so ist $\frac{1}{3}$ mehr Kupfer, oder $\frac{1}{3} = 33,3\%$ der Kupfermenge des Einphasensystem erforderlich. Ist der neutrale Leiter von der Hälfte des Querschnitts, so ist $\frac{1}{3}$ mehr oder $\frac{1}{4} = 29,17\%$ der Kupfermenge des Einphasensystem erforderlich. Das System ist indessen jetzt ein Vierleitersystem.

Das unabhängige Vierphasensystem mit vier Leitern ist im Güteverhältnis gleich dem Einphasen-Zweileitersystem, da es weiter nichts ist, als zwei unabhängige Einphasensysteme, die zu einander senkrecht stehen.

Das Vierphasen-Vierleitersystem kann auch als zwei unabhängige Edison-Dreileitersysteme gebraucht werden und ergibt alsdann dieselbe Kupferersparnis, wenn die Spannung zwischen den Aussenleitern verdoppelt wird. In diesem

Falle hat es den Vorteil, dass durch Verkettung derselbe neutrale Leiter für beide Phasen gebraucht und daher einer der neutralen Leiter erspart werden kann.

In diesem Falle erfordert das Vierphasensystem mit gemeinsamem neutralem Leiter von vollem Querschnitt $i_0^5 = 31,25 \text{ } 0/0$ und das Vierphasensystem mit gemeinsamem neutralem Leiter von halbem Querschnitt $\frac{9}{32} = 28,125 \text{ } 0/0$ der Kupfermenge des Einphasen-Zweileitersystems.

In diesem Falle ist indessen das System ein Fünfleitersystem und als solches steht es in Bezug auf Leitungsgüteverhältnis bedeutend unter dem Einphasen-Fünfleitersystem.

Im Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung und der Spannung e pro Zweigkreis ist, wenn der Strom in den Aussenleitern i_2 ist, der Strom im Mittelleiter $i_2 \sqrt{2}$, und wenn dieselbe Stromdichte für alle drei Leiter gewählt wird, welches die Bedingung des besten Güteverhältnisses ist — und wenn der Widerstand eines jeden der Aussenleiter r_2 ist —, so ist der Widerstand des Mittelleiters $\frac{r_2}{\sqrt{2}}$ und der Effektverlust pro Aussenleiter $i_2^2 r_2$ in

dem Mittelleiter $\frac{2 i_2^2 r_2}{\sqrt{2}} = i_2^2 r_2 \sqrt{2}$. Daher ist der gesamte

Effektverlust $2 i_2^2 r_2 + i_2^2 r_2 \sqrt{2} = i_2^2 r_2 (2 + \sqrt{2})$. Der pro Zweig übertragene Effekt ist $i_2 e$, somit der gesamte Effekt $2 i_2 e$. Um denselben Effekt $e i$ zu übertragen, wie durch das Einphasensystem, muss $i_2 = \frac{i}{2}$ sein und somit der Verlust

$\frac{i^2 r_2 (2 + \sqrt{2})}{4}$. Da dieser Verlust derselbe sein soll, wie der Verlust $2 i^2 r$ im Einphasensystem, so muss er $2 r = \frac{(2 + \sqrt{2})}{4}$, oder $r_2 = \frac{8 r}{2 + \sqrt{2}}$ betragen. Deshalb muss jeder

der Aussenleiter $\frac{2 + \sqrt{2}}{8}$ mal so gross sein als jeder Ein-

phasenleiter und der Mittelleiter $\sqrt{2}$ mal grösser. Die erforderliche Kupfermenge für das Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung hat zu der im Einphasensystem erforderlichen Kupfermenge folgendes Verhältnis:

$$\frac{2(2 + \sqrt{2})}{8} + \frac{(2 + \sqrt{2})\sqrt{2}}{8} \div 2, \text{ oder, } \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8} \div 1, = 72,9\%$$

der Kupfermenge des Einphasensystems.

Das Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung spart somit 2% mehr Kupfer wie das Dreiphasensystem, steht indessen in Bezug auf Leitungsgüteverhältnis noch bedeutend unter dem Dreileiter-Einphasensystem.

Das umgekehrte Dreiphasensystem, das aus zwei elektromotorischen Kräften e von 60° Phasenverschiebung und drei gleichen Strömen i_3 in den drei Leitern von gleichem Widerstand r_3 besteht, giebt den Gesamteffekt $2 i_3 e$; d. h. verglichen mit dem Einphasensystem $i_3 = \frac{i}{2}$. Der Verlust in den drei Leitungen

ist $3 i_3^2 r_3 = \frac{3}{4} i^2 r_3$. Um denselben Verlust $2 i^2 r$ wie das

Einphasensystem zu ergeben, muss $r_3 = \frac{8}{3} r$ sein; d. h.

jeder der Dreileiter muss $\frac{8}{3}$ des Kupfer-Querschnittes des Leiters im Zweileiter-Einphasensystem haben. Oder mit anderen Worten: Das umgekehrte Dreiphasensystem erfordert $\frac{8}{3}$ der Kupfermenge des Einphasen-Zweileitersystems.

Es ergibt sich somit folgendes Resultat:

Soll ein bestimmter Effekt bei gegebenem Verlust und gegebener minimaler Spannung, z. B. 110 Volt für Beleuchtung übertragen werden, so ist die für die Leitung erforderliche Kupfermenge:

2 Leiter:	Einphasen-System	100
3 Leiter:	Edison-Dreileiter-Einphasensystem mit vollem Querschnitt des Mittelleiters	37,5
	Edison-Dreileiter-Einphasensystem mit halbem Querschnitt des Mittelleiters	31,25
	Umgekehrtes Dreiphasensystem	56,25
	Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung	72,9
	Dreiphasen-System	75
4 Leiter:	Dreiphasensystem mit Mittelleiter von vollem Querschnitt	33,33
	Dreiphasensystem mit Mittelleiter von halbem Querschnitt	29,17
	Unabhängiges Vierphasensystem	100
5 Leiter:	Edison-Fünfleiter-Einphasensystem mit vollem Querschnitt des Mittelleiters	15,625
	Edison-Fünfleiter-Einphasensystem mit halbem Querschnitt des Mittelleiters	10,93
	Vierleiter-Vierphasensystem mit gemeinsamem Mittelleiter von vollem Querschnitt	31,25
	Vierleiter-Vierphasensystem mit gemeinsamem Mittelleiter von halbem Querschnitt	28,125

Es ergibt sich hieraus, dass bei Stromverteilung für Beleuchtung das Einphasensystem bei gleicher minimaler Spannung und Leiterzahl jedem Mehrphasensysteme bedeutend überlegen ist.

Das Gleichstromsystem ist bei diesem Vergleich gleich dem Einphasen-Wechselstromsystem von gleicher Effektivspannung, da der Vergleich auf Grund der Effektivspannung gemacht ist und der Effekt ebenfalls von der Effektivspannung abhängt.

261. *Vergleich auf Grund der Gleichheit der maximalen Spannungsdifferenz in dem System in Fernleitungen, Kraftverteilung u. s. w.*

In Stromkreisen, in denen die Spannung so hoch ist, dass die Schwierigkeit der Isolierung der Leiter bedeutend wird, oder das Leben in Gefahr kommt, geschieht der

richtige Vergleich der verschiedenen Systeme auf Grund der Gleichheit der maximalen Spannung in dem System.

In diesem Falle, wo die maximale Spannung gegeben ist, ist somit kein Vorteil bei Verwendung von Edison-Drei- oder Fünfleitersystemen zu erwarten. Dieselben kommen somit nicht in Betracht.

Der Vergleich zwischen Dreiphasen- und Einphasensystem bleibt derselbe, da das Dreiphasensystem dieselbe maximale und minimale Spannung hat, d. h. das Dreiphasensystem erfordert $\frac{3}{4}$ der Kupfermenge des Einphasensystems, um denselben Effekt bei gleichem Verlust über dieselbe Entfernung zu übertragen.

Das Vierleiter-Vierphasensystem erfordert dieselbe Kupfermenge wie das Einphasensystem, da es aus zwei Einphasensystemen besteht.

Im Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung ist die Spannung zwischen den Aussenleitern $\sqrt{2}$ mal der Spannung pro Zweig. Bei gleicher Beanspruchung der Isolierung, somit gleicher Spannung e zwischen den Aussenleitern, wie im Einphasensystem, ist somit die Spannung pro Zweig $= \frac{e}{\sqrt{2}}$, folglich der Strom $i_4 = \frac{i}{\sqrt{2}}$, wo i dem Strom des Einphasensystems von gleichem Effekt gleicht, und $i_4 \sqrt{2} = i$ ist der Strom in dem Mittelleiter.

Ist somit r_4 der Widerstand des Aussenleiters, und $\frac{r_4}{\sqrt{2}}$ der Widerstand des Mittelleiters, so ist der gesamte Effektverlust des Systems

$$2 i_4^2 r_4 + \frac{i_4^2 2 r_4}{\sqrt{2}} = i_4^2 r_4 (2 + \sqrt{2}) = i^2 r_4 \frac{(2 + \sqrt{2})}{2}.$$

Da im Einphasensystem der Verlust $= 2 i^2 r$ ist, so ist:

$$r_4 = \frac{4 r}{2 + \sqrt{2}};$$

d. h. jeder der Aussenleiter muss $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ mal soviel Kupfer

enthalten, wie jeder der Einphasenleiter und die Mittelleiter $\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \sqrt{2}$ mal so viel Kupfer. Das gesamte System enthält somit $\frac{2(2 + \sqrt{2})}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \sqrt{2}$ mal so viel Kupfer als jeder der Einphasenleiter, d. h. $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{4}$ mal so viel Kupfer als das Einphasensystem.

Oder mit anderen Worten:

Ein Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung erfordert $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} = 1,457$ mal so viel Kupfer als ein Einphasensystem von gleicher Maximalspannung und gleichem Effektverlust.

Da der Vergleich auf Grund gleicher Maximalspannung gemacht ist und die Maximalspannung des Wechselstromsystems $\sqrt{2}$ mal der gleichen Effektivspannung eines Gleichstromstromkreises ist, so ist in Bezug auf Maximalspannung ein Wechselstromstromkreis von der Effektivspannung e gleich dem im Gleichstromstromkreise von der Spannung $e \sqrt{2}$, und der letztere verlangt somit nur $\frac{1}{2} = 50\%$ der Kupfermenge des Wechselstromkreises.

Indessen ist der Vergleich des Wechselstromes mit dem Gleichstrom nicht statthaft, da die Gleichstromspannung ausser der elektrostatischen Beanspruchung noch eine elektrolytische Beanspruchung auf das Dielektrikum bedingt, die im Wechselstromstromkreise nicht existiert und unter Umständen im Gleichstromstromkreise zerstörender auf die Isolierung einwirkt, wie die eines Wechselstromnetzes mit gleicher Spannung.

Ausserdem ist bei den Spannungen, die in Betracht kommen, der Gleichstrom von vornherein von der Verwendung ausgeschlossen.

Es ergibt sich somit folgendes:

Soll ein bestimmter Effekt bei gegebenem Verlust und gegebener maximaler Spannungsdifferenz des Systems, d. h.

derselben Beanspruchung der Isolierung, übertragen werden, so ist die erforderliche Kupfermenge, wie folgt:

2 Leiter:	Einphasensystem	100
	Gleichstromsystem	50
3 Leiter:	Dreiphasensystem	75
	Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung	145,7
4 Leiter:	Unabhängiges Vierphasensystem	100

Das Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung ist somit von der Verwendung für Fernleitungen praktisch ausgeschlossen.

262. Auf andere Weise lassen sich die vergleichswisen Resultate zwischen Einphasen-, Dreiphasen und Vierphasen - Systemen ableiten durch Zerlegung der Systeme in ihre Einphasen-Zweig-Systeme.

Das Dreiphasen-System mit der elektromotorischen Kraft e zwischen den Leitungen lässt sich betrachten als bestehend aus drei Einphasen-Stromkreisen von der elektromotorischen Kraft $\frac{e}{\sqrt{3}}$ ohne Rückleitung. Das Einphasen-System von der elektromotorischen Kraft e zwischen den Leitungen lässt sich betrachten als bestehend aus zwei Einphasen-Stromkreisen von der elektromotorischen Kraft $\frac{e}{2}$ ohne Rückleitung. Der relative Kupferverbrauch beider Systeme ist umgekehrt proportional dem Quadrat der elektromotorischen Kraft, steht somit im Verhältnis: $\left(\frac{\sqrt{3}}{e}\right)^2 : \left(\frac{2}{e}\right)^2 = 3:4$; d. h. das Dreiphasensystem erfordert 75% der Kupfermenge des Einphasensystems.

Das Vierphasensystem mit vier gleichen Leitern erfordert dieselbe Kupfermenge wie das Einphasensystem, da es aus zwei Einphasen-Stromkreisen besteht. Werden zwei der vier Leiter des Vierphasensystems durch einen gemeinsamen Leiter desselben Querschnittes ersetzt, so ist

der Strom in diesem gemeinsamen Leiter $\sqrt{2}$ mal so gross als in den anderen Leitern, somit der Effektverlust zweimal so gross; d. h. ebenso gross, wie in den beiden Leitern, die durch den gemeinsamen Leiter ersetzt wurden, oder der Gesamtverlust ist unverändert, während 25% des Kupfers gespart werden, und das System erfordert nur 75% der Kupfermenge des Einphasensystems, erzeugt aber eine $\sqrt{2}$ mal so hohe Spannung zwischen den Aussenleitern. Um dieselbe maximale Spannung zu ergeben, müssen daher die elektromotorischen Kräfte des Systems um $\frac{1}{\sqrt{2}}$ reduziert werden, d. h. die Kupfermenge verdoppelt werden, und daher erfordert das Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung von gleichem Querschnitt wie die Aussenleiter 150% der Kupfermenge des Einphasensystems. In diesem Falle ist indessen die Stromdichte im Mittelleiter grösser und das Kupfer nicht in der meist ökonomischen Weise verwendet. Bringt man einen Teil des Kupfers der Aussenleiter nach dem Mittelleiter, um alle drei auf die gleiche Stromdichte zu bringen, so wird der Effektverlust vermindert; oder bei gleichem Verluste wird die Kupfermenge auf 145,7% der Kupfermenge eines Einphasensystems verringert.

Kapitel XXIX.

Dreiphasen-System.

263. Bei gleicher Belastung und gleicher Phasenverschiebung aller drei Zweige zeigt das symmetrische Dreiphasensystem keine besonderen Merkmale vor denen dreier gleichbelasteter Einphasen-Systeme und kann daher als solches behandelt werden, da die gegenseitige Beeinflussung der drei Phasen bei gleicher Belastung gleich 0 ist; d. h. jede Phase wird von der vorhergehenden Phase in gleicher, aber entgegengesetzter Weise wie von der folgenden Phase beeinflusst.

Bei ungleicher Belastung der drei Zweige werden die Spannungen und Phasendifferenzen mehr oder minder ungleich. Diese unausgeglichene Effekte sind offenbar ein Maximum, wenn einzelne der Phasen voll belastet, andere unbelastet sind. Es sei:

E = elektromotorische Kraft zwischen Leitung 1 und 2 einer Dreiphasenmaschine. Dann ist:

εE = elektromotorische Kraft zwischen 2 und 3,

$\varepsilon^2 E$ = elektromotorische Kraft zwischen 3 und 1,

wo

$$\varepsilon = \sqrt[3]{1} = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}.$$

Es seien

Z_1, Z_2, Z_3 = die Impedanzen der von den Generatorklemmen 1, 2, 3 ausgehenden Leitungen

und Y_1, Y_2, Y_3 = die Admittanzen der zwischen Leitung 2 und 3, 3 und 1, und 1 und 2 geschalteten Verbrauchstromkreise

Sind dann:

I_1, I_2, I_3 die von den Klemmen 1, 2, 3 des Generators in die Leitungen fließenden Ströme, so ist

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (1)$$

Wenn I_1', I_2', I_3' die von 2 nach 3, 3 nach 1 und 1 nach 2 durch die Admittanzen Y_1, Y_2, Y_3 fließenden Ströme sind, so ist

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_3' - I_2', \text{ oder, } I_1 + I_2' - I_3' = 0 \\ I_2 &= I_1' - I_3', \text{ oder, } I_2 + I_3' - I_1' = 0 \\ I_3 &= I_2' - I_1', \text{ oder, } I_3 + I_1' - I_2' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Diese drei Gleichungen (2) addiert, ergibt (1) als abhängige Gleichung.

An den Enden der Leitungen 1, 2, 3 sind

$$\left. \begin{aligned} E_1' &= E_1 - Z_2 I_2 + Z_3 I_3 \\ E_2' &= E_2 - Z_3 I_3 + Z_1 I_1 \\ E_3' &= E_3 - Z_1 I_1 + Z_2 I_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

die Spannungsdifferenzen, und

$$\left. \begin{aligned} I_1' &= E_1' Y_1 \\ I_2' &= E_2' Y_2 \\ I_3' &= E_3' Y_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

die Ströme in den Speiseleitungen.

Diese neun Gleichungen (2), (3), (4) bestimmen die neun Grössen $I_1, I_2, I_3, I_1', I_2', I_3', E_1', E_2', E_3'$.

Gleichungen (4) in (2) eingesetzt, ergibt:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= E_3' Y_3 - E_2' Y_2 \\ I_2 &= E_1' Y_1 - E_3' Y_3 \\ I_3 &= E_2' Y_2 - E_1' Y_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese Gleichungen (5) eingesetzt in (3) und transponiert, ergeben

da $\left. \begin{aligned} E_1 &= \varepsilon E \\ E_2 &= \varepsilon^2 E \\ E_3 &= E \end{aligned} \right\}$ als elektromotorische Kräfte an den Generatoren.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon E - E_1'(1 + Y_1 Z_2 + Y_1 Z_3) + E_2' Y_2 Z_3 + E_3' Y_3 Z_2 &= 0 \\ \varepsilon^2 E - E_2'(1 + Y_2 Z_3 + Y_2 Z_1) + E_3' Y_3 Z_1 + E_1' Y_1 Z_3 &= 0 \\ E - E_3'(1 + Y_3 Z_1 + Y_3 Z_2) + E_1' Y_1 Z_2 + E_2' Y_2 Z_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

als drei lineare Gleichungen mit den drei Grössen E_1' , E_2' , E_3' .

Setzen wir diese Kürzungen ein:

$$\left. \begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} -(1 + Y_1 Z_2 + Y_1 Z_3), & Y_2 Z_3 & Y_3 Z_2 \\ Y_1 Z_3, & -(1 + Y_2 Z_3 + Y_2 Z_1), & Y_3 Z_1 \\ Y_1 Z_2, & Y_2 Z_1, & -(1 + Y_3 Z_1 + Y_3 Z_2) \end{vmatrix} \\
 D_1 &= \begin{vmatrix} \varepsilon, & Y_2 Z_3, & Y_3 Z_2 \\ \varepsilon^2, & -(1 + Y_2 Z_3 + Y_2 Z_1), & Y_3 Z_1 \\ 1, & Y_2 Z_1, & -(1 + Y_3 Z_1 + Y_3 Z_2) \end{vmatrix} \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} -(1 + Y_1 Z_2 + Y_1 Z_3), & \varepsilon, & Y_3 Z_2 \\ Y_1 Z_3, & \varepsilon^2, & Y_3 Z_1 \\ Y_1 Z_2, & 1, & -(1 + Y_3 Z_1 + Y_3 Z_2) \end{vmatrix} \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} -(1 + Y_1 Z_2 + Y_1 Z_2), & Y_2 Z_3, & \varepsilon \\ Y_1 Z_3, & -(1 + Y_2 Z_3 + Y_2 Z_1), & \varepsilon^2 \\ Y_1 Z_2, & Y_2 Z_1, & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

so ist:

$$\left. \begin{aligned}
 E_1' &= D_1/D \\
 E_2' &= D_2/D \\
 E_3' &= D_3/D
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_1' &= \frac{Y_1 D_1}{D} \\
 I_2' &= \frac{Y_2 D_2}{D} \\
 I_3' &= \frac{Y_3 D_3}{D}
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= \frac{Y_3 D_3 - Y_2 D_2}{D} \\
 I_2 &= \frac{Y_1 D_1 - Y_3 D_3}{D} \\
 I_3 &= \frac{Y_2 D_2 - Y_1 D_1}{D}
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{folglich: } \left. \begin{aligned}
 E_1' + E_2' + E_3' &= 0 \\
 I_1 + I_2 + I_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

264. Besondere Fälle.

A. Ausgeglichenes System.

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z.$$

Setzen wir dieses in (6) ein und transponieren, so erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = \varepsilon E \\ E_2 = \varepsilon^2 E \\ E_3 = E \end{array} \right\} \begin{array}{l} E_1' = \frac{\varepsilon E}{1 + 3YZ} \\ E_2' = \frac{\varepsilon^2 E}{1 + 3YZ} \\ E_3' = \frac{E}{1 + 3YZ} \end{array} \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1' = \frac{\varepsilon E Y}{1 + 3YZ} \\ I_2' = \frac{\varepsilon^2 E Y}{1 + 3YZ} \\ I_3' = \frac{E Y}{1 + 3YZ} \end{array} \right\} \begin{array}{l} I_1 = \frac{\varepsilon^2(\varepsilon - 1) E Y}{1 + 3YZ} \\ I_2 = \frac{(\varepsilon - 1) E Y}{1 + 3YZ} \\ I_3 = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1) E Y}{1 + 3YZ} \end{array}$$

als Gleichungen des symmetrisch ausgeglichenen Dreiphasensystems.

