

1902. A. 613.

Boh...

THEORIE

DES

17254

HARMONISCHEN ANALYSATORS,

VON

DR. LUCIAN GRABOWSKI.

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN MATH. NATURW. CLASSE; BD. CX. ABTH. II. A.
JULI 1901.

(MIT 2 TAFELN UND 15 TEXTFIGUREN.)

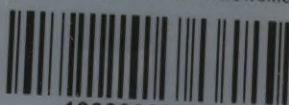
WIEN

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.
1901.

Matem pols

D/S

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

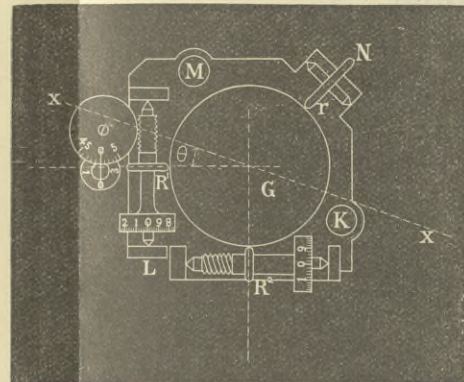
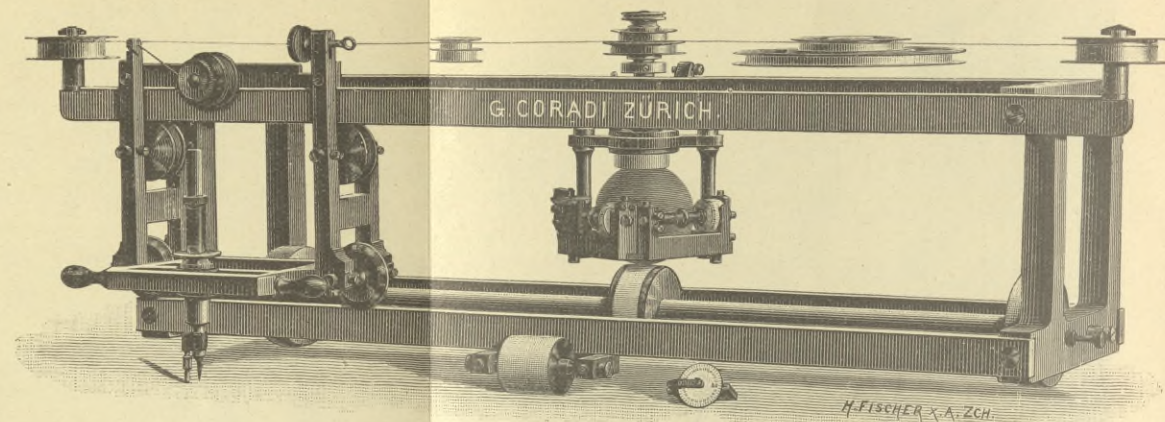


100000297572

Theorie des Harmonischen Analysators.



L. Grabowski: Theorie des harmonischen Analysators.



Anmerkung. Diese beiden Abbildungen sind der Broschüre des Herrn Coradi »Der Harmonische Analysator« (Zürich 1894) entnommen. Der Leser möge beachten, dass das in der oberen Abbildung dargestellte Instrument in einigen unwesentlichen Einzelheiten (Vorrathsrolle und Anzahl der Leitrollen, S. 15 und 16) von dem von mir benutzten abweicht. Die Bezeichnungsbuchstaben haben keinen Bezug auf meine Abhandlung. *Der Verf.*

M

THEORIE

DES

HARMONISCHEN ANALYSATORS,

VON

DR. LUCIAN GRABOWSKI.

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN MATH. NATURW. CLASSE; BD. CX. ABTH. II. A.
JULI 1901.

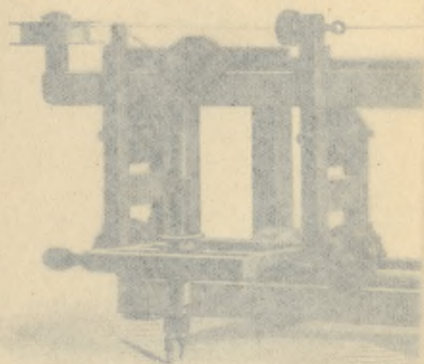
(MIT 2 TAFELN UND 15 TEXTEFIGUREN.)

WIEN

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

1901.

D/1110



Anmerkung. Diese beiden Abbildungen sind der
möge beachten, dass das in der oberen Abbildung dargestellt
S. 18 und 19) von dem von mir benutzten abweicht. Die Beze

M

THEORIE

DES

HARMONISCHEN ANALYSATORS,

VON

DR. LUCIAN GRABOWSKI.

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN MATHEM.-NATURW. CLASSE; BD. CX. ABTH. II. A.
JULI 1901.

(MIT 2 TAFELN UND 15 TEXTFIGUREN.)

W I E N

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

1901.

D/576

LIBRARY

KD 518.5:681.142



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

55088
II 2824 II

Akc. Nr. 1388 / 48

Vorwort.

Der Harmonische Analysator, ein vor wenigen Jahren von Prof. O. Henrici (London) angegebenes und vom Mechaniker G. Coradi (Zürich) construiertes Instrument, dient zur mechanischen Entwicklung einer graphisch gegebenen Function einer reellen Variablen in eine trigonometrische Reihe. Ich versuche in der vorliegenden Abhandlung, eine vollständigere und strengere Theorie dieses Instrumentes aufzustellen, als sie in der bisher vorhandenen Literatur dieses Gegenstandes erhalten ist. Es handelte sich dabei namentlich um die Berücksichtigung der verschiedenen hier in Betracht kommenden Fehlerquellen, da die allermeisten derselben bis jetzt nicht behandelt und nicht erwähnt worden waren.

Das Instrument, welches mir zur Verfügung stand, ist Eigenthum der königl. Sternwarte in München.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, mit dem Ausdrucke einer tiefgefühlten Dankbarkeit der zahlreichen Rathschläge und Anregungen, sowie des jederzeit bereitwilligen und liebenswürdigen Entgegenkommens zu gedenken, welche ich im Laufe meiner Arbeit von Herrn Prof. Dr. H. Seeliger zu erfahren die Ehre hatte.

Herrn G. Coradi bin ich für bereitwillige Auskunft über gewisse constructive Details des Instrumentes sowie für die Freundlichkeit, mir die Clichés zu den beiden Abbildungen des Analysators zur Verfügung gestellt zu haben, zu Dank verpflichtet.

Inhalts-Übersicht.

	Seite
Einleitung. 1. 2.	2
Theorie des correcten Analysators. 3.—6.	5
Die Fehler des Instrumentes. 7.—40.	19
Wirkungen der einzelnen Fehlerquellen. 8.—23.	21
Zusammenfassende Formeln. 24.—26.	85
Corrigierung der Coefficienten der Fourier'schen Reihe wegen der Instrumentalfehler. 27.—30.	90
Methoden zur Bestimmung der Fehlerconstanten; Beispiele. 31.—40.	106
Die Fehler des Millimeterpapiers und der Aufstellung. — Complete Formeln zur Corrigierung der Coefficienten. 41.—48.	148
Beispiel der Reduction einer Harmonischen Analyse. 49.—50.	166

Einleitung.

1. Der »Harmonische Analysator« ist ein Instrument, welches dazu dient, eine für ein bestimmtes Intervall graphisch gegebene Function einer reellen Variablen in die Fourier'sche¹ Reihe mechanisch zu entwickeln, d. h. die Coefficienten mehrerer Anfangsglieder dieser Entwicklung mechanisch zu finden, anstatt dieselben zu berechnen. Er ist vor wenigen Jahren von Prof. O. Henrici in London im Princip erfunden und vom Mechaniker G. Coradi in Zürich construiert worden.

Der Harmonische Analysator von Henrici-Coradi hat seine Vorgänger gehabt. Es ist nicht meine Absicht, hier auf die Geschichte jener früher erdachten oder construierten Instrumente, welche die gleiche oder eine ähnliche Aufgabe zu lösen bezweckten, näher einzugehen. Ich erinnere nur an die William Thomson'sche sogenannte Flutberechnungsmaschine als das bekannteste jener Instrumente. Der Harmonische Analysator von Henrici-Coradi stellt indessen in Bezug auf Genauigkeit, Handlichkeit, verhältnismäßig einfache Handhabung und — nicht zum mindesten — seine sehr sinnreiche Construction wohl das Vollkommenste dar, was zur Zeit in diesem Gebiete existiert.

Die Entwicklung der gegebenen Function in die Fouriersche Reihe, oder — wie ich kurz sagen will — die harmonische Analyse derselben, geschieht mit diesem Instrumente in der Weise, dass die gezeichnete Curve, welche diese Function in einem Diagramm xy darstellt, mit dem Fahrstift des Instrumentes befahren wird und sodann an entsprechenden Theilungen des Instrumentes Ablesungen gemacht werden, welche die Werte der gesuchten Coefficienten liefern.

2. Bevor ich auf die Theorie dieses Instrumentes eingehe, erscheint es mir zweckmäßig, zunächst die bekannten Haupt-

¹ Euler war der erste, welcher die Ausdrücke der Coefficienten einer solchen Reihe angegeben hat; dies geschah in einer Abhandlung vom Jahre 1777, welche in den Acta nova Acad. Scient. Petrop., XI. Bd., 1798, veröffentlicht wurde. Trotzdem behalte ich die Bezeichnung »Fourier'sche Reihe« bei, in Anbetracht der Thatsache, dass Fourier der erste war, welcher die ausserordentliche Bedeutung und Anwendbarkeit dieser Reihen erkannt hat, und mit Rücksicht darauf, dass diese Bezeichnung üblich ist.

sätze der Theorie der Fourier'schen Reihen in exacter Fassung anzuführen.

1) Ist eine beliebige Function $f(x)$ für das Intervall $0 \leq x \leq c$ definiert, so kann sie bekanntlich, wenn sie innerhalb dieses Intervalles gewissen sogleich zu präcisierenden Bedingungen genügt, für dieses Intervall dargestellt werden durch eine in diesem Intervall convergente, und zwar (natürlich mit Ausnahme etwaiger Unstetigkeitspunkte der Function) gleichmäßig convergente Reihe von folgender Form:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{c} + a_2 \cos \frac{4\pi x}{c} + a_3 \cos \frac{6\pi x}{c} + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi x}{c} + \dots + \\
 &\quad + b_1 \sin \frac{2\pi x}{c} + b_2 \sin \frac{4\pi x}{c} + b_3 \sin \frac{6\pi x}{c} + \dots + b_n \sin \frac{2n\pi x}{c} + \dots = \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{c} + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{c}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Diese Entwicklung ist es, die man als die Fourier'sche Entwicklung dieser Function bezeichnet.

2) Folgende Eigenschaften der Function $f(x)$ sind hinreichende Bedingungen ihrer Entwickelbarkeit in der angegebenen Form: Sie bleibt in dem Intervall $0 \leq x \leq c$ endlich, ist in demselben im allgemeinen stetig, kann aber eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten haben, der Art, dass dort eine plötzliche Änderung ihres Wertes eintritt, sie

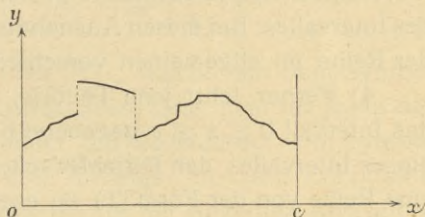


Fig. 1.

hat — schließlich — nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima in dem betrachteten Intervalle. Die Function darf aber auch in einem Punkte $x = x_0$ des Intervalles, oder in mehreren solchen Punkten, unendlich werden, vorausgesetzt, dass dies in der Weise geschieht, dass sie, bei genügend kleinem ε , von $x_0 - \varepsilon$ bis x_0 und von x_0 bis $x_0 + \varepsilon$ ein constantes Vorzeichen behält und dass das Integral $\int_A^x f(x) dx$ einem Grenzwerte

zustrebt, wenn seine obere Grenze x sich dem Werte x_0 nähert, unabhängig davon, von welcher Seite sie sich nähert. — Die so formulierten Bedingungen werden öfters kurz die Dirichlet'schen Bedingungen genannt. Es sind hinreichende, keine nothwendigen Bedingungen; im Gegentheile haben die neueren Untersuchungen den Kreis dieser Bedingungen immer weiter gezogen, so dass er ein immer größeres Gebiet von Functionen umfasste. Doch wäre es nicht am Platze, hier darauf näher einzugehen, da schon diese sogenannten Dirichlet'schen Bedingungen ein sehr weites Gebiet von Functionen und jedenfalls wohl alle in der Natur vorkommenden Functionen umfassen.

3) Wie gesagt, lehrt also die Theorie der Fourier'schen Reihen, dass eine Function $f(x)$, welche für jeden Punkt eines Intervalles $0 \leq x \leq c$ definiert ist und innerhalb dieses Intervalles den Dirichlet'schen Bedingungen genügt, für dieses Intervall dargestellt werden kann durch eine Reihe von der Form (1). Dieses Dargestelltwerden ist dabei so verstanden: Für jedes innerhalb des Intervalles liegende x ist die Summe der Reihe gleich dem Werte der Function $f(x)$, mit Ausnahme derjenigen x , für welche die vorgelegte Function einen Sprung hat, und derjenigen, bei welchen sie ein der y -Axe parallel verlaufendes Stück hat, schließlich mit Ausnahme des Anfangs- und des Endpunktes des Intervalles. Bei diesen Ausnahmewerten von x ist die Summe der Reihe im allgemeinen verschieden von der Function $f(x)$.

4) Ferner lehrt jene Theorie, dass die Aufgabe, eine für das Intervall $0 \leq x \leq c$ gegebene Function, welche innerhalb dieses Intervalles den Dirichlet'schen Bedingungen genügt, in eine Reihe von der Form (1) zu entwickeln, welche innerhalb dieses Intervalles gleichmäßig convergent sein und die Function $f(x)$ in dem soeben ausgesprochenen Sinne darstellen soll, eine vollständig bestimmte ist, d. h. dass es nur eine solche Reihe gibt. Diese einzige Lösung der Aufgabe ist gegeben durch die folgenden Ausdrücke der Coefficienten a, b :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{c} \int_0^c f(x) dx & a_n &= \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \cos \frac{2n\pi x}{c} dx \\
 b_n &= \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \sin \frac{2n\pi x}{c} dx.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Theorie des correcten Analysators.

3. Auf diese Ergebnisse der Theorie der Fourier'schen Reihen, also auf das System der Formeln (1) und (2), stützt sich nun die Theorie des Coradi'schen Analysators.

Diese setzt damit ein, jene Ausdrücke etwas umzuformen.

Ich bezeichne die ganze vorgelegte Curve mit S , und ich schneide aus derselben solche Abschnitte heraus, dass die Grenzpunkte eines jeden Abschnittes zwei aufeinanderfolgenden Ausnahmewerten von x entsprechen. Innerhalb eines jeden dieser Abschnitte bleibt also die Function ausnahmslos stetig und besitzt kein parallel der y -Axe verlaufendes endliches Stück. Die Gesammtheit dieser Abschnitte der Curve bezeichne ich mit (S) . Dann kann man offenbar die Ausdrücke (2) für a_n, b_n so schreiben, indem man für jeden der Abschnitte (S) die in a_n und b_n enthaltenen bestimmten Integrale durch partielle Integration bildet:

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left(y \sin \frac{2n\pi x}{c} \right)_{(S)} - \frac{1}{n\pi} \int_{(S)} \sin \frac{2n\pi x}{c} dy$$

$$b_n = \frac{-1}{n\pi} \left(y \cos \frac{2n\pi x}{c} \right)_{(S)} + \frac{1}{n\pi} \int_{(S)} \cos \frac{2n\pi x}{c} dy;$$

darin ist die »Substitution über (S) «, welche mit dem Symbol $(\)_{(S)}$ bezeichnet wurde, so verstanden, dass man für jeden der Abschnitte (S) den Betrag bildet, um welchen der vom Symbol eingeschlossene Ausdruck vom Anfangs- bis zum Endpunkte des Abschnittes zunimmt, und die für die einzelnen Abschnitte geltenden Zunahmen summiert; analog ist der Sinn der »Integration über (S) «, welche mit dem Symbol $\int_{(S)}$ bezeichnet wurde.

Die Construction des Analysators ist eine derartige, dass eine Verschiebung der Fahrstiftspitze nach oben oder unten (d. h. senkrecht zur Ebene der Zeichnung) keine übrigen Theile des Instrumentes in Bewegung versetzt; nicht die Bewegung der Fahrstiftspitze also, sondern die Bewegung ihrer Projection auf die Ebene der Zeichnung ist maßgebend für die Angaben

des Analysators. Aus dieser einfachen Bemerkung ergibt sich eine wichtige Folgerung. Denn da dieser Projectionspunkt natürlich nicht in einem Punkte der Ebene der Zeichnung verschwinden und darauf in einem anderen wiedererscheinen kann, so folgt, dass nur ununterbrochene Curven mit dem Analysator »befahren« werden. Infolge dessen haben wir hier nicht, wie bisher, von Curven mit Unstetigkeitspunkten und parallel der y -Axe verlaufenden Stücken, sondern nur (höchstens) von Curven mit parallel der y -Axe verlaufenden Stücken zu sprechen. [Nebenbei sei bemerkt, dass die Fourier'sche Reihe für die oben abgebildete Curve, wie leicht einzusehen, genau dieselbe ist, wie für die Curve, welche aus jener dadurch entsteht, dass die Lücken durch parallel der y -Axe verlaufende Stücke ausgefüllt werden.]

Für eine solche Curve nun ist identisch

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\pi} \left(y \sin \frac{2n\pi x}{c} \right)_{(S)} - \frac{1}{n\pi} \int_{(S)} \sin \frac{2n\pi x}{c} dy &= \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(y \sin \frac{2n\pi x}{c} \right)_S - \frac{1}{n\pi} \int_S \sin \frac{2n\pi x}{c} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{n\pi} \left(y \cos \frac{2n\pi x}{c} \right)_{(S)} + \frac{1}{n\pi} \int_{(S)} \cos \frac{2n\pi x}{c} dy &= \\ &= \frac{-1}{n\pi} \left(y \cos \frac{2n\pi x}{c} \right)_S + \frac{1}{n\pi} \int_S \cos \frac{2n\pi x}{c} dy, \end{aligned}$$

wo rechts die Integration und die Substitution auf die ganze vorgelegte Curve S (welche in einem Punkte der y -Axe anfängt und in einem Punkte der Ordinatenlinie $x = c$ endet) erstreckt sind; — denn für einen parallel der y -Axe verlaufenden Abschnitt $[S]$ der letzteren Curve ist identisch

$$\frac{1}{n\pi} \left(y \sin \frac{2n\pi x}{c} \right)_{[S]} - \frac{1}{n\pi} \int_{[S]} \sin \frac{2n\pi x}{c} dy = 0$$

$$\frac{-1}{n\pi} \left(y \cos \frac{2n\pi x}{c} \right)_{[S]} + \frac{1}{n\pi} \int_{[S]} \cos \frac{2n\pi x}{c} dy = 0.$$

Wir erhalten daher, wenn wir mit y_a die Ordinate des Anfangspunktes der ganzen Curve S , mit y_e die Ordinate ihres Endpunktes bezeichnen,

$$\left. \begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_S \sin \frac{2n\pi x}{c} dy \\ b_n &= -\frac{1}{n\pi} (y_e - y_a) + \frac{1}{n\pi} \int_S \cos \frac{2n\pi x}{c} dy. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hier führt nun die Theorie des Analysators die Voraussetzung ein, dass $y_e = y_a$ ist. Ist dies nicht der Fall, so muss man bei der Befahrung, nachdem man den Endpunkt der vorgelegten Curve erreicht hat, ein Stück ergänzen, indem man längs der Ordinate so weit hinunter- oder hinaufsteigt, bis die Ordinate gleich y_a wird. Wie wir bereits bemerkt haben, gilt dann die Reihe, welche man für die so ergänzte Curve erhält, auch für die ursprünglich vorgelegte Curve.

Wir erhalten also schließlich die Formeln

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{c} + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{c} \\ a_0 &= \frac{1}{c} \int_0^c f(x) dx \quad a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_S \sin \frac{2n\pi x}{c} dy \\ & \quad b_n = +\frac{1}{n\pi} \int_S \cos \frac{2n\pi x}{c} dy. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Aufgabe des Analysators ist, die Integrale a_n und b_n , für alle n von $n=1$ bis zu einem Maximalwerte (bei unserem Instrumente dem Werte $n=6$), mechanisch zu liefern. Der erste Coefficient, a_0 , wird durch den Analysator nicht geliefert. Er kann entweder mit einem gewöhnlichen Planimeter oder auch dadurch bestimmt werden, dass man die Reihe der weiteren Glieder, welche man mit Hilfe des Analysators erhalten hat, für irgendeinen Wert von x mit der Ordinate der Zeichnung vergleicht.

4. Die Curve, welche man zu analysieren hat, wird eine Relation zwischen zwei veränderlichen Größen (z. B. der Zeit

und der Temperatur) ausdrücken, von denen die eine als Abscisse, die andere als Ordinate aufgetragen wird. Bei dem Auftragen der Curve kann die Beziehung zwischen der Einheit der letzteren Größe und der Längeneinheit willkürlich gewählt werden. Die Beziehung aber zwischen der Einheit der ersteren, als Argument auftretenden Größe und der Längeneinheit ist für den Gebrauch des Analysators eine vorgeschriebene: sie muss so gewählt werden, dass das Intervall der Argument-Größe, für welches die periodische Entwicklung gesucht wird, durch ein Intervall der x -Axe dargestellt wird, dessen Länge c gleich ist 360 Millimetern¹ der an einer Schiene des Instrumentes angebrachten Millimetertheilung. Handelt es sich z. B. um den Verlauf der Temperatur im Laufe eines Jahres, so muss, für das Auftragen der Abscissen, $1 \text{ Tag} = \frac{360}{365}$ Millimetern gesetzt werden.

Ich halte in dem gegenwärtigen Abschnitte die Annahme fest, dass sowohl das Instrument, als auch das Coordinatennetz des zum Auftragen der Curve verwendeten Millimeterpapieres, vollkommen correct seien. Von dem Papiere wird hier also vorausgesetzt, dass die Linien der y -Richtung genau rechtwinklig zu denjenigen der x -Richtung stehen, ferner dass die Millimetermaße sowohl der einen wie der anderen Richtung genau richtig sind (und infolge dessen auch mit der Millimetertheilung der erwähnten Schiene übereinstimmen).

Die Einrichtung und die Wirkungsweise des correcten Analysators sind die folgenden. (Siehe Tafel.)

Das Gerüst des Instrumentes besteht aus einem rechtwinkligen länglichen unteren Rahmen, und einem gleichen oberen Rahmen, der mit jenem durch vier Säulen verbunden ist. Längs der vorderen Schiene des unteren Rahmens läuft ein Wagen, der den Fahrstift trägt; er ist mit einem Index versehen, welcher längs der vorderen Schiene des oberen Rahmens gleitet, und zwar von dem Striche »0« bis zum Striche »360« der an dieser Schiene angebrachten Millimetertheilung. Das Gerüst selbst ruht auf dem Papier mittelst zweier an den

¹ Bei einigen anderen Exemplaren des Analysators beträgt diese Zahl 400.

Seiten angebrachter, an einer gemeinsamen drehbaren Axe festsetzender Laufräder und einer vorn angebrachten kleinen Laufwalze; die Axen der Laufräder und der Walze sind der Schiene, an welcher der Wagen rollt, parallel. Das Instrument muss nun so aufgestellt werden, dass diese Schiene der x -Axe der Zeichnung parallel ist, und dass ferner in der äußersten Stellung des Wagens nach links, also wenn der Index an der Schienentheilung 0 zeigt, die Fahrstiftspitze sich auf der y -Axe der Zeichnung befindet. Dann kann jeder beliebige Punkt der Zeichnungsebene, für welchen $0 \leq x \leq c$ ist, mit dem Fahrstift erreicht werden, indem die x -Componente der Verschiebung des Fahrstiftes durch Rollen des Wagens an der Schiene bewerkstelligt wird, die y -Componente dagegen durch Rollen der Laufräder — also Bewegung des ganzen Instrumentes — auf der Zeichnungsebene.

Außer diesem Gerüst besteht das Instrument aus einer Anzahl N von Integrierapparaten; der n te ($n = 1, 2, \dots, N$) Integrierapparat liefert sowohl den Coefficient a_n , als auch, gleichzeitig, den Coefficient b_n . Die Anordnung dieses Integrierapparates ist folgende. Eine mattgeschliffene Glaskugel ist von einem quadratförmigen Rahmen umgeben, in welchem, auf drehbaren Axen, drei Rollen befestigt sind, die die Kugel in Punkten ihres horizontalen größten Kreises (ihres Äquators) berühren; die Axen dieser Rollen liegen selbst in der Ebene dieses größten Kreises, und zwar senkrecht zu den Radienvectoren der betreffenden Berührungspunkte. Zwei dieser Rollen sind »Messrollen« und ihre Berührungspunkte auf dem Äquator der Kugel liegen in einem Abstände von 90° voneinander; die dritte, diesen beiden gegenüber angebrachte Rolle dient nur als Stützrolle, indem sie, vermöge der federnden Wirkung einer hebelartigen Vorrichtung, an welcher ihre Axe gelagert ist, die Kugel beständig an die beiden Messrollen leise andrückt. Der Mittelpunkt der Kugel befindet sich vertical über der Rotationsaxe der beiden Laufräder, und die Kugel stützt sich unten auf die Mantelfläche eines kurzen und breiten Cylinders, der an dieser Axe befestigt ist und dessen geometrische Axe mit derselben zusammenfällt.

Wird der Fahrstift in der Richtung der x -Axe verschoben, so wird dadurch der quadratförmige Rahmen des Integrierapparates in Umdrehung versetzt um die durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Verticale, wobei er die Kugel mitnimmt. Von dem Wagen geht nämlich, am Anfange parallel der Schiene verlaufend, ein feiner Silberdraht aus, der, über Wellen (Leitrollen) gespannt, an den Integrierapparat herankommt und eine oben an dem Apparat befindliche Horizontal-scheibe umwickelt, deren Spindel durch die hintere Leiste des oberen Gerüstrahmens hindurchgeht und mit dem Rahmen des Integrierapparates fest verbunden ist; der Draht ist in seinem weiteren Verlaufe so über andere Leitrollen geführt, dass er mit seinem Endstücke, hier wieder parallel der Schiene verlaufend, wieder zur Befestigung an dem Wagen gelangt. — Keinerlei relative Bewegung der Kugel gegen die Rollen des Apparates kommt bei dieser Verschiebung zustande, und die Rollen drehen sich um ihre Axen nicht.

Wird dagegen der Fahrstift in der Richtung der y -Axe verschoben, was nur durch Fortrollen des ganzen Instrumentes geschehen kann, so dreht sich der an der Axe der Laufräder sitzende Cylinder unter der Kugel um die zur x -Axe parallele Gerade, und theilt seine Bewegung der Kugel mit, die sich somit um eine der x -Axe parallele Gerade dreht. Diese Rotation überträgt sich auf jede einzelne der drei Rollen: voll, gar nicht, oder zum Theil, — je nach dem Winkelabstande, in welchem auf dem Kugeläquator der Berührungspunkt der Rolle sich von dem zur x -Axe parallelen Durchmesser der Kugel befindet.

Niemals kommt also eine Rotation der Kugel um eine andere horizontale Axe zustande, als um die zur x -Axe parallele. Es ist für die klare Vorstellung der Wirkungsweise des Analysators von principieller Wichtigkeit, sich zu vergegenwärtigen, dass die Rotation der Kugel immer so erfolgt, dass die verticale Componente dieser Rotation gleich ist der Rotation des Rahmens des Integrierapparates und dass ihre horizontale Componente in den zur x -Axe parallelen Radiusvector fällt. Die relative Bewegung der Kugel gegen den Rahmen wird daher immer genau dargestellt durch denjenigen Theil ihrer absoluten Drehung, welcher eine Rotation um den zur x -Axe

parallelen Radiusvector ist. Sie ist daher auch immer nur der Componente dy der Verschiebung des Stiftes proportional und hängt von dx durchaus nicht ab.

5. Ich lege nun durch den Mittelpunkt O der Kugel drei Strahlen OX , OY , OZ ; den ersteren parallel zur Axe ox der Zeichnung, den zweiten um $+90^\circ$ davon abgelenkt, somit parallel zur Axe oy der Zeichnung, den dritten senkrecht auf die beiden und nach oben gerichtet. Der Winkel, um welchen der nach dem Mittelpunkte einer Rolle gehende Radiusvector abgelenkt ist von der X -Axe, diese Ablenkung natürlich von X nach Y gezählt, möge — in Consequenz des Ausdruckes »Äquator« — kurz die »geographische Länge« dieser Rolle genannt werden (einen besseren Ausdruck habe ich nicht finden können). Ich bezeichne die beiden Messrollen mit M_{n1} und M_{n2} , die Stützrolle mit M_{n3} , und zwar so, dass bei Herumgehen um die Kugel im Sinne der wachsenden zweiten Indices die geographischen Längen wachsen. Es möge gleich erwähnt werden, dass die Rolle M_{n1} mit der Inschrift »Cosinus«, M_{n2} mit der Inschrift »Sinus« versehen sind, und demnach die erstere auch als die Cosinusrolle, die letztere als die Sinusrolle bezeichnet wird. Dieselben Buchstaben M_{n1} , M_{n2} , M_{n3} sollen außerdem auch die Mittelpunkte der drei Rollen, sowie ihre Halbmesser bezeichnen. Ich bezeichne die geographische Länge der Rolle M_{ni} ($i = 1, 2, 3$) mit λ_{ni} . Von den beiden entgegengesetzt gerichteten Strahlen, welche in ihrer Axe liegen, fasse ich als Rotationsaxe diesen auf, welcher nach wachsenden λ geht; damit ist der Sinn der »positiven« Rotation der Rolle M_{ni} um ihre Axe definiert. Schließlich bezeichne ich eine unendlich kleine Drehung um die so definierte Rotationsaxe mit $d\mu_{ni}$, so dass μ_{ni} die »Drehungsphase« der Rolle M_{ni} , von einer beliebigen Anfangsphase aus gezählt, darstellt.

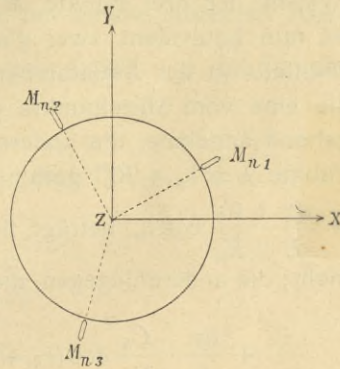


Fig. 2.

Wie dreht sich nun die Rolle M_{ni} um ihre Axe, wenn der Fahrstift längs der vorgelegten Curve S um ds (mit den Componenten dx, dy) verschoben wird? — Der Cylinder wird um den zur x -Axe parallelen Strahl offenbar um den Winkel $\frac{-dy}{L}$ gedreht, wo L der Halbmesser der Laufräder ist; indem sich diese Bewegung auf die Kugel überträgt, wird dadurch eine Drehung der Kugel um die X -Axe um den Winkel $+\frac{dy}{L} \cdot \frac{C_n}{K_n}$ erzeugt, wo C_n der Halbmesser des Cylinders und K_n derjenige der Kugel ist. Diese Rotation ist nur der eine Theil der gesammten Drehung der Kugel; dieser stellt aber, nach 4., zugleich die ganze relative Bewegung der Kugel gegen das System der drei Punkte M_{n1}, M_{n2}, M_{n3} dar. Diese Rotation ist nun äquivalent zwei gleichzeitigen Rotationen um zwei ebenfalls in der Äquatorebene liegende Axen, von denen ich die eine vom Mittelpunkte der Kugel nach dem Punkte M_{ni} gehend annehme, die andere senkrecht darauf, also nach dem Punkte $\lambda = \lambda_{ni} + 90^\circ$ gerichtet. Die erstere Componente, die $+\frac{dy}{L} \cdot \frac{C_n}{K_n} \cos \lambda_{ni}$ beträgt, überträgt sich auf die Rolle M_{ni} gar nicht; die andere dagegen, die

$$+\frac{dy}{L} \cdot \frac{C_n}{K_n} \cos (\lambda_{ni} + 90^\circ) = -\frac{dy}{L} \cdot \frac{C_n}{K_n} \sin \lambda_{ni}$$

beträgt, überträgt sich auf die Rolle M_{ni} mit ihrem vollen linearen Betrage, da ihre Axe parallel ist der der Rolle M_{ni} . Wir erhalten daher

$$d\psi_{ni} = +\frac{dy}{L} \frac{C_n}{K_n} \sin \lambda_{ni} \cdot \frac{K_n}{M_{ni}} = +\frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy.$$

Das λ_{ni} ist nun eine Function der Abscisse x des Punktes, zu welchem das betrachtete Element der Curve gehört. Bezeichnet man nämlich den Wert, welchen die geographische Länge der Rolle M_{ni} dann hat wenn der Fahrstift sich auf der y -Axe befindet, mit Λ_{ni} , so ist das dem Werte x der Abscisse entsprechende λ_{ni}

$$\lambda_{ni} = \Lambda_{ni} - \frac{x}{H_n},$$

wo H_n den Halbmesser der Horizontalscheibe des n^{ten} Integrierapparates bezeichnet; denn es muss ein Drahtstück von der Länge x sich von der Scheibe abgewickelt haben, damit der Fahrstift von $x = 0$ zu $x = x$ übergegangen sei, und der Sinn der Umwicklung des Drahtes an der Scheibe ist so getroffen, dass sich die Scheibe um die Z-Axe negativ dreht, wenn x wächst. Es ergibt sich also

$$d\mu_{ni} = + \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin\left(\frac{-x}{H_n} + \Lambda_{ni}\right) dy.$$

Die Abmessungen sind nun, bei einem correcten Analysator, so getroffen, dass $\frac{C_n}{LM_{ni}}$ (eine Größe von der Dimension: Länge⁻¹)

$$\frac{C_n}{LM_{ni}} = \frac{1}{5 \text{ mm}} \quad (i = 1, 2)$$

und

$$H_n = \frac{c}{2n\pi}$$

ist; man hat dann also

$$d\mu_{ni} = + \frac{1}{5 \text{ mm}} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}\right) dy.$$

Ferner ist, bei correctem Zustande des Instrumentes, der Anfangswert der geographischen Länge der Cosinusrolle 180° , der Sinusrolle 270° . Es ist somit schließlich

$$d\mu_{n1} = + \frac{1}{5 \text{ mm}} \sin \frac{2n\pi x}{c} dy$$

$$d\mu_{n2} = - \frac{1}{5 \text{ mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c} dy.$$

Nachdem man die ganze Curve S befahren hat, beträgt die gesammte Drehung der Messrollen

$$\int_S d\psi_{n1} = \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \sin \frac{2n\pi x}{c} dy$$

$$\int_S d\psi_{n2} = -\frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \cos \frac{2n\pi x}{c} dy.$$

An den Axen der Messrollen sitzen nun mit Theilungen versehene Trommeln, welche sich an festen Indices vorbeidrehen. Jede Trommel ist in 100 Theile getheilt, und die Ziffern wachsen, wenn man längs der Peripherie in dem Sinne fortschreitet, in welchem der Winkel ψ_{ni} gezählt wird; die Ablesung nimmt also bei einer positiven Drehung der Rolle ab. An dieser Trommel kann man die Zehntel und Hundertstel einer Revolution ablesen und die Tausendstel noch schätzen. Neben der Messrolle befindet sich außerdem ein Zählrad, welches in 50 Theile getheilt ist und sich um einen Theilstrich dreht während die Messrolle eine ganze Revolution vollzieht; endlich gibt ein zweites, kleines Zählrad, welches an den vier Theilpunkten seiner Peripherie die Ziffern 0, 50, 100, 150 trägt, an, wievielmals 50 Revolutionen ausgeführt worden sind. Diese beiden Zählräder geben also zusammen die Anzahl ganzer Revolutionen. Ich notiere stets die Ablesung so — hierin dem Vorgange des Herrn Bervy¹ folgend —, dass das Komma nach der Anzahl ganzer Revolutionen gesetzt wird.

Man liest nun die Theilungen der Messrolle M_{ni} vor und nach der Befahrung ab und bildet die Differenz: Endablesung — Anfangsablesung. Ich nenne immer diese Differenz kurz die »Ablesung über die befahrene Curve«. Beträgt dieselbe α_{ni} , so ist offenbar

$$\alpha_{ni} = -\frac{1}{2\pi} \int_S d\psi_{ni},$$

also

$$\alpha_{n1} = -\frac{1}{1 \text{ cm}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \sin \frac{2n\pi x}{c} dy$$

$$\alpha_{n2} = +\frac{1}{1 \text{ cm}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \cos \frac{2n\pi x}{c} dy.$$

¹ Sur un analyseur harmonique. Annales de l'Observatoire Astronomique de Moseou, 1896.

Vergleicht man diese Werte mit den Formeln (4), so sieht man, dass

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_{n1}}{n} \text{ cm} \\ b_n &= \frac{\alpha_{n2}}{n} \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ist. Somit ist die Aufgabe des Analysators gelöst.

6. Als Anhang an die obige Theorie des correcten Analysators mögen hier in Bezug auf die Einrichtung des Instrumentes einige nähere Angaben Platz finden, welche für das Spätere von Nutzen sein werden, welche aber oben, wo von der Einrichtung nur das Principielle in Frage kam, übergangen worden sind.

Die einzelnen Integrierapparate des Analysators unterscheiden sich von einander nur durch die Durchmesser ihrer Scheiben; dieser Durchmesser ist dem n umgekehrt proportional. Herr Coradi ordnet nun oberhalb jeder Scheibe coaxial eine zweite Scheibe an, mit entsprechend kleinerem Durchmesser, so dass, wenn der Draht von den unteren Scheiben weggenommen und auf die oberen verlegt wird, gleichsam neue Integrierapparate in Thätigkeit gesetzt werden: der erste Integrierapparat fungiert nunmehr als der $(k+1)$ te, der zweite als der $(k+2)$ te, ..., der k -te als der $(2k)$ te, wenn k die Anzahl der vorhandenen Kugeln bedeutet. Auf diese Weise besteht also z. B. bei unserem Instrumente, das 3 Kugeln besitzt, der erste Integrierapparat aus der zugehörigen Glaskugel, dem Cylinder, den Messrollen und der unteren Horizontalscheibe; der vierte aber aus derselben Kugel, Cylinder, Messrollen und der oberen Horizontalscheibe. Es besitzt daher jeder nach diesem Typus gebaute Analysator eigentlich $N = 2k$ Integrierapparate, wovon allerdings nur die Hälfte gleichzeitig functioniert, so dass die Bestimmung höherer Glieder eine nochmalige Umfahrung der Curve erfordert. —

Über der hinteren Längsleiste des oberen Gerüststrahmens liegen die drei Doppelscheiben; an jedem der beiden seitlichen Querstäbe desselben sind in ähnlicher Weise je zwei Leitrollen angebracht, die hintereinander liegen und sich um verticale

Axen drehen. Der obere Theil des Wagens trägt, etwa in der Höhe der Leitrollen und Scheiben, ebenfalls zwei Rollen auf verticalen Axen, die sich aber bei der regelmäßigen Benutzung des Instrumentes nicht drehen. Die eine davon ist die »Vorrathsrolle«; auf dieselbe wird das nach dem Anlegen des Drahtes übrigbleibende Stück aufgewickelt, sein Ende durch eine in dem Rande der oberen Rollenbacke befindliche Öffnung hindurchgelassen und an dieser Backe festgeschraubt. Vermöge der Verzahnung des Randes der unteren Backe und eines ebenfalls an dem Wagen angebrachten federnden Daumens, der zwischen die Zähne einspringt, bleibt die Vorrathsrolle dauernd gehemmt; sie kann aber nach Zurückziehung des Daumens um einen oder mehrere Zähne gedreht werden und dient auf diese Weise also auch zum Spannen des Drahtes. Die zweite der Wagenrollen liegt hinter der Vorrathsrolle und ist eine Leitrolle.

Verfolgt man nun den Verlauf des Drahtes von der Vorrathsrolle ausgehend, während das Instrument auf die Bestimmung der drei unteren Glieder eingerichtet ist, so ist er der folgende. Der Draht bildet die linksliegende äußere gemeinsame Tangente der beiden Wagenrollen; umwickelt die Wagen-Leitrolle (in dem negativen Sinne), längs etwa $\frac{3}{4}$ ihrer Peripherie; bildet die vornliegende äußere gemeinsame Tangente der Wagen-Leitrolle und der vorderen linken (Gerüst-) Leitrolle, wobei er genau parallel zur Führungsrichtung des Wagens liegt. Dann verläuft er über die beiden linken Leitrollen, über die drei von links nach rechts aufeinanderfolgenden Scheiben des 3ten, 2ten und 1ten Integrierapparates, und über die vordere rechte Leitrolle; er bildet dabei zwischen den beiden linken Leitrollen ihre linksliegende äußere gemeinsame Tangente, zwischen der hinteren linken Leitrolle und der nächsten Scheibe, sowie zwischen der äußersten Scheibe rechts und der vorderen rechten Leitrolle die innere, zwischen je zwei Scheiben aber die vornliegende äußere gemeinsame Tangente, und berührt die linken Rollen längs je etwa $\frac{1}{4}$, die rechte längs etwa $\frac{1}{2}$, die Scheiben dagegen (an denen er im positiven Sinne verläuft) längs je etwa einer vollen Peripherie. Von der rechten Leitrolle aus bis zu seinem anderen Befestigungspunkte an dem Wagen liegt er wieder parallel zur Führungsschiene. Die

Befestigung ist hier in der Weise ausgeführt, dass an diesem Ende des Drahtes eine Öse gedreht und diese Öse auf den Hals eines in den oberen Theil des Wagens eingeschraubten kleinen Bolzens aufgesteckt ist.

Ist das Instrument dagegen auf die Bestimmung der höheren Glieder eingerichtet, so treten in dem obigen Verlaufe an Stelle der unteren die oberen Scheiben auf; außerdem aber wird dann zwischen die äußerste Scheibe rechts und die vordere rechte Leitrolle, um eine möglichst geradlinige Führung des Drahtes zu erzielen, noch die hintere rechte Leitrolle eingeschaltet. Der Draht bildet dabei zwischen der erwähnten Scheibe und der hinteren rechten Leitrolle ihre innere, zwischen dieser und der vorderen rechten Leitrolle ihre rechtsliegende äußere gemeinsame Tangente und berührt diese beiden Leitrollen längs etwa je $\frac{1}{4}$ ihrer Peripherien. Da ferner in diesem Falle der Draht auch an sämtlichen Leitrollen etwas höher zu liegen kommt als in dem früheren, so besitzt die Wagen-Leitrolle um ihre Mantelfläche eine untere und eine obere Nuth für den Draht; ebenso muss in dem letzteren Falle der Schraubenbolzen, welcher das andere Drahtende festhält, in die obere Mutter eingeschraubt sein. —

An seinem unteren Theil trägt der Wagen vorne eine dicke, längliche, horizontale Metallplatte; durch eine Längspalte in dieser Platte ist die verticale Röhre hindurchgelassen, in welcher der Fahrstift eingebettet ist. Die Röhre kann in der Spalte nach links und rechts (und nur in dieser Richtung) verrückt und dann in der gewählten Stellung an der Platte festgeklemmt werden. Ist also das Zusammentreffen der Stellung des Wagenindex auf dem Theilstriche 0 der oberen Schiene mit der Stellung der Fahrstiftspitze auf der y -Axe der Zeichnung nicht durch die Aufstellung des Instrumentes bereits genau erreicht, so kann es vermöge dieser Einrichtung herbeigeführt werden, ohne dass es nöthig wäre, die Aufstellung des Instrumentes zu ändern. Der Fahrstift selbst ragt aus der Röhre oben und unten heraus, ist oben knopfförmig erweitert, unten zugespitzt, und kann in der Röhre frei gedreht sowie gehoben und gesenkt werden. Die Spitze soll nicht direct das Papier berühren, sondern etwas darüber schweben. Um nun das

Herabfallen des Fahrstiftes auf das Papier zu verhindern und ihn höher oder niedriger über dem Papier stellen zu können, ist folgende Einrichtung getroffen. An den Fahrstift wird, etwas oberhalb der Spitze, eine kurze, bloß durch Reibung daran fest-sitzende Hülse aufgesteckt, welche mit einem seitlichen, unten abgerundeten Fuß versehen ist. Mit diesem Fuße stützt sie, vermöge des Gewichtes des Fahrstiftes, sich auf das Papier. —

Der in der Theorie erwähnte quadratförmige Rahmen des Integrierapparates besteht aus einem unteren und einem oberen Rahmen, welche durch Säulen mit einander verbunden sind. An passender Stelle des unteren Rahmens befindet sich der Drehungspunkt eines rechtwinkligen Winkelhebels, des »Stützrollen-Hebels«. Der eine, nach oben gehende Arm dieses Hebels hat etwa die Form einer kurzen (geschlossenen) Gabel, in welcher quer die Axe der Stützrolle eingesetzt ist. Der andere Arm ist in einen Celluloidring ausgebildet, der den unteren Theil der Kugel umgibt ohne sie zu berühren, und hat als seine Verlängerung über den Drehungspunkt hinaus einen Flügel; über dem letzteren befindet sich ein in einem Vorsprung des Rahmens eingebettetes Schraubchen, durch welches man den Flügel niederdrücken oder freilassen, also den ganzen Stützrollen-Hebel drehen kann. Der obere Rahmen des Integrierapparates hat als innere Begrenzung wieder einen Celluloidring.

Ist nun das Instrument in gebrauchsfertigem Zustande, so ist das Schraubchen hinaufgeschraubt, der ringförmige untere Hebelarm ist gesenkt und lässt die Kugel frei, die dann den Cylinder berührt, und drückt durch sein Gewicht die im anderen Hebelarme eingesetzte Stützrolle an die Kugel an. Nach Gebrauch des Instrumentes hebt man vermittels des Schraubchens den unteren Ring empor, wobei gleichzeitig die Stützrolle sich von der Kugel entfernt; der Ring nimmt die Kugel auf, welche, indem sie sich auf ihn legt, von den Messrollen wegrückt; dann hebt er die Kugel solange empor, vom Cylinder weg, bis sie den Celluloidring des oberen Rahmens erreicht und so zwischen den beiden Ringen festgehalten bleibt.

Die Fehler des Instrumentes.

7. Der Gegenstand meiner bisherigen Ausführungen (1. bis 5.) war die Theorie des correcten Analysators, und diese Ausführungen enthalten im wesentlichen nichts neues gegenüber der bereits vorhandenen Literatur des Analysators. Diese Literatur ist übrigens bis heute sehr spärlich, was sich wohl einfach dadurch erklärt, dass das Instrument immer noch eine ziemlich recente Erfindung ist und bis jetzt nur in wenigen Händen sich befindet. Sie besteht in der Hauptsache aus zwei Publicationen. Erstens wurde vom Constructeur Coradi eine kleine Begleitschrift zu dem Instrumente herausgegeben unter dem Titel: »Der Harmonische Analysator« (Zürich 1894); sie enthält in ihrer ersten Hälfte die Theorie des Analysators, verfasst von Prof. O. Henrici, in der zweiten einige auf die praktische Verwendung des Instrumentes bezügliche Bemerkungen von Herrn Coradi. Zweitens ist ein Aufsatz von Herrn Bervy zu erwähnen, unter dem Titel: »Sur un analyseur harmonique«, im Jahre 1896 in den »Annales de l'Observatoire Astronomique de Moscou« erschienen.

Die Frage nach den Instrumentalfehlern des Analysators und den Methoden ihrer Berücksichtigung ist bis jetzt noch sehr fragmentarisch bearbeitet. Eine eingehendere Behandlung haben nur zwei Fehlerquellen erfahren. Schon in der oben erwähnten Coradi'schen Schrift wurde auf die »Excentricität der Kugel« hingewiesen, d. h. den Umstand, dass die Umdrehungsaxe des Rahmens des Integrierapparates (welche hierbei durch den Mittelpunkt des Cylinders gehend vorausgesetzt wird) nicht genau durch das Centrum der Kugel geht. Zugleich wurde auch schon in dieser Schrift angegeben, dass und wie der Einfluss dieses Fehlers auf das Resultat der Analyse durch eine einfache Maßnahme aufgehoben werden kann. Ich komme an der geeigneten Stelle eingehend darauf zurück.

Ferner hat Herr Bervy in seiner Abhandlung eine andere Fehlerquelle behandelt: die Ausziehung des Drahtes durch die Kraft der führenden Hand. Das Stück des Drahtes, welches hinter dem Fahrstift liegt und einerseits durch denselben, andererseits durch die Scheibe H_n begrenzt ist, ist infolge

dieses Umstandes ausgezogen; wäre der Draht unausziehbar, so würde sich für dieselbe Stellung x des Fahrstiftes schon ein längeres Stück von der Peripherie der Scheibe abgewickelt haben müssen. Da diese Verlängerung eine lineare Function des x ist, so macht Herr Bervy dafür den Ansatz — in unserer Bezeichnungsweise —

$$\lambda_{ni} = (i+1) \frac{\pi}{2} + A_n + B_n x \quad (i = 1, 2),$$

wo A_n, B_n Instrumentalconstanten sind. Auf die weitere Behandlung des Einflusses dieser Fehlerquelle kommen wir wieder später zurück. —

Ich habe mich nun mit diesen Fragen eingehend beschäftigt und versucht, eine möglichst vollständige Theorie des fehlerhaften Analysators zu construieren.

Ich habe dabei zunächst eine Liste der in Betracht kommenden Fehlerquellen aufgestellt, welche, wie ich glaube, als vollständig angesehen werden kann. Diese einzelnen Fehlerquellen sollen hier jetzt der Reihe nach untersucht werden. Alle Fehler werden dabei als klein von der ersten Ordnung angenommen, und Größen zweiter Ordnung werden vernachlässigt. Demgemäß werden auch immer, bei Betrachtung einer Fehlerquelle, die übrigen außeracht gelassen.

In den folgenden Betrachtungen werden behandelt zuerst die verschiedenen »Orientierungs- und Positionsfehler«, d. h. solche, die die gegenseitige Lage der einzelnen Organe des Instrumentes betreffen; darauf die »metrischen« Fehler, die sich auf Dimensionen beziehen; zuletzt die »Fehler des Anfangszustandes«. Ferner kommen außer den genannten Fehlerarten, die man als »geometrische« bezeichnen könnte, noch gewisse physikalische Fehlerquellen in Betracht (wie Einflüsse der Temperatur, Ausziehung des Drahtes), die in einem Schlussparagraph besprochen werden sollen.

Das Coordinatensystem xyz wird, in dem ganzen Abschnitte »Die Fehler des Instrumentes«, in folgender Weise definiert.

Nachdem das Instrument aufgestellt worden ist, gilt die Unterlage des Instrumentes als die Ebene xy . Die x -Richtung

ist die, in welcher der Fahrstift sich verschiebt, wenn er bei nichtrollendem Instrumente längs der Schiene im Sinne wachsender Schienenablesungen bewegt wird; die y -Richtung ist die, in welcher das Instrument sich beim Rollen bewegt. Die z -Axe ist die nach oben gehende Normale der Ebene xy . Es wird in diesem Abschnitt noch angenommen, dass die Schiene parallel der Umdrehungsaxe der Laufräder ist; das System xy ist daher ein rechtwinkeliges, und es soll die y -Richtung von der x -Richtung um $+90^\circ$ abgelenkt sein. Der Anfangspunkt o wird in einem beliebigen Punkte derjenigen Geraden angenommen, welche der Fahrstift beschreibt, wenn der Index auf dem Theilstrich 0 der Schienentheilung steht und das Instrument rollt. —

Wirkungen der einzelnen Fehlerquellen.

8. Wir nehmen wieder, für jeden einzelnen (den n ten) Integrierapparat, ein zum Gerüste des Instrumentes festes Coordinatensystem $OXYZ$ an; dieses System verschiebt sich also nur beim Rollen des Instrumentes. Als Anfangspunkt O nehmen wir den Schnittpunkt der Umdrehungsaxe des n ten Rahmens mit derjenigen horizontalen, d. h. zur Unterlage parallelen, Ebene, welche (in der Anfangsstellung des Instrumentes) den Mittelpunkt der Kugel enthält. Die Axen OX , OY , OZ führen wir parallel den Axen ox , oy , oz .

Wir bezeichnen als die »geographische Länge«, λ_{ni} , des Berührungspunktes der Rolle M_{ni} mit der Kugel, die Ablenkung in der XY -Ebene des von O nach dem Berührungspunkte gerichteten Strahles von der Axe OX . Mit μ_{ni} bezeichnen wir die Drehungsphase der Rolle M_{ni} um ihre Umdrehungsaxe, die wir als im Sinne der wachsenden geographischen Längen gehend betrachten, womit der Sinn, in welchem die Drehungsphase gezählt wird, schon definiert ist; die Anfangs-Phase, von welcher aus sie gezählt wird, brauchen wir nicht festzusetzen.

