

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw. ~~381~~



SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 65

# Sammlung Bösch

Unser heutiges Wissen in kurzen,  
klaren, allgemeinverständlichen  
Einzeldarstellungen

Zweck und Ziel der „Sammlung Bösch“ ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296057





381  
Sammlung Göschen

---

# Analytische Geometrie der Ebene

Von

**Dr. Robert Haubner**

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 60 Figuren im Text



W a l t e r d e G r u y t e r & C o .

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-  
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

Berlin 1934 Leipzig

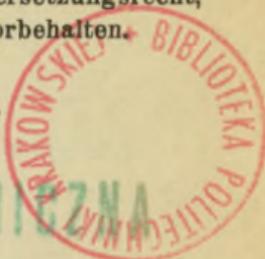
By/2  
68.

KD 516(023)

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,  
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Archiv-Nr. 110065.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW



~~I 381~~

I-301388

Druck von C. G. Röder A.-G., Leipzig.

Akc. Nr.

BPK-B 12/1907  
~~7749/50~~

# Inhalt.

	Seite
<b>1. Abschnitt. Geometrie in der Geraden.</b>	
1. Strecken und Winkel . . . . .	5
2. Koordinaten . . . . .	8
3. Teilverhältnis einer Strecke . . . . .	9
4. Doppelverhältnis . . . . .	11
5. Harmonische Punkte und Strahlen . . . . .	14
<b>2. Abschnitt. Koordinatensysteme der Ebene und Grundformeln.</b>	
6. Parallelkoordinaten . . . . .	15
7. Polarkoordinaten . . . . .	18
8. Hilfssatz über Projektionen . . . . .	19
9. Transformation von Parallel- in Polarkoordinaten und umgekehrt	20
10. Transformation zwischen Parallelkoordinaten . . . . .	23
11. Länge und Richtung einer Strecke; Teilverhältnis . . . . .	26
12—14. Flächeninhalt von Dreiecken und Vielecken . . . . .	27
15. Aufgabe der analytischen Geometrie . . . . .	31
<b>3. Abschnitt. Die gerade Linie.</b>	
16. Die Gerade mit gegebener Richtung durch einen gegebenen Punkt .	32
17. Die Gerade durch zwei Punkte . . . . .	33
18. Normalgleichung . . . . .	34
19. Allgemeine Gleichung . . . . .	36
20. Senkrechter Abstand eines Punktes von einer Geraden . . . . .	38
21. Winkel zweier Geraden . . . . .	39
22. Schnittpunkt zweier Geraden . . . . .	41
23. Strahlenbüschel . . . . .	42
24. Dreieckssätze . . . . .	44
25. Sätze von Ceva und Menelaos . . . . .	47
26. Das vollständige Viereck . . . . .	49
<b>4. Abschnitt. Kurven zweiter Ordnung.</b>	
27. Geometrische Örter . . . . .	52
28. Allgemeine Gleichung zweiten Grades . . . . .	55
29. Mittelpunkt im Endlichen und Durchmesser . . . . .	57
30. Achsen. Bedingungen, daß die Kurve ein Kreis ist . . . . .	59
31. Mittelpunkt im Unendlichen. Klassifikation der Kurven zweiter Ordnung	63
32. Tangente und Polare . . . . .	66
33. Asymptoten. Konjugierte Durchmesser . . . . .	69
<b>5. Abschnitt. Gestalt der Kurven zweiter Ordnung.</b>	
34. Ellipse . . . . .	71
35. Hyperbel . . . . .	76
36. Parabel . . . . .	80

	Seite
6. Abschnitt. Tangenten und Polaren.	
37. Konstruktion für alle drei Kegelschnittarten . . . . .	82
38. Kreis, Ellipse und Hyperbel . . . . .	83
39. Asymptotensätze der Hyperbel . . . . .	85
40. Parabel . . . . .	88
7. Abschnitt. Konjugierte Durchmesser.	
41. Allgemeine Konstruktion konjugierter Durchmesser . . . . .	89
42. Ellipse und Hyperbel . . . . .	90
43. Sätze über konjugierte Durchmesser und Asymptoten . . . . .	96
44. Parabel . . . . .	101
8. Abschnitt. Brennpunkte und Leitlinien.	
45. Ellipse und Hyperbel . . . . .	103
46. Sätze . . . . .	106
47. Parabel . . . . .	109
48. Sätze für Ellipse, Hyperbel und Parabel . . . . .	111
49. Die Kurven zweiter Ordnung als Kegelschnitte . . . . .	112
9. Abschnitt. Die Potenz eines Kegelschnittes.	
50. Definition der Potenz . . . . .	117
51. Satz von Pascal . . . . .	119
52. Satz von Brianchon . . . . .	120
53. Konstruktion eines Kegelschnittes aus fünf Punkten oder fünf Tangenten . . . . .	122
54. Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis. Potenzlinie zweier und Potenzpunkt dreier Kreise . . . . .	124
55. Kreisbüschel und Kreisnetze . . . . .	128
10. Abschnitt. Der Punkt.	
56. Linienkoordinaten . . . . .	132
57. Gleichung eines Punktes . . . . .	133
58. Zwei Gerade, gegeben durch ihre Linienkoordinaten . . . . .	135
59. Zwei durch ihre Gleichungen gegebene Punkte . . . . .	137
60. Punktreihe . . . . .	138
61. Transformation von Linienkoordinaten . . . . .	141
11. Abschnitt. Kurven zweiter Klasse.	
62. Allgemeine Gleichung einer Kurve zweiter Klasse . . . . .	143
63. Berührungspunkt einer Tangente . . . . .	144
64. Die Kegelschnitte als Hüllkurven . . . . .	146
65. Überführung der Linien- in Punktkoordinaten für eine spezielle Kegelschnittgleichung . . . . .	147
66. Zerfallende Kurven zweiter Klasse . . . . .	149
67. Identität der nicht zerfallenden Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse . . . . .	151
12. Abschnitt. Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen von Kreisen.	
68. Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise . . . . .	154
69. Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise . . . . .	157
70. Das Apollonische Berührungsproblem . . . . .	161
Sachregister . . . . .	163

## 1. Abschnitt.

### Geometrie in der Geraden.

#### 1. Strecken und Winkel.

I. Die Strecke  $P_1P_2$  einer Geraden  $g$  heißt eine gerichtete Strecke und wird mit  $\overrightarrow{P_1P_2}$  bezeichnet, wenn nicht nur ihre absolute Länge  $P_1P_2$ , sondern auch ihre Richtung in Betracht gezogen wird. Der erste Buchstabe einer gerichteten Strecke soll stets den Anfangs-, der zweite den Endpunkt bezeichnen. Demnach kann die gerichtete Strecke  $\overrightarrow{P_2P_1}$  nicht mit  $\overrightarrow{P_1P_2}$  identisch sein; sie hat zwar die gleiche absolute Länge, aber die entgegengesetzte Richtung. Trägt man an den Endpunkt  $P_2$  von  $\overrightarrow{P_1P_2}$  die gerichtete Strecke  $\overrightarrow{P_2P_1}$  an, so fällt der Endpunkt der letzteren mit dem Anfangspunkte der ersteren zusammen. Man erhält also

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_1} = 0 \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_2P_1},$$

während ohne Berücksichtigung der Richtung  $P_1P_2 + P_2P_1 = 2P_1P_2 = 2P_2P_1$  ist. Bezeichnet man die eine Richtung der Geraden  $g$ , z. B. die von  $P_1$  nach  $P_2$ , als die positive Richtung, so wird man im Sinne der vorstehenden Gleichung die entgegengesetzte als die negative benennen. Die positive Richtung einer Geraden soll in den Figuren durch eine Pfeilspitze angedeutet werden.

Durch bloße Parallelverschiebung können nun zwei Strecken einer Geraden  $g$  von gleicher Länge und gleicher Richtung zur Deckung gebracht werden. Das gleiche gilt

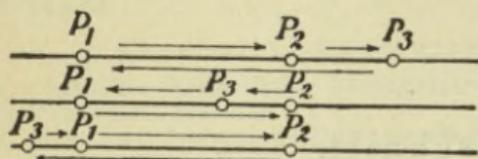


Fig. 1.

auch noch für zwei gerichtete Strecken in parallelen und gleichgerichteten Geraden.

Aus der Definition der gerichteten Strecke folgt sofort weiter, daß für

drei Punkte einer Geraden  $g$ , mögen sie zu einander liegen, wie sie wollen (Fig. 1), stets die Gleichung gilt:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} + \overrightarrow{P_3 P_1} = 0 \text{ oder } \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} = \overrightarrow{P_1 P_3}.$$

Diese Beziehung läßt sich auf beliebig viele Punkte ausdehnen; es muß nur der Endpunkt jeder Strecke der Anfangspunkt der nächstfolgenden, der Endpunkt der letzten Strecke der Anfangspunkt der ersten sein:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} + \overrightarrow{P_3 P_4} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1} P_n} + \overrightarrow{P_n P_1} = 0.$$

II. Um den von zwei sich schneidenden Geraden (Strahlen)  $g_1$  und  $g_2$  gebildeten Winkel unzweideutig bestimmen zu

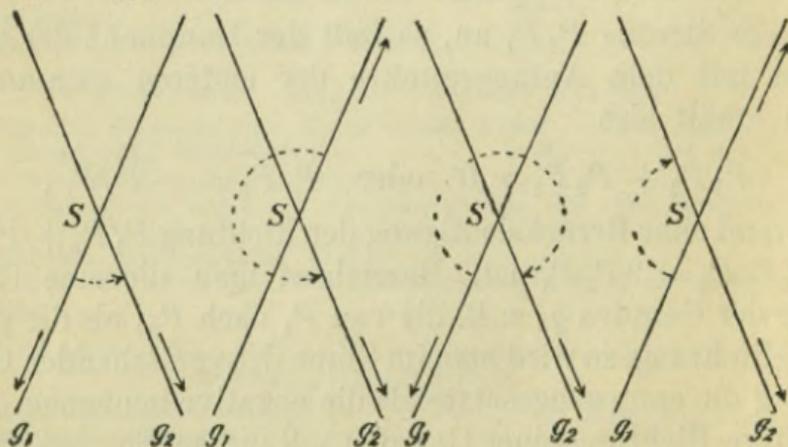


Fig. 2.

können, setzt man zunächst für jede Gerade die positive Richtung und ferner für die Ebene ( $g_1 g_2$ ) den positiven Drehsinn willkürlich fest. Dann soll  $\sphericalangle g_1 g_2$  oder  $\sphericalangle (g_1, g_2)$  den Winkel bezeichnen, um den man den Strahl  $g_1$  in positivem Sinne um den Schnittpunkt  $S$  von  $g_1$  und  $g_2$  drehen muß, bis er mit dem Strahle  $g_2$  so zusammenfällt, daß sich auch die positiven Richtungen decken. Die Figur 2 veranschaulicht die verschiedenen Möglichkeiten; die den Kreisbögen angefügte Pfeilspitze gibt den positiven Drehsinn und zugleich  $\sphericalangle g_1 g_2$  an. Für jede mögliche Annahme aber gilt stets<sup>1)</sup>

$$\sphericalangle g_1 g_2 + \sphericalangle g_2 g_1 = 2\pi$$

und mithin

$$\sin g_1 g_2 = -\sin g_2 g_1, \quad \cos g_1 g_2 = +\cos g_2 g_1.$$

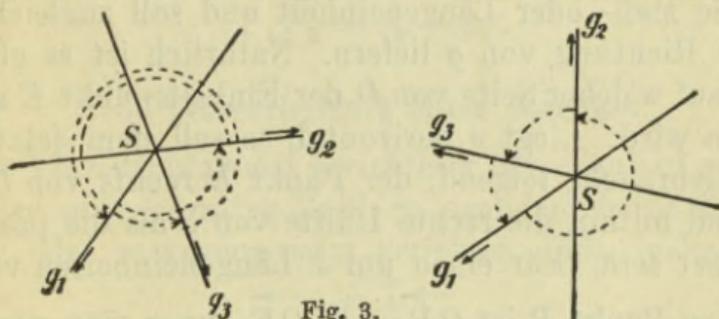


Fig. 3.

Die Beziehungen zwischen drei und mehr in gleichem Drehsinne gemessenen Winkeln (Fig. 3), die den obigen Beziehungen zwischen drei und mehr gerichteten Strecken entsprechen, sind:

$$\sphericalangle g_1 g_2 + \sphericalangle g_2 g_3 + \sphericalangle g_3 g_1 = k \cdot 2\pi$$

$$\sphericalangle g_1 g_2 + \sphericalangle g_2 g_3 + \dots + \sphericalangle g_{n-1} g_n + \sphericalangle g_n g_1 = k \cdot 2\pi,$$

wo  $k$  eine positive ganze Zahl bezeichnet, die nach der

<sup>1)</sup> Erklärung von Bogenmaß: Da der Winkel sich zur Ebene verhält wie jeder Bogen zwischen seinen Schenkeln, dessen Zentrum im Scheitel des Winkels liegt, zum Vollkreise, so hat man, wenn  $l$  der Bogen des Winkels auf dem Einheitskreise (Kreis mit der Längeneinheit als Radius),  $\varphi$  die Zahl der Grade desselben

Winkels und  $\pi$  die Ludolphsche Zahl bedeuten:  $\varphi : 360 = l : 2\pi$ , also  $l = \pi \cdot \frac{\varphi}{180}$ .

Man nennt  $l$  das Bogenmaß des Winkels, das man aus dem Gradmaß durch

Größe der Winkel verschiedene Werte hat. Welches aber auch der Wert von  $k$  sein mag, stets ist

$$\sin(g_1 g_2 + g_2 g_3) = -\sin(g_3 g_1), \quad \cos(g_1 g_2 + g_2 g_3) = \cos(g_3 g_1).$$

Als positiver Drehsinn soll weiterhin stets der dem Drehsinn des Uhrzeigers entgegengesetzte gewählt werden.

## 2. Koordinaten.

Um die Lage eines Punktes  $P$  auf der Geraden  $g$  bestimmen zu können, wählt man auf  $g$  einen festen Punkt  $O$  als Null- oder Anfangspunkt und einen zweiten festen Punkt  $E$  als Einheitspunkt; die gerichtete Strecke  $\overrightarrow{OE}$  gibt dann die Maß- oder Längeneinheit und soll zugleich die positive Richtung von  $g$  liefern. Natürlich ist es gleichgültig, auf welcher Seite von  $O$  der Einheitspunkt  $E$  angenommen wird. Liegt  $g$  horizontal, so soll dem jetzt üblichen Gebrauche folgend, der Punkt  $E$  rechts von  $O$  gelegen und mithin die rechte Hälfte von  $g$  als die positive bezeichnet sein. Für einen um  $x$  Längeneinheiten von  $O$  entfernten Punkt  $P$  ist  $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OE}$ , wo  $x$  eine positive oder negative Zahl ist, je nachdem  $P$  auf der positiven oder negativen Hälfte von  $g$  liegt. Die so einem Punkte  $P$  zugeordnete Zahl von  $x$  Längeneinheiten heißt seine Koor-

Multiplikation mit  $\frac{\pi}{180}$  erhält. Hierbei ist für jede Minute des Gradmaßes  $\frac{1}{60}$

Grad und für jede Sekunde  $\frac{1}{60 \cdot 60}$  Grad zu setzen, also z. B. für einen Winkel

von  $20^\circ 11' 7''$  die Gradzahl  $\varphi = 20 + \frac{11}{60} + \frac{7}{60 \cdot 60} = \frac{72667}{3600}$ . Die folgende

Tafel gibt für einige ausgezeichnete Winkel das Bogenmaß:

Gradmaß:	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$	$720^\circ$
Bogenmaß:	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$4\pi$

ordinate, die durch seine Lage eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt aber bestimmt eine positive oder negative Zahl  $x$  als Koordinate einen und nur einen Punkt  $P$  auf  $g$ .

Soll der Nullpunkt in einen anderen Punkt  $O'$  auf  $g$ , dem die Koordinate  $x_0$  zukommt, verlegt und von ihm aus die Koordinate  $x'$  eines Punktes  $P$  gemessen werden, so folgt aus  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ :

$$(1) \quad x = x_0 + x', \quad x' = x - x_0.$$

Die gleiche Überlegung liefert auch die Länge einer Strecke  $\overrightarrow{P_1P_2}$ , ausgedrückt durch die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  ihrer Begrenzungspunkte:  $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$ , also

$$(2) \quad \overrightarrow{P_1P_2} = x_2 - x_1.$$

### 3. Teilverhältnis einer Strecke.

Das Verhältnis zweier gerichteter Strecken auf  $g$  ist eine positive oder negative Zahl, je nachdem beide Strecken gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Insbesondere

ist das Teilverhältnis  $\frac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{P_1P_2}} = \kappa$  eines Punktes  $P$  der

Strecke  $P_1P_2$  eine positive Zahl, wenn  $P$  ein innerer, d. h. zwischen  $P_1$  und  $P_2$  gelegener Punkt ist, dagegen eine negative Zahl, wenn  $P$  ein außerhalb der Strecke  $P_1P_2$  gelegener (äußerer) Punkt der Geraden  $g$  ist.

Läßt man  $P$  die ganze (unendlich lange) Gerade  $g$  durchlaufen, so nimmt  $\kappa$  alle Zahlenwerte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  an. Fällt nämlich  $P$  mit  $P_1$  zusammen, so ist  $\kappa$  gleich Null; wandert dann  $P$  von  $P_1$  nach  $P_2$ , so wächst  $P_1P$ , während  $PP_2$  abnimmt, und folglich durchläuft  $\kappa$  stetig alle positiven Zahlen bis  $+\infty$ . Für den Halbierungspunkt  $H$  ist

$\kappa = 1$ . Ist  $P$  ein äußerer Punkt, so ist  $P_1 P >$  bzw.  $< P P_2$ , je nachdem  $P$  über  $P_2$  oder über  $P_1$  hinaus liegt. In dem ersteren Falle hat  $\kappa$  Werte  $< -1$ , die mit der Annäherung von  $P$  an  $P_2$  gegen  $-\infty$  streben, während in dem zweiten Falle die Werte von  $\kappa$  zwischen 0 und  $-1$  liegen. Wenn  $P$  unendlich fern liegt, sei es auf der Seite von  $P_1$  oder auf der von  $P_2$ , so ist

$$\kappa = \frac{\overrightarrow{P_1 P}}{\overrightarrow{P P_2}} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P}}{\overrightarrow{P P_2}} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{\overrightarrow{P P_2}} - 1 = -1,$$

da  $P_1 P_2$  endlich,  $P P_2$  aber unendlich groß,  $\overrightarrow{P_1 P_2} : \overrightarrow{P P_2}$  daher  $= 0$  ist.

Bedient man sich der Ausdrucksweise, daß jede Gerade nur einen unendlich fernen Punkt besitzt — welche Ausdrucksweise sich stets als sehr zweckmäßig erweisen wird —, so entspricht jedem Punkte  $P$  der durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gehenden Geraden  $g$  ein bestimmter Zahlenwert des Teilverhältnisses  $\overrightarrow{P_1 P} : \overrightarrow{P P_2}$ , — wenn noch die beiden Grenzwerte  $+\infty$  und  $-\infty$ , die dem Falle  $P = P_2$  zugehören, für das Teilverhältnis als gleichbedeutend angesehen werden — und umgekehrt entspricht jedem Werte von  $\kappa$  ein bestimmter Punkt  $P$ . Der unendlich ferne Punkt einer Geraden wird auch als uneigentlicher Punkt und das Teilungsverhältnis  $\pm\infty$  als uneigentliche Zahl bezeichnet.

Mit Benutzung der sich nach (2) für  $\overrightarrow{P_1 P}$  und  $\overrightarrow{P P_2}$  ergebenden Ausdrücke  $x - x_1$  und  $x_2 - x$  erhält man aus  $\kappa = \overrightarrow{P_1 P} : \overrightarrow{P P_2}$  als Wert der Koordinate  $x$  von  $P$ :

$$(3) \quad x = \frac{x_1 + \kappa x_2}{1 + \kappa}, \quad \kappa = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

## 4. Doppelverhältnis.

Sehr häufig ist es vorteilhafter, drei feste Punkte einer Geraden  $g$  zu benutzen, um einen vierten Punkt zu bestimmen. Dies gilt besonders für die Bestimmung eines vierten Strahles durch einen Punkt  $S$  in bezug auf drei feste Strahlen.

Man versteht unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden  $P_1, P_2, P_3, P_4$  den Quotienten der beiden Teilverhältnisse

$$\frac{\overrightarrow{P_1 P_3}}{\overrightarrow{P_3 P_2}} : \frac{\overrightarrow{P_1 P_4}}{\overrightarrow{P_4 P_2}} = \kappa_1 : \kappa_2 = \nu$$

und bezeichnet es durch  $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ , wo die Reihenfolge der Punkte für den Wert des Doppelverhältnisses wesentlich ist<sup>1)</sup>.

Unter dem Doppelverhältnis von vier durch einen Punkt  $S$  gehenden Strahlen  $g_1, g_2, g_3, g_4$  eines Strahlenbüschels versteht man entsprechend den Quotienten

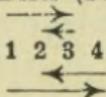
$$\frac{\sin g_1 g_3}{\sin g_3 g_2} : \frac{\sin g_1 g_4}{\sin g_4 g_2} = \kappa_1 : \kappa_2 = \nu$$

und bezeichnet es mit  $(g_1 g_2 g_3 g_4)$ . Die Winkel werden in der früher angegebenen Weise bestimmt, wobei es aber jetzt, wie man sich leicht überzeugt, gleichgültig ist, welche Richtung eines jeden Strahles man als die positive wählt.

Sind drei  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte } P_1, P_2, P_3 \text{ auf einer Geraden } g \\ \text{Strahlen } g_1, g_2, g_3 \text{ durch einen Punkt } S \end{array} \right\}$  fest,

<sup>1)</sup> Für die Definition des Doppelverhältnisses (1 2 3 4) von vier Punkten

oder Geraden merke man sich das Schema 1 2 3 4.



so gehört jedem beliebigen vierten  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte } P_4 \\ \text{Strahle } g_4 \end{array} \right\}$  ein bestimmter Wert  $\nu$  des Doppelverhältnisses zu, und umgekehrt entspricht jedem Werte von  $\nu$  ein und nur ein  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt } P_4 \text{ auf } g \\ \text{Strahl } g_4 \text{ durch } S \end{array} \right\}$ . Denn durchläuft der Punkt  $P_4$  die Gerade  $g$ , bzw. dreht sich der Strahl  $g_4$  um  $S$ , so nimmt  $\alpha_2$  und folglich auch — aber in anderer Ordnung — der Quotient  $\alpha_1 : \alpha_2 = \nu$ , da  $\alpha_1$  eine bestimmte endliche Zahl ist, alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  an. Ist aber umgekehrt  $\nu$  gegeben, so kann man den zugehörigen Punkt  $P_4$  oder Strahl  $g_4$  eindeutig bestimmen auf Grund der Gleichung

$$\alpha_2 = \frac{\overrightarrow{P_1 P_4}}{\overrightarrow{P_4 P_2}} = \frac{1}{\nu} \frac{\overrightarrow{P_1 P_3}}{\overrightarrow{P_3 P_2}}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin g_1 g_4}{\sin g_4 g_2} = \frac{1}{\nu} \frac{\sin g_1 g_3}{\sin g_3 g_2}.$$

Aus der Definition von  $(P_1 P_2 P_3 P_4)$  folgt

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_3 P_4 P_1 P_2).$$

Es ordnen sich also die vier Elemente eines Doppelverhältnisses zu zwei gleichberechtigten Paaren an, die miteinander vertauscht werden können. Die Elemente eines jeden

Paares heißen konjugiert.

Schneidet man (Fig. 4) vier Strahlen  $g_1, g_2, g_3, g_4$  mit einer beliebigen Geraden  $g$  in den Punkten  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , so kann der zweifache Flächen-

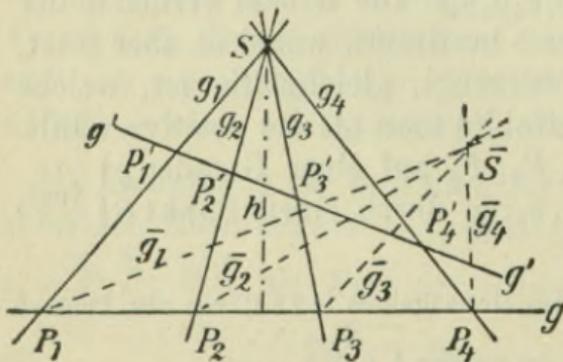


Fig. 4.

inhalt der Dreiecke  $P_1P_3S$  und  $P_3P_2S$  in doppelter Weise dargestellt werden:

$$\begin{aligned} P_1P_3S &= P_1P_3 \cdot h = P_1S \cdot P_3S \cdot \sin g_1g_3, \\ P_3P_2S &= P_3P_2 \cdot h = P_3S \cdot P_2S \cdot \sin g_3g_2, \end{aligned}$$

wo  $h$  die gemeinsame Höhe beider Dreiecke ist. Dann ist auch dem Vorzeichen nach richtig die Gleichung:

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_3}}{\overrightarrow{P_3P_2}} = \frac{P_1S}{P_2S} \cdot \frac{\sin g_1g_3}{\sin g_3g_2}, \quad (a)$$

wo für  $P_1S, P_2S$  die absoluten Längen dieser Strecken zu nehmen sind.

$$\text{Analog} \quad \frac{\overrightarrow{P_1P_4}}{\overrightarrow{P_4P_2}} = \frac{P_1S}{P_2S} \cdot \frac{\sin g_1g_4}{\sin g_4g_2}.$$

$$\text{Daher ist} \quad (P_1P_2P_3P_4) = (g_1g_2g_3g_4).$$

Da  $g$  beliebig gezogen war, so gilt für eine andere Gerade  $g'$  und ihre Schnittpunkte  $P'_q$  mit  $g_q$  ( $q=1, 2, 3, 4$ )

$$(P'_1P'_2P'_3P'_4) = (g_1g_2g_3g_4)$$

und für vier andere Strahlen durch die Punkte  $P$  und einen beliebigen Punkt  $\bar{S}$ :

$$(P_1P_2P_3P_4) = (\bar{g}_1\bar{g}_2\bar{g}_3\bar{g}_4),$$

also auch

$$(P_1P_2P_3P_4) = (P'_1P'_2P'_3P'_4), \quad (g_1g_2g_3g_4) = (\bar{g}_1\bar{g}_2\bar{g}_3\bar{g}_4).$$

D. h.: Das Doppelverhältnis von vier Strahlen ist gleich dem ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden. Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden  $g$  ist gleich dem ihrer Zentral-Projektionen von einem Punkte  $S$  aus auf eine andere Gerade  $g'$ . Schneiden sich vier von einem Punkte  $S$  ausgehende Strahlen mit vier von einem anderen Punkte  $\bar{S}$  ausgehenden in

Punkten einer Geraden, so sind die Doppelverhältnisse der ersten und der zweiten vier Strahlen gleich.

Unter der Zentral-Projektion eines Punktes  $P$  einer Geraden  $g$  von einem Punkte (Zentrum)  $S$  auf eine Gerade  $g'$  versteht man den Schnittpunkt  $P'$  von  $SP$  mit  $g'$ .

### 5. Harmonische Punkte und Strahlen.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall  $\kappa_2 = -\kappa_1$ , also  $\nu = -1$ , in welchem Falle man von vier harmonischen Punkten, bzw. Strahlen, spricht. Da dann die Teilverhältnisse der Elemente 3, 4 (also entweder  $P_3, P_4$  oder  $g_3, g_4$ ) entgegengesetzt gleich sind, so trennen von vier harmonischen Elementen die Elemente des einen Paares die des anderen.

Sind vier Punkte  $P_\rho$  durch ihre Koordinaten  $x_\rho$  ( $\rho = 1, 2, 3, 4$ ) gegeben, so ergibt sich aus (3) für ihr Doppelverhältnis

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4},$$

woraus man für vier harmonische Punkte die Bedingung erhält:

$$2(x_1 x_2 + x_3 x_4) - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0.$$

Für  $x_4 = \infty$  ergibt diese Bedingungsgleichung  $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,

und umgekehrt kann sie für diesen Wert von  $x_3$  nur durch  $x_4 = \infty$  erfüllt werden. Daher: zum Halbierungspunkte  $P_3$  einer Strecke  $P_1 P_2$  gehört als konjugierter harmonischer Punkt der unendlich ferne Punkt der Geraden. Ferner:

Halbiert von vier harmonischen Strahlen  $g_3$  den von  $g_1$  und  $g_2$  gebildeten Winkel, so steht sein kon-

jugierter Strahl  $g_4$  auf ihm senkrecht und umgekehrt.

Denn aus  $\frac{\sin g_1 g_4}{\sin g_4 g_2} = -\frac{\sin g_1 g_3}{\sin g_3 g_2} = -1$  folgt  $\sin g_1 g_4 = \sin g_2 g_4$ , was, da  $g_4$  nicht mit  $g_3$  zusammenfallen kann, nur möglich ist für  $\sphericalangle g_1 g_4 = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle g_1 g_3$ ,  $\sphericalangle g_2 g_4 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle g_3 g_2$ . Aus diesen letzteren Werten aber folgt wieder  $\sphericalangle g_1 g_3 = \sphericalangle g_3 g_2$ .

## 2. Abschnitt.

### Koordinatensysteme der Ebene und Grundformeln.

#### 6. Parallelkoordinaten.

Um die Punkte einer Ebene zu bestimmen, legt man in ihr zwei sich schneidende Gerade als Achsen zugrunde, wählt ihren Schnittpunkt  $O$  als Nullpunkt und bestimmt auf jeder Achse die Punkte in der im vorigen Abschnitte behandelten Weise bei gemeinsamer Längeneinheit<sup>1)</sup>. Zum Unterschiede bezeichnet man die Koordinaten auf der zweiten Achse mit  $y$  und nennt dementsprechend die erste Achse  $X$ - oder Abszissenachse, die zweite  $Y$ - oder Ordinatenachse. Die  $x$ -Koordinaten heißen auch Abszissen, die  $y$ -Koordinaten Ordinaten. Beide Achsen bilden das Koordinatensystem. Zieht man dann durch einen Punkt  $P$  zu den Achsen die Parallelen  $PA$  und  $PB$ , so ist  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OA} = x$ ,  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB} = y$ , und man nennt diese Strecken die Koordinaten des Punktes  $P$ ,  $\overrightarrow{OA}$

<sup>1)</sup> Zur zeichnerischen Darstellung nimmt man unter Umständen für die beiden Achsen verschiedene Längeneinheiten an; so wählt man z. B., wenn die Ordinaten einzelner Punkte gegenüber ihren Abszissen sehr groß sind, die Längeneinheit auf der  $y$ -Achse nur gleich einem geeigneten Bruchteile der Längeneinheit auf der  $X$ -Achse.

oder  $\overrightarrow{BP}$  seine Abszisse,  $\overrightarrow{OB}$  oder  $\overrightarrow{AP}$  seine Ordinate. Sind die Koordinaten  $x, y$  gegeben, so erhält man den zugehörigen Punkt  $P$ , indem man auf der  $X$ -Achse  $\overrightarrow{OA} = x$ , auf der  $Y$ -Achse  $\overrightarrow{OB} = y$  konstruiert und durch  $A$  und  $B$  die Parallelen zu den Achsen zieht oder z. B. nur  $\overrightarrow{OA} = x$  konstruiert, durch  $A$  die Parallele zur  $Y$ -Achse zieht und auf ihr  $\overrightarrow{AP} = y$  abträgt. Den Punkt  $P$  bezeichnet man, wenn man auch seine Koordinaten angeben will:  $P(x, y)$  oder auch kurz nur  $(x, y)$ .

Der Null- oder Anfangspunkt hat die Koordinaten  $0, 0$ ; jeder andere Punkt der Abszissenachse die Ordinate  $0$ , während die Abszisse  $x \neq 0$  ist<sup>1)</sup>, und jeder andere Punkt der Ordinatenachse eine von Null verschiedene Ordinate, aber die Abszisse  $0$ . Der Winkel  $w = \sphericalangle(+X, +Y)$  soll auch stets in positivem Drehsinn gemessen werden und heißt der Koordinatenwinkel; für  $w$  kann jeder Wert zwischen  $0$  und  $2\pi$ , mit Ausnahme von  $\pi$ , genommen werden. Die beiden Koordinatenachsen teilen die ganze Ebene in vier Felder, die in positivem Drehsinne mit  $1, 2, 3, 4$  bezeichnet werden mögen. Ist  $w = \frac{\pi}{2}$ , so heißen die vier Felder

Quadranten. Die Vorzeichen der Koordinaten eines Punktes sind nach seiner Lage in den vier Feldern in der folgenden Tafel für  $w < \pi$  zusammengestellt:

Feld	1	2	3	4
$x$	+	—	—	+
$y$	+	+	—	—

Für die Punkte eines jeden Feldes ist also eine bestimmte

<sup>1)</sup> Das Zeichen  $\neq$  bedeutet „nicht gleich“.

Vorzeichenkombination ihrer Koordinaten charakteristisch, wie dies auch die Fig. 5a veranschaulicht, in der die Koordinaten der vier Punkte  $P, P', P'', P'''$  gleiche Zahlenwerte

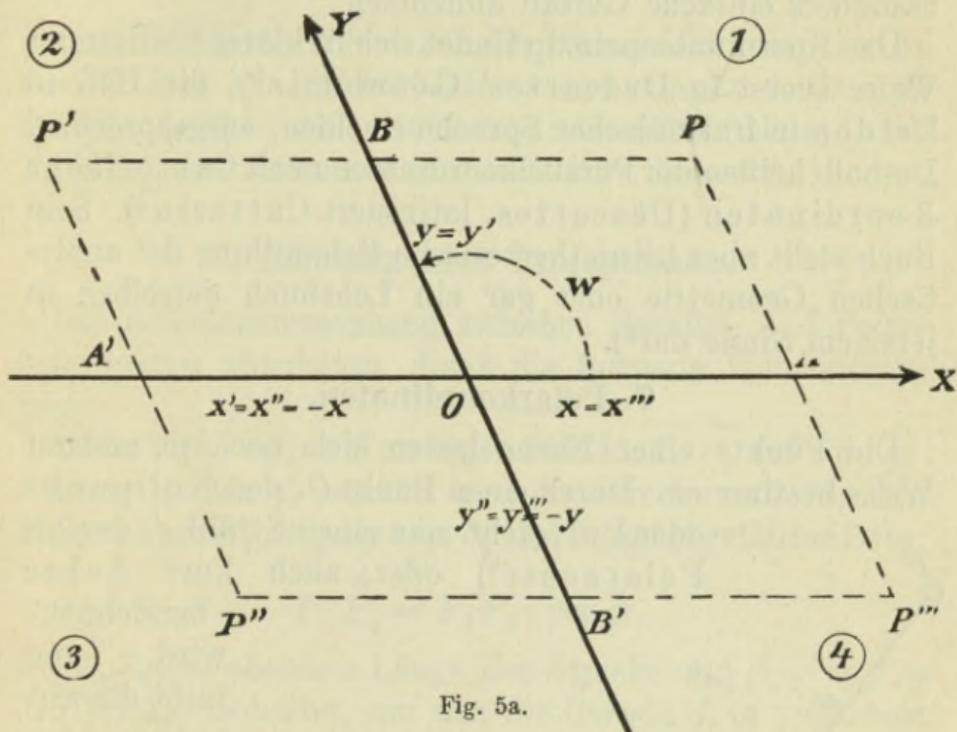


Fig. 5a.

haben und sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden. Für  $w > \pi$  gilt dieselbe Tafel, wenn die Feldnummern in der Reihenfolge 4, 3, 2, 1 aufeinanderfolgen.

Die hier zur Ortsbestimmung verwandten Koordinaten heißen wegen der charakteristischen Figur  $OABP$  Parallelkoordinaten, die man noch als schiefwinklige oder rechtwinklige unterscheidet, je nachdem  $w \neq \frac{\pi}{2}$  oder  $w = \frac{\pi}{2}$  ist. Den Wert von  $w$  wählt man so, daß das Koordinatensystem sich für die jeweilige Aufgabe besonders eig-

net; in vielen Fällen wird dies für  $w = \frac{\pi}{2}$  der Fall sein, schon deshalb, weil dann die meisten Grundformeln eine besonders einfache Gestalt annehmen.

Das Koordinatenprinzip findet sich in klarer bestimmter Weise zuerst in Descartes' *Géométrie*<sup>1)</sup>, die 1637 in Leiden in französischer Sprache erschien, ausgesprochen. Deshalb heißen die Parallelkoordinaten auch Cartesische Koordinaten (Descartes, latinisiert Cartesius). Sein Buch stellt aber keine theoretische Behandlung der analytischen Geometrie oder gar ein Lehrbuch derselben in jetzigem Sinne dar<sup>2)</sup>.

### 7. Polarkoordinaten.

Die Punkte einer Ebene lassen sich noch in anderer Weise bestimmen. Durch einen Punkt  $O$ , den Nullpunkt oder Pol, zieht man einen Strahl  $s$ , der als Polarachse<sup>3)</sup> oder auch kurz Achse

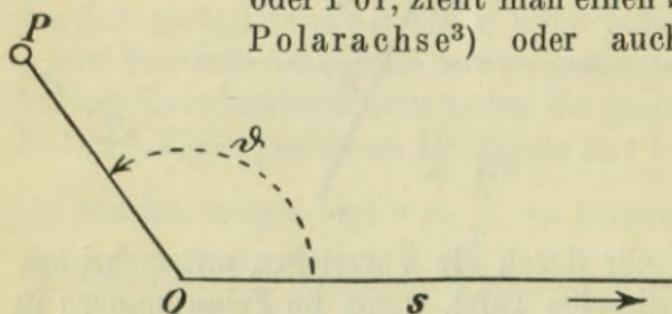


Fig. 5b.

bezeichnet wird, und mißt die absolute Länge  $r$  des Abstandes irgendeines Punktes  $P$

der Ebene von  $O$ , sowie den Winkel  $\varphi$ , um den die Polarachse in positivem Sinne gedreht werden muß, bis sie mit  $\vec{OP}$  auch der Richtung nach zusammenfällt (Fig. 5b). Läßt man,

<sup>1)</sup> Deutsche Übersetzung von L. Schlesinger, 2. Aufl., Leipzig 1923.

<sup>2)</sup> Vgl. Tropke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. VI, S. 101 ff., Berlin 1924.

<sup>3)</sup> Die Polarachse erstreckt sich also von  $O$  aus nur nach der einen Seite ins Unendliche; diese Richtung wird stets als ihre positive Richtung genommen.

wie häufig, zu, daß der sich drehende Strahl beliebig oft um  $O$  dreht, so ist der Winkel nur bis auf beliebige Vielfache von vier Rechten bestimmt. Der Strahl  $OP$  heißt Leitstrahl oder radius vector des Punktes  $P$ ; der in Bogenmaß gemessene Winkel  $s, \overrightarrow{OP} = \mathcal{P}$  heißt Phase oder Amplitude des Punktes  $P$ . Radiusvektor  $r$  und Amplitude  $\mathcal{P}$  eines Punktes heißen seine Polarkoordinaten (zuerst [nach Tropfke] von Jakob Bernoulli 1694 benutzt).

### 8. Hilfssatz über Projektionen.

Um den Zusammenhang zwischen Parallel- und Polarkoordinaten abzuleiten, dient die folgende Hilfsbetrachtung.

Unter der Projektion einer Strecke  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  auf eine gerichtete Gerade  $g'$  versteht man die Strecke zwischen den Fußpunkten  $P'_1, P'_2$  der von  $P_1$  und  $P_2$  auf  $g'$  gefällten Lote:

$$\overrightarrow{P'_1 P'_2} = P_1 P_2 \cdot \cos \psi,$$

wo  $P_1 P_2$  die absolute Länge der Strecke und  $\psi = \sphericalangle g', g$  den Winkel bedeutet, um den die Gerade  $g'$  in positivem Sinne gedreht werden muß, bis ihre positive Richtung mit der Richtung  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  zusammenfällt. Es ist  $\psi$  gleich dem spitzen Winkel  $\chi$ , den die Geraden  $g'$  und  $g$  einschließen, wenn die positiven Richtungen beider Geraden nach derselben Seite zeigen, und gleich  $\pi + \chi$  im anderen Falle; je nachdem ergibt sich  $\overrightarrow{P'_1 P'_2}$  positiv oder negativ (Fig. 6).

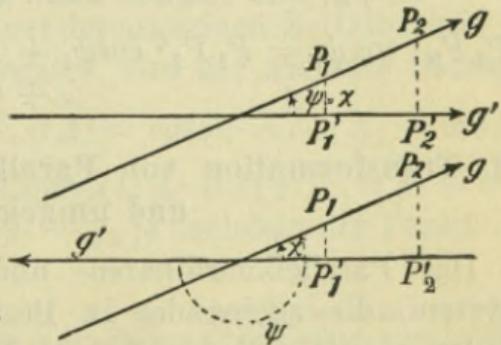


Fig. 6.

Dadurch, daß nicht in jedem Falle der spitze Winkel  $\chi$  in der obigen Formel benutzt wird, ist die Projektionsformel inhaltsreicher, insofern sie auch über die Richtung der Projektion Aufschluß gibt.

Für solche gerichteten Projektionen gilt der wichtige Satz:

Die Projektion eines geschlossenen Linienzuges  $P_1P_2\dots P_nP_1$ , der in ein und derselben Richtung durchlaufen wird, auf eine beliebige Gerade  $g'$  ist Null.

Beweis: Die Projektionen der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  seien  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ . Dann ist, wenn die Winkel, die  $g'$  mit den Geraden  $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \dots, \overrightarrow{P_nP_1}$  im obigen Sinne einschließt, mit  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  bezeichnet werden:

$$P_1P_2 \cdot \cos \psi_1 + P_2P_3 \cdot \cos \psi_2 + \dots + P_{n-1}P_n \cdot \cos \psi_{n-1} \\ + P_nP_1 \cdot \cos \psi_n \\ = \overrightarrow{P'_1P'_2} + \overrightarrow{P'_2P'_3} + \dots + \overrightarrow{P'_{n-1}P'_n} + \overrightarrow{P'_nP'_1} = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Da  $\overrightarrow{P_nP_1}$  und  $\overrightarrow{P_1P_n}$  entgegengesetzt gerichtet sind, so unterscheiden sich die Winkel  $\psi_n = \sphericalangle g', \overrightarrow{P_nP_1}$  und  $\bar{\psi}_n = \sphericalangle g', \overrightarrow{P_1P_n}$  um  $\pi$ , folglich ist  $\cos \psi_n = \cos(\bar{\psi}_n \pm \pi) = -\cos \bar{\psi}_n$ , und folglich kann auch geschrieben werden:

$$P_1P_n \cdot \cos \bar{\psi}_n = P_1P_2 \cdot \cos \psi_1 + P_2P_3 \cdot \cos \psi_2 \\ + \dots + P_{n-1}P_n \cdot \cos \psi_{n-1}.$$

## 9. Transformation von Parallel- in Polarkoordinaten und umgekehrt.

Das Parallelkoordinaten- und das Polarkoordinatensystem, die zueinander in Beziehung gebracht werden sollen, mögen so liegen, daß der Nullpunkt und die positive

$X$ -Halbachse des ersteren Systems Pol und Polarachse des letzteren sind. Durch einen beliebigen Punkt  $P(x, y)$  werde die Parallele zur  $Y$ -Achse (Fig. 7) gezogen, die in  $A$  die  $X$ -Achse schneide, und das Dreieck  $OAP$  auf die  $X$ -Achse und eine zu ihr Senkrechte  $s$ , deren positive Richtung nach derselben Seite der  $X$ -Achse zeige, wie die  $+Y$ -Achse, projiziert. Dann ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

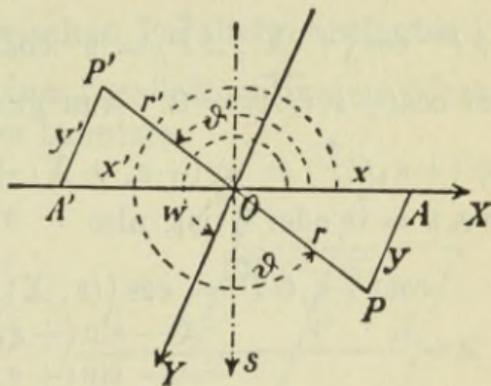


Fig. 7.

$$\begin{aligned}
 OP \cdot \cos(+X, \overrightarrow{OP}) &= OA \cdot \cos(+X, \overrightarrow{OA}) \\
 &\quad + AP \cdot \cos(+X, \overrightarrow{AP}), \\
 OP \cdot \cos(+s, \overrightarrow{OP}) &= OA \cdot \cos(+s, \overrightarrow{OA}) \\
 &\quad + AP \cdot \cos(+s, \overrightarrow{AP}).
 \end{aligned}$$

Liegt der Punkt  $A$  auf der positiven  $X$ -Halbachse, so ist seine Abszisse  $x = \overrightarrow{OA}$  positiv, also der absolute Betrag von  $OA = x$  und  $\cos(+X, \overrightarrow{OA}) = \cos(+X, +X) = \cos 0 = 1$ ; liegt aber  $A$  auf der negativen  $X$ -Halbachse<sup>1)</sup>, so ist seine Abszisse  $x$  negativ, also der absolute Betrag  $OA = -x$  und  $\cos(+X, \overrightarrow{OA}) = \cos(+X, -X) = \cos \pi = -1$ . In jedem Falle ist daher  $OA \cdot \cos(+X, \overrightarrow{OA}) = x$ . Ebenso ist  $AP = y$  oder  $= -y$ , je nachdem der Punkt  $P$

<sup>1)</sup> In Fig. 7 veranschaulicht  $OAP$  den Fall  $x > 0, y > 0$  und  $OA'P'O$  den Fall  $x < 0, y < 0$ . Für Punkte in den Feldern 1 und 3 haben  $x$  und  $y$  entgegengesetzte Vorzeichen.

auf der Seite der  $+Y$ - oder  $-Y$ -Halbachse liegt; daher  $\cos(+X, \vec{AP}) = \cos(+X, +Y) = \cos w$  oder  $\cos(+X, \vec{AP}) = \cos(+X, -Y) = -\cos w$ . Aber stets ist

$AP \cdot \cos(+X, \vec{AP}) = y \cdot \cos w$ . Da  $s \perp OA = X$ , so ist  $\cos(+s, \vec{OA}) = 0$ . Nun gilt für jede Richtung  $\vec{OP}$ :

$\sphericalangle(+s, \vec{OP}) = \sphericalangle(+s, +X) + \sphericalangle(+X, \vec{OP}) - k \cdot 2\pi$ ,  
wo  $k = 0$  oder  $1$  ist, also

$$\begin{aligned} \cos(+s, \vec{OP}) &= \cos[(s, X) + (X, \vec{OP})] \\ &= -\sin(+s, +X) \cdot \sin(+X, \vec{OP}) \\ &= -\sin(+s, +X) \sin \vartheta, \end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned} \cos(+s, \vec{AP}) &= -\sin(+s, +X) \cdot \sin(+X, \vec{AP}) \\ &= -\sin(+s, +X) \cdot \sin(+X, \pm Y) \\ &= -\sin(+s, +X) \cdot \{\pm \sin w\}. \end{aligned}$$

Das obere oder untere Zeichen gilt, wie zuvor, je nachdem  $AP = \pm y$  ist; daher stets  $AP \cdot \cos(+s, \vec{AP}) = -y \cdot \sin(+s, +X) \cdot \sin w$ . Setzt man alle gefundenen Werte in die obigen Gleichungen ein, so erhält man<sup>1)</sup>:

$$(4) \quad \begin{cases} r \cdot \cos \vartheta = x + y \cdot \cos w & x = \frac{r \cdot \sin(w - \vartheta)}{\sin w} \\ r \cdot \sin \vartheta = y \cdot \sin w & \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos w}, & y = \frac{r \cdot \sin \vartheta}{\sin w} \end{cases}$$

$$(4') \quad w = \frac{\pi}{2}: \quad \begin{cases} r \cdot \cos \vartheta = x, \\ r \cdot \sin \vartheta = y, \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zur Bestimmung von  $\vartheta$  sind die beiden ersten Formeln zu benutzen, da bei Verwendung von einer der beiden For-

<sup>1)</sup> Die mit einem Akzent versehenen Formelnummern, wie hier (4') beziehen sich stets auf rechtwinklige Koordinaten.

meln allein sich zwei Werte für  $\mathcal{Q}$  ergeben, von denen nur der eine auch der anderen Formel für  $\mathcal{Q}$  genügt.

### 10. Transformation zwischen Parallelkoordinaten.

Oft ist es nützlich, statt eines Parallelkoordinatensystems  $X, Y$  ein anderes  $X', Y'$  zu benutzen.

I. Beide Systeme  $X, Y$ ;  $X', Y'$  haben parallele und gleichgerichtete Achsen, aber verschiedene Anfangspunkte  $O$  und  $O'$  (Fig. 8).

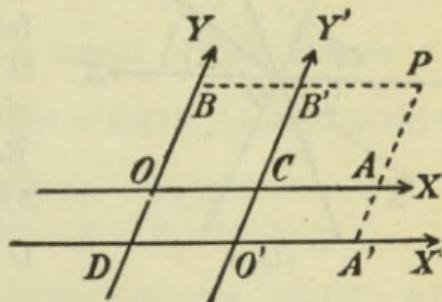


Fig. 8.

Der Anfangspunkt des neuen Systems habe die Koordinaten  $\vec{OC} = x_0$ ,

$\vec{OD} = y_0$  in bezug auf das alte System. Sind  $\vec{BP} = x$ ,  $\vec{AP} = y$  die alten und  $\vec{B'P} = x'$ ,  $\vec{A'P} = y'$  die neuen Koordinaten eines Punktes  $P$ , so folgt nach (1) sofort

$$(5) \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x = x_0 + x', & y = y_0 + y' \\ x' = x - x_0, & y' = y - y_0. \end{cases}$$

Eine Parallelverschiebung des Achsenkreuzes ändert also Abszisse und Ordinate eines jeden Punktes nur um die konstante Abszisse, bzw. Ordinate des neuen Anfangspunktes in bezug auf das alte System.