B. Ein Zweig belastet, zwei Zweige unbelastet.

$$Y_1 = Y_2 = 0, Y_3 = Y$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z.$$

Dieses in die Gleichungen (6) eingesetzt:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon E - E_1' + E_3' Y Z = 0 \\ \varepsilon^2 E - E_2' + E_3' Y Z = 0 \end{array} \right\} \text{unbelastete Zweige,}$$

$$E - E_3' (1 + 2 Y Z) = 0, \text{ belasteter Zweig,}$$

folglich:

$$\left. \begin{array}{l} E_1' = \frac{E \{ \varepsilon + (1 + 2\varepsilon) Y Z \}}{1 + 2 Y Z} \\ E_2' = \frac{E \{ \varepsilon^2 + (1 + 2\varepsilon^2) Y Z \}}{1 + 2 Y Z} \\ E_3' = \frac{E}{1 + 2 Y Z} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{unbelastet} \\ \text{belastet} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{alle drei} \\ \text{elektromo-} \\ \text{torischen} \\ \text{Kräfte} \\ \text{ungleich.} \end{array} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1' &= I_2' = 0 \\ I_3' &= \frac{EY}{1 + 2YZ} \\ I_1 &= \frac{EY}{1 + 2YZ} \\ I_2 &= -\frac{EY}{1 + 2YZ} \\ I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (13) \\ (13) \end{array}$$

C. Zwei Zweige belastet, ein Zweig unbelastet.

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_2 = Y, & Y_3 &= 0, \\ Z_1 &= Z_2 = Z_3 = Z. \end{aligned}$$

Setzen wir dieses in die Gleichungen (6) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon E - E_1'(1 + 2YZ) + E_2'YZ &= 0 \\ \varepsilon^2 E - E_2'(1 + 2YZ) + E_1'YZ &= 0 \end{aligned} \right\} \text{belastete Zweige,}$$

$$E - E_3' + (E_1' + E_2')YZ = 0 \text{ unbelasteter Zweig,}$$

oder da:

$$\begin{aligned} (E_1' + E_2') &= -E_3'; \\ E - E_3' - E_3'YZ &= 0, \\ E_3' &= \frac{E}{1 + YZ} \end{aligned}$$

folglich:

$$\left. \begin{aligned} E_1' &= \frac{E\varepsilon\{1 + (2 + \varepsilon)YZ\}}{1 + 4YZ + 3Y^2Z^2} \\ E_2' &= \frac{E\varepsilon^2\{1 + (2 + \varepsilon^2)YZ\}}{1 + 4YZ + 3Y^2Z^2} \\ E_3' &= \frac{E}{1 + YZ} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{belastete Zweige} \\ \text{unbelasteter Zweig} \end{array} \quad (14)$$

Wie ersichtlich werden alle drei Zweige bei unsymmetrischer Belastungsverteilung mehr oder weniger ungleich.

Kapitel XXX.

Vierphasen-System.

265. In einem Dreileiter-Vierphasen-System mit gemeinsamer Rückleitung beider Phasen seien die beiden Aussenklemmen und Leiter mit 1 und 2 und der Mittelleiter, bzw. die gemeinsame Rückleitung mit 0 bezeichnet.

Dann ist:

$E_1 = E =$ die elektromotorische Kraft zwischen 0 und 1 im Generator,

$E_2 = jE =$ die elektromotorische Kraft zwischen 0 und 2 im Generator.

Es seien:

I_1 und $I_2 =$ die Ströme in 1 und in 2,

$I_0 =$ der Strom in 0,

Z_1 und $Z_2 =$ die Impedanzen der Leitungen 1 und 2,

$Z_0 =$ die Impedanz der Leitung 0,

Y_1 und $Y_2 =$ die Admittanzen der Stromkreise 0 bis 1 und 0 bis 2,

I'_1 und $I'_2 =$ die Ströme in den Stromkreisen 0 bis 1 und 0 bis 2,

E'_1 und $E'_2 =$ die Spannungsdifferenzen am Stromkreis 0 bis 1 und 0 bis 2.

Dann ist: $I_1 + I_2 + I_0 = 0$ }
 oder: $I_0 = -(I_1 + I_2)$ } (1)

d. h. I_0 ist die gemeinsame Rückleitung von I_1 und I_2 .

Ferner sei:

$$\left. \begin{aligned} E'_1 &= E - I_1 Z_1 + I_0 Z_0 = E - I_1 (Z_1 + Z_0) - I_2 Z_0 \\ E'_2 &= jE - I_2 Z_0 + I_0 Z_0 = jE - I_2 (Z_2 + Z_0) - I_1 Z_1 \end{aligned} \right\} (2)$$

und

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_1 E_1' \\ I_2 &= Y_2 E_2' \\ I_0 &= -(Y_1 E_1' + Y_2 E_2') \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Setzen wir (3) in (2) ein, und entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} E_1' &= E \frac{1 + Y_2 Z_2 + Y_2 Z_0 (1 - j)}{(1 + Y_1 Z_0 + Y_1 Z_1)(1 + Y_2 Z_0 + Y_2 Z_2) - Y_1 Y_2 Z_0^2} \\ E_2' &= jE \frac{1 + Y_1 Z_1 + Y_1 Z_0 (1 + j)}{(1 + Y_1 Z_0 + Y_1 Z_1)(1 + Y_2 Z_0 + Y_2 Z_2) - Y_1 Y_2 Z_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die beiden elektromotorischen Kräfte am Ende der Leitung sind daher in ihrer Grösse ungleich und stehen nicht mehr senkrecht zu einander.

266. Besondere Fälle.

A. Ausgeglichenes System.

$$Z_1 = Z_2 = Z;$$

$$Z_0 = Z/\sqrt{2};$$

$$Y_1 = Y_2 = Y.$$

Diese Werte in (4) eingesetzt, ergibt:

$$\left. \begin{aligned} E_1' &= E \frac{1 + \frac{1 + \sqrt{2} - j}{\sqrt{2}} YZ}{1 + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2} YZ + (1 + \sqrt{2}) Y^2 Z^2)} \\ &= E \frac{1 + (1,707 - 0,707j) YZ}{1 + 3,414 YZ + 2,414 Y^2 Z^2} \\ E_2' &= jE \frac{1 + \frac{1 + \sqrt{2} + j}{\sqrt{2}} YZ}{1 + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) YZ + (1 + \sqrt{2}) Y^2 Z^2} \\ &= jE \frac{1 + (1,707 + 0,707j) YZ}{1 + 3,414 YZ + 2,414 Y^2 Z^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Das ausgeglichene Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung ist somit in Bezug auf Spannung und Phasenverschiebung unausgeglichen; oder mit anderen Worten, selbst wenn im Vierphasensystem mit gemeinsamer Rückleitung beide Zweige oder Phasen gleich und mit gleicher Phasenverschiebung belastet sind, wird das System gleichviel unausgeglichen und die beiden elektromotorischen Kräfte am Ende der Leitung sind weder gleich, noch senkrecht zu einander.

B. Ein Zweig belastet; ein Zweig unbelastet.

$$Z_1 = Z_2 = Z; \quad Z_0 = Z\sqrt{2}.$$

a) $Y_1 = 0, \quad Y_2 = Y.$

b) $Y_1 = Y, \quad Y_2 = 0.$

Setzen wir diese Werte in (4) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{a) } E_1' &= E \frac{1 + YZ \frac{1 + \sqrt{2} - j}{\sqrt{2}}}{1 + YZ \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \\ &= E \left\{ 1 - \frac{j}{1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{YZ}} \right\} \\ &= E \left\{ 1 - \frac{j}{2,414 + \frac{1,414}{YZ}} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} E_2' &= jE \frac{1}{1 + YZ \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \\ &= jE \frac{1}{1 + 1,707 YZ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } E_1' &= E \frac{1}{1 + YZ \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \\ &= E \frac{1}{1 + 1,707 YZ} \\ E_2' &= jE \frac{1 + YZ \frac{1 + \sqrt{2} + j}{\sqrt{2}}}{1 + YZ \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= jE \left\{ 1 + \frac{j}{1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{YZ}} \right\} \\ &= jE \left\{ 1 + \frac{j}{2,414 + \frac{1,414}{YZ}} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Diese beiden elektromotorischen Kräfte sind ungleich und stehen nicht senkrecht zu einander.

Die Werte im Falle a) sind indessen verschieden von den Werten im Falle b).

D. h. die beiden Phasen eines Dreileiter-Vierphasensystems sind unsymmetrisch und die voreilende Phase 1 wirkt auf die zurückbleibende Phase 2 in verschiedener Weise ein als Phase 2 auf Phase 1.

Die Benutzung eines Dreileiter - Vierphasensystems ist daher nicht empfehlenswert, ausser in Fällen, wo die Leitungs-Impedanzen Z vernachlässigt werden können.

In allen anderen Fällen ist das Vierleiter-Vierphasensystem vorzuziehen, das im wesentlichen aus zwei unabhängigen Einphasensystemen besteht und als solches behandelt wird.

Augenscheinlich können selbst in einem unabhängigen Vierphasensystem bei ungleicher Belastung unausgeglichene Effekte auftreten.

Ist einer der Zweige oder Phasen verschieden von der andern belastet, so ist der Spannungsverlust und die Phasenverschiebung verschieden von den entsprechenden Grössen in dem anderen Zweige und somit sind die elektromotorischen Kräfte am Ende der Leitung weder gleich an Grösse, noch senkrecht zu einander.

Bei gleicher Belastung beider Zweige bleibt dagegen das System in Spannung und Phase ausgeglichen, ebenso wie das Dreiphasensystem unter den gleichen Bedingungen.

Das Vierleiter-Vierphasensystem und das Dreiphasensystem sind also bei gleicher Belastung in Bezug auf Spannung und Phase ausgeglichen, werden aber bei ungleicher Verteilung unausgeglichene. Das Dreileiter-Vierphasensystem dagegen ist selbst bei gleicher Belastung in Bezug auf Spannung und Phase unausgeglichene.

Anhang.

—

Anhang I.

Algebra komplexer imaginärer Grössen.

Einleitung.

267. Das Zahlensystem, mit dem die Algebra zu thun hat, hat seinen Ursprung in der Erfahrung. Direkt abgeleitet von der Erfahrung sind indessen nur die absoluten ganzen Zahlen. Brüche z. B. sind nicht direkt der Erfahrung entnommen, sondern sind Abstraktionen, die Beziehungen zwischen verschiedenen Klassen von Grössen ausdrücken. So z. B. ergeben sich durch Teilung einer Grösse in zwei gleiche Teile zwei Grössen, und die Bezeichnung der letzteren als „Halbe“ drückt eine Beziehung aus, nämlich die, dass zwei Grössen dieser Art von einer der ursprünglichen Grössen abgeleitet sind, oder zu derselben zusammengesetzt werden können.

268. Direkt der Erfahrung entnommen ist das *Zählen*.

$$a, a + 1, a + 2, a + 3 \dots$$

Zählt man eine bestimmte Zahl von Ganzen:

$$a + \underbrace{1 + 1 + 1 \dots + 1}_{b \text{ Ganze}} = c,$$

so kommt man zur Addition, als dem mehrfachen Zählen:

$$a + b = c.$$

Es ist:

$$a + b = b + a,$$

d. h. die Glieder der Addition oder Summanden sind vertauschbar.

Mehrfache Addition derselben Ausdrücke:

$$\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ gleiche Zahlen}} = c$$

führt die Multiplikation ein:

$$a \times b = c.$$

Es ist

$$a \times b = b \times a,$$

d. h. die Glieder der Multiplikation oder Faktoren sind vertauschbar.

Mehrfache Multiplikation gleicher Faktoren:

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{b \text{ gleiche Zahlen}} = c$$

führt das Potenzieren ein:

$$a^b = c.$$

Da

$$a^b \text{ nicht gleich } b^a$$

ist, so sind die Glieder der Potenzen nicht vertauschbar.

269. Die umgekehrte Operation der Addition führt zur Subtraktion.

Wenn

$$a + b = c,$$

so ist

$$c - b = a.$$

Diese Operation kann im System ganzer und absoluter Zahlen nicht mehr ausgeführt werden, wenn

$$b > c.$$

Um daher die Subtraktion unter allen Umständen auszuführen, muss das System absoluter Zahlen durch die Einführung der *negativen Zahl* erweitert werden:

$$-a = \frac{(-1) \times a}{(-1)}$$

wo

die negative Einheit ist.

Dadurch ist das System der Zahlen unterteilt in positive und negative Zahlen und die Subtraktion möglich für alle Werte des Subtrahenden und des Minuenden, oder

$$(-1) \times (-1) = 1;$$

d. h. die negative Einheit ist definiert durch die Gleichung

$$(-1)^2 = 1.$$

270. Die Umkehrung der Multiplikation führt zur *Division*:

$$\text{Wenn} \quad a \times b = c,$$

$$\text{so ist} \quad \frac{c}{b} = a.$$

Im System ganzer Zahlen lässt sich diese Operation nur ausführen, wenn b ein Faktor von c ist.

Um die Division unter allen Umständen durchführbar zu machen, muss das System der ganzen Zahlen erweitert werden durch Einführung der *Brüche*:

$$\frac{c}{b} = c \times \left(\frac{1}{b}\right),$$

$$\text{wo} \quad \frac{1}{b}$$

der ganze Bruch ist, und definiert ist durch:

$$\left(\frac{1}{b}\right) \times b = 1.$$

271. Die Umkehr des Potenzierens führt zwei neue Rechnungsweisen ein, da beim Potenzieren:

$$a^b = c$$

die Glieder a und b nicht vertauschbar sind.

Folglich $\sqrt[b]{c} = a$, das Wurzelziehen (Radizieren).

$\log_a c = b$, das Logarithmieren.

Das Wurzelziehen aus Grössen c , welche nicht ganze Potenzen sind, macht eine Erweiterung des Zahlensystems notwendig durch Einführung der *irrationalen Einheit*, z. B.:

$$\sqrt{2} = 1,414213.$$

272. Das Wurzelziehen aus negativen Grössen c mit geraden Exponenten b , z. B.

$$\sqrt[2]{-a}$$

macht wieder eine Erweiterung des Zahlensystems not-

wendig durch Einführung der *imaginären Einheit*:

$$\sqrt{-1}.$$

Folglich
$$\sqrt[2]{-a} = \sqrt[2]{-1} \times \sqrt[2]{a},$$

wo: $\sqrt{-1}$ mit j bezeichnet wird.

Die imaginäre Einheit ist somit definiert durch

$$j^2 = -1.$$

Durch Addition und Subtraktion reeller und imaginärer Einheiten ergeben sich zusammengesetzte Zahlen von der Form:

$$a + jb,$$

welche als komplexe imaginäre Zahlen bezeichnet werden.

Eine fernere Erweiterung des Zahlensystems wird durch das Wurzelziehen nicht eingeführt.

Das Logarithmieren führt gleichfalls zur irrationalen und imaginären und komplexen imaginären Zahlen, jedoch zu keinem weiteren Zahlensystem.

273. Von der absoluten ganzen Zahl der Erfahrung ausgehend, ergeben sich somit durch die beiden Bedingungen:

1. Möglichkeit der Ausführung der algebraischen Operationen und ihrer Umkehr-Operationen für alle Bedingungen,

2. Allgemeine Gültigkeit der Rechnungsgesetze für das erweiterte Zahlensystem, die Erweiterung des Zahlensystems in positive und negative Zahlen, ganze Zahlen und Brüche, rationale und irrationale Zahlen, reelle und imaginäre Zahlen und komplexe imaginäre Zahlen.

Hiermit schliesst das Feld der Algebra und alle algebraischen Operationen und ihre Umkehr-Operationen lassen sich ausführen für alle Werte der in die Rechnung eintretenden Zahlengrößen.

Innerhalb des Gebiets der Algebra ist somit keine weitere Ausdehnung des Zahlensystems nötig, oder möglich, und die allgemeinste Zahl ist

$$a + jb,$$

wo a und b ganze Zahlen, oder Brüche, positiv oder negativ, rational oder irrational sein können.

Algebraische Operationen mit komplexen imaginären Grössen.

274. *Definition der imaginären Einheit:*

$$j^2 = -1.$$

Komplexe imaginäre Zahl.

$$A = a + jb.$$

Setzt man ein:

$$a = r \cos \beta$$

$$b = r \sin \beta,$$

so ist:

$$A = r (\cos \beta + j \sin \beta),$$

wo:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{tang } \beta = \frac{b}{a},$$

$r =$ Vektor,

$\beta =$ Amplitude der komplexen imaginären Zahl A .

Setzt man ein:

$$\cos \beta = \frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2j}.$$

so ist:

$$A = r e^{j\beta},$$

wo $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_0^{\infty} \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k}$

die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Konjugierte Zahlen:

$$a + jb = r (\cos \beta + j \sin \beta) = r e^{j\beta}$$

und $a - jb = r (\cos [-\beta] + j \sin [-\beta]) = r e^{-j\beta}$

so ist: $(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = r^2$

Associierte Zahlen:

$$a + jb = r (\cos \beta + j \sin \beta) r e^{j\beta}$$

$$\text{und } b + ja = r \left(\cos \left[\frac{\pi}{2} - \beta \right] + j \sin \left[\frac{\pi}{2} - \beta \right] \right) = r e^{j \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)};$$

$$\text{so ist: } (a + jb)(b + ja) = j(a^2 + b^2) = jr^2.$$

$$\text{Wenn: } a + ib = a' + jb',$$

$$\text{so ist: } \begin{aligned} a &= a' \\ b &= b'. \end{aligned}$$

$$\text{Wenn: } a + jb = 0,$$

$$\text{so ist: } \begin{aligned} a &= 0, \\ b &= 0. \end{aligned}$$

275. Addition und Subtraktion:

$$(a + jb) \pm (a' + jb') = (a \pm a') + j(b \pm b').$$

Multiplikation:

$$(a + jb)(a' + jb') = (aa' - bb') + j(ab' + ba')$$

$$\text{oder: } r(\cos \beta + j \sin \beta) \times r'(\cos \beta' + j \sin \beta') = rr'(\cos [\beta + \beta'] + j \sin [\beta + \beta']);$$

$$\text{oder: } r e^{j\beta} \times r' e^{j\beta'} = rr' e^{j(\beta + \beta')}.$$

Division:

Erweiterung des komplexen imaginären Bruches zum Rationalmachen von Nenner oder Zähler durch Multiplikation mit der konjugierten Grösse:

$$\begin{aligned} \frac{a + jb}{a' + jb'} &= \frac{(a + jb)(a' - jb')}{(a' + jb')(a' - jb')} = \frac{(aa' + bb') + j(ba' - ab')}{a'^2 + b'^2}; \\ &= \frac{(a + jb)(a - jb)}{(a' + jb')(a - jb)} = \frac{a^2 + b^2}{(aa' + bb') + j(ab' + ba')}; \end{aligned}$$

$$\text{oder: } \frac{r(\cos \beta + j \sin \beta)}{r'(\cos \beta' + j \sin \beta')} = \frac{r}{r'} (\cos [\beta - \beta'] + j \sin [\beta - \beta']);$$

$$\text{oder: } \frac{r e^{j\beta}}{r' e^{j\beta'}} = \frac{r}{r'} e^{j(\beta - \beta')}.$$

Potenzieren:

$$\begin{aligned} (a + jb)^n &= \{r(\cos \beta + j \sin \beta)\}^n = \{r e^{j\beta}\}^n \\ &= r^n (\cos n\beta + j \sin n\beta) = r^n e^{jn\beta}. \end{aligned}$$

Wurzelziehen (Radizieren):

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a + jb} &= \sqrt[n]{r(\cos \beta + j \sin \beta)} = \sqrt[n]{r} e^{j\beta/n} \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\beta}{n} + j \sin \frac{\beta}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{j\frac{\beta}{n}}.\end{aligned}$$

276. Wurzeln der Einheit:

$$\sqrt[2]{1} = +1, -1,$$

$$\sqrt[3]{1} = +1, \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt[4]{1} = +1, -1, +j, -j;$$

$$\begin{aligned}\sqrt[8]{1} &= +1, -1, +j, -j, \frac{+1 + j\sqrt{2}}{2}, \frac{+1 - j\sqrt{2}}{2}, \\ &\quad \frac{-1 + j\sqrt{2}}{2}, \frac{-1 - j\sqrt{2}}{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1} &= \cos \frac{2\pi k}{n} + j \sin \frac{2\pi k}{n} = e^{\frac{2\pi jk}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots \\ &\quad n - 1.\end{aligned}$$

277. Rotation:

In den komplexen imaginären Ebenen bedeutet Multiplikation mit

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n} = e^{\frac{2\pi j}{n}}$$

Rotation in positiver Richtung durch $\frac{1}{n}$ Umdrehung,

Multiplikation mit (-1) bedeutet Umkehrung oder Rotation um 180° ,

Multiplikation mit $(+j)$ bedeutet positive Rotation um 90° ,

Multiplikation mit $(-j)$ bedeutet negative Rotation um 90° .

