

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

inw. ....

~~369~~

878

Geisteswelt

A. Schan  
Statik

Zweite Auflage



B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

## Die Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“

nunmehr über 700 Bändchen umfassend, dient seit ihrem Entstehen (1898) den Gedanken, auf denen die heute sich so mächtig entwickelnde Volkshochschulbewegung beruht. Sie will jedem geistig Mündigen die Möglichkeit schaffen, sich ohne besondere Vorkenntnisse an sicherster Quelle, wie sie die Darstellung durch berufene Vertreter der Wissenschaft bietet, über jedes Gebiet der Wissenschaft, Kunst und Technik zu unterrichten. Sie will ihn dabei zugleich unmittelbar im Berufsfördern, den Gesichtskreis erweiternd, die Einsicht in die Bedingungen der Berufsarbeit vertiefend.

Sie bietet wirkliche „Einführungen“ in die Hauptwissensgebiete für den Unterricht oder Selbstunterricht des Laien nach den heutigen methodischen Anforderungen. Diesem Bedürfnis können Skizzen im Charakter von „Auszügen“ aus großen Lehrbüchern nie entsprechen, denn solche sehen eine Vertrautheit mit dem Stoffe schon voraus.

Sie bietet aber auch dem Fachmann eine rasche zuverlässige Übersicht über die sich heute von Tag zu Tag weitenden Gebiete des geistigen Lebens in weitestem Umfang und vermag so vor allem auch dem immer stärker werdenden Bedürfnis des Forschers zu dienen, sich auf den Nachbargebieten auf dem laufenden zu erhalten.

In den Dienst dieser Aufgabe haben sich darum auch in dankenswerter Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, gern die Gelegenheit benutzend, sich an weiteste Kreise zu wenden, an ihrem Teil bestrebt, an der „Sozialisierung“ unserer Kultur mitzuarbeiten.

So konnte der Sammlung auch der Erfolg nicht fehlen. Mehr als die Hälfte der Bändchen liegen, bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet, bereits in 2. bis 7. Auflage vor, insgesamt hat die Sammlung bis jetzt eine Verbreitung von fast 5 Millionen Exemplaren gefunden.

Alles in allem sind die schmucken, gehaltvollen Bände besonders geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen kleinen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden. Durch den billigen Preis ermöglichen sie es tatsächlich jedem, auch dem wenig Begüterten, sich eine Bücherei zu schaffen, die mit der „Aus Natur und Geisteswelt“ vereinigt.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000296013

Leipzig, in

en  
ich

J. Teubner

# Bisher sind erschienen zur Technik und mechanischen Industrie:

## Geschichte und Grundlagen der Technik.

Am tausenden Webstuhl der Zeit. Übersicht über die Wirkungen der Naturwissenschaft und Technik auf das gesamte Kulturleben. Von Geh. Reg.-Kat Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 3 Abbildungen. (Bd. 23.)

Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Von Geh. Reg.-Kat M. Geitel. Mit 32 Abbildungen. (Bd. 28.)

Einführung in die Technik. Von Geh. Reg.-Kat Prof. Dr. S. Lorenz. Mit 77 Abb. im Text. (Bd. 729.)

## Mechanik.

Mechanik. Von Prof. Dr. S. Hamel. I. Grundbegriffe der Mechanik. Mit 38 Figuren. \*II. Mechanik der festen Körper. \*III. Mechanik der flüssigen u. luftförmigen Körper. (Bd. 684/86.)

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Für den Schul- und Selbstunterricht. Von Prof. N. Schmitt. I. Bewegungslehre. Statik. 2. Aufl. Mit Aufgaben, Lösungen und zahlreichen Figuren im Text. II. Dynamik. 140 Aufgaben u. Lösungen mit zahlreichen Figuren im Text. III. Festigkeitslehre. (Bd. 557/559.)

Statik. Von Baugewerkschuldirektor Reg.-Baumeister A. Schau. 2. Auflage. Mit 112 Figuren. (Bd. 828.)

Festigkeitslehre. Von Baugewerkschuldirektor Reg.-Baumeister A. Schau. 2. Auflage. Mit 119 Figuren. (Bd. 829.)

Einführung in die technische Wärmelehre (Thermodynamik). Von Geh. Bergrat Prof. N. Vater. 2. erweiterte Auflage bearbeitet von Privatdozent Dr. S. Schmidt. Mit 46 Abbildungen im Text. (Bd. 516.)

Praktische Thermodynamik. Aufgaben und Beispiele zur technischen Wärmelehre. Von Geh. Bergrat Prof. N. Vater. Mit 40 Abb. im Text u. 3 Tafeln. (Bd. 596.)

Das Perpetuum mobile. Von Dr. Fr. Schat. Mit 38 Abb. (Bd. 462.)

## Bergbau, Hüttenwesen und mechanische Technologie.

Unsere Kohlen. Von Bergassessor P. Kutuk. 2. verb. Aufl. Mit 49 Abbildungen im Text und 1 Tafel. (Bd. 396.)

\*Metallurgie. Von Dr.-Ing. Nügel. I. Leicht- u. Edelmetalle. II. Schwermetalle. (Bd. 446/47.)

\*Metallbearbeitung. Von Ing. Dir. D. Stolzenberg. Bd. I: Rohstoffe des Maschinenbaus. Bd. II: Arbeiten des Maschinenbauers. (Bd. 671/72.)

Das Eisenhüttenwesen. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. S. Wedding. 6. Aufl. von Bergassessor S. W. Wedding. Mit 22 Abb. (Bd. 20.)

Maschinenelemente. Von Geh. Bergrat Prof. N. Vater. 3. Aufl. Mit 175 Abb. (Bd. 301.)

Hebezeuge. Hilfsmittel zum Heben fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Von Geh. Bergrat Prof. N. Vater. 2. Aufl. Mit 67 Abb. im Text. (Bd. 196.)

\*Sördereinrichtungen. Von Oberingenieur D. Bechstein. (Bd. 726.)

Das Holz, seine Verarbeitung u. seine Verwendung. Von J. Grossmann, Inspektor der Lehrwerkstätten für Holzbearbeitung in München. Mit 39 Originalabb. im Text. (Bd. 473.)

Die Spinnererei. Von Direktor Prof. M. Lehmann. Mit 35 Abbildungen. (Bd. 338.)

Die Rälle, ihr Wesen, ihre Erzeugung und Verwertung. Von Dr. S. Alt. Mit 45 Abbildungen. (Bd. 311.)

## Maschinenlehre.

Industrie-Feuerungsanlagen und Dampfkessel. V. Ing. J. E. Mayer. Mit 88 Abb. (Bd. 348.)

Die Dampfmaschine. Von Geh. Bergrat Prof. N. Vater. 2 Bde. I. Bd.: Wirkungsweise des Dampfes in Kessel und Maschine. 4. Aufl. Mit 37 Abb. II. Bd.: Ihre Gestaltung und ihre Verwendung. 3. Aufl. Von Privatdozent Dr. S. Schmidt. Mit 94 Abb. (Bd. 393/94.)

Die neueren Wärmekraftmaschinen. Von Geh. Bergrat Prof. N. Vater. 2 Bände. I. Bd.: Einführung in die Theorie und den Bau der Gasmaschinen. 5. Aufl. Mit 41 Abb. (Bd. 21.) II. Bd.: Gase-, Großgas-, Gas- u. Dampfsturk. 4. Aufl. Mit 43 Abb. (Bd. 86.)

\*Elektrische Maschinen. Von Dipl.-Ing. M. Eiwisch. (Bd. 774.)

\*Wasserkraftanlagen und -maschinen. Von Dr.-Ing. S. Sawaczek. (Bd. 732.)

\*Verkeugmaschinen. Von Dipl.-Ing. E. Preger. (Bd. 699.)

Landwirtschaftliche Maschinenkunde. Von Geh. Reg.-Kat Prof. Dr. S. Fischer. Mit 64 Abbildungen. 2. Auflage. (Bd. 316.)

## **Elektrotechnik.**

- Grundlagen der Elektrotechnik.** Von Obering. A. Kottb. 3. Aufl. Mit 70 Abb. (Bd. 391.)  
**Die elektrische Kraftübertragung.** Von Ing. P. Köhn. 2. Aufl. Mit 133 Abb. (Bd. 424.)  
**Drähte und Kabel, ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik.** Von Oberpostinsp. S. Vrid. 2. Aufl. Mit 43 Abb. (Bd. 285.)  
**Die Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung.** Von Oberpost-Inspr. S. Vrid. 2. Aufl. Mit 65 Abb. (Bd. 235.)  
**Das Telegraphen- und Fernsprechwesen.** 2. Aufl. Von Oberpostrat Otto Sieblist. (Bd. 183.)  
**Die Funkentelegraphie.** Von Telegr.-Dir. S. Thurn. 5. Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 167.)

## **Hausbau und -einrichtung.**

- Der Eisenbetonbau.** Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. 2. Aufl. Mit 62 Abbildungen im Text sowie 8 Rechnungsbeispielen. (Bd. 275.)  
**Beleuchtungswesen.** Von Ing. Dr. S. Lux. M. 54 Abb. (Bd. 433.)

## **Verkehrstechnik.**

- Das Eisenbahnwesen.** Von Eisenbahnbaus- und Betriebsinspektor a. D. Dr.-Ing. E. Biedermann. 3., verb. Aufl. Mit 62 Abbildungen. (Bd. 144.)  
**Die Klein- und Straßenbahnen.** V. Oberlehrer A. Liebmann. M. 85 Abb. (Bd. 322.)  
**Die Luftfahrt, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung.** Von Dr. R. Nimführ. 3. Auflage von Dr. S. Guth. Mit 60 Abbildungen. (Bd. 300.)  
**Nautik.** Von Direktor Dr. J. Müller. 2. Aufl. Mit 64 Fig. im Text u. 1 Seekarte. (Bd. 255.)

## **Kriegstechnik.**

- Die Handfeuerwaffen.** Ihre Entwicklung und Technik. Von Major A. Weiss. Mit 69 Abbildungen. (Bd. 364.)  
**Unsere Kriegsschiffe.** Ihre Entstehung und Verwendung. Von Geh. Marinebaurat a. D. E. Krieger. 2. Aufl. von Marinebaurat Friedr. Schürer. Mit 62 Abb. (Bd. 369.)

## **Graphische und Fein-Industrie.**

- Wie ein Buch entsteht.** Von Professor A. W. Unger. 5. Aufl. Mit Tafeln und Abbildungen im Text. (Bd. 175.)  
**Die Schmucksteine und die Schmuckstein-Industrie.** Von Dr. A. Eppler. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 376.)  
**Die Uhr.** Grundlagen und Technik der Zeitmessung. Von Prof. Dr.-Ing. S. Bod. 2., umgearbeitete Auflage. Mit 55 Abbildungen im Text. (Bd. 216.)  
**Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen.** Von Reg.-Nat. Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abbildungen im Text. (Bd. 490.)

## **Zeichnen.**

- Der Weg zur Zeichenkunst.** Von Dir. Dr. E. Weber. 3. Aufl. Mit 84 Abbildungen und 1 Farbtafel. (Bd. 430.)  
**Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen.** V. Prof. Dr. A. Doeblemann. 2., verb. Aufl. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bd. 510.)  
**Geometrisches Zeichnen.** Von akad. Zeichenlehrer A. Schudeitsch. Mit 172 Abb. im Text und auf 12 Tafeln. (Bd. 568.)  
**\*Technisches Zeichnen.** Von Reg.- u. Gewerbeschulrat Prof. A. Horstmann. (Bd. 546.)  
**Projektionslehre.** Die rechtwinkl. Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung techn. Gebilde nebst Anhang über die schiefwinkl. Parallelprojektion in kurzer leichtfaßlicher Darstell. f. Selbstunterricht. u. Schulgebr. Von akad. Zeichenl. A. Schudeitsch. M. 164 Fig. i. Text. (Bd. 564.)  
**Maße und Messen.** Von Dr. W. Bloch. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

Die mit \* bezeichneten und weitere Bände befinden sich in Vorbereitung.

T 369

Aus Natur und Geisteswelt  
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

---

828. Band

# Statik

Von

Regierungsbaumeister A. Schau

Gewerbeschulrat und Direktor der staatl. Vaugewerkschule in Essen

Zweite Auflage

Mit 112 Figuren im Text



Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1921

By/41



I-3015 A7

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKOW

~~I 369~~

Schutzformel für die Vereinigten Staaten von Amerika:  
Copyright 1921 by B. G. Teubner in Leipzig

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten

Akc. Nr.

~~357~~ 150

BPK-10-P7 1827

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite		Seite
A. Einleitung . . . . .	5	V. Anwendung auf einfache	
I. Allgemeines . . . . .	5	Stabkonstruktionen . . . . .	29
II. Die wichtigsten physikalischen Grundgesetze . . . . .	8	a) Allgemeines. Knotenpunkte . . . . .	29
a) Das Gesetz der Trägheit . . . . .	8	b) Konsolträger . . . . .	30
b) Das Gesetz der Gegenwirkung . . . . .	8	c) Das einfache Hängewerk . . . . .	32
III. Rechnerisches und zeichnerisches Verfahren bei Untersuchung von Baukonstruktionen . . . . .	9	d) Der doppelt armierte Träger . . . . .	33
B. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht von Kräften . . . . .	9	VI. Das statische Moment der Kräfte. Momentensatz . . . . .	34
I. Allgemeines . . . . .	9	a) Der Begriff des statischen Momentes . . . . .	34
a) Die Bestimmungsteile einer Kraft. Einzelkräfte . . . . .	9	b) Bestimmung d. Lage d. Mittelkraft einer Kräftegruppe auf rechnerischem Wege. Anwendung d. Momentensatzes . . . . .	36
b) Mittelkraft und Seitenkräfte . . . . .	10	c) Besondere Fälle . . . . .	39
c) Gleichgewicht der Kräfte . . . . .	11	d) Standsicherheit . . . . .	40
II. Kräfte, welche in derselben Geraden wirken . . . . .	11	VII. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	42
III. Kräfte verschiedener Richtung mit gemeinsamem Angriffspunkt . . . . .	14	a) Rechnerische Bedingungen . . . . .	42
a) Zwei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt . . . . .	14	b) Zeichnerische Bedingungen . . . . .	43
b) Beliebige viele Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt . . . . .	18	C. Die Anwendung der statischen Gesetze auf die Baukonstruktionen . . . . .	43
IV. Kräfte verschiedener Richtung mit verschiedenen Angriffspunkten . . . . .	20	I. Allgemeines über Träger und deren Auflagerung . . . . .	43
a) Die Kraftrichtungen schneiden sich . . . . .	20	II. Die Bestimmung der Auflagerdrücke, des Biegemomentes und der Querkräfte eines Trägers auf zwei Stützen mit einer oder mehreren Einzellasten . . . . .	46
b) Die Kraftrichtungen schneiden sich nicht (parallele Kräfte) . . . . .	25	III. Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßiger Belastung . . . . .	57
		IV. Träger auf zwei Stützen mit Streckenlasten . . . . .	61

	Seite		Seite
V. Träger auf zwei Stützen mit gemischter Belastung . . . . .	61	2. Unbelastete Gewölbe . . . . .	83
VI. Berechnung einfacher Balkenträger unter dem Einflusse beweglicher Lasten . . . . .	65	3. Gewölbe mit Überschüttung . . . . .	87
1. Einflußlinien für unmittelbare Belastung . . . . .	66	4. Gewölbe mit Überschüttung und Belastung . . . . .	88
a) Es wirken Einzellasten . . . . .	66	5. Unsymmetrisch belastete Gewölbe . . . . .	90
b) Es wirkt eine gleichmäßig verteilte Belastung . . . . .	67	6. Untersuchung von Gewölbepeilern . . . . .	92
2. Einflußlinien für mittelbare Belastungen . . . . .	69	7. Untersuchung der Widerlager . . . . .	94
3. Die Einflußlinien für die äußeren Kraftwirkungen . . . . .	70	X. Die Berechnung größerer Dachkonstruktionen . . . . .	95
a) Die Einflußlinie des Stützenwiderstandes . . . . .	70	1. Allgemeines . . . . .	95
b) Die Einflußlinie für die Querkraft . . . . .	70	2. Ermittlung der Spannkraften und Querschnitte . . . . .	96
c) Die Einflußlinie für das Moment . . . . .	72	XI. Der Erddruck . . . . .	101
4. Anwendungen . . . . .	74	1. Allgemeines . . . . .	101
VII. Durchgehende (kontinuierliche) Träger . . . . .	79	2. Die Ermittlung der Größe des Erddrucks . . . . .	102
VIII. Anwendungen auf einfache Maschinen . . . . .	80	XII. Der Wasserdruck . . . . .	105
IX. Untersuchung von Gewölben und Widerlagern . . . . .	82	1. Wasserdruck bei lotrechter Rückwand . . . . .	105
1. Allgemeines . . . . .	82	2. Wasserdruck bei geneigter Rückwand . . . . .	106
		3. Wasserdruck bei gebrochener Rückwand . . . . .	106
		4. Beispiel . . . . .	107



## A. Einleitung.

### I. Allgemeines.

Überall in der Natur, im täglichen Leben, vor allem aber in sämtlichen Zweigen der Technik begegnen wir Erscheinungen, deren Ursachen unserem Auge häufig verborgen sind.

So bieten uns z. B. die Bewegungen der Erde um ihre Achse, bzw. um die Sonne, wie überhaupt die Bewegungen der Gestirne geheimnisvolle Vorgänge, welche z. T. überhaupt nicht unmittelbar wahrgenommen werden können, deren Vorhandensein aber aus anderen Erscheinungen geschlossen werden muß. Oft werden Änderungen in der Form oder in der Bewegung eines Gegenstandes beobachtet, ohne daß man bemerkt, welche Ursache dafür vorhanden ist. Die Ursache irgendeiner solchen Änderung oder irgendeiner Erscheinung nennen wir Kraft.

Schon an unserem eigenen Körper können wir entsprechende Beobachtungen machen. Gehen wir z. B. mit einer Last einen Berg hinan, so beugen wir uns nach vorn, bergab dagegen nach hinten. Wir können hieraus Schlüsse ziehen auf die Wirkung der Schwere unseres Körpers und die Notwendigkeit einer anderen Unterstützung seines Schwerpunktes als der, die beim Gehen auf ebener Erde vorhanden ist. Heben wir einen schweren Gegenstand, so tun wir dies nicht mit gestrecktem Arm, sondern wir ziehen den Arm an. Bei gestrecktem Arme würde ihn die Last leichter herabziehen, d. h. er würde sich um unser Schultergelenk drehen, und zwar um so leichter, je größer die Last ist. Die Ursache dieser Erscheinung ist ein wichtiges statisches Gesetz, welches wir immer wieder anzuwenden haben, nämlich das Gesetz vom statischen Moment, d. h. dem Produkte aus Kraft und Hebelarm. Wir erkennen dabei, daß ein Drehbestreben eintritt, welches um so größer ist, je größer die angreifende Kraft und je größer der Hebelarm ist.

Soll — um ein weiteres Beispiel unmittelbar aus der Technik anzuführen — zwischen den beiden Ufern eines Wasserlaufes eine Verbindung hergestellt werden, so genügt im einfachsten Falle hierfür

ein Brett. Gehen wir über dieses, so bemerken wir, daß es sich durchbiegt, und zwar am stärksten, wenn wir uns in der Mitte befinden. Wir können hieran den Einfluß einer beweglichen Last (in diesem Falle unseres Gewichtes) auf einen Träger auf zwei Endstützen verfolgen, und erkennen weiter, daß bei Einwirkung einer Einzellast unter dieser das Brett am leichtesten brechen würde, daß also hier der gefährdetste Querschnitt liegt. Bei größerer Breite des Wasserlaufes würde das Brett allein nicht mehr genügen, es müßte daher durch Pfosten (Pfeiler) unterstützt werden, oder, falls dies nicht angängig wäre, durch Anwendung schräger, in den Ufern unterstützter Streben gesichert werden. Im letzteren Falle gelangen wir zur Anwendung einer Sprengwerkskonstruktion. Bei weiterer Verfolgung dieses Gedankens würden wir zu größeren Brückenkonstruktionen kommen.

Bei allen derartigen Bauwerken erkennen wir als Kräfte, welche das Bauwerk beanspruchen und bei ungenügender Konstruktion seine Zerstörung herbeiführen, neben dem Eigengewicht des Bauwerkes die Verkehrslast, also das Gewicht von Menschen, Tieren, Fahrzeugen aller Art und dgl., welche sich über die Brücke bewegen.

Doch gibt es auch noch andere Kräfte. Wir sehen, wie sich der Baum unter dem Winde biegt; wir beobachten, daß er beim Brechen stets in der Nähe der Wurzel knickt. Hier liegt also offenbar die gefährlichste Stelle, weshalb auch die Natur den Baum hier am stärksten gestaltet hat. Wir können hieraus die Nutzenanwendung auf den an einer Seite eingespannten Freitträger ziehen und gleichzeitig darauf schließen, welchen Einfluß die Kraft des Windes auf hochragende Bauwerke, besonders auf Schornsteine, sowie auf steile Dächer, freistehende Mauern und dgl. hat.

Nimmt es da Wunder, wenn der Mensch bei der Beobachtung der Wirkungen der Kräfte in der Natur angespornt wurde, diese Kräfte näher zu studieren und seinen Diensten nutzbar zu machen, oder da, wo sie nachteilige Wirkungen ausüben, sie unschädlich zu machen oder wenigstens ihre üblen Folgen zu beseitigen?

Aus dem bisherigen erhellt die ganz besondere Wichtigkeit des Studiums der Kräfte für die Technik. In deren sämtlichen Zweigen spielen sie eine hervorragende Rolle. Jede technische Konstruktion muß so beschaffen sein, daß sie imstande ist, die Wirkungen der Kräfte, welche sie beanspruchen, sicher aufzunehmen, so daß jede Änderung oder gar eine Zerstörung der Konstruktion ausgeschlossen ist.

Die oberste Bedingung für die Sicherheit einer technischen Konstruktion ist das Vorhandensein des Gleichgewichtes aller auf die Konstruktion einwirkenden Kräfte. Wir nennen die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte Statik. Eine weitere Lehre bildet die Dynamik, d. h. die Lehre von der Bewegung, auf welche in nachstehendem jedoch nicht eingegangen wird. Statik und Dynamik führen zusammen den Namen Mechanik.

Der Zweck der Statik ist daher die Untersuchung technischer Konstruktionen, bzw. einzelner ihrer Teile auf ihre Standsicherheit hin, welche dann gewährleistet ist, wenn Änderungen der Lage, der Gestalt und des Zusammenhanges der ganzen Konstruktion oder ihrer einzelnen Teile ausgeschlossen sind. Von ganz besonderer Wichtigkeit ist die Statik für die Konstruktionen des Hoch- und Tiefbaues; für das Gebiet des Maschinenbaus kommen für die ruhenden Teile die gleichen statischen Gesetze in Frage.

Die wichtigsten für die letztgenannten Konstruktionen in Betracht kommenden Kräfte sind die Anziehungskraft der Erde (Schwerkraft), der Druck von Belastungen, welche ein Bauwerk erfährt oder selbst ausübt, der Druck von Erde, Wasser, Wind und Schnee. Die Schwerkraft verursacht die Bewegung aller ihrer Unterstüzung beraubten Körper nach dem Mittelpunkte der Erde hin. Sie wirkt ständig; aber auch von den anderen genannten Kräften wirken in der Regel mehrere gleichzeitig von außen auf ein Bauwerk ein. Man bezeichnet alle diese Kräfte als äußere oder angreifende Kräfte.

Heben sich die äußeren Kräfte in ihren Wirkungen gegenseitig auf, so befindet sich das Bauwerk, auf welches sie einwirken, im Zustande der Ruhe oder des Gleichgewichtes, womit nach obigem seine Standsicherheit gewährleistet ist. Doch ist damit sein dauernder Bestand noch nicht gesichert. Die äußeren Kräfte suchen nämlich eine Verschiebung der einzelnen Massenteilchen des Baukörpers herbeizuführen, welcher die Zusammenhangskraft (Kohäsion) desselben einen gewissen Widerstand entgegensetzt. Dadurch werden im Innern des Körpers Kraftwirkungen erzeugt, welche man innere (widerstehende) Kräfte oder Spannungen nennt. Sie dürfen eine gewisse Größe nicht überschreiten, wenn der Zusammenhang des Baukörpers und damit seine Dauer gewahrt bleiben soll. Die Ermittlung der inneren Kräfte und die Bestimmung der hiervon abhängigen Größenabmessungen eines Bauwerkes bilden einen besonderen Zweig der

Statik, welcher in einem zweiten, sich diesem anschließenden Bändchen, der Festigkeitslehre, behandelt wird.

## II. Die wichtigsten physikalischen Grundgesetze.

a) **Das Gesetz der Trägheit.** Sigt man in einem Eisenbahnzuge, so erhält man bei dessen Anfahren einen Stoß nach rückwärts, beim Anhalten eines fahrenden Zuges dagegen einen Stoß nach vorwärts. Beim Abspringen von einem Straßenbahnwagen muß man, wenn man einen Fall vermeiden will, in der Richtung des fahrenden Wagens abspringen. Man sucht also in jedem Falle diejenige Lage beizubehalten, die man einmal hatte, und zwar im ersten Falle im Zustande der Ruhe, in den beiden anderen Fällen dagegen in dem Zustande der Bewegung zu verharren und wird erst durch die Einwirkung einer äußeren Kraft aus diesen Zuständen in die der Bewegung, bzw. der Ruhe übergeführt. Aus diesen Beispielen läßt sich das wichtige Gesetz der Trägheit oder des Beharrungsvermögens erkennen, welches lautet:

Jeder Körper sucht in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung zu verharren, in welchem er sich gerade befindet, solange nicht äußere Kräfte eine Änderung dieses Zustandes herbeiführen.

Eine Kugel müßte z. B. auf ebener Unterlage, einmal in Bewegung versetzt, immer weiter in der eingeschlagenen Richtung rollen, wenn nicht die Reibung auf dieser Unterlage und der Luftwiderstand als äußere Kräfte ihre Bewegung verlangsamen und sie schließlich zum Stillstande bringen würden. — Auch die Bewegungen der Gestirne beruhen auf dem Gesetze der Trägheit.

b) **Das Gesetz der Gegenwirkung.** Schlägt man mit einer Hand auf die andere, so spürt man, daß nicht nur die geschlagene Hand einen Druck erhält, sondern auch die schlagende einen gleich großen. Ziehe man eine Last vorwärts, so wird man gleichzeitig mit gleicher Kraft zu der Last hingezogen. Aus diesen Beispielen erkennt man ein weiteres, wichtiges Naturgesetz, das Gesetz der Gegenwirkung. Es lautet:

Die Kräfte treten in der Natur nie einzeln auf, sondern jede Kraft ruft eine Gegenkraft hervor, welche in derselben Geraden wirkt und gleiche Größe, aber entgegengesetzten Wirkungssinn hat.

### III. Rechnerisches und zeichnerisches Verfahren bei Untersuchung von Baukonstruktionen.

Die Untersuchung eines Bauwerkes kann auf rechnerischem oder zeichnerischem (graphischem) Wege erfolgen. Das rechnerische Verfahren ist genauer, aber meist umständlicher und daher zeitraubender, das zeichnerische in der Regel einfacher und übersichtlicher, aber etwas weniger genau, ein Nachteil, der jedoch häufig nicht ins Gewicht fällt. Derjenige Zweig der Statik, welcher die zeichnerische Lösung von Aufgaben umfaßt, heißt Graphostatik oder graphische Statik.

## B. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht von Kräften.

### I. Allgemeines.

a) **Die Bestimmungsteile einer Kraft. Einzelkräfte.** Die Kräfte unterscheidet man in bewegende (angreifende) Kräfte, wenn sie eine Bewegung oder eine Bewegungsänderung eines Körpers hervorrufen, und widerstehende Kräfte (Widerstände), wenn sie eine Bewegung verhindern, verringern oder aufheben. Bewegende Kräfte sind demnach u. a. die Schwerkraft, die Spannkraft des Dampfes, der Gase, die elektrische Kraft, die Muskelkraft von Menschen und Tieren, Widerstände dagegen die Reibung, der Luftwiderstand, die Festigkeit der Baustoffe. Widerstände wirken in der Regel nur solange, als die Bewegung oder die äußere Kraftwirkung, durch die sie hervorgerufen werden, andauert.

Um die Wirkung einer Kraft genau festlegen zu können, müssen folgende vier Bestimmungsteile bekannt sein:

1. Die Richtung der Kraft, d. h. diejenige Gerade (Wirkungslinie), in welcher die Kraft wirkt und in der der Körper durch sie fortbewegt würde.

2. Der Angriffspunkt der Kraft, d. h. derjenige Punkt der Wirkungslinie, in welchem die Kraft von außen her auf den Körper trifft (Kennlichmachung durch kleinen Kreis). In ihm kann man die Kraft wirkend annehmen. Der Angriffspunkt kann in der Richtung der Kraft beliebig verschoben werden, ohne daß die Wirkung der

Kraft geändert würde. So ist z. B. die Dampfkraft einer Lokomotive am Zuge dieselbe, gleichviel ob sie den Zug zieht oder schiebt.

3. Der Sinn der Kraft, d. h. die Angabe, ob die Kraft in dem gleichen Abschnitt der Wirkungslinie von dem Angriffspunkt weg oder auf ihn zu gerichtet ist. Beim zeichnerischen Verfahren erfolgt diese Angabe durch einen Pfeil auf der Wirkungslinie, beim rechnerischen durch das Vorzeichen + oder -.

4. Die Größe der Kraft. Die Wirkung jeder Kraft kann durch ein Gewicht dargestellt werden. Als Krafteinheit zur Bestimmung der Größe einer Kraft dient dementsprechend auch die Gewichtseinheit, also das Kilogramm (kg). Bei sehr großen Kräften, wie sie namentlich im Gebiete des Tiefbaues vorkommen, wählt man als Krafteinheit die Tonne ( $t = 1000 \text{ kg}$ .)

Zeichnerisch wird eine Kraft durch eine Strecke dargestellt. Hat man mehrere Kräfte darzustellen, so sind die sie darstellenden Strecken der Größe der Kräfte proportional. Zur Messung dient ein Kräftemaßstab z. B.  $1 \text{ cm} = 100 \text{ kg}$ ,  $1 \text{ cm} = 5 \text{ t}$ .

Eine Strecke von 5 cm würde darnach bei Wahl eines Kräftemaßstabes von  $1 \text{ cm} = 1000 \text{ kg}$  eine Kraft von 5000 kg darstellen.

Welchen Maßstab man wählt, ist an sich gleichgültig, doch empfiehlt es sich, bei kleinen Kräften eine große Längeneinheit, bei großen Kräften eine kleine Längeneinheit für die Kräfte zugrunde zu legen.

Voraussetzung für alle in folgendem vorkommenden Untersuchungen ist, daß die auftretenden Kräfte nicht im Raume, sondern in einer Ebene wirken, welche mit der Zeichenebene zusammenfällt.

b) **Mittelkraft und Seitenkräfte.** Ein Wagen kann durch zwei Pferde fortbewegt werden, gegebenenfalls genügt aber auch ein Pferd, welches natürlich eine ebenso große Kraft aufwenden müßte, wie die beiden Pferde zusammen. Was für die hier auftretenden Zugkräfte der Pferde gilt, hat auch für alle anderen Kräfte Geltung.

Wirken also auf einen Körper mehrere Kräfte ein, so können diese durch eine einzige Kraft von gleicher Wirkung ersetzt werden. Man nennt diese Ersatzkraft die Mittelkraft, Resultierende oder Resultante; die Einzelkräfte, welche durch die Mittelkraft ersetzt werden, nennt man Seitenkräfte oder Komponenten. Die Mittelkraft hat also die gleiche statische Wirkung wie die Gruppe der Einzelkräfte. Die Bestimmung der Mittelkraft mit Hilfe der Einzelkräfte nennt man die Zusammensetzung von Kräften. Umgekehrt wird aber auch oft

die Aufgabe gestellt, aus einer gegebenen Kraft als Mittelkraft die Seitenkräfte zu bestimmen, welche dieselbe Wirkung wie die Mittelkraft hervorrufen. Die Lösung einer solchen Aufgabe nennt man Zerlegung der Kräfte.

c) Gleichgewicht der Kräfte. Heben sich alle auf einen Körper wirkenden Kräften in ihren Wirkungen gegenseitig auf, so befindet sich der Körper im Zustande des Gleichgewichtes. Die Mittelkraft hat dann natürlich den Wert Null, da bei jedem anderen Werte eine Bewegung des Körpers eintreten müßte.

## II. Kräfte, welche in derselben Geraden wirken.

Wirken zwei Kräfte gleichen Sinnes in derselben Geraden, so ist ihre Mittelkraft gleich ihrer Summe. Bei der zeichnerischen Darstellung reißt man die beiden Kraftstrecken in ihrem Sinne aneinander an, so daß der Endpunkt der einen Kraft der Anfangspunkt der zweiten wird. Die Reihenfolge ist dabei beliebig. Die Mittelkraft  $R$  ist dann durch die Strecke vom Anfangspunkt  $A$  der ersten bis zum Endpunkt  $E$  der zweiten Kraft gegeben (Fig. 1).

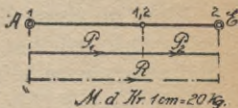


Fig. 1.

Beispiel. Für die gegebenen Kräfte  $P_1 = 30$  kg und  $P_2 = 20$  kg, welche gleiche Richtung und gleichen Sinn haben, wird die Mittelkraft  $R = P_1 + P_2 = 30 + 20 = 50$  kg. Im Kräftemaßstab 1 cm = 20 kg, ist  $P_1 = 1,5$  cm und in ihrem Endpunkte  $P_2 = 1,0$  cm aufzutragen. Dann wird die Strecke  $AE = 2,5$  cm =  $2,5 \cdot 20 = 50$  kg =  $R$  (Fig. 1).

Anwendung. Bei einer Zweifachexpansionsmaschine (Tandemaschine) wirkte auf den Kolben des Hochdruckzylinders  $H$  eine Kraft  $P_1 = 4600$  kg, auf den Niederdruckkolben  $N$  eine Kraft  $P_2 = 2500$  kg (Fig. 2). Die gesamte Antriebskraft (Mittelkraft) ist  $R = P_1 + P_2 = 4600 + 2500 = 7100$  kg.

Wirkt nun eine beliebige Anzahl von Kräften gleichen Sinnes in derselben Geraden, so kann man zunächst zwei derselben in der eben geschilderten Weise zu ihrer Mittelkraft  $R$  zusammensetzen, diese Mittelkraft mit der nächsten Einzelkraft zu einer neuen Mittelkraft  $R_2$  und

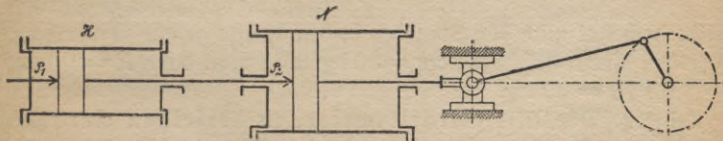
 $R = P_1 + P_2$ 

Fig. 2.

so fort, bis man schließlich als Mittelkraft sämtlicher Einzelkräfte die Summe aller Einzelkräfte erhält. Die zeichnerische Lösung erhält man, indem man jedesmal den Endpunkt einer Kraft zum Anfangspunkt der nächsten macht. Als Mittelkraft ergibt sich dann die Gesamtstrecke vom Anfangspunkt  $A$  der ersten bis zum Endpunkt  $E$  der letzten Kraft.

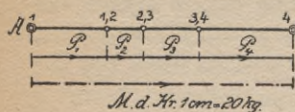


Fig. 3.

**Beispiel.** Gegeben die Kräfte  $P_1 = 20 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 10 \text{ kg}$ ,  $P_3 = 15 \text{ kg}$ ,  $P_4 = 25 \text{ kg}$ . Es wird  $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 20 + 10 + 15 + 25 = 70 \text{ kg}$ . Fig. 3 zeigt die zeichnerische Lösung für den Kräftemaßstab  $1 \text{ cm} = 20 \text{ kg}$ . Die Strecke  $AE$ , welche sich aus den Einzelstrecken  $P_1 = 1,0 \text{ cm}$ ,  $P_2 = 0,5 \text{ cm}$ ,  $P_3 = 0,75 \text{ cm}$ ,  $P_4 = 1,25 \text{ cm}$  zusammensetzt, mißt  $3,5 \text{ cm}$ , also ist  $R = 3,5 \cdot 20 = 70 \text{ kg}$ .

Aus diesen Beispielen folgt der Lehrsatz: Die Mittelkraft beliebig vieler Kräfte, welche in derselben Geraden wirken und gleichen Sinn haben, ist gleich der Summe der Kräfte.

Wirkt an einem Körper eine Zugkraft  $P_1 = + 50 \text{ kg}$  und im Angriffspunkt derselben noch eine zweite Zugkraft  $P_2 = - 20 \text{ kg}$ , welche also zwar in derselben Geraden wirkt, aber entgegengesetzten Sinn hat, so leuchtet ohne weiteres ein, daß eine Bewegung des Körpers wohl in der Richtung der größeren Kraft erfolgt, aber nur so, als ob eine Kraft von  $30 \text{ kg}$  wirken würde, da offenbar ein Teil in Höhe von  $20 \text{ kg}$  durch die kleinere Zugkraft aufgehoben wird. Die Mittelkraft  $R$  ergibt sich also als Unterschied der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  und es wird  $R = + P_1 - P_2 = + 50 - 20 = + 30 \text{ kg}$ . Das Vorzeichen  $+$  gibt hier an, daß die Kraftrichtung der Mittelkraft mit derjenigen der größeren Kraft zusammenfällt.

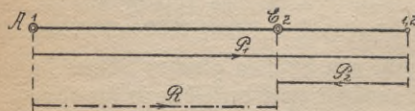


Fig. 4.

Bei der zeichnerischen Lösung (Fig. 4) trägt man die beiden Kräfte wieder so auf, daß der Anfangspunkt der einen mit dem Endpunkt der andern zusammenfällt, doch hat man den Sinn der beiden Kräfte genau zu beachten. Für den Kräftemaßstab  $1 \text{ cm} = 10 \text{ kg}$  mißt man dann  $R = 3,0 \text{ cm} = 3,0 \cdot 10 = 30 \text{ kg}$ .

**Lehrsatz.** Die Mittelkraft zweier, in derselben Geraden wirkender Kräfte entgegengesetzten Sinnes ist gleich der Differenz der beiden Kräfte.



Ist  $P_1 = P_2$ , so ist ihre Mittelkraft offenbar gleich Null und es herrscht Gleichgewicht.

Wirken beliebig viele Kräfte entgegengesetzten Sinnes in derselben Geraden, so heben sich ihre Wirkungen teilweise oder ganz auf. Ihre Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe aller dieser Kräfte, wobei man alle nach der einen Seite wirkenden Kräfte mit +, die nach der anderen Seite wirkenden mit - bezeichnet.



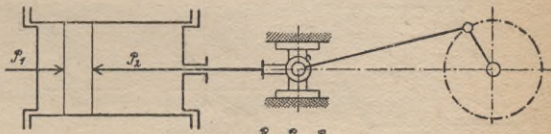
Fig. 5.

**Beispiel.** Gegeben  $P_1 = + 20$  kg,  $P_2 = + 30$  kg,  $P_3 = + 10$  kg,  $P_4 = - 15$  kg,  $P_5 = - 20$  kg. Es wird  $R = + P_1 + P_2 + P_3 - P_4 - P_5 = + 20 + 30 + 10 - 15 - 20 = + 25$  kg. Die zeichnerische Lösung zeigt Fig. 5. Sie braucht nach den bisherigen Erläuterungen wohl nicht näher erklärt zu werden.

**Anwendung.** Auf der Deckseite eines Dampfkolbens wurde durch den Dampfdruck eine Kraft  $P_1 = 3400$  kg, auf der Kurbelseite eine Kraft  $P_2 = 900$  kg erzeugt (Fig. 6). Die den Kolben treibende Mittelkraft  $R = P_1 - P_2 = 3400 - 900 = 2500$  kg.

**Zerlegung.** Soll eine Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche in derselben Wirkungsgeraden liegen, so sind offenbar unendlich viele Lösungen möglich. Eine bestimmte Lösung ist nur dann vorhanden, wenn die eine der beiden Seitenkräfte gegeben ist. — Soll eine Kraft in  $n$  Seitenkräfte zerlegt werden, so müssen  $n - 1$  Seitenkräfte nach Größe und Sinn gegeben sein.

**Gleichgewicht.** Aus dem Vorhergehenden ergibt sich für den Zustand des Gleichgewichtes:



$R = P_1 - P_2$   
Fig. 6

Zwei auf einen

Körper wirkende Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, wenn sie in derselben Geraden wirken, gleiche Größe und entgegengesetzten Sinn haben.

Beliebig viele auf einen Körper in einer Geraden wirkende Kräfte verschiedenen Sinnes sind im Gleichgewicht, wenn ihre algebraische Summe (und damit ihre Mittelkraft) gleich Null ist.

### III. Kräfte verschiedener Richtung mit gemeinsamem Angriffspunkt.

a) Zwei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. 1. Zusammenfügung. Rudert man von einem Punkte des Ufers quer über



Fig. 7.

einen Fluß, so gelangt man nicht an einem rechtwinklig gegenüberliegenden Punkte an das andere Ufer, sondern weiter flußabwärts, weil man durch die Kraft der Strömung aus der direkten Richtung abgetrieben wird. Will man aber in letzterer an das andere Ufer gelangen, so muß man mit entsprechender größerer Kraft gegen die Strömung, also flußauf rudern. In beiden Fällen wird das Boot eine Richtung einschlagen, welche mit der Diagonale des aus den beiden Bewegungsrichtungen konstruierten Parallelogrammes zusammenfällt (Fig. 7). Hieraus kann man unmittelbar die Nutzenanwendung auf die Ermittlung der Mittelkraft zweier Kräfte verschiedener Richtung mit gemeinsamem Angriffspunkt ziehen. Es ist nämlich:

Die Mittelkraft zweier durch einen Punkt gehender Kräfte nach Richtung, Größe und Sinn gleich der vom Angriffspunkt ausgehenden Diagonale desjenigen Parallelogrammes, welches man aus den gegebenen Kräften als Seiten

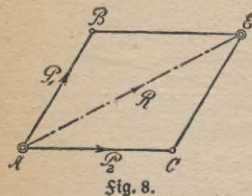


Fig. 8.

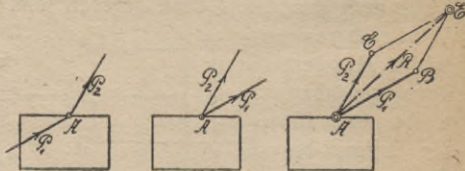


Fig. 9.

bilden kann. Der gegebene Punkt ist der Angriffspunkt der Mittelkraft, das Parallelogramm heißt Parallelogramm der Kräfte (Fig. 8).

Ist der Sinn der Kräfte nicht von vornherein vom Angriffspunkt weggerichtet, so muß man vor Zeichnung des Parallelogramms die eine der Kräfte so lange in ihrer Richtung verschieben, bis das der Fall ist (Fig. 9).

Doch man dies ohneweiters tun kann, geht z. B. daraus hervor, daß eine Lokomotive, gleichviel ob sie am Anfange oder am Ende des Zuges steht, also gleichviel ob sie zieht oder schiebt, dieselbe Wirkung hervorruft.

Da die Diagonale eines Parallelogrammes dieses in zwei kongruente Dreiecke  $ABE$  und  $ACE$  (Fig. 8) zerlegt, und in jedem dieser Dreiecke die gegebenen Seitenkräfte und die Mittelkraft vorkommen, so genügt zur Bestimmung der letzteren die Zeichnung eines dieser Dreiecke. Man nennt es Kräftedreieck.

Das Kräftedreieck wird meist in einer besonderen Figur neben dem Körper gezeichnet (Fig. 10). Man wählt wieder einen Kräftemaßstab und trägt von einem beliebig angenommenen Punkte  $A$  die Kraft  $P_1$  gleichlaufend zur gegebenen Richtung auf. Durch den Endpunkt  $B$  wird sodann eine Gleichlaufende zu  $P_2$  gezogen und auf ihr  $P_2$  von  $B$  aus derart abgetragen, daß die Pfeilrichtungen der Kräfte sich folgen. Die Verbindungslinie  $AE$  (Schlußlinie) gibt alsdann die gesuchte Mittelkraft  $R$  nach Richtung und Größe. Ihren Sinn erhält man durch Anbringung eines Pfeiles, welcher gegen die Pfeilrichtungen der gegebenen Kräfte läuft. Durch parallele Verschiebung von  $R$  nach dem Angriffspunkt erhält man auch ihre richtige Lage zum untersuchten Körper (Hauptfigur).

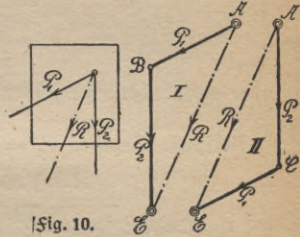


Fig. 10.

Man kann, wie das Kräftedreieck II zeigt (Fig. 10), auch mit  $P_2$  beginnen und an sie  $P_1$  antragen. Wieder wird  $R = AE$ . Die gebrochenen Linien  $ABE$  und  $ACE$  nennt man den Kräftezug und die bei Aneinanderreihung von Kräften durch die erste aufgetragene Kraft bestimmte vom Angriffspunkt weggerichtete Pfeilrichtung den Umfahrunngsinn. Die Seitenkräfte im Kräftedreieck haben mithin stets den gleichen Umfahrunngsinn, die Mittelkraft entgegen gesetzten Umfahrunngsinn.

Da das Kräftedreieck einfacher ist, so wird es häufiger angewendet als das Kräfteparallelogramm.

**Rechnerisches Verfahren.** Durch Zeichnung gelangt man in vorliegendem Falle in der Regel schneller und einfacher zum Ziele, so daß dieses Verfahren am häufigsten angewandt wird. Das rechnerische Verfahren soll daher nur für die folgenden beiden Sonderfälle gegeben werden.

A. Die Kräfte schließen einen rechten Winkel ein. Das Kräftedreieck wirkt rechtwinkelig (Fig. 11), mithin:

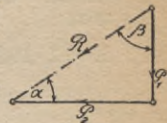


Fig. 11.

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 \quad \text{und} \quad R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

$$\text{oder: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1}{P_2} \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\frac{P_1}{R} = \sin \alpha, \quad P_1 = R \cdot \sin \alpha$$

$$R = \frac{P_1}{\sin \alpha}$$

$$\text{oder entsprechend zu finden: } R = \frac{P_2}{\cos \alpha}.$$

**Beispiel.** Gegeben  $P_1 = 30 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 40 \text{ kg}$ . Gesucht  $R$ .

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ kg}$$

$$\text{oder: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{30}{40} = 0,7500, \text{ woraus: } \alpha = 36^\circ 52'$$

$$\text{mithin: } R = \frac{30}{\sin 36^\circ 52'} = \frac{30}{0,6000} = 50 \text{ kg}$$

$$\text{oder: } R = \frac{40}{\cos 36^\circ 52'} = \frac{40}{0,8000} = 50 \text{ kg}.$$

B. Die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  sind einander gleich. Das Kräfte-dreieck wird gleichschenkelig (Fig. 12) und  $P_1 = P_2 = P$ . Zieht man  $CD \perp AE$ , so wird  $AD = \frac{R}{2}$ . Der Kraftwinkel  $\alpha$  wird durch  $AE$  halbiert, mithin ist:

$$\frac{AD}{AC} = \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ also: } AD = AC \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{oder: } \frac{R}{2} = P \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \text{ und } R = 2P \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

**Beispiel.** Gegeben  $P = 1000 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 40^\circ$ .  
Es wird:

$$R = 2 \cdot 1000 \cdot \cos \frac{40}{2} = 2000 \cdot \cos 20^\circ$$

$$R = 2000 \cdot 0,9397 = 1879 \text{ kg}.$$

Wird  $\alpha = 90^\circ$ , so wird das Kräfte-dreieck gleichschenkelig-rechtwinkelig, mithin:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 \quad \text{und da } P_1 = P_2 = P$$

$$R^2 = 2P^2, \text{ also: } R = \sqrt{2}P^2 \text{ oder: } R = P \cdot \sqrt{2}.$$

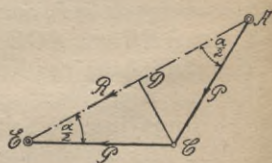


Fig. 12.

2. Zerlegung. Die Aufgabe, eine Kraft in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, läßt unendlich viele Lösungen zu. Sie wird erst dann bestimmt, wenn entweder die Richtung jeder Seitenkraft oder eine der beiden Seitenkräfte nach Größe, Richtung und Sinn gegeben ist.

a) Gegeben  $R$  und die beiden Krafrichtungen  $m$  und  $n$  der Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Die Lösung erfolgt am einfachsten mit Hilfe des Kräfte dreiecks (Fig. 13). Man trägt in einer Nebenfigur  $R$  nach Größe, Richtung und Sinn auf und zieht durch  $A$  eine Gleichlaufende zu der einen Krafrichtung, durch  $E$  eine Gleichlaufende zur anderen Krafrichtung (daher zwei Lösungen möglich). Die so gefundenen Dreiecksseiten geben nach Größe und Richtung die gesuchten Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$ , deren Umfahrunngsinn dem von  $R$  entgegengesetzt ist.

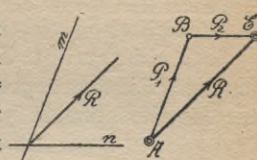


Fig. 13.

b) Gegeben ist  $R$  und eine der Seitenkräfte nach Größe, Richtung und Sinn. Man trägt in der Nebenfigur nach den gegebenen Richtungen von  $R$  und der Seitenkraft  $AE = R$  und  $AB = P_1$  auf, und verbindet  $B$  mit  $E$ , so ist  $BE$  nach Größe und Richtung die gesuchte Seitenkraft  $P_2$ .  $P_2$  hat denselben Umfahrunngsinn wie  $P_1$ , aber entgegengesetzten wie  $R$ . Die Lage von  $P_2$  wird durch Parallelverschiebung nach dem eigentlichen Angriffspunkt  $O$  gefunden.

Rechnerische Lösung. Auch hier soll nur ein Sonderfall behandelt werden, da die zeichnerische Lösung in allen anderen Fällen rascher zum Ziele führt. Sehr häufig tritt der Fall ein, daß eine Kraft in zwei zueinander senkrechte Seitenkräfte zerlegt werden soll, wobei die Seitenkräfte in der Regel senkrecht und wagerecht gerichtet sind. Bezeichnet man, wie üblich, die senkrechte (vertikale) Seitenkraft mit  $V$ , die wagerechte (horizontale) Seitenkraft mit  $H$ , so wird nach Fig. 14

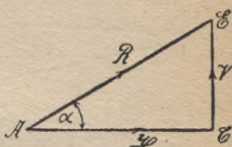


Fig. 14.

$$\frac{H}{R} = \cos \alpha, \text{ also: } H = R \cdot \cos \alpha \text{ und}$$

$$\frac{V}{R} = \sin \alpha, \text{ also: } V = R \cdot \sin \alpha.$$

Anwendungsbeispiel. Auf einen Dampfkolben wirke eine Kraft  $P = 4500 \text{ kg}$ . Diese Kraft wird auf den Kreuzkopf (Fig. 15) übertragen und von da durch die Schubstange auf die Kurbel. Es findet daher eine Zer-

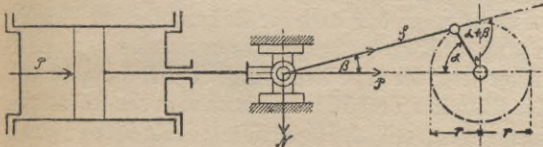


Fig. 15 a.

M. D. K. 1 cm = 2000 kg.

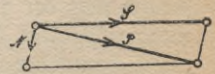


Fig. 15 b.

legung in eine Kraft  $S$  in Richtung der Schubstange statt und in eine Kraft  $N$ , die winkelrecht zur Führung gerichtet ist. Für die in Fig. 15 gegebene Lage der Schubstange ergibt sich bei  $\alpha = 60^\circ$ :  $S = 4680$  kg und  $N = 1150$  kg.

Da der Winkel  $\alpha$  an der Kurbel die Werte  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = 360^\circ$  durchläuft, so wird die Kraft  $S$  für jede Kurbellage einen anderen Wert erhalten, ebenso  $N$ .

3. Gleichgewicht. Zwei Kräfte, welche an einem Punkte in verschiedener Richtung angreifen, können sich, wie ohne weiteres einleuchtet, nie das Gleichgewicht halten.

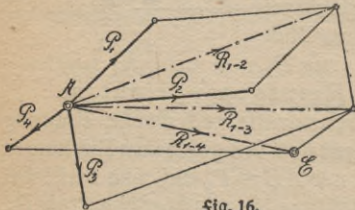


Fig. 16.