Aus (5) ist ersichtlich, daß die neuen Koordinaten des Anfangspunktes des alten Systems  $-x_0, -y_0$  sind.

II. Beide Systeme haben denselben Anfangspunkt, aber die Achsen des neuen Systems

sind gegen die des alten gedreht. Es sei (Fig. 9)  $\sphericalangle(+X, +X') = \alpha$ ,  $\sphericalangle(+X, +Y') = \beta$ .

Um die entsprechenden Formeln zu erhalten, sollen die Formeln (4) benutzt werden, indem zwei Polarsysteme zu

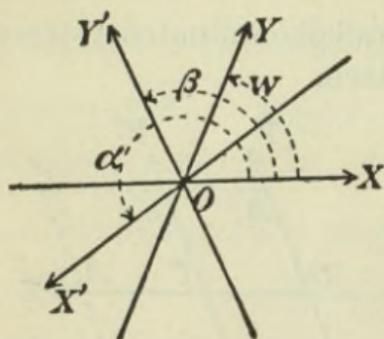


Fig. 9.

Hilfe genommen werden, deren Achsen mit der positiven X- bzw. X'-Halbachse zusammenfallen, während der Nullpunkt O für beide der Pol ist. Für einen Punkt P ist daher  $OP$  Radiusvektor in beiden Polarsystemen, während  $\sphericalangle(+X, \vec{OP}) = \vartheta$ ,  $\sphericalangle(X', \vec{OP}) = \vartheta'$  sei.

Der Koordinatenwinkel des

neuen Systems ist  $\beta - \alpha$  oder  $2\pi - (\alpha - \beta)$ , je nachdem  $\beta > \alpha$  oder  $\beta < \alpha$  ist, und die Amplitude  $\vartheta'$  ist gleich  $2\pi + (\vartheta - \alpha)$  oder gleich  $\vartheta - \alpha$ , je nachdem  $OP$  innerhalb des Winkels  $\alpha$  liegt oder außerhalb<sup>1)</sup>. Daher gelten für die alten und neuen Koordinaten von P stets die Beziehungen:

$$\begin{aligned} r \cdot \cos \vartheta &= x + y \cdot \cos w, & r \cdot \cos \vartheta' &= r \cdot \cos(\vartheta - \alpha) \\ & & &= x' + y' \cdot \cos(\beta - \alpha), \\ r \cdot \sin \vartheta &= y \cdot \sin w, & r \cdot \sin \vartheta' &= r \cdot \sin(\vartheta - \alpha) \\ & & &= y' \cdot \sin(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $r \cdot \cos \vartheta$  und  $r \cdot \sin \vartheta$  erhält man zwei Gleichungen zwischen  $x, y; x', y'$ , aus denen sich leicht die Transformations-Formeln ergeben:

$$(6) \quad \text{I. } \begin{cases} x' \cdot \sin(\beta - \alpha) = x \cdot \sin \beta & - y \cdot \sin(w - \beta), \\ y' \cdot \sin(\beta - \alpha) = -x \cdot \sin \alpha & + y \cdot \sin(w - \alpha); \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} x \cdot \sin w & = x' \cdot \sin(w - \alpha) + y' \cdot \sin(w - \beta), \\ y \cdot \sin w & = x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \sin \beta. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Man zeichne sich für die verschiedenen Fälle entsprechende Figuren, aus denen sich die vorstehenden Beziehungen leicht ergeben.

III. Die allgemeinste Transformation eines Parallelkoordinatensystems, mit dem Anfangspunkte  $O$  in ein anderes mit dem Anfangspunkte  $O'$ , dessen Achsen gegen die alten Achsen geneigt sind, ergibt sich aus den vorstehenden Formeln, wenn in ihnen nach dem Satze unter (I)  $x$  durch  $x - x_0$  und  $y$  durch  $y - y_0$  ersetzt wird.

IV. Wichtige besondere Fälle.

$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ : Übergang von einem schiefwinkligen zu einem rechtwinkligen System mit anderem Anfangspunkte.

$$(7) \text{ I. } \begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \cos(w - \alpha), \\ y' = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \sin(w - \alpha); \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} x \cdot \sin w = x_0 + x' \cdot \sin(w - \alpha) - y' \cdot \cos(w - \alpha), \\ y \cdot \sin w = y_0 + x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

$w = \frac{\pi}{2}$  und  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ : Beide Systeme sind rechtwinklige.

$$(8) \text{ I. } \begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha, \\ y' = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha; \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} x = x_0 + x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha, \\ y = y_0 + x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

$w = \frac{\pi}{2}$  und  $\alpha = 0$ : Übergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen Systeme, deren  $X$ - und  $X'$ -Achsen parallel sind.

$$(9) \text{ I. } \begin{cases} x' = x - x_0 - (y - y_0) \operatorname{ctg} \beta, \\ y' = (y - y_0) \frac{1}{\sin \beta}; \end{cases} \text{ II. } \begin{cases} x = x_0 + x' + y' \cos \beta, \\ y = y_0 + y' \sin \beta. \end{cases}$$

### 11. Länge und Richtung einer Strecke; Teilverhältnis.

Die zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  seien gegeben durch ihre Koordinaten  $x_1, y_1; x_2, y_2$  in bezug auf ein Parallelkoordinatensystem. Es soll die Länge  $l$  der Strecke  $P_1P_2$

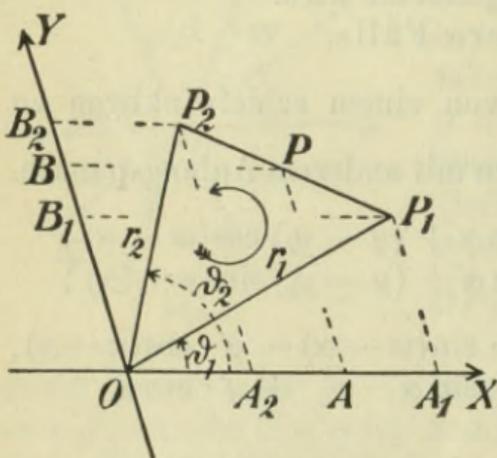


Fig. 10a.

und der Winkel  $\alpha$  bestimmt werden, um den der durch  $P_1$  zur  $+X$ -Achse gezogene Parallelstrahl in positivem Sinne gedreht werden muß, bis er mit  $\overrightarrow{P_1P_2}$  zusammenfällt. Denkt man sich das Koordinatensystem parallel verschoben, bis der Anfangspunkt in den Punkt  $P_1$  fällt, so sind nach § 10, I die neuen

Koordinaten von  $P_2$ :  $x'_2 = x_2 - x_1, y'_2 = y_2 - y_1$  und daher nach den Formeln S. 22 (4):

$$(10) \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos w}$$

$$l \cdot \cos \alpha = x_2 - x_1 + (y_2 - y_1) \cos w, \quad l \cdot \sin \alpha = (y_2 - y_1) \sin w.$$

$$w = \frac{\pi}{2} :$$

$$(10') \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$l \cos \alpha = x_2 - x_1, \quad l \sin \alpha = y_2 - y_1.$$

Teilt der Punkt  $P(x, y)$  die Strecke  $P_1P_2$  im Verhältnis  $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = \kappa$ , so teilen die Schnittpunkte der Parallelen

zu den Achsen durch die drei Punkte die Achsen im gleichen Verhältnis (vgl. hierzu Fig. 10 a):

$$\overrightarrow{A_1 A} : \overrightarrow{A A_2} = \overrightarrow{B_1 B} : \overrightarrow{B B_2} = \kappa : 1,$$

folglich erhält man nach S. 10 (3):

$$(11) \quad x = \frac{x_1 + \kappa x_2}{1 + \kappa}, \quad y = \frac{y_1 + \kappa y_2}{1 + \kappa}.$$

### 12–14. Flächeninhalt von Dreiecken und Vielecken.

Um ferner den Flächeninhalt  $J$  des Dreiecks  $OP_1P_2$  durch die Koordinaten der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auszudrücken, beachte man, daß derselbe gleich dem halben Produkte zweier Seiten in den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist und sich daher mittels der Polarkoordinaten von  $P_1, P_2$  schreiben läßt:

$$J = \frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 \cdot \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1),$$

also nach S. 22 (4):

$$(12) \quad J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin w = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \sin w^1).$$

$$(12') \quad w = \frac{\pi}{2} : J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Die Formeln (12) und (12') liefern den Flächeninhalt nur dann positiv, wenn  $\vartheta_2 > \vartheta_1$  ist, im anderen Falle negativ, und es müßten in den Formeln die Indizes 1 und 2 mit-

---

<sup>1)</sup> Das Symbol  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$  ist durch  $x_1 y_2 - x_2 y_1$  definiert und heißt eine Determinante zweiten Grades. Bezeichnet man die Diagonale von links oben nach rechts unten als Haupt-, die andere als Nebendiagonale,  $x_1, y_1, x_2, y_2$  als ihre Elemente, so ist also der Wert einer Determinante zweiten Grades gleich dem Produkte der in der Hauptdiagonale stehenden Elemente, vermindert um das Produkt der in der Nebendiagonale stehenden. Die Determinantenschreibweise zu benutzen, empfiehlt sich durch die größere Übersichtlichkeit und das bequeme Rechnen mit Determinanten, was beides schon bei den Determinanten dritten Grades deutlich hervortritt.

einander vertauscht werden, wenn der Flächeninhalt sich mit positivem Vorzeichen ergeben soll. Im ersten Falle (Fig. 10a) folgen die Punkte  $O, P_1, P_2$  in positivem, im zweiten Falle (Fig. 10b) in negativem Drehsinne aufeinander. Um nicht die beiden Fälle unterscheiden zu müssen,

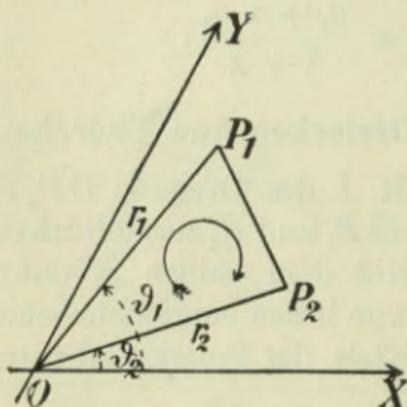


Fig. 10 b.

soll der Flächeninhalt des Dreiecks  $\overrightarrow{OP_1P_2}$  — die Reihenfolge der Ecken ist wesentlich, was durch den Pfeil angedeutet wird — stets durch die Formel (12) gegeben sein. Dann liefert die rechte Seite von (12) durch ihren absoluten Betrag den numerischen Wert des Flächeninhalts von  $\overrightarrow{OP_1P_2}$ , durch ihr Vorzeichen  $+$  oder  $-$  aber läßt sie erkennen, ob die drei Ecken in positivem oder negativem Drehsinne aufeinanderfolgen. Durch die Zulassung von negativen Flächeninhalten ist somit die Formel (12) inhaltsreicher geworden.

Offenbar ändert sich der Drehsinn nicht, in dem die Ecken des Dreiecks aufeinanderfolgen, wenn man statt  $\overrightarrow{OP_1P_2}$  schreibt  $\overrightarrow{P_1P_2O}$  oder  $\overrightarrow{P_2OP_1}$ . Eine solche Vertauschung der Ecken nennt man eine zyklische Vertauschung.

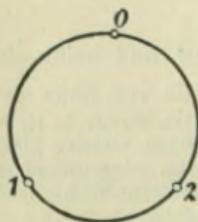


Fig. 11.

Ordnet man nämlich (Fig. 11) die Zahlen 0, 1, 2 auf der Peripherie eines Kreises in gleichen Abständen an, so geht die Anordnung 0 1 2 durch eine Drehung um  $120^\circ$  in positivem Sinne in 2 0 1 und durch eine weitere gleiche Drehung in 1 2 0 über. Ebenso gehen die drei Anordnungen 0 2 1,

102, 210 zyklisch ineinander über durch Drehungen in negativem Sinne.

13. Den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks  $\overrightarrow{P_1 P_2 P_3}$  (Fig. 12) erhält man unmittelbar aus (12) durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems, so daß der Anfangspunkt, wie in § 11. in den Punkt  $P_1$  fällt:

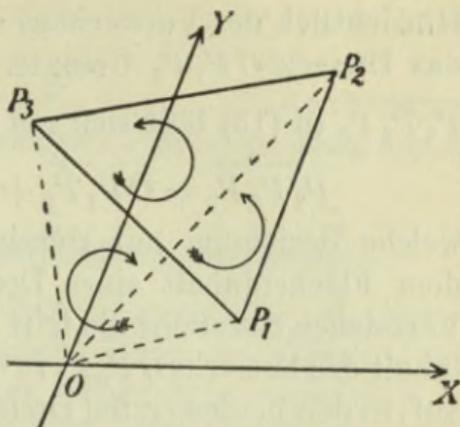


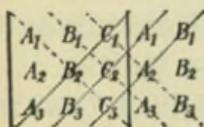
Fig. 12.

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \overrightarrow{P_1 P_2 P_3} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \sin w \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\} \sin w \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin w.
 \end{aligned}$$

$$w = \frac{\pi}{2} :$$

$$(13') \quad \overrightarrow{P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ )}.$$

1) Das hier benutzte Symbol wird als Determinante dritten Grades bezeichnet. Auch hier heißt die Diagonale von links oben nach rechts unten die Hauptdiagonale, die von rechts oben nach links unten die Nebendiagonale. Der Wert läßt sich mit Hilfe der folgenden Gedächtnisregel leicht hinschreiben. Nach ihr denke man sich die beiden ersten Spalten nochmals rechts neben die Determinante geschrieben, bilde die Produkte der in der Hauptdiagonale und der in den beiden Parallelen zu ihr stehenden Elemente und subtrahiere von ihrer Summe die Produkte der in der Nebendiagonale und der in den beiden Parallelen zu ihr stehenden Elemente:



$$\begin{aligned}
 &A_1 B_2 C_3 + A_3 B_1 C_2 + A_2 B_3 C_1 - A_3 B_2 C_1 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3 \\
 &= (A_1 B_2 - A_2 B_1) C_3 + (A_2 B_3 - A_3 B_2) C_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) C_2
 \end{aligned}$$

Hinsichtlich des Vorzeichens der rechten Seite gilt das für das Dreieck  $OP_1P_2$  Gesagte. Der mittlere Ausdruck für  $\overrightarrow{P_1P_2P_3}$  in (13) läßt sich auf Grund von (12) schreiben:

$$\overrightarrow{P_1P_2P_3} = \overrightarrow{OP_1P_2} + \overrightarrow{OP_2P_3} + \overrightarrow{OP_3P_1},$$

welche Beziehung nur richtig ist, wenn, wie geschehen, dem Flächeninhalt eines Dreiecks auch ein bestimmtes Vorzeichen zukommt. So tritt z. B. für Fig. 12 der Flächeninhalt des Dreiecks  $OP_3P_1$  in der letzten Gleichung doppelt auf; in den beiden ersten Dreiecken hat er positives Vorzeichen nach S. 27 (12), in dem letzten negatives. Es bleibt also, da  $\overrightarrow{OP_1P_2}$ ,  $\overrightarrow{OP_2P_3}$  positiven,  $\overrightarrow{OP_3P_1}$  negativen Flächeninhalt haben, nur der Flächeninhalt von  $\overrightarrow{P_1P_2P_3}$ , und zwar mit positivem Vorzeichen, übrig.

14. Aus der geometrischen Interpretation der Formel (13) erhält man sofort die Verallgemeinerung für ein beliebiges  $n$ -Eck  $\overrightarrow{P_1P_2\dots P_n}$  — auch ein solches mit einspringenden Ecken — als Summe von  $n$ -Dreiecken:

$$\overrightarrow{OP_1P_2} + \overrightarrow{OP_2P_3} + \dots + \overrightarrow{OP_{n-1}P_n} + \overrightarrow{OP_nP_1}$$

und daher für seinen Flächeninhalt den Wert:

$$(14) \quad \overrightarrow{P_1P_2\dots P_n} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots \right. \\ \left. + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\} \cdot \sin \omega,$$

wo jede Determinante aus der vorhergehenden durch zyklische Vertauschung der Zeilenindizes entsteht und der Zeilenindex der zweiten Zeile in der letzten Determinante

übereinstimmt mit dem der ersten Zeile in der ersten Determinante. Das Vorzeichen der rechten Seite ist positiv oder negativ, je nachdem die Ecken  $P_1, P_2, \dots, P_n$  im entgegengesetzten Drehsinne des Uhrzeigers oder im gleichen durchlaufen werden.

### 15. Aufgabe der analytischen Geometrie.

Die Aufgabe der analytischen Geometrie ist es, geometrische Probleme in algebraische Form einzukleiden und sie dadurch der rechnerischen Behandlung zugänglich zu machen. Dies geschieht mit Hilfe der Koordinaten. Daher ist der Begriff des geometrischen Ortes, d. h. des Ortes aller Punkte, die gegebenen Bedingungen genügen, grundlegend für die analytische Geometrie. Es handelt sich darum, für solche geometrischen Örter Gleichungen zwischen den Koordinaten ihrer Punkte aufzustellen, so daß aus diesen Gleichungen umgekehrt wieder die geometrischen Eigenschaften herausgelesen werden können. Diese Gleichungen werden kombiniert und transformiert, um schließlich durch Deutung der Endgleichungen neue geometrische Sätze ablesen zu lassen. Die geometrischen Betrachtungen werden somit durch Rechnung ersetzt; die Schwierigkeit aber liegt darin, für die analytische Behandlung eines jeden Problems möglichst einfache Ausgangspunkte zu schaffen und das Maß der notwendigen Rechnungen auf ein möglichst geringes zu beschränken.

In der analytischen Geometrie der Ebene sind die geometrischen Örter, um die es sich handelt, Kurven, d. h. die Gesamtheit aller Punkte, die nur einer Bedingung genügen. Diese Bedingung ist zu ersetzen durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten der Punkte; dann sind die Gestalt und die Eigenschaften der Kurve aus der Gleichung zu ermitteln.

Aber auch jede gerade Linie der Ebene kann man durch zwei Bestimmungsstücke in bezug auf ein Koordinatensystem festlegen, die deshalb als Linienkoordinaten bezeichnet werden. Die Gesamtheit aller Geraden, die einer Bedingung genügen, bestimmen auch eine Kurve, die event. auch ein Punkt sein kann (vgl. den Schluß von § 17). Eine Kurve kann also durch eine Gleichung zwischen Punktkoordinaten oder eine solche zwischen Linienkoordinaten analytisch dargestellt sein.

Beispiele für die Aufstellung solcher geometrischer Örter bieten in diesem Bändchen die gerade Linie (§§ 16—18) und die Kegelschnitte (§ 27): Ellipse (speziell Kreis), Parabel und Hyperbel.

### 3. Abschnitt.

#### Die gerade Linie.

##### 16. Die Gerade mit gegebener Richtung durch einen gegebenen Punkt.

Es soll die Gleichung der geraden Linie aufgestellt werden, die durch einen gegebenen Punkt  $P_1$  hindurchgeht und mit der  $x$ -Achse einen bestimmten Winkel  $\alpha$  bildet.

Die Antwort wird durch die Formeln S. 26 (10) gegeben. Betrachtet man in ihnen den Punkt  $P_2(x_2, y_2)$  als veränderlichen Punkt  $P(x, y)$  der gesuchten Geraden, so ist auch  $l$  veränderlich. Aus den Gleichungen (10) für  $l \cdot \cos \alpha$  und  $l \cdot \sin \alpha$  folgt leicht durch Elimination von  $l$ :

$$(15) \quad y - y_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin(w - \alpha)} (x - x_1);$$

$$(15') \quad w = \frac{\pi}{2} : y - y_1 = \operatorname{tg} \alpha \cdot (x - x_1)$$

als Gleichung der gesuchten Geraden. Der Quotient auf der rechten Seite bleibt ungeändert, wenn man  $\alpha$  durch  $\pi + \alpha$  ersetzt, was der Tatsache entspricht, daß die Gerade,

die durch  $P_1$  geht und den Winkel  $\pi + \alpha$  mit der  $x$ -Achse einschließt, mit der Geraden unter dem Winkel  $\alpha$  identisch ist. Der Koeffizient von  $x$  in (15) heißt der Richtungskoeffizient der Geraden.

Man kann aber auch, was in vielen Fällen von Vorteil ist, in den beiden Formeln (10) die Länge  $l$  beibehalten und sie umformen in

$$(16) \quad x = x_1 + l \cdot \frac{\sin(w - \alpha)}{\sin w}, \quad y = y_1 + l \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin w}.$$

$$(16') \quad w = \frac{\pi}{2}: \quad x = x_1 + l \cdot \cos \alpha, \quad y = y_1 + l \cdot \sin \alpha.$$

Die Vertauschung von  $\alpha$  mit  $\pi + \alpha$  kommt hier darauf hinaus, daß  $+l$  durch  $-l$  ersetzt wird. Läßt man in den vorstehenden Formeln  $l$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  laufen, so erhält man für einen jeden Wert von  $l$  die Koordinaten eines bestimmten Punktes der Geraden. Man bezeichnet  $l$  als Parameter und nennt die letzten Gleichungen die Parametergleichungen der gesuchten Geraden.

### 17. Die Gerade durch zwei Punkte.

Die Gleichung der Geraden durch zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  erhält man aus den Formeln S. 27 (11) oder aus S. 29 (13).

Eliminiert man aus den ersteren Formeln  $\lambda$ , so erhält man

$$(17) \quad x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

oder als Determinante geschrieben:

$$(17) \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zu dem gleichen Ergebnis führt die Überlegung, daß ein Dreieck den Flächeninhalt Null nur haben kann, wenn seine drei Ecken in einer Geraden liegen. Ist  $P_3$  irgendein Punkt

$P$  der Geraden  $P_1 P_2$ , so folgt, daß die Determinante auf der rechten Seite der Gleichung (13) verschwinden muß.

In (17) hat der Richtungskoeffizient der Geraden den Wert  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ .

Die Formeln (11) selbst liefern für diesen Fall die Parametergleichungen der Geraden, wo  $x = -\infty \cdots + \infty$ .

Aus (17) ergeben sich noch zwei wichtige Formen der Gleichung der Geraden  $g$ , wenn man als  $P_1$  und  $P_2$  die Schnittpunkte von  $g$  mit der  $X$ - und mit der  $Y$ -Achse wählt. Es seien  $x_1 = m, y_1 = 0; x_2 = 0, y_2 = n$  die Koordinaten dieser Schnittpunkte, also  $m$  und  $n$  die Achsenabschnitte, die  $g$  auf den Koordinatenachsen abschneidet, dann läßt sich die Gleichung von  $g$  schreiben:

$$(18) \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0.$$

Setzt man noch  $m = -\frac{1}{u}, n = -\frac{1}{v}$ , so erhält man

$$(19) \quad x \cdot u + y \cdot v + 1 = 0,$$

wo  $u, v$ , also die negativ und reziprok genommenen Achsenabschnitte, als die Linienkoordinaten der Geraden  $g$  bezeichnet werden.

Hält man in (19)  $x, y$  fest und läßt  $u, v$  sich verändern, so liefern alle diese Gleichung erfüllenden Wertepaare  $u, v$  die sämtlichen Geraden, die durch den Punkt  $(x, y)$  hindurchgehen. Dann ist die Gleichung (19) die Gleichung dieses Punktes in den Koordinaten aller durch ihn gehenden Geraden.

### 18. Normalgleichung.

In § 16 war eine gerade Linie  $g$  geometrisch bestimmt worden, entweder durch einen Punkt und ihre Richtung

oder durch zwei Punkte; sie ist aber auch geometrisch festgelegt durch die Länge  $p$  des vom Nullpunkte auf sie gefällten Lotes und den Winkel  $\gamma$ , um den die positive  $X$ -Halbachse in positivem Sinne gedreht werden muß, bis sie mit der Richtung des Lotes vom Nullpunkte nach der Geraden hin zusammenfällt (Fig. 13). Um die entsprechende Gleichung für  $g$  zu erhalten, transformiert man das Koordinatensystem auf ein neues rechtwinkliges, dessen Abszissenachse mit der positiven Lotrichtung  $OF$  und dessen Ordinatenachse so mit  $g$  zusammenfällt, daß  $\sphericalangle(+X', +Y')$

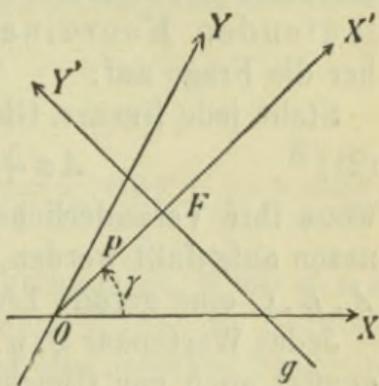


Fig. 13.

$= \frac{\pi}{2}$  ist. Dann ist die Gleichung von  $g$ :  $x' = 0$  und folglich aus der ersten Formel § 10 (7<sup>1</sup>) für  $\alpha = \gamma$ :

$$0 = (x - x_0) \cos \gamma + (y - y_0) \cos(w - \gamma).$$

Da der Nullpunkt des alten Systems die alten Koordinaten  $x = 0$ ,  $y = 0$  und die neuen  $x' = -p$ ,  $y' = 0$  hat, so liefert dieselbe Formel (7):

$$p = x_0 \cdot \cos \gamma + y_0 \cdot \cos(w - \gamma),$$

und folglich erhält man als Gleichung von  $g$ :

$$(20) \quad x \cdot \cos \gamma + y \cdot \cos(w - \gamma) - p = 0,$$

$$(20') \quad w = \frac{\pi}{2}: \quad x \cdot \cos \gamma + y \cdot \sin \gamma - p = 0.$$

Die Gleichungen (20) bezeichnet man als die Hessesche Normalform oder auch kurz als die Normalform der Gleichung einer geraden Linie.

### 19. Allgemeine Gleichung.

Die bisher für eine Gerade aufgestellten Gleichungen (15), (17), (18), (19), (20) haben gemeinsam, daß sie lineare Gleichungen, d. h. Gleichungen ersten Grades in den laufenden Koordinaten  $x, y$  sind. Es drängt sich daher die Frage auf:

Stellt jede lineare Gleichung

$$(21) \quad Ax + By + C = 0,$$

wenn ihre Veränderlichen  $x, y$  als parallele Punktkoordinaten aufgefaßt werden, für irgendein reelles Wertesystem  $A, B, C$  eine gerade Linie dar?

Jedes Wertepaar  $x, y$ , das die Gleichung (21) befriedigt, genügt auch der Gleichung

$$\kappa(Ax + BY + C) = 0,$$

wo  $\kappa$  irgendeinen Faktor bezeichnet. Die Beantwortung der aufgeworfenen Frage kommt also darauf hinaus, zu zeigen, daß durch geeignete Wahl von  $\kappa$  die linke Seite der vorstehenden Gleichung sich in völlige Übereinstimmung mit der linken Seite der Gleichung (20) bringen läßt. Ist dies aber der Fall, so bestehen die Gleichungen

$$\kappa A = \cos \gamma, \quad \kappa B = \cos(w - \gamma), \quad \kappa C = -p.$$

Berechnet man aus der mittleren Gleichung mit Hilfe der ersten noch  $\sin \gamma$  und addiert die Werte von  $\cos^2 \gamma$  und  $\sin^2 \gamma$  zueinander, so ergibt sich

$$(22) \quad \begin{cases} \kappa = \sqrt{\frac{\sin^2 w}{A^2 + B^2 - 2AB \cos w}}, \\ \cos \gamma = \kappa A, \quad \sin \gamma = \kappa \frac{B - A \cos w}{\sin w}, \end{cases}$$

wobei der Wurzel in  $\kappa$  das entgegengesetzte Vorzeichen von  $C$  zu geben ist, damit die Gleichung  $\kappa C = -p$ , wo  $p > 0$

ist, auch dem Vorzeichen nach richtig ist.  $\alpha$  und  $\gamma$  sind stets reell, da

$$A^2 + B^2 - 2AB \cos w = (B - A \cos w)^2 + A^2 \cdot \sin^2 w > 0$$

ist und die rechten Seiten von  $\cos \gamma$  und  $\sin \gamma$  dem absoluten Betrage nach  $\leq 1$  sind.

$$w = \frac{\pi}{2} :$$

$$(22') \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Durch Multiplikation mit dem gefundenen Werte von  $\alpha$  läßt sich somit jede lineare Gleichung (21) in die Normalform überführen, und dadurch ist die gestellte Frage in bejahendem Sinne beantwortet. Die Gleichung (21) wird als die allgemeine Form der Gleichung der geraden Linie bezeichnet.

Identifiziert man die allgemeine Form (21) mit der Form § 16 (15), also  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$  mit  $y = \mu x + (y_1 - \mu x_1)$ , wo  $\mu$  den Richtungskoeffizienten  $\frac{\sin \alpha}{\sin(w - \alpha)}$  der Geraden  $g$  bezeichnet, so findet man  $\mu = -\frac{A}{B}$  als Richtungskoeffizienten der allgemeinen Form.

Die spezielle letzte Form  $y = \mu x + n$  wird oft mit Vorteil verwendet; in ihr bedeutet dann  $n$  den Achsenabschnitt der Geraden auf der  $Y$ -Achse. Für  $B = 0$  ist  $\mu = \infty$ , die Gerade parallel zur  $y$ -Achse; die vorstehende Form der Gleichung der Geraden versagt, und man muß dann  $x = -\frac{C}{A}$  benutzen, welche Abszisse den Schnittpunkt der Geraden mit der  $X$ -Achse bestimmt.

## 20. Senkrechter Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Der senkrechte Abstand  $p_0$  eines Punktes  $P_0(x_0, y_0)$  von der Geraden  $g$  soll bestimmt werden.

Die Gerade  $g$  sei in der Normalform § 18 (20) gegeben. Man verschiebe das Koordinatensystem parallel in den Punkt  $P_0$ . Bezeichnet  $\gamma'$  den Winkel, den die neue Abszissenachse  $X'$  mit dem Lote  $\overrightarrow{P_0 F_0}$  einschließt, so hat  $g$  in bezug auf das  $X' Y'$ -System die Gleichung

$$x' \cdot \cos \gamma' + y' \cdot \cos(w - \gamma') - p_0 = 0.$$

Je nachdem nun  $P_0$  und  $O$  auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen (Fig. 14:  $P_0$  bzw.  $\hat{P}_0$ ), ist  $\gamma' = \gamma$  oder  $\gamma' = \gamma + \pi$ . Wenn man noch  $x' = x - x_0$ ,  $y' = y - y_0$  einsetzt und berücksichtigt, daß für jeden Punkt  $(x, y)$  der Geraden  $g$  die Gleichung (20) erfüllt ist, so erhält man:

$$p_0 = \mp \{x_0 \cdot \cos \gamma + y_0 \cdot \cos(w - \gamma) - p\}.$$

Statt aber den beiden Fällen entsprechend die rechte Seite mit dem negativen oder positiven Vorzeichen zu nehmen, soll, ähnlich wie in § 10 der Dreiecksinhalt, hier der senkrechte Abstand des Punktes  $P_0$  von  $g$  durch die Formel (23)

$$(23) \quad p_0 = -\{x_0 \cos \gamma + y_0 \cos(w - \gamma) - p\},$$

$$(23') \quad w = \frac{\pi}{2}: p_0 = -\{x_0 \cos \gamma + y_0 \sin \gamma - p\}$$

gegeben sein. Ist dann die rechte Seite positiv, so liegen  $P_0$  und  $O$  auf derselben Seite von  $g$ ; dagegen liegen beide Punkte auf verschiedenen Seiten, wenn die rechte Seite von (23) sich negativ ergibt<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In vielen Lehrbüchern ist die entgegengesetzte Festsetzung:  $p_0 = x_0 \cos \gamma + y_0 \cos(w - \gamma) - p$  getroffen. Demgegenüber hat die Festsetzung durch die Formel (23) den Vorteil, daß sie für  $x_0 = y_0 = 0$  den senkrechten Abstand  $p_0 = p$  gibt; die positive Richtung des von  $P_0$  auf  $g$  gefällten Lotes ist also dieselbe, wie die des Lotes vom Nullpunkte.

Man erhält also den gesuchten Abstand  $p_0$  durch den Wert, den die mit negativem Zeichen genommene linke Seite der Gleichung (20) annimmt, wenn an Stelle der laufenden Koordinaten  $x, y$  die Koordinaten  $x_0, y_0$  des Punktes  $P_0$  gesetzt werden. Durch diese Bemerkung hat man aber sofort auch die Lösung, wenn die Gleichung von  $g$  nicht in der Normalform gegeben ist. Man bringt dann die Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

durch Multiplikation mit  $\kappa$  S. 36 (22) auf die Normalform und verfährt dann wie angegeben:

$$(23) \quad p_0 = -\kappa(Ax_0 + By_0 + C).$$

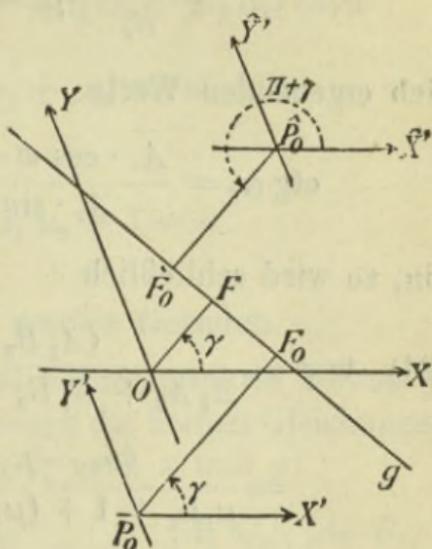


Fig. 14.

## 21. Winkel zweier Geraden.

Es seien zwei Gerade  $g_v: A_v x + B_v y + C_v = 0$  ( $v=1, 2$ ) gegeben. Dann entsteht die Frage, unter welchem Winkel sich  $g_1$  und  $g_2$  schneiden. Schließt  $g_1$  den größeren Winkel  $\alpha_1$  mit der  $+X$ -Achse (Fig. 15) ein, so ist  $\psi = \alpha_1 - \alpha_2$ , und man erhält aus  $\text{ctg } \psi = \text{ctg } (\alpha_1 - \alpha_2)$ :

$$\text{ctg } \psi = \frac{\text{ctg } \alpha_1 \cdot \text{ctg } \alpha_2 + 1}{\text{ctg } \alpha_2 - \text{ctg } \alpha_1}.$$

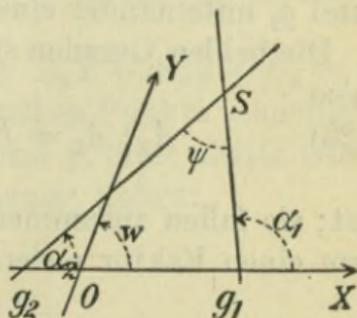


Fig. 15.

Setzt man nun die aus

$$-\frac{A_v}{B_v} = \mu_v = \frac{\sin \alpha_v}{\sin(w - \alpha_v)}$$

sich ergebenden Werte

$$\operatorname{ctg} \alpha_v = \frac{A_v \cdot \cos w - B_v}{A_v \cdot \sin w} = \frac{\mu_v \cos w + 1}{\mu_v \cdot \sin w}$$

ein, so wird schließlich

$$(24) \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1) \sin w}{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos w}$$

$$= \frac{(\mu_2 - \mu_1) \sin w}{\mu_1 \mu_2 + 1 + (\mu_1 + \mu_2) \cos w}$$

und für  $w = \frac{\pi}{2}$ :

$$(24') \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \mu_2 + 1}.$$

Ist aber  $\alpha_2 > \alpha_1$ , so ist  $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$  und  $\operatorname{tg} \phi$  gleich dem vorstehenden Werte mit negativem Vorzeichen. Daher liefern die Formeln (24) einen der beiden Winkel, die  $g_1$  und  $g_2$  miteinander einschließen.

Die beiden Geraden sind einander parallel, wenn  $\phi = 0$ , also

$$(25) \quad A_1 : A_2 = B_1 : B_2 \quad \text{oder} \quad \mu_2 = \mu_1$$

ist; sie fallen zusammen, wenn ihre Gleichungen sich nur um einen Faktor unterscheiden:

$$(26) \quad A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2.$$

Aus (24) folgt ferner als Bedingung, daß beide Geraden senkrecht aufeinanderstehen:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oder} \\ A_1 A_2 + B_1 B_2 = (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos w \\ \mu_1 \mu_2 + 1 + (\mu_1 + \mu_2) \cos w = 0; \end{array} \right.$$

$$w = \frac{\pi}{2} :$$

$$(27') \quad \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} + 1 = \mu_1 \mu_2 + 1 = 0.$$

## 22. Schnittpunkt zweier Geraden.

Die Koordinaten  $x_s, y_s$  des Schnittpunktes  $S$  von  $g_1$  und  $g_2$  erhält man durch Auflösung der beiden Gleichungen  $A_\nu x + B_\nu y + C_\nu = 0$  ( $\nu = 1, 2$ ) nach  $x$  und  $y$ :

$$(28) \quad x_s = - \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_s = - \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Der Schnittpunkt  $S$  rückt in das Unendliche,  $g_2$  ist parallel  $g_1$ , wenn der Nenner verschwindet [S. 40 (25)], ohne daß weder der Zähler von  $x_s$ , noch der von  $y_s$  Null ist. Ist aber auch noch ein Zähler gleich Null, also  $A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2$ , so verschwindet auch der andere Zähler, der Schnittpunkt von  $g_1$  und  $g_2$  wird unbestimmt; das ist nur möglich, wenn beide Geraden zusammenfallen [S. 40 (26)].

Damit noch die dritte Gerade  $A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$  sich mit den beiden ersten in demselben Punkte schneidet, müssen die obigen Werte für  $x_s$  und  $y_s$  diese dritte Gleichung befriedigen, was die Bedingung liefert:

$$(29) \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

## 23. Strahlenbüschel.

Bezeichnet man die ganze linke Seite der Gleichung  $A_v x + B_v y + C_v = 0$  mit  $n_v$ , wo  $n_v$  also zunächst nicht die Normalform zu sein braucht, so kann die Gleichung der Geraden  $g_v$  kurz  $n_v = 0$  geschrieben werden. Dann ist, da  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2$  linear in  $x$  und  $y$  ist,

$$(30) \quad \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$$

die Gleichung einer Geraden, die durch den Schnittpunkt  $S$  von  $g_1$  und  $g_2$  hindurchgeht, da für  $x = x_s, y = y_s$  sowohl  $n_1$  als  $n_2$  Null ist. Nimmt nun  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  alle Werte von  $-\infty$  bis

$+\infty$  an, so liefert (30) alle Geraden durch den Punkt, deren Gesamtheit als ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte  $S$  bezeichnet wird. Geht eine dritte Gerade  $g_3$  mit der Gleichung  $n_3 = 0$  ebenfalls durch  $S$ , so muß sie ein Strahl des Büschels (30) sein; d. h. für ein bestimmtes Wertverhältnis  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  muß sich eine Zahl ( $-\lambda_3$ ) so

bestimmen lassen, daß ( $-\lambda_3 n_3$ ) Glied für Glied übereinstimmt mit  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2$ , oder wie man sagt, daß beide Ausdrücke identisch gleich sind, was so geschrieben werden soll:

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 \equiv -\lambda_3 n_3$$

oder

$$(31) \quad \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 \equiv 0$$

und bedeutet, daß die Koeffizienten von  $x, y$  und das konstante Glied links einzeln für jedes Wertepaar  $x, y$  verschwinden. Die Identität (31) schließt also die drei gewöhnlichen Gleichungen

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0, \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 = 0, \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0$$

ein. Berechnet man aus zwei der drei Gleichungen  $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$

und setzt ihre Werte in die dritte ein, so erhält man wieder die Bedingung (29).

Umgekehrt kann man schließen, daß, wenn zwischen den Gleichungen dreier Geraden eine Identität von der Gestalt (31) besteht, die Geraden durch einen Punkt gehen, denn für jedes Wertepaar  $x, y$ , das  $n_3 = 0$  werden läßt, wird dann auch die mit  $-\lambda_3 n_3 = 0$  identische Gleichung  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$ , d. h. aber die Gerade  $n_3 = 0$  ist ein Strahl des Büschels (30). Die Identität (31) ist also die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die drei Geraden  $g_\nu$  mit den Gleichungen  $n_\nu = 0$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) demselben Strahlenbüschel angehören.

Die Bedeutung des Parameters  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  in (30) soll nun unter der Annahme ermittelt werden, daß die Gleichungen  $n_\nu = 0$  in der Normalform  $x \cdot \cos \gamma_\nu + y \cdot \cos (w - \gamma_\nu) - p_\nu = 0$  gegeben sind. Fällt man von irgendeinem Punkte  $P_0(x_0, y_0)$  des Strahles  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$  die Lote  $p_1, p_2$  auf  $n_1 = 0$  und  $n_2 = 0$ , dann ist, weil  $x_0, y_0$  die Gleichung des Strahles befriedigen müssen, nach § 20:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = - \frac{\cos \gamma_1 \cdot x_0 + \cos (w - \gamma_1) \cdot y_0 - p_1}{\cos \gamma_2 \cdot x_0 + \cos (w - \gamma_2) \cdot y_0 - p_2} = - \frac{p_1}{p_2},$$

d. h.  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  ist gleich dem negativ genommenen Abstandsverhältnisse eines beliebigen Punktes des Strahles  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$  von den Strahlen  $n_1 = 0, n_2 = 0$ . Denn wenn man von einem beliebigen anderen Punkte  $Q$  des Strahles durch  $P_0$  die Lote  $q_1, q_2$  gefällt hätte, so ist leicht zu erkennen, daß  $p_1 : p_2 = q_1 : q_2$  ist.

Die beiden Strahlen  $g_1, g_2$  teilen die Ebene in vier Felder 1, 1' und 2, 2', von denen die beiden Felder eines jeden Paares Scheitelfelder sind. Liegt nun der Koordinaten-

anfangspunkt im Felde (1), so erkennt man leicht, daß  $p_1$  und  $p_2$  gleiche Vorzeichen haben, wenn der Strahl  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$  durch die Felder 1, 1' geht, jedoch entgegengesetzt, wenn er durch die Felder 2, 2' geht. Im ersten Falle haben  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  entgegengesetzte, im zweiten gleiche Vorzeichen. Z. B. sind die Gleichungen der beiden Winkelhalbierenden  $n_1 - n_2 = 0$  für 1 und 1',  $n_1 + n_2 = 0$  für 2 und 2'.

### 24. Dreieckssätze.

Mittels der Betrachtungen des vorigen Paragraphen lassen sich leicht und elegant viele Dreieckssätze beweisen.

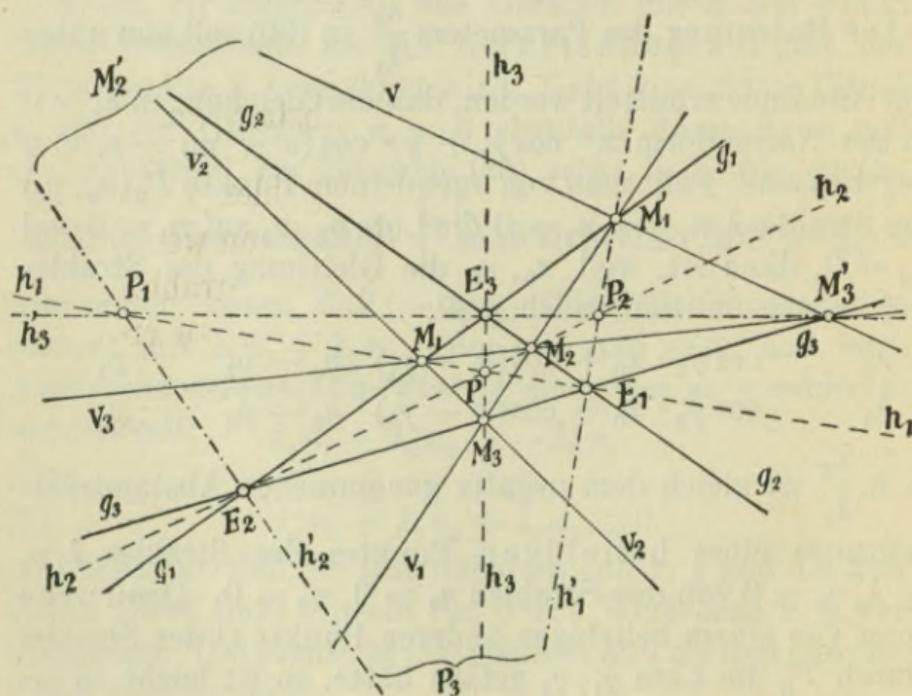


Fig. 16.

Es seien  $n_v = 0$  ( $v = 1, 2, 3$ ) die Normalgleichungen der drei Seiten  $g_v$  eines Dreiecks  $E_1E_2E_3$  (Fig. 16), für die

daher nicht eine Identität von der Form S. 42 (31) bestehen kann. Durch die Ecken  $E_1, E_2, E_3$  zieht man die sechs Geraden mit den Gleichungen:

$$h_3 : \lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2 = 0, \quad h'_3 : \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$$

$$h_1 : \lambda_2 n_2 - \lambda_3 n_3 = 0, \quad h'_1 : \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = 0$$

$$h_2 : \lambda_3 n_3 - \lambda_1 n_1 = 0, \quad h'_2 : \lambda_3 n_3 + \lambda_1 n_1 = 0,$$

wo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  beliebige Werte sind. Addiert man die Gleichungen der drei Geraden  $h_1, h_2, h_3$ , so verschwindet die Summe identisch; Entsprechendes gilt für die Geraden  $h_1, h'_2, h'_3; h'_1, h_2, h'_3$  und  $h'_1, h'_2, h_3$  (z. B.  $h_1 + h'_2 - h'_3 \equiv 0$ ). Es schneiden sich also die drei Geraden  $h$  in einem Punkte  $P$  und je zwei Gerade  $h'$  und die dritte Gerade  $h$  in einem Punkte ( $P_1, P_2, P_3$ ) nach (31). Die drei Geraden  $h$  z. B. kann man also durch einen beliebigen Punkt  $P$  ziehen; dann sind aber die Geraden  $h'$  bestimmt, da aus den Gleichungen der

Geraden  $h$  die Quotienten  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$  sich ergeben. Bezeich-

nen weiter  $M_v, M'_v$  die Schnittpunkte von  $h_v, h'_v$  durch  $E_v$  mit der Gegenseite des Dreiecks  $g_v$ , so liegen die drei Punkte  $M'_1, M'_2, M'_3$  auf einer Geraden  $v$  und je zwei Punkte  $M$  und der dritte  $M'$  auf einer Geraden, z. B.  $M'_1, M_2, M_3$  auf  $v_1$ . Denn die Gleichung  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = 0$  ist befriedigt für den Schnittpunkt von  $g_1$  und  $h'_1$ , für dessen Koordinaten  $n_1 = 0$  und  $\lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = 0$  ist, ebenso für den Schnittpunkt von  $g_2$  mit  $h'_2$  ( $n_2 = 0$  und  $\lambda_1 n_1 + \lambda_3 n_3 = 0$ ) und für den von  $g_3$  mit  $h'_3$  ( $n_3 = 0$  und  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$ ). Es ist also  $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = 0$ , die eine lineare Gleichung in  $x, y$  ist, die Gleichung der Geraden  $v$ . Ebenso sieht man, daß  $-\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = 0$  die Gleichung der Geraden  $v_1$  ist und  $\lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = 0, \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 - \lambda_3 n_3 = 0$  die Gleichungen von  $v_2$  und  $v_3$  sind.

Wählt man den Nullpunkt des Koordinatensystems und den Punkt  $P$  im Innern des Dreiecks, so sind  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  positiv. Für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  erhält man die bekannten Sätze, daß sich die drei inneren Winkelhalbierenden in einem Punkte und je zwei äußere und die dritte innere Winkelhalbierende in je einem Punkte schneiden. Der Schnittpunkt  $P$  ist der Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises;  $P_1, P_2, P_3$  sind die Mittelpunkte der drei dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise.

Um die analogen Sätze für die drei Höhen eines Dreiecks zu beweisen, hat man in  $h_1, h_2, h_3$  die Werte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  so zu wählen, daß jede Gerade  $h$  auf der Gegenseite senkrecht steht. Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem hat  $g_1$  die Gleichung

$$x \cdot \cos \gamma_1 + y \cdot \sin \gamma_1 - p_1 = 0.$$

Damit  $h_1$ :

$$\begin{aligned} & \lambda_2 n_2 - \lambda_3 n_3 = \\ x (\lambda_2 \cdot \cos \gamma_2 - \lambda_3 \cdot \cos \gamma_3) + y (\lambda_2 \cdot \sin \gamma_2 - \lambda_3 \cdot \sin \gamma_3) \\ & - (\lambda_2 p_2 - \lambda_3 p_3) = 0 \end{aligned}$$

auf  $g_1$  senkrecht steht, muß das Produkt der Richtungskoeffizienten von  $h_1$  und  $g_1$  nach S. 41 (27') gleich  $-1$  sein:

$$\frac{\cos \gamma_1 \cdot \lambda_2 \cos \gamma_2 - \lambda_3 \cos \gamma_3}{\sin \gamma_1 \cdot \lambda_2 \sin \gamma_2 - \lambda_3 \sin \gamma_3} = -1$$

oder

$$\lambda_3 : \lambda_2 = \cos(\gamma_2 - \gamma_1) : \cos(\gamma_3 - \gamma_1).$$

Die drei Höhen des Dreiecks haben daher die Gleichungen:

$$h_1: \cos(\gamma_3 - \gamma_1) \cdot n_2 - \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \cdot n_3 = 0,$$

$$h_2: \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot n_3 - \cos(\gamma_3 - \gamma_2) \cdot n_1 = 0,$$

$$h_3: \cos(\gamma_2 - \gamma_3) \cdot n_1 - \cos(\gamma_1 - \gamma_3) \cdot n_2 = 0.$$

Da die Summe der linken Seiten identisch verschwindet, so ist hiermit der Satz bewiesen: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Auf diese Weise lassen sich viele Dreieckssätze aus dem allgemeinen Satze ableiten.