278. Komplexe imaginäre Ebene.

Die positiven und negativen Zahlen können bekanntlich als Punkte einer Linie dargestellt werden. Die komplexen imaginären Zahlen lassen sich durch die Punkte

einer Ebene darstellen, mit der Horizontalaxe als reelle Axe und der Vertikalaxe als imaginäre Axe. Alsdann sind:

- alle positiven reellen Zahlen durch Punkte der rechten oder Halbaxe \overline{OA} ,
- alle negativen reellen Zahlen durch Punkte der linken oder Halbaxe \overline{OA} ,
- alle positiven imaginären Zahlen durch Punkte der oberen oder Halbaxe \overline{OB} ,
- alle negativen imaginären Zahlen durch Punkte der unteren oder Halbaxe \overline{OB}

dargestellt.

Die komplexen imaginären Zahlen sind durch die Punkte ausserhalb der Koordinaten-Axen dargestellt.

Anhang II.

Oscillierende Ströme.

Einleitung.

279. Ein periodisch zwischen konstanten Maximal- und Minimalwerten variierender elektrischer Strom wird ein Wechselstrom genannt, wenn der arithmetische Mittelwert $= 0$ ist, und ein pulsierender Strom, wenn der arithmetische Mittelwert von 0 verschieden ist.

Wird die Wechselstromwelle als Sinuswelle angenommen, oder durch die aequivalente Sinuswelle ersetzt, so wird der Wechselstrom charakterisiert durch die Periode, oder die Zeit eines vollständigen Kreislaufes und die Amplitude, oder den Maximalwert der Welle. Periode und Amplitude eines Wechselstromes sind daher konstant.

Eine wichtige Klasse bilden die Ströme mit konstanter Periode, aber mit geometrisch veränderlicher Amplitude; d. h. Ströme, in denen die Amplitude jeder folgenden Welle zu derjenigen der vorhergehenden Welle in konstantem Verhältnis steht. Solche Ströme bestehen aus einer Reihe von Wellen konstanter Länge, die in Amplitude oder Intensität in konstantem Verhältnis abnehmen.

Dieselben werden oscillierende Ströme genannt, analog der mechanischen Oscillation — wie z. B. des Pendels —, wo die Amplitude gleichfalls in konstantem Verhältnis abnimmt.

Da die Amplitude oscillierender Ströme sich verändert, und konstant abnimmt, so unterscheiden sich oscillierende Ströme von Wechselströmen dadurch, dass sie in einem be-

stimmten Zeitmoment beginnen und allmählich abnehmen, und den Nullwert erreichen in theoretisch unendlicher Zeit, praktisch gewöhnlich in sehr kurzer Zeit, d. h. einer Zeit, die im allgemeinen sehr klein ist, selbst im Vergleich zu der Zeit einer Wechselstromhalbwelle.

Charakteristische Konstanten des oscillierenden Stromes sind die Periode T oder Frequenz $N = \frac{1}{T}$, die erste Am-

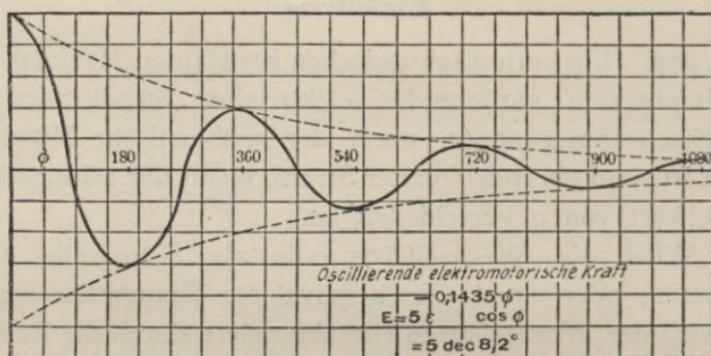


Fig. 181.

plitude und das Verhältnis zweier aufeinander folgender Amplituden, welche das Dekrement der Welle genannt werden. Der oscillierende Strom lässt sich somit durch das Produkt einer periodischen Funktion und einer in geometrischem Verhältnis mit der Zeit abnehmenden Funktion darstellen. Letztere ist die Exponential-Funktion $A e^{-g t}$.

280. Der allgemeine Ausdruck eines oscillierenden Stromes ist somit

$$I = A e^{-g t} \cos (2 \pi N t - \omega),$$

da

$$A e^{-g t} = A e^{-a t} e^{-b t} = i \varepsilon^{-b t}.$$

Wenn ε die Basis der natürlichen Logarithmen ist, kann der oscillierende Strom ausgedrückt werden durch

$$I = i \varepsilon^{-bt} \cos(2\pi Nt - \omega) = c \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega),$$

wo $\varphi = 2\pi Nt$ ist; d. h. die Periode ist durch eine vollständige Umdrehung dargestellt.

In derselben Weise lässt sich eine oscillierende elektromotorische Kraft durch die Gleichung ausdrücken:

$$E = e \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega).$$

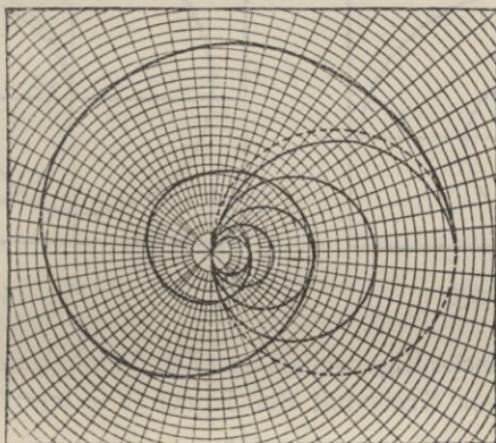


Fig. 182.

Eine solche oscillierende elektromotorische Kraft für die Werte:

$$e = 5, \alpha = 0,1435 \text{ oder } \varepsilon^{-2\pi\alpha} = 0,4, \omega = 0$$

ist in rechtwinkligen Koordinaten in Fig. 181 dargestellt, und in Polar-Koordinaten in Fig. 182. Wie aus Fig. 181 ersichtlich, berührt die oscillierende Welle in rechtwinkligen Koordinaten die beiden Exponentialkurven:

$$y = \pm e \varepsilon^{-a\varphi}.$$

281. In Polar-Koordinaten ist die oscillierende Welle durch eine Spirale dargestellt, die zweimal pro Periode

durch den Nullpunkt geht und die Exponential-Spirale
 $y = \pm e \varepsilon^{-a\varphi}$
 berührt, wie aus Fig. 182 ersichtlich.

Letztere wird die Envelope eines Systems oscillirender Wellen genannt und ist in Fig. 183 separat dargestellt, mit denselben Konstanten, wie in Fig. 181 und 182. Ihre

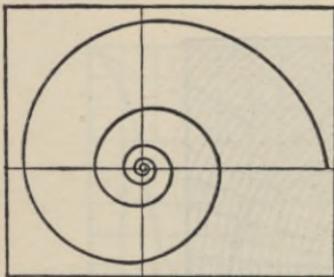


Fig. 183.

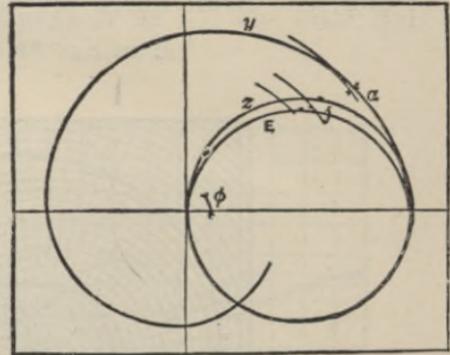


Fig. 184.

charakteristische Eigenschaft ist: Der Winkel, den irgend ein konzentrischer Kreis mit der Kurve $y = e \varepsilon^{-a\varphi}$ macht, ist

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy}{y d\varphi} = -\alpha,$$

und ist somit konstant, d. h.: „Die Envelope des oscillirenden Stromes ist die Exponential-Spirale, welche durch einen konstanten Schnittwinkel mit allen konzentrischen Kreisen oder Radienvektoren charakterisiert ist“. Der oscillirende Strom ist das Produkt der Sinuswelle und der Exponential-Spirale.

282. Es sei in Fig. 184 $y = e \varepsilon^{-a\varphi}$ die Exponential-Spirale und

$$z = e \cos(\varphi - a)$$

die Sinuswelle; ferner

$$E = e \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega)$$

die oscillirende Welle.

Es ist alsdann:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \beta &= \frac{dE}{E d\varphi} \\ &= \frac{-\sin(\varphi - \omega) - a \cos(\varphi - \omega)}{\cos(\varphi - \omega)} \\ &= -\{\operatorname{tang}(\varphi - \omega) + a\}; \end{aligned}$$

d. h. während die Steigung der Sinuswelle $z = e \cos(\varphi - \omega)$,

$$\operatorname{tang} \gamma = -\operatorname{tang}(\varphi - \omega)$$

und die Steigung der Exponential-Spirale $y = e \varepsilon^{-a\varphi}$ konstant ist

$$\operatorname{tang} a = -a,$$

ist die Steigung der oscillierenden Welle $E = e \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega)$

$$\operatorname{tang} \beta = -\{\operatorname{tang}(\varphi - \omega) + a\}.$$

Dieselbe ist somit grösser wie die der Wechselstromwelle und zwar um die Konstante a . Das Verhältnis der Amplituden zweier aufeinander folgenden Perioden ist

$$A = \frac{E_{2\pi}}{E_0} = \varepsilon^{-2\pi a}.$$

A wird das numerische Dekrement, a das Exponential-Dekrement und α das Winkeldekrement der oscillierenden Welle genannt. Die oscillierende Welle lässt sich durch die Gleichung ausdrücken:

$$E = e \varepsilon^{-\varphi \operatorname{tang} a} \cos(\varphi - \omega).$$

In dem in Figg. 181 und 182 dargestellten Beispiel

$$\text{ist } A = 0,4, \quad a = 0,1435, \quad \alpha = 8,2^0.$$

Impedanz und Admittanz.

283. In komplexen imaginären Grössen ist die Wechselstromwelle

$$z = e \cos(\varphi - \omega)$$

dargestellt durch das Symbol

$$E = e(\cos \omega + j \sin \omega) = e_1 + j e_2.$$

Unter Erweiterung dieses symbolischen Ausdrucks lässt sich die oscillierende Welle $E = e \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega)$ durch das Symbol darstellen:

$$E = e (\cos \omega + j \sin \omega) \operatorname{dec} \alpha = (e_1 + j e_2) \operatorname{dec} \alpha,$$

wo $a \operatorname{tang} \alpha$ das Exponential-Dekrement, α das Winkel-Dekrement und $\varepsilon^{-2\pi a}$ das numerische Dekrement ist.

Induktanz.

284. Es sei $r =$ Widerstand, $L =$ Induktanz und $x = 2\pi N L =$ Reaktanz in einem Stromkreise, der von dem oscillierenden Strome durchflossen wird:

$$I = i \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega) = i (\cos \omega + j \sin \omega) \operatorname{dec} \alpha \\ = (i_1 + j i_2) \operatorname{dec} \alpha,$$

wo:

$$i_1 = i \cos \omega, \quad i_2 = i \sin \omega, \quad a = \operatorname{tang} \alpha.$$

Die vom Widerstand r des Stromkreises verbrauchte elektromotorische Kraft ist sodann:

$$E_r = r I \operatorname{dec} \alpha.$$

Die von der Induktanz L des Stromkreises verbrauchte elektromotorische Kraft ist

$$E_x = L \frac{dI}{dt} = 2\pi N L \frac{dI}{d\varphi} = x \frac{dI}{d\varphi}.$$

$$\text{Folglich } E_x = -x i \varepsilon^{-a\varphi} \{ \sin(\varphi - \omega) + a \cos(\varphi - \omega) \} \\ = -\frac{x i \varepsilon^{-a\varphi}}{\cos \alpha} \sin(\varphi - \omega + \alpha).$$

Daher in symbolischer Darstellung:

$$E_x = -\frac{x i}{\cos \alpha} \{ \sin(\omega - \alpha) + j \cos(\omega - \alpha) \} \operatorname{dec} \alpha \\ = -x i (a + j) (\cos \omega + j \sin \omega) \operatorname{dec} \alpha;$$

$$\text{d. h. } E_x = -x I (a + j) \operatorname{dec} \alpha.$$

D. h. die scheinbare Reaktanz des oscillierenden Stromkreises ist in symbolischer Darstellung:

$$X = x (a + j) \operatorname{dec} \alpha,$$

enthält somit eine Energie-Komponente $a x$, und die Impedanz ist:

$$Z = (r - X) \operatorname{dec} \alpha = \{ r - x(a + j) \} \operatorname{dec} \alpha = (r - ax - jx) \operatorname{dec} \alpha.$$

Kapazität.

285. Es sei $r =$ Widerstand, $C =$ Kapazität und $x_c = 1/2 \pi C =$ Kapazitäts-Reaktanz. In einem Stromkreise, der vom oscillierenden Strom I durchflossen wird, ist die von der Kapazität C verbrauchte elektromotorische Kraft

$$E_x = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{2 \pi N C} \int I d\varphi = k \int I d\varphi;$$

oder eingesetzt:

$$\begin{aligned} E_x &= x \int i \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega) d\varphi \\ &= \frac{x}{1 + a^2} i \varepsilon^{-a\varphi} \{\sin(\varphi - \omega) - a \cos(\varphi - \omega)\} \\ &= \frac{x i \varepsilon^{-a\varphi}}{(1 + a^2) \cos \alpha} \sin(\varphi - \omega - \alpha); \end{aligned}$$

somit in symbolischer Darstellung

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{x i}{(1 + a^2) \cos \alpha} \{-\sin(\omega + \alpha) + j \cos(\omega + \alpha)\} \text{dec } \alpha \\ &= \frac{x i}{1 + a^2} (a + j) (\cos \omega + j \sin \omega) \text{dec } \alpha; \end{aligned}$$

folglich

$$E_x = \frac{x}{1 + a^2} (-a + j) I \text{dec } \alpha;$$

d. h. die scheinbare Kapazitäts-Reaktanz des oscillierenden Stromkreises ist in symbolischer Darstellung

$$C = \frac{x_c}{1 + a^2} (-a + j) \text{dec } \alpha.$$

286. Es ergibt sich somit:

In einem oscillierenden Stromkreis mit dem Widerstand r , der induktiven Reaktanz x und der Kapazitäts-Reaktanz x_c mit einem Exponential-Dekrement α ist die scheinbare Impedanz in symbolischer Darstellung:

$$\begin{aligned} Z &= \left\{ r - x(a + j) + \frac{x_c}{1 + a^2} (-a + j) \right\} \text{dec } \alpha, \\ &= \left\{ r - a \left(x + \frac{x_c}{1 + a^2} \right) - j \left(x - \frac{x_c}{1 + a^2} \right) \right\} \text{dec } \alpha, \\ &= r_a - j x_a; \end{aligned}$$

und absolut

$$\begin{aligned} z_a &= \sqrt{r_a^2 + x_a^2} \\ &= \sqrt{\left[r - a \left(x + \frac{x_c}{1 + a^2}\right)\right]^2 + \left[x - \frac{x_c}{1 + a^2}\right]^2}. \end{aligned}$$

Admittanz.

287. Es sei der Strom

$$I = i \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega).$$

Aus der vorangegangenen Diskussion ergibt sich somit als die vom Widerstand r , induktiver Reaktanz x und Kapazitäts-Reaktanz x_c verbrauchte elektromotorische Kraft

$$\begin{aligned} E &= i e^{-a\varphi} \left\{ \cos(\varphi - \omega) \left[r - ax - \frac{a}{1 + a^2} x_c \right] - \sin(\varphi - \omega) \right. \\ &\quad \left. \left[x - \frac{x_c}{1 + a^2} \right] \right\} \\ &= i z_a \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega + \delta), \end{aligned}$$

$$\text{wo: } \operatorname{tang} \delta = \frac{x - \frac{x_c}{1 + a^2}}{r - ax - \frac{a}{1 + a^2} x_c};$$

$$z_a = \sqrt{\left(x - \frac{x_c}{1 + a^2}\right)^2 + \left(r - ax - \frac{a}{1 + a^2} x_c\right)^2};$$

$\omega + \delta$ für ω eingesetzt, und $e = i z_a$ ergibt

$$E = e \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega),$$

$$I = \frac{e}{z_a} \varepsilon^{-a\varphi} \cos(\varphi - \omega - \delta)$$

$$= e \varepsilon^{-a\varphi} \left\{ \frac{\cos \delta}{z_a} \cos(\varphi - \omega) + \frac{\sin \delta}{z_a} \sin(\varphi - \omega) \right\};$$

somit in komplexen Grössen

$$E = e (\cos \omega + j \sin \omega) \operatorname{dec} \alpha,$$

$$I = E \left\{ \frac{\cos \delta}{z_a} + j \frac{\sin \delta}{z_a} \right\} \operatorname{dec} \alpha;$$

oder eingesetzt:

$$I = E \left\{ \frac{r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c}{\left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)^2 + \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c\right)^2} + j \frac{x - \frac{x_c}{1+a^2}}{\left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)^2 + \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c\right)^2} \right\} \text{dec } a$$

288. In komplexen Grössen ergibt sich somit für oscillierende Ströme: Konduktanz:

$$g = \frac{r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c}{\left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)^2 + \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c\right)^2};$$

Suszeptanz:

$$b = \frac{x - \frac{x_c}{1+a^2}}{\left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)^2 + \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c\right)^2};$$

Admittanz, in absoluten Werten:

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)^2 + \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c\right)^2}};$$

in symbolischer Darstellung:

$$Y = g + jb = \frac{\left(r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c\right) + j\left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)}{\left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)^2 + \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c\right)^2}.$$

Da die Impedanz

$$Z = \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2}x_c\right) - j\left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right) = r_a - jx_a$$

ist, so ist

$$Y = \frac{1}{Z}; y = \frac{1}{z_a}; g = \frac{r_a}{z_a^2}; b = \frac{x_a}{z_a^2};$$

d. h. dasselbe Verhältnis wie in komplexen Grössen in Wechselstromstromkreisen, nur dass im vorliegenden Falle alle Konstanten r_a, x_a, z_a, g, z, y von dem Dekrement a abhängen.

Stromkreise von Null-Impedanz.

289. In einem oscillierenden Stromkreise mit dem Dekrement a , dem Widerstand r , der induktiven Reaktanz x und der Kapazitäts-Reaktanz x_c ergab sich als Impedanz in symbolischer Darstellung

$$Z = r_a - jx_a = \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2} x_c \right) - j \left(x - \frac{x_c}{1+a^2} \right),$$

oder numerisch

$$z = \sqrt{r_a^2 + x_a^2} = \sqrt{\left(r - ax - \frac{a}{1+a^2} x_c \right)^2 + \left(x - \frac{x_c}{1+a^2} \right)^2}.$$

Folglich repräsentieren sowohl die induktive Reaktanz x , als auch die Kapazitäts-Reaktanz x_c nicht wattlose elektromotorische Kräfte wie im Wechselstromstromkreis, sondern liefern Energie-Komponenten von negativem Vorzeichen

$$-ax - \frac{a}{1+a^2} x_c;$$

d. h.:

„In einem oscillierenden Stromkreise liegt die gegen-elektromotorische Kraft der Selbstinduktion nicht senkrecht hinter dem Strome, sondern bleibt um weniger als 90° , oder einer Viertelperiode, zurück und der Ladestrom eines Kondensators eilt der Klemmenspannung um weniger als 90° , oder eine Viertelperiode, vor.“

290. Infolge dieser negativen Energie-Komponenten der Reaktanz im oscillierenden Stromkreise kann eine Erscheinung auftreten, die im Wechselstromstromkreise nicht analog ist; d. h. unter gewissen Bedingungen kann die Gesamt-Impedanz des oscillierenden Stromkreises gleich Null sein:

$$Z = 0.$$

In diesem Falle ergibt sich

$$r - ax - \frac{a}{1 + a^2} x_c = 0; \quad x - \frac{x_c}{1 + a^2} = 0,$$

in diese Gleichungen eingesetzt

$$x = 2\pi NL; \quad x_c = \frac{1}{2\pi NC};$$

und entwickelt, ergibt:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{r^2 C} - 1}};$$

$$2\pi N = \frac{r}{2L} \sqrt{\frac{4L}{r^2 C} - 1} = \frac{r}{2aL}.$$

d. h.:

„Wenn in einem oscillierenden Stromkreise das Dekrement

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{r^2 C} - 1}},$$

und die Frequenz $N = r / 4\pi aL$ ist, so ist die gesamte Impedanz des Stromkreises gleich Null; d. h. der oscillierende Strom dauert, wenn einmal vorhanden, ohne weitere Zuführung äusserer Energie zum Stromkreise fort.“

291. Die physikalische Bedeutung dieser Erscheinungen ist folgende: „Wird einem elektrischen Stromkreise ein bestimmter Energiebetrag zugeführt und der Stromkreis alsdann sich selbst überlassen, so wird der Strom im Stromkreise oscillierend mit der Periodenzahl $N = r / 4\pi aL$ und dem Dekrement

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{r^2 C} - 1}}.$$

D. h. oscillierende Ströme sind die Erscheinungen, unter denen ein im Gleichgewicht gestörter elektrischer Stromkreis in's Gleichgewicht zurückkehrt.

Diese Erscheinung zeigt den Ursprung oscillierender Ströme und die Mittel, solche Ströme zu erzeugen, durch Störung des Gleichgewichts eines elektrischen Stromkreises, z. B. durch Kondensator-Entladung, Schliessung und Unterbrechung des Stromkreises, durch plötzliche elektrostatische Ladung, wie Blitz u. s. w.