9. Nehmen wir zuerst an, die Rolle M_{ni} sitze zwar senkrecht auf ihrer Axe, diese Axe aber besitze einen kleinen Azimutalfehler, α ; d. h., sie sei von dem Radiusvector des Berührungspunktes um den Winkel $+90^\circ + \alpha$ anstatt um $+90^\circ$ abgelenkt. Bei einer Verschiebung des Fahrstiftes parallel zur

x -Axe wird dieser Umstand offenbar keinen Einfluss haben: der Rahmen wird sich um die Z -Axe genau so drehen, wie bei correctem Analysator, und es wird auch keine Drehung der

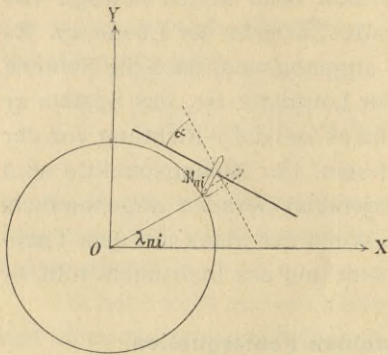


Fig. 3.

Rolle um ihre Axe hervorgerufen werden. Bei einer Verschiebung des Fahrstiftes parallel der y -Axe dreht der Antrieb, welchen der momentan in Berührung mit der Rolle befindliche Punkt der Kugel durch seine (verticale) Verschiebung ausübt auf die Messrolle, diese letztere genau so, wie er eine Rolle (in der Figur punktiert gezeichnet) drehen würde, welche, die Kugel in demselben Punkte berührend und ihre Umdrehungsaxe gleichfalls senkrecht zu ihrer Ebene habend, frei vom Azimutalfehler der Axe wäre; die Messrolle dreht sich also um einen Winkel $d\varphi_{ni}$, der gegeben ist durch die Relation

$$M_{ni} \cdot d\varphi_{ni} = K_n \sin \lambda_{ni} \cdot \left(\frac{C_n}{K_n} \frac{dy}{L} \right),$$

übereinstimmend mit dem Falle des correcten Analysators.

10. Betrachten wir ferner den Fall, dass die Umdrehungsaxe, auf welcher die Messrolle rechtwinklig aufgesetzt ist, eine kleine Elevation, β , besitzt; d. h., sie ist in der zum Radiusvector des Berührungspunktes senkrechten Ebene um den Winkel β von der Tangente des Äquators abgelenkt. (Siehe Fig. 4.) Der Fahrstift werde parallel zur Axe ox um dx verschoben. Die Mittelpunkte der Rollen M_{n1}, M_{n2}, M_{n3} erhalten dadurch eine gemeinschaftliche Drehung um die Z -Axe um den Winkel $d\lambda_n = -n \frac{2\pi dx}{c}$, und erfährt der Mittelpunkt der Rolle M_{ni} die lineare Verschiebung, in der mit einem Pfeilchen angedeuteten Richtung, $(K_n + M_{ni}) \frac{2n\pi dx}{c}$. Es ist nun nicht ausgeschlossen,

dass dabei die Rolle M_{ni} gleichzeitig um ihre Axe rotiert, indem sie, anstatt die Kugel in die Umdrehung um die Z-Axe vollständig mitzunehmen, auf der Kugeloberfläche theilweise rollt. Indessen wird der Betrag dieser rollenden Bewegung offenbar lediglich von der Verschiebung dx abhängen, dagegen unabhängig sein von dem dabei festgehaltenen Werte des y ; eine gleiche und entgegengesetzte Verschiebung dx wird eine gleiche und entgegengesetzte Drehung der Rolle um ihre Axe hervorrufen, auch dann, wenn inzwischen dieser Wert von y sich verändert haben sollte. Daraus folgt, dass der in Rede stehende Einfluss der Elevation auf die Rollenablesung sich im Resultate aufheben wird, wenn bei der Umfahrung der Fahrstift zuletzt in einem Punkte anlangt, welcher das gleiche x wie der Ausgangspunkt besitzt. Wie wir später genau sehen werden, macht die Constatierung dieser Eigenschaft die quantitative Untersuchung der betreffenden Fehlerwirkung überflüssig.

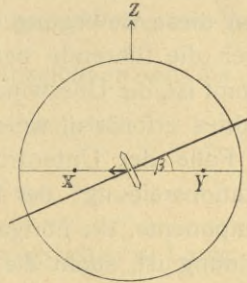


Fig. 4.

Wird aber der Fahrstift parallel der Axe oy um dy verschoben, so wirkt der (verticale) Antrieb, welchen der momentan in Berührung befindliche Kugelpunkt dadurch erhält und welcher $K_n \sin \lambda_{ni} \cdot \left(\frac{C_n}{K_n} \frac{dy}{L} \right)$ beträgt, nicht wie bei correctem Analysator in der zur Axe und zum Radius der Rolle senkrechten Richtung allein, sondern hat noch eine Componente parallel zur Rollenaxe.

Die tangentielle Componente bringt ungehindert die relative Bewegung des berührenden Rollenpunktes um die Rollenaxe hervor, und da sie $\frac{C_n \sin \lambda_{ni}}{L} dy \cdot \cos \beta$ beträgt, ertheilt sie der Rolle die Drehung

$$d\varphi_{ni} = \frac{C_n \sin \lambda_{ni} \cos \beta}{LM_{ni}} dy,$$

wo der Coefficient von dy bis auf Größen zweiter Ordnung der Elevation gleich ist demjenigen bei correctem Analysator.

Die in der Richtung der Umdrehungsaxe wirkende Componente dagegen kann keine Drehung der Rolle um die Axe verursachen, sondern wirkt auf die Axe selbst. Man kann sie sich wieder zerlegt denken in eine horizontale und eine verticale Componente. Die erstere würde dahin wirken, den Rahmen um die Z-Axe zu drehen; sie kann aber nicht zustande kommen, denn diese Bewegung würde, da die Stellung des Fahrstiftes durch die führende beziehungsweise haltende Hand fest bestimmt ist, die Überwindung des Ausziehungswiderstandes des Drahtes erfordern, welcher Widerstand viel größer ist, als die im Falle der Unterdrückung dieser Bewegung entstehende Rotationsreibung¹ der Kugel an dem Cylinder. Die verticale Componente, die übrigens von Haus aus klein von der zweiten Ordnung ist, sucht die Axe beziehungsweise den Rahmen in die Höhe zu heben und wird durch die Bauart des Integrierapparates vernichtet.

11. Nehmen wir jetzt an, die Umdrehungsaxe der Rolle liege richtig, die Rolle selbst aber sei schräg auf ihr befestigt; nämlich, die Normale der Rolle bilde einen kleinen Winkel γ mit der Axe. In diesem Falle wirkt der Antrieb, welchen bei der Verschiebung dy des Fahrstiftes der momentan in Berührung befindliche Kugelpunkt auf den berührten Punkt der Rollenperipherie ausübt, stets in der zur Umdrehungsaxe (und zum Berührungsradius) der Rolle senkrechten Richtung, wie die momentane Drehungsphase der Rolle auch sein mag. Diese Bewegung bringt also nur eine Drehung der Rolle um ihre Axe hervor, und zwar die, welcher die lineare Verschiebung des Berührungspunktes um

$$\frac{C_n \sin \lambda_{ni} dy}{L}$$

entspricht, wie bei correctem Analysator. Hierin ist λ_{ni} die geographische Länge des Berührungspunktes. Diese ist nun

¹ Man kann neben die beiden üblichen Begriffe der »Gleit-« und »Rollreibung« noch einen dritten, der »Rotationsreibung« stellen. Ich verstehe darunter die Reibung, welche zustande kommt, wenn von zwei sich in einem Punkte berührenden Körpern der eine eine relative Rotation gegen den anderen ausführt, deren Axe auf der Tangentialebene im Berührungspunkte senkrecht steht.

offenbar in unserem Falle, entgegen dem des correcten Analysators, von der Drehungsphase der Rolle abhängig. In einem gegebenen Augenblicke bilde die Ebene, welche die Umdrehungsaxe und deren Projection auf die Ebene der Rolle enthält, den Winkel ψ mit der Ebene, welche die Umdrehungsaxe enthält und der Z-Axe parallel ist. Dann ist λ_{ni} eine Function von ψ und kann daher nur für bestimmte Werte von ψ den richtigen Wert $\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c}$ haben. Bezeichnen wir die geographische Länge des Mittelpunktes der Rolle mit

$$\left(\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c} \right) + \sigma,$$

wo σ eine Constante ist, so ist die geographische Länge des Berührungspunktes

$$\lambda_{ni} = \left(\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c} \right) + \sigma + \Delta\lambda_{ni},$$

wo $\Delta\lambda_{ni}$ eine Function von ψ ist. Das constante Fehlerglied, σ , wird sich, wie man sieht, vereinigen mit einem »Fehler des Anfangszustandes«, nämlich der Verschiedenheit des Anfangswertes Λ_{ni} der geographischen Länge der Rolle von $(i+1)\frac{\pi}{2}$, einer Fehlerquelle, die später ja für sich berücksichtigt werden soll; der Einfachheit halber lasse ich also dieses Glied schon hier fort.

Will man nun den der obigen linearen Verschiebung entsprechenden Drehungswinkel finden, so muss man berücksichtigen, dass der Arm dieser Verschiebung, d. h. der Abstand ihres Angriffspunktes von der Umdrehungsaxe, in unserem Falle nicht gleich M_{ni} ist: mit ψ ändert er sich. Man sieht indessen durch Betrachtung seiner extremen Werte sofort, dass diese Variationen nur von zweiter Ordnung, also zu vernachlässigen sind. Man erhält also für die Drehung der Rolle, wenn man noch den Ausdruck für λ_{ni} einsetzt,

$$\begin{aligned} dy_{ni} &= \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \left\{ \Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c} + \Delta\lambda_{ni} \right\} dy = \\ &= \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \left(\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c} \right) dy + \frac{C_n}{LM_{ni}} \cos \left(\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c} \right) dy \cdot \Delta\lambda_{ni}. \end{aligned}$$

Das zweite Glied rechts ist das Fehlerglied. Der erste Factor (bis zum Punkte) in demselben ist, ebenso wie das vorhergehende Glied, von der 0ten Ordnung. Der zweite Factor, $\Delta\lambda_{ni}$, erreicht seinen größten Wert, wenn $\psi = 90^\circ$ ist; er beträgt aber dann nur $\frac{M_{ni}\beta}{K_n}$. Die kleine Größe erster Ordnung β erscheint hier noch mit dem kleinen Factor $\frac{M_{ni}}{K_n}$ multipliziert.

Man kann sich infolge dessen erlauben, die Größe $\Delta\lambda_{ni}$, obwohl sie nicht im strengen Sinne des Wortes als eine Größe zweiter Ordnung bezeichnet werden kann, zu vernachlässigen. Dann hat man

$$d\mu_{ni} = \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}\right) dy,$$

genau so, wie bei correctem Analysator. Ich bemerke übrigens, dass durch eine Maßnahme beim Analysieren, welche zur Elimination einer anderen Fehlerquelle dient und von welcher später (24.) die Rede sein wird, auch das soeben betrachtete Fehlerglied mit eliminiert wird.

Wird dagegen der Fahrstift verschoben parallel zur x -Axe um dx , so wird der Rahmen um die Z -Axe gedreht. Jede Rolle erhält dadurch einen Antrieb parallel zu ihrer Umdrehungsaxe, und es ist klar, dass dabei ihre schräge Befestigung auf dieser Axe weder ihre Lage in der XY -Ebene irgendwie alterieren, noch eine Drehung um diese Axe verursachen kann.

12. Betrachten wir jetzt den Fall (siehe Fig. 5), dass der Cylinder C_n ¹ schräg auf seiner Axe (auf seiner Walze) befestigt ist, so dass seine geometrische, d. h. zu den Erzeugenden parallele Axe mit seiner Umdrehungsaxe einen kleinen Winkel ϵ bildet. Da bei correctem Analysator der Mittelpunkt des Durchschnittes des Cylinders durch die YZ -Ebene — diesen Punkt nenne ich den Mittelpunkt des Cylinders — auf der Umdrehungsaxe des Cylinders liegt und infolge dessen durch die Z -Axe getroffen wird, so hat man auch hier anzunehmen, dies

¹ In der Figur ist der Cylinder der Deutlichkeit halber übertrieben lang gezeichnet.

sei der Fall. Man lege nun durch den Mittelpunkt des Cylinders ein rechtwinkliges Coordinatensystem $C_n \xi \eta \zeta$, parallel dem Coordinatensystem $OXYZ$; dann ist $X = \xi$, $Y = \eta$, $Z = \zeta - h$, wo h die Höhe des Kugelmittelpunktes über dem Cylindermittelpunkte bezeichnet. Bei der Fahrt parallel der Axe oy wird die geometrische Axe des Cylinders um die ξ -Axe einen Kegel beschreiben. Nennen wir diejenige Lage der Cylinderaxe, in welcher sie in der $\xi\zeta$ -Ebene liegt und von links oben nach rechts unten geht, ihre Anfangslage; den Winkel, um welchen der Cylinder von dieser Anfangslage aus gedreht werden müsste

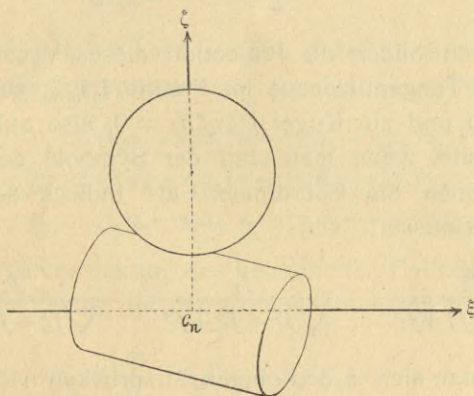


Fig. 5.

im Sinne von der ζ - gegen die η -Axe, um die im gegebenen Augenblicke (siehe Fig. 5) stattfindende Lage einzunehmen, bezeichnen wir mit φ . Die Richtung der Cylinderaxe ist also vollständig definiert durch die Winkel ϵ (constant) und φ (veränderlich).

Für einen bestimmten Wert von φ , sind die Coordinaten $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ des Berührungspunktes des Cylinders mit der Kugel, die Höhe h des Kugelmittelpunktes, sowie die Verrückung \bar{dl} , welche der momentan in Berührung befindliche materielle Punkt des Cylinders erfährt bei weiterer Drehung des Cylinders um $d\varphi$, bestimmt; die Drehung der Kugel, welche erfolgen wird, ist die, welche ihr ertheilt wird durch die in die Tangentialebene der Kugel fallende Componente der Verrückung \bar{dl} des Cylinder-

punktes; die zur Kugel senkrechte Componente dieser Ver-
rückung hat auf die Drehung der Kugel keinen Einfluss.¹
Nehmen wir vorläufig an, die $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, h$ seien für das ge-
gebene φ bereits berechnet; man kann schon im Voraus
bemerken, dass es jedenfalls sein wird $\xi_0 = [\varepsilon \cong 1]$, $\eta_0 = [\varepsilon \cong 1]$,
 $\zeta_0 = C_n + [\varepsilon \cong 1]$, $h - \zeta_0 = K_n + [\varepsilon \cong 1]$, wo jedesmal unter $[\varepsilon^v]$
Glieder von v ter Ordnung des ε verstanden werden. Die Ver-
rückung \overline{dl} ist ein Vector, dessen Componenten längs der
Axen $\xi\eta\zeta$, wie leicht einzusehen, folgende sein werden:

$$(dl)_1 = 0, \quad (dl)_2 = \zeta_0 d\varphi = \frac{\zeta_0}{L} dy, \quad (dl)_3 = -\eta_0 d\varphi = -\frac{\eta_0}{L} dy;$$

wir haben zu bilden die Projection dieses Vectors auf die
gemeinsame Tangentialebene im Punkte $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ zum Cylinder
 $F(\xi\eta\zeta\varphi) = 0$ und zur Kugel $f(\xi\eta\zeta h) = 0$, also auf die Ebene,
deren Normale, wenn man statt der Symbole der partiellen
Differentiationen die Coordinaten als Indices schreibt, die
Richtungscosinusse

$$\frac{f_\xi}{\sqrt{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2}}, \quad \frac{f_\eta}{\sqrt{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2}}, \quad \frac{f_\zeta}{\sqrt{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2}}$$

hat, wobei man sich in den obigen Ausdrücken nach der Diffe-
rentiation die Werte $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0, \zeta = \zeta_0$ eingesetzt zu denken
hat. Wie aus den elementarsten Sätzen der Vektorenrechnung
leicht zu folgern, besteht, wenn ein Vector $\bar{p} = p_1i + p_2j + p_3k$
die Projection eines Vectors $\bar{a} = a_1i + a_2j + a_3k$ auf eine zu
dem Einheitsvector $\bar{v} = v_1i + v_2j + v_3k$ senkrechte Ebene ist,
zwischen den Einheitsvectors $\bar{\pi}$ und \bar{a} der beiden Vectors
 \bar{p} und \bar{a} die Relation²

$$\bar{\pi} = \mathbf{V}\bar{\sigma}\bar{v},$$

wo $\bar{\sigma}$ den Einheitsvector des Vectors $\bar{s} = \mathbf{V}\bar{v}\bar{a}$ bezeichnet; also
die Componenten des Vectors $\bar{\pi}$ sind

¹ Sie findet ihre volle Berücksichtigung darin, dass wir später die That-
sache des abwechselnden Steigens und Fallens der Kugel, oder der Oscillationen
des h , in Betracht ziehen werden.

² \mathbf{V} und \mathbf{S} sind Operationssymbole für Vectorialproduct und Scalar-
product.

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1 &= \sigma_2 \nu_3 - \sigma_3 \nu_2 = \frac{(\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) \nu_3 - (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1) \nu_2}{\sqrt{(\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)^2 + (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1)^2 + (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2)^2}} = \\ &= \frac{(\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) \nu_3 - (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1) \nu_2}{\sqrt{(\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)^2 + (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1)^2 + (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2)^2}} = \\ &= \frac{(\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) \nu_3 - (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1) \nu_2}{\mathbf{S} \bar{a} \bar{\pi}}, \end{aligned}$$

$$\bar{\pi}_2 = \frac{(\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1) \nu_1 - (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2) \nu_3}{\mathbf{S} \bar{a} \bar{\pi}},$$

$$\bar{\pi}_3 = \frac{(\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2) \nu_2 - (\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) \nu_1}{\mathbf{S} \bar{a} \bar{\pi}};$$

die Projection \bar{p} selbst aber ist dann gegeben durch $\bar{p} = \bar{\pi} \cdot \mathbf{S} \bar{a} \bar{\pi}$ oder durch die Componenten

$$\begin{aligned} p_1 &= (\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) \nu_3 - (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1) \nu_2, \\ p_2 &= (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1) \nu_1 - (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2) \nu_3, \\ p_3 &= (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2) \nu_2 - (\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3) \nu_1. \end{aligned}$$

Die Tangentialverrückung des betrachteten Cylinderpunktes ist demnach ein Vector mit den Componenten auf den Axen xyz :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{dy}{\dagger L} [f_{\xi} f_{\zeta} \eta_0 - f_{\xi} f_{\tau} \zeta_0], \\ p_2 &= \frac{dy}{\dagger L} [(f_{\xi}^2 + f_{\zeta}^2) \zeta_0 + f_{\tau} f_{\zeta} \eta_0], \\ p_3 &= -\frac{dy}{\dagger L} [(f_{\xi}^2 + f_{\tau}^2) \eta_0 + f_{\tau} f_{\xi} \zeta_0], \end{aligned}$$

wo der Kürze halber \dagger anstatt $f_{\xi}^2 + f_{\tau}^2 + f_{\zeta}^2$ geschrieben wurde. Sich dem anstoßenden Kugelpunkte, dessen Coordinaten $X_0 = \xi_0$, $Y_0 = \tau_0$, $Z_0 = \zeta_0 - h$ sind, mittheilend, würde diese Verrückung eine Drehung $\bar{\chi}$ der Kugel um ihren Mittelpunkt hervorbringen,

$$\bar{\chi} = \frac{1}{K^2} \mathbf{V} \bar{r}_0 \bar{p}, \quad \bar{r}_0 = \xi_0 i + \tau_0 j + (\zeta_0 - h) k;$$

ein Zustandekommen der componenten Rotation um die Z -Axe, χ_Z , kommt hier nicht in Betracht, da der Wert von x

festgehalten wird; dagegen übertragen sich auf die Rollen die beiden übrigen componenten Drehungen, um die X - und um die Y -Axe, welche sind

$$\begin{aligned}\chi_X &= \frac{1}{K_n^2} \{ \eta_0 p_3 - (\zeta_0 - h) p_2 \} = \\ &= \frac{dy}{LK_n^2 \dot{\varphi}} \{ -\eta_0 [(f_\xi^2 + f_\eta^2) \eta_0 + f_\eta f_\xi \zeta_0] + (h - \zeta_0) [(f_\xi^2 + f_\eta^2) \zeta_0 + f_\eta f_\xi \eta_0] \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_Y &= \frac{1}{K_n^2} \{ (\zeta_0 - h) p_1 - \xi_0 p_3 \} = \\ &= \frac{dy}{LK_n^2 \dot{\varphi}} \{ (h - \zeta_0) [f_\xi f_\eta \zeta_0 - f_\xi f_\zeta \eta_0] + \xi_0 [(f_\xi^2 + f_\eta^2) \eta_0 + f_\eta f_\xi \zeta_0] \}.\end{aligned}$$

Infolge dieser Drehungen dreht sich die Rolle M_{ni} um ihre Axe um den Winkel

$$d\varphi_{ni} = -\frac{K_n}{M_{ni}} [\chi_X \cos(\lambda_{ni} + 90^\circ) + \chi_Y \cos \lambda_{ni}].$$

Die Werte $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, h$ hat man selbstverständlich zu finden als die gemeinsame Lösung der vier Gleichungen

$$\left. \begin{aligned}F(\xi \eta \zeta \varphi) &= 0 \\ f(\xi \eta \zeta h) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} : \frac{\partial F}{\partial \eta} : \frac{\partial F}{\partial \zeta} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta} : \frac{\partial f}{\partial \zeta}\end{aligned} \right\},$$

mit anderen Worten, der vier Gleichungen

$$\left. \begin{aligned}F(\xi \eta \zeta \varphi) &= 0 \\ f(\xi \eta \zeta h) &= 0 \\ F_\xi^2 (f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2) &= f_\xi^2 (F_\xi^2 + F_\eta^2 + F_\zeta^2) \\ F_\eta^2 (f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2) &= f_\eta^2 (F_\xi^2 + F_\eta^2 + F_\zeta^2)\end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}F(\xi \eta \zeta \varphi) &= \xi^2 \sin^2 \varepsilon + \eta^2 [1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \varepsilon] + \zeta^2 [1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \varepsilon] - \\ &\quad - 2\eta \zeta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \varepsilon + 2\zeta \xi \cos \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \\ &\quad + 2\xi \eta \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon - C_n^2,\end{aligned}$$

$$f(\xi \eta \zeta h) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2h\zeta + h^2 - K_n^2,$$

$$F_{\xi} = 2\xi \sin^2 \varepsilon + 2\zeta \cos \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon + 2\eta \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon,$$

$$f_{\xi} = 2\xi,$$

$$F_{\eta} = 2\eta(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \varepsilon) - 2\zeta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \varepsilon + 2\xi \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon,$$

$$f_{\eta} = 2\eta,$$

$$F_{\zeta} = 2\zeta(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \varepsilon) - 2\eta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \varepsilon + 2\xi \cos \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon,$$

$$f_{\zeta} = -2(h - \zeta),$$

und daher

$$F_{\xi}^2 = 4\zeta^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varepsilon + 8\eta\zeta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \varepsilon + [\varepsilon^{\cong 4}],$$

$$F_{\eta}^2 = 4\eta^2 - 8\eta\zeta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \varepsilon + 8\xi\eta \sin \varphi \sin \varepsilon + [\varepsilon^{\cong 4}],$$

$$F_{\zeta}^2 = 4\zeta^2(1 - 2\cos^2 \varphi \sin^2 \varepsilon) - 8\eta\zeta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \varepsilon + \\ + 8\xi\zeta \cos \varphi \sin \varepsilon + [\varepsilon^{\cong 4}];$$

die dritte und die vierte der Gleichungen (6) werden daher (unter Berücksichtigung der zweiten): die dritte zu

$$16(\zeta^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varepsilon + 2\eta\zeta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \varepsilon) K_n^2 = 16\xi^2 \zeta^2 + [\varepsilon^{\cong 4}]$$

oder

$$\zeta^2 \cdot K_n^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varepsilon = \zeta^2 \cdot \xi^2 + [\varepsilon^{\cong 4}],$$

woraus man sieht, dass ξ von der ersten Ordnung ist [so dass in den Ausdrücken für F_{ξ}^2 , F_{η}^2 , F_{ζ}^2 jetzt das Zeichen \cong im Exponent fortgelassen werden kann], und die vierte zu

$$16(\eta^2 - 2\eta\zeta \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \varepsilon + 2\xi\eta \sin \varphi \sin \varepsilon) K_n^2 = 16\eta^2 \zeta^2 + [\varepsilon^{\cong 4}]$$

oder (da wir jetzt aus der ersten Gleichung (6) sehen, dass $\zeta^2 = C_n^2 + [\varepsilon^2]$ ist)

$$\eta^2 \cdot (K_n^2 - C_n^2) - 2\eta[C_n K_n^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \sin^2 \varepsilon - K_n^2 \sin \varphi \cdot \xi \sin \varepsilon] = [\varepsilon^4],$$

woraus man sieht, dass η von der zweiten Ordnung ist. Wir sehen jetzt, wenn wir noch die aus der zweiten Gleichung (6) sich jetzt ergebende Folgerung $h - \zeta = K_n + [\varepsilon^2]$ berücksichtigen, dass die Ausdrücke in den geschwungenen Klammern der Formeln für χ_X und χ_Y gleich sind beziehungsweise

$$+ 4 C_n K_n^3 + [\varepsilon^2] \quad \text{und} \quad [\varepsilon^3];$$

das f im Nenner ist $= 4K_n^2$; wir erhalten somit schließlich

$$dy_{ni} = \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy,$$

wobei in dem Coefficient von dy nur Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt sind.

Außerdem findet bei dem zur Axe oy parallelen Verschieben des Instrumentes noch eine andere Erscheinung statt: die, dass die Kugel als Ganzes abwechselnd steigt und sinkt. Dies bewirkt in jedem Augenblicke eine Drehung der Rollen um ihre Axen; da wir aber hier nicht mit einer Drehung der Kugel, sondern mit ihrem Fortschreiten als Ganzes, zu thun haben, ist klar, dass der Einfluss auf die Rollen unabhängig ist von deren geographischen Längen, also davon, bei welchem Werte von x dieses zur Axe oy parallele Verschieben ausgeführt wird. Aus dieser Bemerkung folgt, dass dieser Fehler sich im Resultate aufheben wird, wenn bei der Umfahrung man zuletzt in einem Punkte anlangt, welcher das gleiche y wie der Ausgangspunkt hat.

Es bleibt noch übrig, den Einfluss der schrägen Anbringung des Cylinders während eines Verschiebens des Fahrstiftes parallel der Axe ox zu untersuchen. Infolge der schiefen Stellung des Cylinders befindet sich der Stützpunkt der Kugel auf dem Cylinder etwas abseits von der durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Verticalen; wird also der Rahmen um einen Winkel $\omega = -n \frac{2\pi dx}{c}$ gedreht, so wird der Kugel durch die Rollen der Antrieb zur Rotation in einer Ebene mitgetheilt, welche nicht senkrecht sondern geneigt steht zur Verbindungslinie ihres Mittelpunktes mit ihrem Stützpunkte auf dem Cylinder. Ich zerlege diese Rotation ω um die Z -Axe auf zwei Rotationsaxen, deren eine, b , vom Mittelpunkte nach dem dem Stützpunkte gegenüberstehenden Punkte der Kugel gerichtet ist, die andere, a , aber nach demjenigen Punkte der Kugel, welcher vom Pole der Axe b , im Sinne von demselben nach dem Pole der Z -Axe, um 90° entfernt ist. Da die Axe b durch den Stützpunkt geht, kann sich die Kugel um diese Axe frei drehen; die Componente ω_b der Z -Rotation kommt also ungehindert

zustande; für die componente Rotation ω_a dagegen ist es, da eine solche Rotation in einer durch den Stützpunkt gehenden Ebene erfolgen und daher einem Gleiten der Kugel auf dem Cylinder entsprechen würde, möglich, dass diese Bewegung, ganz oder zu einem Theile $\nu\omega_a$, durch die Reibung vernichtet wird. Man kann dann die effective Bewegung der Kugel dadurch darstellen, dass die Kugel erstens vollständig durch die Umdrehung des Rahmens um die Z -Axe mitgenommen wird, zweitens aber noch eine Zusatzbewegung besitzt, die in einer Rotation $-\nu\omega_a = -\nu\left(\frac{-2n\pi dx}{c} \sin \sigma\right)$ um die Axe a besteht; dabei bedeutet σ den (absolut genommenen) kleinen Winkel zwischen dem Radiusvector des Berührungspunktes Kugel-Cylinder und der abwärts gerichteten Verticalen, und ist $0 \leq \nu \leq 1$.—Diese Zusatzbewegung kann die Rollen in Drehung um ihre Axen versetzen, und eben darin besteht der in dem hier betrachteten Falle entstehende Fehler. Nun fällt aber die Z -Componente dieser Zusatzrotation offenbar außer Betracht, schon aus dem Grunde, weil sie zweiter Ordnung ist; ihre andere Componente dagegen ist von der ersten Ordnung und wird, als eine Rotation um eine in der XY -Ebene liegende Axe, die Rollen in Drehung um ihre eigenen Axen versetzen. Diese Componente hat den Wert

$$+\nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin \sigma \cos \sigma,$$

und sie ist den beiden simultanen Rotationen der Kugel:

$$+\nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin \sigma \cos \sigma \cdot \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}$$

um die X -Axe und

$$+\nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin \sigma \cos \sigma \cdot \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}$$

um die Y -Axe (das Wurzelzeichen bedeutet beide Male den absoluten Wert der Quadratwurzel) äquivalent. Die Drehung der Rolle M_{ni} um ihre Axe, welche infolge davon entsteht, beträgt demnach

$$d\mu_{ni} = -\frac{K_n}{M_{ni}} \cdot \nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin \sigma \cos \sigma \cdot \frac{X_0 \cos(\lambda_{ni} + 90^\circ) + Y_0 \cos \lambda_{ni}}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}},$$

und wenn man noch berücksichtigt, dass $\sin \sigma = \frac{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}{K_n}$,

dass $\cos \sigma - 1$ und Y_0 Größen zweiter Ordnung sind, schließlich, dass $X_0 = -K_n \cos \varphi \sin \varepsilon + [\varepsilon^3]$ ist (wie aus $X_0^2 = \xi_0^2 = K_n^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varepsilon + [\varepsilon^4]$ hervorgeht), so erhält man für diese Zusatzdrehung der Rolle

$$\begin{aligned} d\mu_{ni} &= +\nu \frac{K_n}{M_{ni}} \frac{2n\pi}{c} \cos \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda_{ni} dx = \\ &= +\frac{K_n}{M_{ni}} \frac{2n\pi}{c} \nu \sin \varepsilon \cdot \cos \left(\frac{y}{L} + \Gamma_n \right) \sin \lambda_{ni} dx, \end{aligned}$$

wo Γ_n der Wert von φ für $y = 0$ ist. Was den »Reibungscoefficient« (in gewissem Sinne des Wortes) ν anbelangt, so kann zwar nicht behauptet werden, dass derselbe während der Umfahrung constant bleibt; es ist jedoch zum mindesten eine sehr wahrscheinliche Annahme, dass die Schwankungen des ν innerhalb enger Grenzen bleiben, so dass sie bei dem kleinen Factor $\sin \varepsilon$ außeracht gelassen werden dürfen.¹ Unter dieser Voraussetzung können wir schreiben:

$$d\mu_{ni} = +\frac{n\gamma_n}{M_{ni}} \cos \left(\frac{y}{L} + \Gamma_n \right) \sin \lambda_{ni} dx, \quad (7)$$

wo γ_n und Γ_n unbekannte Instrumentalconstanten des n ten Integrierapparates bedeuten und γ_n von der ersten Ordnung klein ist.

¹ Die Erfahrung bestätigt das, wie sich später zeigen wird.

Die ganz strenge Behandlung dieses Gegenstandes stößt auf große Schwierigkeiten, die theils in den Unvollkommenheiten der Reibungstheorie (z. B. in der mangelnden Kenntnis der Abhängigkeit des kinetischen Reibungscoefficienten von den Geschwindigkeiten, sowie auch in den verschiedenen Unbestimmtheiten, wie sie in analytischer Behandlung von Reibungsfragen nicht selten auftreten) ihre Quelle haben, anderentheils damit zusammenhängen, dass es dem mit dem Analysator Arbeitenden kaum möglich sein wird, die physikalischen Eigenschaften der sich berührenden Substanzen und Flächen zu kennen.

13. Ich gehe jetzt über zur Betrachtung der Excentricität der Rollen. Die nachstehende Figur ist der Durchschnitt des Apparates mit der durch die Rotationsachsen der Rollen gelegten Ebene. Die Umdrehungsaxe des Rahmens (die Z -Axe), die zugleich auch das Centrum des Cylinders enthält, trifft diese Ebene in einem Punkte, der in der Figur mit O bezeichnet ist; diesen Punkt nenne ich das Umdrehungscentrum des Rahmens. Ich nenne für jede Rolle denjenigen ihrer materiellen Punkte, welcher (dauernd) den Schnittpunkt der durch ihre Peripherie gelegten Ebene mit ihrer Rotationsaxe bildet, das Umdrehungscentrum dieser Rolle (in der Figur U_1, U_2, U_3), im Gegensatze

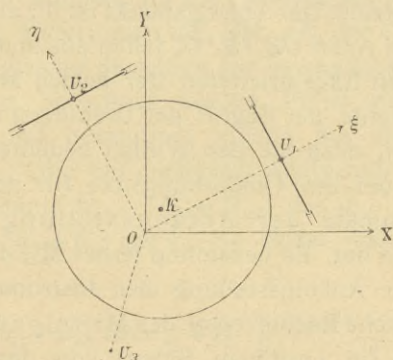


Fig. 6.

zu ihrem Mittelpunkte (dem Mittelpunkte ihrer Figur), der sich in unserem Falle, obwohl ebenfalls in der letzteren Ebene, jedoch außerhalb der Rotationsaxe befindet. Die Umdrehungscentra der beiden Messrollen und das Umdrehungscentrum des Rahmens sind drei fest miteinander und mit dem Rahmen verbundene Punkte. Dagegen wird der Mittelpunkt der Kugel, K , nicht — wenigstens nicht dauernd, — auf der Umdrehungsaxe des Rahmens bleiben können, sondern eine mit den Drehungsphasen der beiden Messrollen veränderliche Lage außerhalb der Z -Axe einnehmen, weil die Kugel, vermöge der Wirkung der Stützrolle, mit den excentrisch sich drehenden Messrollen stets in Berührung bleibt.

In den folgenden Betrachtungen der Vorgänge bei einer Verschiebung des Fahrstiftes gebrauche ich außer dem Coordinatensystem $OXYZ$ noch ein anderes ebenfalls zum Gerüst

des Analysators festes Coordinatensystem; außerdem stellenweise ein bewegliches System. Die Ebenen sämtlicher Rollen sind nämlich fest mit dem Rahmen verbundene Ebenen, die immer durch die Axe OZ gehen und die von der ZX -Ebene um die veränderlichen Winkel $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}$ abgelenkt sind. Nun nehme ich bei Betrachtung einer Verschiebung des Fahrstiftes die Ebenen der Messrollen M_{n1}, M_{n2} als $Z\xi$ -, beziehungsweise ZH -Ebene eines sich drehenden Coordinatensystems, gleichzeitig aber die in Bezug auf das Gerüst festgehaltenen Lagen, welche diese Ebenen zu Beginn der betrachteten Verschiebung einnahmen, als $\xi\xi$ -, beziehungsweise $\zeta\eta$ -Ebene eines festen Coordinatensystems. Der Anfangspunkt ist für alle drei Systeme derselbe, O ; die Axen $OZ, OZ, O\xi$ fallen zusammen.

Die linearen Excentricitäten der beiden Messrollen seien Δ_{n1}, Δ_{n2} . Es werde der Begriff der Drehungsphase μ_{ni} dahin präciser gefasst, dass sie den Winkel bedeutet, um welchen sich die Rolle um ihre Umdrehungsaxe (in positivem Sinne) seit dem Zeitpunkte der Anfangsstellung des Instrumentes gedreht hat. Es bezeichne ferner M_{ni} den Winkel, um welchen in der Anfangsstellung des Instrumentes der umdrehungscentrische Radiusvector des Mittelpunktes der Rolle abgelenkt war (in positivem Sinne) von dem zur Z -Axe parallelen umdrehungscentrischen Radiusvector. Schließlich seien D_{n1}, D_{n2} die constanten Abstände, in welchen die Umdrehungscentra der Messrollen M_{n1}, M_{n2} von der Umdrehungsaxe des Rahmens angebracht sind, und h_n die constante Höhe der Ebene dieser Umdrehungscentra der Rollen über der Axe des Cylinders.

Dann sind für den Zeitpunkt bestimmter Drehungsphasen μ_{n1}, μ_{n2} der beiden Messrollen die Gleichungen der Rollenperipherien im Coordinatensystem $\Xi H Z$:

für die Rolle M_{n1} :

$$\begin{cases} (\Xi - D_{n1} - \Delta_{n1} \sin u_{n1})^2 + (Z - \Delta_{n1} \cos u_{n1})^2 = M_{n1}^2 \\ H = 0 \end{cases}$$

und für die Rolle M_{n2} :

$$\begin{cases} (H - D_{n2} - \Delta_{n2} \sin u_{n2})^2 + (Z - \Delta_{n2} \cos u_{n2})^2 = M_{n2}^2 \\ \Xi = 0, \end{cases}$$

wenn man, zur Abkürzung, u_{ni} anstatt $\mu_{ni} + M_{ni}$ schreibt; u_{ni} ist demnach, sozusagen, die umdrehungscentriche Zenithdistanz des Mittelpunktes. Dadurch, dass die Kugel stets diese beiden Kreise und die Cylinderfläche berühren muss, sind für gegebene Drehungsphasen der beiden Messrollen die Lage $\Xi_0 H_0 Z_0$ des Mittelpunktes der Kugel, der Punkt $\Xi_1 H_1 Z_1$ in welchem die Berührung zwischen der Kugel und der Rolle M_{n1} stattfindet, der Punkt $\Xi_2 H_2 Z_2$ der Berührung zwischen Kugel und Rolle M_{n2} , und der Punkt $\Xi_{IV} H_{IV} Z_{IV}$ der Berührung zwischen der Kugel und dem Cylinder vollständig bestimmt. Es können also die zwölf Coordinaten in Function der Argumente $u_{n1} u_{n2}$ berechnet werden; ebenso können, für die Änderungen $du_{n1} du_{n2}$ dieser Argumente, die Änderungen $d\Xi_0 dH_0 dZ_0$ der Coordinaten des Mittelpunktes, welche dieselben im beweglichen Coordinatensystem erfahren, berechnet werden. Führt man diese Rechnungen aus, und bezeichnet zuletzt die kleine Constante $D_{n1} - (K_n + M_{n1})$ (die bei correctem Analysator 0 ist) mit d_{n1} , die kleine Constante $D_{n2} - (K_n + M_{n2})$ mit d_{n2} , und die kleine Constante $h_n - (K_n + C_n)$ mit k_n , so findet man die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \Xi_0 &= d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1} + II \\ H_0 &= d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2} + II \\ Z_0 &= -k_n + II \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Xi_1 - \Xi_0 &= K_n + II \\ H_1 - H_0 &= -d_{n2} - \Delta_{n2} \sin u_{n2} + II \\ Z_1 - Z_0 &= \frac{K_n}{K_n + M_{n1}} k_n + \frac{K_n}{K_n + M_{n1}} \Delta_{n1} \cos u_{n1} + II \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Xi_2 - \Xi_0 &= -d_{n1} - \Delta_{n1} \sin u_{n1} + II \\ H_2 - H_0 &= K_n + II \\ Z_2 - Z_0 &= \frac{K_n}{K_n + M_{n2}} k_n + \frac{K_n}{K_n + M_{n2}} \Delta_{n2} \cos u_{n2} + II, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

worin II Glieder andeutet, welche constante Coefficienten enthalten, die von zweiter oder höheren Ordnungen klein sind; ferner ist, wie auch unmittelbar aus der Anschauung klar,

$$X_W - X_0 = 0, \quad Y_W - Y_0 = -\frac{K_n}{K_n + C_n} Y_0,$$

$$Z_W - Z_0 = -\frac{K_n}{K_n + C_n} (h_n + Z_0),$$

und daher

$$\left. \begin{aligned} \Xi_W - \Xi_0 &= -\frac{K_n}{K_n + C_n} \left[(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + \right. \\ &\quad \left. + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1} \right] \sin \lambda_{n1} + II \\ H_W - H_0 &= -\frac{K_n}{K_n + C_n} \left[(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + \right. \\ &\quad \left. + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1} \right] \cos \lambda_{n1} + II \\ Z_W - Z_0 &= -K_n + II; \end{aligned} \right\} (11)$$

für die Änderungen aber der Coordinaten des Mittelpunktes findet man

$$\left. \begin{aligned} d\Xi_0 &= \Delta_{n1} \cos u_{n1} du_{n1} + II \\ dH_0 &= \Delta_{n2} \cos u_{n2} du_{n2} + II \\ dZ_0 &= II. \end{aligned} \right\} (12)$$

a) Betrachten wir zunächst den Fall einer Fahrt des Stiftes parallel zur y -Axe allein. Als das (zum Analysator) feste Coordinatensystem wollen wir hier das System $\xi\eta\zeta$ verwenden. Da in dem hier betrachteten speciellen Falle das System $\Xi H Z$ mit dem System $\xi\eta\zeta$ nicht bloß zusammenfällt, sondern gegen das letztere auch keine Bewegung besitzt, gelten nicht bloß die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1} + II \\ \eta_0 &= d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2} + II \\ \zeta_0 &= -k_n + II \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 - \xi_0 &= K_n + II \\ \eta_1 - \eta_0 &= -d_{n2} - \Delta_{n2} \sin u_{n2} + II \\ \zeta_1 - \zeta_0 &= \frac{K_n}{K_n + M_{n1}} k_n + \frac{K_n}{K_n + M_{n1}} \Delta_{n1} \cos u_{n1} + II \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 - \xi_0 &= -d_{n1} - \Delta_{n1} \sin u_{n1} + II \\ \eta_2 - \eta_0 &= K_n + II \\ \zeta_2 - \zeta_0 &= \frac{K_n}{K_n + M_{n2}} k_n + \frac{K_n}{K_n + M_{n2}} \Delta_{n2} \cos u_{n2} + II \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_W - \xi_0 &= -\frac{K_n}{K_n + C_n} \left[(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + \right. \\ &\quad \left. + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1} \right] \sin \lambda_{n1} + II \\ \eta_W - \eta_0 &= -\frac{K_n}{K_n + C_n} \left[(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + \right. \\ &\quad \left. + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1} \right] \cos \lambda_{n1} + II \\ \zeta_W - \zeta_0 &= -K_n + II, \end{aligned} \right\} (16)$$

sondern auch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} d\xi_0 &= \Delta_{n1} \cos u_{n1} du_{n1} + II \\ d\eta_0 &= \Delta_{n2} \cos u_{n2} du_{n2} + II \\ d\zeta_0 &= II. \end{aligned} \right\} (17)$$

Die infinitesimale Bewegung der Kugel in dem System $\xi\eta\zeta$, welche erfolgen wird, kann dargestellt werden durch eine infinitesimale Translation \bar{m} des Mittelpunktes der Kugel, verbunden mit einer infinitesimalen Drehung der Kugel um denselben, $\bar{\omega}$. Hatte zu Beginn dieser infinitesimalen Bewegung der Mittelpunkt die Coordinaten $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und irgendein anderer Punkt der Kugel die Coordinaten $\xi_1\eta_1\zeta_1$, so erleidet der letztere materielle Punkt der Kugel dadurch eine Verrückung \bar{s} , deren Componenten (Projectionen) $s_\xi s_\eta s_\zeta$ auf den festen Axen $\xi\eta\zeta$ zusammenhängen mit den Componenten $m_\xi = d\xi_0$, $m_\eta = d\eta_0$, $m_\zeta = d\zeta_0$ des Vectors \bar{m} und mit den Componenten $\omega_\xi \omega_\eta \omega_\zeta$ des Vectors $\bar{\omega}$ durch die Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} s_\xi &= d\xi_0 + \omega_\eta (\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_\zeta (\eta_1 - \eta_0) \\ s_\eta &= d\eta_0 + \omega_\zeta (\xi_1 - \xi_0) - \omega_\xi (\zeta_1 - \zeta_0) \\ s_\zeta &= d\zeta_0 + \omega_\xi (\eta_1 - \eta_0) - \omega_\eta (\xi_1 - \xi_0); \end{aligned} \right.$$

auf den rechten Seiten dieser Gleichungen können die Werte (17), (14) eingesetzt werden. Derjenige Punkt der Kugel, welcher

zu Beginn ihrer infinitesimalen Bewegung die Coordinaten $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ hatte, erleidet eine Verrückung \bar{t} mit den Componenten

$$\left\{ \begin{array}{l} t_\xi = d\xi_0 + \omega_\tau(\zeta_2 - \zeta_0) - \omega_z(\eta_2 - \eta_0) \\ t_\eta = d\eta_0 + \omega_z(\xi_2 - \xi_0) - \omega_\xi(\zeta_2 - \zeta_0) \\ t_z = d\zeta_0 + \omega_\xi(\eta_2 - \eta_0) - \omega_\tau(\xi_2 - \xi_0). \end{array} \right.$$

Derjenige Punkt der Kugel, welcher die Coordinaten $\xi_W \eta_W \zeta_W$ hatte, erleidet eine Verrückung \bar{w} mit den Componenten

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\xi = d\xi_0 + \omega_\tau(\zeta_W - \zeta_0) - \omega_z(\eta_W - \eta_0) \\ w_\eta = d\eta_0 + \omega_z(\xi_W - \xi_0) - \omega_\xi(\zeta_W - \zeta_0) \\ w_z = d\zeta_0 + \omega_\xi(\eta_W - \eta_0) - \omega_\tau(\xi_W - \xi_0). \end{array} \right.$$

Es möge nebenbei bemerkt werden, dass man über die Drehung $\omega_\xi \omega_\eta \omega_z$ der Kugel von vornherein weiß, dass

$$\omega_\xi = \frac{C_n dy}{LK_n} \cos \lambda_{n1} + I, \quad \omega_\eta = -\frac{C_n dy}{LK_n} \sin \lambda_{n1} + I, \quad \omega_z = I \quad (a)$$

sein wird, wo I Glieder andeutet, welche mindestens von der ersten Ordnung klein sind; denn bei correctem Analysator ist in dem hier betrachteten Falle

$$\omega_\xi = \frac{C_n dy}{LK_n} \cos \lambda_{n1}, \quad \omega_\eta = -\frac{C_n dy}{LK_n} \sin \lambda_{n1}, \quad \omega_z = 0.$$

Gleichzeitig damit dreht sich der Rollenkreis M_{n1} in seiner Ebene ($\eta = 0$) um sein Umdrehungscentrum um den Winkel du_{n1} , der Kreis M_{n2} in seiner Ebene ($\xi = 0$) um den Winkel du_{n2} , und der Cylinder um seine Axe um den Winkel $\frac{-dy}{L}$.

Vermöge der Drehung du_{n1} der Rolle M_{n1} verrückt sich derjenige ihrer Punkte, welcher zu Beginn dieser Bewegung die Coordinaten $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ hatte, um eine Verrückung \bar{s} mit den Componenten

$$\left\{ \begin{array}{l} s'_\xi = \zeta_1 du_{n1} \\ s'_\eta = 0 \\ s'_z = (D_{n1} - \xi_1) du_{n1}. \end{array} \right.$$

Derjenige Punkt der Rolle M_{n2} , welcher die Coordinaten $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ hatte, verrückt sich um \bar{t}' mit den Componenten

$$\left\{ \begin{array}{l} t'_\xi = 0 \\ t'_\eta = \zeta_2 du_{n2} \\ t'_\zeta = (D_{n2} - \eta_2) du_{n2}. \end{array} \right.$$

Derjenige Punkt des Cylinders, welcher die Coordinaten $\xi_W \eta_W \zeta_W$ hatte, verrückt sich, vermöge der Drehung des Cylinders, um \bar{w}' mit den Componenten

$$\left\{ \begin{array}{l} w'_\xi = (h_n + \zeta_W) \frac{dy}{L} \sin \lambda_{n1} \\ w'_\eta = (h_n + \zeta_W) \frac{dy}{L} \cos \lambda_{n1} \\ w'_\zeta = -\eta_W \frac{dy}{L} \cos \lambda_{n1} - \xi_W \frac{dy}{L} \sin \lambda_{n1}. \end{array} \right.$$

Es möge hiebei bemerkt werden, dass man im voraus weiß, dass

$$du_{n1} = \frac{C_n}{LM_{n1}} \sin \lambda_{n1} dy + I, \quad du_{n2} = \frac{C_n}{LM_{n2}} \cos \lambda_{n1} dy + I \quad (b)$$

sein wird, weil der Unterschied zwischen du_{ni} und dem ausgedruckten Gliede der rechten Seite mit den Fehlern des Instrumentes verschwindet.

Da die Drehung der Rolle M_{n1} in ihrer Ebene nur dadurch erzeugt wird, dass der anstoßende Kugelpunkt sie in eine solche Drehung versetzt, so müssen die erfolgenden Verrückungen des Rollenpunktes, in den beiden zu ihrer Umdrehungsaxe senkrechten Richtungen, gleich sein den entsprechenden componenten Verrückungen des anstoßenden Kugelpunktes; es muss also sein $s'_\xi = s_\xi$, $s'_\zeta = s_\zeta$. Es sind dies, sozusagen, die Gleichungen des Rollens der Messrolle M_{n1} an der Kugel. Ebenso hat man die Relationen $t'_\eta = t_\eta$, $t'_\zeta = t_\zeta$, als die Gleichungen des Rollens der Messrolle M_{n2} an der Kugel. Schließlich, da die Kugel an dem Cylinder nicht gleitet,

die Relationen $w_\xi = w'_\xi$, $w_\eta = w'_\eta$, $w_\zeta = w'_\zeta$, — die Gleichungen des Rollens der Kugel an dem Cylinder.

