Geisteswelt

verständlicher Darstellungen

G. Kowalewski

Einführung in die

Infinitesimalrechnung

mit einer historischen Übersicht

Zweite Auflage

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

1.25

Ein voll[…] Aus Natur
und Gei[…]s Bandes.

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

197. Bändchen

Einführung in die Infinitesimalrechnung

mit einer historischen Übersicht

Von

Dr. Gerhard Kowalewski

o. ö. Professor der Mathematik an der k. k. deutschen Universität zu Prag

Zweite, völlig umgearbeitete Auflage

Mit 22 Figuren im Text

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig 1913

Herrn Dr. Karl Carda

o. ö. Professor der Mathematik an der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag

meinem verehrten Kollegen
in herzlicher Dankbarkeit
gewidmet

Vorwort zur zweiten Auflage.

Das Büchlein erscheint hier in stark veränderter Gestalt. Ich habe es so eingerichtet, daß der Leser rascher als bei der ersten Auflage zur Differentialrechnung gelangt. Auch sind jetzt die Betrachtungen über Häufungswerte und Grenzwerte, wie ich glaube, leichter zu lesen als früher. Ganz ersparen kann man sie dem Leser nicht, sonst bekommt er ein falsches Bild von dem Wesen der Infinitesimalrechnung.

Ich habe auch die Bedürfnisse der Studierenden nicht aus dem Auge gelassen. Deshalb ist manches aufgenommen, was sonst ohne Schaden hätte fehlen können. Ich nenne vor allem den § 38.

Schon die erste Auflage ist viel von Studierenden benutzt worden, z. B. bei den Anfängerübungen im mathematischen Seminar der Universität Innsbruck. Auch hat, wie ich höre, Herr Privatdozent Schatunovskij in Odessa für die russischen Studierenden eine Übersetzung meines Büchleins herausgegeben.

Möchte diese zweite Auflage eine so günstige Aufnahme finden wie die erste!

Prag, Oktober 1912.

Gerhard Kowalewski.

Inhaltsübersicht.

Erstes Kapitel.

Häufungswerte und Grenzwerte.

§ 1. Die Zahlen und ihre geometrische Versinnlichung.

Wir wollen den Leser daran erinnern, was er von den Zahlen weiß. Er kennt die ganzen Zahlen und die Brüche, die man zusammen als rationale Zahlen bezeichnet. Solche Zahlen sind z. B.

$$5, \quad -7, \quad 0, \quad \frac{11}{13}, \quad -\frac{15}{17}.$$

Dem Leser ist ferner bekannt, daß man mit den rationalen Zahlen nicht auskommt. Schon die alten Griechen wußten, daß z. B. die Quadratwurzel aus 2 keine rationale, sondern eine irrationale Zahl ist. Da die Diagonale eines Quadrats von der Seite 1 die Länge $\sqrt{2}$ hat, so kann man auch sagen, daß die Seite und die Diagonale eines Quadrats inkommensurabel sind, d. h. daß es keine Maßstrecke gibt, die in beiden aufgeht. Wäre nämlich eine gewisse Strecke q-mal in der Seite und p-mal in der Diagonale des Quadrats enthalten[1]), so müßte $\sqrt{2} = p : q$, also rational sein. In Satz 117 des zehnten Buches seiner „Elemente" hat Euklid (etwa 300 v. Chr.) gezeigt, daß dies unmöglich ist. Er nimmt an, daß der Bruch $p : q$ gekürzt ist, also p und q teilerfremd sind. Dann stützt er sich auf die Bemerkung, daß eine gerade Zahl ein gerades Quadrat, eine ungerade Zahl ein ungerades Quadrat hat, was man sofort aus den Gleichungen

$$(2n)^2 = 4n^2, \quad (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

ersieht. Wäre nun $\sqrt{2} = p : q$, so hätte man $p^2 = 2q^2$, also müßte p eine gerade Zahl sein, weil p^2 gerade ist. Setzt man aber $p = 2p'$, so ergibt sich $4p'^2 = 2q^2$, d. h. $q^2 = 2p'^2$. Es müßte also auch q eine gerade Zahl sein. Dies steht aber im Widerspruch mit der Annahme,

1) p und q sind ganze Zahlen.

daß p und q teilerfremd sind. Sie dürfen dann nämlich nicht beide durch 2 teilbar sein.

Multipliziert man $\sqrt{2}$ mit einer von Null verschiedenen Rationalzahl r, so ist auch $r\sqrt{2}$ irrational. Dasselbe gilt von $s + r\sqrt{2}$, wenn s eine zweite Rationalzahl ist. So ergeben sich bereits unendlich viele Irrationalzahlen, womit diese aber nicht im entferntesten erschöpft sind.

Descartes, der berühmte französische Philosoph (1596—1650), hat in seiner „Geometrie" (1637) gelehrt, wie man die (rationalen und irrationalen) Zahlen durch die Punkte einer Geraden in einfacher Weise versinnlichen kann. Er wurde dadurch der Begründer der analytischen Geometrie.

Wenn wir eine Gerade betrachten (Fig. 1), so können wir uns in zwei verschiedenen Richtungen auf ihr bewegen. Die eine dieser beiden Richtungen ist in der Figur durch einen Pfeil markiert. Sie soll die positive heißen, die andere die negative. Eine Bewegung auf unserer Geraden in positiver Richtung wollen wir eine Vorwärtsbewegung, eine Bewegung in negativer Richtung eine Rückwärtsbewegung nennen. Nun sei A ein erster, B ein zweiter Punkt auf der Geraden; d sei die Entfernung beider, gemessen mit einer zu Grunde gelegten Längeneinheit. Bewegen wir uns auf der Geraden von A nach B, so beschreiben wir die Strecke AB. Haben wir dabei eine Vorwärtsbewegung ausgeführt, so wollen wir sagen: Die Strecke AB hat die Maßzahl d. Haben wir eine Rückwärtsbewegung ausgeführt, so wollen wir sagen: Die Strecke AB hat die Maßzahl $-d$.

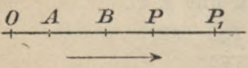

Fig. 1.

Die Maßzahl einer Strecke AB ist also die mit einem gewissen Vorzeichen versehene Entfernung der beiden Punkte A, B. Dieses Vorzeichen ist das Zeichen $+$, wenn man von A nach B durch eine Vorwärtsbewegung gelangt, das Zeichen $-$, wenn man von A nach B durch eine Rückwärtsbewegung gelangt.