Die wichtigste Klasse oscillierender Ströme sind offenbar die in Stromkreisen von Null-Impedanz verlaufenden, die oscillierende Entladungen des Stromkreises darstellen. Zu dieser Klasse gehören gewöhnlich Blitzentladungen.

Oscillierende Entladungen.

292. Die Bedingung einer oscillierenden Entladung ist $Z = 0$, d. h.:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{r^2 C} - 1}}, \quad 2\pi N = \frac{r}{2aL} = \frac{r}{2L} \sqrt{\frac{4L}{r^2 C} - 1}.$$

Wenn $r = 0$, d. h. in einem Stromkreise ohne Widerstand, so erhalten wir $a = 0$, $N = 1 / 2\pi\sqrt{LC}$; d. h. die Ströme sind Wechselströme ohne Dekrement, und die Periodenzahl ist diejenige vollständiger Resonanz.

Wenn $4L / r^2 C - 1 < 0$, d. h. $r > 2\sqrt{LC} / a$, so werden a und N imaginär, d. h. die Entladung hört auf, oscillierend zu sein. Eine elektrische Entladung wird somit nur dann oscillierend, wenn $r < 2\sqrt{LC}$. Im Falle $r = 2\sqrt{LC}$, ist $a = \infty$, $N = 0$; d. h. der Strom verläuft ohne Oscillation.

Aus dem vorhergehenden ergibt sich $Z = 0$ dec a als die Bedingung oscillierender Entladung, wie z. B. die Erscheinungen, die auftreten, wenn ein zu einer bestimmten Spannung geladener Kondensator durch einen Stromkreis entladen wird, oder wenn Blitz in einen Stromkreis einschlägt.

Da

$$I = (i_1 + j i_2) \operatorname{dec} \alpha, \quad E_r = I r \operatorname{dec} \alpha,$$

$$E_x = x I (a + j) \operatorname{dec} \alpha, \quad E_{x_c} = \frac{x_c}{1 + a^2} (-a + j) \operatorname{dec} \alpha,$$

so ist

$$r - a x - \frac{a}{1 + a^2} x_c = 0,$$

$$-x + \frac{x_c}{1 + a^2} = 0;$$

somit eingesetzt:

$$E_{x_c} = x I (-a + j) \operatorname{dec} \alpha.$$

Die beiden Konstanten der Entladung i_1 und i_2 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, d. h. der elektromotorischen Kraft und dem Strom zur Zeit $t = 0$.

293. Es werde ein Kondensator von der Kapazität C entladen durch einen Stromkreis von dem Widerstand r und der Induktanz L . Die elektromotorische Kraft des Kondensators im Augenblicke des Stromschlusses sei e , d. h. zur Zeit $t = 0$, oder $\varphi = 0$. In diesem Augenblicke ist der Strom gleich Null, d. h.:

$$I = j i_2, \quad i_1 = 0.$$

Da

$$E_{x_c} = x I (-a + j) \operatorname{dec} \alpha = e \text{ bei } \varphi = 0,$$

$$\text{so ist } x i_2 \sqrt{1 + a^2} = e \text{ oder } i_2 = \frac{e}{x \sqrt{1 + a^2}}.$$

Dies eingesetzt, ergibt

$$I = j \frac{e}{x \sqrt{1 + a^2}} \operatorname{dec} \alpha, \quad E_r = j e \frac{r}{x \sqrt{1 + a^2}} \operatorname{dec} \alpha,$$

$$E_x = \frac{e}{\sqrt{1 + a^2}} (1 - ja) \operatorname{dec} \alpha, \quad E_{x_c} = - \frac{e}{\sqrt{1 + a^2}} (1 + ja) \operatorname{dec} \alpha$$

die Gleichungen der oscillierenden Entladung eines Kondensators von der Anfangsspannung e .

Da $x = 2\pi NL,$

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{r^2} - 1}},$$

$$2\pi N = \frac{r}{2aL},$$

so ist:

$$x = \frac{r}{2a} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{4L}{r^2} - 1};$$

somit eingesetzt:

$$I = je \sqrt{\frac{C}{L}} \operatorname{dec} \alpha, \quad E_r = jer \sqrt{\frac{C}{L}} \operatorname{dec} \alpha,$$

$$E_x = \frac{er}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left(\sqrt{\frac{4L}{r^2} - 1} - j \right) \operatorname{dec} \alpha,$$

$$E_k = -\frac{er}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left(\sqrt{\frac{4L}{r^2} - 1} + j \right) \operatorname{dec} \alpha,$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{r^2} - 1}}, \quad N = \frac{r \sqrt{\frac{4L}{r^2} - 1}}{4\pi L}$$

die Gleichungen der oscillierenden Entladung, in symbolischer Darstellung.

Transformator für oscillierenden Strom.

294. Als ein Beispiel für die Anwendung der symbolischen Methode zur Untersuchung oscillierender Ströme mag die Transformation solcher Ströme betrachtet werden. Wird in einem die Primärspule eines Transformators enthaltenden Stromkreis ein oscillierender Strom erzeugt, so fließen auch im Sekundärkreise des Transformators oscillierende Ströme.

Es sei p das Verhältniß der sekundären zu den primären Windungen des Transformators. Die Sekundärspule sei durch einen Stromkreis vom Gesamtwiderstand $r_1 = r_1' + r_1''$ geschlossen, wo r_1' = äusserer, r_1'' = innerer Widerstand ist. Es sei die Gesamt-Induktanz

$L_1 = L_1' + L_1''$, wo L_1' die äussere, L_1'' die innere Induktanz, C_1 die Gesamt-Kapazität ist.

Alsdann ist die gesamte Admittanz des Sekundärstromkreises:

$$Y_1 = (g + jb_1) \operatorname{dec} \alpha = \frac{1}{\left(r_1 - ax_1 - \frac{a}{1+a^2}x_{c1}\right) - j\left(x_1 - \frac{x_c}{1+a^2}\right)},$$

wo $x_1 = 2\pi N L_1$ = die induktive Reaktanz, $x_{c1} = \frac{1}{2\pi N C}$ die Kapazitäts-Reaktanz ist.

Es sei r_0 der effektive hysteretische Widerstand, L_0 die Induktanz; folglich $x_0 = 2\pi N L_0$ die Reaktanz. Folglich

$$Y_0 = g_0 + jb_0 = \frac{1}{(r_0 - ax_0) - jx_0} = \text{die Admittanz}$$

des primären Erreger-Stromkreises des Transformators; d. h. die Admittanz des primären Stromkreises bei offenem Sekundär-Stromkreis.

Wie im vorhergehenden erörtert, lässt sich ein Transformator als aus einem sekundären Stromkreis bestehend betrachten, dem die Klemmenspannung über die Hauptleitung zugeführt wird, dessen Impedanz gleich der Summe der primären und sekundären Transformator-Impedanz ist, und die zu dem Erreger-Stromkreis im Nebenschluss liegt, ausserhalb der sekundären, jedoch innerhalb der primären Impedanz.

Es sei r der Widerstand, L die Induktanz, C die Kapazität; folglich ist $x = 2\pi N L$ die induktive Reaktanz und $x_c = \frac{1}{2\pi N C}$ die Kapazitäts-Reaktanz des gesamten Primär-Stromkreises, einschliesslich der Primärspule des Transformators.

Bezeichnet $E_1' = E_1' \operatorname{dec} \alpha$ die in der Sekundärspule des Transformators durch gegenseitige Induktion erzeugte elektromotorische Kraft; d. h. die elektromotorische Kraft, die durch den oscillierenden Magnetismus mit der primären und sekundären Spule verkettet ist, so ist der Sekundärstrom:

$$I_1 = E_1 Y_1 \operatorname{dec} \alpha.$$

Folglich ist $I'_1 = p I_1$ dec $\alpha = p E'_1 Y_1$ dec $\alpha =$ dem primären Belastungsstrom, oder der Komponente des Primärstromes, entsprechend dem Sekundärstrom. Folglich ist $I_0 = \frac{1}{p} E'_1 Y_0$ dec α der primäre Erregerstrom; folglich der gesamte Primärstrom:

$$I = I'_1 + I_0 = \frac{E'_1}{p} \{Y_0 + p^2 Y_1\} \text{ dec } \alpha.$$

$E' = \frac{E'_1}{p}$ dec α ist die induzierte primäre elektromotorische Kraft.

Folglich ist die gesamte primäre elektromotorische Kraft $E = (E' + IZ)$ dec $\alpha = \frac{E'_1}{p} \{1 + Z Y_0 + p^2 Z Y_1\}$ dec α .

Bei oscillierender Entladung ist die gesamte elektromotorische Kraft $E = 0$; d. h.

$$1 + Z Y_0 + p^2 Z Y_1 = 0,$$

oder eingesetzt:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\left(r - ax - \frac{a}{1+a^2} x_c\right) - j \left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)}{(r_0 - ax_0) - j x_0} \\ + p^2 \frac{\left(r - ax - \frac{a}{1+a^2} x_c\right) - j \left(x - \frac{x_c}{1+a^2}\right)}{\left(r_1 - ax_1 - \frac{a}{1+a^2} x_{c1}\right) - j \left(x_1 - \frac{x_{c1}}{1+a^2}\right)} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichung $x = 2 \pi N C$, $x_c = \frac{1}{2 \pi N C}$ u. s. w. ein, so ergibt sich eine komplexe imaginäre Gleichung mit den beiden Konstanten a und N . Diese Gleichung in ihren reellen und imaginären Teilen getrennt liefert zwei Gleichungen, aus denen sich die beiden Konstanten a und N der Entladung berechnen lassen.

295. Kann der Erregerstrom des Transformators vernachlässigt werden, d. h. ist $Y_0 = 0$, so wird die Gleichung wesentlich vereinfacht:

$$1 + p^2 \frac{\left(r - ax - \frac{a}{1+a^2} x_c \right) - j \left(x - \frac{x_c}{1+a^2} \right)}{\left(r_1 - ax_1 - \frac{a}{1+a^2} x_{c1} \right) - j \left(x_1 - \frac{x_{c1}}{1+a^2} \right)} = 0;$$

d. h.

$$\left(r_1 - ax_1 - \frac{a}{1+a^2} x_{c1} \right) + p^2 \left(r - ax - \frac{a}{1+a^2} x_c \right) = 0;$$

$$\left(x_1 - \frac{x_{c1}}{1+a^2} \right) + p^2 \left(x - \frac{x_c}{1+a^2} \right) = 0;$$

oder kombiniert:

$$(r_1 - 2ax_1) + p^2(r - 2ax) = 0,$$

$$r_1 + p^2 r = 2a(x_1 + p^2 x),$$

$$x_{c1} + p^2 x_c = (1+a^2)x_1 + p^2 x.$$

x_1, x, x_{c1}, x_c eingesetzt, ergibt:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{4(L_1 + p^2 L)}{(r_1 + p^2 r)^2 C_1 + p^2 C}} - 1},$$

$$2\pi N = \frac{r_1 + p^2 r}{2a(L_1 + p^2 L)}$$

$$= \frac{r_1 + p^2 r}{2(L_1 + p^2 L)} \sqrt{\frac{4(L_1 + p^2 L)}{(r_1 + p^2 r)^2 C_1 + p^2 C}} - 1.$$

$$E = \frac{E_1'}{p} \{ 1 + p^2 Z Y_1 \} \operatorname{dec} \alpha,$$

$$I = p E_1' Y_1 \operatorname{dec} \alpha,$$

$$I_1 = E_1' Y_1 \operatorname{dec} \alpha$$

die Gleichungen des Transformators für oscillierenden Strom, mit E_1' als Parameter.

Anhang III.

Effekt und sonstige Grössen doppelter Periodizität.

I.

296. Wechselströme und wechselnde elektromotorische Kräfte werden gewöhnlich graphisch durch Vektoren dargestellt. Ein Vektor ist eine Grösse, die Länge und Richtung hat. Die Länge stellt die Intensität, die Richtung die Phase der Wechselstromwelle dar. Gewöhnlich werden die Vektoren vom Mittelpunkt der Koordinaten aus aufgetragen. In der topographischen Darstellung dagegen, die für komplizierte Stromkreise, wie verkettete Mehrphasennetze, geeigneter ist, erscheint die Wechselstromwelle als die gerade Verbindungslinie zweier Punkte, welch' letztere die absoluten Werte der Spannung und deren Verbindung die Spannungsdifferenz in Phase und Intensität darstellen.

Algebraisch werden diese Vektoren durch komplexe Grössen dargestellt. Die Impedanz, Admittanz u. s. w. des Stromkreises erscheinen sodann in symbolischer Darstellung gleichfalls als komplexe Grössen. Strom, elektromotorische Kraft, Impedanz und Admittanz stehen daher mit einander in Beziehung durch Multiplikation und Division komplexer Grössen, in derselben Weise wie Strom, elektromotorische Kraft, Widerstand und Konduktanz durch das Ohm'sche Gesetz in Gleichstromkreisen.

In Gleichstromstromkreisen ist der Effekt das Produkt von Strom und elektromotorischer Kraft. Ist in einem Wechselstromstromkreise:

$$\begin{aligned} E &= e' + j e'' \\ J &= i' + j i'' \end{aligned}$$

so ist das Produkt:

$$P_0 = EJ = (e' i' - e'' i'') + j (e'' i' + e' i'')$$

nicht der Effekt; d. h. Multiplikation und Division, die in der gegenseitigen Beziehung zwischen Strom, elektromotorischer Kraft und Impedanz richtig sind, geben bei der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen elektromotorischer Kraft, Strom und Effekt kein richtiges Resultat.

Die Ursache hiervon ist, dass E und J Vektoren gleicher Periodenzahl und Z ein konstanter Zahlenfaktor ist, der die Periodenzahl nicht ändert.

Der Effekt P dagegen hat im Vergleich zu E und J die doppelte Periodenzahl und kann daher nicht durch einen Vektor in demselben Diagramm mit J und E dargestellt werden. Das Produkt $P_0 = EJ$ ist von derselben Periodenzahl wie E und J und kann daher nicht den Effekt repräsentieren.

297. Da der Effekt eine Grösse von doppelter Periodenzahl von E und J ist und daher der Phasenwinkel ω in E und J einem Phasenwinkel 2ω in dem Effekt entspricht, ist es von Interesse, das Produkt E und J zu untersuchen, welches durch Verdoppelung des Phasenwinkels gebildet wird.

Algebraisch ist:

$$\begin{aligned} P &= EJ = (e' + j e'')(i' + j i'') = \\ &= (e' i' + j^2 e'' i'') + (j e'' i' + e' j i''). \end{aligned}$$

Da $j^2 = -1$ einer Drehung von 180° für E und J entspricht, so ist für die Grösse P mit der doppelten Periode oder 360° Drehung $j^2 = +1$, und

$$\begin{aligned} j \times 1 &= j \\ 1 \times j &= -j. \end{aligned}$$

Diese Werte eingesetzt, ergibt:

$$P = [EJ] = (e' i' + e'' i'') + j (e'' i' - e' i'').$$

Das Symbol $[EJ]$ bezeichnet hier den Übergang von der einfachen Periode von E und J zu der doppelten Periode von P .

Das Produkt $P = [EJ]$ besteht aus zwei Komponenten, der reellen Komponente

$$P' = [EJ]' = (e' i' + e'' i'')$$

und der imaginären Komponente

$$jP^j = j[EJ]^j = j(e'' i' - e' i'').$$

Die Komponente

$$P' = [EJ]' = (e' i' + e'' i'')$$

ist der Effekt des Stromkreises $= EI \cos (EI)$.

Die Komponente

$$P^j = [EJ]^j (e'' i' - e' i'')$$

kann der „wattlose Effekt“, oder die energielosen oder senkrechten Volt-Ampère des Stromkreises $= EI \sin (EI)$ genannt werden. Die reelle Komponente wird mit dem Index 1, die imaginäre, oder wattlose Komponente, mit dem Index j bezeichnet.

Durch Einführung dieses Symbolismus lässt sich der Effekt eines Wechselstromstromkreises in derselben Weise wie im Gleichstromstromkreise repräsentieren, als symbolisches Produkt von Strom und elektromotorischer Kraft.

In derselben Weise wie der symbolische Ausdruck von Strom und elektromotorischer Kraft als komplexe Grösse nicht nur die Intensität, sondern auch die Phase

$$E = e' + j e''$$

$$E = \sqrt{e'^2 + e''^2} \operatorname{tang} \varphi = \frac{e''}{e'}$$

ergibt, so bezeichnet das doppelperiodische Vektorprodukt $P = [EJ]$ mehr als den Effekt, indem es mit seinen zwei Komponenten $P' = [EJ]'$ und $P^j = [EJ]^j$ die wahren Energie - Volt - Ampère und die wattlosen Volt - Ampère ergibt.

Wenn

$$E = e' + j e''$$

$$J = i' + j i''$$

folglich

$$E = \sqrt{e'^2 + e''^2}$$

$$I = \sqrt{i'^2 + i''^2}$$

so ist

$$P^i = [EJ]^i = (e' i' + e'' i'')$$

$$P^j = [EJ]^j = (e'' i' - e' i'')$$

und

$$\begin{aligned} P'^2 + P^j{}^2 &= (e' i')^2 + (e'' i'')^2 + (e'' i')^2 + (e' i'')^2 \\ &= (e'^2 + e''^2)(i'^2 + i''^2) \\ &= (EI)^2 \\ &= Q^2 \end{aligned}$$

wo Q = gesamte Volt-Ampère des Stromkreises.

D. h. der wahre Effekt P' und der wattlose Effekt P^j sind die beiden rechtwinkligen Komponenten des gesamten scheinbaren Effektes Q des Stromkreises.

Hieraus folgt: In symbolischer Darstellung als doppelperiodisches Vektorprodukt können Effekte nach dem Parallelogramm der Vektoren kombiniert und zerlegt werden, in derselben Weise, wie Ströme und elektromotorische Kräfte in graphischer oder symbolischer Darstellung.

Hierbei sind die graphischen Methoden der Untersuchung von Wechselstromerscheinungen auch auf die Betrachtung von doppelperiodischen Grössen, wie Effekt, Drehmoment u. s. w. ausgedehnt.

Es ist:

$$\frac{P'}{Q} = p = \cos \omega = \text{Leistungsfaktor,}$$

$$\frac{P^j}{Q} = q = \sin \omega = \text{Induktanzfaktor}$$

des Stromkreises, und der allgemeine Ausdruck des Effektes ist:

$$\begin{aligned} P &= Q(p + jq) \\ &= Q(\cos \omega + j \sin \omega). \end{aligned}$$

298. Die Einführung des doppelperiodischen Vektorproduktes $P = [EJ]$ bringt uns indessen ausserhalb des Gebietes der Algebra und das kommutative Prinzip der

Algebra: $a \times b = b \times a$ ist nicht mehr anwendbar, sondern es ist:

$$[EJ] \text{ ungleich } [JE],$$

da

$$[EJ] = [EJ]' + j[EJ]^j$$

und

$$\begin{aligned} [JE] &= [JE]' + j[JE]^j \\ &= [EJ]' - j[EJ]^j \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} [EJ]' &= [JE]' \\ [EJ]^j &= -[EJ]^j, \end{aligned}$$

d. h. die imaginäre Komponente kehrt ihr Vorzeichen um durch die Vertauschung der Faktoren.

Die physikalische Bedeutung hiervon ist, dass, wenn der wattlose Effekt $[EJ]^j$ in Bezug auf E phasenverspätet ist, so ist er in Bezug auf J phasenverfrüht.

Die wattlose Effektkomponente ist Null, d. h. der scheinbare Effekt ist der wahre Effekt, wenn

$$[EJ]^j = (e'' i' - e' i'') = 0;$$

d. h.

$$\frac{e''}{e'} = \frac{i''}{i'};$$

oder

$$\text{tang } E = \text{tang } J;$$

d. h. E und J sind in Phase, oder in Opposition.

Der wahre Effekt ist Null, d. h. der gesamte scheinbare Effekt ist wattlos, wenn

$$[EJ]' = (e' i' + e'' i'') = 0;$$

d. h.

$$\frac{e''}{e'} = -\frac{i'}{i''};$$

oder

$$\text{tang } E = -\text{cotg } J$$

d. h. E und J stehen senkrecht auf einander.

Der wattlose Effekt ist phasenverspätet (in Bezug auf E , oder phasenverfrüht in Bezug auf J), wenn

$$[EJ]^j > 0$$

und phasenverfrüht, wenn

$$[EJ]^j < 0.$$

Der wahre Effekt ist negativ, d. h. der Effekt wird zurückgegeben, wenn

$$[EJ]' < 0.$$

Es ist:

$$[E(-J)] = [-EJ] = -[EJ]$$

$$[(-E)(-J)] = +[EJ]$$

d. h. wenn der Effekt eines Stromkreises oder eines Teils eines Stromkreises dargestellt wird, so müssen der Strom und die elektromotorische Kraft in ihrem richtigen gegenseitigen Phasenverhältnis betrachtet werden, aber ihr Phasenverhältnis mit dem übrigen Teil des Stromkreises ist unwesentlich.