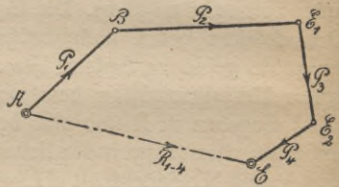


Fig. 17.

b) Beliebig viele Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. 1. Zusammensetzung. Die Zusammensetzung beliebig vieler Kräfte erfolgt mit Hilfe wiederholter Anwendung des Kräfteparallelogramms oder einfacher des Kräftedreiecks. Am besten wird das letztere Verfahren an einem Beispiel gezeigt (Fig. 16).

**Beispiel.** Gegeben seien die Kräfte  $P_1 = 50$  kg,  $P_2 = 100$  kg,  $P_3 = 150$  kg,  $P_4 = 70$  kg in den dargestellten Richtungen. Man setzt in der Nebenfigur zunächst  $P_1$  und  $P_2$  zur Mittelkraft  $R_{1-2}$  zusammen, sodann diese mit  $P_3$  zu  $R_{1-3}$  und endlich letztere mit  $P_4$  zu  $R_{1-4}$ , wodurch man  $R_{1-4} = R$  erhält. Dieses Verfahren kann für beliebig viele Kräfte fortgesetzt werden.

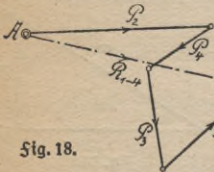


Fig. 18.

Aus Fig. 17 erkennt man ohne weiteres, daß man zum gleichen Ziele gekommen wäre, wenn man unter Fortlassung der Zwischenmittelkräfte  $R_{1-2}$  und  $R_{1-3}$  die Einzelkräfte so aneinander gereiht hätte, daß der Endpunkt der ersten Kraft zugleich Anfangspunkt der zweiten, der Endpunkt der zweiten Anfangspunkt der dritten wird usw. Aus Fig. 18 erkennt man ferner, daß auch die Reihenfolge der Kräfte gleichgültig ist. Nur muß der Umfassungssinn der aneinandergereihten Kräfte stets der gleiche sein, die erste Kraft muß vom Anfangspunkt weggerichtet sein. Die Mittelkraft erhält man, wenn man den Anfangs- und Endpunkt der aneinandergereihten Einzelkräfte (des Kräftezuges) miteinander verbindet. Der Sinn der Mittelkraft ist dem Sinne

der Einzelkräfte entgegengesetzt. Die den Kräftezug schließende und die Mittelkraft darstellende Linie heißt Schlußlinie, das entstandene Vieleck  $A, B, E_1, E_2, E$  nennt man Kräfteviereck, Kräfteeck oder Kräftepolygon. Man erhält zur Bestimmung der Mittelkraft also den

**Lehrsatz:** Die Mittelkraft beliebig vieler in einem Punkte angreifender Kräfte ist nach Richtung, Größe und Sinn gleich der vom Anfang- nach dem Endpunkte gezogenen Schlußlinie desjenigen Kräftezuges, dessen Seiten gleich und gleichlaufend den gegebenen Seitenkräften sind.

Durch Parallelverschiebung nach dem gemeinsamen Angriffspunkt  $O$  der Hauptfigur erhält man auch hier wieder die Lage der Mittelkraft.

Die rechnerische Lösung ist bedeutend umständlicher und daher auch zeitraubender, weshalb von ihr abgesehen werden soll. Man findet sie bei Schau, Statik, Teil I, S. 15. (Leipzig, B. G. Teubner.)

2. Zerlegung. Die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Seitenkräfte soll nicht behandelt werden, weil sie zu selten vorkommt.

3. Gleichgewicht. Die Bewegung eines Punktes in fortschreitender Richtung kann offenbar unter dem Einfluß mehrerer Kräfte nur dann stattfinden, wenn diese Kräfte sich durch eine Mittelkraft ersetzen lassen. Ist dies nicht der Fall, ist also die Mittelkraft  $R = 0$ , so ist

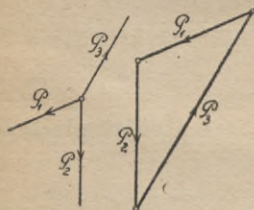


Fig. 19.

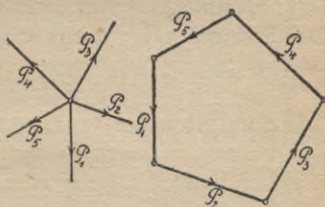


Fig. 20.

eine fortschreitende Bewegung ausgeschlossen, die Kräfte sind im Gleichgewicht. Dies tritt offenbar dann ein, wenn der Anfangspunkt und der Endpunkt des aus den Einzelkräften gezeichneten Kräftezuges zusammenfallen, denn dann wird die Mittelkraft  $R = 0$ . Man nennt in diesem Falle den Kräftezug geschlossen; die Kräfte haben alle gleichen Umfahrungsinn.

Bei drei im Gleichgewicht befindlichen Kräften ergibt sich demnach als Kräfteeck ein geschlossenes Kräfte-dreieck (Fig. 19), bei mehr als drei im Gleichgewicht befindlichen Kräften ein geschlossenes Vieleck (Fig. 20).

Man erhält also folgenden

**Lehrsatz:** Drei an einem Punkte angreifende Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, wenn der aus ihnen gebildete Kräftezug ein geschlossenes Krästedreieck mit stetigem Umfahrungsinn ergibt; mehrere an einem Punkte angreifende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn der aus ihnen gebildete Kräftezug ein geschlossenes Vieleck mit stetigem Umfahrungsinn ergibt.

Die Reihenfolge der Aneinanderreihung kann beliebig sein.

Kann man aus zwei oder mehr Kräften eine Mittelkraft bilden, so müßte man, wenn Gleichgewicht herrschen sollte, deren Wirkung durch Hinzufügung einer Kraft aufheben, welche ebenso groß, gleich gerichtet, aber von entgegengesetztem Sinne ist wie die Mittelkraft. Man nennt eine solche Kraft dann Gleichgewichtskraft.

**Rechnerische Lösung.** Man zerlegt jede der angreifenden Kräfte in ihre wagerechte und senkrechte Seitenkraft. Für den Fall des Gleichgewichtes muß dann die Mittelkraft aller wagerechten Seitenkräfte, also deren Summe ( $\Sigma H$ ), wie auch die Mittelkraft aller senkrechten Seitenkräfte, also deren Summe ( $\Sigma V$ ) gleich Null sein. Mithin erhält man folgenden

**Lehrsatz:** Ein Körper befindet sich unter der Einwirkung mehrerer an einem Punkt angreifender Kräfte im Gleichgewicht, wenn

1. Die Summe aller wagerechten Seitenkräfte gleich Null ist,

$$\Sigma H = 0^1)$$

2. Die Summe aller senkrechten Seitenkräfte gleich Null ist,

$$\Sigma V = 0.$$

#### IV. Kräfte verschiedener Richtung mit verschiedenen Angriffspunkten.

a) **Die Kraftrichtungen schneiden sich.** 1. Zusammensetzung. Wirken zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  an verschiedenen Angriffspunkten A und B, wie es z. B. bei Holzkonstruktionen häufig vorkommt (Fig. 21), so verschiebt man die beiden Kräfte in ihrer Richtung bis zu ihrem

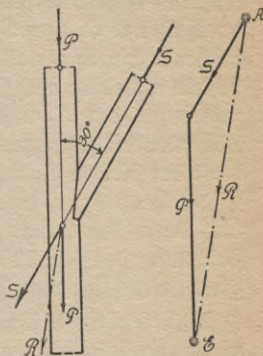
1)  $\Sigma$  (griechisches Sigma = S) bedeutet als Abkürzung: Summe.  $\Sigma H$  = Summe aller H.



Schnittpunkt, welcher jetzt gemeinschaftlicher Angriffspunkt wird, und setzt die Kräfte in bekannter Weise mit Hilfe des Kräfte-dreiecks zusammen.

In Fig. 21 ergibt sich als Mittelfraft aus der auf den Pfosten wirkenden Kraft  $P = 6000$  kg und der auf den Pfosten von der Strebe übertragenen Kraft  $S = 3000$  kg für einen Kräfte-maßstab  $1 \text{ cm} = 2000$  kg  $AE = R = 4,35$  cm  $= 4,35 \cdot 2000 = 8700$  kg.

Wirken mehr als zwei Kräfte auf den Körper, so wiederholt man das eben beschriebene Verfahren in sinngemäßer Weise mehrfach, indem man zunächst zwei Kräfte zur Mittelfraft im Kräfte-dreieck zusammensetzt, aus dieser mit der nächsten Einzelkraft wieder eine neue Mittelfraft bildet und so fortfährt, bis man die Gesamtmittelfraft erhält. Die Reihenfolge der Zusammensetzung der gegebenen Kräfte ist beliebig. Die Angriffspunkte findet man in der Hauptfigur durch Festlegung der Schnittpunkte der entsprechenden gegebenen Kräfte mit den Zwischenmittelfräften. Den Linienzug der aufeinanderfolgenden Mittelfräfte nennt man Mittelfraftviereck (Resultantenpolygon).



M. d. Kr. 1 cm = 2000 kg  
Fig. 21.

Die Schnittpunkte der Krafrichtungen liegen außerhalb der Zeichenebene.

Hierfür kommt nur das zeichnerische Verfahren in Betracht.

a) Es wirken nur zwei Kräfte. Man zerlegt nach Fig. 22 zunächst  $P_1$  in zwei beliebig angenommene Seitenkräfte  $S_0$  und  $S_1$  und ebenso in  $P_2$  zwei Seitenkräfte  $S'_1$  und  $S_2$ , aber so, daß  $S'_1 = S_1$  wird, jedoch entgegengesetzten

Wirkungssinn wie  $S_1$  erhält. Dadurch wird  $S_2$  nach Größe, Richtung und Sinn bestimmt.

Die Richtungen der Seitenkräfte

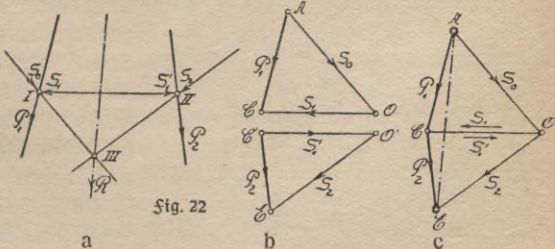


Fig. 22

der Kraft  $P_1$  werden nun nach einem auf  $P_1$  beliebig angenommenen Punkt I (Fig. 22 a) übertragen, der Sinn der Kräfte gleichfalls angegeben und sodann der Schnittpunkt II der Kraft  $S_1$  mit  $P_1$  bestimmt, worauf man die Richtung und den Sinn der Seitenkräfte von  $P_2$  nach dem Schnittpunkt II überträgt. Da  $S_1$  und  $S'_1$  gleiche Richtung und Größe, aber entgegengesetzten Sinn haben, so heben sie sich gegenseitig auf, und an Stelle der durch  $S_0$  und  $S_1$  bzw.  $S'_1$  und  $S_2$  ersetzten Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  verbleiben mithin nur noch als allein wirkende Kräfte die Seitenkräfte  $S_0$  und  $S_2$ . Schiebt man nun nach Fig. 22 c die beiden Kräfte dreiecke aus Fig. 22 b zusammen, daß  $S_1$  und  $S'_1$  zusammenfallen, und setzt  $P_1$  und  $P_2$  zur Mittelkraft  $R$  zusammen, so erkennt man sofort, daß  $R$  auch die Mittelkraft der Kräfte  $S_0$  und  $S_2$  ist. Man erhält daher die Lage von  $R$  in der Hauptfigur, indem man daselbst  $S_0$  und  $S_2$  zum Schnitt bringt und durch den Schnittpunkt III eine Gleichlaufende zu  $R$  zieht. Die Zeichnung der Fig. 22 b ist offenbar nicht nötig, man kann vielmehr gleich, wie folgt verfahren:

Man setzt im Kräfte dreieck  $P_1$  und  $P_2$  zu  $R$  zusammen (Fig. 23 b), nimmt einen beliebigen Punkt  $O$ , welcher Pol genannt wird, an, verbindet  $O$  mit sämtlichen Endpunkten der gegebenen Kräfte und erhält so die Polstrahlen  $AO = S_0$ ,  $CO = S_1$  und  $EO = S_2$ . Die ganze Figur heißt Polfigur. Durch einen auf  $P_1$  beliebig angenommenen Punkt I zieht man nun  $s_0 \parallel S_0$  und  $s_1 \parallel S_1$  bis zum Schnittpunkt II mit  $P_2$ , und sodann durch II  $s_2 \parallel S_2$ , bringt die beiden äußeren Strahlen  $s_0$  und  $s_2$  zum Schnitt III und zieht durch III  $R$  gleichlaufend zu  $R$  in der Polfigur.

Der Linienzug  $s_0 s_1 s_2$  in der Hauptfigur heißt Seileck, Seilviereck, Seilpolygon, Seilzug oder Seillinie, da ein in den Punkten  $H$  und  $J$  befestigt gedachtes Seil, an welchem die Lasten  $P_1$  und  $P_2$  in der angegebenen Weise in den Knotenpunkten I und II wirken (ein Versuch läßt sich mit einer Schnur in einfacher Weise anstellen), die Form dieses Seilzuges annehmen würde. Die Seiten  $s_0 s_1 s_2$  heißen Seilstrahlen,  $s_0$  und  $s_2$  sind die äußeren Seilstrahlen, da sie im Kräfteck die Mittelkraft einschließen.

Da  $S_0$  beliebig angenommen war, so folgt, daß man den

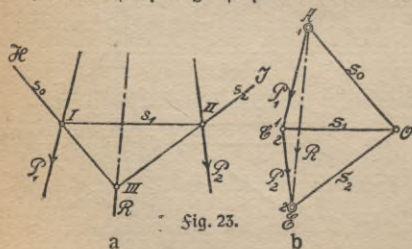


Fig. 23.

Pol  $O$  auch beliebig wählen kann. Das Seileck wird zwar bei anderer Wahl des Poles auch ein Anderes, doch erhält man, wie Fig. 24 zeigt, dieselbe Lage der Mittelkraft. Man kann somit unzählige Seilecke zeichnen, doch liegen alle Schnittpunkte der äußeren Seilseiten auf einer Geraden, welche die Lage der Mittelkraft bestimmt.

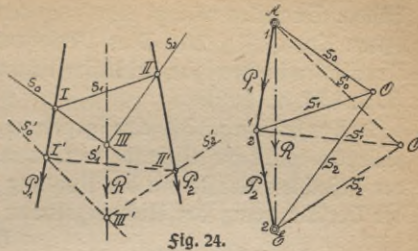


Fig. 24.

b) Es wirken beliebig viele Kräfte. Das unter a) geschilderte Verfahren wird wiederholt angewandt:

Man trägt nach Fig. 25 die gegebenen Kräfte zu einem Vieleck in beliebiger Reihenfolge aneinander und bestimmt die Mittelkraft  $AE = R$  nach Größe, Richtung und Sinn. Sodann wählt man einen Pol, zieht die

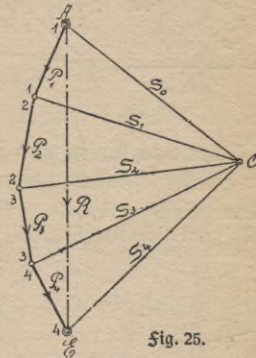
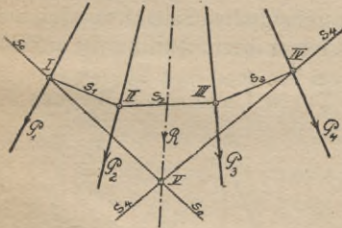


Fig. 25.

Polstrahlen  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4$ , (uff.) und gleichlaufend zu ihnen den Seilzug  $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$ , von einem beliebigen Punkt  $I$  auf  $P_1$  ausgehend, in der Hauptfigur. Die Lage von  $R$  daselbst erhält man, indem man durch den Schnittpunkt  $V$  der äußeren Seilstrahlen  $s_0$  und  $s_4$  eine Gleichlaufende zu  $R$  im Kräfteck zieht. Auch hier sind unzählige Lösungen möglich, welche aber alle dasselbe Ergebnis zeitigen.

Der Pol wird am besten so gewählt, daß die beiden äußeren Polstrahlen etwa einen rechten Winkel

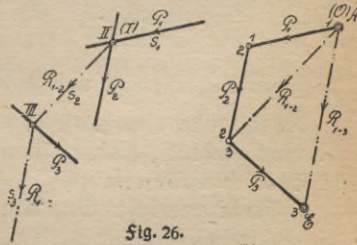


Fig. 26.

bilden. Zuweilen verlegt man auch den Pol in den Anfangspunkt der ersten Kraft (Fig. 26). Dies Verfahren findet beim Einzeichnen von Drucklinien in Gewölbe, bei Untersuchung von Stützmauern Anwendung (s. S. 85 f. u. 108).

2. Zerlegung. Ist eine gegebene Kraft in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, so ist die Aufgabe nur dann lösbar, wenn die Richtungen der gesuchten Kräfte mit der Richtung der gegebenen bei entsprechender Verlängerung der Richtungslinien sich in einem Punkte schneiden.

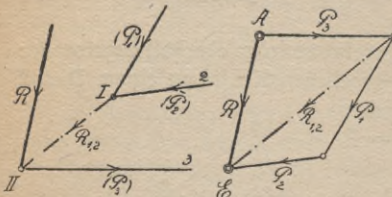


Fig. 27.

Die Lösung erfolgt dann ebenso, wie unter III, a, 2 angegeben wurde.

Soll eine bekannte Kraft  $R$  in drei Seitenkräfte  $P_1, P_2, P_3$  zerlegt werden, welche nach Lage und Richtung gegeben sind, so ist das nur dann möglich, wenn die gegebenen Richtungen 1, 2, 3 der nach Größe und Sinn unbekanntes Seitenkräfte sich nicht in einem Punkte schneiden, und wenn keiner ihrer Schnittpunkte auf  $R$  liegt.

Man bringt in diesem Falle zwei der gegebenen Richtungen, etwa 1 und 2, zum Schnitt (Fig. 27) im Punkte I und ebenso Richtung 3 zum Schnitt mit  $R$  im Punkte II.

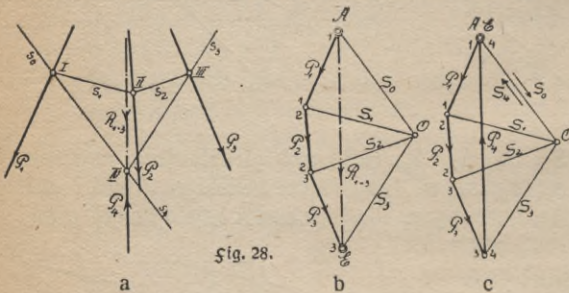


Fig. 28.

Nun verbindet man I und II und zerlegt  $R$  in  $P_3$  und in eine in der Verbindungslinie III wirkende Kraft  $R_{1,2}$ , welche mit  $P_1$  und  $P_2$  darstellen muß und noch nach den Richtungen 1 und 2 in  $P_1$  und  $P_2$  zu zerlegen ist.

Die Aufgabe, eine Kraft in mehr als drei Seitenkräfte zu zerlegen, ist nicht eindeutig lösbar. Man sagt in solchem Falle, die Aufgabe ist statisch unbestimmt.

3. Gleichgewicht. Eine Kraftgruppe ist im Gleichgewicht, wenn die Gesamtwirkung der vorhandenen Kräfte gleich Null ist. Hat man

zu drei gegebenen Kräften  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  mit Hilfe des Seilecks die Mittelkraft  $R_{1-3}$  bestimmt (Fig. 28 b), so kann der Gleichgewichtszustand offenbar nur dann eintreten, wenn man die Wirkung von  $R_{1-3}$  durch Hinzufügung einer Kraft  $P_4$  aufhebt, welche die gleiche Größe, Richtung und Lage, aber entgegengesetzten Sinn wie  $R_{1-3}$  haben muß (Fig. 28 a).  $P_4$  bildet dann mit  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  ein geschlossenes

Kräfteviereck (Fig. 28 c), die Gesamtmittelkraft ist also gleich Null. Die Polstrahlen  $S_0$  und  $S_4$  decken sich, haben also gleiche Größe, aber entgegengesetzten Sinn,

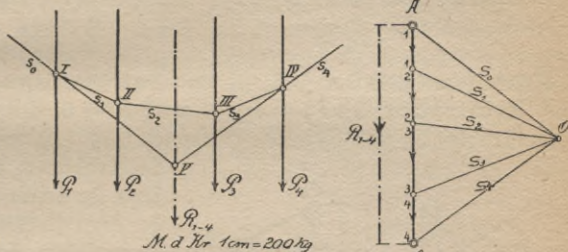


Fig. 29.

und im Seileck fallen die beiden äußeren Seilstrahlen in dieselbe Gerade, das Seileck bildet also auch eine geschlossene Figur.

Beliebig viele in einer Ebene zerstreut liegende Kräfte sind also im Gleichgewicht, wenn sowohl das zugehörige Kräfteck, wie auch das entsprechende Seileck sich schließen.

### b) Die Kräfterichtungen schneiden sich nicht (parallele Kräfte).

1. Zusammensetzung. Die Lösung erfolgt wieder mit Hilfe des Kräfte- und Seilecks, da man parallele Kräfte als solche Kräfte auffassen kann, deren Schnittpunkt in unendlicher Entfernung liegt. Das Kräfteck geht in eine Gerade über, die Mittelkraft fällt als Schlußlinie mit ihr zusammen und ist daher gleichlaufend zu den Seitenkräften.

Fig. 29 zeigt die Lösung für 4 Einzelkräfte gleichen Sinnes  $P_1 = 120$  kg,  $P_2 = 150$  kg,  $P_3 = 200$  kg,  $P_4 = 130$  kg (Kräftemaßstab 1 cm = 200 kg). Es wird  $R_{1-4} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 120 + 150 + 200 + 130 = 600$  kg. Ihre Lage wird durch den Schnittpunkt der beiden äußeren Seilstrahlen  $s_0$  und  $s_4$  bestimmt. Eine weitere Erklärung dürfte sich erübrigen.

Parallele Kräfte mit verschiedenem Sinn. Zunächst soll der Fall für zwei gegebene Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  untersucht werden, von denen  $P_1 > P_2$  sei. Man setzt die Kräfte zur Mittelkraft  $R = P_1 - P_2$  zusammen (Fig. 30), wählt einen beliebigen Pol, zieht die Polstrahlen und zeichnet das Seileck in bekannter Weise, wobei man nur auf die genaue

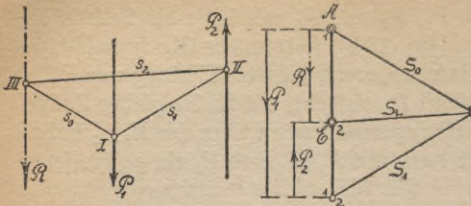


Fig. 30.

Reihenfolge der Seilstrahlen zu achten hat. Die Mittelkraft geht wieder durch den Schnittpunkt III der beiden äußeren Seilstrahlen  $s_0$  und  $s_2$ . Sie liegt mithin außerhalb der beiden Kräfte auf Seite der größeren

Kraft (was stets der Fall ist) und hat den Sinn der letzteren. Kräftepaar. Ist  $P_1 = P_2$ , so wird  $R = 0$ . Die beiden äußeren Polstrahlen  $S_0$  und  $S_2$  fallen zusammen (Fig. 31), mithin werden die

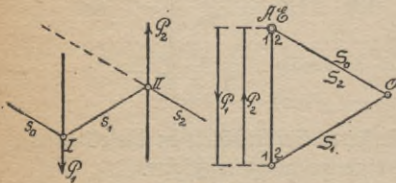


Fig. 31.

Seilstrahlen  $s_0$  und  $s_2$  gleichlaufend, ihr Schnittpunkt und damit der Angriffspunkt von  $R$  liegt im Unendlichen. Zwei gleich große, gleichlaufende Kräfte mit entgegengesetztem Sinn lassen sich daher nicht zusammensetzen. Man nennt eine solche Kräftegruppe ein Kräftepaar. Da  $R = 0$  ist,

kann eine fortschreitende Bewegung nicht eintreten. Trotzdem heben sich die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  nicht auf, sondern rufen eine drehende Bewegung hervor, vgl. unter 3.

Sind mehrere parallele Kräfte zu ihrer Mittelkraft  $R$  zusammensetzen, so trägt man sie in beliebiger Reihenfolge aneinander an und erhält ihre Größe als algebraische Summe der Einzelkräfte (Fig. 32). Die

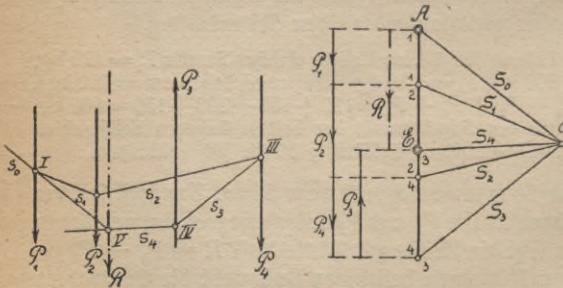


Fig. 32.

Lage der Mittelkraft erhält man wieder mit Hilfe des Seilecks, wobei man nur auf die genaue Reihenfolge der Seilstrahlen zu achten hat.

2. Zerlegung. Die Zer-

legung einer Kraft in zwei der Lage nach gegebene Seitenkräfte kommt in der Praxis bei belasteten Trägern auf zwei Stützen vor und ist daher von größter Wichtigkeit. Die Belastung  $R$  des Trägers wird offenbar auf die Auflager an beiden Trägerenden übertragen, und die hier hervorgerufenen Auflagerdrücke sind die gesuchten Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  der belasteten Kraft  $R$ . Die Lösung der Aufgabe ist nichts anderes als die Umkehrung der weiter oben behandelten Aufgabe, zwei gleichlaufende Kräfte zur Mittelkraft zusammenzusetzen.

Man trägt  $R$  in einer Nebenfigur (Fig. 33) nach einem gewählten Kräftemaßstab auf, wählt den Pol  $O$  beliebig, zieht die Polstrahlen  $S_0$  und  $S_2$ , zerlegt also damit  $R$  in zwei Seitenkräfte  $S_0$  und  $S_2$ . Durch einen beliebigen Punkt III auf  $R$  zieht man sodann  $s_0 \parallel S_0$  und  $s_2 \parallel S_2$ , welche  $P_1$  in I und  $P_2$  in II schneiden. Durch Verbindung von I und II erhält man den Seilstrahl  $s_1$ , zu welchem man in der Polfigur eine Gleichlaufende durch  $O$  zieht. Diese zerlegt  $R$  in die gesuchten Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Die Richtung des Verfahrens ist ohne weiteres einzusehen, wenn man umgekehrt wieder  $P_1$  und  $P_2$  zu  $R$  zusammensetzt.

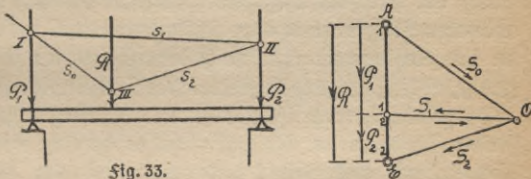


Fig. 33.

Die Gerade I—II nennt man die Schlußlinie des Seilecks. Sie soll künftig nur mit  $s$  bezeichnet werden.

Die Aufgabe, eine Kraft in mehr als zwei gleichlaufende Seitenkräfte zu zerlegen, ist statisch unbestimmt.

3. Gleichgewicht. Zwei parallele Kräfte gleichen Sinnes lassen sich stets durch eine Mittelkraft ersetzen, können sich also nicht im Gleichgewicht halten. Zwei parallele Kräfte entgegengesetzten Sinnes von verschiedener Größe können gleichfalls durch eine Mittelkraft ersetzt werden, sind mithin auch nie im Gleichgewicht, und endlich zwei parallele Kräfte entgegengesetzten Sinnes, aber gleicher Größe bilden ein Kräftepaar und befinden sich daher auch nicht im Gleichgewicht.

Drei parallele Kräfte sind offenbar dann im Gleichgewicht, wenn je zwei von ihnen eine Mittelkraft haben, die mit der dritten nach Lage und Größe übereinstimmt, aber entgegengesetzten Sinn hat. In Fig. 33 wirken die 3 Kräfte  $R$ ,  $P_1$  und  $P_2$ , letztere als Seitenkräfte von  $R$ . Fügt man an Stelle von  $P_1$  und  $P_2$  zwei gleichgroße Kräfte  $A = P_1$  und  $B = P_2$  hinzu, welche aber entgegengesetzten Sinn haben,

so heben diese die Wirkung von  $P_1$  und  $P_2$ , also auch von  $R$  auf und es herrscht Gleichgewicht (Fig. 34).  $A$  und  $B$  sind dann Gleichgewichtskräfte. Man findet sie offenbar sofort, wenn man in Fig. 33 an Stelle der Pfeile von  $P_1$  und  $P_2$  Pfeile von entgegengesetzter Richtung anbringt, wie das in Fig. 34 geschehen ist.  $A$  und  $B$  werden

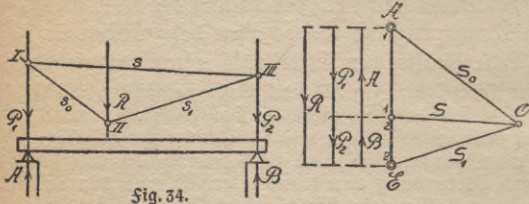


Fig. 34.

also auf gleiche Weise unter sinngemäßer Anwendung des eben Gesagten gefunden, wie weiter oben  $P_1$  und  $P_2$ .

Dieser Fall findet namentlich Anwen-

dung bei Trägern auf zwei Stützen. Die auf Seite 27 bereits erwähnten Stützendrücke oder Auflagerdrücke  $P_1$  und  $P_2$  (Fig. 33) rufen in den Auflagerpunkten nach dem Gesetz der Gegenwirkung gleichgroße, aber entgegengesetzt wirkende Stützenwiderstände oder Auflagerwiderstände hervor (Fig. 34). Die Kräftegruppe  $R$ ,  $A$  und  $B$  befindet sich dann im Gleichgewicht, es herrscht also Ruhezustand und Kräfte- und Seileck sind geschlossen (Fig. 34).

Wird der Träger durch mehr als eine Kraft belastet, so ändert sich an der Lösung der Aufgabe nichts, da man alle diese Kräfte durch ihre Mittelkraft  $R$  ersetzen kann, wodurch der Fall auf den eben behandelten zurückgeführt wird. Fig. 35 zeigt die Lösung der Aufgabe für einen von vier Kräften belasteten Träger: eine weitere Erklärung ist wohl überflüssig.

Zu beachten ist: Befinden sich an einem Körper die äußeren Kräfte

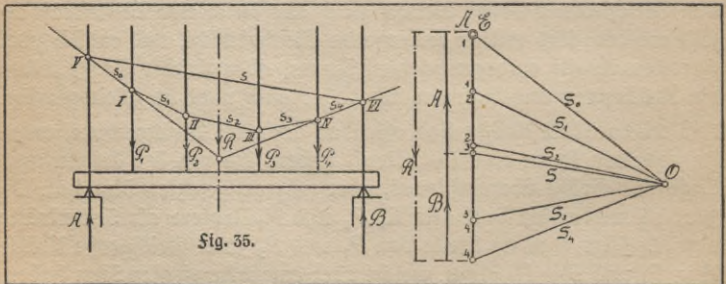


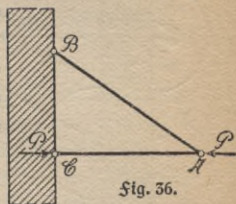
Fig. 35.



im Gleichgewicht, so muß sich ein geschlossenes Kräfteck und ein geschlossenes Seileck ergeben.

## V. Anwendung auf einfache Stabkonstruktionen.

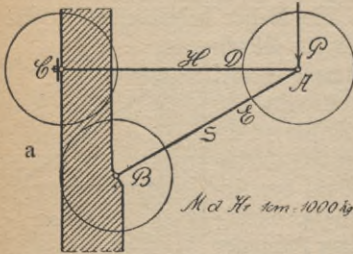
a) **Allgemeines. Knotenpunkte.** Die bisher behandelten Gesetze über die Zerlegung von Kräften und das Gleichgewicht der Kräfte finden häufig Anwendung bei der Untersuchung einfacher Baukonstruktionen. Dabei sind in der Regel die inneren Kräfte zu ermitteln, welche den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Von ihnen ist die Wahl der Abmessung der einzelnen Bauteile abhängig. Gleichgewicht muß aber in jedem Punkte eines Bauteiles herrschen, weshalb diejenigen Punkte von besonderer Wichtigkeit sind, in denen die äußeren Kräfte angreifen. Für den Ruhezustand ist es erforderlich, daß die einzelnen Punkte eines Bauteiles miteinander in starre Verbindung gebracht werden, wodurch sich dann häufig stabförmige Konstruktionen ergeben, wie in Fig. 36 an einem einfachen Beispiel dargestellt ist. Zur Sicherung des Punktes  $A$  sind zwei, an der unverschieblichen Mauer befestigte Stäbe  $AB$  und  $AC$  angebracht. Auf diese Weise entsteht ein Dreieck  $ABC$ , welches bekanntlich unverschieblich ist. Der Punkt  $A$ , in dem die Stäbe zusammentreffen, heißt Knotenpunkt; eine Kraftübertragung kann, wie ohne weiteres einzusehen, nur in den Richtungen  $AC$  und  $AB$  stattfinden. Auch die Punkte  $B$  und  $C$  sind als Knotenpunkte zu betrachten.



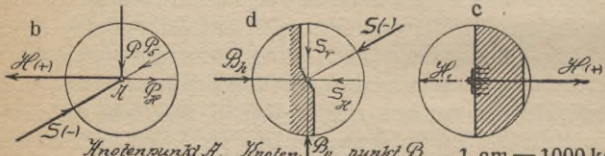
Wirkt nun im Punkte  $A$  eine Kraft  $P$  in der angeedeuteten Weise, so wird diese in der Richtung  $AC$  auf den Punkt  $C$  übertragen und ruft dort nach dem Gesetze der Gegenwirkung eine gleichgroße, aber mit entgegengesetztem Sinn wirkende Kraft  $P$  (Fig. 36) hervor. Man sieht ohne weiteres, daß diese beiden Kräfte  $P$  das Bestreben haben, die Punkte  $A$  und  $C$  einander zu nähern, den sie verbindenden Stab  $AC$  also zu drücken. Mithin entsteht in ihm eine Druckbeanspruchung. Hätte die Kraft  $P$  im Punkte  $A$  entgegengesetzten Sinn, so müßte die Pfeilrichtung von  $P$  entsprechend auch im Punkte  $C$  von  $C$  weggerichtet sein; die Punkte  $A$  und  $C$  würden voneinander entfernt; im Stabe entsteht eine Zugbeanspruchung.

Da die Kraft  $P$  sich im Innern des Stabes bis  $C$ , wo sie durch die Festigkeit des Mauerkörpers eine sie aufhaltende Gegenkraft her-

vorrust, fortpflanzt, so muß sie in jedem Stabquerschnitte eine ihr gleiche innere Kraft  $P$  erzeugen, welche Spannkraft genannt wird und nach obigem entweder eine Druckkraft oder eine Zugkraft ist. Die Ermittlung der Größe der Spannkraften und die Entscheidung der Frage, ob in den einzelnen Teilen einer Konstruktion Zug oder Druck herrscht, wird am besten an Beispielen gezeigt.



b) Konfolträger. Der in Fig. 37 a gegebene Konfolträger eines Balkons werde im Punkte A durch eine senkrecht wirkende Last  $P = 1400 \text{ kg}$  (Belastung durch Balkondecke und -brüstung) belastet. Die in H und S auftretenden Stabkräfte, sowie die Beanspruchungen des



Mauerwerks sind zu ermitteln. Kräftemaßstab

1 cm = 1000 kg.

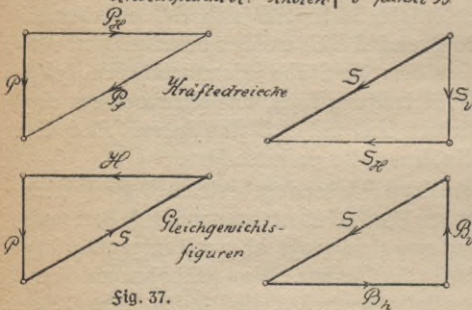


Fig. 37.

Die Kraft  $P$  ruft in den Stäben  $AC$  und  $AB$  die Spannkraften  $H$  und  $S$  hervor; eine Übertragung nach anderer Richtung ist nicht möglich. Man zerlegt daher im Krästedreieck (Fig. 37 b)  $P$  nach diesen beiden Richtungen in die Seitenkräfte  $P_H$  und  $P_S$ . Nun muß im Punkte A Gleichgewicht herrschen, mithin müssen die im Innern der Stäbe  $AC$  und  $AB$  auftretenden

Spannkraften  $H$  und  $S$  die Wirkung der Seitenkräfte  $P_H$  und  $P_S$ , und damit auch die Wirkung ihrer Mittelkraft  $P$  aufheben; man zeichnet daher am besten den Punkt A durch einen frei-förmig geführten Schnitt besonders heraus (Fig. 37 b), das Krästedreieck, in dem die Zerlegung von  $P$  in  $P_H$  und  $P_S$  vorgenommen wird, wird zweckmäßig darunter gezeichnet. Durch den geführten Schnitt wird der Zusammenhang der Stäbe bei D und E zerstört, so daß eine Übertragung von  $P_H$  im Punkte D nach dem festen

Punkt  $C$  nicht mehr erfolgen kann. Soll dennoch der Gleichgewichtszustand wiederhergestellt werden, so muß in der Richtung des Stabes  $AC$  eine der Kraft  $P_H$  gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $H$  angebracht werden. Ebenso ist im Punkte  $E$  die Anbringung einer Kraft  $S$  erforderlich, welche ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist wie  $P_S$ . Denkt man sich nun den Punkt  $A$  festgehalten, so erkennt man, daß  $H$  am Stabstumpf  $AD$  ziehend und  $S$  an dem Stabstumpf  $AE$  drückend wirkt.  $S$  und  $H$  geben nun die Wirkungen an, welche bei nicht gelöstem Zusammenhang ausgeübt werden, stellen also die in den Stäben wirkenden Spannkräfte an. Man erkennt hieraus aber auch die wichtige Regel:

Ist der Sinn einer inneren Kraft dem Knotenpunkt zugewendet, so ist die Spannkraft eine Druckkraft, ist sie vom Knotenpunkte weggewendet, so ist sie eine Zugkraft.

Zug und Druck sollen fernerhin durch das Vorzeichen unterschieden werden, und zwar Zug durch  $+$ , Druck durch  $-$  bezeichnet werden.

Die Kräfte  $P$ ,  $H$  und  $S$  müssen sich im Punkte  $A$  das Gleichgewicht halten. Man kann daher aus dem Krätedreieck unmittelbar ihre Größe und ihren Sinn, wie folgt, bestimmen: Man löst den Knoten durch einen freisförmigen Schnitt von dem übrigen Baukörper in besonderer Zeichnung heraus, bringt die äußeren Kräfte innerhalb des Schnittkreises an, bestimmt, wie oben angegeben, diejenigen Kräfte  $H$  und  $S$ , welche der Kraft  $P$  das Gleichgewicht halten und überträgt den aus der Gleichgewichtsfigur, welches ein geschlossenes Dreieck ergeben muß (Fig. 37 b), gewonnenen Sinn von  $H$  und  $S$  außerhalb des Schnittkreises an die Stabstumpfe. Hierauf stellt man an der Hand obiger Regel fest, ob Zug oder Druck in den Stäben herrscht. In unserem Falle ergibt sich, daß  $H$  eine Zugkraft und  $S$  eine Druckkraft ist. Man mißt  $H = 2,45$  cm und  $S = 2,83$  cm, mithin wird  $H = 2,45 \cdot 1000 = 2450$  kg und  $S = 2,83 \cdot 1000 = 2830$  kg.

Schneidet man den Punkt  $C$  heraus, so ist die gefundene Stabkraft  $H$  als Zugkraft am Stabstumpf anzubringen (der Pfeil muß also vom Knotenpunkt wegzeigen.) Der Kraft  $H$  muß durch eine Gegenkraft das Gleichgewicht gehalten werden. Man ordnet daher bei  $C$  eine entsprechend große Ankerplatte an (in Fig. 37 c durch einen kleinen senkrechten Strich angedeutet), welche auf das Mauerwerk drückt und einen Gegendruck  $H_1 = H$  hervorruft.

Am Stumpfe im Punkte  $B$  wirkt die Druckkraft  $S$  (Pfeil also gegen den Stumpf gerichtet). Sie ist in eine lotrechte und wagerechte Seitenkraft  $S_v$  und  $S_h$  (Fig. 37 d) zu zerlegen, welche beide durch gleichgroße, aber entgegengesetzt wirkende Auflagerkräfte  $B_v$  und  $B_h$  im Gleichgewicht erhalten werden. Hier wird  $B_v = P$  und  $B_h = H$ .

Tritt der Fall ein, daß im Punkte  $A$  mehrere äußere Kräfte wirken, so ersetzt man sie durch ihre Mittelkraft  $R$  und verfährt dann ebenso wie vorstehend beschrieben.

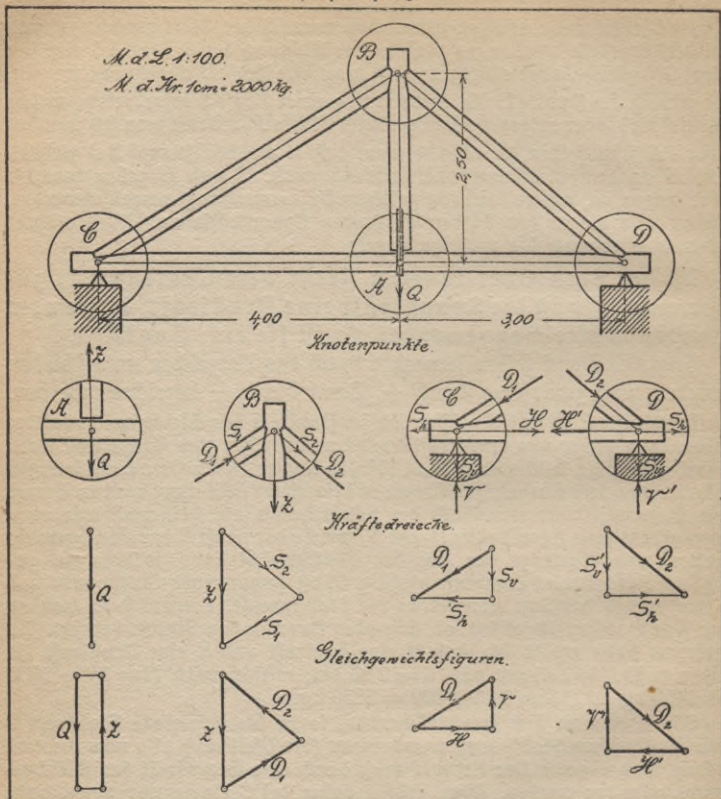


Fig. 38.

Mehr als zwei Stäbe mit unbekanntem Spannkraften dürfen selbstverständlich an einem Knoten nicht angreifen, da sonst die Aufgabe statisch unbestimmt wäre.

c) Das einfache Hängewerk. In Fig. 38 ist die Untersuchung für ein einfaches, unsymmetrisches Hängewerk durchgeführt. An der Hängesäule wirkt eine äußere Kraft  $Q = 3000$  kg. Es ergibt sich, daß dadurch in der Hängesäule  $AB$  Zug, in den beiden Streben  $BC$  und  $BD$  Druck und in dem Balken  $CD$  Zug auftritt. Die Konstruktion findet Anwendung, wenn die Stüßlänge des Balkens  $CD$  eine gewisse Länge (6 m) überschreitet, um im Punkte  $A$  eine weitere Unterstüßung zu schaffen. Wird  $AC = AD$ ,

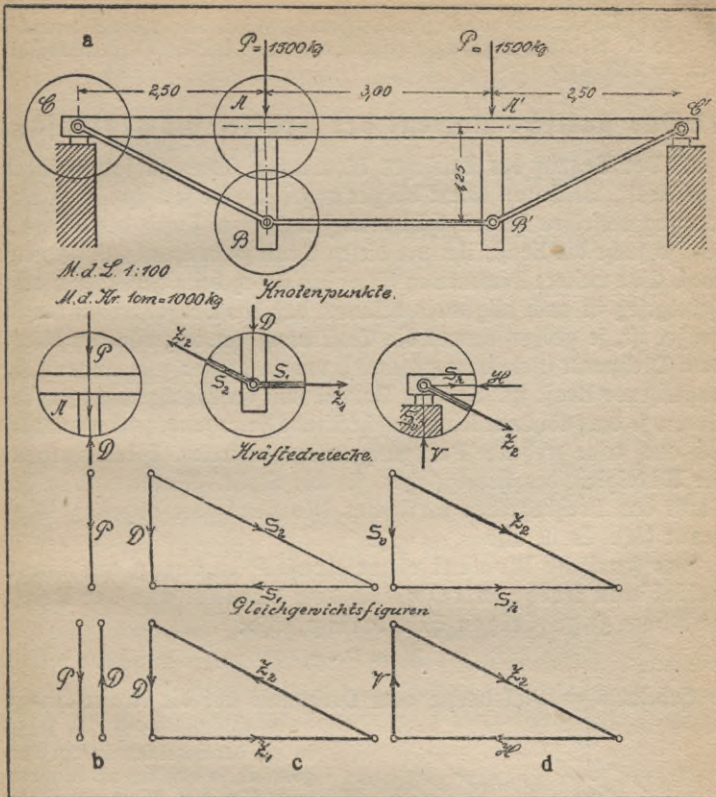


Fig. 39.

so entsteht ein symmetrisches Hängewerk und die Auflagerdrücke  $V$  in den Punkten  $C$  und  $D$  werden gleich groß. Die Größe der Spannkraft und Auflagerdrücke ist leicht nachzumessen (Kräftemaßstab 1 cm = 2000 kg).

d) Der doppelt armierte Träger. Er findet gleichfalls bei großer Balkenlänge  $CC'$  Anwendung und schafft die Unterstützungspunkte  $A$  und  $A'$  (Abb. 39a). Die Untersuchung ist für die beiden in den Punkten  $A$  und  $A'$  angreifenden Kräfte  $P = 1000$  kg geführt. In den Streben  $AB$  und  $A'B'$  ergibt sich Druck, im Balken  $CC'$  ebenfalls Druck, in den Stangen  $BC$ ,  $BB'$  und  $B'C'$  Zug (daher Zugstangen genannt). Die Untersuchung ist mit Rücksicht auf die Symmetrie der Konstruktion nur für die Punkte  $A$

(Fig. 39 b) B (Fig. 39 c) und C (Fig. 39 d) durchgeführt, da für die Punkte A', B' und C dieselben Ergebnisse gefunden werden würden (Kräftemaßstab 1 cm = 1000 kg).

## VI. Das statische Moment der Kräfte. Momentensatz.

a) **Der Begriff des statischen Momentes.** Wie wir sehen, führt eine Kraft, welche an einem Körper angreift, eine fortschreitende Bewegung desselben herbei. Hält man jedoch einen Punkt des Körpers fest, so sucht die Kraft, ihn um diesen Punkt zu drehen (z. B. Wagenrad). Eine weitere Anwendung findet das Gesetz beim Hebel. Aus dem Hebelgesetz ist auch allgemein bekannt, daß das Drehbestreben um so größer ist, je größer einmal die Entfernung der angreifenden Kraft vom Drehpunkt (Hebelarm genannt), und je größer zum andern die angreifende Kraft ist. Soll ein Bauteil nun im Gleichgewicht sich befinden, so darf nicht nur keine fortschreitende Bewegung, sondern natürlich auch keine drehende Bewegung an ihm eintreten. Hieraus erhellt die Wichtigkeit des Hebelgesetzes für die Statik. Man nennt in der Statik das Drehbestreben statisches Moment oder abgefürzt Moment ( $M$ ). Es ist also

das statische Moment einer Kraft  $P$  in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt  $O$  gleich dem Produkt aus der Kraft und dem zugehörigen Hebelarm  $p$ , also:

$$M = P \cdot p.$$

Hebelarm = Winkelrechte vom Drehpunkt auf die Kraftrichtung.

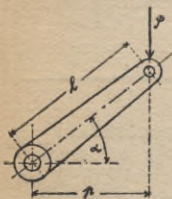


Fig. 40.

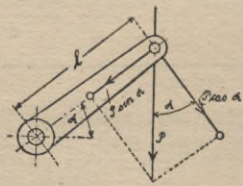


Fig. 41.

Gewöhnlich wird die Kraft in kg, der Hebelarm in cm ausgedrückt, so daß sich als Maßeinheit für das Moment „Kilogrammzentimeter“ (kgcm) ergibt; doch findet man bei großen Momenten Kilogrammmeter (kgm) oder Tonnenmeter (tm) als Einheit.

**Beispiel.** Das statische Moment einer an einer Kurbel wirkenden Kraft  $P$  (vgl. auch Fig. 15) ist nach Fig. 40

$$M = P \cdot p; \quad p = l \cdot \cos \alpha; \quad \text{daher } M = P \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

Zur Zerlegung der Kraft  $P$  in eine Seitenkraft in Richtung der Kurbel und winkelrecht dazu, erhält man nach Fig. 41, das gleiche Ergebnis. Die Seitenkraft  $P \cos \alpha$  hat das Drehbestreben  $M = P \cdot \cos \alpha \cdot l$ .

**Anwendung.** Für den in Fig. 15 angegebenen Fall ist  $M = S \cdot r \cdot \sin(\alpha + \beta)$ ;  $r = 320$  mm. Für  $\alpha = 60^\circ$  und  $\beta = 10^\circ$  wird:

$$M = 4680 \cdot 32 \cdot \sin(60 + 10) = 4680 \cdot 32 \cdot 0,94 = 140400 \text{ kgcm.}$$

Wird der Hebelarm gleich Null, geht also die Kraft durch den Drehpunkt  $O$  hindurch, so wird naturgemäß auch das Moment der Kraft gleich Null, eine Drehung kann nicht eintreten, es wird auf den Drehpunkt nur ein Druck ausgeübt.

Da man zeichnerisch eine Kraft durch eine Linie darstellt, muß sich in der Zeichnung ein Moment als Fläche ergeben (Produkt zweier Linien).

Das Drehbestreben kann nach zwei verschiedenen Seiten eintreten. Ruft eine Kraft eine Drehung im Uhrzeigersinne hervor, so nennt man das Moment rechtsdrehend

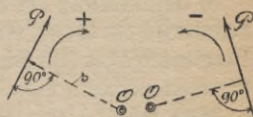


Fig. 42.

(gewöhnlich mit  $+$  bezeichnet), erfolgt die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt, so heißt es linksdrehend (dann entsprechend mit  $-$  bezeichnet) Fig. 42. Nach dem Vorzeichen unterscheidet man daher auch positive und negative Momente.

Treten nur Momente mit gleichem Drehsinn auf, so summieren sich naturgemäß ihre Wirkungen, während bei gleichzeitigem Auftreten von Momenten mit verschiedenem Drehsinn sich die Momente teilweise oder ganz aufheben. Ist letzteres der Fall, also die algebraische Summe aller Momente bezogen auf denselben Drehpunkt gleich Null, so kann der Körper keine drehende Bewegung ausführen, er ist also im Gleichgewicht. Daraus folgt als weitere Gleichgewichtsbedingung:

Soll ein Körper im Gleichgewicht sein, so muß die algebraische Summe aller statischen Momente, bezogen auf denselben Drehpunkt, gleich Null sein. Oder kurz:

$$\sum M = 0.$$

Da die Mittelkraft  $R$  einer Kräftegruppe dieselbe Wirkung hervorruft, wie die Einzelkräfte zusammen, so muß auch das Drehbestreben, welches  $R$  in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt hervorruft, dasselbe sein, welches die Einzelkräfte in bezug auf denselben Drehpunkt ausüben. Hieraus folgt der wichtige Momentensatz:

Das statische Moment der Mittelkraft einer Kräftegruppe in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt ist gleich

der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte bezogen auf denselben Drehpunkt.

Von diesem Satz werden wir oft Gebrauch zu machen haben. Dabei ist streng auf den Drehsinn der Momente zu achten. Ist  $r$  der Hebelarm der Mittelkraft  $R$ , und  $p$  der Hebelarm je einer Einzelkraft  $P$ , so läßt sich der Momentensatz, wie folgt, als Formel schreiben:

$$R \cdot r = \sum P \cdot p.$$

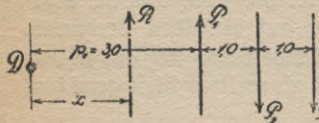
b) Bestimmung der Lage der Mittelkraft einer Kräftegruppe auf rechnerischem Wege. Anwendung des Momentensatzes. Mit Hilfe des Momentensatzes läßt sich die Lage der Mittelkraft einer Kräftegruppe bestimmen, nachdem man deren Größe, Richtung und Sinn ermittelt hat.

Man wählt hierzu einen beliebigen Drehpunkt, stellt in bezug auf ihn die Hebelarme der Einzelkräfte fest und bildet die algebraische Summe der Momente der Einzelkräfte. Ist  $x$  der Hebelarm der Mittelkraft (also deren senkrechter Abstand vom Drehpunkt), so ist nach obiger Gleichung  $R \cdot x = \sum P \cdot p$ , woraus:

$$x = \frac{\sum P \cdot p}{R}.$$

Besonders einfach wird das Verfahren, wenn die Kräfte parallel sind.

