…kürlicher Funktionen nach Funktionen spezieller orthogonaler und biorthogonaler Systeme.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der philosophischen Fakultät der Schlesischen
Friedrich-Wilhelms-Universität in Breslau
eingereicht und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Herbert Laudien
Kand. des höh. Lehramts aus Breslau.

Sonnabend, den 16. Mai 1914,
in der Aula Leopoldina
Vortrag
über das Thema: Cauchys Bedeutung für die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen
und
Promotion.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1914.

Referent: Professor Dr. Kneser.

Meinen Eltern.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

In der Theorie der Integralgleichungen wird der Nachweis der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen in eine nach den Funktionen eines Orthogonalsystems fortschreitende Reihe in zwei Schritten erbracht.

Ist $K(x, \xi)$ ein in den Variablen x, ξ symmetrischer Kern, sind $\varphi_\nu(x)$ seine normierten Eigenfunktionen, λ_ν seine Eigenwerte, und gilt die Entwicklung

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu},$$

d. h. die sogen. bilineare Formel, worin die rechtsstehende Reihe gleichmäßig konvergiert, ist ferner $f(x)$ eine beliebige, stückweise stetige Funktion, so kann die Funktion

$$F(x) = \int_0^1 K(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi \tag{a}$$

in eine nach den Funktionen $\varphi_\nu(x)$ fortschreitende Reihe auf die Fouriersche Art entwickelt werden, d. h. es gilt die Gleichung

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) \int_0^1 F(\alpha)\, \varphi_\nu \alpha\, d\alpha\,.$$

Eine Funktion von der Form (a) nennen wir quellenmäßig dargestellt.[1]) Sie erfüllt dieselben Randbedingungen wie der Kern $K(x, \xi)$ und ist mit ihrer ersten Ableitung stetig, während ihre zweite Ableitung nur stückweise stetig ist.

Ist nun umgekehrt $F(x)$ eine mit ihrer ersten Ableitung stetige Funktion, während ihre zweite Ableitung stückweise

[1]) Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, Braunschweig 1911 S. 9.

stetig ist, die denselben Randbedingungen genügt wie der Kern $K(x, \xi)$, so ist der erste Schritt, der zum Nachweis der Entwickelbarkeit der Funktion $F(x)$ nach den Eigenfunktionen des Kerns führt, der, nachzuweisen, daß $F(x)$ durch den Kern $K(x, \xi)$ quellenmäßig dargestellt werden kann; der zweite Schritt besteht in dem Nachweis der Gültigkeit der bilinearen Formel und der gleichmäßigen Konvergenz der bilinearen Reihe. Während der erste Schritt in den meisten Fällen leicht durchführbar ist, bietet der letztere Nachweis schon erheblichere Schwierigkeiten. Um diesen Nachweis zu führen, hat man in neuester Zeit vielfach den Cauchyschen Integralsatz herangezogen. Die Untersuchungen über die gleichmäßige Konvergenz der bilinearen Reihe werden dabei ersetzt durch Grenzbetrachtungen über Integrale meromorpher Funktionen, welche über unbegrenzt wachsende Konturen zu erstrecken sind. In der vorliegenden Arbeit ist diese Methode in einigen speziellen Fällen zum Nachweis der Gültigkeit der bilinearen Formel angewandt worden.

In den Beispielen des ersten und dritten Kapitels handelt es sich um die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen symmetrischer, im ganzen Grundgebiet endlicher und stetiger Kerne mit reellen, positiven Eigenwerten. Die Entwicklungen der Kerne selbst nach ihren Eigenfunktionen sind demnach durch den Satz von Mercer über definit positive Kerne[1]) zwar unmittelbar gegeben; um aber die über die zu entwickelnden Funktionen zu machenden Voraussetzungen einschränken zu können, ist es nötig, auch die Entwicklung der unstetigen Ableitung des Kerns zu besitzen. Diese liefert die Cauchysche Methode zugleich mit der Entwicklung des Kerns selbst; sie erspart den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der durch einmalge Differentiation aus der bilinearen Reihe abgeleiteten Reihe. Auf den im dritten Kapitel behandelten Kern ist der Mercersche Satz nicht anwendbar.

In dem vierten und fünften Kapitel finden sich die Hauptresultate der Arbeit. Es werden darin die Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen unsymmetrischer

---

[1]) Philosophical Transactions of the Royal society 1909.

Kerne behandelt.[1]) Den Gegenstand des vierten Kapitels bildet ein thermoelastisches Problem von Duhamel,[2]) welches zu einer Integralgleichung mit unsymmetrischem Kerne führt und damit zu der Aufgabe, eine willkürliche Funktion nach den Funktionen eines Biorthogonalsystems zu entwickeln. Ebenso behandelt das fünfte Kapitel, dessen Ausgangspunkt ein rein analytisches Liouvillesches Problem bildet, die Entwickelung nach Funktionen eines Biorthogonalsystems.

Das erste Kapitel dient lediglich der Darstellung der angewandten Methode an einem einfachen Beispiel.

Erstes Kapitel.

Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen der radial abkühlenden Kugel.

Eine homogene Kugel vom Radius π werde im Mittelpunkte auf der konstanten Temperatur 0^0 gehalten und strahle nach außen Wärme aus. Die Temperatur u genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial(xu)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2(xu)}{\partial x^2}.$$

Setzt man $u = e^{-\gamma t}.v$, $\frac{\gamma}{a^2} = \varrho^2$, so findet man als Differentialgleichung der Eigenfunktionen

$$v'' + \varrho^2 v = 0; \tag{1}$$

sie genügen den Randbedingungen

$$v \Big|^{x=0} = 0, \quad \frac{dv}{dx} + hv \Big|^{x=\pi} = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Entwicklungen dieser Art sind bereits durchgeführt von Hilb (Crelle 140), Haupt (Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie, Math.-phys. Klasse, 4. Mai 1912, Koschmieder (Crelle 143).

[2]) Mém. prés. par divers savants à l'Acad. de Paris T. V (1838) p. 440, Journal de l'école polytechnique T. XV. Cah. 25. Vgl. hierzu auch Franz Neumann, Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in komprimierten oder ungleichmäßig erwärmten unkristallinischen Körpern. Abh. d. Berl. Akad. für 1841. Berlin 1842.

Bezeichnet man mit $\pm\varrho_\nu$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho\cos\varrho\pi + h\sin\varrho\pi = 0\,, \tag{3}$$

so sind die Eigenfunktionen

$$v_\nu = \sin\varrho_\nu x\,.$$

Der Kern $K(x, \xi)$ ist bestimmt als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K(x,\xi)}{\partial x^2} = 0\,, \tag{4}$$

durch die Forderung der Stetigkeit bezüglich der Variablen x und ξ im Interval $0 \leqq x \leqq \pi$ und durch die Gleichung

$$\frac{\partial K}{\partial x}\bigg|^{x=\xi-0} - \frac{\partial K}{\partial x}\bigg|^{x=\xi+0} = 1\,. \tag{5}$$

Bezeichnen wir mit $\chi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung (4), von denen die erste der ersten, die zweite der zweiten Randbedingung genügt, so können wir den Kern ansetzen in der Form

$$\underset{x<\xi}{K(x,\xi)} = C\chi(x)\psi(\xi)\,,$$

$$\underset{x>\xi}{K(x,\xi)} = C\chi(\xi)\psi(x)\,,$$

wobei die Konstante C aus der Gleichung

$$C[\chi'(\xi)\psi(\xi) - \chi(\xi)\psi'(\xi)] = 1$$

zu bestimmen ist. Setzen wir $\chi(x) = x$, $\psi(x) = x - \frac{h\pi+1}{h}$, so ist

$$C = -\frac{h}{h\pi+1}\,,$$

und wir erhalten für den Kern die Ausdrücke

$$\underset{x<\xi}{K(x,\xi)} = \frac{x[1+h(\pi-\xi)]}{1+h\pi}\,,$$

$$\underset{x>\xi}{K(x,\xi)} = \frac{\xi[1+h(\pi-x)]}{1+h\pi}\,.$$

Die der Differentialgleichung äquivalente Integralgleichung lautet

$$v(\xi) = \varrho^2\int_0^\pi K(x,\xi)\,v(x)\,dx\,.$$

Bezeichnen wir mit

$$\varphi_\nu(x) = \frac{v_\nu(x)}{\int\limits_0^\pi v_\nu^2(x)\,dx}$$

die normierten Eigenfunktionen des Kerns, so lautet die bilineare Formel, deren Richtigkeit zu erweisen ist,

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2}.$$

Die im folgenden durchgeführte Beweismethode führt nun nicht direkt auf diese Gleichung, vielmehr erscheint diese als spezieller Fall einer allgemeineren, deren Richtigkeit unmittelbar durch den Cauchyschen Integralsatz erwiesen wird. In der Differentialgleichung (1) der Eigenfunktionen fügen wir zu der Konstanten ϱ^2 die Konstante z^2 additiv hinzu; der Differentialgleichung

$$v'' + (\varrho^2 + z^2)\,v = 0 \tag{6}$$

stellen wir als Differentialgleichung des Kerns $K_1(x, \xi)$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2} + z^2 K_1 = 0 \tag{7}$$

gegenüber. Aus (6) und (7) ergibt sich die Integralgleichung

$$v(\xi) = \varrho^2 \int\limits_0^\pi K_1(x, \xi)\,v(x)\,dx;$$

die normierten Eigenfunktionen des Kerns $K_1(x, \xi)$, der dieselben Randbedingungen erfüllt wie der Kern $K(x, \xi)$, sind wiederum die Funktionen $\varphi_\nu(x)$, seine Eigenwerte sind die Größen $\varrho_\nu^2 - z^2$; es wird demnach als Entwicklung des Kerns $K_1(x, \xi)$ nach seinen Eigenfunktionen die bilineare Formel

$$K_1(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2 - z^2} \tag{8}$$

zu erwarten sein. Fassen wir $z = v + iw$ als komplexe Veränderliche auf, so stellt die Entwicklung die Partialbruchzerlegung von $K_1(x, \xi)$, aufgefaßt als meromorphe Funktion von z dar. Ist nun $K_1(x, \xi)\,|^{z=0} = K(x, \xi)$, so geht die Gleichung (8), wenn man in ihr $z = 0$ setzt, in die bilineare Entwicklung des Kerns $K(x, \xi)$ über.

Wir stellen zunächst für den Kern $K_1(x, \xi)$ die expliziten Ausdrücke her. Verstehen wir unter α eine Wurzel der Gleichung

$$z \cos(\alpha - \pi) z - h \sin(\alpha - \pi) z = 0, \tag{8a}$$

so können wir setzen

$$\underset{x<\xi}{K_1(x, \xi)} = C_1 \sin z x \cdot \sin z (\xi - \alpha),$$

$$\underset{x>\xi}{K_1(x, \xi)} = C_1 \sin z \xi \cdot \sin z (x - \alpha).$$

Aus der Gleichung

$$K_1'(\xi, \xi - 0) - K_1'(\xi, \xi + 0) = 1 \text{ [1]}$$

ergibt sich

$$C_1 = -\frac{1}{z \sin z \alpha}.$$

Durch Umformung der Gleichung (8a) erhält man

$$\frac{\cos z\pi \cdot \cos z\alpha + 1}{\cos z\alpha - \cos z\pi} = -\frac{h}{z}, \quad \cot z\alpha = \frac{h \cot z\pi - z}{z \cot z\pi + h},$$

$$\frac{1}{z \sin z\alpha} = \frac{\sqrt{h^2 + z^2}}{z(z \cos z\pi + h \sin z\pi)},$$

und somit für $K_1(x, \xi)$

$$\left.\begin{aligned} \underset{x<\xi}{K_1(x, \xi)} &= -\frac{\sqrt{h^2 + z^2} \sin z x \cdot \sin z(\xi - \alpha)}{z(z \cos z\pi + h \sin z\pi)}, \\ \underset{x>\xi}{K_1(x, \xi)} &= -\frac{\sqrt{h^2 + z^2} \sin z \xi \cdot \sin z(x - \alpha)}{z(z \cos z\pi + h \sin z\pi)}. \end{aligned}\right\} \tag{9A}$$

Eine andere Form für $K_1(x, \xi)$ liefert folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{\sin z(\xi - \alpha)}{\sin z\alpha} &= \sin z\xi \cdot \cot z\alpha - \cos z\xi \\ &= \sin z\xi \cdot \frac{h \cot z\pi - z}{z \cot z\pi + h} - \cos z\xi \end{aligned}$$

---

[1]) Mit $K_1'(x, \xi)$ werde kurz die Ableitung nach x bezeichnet.

$$= \frac{\sin z\xi\,(h\cos z\pi - z\sin z\pi) - \cos z\xi\,(z\cos z\pi + h\sin z\pi)}{z\cos z\pi + h\sin z\pi}$$

$$= \frac{h\sin z\,(\xi - \pi) - z\cos z\,(\xi - \pi)}{z\cos z\pi + h\sin z\pi}.$$

Somit ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \underset{x<\xi}{K_1}(x,\xi) &= \sin zx\cdot\frac{h\sin z\,(\xi-\pi) - z\cos z\,(\xi-\pi)}{z\,(h\sin z\pi + z\cos z\pi)},\\ \underset{x>\xi}{K_1}(x,\xi) &= \sin z\xi\;\frac{h\sin z\,(x-\pi) - z\cos z\,(x-\pi)}{z\,(h\sin z\pi + z\cos z\pi)}; \end{aligned}\right\} \tag{9 B}$$

in dieser Form erscheint der Kern als meromorphe Funktion von z. Wir werden im folgenden beide Formen des Kerns $K_1(x, \xi)$ benutzen.

Im Falle $x \leqq \xi$ (der Fall $x > \xi$ erledigt sich in derselben Weise) stellen wir nun die Partialbruchzerlegung des Kerns $K_1(x, \xi)$ her. Die Pole von $K_1(x, \xi)$ sind die Wurzeln der Gleichung (3), also die Größen $z = \pm\varrho_\nu$ mit Ausnahme der Wurzel $z = 0$; sie liegen demnach sämtlich auf der reellen Achse;[1] ist K_n ein Kreis um den Nullpunkt als Mittelpunkt, der die ersten 2n-Pole von $K_1(x, \xi)$ umfaßt, so gilt auf Grund des Cauchyschen Residuensatzes die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = K_1(x,\xi)\Big|^{z=\mu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\underset{z=\pm\varrho_\nu}{\mathrm{Res}}\,\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}; \tag{10}$$

darin ist μ eine beliebige komplexe Konstante, $\underset{z=\varrho_\nu}{\mathrm{Res}}\,\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}$ das Residuum von $\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}$ für den Pol $z = \varrho_\nu$.

Wir erhalten unter Zugrundelegung der Form (9 A)

$$\underset{z=+\varrho_\nu}{\mathrm{Res}}\,\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} = -\frac{\sqrt{h^2+\varrho_\nu{}^2}\,\sin\varrho_\nu x\cdot\sin\varrho_\nu(\xi-\alpha)}{\varrho_\nu(\varrho_\nu-\mu)\,(\cos\varrho_\nu\pi - \pi\varrho_\nu\sin\varrho_\nu\pi + h\pi\cos\varrho_\nu\pi)},$$

---

[1]) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der math. Physik Bd. 2 § 53.

oder, wenn wir im Nenner $\sin \varrho_\nu \pi = -\frac{\varrho_\nu \cos \varrho_\nu \pi}{h}$ setzen,

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} = -\frac{\sqrt{h^2+\varrho_\nu^2}\cdot \sin \varrho_\nu x \cdot \sin \varrho_\nu(\xi - a)}{\varrho_\nu(\varrho_\nu-\mu)\frac{\cos \varrho_\nu \pi}{h}[h+\pi(\varrho_\nu^2+h^2)]},$$

und schließlich, mit Benutzung der Relationen

$$\sin \varrho_\nu a = \frac{\varrho_\nu \cos \varrho_\nu \pi + h \sin \varrho_\nu \pi}{\sqrt{h^2+\varrho_\nu^2}} = 0,$$

$$\frac{\cos \varrho_\nu a}{\cos \varrho_\nu \pi} = \frac{h - \varrho_\nu \tan \varrho_\nu \pi}{\sqrt{h^2+\varrho_\nu^2}} = \frac{\sqrt{h^2+\varrho_\nu^2}}{h}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} = -\frac{\sin \varrho_\nu x \cdot \sin \varrho_\nu \xi}{\varrho_\nu(\varrho_\nu-\mu)} \cdot \frac{h^2+\varrho_\nu^2}{h+\pi(\varrho_\nu^2+h^2)}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\operatorname*{Res}_{z=-\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} = -\frac{\sin \varrho_\nu x \cdot \sin \varrho_\nu \xi}{\varrho_\nu(\varrho_\nu+\mu)} \cdot \frac{h^2+\varrho_\nu^2}{h+\pi(\varrho_\nu^2+h^2)}.$$

Zieht man nun die Residuen für die Pole $+\varrho_\nu$ und $-\varrho_\nu$ zusammen, und beachtet dabei, daß

$$\int_0^\pi \sin^2 \varrho_\nu x \, dx = \frac{h+\pi(\varrho_\nu^2+h^2)}{2(h^2+\varrho_\nu^2)},$$

also

$$\sin \varrho_\nu x \sqrt{\frac{2(h^2+\varrho_\nu^2)}{h+\pi(h^2+\varrho_\nu^2)}} = \varphi_\nu(x)$$

ist, so erhält Gleichung (10) die Form

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} dz = K_1(x,\xi)\Big|^{z-\mu} - \sum_{\nu-1}^{\nu=n} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2-\mu^2} \qquad (11)$$

Wir bezeichnen nun mit K_n, K_{n+1}, $K_{n+2}, \ldots$ eine Folge von Kreisen um den Nullpunkt mit unbegrenzt wachsenden Radien, welche die reelle Achse zwischen zwei aufeinanderfolgenden

Polen von $K_1(x, \xi)$ schneiden und somit bezw. die $2n$, $2(n+1)$, $2(n+2)\ldots$ ersten Pole einschließen. Nähert sich dann das Konturintegral

$$\int_{K_n} \frac{K_1(x, \xi)}{z - \mu}\, dz$$

einer bestimmten Grenze, so können wir schreiben:

$$K_1(x, \xi)\Big|^{z=\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^{\,2} - \mu^2} + \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{K_1(x, \xi)}{z - \mu}\, dz. \tag{12}$$

Es handelt sich jetzt darum, den Grenzwert des rechtsstehenden Konturintegrals zu ermitteln.

Bestimmung des Grenzwertes

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{K_1(x, \xi)}{z - \mu}\, dz.$$

Die Grenzbetrachtungen über das Konturintegral schließen sich hier wie auch im zweiten und vierten Kapitel an einige von Freund[1]) aufgestellten Sätze an, die an dieser Stelle kurz erwähnt werden mögen.

Es sei α ein positiver echter Bruch, $R(z)$ und $S(z)$ seien zwei rational gebrochene Funktionen von der Eigenschaft, daß $\lim\limits_{z=\infty} R(z) = c_1$, $\lim\limits_{z=\infty} S(z) = c_2$ ist, λ_ν die Wurzeln der Gleichung $e^z - S(z) = 0$; diese werden, wenn der Betrag von z groß genug ist, im Innern beliebig kleiner, um die Wurzeln der Gleichung $e^z - c_1 = 0$ beschriebene Kreise liegen, können sich also, da die Nullstellen von $e^z - c_2$ keinen Häufungspunkt haben, ebenfalls nicht häufen. Demnach läßt sich eine unendliche Folge von Kreisen K_n mit den Radien r_n konstruieren, wobei immer $r_{\nu+1} > r_\nu$ ist, und alle r_ν von den Größen λ_ν um einen endlichen Wert abweichen.

---

[1]) Eugen Freund, Entwicklung willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher. Diss. Breslau 1909.

Auf diesen Kreisen, die außerdem die Pole von $R(z)$ nicht enthalten dürfen, bleiben die Funktionen

$$(A)\ \frac{e^{\alpha z} R(z)}{e^z - S(z)} \quad \text{und} \quad (B)\ \frac{e^z R(z)}{e^z - S(z)}$$

unter einer von n unabhängigen Schranke, und es gilt die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^{\alpha z} R(z)}{e^z - S(z)} \frac{dz}{z-\mu} = 0, \tag{13}$$

worin μ eine beliebige komplexe Konstante ist.

Um den Grenzwert des Integrals

$$\int_{K_n} \frac{e^z R(z)}{e^z - S(z)} \frac{dz}{z-\mu}$$

zu bestimmen, setzen wir $\dfrac{e^z}{e^z - S(z)} = 1 + \dfrac{S(z)}{e^z - S(z)}$; dann ist

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^z R(z)}{e^z - S(z)} \cdot \frac{dz}{z-\mu} = \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{R(z)\,dz}{z-\mu} + \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{R(z) S(z)}{e^z - S(z)} \cdot \frac{dz}{(z-\mu)},$$

oder, da

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{R(z) S(z)}{e^z - S(z)} \frac{dz}{z-\mu} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{e^z R(z)}{e^z - S(z)} \cdot \frac{dz}{z-\mu} = \lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{R(z)\,dz}{z-\mu}.$$

Setzt man nun $R(z) - c_1 = f(z)$, so existiert eine positive Größe R derart, daß, sobald $|z| > R$, der Betrag von $f(z)$ kleiner ist als eine beliebig klein vorgeschriebene Größe ε; es gilt somit, wenn $r_n > R$ ist,

$$\left| \int_{K_n} \frac{R(z)}{z-\mu}\,dz - \int \frac{c_1\,dz}{z-\mu} \right| \leqq \int_{K_n} \left| \frac{f(z)\,dz}{z-\mu} \right|,$$

oder da

$$|z-\mu| \geqq r_n - |\mu|, \quad |f(z)| < \varepsilon,$$

ist,

$$\left| \int\limits_{K_n} \frac{R(z)}{z-\mu} dz - 2\pi i c_1 \right| < \varepsilon \int\limits_{K_n} \frac{|dz|}{r_n - |\mu|},$$

$$< \varepsilon \cdot 2 r_n \pi \cdot \frac{1}{r_n - |\mu|},$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{K_n} \frac{R(z)\, dz}{z-\mu} = 2 c_1 \pi i,$$

und somit auch

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{K_n} \frac{e^z \cdot R(z) \cdot dz}{[e^z - S(z)](z-\mu)} = 2 c_1 \pi i. \tag{14}$$

Ist β eine Zahl derart, daß $0 \leqq \beta \leqq 1$ ist, so ist

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{K_n} \frac{e^{\beta z} R(z)}{e^z - S(z)} \cdot \frac{dz}{z^k (z-\mu)} = 0 \cdot (k \geqq 1). \tag{15}$$

Es ist nämlich, wenn $z = r e^{i\varphi}$ gesetzt wird,

$$\int\limits_{K_n} \frac{e^{\beta z} R(z)}{e^z - S(z)} \cdot \frac{dz}{z^k (z-\mu)} = \int\limits_{K_n} \frac{e^{\beta z} R(z) \cdot i d\varphi}{(e^z - S(z)) z^{k-1} (z-\mu)}.$$

Bezeichnen wir die obere Grenze des Betrages der Funktion $\frac{e^{\beta z} R(z)}{e^z - S(z)}$ auf den Kreisen K_n mit M, die Differenz $r_n - |\mu|$ mit ϱ_n, so ist

$$\left| \int\limits_{K_n} \frac{e^{\beta z} R(z)}{e^z - S(z)} \cdot \frac{i d\varphi}{z^{k-1}(z-\mu)} \right| \leqq \int\limits_{K_n} \frac{M d\varphi}{r_n^{k-1} \varrho_n},$$

$$\leqq \frac{2 M \pi}{r_n^{k-1} \cdot \varrho_n}.$$

Mithin ist die Richtigkeit der Gleichung (15) erwiesen. Die Folge der Kreise K_n kann, wie aus dem von Freund a. a. O. durchgeführten Beweise hervorgeht, durch jede andere Folge von Konturen, auch ungeschlossenen, die nur keine Pole von R(z) und keine Nullstellen von $e^z - S(z)$ enthalten dürfen, ersetzt werden. Die bei Freund über die Funktionen R(z) und S(z) festgesetzten Voraussetzungen können allgemeiner formuliert werden; es werden dort R(z) und S(z) rational vorausgesetzt. Der Beweis bleibt jedoch vollständig unverändert, wenn wir von den Funktionen R(z) und S(z) nur voraussetzen, daß sie auf einer unbegrenzten Folge von Konturen endlich bleiben und mit unbegrenzt wachsenden Beträgen von z gleichmäßig gegen Konstante konvergieren. Dies sind die Bedingungen, unter welchen der Freundsche Beweis richtig ist, welche sich dort aus der Rationalität der Funktionen R(z) und S(z) ergeben, falls in ihnen der Grad des Zählers kleiner oder höchstens gleich dem des Nenners ist. Wir werden im zweiten Kapitel von der allgemeinen Formulierung der Voraussetzungen zum Freundschen Satz Gebrauch machen.

Mit Hilfe der Gleichungen (13), (15) gelingt es nun leicht, den Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}\int\limits_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz$ zu bestimmen.