Die Maßzahl der Strecke AB wollen wir mit $\overline{AB}$ bezeichnen. Dann ist offenbar

$$(1) \qquad \overline{AB} = -\overline{BA};$$

führt uns z. B. eine Vorwärtsbewegung von A nach B, so gelangen wir von B nach A, indem wir um dasselbe Stück rückwärts gehen.

Eine wichtige Relation besteht zwischen den durch drei Punkte A, B, C bestimmten Strecken. Es ist immer

$$(2) \qquad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \quad \text{oder} \quad \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}.$$

Diese Formel kann man aus der Fig. 2 ablesen, welche die verschiedenen Arten, wie die Punkte A, B, C liegen können, veranschaulicht. Man muß dabei auf die Relation (1) Rücksicht nehmen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Versinnlichung der Zahlen durch die Punkte einer Geraden, die wir die *Zahlenlinie* nennen, in folgender Weise bewerkstelligen. Wir wählen auf der Geraden (vgl. Fig. 1) einen festen *Anfangspunkt* O. Jedem Punkt P ordnen wir dann die Zahl

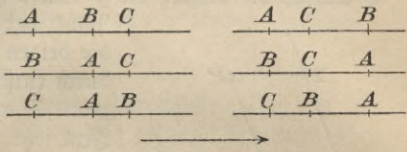

Fig. 2.

(3) $$x = \overline{OP}$$

zu und nennen sie seine *Abszisse*. Zwei verschiedene Punkte P und P_1 haben dann immer verschiedene Abszissen; denn aus $\overline{OP} = \overline{OP_1}$ folgt auf Grund der Formel (2) $\overline{PP_1} = 0$. Ferner läßt sich, wenn eine Zahl x gegeben ist, stets P so wählen, daß $\overline{OP} = x$ wird. Ist $x = 0$, so fällt P mit O zusammen; ist x positiv, so gelangt man von O nach P durch eine Vorwärtsbewegung um x; ist x negativ, so gelangt man von O nach P durch eine Rückwärtsbewegung um $-x$. Durch Formel (3) ist also zwischen den Zahlen x und den Punkten P der Geraden eine Zuordnung getroffen, welche folgende Eigenschaften hat: Jedem Punkt P entspricht eine Zahl x, seine Abszisse; verschiedene Punkte haben verschiedene Abszissen; jede Zahl x kommt als Abszisse eines Punktes vor.

Eine solche Zuordnung wollen wir eine *Abbildung* nennen. Es ist uns also gelungen, die Zahlen auf die Punkte einer Geraden *abzubilden*.

Sind x und x_1 die Abszissen der Punkte P bzw. P_1, so folgt aus (2):

(4) $$\overline{PP_1} = x_1 - x.$$

Der Leser möge unter Benutzung dieser Formel die Abszisse des Mittelpunkts der Strecke PP_1 berechnen. Er möge ferner verifizieren, daß vier Punkte A, B, C, D auf der Zahlenlinie stets die sogenannte *Eulersche* Relation erfüllen:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$$

Hierbei wird es zweckmäßig sein, den Punkt A als Anfangspunkt zu benutzen, so daß A die Abszisse Null hat. Die Abszissen von B, C, D wird man am besten mit b, c, d bezeichnen. Der Beweis der Eulerschen Relation ergibt sich dann leicht mit Hilfe von (4).

Descartes hat auch gezeigt, wie man die Zahlenpaare x, y auf die Punkte einer Ebene abbilden kann. Man zieht in dieser Ebene durch einen Punkt O (den Anfangspunkt) zwei verschiedene Geraden (Koordinatenachsen). Auf jeder von ihnen wird eine positive Richtung festgesetzt (vgl. Fig. 3). Die eine Gerade möge die x-Achse, die andere die y-Achse heißen. Ist nun P ein beliebiger Punkt der Ebene, so zieht man durch ihn die beiden Parallelen zu den Achsen. Dadurch entsteht auf der x-Achse der Schnittpunkt X, auf der y-Achse der Schnittpunkt Y. Jetzt setzt man[1])

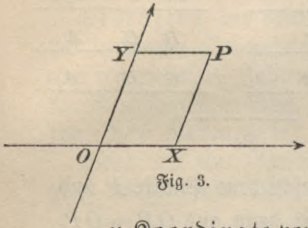

Fig. 3.

$$(5)\quad x = \overline{OX} = \overline{YP} \qquad y = \overline{OY} = \overline{XP}$$

und nennt x die x-Koordinate, y die y-Koordinate von P. Man sagt auch, x sei die Abszisse, y die Ordinate von P. Jedem Punkt P der Ebene entspricht auf diese Weise ein Zahlenpaar x, y; die erste Zahl ist die Abszisse, die zweite die Ordinate v n P. Zwei verschiedenen Punkten entsprechen offenbar verschiedene Zahlenpaare. Zu jedem Zahlenpaar x, y läßt sich ein Punkt finden, dessen Abszisse x und dessen Ordinate y ist. Es ist uns also gelungen, die Zahlenpaare x, y auf die Punkte der Ebene abzubilden. Diese Abbildung ist durch die Formeln (5) bestimmt. Gewöhnlich wählt man die Achsen so, daß sie einen rechten Winkel bilden.

Um eine Abbildung der Zahlentripel x, y, z auf die Punkte des Raumes zu gewinnen, zieht man durch einen Punkt O drei Geraden, x-Achse, y-Achse und z-Achse genannt, die nicht in einer Ebene liegen. Sie bestimmen paarweise drei Ebenen, die Koordinatenebenen. Ist P ein beliebiger Punkt des Raumes, so legt man durch ihn drei Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen. Dadurch entsteht auf der x-Achse ein Schnittpunkt X, auf der y-Achse Y, auf der z-Achse Z. Jetzt setzt man

$$(6)\qquad x = \overline{OX}, \quad y = \overline{OY}, \quad z = \overline{OZ}.$$

Diese Formeln liefern eine Abbildung der Zahlentripel auf die Punkte des Raumes. Man wählt die Achsen gewöhnlich so, daß sie paarweise rechte Winkel bilden.

---

1) Ist auf einer Geraden die positive Richtung festgesetzt, so pflegt man sie, wenn die Gerade eine Parallelverschiebung erfährt, ungeändert zu lassen. Nach Festsetzung der positiven Richtung auf den Koordinatenachsen ist also auch auf den zu ihnen parallelen Geraden die positive Richtung festgelegt.