**Beispiel.** Gegeben seien nach Fig. 43 die Kräfte  $P_1 = +8000$  kg,  $P_2 = -3000$  kg,  $P_3 = -1000$  kg in gegenseitigen Abständen von 1,0 m. Gesucht  $R$  nach Lage, Größe, Richtung und Sinn.



Stg. 43.

**Lösung.** Es ist  $R = \sum P$ , also  $R = P_1 - P_2 - P_3 = 8000 - 3000 - 1000 = +4000$  kg. Wählt man als Drehpunkt den  $p_1 = 3,0$  m von  $P_1$  entfernten

Punkt  $D$ , so ergibt sich der Hebelarm von  $P_2$  zu  $p_2 = 4,0$  m und der Hebelarm von  $P_3$  zu  $p_3 = 5,0$  m, mithin:

$$R \cdot x = P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 - P_3 \cdot p_3$$

$$\text{oder: } 4000 \cdot x = 8000 \cdot 300 - 3000 \cdot 400 - 1000 \cdot 500$$

$$x = \frac{2400000 - 1200000 - 500000}{4000} = \frac{700000}{4000}$$

$$x = +175 \text{ cm.}$$

Mithin ist  $R$  von  $D$  1,75 m und von  $P_1$  1,25 m entfernt. Da  $R$  sich positiv ergab, so hat es denselben Wirkungssinn wie  $P_1$ , ist also nach oben gerichtet.<sup>1)</sup>

1) Wählt man einen anderen Drehpunkt, so erhält man trotzdem für  $R$  denselben Abstand von  $P_1$  (Versuch!).



Mit Hilfe des Momentensatzes läßt sich auch das statische Moment einer beliebigen Kräftegruppe mit Hilfe des Kraftseils und Seilecks ermitteln.

Man bestimmt nach Fig. 44  $R$  mit Hilfe des Kraftseils und Seilecks. Sodann nimmt man einen beliebigen Drehpunkt  $D$  an (Fig. 44) und zieht durch ihn eine Gleichlaufende zu  $R$ , welche auf den äußersten Seilstrahlen  $s_0$  und  $s_4$  die Strecke  $FG = y$  abschneidet. Von  $D$  zieht man  $CJ \perp FG$  und erhält dadurch den Hebelarm  $r$ . Das statische Moment der Kräftegruppe ist in bezug auf  $D$  daher  $M = R \cdot r$ . Sodann zieht man in der Polfigur  $OB \perp AE$ . Man nennt diesen Abstand des Poles  $O$  von der Mittelkraft  $R$  Polentfernung oder Polabstand und bezeichnet ihn allgemein mit  $H$ . Nun ist:  $\triangle CFG \sim \triangle OAE$ , da die Seiten der Dreiecke einander bezüglich parallel sind. Daher ist:

$$CJ : FG = OB : AE \quad \text{oder:} \quad r : y = H : R$$

$$R \cdot r = H \cdot y$$

$$M = H \cdot y.$$

Hieraus folgt der Lehrsatz:

Das statische Moment einer Kräftegruppe in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt ist gleich dem Produkte aus dem Polabstand  $H$  und der Strecke  $y$ , welche durch die äußersten, die Mittelkraft einschließenden Seilzugseiten auf einer durch den Drehpunkt parallel zur Mittelkraft gezogenen Geraden abgeschritten wird.

Man pflegt  $H$  als Kraft im Kräftemaßstab und  $y$  als Länge im Längenmaßstab zu messen, doch erhält man dasselbe Ergebnis, wenn man  $H$  als Länge und  $y$  als Kraft mißt.

Der Momentensatz wird auch häufig zur Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen angewendet. Im allgemeinen soll in diesem Buche die Ermittlung des Schwerpunktes von Linien, Flächen und Körpern

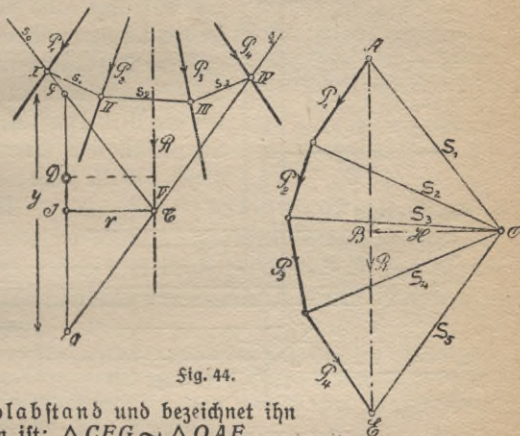


Fig. 44.

als aus der Mathematik bekannt vorausgesetzt und daher nur der eben besprochene Fall erörtert werden.

Zur Ermittlung des Schwerpunktes einer Fläche zerlegt man diese in Einzelflächen, deren Schwerpunkte leicht zu bestimmen sind (Rechtecke, Dreiecke). Diese Einzelflächen faßt man als Gewichte, also als Kräfte auf, welche in den Schwerpunkten der Einzelflächen angreifen. Durch Rechnung oder mit Hilfe des Seilecks sucht man nun zu diesen Einzelkräften die Mittelkraft  $R$ , welche natürlich eine Schwerlinie der Gesamtfläche darstellt. In gleicher Weise sucht man eine zweite Schwer-

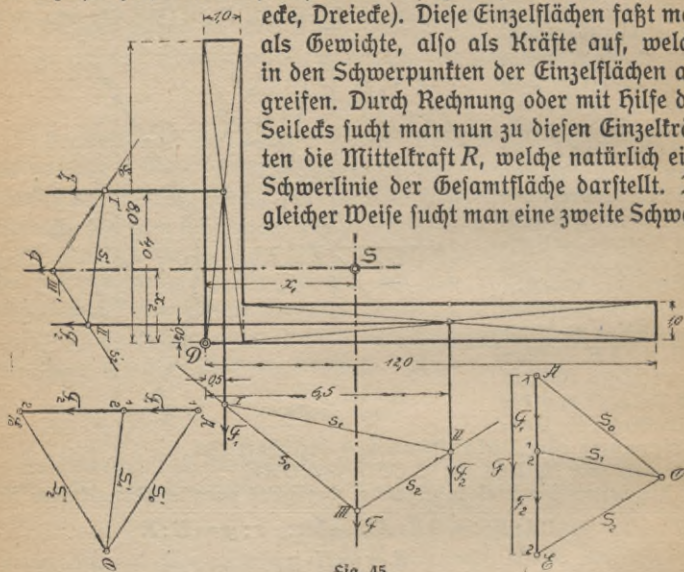


Fig. 45.

linie auf. Der Schnittpunkt beider Schwerlinien ist der gesuchte Schwerpunkt. Ein einfaches Beispiel zeige den Gang des Verfahrens.

**Beispiel.** Der Schwerpunkt der in ihren Abmessungen in Fig. 45 gegebenen Fläche (ungleichschenkliges Winkelblech) ist zu bestimmen.

**Lösung.** a) Rechnerisch: Man zerlegt die Figur in die Flächen  $F_1 = 8,0 \cdot 1,0 = 8,0$  qcm und  $F_2 = 11,0 \cdot 1,0 = 11,0$  qcm. Den Drehpunkt wählt man am besten in  $D$ , so daß sich für lotrechte Richtung der Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  die in Fig. 45 eingeschriebenen Hebelarme ergeben.  $x_1$  sei der Abstand der gesuchten Schwerlinie (Mittelkraft)  $F$  von  $D$ . Dann ist nach dem Momentensatz das Moment der ganzen Fläche gleich der Summe der Momente der Einzelflächen. Die letzteren drehen in Bezug auf  $D$  in gleichem Sinne, sind also positiv. Man erhält:

$$\begin{aligned} F \cdot x_1 &= F_1 \cdot 0,5 + F_2 \cdot 6,5 \\ (8,0 + 11,0)x_1 &= 8,0 \cdot 0,5 + 11,0 \cdot 6,5 \\ x_1 &= \frac{4,0 + 71,5}{19,0} = \frac{75,5}{19,0} = 3,97 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Um die zweite Schwerlinie zu finden, denkt man sich die Richtung von  $F_1$  und  $F_2$ , und damit auch die von  $F$  um  $90^\circ$  gedreht und erhält, wieder in bezug auf  $D$  als Drehpunkt

$$F \cdot x_2 = F_1 \cdot 4,0 + F_2 \cdot 0,5$$

$$x_2 = \frac{8,0 \cdot 4,0 + 11,0 \cdot 0,5}{19,0} = \frac{32,0 + 5,5}{19,0} = \frac{37,5}{19,0} = 1,97 \text{ cm.}$$

Nunmehr kann der Schwerpunkt  $S$  festgesetzt werden, wie die Figur zeigt.

b) Zeichnerisch: Man wählt einen Kräftemaßstab (hier  $1 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$ ) und zeichnet für die beiden zueinander senkrechten Flächenrichtungen nach Fig. 45 Polfigur und Seileck. Der Schnittpunkt  $S$  der hierbei gewonnenen Schwerlinien (Mittelkräfte  $F$  zu  $F_1$  und  $F_2$ ) ist der gesuchte Schwerpunkt. Durch Messung findet man die Abstände  $x_1$  und  $x_2$  in gleicher Größe wie durch Rechnung.

c) **Besondere Fälle.** 1. Das Kräftepaar. Unter einem Kräftepaar verstanden wir zwei parallele, gleich große Kräfte von entgegengesetztem Wirkungssinn, deren Mittelkraft gleich Null ist, so daß von ihm keine fortschreitende, sondern nur eine drehende Bewegung hervorgerufen werden kann.

Das statische Moment soll nun für die in Fig. 46 dargestellten, allein möglichen Fälle der Lage des Drehpunktes zu dem Kräftepaar bestimmt werden.

Liegt der Drehpunkt  $D$  zwischen den beiden Kräften (Fig. 46a), so wird, da beide Kräfte in gleichem Sinn drehen:

$$M = P \cdot m + P \cdot n = P(m + n) = P \cdot a.$$

Liegt  $D$  auf einer der beiden Kräfte, so wird das Moment dieser Kraft  $= 0$  und man erhält  $M = P \cdot a$  (Fig. 46b).

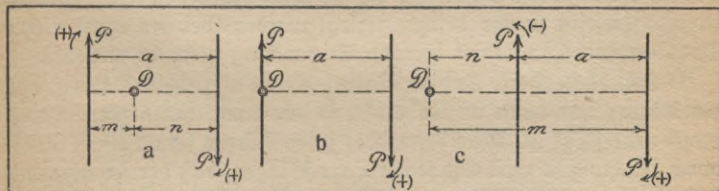


Fig. 46.

Liegt  $D$  außerhalb der beiden Kräfte (Fig. 46c), so drehen sie in verschiedenem Sinne, und es wird:

$$M = P \cdot m - P \cdot n = P(m - n) = P \cdot a.$$

Das statische Moment eines Kräftepaars ist daher stets gleich dem Produkt aus einer der beiden Kräfte und ihrem senkrechten Abstände von der anderen Kraft.

Ein Kräftepaar kann nur durch ein Kräftepaar, aber nie durch eine Einzelkraft ersetzt oder aufgehoben werden. Das ersetzende Kräftepaar muß denselben Drehsinn und ein gleich großes Drehmoment, das aufhebende ein gleich großes Drehmoment, aber entgegengesetzten Drehsinn besitzen.

Wirken auf einen Körper mehrere Kräftepaare, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die algebraische Summe der Drehmomente gleich Null ist.

2. Einzelkraft und Kräftepaar. Häufig kommt in der Statik der Fall vor, daß auf einen Körper eine Einzelkraft  $P$  und ein Kräftepaar mit dem Moment  $Q \cdot a$  wirkt. Nach dem eben Gesagten kann letzteres durch ein anderes Kräftepaar mit dem Moment  $P \cdot b = Q \cdot a$  ersetzt werden, woraus man erhält  $b = \frac{Q \cdot a}{P}$ .

Dieses neue Moment  $P \cdot b$  kann man nun so verschieben, daß der Arm  $b$  senkrecht zur gegebenen Kraft  $P$  steht und mithin die eine Kraft  $P$  des Kräftepaares in die Richtung der gegebenen Kraft  $P$  fällt. Diese beiden Kräfte heben sich dann gegenseitig auf, und die Wirkung einer solchen Kräftegruppe ist dieselbe, als wenn nur eine Kraft  $P$  im Abstände  $b$  vom Drehpunkt wirken würde. Daraus folgt:

Wirkt auf einen Körper eine Einzelkraft und ein Kräftepaar, so lassen sich beide zu einer Einzelkraft vereinigen, welche ebenso groß ist wie die gegebene Kraft, aber parallel zu letzterer um ein gewisses Maß  $b$  verschoben wird.

Umgekehrt kann natürlich auch stets eine Einzelkraft in ein Kräftepaar und eine zweite Einzelkraft, welche zu der gegebenen Kraft parallel ist und dieselbe Größe besitzt, zerlegt werden (bei der exzentrischen Druckbeanspruchung wird hiervon Anwendung gemacht werden).

**d) Standficherheit.** Aus der Naturlehre ist allgemein bekannt, daß ein Körper nur dann im Ruhezustand sein kann, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist. Man kann aber jeden Körper (etwa einen Stuhl) durch Drehung so weit aus seiner Lage bringen, daß der Schwerpunkt außerhalb des Unterstützungspunktes, der Unterstützungsgeraden oder der Unterstützungsfläche zu liegen kommt und damit der Körper umfällt. In folgendem soll nur der Fall erörtert werden, bei welchem der Schwerpunkt des Körpers durch eine Fläche unterstützt wird, wie das bei Baukörpern der Fall ist.

Der Baukörper muß imstande sein, durch sein Eigengewicht dem Einfluß anderer Kräfte, z. B. Winddruck, Erddruck, Wasserdruck und dgl., die ihn umzustürzen oder fortzuschieben suchen, zu widerstehen.

Ein Fortschieben des Körpers wird meist durch die auf der Unterlage auftretenden Reibungswiderstände verhindert. Den Widerstand, welchen der Körper dem Umfallen entgegensetzt, nennt man Standficherheit (Stabilität), die Kante, um welche das Umfallen erfolgt, Kippkante.

Betrachtet man den Körper in Fig. 47 (Mauer), so erkennt man sofort, daß die Kraft  $D$  den Körper um den Punkt  $A$  zu kippen sucht. Ihr Drehmoment ist links drehend und hat die Größe  $D \cdot d$ .

Es heißt Kippmoment oder Umsturzmoment. Die lotrecht wirkenden Kräfte (Eigengewicht und etwaige senkrechte Belastung) suchen den Körper ebenfalls um den Punkt  $A$ , aber rechts zu drehen, wobei der Körper fest gegen seine Unterlage gedrückt und damit ein Maß für die Standfähigkeit des Körpers gegeben wird. Man nennt dieses Moment von der Größe  $G \cdot b$  daher Standficherheitsmoment (Stabilitätsmoment). Es wird also um so größer, je größer die Entfernung der Lotrechten Kraft von der Kippkante ist, und je größer Eigengewicht und Belastung werden. Ist Gleichgewicht vorhanden, so muß sein:

$$G \cdot b = D \cdot d.$$

Dies reicht aber zur Standficherheit nicht aus. Soll letztere vorhanden sein, so muß:

$$G \cdot b > D \cdot d$$

sein. Ist dagegen  $G \cdot b < D \cdot d$ , so tritt Umfallen ein. Für die Praxis wird verlangt, daß das Standficherheitsmoment mindestens das 1,5 fache des Umsturzmomentes beträgt, also:

$$G \cdot b > 1,5 D \cdot d.$$

Wir werden später sehen, daß zur Standficherheit eines solchen Körpers aber noch andere Bedingungen, als die eben besprochene, erfüllt sein müssen.

**Beispiel.** Die in Fig. 48 in ihren Abmessungen gegebene Mauer ist auf ihre Standficherheit zu untersuchen. Die Mauer werde vom Winddruck, der in der Mitte der Höhe angreift, mit  $125 \text{ kg/m}^2$  belastet. Sie ist in Abständen von 2,0 m von Mitte zu Mitte mit Strebepfeilern auf einer Seite versehen. Das Gewicht des Mauerwerkes betrage  $2400 \text{ kg/m}^2$ .

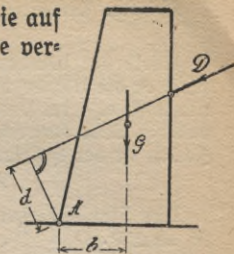


Fig. 47.

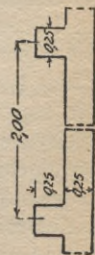
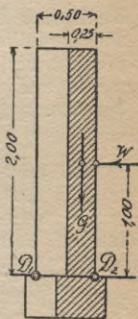


Fig. 48.

**Lösung.** Die Größe des Winddruckes ist:

$$W = 2,0 \cdot 2,0 \cdot 125 = 500 \text{ kg.}$$

Wirkt der Winddruck  $W$  in der in der Figur angegebenen Weise, so sucht er die Mauer um die Kante des Strebepfeilers zu kanten, der Drehpunkt ist also im Punkte  $D_1$  anzunehmen. Würde der Wind auch von der anderen Seite angreifen, so wäre  $D_2$  als Drehpunkt zu wählen. In beiden Fällen ist der Hebelarm von  $W = 1,0 \text{ m}$ , mithin das Umstürzmoment:

$$M_u = 500 \cdot 100 = 50000 \text{ kgcm.}$$

Das Standficherheitsmoment wird für den Drehpunkt  $D_1$ :

$$M_s = \Sigma P \cdot p$$

$$= 2400 \cdot 2,0 \cdot \left[ 0,25 \cdot 2,0 \cdot \left( 0,25 + \frac{0,25}{2} \right) + 0,25 \cdot 0,25 \cdot \frac{0,25}{2} \right]$$

$$= 937,5 \text{ kgm} = 93750 \text{ kgcm.}$$

Mithin ist mehr als  $1\frac{1}{2}$ fache Sicherheit vorhanden. Für  $D_2$  als Drehpunkt erhält man:

$$M_s = 2400 \cdot 2,0 \cdot \left[ 0,25 \cdot 2,0 \cdot \frac{0,25}{2} + 0,25 \cdot 0,25 \cdot \left( 0,25 + \frac{0,25}{2} \right) \right]$$

$$= 301,65 \text{ kgm} = 30165 \text{ kgcm.}$$

Also erreicht  $M_s$  noch nicht einmal die Größe von  $M_u$ , mithin würde die Mauer kanten, wenn sie auch nach dieser Seite den Winddruck aufnehmen sollte. Sie müßte daher auch auf der anderen Seite mit Strebepfeilern versehen werden. Letztere dienen mithin dazu, die Kippkante weiter nach vorn zu schieben und dadurch den Hebelarm und also auch das Standficherheitsmoment zu vergrößern.

## VII. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit ein Bauwerk im Zustande der Ruhe sich befinde, sind in den bisherigen Erläuterungen schon aufgestellt worden, sollen aber zur größeren Übersichtlichkeit hier nochmals zusammengestellt werden.

**a) Rechnerische Bedingungen.** Beliebig viele in einer Ebene auf einen Körper wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

1. die algebraische Summe ihrer sämtlichen wagerechten Seitenkräfte gleich Null ( $\Sigma H = 0$ ),
2. die algebraische Summe ihrer sämtlichen senkrechten Seitenkräfte gleich Null ( $\Sigma V = 0$ ),
3. die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt gleich Null ist ( $\Sigma M = 0$ ). Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann weder eine fortschreitende (Bedingung 1 und 2), noch eine drehende Bewegung (Bedingung 3) eintreten.

**b) Zeichnerische Bedingungen.** Eine beliebige Anzahl in einer Ebene liegender Kräfte befindet sich im Gleichgewicht, wenn sie sich zu einem geschlossenen Kräfteck mit gleichem Umlaufungssinn zusammensetzen lassen und zwischen ihren Richtungen sich ein in sich schließendes Seileck zeichnen läßt.

**Anwendungsbeispiel.** Die Einwirkung der äußeren Kräfte auf eine offenstehende, in Angeln bewegliche Tür soll untersucht werden (Fig. 49). Auf die Tür wirkt in ihrem Schwerpunkt  $S$  das Eigengewicht  $G$ ; in den beiden Angeln muß zusammen ein Stützenwiderstand  $G_1$  entstehen, der gleich  $G$  ist, denn nach den Gleichgewichtsbedingungen  $\Sigma V = 0$  muß sein:  $G - G_1 = 0$ ;  $G = G_1$ .

$G$  und  $G_1$  bilden ein Kräftepaar, dessen Drehbestreben  $M = G \cdot g$  beträgt. Dieses Drehmoment sucht die Tür nach rechts zu drehen, was durch die Befestigung in den Angeln verhindert wird. Auf die Angeln wirken daher wagerechte Seitendrücke, oben ein nach rechts gerichteter, unten ein nach links gerichteter. Hierdurch werden jeweilig gleichgroße, wagerechte Stützendrücke als Gegendrücke hervorgerufen, von denen somit der obere  $H_1$  nach links, der untere  $H_2$  nach rechts gerichtet ist. Nach der Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma H = 0$  muß sein:  $H_1 - H_2 = 0$ , also wird  $H_1 = H_2 = H$ .

Diese beiden wagerechten gegensinnigen Gegendrücke bilden ebenfalls ein Kräftepaar  $= H \cdot h$ , das linksherumdreht.

Nach der dritten Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma M = 0$  muß sein:  $G \cdot g - H \cdot h = 0$ ;

der Seitendruck in den Angeln läßt sich somit bestimmen;  $H = \frac{G \cdot g}{h}$ .

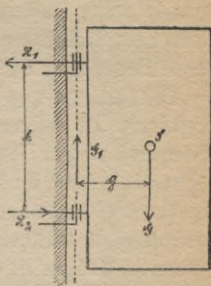


Fig. 49.

## C. Die Anwendung der statischen Gesetze auf die Baukonstruktionen.

### I. Allgemeines über Träger und deren Auflagerung.

Ein Träger ist ein Bauteil, bei dem die auftretende Belastung ausschließlich oder doch zum größten Teile rechtwinklig zur Längsachse bzw. zur Verbindungslinie der Stützpunkte (Auflager) des Bauteiles wirkt. Die Belastungen sind in der Regel lotrecht, daher liegt die Längsachse der Träger meist wagerecht oder weicht nur wenig von der Wagerechten ab. Unter einem Träger versteht man in erster Linie einen Balkenträger (gerade Längsachse) aus Holz oder Eisen, doch zählen

auch Dachbinder, Spreng- und Hängewerke (gebrochene Längsachse), sowie Gewölbe und eiserne Bogenträger (gekrümmte Längsachse) zu ihnen. Balkenträger sind Träger, bei denen bei lotrechter Belastung nur lotrechte Auflagerdrücke entstehen, während bei Sprengwerken bei lotrechter Belastung schiefe Stützendrücke auftreten, die jedoch in lot- und wagerechte Seitendrücke zerlegt werden können.

Die Auflagerung der Träger kann auf zwei oder mehreren Stützen erfolgen. Ist ersteres der Fall, so nennt man den Träger einen einfachen Träger, sonst einen fortlaufenden, durchgehenden (kontinuierlichen Träger). Der Träger liegt auf seinen Stützen entweder frei auf, oder er wird auf der Stütze auf eine größere Strecke festgehalten, in welchem Falle man ihn eingespannt nennt. Ein eingespannter Träger ist auch der Freitragler, dessen eines Ende keine Unterstützung besitzt (Balkonträger). Zuweilen besitzt ein Träger auch ein über jede oder nur eine Stütze hinausragendes Ende, man heißt ihn dann Kragträger mit zwei freien Enden, bzw. Kragträger mit einem freien Ende.

Kann man mit Hilfe der drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen aus der Belastung die unbekanntenen Stützendrücke bestimmen, wie es beim Träger auf zwei Stützen der Fall ist, so nennt man den Träger statisch bestimmt, andernfalls statisch unbestimmt (durchgehender Träger).

Die Auflagerung erfolgt entweder fest oder beweglich.

Feste Auflager müssen jedoch lot- oder wagerechte Verschiebung des Punktes, in dem die Stützung stattfindet, verhindern. Der auftretende Stützen- oder Auflagerdruck kann daher eine beliebige Richtung in der Trägerebene besitzen und demnach sowohl eine lotrechte, wie eine wagerechte Seitenkraft ergeben (Fig. 50).

Bewegliche Auflager finden Anwendung, um erheblichere Längenänderungen des Trägers infolge Temperaturausdehnung zu gestatten, und ermöglichen eine Verschiebung des zu stützenden Trägerpunktes auf vorgeschriebener Bahn. Beim beweglichen Auflager nimmt man eine reibungslose Berührung der Oberfläche des Trägers und des Auflagers an (Rollenauger). Läßt die Stützung nur reibungslose wagerechte Bewegungen zu, so muß der auftretende Auflagerdruck lotrecht gerichtet sein (Fig. 51).

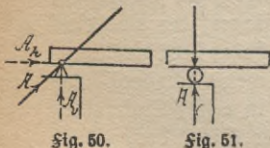


Fig. 50.

Fig. 51.



Bei beliebiger Belastung, wie sie etwa bei einem Dachbinder durch den Winddruck  $W$ , der senkrecht zur geneigten Dachfläche angenommen werden kann, auftritt, erfahren die Unterstützungspunkte bestimmte Drücke (Fig. 52). Da das eine Auflager als Rollenlager ausgebildet wird, so muß nach dem eben Gesagten der Auflagerdruck  $B$  lotrecht gerichtet sein. Soll Gleichgewicht herrschen, so müssen sich die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  und der Winddruck  $W$  in einem Punkte  $C$  schneiden. Man hat daher  $B$  und  $W$  in  $C$  zum Schnitt zu bringen.

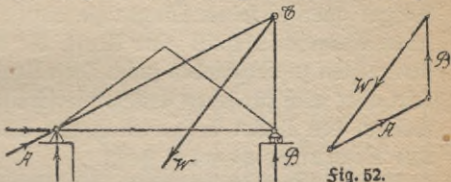


Fig. 52.

Die Kraft  $A$  muß natürlich auch durch den Stützpunkt  $A$  gehen, man findet also ihre Richtung, indem man den Schnittpunkt  $C$  mit  $A$  verbindet. Die Größe von  $A$  und  $B$  erhält man aus dem Kräfte Dreieck,  $A$  ist dann noch in seine lotrechte und wagerechte Seitenkraft am Auflager zu zerlegen.

Hinsichtlich der Belastung der Träger unterscheidet man:

1. Einzellasten. Die Lasten greifen an einem oder mehreren Punkten an (z. B. Kappenträger auf einem Unterzug).

2. Gleichmäßig verteilte Belastung. Die Belastung ist auf die ganze Länge des Balkens in gleicher Weise verteilt (z. B. die Belastung eines Zimmerbalkens durch die Nutzlast, oder eines Trägers durch eine über ihn ununterbrochen fortlaufende Mauer).

3. Streckenbelastung. Nur einzelne Strecken des Balkens tragen eine gleichmäßige Belastung (z. B. die Belastung eines Trägers durch eine von einer Türöffnung unterbrochene Mauer).

4. Gemischte Belastung. Mehrere oder alle der unter 1 bis 3 genannten Belastungen treten gleichzeitig auf.

Die Belastung kann auch bleibend und veränderlich oder beweglich sein (Eigengewicht der Träger, auf Trägern ruhende Mauern liefern bleibende, also stets vorhandene Lasten; Radrücke von Fahrzeugen, Menschengedränge auf Brücken, Schnee- und Winddrucke sind veränderliche Lasten).

Belastungsfeld. Zur besseren Verfolgung der Kraftwirkungen, teilt man den Träger in Belastungsfelder ein, d. h. in Strecken, auf welchen die Art und Größe der Belastung die gleiche ist. Eine Einzellast stellt ein Belastungsfeld von unendlich kleiner Länge dar.

Querkraft und Biegemoment. Wie wir bereits sahen, werden bei einem Träger durch lotrechte Belastung Stützendrücke hervorgerufen, damit Gleichgewicht herrscht. Die äußeren Kräfte aber suchen auch den Träger durchzubiegen, sowie in ihrer Wirkungslinie die einzelnen Trägerquerschnitte gegeneinander zu verschieben, mithin den Träger quer zu seiner Längsachse abzuscheren. Daher ergibt sich für jeden Trägerquerschnitt eine Kraft, die den linken Trägerteil gegen den rechten zu verschieben sucht. Diese Kraft heißt Querkraft. Ferner tritt aber auch für jeden Trägerquerschnitt ein statisches Moment auf, welches den linken Trägerteil gegen den rechten zu verbiegen sucht und Biegemoment heißt.

Durch diese Beanspruchung werden innere Kräfte hervorgerufen, die mit den äußeren Kräften sich im Gleichgewicht befinden müssen; die Trägerabmessungen müssen so gewählt werden, daß der Träger die Einwirkung dieser inneren Kräfte mit Sicherheit auf die Dauer ertragen kann.

Die Biegemomente sind, wie aus einfacher Überlegung zu erkennen, nicht für jeden Querschnitt des Trägers gleich groß. Man muß daher zur richtigen Ermittlung der Abmessungen eines Trägers das größte Biegemoment (Maximalmoment =  $M_{\max}$ ) bestimmen. In dem Querschnitt, in welchem es auftritt, ist der Bruch des Trägers am meisten zu befürchten; er heißt daher der gefährliche Querschnitt.

## II. Die Bestimmung der Auflagerdrücke, des Biegemomentes und der Querkräfte eines Trägers auf zwei Stützen mit einer oder mehreren Einzellasten.

Die hier, wie auch in den folgenden Abschnitten zu behandelnden Träger erfahren nur lotrechte Belastungen, so daß auch die Richtung der beiden Auflagerdrücke lotrecht ist. Da also nur diese beiden Drücke  $A$  und  $B$  zu ermitteln sind, hat man nur zwei Unbekannte festzulegen. Wagerechte Kräfte kommen nicht vor, mithin genügt die Erfüllung der beiden Gleichgewichtsbedingungen  $\Sigma M = 0$  und  $\Sigma V = 0$ .

**Ermittlung der Auflagerdrücke.** a) Rechnerisches Verfahren. Die Lösung der Aufgabe wird am besten sofort an einem Beispiele gezeigt. Ein Träger sei nach Fig. 53 mit den Einzellasten  $P_1 = 2000$  kg,  $P_2 = 3000$  kg,  $P_3 = 1000$  kg und  $P_4 = 2000$  kg belastet.

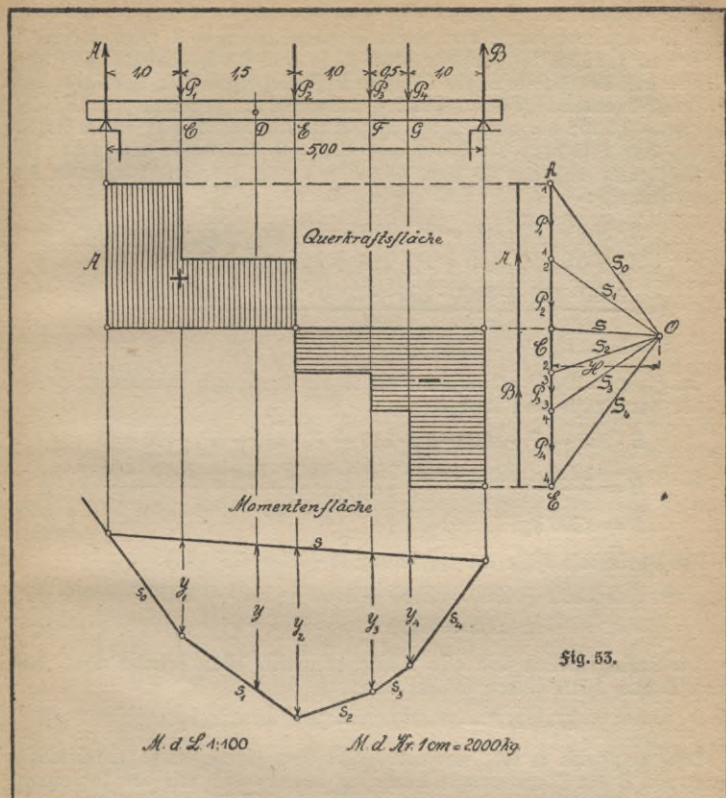


Fig. 53.

Da die beiden Auflagerdrücke und die entgegengesetzt wirkenden Kräfte  $P$  nach der Bedingung  $\Sigma V = 0$  im Gleichgewicht sein müssen, so muß sein:

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 0$$

$$\text{also: } A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

oder allgemein:  $A + B = \Sigma P$

$$\text{mithin: } A + B = 2000 + 3000 + 1000 + 2000 = 8000 \text{ kg.}$$

Zur Bestimmung von  $A$  und  $B$  benutzt man die 3. Gleichgewichtsbedingung (vgl. S. 43). Um aber eine Gleichung mit nur einer Unbekannten zu erhalten, verlegt man den Drehpunkt zur Bestimmung von  $A$  nach  $B$  und

zur Bestimmung von  $B$  nach  $A$ , da dann jedesmal der Hebelarm der einen Unbekannten und damit auch deren Moment gleich Null wird. Bestimmt man nun zunächst den Auflagerdruck  $A$ , so sind die Hebelarme sämtlicher Kräfte auf den Punkt  $B$  als Drehpunkt zu beziehen. Der Hebelarm von  $P_1$  mißt demnach  $1,5 + 1,0 + 0,5 + 1,0 = 4,0$  m, derjenige von  $P_2$  entsprechend  $2,5$  m; der von  $P_3$  beträgt  $1,5$  m und der von  $P_4$  ergibt sich zu  $1,0$  m. Zur Erfüllung der Bedingung  $\Sigma M = 0$  muß daher sein (unter Berücksichtigung, daß das Moment von  $B$  mit dem Hebelarm  $0$  nicht in Betracht kommt):

$$A \cdot 500 - P_1 \cdot 400 - P_2 \cdot 250 - P_3 \cdot 150 - P_4 \cdot 100 = 0$$

oder  $A \cdot 500 = P_1 \cdot 400 + P_2 \cdot 250 + P_3 \cdot 150 + P_4 \cdot 100$

$$A = \frac{2000 \cdot 400 + 3000 \cdot 250 + 1000 \cdot 150 + 2000 \cdot 100}{500}$$

$$A = 3800 \text{ kg.}$$

In gleicher Weise erhält man für  $A$  als Drehpunkt (Hebelarme = Abstände der Kräfte von  $A$ ):

$$B \cdot 500 - P_1 \cdot 100 - P_2 \cdot 250 - P_3 \cdot 350 - P_4 \cdot 400 = 0$$

$$B = \frac{2000 \cdot 100 + 3000 \cdot 250 + 1000 \cdot 350 + 2000 \cdot 400}{500}$$

$$B = 4200 \text{ kg.}$$

Die Probe mit Hilfe der Beziehung  $A + B = \Sigma P$  gibt:

$$3800 + 4200 = 2000 + 3000 + 1000 + 2000$$

$$8000 = 8000.$$

Die Auflagerdrücke sind also richtig ermittelt. Man erkennt aber, daß man  $B$  auch hätte finden können aus:

$$B = \Sigma P - A = 8000 - 3800 = 4200 \text{ kg.}$$

Doch empfiehlt es sich, namentlich für Ungeübtere, auch zur Ermittlung von  $B$  die Momentengleichung aufzustellen und mit der Beziehung  $A + B = \Sigma P$  die Probe zu machen, ob man richtig gerechnet hat.

b) Zeichnerisches Verfahren. Die Lösung der Aufgabe ist bereits unter  $B$ , IV, b, 2 besprochen. Man zeichnet, wie in Fig. 53 angegeben, unter Annahme eines beliebigen Poles  $O$  die Polfigur und sodann das Seiled. Eine Parallele durch  $O$  zur Schlußlinie  $s$  des Seiledes schneidet auf  $AE$  die Strecken  $AC = A$  und  $CE = B$  ab. Die Stützenwiderstände  $A$  und  $B$  halten den gegebenen Lasten  $P$  das Gleichgewicht, da Kräfte und Seiled geschlossen sind. Die Festlegung der Lage der Mittelkraft  $R$  ist nicht notwendig.

**Bestimmung des Biegemomentes und der Querkraft.** a) Rechnerisches Verfahren. Zur Ermittlung des an einer beliebigen Stelle des Trägers auftretenden Biegemomentes und der daselbst auf-

tretenden Querkraft denkt man sich den Träger an der betreffenden Stelle  $D$  lotrecht durchschnitten und betrachtet zunächst das linke Trägerstück, das man zweckmäßig nochmals besonders herauszeichnet (Fig. 54). Die äußeren Kräfte hielten sich vor der Trennung das Gleichgewicht, ebenso befanden sich an jeder Stelle des Trägers die auftretenden äußeren und inneren Kräfte im Gleichgewicht. Durch Störung des Zusammenhanges des Trägers an der Schnittstelle wird natürlich auch der vorhandene Gleichgewichtszustand gestört. Will man ihn jedoch aufrecht erhalten, so muß man an der Schnittstelle solche Kräfte anbringen, welche die gleiche Wirkung hervorrufen wie zuvor die inneren Kräfte. Die Ermittlung dieser inneren Widerstandskräfte lehrt die Festigkeitslehre.

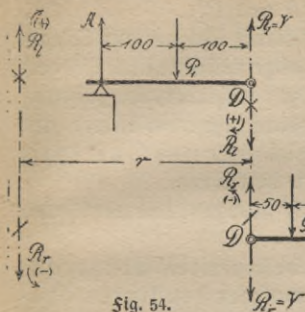


Fig. 54.

handene Gleichgewichtszustand gestört. Will man ihn jedoch aufrecht erhalten, so muß man an der Schnittstelle solche Kräfte anbringen, welche die gleiche Wirkung hervorrufen wie zuvor die inneren Kräfte. Die Ermittlung dieser inneren Widerstandskräfte lehrt die Festigkeitslehre.

Um sich die Wirkung der äußeren Kräfte klar zu machen, ermittelt man die Mittelkraft  $R_1$  der am linken Trägerstück wirkenden Kräfte nach Größe, Lage, Richtung und Sinn in gleicher Weise, wie auf S. 36 gezeigt wurde. Die Größe von  $R_1$  folgt aus:

$$R_1 = A - P_1 = 3800 - 2000 = 1800 \text{ kg.}$$

Da das Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Momente der Einzelkräfte ist, so erhält man den Hebelarm  $r$  in bezug auf den Drehpunkt  $D$  aus der Gleichung:

$$R_1 \cdot r = A \cdot 200 - P_1 \cdot 100$$

$$r = \frac{3800 \cdot 200 - 2000 \cdot 100}{1800} = 3,11 \text{ m.}$$

Man fügt nun in  $D$  zwei gleich große, aber einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $= R_1$  hinzu, wodurch an der ursprünglichen Kraftwirkung nichts geändert wird, da sie sich ja gegenseitig aufheben. Die ursprünglich gefundene Mittelkraft  $R_1$  und die in  $D$  in entgegengesetztem Sinne wirkende Kraft  $R_1$  bilden nun ein Kräftepaar mit dem rechts drehenden Moment:  $M_1 = R_1 \cdot r$ ,

welches also den linken Trägerteil an der Schnittstelle gegen den rechten

zu verbiegen sucht und daher das Biegemoment für den Punkt  $D$  ist. Es ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller am linken Trägerteil wirkenden Einzelkräfte ( $A$  und  $P_1$ ).

Serner wirkt im Punkte  $D$  noch die Hilfskraft  $R_l$  quer zur Längsachse des Trägers nach oben und sucht das abgeschnittene linke Trägerstück in ihrem Wirkungssinne, also nach oben, zu verschieben, vor Führung des Schnittes bei  $D$  den Träger also daselbst durchzuscheren. Man nennt diese Kraft darum auch Scherkraft, oder häufiger noch Querkraft (Transversalkraft) und pflegt sie mit  $V$  zu bezeichnen.

Hieraus geht zur Erklärung der Begriffe „Biegemoment“ und „Querkraft“ folgendes hervor:

Das Biegemoment für einen bestimmten Trägerabschnitt ist dasjenige Kraftmoment, welches den linken Trägerteil gegen den rechten an der Schnittstelle zu verbiegen sucht. Das Biegemoment ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller am abgeschnitten gedachten Trägerteil wirkenden äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt des Querschnitts der Schnittstelle als Drehpunkt.

Die Querkraft für einen bestimmten Trägerabschnitt ist diejenige Kraft, welche den linken Trägerteil gegen den rechten in ihrem Wirkungssinne im betrachteten Querschnitt zu verschieben sucht. Die Querkraft ist gleich der Mittelkraft aller am abgeschnitten gedachten Trägerteil wirkenden äußeren Kräfte.

Betrachtet man das rechte Trägerstück (Fig. 54), so erhält man für die Größe der Mittelkraft der an ihn wirkenden Kräfte:

$$R_r = B - P_2 - P_3 - P_4$$

$$R_r = 4200 - 3000 - 1000 - 2000 = -1800 \text{ kg.}$$

$R_r$  hat also dieselbe Größe wie  $R_l$ , ist jedoch entgegengesetzt gerichtet. Für  $D$  als Drehpunkt erhält man:

$$R_r \cdot r = B \cdot 300 - P_2 \cdot 50 - P_3 \cdot 150 - P_4 \cdot 200$$

$$r = \frac{4200 \cdot 300 - 3000 \cdot 50 - 1000 \cdot 150 - 2000 \cdot 200}{-1800} = -3,11 \text{ m.}$$

Das Vorzeichen gibt an, daß  $R$  auf der dem rechten Trägerstück abgekehrten Seite liegt; da außerdem  $r$  denselben Wert hat, wie für das linke Trägerstück, so hat  $R_r$  dieselbe Lage, aber entgegengesetzten Sinn wie  $R_l$ . Da beide in dieselbe Gerade fallen, so heben sie sich auf, und

es ist Gleichgewicht vorhanden. Da  $R_l = R_r$  und  $r$  konstant, so folgt:

$$R_l \cdot r = R_r \cdot r \quad \text{oder} \quad M_l = M_r.$$

Die Momente der Mittelkräfte sind für beide Trägerstücke in bezug auf einen beliebigen Drehpunkt also gleich, doch ist  $M_r$  ein links drehendes Moment. Die Momente haben mithin entgegengesetzten Drehsinn, aber gleiche Größe und halten sich daher im Gleichgewicht.

Die in  $D$  am rechten Trägerstück verbleibende, nach unten gerichtete Hilfskraft  $R_r$  ist die Querkraft für das rechte Trägerstück und sucht dieses nach unten zu verschieben. Sie ist eben so groß, aber entgegengesetzt gerichtet, wie die Querkraft  $R_l$  für das linke Trägerstück und befindet sich mit ihr im Gleichgewicht.

Zur Ermittlung des Biegemomentes und der Querkraft für einen beliebigen Querschnitt ist es daher gleichgültig, ob man das Trägerstück links von der Schnittstelle oder dasjenige rechts von ihr betrachtet. Zweckmäßig wählt man das einfachere Trägerstück, also das, an welchem die wenigsten Kräfte wirken.

Für den Fall in Fig. 53 erhält man als Biegemoment demnach:

$$M = R \cdot r = 1800 \cdot 311 = 559800 \text{ kgcm}$$

und als Querkraft:  $V = R_l = R_r = 1800 \text{ kg}$ .

Würde man unmittelbar hinter  $A$  den lotrechten Schnitt führen, so müßte nach obiger Erklärung für die Querkraft werden:

$$V_1 = A = + 3800 \text{ kg}.$$

Diesen Wert hat die Querkraft an jeder Stelle bis zum Angriffspunkt von  $P_1$ , also über das ganze erste Belastungsfeld. Für sämtliche Belastungsfelder erhält man demnach für jede beliebige Schnittstelle des betreffenden Feldes:

1. Belastungsfeld:  $V_1 = A = + 3800 \text{ kg}$
2. "  $V_2 = A - P_1 = 3800 - 2000 = + 1800 \text{ kg}$
3. "  $V_3 = A - P_1 - P_2 = 3800 - 2000 - 3000 = - 1200 \text{ kg}$
4. "  $V_4 = A - P_1 - P_2 - P_3 = 3800 - 2000 - 3000 - 1000 = - 2200 \text{ kg}$
5. "  $V_5 = A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 3800 - 2000 - 3000 - 1000 - 2000 = - 4200 \text{ kg} = B$ .

Die Querkraft ist im 3. Belastungsfelde negativ, der Übergang muß also im Angriffspunkte  $E$  von  $P_2$  stattfinden. Wir werden gleich sehen, welche Bedeutung dies hat.

Denkt man sich einen lotrechten Schnitt zwischen  $A$  und  $P_1$  in einer Entfernung  $= 1$  cm von  $A$  geführt, so würde für den Drehpunkt im Schwerpunkte des Querschnittes an der Schnittstelle das Biegemoment des linken Trägerstückes:

$$M = A \cdot 1,0 = 3800 \cdot 1,0 = 3800 \text{ kgcm},$$

für einen Schnitt in der Entfernung  $= 2$  cm von  $A$  aber:

$$M = A \cdot 2,0 = 3800 \cdot 2,0 = 7600 \text{ kg}$$

also doppelt so groß.

Man erkennt sofort, daß das Moment proportional mit der Entfernung wächst, um schließlich bei  $C$  einen gewissen Höchstwert zu erreichen. Von da ab muß infolge des Hinzutretens der Kraft  $P_1$  natürlich eine neue Momentengleichung aufgestellt werden, doch wird, da bis  $E$  keine weitere Kraft angreift, das Moment bis  $E$  wieder proportional wachsen. Es wird daher genügen, das Moment nur für diejenigen Punkte als Drehpunkte zu bestimmen, in denen die Einzellasten angreifen.

Man erhält dementsprechend:

Für Drehpunkt  $A$  (Hebelarm  $= 0$ ) (Fig. 55):

$$M_A = A \cdot 0 = 3800 \cdot 0 = 0.$$

Für Drehpunkt  $C$  (Abb. 56):

$$M_1 = A \cdot 100 - P_1 \cdot 0 = 3800 \cdot 100 - 2000 \cdot 0 = 380000 \text{ kgcm}.$$

Für Drehpunkt  $E$  (Abb. 57):

$$M_2 = A \cdot 250 - P_1 \cdot 150 - P_2 \cdot 0^1)$$

$$M_2 = 3800 \cdot 250 - 2000 \cdot 150 = 650000 \text{ kgcm}.$$

Für Drehpunkt  $F$  (Abb. 58):

$$M_3 = A \cdot 350 - P_1 \cdot 250 - P_2 \cdot 100.$$

$$M_3 = 3800 \cdot 350 - 2000 \cdot 250 - 3000 \cdot 100 = 530000 \text{ kgcm}.$$

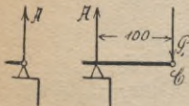


Fig. 55.

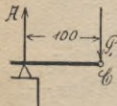


Fig. 56.

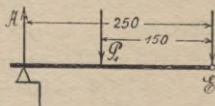


Fig. 57.

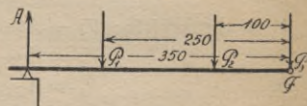


Fig. 58.

Einfacher erhält man unter Benutzung des rechten Trägerstückes (Abb. 59):

$$M_3 = B \cdot 150 - P_4 \cdot 50$$

$$= 4200 \cdot 150 - 2000 \cdot 50 = 530000 \text{ kgcm}.$$

1) Dieses Moment fällt aus der Rechnung heraus und soll daher in Zukunft nicht mehr geschrieben werden.



Für Drehpunkt  $G$  (Abb. 60):

$$M_A = A \cdot 400 - P_1 \cdot 300 - P_2 \cdot 150 - P_3 \cdot 50$$

$$M_A = 3800 \cdot 400 - 2000 \cdot 300 - 3000 \cdot 150 - 1000 \cdot 50 = 420\,000 \text{ kgcm.}$$

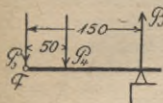


Fig. 59.

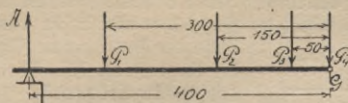


Fig. 60.

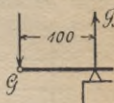


Fig. 61.

Einfacher unter Benützung des rechten Trägerstückes (Abb. 61):

$$M_A = B \cdot 100 = 4200 \cdot 100 = 420\,000 \text{ kgcm.}$$

Für  $B$  wird entsprechend wie bei  $A$ :  $M_B = B \cdot 0 = 0$ .

Man erkennt hieraus, daß das größte Biegemoment bei  $E$  auftritt, mithin an derselben Stelle, wo die Querkraft  $V = 0$  wird, also am kleinsten ist und aus dem Positiven ins Negative übergeht. Umgekehrt sieht man, daß das Moment am kleinsten am Auflager ist, wo die Querkraft ihren Höchstwert hat. Aus diesen Betrachtungen läßt sich daher der Satz aufstellen:

Das größte Biegemoment tritt an der Stelle auf, wo die Querkraft gleich Null ist oder den Wert Null durchläuft.

Wir sahen, daß die Querkraft an jeder Stelle gleich der Mittelkraft aller auf das betrachtete Trägerstück wirkenden Kräfte ist. Von diesen ist nur der Auflagerdruck nach oben gerichtet, während die belastenden Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind. Daraus folgt, daß die Querkraft da gleich Null wird, wo die das eine Balkenstück belastenden Kräfte gleich dem zugehörigen Auflagerdruck werden. Daher gilt der Satz:

Der gefährliche Querschnitt teilt den Balken so in zwei Teile, daß die auf jedem Teil ruhende Belastung gleich dem zugehörigen Auflagerdruck ist.

Dieser Satz gilt für jede Belastung, also nicht nur für Einzellasten. Er liefert auch eine einfache Regel, um die Stelle des gefährlichen Querschnittes durch Kopfrechnung zu ermitteln. Man muß nur von links nach rechts oder umgekehrt die belastenden Kräfte bis zu der Stelle zusammenzählen, an welcher sie die Größe des zugehörigen Auflagerdruckes erreichen oder überschreiten. Da bei Einzellasten dies nur an einer Stelle eintreten kann wo eine Einzellast wirkt, so folgt weiter:

Der gefährliche Querschnitt liegt bei Belastung durch Einzellasten stets unter einer Einzellast.

b) Zeichnerisches Verfahren. Man denkt sich auch hierbei den Träger an einer beliebigen Stelle  $D$  durchgeschnitten und ermittelt nun nach

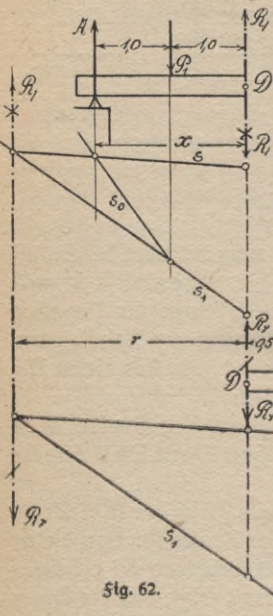


Fig. 62.

Fig. 62 zunächst für das linke Trägerstück mit Hilfe der Polfigur in Fig. 53 und des Seileckes die Mittelkraft  $R_1$ . Ebenso verfährt man für das rechte Trägerstück und findet so  $R_7 = R_1$  nach Größe, Lage und Richtung, aber entgegengesetzten Sinnes. Durch Messung von  $r = 3,11$  m und  $R = A - P_1 = B - P_4 - P_5 - P_2 = 1,80$  cm  $= 1800$  kg, ergibt sich  $M = R \cdot r = 1800 \cdot 311 = 559800$  kg cm wie beim rechnerischen Verfahren. Bezüglich des Biegemomentes und der Querkraft kann man nun dieselben allgemeinen Betrachtungen anstellen, wie es beim rechnerischen Verfahren geschah, indem man in  $D$  wieder die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Hilfskräfte  $R$  anbringt.

Um die Größe des Biegemomentes für einen beliebigen Punkt  $D$  zu bestimmen, zieht man nach dem bereits auf S. 37 beschriebenen Verfahren durch  $D$  eine Parallele zur Mittelkraft (Fig. 53). Die zu den gegebenen Kräften gehörigen, die Mittel-

kraft einschließenden, äußeren Seileckseiten (hier  $s_1$  und die Schlußlinie  $s$ ) schneiden auf dieser Parallelen die Strecke  $y$  ab. Nach dem auf S. 37 Gesagten ist daher das Biegemoment für  $D$ :

$$M_D = H \cdot y.$$

Da hier  $H = 1,45$  cm, also  $H = 1,45 \cdot 2000 = 2900$  kg und  $y = 193$  cm, so ergibt sich das Moment  $M_D = 2900 \cdot 193 = 559700$  kg cm, was mit dem früher gefundenen rechnerischen Ergebnis fast genau übereinstimmt.

$H$  ist, einmal angenommen, eine unveränderliche Größe.  $M$  ändert sich daher nur mit  $y$ , so daß die Lotrechten Abschnitte  $y$  unmittelbar die Momente darstellen. Man nennt daher die von der Schlußlinie und den Seilecken begrenzte Fläche die Momentenfläche. Man erkennt aus ihrem Verlaufe, wie oben schon durch die Rechnung, daß

die Momente zwischen je zwei Lastpunkten proportional zu- bzw. abnehmen und in den Lastpunkten jeweils einen gewissen Höchstwert erreichen, und daß daher auch das größte Biegemoment unter einem Lastpunkte liegen muß, nämlich da, wo  $y$  am größten ist.