Es ist

$$\underset{x<\xi}{K_1(x,\xi)} = \sin zx\,\frac{h\sin z(\xi-\pi)-z\cos z(\xi-\pi)}{(h\sin z\pi+z\cos z\pi)\,z}$$

$$=\frac{e^{zix}-e^{-zix}}{2i}\cdot\frac{e^{zi(\xi-\pi)}(h-zi)-e^{-zi(\xi-\pi)}(h+zi)}{e^{z\pi i}(h+zi)-e^{-z\pi i}(h+zi)}.$$

Setzen wir

$$\frac{h+zi}{h-zi}=S(z),$$

so wird

$$K_1(x,\xi)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{zi(x+\xi-2\pi)}-e^{zi(x-\xi)}S(z)-e^{zi(\xi-x-2\pi)}+e^{-zi(x+\xi)}S(z)}{z\left[S(z)-e^{-2z\pi i}\right]},$$

oder wenn $-2z\pi i=u$, $S(z)=\overline{S}(u)$ gesetzt wird,

$$K_1(x,\xi)=\pi\cdot\frac{e^{-u\left(\frac{x+\xi}{2\pi}-1\right)}-e^{-u\frac{x-\xi}{2\pi}}\,\overline{S}(u)}{\left[\overline{S}(u)-e^{u}\right]u}$$

$$-\pi\cdot\frac{e^{u\left(\frac{x-\xi}{2\pi}+1\right)}-e^{u\frac{x+\xi}{2\pi}}\,\overline{S}(u)}{\left[\overline{S}(u)-e^{u}\right]u}.$$

Bezeichnen wir mit $\overline{K}_n$ den durch die Substitution $-2z\pi i = u$ aus dem Kreise K_n hervorgegangenen Kreis, setzen wir ferner $\bar{\mu} = -2\mu\pi i$, so gilt:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{K_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = \pi \int\limits_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\frac{\xi-x}{2\pi}}\,\overline{S}(u)}{e^u - \overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u(u-\bar{\mu})} \\ -\pi \int\limits_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\frac{2\pi-x-\xi}{2\pi}}}{e^u - \overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u(u-\bar{\mu})} \\ -\pi \int\limits_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\cdot\frac{x+\xi}{2\pi}}\,\overline{S}(u)}{e^u - \overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u(u-\bar{\mu})} \\ +\pi \int\limits_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\cdot\frac{2\pi+x-\xi}{2\pi}}}{e^u - \overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u(u-\bar{\mu})}.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Da für die Variablen x und ξ die Ungleichungen $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq \xi \leqq \pi$ gelten, liegen die Größen $\frac{\xi - x}{2\pi}$, $\frac{2\pi - x - \xi}{2\pi}$, $\frac{x+\xi}{2\pi}$, $\frac{2\pi + x - \xi}{2\pi}$ sämtlich zwischen den Grenzen 0 und 1; ferner ist $\lim\limits_{|u|=\infty} \overline{S}(u) = -1$. Es verschwinden demnach, wenn wir u unbegrenzt wachsen lassen, alle vier Integrale der rechten Seite auf Grund der Gleichung (15), so daß man erhält

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{K_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = 0.$$

Aus Gleichung (12) folgt dann weiter

$$K_1(x,\xi)\,\Big|^{z=\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2 - \mu^2}.$$

Setzt man hierin $\mu = 0$, so ergibt sich, da

$$\underset{x<\xi}{K_1(x, \xi)}\Big|^{z=0} = -\frac{\sin z x}{z}\Big|^{z=0} \cdot \frac{h \sin z(\xi-\pi) - z \cos z(\xi-\pi)}{h \sin z\pi + z \cos z\pi}\Big|^{z=0}$$

$$= -x\left[-\frac{1}{h\pi+1} + \frac{h(\xi-\pi)}{h\pi+1}\right] = x\left[\frac{h(\pi-\xi)+1}{h\pi+1}\right],$$

ebenso

$$\underset{x>\xi}{K_1(x, \xi)}\Big|^{z=0} = \xi\left[\frac{h(\pi-x)+1}{h\pi+1}\right]$$

ist,

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^{\,2}}.$$

Damit ist die bilineare Entwicklung des Kerns $K(x, \xi)$ erwiesen.

Um die Entwicklung der Ableitung $K'(x, \xi)$ herzustellen, differenzieren wir Gleichung (11) nach x:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n} \frac{\partial K_1(x, \xi)}{\partial x} \cdot \frac{dz}{z-\mu} = K_1'(x, \xi)\Big|^{z=\mu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^{\,2} - \mu^2}.$$

Aus Gleichung (16) folgt

$$\int_{K_n} \underset{x<\xi}{K_1'(x, \xi)} \cdot \frac{dz}{z-\mu} = -\frac{1}{2}\int_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\frac{\xi-x}{2\pi}} \cdot \overline{S}(u)}{e^u - \overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u-\overline{\mu}}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\overline{K}n} \frac{e^{u\frac{2\pi-x-\xi}{2\pi}}}{e^u - \overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u-\overline{\mu}}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\cdot\frac{x+\xi}{2\pi}} \cdot \overline{S}(u)}{e^u - \overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u-\overline{\mu}}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\frac{2\pi+x-\xi}{2\pi}}}{e^u - \overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u-\overline{\mu}}.$$

Ebenso ist

$$\int\limits_{K_n} K_1'(x,\xi)_{x>\xi} \cdot \frac{dz}{z-\mu} = \frac{1}{2}\int\limits_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\frac{x-\xi}{2\pi}}\,\overline{S}(u)}{e^u-\overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u-\overline{\mu}}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\cdot\frac{2\pi-x-\xi}{2\pi}}}{e^u-\overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u-\overline{\mu}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\frac{x+\xi}{2\pi}}\,\overline{S}(u)}{e^u-\overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u-\overline{\mu}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\overline{K}_n} \frac{e^{u\frac{2\pi-x-\xi}{2\pi}}}{e^u-\overline{S}(u)} \cdot \frac{du}{u-\overline{\mu}}.$$

Auf Grund der Gleichung (13) ist, wenn $x \neq \xi$,

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{K_n} K_1'(x,\xi)\cdot\frac{dz}{z-\mu} = 0.$$

Im Falle $x = \xi$ erhalten wir[1])

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n}\left[K_1'(\xi-0,\xi)+K_1'(\xi+0,\xi)\right]\frac{dz}{z-\mu}$$

$$= K_1'(\xi-0,\xi)\Big|^{z=\mu} + K_1'(\xi+0,\xi)\Big|^{z=\mu} - 2\sum_{\nu=1}^{u}\frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2-\mu^2}.$$

---

[1]) vgl. Hilb a. a. O. S. 227.

Nun ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n}\left[K_1'(\xi-0,\xi)+K_1'(\xi+0,\xi)\right]\frac{dz}{z-\mu}$$

$$=\int_{\overline{K}_n}\frac{e^{u\frac{\pi-\xi}{\pi}}}{e^u-\overline{S}(u)}\cdot\frac{du}{u-\overline{\mu}}-\int_{\overline{K}_n}\frac{e^{u\cdot\frac{\xi}{\pi}}}{e^u-\overline{S}(u)}\cdot\frac{du}{u-\overline{\mu}}.$$

Mit wachsenden Radien der Konturen konvergieren die rechts stehenden Integrale für alle Werte von ξ in dem betrachteten Intervall mit Ausnahme der Werte $\xi=0$ und $\xi=\pi$ gegen Null auf Grund der Gleichung (13); es gilt somit

$$\frac{K_1'(\xi-0,\xi\Big|^{z=\mu}+K_1'(\xi+0,\xi)\Big|^{z=\mu}}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2-\mu^u}$$

für alle Werte ξ außer 0 und π. Da nun $K_1'(x,\xi)\Big|^{z=0}=K'(x,\xi)$ ist, so ist im Falle $x\neq\xi$,

$$K'(x,\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2},$$

im Falle $x=\xi$:

$$\frac{K'(\xi-0,\xi)+K'(\xi+0,\xi)}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu'(\xi)\cdot\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2}.$$

Zweites Kapitel.

Entwicklung nach Besselschen Funktionen.

Wir setzen als Differentialgleichung der Eigenfunktionen des Kerns $K(x,\xi)$ die Besselsche Differentialgleichung an in der Form:

$$\frac{d}{dx}\left[4x\frac{dv}{dx}\right]+\varrho^2 v=0. \tag{17}$$

Der Kern $K(x, \xi)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dv}{dx}\right) = 0, \tag{18}$$

der Kern $K_1(x, \xi)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(4x\frac{dv}{dx}\right) + z^2 v = 0. \tag{19}$$

Die Randbedingungen, denen die Eigenfunktionen und die Kerne $K(x, \xi)$, $K_1(x, \xi)$ zu genügen haben, seien folgende: an der Stelle $x = 0$ seien v, K, und K_1 endlich, an der Stelle $x = 1$ gelte $v|^{x=1} = K|^{x=1} = K_1|^{x=1} = 0$. Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $I(\varrho) = 0$ mit $\pm\varrho_\nu$, so sind die Eigenwerte des Kerns $K(x, \xi)$ die Größen ϱ_ν^2, die des Kerns $K_1(x, \xi)$ die Größen $\varrho_\nu^2 - z^2$. Die normierten Eigenfunktionen sind, da

$$\int_0^1 I^2\left(\varrho_\nu\sqrt{x}\right) dx = I^2(\varrho_\nu) + I'^2(\varrho_\nu)$$

ist,

$$\varphi_\nu(x) = \frac{I\left(\varrho_\nu\sqrt{x}\right)}{I'(\varrho_\nu)}.$$

Wir stellen zunächst die expliziten Ausdrücke für den Kern $K(x, \xi)$ her. Setzen wir $\varphi(x) = c$, $\psi(x) = \log x$, so genügen die Ausdrücke

$$\varphi(x)\,\psi(\xi) \underset{x<\xi}{=} c\cdot\log\xi, \quad \varphi(\xi)\cdot\varphi(x) \underset{x>\xi}{=} c\log x$$

den Randbedingungen und der Differentialgleichung (18). Aus der Gleichung

$$\varphi'(\xi)\,\psi(\xi) - \psi(\xi)\,\varphi(\xi) = \frac{1}{4\,\xi}$$

ergibt sich $c = -\frac{1}{4}$; wir erhalten somit

$$\underset{x<\xi}{K(x, \xi)} = -\frac{1}{4}\log\xi,$$

$$\underset{x>\xi}{K(x, \xi)} = -\frac{1}{4}\log x.$$

Nachzuweisen ist die bilineare Entwicklung des Kernes $K(x, \xi)$:

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{I(\varrho_\nu \sqrt{x})\, I(\varrho_\nu \sqrt{\xi})}{\varrho_\nu{}^2 \cdot I'^2(\varrho_\nu)}.$$

Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst wiederum die expliziten Ausdrücke für den Kern $K_1(x, \xi)$ her. Die Integrale der Differentialgleichung (19), die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art, in der Bezeichnung von Riemann-Weber seien $I(z\sqrt{x})$ und $Y(z\sqrt{x})$.

Setzen wir

$$\varphi(x) = I(z\sqrt{x}),$$

$$\psi(x) = I(z\sqrt{x})\, Y(z) - I(z)\, Y(z\sqrt{x}),$$

so genügt der Kern

$$\underset{x<\xi}{K_1(x, \xi)} = C \cdot \varphi(x)\, \psi(\xi),$$

$$\underset{x>\xi}{K_1(x, \xi)} = C \cdot \varphi(\xi) \cdot \psi(x)$$

der Differentialgleichung (19) und den Randbedingungen. Die Konstante C bestimmt sich aus der Gleichung

$$C\,[\varphi'(\xi)\, \psi(\xi) - \varphi(\xi)\, \psi'(\xi)] = \frac{1}{4\xi}.$$

Es ist

$$\varphi'(\xi)\, \psi(\xi) - \varphi(\xi)\, \psi'(\xi)$$

$$= 2 \frac{z}{\sqrt{\xi}} \Big\{ I'(z\sqrt{\xi})\, [I(z\sqrt{\xi})\, Y(z) - I(z)\, Y(z\sqrt{\xi})]$$

$$- I(z\sqrt{\xi})\, [I'(z\sqrt{\xi})\, Y(z) - I(z)\, Y'(z\sqrt{\xi})] \Big\};$$

oder, da

$$Y'(z\sqrt{\xi})\, I(z\sqrt{\xi}) - Y(z\sqrt{\xi})\, I(z\sqrt{\xi}) = -\frac{2}{\pi z \sqrt{\xi}}, \qquad (19a)$$

$$C = -\frac{\pi}{4\, I(z)}.$$

Danach erhalten wir für den Kern $K_1(x, \xi)$ die expliziten Ausdrücke

$$\underset{x<\xi}{K_1(x, \xi)} = -\frac{\pi\, I(z\sqrt{x})\, [I(z\sqrt{\xi})\, Y(z) - Y(z\sqrt{\xi})\, I(z)]}{4\, I(z)}$$

$$K_1(x,\xi)_{x>\xi} = -\frac{\pi I(z\sqrt{\xi})\,[I(z\sqrt{x})\,Y(z) - Y(z\sqrt{x})\,I(z)]}{4\,I(z)}.$$

Der Kern $K_1(x, \xi)$ erscheint somit wiederum als meromorphe Funktion von z; die Pole von $K_1(x, \xi)$ sind die Wurzeln der Gleichung $I(z) = 0$, also die Größen $\pm\varrho_\nu$; sie sind sämtlich reell. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Wurzeln nähert sich mit wachsender Entfernung der Wurzeln vom Nullpunkt der Zahl π. Es ist demnach möglich, eine unbegrenzte Folge von Kreisen K_n zu konstruieren, welche die reelle Achse immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln von $I(z) = 0$ treffen.

Wir wählen eine von den Konturen K_n aus und betrachten das Integral

$$\int_{K_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz,$$

wobei wir wiederum den Fall $x < \xi$ allein behandeln; es ist

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} = -\frac{\pi I(\varrho_\nu\sqrt{x})\,Y(\varrho_\nu\sqrt{\xi})\,Y(\varrho_\nu)}{4(\varrho_\nu-\mu)\,I'(\varrho_\nu)},$$

und da nach (19a)

$$\frac{\pi Y(\varrho_\nu)}{4\,I'(\varrho_\nu)} = \frac{\pi Y(\varrho_\nu)\,I'(\varrho_\nu)}{4\,[I'(\varrho_\nu)]^2} = \frac{1}{2\varrho_\nu I'^2(\varrho_\nu)},$$

ist, so folgt

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} = -\frac{I(\varrho_\nu\sqrt{x})\,I(\varrho_\nu\sqrt{\xi})}{2\varrho_\nu(\varrho_\nu-\mu)\,I'^2(\varrho_\nu)}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\operatorname*{Res}_{z=-\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} = -\frac{I(\varrho_\nu\sqrt{x})\,I(\varrho_\nu\sqrt{\xi})}{2\varrho_\nu(\varrho_\nu+\mu)\,I'^2(\varrho_\nu)}$$

und

$$\operatorname*{Res}_{z=+\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} + \operatorname*{Res}_{z=-\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}$$

$$= -\frac{I(\varrho_\nu\sqrt{x})\,I(\varrho_\nu\sqrt{\xi})}{I'^2(\varrho_\nu)(\varrho_\nu^2-\mu^2)} = -\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2-\mu^2}.$$

Es gilt somit die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = K_1(x,\xi)\,|^{z=\mu} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2-\mu^2}\,. \tag{20}$$

Wir lassen nun den Radius der Kontur über alle Grenzen zunehmen und wenden uns zu der Untersuchung des Grenzwertes

$$\lim_{n=\infty}\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz\,.$$

Hierbei beachten wir zunächst, daß $K_1(x,\xi)$ eine gerade Funktion von z ist; es ist nämlich $I(z) = I(-z)$ und, wie aus der Darstellung von $Y(z)$ in der Form

$$Y(z) = I(z)\cdot\log z + G(z)\,,$$

wo $G(z)$ eine gerade Funktion ist, hervorgeht,

$$I(z_2)\,Y(z_1) - I(z_1)\,Y(z_2) = I(-z_2)\,Y(-z_1) - I(-z_1)\,Y(-z_2).$$

Weiterhin nimmt der Integrand, wenn wir unter μ eine reelle Konstante verstehen, für reelle Werte von z reelle Werte, also für konjugiert imaginäre Werte von z konjugiert imaginäre Werte an. Wegen der ersten Eigenschaft von $K_1(z,\xi)$ ist

$$\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = \int_{H_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz + \int_{H_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z+\mu}\,dz\,,$$

wenn H_n den rechts von der imaginären Achse liegenden Teil von K_n bezeichnet. Wegen der zweiten Eigenschaft des Integranden liefern die unterhalb und oberhalb der reellen Achse liegenden Teile von H_n konjugiert imaginäre Beiträge zum Integral. Bezeichnen wir den oberen Teil mit Q_n, so genügt es also, um nachzuweisen, daß

$$\lim_{n=\infty}\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = 0$$

ist, zu zeigen, daß

$$\lim_{n=\infty}\int_{Q_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = 0$$

ist.

Dieser Nachweis soll im folgenden geführt werden. In dem Integral $\int\limits_{K_n} \frac{K_1(x, \xi)}{z - \mu} dz$ nimmt der reelle Teil von z nur positive Werte an; setzt man noch fest, daß der reelle Teil von $\sqrt{2\pi z}$ positiv ist, so können unter dem Integral die Funktionen I(z) und Y(z) durch die Weberschen Ausdrücke ersetzt werden; es ist dann

$$\sqrt{2\pi z}\, I(z) = e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(2zi) + e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(-2zi),$$

$$i\sqrt{2\pi z}\, Y(z) = e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(2zi) - e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(-2zi).$$

Die Funktion S(z) ist in dem ganzen betrachteten Gebiet stetig, bleibt daselbst unter einer endlichen Grenze und besitzt ferner die Eigenschaften, daß

$$\lim_{(z)=\infty} S(z) = 1\,, \quad \lim_{z=\infty} S'(z) = 0\,^{1)}$$

ist.

Wir führen die Weberschen Ausdrücke für I und Y in den Kern $K_1(x, \xi)$ ein und erhalten, wenn wir $\sqrt{x} = x_1$, $\sqrt{\xi} = \xi_1$ setzen,

$$\sqrt{x_1 \cdot \xi_1}\, K_1(x, \xi) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\pi i} \cdot \frac{e^{zi(1-x_1-\xi_1)} S(2zix_1) S(2zi\xi_1) S(-2zi)}{z\left[e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(2zi) + e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(-2zi)\right]}$$

$$- \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\pi i} \cdot \frac{e^{zi(1+x_1-\xi_1)} S(-2zix_1) S(2zi\xi_1) S(-2zi)}{z\left[e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(2zi) + e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(-2zi)\right]}$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\pi i} \cdot \frac{e^{zi(1-x_1-\xi_1)} S(2zix_1) S(-2zi\xi_1) S(2zi)}{z\left[e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(2zi) + e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} S(-2zi)\right]}$$

---

1) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der math. Physik I S. 182 § 77.

$$-\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\pi i}\cdot\frac{e^{-zi(1+x_1-\xi_1)}\,S(2zix_1)\,S(-2zi\xi_1)\,S(2zi)}{z\left[e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}S(2zi)+e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}S(2zi)\right]}$$

Wir erweitern den ersten und vierten Bruch der rechten Seite mit $e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}$, den zweiten und dritten mit $e^{i\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}$ und setzen $2zi=v$, $\frac{S(-2zi)}{iS(2zi)}=R(v)$; dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1\,\xi_1}\,K_1(x,\xi)=\;&\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\right)}S(v\,x_1)\,S(v\,\xi_2)}{v\,[e^v-R(v)]}\\&-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{\xi_1-x_1}{2}\right)}S(-vx_1)\,S(v\xi_1)}{v\,[e^v-R(v)]}\\&+\frac{2i}{\pi}\cdot\frac{e^{v\cdot\frac{x_1+\xi_1}{2}}\cdot S(-vx_1)\,S(-v\xi_1)\,R(v)}{v\,[e^v-R(v)]}\\&-\frac{2i}{\pi}\cdot\frac{e^{v\frac{\xi_1-x_1}{2}}\,S(vx_1)\,S(-v\xi_1)\,R(v)}{v\,[e^v-R(v)]}\end{aligned}\tag{21}$$

Also

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}dz=\;&\frac{1}{\pi i\sqrt{x_1\,\xi_1}}\int\limits_{Q_n}\frac{e^{v\left(1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\right)}S(vx_1)\,S(v\,\xi_1)}{e^v-R(v)}\cdot\frac{dv}{v(v-2\mu i)}\\&-\frac{1}{\pi i\sqrt{x_1\,\xi_1}}\int\limits_{Q_n}\frac{e^{v\left(1-\frac{\xi_1-x_1}{2}\right)}S(-vx_1)\,S(v\,\xi_1)}{e^v-R(v)}\cdot\frac{dv}{v(v-2\mu i)}\\&+\frac{1}{\pi\sqrt{x_1\,\xi_1}}\int\limits_{Q_n}\frac{e^{v\frac{x_1+\xi_1}{2}}\,S(-vx_1)\,S(-v\xi_1)\,R(v)}{e^v-R(v)}\cdot\frac{dv}{v(v-2\mu i)}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{x_1\,\xi_1}}\int\limits_{Q_n}\frac{e^{v\frac{\xi_1-x_1}{2}}\,S(v x_1)\,S(-v\,\xi_1)\,R(v)}{e^v-R(v)}\cdot\frac{dv}{v(v-2\mu i)}.$$

Läßt man nun v über alle Grenzen wachsen, so nähern sich die Beträge der Produkte $S(v\,x_1)\cdot S(v\,\xi_1)$, $S(v\,\xi_1)\cdot S(-v\,x_1)\cdot S(-v\,x_1)\cdot S(-v\,\xi_1)\,R(v)$, $S(v\,x_1)\,S(-v\,\xi_1)\,R(v)$ und der Betrag von $R(v)$ der Eins. Da $0\leqq x_1\leqq 1$, $0\leqq \xi_1\leqq 1$, also auch

$$0\leqq\frac{x_1+\xi_1}{2}\leqq 1 \text{ und } 0\leqq\frac{\xi_1-x_1}{2}\leqq 1,$$

$$0\leqq 1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\leqq 1 \text{ und } 0\leqq 1-\frac{\xi_1-x_1}{2}\leqq 1,$$

genügen die Größen $\frac{x_1+\xi_1}{2}$, $\frac{\xi_1-x_1}{2}$, $1-\frac{x_1+\xi_1}{2}$, $1-\frac{\xi_1-x_1}{2}$ den für die Geltung der Gleichung (15) notwendigen Bedingungen es gilt somit auf Grund dieser Gleichung

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{Q_n}\frac{K_1(x,\,\xi)}{z\pm\mu}\,dz=0$$

und somit auch

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{K_n}\frac{K_1(x,\,\xi)}{z\pm\mu}\,dz=0$$

für alle Werte von x und ξ in dem betrachteten Grundgebiet mit Ausnahme der Werte $x=0$, $\xi=0$, welche wegen des im Nenner von $K_1(x,\,\xi)$ auftretenden Faktors $\sqrt{x_1\,\xi_1}$ ausgeschlossen werden müssen. Aus Gleichung (20) folgt weiter die bilineare Entwicklung von $K_1(x,\,\xi)$:

$$K_1(x,\,\xi)\,|^{z=\mu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu{}^2-\mu^2}. \tag{22}$$

Setzen wir in $K_1(x,\xi)$ $\mu=0$, so ergibt sich, da $I(0)=1$, $G(0)=0$,

$$Y(z)\,I(z\xi_1) - Y(z\xi_1)\,I(z)\Big|^{x=0} = -\frac{2}{\pi}\Big[-I(z)\,I(z\xi_1)\log\xi_1$$

$$+ I(z\xi_1)\,G(z) - G(z\xi_1)\,I(z)\Big]^{z=0} = \frac{2}{\pi}\log\xi_1 = \frac{1}{\pi}\log\xi.$$

Folglich:

$$\underset{x<\xi}{K_1(x,\xi)}\Big|^{\mu=0} = -\frac{1}{4}\log\xi.$$

Ebenso:

$$\underset{x>\xi}{K_1(x,\xi)}\Big|^{\mu=0} = -\frac{1}{4}\log x,$$

d. h.

$$K_1(x,\xi)\Big|^{\mu=0} = K(x,\xi).$$

Aus (22) folgt somit die bilineare Entwicklung

$$K(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^{\,2}}.$$

Entwicklung des Differentialquotienten $\frac{\partial K_1(x,\xi)}{\partial x}$ nach den Funktionen φ_ν