§ 2. Zahlenfolgen und ihre Häufungswerte.

Die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . bieten das einfachste Beispiel einer Zahlenfolge.[1]) Jede andere Zahlenfolge entsteht hieraus, indem man die Glieder irgendwie abändert, also 1 durch eine Zahl u_1, 2 durch eine Zahl u_2, 3 durch eine Zahl u_3 und überhaupt jedes n durch eine Zahl u_n ersetzt. Eine Zahlenfolge hat also folgendes Aussehen

$$u_1, u_2, u_3, \ldots .$$

Die Punkte deuten an, daß die Folge ins Unendliche weitergeht. Es gibt in ihr kein letztes Glied, gerade so, wie es unter den natürlichen Zahlen keine größte gibt.

Man kann natürlich niemals alle Glieder einer Zahlenfolge aufschreiben. Sie ist immer nur durch ein Gesetz bestimmt, das vorschreibt, welche Zahl u_n an der n-ten Stelle stehen soll. Bei der Zahlenfolge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

lautet dieses Gesetz: An der n-ten Stelle soll die Zahl $1/n$ stehen, bei der Zahlenfolge

$$1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{4}, \ldots:$$

An der n-ten Stelle soll $\pm\sqrt{n}$ stehen, und zwar $+\sqrt{n}$, wenn n ungerade, $-\sqrt{n}$, wenn n gerade ist.

Wenn die Differenzen $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, $u_4 - u_3$, . . . alle gleich sind, so heißt $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine arithmetische Folge. Von einer geometrischen Folge spricht man, wenn die Quotienten u_2/u_1, u_3/u_2, u_4/u_3, . . . alle gleich sind. Eine arithmetische Folge sieht hiernach so aus:

$$a, \; a+d, \; a+2d, \; a+3d, \ldots;$$

das n-te Glied oder, wie man auch sagt, das allgemeine Glied lautet $a+(n-1)d$. Eine geometrische Folge sieht so aus:

$$a, \; a\cdot q, \; a\cdot q^2, \; a\cdot q^3, \ldots;$$

das allgemeine Glied lautet $a\cdot q^{n-1}$.

Die arithmetische und die geometrische Folge werden schon in der Elementarmathematik betrachtet. Man lernt dort, was wir hier nebenbei besprechen wollen, einen Abschnitt einer solchen Folge summieren, und der Leser wird sich des folgenden Satzes erinnern:

---

1) Statt „Zahlenfolge" benutzen wir oft den kürzeren Ausdruck „Folge".

Ist $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine arithmetische Folge, so haben ihre n ersten Glieder die Summe

$$\frac{1}{2}\, n(u_1 + u_n).$$

Man erkennt dies sofort, wenn man $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ einmal in der Form

$$u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) + \cdots + (u_1 + \overline{n-1}\, d),$$

ein zweites Mal in der Form

$$u_n + (u_n - d) + (u_n - 2d) + \cdots + (u_n - \overline{n-1}\, d)$$

schreibt. Dann ergibt sich nämlich durch Addition für die doppelte Summe der Ausdruck

$$(u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \cdots + (u_1 + u_n) = n(u_1 + u_n),$$

so daß

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

ist, d. h. gleich dem n-fachen arithmetischen Mittel aus dem ersten Gliede u_1 und dem letzten Gliede u_n.

Wie die entsprechende Aufgabe bei einer geometrischen Folge behandelt wird, ist dem Leser gewiß auch bekannt. Aus

$$S = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^{n-1}$$

folgt

$$qS = \phantom{a + {}} a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n.$$

und durch Subtraktion ergibt sich weiter

$$(q - 1)S = a \cdot q^n - a,$$

also

$$S = \frac{a \cdot q^n - a}{q - 1}.$$

Im Falle $a = 1$ lautet diese Formel

$$(*) \qquad 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

In § 1 haben wir gesehen, daß man jede Zahl durch einen Punkt auf einer Geraden, der Zahlenlinie, versinnlichen kann. Liegt nun eine Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ vor, so entspricht jedem u_n ein Punkt P_n auf der Zahlenlinie, und der Zahlenfolge entspricht also eine Punktfolge auf der Zahlenlinie. Umgekehrt gehört zu jeder solchen Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ eine Zahlenfolge. Um sie zu erhalten, muß man jeden Punkt P_n durch seine Abszisse u_n ersetzen. Dabei verwandelt sich die Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in die Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Es ist hiernach ein und dasselbe, ob man sich mit den Zahlenfolgen beschäftigt oder mit den Punktfolgen auf der Zahlenlinie.

Wir kommen jetzt zu einem wichtigen Begriff, den wir geometrisch, d. h. bei den Punktfolgen, erklären wollen, damit er dem Leser möglichst klar wird.

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ sei eine Punktfolge und Q ein Punkt auf der Zahlenlinie. Dann heißt Q eine **Häufungsstelle** der Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$, wenn in jeder Umgebung von Q unendlichviele Glieder dieser Folge enthalten sind. Das hat folgenden Sinn: Konstruieren wir (Fig. 4) um Q als Mittelpunkt ein Intervall $Q'Q''$ und unterdrücken wir in der Punktfolge alle Punkte, die nicht in das Intervall $Q'Q''$ fallen, so bleibt noch eine Punktfolge übrig (nicht etwa nur eine endliche Anzahl von Punkten); dies gilt immer, wie klein auch das Intervall $Q'Q''$ gewählt sein mag.

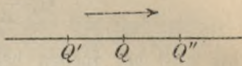

Fig. 4.

Es ist von großer Wichtigkeit, daß der Leser sich den Begriff Häufungsstelle völlig klar macht, weil dieser Begriff für das Folgende grundlegend ist. Wir wollen deshalb noch etwas bei diesem Begriff verweilen und uns überlegen, was wir von dem Punkte Q sagen können, wenn er keine Häufungsstelle der Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ist. Dann wird es also nicht in jeder Umgebung unendlichviele Punkte der Folge geben, vielmehr wird sich das Intervall $Q'Q''$ in Fig. 4 so wählen lassen, daß darin nur endlichviele Punkte der Folge enthalten sind, also z. B. 112 oder 10 oder wieviele es sonst sein mögen.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die obige Definition einer Häufungsstelle nichts darüber sagt, ob diese selbst der betrachteten Punktfolge angehört oder nicht. Das bleibt völlig dahingestellt. Es gibt Häufungsstellen, die ihrer Punktfolge angehören und solche, die es nicht tun. Wir werden das sogleich an Beispielen sehen.