299. Wenn:

$$P_1 = [E_1 J_1], P_2 = [E_2 J_2] \cdots P_n = [E_n J_n]$$

die symbolischen Ausdrücke des Effekts der verschiedenen Teile eines Stromkreises oder eines Netzes von Stromkreisen sind, so ist der Gesamteffekt des gesamten Stromkreises oder Netzes der Stromkreise

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

und es ist:

$$P' = P_1' + P_2' + \cdots + P_n'$$

$$P^j = P_1^j + P_2^j + \cdots + P_n^j.$$

Mit anderen Worten: Der Gesamteffekt eines Stromkreises oder Stromnetzes (sowohl wahrer als auch wattloser Effekt) in symbolischer Darstellung ist gleich der Summe der Effekte seiner Einzelkomponenten in symbolischer Darstellung.

Die erste Gleichung ist offenbar ein direktes Resultat aus dem Gesetz von der Erhaltung der Energie.

Als Resultat ergibt sich hieraus z. B.:

Wenn in einem Generator, welcher einem System Energie zuführt, der Strom gegen die elektromotorische Kraft so phasenverschoben ist, dass er den wattlosen Effekt P' ergibt, so kann der Strom mit der Generator-Elektromotorischen Kraft in Phase gebracht werden, d. h. die Belastung des Generators kann dadurch induktionsfrei gemacht werden, dass irgendwo in den Stromkreis ein Apparat eingeschaltet wird, der den wattlosen Effekt $-P'$ liefert. D. h. Kompensation für wattlose Ströme in einem System findet statt ohne Rücksicht auf die Stelle, wo der Kompensationsapparat eingeschaltet ist.

Zwischen dem Kompensationsapparat und der Quelle der wattlosen Ströme, die ausgeglichen werden sollen, fließen augenscheinlich wattlose Ströme, und aus diesem Grunde ist es ratsam, den Kompensationsapparat dem Stromkreis, welcher ausgeglichen werden soll, möglichst nahe zu bringen.

300. Wie der Effekt, so ist auch das Drehmoment ein doppelperiodisches Vektorprodukt aus Magnetismus und magnetomotorischer Kraft oder Strom und kann daher in derselben Weise behandelt werden.

Im Induktionsmotor ist das Drehmoment das Produkt aus dem magnetischen Feld in einer Richtung und der Komponente des sekundären induzierten Stromes, welche der Zeit nach in Phase mit dem magnetischen Feld ist, aber senkrecht dazu im Raume steht, mal der Windungszahl dieses Stromes. Oder da die induzierte elektromotorische Kraft senkrecht und proportional dem magnetischen Felde und der Windungszahl ist, so ist das Drehmoment des Induktionsmotors das Produkt aus der induzierten elektromotorischen Kraft und der Komponente des Sekundärstromes senkrecht dazu in Zeit und Raum, oder das Produkt des induzierten Stromes und der Komponente der induzierten elektromotorischen Kraft senkrecht dazu in Zeit und Raum.

Ist somit

$E = e' + j e''$ die induzierte elektromotorische Kraft in einer Richtung im Raum,

$J = i' + j i''$ der Sekundärstrom in senkrechter Richtung im Raum, so ist das Drehmoment

$$T = [EJ]^j = e'' i' - e' i''.$$

Durch diese Gleichung ist das Drehmoment in Watt gegeben, d. h. $T = [EJ]^j$ ist der Effekt, der durch das Drehmoment bei synchroner Geschwindigkeit erreicht werden würde, oder das Drehmoment in synchronen Watt.

Das eigentliche Drehmoment ist dann $\frac{T}{2\pi Np}$,
 wo p die Anzahl der Polpaare des Motors ist.

301. Als weiteres Beispiel können wir das Verhalten zweier Mehrphasen-Induktionsmotoren in Hintereinanderschaltung (Tandemschaltung, Verkettung, Kaskadenschaltung) betrachten, d. h. zwei gleiche Induktionsmotoren, in denen der Sekundärstrom des ersten Motors durch den Primärkreis des zweiten Motors geschlossen und die Motoren mechanisch so verbunden sind, so dass sie bei gleicher Geschwindigkeit laufen.

In diesem Falle sei:

$N =$ Periodenzahl des Hauptstromkreises,

$s =$ Schlüpfung des ersten Motors unter Synchronismus.

Die im Sekundärkreis des ersten Motors induzierte und somit dem zweiten Motor zugeführte Periodenzahl ist somit sN . Die Geschwindigkeit des ersten Motors ist $(1 - s)N$, folglich die Schlüpfung des zweiten Motors oder die in seinem Sekundärkreis induzierte Periodenzahl

$$sN - (1 - s)N = (2s - 1)N.$$

Es sei e die in dem Sekundärkreis des zweiten Motors induzierte gegenelektromotorische Kraft, reduziert auf die volle Periodenzahl.

$Z_0 = r_0 - jx_0 =$ primäre Impedanz,

$Z_1 = r_1 - jx_1 =$ sekundäre Impedanz,

$Y = g + jb =$ primäre Admittanz

eines Motors; alle diese Grössen reduziert auf die volle Periodenzahl und auf den primären Stromkreis durch das Verhältnis der Windungen.

Es ist alsdann

Zweiter Motor:

sekundär induzierte elektromotorische Kraft

$$e(2s - 1),$$

sekundärer Strom

$$J_1 = \frac{e(2s - 1)}{r_1 - j(2s - 1)x_1} = e(a_1 + j a_2),$$

wo

$$a_1 = \frac{(2s - 1)r_1}{r_1^2 + (2s - 1)^2 x_1^2} \quad a_2 = \frac{(2s - 1)^2 x_1}{r_1^2 + (2s - 1)^2 x_1^2}$$

primärer Erregerstrom

$$J_0 = e(g + jb),$$

folglich gesamter Primärstrom

$$J_2 = J_1 + J_0 = e(b_1 + j b_2),$$

wo

$$b_1 = a_1 + g \quad b_2 = a_2 + b$$

primär induzierte elektromotorische Kraft

$s e$

primäre elektromotorische Kraft der Impedanz

$$J_2(r_0 - jsx_0),$$

somit primäre Klemmenspannung

$$E_2 = se + J_2(r_0 - jsx_0) = e(c_1 + j c_2),$$

wo

$$c_1 = s + r_0 b_1 + sx_0 b_2 \quad c_2 = r_0 b_2 - sx_0 b_1.$$

Erster Motor:

Sekundärstrom

$$J_2 = e(b_1 + j b_2),$$

sekundär induzierte elektromotorische Kraft

$$E_3 = E_2 + J_2(r_1 - jsx_1) = e(d_1 + j d_2),$$

wo

$$d_1 = c_1 + r_1 b_1 + sx_1 b_2 \quad d_2 = c_2 + r_1 b_2 - sx_1 b_1,$$

primär induzierte elektromotorische Kraft

$$E_4 = \frac{E_3}{s} = e (f_1 + jf_2),$$

wo

$$f_1 = \frac{d_1}{s} \quad f_2 = \frac{d_2}{s},$$

primärer Erregerstrom

$$J_4 = E_4 (g + jb),$$

gesamter Primärstrom

$$J = J_2 + J_4 = e (g_1 + jg_2),$$

wo

$$g_1 = b_1 + gf_1 - bf_2 \quad g_2 = b_2 + gf_2 + bf_1$$

primäre elektromotorische Kraft der Impedanz

$$J (r_0 - jx_0),$$

somit primäre Klemmenspannung

$$E_0 = E_4 + J (r_0 - jx_0) = e (h_1 + jh_2),$$

wo

$$h_1 = f_1 + r_0 g_1 + x_0 g_2 \quad h_2 = f_2 + r_0 g_2 - x_0 g_1,$$

oder absolut

$$e_0 = e \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

und

$$e = \frac{e_0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Diese Werte von e in die vorhergehenden Gleichungen eingesetzt, geben die Werte der Ströme und elektromotorischen Kräfte in den verschiedenen Stromkreisen der Motorkette.

Die induzierte elektromotorische Kraft, die im Raume senkrecht zur elektromotorischen Kraft steht, ist im Mehrphasen-Induktionsmotor

$$jE.$$

Das Drehmoment des zweiten Motors ist somit

$$T_2 = [j e J_1] \quad j = [e J_1]' = e^2 a_1,$$

daher seine mechanische Leistung

$$P_3 = (1 - s) T_2 = (1 - s) e^2 a_1.$$

Der zugeführte elektrische Effekt ist

$$\begin{aligned} P_2 &= [E_2 J_2] = [E_2 J_2]' + j [E_2 J_2]' \\ &= e^2 [(c_1 + jc_2) (b_1 + jb_2)] \end{aligned}$$

somit das Güteverhältnis

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{(1-s) e^2 a_1}{[E_2 J_2]'} = \frac{(1-s) a_1}{c_1 b_1 + c_2 b_2},$$

der Leistungsfaktor

$$\frac{[E_2 J_2]}{E_2 I_2} = \frac{c_1 b_1 + c_2 b_2}{\sqrt{(c_1^2 + c_2^2) (b_1^2 + b_2^2)}}$$

u. s. w.

Im ersten Motor ist das Drehmoment

$$\begin{aligned} T_1 &= [E_4 J_2]' = e^2 [(f_1 + jf_2) (b_1 + jb_2)]' \\ &= e^2 (f_1 b_1 + f_2 b_2) \end{aligned}$$

die mechanische Leistung

$$\begin{aligned} P_4 &= T_1 (1-s) \\ &= e^2 (1-s) (f_1 b_1 + f_2 b_2), \end{aligned}$$

der zugeführte elektrische Effekt

$$\begin{aligned} P_1 &= [E_0 J] = e^2 [(h_1 + jh_2) (g_1 + jg_2)] \\ &= [E_0 J]' + j [E_0 J]'' \end{aligned}$$

somit das Güteverhältnis

$$\frac{P_4}{[E_0 J]' - [E_2 J_2]'} = \frac{(1-s) (f_1 b_1 + f_2 b_2)}{(h_1 g_1 + h_2 g_2) - (c_1 b_1 + c_2 b_2)},$$

der Leistungsfaktor des gesamten Systems

$$\frac{P_1}{E_0 I} = \frac{h_1 g_1 + h_2 g_2}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2) (g_1^2 + g_2^2)}},$$

der Leistungsfaktor des ersten Motors

$$\frac{P_1 - P_2}{E_0 I - E_2 I_2} = \frac{(h_1 g_1 + h_2 g_2) - (c_1 b_1 + c_2 b_2)}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2) (g_1^2 + g_2^2)} - \sqrt{(c_1^2 + c_2^2) (b_1^2 + b_2^2)}},$$

das gesamte Güteverhältnis des Systems

$$\frac{P_1 + P_3}{[E_0 J]'} = \frac{(1-s) (f_1 b_1 + f_2 b_2 + a_1)}{h_1 g_1 + h_2 g_2}$$

u. s. w.

Als Beispiel sind in Fig. 185 Kurven des gesamten Drehmoments, des Drehmoments des zweiten Motors und des Stromes für den Bereich der Schlüpfung von $s = + 1,5$

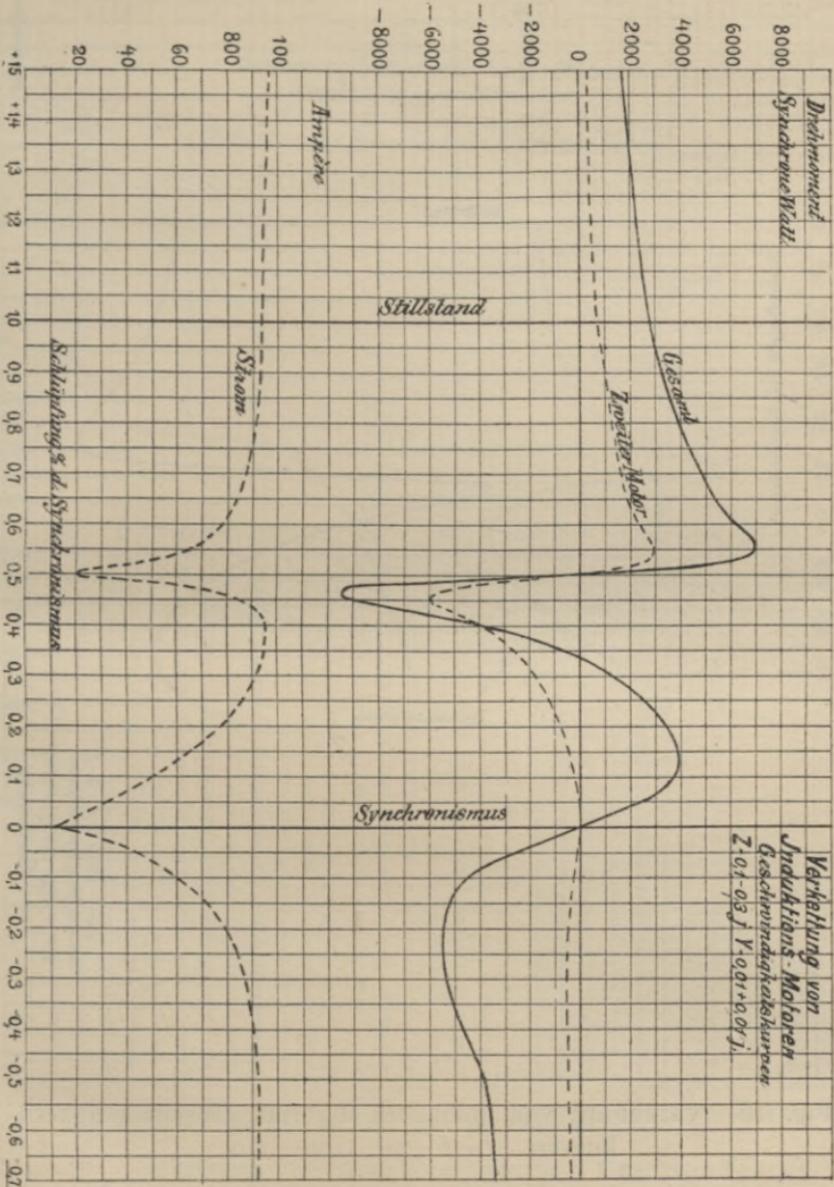


Fig. 185. Verkettung von Induktions-Motoren. Geschwindigkeitskurven. $Z = 0,1 - 0,3j, Y = 0,01 + 0,1j$.

bis $s = -0,7$ für ein Paar Induktionsmotoren in Kaskadenschaltung von folgenden Konstanten gegeben:

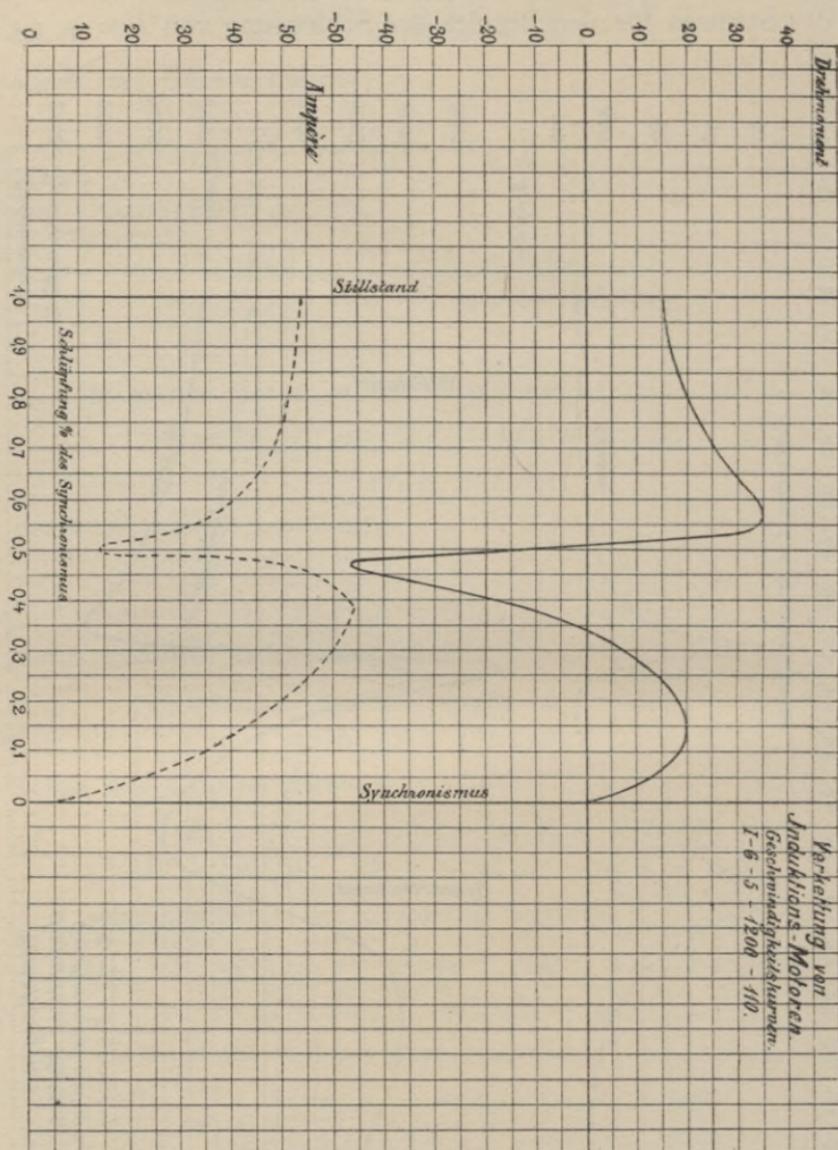


Fig. 186. Verkettung von Induktions-Motoren. Geschwindigkeitskurven. I-6-5-1200-110.

$$Z_0 = Z_1 = 0,1 - 0,3j$$

$$Y = 0,01 + 0,1j$$

Fig. 186 giebt die Kurven des gesamten Drehmoments und des Stromes nach Versuchen mit einem Motor mit ähnlichen Konstanten, für den Bereich von $s = + 1$ bis $s = 0$.

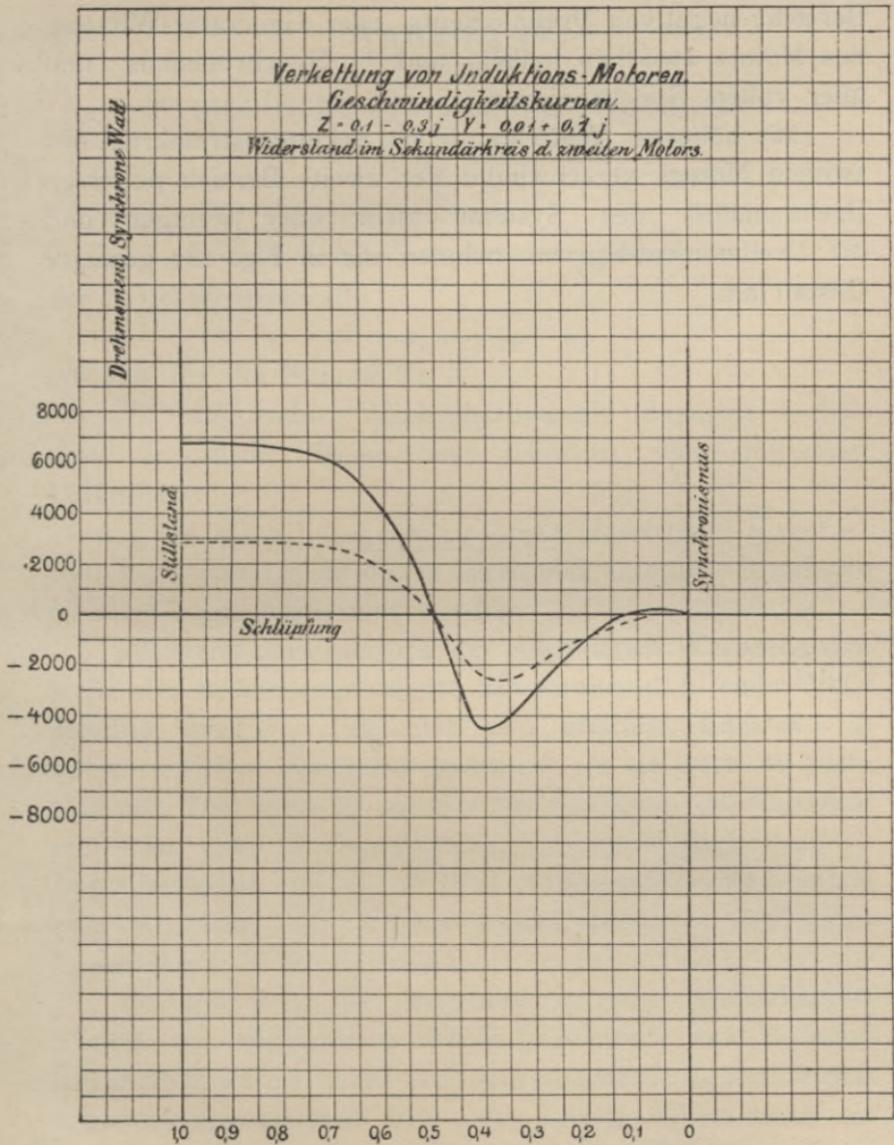


Fig. 187. Verkettung von Induktions-Motoren. Geschwindigkeitskurven. $Z = 0,1 - 0,3j$, $Y = 0,01 + 0,7j$.