### 25. Sätze von Ceva und Menelaos.

In welchem Verhältnis teilt der Punkt  $M_3$  in Fig. 16 die Seite  $E_2E_1$ ?

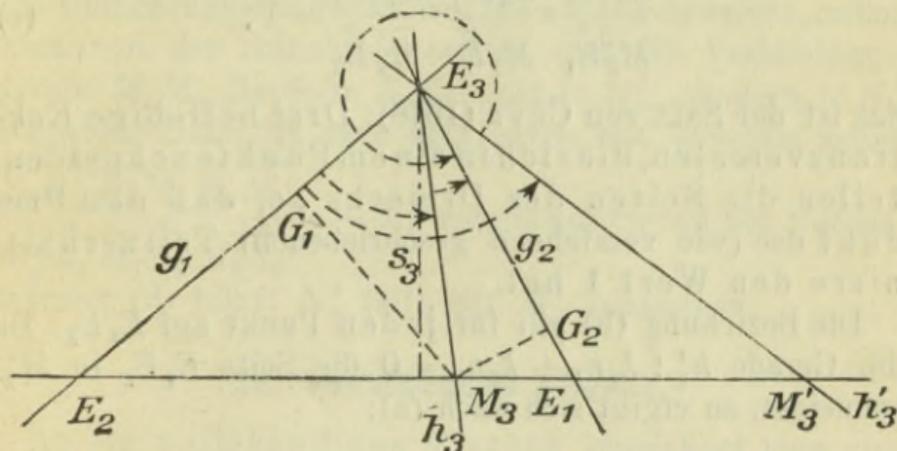


Fig. 17.

Fällt man (Fig. 17) von  $M_3$  die Lote auf  $g_1$  und  $g_2$ , so verhält sich

$$M_3G_1 : M_3G_2 = \sin g_1 h_3 : \sin h_3 g_2.$$

Nach § 23 folgt aber aus der Gleichung für  $h_3$ :

$$\lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2 = 0:$$

$$\lambda_2 : \lambda_1 = M_3G_1 : M_3G_2 = \sin g_1 h_3 : \sin h_3 g_2.$$

Wendet man nun die Formel S. 13 (a) hier auf die Dreiecke  $E_2M_3E_3$ ,  $M_3E_1E_3$  (statt auf  $P_1P_3S$ ,  $P_3P_2S$ ) an, so erhält man

$$\frac{\overrightarrow{E_2M_3}}{\overrightarrow{M_3E_1}} = \frac{E_2E_3}{E_1E_3} \cdot \frac{\sin g_1 h_3}{\sin h_3 g_2} = \frac{E_2E_3}{E_1E_3} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (b)$$

Für die anderen Dreiecksseiten erhält man ebenso:

$$\frac{\overrightarrow{E_3 M_1}}{\overrightarrow{M_1 E_2}} = \frac{E_3 E_1 \cdot \lambda_3}{E_2 E_1 \cdot \lambda_2}, \quad \frac{\overrightarrow{E_1 M_2}}{\overrightarrow{M_2 E_3}} = \frac{E_1 E_2 \cdot \lambda_1}{E_3 E_2 \cdot \lambda_2}.$$

Folglich ist

$$\frac{\overrightarrow{E_2 M_3}}{\overrightarrow{M_3 E_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_3 M_1}}{\overrightarrow{M_1 E_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_1 M_2}}{\overrightarrow{M_2 E_3}} = 1; \quad (c)$$

das ist der Satz von Ceva (1678): Drei beliebige Ecktransversalen, die sich in einem Punkte schneiden, teilen die Seiten des Dreiecks so, daß das Produkt der (wie vorstehend geschriebenen) Teilverhältnisse den Wert 1 hat.

Die Beziehung (b) gilt für jeden Punkt auf  $E_1 E_2$ . Da die Gerade  $h'_3: \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$  die Seite  $E_1 E_2$  in  $M'_3$  schneidet, so ergibt sich nach (a):

$$\frac{\overrightarrow{E_2 M'_3}}{\overrightarrow{M'_3 E_1}} = \frac{E_2 E_3 \cdot \sin g_1 h'_3}{E_1 E_3 \cdot \sin h'_3 g_2} = - \frac{E_2 E_3 \cdot \lambda_2}{E_1 E_3 \cdot \lambda_1}. \quad (b')$$

Daher

$$\frac{\overrightarrow{E_2 M'_3}}{\overrightarrow{M'_3 E_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_3 M_1}}{\overrightarrow{M_1 E_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_1 M_2}}{\overrightarrow{M_2 E_3}} = -1. \quad (d)$$

Satz von Menelaos (100 n. Chr.): Eine jede Gerade teilt die drei Seiten eines Dreiecks so, daß das Produkt (d) der Teilverhältnisse gleich  $-1$  ist.

Es gelten aber auch die Umkehrungen beider Sätze. Gilt die Relation (c), aber es gehe  $E_3 M_3$  nicht durch den Schnittpunkt von  $E_1 M_1$  und  $E_2 M_2$ ; vielmehr schneide die Verbindungslinie dieses Punktes mit  $E_3$  die Seite  $E_1 E_2$  in

dem Punkte  $N_3$ . Dann ist nach dem Satz von Ceva

$$\frac{\overrightarrow{E_2 N_3}}{\overrightarrow{N_3 E_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_3 M_1}}{\overrightarrow{M_1 E_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_1 M_2}}{\overrightarrow{M_2 E_3}} = 1; \text{ dividiert man die linke Seite}$$

$$\text{durch die von (c), so folgt } \frac{\overrightarrow{E_2 N_3}}{\overrightarrow{N_3 E_1}} = \frac{\overrightarrow{E_2 M_3}}{\overrightarrow{M_3 E_1}}, \text{ was nur möglich}$$

ist, wenn  $N_3$  mit  $M_3$  zusammenfällt. — Genau so kann man die Umkehrung des Satzes von Menelaos beweisen, indem man von der Annahme ausgeht, daß die Verbindungsgerade  $M_1 M_2$  die Seite  $E_1 E_2$  nicht in  $M'_3$ , sondern in  $N'_3$  schneide. Dann ist nach dem Satze von Menelaos selbst

$$\frac{\overrightarrow{E_2 N'_3}}{\overrightarrow{N'_3 E_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_3 M_1}}{\overrightarrow{M_1 E_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_1 M_2}}{\overrightarrow{M_2 E_3}} = -1, \text{ woraus auf Grund der Voraus-}$$

$$\text{setzung (d) folgt: } N'_3 \text{ fällt mit } M'_3 \text{ zusammen.}$$

## 26. Vollständiges Viereck.

Als ein vollständiges Viereck bezeichnet man vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und ihre sechs Verbindungsgeraden; die ersteren heißen Ecken, die letzteren Seiten. Die drei Schnittpunkte der sechs Seiten, die nicht Eckpunkte sind, heißen Diagonalepunkte und sind die Ecken des Diagonaldreiecks. So bilden z. B. in Fig. 16 die Punkte  $E_1, E_2, M_1, M_2$  die vier Ecken,  $g_1, g_2, g_3, v_3, h_1, h_2$  die Seiten eines vollständigen Vierecks, für das  $P, E_3, M'_3$  die Diagonalepunkte sind. Nun ist nach (b) und (b'):

$$(E_2 E_1 M_3 M'_3) = -1, \text{ also (nach § 4)}$$

$$(g_1 g_2 h_3 h'_3) = -1;$$

aber auch

$$(M_1 M_2 N_3 M'_3) = (g_1 g_2 h_3 h'_3) = -1.$$

Die Fig. 16 ist aber völlig bestimmt, sobald man vier Punkte, von denen nicht drei in einer Geraden liegen,

z. B.  $E_1, E_2, E_3, P$  beliebig gewählt hat.  $E_3P_2$  schneidet die Gerade  $E_1E_2$  in  $M_3$ , während der zu  $M_3$  konjugierte Punkt  $M'_3$  nach § 24 aus derselben Geraden ausgeschnitten

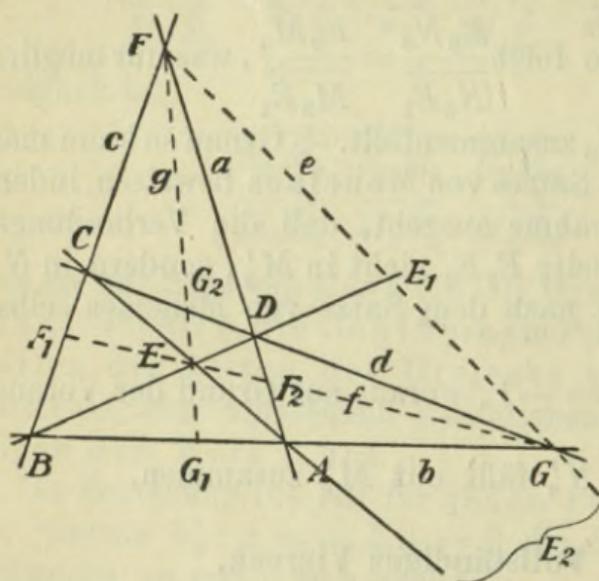


Fig. 18.

wird, durch die Verbindungs-  
linie der Punkte  $M_1$  und  $M_2$ , in denen  $E_1P$  die Gerade  $E_2E_3$  und  $E_2P$  die Gerade  $E_3E_1$  trifft. Das vollständige

Viereck  $E_2E_1M_1M_2$  ist also ganz allgemeiner Art; alle für die Fig. 16 abgeleiteten Eigenschaften gelten

allgemein, und es können daher aus dieser Figur sofort die folgenden wichtigen Sätze<sup>1)</sup> abgelesen werden (Fig. 18):

Je zwei Ecken eines vollständigen Vierecks  $ABCD$  werden harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungsseite mit den Seiten des Diagonaldreiecks  $EFG$  [z. B.  $(ABG_1G) = -1$ ].

Je zwei Ecken des Diagonaldreiecks werden harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungsseite mit den Seiten des vollständigen Vierecks [z. B.  $(EGF_1F_2) = -1$ ].

<sup>1)</sup> Man ersetze in Fig. 16 die Buchstaben  $E_1, E_2, M_1, M_2, P, E_3, M'_3$ ;  $g_2, g_3, g_1, v_3, h_3$  der Reihe nach durch  $A, B, C, D, E, F, G; a, b, c, d, g$ .

Die in jeder Ecke des Diagonaldreiecks zusammentreffenden vier Strahlen sind vier harmonische Strahlen [z. B.  $(aceg) = -1$ ].

Diese harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks benutzt man, um zu einem Punkte einer Strecke den konjugierten vierten harmonischen Punkt zu konstruieren. Ist z. B. die Strecke  $AB$  gegeben und wird der zu  $G_1$  konjugierte Punkt gesucht, so zieht man durch  $A$  und  $B$  zwei beliebige Gerade, deren Schnittpunkt  $F$  sei; wählt man dann auf  $G_1F$  den Punkt  $E$  willkürlich, dessen Verbindungslinien mit  $A$  und  $B$  die Punkte  $C$  auf  $BF$  und  $D$  auf  $AF$  ausschneiden, so schneidet die Verbindungslinie  $CD$  die Gerade  $AB$  in dem gesuchten vierten harmonischen Punkte  $G$ .

Die Konstruktion erfährt, wenn statt eines inneren Punktes von  $AB$  ein äußerer, z. B.  $G$ , gegeben ist, eine leicht erkennbare Abänderung. Jedesmal handelt es sich nur darum, die Figur eines vollständigen Vierecks aus den drei gegebenen Punkten so zu zeichnen, daß die Begrenzungspunkte der gegebenen Strecke zwei Ecken des Vierecks und der eine gegebene Teilpunkt Schnittpunkt der Strecke mit einer Seite des Diagonaldreiecks werden.

Diese Konstruktion ist ebenfalls anwendbar, wenn es sich darum handelt, zu drei gegebenen Strahlen eines Büschels den vierten harmonischen Strahl zu finden. Auch bei dieser Aufgabe ist mit Hilfe der drei gegebenen Strahlen ein vollständiges Viereck zu bilden. Sind z. B.  $a, c, e$  des Büschels  $F$  gegeben und soll der zu  $e$  konjugierte Strahl konstruiert werden, so zieht man durch einen beliebigen Punkt  $G$  auf  $e$  zwei beliebige Strahlen  $b, d$  und verbindet deren Schnittpunkte mit  $a$  und  $c$  kreuzweise, nämlich  $A$  mit  $C$ ,  $B$  mit  $D$ . Dann ist die Verbindungslinie von  $F$  mit dem Schnittpunkte  $E$  von  $AC$  mit  $BD$  der gesuchte vierte harmonische Strahl.

Besonders bemerkenswert ist es, daß bei dieser Konstruktion des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen allein das Lineal, nicht auch wie bei anderen Konstruktionen der Zirkel, nötig ist.

#### 4. Abschnitt.

### Kurven zweiter Ordnung.

#### 27. Geometrische Örter.

Zunächst sollen einige geometrische Örter behandelt werden, die auf Kurven zweiter Ordnung in Parallelkoordinaten  $x, y$  führen.

I. Aus der ersten Gleichung §11 (10) folgt, daß der Kreis, als geometrischer Ort aller Punkte  $P(x, y)$ , die von einem festen Punkte  $P_0(x_0, y_0)$ , dem Mittelpunkte, den gleichen Abstand  $l = r$  (= Radius) haben, die Gleichung besitzt:

$$(32) \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 2(x-x_0)(y-y_0)\cos w = r^2.$$

Für  $w = \frac{\pi}{2}$ :

$$(32') \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2.$$

II. Es soll der geometrische Ort aller Punkte bestimmt werden, die von zwei festen Punkten  $F_1, F_2$  eine konstante Abstandssumme oder Abstandsdifferenz (=  $2a$ ) haben. Die der ersteren Forderung entsprechende Kurve heißt *Ellipse*, die der zweiten entsprechende *Hyperbel*.

Das Koordinatensystem wählt man stets so, daß es der Aufgabe und den in ihr gegebenen geometrischen Elementen am besten angepaßt ist. Das ist hier das rechtwinklige System, dessen  $X$ -Achse mit der Geraden  $F_1, F_2$  und dessen Nullpunkt  $O$  mit dem Halbierungspunkte der

Strecke  $F_1F_2 = 2e$  zusammenfällt. Die Punkte  $F_1, F_2$  haben dann die Koordinaten  $\pm e, 0$  (vgl. Fig. 20).

Nach § 11 (10') ist

$$r_1 = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + e)^2 + y^2}$$

und aus

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad \text{bzw.} \quad r_1 - r_2 = \pm 2a$$

folgt

$$r_1^2 - r_2^2 - 4a^2 = \mp 4ar_2$$

und durch Einsetzen der Werte von  $r_1, r_2$  und nochmaliges Quadrieren:

$$(xe + a^2)^2 = a^2(x + e)^2 + a^2y^2$$

oder

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Für die Summe der Abstände muß  $a > e$ , für die Differenz  $a < e$  sein. Im ersten Falle setzt man  $a^2 - e^2 = b^2$ , im zweiten  $e^2 - a^2 = b^2$  und erhält die Gleichungen:

$$(33) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ellipse.}$$

$$(34) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Hyperbel.}$$

Die Punkte  $F_1, F_2$  heißen Brennpunkte von Ellipse und Hyperbel;  $e$  die lineare Exzentrizität.

III. Es soll der geometrische Ort aller Punkte  $P$  bestimmt werden, deren  $\lambda$ -facher senkrechter Abstand von einer festen Geraden  $l$  — der Leitlinie oder Direktrix — gleich ihrer Entfernung von einem festen Punkte  $F$  — dem Brennpunkt — ist.  $\lambda$  ist eine beliebige positive Zahl. Die dieser Bedingung genügenden Kurven heißen Kegelschnitte (vgl. § 49) und umfassen Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Man legt zweckmäßig die  $Y$ -Achse in die Gerade  $l$  und die  $X$ -Achse senkrecht zu ihr durch den Punkt  $F$ . Hat  $F$  den Abstand  $s$  von  $O$ , so sind seine Koordinaten  $s, 0$ , und es ist

$$FP^2 = (x - s)^2 + y^2,$$

und der senkrechte Abstand des Punktes  $P$  von der Geraden  $l$  ist gleich seiner Abszisse  $x$ . Dann folgt aus  $\lambda x = FP$ :

$$(35) \quad y^2 = (\lambda^2 - 1)x^2 + 2sx - s^2,$$

welche Gleichung durch die für  $\lambda \geq 1$  stets mögliche Verschiebung des Nullpunktes längs der  $X$ -Achse

$$x = x' - \frac{s}{\lambda^2 - 1}, \quad y = y'$$

die Form annimmt:  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ ,

wo  $a^2 = \frac{s^2 \lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2}$ ,  $b^2 = \frac{s^2 \lambda^2}{1 - \lambda^2}$  ist. Die Kurve ist also

(nach Abschnitt II) eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem  $\lambda < 1$  oder  $\lambda > 1$  ist.  $2s\lambda = 2p$  heißt der Parameter; die Ordinaten im Brennpunkte sind gleich  $\pm p$ .

Die Kurve (35) schneidet die  $X$ -Achse in den Punkten  $A_1, A_2$  mit den Abszissen  $\frac{s}{1 + \lambda}$  und  $\frac{s}{1 - \lambda}$ , die Scheitelpunkte heißen. Die Abszissen der vier Punkte  $O, F, A_1$  und  $A_2$  erfüllen die in § 5 für vier harmonische Punkte aufgestellte Bedingung, folglich trennen die Scheitelpunkte einer Ellipse oder Hyperbel den Brennpunkt und den Schnittpunkt der Leitlinie mit der Achse harmonisch.

Nimmt man die Verschiebung des Nullpunktes längs der  $X$ -Achse um die Strecke  $\frac{s}{\lambda + 1}$  vor:

$$x = x'' + \frac{s}{\lambda + 1}, \quad y = y'',$$

was für jeden Wert von  $\lambda$  möglich ist, so erhält man die wichtige sog. Scheitelgleichung der Kurven zweiter Ordnung:

$$(36) \quad y''^2 = 2p x'' + (\lambda^2 - 1) x''^2.$$

Für  $\lambda = 1$ ,  $p = s$  heißt die Kurve Parabel.

Für  $y'' = 0$  liefert die Gleichung (36) die Abszissen der Scheitel

$$x'' = 0 \text{ und } x'' = \frac{2p}{\lambda^2 - 1}.$$

Für die Ellipse und Hyperbel liegen beide Scheitel im Endlichen, während für die Parabel der zweite im Unendlichen liegt. Bei der Parabel wird der senkrechte Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie durch den Scheitel halbiert.

Dieses Beispiel eignet sich auch für die Benutzung von Polarkoordinaten. Nimmt man  $F$  als Pol und  $FO$  als Polarachse, so ist

$$(36a) \quad r = \frac{p}{1 + \lambda \cos \vartheta}.$$

Diese Formel liefert für  $\lambda > 1$  nur denjenigen Hyperbelzweig, innerhalb dessen der Brennpunkt  $F$  liegt.

$F$  ist der eine Brennpunkt bei der Ellipse und Hyperbel, und  $l$  heißt die zugehörige Leitlinie oder Direktrix. Die Parabel hat nur einen Brennpunkt und eine Leitlinie.  $\lambda$  heißt die numerische Exzentrizität der Kurven zweiter Ordnung.

## 28. Allgemeine Gleichung zweiten Grades.

Wie in § 19 die Frage erhoben wurde, ob jede Gleichung ersten Grades in  $x$  und  $y$  eine gerade Linie darstellt, so liegt hier die Untersuchung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in  $x$ ,  $y$  und die Beantwortung der Frage nahe, ob es noch andere Kurven zweiter Ordnung als Ellipse (Kreis), Hyperbel und Parabel, die man gemeinsam Kegelschnitte nennt, gibt.

Die allgemeinste algebraische Gleichung zweiten Grades<sup>1)</sup> mit zwei Veränderlichen kann geschrieben werden:

$$(37) \quad f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Da in dieser Gleichung die Größen  $a_{21}$ ,  $a_{31}$ ,  $a_{32}$  nicht vorkommen, so kann über sie frei verfügt werden, was in der Weise geschehen soll, daß

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{23}$$

ist. Zur Abkürzung soll noch

$$(38) \quad \begin{aligned} f'(x, y) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ f''(x, y) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ f'''(x, y) &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \end{aligned}$$

gesetzt werden. Dann ist

$$(37a) \quad f(x, y) = f'(x, y) \cdot x + f''(x, y) \cdot y + f'''(x, y).$$

Wenn kein Mißverständnis möglich ist, sollen die Argumente  $x, y$  in den Funktionsbezeichnungen fortgelassen und nur  $f, f', f'', f'''$  benutzt werden.

Unter einer algebraischen Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung versteht man eine Kurve, deren Gleichung eine algebraische Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $x, y$ , d. h. die eine Summe von Gliedern der Form  $x^\mu y^\nu$  multipliziert in Konstante ist, wo  $\mu + \nu \leq n$ . Wendet man auf eine solche Gleichung die allgemeinste Transformation eines Parallelkoordinatensystems in ein anderes an (S. 25, III):

$$\begin{aligned} x \cdot \sin w &= x_0 + x' \cdot \sin(w - \alpha) + y' \cdot \sin(w - \beta), \\ y \cdot \sin w &= y_0 + x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \sin \beta, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Statt die Buchstaben  $a, b, c, \dots$  für die Koeffizienten der Potenzen von  $x$  und  $y$  zu benutzen, ist es hier vorteilhafter, die Schreibweise durch einen einzigen Buchstaben mit doppelten Indizes zu verwenden. Zwei Koeffizienten,  $a_{\mu, \nu}$  und  $a_{\rho, \sigma}$ , bei denen einer oder beide Indizes  $\mu, \nu$  von  $\rho, \sigma$  verschieden, sind im allgemeinen als unabhängig voneinander anzusehen.

die in den Koordinaten vom ersten Grade sind, so kann dadurch der Grad der Gleichung und also der der Kurve nicht geändert werden. Eine Kurve zweiter Ordnung bleibt bei jeder Koordinatentransformation eine solche zweiter Ordnung. Man wird daher, um die allgemeine Gleichung zweiten Grades zu untersuchen, sie durch geeignete Transformationen auf einfachere Gestalten zurückführen.

Fragt man, in wievielen Punkten eine Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung von der Geraden  $x = \frac{x_1 + \kappa x_2}{1 + \kappa}$ ,  $y = \frac{y_1 + \kappa y_2}{1 + \kappa}$  geschnitten wird, so erhält man durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Kurvengleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung eine algebraische Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades für  $\kappa$ . Da eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades  $n$  Wurzeln besitzt, so kann man sagen, daß eine Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung von einer beliebigen Geraden in  $n$  Punkten geschnitten wird, wobei aber die Schnittpunkte nicht alle reell und voneinander verschieden zu sein brauchen. Demnach schneidet eine beliebige Gerade eine Kurve zweiter Ordnung in zwei Punkten. Die Anzahl der reellen und voneinander verschiedenen Schnittpunkte stimmt überein mit der Anzahl der reellen, voneinander verschiedene Wurzeln der Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades für  $\kappa$ .

Das zwischen diesen beiden Punkten, wenn sie reell und verschieden sind, gelegene Stück der Schnittgeraden heißt Sehne.

## 29. Mittelpunkt im Endlichen und Durchmesser.

Gibt es einen Punkt, der alle durch ihn hindurchgehenden Sehnen halbiert, so nennt man ihn Mittelpunkt der Kurve zweiter Ordnung und die durch ihngehenden Sehnen Durchmesser.

Wann hat eine Kurve zweiter Ordnung einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt  $x_0, y_0$ ?

Um diese Frage zu beantworten, werde eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt  $x = x' + x_0$ ,  $y = y' + y_0$  vorgenommen, wodurch die Kurvengleichung  $f(x, y)$  übergeht in

$$a_{11} x'^2 + 2a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + 2f'(x_0, y_0) \cdot x' + 2f''(x_0, y_0) \cdot y' + f(x_0, y_0) = 0.$$

Da jetzt der Nullpunkt des  $x' y'$ -Systems Mittelpunkt sein soll, so müssen, wenn  $x', y'$  die Koordinaten eines Punktes der Kurve sind, auch  $-x', -y'$  der Kurvengleichung genügen. Das ist aber nur möglich, wenn in der vorstehenden Gleichung Glieder ersten Grades in  $x'$  und  $y'$  nicht vorkommen. Für die Koordinaten des Mittelpunktes erhält man daher die Gleichungen:

$$(39) \quad \begin{cases} f'(x_0, y_0) = a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} = 0 \\ f''(x_0, y_0) = a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} = 0, \end{cases}$$

also

$$(39a) \quad x_0 = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad y_0 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Die Kurve hat mithin einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt, wenn

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich, nach Einsetzen der Werte (39a) für  $x_0, y_0$ :

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= f'(x_0, y_0) \cdot x_0 + f''(x_0, y_0) \cdot y_0 + f'''(x_0, y_0) \\ &= f'''(x_0, y_0) \\ &= \frac{\Delta}{\delta}, \end{aligned}$$

wo

$$(40) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

$\Delta$  heißt die Diskriminante von  $f(x, y)$ .

Die Gleichung der Kurve wird daher

$$(41) \quad a_{11} x'^2 + 2a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

### 30. Aachsen.

Diese Kurvengleichung soll nun auf ein rechtwinkliges  $X'' Y''$ -Koordinatensystem transformiert werden, was mittels der Formeln S. 25 (7 II) geschieht, die jetzt lauten:

$$x' \cdot \sin w = x'' \cdot \sin(w - \alpha) - y'' \cos(w - \alpha)$$

$$y' \cdot \sin w = x'' \cdot \sin \alpha + y'' \cos \alpha.$$

Es fragt sich nun, ob der in diesen Formeln auftretende Winkel  $\alpha = \sphericalangle(X', X'')$  so gewählt werden kann, daß in der transformierten Kurvengleichung das Glied mit  $x'' y''$  fehlt. Setzt man die Werte für  $x'$ ,  $y'$  aus den vorstehenden Gleichungen in (41) ein, so ergibt sich, daß der Koeffizient

von  $\frac{2x'' y''}{\sin^2 w}$ :

$$-a_{11} \sin(w - \alpha) \cdot \cos(w - \alpha)$$

$$+ a_{12} [\sin(w - \alpha) \cdot \cos \alpha - \cos(w - \alpha) \sin \alpha]$$

$$+ a_{22} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

oder

$$(42) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a_{11} \sin 2w - 2a_{12} \sin w}{a_{11} \cos 2w - 2a_{12} \cos w + a_{22}}$$

sein muß. Ist das ursprüngliche Koordinatensystem schon ein rechtwinkliges, so lautet der Wert einfacher

$$(42') \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Die beiden Werte, die sich für  $2\alpha$  im allgemeinen aus den Gleichungen (42) ergeben, unterscheiden sich um  $\pi$ , die beiden Werte von  $\alpha$  um  $\frac{\pi}{2}$ ; sie liefern also das einzige

rechtwinklige Koordinatensystem, das der oben gestellten Bedingung genügt. Die in der  $X''$ - und  $Y''$ -Achse gelegenen Durchmesser der Kurve stehen aufeinander senkrecht und heißen Achsen.

Die Koeffizienten von  $x''^2$  und  $y''^2$  sind

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{1}{\sin^2 w} \left\{ a_{11} \sin^2(w - \alpha) + 2a_{12} \sin(w - \alpha) \sin \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha \right\}$$

$$\frac{1}{b'^2} = \frac{1}{\sin^2 w} \left\{ a_{11} \cos^2(w - \alpha) - 2a_{12} \cos(w - \alpha) \cos \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha \right\}$$

wo für  $\alpha$  einer der beiden aus (42) sich ergebenden Werte zu setzen ist.

Um nachzuweisen, daß das Produkt  $a'^2 b'^2$  positiv oder negativ ist, je nachdem  $\delta >$  oder  $< 0$  ist, werde gesetzt:

$$\begin{aligned} a_{11} \sin(w - \alpha) + a_{12} \sin \alpha &= A, & +a_{12} \sin(w - \alpha) + a_{22} \sin \alpha &= B, \\ a_{11} \cos(w - \alpha) - a_{12} \cos \alpha &= C, & -a_{12} \cos(w - \alpha) + a_{22} \cos \alpha &= D. \end{aligned}$$

Dann kann die der Gleichung (42) voranstehende in doppelter Weise geschrieben werden:

$$A \cos(w - \alpha) = B \cos \alpha \quad \text{oder} \quad C \sin(w - \alpha) = D \sin \alpha,$$

und es ist weiter:

$$\frac{\sin^2 w}{a'^2} = A \sin(w - \alpha) + B \sin \alpha,$$

$$\frac{\sin^2 w}{b'^2} = C \cos(w - \alpha) + D \cos \alpha.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 w}{a'^2 b'^2} &= \left( (A \cdot \sin(w - \alpha) + B \cdot \sin \alpha) \right) \left( C \cdot \cos(w - \alpha) + D \cdot \cos \alpha \right) \\ &\quad - \left( A \cdot \cos(w - \alpha) - B \cdot \cos \alpha \right) \left( C \cdot \sin(w - \alpha) - D \cdot \sin \alpha \right), \end{aligned}$$

da die Faktoren des zweiten Gliedes rechts gleich Null sind.  
Daraus folgt

$$\frac{\sin^4 w}{a'^2 b'^2} = (AD + BC) \cdot \sin w.$$

Berechnet man nun noch  $AD + BC$ , so findet man dafür leicht  $\delta \cdot \sin w$ , so daß

$$\frac{\sin^2 w}{a'^2 b'^2} = \delta$$

ist; hiermit ist bewiesen, daß

für  $\delta > 0$  die Größen  $a'^2$  und  $b'^2$  gleiches (positives oder negatives) Vorzeichen,

für  $\delta < 0$  aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Die aus der Gleichung

$$(43) \quad \frac{x''^2}{a'^2} + \frac{y''^2}{b'^2} = -\frac{\Delta}{\delta}$$

für  $\Delta \neq 0$ ,  $a^2 = -\frac{a'^2 \Delta}{\delta}$ ,  $b^2 = -\frac{b'^2 \Delta}{\delta}$  folgende Gleichung

$$(43a) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

stimmt mit den Gleichungen S. 53 (33) und (34) überein; die Gleichung S. 56 (37) stellt daher eine Ellipse oder Hyperbel dar, je nachdem  $\delta > 0$  oder  $< 0$  ist.

Im ersteren Falle ist

$$\frac{a_{11}}{a'^2} = \frac{1}{\sin^2 w} \left\{ A^2 + \delta^2 \sin^2 \alpha \right\} > 0$$

und

$$\frac{a_{11}}{b'^2} = \frac{1}{\sin^2 w} \left\{ C^2 + \delta^2 \cos^2 \alpha \right\} > 0,$$

folglich

$$a^2 \text{ und } b^2 > 0 \text{ oder } < 0,$$

je nachdem  $a_{11}\Delta < 0$  oder  $> 0$  ist. Für  $a_{11}\Delta > 0$  ist die Kurvengleichung für kein reelles Wertepaar  $x, y$  erfüllt, weshalb man dann von einer imaginären Ellipse spricht. Da für  $\delta > 0$  auch  $a_{11}$  und  $a_{22}$  gleiches Vorzeichen haben müssen, so ist das Vorzeichen von  $a_{22}\Delta$  mit dem von  $a_{11}\Delta$  übereinstimmend. Die im Falle  $\delta < 0$  sich ergebende Hyperbel ist stets reell.

Die Gleichung (42) liefert nur dann keinen bestimmten Wert für den Winkel  $\alpha$ , wenn der Zähler und der Nenner gleichzeitig Null sind. Der Zähler liefert dann:  $a_{11} \cos w = a_{12}$ , der Nenner  $a_{22} = -a_{11} \cos 2w + 2a_{12} \cos w = -a_{11}(\cos 2w - 2 \cos^2 w) = a_{11}$ . Mit Hilfe dieser Beziehungen zwischen  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  und  $a_{22}$  findet man nach leichter trigonometrischer Umformung

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{1}{b'^2} = a_{11}$$

für jeden Winkel  $\alpha$  und jeden Winkel  $w$ , d. h. die Kurve ist ein Kreis um den Nullpunkt. Für  $\delta$  ergibt sich der Wert  $a_{11}^2 \sin^2 w$ , und die Gleichung (41) wird

$$x'^2 + 2x'y' \cos w + y'^2 + \frac{\Delta}{a_{11}^3 \sin^2 w} = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit S. 52 (32), so sieht man, daß der Radius des Kreises durch  $r^2 = -\frac{\Delta}{a_{11}^3 \sin^2 w}$  bestimmt ist.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades S. 56 (37) stellt also stets einen Kreis dar, wenn  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = a_{11} \cos w$  (für  $w = \frac{\pi}{2}$ , also  $a_{12} = 0$ ) ist; der Kreis ist reell oder nicht, je nachdem  $\Delta a_{11}$  negativ oder positiv ist.

Ist aber  $\Delta = 0$ , so liefert die Gleichung (43) eine sogenannte zerfallende Kurve zweiter Ordnung, d. h. zwei imaginäre oder reelle Geraden, je nachdem  $\delta > 0$  oder  $\delta < 0$  ist. Die für  $\delta > 0$  sich ergebenden imaginären Geraden haben den Nullpunkt, der ihr Schnittpunkt ist, als einzigen reellen Punkt. Für  $\delta < 0$  ist  $\frac{b'^2}{a'^2} = -c^2$ , wo  $c$  reell ist, und die beiden Geraden der Gleichung (43) sind

$$y'' = \pm c x''.$$

### 31. Mittelpunkt im Unendlichen.

Wenn  $\delta = 0$  ist, so hat die Kurve (37) einen im Unendlichen gelegenen Mittelpunkt, und eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt läßt sich daher nicht mehr ausführen. Ist einer der Koeffizienten  $a_{11}$  und  $a_{22}$  gleich Null, so muß auch  $a_{12} = 0$  sein. Werden diese drei Koeffizienten zunächst sämtlich als von Null verschieden angenommen, so kann die Kurvengleichung (37) geschrieben werden:

$$(44) \quad (a_{11}x + a_{12}y)^2 + 2a_{11}a_{13}x + 2a_{11}a_{23}y + a_{11}a_{33} = 0.$$

Setzt man in den Formeln S. 25 (7 II) zur Abkürzung

$$\frac{\sin(w - \alpha)}{\sin w} = q_1, \quad -\frac{\cos(w - \alpha)}{\sin w} = q_2,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin w} = r_1, \quad \frac{\cos \alpha}{\sin w} = r_2$$

und  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , so geht durch diese Transformation die Gleichung (44), wenn noch  $\alpha$  so gewählt wird, daß  $a_{11}q_1 + a_{12}r_1 = 0$  ist, über in

$$(a_{11}q_2 + a_{12}r_2)^2 y'^2 + 2a_{11}(a_{13}q_1 + a_{23}r_1) x' + 2a_{11}(a_{13}q_2 + a_{23}r_2) y' + a_{11}a_{33} = 0$$

oder

$$k^2 y'^2 + 2l x' + 2m y' + n = 0,$$

wo die Bedeutung der vier Konstanten ohne weiteres aus der vorhergehenden Gleichung zu entnehmen ist. Führt man noch die Parallelverschiebung

$$ky' + \frac{m}{k} = ky'', \quad lx' + \frac{k^2n - m^2}{2k^2} = lx''$$

aus, was  $l \neq 0$  voraussetzt, so erhält man schließlich

$$y''^2 + 2 \frac{l}{k^2} x'' = 0.$$

Nach (S. 53, III) ist daher die Kurve eine Parabel.

Die Diskriminante  $\Delta$  hat, wenn man beachtet, daß  $\delta = 0$  ist, den Wert

$$\Delta = -\frac{1}{a_{11}} \left\{ a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} \right\}^2 = -\frac{1}{a_{22}} \left\{ a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23} \right\}^2.$$

Aus der obigen Bestimmungsgleichung für  $\alpha$  folgt:

$$\frac{q_1}{r_1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{a_{22}}{a_{12}}, \quad \text{als } 0$$

$$l = a_{13}q_1 + a_{23}r_1 = \frac{r_1}{a_{11}}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) = \frac{q_1}{a_{22}}(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}).$$

Ist aber  $l \neq 0$ , so kann  $\Delta \neq 0$  sein.

Für  $a_{11} = 0$  muß  $a_{12} = 0$  sein, aber  $a_{22} \neq 0$ , wenn die Gleichung S. 56 (37) noch vom zweiten Grade sein soll; sie kann dann geschrieben werden:

$$(a_{22}y + a_{23})^2 + 2a_{22}a_{13}x + a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0$$

und ist wieder eine Parabel, wenn  $a_{22}a_{13} \neq 0$  ist. Dann aber ist auch  $\Delta = -a_{13}^2 a_{22} \neq 0$ .

Für  $\Delta = 0$  muß, wenn keine der Größen  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  gleich Null ist,  $a_{11}:a_{12} = a_{13}:a_{23} = a_{12}:a_{22}$  sein, wie sich

aus den beiden obigen Werten von  $\Delta$  ergibt; hieraus folgt:

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) \frac{a_{12}^2}{a_{22}^2} = \frac{a_{11}}{a_{12}} (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}).$$

Dann wird nach leichter Umformung:

$$n - \frac{m^2}{k^2} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2$$

und

$$k^2 y''^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0.$$

Das sind aber zwei reelle oder imaginäre parallele Gerade, je nachdem  $a_{11}a_{33} - a_{13}^2$  oder  $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 < 0$  oder  $> 0$  ist. Für  $a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0$  erhält man eine Doppelgerade.

Für  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} \neq 0$  ergibt sich aus  $\Delta = 0$ , daß auch  $a_{13} = 0$  sein muß. Dann liefert der Wert von  $a_{22}a_{33} - a_{23}^2$  in der gleichen Weise wie zuvor die Unterscheidung der drei Fälle.

Setzt man noch  $a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = \delta_1$  und  $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = \delta_2$ , so lassen sich jetzt die in diesem und dem vorigen Paragraphen gefundenen Kriterien in folgender Weise übersichtlich anordnen:

	$\delta > 0$	$\delta < 0$	$\delta = 0$	
$\Delta \neq 0$	Ellipse $a_{11} \Delta$ oder $a_{22} \Delta$ $< 0$   $> 0$ reell   imaginär	Hyperbel	Parabel	
$\Delta = 0$	Imaginäres Geradenpaar Schnittpunkt reell und im Endlichen	Reelles Geradenpaar	$\delta_1$ oder $\delta_2$ $< 0$   $> 0$ Reelles   Imaginäres Parallelenpaar	$\delta_1 = \delta_2 = 0$ Doppelgerade

## 32. Tangente und Polare.

Die Schnittpunkte  $S'$ ,  $S''$  einer Geraden  $x = \frac{x_1 + \kappa x_2}{1 + \kappa}$ ,  
 $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$  mit der Kurve S. 56 (37) erhält man durch Be-  
 rechnen der beiden Werte von  $\kappa$ , für die  $f\left(\frac{x_1 + \kappa x_2}{1 + \kappa}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$   
 $= 0$  ist. Diese Forderung ergibt die quadratische Gleichung

$$(45) \quad \kappa^2 \cdot f(x_2, y_2) + 2 \kappa \{f'(x_1, y_1) \cdot x_2 + f''(x_1, y_1) y_2 \\ + f'''(x_1, y_1)\} + f(x_1, y_1) = 0,$$

wo zunächst  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$  zwei beliebige Punkte  
 der Geraden sind. Sind  $\kappa'$  und  $\kappa''$  die beiden Wurzeln der  
 Gleichung (45), so hat man nur diese Werte in die Para-  
 metergleichungen der Geraden einzusetzen, um die Koordi-  
 naten von  $S'$  und  $S''$  zu erhalten.

Liegt der Punkt  $P_1$  im besonderen auf der  
 Kurve, so muß  $f(x_1, y_1) = 0$  sein, und der eine Wurzel-  
 wert  $\kappa'$  von  $\kappa$  ist Null. Der zu  $\kappa'$  gehörige Schnittpunkt  $S'$   
 fällt also mit  $P_1$  zusammen. Dreht man nun die Gerade  
 um  $P_1$ , so wandert ihr zweiter Schnittpunkt  $S''$  auf der  
 Kurve und fällt schließlich mit dem ersten  $S'$  zusammen;  
 dann nennt man die Gerade eine Tangente an die Kurve  
 und den Punkt  $P_1$  ihren Berührungspunkt. Damit die  
 Gleichung (45) aber auch  $\kappa'' = 0$  ergibt, muß der Koeffi-  
 zient von  $2 \kappa$  verschwinden.

Da diese Bedingung vom ersten Grade in  $x_2, y_2$  ist, so  
 ist der geometrische Ort aller Punkte  $P_2$ , die mit  $P_1$  ver-  
 bunden die Tangente in  $P_1$  ergeben, die gerade Linie

$$(46) \quad f'(x_1, y_1) \cdot x + f''(x_1, y_1) \cdot y + f'''(x_1, y_1) = 0,$$

womit die Gleichung der Tangente<sup>1)</sup> im Punkte  $P_1$  der  
 Kurve (37) gefunden ist. In (46) bezeichnet man die

Koordinaten  $x, y$  eines beliebigen Punktes der Tangente als die laufenden Koordinaten.

Läßt man die Bedingung, daß  $P_1$  ein Punkt der Kurve sei, wieder fallen und nimmt ihn beliebig an, fragt aber nach der Bedingung, wann die Punkte  $P_1, P_2$  und die Schnittpunkte  $S', S''$  ihrer Verbindungsgeraden mit der Kurve zwei Paare konjugierter harmonischer Punkte darstellen, so muß  $\kappa' = -\kappa''$  sein, was nur der Fall ist, wenn wieder in (45) der Koeffizient von  $2\kappa$  verschwindet. Hält man wiederum  $P_1$  fest und läßt  $P_2$  so wandern, daß stets diese beiden Punkte mit den Schnittpunkten vier harmonische Punkte liefern, so erhält man, da die gleiche Bemerkung wie oben gilt, als geometrischen Ort des Punktes  $P_2$  die Gerade

$$f'(x_1, y_1) \cdot x + f''(x_1, y_1) y + f'''(x_1, y_1) = 0.$$

Diese Gerade heißt die Polare<sup>1)</sup> des Punktes  $P_1$ , der umgekehrt als Pol der Geraden bezeichnet wird. Die Gleichung der Polare ist formal dieselbe wie die Gleichung der Tangente; während aber in letzterer der Punkt  $P_1$  ihr Berührungspunkt mit der Kurve ist, und auf dieser liegt, ist der Pol  $P_1$  der Polare  $f'(x_1, y_1) \cdot x + f''(x_1, y_1) \cdot y + f'''(x_1, y_1) = 0$  im allgemeinen kein Punkt der Kurve. Wird jedoch der Pol zu einem Punkte der Kurve, so wird seine Polare zur Tangente in ihm; nur in diesem Falle können Pol und Polare vereinigt liegen.

<sup>1)</sup> Gedächtnisregel für die Bildung der Tangenten- bzw. Polarengleichung des Punktes  $(x_1, y_1)$ : Man schreibe die Kurvengleichung (37) in der Gestalt:

$$a_{11}xx + a_{12}(xy + yx) + a_{22}yy + a_{13}(x + x) + a_{23}(y + y) + a_{33} = 0$$

und ersetze in jedem Produkte und in jeder Klammer überall die erste (oder, was auf dasselbe hinauskommt, die zweite Koordinate) durch die entsprechende des Berührungspunktes bzw. des Poles  $P_1$ , wodurch die Gleichung

$$a_{11}x_1x + a_{12}(x_1y + y_1x) + a_{22}y_1y + a_{13}(x_1 + x) + a_{23}(y_1 + y) + a_{33} = 0$$

entsteht, die mit (46) übereinstimmt.

Zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , deren Koordinaten die Bedingung

$$(47) \quad f'(x_1, y_1) \cdot x_2 + f''(x_1, y_1) \cdot y_2 + f'''(x_1, y_1) = 0$$

oder anders geordnet die Bedingung

$$(47a) \quad f'(x_2, y_2) \cdot x_1 + f''(x_2, y_2) \cdot y_1 + f'''(x_2, y_2) = 0$$

erfüllen, heißen harmonische (oder reziproke) Pole; jeder der Pole liegt auf der Polaren des anderen.

Bezeichnen  $(\xi, \eta)$  die Koordinaten eines der beiden Kurvenschnittpunkte der Polaren des Punktes  $P_1$ , so ist ihre Gleichung erfüllt für  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ :

$$f'(x_1, y_1) \cdot \xi + f''(x_1, y_1) \cdot \eta + f'''(x_1, y_1) = 0.$$

Wegen dieser Gleichung ist aber die Gleichung der Tangente in  $(\xi, \eta)$ :

$$f'(\xi, \eta) \cdot x + f''(\xi, \eta) \cdot y + f'''(\xi, \eta) = 0$$

für  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  erfüllt. Da nun zu jedem Punkte  $P_1$  nur eine Polare gehört, so folgt: Von einem Punkte  $P_1$  sind an eine Kurve zweiter Ordnung nur zwei Tangenten möglich, die sie in ihren Schnittpunkten mit der Polaren von  $P_1$  berühren. Die Tangenten sind nur reell, wenn die Polare von  $P_1$  die Kurve in zwei reellen Punkten schneidet.

Sind aber  $(\xi, \eta)$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Polaren des Punktes  $P_1$ , so folgt in gleicher Weise, daß die Gleichung der Polaren von  $(\xi, \eta)$  erfüllt ist für  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ ; d. h.: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden  $p_1$ , so dreht sich seine Polare um den Pol dieser Geraden.

Diese Gerade  $p_1$  und die Polare irgendeines ihrer Punkte haben also die Eigenschaft, daß jede durch den Pol der anderen hindurchgeht. Zwei solche Gerade heißen harmonische (oder reziproke) Polaren, und ihre Pole sind demnach harmonische Pole.

### 33. Asymptoten. Konjugierte Durchmesser.

Die Gleichung der Polaren des Punktes  $P_\sigma$  mit den Koordinaten  $\sigma x_1, \sigma y_1$ , wo  $\sigma$  ein beliebiger Faktor ist, kann geschrieben werden:

$$f'(x, y) \cdot x_1 + f''(x, y) \cdot y_1 + \frac{f'''(x, y)}{\sigma} = 0.$$

Läßt man nun  $\sigma$  unendlich werden, so wird  $P_\sigma$  zum unendlich fernen Punkte der Richtung  $OP_1 = g$ , und seine Polare ist dann

$$(48) \quad f'(x, y) \cdot x_1 + f''(x, y) \cdot y_1 = 0,$$

welche Gleichung von den Koordinaten  $x_0, y_0$  des Mittelpunktes der Kurve — wenn ein solcher im Endlichen existiert, also  $\delta \neq 0$  ist — erfüllt wird. Die Polaren der unendlich fernen Punkte sind also Durchmesser der Kurve.

Umgekehrt ist die Polare des Mittelpunktes die unendlich ferne Gerade. Denn setzt man in der Gleichung (46) anstatt  $x_1, y_1$  die Koordinaten  $x_0, y_0$  des Mittelpunktes und führt für  $x$  und  $y$  Polarkoordinaten nach S. 22 (4) ein, so erhält man aus (46) für die Polare des Mittelpunktes:

$$f'(x_0, y_0) \sin(w - \mathcal{J}) + f''(x_0, y_0) \cdot \sin \mathcal{J} + \frac{f'''(x_0, y_0)}{r} \cdot \sin w = 0.$$

Da nun  $f'(x_0, y_0) = 0, f''(x_0, y_0) = 0$ , für nicht zerfallende Kurven aber  $\mathcal{J} \neq 0$ , also — nach § 29 —  $f'''(x_0, y_0) \neq 0$  ist, so kann die Gleichung nur für  $r = \infty$  befriedigt sein. Zieht man vom Mittelpunkte aus die Tangenten an die Kurve, so müssen sie dieselbe in den Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden berühren. Diese besonderen Tangenten heißen Asymptoten.

Um zu erkennen, wann diese reell sind, führt man in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades Polarkoordinaten

ein und dividiert durch  $r^2$ . Läßt man dann  $r = \infty$  werden, so bleibt nur das von  $\frac{1}{r}$  freie Glied übrig, und man

erhält für die Asymptotenrichtungen die Gleichung  
 (48)  $a_{11} \sin^2(w - \mathcal{G}) + 2a_{12} \sin(w - \mathcal{G}) \sin \mathcal{G} + a_{22} \sin^2 \mathcal{G} = 0$ ,  
 oder

$$\operatorname{tg} \mathcal{G} = \frac{(a_{11} \cos w - a_{12}) \sin w \pm \sqrt{-\delta} \cdot \sin w}{a_{11} \cos^2 w - 2a_{12} \cos w + a_{22}},$$

$$w = \frac{\pi}{2}:$$

$$(48') \quad \operatorname{tg} \mathcal{G} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{22}}.$$

Mithin hat nur die Hyperbel zwei reelle Asymptoten.