In unserem Falle tritt  $M_{\max}$ , wie schon die Rechnung zeigte unter  $P_2$  auf, da  $y$  hier am größten ist. Man mißt im Punkte  $E$  die Länge  $y_2 = y_{\max} = 224$  cm (Fig. 53), mithin wird:

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max} = 2900 \cdot 224 = 650\,000 \text{ kg cm.}$$

wie oben auch durch Rechnung gefunden wurde.

Wir sahen bereits bei dem rechnerischen Verfahren, daß die Querkraft innerhalb eines Belastungsfeldes bei Belastung durch Einzelkräfte ihren Wert beibehält und nur in den Lastpunkten sich sprungweise ändert. Man kann nun auch eine Fläche zeichnen, die für jeden Trägerquerschnitt die Größe der Querkraft angibt und daher Querkraftsfläche genannt wird. Man trägt zu diesem Zwecke von einer Wagerechten, der Nullachse, deren Länge  $= AB$  ist, unter jedem Querschnitt den zugehörigen Wert der Querkraft lotrecht auf, und zwar die positiven Werte nach oben, die negativen nach unten (Fig. 53). Am zweckmäßigsten benutzt man dazu die Polfigur, mit deren Hilfe man die Querkräfte unmittelbar durch Zeichnung bestimmen kann. Man legt durch den Punkt, in welchem die Gleichlaufende  $S$  zur Schlußlinie  $s$  den Kräftezug trifft und dadurch  $R$  in die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  zerlegt, die wagerechte Nullachse und überträgt nun, wie Fig. 53 zeigt, die Querkräfte unmittelbar aus dem Kräftezuge. Man subtrahiert also, von  $A$  ausgehend, gewissermaßen zeichnerisch die Einzelkräfte, wie es oben durch Rechnung geschehen ist.

Belastung durch Einzellast (Fig. 63). Dieser Fall ist ein Sonderfall des eben beschriebenen. Er soll nur allgemein behandelt werden. Fig. 63 zeigt die zeichnerische, ohne weitere Erklärung verständliche Lösung. Der gefährliche Querschnitt und damit das größte Biegemoment liegen unter der Einzellast.  $M_{\max} = H \cdot y_{\max}$ .

Rechnerische Lösung. Es ist:

$$A + B = P. \quad (1)$$

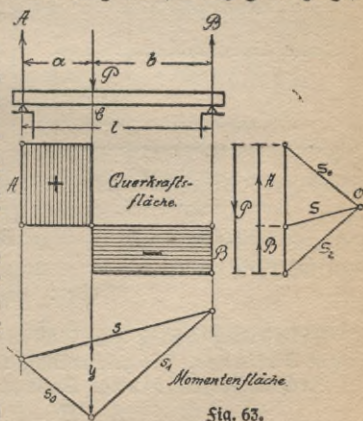


Fig. 63.

Die Momentengleichung in bezug auf den Punkt  $B$  ergibt:

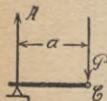
$$A \cdot l - P \cdot b = 0,$$

woraus:

$$A = \frac{P \cdot b}{l}; \quad (2)$$

in bezug auf den Punkt  $A$  findet man:

$$B \cdot l - P \cdot a = 0, \text{ also: } B = \frac{P \cdot a}{l}. \quad (3)$$



Querkräfte: Im ersten Belastungsfelde wird:

$$V_1 = A$$

und im zweiten Belastungsfelde bei Betrachtung des linken

Trägerstückes:

$$V_2 = A - P$$

oder einfacher bei Betrachtung des rechten Trägerstückes:

$$V_2 = -B, \text{ also auch: } A - P = -B,$$

was man auch aus Gleichung (1) erhielte, wenn man berücksichtigt, daß  $P > A$  sein muß.

Biegemoment: Für  $C$  als Drehpunkt erhält man bei Betrachtung des linken Trägerstückes (Fig. 64):

$$M_{\max} = A \cdot a, \text{ und da: } A = \frac{P \cdot b}{l}$$

$$\text{so folgt: } M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}. \quad (4)$$

Bei Betrachtung des rechten Trägerstückes erhält man gleichfalls:

$$M_{\max} = B \cdot b = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}.$$

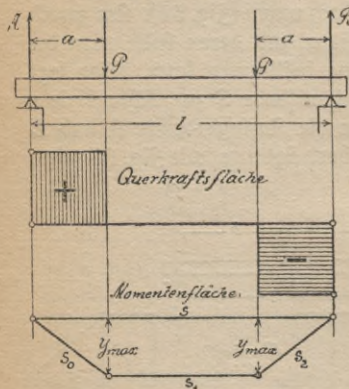
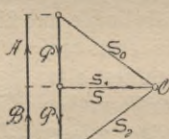


Fig. 65.



Wirkt die Einzellast in der Trägermitte, ist also:  $a = b = \frac{l}{2}$ , so wird:

$$B = A = \frac{P}{2} \text{ und: } M_{\max} = A \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

$$\text{oder: } M_{\max} = \frac{Pl}{4}. \quad (5)$$

Belastung durch zwei Einzellasten in gleichem Abstand  $a$  vom Auflager. Die zeichnerische Lösung zeigt Fig. 65.

Rechnerische Lösung. Auflagerdrücke: Es ist:

$$A + B = P + P = 2P. \quad (1)$$

Da die Lasten symmetrisch angeordnet sind, muß sein:

$$A = B = P,$$

was man auch aus der Momentengleichung erhält, nämlich:

$$A \cdot l - P(l - a) - P \cdot a = 0$$

$$A \cdot l - P \cdot l + P \cdot a - P \cdot a = 0$$

$$Al = Pl$$

$$A = P.$$

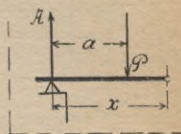


Fig. 66.

Querkräfte: Es wird im

- |  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. Belastungsfeld $V_1 = A,$           | } von links gerechnet |
| 2. " $V_2 = A - P = A - A = 0,$        |                       |
| 3. " $V_3 = -B,$ von rechts gerechnet. |                       |

Biegemomente: Unter der ersten Last wird für C als Drehpunkt:

$$M_C = A \cdot a, \text{ oder da: } A = P \text{ ist, wird: } M_C = P \cdot a.$$

Für D als Drehpunkt wird (von rechts gerechnet):

$$M_D = B \cdot a, \text{ also da: } B = P \text{ ist, auch: } M_D = P \cdot a.$$

Für eine beliebige Stelle im Abstand  $x$  von A wird (Fig. 66):

$$M_x = A \cdot x - P \cdot (x - a), \text{ oder da: } A = P,$$

$$M_x = P \cdot x - Px + P \cdot a,$$

$$M_x = P \cdot a.$$

Das Moment hat also den Höchstwert  $M_{\max} = P \cdot a$  und behält diesen auf dem ganzen mittleren Belastungsfeld bei; jeder Querschnitt in diesem Felde ist also ein gefährlicher Querschnitt.

### III. Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßiger Belastung.

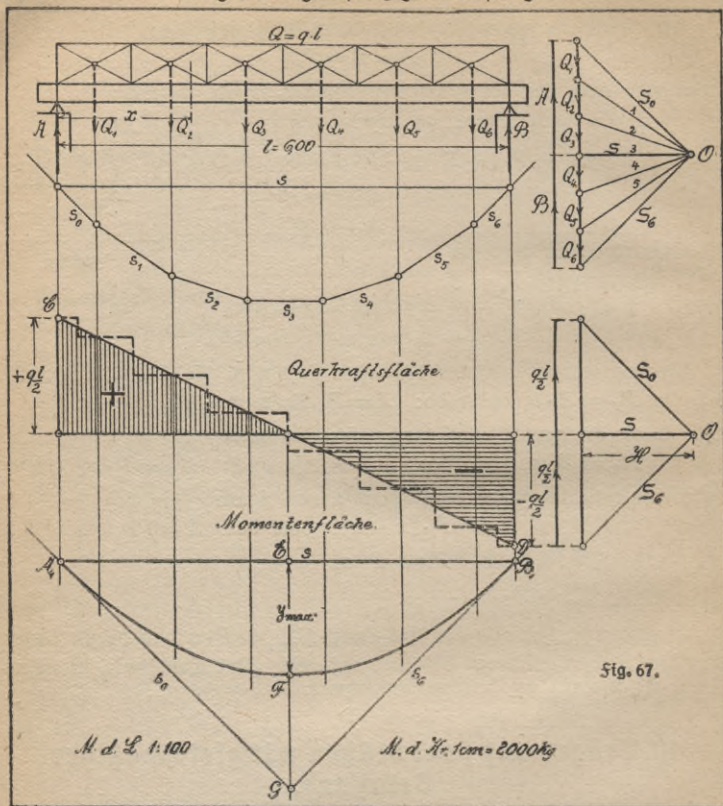
**Aufgabe.** Ein Träger von 6,0 m Stützweite sei mit 10 kg für 1 cm Länge gleichmäßig belastet. Die Auflagerdrücke, Querkräfte und größtes Biegemoment sind zu bestimmen (Fig. 67).

a) Rechnerische Lösung. Auflagerdruck. Für eine Stützweite von  $l$  m und eine Belastung von  $q$  kg/qcm wird ganz allgemein die Gesamtbelastung:

$$Q = q \cdot l.$$

Da die Belastung symmetrisch ist, muß sie sich zu gleichen Teilen auf die beiden Auflager verteilen. Es ist also:

$$A = B = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2}.$$



**Querkräfte:** Die Querkraft nimmt infolge der gleichmäßigen Belastung nicht sprungweise, sondern gleichmäßig, und zwar für jede Längeneinheit um die Größe  $q$  (für noch kleinere Längen um noch kleinere Maße) ab. Für eine beliebige Schnittstelle im Abstände  $x$  hat sie, da sie am Auflager natürlich wieder  $= A$  ist, demnach die Größe (Fig. 67):

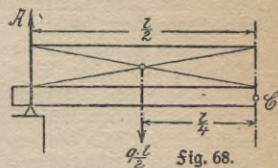
$$V = A - q \cdot x \quad \text{oder, da: } A = \frac{ql}{2}, \quad (1)$$

$$V = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x,$$

$$V = q \left( \frac{l}{2} - x \right). \quad (2)$$

Gefährlicher Querschnitt: Der gefährliche Querschnitt liegt da, wo  $V=0$  ist. In Gleich. (2) wird dies eintreten, wenn  $x = \frac{l}{2}$ . Der gefährliche Querschnitt liegt bei einem gleichmäßig belasteten Träger also stets in der Mitte des Trägers.

Größtes Biegemoment: Da der gefährliche Querschnitt in der Trägermitte liegt, denkt man sich den Träger in der Mitte durchschnitten und zeichnet das linke Trägerstück wieder heraus (Fig. 68). An Kräften



wirken der Auflagerdruck  $A = \frac{q \cdot l}{2}$  und die auf die Strecke  $\frac{l}{2}$  gleichmäßig verteilte Belastung  $q \cdot \frac{l}{2}$ . Letztere kann man, wenn man sich  $q$  für jede Längeneinheit aufgetragen denkt, wie in Fig. 67 durch ein Rechteck darstellen, in dessen Schwerpunkt sie angreift. Der zugehörige Hebelarm in bezug auf die Schnittstelle ist demnach  $\frac{l}{4}$ . Man erhält daher für die Schnittstelle das Moment:

$$M_{\max} = A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l^2}{8} = q \cdot \frac{l^2}{4} - q \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$M_{\max} = q \cdot \frac{l^2}{8} \quad \text{oder, da: } ql = Q, \text{ auch: } M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{8}$$

Für eine beliebige Stelle im Abstände  $x$  von  $A$  wird nach Fig. 67:

$$M_x = A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_x = q \cdot \frac{l}{2} \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_x = q \cdot \frac{x}{2} (l - x).$$

Für  $x = 0$  wird daher auch  $M_x = 0$ , d. h. das Moment hat in den Auflagern den Wert 0.

Für unser Zahlenbeispiel wird:

$$Q = q \cdot l = 10 \cdot 600 = 6000 \text{ kg}$$

$$A = B = \frac{Q}{2} = \frac{6000}{2} = 3000 \text{ kg}$$

$$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{6000 \cdot 600}{8} = 450000 \text{ kgcm.}$$

b) Zeichnerische Lösung. Man kann den Fall auf den Fall der Belastung mit Einzellasten zurückführen, indem man den Träger in gleich breite Streifen zerlegt und die auf jeden Streifen wirkende Belastung durch eine im Schwerpunkte des Streifens angreifende Einzellast ersetzt. Mit Hilfe des Seilecks bestimmt man dann nach Fig. 67 die Querkräfte und erhält dieselben Werte wie durch Rechnung. Es gelten also die oben gefundenen Formeln.

Bei der genannten Zerlegung des Trägers in gleich breite Streifen erhält die Querkraftsfläche die in Fig. 67 punktierte Gestalt. Es ist klar, daß diese Fläche ungenau ist. Sie wird umso genauer werden, je schmaler man die Streifen wählt, und die abgetreppte Linie wird in eine Gerade übergehen, sobald die Streifen unendlich schmal werden. Man braucht also nur die Verbindungsgerade  $CD$  zu ziehen, um die obere und untere Begrenzung und damit die genaue Gestalt der Querkraftsfläche zu erhalten. Da die beiden so entstehenden Dreiecke deckungsgleich sind, so schneidet  $CD$  die Nulllinie in der Mitte. Der gefährliche Querschnitt ergibt sich also auch hier in der Trägermitte.

Das Seileck liefert gleichfalls eine noch ungenaue Gestalt der Momentenfläche. Die Genauigkeit wird auch hier umso größer, je schmaler die Streifen sind. Bei unendlich kleiner Breite geht das Seileck in eine Kurve (Parabel) über (Fig. 67). Das größte Biegemoment liegt in der Mitte und hat wieder den Wert  $M_{\max} = H \cdot y_{\max}$ . An einer beliebigen Stelle des Trägers hat man  $y$  zu messen und erhält hierfür  $M = H \cdot y$ .

Nimmt man den Pol auf der im Halbierungspunkte von  $Q$  errichteten Winkelrechten an, so wird die Schlußlinie  $s$  des Seilecks wagerecht (Fig. 67). Die äußeren Seilstrahlen, welche die Berührungslinien in den Parabelpunkten  $A_1$  und  $B_1$  darstellen, schneiden sich auf einer durch die Trägermitte gelegten Lotrechten. Der Scheitel der Parabel geht durch die Mitte des Abstandes  $EG$ , also wird  $EG = 2EF = 2y_{\max}$ ,

oder  $y_{\max} = \frac{EG}{2}$ . Da

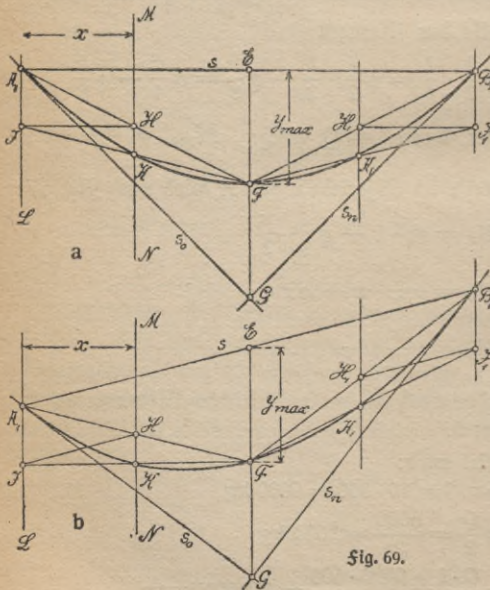


Fig. 69.



eine Parabel durch drei Punkte (hier  $A$ ,  $B$  und  $F$ ) bestimmt ist, so braucht man die Zerlegung in Streifen nicht vorzunehmen, um die Momentenfläche zu zeichnen, sobald man die Konstruktion der Parabel kennt. Diese sei im folgenden für eine wagerechte und eine geneigte Schlußlinie  $s$  angegeben; sie ist für jedes Parabelstück anwendbar (Fig. 69a und b).

Man zieht die äußeren Seilstrahlen der Parabel  $s_0$  und  $s_n$  im Punkte  $A_1$  und  $B_1$ , bestimmt ihren Schnittpunkt  $G$ , zieht die Lotrechte  $EG$  und halbiert sie im Punkte  $F$ , welcher dann ein Parabelpunkt ist.  $EF$  ist die größte Parabelordinate. Sodann zieht man die Hilfslinien  $A_1F$  und  $B_1F$ . Zur Bestimmung irgend eines Parabelpunktes im Abstände  $x$  (senkrecht zur Krafttrichtung gemessen) bringt man die im Abstände  $x$  gezogene Lotrechte  $MN$  (bzw. Parallele zur Krafttrichtung) mit  $A_1F$  (bzw.  $B_1F$  für das rechte Parabelstück) zum Schnitt in  $H$ , zieht durch  $H$  eine Gleichlaufende zur Schlußlinie  $A_1B_1$  und bestimmt deren Schnittpunkt  $J$  mit  $A_1L$ , verbindet  $J$  mit  $F$ , so ist der Punkt  $K$  als Schnittpunkt von  $MN$  mit  $JF$  der gesuchte Parabelpunkt. — Auf diese Weise bestimmt man noch andere Punkte, durch deren Verbindung sich die gesuchte Parabel ergibt. Die Ordinaten der damit bestimmten Momentenfläche dienen zur genauen Ermittlung der Momente an beliebigen Stellen des Trägers.

In unserem Beispiel ist  $H = 1,5$  cm, also  $H = 1,5 \cdot 2000 = 3000$  kg. Man findet, da  $y_{\max} = 150$  cm, mithin das Moment:

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max} = 3000 \cdot 150 = 450\,000 \text{ kg/cm,}$$

wie oben durch Rechnung.

#### IV. Träger auf zwei Stützen mit Streckenlasten.

Man denkt sich die Streckenlast durch eine oder mehrere Einzellasten ersetzt, die im Schwerpunkte der betreffenden Strecken angreifen und verfährt im übrigen genau wie bisher.

#### V. Träger auf zwei Stützen mit gemischter Belastung.

Dieser Fall kommt eigentlich stets vor, da das Eigengewicht des Trägers eine über diesen gleichmäßig verteilte Belastung darstellt. Doch ist das Eigengewicht im Vergleich zu den anderen Belastungen so gering und daher von so unbedeutendem Einfluß auf die Abmessungen des Trägers, daß man es in der Regel ohne wesentliche Fehler vernachlässigen kann.

**Aufgabe.** Der in Fig. 70 gegebene Träger sei mit  $q = 5$  kg/cm gleichmäßig und ferner in den gegebenen Abständen mit den Einzellasten  $P_1 = 2000$  kg,  $P_2 = 3000$  kg und  $P_3 = 2000$  kg belastet. Auflagerdrücke, Querkräfte und Biegemomente sind zu bestimmen.

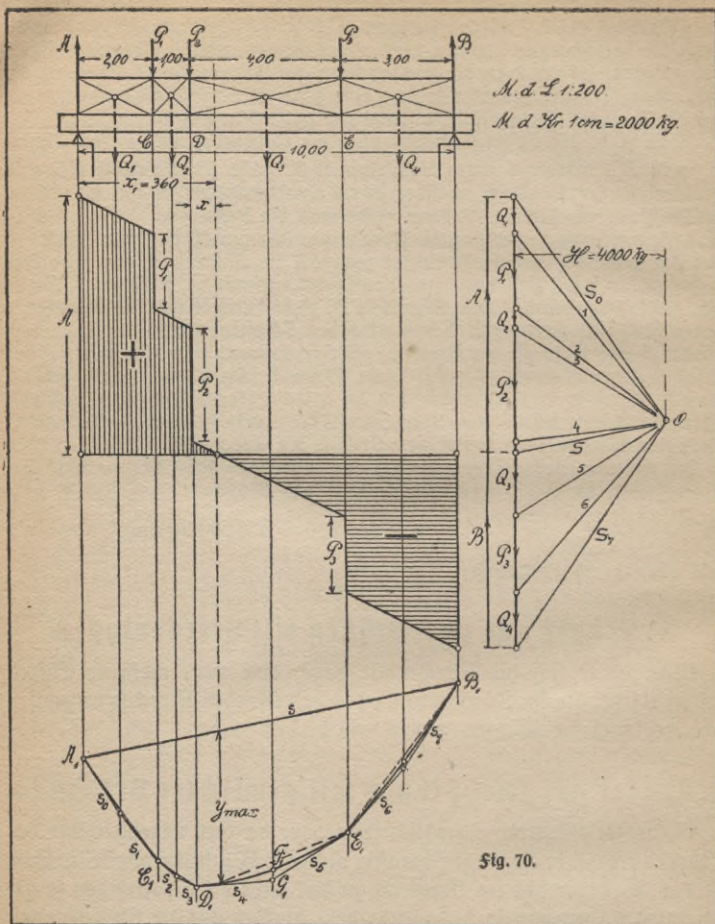


Fig. 70.

a) Rechnerische Lösung. Auflagerdrücke: Bei Bestimmung des Auflagerdruckes A erhält man für den Drehpunkt B:

$$A \cdot 1000 - P_1 \cdot 800 - P_2 \cdot 700 - P_3 \cdot 300 - ql \cdot 500 = 0$$

woraus sich unter Einsetzung der gegebenen Werte  $P$  ergibt:

$$A = \frac{2000 \cdot 800 + 3000 \cdot 700 + 2000 \cdot 300 + 5 \cdot 1000 \cdot 500}{1000}$$

$$A = 6800 \text{ kg.}$$

Für den Drehpunkt  $A$  erhält man:

$$B \cdot 1000 - P_3 \cdot 700 - P_2 \cdot 300 - P_1 \cdot 200 + q \cdot l \cdot 500 = 0,$$

$$\text{woraus: } B = \frac{2000 \cdot 700 + 3000 \cdot 300 + 2000 \cdot 200 + 5 \cdot 1000 \cdot 500}{1000}$$

$$B = 5200 \text{ kg.}$$

$$\text{Probe: } A + B = q \cdot l + P_1 + P_2 + P_3$$

$$6800 + 5200 = 5,0 \cdot 1000 + 2000 + 3000 + 2000$$

$$12000 = 12000 \text{ kg, also richtig.}$$

Gefährlicher Querschnitt und Querkraft: Die Belastung wird nach Fig. 70 wieder in einzelne Felder zerlegt, worauf dasjenige Belastungsfeld gesucht wird, in dem die Querkraft = 0 wird. Am Anfange des dritten Belastungsfeldes bei  $D$  wird:

$$V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot (200 + 100) = 6800 - 2000 - 3000 - 5 \cdot 300$$

$$V_3 = +300 \text{ kg,}$$

und am Ende des dritten Belastungsfeldes bei  $E$  erhält man:

$$V_4 = A - P_1 - P_2 - q(200 + 100 + 400) = 6800 - 2000 - 3000 - 5 \cdot 700$$

$$V_4 = -1700 \text{ kg.}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also zwischen  $D$  und  $E$ . Da bei  $D$  noch +300 kg vorhanden waren, so muß bis zum gefährlichen Querschnitt noch eine Last von gleicher Größe ruhen, es ist also der gefährliche Querschnitt von  $D$  noch:

$$q \cdot x = 300, \text{ mithin: } x = \frac{300}{q} = \frac{300}{5} = 60 \text{ cm,}$$

mithin vom linken Auflager  $x_1 = 360 \text{ cm}$  entfernt.

Biegemoment: Man zeichnet sich das linke Trägerstück heraus (Fig. 71) und erhält:

$$M_{\max} = A \cdot 360 - Q_1 \cdot 260 - P_1 \cdot 160 - Q_2 \cdot 110 - P_2 \cdot 60 - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

oder, da:

$$Q_1 = 5 \cdot 200 = 1000 \text{ kg, } Q_2 = 5 \cdot 100 = 500 \text{ kg, } q \cdot x_1 = 5 \cdot 60 = 300 \text{ kg}$$

$$M_{\max} = 6800 \cdot 360 - 1000 \cdot 260 - 2000 \cdot 160 - 500 \cdot 110 - 3000 \cdot 60 - 300 \cdot \frac{60}{2}$$

$$M_{\max} = 1624000 \text{ kgcm.}$$

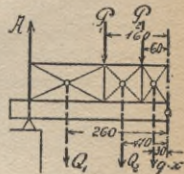
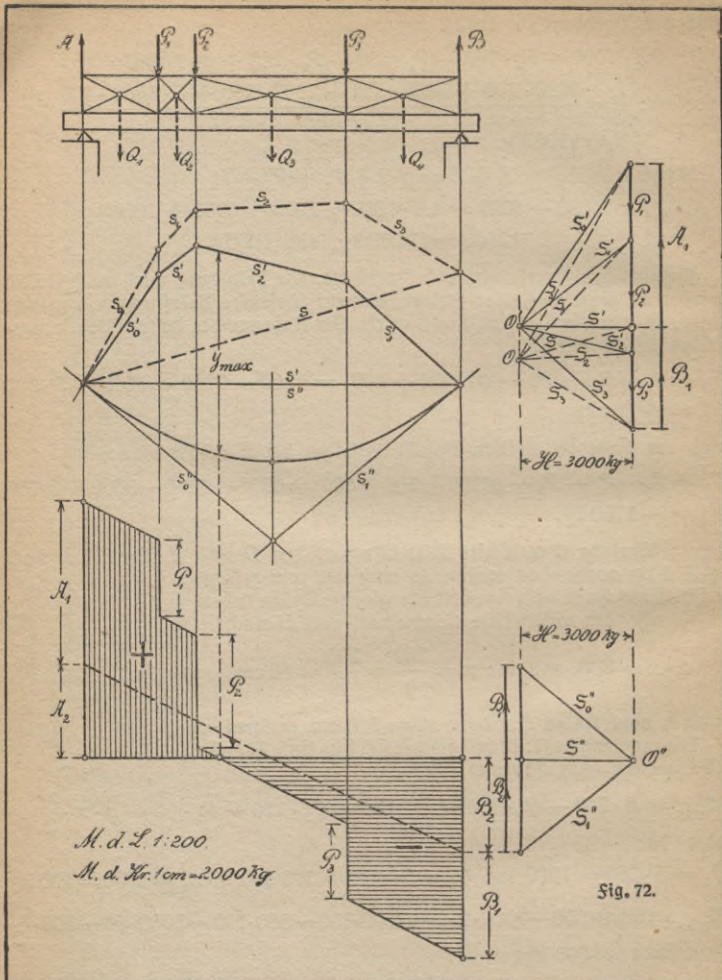


Fig. 71.

b) Zeichnerische Lösung. Man kann dabei zwei Wege einschlagen.

Erstes Verfahren. Man zerlegt, wie in Fig. 62, den Träger in Belastungsfelder und schaltet die Einzellasten zwischen die durch die Teilung entstehenden Streckenlasten. Hierauf zeichnet man Kraft- und Seileck und bestimmt daraus die gesuchten Größen in bekannter Weise. Die Strecken-



lasten ergeben in der Begrenzung der Momentenfläche Parabelstrecken. Es genügt zu ihrer Konstruktion, die Endpunkte der einzelnen Parabelstrecken (z. B.  $D, E_1$ ) zu verbinden, durch die Schnittpunkte der Seilstrahlen ( $G_1$ ) Lote zu ziehen und die so gewonnenen Abstände ( $F_1, G_1$ ) zu halbieren. Die Halbierungspunkte sind Parabelpunkte.

Die Begrenzung der Querkraftsfläche ändert sich auf die Länge der Belastungsfelder naturgemäß stetig, in den Lastpunkten der Einzellasten aber sprungweise.

Zweites Verfahren. Streckenlasten und Einzellasten werden getrennt behandelt, und für jede der beiden Gruppen werden unter Benützung desselben Kräftemaßstabes und desselben Polabstandes in der Polfigur die Momenten- und Querkraftsfläche gezeichnet (Fig. 72). Derselbe Polabstand für beide Gruppen ist erforderlich, damit man die Gesamtordinaten  $y$  unmittelbar abgreifen kann. Da jedoch der eine Teil der Momentenfläche oberhalb, der andere unterhalb der Schlußlinie zu liegen kommt, so sind auch die Pole auf beiden Seiten des Krafteds entsprechend anzunehmen. Auch wird es in der Regel erforderlich werden, die Lage des einen Poles so zu verändern, daß die Schlußlinien der Seilecke für beide Gruppen zusammenfallen (s. Fig. 72).

## VI. Berechnung einfacher Balkenträger unter dem Einflusse beweglicher Lasten.

Während bei den Hochbauten in den meisten Fällen nur ruhende Belastungen in Rücksicht zu ziehen sind, kommen bei den Bauwerken des Tiefbaus und des Maschinenbaus vielfach bewegliche Lasten in Frage. So sind bei Berechnung von Brückenbauten bei Eisenbahnbrücken die Raddrücke der beweglichen, das Bauwerk befahrenden Eisenbahnzüge, bei Straßenbrücken Dampfwalzen, Fuhrwerke, Menschengedränge als bewegliche Lasten zu berücksichtigen. Im Maschinenbau spielen z. B. bei der Berechnung der Kranträger bewegliche Lasten eine Hauptrolle, hierbei handelt es sich jedoch nicht wie bei Brücken um eine große Reihe sich bewegendes Einzellasten, sondern es sind meist nur eine geringe Zahl vorhanden, sie werden durch Raddrücke der auf der Kranbahn sich bewegendes Laufkatzen hervorgerufen.

Jeder Träger muß, wie jedes Bauwerk, derartige Abmessungen erhalten, daß er die durch die äußeren Kräfte bedingten inneren Kräfte leisten kann, da andernfalls die Zerstörung erfolgen würde. Bei den statisch bestimmten Trägern hängen die äußeren Kräfte von der Trägerstützweite und der Art der Lastübertragung in der Trägerfahrbahn ab, das Trägersystem spielt keine Rolle. Für Träger mit voller Wand und solche mit aufgelöster (Fachwerkträger) gilt daher nachstehendes in gleicher Weise.

Es ist nun die Aufgabe zu lösen, den Einfluß beweglicher, einander paralleler Lasten auf irgend eine Unbekannte  $Z$ , um deren Ermittlung es sich bei einer Trägerberechnung handelt, festzustellen.  $Z$  kann

also einen Stützenwiderstand, ferner das Biegemoment, die Querkraft für einen bestimmten Querschnitt usf. bedeuten. Es muß hierbei immer die für die Abmessungsbestimmung ungünstigste Annahme gemacht, also die gefährlichste Laststellung aufgesucht werden.

Das wichtigste Verfahren zur Herbeiführung der gewünschten Ergebnisse ist das der Einflußlinien. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden

1. Die beweglichen Lasten wirken unmittelbar auf den Träger
2. Die beweglichen Lasten wirken mittelbar auf den Träger.

### 1. Einflußlinien für unmittelbare Belastung.

a) **Es wirken Einzellasten.** Man läßt eine Einzellast  $P$ , die in der Regel gleich der Einheit (z. B.  $P = 1^t$ ) gewählt wird, über den Träger wandern, bestimmt für jede Laststellung der Last  $P$  den Einfluß

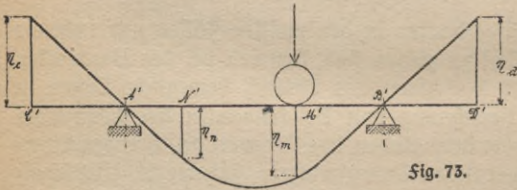


Fig. 73.

die Größe  $Z$  (die Einflußgröße =  $\eta$ ) und trägt diese Einflußgröße  $\eta$  von einer Nulllinie  $A'B'$  aus in der Richtungslinie der Last und unter Berücksichtigung des Vorzeichens ab. Die Endpunkte aller der Einflußgrößen für  $Z$  liegen bei der Wanderung der Last  $P$  über den Träger auf einer Linie, die man die Einflußlinie für  $Z$  nennt. Die von der Nulllinie, den Endordinaten und der Einflußlinie begrenzte Fläche heißt die Einflußfläche. Sie setzt sich im allgemeinen aus positiven und negativen Teilflächen zusammen (vgl. Fig. 73).

Wirkt statt der Last  $P = 1$  eine Last von der Größe  $P$ , so wird  $Z$  auch  $P$  mal so groß, also  $Z = P \cdot \eta$ .

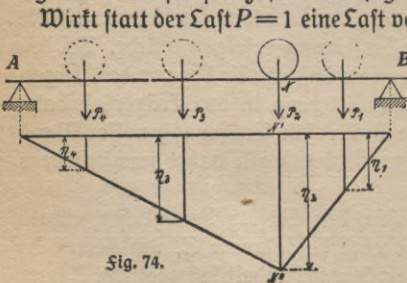


Fig. 74.

Länge des Trägers = 1000 m

Liegt die größte Ordinate  $\eta$  der Einflußfläche unter dem Punkte  $M$  und befindet sich die Last  $P$  über  $M$ , so bezeichnet man diese Stellung der wandernden Einzellast als gefährlichste Lastlage.

Ist ein Lastenzug vorhanden, so ist der bei einer bestimmten Stellung des Zuges auf dem Träger entstehende Gesamtwert  $Z$  gleich der Summe der durch die einzelnen Lasten herrührenden Einzelwerte  $Z$ . Sind die auftretenden Lasten  $P_1, P_2, P_3$  uff., und die ihnen zugeordneten Einflußgrößen der Einflußfläche  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  uff. (Fig. 74), so ist die Gesamtgröße

$$Z = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + \dots$$

Diejenige Lage des Lastenzuges ist die gefährlichste, für welche diese Summe ihren Grenzwert erreicht. Sind nur positive oder nur negative Einflußgrößen vorhanden (wie z. B. in Fig. 74), so ist nur ein Grenzwert möglich. Sind jedoch positive und negative Einflußgrößen gleichzeitig vorhanden, so sind zwei Grenzwerte und zwar der Größtwert und der Kleinstwert zu bestimmen (Fig. 73).

**b) Es wirkt eine gleichmäßig verteilte Belastung.** Eine gleichmäßig verteilte Last kann man auf unendlich nahe aneinanderliegende Einzellasten zurückführen. Die Einflußgrößen liegen daher ebenfalls dicht nebeneinander, sie erfüllen somit die Einflußfläche. Der Gesamtwert  $Z$  wird daher z. B. für den in Fig. 75 dargestellten Fall dadurch bestimmt, daß man die Einflußfläche  $F = C'D'D''C''$  mit  $q$ , der Belastung für die Längeneinheit, multipliziert  $Z = q \cdot F$ .

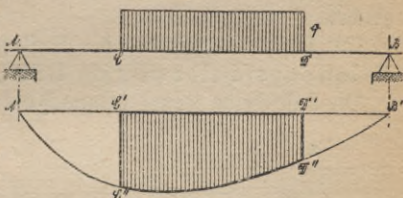


Fig. 75.

**Beispiel.** Es soll für die Mitte eines Trägers auf zwei Stützen bei gleichmäßig verteilter Belastung das größte Moment mittels der Einflußlinie bestimmt werden (Fig. 76).

**Lösung.** Läßt man eine Einzellast  $P = 1$  über den Träger wandern, so ist die gefährlichste Lastlage die über den Mittelquerschnitt  $N$ . Die Einflußgröße  $\eta_n$ , also das in  $N$  entstehende Moment, ergibt sich zu:

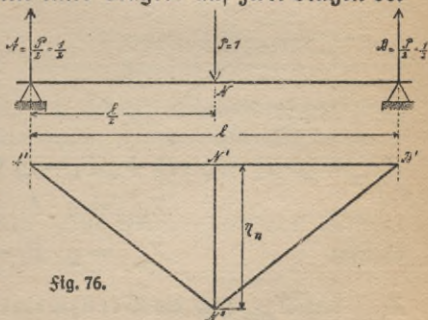


Fig. 76.

$$\eta_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{4}.$$

Man wählt nun für die Auftragung einen Momentenmaßstab und trägt  $\eta_n = N' N''$  auf. Verbindet man  $N''$  mit  $A'$  und  $B'$ , so ergibt sich die Einflußfläche. Der Größtwert  $Z = M_{\max}$  wird  $= q \cdot F$ ; demnach:

$$M_{\max} = q \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{4} = \frac{q l^2}{8}.$$

Im allgemeinen haben die Ordinaten  $\eta$  verschiedene Vorzeichen. Die Einflußfläche besteht somit aus positiven und negativen Teilflächen. Es gibt dann stets mindestens einen Punkt, in welchem die positive Teilfläche in die negative übergeht, also die Einflußlinie die Nullachse  $A' B'$  schneidet. Die Einflußfläche wechselt in diesem Punkte das Vorzeichen.

Ein Lastpunkt, für den die Einflußgröße zu Null wird, heißt eine Belastungsscheide oder ein Nullpunkt.

Die Lastscheide trennt demnach die Einflußfläche in einen positiven

und einen negativen Teil (s. Fig. 77 c). Die gefährlichste Lastlage für die Bestimmung der Größe  $Z$  kann daher leicht angegeben werden.

Wirkt z. B. auf einen Träger außer der gleichmäßigen Belastung  $g$  noch eine bewegliche Belastung  $p$  für die Längeneinheit, so erhält man  $Z_{\max}$  durch Belastung der positiven Einflußfläche mit  $p$ ,  $Z_{\min}$  durch Belastung der negativen Einflußflächen mit  $p$  (Fig. 77) also

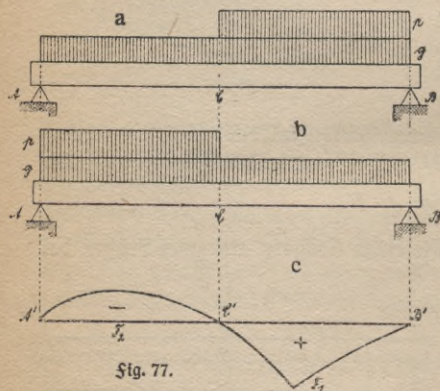
$$Z_{\max} = g \cdot F_1 - g \cdot F_2 + p F_1 = F_1 (g + p) - g F_2; \quad g + p = b$$

$$Z_{\max} = q \cdot F_1 - g \cdot F_2$$

ebenso:

$$Z_{\min} = g \cdot F_1 - q \cdot F_2.$$

$Z_{\max}$  und  $Z_{\min}$  sind die Grenzwerte von  $Z$ .





## 2. Einflußlinien für mittelbare Belastungen.

In den meisten Fällen werden die Lasten durch Querträger mittelbar auf die Träger übertragen (Fig. 78). Wirkt auf den oberen Längsträger zwischen den beiden Querträgern 1 und 2 im Punkte  $M$  eine Last  $P$ , so beträgt der nach 1 übertragene Auflagerdruck:

$$P_1 = P \cdot \frac{x}{a};$$

der nach 2 übertragene wird:

$$P_2 = P \cdot \frac{a-x}{a};$$

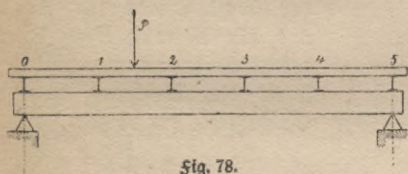


Fig. 78.

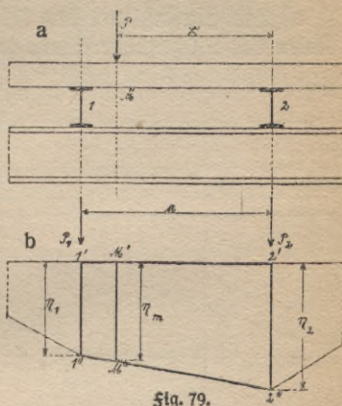


Fig. 79.

$a$  = Feldweite (Fig. 79). Für die Größe  $Z$  eines Querschnitts des mittelbar belasteten Hauptträgers muß der Einfluß der beiden Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  ebenso groß sein wie der Einfluß der Mittelkraft  $P$ . Sind die entsprechenden Ordinaten der Einflußlinie  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  und  $\eta_m$ , so muß sein:

$$P \cdot \eta_m = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 \text{ oder}$$

$$P \cdot \eta_m = P \cdot \frac{x}{a} \cdot \eta_1 + P \cdot \frac{a-x}{a} \cdot \eta_2$$

$$\eta_m = \frac{x}{a} \cdot \eta_1 + \frac{a-x}{a} \cdot \eta_2$$

da für jeden besonderen Lastfall  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  sowie  $a$  unveränderliche Größen darstellen und die veränderliche Größe  $x$  vom ersten Grade ist, so stellt die letzte Gleichung eine gerade Linie dar. Es ergibt sich also der Satz:

Die Einflußlinie zwischen zwei Knotenpunkten ist stets eine Gerade.

### 3. Die Einflußlinien für die äußeren Kraftwirkungen.

Als  $Z$ -Größen kommen beim Träger auf zwei Stützen in erster Linie der Stützenwiderstand, die Querkraft und das Moment in Frage.

a) Die Einflußlinie des Stützenwiderstandes. Aus den Einflußlinien der Stützenwiderstände werden alle übrigen Einflußlinien abgeleitet (Fig. 80).

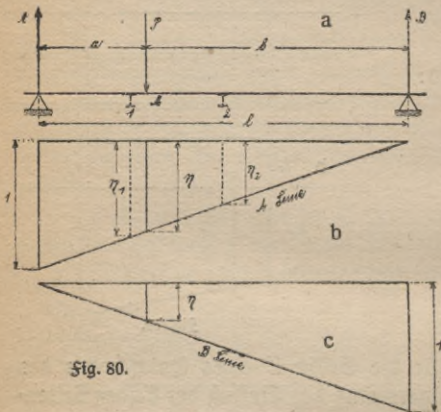


Fig. 80.

Der Stützenwiderstand  $A = \frac{P \cdot b}{l}$  und  $B = \frac{P \cdot a}{l}$  (vgl. S. 56).

Für die Aufzeichnung der Einflußlinien für  $A$  und für  $B$  muß  $P = 1$  gesetzt werden; man erhält somit die Gleichung der Einflußlinie für  $A$  zu:

$$\eta = 1 \cdot \frac{b}{l}$$

ebenso für  $B$  zu:

$$\eta = 1 \cdot \frac{a}{l}$$

Die Einflußlinie für  $A$  ( $A$ -Linie) ist demnach eine Gerade. Für  $b = 0$  also im Punkte  $B$ , wird  $\eta = 0$ ; für  $b = l$ , also für  $A$ , wird die Ordinate  $\eta = 1$ . In Fig. 80 b ist die  $A$ -Linie dargestellt.

Satz: Die Einflußfläche des Stützenwiderstandes ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete die Trägerstützweite  $l$  und dessen andere die Strecke  $P = 1$  bildet.

Die  $B$ -Linie wird genau so hergeleitet, sie ist in Fig. 80 c dargestellt.

Für mittelbare Belastung gelten die gleichen Einflußlinien wie für unmittelbare, denn für die Lage der beweglichen Last im Punkte 1 und 2 (Fig. 80 a) ergeben sich für mittelbare und unmittelbare Übertragung die gleichen Einflußgrößen  $\eta$ , also fällt ihre Verbindungsgerade auch mit der für unmittelbare Belastung abgeleiteten Einflußlinie zusammen.

b) Die Einflußlinie für die Querkraft. I. Unmittelbare Belastung liegt vor. Für den Querschnitt  $C$  soll die Einflußlinie der

Querkraft gezeichnet werden (Fig. 81). Man läßt zunächst die Last auf der Strecke  $BC$  rollen. Für jeden Punkt der Strecke  $AC$  ist dann die Querkraft  $V = +A$ , also nur abhängig von  $A$ .

Der Einfluß der Kraft  $P$  für die Querkraft ergibt sich daher aus der  $A$  Linie, so z. B. für die Lage der Last  $P$  im Punkte 2 zu  $\eta_2$ .

Bewegt sich die Last auf der Strecke  $AC$  (Lage 1), so findet man die entsprechende Querkraft für den Punkt  $C$  durch Betrachtung des rechten Trägerstückes  $BC$  zu  $V = -B$ . (Oder bei Betrachtung des linken Trägerstückes zu  $V = A - P$ . Nun ist  $A + B = P$ ; es ergibt sich daher ebenfalls, da  $A - P = -B$  ist,  $V = -B$ .)

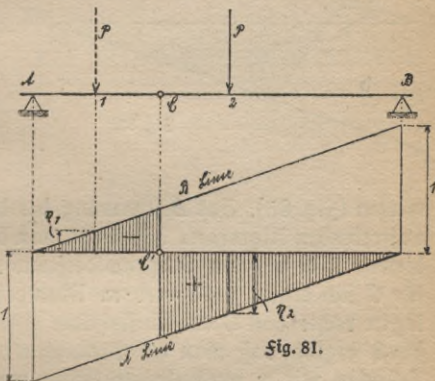
Es gilt demnach für die Strecke  $AC$  die  $B$ -Linie, jedoch mit negativem Werte. Die in Figur 81 b schraffierte Fläche stellt somit die Einflußfläche für die Querkraft im Querschnitt  $C$  dar. Der Lage der Last im Punkte 1 entspricht  $\eta_1$ .

Wirkt an der Stelle 1 eine Last  $P_1$ , im Punkte 2 eine Last  $P_2$ , so ergibt sich die Querkraft in  $C$  zu

$$V = -P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2.$$

Der Punkt  $C$  bildet die Lastscheide.

II. Mittelbare Belastung liege vor. Bewegt sich die Last  $P$  auf der Strecke  $B2$ , so gilt die Einflußlinie für  $A$ , im Punkte 2 ist die Einflußgröße  $= \eta_2$  (Fig. 82). Rollt die Last auf der Strecke  $A1$ , so gilt die Einflußlinie für  $-B$ , im Punkte 1 ist die Einflußgröße  $= \eta_1$ . Innerhalb des Feldes 1 2 muß die Einflußlinie stets eine Gerade sein, daher ist die Gerade  $1' 2'$  zu ziehen und die Gerade  $A' 1'' 2'' B'$  ist die gesuchte Einflußlinie. Die Querkraftsdarstellung ist für jeden Querschnitt innerhalb des Feldes 1 2 die gleiche; die Grenzwerte der Querkraft haben daher für jeden Querschnitt des Feldes jeweilig gleiche Größe. Die gezeichnete Einflußfläche gilt also für das ganze betreffende Trägerfeld. Man bezeichnet daher die gezeichnete Einflußfläche als die



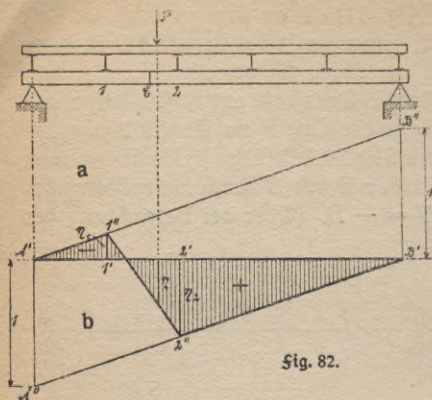


Fig. 82.

wirken (Fig. 83). Zur Bestimmung des durch diesen Lastzustand in  $C$  auftretenden Momentes betrachtet man das linke Trägerstück  $AC$ . An diesem tritt nur der Stützenwiderstand  $A$  auf, so daß das Moment für  $C$  sich ergibt zu  $M = A \cdot x$ . Man erhält somit für sämtliche Lastlagen rechts von  $C$  als Einflußlinie eine Gerade  $A''B'$ , die sich dadurch ergibt, daß man die Ordinaten der in Fig. 80b gezeichneten  $A$ -Linien mit  $x$  multipliziert. Man muß somit die  $A$ -Linie im  $x$ -fachen Maßstab zeichnen. Statt des Wertes 1 im Punkte  $A'$  ist demnach der Wert  $1 \cdot x$  aufzutragen.

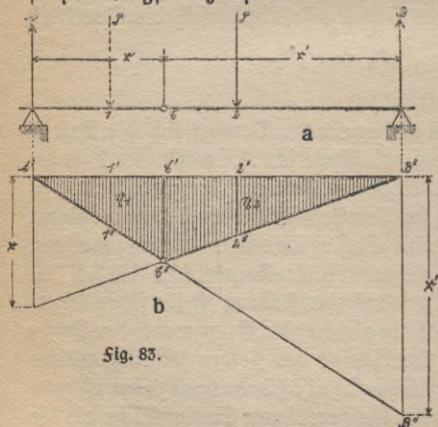


Fig. 83.

Einflußfläche für die Querkraft eines Feldes. In Fig. 82 ist die Querkraft für den linken, abgeschnitten gedachten Trägerteil gezeichnet, bei Zeichnung für den rechten Trägerteil ergeben sich die gleichen Linien aber entgegengesetzte Vorzeichen für die Einflußteilflächen.

**c) Einflußlinie für das Moment.** I. Unmittelbare Belastung liegt vor. Man läßt wiederum die Last zunächst auf der Strecke  $BC$

wirken (Fig. 83). Zur Bestimmung des durch diesen Lastzustand in  $C$  auftretenden Momentes betrachtet man das linke Trägerstück  $AC$ . An diesem tritt nur der Stützenwiderstand  $A$  auf, so daß das Moment für  $C$  sich ergibt zu  $M = A \cdot x$ . Man erhält somit für sämtliche Lastlagen rechts von  $C$  als Einflußlinie eine Gerade  $A''B'$ , die sich dadurch ergibt, daß man die Ordinaten der in Fig. 80b gezeichneten  $A$ -Linien mit  $x$  multipliziert. Man muß somit die  $A$ -Linie im  $x$ -fachen Maßstab zeichnen. Statt des Wertes 1 im Punkte  $A'$  ist demnach der Wert  $1 \cdot x$  aufzutragen. Als Einflußfläche gilt für die Strecke  $BC$  infolgedessen die Fläche  $C''C''B'$ . Ebenso erhält man für die Lastlagen auf der Strecke  $AC$ , sofern man das rechte Trägerstück  $BC$  betrachtet, als Biegemoment für  $C$  den Wert  $M = B \cdot x'$ . Es gilt hier also die  $B$ -Linie, die im Maßstab  $x'$  zu zeichnen ist; es muß danach im Punkte  $B'$  statt der Größe 1 die Strecke  $1 \cdot x' = x' = B'B''$  auf-

getragen werden. Die Einflußlinie ist daher  $A'B''$ ; als Einflußfläche kommt die Fläche  $A'C'C''$  in Frage. Die beiden Geraden  $A'B''$  und  $A''B'$  schneiden sich im Punkte  $C''$  senkrecht unter  $C$ . Die Linie  $A'C''B'$  ist die Einflußlinie für das Moment im Querschnitt  $C$  ( $M$ -Linie); das Dreieck  $A'C''B'$  ist die Einflußfläche, die in allen ihren Teilen positiv ist (Fig. 83b).

Wirkt im Punkte 1 eine Last  $P_1$  und im Punkte 2 eine Last  $P_2$ , so wird das Moment für  $C$  gefunden zu:

$$M = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2.$$

II. Mittelbare Belastung liegt vor. Befindet sich der zu untersuchende Querschnitt zwischen zwei Querträgern 1 und 2, so ist zunächst die Momentenfläche genau wie vorher bei unmittelbarer Belastung aufzuzeichnen.

Für die Lastlage  $A$  bis 1 (Fig. 84) gilt die Einflußfläche  $A'1'1''$ , für die Laststellung in 1 die Ordinate  $\eta_1$ ; für die Lastlagen von  $B$  bis 2 kommt die Einflußfläche  $B'2'2''$  in Frage, für die Laststellung in 2 die Ordinate  $\eta_2$ . Für das Feld 1 2 muß die Einflußlinie aber nach S. 69 eine Gerade sein; man zieht daher  $1''2''$ , so daß die Ecke  $C'$  abgestumpft wird. Die Fläche  $A'B'2''1''$  ist somit die Einflußfläche des Momentes für  $C$  für mittelbare Belastung.

**Beispiel.** Es soll das größte Moment im Punkte  $C$  infolge gleichmäßig verteilter Belastung für den in Fig. 83 gezeichneten Träger bestimmt werden.

Ist die gleichmäßige Belastung  $q = g + p$  für die Längeneinheit, so wird das größte Moment an der Stelle  $C$  durch Vollbelastung erzielt. Man erhält seine Größe durch Multiplikation von  $q$  mit dem Inhalt der Einflußfläche  $A'C'B'$ . Es ist:  $M_{C_{\max}} = q \cdot \Delta A'C''B'$

$$M_{C_{\max}} = q \cdot A'B' \cdot \frac{C'C''}{2}; \quad A'B' = l; \quad C'C'' = x \cdot \frac{x'}{l}.$$

$$M_{C_{\max}} = q \cdot \frac{l \cdot x \cdot x'}{2l} = q \cdot \frac{x \cdot x'}{2}.$$

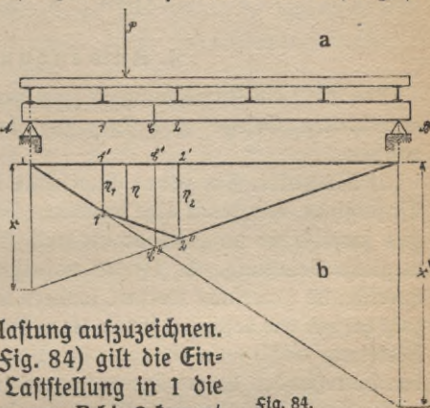


Fig. 84.