Dies sind zwischen fünf Unbekannten $\omega_\xi \omega_\eta \omega_\zeta du_{n1} du_{n2}$ sieben Bedingungen, die jedoch, wenigstens in erster Ordnung genau, miteinander compatibel sind, weil einige unter ihnen die Form von Identitäten annehmen und daher für die Bestimmung der Unbekannten ohne Bedeutung sind. Die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} s'_\xi = s_\xi \\ s'_\zeta = s_\zeta \end{array} \right. \text{ liefern die Relationen}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 du_{n1} = d\xi_0 + \omega_\eta (\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_\tau (\eta_1 - \eta_0) \\ (D_{n1} - \xi_1) du_{n1} = d\zeta_0 + \omega_\xi (\eta_1 - \eta_0) - \omega_\tau (\xi_1 - \xi_0), \end{array} \right.$$

oder, wenn man die Ausdrücke (17) und (14) einsetzt, und für die Größen $\omega_\xi \omega_\eta \omega_\zeta du_{n1} du_{n2}$, soweit sie mit kleinen Coefficienten multipliziert auftreten, die Ausdrücke (a) und (b) einsetzt, die Relationen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_n}{LM_{n1}} \left(-\frac{M_{n1}}{K_n + M_{n1}} k_n + \frac{K_n}{K_n + M_{n1}} \Delta_{n1} \cos u_{n1} \right) \sin \lambda_{n1} dy + II = \\ = \frac{C_n}{LM_{n1}} \Delta_{n1} \cos u_{n1} \sin \lambda_{n1} dy - \frac{C_n}{L(K_n + M_{n1})} (k_n + \Delta_{n1} \cos u_{n1}) \sin \lambda_{n1} dy + II \\ (M_{n1} - \Delta_{n1} \sin u_{n1}) du_{n1} + II = \\ = -\frac{C_n}{LK_n} (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1} dy - K_n \omega_\tau + II, \end{array} \right.$$

von denen die zweite allein Bedeutung hat. Die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} t'_\eta = t_\eta \\ t'_\zeta = t_\zeta \end{array} \right. \text{ liefern die Relationen}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_n}{LM_{n2}} \left(-\frac{M_{n2}}{K_n + M_{n2}} k_n + \frac{K_n}{K_n + M_{n2}} \Delta_{n2} \cos u_{n2} \right) \cos \lambda_{n1} dy + II = \\ = \frac{C_n}{LM_{n2}} \Delta_{n2} \cos u_{n2} \cos \lambda_{n1} dy - \frac{C_n}{L(K_n + M_{n2})} (k_n + \Delta_{n2} \cos u_{n2}) \cos \lambda_{n1} dy + II \\ (M_{n2} - \Delta_{n2} \sin u_{n2}) du_{n2} + II = \\ = K_n \omega_\xi - \frac{C_n}{LK_n} (d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} dy + II, \end{array} \right.$$

von denen wieder die erstere wegfällt. Die Gleichungen $\left\{ \begin{array}{l} w'_\xi = w_\xi \\ w'_\eta = w_\eta \\ w'_\zeta = w_\zeta \end{array} \right.$ liefern die Relationen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_n}{L} \sin \lambda_{n1} dy + II = \frac{C_n}{LM_{n1}} \Delta_{n1} \cos u_{n1} \sin \lambda_{n1} dy - K_n \omega_\eta + II \\ \frac{C_n}{L} \cos \lambda_{n1} dy + II = \frac{C_n}{LM_{n2}} \Delta_{n2} \cos u_{n2} \cos \lambda_{n1} dy + K_n \omega_\xi + II \\ \frac{1}{L} \frac{K_n}{K_n + C_n} [(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1}] dy - \\ - \frac{1}{L} [(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1}] dy + II = \\ = - \frac{C_n}{L(K_n + C_n)} [(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1}] dy + II, \end{array} \right.$$

von denen die letzte wegfällt. Aus den vier Relationen, welche nicht ausfallen, hat man

$$\left\{ \begin{array}{l} (M_{n1} - \Delta_{n1} \sin u_{n1}) du_{n1} = \\ = \frac{C_n}{L} \sin \lambda_{n1} dy - \frac{C_n}{LM_{n1}} \Delta_{n1} \cos u_{n1} \sin \lambda_{n1} + \frac{M_{n1}}{K_n} \Delta_{n2} \sin u_{n2} \cos \lambda_{n1} dy - \frac{C_n}{LK_n} d_{n2} \cos \lambda_{n1} dy + II \\ (M_{n2} - \Delta_{n2} \sin u_{n2}) du_{n2} = \\ = \frac{C_n}{L} \cos \lambda_{n1} dy - \frac{C_n}{LM_{n2}} \Delta_{n2} \cos u_{n2} \cos \lambda_{n1} + \frac{M_{n2}}{K_n} \Delta_{n1} \sin u_{n1} \sin \lambda_{n1} dy - \frac{C_n}{LK_n} d_{n1} \sin \lambda_{n1} dy + II, \end{array} \right.$$

was man kurz, für die i te Rolle ($i = 1, 2$), so schreiben kann:

$$(M_{ni} - \Delta_{ni} \sin u_{ni}) dt_{ni} = \frac{C_n}{L} \sin \lambda_{ni} dy - \frac{C_n}{LK_n} (-1)^j d_{ij} \cos \lambda_{ni} dy - \frac{C_n}{LM_{ni}} \left[\Delta_{ni} \cos u_{ni} \sin \lambda_{ni} + \frac{M_{ni}}{K_n} \Delta_{nj} \sin u_{nj} \sin \lambda_{nj} \right] dy + II,$$

wenn mit dem Index j die andere (die „nicht i te“) Messrolle bezeichnet wird. Dividiert man schließlich mit dem Coefficient des dt_{ni} , setzt für u_{n1} , u_{n2} die damit bezeichneten Ausdrücke wieder ein, bezeichnet zuletzt die procentuellen Excentricitäten $\frac{\Delta_{n1}}{M_{n1}}$, $\frac{\Delta_{n2}}{M_{n2}}$ mit δ_{n1} , δ_{n2} , die Constanten $\frac{d_{n1}}{K_n}$, $\frac{-d_{n2}}{K_n}$ aber mit θ_{n1} , θ_{n2} , so ergibt sich als Drehung der Rolle bei einer zur y -Axe parallelen Verschiebung des Fahrstiftes, unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung im Coefficient von dy ,

$$d\psi_{ni} = \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy + \frac{C_n}{LM_{ni}} \theta_{nj} \cos \lambda_{ni} dy + \frac{C_n}{LM_{ni}} \left[\delta_{ni} \{ \sin (\psi_{ni} + M_{ni}) - \cos (\psi_{ni} + M_{ni}) \} \sin \lambda_{ni} - \frac{M_{nj}}{K_n} \delta_{nj} \sin (\psi_{nj} + M_{nj}) \sin \lambda_{nj} \right] dy, \quad (18)$$

wo in der letzten Zeile die Drehungsphasen ψ_{ni} , ψ_{nj} ersetzt werden dürfen durch diejenigen, $\bar{\psi}_{ni}$, $\bar{\psi}_{nj}$,¹ welche ein correcter Analysator in demselben Punkte derselben Befahrung aufweisen würde, und Analoges von λ_{ni} , λ_{nj} gilt. —

¹ Die Striche sind hier selbstverständlich keine Vectorzeichen.

b) Betrachten wir jetzt den Fall einer Verschiebung des Stifes parallel zur x -Axe allein.

Die Gleichungen (8) bis (12) gelten auch in diesem Falle. Die Coordinaten, im festen System, des Mittelpunktes der Kugel und der drei Punkte, in welchen ihre Berührung mit den Messrollen und dem Cylinder stattfindet, sind ausgedrückt durch die Gleichungen (13) bis (16); die Änderungen dagegen, welche die Coordinaten des Mittelpunktes im festen System erleiden, durch die Gleichungen, welche man findet, wenn man die Transformationsformeln $\xi_0 = \Xi_0 \cos(\Xi, \xi) - H_0 \sin(\Xi, \xi), \dots$ vollständig differentiirt und darauf für (Ξ, ξ) seinen Wert 0, für $d(\Xi, \xi)$ seinen Wert $\frac{-2n\pi dx}{c}$, und für $\Xi_0, H_0, d\Xi_0, dH_0$ ihre Ausdrücke (8), (12) einsetzt; man findet auf diese Weise

$$\left. \begin{aligned} d\xi_0 &= \Delta_{n1} \cos u_{n1} du_{n1} + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \frac{2n\pi}{c} dx + II \\ d\eta_0 &= \Delta_{n2} \cos u_{n2} du_{n2} - (d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \frac{2n\pi}{c} dx + II \\ d\zeta_0 &= II. \end{aligned} \right\} (19)$$

du_{ni} bedeutet, gemäß der Definition des u_{ni} , die Drehung der Rolle um ihre in Bewegung begriffene Axe; also die Drehung, welche die im beweglichen System $\Xi H Z$ betrachteten Verrückungen ihrer einzelnen Theilchen gegen ihr Umdrehungscentrum — ausmachen. Infolge dessen sind, wenn wir dasjenige Theilchen der Rolle M_{n1} , welches zu Beginn der Verschiebung sich im Berührungspunkte der Kugel mit der Rolle befand, das Theilchen $1'$ nennen, die Änderungen, welche die Coordinaten dieses Theilchens im beweglichen System, $\Xi(1')$, $H(1')$, $Z(1')$, erleiden, mit du_{n1} verbunden durch die Relationen: $d\Xi(1') = Z(1') du_{n1}$, $dH(1') = 0$, $dZ(1') = [D_{n1} - \Xi(1')] du_{n1}$; oder, was dasselbe ist, $d\Xi(1') = \zeta_1 du_{n1}$, $dH(1') = 0$, $dZ(1') = (D_{n1} - \xi_1) du_{n1}$.

Nennt man dagegen dasjenige Theilchen der Kugel, welches zu Beginn der Verschiebung sich in jenem Berührungspunkte befand, das Theilchen 1, so erleiden seine festen Coordinaten $\xi(1)$, $\eta(1)$, $\zeta(1)$ durch die Bewegung der Kugel die Änderungen $d\xi(1) = d\xi_0 + \omega_\tau(\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta_1 - \eta_0), \dots$, wo

$\omega_x \omega_y \omega_z$, wie früher, die Rotationen der Kugel um die festen Axen bezeichnen. Die Änderung, welche die Coordinate $\Xi(1)$ dieses Theilchens erleidet, findet man daraus mittels der Formel

$$d\Xi(1) = d\xi(1) - \eta(1) \frac{2n\pi}{c} dx, \text{ welche durch vollständige Differentiation der Transformationsformel } \Xi(1) = \xi(1) \cos(\Xi, \xi) + \eta(1) \sin(\Xi, \xi) \text{ erhalten wird. Es ist somit } d\Xi(1) = d\xi_0 + \omega_x(\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_y(\eta_1 - \eta_0) - \eta_1 \frac{2n\pi}{c} dx.$$

Man hat also

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Xi(1) = d\xi_0 + \omega_x(\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_y(\eta_1 - \eta_0) - \eta_1 \frac{2n\pi}{c} dx \\ dH(1) = d\eta_0 + \omega_x(\xi_1 - \xi_0) - \omega_y(\zeta_1 - \zeta_0) + \xi_1 \frac{2n\pi}{c} dx \\ dZ(1) = d\zeta_0 + \omega_x(\eta_1 - \eta_0) - \omega_y(\xi_1 - \xi_0), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Xi(1') = \zeta_1 du_{n1} \\ dH(1') = 0 \\ dZ(1') = (D_{n1} - \xi_1) du_{n1}. \end{array} \right.$$

Ebenso findet man für die Änderungen der Coordinaten $\Xi(2)$, $H(2)$, $Z(2)$ des Kugeltheilchens 2, welches zu Beginn der Verschiebung sich im Berührungspunkte der Kugel mit der Rolle M_{n2} befand, und anderseits für die Änderungen der Coordinaten $\Xi(2')$, $H(2')$, $Z(2')$ des Rollentheilchens 2', welches zu gleicher Zeit sich in jenem Berührungspunkte befand, die Ausdrücke

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Xi(2) = d\xi_0 + \omega_x(\zeta_2 - \zeta_0) - \omega_y(\eta_2 - \eta_0) - \eta_2 \frac{2n\pi}{c} dx \\ dH(2) = d\eta_0 + \omega_x(\xi_2 - \xi_0) - \omega_y(\zeta_2 - \zeta_0) + \xi_2 \frac{2n\pi}{c} dx \\ dZ(2) = d\zeta_0 + \omega_x(\eta_2 - \eta_0) - \omega_y(\xi_2 - \xi_0), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Xi(2') = 0 \\ dH(2') = \zeta_2 du_{n2} \\ dZ(2') = (D_{n2} - \eta_2) du_{n2}. \end{array} \right.$$

Nennt man endlich das Kugeltheilchen, welches zu Beginn der Verschiebung sich im Berührungspunkte der Kugel mit dem Cylinder befand, das Theilchen W und betrachtet die Änderungen seiner festen Coordinaten $\xi(W)$, $\eta(W)$, $\zeta(W)$; nennt anderseits das Cylindertheilchen, welches zu gleicher Zeit sich in jenem Punkte befand, das Theilchen W' und betrachtet die Änderungen seiner Coordinaten $\xi(W')$, $\eta(W')$, $\zeta(W')$: — so hat man für diese Änderungen die Ausdrücke

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi(W) = d\xi_0 + \omega_\tau(\zeta_{1W} - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta_{1W} - \eta_0) \\ d\eta(W) = d\eta_0 + \omega_\zeta(\xi_{1W} - \xi_0) - \omega_\xi(\zeta_{1W} - \zeta_0) \\ d\zeta(W) = d\zeta_0 + \omega_\xi(\eta_{1W} - \eta_0) - \omega_\tau(\xi_{1W} - \xi_0), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi(W') = 0 \\ d\eta(W') = 0 \\ d\zeta(W') = 0. \end{array} \right.$$

Man hat ferner, analog wie in dem vorher betrachteten Falle, sieben Gleichungen des Rollens. Im voraus kann man hier sagen, dass

$$\omega_\xi = I, \quad \omega_\tau = I, \quad \omega_\zeta = -\frac{2n\pi dx}{c} + I \quad (c)$$

und dass

$$du_{n1} = I, \quad du_{n2} = I \quad (d)$$

sein wird. Die Gleichungen $\begin{cases} d\Xi(1') = d\Xi(1) \\ dZ(1') = dZ(1) \end{cases}$ liefern, wenn man die Ausdrücke (19), (13) bis (16) einsetzt und für $\omega_\xi \omega_\tau \omega_\zeta du_{n1}$, soweit sie mit kleinen Coefficienten multipliciert auftreten, die Werte (c), (d) einsetzt, die Relationen

$$\left\{ \begin{array}{l} II = (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \frac{2n\pi}{c} dx - \frac{2n\pi dx}{c} (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) + II \\ M_{n1} du_{n1} + II = -K_n \omega_\tau + II, \end{array} \right.$$

von denen nur die letztere Bedeutung hat. Die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} dH(2') = dH(2) \\ dZ(2') = dZ(2) \end{array} \right.$$

liefern in ähnlicher Weise die Relationen

$$\left\{ \begin{array}{l} II = -(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \frac{2n\pi}{c} dx + \frac{2n\pi dx}{c} (d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) + II \\ M_{n2} du_{n2} + II = K_n \omega_\xi + II, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi(W) = d\xi(W') \\ d\eta(W) = d\eta(W') \\ d\zeta(W) = d\zeta(W') \end{array} \right. \text{ liefern die Relationen}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (d_{n_2} + \Delta_{n_2} \sin u_{n_2}) \frac{2n\pi}{c} dx - \\ - K_n \omega_{\eta} \frac{2n\pi dx}{c} \frac{K_n}{K_n + C_n} [(d_{n_1} + \Delta_{n_1} \sin u_{n_1}) \sin \lambda_{n_1} + (d_{n_2} + \Delta_{n_2} \sin u_{n_2}) \cos \lambda_{n_1}] \cos \lambda_{n_1} + II = 0 \\ - (d_{n_1} + \Delta_{n_1} \sin u_{n_1}) \frac{2n\pi}{c} dx + \\ + \frac{2n\pi dx}{c} \frac{K_n}{K_n + C_n} [(d_{n_1} + \Delta_{n_1} \sin u_{n_1}) \sin \lambda_{n_1} + (d_{n_2} + \Delta_{n_2} \sin u_{n_2}) \cos \lambda_{n_1}] \sin \lambda_{n_1} + K_n \omega_{\xi} + II = 0 \\ II + II + II = 0, \end{array} \right.$$

von denen wieder die letzte wegfällt. Aus den vier Relationen, welche nicht ausfallen, hat man

$$\begin{aligned} M_{n_1} du_{n_1} &= - (d_{n_2} + \Delta_{n_2} \sin u_{n_2}) \frac{2n\pi}{c} dx + \\ &+ \frac{K_n}{K_n + C_n} [(d_{n_1} + \Delta_{n_1} \sin u_{n_1}) \sin \lambda_{n_1} + (d_{n_2} + \Delta_{n_2} \sin u_{n_2}) \cos \lambda_{n_1}] \cos \lambda_{n_1} \frac{2n\pi}{c} dx + II \\ M_{n_2} du_{n_2} &= (d_{n_1} + \Delta_{n_1} \sin u_{n_1}) \frac{2n\pi}{c} dx - \\ &- \frac{K_n}{K_n + C_n} [(d_{n_1} + \Delta_{n_1} \sin u_{n_1}) \sin \lambda_{n_1} + (d_{n_2} + \Delta_{n_2} \sin u_{n_2}) \cos \lambda_{n_1}] \sin \lambda_{n_1} \frac{2n\pi}{c} dx + II, \end{aligned}$$

was man kurz, für die i te Rolle ($i = 1, 2$), so schreiben kann:

$$M_{ni} dt_{ni} = \left[d_{ni} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin \lambda_{ni} \cos \lambda_{ni} + (-1)^j d_{nj} \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \lambda_{nj} - 1 \right) \right] \frac{2n\pi}{c} dx + \\ + \left[\Delta_{ni} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin u_{ni} \sin \lambda_{ni} \cos \lambda_{ni} + (-1)^j \Delta_{nj} \sin u_{nj} \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \lambda_{nj} - 1 \right) \right] \frac{2n\pi}{c} dx + II.$$

Dividiert man endlich mit M_{ni} und bezeichnet die Constanten $\frac{d_{ni}}{M_{ni}}$, $\frac{d_{nj}}{M_{nj}}$ mit ϑ_{ni} , ϑ_{nj} , so ergibt sich als Drehung der Rolle bei einer zur x -Axe parallelen Verschiebung des Fahrstiftes, unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung der Instrumentalfehler,

$$d\mu_{ni} = \left[\vartheta_{ni} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin \lambda_{ni} \cos \lambda_{ni} + (-1)^j \vartheta_{nj} \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \lambda_{nj} - 1 \right) \right] \frac{2n\pi}{c} dx + \\ + \left[\delta_{ni} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin (\mu_{ni} + M_{ni}) \sin \lambda_{ni} \cos \lambda_{ni} + (-1)^j \delta_{nj} \sin (\mu_{nj} + M_{nj}) \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \lambda_{nj} - 1 \right) \right] \frac{2n\pi}{c} dx, \quad (20)$$

wo bei ϑ_{nj} und δ_{nj} der Factor $\frac{M_{nj}}{M_{ni}}$, als gleich der Einheit, weggelassen wurde und μ_{ni} , μ_{nj} , λ_{ni} , λ_{nj} auf der rechten Seite durch $\bar{\mu}_{ni}$, $\bar{\mu}_{nj}$, $\bar{\lambda}_{ni}$, $\bar{\lambda}_{nj}$ ersetzt werden dürfen.

c) Bei einer beliebigen Befahrung, während der Fahrstift ein Element ds der Befahrungsbahn, dessen Componenten dx , dy sind, beschreibt, ist die Drehung der Rolle

$$d\mu_{ni} = \frac{\partial \mu_{ni}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu_{ni}}{\partial y} dy;$$

die Ausdrücke für $\frac{\partial \mu_{ni}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu_{ni}}{\partial y}$ sind gegeben durch die Formeln (20), (18). Wenn eine bestimmte Befahrungsbahn vorliegt, kann man den laufenden Punkt derselben dadurch unzweideutig definieren, dass man die Bogenlänge s angibt, welche der Fahrstift seit dem Ausgangspunkte ($x = 0$, $y = 0$) bis zu dem betrachteten Punkte zurückgelegt hat. Die Veränderlichen $\bar{\mu}_{ni}$, $\bar{\mu}_{n2}$ sind nun ganz bestimmte Functionen des laufenden Punktes der Befahrungsbahn, die mit Eigenschaften des Instrumentes in keinerlei Beziehung stehen. θ_{n1} , θ_{n2} , ϑ_{n1} , ϑ_{n2} , δ_{n1} , δ_{n2} sind Instrumentalconstanten; M_{n1} , M_{n2} Constanten, die außerdem von der Anfangsaufstellung des Instrumentes abhängen. Man kann also den Ausdruck der Drehung der Rolle für den allgemeinen Fall so schreiben:

$$\begin{aligned} d\mu_{ni} = & \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy + \\ & + \frac{C_n}{LM_{ni}} \theta_{nj} \cos \lambda_{ni} dy + \\ & + \left[\vartheta_{ni} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin \lambda_{ni} \cos \lambda_{ni} + (-1)^j \vartheta_{nj} \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \lambda_{nj} - 1 \right) \right] \frac{2n\pi}{c} dx + \\ & + \delta_{ni} \cdot f_{ni}(M_{ni}, s) ds + \delta_{nj} \cdot g_{nj}(M_{nj}, s) ds; \end{aligned} \quad (21)$$

die Functionen $f_{ni}(M_{ni}, s)$, $g_{nj}(M_{nj}, s)$ des laufenden Punktes und der Parameter M_{ni} , M_{nj} sind folgende:

$$\begin{aligned} f_{ni}(M_{ni}, s) = & \frac{2n\pi}{c} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin(\bar{\mu}_{ni} + M_{ni}) \sin \bar{\lambda}_{ni} \cos \bar{\lambda}_{ni} \cos(s, x) + \\ & + \frac{C_n}{LM_{ni}} \{ \sin(\bar{\mu}_{ni} + M_{ni}) - \cos(\bar{\mu}_{ni} + M_{ni}) \} \sin \lambda_{ni} \sin(s, x) \\ g_{nj}(M_{nj}, s) = & (-1)^j \frac{2n\pi}{c} \sin(\bar{\mu}_{nj} + M_{nj}) \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \bar{\lambda}_{nj} - 1 \right) \cos(s, x) - \\ & - \frac{C_n}{LM_{ni}} \cdot \frac{M_{nj}}{K_n} \sin(\bar{\mu}_{nj} + M_{nj}) \sin \bar{\lambda}_{nj} \sin(s, x). \end{aligned} \quad (22)$$

Das erste Glied der rechten Seite in (21) ist dasjenige, welches dem Falle des correcten Analysators entspricht. Die Glieder der zweiten und dritten Zeile entspringen dem angenommenen Umstande, dass die Umdrehungscentra der Messrollen in Abständen von der Umdrehungsaxe des Rahmens angebracht sind, welche nicht genau gleich sind der Summe des Kugelhalbmessers (K_n) und des Rollenhalbmessers (M_{n1} , beziehungsweise M_{n2}); dieser Umstand bewirkt, dass der Mittelpunkt der Kugel sich dauernd abseits von der Umdrehungsaxe befindet. Die genannten Glieder drücken daher die Wirkung einer constanten Excentricität der Kugel aus. Indem ich diese letztere Fehlerquelle in einem weiteren Artikel (14.) gesondert besprechen will, lasse ich diese Glieder hier weg. Als Wirkung der Rollenexcentricitäten allein, bleibt

$$d\mu_{ni} = \delta_{ni} \cdot f_{ni}(M_{ni}, s) ds + \delta_{nj} \cdot g_{nj}(M_{nj}, s) ds. \quad (23)$$

Es möge noch die Eigenschaft der Functionen $f_{ni}(M_{ni}, s)$, $g_{nj}(M_{nj}, s)$ hervorgehoben werden, dass sie bei um 180° veränderten Werten der Parameter M_{n1} , M_{n2} , für alle s die entgegengesetzten Werte annehmen. Wir werden später diese Eigenschaft verwerthen. —

14. Die Excentricität der Kugel besteht darin, dass die Umdrehungsaxe des Rahmens des Integrierapparates nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht, so dass, abgesehen von anderen Fehlern des Apparates, der Mittelpunkt der Kugel sich in einem constanten Abstände von jener Umdrehungsaxe befindet und seine geographische Länge mit den geographischen Längen der Rollen gleich wächst. Diese Fehlerquelle wurde bereits in der bis jetzt vorhandenen Literatur des Analysators kurz berührt. Vollständig ausgedrückt ist ihr Einfluss durch die beiden Glieder der zweiten und dritten Zeile der Formel (21).

Die eine Wirkung dieser Configuration besteht darin, dass, während der Fahrstift parallel der y -Axe verschoben wird und dadurch die Kugel sich um eine durch ihren Mittelpunkt parallel der x -Axe gehende Axe dreht, die Rolle M_{ni} die Kugel in einem Punkte berührt, dessen Winkelabstand von der Drehungsaxe nicht $= \lambda_{ni}$ ist. Der Unterschied ist von λ_{ni} unabhängig. Das

erstere der genannten Glieder entspricht diesem Umstande. Die Wirkung dieses Umstandes ist offenbar dieselbe, wie diejenige eines constanten Fehlers der geographischen Länge der Rolle M_{ni} ; eines Fehlers, der später noch (als ein »Fehler des Anfangszustandes«) Aufnahme finden soll. Mit Rücksicht darauf können wir hier dieses Glied weglassen.

Die andere Wirkung der excentrischen Lagerung der Kugel ist die, dass bei einer zur x -Axe parallelen Verschiebung des Fahrstiftes die Kugel auf dem Cylinder herumrollt und infolge dessen nicht allein um die verticale Axe, sondern auch in jedem Augenblick um eine horizontale Axe sich dreht, welche letztere Drehung von den Rollen registriert wird. Diesem Umstande trägt das zweite der genannten Glieder Rechnung. In diesem Gliede ist der Factor bei dx eine Function der x -Coordinate allein. Daraus folgt, dass der Einfluss dieses Umstandes in der Ablesung der Rolle sich aufhebt, wenn die Befahrung in einem Punkte endet, dessen Abscisse gleich der des Ausgangspunktes ist.¹

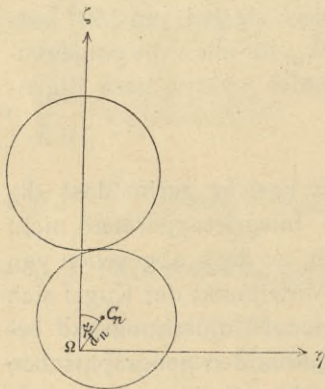


Fig. 7.

15. Betrachten wir jetzt die Excentricität des Cylinders C_n ; seine Umdrehungsaxe, die der x -Axe parallel ist (und hier noch immer als in der Ebene ZX gelegen angenommen werden soll), wird von der Umdrehungsaxe Z des Rahmens in einem Punkte Ω getroffen, den ich für den Anfangspunkt eines neuen Coordinatensystems, $\Omega\xi\eta\zeta$, nehme, dessen Axen den Axen XYZ parallel gelegt werden. Es wird dann unter

¹ Es möge nebenbei bemerkt werden, dass die Curve, welche der Berührungspunkt der Kugel auf dem Cylinder bei einer zur x -Axe parallelen Verschiebung des Stiftes beschreibt, nahezu eine ebene, und zwar eine Ellipse, ist. Die Behauptung, welche sich sowohl bei Prof. Henrici, als bei Herrn Bervy findet, diese Curve sei nahezu ein Kreis, beruht offenbar auf einem Versehen. Denn die Schwankungen des Radiusvectors in dieser Curve sind von derselben Größenordnung wie der Radiusvector. Es ist nicht zulässig, der Betrachtung des Vorganges die Vereinfachung zugrunde zu legen, dass man an Stelle der Cylinderfläche ihre Tangentialebene setzt.

dem Mittelpunkte des Cylinders die Projection des Punktes Ω auf die geometrische Axe des Cylinders verstanden. Bei der Fahrt parallel der Axe oy wird die geometrische Axe des Cylinders um die ξ -Axe eine cylindrische Fläche beschreiben. Man bezeichne mit d_n den kleinen constanten Abstand zwischen dem Mittelpunkte C_n des Cylinders und seiner Umdrehungsaxe, und mit ψ die Ablenkung der Richtung ΩC_n von der ζ -Axe, im Sinne von der ζ - gegen die η -Axe gezählt.

Für einen bestimmten Wert von ψ , sind die Coordinaten $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ des Berührungspunktes des Cylinders mit der Kugel, die Höhe h des Kugelmittelpunktes über dem festen Punkte Ω , sowie die Verrückung \bar{dl} , welche das momentan in Berührung befindliche Theilchen des Cylinders erleidet bei weiterer Drehung des Cylinders um $d\psi$, bestimmt; die Drehung der Kugel, welche erfolgen wird, ist bestimmt durch die Projection dieser Verrückung auf die gemeinsame Tangentialebene im Punkte $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ zu der Cylinderfläche

$$F(\xi \eta \zeta \psi) \equiv \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta d_n \sin \psi - 2\zeta d_n \cos \psi + d_n^2 - C_n^2 = 0$$

und der Kugelfläche

$$f(\xi \eta \zeta h) \equiv \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\zeta h + h^2 - K_n^2 = 0.$$

Es wird, ähnlich wie auf der Seite 30, die entstehende Drehung der Kugel um die X -Axe

$$\chi_X = \frac{dy}{LK_n^2 \bar{f}} \left\{ -\eta_0 [(f_\xi^2 + f_\eta^2) \eta_0 + f_\eta f_\zeta \zeta_0] + (h - \zeta_0) [(f_\xi^2 + f_\zeta^2) \zeta_0 + f_\eta f_\zeta \eta_0] \right\} \quad (24)$$

sein, wobei \bar{f} der Kürze halber für $f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2$ steht, und in den f_ξ, f_η, f_ζ man $\xi \eta \zeta$ nach der Differentiation durch $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ ersetzt sich denken soll; die Drehungen der Kugel um die Y -Axe und um die Z Axe dagegen werden in diesem Falle, wie unmittelbar einleuchtend, beide Null sein. Infolge dieser Drehung der Kugel wird sich die Rolle M_{ni} um ihre Axe um den Winkel

$$d\mu_{ni} = -\frac{K_n}{M_{ni}} \chi_X \cos(\lambda_{ni} + 90^\circ)$$

drehen. Die Werte $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, h$ hat man als Lösung des Systems der vier Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} F(\xi\eta\zeta\psi) &= 0 \\ f(\xi\eta\zeta h) &= 0 \\ f_\xi : f_\eta : f_\zeta &= F_\xi : F_\eta : F_\zeta \end{aligned} \right\},$$

mit anderen Worten, des Systems der vier Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} F(\xi\eta\zeta\psi) &= 0 \\ f(\xi\eta\zeta h) &= 0 \\ f_\eta \sqrt{F_\xi^2 + F_\eta^2 + F_\zeta^2} &= -F_\eta \sqrt{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2} \\ f_\zeta \sqrt{F_\xi^2 + F_\eta^2 + F_\zeta^2} &= -F_\zeta \sqrt{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(wir nehmen die Vorzeichen verschieden, weil es sich für uns um den Fall äußerer Berührung allein handelt) zu bestimmen; ξ_0 ist übrigens, wie unmittelbar einleuchtend, gleich Null. Da

$$\begin{aligned} F_\xi &= 0, & F_\eta &= 2\eta_0 - 2d_n \sin \psi, & F_\zeta &= 2\zeta_0 - 2d_n \cos \psi, \\ f_\xi &= 2\xi_0, & f_\eta &= 2\eta_0, & f_\zeta &= 2(\zeta_0 - h), \end{aligned}$$

so hat man aus der dritten Gleichung des Systems (25)

$$\eta_0 = \frac{K_n}{K_n + C_n} d_n \sin \psi,$$

η_0 ist also klein von der ersten Ordnung des d_n ; aus der ersten Gleichung (25) erhält man jetzt

$$\zeta_0^2 - 2\zeta_0 d_n \cos \psi = C_n^2 + [d_n^2]$$

und daraus

$$\zeta_0 = d_n \cos \psi \pm (C_n + [d_n^2]),$$

wo von den beiden Vorzeichen für uns natürlich nur das obere Geltung hat. Setzt man in die Formel (24) für $f_\xi, f_\eta, f_\zeta, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ die erhaltenen Werte und für $h - \zeta_0$ den Ausdruck

$$h - \zeta_0 = K_n + [d_n^2],$$

der aus der zweiten Gleichung (25) jetzt folgt, ein, so ergibt sich

$$\chi_X = \frac{dy}{LK_n} \{C_n + d_n \cos \psi + [d_n^2]\};$$

und damit schließlich

$$d\psi_{ni} = \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy + \frac{d_n \cos \phi}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy,$$

wenn man im Coefficient von dy die Glieder zweiter Ordnung weglässt. Es ergibt sich also hier, außer dem bei correctem Analysator stattfindenden Werte, noch ein Zusatzglied der Drehung der Rolle M_{ni} , von der Form

$$d\psi_{ni} = \frac{z_n}{M_{ni}} \cos \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \sin \lambda_{ni} dy, \quad (26)$$

wo z_n, K_n unbekannt Instrumentalconstanten des n^{ten} Integrierapparates bedeuten und z_n von der ersten Ordnung klein ist.

Die Fehler, welche durch die auf- und absteigende Bewegung der Kugel hervorgerufen werden, eliminieren sich aus dem Resultate, wenn bei der Umfahrung man zuletzt in einem Punkte anlangt, welcher das gleiche y wie der Ausgangspunkt hat.

Es bleibt übrig, den Einfluss der Excentricität des Cylinders während eines Verschiebens des Fahrstiftes parallel der Axe ox zu untersuchen. Durch analoge Überlegungen wie auf den Seiten 32 und 33 ersieht man, dass in diesem Falle die effective Bewegung der Kugel, durch Reibung zwischen ihr und dem Cylinder afficiert, dadurch dargestellt werden kann, dass die Kugel, außer der ihr mit dem Rahmen gemeinsamen Rotation, noch eine Zusatzrotation besitzt: wird der kleine absolute Winkel, welchen am Mittelpunkte der Kugel der Radiusvector des Berührungspunktes bildet mit der ($-Z$)-Axe, mit σ bezeichnet, so beträgt diese Zusatzrotation $+\nu \frac{2\pi dx}{c} \sin \sigma$ ($0 \leq \nu \leq 1$), und ihre Axe, a , geht vom Mittelpunkte der Kugel nach demjenigen Punkte der Kugel, welcher um 90° entfernt ist von dem dem Berührungspunkte entgegengesetzten Punkte der Kugel, im Sinne von diesem letzteren nach dem Pol der Z -Axe gezählt. Die Z -Componente dieser Zusatzrotation ist zweiter Ordnung; die in die XY -Ebene fallende Componente fällt in dem hier betrachteten Falle offenbar stets in die Gerade

$X = 0$ und ihr Betrag um die Y -Axe ist $\nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin \sigma \cos \sigma$.
 Durch dieselbe wird also der Rolle M_{ni} eine Drehung um ihre
 Axe mitgetheilt im Betrage von

$$d\mu_{ni} = - \frac{K_n}{M_{ni}} \cdot \nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin \sigma \cos \sigma \cdot \cos \lambda_{ni}.$$

Da $\sin \sigma = \frac{Y_0}{K_n} = \frac{d_n \sin \phi}{K_n + C_n}$, $\cos \sigma = 1 + [d_n^2]$ ist, so ergibt sich
 für diese fälschliche Drehung der Rolle, bei Weglassung der
 Glieder zweiter Ordnung im Coefficient von dx ,

$$d\mu_{ni} = - \frac{K_n}{M_{ni}(K_n + C_n)} \nu \frac{2n\pi}{c} d_n \sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \cos \lambda_{ni} dx,$$

oder

$$d\mu_{ni} = \frac{n\dot{\gamma}_n}{M_{ni}} \sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \cos \lambda_{ni} dx, \quad (27)$$

wo $\dot{\gamma}_n$ eine unbekannte Instrumentalconstante des n ten Integrier-
 apparatus und von der ersten Ordnung klein ist.

16. Es hätte offenbar keinen Sinn, die Eventualität in
 Erwägung zu ziehen, dass der Cylinder auf seiner Axe ein
 wenig nach rechts oder links verlegt wäre; denn solange der
 unterste Punkt der Kugel die Mantelfläche des Cylinders über-
 haupt berührt, ist es gleichgiltig, wie weit sich diese Mantel-
 fläche nach rechts oder links erstreckt. Anders verhält es sich
 mit einer kleinen Verlegung des Cylinders sammt seiner Um-
 drehungsaxe nach vorn oder hinten; denn im Falle einer solchen
 Anordnung geht die Umdrehungsaxe des Rahmens nicht mehr
 durch den Berührungspunkt der Kugel mit dem Cylinder, es
 müsste dann also bei einer Verschiebung des Fahrstiftes
 parallel der Axe ox eine gleitende Reibung zwischen der Kugel
 und dem Cylinder entstehen, sollte die Kugel sich dabei genau
 um die Umdrehungsaxe des Rahmens (Z -Axe) drehen.

Während bei einem Vorrücken des Stiftes in der Richtung
 der y -Axe ein solches Instrument genau so functionieren wird,
 wie wenn die Axe des Cylinders sich genau in der YZ -Ebene
 befände, wird bei dem Vorrücken des Stiftes in der Richtung
 der x -Axe, im Gegensatze zur Functionierung des correcten

Analysators, eine kleine Rotation der Rollen um ihre Axen zustande kommen. Es ist aber klar, dass diese letztere Erscheinung unabhängig davon ist, was für ein Wert y der Ordinate es ist, der bei dieser Operation eingehalten wird. Daraus folgt, dass der aus dieser fehlerhaften Anordnung herrührende Fehler in dem Drehungswinkel der Rolle M_{ni} um ihre Axe sich im Resultate eliminiert, wenn bei der Befahrung zuletzt an einem Punkte angelangt wird, welcher das gleiche x wie der Ausgangspunkt hat.

17. Nachdem in den vorigen Paragraphen die Fehler der unteren Organe des Apparates behandelt worden sind, gehe ich jetzt über zu seinem oberen Theile: der Horizontalscheibe H_n . Verfolgt man den Draht von der Wagen-Leitrolle ausgehend, so trifft man nacheinander auf eine Anzahl Leitrollen und Integratortenscheiben, die ich zusammen allgemein Horizontalräder nennen und in der soeben angedeuteten Reihenfolge mit den Nummern $0, 1, 2, \dots, N$ belegen will, wobei die Wagen-Leitrolle das 0^{te} Rad und die Scheibe des letzten Integrierapparates rechts das N^{te} Rad ist. Es wird demnach, bei einer positiven Verschiebung des Stiftes parallel der Axe ox , jedes Rad von dem mit unmittelbar kleinerer Nummer angetrieben und treibt das mit unmittelbar größerer Nummer an. Jedes Rad nenne ich ein von dem Drahte positiv oder negativ umwickeltes, je nachdem man, bei dem oben angedeuteten Fortschreiten längs des Drahtes, die Peripherie dieses Rades in dem positiven oder dem negativen Sinne umkreisen würde.

Es soll nun angenommen werden, dass diese Räder auf ihren Umdrehungsaxen excentrisch angebracht seien.

Ich stelle mir zunächst das folgende, etwas allgemeinere, kinematische Problem vor, dessen Anwendung dann im nächsten Paragraph sofort die gesuchten Ausdrücke der Wirkung der Räderexcentricitäten liefert. —

Es liege in einer Ebene xy ein System geschlossener Figuren $S_0 S_1 S_2 \dots S_N$ vor. Dieses System ändere sich continuierlich in der Weise, dass alle Curven, durch welche die einzelne Figur S_m ($m = 1, 2, \dots, N$) successive ersetzt wird, die Eigenschaft haben, ineinander übergeführt werden zu können

durch Drehung um einen festen Punkt $R_m(x = A_m, y = B_m)$ der xy -Ebene, und dass alle Curven, durch welche die Figur S_0 successive ersetzt wird, die Eigenschaft haben, ineinander übergeführt werden zu können durch bloße Verschiebung parallel der x -Axe. Von der durch die einzelne Curve S_m erzeugten Curvenfamilie wird (bei $m = 1, 2, \dots, N$) nur angenommen, dass ihre sämtlichen Glieder übereinstimmen bis auf kleine Abweichungen erster Ordnung (sowohl hinsichtlich der Punkte, als hinsichtlich der Tangenten und Krümmung) mit einem und demselben um R_m gezeichneten unveränderlichen Kreise, dessen Radius ebenfalls R_m heißen mag; von der durch die Curve S_0 erzeugten Curvenfamilie wird angenommen, dass ihre sämtlichen Glieder bis auf kleine Abweichungen erster Ordnung mit Kreisen übereinstimmen, welche aus einem zur erzeugenden Figur festen Kreise von dem unveränderlichen Radius R_0 entstehen; der Mittelpunkt dieses Kreises habe die (veränderliche) Abscisse A_0 und, vermöge passender Wahl des Coordinatensystems, die Ordinate $B_0 = 0$. Der momentane Zustand des Curvensystems $S_0 S_1 \dots S_N$ ist dann vollständig definiert durch die Abscisse A_0 des Mittelpunktes des Kreises der Curve S_0 und durch die Drehungsphasen α_m jeder Curve S_m ($m = 1, 2, \dots, N$); ich verstehe dabei unter der Drehungsphase den Winkel, um welchen sich derjenige mit der erzeugenden Curve fest verbundene aus dem Umdrehungscentrum R_m gezogene Strahl, welcher in dem Anfangszustande des Systems der x -Axe parallel war, von dieser abgelenkt hat seit jenem Anfangszustande bis zu dem momentanen Zustande. Vorausgesetzt wird, dass die $N+1$ Contouren stets außerhalb einander bleiben.

Nun seien die Änderungen der einzelnen Theile des Systems durch das folgende Gesetz miteinander verbunden.

Es sei für den Anfangszustand des Systems ein Linienzug, den ich kurz den »Faden« nennen will, als die Bahn eines laufenden Punktes definiert, der sich von einem Punkte auf der Curve S_0 bis zu einem Punkte auf der Curve S_N ohne Sprünge und plötzliche Richtungsänderungen so bewegt, dass jedes Element der Bewegung entweder mit dem Element einer bestimmten von S_m nach S_{m+1} gerichteten gemeinsamen Tangente eines Curvenpaares $S_m S_{m+1}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, N$)

zusammenfällt, oder auf dem Elemente einer Curve des Systems liegt. Für jeden anderen Zustand des Systems ist der Faden derjenige Linienzug, welcher von einem Punkte der neuen Curve S_0 bis zu einem Punkte der neuen Curve S_N wieder in einer dieser Definition genügenden Weise verläuft und aus dem Faden des Anfangszustandes auf continuierliche Weise entsteht. Das erwähnte Gesetz ist dann das: Die Länge des Fadens zwischen irgend einem mit der erzeugenden Curve fest verbundenen Punkte der Curve S_0 und irgend einem mit der erzeugenden Curve fest verbundenen Punkte der Curve S_m soll unveränderlich bleiben; und zwar gilt dies für jede einzelne der N Curven S_1, S_2, \dots, S_N .

Die Aufgabe ist, für ein beliebiges m die Drehungsphase α_m als Function von A_0 zu bestimmen. Wir werden bei Lösung derselben noch die specielle Voraussetzung über die Gestaltung des Contourensystems einführen, dass der Faden auf der Strecke von S_0 bis S_1 nahezu parallel der $(-x)$ -Axe verläuft. —

Der Weg zur Lösung dieses Problems ist direct durch die Fragestellung vorgezeichnet. Wendet man das obige Gesetz der Constanz der Fadenlänge an auf Figuren S_1, \dots, S_{m-1}, S_m , so erhält man m Differentialgleichungen zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ und A_0 , aus denen es möglich sein wird den gesuchten Ausdruck

$$d\alpha_m = f(A_0) dA_0$$

zu finden.

Man lege für jede der $m + 1$ Curven $S_0 S_1 \dots S_m$, allgemein für die Curve S_v , ein eigenes Polarcoordinatensystem, r, φ_v , mit dem Punkte A, B , als Pol und dem zur x -Axe parallelen Strahl als Polaraxe (die Anomalie φ_v ist gezählt in positivem Drehungsinne von der Polaraxe bis zum Radiusvector). Die Gleichungen dieser $m + 1$ Curven sind dann

$$\begin{aligned} r_0 &= F_0(\varphi_0), \\ r_1 &= F_1(\alpha_1, \varphi_1), \\ &\dots\dots\dots, \\ r_m &= F_m(\alpha_m, \varphi_m), \end{aligned}$$

wo α_v als ein Parameter in der Gleichung zwischen den Variablen r_v und φ_v auftritt. Man bezeichne für die allgemeine Curve S_v mit $P_{v, v-1}(x_{v, v-1}, y_{v, v-1})$ ihren Berührungspunkt mit

der vom Faden gebildeten Tangente des Curvenpaares $S_{\nu-1}S_{\nu}$, und mit $P_{\nu, \nu+1}(x_{\nu, \nu+1}, y_{\nu, \nu+1})$ ihren Berührungspunkt mit der vom Faden gebildeten Tangente des Curvenpaares $S_{\nu}S_{\nu+1}$. Der Wert der Anomalie φ_{ν} für den Punkt $P_{\nu, \nu-1}$ sei $\varphi_{\nu, \nu-1}$, für den Punkt $P_{\nu, \nu+1}$ sei $\varphi_{\nu, \nu+1}$. Man führe schließlich den Factor $\omega_{\nu} = +1, -1$ ein, der den Sinn bedeutet, in welchem die Contour S_{ν} vom Faden umwickelt ist.

Ein Punkt der Curve S_{ν} , welcher durch den Wert $\alpha_{\nu} + C$ der Anomalie φ_{ν} definiert ist, entspricht nun, wenn C eine Constante bedeutet, vor und nach der Drehung einem und demselben Punkte der erzeugenden Curve. Ein Punkt der Curve S_0 , welcher durch den Wert K der Anomalie φ_0 definiert ist, entspricht, wenn K eine Constante bedeutet, vor und nach der Verschiebung einem und demselben Punkte der erzeugenden Curve. Die absolute Länge des Fadens zwischen dem Punkte $\varphi_0 = K$ der Curve S_0 und ihrem Punkte $P_{01}(\varphi_0 = \varphi_{01})$ ist

$$\omega_0 \int_K^{\varphi_{01}} \left| \sqrt{r_0^2 + \left(\frac{dr_0}{d\varphi_0} \right)^2} \right| d\varphi_0.$$

Die absolute Länge des Fadens zwischen seinem Ankunftspunkte an der Curve S_{ν} , d. h. ihrem Punkte $\varphi_{\nu} = \varphi_{\nu, \nu-1}$, und ihrem Punkte $\varphi_{\nu} = \alpha_{\nu} + C$ ist

$$\omega_{\nu} \int_{\varphi_{\nu, \nu-1}}^{\alpha_{\nu} + C} \left| \sqrt{r_{\nu}^2 + \left(\frac{\partial r_{\nu}}{\partial \varphi_{\nu}} \right)^2} \right| d\varphi_{\nu}.$$

Mit jeder der zwischenliegenden $\nu - 1$ Contouren, allgemein der Contour S_i , hat der Faden ein Stück gemeinsam, dessen absolute Länge (bis auf eine gegebene Anzahl ganzer Umfänge)

$$\omega_i \int_{\varphi_{i, i-1}}^{\varphi_{i, i+1}} \left| \sqrt{r_i^2 + \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i} \right)^2} \right| d\varphi_i$$

ist. Die absolute Länge des zwischen je zwei Contouren $S_i S_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, \nu - 1$) enthaltenen Fadenstückes ist

$$\begin{aligned} & -\omega_i r_{i, i+1} \cos \tau_{i, i+1} + \omega_{i+1} r_{i+1, i} \cos \tau_{i+1, i} + \\ & + \omega_i (A_{i+1} - A_i) \cos \vartheta_{i, i+1} + \omega_i (B_{i+1} - B_i) \sin \vartheta_{i, i+1}, \end{aligned}$$

wo $r_{i, i+1}$ den Radiusvector r_i für den Punkt $\varphi_i = \varphi_{i, i+1}$ der Curve S_i , $\tau_{i, i+1}$ die in diesem Punkte geltende Ablenkung des

positiven (nach wachsenden Anomalien gehenden) Curvenelementes von dem Radiusvector, $\vartheta_{i,i+1}$ die in demselben geltende Ablenkung des positiven Curvenelementes von der x -Axe bedeutet, und $r_{i+1,i}$, $\tau_{i+1,i}$, $\vartheta_{i+1,i}$ die analoge Bedeutung für den Punkt $\varphi_{i+1,i}$ der Curve S_{i+1} haben. Die absolute Länge des zwischen den Contouren S_0 und S_1 enthaltenen Fadenstückes ist

$$-\omega_1 r_{01} \cos \tau_{01} + \omega_1 r_{10} \cos \tau_{10} + \omega_0 (A_1 - A_0) \cos \vartheta_{01} + \omega_0 B_1 \sin \vartheta_{01}.$$

Die Bedingungsleichung in Anwendung auf die Contour S , ist daher

$$\begin{aligned} & \omega_0 \frac{d}{dA_0} \int_K^{\varphi_{01}} \sqrt{r_0^2 + \left(\frac{dr_0}{d\varphi_0}\right)^2} d\varphi_0 + \\ & + \frac{d}{dA_0} [-\omega_0 r_{01} \cos \tau_{01} + \omega_1 r_{10} \cos \tau_{10} + \omega_0 (A_1 - A_0) \cos \vartheta_{01} + \omega_0 B_1 \sin \vartheta_{01}] + \\ & + \sum_{i=1}^{i=v-1} \omega_i \frac{d}{dA_0} \int_{\varphi_{i,i-1}}^{\varphi_{i,i+1}} \sqrt{r_i^2 + \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}\right)^2} d\varphi_i + \\ & + \sum_{i=1}^{i=v-1} \frac{d}{dA_0} [-\omega_i r_{i,i+1} \cos \tau_{i,i+1} + \omega_{i+1} r_{i+1,i} \cos \tau_{i+1,i} + \omega_i (A_{i+1} - A_i) \cos \vartheta_{i,i+1} + \omega_i B_i \sin \vartheta_{i,i+1}] + \\ & + \omega_v \frac{d}{dA_0} \int_{\varphi_{v,v-1}}^{\varphi_{v,C}} \sqrt{r_v^2 + \left(\frac{\partial r_v}{\partial \varphi_v}\right)^2} d\varphi_v = 0; \end{aligned}$$

führt man die angezeigten Differentiationen nach A_0 aus, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Function r_i der beiden Argumente α_i, φ_i offenbar nur die Differenz derselben enthält und daher $\frac{\partial r_i}{\partial \alpha_i} \equiv -\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}$ ist, vernachlässigt die Glieder zweiter Ordnung und setzt die Ausdrücke für $\tau_{01}, \vartheta_{01}, \tau_{10}, \vartheta_{10}, \tau_{i,i+1}, \vartheta_{i,i+1}, \tau_{i+1,i}, \vartheta_{i+1,i}$ ein, so geht diese Gleichung über in

[siehe Gleichung (28) auf der nebenstehenden Tafel],

wo das Resultat der Einsetzung von $\varphi_{i,i+1}$ für φ_i in die Functionen r_i und $\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}$ der beiden Argumente α_i, φ_i , der Kürze halber, mit

$$r_{i,i+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i} \right)_{i,i+1} \quad \left[\text{anstatt} \quad \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i} \right)_{\varphi_{i,i+1}} \right]$$

bezeichnet wurde, und Analoges von den Symbolen

$$\left(\frac{dr_0}{d\varphi_0} \right)_{01}, \quad r_{i,i-1}, \quad \left(\frac{\partial r_{i+1}}{\partial \varphi_{i+1}} \right)_{i+1,i}$$

gilt.¹ Die einzelnen Zeilen der Gleichung (28) entstehen aus den entsprechenden Zeilen der vorhergehenden.

Bildet man nun die Gleichung (28) einzeln für $\nu = 1, \nu = 2, \dots, \nu = m$, so erhält man ein System von m Gleichungen, welches, indem man die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gleichungen des Systems nimmt und außerdem die erste Gleichung des Systems beibehält, durch das folgende ersetzt werden kann:

[siehe auf der Tafel Gleichungen (29)].