Als erstes Beispiel diene die Folge

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Das $(2n-1)$-te Glied lautet hier $1:(n+2)$, das $2n$-te Glied $(n+1):(n+2)$. Diese Folge hat die Häufungsstellen 0 und 1. Der Leser wird das sofort erkennen, wenn er auf der Zahlenlinie die Punkte $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$ sowie die Punkte 0 und 1 markiert[1])

1) Der Punkt x ist der Punkt mit der Abszisse x.

(vgl. Fig. 5). In jeder Umgebung der Stelle 0 liegen unendlichviele von den Punkten $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$, in jeder Umgebung der Stelle 1 unendlichviele von den Punkten $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$, also unendlichviele Glieder der Folge. Die beiden Häufungsstellen 0 und 1 sind hier nicht in der Folge enthalten.

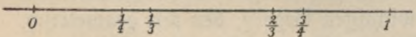

Fig. 5.

Die Folge

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \cdots,$$

die aus der soeben betrachteten durch Vorsetzen der 0 entsteht, hat ebenfalls die beiden Häufungsstellen 0 und 1. Die 0 gehört hier der Folge an, die 1 aber nicht.

Die Folge

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$$

enthält ihre beiden Häufungsstellen 0 und 1.

Wenn man ausdrücklich von Zahlenfolgen spricht, sagt man statt „Häufungsstelle" gewöhnlich „Häufungswert". 0 und 1 sind also Häufungswerte der obigen Zahlenfolgen.

§ 3. Satz von Weierstraß.

Es gibt Zahlenfolgen, die keinen Häufungswert besitzen. Eine solche ist z. B. die Folge 1, 2, 3, ... Auf der Zahlenlinie ist keine Stelle vorhanden, von der man sagen kann, daß in jeder Umgebung von ihr unendlichviele Punkte der Folge 1, 2, 3, ... enthalten sind; denn in jedes Intervall fallen offenbar nur endlichviele von diesen Punkten oder überhaupt keiner.

Wir werden jetzt eine Klasse von Zahlenfolgen kennen lernen, bei denen man sicher sein kann, daß es wenigstens *einen* Häufungswert gibt. Es sind das die *beschränkten* Zahlenfolgen. Eine Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ heißt beschränkt, wenn sich auf der Zahlenlinie eine Strecke abgrenzen läßt, die die sämtlichen Punkte $u_1, u_2, u_3, \ldots$ enthält. Wollen wir uns nicht geometrisch ausdrücken, so können wir sagen: $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ist eine beschränkte Zahlenfolge, wenn es zwei Zahlen a und b gibt, zwischen denen alle Glieder der Folge enthalten sind, so daß also für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichungen $a < u_n < b$ stattfinden. Man nennt den Inbegriff aller Zahlen, die zwischen a und

b liegen, das Intervall (a, b).[1]) Eine beschränkte Zahlenfolge läßt sich also ganz in ein Intervall (a, b) einschließen.

Eine beschränkte Zahlenfolge ist z. B. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$ Sie ist ganz in dem Intervall $(0, 1)$ enthalten. Dagegen ist die Zahlenfolge $1, 2, 3, \ldots$ nicht beschränkt, weil es kein Intervall (a, b) gibt, das alle ihre Glieder umfaßt.

Über die beschränkten Zahlenfolgen gilt nun der folgende Satz von Weierstraß: **Eine beschränkte Zahlenfolge hat wenigstens einen Häufungswert.**

Der Leser stelle sich die zugehörige Punktfolge auf der Zahlenlinie vor. Da es sich um eine beschränkte Zahlenfolge handelt, so läßt sich auf der Zahlenlinie eine Strecke abgrenzen, die die sämtlichen Punkte jener Punktfolge enthält. Diese unendlich vielen Punkte müssen hier auf einem endlichen Raume Platz finden. Da ist es klar, daß irgendwo an einer Stelle Q ein schreckliches Gedränge herrschen muß, so schrecklich, daß in jeder Umgebung von Q unendlichviele Punkte der Folge vorhanden sind. Damit ist die Existenz einer Häufungsstelle wenn nicht bewiesen, so doch wenigstens plausibel gemacht. Das möge hier genügen, da der exakte Beweis nur auf Grund einer genauen Erörterung des Zahlbegriffs möglich und daher für den Anfänger zu schwer ist[2]).

§ 4. Konvergente Zahlenfolgen.

Aus dem Weierstraßschen Satze wissen wir, daß eine beschränkte Zahlenfolge wenigstens einen Häufungswert besitzt. Wir wollen jetzt diejenigen beschränkten Zahlenfolgen betrachten, bei denen es so wenig Häufungswerte gibt wie möglich, also einen einzigen. $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sei eine beschränkte Folge von dieser Art und u ihr einziger Häufungswert. Wir wollen um u als Mitte irgend ein Intervall $\mathfrak{J}$ konstruieren. In diesem liegen, weil u ein Häufungswert ist, unendlichviele Glieder der Folge. Die Glieder, die das nicht tun, mögen die Ausnahmeglieder heißen. Nun läßt sich hier zeigen, daß es nur eine endliche Anzahl solcher Ausnahmeglieder gibt. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, es gäbe also unendlichviele Ausnahmeglieder. Sie bilden dann eine Folge $u_1', u_2', u_3', \ldots$, die aus $u_1, u_2, u_3, \ldots$

---

1) a und b, die Grenzen des Intervalls, rechnet man manchmal mit dazu.