Da  $x' = l - x$  ist, so wird  $M_{C_{\max}} = q \cdot \frac{x(l-x)}{2}$ .

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar.

Liegt der Querschnitt  $C$  in der Mitte, so wird

$$x = \frac{l}{2}, \quad l - x = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2},$$

also  $M_{\max} = q \cdot \frac{l^2}{8}$ , wie auf S. 68 angegeben.

#### 4. Anwendungen.

Bevor an ein Anwendungsbeispiel herangegangen wird, sollen die entwickelten Gesetze noch kurz zur Erleichterung zusammengefaßt werden.

a) **Momente.** Für jeden Querschnitt des Trägers ist eine besondere Einflußlinie und somit eine besondere Einflußfläche aufzustellen; dies gilt sowohl für unmittelbar als auch für mittelbar angreifende bewegliche Belastung. Es können naturgemäß nicht sämtliche Trägerquerschnitte untersucht werden, sondern man greift eine bestimmte Anzahl heraus und bestimmt für sie die größten Momente. Bei mittelbarer Belastung wählt man die unter den Belastungspunkten, d. h. die unter den betreffenden Querträgerauflagern liegenden Querschnitte.

Die Einflußgrößen eines Momentes haben auf der ganzen Strecke zwischen den beiden Stützpunkten das gleiche Vorzeichen (der Träger darf allerdings über die Stützpunkte nicht überstehen!). Das größte Moment erhält man somit durch Vollbelastung, wobei die größte Last nach Möglichkeit über der größten Ordinate der Einflußlinie zu stehen kommen muß, also bei unmittelbarer Belastung unmittelbar über dem Querschnitt, bei mittelbarer über dem Belastungspunkte, der dem Querschnitte am nächsten liegt.

b) **Querkraft.** Bei unmittelbarer Belastung gehört zu jedem Querschnitte eine besondere Einflußlinie für die Querkraft. Bei mittelbarer Belastung haben alle Querschnitte desselben Feldes die gleiche Querkraftsgröße; in diesem Falle gibt es also nur eine Einflußfläche für die Querkraft eines Feldes.

Die Einflußlinie für die Querkraft eines Querschnittes ist in ihrem einen Teile, z. B. dem rechten, positiv, in ihrem anderen, z. B. dem linken, negativ. Die Trennung erfolgt durch die Lastscheide. Es entstehen zwei Größtwerte für die Querkraft und zwar durch Teilbe-

lastung. Die größte positive Querkraft erhält man z. B. durch Belastung der Strecke rechts vom Querschnitt, die größte negative z. B. durch Belastung links vom Querschnitt. Bei unmittelbarer Belastung müssen die Lasten meist bis unmittelbar an den Querschnitt vorrücken, bei mittelbaren in der Regel nur bis zu dem benachbarten Belastungspunkte, da dort die größte Ordinate vorliegt. (Nur wenn eine kleine Einzellast an der Spitze des Lastzuges sich befindet, kann der Fall eintreten, daß durch weiteres Verschieben in das Feld eine größere Summe der Einflußgrößen durch Heranziehung größerer Lasten und Ordinaten sich ergibt.)

Für die zeichnerische Behandlung beachte man, daß der Träger und der Lastenzug in dem gleichen Längenmaßstab (in m oder cm) aufgetragen werden muß, daß für die Ordinaten der Einflußlinien bei der Bestimmung der Querkraft ein Kräftemaßstab (in t oder kg) und daß für die Ordinaten der Einflußlinien für die Momente ein Momentenmaßstab (kg cm oder mt) eingeführt werden muß. Den einmal für eine Aufgabe gewählten Maßstab behält man während der ganzen Bearbeitung bei.

Einfache Fälle von Belastungen von Trägern durch bewegliche Lasten kommen im Maschinenbau bei Kranträgern vor. Im folgenden werde an einem Beispiel die Verwendung der Einflußlinien gezeigt.

**Beispiel.** Ein Kranträger von 10,0 m Stützweite werde durch eine Laufstübe mit je 5,0 t Raddruck bei 1,50 m Radstand belastet. Es sollen die größten Momente und Querkräfte mittels Einflußlinien bestimmt werden (vgl. Fig. 85 u. 86). Als Maßstab der Längen wurde 1:150 gewählt.

1. Bestimmung der Momente. Man teilte den Träger in 8 gleiche Abschnitte ein und führe die Untersuchung für die so gefundenen Teilpunkte der einen Hälfte durch (Sig 85 a—e). Es soll unmittelbare Lastübertragung vorliegen.

Im Punkte  $O$  ist das Moment gleich Null, die Einflußlinie fällt mit der Geraden  $A'B'$  zusammen.

Bestimmung der Einflußlinie für das Moment  $M_1$  im Punkte 1. Man hat nach S. 72 für jeden Lastpunkt die Ordinaten der  $A$ -Linie mit  $x_1$  zu multiplizieren. Man trägt daher im Punkte  $A'$  die Strecke  $A'A'' = x_1 \cdot 1$  t auf. Da hier  $x_1 = 1,25$  m ist, so wird  $A'A'' = 1,25 \cdot 1,0 \text{ m} \cdot t = 1,25 \text{ mt}$ .

Wählt man als Momentenmaßstab  $1 \text{ cm} = 1,5 \text{ mt}$ , so ist  $A'A'' = \frac{1,25}{1,5} = 0,835 \text{ cm}$

= rund  $\cdot 0,84$  cm anzutragen und  $A''B'$  zu ziehen. Die größte Ordinate der Momentenlinie liegt senkrecht unter 1; hierdurch ist der Punkt  $1''$  bestimmt. Der linke Teil der Einflußlinie wird durch die Gerade  $1''A'$  festgelegt.

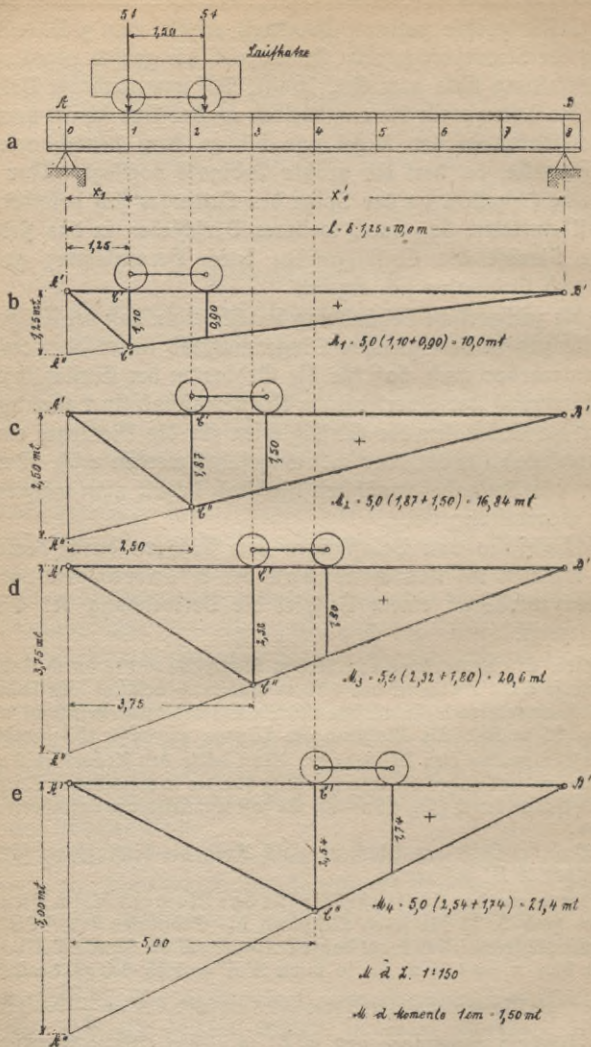


Fig. 85.



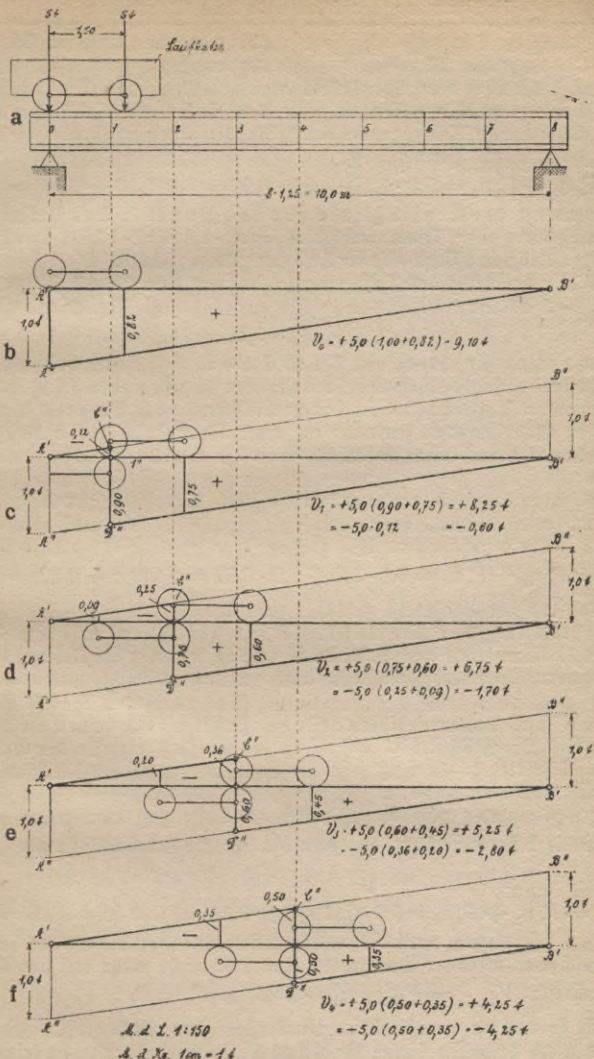


Fig. 86.

Jetzt muß die Laufstange nun so verschoben werden, daß für den Querschnitt  $C$  die größte Momentensumme sich ergibt, also müssen die Radlasten möglichst über die größten Ordinaten gestellt werden. Die zu wählende Lage ist aus Fig. 85 b ersichtlich. Ein Rad steht über  $1' 1''$ , das andere 1,50 m rechts davon. Die zugehörigen Ordinaten ergeben sich zu  $\eta_1 = 1,10$  mt und  $\eta_2 = 0,90$  mt. Demnach ist:

$$M_1 = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 = 5,0 \cdot 1,10 + 5,0 \cdot 0,90 = 5,0(1,10 + 0,90) = 10 \text{ mt.}$$

Bestimmung der Einflußlinie für den Punkt 2. Das Verfahren ist sinngemäß das gleiche. Man macht  $A'A'' = x_2 \cdot 1,0t = 2 \cdot 1,25 \cdot 1,0 = 2,50$  mt, im obigen Kräftemaßstab also = 1,67 cm. Man zieht  $A''B'$ , bestimmt  $2''$ , zieht  $A'2''$ , verschiebt den Lastenzug so, daß ein Rad über  $2' 2''$  zu stehen kommt, das andere 1,50 m nach rechts entfernt (vgl. Fig. 85 c). Es wird

$$M_2 = 5,0 \cdot 1,87 + 5,0 \cdot 1,50 = 16,84 \text{ mt.}$$

Ebenso wird für Querschnitt 3 und 4 die Untersuchung vorgenommen. Die betreffenden Ergebnisse sind bei den Figuren beige geschrieben. (Fig. 85 d u. e.)

Wenn man sämtliche so gefundenen Größtwerte der Momente unter den fraglichen Querschnitten senkrecht an einer Nulllinie  $A''B''$  aufträgt und ihre Endpunkte verbindet, so erhält man die Kurve der Maximalmomente.

II. Bestimmung der Querkräfte (vgl. Fig. 86). Für den Querschnitt  $O$  wird die Querkraft =  $A$  (vgl. Fig. 86 b). Die Einflußlinie fällt mit der  $A$ -Linie zusammen. Die größte, hier positive Querkraft ist:

$$V_{\max} = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 = 5,0 \cdot 1,0 + 5,0 \cdot 0,82 = 5,0(1,0 + 0,82) = 9,10 \text{ t.}$$

Der Maßstab der Kräfte ist gewählt zu 1 cm = 1 t.

Bestimmung der Einflußlinie für die Querkraft im Querschnitt 1. Man trägt nach S. 71 in  $A'$  und  $B'$  jeweilig die Werte 1,0 t auf in dem gewählten Kräftemaßstabe und zwar in  $A'$  nach unten =  $A'A''$  und  $B'$  nach oben =  $B'B''$  (Fig. 86 c). Man verbindet  $A'$  mit  $B''$  und  $A''$  mit  $B'$  und legt durch Übertragen des Punktes 1 die beiden Teileinflussflächen fest. Die Fläche  $A'C'D''B'$  ist die Einflußlinie für die Querkraft des Querschnittes 1. Es muß jetzt der Größtwert und der Kleinstwert der Querkraft bestimmt werden.

Zur Bestimmung von  $V_{1\max}$  wird der Lastenzug von rechts bis zur Schnittstelle 1 herangeführt, da dann die Summe der Einflüsse am größten wird.

Es ist dann:

$$V_{1\max} = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 = 5,0 \cdot 0,90 + 5,0 \cdot 0,75 = 5,0(0,90 + 0,75) = 8,25 \text{ t.}$$

Um  $V_{1\min}$  festzulegen, muß die Laufstange von links her bis an den Schnitt 1 herangeschoben werden. Das zweite Rad fällt nicht mehr auf den Träger.

Demnach ist:  $V_{1\min} = P\eta'_1$ ;  $\eta'_1 = 1''C''$ ;  $P_1 = P_2 = P$ .

Vielfach kommt es gerade beim Kranträger vor, daß die Laufstange den Träger nicht verlassen kann; in diesem Falle wird überhaupt kein  $V_{1\min}$  entstehen können.

Hier ist  $V_{1\min} = -5,0 \cdot 0,12 = -0,60 \text{ t.}$

Die Querkraft für den Schnitt 1 kann sich somit nur zwischen  $N_{1 \max} = +8,25 \text{ t}$  und  $V_{1 \min} = -0,60 \text{ t}$  bewegen.

Bestimmung der Einflußlinie für die Querkraft im Querschnitt 2. Das Aufzeichnen der Einflußlinie erfolgt genau wie oben für Querschnitt 1 hergeleitet. Die Trennung der beiden Teileinflußflächen erfolgt durch Übertragung des Punktes 2 (Fig. 86 d). Es ergibt sich hierbei:

$$V_{2 \max} = +P\eta_1 + P\eta_2 = 5,0(0,75 + 0,60) = 6,75 \text{ t.}$$

$$V_{2 \min} = -P\eta'_1 - P\eta'_2 = -P(\eta'_1 + \eta'_2) = -5,0(0,25 + 0,09) = -1,70 \text{ t}$$

In entsprechender Weise erhält man die Größt- und Kleinstwerte der Querkraftsummen für die übrigen Teilpunkte 3 und 4 (Fig. 86 e u. f.).

Trägt man die größten Querkräfte, also die positiven Werte, und die kleinsten Querkräfte, also die negativen, von einer Geraden  $A''B''$  in den den Teilpunkten entsprechenden Punkten senkrecht ab, so erhält man die Kurve der größten und die Kurve der kleinsten Querkräfte.

Handelt es sich um Feststellung des Einflusses größerer Lastgruppen wie z. B. bei Eisenbahnbrücken, wo eine Anzahl Lokomotiven und Wagenraddrücke für die Belastung in Frage kommen, oder bei Straßenbrücken, wo Dampfswalzen, Wagenlast und Menschengedränge zu beachten ist, so wird die Feststellung der ungünstigen Lastlage etwas schwieriger. Zu beachten ist jedoch, daß bei der gefährlichsten Lastlage stets eine der Lasten des Lastenzuges an einer ausspringenden Ecke der Einflußlinien liegen muß. Man kann durch Probieren zum Ziele gelangen dadurch, daß man zunächst eine beliebige Lastlage annimmt unter Beachtung obiger Voraussetzung, dann den Zug nach rechts verschiebt und feststellt, ob sich für  $Z$  ein größerer oder kleinerer Wert ergibt. Ergibt sich ein größerer Wert, so muß man die Verschiebung im gleichen Sinn fortsetzen, ergibt sich ein kleinerer Wert, so muß eine Verschiebung nach links angenommen werden. Nimmt sowohl bei Verschiebung nach rechts oder links der Wert für  $Z$  ab, so war die ursprüngliche Lage die richtige.

Von einem weiteren Eingehen auf die Berechnung muß wegen Platzmangels Abstand genommen werden. Näheres vgl. Müller-Breslau Statik der Baukonstruktionen und Mehrtens Statik II.

## VII. Durchgehende (kontinuierliche) Träger.

Der Begriff des durchgehenden Trägers ist bereits festgelegt (S. 44). Denkt man sich bei dem einfachsten Fall (Träger auf drei Stützen) zur Bestimmung der Auflagerdrücke in irgend einem Stützpunkt den Drehpunkt, so erkennt man sofort, daß wohl das Moment dieses unbe-

kannten Stützdruckes gleich Null wird, aber immer noch die Momente der beiden anderen unbekanntes Stützdrucke in der Gleichung verbleiben. Die Aufgabe ist daher statisch unbestimmt und mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht zu lösen.

Da für Hochbaukonstruktionen Träger auf mehreren Stützen im allgemeinen nicht zu empfehlen sind, so werden sie in der Regel auf den Stützen gestoßen und als Träger auf zwei Stützen für jedes Feld berechnet.

### VIII. Anwendung auf einfache Maschinen.

Die statischen Gesetze vom Gleichgewicht der Kräfte und vom statischen Moment finden auch Anwendung bei einfachen Maschinen, vor allem beim Hebel (bei der Wage), ferner beim Wellrad, der Rolle, den verschiedenen Flaschenzügen usw. An zwei kleineren Beispielen soll die Anwendung gezeigt werden.

**Beispiel 1.** An einem Wellrade wirke eine Last  $Q = 600$  kg. Der Halbmesser des Rades sei  $R = 80$  cm, der der Welle  $r = 20$  cm. Welche Kraft  $P$  ist erforderlich, um der Last das Gleichgewicht zu halten?

**Lösung.** Die Summe der statischen Momente muß für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null sein. Nach Fig. 87 ist demnach:

$$P \cdot R - Q \cdot r = 0 \quad \text{oder} \quad P \cdot R = Q \cdot r$$

$$\text{mithin: } P = \frac{Q \cdot r}{R}$$

oder unter Einsetzung der Zahlenwerte:

$$P = \frac{600 \cdot 20}{80} = 150 \text{ kg.}$$

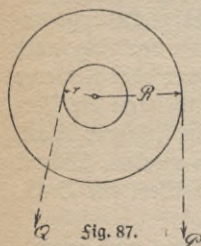


Fig. 87.

Um die Last aufzuziehen, müßte also eine Kraft von mehr als 150 kg angewandt werden.

**Beispiel 2.** Die Last soll ermittelt werden, welche mit Hilfe eines Differentialflaschenzuges gehoben werden kann, wenn das Verhältnis der Halbmesser  $\frac{r}{R} = \frac{9}{10}$  und die aufgewendete Kraft  $P = 45$  kg ist.

**Lösung.** Der Differentialflaschenzug besteht bekanntlich aus miteinander verbundenen festen Rollen von verschiedenem Durchmesser mit gemeinschaftlicher Achse und einer losen Rolle, an deren Haken die Last angebracht wird. Beim Aufziehen der Last wickelt sich eine endlose

Kette an der einen Seite von der kleinen Rolle ab und gleichzeitig an der anderen Seite der großen Rolle auf (Fig. 88). Da die Kette durch die Last  $Q$  gespannt wird, so entfällt auf jeden Kettenteil mithin der Anteil  $\frac{Q}{2}$ . Da man nun  $ABCD$  als doppelarmigen Hebel mit dem Drehpunkte  $C$  betrachten kann, so besteht mithin die Gleichgewichtsgleichung:

$$P \cdot \overline{AC} + \frac{Q}{2} \cdot \overline{BC} - \frac{Q}{2} \cdot \overline{CD} = 0$$

oder:  $P \cdot R + \frac{Q}{2} \cdot r - \frac{Q}{2} \cdot R = 0,$

woraus:  $P \cdot R = \frac{Q}{2} \cdot R - \frac{Q}{2} \cdot r$

$$P = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{r}{R} \quad \text{oder:} \quad P = \frac{Q}{2} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Differentialflaschenzug.

Mit Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte erhält man nunmehr, da die Gleichung für  $Q$  aufzulösen ist:

$$Q = \frac{2P}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{2 \cdot 45}{1 - \frac{9}{10}} = \frac{90}{\frac{1}{10}}$$

$$Q = 900 \text{ kg.}$$

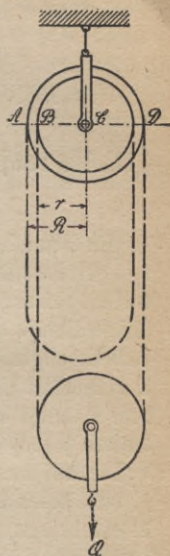


Fig. 88.

**Beispiel 3.** Ein Sicherheitsventil an einem Dampfkessel soll sich bei einem Dampfüberdruck von 3 atm öffnen. Hierzu wird es mittels eines einarmigen Hebels, an dem ein Laufgewicht  $G$  von 14 kg wirkt, nach Fig. 89 belastet. Das Ventil habe einen Durchmesser von 65 mm und ein Gewicht  $G_1 = 1,0$  kg, die Hebelstangen wiegen  $G_2 = 1,8$  kg, das Maß  $a$  betrage 8 cm, der Schwerpunkt der Hebelstange liege im Abstände  $b = 30$  cm vom Hebeldrehpunkt. In welcher Entfernung muß das Laufgewicht angebracht werden?

Der Überdruck des Dampfes auf die Ventilunterfläche beträgt:

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot 3,0$$

$$= 33,18 \cdot 3,0 = 99,54 \text{ kg.}$$

Die Gleichgewichtsbe-

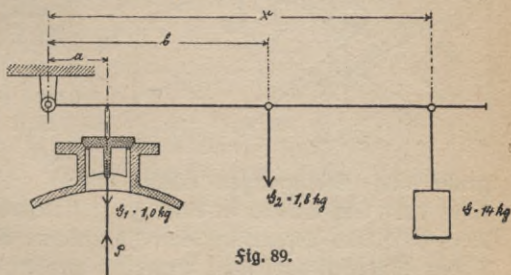


Fig. 89.

dingung  $\Sigma M = 0$  lautet in Anwendung für den vorliegenden Fall:

$$G \cdot x + G_2 \cdot b + G_1 \cdot a - P \cdot a = 0; \quad x = \frac{(P - G_1) \cdot a - G_2 \cdot b}{G}$$

$$x = \frac{(99,54 - 1,0) \cdot 8 - 1,8 \cdot 30}{14,0} = 52,5 \text{ cm.}$$

## IX. Untersuchung von Gewölben und Widerlagern.

### 1. Allgemeines.

Ein Gewölbe kann aufgefaßt werden als ein Träger auf zwei Stützen mit gekrümmter Längsachse. Die Belastung ist lotrecht, jedoch werden auf die Auflager, die hier Widerlager oder Kämpfer genannt werden, schiefe Drücke ausgeübt. Daher entstehen hier wagerechte Seitenkräfte. Das Eigengewicht spielt eine große Rolle und ist deshalb neben der Verkehrslast stets zu berücksichtigen. Das Eigengewicht setzt sich aus dem Gewicht des Gewölbes und der Überschüttung zusammen, welche letztere jedoch bei unbelasteten Gewölben fehlt.

Die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sind:

1. das bekannte Eigengewicht mit der darauf ruhenden Belastung;
2. die beiden unbekanntenen Kämpferdrücke  $K_l$  und  $K_r$  (Fig. 90).

Diese drei Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten. Die Aufgabe bleibt, wie Fig. 90 zeigt, statisch unbestimmt, da sich, wie sofort zu erkennen ist, unzählige Kämpferdrücke mit dem Gewicht  $G$  im Gleich-

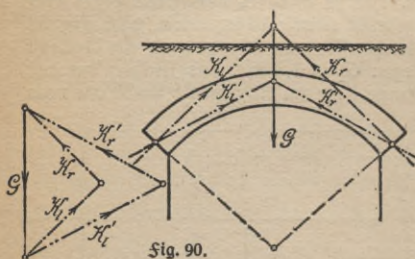


Fig. 90.

gewicht befinden. Man muß daher die Angriffspunkte der Kämpferdrücke annehmen und außerdem festsetzen, daß die Drucklinie, worüber später noch gesprochen wird, durch irgend einen Punkt des Gewölbes gehen soll.

Soll ein Gewölbe stand-

sicher sein, so müssen folgende drei Bedingungen erfüllt sein:

1. es darf kein Gleiten in einer Fuge stattfinden;
2. es darf kein Kippen um eine Fugenkante eintreten;
3. das Material darf nicht zermalmt werden.

Die erste Bedingung, daß kein Gleiten stattfinden darf, wird erfüllt, wenn der Druck auf die Fuge mit der in seinem Angriffspunkt auf der Fuge errichteten Senkrechten einen Winkel einschließt, welcher kleiner oder höchstens ebenso groß ist, als der Reibungswinkel des Wölbmaterials. Unter dem Reibungswinkel versteht man denjenigen Neigungswinkel einer schiefen Ebene, bei welchem ein Körper von selbst infolge seiner Schwere abwärts zu gleiten beginnt. Die Tangente des Reibungswinkels nennt man den Reibungskoeffizienten. Die Größe des Reibungswinkels und Reibungskoeffizienten findet man in jedem Tabellenwerke.

Ein Kippen tritt nicht ein, wenn die Mittelkraft an keiner Stelle aus dem mittleren Drittel, dem Kern des Gewölbes heraustritt.

Ein Zermahlen des Materials ist ausgeschlossen, wenn die nach der Formel für exzentrischen Druck zu ermittelnden Kantenpressungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben, vgl. Festigkeitslehre S. 98 ff.

## 2. Unbelastete Gewölbe.

Die beiden Hälften eines Gewölbes stützen sich im Scheitel gegenseitig. Daher übt jede Gewölbehälfte daselbst auf die andere einen wagerechten Druck aus, welcher Seitenschub oder Horizontalschub genannt wird.

Denkt man sich bei der statischen Untersuchung die eine Hälfte des Gewölbes fortgenommen, so muß man demnach im Scheitel eine wagerechte Kraft  $H$  anbringen, welche ebenso groß ist wie der Seitenschub.

Aus Fig. 91 erkennt man, daß es unzählige Seitenschübe gibt. Da jedoch nur die im Kerne des Gewölbes wirkenden Kräfte in Betracht kommen, und von diesen

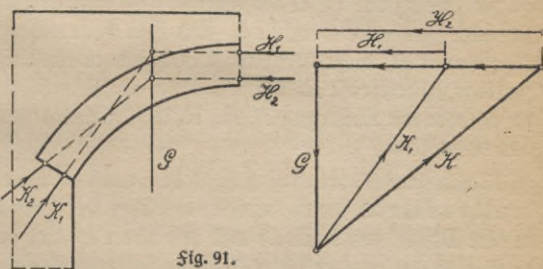


Fig. 91.

wieder diejenigen, welche die ungünstigsten Bedingungen ergeben, so genügt die Berücksichtigung der durch die Kerngrenzen, also durch das obere und untere Drittel des Scheitels gehenden Seitenschübe. Aus Fig. 91 ist ferner unschwer zu erkennen, daß der kleinste Seitenschub

sich ergibt, wenn  $H$  durch das obere Drittel des Scheitels und der Kämpferdruck  $K$  durch das untere Drittel des Kämpfers geht. Der größte Seitenschub ergibt sich dagegen, wenn  $H$  durch das untere Drittel des Scheitels und  $K$  durch das obere Drittel des Kämpfers geht. Um dies zu erkennen, braucht man sich nur in der Hauptfigur einen anderen Angriffspunkt des Kämpferdruckes zu denken und zu der dadurch bestimmten Richtung der Kraft  $K$  in der Kräftefigur eine Parallele zu ziehen. — Je tiefer also der Seitenschub angreift, um so größer wird er.

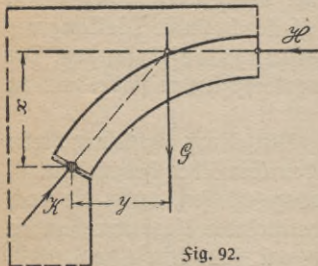


Fig. 92.

Durch Anordnung eines Gelenkes kann man dem Kämpferdruck einen bestimmten Angriffspunkt geben und damit die statische Unbestimmtheit des Gewölbes beseitigen (Fig. 92).

Die Größe des Seitenschubes findet man nach Fig. 92 aus:

$$H \cdot x = G \cdot y, \text{ woraus: } H = \frac{G \cdot y}{x}. \quad (32)$$

Bei der statischen Untersuchung betrachtet man am besten einen Streifen von 1 m Tiefe. Auch genügt es, da die Belastung durch das Eigengewicht, die bei unbelasteten Gewölben allein wirkt, symmetrisch ist, nur eine Gewölbehälfte zu untersuchen. Man zerlegt diese Gewölbehälfte in einzelne kleine Abschnitte, bestimmt deren Gewichte und setzt zunächst das erste Gewicht  $G_1$  mit dem Seitenschub  $H$  zur Mittelkraft  $R_1$  zusammen, diese Mittelkraft mit dem zweiten Gewicht  $G_2$  zu einer zweiten Mittelkraft  $R_2$  usw. bis man am Kämpfer anlangt. Den sich so ergebenden Linienzug  $H, R_1, R_2, R_3 \dots$  nennt man die Drucklinie des Gewölbes.

Man unterscheidet entsprechend dem größten Seitenschub eine Maximaldrucklinie, welche nach dem früher Gesagten demnach durch das untere Drittel des Scheitels und das obere Drittel des Kämpfers gehen muß, und entsprechend dem kleinsten Seitenschub eine Minimaldrucklinie, welche durch das obere Drittel des Scheitels und das untere Drittel des Kämpfers gehen muß. Häufig wird auch eine mittlere Drucklinie, durch die Mitte des Scheitels und des Kämpfers gehend, gezeichnet. Ein Beispiel möge die Untersuchung zeigen.



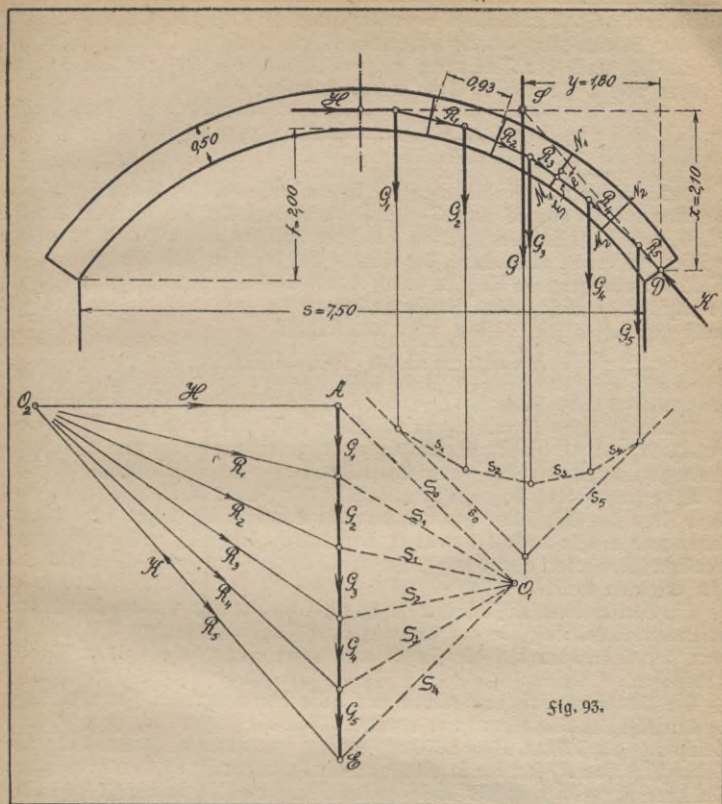


Fig. 93.

**Beispiel.** Für das in Fig. 93 gegebene Gewölbe soll die mittlere Drucklinie gezeichnet werden.

**Lösung.** Das Gewölbe wird in fünf Abschnitte von 0,93 m mittlerer Länge zerlegt, welche genügend genau als Rechtecke berechnet werden können. Das Gewicht eines Streifens ist dann, wenn 1 cbm Gewölbemauerwerk 2000 kg wiegt:

$$G_1 = G_2 = G_3 \dots = 0,93 \cdot 0,50 \cdot 1,0 \cdot 2000 = 930 \text{ kg}$$

und das Gesamtgewicht (die Mittelkraft der Einzelgewichte):

$$G = 5 \cdot 930 = 4650 \text{ kg.}$$

Die Lage der Mittelkraft  $G$  wird mit Hilfe des Kraft- und Seilecks in bekannter

Weise ermittelt. Ihr Abstand vom Angriffspunkt  $D$  des Kämpfers, welcher bei der Bestimmung des Seitenschubes  $H$  als Drehpunkt anzunehmen ist, ergibt sich nach der Zeichnung zu  $y = 1,80$  m, der Abstand des Seitenschubes von  $D$  zu  $x = 2,10$  m. Demnach wird:

$$H = \frac{G \cdot y}{x} = \frac{4650 \cdot 1,80}{2,10} = 3986 \text{ kg.}$$

Durch Zeichnung findet man  $H$ , indem man in der Hauptfigur den Schnittpunkt  $S$  von  $H$  und  $G$  mit  $D$  verbindet. Da sich die drei Kräfte  $H$ ,  $G$  und  $K$ , falls Gleichgewicht herrschen soll, in einem Punkt schneiden müssen, so erhält man durch die Gerade  $SD$  die Lage des Kämpferdruckes  $K$ . Zieht man nun im Kräfteck durch  $A$  und  $E$  Gleichlaufende zu  $H$  und  $K$ , so erhält man diese beiden Kräfte auch nach Größe und Sinn (das Kräfteck muß geschlossen sein). Man mißt und findet:

$$H = 4,0 \text{ cm} = 4,0 \cdot 1000 = 4000 \text{ kg,}$$

was mit dem durch Rechnung gefundenen Ergebnis fast genau übereinstimmt.

Nunmehr wird  $H$  mit  $G_1$  zu  $R_1$ , sodann  $R_1$  mit  $G_2$  zu  $R_2$ ,  $R_2$  mit  $G_3$  zu  $R_3$ ,  $R_3$  mit  $G_4$  zu  $R_4$ ,  $R_4$  mit  $G_5$  zu  $R_5$  zusammengesetzt und die Drucklinie gezeichnet, wie die Figur darstellt.

Man sieht sofort, daß die Drucklinie in den Fugen  $M_1 N_1$  und  $M_2 N_2$  aus dem Kern des Gewölbes heraustritt. Das Gewölbe ist daher nicht standfest und müßte verstärkt werden, was durch gleichmäßige Vergrößerung der Gewölbestärke  $d$  oder durch zunehmende Vergrößerung nach dem Kämpfer hin erfolgen kann.

Ein Gleiten in einer Fuge wird nicht eintreten, da man aus der Abbildung erkennen kann, daß die auf die einzelnen Fugen wirkenden Mittelkräfte von der Lotrechten auf die Fugen nur unter einem sehr kleinen Winkel abweichen.

Die Kantenpressungen werden mit Hilfe der bekannten Formeln über exzentrische Druckbeanspruchung ermittelt. Für die Fuge  $M_1 N_1$  ist z. B. nach Zeichnung  $e = 9,5$  cm,  $R_3 = 4870$  kg. Streng genommen müßte die senkrechte Seitenkraft von  $R_3$  für die Ermittlung der Kantenpressung benutzt werden. Da aber  $R_3$  größer ist als diese, so kann man auch  $R_3$  in die Formel einsetzen, was der Sicherheit nur zu gute kommt. Dann erhält man mit Hilfe der Gleichung (s. Festigkeitslehre S. 99):

$$k = \frac{R_3}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6e}{b}\right) = \frac{4870}{50 \cdot 100} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot 9,5}{50}\right) = 0,974 \cdot (1 \pm 1,14)$$

und hieraus:

$$k_{\max} = 2,18 \text{ kg/qcm}$$

$$k_{\min} = -0,14 \text{ kg/qcm.}$$

Mithin wird mit  $k_{\max}$  die zulässige Spannung nicht überschritten. Da jedoch  $k_{\min}$  negativ wird, so treten Zugspannungen auf. Sollen diese ausgeschlossen sein, so muß man Fugenentlastung annehmen und nach Gleichung (47) (s. Festigkeitslehre S. 103) rechnen. Dabei erhält man:

$$k = \frac{2R_5}{3c \cdot b} = \frac{2 \cdot 4870}{3 \cdot \left(\frac{50}{2} - 9,5\right) \cdot 50} = 4,2 \text{ kg/qcm,}$$

also eine zulässige Spannung  $c = \frac{b}{2} - e$ .

Für das Widerlager wird  $e = 0$ , mithin ist hier zentrische Belastung vorhanden. Die angreifende Kraft ist  $R_5$ , welche den gleich großen, in derselben Geraden aber entgegengesetzt wirkenden Kämpferdruck  $K$  hervorruft. Nach Zeichnung ist  $R_5 = 6120 \text{ kg}$ , so daß:

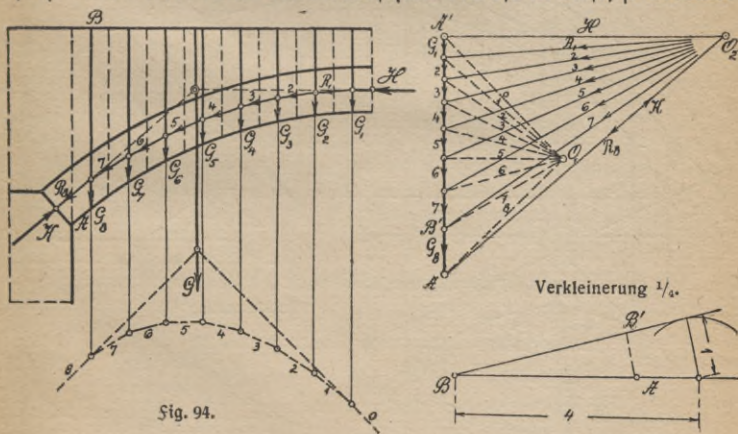
$$k = \frac{R_5}{F} = \frac{6120}{50 \cdot 100} = 1,22 \text{ kg/qcm}$$

wird, was zulässig ist.

### 3. Gewölbe mit Überschüttung.

Ist ein Gewölbe mit Erde überschüttet, so teilt man es in der Regel ohne Rücksicht auf die Anordnung der Fugen, aber einschließlich der Überschüttung in schmale, senkrechte Streifen von gleicher Breite ein. Macht man die Streifen nicht zu breit, so kann man der größeren Einfachheit wegen ihre Mittellinien als Schwerlinien betrachten. In diesen wirken dann die Gewichte der einzelnen Streifen.

Wiegt die Überschüttungserde ebenso viel wie das Mauerwerk, dann entsprechen bei gleicher Breite der Streifen deren Mittellinien dem Gewichte der Streifen. Sind die Streifen z. B. 0,50 m breit, und untersucht man wieder einen Gewölbeabschnitt von 1,0 m Tiefe, so bedeutet



1 m Höhe der Mittellinien der Streifen einen Rauminhalt von  $0,5 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 0,5$  cbm, und bei einem Erd- und Mauergerichte von  $1800 \text{ kg/cbm}$  demnach ein Gewicht von  $0,5 \cdot 1800 = 900 \text{ kg}$ .

Man kann daher nach einem gewählten Kräftemaßstabe die Mittellinien der Streifen gleich als Gewichte im Kräfteed auftragen. Will man die Kräfte nicht in zu großem Maßstabe erhalten, so benutzt man zur Auftragung, wie dies in Fig. 94 geschehen ist, einen Verkleinerungsmaßstab. Die Verkleinerung ist hier  $= \frac{1}{4}$  gewählt. Der Gebrauch des Maßstabes ergibt sich aus den Bezeichnungen der Fig. 94 von selbst.

Die Zeichnung der Drucklinie und die weitere Untersuchung erfolgt genau wie zuvor. In Fig. 94 ist wieder die mittlere Drucklinie gezeichnet.

#### 4. Gewölbe mit Überschüttung und Belastung.

Häufig besitzt die Überschüttung ein anderes Gewicht als das des Mauerwerkes, auch tritt in der Regel noch eine Auflast (Verkehrslast)

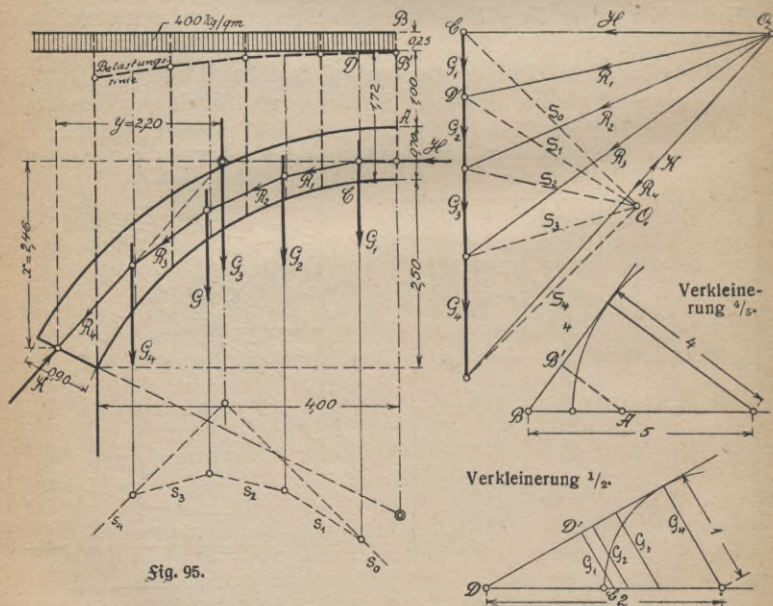


Fig. 95.

hinzu. Dann werden die Gewichte der Überschüttung und der Auflast in Mauerwerksgewicht umgerechnet. Das Verfahren wird am besten durch ein Beispiel an Hand von Fig. 95 gezeigt.

Das Gewölbe sei wieder symmetrisch belastet, so daß die Kämpferdrücke an beiden Widerlagern gleich werden, und mithin nur eine Gewölbehälfte untersucht werden muß. Die Auflast betrage 400 kg/qm, das Gewicht der Erde 1600 kg/cbm, das Gewicht des Mauerwerkes 2000 kg/cbm.

Zunächst ist festzustellen, welche Höhe ein dem Gewichte der Auflast entsprechender Erdkörper erhalten muß. Diese Höhe ergibt sich aus:

$$h_1 = \frac{400}{1600} = 0,25 \text{ m.}$$

Um dieses Maß ist, wie die Figur zeigt, die Überschüttung zu vergrößern. Die Überschüttung ist sodann in Mauerwerk umzurechnen. Da das Gewicht des Mauerwerkes größer ist als das der Erde, so muß ein Erdkörper vom Gewichte des Mauerwerkes naturgemäß einen geringeren Rauminhalt einnehmen als ein leichter Körper von dem gegebenen Erdgewicht. Die Höhen der Überschüttung einschließlich Auflast sind daher zu verringern. Diese Verkleinerung muß betragen:

$$\frac{1600}{2000} = \frac{4}{5}.$$

Das Gewölbe wird wieder in einzelne senkrechte Streifen zerlegt. Dabei soll der links vom Widerlager liegende Teil des Gewölbes samt Überschüttung zum Widerlager gerechnet werden. Der hierdurch entstehende Fehler ist belanglos; dafür erhält man ein rundes Teilungsmaß (hier 1 m). Nunmehr trägt man mit Hilfe des Verkleinerungsmaßstabes  $\frac{4}{5}$  in den durch die Teilpunkte gezogenen Senkrechten die auf Mauergewicht zurückgeführten Höhen der Überschüttung einschließlich Auflast von der äußeren Leibung des Gewölbes nach oben auf. Z. B. wird  $AB$  in den Verkleinerungsmaßstab übertragen, daselbst  $AB' = \frac{4}{5}AB$  abgegriffen und in der Hauptfigur von  $A$  aus nach oben aufgetragen. Der so gewonnene Punkt  $B'$  ist ein Punkt der dem Gewichte des Mauerwerkes entsprechenden neuen Belastungslinie, deren andere Punkte in gleicher Weise gewonnen werden.

Die Mittellinien der Streifen können wieder als Gewichte der Streifen aufgefaßt werden. Da 1 cbm Mauerwerk 2000 kg wiegt, so entspricht bei einer Breite der Streifen von 1,0 m demnach 1 cm Höhe der Streifen einem Gewichte von 2000 kg, wenn die Tiefe des Gewölbes, wie üblich, wieder = 1,0 m angenommen wird.

Rechnerisch ergeben sich diese Gewichte wie folgt:

$$G_1 = 1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,72 \cdot 2000 = 3440 \text{ kg}$$

$$G_2 = 1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,92 \cdot 2000 = 3840 \text{ kg}$$

$$G_3 = 1,0 \cdot 1,0 \cdot 2,34 \cdot 2000 = 4680 \text{ kg}$$

$$G_4 = 1,0 \cdot 1,0 \cdot 3,15 \cdot 2000 = 6300 \text{ kg}$$

$$\Sigma G = G = 18260 \text{ kg.}$$

Da die Streifen als Trapeze aufgefaßt werden können, so greifen in ihren Schwerpunkten die Gewichte an (bei schmalen Streifen wieder genügend genau in den Mitten der Trapeze).

Um das Kräftefeld nicht zu groß werden zu lassen, sind die Gewichte mit Hilfe des Verkleinerungsmaßstabes  $\frac{1}{2}$  um die Hälfte verkleinert aufgetragen worden, so daß im Kräftefeld daher 1 cm Länge ein Gewicht von 4000 kg darstellt.

Der Seitenschub ergibt sich aus:

$$H = \frac{G \cdot y}{x} = \frac{18260 \cdot 2,20}{2,46} = 16300 \text{ kg,}$$

was mit der Zeichnung übereinstimmt, da hier  $H = 4,07 \text{ cm} = 4,07 \cdot 4000 = 16280 \text{ kg}$  ist. Der Kämpferdruck wird in gleicher Weise wie oben gefunden. Rechnerisch erhält man ihn aus:

$$K = \sqrt{H^2 + G^2} = \sqrt{16300^2 + 18260^2} = 24477 \text{ kg.}$$

In der Zeichnung findet man  $K = 6,125 \text{ cm} = 6,125 \cdot 4000 = 24500 \text{ kg}$ . Gezeichnet wurde entsprechend dem größten Seitenschube die Maximaldrucklinie, welche also durch das untere Drittel des Scheitels und das obere Drittel des Kämpfers geht. Die Konstruktion erfolgt im übrigen in gleicher Weise, wie sonst. Die Drucklinie tritt an keiner Stelle aus dem Kerne des Gewölbes heraus. Die Untersuchung gegen Gleiten und Zermalmen weicht von der bereits beschriebenen nicht ab.

### 5. Unsymmetrisch belastete Gewölbe.

Bei Gewölben, welche noch eine Verkehrslast aufzunehmen haben, tritt die ungünstigste Beanspruchung im allgemeinen dann ein, wenn die eine Gewölbehälfte mit der Verkehrslast, die andere dagegen nur mit dem Eigengewicht und der Überschüttung belastet ist. Da die Belastung hier unsymmetrisch ist, wird auch die Drucklinie unsymmetrisch, so daß die Untersuchung für beide Gewölbehälften durchgeführt werden muß. Man rechnet auch hier (wovon jedoch in Fig. 96 zur größeren Deutlichkeit der Darstellung Abstand genommen wurde) wieder Überschüttung und Auflast in Mauergewicht um und zeichnet dafür die Belastungslinie. Die Einteilung des Gewölbes in Streifen und die Bestimmung der Gewichte der Streifen erfolgt wie früher. Die Lage der Mittelkräfte  $G_{1-4}$  und  $G_{5-8}$  für beide Gewölbehälften findet man mit Hilfe des Seileckes. Nunmehr betrachtet man zunächst jede Gewölbehälfte für sich. Auf die belastete linke Gewölbehälfte wirkt das Gewicht  $G_{1-4}$  und der Kämpferdruck  $K'_1$ . Denkt man sich die rechte Gewölbehälfte vorhanden, aber gewichtslos, so muß sie, falls Gleichgewicht herrschen soll, auf die linke Gewölbehälfte gleichfalls eine Kraft

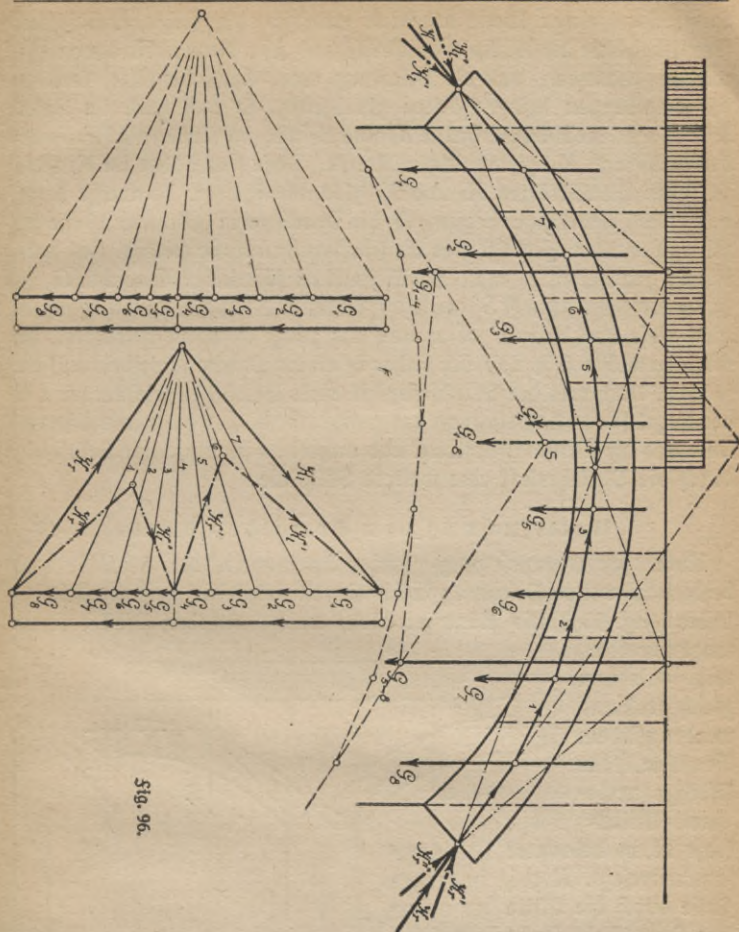


Fig. 96.

ausüben, welche einerseits natürlich durch den für die Drucklinie im rechten Kämpfer gewählten Punkt, andererseits aber mit Rücksicht auf das Gleichgewicht auch durch den Schnittpunkt von  $G_{1-4}$  und  $K_i$  gehen muß. Damit erhält man die Richtung des Kämpferdruckes  $K_r$  und mit Hilfe des Kräfte dreiecks nunmehr auch  $K_i$  und  $K_r$  nach Größe und

Sinn. In gleicher Weise ermittelt man für die rechte, unbelastete Gewölbehälfte die Kämpferdrücke  $K'_l$  und  $K'_r$ . Nun wirkt aber nicht, wie angenommen, nur die Belastung einer Gewölbehälfte, sondern die Belastungen beider Hälften gleichzeitig, so daß auch im linken Widerlager die Kämpferdrücke  $K'_l$  und  $K'_r$  und im rechten die Kämpferdrücke  $K'_r$  und  $K'_l$  gleichzeitig auftreten. Diese sind daher im Kräfteck zu ihren Mittelkräften  $K_l$  und  $K_r$  zusammengesetzt. Nunmehr kann, von einem Widerlager beginnend, die Drucklinie in bekannter Weise gezeichnet werden. Fig. 96 gibt die Maximaldrucklinie wieder. Hat man richtig gearbeitet, so muß die Mittelkraft sämtlicher Gewichte  $G_1 \dots G_8$  durch den Schnittpunkt  $S'$  der Kämpferdrücke  $K_l$  und  $K_r$  hindurchgehen, weil diese drei Kräfte, wenn man das ganze Gewölbe betrachtet, im Gleichgewichte sein und sich daher in einem Punkte schneiden müssen.

Zum Nachweis der Standfestigkeit eines Gewölbes zeichnet man in der Regel für volle Belastung des ganzen Gewölbes die mittlere Drucklinie und die Minimalstützlinie, und außerdem für einseitige Belastung durch die Verkehrslast eine weitere Stützlinie.

## 6. Untersuchung von Gewölbepfeilern.

Unter der Voraussetzung gleicher Spannweite der Gewölbe und beiderseits voller Belastung wird ein Mittelpfeiler symmetrisch belastet (Fig. 97). Die Kämpferdrücke, welche auf den Pfeiler übertragen werden,

sind alsdann gleich groß und werden mit dem Gewichte des Pfeilers zur Gesamt-Mittelkraft  $R$  in bekannter Weise zusammengesetzt.  $R$  geht in diesem Falle durch die Mitte der untersten Fuge, steht senkrecht auf ihr und ruft daher zentrische Belastung des Bodens hervor.