Wie ersichtlich, existieren zwei Bereiche positiven Drehmoments des Systems, das eine unterhalb halbem Synchronismus und das andere zwischen ungefähr $\frac{2}{3}$ Synchronismus und vollem Synchronismus, ferner zwei Bereiche negativen Drehmoments, oder Generator-Wirkung des Motors zwischen halbem und $\frac{2}{3}$ Synchronismus, und über vollem Synchronismus.

Mit höherem Widerstande im Sekundärstromkreis des zweiten Motors verschwindet der zweite Bereich positiven Drehmoments des Systems mehr oder weniger und die Drehmoment-Kurven nehmen die in Fig. 187 gezeigte Gestalt an.

Anhang IV.

Symbolische Darstellung allgemeiner Wechselstromwellen.

302. Die Vektor-Darstellung

$$A = a' + j a'' = a (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

der Wechselstromwelle

$$A = a_0 \cos (\varphi - \alpha)$$

gilt nur für die Sinuswelle.

Die allgemeine Wechselstromwelle dagegen enthält eine unendliche Reihe von Gliedern von ungerader Periodizität:

$$A = A_1 \cos (\varphi - \alpha_1) + A_3 \cos (3 \varphi - \alpha_3) + A_5 \cos (5 \varphi - \alpha_5) + \dots$$

und kann somit nicht direkt durch eine komplexe imaginäre Vektor-Grösse dargestellt werden.

Während die Ersetzung der allgemeinen Wechselstromwelle durch ihre äquivalente Sinuswelle, d. h. einer Welle gleicher effektiver Intensität und gleichen Effektes, in manchen Fällen genügend genau ist, ist sie doch oft nicht statthaft, besonders in solchen Stromkreisen, die Kapazität enthalten, oder in Stromkreisen, die periodisch (und im Synchronismus mit der Welle) variierenden Widerstand oder Reaktanz (wie Wechselstrom-Lichtbogen, Reaktions-Maschinen u. s. w.) enthalten.

Da indessen die einzelnen höheren harmonischen Wellen der allgemeinen Wechselstromwelle von einander unabhängig sind, d. h. alle Produkte verschiedener Periodizität verschwinden, so lässt sich jedes einzelne Glied durch ein komplexes Symbol darstellen, und die Gleichungen der allgemeinen Welle sind dann die Resultante der Ausdrücke der einzelnen harmonischen Glieder.

Symbolisch lässt sich dies durch Vereinigung der symbolischen Darstellungen verschiedener Periodizität in einer Gleichung darstellen:

$$A = \sum_I^{\infty} \sqrt{2^{n-1}} (a_n' + j_n a_n''),$$

wo

$$j_n = \sqrt{-1}$$

und der Index n in j_n nur bedeutet, dass die j mit verschiedenen Indices n zwar algebraisch identisch sind, physikalisch aber verschiedene Periodizitäten darstellen und somit nicht miteinander kombinierbar sind.

Die allgemeine Welle des Wechselstromes elektromotorischer Kraft ist somit dargestellt durch

$$E = \sum_I^{\infty} \sqrt{2^{n-1}} (e_n' + j_n e_n''),$$

und die allgemeine Welle des Stromes durch

$$J = \sum_I^{\infty} \sqrt{2^{n-1}} (i_n' + j_n i_n'').$$

Ist

$$Z_1 = r - j(x_m + x_o + x_c)$$

die Impedanz der Fundamentalwelle, wo

x_m derjenige Teil der Reaktanz, der der Periodenzahl proportional ist (Induktanz u. s. w.),

x_o derjenige Teil der Reaktanz, der von der Periodenzahl unabhängig ist (gegenseitige Induktion, Synchronbewegung u. s. w.),

x_c derjenige Teil der Reaktanz, der der Periodenzahl umgekehrt proportional ist (Kapazität u. s. w.),

so ist die Impedanz für das n^{te} harmonische Glied

$$Z = r - j_n \left(n x_m + x_o + \frac{x_c}{n} \right).$$

Dieser Ausdruck kann als allgemeines Symbol der Impedanz eines Stromkreises von allgemeiner Wellenform betrachtet werden.

Das Ohm'sche Gesetz in symbolischer Darstellung nimmt für die allgemeine Wechselstromwelle die Gestalt an:

$$J = \frac{E}{Z},$$

oder

$$\sum_I^{\infty} \overline{2n-1} (i_n' + j_n i_n'') = \sum_I^{\infty} \overline{2n-1} \frac{e_n' + j_n e_n''}{r - j_n (n x_m + x_o + \frac{x_c}{n})},$$

$$E = J Z,$$

oder

$$\sum_I^{\infty} \overline{2n-1} (e_n' + j_n e_n'') = \sum_I^{\infty} \overline{2n-1} \left\{ r - j_n \left(n x_m + x_o + \frac{x_c}{n} \right) \right\} (i_n' + j_n i_n''),$$

$$Z = \frac{E}{J}$$

oder

$$Z r - j_n \left(n x_m + x_o + \frac{x_c}{n} \right) = \frac{e_n' + j_n e_n''}{i_n' + j_n i_n''}.$$

Die Symbole der Multiplikation und Division der Ausdrücke E, J, Z bedeuten daher nicht algebraische Operationen, sondern Multiplikation und Division entsprechender Glieder von E, J, Z , d. h. solcher Glieder, die denselben Index n haben. Oder mit anderen Worten, bei algebraischer Multiplikation und Division von E, J fallen alle zusammengesetzten Glieder, d. h. Glieder, welche verschiedene Indices n enthalten, heraus.

303. Der Effektivwert der allgemeinen Welle

$$A = A_1 \cos(\varphi - \alpha_1) + A_3 \cos(3\varphi - \alpha_3) + A_5 \cos(5\varphi - \alpha_5) + \dots$$

ist die Quadratwurzel aus der Summe der mittleren Quadrate der einzelnen harmonischen Glieder

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ A_1^2 + A_3^2 + A_5^2 + \dots \right\}}$$

da, wie oben erwähnt, die zusammengesetzten Glieder, die zwei verschiedene Indices n enthalten, verschwinden.

Der absolute Wert der allgemeinen Wechselstromwelle

$$A = \sqrt{\sum_{\mathbf{I}}^{\infty} \frac{a_n' + j_n a_n''}{b_n' + j_n b_n''}}$$

ist daher

$$a = \sqrt{\sum_{\mathbf{I}}^{\infty} \frac{a_n'^2 + a_n''^2}{b_n'^2 + j_n b_n''^2}}$$

Dies gestattet eine einfache Reduktion von symbolischer Darstellung zu absolutem Werte.

Der absolute Wert der elektromotorischen Kraft

$$E = \sqrt{\sum_{\mathbf{I}}^{\infty} (e_n' + j_n e_n'')}$$

ist somit

$$E = \sqrt{\sum_{\mathbf{I}}^{\infty} (e_n'^2 + e_n''^2)}$$

und der absolute Wert des Stromes

$$J = \sqrt{\sum_{\mathbf{I}}^{\infty} (i_n' + j_n i_n'')}$$

ist

$$I = \sqrt{\sum_{\mathbf{I}}^{\infty} (i_n'^2 + i_n''^2)}$$

304. Die doppelperiodischen Produkte (Drehmoment u. s. w.) haben für die allgemeine Wechselstromwelle denselben symbolischen Ausdruck wie für die Sinuswelle.

$$\begin{aligned} P &= [EJ] \\ &= P' + jP^j \\ &= [EJ]' + j[EJ]^j \\ &= \sum_{\mathbf{I}}^{\infty} (e_n' i_n' + e_n'' i_n'') + \sum_{\mathbf{I}}^{\infty} j_n (e_n'' i_n' - e_n' i_n''), \end{aligned}$$

wo

$$F' = [EJ]' = \sum_I^{\infty} \overline{2n-1} (e_n' i_n' + e_n'' i_n'')$$

$$P^j = [EJ]_j = \sum_I^{\infty} \overline{2n-1} \frac{j_n}{j} (e_n'' i_n' - e_n' i_n'').$$

Die j_n treten unter das Summationszeichen des „wattlosen Effektes“ P^j , so dass die wattlosen Effekte der verschiedenen harmonischen Glieder nicht mehr algebraisch addiert werden können.

Folglich:

Der gesamte „wahre Effekt“ eines allgemeinen Wechselstromstromkreises ist die algebraische Summe der Effekte der einzelnen harmonischen Glieder.

Der gesamte „wattlose Effekt“ eines allgemeinen Wechselstromstromkreises ist nicht die algebraische, sondern die absolute Summe der wattlosen Effekte der einzelnen harmonischen Glieder.

In Bezug auf den wattlosen Effekt, als ganzen, lässt sich somit im Wechselstromstromkreis kein Unterschied machen zwischen Phasennacheilung und Phasenvoreilung da manche harmonische Glieder verfrüht, manche verspätet sein können.

Der scheinbare Effekt (oder die gesamten Volt-Ampère des Stromkreises) ist

$$Q = EI = \sqrt{\sum_I^{\infty} \overline{2n-1} (e_n'^2 + e_n''^2) \sum_I^{\infty} \overline{2n-1} (i_n'^2 + i_n''^2)}.$$

Der Leistungsfaktor des Stromkreises ist

$$P = \frac{P'}{Q} = \frac{\sum_I^{\infty} \overline{2n-1} (e_n' i_n' + e_n'' i_n'')}{\sum_I^{\infty} \overline{2n-1} (e_n'^2 + e_n''^2) \sum_I^{\infty} \overline{2n-1} (i_n'^2 + i_n''^2)}.$$

Die Bezeichnung „Induktanzfaktor“ hat indessen keine Bedeutung mehr, da die wattlosen Effekte der verschiedenen harmonischen Glieder nicht mehr miteinander kombinierbar sind.

Die Grösse

$$q_0 = \sqrt{1 - p^2}$$

hat keine physikalische Bedeutung und ist nicht gleich $\frac{\text{wattloser Effekt}}{\text{gesamter scheinbarer Effekt}}$.

Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{P_j}{EI} &= \sum_{\substack{\infty \\ 2n-1 \\ I}} \frac{e_n'' i_n' - e_n' i_n''}{EI} \\ &= \sum_{\substack{\infty \\ 2n-1 \\ I}} q_n, \end{aligned}$$

wo

$$q_n = \frac{e_n'' i_n' - e_n' i_n''}{EI}$$

besteht aus einer Reihe von Induktanzfaktoren q_n der einzelnen harmonischen Glieder.

Im allgemeinen ist für die allgemeine Wechselstromwelle

$$p^2 + q^2 < 1;$$

d. h. q weicht von

$$q_0 = \sqrt{1 - p^2} \text{ ab.}$$

Die komplexe Grösse

$$\begin{aligned} U &= \frac{P}{Q} = \frac{[EJ]}{EI} = \frac{[EJ]' + j[EJ]_j}{EI} \\ &= \frac{\sum_{\substack{\infty \\ 2n-1 \\ I}} (e_n' i_n' + e_n'' i_n'') + \sum_{\substack{\infty \\ 2n-1 \\ I}} j_n (e_n'' i_n' - e_n' i_n'')}{\sqrt{\sum_{\substack{\infty \\ 2n-1 \\ I}} (e_n'^2 + e_n''^2) \sum_{\substack{\infty \\ 2n-1 \\ I}} (i_n'^2 + i_n''^2)}} \\ &= p + \sum_{\substack{\infty \\ 2n-1 \\ I}} j_n q_n \end{aligned}$$

nimmt im Stromkreis der allgemeinen Wechselstromwelle dieselbe Stellung ein, wie Leistungsfaktor und Induktanzfaktor im Stromkreise einer Sinuswelle.

$U = \frac{P}{Q}$ kann somit als „Stromkreisfaktor“ bezeichnet werden.

Er besteht aus einem reellen Gliede p , dem Leistungsfaktor und einer Reihe imaginärer Glieder $j_n q_n$, den Induktanzfaktoren der einzelnen harmonischen Glieder.

Der absolute Wert des Stromkreisfaktors

$$u = \sqrt{p^2 + \left(\sum_I^{\infty} q_n \right)^2}$$

ist gewöhnlich < 1 .

305. Einige Beispiele mögen die Anwendung und Nützlichkeit dieses Symbolismus erläutern.

Erstes Beispiel:

$$E = \sum_I^5 (e_n' + j_n e_n'')$$

speist einen Stromkreis von der Impedanz

$$Z = r - j_n \left(n x_m - \frac{x_c}{n} \right),$$

d. h. einen Stromkreis, der den Widerstand r , die induktive Reaktanz x_m und die Kapazität x_c in Reihenschaltung enthält.

Es sei

$$\begin{aligned} e_1' &= 720 & e_1'' &= 540 \\ e_3' &= 283 & e_3'' &= 283 \\ e_5' &= -104 & e_5'' &= 138 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} e_1 &= 900 & \text{tang } \omega_1 &= 0,75 \\ e_3 &= 400 & \text{tang } \omega_3 &= -1 \\ e_5 &= 173 & \text{tang } \omega_5 &= -1,33. \end{aligned}$$

Es ist dann in symbolischer Darstellung

$$\begin{aligned} Z_1 &= 10 + 80j_1 & z_1 &= 80,6 \\ Z_3 &= 10 & z_3 &= 10 \\ Z_5 &= 10 - 32j_5 & z_5 &= 33,5, \end{aligned}$$

und die elektromotorische Kraft

$$E = (720 + 540j_1) + (283 - 283j_3) + (-104 + 138j_5),$$

oder absolut

$$E = 1000,$$

und der Strom

$$\begin{aligned} J &= \frac{E}{Z} = \frac{720 + 540j_1}{10 + 80j_1} + \frac{283 - 283j_3}{10} + \frac{-104 + 138j_5}{10 - 32j_5} \\ &= (7,76 - 8,04j_1) + (28,3 - 28,3j_3) + (-4,86 - 1,73j_5), \end{aligned}$$

oder absolut

$$I = 41,85;$$

davon ist von Fundamentalperiodizität: $I_1 = 11,15$,

„ dreifacher Periodizität: $I_3 = 40$,

„ fünffacher „ $I_5 = 5,17$.

Der gesamte scheinbare Effekt des Stromkreises ist

$$Q = EI = 41,850.$$

Der wahre Effekt des Stromkreises ist

$$\begin{aligned} P' &= [EJ]' = 1240 + 16,000 + 270 \\ &= 17,510. \end{aligned}$$

Der wattlose Effekt ist

$$jP^j = j[EJ]^j = 10,000j_1 - 850j_5,$$

somit der gesamte Effekt

$$P = 17,510 + 10,000j_1 - 850j_5,$$

d. h. der wattlose Effekt des ersten harmonischen Gliedes ist phasenverfrüht, derjenige des dritten harmonischen Gliedes = 0

und derjenige des fünften harmonischen Gliedes verspätet.

Es ist $17,510 = Ir^2$, wie ersichtlich.

Der Stromkreisfaktor ist

$$\begin{aligned} U &= \frac{P}{Q} = \frac{[EJ]}{EI} \\ &= 0,418 + 0,239j_1 - 0,0203j_5, \end{aligned}$$

oder absolut

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{0,418^2 + 0,2593^2} \\ &= 0,492. \end{aligned}$$

Der Leistungsfaktor ist

$$p = 0,418,$$

der Induktanzfaktor des ersten harmonischen Gliedes ist $q_1 = 0,239$, derjenige des dritten harmonischen Gliedes $q_3 = 0$ und derjenige des fünften harmonischen Gliedes $q_5 = -0,0203$.

Betrachtet man dagegen die Wellen durch ihre äquivalenten Sinuswellen ersetzt, so ergibt sich aus der Gleichung der Sinuswelle

$$p^2 + q_0^2 = 1$$

ein Induktanzfaktor

$$q_0 = 0,914$$

und ein Phasenwinkel

$$\text{tang } \omega = \frac{q_0}{p} = \frac{0,914}{0,418} = 2,18, \quad \omega = 65,4^\circ,$$

somit anscheinend eine sehr grosse Phasenverschiebung, während in Wirklichkeit von den 41,85 Ampère Gesamtstrom 40 Ampère (der Strom des dritten harmonischen Gliedes) mit ihrer elektromotorischen Kraft in Phase sind.

Wir haben somit hier den Fall eines Stromkreises mit komplexen harmonischen Wellen, die sich nicht durch ihre äquivalenten Sinuswellen ersetzen lassen. Die relativen Grössen der verschiedenen harmonischen Glieder sind in der Stromwelle und der elektromotorischen Kraft wesentlich verschieden und der Stromkreis hat daher gleichzeitig einen sehr niedrigen Leistungsfaktor und einen sehr niedrigen Induktanzfaktor, d. h. ein niedriger Leistungsfaktor tritt auf ohne entsprechende Phasenverschiebung. Der Stromkreisfaktor ist weniger als $\frac{1}{2}$.

Solche Stromkreise finden sich z. B. im Wechselstromlichtbogen, in Reaktionsmaschinen, synchronen Induktionsmotoren, Reaktanzen mit übersättigtem magnetischem Stromkreis, Hochspannungsleitungen, in denen die maximale Spannungsdifferenz die Grenze überschreitet, wo Büschelentladung u. s. w. auftritt.

Solche Stromkreise können daher nicht mehr mit genügender Genauigkeit und in vielen Fällen auch nicht ein-

mal annähernd mittels der Theorie der äquivalenten Sinuswelle behandelt werden, sondern mittels Symbolismus der komplexen harmonischen Welle.

Zweites Beispiel:

306. Ein Kondensator von der Kapazität $C_0 = 20$ Mikrofarad ist in den Stromkreis einer 60-periodischen Wechselstrommaschine geschaltet, welche die Welle der elektromotorischen Kraft

$e = E (\cos \varphi - 0,10 \cos 3 \varphi - 0,08 \cos 5 \varphi + 0,06 \cos 7 \varphi)$ ergibt, oder in symbolischer Darstellung

$$E = e (1_1 - 0,10_3 - 0,08_5 + 0,06_7).$$

Die Synchron-Impedanz der Wechselstrommaschine ist

$$Z_0 = r_0 - j_n n x_0 = 0,3 - 5 n j_n.$$

Was ist alsdann die scheinbare Kapazität C des Kondensators, berechnet aus Klemmenspannung und Ampère, wenn der Kondensator direkt mit den Klemmen der Wechselstrommaschine verbunden ist und wenn verschiedene Beträge von Widerstand und induktiver Reaktanz dazwischen geschaltet sind?

Die Kapazitätsreaktanz des Kondensators ist

$$x_c = \frac{10^5}{2 \pi N C_0} = 132 \text{ Ohm,}$$

oder in symbolischer Darstellung

$$+ j_n \frac{x_c}{n} = \frac{132}{n} j_n.$$

Es sei

$Z_1 = r - j_n n x =$ der mit dem Kondensator in Reihe geschalteten Impedanz. Die gesamte Impedanz des Stromkreises ist alsdann

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 + Z_1 + j_n \frac{x_c}{n} \\ &= (0,3 + r) - j_n \left([5 + x] n - \frac{132}{n} \right). \end{aligned}$$

Der Strom im Stromkreise ist

$$J = \frac{E}{z}$$

$$= e \left\{ \frac{1}{(0,3 + r) - j_1(x - 132)} - \frac{0,1}{(0,3 + r) - j_3(3x - 29)} \right.$$

$$\left. - \frac{0,08}{(0,3 + r) - j_5(5x - 1,4)} + \frac{0,06}{(0,3 + r) - j_7(7x + 16,1)} \right\}$$

und die elektromotorische Kraft an den Kondensator-
klemmen

$$E_1 = j_n \frac{x_c J}{n}$$

$$= e \left\{ \frac{132 j_1}{(0,3 + r) - j_1(x - 132)} - \frac{4,4 j_3}{(0,3 + r) - j_3(3x - 29)} \right.$$

$$\left. - \frac{2,11 j_5}{(0,3 + r) - j_5(5x - 1,4)} + \frac{1,13 j_7}{(0,3 + r) - j_7(7x + 16,1)} \right\},$$

somit die scheinbare Kapazitätsreaktanz der Kondensatoren

$$x_1 = \frac{E_1}{I}$$

und die scheinbare Kapazität

$$C = \frac{10^6}{2 \pi N x_1}.$$

a. $x = 0$: Widerstand r in Reihe mit dem Kondensator.
Auf absolute Werte reduziert ist:

$$\frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{(0,3 + r) + 17424} + \frac{0,01}{(0,3 + r)^2 + 841}$$

$$\frac{17424}{(0,3 + r)^2 + 17424} + \frac{19,4}{(0,3 + r)^2 + 841}$$

$$+ \frac{0,0064}{(0,3 + r)^2 + 1,96} + \frac{0,0036}{(0,3 + r)^2 + 259}$$

$$+ \frac{4,45}{(0,3 + r)^2 + 1,96} + \frac{1,28}{(0,3 + r)^2 + 259}$$

b. $r = 0$: Induktive Reaktanz x in Reihe mit dem Kondensator. Auf absolute Werte reduziert ist:

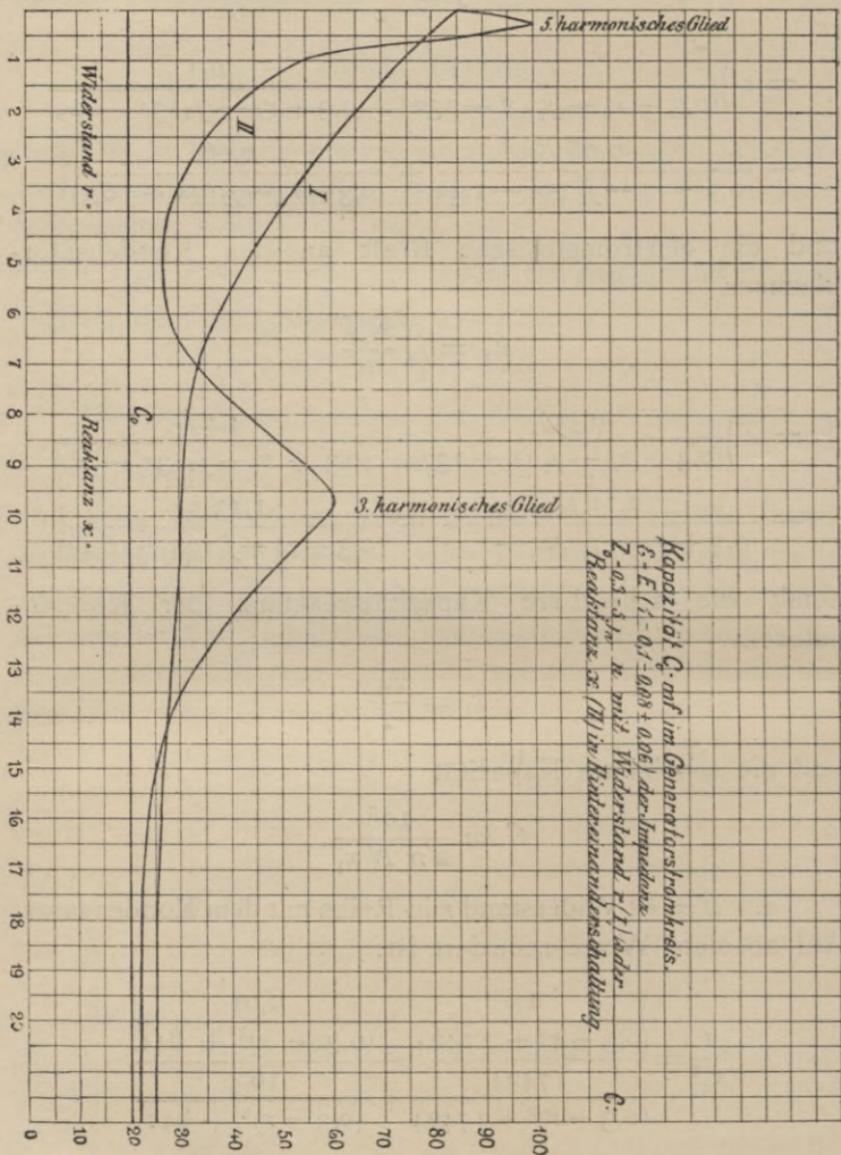


Fig. 188.