¹ Die Voraussetzung, dass der Faden von S_0 nach S_1 nahezu parallel der ($-x$)-Axe verläuft, ist eingeführt worden in dem Gliede $+1$ dieser Formel. Bei entgegengesetzter Annahme müsste dieses Glied -1 , im allgemeinen Falle aber

$$-\omega_0 \cos \vartheta_{01} = -\omega_0 \frac{\left(\frac{dr_0}{d\varphi_0} \right)_{01} \cos \varphi_{01} - r_{01} \sin \varphi_{01}}{\sqrt{r_{01}^2 + \left(\frac{dr_0}{d\varphi_0} \right)_{01}^2}}$$

heißen.

$$\left. \begin{aligned}
 & + 1 \quad \omega_0 R_0 \frac{d\varphi_{01}}{dA_0} \\
 & - \sum_{i=1}^{i=v-1} \omega_i R_i \frac{d\varphi_{i,i-1}}{dA_0} \quad + (\omega_1 R_1 - \omega_0 R_0) \frac{d\varphi_{01}}{dA_0} \quad - \left(\omega_0 + \frac{\omega_1 R_1 - \omega_0 R_0}{R_0} \right) \frac{d}{dA_0} \left(\frac{dr_0}{d\varphi_0} \right)_{01} \quad + \omega_1 \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi_1} \right)_{10} \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{i=v-1} \omega_i R_i \frac{d\varphi_{i,i+1}}{dA_0} \quad + \sum_{i=1}^{i=v-1} (\omega_{i+1} R_{i+1} - \omega_i R_i) \frac{d\varphi_{i,i+1}}{dA_0} \quad - \sum_{i=1}^{i=v-1} \left(\omega_i + \frac{\omega_{i+1} R_{i+1} - \omega_i R_i}{R_i} \right) \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i} \right)_{i,i+1} \quad + \sum_{i=1}^{i=v-1} \omega_{i+1} \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_{i+1}}{\partial \varphi_{i+1}} \right)_{i+1,i} \\
 & - \omega_v R_v \frac{d\varphi_{v,v-1}}{dA_0} \quad - \sum_{i=1}^{i=v-1} \omega_i (r_{i,i+1} - r_{i,i-1}) \frac{d\alpha_i}{dA_0} \quad + \omega_v r_{v,v-1} \frac{d\alpha_v}{dA_0}
 \end{aligned} \right\} = 0 \tag{28}$$

$$\left. \begin{aligned}
 1 \quad & -\omega_1 R_1 \frac{d\varphi_{10}}{dA_0} \quad + \omega_1 R_1 \frac{d\varphi_{01}}{dA_0} \quad - \frac{\omega_1 R_1}{R_0} \frac{d}{dA_0} \left(\frac{dr_0}{d\varphi_0} \right)_{01} \quad + \omega_1 \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi_1} \right)_{10} \quad + \omega_1 r_{10} \frac{d\alpha_1}{dA_0} = 0 \\
 & -\omega_2 R_2 \frac{d\varphi_{21}}{dA_0} \quad + \omega_2 R_2 \frac{d\varphi_{12}}{dA_0} \quad - \frac{\omega_2 R_2}{R_1} \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi_1} \right)_{12} \quad + \omega_2 \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_2}{\partial \varphi_2} \right)_{21} \quad + \omega_2 r_{21} \frac{d\alpha_2}{dA_0} - \omega_1 r_{12} \frac{d\alpha_1}{dA_0} = 0 \\
 & -\omega_3 R_3 \frac{d\varphi_{32}}{dA_0} \quad + \omega_3 R_3 \frac{d\varphi_{23}}{dA_0} \quad - \frac{\omega_3 R_3}{R_2} \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_2}{\partial \varphi_2} \right)_{23} \quad + \omega_3 \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_3}{\partial \varphi_3} \right)_{32} \quad + \omega_3 r_{32} \frac{d\alpha_3}{dA_0} - \omega_2 r_{23} \frac{d\alpha_2}{dA_0} = 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & -\omega_m R_m \frac{d\varphi_{m,m-1}}{dA_0} \quad + \omega_m R_m \frac{d\varphi_{m-1,m}}{dA_0} \quad - \frac{\omega_m R_m}{R_{m-1}} \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}} \right)_{m-1,m} \quad + \omega_m \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_m}{\partial \varphi_m} \right)_{m,m-1} \quad + \omega_m r_{m,m-1} \frac{d\alpha_m}{dA_0} - \omega_{m-1} r_{m-1,m} \frac{d\alpha_{m-1}}{dA_0} = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{29}$$



Es ist aber ($\nu = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu-1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu-1}} \right) \cdot d\alpha_\nu + \frac{\partial}{\partial \varphi_{\nu, \nu-1}} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu-1}} \right) \cdot d\varphi_{\nu, \nu-1} = \\
 &= \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \alpha_\nu \partial \varphi_{\nu, \nu-1}} \right) \cdot d\alpha_\nu + \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu-1}^2} \right) \cdot d\varphi_{\nu, \nu-1} = - \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu-1}^2} \right)_{\nu, \nu-1} \cdot dA_0 + \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu-1}^2} \right)_{\nu, \nu-1} \cdot \frac{d\varphi_{\nu, \nu-1}}{dA_0}, \\
 \frac{d}{dA_0} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}} \right) \cdot d\alpha_\nu + \frac{\partial}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}} \right) \cdot d\varphi_{\nu, \nu+1} = \\
 &= \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \alpha_\nu \partial \varphi_{\nu, \nu+1}} \right) \cdot d\alpha_\nu + \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}^2} \right) \cdot d\varphi_{\nu, \nu+1} = - \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}^2} \right)_{\nu, \nu+1} \cdot dA_0 + \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}^2} \right)_{\nu, \nu+1} \cdot \frac{d\varphi_{\nu, \nu+1}}{dA_0}.
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (29) können daher so geschrieben werden:

$$\begin{cases}
 1 + \omega_1 \left[R_1 - \frac{R_1}{R_0} \left(\frac{\partial^2 r_0}{\partial \varphi_0^2} \right)_{01} \right] \frac{d\varphi_{01}}{dA_0} - \omega_1 \left[R_1 - \left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi_1^2} \right)_{10} \right] \frac{d\varphi_{10}}{dA_0} & \left[da_1 = 0 \right] \\
 \omega_2 \left[R_2 - \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi_1^2} \right)_{12} \right] \frac{d\varphi_{12}}{dA_0} - \omega_2 \left[R_2 - \left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial \varphi_2^2} \right)_{21} \right] \frac{d\varphi_{21}}{dA_0} + \left[\omega_2 R_1 \left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi_1^2} \right)_{12} - \omega_1 r_{12} \right] \frac{d\alpha_1}{dA_0} & \left[da_2 = 0 \right] \\
 \omega_3 \left[R_3 - \frac{R_3}{R_2} \left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial \varphi_2^2} \right)_{23} \right] \frac{d\varphi_{23}}{dA_0} - \omega_3 \left[R_3 - \left(\frac{\partial^2 r_3}{\partial \varphi_3^2} \right)_{32} \right] \frac{d\varphi_{32}}{dA_0} + \left[\omega_3 R_2 \left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial \varphi_2^2} \right)_{23} - \omega_2 r_{23} \right] \frac{d\alpha_2}{dA_0} & \left[da_3 = 0 \right] \\
 \dots \\
 \omega_m \left[R_m - \frac{R_m}{R_{m-1}} \left(\frac{\partial^2 r_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}^2} \right)_{m-1, m} \right] \frac{d\varphi_{m-1, m}}{dA_0} - \omega_m \left[R_m - \left(\frac{\partial^2 r_m}{\partial \varphi_m^2} \right)_{m, m-1} \right] \frac{d\varphi_{m, m-1}}{dA_0} + \\
 + \left[\omega_m R_{m-1} \left(\frac{\partial^2 r_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}^2} \right)_{m-1, m} \right] \frac{d\alpha_{m-1}}{dA_0} - \omega_m \left[r_{m, m-1} - \left(\frac{\partial^2 r_m}{\partial \varphi_m^2} \right)_{m, m-1} \right] \frac{d\alpha_m}{dA_0} & \left[da_m = 0 \right].
 \end{cases} \quad (30)$$

Die Anomalien der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente sind, für jedes Contourenpaar $S, S_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \dots, m-1$), in Function der beiden Drehungsphasen zu bestimmen aus dem Gleichungenpaar

$$\begin{aligned}
 U(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \varphi_{\nu, \nu+1}, \varphi_{\nu+1, \nu}) &\equiv \\
 &\equiv \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu} \right)_{\nu, \nu+1} \sin \varphi_{\nu, \nu+1} + r_{\nu, \nu+1} \cos \varphi_{\nu, \nu+1} & r_{\nu+1, \nu} \sin \varphi_{\nu+1, \nu} + B_{\nu+1} - r_{\nu, \nu+1} \sin \varphi_{\nu, \nu+1} - B_\nu, \\
 &\equiv \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu} \right)_{\nu, \nu+1} \cos \varphi_{\nu, \nu+1} - r_{\nu, \nu+1} \sin \varphi_{\nu, \nu+1} & r_{\nu+1, \nu} \cos \varphi_{\nu+1, \nu} + A_{\nu+1} - r_{\nu, \nu+1} \cos \varphi_{\nu, \nu+1} - A_\nu, \\
 &= 0 \\
 \\
 V(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \varphi_{\nu, \nu+1}, \varphi_{\nu+1, \nu}) &\equiv \\
 &\equiv \left(\frac{\partial r_{\nu+1}}{\partial \varphi_{\nu+1}} \right)_{\nu+1, \nu} \sin \varphi_{\nu+1, \nu} + r_{\nu+1, \nu} \cos \varphi_{\nu+1, \nu} & r_{\nu+1, \nu} \sin \varphi_{\nu+1, \nu} + B_{\nu+1} - r_{\nu, \nu+1} \sin \varphi_{\nu, \nu+1} - B_\nu, \\
 &\equiv \left(\frac{\partial r_{\nu+1}}{\partial \varphi_{\nu+1}} \right)_{\nu+1, \nu} \cos \varphi_{\nu+1, \nu} - r_{\nu+1, \nu} \sin \varphi_{\nu+1, \nu} & r_{\nu+1, \nu} \cos \varphi_{\nu+1, \nu} + A_{\nu+1} - r_{\nu, \nu+1} \cos \varphi_{\nu, \nu+1} - A_\nu, \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

ihre Differentialquotienten nach A_0 sind in Folge dessen

$$\frac{d\varphi_{\nu, \nu+1}}{dA_0} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} \frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu}}{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} \frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu}}{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}}} \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} \frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu}}{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1, \nu}} \frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu, \nu+1}}} \frac{d\alpha_{\nu+1}}{dA_0},$$

$$\frac{d\varphi_{v+1, \nu}}{dA_0} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}} \frac{\partial U}{\partial \alpha_\nu} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}}}{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}}} \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} - \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}} \frac{\partial U}{\partial \alpha_{v+1}} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}}}{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}} \frac{\partial U}{\partial \varphi_{v+1, \nu}}} \frac{d\alpha_{v+1}}{dA_0},$$

und wenn man die angedeuteten partiellen Differentiationen und Multiplicationen ausführt, unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung, findet man

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{v, \nu+1}}{dA_0} &= \left[-\frac{1}{R_\nu} \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_\nu^2} \right)_{\nu, \nu+1} - \frac{\omega_\nu}{T_{\nu, \nu+1}} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu} \right)_{\nu, \nu+1} \right] \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} \\ &\quad + \frac{\omega_{\nu+1}}{T_{\nu, \nu+1}} \left(\frac{\partial r_{\nu+1}}{\partial \varphi_{\nu+1}} \right)_{\nu+1, \nu} \frac{d\alpha_{\nu+1}}{dA_0}, \\ \frac{d\varphi_{v+1, \nu}}{dA_0} &= -\frac{\omega_\nu}{T_{\nu, \nu+1}} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu} \right)_{\nu, \nu+1} \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} + \left[\frac{1}{R_{\nu+1}} \left(\frac{\partial^2 r_{\nu+1}}{\partial \varphi_{\nu+1}^2} \right)_{\nu+1, \nu} + \frac{\omega_{\nu+1}}{T_{\nu, \nu+1}} \left(\frac{\partial r_{\nu+1}}{\partial \varphi_{\nu+1}} \right)_{\nu+1, \nu} \right] \frac{d\alpha_{\nu+1}}{dA_0}, \end{aligned}$$

wo $T_{\nu, \nu+1}$ die absolute Länge derselben gemeinsamen Tangente, wie sie vom Faden gebildet wird, für den idealen Fall (den Fall der Kreise $R_\nu, R_{\nu+1}$) ist. In ähnlicher Weise haben die Anomalien der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente im Contourenpaare $S_0 S_1$, als gemeinsame Lösungen der Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} U(\alpha_1, \varphi_{01}, \varphi_{10}, A_0) &\equiv \frac{\left(\frac{dr_0}{d\varphi_0} \right)_{01} \sin \varphi_{01} + r_{01} \cos \varphi_{01}}{\left(\frac{dr_0}{d\varphi_0} \right)_{01} \cos \varphi_{01} - r_{01} \sin \varphi_{01}} - \frac{r_{10} \sin \varphi_{10} + B_1 - r_{01} \sin \varphi_{01}}{r_{10} \cos \varphi_{10} + A_1 - r_{01} \cos \varphi_{01} - A_0} = 0 \\ V(\alpha_1, \varphi_{01}, \varphi_{10}, A_0) &\equiv \frac{\left(\frac{dr_1}{d\varphi_1} \right)_{10} \sin \varphi_{10} + r_{10} \cos \varphi_{10}}{\left(\frac{dr_1}{d\varphi_1} \right)_{10} \cos \varphi_{10} - r_{10} \sin \varphi_{10}} - \frac{r_{10} \sin \varphi_{10} + B_1 - r_{01} \sin \varphi_{01}}{r_{10} \cos \varphi_{10} + A_1 - r_{01} \cos \varphi_{01} - A_0} = 0, \end{aligned} \right.$$

ihre Differentialquotienten bis auf Glieder zweiter Ordnung gleich den Ausdrücken

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{01}}{dA_0} &= \frac{1}{(A_0 - A_1)^2} [r_{10} \sin \varphi_{10} + B_1 - r_{01} \sin \varphi_{01}] + \\ &\quad + \frac{\omega_1}{A_0 - A_1} \left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi_1} \right)_{10} \cdot \frac{d\alpha_1}{dA_0}, \\ \frac{d\varphi_{10}}{dA_0} &= \frac{1}{(A_0 - A_1)^2} [r_{10} \sin \varphi_{10} + B_1 - r_{01} \sin \varphi_{01}] + \\ &\quad + \left[-\frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi_1^2} \right)_{10} + \frac{\omega_1}{A_0 - A_1} \left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi_1} \right)_{10} \right] \cdot \frac{d\alpha_1}{dA_0}. \end{aligned}$$

Damit werden die Gleichungen (30) einfach

$$\left. \begin{aligned} 1 &+ \omega_1 r_{10} \frac{d\alpha_1}{dA_0} &= 0, \\ -\omega_1 r_{12} \frac{d\alpha_1}{dA_0} &+ \omega_2 r_{21} \frac{d\alpha_2}{dA_0} &= 0, \\ -\omega_2 r_{23} \frac{d\alpha_2}{dA_0} &+ \omega_3 r_{32} \frac{d\alpha_3}{dA_0} &= 0, \\ \dots &\dots &\dots \\ -\omega_{m-1} r_{m-1, m} \frac{d\alpha_{m-1}}{dA_0} &+ \omega_m r_{m, m-1} \frac{d\alpha_m}{dA_0} &= 0. \end{aligned} \right\} (31)$$

Hierin sind: r_{01} ; r_{12} ; r_{21} ; r_{23} ; r_{32} ; \dots ; $r_{m-1, m}$; $r_{m, m-1}$ bekannte Functionen von: α_1 und φ_{10} ; von α_1 und φ_{12} , von α_2 und φ_{21} ; \dots ; von α_{m-1} und $\varphi_{m-1, m}$, von α_m und $\varphi_{m, m-1}$. Die Gleichungen (31), zusammengenommen mit den Gleichungen, aus welchen die Anomalien der Berührungspunkte in jedem Contourenpaare in Function der beiden Drehungsphasen — beziehungsweise in Function der Drehungsphase α_1 und der Abscisse A_0 — ausgedrückt werden, enthalten die Lösung der Aufgabe.

18. Die Anwendung auf die excentrischen Horizontalräder des Analysators ist eine unmittelbare.

Schneidet man mit einer horizontalen Ebene jedes Rad in der Höhe durch, wo es vom Draht umwickelt ist, so bilden die Figuren der Räder in dieser Ebene ein System geschlossener

Curven. Nimmt man in dieser Ebene ein rechtwinkliges, zum Gerüst des Instrumentes festes Coordinatensystem xy an, dessen Axen den gleichnamigen Axen des früheren Systems xyz parallel und die x -Axe durch den Mittelpunkt der Wagen-Leitrolle (= des 0^{ten} Rades) gelegt werden, so ist jenes Curvensystem im Falle der excentrischen Räder durch Gleichungen dargestellt, welche mit der Stellung des Fahrstiftes sich continuierlich ändern, und sind die Veränderungen des Curvensystems gerade von der Art, wie sie im vorigen Paragraph beschrieben wurde. Indem nämlich bei der Verschiebung dx des Fahrstiftes der Draht die Räder $1, 2, \dots, N$ in Umdrehung versetzt, ist die jedem Rad ertheilte Drehung eine solche, dass ein materieller Punkt des umwickelnden Drahtstückes (welcher nicht durch die Verschiebung die Peripherie des Rades verlässt) vor und nach der Verschiebung mit demselben materiellen Punkte des Rades zusammenfällt. Sie ist, mit anderen Worten, durch diese geometrische Bedingung definiert, dass die Entfernung zwischen einem materiellen Punkte der Peripherie der Wagen-Leitrolle und einem solchen der Peripherie des Rades, gemessen längs des Drahtes, durch die Verschiebung nicht geändert wird.

Die veränderlichen Contouren S_0, S_1, S_2, \dots , welche durch die excentrischen Horizontalräder des Analysators in der xy -Ebene gebildet werden, sind Kreise. Die Gleichungen der Contouren S_1, S_2, \dots in den durch die Umdrehungscentra der Räder gelegten Polarcoordinaten-Systemen sind, wenn man mit δ_v die lineare Excentricität des v^{ten} Rades, mit R_v seinen Halbmesser und mit E_v die in der Anfangsstellung des Instrumentes stattfindende Ablenkung der Richtung Umdrehungscentrum—Radmittelpunkt von der x -Axe bezeichnet,

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1 + \delta_1 \cos(\varphi_1 - \alpha_1 - E_1) + [\delta_1^2] \\ r_2 &= R_2 + \delta_2 \cos(\varphi_2 - \alpha_2 - E_2) + [\delta_2^2] \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

wo also δ_v, E_v Instrumentalconstanten des v^{ten} Rades sind. Die Verschiebung dA_0 der Contour S_0 ist gleich der Verschiebung dx des Fahrstiftes.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Horizontalscheibe des n^{ten} Integrierapparates bei einer positiven Verschiebung dx des Fahrstiftes drehen wird; wie man später sehen wird, braucht der Fall der negativen Verschiebung hier nicht genauer untersucht zu werden. Die Horizontalscheibe des n^{ten} Integrierapparates sei das m^{te} Rad.

Dann haben wir die Gleichungen (31) anzuwenden. Es ist aber, bis auf Glieder zweiter Ordnung der Excentricitäten,

$$r_{10} = R_1 + \delta_1 \cos(\Phi_{10} - \alpha_1 - E_1)$$

und

$$r_{\nu, \nu+1} = R_\nu + \delta_\nu \cos(\Phi_{\nu, \nu+1} - \alpha_\nu - E_\nu),$$

$$r_{\nu+1, \nu} = R_{\nu+1} + \delta_{\nu+1} \cos(\Phi_{\nu+1, \nu} - \alpha_{\nu+1} - E_{\nu+1}),$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, m-1),$$

wo Φ_{10} , $\Phi_{\nu, \nu+1}$, $\Phi_{\nu+1, \nu}$ die Anomalien der betreffenden Berührungspunkte für den idealen Fall, somit bekannte Constanten des Instrumentes sind. Es fällt daher die Nothwendigkeit weg, bei der Anwendung der Gleichungen (31) erst die Anomalien der factischen Berührungspunkte in Function der Drehungsphasen auszudrücken. Setzt man die obigen Werte ein und summiert die Gleichungen (31), so erhält man

$$\begin{aligned} \omega_m \frac{d\alpha_m}{dx} = & -\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_m} \frac{\delta_m}{R_m} \cos(\Phi_{m, m-1} - \alpha_m - E_m) \\ & + \frac{1}{R_m} \frac{\delta_1}{R_1} [\cos(\Phi_{10} - \alpha_1 - E_1) - \cos(\Phi_{12} - \alpha_1 - E_1)] + \\ & + \frac{1}{R_m} \frac{\delta_2}{R_2} [\cos(\Phi_{21} - \alpha_2 - E_2) - \cos(\Phi_{23} - \alpha_2 - E_2)] + \dots + \\ & + \frac{1}{R_m} \frac{\delta_{m-1}}{R_{m-1}} [\cos(\Phi_{m-1, m-2} - \alpha_{m-1} - E_{m-1}) - \cos(\Phi_{m-1, m} - \alpha_{m-1} - E_{m-1})], \end{aligned} \quad (32)$$

wo rechts nur Glieder zweiter Ordnung der Excentricitäten weggelassen sind.

Die weitere Anwendung der erhaltenen Formel muss auf ein bestimmtes Modell des Analysators Bezug nehmen. Hier soll sie für den Fall durchgeführt werden, welcher bei dem von mir benutzten Instrumente vorliegt. Für andere Anordnungen

wird sie sich nach demselben Muster unter leichter Modification durchführen lassen. Bei meinem Instrumente nun sind (sofern nicht zu besonderen Zwecken der Verlauf des Drahtes geändert wird) die Räder 1 und 2 Leitrollen, nämlich die vordere linke und die hintere linke Leitrolle, und darauf folgen als die Räder 3, 4 und 5 die Integratorenscheiben H_3, H_2, H_1 , oder H_6, H_5, H_4 ; ferner sind die Leitrollen negativ, die Integratoren-Scheiben positiv vom Drahte umwickelt. Bezeichnet man also, allgemein für die Horizontalscheibe H_j , mit e_j ihre lineare Excentricität, mit Π'_j den correcten Wert der Anomalie des Ankunfts-punktes des Drahtes an dieser Scheibe vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes der Scheibe, mit Π''_j den correcten Wert der Anomalie des Abgangspunktes des Drahtes von der Scheibe vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes; — ferner mit H den Halbmesser der vorderen linken Leitrolle, mit e ihre lineare Excentricität, mit Π' und Π'' die Anomalien des Ankunfts- und des Abgangspunktes des Drahtes an dieser Rolle vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes der Rolle; — schließlich mit J, f, Ψ' und Ψ'' die analogen Größen für die hintere linke Leitrolle: — so erhält man als die gesuchte Beziehung zwischen der Änderung der geographischen Längen der Messrollen des n^{ten} Integrators und der Verschiebung dx des Fahrstiftes:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{ni}}{dx} = & -\frac{1}{H_n} + \frac{e_n}{H_n^2} \cos\left(\Pi'_n + \frac{2n\pi x}{c}\right) + \\ & + \frac{1}{H_n} \frac{e}{H} \left[\cos\left(\Pi' - \frac{x}{H}\right) - \cos\left(\Pi'' - \frac{x}{H}\right) \right] + \\ & + \frac{1}{H_n} \frac{f}{J} \left[\cos\left(\Psi' - \frac{x}{J}\right) - \cos\left(\Psi'' - \frac{x}{J}\right) \right] + \\ & + \frac{1}{H_n} \sum_{j=n+1}^{j=k} \frac{e_j}{H_j} \left[\cos\left(\Pi'_j + \frac{2j\pi x}{c}\right) - \cos\left(\Pi''_j + \frac{2j\pi x}{c}\right) \right], \end{aligned}$$

wobei k die höchste Integratornummer in der Gruppe, zu welcher der n^{te} Integrator gehört, bezeichnet. Daraus ergibt sich, wenn Λ_{ni} den Wert der geographischen Länge der Rolle M_{ni} für die Stellung $x = 0$ des Fahrstiftes bezeichnet,

$$\begin{aligned} \lambda_{ni} - \Lambda_{ni} = & -\frac{x}{H_n} + 2n\pi \frac{e_n}{c} \cdot \left[\sin \left(\Pi'_n + \frac{2n\pi x}{c} \right) - \sin \Pi'_n \right] - \\ & - 4n\pi \frac{e}{c} \sin \frac{\Pi' - \Pi''}{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{x}{H} - \frac{\Pi' + \Pi''}{2} \right) - \cos \frac{\Pi' + \Pi''}{2} \right] - \\ & - 4n\pi \frac{f}{c} \sin \frac{\Psi' - \Psi''}{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{x}{J} - \frac{\Psi' + \Psi''}{2} \right) - \cos \frac{\Psi' + \Psi''}{2} \right] + \\ & + \sum_{j=n+1}^{j=k} 4n\pi \frac{e_j}{c} \sin \frac{\Pi'_j - \Pi''_j}{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{2j\pi x}{c} + \frac{\Pi'_j + \Pi''_j}{2} \right) - \cos \frac{\Pi'_j + \Pi''_j}{2} \right], \end{aligned}$$

wo also, z. B. für den j ten Integrierapparat, $e_j \Pi'_j \Pi''_j$ unbekannt Constanten dieses Apparates sind, die Differenz $\Pi'_j - \Pi''_j$ jedoch eine bekannte Constante des Analysators ist.

Die Winkel $\frac{\Pi'_j - \Pi''_j}{2}$ sind bei meinem Analysator¹ sehr gering. Den Coefficient vor der Klammer in dem Summationsglied der letzten Zeile kann man so schreiben:

$$\frac{2n}{j} \left(\frac{e_j}{H_j} \right) \sin \frac{\Pi'_j - \Pi''_j}{2},$$

wo $\frac{e_j}{H_j}$ die procentuelle Excentricität der Scheibe H_j darstellt. Der Factor $\frac{2n}{j} \sin \frac{\Pi'_j - \Pi''_j}{2}$ beträgt in meinem Analysator bei $n = 1$: $+0.1$ für $j = 2$ und $+0.01$ für $j = 3$; bei $n = 2$: $+0.01$. Ist aber der n te Integrierapparat einer der höheren Gruppe, so übersteigt der absolute Betrag keines der zugehörigen Factoren den Wert 0.01 . Da man ohnehin nicht hoffen kann, die procentuelle Excentricität mit einer Sicherheit zu bestimmen, dass man noch $\frac{1}{10}$ ihres Betrages verbürgen

könnte, so hat es keinen Zweck, diese Glieder noch mitzunehmen. Ferner kann in den Gliedern der zweiten und dritten Zeile, besonders in Rücksicht auf die kleinen Coefficienten dieser Glieder, $J = H$ gesetzt werden; ich habe nämlich gefunden $H = 15.70$ mm, $J = 15.72$ mm. Dann ziehen sich diese

¹ Meines Wissens richtet Herr Coradi dies auch bei anderer Anzahl der Integrierapparate regelmäßig so ein.

beiden Glieder in eines zusammen. Bezeichnet man noch $2\pi \frac{e_n}{c}$ mit ε_n , Π'_n mit E_n , so kann man die Formel für geographische Längen endgiltig so schreiben:

$$\lambda_{ni} = \left(\Lambda_{ni} - \frac{x}{H_n} \right) + n\varepsilon_n \left[\sin \left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n \right) \pm \sin E_n \right] + \left. \begin{array}{l} \\ + n\varepsilon \left[\sin \left(\frac{x}{H} + E \right) - \sin E \right], \end{array} \right\} (33)$$

wo $\varepsilon_n E_n$ unbekannte Instrumentalconstanten des n ten Integrierapparates, εE aber von n unabhängige Constanten des Analysators sind.¹ —

Wie aus der Ableitung ersichtlich, gilt dieser Wert nur, solange der Fahrstift in positiver Verschiebung begriffen ist, oder nach einer positiven Verschiebung auf constantem Abscissenwert gehalten wird. Für den Rückweg von der Endabscisse der analysierten Curve zu ihrer Anfangsabscisse müssen wir deshalb schreiben:

$$\lambda_{ni} = \left(\Lambda_{ni} - \frac{x}{H_n} \right) + \phi_n(x),$$

wo $\phi_n(x)$ eine andere Function von x ist, welche Factoren von erster Ordnung der Excentricitäten enthält.

19. Im Anschluss an die obige Untersuchung über die Wirkung der Excentricitäten der Horizontalräder soll hier noch eine Relation abgeleitet werden, die für später wertvoll sein wird. Die Gleichungen (31) liefern die Relation zwischen den Drehungen zweier unmittelbar nacheinander eingeschalteter Räder, des als ν tes und des als $(\nu-1)$ tes eingeschalteten:

$$\frac{d\alpha_\nu}{d\alpha_{\nu-1}} = \frac{\omega_{\nu-1} r_{\nu-1, \nu}}{\omega_\nu r_{\nu, \nu-1}}.$$

¹ Es ist dann:

$$\varepsilon \sin E = -4\pi \frac{e}{c} \sin \frac{\Pi' - \Pi''}{2} \cos \frac{\Pi' + \Pi''}{2} - 4\pi \frac{f}{c} \sin \frac{\Psi' - \Psi''}{2} \cos \frac{\Psi' + \Psi''}{2},$$

$$\varepsilon \cos E = -4\pi \frac{e}{c} \sin \frac{\Pi' - \Pi''}{2} \sin \frac{\Pi' + \Pi''}{2} - 4\pi \frac{f}{c} \sin \frac{\Psi' - \Psi''}{2} \sin \frac{\Psi' + \Psi''}{2}.$$

Ist also unmittelbar vor oder nach einer Integratorscheibe, H_q , eine andere Integratorscheibe, H_p , in den Draht eingeschaltet, dann besteht zwischen der Änderung der geographischen Längen der Messrollen in dem p^{ten} Integrierapparate und der gleichzeitigen Änderung der Rollenlängen in dem q^{ten} Integrierapparate (wobei wir die Rollenindices weglassen können) die Relation

$$\frac{d\lambda_q}{d\lambda_p} = \frac{H_p + e_p \cos(\Pi_p^q - \alpha_p)}{H_q + e_q \cos(\Pi_q^p - \alpha_q)},$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_q}{d\lambda_p} = \frac{H_p}{H_q} - \frac{H_p}{H_q} \left(\frac{e_q}{H_q} \right) \cos \left(\Pi_q^p - \frac{H_p}{H_q} [\lambda_p - \Lambda_p] \right) + \\ + \frac{H_p}{H_q} \left(\frac{e_p}{H_p} \right) \cos \left(\Pi_p^q - [\lambda_p - \Lambda_p] \right), \end{aligned}$$

wo die Constante Π_p^q die Anomalie des Berührungspunktes der gemeinsamen Tangente mit der Scheibe H_p vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes der Scheibe H_p , die Constante Π_q^p dagegen die Anomalie ihres Berührungspunktes mit der Scheibe H_q vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes der Scheibe H_q ist. Durch Integration erhält man eine Formel, welcher man die beiden folgenden Gestalten geben kann:

$$\begin{aligned} q\varepsilon_q [\sin(\lambda_q - \Lambda_q - \Pi_q^p) + \sin \Pi_q^p] = -(\lambda_q - \Lambda_q) + \\ + \frac{H_p}{H_q} (\lambda_p - \Lambda_p) + q\varepsilon_p [\sin(\lambda_p - \Lambda_p - \Pi_p^q) + \sin \Pi_p^q], \\ p\varepsilon_p [\sin(\lambda_p - \Lambda_p - \Pi_p^q) + \sin \Pi_p^q] = -(\lambda_p - \Lambda_p) + \\ + \frac{H_q}{H_p} (\lambda_q - \Lambda_q) + p\varepsilon_q [\sin(\lambda_q - \Lambda_q - \Pi_q^p) + \sin \Pi_q^p]. \end{aligned} \quad (34)$$

Die gleichen Formeln gelten bei leichter Modification der Bedeutung der Constanten Π_p^q , Π_q^p auch für den Fall, dass der Draht zwischen den Scheiben H_p , H_q noch Räder antrifft, jedes derselben aber mit einer geringen Differenz der Grenzanomalien umwickelt.

Dank der Eigenschaft (34) ist es für gewisse Integratordisken möglich, ihre Excentricitäten unabhängig von anderen Instrumentalfehlern und ohne die Nothwendigkeit präciser Einstellungen des Wagenindex an der Schienentheilung zu bestimmen (Art. 37.).

20. Ich betrachte jetzt den Fall einer schrägen Befestigung der Horizontalscheibe des n^{ten} Integrierapparates an ihrer Umdrehungsaxe. Die Normale der Scheibe, d. h. die geometrische Axe ihrer Mantelfläche, bilde mit der Umdrehungsaxe einen kleinen Winkel τ . Da die Scheibe sich nur um diese Umdrehungsaxe drehen kann, eine Verschiebung der Scheibe mit dieser Axe oder eine Drehung um eine dazu senkrechte Axe dagegen durch die Construction des Apparates verhindert ist, so kommt allein der Umstand in Betracht, dass die lineare Verschiebung eines die Scheibe berührenden Drahttheilchens unter Umständen, nämlich je nach seiner Lage gegen die Ebene der Normale und der Umdrehungsaxe, nicht mit ihrem vollen Betrage wirken kann im Sinne einer Rotation um die Umdrehungsaxe der Scheibe, sondern nur mit dem ihrer Projection auf die zur Umdrehungsaxe senkrechte Ebene; und ferner, dass der Arm der Verschiebung eines Drahttheilchens in Bezug auf die Umdrehungsaxe unter Umständen verschieden sein kann von dem Scheibenhalmmesser H_n , nämlich gleich der directen Distanz des Berührungspunktes von der Umdrehungsaxe.

Jedoch ist klar, dass jene Projection der Verschiebung stets bis auf Größen zweiter Ordnung der Neigung τ gleich bleibt der Verschiebung selbst; ebenso, dass die Distanz von der Umdrehungsaxe stets bis auf Größen zweiter Ordnung der Neigung gleich bleibt dem Scheibenhalmmesser H_n . Der daraus resultierende Fehler in der Drehungsphase des Rahmens des Integrierapparates ist daher zu vernachlässigen.

21. Die bisher behandelten Fehler des Analysators waren die »Orientierungs-« und »Positionsfehler«. Ich gehe über zur Betrachtung der »metrischen« Fehler, d. h. solcher, die in ungenauen Dimensionen der einzelnen Organe des Instrumentes bestehen.

In der ganzen Theorie des Analysators und der Constantenbestimmung gebrauche ich immer als die Längeneinheit, auf welche alles reduciert wird, den »Analysator-Millimeter«, d. h. den 360^{ten} Theil der zwischen dem Strich 0 und dem Strich 360 der Schienentheilung des Analysators enthaltenen Länge, c . Das Zeichen mm soll immer diesen Analysator-Millimeter bedeuten. Mit Rücksicht auf eventuelle Veränderlichkeit der Schienenlänge wird man genauer sagen, 1 mm bedeute den momentanen Analysator-Millimeter. Es ist also immer streng $c = 360$ mm.

Bei dem correcten Analysator ist der Halbmesser der Scheibe H_n

$$H_n = \frac{c}{2n\pi}.$$

Bei dem fehlerhaften Analysator sei er

$$H_n = \frac{c}{2n\pi} (1 + s_n),$$

wo s_n von der ersten Ordnung klein sei. Die Wirkung dieser Fehlerquelle ist einleuchtend: es ist dann

$$\lambda_{ni} = \left(-\frac{2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni} \right) + s_n \cdot \frac{2n\pi x}{c},$$

oder

$$\lambda_{ni} = \left(-\frac{2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni} \right) + h_n \cdot \frac{x}{c}, \quad (35)$$

wo also h_n eine unbekannte Instrumentalconstante des n ^{ten} Integrierapparates (abstracte Zahl) ist.

Bei dem correcten Analysator sind die Halbmesser: der Laufräder L , der Messrolle M_{ni} , und des Cylinders C_n so getroffen, dass

$$\frac{C_n}{LM_{ni}} = \frac{1}{5 \text{ mm}}$$

ist. Bei dem fehlerhaften sei dieses Verhältnis

$$\frac{C_n}{LM_{ni}} = \frac{1}{5 \text{ mm}} (1 + m_{ni}),$$

wo m_{ni} von der ersten Ordnung klein sei. Dann ist die unendlich kleine Drehung der Messrolle um ihre Axe

$$d\mu_{ni} = + \frac{1}{5 \text{ mm}} \sin \lambda_{ni} dy + \frac{m_{ni}}{5 \text{ mm}} \sin \lambda_{ni} dy, \quad (36)$$

wo die abstracten Zahlen m_{n1} , m_{n2} zwei unbekannte Instrumentalconstanten des n^{ten} Integrierapparates und von der ersten Ordnung klein sind.

22. Die »Fehler des Anfangszustandes« bestehen darin, dass die Anfangswerte der geographischen Längen der beiden Messrollen des n^{ten} Integrierapparates andere sind, als bei dem correcten Analysator. Bezeichnet man die speciellen Winkel, welche bei dem letzteren zutreffen (180° für die Rolle M_{n1} , 270° für die Rolle M_{n2}) mit Λ_{ni}^0 , so kann man setzen

$$\Lambda_{ni} = \Lambda_{ni}^0 + \sigma_{ni},$$

wo σ_{ni} von der ersten Ordnung klein sei. Dann ist

$$\lambda_{ni} = \left(- \frac{2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) + \sigma_{ni}; \quad (37)$$

σ_{n1} , σ_{n2} sind zwei unbekannte Instrumentalconstanten des n^{ten} Integrierapparates.

23. Es bleibt übrig, zum Schluss einige Bemerkungen zu machen über die verschiedenen physikalischen Umstände, welche die Functionierung des Instrumentes beeinflussen.

Ein solcher Umstand ist die Ausziehung des Drahtes durch die Kraft der den Wagen führenden Hand. Das Stück des Drahtes, welches, in einer bestimmten Stellung x des Fahrstiftes, hinter dem Wagen liegt und bis zu der betrachteten Scheibe H_n sich erstreckt, ist infolge dieses Umstandes verlängert und diese Verlängerung eine lineare Function seiner Länge, also auch des x . Wie bereits in der Einleitung dieses Abschnittes erwähnt, hat schon Herr Bervy deswegen gesetzt

$$\lambda_{ni} = \left(- \frac{2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) + A_n + B_n x.$$

Für den Rückweg, d. h. denjenigen Theil der Umfahrung, wo die Abscissen abnehmen, wirkt die Zugkraft in entgegen-

gesetzter Richtung und ist für die Drehung der Scheibe das an der anderen Seite des Wagens liegende Drahtstück maßgebend; es wäre also mit Rücksicht darauf für den Rückweg zu setzen

$$\lambda_{ni} = \left(-\frac{2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) + A'_n + B'_n x.$$

Die Fehlerglieder $A_n + B_n x$, $A'_n + B'_n x$ werden als stets klein bleibend vorausgesetzt, so dass ihre Quadrate vernachlässigt werden dürfen.

Ein Glied von dieser Form haben wir indessen in unserer Theorie schon gehabt. Ein solches entsteht nämlich durch die Verbindung unseres »Anfangsfehlers« der Rolle M_{ni} mit dem »metrischen Fehler« der Scheibe H_n . Die Berücksichtigung der Ausziehbarkeit des Drahtes wird für uns also lediglich darin bestehen, unseren Instrumentalconstanten σ_{ni} und h_n eine etwas veränderte physikalische Bedeutung beizulegen; außerdem aber, diese Constanten für den Rückweg durch andere, σ'_{ni} und h'_n , zu ersetzen. —

Ferner gehört zu solchen Umständen auch das Gleiten des Drahtes an der Scheibe, wodurch die Drehung der letzteren verzögert wird. Die Möglichkeit einer solcher Erscheinung kann nicht ausgeschlossen werden, obwohl, wie mir scheint, ein Gleiten, praktisch genommen, gar nicht stattfindet, falls der Draht richtig gespannt und die Axe der Scheibe in ihrem Lager richtig eingölt ist. Indessen ist, unter der Annahme, dass das Gleiten als gleichmäßig und somit der Betrag der Verzögerung als proportional der vollzogenen Drehung angesehen werden kann, die Wirkung dieses Fehlers offenbar wieder dieselbe, wie die eines metrischen Fehlers der Scheibe, h_n .

Eine gehörige Spannung des Drahtes ist aber ohnehin aus anderen Gründen erforderlich. Ein nicht richtig gespannter Draht krümmt sich stellenweise mehr oder weniger, und ein gekrümmter Draht ist selbstverständlich zum Gebrauche absolut untauglich, weil die krummen Stellen sich leichter als die anderen verlängern. Ich habe die Spannung immer akustisch gemessen, eine Methode, die ebenso einfach wie empfindlich ist. Der Wagenindex wurde mit einer nach links gerichteten Bewegung des Wagens auf den Strich 0 der Schienentheilung

gestellt, sodann das zwischen dem Wagen und der vorderen rechten Leitrolle liegende Drahtstück mit einem weichen Holzstäbchen leise angeschlagen und der hörbar werdende Ton mit dem einer Stimmgabel verglichen. Beim Anlegen eines Drahtes muss man darauf achten, dass derselbe keinen kurzen Bug (Knick) erhält, weil er dann an dieser Stelle leicht brechen würde. Ist ein Draht ohne einen solchen angelegt, so nenne ich die größte Spannung, welche er noch verträgt, d. h. bei welcher er noch nicht bricht, die höchste zulässige Spannung. Für die Functionierung des Instrumentes am günstigsten ist nun nach meinen Erfahrungen eine Spannung, welche nur wenig kleiner als die höchste zulässige Spannung ist. Für mein Instrument und für den Fall, dass der Draht an den unteren Scheiben liegt, ist es etwa die Spannung d' oder e' .

Nach einer Neuanlage des Drahtes darf derselbe jedoch nicht gleich auf diesen Ton, sondern zunächst um mehrere Töne (etwa eine Quinte) tiefer gespannt werden. Sodann fährt man den Wagen gleichmäßig und sehr langsam mindestens zweimal bis an das rechte Ende der Schiene und zurück, damit die Spannungen sich ausgleichen, und spannt darauf nur um einen Zahn der Vorrathsrolle weiter. Dann fährt man wieder langsam mindestens zweimal hin und zurück, und wiederholt das Verfahren solange, bis jene günstigste Spannung nahezu (etwa bis auf einen Ton) erreicht ist. Lässt man gleich nach der Weiterspannung um einen Zahn der Vorrathsrolle den Draht wiedererschallen, so findet man den Ton in der Regel um etwa eine volle oder eine kleine Terz,¹ nach der wiederholten Hin- und Rückfahrt nur noch um etwa eine volle oder eine kleine Secunde höher, als er vor der Spannung war. Das kleine Intervall, welches die schließlich erreichte Spannung noch von jener günstigsten Spannung trennt, pflege ich vorderhand (etwa bis zum nächsten Tage) bestehen zu lassen.

¹ Zuweilen, allerdings selten, kommt es vor, dass die Erhöhung viel größer (z. B. = eine kleine Quinte) gefunden wird, die Spannung also einen plötzlichen Sprung ausgeführt hat. In solchem Falle muss man sofort wieder um einen Zahn zurückschrauben, sonst bricht der Draht im nächsten Augenblicke, jedenfalls aber sicher bei der nächsten Bewegung des Wagens, — und erst mehrere Hin- und Zurückfahrten ausführen.

In den ersten Tagen nach einer Neulegung des Drahtes, besonders wenn unterdessen Umfahrungen ausgeführt werden, lässt die Spannung allmählich nach, so dass man noch zwei- oder dreimal veranlasst ist, den Draht wieder um einen halben Ton fester zu spannen, um den früheren Ton wiederherzustellen. Später sind die Zeitpunkte, wo eine solche Correctur nöthig wird, durch sehr viele Umfahrungen von einander getrennt. Eigenthümlich ist jedoch die Erfahrung, dass, wenn ein Draht schon mehrere Male eine Wiederherstellung des ursprünglichen Spannungszustandes erfahren hat, er dann dieselbe Spannung nicht mehr verträgt; man muss sich dann mit einer etwas geringeren (etwa $c^{\frac{1}{4}}$) begnügen.

Liegt der Draht an den oberen Scheiben, dann ist die für den früheren Fall günstigste Spannung nicht mehr zulässig; er verträgt sie dann kaum, wohl wegen der stärkeren Krümmung. In diesem Falle ist am günstigsten etwa die Spannung h oder c' . —

Ein weiterer Umstand von Einfluss ist das Gleiten der Messrollen an der Kugel (oder genauer gesagt, der Kugel an den Rollen) längs der Tangenten ihrer Peripherien. Ist die Freiheit der Rollenaxe, sich in ihren Lagern zu drehen, infolge irgend einer der sofort anzuführenden Ursachen vermindert, dann kann dieses Gleiten sogar ein derartiges sein, dass die Rolle bei einer Fahrt des Instrumentes längs der y -Axe sich überhaupt, wenigstens bei gewissen geographischen Längen, nicht dreht. Dasselbe tritt natürlich ein, wenn die Kugel nicht dauernd durch die Stützrolle angedrückt wird gegen die Messrollen. Sind jedoch die nöthigen Vorsichtsmaßnahmen getroffen worden, dann ist dieses Gleiten nur gering und kann als gleichmäßig angesehen werden. Diese Fehlerquelle vereinigt sich offenbar mit dem »metrischen Fehler« der Messrolle, m_{ni} . Eine sehr eigenthümliche Beobachtung des Herrn Bervy,¹ wonach der Betrag der entstandenen Verzögerung der Rolle fast unabhängig sein soll von der durchlaufenen Ordinatenlänge (was als ein Grund dafür angeführt wird, bei den zu analysierenden Zeichnungen die Ordinaten-Scala möglichst groß zu wählen),

¹ l. c., S. 117, Zeile 7 von unten bis 5 von unten.

habe ich nicht bestätigt gefunden. Denn in diesem Falle müssten meine ohne Berücksichtigung eines solchen Verhaltens ausgeführten Bestimmungen der Constante m_{ni} verschiedene Werte ergeben haben, je nach der Länge der zu diesem Zwecke befahrenen Ordinaten; thatsächlich aber stimmen diese Werte befriedigend überein. —

Ein Vorgang von großem Einflusse auf das Verhalten des Analysators ist die fortschreitende Verunreinigung des Instrumentes durch Staub und eventuell auch Rost. Sie findet ihren Ausdruck darin, dass verschiedene in der obigen Theorie aufgestellte Constanten — mit dieser Bezeichnung war zunächst nichts weiter gemeint, als Größen, die während einer Umfahrung als constant angesehen werden dürfen — ihre Werte allmählich ändern; ja, mit zunehmender Verunreinigung der einzelnen Organe wird die Wirkungsweise der letzteren überhaupt eine ungesetzmäßige, oder — mit anderen Worten — die bezüglichen Factoren verlieren ihre Constanz; man merkt dies auch daran, dass dann kurz nacheinander ausgeführte Bestimmungen einer Constante keine befriedigend übereinstimmenden Werte mehr geben.

Der auf das ganze Instrument fortwährend niederfallende Staub wird nämlich an denjenigen Stellen der Cylinder, welche bei den Umfahrungen in Berührung mit der Kugel kommen, zusammengequetscht und bleibt dort haften. Nach einiger Zeit wird auf der Mantelfläche jedes Cylinders längs des mittleren Parallelkreises dieser Fläche eine dunkle Linie sichtbar, die allmählich immer dunkler wird. Es ist eine Schmutzschichte. Gleichzeitig constatirt man die gleiche Erscheinung auch auf den Kanten der Rollen. Wird der Apparat dann noch nicht gereinigt, so erscheinen bald auch auf der Oberfläche der Kugel zerstreute Schmutzflecke. Ferner können sich Staubtheilchen zwischen der Theilungstrommel der Messrollenaxe und dem daneben befindlichen Indexbogen, oder in den Lagern der Rollenaxe, oder schließlich in den Lagern der die Cylinder tragenden Walze allmählich anhäufen. Alles dies beeinflusst selbstverständlich die auf die Drehung $d\mu_{ni}$ bezüglichen Constanten. Solange jedoch die Verunreinigung nur wenig fortgeschritten ist — es gelingt aber durch entsprechende Maß-

nahmen und allgemeine vorsichtige Behandlung, diesen Zustand selbst bei täglich mehrstündigem Gebrauche des Instrumentes viele Monate hindurch zu erhalten —, kann die obige Theorie angewandt, und die bezüglichlichen Factoren als Constanten in dem Sinne dieser Theorie angesehen werden, die nur allmählich fortschreitende kleine Änderungen erfahren.

Um dies zu erreichen, muss man das Instrument selbstverständlich sowohl außerhalb des Gebrauches vor dem Staube schützen, als auch — soweit dies möglich — während des Gebrauches eine Bestäubung desselben vermeiden. Außerdem aber bürste ich jedesmal vor und nach dem Gebrauche die Laufräder und die Cylinder, manchmal auch die Kugeln und die Celluloidringe, mit einem weichen Pinsel, der dem Instrumente beigegeben wird, ab. Den auf den oberen Balken des Gerüstes und den oberen Flächen der Horizontalscheiben liegenden Staub muss man entweder ruhig liegen lassen, oder ihn nur dann abstreifen, nachdem man Vorsichtsmaßregeln getroffen hat, welche sein Herunterfallen auf die Organe der Integrierapparate verhindern.

Ist endlich die Verunreinigung des Apparates zu weit fortgeschritten, dann muss man eine gründliche Reinigung seiner Organe vornehmen, — eine Operation, die freilich die Nothwendigkeit der Neubestimmung seiner meisten Constanten zur Folge hat. Ich umwickle zu diesem Zwecke den kleinen Finger mit einem ziemlich weichen Lappen, dessen Oberfläche glatt (ohne Härchen) ist, benetze den letzteren mit Petroleum und wasche damit, während die Kugel vom Cylinder abgehoben bleibt, die Oberfläche des Cylinders rein. Dann wird die Kugel auf den Cylinder heruntergelassen und, unter zweckmäßigen Bewegungen des Instrumentes, die Oberfläche der Kugel und die Kanten sämtlicher drei Rollen ebenso gewaschen; nur ist bei der Waschung der Rollenkanten der Lappen auf einem schmalen Holzstäbchen aufgewickelt. Ferner reinige ich auch, mit Petroleum und einem zugespitzten Hölzchen, die Spitzen aller Axen. Um etwaigen zwischen der Theilungstrommel und dem Indexbogen befindlichen Staub zu entfernen, schneide ich ein Stückchen Papier mit scharfen Kanten aus, halte dasselbe in den Zwischenraum hinein und drehe die Rollenaxe mit der

Trommel mehreremale um.¹ Zuletzt werden sämmtliche Axen (auch die Spindel der Horizontalscheibe) in ihren Lagern eingölt. Die freie Drehbarkeit der Messrolle wird geprüft, indem ihr an der Trommel-Mantelfläche ein leichter Antrieb ertheilt wird, der jedoch wegen Schonung der Axenspitzen möglichst ausschließlich in der Richtung erfolgen soll, welche sowohl zum Radius als auch zur Axe senkrecht ist. Die Rolle soll sich dann lebhaft spielend drehen und langsam auslaufen. An der Lagerung der Rollenaxe findet man eine Vorrichtung, welche es ermöglicht, die gegenseitige Entfernung der beiden Lagerbolzen ein wenig zu ändern oder auch das ganze Bolzenpaar ein wenig in der Richtung der Axe zu verschieben. Die letztere Verschiebung kann dazu benutzt werden, einen hinreichend breiten Zwischenraum zwischen der Trommel und dem indextragenden Segment herzustellen; dieser Zwischenraum soll eher zu breit als zu eng gehalten werden. —

Die Instrumentalconstanten weisen zweierlei Art ihres Verhaltens auf.

Die einen unter ihnen erfahren, wenn das Instrument rein gehalten und umsichtig behandelt wird, nur allmählich fortschreitende kleine Änderungen und bleiben in langen Zeiträumen mit hinreichender Genauigkeit constant. Dies sind die Constanten aller Orientierungs- und Positionsfehler, — abgesehen natürlich, soweit diese Constanten Winkel sind, von der in ihnen enthaltenen Anfangs-Drehungsphase des bezüglichen Organs des Instrumentes. Bei dem Cylinder wird die Anfangs-Drehungsphase (d. h. die der Stellung $y = 0$ des Stiftes entsprechende) im allgemeinen bei jeder neuen Aufstellung des Instrumentes eine andere sein, und die einmal bestimmten Werte der Constanten Γ_n, K_n müssen daher, bevor sie für ein anderes Mal angewendet werden, um den Unterschied der alten und der neuen Anfangs-Drehungsphase vergrößert beziehungsweise verkleinert werden; zu diesem Zwecke muss also dieser Unterschied ablesbar sein. Ich habe deswegen an der ebenen Fläche des einen Laufrades eine ganz rohe Winkeltheilung und neben dem Laufrad, mit der hinteren Gestellschiene fest verbunden,

¹ Diese Maßregel habe ich einer Broschüre des Herrn Coradi über seine Planimeter entnommen. (Die Planimeter Coradi. Zürich, 1895.)

einen Index angebracht, der das Laufrad nicht berührt. Die Theilung geht von 10° zu 10° , lässt also noch einzelne Grade schätzen; eine auf 5° genaue Ablesung genügt indessen sicher für den vorliegenden Zweck. Die Constanten E_n , E enthalten wieder die Anfangs-Drehungsphasen (d. h. die der Stellung $\alpha = 0$ entsprechenden) der Horizontalräder des Instrumentes; diese können sich in einem hier zu berücksichtigenden Betrage nur bei Gelegenheit einer Neulegung des Drahtes ändern. Dies wird am einfachsten dadurch berücksichtigt, dass man bei einer solchen Operation darauf achtet, dass die in Betracht kommenden Räder nach der Operation ungefähr dieselbe Lage haben wie vorher; hiezu genügt die Anbringung einer Marke an der oberen Fläche jedes Rades und Beobachtung ihrer Coincidenz mit einer entsprechend gewählten oder absichtlich hergestellten Marke an dem zugehörigen Theile des Gerüsts.

Im Gegensatz dazu zeigen die Constanten h_n und σ_{n1} ein zufälliges Verhalten und müssen für jede Analyse besonders bestimmt werden. σ_{n2} führe ich nicht an, weil die Differenz $\sigma_{n2} - \sigma_{n1}$ wieder von der ersteren Art ist. Die Veränderlichkeit der Constanten h_n , σ_{n1} erklärt sich wohl durch kleine (und die größeren, künstlichen) Variationen der Spannung und sonstige Vorgänge im Draht; zum Theil vielleicht auch durch die ungleiche Temperaturexension der Längeneinheit (Stahl), des Drahtes (Silber) und der Scheibe (Messing). Die Fehler σ_{n1} und σ_{n2} kann man vor jeder Analyse, beide gleichzeitig um denselben Betrag, verringern: eine eigene Justirvorrichtung nämlich erlaubt es, nach Lockerung einer Schraube den ganzen Integratorrahmen bei stillstehender Scheibenspinde um diese beliebig zu drehen und dann wieder an ihr festzuschrauben; ein kleiner Fehler wird aber natürlich immer bleiben. —

Als den letzten physikalischen Umstand von Einfluss auf die Functionierung des Analysators erwähne ich die Temperatur. Um diese stets unter Controle halten zu können, habe ich an geeigneter Stelle des Gerüsts ein Thermometer angebunden, das also immer mit dem Analysator mitfährt. Nach dem Herausnehmen des Instrumentes aus dem Kasten stieg gewöhnlich die Temperatur, einige Zeit lang, im ganzen um 1° oder $1\frac{1}{2}^\circ$ C., bis sie stationär wurde.