Da nun der zum Halbierungspunkte einer Strecke konjugierte vierte harmonische Punkt (§ 5) der unendlich ferne Punkt dieser Geraden und die Polare dieses unendlich fernen Punktes ein Durchmesser ist, so folgt, daß die Halbierungspunkte paralleler Sehnen auf einem Durchmesser liegen, der als der zu der Richtung  $g$  der parallelen Sehnen konjugierte Durchmesser  $d'$  bezeichnet wird. Die Polare des unendlich fernen Punktes dieses Durchmessers  $d'$  ist aber der zu der parallelen Sehnenschar gehörige Durchmesser, der mit  $d$  bezeichnet werde. Dementsprechend heißen  $d$  und  $d'$  konjugierte Durchmesser; für sie gelten also die Gleichungen

$$(49) \quad \begin{cases} d: & y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \\ d': & f'(x, y) \cdot x_1 + f''(x, y) \cdot y_1 = 0. \end{cases}$$

Die Achsen sind das einzige Paar zu einander konjugierter und zu einander senkrechter Durchmesser.

Zu den einer Richtung  $g$  parallelen Sehnen gehören auch die Tangenten. Folglich sind die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers parallel zu seinem konjugierten Durchmesser.

5. Abschnitt.

Gestalt der Kurven zweiter Ordnung.

34. Ellipse.

Zur Untersuchung der Gestalt von Ellipse und Hyperbel benutzt man am bequemsten die auf die Achsen der Kurve als Koordinatenachsen bezogenen Gleichungen S. 53, II (33) und (34).

Bei der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > b$  nennt man die Achse, auf der die Brennpunkte liegen, die große oder Hauptachse, die zu ihr senkrechte die kleine oder Nebenachse; die Bezeichnung als große und kleine Hauptachse entspricht der Erzeugung nach S. 52, II. Die Brennpunkte haben den Abstand  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  vom Mittelpunkte. Die Endpunkte dieser Achsen  $x = \pm a$ ,  $y = 0$  und  $x = 0$ ,  $y = \pm b$  heißen die Scheitel. Da in der Gleichung (33)  $x$  mit  $-x$  und  $y$  mit  $-y$  vertauscht werden kann, ohne daß die linke Seite der Gleichung ihren Wert ändert, so folgt, daß die Ellipse in bezug auf ihre beiden Achsen symmetrisch ist.

Durch Einführung von Polarkoordinaten  $x = r \cdot \cos \vartheta$ ,  $y = r \cdot \sin \vartheta$  erhält man aus der Ellipsengleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{e^2}{a^2 b^2} \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{1}{b^2} - \frac{e^2}{a^2 b^2} \cos^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Da  $a^2 - b^2 > 0$  ist für  $a > b$ , so folgt aus dem vorletzten Ausdruck von  $\frac{1}{r^2}$ , daß  $r$  seinen größten Wert  $a$  für  $\vartheta = 0$  und  $\pi$ , und aus dem letzten Ausdrucke, daß  $r$  seinen kleinsten Wert  $b$  für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3\pi}{2}$  annimmt. Alle Werte von  $r$  liegen also, da sich  $r$  mit  $\vartheta$  stetig ändert, zwischen  $a$  und  $b$ ; die Ellipse ist mithin eine geschlossene Kurve, die ganz innerhalb des durch die vier Geraden  $x = \pm a$  und  $y = \pm b$  gebildeten Rechtecks  $C_1 C_2 C_3 C_4$  (vgl. Fig. 20) liegt. Die Seiten dieses Rechtecks sind die Ellipsentangenten in den vier Scheiteln, wie aus der nach § 32 gebildeten Gleichung der Tangente im Punkte  $P_1$  der Ellipse

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

für  $x_1 = \pm a$ ,  $y_1 = 0$  und  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = \pm b$  unmittelbar zu erkennen ist.

Für die genaue Zeichnung einer Ellipse ist die Kenntnis der Krümmungskreise in ihren vier Scheiteln von wesentlichem Vorteil. Legt man (Fig. 19) durch den Scheitel  $A_1$  der Hauptachse einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Hauptachse liegt, so schneidet er die Ellipse, wenn sein Radius kleiner als  $a$  ist, noch in zwei symmetrisch zur X-Achse gelegenen Punkten  $Q'$ ,  $Q''$ , deren Abszisse  $OR = a - \varepsilon$  sei; als ihre Ordinaten ergeben sich dann aus

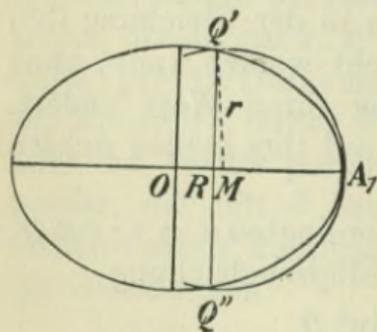


Fig. 19.

der Ellipsengleichung die Werte  $\pm \frac{b}{a} \sqrt{2a\varepsilon - \varepsilon^2}$ . Je kleiner man  $\varepsilon$  werden läßt, um so mehr nähern sich die Schnitt-

punkte  $Q', Q''$  dem Scheitel  $A_1$ , bis sie für  $\varepsilon = 0$  mit ihm zusammenfallen. Der sich dann für diese Grenzlage ergebende Kreis heißt der Krümmungskreis im Scheitel der Hauptachse; sein Radius sei  $r_A$ . Wie aus seiner Entstehung hervorgeht, schmiegt er sich der Ellipse in dem Scheitel  $A_1$  von allen möglichen Kreisen am engsten an. Da  $MA_1 = MQ'$  gleich dem Radius  $r$  des Kreises  $Q'A_1Q''$ , also  $MR = \pm(MA_1 - RA_1) = \pm(r - \varepsilon)$ , so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $MRQ'$ :  $MQ'^2 = r^2 = (r - \varepsilon)^2 + \frac{b^2}{a^2}(2a\varepsilon - \varepsilon^2)$ , woraus sich nach Division durch  $\varepsilon$  ergibt:

$$-2\left(r - \frac{b^2}{a}\right) + \varepsilon\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 0, \text{ und schließlich für } \varepsilon = 0:$$

$$(50 a) \quad r_A = \frac{b^2}{a}.$$

In der gleichen Weise erhält man für die Scheitel der Nebenachse Krümmungskreise, deren Mittelpunkte auf der  $Y$ -Achse liegen und deren Radius

$$(50 b) \quad r_B = \frac{a^2}{b}$$

ist. Die Mittelpunkte dieser Kreise, die sogenannten Krümmungsmittelpunkte, lassen sich leicht konstruieren; man hat (Fig. 20) nur die Sehne  $A_1B_1$  zwischen den Scheiteln  $A_1$  und  $B_1$  zu ziehen und auf sie von der Ecke  $C_1$  des von den Scheiteltangenten gebildeten Rechtecks  $C_1C_2C_3C_4$  das Lot zu fällen, das die  $X$ - und  $Y$ -Achse in den Mittelpunkten  $M_1$  und  $N_1$  der zu  $A_1$  und  $B_1$  gehörenden Krümmungskreise schneidet. (Denn aus den ähnlichen Dreiecken  $M_1A_1C_1$ ,  $A_1C_1B_1$ ,  $C_1B_1N_1$  folgt  $M_1A_1:A_1C_1 = A_1C_1:C_1B_1 = C_1B_1:N_1B_1$  oder  $r_A:b = b:a = a:r_B$  in Übereinstimmung mit den Werten 50a und 50b.)

Zur Konstruktion einzelner Punkte der Ellipse aus ihren beiden Achsen  $2a$  und  $2b$  bedient man sich am besten des folgenden Verfahrens. Man konstruiert die Kreise mit den Radien  $a$  und  $b$  um den Anfangspunkt  $O$ , zieht unter dem

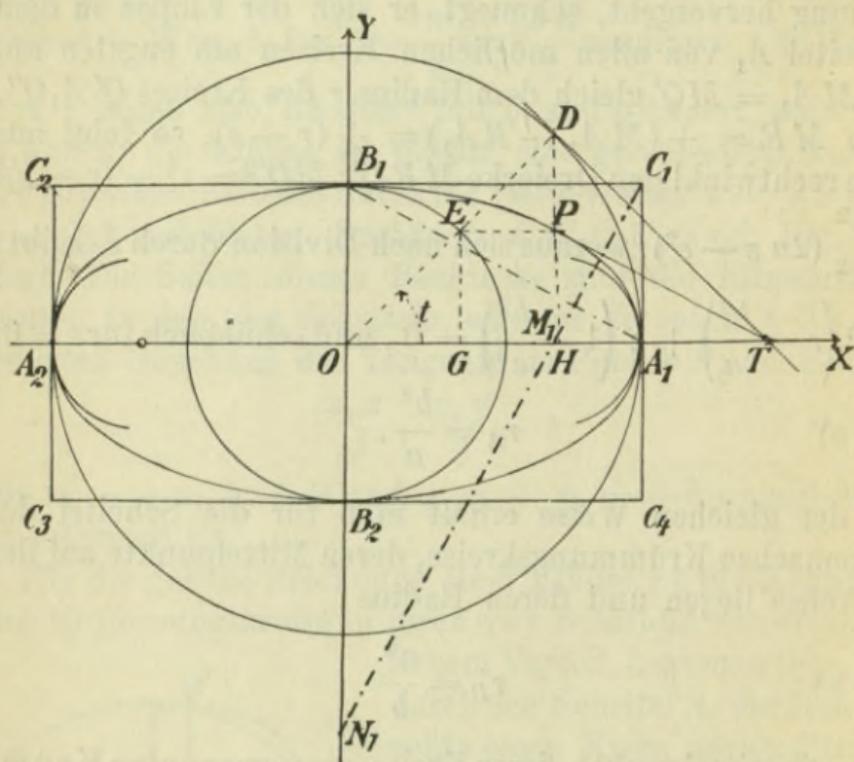


Fig. 20.

beliebigen Winkel  $t$  gegen die  $X$ -Achse den Radius, der die beiden Kreise in den Punkten  $D$  und  $E$  schneidet; der Schnittpunkt  $P$  der von  $D$  auf die  $X$ -Achse und von  $E$  auf die  $Y$ -Achse gefällten Lote ist ein Punkt der Ellipse. Denn aus

$$(51) \quad OH = x = a \cdot \cos t, \quad HP = GE = y = b \cdot \sin t$$

folgt sofort  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Die Gleichungen (51) sind also

Parametergleichungen der Ellipse;  $t$  heißt die exzentrische Anomalie des betreffenden Ellipsenpunktes. Aus ihnen folgt, daß die zu der gleichen Abszisse gehörenden Ordinaten eines Ellipsenpunktes und des Kreises  $x^2 + y^2 = a^2$  zueinander das Verhältnis  $b:a$  haben. Man nennt diese Zuordnung von Ellipse und Kreis affine Verwandtschaft mit der  $X$ -Achse als Affinitätsachse.

Für die mechanische Erzeugung von Ellipse, Hyperbel und Parabel sind zahlreiche Apparate ersonnen, die teils nur eine der drei Kurvenarten, teils alle drei zu erzeugen vermögen und als Kegelschnittzirkel bezeichnet werden. Für den praktischen Gebrauch haben sie im allgemeinen wenig Bedeutung. Es sollen deshalb nur zwei mechanische Erzeugungsweisen der Ellipse erwähnt werden.

Aus ihrer Eigenschaft als Ortskurve aller Punkte, die von zwei festen Punkten (Brennpunkten) eine konstante Abstandssumme besitzen (S. 52, II), folgt eine einfache Fadenkonstruktion, die wegen ihrer handwerklichen Verwendung als Gärtnerkonstruktion bezeichnet wird. Um zwei in den Brennpunkten  $F_1, F_2$  befestigte Nadeln wird ein Faden von der Länge  $2(a + e)$  herumgelegt und mit Hilfe des Zeichenstiftes zu einem Dreieck  $F_1 F_2 P$  gespannt, dessen Basis gleich  $2e$  und dessen Summe der beiden anderen Seiten gleich  $2a$  ist; bei der Bewegung des Zeichenstiftes erzeugt die Spitze  $P$  eine Ellipse.

Bewegen sich die Endpunkte  $Q, R$  einer Strecke von der gegebenen Länge  $s$  auf zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden, so beschreibt ein beliebiger Punkt  $P$  der Verbindungsgeraden  $QR$  eine Ellipse. Nimmt man die beiden Geraden als

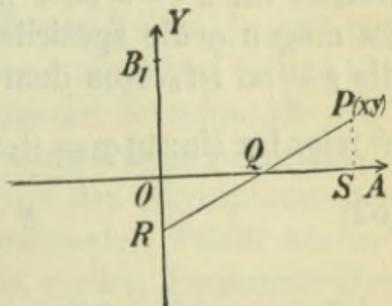


Fig. 21.

Koordinatenachsen (Fig. 21), gleitet der Punkt  $Q$  auf der  $X$ - und der Punkt  $R$  auf der  $Y$ -Achse und hat der erzeugende Punkt  $P$  den Abstand  $t$  von  $Q$ , so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $QOR$  und  $QSP$  für den Winkel  $\varphi$ , den  $QR$  mit der  $X$ -Achse bildet,

$$\sin \varphi = \frac{y}{t}, \quad \cos \varphi = \frac{OQ}{s} = \frac{x - OQ}{t} = \frac{x}{s + t},$$

also

$$\frac{x^2}{(s + t)^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1.$$

Wird  $P$  zwischen  $Q$  und  $R$  genommen, so ist  $t$  negativ in Rechnung zu stellen. Die auf diesem Satze beruhenden Apparate sind so eingerichtet, daß die gegenseitige Entfernung der Punkte  $P, Q, R$  verändert werden kann<sup>1)</sup>.

### 35. Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  geht für Polarkoordinaten  $x = r \cdot \cos \vartheta$ ,  $y = r \cdot \sin \vartheta$  über in

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta},$$

woraus für  $\vartheta = 0$  oder  $\pi$  der kleinste Wert  $r = a$  folgt. Es mögen  $\varphi$  die speziellen Werte von  $\vartheta$  bezeichnen, für die  $r = \infty$  ist. Aus dem Verschwinden des Nenners von

$$r^2 \text{ folgt für sie: } \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a}. \text{ Die Geraden}$$

$$(52) \quad y = \pm \frac{b}{a} x$$

<sup>1)</sup> Eine vorzügliche Ausführung eines solchen Apparates ist die von K. Rohn im Verlage von Martin Schilling in Leipzig.

sind die Asymptoten der Hyperbel (vgl. S. 70 [48']).  $2\varphi$  heißt der Asymptotenwinkel.

Die Werte von  $r$  sind nur reell, wie aus der Gleichung für  $r^2$  folgt, wenn  $\vartheta$  zwischen  $0$  und  $\varphi$ ,  $\pi - \varphi$  und  $\pi + \varphi$ ,  $2\pi - \varphi$  und  $0$  liegt. Die Hyperbel besteht also aus zwei getrennten Kurvenzweigen (Fig. 22). Der eine liegt rechts von der Parallelen zur  $Y$ -Achse durch den Punkt  $(+a, 0)$ , der andere links von der Parallelen zur  $Y$ -Achse durch den

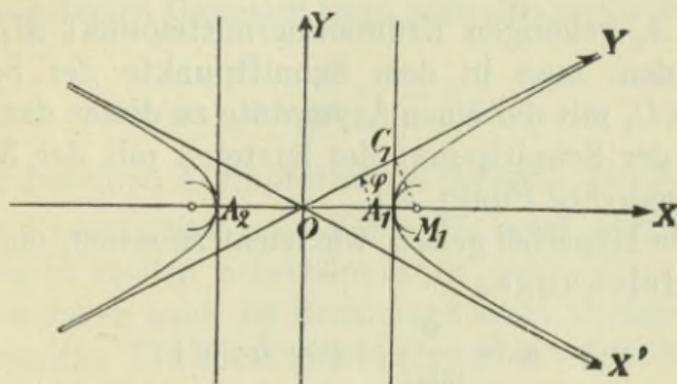


Fig. 22

Punkt  $(-a, 0)$ ; beide Zweige werden ferner von den Asymptoten eingeschlossen. Die  $X$ -Achse schneidet also die Hyperbel in den zwei reellen Scheitelpunkten  $x = \pm a$  und trägt die Brennpunkte, die, wie aus S. 52, II folgt, die Abszissen  $x = \pm \sqrt{a^2 + b^2} = \pm e$  haben. Die  $Y$ -Achse liegt ganz außerhalb der Kurve, so daß bei der Hyperbel nur zwei (reelle) Scheitelpunkte vorhanden sind. Deshalb nennt man auch die die Brennpunkte tragende Hauptachse die reelle, die andere die imaginäre Achse. Nur Gerade, die in die von den Asymptoten begrenzten und von der  $X$ -Achse halbierten Felder hineinragen, schneiden die Hyperbel in reellen Punkten. Die Kurve ist in bezug auf die beiden Achsen symmetrisch.

Für alle Punkte des rechten Hyperbelzweiges ist  $r_2 - r_1 = 2a$ , für alle des linken  $r_1 - r_2 = 2a$ .

Für die Zeichnung der Hyperbel in der Nähe der Scheitel ist wieder die Konstruktion der Krümmungskreise derselben von Vorteil. In gleicher Weise wie für die Scheitel der Hauptachse der Ellipse findet man für ihren Radius

$$(53) \quad r_A = \frac{b^2}{a}.$$

Den zu  $A_1$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt  $M_1$  findet man, indem man in dem Schnittpunkte der Scheiteltangente  $C_1$  mit der einen Asymptote zu dieser das Lot errichtet; der Schnittpunkt des letzteren mit der  $X$ -Achse ist der gesuchte Punkt  $M_1$ .

Für die Hyperbel gelten, wie leicht zu sehen, die Parametergleichungen

$$(54_1) \quad x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \cdot \operatorname{tg} t.$$

Auf sie stützt sich die folgende einfache Konstruktion einzelner Hyperbelpunkte (Fig. 23). Man konstruiert um den

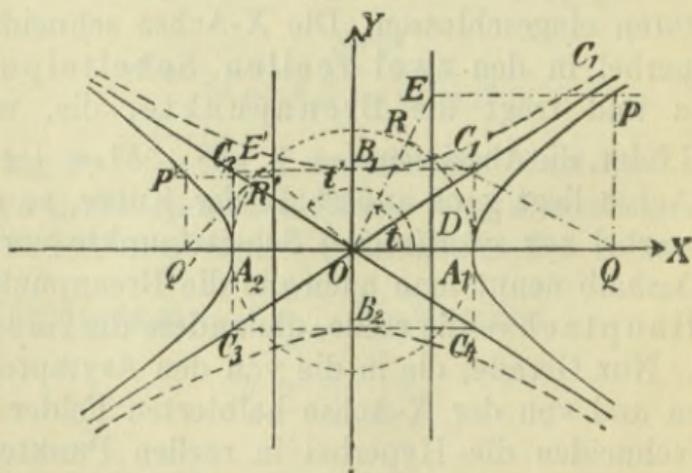


Fig. 23.

Nullpunkt einen Kreis vom Radius  $a$  und zieht zur  $Y$ -Achse die Parallele  $x = b$ . Zieht man dann unter einem beliebigen Winkel  $t$  einen Radius  $OR$ , der auf der gezogenen Parallelen das Stück  $DE$  abschneidet, so ist dieses ebenso groß wie die Ordinate  $QP$  desjenigen Hyperbelpunktes, dessen Abszisse von der Tangente an den Kreis in  $R$  auf der  $X$ -Achse abgeschnitten wird, denn  $QP = DE = b \cdot \operatorname{tg} t$ ,  $OQ = \frac{a}{\cos t}$ .

Der gegebenen Hyperbel kann man eine zweite zuordnen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Sie hat dieselben Asymptoten wie die erste und die gleiche lineare Exzentrizität  $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ , wird aber von der  $Y$ -Achse in reellen Scheitelpunkten geschnitten; auf der  $Y$ -Achse liegen auch die Brennpunkte im Abstände  $e$  vom Mittelpunkte. Für diese zweite Hyperbel ist die konstante Differenz der Abstände eines Punktes von den beiden Brennpunkten gleich  $2b$ . Ihre Parametergleichungen sind

$$(54_2) \quad x = a \cdot \cot t, \quad y = \frac{b}{\sin t}.$$

Der Krümmungsradius ihrer Scheitel ist gleich  $\frac{a^2}{b}$ . Beide Hyperbeln bezeichnet man als konjugierte Hyperbeln.

Für  $b = a$  werden beide Hyperbeln kongruent; die eine geht aus der anderen durch eine Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  hervor.

Diese Hyperbel mit gleichen Halbachsen heißt gleichseitige oder rechtwinklige Hyperbel, weil ihre Asymptoten aufeinander senkrecht stehen:  $\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$ . Die gleichseitige Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$  steht zu der Hyperbel

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  in derselben affinen Verwandtschaft wie der Kreis vom Radius  $a$  zu der Ellipse mit der halben Hauptachse  $a$ : Die Ordinaten der zu derselben Abszisse gehörenden Punkte beider Kurven verhalten sich wie  $a : b$ .

### 36. Parabel.

Nach § 27, III ist die einfachste Gleichungsform der Parabel die sogenannte Scheiteltgleichung:

$$y^2 = 2px.$$

Bei dieser Form der Gleichung liegt der Brennpunkt  $F$  der Parabel auf der  $X$ -Achse. Die Kurve hat, da in ihrer Gleichung  $y$  ohne weiteres mit  $-y$  vertauscht werden kann, die  $X$ -Achse als Symmetrielinie und liegt ganz auf der Seite der  $Y$ -Achse, nach welcher die positive  $X$ -Achse zeigt, wenn der Parameter  $2p$  positiv ist; umgekehrt liegt die Parabel auf der entgegengesetzten Seite der  $Y$ -Achse, wenn  $2p$  negativ ist. Der Nullpunkt heißt der Scheitel der Parabel und die positive bzw. negative  $X$ -Achse ist ihre Achse. Die Abszisse des Brennpunktes ist nach § 27 gleich  $\frac{p}{2}$ , die des Schnittpunktes der Leitlinie mit der  $X$ -Achse gleich  $-\frac{p}{2}$ .

Die Gleichung der Parabeltangente im Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  lautet nach S. 67

$$y_1 y = p(x_1 + x)$$

und fällt daher für ihren Scheitel ( $x_1 = y_1 = 0$ ) mit der  $Y$ -Achse zusammen.

Durch Einführung von Polarkoordinaten  $x = r \cdot \cos \vartheta$ ,  $y = r \cdot \sin \vartheta$  läßt die Kurvengleichung  $\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{2p}{r \cdot \cos \vartheta}$  erkennen, daß  $r = \infty$  nur möglich ist für  $\vartheta = 0$ . Die

Parabel besitzt also nur einen unendlich fernen Punkt, wie sie auch nur einen Scheitel und nur einen Brennpunkt hat; sie kann als Grenzfall einer Ellipse, deren große Achse unendlich groß geworden ist, angesehen werden. Alle Durchmesser der Parabel sind ihrer Achse parallel.

Für die Zeichnung einer Parabel ist wieder die Kenntnis des Krümmungskreises in ihrem Scheitelpunkte von Vorteil. Ein beliebiger Kreis durch den Scheitel der Parabel, dessen Mittelpunkt auf der Parabelachse liegt und dessen Radius  $r > p$  ist, schneidet die Kurve noch in zwei Punkten mit der Abszisse  $\varepsilon$ . Für einen solchen Kreis gilt die Gleichung  $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ , woraus für seine Schnittpunkte  $x = \varepsilon$  mit der Parabel die Gleichung  $\varepsilon^2 - 2(r - p)\varepsilon = 0$  folgt, die nach Division mit  $\varepsilon$  für  $\varepsilon = 0$  den Radius  $r_0$  des Krümmungskreises

$$r_0 = p$$

hat. Der Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises der Parabel liegt also doppelt so weit als der Brennpunkt vom Scheitel entfernt.

Einzelne Punkte der Parabel kann man (Fig. 24) in der Weise konstruieren, daß man Kreise  $k_1, k_2, \dots$  um den Brennpunkt  $F$  beschreibt und jeden mit der Parallelen zur Leitlinie schneidet, die von der letzteren einen senkrechten Abstand gleich dem

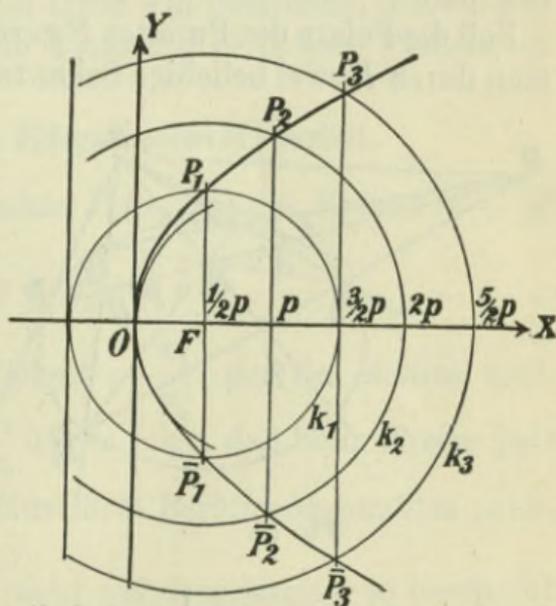


Fig. 24.

Radius des betreffenden Kreises hat und auf der gleichen Seite wie der Brennpunkt liegt. Will man mehrere Parabelpunkte konstruieren, so ist es vorteilhaft, als Radien der Kreise  $p, \frac{3}{2}p, 2p, \dots$  zu wählen, da dann die Parallelen zur Leitlinie durch die Punkte mit den Abszissen  $\frac{p}{2}, p, \frac{3}{2}p, \dots$  hindurchgehen.

## 6. Abschnitt.

### Tangenten und Polaren.

#### 37. Konstruktion für alle drei Kegelschnittarten.

Um für einen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt Polaren und Tangenten zu konstruieren, kann man die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks benutzen (Fig. 25).

Soll die Polare des Punktes  $P$  gezeichnet werden, so zieht man durch  $P$  zwei beliebige Sekanten, die den Kegelschnitt

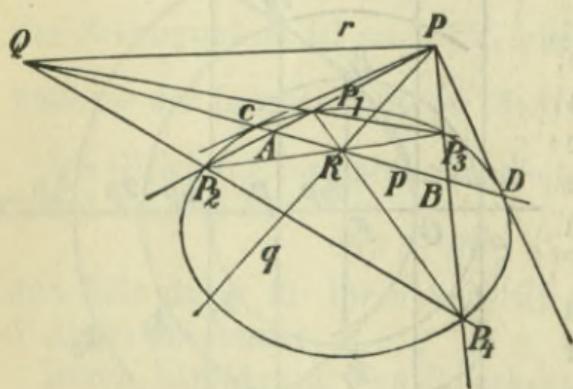


Fig. 25.

in den Punkten  $P_1, P_2$  und  $P_3, P_4$  schneiden, und verbindet dann  $P_1$  mit  $P_3, P_2$  mit  $P_4$  und  $P_1$  mit  $P_4, P_2$  mit  $P_3$ . Ist  $Q$  der Schnittpunkt des ersten,  $R$  der des zweiten Linienpaares, so ist  $QR$  die Polare  $p$  des

Punktes  $P$ , da, wenn  $A$  und  $B$  die Schnittpunkte von  $QR$

mit  $P_1P_2$  und  $P_3P_4$  bezeichnen,  $(P_1P_2AP) = (P_3P_4BP) = -1$  ist (nach § 26). Sind  $C$  und  $D$  die Schnittpunkte von  $p$  mit dem Kegelschnitte, so ergeben die Verbindungslinien dieser Punkte mit  $P$  die Tangenten in ihnen.

Die Fig. 25 läßt ohne weiteres erkennen, daß die Konstruktion auch für einen Punkt  $R$ , von dem keine (reellen) Tangenten an die Kurve möglich sind, ihre Gültigkeit behält;  $QP = r$  ist die zu  $R$  gehörige Polare.

Soll zu einer gegebenen Geraden, z. B.  $p$ , der zugehörige Pol ermittelt werden, so beachte man, daß sich in ihm nach dem Satze des vorletzten Absatzes von § 32 die Polaren aller Punkte von  $p$  schneiden. Man hat also nur zu zwei beliebigen Punkten von  $p$  die zugehörigen Polaren zu konstruieren und erhält in ihrem Schnittpunkte den Pol von  $p$ .

Die Tangente in einem Punkte, z. B.  $C$ , eines Kegelschnittes kann man finden, indem man durch  $C$  eine beliebige Gerade zieht und ihren Pol bestimmt, dessen Verbindungslinie mit  $C$  die Tangente in diesem Punkte ist.

### 38. Kreis, Ellipse und Hyperbel.

Die Tangente im Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  des Kreises  $x^2 + y^2 = a^2$  ist

$$(55) \quad x_1x + y_1y = a^2.$$

Da ihr Richtungskoeffizient  $-\frac{x_1}{y_1}$ , der des Radius nach dem Punkte  $P$  gleich  $\frac{y_1}{x_1}$  ist, so folgt, daß beim Kreise jede Tangente auf dem Radius ihres Berührungspunktes senkrecht steht.

Liegt der Punkt  $P_1$  nicht auf dem Kreise, so bestimmt (55) seine Polare  $p_1$ , die auf der Verbindungslinie des Kreis-

mittelpunktes  $O$  mit  $P_1$  senkrecht steht. Um  $p_1$  zu konstruieren, schlägt man über  $OP_1$  einen Halbkreis, wenn  $P_1$  außerhalb des gegebenen Kreises liegt, und verbindet die Schnittpunkte beider Kreise. Liegt aber  $P_1$  innerhalb des Kreises, so errichtet man in  $P_1$  die Senkrechte  $s$  zu  $OP_1$  und konstruiert in ihren Schnittpunkten mit dem Kreise die Tangenten; die Parallele zu  $s$  durch den Schnittpunkt beider Tangenten ist die gesuchte Polare. —

Die Tangente im Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  an die Ellipse (33) bezogen auf die Hauptachsen als Koordinatensystem, hat die Gleichung

$$(55^a) \quad \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1,$$

schneidet also die  $X$ -Achse im Punkte  $T\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$  (vgl. S. 74, Fig. 20). In dem zur gleichen Abszisse gehörenden Punkte  $P'\left(x_1, \frac{a}{b} y_1\right)$  des Kreises  $x^2 + y^2 = a^2$  ist die Tangente:

$$x_1 x + \frac{a}{b} y_1 y = a^2;$$

sie schneidet die  $X$ -Achse in demselben Punkte  $T$ . Da aber die Kreistangente senkrecht auf dem Radius nach dem Berührungspunkte steht und daher leicht zu zeichnen ist, so braucht man nur ihren Schnittpunkt  $T$  mit der Hauptachse der Ellipse zu ermitteln und ihn mit dem zugehörigen Punkte  $P$  der Ellipse zu verbinden, um die Ellipsentangente in  $P$  zu erhalten.

Die gleiche Konstruktion führt zu der Konstruktion der Hyperbeltangente, wenn statt des Kreises die zu der Hyperbel affine gleichseitige Hyperbel benutzt wird. Die Tangenten an die beiden Hyperbeln in den zu der Abszisse  $x_1$  gehörenden Hyperbelpunkten  $P_1, P_1'$  schneiden die reelle

Achse in demselben Punkte  $T \left( \frac{a^2}{x_1}, 0 \right)$ . Dieser Punkt läßt sich, ohne daß die Zeichnung der gleichseitigen Hyperbel nötig ist, leicht konstruieren. Am zweckmäßigsten ist es, diese Konstruktion mit der des Hyperbelpunktes nach § 35 zu verbinden.

Dann hat man nur (Fig. 26) von dem Punkte  $R$ , in dem der unter dem Winkel  $t$  gezogene Radius den Kreis vom Radius  $a$  um  $O$  als Mittelpunkt schneidet, das Lot  $RT$  auf die  $X$ -Achse zu fällen, um den Punkt  $T$  zu erhalten, in dem die Tangente in dem  $t$  zugehörigen Hyperbelpunkte  $P$  die  $X$ -Achse schneidet. Denn aus

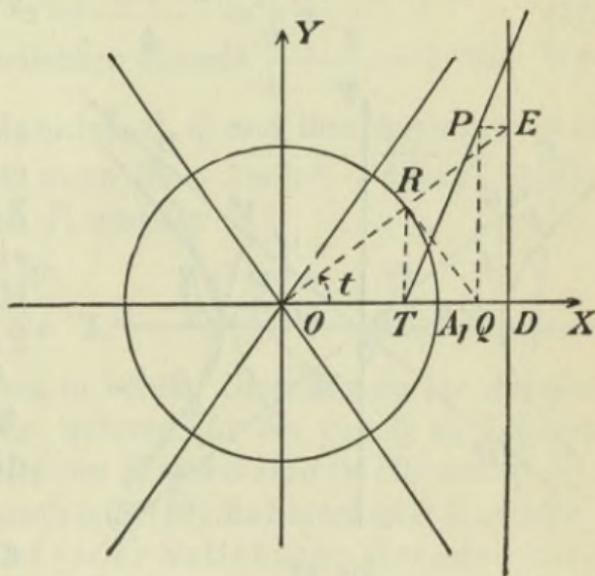


Fig. 26.

den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken  $OTR$  und  $ORQ$

folgt  $OT:OR = OR:OQ$  oder  $OT = \frac{a^2}{x_1}$ .

### 39. Asymptotensätze der Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel nimmt in bezug auf ihre beiden Asymptoten als Koordinatenachsen eine oft sehr vorteilhafte Gestalt an. Ist  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ , so hat

man zu der nötigen Drehung des Koordinatensystems die Formeln zu benutzen:

$$x = (x' + y') \cos \varphi, \quad y = (-x' + y') \sin \varphi$$

und erhält die Hyperbelgleichung

$$(56) \quad x' y' = \frac{a^2 + b^2}{4} = c^2.$$

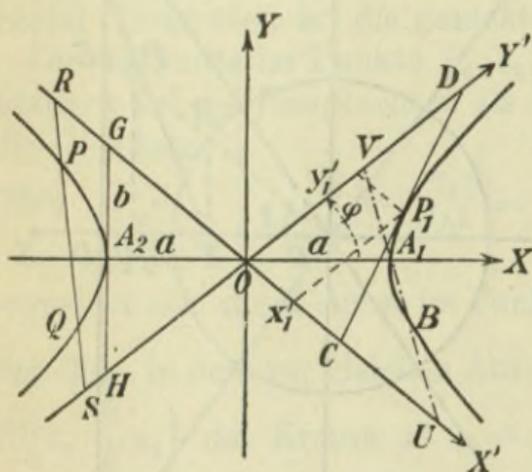


Fig. 27.

Aus dieser Gleichung liest man unmittelbar den Satz ab: Zieht man durch einen beliebigen Hyperbelpunkt  $P_1$  Parallelen zu den Asymptoten, so besitzt (Fig. 27) das so entstehende Parallelogramm  $OX'_1P_1Y'_1$  den konstanten

Flächeninhalt  $(x'_1 y'_1 \cdot \sin 2\varphi =) \frac{ab}{2}$ .

Die Tangente im Punkte  $P_1(x'_1, y'_1)$  hat nun die Gleichung

$$(57) \quad y'_1 x' + x'_1 y' = 2c^2$$

und schneidet die Asymptoten in den Punkten  $C\left(\frac{2c^2}{y'_1}, 0\right)$  und  $D\left(0, \frac{2c^2}{x'_1}\right)$ . Berechnet man die Strecken  $CP_1$  und

$DP_1$  aus den Koordinaten ihrer Endpunkte, so erkennt man mit Hilfe von (56) leicht, daß das zwischen den Asymptoten gelegene Stück jeder Hyperbeltangente von dem Berührungspunkte halbiert wird.

Andererseits folgt aus  $OC \cdot OD = \frac{4c^4}{x'_1 y'_1} = 4c^2$  der weitere

Satz:

Jede Hyperbeltangente schneidet auf den Asymptoten Strecken ab, deren Produkt konstant ist.

Schneidet eine beliebige Gerade  $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$  die Hyperbel (56) in den Punkten  $P, Q$  und ihre Asymptoten in  $R, S$ , so findet man, wenn  $W = \sqrt{m^2 n^2 - 4mn c^2}$  ist, für die Koordinaten von  $P$  und  $Q$ :

$$x' = \frac{m}{2} \pm \frac{W}{2n}, \quad y' = \frac{c^2}{x'} = \frac{n}{2} \mp \frac{W}{2m},$$

wo die oberen Zeichen in beiden Gleichungen für die Koordinaten von  $P$ , die unteren für die von  $Q$  zu nehmen sind. Die Koordinaten von  $R$  und  $S$  sind  $(m, 0)$  und  $(0, n)$ . Berechnet man nun nach S.26 (10) die Strecken  $PR$  und  $QS$ , so findet man, daß auf jeder beliebigen Geraden ihre Schnittpunkte mit den Asymptoten einer Hyperbel gleichweit von ihren Hyperbelschnittpunkten entfernt liegen.

Dieser Satz kann vorteilhaft zur Konstruktion von Hyperbelpunkten benutzt werden, wenn die Halbachsen  $a$  und  $b$  gegeben sind. Man trägt zunächst die Länge  $a$  auf einer Geraden (reelle Achse) von einem Punkte  $O$  aus ab bis  $A_1, A_2$  (Scheitel) und errichtet in ihnen die Lote von der Länge  $b$ , deren Endpunkte  $G, H$  mit  $O$  verbunden die Asymptoten ergeben. Zieht man dann durch einen der Scheitel, z. B. durch  $A_1$ , eine beliebige Gerade, welche die Asymptoten in den Punkten  $U$  und  $V$  schneidet, so hat man nur die Länge  $AV$  von  $U$  aus rückwärts abzutragen, um in  $B$  einen zweiten Hyperbelpunkt  $B$  zu finden.

## 40. Parabel.

Als Normale eines Punktes  $P$  einer beliebigen Kurve wird die Senkrechte in  $P$  zur Tangente dieses Punktes bezeichnet und als Subnormale das gerichtete Stück der

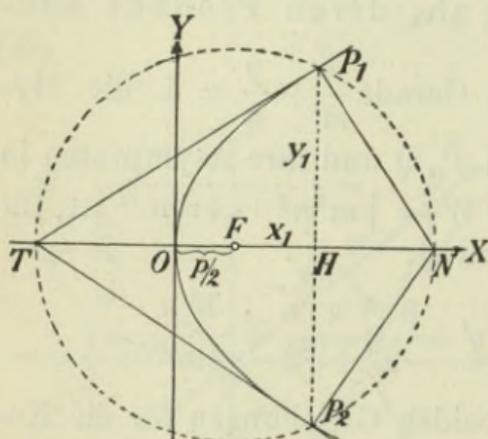


Fig. 28.

$X$ -Achse von dem Fußpunkte  $H$  der Ordinate des Kurvenpunktes  $P$  an bis zum Schnittpunkte mit der Normalen  $N$ . Unter der Subtangente versteht man das gerichtete Stück der  $X$ -Achse von ihrem Schnittpunkte  $T$  mit der Tangente an bis zum Ordinatenfußpunkte  $H$  hin.

Für die Parabel gestalten sich diese Werte besonders einfach, wenn man ihre Scheitelgleichung  $y^2 = 2px$  zugrunde legt. Die Tangente im Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  ist dann

$$(58) \quad y_1 y = p(x + x_1),$$

ihr Richtungskoeffizient also  $\frac{p}{y_1}$ , und mithin lautet die Gleichung der Normale in  $P_1$ :

$$(59) \quad p(y - y_1) = -y_1(x - x_1).$$

Die Punkte  $N$  und  $T$  (Fig. 28) haben die Abszissen:

$$x = x_1 + p \quad \text{und} \quad x = -x_1,$$

und mithin ist

$$(60) \quad \overrightarrow{HN} = s_n = +p, \quad \overrightarrow{TH} = s_t = -2x_1.$$

Der Kreis mit dem Radius  $x_1 + \frac{p}{2}$  um den Brennpunkt  $F$

schneidet die  $X$ -Achse in den Punkten  $N$  und  $T$ . Diese Konstruktion verbindet man zweckmäßig mit der auf S. 81 und 82 angegebenen.

7. Abschnitt.

Konjugierte Durchmesser.

41. Allgemeine Konstruktion konjugierter Durchmesser.

Die in § 37 benutzten harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks dienen auch, um zu einer gegebenen Sehnenrichtung  $g$  den konjugierten Durchmesser zu konstruieren.

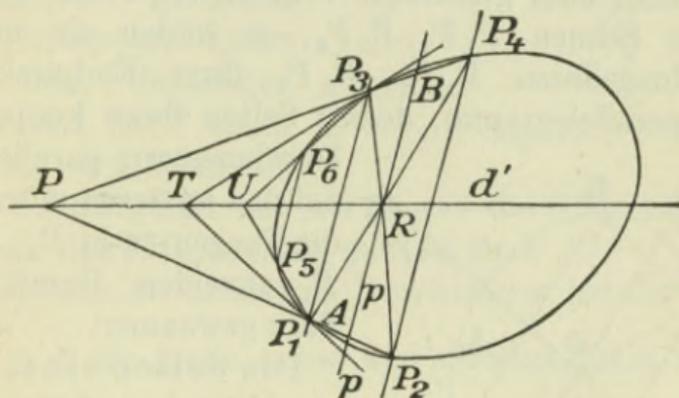


Fig. 29.

Man zieht irgend zwei Sehnen  $P_1P_3$ ,  $P_2P_4$  parallel zu der gegebenen Richtung  $g$  (Fig. 29) und ergänzt die Figur zum vollständigen Viereck. Der Diagonalepunkt  $Q$  (vgl. S. 82, Fig. 25) fällt hier in das Unendliche, und daher ist seine Polare der zu den parallelen Sehnen, also zur Richtung  $g$  konjugierte Durchmesser  $d'$ . Folglich gelten für Ellipse, Hyperbel und Parabel die Sätze:

Die Verbindungsgeraden der Endpunkte paralleler Sehnen schneiden sich auf dem zu ihnen konjugierten Durchmesser.

Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne schneiden sich auf dem konjugierten Durchmesser (z. B. die Tangenten in  $P_1$  und  $P_3$  in dem Punkte  $T$  auf  $d'$ ).

## 42. Ellipse und Hyperbel.

Will man bei der Ellipse und Hyperbel den Mittelpunkt nicht durch Halbieren eines Durchmessers bestimmen, so konstruiert man zu einer zweiten Richtung den konjugierten Durchmesser und erhält dann in dem Schnittpunkte beider Durchmesser den Mittelpunkt der Kurve. Wählt man zwei gleichweit vom Mittelpunkte entfernte parallele Sehnen  $P_1P_2, P_3P_4$ , so bilden sie mit den Verbindungslinien  $P_1P_4, P_2P_3$  ihrer Endpunkte ein Sehnenparallelogramm, dessen Seiten ihren konjugierten

Durchmessern parallel sind; auf den letzteren müssen sich die Tangenten in  $P_1, P_2, P_3, P_4$  schneiden. Damit ist der Satz gewonnen:

Die Seiten eines einem Mittelpunktkegelschnittes einbeschriebenen Sehnenparallelogramms sind konjugierten Durchmessern parallel; die Diagonalen eines Tangentenparallelo-

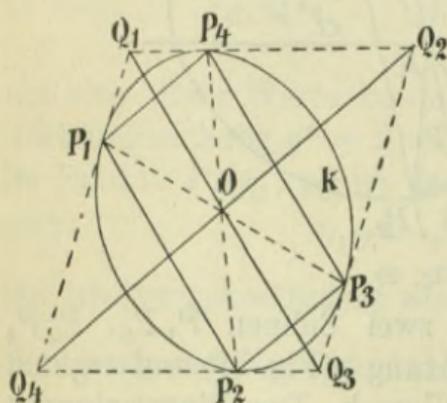


Fig. 30 a.

gramms sind konjugierte Durchmesser (Fig. 30a und b).

Auf diesem Satze beruht die Methode der sogenannten Supplementarsehnen für die Konstruktion konjugierter Durchmesser. Man zieht einen beliebigen Durchmesser

$QOP$  und verbindet seine Endpunkte  $P, Q$  mit irgendeinem Punkte der Kurve; diese Sehnen heißen Supplementarsehnen und sind einem Paar konjugierter Durchmesser parallel. Sollen im besonderen die Hauptachsen einer gezeichnet vorliegenden Mittelpunktskurve gefunden werden, so beschreibt man über dem beliebigen Durchmesser  $QOP$  einen Halbkreis und zieht von seinem Schnittpunkt mit der Kurve die Sehnen nach  $P$  und  $Q$ , die den Hauptachsen parallel sind.

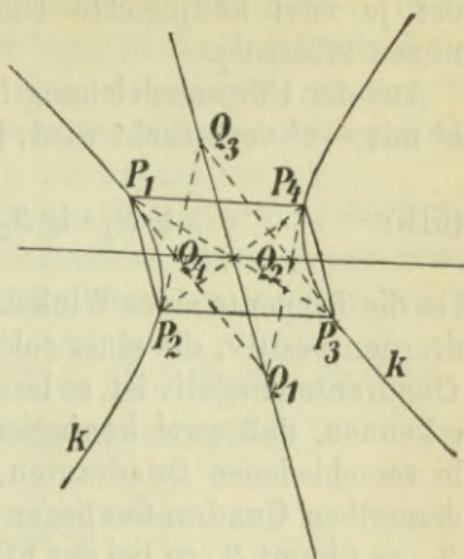


Fig. 30 b.

Nimmt man als beliebigen Durchmesser bei der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  die große Achse und verbindet ihre Scheitel  $A_1, A_2$  mit dem beliebigen Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  der Ellipse, so sind die  $A_1P_1$  und  $A_2P_1$  parallelen Durchmesser konjugiert und haben die Gleichungen:

$$y = \frac{y_1}{x_1 - a} x = \operatorname{tg} \vartheta_1 \cdot x, \quad y = \frac{y_1}{x_1 + a} x = \operatorname{tg} \vartheta_2 \cdot x,$$

wo  $\vartheta_1, \vartheta_2$  die von ihnen mit der positiven  $X$ -Achse gebildeten Winkel sind. Dann folgt, mit Berücksichtigung des Umstandes, daß  $x_1, y_1$  der Ellipsengleichung genügen müssen, die wichtige Beziehung

$$(61a) \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 \cdot \operatorname{tg} \vartheta_2 = -\frac{b^2}{a^2},$$

der je zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse genügen müssen<sup>1)</sup>.

Aus der Ellipsengleichung folgt die der Hyperbel, wenn  $b^2$  mit  $-b^2$  vertauscht wird; folglich gilt für die Hyperbel

$$(61b) \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 \cdot \operatorname{tg} \vartheta_2 = + \frac{b^2}{a^2}.$$

Da die Tangente eines Winkels im ersten oder dritten Quadranten positiv, die eines solchen im zweiten oder vierten Quadranten negativ ist, so lassen die vorstehenden Formeln erkennen, daß zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse in verschiedenen Quadranten, zwei solche der Hyperbel in demselben Quadranten liegen müssen. Wächst der Winkel  $\vartheta_1$ , so nimmt  $\vartheta_2$  zu bei der Ellipse, dagegen ab bei der Hyperbel. Zwei konjugierte Durchmesser einer Hyperbel werden durch eine der Asymptoten getrennt.

Bei der Ellipse ist der Fall  $\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{b}{a}$ ,  $\operatorname{tg} \vartheta_2 = \operatorname{tg}(\pi - \vartheta_1) = -\frac{b}{a}$  bemerkenswert. Die zugehörigen konjugierten

Durchmesser sind die Diagonalen des von den Scheiteltangenten gebildeten Rechtecks und schließen, wie sich leicht nachweisen läßt, den größten Winkel miteinander ein, den zwei konjugierte Durchmesser bilden können.

Nur bei der Hyperbel kann  $\vartheta_2 = \vartheta_1$  sein, nämlich für  $\operatorname{tg}^2 \vartheta_1 = \frac{b^2}{a^2}$ ; jede Asymptote fällt also mit dem zu

---

<sup>1)</sup> Die Gleichung des zu  $y = \frac{y_1}{x_1 - a} \cdot x$  konjugierten Durchmessers kann natürlich auch ohne Benutzung des vorstehenden Satzes aus den Gleichungen (49) erhalten werden. Dort ist  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $f'(x, y) = \frac{x}{a^2}$ ,  $f''(x, y) = \frac{y}{b^2}$  zu setzen und  $x_1$  durch  $x_1 - a$  zu ersetzen. Dann erhält man die Gleichung von  $d'$  in der Gestalt:  $y = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1 - a}{y_1} x = \operatorname{tg} \vartheta_2 \cdot x$ , aus der dann unmittelbar (61) folgt.

ihr konjugierten Durchmesser zusammen. In Verbindung mit § 41 schließt man hieraus, daß die Polare eines beliebigen Punktes einer Asymptote zu derselben parallel ist und mit ihr zusammenfällt, wenn jener Punkt der unendlich ferne Punkt der Asymptote ist.

Transformiert man die Hauptachsengleichung der Ellipse auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Achsen mit zwei konjugierten Durchmessern zusammenfallen, indem man auf S. 24 in (6, II)  $w = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \mathcal{G}_1$ ,  $\beta = \mathcal{G}_2$  setzt, so erhält man mit Berücksichtigung von (61a):

$$(62a) \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

wo  $a'$ ,  $b'$  die Längen der konjugierten Halbmesser sind.

Die Koordinaten der Endpunkte  $A'$ ,  $B'$  dieser konjugierten Halbmesser  $a'$ ,  $b'$  haben in bezug auf das Hauptachsensystem Koordinaten, die sich, wenn  $t_1$ ,  $t_2$  die zu den konjugierten Durchmessern gehörigen Parameterwerte (§ 34) sind, in doppelter Weise darstellen lassen:

$$(I') \quad a' \cdot \cos \mathcal{G}_1 = a \cdot \cos t_1, \quad (I'') \quad a' \cdot \sin \mathcal{G}_1 = b \cdot \sin t_1;$$

$$(II') \quad b' \cdot \cos \mathcal{G}_2 = a \cdot \cos t_2, \quad (II'') \quad b' \cdot \sin \mathcal{G}_2 = b \cdot \sin t_2.$$

Daraus folgt durch Division der in jeder Zeile stehenden Gleichungen und nachherige Multiplikation der Quotienten

$$\operatorname{tg} \mathcal{G}_1 \cdot \operatorname{tg} \mathcal{G}_2 = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} t_1 \cdot \operatorname{tg} t_2,$$

und mit Rücksicht auf (61a)

$$\operatorname{tg} t_1 \cdot \operatorname{tg} t_2 = -1 \text{ oder } \cos(t_2 - t_1) = 0,$$

d. h. die exzentrischen Anomalien der Endpunkte zweier konjugierter Ellipsenhalbmesser besitzen

die konstante Differenz  $\frac{\pi}{2}$ .