Kapazität $C_0 = 20 \text{ Mf}$ im Generatorstromkreis. $E = E(1 - 0,1 - 0,08 + 0,06)$ der Impedanz $Z_0 = 0,3 - 5j n$ mit Widerstand $r(I)$ oder Reaktanz $x(II)$ in Hintereinanderschaltung.

$$\frac{1}{x_1^2} = \frac{\frac{1}{0,09 + (x - 132)^2} + \frac{0,01}{0,09 + (3x - 29)^2}}{\frac{17424}{0,09 + (x - 132)^2} + \frac{19,4}{0,09 + (3x - 29)^2}} + \frac{\frac{0,0064}{0,09 + (5x - 1,4)^2} + \frac{0,0036}{0,09 + (7x + 16,1)^2}}{\frac{4,45}{0,09 + (5x - 1,4)^2} + \frac{1,28}{0,09 + (7x + 16,1)^2}}$$

Aus $\frac{1}{x_1^2}$ ergeben sich die Werte der scheinbaren Kapazität

$$C = \frac{10^6}{2\pi N x_1}$$

In Fig. 188 sind die Werte der scheinbaren Kapazität konstruiert für Werte von r und x von 0 bis 22 Ohm.

Wie ersichtlich, ist wenn weder Zusatzwiderstand noch Reaktanz in Reihe zum Kondensator geschaltet ist, die scheinbare Kapazität mit dieser Generatorwelle 84 Mikrofarad, oder 4,2 mal die wahre Kapazität und nimmt mit zunehmendem in Reihe geschaltetem Widerstand langsam ab zu $C = 27,5$ Mikrofarad oder 1,375 mal die wahre Kapazität bei $r = 13,2$ Ohm oder $\frac{1}{10}$ der wahren Kapazitätsreaktanz; mit $r = 132$ Ohm oder mit einem Zusatzwiderstand gleich der der ganzen Kapazitätsreaktanz auf $C = 20,5$ Mikrofarad oder nur 2,5 $\%$, und bei $r = \infty$, auf $C = 20,3$ Mikrofarad oder 1,5 $\%$ mehr als die wahre Kapazität.

Mit der Reaktanz x , aber keinem Zusatzwiderstand r in Hintereinanderschaltung, steigt die scheinbare Kapazität von 4,2 mal die wahre Kapazität bei $x = 0$ bis zu einem Maximum 5,03 mal die wahre Kapazität oder $C = 100,6$ Mikrofarad bei $x = 0,28$, wo Resonanz für die fünfte harmonische Welle auftritt. Alsdann fällt die scheinbare Kapazität wieder zu einem Minimum von 27 Mikrofarad oder 35 $\%$ mehr wie die wahre Kapazität, steigt wieder zu einem Maximum von 60,2 Mikrofarad oder 3,01 mal die wahre Kapazität für $x = 9,67$, wobei Resonanz für das dritte harmonische Glied auftritt, und nimmt wieder ab, erreicht 20 Mikrofarad oder die

wahre Kapazität bei $x = 132$, oder eine induktive Reaktanz gleich der Kapazitätsreaktanz und steigt wieder zu 20,2 Mikrofarad bei $x = \infty$.

Dieses Steigen und Fallen der scheinbaren Kapazität ist innerhalb weiter Grenzen unabhängig von der Grösse der höheren harmonischen Glieder der Generatorwelle der elektromotorischen Kraft, hängt aber lediglich von ihrer Gegenwart ab und es folgt somit, dass die wahre Kapazität eines Kondensators auch nicht annähernd durch Messung von Volt und Ampère bestimmt werden kann, wenn einige höhere harmonische Glieder im Generator vorhanden sind, ausser durch Einschaltung eines sehr grossen Widerstandes oder einer Reaktanz in Reihe zum Kondensator.

Drittes Beispiel:

307. Ein Wechselstromgenerator von der Wellenform

$$E_0 = 2000 \{1_1 + 0,12_3 - 0,23_5 - 0,13_7\}$$

und von der Synchron-Impedanz

$$Z_0 = 0,3 - 5 n j_n$$

speist über eine Leitung von der Impedanz

$$Z_1 = 2 - 4 n j_n$$

einen Synchronmotor von der Wellenform

$$E_1 = 2250 \{(\cos \omega + j_1 \sin \omega) + 0,24 (\cos 3\omega + j_3 \sin 3\omega)\}$$

und von der Synchron-Impedanz

$$Z_2 = 0,3 - 6 n j_n.$$

Die Gesamt-Impedanz des Systems ist sodann

$$Z = Z_0 + Z_1 + Z_2$$

$$= 2,6 - 15 n j_n,$$

somit der Strom

$$J = \frac{E_0 - E_1}{Z}$$

$$= \frac{2000 - 2250 \cos \omega - 2250 j_1 \sin \omega}{2,6 - 15 j_1}$$

$$+ \frac{240 - 540 \cos 3\omega - 540 j_3 \sin 3\omega}{2,6 - 45 j_3}$$

$$- \frac{460}{2,6 - 75 j_5} - \frac{260}{2,6 - 105 j_7}$$

$$= (a_1' + j_1 a_1'') + (a_3' + j_3 a_3'') + (a_5' + j_5 a_5'') + (a_7' + j_7 a_7''),$$

wo

$$a_1' = 22,5 - 25,2 \cos \omega + 146 \sin \omega$$

$$a_1'' = 130 - 146 \cos \omega - 25,2 \sin \omega$$

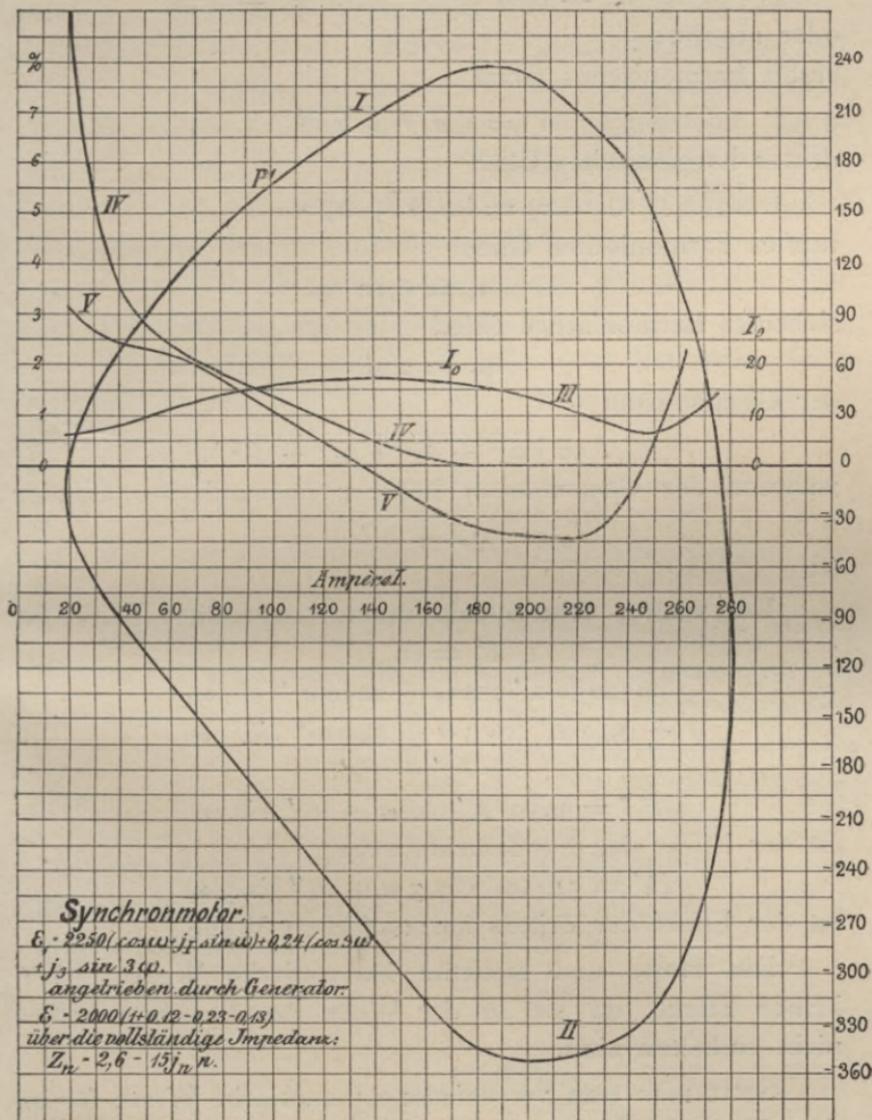


Fig. 189. Synchronmotor.

$E_1 = 2250(\cos \omega + j_1 \sin \omega) + 0,24(\cos 3\omega + j_3 \sin 3\omega)$ angetrieben durch Generator. $E_0 = 2000(1 + 0,12 - 0,23j - 0,13j^2)$ über die vollständige Impedanz: $Z_n = 2,6 - 15j_n \Omega$.

$$a_3' = 0,306 - 0,69 \cos 3 \omega + 11,9 \sin 3 \omega$$

$$a_3'' = 5,3 - 11,9 \cos 3 \omega - 0,69 \sin 3 \omega$$

$$a_5' = -0,213 \qquad a_5'' = -6,12$$

$$a_7' = -0,61 \qquad a_7'' = -2,48$$

oder absolut:

erstes harmonisches Glied

$$a_1 = \sqrt{a_1'^2 + a_1''^2}$$

drittes harmonisches Glied

$$a_3 = \sqrt{a_3'^2 + a_3''^2}$$

fünftes harmonisches Glied

$$a_5 = 6,12$$

siebentes harmonisches Glied

$$a_7 = 2,48$$

der Gesamtstrom

$$I = \sqrt{a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + a_7^2}$$

während der Gesamtstrom höherer harmonischer Glieder

$$I_0 = \sqrt{a_3^2 + a_5^2 + a_7^2}$$

ist.

Der wahre, dem Synchronmotor zugeführte Effekt ist

$$P' = [E_1 J]'$$

$$= (2250 a_1' \cos \omega + 2250 a_1'' \sin \omega)$$

$$+ (540 a_3' \cos 3 \omega + 540 a_3'' \sin 3 \omega)$$

$$= P_1' + P_3'$$

$$P_1' = 2250 (a_1' \cos \omega + a_1'' \sin \omega)$$

ist der Effekt der Fundamentalwelle;

$$P_3' = 540 (a_3' \cos 3 \omega + a_3'' \sin 3 \omega)$$

ist der Effekt der dritten harmonischen Welle.

Die fünfte und siebente harmonische Welle liefern keinen Effekt, da sie in der Welle des Synchronmotors nicht enthalten sind.

Setzt man nun verschiedene numerische Werte für ω , den Phasenwinkel zwischen Generator-Elektromotorische Kraft und Synchronmotor-Gegenelektromotorische Kraft, ein, so ergeben sich entsprechende Werte der Ströme I und I_0 und der Effekte P' , P_1' , P_3' . Dieselben sind in Fig. 189

gezeichnet, mit dem Gesamtstrom I als Abscissen. Jedem Werte des Gesamtstromes I entsprechen zwei Werte des Gesamteffektes P' , ein positiver Wert — Synchronmotor, Kurve I — und ein negativer Wert — Wechselstrom-Generator Kurve II —. Kurve III giebt den Gesamtstrom höherer Periodizität I_0 , Kurve IV die Differenz zwischen dem Gesamtstrom und dem Strom fundamentaler Periodizität $I - a_1$, in Prozenten des Gesamtstromes I , und Kurve V den Effekt des dritten harmonischen Gliedes P_3' , in Prozenten des Gesamteffektes P' .

Kurve III , IV und V entsprechen dem positiven oder Synchronmotorteil der Effektkurve P' .

Wie ersichtlich, ist die Zunahme des Stromes infolge höherer harmonischer Glieder unbedeutend und verschwindet gänzlich bei ungefähr 180 Ampère.

Der Effekt des dritten harmonischen Gliedes ist positiv, d. h. addiert sich zu dem Effekt des Synchronmotors, bis zu ungefähr 140 Ampère oder etwa dem Maximaleffekt des Motors und wird dann negativ.

Daraus folgt, dass höhere harmonische Glieder in den Wellen der elektromotorischen Kraft von Generatoren und Synchronmotoren nicht eine Stromvergeudung bedeuten, sondern die Leistung des Motors mehr oder weniger erhöhen können. Bei 75 Ampère Gesamtstrom z. B. ist die Steigerung des Effektes infolge der höheren harmonischen Glieder gleich der Steigerung des Stromes; oder mit anderen Worten: die höheren harmonischen Glieder leisten Arbeit mit demselben Güteverhältnis, wie die Fundamentalwelle.



Namen- und Sach-Register.

A.

- Admittanz, Kapitel VII 57. 58.
— absolute, eines eisengeschlossenen Stromkreises 134.
— in Reihenschaltung 63.
— in Parallelschaltung 63.
— primäre, des Transformators 197.
Algebra komplexer imaginärer Grössen, Anhang I 447.
Allgemeiner Wechselstromtransformator, Kapitel XIV 214. 217.
Allgemeine Wirkungsweise des allgemeinen Wechselstromtransformators 225.
Amplitude oder Maximum der Welle 7.
Analytische Methode der Behandlung des Synchronmotors 311.
Aenderung der Spannung im Abnahmestromkreis durch Suszeptanz im Nebenschluss 105.
Ankerwiderstand des Induktionsmotors, Wirkung auf Anzugsmoment 248.
Anlasswiderstand des Induktionsmotors 249.
Anwachsen; Maximum d. Anwachsens der Spannung im Abnahmestromkreis, gespeist durch eine induktive Leitung 110.
Anzugsmoment des Induktionsmotors 241.
Arbeitsgleichung für Gleichstrom 1.
— für Wechselstromkreise 7.
Asynchronmotor, siehe Induktionsmotor.
Auflösen von Sinuswellen in symbolischer Ausdrucksweise 42.
Ausgeglichenes Dreiphasensystem, Gleichungen 439.

- Ausgeglichenes Mehrphasensystem, Kapitel XXV 390. 400. 401.
— Vierphasensystem, Gleichungen 442.
Ausgleich des Mehrphasensystems in topographischer Darstellung 50.
Ausgleichsfaktor des Mehrphasensystems 401.
—, unveränderter, durch Transformation des Mehrphasensystems 421.
Ausgleichsströme zwischen parallelarbeitenden Wechselstrommaschinen 283.

B.

- Betrieb bei Hintereinanderschaltung von Wechselstrommaschinen 285.
Beziehung für den Transformator bei verzweigtem Stromkreis 202.

C.

- Charakteristik, äussere einer Wechselstrommaschine 273.
— magnetische, wahre und scheinbare 123.
Charakteristiken des Effekts des Synchronmotors 315.
Charakteristische Belastung einer Übertragungsleitung 104.
— Wellenformen 380.
Cyklen, magnetische, der Hysteresis 117.

D.

- Darstellung, symbolische, allgemeiner Wechselstromwellen, Anhang IV. 486—503.
Delta-Schaltung des Dreiphasensystems 414.
— Spannung des Dreiphasensystems 416.
— Strom des Dreiphasensystems 416.

- Dielektrische Hysterisis 115. 160.
 — Admittanz, Impedanz u. s. w. 162.
 — Hysterisisverzögerungs - Winkel 162.
 Doppelsinn der Vektoren 47.
 Doppelschaltung der Induktionsmotoren 256.
 Draht, Eisendraht 148. 150.
 DrehmomentdesInduktionsmotors237.
 — maximales, des Induktionsmotors 241.
 Drehung der Vektoren 41.
 Dreileiter - System, Kupferwirkungsgrad 426.
 Dreiphasengenerator bei ausgeglichener Belastung 50.
 — bei nicht ausgeglichener Belastung 53.
 Dreiphasensystem, Kap. XXIX 436. 392. 394.
 — als ausgeglichenes System 402.
 — Effektfluss 406.
 — Kupferwirkungsgrad 425.
 — resultierende magnetomotorische Kraft 398.
 — topographische Darstellung 48.
 — Transformation in Vierphasensystem 423.
 — umgekehrtes als unausgeglichenes System 403.
 — umgekehrtes, Effektfluss 395.
 — unausgeglichenes, Gleichungen 436.
 Drittes harmonisches Glied, Verzerrung der Wellenform 377.

E.

- Effekt-Axen des Wechselstrom-Systems 411.
 Effekt einer komplexen harmonischen Welle 384.
 — und sonstige Grössen doppelter Periodizität 472.
 Effektiver Wert der Welle 12. 15.
 — Widerstand 3. 7.
 — Widerstand und Reaktanz Kap. X. 113.
 — Widerstand, Reaktanz, Konduktanz, Suszeptanz 113.

Steinmetz, Wechselstromerscheinungen.

- Effekt, maximaler, der Wechselstrommaschine 281.
 — Charakteristik der Wechselstromsysteme 408. 409.
 Effektfluss im einphasigen System 400.
 — im mehrphasigen System 401. 407.
 Effektgleichung der Wechselströme 26.
 Einphasensystem 394.
 — Charakteristischer Effekt 408.
 — Effektfluss des 400. 404.
 — Induktionsmotor 258.
 — Kupferwirkungsgrad Kap. XXVIII 425.
 Einwertige Funktion der Zeit und Fourier'sche Reihe 8.
 Eisenblech 146. 150.
 Eisendraht 148. 150.
 Eisenlamellen 146. 150.
 Eisengeschlossene Induktanz 135.
 Eisengeschlossener magnetischer Stromkreis 116.
 Elektromagnetische Induktion, Gesetz der, Kap. III. 18.
 Elektrostatische Hysterisis, siehe Dielektrische Hysterisis.
 — Induktion oder Influenz 163.
 Energiekomponente der Reaktanz 349.
 Energiekomponenten des Stromes und der elektromotorischen Kraft 165.
 Entladungs-Erscheinungen 163.
 Entmagnetisierende Wirkung durch Wirbelströme 151.
 Erregerstrom des Transformators 187.

F.

- Feld des Wechselstromgenerators 266.
 — Pulsation des Feldes im Wechselstromgenerator 267.
 Foucault Ströme, Kap. XI 115. 143.
 Fourier'sche Reihe, einwertige Funktion der Zeit 8.
 Frequenz der Welle 8.
 — Festlegung beim Induktionsgenerator 252.
 Fundamentalwelle, oder erstes harmonisches Glied 9.

Fünftes harmonische Glied, Verzerrung der Wellenform durch das 377.
 Funkenbildung in Reihen- und Nebenschlussmotoren 345.

G.