Durch Temperaturwechsel ändert sich der Gang der Messrolle infolge ungleicher Ausdehnung des Materials des Rahmens, in welchem sie gelagert ist (Messing?), und der Rollenaxe (Stahl). War das Instrument an kühlem Orte aufbewahrt, so wird die Rollenaxe im Anfange zu wenig Spielraum und dadurch die Rolle einen trägen, schweren Gang haben, was die Constante m_{ni} beeinflussen würde. Um dem vorzubeugen, erwärme ich den Rahmen der Rollenaxe mit der Hand etwas, ehe das Instrument in Gebrauch genommen wird¹; ich halte ihn zu diesem Zwecke etwa $1\frac{1}{2}$ Minuten zwischen den Fingern.

Ob die übrigen durch Temperaturwechsel hervorgerufenen Änderungen in den Dimensionen des Instrumentes einen merklichen Einfluss auf diese oder auf andere Constanten haben können, vermag ich auf Grund meiner Erfahrungen nicht zu entscheiden. Meine Beobachtungen zeigen einen deutlich ausgesprochenen Einfluss dieser Art nicht. Sie bewegen sich aber auch innerhalb ziemlich enger Temperaturgrenzen; denn es war das gerade angestrebt, in nicht zu verschiedenen Temperaturen zu arbeiten. Die niedrigste in meinem Beobachtungsjournal notierte Temperatur ist $+18^{\circ}$ C., die höchste $+27^{\circ}$ C.; innerhalb dieser Grenzen also ist eine solche Abhängigkeit nicht zu constatieren.

Immerhin dürfte es keine übertriebene Vorsicht gewesen sein, wenn darauf geachtet wurde, dass während einer Befahrung die Temperatur ungefähr constant bleibe. Sicher aber ist es von großer Wichtigkeit, dafür zu sorgen, dass das Instrument dabei möglichst gleichmäßig erwärmt sei. Bei den feinen Constantenbestimmungen, wo mitten innerhalb einer Operation mehrere Male genaue Ablesungen, sei es an dem Wagenindex, sei es an den Trommeln der Integrierapparate, gemacht werden müssen, könnte es leicht vorkommen, dass die nahe daran befindlichen Organe des Instrumentes durch die Ausstrahlung des Kopfes des Beobachters in schädlichem Grade plötzlich erwärmt werden; in solchen Fällen scheint es nach meinen Erfahrungen von gutem Erfolge zu sein, nach der Ablesung, durch Anfächeln der betroffenen Theile von ver-

¹ Diese Maßregel ist ebenfalls der erwähnten Broschüre entnommen.

schiedenen Seiten mit der Hand, in der Umgebung derselben eine Luftcirculation zu erzeugen und dann einige Zeit (z. B. 2 Minuten) zu warten, ehe die Befahrung fortgesetzt wird. Aus derselben Rücksicht auf Constanz und namentlich Gleichmäßigkeit der Temperatur soll man auch nie bei künstlicher Beleuchtung oder in directer Sonnenstrahlung, sondern nur bei diffussem Tageslichte mit dem Analysator arbeiten.

Dass die Fenster, namentlich bei kühler Witterung, geschlossen zu halten sind, braucht kaum besonders hervorgehoben zu werden, da dies auch sonst, um Staub fernzuhalten, erforderlich ist. —

Endlich muss während der Befahrungen jeder, auch der leiseste Anstoß, sei es an das Instrument selbst oder an den Arbeitstisch, sowohl wie jede stärkere Erschütterung, streng vermieden werden, weil unter Umständen dadurch die Ablesungen, oder auch gewisse Constanten, sich ändern können. Zur Vermeidung von Erschütterungen ist besondere Aufmerksamkeit nothwendig beim Einlegen des Instrumentes in den Kasten. Beim Schließen des Kastens endlich ist darauf zu sehen, ob die an dem Deckel angebrachten Holzeinlagen, die das Instrument festzuhalten bestimmt sind, keinen Druck auf ihre Anlehnungspunkte am Instrument ausüben. Ein solcher Druck auf den oberen Zapfen der Horizontalscheibe z. B., mag er auch für die schließende Hand nur einen geringen Widerstand bieten, genügt schon, die Ebene der Rollenaxen hinunterzudrücken, so dass nachher die Rollen bei Gebrauch des Instrumentes die Kugel nicht mehr in Punkten eines größten Kreises berühren, und infolge dessen unter Umständen sogar die Drehung der Rollen unterbleiben kann.

Zu einer Bemerkung gibt noch Anlass die Einrichtung der Bremse. Bei meinen Bestimmungen namentlich der auf die Cylinder bezüglichen Constanten konnte ich so lange zu keinen irgend befriedigend übereinstimmenden Resultaten kommen, bis es mir einfiel, auf das Bremsen ganz zu verzichten. Dieses geschieht bei meinem Instrument durch eine Schraube, deren Mutter in dem rechten Querbalken des unteren Gerüstrahmens sich befindet und deren Spitze beim Bremsen gegen die äußere ebene Fläche des rechten Laufrades drückt. Diese Bremse hebt

also das Rollen des Instrumentes auf die Weise auf, dass die linke Spitze der Axe der Cylinder in ihr Lager eingepresst wird. [Genauer gesagt, bleibt vielmehr die Walze der Cylinder durch die Laufräder auf dem Tische ruhen, dagegen wird das ganze Gerüst zusammen mit allen Integrierapparaten nach rechts verschoben, so lange, bis das linksseitige Lager an die Spitze der Walze fest angepresst ist.] Es ist klar, dass dieser Vorgang an sich schon Fehler in den Anzeigen der Rollen bewirken kann. Ferner aber kann man nicht erwarten, dass nach Losbremsung der ursprüngliche Zustand des Instrumentes vollständig wiederhergestellt ist, vielmehr wird nach wiederholter Bremsung das Gerüst dauernd gegen die Laufräder und das Papier mehr oder weniger verschoben bleiben, und anderseits kann (was wohl noch wichtiger ist), infolge des ganz unsymmetrischen Eingriffes der Bremsschraube in Bezug auf die Axe der Laufräder, eine Ausbiegung der Endstücke der Axe entstehen, beziehungsweise verändert werden.

Zusammenfassende Formeln.

24. In den vorangegangenen Discussionen sind die Glieder gefunden worden, welche durch die einzelnen Fehlerquellen zu dem Ausdrücke für $d\mu_{ni}$ oder zu dem für λ_{ni} geliefert werden. Fasst man diese einzelnen Ergebnisse zusammen, so erhält man folgende Formeln, in denen xy die Coordinaten des Fahrstiftes, s die von ihm durchlaufene Bogenlänge ist:

$$\begin{aligned}
 d\mu_{ni} = & \frac{1}{\delta_{\text{mm}}} \sin \lambda_{ni} dy + \\
 & + \frac{\dot{\gamma}_n}{M_{ni}} n \cos \left(\frac{y}{L} + \Gamma_n \right) \sin \lambda_{ni} dx + \\
 & + \delta_{ni} f_{ni}(M_{ni}, s) ds + \delta_{nj} g_{nj}(M_{nj}, s) ds + \\
 & + \frac{\dot{\alpha}_n}{M_{ni}} \cos \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \sin \lambda_{ni} dy + \frac{\dot{\beta}_n}{M_{ni}} n \sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \cos \lambda_{ni} dx + \\
 & + \frac{m_{ni}}{\delta_{\text{mm}}} \sin \lambda_{ni} dy + \\
 & + [\text{cyclische Glieder}]
 \end{aligned} \tag{38}$$

und

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ni} = & \frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 + \\
 & + \left\{ n\varepsilon_n \left[\sin \left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n \right) - \sin E_n \right] + n\varepsilon \left[\sin \left(\frac{x}{H} + E \right) - \sin E \right] \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad \psi_n(x) \\
 & + \left\{ h_n \frac{x}{c} \right\} + \\
 & + \left\{ h'_n \frac{x}{c} \right\} + \\
 & + \left\{ \sigma_{ni} \right\}; \qquad \qquad \qquad (39) \\
 & + \left\{ \sigma'_{ni} \right\};
 \end{aligned}$$

wo zwei Ausdrücke in einer geschweiften Klammer übereinander stehen, gelten die oberen für die Hinfahrt, die unteren für die Rückfahrt; die Klammer: [cyclische Glieder] vertritt Glieder, deren Integral = 0 ist, wenn die Integration längs einer geschlossenen Contour ausgeführt wird.

In den Coefficienten $\frac{\gamma_n}{M_{ni}}, \frac{\alpha_n}{M_{ni}}, \frac{\dot{\gamma}_n}{M_{ni}}$ ist es offenbar erlaubt, $M_{n1} = M_{n2}$ zu setzen, wodurch diese Coefficienten von dem Index i unabhängige Constanten werden; wir führen dann die abstracten Zahlen $\frac{\gamma_n \cdot 5 \text{ mm}}{M_{ni}}, \frac{\alpha_n \cdot 5 \text{ mm}}{M_{ni}}, \frac{\dot{\gamma}_n \cdot 5 \text{ mm}}{M_{ni}}$ als neue Constanten ein, die wir, um die Bezeichnungen nicht zu vermehren, wieder mit den Buchstaben $\gamma_n, \alpha_n, \dot{\gamma}_n$ bezeichnen wollen. Diese Buchstaben in ihrer früheren Bedeutung werden von nun an nicht mehr vorkommen. Ferner führen wir, da die Functionen $f_{ni}(M_{ni}, s), g_{nj}(M_{nj}, s)$ von der Dimension (Länge)⁻¹ sind, statt derselben die Bezeichnungen $\frac{F_{ni}(M_{ni}, s)}{5 \text{ mm}}, \frac{G_{nj}(M_{nj}, s)}{5 \text{ mm}}$ ein, so dass die Ausdrücke $F_{ni}(M_{ni}, s), G_{nj}(M_{nj}, s)$ abstracte sind:

$$\begin{aligned}
 F_{ni}(M_{ni}, s) = & \\
 = & \frac{n\pi}{36} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin(\bar{p}_{ni} + M_{ni}) \sin \bar{\lambda}_{ni} \cos \bar{\lambda}_{ni} \cos(s, x) + \\
 & + [\sin(\bar{p}_{ni} + M_{ni}) - \cos(\bar{p}_{ni} + M_{ni})] \sin \bar{\lambda}_{ni} \sin(s, x) \qquad (22')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{nj}(M_{nj}, s) &= \\
 &= (-1)^j \frac{j n \pi}{36} \sin(\bar{\mu}_{nj} + M_{nj}) \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \bar{\lambda}_{nj} - 1 \right) \cos(s, x) - \\
 &\quad - \frac{M_{nj}}{K_n} \sin(\bar{\mu}_{nj} + M_{nj}) \sin \bar{\lambda}_{nj} \sin(s, x). \quad (22')
 \end{aligned}$$

Mittels der genannten Bezeichnungen hat man die beiden Formeln

$$\begin{aligned}
 d\mu_{ni} &= \frac{1}{5 \text{ mm}} \sin \lambda_{ni} dy + \\
 &\quad + \frac{\gamma_n}{5 \text{ mm}} n \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin \lambda_{ni} dx + \\
 &\quad + \frac{\delta_{ni}}{5 \text{ mm}} F_{ni}(M_{ni}, s) ds + \frac{\delta_{nj}}{5 \text{ mm}} G_{nj}(M_{nj}, s) ds + \\
 &\quad + \frac{\alpha_n}{5 \text{ mm}} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \sin \lambda_{ni} dy + \frac{\dot{\gamma}_n}{5 \text{ mm}} n \sin\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \cos \lambda_{ni} dx + \\
 &\quad + \frac{m_{ni}}{5 \text{ mm}} \sin \lambda_{ni} dy + \\
 &\quad + [\text{cyclische Glieder}] \quad (38')
 \end{aligned}$$

und

$$(39).$$

Die Größen: $\gamma_n, \Gamma_n; \delta_{n1}, \delta_{n2}, M_{n1}, M_{n2}; \alpha_n, \dot{\gamma}_n, K_n; \varepsilon_n, E_n; h_n$ und $h'_n; \sigma_{n1}, \sigma_{n2}$ und $\sigma'_{n1}, \sigma'_{n2}$ sind unbekannte Instrumentalconstanten des n ten Integrierapparates, ε, E von n unabhängige unbekannte Instrumentalconstanten des Analysators. Sie alle sind abstracte Zahlen und, mit Ausnahme der mit griechischen Majuskeln bezeichneten Winkel, von der ersten Ordnung klein; die Function $\psi_n(x)$ besteht ebenfalls aus Gliedern mit constanten Factoren erster Ordnung. L, H, c sind bekannte Constanten: $L = 23 \cdot 625 \text{ mm}, H = 15 \cdot 71 \text{ mm}, c = 360 \text{ mm}.$

25. Beschreibt nun der Fahrstift eine Curve S von einem Punkte A ($x = 0, y = y_a$) bis zu einem Punkte B ($x = c, y = y_e = y_a$, vgl. S. 7) und kehrt dann vom Punkte B geradlinig zurück zum Ausgangspunkte, so erhält man die Gesamtdrehung

der Rolle M_{ni} ($i = 1, 2$), wenn man den Ausdruck dp_{ni} über die ganze vom Fahrstift beschriebene Contour, Σ , integriert. Man setze nun (39) in (38') ein, wobei man sich wieder auf Glieder erster Ordnung beschränkt. Man bedenke ferner, dass für den geradlinigen Theil BA des Integrationsweges das Integral aller Glieder, welche mit dy multipliciert sind, Null ist; auch in dem

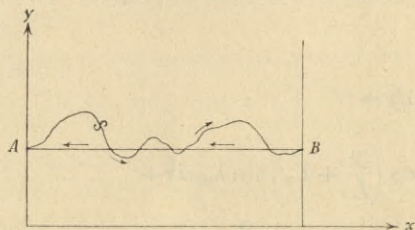


Fig. 8.

Integral des Gliedes $\frac{\dot{\gamma}_n}{5 \text{ mm}} n \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx$ kann das Integrationssymbol \int_{Σ} durch \int_S ersetzt werden, da y auf dem Rückwege constant und $\int_{x=c}^{x=0} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx = 0$ ist. Außerdem tritt in den von der Excentricität des Cylinders herrührenden Gliedern eine Vereinfachung ein. Setzt man nämlich für den Augenblick

$$U(xy) = -\frac{2n\pi L}{c} \sin\left(\frac{y}{L} + \mathbf{K}_n\right) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right),$$

$$V(xy) = \cos\left(\frac{y}{L} + \mathbf{K}_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right),$$

so kann man das Integral der beiden erwähnten Glieder längs der Contour Σ so schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5 \text{ mm}} \left(z_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n \right) \int_{\Sigma} V(xy) dy - \\ & - \frac{1}{5 \text{ mm}} \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n \int_{\Sigma} [U(xy) dx + V(xy) dy]. \end{aligned}$$

Das zweite dieser Integrale fällt aber weg, nach dem bekannten Satze der Theorie der Curvenintegrale, dass für jede geschlossene Contour Σ das Integral

$$\int_{\Sigma} U(xy) dx + V(xy) dy = 0$$

ist, wenn innerhalb der Contour die Functionen U und V sowie ihre ersten Ableitungen stetig sind und dortselbst die Relation

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

erfüllt wird.

Man erhält also für die Gesamtdrehung der Messrolle bei der Umfahrung den Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d\mu_{ni} &= \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \sin \left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy + \\ &+ \gamma_n \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S n \cos \left(\frac{y}{L} + \Gamma_n \right) \sin \left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dx + \\ &+ \left(\kappa_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n \right) \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \cos \left(\frac{y}{L} + \mathbf{K}_n \right) \sin \left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy + \\ &+ \varepsilon_n \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S n \left[\sin \left(\frac{2n\pi x}{c} + \mathbf{E}_n \right) - \sin \mathbf{E}_n \right] \cos \left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy + \\ &\quad + \varepsilon \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S n \left[\sin \left(\frac{x}{H} + \mathbf{E} \right) - \sin \mathbf{E} \right] \cos \left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy + \\ &+ h_n \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \frac{x}{c} \cos \left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy + \\ &+ m_{ni} \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \sin \left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy + \\ &+ \sigma_{ni} \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \cos \left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy + \\ &+ \delta_{ni} \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_{\Sigma} F_{ni}(M_{ni}, s) ds + \delta_{nj} \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_{\Sigma} G_{nj}(M_{nj}, s) ds. \end{aligned} \quad (40)$$

Wurde die Umfahrung wiederholt mit um 180° veränderten Anfangs-Drehungsphasen M_{n1}, M_{n2} der Messrollen, und bezeichnet $\int_{\Sigma} dy_{ni}$ das arithmetische Mittel der beiden Gesamtdrehungen der Messrolle M_{ni} , so fällt in der Formel (40) die letzte Zeile weg.

26. Zwei Fragen sind jetzt auf Grund der erhaltenen Formeln zu beantworten. Erstens: wie man die Instrumentalconstanten experimentell bestimmen kann. Zweitens: wie man bei der harmonischen Analyse der vom Fahrstift beschriebenen Curve aus den Ablesungen eines Analysators, dessen Instrumentalconstanten bestimmt sind, die Coefficienten der gesuchten Entwicklung zu berechnen hat.

Ich will zuerst die letztere Frage erörtern.

Corrigierung der Coefficienten der Fourier'schen Reihe wegen der Instrumentalfehler.

27. Beschreibt der Fahrstift einen beliebigen Weg, so ist die Ablesung über den befahrenen Weg

$$\alpha_{ni} = -\frac{1}{2\pi} \int dy_{ni},$$

wo das Integral über den befahrenen Weg zu erstrecken ist.

Ich nehme nun an, der Fahrstift habe eine Curve S , $y = f(x)$, vom Punkte $x = 0$, $y = y_a$ bis zu dem Punkte $x = c$, $y = y_c = y_a$ beschrieben, sei darauf von dem letzteren geradlinig zum Ausgangspunkte zurückgekehrt, man habe dann, ohne die Aufstellung des Instrumentes zu ändern, die Messrollen um 180° gedreht und die Umfahrung wiederholt; man habe beide Male die Ablesung über die gesammte Umfahrungsbahn Σ gebildet, und aus diesen beiden Ablesungen das Mittel genommen, α_{ni} .

Dividirt man α_{n1}, α_{n2} durch n und multiplicirt den Quotient mit 1 cm , so erhält man einen genäherten Wert a'_n, b'_n der Coefficienten der Fourier'schen Entwicklung der Function $y = f(x)$. Die genauen Werte dieser Coefficienten aber sind $\frac{-1}{n\pi} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy$, $\frac{-1}{n\pi} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy$. Es sind

also, nach der Gleichung (40), die Correctionen $\Delta a'_n$, $\Delta b'_n$, welche man zu den Coefficienten a'_n , b'_n hinzufügen muss, um die correcten zu erhalten, folgende:

$$\begin{aligned}
 \Delta a'_n = & +\gamma_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dx + \\
 & + \left(\kappa_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n\right) \cdot \frac{1}{n\pi} \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy + \\
 & + \varepsilon_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \left[\sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n\right) - \sin E_n \right] \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy + \\
 & + \varepsilon \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \left[\sin\left(\frac{x}{H} + E\right) - \sin E \right] \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy + \\
 & + h_n \cdot \int_S \frac{x}{n\pi c} \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy - \\
 & - m_{n1} \cdot a_n - \\
 & - \sigma_{n1} \cdot b_n \\
 \Delta b'_n = & +\gamma_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dx + \\
 & + \left(\kappa_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n\right) \cdot \frac{1}{n\pi} \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy + \\
 & + \varepsilon_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \left[\sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n\right) - \sin E_n \right] \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy + \\
 & + \varepsilon \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \left[\sin\left(\frac{x}{H} + E\right) - \sin E \right] \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy + \\
 & + h_n \cdot \int_S \frac{x}{n\pi c} \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy - \\
 & - m_{n2} \cdot b_n + \\
 & + \sigma_{n2} \cdot a_n.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Es bleibt nur übrig, die in den je fünf ersten Zeilen enthaltenen Integrale auszuwerten.

Zu diesem Zwecke theile ich die Bahn $y = f(x)$ in solche Abschnitte, dass jeder Abschnitt entweder kein der y -Axe paralleles Stück enthält, oder ganz ein solches Stück ist. Ich bezeichne die erstere Kategorie mit (S), die letztere mit [S].

Das Operationssymbol $\int_{(S)}$ bedeutet die Summe sämtlicher bestimmten Integrale einer Function, welche gebildet sind über die einzelnen Abschnitte (S); das Operationssymbol $[]_{(S)}$ die Summe sämtlicher Substitutionen, welche gebildet sind über die einzelnen Abschnitte (S); das Operationssymbol $[]_{[S]}$ die Summe sämtlicher Substitutionen, welche gebildet sind über die einzelnen Abschnitte [S].

Es ist nun offenbar

$$\begin{aligned} \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx &= \\ &= \cos \Gamma_n \cdot \int_{(S)} \cos \frac{y}{L} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx - \\ &\quad - \sin \Gamma_n \cdot \int_{(S)} \sin \frac{y}{L} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx. \quad (42) \end{aligned}$$

Die Functionen $\cos \frac{y}{L}$, $\sin \frac{y}{L}$ von x genügen offenbar in dem Intervall $0 \leq x \leq c$ allen Dirichlet'schen Bedingungen, bleiben ferner in demselben endlich, haben keine Unstetigkeitspunkte, haben der y -Axe parallele endliche Stücke nur dort, wo die Function y solche hat, und haben ihre Endwerte gleich den Anfangswerten. Die Fourier'schen Entwicklungen derselben,

$$\begin{aligned} \cos \frac{y}{L} &= A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \cos \frac{2\nu\pi x}{c} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu \sin \frac{2\nu\pi x}{c}, \\ \sin \frac{y}{L} &= A'_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A'_\nu \cos \frac{2\nu\pi x}{c} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B'_\nu \sin \frac{2\nu\pi x}{c}, \end{aligned}$$

sind infolge dessen Reihen, welche innerhalb jeden Abschnittes der Kategorie (S) gleichmäßig convergieren und in jedem Punkte eines solchen genau diese Functionen darstellen. Man kann also diese Reihen in (42) einsetzen und die angedeuteten Integrationen gliedweise ausführen; man erhält

$$\begin{aligned}
& \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx = \\
& = \cos \Gamma_n \cdot \left\{ A_0 \int_{(S)} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx + \right. \\
& \quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \int_{(S)} \cos \frac{2\nu\pi x}{c} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx + \\
& \quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \int_{(S)} \sin \frac{2\nu\pi x}{c} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx \right\} - \\
& - \sin \Gamma_n \cdot \left\{ A'_0 \int_{(S)} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx + \right. \\
& \quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} A'_\nu \int_{(S)} \cos \frac{2\nu\pi x}{c} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx + \\
& \quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} B'_\nu \int_{(S)} \sin \frac{2\nu\pi x}{c} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx \right\}.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass nichts geändert wird, wenn man rechts die Symbole $\int_{(S)}$ durch $\int_{x=0}^{x=c}$ ersetzt. Man findet auf diese Weise

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx = \\
& \qquad \qquad \qquad = \cos \Gamma_n \cdot \frac{c}{2} B_n - \sin \Gamma_n \cdot \frac{c}{2} B'_n \\
& \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx = \\
& \qquad \qquad \qquad = -\cos \Gamma_n \cdot \frac{c}{2} A_n + \sin \Gamma_n \cdot \frac{c}{2} A'_n.
\end{aligned} \right.$$

Das Integral $\int_{\Sigma} \cos\left(\frac{y}{L} + \mathbf{K}_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy$, welches in den zweiten Zeilen der Formeln (41) steht, ist gleich

$$\frac{2n\pi L}{c} \int_{\Sigma} \sin\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx;$$

indem man dieses letztere so behandelt, wie das Integral der ersten Zeilen, findet man

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Sigma} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy &= \\ &= -\cos K_n \cdot Ln\pi A'_n - \sin K_n \cdot Ln\pi A_n \\ \int_{\Sigma} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy &= \\ &= -\cos K_n \cdot Ln\pi B'_n - \sin K_n \cdot Ln\pi B_n. \end{aligned} \right.$$

Ferner hat man

$$\left\{ \begin{aligned} \int_S (-\sin E_n) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy &= \sin E_n \cdot n\pi b_n \\ \int_S (-\sin E_n) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy &= -\sin E_n \cdot n\pi a_n. \end{aligned} \right.$$

Ebenso

$$\left\{ \begin{aligned} \int_S (-\sin E) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy &= \sin E \cdot n\pi b_n \\ \int_S (-\sin E) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy &= -\sin E \cdot n\pi a_n. \end{aligned} \right.$$

Ferner

$$\begin{aligned} - \int_S \sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n\right) \cos \frac{2n\pi x}{c} dy &= \\ &= -\cos E_n \int_S^{\frac{1}{2}} \sin \frac{4n\pi x}{c} dy - \sin E_n \int_S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{4n\pi x}{c}\right) dy \\ - \int_S \sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n\right) \sin \frac{2n\pi x}{c} dy &= \\ &= -\cos E_n \int_S \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4n\pi x}{c}\right) dy - \sin E_n \int_S^{\frac{1}{2}} \sin \frac{4n\pi x}{c} dy \end{aligned}$$

oder

$$\left\{ \begin{aligned} \int_S \sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n\right) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy &= \\ &= \cos E_n \cdot n\pi a_{2n} - \sin E_n \cdot n\pi b_{2n} \\ \int_S \sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n\right) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy &= \\ &= \cos E_n \cdot n\pi b_{2n} + \sin E_n \cdot n\pi a_{2n}. \end{aligned} \right.$$

Die noch übrig bleibenden je zwei Integrale in den Formeln (41) berechne ich durch Anwendung der Transformation

$$\int_S \varphi(x) \cdot dy = [\varphi(x) \cdot y]_S - \int_{(S)} y \frac{d\varphi(x)}{dx} dx. \quad (43)$$

Man hat hienach

$$\begin{aligned} & - \int_S \sin\left(\frac{x}{H} + E\right) \cos \frac{2n\pi x}{c} dy = \\ & = - \sin\left(\frac{c}{H} + E\right) \cdot y_a + \\ & \quad + \cos E \int_{(S)} y \left(\frac{1}{H} \cos \frac{x}{H} \cos \frac{2n\pi x}{c} - \frac{2n\pi}{c} \sin \frac{x}{H} \sin \frac{2n\pi x}{c} \right) dx + \\ & \quad + \sin E \int_{(S)} y \left(-\frac{1}{H} \sin \frac{x}{H} \cos \frac{2n\pi x}{c} - \frac{2n\pi}{c} \cos \frac{x}{H} \sin \frac{2n\pi x}{c} \right) dx, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
& - \int_S \sin \left(\frac{x}{H} + E \right) \cos \frac{2n\pi x}{c} dy = - \sin \left(\frac{c}{H} + E \right) \cdot y_a + \\
& \quad + \cos E \cdot \left\{ a_0 \left[\frac{1}{H} \int_0^c \cos \frac{x}{H} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx - \frac{2n\pi}{c} \int_0^c \sin \frac{x}{H} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx \right] \right\} \\
& \quad + \sin E \cdot \left\{ a_0 \left[\frac{-1}{H} \int_0^c \sin \frac{x}{H} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx - \frac{2n\pi}{c} \int_0^c \cos \frac{x}{H} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx \right] \right\}
\end{aligned}$$

wo das Symbol \sum_{ν} eine auf die Werte $\nu = 1, 2, 3, \dots$ erstreckte Summation bedeutet; oder, indem man die Constante $\varepsilon = \frac{c}{2\pi H}$ einführt,

$$\begin{aligned}
- \int_S \sin \left(\frac{x}{H} + E \right) \cos \frac{2n\pi x}{c} dy &= \cos E \cdot \left\{ \sin \frac{c}{H} \cdot (a_0 - y_a) \right. \\
& \quad \left. + \sin E \cdot \left(\cos \frac{c}{H} - 1 \right) \cdot (a_0 - y_a) \right\}
\end{aligned}$$

ebenso kann man das Integral $-\int_S \sin \left(\frac{x}{H} + E \right) \sin \frac{2n\pi x}{c} dy$ behandeln. Führt man die Bezeichnungen ein:

$$p_{\nu, n} = \sin \frac{c}{2H} \cdot \left[\frac{(n+\nu)n-k^2}{(n+\nu)^2-k^2} + \frac{(n-\nu)n-k^2}{(n-\nu)^2-k^2} \right],$$

ferner

$$r_{\nu, n} = \sin \frac{c}{2H} \cdot \left[\frac{\nu k}{(n+\nu)^2-k^2} - \frac{\nu k}{(n-\nu)^2-k^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\nu} a_{\nu} \left[\frac{1}{H} \int_0^c \cos \frac{2\nu\pi x}{c} \cos \frac{x}{H} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx - \frac{2n\pi}{c} \int_0^c \cos \frac{2\nu\pi x}{c} \sin \frac{x}{H} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx \right] + \\
& + \sum_{\nu} b_{\nu} \left[\frac{1}{H} \int_0^c \sin \frac{2\nu\pi x}{c} \cos \frac{x}{H} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx - \frac{2n\pi}{c} \int_0^c \sin \frac{2\nu\pi x}{c} \sin \frac{x}{H} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx \right] \Big\} + \\
& + \sum_{\nu} a_{\nu} \left[\frac{-1}{H} \int_0^c \cos \frac{2\nu\pi x}{c} \sin \frac{x}{H} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx - \frac{2n\pi}{c} \int_0^c \cos \frac{2\nu\pi x}{c} \cos \frac{x}{H} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx \right] + \\
& + \sum_{\nu} b_{\nu} \left[\frac{-1}{H} \int_0^c \sin \frac{2\nu\pi x}{c} \sin \frac{x}{H} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx - \frac{2n\pi}{c} \int_0^c \sin \frac{2\nu\pi x}{c} \cos \frac{x}{H} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \frac{c}{H} \cdot \sum_{\nu} \frac{1}{2} a_{\nu} \left[\frac{(n+\nu)n-k^2}{(n+\nu)^2-k^2} + \frac{(n-\nu)n-k^2}{(n-\nu)^2-k^2} \right] - \\
& - \left(\cos \frac{c}{H} - 1 \right) \cdot \sum_{\nu} \frac{1}{2} b_{\nu} \left[\frac{\nu k}{(n+\nu)^2-k^2} + \frac{\nu k}{(n-\nu)^2-k^2} \right] \Big\} + \\
& + \left(\cos \frac{c}{H} - 1 \right) \cdot \sum_{\nu} \frac{1}{2} a_{\nu} \left[\frac{(n+\nu)n-k^2}{(n+\nu)^2-k^2} + \frac{(n-\nu)n-k^2}{(n-\nu)^2-k^2} \right] - \\
& + \sin \frac{c}{H} \cdot \sum_{\nu} \frac{1}{2} b_{\nu} \left[\frac{\nu k}{(n+\nu)^2-k^2} + \frac{\nu k}{(n-\nu)^2-k^2} \right] \Big\};
\end{aligned}$$

$$q_{\nu, n} = \sin \frac{c}{2H} \cdot \left[\frac{\nu k}{(n+\nu)^2-k^2} + \frac{\nu k}{(n-\nu)^2-k^2} \right],$$

$$s_{\nu, n} = \sin \frac{c}{2H} \cdot \left[\frac{(n+\nu)n-k^2}{(n+\nu)^2-k^2} - \frac{(n-\nu)n-k^2}{(n-\nu)^2-k^2} \right],$$

— Zahlen, welche man, für das gegebene Instrument, mit den Argumenten n und ν ein- für allemal tabulieren kann —, so hat man einfach

$$\left\{ \begin{aligned} \int_S \sin\left(\frac{x}{H} + E\right) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy &= \\ &= \cos\left(E + \frac{c}{2H}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{c}{2H} \cdot (a_0 - y_a) + \sum_{\nu} a_{\nu} p_{\nu, n}\right) + \\ &\quad + \sin\left(E + \frac{c}{2H}\right) \cdot \sum_{\nu} b_{\nu} q_{\nu, n} \\ \int_S \sin\left(\frac{x}{H} + E\right) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy &= \\ &= \sin\left(E + \frac{c}{2H}\right) \cdot \sum_{\nu} a_{\nu} r_{\nu, n} \\ &\quad - \cos\left(E + \frac{c}{2H}\right) \cdot \sum_{\nu} b_{\nu} s_{\nu, n}. \end{aligned} \right. \quad 1$$

Wendet man die Transformation (43) endlich an auf die Integrale, welche in den fünften Zeilen von (41) stehen, so findet man

$$\left\{ \begin{aligned} \int_S \frac{x}{n\pi c} \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy &= \\ &= -\frac{1}{2} b_n + \frac{1}{n\pi} (a_0 - y_a + \frac{3}{4} a_n) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} a_{\nu} \\ \int_S \frac{x}{n\pi c} \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy &= \\ &= \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4n\pi} b_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} b_{\nu}, \end{aligned} \right.$$

¹ In der ersten Gleichung könnte man den Coefficient bei $\cos\left(E + \frac{c}{2H}\right)$ noch etwas einfacher schreiben, wenn man berücksichtigt, dass $y_a = \sum_{\nu} a_{\nu}$ ist; er wird dann: $\sum_{\nu} a_{\nu} p'_{\nu, n}$, wobei

$$p'_{\nu, n} = p_{\nu, n} - 2 \sin \frac{c}{2H} = \sin \frac{c}{2H} \cdot \left[\frac{-(n+\nu)\nu}{(n+\nu)^2 - k^2} + \frac{(n-\nu)\nu}{(n-\nu)^2 - k^2} \right]$$

ist.

wo $\sum_{\nu \neq n}$ auf die Werte $\nu = 1, 2, \dots, n-1, n+1, n+2, \dots$ zu erstrecken ist.

Setzt man die obigen Ausdrücke der Integrale in (41) ein und gebraucht anstatt der bisherigen neue Instrumentalconstanten:

$$\begin{aligned} \gamma_n \cos \Gamma_n &= \gamma'_n, & \gamma_n \sin \Gamma_n &= \gamma''_n, \\ \left(\kappa_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n \right) \cos K_n &= \kappa'_n, & \left(\kappa_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n \right) \sin K_n &= \kappa''_n, \\ \varepsilon_n \cos E_n &= \varepsilon'_n, & \varepsilon_n \sin E_n &= \varepsilon''_n, \\ \varepsilon \cos \left(E + \frac{c}{2H} \right) &= \varepsilon', & \varepsilon \sin \left(E + \frac{c}{2H} \right) &= \varepsilon'', \\ \sigma_{n1} - n \varepsilon \sin E &= \sigma'_{n1}, \\ \sigma_{n2} - n \varepsilon \sin E &= \sigma'_{n2}, \end{aligned}$$

so erhält man die Formeln zur Corrigierung der Coefficienten a'_n, b'_n :

$$\begin{aligned} \Delta a'_n &= \gamma'_n \cdot \frac{c}{2\pi} B_n - \gamma''_n \cdot \frac{c}{2\pi} B'_n \\ &\quad - \kappa'_n \cdot L A'_n - \kappa''_n \cdot L A_n \\ &\quad + \varepsilon'_n \cdot n a_{2n} + \varepsilon''_n \cdot n (b_n - b_{2n}) \\ &\quad + \varepsilon' \cdot \left(\frac{2(a_0 - y_a) \sin \frac{c}{2H}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} a_{\nu} p_{\nu, n} \right) + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} b_{\nu} q_{\nu, n} \\ &\quad + h_n \cdot \left\{ -\frac{1}{2} b_n + \frac{1}{n\pi} (a_0 - y_a + \frac{3}{4} a_n) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} a_{\nu} \right\} \\ &\quad - m_{n1} \cdot a_n \\ &\quad - \sigma'_{n1} \cdot b_n \\ \Delta b'_n &= -\gamma'_n \cdot \frac{c}{2\pi} A_n + \gamma''_n \cdot \frac{c}{2\pi} A'_n \\ &\quad - \kappa'_n \cdot L B'_n - \kappa''_n \cdot L B_n \\ &\quad + \varepsilon'_n \cdot n b_{2n} - \varepsilon''_n \cdot n (a_n - a_{2n}) \\ &\quad - \varepsilon' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} b_{\nu} s_{\nu, n} + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} a_{\nu} r_{\nu, n} \\ &\quad + h_n \cdot \left\{ \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4n\pi} b_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} b_{\nu} \right\} \\ &\quad - m_{n2} \cdot b_n \\ &\quad + \sigma'_{n2} \cdot a_n. \end{aligned} \tag{44}$$

Im folgenden gebe ich eine für mein Instrument ($H = 15.71$ mm) berechnete Tafel der Factoren $\frac{1}{\pi} P_{v,n}$, $\frac{1}{\pi} Q_{v,n}$ und eine ebensolche der Factoren $\frac{1}{\pi} S_{v,n}$, $\frac{1}{\pi} r_{v,n}$.

Tafel der Factoren $\frac{1}{\pi} P_{v,n}$, $\frac{1}{\pi} Q_{v,n}$.

v	n											
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$						
1	-0.63	+0.19	-0.75	+0.33	-0.09	-0.27	-0.25	+0.15	-0.92	-0.43	-0.64	-0.12
2	-1.01	+0.65	+0.28	-0.61	-0.28	-0.09	+0.30	+0.13	0.06	+0.43	-1.32	-0.81
3	+0.51	-0.82	-0.27	-0.01	-0.34	+0.10	-0.33	+0.17	0.25	+0.27	+0.14	+0.68
4	-0.88	+0.61	-0.51	+0.26	-0.44	+0.22	-0.39	+0.23	-0.33	+0.28	-0.19	+0.40
5	+1.92	-2.15	-1.28	+1.06	-0.65	+0.46	-0.50	+0.34	0.41	+0.33	-0.31	+0.37
6	+0.50	-0.71	+2.23	-2.43	-1.53	+1.36	-0.74	+0.60	-0.53	+0.45	-0.41	+0.42

Tafel der Factoren $\frac{1}{\pi} S_{v,n}$, $\frac{1}{\pi} r_{v,n}$.

v	n											
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$						
1	-0.06	+0.03	-0.22	+0.16	+0.36	-0.50	-0.08	-0.33	+0.50	+0.34	+0.18	+0.06
2	-0.35	+0.31	+0.84	-0.93	+0.20	-0.35	+0.03	-0.32	-0.29	-0.54	+0.93	+0.73
3	+1.45	-1.49	+0.43	+0.52	-0.23	-0.37	+0.10	-0.34	-0.05	-0.40	+0.48	-0.77
4	+1.28	-1.32	+0.55	-0.63	+0.32	-0.45	+0.18	-0.39	+0.06	-0.40	-0.11	-0.49
5	-1.73	+1.70	+1.27	-1.35	+0.53	-0.66	+0.31	-0.50	+0.16	-0.45	+0.30	-0.47
6	-0.40	+0.36	-2.26	+2.19	+1.42	-1.54	+0.56	-0.74	+0.31	-0.56	+0.16	-0.52

Dass die in (44) vorkommenden Reihen convergieren, lässt sich sehr leicht in allgemeiner Weise zeigen. Bekanntlich existiert immer, wenn a_ν, b_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) Coefficienten in der Entwicklung einer Function sind, welche den Dirichlet'schen Bedingungen genügt und endlich bleibt, eine endliche Zahl \mathfrak{B} von der Art, dass für alle ν die Ungleichheiten bestehen

$$|a_\nu| < \frac{\mathfrak{B}}{\nu}, \quad |b_\nu| < \frac{\mathfrak{B}}{\nu}.$$

Es ist nun [das n in den Formeln (44) ist natürlich eine endliche Zahl]

$$\left| \sum_{\nu=n+4}^{\nu=\infty} \frac{\nu a_\nu}{(\nu-n)^2-k^2} \right| < \sum_{\nu=n+4}^{\nu=\infty} \frac{\nu |a_\nu|}{(\nu-n)^2-k^2} < \mathfrak{B} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{1}{(\mu+4)^2-k^2},$$

also, da $k < 4$ ist,

$$\left| \sum_{\nu=n+4}^{\nu=\infty} \frac{\nu a_\nu}{(\nu-n)^2-k^2} \right| < \mathfrak{B} \frac{1}{4^2-k^2} + \mathfrak{B} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{\mu^2+8\mu} < \mathfrak{B} \frac{1}{4^2-k^2} + \mathfrak{B} \frac{\pi^2}{6}.$$

Die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{\nu}{(\nu-n)^2-k^2} \quad \text{und (umsomehr)} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{\nu}{(\nu+n)^2-k^2} \quad (45)$$

sind daher absolut convergent. Umsomehr convergieren die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{n}{(\nu-n)^2-k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{n}{(\nu+n)^2-k^2}; \quad (46)$$

aus der Convergenz der Reihen (46) und der Reihen (45) folgt aber diejenige der Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{(n-\nu)n}{(\nu-n)^2-k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{(n+\nu)n}{(\nu+n)^2-k^2}. \quad (47)$$

Infolge der Convergenz von (45) convergieren die Reihen $\sum_{\nu} a_{\nu} r_{\nu, n}$, $\sum_{\nu} b_{\nu} q_{\nu, n}$; infolge der Convergenz von (47) die Reihen $\sum_{\nu} a_{\nu} p_{\nu, n}$, $\sum_{\nu} b_{\nu} s_{\nu, n}$.

Ähnlich ersieht man die Convergenz der Reihen, welche in den Coefficienten bei h_n stehen. Es ist

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu^2-n^2} b_{\nu} \right| < \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu^2-n^2} |b_{\nu}| < 3 \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{2n\mu + \mu^2} < 3 \frac{\pi^2}{6},$$

womit die Convergenz der Reihe $\sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2-n^2} b_{\nu}$ bewiesen ist.

Umsömehr convergiert die Reihe $\sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2-n^2} a_{\nu}$.

28. In der praktischen Anwendung der Formeln (44) können diese Summen nicht genau berechnet werden, weil die Coefficienten a_{ν} , b_{ν} für $\nu > N$ im allgemeinen unbekannt sein werden. Die Anwendung des Analysators mit N Integrierapparaten setzt schon voraus, dass bei der zu analysierenden Curve die Summen

$$\sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} a_{\nu} \cos \frac{2\nu\pi x}{c}$$

und

$$\sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} b_{\nu} \sin \frac{2\nu\pi x}{c}$$

vernachlässigt werden dürfen. In dieser Voraussetzung ist, streng genommen, die Eigenschaft nicht enthalten, dass

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} a_{\nu} p_{\nu, n}, \quad \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} b_{\nu} q_{\nu, n}, \quad \sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^2-n^2} a_{\nu}$$

und

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} b_{\nu} s_{\nu, n}, \quad \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} a_{\nu} r_{\nu, n}, \quad \sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} b_{\nu}$$

Größen seien, welche, mit kleinen Factoren erster Ordnung multipliciert, vernachlässigt werden dürfen. Diese letztere Eigenschaft muss also hier als eine weitere Voraussetzung eingeführt werden. Dann können die Summationen in (44) auf die Indices $\nu = 1, 2, \dots, N$ beschränkt werden. Die Nothwendigkeit dieser Voraussetzung liegt an der Natur des Instrumentes, welches nur eine beschränkte Anzahl Coefficienten liefert und über die übrigen nichts aussagt.

Die Symbole \sum_{ν} , $\sum_{\nu \neq n}$ in den Formeln (44) sollen fortan im Sinne dieser Beschränkung verstanden werden.

29. Die Coefficienten $A_n B_n$ der Fourier'schen Entwicklung der Function $\cos \frac{y}{L}$, und $A'_n B'_n$ der Entwicklung der Function $\sin \frac{y}{L}$, von x könnte man in folgender Weise berechnen. Der sin oder cos des Ausdruckes

$$\frac{y}{L} = \frac{a_0}{L} + \sum_n \frac{a_n}{L} \cos \frac{2n\pi x}{c} + \sum_n \frac{b_n}{L} \sin \frac{2n\pi x}{c}$$

in welchem man die Summen auf wenige Glieder beschränkt, stellt sich dar als ein Aggregat von Producten, deren einzelne Factoren sämmtlich die Formen haben:

$$\frac{\sin \left(\frac{a_{\nu}}{L} \cos \frac{2\nu\pi x}{c} \right)}{\cos \left(\frac{L}{L} \cos \frac{2\nu\pi x}{c} \right)}, \quad \frac{\sin \left(\frac{b_{\nu}}{L} \sin \frac{2\nu\pi x}{c} \right)}{\cos \left(\frac{L}{L} \sin \frac{2\nu\pi x}{c} \right)},$$

wobei ν in den verschiedenen Factoren verschieden ist. Entwickelt man nun jeden solchen Factor mit Hilfe der Bessel'schen Functionen in eine Reihe nach Vielfachen von $\frac{2\nu\pi x}{c}$ und multipliciert diese Reihen, so kann man auf diesem Wege zu der gesuchten Entwicklung von der Gestalt

$$\cos \frac{y}{L} = A_0 + \sum_{\nu} A_{\nu} \cos \frac{2\nu\pi x}{c} + \sum_{\nu} B_{\nu} \sin \frac{2\nu\pi x}{c},$$

beziehungsweise

$$\sin \frac{y}{L} = A'_0 + \sum_{\nu} A'_{\nu} \cos \frac{2\nu\pi x}{c} + \sum_{\nu} B'_{\nu} \sin \frac{2\nu\pi x}{c}$$

gelangen.

Ich habe die entsprechenden Formeln abgeleitet; dieselben sind jedoch außerordentlich compliciert. Ich theile sie daher nicht mit. Gewöhnlich wird sich zur Bestimmung der Coefficienten A_{ν} , B_{ν} , A'_{ν} , B'_{ν} das folgende Verfahren mehr empfehlen. Man zeichnet, außer der zur Analyse vorgelegten Curve S , noch (roh) zwei Hilfscurven, deren Ordinaten proportional sind dem $\cos \frac{y}{L}$, beziehungsweise $\sin \frac{y}{L}$, wo y die Ordinate der Curve S ist; man analysiert diese beiden Curven mit dem Instrument, wobei natürlich von Instrumentalfehlern abgesehen werden darf.

In den meisten Fällen aber wird man es vorziehen, diese Entwicklungen überhaupt nicht zu bestimmen, sondern die entsprechenden Fehlerglieder durch eine Maßnahme bei der Analyse der Curve S aus der Ablesung zu eliminieren. Dies wird in der That erreicht, wenn man vor der Wiederholung der Umfahrung, welche behufs Verminderung der zufälligen Fehler oder Elimination der Rollenexcentricitäten vorgenommen wird, das Instrument von der Unterlage abhebt und es in der Weise neu aufstellt, dass die neue Anfangsablesung an der Laufradtheilung von der früheren um 180° verschieden ist. Dieses Verfahren hat freilich einen Nachtheil. Die gegenseitige Lage und Orientierung der beiden Coordinatensysteme: desjenigen des Instrumentes (xy) und desjenigen, in welchem die Zeichnung entworfen worden ist, wird dadurch geändert und muss deshalb von neuem festgestellt werden.

Hat man das Eliminationsverfahren angewandt und bezeichnet a'_n , b'_n wieder das arithmetische Mittel der Werte aus beiden Umfahrungen, dann sind die Formeln für die Correction der Werte a'_n b'_n einfach

$$\begin{aligned}
 \Delta a'_n &= \varepsilon'_n \cdot n a_{2n} + \varepsilon''_n \cdot n (b_n - b_{2n}) \\
 &+ \varepsilon' \cdot \left(\frac{2(a_0 - y_a) \sin \frac{c}{2H}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} a_{\nu} p_{\nu, n} \right) + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} b_{\nu} q_{\nu, n} \\
 &+ h_n \cdot \left\{ -\frac{1}{2} b_n + \frac{1}{n\pi} (a_0 - y_a + \frac{3}{4} a_n) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} a_{\nu} \right\} \\
 &- m_{n1} \cdot a_n \\
 &- \sigma'_{n1} \cdot b_n \\
 \Delta b'_n &= \varepsilon'_n \cdot n b_{2n} - \varepsilon''_n \cdot n (a_n - a_{2n}) \\
 &- \varepsilon' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} b_{\nu} s_{\nu, n} + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} a_{\nu} r_{\nu, n} \\
 &+ h_n \cdot \left\{ \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4n\pi} b_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} b_{\nu} \right\} \\
 &- m_{n2} \cdot b_n \\
 &+ \sigma'_{n2} \cdot a_n.
 \end{aligned} \tag{48}$$

30. Entschließt man sich, bei allen Analysen immer das letztere Verfahren anzuwenden, so braucht man also nicht, die Instrumentalconstanten $\gamma_n, \Gamma_n, \varkappa_n, \dot{\gamma}_n, \mathbf{K}_n$ bestimmt zu haben. Da es aber wünschenswert erschien, die Richtigkeit der Theorie durch Beobachten des Verhaltens der Constanten, sowie durch ihre Anwendung auf Analysen bekannter Curven zu prüfen (namentlich auch in der Erwägung, dass die Einführung der Constanten $\gamma_n, \dot{\gamma}_n$ in der Theorie auf der nicht ganz bewiesenen Annahme beruht, dass die so bezeichneten Größen während einer Analyse als constant angesehen werden dürfen), — so musste eine Reihe von Bestimmungen der Constanten

$$\begin{aligned}
 &\gamma_n \cos \Gamma_n, \quad \gamma_n \sin \Gamma_n, \quad \varkappa_n \cos \mathbf{K}_n, \quad \varkappa_n \sin \mathbf{K}_n, \quad \dot{\gamma}_n \cos \mathbf{K}_n, \quad \dot{\gamma}_n \sin \mathbf{K}_n, \\
 &\varepsilon_n \cos \mathbf{E}_n, \quad \varepsilon_n \sin \mathbf{E}, \quad \varepsilon \cos \mathbf{E}, \quad \varepsilon \sin \mathbf{E}, \quad m_{n1}, \quad m_{n2}, \quad \sigma_{n1}, \quad \sigma_{n2}
 \end{aligned}$$

ausgeführt werden, die auch in der That ergab, dass alle diese Constanten bei richtiger Behandlung des Instrumentes sogar im Laufe längerer Zeiträume mit hinreichender Genauigkeit constant bleiben. Nur im Hinblick auf solche Bestimmungen geschieht es, wenn im nächsten Unterabschnitte, der von den

Bestimmungsmethoden der verschiedenen Instrumentalconstanten handelt, auch diejenigen für die Constanten $\gamma_n \cos \Gamma_n$ und $\gamma_n \sin \Gamma_n$, $\varkappa_n \cos K_n$ und $\varkappa_n \sin K_n$, $\dot{\gamma}_n \cos K_n$ und $\dot{\gamma}_n \sin K_n$ beschrieben werden. —

Methoden zur Bestimmung der Constanten.

31. In den zunächst folgenden Paragraphen beschäftige ich mich mit den Bestimmungsmethoden derjenigen Constanten, welche ein für viele Mal bestimmt werden können. Ich nenne fortan diese Constanten kurz die regulären.

Um diese Constanten mit der wünschenswerten Genauigkeit bestimmen zu können, sind nur solche Verfahren zweckmäßig, welche präzise Einstellungen oder Ablesungen des Wagenindex an der Schienentheilung nicht voraussetzen; genauer gesagt, nur so beschaffene Bestimmungsmethoden, dass die von einem kleinen Einstellungs-, beziehungsweise Ablesungsfehler herrührende Ungenauigkeit der geographischen Längen der Messrollen sich im Resultate der Bestimmung eliminiert. Der Nonius am Wagenindex ist nur auf Ablesung der Zehntelmillimeter eingerichtet. Zwar gelingt es bei einiger Übung die Genauigkeit der Schätzung so weit zu treiben, dass der Ablesungsfehler selten größer als 0·02 mm ist. Jedoch, einerseits, genügt hier diese Genauigkeit manchmal nicht; andererseits sind so scharfe Ablesungen sehr zeitraubend und auch ermüdend, wodurch nach mehreren Ablesungen die Bestimmtheit des Urtheiles immer geringer wird.

Deshalb sind die unten beschriebenen Verfahren von solcher Art, dass diese Nothwendigkeit, soweit möglich, vermieden wird.

Man wird bei den unten beschriebenen Verfahren öfters bemerken können, dass die untersuchte Constante sich auch auf eine andere Weise würde bestimmen lassen. Ich beschreibe jedesmal nur dasjenige Bestimmungsverfahren, welches nach meinen Versuchen und Überlegungen sich als das genaueste (oder als das einzige befriedigend genaue) erwiesen hat, und unterdrücke ferner auch die ausdrückliche Angabe von mög-

lichen Modificationen des beschriebenen Verfahrens, welche unwesentlich und unmittelbar einleuchtend sind.

Die bisherige Definition (Art. 7) des Coordinatensystems xy wird auch in diesen Darstellungen festgehalten. Es möge daran erinnert werden, dass dieses Coordinatensystem auf etwaigen auf der Unterlage des Instrumentes vorhandenen Aufdruck oder Zeichnung keinen Bezug nimmt.