Aus Gleichung (21) ergibt sich durch Differentiation

$$\sqrt{x_1\xi_1}\,\underset{x<\xi}{K_1'(x,\xi)} + \frac{\xi_1}{2x_1\sqrt{x_1\xi_1}}\,K_1(x,\xi) = -\frac{1}{2\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\right)}S(vx_1)\,S(v\xi_1)}{e^v - R(v)}$$

$$-\frac{1}{2\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{\xi_1-x_1}{2}\right)}S(-vx_1)\,S(v\xi_1)}{e^v - R(v)} + \frac{i}{2\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\frac{x_1+\xi_1}{2}}S(-vx_1)\,S(-v\xi_1)\,R(v)}{e^v - R(v)}$$

$$+\frac{i}{2\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\frac{x_1-\xi_1}{2}}S(vx_1)\,S(-v\xi_1)\,R(v)}{e^v - R(v)} + \frac{1}{\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\right)}S'(-vx_1)\,S(v\xi_1)}{e^v - R(v)}$$

$$+\frac{1}{\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{\xi_1+x_1}{2}\right)}S(-vx_1)S(v\xi_1)}{e^v-R(v)}-\frac{i}{\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\frac{x_1+\xi_1}{2}}S'(-vx_1)S(-v\xi_1)R(v)}{e^v-R(v)}$$

$$-\frac{i}{\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\frac{\xi_1-x_1}{2}}S'(vx_1)S(-v\xi_1)R(v)}{e^v-R(v)}.$$

Für $x>\xi$ gilt

$$\sqrt{x_1\xi_1}\,K_1'(x,\xi)+\frac{\xi_1}{2x_1\sqrt{x_1\xi_1}}K_1(x,\xi)=-\frac{1}{2\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\right)}S(vx_1)S(v\xi_1)}{e^v-R(v)}$$

$$+\frac{1}{2\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\right)}S(vx_1)S(-v\xi_1)}{e^v-R(v)}+\frac{i}{2\pi x_1}\frac{e^{v\frac{x_1+\xi_1}{2}}S(-vx_1)S(-v\xi_1)R(v)}{e^v-R(v)}$$

$$=\frac{i}{2\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\frac{x_1-\xi_1}{2}}S(-vx_1)S(v\xi_1)R(v)}{e^v-R(v)}+\frac{1}{\pi x_1}\frac{e^{v\left(1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\right)}S'(vx_1)S(iv\xi_1)}{e^v-R(v)}$$

$$-\frac{1}{\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\left(1-\frac{x_1+\xi_1}{2}\right)}S'(vx_1)S(-v\xi_1)}{e^v-R(v)}-\frac{i}{\pi x_1}\frac{e^{v\frac{x_1-\xi_1}{2}}S'(-vx_1)S(-v\xi_1)R(v)}{e^v-R(v)}$$

$$+\frac{i}{\pi x_1}\cdot\frac{e^{v\frac{x_1-\xi_1}{2}}S'(-vx_1)S(v\xi_1)R(v)}{e^v-R(v)}.$$

Wächst v dem Betrage nach über alle Grenzen, so konvergieren die Beträge von $S(vx_1)\,S(v\xi_1)$, $S'(vx_1)\,S(v\xi_1)$, $S'(vx_1)\,S(-v\xi_1)$, $S'(-vx_1)\,S(v\xi_1)\,R(v)$ gegen Constante. Es ist deshalb, und weil die im Exponenten von e neben v auftretenden Faktoren im Falle $x=\xi$ den in Gleichung (13) für die Größe α geforderten Bedingungen genügen,

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{Q_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz=0$$

für alle Werte x und ξ im betrachteten Grundgebiet mit Ausnahme der Werte $x = 0$ und $\xi = 0$. Im Falle $x = \xi$ bilden wir

$$\xi_1 \left[K_1'(\xi - 0, \xi) + K_1'(\xi + 0, \xi)\right] + \frac{K_1(\xi, \xi)}{\xi}$$

$$= -\frac{1}{\pi \xi_1} \cdot \frac{e^{v(1-\zeta_1)} S^2(v\xi_1)}{e^v - R(v)} + \frac{i}{\pi \xi_1} \frac{e^{v\xi_1} S^2(-v\xi_1) R(v)}{e^v - R(v)}$$

$$+ \frac{2}{\pi \xi_1} \cdot \frac{e^{\bar{v}(1-\xi_1)} S(v\xi_1) S'(v\xi_1)}{e^v - R(v)} - \frac{2i}{\pi \xi_1} \cdot \frac{e^{v\xi_1} S(-v\xi_1) S'(-v\xi_1)}{e^v - R(v)}$$

Hieraus ergibt sich für alle Werte ξ zwischen 0 und 1 mit Ausnahme der Werte $\xi = 0$, $\xi = 1$

$$\lim_{n=\infty} \int_{Q_n} \frac{K_1'(\xi - 0, \xi) + K_1'(\xi + 0, \xi)}{z - \mu} dz = 0. \tag{24}$$

Nun ist $K'(x, \xi)$ wiederum eine gerade Funktion von z, der Integrand $\frac{K_1'(x, \xi)}{z - \mu}$ nimmt wiederum für konjugiert imaginäre Werte von z konjugiert imaginäre Werte an; folglich sind mit den Gleichungen (23) und (24) zugleich die folgenden bewiesen:

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{K_1'(x, \xi)}{z - \mu} dz = 0$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{K_1'(\xi - 0, \xi) + K_1'(\xi + 0, \xi)}{z - \mu} dz = 0.$$

Aus diesen Gleichungen und der Gleichung (20) ergeben sich ebenso wie in Kap. 1 die Entwicklungen

$$\frac{\partial K_1(x, \xi)}{\partial x}\Bigg|^{z=\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2 - \mu^2}$$

$$\frac{K_1'(\xi - 0, \xi)\Big|^{z=\mu} + K_1'\,\xi + 0, \xi)\Big|^{z=\mu}}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2 - \mu^2}$$

und

$$K'(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2}$$

$$\frac{K'(\xi-0,\xi)+K'(\xi+0,\xi)}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2}.$$

Von der Voraussetzung, daß in den Entwicklungen für $K_1(x,\xi)$ und $K_1'(x,\xi)$ μ reell sein muß, kann man sich durch folgende Betrachtung befreien. Durch die Gleichungen

$$\lim_{n=8} \int_{K_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = 0, \quad \lim \int_{K_n} \frac{K_1'(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = 0$$

für reelles μ war die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2-\mu^2}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2-\mu^2}$ für reelles μ bewiesen.

Da aber die Glieder der Reihen

$$\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2\left(1-\frac{\mu^2}{\varrho_\nu^2}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2\left(1-\frac{\mu^2}{\varrho_\nu^2}\right)}$$

auch für komplexes μ mit wachsendem ν dem Grenzwert $\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2}$ bezw. $\frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^2}$ zustreben, konvergieren die Reihen auch gleichmäßig und absolut für komplexes μ und definieren somit in dem durch die ganze Ebene mit Ausschluß beliebig kleiner um die Stellen $\pm\varrho_\nu$ beschriebenen Kreise dargestellten Gebiete analytische Funktionen von μ. Da diese auf der reellen Achse mit $K_1(x,\xi)$ bezw. $K_1'(x,\xi)$ identisch sind, gilt dasselbe im ganzen Regularitätsgebiet.

Drittes Kapitel.

Entwicklung beim Problem des transversal schwingenden Stabes.

Die Eigenfunktionen des nur an einem Ende ($x = 0$) eingespannten Stabes von der Länge 1 genügen der Differentialgleichung

$$v^{IV} - \varrho^4 v = 0 \tag{25}$$

und erfüllen die Randbedingungen

$$v\,|^0 = 0,\quad v'\,|^0 = 0,\quad v''\,|^1 = 0,\quad v'''\,|^1 = 0.$$

Bezeichnen wir die Eigenwerte ϱ_ν, die Wurzeln der Gleichung

$$\cos\varrho\,\mathrm{Cof}\,\varrho + 1 = 0,$$

mit ϱ_ν, so sind die Eigenfunktionen

$$v_\nu(x) = (\sin\varrho_\nu + \mathrm{Sin}\,\varrho_\nu)(\cos\varrho_\nu x - \mathrm{Cof}\,\varrho_\nu x)$$
$$- (\cos\varrho_\nu + \mathrm{Cof}\,\varrho_\nu)(\sin\varrho_\nu x - \mathrm{Sin}\,\varrho_\nu x).$$

Der Kern $K(x, \xi)$ genügt der Differentialgleichung

$$v^{IV} = 0$$

und hat dieselben Randbedingungen wie die Funktionen v_ν zu erfüllen; er ist mit seiner ersten und zweiten Ableitung im ganzen Intervall von 0 bis 1 stetig, während die dritte Ableitung an der Stelle $x = \xi$ einen Sprung von der Größe -1 macht. Setzen wir an

$$\underset{x>\xi}{K(x, \xi)} = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1,$$

$$\underset{x>\xi}{K(x, \xi)} = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2,$$

so sind die Koeffizienten a_1, b_1, c_1, d_1; a_2, b_2, c_2, d_2 zu bestimmen aus den 8 Gleichungen

$$d_1 = 0,\quad c_1 = 0,\quad 3a_2 + b_2 = 0,\quad a_2 = 0,$$
$$a_1\xi^3 + b_1\xi^2 + c_1\xi + d_1 = a_2\xi^3 + b_2\xi^2 + c_2\xi + d_2,$$
$$3a_1\xi^2 + 2b_1\xi + c_1 = 3a_2\xi^2 + 2b_2\xi + c_2,$$
$$3a_1\xi + b_1 = 3a_2\xi + b_2,$$
$$a_2 - a_1 = \frac{1}{6}.$$

Es ergibt sich

$$\underset{x<\xi}{K(x,\xi)} = \frac{x^2}{2}\left(\xi - \frac{x}{3}\right),$$

$$\underset{x>\xi}{K(x,\xi)} = \frac{\xi^2}{2}\left(x - \frac{\xi}{3}\right).$$

Es ist nachzuweisen, daß die bilineare Entwicklung des Kerns $K(x,\xi)$ nach den Eigenfunktionen $v_\nu(x)$ dargestellt wird durch die bilineare Formel

$$K(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v_\nu(x) \cdot v_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4 \int\limits_0^1 v_\nu^2(x)\,dx},$$

oder wenn wir mit $\varphi_\nu(x) = \dfrac{v_\nu(x)}{\sqrt{\int\limits_0^1 v_\nu^2(x)\,dx}}$

die normierten Eigenfunktionen bezeichnen, durch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4}.$$

Zu diesem Zwecke erweisen wir zunächst die Gültigkeit der Gleichung

$$K_1(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4 - z^4},$$

wo $K_1(x,\xi)$ der Differentialgleichung

$$v^{IV} - z^4 v = 0 \tag{26}$$

und im übrigen denselben Randbedingungen und Stetigkeitsforderungen genügt wie $K(x,\xi)$. Aus den partikulären Integralen $\cos z x$, $\sin z x$, $\operatorname{Cof} z x$, $\operatorname{Sin} z x$ der Differentialgleichung (26) setzen wir den Kern $K_1(x,\xi)$ zunächst wiederum mit den unbestimmten Koeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ an:

$$\underset{x<\xi}{K_1(x,\xi)} = \alpha_1 \cos z x + \beta_1 \sin z x + \gamma_1 \operatorname{Cof} z x + \delta_1 \operatorname{Sin} z x,$$

$$\underset{x>\xi}{K_1(x,\xi)} = \alpha_2 \cos z x + \beta_2 \sin x + \gamma_2 \operatorname{Cof} z x + \delta_2 \operatorname{Sin} z x.$$

Für die Koeffizienten ergeben sich aus den Randbedingungen, der Forderung der Stetigkeit von $K_1(x,\xi)$, $K_1'(x,\xi)$, $K_1''(x,\xi)$ und aus der Gleichung

$$K_1'''(\xi-0,\xi)-K_1'''(\xi+0,\xi)=-1$$

folgende acht Gleichungen:

$$\alpha_1+\gamma_1=0$$

$$\beta_1+\delta_1=0$$

$$-\alpha_2\cos z-\beta_2\sin z+\gamma_2\,\mathfrak{Cof}\,z+\delta_2\,\mathfrak{Sin}\,z=0$$

$$\alpha_2\sin z-\beta_2\cos z+\gamma_2\,\mathfrak{Sin}\,z+\delta_2\,\mathfrak{Cof}\,z=0$$

$$(\alpha_1-\alpha_2)\cos z\xi+(\beta_1-\beta_2)\sin z\xi+(\gamma_1-\gamma_2)\,\mathfrak{Cof}\,z\xi+(\delta_1-\delta_2)\,\mathfrak{Sin}\,z\xi=0$$

$$-(\alpha_1-\alpha_2)\sin z\xi+(\beta_1-\beta_2)\cos z\xi+(\gamma_1-\gamma_2)\,\mathfrak{Sin}\,z\xi+(\delta_1-\delta_2)\,\mathfrak{Cof}\,z\xi=0$$

$$-(\alpha_1-\alpha_2)\cos z\xi-(\beta_1-\beta_2)\sin z\xi+(\gamma_1-\gamma_2)\,\mathfrak{Cof}\,z\xi+(\delta_1-\delta_2)\,\mathfrak{Sin}\,z\xi=0$$

$$(\alpha_1-\alpha_2)\sin z\xi-(\beta_1-\beta_2)\cos z\xi+(\gamma_1-\gamma_2)\,\mathfrak{Sin}\,z\xi+(d_1-\delta_2)\,\mathfrak{Cof}\,z\xi=-\frac{1}{z^3}\,.$$

Sie liefern für den Kern folgende expliziten Ausdrücke:

$$4z^3(1+\cos z\,\mathfrak{Cof}\,z)\,K_1(x,\xi)$$

$$=\Big\{-(\mathfrak{Sin}\,z\xi+\sin z\xi)(1+\cos z\,\mathfrak{Cof}\,z)+(\mathfrak{Sin}\,z\xi-\sin z\xi)\,\mathfrak{Sin}\,z\sin z$$
$$+(\cos z\xi-\mathfrak{Cof}\,z\xi)(\sin z\,\mathfrak{Cof}\,z-\cos z\,\mathfrak{Sin}\,z)\Big\}(\cos zx-\mathfrak{Cof}\,zx)$$
$$+\Big\{(\mathfrak{Cof}\,z\xi+\cos z\xi)(1+\cos z\,\mathfrak{Cof}\,z)+(\mathfrak{Cof}\,z\xi-\cos z\xi)\,\mathfrak{Sin}\,z\sin z$$
$$+(\sin z\xi-\mathfrak{Sin}\,z\xi)(\sin z\,\mathfrak{Cof}\,z+\cos z\,\mathfrak{Sin}\,z)\Big\}(\sin zx-\mathfrak{Sin}\,zx)\,.$$

$\underset{x>\xi}{K_1(x,\xi)}$ ergibt sich hieraus durch Vertauschung von x und ξ.

Wir beschränken uns im folgenden wiederum auf die Betrachtung von $\underset{x<\xi}{K_1(x,\xi)}$.

Die Pole von $K_1(x,\xi)$, aufgefaßt als Funktion von z, sind die Stellen $z=\varrho_\nu$, $z=-\varrho_\nu$, $z=\varrho_\nu i$, $z=-\varrho_\nu i$. Zur Abkürzung setzen wir

$$\chi(z)=\cos z\,\mathfrak{Sin}\,z-\mathfrak{Cof}\,z\sin z\,,$$

$$\psi(z)=\cos z\,\mathfrak{Sin}\,z+\mathfrak{Cof}\,z\sin z\,;$$

dann gelten die Relationen

$$\chi(-z)=-\chi(z),\ \chi(zi)=-i\,\chi(z)$$

$$\psi(-z)=-\psi(z),\ \psi(zi)=i\,\psi(z)\,.$$

Auf Grund des Cauchyschen Residuensatzes gilt die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Q_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = K_1(x,\xi)\Big|^{z=\mu} + \sum_{\nu=1}^{n}\ \underset{z=\begin{cases}\pm\varrho_\nu\\ \pm\varrho_\nu i\end{cases}}{\mathrm{Res}}\ \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}, \tag{27}$$

worin Q_n eine später noch näher zu definierende, die ersten $4n$-Pole umschließende Kontur bedeutet.

Es ist

$$\underset{z=\varrho_\nu}{\mathrm{Res}}\ \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} = \frac{\sin\varrho_\nu\,\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,(\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,\xi-\sin\varrho_\nu\,\xi)}{4\,\varrho_\nu^{\,3}(\varrho_\nu-\mu)\,\chi(\varrho_\nu)}(\cos\varrho_\nu x-\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu x)$$

$$+\frac{(\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu\,\xi-\cos\varrho_\nu\,\xi)(\cos\varrho_\nu\,x-\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu\,x)}{4\,\varrho_\nu^{\,3}(\varrho_\nu-\mu)}$$

$$+\frac{\sin\varrho_\nu\,\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,(\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu\,\xi-\cos\varrho_\nu\,\xi)}{4\,\varrho_\nu^{\,3}(\varrho_\nu-\mu)\,\chi(\varrho_\nu)}(\sin\varrho_\nu x-\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu x)$$

$$+\frac{\psi(\varrho_\nu)(\sin\varrho_\nu\,\xi-\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,\xi)(\sin\varrho_\nu\,x-\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu x)}{4\,\varrho_\nu^{\,3}(\varrho_\nu-\mu)\,\chi(\varrho_\nu)}.$$

Die Residuen für die Pole $z=-\varrho_\nu$, $z=\varrho_\nu i$, $z=-\varrho_\nu i$ ergeben sich in gleicher Weise; man erhält sie, wenn man in dem obenstehenden Ausdruck μ bezw. durch $-\mu$, $-\mu i$, $+\mu i$ ersetzt; wir erhalten somit

$$\underset{z=\varrho_\nu}{\mathrm{Res}}+\underset{z=-\varrho_\nu}{\mathrm{Res}}+\underset{z=\varrho_\nu i}{\mathrm{Res}}+\underset{z=-\varrho_\nu i}{\mathrm{Res}}$$

$$=\frac{\sin\varrho_\nu\,\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,(\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,\xi-\sin\varrho_\nu\,\xi)}{(\varrho_\nu^{\,4}-\mu^4)\,\chi(\varrho_\nu)}(\cos\varrho_\nu x-\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu x)$$

$$+\frac{(\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu\,x-\cos\varrho_\nu\,\xi)(\cos\varrho_\nu x-\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu\,x)}{\varrho_\nu^{\,4}-\mu^4}$$

$$+\frac{\sin\varrho_\nu\,\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,(\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu\,\xi-\cos\varrho_\nu\,\xi)}{(\varrho_\nu^{\,4}-\mu^4)\,\chi(\varrho_\nu)}(\sin\varrho_\nu\,x-\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,x)$$

$$+\frac{\psi(\varrho_\nu)(\sin\varrho_\nu\,\xi-\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,\xi)}{(\varrho_\nu^{\,4}-\mu^4)\,\chi(\varrho_\nu)}(\sin\varrho_\nu\,x-\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu\,x).$$

Nun ist

$$\frac{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu}{\chi(\varrho_\nu)}$$

$$= \frac{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu (\cos\varrho_\nu + \operatorname{Cof}\varrho_\nu)}{\operatorname{Sin}\varrho_\nu \cos^2\varrho_\nu + \cos\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu - \cos\varrho_\nu \operatorname{Cof}\varrho_\nu \sin\varrho_\nu - \operatorname{Cof}^2\varrho_\nu \sin\varrho_\nu}$$

und auf Grund der Gleichung $\cos\varrho_\nu \operatorname{Cof}\varrho_\nu + 1 = 0$

$$\frac{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu}{\chi(\varrho_\nu)} = -\frac{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu (\cos\varrho_\nu + \operatorname{Cof}\varrho_\nu)}{\operatorname{Sin}\varrho_\nu (1-\cos^2\varrho_\nu) + \sin\varrho_\nu (\operatorname{Cof}^2\varrho_\nu - 1)}$$

$$= -\frac{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu (\cos\varrho_\nu + \operatorname{Cof}\varrho_\nu)}{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu (\sin\varrho_\nu + \operatorname{Sin}\varrho_\nu)}$$

$$= -\frac{(\cos\varrho_\nu + \operatorname{Cof}\varrho_\nu)(\sin\varrho_\nu + \operatorname{Sin}\varrho_\nu)}{(\sin\varrho_\nu + \operatorname{Sin}\varrho_\nu)^2}.$$

Da nun $(\sin\varrho_\nu + \operatorname{Sin}\varrho_\nu)^2 = \int_0^1 v_\nu^2(x)\,dx$ ist, ergibt sich schließlich

$$\frac{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu}{\chi(\varrho_\nu)} = -\frac{(\cos\varrho_\nu + \operatorname{Cof}\varrho_\nu)(\sin\varrho_\nu + \operatorname{Sin}\varrho_\nu)}{\int_0^1 v_\nu^2(x)\,dx}.$$

Erweitert man den Bruch $\frac{\psi(\varrho_\nu)}{\chi(\varrho_\nu)}$ ebenfalls mit $(\cos\varrho_\nu + \operatorname{Cof}\varrho_\nu)$, so ergibt sich

$$\frac{\psi(\varrho_\nu)}{\chi(\varrho_\nu)} = -\frac{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}^2\varrho_\nu - \operatorname{Sin}\varrho_\nu \sin^2\varrho_\nu}{\sin\varrho_\nu \operatorname{Sin}\varrho_\nu (\operatorname{Sin}\varrho_\nu + \sin\varrho_\nu)}$$

$$= \frac{\sin\varrho_\nu - \operatorname{Sin}\varrho_\nu}{\operatorname{Sin}\varrho_\nu + \sin\varrho_\nu} = \frac{\sin^2\varrho_\nu - \operatorname{Sin}^2\varrho_\nu}{(\operatorname{Sin}\varrho_\nu + \sin\varrho_\nu)^2}.$$

Nun ist $\sin^2\varrho_\nu - \operatorname{Sin}^2\varrho_\nu = 2 - \cos^2\varrho_\nu - \operatorname{Cof}^2\varrho_\nu = -(\cos\varrho_\nu + \operatorname{Cof}\varrho_\nu)^2$, folglich ist

$$\frac{\psi(\varrho_\nu)}{\chi(\varrho_\nu)} = -\frac{(\cos\varrho_\nu + \operatorname{Cof}\varrho_\nu)^2}{\int_0^1 v_\nu^2(x)\,dx}.$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=-\varrho_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu i} + \operatorname*{Res}_{z=-\varrho_\nu i}$$

$$= -\frac{(\cos\varrho_\nu x - \mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu x)(\cos\varrho_\nu \xi - \mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu \xi)(\sin\varrho_\nu + \mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu)^2}{(\varrho_\nu{}^4 - \mu^4)\int_0^1 v_\nu{}^2(x)\,dx}$$

$$+ \frac{(\cos\varrho_\nu x - \mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu x)(\sin\varrho_\nu \xi - \mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu x)(\cos\varrho_\nu + \mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu)(\sin\varrho_\nu + \mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu)}{(\varrho_\nu{}^4 - \mu^4)\int_0^1 v_\nu{}^2(x)\,dx}$$

$$+ \frac{(\sin\varrho_\nu x - \mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu x)(\cos\varrho_\nu \xi - \mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu \xi)(\cos\varrho_\nu + \mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu)(\sin\varrho_\nu + \mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu)}{(\varrho_\nu{}^4 - \mu^4)\int_0^1 v_\nu{}^2(x)\,dx}$$

$$- \frac{(\sin\varrho_\nu x - \mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu x)(\sin\varrho_\nu \xi - \mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu x)(\cos\varrho_\nu + \mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu)}{(\varrho_\nu{}^4 - \mu^4)\int_0^1 v_\nu{}^2(x)\,dx}$$

$$= \frac{-v_\nu(x)\cdot v_\nu(\xi)}{(\varrho_\nu{}^4 - \mu^4)\int_0^1 v_\nu{}^2(x)\,dx} = \frac{-\varphi_\nu(x)\cdot\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu{}^4 - \mu^4},$$

und aus Gleichung (27) folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = K_1(x,\xi)\Big|^{z=\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu{}^4 - \mu^4}. \qquad (28)$$

Abschätzung des Konturintegrals $\int_{Q_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz$.

Die reellen Wurzeln der Gleichung $\cos z\,\mathfrak{Cof}\,z + 1 = 0$ haben die Form $\varrho_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - (-1)^n \alpha_n$,[1]) wo α_n mit wachsendem n gegen Null konvergiert; die übrigen Wurzeln gehen aus diesen durch Multiplikation mit i, —1, —i hervor. Setzen wir

[1]) Lord Rayleigh Theorie des Schalls.