Am ungünstigsten wird ein Mittelpfeiler beansprucht, wenn das eine anstoßende Gewölbe voll,

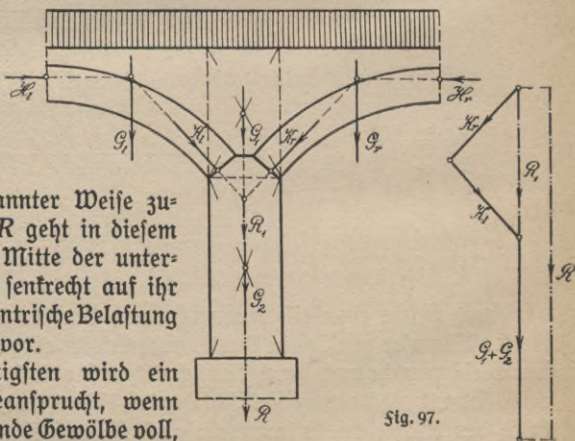


Fig. 97.



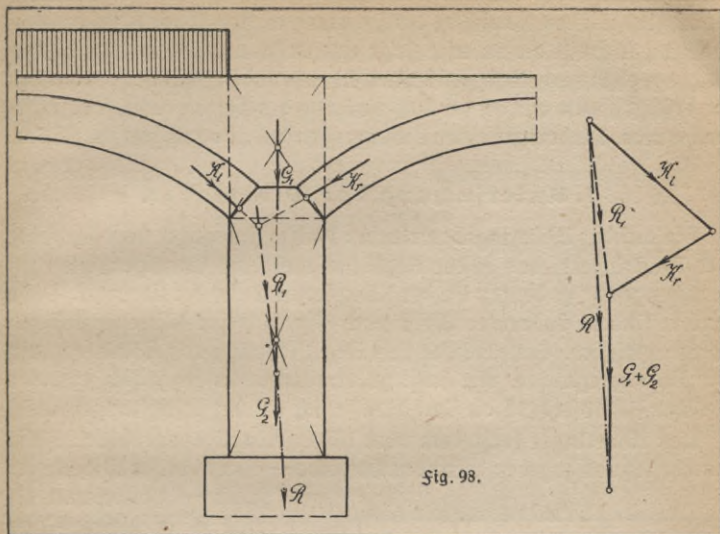


Fig. 98.

das andere nur mit Eigengewicht und Überschüttung belastet ist (Fig. 98). Denn in diesem Falle sind die aufzunehmenden Kämpferdrücke verschieden groß; das Gewölbe ist daher einseitigem Schube ausgesetzt, die Mittelkraft muß aus der Mitte der untersten Fuge heraustreten.

In Fig. 98 ist das linke Gewölbe vollbelastet, so daß die Mittelkraft  $R$  den Pfeiler nach rechts zu drücken sucht. Wenn dies tatsächlich eintritt, so muß sich im Gewölbe die Scheitelfuge unten und die Kämpferfuge oben öffnen (Fig. 99), wie es der Minimaldrucklinie entspricht. Gleichzeitig sucht das rechte Gewölbe nach oben auszuweichen, so daß sich die Scheitelfuge nach oben und die Kämpferfuge nach unten öffnet (Fig. 99), entsprechend der Maximaldrucklinie.

Bei einem unsymmetrisch belasteten Pfeiler hat man daher für das belastete Gewölbe die Minimaldrucklinie und für das unbelastete Gewölbe die Maximaldrucklinie zu zeichnen. Die hieraus sich in bekannter Weise ergebenden Kämpfer-

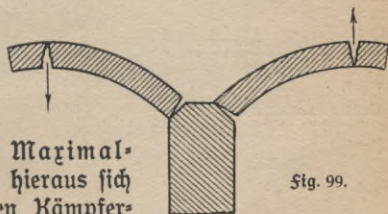


Fig. 99.

drücke sind mit den Gewichten des Pfeilers zur Mittelkraft  $R$  zusammenzusetzen,  $R$  greift die unterste Fuge exzentrisch an. Die weitere Untersuchung, ob Sicherheit gegen Kanten, Gleiten und Zermalmen vorhanden ist, erfolgt ebenso wie bei der Untersuchung des Gewölbes selbst beschrieben wurde. Diedort gestellten Bedingungen sind also auch hier zu erfüllen.

### 7. Untersuchung der Widerlager.

Die auf das Widerlager wirkenden Kräfte sind außer dem Gewichte des Widerlagers, das in der Regel aus mehreren Einzelgewichten zusammengesetzt zu denken ist, der Kämpferdruck und der Erddruck. Diese Kräfte sind in bekannter Weise nach Fig. 100 zur Mittelkraft  $R$  zusammenzusetzen. Entsprechend dem Angriffspunkte von  $R$  sind hiernach die Bodenpressungen wie sonst zu ermitteln. Es fragt sich nur, für welchen Kämpferdruck die Verhältnisse sich am ungünstigsten gestalten.

Das Widerlager sucht dem vom Kämpferdruck ausgeübten Schube am ehesten nachzugeben, wenn das Gewölbe — aber nicht das Widerlager

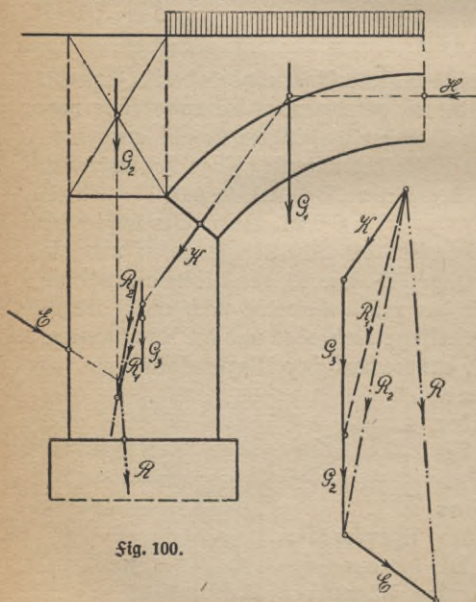


Fig. 100.

selbst — vollbelastet ist, weil es in diesem Falle den größten Schub ausübt. Gibt das Widerlager nach, was durch Ausweichen nach links erfolgt (Fig. 100), so öffnet sich die Scheitelfuge unten und die Kämpferfuge oben, entsprechend der Minimaldrucklinie. Daher ist bei der Untersuchung der bei Vollbelastung des Gewölbes aus der Minimaldrucklinie sich ergebende Kämpferdruck zugrunde zu legen.

Der Erddruck wird häufig ganz vernachlässigt, weil er die Richtung

der Mittelkraft, wie aus der Abbildung sofort erkannt wird, nur günstig beeinflusst.

Für die Standicherheit des Widerlagers gegen Kanten, Gleiten und Zermalmen gelten dieselben Bedingungen, wie bisher.

## X. Die Berechnung größerer Dachkonstruktionen.

### 1. Allgemeines.

Größere Dachkonstruktionen, zu denen namentlich solche aus Eisen zählen, sind Fachwerksrüger auf zwei Stützen oder Freitrüger. Da bekanntlich das Dreieck eine starre Verbindung bildet, sind solche Konstruktionen aus einzelnen Stäben zu Dreiecken zusammengesetzt, so daß sich eine unverschiebliche Figur ergibt. Wir sahen bereits, daß man die Punkte, in denen die Stäbenenden zusammenstoßen, Knotenpunkte nennt. Wenn möglich, läßt man die äußeren Kräfte, die Lasten, in den Knotenpunkten angreifen, weil sie in diesem Falle in den einzelnen Stäben nur Zug- oder Druckspannungen hervorrufen (vgl. S. 29). Doch werden einzelne Stäbe mitunter auch zwischen den Knotenpunkten durch Pfetten belastet. Solche Stäbe sind dann auf zusammengesetzten Festigkeit zu berechnen.

Derartige Dachkonstruktionen eignen sich besonders für große Stützweiten und werden daher namentlich bei Hallen ausgeführt.

Die Belastung setzt sich zusammen aus

1. dem Eigengewicht,
2. dem Schneedruck,
3. dem Winddruck.

Das Eigengewicht ist wesentlich abhängig von der Art der Dach-eindeckung, der Schneedruck dagegen von der Dachneigung. Je steiler das Dach ist, desto leichter rutscht der Schnee ab, so daß man bei Dächern, welche einen größeren Neigungswinkel als  $50^\circ$  besitzen, den Schneedruck bei der Rechnung ganz vernachlässigen kann.

Der Wind beansprucht das Dach in der Regel nur von einer Seite her. Bei genaueren Untersuchungen ist der rechnerische Nachweis daher für linksseitigen, wie für rechtsseitigen Winddruck zu führen. Für die Bestimmung der Auflagerdrücke greift alsdann das auf S. 45 Gesagte Platz, da hierbei die Anordnung des Auflagers, ob beweglich oder fest, von ausschlaggebender Bedeutung ist. Bei flachen Dächern ist der Einfluß des Windes jedoch nicht so groß, wie bei steilen Dächern,

so daß man hier in der Regel die Belastung durch den Wind, ebenso wie diejenige durch Eigengewicht und Schnee, als gleichmäßig über beide Dachflächen verteilt und daher lotrecht wirkend annimmt. Auf diese Weise ergibt sich nur lotrechte Belastung, mithin entstehen auch nur lotrechte Auflagerdrücke.

Die Größe der Belastung durch Eigengewicht, Schnee und Wind kann aus Tabellen entnommen werden. Daher sollen hier keine Angaben darüber gemacht werden. Auch soll nur das abgefürzte Verfahren, bei welchem der Winddruck in die lotrechte Belastung eingerechnet wird, berücksichtigt werden.

## 2. Ermittlung der Spannkräfte und Querschnitte.

Für die Ermittlung der Spannungen hat man zwei Verfahren. Auf die rechnerische Ermittlung nach dem Ritterschen Schnittverfahren soll jedoch nicht eingegangen, vielmehr nur das zeichnerische Verfahren betrachtet werden.

In Fig. 101 ist ein sog. französischer Dachstuhl (Polonceaubinder) von 12,00 m Stützweite gegeben. Die Ermittlung der inneren Spannkräfte erfolgt hier in derselben Weise, wie sie auf S. 29 bis 32 besprochen wurde. Auch hier sind die Knotenpunkte besonders herausgezeichnet, der Einfachheit halber aber nur die Gleichgewichtsfiguren gezeichnet.

Im Knotenpunkte I wirken der Auflagerdruck  $A$  und die Belastung  $\frac{P}{2}$  für das anstoßende halbe Feld. Unter Annahme einer Binderentfernung  $= 4,0$  m und einer Feldbreite  $= \frac{l}{4} = 3,00$  m, sowie einer Belastung durch Eigengewicht, Schnee und Wind von  $q = 250$  kg/qcm Grundrißfläche wird die Belastung eines ganzen Feldes:

$$P = 3,0 \cdot 4,0 \cdot 250 = 3000 \text{ kg.}$$

Ein Teil der Auflagerwiderstände  $A$  und  $B$  wird durch die in den Auflagern wirkenden Lasten  $\frac{P}{2}$  aufgehoben. Für die Größe des Auflagerdruckes, soweit er von Einfluß auf die Spannkräfte in den benachbarten Stäben ist, kommen daher nur die Belastungen in den Zwischenknotenpunkten in Betracht. Da Dachkonstruktion und Belastung symmetrisch sind, so ist:

$$A = B = \frac{3P}{2} = 1,5 P = 1,5 \cdot 3000 = 4500 \text{ kg.}$$

Der Einfluß von  $\frac{P}{2}$  auf  $A$  ist damit berücksichtigt. Das ermittelte  $A$  ruft in den anstoßenden Stäben  $O_1$  (Obergurt) und  $U_1$  (Untergurt) Spann-

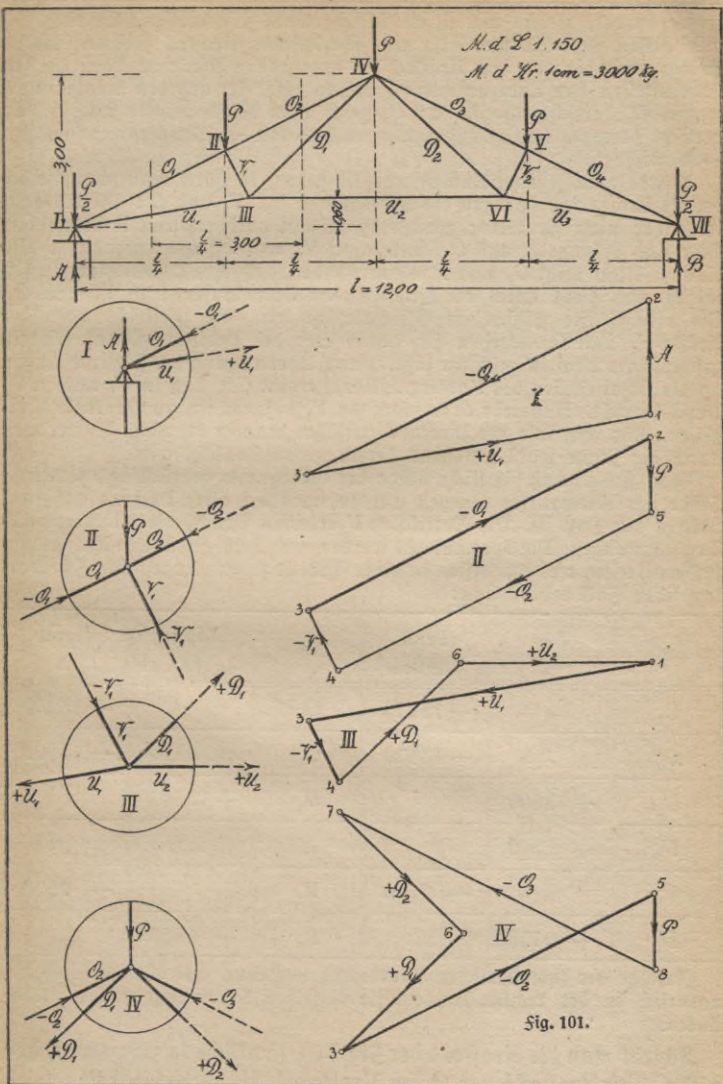


Fig. 101.

Kräfte hervor, welche mit  $A$  im Gleichgewicht sein müssen. Es muß sich aus diesen drei Kräften also ein geschlossenes Kräfteck zeichnen lassen. Bringt man die aus dem Kräfteck sich ergebenden Pfeilrichtungen an den Schnittstellen des Knotenpunktes I an, so zeigt  $O_1$  auf den Knotenpunkt zu, in  $O_1$  herrscht also Druck;  $U_1$  zeigt vom Knotenpunkte weg, in  $U_1$  herrscht demnach Zug. Zugspannungen sind mit +, Druckspannungen mit - bezeichnet.

Würde man jetzt zu Knotenpunkt III gehen, so hätte man nur eine bekannte Kraft,  $U_1$ , dagegen die unbekanntes  $U_2$ ,  $V_1$  und  $D_1$ . Die Aufgabe ist daher nicht zu lösen; man muß mithin vorher Punkt II betrachten. Hier sind bekannt  $P$  und  $O_1$ , unbekannt  $V_1$  und  $O_2$ ; die Aufgabe ist also lösbar. Man reißt  $O_1$  und  $P$  so aneinander, daß ihre Pfeilrichtungen sich folgen und zieht durch die freien Enden Gleichlaufende zu  $V_1$  und  $O_2$ . Die vier Kräfte müssen im Gleichgewicht sein, die Pfeilrichtungen der Kräfte  $V_1$  und  $O_2$  ergeben sich daher aus der Bedingung, daß sich ein geschlossenes Kräfteck zeichnen läßt. Durch Übertragung der Pfeilrichtungen an die Schnittstellen des Knotenpunktes II ergibt sich, daß in  $V_1$  und in  $O_2$  Druck herrscht. Nunmehr kann man, da  $V_1$  bekannt ist, zu Punkt III übergehen. Für ihn, wie für Punkt IV verfährt man in derselben Weise, was durch die Figur wohl genügend genau veranschaulicht wird.

Man findet, daß sämtliche Stäbe des Obergurtes gedrückt und sämtliche Stäbe des Untergurtes gezogen werden, was bei allen Dächern auf zwei Stützen der Fall ist. Die Vertikalen  $V$  erleiden Druck, die Diagonalen  $D$  Zugspannungen. Die Spannungen werden nach dem gewählten Kräftemaßstabe gemessen und am besten in einer Tabelle zusammengestellt. Für vorliegenden Fall erhält man:

Stab	Zug kg	Druck kg	Stab	Zug kg	Druck kg
$O_1$		- 15270	$O_3$		- 15270
$O_2$		- 13920	$O_4$		- 13920
$U_1$	+ 13800		$U_3$	+ 13800	
$U_2$	+ 7590				
$V_1$		- 2670	$V_2$		- 2670
$D_1$	+ 6750		$D_2$	+ 6750	

Infolge der symmetrischen Anordnung entstehen, wie die Tabelle zeigt, natürlich in der rechten Bindehälfte dieselben Spannungen, wie in der linken.

Schiebt man die Kräftecke der Fig. 101 sämtliche so zusammen, daß 3. B.  $O_1$  im Kräfteck I mit  $O_1$  im Kräfteck II,  $U_1$  im Kräfteck III mit  $U_1$

im Kräfteck I,  $O_2$  im Kräfteck IV mit  $O_2$  im Kräfteck II zusammenfällt, und zeichnet auch die Spannkraften für die rechte Binderhälfte, so entsteht eine in sich geschlossene Figur, welche Cremonaplan genannt wird und infolge der Symmetrie der ganzen Anordnung gleichfalls symmetrisch wird (Fig. 102).

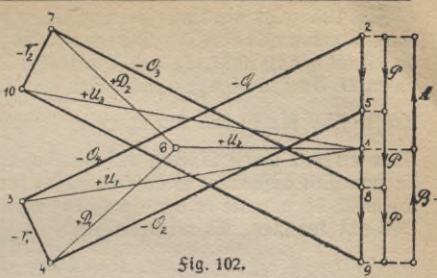
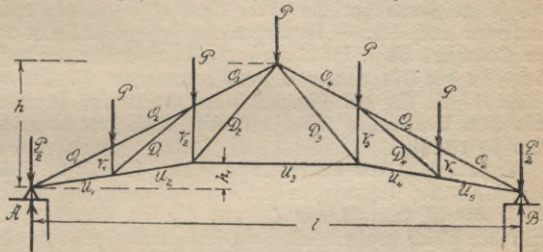


Fig. 102.

Man benutzt bei der Zeichnung eines solchen Planes also die eben gefundenen Spannkraften, ohne erstere nochmals zu zeichnen, wie dies in Fig. 101 geschehen war. In Fig. 102 sind die Druckspannkraften durch stärkere Linien von den Zugspannkraften unterschieden.



Einer weiteren Erklärung bedarf die Figur wohl nicht. Wegen ihrer Einfachheit und Übersichtlichkeit sind die Cremonapläne sehr beliebt und werden an Stelle des Verfahrens nach Fig. 101 allgemein angewendet.

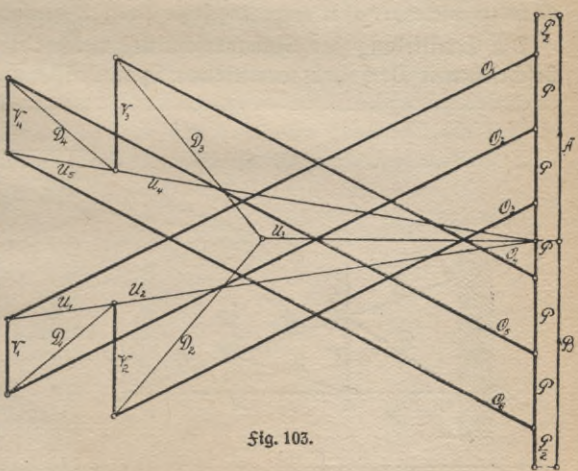


Fig. 103.





mögen, erfolgt mit Hilfe der bekannten Formeln für Zug- bzw. Druckfestigkeit, wie in der Festigkeitslehre ausführlich dargelegt ist. Doch hat man zu beachten, daß alle auf Druck beanspruchten Stäbe auch auf Zerknicken zu berechnen sind, weil ihr Querschnitt im Vergleich zu ihrer Länge sehr gering ist. Die Länge der Stäbe kann aus der Zeichnung entnommen werden. Man wählt für sämtliche Obergurtstäbe denselben Querschnitt, welcher dann natürlich nach der größten Druckkraft zu berechnen ist. Ebenso nimmt man für sämtliche aufsteigenden Untergurtstäbe gleichen Querschnitt, und ebenso für sämtliche Vertikalen, wie auch für sämtliche Diagonalen. Gehobene Untergurtstäbe (Fig. 101 und 103) werden besonders berechnet.<sup>1/2</sup>

## XI. Der Erddruck.

### 1. Allgemeines.

Werden lockere Erdmassen auf einer ebenen Fläche aufgeschüttet, so bilden ihre Seitenflächen, sobald sie zur Ruhe gelangt sind, mit der ebenen Fläche einen Winkel, welchen man den natürlichen Böschungswinkel nennt. Dieser ist natürlich für die verschiedenen Erdmassen auch verschieden groß und kann aus den Tabellen entnommen werden. Nach dem, was auf S. 83 über die Reibung kurz gesagt wurde, ist ohne weiteres einzusehen, daß der natürliche Böschungswinkel gleich dem Reibungswinkel ist.

Sollen die aufgeschütteten Erdmassen eine steilere Neigung erhalten, so müssen sie durch eine Wand gestützt werden, welche alsdann durch die Erde einen Druck erleidet, der Erddruck genannt wird und für die Stärke der Wand mitbestimmend ist. Ohne weiteres erkennt man, daß der Erddruck mit der Tiefe zunimmt.

Denkt man sich die Mauer von der Anschüttung etwas abgerückt, (Fig. 105), so wird nicht der ganze oberhalb der natürlichen Böschungslinie  $AC$  liegende Erdkörper  $ABC$  zum Abgleiten gelangen, son-

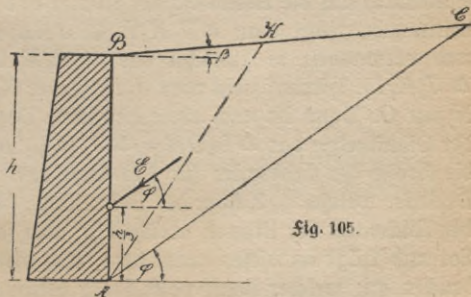


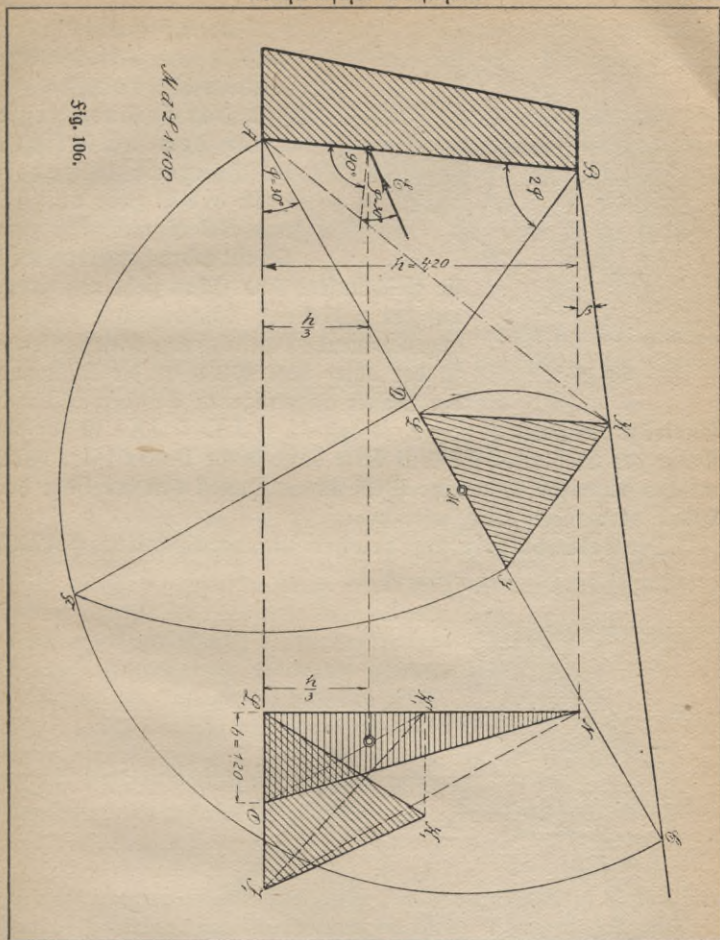
Fig. 105.

dern nur ein Teil desselben,  $ABK$ , während der übrige Teil infolge der Reibung festgehalten wird. Die durch die Linie  $AK$  bestimmte Fläche heißt Gleitfläche. Auch wirkt der Erddruck nicht senkrecht zur Wand, sondern er schließt mit der in seinem Angriffspunkt errichteten Senkrechten einen Winkel ein, welcher gleich dem Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk ist. Da die Rückwand der Mauer gewöhnlich rauh ist, macht man häufig — wie es auch hier weiterhin geschehen soll — die vereinfachende Annahme, daß der Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk gleich dem natürlichen Böschungswinkel ist (Fig. 105).

## 2. Die Ermittlung der Größe des Erddrucks.

Am einfachsten wird die Größe des Erddruckes auf zeichnerischem Wege nach dem Rebhannschen Verfahren ermittelt, welches in Fig. 106 u. f. dargestellt ist.

1. Das Gelände steige unter einem Winkel  $\beta$  von der Oberkante der Mauer an. Man bringt die natürliche Böschungslinie  $AC$  zum Schnitt mit der Geländelinie  $BC$ , trägt an die Rückwand der Mauer den  $\sphericalangle 2\varphi$  (bzw. die Summe aus natürlichem Böschungswinkel und Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk, wenn diese beiden Winkel verschieden angenommen werden) an und erhält so den Punkt  $D$  auf der natürlichen Böschungslinie. Nun schlägt man über  $AC$  einen Halbkreis, errichtet in  $D$  ein Lot, welches den Halbkreis im Punkte  $F$  schneidet, und überträgt  $F$  von  $A$  aus durch Zirkelschlag nach  $J$  auf der natürlichen Böschungslinie. Hierauf zieht man  $JK \parallel BD$ , schlägt den Bogen  $KL$  und verbindet  $K$  mit  $L$ . Das Dreieck  $JKL$  gibt die Größe des Erddruckprismas für 1 m Tiefe. Um die Verteilung des Erddruckes auf die Rückwand der Mauer und seinen Angriffspunkt zu bestimmen, trägt man  $\triangle J_1K_1L_1 \cong JKL$  auf, zieht  $K_1K'_1 \parallel J_1L_1$  und verwandelt so zunächst das  $\triangle J_1K_1L_1$  in das inhaltsgleiche  $\triangle J_1K'_1L_1$ . Hierauf zieht man  $J_1N$ , ferner  $K'_1O \parallel J_1N$  und verbindet  $N$  mit  $O$ . Dann ist nach einer einfachen Verwandlungsaufgabe aus der Planimetrie das  $\triangle L_1ON = \triangle J_1K_1L_1$  und stellt somit gleichfalls die Größe des Erddruckes für 1 m Tiefe dar. Den Schwerpunkt dieses Dreiecks, welcher  $\frac{1}{3}h$  über der Bodenfläche liegt, überträgt man nach der Rückwand der Mauer, errichtet in dem so gefundenen Punkte ein Lot und trägt an dieses unter dem  $\sphericalangle \varphi$  die Richtungslinie des Erddruckes an, welcher somit vollständig bestimmt ist. Da in Fig. 106



die Höhe der Mauer 4,20 m ist, und in dem Erddruckdreieck  $L_1 O N$  die Grundlinie  $L_1 O = 1,20$  m mißt, so ist bei einem Erdgewichte von 1600 kg/cbm der Erddruck für 1 m Tiefe:

$$E = \frac{1,20 \cdot 4,20}{2} \cdot 1600 = 4032 \text{ kg.}$$

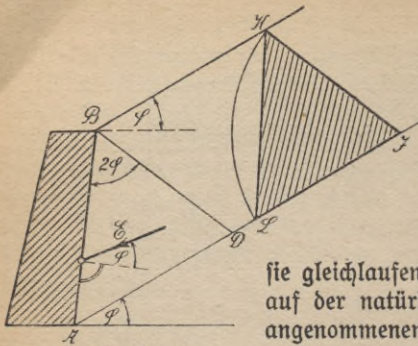


Fig. 107.

überträgt den Punkt  $K$  nach  $L$ , so daß  $JL = JK$ .  $\triangle JKL$  ist das die Größe des Erddruckes für 1 m Tiefe darstellende Dreieck (Fig. 107), welches nunmehr in gleicher Weise in ein Dreieck von der Höhe der Wand verwandelt wird, wie zuvor.

3. Die Geländelinie ist gebrochen. Man verwandelt das  $\triangle ABC$ ,

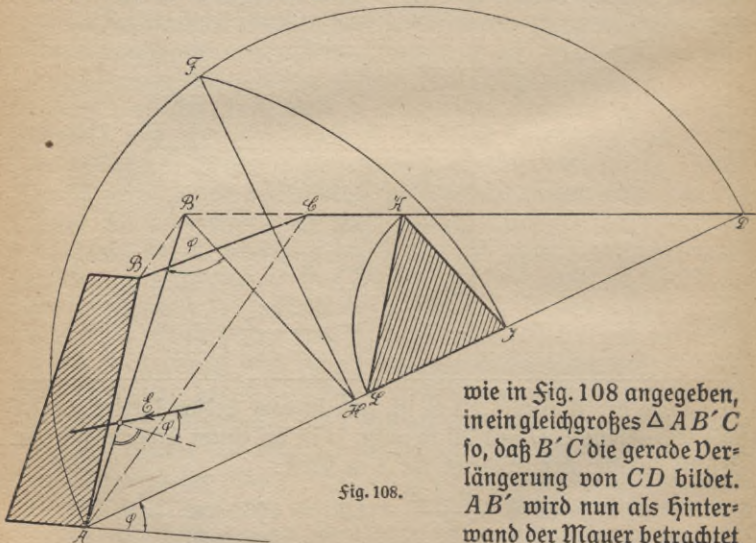


Fig. 108.

wie in Fig. 108 angegeben, in ein gleichgroßes  $\triangle AB'C$  so, daß  $B'C$  die gerade Verlängerung von  $CD$  bildet.  $AB'$  wird nun als Hinterwand der Mauer betrachtet

und hierfür das Erddruckdreieck  $JKL$  in bekannter Weise konstruiert. Die Verwandlung in ein Dreieck von der Höhe der neugebildeten Rückwand ist dieselbe wie zuvor.

4. Die obere Begrenzung der Mauer hat eine Auflast. Die Auflast oder Verkehrslast von  $q$  kg/qcm wird genau, wie wir schon bei den Gewölben sahen, in das Gewicht eines Erdkörpers umgewandelt und die Höhe dieses Erdkörpers, der ebenso viel wiegt, wie die Auflast, bestimmt. Ist  $\gamma_e$  das Gewicht von 1 cbm Erde in kg, so ist die gesuchte Höhe:

$$h_1 = \frac{q}{\gamma_e}.$$

Die weitere Untersuchung erfolgt für eine Höhe  $h + h_1$ , worin  $h$  die Höhe der Mauer bedeutet. Das Beispiel am Schlusse des nächsten Abschnittes zeigt eine derartige Aufgabe.

## XII. Der Wasserdruck.

### 1. Wasserdruck bei lotrechter Rückwand.

Aus der Naturlehre ist allgemein bekannt, daß der Druck auf die Seitenflächen eines Behälters gleich ist dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche die gedrückte Fläche zur Grundfläche und den Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel zur Höhe hat. Die Richtung des Wasserdruckes ist stets senkrecht zur gedrückten Fläche.

Ist  $x_0$  der Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Fläche (etwa der Rückwand einer Wassermauer),  $F$  deren Inhalt und  $\gamma_w$  die Gewichtseinheit des Wassers, so ist daher der Wasserdruck (Fig. 109):

$$W = \gamma_w \cdot F \cdot x_0.$$

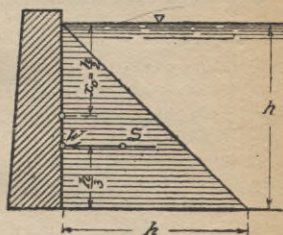


Fig. 109.

Setzt man eine Tiefe von 1,0 m der Untersuchung zu Grunde und ist die Rückwand der Mauer von der Höhe  $h$  senkrecht, so wird:

$$F = 1,0 \cdot h = h$$

$$x_0 = \frac{h}{2} \quad \text{folglich:} \quad W = \gamma \frac{h^2}{2}. \quad (33)$$

$\frac{h^2}{2}$  stellt den Inhalt eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks von der Grundlinie  $h$  und Höhe  $h$  dar, so daß sich also der Wasserdruck

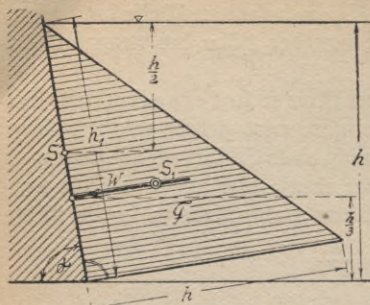


Fig. 110.

Da hier für 1 m Tiefe:

$$F = 1,0 \cdot h_1 = h_1 \quad \text{und:} \quad x_0 = \frac{h}{2},$$

so folgt:

$$W = \gamma_w \cdot \frac{h_1 \cdot h}{2}. \quad (34)$$

Auch hier läßt sich also der Wasserdruck durch ein rechtwinkliges  $\Delta$  vom Inhalte  $\frac{h_1 \cdot h}{2}$  darstellen, wie dies Fig. 110 zeigt.  $W$  greift wieder in  $\frac{h}{3}$  über dem Boden an, ist aber senkrecht zur Rückwand gerichtet.

Bezeichnet  $\alpha$  den Neigungswinkel der Rückwand zur Wagerechten, so ist:

$$\frac{h}{h_1} = \sin \alpha, \quad \text{also:} \quad h_1 = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Dann erhält man an Stelle von Gleichung (34):

$$W = \frac{\gamma_w \cdot h^2}{2 \sin \alpha}. \quad (35)$$

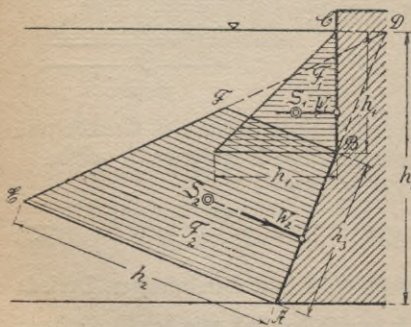


Fig. 111.

durch ein solches Dreieck darstellen läßt. Der Wasserdruck geht natürlich durch den Schwerpunkt dieses Dreiecks, greift also die Rückwand der Mauer in  $\frac{1}{3}$  ihrer Höhe über dem Boden an (Fig. 109).

## 2. Wasserdruck bei geneigter Rückwand.

Nach dem oben Gesagten wird (Fig. 110):

$$W = \gamma_w \cdot F \cdot x_0.$$

## 3. Wasserdruck bei gebrochener Rückwand.

Die Bestimmung des Wasserdruckes erfolgt hier für einen etwa vorhandenen geraden Teil (Fig. 111) nach dem unter 1. beschriebenen Verfahren. Für den geneigten Teil (häufig hat man auch eine mehrfach gebrochene Rückwand)

wird der Wasserdruck nach dem unter II. Gesagten bestimmt, in dem man die Neigung der Rückwand bis zum Schnittpunkt mit der Wasserspiegellinie verlängert. Von dem gewonnenen Dreieck  $ADE$  ist der obere Teil  $BDF$  in Abzug zu bringen. Das verbleibende Trapez  $ABFE$  gibt die Größe des Wasserdruckes  $W_2$  für 1 m Tiefe auf den geneigten Teil  $AB$  der Rückwand an. Der Wasserdruck  $W_2$  geht durch den Schwerpunkt des Trapezes und ist senkrecht zur geneigten Fläche  $AB$  gerichtet.

#### 4. Beispiel.

Die in Fig. 112 gegebene Wassermauer ist auf ihre Standsicherheit hin zu untersuchen. Die Mauer hat eine Auflast von 800 kg/qm aufzunehmen, 1 cbm Mauerwerk wiege 2000 kg, 1 cbm Erde 1600 kg.

Zur Bestimmung des Erddruckes wird die Mauer in zwei Abschnitte  $AB$  und  $AA'$  zerlegt. Das Gewicht der Auflast wird in Erdgewicht umgerechnet. Die Höhe, welche ein Erdkörper vom gleichen Gewichte wie die Auflast haben müßte, folgt aus:

$$h_1 = \frac{q}{\gamma_e} = \frac{800}{1600} = 0,50 \text{ m.}$$

Diese Höhe wird oberhalb der Mauer aufgetragen und die Linie  $CD$  als Geländelinie betrachtet. Sodann ermittelt man für den lotrechten Teil der Rückwand, und zwar von der Höhe  $AC$  (also nicht von der Höhe  $AB$ ) den Erddruck in bekannter Weise. Dabei ergibt sich das Druckdreieck  $JKL$ . Nunmehr ist der Erddruck für den unteren untergeschnittenen Teil der Mauer  $AA'$  zu bestimmen. Man verlängert zu diesem Zwecke  $AA'$  bis zum Schnittpunkt  $C'$  mit  $CD$  und betrachtet  $AC'$  als Rückwand, für welche das Druckdreieck  $J'K'L'$  in gleicher Weise wie sonst gefunden wird. Die beiden Erddruckdreiecke werden nun in Dreiecke von der Höhe des senkrechten Teiles  $AC$ , bzw. der geneigten Wand  $A'C'$  verwandelt, wie die Figur zeigt. Um den Druck auf den untergeschnittenen Teil der Wand zu erhalten, hat man den Druck auf den oberen senkrechten Teil der Wand von dem ganzen, durch das größere Dreieck veranschaulichten Druck abzuziehen. Demnach stellt das Trapez  $J'MNJ$  den Erddruck auf den untergeschnittenen Teil  $A'A$  dar. Der Schwerpunkt des Trapezes wird nach  $A'A$  gelotet, in den so erhaltenen Angriffspunkt eine Senkrechte auf  $A'A$  errichtet und an diese die Richtung des Erddruckes  $E_2$  unter dem Reibungswinkel (hier =  $35^\circ$ ) angetragen.

Da vor der Auflast keine Mauer vorhanden ist, so ist das kleine  $\triangle OPQ$  von dem den oberen Erddruck  $E_1$  darstellenden Dreieck  $JK'Q$  in Abzug zu bringen, so daß  $E_1$  durch das Trapez  $JK'PO$  veranschaulicht wird. Die Bestimmung des Angriffspunktes mit Hilfe des Schwerpunktes dieses Trapezes und die Festlegung der Richtung des Erddruckes erfolgen in gleicher Weise wie eben beschrieben.

Der Mauerkörper selbst wird in zwei, durch den Punkt  $A$  bestimmte Teile zerlegt, so daß man die in den Schwerpunkten der beiden sich ergebenden Trapeze wirkenden Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  erhält.





Der Wasserdruck  $W$  wird in der unter II. beschriebenen Weise ermittelt.

Mit Hilfe der gegebenen, bzw. durch Zeichnung gefundenen Maße erhält man sodann:

$$G_1 = \frac{1,60 + 2,50}{2} \cdot 4,80 \cdot 2000 = 19680 \text{ kg}$$

$$G_2 = \frac{2,71 + 3,20}{2} \cdot 2,46 \cdot 2000 = 14540 \text{ kg}$$

$$E_1 = \frac{1,31 + 0,15}{2} \cdot 4,80 \cdot 1600 = 5610 \text{ kg}$$

$$E_2 = \frac{1,47 + 0,91}{2} \cdot 3,15 \cdot 1600 = 6000 \text{ kg}$$

$$W = \frac{3,50 \cdot 3,56}{2} \cdot 1000 = 6230 \text{ kg}$$

Nachdem nunmehr die äußeren Kräfte ermittelt sind, kann zu deren Zusammensetzung geschritten werden. Diese ist hier derart vorgenommen, daß  $E_1$  und  $G_1$  zu  $R_1$ ,  $R_1$  und  $G_2$  zu  $R_2$ ,  $R_2$  und  $E_2$  zu  $R_3$  und  $R_3$  und  $W$  zu  $R_4$  vereinigt wurde.

Die Mittelkraft sämtlicher Kräfte,  $R_4$ , greift im Abstände  $e = 35$  cm vom Mittelpunkt der 2,46 m langen Bodenfuge  $A'F$  an. Da:

$$\frac{b}{6} = \frac{2,46}{6} = 0,41 \text{ m,}$$

so liegt die Mittelkraft noch im Kerne der Fuge; die Mauer ist also gegen Kanten gesichert. Die senkrechte Seitenkraft von  $R_4$ , welche man durch Zeichnung findet:

$$V_4 = 41200 \text{ kg,}$$

schließt mit  $R_4$  einen  $\sphericalangle 5^\circ 40'$  ein, welcher auch unterhalb der zulässigen Grenze liegt, so daß ein Gleiten der Mauer ausgeschlossen ist.

Die Bodenpressungen ergeben sich nach der in der Festigkeitslehre hergeleiteten Formel:

$$k = \frac{V}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6e}{b}\right).$$

Da ein Mauerstreifen von 1,0 m Tiefe untersucht wurde, so wird:

$$k = \frac{41200}{246 \cdot 100} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot 35}{246}\right) = 1,67 \cdot (1 \pm 0,85)$$

$$\text{also: } k_{\max} = 1,67 \cdot 1,85 = 3,1 \text{ kg/qcm}$$

$$k_{\min} = 1,67 \cdot 0,15 = 0,25 \text{ kg/qcm.}$$

Läßt man eine Bodenpressung von 3 bis 4 kg qcm zu, so überschreitet  $k_{\max}$  die zulässige Grenze nicht. Bei geringerer zulässiger Bodenbeanspruchung müßte jedoch die Fuge verbreitert werden.

Die Mauer muß aber auch dann standsicher sein, wenn der Wasserdruck nicht wirkt (z. B. bei Abdämmung infolge Ausbesserungsarbeiten). In diesem Falle kommt für die Untersuchung der untersten Fuge die Mittelkraft  $R_2$  und ihre Seitenkraft  $V_3$  in Betracht. Endlich muß die Mauer auch ohne Wasserdruck und Erddruck standsicher sein (vor der Hinterfüllung). Dann hat man für die Untersuchung der Fuge  $A'F$  die Mittelkraft  $G_{1-2}$  aus  $G_1$  und  $G_2$  und deren lotrechte Seitenkraft  $V_g$  zu benutzen. Die Untersuchung erfolgt in gleicher Weise, wie eben beschrieben.

**R. Schröder's Gewerbebuchhandlung**


**1. Schlesische Altbücherei**

Altbüsserstraße 32

am Ritterplatz.


... Darlegung  
Berechnungen besonders konstruierte Turbine  
ffliche Dienste, setzt aber in der Handhabung  
ihn bleibt der Wert des Buches bestehen.

ste unverändert, da es dem Verfasser durch  
önnt gewesen ist, auf den Inhalt Einfluß zu  
wünschenswerten Verbesserungen zu benutzen



### is [gekürzt]:

pezielle Berechnungen bei Wasserkraftprojek-  
erung — Bemerkungen zur Wasserkraftpro-  
ktierung — Verwendung des Turbinenrechen-  
hiebers zur Projektierung von Zentrifugal-  
mpen — Bestimmung von Wellenstärken mit  
s des Turbinenrechenschiebers — Beispiel-  
nmlung



Ferner erschien von Reg.-Baumeister A. Schau, Gewerbeschulrat und Direktor der staatlichen Baugewerkschule in Essen:

## Leitfaden der Statik

**Teil I: Grundgesetze. Anwend. d. stat. Gesetze a. Trägerordn. Einf. Stabkonstruktionen u. ebene Fachwerkträger. 2. Aufl. Mit 82 Fig. Steif geh. M. 4.—**

Umfaßt die Grundgesetze der Statik mit ihren Anwendungen auf Trägeranordnungen, vor allem auf Träger auf zwei Stützen, Berechnung einfacher Selbstkonstruktionen und einfacher ebener Fachwerke.

**Teil II: Festigkeitslehre. Zug- und Druckfestigkeit, Schubfestigkeit, Biegezugfestigkeit u. Knickfestigkeit. 2. Aufl. Mit 208 Fig. Steif geh. M. 5.60**

Die im I. Teil gegebenen Grundgesetze der Statik werden an einer großen Zahl angewandter Aufgaben aus der Praxis erweitert. Die Bestimmungen der Abmessung der einzelnen Bauteile werden bis ins einzelne eingehend dargelegt. In einem Anhang sind noch einige Aufgaben gelöst, deren Kenntnis für den Praktiker von großer Bedeutung ist.

**Teil IIIa: Für die Hochbauabteilungen. Mit 238 Abb. i. T. Kart. M. 6.80**

Im Teil IIIa für Hochbau werden die Ergänzungen des Teiles II über Festigkeitslehre vorgenommen, wobei vor allem die Biegezuglehre und die zusammengesetzte Festigkeit in allen ihren Unterabteilungen in Frage kommen. Zahlreiche Anwendungsbeispiele machen das Buch besonders wertvoll für den Praktiker und den Lernenden.

**Teil IVa: Die Statik der Eisenbetonbauten. Mit 113 Abb. im Text. Kart. M. 8.80**

Im Teil IVa wird die Eisenbetonstatik in ihren Anwendungen für den Hochbau eingehend behandelt, zahlreiche Beispiele zeigen den Gebrauch für die Praxis; die amtlichen Bestimmungen, sowie die dazu gegebenen Musterbeispiele werden eingehend besprochen und ihre Benutzung für Entwurf und Prüfung gezeigt.

Teil III b und IV b für Tiefbauabteilungen sind in Vorbereitung.

**Festigkeitslehre. 2. Aufl. M. Fig. (ANuG Bd. 829.) Kart. M. 2.80, geb. M. 3.50**

Das Ziel des vorliegenden Bändchens ist, in möglichst kurzer und klarer Weise die verschiedenartigsten Berechnungsweisen für die Abmessungsbestimmungen von Bauteilen dem Verständnis der Leser nahezubringen. Die zahlreichen Beispiele aus dem Hoch- u. Tiefbau sind durch eine Reihe von Beispielen aus dem Gebiete des Maschinenbaues ergänzt worden, so daß das Bändchen ein abgeschlossenes Ganzes darstellt.

**Der Brückenbau. I. Teil: Allgem. Durchlässe u. mass. Brücken. Unterhaltung. Überschlägl. Kostenberechn. 2. Aufl. Mit 324 Abb. Kart. M. 4.20**  
II. Teil: Die eisernen Brücken. Allgemeines. Bauliche Anordnung und Ausbildung der Eisenbahnbrücken und Fußgängerbrücken. Unterhaltung. Kostenberechnung eiserner Überbauten. Mit 404 Abbildungen und 6 Tafeln. Kart. . . . . M. 4.20

**Der Eisenbahnbau. I. Teil: Allgem. Grundl. Bahngestaltung. Grundz. f. d. Anlage d. Bahnen. 3., verb. Aufl. Mit 180 Abb. Kart. M. 3.80**  
II. Teil: Stationsanlagen und Sicherungswesen. 3., verb. Auflage. Mit 297 Abbildungen im Text und auf 1 Tafel. Kart. . . . . M. 5.80

**Mechanik. Von Dr. G. Hamel, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Bd. I: Grundbegriffe der Mechanik. Bd. II: Mechanik der festen Körper. Bd. III: Mechanik der flüssigen und luftförmigen Körper. (ANuG Bd. 684/86.) Kart. je M. 2.80, geb. je M. 3.50**

Das Buch kann allen denen empfohlen werden, die ohne höhere mathematische Kenntnisse einen allgemeinen Überblick über die Mechanik zu gewinnen wünschen, als auch denen, die ein umfassendes Studium beginnen wollen. Das erste Bändchen enthält die sogenannte Punktmechanik, im zweiten werden die festen und insbesondere die starren Körper und im dritten Wasser und Luft behandelt.

Aufsämtl. Pr. Teuerungszuschl. d. Verl. (ab April 1920 100%, Abänd. verb.) u. teilw. d. Buchh.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

**Aufgabensammlung aus der technischen Mechanik**  
für den Schul- und Selbstunterricht. Von Prof. N. Schmitt in Dortmund.  
In 3 Bdn. Mit zahlr. Fig. (ANuG Bd. 557/59.) Kart. je M. 2.80, geb. M. 3.50  
Bd. I.: Bewegungslehre, Statik. 2. Aufl. — Bd. II.: Dynamik. 140 Aufgaben.  
und Lösungen. — Bd. III.: Festigkeitslehre.

„Eine ganz vorzügliche Sammlung von typischen Aufgaben samt ausgeführten  
Lösungen, welche, einer auf Arbeitsfreudigkeit der Schüler glücklich abzielenden  
Unterrichtstätigkeit entsprossen, selbst den bereits erwerbstätigen Techniker noch  
zu fesseln und zu fördern vermögen.“ (Fachschule.)

**Einführung in die techn. Wärmelehre. (Thermodynamik.)**  
Von Geh. Bergrat R. Vater, weil. Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Berlin.  
2., erw. Aufl. Bearb. v. Dr. F. Schmidt, Privatdoz. a. d. Techn. Hochsch.  
zu Berlin. Mit 46 Abb. [123 S.] 8. 1920. (ANuG Bd. 516.) Kart. M. 2.80, geb. M. 3.50

Mit großer Klarheit und Anschaulichkeit behandelt der Verfasser in diesem  
Bändchen unter Beschränkung auf die wichtigsten Regeln und Gesetze, deren  
praktische Verwendbarkeit grundsätzlich und überall durch Beispiele nachgewiesen  
wird, die Grundlagen der mechanischen Wärmetheorie.

**Praktische Thermodynamik. Aufg. u. Beisp. z. techn. Wärmel.**  
Von Geh. Bergrat R. Vater, weil. Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Berlin. Mit  
40 Abb. u. 3 Taf. [V u. 96 S.] 8. 1918. (ANuG Bd. 596.) Kart. M. 2.80, geb. M. 3.50

In Beispielen und Aufgaben, die der Praxis entnommen sind, zeigt das Bänd-  
chen die mannigfache Anwendung der Thermodynamik auf allen Gebieten der Technik.  
Es schließt sich in seinem Aufbau an ANuG Bd. 516 (Techn. Wärmelehre) des gleichen  
Verfassers an, in dem eine grundlegende Darstellung der mechanischen Wärme-  
theorie und Ableitung ihrer Formeln gegeben ist.

**Mechanik.** Redigiert von F. Klein in Göttingen und C. H. Müller  
in Hannover. In 2 Teilen (4 Teilbänden) und 1 Registerband [dieser  
in Vorbereitung]. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften  
mit Einschluß ihrer Anwendungen. 4. Band.)

1. Teil, Abteilg. 1 (1. Teilbd.) 1901/8 geh. M. 20.40, in Halbfrz. geb. M. 29.40. — Abteilg. 2  
(2. Teilband) Heft 1 1904 geh. M. 4.40, Heft 2 1911 geh. M. 6.40, Heft 3 1914 M. 4.60
2. Teil, Abteilung 1 (3. Teilband) 1907/8 geh. M. 17.60, in Halbfranz geb. M. 26.60. —  
Abteilung 2 (4. Teilband) 1907/14 geh. M. 26.60, in Halbfranz geb. . . . M. 35.60

**Vorlesungen über technische Mechanik.** Von Geh. Hofrat  
Dr. A. Föppl, Professor an der Technischen Hochschule München.