Quadriert und addiert man die Gleichungen (I) und dann (II), so ergibt sich

$$(63a) \quad \begin{cases} a'^2 = a^2 \cos^2 t_1 + b^2 \sin^2 t_1 \\ b'^2 = a^2 \cos^2 t_2 + b^2 \sin^2 t_2, \end{cases}$$

woraus folgt

$$(64a) \quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Multipliziert man die Gleichungen (I) und (II) kreuzweise, so erhält man

$$(64'a) \quad a' b' \sin(\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1) = ab.$$

Durch die gleiche Transformation, mit Berücksichtigung der Gleichung (61b), gehen die Hauptachsengleichungen der beiden konjugierten Hyperbeln  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$  über in

$$(62b) \quad \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = \pm 1,$$

wo  $a', b'$  die Längen der beiden konjugierten Halbmesser sind, und zwar ist  $a'$  der Abstand der Schnittpunkte der  $X'$ -Achse mit der Hyperbel, für die rechts das obere Vorzeichen gilt,  $b'$  der Schnittpunkte der  $Y'$ -Achse mit der zur ersten konjugierten Hyperbel. Um hier die den Formeln (I) und (II) entsprechenden Formeln zu erhalten, sind auf die erste Hyperbel die Formeln (54<sub>1</sub>), auf die zweite die Formeln (54<sub>2</sub>) anzuwenden, während  $t_1, t_2$  ihre vorige Bedeutung behalten:

$$(I') \quad a' \cos \mathcal{G}_1 = \frac{a}{\cos t_1}, \quad (I'') \quad a' \sin \mathcal{G}_1 = b \cdot \operatorname{tg} t_1;$$

$$(II') \quad b' \cos \mathcal{G}_2 = a \cdot \operatorname{cot} t_2, \quad (II'') \quad b' \sin \mathcal{G}_2 = \frac{b}{\sin t_2}.$$

In gleicher Weise wie bei der Ellipse ergibt sich zunächst

$$\operatorname{tg} \mathcal{P}_1 \cdot \operatorname{tg} \mathcal{P}_2 = \frac{b^2 \sin t_1}{a^2 \cos t_2},$$

und mit Rücksicht auf (61 b)

$$\sin t_1 = \cos t_2, \quad \text{d. h.} \quad t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1$$

oder die zu zwei konjugierten Hyperbelhalbmessern gehörenden Parameterwerte ergänzen sich zu  $\frac{\pi}{2}$ .

Hieraus folgt weiter:

$$(63 \text{ b}) \quad \begin{cases} a'^2 = \frac{a^2 + b^2 \sin^2 t_1}{\cos^2 t_1} \\ b'^2 = \frac{a^2 \cos^2 t_2 + b^2}{\sin^2 t_2} = \frac{a^2 \sin^2 t_1 + b^2}{\cos^2 t_1} \end{cases}$$

und folglich

$$(64 \text{ b}) \quad \begin{cases} a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \\ a' b' \sin(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) = ab. \end{cases}$$

Somit sind die Sätze gewonnen:

Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Quadrate zweier konjugierten Halbmesser konstant; bei beiden Kurven bilden je zwei konjugierte Halbmesser mit der Verbindungslinie ihrer Endpunkte ein Dreieck konstanten Flächeninhaltes.

Alle Durchmesser, die einen Winkel  $\mathcal{P}_1$  kleiner als der Asymptotenwinkel  $\varphi$  mit der Hauptachse der Hyperbel

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  einschließen, schneiden dieselbe in reellen

Punkten, während die zu ihnen konjugierten Halbmesser diese Hyperbel nicht, wohl aber die konjugierte Hyperbel

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  in reellen Punkten schneiden.

Aus den Gleichungen (62a und b) ergeben sich für die Polare bzw. Tangente eines Punktes  $(\xi, \eta)$  die Gleichungen:

$$\frac{\xi x'}{a'^2} \pm \frac{\eta y'}{b'^2} = 1.$$

Liegt der Punkt auf der  $X'$ -Achse, so ist  $x' = \frac{a'^2}{\xi}$ , d. h. in

Übereinstimmung mit § 41:

Die Polaren aller Punkte eines Ellipsen- oder Hyperbeldurchmessers sind zu dem konjugierten Durchmesser parallel.

### 43. Sätze über konjugierte Durchmesser und Asymptoten.

Bei vielen Sätzen aus der Theorie der Kegelschnitte vereinfacht die Benutzung eines geeigneten schiefwinkligen Koordinatensystems den Beweis sehr, wie z. B. bei den folgenden drei Sätzen.

1. Das Produkt der von den Berührungspunkten aus gemessenen Strecken, die eine bewegliche Tangente auf zwei festen parallelen Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel abschneidet, ist konstant, und zwar gleich dem Quadrate des den festen Tangenten parallelen Halbmessers.

Zum Beweise wähle man das Koordinatensystem (Fig. 31) so, daß die  $Y'$ -Achse der den festen Tan-

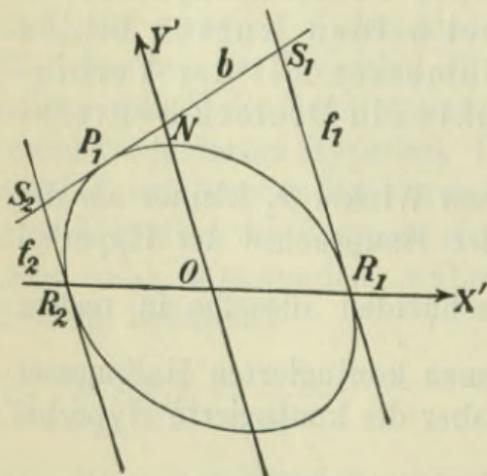


Fig. 31.

genten  $R_1S_1$ ,  $R_2S_2$  parallele, die  $X'$ -Achse der ihre Berührungspunkte verbindende Durchmesser ist. Sind  $a'$ ,  $b'$  die zugehörigen Halbmesser, so lautet die Kurvengleichung für dieses von zwei konjugierten Durchmessern gebildete System:

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

wobei für  $b'^2$  der Hyperbel entsprechend negative Werte zuzulassen sind. Die bewegliche Tangente hat, wenn  $x_1$ ,  $y_1$  die Koordinaten ihres Berührungspunktes  $P_1$  sind, die Gleichung

$$\frac{x'_1 x'}{a'^2} + \frac{y'_1 y'}{b'^2} = 1,$$

woraus sich für  $x' = \pm a'$  die Tangentenabschnitte  $R_1S_1$  und  $R_2S_2$  gleich  $\left(1 \mp \frac{x'_1}{a'}\right) \frac{b'^2}{y'_1}$  ergeben.

Ihr Produkt ist dann

$$\left(1 - \frac{x'_1{}^2}{a'^2}\right) \frac{b'^4}{y_1'^2} = \frac{y_1'^2}{b'^2} \cdot \frac{b'^4}{y_1'^2} = b'^2.$$

Für die Ellipse sind die beiden Abschnitte  $\overrightarrow{R_1S_1}$  und  $\overrightarrow{R_2S_2}$  gleichgerichtet, für die Hyperbel entgegengesetzt; für die erstere ist  $b'^2$  positiv, für die letztere negativ. Daher ist in jedem Falle

$$\overrightarrow{R_1S_1} \cdot \overrightarrow{R_2S_2} = b'^2.$$

2. Das Produkt der Abschnitte einer Ellipsen- oder Hyperbel-Tangente zwischen ihrem Berührungspunkte und den Schnittpunkten mit zwei beliebigen konjugierten Durchmessern ist konstant, und zwar gleich dem Quadrate des der beweglichen Tangente parallelen Halbmessers.

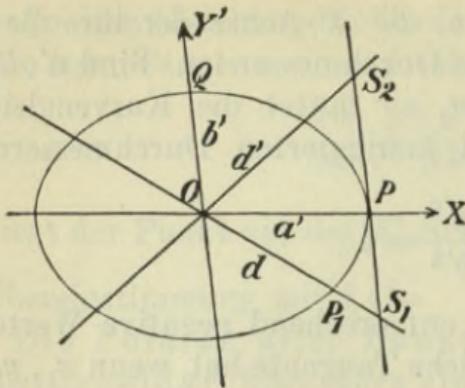


Fig. 32.

Der Durchmesser (Fig. 32) nach dem Berührungspunkte  $P$  der beweglichen Tangente und der konjugierte werden als  $X'$ - und  $Y'$ -Achse gewählt, so daß die Gleichung der Kurve wieder die obige ist. Zu dem Durchmesser  $OP_1 = d$  mit der Gleichung  $y' = \frac{y'_1}{x'_1} x'$  gehört

nach (49) als konjugierter  $d'$ , dessen Gleichung:  $\frac{x'_1}{a^2} x' + \frac{y'_1}{b^2} y' = 0$  ist; sie schneiden auf der Tangente  $x' = a'$  die Strecken  $\overrightarrow{PS_1} = \frac{y'_1}{x'_1} a'$  und  $\overrightarrow{PS_2} = -\frac{b'^2}{a'} \frac{x'_1}{y'_1}$  ab, deren Produkt  $\overrightarrow{PS_1} \cdot \overrightarrow{PS_2} = -b'^2$  ist. Beachtet man, daß bei der Ellipse  $\overrightarrow{PS_1}$  und  $\overrightarrow{PS_2}$  entgegengesetzt, bei der Hyperbel gleichgerichtet sind, daß bei der ersteren  $b'^2$  positiv, bei der letzteren  $b'^2$  negativ ist, so erkennt man, daß der Satz auch dem Vorzeichen nach richtig ist. —

Dieser Satz kann benutzt werden, um aus einem Paare konjugierter Halbachsen, das nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel  $w$  gegeben ist, die Länge und Lage der Hauptachsen zu konstruieren, ohne daß die Kurve selbst gezeichnet vorliegen muß. Ist  $OP$  und  $OQ$  das gegebene Paar, so gestaltet sich die Konstruktion für die Ellipse (Fig. 33a) folgendermaßen. Wird die Tangente  $t$  in  $P$  von der Hauptachse in  $A$ , von der Nebenachse in  $B$  getroffen, so ist  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -b'^2$  negativ;  $P$  liegt zwischen  $A$  und  $B$ . Man errichtet in  $P$  das Lot auf  $t$ , trägt auf beiden Seiten

...

von  $P$  aus die Länge  $b'$  bis  $C$  und  $D$  ab und konstruiert dann über der Tangente als Durchmesser den durch die Punkte  $O, C$  und  $D$  gehenden Kreis, dessen Schnittpunkte mit der Tangente  $t$  die gesuchten Punkte  $A$  und  $B$  liefern; ihre Verbindungslinien mit  $O$  sind die Hauptachsen.

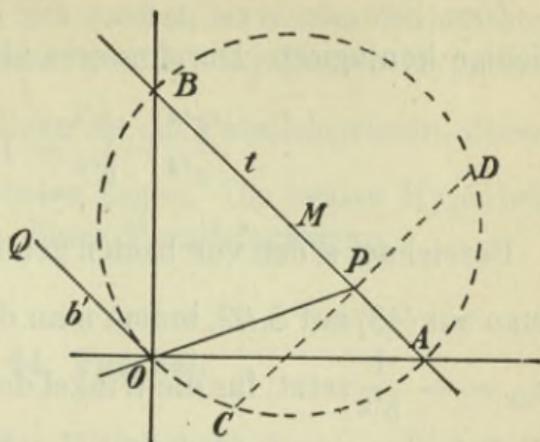


Fig. 33 a.

die Hauptachsen. — Für die Hyperbel (Fig. 33b) ist

$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = -b'^2 = b_1'^2$  positiv; es muß also  $P$  außerhalb der Strecke  $AB$  liegen.

Man konstruiert jetzt über  $OP$  als Durchmesser den Halbkreis, in den man von  $P$  die Länge  $b_1'$  als Sehne bis  $E$  einträgt; das von  $E$  auf  $OP$  gefällte Lot teilt  $OP$

in  $C$  so, daß  $\vec{PC} \cdot \vec{PO} = b_1'^2$  ist. Der Kreis durch  $O$  und  $C$

mit dem Mittelpunkt  $M$  auf der Tangente  $t$  in  $P$  schneidet die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  der beiden Hyperbelachsen aus.

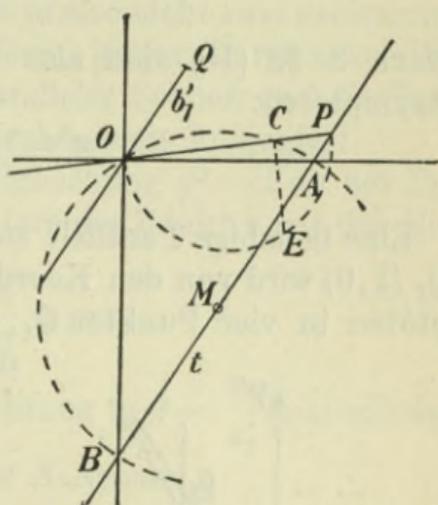


Fig. 33 b.

3. Je zwei konjugierte Durchmesser einer Hyperbel bilden mit den Asymptoten vier harmonische Strahlen.

Zum Beweise bezieht man die Hyperbel auf zwei beliebige konjugierte Durchmesser als Achsen (Fig. 34):

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Bezeichnet  $w$  den von beiden gebildeten Winkel, so erhält man aus (48) auf S. 69, indem man dort  $a_{11} = \frac{1}{a'^2}$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = -\frac{1}{b'^2}$  setzt, für die Winkel der Asymptoten gegen die  $X$ -Achse:

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{\sin^2(w - \vartheta)} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Nach S. 32 (15) sind also die Gleichungen der beiden Asymptoten:

$$y' = \pm \frac{b'}{a'} x'.$$

Eine beliebige Parallele zur  $Y'$ -Achse durch den Punkt  $Q_1(\xi, 0)$  wird von den Koordinatenachsen und den Asymptoten in vier Punkten  $Q_1, Q_2(=\infty), Q_3, Q_4$  geschnitten, deren Ordinaten sind:

$$0, \infty, \frac{b'}{a'}, -\frac{b'}{a'}.$$

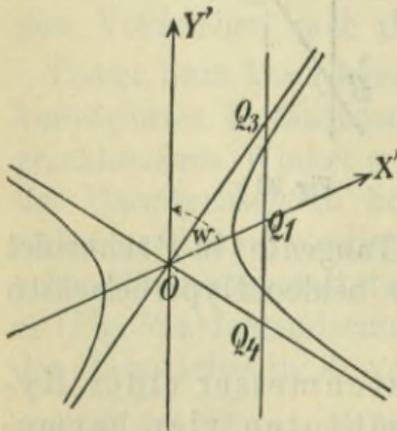


Fig. 34.

Nach dem ersten Satze des § 5 sind die vier Punkte vier harmonische Punkte und daher ihre Verbindungslinien mit dem Nullpunkte vier harmonische Strahlen, womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Zieht man durch die Endpunkte der beiden konjugierten Halbmesser die Tangenten an die konjugierten Hyperbeln  $\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = \pm 1$ , so bilden sie ein Parallelogramm, dessen Ecken auf den Asymptoten liegen. Die beiden Hyperbeln liegen ganz außerhalb dieses Parallelogramms.

#### 44. Parabel.

Da bei der Parabel der Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt der Parabelachse ist, so sind alle Durchmesser zu ihr parallel. Bei der Parabel kann es also nicht zwei zueinander konjugierte Durchmesser geben; jedem Durchmesser ist nur eine bestimmte Schar paralleler Sehnen und die Tangente im Endpunkte des Durchmessers konjugiert.

Geht man von der Scheitelgleichung  $y^2 = 2px$  der Parabel aus, so ist (S. 67) die Polare des Punktes mit den Koordinaten  $\sigma x_1, \sigma y_1$ :

$$y_1 y = p \frac{x}{\sigma} + p x_1,$$

woraus für  $\sigma = \infty$  als zur Richtung  $\operatorname{tg} \beta = \frac{y_1}{x_1}$  konjugierter Durchmesser die Parallele zur X-Achse:

$$y = p \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

folgt; sie schneidet die Parabel in dem Punkte  $P_0$  mit den Koordinaten

$$x_0 = \frac{p}{2} \operatorname{ctg}^2 \beta, \quad y_0 = p \operatorname{ctg} \beta.$$

Nimmt man eine Koordinatentransformation so vor, daß der Anfangspunkt in den Punkt  $P_0$  zu liegen kommt, die

$X'$ -Achse der  $X$ -Achse parallel ist, die  $Y'$ -Achse aber den Winkel  $\beta$  mit der  $X'$ -Achse einschließt [S. 25 (9, II)]

$$x = x_0 + x' + y' \cos \beta,$$

$$y = y_0 + y' \sin \beta,$$

so nimmt die Parabelgleichung die Gestalt an:

$$(64) \quad y'^2 \sin^2 \beta = 2p x',$$

und die Gleichung der Tangente im Punkte  $P'(x'_1, y'_1)$ :

$$y'_1 y' \sin^2 \beta = p(x'_1 + x').$$

Aus letzterer ist unmittelbar zu erkennen, daß die Tangente im Nullpunkte mit der  $Y'$ -Achse zusammenfällt. Ferner zeigt die Gleichung (64), daß jeder Durchmesser die Parabel nur in einem, im Endlichen gelegenen Punkte schneidet und alle zur Tangente in diesem Schnittpunkte parallelen Sehnen halbiert.

Ferner gelten die Sätze (Fig. 35):

1. Der Endpunkt jedes Durchmessers halbiert die Strecke, welche von einer konjugierten Sehne und den Tangenten in ihren Endpunkten auf ihm abgeschnitten wird.

Der Schnittpunkt  $S$  der Tangenten in den Endpunkten  $P_1, P_2$  einer Sehne ist der Pol der Sehne und liegt auf dem zur Sehnenrichtung konjugierten Durchmesser (§ 41), der die Parabel in  $P_0$  und die Sehne  $P_1 P_2$  in  $M$  schneidet, während der andere Schnittpunkt eines jeden Durchmessers der unendlich ferne

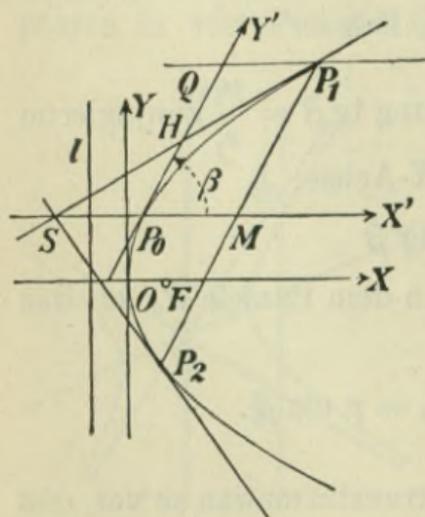


Fig. 35.

Punkt  $U$  der Achse ist. Da nun  $(SM P_0 U) = -1$  ist, so muß nach §5 der Punkt  $P_0$  die Strecke  $SM$  halbieren. — Der Beweis dieses Satzes ergibt sich auch aus §40, wenn man beachtet, daß  $SM$  die Subtangente der beiden Tangenten in  $P_1$  und  $P_2$  ist, und daß sich, wenn man für die Parabel die auf das Koordinatensystem  $X', Y'$  bezogene Gleichung (64) zugrunde legt, für  $s_t = SM$  der Wert  $2x'_1$  ergibt.

2. Die Strecke jeder Parabeltangente zwischen dem Berührungspunkte und dem Schnittpunkte mit einem beliebigen Durchmesser wird von der Tangente in seinem Endpunkte halbiert.

Der Beweis folgt aus dem vorigen Satze auf Grund der Kongruenz der Dreiecke  $HP_0S$  und  $HQP_1$ .

3. Der geometrische Ort aller Punkte, von denen sich zwei zueinander senkrechte Tangenten an eine Parabel ziehen lassen, ist die Leitlinie.

Geht man von der Scheitelgleichung  $y^2 = 2px$  der Parabel aus, so sind die Tangenten in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  der Parabel:

$$y_\varrho y = p(x + x_\varrho) \quad (\varrho = 1, 2).$$

Beide stehen aufeinander senkrecht, wenn [nach S. 41 (27')]

$\frac{p^2}{y_1 y_2} = -1$  ist. Die Abszisse  $\xi$  ihres Schnittpunktes  $S$

ist dann

$$\xi = \frac{y_1 y_2}{2p} = -\frac{p}{2},$$

das ist aber die Gleichung der Leitlinie.

## 8. Abschnitt.

### Brennpunkte und Leitlinien.

#### 45. Ellipse und Hyperbel.

In §27, II waren Ellipse und Hyperbel definiert als Ortskurven der Punkte, deren Abstandssumme bzw. Ab-

standsdifferenz von zwei festen Punkten, den Brennpunkten  $F_1(e, 0)$  und  $F_2(-e, 0)$ , konstant  $= 2a$  ist. Für die Ellipse war so als Hauptachsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{wo } b^2 = a^2 - e^2,$$

und für die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{wo } b^2 = e^2 - a^2,$$

gefunden worden.

Die Polare eines Punktes  $P_0(x_0, y_0)$  ist

$$\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

und daher für den Brennpunkt  $F_1(x_0 = e, y_0 = 0)$ :

$$x = \frac{a^2}{e},$$

für  $F_2(x_0 = -e, y_0 = 0)$ :

$$x = -\frac{a^2}{e}.$$

Die Polaren der Brennpunkte stehen also auf der Hauptachse senkrecht und sind nach § 27, III die zugehörigen Leitlinien  $l_1$  und  $l_2$ . Bei der Ellipse liegen die Brennpunkte zwischen den Scheiteln  $A_1, A_2$  der Hauptachse, bei der Hyperbel außerhalb der Strecke  $A_1, A_2$ . Bei der Ellipse schneiden die Leitlinien die  $X$ -Achse außerhalb der Strecke  $A_1, A_2$ , bei der Hyperbel innerhalb.

Für die Brennstrahlen, wie die Verbindungslinien eines Kurvenpunktes  $P_0(x_0, y_0)$  mit den Brennpunkten genannt

werden, kann man die Werte  $\sqrt{(x_0 \mp e)^2 + y_0^2}$  mit Hilfe der Kurvengleichungen umgestalten in

$$r_1 = \frac{a^2 - e x_0}{a}, \quad r_2 = \frac{a^2 + e x_0}{a}, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

für die Ellipse und

$$r_1 = \frac{e x_0 - a^2}{a}, \quad r_2 = \frac{e x_0 + a^2}{a}, \quad e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

für den einen Zweig der Hyperbel, während für den anderen  $r_1$  mit  $r_2$  zu vertauschen ist. Als Abstände  $s_1, s_2$  von den zu  $F_1, F_2$  gehörenden Leitlinien findet man

$$s_1 = \frac{a^2 - e x_0}{e}, \quad s_2 = \frac{a^2 + e x_0}{e}$$

für die Ellipse, bzw.

$$s_1 = \frac{e x_0 - a^2}{e}, \quad s_2 = \frac{e x_0 + a^2}{e}$$

für den rechten Hyperbelzweig, dessen Betrachtung wegen der Symmetrie der Hyperbel genügt. Folglich ist

$$\lambda = \frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} = \frac{e}{a},$$

d. h. die numerische Exzentrizität  $\lambda$  ist gleich der linearen Exzentrizität dividiert durch die halbe große, bzw. reelle Achse. Die beiden in § 27 gegebenen Erzeugungsarten von Ellipse und Hyperbel sind also völlig gleichwertig, wie man auch erkennt, wenn man alle hier für  $a, b$  berechneten Strecken durch  $s$  und  $\lambda$  ausdrückt.

Wird die Ellipse insbesondere zum Kreise, so wird, da  $a = b$  ist,  $e$  und  $\lambda$  zu Null; die beiden Brennpunkte fallen in den Mittelpunkt zusammen, und die Leitlinie wird die

unendlich ferne Gerade, da ihr Abstand vom Kreismittelpunkte  $\frac{a^2}{e}$  unendlich wird.

#### 46. Sätze.

Bringt man die Gleichung der Tangente  $t_0$  des Punktes  $P_1$  auf die Normalform

$$\left(\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} - 1\right) : \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} = 0,$$

und beachtet man, daß  $\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} = \frac{\sqrt{a^4 - e^2 x_0^2}}{a^2 b}$ , bzw.  $= \frac{\sqrt{e^2 x_0^2 - a^4}}{a^2 b}$  für Ellipse, bzw. Hyperbel ist, so erhält man

für die Länge der von den Brennpunkten auf die Tangente in  $P_0$  gefällten Lote  $d_1, d_2$ :

$$d_1 = b \sqrt{\frac{a^2 - e x_0}{a^2 + e x_0}}, \quad d_2 = b \sqrt{\frac{a^2 + e x_0}{a^2 - e x_0}},$$

bzw.

$$d_1 = -b \sqrt{\frac{e x_0 - a^2}{e x_0 + a^2}}, \quad d_2 = b \sqrt{\frac{e x_0 + a^2}{e x_0 - a^2}}$$

(für den rechten Hyperbelzweig auch dem Vorzeichen nach richtig).

Hieraus folgt

$$d_1 d_2 = b^2, \quad \text{bzw.} \quad d_1 \cdot d_2 = -b^2 \quad \text{und} \quad \frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2},$$

d. h. die beiden Sätze:

1. Das Produkt der senkrechten Abstände der beiden Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel von einer beliebigen Tangente ist konstant, und zwar gleich dem Quadrate der halben kleinen

Achse für die erstere und dem negativen Quadrate der halben Nebenachse für die letztere. (Bei der ersteren liegen beide Brennpunkte auf derselben, bei der letzteren auf verschiedenen Seiten der Tangenten.)

2. Die Tangente bildet gegen die beiden Brennstrahlen gleiche Winkel. Denn  $\frac{d_1}{r_1}$  und  $\frac{d_2}{r_2}$  sind die Sinus der Winkel, die  $r_1$  und  $r_2$  mit der Tangente einschließen.

Da die Normale auf der Tangente senkrecht steht, so kann man den letzten Satz auch so aussprechen:

2. Bei der Ellipse halbiert die Normale den von den Brennstrahlen eingeschlossenen Winkel, während bei der Hyperbel dies für die Tangente gilt.

Auf diesem Satze beruhen die optischen Eigenschaften beider Kurven. Ein von einem Brennpunkte ausgehender Lichtstrahl wird von der Ellipse nach dem anderen Brennpunkte reflektiert, während er bei der Hyperbel so reflektiert wird, als ob er seinen Ursprung im anderen Brennpunkt habe. Dasselbe gilt auch in akustischer Hinsicht.

Auf Grund des zweiten Satzes auf S. 14 über vier harmonische Strahlen folgt sofort weiter aus dem vorstehenden Satze 2:

3. Die Schnittpunkte von Tangente und Normale eines beliebigen Punktes mit der Hauptachse teilen die Strecke zwischen den beiden Brennpunkten harmonisch.

Verlängert man die auf die Tangente  $t_0$  von den Brennpunkten gefällten Lote über ihre Fußpunkte  $G_1, G_2$  hinaus (Fig. 36a und b) um ihre eigenen Längen, so erhält man die sogenannten Gegenpunkte der Brennpunkte  $H_1, H_2$ . Verbindet man letztere noch mit dem Kurvenmittelpunkte  $M$  und mit  $P$ , so sind die Dreiecke  $F_1 P_0 G_1$  und  $H_1 P_0 G_1$

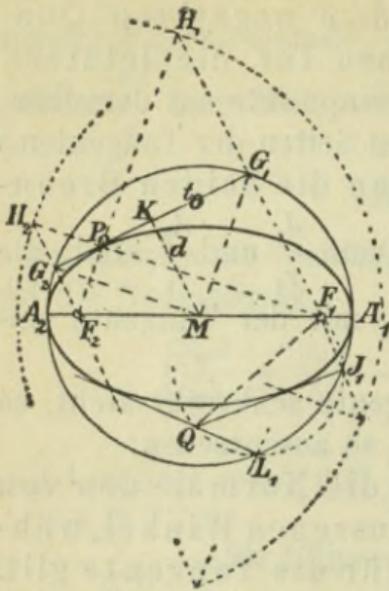


Fig. 36 a.

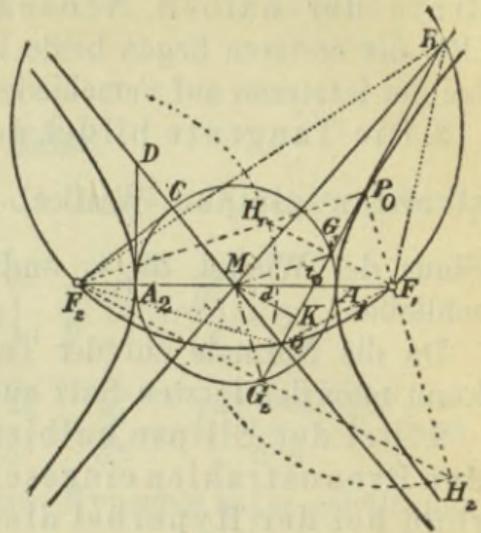


Fig. 36 b.

kongruent, ebenso  $F_2P_0G_2$  und  $H_2P_0G_2$ . Hieraus und aus Satz 2 folgt aber weiter, daß

$$\sphericalangle F_1P_0G_1 = \sphericalangle H_2P_0G_2 = \sphericalangle H_1P_0G_1 = \sphericalangle F_2P_0G_2;$$

die Linien  $F_1P_0H_2$  und  $F_2P_0H_1$  sind also gerade Linien von der Länge  $2a$ .

Weil nun  $G_1, G_2, M$  die Strecken  $F_1H_1, F_2H_2, F_1F_2$  halbieren, so ist

$$\triangle MF_1G_1 \sim \triangle F_2F_1H_1, \quad \triangle MF_2G_2 \sim \triangle F_1F_2H_2,$$

also  $MG_1:F_2H_1 = MG_2:F_1H_2 = \frac{1}{2}F_1F_2:F_1F_2$ , woraus  $MG_1 = MG_2 = a$  folgt. Daher:

4. Die Fußpunkte der von den beiden Brennpunkten einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangenten gefälltten Lote liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt mit dem der Kurve zusammenfällt und dessen Radius gleich der halben Hauptachse ist.

5. Die Gegenpunkte eines Brennpunktes für alle Tangenten liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt im anderen Brennpunkte liegt und dessen Radius gleich der Hauptachse ist.

Für den Kreis werden diese Sätze bedeutungslos.

#### 47. Parabel.

Bei der Parabel fallen der Mittelpunkt und der eine Brennpunkt in den unendlich fernen Punkt der Parabelachse. Infolgedessen gelten statt der Sätze des vorigen Paragraphen die unten folgenden. Geht man wieder von der Scheiteltgleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

aus, so hat der Brennpunkt die Abszisse  $\frac{p}{2}$  und die Leitlinie schneidet die Abszissenachse im Punkte  $-\frac{1}{2}p$ .

Der Brennpunkt hat von der Tangente

$$px - y_0y + px_0 = 0$$

des Parabelpunktes  $P_0$  den senkrechten Abstand

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + y_0^2}.$$

Bezeichnet  $\beta$  den spitzen Winkel der Tangente  $t$  gegen den Brennstrahl nach  $P_0$ , so ist

$$\sin \beta = \frac{d}{FP_0} = \frac{d}{\left(\frac{p}{2} + x_0\right)} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p}{y_0}.$$

Da der Richtungskoeffizient  $\operatorname{tg} \beta$  der Tangente  $t$  in  $P_0$  den gleichen Wert hat, so folgt:

1. Die Tangente einer Parabel ist gegen den Brennstrahl nach ihrem Berührungspunkte und gegen die Achse gleich geneigt.

Nach § 44, Satz 2 wird jede Parabeltangente zwischen dem Berührungspunkte und ihrem Schnittpunkte mit der

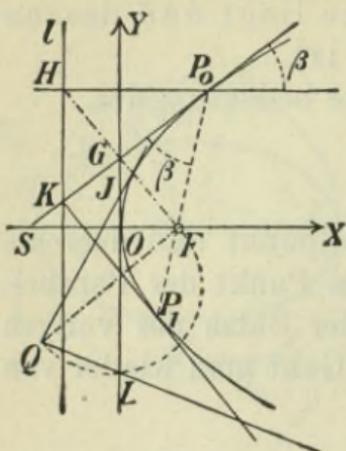


Fig. 37.

Achse von der Scheiteltangente in  $G$  halbiert. Folglich sind (Fig. 37) die beiden Dreiecke  $FGP_0$  und  $FGS$  kongruent ( $FG = FG$ ,  $P_0G = SG$ ,  $\sphericalangle FP_0G = \sphericalangle FSG$ ), weshalb die Dreieckswinkel bei  $G$  rechte Winkel sein müssen. Daher ist  $G$  auch der Fußpunkt des von  $F$  auf die Tangente  $t$  gefällten Lotes. Verlängert man  $FG$  um sich selbst bis  $H$ , so ist auch das Dreieck  $HGP_0$  den beiden vorigen kon-

gruent, folglich  $P_0H = P_0F = \frac{p}{2} + x_0$ .

2. Die Fußpunkte der von dem Brennpunkte auf die Tangenten einer Parabel gefällten Lote liegen auf ihrer Scheiteltangente, die Gegenpunkte auf der Leitlinie.

Man kann den ersten Teil dieses Satzes benutzen, um von einem gegebenen Punkte  $Q$  die beiden Tangenten an die Parabel zu konstruieren. Man konstruiert über  $FQ$  als Durchmesser einen Kreis, durch dessen Schnittpunkte  $J, L$  mit der Scheiteltangente die gesuchten Tangenten von  $Q$  aus gehen müssen; verlängert man noch  $FJ$  und  $FL$  bis zu den Schnittpunkten mit der Leitlinie, so schneiden die Parallelen zur Achse durch diese Punkte die Tangenten  $QJ$  und  $QL$  in den Berührungspunkten mit der Parabel<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In der Fig. 37 sind die Linien  $FJ$  und  $FL$  und die Parallelen zur Achse durch ihre Schnittpunkte mit  $l$  nicht gezeichnet, um die Figur nicht unübersichtlich zu machen.

## 48. Sätze für Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Um für alle drei Kegelschnitte gültige Sätze abzuleiten, transformiere man die Gleichung (35) auf S. 54:

$$y^2 = (\lambda^2 - 1)x^2 + 2sx - s^2,$$

wo die  $Y$ -Achse mit der Leitlinie zusammenfällt und die  $X$ -Achse die zu ihr Senkrechte durch den Brennpunkt  $F(s, 0)$  ist, durch eine Parallelverschiebung in den Brennpunkt  $F$ :

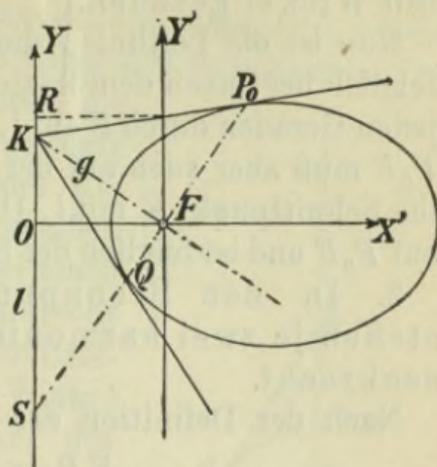


Fig. 38.

$$x = x' + s, \quad y = y'.$$

Die Kurvengleichung lautet dann

$$y'^2 = (\lambda^2 - 1)x'^2 + 2\lambda^2 s \cdot x' + \lambda^2 s^2,$$

für die die Tangentengleichung im Punkte  $P_0(x'_0, y'_0)$  ist:

$$y'_0 y' = (\lambda^2 - 1)x'_0 x' + \lambda^2 s(x'_0 + x') + \lambda^2 s^2.$$

Diese Tangente schneidet die Leitlinie (Fig. 38), die jetzt die Gleichung  $x' = -s$  hat, in dem Punkte  $K(\xi, \eta)$ :

$$\xi = -s, \quad \eta = s \frac{x'_0}{y'_0}.$$

Folglich haben die Geraden  $FP_0$  und  $FK$  die Gleichungen:

$$y' = \frac{y'_0}{x'_0} x' \quad \text{und} \quad y' = -\frac{x'_0}{y'_0} x',$$

stehen also aufeinander senkrecht, daher

1. Die Strecke einer beliebigen Tangente einer Kurve 2. Ordnung zwischen ihrem Berührungspunkte und einer Leitlinie wird von dem zur letz-

teren gehörenden Brennpunkte unter einem rechten Winkel gesehen.

Nun ist die Leitlinie  $l$  die Polare des Brennpunktes  $F$ , folglich liegt nach dem letzten Satze auf S. 68 der Pol einer jeden Geraden durch  $F$  auf  $l$ . Der Pol der Berührungssehne  $P_0F$  muß aber auch auf der Tangente in  $P_0$  liegen, ist also ihr Schnittpunkt  $K$  mit  $l$ . Der Pol von  $KF$  liegt daher auch auf  $P_0F$  und ist folglich der Schnittpunkt  $S$  von  $P_0F$  und  $l$ :

2. In den Brennpunkten der Kegelschnitte stehen je zwei harmonische Polaren aufeinander senkrecht.

Nach der Definition der Kegelschnitte in § 27, III ist

$$FP_0 = \lambda \cdot P_0R,$$

woraus mit Hilfe von Satz (1) jetzt folgt:

$$\sin FK P_0 = \lambda \cdot \sin RK P_0$$

oder

3. Zieht man von dem Schnittpunkte einer Kegelschnittstangente  $t$  mit einer Leitlinie  $l$  die Verbindungsgerade  $g$  nach dem zugehörigen Brennpunkte, so teilt die Tangente den von  $l$  und  $g$  gebildeten Winkel so, daß

$$\sin g, t = \lambda \cdot \sin l, t,$$

wo  $\lambda \leq 1$  ist, je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

#### 49. Die Kurven 2. Ordnung als Kegelschnitte.

Im Anschluß an die Untersuchungen über Brennpunkte und Leitlinien soll noch gezeigt werden, daß Ellipse, Parabel und Hyperbel durch Ebenen aus einem geraden Kreiskegel ausgeschnitten werden können, daher ihre zusammenfassende Benennung als Kegelschnitte mit Recht führen.

Ein gerader Kreiskegel entsteht, indem (Fig. 39) ein Winkel  $\varphi$  um einen seiner Schenkel  $a$  gedreht wird, bis der gedrehte Schenkel  $b$  in seine Anfangslage zurückkehrt. Der festgehaltene Schenkel  $a$  bildet die Kegelachse, während der bewegte Schenkel  $b$  die Mantellinien des Kegels mit  $O$  als Spitze erzeugt; irgendein Punkt  $Q$  auf  $b$  beschreibt dabei einen Kreis  $k_1$ , dessen Ebene  $\mathfrak{C}_1$  senkrecht auf  $a$  steht und  $a$  im Kreismittelpunkte  $N_1$  schneidet. Der Winkel  $2\varphi$  heißt der Öffnungswinkel des Kegels. Beschreibt man noch den durch  $Q$  gehenden Halbkreis über  $a$  als Durchmesser, so erzeugt dieser Halbkreis bei der Umdrehung der ganzen Figur eine dem Kegel eingeschriebene Kugel, die von ihm längs des Kreises  $k_1$  berührt wird und deren Mittelpunkt  $M_1$  der Mittelpunkt des Halbkreises ist. Hieraus folgt zugleich, daß alle von einem Punkte an eine Kugel gezogenen Tangenten gleiche Länge haben.

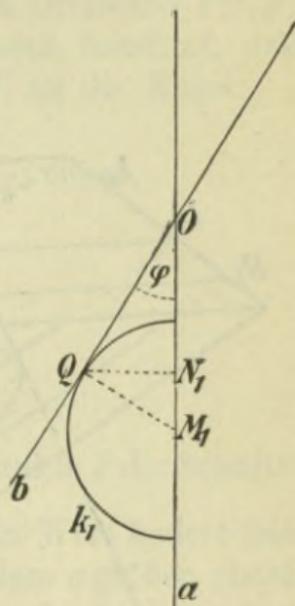


Fig. 39.

Nun bringt man (Fig 40) den Kegel zum Schnitt mit einer Ebene  $\mathfrak{C}$ , die gegen die Kegelachse unter dem Winkel  $\sigma$  geneigt ist und die Kugel in dem Punkte  $F_1$  berührt; diese Ebene steht senkrecht auf dem Kugelradius  $M_1F_1$ . Die Schnittebene  $\mathfrak{C}$  werde von dem Kegel in einer Kurve  $k$  und von der Ebene  $\mathfrak{C}_1$  des Berührungskreises  $k_1$  der Kugel mit dem Kegelmantel in der Geraden  $l_1$  geschnitten.

Man ziehe weiter eine beliebige Mantellinie des Kegels, die den Berührungskreis  $k_1$  in dem Punkte  $P_1$ , die Schnittkurve  $k$  in dem Punkte  $P$  trifft, und fälle von  $P$  das Lot

auf die Ebene  $\mathfrak{E}_1$ , das diese Ebene in  $G_1$  trifft.  $PG_1$  muß in der durch die Kegelachse und die Mantellinie  $OP_1P$  gehenden Ebene liegen, die senkrecht zu  $\mathfrak{E}_1$  ist und  $\mathfrak{E}_1$  in

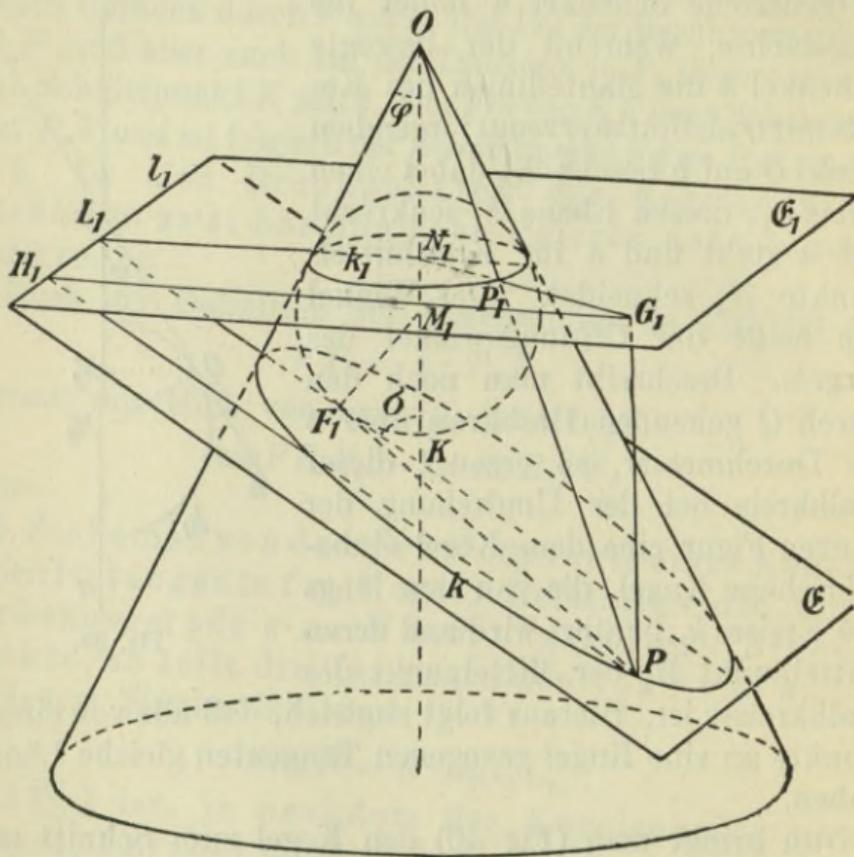


Fig. 40.

der Geraden  $N_1P_1G_1$  schneidet;  $\sphericalangle P_1PG_1$  ist gleich  $\varphi$ . Durch die Kegelachse und die zu ihr parallele Gerade  $PG_1$  lege man noch die Ebenen senkrecht zu  $l_1$ , welche  $l_1$  in  $L_1$  und  $H_1$ , die Ebene  $\mathfrak{E}_1$  in  $N_1L_1$  und  $G_1H_1$  und schließlich die Ebene  $\mathfrak{E}$  in  $L_1F_1$  und  $PH_1$  schneiden; denn da die erstere Ebene durch die Kegelachse geht und senkrecht zu  $\mathfrak{E}$  ist, so muß in ihr das vom Kugelmittelpunkt  $M_1$  auf die Ebene  $\mathfrak{E}$

gefällte Lot liegen.  $\sphericalangle M_1 K F_1$  ist der Neigungswinkel  $\sigma$  der Kegelachse gegen  $\mathfrak{E}$ , und ihm ist  $\sphericalangle G_1 P H_1$  gleich, da die Schenkel beider Winkel parallel sind.

Aus den beiden bei  $G_1$  rechtwinkligen Dreiecken  $PG_1P_1$  und  $PG_1H_1$  folgt aber, wenn man noch beachtet, daß  $PP_1 = PF_1$  ist, als Tangenten von  $P$  an die Kugel:

$$PG_1 = PP_1 \cdot \cos \varphi = PF_1 \cdot \cos \varphi,$$

$$PG_1 = PH_1 \cdot \cos \sigma,$$

also

$$PF_1 = PH_1 \cdot \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi}.$$

Der Quotient  $\lambda = \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi}$  ist für alle Punkte  $P$  der Schnittkurve  $k$  des Kegels mit  $\mathfrak{E}$  konstant; sein Wert ändert sich für denselben Kegel nur mit  $\sigma$ . Je nachdem  $\sigma$  größer, gleich oder kleiner als  $\varphi$  ist, ergibt sich  $\lambda$  kleiner, gleich oder größer als 1. Beachtet man, daß das in der letzten Gleichung für die Punkte  $P$  der Kurve  $k$  aufgestellte Gesetz das gleiche ist wie das in § 27, III zugrunde gelegte, so folgt:

Ein gerader Kreiskegel wird von einer beliebigen Ebene in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel geschnitten, je nachdem ihr Neigungswinkel gegen die Kegelachse größer, gleich oder kleiner als der halbe Öffnungswinkel  $\varphi$  des Kegels ist.

Nun war für Ellipse und Hyperbel  $\lambda$  gleich der numerischen Exzentrizität  $\frac{e}{a}$ . Für die Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  folgt aus  $e^2 = a^2 - b^2$  für die kleine Halbachse  $b = \frac{a}{\cos \varphi} \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \sigma}$ . Das Achsenverhältnis  $\frac{b}{a}$

kann jeden Wert zwischen 1 und 0 (ausschließlich) annehmen, wenn  $\sigma$  von  $\frac{\pi}{2}$  bis  $\varphi$  aussch. abnimmt, und nur

diese Werte von  $\sigma$  kommen für eine Ellipse in Betracht. Die Hauptachse der Ellipse muß senkrecht zur Leitlinie  $l_1$  sein, folglich schneidet die Ebene durch die Kegalachse senkrecht zu  $l_1$  die Ebene  $\mathfrak{E}$  in der Hauptachse  $2a$ , deren Länge dadurch verändert werden kann, daß man  $\mathfrak{E}$  parallel zu sich verschiebt. — Für die Hyperbel gilt die letzte Bemerkung in gleicher Weise. Für sie ist  $e^2 = a^2 + b^2$  und somit

$$b = \frac{a}{\cos \varphi} \sqrt{\cos^2 \sigma - \cos^2 \varphi}. \text{ Da } \sigma < \varphi \text{ ist, so kann das}$$

Achsenverhältnis jeden Wert zwischen Null (ausschließlich) und  $\operatorname{tg} \varphi$  annehmen, wenn  $\sigma$  von  $\varphi$  (ausschließlich) bis zu Null abnimmt. Für  $\sigma = 0$  schneidet  $\mathfrak{E}$  den Kegel in zwei

Mantellinien. Da aber  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$  ist, wenn  $\alpha$  den Winkel

zwischen einer Asymptote und der Hauptachse bezeichnet, so können nur Hyperbeln aus dem Kegel ausgeschnitten

werden, deren Achsenverhältnis  $\frac{b}{a} \leq \operatorname{tg} \varphi$  ist. — Bei der

Parabel ( $\sigma = \varphi$ ) ist der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel gleich  $\frac{1}{2} p$ ; durch Parallelverschiebung von  $\mathfrak{E}$  er-

hält man also Parabeln jeder Größe. Daher:

Aus jedem geraden Kreiskegel kann man alle möglichen Ellipsen und Parabeln durch Ebenen ausschneiden, Hyperbeln jedoch nur so weit, als ihr Asymptotenwinkel  $2\alpha$  nicht größer ist als der Öffnungswinkel  $2\varphi$  des Kegels.