$z = \zeta + i\eta$, so nehmen wir als Kontur Q_n ein Quadrat mit den Seiten $\zeta = \pm n\pi$, $\eta = \pm n\pi$. Den Kern $K_1(x, \xi)$ bringen wir in folgende Form:

$$\begin{aligned} & z^3 (\mathfrak{Cos}\, z \cos z - 1)\, K_1(x, \xi) \\ = & \mathfrak{Cos}\, z \sin z (1 + x - \xi) - \cos z\, \mathfrak{Sin}\, z (1 + x - \xi) + \mathfrak{Cos}\, z (1 - x - \xi) \sin z \\ & - \cos z (1 - x - \xi)\, \mathfrak{Sin}\, z - \mathfrak{Cos}\, z (1 - x) \sin z (1 - \xi) + \cos z (1 - x)\, \mathfrak{Sin}\, z (1 - \xi) \\ & - \mathfrak{Cos}\, z (1 - \xi) \sin z (1 - x) + \cos z (1 - \xi)\, \mathfrak{Sin}\, z (1 - x) + \mathfrak{Cos}\, z x \sin z \xi \\ & - \cos z x\, \mathfrak{Sin}\, z \xi + \mathfrak{Cos}\, z \xi \sin z x - \cos z \xi\, \mathfrak{Sin}\, z x + \sin z (x - \xi) - \mathfrak{Sin}\, z (x - \xi). \end{aligned}$$

Da $K_1(x, \xi)$ eine gerade Funktion von z ist und der Integrand $\frac{K_1(x, \xi)}{z - \mu}$, wenn wir unter μ zunächst wiederum eine reelle Konstante verstehen, für reelle Werte von z reell ist, genügt es, das Integral auf einem Viertel der oben bezeichneten Kontur abzuschätzen. Wir wählen die Strecken $\zeta = n\pi$, $0 \leqq \eta \leqq n\pi$ und $\eta = n\pi$, $0 \leqq \zeta \leqq n\pi$.

Ersetzt man in dem Integranden die hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktionen, so zerfällt das Integral in eine Anzahl von Summanden, die sämtlich die Form

$$\int_{Q_n} \frac{e^{(a + ib) z}}{\cos z\, \mathfrak{Cos}\, z + 1} \cdot \frac{dz}{z^3 (z - \mu)}$$

haben, wo a und b reelle Konstante sind von der Eigenschaft, daß $-1 \leqq a \leqq 1$, $-1 \leqq b \leqq 1$ ist. Setzen wir

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{4} \frac{e^{(a + ib)}}{\cos z\, \mathfrak{Cos}\, z + 1} \\ &= \frac{e^{(a + ib) z}}{e^{z(i+1)} + e^{z(i-1)} + e^{-z(i-1)} + e^{-z(i+1)} + 4}, \end{aligned}$$

so wollen wir im folgenden zeigen, daß

$$\lim_{n = \infty} \int_{Q_n} F(z) \frac{dz}{z^\lambda (z - \mu)} = 0 \text{ ist.} \quad (\lambda \geqq 1.)$$

Wir schätzen zunächst F(z) auf der Geraden $\zeta = n\pi$ von $\eta = 0$

bis $\eta = n\pi$ ab und erweitern zu diesem Zwecke $F(x)$ mit $e^{z(i-1)}$ dann erhalten wir

$$F(z) = \frac{e^{-(1-\alpha)z} \cdot e^{zi(1+b)}}{1 + e^{2zi} + e^{2z(i-1)} + e^{-2z} + 4e^{z(i-1)}}.$$

Es ist

$$\left| e^{-(1-\alpha)z} \cdot e^{zi(1+b)} \right| = e^{-(1-\alpha)n\pi} e^{-(1+b)\eta} \leqq e^{-(1-\alpha)n\pi}.$$

Im Nenner ist

$$1 + e^{2zi} = 1 + e^{2n\pi i} \cdot e^{-2\eta}$$

reell und größer als 1,

$$\left| e^{2z(i-1)} + e^{-2z} + 4e^{z(i-1)} \right| \leqq 2e^{-2n\pi} + 4e^{-n\pi};$$

folglich bleibt, wenn n eine gewisse Grenze überschritten hat, der Nenner über einer festen Grenze g, und der Betrag $|F(z)|$ ist $\leqq \frac{e^{-(1-\alpha)n\pi}}{g}$; daraus folgt

$$\left| \int_{z=n\pi}^{z=n\pi+n\pi i} F(z) \cdot \frac{dz}{z^\lambda (z-\mu)} \right| \leqq \int_{\eta=0}^{\eta=n\pi} \frac{|F(z)|}{(n\pi-\mu)\, n^\lambda \pi^\lambda} |d\eta| \text{ [1]}$$

$$\leqq \frac{e^{-(1-\alpha)n\pi}}{g \cdot n^\lambda \cdot \pi^\lambda} \cdot \frac{n\pi}{n\pi-\mu},$$

d. h.

$$\lim \int_{z=n\pi}^{z=n\pi+n\pi i} F(z) \frac{dz}{z^\lambda (z-\mu)} = 0. \qquad (28)$$

Um die Funktion $F(z)$ auf der Geraden $\eta = n\pi$ abzuschätzen, erweitern wir wiederum mit $e^{z(i-1)}$. Es ist, da $0 \leqq \zeta \leqq n\pi$,

$$\left| e^{-(1-\alpha)z} \cdot e^{zi(1+b)} \right| \leqq e^{-(1+b)n\pi},$$

$$1 + e^{-2z} = 1 + e^{-2\zeta} > 1,$$

$$\left| e^{2zi} + e^{2z(i-1)} + 4e^{z(i-1)} \right| \leqq 2e^{-2n\pi} + 4e^{-n\pi};$$

---

[1]) Es gilt auf der Geraden $\zeta = n\pi$ die Ungleichung $|z-\mu| \geqq n\pi - \mu$, also $\left|\frac{1}{z-\mu}\right| \leqq \frac{1}{n\pi-\mu}$, auf der Geraden $\eta = n\pi$ ebenso $|z-\mu| \geqq n\pi$, also $\left|\frac{1}{z-\mu}\right| \leqq \frac{1}{n\pi}$.

somit ist, wenn n eine gewisse Grenze überschritten hat,

$$|F(z)| \leqq \frac{e^{-(1+b)n\pi}}{g}$$

und

$$\left| \int_{z=n\pi+n\pi i}^{z=n\pi i} F(z) \cdot \frac{dz}{z^\lambda (z-\mu)} \right| =< \frac{e^{-(1+b)n\pi}}{g(n\pi-\mu) n^\lambda \pi^\lambda} \cdot n\pi,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \int_{z=n\pi+n\pi i}^{z=n\pi i} F(z) \cdot \frac{dz}{z^\lambda (z-\mu)} = 0. \tag{29}$$

Aus den Gleichungen (28) und (29) folgt dann

$$\lim_{n=\infty} \int_{Q_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu} dz = 0.$$

Ebenso erhalten wir

$$\lim_{n=\infty} \int_{Q_n} \frac{K_1'(x,\xi)}{z-\mu} dz = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{Q_n} \frac{K_1''(x,\xi)}{z-\mu} dz = 0,$$

und somit die Entwicklungen

$$K_1(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4 - \mu^4}, \tag{30a}$$

$$K_1'(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4 - \mu^4}, \tag{30b}$$

$$K_1''(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu''(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4 - \mu^4}, \tag{30c}$$

Die Erweiterung des Geltungsbereichs der Gleichungen (30) ebenso wie der weiter unten durchgeführten Entwicklung von $K_1'''(x,\xi)$ erfolgt für komplexe μ in derselben Weise wie im vorangehenden Kapitel. Wir setzen nun in Gleichung (30a) $\mu = 0$

und untersuchen den Grenzwert $K_1(x,\xi)\big|^{\mu=0}$. Wir entwickeln zu diesem Zwecke $K_1(x,\xi)$ nach Potenzen von z, wobei wir nur bis zur dritten Potenz fortzuschreiten brauchen. Wir setzen also

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6},\quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2},\quad \mathfrak{Sin}\, z = z + \frac{z^3}{6},\quad \mathfrak{Cof}\, z = 1 + \frac{z^2}{2};$$

dann ist $\mathfrak{Cof}\, a \sin b - \cos a\, \mathfrak{Sin}\, b = b\left(a^2 - \frac{b^2}{3}\right)$. Mit Benutzung dieser Formel erhalten wir

$$4(1 + \cos z\, \mathfrak{Cof}\, z)\, K_1(x,\xi) = (1 + x - \xi)\left[1 - \frac{(1+x-\xi)^2}{3}\right]$$
$$+ (1-x-\xi)^2 - \frac{1}{3} - (1-\xi)\left[(1-x)^2 - \frac{(1-\xi)^2}{3}\right]$$
$$- (1-x)\left[(1-\xi)^2 - \frac{(1-x)^2}{3}\right]$$
$$+ \xi\left(x^2 - \frac{\xi^2}{3}\right) + x\left(\xi^2 - \frac{x^2}{3}\right) - \frac{(x-\xi)^3}{3} = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2\xi.$$

Setzt man in dieser Gleichung $z = 0$, so ergibt sich

$$\underset{x<\xi}{K_1(x,\xi)}\Big|^{\mu=0} = \frac{x^2}{2}\left(\xi - \frac{x}{3}\right).$$

Ebenso ergibt sich

$$\underset{x>\xi}{K_1(x,\xi)}\Big|^{\mu=0} = \frac{\xi^2}{2}\left(x - \frac{\xi}{3}\right),$$

es ist also

$$K_1(x,\xi)\big|^{z=0} = K(x,\xi),\quad K_1'(x,\xi)\big|^{z=0} = K'(x,\xi),\quad K_1''(x,\xi)\big|^{z=0} = K''(x,\xi),$$

und aus den Gleichungen (30) folgen die Entwicklungen

$$K(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4},$$

$$K'(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4},$$

$$K''(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu''(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4}.$$

Die Entwicklung der dritten Ableitung des Kerns nach seinen Eigenfunktionen.

Durch dreimalige Differentiation des Kerns $K_1(x, \xi)$ nach x in der auf S. 34 angegebenen Form erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& \underset{x<\xi}{K'''}(x, \xi)(1+\cos z \operatorname{Cos} z) \\
= & -\operatorname{Cof} z \cos z(1+x-\xi)-\cos z \operatorname{Cof} z(1+x-\xi) \\
& \qquad -\operatorname{Sin} z(1-x-\xi) \sin z \\
& +\sin z(1-x-\xi) \operatorname{Sin} z+\operatorname{Sin} z(1-x) \sin z(1-\xi) \\
& -\sin z(1-x) \operatorname{Sin} z(1-\xi)-\operatorname{Cof} z(1-\xi) \cos z(1-x) \\
& \qquad +\cos z(1-\xi) \cdot \operatorname{Sin} z(1-x) \\
& +\operatorname{Sin} z x \cdot \sin z \xi-\sin z x \operatorname{Sin} z \xi-\operatorname{Cof} z \xi \cos z x-\cos z \xi \operatorname{Cof} z x \\
& -\cos z(x-\xi)-\operatorname{Cof} z(x-\xi) ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \underset{x>\xi}{K'''}(x, \xi)(1+\cos z \operatorname{Cof} z) \\
& \qquad =\operatorname{Cof} z \cos z(1+x-\xi)+\cos z \operatorname{Cof} z(1+x-\xi) \\
& -\operatorname{Sin} z(1-x-\xi) \sin z+\sin z(1-x-\xi) \operatorname{Sin} z \\
& -\operatorname{Cof} z(1-\xi) \cos z(1-x)+\cos z(1-\xi) \operatorname{Sin} z(1-x) \\
& +\operatorname{Sin} z(1-x) \sin z(1-\xi)-\sin z(1-x) \operatorname{Sin} z(1-\xi) \\
& -\operatorname{Cof} z \xi \cos z x-\cos z \xi \operatorname{Cof} z x+\operatorname{Sin} z x \sin z \xi-\sin z x \operatorname{Sin} z \xi \\
& +\cos z(x-\xi)+\operatorname{Cof} z(x-\xi) .
\end{aligned}
$$

Durch dreimalige Differentiation der Gleichung (27) erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_n} \frac{K_1'''(x,\xi)}{z-\mu}\, dz = K_1'''(x,\xi)\Big|^{z=\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu'''(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4 - \mu^4}.$$

Wir betrachten wieder den Fall $x < \xi$.

Die unter dem Konturintegral auftretenden Integranden sind sämtlich von der Form

$$\frac{e^{(a+ib)z}}{\cos z \operatorname{Cof} z + 1} \cdot \frac{dz}{z-\mu} = F(z)\frac{dz}{z-\mu},$$

wo a und b den auf S. 34 für diese Konstanten Bedingungen unterworfen sind; es ist unmittelbar ersichtlich, daß wenn der Fall $x = \xi$ ausgeschlossen wird, die Konstanten a und b niemals gleichzeitig absolut genommen gleich 1 werden. Wir betrachten das Integral wiederum nur auf einem Viertel der Kontur Q_n, und zwar zunächst auf der Strecke $\zeta = n\pi$, $0 \leqq \eta \leqq n\pi$; diese teilen wir nun in zwei Teilstrecken.

Es sei k(n) eine Funktion des Index n, die folgende beiden Eigenschaften hat; es sei

$$1. \quad \lim_{n=\infty} k(n) = \infty,$$

$$2. \quad \lim_{n=\infty} \frac{k(n)}{n} = 0,$$

also etwa $k(n) = \log n$.

Dann grenzen wir auf der Quadratseite $\zeta = n\pi$ die Teile $0 \leqq \eta \leqq k(n)$ und $k(n) \leqq \eta \leqq n\pi$ ab. Auf der Strecke $k(n) \leqq \eta \leqq n\pi$ ist

$$|F(z)| = \left| \frac{e^{-(1-\alpha)z}\, e^{(1+b)zi}}{1 + e^{2zi} + e^{2z(i-1)} + e^{-2z} + 4e^{z(i-1)}} \right|$$

$$\leqq \frac{e^{-(1-\alpha)n\pi} \cdot e^{-(1+b)k(n)}}{g},\ [1]$$

wo g eine von Null verschiedene Konstante bedeutet, also

$$\left| \int\limits_{z=n\pi+ik(n)}^{z=n\pi+in\pi} F(z) \cdot \frac{dz}{z-\mu} \right| \leqq \int\limits_{\eta=k(n)}^{\eta=n\pi} \frac{|F(z)|}{(n\pi-\mu)} |d\eta|,$$

$$\leqq \frac{e^{-(1-\alpha)n\pi} \cdot e^{-(1+b)k(n)}}{g} \cdot \frac{n\pi - k(n)}{n\pi - \mu},$$

der limes des Integrals ist Null, wenn $1-\alpha$ und $1+b$ nicht gleichzeitig Null sind.

Auf der Strecke $0 \leqq \eta \leqq k(n)$ ist

$$|F(z)| \leqq \frac{e^{-(1-\alpha)n\pi}}{g}\ [2]$$

und

$$\left| \int\limits_{z=n\pi}^{z=n\pi+ik(n)} F(z) \frac{dz}{z-\mu} \right| \leqq \frac{e^{-(1-\alpha)n\pi}}{g} \cdot \frac{k(n)}{n\pi-\mu};$$

---

[1]) vgl. S. 35.

[2]) vgl. S. 35.

der limes des Integrals ist also Null, auch wenn $\alpha = 1$ ist. Somit verschwindet das Integral

$$\int\limits_{z=n\pi}^{z=n\pi+n\pi i} F(z)\,\frac{dz}{z-\mu}$$

für $n = \infty$ für alle Werte α, b zwischen -1 und $+1$ mit Ausnahme des Wertepaares $\alpha = 1$, $b = -1$.

Auf der Strecke $\eta = n\pi$, $0 \leqq \zeta \leqq n\pi$ teilen wir die Strecken $0 \leqq \zeta \leqq k(n)$, $k(n) \leqq \zeta \leqq n\pi$ ab und erhalten für die zweite Strecke

$$\left| \int\limits_{z=n\pi+n\pi i}^{z=k(n)+n\pi i} F(z)\,\frac{dz}{z-\mu} \right| \leqq \frac{e^{-(1-\alpha)k(n)} \cdot e^{-(1+b)n\pi}}{g} \cdot \frac{n\pi - k(n)}{n\pi},$$

für die erste

$$\left| \int\limits_{z=k(n)+n\pi i}^{z=n\pi i} F(z)\,\frac{dz}{z-\mu} \right| \leqq \frac{e^{-(1+b)n\pi}}{g} \cdot \frac{k(n)}{n\pi},$$

d. h.

$$\lim \int\limits_{z=n\pi+n\pi i}^{z=n\pi i} F(z)\,\frac{dz}{z-\mu} = 0$$

für alle Werte α, b zwischen -1 und $+1$ mit Ausnahme des Paares $\alpha = 1$, $b = -1$.

Ahnlich gestaltet sich die Untersuchung für die drei übrigen Viertel der Kontur, und es ergibt sich, daß für alle Werte α, b mit Ausnahme der Wertepaare

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & b &= 1 \\ \alpha &= -1, & b &= -1 \\ \alpha &= 1, & b &= -1 \\ \alpha &= -1, & b &= 1 \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{Q_n} F(z)\,\frac{dz}{z-\mu} = 0$$

gilt. Ersetzt man in dem Ausdruck für $K'''(x, \xi)$ die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen durch die Exponentialgrößen, so erkennt man auf Grund der soeben hergeleiteten Resultate, daß wenn $x \neq \xi$

$$\lim_{n=\infty} \int_{Q_n} \frac{K_1'''(x,\xi)}{z-\mu} \, dz = 0$$

ist. Im Falle $x = \xi$ erhalten wir:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{Q_n} \frac{K_1'''(\xi-0,\xi) + K_1'''(\xi+0,\xi)}{z-\mu} \, dz = K_1'''(\xi-0,\xi) + K_1'''(\xi+0,\xi)$$
$$- 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'''(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4 - \mu^4}.$$

Es ist

$$\int_{Q_n} \frac{K_1'''(\xi-0,\xi) + K_1'''(\xi+0,\xi)}{z-\mu} \, dz$$
$$= 2 \int_{Q_n} \frac{\mathfrak{Sin}\, z \sin z (1-2\xi) - \sin z\, \mathfrak{Sin}\, z(1-2\xi)}{(z-\mu)(\cos z\, \mathfrak{Cos}\, z + 1)} \, dz$$
$$- 4 \int_{Q_n} \frac{\cos z\xi \cdot \mathfrak{Cos}\, z\xi}{(z-\mu)(\cos z\, \mathfrak{Cos}\, z + 1)} \, dz.$$

Ersetzt man in den beiden rechts stehenden Integralen die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen durch die Exponentialgrößen, so treten unter den Integralen Exponentialgrößen von der Form

$$e^{[\pm 1 \pm i(1-2\xi)]z},$$
$$e^{[\pm i \pm (1-2\xi)]z}, \qquad e^{[\pm \xi \pm i\xi]}$$

auf, deren Exponentialfaktoren a, b also, wenn die Werte $\xi = 0$ und $\xi = 1$ ausgeschlossen werden, den auf S. 40 aufgestellten, für das Bestehen der Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_{Q_n} F(z) \frac{dz}{z-\mu} = 0$$

notwendigen Bedingungen genügen.

Wir erhalten somit die Entwicklungen

$$K_1'''(x,\xi) \Big|_{x \neq \xi}^{z=\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'''(x)\, \varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4 - \mu^4},$$

$$\frac{K_1'''(\xi-0,\xi)+K_1'''(\xi+0,\xi)}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu'''(\xi)\cdot\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4-\mu^4}.$$

Daraus ergeben sich, wenn man $\mu=0$ setzt, die Entwicklungen

$$K'''(x,\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu'''(x)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4}$$

$$\frac{K'''(\xi-0,\xi)+K_1'''(\xi+0,\xi)}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu'''(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^4}.$$

IV. Kapitel.

Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermomechanischen Problem.

Wir behandeln im folgenden Kapitel ein von Duhamel stammendes thermomechanisches Problem, das zu einer Integralgleichung mit unsymmetrischem Kern führt. Duhamel untersucht in einer Abhandlung in Bd. 14 des Journal de l'école polytechnique die Wärmebewegung in einer Kugel mit Berücksichtigung der zwischen den Molekülen wirkenden elastischen Kräfte.

Es werde im folgenden zunächst kurz erläutert, wie Duhamel zu den Differentialgleichungen eines allgemeinen thermomechanischen Problems gelangt.

Mit a, b, c bezeichnen wir die Koordinaten eines unendlich kleinen Parallelepipeds von den Kantenlängen da, db, dc innerhalb eines festen Körpers. Ist ferner k die innere Leitfähigkeit, c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, $\varDelta$ die Dichte des Körpers, so ist bei Wärmebewegung der Zuwachs der Temperatur v in der Zeit dt

$$\frac{k}{\varDelta\cdot c_v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial c^2}\right)dt.$$

Durch die aus der Temperaturänderung hervorgehenden Volumenänderung des Körpers ändern die Moleküle ihre Lage; ihre veränderlichen Koordinaten seien $a+x$, $b+y$, $c+z$; es sei ferner c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck, δ die Ausdehnung der Längeneinheit bei Erwärmung von 0^0 auf 100^0, δ' die Ausdehnung der Einheitsstrecke bei der Wirkung der Einheitsspannung auf jeden Punkt der Oberfläche, $\lambda\Delta$ der Zuwachs der Dichte, wobei $\lambda = -\left(\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)$ ist. Läßt man nun den Körper sich abkühlen, bis die Dichte um $\varepsilon\Delta$ zugenommen hat, die Volumeneinheit $1-\varepsilon$ geworden ist, so ist die der Volumeneinheit dabei entzogene Wärmemenge $\frac{c_p\cdot\varepsilon}{3\delta}$; ist Θ der Temperaturzuwachs bei der Dichtigkeitszunahme $\varepsilon\Delta$, so muß

$$\frac{c_p\cdot\varepsilon}{3\delta} = c_v\left(\frac{\varepsilon}{3\delta}+\Theta\right)$$

sein, woraus $\Theta = \frac{\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\varepsilon}{3\delta}$ folgt.

Betrachtet man immer dasselbe Molekül, so ist λ eine Funktion von t allein, und zwar ist

$$d\lambda = -\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial c\,\partial t}\right)dt\,.$$

Setzt man diesen Wert für ε ein, so erhält man für den Temperaturzuwachs Θ den Wert

$$-\frac{\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)}{3\delta}\cdot\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial c\,\partial t}\right)dt\,,$$

und die Differentialgleichung der Wärmeleitung erhält die Form

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{c_v\cdot\Delta}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial c^2}\right)-\frac{\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)}{3\delta}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial c\,\partial t}\right).$$

Nun sind die x, y, z nicht Funktionen von a, b, c, t allein, sondern hängen selbst wiederum von v ab. Die Art der Abhängigkeit ist von Duhamel in einer früheren Abhandlung (Mém. prés. à l'Acad. de Paris T.V p. 440) untersucht worden. Sind X, Y, Z die Komponenten der zwischen den Molekülen wirkenden elastischen Kräfte, X', Y', Z' die Komponenten der auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte, m, l, n die Winkel zwischen den nach außen gerichteten Normalen und den Koordinatenachsen, so gelten folgende Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
5\delta'\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right) &= 3\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial c^2}\\
&\quad +2\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}+2\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial c}-5\delta\cdot\frac{\partial v}{\partial a},\\
5\delta'\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial a^2}+3\frac{\partial^2 x}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial c^2}\\
&\quad +2\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}+2\frac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial c}-5\delta\cdot\frac{\partial v}{\partial b},\\
5\delta'\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial b^2}+3\frac{\partial^2 x}{\partial c^2}\\
&\quad +2\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial c}+2\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial c}-5\delta\cdot\frac{\partial v}{\partial c}.^{1)}
\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

---

[1]) Setzt man in den Gleichungen (31) $\frac{\partial v}{\partial a}=0$, $\frac{\partial v}{\partial b}=0$, setzt man also konstante Temperatur voraus, so erkennt man, daß sie auf einer besonderen, die Konstanten μ und λ der modernen Theorie betreffenden Voraussetzung beruhen, die nicht mehr zugelassen wird. Setzt man nämlich in den allgemeinen Differentialgleichungen für die Bewegung eines isotropen elastischen Körpers

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right) &= \mu\left[\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial c^2}\right]\\
&\quad +(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial c}+\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial c}+\frac{\partial^2 z}{\partial c^2}\right]\\
\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right) &= \mu\left[\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial c^2}\right]\\
&\quad +(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}+\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial c}\right]\\
\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right) &= \mu\left[\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial c^2}\right]\\
&\quad +(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}+\frac{\partial^2 y}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial c}\right]
\end{aligned}$$

(vgl. Riemann-Weber Bd. 2 S. 168) $\mu=\lambda$, so gehen sie über in die folgenden und für die Punkte der Oberfläche

$$5\,\delta' X' = \left(3\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\right)\cos l + \left(\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial a}\right)\cos m + \left(\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial a}\right)\cos n - 5\,\delta v \cos l\,,$$

$$5\,\delta' Y' = \left(\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial b}\right)\cos l + \left(\frac{\partial x}{\partial a} + 3\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\right)\cos m + \left(\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\right)\cos n - 5\,\delta v \cos m\,,$$

$$5\,\delta' Z' = \left(\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial a}\right)\cos l + \left(\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial c}\right)\cos m + \left(\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + 3\frac{\partial z}{\partial c}\right)\cos n - 5\,\delta v \cos n\,.$$

Diese Differentialgleichungen, in Verbindung mit der oben abgeleiteten Wärmeleitungsgleichung, mit den für die Randpunkte gestellten thermischen Bedingungen und dem gegebenen Anfangszustand, bestimmen die x, y, z, v als Funktionen von a, b, c, t.