32. Um die Constante $\sigma_{n2} - \sigma_{n1}$ zu bestimmen, bemerke man, dass, wenn λ_{n1} , λ_{n2} zwei gleichzeitige Werte der geographischen Längen der beiden Messrollen sind, ihre Differenz nach (39)

$$\lambda_{n2} - \lambda_{n1} = 90^\circ + (\sigma_{n2} - \sigma_{n1})$$

ist, also andere Instrumentalconstanten nicht enthält.

Ich bringe nun durch Einstellungen des Index an der Schienentheilung den Fahrstift nacheinander in die vier Lagen

$$x = \frac{1}{8} \frac{c}{n} + \xi', \quad x = \frac{3}{8} \frac{c}{n} + \xi'', \quad x = \frac{5}{8} \frac{c}{n} + \xi''', \quad x = \frac{7}{8} \frac{c}{n} + \xi^{IV},$$

wo ξ' , ξ'' , ξ''' , ξ^{IV} Einstellungsfehler bedeuten. Folgende Figuren veranschaulichen die dadurch erzeugten Stellungen des Rollenpaares:

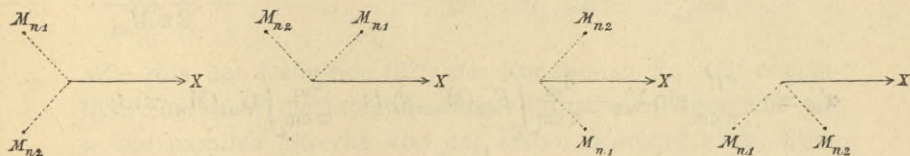


Fig. 9.

In jeder dieser Lagen gehe ich von einer und derselben Geraden $y = \text{Const.}$ aus und lasse, durch Fortrollen des Instrumentes, den Fahrstift von hier aus eine jedesmal möglichst gleich lange Strecke

l' , l'' , l''' , l^{IV}

in der Richtung der y -Axe durchlaufen. Die Verhältnisse zwischen diesen vier Strecken unterscheiden sich also von der

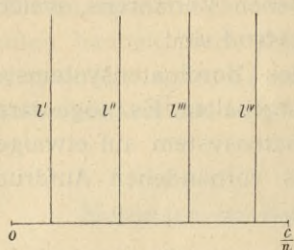


Fig. 10.

Einheit nur um kleine Größen erster Ordnung; ebenso sollen auch die durch Einstellungsfehler bedingten Fehler der geographischen Längen als klein von der ersten Ordnung angesehen werden können. Auf jeder Strecke vollziehen die Messrollen angenähert eine ganze Anzahl Revolutionen.

Die beiden »Ablesungen über l' «: α'_{n1} und α'_{n2} , und die über die weiteren Strecken: α''_{n1} und α''_{n2} , α'''_{n1} und α'''_{n2} , α^{iv}_{n1} und α^{iv}_{n2} erlauben nun den constanten Längenunterschied $\lambda_{n2} - \lambda_{n1}$ zu berechnen, wenn die Streckenlängen l', l'', l''', l^{iv} in Analysator-Millimetern bekannt sind.

In der That ist infolge von (38'), wenn cm den Analysator-Centimeter bedeutet,

$$\alpha'_{n1} = -\frac{l'}{\pi \text{ cm}} \sin \lambda'_{n1} - \frac{\delta_{n1}}{\pi \text{ cm}} \int_{l'} F_{n1}(M_{n1}, s) ds - \frac{\delta_{n2}}{\pi \text{ cm}} \int_{l'} G_{n2}(M_{n2}, s) ds -$$

$$-\frac{\kappa_n}{\pi \text{ cm}} \sin 135^\circ \cdot \int_{l'} \cos \left(\frac{y}{L} + K_n \right) dy - \frac{m_{n1} l'}{\pi \text{ cm}} \sin 135^\circ -$$

$$-\frac{[z_n]_{l'}}{2\pi M_{n1}},$$

$$\alpha'_{n2} = -\frac{l'}{\pi \text{ cm}} \sin \lambda'_{n2} - \frac{\delta_{n2}}{\pi \text{ cm}} \int_{l'} F_{n2}(M_{n2}, s) ds - \frac{\delta_{n1}}{\pi \text{ cm}} \int_{l'} G_{n1}(M_{n1}, s) ds -$$

$$-\frac{\kappa_n}{\pi \text{ cm}} \sin 225^\circ \cdot \int_{l'} \cos \left(\frac{y}{L} + K_n \right) dy - \frac{m_{n2} l'}{\pi \text{ cm}} \sin 225^\circ -$$

$$-\frac{[z_n]_{l'}}{2\pi M_{n2}},$$

wo z_n die veränderliche (in Artt. 12. und 15. mit h bezeichnete) Höhe des Kugelmittelpunktes über dem Umdrehungscentrum des Cylinders, und das Operationssymbol $[]_{l'}$, wie gewöhnlich die »Substitution über l' « bezeichnet; denn die Schwankungen jener Höhe infolge Schrägheit und Excentricität des Cylinders

sind die einzigen Fehlerquellen von cyclischer Wirkung, welche bei der zur y -Axe parallelen Fahrt einen Einfluss haben. Nach der für kleine β giltigen Formel

$$\arcsin(\sin \lambda + \beta) = \lambda + \beta \sec \lambda,$$

welche, wenn der Winkel λ nicht nahe $= 90^\circ$ oder nahe $= 270^\circ$ ist, bis auf Glieder zweiter Ordnung des β richtig ist, kann man nun bilden $\arcsin\left(\frac{-\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}}\right)$ und $\arcsin\left(\frac{-\alpha'_{n2}}{l'/\pi \text{ cm}}\right)$; man überzeugt sich, dass

$$\begin{aligned} & \arcsin\left(\frac{-\alpha'_{n2}}{l'/\pi \text{ cm}}\right) - \arcsin\left(\frac{-\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}}\right) = \\ & = \lambda_{n2} - \lambda_{n1} + \frac{\delta_{n1}}{l'} \left\{ \int_{l'} F_{n1}(M_{n1}, s) ds - \int_{l'} G_{n1}(M_{n1}, s) ds \right\} \sec 45^\circ + \\ & \quad + \frac{\delta_{n2}}{l'} \left\{ - \int_{l'} F_{n2}(M_{n2}, s) ds + \int_{l'} G_{n2}(M_{n2}, s) ds \right\} \sec 45^\circ + \\ & \quad + 2 \frac{z_n}{l'} \int_{l'} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) dy + m_{n1} + m_{n2} + \\ & \quad \quad \quad + \frac{[z_n]_{l'}}{2l'} \left(\frac{1}{M_{n1}/\text{cm}} - \frac{1}{M_{n2}/\text{cm}} \right) \sec 45^\circ. \end{aligned}$$

Wie aus der Definition (22') der Functionen F_{ni} , G_{nj} ersichtlich, sind aber die Integrale dieser Functionen über eine zur y -Axe parallele Strecke von der ersten Ordnung klein, wenn über die Integrationsstrecke die Veränderlichen $\bar{\mu}_{ni}$, $\bar{\mu}_{nj}$ um nahezu ein ganzes Vielfaches von 2π variieren; andererseits ist bei dem kleinen Factor erster Ordnung $[z_n]_{l'}$, $M_{n1} = M_{n2}$ zu setzen; man hat also, bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig,

$$\begin{aligned} & \arcsin\left(\frac{-\alpha'_{n2}}{l'/\pi \text{ cm}}\right) - \arcsin\left(\frac{-\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}}\right) = \\ & = \lambda_{n2} - \lambda_{n1} + 2 \frac{z_n}{l'} \int_{l'} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) dy + m_{n1} + m_{n2}. \end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{-\alpha''_{n2}}{l''/\pi \text{ cm}}\right) - \arcsin\left(\frac{-\alpha''_{n1}}{l''/\pi \text{ cm}}\right) &= \\ &= \lambda_{n2} - \lambda_{n1} - 2 \frac{\alpha_n}{l''} \int_{l''} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) dy - m_{n1} - m_{n2} - \\ &\quad - \frac{[z_n]_{l''}}{2l''} \left(\frac{1}{M_{n1}/\text{cm}} + \frac{1}{M_{n2}/\text{cm}}\right) \sec 45^\circ, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{-\alpha'''_{n2}}{l'''/\pi \text{ cm}}\right) - \arcsin\left(\frac{-\alpha'''_{n1}}{l'''/\pi \text{ cm}}\right) &= \\ &= \lambda_{n2} - \lambda_{n1} + 2 \frac{\alpha_n}{l'''} \int_{l'''} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) dy + m_{n1} + m_{n2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{-\alpha^{iv}_{n2}}{l^{iv}/\pi \text{ cm}}\right) - \arcsin\left(\frac{-\alpha^{iv}_{n1}}{l^{iv}/\pi \text{ cm}}\right) &= \\ &= \lambda_{n2} - \lambda_{n1} - 2 \frac{\alpha_n}{l^{iv}} \int_{l^{iv}} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) dy - m_{n1} - m_{n2} + \\ &\quad + \frac{[z_n]_{l^{iv}}}{2l^{iv}} \left(\frac{1}{M_{n1}/\text{cm}} + \frac{1}{M_{n2}/\text{cm}}\right) \sec 45^\circ. \end{aligned}$$

Summiert man diese vier Gleichungen, so hat man offenbar bis auf kleine Größen zweiter Ordnung richtig

$$4(\lambda_{n2} - \lambda_{n1}) = \sum_{r=1}^{r=4} \left[\arcsin\left(\frac{-\alpha^{(r)}_{n2}}{l^{(r)}/\pi \text{ cm}}\right) - \arcsin\left(\frac{-\alpha^{(r)}_{n1}}{l^{(r)}/\pi \text{ cm}}\right) \right]. \quad (49)$$

Von den verschiedenen Werten des $\arcsin\left(\frac{-\alpha_{ni}^{(r)}}{l^{(r)}/\pi \text{ cm}}\right)$ ist, wie aus der Ableitung ersichtlich, derjenige Wert zu nehmen, welcher sich von $\frac{-2n\pi x^{(r)}}{c} + \Lambda_{ni}^0$ nur wenig unterscheidet.

Bei der Befahrung werden die beiden Endpunkte der einzelnen Strecken l' , l'' , l''' , l^{iv} durch Eindrücken des Stiftes in die Unterlage markiert, und nach der Operation ihre Entfernungen von einander in Analysator-Millimetern ausgemessen. —

Um ein Beispiel zu geben, möge hier von meinen wiederholt ausgeführten derartigen Bestimmungen wiedergegeben werden, unter Hinzufügung einiger Texterläuterungen, das

Beobachtungs-Protokoll von 1899 Juni 22.¹

Bestimmung der Constante $\sigma_{22} - \sigma_{21}$.

Das Instrument wird auf dem Millimeterpapiere aufgestellt, so, dass die x -Axe der Instrumentalcoordinaten nahezu parallel der der Papiercoordinaten ist, was geprüft wird durch Beobachten, ob die Fahrstiftspitze während der Verschiebung des Stiftes bei nichttrollendem Instrument eine der x -Linien des Papierees nicht verlässt.

Die Cylinder werden mit dem Pinsel abgewischt.

Die Rahmen der Axen der Rollen M_{21} , M_{22} werden angewärmt.

Die Kugel 2 wird auf den Cylinder heruntergelassen. — Die Zwischenräume bei den Trommeln sind frei.²

¹ Die Ablesung der Rolle ist eine Zahl von 3 Decimalstellen, da die Zehntel einer Pars der Trommeltheilung Tausendstel-Revolutionen sind. Fand ich bei der Schätzung, dass die Ablesung »6 Zehntelpartes« zu wenig, »7 Zehntelpartes« aber zu viel wäre, konnte ich aber nicht entscheiden, was der Wahrheit näher sei, dann notierte ich als letzte Stelle der Ablesung 6_+ oder 7_- (je nachdem ich glaubte, dass ich mir vielleicht doch leichter die Richtigkeit von 6, als von 7 einreden könnte, oder umgekehrt). Fand ich 6 zu wenig und 7 zu viel, war ich aber sicher, dass mir 6 richtiger vorkommt, als 7, dann notierte ich $6_{(+)}$, im umgekehrten Falle $7_{(-)}$. War ich unsicher, ob $6_{(+)}$ oder 6 zu lesen sei, dann notierte ich $6_{[+]}$; war ich unsicher, ob $7_{(-)}$ oder 7, dann notierte ich $7_{[-]}$.

Bei der Berechnung wurde dann sowohl 6_+ wie 7_- mit $6\cdot5$ Zehntelpartes übersetzt; ein Unterschied zwischen diesen beiden Notierungen wurde nur dann gemacht, wenn die Rechnungsoperationen (etwa eine Mittelbildung oder Division) es nöthig machten, die Zahl $6\cdot5$ durch eine mit gerader Anzahl Zehntel zu ersetzen, also sich zwischen $6\cdot4$ und $6\cdot6$ zu entschließen. Die Notierung $6_{(+)}$ wurde mit $6\cdot3$ (eventuell, im Falle eines rechnerischen Bedürfnisses, mit $6\cdot2$), die Notierung $7_{(-)}$ mit $6\cdot7$ (eventuell $6\cdot8$) Zehntelpartes übersetzt. Die Notierung $6_{[+]}$ wurde übersetzt mit $6\cdot2$, die Notierung $7_{[-]}$ mit $6\cdot8$ Zehntelpartes.

Das Kleine Zählrad, welches die Vielfachen von 50 Revolutionen zu geben bestimmt ist, wurde nie mit abgelesen; erstens, weil bei solchen Befahrungen ein bleibender Irrthum um 50 Revolutionen ausgeschlossen ist, — zweitens, weil die Angaben dieser Zählräder sehr oft falsch sind.

² Dies pflegte ich vor jeder Operation nachzusehen. Vergl. S. 79, ZZ. 8 v. unt. bis 6 v. unt., und S. 81, ZZ. 15 bis 16.

Schiene 22·5:

	α_{21}	α_{22}
Anfangsablesung (oder »Papier 0«) ..	2·728	1·077 ₍₊₎
Vorgerollt: Papier 312 ¹	45·696 _[-]	8·048 _[+]
„ : Papier 445	42·700	11·017 ₊
Zurück zu »Papier 312«	45·696 ₋	8·045 ₊
„ „ »Papier 0«	2·726	1·074

3^h 45^m, Temperatur 15·4° R.

Schiene 67·5:

	α_{21}	α_{22}
Papier 0	2·736 ₋	1·060 ₍₋₎
„ 312	45·740	44·035 ₍₊₎
„ 445	42·756 ₍₋₎	41·038
„ 312 ..	45·739	44·035 _[-]
„ 0	2·737	1·063 ₍₊₎

4^h 5^m, Temperatur 15·5° R.

Schiene 112·5:

	α_{21}	α_{22}
Papier 0	2·759 ₍₊₎	1·065 ₊
„ 312	9·797 ₍₊₎	44·098
„ 445	12·801	41·124 ₍₋₎
„ 312	9·798 ₍₊₎	44·097
„ 0	2·758 _[-]	1·064 ₊

4^h 28^m, Temperatur 15·5° R.

Schiene 157·5:

	α_{21}	α_{22}
Papier 0	2·766	1·080 ₍₋₎
„ 312	9·754 _[-]	8·116
„ 445	12·731 ₊	11·115 ₍₋₎
„ 312	9·754 _[-]	8·116
„ 0	2·765 ₍₋₎	1·083 ₍₊₎

4^h 53^m, Temperatur 15·5° R.

Die Kugel 2 wird hinaufgehoben.

Das Instrument wird in die zu den y -Linien des Papiers parallele Lage verstellt, behufs Ausmessung der Entfernung

¹ Angabe, laut des Papiernetzes, der Ordinate in Millimetern, gezählt von derjenigen x -Linie des Papiers ab, auf welcher der Fahrstift bei der Anfangsablesung stand.

zwischen den bei »Papier 0« und den bei »Papier 312« vorhin gemachten Marken. Es finden sich folgende Schienenablesungen:

(L. Grabowski).

Fahrstiftspitze eingestellt auf die		Marke »Papier 0«		Also die Entfernung der bei »Papier 312« von der bei »Papier 0« gemachten Marke
Marke »Papier 312«		Marke »Papier 0«		
auf der vorhin bei »Schiene 22·5« befahrenen Ordinatenlinie:	47·53	und	359·02	311·49 mm
» » » » »Schiene 67·5«	47·58	»	359·05	311·47 mm
» » » » »Schiene 112·5«	47·55	»	359·08	311·53 mm
» » » » »Schiene 157·5«	47·58	»	359·08	311·50 mm

Das Instrument wird übertragen in eine geeignete Lage zur Ausmessung der Entfernungen zwischen den bei »Papier 312« und den bei »Papier 445« gemachten Marken; die entsprechenden Schienenablesungen sind:

(Marke »Papier 445«) (Marke »Papier 312«)		Also die Entfernungen:	
61·33	und	194·23	132·90 mm
61·28	»	194·23	132·95 mm
61·22	»	194·12	132·90 mm
61·28	»	194·12	132·84 mm

6^h, Temperatur 15·6° R., Spannung *d'*.

Die Cylinder und Laufräder werden mit dem Pinsel abgewischt und das Instrument in den Kasten hineingelegt.

Berechnung. Aus den Beobachtungen bei »Schiene 22·5« ergibt sich:

	α'_{n1} (Mittel)	α'_{n2} (Mittel)
Ablesung über $l' = 311\cdot49$ mm ist.....	— 7·031 ₃	—6·971 ₂
„ „ $l' = 444\cdot39$ mm „	—10·027 ₀	—9·941 ₈

also

	arc sin $\left(\frac{-\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}}\right)$	arc sin $\left(\frac{-\alpha'_{n2}}{l'/\pi \text{ cm}}\right)$	Differenz
aus $l' = 311\cdot49$ mm:.....	134° 50' 1	224° 40' 6	
„ $l' = 444\cdot39$ mm:.....	51·5	39·3	
Mittel	134 50·8	224 40·0	} 89° 49' 2

Ebenso ergeben die bei weiteren Stiftstellungen gemachten Beobachtungen die Werte für die weiteren arc sin:

$l'' = 311\cdot47$ mm:.....	44° 53' 2	134° 52' 2	
$l'' = 444\cdot42$ mm:.....	52·4	52·9	
Mittel	44 52·8	134 52·6	} 89° 59' 8

$l''' = 311\cdot53$ mm:.....	314° 46' 6	44° 38' 3	
$l''' = 444\cdot43$ mm:.....	46·4	38·8	
Mittel	314 46·5	44 38·6	} 89° 52' 1

$l^{IV} = 311\cdot50$ mm:.....	224° 48' 8	314° 48' 6	
$l^{IV} = 444\cdot34$ mm:.....	48·0	49·0	
Mittel	224 48·4	314 48·8	} 90° 0' 4

$$\lambda_{22} - \lambda_{21} = 1/4 \text{ Summe} = 89^\circ 55' 4$$

Es ergibt sich somit: $\sigma_{22} - \sigma_{21} = -4' 6 = -0\cdot0013$.

(Eine Wiederholung dieser Bestimmung am nächsten Tage behufs Controle ergab: $\sigma_{22} - \sigma_{21} = -4' 8$.)

33. Um die Constanten m_{n1} , m_{n2} zu bestimmen, stelle ich den Fahrstift successive in die vier Lagen

$$x = 0 + \xi', \quad x = \frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi'', \quad x = \frac{1}{2} \frac{c}{n} + \xi''', \quad x = \frac{3}{4} \frac{c}{n} + \xi^{iv}$$

ein, wobei $\xi', \xi'', \xi''', \xi^{iv}$ Einstellungsfehler bedeuten, sodass die Stellungen des Rollenpaares nahezu die durch die folgenden Figuren veranschaulichten sind. In jeder dieser Lagen lasse ich

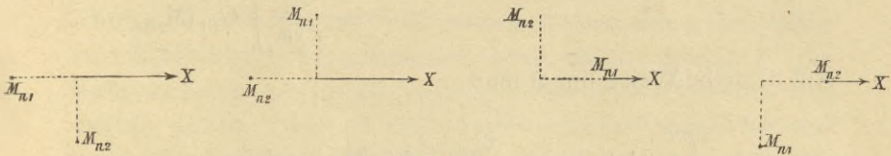


Fig. 11.

durch Rollen des Instrumentes den Fahrstift in der Richtung der y -Axe eine Strecke durchlaufen, welche annähernd gleich einem Vielfachen von $2L\pi$ ist, was durch Beobachten der am Laufrade angebrachten Theilung im Anfangs- und Endpunkte der Strecke constatiert wird.

Die Operation wird sodann mit um 180° veränderten Anfangs-Drehungsphasen der Messrollen wiederholt.

Sind die thatsächlich durchlaufenen vier Strecken l', l'', l''', l^{iv} in Analysator-Millimetern bekannt, so liefert die Ablesung α'_{n2} sowohl als auch α'''_{n2} die Constante m_{n2} , die Ablesung α''_{n1} aber, sowohl als α^{iv}_{n1} , die Constante m_{n1} .

In der That, die Formel (38') gibt

$$\int_{l'} d\mu_{n2} = \frac{1}{5 \text{ mm}} (1 + m_{n2}) \int_{l'} \sin \lambda_{n2} dy + \frac{\delta_{n2}}{5 \text{ mm}} \int_{l'} F_{n2}(M_{n2}, s) ds + \\ + \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l'} G_{n1}(M_{n1}, s) ds - \alpha_n \frac{L}{5 \text{ mm}} \left[\sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \right]_{l'} + \frac{[z_n]_{l'}}{M_{n2}};$$

da aber $\sin \lambda_{n2}$ sich auf der Strecke l' nur um eine Größe zweiter Ordnung von -1 unterscheidet, ferner

$$\alpha_n \left[\sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \right]_{l'}$$

wegen der nahezu ganzen Anzahl von Cylinder-Revolutionen klein von der zweiten Ordnung ist, und dasselbe auch von $\frac{[z_n]_{l'}}{M_{n2}}$

gilt, so hat man, indem man noch beiderseits mit $\frac{-1}{2\pi}$ multipliziert,

$$\alpha'_{n2} = + \frac{l'}{\pi \text{ cm}} (1 + m_{n2}) - \frac{\delta_{n2}}{\pi \text{ cm}} \int_{l'} F_{n2}(\mathbf{M}_{n2}, s) ds - \\ - \frac{\delta_{n1}}{\pi \text{ cm}} \int_{l'} G_{n1}(\mathbf{M}_{n1}, s) ds.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\alpha'''_{n2} = - \frac{l'''}{\pi \text{ cm}} (1 + m_{n2}) - \frac{\delta_{n2}}{\pi \text{ cm}} \int_{l'''} F_{n2}(\mathbf{M}_{n2}, s) ds - \\ - \frac{\delta_{n1}}{\pi \text{ cm}} \int_{l'''} G_{n1}(\mathbf{M}_{n1}, s) ds.$$

Dabei ist, infolge von (22'),

$$\int_{l'} F_{n2}(\mathbf{M}_{n2}, s) ds = - \int_{l'} \left[\sin \left(\frac{-y}{5 \text{ mm}} + \mathbf{M}_{n2} \right) - \cos \left(\frac{-y}{5 \text{ mm}} + \mathbf{M}_{n2} \right) \right] dy, \\ \int_{l'} G_{n1}(\mathbf{M}_{n1}, s) ds = 0,$$

$$\int_{l'''} F_{n2}(\mathbf{M}_{n2}, s) ds = + \int_{l'''} \left[\sin \left(\frac{y}{5 \text{ mm}} + \mathbf{M}_{n2} \right) - \cos \left(\frac{y}{5 \text{ mm}} + \mathbf{M}_{n2} \right) \right] dy, \\ \int_{l'''} G_{n1}(\mathbf{M}_{n1}, s) ds = 0.$$

Man sieht also, dass diese Glieder sich nicht aufheben, wenn auch l' nahezu $= l'''$ wäre. Bedeutet indessen $\{ \}$ bei den Ableesungen das Mittel aus der Ableesung bei der ersten und der bei der zweiten Operation, so erhält man, da die Constante \mathbf{M}_{n2} ihren Wert inzwischen um 180° verändert hat,

$$\{ \alpha'_{n2} \} = + \frac{l'}{\pi \text{ cm}} (1 + m_{n2}), \quad \{ \alpha'''_{n2} \} = - \frac{l'''}{\pi \text{ cm}} (1 + m_{n2}),$$

oder kurz

$$1 + m_{n2} = \frac{\{ \alpha'_{n2} \}}{l'/\pi \text{ cm}} = \frac{\{ \alpha'''_{n2} \}}{l'''/\pi \text{ cm}}. \quad (50)$$

Ebenso findet man

$$1 + m_{n1} = \frac{\{|\alpha''_{n1}|\}}{l''/\pi \text{ cm}} = \frac{\{|\alpha''''_{n1}|\}}{l''''/\pi \text{ cm}}. \quad (50)$$

Ein Beispiel dieser Bestimmung zu geben, dürfte überflüssig sein.

Die Forderung, das Verfahren nach Verdrehung der Rollen zu wiederholen, wäre umgangen, wenn auf der Strecke $l^{(r)}$ die Rolle sich ebenfalls um eine nahezu ganze Anzahl Revolutionen drehen würde. Dies mit einer nahezu ganzen Anzahl Revolutionen der Laufräder zu vereinigen, ist mit einiger Annäherung möglich, wenn man die Länge $l^{(r)}$ so wählt, dass die Rolle 14, oder so, dass sie 19 Revolutionen macht.

34. Um die Constanten $\gamma_n \cos \Gamma_n$, $\gamma_n \sin \Gamma_n$ zu bestimmen, stelle ich das Instrument auf in derjenigen Drehungsphase der Laufräder, auf welche die zu erhaltende Constante Γ_n sich beziehen soll, und stelle den Fahrstift mittels Schienenablesung auf die Abscisse (siehe Fig. 12) $\frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi'$ ein, wo ξ' der (unbekannte) Einstellungsfehler ist.

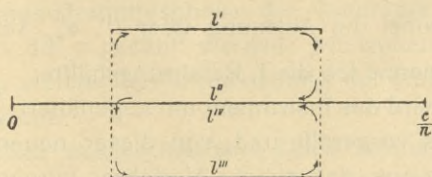


Fig. 12.

Dann rolle ich das Instrument um angenähert ein ungerades Vielfaches von $L\pi$ vor, lese in dem erreichten Punkte die Rolle M_{n2} ab, verschiebe den Fahrstift längs der zur x -Achse möglichst parallelen Bahn l' bis zur Abscisse $\frac{3}{4} \frac{c}{n} + \xi''$, und lese die Rolle M_{n2} wieder ab; die Ablesung über l' heiße α'_{n2} . Da indessen dabei infolge Nichtverwendung der Bremse kleine Rollbewegungen des Instrumentes, die von der Rolle M_{n2} registriert werden, unausbleiblich sind, verwende ich zu deren

Controle einen der übrigen Integrierapparate, den k ten, welcher zu diesem Zwecke (längere Zeit vor der Operation) aus dem Draht ausgeschaltet worden ist und angenähert in seiner Anfangslage d. h. so steht, dass seine Cosinusrolle sich beim Rollen des Instrumentes nicht dreht. Die Controle geschieht, indem ich in genügend vielen (z. B. 9) Stationen innerhalb der Strecke l' die Rolle M_{k2} ablese.

Darauf rolle ich das Instrument zurück bis angenähert zu der Grundstellung und befahre sodann mit dem Fahrstift, wieder unter Ablesungen der Sinusrolle des Control-Apparates in Zwischenpunkten, eine zur $(-x)$ -Axe möglichst parallele Strecke l'' bis zur Abscisse $\frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi'''$; die Ablesung der Rolle M_{n2} über l'' heiße α''_{n2} . Dann rolle ich das Instrument weiter rückwärts um angenähert ein ungerades Vielfaches von $L\pi$, und befahre, unter Ablesungen am Control-Apparate, eine zur x -Axe möglichst parallele Strecke l''' bis zur Abscisse $\frac{3}{4} \frac{c}{n} + \xi^{IV}$, wobei die Ablesung über l''' α'''_{n2} sei. Nach Vorwärtsrollen des Instrumentes bis angenähert zu der Grundstellung, befahre mit dem Fahrstift, unter Ablesungen am Control-Apparate, eine zur $(-x)$ -Axe möglichst parallele Strecke l^{IV} bis zur Abscisse $\frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi^V$, wobei die Ablesung über l^{IV} α^{IV}_{n2} sei. Das bisher Geschilderte nenne ich die I. Befahrungshälfte.

Sodann wird das Instrument um angenähert $\frac{1}{4}$ -Umdrehung des Laufrades vorgerollt und, von dieser neuen Stellung als Grundstellung aus, das gleiche Verfahren vorgenommen. Dies ist die II. Befahrungshälfte.

Die ganze Operation wird mit um 180° veränderter Anfangs-Drehungsphase der Rolle M_{n1} wiederholt.

Die vier Ablesungen α'_{n2} , α''_{n2} , α'''_{n2} , α^{IV}_{n2} der ersten Hälfte jeder Befahrung liefern dann die Constante $\gamma_n \cos \Gamma_n$, die vier Ablesungen α'_{n2} , α''_{n2} , α'''_{n2} , α^{IV}_{n2} der zweiten Befahrungshälfte die Constante $\gamma_n \sin \Gamma_n$; in diesen beiden Constanten ist Γ_n bezogen auf diejenige Anfangs-Drehungsphase der Laufräder, welche bei der Grundstellung der ersten Befahrungshälfte stattfand. Die Kenntnis der genauen Längen der einzelnen Befahrungsstücke ist dabei nicht nöthig.

In der That, da auf der Strecke $l^{(r)}$ der ersten oder der zweiten Befahrungshälfte $\frac{y}{L}$ nahezu constant und gleich $\frac{y^{(r)}}{L}$ ist, wo $y^{(r)}$ etwa die mittlere Ordinate dieser Strecke bezeichnet, so erhält man nach (38')

$$\begin{aligned} \int_{l^{(r)}} d\mu_{n2} &= \frac{1}{5 \text{ mm}} \sum_{l^{(r)}} (\int \sin \lambda_{n2} dy) - \\ &- \frac{n' \Gamma_n}{5 \text{ mm}} \cos \left(\frac{y^{(r)}}{L} + \Gamma_n \right) \int_{l^{(r)}} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx + \\ &+ \frac{\delta_{n2}}{5 \text{ mm}} \int_{l^{(r)}} F_{n2}(M_{n2}, s) ds + \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l^{(r)}} G_{n1}(M_{n1}, s) ds - \\ &- \frac{n' \Gamma_n}{5 \text{ mm}} \sin \left(\frac{y^{(r)}}{L} + \Gamma_n \right) \int_{l^{(r)}} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx + [\text{cycl. Gl.}]; \end{aligned}$$

die Integration $\int \sin \lambda_{n2} dy$ ist über das zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stationen enthaltene Intervall auszuführen, und die $\sum_{l^{(r)}}$ erstreckt sich auf alle Stationen-Intervalle der Strecke $l^{(r)}$. In (38'), daher auch in dieser Formel, ist Γ_n auf diejenige Anfangs-Drehungsphase der Laufräder bezogen, von welcher aus die y gezählt werden; wir wollen hier als solche die wählen, welche der Grundstellung der ersten Befahrungshälfte entspricht.

Das letzte ausgeschriebene Glied rechts in der obigen Formel ist von zweiter Ordnung. Das Integral $\int \sin \lambda_{n2} dy$ ist gleich dem Ordinatenunterschiede Δy der Endpunkte des Intervalles, multipliciert mit einem Mittelwerte von $\sin \lambda_{n2}$; dieser letztere Factor aber ist, bei nicht zu großer Ausdehnung des Intervalles, nahezu gleich $-\cos \frac{2n\pi x}{c}$, wo x die mittlere Abscisse in dem Intervalle ist; wird also dieser Factor bei den immer sehr klein bleibenden Schwankungen $\frac{\Delta y}{5 \text{ mm}}$ durch $-\cos \frac{2n\pi x}{c}$ ersetzt, so begeht man damit bloß Fehler zweiter Ordnung. Ferner ist, infolge von (22'),

$$\int_{l^{(r)}} F_{n2}(M_{n2}, s) ds = 0, \quad \int_{l^{(r)}} G_{n1}(M_{n1}, s) ds = \\ = \pm \frac{n\pi}{36} \sin\left(\frac{y}{5} + M_{n1}\right) \cdot \int_{l^{(r)}} \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \frac{2n\pi x}{c} - 1 \right) ds,$$

wo das obere Vorzeichen für den Fall der Strecke l' oder l''' , das untere für l'' oder l^{IV} gilt.

Man hat also die vier bis auf kleine Größen zweiter Ordnung genauen Formeln:

$$\int_{l'} d\mu_{n2} = - \sum_{l'} \left(\frac{\Delta y}{5 \text{ mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c} \right) + \frac{\gamma_n}{5 \text{ mm}} \cos \left(\frac{y'}{L} + \Gamma_n \right) \cdot \frac{c}{\pi} + \\ + \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l'} G_{n1}(M_{n1}, s) ds \quad + [\text{cycl. Gl.}],$$

$$\int_{l''} d\mu_{n2} = - \sum_{l''} \left(\frac{\Delta y}{5 \text{ mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c} \right) - \frac{\gamma_n}{5 \text{ mm}} \cos \left(\frac{y''}{L} + \Gamma_n \right) \cdot \frac{c}{\pi} + \\ + \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l''} G_{n1}(M_{n1}, s) ds \quad + [\text{cycl. Gl.}],$$

$$\int_{l'''} d\mu_{n2} = - \sum_{l'''} \left(\frac{\Delta y}{5 \text{ mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c} \right) + \frac{\gamma_n}{5 \text{ mm}} \cos \left(\frac{y'''}{L} + \Gamma_n \right) \cdot \frac{c}{\pi} + \\ + \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l'''} G_{n1}(M_{n1}, s) ds \quad + [\text{cycl. Gl.}],$$

$$\int_{l^{IV}} d\mu_{n2} = - \sum_{l^{IV}} \left(\frac{\Delta y}{5 \text{ mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c} \right) - \frac{\gamma_n}{5 \text{ mm}} \cos \left(\frac{y^{IV}}{L} + \Gamma_n \right) \cdot \frac{c}{\pi} + \\ + \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l^{IV}} G_{n1}(M_{n1}, s) ds \quad + [\text{cycl. Gl.}].$$

Die hier vorkommenden cyclischen Glieder sind selbstverständlich Wirkungen nur derjenigen cyclischen Fehlerquellen, welche bei einer zur y -Axe senkrechten Fahrt einen Einfluss haben. Summiert man diese Gleichungen, so heben sich diese Glieder, bis auf kleine Größen zweiter Ordnung, zwischen je zwei einander entgegengerichteten Strecken $l^{(r)}$ auf. Die mit δ_{n1} multiplizierten Glieder der obigen Gleichungen eliminieren sich aber nicht. Es ergibt sich daher, nach Multiplikation der Summe mit $\frac{-1}{2\pi}$, Einsetzung des Wertes

$$\frac{\Delta y}{\pi \text{ cm}} = \Delta \alpha_{k2},$$

wo α_{k2} die Ablesungen am Control-Apparate sind, und Berücksichtigung der angenäherten Relationen $\frac{y'}{L} = \frac{y''}{L} + \pi$, $\frac{y'''}{L} = \frac{y''}{L} - \pi$, $\frac{y^{iv}}{L} = \frac{y''}{L}$:

$$\begin{aligned} & \left[\alpha'_{n2} - \sum_{l'} \left(\Delta \alpha_{k2} \cdot \cos \frac{2n\pi x}{c} \right) \right] + \\ & + \left[\alpha''_{n2} - \sum_{l''} \left(\Delta \alpha_{k2} \cdot \cos \frac{2n\pi x}{c} \right) \right] + \\ & + \left[\alpha'''_{n2} - \sum_{l'''} \left(\Delta \alpha_{k2} \cdot \cos \frac{2n\pi x}{c} \right) \right] + \\ & + \left[\alpha^{iv}_{n2} - \sum_{l^{iv}} \left(\Delta \alpha_{k2} \cdot \cos \frac{2n\pi x}{c} \right) \right] = \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}} \gamma_n \cos \Gamma_n \cos \frac{y''}{L} - \frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}} \gamma_n \sin \Gamma_n \sin \frac{y''}{L} - \\ & - \frac{\delta_{n1}}{\pi \text{ cm}} \left[\int_{l'} G_{n1}(M_{n1}, s) ds + \int_{l''} G_{n1}(M_{n1}, s) ds + \right. \\ & \left. + \int_{l'''} G_{n1}(M_{n1}, s) ds + \int_{l^{iv}} G_{n1}(M_{n1}, s) ds \right]. \end{aligned}$$

Es ist aber, gemäß der Festsetzung der x -Axe, auf der Strecke l'' der ersten Befahrungshälfte $\frac{y}{L} = 0$, auf der Strecke l''' der zweiten Befahrungshälfte aber $\frac{y}{L} = \frac{\pi}{2}$; Werte, deren Ungenauigkeiten klein von erster Ordnung sind.

Man sieht also, dass aus der ersten Befahrungshälfte die Constante $\gamma_n \cos \Gamma_n$, aus der zweiten die Constante $-\gamma_n \sin \Gamma_n$ erhalten wird — beides indessen noch mit dem Einflusse der Rollenexcentricität behaftet — wenn man den in (51) linksstehenden Ausdruck durch $\frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}}$ dividiert.

Dadurch, dass die ganze Befahrung nach Umdrehung der Rolle M_{n1} wiederholt und für jede Constante das Mittel aus beiden Bestimmungen genommen wird, wird das letzte Glied ihres aus (51) folgenden Ausdruckes eliminiert.

Bei Betrachtung des unten mitgetheilten Beispielles könnte vielleicht der Zweifel aufkommen, ob bei diesen subtilen Bestimmungen, wo es sich, wie man sehen wird, um sehr kleine Größen handelt und noch eine ungefähre Kenntniss der vierten Decimale der Rollenrevolution vorausgesetzt wird, das gefundene Resultat nicht, infolge der unvermeidlichen Ablesungs- und anderen zufälligen Fehler, ein illusorisches ist. Es soll nun allerdings nicht geleugnet werden, dass diese die peinlichste Aufmerksamkeit erfordernden Beobachtungen jedenfalls wohl schon nahe an der Grenze der erreichbaren reellen Genauigkeit liegen. Indessen zeigten die Resultate der von mir wiederholt ausgeführten Bestimmungen eine nicht unbefriedigende Übereinstimmung, und nach derselben scheint es ziemlich sicher, dass sie doch in der Hauptsache der Ausdruck einer thatsächlichen Eigenschaft des Instrumentes sind. Wenn die Discordanzen der einzelnen Werte vielleicht noch nicht den erwünschten Grad der Kleinheit hatten gegenüber den Werten selbst, so ist auch zu bedenken, dass die in Rede stehenden Constanten bei meinem Exemplar des Analysators eben sehr klein sind; hat man aber ein Exemplar, bei welchem dieser Instrumentalfehler etwas stärker ist, so werden jene zufälligen Bestimmungsfehler deshalb doch nicht größer sein, und dann wird also sicher die Bestimmung und Berücksichtigung dieser Constanten volle Berechtigung haben.

Das Folgende ist eine etwas abgekürzte Wiedergabe meines

Beobachtungs-Protokolles von 1899 Juni 9.¹

Bestimmung der Constanten $\gamma_2 \cos \Gamma_2$, $\gamma_2 \sin \Gamma_2$; ausgeschaltet ist der dritte Integrierapparat.

Der Control-Apparat wird in seine Anfangslage gedreht und diese geprüft.

8^h 20^m, Temperatur 13·4° R., Spannung d' .

Anfangsstellung: Laufradablesung 250°.

¹ Es möge bemerkt werden, dass an diesem Tage die unwillkürlichen Rollbewegungen etwas größer waren, als gewöhnlich. Die Correction einer Ablesung $\alpha_{n2}^{(r)}$ war sonst nur selten größer als 0·0010.

Der Wagenindex wird an der Schiene auf 45·0 eingestellt und das Instrument bis zur Laufradablesung 430° vorgerollt.

		Schieneinstellung									
		(45·0)	55	65	75	85	95	105	115	125	135·0
Laufrad 430:	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{32} = 37 \cdot 871_{+} \\ \alpha_{22} = 2 \cdot 862_{[+]} \end{array} \right.$		2	2+	3+	4[-]	4[-]	4-	3+	3+	3+
											·872[-]

Zurückgerollt zur Anfangsstellung;

		(135·0)	125	115	105	95	85	75	65	55	45·0
Laufrad 250:	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{32} = 35 \cdot 507_{-} \\ \alpha_{22} = 2 \cdot 866_{(-)} \end{array} \right.$		7-	7-	6+	6(+)	6(+)	6+	6(+)	6+	7[-]
											·857.

8^h50^m, Temp. 13·6° R.

Weiter rückwärts gerollt;

		(45·0)	55	65	75	85	95	105	115	125	135·0
Laufrad 70:	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{32} = 33 \cdot 153_{(-)} \\ \alpha_{22} = 2 \cdot 863_{-} \end{array} \right.$		4	5[-]	5	5[-]	5[-]	5	5(+)	5+	6(-)
											·872_{-}

Zurückgerollt zur Anfangsstellung;

		(135·0)	125	115	105	95	85	75	65	55	45·0
Laufrad 250:	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{32} = 35 \cdot 511 \\ \alpha_{22} = 2 \cdot 880_{(-)} \end{array} \right.$		1(+)	1+	1(+)	1(+)	1+	2-	2[-]	2	·873[-]

9^h15^m, Temp. 13·6° R.

Das Instrument wird vorgerollt über Laufrad 340 (Grundstellung der II. Befahrungshälfte) bis Laufrad 520.

	(45·0)	55	65	75	85	95	105	115	125	135·0
Laufrad 520:	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{32} = 39 \cdot 061_+ \\ \alpha_{22} = 2 \cdot 870 \end{array} \right.$									
	0(-)	9(+)	9	9(-)	8(+)	8	8(+)	8(+)	8(+)	8
										·878(+)

Zurückgerollt zur Grundstellung;

	(135·0)	125	115	105	95	85	75	65	55	45·0
Laufrad 340:	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{32} = 36 \cdot 690_+ \\ \alpha_{22} = 2 \cdot 872 \end{array} \right.$									
	1(-)	1	1	1(+)	2(-)	2(+)	2(+)	2(+)	3-	3
										·859(+)

9^h45^m, Temp. 13·6° R.

Weiter rückwärts gerollt;

	(45·0)	55	65	75	85	95	105	115	125	135·0
Laufrad 160:	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{32} = 34 \cdot 338_+ \\ \alpha_{22} = 2 \cdot 865_+ \end{array} \right.$									
	9(-)	9	9	9+	0(-)	0(-)	0(-)	0(-)	0	0
										·872--

Zurückgerollt zur Grundstellung;

	(135·0)	125	115	105	95	85	75	65	55	45·0
Laufrad 340:	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{32} = 36 \cdot 689 \\ \alpha_{22} = 2 \cdot 877_{(+)} \end{array} \right.$									
	9(-)	9(-)	9(+)	0+	1(-)	1(-)	1(-)	1(-)	1	1
										·866(-)

10^h20^m, Temp. 13·7° R., Spannung *d'*.

Die Operation wurde dann mit um 0·5 veränderter Anfangsablesung der Rolle M_{21} wiederholt.

Berechnung. Aus der ersten Befahrungshälfte hat man:

$$\alpha'_{22} = +0.009_6,$$

Schienenintervalle	$\Delta\alpha_{32}$	$-\cos \frac{2n\pi x}{c}$	$-\Delta\alpha_{32} \cos \frac{2n\pi x}{c}$
45—55, 125—135	+0.000 ₅ , 0	+0.174	+0.000 09
55—65, 115—125	+0.000 ₅ , 0	+0.500	+0.000 25
65—75, 105—115	+0.001 ₀ , 0	+0.766	+0.000 77
75—85, 95—105	+0.000 ₃ , -0.000 ₃	+0.940	0
85—95	0	+1.000	0

Correction zum $\alpha'_{22} \dots +0.001 \ 1_{\underline{1}}$

$$\alpha'_{22} \text{ corrigiert} = +0.0107;$$

$$\alpha''_{22} = -0.008_7,$$

Schienenintervalle	$\Delta\alpha_{32}$	$-\Delta\alpha_{32} \cos \frac{2n\pi x}{c}$
135—125, 55—45	0, +0.000 ₃	+0.000 05
125—115, 65—55	0, +0.000 ₂	+0.000 10
115—105, 75—65	0, -0.000 ₂	-0.000 15
105—95, 85—75	-0.000 ₂ , +0.000 ₂	0
95—85	0	0

Correction... 0.000 00

$$\alpha''_{22} \text{ corrigiert} = -0.0087;$$

ebenso findet man

Correction

$$\alpha'''_{22} = +0.009_0, \quad +0.001 \ 1_{\underline{4}}, \quad \alpha'''_{22} \text{ corrigiert} = +0.0101;$$

$$\alpha^{IV}_{22} = -0.006_9, \quad +0.000 \ 5_{\underline{3}}, \quad \alpha^{IV}_{22} \text{ corrigiert} = -0.0064.$$

Es ergibt sich daher

$$\gamma_2 \cos \Gamma_2 = \frac{+0.0057}{\frac{4}{\pi} \frac{36}{\pi}} = +0.000 \ 39.$$

Auf dieselbe Weise liefert die zweite Befahrungshälfte

Correction

$$\alpha'_{22} = +0.008_3, \quad -0.001 \ 4_{\underline{1}}, \quad \alpha'_{22} \text{ corr.} = +0.0069$$

$$\alpha''_{22} = -0.012_7, \quad +0.001 \ 5_{\underline{9}}, \quad \alpha''_{22} \text{ corr.} = -0.0111$$

$$\alpha'''_{22} = +0.006_0, \quad +0.001 \ 0_{\underline{0}}, \quad \alpha'''_{22} \text{ corr.} = +0.0070$$

$$\alpha^{IV}_{22} = -0.011_5, \quad +0.001 \ 9_{\underline{1}}, \quad \alpha^{IV}_{22} \text{ corr.} = -0.0096$$

und daraus

$$-\gamma_2 \sin \Gamma_2 = \frac{-0.0068}{\frac{4}{\pi} \frac{36}{\pi}} = -0.00047.$$

Die Wiederholung mit umgedrehter Rolle ergab $\gamma_2 \cos \Gamma_2 = +0.00033$, $-\gamma_2 \sin \Gamma_2 = -0.00049$. Es ist somit, frei vom Einflusse der Rollenexcentricität,

$$\gamma_2 \cos \Gamma_2 = +0.00036, \quad \gamma_2 \sin \Gamma_2 = +0.00048$$

(oder: $\gamma_2 = 0.0006$, $\Gamma_2 = +53^\circ$)

für den Fall: Laufradablesung in der Anfangsstellung = 250° .

35. Um die beiden Constanten $\kappa_n \sin K_n$, $\kappa_n \cos K_n$ zu bestimmen, stelle ich den Fahrstift successive auf die beiden Abscissen

$$x = \frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi', \quad x = \frac{3}{4} \frac{c}{n} + \xi''',$$

wo ξ' , ξ''' Einstellungsfehler bedeuten, ein. In der ersteren Lage lasse ich durch Rollen des Instrumentes den Fahrstift eine

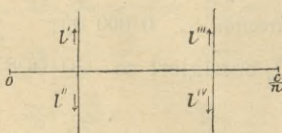


Fig. 13.

Strecke l' in der Richtung der y -Axe und darauf, von demselben Punkte aus, eine Strecke l'' in der Richtung der $(-y)$ -Axe durchlaufen. In der zweiten Lage gehe ich wieder von einem Punkte annähernd derselben

Geraden $y = \text{Const.}$ aus und lasse den Fahrstift von hier aus eine Strecke l''' in der Richtung der y -Axe und eine Strecke l'''' in der Richtung der $(-y)$ -Axe durchlaufen. Die vier Strecken sind einander annähernd gleich und beträgt jede annähernd ein ungerades Vielfaches von $L\pi$.

Dann rolle ich das Instrument vorwärts um annähernd $\frac{1}{4}$ -Umdrehung der Laufräder, und befahre von dieser neuen Grundstellung aus wieder vier ebensolche Strecken.

Die vier Ablesungen α'_{n1} , α''_{n1} , α'''_{n1} , α''''_{n1} über die vier Strecken der ersten Hälfte der Befahrung liefern die Constante $\kappa_n \sin K_n$, die vier Ablesungen α'_{n1} , α''_{n1} , α'''_{n1} , α''''_{n1} der zweiten Befahrungshälfte liefern die Constante $\kappa_n \cos K_n$; K_n in beiden bezogen auf

diejenige Anfangs-Drehungsphase der Laufräder, welche bei der Grundstellung der ersten Befahrungshälfte stattfand.

In der That ist, sowohl für die vier Strecken der ersten als für die vier Strecken der zweiten Befahrungshälfte, $\sin \lambda_{n1}$ auf den Strecken l' und l'' von $+1$, auf l''' und l^{IV} von -1 nur um Kleines zweiter Ordnung verschieden, und ist ferner

$$\int_{l^{(r)}} F_{n1}(M_{n1}, s) ds = \pm \int_{l^{(r)}} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds,$$

$$\int_{l^{(r)}} G_{n2}(M_{n2}, s) ds = 0,$$

wo das obere Vorzeichen für den Fall der Strecke l' oder l^{IV} , das untere für l'' oder l''' gilt. Die Formel (38') gibt infolge dieser Umstände, für die vier Strecken einer Befahrungshälfte,

$$\int_{l'} d\mu_{n1} = \frac{l'}{5 \text{ mm}} + \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l'} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds +$$

$$+ \frac{\alpha_n L}{5 \text{ mm}} \left[\sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \right]_{l'} + \frac{m_{n1} l'}{5 \text{ mm}} + \frac{[z_n]_{l'}}{M_{n1}},$$

$$\int_{l''} d\mu_{n1} = - \frac{l''}{5 \text{ mm}} - \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l''} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds +$$

$$+ \frac{\alpha_n L}{5 \text{ mm}} \left[\sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \right]_{l''} - \frac{m_{n1} l''}{5 \text{ mm}} + \frac{[z_n]_{l''}}{M_{n1}},$$

$$\int_{l'''} d\mu_{n1} = - \frac{l'''}{5 \text{ mm}} - \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l'''} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds -$$

$$- \frac{\alpha_n L}{5 \text{ mm}} \left[\sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \right]_{l'''} - \frac{m_{n1} l'''}{5 \text{ mm}} + \frac{[z_n]_{l'''}}{M_{n1}},$$

$$\int_{l^{IV}} d\mu_{n1} = \frac{l^{IV}}{5 \text{ mm}} + \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l^{IV}} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds -$$

$$- \frac{\alpha_n L}{5 \text{ mm}} \left[\sin \left(\frac{y}{L} + K_n \right) \right]_{l^{IV}} + \frac{m_{n1} l^{IV}}{5 \text{ mm}} + \frac{[z_n]_{l^{IV}}}{M_{n1}}.$$

Die fünften Glieder der rechten Seiten dieser Gleichungen sind von zweiter Ordnung. Zieht man von der Summe der beiden

ersten Gleichungen die der beiden letzten ab, so heben sich außerdem, wegen der angenäherten Gleichheit der vier Strecken, die vierten Glieder bis auf Größen zweiter Ordnung auf; in Bezug auf die zweiten Glieder ist zu bemerken, dass bis auf kleine Größen erster Ordnung richtig

$$\begin{aligned} \int_{l'''} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds &= \\ &= \int_{l''} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds, \\ \int_{l^{IV}} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds &= \\ &= \int_{l'} \{ \sin (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) - \cos (\bar{\mu}_{n1} + M_{n1}) \} ds. \end{aligned}$$

Man erhält also durch die genannte Combination der vier Gleichungen, bis auf Glieder zweiter Ordnung genau,

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{n1} + \alpha''_{n1} - \alpha'''_{n1} - \alpha^{IV}_{n1} + \frac{l' - l'' + l''' - l^{IV}}{\pi \text{ cm}} &= \\ = -4 \frac{L}{\pi \text{ cm}} \kappa_n \cos K_n \left[\sin \frac{y}{L} \right]_{l'} - 4 \frac{L}{\pi \text{ cm}} \kappa_n \sin K_n \left[\cos \frac{y}{L} \right]_{l'} \end{aligned} \right\} (52)$$

Es ist aber, gemäß der Festsetzung der x -Axe, für die Strecke l' der ersten Befahrungshälfte $\left[\sin \frac{y}{L} \right]_{l'} = 0$ und $\left[\cos \frac{y}{L} \right]_{l'} = -2$, dagegen für die Strecke l' der zweiten Befahrungshälfte $\left[\sin \frac{y}{L} \right]_{l'} = -2$ und $\left[\cos \frac{y}{L} \right]_{l'} = 0$; — Werte, deren Ungenauigkeiten klein von erster (beziehungsweise zweiter) Ordnung sind.