2) Den exakten Beweis findet man z. B. in meinem Buche „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung" (Leipzig, Teubner, 1909).

durch Streichung aller in $\mathfrak{J}$ enthaltenen Glieder entsteht. Eine solche Folge, die aus $u_1, u_2, u_3, \ldots$ durch gewisse Streichungen entsteht, nennt man eine *Teilfolge* von $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Jede Teilfolge einer beschränkten Folge ist offenbar ebenfalls beschränkt; denn wenn die ganze Folge in ein Intervall (a, b) eingeschlossen ist, so sind auch alle ihre Teilfolgen in (a, b) enthalten. Wir können also auf $u_1', u_2', u_3', \ldots$ den Weierstraßschen Satz anwenden und daraus schließen, daß diese Folge einen Häufungswert u' besitzt. u' ist sicher von u verschieden; denn u ist kein Häufungswert von $u_1', u_2', u_3', \ldots$, weil z. B. in $\mathfrak{J}$ überhaupt kein Glied dieser Folge enthalten ist. Ferner läßt sich leicht erkennen, daß u' auch ein Häufungswert der Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sein muß. Da nämlich in jeder Umgebung von u' unendlichviele Glieder der Teilfolge $u_1', u_2', u_3', \ldots$ enthalten sind, ist damit zugleich gesagt, daß es dort unendlichviele Glieder der Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ gibt. Die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ hätte demnach zwei verschiedene Häufungswerte u und u', gegen die Voraussetzung.

Bei einer beschränkten Zahlenfolge mit nur *einem* Häufungswert u hat dieser, wie wir festgestellt haben, folgende Eigenschaft: In jeder Umgebung von u liegen *alle Glieder der Folge mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen* oder, wie wir kurz sagen wollen, **fast alle** *Glieder der Folge*[1]).

Steht eine Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *zu einer Zahl* u *in einer solchen Beziehung, daß in jeder Umgebung von* u *fast alle Glieder der Folge enthalten sind, so sagt man: Die Folge* $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *hat den* **Grenzwert** u. *Eine solche Folge nennt man* **konvergent.**

Wir haben also oben bewiesen, daß eine beschränkte Zahlenfolge, die nur einen einzigen Häufungswert u besitzt, konvergent ist und den Grenzwert u hat. Jetzt wollen wir noch zeigen, das auch das Umgekehrte richtig ist, daß also eine konvergente Zahlenfolge mit dem Grenzwert u beschränkt ist und nur den einen Häufungswert u hat. Konstruieren wir um u eine Umgebung $\mathfrak{J}$, so liegen darin fast alle Glieder der konvergenten Zahlenfolge. Nur eine endliche Anzahl von Ausnahmegliedern gibt es, die nicht in $\mathfrak{J}$ enthalten sind. Es ist nun klar, daß wir ein Intervall (a, b) so wählen können, daß $\mathfrak{J}$ und alle Ausnahmeglieder davon umschlossen werden. Ist $\mathfrak{J}$ unterhalb durch $u - \varepsilon$, oberhalb durch $u + \varepsilon$ begrenzt, so genügt es, a kleiner zu wählen als $u - \varepsilon$ und zugleich kleiner als alle Ausnahmeglieder, b dagegen größer als $u + \varepsilon$ und zugleich größer als alle Ausnahmeglieder. Gerade weil

1) „Fast alle" = „alle mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen."

es nur eine endliche Anzahl von Ausnahmegliedern gibt, können wir das machen. Dann ist aber die ganze Folge in (a, b) enthalten. Daraus sehen wir, daß es sich um eine beschränkte Folge handelt. Offenbar ist u ein Häufungswert von ihr. In jeder Umgebung von u liegen nämlich fast alle Glieder der Folge. Fast alle sind aber unendlich viele. Hätte die Folge noch einen andern Häufungswert u′, so könnten wir um u und u′ Umgebungen konstruieren, die ganz auseinander liegen (vgl. Fig. 6). Da in der um u konstruierten Umgebung fast alle Glieder der Folge enthalten sind, so kann es in der um u′ konstruierten Umgebung nur eine endliche Anzahl von Gliedern dieser Folge geben, während doch ein Häufungswert für jede solche Umgebung unendlich viele Glieder verlangt. Damit ist bewiesen, daß es außer u keinen andern Häufungswert gibt. Der Grenzwert ist ein Monarch, der keinen andern Häufungswert neben sich duldet.

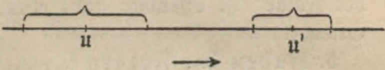

Fig. 6.

Wir wissen jetzt, daß konvergente Zahlenfolgen und beschränkte Zahlenfolgen mit einem einzigen Häufungswert ein und dasselbe sind.

Zum Schluß wollen wir über die konvergenten Zahlenfolgen noch einige Bemerkungen machen, von deren Richtigkeit sich der Leser selbst überzeugen möge. Wir geben jedesmal eine Andeutung, wie der Beweis geführt wird.

1. Hat eine Folge den Grenzwert u, so hat auch jede Teilfolge von ihr den Grenzwert u.

Was von fast allen Gliedern der Folge gilt, gilt nämlich auch von fast allen Gliedern der Teilfolge.

2. Hat die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ den Grenzwert u, so gilt dasselbe von der Folge $a_1, a_2, \ldots, a_p, u_1, u_2, u_3, \ldots$. Man darf also beliebige Glieder in endlicher Anzahl hinzusetzen; die Folge hat nach wie vor den Grenzwert u.

Fast alle Glieder der alten Folge sind auch fast alle Glieder der neuen Folge.

3. Hat die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ den Grenzwert u, so gilt dasselbe von der Folge

$$\underbrace{u_1, u_1, \ldots, u_1}_{p_1\text{-mal}},\ \underbrace{u_2, u_2, \ldots, u_2}_{p_2\text{-mal}},\ \underbrace{u_3, u_3, \ldots, u_3}_{p_3\text{-mal}}, \ldots.$$

Sie entsteht aus $u_1, u_2, u_3, \ldots$ dadurch, daß jedes Glied dieser Folge eine endliche Anzahl von Malen aufgeschrieben wird.

Wenn wir um u irgendeine Umgebung konstruieren, so gibt es in der alten Folge nur eine endliche Anzahl von Ausnahmegliedern, die nicht in dieser Umgebung liegen. Jedes von ihnen tritt in der neuen Folge eine endliche Anzahl von Malen auf. Die Anzahl der Ausnahmeglieder bleibt also endlich.

4. Eine konvergente Folge bleibt konvergent und behält denselben Grenzwert, wenn man aus ihr durch Umrangieren der Glieder eine neue Folge bildet.

Die Aussage „In jeder Umgebung von u liegen fast alle Glieder der Folge" ist offenbar ganz unabhängig von der Anordnung der Glieder.

5. Haben die Folgen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ und $v_1, v_2, v_3, \ldots$ beide denselben Grenzwert g, so hat auch die aus ihnen zusammengesetzte Folge $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots$ den Grenzwert g.

In jeder Umgebung von g liegen fast alle u_n und fast alle v_n, d. h. fast alle Glieder der zusammengesetzten Folge.