Findet in einem Körper Abkühlung statt, so führen die einzelnen Moleküle Schwingungen um Gleichgewichtslagen aus, die jedoch in Anbetracht der kurzen Dauer gegenüber der langsam fortschreitenden Abkühlung vernachlässigt werden können, so daß man eine stete Aufeinanderfolge von Gleichgewichtszuständen annehmen kann. Bei dieser Annahme werden die linken Seiten der Gleichungen (31) Null.

D u h a m e l behandelt nun die Abkühlung einer Kugel unter der Annahme, daß keine Druckkräfte von außen auf sie einwirken. Die Anfangstemperatur ist gegeben als Funktion der

---

$$\frac{\Delta}{\mu}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) = 3\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial c^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial c}$$

$$\frac{\Delta}{\mu}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + 3\frac{\partial^2 y}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial c^2} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial c}$$

$$\frac{\Delta}{\mu}\left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial b^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial c^2} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial c} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial c}\,,$$

d. h. sie gehen über in die Gleichungen (31) für den Fall konstanter Temperatur.

Entfernung vom Mittelpunkte, r; im Mittelpunkte herrscht ständig die Temperatur 0, die Oberfläche strahlt Wärme aus.

Setzt man $x = a\varphi$, $y = b\varphi$, so bedeutet $\varphi \cdot r$ den Zuwachs des Radius r, und die Wärmeleitungsgleichung sowie die Gleichungen (31) gehen über in die folgenden

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{\varDelta \cdot c_v}\left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{dv}{dr}\right) + \frac{\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)}{3\delta}\cdot\frac{d}{dt}\left(3\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right) \\ &\text{b)} \quad \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{4}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dr} - \frac{5\delta}{3r}\cdot\frac{dv}{dr} = 0 . \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Hierzu treten die Gleichungen, welche die thermischen und mechanischen Grenzbedingungen ausdrücken

$$\frac{dv}{dr} + hv \Big|^{r=1} = 0\,^{1)}$$

$$5\varphi + 3r\frac{d\varphi}{dr} - 5\delta v = 0 .$$

Der Ausdruck

$$\varphi = \frac{5\delta}{3r^3}\int_0^r v r^2 dr + \frac{4\delta}{3}\int_0^1 v r^2 dr$$

genügt, welches auch die Funktion v sein möge, den Differentialgleichungen (32).

Setzt man diesen Wert in (32 a) ein und setzt $v \cdot r = V$,

$$\frac{9k}{(4c_v + 5c_p)\varDelta} = a^2, \quad \frac{12(c_p - c_v)}{(4c_v + 5c_p)} = b^2,$$

so erhält man für V die Integrodifferentialgleichung

$$\frac{dV}{dt} = a^2\frac{d^2V}{dr^2} - b^2 r\int_0^1 r\frac{dV}{dt}dr . \quad (33)$$

Diese Gleichung ist zu lösen für die Randbedingungen

$$V\Big|^{r=0} = 0, \quad \frac{dV}{dr} + hV\Big|^{r=1} = 0 .$$

Für $t = 0$ ist $V = f(r)$.

---

[1]) Der Radius der Kugel ist = 1 gesetzt.

Es entsteht die Aufgabe, f (r) in eine nach den Lösungen einer Integrodifferentialgleichung fortschreitende Reihe zu entwickeln; diese ist von Liouville[1]) behandelt worden. Die Möglichkeit der Entwicklung beruht auf einer besonderen Eigenschaft der Lösungen, die darin besteht, daß alle zu den Lösungen einer anderen Differentialgleichung orthogonal sind. Im folgenden soll dieser Nachweis mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen geführt werden.

A. Das Biorthogonalsystem.

Wir schreiben für r jetzt x; wird

$$V = e^{-a^2\varrho^2 t} \cdot u(x)$$

gesetzt, so ergibt sich für den Raumfaktor u (x) die Differentialgleichung

$$u'' + \varrho^2 \left(u + b^2 x \int_0^1 x\, u\, dx \right) = 0. \tag{34}$$

Die Randbedingungen, denen u zu genügen hat, sind

$$u\,|^{x=0} = 0, \quad u' + h\,u\,|^{x=1} = 0.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (34) hat die Form

$$u = A \sin \varrho x + B \cos \varrho x - b^2 x \int_0^1 x\, u\, dx.$$

Setzt man

$$\alpha(\varrho) = \frac{3 b^2}{3 + b^2} \cdot \frac{\sin \varrho - \varrho \cos \varrho}{\varrho^2}, \quad A = \frac{1}{\varrho}, \tag{34a}$$

so ist

$$u = \frac{\sin \varrho x - \alpha(\varrho)\, x}{\varrho} \tag{34b}$$

eine der ersten Randbedingung genügende Lösung, und die zweite Randbedingung liefert die Gleichung

$$\omega(\varrho) = \cos \varrho + \frac{h \sin \varrho}{\varrho} - \frac{\alpha(\varrho)(h+1)}{\varrho} = 0,$$

deren Wurzeln die Eigenwerte darstellen; wir bezeichnen sie mit ϱ_ν ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$). Liouville hat bewiesen, daß sie sämtlich

[1]) Journal Liouville Bd. 2.

reell und voneinander verschieden sind.[1]) Für großes ν haben sie die Form

$$\varrho_\nu = (2\nu + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{B_\nu}{\nu},$$

wo B_ν eine Funktion des Index ν bezeichnet, deren absoluter Wert niemals einen von ν unabhängigen bestimmten Maximalwert überschreitet, so daß, sobald ν eine gewisse Grenze überschritten hat, die Wurzeln ϱ_ν von den Stellen $(2\nu + 1)\frac{\pi}{2}$ beliebig wenig verschieden sind. Neben der Gleichung (34) betrachten wir die Differentialgleichung

$$v'' + \varrho^2 v = 0, \tag{35}$$

deren Lösungen den Randbedingungen

$$v\,|^{x=0} = 0, \; v'(1) + h\, v(1) - \frac{3 b^2 (1+h)}{3+b^2}\int_0^1 x\, v\, dx = 0$$

genügen.

Die der ersten Randbedingung genügende Lösung von (35) ist $v = A \sin \varrho x$, oder wenn wir wiederum $A = \frac{1}{\varrho}$ setzen,

$$v = \frac{\sin \varrho x}{\varrho}. \tag{59a}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & v'(1) + h\, v(1) - \frac{3 b^2 (1+h)}{3+b^2}\int_0^1 x\, v\, dx \\ & = v'(1) + h\, v(1) - \frac{3 b^2 (1+h)}{\varrho^2 (3+b^2)}\big(v'(1) - v(1)\big) \\ & = \frac{1}{\varrho}\left[\varrho \cos \varrho + h \sin \varrho - \frac{3 b^2 (1+h)}{\varrho^2 (3+b^2)}(\sin \varrho - \varrho \cos \varrho)\right] \\ & = \cos \varrho + \frac{h \sin \varrho}{\varrho} - \frac{\alpha(\varrho)(1+h)}{\varrho} = \omega(\varrho). \end{aligned} \tag{35b}$$

Die Eigenwerte der Differentialgleichung (35) sind also ebenfalls die Größen ϱ_ν.

Es sei nun u_μ die zum Eigenwert $\varrho = \varrho_\mu$ gehörende Lösung von (34), v_ν die zum Eigenwert $\varrho = \varrho_\nu$ gehörende Lösung von (35), also

---

[1]) a. a. O. S. 445 ff.

$$u_\mu'' + \varrho_\mu^2\left(u_\mu + b^2 x\int_0^1 x\, u_\mu\, dx\right) = 0$$

$$v_\nu'' + \varrho_\nu^2 v_\nu = 0;$$

dann ergibt sich durch Multiplikation der ersten Gleichung mit v_ν, der zweiten mit u_μ nach Subtraktion und Integration von 0 bis 1

$$v_\nu u_\mu' - u_\mu v_\nu' \Big|^1 + (\varrho_\mu^2 - \varrho_\nu^2)\int_0^1 u_\mu v_\nu\, dx$$

$$+ \varrho_\mu^2 b^2 \int_0^1 x\, v_\nu\, dx \int_0^1 x\, u_\mu\, dx = 0,$$

oder, da $v_\nu u_\mu' - v_\nu' u_\mu \Big|^1 = - u_\mu(1)(v_\nu' + h v_\nu)\Big|^1$, und nach (34b) und (35a) die Gleichungen

$$\int_0^1 x\, u_\mu\, dx = \frac{3 u_\mu(1)(1+h)}{\varrho_\mu^2(3+b^2)}, \int_0^1 x\, v_\nu\, dx = \frac{1}{\varrho_\nu^2}\left[v_\nu'(1) - v_\nu(1)\right]$$

gelten,

$$(\varrho_\mu^2 - \varrho_\nu^2)\int_0^1 u_\mu v_\nu\, dx$$

$$= u_\mu(1)\left[v_\nu'(1) + h v_\nu(1) - \frac{3 b^2(1+h)}{\varrho_\nu^2(3+b^2)}\left[v_\nu'(1) - v_\nu(1)\right]\right],$$

$$= u_\mu(1)\cdot\omega(\varrho_\nu).$$

Es ist demnach, wenn $\varrho_\mu \neq \varrho_\nu$, d. h. $\mu \neq \nu$ ist,

$$\int_0^1 u_\mu v_\nu\, dx = 0.$$

Die Funktionen μ und v bilden ein Biorthogonalsystem. Ist $\mu = \nu$, so ist

$$\int_0^1 u_\mu v_\mu\, dx = - \left.\frac{u_\mu(1)\dfrac{d\omega}{d\varrho}}{2\varrho}\right|_{\varrho=\varrho_\mu} . \qquad (35c)$$

B. Überführung der Differentialgleichungen (34) und (35) in Integralgleichungen.

Um die Differentialgleichung (34) in eine Integralgleichung überzuführen, stellen wir ihr die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2} = 0 \tag{36}$$

gegenüber. Die Funktion $G(x, \xi)$ genüge den Randbedingungen

$$G(x,\xi)\,|^{x=0} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x} + h\,G\,|^{x=1} = 0,$$

außerdem sei die Ableitung $\frac{\partial G}{\partial x}$ an der Stelle $x = \xi$ unstetig derart, daß

$$\frac{\partial G}{\partial x}\Bigg|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = 1 \text{ ist.}$$

Multiplizieren wir die Gleichung (34) mit G, Gleichung (36) mit u, subtrahieren und integrieren von 0 bis 1, so erhalten wir

$$\left(G\,u' - u\frac{\partial G}{\partial x}\right)\Bigg|_0^1 - u(\xi) = -\varrho^2\int_0^1 G(x,\xi)\;u(x)\,d\,x$$
$$-\varrho^2\,b^2\int_0^1 x\,G\,d\,x\int_0^1 x\,u\,d\,x,$$

oder, da

$$\left(G\,u - u\frac{\partial G}{\partial x}\right)\Bigg|^{x=1} = 0,$$

$$u(\xi) = \varrho^2\int_0^1 u(x)\left[G(x,\xi) + b^2\,x\int_0^1 \alpha\,G(\alpha,\xi)\,d\,\alpha\right]d\,x.$$

Wir setzen

$$\int_0^1 \alpha\,G(\alpha,\xi)\,d\,\alpha = \Phi(\xi),$$

$$G(x,\xi) + b^2 x\,\Phi(\xi) = K(x,\xi);$$

dann erhalten wir die Integralgleichung

$$u(\xi) = \varrho^2\int_0^1 K(x,\xi)\,u(x)\,d\,x.$$

Während $G(x, \xi)$ in x und ξ symmetrisch ist, ist der Kern $K(x, \xi)$ selbst unsymmetrisch; er genügt folgenden Randbedingungen:

$$K(0,\xi) = 0, \quad \left[\frac{\partial K}{\partial x} + h\,K\right]^{x=1} = b^2(1+h)\,\Phi(\xi).$$

Als Funktion von ξ genügt $K(x, \xi)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} = b^2 x \frac{d^2 \Phi}{d \xi^2} = - b^2 x \xi,$$

und den Randbedingungen

$$K(x, 0) = 0, \left[\frac{\partial K}{\partial \xi} + h K\right]^{\xi=1} = 0. \tag{35d}$$

Sowohl $\frac{\partial K}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial K}{\partial \xi}$ werden an der Stelle $x = \xi$ in derselben Weise unstetig wie $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial G}{\partial \xi}$. Es ist

$$\underset{x<\xi}{G(x, \xi)} = \left(1 - \frac{h\xi}{1+h}\right) x,$$

$$\underset{x>\xi}{G(x, \xi)} = \left(1 - \frac{h x}{1+h}\right) \xi,$$

$$\Phi(\xi) = \frac{G(1, \xi)}{2} - \frac{\partial G}{\partial x}\Big|^{x=1} - \frac{\xi^3}{6}$$

$$= \frac{\xi(3+h) - \xi^3(1+h)}{6(1+h)},$$

also

$$\underset{x<\xi}{K(x, \xi)} = \left(1 - \frac{h\xi}{1+h}\right) x + b^2 x \frac{\xi(3+h) - \xi^3(1+h)}{6(1+h)},$$

$$\underset{x>\xi}{K(x, \xi)} = \left(1 - \frac{h x}{1+h}\right) \xi + b^2 x \frac{\xi(3+h) - \xi^3(1+h)}{6(1+h)}.$$

Um ferner die Differentialgleichung (35) in eine Integralgleichung überzuführen, verbinden wir sie mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} = - b^2 x \xi.$$

Multiplizieren wir diese mit $v(\xi)$, die Differentialgleichung

$$v''(\xi) + \varrho^2 v(\xi) = 0$$

mit $K(x, \xi)$, subtrahieren und integrieren nach ξ von 0 bis 1 so erhalten wir

$$\left[K\frac{dv}{d\xi} - v\frac{\partial K}{\partial \xi}\right]_0^1 - v(x)$$

$$+\varrho^2\int_0^1 v(\xi)\,K(x,\xi)\,d\xi - b^2x\int_0^1 \xi\cdot v(\xi)\,d\xi = 0;$$

$$\left[K\frac{dv}{d\xi} - v\frac{\partial K}{\partial \xi}\right]_0^1 - b^2x\int_0^1 \xi\cdot v(\xi)\,d\xi$$

$$= \left[K(x,1)\frac{3b^2(1+h)}{3+b^2} - b^2x\right]\int_0^1 x\cdot v\cdot dx.$$

Da nun die Gleichung

$$K(x,1) = G(x,1) + b^2x\,\Phi(1) = x\cdot\frac{3+b^2}{3(1+h^2)}$$

gilt, so ist

$$K(x,1)\frac{3b^2(1+h^2)}{3+b^2} - b^2x = x\frac{3+b^2}{3(1+h)}\cdot\frac{3b^2(1+h)}{3+b^2} - b^2x = 0,$$

folglich

$$\left[K\frac{dv}{d\xi} - v\frac{\partial K}{\partial \xi}\right]_0^1 - b^2x\int_0^1 \xi\cdot v(\xi)\,d\xi = 0,$$

und es ergibt sich die Integralgleichung

$$v(x) = \varrho^2\int_0^1 K(x,\xi)\,v(\xi)\,d\xi.$$

C. Quellenmäßige Darstellung von Funktionen.

Da der Kern $K(x,\xi)$ unsymmetrisch ist, erhalten wir zwei verschiedene Arten der quellenmäßigen Darstellung nach der Bezeichnung von Kneser.[1])

a) Ist

$$F(\xi) = \int_0^1 K(x,\xi)\,f(x)\,dx,$$

so genügt F nach (35d) den Randbedingungen

$$F(0) = 0,\quad F'(1) + hF(1) = 0$$

[1]) Integralgleichungen §§ 2, 20.

und der Differentialgleichung

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} = -f(\xi) - b^2\xi\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx.$$

Ist $f(x)$ stückweise stetig, so ist die Funktion $F(\xi)$ mit ihrer ersten Ableitung stetig, während die zweite Ableitung stückweise stetig ist, und genügt denselben Randbedingungen wie $K(x, \xi)$ in bezug auf ξ.

b) Ist

$$F(x) = \int_0^1 K(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

so genügt F nach (35 b) den Randbedingungen

$$F(0) = 0,\quad F'(1) + hF(1) = b^2(1+h)\int_0^1 \Phi(\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

und der Differentialgleichung

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -f(x).$$

Trifft die oben über $f(x)$ gemachte Voraussetzung zu, so ist die Funktion $F(x)$ mit ihrer ersten Ableitung stetig, während die zweite stückweise stetig ist.

Umgekehrt ist jede Funktion mit stetiger erster Ableitung und stückweise stetiger zweiter Ableitung, welche den Randbedingungen a) oder b) genügt, quellenmäßig darstellbar.

a) Die Funktion F sei mit ihrer ersten Ableitung stetig und genüge den Randbedingungen

$$F(0) = 0,\quad F'(1) + hF(1) = 0,$$

dann definieren wir $f(x)$ durch die Gleichung

$$F''(x) = -f(x) - b^2x\int_0^1 x\, f(x)\, dx; \tag{37 a}$$

multipliziert man (37 a) mit x und integriert von 0 bis 1 nach x, so erhält man $\int_0^1 x\, f(x)\, dx = \frac{3}{3+b^2} F(1)(1+h)$,

es ist also

$$f(x) = -F''(x) - \frac{3b^2}{3+b^2}(1+h)\cdot x\cdot F(1).^{1)} \tag{37 b}$$

Der Gleichung (37 a) stellen wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} = 0$$

gegenüber.

Multiplizieren wir diese mit F(x), Gleichung (37 a) mit K(x, ξ), subtrahieren und integrieren von 0 bis 1 nach x, so ergibt sich

$$\left[K F' - F \frac{\partial K}{\partial x}\right]_0^1 - F(\xi)$$

$$= \int_0^1 K(x, \xi) f(x) \, dx - b^2 \int_0^1 x K(x, \xi) \, dx \int_0^1 x f(x) \, dx .$$

Weiter ist

$$\int_0^1 x K(x, \xi) \, dx = \Phi(\xi) + \frac{b^2 \Phi(\xi)}{3} = \Phi(\xi) \cdot \frac{3 + b^2}{3},$$

folglich

$$b^2 \int_0^1 x K(x, \xi) \, dx \int_0^1 x f(x) \, dx = b^2 (1 + h) F(1) \, \Phi(\xi) .$$

Es ist aber nach (35b)

$$\left[K F' - F \frac{\partial K}{\partial x}\right]^{x=1} = - b^2 (1 + h) F(1) \, \Phi(\xi),$$

also

$$\left[K F' - F \frac{\partial K}{\partial x}\right]^{x=1} + b^2 \int_0^1 x K(x, \xi) \, dx \int_0^1 x f(x) \, dx = 0$$

und

$$F(\xi) = \int_0^1 K(x, \xi) f(x) \, dx .$$

b) F genüge den Randbedingungen

$$F(0) = 0, \; F'(1) + h F(1) = b^2 (1 + h) \int_0^1 \Phi(\xi) \cdot f(\xi) \, d\xi . \tag{38}$$

Dann bestimmen wir die Funktion f aus der Gleichung

$$\frac{d^2 F}{d \xi^2} = - f(\xi) . \tag{38a}$$

Aus dieser und der Differentialgleichung des Kerns

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} = - b^2 x \xi$$

ergibt sich wie im Falle a)

$$\left[F \frac{\partial K}{\partial \xi} - K \frac{d F}{d \xi}\right]^{\xi=1} + F(x) = \int_0^1 K(x, \xi) f(\xi) d\xi - b^2 x \int_0^1 \xi \cdot F(\xi) d\xi. \quad (38\,b)$$

Da nun nach (35 b)

$$\frac{\partial K}{\partial \xi} - h K \Big|^{\xi=1} = 0,$$

so ist nach (38)

$$\left[F \frac{\partial K}{\partial \xi} - K \frac{\partial F}{\partial \xi}\right]^{\xi=1} = - K(x, 1)\, b^2 (1 + h) \int_0^1 \Phi(\xi) f(\xi) d\xi. \qquad (38\,c)$$

Aus Gleichung (38) aber und dem oben für $\Phi(\xi)$ gegebenen Ausdrucke sowie der Gleichung (38 a) folgt:

$$\int_0^1 \Phi(\xi) f(\xi) d\xi = - \int_0^1 \Phi(\xi) F''(\xi) d\xi$$

$$= F(1) \Phi'(1) - F'(1) \Phi(1) + \int_0^1 \xi \cdot F(\xi) d\xi$$

$$= - \Phi(1) \cdot b^2 (1 + h) \int_0^1 \Phi(\xi) f(\xi) d\xi + \int_0^1 \xi F(\xi) d\xi,$$

und hieraus

$$\int_0^1 \Phi(\xi) f(\xi) d\xi = \frac{\int_0^1 \xi \cdot F(\xi) d\xi}{1 + b^2 (1 + h) \Phi(1)}$$

Da nun $K(x, 1) = \frac{x}{1+h}\big(1 + b^2 \Phi(1) (1 + h)\big)$ ist,

so folgt nach (38 d)

$$- b^2 (1 + h) K(x, 1) \int_0^1 \Phi(\xi) f(\xi) d\xi = - b^2 x \int_0^1 \xi \cdot F(\xi) d\xi.$$

Folglich ergibt die Gleichung (38 c)

$$\left[F \frac{\partial K}{\partial \xi} - K \frac{d F}{d \xi}\right]^{\xi=1} + b^2 x \int_0^1 \xi F(\xi) d\xi = 0$$

und nach Gleichung (38)

$$F(x) = \int_0^1 K(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

D. Ein allgemeinerer Kern $K_1(x, \xi)$ und seine Entwicklung nach den Eigenfunktionen.

Als Differentialgleichung des Kerns $K_1(x, \xi)$ setzen wir an

$$\frac{\partial^2 K_1(x, \xi)}{\partial x^2} + z^2 K_1(x, \xi) = 0. \tag{39}$$

Wir setzen gleichzeitig als erste Randbedingung an

$$K_1(0. \xi) = 0$$

und bestimmen, daß $\frac{\partial K_1}{\partial x}$ an der Stelle $x = \xi$ in der Weise unstetig ist, daß

$$\frac{\partial K_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = 1$$

ist, während wir uns die Festlegung der zweiten Randbedingung noch vorbehalten.

Aus den Gleichungen

$$u'' + \varrho^2 \left(u + b^2 x \int_0^1 x u \, dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2} + z^2 K_1 = 0$$

folgt

$$\left[u' K_1 - u \frac{\partial K}{\partial x}\right]_0^1 - u(\xi) + (\varrho^2 - \mu^2) \int_0^1 K_1(x, \xi) u(x) dx$$
$$+ \varrho^2 b^2 \int_0^1 x u \, dx \int_0^1 x K_1 \, dx = 0.$$

Aus der Forderung

$$\left[u' K_1 - u \frac{\partial K_1}{\partial x}\right]_0^1 + \varrho^2 b^2 \int_0^1 x u \, dx \int_0^1 x K_1 \, dx = 0$$

oder

$$-u(1)\left[\frac{\partial K_1}{\partial x} + h K_1\right]^{x=1} + \varrho^2 b^2 \int_0^1 x u \, dx \int_0^1 x K_1 \, dx = 0 \tag{40}$$

ergibt sich die Randbedingung, der $K_1(x, \xi)$ an der Stelle $x = 1$ genügen muß. Aus der Differentialgleichung

$$u'' + \varrho^2\left(u + b^2 x \int_0^1 x u \, dx\right) = 0$$

ergibt sich durch Multiplikation mit x und Integration von 0 bis 1

$$\int_0^1 x u \, dx = \frac{3 u(1)(1 + h)}{\varrho^2 (3 + b^2)},$$

und ebenso ergibt sich aus Gleichung (39)

$$\int_0^1 x K_1 \, dx = \left[K_1(1, \xi) - \frac{\partial K_1}{\partial x}\Bigg|^{x=1} - \xi\right] \cdot \frac{1}{z^2}.$$

Setzen wir noch

$$\frac{3 b^2 (1 + h)}{z^2 (3 + b^2)} = D, \tag{40a}$$

so geht Gleichung (40) über in

$$\frac{\partial K_1}{\partial x}\Bigg|^{x=1} (1 + D) + K_1(1, \xi)(h - D) = - D \xi. \tag{41}$$

Um die expliziten Ausdrücke für den Kern $K_1(x, \xi)$ herzustellen, setzen wir ihn zunächst mit den unbestimmten Koeffizienten b_1, a_2, b_2 an in der Form

$$\underset{x<\xi}{K_1(x, \xi)} = b_1 \sin z x$$

$$\underset{x>\xi}{K_1(x, \xi)} = a_2 \cos z x + b_2 \sin z x.$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten ergeben sich aus der Forderung der Stetigkeit von $K_1(x, \xi)$ an der Stelle $x = \xi$, der Unstetigkeit der Ableitung nach x an der Stelle $x = \xi$ und der zweiten Randbedingung. Sie lauten

$$b_1 \sin z\xi - a_2 \cos z\xi - b_2 \sin z\xi = 0$$

$$b_1 \cos z\xi + a_2 \sin z\xi - b_2 \cos z\xi = \frac{1}{z}$$

$$(- a_2 z \sin z + b_2 z \cos z)(1 + D) + (a_2 \cos z + b_2 \sin z)(h - D) = - D \xi.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich

$$a_2 = \frac{\sin z\xi}{z}, \quad b_1 - b_2 = \frac{\cos z\xi}{z},$$

aus der dritten folgt

$$a_2 [h \cos z - z \sin z - D (z \sin z + \cos z)]$$
$$+ b_2 [z \cos z + h \sin z + D (z \cos z - \sin z)] = - D \xi$$

oder, da $z \cos z + h \sin z + D (z \cos z - \sin z) = z \omega (z)$ ist,

$$\frac{\sin z \xi}{z} [h \cos z - z \sin z - D (z \sin z + \cos z)] + z b_2 \cdot \omega (z) = - D \xi,$$

woraus sich

$$b_2 = \frac{\sin z \xi [D (z \sin z + \cos z) - h \cos z + z \sin z] - z D \cdot \xi}{z^2 \cdot \omega (z)}$$

$$b_1 = \frac{\cos z \xi \cdot z \cdot \omega (z) + \sin z \xi [D (z \sin z + \cos z)] + (z \sin z - h \cos z) \sin z \xi - z D \xi}{z^2 \cdot \omega (z)}$$

und

$$z^2 \cdot \omega (z) \underset{x<\xi}{K_1 (x, \xi)}$$
$$= \{ \cos z \xi \cdot z \cdot \omega (z) + \sin z \xi [D (z \sin z + \cos z) + z \sin z - h \cos z] - z D \xi \} \cdot \sin z x,$$

$$z^2 \cdot \omega (z) \underset{x>\xi}{K_1 (x, \xi)} = \sin z \xi \cdot z \omega (z) \cos z x$$
$$+ \{ \sin z \xi [D (z \sin z + \cos z) + \sin z - h \cos z] - z D \xi \} \sin z x$$

ergibt. $K_1 (x, \xi)$ zerfällt in einen symmetrischen und einen unsymmetrischen Summanden.