Man sieht also, dass aus den vier Ablesungen und vier Strecken der ersten Befahrungshälfte die Constante $\kappa_n \sin K_n$, aus den vier Ablesungen und vier Strecken der zweiten Befahrungshälfte die Constante $\kappa_n \cos K_n$ erhalten wird, wenn man die in (52) links stehende Summe durch $\frac{8L}{\pi \text{ cm}}$ dividiert.

Das Folgende ist eine etwas abgekürzte Wiedergabe meines

Beobachtungs-Protokolles von 1899 Mai 28.

Bestimmung der Constanten $\alpha_3 \sin K_3$, $\alpha_3 \cos K_3$,
 9^h 55^m a. m., Temperatur 14·6° R., Spannung $c' \#$.
 10^h 15^m, Temp. 15·3° R.

Schiene 30·0:

		α_{31}
	Laufradablesung 250°	12·385 _[-]
Vorwärts, bis zu	» 430	10·022
Zurück zu	» 250	12·385 _[-]
Rückwärts, bis zu	» 70	14·743 ₊
Zurück zu	» 250	12·385

10^h 30^m, Temp. 15·4° R.

Schiene 90·0:

		α_{31}
Laufrad	250	12·391
»	430	14·754 ₊
»	250	12·391 ₍₊₎
»	70	10·035
»	250	12·392

10^h 45^m, Temp. 15·5° R.

Instrument vorgerollt um $\frac{1}{4}$ -Umdrehung des Laufrades.
 Fahrstift zurück bis Schienenablesung 30·0.

Schiene 30·0:

		α_{31}
Laufrad	340	11·196 _[+]
»	520	8·823 ₍₊₎
»	340	11·197
»	160	13·544 ₍₋₎
»	340	11·196 ₊

11^h, Temp. 15·6° R.

Schiene 90·0:

		α_{31}
Laufrad	340	11·205 ₋
»	520	13·580 ₍₊₎
»	340	11·205 ₊
»	160	8·863
»	340	11·205 ₍₋₎

11^h 15^m, Temp. 15·7° R.

Instrument wird aufgestellt längs der Linie der bei »Schiene 30·0« gemachten Marken. Es finden sich folgende Schienenablesungen:

an der bei	{	»Laufrad 520«	gemachten Marke	:	172·12
		»Laufrad 430«		:	209·65
		»Laufrad 340«		:	246·84 ₊
		»Laufrad 250«		:	283·98
		»Laufrad 160«		:	320·54 ₊
		»Laufrad 70«		:	358·17

11^h 50^m, Temp. 15·9° R.

Instrument vorgerollt bis zu der Linie der bei »Schiene 90·0« gemachten Marken. Es finden sich die Schienenablesungen:

an der bei	{	»Laufrad 520«	gemachten Marke	:	172·38
		»Laufrad 430«		:	209·85
		»Laufrad 340«		:	247·03
		»Laufrad 250«		:	284·13 ₊
		»Laufrad 160«		:	320·68
		»Laufrad 70«		:	358·33

12^h 20^m, Temperatur 15·8° R., Spannung $c'_{\#}$.

Berechnung. Die erste Hälfte der Befahrung gibt folgende Ablesungen (Mittelwerte):

$$\begin{array}{l}
 \alpha'_{31} = -2\cdot362_8, \\
 \alpha''_{31} = +2\cdot358_6, \\
 \alpha'''_{31} = +2\cdot363_4, \\
 \alpha^{iv}_{31} = -2\cdot356_6,
 \end{array}
 \left| \right.
 \begin{array}{l}
 \alpha'_{31} + \alpha''_{31} - \alpha'''_{31} - \alpha^{iv}_{31} = -0\cdot011_0
 \end{array}$$

wobei die Strecken waren

$$\begin{array}{l}
 l' = 74\cdot33 \text{ mm}, \\
 l'' = 74\cdot19 \text{ mm}, \\
 l''' = 74\cdot28_5 \text{ mm}, \\
 l^{iv} = 74\cdot19_5 \text{ mm}.
 \end{array}
 \left| \right.
 \begin{array}{l}
 l' - l'' + l''' - l^{iv} = +0\cdot23_0 \text{ mm}; \\
 \frac{1}{\pi \text{ cm}} (l' - l'' + l''' - l^{iv}) = +0\cdot0073.
 \end{array}$$

Die zweite Befahrungshälfte gibt

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{31} &= -2 \cdot 373_3, \\ \alpha''_{31} &= +2 \cdot 347_1, \\ \alpha'''_{31} &= +2 \cdot 375_3, \\ \alpha^{IV}_{31} &= -2 \cdot 342_1, \end{aligned} \right| \quad \alpha'_{31} + \alpha''_{31} - \alpha'''_{31} - \alpha^{IV}_{31} = -0 \cdot 059_4,$$

über die Strecken

$$\left. \begin{aligned} l' &= 74 \cdot 72_5 \text{ mm}, \\ l'' &= 73 \cdot 70 \text{ mm}, \\ l''' &= 74 \cdot 65 \text{ mm}, \\ l^{IV} &= 73 \cdot 65 \text{ mm}. \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} l' - l'' + l''' - l^{IV} &= +2 \cdot 02_5 \text{ mm}; \\ \frac{1}{\pi \text{ cm}} (l' - l'' + l''' - l^{IV}) &= +0 \cdot 0645. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$z_3 \sin K_3 = \frac{-0 \cdot 0037}{8L/\pi \text{ cm}} = -0 \cdot 00062,$$

$$z_3 \cos K_3 = \frac{+0 \cdot 0051}{8L/\pi \text{ cm}} = +0 \cdot 00085,$$

(oder: $z_3 = 0 \cdot 0011$, $K_3 = -37^\circ$).

36. Zur Bestimmung der Constanten $\dot{\gamma}_n \sin K_n$, $\dot{\gamma}_n \cos K_n$ dient dasselbe Verfahren, wie es in Art. 34 beschrieben wurde, nur wird anstatt der Rolle M_{n2} die Rolle M_{n1} abgelesen und ist die Wiederholung mit umgedrehter Rolle nicht erforderlich.

Die vier Ablesungen α'_{n1} , α''_{n1} , α'''_{n1} , α^{IV}_{n1} der ersten Hälfte der Befahrung liefern dann die Constante $\dot{\gamma}_n \sin K_n$, die in der zweiten Befahrungshälfte gemachten Ablesungen α'_{n1} , α''_{n1} , α'''_{n1} , α^{IV}_{n1} die Constante $\dot{\gamma}_n \cos K_n$; K_n in beiden bezogen auf diejenige Anfangs-Drehungsphase der Laufräder, welche bei der Grundstellung der ersten Befahrungshälfte stattfand. Die Kenntnis der genauen Längen der einzelnen Befahrungsstücke ist dabei nicht erforderlich.

In der That findet man durch Anwendung der Formel (38') auf die Strecke $l^{(r)}$ der ersten oder der zweiten Befahrungshälfte, analog wie in 34.,

$$\int_{l^{(r)}} d\mu_{n1} = \frac{1}{5 \text{ mm}} \sum_{l^{(r)}} (\int \sin \lambda_{n1} dy) +$$

$$+ \frac{n \dot{\gamma}_n}{5 \text{ mm}} \cos \left(\frac{y^{(r)}}{L} + \Gamma_n \right) \int_{l^{(r)}} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx +$$

$$+ \frac{\delta_{n1}}{5 \text{ mm}} \int_{l^{(r)}} F_{n1}(M_{n1}, s) ds + \frac{\delta_{n2}}{5 \text{ mm}} \int_{l^{(r)}} G_{n2}(M_{n2}, s) ds -$$

$$- \frac{n \dot{\gamma}_n}{5 \text{ mm}} \sin \left(\frac{y^{(r)}}{L} + K_n \right) \int_{l^{(r)}} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx + [\text{cycl. Gl.}];$$

das zweite Glied rechts ist von zweiter Ordnung; ferner ist hier

$$\int_{l^{(r)}} F_{n1}(M_{n1}, s) ds = 0,$$

$$\int_{l^{(r)}} G_{n2}(M_{n2}, s) ds =$$

$$= \pm \frac{n\pi}{36} \sin(\bar{\mu}_{n2} + M_{n2}) \int_{l^{(r)}} \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \cos^2 \frac{2n\pi x}{c} - 1 \right) ds,$$

wo das obere Vorzeichen für den Fall der Strecke l' oder l''' , das untere für l'' oder l^{iv} gilt, und $\bar{\mu}_{n2}$ offenbar innerhalb der ganzen Befahrungshälfte constant bleibt. Wenn man die vorhergehende Formel für $\int_{l^{(r)}} d\mu_{n1}$ auf die vier Strecken l', l'', l''', l^{iv} anwendet und die vier Gleichungen summiert, so heben sich die der Rollenexcentricität entsprechenden Glieder derselben bis auf kleine Größen zweiter Ordnung auf; ebenso heben sich die cyclischen Glieder auf zwischen je zwei einander entgegengerichteten Strecken. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} & \left[\alpha'_{n1} + \sum_{l'} \left(\Delta \alpha_{k2} \cdot \sin \frac{2n\pi x}{c} \right) \right] + \\ & + \left[\alpha''_{n1} + \sum_{l''} \left(\Delta \alpha_{k2} \cdot \sin \frac{2n\pi x}{c} \right) \right] + \\ & + \left[\alpha'''_{n1} + \sum_{l'''} \left(\Delta \alpha_{k2} \cdot \sin \frac{2n\pi x}{c} \right) \right] + \\ & + \left[\alpha^{iv}_{n1} + \sum_{l^{iv}} \left(\Delta \alpha_{k2} \cdot \sin \frac{2n\pi x}{c} \right) \right] = \end{aligned} \right\} (53)$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}} \dot{\gamma}_n \cos K_n \sin \frac{y''}{L} + \frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}} \dot{\gamma}_n \sin K_n \cos \frac{y''}{L}.$$

Man sieht, dass aus der ersten Befahrungshälfte $\dot{\gamma}_n \sin K_n$, aus der zweiten $\dot{\gamma}_n \cos K_n$ dadurch erhalten wird, dass man den Wert des in (53) links stehenden Ausdruckes durch

$$\frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}}$$

dividiert.

Selbstverständlich kann das Verfahren auf eine Befahrungshälfte beschränkt werden, wenn K_n bereits bekannt und bloß $\dot{\gamma}_n$ gesucht wird. Man bestimmt dann z. B. nur die Constante $\dot{\gamma}_n \cos K_n$, während man dabei das Instrument in derjenigen Anfangs-Drehungsphase der Laufräder aufgestellt hat, auf welche bezogen $K_n = 0^\circ$ ist.

37. Zur Bestimmung der Constanten $\varepsilon_n \sin E_n$, $\varepsilon_n \cos E_n$ sind für verschiedene Integrierapparate verschiedene Methoden zweckmäßig.

a) Ist der n^{te} Integrierapparat einer, welchen man unmittelbar neben (d. h. vor oder hinter) den Integrierapparat von zweimal so hoher Nummer einschalten kann, dann ist es möglich, seine Excentricitätsconstanten nach einer Methode zu bestimmen, welche weder präzise Schieneneinstellungen, noch die Kenntnis anderer Constanten des Instrumentes voraussetzt. Jener neben dem zu untersuchenden eingeschaltete Integrierapparat dient dann nämlich zur Controle der Drehungen, welche der zu untersuchende Integrierapparat zwischen den verschiedenen Schieneneinstellungen hätte bei Abwesenheit seines Excentricitätsfehlers erleiden sollen.

Ist allgemein n die Nummer des zu untersuchenden, k die des Control-Apparates, so hat man nach den Relationen (34) (z. B. der zweiten):

$$\left. \begin{aligned} n\varepsilon_n \left[\sin \left(\frac{-2n\pi x}{c} - \Pi_n^k \right) + \sin \Pi_n^k \right] &= \\ &= -(\lambda_n - \Lambda_n) + \frac{n}{k} (\lambda_k - \Lambda_k) - \left(\frac{h_k}{k} - \frac{h_n}{n} \right) \frac{nx}{c} + \\ &+ n\varepsilon_k \left[\sin \left(\frac{-2k\pi x}{c} - \Pi_k^n \right) + \sin \Pi_k^n \right]. \end{aligned} \right\} (34^{\text{bis}})$$

Für $k = 2n$ hat man

$$\left. \begin{aligned}
 n\varepsilon_n \left[\sin \left(\frac{-2n\pi x}{c} - \Pi_n^{2n} \right) + \sin \Pi_n^{2n} \right] = \\
 = -(\lambda_n - \Lambda_n) + \frac{1}{2} (\lambda_{2n} - \Lambda_{2n}) - \left(\frac{h_{2n}}{2n} - \frac{h_n}{n} \right) \frac{nx}{c} + \\
 + n\varepsilon_{2n} \left[\sin \left(\frac{-4n\pi x}{c} - \Pi_{2n}^n \right) + \sin \Pi_{2n}^n \right].
 \end{aligned} \right\} (54)$$

Man nehme nun an, man hätte den Fahrstift successive in die Lagen $x = x' = 0 + \xi'$, $x = x''' = \frac{1}{2} \frac{c}{n} + \xi'''$, $x = x^v = \frac{c}{n} + \xi^v$ gebracht, wobei ξ' , ξ''' , ξ^v unbekannte Einstellungsfehler sind und die Einstellungen selbst immer mit nach rechts gerichteter Bewegung bewirkt wurden, — und es seien die Drehungen, welche die beiden Integrierapparate zwischen je zwei Lagen des Fahrstiftes thatsächlich vollzogen haben, auf irgendeine Weise (worauf ich sofort zurückkomme) genau festgestellt worden. Wendet man die Formel (54) auf diese drei Lagen an, so hat man

$$\left\{ \begin{aligned}
 0 &= -(\lambda_n' - \Lambda_n) + \frac{1}{2} (\lambda_{2n}' - \Lambda_{2n}) \\
 2n\varepsilon_n \sin \Pi_n^{2n} &= -(\lambda_n''' - \Lambda_n) + \frac{1}{2} (\lambda_{2n}''' - \Lambda_{2n}) - \frac{1}{2} \left(\frac{h_{2n}}{2n} - \frac{h_n}{n} \right) \\
 0 &= -(\lambda_n^v - \Lambda_n) + \frac{1}{2} (\lambda_{2n}^v - \Lambda_{2n}) - \left(\frac{h_{2n}}{2n} - \frac{h_n}{n} \right),
 \end{aligned} \right.$$

oder, wenn man von der mittleren Gleichung einmal die erste, das andere Mal die letzte abzieht, und beide Differenzen summiert,

$$\begin{aligned}
 4n\varepsilon_n \sin \Pi_n^{2n} &= \\
 &= - \left[(\Delta\lambda_n)''' - \frac{1}{2} (\Delta\lambda_{2n})''' \right] + \left[(\Delta\lambda_n)^v - \frac{1}{2} (\Delta\lambda_{2n})^v \right]; \quad (55)
 \end{aligned}$$

die Abkürzung $(\Delta\lambda_n)'''$ steht anstatt $\lambda_{n1}''' - \lambda'_{n1} \equiv \lambda''_{n2} - \lambda'_{n2}$, stellt also die Drehung des n ten Integrierapparates zwischen der Einstellung x' und x''' dar, und Analoges gilt von den übrigen Symbolen rechts. Ähnlich hat man, für die beiden Abscissenwerte $x = x'' = \frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi''$, $x = x^{iv} = \frac{3}{4} \frac{c}{n} + \xi^{iv}$, die Gleichung

$$2n \varepsilon_n \cos \Pi_n^{2n} = - \left[(\Delta \lambda_n)_{II}^{IV} - \frac{1}{2} (\Delta \lambda_{2n})_{II}^{IV} \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{h_{2n}}{2n} - \frac{h_n}{n} \right)$$

oder

$$2n \varepsilon_n \cos \Pi_n^{2n} = - \left[(\Delta \lambda_n)_{II}^{IV} - \frac{1}{2} (\Delta \lambda_{2n})_{II}^{IV} \right] + \frac{1}{2} \left[(\Delta \lambda_n)_I^V - \frac{1}{2} (\Delta \lambda_{2n})_I^V \right]. \quad (55')$$

Die Formeln (55) und (55') lassen, wenn die Veränderungen der geographischen Längen bestimmt sind, die Constanten ε_n , Π_n^{2n} berechnen; E_n erhält man, indem man zu der Constante Π_n^{2n} die mit genügender Genauigkeit bekannte Differenz $\Phi_n' - \Phi_n^{2n}$ addiert, wo Φ_n' , wie in 18., die Anomalie desjenigen Punktes bezeichnet, welcher unter normalen Umständen der Ankunftsplatz des Drahtes an der Scheibe H_n ist, Φ_n^{2n} aber die Anomalie des Punktes, in welchem bei der Operation das zwischen den Scheiben H_n , H_{2n} liegende Drahtstück die unterste Scheibe berührte.

Die Bestimmung dieser Veränderungen der geographischen Längen ist im vorliegenden Falle dadurch vereinfacht, dass die Lagen des Integrierapparates, welche die festzustellende Drehung desselben begrenzen, solche sind, in welchen eine — und zwar in beiden dieselbe — Messrolle nahezu auf der X -Axe liegt. Wenn nämlich in einer Lage, in welcher die Messrolle M_{vj} eines Integrierapparates nahezu auf der X -Axe steht, eine zur y -Axe parallele, von der Anfangsstellung des Instrumentes ausgehende Strecke l befahren wird, deren Länge annähernd gleich einem Vielfachen von $2L\pi$ ist, dann ist, nach den Formeln (38') und (22'), bis auf Glieder zweiter Ordnung genau,

$$\sin \lambda_{vj} = - \frac{(\alpha_{vj})l}{l/\pi \text{ cm}} + \frac{\delta_{vj}}{l} \frac{M_{vj}}{K_v} \sin \bar{\lambda}_{vj} \int_l \sin \left(\frac{y \sin \bar{\lambda}_{vj}}{5 \text{ mm}} + M_{vj} \right) dy;$$

daher, je nachdem die Rolle M_{vj} nahezu auf der (+ X)-Axe oder der (− X)-Axe steht,

$$\text{entweder: } \lambda_{vj} = \frac{-(\alpha_{vj})l}{l/\pi \text{ cm}} - \frac{\delta_{vj}}{l/5 \text{ mm}} \frac{M_{vj}}{K_v} \left[\cos (\bar{\mu}_{vj} + M_{vj}) \right]_l,$$

$$\text{oder: } \pi - \lambda_{vj} = \frac{-(\alpha_{vj})l}{l/\pi \text{ cm}} - \frac{\delta_{vj}}{l/5 \text{ mm}} \frac{M_{vj}}{K_v} \left[\cos (\bar{\mu}_{vj} + M_{vj}) \right]_l,$$

— beide Werte richtig bis auf kleine Größen zweiter Ordnung (und Vielfache von 2π). Auf diese Weise kann λ_{vj} unabhängig von der Kenntnis von Instrumentalconstanten gemessen werden, wenn die Länge l annähernd genau bekannt ist. Der Coefficient von δ_{vj} kann durch die Wahl einer genügend großen, oder einer solchen Länge l , dass auf derselben die Rolle M_{vj} nicht viel mehr und nicht viel weniger als eine ganze Anzahl Revolutionen vollzieht, so klein gemacht werden, dass das Glied

$$\frac{\delta_{vj}}{l/5 \text{ mm}} \frac{M_{vj}}{K_v} [\cos (\bar{\mu}_{vj} + M_{vj})]_l$$

praktisch von zweiter Ordnung ist.¹

Dieses vortheilhafteste Verfahren zur Bestimmung der Excentricitätsconstanten ε_n , E_n ist bei meinem Instrument leider nur auf einen Integrierapparat, nämlich den ersten, anwendbar; denn für keinen anderen lässt sich die unmittelbare Anschaltung an den 2^{ten} Integrierapparat durchführen. —

Das Folgende ist mein

Beobachtungsprotokoll von 1899 August 2.

9^h 35^m a. m., Temperatur 12·9° R., Spannung $c' \#$.
10^h 5^m, Temp. 13·6° R.

Schiene 0:

	α_{21}	α_{11}
Laufrad 70 2·227 ₋	14·367 _[-]
» 70+2×360 ·209 _[-]	·380
» 70 ·231	·366 ₍₊₎
» 70+2×360 ·211 ₍₋₎	·378 ₍₊₎
» 70 ·232 ₍₋₎	·365 ₊
» 70+2×360 ·212	·378 ₋
» 70 ·232	·365 ₍₊₎

10^h 40^m, Temp. 13·7° R.

¹ Bei den unten wiedergegebenen Beobachtungen von 1899 August 2 war die Vorsorge vergessen worden, den Coefficient von δ_{vj} klein zu machen; die Drehung der Rollen M_{vj} war in der That nicht viel verschieden von einer ungeraden Anzahl Halbrevolutionen. Indessen kann dadurch das Resultat nicht wesentlich beeinflusst worden sein; denn selbst unter Annahme des großen Wertes $\frac{1}{100}$ für δ_{vj} und des ungünstigsten Wertes (0) für M_{vj} würde der Fehler der gemessenen geographischen Länge nur 0·00007 (circa 15'') betragen.

Schiene 90:

		α_{21}	α_{12}
Laufrad	70 ·237 _[-]	31·063 ₊
»	70+2×360 ·285 _[+]	·083 _[-]
»	70 ·237 ₍₋₎	·064 ₊
»	70+2×360 ·283 _[-]	·082 ₍₋₎
»	70 ·236 ₍₋₎	·064 ₊
»	70+2×360 ·283 _[-]	·082 ₋
»	70 ·234 _[+]	·065 ₍₋₎

11^h15^m, Temp. 13·7° R.

Schiene 180:

		α_{21}	α_{11}
Laufrad	70 ·244	14·382 _[+]
»	70+2×360 ·209 ₍₋₎	·376
»	70 ·246 ₋	·384 ₋
»	70+2×360 ·211 ₍₋₎	·379 _[-]
»	70 ·246 _[+]	·384 _[-]
»	70+2×360 ·210 ₊	·382
»	70 ·247	·389 _[+]

11^h45^m, Temp. 13·9° R.

Schiene 270:

		α_{21}	α_{12}
Laufrad	70 ·265 ₋	31·047 _[+]
»	70+2×360 ·305 ₍₋₎	·035 _[+]
»	70 ·268 ₊	·048
»	70+2×360 ·304 ₊	·037 _[+]
»	70 ·268 ₊	·048 ₍₊₎
»	70+2×360 ·303 ₋	·037 ₍₊₎
»	70 ·267 ₊	·049 ₍₊₎

12^h20^m, Temp. 13·9° R.

Schiene 360:

		α_{21}	α_{11}
Laufrad	70 ·278 ₊	14·403 _[-]
»	70+2×360 ·240 ₍₊₎	·393 ₍₊₎
»	70 ·278 ₍₋₎	·403 ₊
»	70+2×360 ·238 _[-]	·393 _[+]
»	70 ·276 ₍₊₎	·401 ₊
»	70+2×360 ·234 ₋	·391 ₍₊₎
»	70 ·273 _[+]	·399 ₋

1^h0^m, Temp. 13·8° R., Spannung c' .

Berechnung. Aus den Ablesungen bei »Schiene 0« hat man im Mittel $\alpha'_{21} = 2 \cdot 210_3 - 2 \cdot 230_3 = -0 \cdot 0200$ und $\alpha'_{11} = 14 \cdot 378_6 - 14 \cdot 366_6 = +0 \cdot 0126$, daher

$$\lambda'_{21} = \pi + \frac{-0 \cdot 0200}{l/\pi \text{ cm}} \quad \lambda'_{11} = \pi + \frac{+0 \cdot 0126}{l/\pi \text{ cm}};$$

in analoger Weise findet man:

$$\begin{aligned} \lambda''_{21} &= \pi - \frac{+0 \cdot 0477}{l/\pi \text{ cm}} & \lambda''_{12} &= \pi + \frac{+0 \cdot 0177}{l/\pi \text{ cm}} \\ \lambda'''_{21} &= -\pi + \frac{-0 \cdot 0357}{l/\pi \text{ cm}} & \lambda'''_{11} &= -\pi - \frac{-0 \cdot 0058}{l/\pi \text{ cm}} \\ \lambda^{iv}_{21} &= -2\pi - \frac{+0 \cdot 0367}{l/\pi \text{ cm}} & \lambda^{iv}_{12} &= -\pi - \frac{-0 \cdot 0116}{l/\pi \text{ cm}} \\ \lambda^v_{21} &= -3\pi + \frac{-0 \cdot 0392}{l/\pi \text{ cm}} & \lambda^v_{11} &= -\pi + \frac{-0 \cdot 0090}{l/\pi \text{ cm}}. \end{aligned}$$

Man hat also

$$\begin{aligned} (\Delta\lambda_1)_{i1}^{iii} &= -\pi - \frac{0 \cdot 0068}{l/\pi \text{ cm}}, & (\Delta\lambda_1)_{iii}^v &= -\pi - \frac{0 \cdot 0148}{l/\pi \text{ cm}}, \\ (\Delta\lambda_2)_{i1}^{iii} &= -2\pi - \frac{0 \cdot 0157}{l/\pi \text{ cm}}, & (\Delta\lambda_2)_{iii}^v &= -2\pi - \frac{0 \cdot 0035}{l/\pi \text{ cm}}, \\ (\Delta\lambda_1)_{ii}^{iv} &= -\pi - \frac{0 \cdot 0061}{l/\pi \text{ cm}}, \\ (\Delta\lambda_2)_{ii}^{iv} &= -2\pi - \frac{0 \cdot 0110}{l/\pi \text{ cm}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach den Bestimmungsformeln (55) und (55')

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \sin \Pi_1^2 &= \frac{1}{4} \frac{-0 \cdot 0141}{l/\pi \text{ cm}} = -0 \cdot 00037, \\ \varepsilon_1 \cos \Pi_1^2 &= \frac{1}{2} \frac{+0 \cdot 0056}{l/\pi \text{ cm}} = +0 \cdot 00030. \end{aligned}$$

Da der Verlauf des Drahtes der normale war, so ist die Größe Π_1^2 zugleich die Instrumentalconstante E_1 selbst; die

Excentricitätsconstanten des ersten Integrierapparates sind also engdilig

$$\varepsilon_1 \sin E_1 = -0.0004, \quad \varepsilon_1 \cos E_1 = +0.0003.$$

b) Ebenfalls keine präzisen Schieneneinstellungen, wohl aber die Kenntnis einer Instrumentalconstante ist erforderlich bei dem nachstehend geschilderten Verfahren, welches zur Bestimmung der Excentricitätsconstanten $\varepsilon_n \sin E_n$, $\varepsilon_n \cos E_n$ eines Integrierapparates dient, der sich an einen mit halb so hoher Nummer versehenen anschalten lässt.

In diesem Falle ist $k = \frac{1}{2}n$, und die Relation (34^{bis}) gibt

$$\begin{aligned} n \varepsilon_n \left[\sin \left(\frac{-2n\pi x}{c} - \Pi_{\frac{1}{2}n} \right) + \sin \Pi_{\frac{1}{2}n} \right] &= \\ &= -(\lambda_n - \Lambda_n) + 2(\lambda_{\frac{1}{2}n} - \Lambda_{\frac{1}{2}n}) - \left(\frac{2h_{\frac{1}{2}n} - h_n}{n} \right) \frac{n\pi x}{c} + \\ &+ n \varepsilon_{\frac{1}{2}n} \left[\sin \left(\frac{-n\pi x}{c} - \Pi_{\frac{1}{2}n} \right) + \sin \Pi_{\frac{1}{2}n} \right]. \quad (56) \end{aligned}$$

Wendet man diese Formel an auf die Abscissen $x = x' = 0 + \xi'$, $x = x''' = \frac{1}{2} \frac{c}{n} + \xi'''$, $x = x^v = \frac{c}{n} + \xi^v$, $x = x^{vii} = \frac{3}{2} \frac{c}{n} + \xi^{vii}$, $x = x^{ix} = 2 \frac{c}{n} + \xi^{ix}$, und summiert sie so erhaltenen fünf Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit $-1, 2, -2, 2, -1$ multipliciert hat, so findet man

$$\begin{aligned} 8n \varepsilon_n \sin \Pi_{\frac{1}{2}n} &= -[(\Delta\lambda_n)_{i'}^{iii} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{i'}^{iii}] + \\ &+ [(\Delta\lambda_n)_{iii}^v - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{iii}^v] - [(\Delta\lambda_n)_{v}^{vii} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{v}^{vii}] + \\ &+ [(\Delta\lambda_n)_{vii}^{ix} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{vii}^{ix}]. \quad (57) \end{aligned}$$

Wendet man die Formel (56) an auf die Abscissen $x = x'' = \frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi''$, $x = x^{iv} = \frac{3}{4} \frac{c}{n} + \xi^{iv}$, $x = x^{vi} = \frac{5}{4} \frac{c}{n} + \xi^{vi}$, $x = x^{viii} = \frac{7}{4} \frac{c}{n} + \xi^{viii}$, und summiert die so erhaltenen vier Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit $-1, 1, -1, 1$ multipliciert hat, so findet man

$$4n \varepsilon_n \cos \Pi_{\frac{1}{2}n} =$$

$$= -[(\Delta\lambda_n)_{ii}^{iv} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{ii}^{iv}] - [(\Delta\lambda_n)_{vi}^{viii} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{vi}^{viii}] - \left(\frac{2h_{\frac{1}{2}n} - h_n}{n}\right)$$

oder

$$4n \varepsilon_n \cos \Pi_{\frac{1}{2}n} =$$

$$= -[(\Delta\lambda_n)_{ii}^{iv} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{ii}^{iv}] - [(\Delta\lambda_n)_{vi}^{viii} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{vi}^{viii}] -$$

$$- \frac{1}{2} [(\Delta\lambda_n)_i^{ix} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_i^{ix}]. \quad (57')$$

Die in (57) und (57') auftretenden Drehungen des n^{ten} Integrierapparates sind durch je zwei derartige Lagen begrenzt, dass in jeder der beiden Lagen eine, und zwar in beiden dieselbe, Messrolle dieses Apparates nahezu auf der X -Axe liegt; sie können daher, so, wie im vorigen Falle, durch Befahrungen zur y -Axe paralleler Strecken ohne Kenntnis von Instrumentalconstanten bestimmt werden. Die damit gleichzeitigen Drehungen des $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Integrierapparates dagegen sind derartige, dass in jeder der beiden die Drehung begrenzenden Lagen eine, aber nicht in beiden dieselbe, Messrolle dieses Apparates nahezu auf der X -Axe liegt. Hat man daher in jeder der beiden Lagen des Control-Apparates die geographische Länge der nahezu auf der X -Axe liegenden Messrolle ermittelt, so muss man, um aus der Differenz der beiden Werte die Drehung des Apparates abzuleiten, den constanten Längenunterschied $90^\circ + \sigma_{\frac{n}{2}, 2} - \sigma_{\frac{n}{2}, 1}$ seiner Messrollen kennen.

c) Auch für einen Integrierapparat H_n , welcher sich weder an den $2n^{\text{ten}}$, noch an den $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ unmittelbar (oder vermittelt durch Scheiben, die unter einer geringen Differenz der beiden Grenzanomalien des Drahtes umwickelt sind) anschließen lässt, kann man noch zur Bestimmung der Excentricitätsconstanten einen Control-Apparat H_k verwenden; in diesem allgemeinsten Falle jedoch erfordert die Bestimmung die Kenntnis dreier Constanten des Control-Apparates.

Man gibt dem Fahrstift successive die Abscissen $x = x' = 0 + \xi'$, $x = x'' = \frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi''$, $x = x''' = \frac{1}{2} \frac{c}{n} + \xi'''$, $x = x^{iv} = \frac{3}{4} \frac{c}{n} + \xi^{iv}$, ...; wendet man die Gleichung (34^{bis}) an auf die genügend weit fortgesetzte Abscissenfolge x', x''', x^v, \dots einerseits, x'', x^{iv}, \dots andererseits, so erhält man wieder zwei Gleichungssysteme, aus denen sich zwei Bestimmungsformeln von ähnlicher Form wie (57) und (57') ergeben. Die darin vorkommenden Drehungen des Control-Apparates werden jedoch im allgemeinen durch Lagen begrenzt sein, in welchen keine seiner Messrollen nahezu auf der X-Axe liegt. Um hier bei jeder Abscisseneinstellung $x^{(r)}$ die Lage des Rollenpaares des Control-Apparates kennen zu lernen, liest man am besten, bei den Befahrungen der Strecken $l^{(r)}$, seine beiden Rollen ab und ermittelt daraus λ_{k1} mittels der nachstehend abgeleiteten Formel.

Es ist allgemein, wenn ein Winkel λ durch die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \sin \lambda = a + \xi \\ \cos \lambda = b + \eta, \end{cases} \quad \xi, \eta \text{ von der ersten Ordnung klein,}$$

definiert ist, dieser Winkel bis auf Glieder zweiter Ordnung genau ausgedrückt durch

$$\lambda = \arctg \frac{a}{b} + \xi \cos \lambda - \eta \sin \lambda. \quad (*)$$

Schreibt man die Gleichung (38') für den k ten Apparat, integriert sie über $l^{(r)}$, welches annähernd gleich einem Vielfachen von $2L\pi$ sein soll, setzt darin successive $i = 1$, $i = 2$, setzt schließlich für λ_{k2} seinen Wert $\lambda_{k1} + 90^\circ + (\sigma_{k2} - \sigma_{k1})$ ein, so erhält man zwei Gleichungen für $\sin \lambda_{k1}$, $\cos \lambda_{k1}$, welche die Form der oben angeschriebenen haben; die Glieder a, b sind in diesem

Falle $\frac{5 \text{ mm}}{l^{(r)}} \int_{l^{(r)}} d\mu_{k1}$, $\frac{5 \text{ mm}}{l^{(r)}} \int_{l^{(r)}} d\mu_{k2}$. Wendet man darauf die Formel (*) an, so findet man

$$\begin{aligned} \lambda_{k1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha_{k1}^{(r)}}{\alpha_{k2}^{(r)}} - & \\ - \frac{\delta_{k1}}{l^{(r)}/5 \text{ mm}} \cos \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \left[\cos(\bar{\mu}_{k1} + M_{k1}) + \sin(\bar{\mu}_{k1} + M_{k1}) \right]_{l^{(r)}} + & \\ + \frac{\delta_{k1}}{l^{(r)}/5 \text{ mm}} \sin \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \cdot \frac{M_{k1}}{K_k} \left[\cos(\bar{\mu}_{k1} + M_{k1}) \right]_{l^{(r)}} + & \\ + \frac{\delta_{k2}}{l^{(r)}/5 \text{ mm}} \frac{M_{k2}}{K_k} \cos \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \left[\cos(\bar{\mu}_{k2} + M_{k2}) \right]_{l^{(r)}} - & \\ - \frac{\delta_{k2}}{l^{(r)}/5 \text{ mm}} \sin \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \left[\cos(\bar{\mu}_{k2} + M_{k2}) + \sin(\bar{\mu}_{k2} + M_{k2}) \right]_{l^{(r)}} - & \\ - (\sigma_{k2} - \sigma_{k1}) \sin^2 \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} + \{m_{k1} - m_{k2}\} \sin \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \cos \frac{2k\pi x^{(r)}}{c}. & \end{aligned}$$

Wenn die Coefficienten von δ_{k1} , δ_{k2} durch geeignete Wahl der Länge $l^{(r)}$ hinreichend klein gemacht worden sind, dann bleibt einfach

$$\begin{aligned} \lambda_{k1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha_{k1}^{(r)}}{\alpha_{k2}^{(r)}} - (\sigma_{k2} - \sigma_{k1}) \sin^2 \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} + & \\ + \{m_{k1} - m_{k2}\} \sin \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \cos \frac{2k\pi x^{(r)}}{c}. & \end{aligned}$$

d) Eine immer anwendbare Methode, welche indessen nur dann sich empfehlen dürfte, wenn kein anderes Verfahren ausführbar ist, ist die directe Methode, welche nicht die Beobachtung der Drehungen eines Control-Apparates zwischen je zwei Schieneneinstellungen, sondern die Ablesungen dieser Einstellungen selbst benutzt.

Man gibt dem Fahrstift der Reihe nach die Abscissen $x = x' = 0 + \xi'$, $x = x'' = \frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi''$, $x = x''' = \frac{1}{2} \frac{c}{n} + \xi'''$, ..., wo ξ' , ξ'' , ξ''' , ... die abgelesenen Einstellungsfehler sind, und misst in jeder Lage die geographische Länge der nahezu auf der X-Axe befindlichen Rolle des zu untersuchenden n^{ten} Apparates; dann sind, unter der Annahme, dass die abgelesenen Einstellungsfehler gleich den wirklichen seien, in der Gleichung (39) λ_{ni} und x bekannt, und man erhält ein System

von Gleichungen (39), welches erlaubt die Constanten $\varepsilon_n \sin E_n$, $\varepsilon_n \cos E_n$ zu berechnen. Die übrigen Constanten des n ten Integriapparates, welche in (39) vorkommen, können durch Differenzen der Gleichungen eliminiert werden, die beiden Constanten $\varepsilon \sin E$, $\varepsilon \cos E$ jedoch im allgemeinen nicht. Die Kenntnis der letzteren wird also erfordert.

Man hat in der That aus den drei für $i = 1$ und für $x = x'$, $x = x'''$, $x = x^v$ gebildeten Gleichungen (39) die beiden Differenzgleichungen

$$\begin{aligned} -2n\varepsilon_n \sin E_n &= (\Delta\lambda_{n1})_i^{iii} + \pi + \frac{2n\pi}{c} (\xi''' - \xi') - \\ &\quad - n\varepsilon \sin \left(\frac{1}{2n} \frac{c}{H} + E \right) + n\varepsilon \sin E - \frac{h_n}{2n} \\ + 2n\varepsilon_n \sin E_n &= (\Delta\lambda_{n1})_{iii}^v + \pi + \frac{2n\pi}{c} (\xi^v - \xi''') - \\ &\quad - n\varepsilon \sin \left(\frac{1}{n} \frac{c}{H} + E \right) + n\varepsilon \sin \left(\frac{1}{2n} \frac{c}{H} + E \right) - \frac{h_n}{2n}, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\begin{aligned} 4n\varepsilon_n \sin E_n &= (\Delta\lambda_{n1})_{iii}^v - (\Delta\lambda_{n1})_i^{iii} + \frac{2n\pi}{c} (\xi^v - 2\xi''' + \xi') - \\ &\quad - n\varepsilon \left[\sin \left(\frac{1}{n} \frac{c}{H} + E \right) - 2 \sin \left(\frac{1}{2n} \frac{c}{H} + E \right) + \sin E \right]. \quad (58) \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich aus den drei für $i = 2$ und $x = x''$, x^{iv} , x^{vi} gebildeten Gleichungen (39)

$$\begin{aligned} 4n\varepsilon_n \cos E_n &= (\Delta\lambda_{n2})_{iv}^{vi} - (\Delta\lambda_{n2})_{ii}^{iv} + \frac{2n\pi}{c} (\xi^{vi} - 2\xi^{iv} + \xi'') - \\ &\quad - n\varepsilon \left[\sin \left(\frac{5}{4n} \frac{c}{H} + E \right) - 2 \sin \left(\frac{3}{4n} \frac{c}{H} + E \right) + \sin \left(\frac{1}{4n} \frac{c}{H} + E \right) \right]. \quad (58') \end{aligned}$$

Man kann in dem concreten Falle, durch Hinzunahme weiterer oder Wahl anderer Abscisseneinstellungen aus den obigen beiden Folgen, diese Methode so einzurichten trachten, dass in den endgiltigen Bestimmungsformeln die Factoren bei $\varepsilon \sin E$, $\varepsilon \cos E$ möglichst klein werden, damit die Ungenauigkeit der Kenntnis dieser Constanten bloß mit einem kleinen

Bruchtheile des eigenen Betrages in die zu bestimmenden Constanten hineinkommt. Bestimmte Vorschriften lassen sich hierfür nicht geben, da dies von der speciellen Configuration des verwendeten Analysators abhängt.

Einigermaßen genaue Werte kann man bei diesem Bestimmungsverfahren nur dadurch zu erhalten hoffen, dass man die Bestimmung mehrere Male wiederholt, um den Einfluss von Ablesungsfehlern abzuschwächen. —

38. Als letzte der regulären Instrumentalconstanten bleiben noch $\varepsilon \sin E$, $\varepsilon \cos E$ übrig. Diese Constanten der Formel für die geographischen Längen im n^{ten} Integrierapparat sind für sämtliche Apparate einer Gruppe (S. 15) gemeinsam. Die für die untere Gruppe geltenden hängen von den Eigenschaften der beiden linken Leitrollen, die für die obere Gruppe geltenden von den Eigenschaften der vorderen linken Leitrolle allein ab.

Ich spreche in dem Folgenden der Kürze halber immer nur von »der Leitrolle«; die Worte »beziehungsweise Leitrollenpaar« sind zu ergänzen.

Die für einen Integrierapparat angewendete Methode, seine Excentricitätsconstanten dadurch zu bestimmen, dass man die miteinander gleichzeitigen Drehungen misst, welche der untersuchte und der als Control-Apparat an ihn angeschaltete Apparat vollzogen haben, lässt sich nicht auf die Bestimmung der Excentricitätsconstanten der Leitrolle übertragen, weil man kein Mittel hat, die Drehungen der Leitrolle unabhängig zu messen (da sie keine Messrollen trägt), dieselben vielmehr nur aus ihren Wirkungen auf die Drehung des daran angeschlossenen Integrierapparates erkannt werden müssen. Die Nothwendigkeit präziser Schienenablesungen lässt sich hier also nicht umgehen.

In den obigen Bemerkungen ist das Principielle der Bestimmungsmethode bereits ausgesprochen. Man benutzt einen unmittelbar (oder unter geringer Differenz der Grenzanomalien des Drahtes an jeder Zwischenscheibe) nach der Leitrolle eingeschalteten Integrierapparat gleichsam als Reagens, indem seine Drehungsphasen die Wirkungen der Excentricitätsconstanten der Leitrolle sollen erkennen lassen. Man gibt durch

Schieneneneinstellungen, welche möglichst genau abgelesen werden müssen, dem Fahrstift der Reihe nach geeignete Abscissen von diesen, bei welchen seine Cosinusrolle, oder von diesen, bei welchen seine Sinusrolle nahezu auf der X -Axe liegt (eventuell von beiden Abscissenfolgen), damit man die zwischen je zwei Lagen einer Folge vollzogene Drehung unabhängig von der Kenntnis seiner Constanten messen kann. Durch Einsetzung der abgelesenen Abscissenwerte und der gemessenen Werte der geographischen Längen in die entsprechenden aus (39) gebildeten Differenzgleichungen erhält man ein Gleichungssystem, in welchem die sonstigen noch vorkommenden Constanten sich durch bloße Summationen und Subtractionen eliminieren lassen. Man erhält zwei Bestimmungsformeln, welche nur die beiden Unbekannten $\varepsilon \sin E$, $\varepsilon \cos E$, jedoch jede die beiden, enthalten.

Welcher Apparat als Reagens-Apparat benutzt werden solle, und wie die verschiedenen Abscissen am zweckmäßigsten gewählt und combinirt werden sollen, um in den Schlussformeln günstige Verhältnisse der Coefficienten zu erhalten, das hängt von der speciellen Configuration des verwendeten Analysators ab. Nur als Beispiel soll hier das Verfahren genauer beschrieben werden, welches ich für mein Instrument angewendet habe.

Ich benutzte, um die Constanten $\varepsilon \sin E$, $\varepsilon \cos E$ des Leitrollenpaares zu bestimmen, als Reagens den 3^{ten} Integrierapparat, und gab dem Fahrstift die sechs Abscissenwerte, welche folgenden Ableesungen entsprechen: $x' = \frac{c}{6} + \xi'$, $x'' = 2 \frac{c}{6} + \xi''$, $x''' = 3 \frac{c}{6} + \xi'''$, $x^{iv} = 4 \frac{c}{6} + \xi^{iv}$, $x^v = 5 \frac{c}{6} + \xi^v$, $x^{vi} = 6 \frac{c}{6} + \xi^{vi}$, wo ξ' , ξ'' , ..., ξ^{vi} abgelesene Einstellungsfehler sind. In diesen Lagen steht die Cosinusrolle des Apparates nahezu auf der X -Axe. Die Gleichung (39) gibt

$$\begin{aligned} \lambda_{31}^{(r)} = & \pi - r\pi - 6\pi \frac{\xi^{(r)}}{c} + 3\varepsilon_3 [\sin(r\pi + E_3) - \sin E_3] + \\ & + 3\varepsilon \cos E. \sin \frac{r}{6} \frac{c}{H} + 3\varepsilon \sin E. \left(\cos \frac{r}{6} \frac{c}{H} - 1 \right) + \\ & + \frac{r}{6} h_3 + \sigma_{31}. \end{aligned}$$

Bildet man aus dieser Gleichung die Ausdrücke für $(\Delta\lambda_{31})_{iii}^{iii}$, $(\Delta\lambda_{31})_{iii}^{iv}$, $(\Delta\lambda_{31})_{iii}^{vi}$, setzt dann in diesen Ausdrücken den Wert $\frac{1}{6} \frac{c}{H} = 218^{\circ}51'$ ein, so findet man, durch Additionen und Subtractionen der vier Gleichungen,

$$\left\{ \begin{aligned} 7 \cdot 06 \varepsilon \cos E - 0 \cdot 64 \varepsilon \sin E &= \\ &= (\Delta\lambda_{31})_{iii}^{iv} - (\Delta\lambda_{31})_{iii}^{vi} + 6\pi \frac{(\xi^{iv} - \xi^{vi}) - (\xi^{vi} - \xi^{iv})}{c} \\ 0 \cdot 87 \varepsilon \cos E - 7 \cdot 10 \varepsilon \sin E &= \\ &= (\Delta\lambda_{31})_{iii}^{iii} - (\Delta\lambda_{31})_{iii}^{iv} + 6\pi \frac{(\xi^{iii} - \xi^{iv}) - (\xi^{iv} - \xi^{iii})}{c} \end{aligned} \right.$$

39. Nach den oben erörterten Methoden zur Bestimmung der regulären Instrumentalconstanten wurden diese für mein Instrument wiederholt bestimmt.

Die in der nachstehenden Tafel angegebenen Werte können als geltend für den Sommer 1899 angesehen werden.

Die Constanten Γ_n , K_n sind auf den Fall reducirt, wenn bei der Anfangsstellung des Instrumentes die Laufradtheilung 0° zeigt; die Werte der Constanten E_n , E beziehen sich selbstverständlich auf den Fall der Coincidenz der an den betreffenden Horizontalrädern angebrachten Marken mit den zugehörigen Marken am Gerüst des Instrumentes.

Constanten, deren Werte durch einen Strich ersetzt sind, wurden nicht oder nicht genau bestimmt.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$\sigma_{n2} - \sigma_{n1}$	+0.0018	-0.0014	+0.0012	= $\sigma_{12} - \sigma_{11}$	= $\sigma_{22} - \sigma_{21}$	= $\sigma_{32} - \sigma_{31}$
m_{n1}	-0.0002	+0.0002	-0.0015	= m_{11}	= m_{21}	= m_{31}
m_{n2}	-0.0012	-0.0011	-0.0007	= m_{12}	= m_{22}	= m_{32}
$\dot{\gamma}_n$	0.0013	0.0006	0.0005	= $\dot{\gamma}_1$	= $\dot{\gamma}_2$	= $\dot{\gamma}_3$
Γ_n	278°	162°	307°	= Γ_1	= Γ_2	= Γ_3
κ_n	0.0017	0.0016	0.0012	= κ_1	= κ_2	= κ_3
K_n	105°	21°	77°	= K_1	= K_2	= K_3
$\dot{\gamma}_n$	-0.0005	-0.0003	-0.0003	= $\dot{\gamma}_1$	= $\dot{\gamma}_2$	= $\dot{\gamma}_3$
$\varepsilon_n \cos E_n$	+0.0002	+0.0003	—	—	—	—
$\varepsilon_n \sin E_n$	-0.0005	+0.0001	—	—	—	—
$\varepsilon \cos E$		+0.0001			—	
$\varepsilon \sin E$		-0.0000			—	

In dem in den Correctionsformeln eingeführten Constantensystem sind die Werte der regulären Constanten demnach folgende:

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
γ'_{n1}	+0·0002	-0·0006	+0·0003	= γ'_{11}	= γ'_{12}	= γ'_{13}
γ''_{n1}	-0·0013	+0·0002	-0·0004	= γ''_{11}	= γ''_{12}	= γ''_{13}
α'_{n1}	-0·0002	+0·0007	+0·0001	= α'_{11}	= α'_{12}	= α'_{13}
α''_{n1}	+0·0006	+0·0003	+0·0003	= α''_{11}	= α''_{12}	= α''_{13}
ε'_{n1}	+0·0002	+0·0003	—	—	—	—
ε''_{n1}	-0·0005	+0·0001	—	—	—	—
ε'	+0·0001			—		
ε''	-0·0001			—		
m_{n11}	-0·0002	+0·0002	+0·0015	= m_{11}	= m_{21}	= m_{31}
m_{n12}	-0·0012	-0·0011	-0·0007	= m_{12}	= m_{22}	= m_{32}
$\sigma'_{n1} - \sigma'_{n2}$	+0·0018	-0·0014	+0·0012	= $\sigma'_{12} - \sigma'_{11}$	= $\sigma'_{22} - \sigma'_{21}$	= $\sigma'_{32} - \sigma'_{31}$

40. Die Constanten h_n , σ'_{n1} müssen bei jeder Analyse besonders bestimmt werden.

Es empfiehlt sich, dieselben vor und nach der Analyse zu bestimmen, und bei der Anwendung der Formel (44) Mittelwerte aus beiden Bestimmungen zu verwenden.

Die Bestimmung selbst geschieht in folgender Weise.

Man stellt den Wagenindex auf 0, wobei man möglichst genau den Einstellungsfehler ξ' abliest, befährt eine der y -Axe parallele Strecke l' von geeigneter [siehe 37. a] Länge ein- oder mehreremale abwechselnd hin und zurück und bildet die Ablesungen sämtlicher Cosinusrollen über die Strecke l' . Dann stellt man den Wagenindex auf 360, wobei man möglichst genau den Einstellungsfehler ξ'' abliest, und befährt wieder eine der y -Axe parallele Strecke l'' von geeigneter Länge, in derselben Weise wie früher und wieder unter Ablesungen der Cosinusrollen. Die Einstellungen sind immer mit nach rechts gerichteter Bewegung zu bewirken.

Aus den Ablesungen der Cosinusrollen über die Strecke l' erhält man in der That, wenn die Länge l' roh bekannt ist, nach der Formel

$$\lambda'_{n1} = \pi + \frac{\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}}, \quad (59)$$

die geographischen Längen sämtlicher Cosinusrollen für die Abscisse ξ' des Fahrstiftes. Ebenso aus den Ableesungen über l'' , nach der Formel

$$\lambda''_{n1} = (1-2n)\pi + \frac{\alpha''_{n1}}{l''/\pi \text{ cm}}, \quad (60)$$

die geographischen Längen der Cosinusrollen für die Abscisse $c + \xi''$ des Fahrstiftes.

Wendet man nun die Gleichung (39) auf die Strecke l' an, wobei man für λ_{n1} den Wert (59) einsetzt, so ergibt sich

$$\sigma_{n1} = \frac{\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}} - \frac{2n\pi\xi'}{c}. \quad (61)$$

σ'_{n1} erhält man aus σ_{n1} , wenn man die bekannte reguläre Constante $n\varepsilon \sin E$ abzieht.

Wendet man aber die Gleichung (39) an auf die beiden Strecken l', l'' , und zieht die beiden entsprechenden Gleichungen voneinander ab, so findet man

$$h_n = \frac{\alpha''_{n1}}{l''/\pi \text{ cm}} - \frac{\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}} + \frac{2n\pi(\xi'' - \xi')}{c} - 2 \sin \frac{c}{2H} \cdot n\varepsilon', \quad (62)$$

wo ε' die bekannte reguläre Constante des Analysators ist.

In der Ausführung der Bestimmung empfiehlt es sich, zur Verminderung des Einflusses der ungenauen Kenntnis der Einstellungsfehler, die beiden Einstellungen einige Male zu wiederholen, indem man immer die Einstellung auf 0 und die auf 360 abwechseln lässt.

Die Fehler des Millimeterpapiers und der Aufstellung.

41. In der obigen Theorie der Instrumentalfehler ist noch ein Umstand unberücksichtigt geblieben, der zwar noch zu den Fehlern des Instrumentes gehört, den es aber zweckmäßiger erschien in Verbindung mit den Papier- und Aufstellungsfehlern zu berücksichtigen.

Ist nämlich die Richtung, in welcher bei stillstehendem Instrument der Fahrstift sich verschiebt, nicht genau senkrecht zu der Rollrichtung des Instrumentes, dann würden offenbar

die Gleichungen (38') und (39) [und damit auch alle daraus nachher gezogenen Folgerungen] gültig bleiben, wenn man darin unter xy die Coordinaten, unter $dx dy$ die Verrückungscomponenten, des Fahrstiftes in einem schiefwinkligen Coordinatensystem verstehen würde, dessen x -Linien die Richtung haben, in welcher der Fahrstift ohne Rollen des Instrumentes bewegt werden kann, dessen y -Linien aber die Richtung haben, in welcher das Gerüst beim Rollen bewegt wird. Als die Ordinatenaxe selbst gilt dann selbstverständlich wieder diejenige Gerade der letzteren Familie, auf welcher die Fahrstiftspitze sich befindet, während der Wagenindex auf dem Schienenstrich 0 steht; die Abscissenaxe aber brauchte bisher nicht festgelegt zu werden.