6. Haben die Folgen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ und $v_1, v_2, v_3, \ldots$ beide denselben Grenzwert g und liegt w_n immer zwischen u_n und v_n, so hat auch die Folge $w_1, w_2, w_3, \ldots$ den Grenzwert g.

Wenn nämlich in jeder Umgebung von g fast alle u_n und fast alle v_n liegen, so sind darin auch fast alle w_n enthalten.

§ 5. Monotone Zahlenfolgen.

Eine Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ heißt aufsteigend, wenn

$$u_1 \leqq u_2 \leqq u_3 \leqq \ldots,$$

wenn also kein Glied größer ist als das folgende. Sie heißt absteigend, wenn

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \ldots,$$

wenn also kein Glied kleiner ist als das folgende. Beide Arten von Folgen bezeichnet man als monotone Folgen.

Es genügt, wenn wir uns mit den aufsteigenden Folgen beschäftigen. Bei den absteigenden Folgen geht es genau entsprechend. $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sei also eine aufsteigende Folge. Offenbar sind dann zwei Fälle möglich:

1. Es gibt eine Zahl U, die von keinem Gliede der Folge übertroffen wird.

2. Es gibt keine solche Zahl.

Im ersten Falle ist die Folge beschränkt, weil alle ihre Glieder dem Intervall (u_1, U) angehören. Nach dem Weierstraßschen Satze (vgl.

§ 3) gibt es also einen Häufungswert u. Wäre nun irgend ein Glied der Folge, z. B. u_ν, größer als u, so ließe sich um u eine Umgebung $\mathfrak{J}$ konstruieren, die u_ν und infolgedessen auch $u_{\nu+1}$, $u_{\nu+2}$, ... nicht enthält (vgl. Fig. 7). In $\mathfrak{J}$ gäbe es also nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Folge. Das widerspricht aber dem Wesen eines Häufungswertes. Wir können demnach schließen, *daß u von keinem Gliede der Folge übertroffen wird.* Gäbe es noch eine *kleinere* Zahl u′, die dieselbe Eigenschaft hat, so könnten wir $\mathfrak{J}$ derart wählen, daß u′ nicht darin enthalten ist. Dann läge aber in $\mathfrak{J}$ überhaupt kein einziges u_n, weil kein u_n größer als u′ sein soll. Das geht also nicht, und wir ersehen hieraus, daß *u die kleinste Zahl ist, die von keinem Gliede der Folge übertroffen wird.* Eine solche Zahl kann nur in *einem* Exemplar existieren. Es kann daher außer u keinen andern Häufungswert geben, und wir haben es also mit einer beschränkten Folge zu tun, die nur *einen* Häufungswert besitzt. Das ist aber eine konvergente Folge, und u ist ihr Grenzwert.

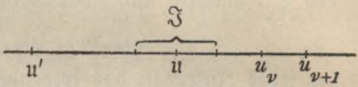

Fig. 7.

Hiermit ist folgender Satz gewonnen: *Eine aufsteigende* (absteigende) *Zahlenfolge ist konvergent, wenn es eine Zahl gibt, die von keinem Gliede der Folge übertroffen* (untertroffen) *wird. Der Grenzwert ist die kleinste* (größte) *Zahl mit dieser Eigenschaft.*[1])

Wir müssen jetzt noch den zweiten Fall besprechen. Da gibt es keine solche Zahl U wie im ersten Falle. Es wird vielmehr jede Zahl von irgendeinem u_ν und um so mehr von $u_{\nu+1}$, $u_{\nu+2}$, $u_{\nu+3}$, ... übertroffen. Jede Zahl wird also von fast allen Gliedern der Folge übertroffen. In diesem Falle ist überhaupt kein Häufungswert vorhanden, weil in jedem Intervall (a, b) nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Folge enthalten ist; fast alle Glieder sind größer als b.

Wenn eine Folge so beschaffen ist, daß jede Zahl — man mag sie so groß wählen, als man will — von fast allen Gliedern der Folge übertroffen wird, so sagt man, die Folge habe den *uneigentlichen Grenzwert* $+\infty$ (plus Unendlich). Das gilt z. B. von jeder aufsteigenden Zahlenfolge. die nicht beschränkt ist.

Ist eine Folge so beschaffen, daß jede Zahl von fast allen Gliedern der Folge untertroffen wird[1]), so sagt man, die Folge habe den *uneigentlichen Grenzwert* $-\infty$ (minus Unendlich). Das gilt z. B. von jeder absteigenden Zahlenfolge, die nicht beschränkt ist.

1) Eine Zahl untertreffen heißt kleiner sein als sie.

Von einer monotonen Zahlenfolge können wir also folgendes sagen: Wenn sie beschränkt ist, hat sie einen eigentlichen Grenzwert; wenn sie unbeschränkt und aufsteigend ist, den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$; wenn sie unbeschränkt und absteigend ist, den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$.

§ 6. Eine besondere Art von Intervallfolgen.

Wir wollen hier eine wichtige Anwendung von den Ergebnissen des § 5 machen, und zwar betrachten wir eine Folge von Intervallen

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_3),\ \ldots,$$

wo jedes Intervall das folgende enthält, so daß also

$$a_n \leqq a_{n+1} < b_{n+1} \leqq b_n$$

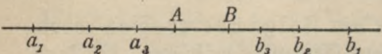

Fig. 8.

ist (vgl. Fig. 8). Eine solche Folge möge ein Satz von Intervallen heißen.

Offenbar bilden die a eine aufsteigende, die b eine absteigende Folge. Beide Folgen sind beschränkt, da sie in (a_1, b_1) liegen. Nach § 5 sind sie also konvergent. Bezeichnet man ihre Grenzwerte mit A bzw. B, so ist A, wie wir aus § 5 wissen, die kleinste Zahl, die von keinem a übertroffen wird. Also wird A sicher von keinem b untertroffen. B ist aber nach § 5 die größte Zahl, die von keinem b untertroffen wird. Daher ist $A \leqq B$.

Das Intervall (A, B), welches das Grenzintervall des Satzes heißen möge, ist in allen Intervallen (a_n, b_n) enthalten. Hat ein anderes Intervall (A', B') dieselbe Eigenschaft[1]), so wird A' von keinem a übertroffen und B' von keinem b untertroffen. A ist aber die kleinste Zahl der ersten, B die größte Zahl der zweiten Art. Daher muß $A \leqq A'$ und $B' \leqq B$ sein, es muß also (A', B') in (A, B) liegen. (A, B) ist demnach das größte Intervall, das von allen Intervallen des Satzes umschlossen wird.