- I. Bd.: Einführung in die Mechanik. 6. Aufl. Mit 104 Fig. [XVI u. 414 S.] 1920. Geh.  
M. 16.—, geb. . . . M. 18.—
- II. Bd.: Graphische Statik. 5. Auflage. Mit 209 Abb. [XII u. 404 S.] 1920. Geh.  
M. 16.—, geb. . . . M. 18.—
- III. Bd.: Festigkeitslehre. 8. Auflage. Mit 114 Abb. [XVIII u. 446 S.] 1920. Geh.  
M. 16.—, geb. . . . M. 18.—
- IV. Bd.: Dynamik. 5. Aufl. Mit 86 Fig. [X u. 438 S.] 1919. Geh. M. 16.—, geb. M. 18.—
- V. Bd.: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. 3. unver. Auflage.  
Mit 44 Fig. [XII u. 391 S.] 1920. Geh. M. 16.—, geb. . . . M. 18.—
- VI. Bd.: Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. 3. unv. Abdr. Mit 30 Abb.  
im Text. [XII u. 484 S.] 1920. Geh. M. 22.—, geb. . . . M. 24.—

Aufsämtl. Pr. Teuerungszuschl. d. Verl. (ab April 1920 100%, Abänd. v. orb.) u. teilw. d. Buchh.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

# Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher  
Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band ist  
einzeln käuflich



Kartoniert und  
gebunden erhältlich

Verlag B. G. Teubner

in Leipzig und Berlin

Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet

## I. Religion, Philosophie und Psychologie.

**Anthroposophie** s. Theosophie  
**Ästhetik.** Von Prof. Dr. R. Hamann. 2. Aufl. (Bd. 345.)  
**Astrologie** siehe Stern Glaube.  
**Aufgaben u. Ziele d. Menschenlebens.** Von Prof. Dr. J. Unold. 5. verb. A. (Bd. 12.)  
**Vergpredigt.** Die. Von Geh. Kirchenrat Prof. D. Dr. S. Weincl. (Bd. 710.)  
**Bergson.** Henri, der Philosoph moderner Religi. Von Barrer Dr. E. Ott. (Bd. 480.)  
**Berlefen** siehe Lode, Berlefen, Sume.  
**Buddha.** Leben u. Lehre d. V. B. Prof. Dr. R. Pischel. 3. A., durchg. v. Prof. Dr. S. Lüders. Mit 1 Taf. (Bd. 109.)  
**Christentum.** Das im Kampf u. Ausgleich m. d. griech.-röm. Welt. Studien u. Charakterist. a. f. Werbezeit. V. Prof. Dr. J. Geissen. 3. umg. Aufl. (Bd. 54.)  
— Christentum und Weltgeschichte seit der Reformation. Von Prof. D. Dr. R. Seil. 2 Bde. (Bd. 297, 298.)  
— siehe Jesus, Kirche, Mystik im Christent.  
**Ethik.** Grundzüge d. E. M. bei Berücksicht. d. päd. Probl. 2. Aufl. B. C. Wentzsch. (Bd. 397.)  
— f. a. Aufg. u. Ziele, Sernaethik, Sittl. Lebensanschauungen, Willensfreiheit.  
**Freimaurerei.** Die. Eine Einführung in ihre Anschauungswelt u. ihre Geschichte. Von Geh. Rat Dr. L. Keller. 2. Aufl. von Geh. Archivrat Dr. G. Schuster. (463.)  
**Glauben und Wissen.** Von Privatdoz. Studienrat Lic. W. Bruhn. (Bd. 730.)  
**Griechische Religion** siehe Religion.  
**Handschriftenbeurteilung.** Die. Eine Einführung in die Psychol. d. Handschrift. Von Prof. Dr. G. Schneidemühl. 2., durchg. u. erw. Aufl. Mit 51 Handschriftennachb. i. L. u. 1 Taf. (Bd. 514.)  
**Heidentum** siehe Mystik.  
**Herbart.** Johann Friedrich H.'s Leben und Lehre mit bes. Berücksichtigung seiner Erziehungs- und Bildungslehre. Von Bezirkschulinspektor Dr. F. H. Frisch. (Bd. 164.)  
**Sume** siehe Lode, Berlefen, Sume.

**Hypnotismus und Suggestion.** Von Dr. C. Trömmner. 3. Aufl. (Bd. 199.)  
**Jesuiten.** Die. Eine histor. Skizze. V. Prof. Dr. S. Boehmer. 4. verb. A. (Bd. 49.)  
**Jesus.** Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu. Von Kirchenrat Barrer D. Dr. P. Mehlhorn. 3. umg. Aufl. (Bd. 137.)  
— Die Gleichnisse Jesu. zugleich Anleitung z. quellenmäß. Verständnis d. Evangelien. Von Geh. Kirchenrat Prof. D. Dr. S. Weincl. 4. Aufl. (Bd. 46.)  
— f. auch Bergpredigt.  
**Judaistische Religion** siehe Religion.  
**Juden.** Geschichte der. J. f. Abt. IV.  
**Kant.** Immanuel. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Kälpe. 5. Aufl. hreg. v. Prof. Dr. A. Messer. Mit 1 Bildnis Kants. (Bd. 146.)  
**Kirche.** Geschichte der christlichen Kirche. Von Prof. Dr. S. Febr. v. Soden: I. Die Entstehung der christlichen Kirche. (Bd. 690.) II. Vom Urchristentum zum Katholizismus. (Bd. 691.)  
— siehe auch Staat und Kirche.  
**Kriminalpsychologie** s. Psychologie d. Verbrechens, Handchriftenbeurteilung.  
**Leben.** Das A. nach dem Tode i. Glauben der Menschheit. Von Prof. D. Dr. C. Clemen. (Bd. 544.)  
**Lebensanschauungen** siehe Sittliche A.  
**Leib und Seele** in ihrem Verhältnis zueinander. Von Dr. phil. et med. G. Sommer. (Bd. 702.)  
**Lode.** Berlefen, Sume. Die großen engl. Philos. Von Studienrat Dr. P. Thormeyer. (Bd. 481.)  
**Logik.** Grundriss d. L. Von Dr. R. J. Grau. 2. durchg. u. verbänd. A. (637.)  
**Luther.** Martin L. u. d. deutsche Reformation. Von Prof. Dr. W. Köhler. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis Luthers. (Bd. 515.)  
— f. auch Von L. zu Bismard Abt. IV.  
**Medizin d. Geisteslebens.** Die. V. Geh. Medizinalrat Direktor Prof. Dr. R. Berworn. 4. A. M. 19 Abb. (Bd. 200.)  
**Mission.** Die evangelische. Von Pastor S. Baudert. (Bd. 406.)

- Mythol.** M. I. Heidentum u. Christentum. V. Prof. Dr. E. v. Lehmann. 2. Aufl. Übers. v. A. Grundtvig. (Bd. 217.)  
— f. auch Okkultismus, Theosophie.
- Mythologie.** Germanische. Von Prof. Dr. F. von Hegelein. 3. Aufl. (Bd. 95.)
- Naturphilosophie.** Von Prof. Dr. F. M. Werwien. 2. Aufl. (Bd. 491.)
- Okkultismus, Spiritismus u. unterben. Seelenzust.** V. Dr. H. Baerwald. (560.)
- Palästina und seine Geschichte.** Von Prof. Dr. S. Frh. v. Soden. 1. d. Aufl. Mit 1 Plan von Jerusalem und 3 Ansichten des heiligen Landes. (Bd. 6.)  
— U. u. f. Kultur in 5 Jahrtausenden. Nach d. neuest. Ausgrabn. u. Forschgn. dargestellt. von Prof. Dr. B. Thomsen. 2., neubearb. Aufl. Nr. 37 Abb. (260.)
- Paulus, Der Apostel, u. sein Werk.** Von Prof. Dr. E. Vischer. 2. U. (Bd. 309.)
- Philosophie, Die. Einführ. i. d. Wissensch., ihr Wesen u. ihre Probleme.** Von Realgymnasialdir. S. Richter. 3. U. (186.)  
— Einführung in die Ph. Von Prof. Dr. R. Richter. 5. Aufl. von Privat-Doz. Dr. R. Brahn. (Bd. 155.)  
— Geschichte der Philosophie in 7 Bden. I. Antike Philosophie bis Aristoteles. Von Studientat. Dr. E. Hoffmann. II. 1. Antike Phil. bis Poseidonios. Von Stud. Dr. E. Hoffmann. 2. Hellenistisch-christliche Phil. Von Privatdoz. Dr. M. Heibegger. III. Mittelalter u. Renaissance bis zur mod. Naturwiss. V. Privatdoz. Dr. M. Heibegger. IV. Von Descartes bis Leibniz. Von Prof. Dr. Kronez. V. Englischer Empirismus. Aufklärung. Kant. Von Privatdoz. Dr. S. Mard. VI/VII. Die Philosophie von Kant an. Von Prof. Dr. F. Cohn. (Bd. 741/47.)  
— Führende Denker. Geschichtl. Einleit. in die Philosophie. Von Prof. Dr. F. Cohn. 4. Aufl. Mit 6 Bildn. (176.)  
— Die Phil. d. Gegenwart in Deutschland. V. Prof. Dr. D. Kälpe. 7. verb. U. (41.)  
— f. auch Religion: Religionsphilos.
- Portik.** Von Dr. R. Müller-Friedenfelds. 2. überarb. u. erw. Aufl. (Bd. 460.)
- Psychologie.** Einführ. i. d. Ph. V. Prof. Dr. E. von Ullmer. 2. Aufl. M. 4 Abb. (492.)  
— Psychologie d. Kindes. V. Prof. Dr. R. Gaupp. 4. Aufl. M. 17 Abb. (213/214.)  
— Psychologie d. Verbrechers. (Kriminalpsychol.) V. Strafanstaltsdir. Dr. med. B. Bollig. 2. Aufl. M. 5 Diagr. (Bd. 248.)  
— Einführung in die experiment. Psychologie. Von Prof. Dr. R. Brauns-hausen. 2. Aufl. M. 17 Abb. i. T. (484.)  
— Angewandte Psych. Method. u. Ergebn. V. Dr. phil. et med. E. Stern. (Bd. 771.)  
— Die krankhaften Erscheinungen des Seelenlebens. Allg. Psychopathologie. Von Dr. phil. et med. E. Stern. (764.)  
— f. auch Handschriftenbeurteilg., Hypnotismus u. Sugg., Mechanik d. Geistesleb., Poetik, Seele d. Menschen, Veranlag. u. Bererb., Willensfreiheit; Pädag. Abt. II.
- Reformation** siehe Luther.
- Religion.** Einführung i. d. vergl. R.-Geschichte. Von Prof. Dr. Dr. R. Beth. (Bd. 658.)  
— Die nichtchristlichen Kultureligionen in ihrem gegenw. Zustand. Von Prof. Dr. Dr. C. Clemen. 2 Bde. I. Die japanischen und chinesischen Nationalreligionen. Der Jainismus und Buddhismus. II. Der Hinduismus, Barjismus und Islam. (Bd. 533/34.)  
— Die Religion der Griechen. Von Prof. Dr. E. Samter. Mit Bilderanhang. (Bd. 457.)  
— Die Grundzüge der israelitischen Religionsgesch. V. Prof. Dr. Fr. Giesebrecht. 3. Aufl. V. Geh. Konsistorialrat Prof. D. A. Bertholet. (Bd. 52.)  
— Religion u. Naturwissensch. in Kampf u. Fried. E. geschichtl. Rückbl. V. Biarr. Dr. A. Pfannkuche. 2. U. (Bd. 141.)  
— f. auch Bergson, Buddha, Christentum. Leben nach dem Tode, Luther.  
— Religionsphilosophie, Einführung in die R. Von Konsistorialr. Lic. Dr. B. Kalweit. 2. Aufl. (Bd. 225.)  
Religiöse Erziehung siehe Abt. II.
- Rousseau.** Von Prof. Dr. F. Senlel. 3. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 180.)
- Schopenhauer, Seine Persönlichk., f. Lehre, f. Bedeutung.** V. Realgymnasialdir. S. Richter. 4. Aufl. Mit dem Bildn. Schopenhauers. (Bd. 81.)
- Seele des Menschen, Die.** Von Geh. Rat Prof. Dr. F. Rehmke. 5. Aufl. (Bd. 36.)
- Seruaethik.** Von Prof. Dr. S. E. Timmerding. (Bd. 592.)
- Sinne d. Menschen, D. Sinnesorgane und Sinnesempfind.** V. Hofr. Prof. Dr. J. R. Kreibitz. 3. verb. U. M. 30 Abb. (27.)
- Sittl. Lebensanschauungen d. Gegenwart.** V. Geh. Kirchenr. Prof. Dr. D. R. Kien. 3. U. V. Prof. Dr. Dr. D. Stephan. (177.)  
— f. a. Ethik, Seruaethik.
- Spiritismus** siehe Okkultismus.
- Staat und Kirche** in ihrem gegenseitigen Verhältnis seit der Reformation. Von Biarr. Dr. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)
- Sternglaube und Sternbedeutung.** Die Geschichte u. d. Bes. d. Astrolog. Ant. Mimm. v. Geh. Rat Prof. Dr. R. Bezold dargestellt. V. Geh. Hofr. Prof. Dr. Fr. Boll. 2. Aufl. M. 1 Sternf. u. 20 Abb. (Bd. 638.)
- Suggestion** f. Hypnotismus.
- Testament, Das Alte.** Seine Gesch. u. Bedeutung. V. Prof. Dr. B. Thomsen. (669.)
- Neues.** Der Text d. R. T. nach f. geschichtl. Entwickl. Von Prof. Bis. A. Bött. 2. Aufl. Mit 8 Taf. (Bd. 134.)
- Theologie.** Einführung in die Theologie. Von Pastor M. Cornils. (Bd. 347.)
- Theosophie u. Anthroposophie.** V. Privatdoz. Studientat. Lic. B. Brahn. (775.)
- Urkristentum** siehe Christentum.
- Veranlag. u. Bererb. Geistige.** V. Dr. phil. et med. G. Sommer. 2. Aufl. (512.)
- Weltanschauung, Griechische.** Von Prof. Dr. M. Wunbt. 2. Aufl. (Bd. 329.)



**Weltanschauungen, D., d. groß. Philosophen der Neuzeit.** Von Prof. Dr. E. Husserl. 6. Aufl., hrsg. v. Geh. Dozent Prof. Dr. R. Falkenberg. (Bd. 56.)  
**Weltentstehung, Entsteh. d. W. u. d. Erde nach Sage u. Wissenschaft.** Von Prof. Dr. M. B. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)

**Weltuntergang in Sage und Wissenschaft.** Von Prof. Dr. S. Oppenheim und Prof. Dr. R. Sieglar. (Bd. 720.)  
**Willensfreiheit. Das Problem der W.** Von Prof. Dr. G. F. Lipps. 2. Aufl. (Bd. 383.)  
 — f. auch Ethik, Mechanik d. Geisteslebens, Psychologie.

## II. Pädagogik und Bildungswesen.

**Berufswahl, Begabung u. Arbeitsleistung i. ihren gegenseit. Beziehungen.** W. W. F. Nuttmann. 2. A. M. 7 Abb. (Bd. 522.)  
**Bildungswesen, D. deutsche, i. f. geschichtl. Entwicklung.** Prof. Dr. Fr. Paulsen. 4. Aufl. M. Bildn. P's. (Bd. 99/100.)  
 — f. auch Volkswbildungswesen.  
**Erziehung, G. zur Arbeit.** Von Prof. Dr. E. v. Lehmann. (Bd. 459.)  
 — Deutsche G. in Haus u. Schule. Von F. Tews. 3. Aufl. (Bd. 159.)  
 — f. a. Großstadterz., Regio. Erziehung.  
**Fortbildungsschulwesen, Das deutsche.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. F. Schilling. (Bd. 256.)  
**Fröbel, Friedrich.** Von Dr. Joh. Prauser. 2. verb. Aufl. M. 2 Abb. (Bd. 82.)  
**Großstadterziehung. Die Großstadt als Jugendbildungsstätte.** F. Tews. 2. Aufl. (327.)  
**Herbart, Johann Friedrich.** S. Leben und Lehre mit besond. Berücksichtigung seiner Erziehung- und Bildungslehre. Von Bezirkschulinspektor Dr. F. H. Frisch. (Bd. 164.)  
**Hochschulen f. Techn. Hochschulen u. Univ. Jugendpflege.** Von Fortbildungsschullehrer B. Wiemann. (Bd. 434.)  
 Leibübungen siehe Abt. V.  
**Mittelschule f. Volks- u. Mittelschule.**  
**Pädagogik, Allgemeine.** Von Prof. Dr. Th. Biegler. 4. Aufl. (Bd. 33.)  
 — Experimentelle P. mit bes. Rücksicht auf die Erzieh. durch die Tat. Von Dr. W. A. Zah. 3. verb. A. M. 6 Abb. (Bd. 224.)  
 — siehe Erziehung, Psychologie, Abt. I.

**Bestalozzi. Leben u. Ideen.** W. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. B. Ratorp. 3. Aufl. (250.)  
**Religiöse Erziehung in Haus u. Schule.** W. Prof. Dr. F. Nebergall. (599.)  
**Rouffrau.** Von Prof. Dr. F. Hensele. 3. Aufl. Mit 1 Bildniz. (Bd. 180.)  
**Schule** siehe Fortbildungs-, Techn. Hoch-, Volksschule, Universität.  
**Schulhygiene.** Von Reg.-Rat Prof. Dr. L. Bürgerstein. 4. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 96.)  
**Schulkämpfe d. Gegenw.** Von F. Tews. 2. Aufl. (Bd. 111.)  
**Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909.** Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)  
**Südententum, Geschichte des deutschen St.** Von Dr. W. Bruchmüller. (Bd. 477.)  
**Techn. Hochschulen in Nordamerika.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. S. Müller. M. zahlr. Abb., Karte u. Lagepl. (190.)  
**Universitäten, über U. u. Universitätsstud.** W. Prof. Dr. Th. Biegler. Mit 1 Bildn. Humboldts. (Bd. 411.)  
**Unterrichtswesen, Das deutsche, der Gegenwart.** Von Geh. Studienrat Oberrealschuldir. Dr. R. Knabe. (Bd. 299.)  
**Volkswbildungswesen, B. Stadttbl.** Prof. Dr. G. Fris. 2. Aufl. M. 12 Abb. (Bd. 266.)  
**Volks- und Mittelschule, Die preussische, Entwicklung und Ziele.** Von Geh. Reg.-u. Schulrat Dr. A. Sachse. (Bd. 432.)  
**Zeichenkunst, Der Weg z. f. Ein Büchl. f. theor. u. prakt. Selbstb. B. Dir. Dr. E. Weber. 3. A. M. 84 Abb. u. 1 Farb. (430.)**

## III. Sprache, Literatur, Bildende Kunst und Musik.

**Alt-nordische Literaturgesch. f. Literatur.**  
**Architektur** siehe Baukunst und Renaissancearchitektur.  
**Ästhetik.** Von Prof. Dr. R. Hamann. 2. Aufl. (Bd. 315.)  
**Baukunst, Deutsche B.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. 4 Bd.  
 I. Deutsche Baukunst im Mittelalter. B. d. Anf. b. z. Ausgang d. roman. Baukunst. 4. Aufl. Mit 35 Abb. (Bd. 8.) II. Gotik u. „Spätgotik“. 4. Aufl. Mit 67 Abb. (Bd. 9.) III. Deutsche Baukunst in d. Renaissance u. d. Barockzeit b. z. Ausg. d. 18. Jahrh. 2. Aufl. Mit 63 Abb. i. Text. (Bd. 326.) IV. Deutsche B. im 19. Jahrh. u. i. d. Gegenw. 2. Aufl. M. 40 Abb. (781.)  
 — siehe auch Renaissancearchitektur.  
**Brethoven** siehe Haydn.  
**Bildende Kunst, Bau und Leben der b. R.** Von Dir. Prof. Dr. Th. Volbehr. 2. Aufl. Mit 44 Abb. (Bd. 68.)

**Bildende Kunst f. a. Bauk., Griech. R., Impression., Kunst, Maser, Maser, Sille.**  
**Björnson** siehe Ibsen.  
**Buch, Wie ein Buch entsteht** siehe Abt. VI.  
 — f. auch Schrift- u. Buchwesen Abt. IV.  
**Decorative Kunst d. Altertums.** B. Dr. Fr. Paulsen. M. 112 Abb. (Bd. 454.)  
**Denkmalpflege** siehe Abt. IV.  
**Drama, Das.** Von Dr. B. Husse. Mit 1 Abb. 3 Bde. I: B. d. Antike z. franz. Klassizismus. 2. A., neub. v. Studientr. Dr. F. R. Nieblisch, Prof. Dr. R. Amelmann u. Prof. Dr. Glaser. M. 3 Abb. II: Von Voltaire zu Lessing. 2. Aufl. Von Dir. Dr. Ludwig u. Prof. Dr. Glaser. III: B. d. Romant. z. Gegenw. (287/289.)  
**Drama, D. dtische, D. d. 19. Jahrh. In f. Entwickl. d. gest. v. Prof. Dr. G. Witkowski. 4. Aufl. M. Bildn. Sebels. (Bd. 51.)**

- Drama** s. a. Goethe, Grillparzer, Hauptmann, Hebbel, Ibsen, Lessing, Literatur, Schiller, Schaferspeare, Theater. **Dürer**, Albrecht. V. Prof. Dr. R. Wustmann. 2. Aufl., neubearb. u. ergänzt v. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. M. Atthäet. Mit Titelb. u. 31 Abb. (Bd. 97.)
- Französischer Roman** siehe Roman.
- Französisch.** Gesch. d. dt. F. 1800. V. Dr. S. Spiero. M. 3 Bld. (390.)
- Fremdwortkunde.** Von Dr. E. Richter. Gartenkunst siehe Abt. IV. (Bd. 570.)
- Goethe.** Von Prof. Dr. M. F. Wolff. (Bd. 497.)
- Griech. Komödie.** D. B. Geh. Hofr. Prof. Dr. A. Körte. M. Titelb. u. 2 Taf. (400.)
- Griechische Kunst.** Die Blütezeit der g. R. im Spiegel der Vellestiarophage. Eine Einf. l. d. griech. Plastik. V. Prof. Dr. S. Wachtler. 2. A. M. zahlr. Abb. (272.)
- siehe auch Deloraité Kunst.
- Griechische Myth.** Von Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Vethe. (Bd. 736.)
- Griech. Tragödie.** Die. V. Prof. Dr. F. Gelfand. M. 5 Abb. i. T. u. a. 1 Taf. (566.)
- Grillparzer.** Franz. Von Prof. Dr. A. Kleinberg. M. Bildn. (Bd. 513.)
- Harmonielehre.** Von Dr. S. Scholz. (Bd. 703/04.)
- Harmonium** s. Tasteninstrument.
- Hauptmann, Gerhart.** V. Prof. Dr. E. Sulzger-Gebing. M. 1 Bildn. 2. Aufl. (Bd. 283.)
- Haydn, Mozart, Beethoven.** Von Prof. Dr. C. Krebs. 3. Aufl. Mit 4 Bildn. auf Tafeln. (Bd. 92.)
- Hebbel, Friedrich, u. f. Dramen.** V. Geh. Hofr. Prof. Dr. O. Balzel. 2. Aufl. (408.)
- Heimatpflege** siehe Abt. IV.
- Heldenepic.** Die germanische. Von Dr. F. M. Bruhier. (Bd. 486.)
- Österreichische Dichtung.** Die. Von Rektor Dr. G. Finster. (Bd. 496.)
- Ibsen u. Björnson.** Von Prof. Dr. G. Nedel. (Bd. 635.)
- Impressionismus.** Die Maler des J. Von Prof. Dr. W. Pázar. 2. A. M. 32 Abb. auf 16 Tafeln. (Bd. 395.)
- Klavier** siehe Tasteninstrumente.
- Komödie** siehe Griech. Komödie.
- Kunst.** Das Weien der deutschen bildenden K. Von Geh. Rat Prof. Dr. S. Thode. (Bd. 585.)
- s. a. Bauk., Bild., Dekor., Griech. K.; Pompeii; Stile; Gartenk. Abt. IV.
- Lessing.** Von Prof. Dr. Ch. Schreyff. Mit einem Bildnis. (Bd. 403.)
- Literatur.** Entwickl. der deutsch. L. seit Goethes Tod. V. Dr. W. Brecht. (595.)
- Geschichte der niederdeutschen L. v. d. ältest. Zeiten bis z. Gegenw. Von Prof. Dr. W. Stämmeler. (Bd. 815.)
- Altindische Literatur-Geschichte. Von Prof. Dr. G. Nedel. (Bd. 782.)
- Einführung i. d. Verständnis literarischer Kunstwerke. Von Prof. Dr. B. Merker. (Bd. 711.)
- Lyrik.** Geschichte d. deutsch. L. f. Claudius. V. Dr. S. Spiero. 2. Aufl. (Bd. 254.)
- s. auch Frauenbildung, Griechische Lyrik, Literatur, Minnesang, Volkslied.
- Malerei.** Die altdeutschen, in Süddeutschland. Von S. Kemig. Mit 1 Abb. 1 Text und Bilderanhang. (Bd. 464.)
- s. Dürer, Michelangelo, Impression, Rembrandt.
- Malerei.** D. deutsche i. 19. Jahrh. V. Prof. Dr. R. Samann. 2. Bde. (448—449.)
- Niederl. M. im 17. Jahrh. V. Prof. Dr. S. Zanen. M. 37 Abb. (373.)
- Märchen** s. Volksmärchen.
- Michelangelo.** Eine Einführung in das Verständnis seiner Werke. V. Prof. Dr. E. Sildebrandt. Mit 44 Abb. (392.)
- Minnesang.** D. Siebe i. Siebe d. d. sch. Mittelalt. V. Dr. F. W. Bruhier. (404.)
- Mozart** siehe Handb.
- Musik.** Die Grundlagen d. Tonkunst. Versuch einer entwicklungsgechl. Darstell. d. allg. Musiklehre. Von Prof. Dr. S. Rietsch. 2. Aufl. (Bd. 178.)
- Musikalische Kompositionsformen. V. S. G. Kallenberg. Band I: Die elementar. Konverbindungen als Grundlage d. Harmonielehre. Bd. II: Kontrabuntst. u. Formenlehre. (Bd. 412, 413.)
- Geschichte der Musik. Von Dr. A. Einstein. 2. Aufl. (Bd. 438.)
- Beispielsammlung zur älteren Musikgeschichte. V. Dr. A. Einstein. (439.)
- Musikal. Romantik. Die Blütezeit d. m. K. in Deutschland. Von Dr. E. F. J. 2. verb. Aufl. (Bd. 239.)
- s. auch Harmonielehre, Haydn, Oper, Orchester, Tasteninstrumente, Wagner, Anthologie, Germanische. Von Prof. Dr. S. v. Megelein. 3. Aufl. (Bd. 95.)
- siehe auch Volkslied, Deutsche.
- Nibelungenlied.** Das. Von Prof. Dr. F. Körner. (Bd. 591.)
- Niederdeutsche Literatur** s. Literatur.
- Niederländ.** Malerei f. Malerei, Rembrandt.
- Novelle** siehe Roman.
- Oper.** Die moderne. Vom Lobe Wagners bis zum Weltkrieg (1883—1914). Von Dr. E. F. J. Mit 3 Bildn. (Bd. 495.)
- siehe auch Handb., Wagner.
- Orchester.** Das moderne Orchester. Von Prof. Dr. F. F. F. I. Die Instrumente d. O. (Bd. 714.) II. Das mod. O. i. f. Entwickl. 2. Aufl. M. Titelb. u. 2 Taf. (715.)
- Orgel** siehe Tasteninstrumente.
- Personennamen.** D. deutsch. V. Geh. Studienrat A. W. V. S. A. (Bd. 296.)
- Perspektive.** Grundzüge d. P. nebst Anwend. V. Prof. Dr. R. Doehlemann. 2. verb. Aufl. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (510.)
- Phonetik.** Einführ. i. d. Ph. Wie wir sprechen. V. Dr. E. Richter. M. 20 A. (354.)
- Photographie.** D. künstl. Ihre Entwickl., ihre Prohl., ihre Bedeutung. V. Studienrat Dr. W. Warstat. 2. verb. Aufl. Mit Bilderanhang. (Bd. 410.)
- s. auch Photographie Abt. VI.

**Plastik** s. Griech. Kunst, Michelangelo.  
**Poetik**. Von Dr. R. Müller-Freienfels. 2. Aufl. (Bd. 460.)  
**Compeji**. Eine hellenist. Stadt in Italien. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. Fr. v. Duhn. 3. Aufl. M. 62 Abb. i. T. u. auf 1 Taf., sowie 1 Plan. (Bd. 114.)  
**Projektionslehre**. In kurzer leichtfaßlicher Darstellung f. Selbstl. u. Sch. u. Schulgebrauch. B. arab. Zeichen. A. Sch. u. Beis. Mit 208 Abb. (Bd. 564.)  
**Membrandt**. Von Prof. Dr. B. Schüring. 2. Aufl. Mit 48 Abb. auf 28 Taf. i. Anh. (Bd. 158.)  
**Renaissance** siehe Abt. IV.  
**Renaissancearchitektur in Italien**. Von Prof. Dr. B. Frankl. I. Bd. M. 12 Taf. u. 27 Textabb. (Bd. 381.)  
**Rhetorik**. Von Prof. Dr. E. Geißler. 2 Bde. I. Richtlinien für die Kunst des Sprechens. 3. verb. Aufl. II. Deutsche Redekunst. 2. Aufl. (Bd. 455/456.)  
**Roman**. Der französische Roman und die Novelle. Ihre Geschichte v. d. Anf. b. z. Gegenw. Von D. Flake. (Bd. 377.)  
**Romantik**. Deutsche. B. Geh. Hofrat Prof. Dr. O. F. Walzel. 4. Aufl. I. Die Weltanschauung. II. Die Dichtung. (Bd. 232/233.)  
 — Die Blütezeit der mus. K. in Deutschland. B. Dr. E. Fstel. 2. Aufl. (239.)  
**Sage** siehe Helden- u. Mythol., Volks- u. Sagen.  
**Schauspieler**. Der. Von Prof. Dr. Ferdinand Gregori. (Bd. 692.)  
**Schiller**. Von Prof. Dr. Th. Biegler. Mit 1 Bildn. 3. Aufl. (Bd. 74.)  
**Schillers Dramen**. Von Direktor E. Seusermann. (Bd. 493.)  
**Shakespeare**. Sh. u. seine Zeit. Von Prof. Dr. R. Jmelmann. (Bd. 816.)  
 — Sh.'s Werke. Von Prof. Dr. R. Jmelmann. (Bd. 817.)

#### IV. Geschichte, Kulturgeschichte und Geographie.

**Äben**. Die. Von H. Reishauer. 2., neub. Aufl. von Prof. Dr. S. Slanar. Mit Abb. und Karten. (Bd. 276.)  
**Altertum**. Das, im Leben der Gegenwart. B. Prob.-Schul- u. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. V. Cauer. 2. Aufl. (Bd. 356.)  
 — D. Altertum, seine staatliche u. geistige Entwicklung und deren Nachwirkungen. B. Studienrat S. Preller. (Bd. 642.)  
**Amerika**. Gesch. d. Verein. Staaten v. A. B. Prof. Dr. E. Daenell. 2. A. (Bd. 147.)  
 — Südamerika. B. Regier.- u. Oekonomier. Prof. Dr. E. Wagemann. (718.)  
**Amerikaner**. Die. B. R. R. Butler. Dicht. v. Prof. Dr. W. Paszkowski. (319.)  
**Antike**. Deutschtum u. A. in ihrer Verknüpfung. Ein Überblick von Oberstudienrat Konrektor Prof. Dr. E. Stempelinger und Konrektor Prof. Dr. S. Pamer. Mit 1 Taf. (Bd. 689.)

**Sprache**. Die Haupttypen des menschl. Sprachbaus. Von Prof. Dr. F. N. F. i. d. 2. Aufl. v. Prof. Dr. E. Richter. (263.)  
 — Die deutsche Sprache v. heute. B. Student. Dr. W. Fischer. 2. verb. A. (475.)  
 — Fremdwortkunde. Von Privatdozentin Dr. E. Lise Richter. (Bd. 570.)  
 — siehe auch Phonetik, Rhetorik; ebenso Sprache u. Stimme Abt. V.  
**Sprachstämme**. Die, des Erdkreises. Von Prof. Dr. F. N. F. i. d. 2. Aufl. (Bd. 267.)  
**Sprachwissenschaft**. Von Prof. Dr. R. Sandfeld-Jensen. (Bd. 472.)  
**Stille**. Die Entwicklungsgesch. d. St. in der bild. Kunst. B. Dr. E. Cohn-Biener. 3. Aufl. I.: B. Altertum b. z. Gotik. M. 69 Abb. II.: B. d. Renaissance b. z. Gegenwart. Mit 42 Abb. (Bd. 317/318.)  
**Tasteninstrumente**. Klavier, Orgel, Harmonium. Das Wesen der Tasteninstrumente. B. Prof. Dr. O. Vie. (Bd. 325.)  
**Theater**. Das, v. Altzeit. bis zur Gegenwart. Von Prof. Dr. Chr. Gaebele. 3. Aufl. 17 Abb. (Bd. 230.)  
**Tragödie** s. Griech. Tragödie.  
**Urheberrecht** siehe Abt. VI.  
**Volkslied**. Das deutsche. Über Wesen und Werden d. deutschen Volksliedes. Von Dr. F. W. Bruhier. 5. Aufl. (Bd. 7.)  
**Volksmärchen**. Das deutsche. B. Von Pfarer R. Spieß. (Bd. 587.)  
**Volkslage**. Die deutsche. Übersichtl. dargestellt. v. Dr. O. Böckel. 2. Aufl. (Bd. 262.)  
 — s. a. Helden-, Rabelungenl., Mythologie.  
**Wagner**. Das Kunstwerk Richard W.'s. Von Dr. E. Fstel. M. 1 Bildn. 2. Aufl. (330.)  
 — siehe auch Musikal. Romantik u. Oper.  
**Zeichenkunst**. Der Weg z. 3. Ein Bächlein für theoretische und praktische Selbstbildung. Von Dir. Dr. E. Weber. 3. Aufl. Mit 84 Abb. u. 1 Farbtafel. (Bd. 430.)  
 — s. auch Perspektive, Projektionslehre; Geometr. Zeichn. Abt. V, Techn. B. Abt. VI.  
**Zeitungswesen**. Von Dr. S. Diez. 2. durchgearb. Aufl. (Bd. 328.)

**Antike**. A. Wirtschafts- u. Kulturgeschichte. Von Dr. O. Neurat. 2. Aufl. (Bd. 258.)  
 — Antikes Leben nach den ägyptischen Papyri. B. Geh. Hofrat Prof. Dr. Fr. Preisigke. Mit 1 Tafel. (Bd. 565.)  
**Arbeiterbewegung** s. Soziale Bewegungen.  
**Australien und Neuseeland**. Land, Leute und Wirtschaft. Von Prof. Dr. R. Schachner. Mit 23 Abb. (Bd. 366.)  
**Baltische Provinzen**. B. Dr. B. Tornius. 3. Aufl. M. 8 Abb. u. 2 Kartenst. (Bd. 542.)  
**Bauernhaus**. Kulturgeschichte des deutschen. B. Von Vaidir. Dr.-Ing. Chr. Rand. 3. Aufl. Mit 73 Abb. (Bd. 121.)  
**Bauernstand**. Gesch. d. dtsh. B. B. Prof. Dr. S. Gerdes. 2., verb. Aufl. Mit 22 Abb. i. Text (Bd. 320.)  
**Belgien**. Von Dr. B. D'Kwaid. 3. Aufl. Mit 4 Karten i. T. (Bd. 501.)

- Bismarck u. s. Zeit.** Von Archivar Prof. Dr. B. Valentin. Mit Titelf. 4. Aufl. (Bd. 500.)
- **Von Luther zu Bismarck.** 12 Charakterbilder aus deutscher Geschichte. Von Prof. Dr. D. Weber. 2. Aufl. (Bd. 123/124.)
- Böhmen.** Zur Einführung in die böhmische Frage. Von Prof. Dr. R. F. Kaindl. Mit 1 Karte. (Bd. 701.)
- Brandenburg-preuß. Gesch.** B. Archivar Dr. Fr. Israel. I. Von d. ersten Anfängen b. z. Tode König Fr. Wilhelms I. 1740. II. B. d. Regierungsantritt Friedrichs d. Gr. b. z. Gegenw. (440/441.)
- Führer d. Mittelalt. f. Städte u. B. i. M.** Christentum u. Weltgeschichte seit der Reformation. Von Prof. D. Dr. R. Sell. 2. Bde. (Bd. 297/298.)
- Denkmalspflege f. Heimatpflege.**
- Deutschtum im Ausland.** Das, vor dem Weltkrieg. Von Prof. Dr. R. Soeniger. 2. Aufl. (Bd. 402.)
- u. Antike i. ihr. Verknüpfung. Ein Überblick v. Oberstudient. Konrert. Prof. Dr. C. Stemplinger u. Oberstudient. Konrert. Prof. Dr. S. Lamer. II. (689.)
- Dorf.** Das deutsche. B. Prof. R. Mielke. 3. Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 192.)
- Eiszeit.** Die, u. d. vorgeschichtl. Mensch. B. Geh. Bergrat Prof. Dr. G. Steinmann. 2. Aufl. M. 24 Abb. (302.)
- Englands Weltmacht in ihrer Entwickl. seit d. 17. Jahrh. b. a. u. Tage.** B. Dir. Prof. Dr. B. Langenbed. 3. Aufl. (Bd. 174.)
- Entdeckungen.** Das Zeitalter der G. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. S. Günther. 4. Aufl. Mit 1 Weltkarte. (Bd. 26.)
- Erde siehe Mensch u. G.**
- Erdfunde.** Allgemeine. 8 Bde. Mit Abb. I. Die Erde, ihre Beweg. u. ihre Eigenschaften (math. Geogr. u. Geonomie). Von Admiralitätsr. Prof. Dr. E. Rohlichlötzter. (Bd. 625.) II. Die Atmosphäre der Erde (Klimatologie, Meteorologie). Von Prof. Dr. D. Paschin. (Bd. 626.) III. Geomorphologie. B. Prof. Dr. F. Machatschel. M. 33 Abb. (Bd. 627.) IV. Phytogeographie d. Süßwassers. B. Prof. Dr. F. Machatschel. M. 24 Abb. (Bd. 628.) V. Die Meere. Von Prof. Dr. A. Merz. (Bd. 629.) VI. Die Verbreitung der Pflanzen. Von Dr. Brodmann-Gerosch. (Bd. 630.) VII. Die Verbreitung d. Tiere. B. Dr. W. Knoopf. I. (Bd. 631.) VIII. Die Verbreitung d. Menschen auf d. Erdoberfläche (Anthropogeographie). B. Prof. Dr. M. Krebs. M. 12 Abb. (632.) — siehe auch Geographie.
- Europa.** Vorgegeschichte G.'s. Von Prof. Dr. S. Schmidt. (Bd. 571/572.)
- Europäische Geschichte in Zeitalter Karls V., Philipps II. u. d. Elisabeth.** Von Prof. Dr. G. Meun. (Bd. 528.)
- im Zeitalter Ludwigs XIV. und d. Großen Kurfürsten. Von Prof. Dr. W. Plabhoff. (Bd. 530.)
- Familienforschung.** Von Dr. E. Devrient. 2. Aufl. M. 6 Abb. i. Z. (350.)
- Feldherren.** Große. Von Major F. C. Endres. I. Vom Alexertum b. z. Tode Gustav Adolfs. Mit 1 Titelf., 12 Karten u. 1 Schema. II. S. Turenne b. Hindenburg. M. 1 Titelf. u. 14 K. (687/688.)
- Feste.** Deutsche. u. Volksbräute. B. Prof. Dr. E. Fehrlé. 2. Aufl. M. 29 Abb. (Bd. 518.)
- Finnland.** Von Gesandtschaftsrat J. Schuquiff. (Bd. 700.)
- Franzosenbewegung.** Die deutsche. Von Dr. Marie Bernays. (Bd. 761.)
- Frauenleben.** Deutsch., i. Wandel d. Jahrhunderte. B. Geh. Schultat Dir. Dr. Ed. Otto. 3. Aufl. 12 Abb. i. Z. (Bd. 45.)
- Friedrich d. Gr.** 6 Worte. B. Prof. Dr. T. B. Bitterauf. 2. M. 2 Bildn. (216.)
- Gartenkunst.** Gesch. d. G. B. Vaudir. Dr.-Ing. Chr. Rand. M. 41 Abb. (274.)
- Geographie der Vorkwelt** (Paläogeographie). Von Prof. Dr. E. Dacqué. Mit 18 Fig. i. Text. (Bd. 619.)
- Geologie** siehe Abt. V.
- German. Heldensage f. Selbentage.**
- Germanische Kultur in der Urzeit.** Von Bibliotheksdir. Prof. Dr. G. Steinhäusen. 3. Aufl. Mit 13 Abb. (Bd. 75.)
- Geschichte.** Deutsche G. Von Prof. Dr. D. Weber. (Bd. 825.)
- Deutsche G. des Mittelalters. B. Studr. Dr. G. Bonwetsch. (Bd. 517.)
- Deutsche G. im 19. Jahrh. b. zur Reichseinheit. B. Prof. Dr. R. Schwemer. 3 Bde. I.: Von 1800—1848 Restauration und Revolution. 3. Aufl. (Bd. 37.) II.: Von 1848—1862. Die Reaktion und die neue Ara. 2. Aufl. (Bd. 101.) III.: Von 1862—1871. B. Bund z. Reich. 3. Aufl. (Bd. 826.)
- Gesellsch. u. Gesittig.** in Vergangenh. u. Gegenw. Von S. Trautwein. (706.)
- Griechentum.** Das G. in seiner geschichtlichen Entwicklung. B. Hofrat Prof. Dr. R. v. Scala. Mit 46 Abb. (Bd. 471.)
- Griechische Städte.** Kulturbilder aus arch. St. I. Von Prof. Dr. E. Ziebarth. 3. umg. Aufl. Mit 21 Abb. i. Z. u. a. 16 Taf. (Bd. 131.)
- Handel.** Geschichte d. Welthandels. Von Realgymnasial-Dir. Prof. Dr. M. G. Schmidt. 3. Aufl. (Bd. 118.)
- Gesch. d. dtsh. Handels i. d. Ausgang d. Mittelalters. B. Dir. Prof. Dr. W. Langenbed. 2. Aufl. M. 16 Taf. (237.)
- Handwerk.** Das deutsche, in seiner kulturgeschichtl. Entwickl. Von Geh. Schultat Dir. Dr. E. Otto. 5. Aufl. Mit 28 Abb. a. 8 Taf. (Bd. 14.)
- siehe auch Dekorative Kunst Abt. III.
- Heimatpflege.** (Denkmalspflege u. Heimatlich.) Ihre Aufgaben, Organisation und Gesetzgebung. Von Dr. S. Hartmann. (Bd. 756.)
- Heldensage.** Die germanische. Von Dr. F. W. Bruhier. (Bd. 496.)

- Japan. V. Prof. Dr. R. Haushofer. (822.)  
 Jena. Von J. b. z. Wiener Kongress. Von Prof. Dr. G. Roloff. (Bd. 465.)  
 Jesuiten. Die Eine hist. Skizze. Von Prof. Dr. G. Boehmer. 4. Aufl. (Bd. 49.)  
 Judica. Von Prof. Dr. Sten Konow. (Bd. 614.)  
 Island. b. Sand u. d. Volk. V. Prof. Dr. B. Herrmann. 9. Aufl. (Bd. 461.)  
 Juden. Geschichte d. J. seit d. Unterg. d. jüd. Staates. Von Prof. Dr. Z. Etibogen. (Bd. 748.)  
 Kartenkunde. Vermessungs- u. K. 6 Bde. Mit Abb. I. Geogr. Ortsbestimmung. Von Prof. Schnauber. (Bd. 616.) II. Erdmessung. Von Prof. Dr. O. Egger. (Bd. 607.) III. Landmess. V. Geh. Finanzrat F. Sudow. Mit 69 Zeichn. (Bd. 608.) IV. Ausgleichsrechnung u. d. Methode d. kleinst. Quadrate. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. E. Hegemann. M. 11 Fig. i. Text. (Bd. 609.) V. Photogrammetrie, (Einfache Stereo- u. Luftphotogrammetrie). V. Diplom.-Ing. G. Rüscher. Mit 78 Fig. i. Text u. a. 2 Tafeln. (Bd. 612.) VI. Kartentunde. S. Finanzr. Dr.-Ing. A. Egger. 1. Einführ. i. d. Kartenverständnis. Mit 49 Abbildungen im Text. 2. Kartenherstellung (Landesaufn.). (Bd. 610/611.)  
 Kirche i. Staat u. K.; Kirche Abt. I.  
 Krieg. Kulturgeschichte d. Kr. Von Prof. Dr. A. Weule, Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Vethe, Prof. Dr. B. Schmeidler, Prof. Dr. A. Doren, Prof. Dr. B. Herre. (Bd. 561.)  
 — i. auch Feldherren.  
 Kriegsschiffe. Uiere. Ihre Entstehung u. Verwendung. V. Geh. Mar.-Baur. a. D. E. Krieger. 2. Aufl. v. Geh. Mar.-Baur. Fr. Schürer. M. 62 Abb. (389.)  
 Luther, Martin u. d. dtsche. Reformation. Von Prof. Dr. W. Köhler. 2. verb. Aufl. M. 1. Bildn. Luthers. (Bd. 515.)  
 Von Luther zu Bonnard. 12 Charakterbilder aus deutscher Geschichte. Von Prof. Dr. O. Weber. 2. Aufl. (123/124.)  
 Mary, Karl. Versuch einer Würdigung. V. Prof. Dr. R. Wilsbrandt. 4. U. (621.)  
 Mensch u. Erde. Skizzen v. den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von Geh. Rat Prof. Dr. A. Kirchhoff. 4. Aufl.  
 — i. a. Eiszeit; Mensch Abt. V. (Bd. 31.)  
 Mittelalter. Mittelalterl. Kulturdenkm. V. Prof. Dr. B. Debel. I.: Heidenleben. II.: Ritterromantik. (Bd. 292, 293.)  
 — i. auch Geschichte, Osten, Städte und Bürger i. M.  
 Mollte. Von Major F. C. Endres. Mit 1 Bildn. (Bd. 415.)  
 Münze. Grundriß d. Münzkunde. 2. Aufl. I. Die Münze nach Wesen, Gebrauch u. Bedeutung. V. Hofrat Dr. A. Luschin v. Cengreuth. M. 56 Abb. II. Die Münze in ihrer geschichtl. Entwicklung v. Altertum b. z. Gegenwart. Von Prof. Dr. G. Buchenau. (Bd. 91, 657.)  
 Mythologie i. Abt. I.  
 Napoleon I. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. 3. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 195.)  
 Rationalbenußtheit siehe Volk.  
 Natur u. Mensch. V. Dir. Prof. Dr. M. G. Schmidt. M. 19 Abb. (Bd. 458.)  
 Naturvölker. Die geistige Kultur der N. V. Prof. Dr. R. Th. Preuss. M. 9 Abb. — i. a. Völkertunde, allg. (Bd. 452.)  
 Neugriechenland. Von Prof. Dr. A. Seisenberg. (Bd. 613.)  
 Neuseeland i. Australien.  
 Orient i. Indien, Palästina, Türkei.  
 Osten. Der Zug nach dem O. Die kolonialistische Großtat d. deutsch. Volkes i. Mittelalter. V. Geh. Hofrat Prof. Dr. R. Lampe. (Bd. 731.)  
 Österreich. O.'s innere Geschichte von 1848 bis 1895. V. R. Charmas. 3. verbänd. Aufl. I. Die Vorkherrschaft der Deutschen. II. Der Kampf der Nationen. (651/652.)  
 — Geschichte der auswärtigen Politik O.'s im 19. Jahrhundert. V. R. Charmas. 2. verbänd. Aufl. I. Bis zum Sturze Metternichs. II. 1848—1895. (653/654.)  
 — Österreichs innere u. äussere Politik von 1895—1914. V. R. Charmas. (655.)  
 Ostmark i. Abt. VI.  
 Ostseegebiet. Das. V. Prof. Dr. G. Braun. M. 21 Abb. u. 1 mehrf. Karte. (Bd. 367.)  
 — i. auch Baltische Provinzen, Finnland.  
 Palästina u. i. Geschichte. V. Prof. Dr. G. Frh. v. Soden. 4. Aufl. M. 1 Plan u. Jerusalem. u. 3 Auf. d. Heil. Landes. (6.)  
 — V. u. i. Kultur i. 5 Jahrhund. Nach d. n. Ausgrab. u. Forschg. dargestellt. v. Prof. Dr. P. Thomsen. 2. M. 37 Abb. (260.)  
 Papyri i. Antikes Leben.  
 Polarforschung. Geschichte der Entbedungsreisen zum Nord- u. Südpol v. d. ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. V. Prof. Dr. R. Gallert. 3. Aufl. M. 6 Kart. (Bd. 38.)  
 Polen. M. ein. geschichtl. Überblick Ab. b. polnisch-ruthen. Frage. V. Prof. Dr. R. F. Raindl. 2. verb. Aufl. M. 6 Kart. (547.)  
 Politik. Umrisse d. Weltpol. V. Prof. Dr. J. Gashagen. 3 Bde. I: 1871—1907. 2. U. II: 1908—1914. 2. U. (Bd. 553/54.)  
 — Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert. Von Prof. Dr. R. Th. v. Seigel. 4. Aufl. von Dr. Fr. Endres. (Bd. 129.)  
 — Politische Geographie. Von Prof. Dr. W. Vogel. (Bd. 634.)  
 Pompeii, eine hellenist. Stadt in Italien. V. Geh. Hofrat Prof. Dr. Fr. v. Duhn. 3. Aufl. M. 62 Abb. sowie 1 Plan. (114.)  
 Preussische Geschichte i. Brandenb.-vr. G. Reaktion und neue Era i. Gesch. deutsche. Reformation i. Luther.  
 Reichsverfassung. Die neue R. Von Priv.-Doz. Dr. D. Bühler. (Bd. 762.)  
 Renaissance. Die R. Von Privatdoz. Dr. A. von Martin. (Bd. 730.)  
 Restauration u. Rev. i. Geschichte, dtsche. Revolution. Geschichte der Französ. R. V. Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. Mit 3 Bildn. (Bd. 346.)  
 — 1848. 6 Vorträge. Von Prof. Dr. O. Weber. 3. Aufl. (Bd. 53.)

- Nom.** Das alte Rom. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. D. Richter. Mit Vilderanhang u. 4 Plänen. (Bd. 386.)  
 — Geschichte der römischen Republik. Von Privatdoz. Dr. A. Rosenberg. (838.)  
 — Soziale Kämpfe i. alt. Rom. V. Privatdozent Dr. L. Bloch. 4. Aufl. (Bd. 22.)
- Rußland.** Geschichte, Staat, Kultur. Von Dr. A. Luther. (Bd. 563.)  
 — Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Geh. Studient. Dr. O. Weise. 4. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 4.)  
 — f. a. Buch. Wie ein V. entsteht. Abt. VI.
- Schweiz.** Die Land, Volk, Staat u. Wirtschaft. Von Regierungsrat Dr. O. Wettstein. Mit 1 Karte. (Bd. 482.)
- Sekrieg** s. Kriegsschiff.
- Slawen.** Die S. Von Prof. Dr. V. Diefs. (Bd. 740.)
- Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung.** Von G. Mater. 8. Aufl. (Bd. 2.)  
 — f. a. Marx. Rom; Sozialismus. Abt. VI.
- Staat.** St. u. Kirche in ihr. gegen. Verhältnis seit d. Reformation. V. Pfarrer Dr. phil. A. Pfannuche. (Bd. 485.)  
 — siehe auch Verfassung, Volk.
- Stadt.** Dtsche. Städte u. Bürger i. Mittelalter. V. Geh. Reg.-Rat Oberschulrat Dr. B. Heil. 4. Aufl. (Bd. 43.)  
 — Verfassung u. Verwaltung d. deutschen Städte. V. Dr. M. Schmidt. (Bd. 466.)
- Sternglaube und Sternbeutung.** Die Geschichte u. d. Wesen d. Astrologie. Unt. Mitwirk. v. Geh. Rat Prof. Dr. C. Bezold dargestellt. v. Geh. Hofr. Prof. Dr. Fr. Boll. 2. u. M. 1 Sternk. u. 20 Abb. (638.)
- Student.** Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
- Studententum.** Geschichte d. deutschen St. Von Dr. W. Bruchmüller. (Bd. 477.)
- Südamerika** s. Amerika.
- Türkei.** Die. V. Reg.-Rat V. R. Krause. Mit 2 Karten. 2. Aufl. (Bd. 469.)
- Arzt** s. german. Kultur in der U.
- Verfassung.** Die neue Reichsverfassung. Von Privatdoz. Dr. O. Wühler. (762.)
- Verfassung.** Deutsches Verfassungsrecht i. geschichtlicher Entwicklung. Von Prof. Dr. E. D. Dubrich. 2. Aufl. (Bd. 80.)  
 — Deutsche Verfassungsgeschichte. V. Ansfange d. 19. Jahrh. bis zur Gegenwart. Von Prof. Dr. M. Stimming. (639.)  
 — f. a. Steuern, d. neuen. Abt. VI.
- Vermessungs- u. Kartenkunde** s. Kartent. Voll. Vom deutschen V. zum dt. Staat. Eine Gesch. d. dt. Nationalbewusstseins. Von Prof. Dr. B. Joachimsen. 2. Aufl. (Bd. 511.)
- Völkerkunde, Allgemeine.** I: Feuer, Nahrungserwerb, Wohnung, Schmuck und Kleidung. Von Dr. A. Heilborn. M. 54 Abb. (Bd. 487.) II: Waffen u. Werkzeuge, Industrie, Handel u. Geld, Verkehrsmittel. Von Dr. A. Heilborn. M. 51 Abb. (Bd. 488.) III: Die geistige Kultur der Naturvölker. Von Prof. Dr. A. Th. Preuß. M. 9 Abb. (Bd. 452.)
- Volkstrachten, deutsche.** siehe Feste.
- Volkskunde, Deutsche.** im Grundriss. Von Prof. Dr. C. Neufchel. I. Allgemeines, Sprache, Volksdicht. M. 3 Fig. II. Glaube, Brauch, Kunst u. Recht. (Bd. 644/645.)  
 — f. auch Bauernhaus, Feste, Stern-glaub., Volkskraft, Volksstämme.
- Volksstämme, Die deutschen u. Landschaften.** V. Geh. Studr. Dr. O. Weise. 5. Aufl. Mit 30 Abb. i. T. u. auf 20 Taf. u. 1 Dialektkarte Deutschlands. (Bd. 16.)
- Volkstrachten, Deutsche.** Von Pfarrer R. Erich. Mit 11 Abb. (Bd. 342.)
- Vorgeschichte Europas.** Von Prof. Dr. H. Schmidt. (Bd. 571/572.)
- Wiener Kongress.** Von Jena b. z. W. R. Von Prof. Dr. G. Roloff. (Bd. 465.)
- Wirtschaftsgeschichte, Antike.** V. Dr. O. Neurath. 2., umg. Aufl. (Bd. 258.)  
 — Vom Ausgange d. Antike bis zum Beginn d. 19. Jahrhunderts. (Mittlere Wirtschaftsgeschichte.) Von Prof. Dr. H. Siebeling. (Bd. 577.)  
 — f. a. Antikes Leben n. d. ägypt. Papyri.
- Wirtschaftsleben, Deutsches.** Auf geogr. Grundl. gesch. V. Prof. Dr. Chr. Gruber. 4. Aufl. V. Dr. S. Reinlein. (42.)  
 — f. auch Abt. VI.