Wir wollen nun hier ein solches schiefwinkliges Coordinatensystem einführen, und bezeichnen es mit $x'y'$. Es gelten also die Gleichungen, welche aus (38') und (39) mittels Ersetzung von xy durch $x'y'$ entstehen. c und mm haben dabei genau dieselben Bedeutungen wie früher, desgleichen bedeuten $\Lambda_{n1}^0 = 180^\circ$, $\Lambda_{n2}^0 = 270^\circ$.

Da es ferner wegen der späteren Betrachtungen zweckmäßig ist, die Abscissenaxe festzulegen, definieren wir sie folgendermaßen. Nachdem das Instrument auf dem Papier aufgestellt worden, gibt es unter den verschiedenen Stellungen, welche es durch Rollen successive annimmt, nur eine von der Art, dass in derselben der Fahrstift ohne Rollen des Instrumentes mit dem Ausgangspunkte der gezeichneten Curve C in Coincidenz gebracht werden kann. Diese Stellung bezeichne ich künftig als die Anfangsstellung des Instrumentes, und den Strahl, welchen der Fahrstift in dieser Stellung (nach wachsenden Schienenablesungen) beschreibt, als die Abscissenaxe des Systems $x'y'$.

42. Die zur Analyse vorliegende Curve ist gezeichnet nach Maßgabe des auf dem Millimeterpapier vorgedruckten Netzes. Ihr Anfangs- und Endpunkt liegen also auf einer und derselben Linie der Familie der Abscissenlinien des Papieres, und der Abstand dieser Punkte voneinander beträgt 360 Papier-Millimeter der Abscissenrichtung.

Es wird fortan stets angenommen, dass man bei Umfahrungen zu analysierender Curven nach der folgenden Regel vorgeht:

1) von dem Ausgangspunkte der gezeichneten Curve befährt man diese bis zu ihrem Endpunkte am anderen Ende des zu untersuchenden Intervalls der Zeichnung (unbekümmert darum, dass dadurch der Wagenindex möglicherweise über den Strich 360 der Schiene etwas hinausgleitet oder ihn nicht erreicht); 2) von hier aus rollt man das Instrument, wenn nöthig, vor- oder rückwärts, bis es in seine Anfangsstellung kommt; 3) dann verschiebt man den Fahrstift bei stillstehendem Instrument bis zur Coincidenz mit dem Ausgangspunkte der gezeichneten Curve.

Die durch 1) vom Fahrstift beschriebene Bahn deckt sich vollständig mit der Curve C ; die durch 1) und 2) vom Fahrstift beschriebene Bahn bezeichne ich mit S ; die gesammte Bahn des Fahrstiftes mit Σ .

Die Gesamtdrehung der Rolle M_{ni} bei dieser Umfahrung ist offenbar gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} dy_{ni} = & \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \sin \left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy' + \\
 & + \gamma_n \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S n \cos \left(\frac{y'}{L} + \Gamma_n \right) \sin \left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dx' + \\
 & + \left(\alpha_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n \right) \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \cos \left(\frac{y'}{L} + K_n \right) \sin \left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy' + \\
 & + \varepsilon_n \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S n \left[\sin \left(\frac{2n\pi x'}{c} + E_n \right) - \sin E_n \right] \cos \left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy' + \\
 & \quad + \varepsilon \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S n \left[\sin \left(\frac{x'}{H} + E \right) - \sin E \right] \cos \left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy' + \\
 & + h_n \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \frac{x'}{c} \cos \left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy' + \\
 & + m_{ni} \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \sin \left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy' + \\
 & + \tau_{ni} \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_S \cos \left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0 \right) dy' + \\
 & + \delta_{ni} \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_{\Sigma} F_{ni}(M_{ni}, s) ds + \delta_{nj} \cdot \frac{1}{5 \text{ mm}} \int_{\Sigma} G_{nj}(M_{nj}, s) ds.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Wurde die Umfahrung wiederholt nach Umkehrung der Messrollen und bezeichnet dann $\int_{\Sigma} d\mu_{ni}$ das arithmetische Mittel der beiden Gesamtdrehungen der Rolle M_{ni} , so fällt in der Formel (63) die letzte Zeile weg.

43. Von dem zum Auftragen der Curve verwendeten Millimeterpapier setze ich nur voraus, dass seine Linien gerade und seine kleinsten Felder congruente Parallelogramme sind. Man muss vor dem Auftragen der Curve sich von diesen Eigenschaften überzeugen.

Ich setze dagegen nicht voraus, dass die Linien der einen Familie senkrecht zu den der anderen stehen; nicht, dass die einen oder dass die anderen richtig getheilt seien, d. h. dass ihre Millimeter mit den wahren oder mit den Analysator-Millimetern übereinstimmen; auch nicht, dass die Partes der Ordinateurichtung jenen der Abscissenrichtung gleich seien. Diese letzteren Eigenschaften treffen nach meinen Erfahrungen in der Regel alle nicht zu. Dagegen wird vorausgesetzt (was ja immer zutrifft), dass die Abweichungen davon klein seien.

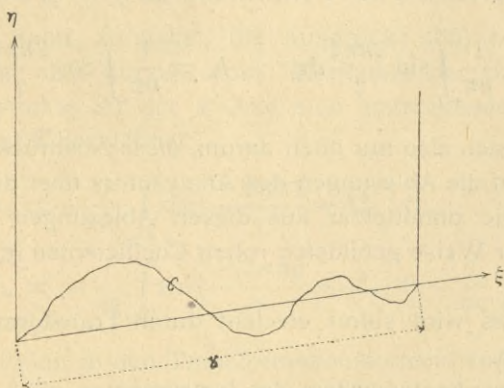


Fig. 14.

Wir nehmen nun die durch den Ausgangspunkt der Curve hindurchgehende Gerade der Familie der Abscissenlinien des Papiernetzes als die ξ -Axe, die durch jenen Punkt hindurchgehende Ordinatenlinie des Papiernetzes als die η -Axe eines schiefwinkligen Coordinatensystems $\xi\eta$. Die Entfernung des

Endpunktes der Curve C von ihrem Ausgangspunkte nenne ich γ .

Wenn nun die Coordinate η des laufenden Punktes P der Curve in Function seiner Coordinate ξ dargestellt ist in der Form

$$\eta = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos \frac{2n\pi\xi}{\gamma} + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin \frac{2n\pi\xi}{\gamma}, \quad (64)$$

so ist es die Anzahl der in der Länge a_n beziehungsweise b_n enthaltenen Papier-Centimeter der Ordinatenrichtung, welche gesucht wird. Denn diese Centimeter sind es, gemäß der Entstehungsweise der Zeichnung, welche bestimmte Einheiten der abhängigen Variablen des behandelten Variablenpaares vertreten. Bezeichnen wir einen Papiercentimeter der Ordinatenrichtung kurz mit 1Cm (im Gegensatz zum Analysatorcentimeter em), so werden also gesucht die abstracten Zahlen

$$a_n = \frac{a_n}{1\text{Cm}}, \quad b_n = \frac{b_n}{1\text{Cm}}$$

Die Längen a_n, b_n , Coefficienten der Entwicklung (64), haben, entsprechend den Formeln (3), da $\eta_e = \eta_a$ ist, die Ausdrücke

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_C \sin \frac{2n\pi\xi}{\gamma} d\eta, \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \int_C \cos \frac{2n\pi\xi}{\gamma} d\eta. \quad (65)$$

Es handelt sich also nur noch darum, diese Ausdrücke zurückzuführen auf die Ablesungen des Analysators über die Bahn Σ , oder auf die unmittelbar aus diesen Ablesungen in früher angegebener Weise gebildeten rohen Coefficienten a'_n, b'_n .

44. Dies wird sofort erreicht durch Transformation von Coordinaten.

Das Coordinatensystem des Instrumentes, $x'y'$, ist schon definiert worden. Seine x' -Axe geht darnach durch den Ausgangspunkt der Curve C . In der nachstehenden Figur ist das Coordinatensystem $\xi\eta$ durch volle, das Coordinatensystem $x'y'$ durch unterbrochene Linien, die gesammte Bahn Σ des Fahrstiftes durch die starke Contour dargestellt. Die Ablenkung der x' -Axe von der ξ -Axe sei ω , die der y' -Axe von der η -Axe sei ψ ;

die Entfernung des Anfangspunktes des Systems $x'y'$ von dem des Systems $\xi\eta$, also die Entfernung, in welcher sich der Strich 0 der Schiene von dem Wagenindex befindet, während die Fahrstiftspitze mit dem Ausgangspunkte der Curve coincidiert, sei pc . ω, ψ, p sollen von der ersten Ordnung klein sein.

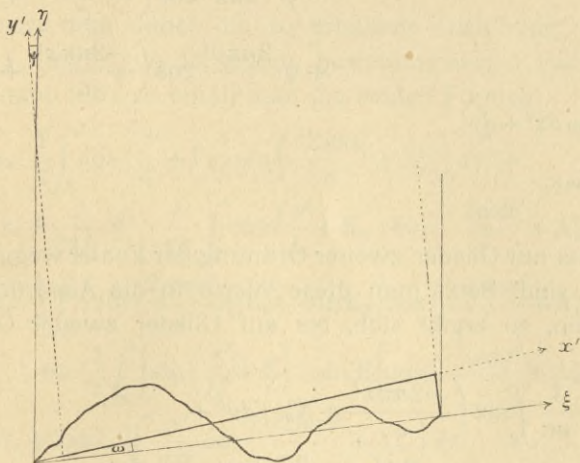


Fig. 15.

Man kann, zunächst, die Ausdrücke (65) so schreiben, indem man den kurzen, vom Endpunkte der Curve C zum Ankunftsunkte an der x' -Axe sich erstreckenden Theil der Bahn Σ mit T bezeichnet:

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n1}^0\right) d\eta,$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n2}^0\right) d\eta - \frac{1}{n\pi} \int_T d\eta.$$

Lässt man in den Transformationsformeln von $\xi\eta$ auf $x'y'$ rechts Glieder zweiter Ordnung der Fehler weg, so findet man

$$\begin{cases} \xi = pc + x' - \psi y' \\ \eta = \omega x' + y'. \end{cases}$$

Setzt man also $\frac{c}{\gamma} = 1 + l$, so dass l ein kleiner Bruch erster Ordnung ist, so hat man

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{ni}^0\right) &= \\ &= \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) - l \cdot \frac{2n\pi x'}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) - \\ &\quad - p \cdot 2n\pi \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) + \\ &\quad + \psi \cdot \frac{2n\pi y'}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0\right), \end{aligned}$$

$$d\eta = \omega dx' + dy',$$

$$\int_T d\eta = \omega c,$$

wo rechts nur Glieder zweiter Ordnung der Fehler weggelassen worden sind. Setzt man diese Werte in die Ausdrücke von a_n , b_n ein, so ergibt sich, bis auf Glieder zweiter Ordnung genau,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy' + \\ &\quad + 2l \cdot \int_S \frac{x'}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy' + \\ &\quad + 2p \cdot \int_S \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy' - \\ &\quad - 2\psi \cdot \int_S \frac{y'}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy', \\ b_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' + \\ &\quad + 2l \cdot \int_S \frac{x'}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' + \\ &\quad + 2p \cdot \int_S \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' - \\ &\quad - 2\psi \cdot \int_S \frac{y'}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' - \frac{\omega}{n\pi} c. \end{aligned} \quad (66)$$

Wenn man in der Gleichung (63) unter $\int_{\Sigma} d\mu_{ni}$ das Mittel aus zwei durch Umdrehung der Rollen unterschiedenen Umfahrungen versteht (demgemäß die letzte Zeile weglässt) und

beide Seiten mit $\frac{-1}{2n\pi} \text{cm}$ multipliziert, dann steht links a'_n beziehungsweise b'_n ; rechts aber, als erstes Glied

$$-\frac{1}{n\pi} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy'.$$

Subtrahiert man daher die so erhaltene Gleichung, gebildet für $i = 1, i = 2$, von der ersten, beziehungsweise zweiten der Gleichungen (66), so erhält man die beiden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} a_n - a'_n &= +\gamma_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \cos\left(\frac{y'}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dx' + \\ &+ \left(\alpha_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n\right) \cdot \frac{1}{n\pi} \int_S \cos\left(\frac{y'}{L} + K_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy' + \\ &+ \varepsilon_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \left[\sin\left(\frac{2n\pi x'}{c} + E_n\right) - \sin E_n \right] \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy' + \\ &+ \varepsilon \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \left[\sin\left(\frac{x'}{H} + E\right) - \sin E \right] \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy' + \\ &+ (h_n + 2n\pi l) \cdot \int_S \frac{x'}{n\pi c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy' - \\ &- m_{n1} \cdot a'_n - \\ &- (\sigma_{n1} + 2n\pi p) \cdot b'_n - \\ &- 2\psi \cdot \int_S \frac{y'}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n1}^0\right) dy', \\ \\ b_n - b'_n &= +\gamma_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \cos\left(\frac{y'}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dx' + \\ &+ \left(\alpha_n + \frac{c}{2\pi L} \dot{\gamma}_n\right) \cdot \frac{1}{n\pi} \int_S \cos\left(\frac{y'}{L} + K_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' + \\ &+ \varepsilon_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \left[\sin\left(\frac{2n\pi x'}{c} + E_n\right) - \sin E_n \right] \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' + \\ &+ \varepsilon \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \left[\sin\left(\frac{x'}{H} + E\right) - \sin E \right] \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' + \\ &+ (h_n + 2n\pi l) \cdot \int_S \frac{x'}{n\pi c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' - \\ &- m_{n2} \cdot b'_n + \\ &+ (\sigma_{n2} + 2n\pi p) \cdot a'_n - \\ &- 2\psi \cdot \int_S \frac{y'}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c} + \Lambda_{n2}^0\right) dy' - \omega \cdot \frac{c}{n\pi}, \end{aligned} \right\} (67)$$

in welchen man, übrigens, offenbar x', y', c , wegen der kleinen Coefficienten, überall durch ξ, η, γ ersetzen darf.

Diese Formeln sind, abgesehen von ihrer je letzten Zeile, den Formeln (41) vollständig analog. Die complete Formeln für Corrigierung der rohen Coefficienten werden sich somit von den beiden Formeln (44) [oder (48)], nach welchen die Correction hinsichtlich der Instrumentalfehler allein erfolgt, nur dadurch unterscheiden, dass zu den rechten Seiten der letzteren noch die Glieder:

$$-2\psi \cdot \int_S \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n1}^0\right) d\eta \quad \text{in der ersten,}$$

$$-2\psi \cdot \int_S \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n2}^0\right) d\eta - \omega \cdot \frac{c}{n\pi} \quad \text{in der zweiten}$$

hinzutreten, und dass ferner einige der Constanten durch gewisse andere ersetzt werden. In den hinzutretenden Gliedern kann man das Symbol \int_S durch \int_C ersetzen, da $\int_T \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{ni}^0\right) d\eta$ klein [sogar von mindestens zweiter Ordnung] ist.

45. Es bleibt also, um die complete Correctionsformeln in der endgiltigen Form hinschreiben zu können, nur übrig, das Integral

$$-2 \int_C \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{ni}^0\right) d\eta$$

auszuwerten. Bezeichnet man wieder mit $\int_{(C)}$ eine Integration, erstreckt auf alle nach Ausschluss etwa vorhandener der η -Achse paralleler Abschnitte zurückbleibenden Abschnitte der Curve C , und wendet die (43) analoge Transformation

$$\int_C \varphi(\xi) \cdot d(\eta^2) = [\varphi(\xi) \cdot \eta^2]_C - \int_{(C)} \eta^2 \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} d\xi$$

an, so erhält man

$$\begin{aligned}
 -2 \int_C \frac{\eta}{c} \cos \left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{ni}^0 \right) d\eta &= \\
 &= \frac{2n\pi}{\gamma c} \int_{(C)} \eta^2 \cdot \sin \left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{ni}^0 \right) d\xi,
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 -2 \int_C \frac{\eta}{c} \cos \left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n1}^0 \right) d\eta &= \\
 &= \frac{2n\pi}{\gamma c} \mathfrak{A}_0 \int_0^\gamma \sin \frac{2n\pi\xi}{\gamma} d\xi + \frac{2n\pi}{\gamma c} \sum_q \mathfrak{A}_q \int_0^\gamma \cos \frac{2q\pi\xi}{\gamma} \sin \frac{2n\pi\xi}{\gamma} d\xi + \\
 &\quad + \frac{2n\pi}{\gamma c} \sum_q \mathfrak{B}_q \int_0^\gamma \sin \frac{2q\pi\xi}{\gamma} \sin \frac{2n\pi\xi}{\gamma} d\xi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2 \int_C \frac{\eta}{c} \cos \left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n2}^0 \right) d\eta &= \\
 &= -\frac{2n\pi}{\gamma c} \mathfrak{A}_0 \int_0^\gamma \cos \frac{2n\pi\xi}{\gamma} d\xi - \frac{2n\pi}{\gamma c} \sum_q \mathfrak{A}_q \int_0^\gamma \cos \frac{2q\pi\xi}{\gamma} \cos \frac{2n\pi\xi}{\gamma} d\xi - \\
 &\quad - \frac{2n\pi}{\gamma c} \sum_q \mathfrak{B}_q \int_0^\gamma \sin \frac{2q\pi\xi}{\gamma} \cos \frac{2n\pi\xi}{\gamma} d\xi,
 \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_q, \mathfrak{B}_q$ ($q = 1, 2, 3, \dots$) die Coefficienten der Entwicklung

$$\eta^2 = \mathfrak{A}_0 + \sum_q \mathfrak{A}_q \cos \frac{2q\pi\xi}{\gamma} + \sum_q \mathfrak{B}_q \sin \frac{2q\pi\xi}{\gamma} \quad (68)$$

bezeichnen. Diese Coefficienten werden bestimmte Functionen der Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ sein; ich schreibe sie daher

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}_0(a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots), \quad \mathfrak{A}_q(a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots), \\
 \mathfrak{B}_q(a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots),
 \end{aligned}$$

oder kurz (symbolisch):

$$\mathfrak{A}_0(a, b), \quad \mathfrak{A}_q(a, b), \quad \mathfrak{B}_q(a, b).$$

Man hat also

$$\left\{ \begin{aligned} -2\psi \int_S \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n_1}^0\right) d\eta &= \psi \frac{n\pi}{c} \mathfrak{B}_n(a, b) \\ -2\psi \int_S \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n_2}^0\right) d\eta &= -\psi \frac{n\pi}{c} \mathfrak{A}_n(a, b). \end{aligned} \right.$$

Der Nachweis, dass die auf der rechten Seite von (68) stehende Reihe, gebildet mit den Coefficienten

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu} a_{\nu}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu} b_{\nu}^2, \\ \mathfrak{A}_q &= \left\{ 2a_0 a_q + \frac{1}{2} \sum_{\nu \neq q} a_{\nu} a_{|\nu-q|} + \frac{1}{2} \sum_{\nu} a_{\nu} a_{\nu+q} \right\} + \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\nu \neq q} \frac{\nu-q}{|\nu-q|} b_{\nu} b_{|\nu-q|} + \frac{1}{2} \sum_{\nu} b_{\nu} b_{\nu+q} \right\}, \\ \mathfrak{B}_q &= 2a_0 b_q - \sum_{\nu \neq q} \frac{\nu-q}{|\nu-q|} a_{\nu} b_{|\nu-q|} + \sum_{\nu} a_{\nu} b_{\nu+q}, \end{aligned} \right\} (69)$$

convergiert und die Function η^2 darstellt, wird im Folgenden wenigstens für die (für die Praxis ja hauptsächlich in Betracht kommenden) Fälle geliefert, wo die zur Analyse vorgelegte Curve C keine der η -Axe parallele Stücke hat, der Differentialquotient der abhängigen Variablen nach der Argumentvariablen also endlich bleibt. In den Ausdrücken (69) sind die Summenzeichen so verstanden, dass \sum_{ν} sich auf die Werte $\nu = 1, 2, 3, \dots$ erstreckt, $\sum_{\nu \neq q}$ aber bloß auf die Werte $\nu = 1, 2, \dots, q-1, q+1, q+2, \dots$.

Wenn nämlich die Curve C die genannte Eigenschaft besitzt, dann werden, in Folge eines bekannten Satzes, die Coefficienten a_m, b_m ($m = 1, 2, \dots$) der Fourier'schen Entwicklung

$$\eta = a_0 + \sum_m a_m \cos \frac{2m\pi\xi}{\gamma} + \sum_m b_m \sin \frac{2m\pi\xi}{\gamma}$$

so beschaffen sein, dass

$$a_m < \frac{\mathfrak{Z}}{m^2}, \quad b_m < \frac{\mathfrak{Z}}{m^2}, \quad (70)$$

wo \mathfrak{Z} eine von m unabhängige endliche Zahl ist; a_0 ist bekanntlich gleich dem Mittelwerte $\bar{\eta}$ sämtlicher η des Intervalles.

Bezeichnet man zur Abkürzung $\frac{2\pi\xi}{\gamma}$ mit φ , so sind in den Doppelreihen

$$\sum_q \left[\sum_{\nu \neq q} \frac{1}{2} a_\nu a_{|\nu-q|} \right] \cos q\varphi, \quad \sum_q \left[\sum_\nu \frac{1}{2} a_\nu a_{\nu+q} \right] \cos q\varphi$$

infolge der Eigenschaft (70) sowohl die Zeilen (die Reihen $q = \text{const.}$), als auch die Columnen (die Reihen $\nu = \text{const.}$) absolut und somit unbedingt convergente Reihen; es kann in ihnen daher die Reihenfolge der Summationen umgekehrt werden, wodurch sie übergehen in die ebenfalls unbedingt convergenten Reihen

$$\sum_\nu \frac{1}{2} a_\nu \left[\sum_{q \neq \nu} a_{|\nu-q|} \cos q\varphi \right], \quad \sum_\nu \frac{1}{2} a_\nu \left[\sum_q a_{\nu+q} \cos q\varphi \right].$$

Es ist daher auch

$$\begin{aligned} \sum_q \left\{ \sum_{\nu \neq q} \frac{1}{2} a_\nu a_{|\nu-q|} + \sum_\nu \frac{1}{2} a_\nu a_{\nu+q} \right\} \cos q\varphi &= \\ &= \sum_\nu \frac{1}{2} a_\nu \left\{ [a_1(\cos(\nu+1)\varphi + \cos(\nu-1)\varphi) + \right. \\ &\quad + a_2(\cos(\nu+2)\varphi + \cos(\nu-2)\varphi) + \dots + \\ &\quad + a_{\nu-1}(\cos(2\nu-1)\varphi + \cos\varphi) + \\ &\quad + a_\nu \cos 2\nu\varphi + \\ &\quad + a_{\nu+1} \cos(2\nu+1)\varphi + \\ &\quad \left. + a_{\nu+2} \cos(2\nu+2)\varphi + \dots] + \right. \\ &\quad \left. + [a_{\nu+1} \cos\varphi + a_{\nu+2} \cos 2\varphi + \dots] \right\}, \end{aligned}$$

oder

$$\sum_q \left\{ \sum_{v \neq q} \frac{1}{2} a_v a_{|v-q|} + \sum_v \frac{1}{2} a_v a_{v+q} \right\} \cos q\varphi = \\ = \sum_v a_v \cos v\varphi \{ a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots \} - \frac{1}{2} \sum_v a_v^2;$$

ebenso erhält man

$$\sum_q \left\{ \sum_{v \neq q} \frac{1}{2} \frac{v-q}{|v-q|} b_v b_{|v-q|} + \sum_v \frac{1}{2} b_v b_{v+q} \right\} \cos q\varphi = \\ = \sum_v b_v \sin v\varphi \{ b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots \} - \frac{1}{2} \sum_v b_v^2.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\sum_q \left\{ - \sum_{v \neq q} \frac{v-q}{|v-q|} a_v b_{|v-q|} + \sum_v a_v b_{v+q} \right\} \sin q\varphi = \\ = 2 \sum_v a_v \cos v\varphi \{ b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots \} = \\ = 2 \sum_v b_v \sin v\varphi \{ a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots \}.$$

Die hier auf den rechten Seiten stehenden vier Doppelreihen sind ebenfalls nach Zeilen und Columnen unbedingt convergente.

Es folgt also, dass die Reihe

$$\mathfrak{A}_0 + \sum_q (\mathfrak{A}_q \cos q\varphi + \mathfrak{B}_q \sin q\varphi),$$

mit den Coefficientenwerten (69), (unbedingt) convergent und dass ihr Wert gleich ist

$$a_0^2 + 2a_0 \sum_q (a_q \cos q\varphi + b_q \sin q\varphi) + \\ + \sum_v \left[(a_v \cos v\varphi + b_v \sin v\varphi) \sum_p a_p \cos p\varphi + \right. \\ \left. + (b_v \sin v\varphi + a_v \cos v\varphi) \sum_p b_p \sin p\varphi \right]$$

oder

$$\left\{ a_0 + \sum_v a_v \cos v\varphi + b_v \sin v\varphi \right\} \cdot \left\{ a_0 + \sum_p (a_p \cos p\varphi + b_p \sin p\varphi) \right\}.$$

Jede der beiden unbedingt convergenten Reihen $a_0 + \sum (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$, $a_0 + \sum (a_\rho \cos \rho\varphi + b_\rho \sin \rho\varphi)$ stellt aber in der That die Function η dar. Somit ist der Satz (69) bewiesen.

Man hat also schließlich

$$\left\{ \begin{aligned} -2\psi \int_S \frac{\eta}{c} \cos \left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n1}^0 \right) d\eta &= \psi \frac{n\pi}{c} [2a_0 b_n + D_n(a, b)] \\ -2\psi \int_S \frac{\eta}{c} \cos \left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n2}^0 \right) d\eta &= -\psi \frac{n\pi}{c} [2a_0 a_n + C_n(a, b)], \end{aligned} \right.$$

wo

$$C_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu \neq n} a_\nu a_{|\nu-n|} + \sum_{\nu} a_\nu a_{\nu+n} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{\nu \neq n \\ \nu > n}} \frac{\nu-n}{|\nu-n|} b_\nu b_{|\nu-n|} + \sum_{\nu} b_\nu b_{\nu+n} \right),$$

$$D_n = -\sum_{\substack{\nu \neq n \\ \nu > n}} \frac{\nu-n}{|\nu-n|} a_\nu b_{|\nu-n|} + \sum_{\nu} a_\nu b_{\nu+n}.$$

In der praktischen Anwendung ist man genöthigt, die Summen in C_n, D_n auf die Glieder zu beschränken, bei welchen kein Index größer als N ist. Die Summensymbole $\sum_{\nu \neq n}, \sum_{\nu}$ sollen künftig mit dieser Beschränkung verstanden werden. Für den Fall meines Instrumentes ($N = 6$) z. B., ist

$$\begin{aligned} C_1 &= (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5 + a_5 a_6) + (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_4 + b_4 b_5 + b_5 b_6) \\ C_2 &= \frac{1}{2} a_1^2 + (a_1 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_6) - \frac{1}{2} b_1^2 + (b_1 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_5 + b_4 b_6) \\ C_3 &= a_1 a_2 + (a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6) - b_1 b_2 + (b_1 b_4 + b_2 b_5 + b_3 b_6) \\ C_4 &= a_1 a_3 + \frac{1}{2} a_2^2 + (a_1 a_5 + a_2 a_6) - b_1 b_3 - \frac{1}{2} b_2^2 + (b_1 b_5 + b_2 b_6) \\ C_5 &= a_1 a_4 + a_2 a_3 + (a_1 a_6) - b_1 b_4 - b_2 b_3 + (b_1 b_6) \\ C_6 &= a_1 a_5 + a_2 a_4 + \frac{1}{2} a_3^2 - b_1 b_5 - b_2 b_4 - \frac{1}{2} b_3^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_1 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_3 b_4 - a_4 b_3) + (a_4 b_5 - a_5 b_4) + (a_5 b_6 - a_6 b_5) \\ D_2 &= a_1 b_1 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) + (a_2 b_4 - a_4 b_2) + (a_3 b_5 - a_5 b_3) + (a_4 b_6 - a_6 b_4) \\ D_3 &= (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_4 - a_4 b_1) + (a_2 b_5 - a_5 b_2) + (a_3 b_6 - a_6 b_3) \\ D_4 &= (a_1 b_3 + a_3 b_1) + a_2 b_2 + (a_1 b_5 - a_5 b_1) + (a_2 b_6 - a_6 b_2) \\ D_5 &= (a_1 b_4 + a_4 b_1) + (a_2 b_3 + a_3 b_2) + (a_1 b_6 - a_6 b_1) \\ D_6 &= (a_1 b_5 + a_5 b_1) + (a_2 b_4 + a_4 b_2) + a_3 b_3. \end{aligned}$$

46. Die complete Formeln zur Corrigierung der rohen Coefficienten a'_n, b'_n sind also [vergl. (44)]:

$$\begin{aligned}
 a_n - a'_n = & \gamma'_n \cdot \frac{c}{2\pi} B_n - \gamma''_n \cdot \frac{c}{2\pi} B'_n \\
 & - \kappa'_n \cdot LA'_n - \kappa''_n \cdot LA_n \\
 & + \varepsilon'_n \cdot n a'_{2n} - \varepsilon''_n \cdot n (b'_{2n} - b_n) \\
 & + \varepsilon' \cdot \left(\frac{2 \sin \frac{c}{2H}}{\pi} a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} a'_\nu p_{\nu, n} \right) + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} b'_\nu q_{\nu, n} \\
 & + (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{ -\frac{1}{2} b'_n + \frac{1}{n\pi} \left(a_0 + \frac{3}{4} a'_n \right) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} a'_\nu \right\} \\
 & - m_{n1} \cdot a'_n \\
 & - \left(\sigma'_{n1} + 2n\pi p - \frac{2n\pi a_0}{c} \phi \right) \cdot b'_n \\
 & + \phi \cdot \frac{n\pi}{c} D_n(a', b')
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
 b_n - b'_n = & -\gamma'_n \cdot \frac{c}{2\pi} A_n + \gamma''_n \cdot \frac{c}{2\pi} A'_n \\
 & - \kappa'_n \cdot LB'_n - \kappa''_n \cdot LB_n \\
 & + \varepsilon'_n \cdot n b'_{2n} + \varepsilon''_n \cdot n (a'_{2n} - a'_n) \\
 & - \varepsilon' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} b'_\nu s_{\nu, n} + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} a'_\nu r_{\nu, n} \\
 & + (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{ \frac{1}{2} a'_n + \frac{1}{4n\pi} b'_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} b'_\nu \right\} \\
 & - m_{n2} \cdot b'_n \\
 & + \left(\sigma'_{n2} + 2n\pi p - \frac{2n\pi a_0}{c} \phi \right) \cdot a'_n \\
 & - \phi \cdot \frac{n\pi}{c} C_n(a', b') - \omega \cdot \frac{c}{n\pi}.
 \end{aligned}$$

Es ist aber, wenn man mit α_n, β_n die durch n dividierten Ablesungen der Rollen über die Contour Σ (arithmetischen Mittel aus zwei durch Umdrehung der Rollen unterschiedenen Umfahrungen) bezeichnet,

$$a'_n = \alpha_n \text{ cm}, \quad b'_n = \beta_n \text{ cm};$$

andererseits, es wurde gesetzt

$$a_n = a_n \text{ Cm}, \quad b_n = b_n \text{ Cm}.$$

Setzt man also diese Werte in die Formeln (71) ein, dividiert beiderseits mit 1 cm und setzt in dem Resultate

$$\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ Cm}} = 1 + m,$$

so dass m ein kleiner Bruch erster Ordnung ist, so erhält man schließlich die Formeln für a_n, b_n :

$$\left. \begin{aligned} a_n = \alpha_n &+ \gamma'_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\pi \text{ cm}} \right) B_n - \gamma''_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\pi \text{ cm}} \right) B'_n \\ &- \kappa'_n \cdot \left(\frac{L}{1 \text{ cm}} \right) A'_n - \kappa''_n \cdot \left(\frac{L}{1 \text{ cm}} \right) A_n \\ &+ \varepsilon'_n \cdot n \alpha_{2n} - \varepsilon''_n \cdot n (\beta_{2n} - \beta_n) \\ &+ \varepsilon' \cdot \left(\frac{2 \sin \frac{c}{2H}}{\pi} \alpha_0 + \frac{1}{\pi} \sum_v \alpha_v p_{v,n} \right) + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_v \beta_v q_{v,n} \\ &+ (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \beta_n + \frac{1}{n\pi} \left(\alpha_0 + \frac{3}{4} \alpha_n \right) - \frac{n}{\pi} \sum_{v \neq n} \frac{1}{v^2 - n^2} \alpha_v \right\} \\ &- (m_{n1} - m) \cdot \alpha_n \\ &- \left(\sigma'_{n1} + 2n\pi p - 2n \frac{\pi \text{ cm}}{c} \alpha_0 \psi \right) \cdot \beta_n \\ &+ \psi \cdot n \frac{\pi \text{ cm}}{c} D_n(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} (72)$$

$$\left. \begin{aligned} b_n = \beta_n &- \gamma'_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\pi \text{ cm}} \right) A_n + \gamma''_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\pi \text{ cm}} \right) A'_n \\ &- \kappa'_n \cdot \left(\frac{L}{1 \text{ cm}} \right) B'_n - \kappa''_n \cdot \left(\frac{L}{1 \text{ cm}} \right) B_n \\ &+ \varepsilon'_n \cdot n \beta_{2n} + \varepsilon''_n \cdot n (\alpha_{2n} - \alpha_n) \\ &- \varepsilon' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_v \beta_v s_{v,n} + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_v \alpha_v r_{v,n} \\ &+ (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \alpha_n + \frac{1}{4n\pi} \beta_n - \frac{1}{\pi} \sum_{v \neq n} \frac{v}{v^2 - n^2} \beta_v \right\} \\ &- (m_{n2} - m) \cdot \beta_n \\ &+ \left(\sigma'_{n2} + 2n\pi p - 2n \frac{\pi \text{ cm}}{c} \alpha_0 \psi \right) \cdot \alpha_n \\ &- \psi \cdot n \frac{\pi \text{ cm}}{c} C_n(\alpha, \beta) - \omega \cdot \frac{1}{n} \frac{c}{\pi \text{ cm}} \end{aligned} \right\}$$

wo mit α_0 das Verhältnis $\frac{\bar{\eta}_1}{C_m}$ oder $\frac{\bar{\eta}_1}{cm}$ bezeichnet wurde. Hierbei ist, für mein Instrument, $\frac{c}{\pi cm} = \frac{36}{\pi} = 11.73$, $\frac{L}{1 cm} = 2.36$.

Hat man aber, wie man dies wohl immer vorziehen wird, die Fehler $\gamma'_n, \gamma''_n, \alpha'_n, \alpha''_n$ schon während der Umfahrungen eliminiert (nach Art. 29.), so bleibt einfach

$$\left. \begin{aligned}
 a_n &= \alpha_n(1 - m_{n1} + m) + \varepsilon'_n \cdot n \alpha_{2n} - \varepsilon''_n \cdot n (\beta_{2n} - \beta_n) \\
 &+ \varepsilon' \cdot \left(-\frac{2 \sin \frac{c}{2H}}{\pi} \alpha_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \alpha_{\nu} p_{\nu, n} \right) + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \beta_{\nu} q_{\nu, n} \\
 &+ (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \beta_n + \frac{1}{n\pi} \left(\alpha_0 + \frac{3}{4} \alpha_n \right) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} \alpha_{\nu} \right\} \\
 &- \left(\sigma'_{n1} + 2n\pi p - 2n \frac{\pi cm}{c} \alpha_0 \phi \right) \cdot \beta_n \\
 &- \phi \cdot n \frac{\pi cm}{c} D_n(\alpha, \beta) \\
 b_n &= \beta_n(1 - m_{n2} + m) + \varepsilon'_n \cdot n \beta_{2n} + \varepsilon''_n \cdot n (\alpha_{2n} - \alpha_n) \\
 &- \varepsilon' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \beta_{\nu} s_{\nu, n} + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \alpha_{\nu} r_{\nu, n} \\
 &+ (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \alpha_n + \frac{1}{4n\pi} \beta_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} \beta_{\nu} \right\} \\
 &+ \left(\sigma'_{n2} + 2n\pi p - 2n \frac{\pi cm}{c} \alpha_0 \phi \right) \cdot \alpha_n \\
 &- \phi \cdot n \frac{\pi cm}{c} C_n(\alpha, \beta) - \omega \cdot \frac{1}{n} \frac{c}{\pi cm}.
 \end{aligned} \right\} (73)$$

In diesem Falle werden die Constanten p , ω und ϕ , welche von der Beziehung zwischen Instrument und Papier abhängen, während der zweiten Umfahrung andere Werte haben, als während der ersten; die Formeln (73) beziehen sich offenbar auf die arithmetischen Mittel der beiden Werte.

47. Die Constanten m , l , p , ϕ , ω bestimmt man in der folgenden Weise.

Man stellt das Instrument, vor der Analyse, den η -Linien parallel auf, stellt den Wagenindex einmal auf den Strich 0, dann auf den Strich 360 der Schientheilung ein, wobei man

jedesmal eine Marke in das Papier drückt, und beobachtet dann auf dem Papier, wie viel Partes mehr als 360 zwischen den Marken enthalten seien. Dieser Überschuss, dividiert durch 360, ist die Constante m .

Man verstellt darauf das Instrument in die den ξ -Linien parallele Lage und vergleicht in derselben Weise die 360 mm der Schienentheilung mit der Anzahl Partes der ξ -Linie. Der Überschuss der letzteren, dividiert durch 360, ist die Constante l .

Man drückt, bei zu den ξ -Linien paralleler Aufstellung des Instrumentes, eine Marke in das Papier, rollt das Instrument über eine längere Strecke vorwärts und macht wieder eine Marke. Die beobachtete Abnahme der ξ -Coordinate von der ersteren zu der zweiten Marke, dividiert durch die Länge der zurückgelegten Strecke, ist die Constante ψ . Von dieser Operation einschließlich ab, darf die Aufstellung des Instrumentes selbstverständlich vor der Analyse nicht mehr geändert werden.

Man rollt das Instrument bis der Fahrstift auf der x' -Axe steht, stellt den Wagenindex auf den Strich 0, oder einen der benachbarten, der Schienentheilung ein und drückt eine Marke in das Papier; man beobachtet dann, um welchen Bruchtheil einer Pars die Marke entfernt ist nach rechts von dem zugehörigen Strich der ξ -Axe. Dieser Bruch, dividiert durch 360, ist die Constante p .

Die gleichen vier Operationen wiederholt man in umgekehrter Reihenfolge nach Schluss der Analyse.

Selbstverständlich kann man alle obigen Operationen auch so ausführen, dass man, anstatt den Index auf die Striche der Schienentheilung, die Fahrstiftspitze auf die Striche der Papiertheilung einstellt, die Nichtcoincidenzen dagegen an der Schiene beobachtet. Diese sind dann negativ zu nehmen.

Auch kann man offenbar, anstatt die Constanten h_n, σ_{n1} (nach 40.) getrennt von den Constanten l, p zu bestimmen, gleich die Verbindungen $h_n + 2n\pi l, \sigma_{n1} + 2n\pi p$ ermitteln; man modificiert zu diesem Zwecke das in 40. angegebene Verfahren insofern, dass man, anstatt den Index auf die Striche 0 und 360 der Schiene einzustellen, die Fahrstiftspitze auf die Striche 0 und 360 der Theilung der ξ -Axe einstellt.

Die Constante ω kann, wohl am bequemsten, während der Analyse selbst bestimmt werden. Man braucht zu diesem Zwecke nur, irgend eine der Sinusrollen über die Theilstrecke T (S. 153) der Umfahrungscontour abzulesen. Die Ablesung ist gleich $-\omega \cdot \frac{c}{\pi \text{ cm}}$.

48. Man sieht ein, dass (in erster Ordnung) nichts geändert wird, wenn man bei den Umfahrungen die Rückkehr vom Endpunkte zum Ausgangspunkte der Curve C , anstatt — wie früher angegeben — über die Strecke T und die x' -Axe, über die beiden anderen Seiten des auf diesen aufgebauten Parallelogramms ausführt.

Beispiel.

49. 1899 Juni 11. Probe-Analyse einer Sinusoide; untere Scheiben.

Es war die Curve $\eta = 10 \text{ Cm} \times \sin \frac{2\pi\xi}{\gamma}$ gezeichnet worden.

Die correcten Werte der Zahlen a_n, b_n sind hier also

$$a_n = 0, \quad b_1 = 10, \quad b_2 = b_3 = 0.$$

Es wurden vier Umfahrungen gemacht, die beiden letzten nach Veränderung der Anfangsablesungen der Rollen um 0.5 gegen die beiden ersten. Die Fehler $\gamma'_n, \gamma''_n, \gamma'_n, \gamma''_n$ habe ich diesmal nicht bei den Umfahrungen eliminiert. Zur Reduction sind daher die Formeln (72) anzuwenden. —

Der Analysator wurde behufs Bestimmung der Constante m parallel den η -Linien gestellt; es wurde, im Mittel aus Messungen in der Nähe der η -Axe und in der Nähe der Geraden $\xi = \gamma$, die Beziehung gefunden:

$$360 \text{ mm} = 359.29 \text{ Mm.}$$

Das Instrument wurde in die zur Ausführung der Umfahung geeignete Aufstellung gebracht. Es wurde, im Mittel aus directen Messungen in der Nähe der Geraden $\eta = -10$ Cm und solchen in der Nähe der Geraden $\eta = +10$ Cm, der Wert gefunden:

$$-\omega \frac{c}{\pi \text{ cm}} = -0.0025.$$

Befahrungen von y' -Linien in der Nähe der y' -Axe und solche in der Nähe der Geraden $x' = c$ lieferten, durch Beobachtungen des Verhaltens der Fahrstiftspitze relativ zu den η -Linien des Papiere, im Mittel

$$\psi = -\frac{0.04}{300} = -0.00013.^1$$

Die Kugeln wurden auf die Cylinder heruntergelassen. Befahrungen der y' -Linie, welche der Einstellung der Fahrstiftspitze auf den Strich 0 der ξ -Axe entsprach, und Mittel aus Befahrungen der beiden y' -Linien, welche den Einstellungen der Spitze auf die Striche -1 und $+1$ entsprachen, ergaben durch Beobachtungen der Cosinusrollen folgende Mittelwerte:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} + 2\pi p &= +0.00100, \\ \sigma_{21} + 2.2\pi p &= +0.00053, \\ \sigma_{31} + 3.2\pi p &= -0.00420.\end{aligned}$$

Die Verbindung derselben Beobachtungen mit den Beobachtungen, welche gemacht wurden bei unter analogen Einstellungen am anderen Ende des Zeichnungs-Intervalles ausgeführten Befahrungen, ergab:

$$\begin{aligned}h_1 + 2\pi l &= -0.0094, \\ h_2 + 2.2\pi l &= -0.0174, \\ h_3 + 3.2\pi l &= -0.0279.\end{aligned}$$

Bei den Umfahrungen selbst wurden folgende Ablesungen gefunden:

¹ Die Fehler ω , ψ (die der Beobachter im allgemeinen nicht durch die Aufstellung beliebig klein machen kann, da ihre Differenz durch das Papier bestimmt ist) sind nicht selten mehrere Male so groß, wie hier.

	Umfahrung		nach Umdrehung der Rollen:		Mittel
	I	II	III	IV	
	Umfahrung				
$\alpha_{11} =$	-0.022_3	-0.021_8	-0.036_9	-0.031_9	-0.0021
$\alpha_{12} =$	$+10.026_2$	$+10.017_2$	$+10.020_6$	$+10.019_9$	
$\alpha_{21} =$	$+0.007_2$	$+0.003_2$	-0.006_3	-0.000_8	
$\alpha_{22} =$	$+0.049_4$	$+0.043_4$	$+0.040_2$	$+0.036_7$	
$\alpha_{31} =$	$+0.001_5$	-0.010_3	-0.016_7	-0.011_6	
$\alpha_{32} =$	$+0.054_3$	$+0.055_8$	$+0.043_5$	$+0.040_8$	
$-\omega \frac{c}{\pi \text{ cm}} =$	-0.0020	-0.0032	-0.0023	-0.0010	

Nach Schluss der Analyse wurden die Constantenmessungen wiederholt und gefunden:

$$\psi = \frac{-0.08}{300} = -0.00026;$$

$$h_1 + 2\pi l = -0.0101,$$

$$h_2 + 2.2\pi l = -0.0184,$$

$$h_3 + 3.2\pi l = -0.0297;$$

$$\sigma_{11} + 2\pi p = +0.00155,$$

$$\sigma_{21} + 2.2\pi p = +0.0082,$$

$$\sigma_{31} + 3.2\pi p = -0.00505;$$

$$-\omega \frac{c}{\pi \text{ cm}} = -0.0014,$$

$$360 \text{ mm} = 359.31 \text{ Mm.}$$

Der Index an der Laufradtheilung zeigte, während der Fahrt auf der x' -Axe stand, 15° .

50. Diese Analyse soll jetzt reduciert werden. Die Zahlen α_n, β_n ($n = 1, 2, 3$) sind hier

$$\alpha_1 = -0.0282 \quad \alpha_2 = +0.0004 \quad \alpha_3 = -0.0031$$

$$\beta_1 = +10.0210 \quad \beta_2 = +0.0212 \quad \beta_3 = +0.0162.$$

Bei der Berechnung der Correctionsglieder in (72) dürfen selbstverständlich anstatt $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ die correcten Werte: $\alpha_0 = 0, \alpha_n = 0, \beta_1 = +10, \beta_2 = \beta_3 = 0$ eingesetzt werden.

Die Coefficienten A_n, B_n, A'_n, B'_n der Entwicklungen der Functionen $\cos \frac{\eta}{L}, \sin \frac{\eta}{L}$ von ξ sind hier leicht zu berechnen: es ist, wenn mit den Symbolen J die Bessel'schen Functionen bezeichnet werden,

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = 2J_2 \left(\frac{10}{2 \cdot 363} \right) = +0 \cdot 60, \quad B_n = 0$$

und

$$A'_n = 0, \quad B'_1 = 2J_1 \left(\frac{10}{2 \cdot 363} \right) = -0 \cdot 32, \quad B'_2 = 0, \quad B'_3 = 2J_3 \left(\frac{10}{2 \cdot 363} \right) = +0 \cdot 87.$$

Bildet man von den vor und nach den Umfahrungen gemessenen Constanten die für das Mittel der Umfahrungen geltenden Werte (für $-\omega \frac{c}{\pi \text{ cm}}$ wurde das Mittel aus den drei Werten $-0 \cdot 0025$, $-0 \cdot 0021$, $-0 \cdot 0014$ genommen) und entnimmt die Werte der nicht gemessenen der Tabelle in 39., wobei jedoch die Constanten $r'_n r''_n \kappa'_n \kappa''_n$ der Tabelle vorher auf die Anfangsablesung 15° des Laufrades [mittels der Formeln $r'_n(15^\circ) = r'_n(0^\circ) \cdot \cos 15^\circ - r''_n(0^\circ) \cdot \sin 15^\circ$, $r''_n(15^\circ) = r''_n(0^\circ) \cdot \cos 15^\circ + r'_n(0^\circ) \cdot \sin 15^\circ$] zu reducieren sind, — so erhält man folgende Zusammenstellung der Werte der vorkommenden Constanten:

$$\begin{array}{l} \epsilon' = +0 \cdot 0001, \quad \epsilon'' = -0 \cdot 0001, \quad \psi = -0 \cdot 00020, \quad -\omega \frac{c}{\pi \text{ cm}} = -0 \cdot 0020, \\ \hline r''_1 = -0 \cdot 0012, \quad r'_2 = -0 \cdot 0007, \quad r''_3 = -0 \cdot 0003 \\ r'_1 = -0 \cdot 0003, \quad r''_2 = +0 \cdot 0003, \quad r'_3 = +0 \cdot 0000 \\ \epsilon'_1 = -0 \cdot 0005, \quad \epsilon''_2 = -0 \cdot 0005, \quad \epsilon'_3 = +0 \cdot 0000 \\ h_1 + 2\pi l = -0 \cdot 0098, \quad h_2 + 2 \cdot 2 \pi l = -0 \cdot 0179, \quad h_3 + 3 \cdot 2 \pi l = -0 \cdot 0288. \\ m_{12} - m = +0 \cdot 00074 \\ \sigma'_{11} + 2\pi p \cdot 2 \frac{\pi \text{ cm}}{c} \alpha_0 \psi = +0 \cdot 00128 \end{array}$$

Die Correctionen zu α_n , β_n sind daher, für das Mittel der Umfahrungen, folgende:

$+ \alpha'_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\pi \text{ cm}} \right) B_n - \alpha''_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\pi \text{ cm}} \right) B'_n$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
	-0.0022	0	+0.0015
$- \alpha'_n \cdot \left(\frac{L}{\text{cm}} \right) A'_n - \alpha''_n \cdot \left(\frac{L}{\text{cm}} \right) A_n$	0	-0.0004	0
$+ \epsilon'_n \cdot n \alpha_{2n} - \epsilon''_n \cdot n (\beta_{2n} - \beta_n)$	-0.0050	0	0
$+ \epsilon' \cdot \left(\frac{2 \sin \frac{c}{2H}}{\pi} \alpha_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \alpha_{\nu} p_{\nu, n} \right) + \epsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \beta_{\nu} q_{\nu, n}$	-0.0002	-0.0003	+0.0003
$+ (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \beta_n + \frac{1}{n\pi} \left(\alpha_0 + \frac{3}{4} \alpha_n \right) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} \alpha_{\nu} \right\}$	+0.0490	0	0
$- (m_{n1} - m) \cdot \alpha_n$	0	0	0
$- \left(\sigma'_{n1} + 2n\pi p - 2n \frac{\pi \text{ cm}}{c} \alpha_0 \psi \right) \cdot \beta_n$	-0.0128	0	0
$+ \psi \cdot n \frac{\pi \text{ cm}}{c} D_n(\alpha, \beta)$	0	0	0
Summe.....	+0.0288	-0.0007	+0.0018;

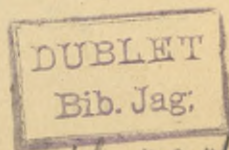
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$-\alpha''_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\pi \text{ cm}} \right) A_n + \alpha''_n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\pi \text{ cm}} \right) A'_n$	0	+0.0022	0
$-\alpha''_n \cdot \left(\frac{L}{\text{cm}} \right) B'_n - \alpha''_n \cdot \left(\frac{L}{\text{cm}} \right) B_n$	-0.0002	0	-0.0000
$+\varepsilon'_n \cdot n \beta_{2n} + \varepsilon''_n \cdot n (\alpha_{2n} - \alpha_n)$	0	0	0
$-\varepsilon'_n \cdot \frac{1}{\pi} \sum_y \beta_y S_{y,n} + \varepsilon''_n \cdot \frac{1}{\pi} \sum_y \alpha_y r'_{y,n}$	+0.0000	+0.0002	-0.0002
$+(h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \alpha_n + \frac{1}{4n\pi} \beta_n - \frac{1}{\pi} \sum_{y \neq n} \frac{y}{y^2 - n^2} \beta_y \right\}$	-0.0078	-0.0190	-0.0114
$-(m_{n2} - m) \cdot \beta_n$	-0.0074	0	0
$+(\sigma'_{n2} + 2n\pi p - 2n \frac{\pi \text{ cm}}{c} \alpha_0 \psi) \cdot \alpha_n$	0	0	0
$-\psi \cdot n \frac{\pi \text{ cm}}{c} C_n(\alpha, \beta) - \omega \cdot \frac{1}{n} \frac{c}{\pi \text{ cm}}$	-0.0020	-0.0027	-0.0006
Summe.....	-0.0174	-0.0193	-0.0122.

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} a_1 &= +0.0006 & a_2 &= -0.0003 & a_3 &= -0.0013 \\ b_1 &= +10.0036 & b_2 &= +0.0019 & b_3 &= +0.0040. \end{aligned}$$

Lässt man jetzt in den Resultaten die letzte Stelle fort, so hat man die folgende vergleichende Zusammenstellung:

	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
Correcte Werte	0	+10.000	0	0	0	0
Rohe Werte (α_{11}, β_{11})	-0.029	+10.021	+0.000	+0.021	-0.003	+0.017
Reducierte Werte	+0.001	+10.004	-0.000	+0.002	-0.001	+0.004.



Sp. 122 54.

10-2

86-5

1961

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

2824

13. IX. 54

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297572

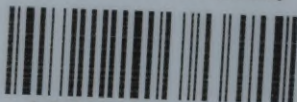
B

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-2824

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297572