Setzt man

$$\underset{x<\xi}{G_1 (x, \xi)} = \frac{\{ z \cdot \cos z (1 - \xi) + h \sin z (1 - \xi) + D [z \cos z (1 - \xi) - \sin z (1 - \xi)] \} \sin z x}{z^2 \omega (z)},$$

$$\underset{x>\xi}{G_1 (x, \xi)} = \frac{\{ z \cos (1 - x) + h \sin z (1 - x) + D [z \cos z (1 - x) - \sin z (1 - x)] \} \sin z \xi}{z^2 \cdot \omega (z)},$$

so ist

$$\underset{x<\xi}{K_1 (x, \xi)} = \underset{x<\xi}{G_1 (x, \xi)} - \frac{D \cdot \xi \cdot \sin z x}{z \cdot \omega (z)},$$

$$\underset{x>\xi}{K_1 (x, \xi)} = \underset{x>\xi}{G_1 (x, \xi)} - \frac{D \cdot \xi \cdot \sin z x}{z \cdot \omega (z)}.$$

Die in x und ξ symmetrische Funktion $G_1 (x, \xi)$ genügt den Randbedingungen

$$G_1 (0, \xi) = 0, \; (1 + D) \frac{\partial G_1}{\partial x}^{x=1} + (h - D) \, G_1 (1, \xi) = 0.$$

Wir bezeichnen nun mit K_n einen Kreis, der die ersten $2n$ Wurzeln $\pm \varrho_\nu$ der Gleichung $\omega (\varrho) = 0$ umschließt; der Radius von K_n kann, sobald n eine gewisse Grenze überschritten hat, gleich $(n+1)\pi$ gewählt werden; in diesem Falle schneidet K_n die reelle Achse zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1}; dann bilden wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz.$$

Es ist

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}=\frac{\sin\varrho_\nu\xi[D(\varrho_\nu)(\varrho_\nu\sin\varrho_\nu+\cos\varrho_\nu)+\varrho_\nu\sin\varrho_\nu-h\cos\varrho_\nu]-\varrho_\nu D(\varrho_\nu)\xi\cdot\sin\varrho_\nu x}{\varrho_\nu{}^2\omega'(\varrho_\nu)(\varrho_\nu-\mu)}$$

oder, da

$$D(\varrho_\nu)(\sin\varrho_\nu-\varrho_\nu\cos\varrho_\nu)=(1+h)\,\alpha(\varrho_\nu)=\varrho_\nu\cos\varrho_\nu+h\sin\varrho_\nu),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}=-\frac{\sin\varrho_\nu\xi\cdot\varrho_\nu(1+h)-\varrho_\nu(1+h)\xi\cdot\alpha(\varrho_\nu)}{\varrho_\nu{}^2\omega'(\varrho_\nu)(\varrho_\nu-\mu)(\sin\varrho_\nu-\varrho_\nu\cos\varrho_\nu)}\cdot\sin\varrho_\nu x$$

$$=\frac{(1+h)[\sin\varrho_\nu\xi-\alpha(\varrho_\nu)\xi]\cdot\sin\varrho_\nu x}{\varrho_\nu{}^2\omega'(\varrho_\nu)(\varrho_\nu-\mu)(\sin\varrho_\nu-\varrho_\nu\cos\varrho_\nu)}.$$

Nun ist

$$\sin\varrho_\nu-\varrho_\nu\cos\varrho_\nu=\varrho_\nu\cdot u(1)(1+h),$$

folglich

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}=\frac{\sin\varrho_\nu\xi-\alpha(\varrho_\nu)\xi}{\varrho^{\nu 2}\omega'(\varrho_\nu)u(1)(\varrho_\nu-\mu)}\cdot\sin\varrho_\nu x.$$

Ebenso ergibt sich

$$\operatorname*{Res}_{z=-\varrho_\nu}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}=\frac{\sin\varrho_\nu\xi-\alpha(\varrho_\nu)\xi}{\varrho_\nu{}^2\omega'(\varrho_\nu)u(1)(\varrho_\nu+\mu)}\cdot\sin\varrho_\nu x$$

und

$$\operatorname*{Res}_{z=+\varrho_\nu}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}+\operatorname*{Res}_{z=-\varrho_\nu}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}=u_\nu(\xi)\cdot\frac{\sin\varrho_\nu x}{\varrho_\nu}\cdot\frac{1}{\dfrac{u(1)\,\omega'(\varrho_\nu)}{2\varrho_\nu}(\varrho_\nu{}^2-\mu^2)}$$

oder, nach (35 a) und (35 c)

$$=u_\nu(\xi)\cdot v_\nu(x)\cdot\frac{-1}{(\varrho_\nu{}^2-\mu^2)\int\limits_0^1 u_\nu\,v_\nu\,dx}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz = K_1(x,\xi)\Big|^{z=\mu} - \sum\frac{u_\nu(\xi)\cdot v_\nu(x)}{(\varrho_\nu{}^2-\mu^2)\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx}. \quad (42)$$

Das Integral $\int_{K_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz$ zerlegen wir nach (41 a) in die beiden Summanden

$$\int_0^1\frac{G_1(x,\xi)}{z-\mu}\,dz \quad \text{und} \quad \int_0^1\frac{D\cdot\xi\cdot\sin z x}{z\,\omega(z)\,(z-\mu)}\,dz.$$

Setzen wir

$$\frac{3b^2}{3+b^2}(1+h) = C,$$

so ist

$$\begin{aligned} z^2\omega(z) &= z^2\cdot\cos z + h z\sin z - C(\sin z - z\cos z)\\ &= e^{zi}\left[\frac{z}{2}(z+C)+\frac{i}{2}(C-hz)\right]+e^{-zi}\left[\frac{z}{2}(z+C)-\frac{i}{2}(C-hz)\right]. \end{aligned}$$

Wir setzen ferner

$$g_1(z) = \frac{1}{2}(z+C)+\frac{i}{2}\left(\frac{C}{z}-h\right),$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2}(z+C)-\frac{i}{2}\left(\frac{C}{z}-h\right);$$

dann ist

$$\frac{z\cos z(1-\xi)+h\sin z(1-\xi)}{z^2\cdot\omega(z)} = \frac{e^{zi(1-\xi)}(z-hi)-e^{-zi(1-\xi)}(z+hi)}{z\left[e^{zi}\cdot g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)\right]}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{z\cos z(1-\xi)+h\sin z(1-\xi)}{z^2\cdot\omega(z)}\cdot\sin z x\\ &= \frac{e^{zi(1+x-\xi)}(z-hi)}{2zi\left[e^{zi}g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)\right]}-\frac{e^{-zi(1-x-\xi)}(z+hi)}{2zi\left[e^{zi}g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)\right]}\\ &+\frac{e^{zi(1-x-\xi)}(z-hi)}{2zi\left[e^{zi}g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)\right]}-\frac{e^{-zi(1+x-\xi)}(z-hi)}{2zi\left[e^{zi}g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)\right]}, \end{aligned}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit $\frac{e^{zi}}{2zi}$ multipliziert und

$2zi = \zeta$ setzt,

$$\frac{z \cdot \cos z\,(1-\xi) - h \sin z\,(1-\xi)}{z\,[e^{zi} g_1(z) - e^{-zi} g_2(z)]} \sin z x$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{e^{\zeta\left(1-\frac{\xi-x}{2}\right)}(\zeta+2h)}{\zeta\left[e^{\zeta}\cdot g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right) - g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)\right]} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{\zeta\cdot\frac{x+\xi}{2}}(\zeta-2h)}{\zeta\left[e^{\zeta} g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right) - g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)\right]}$$

$$+ \frac{1}{2i} \frac{e^{\zeta\left(1-\frac{x+\xi}{2}\right)}(\zeta+2h)}{\zeta\left[e^{\zeta} g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right) - g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)\right]} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{\zeta\cdot\frac{\xi-x}{2}}(\zeta-2h)}{\zeta\left[e^{\zeta} g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right) - g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)\right]}.$$

Da nun

$$\lim_{\zeta=\infty} \frac{\zeta+2h}{g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right)} = \lim_{\zeta=\infty} \frac{\zeta-2h}{g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right)} = 2, \quad \lim_{\zeta=\infty} \frac{g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)}{g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right)} = 1$$

ist, hat jeder der vier obenstehenden Summanden die Form

$$\frac{e^{\beta\zeta}\cdot R(\zeta)}{e^{\zeta} - S(\zeta)},$$

wo β, $R(\zeta)$, $S(\zeta)$ den in Gleichung (15) für β, R, S aufgestellten Bedingungen genügen; es ist also

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{z\cdot\cos z\,(1-\xi) + h \sin z\,(1-\xi)}{z^2\cdot\omega(z)} \sin z x \cdot \frac{dz}{z-\mu} = 0.$$

Man hat in diesem Integral nur $h = -1$ zu setzen und im Nenner den Faktor z^2 hinzuzufügen, um das Integral

$$\frac{3+b^2}{3b^2(1+h)} \int_{K_n} \frac{z \cos z\,(1-\xi) - \sin z\,(1-\xi)}{z^2\cdot\omega(z)} \sin z x \,\frac{dz}{z-\mu}$$

zu erhalten; dieselben Rechnungen wie oben führen somit zu dem Resultat, daß auch dieses Integral gegen 0 konvergiert. Erinnert man nun des in den Gleichungen (41 a) vorkommenden Ausdrucks $G_1(x, \xi)$, so folgt

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{G_1(x,\xi)}{z-\mu}\, dz = 0.$$

Ersetzt man ferner in dem Integral

$$\int_{K_n} \frac{D \cdot \xi \cdot \sin z x}{z\,\omega(z)} = C\,\xi \int_{K_n} \frac{\sin z x}{z^2 \cdot \omega(z)} \cdot \frac{dz}{z(z-\mu)}$$

$\sin z x$ durch die Exponentialgrößen, so erhält man wiederum auf Grund der Gleichung (15)

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{D \cdot \xi \cdot \sin z x}{z\,\omega(z)} \cdot \frac{dz}{z-\mu} = 0,$$

und mithin

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\mu}\, dz = 0.$$

Es folgt demnach aus Gleichung (42)

$$K_1(x,\xi)\Big|^{z=\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\, v_\nu(x)}{(\varrho_\nu{}^2 - \mu^2)\int_0^1 u_\nu \cdot v_\nu\, dx}. \tag{42a}$$

Hierin setzen wir $\mu = 0$, und gehen von folgenden Gleichungen aus:

$$K_1(x,\xi)\Big|^{z=\mu} = \cos\mu\,\xi \cdot \frac{\sin\mu x}{\mu} + \frac{C \cdot \mu \cdot \sin\mu \cdot \sin\mu\,\xi \cdot \sin\mu x}{\mu^4\,\omega(\mu)}$$

$$+ \frac{C \sin\mu x\,(\sin\mu\,\xi \cos\mu - \mu\,\xi)}{\mu^4\,\omega(\mu)}$$

$$+ \frac{\sin\mu \cdot \sin\mu x \cdot \sin\mu\,\xi}{\mu\,\omega(\mu)}$$

$$- \frac{h \cos\mu \sin\mu x \sin\mu\,\xi}{\mu^2\,\omega(\mu)},$$

$$\omega(\mu)\Big|^{\mu=0} = \frac{C}{b^2}, \quad \cos\mu\,\xi \cdot \frac{\sin\mu x}{\mu}\Bigg|^{\mu=0} = x,$$

$$\frac{C \cdot \mu \cdot \sin\mu \cdot \sin\mu\,\xi \cdot \sin\mu x}{\mu^4 \cdot \omega(\mu)}\Bigg|^{\mu=0} = \frac{C \cdot x \cdot \xi \cdot b^2}{C} = b^2 x\,\xi,$$

$$\sin\mu\,\xi \cos\mu - \mu\,\xi = \left(1 - \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^4}{4} - \cdots\right)\left(\mu\,\xi - \frac{\mu^3 \xi^3}{3!} + \cdots\right) - \mu\,\xi$$

$$= \mu^3\left(\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi}{2}\right);$$

hieraus ergibt sich

$$\left.\frac{C\cdot\sin\mu x\,(\sin\mu\xi\cos\mu-\mu\xi)}{\mu^4\cdot\omega(\mu)}\right|^{\mu=0}=-b^2x\left(\frac{\xi^3}{6}+\frac{\xi}{2}\right)$$

$$\left.\frac{\sin\mu\cdot\sin\mu\xi\cdot\sin\mu x}{\mu\,\omega(\mu)}\right|^{\mu=0}=0,$$

$$\left.\frac{h\cos\mu\sin\mu x\sin\mu\xi}{\mu^2\omega(\mu)}\right|^{\mu=0}=-\frac{h x\xi b^2}{C}=-\frac{h x\xi(3+b^2)}{3(1+h)},$$

folglich

$$\begin{aligned}\left.\underset{x<\xi}{K_1(x,\xi)}\right|^{\mu=0}&=x+b^2x\xi-b^2x\left(\frac{\xi^3}{6}+\frac{\xi}{2}\right)-\frac{h x\xi(3+b^2)}{3(1+h)}\\&=x\left(1-\frac{h\xi}{1+h}\right)+b^2x\,\frac{3\xi+h\xi-\xi^3(1+h)}{6(1+h)}\\&=\underset{x<\xi}{K(x,\xi)}.\end{aligned}$$

Dasselbe Resultat ergibt sich im Falle $x>\xi$, es ist also

$$K_1(x,\xi)\Big|^{\mu=0}=K(x,\xi).$$

Somit folgt aus Gleichung (42 a) die bilineare Entwicklung von $K(x,\xi)$

$$K(x,\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu(\xi)\cdot v_\nu(x)}{\varrho_\nu^{\,2}\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx},$$

die man auch aus der durchgeführten Argumentation leicht als gleichmäßig konvergent erkennt.

E. Darstellung willkürlicher Funktionen.

Wir erhalten zwei Arten von Reihenentwicklungen, je nachdem die willkürliche Funktion den Randbedingungen a) oder b) genügt. Erfüllt die willkürliche Funktion $F(x)$ die Randbedingungen a), ist F also darstellbar in der Form

$$F(\xi)=\int_0^1 K(x,\xi)\,f(x)\,dx,$$

so erhalten wir, wenn wir für $K(x,\xi)$ die bilineare Reihe setzen,

$$F(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu(\xi)}{\varrho_\nu^{\,2}\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx}\int_0^1 v_\nu(x)\,f(x)\,dx,$$

nun ist

$$\int_0^1 F(\alpha)\, v_\nu(\alpha)\, d\alpha = \int_0^1 v_\nu(\alpha)\, d\alpha \int_0^1 K(x, \alpha)\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\, dx \int_0^1 K(x, \alpha)\, v_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\varrho_\nu^{\,2}} \int_0^1 v_\nu(x)\, f(x)\, dx;$$

folglich:
$$F(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi) \int_0^1 F(\alpha)\, v_\nu(\alpha)\, d\alpha}{\int_0^1 u_\nu \cdot v_\nu\, dx}.$$

Erfüllt F(x) die Randbedingungen b), ist F also darstellbar in der Form

$$F(x) = \int_0^1 K(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

so erhalten wir

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v_\nu(x)}{\varrho_\nu^{\,2} \int_0^1 u_\nu\, v_\nu\, dx} \int_0^1 u_\nu(\xi)\, f(\xi)\, d\xi;$$

$$\int_0^1 F(\alpha)\, u_\nu(\alpha)\, d\alpha = \int_0^1 u_\nu(\alpha)\, d\alpha \int_0^1 K(\alpha, \xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_0^1 f(\xi)\, d\xi \int_0^1 K(\alpha, \xi)\, u_\nu(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\varrho_\nu^{\,2}} \int_0^1 u_\nu(\xi)\, f(\xi)\, d\xi;$$

folglich
$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v_\nu(x) \int_0^1 F(\alpha)\, u_\nu(\alpha)\, d\alpha}{\int_0^1 u_\nu\, v_\nu\, dx}.$$

Wir haben somit das folgende Resultat erhalten.

Jede den Randbedingungen a) oder b) genügende, mit ihrer ersten Ableitung stetige Funktion ist in eine nach den Funktionen u_ν bezw. v_ν fortschreitende Reihe entwickelbar.

F. Entwicklung unstetiger Funktionen.

Um die Entwicklung von Funktionen, die mit ihrer ersten Ableitung nur stückweise stetig sind, nach den Funktionen u_ν und v_ν herzustellen, ist die Entwicklung der Ableitungen $\frac{\partial K}{\partial x}$ und $\frac{\partial K}{\partial \xi}$ nach den Funktionen u_ν, v_ν notwendig.

Wir stellen im folgenden die Entwicklung der Ableitung $\frac{\partial K}{\partial x}$ her. Zu diesem Zwecke differenzieren wir Gleichung (42) nach x und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_n}\frac{\partial K_1(x,\xi)}{\partial x}\cdot\frac{dz}{z-\mu}=\frac{\partial K_1}{\partial x}\Bigg|^{z=\mu}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{u_\nu(\xi)\,v_\nu'(x)}{(\varrho_\nu^2-\mu^2)\int_0^1 u_\nu v_\nu\,dx} \tag{43}$$

$$\frac{\partial K_1(x,\xi)}{\partial x}=\frac{\partial G_1(x,\xi)}{\partial x}+\frac{D\cdot\xi\cdot\cos zx}{\omega(z)}$$

$$\underset{x<\xi}{\frac{\partial G_1(x,\xi)}{\partial x}}=\frac{z\cos(1-\xi)+h\sin z(1-\xi)}{z\,\omega(z)}\cos zx \tag{43 a}$$

$$+C\frac{[z\cos z(1-\xi)-\sin z(1-\xi)]\cos zx}{z^3\cos(z)}.$$

$$\int_{K_n}\frac{z\cos z(1-\xi)+h\sin z(1-\xi)}{z\,\omega(z)}\cos z\frac{dz}{z-\mu}=\int_{K_n}\frac{e^{zi(1+x-\xi)}(z-hi)}{2[e^{zi}g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)]}\cdot\frac{dz}{z-\mu}$$

$$-\int_{K_n}\frac{e^{-zi(1-x-\xi)}(z+hi)}{2[e^{zi}g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)]}\cdot\frac{dz}{z-\mu}-\int_{K_n}\frac{e^{zi(1-x-\xi)}(z-hi)}{2[e^{zi}g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)]}\cdot\frac{dz}{z-\mu}$$

$$+\int_{K_n}\frac{e^{-zi(1+x-\xi)}(z+hi)}{2[e^{zi}g_1(z)-e^{-zi}g_2(z)]}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner der Integranden durch $g_1(z)\,e^{-zi}$ und setzt $2zi=\zeta$, so erscheinen alle vier Integrale in der Form

$$\int_{K_n}\frac{e^{\alpha\xi}R(\zeta)}{e^z-S(\zeta)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-\overline{\mu}},$$

wo α, R, S den in Gleichung (13) für diese Größen aufgestellten Bedingungen genügen, so daß sich ergibt

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{K_n}\frac{\partial G_1(x,\xi)}{\partial x}\cdot\frac{dz}{z-\mu}=0.$$
$$x \neq \xi$$

Dasselbe gilt auf Grund der Gleichung (13) von dem Integral

$$\int\limits_{K_n}\frac{C\,\xi\cos z}{z^2\cdot\omega(z)}\cdot\frac{dz}{(z-\mu)}.$$

Es gilt also im Falle $x \neq \xi$

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_{K_n}\frac{\partial K_1(x,\xi)}{\partial x}\cdot\frac{dz}{z-\mu}=0.$$

Im Falle $x=\xi$ bezeichnen wir durch K_n' den Kreis, den die Größe ζ beschreibt, wenn z den Kreis K_n durchläuft, und bilden nach (43 a)

$$\int\limits_{K_n}\left\{\frac{\partial K_1}{\partial x}\Bigg|^{x=\xi+0}+\frac{\partial K_1}{\partial x}\Bigg|^{x=\xi-0}\right\}\frac{dz}{z-\mu}$$

$$=-\frac{1}{i}\int\limits_{K_n'}\frac{e^{\xi\cdot\zeta}(\zeta-2h)}{e^{\zeta}g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right)-g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-2\mu i}$$

$$-\frac{1}{i}\int\limits_{K_n'}\frac{e^{\zeta(1-\xi)}(\zeta+2h)}{e^{\zeta}g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right)-g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-2\mu i}$$

$$-\frac{C}{4i}\int\limits_{K_n'}\frac{e^{\xi\zeta}(\zeta+2)}{e^{\zeta}g_1\left(\frac{\xi}{2i}\right)-g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-2\mu i}$$

$$+\frac{C}{4i}\int\limits_{K_n'}\frac{e^{\zeta(1-\xi)}(\zeta-2)}{e^{\zeta}g_1\left(\frac{\zeta}{2i}\right)-g_2\left(\frac{\zeta}{2i}\right)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-2\mu i}$$

$$-2\int\limits_{K_n}\frac{C\,\xi\sin z\,\xi}{z^2\,\omega(z)}\cdot\frac{dz}{z-\mu}.$$

Schalten wir die Werte $\xi = 0$, $\xi = 1$ aus, so gilt wegen Gleichung (13)

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_n} \left\{ \frac{\partial K_1}{\partial x} \Big|^{x=\xi-0} + \frac{\partial K_1}{\partial x} \Big|^{x=\xi+0} \right\} \frac{dz}{z-\mu} = 0.$$

Somit folgt aus Gleichung (43)

$$\underset{x \neq \xi}{\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\, v_\nu'(x)}{\varrho_\nu^2 \int\limits_0^1 u_\nu v_\nu \, dx}$$

und

$$\frac{\frac{\partial K}{\partial x}\Big|^{x=\xi-0} + \frac{\partial K}{\partial x}\Big|^{x=\xi+0}}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(\xi)\, v_\nu'(\xi)}{\varrho_\nu^2 \int\limits_0^1 u_\nu v_\nu \, dx}.$$

Der Nachweis der Möglichkeit, unstetige Funktionen nach den Funktionen u_ν zu entwickeln, gestaltet sich im Anschluß an Kneser, Integralgleichungen §§ 5, 25 ebenso wie bei Entwicklungen nach Funktionen orthogonaler Systeme.

V. Kapitel.

Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem Liouvilleschen Problem.