Gegenseitige Induktanz 157.
 Gemeinsamer Kraftlinienfluss des Transformators 217.
 Generator bei unausgeglichener Belastung in topographischer Darstellung 53.
 — dreiphasiger, bei ausgeglichener Belastung in topographischer Darstellung 50.
 — Induktions- 251.
 — Polardiagramm bei induktionsfreiem, induktivem und Kapazitätsstromkreis 32.
 — vierphasig, in topographischer Darstellung 54.
 — Wechselstrom, Kap. XVI 266.
 Gleichförmige Geschwindigkeit als Bedingung beim Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen 283.
 Gleichungen der Wechselstrommaschine 271.
 — des allgemeinen Wechselstromtransformators 217.
 Graphische Darstellung, Kap. IV 22.
 — Methode des Induktionsmotors 234.
 — — des Synchronmotors 293.
 — —, Nachteil für numerische Rechnungen 37.
 Güterverhältnis konstanter Spannung für konstante Stromtransformation durch Widerstand-Reaktanz 90.

H.

Harmonische Glieder der verzerrten Welle 123.
 Harmonische Glieder, Wirkung der Selbstinduktion und Kapazität 381.
 Harmonisches erstes Glied 9.
 Harmonische Glieder, gradzahlige 9.
 — — oder Obertöne 9.
 — — Resonanz in Leitungen verursachend 381.

Harmonische Glieder, Wirkungen höherer, Kap. XXII 376.
 Hintereinanderschaltung von Induktionsmotoren 256.
 Hysterisis - Abnahme, verursacht durch eine verzerrte Welle 387.
 — dielektrische 115. 160.
 — Effekt der, im elektrischem Stromkreis, Schlussfolgerungen 140.
 — Koeffizient 127.
 —, magnetische 115. 116.
 — -Motor 262.
 — -Schleife 117.
 — -Verlust 125.
 — Zunahme der, verursacht durch eine verzerrte Welle 387.
 Hysteretischer Energiestrom 126.
 — Energiestrom des Transformators 188.
 Hysteretische Voreilung in der Phase 126.

I.

Igeltransformator 187.
 Imaginäre Grössen, komplexe, Anhang I 447.
 Impedanz 2. 5.
 — innere des Transformators 198.
 — in symbolischer oder komplex-imaginärer Darstellung 43.
 — zusammengesetzte, in Parallelschaltung 63.
 — —, in Reihenschaltung 58.
 — mit einem Stromkreise hintereinander geschaltet 76.
 — scheinbare des Transformators 202.
 Induktanz, Einführung und Ableitung der Formel 20.
 — gegenseitige und Selbstinduktanz 157.
 Induktion, elektrostatische, oder Influenz 163.
 Induktionstreie Belastung, Wirkung auf die äussere Charakteristik einer Wechselstrommaschine 273.
 Induktionsfreier Abnahmestromkreis, der durch eine nicht-induktionsfreie Leitung gespeist wird 93.
 Induktionsgenerator 251.

- Induktionsmotor, Kap. XV 228.
 — als Spezialfall des allgemeinen Wechselstromtransformators 220. 228.
 — graphische Methode 234.
 — numerisches Beispiel 253.
 — symbolische Methode 229.
 Induktive Belastung, Wirkung auf die äussere Charakteristik einer Wechselstrommaschine 272.
 — Leitung, einen induktionsfreien Abnahmestromkreis speisend 95.
 — —, maximaler übertragener Effekt 96.
 — — bei maximalem Wirkungsgrad übertragene Leitung 102.
 — — einen induktionsfreien, nicht-induktionsfreien und Kapazitäts-Stromkreis speisend, graphisch 26. 30. 31.
 — — symbolische Methode 44.
 Induzierte elektromotorische Kraft. Ableitung der Formel 18.
 Influenz oder elektrostatische Induktion 163.
 Innere Impedanz des Transformators 198.
 Integralwerte der Welle, Kap. II 12.
 Intensität der Welle 24.
 Isolations-Beanspruchung in Hochspannungsleitungen, verursacht durch verzerrte Wellenform 388.

J.

- j. Einführung als Symbol 40.
 — Definition als $\sqrt{-1}$ 41.
 Joule's Gleichstromgesetz 1.
 — Wechselstromgesetz 7.

K.

- Kapazität 5.
 — Belastung, Wirkung auf äussere Charakteristik einer Wechselstrommaschine 272.
 — Leitungs-, annäherungsweise 170. 171.
 Kapazität, Wirkung auf höhere harmonische Glieder 380.
 Kaskadenschaltung von Induktionsmotoren 256.

- Kirchhoff's Gesetze der Gleichstromkreise 1.
 — — in symbolischer oder komplex-imaginärer Darstellung 45.
 — — der Wechselstromkreise 7. 26.
 Koeffizient der Wirbelströme 147. 145.
 — der Impedanzen in Reihenschaltung 58.
 — der Konduktanzen 57.
 — der Sinuswellen im Parallelogramm oder Polygon als Vektoren 25. 26.
 — der Sinuswellen in symbolischer Darstellung 42.
 — der Widerstände 57.
 Kommutator, Funkenbildung am, Reihen- und Nebenschluss-Motor 345.
 — Motoren Kap. XIX 329.
 Kompensation des Spannungsabfalls in der Leitung bei Suszeptanz im Nebenschluss 106.
 — für zurückbleibende Ströme durch Kondensanz im Nebenschluss 79.
 Komplex-imaginäre Grössen, Anhang I 447.
 Kondensanz im Nebenschluss, Kompensation für zurückbleibende Ströme 79.
 — —, in der Leitung, zur Regulierung der Spannung im Abnahme-Stromkreis 105.
 — oder Kapazitätsreaktanz 6.
 — — Reaktanz für Transformation von konstanter Spannung in konstanten Strom 84.
 —, symbolische oder komplex-imaginäre Darstellung 44.
 Kondensatorstrom von Leitungen, Grössenordnung 168.
 Konduktanz, Kapitel VII 57. 58.
 — äquivalente der Wirbelströme 144.
 — der gegenseitigen Induktanz 157.
 Konduktanz der magnetischen Hysteresis 131.
 — des Abnahmestromkreises gespeist durch eine induktive Leitung 98.

- Konduktanz, effektive 114.
 — zusammengesetzte 57.
 Konstanten des Wechselstromtransformators 211.
 — elektrische, eines eisengeschlossenen magnetischen Stromkreises 138.
 Koordinaten, rechtwinklige und polare 22.
 Kraft, gegen elektromotorische, und Komponente der Klemmenspannung 28.
 Kupfer - Wirkungsgrad der Mehrphasensysteme, Kap. XXVIII 425.

L.

- Ladestrom der Übertragungsleitungen, Größenordnung 169.
 Leerlauf des Synchronmotors 317.
 Leistung des Abnahmestromkreises, durch eine nicht-induktionsfreie Leitung gespeist 95.
 — des allgemeinen Wechselstromtransformators 223. 224.
 — des Induktionsmotors 238. 240.
 — des Repulsionsmotors 337.
 — des Synchronmotors 341.
 — maximale, d. Induktionsmotors 244.
 — maximale, der Wechselstrommaschine 281.
 Leistung, maximale, des Synchronmotors 316.
 — maximale, eines induktionsfreien Abnahmestromkreises, der durch eine nicht-induktionsfreie Leitung gespeist wird 93.
 Leistung, Steigerung der, von Leitungen bei Suszeptanz, Nebenschluss 110.
 Leistungsfaktor des Lichtbogens 372.
 Leistungsfaktor des Reihenschlussmotors 346.
 Leitungen, Widerstand und Reaktanz von, Kap. IX 91.
 Leitungskapazität, annäherungsweise 168. 169. 170.
 — genaue Untersuchung der 172.
 Leitung, induktive, speisend induktionsfreien, nicht-induktionsfreien

- und Kapazitäts-Stromkreis, graphisch 26. 30. 31.
 Leitung, Resonanz durch höhere harmonische Glieder 381.
 — symbolische Methode 45.
 Lichtbogen, Leistungsfaktor des 372.
 Luftzwischenraum in magnetischem Stromkreis 136.
 Luftzwischenraum in seiner Wirkung auf die hysteretische Verzerrung 121.

M.

- Magnetische Hysterisis 115. 116.
 Magnetisierender Strom 126.
 — — des Transformators 188.
 Magnetomotorische Kraft des Wechselstromgenerators 266.
 — — hervorgebracht durch ein symmetrisches Mehrphasensystem 395.
 Maximales Drehmoment des Induktionsmotors 241.
 Maximaler Effekt, übertragen durch eine nicht-induktionsfreie Leitung 96.
 Maximale Leistung des Induktionsmotors 244.
 — — des Synchronmotors 316.
 — — der Wechselstrommaschine 281.
 Maximaler Wert der Welle 12.
 Maximum des Anwachsens der Spannung in dem Abnahme-Stromkreis 110.
 Mechanische Leistung des allgemeinen Wechselstrom-Transformators 223. 224.
 — — des Induktionsmotors 237. 239.
 Mehrphasensysteme, allgemeine, Kap. XXIII 389.
 — Ausgleichsfaktor der 401.
 — Charakteristischer Effekt der 408.
 — symmetrische 393.
 Mehrphasensysteme, Transformation von, Kap. XXVII 421.
 — verkettete, Kap. XXVI 413.
 Minimaler Strom bei gegebener Leistung des Synchronmotor 320.
 Mittelwert der Welle 14.
 Molekulare Reibung 115.

- Monocyklische Systeme 408.
 — —, charakteristischer Effekt der, 407.
 Momentane Werte der Welle, Kap. II 12.
 Motor, Kommutator- 329.
 — Nebenschlussmotor 343.
 — Reihenschlussmotor 338.
 — Repulsionsmotor 329.
 — Synchronmotor, Kap. XVIII 293.
 Motorwirkung des allgemeinen Wechselstrom-Transformators 225.

N.

- Nebenschlussmotor 338. 343.

O.

- Obertöne, oder höhere harmonische Glieder 9.
 Ohm's Gleichstromgesetz 1.
 — Wechselstromgesetz 2. 6.
 Oscillierende Ströme und elektromotorische Kräfte, Anhang II 455.

P.

- Parallelarbeiten von Wechselstrommaschinen, Kap. XVII 282.
 Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen 282.
 Parallelogramm der Vektoren oder Sinuswellen 25.
 Pendelbewegung bei Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen 283.
 Periode einer Welle 8.
 Phase einer Welle 8. 24.
 Phasenverhältnis des Stromes in Wechselstrommaschinen, rückwirkend auf das Feld 267.
 Phasenverschiebung, maximale, im Synchronmotor 322.
 Polardiagramm d. Transformators 188.
 Polarisation, äquivalent der Kapazität 6. 163.
 Polarkoordinaten 22.
 Polycyklische Systeme 408.
 — — charakteristischer Effekt der, 408.
 Polygon der Sinuswellen 25.
 Primäre Admittanz des Transformators 197.

- Pulsation des Feldes von Wechselstromgeneratoren 267.
 — des magnetischen Feldes die Wellenform verzerrend 365.
 — der Reaktanz die Wellenform verzerrend 369.
 — der Reluktanz die Wellenform verzerrend 368.
 — des Widerstandes die Wellenform verzerrend 370.
 Pulsierende Welle 13.

R.

- Reaktanz als Komponente der Impedanz 2.
 — effektive, Kap. X 113.
 — Einführung und Ableitung der Formel 19.
 — hintereinandergeschaltet mit einem Stromkreis 67.
 — in symbolischer Darstellung 42.
 — Kapazitätsreaktanz in symbolischer Darstellung 44.
 — Kapazitätsreaktanz oder Kondensanz 6.
 — Kondensanz, Transformation von konstanter Spannung auf konstanten Strom, Kap. IX 84.
 — magnetische 5.
 — synchrone der Wechselstrommaschine 271.
 — — des Synchronmotors 328.
 — und Widerstand von Leitungen, Kap. IX 91.
 — variable, in Reaktionsmaschinen 248. 249.
 Reaktion bei Voreilung und Nacheilung des Wechselstroms im Synchronmotor 269.
 Reaktionsmaschinen, Kap. XX 347.
 — Gleichungen 354.
 — Verzerrung der Wellenform 352.
 Rechtwinklige Koordinaten 22.
 — — der Vektoren in graphischer Darstellung durch das Polardiagramm 39.
 Regulierung der Wechselstrommaschine auf konstante Spannung 278.

- Regulierung der Spannung des Abnahmestromkreises durch Suszeptanz in Nebenschluss zur Leitung 106.
- Reibung molekulare 115.
- Reihenschlussmotor 338.
- Gleichung 340.
- Leistung 341.
- Phasenverschiebung 342.
- Reluktanz des magnetischen Stromkreises der Wechselstrommaschine 267.
- variable in Reaktionsmaschinen 248.
- Repulsionsmotor 329.
- Effekt des 337.
- Gleichungen 335.
- Resonanz 72.
- durch höhere harmonische Glieder 126.
- durch höhere harmonische Glieder in Leitungen 381.
- in Leitungen 111.
- vollständige, in Leitungen 383.
- Resultierendes magnetisches Feld der Wechselstrommaschine 266.
- Ringschaltung des Mehrphasensystems 391.
- Ringschaltung des verketteten Mehrphasensystems 414.
- Ringspannung des verketteten Mehrphasensystems 416.
- Ringstrom des verketteten Mehrphasensystems 416.
- Ruhmkorff'scher Funkeninduktor 10
- S.**
- Schirmwirkung durch elektrische Leiter 153.
- durch Wirbelströme 151.
- durch Wirbelströme in Eisen 143.
- Schlüpfen, magnetisches 125.
- Schlüpfung des allgemeinen Wechselstrom-Transformators 217.
- Schlüpfung im Induktionsmotor 228.
- Scheinbare Impedanz des Transformators 202.
- Sekundäre Belastung, über die Wirkung derselben auf hysteretische Verzerrung 121.
- Selbst-Induktanz 4.
- der Wechselstrommaschine 270.
- und gegenseitige Induktanz 157.
- Selbst-Induktion des Transformators 186. 216.
- Effekt höherer harmonischer Glieder 380.
- elektromotorische Kraft der, 4.
- Koeffizient der Selbst-Induktion oder Selbst-Induktanz 4.
- Sinuswelle, äquivalente 123. 125. 360.
- als einfachste Welle 7.
- in Polarkoordinaten 23.
- Steigerung der Leistung in Leitungen durch Suszeptanz im Nebenschluss 110.
- Sternschaltung des Mehrphasensystems 391.
- des verketteten Mehrphasensystems 414.
- Sternspannung des verketteten Mehrphasensystems 416.
- Sternstrom des verketteten Mehrphasensystems 416.
- Streu(linien)fluss, magnetischer des Transformators 185. 216.
- Strom, minimaler, bei gegebener Leistung im Synchronmotor 320.
- Stromverlust 115.
- des Transformators 187.
- Suszeptanz, Kap. VII 57. 58.
- des Abnahmestromkreises durch eine nicht-induktionsfreie Leitung gespeist bei verschiedener Leistung 96.
- effektive 114.
- — der gegenseitigen Induktanz 160.
- im Nebenschluss in der Leitung, Regulierung der Spannung im Abnahmestromkreis durch 105.
- Symbolische Methode, Kap. V 37.
- Symbolische Methode auf Transformatoren angewandt 197.
- Darstellung 229.
- Symmetrisches Mehrphasensystem Kap. XXIV 393. 389.

- Synchrone Reaktanz der Wechselstrommaschine 271.
 — des Synchronmotors 328.
 Synchroner Induktionsmotor 260.
 Synchrone Wechselstrommaschine als Kondensanz oder Induktanz 164.
 Synchronisierende Kraft der Wechselstrommaschinen 284. 288. 290.
 Synchronismus, Betriebsverhältnisse nahe dem Synchronismus des Induktionsmotors 250.
 — des Induktionsmotors 250.
 Synchronmotor, Kap. XVIII 293.
 — analytische Methode des 312.
 — Charakteristiken des Effekts des, 315.
 — Diskussion der Resultate des 326.
 — fundamentale Gleichung des 313.
 — graphische Methode des 293.
 — maximale Leistung des 316.

T.

- Tandemschaltung von Induktionsmotoren 256.
 Teilstrom, äquivalent einem Wechselstromtransformator 202.
 Transformation, doppelte 205.
 — eines Dreiphasensystems in ein Vierphasensystem und umgekehrt 423.
 — von konstanter Spannung in konstanten Strom 84.
 — von Mehrphasensystemen, Kap. XXVII 421.
 Transformator, Kap. XIII 185.
 — äquivalent einem verzweigten Stromkreis 202. 203.
 — allgemeiner Wechselstromtransformator, Kap. XIV 214.
 — Gleichungen 216.
 — Konstanten bei induktionsfreier Belastung 211.
 — magnetischer Streulinienfluss des Transformators 216.
 — — Motor. Siehe Induktionsmotor.
 — numerisches Beispiel 212.
 Transformator, Phasendifferenz des sekundären und primären Stromes 36.
 — Polardiagramm 32. 36. 188.

- stationärer Transformator als besonderer Fall des allgemeinen Wechselstromtransformators 221.
 — symbolische Methode 197.
 Trigonometrische Rechnungsweise und graphische Darstellung 38.

U.

- Übertragungsleitung, charakteristische Belastung der 104.
 Umformer, siehe Transformator.
 Umformer-Motor, siehe Induktionsmotor.
 Umgekehrtes Dreiphasensystem als unausgeglichenes System 403.
 — Effekfluss des 407.
 Unabhängiges Mehrphasensystem 391.
 — Vierphasensystem 444.
 Unausgeglichener Dreiphasengenerator oder im ausgeglichenen System bei ungleicher Belastung 52.
 Unausgeglichenes Dreiphasensystem, Gleichungen 439.
 — Mehrphasensystem, Kap. XXV 391. 400.
 — Vierphasensystem, Gleichungen 442.
 — — mit gemeinsamer Rückleitung 55.
 Ungleichmässige Stromverteilung im Leiter 154.
 Unsymmetrisches Mehrphasensystem 389.

V.

- Variable Reaktanz und Reluktanz in Wechselstrommaschinen 347. 348.
 Vektoren 22.
 Vergleichung der Systeme in Bezug auf Kupfer - Wirkungsgrad, Kap. XXVIII 425.
 Verkettetes Mehrphasensystem, Kap. XXVI 391. 413.
 — Vierphasensystem 441.
 Verkettung der Induktionsmotoren 256.
 Verteilte Kapazität, annäherungsweise 170. 171.

- Verteilte Kapazität, Beispiel und besondere Fälle 180.
 — genaue Untersuchung 172.
 Verzerrung der Stromwelle durch Hysterese 116.
 — der Wellenform durch Lichtbog. 370.
 — der Wellenform durch ein drittes harmonisches Glied 377.
 — der Wellenform durch ein fünftes harmonisches Glied 377.
 — der Wellenform in Reaktionsmaschinen 352.
 — der Wellen-(Kurven)form und ihre Ursachen, Kap. XXI 360.
 — der Wellenform, Abnahme der Hysterese verursachend 387.
 — der Wellenform, Zunahme der Hysterese verursachend 387.
 Verzögerungswinkel der dielektrischen Hysterese 162.
 — des entmagnetisierenden und magnetisierenden Wechselstroms im Synchronmotor 268.
 Vierphasensystem, Kap. XXX 391. 395. 441.
 — als ausgeglichenes System 402.
 — Effekfluss 406.
 — Gleichungen 441.
 — Kupferwirkungsgrad, Kap. XXVIII 455.
 — mit gemeinsamer Rückleitung, nicht ausgeglichen 55.
 — resultierende magnetomotorische Kraft 399.
 — Transformation in Dreiphasensystem 423.
 Voreilung des magnetisierenden und entmagnetisierenden Wechselstroms im Synchronmotor 267.

W.

- Wattlose Komponente d. Stromes und der elektromotorischen Kraft 164.
 Wechselseitige Induktion des Transformators 175.
 Wechselstrommaschine mit konstantem Strom 280.
 Wechselstrommaschinen, das Parallelarbeiten von, Kap. XVII 282.

- Wechselstromwelle 13.
 Wellenform, Charakteristik der 378.
 — Verzerrung durch ein drittes harmonisches Glied 377.
 — — durch ein fünftes harmonisches Glied 377.
 — — durch den Lichtbogen 370.
 — — in Reaktionsmaschinen 352.
 — — und ihre Ursachen, Kap. XXI 360.
 — —, Abnahme der Hysterese verursachend 387.
 — —, Zunahme der Hysterese verursachend 387.
 Widerstand als Komponente der Impedanz 2.
 — des Ankers des Induktionsmotors, Wirkung auf das Anzugsmoment 248.
 — effektiver 3. 6. 113.
 — hintereinandergeschaltet mit einem Stromkreis 64.
 — zusammengesetzter 57.
 — symbolische Darstellung des 42.
 — und Reaktanz von Leitungen, Kap. IX 91.
 Winkel der Hysteresevoreilung eines eisengeschlossenen Stromkreises 135.
 — der Voreilung der Wirbelströme 144.
 Wirbelströme, Kap. XI 115. 143.
 — in einem Leiter 154.
 — nicht beeinflusst durch Wellenform 387.

Y.

- Y Schaltung des Dreiphasensystems 414.
 Y Spannung des Dreiphasensystems 416.
 Y Strom des Dreiphasensystems 416.

Z.

- Zeitkonstante 4.
 Zusammengesetzte harmonische Welle 11.
 Zusammensetzung der Admittanzen in Parallelschaltung 63.
 Zweiphasen, siehe Vierphasen.

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAK

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



11 5378

5378

L. iaw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299058