## 9. Abschnitt.

## Potenz eines Kegelschnittes.

## 50. Definition der Potenz.

Schneidet man einen nicht zerfallenden Kegelschnitt durch eine Gerade, die durch einen Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  geht und mit der positiven  $X$ -Achse den Winkel  $\alpha$  einschließt, so nennt man das Produkt der beiden gerichteten Strecken zwischen  $P_0$  und

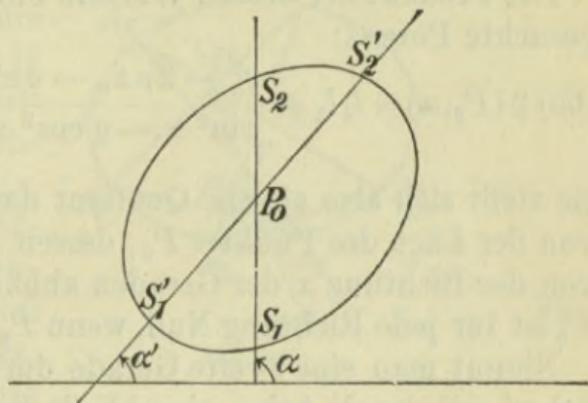


Fig. 41.

den beiden Schnittpunkten  $S_1, S_2$  mit dem Kegelschnitte die Potenz des Punktes  $P_0$  in der Richtung  $\alpha$ , z. B.  $\overrightarrow{P_0 S_1} \cdot \overrightarrow{P_0 S_2}$  (Fig. 41).

Unter Benutzung rechtwinkliger Koordinaten, die für diese Betrachtungen ausreichen und natürlich die einfachsten Ausdrücke liefern, ist die Gerade (nach 16'):

$$x = x_0 + l \cdot \cos \alpha, \quad y = y_0 + l \cdot \sin \alpha.$$

Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß seine  $X$ -Achse mit der Hauptachse und seine  $Y$ -Achse mit der Tangente in einem Scheitel derselben zusammenfällt; dann stellt

$$f(x, y) = y^2 - 2px - qx^2 = 0$$

alle drei Arten von Kegelschnitten dar, wo  $q = \lambda^2 - 1 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$  ist für Hyperbel, Parabel, Ellipse. Für die Strecken

$l_1 = \overrightarrow{P_0 S_1}$ ,  $l_2 = \overrightarrow{P_0 S_2}$  ergibt sich daraus die in  $l$  quadratische Gleichung:

$$l^2(\sin^2 \alpha - q \cos^2 \alpha) + 2l(y_0 \sin \alpha - [p + qx_0] \cos \alpha) + y_0^2 - 2px_0 - qx_0^2 = 0.$$

Das Produkt der beiden Wurzeln dieser Gleichung ist die gesuchte Potenz:

$$(65) \wp(P_0, \alpha) = l_1 l_2 = \frac{y_0^2 - 2px_0 - qx_0^2}{\sin^2 \alpha - q \cos^2 \alpha} = \frac{f(x_0, y_0)}{\sin^2 \alpha - q \cos^2 \alpha};$$

sie stellt sich also als ein Quotient dar, dessen Zähler nur von der Lage des Punktes  $P_0$ , dessen Nenner dagegen nur von der Richtung  $\alpha$  der Geraden abhängt. Die Potenz von  $P_0$  ist für jede Richtung Null, wenn  $P_0$  auf der Kurve liegt.

Nimmt man eine zweite Gerade durch  $P_0$ , die den Winkel  $\alpha'$  mit der  $X$ -Achse einschließt, so ist

$$\frac{\wp(P_0, \alpha)}{\wp(P_0, \alpha')} = \frac{\sin^2 \alpha' - q \cos^2 \alpha'}{\sin^2 \alpha - q \cos^2 \alpha},$$

daher: Das Verhältniß der Potenzen für zwei Richtungen hat für alle Punkte denselben Wert, solange nur keine der Richtungen geändert wird.

Dagegen ist für zwei verschiedene Punkte  $P_0$  und  $P_1$ , aber dieselbe Richtung:

$$\frac{\wp(P_0, \alpha)}{\wp(P_1, \alpha)} = \frac{y_0^2 - 2px_0 - qx_0^2}{y_1^2 - 2px_1 - qx_1^2}.$$

Das Verhältniß der Potenzen für zwei Punkte hat denselben Wert für jede beliebige Richtung der parallelen Geraden.

Die Formel (65) soll nun zum Beweise des wichtigen Pascalschen Satzes benutzt werden.

### 51. Satz von Pascal.

Sind sechs beliebige Punkte eines Kegelschnittes in einer bestimmten, aber willkürlichen Weise (Fig. 42) mit  $A_1, A_2,$

$A_3, A_4, A_5, A_6$  bezeichnet, so bilden die Verbindungsgeraden je zweier aufeinanderfolgenden ein Sehnensechseck. Die Punkte, deren Index um 3 differiert, heißen Gegenpunkte, und zwei Seiten des Sechsecks, deren Ecken paarweise

Gegenpunkte sind, also  $A_1 A_2$  und  $A_4 A_5, A_2 A_3$  und  $A_5 A_6, A_3 A_4$  und  $A_6 A_1$ , heißen Gegenseiten.

Man betrachte nun irgendein Dreieck, dessen Seiten drei nicht paarweise in einer Ecke des Sehnensechsecks zusammenstoßende Seiten desselben sind, z. B.  $A_6 A_1, A_2 A_3, A_4 A_5$ , die das Dreieck  $P_1 P_2 P_3$  bilden.

Für dieses Dreieck  $P_1 P_2 P_3$  ist jede der drei übrigen Seiten des Sechsecks  $A_1 A_2, A_3 A_4, A_5 A_6$  eine Transversale und folglich nach dem Satze von Menelaos (§ 25):

$$\overrightarrow{P_1 A_2} \cdot \overrightarrow{P_2 U} \cdot \overrightarrow{P_3 A_1} = \overrightarrow{P_1 A_1} \cdot \overrightarrow{P_2 A_2} \cdot \overrightarrow{P_3 U}$$

$$\overrightarrow{P_1 A_3} \cdot \overrightarrow{P_2 A_4} \cdot \overrightarrow{P_3 W} = \overrightarrow{P_1 W} \cdot \overrightarrow{P_2 A_3} \cdot \overrightarrow{P_3 A_4}$$

$$\overrightarrow{P_1 V} \cdot \overrightarrow{P_2 A_5} \cdot \overrightarrow{P_3 A_6} = \overrightarrow{P_1 A_6} \cdot \overrightarrow{P_2 V} \cdot \overrightarrow{P_3 A_5}.$$

Multipliziert man die drei Gleichungen ineinander und beachtet man, daß, wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungen von  $A_1 A_6,$

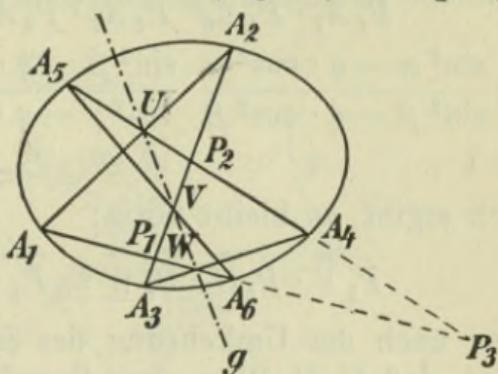


Fig. 42.

$A_2A_3, A_4A_5$  messen, nach dem ersten Satze des vorigen Paragraphen

$$\begin{aligned} & \frac{\overrightarrow{P_1A_2} \cdot \overrightarrow{P_1A_3}}{\overrightarrow{P_1A_1} \cdot \overrightarrow{P_1A_6}} \cdot \frac{\overrightarrow{P_2A_4} \cdot \overrightarrow{P_2A_5}}{\overrightarrow{P_2A_2} \cdot \overrightarrow{P_2A_3}} \cdot \frac{\overrightarrow{P_3A_1} \cdot \overrightarrow{P_3A_6}}{\overrightarrow{P_3A_4} \cdot \overrightarrow{P_3A_5}} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - q \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta - q \cdot \cos^2 \beta} \cdot \frac{\sin^2 \beta - q \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma - q \cdot \cos^2 \gamma} \cdot \frac{\sin^2 \gamma - q \cdot \cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha - q \cdot \cos^2 \alpha} \\ &= 1 \end{aligned}$$

sich ergibt, so bleibt übrig:

$$\overrightarrow{P_1V} \cdot \overrightarrow{P_2U} \cdot \overrightarrow{P_3W} = \overrightarrow{P_1W} \cdot \overrightarrow{P_2V} \cdot \overrightarrow{P_3U},$$

was nach der Umkehrung des Satzes von Menelaos aussagt, daß  $U, V, W$  in einer Geraden liegen. Damit ist der Satz von Pascal (1640) bewiesen:

Die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks liegen auf einer Geraden, der sogenannten **Pascalschen Geraden**.

## 52. Satz von Brianchon.

Diesem Satze von Pascal steht der Satz von Brianchon (1806) dual gegenüber. Das sogenannte Dualitätsprinzip<sup>1)</sup> besagt, daß aus jedem Satze über gegenseitige Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden in der Ebene ein zweiter Satz durch Vertauschung von Geraden und Punkten abgeleitet werden kann. Demgemäß lautet der Satz von Brianchon:

In jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Tangentensechseck schneiden sich

<sup>1)</sup> Auf Grund von Poncelets Arbeiten ist das Dualitätsprinzip von Geronne ausgesprochen und wird ihm oft zugeschrieben, was aber nicht voll berechtigt ist; analytisch hat es zuerst Plücker begründet.

die Verbindungslinien der drei Gegenecken in einem Punkte, dem sogenannten Brianchonschen Punkte.

Bezeichnen  $a_1, \dots, a_6$  (Fig 43) sechs Tangenten eines Kegelschnittes in beliebiger Reihenfolge, so sind die Schnitt-

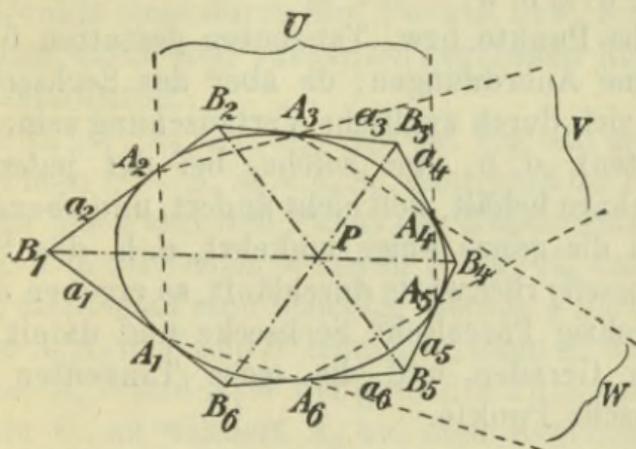


Fig. 43.

punkte je zweier aufeinanderfolgender die Ecken des Sechseits; die Schnittpunkte<sup>1)</sup> von  $a_1 \times a_2 = B_1$  und  $a_4 \times a_5 = B_4$ ,  $a_2 \times a_3 = B_2$  und  $a_5 \times a_6 = B_5$ ,  $a_3 \times a_4 = B_3$  und  $a_6 \times a_1 = B_6$  heißen Gegenecken. Der Beweis des Satzes von Brianchon kann dual zu dem gegebenen Beweise des Satzes von Pascal geführt, aber auch auf den letzteren Satz gestützt werden.

Sind  $A_1, \dots, A_6$  die Berührungspunkte der Tangenten  $a_1, \dots, a_6$ , so ist  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  ein dem Kegelschnitte einbeschriebenes Sechseck, dessen Seiten  $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A_5, A_5 A_6, A_6 A_1$  der Reihe nach die Polaren der Ecken  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  des Tangentensechseits (§ 32) sind. Schneiden sich die Gegenseiten des Sechsecks  $A_1 A_2$

<sup>1)</sup>  $S = g \times h$  soll bedeuten, daß sich  $g$  und  $h$  in  $S$  schneiden.

und  $A_4 A_5$ ,  $A_2 A_3$  und  $A_5 A_6$ ,  $A_3 A_4$  und  $A_6 A_1$  wieder in den Punkten  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , so ist  $U$  der Pol von  $B_1 B_4$ ,  $V$  der von  $B_2 B_5$  und  $W$  der von  $B_3 B_6$ . Nach dem Satze von Pascal liegen  $U$ ,  $V$ ,  $W$  in gerader Linie, folglich müssen sich ihre Polaren in einem Punkte  $P$ , dem Pole der Geraden  $UVW$ , schneiden, w. z. b. w.

Die sechs Punkte bzw. Tangenten gestatten  $6! = 720$  verschiedene Anordnungen; da aber das Sechseck (bzw. Sechseit) sich durch zyklische Vertauschung seiner Ecken (bzw. Seiten), d. h. eine solche, bei der jeder Punkt seine Nachbarn behält, sich nicht ändert, und ebensowenig, wenn man die ganze Folge umkehrt, d. h. das Sechseck (bzw. Sechseit) rückwärts durchläuft, so ergeben die sechs Punkte sechzig Pascalsche Sechsecke und damit sechzig Pascalsche Geraden und die sechs Tangenten sechzig Brianchonsche Punkte.

### 53. Konstruktionen.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes (S. 56, 37) enthält fünf wesentliche Konstante, da man durch eine der Konstanten, die nicht Null ist, dividieren kann, ohne damit die Kurve zu ändern. Ist z. B.  $a_{33} \neq 0$ , so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$a'_{11} x^2 + 2a'_{12} xy + a'_{22} y^2 + 2a'_{13} x + 2a'_{23} y + 1 = 0.$$

Diese fünf Konstanten können aber durch Angabe von fünf Bestimmungsstücken, z. B. von fünf Punkten, durch die der Kegelschnitt geht, oder fünf Geraden, die Tangenten des Kegelschnittes sind, bestimmt werden<sup>1)</sup>.

Folglich gilt die Umkehrung der Sätze von Pascal und Brianchon:

<sup>1)</sup> Wie aus den folgenden Konstruktionen ohne weiteres zu ersehen ist, dürfen von den fünf gegebenen Punkten nicht drei in einer Geraden liegen und von fünf Geraden nicht drei durch denselben Punkt gehen.

Hat ein Sechseck die Eigenschaften des **Pascal-** oder **Brianchonschen** Satzes, so liegen seine sechs Ecken auf einem Kegelschnitte, bzw. berühren seine Seiten einen solchen.

Daher können die beiden Sätze benutzt werden, um weitere Punkte eines durch fünf Punkte, bzw. weitere Tangenten eines durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnittes zu konstruieren.

Sind z. B.  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  (vgl. Fig. 42) gegeben, so bestimmt man  $U = A_1 A_2 \times A_4 A_5$ , dann muß die Pascalsche Gerade für jeden sechsten Punkt des Kegelschnittes durch  $U$  gehen. Um also einen weiteren Punkt  $A_6$  desselben zu erhalten, zieht man eine beliebige Gerade  $g$  durch  $U$ , die  $A_2 A_3$  und  $A_3 A_4$  in  $V$  und  $W$  schneidet; dann ist der Schnittpunkt von  $A_5 V$  und  $A_1 W$  der gesuchte Punkt  $A_6$ . Dreht man  $g$  um  $U$ , so wandert  $A_6$  auf dem Kegelschnitte. — Analog gestaltet sich die Konstruktion einer sechsten Tangente aus fünf gegebenen  $a_1, \dots, a_5$  (vgl. Fig. 43). Der Brianchonsche Punkt  $P$  muß für jede sechste Tangente auf  $B_1 B_4$  liegen. Man wählt also  $P$  willkürlich auf  $B_1 B_4$ , verbindet ihn mit  $B_2$  und  $B_3$  und erhält in der Verbindungsgeraden der Punkte  $B_2 P \times a_5$  und  $B_3 P \times a_1$  eine sechste Tangente  $B_5 B_6 = a_6$ .

Man kann die Sätze auch benutzen, um in einem durch fünf Punkte bzw. Tangenten gegebenen Kegelschnitte die Tangente bzw. den Berührungspunkt zu konstruieren, da, wenn in dem Pascalschen Sechseck zwei Ecken, z. B.  $A_1$  und  $A_2$  zusammenfallen,  $A_1 A_2$  zur Tangente in  $A_1 = A_2 (= A)$  wird, und wenn in dem Brianchonschen Sechseck zwei Tangenten  $a_1$  und  $a_2$  vereinigt liegen, ihr Schnittpunkt  $B$  der Berührungspunkt von  $a_1 = a_2 (= a)$  ist. Im ersten Falle (Fig. 44) sind  $V = A A_3 \times A_5 A_6$  und  $W = A_3 A_4 \times A_6 A$  und damit  $g$  bestimmt; die Gerade von  $U = g \times A_4 A_5$  ist

die Tangente  $t$  in  $A$ . Im zweiten Falle (Fig. 45) ist  $P = B_2 B_5 \times B_3 B_6$  bestimmt, seine Verbindungsgerade mit  $B_4$  schneidet  $a$  in dem gesuchten Berührungspunkte  $B$ .

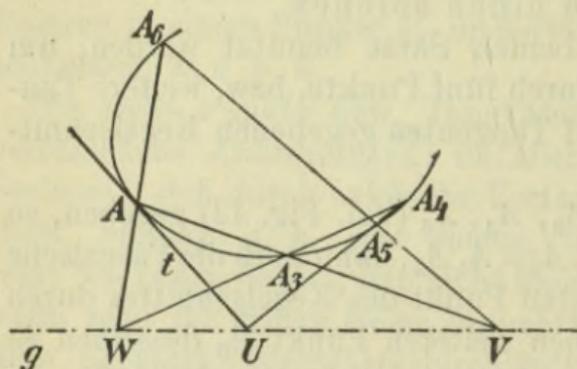


Fig. 44.

Da man so in fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnittes die Tangenten und auf fünf gegebenen Tangenten ihre Berührungspunkte konstruieren kann, so ergibt sich auch hieraus die Gleich-

wertigkeit der Bestimmung eines Kegelschnittes durch fünf Punkte oder fünf Tangenten. Die letzten Konstruktionen lassen aber auch leicht erkennen, daß und wie man aus 4 (bzw. 3, 2, 1) Punkten und 1 (bzw. 2, 3, 4) Tangenten einen Kegelschnitt konstruieren kann.

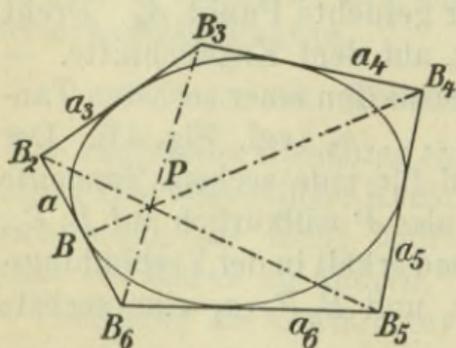


Fig. 45.

#### 54. Potenz für den Kreis; Potenzlinie und -punkt.

Für  $q = -1$  stellt die Gleichung  $y^2 = 2px + qx^2$  einen Kreis dar. Nach (65) erhält man dann

$$l_1 l_2 = y_0^2 - 2px_0 + x_0^2,$$

d. h. für den Kreis ist die Potenz eines Punktes von der Richtung der Geraden unabhängig; weshalb

man für den Kreis kurz von der Potenz  $p(P_0)$  des Punktes  $P_0$  spricht. Legt man die allgemeinste Form der Gleichung eines Kreises in rechtwinkligen Koordinaten

$$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

wo  $a, b$  die Koordinaten des Kreismittelpunktes  $M$  und  $r$  den Radius bezeichnen, zugrunde, so ist die Potenz eines Punktes:

$$\begin{aligned} p(P_0) &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2, \\ &= MP_0^2 - r^2. \end{aligned}$$

Die Potenz (Fig. 46a und b) eines Punktes  $P_0$  ist also positiv, Null oder negativ, je nachdem der Punkt außerhalb des Kreises, auf ihm oder innerhalb desselben liegt. Ist im ersten Falle  $T$  der Berührungspunkt einer der von  $P_0$  an den Kreis möglichen Tangenten, so ist die Potenz des Punktes gleich dem Quadrate der Länge dieser Tangente von  $P_0$  bis  $T$ , da  $P_0T^2 = P_0M^2 - MT^2$  ist. Beschreibt man um  $P_0$  mit  $P_0T$  als Radius einen Kreis, so steht die Tangente dieses Kreises senkrecht auf dem Radius des gegebenen Kreises; man sagt dann, die Kreise schneiden sich senkrecht oder orthogonal.

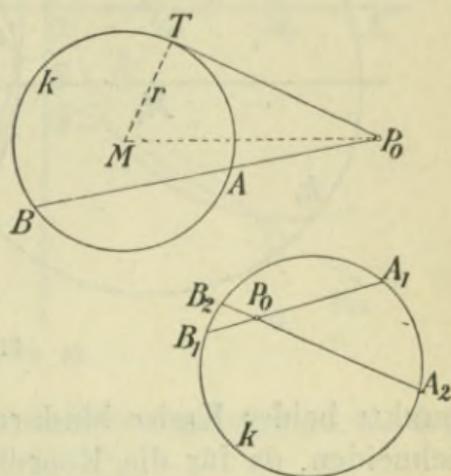


Fig. 46 a u. b.

Es seien nun zwei Kreise (Fig. 47)

$$f_\nu(x, y) = (x - a_\nu)^2 + (y - b_\nu)^2 - r_\nu^2 = 0 \quad (\nu = 1, 2)$$

gegeben. Wie früher bei der Geraden, werde hier analog

die linke Seite dieser Kreisgleichungen mit  $k_v$  bezeichnet. Dann stellt

$$(66) \quad k_1 - k_2 = -2(a_1 - a_2)x - 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0,$$

wo  $c_v$  zur Abkürzung für  $a_v^2 + b_v^2 - r_v^2$  gesetzt ist, eine gerade Linie  $p_{12}$  dar. Diese Gerade muß durch die Schnitt-

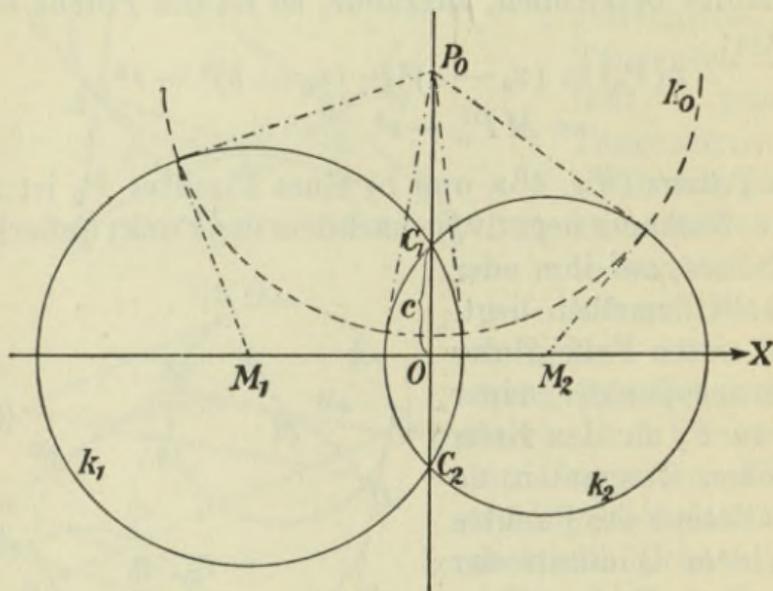


Fig. 47.

punkte beider Kreise hindurchgehen, falls sich die Kreise schneiden, da für die Koordinaten der Schnittpunkte sowohl  $k_1(x, y) = 0$ , als auch  $k_2(x, y) = 0$  ist. Berühren sich beide Kreise, so ist die Tangente des Berührungspunktes die Potenzlinie. Schneiden sich die Kreise nicht in zwei reellen Punkten, so schneidet ihre Potenzlinie die Kreise nicht. Für jeden Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  dieser Geraden ist, da aus (66)

$$(67) \quad k_1(x_0, y_0) = k_2(x_0, y_0)$$

folgt, seine Potenz in bezug auf beide Kreise gleich, weshalb

die Gerade  $p_{12}$  als Potenzlinie der beiden Kreise bezeichnet wird. Folglich liegt ein einzelner Punkt der Potenzlinie entweder außerhalb beider Kreise, auf beiden oder innerhalb beider Kreise. Von den Punkten außerhalb beider Kreise lassen sich im allgemeinen an beide Kreise vier Tangenten legen, die gleiche Länge haben. Daher ist die Potenzlinie auch der geometrische Ort der Mittelpunkte

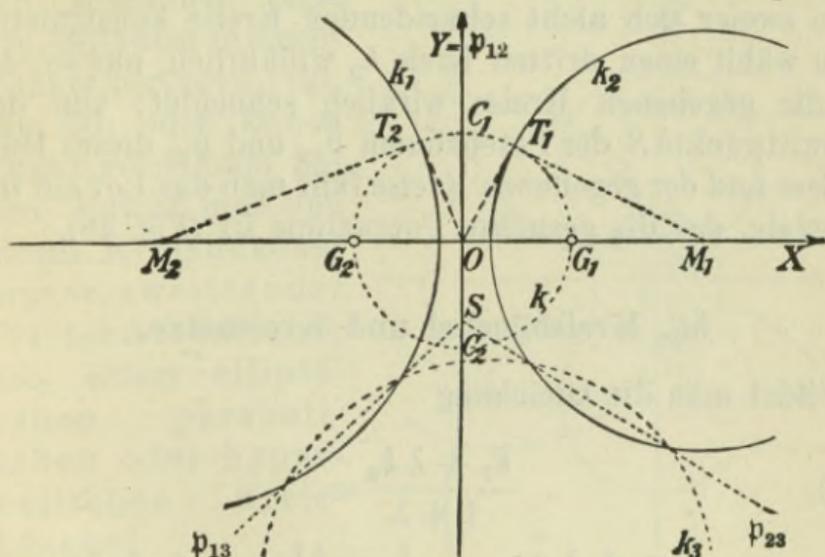


Fig. 48.

aller Orthogonalkreise zu den beiden gegebenen, z. B. des Kreises  $k_0$  mit dem Mittelpunkt  $P_0$ .

Die Potenzlinie zweier Kreise steht auf ihrer Zentrale  $\frac{x - a_1}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_1}{b_1 - b_2}$  senkrecht, da das Produkt ihrer Richtungskoeffizienten gleich  $-1$  ist.

Nimmt man einen dritten Kreis  $k_3 = 0$  hinzu, so ergeben sich für je zwei der drei Kreise eine Potenzlinie:

$$p_{12} : k_1 - k_2 = 0, \quad p_{23} : k_2 - k_3 = 0, \quad p_{31} : k_3 - k_1 = 0.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen verschwindet iden-

tisch, mithin schneiden sich die Potenzlinien von drei Kreisen stets in einem Punkte, ihrem Potenzpunkte  $\mathfrak{P}$ . Er hat gleiche Potenz für alle drei Kreise, und daher haben die Tangenten von ihm an diese Kreise gleiche Länge; der Potenzpunkt ist somit der Mittelpunkt des Orthogonalkreises der drei Kreise.

Mittels des Potenzpunktes kann man leicht die Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden Kreise konstruieren. Man wählt einen dritten Kreis  $k_3$  willkürlich, nur so, daß er die gegebenen Kreise wirklich schneidet; von dem Schnittpunkte  $S$  der Potenzlinien  $p_{13}$  und  $p_{23}$  dieses Hilfskreises und der gegebenen Kreise fällt man das Lot auf ihre Zentrale, das die gesuchte Potenzlinie ist (Fig. 48).

### 55. Kreisbüschel und Kreisnetze.

Bildet man die Gleichung

$$(68) \quad \frac{k_1 + \lambda k_2}{1 + \lambda} =$$

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda} x - 2 \frac{b_1 + \lambda b_2}{1 + \lambda} y + \frac{c_1 + \lambda c_2}{1 + \lambda} = 0,$$

wo  $\lambda$  einen Parameter bezeichnet, der alle Werte zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  durchlaufen kann, so nennt man die Gesamtheit aller dieser Kreise ein Kreisbüschel. Die Mittelpunkte der Kreise desselben liegen auf der Zentrale der beiden Ausgangskreise  $k_1=0, k_2=0$ ; denn der zu dem Kreise mit dem Parameterwerte  $\lambda$  gehörige Mittelpunkt  $M_\lambda$  hat die Koordinaten  $\frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda}, \frac{b_1 + \lambda b_2}{1 + \lambda}$  und teilt  $M_1 M_2$  im Verhältnis  $\lambda:1$ . Je zwei Kreise des Büschels besitzen dieselbe Potenzlinie wie die beiden Grundkreise; denn es ist

für jeden Punkt  $P_0$  der Potenzlinie der Ausgangskreise nach (67)

$$k_\lambda(x_0, y_0) = \frac{k_1(x_0, y_0) + \lambda k_2(x_0, y_0)}{1 + \lambda} = k_1(x_0, y_0).$$

Je nachdem alle Kreise eines Büschels sich in zwei Punkten schneiden (vgl. Fig. 49)<sup>1)</sup> oder in einem Punkte berühren (vgl. Fig. 50) oder keinen Punkt gemeinsam haben, spricht man von einem Kreisbüschel erster, zweiter oder dritter Art oder auch von einem elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Kreisbüschel.

Die einfachste Gestalt, die man der Gleichung eines Kreisbüschels, das die  $Y$ -Achse zur Potenzlinie hat, geben kann, ist

$$(69) \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2 \pm c^2,$$

wo  $a$  als Parameter dient und die Mittelpunktsabszisse der Kreise, deren Zentrale die  $X$ -Achse ist, darstellt und  $c$  eine konstante Länge bezeichnet. Je nachdem rechts das positive oder negative Vorzeichen genommen wird, spricht man

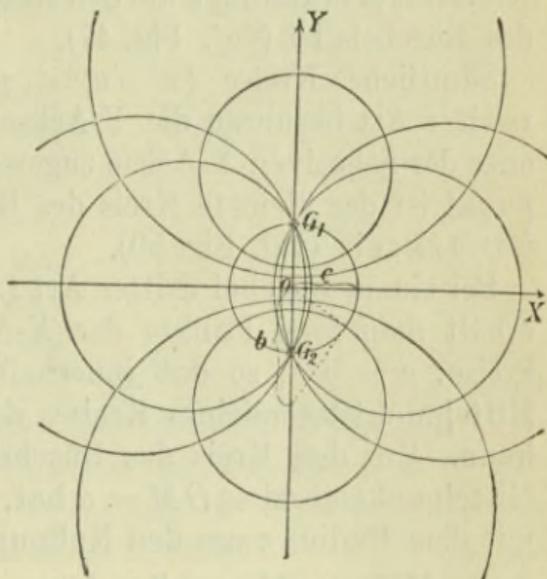


Fig. 49.

<sup>1)</sup> In Fig. 49 veranschaulicht das Kreisbüschel, dessen Mittelpunkte auf der  $X$ -Achse liegen, das Büschel erster Art, und das andere, dessen Mittelpunkte auf der  $Y$ -Achse liegen, das Büschel dritter Art.

von einem Kreisbüschel erster oder dritter Art, während der Grenzfall  $c = 0: (x - a)^2 + y^2 = a^2$  das Kreisbüschel zweiter Art ergibt.

Alle Kreise eines Büschels erster Art  $(x - a)^2 + y^2 = a^2 + c^2$  schneiden die  $Y$ -Achse in den Punkten  $y = \pm c$  — den Grundpunkten  $C_1, C_2$  des Büschels —, so daß der Kreis mit dem Radius  $c$  um den Nullpunkt der kleinste Kreis des Büschels ist (vgl. Fig. 47).

Sämtliche Kreise  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$  eines Büschels zweiter Art berühren die  $Y$ -Achse auf ihrer der positiven oder der negativen  $X$ -Achse zugewandten Seite. Der Nullpunkt ist der kleinste Kreis des Büschels, ein Null- oder Grenzkreis (vgl. Fig. 50).

Bei einem Büschel dritter Art  $(x - a)^2 + y^2 = a^2 - c^2$  erhält man zwei Punkte der  $X$ -Achse  $G_1, G_2$  als Grenzkreise:  $a = \pm c$ , so daß innerhalb der Strecke  $G_1G_2$  der Mittelpunkt irgendeines Kreises des Büschels nicht liegen kann. Um den Kreis des Büschels zu zeichnen, der die Mittelpunktsabszisse  $OM = a$  hat, zeichnet man den Kreis mit dem Radius  $c$  um den Nullpunkt und an ihn die Tangente  $MT$  von  $M$  aus; ihre Länge  $MT = \sqrt{a^2 - c^2}$  liefert den zu  $M$  als Mittelpunkt gehörenden Kreis des Büschels (Fig. 48).

Die Mittelpunkte der Kreise eines Büschels, welche die eines zweiten Büschels rechtwinklig schneiden, liegen auf der Potenzlinie des ersten Büschels. Die Radien nach dem Schnittpunkte zweier zu einander orthogonalen Kreise bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich der Centrale beider Kreise ist. Zwei solche Büschel werden konjugiert genannt. Im vorliegenden Falle erhält man als Gleichung des konjugierten Büschels

$$(69 a) \quad x^2 + (y - b)^2 = b^2 \mp c^2,$$

wo in (69) und (69 a) entweder die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, so daß (Fig. 49) zu einem Kreisbüschel erster Art ein solches dritter Art konjugiert ist und umgekehrt; die Grundpunkte  $C_1, C_2$  des ersteren sind die Grenzkreise  $G_1, G_2$  des letzteren. Zu einem Kreisbüschel zweiter Art ( $c = 0$ ) ist wieder ein solches zweiter Art konjugiert (Fig. 50).

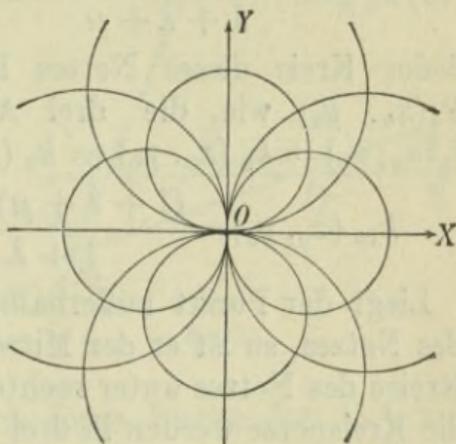


Fig. 50.

Die Polaren eines beliebigen Punktes  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$  in bezug auf alle Kreise eines Büschels schneiden sich in einem Punkte  $Q(\xi, \eta)$ , dessen Verbindungslinie mit  $\bar{P}$  von der Potenzlinie halbiert wird. Faßt man die drei Arten von Kreisbüscheln in der Gleichung (69) zusammen, indem man für  $c^2$  positive und negative Werte, einschließlich Null, zuläßt, so kann die Gleichung der Polaren für zwei beliebige Kreise mit den Mittelpunktsabszissen  $a_v$  ( $v = 1, 2$ ) geschrieben werden:

$$(\bar{x} - a_v)(x - a_v) + y y = a_v^2 + c^2,$$

durch deren Subtraktion man für die Koordinaten von  $Q$

$$\xi = -\bar{x}, \quad \eta = \frac{\bar{x}^2 + c^2}{\bar{y}}$$

erhält.

In bezug auf ein Kreisbüschel dritter Art gehen die Polaren des einen Grenzkreises durch den anderen. —

Drei Kreise  $k_1, k_2, k_3$ , die nicht ein und demselben Büschel angehören, bestimmen ein Kreisnetz:

$$(70) k_{\lambda, \mu} = \frac{k_1 + \lambda k_2 + \mu k_3}{1 + \lambda + \mu} = 0. \quad (\lambda, \mu = -\infty \cdots + \infty).$$

Jeder Kreis dieses Netzes hat denselben Potenzpunkt  $P_0(x_0, y_0)$  wie die drei Ausgangskreise. Denn für  $k_1(x_0, y_0) = k_2(x_0, y_0) = k_3(x_0, y_0)$  folgt

$$k_{\lambda, \mu}(x_0, y_0) = \frac{(1 + \lambda + \mu)k_1(x_0, y_0)}{1 + \lambda + \mu} = k_1(x_0, y_0).$$

Liegt der Punkt außerhalb zweier, folglich aller Kreise des Netzes, so ist er der Mittelpunkt des Kreises, der alle Kreise des Netzes unter rechten Winkeln schneidet. Auch die Kreisnetze werden in drei Arten eingeteilt, je nachdem ihr Potenzpunkt innerhalb der drei Grundkreise, auf ihnen oder außerhalb aller drei liegt; im ersten Falle hat der Potenzpunkt als Potenz einen negativen Wert, im zweiten Falle Null und im dritten Falle einen positiven Wert.

## 10. Abschnitt.

### Der Punkt.

#### 56. Linienkoordinaten.

Die am Schlusse des § 17 als Linienkoordinaten bezeichneten Koeffizienten  $u, v$  von  $x, y$  in der Gleichungsform (19) einer Geraden  $g$ :

$$x \cdot u + y \cdot v + 1 = 0$$

bestimmen die Lage von  $g$ , da sie ihre Schnittpunkte  $P_1, P_2$  (Fig. 51) mit den Koordinatenachsen liefern:

$$\overrightarrow{OP_1} = -\frac{1}{u}, \quad \overrightarrow{OP_2} = -\frac{1}{v}$$

und tragen daher mit Recht die Bezeichnung als Koordinaten. Je nachdem  $u$  positiv oder negativ ist, schneidet die negative oder positive  $X$ -Achse; das gleiche gilt für  $v$  und die  $Y$ -Achse.

Im allgemeinen entspricht also jedem Wertepaare von  $u, v$ , bezogen auf das benutzte Parallelkoordinatensystem eine bestimmte Gerade. Im besonderen hat eine Parallele zur  $X$ -Achse die Linienkoordinaten  $u=0$ ,

$v \neq 0$ , weil  $P_1$  der unendlich ferne Punkt der  $X$ -Achse sein muß;  $u \neq 0, v=0$  dagegen gehört zu einer Parallelen zur  $Y$ -Achse.  $u=0, v=0$  sind die Linienkoordinaten der unendlich fernen Geraden. Die Achsen selbst haben die Linienkoordinaten  $u=0, v=\infty$  und  $u=\infty, v=0$ .

Ausnahmefälle ergeben sich, wenn beide Linienkoordinaten  $\infty$  sind oder eine derselben  $\infty$  ist, die andere aber einen von Null verschiedenen endlichen Wert hat.  $u=\infty, v=\infty$  sind die Linienkoordinaten einer jeden beliebigen Geraden durch den Nullpunkt. Ist  $u=\infty$ , während  $v$  einen von Null verschiedenen endlichen Wert hat, so fällt  $P_1$  mit dem Nullpunkt zusammen, in den dann auch  $P_2$  fallen, also auch  $v=\infty$  sein muß. Die zweite Annahme ist daher unmöglich.

### 57. Gleichung eines Punktes.

Fragt man nach allen Geraden, die durch einen gegebenen Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  gehen, so müssen ihre Linienkoordinaten der Gleichung genügen:

$$(71) \quad x_0 \cdot u + y_0 \cdot v + 1 = 0,$$

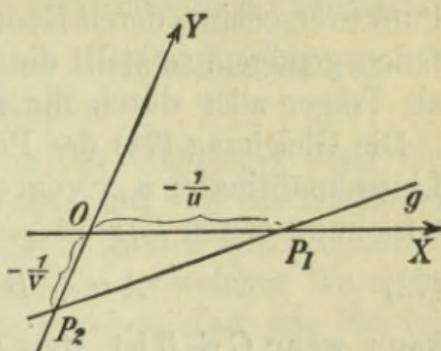


Fig. 51.

aus der zu jedem endlichen Werte von  $u$  ein bestimmter Wert von  $v$  folgt. Wie eine Gerade als Träger aller der Punkte erscheint, deren Koordinaten der Gleichung der Geraden genügen, so stellt die Gleichung (71) den Punkt dar als Träger aller durch ihn gehenden Geraden.

Die Gleichung (71) des Punktes  $P_0$  ist in bezug auf die Linienkoordinaten  $u, v$  vom ersten Grade. Die allgemeinere Gleichung ersten Grades

$$(72) \quad A u + B v + C = 0$$

kann, wenn  $C \neq 0$  ist, stets auf die Gleichung (71) zurückgeführt werden, so daß  $x_0 = \frac{A}{C}, y_0 = \frac{B}{C}$  die Parallelkoordinaten des Punktes  $P_0$  sind. Für jeden Wert von  $C$  gibt  $\frac{y_0}{x_0} = \frac{B}{A}$  die Richtung des Radiusvektors  $OP_0$ .

Ist  $C = 0$ , so ist  $Au + Bv = 0$  die Gleichung des unendlich fernen Punktes des Radiusvektors nach dem Punkte  $x = A, y = B$ , da sich zwar  $x_0 = \infty, y_0 = \infty$  nach dem vorigen ergeben, aber  $y_0 : x_0 = B : A$  ist.

Für die Gleichungen der Geraden und des Punktes ist es also charakteristisch, daß sie in bezug auf die Koordinaten  $x, y$ , bzw.  $u, v$  vom ersten Grade sind<sup>1)</sup>. Je nachdem die Veränderlichen  $\xi, \eta$

Punktkoordinaten		Linienkoordinaten
bezeichnen, stellt die Gleichung $A\xi + B\eta + C = 0$ dar die Gerade mit den Linien-		den Punkt mit den Punkt-
koordinaten $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ ,		koordinaten $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ .

<sup>1)</sup> Dies wäre nicht der Fall, wenn die Linienkoordinaten einer Geraden als die Achsenabschnitte selbst definiert worden wären, wodurch sich dann auch das Dualitätsprinzip nicht in so einfacher Weise begründen ließe.

In dieser Möglichkeit der doppelten Deutung einer Gleichung ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen aber ist das auf S. 120 ausgesprochene Dualitätsprinzip begründet.

### 58. Zwei Gerade, gegeben durch ihre Linienkoordinaten.

Die leichte Möglichkeit, von der Gleichung einer Geraden zu ihren Linienkoordinaten und von der Gleichung eines Punktes zu seinen Punktkoordinaten und umgekehrt überzugehen, macht es gleichgültig, in welcher Weise bei Aufgaben die Ausgangsstücke gegeben sind, wie die folgenden Beispiele zeigen.

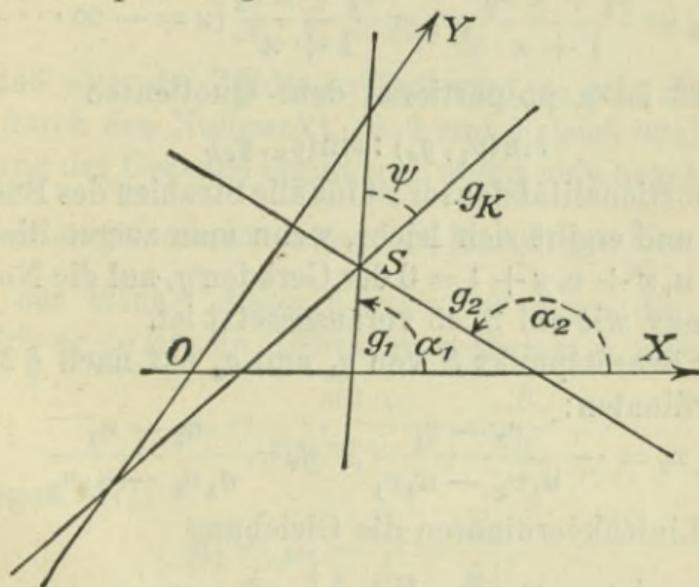


Fig. 52.

1. Der Winkel  $\psi$ , unter dem sich die beiden durch ihre Linienkoordinaten  $u_v, v_v$  gegebenen Geraden  $g_v (v = 1, 2)$  schneiden (Fig. 52), kann sofort nach S. 40 (24) hingeschrieben werden:

$$(73) \quad \operatorname{tg} \psi = \pm \frac{(u_1 v_2 - u_2 v_1) \sin w}{u_1 u_2 + v_1 v_2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cos w},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem  $\alpha_2 <$  oder  $> \alpha_1$  und dementsprechend  $\psi = \alpha_1 - \alpha_2$  oder  $= \alpha_2 - \alpha_1$  gesetzt ist.

2. Die Linienkoordinaten der Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Grundstrahlen  $g_\nu$  die Linienkoordinaten  $u_\nu, v_\nu (\nu = 1, 2)$  besitzen, folgen aus der Gleichung §23(30), die dann lautet:

$$\lambda_1(u_1 x + v_1 y + 1) + \lambda_2(u_2 x + v_2 y + 1) = 0,$$

und haben, wenn man noch  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \kappa$  setzt, die Werte:

$$(74) \quad u_\kappa = \frac{u_1 + \kappa u_2}{1 + \kappa}, v_\kappa = \frac{v_1 + \kappa v_2}{1 + \kappa} \quad (\kappa = -\infty \cdots +\infty).$$

Nach § 23 ist  $\kappa$  proportional dem Quotienten

$$\sin(g_1, g_\kappa) : \sin(g_\kappa, g_2).$$

Der Proportionalitätsfaktor ist für alle Strahlen des Büschels derselbe und ergibt sich leicht, wenn man zuerst die Gleichungen  $u_\nu x + v_\nu y + 1 = 0$  der Geraden  $g_\nu$  auf die Normalform bringt, wie auf S. 43 vorausgesetzt ist.

3. Der Schnittpunkt  $S$  von  $g_1$  und  $g_2$  hat nach § 22 (28) die Koordinaten:

$$(75) \quad x_s = -\frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \quad y_s = \frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

oder in Linienkoordinaten die Gleichung

$$(75 a) \quad \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Aufgabe ist dual zu der Bestimmung der durch zwei Punkte gehenden Geraden in § 17; aus der dort gefundenen Lösung erhält man ohne weiteres die Formeln (75), wenn man die Punktkoordinaten  $x, y$  durch die Linienkoordinaten  $u, v$  ersetzt.

**59. Zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Punkte.**

1. Dual zu der in § 22 behandelten Aufgabe ist die Frage nach den Koordinaten  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  der Verbindungsgeraden der beiden Punkte  $P_v$ :

$$A_v u + B_v v + C_v = 0 \quad (v = 1, 2).$$

Die gesuchten Koordinaten  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  müssen beiden Gleichungen genügen und haben daher die Werte

$$(76) \quad \bar{u} = - \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \bar{v} = - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Verschwindet der Nenner, ist also

$$(77) \quad A_1 : A_2 = B_1 : B_2,$$

ohne daß einer der Zähler zu Null wird, so geht die Gerade  $P_1 P_2$  durch den Nullpunkt, da  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  gleich  $\infty$  sind. Die Richtung der Geraden ergibt sich, wenn man beachtet, daß

die Gleichung des Leitstrahles  $OP_v$  lautet:  $y = \frac{y_v}{x_v} x = \frac{B_v}{A_v} x$ .

Ist  $\alpha_v$  der Winkel dieses Leitstrahles gegen die positive X-Richtung, so ist sein Richtungskoeffizient  $\mu_v$  (nach S. 37)

$$\mu_v = \frac{\sin \alpha_v}{\sin(w - \alpha_v)} = \frac{B_v}{A_v}$$

und wegen (77):

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2}.$$

Ist aber noch eine der Zählerdeterminanten gleich Null, so hat auch die andere Zählerdeterminante den Wert Null; also beide Punkte fallen zusammen, wenn

$$(78) \quad A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2$$

ist.

Damit noch ein dritter Punkt  $A_3 u + B_3 v + C_3 = 0$  auf der Verbindungsgeraden der beiden ersten liegt, müssen die

Werte (76) diese dritte Gleichung befriedigen, woraus

$$(79) \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

als Bedingungsgleichung folgt.

2. Den Winkel  $\psi$ , den die Leitstrahlen  $\vec{OP}_1$  und  $\vec{OP}_2$  miteinander bilden (Fig. 53), erhält man

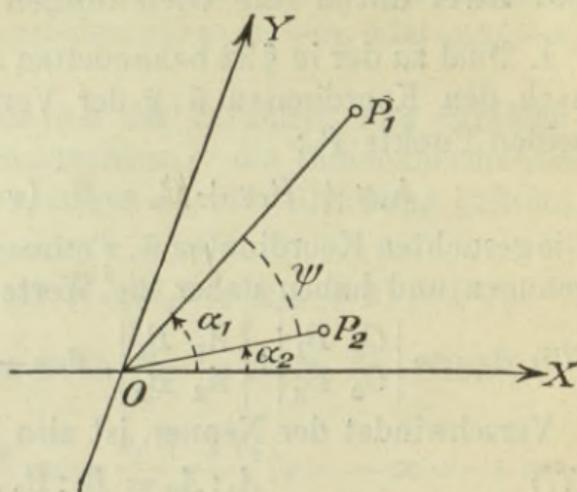


Fig. 53.

aus (24) auf S. 40, wenn man dort  $\mu_v = \frac{B_v}{A_v}$  einführt:

$$(80) \quad \operatorname{tg} \psi = \pm \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1) \sin w}{A_1 A_2 + B_1 B_2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos w},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem  $\alpha_2 <$  oder  $> \alpha_1$  und dementsprechend  $\psi = \alpha_1 - \alpha_2$  oder  $= \alpha_2 - \alpha_1$  gesetzt ist.

Beide Leitstrahlen stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$(81) \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos w = 0$$

ist. Die Formeln (80) und (81) vereinfachen sich wieder für rechtwinklige Koordinatensysteme, da dann  $\sin w = 1$ ,  $\cos w = 0$  ist.

## 60. Punktreihe.

Dem Strahlenbüschel, das ist der Gesamtheit aller Geraden durch einen Punkt  $S$ , steht dual gegenüber die Gesamtheit aller Punkte auf einer Geraden  $g$ , welches Gebilde als Punktreihe bezeichnet wird

Bezeichnet man die ganze linke Seite der Gleichung eines Punktes  $A_v u + B_v v + C_v = 0$  mit  $N_v$ , so kann die Gleichung dieses Punktes  $P_v$  kurz  $N_v = 0$  geschrieben werden. Bildet man für einen beliebigen Parameterwert  $\kappa$  die Gleichung

$$(82) \quad N_1 + \kappa N_2 = 0,$$

die in  $u$  und  $v$  linear und für die Koordinaten der Verbindungsgeraden von  $P_1$  und  $P_2$  erfüllt ist, so liefert (82) die Gleichung eines Punktes auf  $P_1 P_2$ .