Es kann sein, daß das Grenzintervall auf einen Punkt zusammenschrumpft, daß also $A = B$ ist. Dann ist dieser Punkt der einzige, der allen Intervallen des Satzes angehört.

§ 7. Zurückführung konvergenter Zahlenfolgen auf monotone.

Wenn eine Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ den Grenzwert u hat, so kann man ihre Glieder in drei Klassen einteilen:

1) Es darf auch $A' = B'$ sein.

1. solche, die kleiner als u,
2. solche, die größer als u,
3. solche, die gleich u sind.

Zu jeder Klasse können endlichviele oder unendlichviele Glieder gehören. Wenn zur dritten Klasse unendlichviele Glieder gehören, so bilden sie die Folge u, u, u, ... Wenn zur zweiten Klasse unendlichviele Glieder gehören, so kann man sie so anordnen, daß sie eine absteigende Folge bilden. In jeder Umgebung von u liegen fast alle u_n. Daher gibt es nur endlichviele u_n, die größer als $u + 1$, endlichviele, die zwar nicht größer als $u + 1$, aber doch größer als $u + \frac{1}{2}$, endlichviele, die zwar nicht größer als $u + \frac{1}{2}$, aber doch größer als $u + \frac{1}{3}$ sind, usw. In jeder von diesen Gruppen kann man die Glieder nach absteigender Größe ordnen, weil die Gruppe nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält. Auf diese Weise entsteht eine absteigende Folge, die aus den Gliedern der zweiten Klasse gebildet ist. Ebenso überzeugt man sich, daß die Glieder der ersten Klasse, falls es deren unendlichviele gibt, zu einer aufsteigenden Folge geordnet werden können.

Es ergeben sich hiernach 7 Typen von konvergenten Zahlenfolgen.

1. Jede Klasse enthält unendlichviele Glieder.

Dann sieht die Folge nach geeigneter Anordnung ihrer Glieder so aus:

$$u,\ a_1,\ b_1,\ u,\ a_2,\ b_2,\ u,\ a_3,\ b_3,\ \ldots.$$

Hierbei ist (wie auch im folgenden) $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine aufsteigende und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine absteigende Folge mit dem Grenzwert u.

2. Die erste und die dritte oder die zweite und die dritte Klasse enthalten unendlichviele Glieder. Die Folge sieht dann nach eventueller Streichung einer endlichen Anzahl von Gliedern und nach geeigneter Anordnung der übrigen so aus:

$$u,\ a_1,\ u,\ a_2,\ u,\ a_3,\ \ldots \text{ bzw. } u,\ b_1,\ u,\ b_2,\ u,\ b_3,\ \ldots.$$

3. Die erste und die zweite Klasse enthalten unendlichviele Glieder. Die Folge läßt sich durch dieselben Hilfsmittel wie bei 2 auf die Form

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \ldots$$

bringen.

4 Die erste oder die zweite Klasse enthält unendlichviele Glieder. Die Folge läßt sich auf die Form

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots \text{ bzw. } b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

bringen.

5. Die dritte Klasse enthält unendlichviele Glieder. Die Folge läßt sich auf die Form

$$\mathrm{u}, \mathrm{u}, \mathrm{u}, \ldots$$

bringen.

Aus den drei Grundtypen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$
$$\mathrm{u}, \mathrm{u}, \mathrm{u}, \ldots$$

ergeben sich die vier andern durch Zusammensetzung. Jede konvergente Zahlenfolge läßt sich also (nach einer endlichen Anzahl von Streichungen) in drei oder zwei monotone Folgen mit demselben Grenzwert zerlegen oder selbst zu einer monotonen Folge ordnen. Man ersieht hieraus die Wichtigkeit der monotonen Zahlenfolgen.

§ 8. Die Limesoperation.

Wenn die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ den Grenzwert u hat, so ist es zweckmäßig sich eine veränderliche Größe u zu denken, die die Folge durchläuft, d. h. zuerst gleich u_1 wird, dann den Wert u_2 annimmt, hierauf den Wert u_3 usw. Von einer solchen Veränderlichen sagt man, daß sie nach u konvergiert, nach dem Grenzwert u konvergiert, dem Grenzwert u zustrebt, und man schreibt:

$$\lim u = \mathrm{u} \quad (\text{limes } u \text{ gleich } \mathrm{u})$$

limes ist das lateinische Wort für Grenze oder Grenzwert. Die obige Formel drückt also aus, daß u sukzessiv die Werte $u_1, u_2, u_3, \ldots$ annimmt, die eine Folge mit dem Grenzwert u bilden.

In jeder Umgebung $(\mathrm{u} - \varepsilon, \mathrm{u} + \varepsilon)$ von u sind, wie wir wissen (vgl. § 4), fast alle u_n enthalten. u kann also zuerst, wenn es noch jung ist, alle möglichen Sprünge auf der Zahlenlinie vollführen. Mit zunehmendem Alter wird es schließlich so zahm, daß es nicht mehr aus dem Intervall $(\mathrm{u} - \varepsilon, \mathrm{u} + \varepsilon)$ herausgeht. Hierbei ist ε eine beliebig gewählte positive Zahl, und gerade darin liegt das Wesen der Limesbeziehung, daß u jeden verlangten Grad von Zahmheit schließlich erreicht und behält.

Wir wollen uns einen Beobachter vorstellen, der imstande ist, zwei Punkte der Zahlenlinie, die um mehr als ε voneinander entfernt sind, zu unterscheiden, während zwei Punkte, die eine kleinere Entfernung als ε haben, für ihn nicht mehr unterscheidbar sein sollen. Je kleiner der „Schwellenwert" ε ist, desto genauer oder feiner arbeitet der Beobachter. Wenn ein solcher Beobachter den Punkt u betrachtet, während dieser die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ durchlaufend nach u konvergiert, so wird schließlich u nicht mehr von u unterscheidbar sein, d. h. der Beobachter wird sagen: „u fällt jetzt mit u zusammen und geht nicht mehr von der Stelle u fort“. Wie fein auch der Beobachter arbeitet, d. h. wie klein der Schwellenwert ε bei ihm auch sein mag, immer wird er schließlich jene Aussage machen müssen.