## V. Mathematik, Naturwissenschaften und Medizin.

- Aberglaube, Der, in der Medizin u. f. Gefahr f. Gesundh. u. Leben.** V. Geh. Medizinalrat Prof. Dr. D. v. Hanje-mann. 2. Aufl. (Bd. 83.)
- Abstammungs- und Vererbungslehre, Erpimentelle.** Von Prof. Dr. C. Lehmann. 2. Aufl. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)
- Abstammungslehre u. Darwinismus.** V. Pr. Dr. R. Hesse. 5. u. M. 40 Abb. (Bd. 39.)
- Abwehrkräfte des Körpers, Die.** Eine Einführung in die Immunitätslehre. Von Prof. Dr. med. H. Kämmerer. 2. verb. Aufl. Mit 52 Abbildungen. (Bd. 479.)
- Algebra** siehe Arithmetik.
- Alkoholis. Der A. V. Privatdoz. Dr. G. B. Gruber. 2. verb. u. M. 7 Abb. (103.)**
- Anatomie d. Menschen, D. B. Hofrat Prof. Dr. R. v. Bardeleben.** 6 Bde. Jeder Bd. m. zahlr. Abb. (Bd. 418/423.) I. Zelle und Gewebe, Entwicklungsgeschichte. Der ganze Körper. 3. Aufl. II. Das Skelett. 3. Aufl. III. Muskel- u. Gefäßsystem. 3. umg. Aufl. IV. Die Eingeweide (Darm-, Urmungs-, Harn- und Geschlechtsorgane, Haut). 3. Aufl. V. Nerven-system und Sinnesorgane. 2. Aufl. VI. Mechanik (Statik u. Kinetik) d. menschl. Körpers (der Körper in Ruhe u. Bewegung.) 2. Aufl.  
 — siehe auch Wirbeltiere.
- Aquarium, Das.** Von E. W. Schmidt. Mit 15 Fig. (Bd. 335.)

- Arbeitsleistungen des Menschen, Die.** Einführ. in d. Arbeitsphysiologie. V. Prof. Dr. S. Goruttan. M. 14 Fig. (Bd. 539.)
- **Berufswahl, Vergabung u. Arbeitsleistung in i. gegen. Bezieh.** V. W. Z. Ruttmann. 2. Aufl. M. 7 Abb. (522.)
- Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht.** V. Geh. Studr. P. Franck. 2 Bde. I.: Die Rechnungsarten. Gleichungen 1. Grades mit einer u. mehreren Unbekannten. Gleichungen 2. Grades. 7. Aufl. M. 9 Fig. i. Text. II.: Gleichungen. Arithmetik u. geometrische Reih. Zinsseszins- u. Rentenrechn. Komplexer Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 5. Aufl. Mit 21 Textfig. (Bd. 120, 205.)
- Arzneimittel und Genußmittel.** Von Prof. Dr. D. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
- Astronomie, Die A. in ihrer Bedeutung für das praktische Leben.** Von Prof. Dr. A. Marcuse. 2. Aufl. M. 26 Abb. (378.)
- **Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit.** Von Prof. Dr. S. Oppenheimer. I. Vom Altertum bis zur Neuzeit. 3. Aufl. M. 18 Abb. i. T. (Bd. 444.) II. Mod. Astronomie. 2. Aufl. Mit 9 Fig. i. T. u. 1 Taf. (Bd. 445.)
- **siehe auch** Mond, Planeten, Sonne, Weltall, Sternenglaube. Abt. I.
- Atome f. Materie.**
- Aug., Das, und die Brille.** Von Prof. Dr. M. v. Rohr. 2. Aufl. Mit 84 Abb. u. 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)
- Ausgleichsrechn. f. Kartenbe.** Abt. IV.
- Bakterien, Die, im Haushalt und der Natur des Menschen.** Von Prof. Dr. E. Gutzeit. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (242.)
- **Die krankheitserregenden Bakterien.** Grundtatsachen d. Entzieh., Heilung u. Verhütung d. bakteriellen Infektionskrankheiten d. Menschen. V. Prof. Dr. M. Boehlein. 2. Aufl. M. 33 Abb. (Bd. 307.)
- **s. a.** Abwehrkräfte, Desinfektion, Pilze, Schädlinge.
- Bau u. Tätigkeit d. menschl. Körpers, Einf. in die Physiologie d. Menschen.** V. Prof. Dr. S. Sachs. 4. A. M. 34 Abb. (Bd. 32.)
- Beirichtung und Zerbergung.** Von Dr. E. Leichmann. 3. Aufl. M. 3 Abb. (70.)
- Bienen und Bienenzucht.** Von Prof. Dr. E. Sander. Mit 41 Abb. (Bd. 705.)
- Biochemie, Einführung in die B. in elementarer Darstellung.** Von Prof. Dr. M. Pöb. Mit 12 Fig. 2. Aufl. v. Prof. Dr. S. Friedenthal. (Bd. 352.)
- Biologie, Allgemeine, Einführ. i. d. Hauptprobleme d. organ. Natur.** V. Prof. Dr. S. Mehe. 3. A. M. 44 Abb. (Bd. 130.)
- **Experimentelle, Regeneration, Transplantat u. verwandte Gebiete.** V. Dr. T. Theising. M. 1 Taf. u. 69 Textabb. (337.)
- **siehe a.** Abstammungslehre, Bakterien, Befruchtung, Fortpflanzung, Lebewesen, Organismen, Schädlinge, Tiere, Urtiere.
- Blumen, Unsere Bl. u. Pflanzen im Garten.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)
- **Uns. Bl. u. Pflanzen i. Zimmer.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)
- Blut, Ser., Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen.** Von Prof. Dr. S. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
- Botanik, B. d. praktischen Lebens.** V. Prof. Dr. P. Gisevius. M. 24 Abb. (Bd. 173.)
- **siehe** Blumen, Lebewesen, Bilanzen, Pilze, Schädlinge, Tabak, Wald; Rosenabotanik, Abt. VI.
- Brille f. Auge u. d. Brille.**
- Chemie, Einführung in die allg. Ch. B.** Studienrat Dr. B. Bavinck. 2. Aufl. Mit 24 Fig. (Bd. 582.)
- **Einführg. i. d. organ. Chemie; Naturf. u. Instl. Bilanz.- u. Tierstoff. B.** Studienrat Dr. B. Bavinck. 2. A. 9 Abb. (187.)
- **Einführ. i. d. anorgan. Chemie.** Von Studr. Dr. B. Bavinck. M. 312 Abb. (598.)
- **Einführung i. d. analyt. Chemie.** V. Dr. F. Rüsberg. I. Gang u. Theorie d. Analyse. Mit 15 Fig. II. D. Reaktionen. Mit 4 Fig. (524, 525.)
- **Die künstliche Herstellung von Naturstoffen.** V. Prof. Dr. E. Rüst. (Bd. 674.)
- **Ch. in Küche und Haus.** Von Dr. J. Klein. 4. Aufl. (Bd. 76.)
- **siehe a.** Biochemie, Elektrochemie, Luft, Photoch., Radium; Agrikuturch., Farben, Sprengstoffe, Technik, Chem. Abt. VI.
- Chirurgie, Die, unserer Zeit.** Von Prof. Dr. F. Feßler. Mit 52 Abb. (Bd. 339.)
- Darwinismus, Abstammungslehre und D.** Von Prof. Dr. R. Sesse. 5. Aufl. Mit 40 Textabb. (Bd. 39.)
- Desinfektion, Sterilisation und Konser- vierung.** Von Reg.- u. Med.-Rat Dr. D. Solbrig. M. 20 Abb. i. T. (Bd. 401.)
- Differentialrechnung unter Berücksichtig. d. prakt. Anwendung in der Technik mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen.** Von Studienrat Dr. M. Lindow. 3. A. M. 45 Fig. i. Text u. 161 Aufg. (387.)
- Differentialgleichungen.** Von Studienrat Dr. M. Lindow. (Bd. 589.)
- Dynamik f. Mechanik, Thermodynamik.**
- Eiszeit, Die, u. der vorgesch. Mensch.** Von Geh. Berg. Prof. Dr. G. Steinmann. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 302.)
- Elektrochemie u. ihre Anwendungen.** Von Prof. Dr. K. Arndt. 2. Aufl. Mit 37 Abb. i. T. (Bd. 231.)
- Elektrotechnik, Grundlagen der E.** Von Oberingenieur A. Rottg. 3. Aufl. (391.)
- Energie, D. Lehre v. d. E. B. Oberlehr. A. Stein. 2. A. M. 13 Fig. (Bd. 257.)**
- Entwicklungsgeschichte d. Menschen.** V. Dr. A. Heilborn. 2. Aufl. Mit 61 Abb. (Bd. 388.)
- Ernährung und Nahrungsmittel.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Kunz. 3. Aufl. Mit 6 Abb. i. T. u. 2 Taf. (19.)
- Experimentalchemie f. Luft usw.**
- Experimentalphysik f. Physik.**

- Farben s. Licht u. F.; s. a. Farben Abt. VI.
- Festigkeitslehre. B. Gewerbeschulrat Baugewerkschuldir. Reg.-Baum. A. Schau. 2. Aufl. Mit 119 Figur. (Bd. 829.)  
— siehe auch Mechanik, Statik.
- Flechten siehe Pilze.
- Fortpflanzung. F. und Geschlechtsunterschiede d. Menschen. Eine Einführung in die Sexualbiologie. B. Prof. Dr. S. Portu. 2. Aufl. M. 39 Abb. (Bd. 540.)
- Garten. Der Klein. Von Fachlehrer für Gartenb. u. Kleintierz. Joh. Schneider. 2. Aufl. Mit 30 Abb. (Bd. 498.)  
— s. a. Blumen, Pflanzen; Gartenkunst Abt. IV, Gartenstabenbewegung Abt. VI.
- Geisteskrankheiten. Von Geh. Med.-Rat Dir. Dr. G. Fiberg. 2. Aufl. (151.)
- Genüßmittel siehe Arzneimittel u. Genüßmittel; Tabak Abt. VI.
- Geographie s. Abt. IV.  
— Math. G. f. Erdk. Abt. IV.
- Geologie. Allgemeine. B. Geh. Berggr. Prof. Dr. Fr. Frech. 6 Bde. (Bd. 207/211 u. Bd. 61.) I.: Vulkan einst. und jetzt. 3. Aufl. M. Titelbild u. 78 Abb. II.: Gebirgsbau und Erdbeben. 3., wief. erw. Aufl. M. Titelbild u. 57 Abb. III.: Die Arbeit des fließenden Wassers. 3. Aufl. M. 56 Abb. IV.: Die Bodenbildung, Mittelgebirgsformen u. Arbeit des Ozeans. 3., wief. erw. Aufl. Mit 1 Titelbild u. 68 Abb. V.: Steinkohle, Wästen u. Klima der Vorzeit. 3. Aufl. Von Dr. C. W. Schmidt. M. 39 Abb. VI.: Gletscher einst u. jetzt. 3. Aufl. M. 46 Abb. i. T.  
— s. a. Kohlen, Salzlagertüft Abt. VI.
- Geometrie. Analyt. G. d. Ebene z. Selbstunterricht. B. Geh. Studr. B. Cranz. 2. Aufl. Mit 55 Fig. (Bd. 504.)  
— Einführung i. d. darstellende Geometrie. Von Prof. B. B. Fischer. (Bd. 541.)  
— Geom. Zeichen. Von akad. Zeichenl. A. Schudeis. Mit 172 Abb. i. Text u. a. 12 Taf. (Bd. 568.)  
— s. auch Planimetrie, Trigonometrie.
- Geomorphologie s. Erdkunde Abt. IV.
- Geschlechtskrankheiten, Die, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Bekämpfung, u. Verhütung. Für Gebildete aller Stände bearb. v. Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 5. A. Mit 4 Abb. u. 1 mehrfarb. Taf. (251.)
- Geschlechtsunterschiede s. Fortpflanzung.
- Gesundheitslehre. B. Prof. Dr. S. Buchner. 4. Aufl. Von Obermed.-Rat Prof. Dr. M. v. Gruber. M. 26 Abb. (Bd. 1.)  
— G. für Frauen. Von Dir. Prof. Dr. K. Baisch. 2. Aufl. M. 11 Abb. (538.)  
— Wie erhalte ich Körper und Geist gesund? Von Geh. Sanitätsrat Prof. Dr. F. A. Schmidt. (Bd. 600.)  
— s. a. Abwehrkräfte, Bakterien, Selbstüb.
- Graph. Darstellung. Die. B. Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 2. Aufl. Mit 139 Figuren. (Bd. 437.)
- Graphisches Rechnen. Von Oberlehrer O. Bröhl. Mit 164 Fig. i. T. (Bd. 708.)
- Haushalt siehe Batterien, Chemie, Desinfektion, Naturwissenschaften, Pflanzl.
- Haustiere. Die Stammesgeschichte unserer S. Von Prof. Dr. C. Keller. 2. Aufl. Mit 29 Abb. i. Text. (Bd. 252.)  
— s. a. Kleintierzucht, Tierzucht, Abt. VI.
- Herz, Blutgrüße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. S. Kofin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
- Higiene i. Schulhigiene, Stimme.
- Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. C. Erdmner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
- Immunitätslehre s. Abwehrkräfte d. Körper.
- Infinitesimalrechnung. Einführung in die S. B. Prof. Dr. G. Kowalewski. 3. Aufl. Mit 19 Fig. (Bd. 197.)
- Integralrechnung unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlr. Beisp. und Aufgaben vers. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. M. 43 Fig. u. 200 Aufg. (673.)
- Kalender. Der. Von Prof. Dr. W. F. Bislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)
- Kälte, Die. Wesen, Erzeug. u. Verwert. Von Dr. S. Alt. 45 Abb. (Bd. 311.)
- Kaufmännisches Rechnen s. Abt. VI.
- Kinematographie s. Abt. VI.
- Konservierung siehe Desinfektion.
- Korallen u. and. Gesteinbild. Tiere. B. Prof. Dr. W. May. Mit 45 Abb. (Bd. 231.)
- Kosmetik. Ein kurzer Abriss der ärztlichen Verschönerungskunde. Von Dr. F. Sander. Mit 10 Abb. im Text. (Bd. 489.)
- Landmessung s. Kartenkunde Abt. IV.
- Lebewesen. Die Beziehungen der Tiere und Pflanzen zueinander. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. 2. Aufl. I. Der Tiere zueinander. M. 64 Abb. II. Der Pflanzen zueinander u. zu d. Tieren. Mit 68 Abb. (Bd. 426/427.)  
— s. a. Biologie, Organismen, Schädlinge.
- Leib und Seele in ihrem Verhältnis zueinander. Von Dr. phil. et med. G. Sommer. (Bd. 702.)
- Leibesübungen, Die, und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Von Prof. Dr. R. Bander. 4. Aufl. M. 20 Abb. (13.)  
— s. auch Sport, Turnen.
- Licht, Das, u. d. Farben. Einführung in die Optik. Von Prof. Dr. J. Graeb. 4. Aufl. Mit 100 Abb. (Bd. 17.)
- Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorräge aus d. Gebiete d. Experimentalkemie. B. Geh. Reg.-Rat Dr. R. Blochmann. 4. Aufl. M. 115 Abb. (Bd. 5.)
- Luftstoff, D., u. f. Verwertung. B. Prof. Dr. K. Kaiser. 2. A. M. 13 Abb. (318.)
- Masse und Mellen. Von Dr. W. Bloch. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)
- Materie, Das Wesen d. M. B. Prof. Dr. G. Mie. I. Moleküle und Atome. 4. A. Mit 25 Abb. II. Weltäther und Materie. 4. Aufl. Mit Fig. (Bd. 58/59.)



**Mathematik. Einführung in die Mathematik.** Von Studienrat B. Mendelssohn. Mit 42 Fig. (Bd. 503.)

— **Math. Formelsammlung. Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik.** Von Prof. Dr. S. Jakob. I. Arithmetik u. Algebra. II. Geometrie. (646/47.)

— **Naturwissenschaft. Mathem. u. Medizin i. klass. Altertum.** V. Prof. Dr. Joh. V. Heiberg. 2. Aufl. M. 2 Fig. (370.)

— **Praktische M.** Von Prof. Dr. R. Neundorff. I. Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufmännisches Rechnen i. tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verb. M. 29 Fig. i. T. u. 1 Taf. II. Geom. Zeichnen. Projektionsl. Flächenmessung. Körtermessung. M. 133 Fig. (341, 526.)

— **Mathemat. Spiele.** V. Dr. B. Ahrens. 4. Aufl. M. Tisch. u. 78 Fig. (Bd. 170.)

— **f. a. Arithmetik. Differentialgleichung. Differentialrechnung. Vektorrechnung. Geometrie. Graphisches Rechnen. Infinitesimalrechnung. Integralrechnung. Perspektiv. Planimetrie. Projektionslehre. Spiele. Trigonometrie.**

**Mechanik.** V. Prof. Dr. G. Samuel. 3 Bde. I. Grundbegriffe der M. Mit 38 Fig. II. M. d. festen Körper. III. M. d. flüss. u. luftförm. Körper. (Bd. 684/686.)

— **Aufgaben aus d. techn. Mechanik für den Schul- u. Selbstunterricht.** V. Prof. R. Schmitt. I. Statik u. Festigkeitsl. 2. Aufl. Aufg. u. Lsg. II. Dynamik u. Hydraulik. 140 Aufgab. u. Lösung. m. zahlr. Figur. i. Text. (Bd. 558, 559.)

— siehe auch Statik, Festigkeitslehre.

**Medizin i. klass. Altertum f. Mathematik.** Meer. Das M., f. Erforsch. u. f. Leben. Von Prof. Dr. D. Fatio. 3. Aufl. M. 40 F. (Bd. 30.)

**Mensch u. Erde.** Skizzen v. d. Wechselbezieh. zwischen beiden. Von Geh. Rat Prof. Dr. A. Kirchhoff. 4. Aufl. (Bd. 31.)

— **Natur u. Mensch** siehe Natur.

— **f. a. Eiszeit, Entwicklungsgech., Urzeit.**

**Menschl. Körper. Bau u. Tätigkeit d. menschl. K.** Einführ. i. d. Physiol. d. M. V. Prof. Dr. S. Sachs. 4. Aufl. M. 34 Abb. (32.)

— **f. auch Anatomie, Arbeitsleistungen, Auge, Blut, Fortpflanzg., Herz, Nervensystem, Sinne, Vererbungen.**

**Mikroskop. Das. Seine wissenschaftlichen Grundlagen und seine Anwendung.** Von Dr. A. Ehringhaus. Mit 76 Abb. (Bd. 678.)

**Mikrotechnik, Einführung in die M.** Von Dr. B. Franz und Dr. S. Schneider. (Bd. 765.)

**Moleküle f. Materie.**

**Rond. Der.** Von Prof. Dr. F. Franz. 2. Aufl. Mit 34 Abb. (Bd. 90.)

**Nahrungsmittel f. Ernährung u. N.**

**Natur u. Mensch.** V. Direkt. Prof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abb. (Bd. 458.)

**Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen N.** Einführung in die Physik. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 4. Aufl. Mit 71 Fig. (Bd. 40.)

**Naturphilosophie.** Von Prof. Dr. F. M. Berwien. 2. Aufl. (Bd. 491.)

**Naturwissenschaft. Religion u. N. in Kampf u. Frieden.** V. Pfarrer Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)

— **N. und Technik. Am tausenden Webster d. Zeit. Übersicht üb. d. Wirkungen d. Naturv. u. Technik a. d. ges. Kulturleben.** V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. B. Launhardt. 3. Aufl. M. 3 Abb. (23.)

— **N., Math. u. Medizin i. klass. Altertum.** V. Prof. Dr. J. V. Heiberg. 2. Aufl. M. Mit 2 Fig. (Bd. 370.)

**Nerven. Vom Nervensystem, sein. Bau u. sein. Bedeutung für Leib u. Seele im gesund. u. krank. Zustande.** V. Prof. Dr. R. Sander. 3. Aufl. M. 27 Abb. (Bd. 48.)

— siehe auch Anatomie.

**Optik. Die opt. Instrumente. Lupe. Mikroskop, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen verwandte Instr.** V. Prof. Dr. M. v. Rohr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (88.)

— siehe auch Auge, Kinemat., Licht u. Farbe, Mikrosk., Spektroskopie, Strahlen.

**Organismen. D. Welt d. D. In Entwickl. u. Zusammeh. dargest.** V. Oberstudient. Prof. Dr. R. Lampert. M. 52 Abb. (236.)

**Paläozoologie** siehe Tiere der Vorwelt.

**Perspektive. Die, Grundzüge d. P. nebst Anwendung.** V. Prof. Dr. R. Doelemann. 2. verb. Aufl. M. 91 Fig. u. 11 Abb. (510.)

**Pflanzen. Die fleischfress. Pfl.** V. Prof. Dr. A. Wagner. Mit 82 Abb. (Bd. 344.)

— **Auf. Blumen u. Pfl. i. Garten.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 69 Abb. (Bd. 360.)

— **Auf. Blumen u. Pfl. i. Zimmer.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (Bd. 359.)

— **Verdegang u. Züchtungsgrundlagen d. landw. Kulturpflanzen.** V. Prof. Dr. A. Sade. Mit 156. (Bd. 766.)

— **f. auch Botanik, Garten, Gebewesen, Pilze, Schädlinge, Tabak; Kolonialbotanik. Abt. VI.**

**Pflanzenphysiologie.** V. Dir. Prof. Dr. S. Molisch. Mit 63 Fig. (Bd. 569.)

**Photochemie.** V. Prof. Dr. G. Kimmell. 2. Aufl. M. 23 Abb. i. T. u. a. 1 Taf. (227.)

**Photogrammetrie f. Kartenkunde** Abt. IV. **Photographie f. Abt. VI.**

**Physik. Verdegang d. mod. Ph. V. Studient.** Dr. S. Keller. M. 13 Fig. (343.)

— **Experimentalphysik. Gleichgewicht u. Bewegung.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Börnstein. M. 90 Abb. (371.)

**Physik. Ph. i. Klasse u. Haus.** V. Student. S. Speikamp. 2. Aufl. Mit 54 Abb. (Bd. 478.)

— **Große Physiker.** Von Prof. Dr. F. A. Schulze. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (324.)

— **f. a. Energie, Materie, Mechanik, Naturlehre, Optik, Relativitätstheorie, Wärme.**

- Blüte, Die.** Von Dr. A. Eichinger. Mit 64 Abb. (Bd. 334.)
- **Blüte und Flechten.** Von Dr. W. Nienburg. (Bd. 675.)
- **f. auch Batterien.**
- Planeten, Die.** Von Prof. Dr. B. Peter. 2. Aufl. Von Observator Dr. S. Naumann. Mit 16 Fig. (Bd. 240.)
- Planimetrie z. Selbstunterr.** B. Geh. Studr. P. Cranz. 2. Aufl. M. 94 Fig. (340.)
- Praktische Mathematik f. Mathematik.**
- Projektionslehre.** In kurzer leichtfaßlicher Darstellung f. Selbstunterr. u. Schulgebr. Von atab. Zeichenl. A. Schudeisich. Mit 208 Abb. i. Text. (Bd. 564.)
- Psychopathologie** siehe Seelenleben.
- Radium, Das, u. d. Radioaktivität.** Von Prof. Dr. M. Centnerzwer. 2. Aufl. Mit 33 Abbildungen. (Bd. 405.)
- Rechenmaschinen, Die, und das Maschinenrechnen.** Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. R. Lenz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
- Rechenvorteile.** Lehrbuch der R. Schnellrechnen und Rechenkunst. Von Ing. Dr. J. Wolff. M. zahlr. Abungsbeisp. (739.)
- Relativitätstheorie.** Einführ. in die 2. verb. Aufl. M. 18 Fig. B. Dr. W. Bloch. (618.)
- Röntgenstrahlen.** D. N. u. ihre Anwendg. B. Dr. med. G. Buch. M. 85 Abb. i. T. u. auf 4 Tafeln. (Bd. 556.)
- Säuglingspflege.** Von Dr. E. Kobrak. Mit 20 Abb. (Bd. 154.)
- Schachspiel, Das, und seine strategischen Prinzipien.** B. Dr. M. Lange. 3. Aufl. Mit 2 Bildn., 1 Schachbretttafel u. 43 Diagrammen. (Bd. 281.)
- Schäblinge, Die, im Tier- u. Pflanzenreich u. i. Bekämpf.** B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Eckstein. 3. Aufl. M. 36 Fig. (18.)
- Schnellrechnen f. Rechenvorteile.**
- Schulhygiene.** Von Reg.-Rat Prof. Dr. E. Burgerstein. 4. Aufl. Mit 24 eingedr. Abb. (Bd. 96.)
- Seelenleben, Die krankhaften Erscheinungen des S. Ullg. Psychopathologie.** Von Dr. phil. et med. E. Stern. (764.)
- Sexualbiologie f. Fortpflanzung.**
- Sexualität.** B. Prof. Dr. S. E. Timerding. (Bd. 592.)
- Sinne d. Mensch., D. Sinnesorgane u. Sinnesempfindungen.** B. Hofrat Prof. Dr. F. Kreibitz. 3. Aufl. M. 30 Abb. (27.)
- Sonne, Die.** Von Prof. Dr. A. Krause. Mit 64 Abb. (Bd. 357.)
- Spektroskopie.** Von Prof. Dr. B. Grebe. 2. Aufl. M. 63 Fig. i. T. u. a. 2 Doppelst. (284.)
- Spiele, Führer durch die Welt der Sp.** Von Dir. Pastor F. Fahn. (Bd. 758.)
- **f. auch Mathem. Spiele, Schachspiel.**
- Sport.** Von Generalsekr. E. Die m. Mit 1 Titelb. u. 4 Spielpl. i. T. (Bd. 551.)
- Sprache, Die menschliche Sprache, Ihre Entwicklung beim Kinde, ihre Gebrechen und deren Heilung.** Von Lehrer R. Nidderl. Mit 4 Abb. (Bd. 586.)
- Sprache f. a. Rhetorik, Sprache.** Abt. III. Statist. B. Gewerbeschulrat Baugewerkschuldir. Reg.-Baum. U. Schau. 2. Aufl. Mit 112 Figur. (Bd. 828.)
- **siehe auch Fertigkeitenlehre, Mechanik.**
- Sterilisation** siehe Desinfektion.
- Stickstoff f. Luftstickstoff.**
- Stimme, Die menschl. St. u. ihre Hygiene.** B. Geh. Med.-Rat Prof. Dr. W. S. Gerber. 3. Aufl. M. 21 Abb. (136.)
- Strahlen, Sichtbare u. unsichtb. St.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. B. R. nstein. 3. Aufl. v. Prof. Dr. E. Regener. Mit 71 Abb. (Bd. 64.)
- Suggestion, Hypnotismus und Suggestion.** B. Dr. E. Trömmner. 3. Aufl. (Bd. 199.)
- Schwaffer-Plankton, Das.** B. Prof. Dr. O. Zacharias. 2. Aufl. 57 Abb. (Bd. 156.)
- Tabak, Der.** Von Zak. Wolff. 2. Aufl. Mit 17 Abb. i. T. (Bd. 416.)
- Thermodynamik f. Abt. VI.**
- Tiere, L. der Formwelt.** Von Prof. Dr. D. Abel. Mit 31 Abb. (Bd. 399.)
- **Die Fortpflanzung der T.** B. Prof. Dr. R. Goldschmidt. Mit 77 Abb. (Bd. 253.)
- **Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere.** Von Prof. Dr. D. Maas. Mit 11 Karten und Abb. (Bd. 139.)
- **Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus).** Von Dr. F. R. Knauer. Mit 37 Fig. (Bd. 148.)
- **f. Aquarium, Bakterien, Bienen, Haustiere, Korallen, Lebewes., Schäblinge, Urtiere, Vogelleb., Vogelzug, Wirbeltiere.**
- Tierzucht** siehe Abt. VI: Kleintierzucht, Tierzüchtung.
- Trigonometrie, Ebens, z. Selbstunterr.** B. Geh. Studienr. P. Cranz. 3. Aufl. Mit 50 Fig. (Bd. 431.)
- **Sphärische Tr. z. Selbstunterr.** Von Geh. Studienr. P. Cranz. Mit 27 Figur. (Bd. 605.)
- Tuberkulose, Die, Wesen, Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung.** Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 3. Aufl. M. 1 Taf. u. 8 Fig. (Bd. 47.)
- Turnen.** Von Prof. F. Eckardt. Mit 1 Bildnis Jahns. (Bd. 583.)
- **f. auch Leibesübungen.**
- Urtiere, Die.** B. Prof. Dr. R. Goldschmidt. 2. Aufl. M. 44 Abb. (Bd. 160.)
- Urzeit, Der Mensch d. u. Vier Vorlesung, aus der Entwicklungsgeschichte des Menschengeschlechts.** Von Dr. A. Seilborn. 3. Aufl. Mit 47 Abb. (Bd. 62.)
- Vektorrechnung, Einf. i. d. B.** Von Prof. Dr. F. Jung. (Bd. 668.)
- Verbildungen, Körperl., i. Kindesalt. u. ihre Verh.** B. Dr. M. Davids. M. 26 Abb. (321.)

Vererbung. Erp. Abstammgs.- u. B.-Lehre. Von Prof. Dr. E. Lehmann. 2. Aufl. Mit 27 Abbildungen. (Bd. 379.)  
 — Geistige Veranlagung u. B. B. Dr. phil.-et med. G. Sommer. 2. Aufl. (512.)  
 — siehe auch Vererbung.  
 Vogelleben. Deutsches. Zugleich als Exkursionsbuch für Vogelreunde. B. Prof. Dr. A. Voigt. 2. Aufl. (Bd. 221.)  
 Vogelzug und Vogelschutz. Von Dr. W. A. Eckardt. Mit 6 Abb. (Bd. 218.)  
 Wald. Der dtische. B. Prof. Dr. G. Hausrat. 2. u. W. Bilderanz. u. 2 R. (153.)  
 Wärme. Die Lehre v. d. W. B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Börnstein. M. 33 Abb. 2. Aufl. v. Prof. Dr. A. Sigand. (172.)  
 — f. a. Luft; Wärmekraftmasch., Wärmelehre, techn. Thermodynamik Abt. VI.  
 Wasser. Das. Von Geh. Reg.-Rat Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)  
 Weidwerk. D. dtische. B. Forstinst.-G. Arch. v. Norden (Schl.) M. Titelv. (Bd. 436.)  
 Weltall. Der Bau des B. Von Prof. Dr. P. Scheiner. 5. Aufl. Von Oberv. Prof. Dr. B. Guthnid. M. 28 Fig. (24.)  
 Weltalter f. Materie.

Weltbild. Das astronomische B. im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. I. B. Altertum bis a. Kreuzzeit. 3. Aufl. Mit 19 Abb. II. Moderne Astronomie. 2. Aufl. Mit 9 Fig. i. Text u. 1 Taf. (Bd. 444/45.)  
 — siehe auch Astronomie.  
 Weltentstehung. Entstehung d. B. u. d. Erde nach Sage u. Wissensch. B. Prof. Dr. M. B. Weinstein. 3. Aufl. (Bd. 223.)  
 Weltuntergang in Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. S. Oppenheim u. Prof. Dr. R. Sieglitz. (Bd. 720.)  
 Wetter. Unser B. Einführ. i. d. Klimatol. Deutschl. B. Dr. R. Hennig. 2. Aufl. Mit 48 Abb. (Bd. 349.)  
 — Einführung in die Wetterkunde. Von Prof. Dr. A. Weber. 3. Aufl. Mit 28 Abb. u. 3 Taf. (Bd. 55.)  
 Wirbeltiere. Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane der B. Von Prof. Dr. B. Lubosch. Mit 107 Abb. (Bd. 282.)  
 Zellen- und Gewebelehre siehe Anatomie des Menschen, Biologie.  
 Zoologie f. AbstammungsL., Aquarium, Bienen, Biologie, Schädlinge, Tiere, Urtiere, Vogelleben, Vogelzug, Weidwerk, Wirbeltiere.

## VI. Recht, Wirtschaft und Technik.

Agrilkulturchemie. Von Dr. B. Frische. 2. verb. Aufl. Mit 21 Abb. (Bd. 314.)  
 Angestellte siehe Kaufmännische A.  
 Antike Wirtschaftsgeschichte. Von Dr. O. Neurath. 2. umgearb. Aufl. (258.)  
 — siehe auch Antikes Leben Abt. IV.  
 Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. B. Geh. Hofrat Prof. Dr. O. v. Zwiebined.-Südenhorst. 2. Aufl. (78.)  
 Arbeitsleistungen des Menschen. Die Einführ. in d. Arbeitsphysiologie. B. Prof. Dr. S. Boruttan. M. 14 Fig. (Bd. 539.)  
 — Berufswahl, Vergabung u. A. in ihren gegenseitigen Beziehungen. Von W. J. Ruttman. 2. u. M. 7 Abb. (Bd. 522.)  
 Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)  
 Baukunde f. Eisenbetonbau.  
 Baukunst siehe Abt. III.  
 Befruchtungswesen. Von Ing. Dr. S. Bur. Mit 54 Abb. (Bd. 433.)  
 Berufswahl siehe Arbeitsleistungen.  
 Bevölkerungswesen. Von Prof. Dr. B. von Bortkiewicz. (Bd. 670.)  
 Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 332.)  
 Bilanz f. Buchhaltung u. B.  
 Brauerei f. Bierbrauerei.  
 Buch. Wie ein B. entsteht. B. Prof. A. W. Unger. 5. Aufl. M. 9 Taf. u. 26 Abb. im Text. (Bd. 175.)  
 — f. a. Schrift- u. Buchwesen Abt. IV.

Buchhaltung u. Bilanz, Kaufm., und ihre Beziehungen z. buchhalter. Organisation, Kontrolle u. Statistik. B. Dr. B. Gerstner. 3. Aufl. M. 4 schemat. Darst. (507.)  
 — Buchhalterische Organisation (Selbstkostenkontrollbuchführung). Von Dr. B. Gerstner. [In Fortb. 1921.]  
 Dampffessel siehe Feuerungsanlagen.  
 Dampfmaschine, Die. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Wirkungsweise d. Dampfes i. Kessel u. i. d. Masch. 4. Aufl. M. 37 Abb. (393.) II: Ihre Gestalt u. Verwend. 3. Aufl. Von Privatdoz. Dr. F. Schmidt. M. 94 Abb. (394.)  
 Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- und Med.-Rat Dr. O. Solbrig. Mit 20 Abb. (Bd. 401.)  
 Drähte u. Kabel, ihre Anfertigung u. Anwend. i. d. Elektrotech. B. Ober-Post-Inspr. S. Frid. 2. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 285.)  
 Dynamik f. Mechanik, Thermodynamik.  
 Eisenbahnwesen. Das. Von Eisenbahnbau-u. Betriebsinspr. a. D. Dr.-Ing. E. Hiebermann. 3. verb. u. M. 62 Abb. (144.)  
 Eisenbetonbau. Der. B. Dipl.-Ing. E. Salomovici. 2. Aufl. Mit 82 Abb. i. T. sowie 6 Rechnungsbeisp. (Bd. 275.)  
 Eisenhüttenwesen. Das. Von Geh. Berggr. Prof. Dr. B. Hedding. 6. Aufl. v. Bergass. F. W. Hedding. M. Abb. (20.)  
 Elektrische Kraftübertragung, Die. B. Ing. P. Röhn. 2. Aufl. M. 133 Abb. (Bd. 424.)  
 — Maschinen. Von Dipl.-Ing. M. Lim-schid. (Bd. 774.)  
 Elektrochemie. Von Prof. Dr. R. Arnst. 2. Aufl. Mit 37 Abb. i. T. (Bd. 234.)

- Elektrotechnik. Grundlagen d. E. B. Obering.** A. Drotth. 3. A. M. 70 Abb. (391.)  
— f. auch Drähte und Kabel, Maschinen, Telegraphie.
- Erbrecht. Testamentserrichtung und E. von Prof. Dr. F. Leonhard.** (Bd. 429.)
- Ernährung u. Nahrungsmittel f. Abt. V. Farben u. Farbstoffe. J. Erzeug. u. Verwend.** B. Dr. A. Zart. 31 Abb. (Bd. 483.)  
— siehe auch Licht Abt. V.
- Fernsprechtechnik f. Telegraphie.**
- Feuerungsanlagen. Industr., u. Dampfessel. 2. Aufl. in Vorbereit. 1921.** (Bd. 348.)
- Fördereinrichtungen. von Obering. D. Bechstein.** (Bd. 726.)
- Frauenbewegung siehe Abt. IV.**
- Funkentelegraphie siehe Telegraphie.**
- Fürsorge f. Kriegsbeschädigtenfürs., Kinderfürsorge.** B. Prof. Dr. Chr. J. Klumker. (Bd. 620.)
- Kinematographie. von Dr. S. Lehmann. 2. Aufl. B. Dr. W. Merté. Mit 68 zum Teil neuen Abb.** (Bd. 358.)
- Klein- u. Strakenbahnen. Die. B. Obering. a. D. Oberlehrer A. Liebmann. Mit 85 Abb.** (Bd. 322.)
- Kleintierzucht. Die. von Fachl. f. Gartenbau und Kleintierzucht Joh. Schneider. Mit 59 Fig. i. T. u. a. 6 Taf.**  
— siehe auch Tierzucht. (Bd. 604.)
- Kohlen. Unsere. B. Bergass. P. Kukul. 2. verb. Aufl. Mit 49 Abb. i. Text u. 1 Taf.** (Bd. 396.)
- Kolonialbotanik. von Prof. Dr. F. Zober. Mit 21 Abb.** (Bd. 184.)
- Kolonisation. Innere. von A. Brenning.** (Bd. 261.)
- Konservierung siehe Desinfektion.**
- Konjunktionsgesellschaft. Die. von Prof. Dr. F. Staudinger. 2. Aufl. (Bd. 222.)**  
— f. auch Mittelstandsbevægung, Wirtschaftliche Organisationen.
- Kraftanlagen siehe Dampfmaschine, Feuerungsanlagen und Dampfessel, Wärmekraftmaschine, Wasserkraft.**
- Kraftübertragung. Die elekt. B. Ing. B. Böhn. 2. Aufl. M. 133 Abb. (Bd. 424.)**
- Krieg. Kulturgeschichte d. K. B. Prof. Dr. K. Weule, Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Bethe, Prof. Dr. B. Schmeidler, Prof. Dr. A. Doren, Prof. D. B. Gerre.** (Bd. 561.)
- Kriegsbeschädigtenfürsorge. In Verbindung mit Med.-Nat. Oberstabsarzt u. Chefarzt Dr. Rebenitsch, Gewerbeschuldir. S. Bad, Direktor des Städt. Arbeitsamts Dr. B. Schlotter herzog, v. Prof. Dr. E. Kraus, Leit. v. Städt. Fürsorgeamts für Kriegshinterblieb. in Frankfurt a. M. M. 2 Abbildg. (523.)**
- Kriegsschiffe. Unsere. B. Geh. Marinebau. a. D. E. Krieger. 2. Aufl. v. Marinebau. Fr. Schürer. M. 62 Abb. (389.)**

- Kriminalistik, Moderne.** Von Amtsrichter Dr. A. Sellwig. N. 18 Abb. (Bd. 476.)  
— i. a. Verbrechen, Verbrecher.
- Landwirtschaft, Die deutsche.** B. Dr. W. Claßen. 2. Aufl. Mit 15 Abb. u. 1 Karte. (Bd. 215.)  
— i. auch Agrilkulturchemie, Kleintierzucht, Luftkudhofi, Tierzucht; Hausiere, Pflanzen, Tierkunde. Abt. V.
- Landwirtschaftl. Maschinenkunde.** B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. G. Fischer. 2. Aufl. Mit 64 Abbildungen. (Bd. 316.)
- Luftfahrt.** Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. v. Dr. Fr. Guth. N. 60 Abb. (Bd. 300.)
- Luftstoff, Der, u. f. Verm.** B. Prof. Dr. R. Kaiser. 2. Aufl. N. 13 Abb. (313.)
- Marr, Karl.** Versuch e. Würdigung. B. Prof. Dr. R. Wilbrandt. 4. Aufl. (621.)  
— i. auch Sozialismus.
- Maschinen f. Dampfmaschine, Elektrische Maschinen, Lebesuge.** Landwirtschaftl. Maschinenkunde, Wärmekraftmaschinen, Wasserkraftausnutzung, Fördereinrichtg.
- Maschinenelemente.** Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. Aufl. N. 175 Abb. (Bd. 301.)
- Mäße und Messen.** Von Dr. W. Bloß. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)
- Mechanik.** B. Prof. Dr. G. Samel. 3 Bde. I. Grundbegriffe d. M. Mit 38 Fig. II. M. der festen Körper. III. M. d. Flüss. u. luftigen Körper. (Bd. 684/686.)  
— Aufgaben aus der technischen M. f. d. Schul- u. Selbstunterr. B. Prof. N. Schmitt. M. zahlr. Fig. I. Statik u. Festigkeitslehre. 2. Aufl. M. zahlr. Aufg. u. Lösungen. II. Dynamik u. Hydraulik. 140 Aufg. u. Löf. (Bd. 558/559.)
- Metallurgie.** Von Dr.-Ing. R. Nügel. I. Leicht- u. Edelmetalle. II. Schwermetalle. (Bd. 446/447.)
- Miete.** Die, nach d. BGB. Ein Handb. für Juristen, Mieter u. Vermiet. B. Justizrat Dr. M. Strauß. 2. Aufl. (194.)
- Milch, Die, und ihre Produkte.** Von Dr. A. Reib. Mit 16 Abb. (Bd. 362.)
- Mittelstandsbewegung, Die moderne.** Von Dr. L. Müffelmann. (Bd. 417.)  
— siehe Konsumgenoff., Wirtschaftl. Org.
- Nahrungsmittel f. Abt. V.**
- Naturwissensch. u. Technik.** Am laus. Weckuhl d. Zeit. Übers. üb. d. Wirkgn. d. Entw. d. R. u. T. a. d. ges. Kulturleb. B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 3 Abb. (Bd. 23.)
- Nautik.** B. Dir. Dr. F. Müller. 2. Aufl. Mit 64 Fig. i. T. u. 1 Seelarte. (255.)
- Optischen Instrumente, Die.** Lupe, Mikroskop, Fernrohr, photog. Objektiv u. Linsen veru. Instr. Von Prof. Dr. M. v. Rohr. 3. Aufl. N. 89 Abb. (Bd. 88.)
- Organisationen, Die wirtschaftlichen.** Von Prof. Dr. E. Leberer. (Bd. 428.)
- Stimart, Die, Eine Einführ. i. d. Problem. ihrer Wirtschaftsgesch. Hrsq. von Prof. Dr. W. Mitscherlich. (Bd. 331.)**
- Patente u. Patentrecht f. Gewerbl. Rechtsch.**
- Perpetuum mobile, Das.** B. Dr. Fr. J. Hat. Mit 38 Abb. (Bd. 462.)
- Photochemie.** Von Prof. Dr. G. Krummell. 2. Aufl. Mit 23 Abb. i. Text u. auf 1 Tafel. (Bd. 227.)
- Photographie, Die, ihre wissenschaftl. Grundl. u. i. Anwendg.** B. Dipl.-Ing. Dir. Dr. O. Brelinger. 2. Aufl. N. 64 Abb. (414.)  
— Die künstlerische Ph. Ihre Entwicklung, ihre Probleme, ihre Bedeutung. Von Studienrat Dr. W. Warstat. 2. verb. Aufl. Mit Bildersamh. (Bd. 410.)
- Postwesen, Das.** Von Oberpostrat O. Sieblist. 2. Aufl. (Bd. 182.)
- Rechenmaschinen, Die, und das Maschinenrechnen.** Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. R. Lenz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
- Rechnen** siehe lausm. Rechnen.
- Recht, Rechtsfragen des täglichen Lebens in Familie und Haushalt.** Von Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 219.)  
— Rechtsprobleme, Mod. B. Geh. Justizr. Prof. Dr. F. Rohler. 2. Aufl. (Bd. 128.)  
— i. auch Erbrecht, Gewerbl. Rechtsschub, Kaufmann, Kaufm. Angest., Kriminalistik, Miete, Urheberecht, Verbrechen, Verfallungsrecht, Zivilprozeßrecht.
- Reichsverfassung** siehe Verfassung.
- Salzlagerrstätten, Die deutschen, Ihr Vorkommen, ihre Entstehung und die Bewertung ihrer Produkte in Industrie und Landwirtschaft.** Von Dr. E. Riemann. Mit 27 Abb. (Bd. 407.)  
— siehe auch Geologie Abt. V.
- Schmuckl., Die, u. d. Schmucksteinindustrie.** B. Dr. A. Epyler. N. 64 Abb. (Bd. 376.)
- Soziale Bewegungen u. Theorien d. z. mod. Arbeiterbew.** B. G. M. a. i. e. r. 8. Aufl. (Bd. 20)  
— i. a. Arbeiterchug u. Arbeiterversicher.
- Sozialismus, Die gr. Sozialisten.** Von Dr. Fr. Rucke. 4. Aufl. I. Simon, Fourier, Bronthon. II. Saint-Simon, Pecqueur, Buchez, Blanc, Robbertus, Weitling, Marx, Poffalle. (269, 270.)  
— i. auch Marx; Rom, Soz. Kämpfe i. alt. R. Abt. IV.
- Spinnerei, Die.** Von Dir. Prof. M. Behmann. Mit 35 Abb. (Bd. 338.)
- Sprengstoffe, Die, ihre Chemie u. Technologie.** B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Bledermann. 2. Aufl. N. 12 Fig. (286.)  
Staat siehe Abt. IV.
- Statik.** B. Gewerkschulrat Reg.-Baum. Baugewerkschuldir. A. Schau. 2. Aufl. Mit 112 Fig. t. Text. (Bd. 828.)  
— i. auch Festigkeitslehre, Mechanik.

- Statistik. B. Prof. Dr. S. Schott. 2. Aufl. (Bd. 442.)
- Steuern. Die neuen Reichsst. Von Rechtsanwält Dr. E. Dedek. (Bd. 767.)
- Strafe und Verbrechen. Geschichte u. Organist. d. Gefängniswes. B. Strafanstaltsdir. Dr. med. P. Pollig. (Bd. 323.)
- Straßenbahnen. Die Klein- u. Straßenb. Von Oberingenieur a. D. Oberlehrer A. Liebmann. M. 85 Abb. (Bd. 322.)
- Tabak. Der Anbau, Handel u. Verarbeitung. B. Jac. Wolf. 2., verb. u. ergänzte Aufl. Mit 17 Abb. (Bd. 416.)
- Technik. Einführung in d. T. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. S. Lorenz. M. 77 Abb. im Text. (Bd. 729.)
- Die chemische T. Von Dr. A. Müller. 2. Aufl. Mit 165. (Bd. 191.)
- Techn. Zeichnen i. Zeichnen.
- Telegraphie. I. Telegraph.- u. Fernsprechw. B. Oberpost. D. Sieblist. 2. Aufl. (183.)
- Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. B. Oberpost-Inspr. G. Brück. 2. Aufl. Mit 65 Abb. (Bd. 235.)
- Die Funkentelegr. B. Telegr.-Dir. G. Thurn. 5. Aufl. M. 51 Abb. (Bd. 167.)
- siehe auch Drähte und Kabel.
- Testamentserrichtung und Erbrecht. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)
- Thermodynamik. Praktische Aufgaben u. Beispiele zur technischen Wärmelehre. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. R. Vater. Mit 40 Abb. i. Text u. 3 Taf. (Bd. 596.)
- siehe auch Wärmelehre.
- Tierzüchtung. Von Tierzuchtdirektor Dr. G. Wilsdorf. 2. Aufl. M. 23 Abb. auf 12 Taf. u. 2. Fig. i. T. (Bd. 369.)
- siehe auch Kleintierzucht.
- Uhr. Die Grundlagen u. Technik d. Zeitmessg. B. Prof. Dr.-Ing. S. Bod. 2., umgearb. Aufl. Mit 55 Abb. i. T. (21.)
- Arheberrecht. D. Recht a. Schrift- u. Kunstw. B. Rechtsanw. Dr. R. Nothmann. (435.)
- siehe auch gewerblich. Rechtsschub.
- Verbrechen. Straf- und V. Geschichte u. Organisation d. Gefängniswesens. B. Strafanst.-Dir. Dr. med. P. Pollig. (Bd. 323.)
- Moderne Kriminalistik. B. Amtsrichter Dr. A. Hellwig. M. 18 Abb. (Bd. 476.)
- Verbrecher. Die Psychologie des V. (Kriminalpsych.) B. Strafanstaltsdir. Dr. med. P. Pollig. 2. Aufl. M. 5 Diagr. (Bd. 248.)
- Verfassung. Die neue Reichsverfassung. B. Privatdoz. Dr. D. Bühler. (Bd. 762.)
- siehe auch Steuern, die neuen Reichsst.
- Verfassung, Verfassung u. Verwalt. d. Deutsch. Städte. Von Dr. M. Schmid. (466.)
- Deutsch. Verfassung. I. geschichtl. Entw. B. Prof. Dr. E. Dubrich. 2. Aufl. (Bd. 80.)
- Deutsche Verfassungsgeschichte vom Anfange des 19. Jahrh. b. z. Gegenw. B. Prof. Dr. R. Stimming. (639.)
- Verkehrsrecht u. Deutschl. seit 1800 fortges. b. z. Gegenw. Von Geh. Hofr. Prof. Dr. W. Loß. 4., verb. Aufl. (15.)
- Versicherungswesen. Grundzüge des V. (Privatversicher.). Von Prof. Dr. A. Manes. 3., verbänd. Aufl. (Bd. 105.)
- Volkswirtschaftslehre. Grundzüge der V. Von Prof. Dr. G. Jahn. (Bd. 593.)
- Wald. Der deutsche V. Prof. Dr. Hausrat. 2. Aufl. Wiberanz. u. 2 Kart. (153.)
- Wärmekraftmaschinen. Die neueren. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Einführung in die Theorie u. d. Bau d. Gasmasch. 5. Aufl. M. 41 Abb. (Bd. 21.)
- II: Gaserzeuger, Großgasmasch., Dampf- u. Gasurb. 4. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 86.)
- Wärmelehre. Einf. i. d. techn. (Thermodynamik). B. Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. Aufl. von Dr. F. Schmidt. (516.)
- i. auch Thermodynamik.
- Wasser. Das. Von Geh. Reg.-Rat Dr. D. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)
- i. a. Luft, Wass., Licht, Wärme Abt. V.
- Wasserkraftausnutzung u. -maschinen. B. Dr.-Ing. F. Sawaczek. (Bd. 732.)
- Weidwerk. D. d. d. V. Forstmeister G. Frhr. v. Nordenflycht M. Titelsb. (436.)
- Weinbau und Weinbereitung. Von Dr. F. Schmittbener. 34 Abb. (Bd. 332.)
- Wirtschaftlichen Organisationen. Dir. Von Prof. Dr. E. Lederer. (Bd. 423.)
- i. Konjunktur-, Mittelstandsbeweg.
- Wirtschaftsgeographie. Von Prof. Dr. F. Seiberich. (Bd. 633.)
- Wirtschaftsgeschichte vom Ausgange d. Antike bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts. (Mittl. Wirtschaftsgeschichte.) B. Prof. Dr. S. Sieveling. (577.)
- i. a. Antike B., Dänmark.
- Wirtschaftsleben. Deutschl. Auf geograph. Grundl. gesch. v. Prof. Dr. Chr. Gruber. 4. Aufl. v. Dr. S. Reinlein. (42.)
- Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens i. letzten Jahrh. B. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. P. Bohle. 4. Aufl. (57.)
- Wohnungswesen. Von Prof. Dr. R. Eberstadt. (Bd. 709.)
- Zeichnen. Techn. B. Reg.-u. Gewerbeschule Prof. Dr. R. Horstmann. (Bd. 548.)
- Zeitungswesen. B. Dr. S. Diez. 2. Aufl. (Bd. 328.)
- Zivilprozessrecht. Das deutsche. Von Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 315.)

== Weitere Bände sind in Vorbereitung. ==



30-

S-96





Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301517



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000296013