Genau wie in § 23 für die Strahlen eines Büschels, so schließt man hier, daß drei Punkte  $P_v$  mit den Gleichungen  $N_v = 0$  ( $v = 1, 2, 3$ ) in einer Geraden liegen, wenn sich drei Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  so angeben lassen, daß die Identität besteht:

$$(83) \quad \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \lambda_3 N_3 \equiv 0.$$

Aus dieser Identität folgt aber ebenfalls die Bedingung (79), die also mit (83) gleichwertig ist.

Sind die Punktgleichungen in spezieller Form mit  $A = x^v$ ,  $B_v = y_v$ ,  $C_v = 1$  gegeben und bildet man

$$\frac{N_1 + \kappa N_2}{1 + \kappa} = 0,$$

so sind die Koordinaten dieses Punktes  $P_\kappa$ :

$$x_\kappa = \frac{x_1 + \kappa x_2}{1 + \kappa}, \quad y_\kappa = \frac{y_1 + \kappa y_2}{1 + \kappa}.$$

Man erkennt durch Vergleich mit S. 27 (11), daß dann  $P_\kappa$  der Punkt ist, der die Strecke  $P_1 P_2$  im Verhältnis  $\overrightarrow{P_1 P_\kappa} : \overrightarrow{P_\kappa P_2} = \kappa : 1$  teilt. Haben  $A_v, B_v, C_v$  nicht die vorstehenden speziellen Werte, so ist  $\kappa$  nicht gleich dem Teilungsverhältnis, sondern nur ihm proportional, und zwar ist dann  $\kappa \frac{C_2}{C_1}$  gleich dem Teilungsverhältnis  $\overrightarrow{P_1 P_\kappa} : \overrightarrow{P_\kappa P_2}$ .

In ähnlicher Weise, wie mit Hilfe der Betrachtungen des § 23 über Strahlenbüschel, lassen sich auch mittels der vorstehenden Betrachtungen Dreiecksätze beweisen, was nur an zwei Beispielen gezeigt werden soll.

Sind  $N_\nu = x_\nu u + y_\nu v + 1 = 0$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) die Gleichungen der Ecken  $E_\nu$  eines Dreiecks, für die also keine Identität von der Gestalt (83) bestehen kann, und teilt man (vgl. Fig. 16 auf S. 44) die Seiten  $E_1 E_2, E_2 E_3, E_3 E_1$  durch die Punkte  $M'_3, M_1, M_2$  so, daß

$$\frac{\overrightarrow{E_1 M'_3}}{\overrightarrow{M'_3 E_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_2 M_1}}{\overrightarrow{M_1 E_3}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_3 M_2}}{\overrightarrow{M_2 E_1}} = -1$$

ist, so liegen  $M'_3, M_1, M_2$  in einer Geraden  $v_3$  (Umkehrung des Satzes von Menelaos). Denn setzt man

$$\overrightarrow{E_2 M_1} : \overrightarrow{M_1 E_3} = \lambda_3 : \lambda_2, \quad \overrightarrow{E_3 M_2} : \overrightarrow{M_2 E_1} = \lambda_1 : \lambda_3,$$

so muß  $\overrightarrow{E_1 M'_3} : \overrightarrow{M'_3 E_2} = -\lambda_2 : \lambda_1$  sein wegen der Voraussetzung. Deshalb können die Gleichungen dieser drei Punkte  $M$  geschrieben werden:

$$\begin{aligned} M_1: \quad \lambda_2 N_2 + \lambda_3 N_3 &= 0 \\ M_2: \quad \lambda_3 N_3 + \lambda_1 N_1 &= 0 \\ M'_3: \quad \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 &= 0. \end{aligned}$$

Addiert man die linken Seiten der ersten und dritten Gleichung und subtrahiert dann die der zweiten Gleichung, so erhält man Null, woraus nach (83) die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Nimmt man zu  $E_1, E_2, M'_3$  den Punkt  $M_3$  hinzu, so daß  $(E_1 E_2 M_3 M'_3) = -1$  ist, d. h. teilt man die Seiten des Dreiecks  $E_1 E_2 E_3$  so, daß

$$\frac{\overrightarrow{E_1 M_3}}{\overrightarrow{M_3 E_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_2 M_1}}{\overrightarrow{M_1 E_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{E_3 M_2}}{\overrightarrow{M_2 E_3}} = 1$$

ist, so schneiden sich die Transversalen  $E_1M_1$ ,  $E_2M_2$ ,  $E_3M_3$  in einem Punkte  $P$  (Umkehrung des Satzes von Ceva). Dieser Punkt hat die Gleichung

$$\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \lambda_3 N_3 = 0,$$

denn seine Gleichung ist erfüllt, wenn man  $u, v$  so wählt, daß gleichzeitig  $N_1 = 0$  und  $\lambda_2 N_2 + \lambda_3 N_3 = 0$  ist, daß  $u, v$  also die Linienkoordinaten von  $E_1M_1$  sind; analog erkennt man, daß auch  $E_2M_2$  und  $E_3M_3$  durch diesen Punkt  $P$  gehen.

Das zu dem vollständigen Viereck duale Gebilde ist das vollständige Vierseit, gebildet aus vier Geraden (Seiten), von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, und aus ihren sechs Schnittpunkten (Ecken). Die drei Verbindungsgeraden der sechs Ecken, die nicht Seiten sind, heißen Diagonalen des vollständigen Vierseits und bilden das zugehörige Diagonaldreieck. In gleicher Weise wie in § 26 ergeben sich Sätze über harmonische Eigenschaften des vollständigen Vierseits, die mit jenen Sätzen inhaltlich übereinstimmen; die Figur des vollständigen Vierseits ist dieselbe wie Fig. 18, abgesehen von der veränderten Benennung ( $a, b, c, d$  Seiten;  $A, B, C, D, F, G$  Ecken;  $AC, BD, FG$  Diagonalen).

## 61. Transformation von Linienkoordinaten.

Die Transformation von Linienkoordinaten, bezogen auf ein Parallelkoordinatensystem  $X, Y$ , auf ein beliebiges anderes System  $X', Y'$ , läßt sich mit Hilfe der im § 10 gegebenen Formeln leicht durchführen. Eine Gerade  $g$  (Fig. 54) habe in bezug auf die beiden Systeme die Gleichungen:

$$(a) \quad x \cdot u + y \cdot v + 1 = 0,$$

$$(b) \quad x' \cdot u' + y' \cdot v' + 1 = 0,$$

die durch die allgemeinste Koordinatentransformation

(S. 25, III) auseinander hervorgehen mögen. Setzt man die Werte für  $x$  und  $y$  aus den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}(x - x_0) \sin w &= x' \cdot \sin(w - \alpha) + y' \cdot \sin(w - \beta), \\ (y - y_0) \sin w &= x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

in die Gleichung (a) ein, ordnet nach  $x'$ ,  $y'$  und vergleicht

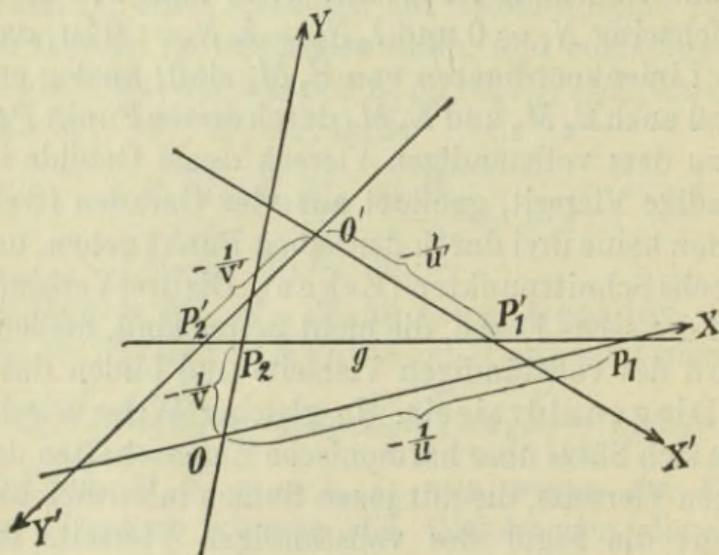


Fig. 54.

nach Division mit dem von  $x'$ ,  $y'$  freien Gliede das Ergebnis mit (b), so erhält man:

$$(84_I) \quad \begin{aligned}u' &= \{u \cdot \sin(w - \alpha) + v \cdot \sin \alpha\} : W', \\ v' &= \{u \cdot \sin(w - \beta) + v \cdot \sin \beta\} : W',\end{aligned}$$

wo  $W' = \{u \cdot x_0 + v \cdot y_0 + 1\} \sin w$  ist.

Transformiert man umgekehrt die Gleichung (b) in die Gleichung (a) und verfährt analog, so ergibt sich:

$$(84_{II}) \quad \begin{aligned}u &= \{u' \cdot \sin \beta - v' \cdot \sin \alpha\} : W, \\ v &= \{-u' \cdot \sin(w - \beta) + v' \cdot \sin(w - \alpha)\} : W,\end{aligned}$$

wo  $W = u' [-x_0 \cdot \sin \beta + y_0 \cdot \sin(w - \beta)]$   
 $+ v' [x_0 \cdot \sin \alpha - y_0 \cdot \sin(w - \alpha)] + \sin(\beta - \alpha)$

ist.

Während die rechten Seiten der Transformationsgleichungen für Punktkoordinaten ganze Funktionen ersten Grades der Veränderlichen sind, treten in den Gleichungen (84) rechts gebrochene Funktionen ersten Grades auf; nur für den Fall, daß das neue System durch eine bloße Drehung, ohne Verlegung des Anfangspunktes, aus dem alten hervorgeht, treten auch in (84) ganze Funktionen rechts auf, da dann  $W' = \sin v$ ,  $W = \sin(\beta - \alpha)$  ist.

Aus den Formeln (84) ergeben sich wieder leicht die Formeln für die wichtigsten besonderen Fälle auf S. 25, IV.

Der Grad der Gleichung  $Au + Bv + C = 0$  wird durch eine beliebige Transformation, wie sofort erkennbar, nicht geändert.

## 11. Abschnitt.

### Kurven zweiter Klasse.

#### 62. Allgemeine Gleichung einer Kurve zweiter Klasse.

Unter einer algebraischen Kurve  $n^{\text{ter}}$  Klasse soll jede Kurve mit Tangenten, deren Linienkoordinaten  $u, v$  jener algebraischen Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades genügen, verstanden werden. Die Gleichung einer solchen Kurve enthält also nur Glieder von der Form  $A_{\mu\nu}u^\mu v^\nu$ , wo die  $A_{\mu\nu}$  Konstante bezeichnen und  $\mu + \nu \leq n$  ist; wenigstens für ein Glied muß  $\mu + \nu = n$  sein. Die Kurve wird von ihren Tangenten eingehüllt und heißt deshalb Hüllkurve derselben.

Daß tatsächlich die Gesamtheit aller durch eine algebraische Gleichung in  $u, v$  bestimmten Geraden eine Kurve im gewöhnlichen Sinne liefert, wird in den folgenden Paragraphen (63–65) für die Kurven 2. Klasse gezeigt. Die Berührungspunkte der Tangentenschar (85) bilden die Kurve selbst. Für Kurven höherer Klasse muß der ent-

sprechende Nachweis aus Raummangel unterbleiben und kann es, da er über das Ziel dieses Bändchens hinausgeht.

Die allgemeinste Gleichung einer Kurve zweiter Klasse ist dann

$$(85) \quad F(u, v) = A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0,$$

und ähnlich, wie auf S. 56, werde  $A_{21} = A_{12}$ ,  $A_{31} = A_{13}$ ,  $A_{32} = A_{23}$ ,

$$(86) \quad \begin{aligned} F'(u, v) &= A_{11}u + A_{12}v + A_{13} \\ F''(u, v) &= A_{21}u + A_{22}v + A_{23} \\ F'''(u, v) &= A_{31}u + A_{32}v + A_{33} \end{aligned}$$

gesetzt, so daß sich auch schreiben läßt:

$$(85a) \quad F(u, v) = F'(u, v) \cdot u + F''(u, v) \cdot v + F'''(u, v).$$

Durch eine Koordinatentransformation kann die Klassenzahl  $n$  einer Kurve  $n^{\text{ter}}$  Klasse sich nicht ändern, da die Gleichungen (84) vom ersten Grade sind.

Unter den Strahlen eines beliebigen Strahlenbüschels gibt es stets  $n$  Tangenten an eine Kurve  $n^{\text{ter}}$  Klasse. Nach S. 136 (74) hat das Strahlenbüschel  $S = g_1 \times g_2$  die Gleichungen

$$u = \frac{u_1 + \kappa u_2}{1 + \kappa}, v = \frac{v_1 + \kappa v_2}{1 + \kappa};$$

durch Einsetzen dieser Werte von  $u, v$  in (85) erhält man eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $\kappa$ , deren  $n$  Wurzelwerte in die Gleichungen für  $u, v$  eingesetzt die  $n$  Tangenten liefern, die sich von  $S$  aus an die Kurve  $n^{\text{ter}}$  Klasse ziehen lassen. Über die Reellität der Wurzeln gilt das auf S. 57 (4. Abschnitt) Gesagte.

### 63. Berührungspunkt einer Tangente.

An eine Kurve zweiter Klasse lassen sich daher von jedem Punkte  $S = g_1 \times g_2$  aus zwei Tangenten  $t', t''$  legen, für die

sich die Parameterwerte  $\kappa'$ ,  $\kappa''$  als Wurzeln der Gleichung

$$(87) \quad \kappa^2 F(u_2, v_2) + 2\kappa \{F'(u_1, v_1) \cdot u_2 + F''(u_1, v_1) \cdot v_2 + F'''(u_1, v_1)\} + F(u_1, v_1) = 0$$

ergeben.

Ist die eine Gerade  $g_1$  selbst Tangente an die Kurve, so muß  $F(u_1, v_1) = 0$  sein und der eine Wurzelwert  $\kappa'$  von  $\kappa$  ist Null. Die zu  $\kappa'$  gehörige Tangente  $t'$  fällt also mit  $g_1$  zusammen. Läßt man nun den Punkt  $S$  auf  $g_1$  wandern, wobei die andere Gerade  $g_2$  beliebig, nur nicht selbst Tangente an die Kurve, also  $F(u_2, v_2) \neq 0$ , ist, so dreht sich die andere Tangente  $t''$  des Büschels  $S$  um die Kurve herum und muß bei einer bestimmten Lage von  $S$  mit  $t' = g_1$  zusammenfallen. Für diese Lage von  $S$  muß auch  $\kappa'' = 0$  sein, was nur möglich ist, wenn der Koeffizient von  $2\kappa$  in der Gleichung (87) verschwindet; dies stellt eine Bedingung ersten Grades in  $u_2, v_2$  dar. Es müssen also alle Geraden  $u, v$ , welche die Tangente  $g_1$  so schneiden, daß die zweite Tangente des Büschels mit  $g_1$  zusammenfällt, durch den Punkt

$$(88) \quad F'(u_1, v_1) \cdot u + F''(u_1, v_1) \cdot v + F'''(u_1, v_1) = 0$$

gehen. Dieser Punkt kann auch aufgefaßt werden als Grenzlage des Schnittpunktes zweier Tangenten, wenn sich die eine längs der Kurve fortbewegt, bis sie schließlich mit der anderen, unverändert festgehaltenen,  $g_1$  zusammenfällt; dieser Schnittpunkt ist dann der Berührungspunkt<sup>1)</sup> der Tangente  $g_1$ .

In (88) heißen  $u, v$  die laufenden Koordinaten; sie sind die Koordinaten einer beliebigen durch den Berührungspunkt gehenden Geraden.

<sup>1)</sup> Die Gleichung (88) lautet ausführlich geschrieben:

$$A_{11} u_1 u + A_{12} (u_1 v + v_1 u) + A_{22} v_1 v + A_{13} (u_1 + u) + A_{23} (v_1 + v) + A_{33} = 0.$$

Es gilt daher für die Gleichung des Berührungspunktes einer Tangente  $u_1, v_1$  der Kurve (85) die analoge Gedächtnisregel, wie sie auf S. 67 für die Tangente einer Kurve zweiter Ordnung angegeben ist.

Die Punktkoordinaten dieses Punktes sind nach § 57:

$$(89) \quad x_1 = \frac{F'(u_1, v_1)}{F'''(u_1, v_1)}, \quad y_1 = \frac{F''(u_1, v_1)}{F'''(u_1, v_1)}.$$

#### 64. Die Kegelschnitte als Hüllkurven.

Es sei eine Gerade  $l$  und ein Punkt  $F$ , dessen senkrechter

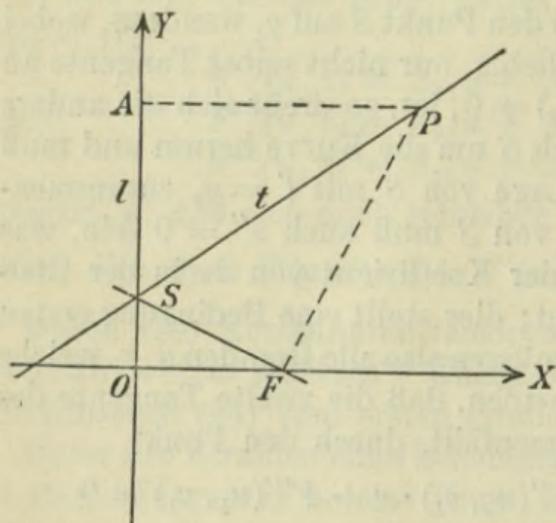


Fig. 55.

Abstand von  $l$  die Länge  $s$  habe, gegeben Die Hüllkurve aller Geraden

$t(u, v)$  soll ermittelt werden, für die der  $\lambda$ -fache Sinus des von  $t$  und  $l$  gebildeten Winkels gleich dem Sinus des von  $t$  und von dem Strahle gezogen von  $t \times l = S$  nach  $F$  eingeschlossenen Winkels ist.

Wie in § 27, III werde die Gerade  $l$  als  $Y$ -Achse und das von  $F$  auf sie gefällte Lot als  $X$ -Achse gewählt (Fig. 55). Aus der Gleichung der Geraden  $t$ :  $ux + vy + 1 = 0$  erkennt man sofort (§ 10), daß

$$\operatorname{tg}(X, t) = -\frac{u}{v},$$

folglich

$$\operatorname{tg}(t, l) = \cot(X, t) = -\frac{v}{u}$$

und

$$\sin(t, l) = \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

ist. Der Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $t$  und der  $Y$ -Achse hat die Koordinaten  $0, -\frac{1}{v}$  und der Punkt  $F$  die Koordinaten  $s, 0$ ; mithin lautet die Gleichung von  $SF$  nach § 17:

$$y = \frac{1}{vs}(x - s),$$

also

$$\operatorname{tg}(X, FS) = \frac{1}{vs}.$$

Nach § 21 (24') erhält man weiter:

$$\operatorname{tg}(FS, t) = \frac{\operatorname{tg}(X, t) + \operatorname{tg}(FS, -X)}{1 - \operatorname{tg}(X, t) \cdot \operatorname{tg}(FS, -X)} = \frac{(1 + us)v}{u - v^2s},$$

folglich

$$\sin(FS, t) = \frac{(1 + us)v}{\sqrt{(u^2 + v^2)(1 + v^2s^2)}}.$$

Wegen der gestellten Forderung muß

$$\lambda^2 \cdot v^2 = \frac{(1 + us)^2 v^2}{1 + v^2s^2}$$

sein, so daß die Gleichung der gesuchten Hüllkurve sich schließlich schreiben läßt:

$$(90) \quad (1 + us)^2 - \lambda^2(1 + v^2s^2) = 0,$$

also eine Kurve zweiter Klasse ist.

## 65. Überführung der Linien- in Punktkoordinaten für diese spezielle Kegelschnittgleichung.

Bildet man nach (88) die Gleichung des Berührungspunktes  $P$  der Tangente  $u, v$ , so lautet sie nach den laufenden Koordinaten  $u, v$  geordnet:

$$(1 + us)s \cdot u - \lambda^2 v s^2 \cdot v + 1 - \lambda^2 + us = 0,$$

und die Koordinaten von  $P$  sind:

$$(91) \quad x = \frac{(1 + us)s}{1 - \lambda^2 + us}, \quad y = -\frac{\lambda^2 vs^2}{1 - \lambda^2 + us}.$$

Daraus folgt für  $PF^2$  der Wert

$$PF^2 = \frac{\lambda^2 s^2 (1 + su)^2}{(1 - \lambda^2 + us)^2},$$

d. h. der  $\lambda$ -fache senkrechte Abstand  $x$  des Punktes  $P$  von der Geraden  $l$  ist gleich seiner Entfernung von  $F$ . Die jetzt gefundenen Kurven zweiter Klasse sind demnach identisch mit den in § 27, III gefundenen Kurven und daher Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem  $\lambda <$ ,  $=$  oder  $> 1$  ist.  $l$  ist wieder die Leitlinie und  $F$  der zu ihr gehörige Brennpunkt.

Da  $\sin(FS, t) = \lambda \cdot \sin(t, l)$ ,  $PF = \lambda \cdot PA$  ist und  $PA \perp l$  steht, so muß auch  $FP \perp SF$  stehen. Man findet daher den Berührungspunkt einer Tangente  $t$  eines Kegelschnittes, indem man ihren Schnittpunkt mit der Leitlinie mit dem zugehörigen Brennpunkte verbindet, und auf ihr in dem Brennpunkte ein Lot errichtet, das die Tangente in dem Berührungspunkte schneidet (vgl. Satz 1 auf S. 111).

Berechnet man aus den Formeln (91) die Linienkoordinaten  $u, v$  der Tangente:

$$(92) \quad u = \frac{s + (\lambda^2 - 1)x}{s(x - s)}, \quad v = -\frac{y}{s(x - s)},$$

die der Gleichung (90) der Kurve zweiter Klasse genügen, so erhält man die Gleichung der letzteren in Punktkoordinaten

$$y^2 = (\lambda^2 - 1)x^2 + 2sx - s^2$$

in Übereinstimmung mit S. 54 (35). Geht man den umgekehrten Weg, indem man von einem Punkte der letzten Kurve ausgeht, so kommt man zur Gleichung (90) zurück. Hiermit ist der Weg gezeigt, wie man allgemein eine (nicht

zerfallende) Gleichung zweiten Grades in Punktkoordinaten transformieren kann in Linienkoordinaten und umgekehrt.

Wendet man dieses Verfahren auf den Kreis bezogen auf rechtwinklige Koordinaten

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0$$

an, so erhält man als Gleichung dieses Kreises in Linienkoordinaten:

$$(93) \quad r^2(u^2 + v^2) = (mu + nv + 1)^2.$$

In diesem Falle kommt man einfacher zum Ziele, wenn man nach § 20 den senkrechten Abstand des Punktes  $x_0 = m$ ,  $y_0 = n$  von der Geraden mit den Linienkoordinaten  $u$ ,  $v$  berechnet und gleich  $r^2$  setzt.

## 66. Zerfallende Kurven zweiter Klasse.

Zerfällt  $F(u, v)$  in zwei Faktoren ersten Grades:

$$(94) \quad F(u, v) = (K_1 u + L_1 v + M_1)(K u + L v + M),$$

so stellt die Gleichung  $F(u, v) = 0$  zwei (reelle verschiedene, zusammenfallende oder imaginäre) Punkte dar, und man spricht von einer zerfallenden oder uneigentlichen Kurve zweiter Klasse.

Vergleicht man die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von  $u$  und  $v$  rechts mit denen der allgemeinen Gleichung (85), so erhält man

$$A_{11} = K_1 K, \quad A_{22} = L_1 L, \quad A_{33} = M_1 M,$$

$$2A_{12} = KL_1 + K_1 L, \quad 2A_{13} = KM_1 + K_1 M, \quad 2A_{23} = LM_1 + L_1 M,$$

woraus

$$4(A_{11} A_{22} - A_{12}^2) = (KL_1 - K_1 L)^2,$$

$$4(A_{22} A_{33} - A_{23}^2) = (LM_1 - L_1 M)^2,$$

$$4(A_{12} A_{23} - A_{22} A_{13}) = (KL_1 - K_1 L)(L_1 M - LM_1)$$

und somit für die Koeffizienten  $A_{\mu\nu}$  die Bedingung folgt:

$$(A_{21}^2 - A_{11} A_{22})(A_{23}^2 - A_{22} A_{33}) - (A_{21} A_{23} - A_{22} A_{13})^2 = 0,$$

die sich nach Division durch  $A_{22}$  schreiben läßt:

$$(95) \quad D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ist  $A_{22} = 0$ , aber  $A_{11} \neq 0$ , so löst man die ursprüngliche Gleichung nach  $u$  auf und kommt ebenfalls zur Bedingung  $D = 0$ .  $D$  heißt die Diskriminante von  $F(u, v)$  und ist genau so gebildet wie (S. 58 (40)) die Diskriminante von  $f(x, y)$ .

Umgekehrt aber zerfällt auch die Gleichung (85) in zwei lineare Faktoren, wenn die Bedingung (95) erfüllt ist. Denn setzt man  $A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2 = p^2$ ,  $A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = q^2$ , so folgt aus ihr  $(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22})^2 = p^2q^2$ . Setzt man dann in  $A_{22}F(u, v)$  hieraus die Werte für  $A_{22}A_{11}$ ,  $A_{22}A_{33}$  und  $A_{22}A_{13}$  ein, so wird

$$A_{22}F(u, v)$$

$$= \{(A_{12} - k)u + A_{22}v + A_{23} - l\} \{(A_{12} + k)u + A_{22}v + A_{23} + l\}.$$

Ist  $A_{22} = 0$ , aber  $A_{11} \neq 0$ , so verfährt man genau so für  $A_{11}F(u, v)$ . Sind  $A_{11}$  und  $A_{22}$  gleich Null, so muß  $A_{12} \neq 0$  sein, wenn  $F(u, v)$  vom zweiten Grade sein soll. Die Bedingung (95) gilt auch jetzt; umgekehrt folgt aus ihr, daß

$$A_{12}F(u, v) = (A_{12}u + A_{23})(A_{12}v + A_{13})$$

ist.

Das Verschwinden der Diskriminante  $D$  von  $F(u, v)$  ist mithin die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurve zweiter Klasse in zwei Punkte zerfällt.

In genau derselben Weise könnte für das Zerfallen der Kurven zweiter Ordnung in zwei gerade Linien die entsprechende Bedingung (S. 58 (40))  $\Delta = 0$  abgeleitet werden, im Einklange mit der auf S. 65 gegebenen Übersicht über die verschiedenen Kurven zweiten Grades<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Daß die Gleichung zweiten Grades in Punktkoordinaten  $f(x, y) = 0$  zwei Punkte darstellt, ist unmöglich. Denn sie müßte dann zwei Konstantenpaare

## 67. Identität der nicht zerfallenden Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Nach den Untersuchungen der §§ 29—31 gibt es keine anderen, nicht zerfallenden oder eigentlichen Kurven zweiter Ordnung, als Ellipse, Parabel und Hyperbel (vgl. die Tafel auf S. 65). Diese drei Kurven sind aber auch nach § 64 Kurven zweiter Klasse. Um zu zeigen, daß es auch keine anderen solchen Kurven gibt, ist es nur nötig zu beweisen, daß jeder nicht zerfallenden Kurve zweiter Klasse die wesentlichste Eigenschaft einer eigentlichen Kurve zweiter Ordnung zukommt.

Jede eigentliche Kurve zweiter Ordnung wird von einer beliebigen Geraden  $g_0$  in zwei Punkten (S. 57) geschnitten.

Durch jeden Punkt  $P$  einer Kurve zweiter Klasse geht eine Tangente der Kurve, für die der Punkt  $P$  Berührungspunkt ist. Der verlangte Nachweis ist also erbracht, wenn sich zeigen läßt, daß durch die Schnittpunkte von  $g_0$  mit der Kurve zwei ihrer Tangenten gehen. Sind  $u_x, v_x$  die Linienkoordinaten einer solchen Tangente, so gibt die Formel (88) auf S. 145 die Gleichung ihres Berührungspunktes

$$F'(u_x, v_x) \cdot u + F''(u_x, v_x) \cdot v + F'''(u_x, v_x) = 0.$$

Soll nun dieser Punkt der Schnittpunkt von  $g_0$  mit der Kurve sein, so muß die vorstehende Gleichung für  $u = u_0, v = v_0$  erfüllt sein:

$$(96) \quad F'(u_x, v_x) \cdot u_0 + F''(u_x, v_x) v_0 + F'''(u_x, v_x) = 0.$$

für die Koordinaten dieser Punkte liefern, könnte also nur von der Form

$$f(x, y) = (ax + b)(cy + d) = 0$$

sein, welche Gleichung aber nur die Parallelen zu den Koordinatenachsen  $x = -\frac{b}{a}$  und  $y = -\frac{d}{c}$  liefert, da entweder  $y$  oder  $x$  völlig willkürlich bleibt.

Ähnlich kann  $F(u, v) = 0$  nicht zwei Gerade liefern. Daher kann eine Kurve zweiter Ordnung, bzw. zweiter Klasse, nicht in zwei Punkte, bzw. nicht in zwei Gerade zerfallen.

Jede Kurventangente muß aber auch der Gleichung der Kurve genügen, daher

$$(97) \quad F'(u_x, v_x) \cdot u_x + F''(u_x, v_x) \cdot v_x + F'''(u_x, v_x) = 0.$$

Die Gleichung (96) ist in bezug auf  $u_x, v_x$  vom ersten Grade; sie liefert also in Verbindung mit (97) zwei Tangenten  $u_x, v_x$  ( $x = 1, 2$ ), womit der Beweis erbracht ist, daß eine Kurve zweiter Klasse von einer beliebigen Geraden  $g_0$  in zwei Punkten geschnitten wird.

Daß umgekehrt sich von einem beliebigen Punkte aus zwei Tangenten ebenso wie an eine Kurve zweiter Klasse auch an eine solche zweiter Ordnung legen lassen, ist auf S. 88 gezeigt.

Die eigentlichen Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse sind damit als identisch nachgewiesen<sup>1)</sup>.

Aus den Gleichungen (94) und (95) ergibt sich aber leicht ein Kennzeichen der Art des durch die Gleichung S. 144 (85) gegebenen Kegelschnittes. Wählt man nämlich für  $g_0$  die unendlich ferne Gerade  $u_0 = 0, v_0 = 0$ , so folgt:

$$F'''(u_x, v_x) = 0, \quad F'(u_x, v_x) \cdot u_x + F'(u_x, v_x) \cdot v_x = 0,$$

und wenn man noch den Wert für  $u_x$  aus der ersten Gleichung in die zweite einsetzt:

$$\begin{aligned} & (A_{11} A_{23}^2 + A_{22} A_{13}^2 - 2 A_{12} A_{13} A_{23}) v_x^2 \\ & + 2(A_{11} A_{23} - A_{12} A_{13}) A_{33} v_x + (A_{11} A_{33} - A_{13}^2) A_{33} = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Koeffizienten von  $v_x^2, v_x$  und das konstante Glied mit  $A, B, \Gamma$ , so hängt die Reellität der Wurzeln  $v_x$  ab von dem Ausdrucke  $B^2 - A\Gamma$ , der sich durch ein-

<sup>1)</sup> Der Satz gilt in dieser Form nur für Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Die Gerade ist Kurve erster Ordnung, aber von 0<sup>ter</sup> Klasse und der Punkt Kurve erster Klasse, aber 0<sup>ter</sup> Ordnung, wie ohne weiteres aus den Definitionen auf den S. 56 und 143 zu erkennen ist.

fache Umrechnung auf die Gestalt  $-A_{13}^2 A_{33} D$  bringen läßt. Die Kurve hat mithin für eine eigentliche Kurve zweiter Klasse ( $D \neq 0$ ) zwei oder keinen reellen unendlich fernen Punkt, je nachdem  $A_{33} D < 0$  oder  $> 0$  ist; sie hat nur einen, wenn  $A_{33} = 0$  ist. Im ersten Falle hat die Kurve zwei reelle Asymptoten (§ 33), im letzten Falle keine. Für  $A_{33} = 0$  folgt aus  $F'''(u_x, v_x) = A_{31} u_x + A_{32} v_x$  für  $v_x = 0$  und  $u_x = 0$ ; die unendlich ferne Gerade ist also Tangente der Kurve. Daher

	$A_{33} D > 0$	$A_{33} D < 0$	$A_{33} = 0$
$D \neq 0$	Ellipse (reell od. imaginär)	Hyperbel	Parabel
$D = 0$	$A_{33} \neq 0$		2 reelle Punkte, deren einer im Unendlichen liegt 2 Punkte (reell verschieden, zusammenfallend oder imaginär) in unendlicher Entfernung
	2 reelle verschiedene, zusammenfallende oder imaginäre Punkte in endlicher Entfernung		

Schärfere Kriterien ergeben sich durch Koordinatentransformationen mit Hilfe der Formeln (84), die in geeigneter Weise spezialisiert werden. Mit Hilfe von Koordinatentransformationen können die Untersuchungen der Abschnitte 4—8 in ähnlicher Weise durchgeführt werden für die Gleichung (85) der Kurve zweiter Klasse als Ausgangspunkt.<sup>1)</sup>

Um die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung  $f(x, y) = 0$  in eine solche mit Linienkoordinaten überzuführen, be-

<sup>1)</sup> Diese Kriterien können aus Mangel an Raum nicht abgeleitet, sollen aber wenigstens hier angegeben werden. Die Ellipse ( $D \neq 0, A_{33} D > 0$ ) ist reell oder imaginär, je nachdem  $d_1 = A_{11} A_{33} - A_{13}^2$  oder  $d_2 = A_{22} A_{33} - A_{23}^2 < 0$  oder  $> 0$  sind; für  $D = 0, A_{33} \neq 0$  sind unter den gleichen Bedingungen die beiden Punkte reell oder nicht, während für  $d_1 = d_2 = 0$  die beiden Punkte in einen (reellen Punkt) zusammenfallen. Für  $D = 0, A_{33} = 0$  liefert die Gleichung zweiter Klasse zwei reelle Punkte, deren einer im Unendlichen liegt, wenn  $A_{13}$  oder  $A_{23} \neq 0$  ist; beide Punkte liegen im Unendlichen, wenn  $A_{13} = A_{23} = 0$  ist, und sind reell verschieden, zusammenfallend oder imaginär, je nachdem  $d = A_{11} A_{22} - A_{12}^2 < 0, =$  oder  $> 0$  ist.

rechnet man aus der Formel S. 66 (46) die Linienkoordinaten  $u_1, v_1$  der Tangente in  $P_1(x_1, y_1)$  und hieraus  $x_1, y_1$  als Funktionen von  $u_1, v_1$ ; diese in die Gleichung  $f(x_1, y_1) = 0$  eingesetzt ergeben die gesuchte Gleichung. Umgekehrt kommt man von den Formeln S. 146 (89) aus zu  $u_1, v_1$  als Funktionen von  $x_1, y_1$ , die in  $F(u_1, v_1) = 0$  eingesetzt die Gleichung der Kurve in Punktkoordinaten transformieren.

## 12. Abschnitt.

### Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen von Kreisen.

#### 68. Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise.

Dual zu der Bestimmung der Potenzlinie zweier Kreise die man als die Trägerin ihrer Schnittpunkte aufzufassen hat, ist die Aufgabe der Bestimmung der Punkte, von denen sich gemeinsame Tangenten an beide Kreise legen lassen.

Wird  $m_\nu u + n_\nu v + 1 = W_\nu$  gesetzt, so kann man die Gleichungen der beiden Kreise  $k_\nu$  mit den Mittelpunkten  $m_\nu, n_\nu$  und den Radien  $r_\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ) nach (149) in rechtwinkligen Koordinaten schreiben:

$$(98) \quad r_\nu^2(u^2 + v^2) = W_\nu^2.$$

Die Koordinaten der gemeinsamen Tangenten beider Kreise, deren es im allgemeinen vier gibt, müssen diesen beiden Gleichungen, also auch ihrer Differenz, genügen:

$$\frac{W_1^2}{r_1^2} - \frac{W_2^2}{r_2^2} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden:

$$(99) \quad A: \frac{W_1}{r_1} - \frac{W_2}{r_2} = 0 \quad \text{und} \quad J: \frac{W_1}{r_1} + \frac{W_2}{r_2} = 0;$$

der durch die erstere Gleichung gegebene Punkt,  $A$  wird als der äußere (Fig. 56), der zweite,  $J$  als der innere

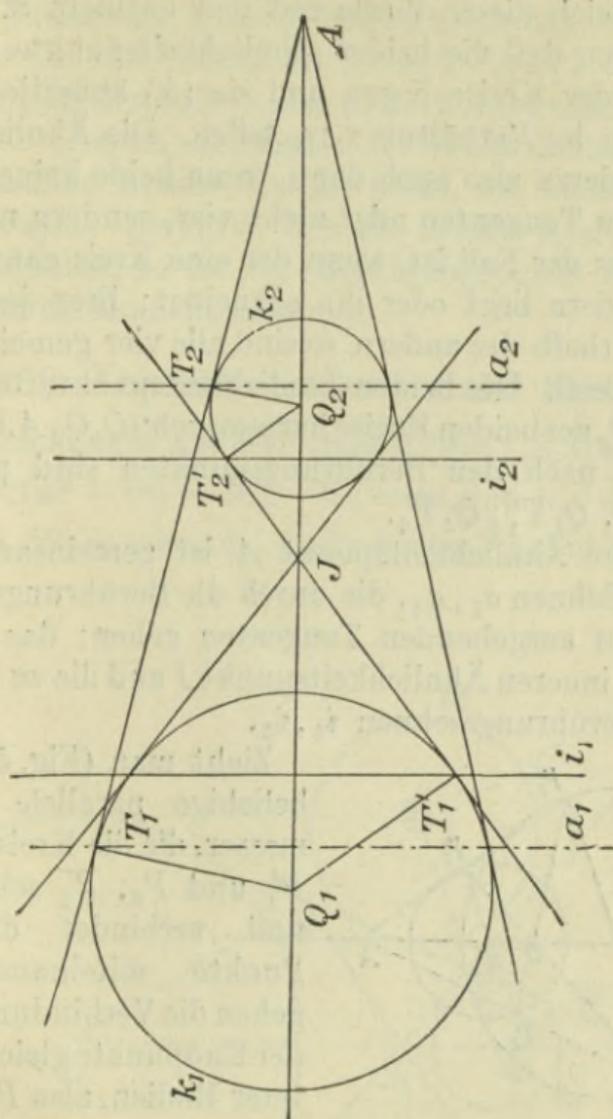


Fig. 56.

Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise bezeichnet. Die Punktkoordinaten dieser Punkte sind daher

$$(100) \quad \begin{aligned} A: \quad x_A &= \frac{m_1 r_2 - m_2 r_1}{r_2 - r_1}, & y_A &= \frac{n_1 r_2 - n_2 r_1}{r_2 - r_1}; \\ J: \quad x_J &= \frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{r_2 + r_1}, & y_J &= \frac{n_1 r_2 + n_2 r_1}{r_2 + r_1}. \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Werte mit den Formeln S. 27 (11) läßt erkennen, daß die beiden Ähnlichkeitspunkte auf der Zentrale beider Kreise liegen und sie (A) äußerlich, bzw. (J) innerlich im Verhältnis  $r_1:r_2$  teilen. Die Ähnlichkeitspunkte existieren also auch dann, wenn beide keine reellen gemeinsamen Tangenten oder nicht vier, sondern nur zwei haben, wie es der Fall ist, wenn der eine Kreis ganz innerhalb des andern liegt oder ihn schneidet; liegt jeder der Kreise ausserhalb des andern, so sind alle vier gemeinsamen Tangenten reell. Die beiden Ähnlichkeitspunkte teilen die Zentrale  $Q_1Q_2$  der beiden Kreise harmonisch:  $(Q_1Q_2AJ) = -1$ . Die Radien nach den Berührungspunkten sind parallel:  $Q_1T_1 \parallel Q_2T_2, Q_1T'_1 \parallel Q_2T'_2$ .

Der äußere Ähnlichkeitspunkt  $A$  ist gemeinsamer Pol der beiden Sehnen  $a_1, a_2$ , die durch die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten gehen; das gleiche gilt für den inneren Ähnlichkeitspunkt  $J$  und die zu ihm gehörenden Berührungssehnen  $i_1, i_2$ .

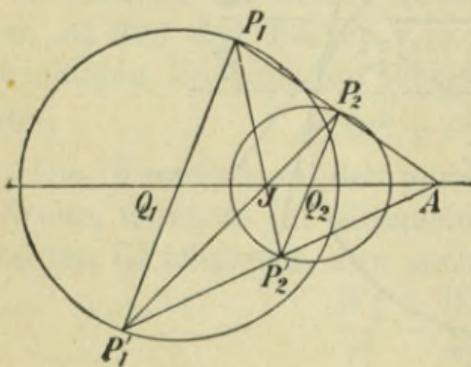


Fig. 57.

Zieht man (Fig. 57) zwei beliebige parallele Durchmesser, die die Kreise in  $P_1, P'_1$  und  $P_2, P'_2$  schneiden, und verbindet die vier Punkte miteinander, so gehen die Verbindungslinien der Endpunkte gleichgerichteter Radien, also  $P_1P_2$  und  $P'_1P'_2$ , durch den äußeren, und die der Endpunkte ent-

gegengesetzt gerichteter Radien  $P_1P'_2$  und  $P'_1P_2$  durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $Q_1P_1A$  und  $Q_2P_2A$  folgt  $\overrightarrow{Q_1A} : \overrightarrow{AQ_2} = r_1 : -r_2$ ; folglich ist der Schnittpunkt von  $P_1P_2$  mit der Zentrale der

beiden Kreise der äußere Ähnlichkeitspunkt  $A$ . Ebenso folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $Q_1 P_1 I$  und  $Q_2 P'_2 I$ , daß  $P_1 P'_2$  die Zentrale in dem inneren Ähnlichkeitspunkte  $J$  schneidet. Diese Konstruktion der Ähnlichkeitspunkte mittels paralleler Radien versagt nicht, wie auch die Kreise liegen mögen. Berühren sich die beiden Kreise innerlich, bzw. äußerlich, so ist der Berührungspunkt ihr äußerer, bzw. innerer Ähnlichkeitspunkt.

### 69. Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise.

Die Gleichungen der drei Kreise  $k_v (v = 1, 2, 3)$  seien wieder

$$r_v^2(u^2 + v^2) = W_v^2, \quad W_v = m_v u + n_v v + 1,$$

und (Fig. 58) es seien  $A_1, J_1$  die beiden Ähnlichkeitspunkte

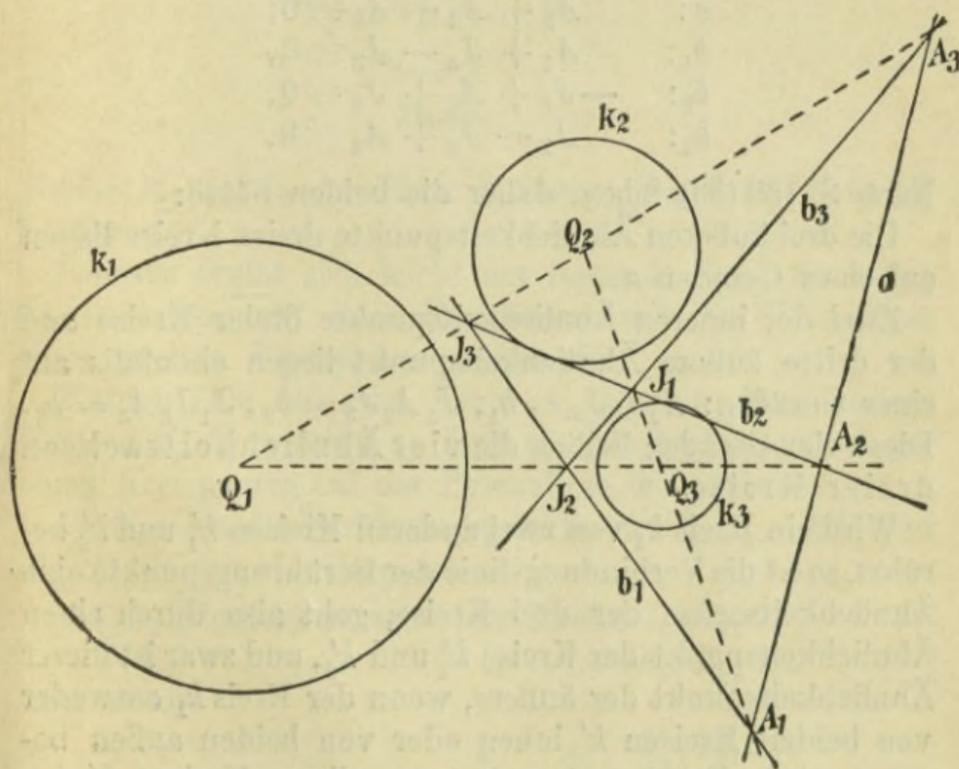


Fig. 58.

von  $k_2$  und  $k_3$ ;  $A_2, J_2$  die von  $k_3$  und  $k_1$ ;  $A_3, J_3$  die von  $k_1$  und  $k_2$ . Dann sind die Gleichungen dieser sechs Ähnlichkeitspunkte:

$$\begin{aligned} A_1: \quad \frac{W_2}{r_2} - \frac{W_3}{r_3} &= 0, & J_1: \quad \frac{W_2}{r_2} + \frac{W_3}{r_3} &= 0, \\ A_2: \quad \frac{W_3}{r_3} - \frac{W_1}{r_1} &= 0, & J_2: \quad \frac{W_3}{r_3} + \frac{W_1}{r_1} &= 0, \\ A_3: \quad \frac{W_1}{r_1} - \frac{W_2}{r_2} &= 0, & J_3: \quad \frac{W_1}{r_1} + \frac{W_2}{r_2} &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist aber, wenn man nicht nur die Punkte, sondern auch die linken Seiten dieser sechs Gleichungen mit  $A_v$ , bzw.  $J_v$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} a: \quad & A_1 + A_2 + A_3 \equiv 0; \\ b_1: \quad & A_1 + J_2 - J_3 \equiv 0, \\ b_2: \quad & -J_1 + A_2 + J_3 \equiv 0, \\ b_3: \quad & J_1 - J_2 + A_3 \equiv 0. \end{aligned}$$

Nach S. 139 (83) folgen daher die beiden Sätze:

Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen auf einer Geraden  $a$ .

Zwei der inneren Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise und der dritte äußere Ähnlichkeitspunkt liegen ebenfalls auf einer Geraden:  $A_1 J_2 J_3 = b_1$ ,  $J_1 A_2 J_3 = b_2$ ,  $J_1 J_2 A_3 = b_3$ . Diese vier Geraden heißen die vier Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise.

Wird ein Kreis  $k_1$  von zwei anderen Kreisen  $k'_1$  und  $k'_2$  berührt, so ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte eine Ähnlichkeitsachse der drei Kreise, geht also durch einen Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $k'_1$  und  $k'_2$ , und zwar ist dieser Ähnlichkeitspunkt der äußere, wenn der Kreis  $k_1$  entweder von beiden Kreisen  $k'$  innen oder von beiden außen berührt wird. Berührt aber einer von diesen Kreisen  $k'$  den

Kreis  $k_1$  außen, der andere innen, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $k'_1$  und  $k'_2$ . Vgl. z. B. Fig. 59, wo die

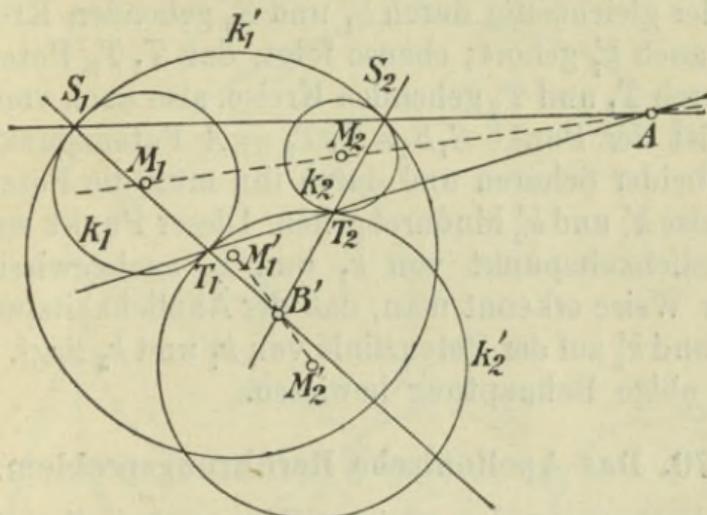


Fig. 59.

Kreise  $k_1$  und  $k_2$  den Kreis  $k'_1$  innen, den Kreis  $k'_2$  außen berühren.

Hieraus ergibt sich leicht der folgende Satz, der einen Ähnlichkeitspunkt eines Kreispaares mit der Potenzlinie eines zweiten Kreispaares verknüpft:

Werden (Fig. 59) zwei Kreise  $k_1, k_2$  von zwei andern Kreisen  $k'_1, k'_2$  berührt, so liegt ein Ähnlichkeitspunkt des einen Kreispaares auf der Potenzlinie des anderen.