A. Das Biorthogonalsystem.

Im 14. Bande des Journal de l'école polytechnique behandelt Liouville die Aufgabe, das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$$

zu finden, das folgenden Bedingungen genügt:

$$1.\ \ U\big|^{x=0} = 0, \qquad 2.\ \ \frac{\partial U}{\partial x}\Big|^{x=0} = 0, \qquad 3.\ \ U\big|^{x=1} = 0,$$

$$4.\ \ U\big|^{t=0} = f(x),$$

wo f (x) eine willkürlich vorgeschriebene Funktion bedeutet. Setzt man, um die Differentialgleichung allgemein zu integrieren,

$$U = u(x) \cdot e^{-\varrho^3 t},$$

wo ϱ ein von x und t unabhängiger Parameter ist, so führt die Aufgabe wie bei Wärmeleitungsproblemen auf die Forderung, die willkürliche Funktion f (x) nach Funktion u_ν zu entwickeln, welche hier einer Differentialgleichung dritter Ordnung genügen. Um diese Aufgabe zu lösen, stellt Liouville hier wiederum dem System der Funktionen u_ν ein anderes gegenüber, das mit jenem ein Biorthogonalsystem bildet. Die Differentialgleichung der Funktionen u_ν ist

$$\frac{d^3 u}{d x^3} + \varrho^3 u = 0, \tag{44}$$

die Randbedingungen sind $u \Big|^{x=0} = 0, \quad \frac{du}{dx}\Big|^{x=0} = 0, \quad u(1) = 0.$

Eine die beiden ersten Randbedingungen befriedigende Lösung ist

$$u = A\left(e^{-\varrho x} + \mu e^{-\mu\varrho x} + \mu^2 e^{-\mu^2 \varrho x}\right),$$

worin $\mu = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $\mu^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$ die dritten Einheitswurzeln bezeichnen.

Die dritte Randbedingung fordert, daß die Gleichung

$$\pi(\varrho) = e^{-\varrho} + \mu e^{-\mu\varrho} + \mu^2 e^{-\mu^2\varrho} = 0$$

erfüllt werde. Die reellen Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen wir mit ϱ_ν.

Die Funktionen v_ν des zweiten Systems genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d^3 v}{d x^3} - \varrho^3 v = 0 \tag{45}$$

und den Randbedingungen

$$v\,|^{x=0} = 0, \quad v\,|^{x=1} = 0, \quad v'(1) = 0.$$

Der zweiten und dritten Randbedingung genügt die Lösung

$$x = B\left[e^{-\varrho(1-x)} + \mu e^{-\mu\varrho(1-x)} + \mu^2 e^{-\mu^2\varrho(1-x)}\right].$$

Wählen wir $A = B = \frac{1}{3\varrho^2}$, so können wir schreiben

$$v(x) = u(1-x),$$

und es ist ersichtlich, daß die erste Randbedingung erfüllt wird, wenn ϱ eine Wurzel der Gleichung $u(1) = \pi(\varrho) = 0$ ist. Die Funktionen u und v sind nun zueinander orthogonal.

Ist u_m die zu dem Werte $\varrho = \varrho_m$ gehörende Lösung der Gleichung (44), v_n die zu dem Werte $\varrho = \varrho_n$ gehörende Lösung von (45), so daß also

$$\mu_m''' + \varrho_m^3 u = 0$$

und

$$v_n''' - \varrho_n^3 v = 0$$

ist, so ergibt sich durch Multiplikation der ersten Gleichung mit v_n, der zweiten mit u_m, Addition und Integration von 0 bis 1

$$\int_0^1 [v_n u_m''' + u_m \cdot v'''] \, dx + (\varrho_m^3 - \varrho_n^3) \int_0^1 u_m \cdot v_n \, dx = 0;$$

es ist

$$\int_0^1 [v_n u''' + u_m v'''] \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dx} [v_n u_m'' - u_m' \cdot v_n' + u_m v_n''] \, dx$$

$$= \left[v_n u_m'' - u_m' v_n' + u_m v_n''\right]_0^1$$

$$= u_m(1) v''(1), \text{ oder da } v''\big|^{x=1} = 1,$$

$$(\varrho_m^3 - \varrho_n^3) \int_0^1 u_m \cdot v_n \, dx = u_m(1).$$

Ist nun $\varrho_m \neq \varrho_n$, so erhalten wir

$$\int_0^1 u_m v_n \, dx = 0.$$

Im Falle $\varrho_m = \varrho_n$ ist

$$\int_0^1 u_m \cdot v_n \, dx = -\frac{\dfrac{d u_m(1)}{d\varrho}}{3 \varrho_m^2} = -\frac{\pi'(\varrho_m)}{3 \varrho_m^2}.$$

B. Überführung der Differentialgleichungen (44) und (45) in Integralgleichungen.

Der Kern K (x, ξ) ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 K(x, \xi)}{\partial x^3} = 0. \tag{46}$$

Als Funktion von x erfüllt er dieselben Randbedingungen wie die Funktionen u_ν; außerdem werde die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$ an der Stelle $x = \xi$ in der Weise unstetig, daß

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\Bigg|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = 1 \text{ ist.}$$

Man erhält für K (x, ξ) die expliziten Ausdrücke

$$\underset{x<\xi}{K(x,\xi)} = \frac{x^2}{2}(1-\xi),$$

$$\underset{x>\xi}{K(x,\xi)} = \frac{x^2}{2}(1-\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2}.$$

Als Funktion von ξ genügt K (x, ξ) der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 K}{\partial \xi^3} = 0$$

und den Randbedingungen $K(x, 0) = 0$,

$$K(x,1) = 0, \quad \frac{\partial K(x,\xi)}{\partial \xi}\Bigg|^{\xi=1} = 0,$$

d. h. denselben Randbedingungen, denen die Funktionen v genügen. Ferner ist

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2}\Bigg|_{\xi=x+0}^{\xi=x-0} = -1.$$

Aus

$$\frac{d^3 u}{d\xi^3} + \varrho^3 u(\xi) = 0$$

und

$$\frac{\partial^3 K}{\partial \xi^3} = 0$$

ergibt sich durch Multiplikation der ersten Gleichung mit K, der zweiten mit u Addition und Integration

$$\int_0^1 \left[u\frac{\partial^3 K}{\partial \xi^3} + K\frac{d^3 u}{d\xi^3}\right] d\xi + \varrho^3 \int_0^1 K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = 0$$

oder

$$\left[u\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial K}{\partial \xi} + \frac{d^2 u}{dx^2}K\right]_{\xi=0}^{\xi=1} - u(x) = -\varrho^3 \int_0^1 K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

das heißt

$$u(x) = \varrho^3 \int_0^1 K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi .$$

Ebenso erhält man aus

$$\frac{d^3 v}{d x^3} - \varrho^3 v = 0$$

und

$$\frac{\partial^3 K}{\partial x^3} = 0$$

$$\int_0^1 \left[u \frac{\partial^3 K}{\partial x^3} + K \frac{d^3 v}{d x^3} \right] d x - \varrho^3 \int_0^1 K(x, \xi)\, v(x)\, d x = 0,$$

$$v \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{d v}{d x} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{d^2 v}{d x^2} K \Bigg|_{x=0}^{x=1} + u(\xi) = \varrho^3 \int_0^1 K(x, \xi)\, v(x)\, d x,$$

oder

$$u(\xi) = \varrho^3 \int_0^1 K(x, \xi)\, v(x)\, d x .$$

Damit sind die Differentialgleichungen (44) und (45) in Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern übergeführt.

C. Quellenmäßige Darstellung von Funktionen.

Wegen der Unsymmetrie des Kerns ergeben sich wiederum zwei verschiedene Arten der quellenmäßigen Darstellung.

a)
$$F(x) = \int_0^1 K(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi ,$$

$F(x)$ genügt den Randbedingungen

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F(1) = 0 .$$

Aus

$$F''(x) = \int_0^{x-0} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} f(\xi)\, d\xi + \int_{x+0}^1 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} f(\xi)\, d\xi$$

ergibt sich durch abermalige Differentiation

$$F'''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^3 K(x, \xi)}{\partial x^3} f(\xi)\, d\xi + f(x) \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right]_{\xi = x+0}^{\xi = x-0}$$

oder

$$F'''(x) = -f(x).$$

b)
$$F(\xi) = \int_0^1 K(x, \xi) f(x) dx,$$

$F(\xi)$ genügt den Randbedingungen

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0, \quad F'(1) = 0.$$

Aus

$$F''(\xi) = \int_0^{\xi-0} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} f(x) dx + \int_{\xi+0}^1 \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} f(x) dx$$

folgt durch Differentiation

$$F'''(\xi) = \int_0^1 \frac{\partial^3 K}{\partial \xi^3} f(x) dx + f(\xi) \left[\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2}\right]_{x=\xi+0}^{x=\xi-0}$$

oder

$$F'''(\xi) = f(\xi).$$

Ist $f(x)$ eine stückweise stetige Funktion, so ist demnach jede durch den Kern $K(x, \xi)$ quellenmäßig dargestellte Funktion nebst ihrer ersten und zweiten Ableitung stetig, während die dritte Ableitung stückweise stetig ist.

Ist umgekehrt F eine den Randbedingungen a) oder b) genügende mit ihrer ersten und zweiten Ableitung stetige Funktion, während ihre dritte Ableitung nur stückweise stetig zu sein braucht, so ist sie quellenmäßig darstellbar.

F erfülle die Randbedingungen a), es sei also

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F(1) = 0,$$

dann definieren wir die stückweise stetige Funktion $f(\xi)$ durch die Gleichung

$$F'''(\xi) = -f(\xi).$$

Aus dieser und der Gleichung

$$\frac{\partial^3 K}{\partial \xi^3} = 0$$

ergibt sich

$$\int_0^1 \left[K \frac{d^3 F}{d \xi^3} + F \frac{\partial^3 K}{\partial \xi^3}\right] d\xi = -\int_0^1 K(x, \xi) f(\xi) d\xi;$$

$$\int_0^1 \left[K \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + F \frac{\partial^3 K}{\partial \xi^3}\right] d\xi$$

$$= \left[K \frac{d^2 F}{d\xi^2} - \frac{dF}{d\xi} \cdot \frac{\partial K}{\partial \xi} + F \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2}\right]_0^1 + F \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2}\Bigg|_{\xi = x + 0}^{\xi = x - 0} = -F(x),$$

folglich

$$F(x) = \int_0^1 K(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Genügt F den Randbedingungen b), so definieren wir f (x) durch die Gleichung

$$F'''(x) = f(x).$$

Aus dieser und der Gleichung

$$\frac{\partial^3 K}{\partial x^3} = 0$$

ergibt sich wie oben

$$\left[K \frac{d^2 F}{d x^2} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + F \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right]_{x=0}^{x=1} + F \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\Bigg|_{x = \xi + 0}^{x = \xi - 0}$$

$$= \int_0^1 K(x, \xi) f(x) dx$$

oder

$$F(\xi) = \int_0^1 K(x, \xi) f(x) dx.$$

D. Die Eigenwerte des Kerns.[1])

Aus der Reihenentwicklung der Funktion $\pi(\varrho)$ nach Potenzen von ϱ

$$\pi(\varrho) = \frac{1}{2} - \frac{\varrho}{5!} + \frac{\varrho^2}{8!} - \frac{\varrho^3}{11!} + \cdots$$

erkennt man unmittelbar, daß $\pi(\varrho)$ keine negativen Nullstellen besitzen kann. Ebenso erkennt man, wenn man $\varrho = \varrho i$ setzt durch Trennung des reellen und imaginären Teils, daß auch keine rein imaginären Nullstellen vorhanden sind.

---

[1]) Die Untersuchung über die Eigenwerte ist einer von Herrn cand. math. Teichmann angefertigten Seminararbeit entnommen.

Setzt man für μ und μ^2 die Werte

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ bezw. } \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

ein, so erscheint $\pi(\varrho)$ in der Form

$$\pi(\varrho) = \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}\varrho} + \sin\left(\frac{\varrho\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Die reellen Wurzeln der Gleichung $\pi(\varrho) = 0$ erhält man als Schnittpunkte der beiden Kurven

$$y = \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}\varrho}, \quad y = -\sin\left(\frac{\varrho\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Sie existieren in unendlich großer Zahl und liegen in der Nähe der Stellen

$$\varrho_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(2n + \frac{1}{3}\right).$$

Ist $\varrho = \varrho_\nu$ eine Wurzel von $\pi(\varrho) = 0$, so sind $\mu\varrho_\nu$ und $\mu^2\varrho_\nu$ ebenfalls Wurzeln.

Andere komplexe Wurzeln als diese können nicht existieren.

Angenommen, $\varrho = \alpha + i\beta$ wäre eine andere außer diesen noch existierende komplexe Nullstelle, es sei also

$$\pi(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}(\alpha + i\beta)} + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{i\beta\sqrt{3}}{2}\right) = 0,$$

dann erhält man durch Trennung des reellen und imaginären Teils folgende zwei Gleichungen, denen α und β zu genügen haben:

$$\text{a)} \quad 2 e^{\frac{3}{2}\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) \mathfrak{Cos}\, \frac{\beta\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{3}{2}\beta,$$

$$\text{b)} \quad 2 e^{\frac{3}{2}\alpha} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) \mathfrak{Sin}\frac{\beta\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{3}{2}\beta.$$

Aus a) und b) folgt durch Multiplikation

$$\text{c)} \qquad 2 e^{3\alpha} \sin\left(\alpha\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sin 3\beta}{\mathfrak{Sin}\,\beta\sqrt{3}},$$

und wenn man beide Gleichungen ins Quadrat erhebt und addiert,

$$\text{d)} \quad e^{3\alpha} = \frac{\cos^2\frac{3}{2}\beta \cdot \mathfrak{Sin}^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3} + \sin^2\frac{3}{2}\beta\, \mathfrak{Cos}^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3}}{4\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{Cos}^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3}}$$

oder, da

$$\cos^2 \frac{3}{2}\beta \,\mathrm{Sin}^2 \frac{\beta}{2}\sqrt{3} + \sin^2 \frac{3}{2}\beta \,\mathrm{Cos}^2 \frac{\beta}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} - \cos 3\beta\right),$$

$$\text{e)} \qquad e^{3\alpha} = \frac{\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} - \cos 3\beta}{2\,\mathrm{Sin}^2\beta\sqrt{3}}.$$

Setzt man diesen Wert von $e^{3\alpha}$ in c) ein, so erhält man

$$\sin\left(\alpha\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sin 3\beta \cdot \mathrm{Sin}\,\beta\sqrt{3}}{\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} - \cos 3\beta}.$$

Gleichung e) lehrt zunächst, daß

$$\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} - \cos 3\beta > 0 \text{ ist.}$$

Wir zeigen nun ferner, daß Gleichung e) nur bestehen kann, wenn $\alpha < 0$ ist.

Es ist

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Sin}^2\beta\sqrt{3} &- \mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} + \cos 3\beta \\ &= 2\,\mathrm{Cos}^2\beta\sqrt{3} - 2 - \mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} + \cos 3\beta \\ &= 2\left[\mathrm{Cos}^2\beta\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cos 3\beta - \frac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} + \frac{1}{2}\cos 3\beta\right]. \end{aligned}$$

Wir behaupten:

$$\left(\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right)^2 > \frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos 3\beta.$$

Beim Beweise dieser Ungleichung können wir uns auf das Gebiet $0 \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{3}$ beschränken, da $\frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos 3\beta$ schon in diesem Intervall alle möglichen Werte wachsend annimmt und

$$\left(\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right)^2$$

ständig wächst.

Da beide Funktionen, sowohl

$$\left(\mathrm{Cos}\,\beta\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right)^2 \text{ und } \frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos 3\beta, \text{ vom Werte } \frac{9}{10}$$

(für $\beta = 0$) an wachsen, so ist

$$\left(\mathfrak{Cof}\,\beta\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)^2>\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos\,3\beta,$$

wenn

$$\frac{d}{d\beta}\left(\mathfrak{Cof}\,\beta\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)^2>\frac{d}{d\beta}\left(\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos 3\beta,\right),$$

das heißt, wenn beständig

$$2\sqrt{3}\left(\mathfrak{Cof}\,\beta\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)\mathfrak{Sin}\,\beta\sqrt{3}>\frac{3}{2}\sin 3\beta$$

oder, da

$$\mathfrak{Cof}\,\beta\sqrt{3}-\frac{1}{4}>\frac{3}{4}$$

$$\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\,\beta\sqrt{3}>\sin 3\beta$$

ist.

Nun wachsen die Funktionen $\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\,\beta\sqrt{3}$ und $\sin 3\beta$ von 0 (für $\beta=0$) an, und zwar $\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\,\beta\sqrt{3}$ beständig, während $\sin 3\beta$ bei $\beta=\frac{\pi}{6}$ ihr Maximum erreicht. Die Ungleichung $\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\,\beta\sqrt{3}>\sin 3\beta$ besteht also, wenn

$$\frac{d}{d\beta}\sqrt{3}\,\mathfrak{Sin}\,\beta\sqrt{3}>\frac{d}{d\beta}\sin 3\beta$$

das heißt, wenn

$$\mathfrak{Cof}\,\beta\sqrt{4}>\cos 3\beta$$

ist.

Diese Ungleichung besteht aber, wie Gleichung e) lehrt, zu Recht; damit ist gezeigt, daß $2\,\mathfrak{Sin}^2\beta\sqrt{3}-\mathfrak{Cof}\,\beta\sqrt{3}+\cos 3\beta>0$ ist, daß also $e^{3a}<1$ sein muß. a muß demnach negativ sein. Ist nun aber $\varrho=a+i\beta$ eine Wurzel, so und auch $\mu\varrho$ und $\mu^2\varrho$ Wurzeln, und es ist nicht möglich, daß ϱ, $\mu\varrho$, $\mu^2\varrho$ sämtlich negative reelle Teile haben, wenn nicht ϱ auf einem der Halbstrahlen liegt, die mit der reellen Achse die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ bilden.

Es gibt demnach keine komplexe Wurzeln außer denen, die aus den reellen durch Multiplikation mit μ und μ^2 hervorgehen.

E. Die Entwicklung des allgemeinen Kerns $K_1(x,\xi)$ nach den Eigenfunktionen.

Der Kern $K_1(x,\xi)$. genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 K_1(x,\xi)}{\partial x^3} + z^3 K_1(x,\xi) = 0.$$

Die Randbedingungen seien dieselben wie die für $K(x,\xi)$. Setzt man an

$$\underset{x<\xi}{K_1}(x,\xi) = a_1 e^{-zx} + b_1 e^{-\mu zx} + c_1 e^{-\mu^2 zx},$$

$$\underset{x>\xi}{K_1}(x,\xi) = a_2 e^{-zx} + b_2 e^{-\mu zx} + c_2 e^{-\mu^2 zx},$$

so erhält man zur Bestimmung der Koeffizienten a_ν, b_ν die Gleichungen

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0$$

$$a_1 + \mu b_1 + \mu^2 e_2 = 0$$

$$a_2 e^{-z} + b_2 e^{-\mu z} + c_2 e^{-\mu^2 z} = 0$$

$$e^{-z\xi}(a_1 - a_2) + e^{-\mu z\xi}(b_1 - b_2) + e^{-\mu^2 z\xi}(c_1 - c_2) = 0$$

$$e^{-z\xi}(a_1 - a_2) + \mu e^{-\mu z\xi}(b_1 - b_2) + \mu^2 e^{-\mu^2 z\xi}(c_1 - c_2) = 0$$

$$e^{-z\xi}(a_1 - a_2) + \mu^2 e^{-\mu z\xi}(b_1 - b_2) + \mu e^{-\mu^2 z\xi}(c_1 - c_2) = \frac{1}{z^2}.$$

Daraus ergibt sich, wenn wir die Lösung der Gleichung (44) einführen,

$$\underset{x<\xi}{K_1}(x,\xi) = \frac{u(1-\xi)\,u(x)}{u(1)},$$

$$\underset{x>\xi}{K_1}(x,\xi) = \frac{u(1-\xi)\,u(x)}{u(1)} - u(x-\xi).$$

Die Pole von $K_1(x,\xi)$ als Funktion von z sind die Stellen $z = \varrho_\nu,\ \mu\varrho_\nu,\ \mu^2\varrho_\nu$.

Es ist

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\lambda} = \frac{u_\nu(x)\,v_\nu(\xi)}{\pi'(\varrho_\nu)} \cdot \frac{1}{\varrho_\nu - \lambda},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=+\varrho_\nu\cdot\mu} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\lambda} = \frac{u_\nu(x)\,v_\nu(\xi)}{\pi'(\varrho_\nu)} \cdot \frac{\mu}{\varrho_\nu\mu - \lambda},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu\cdot\mu^2} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\lambda} = \frac{u_\nu(x)\,v_\nu(\xi)}{\pi'(\varrho_\nu)} \cdot \frac{\mu^2}{\varrho_\nu\mu^2 - \lambda};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu\mu} + \operatorname*{Res}_{z=\varrho_\nu\mu^2} = \frac{u_\nu(x)\, v_\nu(\xi)}{\pi'(\varrho_\nu)} \cdot \frac{3\varrho_\nu^2}{\varrho_1^3 - \lambda^3}$$

$$= - \frac{u_\nu(x) \cdot v_\nu(\xi)}{(\varrho_\nu^3 - \lambda^3) \cdot \int\limits_0^1 u_\nu v_\nu \, dx}.$$

Verstehen wir unter Q_n eine unter näher zu bezeichnende Kontur, welche die ersten 3n Nullstellen von $\pi(\varrho)$ umschließt, so gilt nach dem Cauchyschen Residuensatz die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Q_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\lambda}\, dz = K_1(x,\xi)\Big|^{z=\lambda} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{u_\nu(x)\, v_\nu(\xi)}{(\varrho_\nu^3 - \lambda^3)\int\limits_0^1 u_\nu v_\nu \, dx}. \quad (47)$$

F. Abschätzung des Integrals $\int\limits_{Q_n} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\lambda}\, dz$.

Bei der Abschätzung dieses Integrals beschränken wir uns wiederum auf den Fall $x < \xi$.

Wir betrachten zunächst allgemein die Funktion

$$F(z) = \frac{e^{(a+ib)z}}{e^z + \mu e^{\mu z} + \mu^2 e^{\mu^2 z}} \qquad (a \text{ und } b \text{ reell, } z = \zeta + i\eta)$$

auf den Seiten eines Neunecks, welche durch die Gleichungen

$$\text{I. } \eta = -\frac{\zeta}{\sqrt{3}} + \frac{c}{3}\sqrt{3}, \qquad \text{V. } \eta = -\frac{c}{2},$$

$$\text{II. } \eta = -\zeta\sqrt{3} + c, \qquad \text{VI. } \eta = -\zeta\sqrt{3} - c,$$

$$\text{III. } \eta = \zeta\sqrt{3} - c, \qquad \text{VII. } \zeta = -\frac{c}{2},$$

$$\text{IV. } \eta = \frac{\zeta}{\sqrt{3}} - \frac{c}{3}\sqrt{3}, \qquad \text{VIII. } \eta = \zeta\sqrt{3} + c,$$

$$\text{IX. } \eta = \frac{c}{2}$$

repräsentiert werden, wobei c eine Konstante bedeutet, über die noch verfügt werden soll.

Die Pole von F(z) sind die Stellen $-\varrho_\nu$, $-\mu\varrho_\nu$, $-\mu^2\varrho_\nu$, liegen also auf der negativen reellen Achse und den beiden Halbstrahlen $\eta = \zeta\sqrt{3}$, $\eta = -\zeta\sqrt{3}$. Auf den zwischen diesen beiden Halbstrahlen liegendem Drittel der Kontur wollen wir die Funktion F(z) abschätzen.

Wir erweitern F(z) mit e^{-z} und erhalten

$$F(z) = \frac{e^{(\alpha - 1 + ib)z}}{1 + \mu e^{(\mu-1)z} + \mu^2 e^{(\mu^2-1)z}};$$

$$(\mu - 1)(\zeta + i\eta) = -\frac{3}{2}\zeta - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta - i\left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\zeta}{2}\sqrt{3}\right),$$

$$(\mu^2 - 1)(\zeta + i\eta) = -\frac{3}{2}\zeta + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta - i\left(\frac{3}{2}\eta + \frac{\zeta}{2}\sqrt{3}\right),$$

$$\left|e^{-[(1-\alpha)+ib]z}\right| = e^{-[(1-\alpha)+b\eta]}.$$

Auf der Geraden I ist

$$\left|e^{-[1-\alpha+ib]z}\right| = e^{-\left[\left(1-\alpha-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\zeta + \frac{bc}{\sqrt{3}}\right]}.$$

Im Nenner fassen wir die Glieder

$$1 + \mu^2 e^{-\frac{3}{2}\zeta + \frac{\eta}{2}\sqrt{3}} \cdot e^{-i\left(\frac{3\eta}{2} + \frac{\zeta}{2}\sqrt{3}\right)}$$

zusammen.

Wählen wir die Konstante $c = \frac{4n\pi}{\sqrt{3}}$, so schneidet die Gerade I den Halbstrahl $\eta = \zeta\sqrt{3}$ in der Entfernung $\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}$ vom Nullpunkt.

In dieser Entfernung liegt keine Nullstelle von $\pi(-\varrho)$, da ϱ_ν annähernd $\frac{2n\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ist.

Bei dieser Wahl der Konstanten c ist

$$\frac{3\eta}{2} + \frac{\zeta}{2}\sqrt{3} = 2n\pi \text{ also } e^{-i\left(\frac{3\eta}{2} + \frac{\zeta}{2}\sqrt{3}\right)} = 1.$$

Nun kann aber die Summe von 1 und einer mit μ^2 multiplizierten reellen Größe nicht unter den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ herabsinken, folglich:

$$\left|1+\mu^2\cdot e^{-\frac{3}{2}\zeta+\frac{\eta}{2}\sqrt{3}}\right| \geqq \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Der Betrag

$$\left|\mu e^{(\mu-1)z}\right| = e^{-\left(\frac{3}{2}\zeta+\frac{\eta}{2}\sqrt{3}\right)} = e^{-\left(\zeta+\frac{c}{2}\right)} = e^{-\left(\zeta+\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}\right)}$$

konvergiert mit wachsendem n gegen Null; folglich bleibt der Nenner $1+\mu e^{(\mu-1)z}+\mu^2 e^{(\mu^2-1)z}$ über einer endlichen Grenze.