$S_1, S_2$  seien die Berührungspunkte von  $k_1, k_2$  mit  $k'_1$  und  $T_1, T_2$  die mit  $k'_2$ . Dann ist

$S_1 S_2$	Ähnlichkeitsachse der Kreise	$k_1, k_2, k'_1,$	
$T_1 T_2$	" " "	$k_1, k_2, k'_2,$	
andererseits			
$S_1 T_1$	" " "	$k'_1, k'_2, k_1,$	
$S_2 T_2$	" " "	$k'_1, k'_2, k_2.$	

Folglich ist der Punkt  $S_1 S_2 \times T_1 T_2 = A$  ein Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $k_1$  und  $k_2$  und der Punkt  $S_1 T_1 \times S_2 T_2 = B'$  ein solcher von  $k'_1$  und  $k'_2$ .  $S_1 S_2$  ist aber auch die Potenzlinie aller gleichzeitig durch  $S_1$  und  $S_2$  gehenden Kreise, zu denen auch  $k'_1$  gehört; ebenso folgt, daß  $T_1 T_2$  Potenzlinie aller durch  $T_1$  und  $T_2$  gehenden Kreise, also auch von  $k'_2$  ist. Daher ist der Punkt  $S_1 S_2 \times T_1 T_2 = A$  Potenzpunkt aller Kreise beider Scharen und durch ihn muß die Potenzlinie der Kreise  $k'_1$  und  $k'_2$  hindurchgehen. Dieser Punkt war aber als Ähnlichkeitspunkt von  $k_1$  und  $k_2$  nachgewiesen. In gleicher Weise erkennt man, daß der Ähnlichkeitspunkt  $B'$  von  $k'_1$  und  $k'_2$  auf der Potenzlinie von  $k_1$  und  $k_2$  liegt. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

## 70. Das Apollonische Berührungsproblem.

Der letzte Satz des vorigen Paragraphen findet seine schönste Anwendung bei der Lösung der nach Apollonios benannten Aufgabe, die Kreise zu konstruieren, die drei gegebene Kreise  $k_1, k_2, k_3$  berühren<sup>1)</sup>.

Die Aufgabe hat im allgemeinen acht Lösungen, die aber nicht sämtlich reelle Kreise zu ergeben brauchen; es ist sogar möglich, daß keine reelle Lösung vorhanden ist. Es sind folgende Fälle möglich. Die drei gegebenen Kreise berühren den gesuchten Kreis von innen oder alle drei von außen; es berühren zwei der gegebenen Kreise von innen, der dritte von außen, oder einer von innen und zwei von außen.

Es seien  $k'_1$  und  $k'_2$  die gesuchten Kreise der beiden ersten Fälle (Fig. 60).  $S_1, S_2, S_3$  mögen die Berührungspunkte von  $k'_1$  mit den Kreisen  $k_1, k_2, k_3$  bezeichnen und  $T_1, T_2, T_3$  die von

<sup>1)</sup> Apollonios von Pergä hat zwischen 250 und 200 in Alexandria und Pergamon gelebt. Die obige Aufgabe war in seiner verlorengegangenen Schrift „Berührungen ( $\pi\epsilon\sigma\tau\iota\ \epsilon\pi\alpha\phi\omega\nu$ )“ behandelt.

$k'_2$  mit diesen drei Kreisen. Nach dem vorigen Paragraphen schneiden sich dann die Geraden  $S_1S_2$  und  $T_1T_2$  in dem äußeren Ähnlichkeitspunkte  $A_3$  der Kreise  $k_1$  und  $k_2$ , die

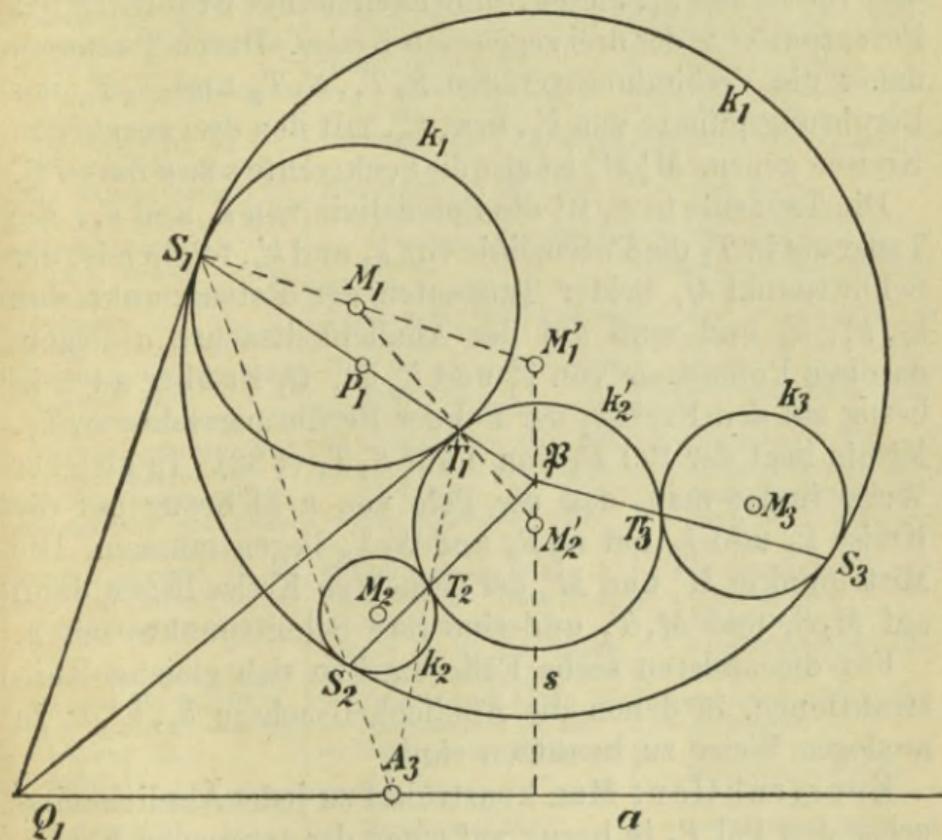


Fig. 60.

Geraden  $S_2S_3$  und  $T_2T_3$  in dem Ähnlichkeitspunkte  $A_1$  und  $S_3S_1$  und  $T_3T_1$  in  $A_2$ . Diese drei Ähnlichkeitspunkte<sup>1)</sup> liegen auf der Ähnlichkeitsachse  $a$ , die nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen die Potenzlinie der Kreise  $k'_1$  und  $k'_2$  ist. Daher liegen die Mittelpunkte  $M'_1$  und  $M'_2$  dieser beiden Kreise auf einer Senkrechten  $s$  zu  $a$ .

<sup>1)</sup> In der Figur sind  $A_1$  und  $A_2$  nicht sichtbar.

Andererseits aber müssen nach demselben Satze die Potenzlinien von  $k_1$  und  $k_2$  durch den Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $k'_1$  und  $k'_2$  gehen, ebenso die Potenzlinien von  $k_2$  und  $k_3$  und von  $k_3$  und  $k_1$ ; dieser Ähnlichkeitspunkt ist folglich der Potenzpunkt  $\mathfrak{P}$  der drei gegebenen Kreise. Durch  $\mathfrak{P}$  müssen daher die Verbindungsgeraden  $S_1 T_1$ ,  $S_2 T_2$  und  $S_3 T_3$  der Berührungspunkte von  $k'_1$ , bzw.  $k'_2$ , mit den drei gegebenen Kreisen gehen.  $M'_1 M'_2$  ist also die Senkrechte  $s$  zu  $a$  durch  $\mathfrak{P}$ .

Die Tangente in  $S_1$  ist die Potenzlinie von  $k_1$  und  $k'_1$ , die Tangente in  $T_1$  die Potenzlinie von  $k_1$  und  $k'_2$ , folglich ist der Schnittpunkt  $Q_1$  beider Tangenten der Potenzpunkt von  $k_1$ ,  $k'_1$ ,  $k'_2$  und muß auf der Ähnlichkeitsachse  $a$  liegen, da diese Potenzlinie von  $k'_1$  und  $k'_2$  ist.  $Q_1$  ist aber auch in bezug auf den Kreis  $k_1$  der Pol der Berührungssehne  $S_1 T_1$ . Mithin liegt der Pol  $P_1$  von  $a$  auf  $S_1 T_1$  (§ 32). In gleicher Weise findet man, daß die Pole von  $a$  in bezug auf die Kreise  $k_2$  und  $k_3$  auf  $S_2 T_2$  und  $S_3 T_3$  liegen müssen. Die Mittelpunkte  $M'_1$  und  $M'_2$  der gesuchten Kreise liegen dann auf  $M_1 S_1$  und  $M_1 T_1$  und sind ihre Schnittpunkte mit  $s$ .

Für die anderen sechs Fälle ergeben sich gleiche Konstruktionen, in denen die Ähnlichkeitsachsen  $b_1, b_2, b_3$  in analoger Weise zu benutzen sind.

Konstruktion: Man konstruiert zu jeder Ähnlichkeitsachse den Pol  $P_1$  in bezug auf einen der gegebenen Kreise, z. B.  $k_1$ , und verbindet ihn mit dem Potenzpunkte  $\mathfrak{P}$  der drei gegebenen Kreise;  $P_1 \mathfrak{P}$  schneidet den Kreis  $k_1$  in den Berührungspunkten  $S_1, T_1$  der der benutzten Ähnlichkeitsachse zugehörigen Lösungskreise. Verbindet man noch den Mittelpunkt  $M_1$  von  $k_1$  mit  $S_1$  und  $T_1$ , so schneiden diese Geraden das von  $\mathfrak{P}$  auf die Ähnlichkeitsachse gefällte Lot  $s$  in den Mittelpunkten  $M'_1, M'_2$  der gesuchten Kreise.

# Sachregister

(Die Zahlen geben die betreffenden Seiten an.)

- Abstand, senkrechter — eines Punktes von einer Geraden 38.  
 Abszissenachse 15.  
 Achsenabschnitte der Geraden 34, 37.  
 Achsen der Kegelschnitte 59 ff.  
 — der Ellipse 61, 71.  
 — der Hyperbel 61, 77.  
 Affine Verwandtschaft 75.  
 Ähnlichkeitsachsen 157 ff.  
 Ähnlichkeitspunkte, innere, äußere — 154.  
 Algebraische Kurve  $n$ -ter Ordnung 56.  
 —  $n$ -ten Klasse 143.  
 Allgemeine Gleichung einer Geraden 36 f.  
 — eines Punktes 134.  
 — zweiter Ordnung 55 ff.  
 — zweiter Klasse 144.  
 Amplitude eines Punktes 19.  
 Anfangspunkt des Koordinatensystems 8.  
 Anomalie, exzentr. 75, 93.  
 Apollonios 160 (Anm.).  
 — Berührungproblem des 160.  
 Asymptoten eines Kegelschnitts 69, 92, 96.  
 — der Hyperbel 77, 85.  
 — -richtung 70.  
 — -winkel 77.  
 Aufgabe der analytischen Geometrie 31.  
 Berührungspunkt der Tangente 66, 144 ff.  
 Bogenmaß  $\beta$  (Anmerkung).  
 Brennpunkte 53, 103 ff.  
 — der Ellipse 53.  
 — der Hyperbel 53, 77.  
 Brennstrahl 104, 107.  
 Brianchon 120.  
 — Satz des 120.  
 — Punkt des 121.  
 Büschel.  
 — Strahlen 42 u. 136.  
 — Kreis 128.  
 Ceva, Satz des 47.  
 — Umkehrung des Satzes des 48 u. 141.  
 Descartes 18.  
 Determinante 2. Grades 27 (Anmerkung).  
 — 3. Grades 29 (Anmerkung).  
 Diagonalepunkt 49.  
 — -dreieck 49.  
 — -dreiheit 141.  
 Direktrix oder Leitlinie 53.  
 Diskriminante 59, 150.  
 Doppelverhältnis von 4 Punkten oder 4 Strahlen 11.  
 Drehsinn, positiver 7.  
 Drehung des Koordinatensystems 23.  
 Drei Gerade durch einen Punkt 41.  
 Dreieckssätze 44 f. u. 140.  
 Dualitätsprinzip 120, 135.  
 Durchmesser der Ellipse 57 ff., 90.  
 — der Parabel 63, 102.  
 — konjugierte 90, 95.  
 Ecktransversale 48.  
 Einheitspunkt des Koordinatensystems 8.  
 Ellipse 52, 65, 71 ff., 148.  
 — Brennpunkte 53, 104.  
 — Durchmesser 57 ff., 90.  
 — Hauptachsen 59, 98.  
 — konjugierte Halbmesser 95.  
 — Leitlinie 53.  
 — Mittelpunkt 57.  
 — Parameter 54.  
 — Scheitelfgleichung 55.  
 Exzentr. Anomalie 75, 93.  
 Exzentrizität, lineare 53, 100.  
 — numerische 105, 115.  
 Flächeninhalt eines Dreiecks 27.  
 — eines  $n$ -Ecks 30.  
 Gedächtnisregel 67 (Anmerkung), 145 (Anmerkung).  
 Gegenpunkte der Brennpunkte 107.  
 Geometrischer Ort 31, 52 ff.  
 Gerade Linie 32 ff.  
 Gerade durch zwei Punkte 33, 137.  
 Gerichtete Strecke 5.  
 Gleichseitige Hyperbel 79.  
 Grundpunkte eines Kreisbüschels 130.  
 Halbierungspunkt einer Strecke 14.  
 Harmonische Polaren 68, 112.  
 — Pole 68.  
 — Punkte 14, 51.  
 — Strahlen 14, 51.  
 Hauptachse der Ellipse 60, 71.  
 — der Hyperbel 60, 99.  
 Hessesche Normalform 35, 43.  
 Höhen eines Dreiecks 46.  
 Hüllkurve 143.  
 Hyperbel 52, 65, 76 ff., 146.  
 — Brennpunkte 53, 103 ff.  
 — Hauptachsen 59, 99.  
 — konjugierte Durchmesser 90.  
 — Konstruktion 87.  
 — Leitlinie 53.  
 — Mittelpunkt 58.  
 — Scheitelfgleichung 55.  
 — konjugierte 58.  
 Kegelschnitt 53 f., 112.  
 — Achsen 59.  
 — Leitlinie 53.  
 — Mittelpunkt 57, 63.  
 — als Hüllkurve 146.  
 — zerfallender oder uneigentlicher 63, 149.  
 Klasse einer Kurve 143.  
 Konjugierte Durchmesser 70, 89 ff., 96.  
 — Elemente eines Doppelverhältnisses 12.  
 — Halbmesser 95.  
 — harmonische Punkte 67.  
 — Hyperbeln 79, 94.  
 — Kreisbüschel 130.  
 Konstruktion der Ellipse 74.  
 — der Hyperbel 87.  
 — der Parabel 81.  
 — eines allgemeinen Kegelschnitts 123.

- Konstruktion konjugierter Durchmesser 89.  
 — des Krümmungskreises 81.  
 — des vierten harmonischen Punktes (Strahles) 51.  
 Koordinaten 8.  
 — Parallel- 17.  
 — Polar- 18.  
 — -winkel 16.  
 Kreis 62, 83 ff.  
 — in Linienkoordinaten 149.  
 Kreisbüschel 128.  
 — Grundpunkte eines 130.  
 — konjugierte 130.  
 Kreiskegel 113.  
 Kreisnetz 132.  
 Krümmungskreis 72.  
 — im Scheitel einer Ellipse 72.  
 — — einer Hyperbel 78.  
 — — einer Parabel 81.  
 Krümmungsmittelpunkt 73.  
 Kurve  $n$ -ter Ordnung 56.  
 —  $n$ -ter Klasse 143.  
 — II. Ordnung 55 ff.  
 — II. Klasse 143 ff.  
 Länge einer Strecke 26.  
 Leitlinien eines Kegelschnittes 53, 55, 103 ff.  
 Leitstrahl eines Punktes 19.  
 Lineare Exzentrizität 53, 105.  
 Linienkoordinaten 32, 34, 132 ff.  
 — Transformation der 141.  
**M e n e l a u s**, Satz des 48.  
 — Umkehrung des Satzes des 48, 140.  
 Mittelpunkt 57 ff.  
 Nebenachse einer Ellipse 71.  
 Normale 88, 107.  
 Normalform, Hessische 35, 43.  
 Normalgleichung 34.  
 Nullpunkt des Koordinatensystems 8.  
 Numerische Exzentrizität 105, 115.  
 Ordinatenachse 15.  
 Ort, geometrischer 31, 52 ff.  
 Parabel 65, 80, 148.  
 — normale, subnormale, subtangente 88.  
 Parabelbrennpunkt 53, 109.  
 — Durchmesser 63, 101, 102.  
 — Leitlinie 55, 103, 109.  
 — Tangente 109 f.  
 Parallele Gerade 40.  
 Parallelkoordinaten 15.  
 — schiefwinklige, rechtwinklige 17.  
 Parallelverschiebung 23.  
 Parameter 33.  
 — -gleichung der Geraden 33.  
 — — der Ellipse 54, 75.  
 — — der Hyperbel 54, 78.  
**P a s c a l**, Satz von 119.  
 — sehe Gerade 120.  
 Phase eines Punktes 19.  
 Pol einer Geraden 67, 83.  
 Polarachse 18.  
 Polare eines Punktes 67, 82, 96, 131.  
 — des Mittelpunktes 69.  
 Polaren, harmonische oder reziproke 68, 112.  
 Polarkoordinaten 18.  
 Pole, harmonische oder reziproke 68.  
 Potenz eines Kegelschnittes 117 ff.  
 Potenzlinie 124.  
 Potenzlinien und Ähnlichkeitspunkte dreier und mehr Kreise 159.  
 Potenzpunkt 124.  
 Projektion einer Strecke 19.  
 — eines Linienzuges 20.  
 Punkt, Gleichung eines 133.  
 Punktreihe 138.  
 Quadrant 16.  
 Radiusvector 19.  
 Rechtwinklige Hyperbel 79.  
 Richtung einer Strecke 26.  
 Richtungskoeffizient einer Geraden 33, 37.  
 Scheitelgleichung der Kegelschnitte 55.  
 Scheitelpunkte der Ellipse 71.  
 — der Hyperbel 77.  
 — der Parabel 80.  
 Schiefwinkliges Koordinatensystem 17, 96.  
 Schnittpunkt zweier Geraden 41, 136.  
 Sehne einer Kurve 57.  
 Sehnenparallelogramm 90.  
 Sehnensechseck eines Kegelschnittes 120.  
 Senkrechter Abstand eines Punktes von einer Geraden 38.  
 Senkrechte Gerade 41.  
 Strahlenbüschel 42.  
 Strecke, gerichtete 5.  
 Subnormale 88.  
 — -tangente 88.  
 Supplementarsehne 91.  
 Tangente 66, 107.  
 — an Kegelschnitte 111.  
 — Berührungspunkt der 66, 144, 145 (Anmerkung), 147.  
 — an Ellipse 84.  
 — — Hyperbel 84.  
 — — Kreis 83.  
 Tangentenparallelogramm 90.  
 Tangentensechseck 120.  
 Teilverhältnis einer Strecke 9, 26, 48, 139.  
 — äußeres, inneres 9.  
 Transformation von Parallelen in Polarkoordinaten 20.  
 — zwischen Parallelkoordinaten 23.  
 — von Linienkoordinaten 141.  
 Uneigentliche Kurve zweiter Ordnung 63.  
 — — zweiter Klasse 149.  
 Uneigentlicher Punkt einer Geraden 10.  
 Unendlich ferne Gerade 133.  
 — ferner Punkt der Parabel 81.  
 Verbindungsgrade zweier Punkte 33, 137.  
 Vertauschung, zyklische 28.  
 Verwandtschaft, affine 75.  
 Viereck, vollständiges 49 f., 82, 89.  
 Vierseit vollständiges 141.  
 Winkelhalbierende 44, 46.  
 Winkel zweier Geraden 6, 39, 133.  
 Zentrale zweier Kreise 127.  
 Zentralprojektion 13.  
 Zerfallende Kurve zweiter Ordnung 63.  
 — zweiter Klasse 149.  
 Zyklische Vertauschung 28.

# Mathematische und verwandte Literatur in Auswahl

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 35

---

---

## a) AUS DER SAMMLUNG GÖSCHEN

**Geschichte der Mathematik.** Von Prof. Dr. Heinrich Wieleitner. 2 Bände.

I: Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. 136 Seiten. Neudruck 1939. II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. 154 Seiten. Neudruck 1939. (Samml. Göschen Nr. 226, 875)  
Geb. je RM. 1.62

**Fünfstellige Logarithmen.** Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Professor A. Adler. Zweite Aufl. 117 S. u. 1 Taf. (Samml. Göschen Bd. 423) . . . Geb. RM. 1.62

**Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt.** Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 181 Seiten. Neue, verbesserte Auflage. 1940. (Samml. Göschen Bd. 81) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Mathematische Formelsammlung.** Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. Ringleb. Mit 37 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 272 Seiten. 1939. (Sammlung Göschen Bd. 51) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Formelsammlung zur praktischen Mathematik.** Von Dr. Günther Schulz. Mit 10 Abbild. 147 S. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 1110.) Geb. RM. 1.62

**Arithmetik.** Von Studienrat Prof. Paul B. Fischer. Mit 19 Abbildungen. 152 Seiten. 1938. (Sammlung Göschen Bd. 47) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Elementare Algebra vom höheren Standpunkt.** Von Dr. Wolfgang Krull, o. Professor an der Universität Bonn. Mit 6 Zeichnungen. 143 Seiten. 1939. (Sammlung Göschen Bd. 930.) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Höhere Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

I: Lineare Gleichungen. Zweite, verbesserte Auflage. 152 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 931) . . . . . Geb. RM. 1.62

II: Gleichungen höheren Grades. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Fig. 158 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 932) Geb. RM. 1.62

**Aufgabensammlung zur höheren Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. 160 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1082) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Zahlentheorie.** Von Dr. Arnold Scholz, Dozent der Mathematik an der Universität Kiel. 136 Seiten. 1939. (Sammlung Göschen Band 1131) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Determinanten.** Von Studienrat Professor Paul B. Fischer. Dritte, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1932. (Samml. Göschen Bd. 402) . . . . . Geb. RM. 1.62

- Differentialrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. B. in Dresden. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 95 Figuren und 189 Beispielen. 202 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 87) . . . Geb. RM. 1.62
- Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. B. in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 62 Figuren und 190 Beispielen. 176 Seiten. 1940. (Samml. Göschen Bd. 88) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.** Von Professor Dr. A. Witting. Mit 58 Figuren und 405 Beispielen und Aufgaben. 136 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 146). Geb. RM. 1.62
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting. Mit 32 Figuren und 305 Beispielen. 118 Seiten. 1934. (Samml. Göschen Bd. 147) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Elementare Reihenlehre.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 1027) . . . Geb. RM. 1.62
- Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. Dritte, neubearbeitete Auflage. 126 Seiten. 1938. (Samml. Göschen Bd. 920)  
Geb. RM. 1.62
- Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.** Von Professor Dr. G. Hoheisel. 148 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1059) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Integralgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 136 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 1099) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Variationsrechnung I.** Von Dr. Lothar Koschmieder, o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Mit 21 Fig. 128 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1074) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Elemente der Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 23 Fig. 144 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 1109.) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.
- Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 668) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Fünfte, neubearbeitete Auflage. 130 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 703) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.
- Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 877)  
Geb. RM. 1.62
- Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 878)  
Geb. RM. 1.62

- Einführung in die konforme Abbildung.** Von Dr. Ludwig Bleiberbach, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Dritte Auflage. Mit 42 Zeichnungen. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 768). Geb. R.M. 1.62
- Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren. Vierte Auflage, unveränderter Neudruck. 171 Seiten. 1940. (Samml. Göschen Bd. 99) . . . . . Geb. R.M. 1.62
- Analytische Geometrie der Ebene.** Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Zweite, verb. Auflage. Mit 60 Figuren. 164 Seiten. 1934. (Samml. Göschen Bd. 65) . . . . . Geb. R.M. 1.62
- Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur Analytischen Geometrie der Ebene** mit den vollständigen Lösungen. Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Zweite, unveränd. Auflage. Mit 22 Figuren im Text. 139 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 256).  
Geb. R.M. 1.62
- Analytische Geometrie des Raumes.** Von Dr. Robert Haußner o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 36 Figuren im Text. 132 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 89) . . . . . Geb. R.M. 1.62
- Koordinatensysteme.** Von Professor Paul B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 507) . . . Geb. R.M. 1.62
- Nichteuklidische Geometrie.** Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970) . . Geb. R.M. 1.62
- Algebraische Kurven.** Neue Bearbeitung von Prof. Dr. H. Wieleitner.  
Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. 146 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 435) Geb. R.M. 1.62  
Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. 123 Seiten. Neudruck 1939. (Samml. Göschen Bd. 436) . . . . . Geb. R.M. 1.62
- Projektive Geometrie.** Von Professor Dr. Karl Doehlemann. Neue einbändige Ausgabe von Dr. H. Timerding, Prof. an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 37 Figuren. 131 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 72) . . . . . Geb. R.M. 1.62
- Aufgabensammlung zur projektiven Geometrie.** Von Dr. H. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 65 Figuren. 140 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1060). . . . Geb. R.M. 1.62
- Differentialgeometrie I: Raumkurven und Anfänge der Flächentheorie.** Von Dr. Rudolf Rothe, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 32 Abbildungen. 132 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 1113) . . . . . Geb. R.M. 1.62
- Vektoranalysis.** Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Fünfte, erneut durchges. Auflage. 136 Seiten. 1938. (Samml. Göschen Bd. 354) . Geb. R.M. 1.62
- Darstellende Geometrie.** Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.  
Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Fünfte, unveränderte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1940. (Samml. Göschen Bd. 142) . . . . . Geb. R.M. 1.62  
Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 143) . . . . . Geb. R.M. 1.62  
Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit 65 Figuren im Text. 141 S. 1931. (Sammlung Göschen Bd. 144)  
Geb. R.M. 1.62

**Darstellende Geometrie.** Vierter Teil: Freie und gebundene Perspektive, Photogrammetrie, kotlierte Projektion. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Professor für Mathematik an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 76 Figuren im Text. 144 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1063) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Von Professor Wilhelm Weitbrecht. Zweite, veränderte Auflage.

I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1938. (Samml. Göschen Bd. 302) Geb. RM. 1.62

II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 641) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Versicherungsmathematik.** Von Dr. Friedrich Böhm, Professor an der Universität München.

I. Elemente der Versicherungsrechnung. 2., vermehrte u. verbesserte Auflage. 144 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 180) Geb. RM. 1.62

II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 917) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Politische Arithmetik.** (Zinsezinsen-, Renten- und Anleherechnung.) Von Dr. Emil Foerster, Honorarprofessor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 155 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 879) Geb. RM. 1.62

**Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik.** Von Professor Dr. M. Pirani. Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. I. Runge. Mit 71 Abbildungen. 149 Selt. 1931. (Samml. Göschen Bd. 728) Geb. RM. 1.62

**Numerische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Praktisches Zahlenrechnen.** Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405). . . . . Geb. RM. 1.62

**Mathematische Instrumente.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922) . . . Geb. RM. 1.62

**Geodäsie** (Landesvermessung u. Erdmessung). Von Prof. Dr. Gustav Förster. Mit 33 Figuren. 122 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 102) Geb. RM. 1.62

**Vermessungskunde.** Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister.

I: Stückmessung und Nivellieren. Mit 145 Figuren. Sechste Auflage. 162 Seiten. 1938. (Samml. Göschen Bd. 468) . . . Geb. RM. 1.62

II: Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Figuren. Vierte Auflage. 147 Seiten. 1939. (Samml. Göschen Bd. 469) . . . Geb. RM. 1.62

III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie und Topographie. Mit 63 Figuren. Dritte Auflage. 144 Seiten. 1934. (Samml. Göschen Bd. 862) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Graphische Statik** mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Bauwerkschule in Erfurt. 2 Teile. 2. Auflage. Unveränd. Neudruck. 1940/41. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695) . . . . . Geb. je RM. 1.62

- Statik.** I. Tell: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Berlin. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 178) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Dynamik.** Von Prof. Dr. Wilhelm Müller. I: Dynamik des Einzelkörpers. Mit 70 Figuren. 160 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 902) Geb. RM. 1.62  
 II: Dynamik von Körpersystemen. Mit 51 Figuren. 137 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 903) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Hydraulik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Elastizitätslehre für Ingenieure.** Von Professor Dr.-Ing. Max Enßlin an der Höheren Maschinenbauschule Eblingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) . . . . . Geb. je RM. 1.62
- Einführung in die geometrische Optik.** Von Dr. W. Hinrichs, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 532) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Technische Tabellen und Formeln.** Von Reg.-Baurat a. D. Prof. Dr.-Ing. W. Müller. Mit 105 Figuren. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. Unveränd. Neudruck. 151 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 579) Geb. RM. 1.62

## b) WEITERE LITERATUR

**Journal für die reine und angewandte Mathematik.** Gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von Helmut Hasse. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je RM. 16.—, Band 145—147 je RM. 12.—, Band 148—151 je RM. 10.—, Band 152 RM. 12.—, Band 153 RM. 17.50, Band 154 RM. 30.—, Band 155 u. 156 je RM. 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband I/II), Band 159—166 je RM. 36.—, Band 167 RM. 56.—, Band 168 RM. 36.—, Band 169 RM. 35.—, Band 170 RM. 35.—, Band 171—183 je RM. 30.—.

*Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.*

**Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.** Herausgegeben ab Band 51 von der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Jeder der neueren Jahrgänge umfaßt etwa 10 Hefte à 10 Druckbogen. Preis jedes Heftes RM. 18.—. Die Preise der früheren Jahrgänge werden auf Wunsch mitgeteilt.

*Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ bringt eingehende Besprechungen sämtlicher periodischen und nichtperiodischen Neuerscheinungen auf dem Gebiete der Mathematik und ihrer wichtigsten Anwendungen. Auch die Geschichte und die Grundlagen der Mathematik finden sorgfältige Berücksichtigung*

**Geschichte der Mathematik.** I. Teil: Von den Ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. Günther in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Samml. Schubert Bd. 18) . Geb. RM. 17.40  
 II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Prof. Dr. Heinrich Wieleitner. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 63.) Geb. RM. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. VI, 220 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 64) . . . Geb. RM. 3.50

**Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung.** Von Professor Dr. Johannes Tropfke, Oberstudiendirektor i. R., Berlin. Lexikon-Oktav.

- Band 1: Rechnen. VII, 222 Seiten. 3. Aufl., 1930. RM. 12.—, geb. RM. 13.20  
 Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 266 Seiten. 3. Aufl., 1933. RM. 12.—, geb. RM. 13.20  
 Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 239 Seiten. 3., verbesserte u. vermehrte Aufl., 1937 . . . . . RM. 10.—, geb. RM. 11.—  
 Band 4: Ebene Geometrie. 3., verbesserte und vermehrte Auflage, besorgt von Dr. Kurt Vogel. IV, 316 Seiten. 1940. RM. 12.—, geb. RM. 13.—  
 Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 2. Aufl., 1923. RM. 7.50, geb. RM. 8.50  
 Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 2. Aufl., 1924. RM. 7.—, geb. RM. 8.—  
 Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 2. Aufl., 1924. RM. 6.50, geb. RM. 7.50

**Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren.** Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923 . . . . . RM. 0.80  
 Dasselbe in englischer Sprache. 1923 . . . . . RM. 0.80

**Neue Rechentafeln.** Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 500 Seiten. 1909 . . . . . Geb. RM. 20.—  
 Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben . . . . . Geb. je RM. 20.—

**Dr. A. L. Crelles Rechentafeln,** welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1938. Geb. RM. 22.—  
 Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer und französischer Ausgabe vor. Geb. je RM. 22.—

**Rechen-Resultate.** Tabellen zum Ablesen der Resultate von Multiplikationen und Divisionen bis  $100 \times 1000 = 100\,000$  in Bruchteilen und ganzen Zahlen sowie für Rechnen mit Zahlen jeder Größe, Radizieren (Wurzelsuchen) nach vereinfachtem Verfahren. Von F. Triebel, Technischem Oberinspektor der Reichsdruckerei i. R. Sechste Auflage, 21.—25. Tausend. Mit Seitenregistern. 290 Seiten. (Verlag von M. Krayn, Berlin). Geb. RM. 18.—

**Fünfstellige Logarithmentafeln** der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 . . . . . Geb. RM. 7.—

**Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln.** Von Professor Dr. E. F. August. Neunundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Professor Dr. F. August. Oktav. VII, 204 Seiten. 1931 Geb. RM. 2.—

**Vierstellige Logarithmentafeln.** Von Professor Dr. Max Zacharias und Dr. Paul Meth. Groß-Oktav. 43 Seiten. 1927 . . . . . Geb. RM. 1.50

**Logarithmische Rechentafeln. Laboratoriums-Taschenbuch für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker.** Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Neubearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Sechsendvierzigste bis fünfzigste Auflage. Oktav. 278 Seiten. 1940 . . . . . Geb. RM. 7.80

**Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen  $e^x$  und  $e^{-x}$  mit den natürlichen Zahlen als Argument.** Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1941. RM. 9.—

**Mathematische Mußstunden.** Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof. Dr. Hermann Schubert, neubearbeitet von Professor Dr. F. Fitting, München-Gladbach. 8. u. 9. Auflage. Oktav. 260 Seiten. 1941. Geb. RM. 4.80

**Lehrbuch der Mathematik zum Selbstunterricht und für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik.** Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. Georg Scheffers. Mit 438 Fig. Neunte Aufl. Lex.-Okt. VIII, 743 Seiten. 1941 . . . . . Geb. RM. 15.—

**Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen, bearbeitet nach den Vorlesungen von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden, o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 3 Bände. 1933. Jeder Band ist einzeln käuflich. . . . . Geb. je RM. 3.80**

I. Vektorrechnung und analytische Geometrie.

II. Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. — Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung.

III. Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. — Differentialgleichungen. Differentialgeometrie. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Probleme der Variationsrechnung.

**Grundbegriffe und Hauptsätze der höheren Mathematik, insbesondere für Ingenieure und Naturforscher.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 40 Figuren. Groß-Oktav. 156 Seiten. 1938 . . . . . Geb. RM. 5.—

**Einführung in die Axiomatik der Algebra.** Von Dr. H. Beck, o. Professor an der Universität Bonn. X, 197 Seiten. 1926. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6) . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50

**Algebra I: Die Grundlagen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 301 Seiten. 1932. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8) Geb. RM. 11.50

**Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Figuren. VIII, 261 S. 1933. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9) Geb. RM. 9.50

- Einführung in die Determinantentheorie** einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Dritte, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. 1941 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50
- Grundlehren der neueren Zahlentheorie.** Von Professor Dr. Paul Bachmann. Dritte, neu durchgesehene Auflage. Herausgegeben von Dr. Robert Haußner, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. XVI, 252 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3) RM. 9.50, geb. RM. 10.50
- Synthetische Zahlentheorie.** Von Dr. Rudolf Fueter, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. VIII, 276 Seiten. 1925. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4) . . . . . RM. 10.—, geb. RM. 12.—
- Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung.** Von Professor Dr. Paul Bachmann. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919 . . . . . RM. 2.50
- Irrationalzahlen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, durchges. Aufl. VIII, 199 Seiten. 1939. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1) . . . . . Geb. RM. 9.80
- Komplex-Symbolik, eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume.** Von Prof. Dr. Roland Weitzenböck. (Sammlung Schubert Band LVII.) Gr. 8°. VI, 191 S. 1908. Geb. RM. 6.40
- Allgemeine Formen- und Invariantentheorie.** Von Prof. Dr. W. Franz Meyer. I. Band: Binäre Formen. (Sammlung Schubert Band XXXIII.) Gr. 8°. VIII, 376 S. 1909 . . . . . Geb. RM. 11.70
- Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik.** Von Dr. Josef Lense, o. ö. Professor der Technischen Hochschule München. Mit 30 Abbildungen. 178 Seiten. 1933. . . . . Geb. RM. 9.50
- Lehrbuch der Differentialgleichungen.** Von Professor Dr. Heinrich Liebmann. Mit zahlreichen Figuren. VI, 226 Seiten. 1901 . . . RM. 6.—
- Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, em. o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Dritte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 195 Seiten. 1937. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10). Geb. RM. 10.50
- Partielle Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, em. o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14) RM. 11.—, geb. RM. 12.—
- Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung** nebst den Resultaten. Von Dr. H. Dölp. Neu bearbeitet von Dr. Eugen Netto. 19. Auflage. Oktav. 214 Seiten. 1940. (Verlag von Alfred Töpelmann, Berlin W 35.) . . . . . RM. 1.95
- Integralgleichungen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 18) . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50
- Differential- und Integralrechnung.** Unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse. Von Dr. Otto Haupt, Professor an der Universität Erlangen. Unter Mitarbeit von Dr. Georg Aumann, Professor an der Universität Frankfurt (Main). Groß-Oktav. 1938.
1. Band: Einführung in die reelle Analysis. Mit 2 Figuren. 196 Seiten. Geb. RM. 11.20
2. Band: Differentialrechnung. 168 Seiten . . . . . Geb. RM. 9.80
3. Band: Integralrechnung. 183 Seiten . . . . . Geb. RM. 10.60  
(Göschens Lehrbücherei Band 24, 25, 26.)

**Funktionentheoretische Vorlesungen.** Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.

I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920 . . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.20

I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921 . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50

II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

**Elliptische Funktionen.** Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

**Elliptische Funktionen.** Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren. Oktav. XII, 356 Seiten, Neudruck 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) . . . Geb. RM. 20.—

II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren. Oktav. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61) Geb. RM. 7.80

**Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.** Von Heinrich W. E. Jung, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923 . . . . . RM. 3.50, geb. RM. 4.—

**Elemente der Stereometrie.** Von Gustav Holzmüller. 4 Teile. Oktav.

1. Teil. Die Lehrsätze und Konstruktionen. Mit 282 Fig. X, 383 Seiten. 1900 . . . . . RM. 6.—, geb. RM. 6.60

2. Teil. Die Berechnung einfach gestalteter Körper. Mit 156 Fig. und zahlr. Übungsbeispielen. XV, 477 S. 1900. RM. 10.—, geb. RM. 10.80

3. Teil. Die Untersuchung und Konstruktion schwieriger Raumgebilde. Guldinsche Drehungskörper und Drehungsflächen mit ihren Verallgemeinerungen. Schraubenflächen, Röhrenflächen und ihre Verallgemeinerungen nebst ihren Inversionsverwandten. Krümmungslinien und isothermische Kurvenscharen auf diesen Flächen. Konforme Abbild. Mit 126 Fig. XII, 333 Seiten. 1902 . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 9.80

4. Teil. Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen. Berechnung und stereometrische Darstellung von statischen, Trägheits- und Zentrifugalmomenten homogener Raumgebilde. Simpsonsche Regel, verallgemeinerte Schichtenformel, gewisse Zuordnungen und konforme Abbildungen im Dienste solcher Bestimmungen. Nachtrag über das Katenoid, seine Krümmungsverhältnisse und sphärische Abbildung und über seinen Zusammenhang mit der Gaußschen Pseudosphäre und der Minimal-Schraubenregelfläche. Mit 89 Fig. XI, 311 S. 1902. RM. 9.—, geb. RM. 9.80

**Grundlagen der Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 17) . . . . . RM. 6.50, geb. RM. 7.80

**Grundzüge der ebenen Geometrie.** Von Professor Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mit 220 Figuren. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2) Geb. RM. 3.90

- Einführung in die analytische Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1929 . . . . . Geb. RM. 11.20
- Elementargeometrie der Ebene und des Raumes.** Von Professor Dr. Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 252 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50
- Analytische Geometrie auf der Kugel.** Von Dr. Richard Heger, Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Mit 4 Figuren. (Sammlung Schubert Bd. LIV.) Gr.-Oktav. VII, 152 S. 1908 . . . Geb. RM. 5.20
- Punkt- und Vektor-Rechnung.** Von Dr. Alfred Lotze, Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 192 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13) . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.—
- Kreis und Kugel.** Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50
- Nichteuklidische Geometrie.** Von Professor Dr. Heinrich Liebmann. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 40 Fig. 150 S. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—
- Liniengeometrie mit Anwendungen.** Von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. Neudruck. VIII, 380 Seiten. 1928. (Samml. Schubert Bd. 34) . . . . . Geb. RM. 18.—  
II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51)  
Geb. RM. 9.50
- Projektive Liniengeometrie.** Von Dr. Robert Sauer, Prof. an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 36 Abbild. Groß-Oktav. 194 Seiten. 1937. (Göschens Lehrbücherei Bd. 23) . . . . . Geb. RM. 9.—
- Geometrische Transformationen.** Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 15) RM. 13.—, geb. RM. 14.50
- Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 16 Figuren. Groß-Oktav. 280 S. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 19) . . . RM. 15.50, geb. RM. 17.—
- Affine Differentialgeometrie.** Von Dr. Erich Salkowski, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Groß-Oktav. Mit 23 Figuren. 200 Seiten. 1934. (Göschens Lehrbücherei Bd. 22) . . . . . Geb. RM. 10.—
- Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.** Von Professor Dr. Georg Scheffers. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50  
II. Mit 110 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI, 582 Seiten. 1922.  
RM. 15.—, geb. RM. 16.50
- Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.** Von Oberstudiendirektor Prof. Dr. V. Kommerell in Tübingen und Prof. Dr. K. Kommerell in Tübingen. I: Krümmung der Raumkurven und Flächen. Vierte Auflage. Mit 38 Figuren. 205 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 20)  
Geb. RM. 10.—  
II: Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlensysteme. Vierte Auflage. Mit 22 Figuren. 194 Seiten. 1931. Geb. RM. 10.—
- Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. Neudruck 1932. . . . . Geb. RM. 18.90

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav.

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten. Mit 118 Figuren. Neudruck. 1932. Geb. RM. 8.50

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 . . . . . Geb. RM. 12.—

**Darstellende Geometrie.** Von Theodor Schmid, o.ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65) Geb. RM. 6.—

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66) Geb. RM. 7.50

**Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume.** Von Dr. H. de Vries, Professor an der Universität zu Amsterdam. Mit 25 Figuren. Lex.-8° 178 S. 1905 . . . . . RM. 3.—

**Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung. I. Bd.** Von Professor E. Grimsehl. Mit 74 Fig. [Sammlung Schubert Bd. XXXVIII.] Gr. 8° VII, 219 S. 1905 . . . . . Geb. RM 7.40

**Methoden der praktischen Analysis.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 132 Figuren. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12) RM. 20.—, geb. RM. 21.50

**Wahrscheinlichkeitsrechnung für Nichtmathematiker.** Von Dr. Karl Dörge, o. Professor an der Universität Köln, unter Mitwirkung von Hans Klein. Groß-Oktav. 113 Seiten. 1939 . . . . . Geb. RM. 6.—

**Flugtechnisches Handbuch.** Unter Mitarbeit zahlreicher Fachleute herausgegeben von Roland Eisenlohr.

4 Bände. I: Aerodynamik und Flugzeugbau. II: Flugzeugführung, Luftverkehr und Segelflug. III: Triebwerk und Sondergebiete des Flugwesens. IV: Flugwetterkunde, Ballone, Luftschiffe.

Jeder Band kart. RM. 7.50

**Aerodynamik des Fluges.** Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie. Von Professor Dr. Harry Schmidt. Mit 81 Figuren. VII, 258 Seiten. 1929 . . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

**Photogrammetrie.** Von Dr. Richard Finsterwalder, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 103 Abb. u. 17 Tab. 237 S. 1939. Geb. RM. 14.—

---

---

## ALLE WISSENSGEBIETE

finden Sie vertreten in der Zeitschrift

# GEISTIGE ARBEIT

Zeitung aus der wissenschaftlichen Welt

Die „Geistige Arbeit“ will nicht eine „Fachzeitschrift“ sein, sondern einen Querschnitt geben durch das wissenschaftliche und geistige Leben. Zu diesem Zweck bringt die Zeitschrift u. a. regelmäßige Berichte über Leistungen, Fortschritte und Probleme einzelner Gebiete der Wissenschaft, über die historische Entwicklung, den Stand und die Organisation in- und ausländischer Forschung, sie bringt biographische und historische Rückblicke und gibt eine Übersicht über die wichtigsten Neuerscheinungen durch zusammenhängende Besprechungen.

Die „Geistige Arbeit“ kostet jährlich RM. 6.—, vierteljährlich RM. 1.50, monatlich RM. —.50. Besser als alle Worte unterrichtet Sie eine Probenummer über Sinn und Ziele der Zeitschrift. Diese Probenummer stellen wir Ihnen auf Wunsch gern zur Verfügung.

---

---

WALTER DE GRUYTER & CO / BERLIN W 35

---

---

---

*Erwin Lohr*

# Vektor- und Dyadenrechnung

Für Physiker und Techniker

Oktav. XV, 411 Seiten. Mit 34 Figuren im Text. 1939.

Gebunden RM. 18.—

Die Vektor- und Dyadenrechnung ist für den Physiker und Techniker von außerordentlicher Bedeutung. Für diese ist das Buch bestimmt. Es zeigt ihnen, daß und wie sie alle früheren Kenntnisse im Bereiche der Vektor- und Dyadenrechnung verwenden können und wie vorteilhaft das wirkliche Rechnen mit Vektoren, Dyaden und extensiven Gebilden noch höheren Ranges ist. Das Buch vermittelt zunächst eine ausreichende und tragfähige mathematische Grundlage des vorgetragenen Rechenverfahrens und bringt in einem besonderen Teil physikalische und technische Anwendungen aus allen Gebieten der theoretischen Physik. Damit nimmt das Buch in der neuen Sammlung „Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften“ einen besonderen Platz ein.

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 35

---

---

---

# Photogrammetrie

*Von Dr. - Ing. Richard Finsterwalder*

a. o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover

Mit 103 Abbildungen und 17 Tabellen

Groß-Oktav. 237 Seiten. 1939. Geb. RM. 14.—

Dieses Buch gibt in lehrbuchartiger Form eine Einführung in das Gesamtgebiet der Photogrammetrie: der Erd- und besonders der Luftbildmessung, einschließlich der Entzerrung. Da es namentlich für Studierende der Hoch- und Fachschulen sowie die in der Praxis tätigen Vermessungsingenieure bestimmt ist, stellt es die Arbeitsverfahren und Instrumente sowie ihre geodätischen und topographischen Anwendungen in möglichst einfacher und klarer Form dar. Um für das Verständnis und die praktische Anwendung der neuen photogrammetrischen Methoden eine sichere Grundlage zu geben, wurden die geometrischen und mathematischen Ableitungen mitbehandelt, wobei überall eine leicht faßliche, wenig Vorkenntnisse voraussetzende Form gewählt ist. Das Ziel des Buches ist, den Leser über das in den letzten Jahren rasch entwickelte, mit neuartigen Hilfsmitteln arbeitende Verfahren der Photogrammetrie so zu unterrichten, daß er es zweckmäßig anzuwenden und den kommenden Entwicklungen auf diesem Gebiet, das heute noch nicht als abgeschlossen gelten kann, zu folgen vermag.

**WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 35**

---

---

---

---

# Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung

Von

*Dr. phil. Egon Hiedemann*

a. o. Professor für Physik an der Universität Köln

Mit 232, z. T. noch unveröffentlichten Abbildungen und  
einer Farbtafel

IX, 287 Seiten. 1939. Preis RM. 24.—

Ein Buch, nach Inhalt und Anlage von gleicher  
Bedeutung für Physiker, Chemiker, Biologen,  
Mediziner und Techniker.

„... Es ist zu begrüßen, daß der Verfasser des vorliegenden Buches nunmehr den Versuch unternommen hat, über eine Berichterstattung hinausgehend eine systematische und kritische Darstellung der Ultraschallforschung sowie ihrer grundlegenden Gedanken vom Standpunkt des Physikers aus zu geben. Es kann wohl gesagt werden, daß dieser Versuch vollkommen gelungen ist. Der Verfasser gibt nicht nur eine kritische Darstellung der Verfahren und Ergebnisse der Ultraschallforschung, sondern führt den Leser auch an die noch offenen Probleme heran. Eine große Zahl guter Abbildungen erleichtert das Verständnis.“

*Deutsche Bergwerks-Zeitung | Techn. Blätter v. 26.11.1939.*

*Ein ausführlicher Prospekt steht kostenlos zur Verfügung.*

**WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 35**

---

---

# Handbuch der neuzeitlichen Wehrwissenschaften

Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Gesellschaft für Wehrpolitik und Wehrwissenschaften und unter Mitarbeit zahlreicher Sachverständiger von  
**HERMANN FRANKE**, Generalmajor z. V.

4 Bände. Lexikon-Oktav.

*Bisher sind erschienen:*

1. **B a n d:** Wehrpolitik und Kriegführung. Mit 81 farbigen und schwarzen Tafeln und 147 Skizzen im Text. XIII, 749 Seiten. 1936.

2. **B a n d:** Das Heer. XII, 804 Seiten. 1937.

Subskriptionspreis für Band 1 und 2 bei Bezug des Gesamtwerkes gebunden je RM. 32.—, bei Einzelbezug gebunden je RM. 36.—.

3. **B a n d:** 1. Teil: Die Kriegsmarine. Mit 27 farbigen und schwarzen Tafeln und 113 Abbildungen bzw. Skizzen im Text. XII, 451 Seiten. 1938.

2. Teil: Die Luftwaffe. Mit 46 farbigen und schwarzen Tafeln und 105 Abbildungen bzw. Skizzen im Text. XII, 451 Seiten. 1938.

Subskriptionspreis für Band 3, 1. und 2. Teil bei Bezug des Gesamtwerkes geb. je RM. 27.—, bei Einzelbezug geb. je RM. 30.—.

*In Vorbereitung befindet sich:*

**B a n d 4:** Wehrwirtschaft und Wehrtechnik.

„... Insgesamt kann man von diesem ausgezeichneten, mit ungewöhnlichem Fleiß und Verständnis aufgebauten Nachschlagewerk, das alle Fragen der Wehrpolitik und Kriegführung beantwortet, nur wünschen, daß es die allerweiteste Verbreitung finden möge. Dankenswerterweise hat der Verlag eine ratenweise Bezahlung zugebilligt, so daß auch der junge Offizier und jeder kriegswissenschaftlich interessierte Leser sich das Werk beschaffen kann. Es ist dabei zu bemerken, daß der Band bei der Fülle des Inhalts, insbesondere in Ansehung der vielen kostspieligen Skizzen, als preiswert zu bezeichnen ist, da das Werk die Beschaffung vieler Bücher erübrigt.“

*General d. Inf. Wetsell im Militär-Wochenblatt Nr. 37, 1936.*

Das Werk wird durch Ergänzungshefte vor dem Veralten geschützt.

**WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 35**

2-32

20,00

S-96

7.62

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301598

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296057