Haben nun die Konstanten a und b die Eigenschaft, daß

$$\left(1-a-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\zeta+\frac{bc}{\sqrt{3}}>0$$

ist, so bleibt F(z) auf der Geraden I unter einer endlichen festen Grenze.

Auf der Geraden II ist der Betrag des Zählers

$$e^{-[(1-a)\zeta+b\eta]} = e^{-[(1-a-b\sqrt{3})\eta+bc]}.$$

Im Nenner ist

$$\left|\mu c^{-(1-\mu)z}+\mu^2 e^{-(1-\mu^2)z}\right|$$

$$\leqq e^{-\frac{3}{2}\zeta-\frac{\eta}{2}\sqrt{3}}+e^{-\frac{3}{2}\zeta+\frac{\eta}{2}\sqrt{3}}$$

$$\leqq e^{-2n\pi}+e^{-\left(\frac{3}{2}\zeta-\frac{\eta}{2}\sqrt{3}\right)}$$

$$\frac{3}{2}\zeta-\frac{\eta}{2}\sqrt{3}=3\zeta-\frac{c}{2}\sqrt{3}.$$

Nun ist auf der Seite II des Neuneckes

$$\frac{c}{2}(\sqrt{3}-1)\leqq\zeta\leqq\frac{c}{3}\sqrt{3},$$

also

$$3\zeta-\frac{c}{2}\sqrt{3}\geqq\frac{c}{2}(2\sqrt{3}-3)\geqq 2n\pi(2-\sqrt{3}).$$

Mit wachsendem n sinkt also der Betrag

$$\left|\mu e^{(\mu-1)z}+\mu^2 e^{(\mu^2-1)z}\right|$$

unter jeden angebbaren Wert, der Nenner bleibt also über einer endlichen Grenze; ist

$$\left(1-a-b\sqrt{3}\right)\zeta+bc>0,$$

so bleibt F(z) auf der Geraden II unter einer endlichen Grenze.

Auf der Seite III ist

$$(1-a)\,\zeta+b\,\eta=\left(1-a+b\sqrt{3}\right)\zeta-bc,$$

$$\left|\mu e^{(\mu-1)z}+\mu^2 e^{(\mu^2-1)z}\right|\leqq e^{-\frac{3}{2}\zeta+\frac{\eta}{2}\sqrt{3}}+e^{\frac{3}{2}\zeta-\frac{\eta}{2}\sqrt{3}},$$

$$\leqq e^{-c}+c^{2n\pi\left(2-\sqrt{3}\right)},$$

der Nenner bleibt demnach, wenn n wächst, über einer festen Grenze, der Zähler unter einer festen Grenze, wenn für alle Werte ζ auf der Geraden III $\left(1-a+b\sqrt{3}\right)\zeta-bc>0$ ist.

Auf der Geraden IV ist

$$(1-a)\,\zeta+b\eta=\left(1-a+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\zeta-\frac{bc}{\sqrt{3}}>0,$$

$$\left|\mu^2 e^{(\mu^2-1)z}\right|=e^{-\left(\zeta+\frac{4n\pi}{3}\right)},$$

$$\left|1+\mu e^{(\mu-1)z}\right|=\left|1+\mu e^{-\frac{3}{2}\zeta-\frac{\eta}{2}\sqrt{3}}\right|\geqq\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

da

$$e^{-i\left(\frac{3\eta}{2}-\frac{\zeta}{2}\sqrt{3}\right)}=1$$

ist. Der Nenner bleibt demnach über einer festen Grenze, der Zähler unter einer festen Grenze, wenn

$$\left(1-a+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\zeta-\frac{bc}{\sqrt{3}}>0$$

ist.

In dem Integral

$$\int_{Q_n}\frac{K_1(x,\xi)}{z-\lambda}\,dz$$

wählen wir die Kontur Q_n so, daß sie durch die Substitution $z=-\bar{z}$ in das oben definierte Neuneck übergeführt wird. Durch diese Substitution geht das Integral über in

$$\int_{Q_n'}\frac{K_1(x,\xi)}{z+\lambda}\,dz.$$

Konvergiert das über ein Drittel der Kontur erstreckte Integral gegen Null, so gilt dies von dem Integral

$$\int_{Q_n'} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\lambda}\, dz$$

in gleicher Weise, da die über die anderen beiden Drittel zu erstreckenden Integrale durch die Substitutionen $z = \mu \bar{z}$ bezw. $z = \mu^2 \bar{z}$ in das erste im wesentlichen übergehen. Wir können uns somit auf die Abschätzung des Integrals auf einem Drittel der Kontur beschränken.

Der Integrand zerfällt in die folgenden neun Summanden:

$$\frac{e^{z(1-\xi+x)}}{u(-1)}, \quad \frac{e^{z(1-\xi+\mu x)}}{u(-1)}, \quad \frac{e^{z(1-\xi+\mu^2 x)}}{u(-1)},$$

$$\frac{e^{z[\mu(1-\xi)+x]}}{u(-1)}, \quad \frac{e^{\mu z(1-\xi+x)}}{u(-1)}, \quad \frac{e^{z[\mu(1-\xi)+\mu^2 x]}}{u(-1)},$$

$$\frac{e^{z[\mu^2(1-\xi)+x]}}{u(-1)}, \quad \frac{e^{z[\mu^2(1-\xi)+\mu x]}}{u(-1)}, \quad \frac{e^{\mu^2 z(1-\xi+x)}}{u(-1)}.$$

Wir haben somit folgende Wertsysteme α, b:

1. $\alpha = 1 - \xi + x, \quad b = 0;$

2. $\alpha = 1 - \xi - \frac{x}{2}, \quad b = \frac{x}{2}\sqrt{3};$

3. $\alpha = 1 - \xi - \frac{x}{2}, \quad b = -\frac{x}{2}\sqrt{3};$

4. $\alpha = x - \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1-\xi);$

5. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 + x - \xi);$

6. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(x + \xi - 1);$

7. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} + x, \quad b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 - \xi);$

8. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(x + \xi - 1);$

9. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}$, $b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}(1 - \xi + x)$.

Erfüllen alle diese Wertsysteme α, b auf der Seite I

die Bedingung $\left(1 - \alpha - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\zeta + \frac{bc}{\sqrt{3}} \geqq 0$,

auf II die Bedingung $(1 - \alpha - b\sqrt{3})\zeta + bc \geqq 0$,

auf III die Bedingung $(1 - \alpha + b\sqrt{3})\zeta - bc \geqq 0$,

auf IV die Bedingung $\left(1 - \alpha + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\zeta - \frac{bc}{\sqrt{3}} \geqq 0$,

so sind alle neun Teilintegrale, in welche das Integral

$$\int_{Q_n'} \frac{K_1(x, \xi)}{z - \lambda} dz$$

zerfällt, dem Betrage nach kleiner als

$$\frac{e^{-\sigma \cdot n}}{G} \cdot \frac{L_n}{M_n^3},$$

worin σ irgend reelle positive Konstante oder 0, L_n, M_n Strecken bedeuten, die mit n unbegrenzt wachsen, deren Quotient jedoch $= 1$ ist, d. h. der Grenzwert aller Integrale ist 0.

Im folgenden soll nun nachgewiesen werden, daß die Wertsysteme α, b in der Tat allen für die einzelnen Seiten in Frage kommenden Bedingungen genügen.

Wir weisen dies zunächst nach für die Seite I.
Auf dieser gilt:

$$\frac{c}{4} \leqq \zeta \leqq \frac{c}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

1. $\alpha = 1 - \xi + x, b = 0$

$$\left(1 - \alpha - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\xi + \frac{bc}{\sqrt{3}} = \varphi_1(\alpha, b) = (\xi - x)\xi \geqq 0$$

2. $\alpha = 1 - \xi - \frac{x}{2}$, $b = \frac{x}{2}\sqrt{3}$; $\varphi_1, (\alpha b) = \xi \cdot \zeta + \frac{cx}{2} \geqq 0$.

3. $\alpha = 1 - \xi - \frac{x}{2}$, $b = -\frac{x}{2}\sqrt{3}$,

$$\varphi_1(\alpha,\beta) = (\xi + x)\zeta - \frac{x}{2} \geqq (\xi + x)\frac{c}{4} - \frac{xc}{2},$$

$$\geqq (\xi - x)\frac{c}{4} \geqq 0.$$

4. $\alpha = x - \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 - \xi)$;

$$\varphi_1(\alpha, b) = (1 + \xi - x)\zeta + \frac{c}{2}(1 - \xi) > 0.$$

5. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 + x - \xi)$;

$$\varphi_1(\alpha, b) = \zeta + \frac{c}{2}(1 + x - \xi) \geqq 0.$$

6. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}$, $b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(x + \xi - 1)$;

$$\varphi_1(\alpha, b) = (1 + x)\zeta - \frac{c}{2}(x + \xi - 1),$$

$$\geqq (1 + x)\frac{c}{4} - \frac{c}{2}(x + \xi - 1)$$

$$\geqq \frac{c}{4}(3 - x - 2\xi) \geqq 0.$$

7. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} + x$, $b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 - \xi)$;

$$\varphi_1(\alpha, b) = (2 - x - \xi)\zeta - \frac{c}{2}(1 - \xi)$$

$$\geqq (2 - x - \xi)\frac{c}{4} - \frac{c}{2}(1 - \xi)$$

$$\geqq (\xi - x)\frac{c}{4} \geqq 0.$$

8. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}$, $b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(x + \xi - 1)$;

$$\varphi_1(\alpha, b) = (2 - \xi)\zeta + \frac{c}{2}(x + \xi - 1)$$

$$\geqq (2 - \xi)\frac{c}{4} + \frac{c}{2}(x + \xi - 1) = 2x + \xi \geqq 0.$$

9. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2},\ b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 + x - \xi);$

$$\varphi_1(\alpha, b) = (2 - \xi + x)\zeta - \frac{c}{2}(1 - \xi + x)$$

$$\geqq (2 - \xi + x)\frac{c}{4} - \frac{c}{1}(1 - \xi + x) = \xi - x \geqq 0.$$

Seite II.

$$\varphi_2(a, b) = \left(1 - \alpha - b\sqrt{3}\right)\zeta + bc;\quad \frac{c}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \leqq \zeta \leqq \frac{c}{3}\sqrt{3}.$$

1. $\alpha = 1 - \xi + x,\ b = 0;\quad \varphi_2(\alpha, b) = (\xi - x)\,\zeta \geqq 0.$

2. $\alpha = 1 - \xi - \frac{x}{2},\ b = -\frac{x}{2}\sqrt{3};\ \varphi_2(\alpha, b) = (\xi - x)\,\zeta + \frac{cx}{2}\sqrt{3} \geqq 0.$

3. $\alpha = 1 - \xi - \frac{x}{2},\ b = -\frac{x}{2}\sqrt{3};$

$$\varphi_2(\alpha, b) = (\xi + 2x)\,\zeta - \frac{cx}{2}\sqrt{3}$$

$$\geqq \frac{c}{2}\left[(\xi + 2x)\left(\sqrt{3} - 1\right) - x\sqrt{3}\right]$$

$$\geqq \frac{c}{2}\left[x\left(2\sqrt{3} - 3\right) + (\xi - x)\left(\sqrt{3} - 1\right)\right] \geqq 0.$$

4. $\alpha = x - \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2},\ b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 - \xi);$

$$\varphi_2(\alpha, b) = (\xi - x)\,\zeta + \frac{c}{2}\sqrt{3}\,(1 - \xi) \geqq 0.$$

5. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2},\ b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 + x - \xi);$

$$\varphi_2(\alpha, b) = (\xi - x)\,\zeta + \frac{c}{2}\sqrt{3}\,(1 + x - \xi) \geqq 0.$$

6. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2},\ b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(x + \xi - 1);$

$$\varphi_2(\alpha, b) = (\xi + 2x)\,\zeta - \frac{c}{2}\sqrt{3}\,(x + \xi - 1)$$

$$\geqq \left[(\xi + 2x)\left(\sqrt{3} - 1\right) - \sqrt{3}\,(x + \xi - 1)\right]\frac{c}{2}$$

$$= \frac{c}{2}\left[x\left(\sqrt{3} - 2\right) + \sqrt{3} - \xi\right].$$

Setzt man

$$x\left(\sqrt{3}-2\right)+\sqrt{3}-\xi=\vartheta,$$

so stellt diese Gleichung eine Ebene dar, welche die x, ξ-Ebene in der Geraden $x\left(\sqrt{3}-2\right)+\sqrt{3}-\xi=0$ schneidet. Da $\vartheta>0$ ist für die Wertepaare $x=0$, $\xi=0$; $x=0$, $\xi=1$; $x=1$, $\xi=1$, so ist ϑ positiv in allen Punkten des Dreiecks 0,0; 1,1; 0,1, also für alle Werte x, ξ zwischen 0 und 1, sofern $x<\xi$.

7. $a=-\frac{1}{2}+\frac{\xi}{2}+x,\ b=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1-\xi)$;

$$\begin{aligned}\varphi_2(a,b)&=(3-x-2\xi)\,\zeta-\frac{c}{2}\sqrt{3}\,(1-\xi)\\&\geqq\left[(3-x-2\xi)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{3}\,(1-\xi)\right]\frac{c}{2}\\&=\left[2\sqrt{3}-3-\xi\sqrt{3}+2\xi-x\left(\sqrt{3}-1\right)\right]\frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Ebenso wie in 6. wird gezeigt, daß die Ebene

$$\xi\left(2-\sqrt{3}\right)-x\left(\sqrt{3}-1\right)+2\sqrt{3}-3=\vartheta$$

das Dreieck 0,0; 1,1, 0,1 nicht schneidet, daß vielmehr für alle Punkte dieses Dreiecks $\vartheta>0$ ist.

8. $a=-\frac{1}{2}+\frac{\xi}{2}-\frac{x}{2},\ b=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(x+\xi-1)$;

$$\begin{aligned}\varphi_2(a,b)&=(3-2\xi-x)\,\zeta+\frac{c}{2}\sqrt{3}\,(x+\xi-1)\\&\geqq\left[2\sqrt{3}-3+x+\xi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]\frac{c}{2}>0.\end{aligned}$$

9. $a=-\frac{1}{2}+\frac{\xi}{2}-\frac{x}{2},\ b=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1+x-\xi)$;

$$\begin{aligned}\varphi_2(a,b)&=(3+2x-\xi)\,\zeta-\frac{c}{2}\sqrt{3}\,(1+x-\xi)\\&\geqq\left[(3+2x-2\xi)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{3}\,(1+x-\xi)\right]\frac{c}{2}\\&=\left[2\sqrt{3}-3+(\xi-x)\left(2-\sqrt{3}\right)\right]\frac{c}{2}>0.\end{aligned}$$

Seite III.

$$\varphi_3(a,b) = \left(1-a+b\sqrt{3}\right)\zeta - bc;\ \frac{c}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \leqq \zeta \leqq \frac{c}{3}\sqrt{3}.$$

1. $a=1-\xi+x,\ b=\frac{x}{2}\sqrt{3};\ \varphi_3(a,b)=(\xi-x)\zeta \geqq 0.$

2. $a=1-\xi-\frac{x}{2},\ b=\frac{x}{2}\sqrt{3};\ \varphi_3(a,b)=(\xi+2x)\zeta-\frac{cx}{2}\sqrt{3}\geqq 0$ (s. II, 3).

3. $a=1-\xi-\frac{x}{2},\ b=-\frac{x}{2}\sqrt{3};\ \varphi_3(a,b)=(\xi-x)\zeta+\frac{cx}{2}\sqrt{3}\geqq 0.$

4. $a=x-\frac{1}{2}+\frac{\xi}{2},\ b=\frac{1}{2}\sqrt{3}(1-\xi);$

$$\varphi_3(a,b)=(3-2\xi-x)\zeta-\frac{c}{2}\sqrt{3}(1-\xi)$$

$$\geqq \left[(3-2\xi-x)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{3}(1-\xi)\right]\frac{c}{2}$$

$$\vartheta=(3-2\xi-x)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{3}(1-\xi)$$

$\vartheta > 0$ für $x=0,\ \xi=0;\ x=0,\ \xi=1;\ x=1,\ \xi=1.$

5. $a=-\frac{1}{2}+\frac{\xi}{2}-\frac{x}{2},\ b=\frac{1}{2}\sqrt{3}(1+x-\xi);$

$$\varphi_3(a,b)\geqq\left[(3+2x-2\xi)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{3}(1+x-\xi)\right]\frac{c}{2}$$

$$\vartheta=(3+2x-2\xi)\left(\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{3}(1+x-\xi)$$

$\vartheta > 0$ für $x=0,\ \xi=0;\ x=0,\ \xi=1;\ x=1,\ \xi=1.$

6. $a=-\frac{1}{2}+\frac{\xi}{2}-\frac{x}{2},\ b=-\frac{1}{2}\sqrt{3}(x+\xi-1);$

$$\varphi_3(a,b)=(3-2\xi-x)\zeta-\frac{c}{2}\sqrt{3}(1-x-\xi)$$

$$\geqq 2\sqrt{3}-3+x+2\xi-\xi\sqrt{3}\geqq 0.$$

7. $a=-\frac{1}{2}+\frac{\xi}{2}+x,\ b=-\frac{1}{2}\sqrt{3}(1-\xi);$

$$\varphi_3(a,b)=(\xi-x)\zeta+\frac{c}{2}\sqrt{3}(1-\xi)\geqq 0.$$

8. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2},\ b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ (x + \xi - 1);$

$$\varphi_3(\alpha, b) = (2x + \xi)\,\zeta - \frac{c}{2}\sqrt{3}\,(x + \xi - 1)$$

$$\geqq \left[(2x + \xi)\left(\sqrt{3} - 1\right) - \sqrt{3}\,(x + \xi - 1)\right]\frac{c}{2}$$

$$\vartheta = x\left(\sqrt{3} - 2\right) - \xi + \sqrt{3}$$

$\vartheta > 0$ für $x = 0,\ \xi = 0;\ x = 0,\ \xi = 1,\ x = 1,\ \xi = 1.$

9. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2},\ b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 + x - \xi)$

$$\varphi_3(\alpha, b) = (\xi - x)\,\zeta + \frac{c}{2}\sqrt{3}\,(1 + x - \xi) > 0.$$

Seite IV.

$$\varphi_4(\alpha, b) = \left(1 - \alpha + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\zeta - \frac{b\,c}{\sqrt{3}};\ \frac{c}{4} \leqq \zeta \leqq \frac{c}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

1. $\alpha = 1 - \xi + x,\ b = 0;\ \varphi_4(\alpha, b) \geqq 0\ (\mathrm{I}, 1).$

2. $\alpha = 1 - \xi - \frac{x}{2},\ b = \frac{x}{2}\sqrt{3};\ \varphi_4(\alpha, b) \geqq 0\ (\mathrm{I}, 3).$

3. $\alpha = 1 - \xi - \frac{x}{2},\ b = -\frac{x}{2}\sqrt{3};\ \varphi_4(\alpha, b) \geqq 0\ (\mathrm{I}, 2).$

4. $\alpha = x - \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2},\ b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 - \xi);$

$$\varphi_4(\alpha, b) = (2 - x - \xi)\,\zeta - \frac{c}{2}\,(1 - \xi)$$

$$\geqq (2 - x - \xi)\frac{c}{4} - \frac{c}{2}\,(1 - \xi) = \frac{c}{4}\,(\xi - x) \geqq 0.$$

5. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2},\ b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1 + x - \xi);$

$$\varphi_4(\alpha, b) = (2 + x - \xi)\,\zeta - \frac{c}{2}\,(1 + x - \xi) \geqq 0.$$

6. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2},\ b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(x + \xi - 1);$

$$\varphi_4(\alpha, b) = (2 - \xi)\,\zeta - \frac{c}{2}\,(1 - x - \xi)$$

$$\geqq (2 - \xi)\frac{c}{4} - \frac{c}{2}\,(1 - x - \xi) = \frac{c}{4}\,(\xi + 2x) \geqq 0.$$

7. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} + x, \quad b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1-\xi);$

$$\varphi_4(\alpha, b) = (1-x)\,\zeta + \frac{c}{2}(1-\xi) \geqq 0.$$

8. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(x+\xi-1);$

$$\begin{aligned}\varphi_4(\alpha, b) &= (1+x)\,\zeta - \frac{c}{2}(x+\xi-1)\\ &\geqq (1+x)\frac{c}{4} - \frac{c}{2}(x+\xi-1)\\ &\geqq (3-2\xi-x)\frac{c}{4} \geqq 0.\end{aligned}$$

9. $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1-\xi+x);$

$$\varphi_4(\alpha, b) = \zeta + \frac{c}{2}(1+x-\xi) \geqq 0.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\lim \int\limits_{Q_n'} \frac{K_1(x,\xi)}{z+\lambda}\,dz = 0$$

und ebenso

$$\lim \int\limits_{Q_n'} \frac{K_1(x,\xi)}{z-\lambda}\,dz = 0$$

ist. Aus Gleichung (47) folgt dann

$$K_1(x,\xi)\Big|^{z=\lambda} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(x)\,v_\nu(\xi)}{(\varrho_\nu{}^3 - \lambda^3)\int\limits_0^1 u_\nu\,v_\nu\,dx}.$$

Hierin setzen wir wieder $\lambda = 0$ und erhalten, da

$$u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\lambda^5\,\alpha^5}{5!} + \cdots, \quad u(x)\Big|^{\lambda=0} = \frac{x^2}{2}$$

ist,

$$\begin{aligned}\underset{x<\xi}{K_1(x,\xi)}\Big|^{\lambda=0} &= \frac{x^2}{2}(1-\xi)^2\\ \underset{x>\xi}{K_1(x,\xi)}\Big|^{\lambda=0} &= \frac{x^2}{2}(1-\xi)^2 + \frac{(x-\xi)^2}{2},\end{aligned}$$

also

$$K_1(x, \xi)\,|^{\lambda=0} = K(x, \xi),$$

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(x)\, v_\nu(\xi)}{\varrho_\nu{}^3 \int\limits_0^1 u_\nu \cdot v_\nu \, d\, x}.$$

Ebenso wie im Kapitel IV ergibt sich, daß jede stetige Funktion mit stetiger erster und stückweise stetiger zweiter Ableitung, wenn sie den Randbedingungen a genügt, in der Form

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(x) \int\limits_0^1 F(\alpha)\, v_\nu(\alpha)\, d\, a}{\int\limits_0^1 u_\nu\, v_\nu\, d\, x},$$

wenn sie den Randbedingungen b genügt, in der Form

$$F(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v_\nu(\xi) \int\limits_0^1 F(\alpha)\, u_\nu(\alpha)\, d\, \alpha}{\int\limits_0^1 u_\nu\, v_\nu\, d\, x}$$

entwickelbar ist.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.

Lebenslauf.

Ich, Herbert Laudien, evang. Konfession, bin geboren am 17. März 1887 zu Hohenstein (Ostpreußen) als Sohn des Gymnasialdirektors, Geh. Reg.-Rates Laudien und seiner Frau geb. Schlieper. Von Ostern 1893 bis Ostern 1901 besuchte ich das Kgl. Gymnasium zu Insterburg (Ostpreußen); von Ostern 1901 ab das städtische Johannes-Gymnasium zu Breslau, das ich Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. Emil Toeplitz für die vielfachen Anregungen, die ich von ihm im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht sowie während der Zeit meines Universitätsstudiums empfangen habe, meinen herzlichsten Dank abzustatten. Acht Semester war ich an der Breslauer, zwei an der Göttinger Universität immatrikuliert, um Mathematik und Physik zu studieren. Im Jahre 1910 bestand ich das Staatsexamen und erfüllte meine militärische Dienstpflicht beim Jäger-Bataillon v. Neumann 1. Schles. Nr. 5. An der Oberrealschule zu Breslau leistete ich mein Seminarjahr, an dem Kgl. katholischen Gymnasium zu Glatz mein Probejahr ab. Am 1. April 1914 erwarb ich die Anstellungsfähigkeit.

In dankbarer Gesinnung nenne ich die Namen der Herren Professoren und Privatdozenten, deren Vorlesungen und Übungen ich besucht habe.

In Breslau: Baumgartner, Kneser, Kühnemann, Lummer, Pringsheim, Schäfer, Sturm, Waetzmann.

In Göttingen: Ambronn, Hilbert, Klein, Koebe, Minkowski †, Toeplitz, Runge, Schwarzschild, Voigt.

Zu ganz besonderem Dank bin ich Herrn Professor Dr. Kneser für die in seinen Vorlesungen und Seminaren erhaltene Förderung und für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verpflichtet.