Wenn u nach u konvergiert, indem es die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ durchläuft, so können wir sagen: u_1 ist der erste, u_2 der zweite, u_3 der dritte Wert, den u annimmt, usw. Der Grenzwert u ist dann gewissermaßen der unendlichste Wert von u. Dieser Ausdruck ist aber nicht üblich, ebensowenig der Ausdruck „letzter Wert von u“, der bei Newton und den Bernoullis vorkommt.

Man spricht von einem Grenzübergang (Übergang zur Grenze, d h. Übergang zum Grenzwert), wenn man eine Veränderliche u nach einem Grenzwert u konvergieren läßt, wenn also u eine Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ mit dem Grenzwert u durchläuft. Der Grenzübergang kann als eine Operation betrachtet werden, die auf u angewandt u liefert. Man nennt diese Operation die **Limesoperation.** Sie wird durch das Symbol lim ausgedrückt.

§ 9. Die Hauptsätze der Grenzwertrechnung.

1. **Satz 1.** Aus

$$\lim u = 0, \quad \lim v = 0$$

folgt

$$\lim (u + v) = 0,$$

d. h. wenn $u_1, u_2, u_3, \ldots$ und $v_1, v_2, v_3, \ldots$ Nullfolgen[1]) sind, so ist auch $u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots$ eine Nullfolge.

Es kommt darauf an zu zeigen, daß in jeder Umgebung $(-\varepsilon, \varepsilon)$ der Null fast alle $u_n + v_n$ enthalten sind. Nun liegen aber fast alle u_n zwischen $-\frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{\varepsilon}{2}$, ebenso fast alle v_n. Also gelten fast immer[2]) die Ungleichungen

$$-\frac{\varepsilon}{2} < u_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < v_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

woraus durch Addition folgt:

$$-\varepsilon < u_n + v_n < \varepsilon.$$

1) Eine Nullfolge ist eine Folge mit dem Grenzwert Null.

2) d. h. für fast alle Werte des Index n.

2. **Satz 2.** Aus $\lim w = 0$ folgt, wenn c eine Konstante[1]) ist, $\lim (cw) = 0$, d. h. wenn $w_1, w_2, w_3, \ldots$ eine Nullfolge ist, so ist auch $cw_1, cw_2, cw_3, \ldots$ eine solche.

Im Falle $c = 0$ trifft dies zu, weil die Folge dann überhaupt aus lauter Nullen besteht. Ist c von Null verschieden, so muß man folgendermaßen schließen. Fast alle w_n liegen zwischen $-\frac{\varepsilon}{c}$ und $\frac{\varepsilon}{c}$, also fast alle cw_n zwischen $-\varepsilon$ und ε.

Verallgemeinerung. Wenn $k_1, k_2, k_3, \ldots$ eine beschränkte Zahlenfolge, also ganz in einem Intervall (a, b) enthalten ist, so liegt $k_n w_n$ zwischen aw_n und bw_n. Ist nun $w_1, w_2, w_3, \ldots$ eine Nullfolge, so sind nach dem obigen Satze auch $aw_1, aw_2, aw_3, \ldots$ und $bw_1, bw_2, bw_3, \ldots$ Nullfolgen. Wir können hier nun die Bemerkung 6 aus § 4 anwenden und schließen, daß auch $k_1 w_1, k_2 w_2, k_3 w_3, \ldots$ eine Nullfolge ist. Damit haben wir folgende Verallgemeinerung des Satzes 2 gewonnen:

Satz 2*. Wenn $\lim w = 0$ ist und k zwischen endlichen Grenzen bleibt[2]), so ist auch $\lim (kw) = 0$.

3. **Bemerkung.** Die Aussagen $\lim u = \mathfrak{u}$ und $\lim (u - \mathfrak{u}) = 0$ sind gleichbedeutend, d. h. wenn die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ den Grenzwert $\mathfrak{u}$ hat, so hat die Folge $u_1 - \mathfrak{u}, u_2 - \mathfrak{u}, u_3 - \mathfrak{u}, \ldots$ den Grenzwert Null und umgekehrt.

Aus

$$\mathfrak{u} - \varepsilon < u_n < \mathfrak{u} + \varepsilon$$

folgt nämlich

$$-\varepsilon < u_n - \mathfrak{u} < \varepsilon$$

und umgekehrt. Man kann auch sagen $\lim u = \mathfrak{u}$ und $\lim (\mathfrak{u} - u) = 0$ sind gleichbedeutend.

4. **Grenzwert einer Summe.** Aus $\lim u = \mathfrak{u}$, $\lim v = \mathfrak{v}$ folgt $\lim (u + v) = \mathfrak{u} + \mathfrak{v}$. Es ist mit andern Worten

$$\lim (u + v) = \lim u + \lim v,$$

d. h. der Grenzwert der Summe gleich der Summe der Grenzwerte.

Nach der Bemerkung in Nr. 3 genügt es zu zeigen, daß

$$\lim (u + v - \mathfrak{u} - \mathfrak{v}) = 0$$

ist. Aus

$$\lim (u - \mathfrak{u}) = 0, \quad \lim (v - \mathfrak{v}) = 0$$

---

1) Eine Konstante behält immer denselben Wert.

2) D. h. eine beschränkte Zahlenfolge durchläuft.

folgt aber nach Satz 1

$$\lim (u - \mathfrak{u} + v - \mathfrak{v}) = \lim (u + v - \mathfrak{u} - \mathfrak{v}) = 0.$$

5. **Grenzwert eines Produktes.** Aus $\lim u = \mathfrak{u}$, $\lim v = \mathfrak{v}$ folgt $\lim (uv) = \mathfrak{u}\mathfrak{v}$. Es ist mit andern Worten

$$\lim (u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v,$$

d. h. der Grenzwert des Produktes gleich dem Produkt der Grenzwerte.

Es genügt zu zeigen, daß

$$\lim (uv - \mathfrak{u}\mathfrak{v}) = 0$$

ist. Nun kann man aber schreiben

$$uv - \mathfrak{u}\mathfrak{v} = u(v - \mathfrak{v}) + \mathfrak{v}(u - \mathfrak{u}).$$

Aus $\lim (u - \mathfrak{u}) = 0$ und $\lim (v - \mathfrak{v}) = 0$ folgt dann

$$\lim \{u(v - \mathfrak{v})\} = 0, \quad \lim \{\mathfrak{v}(u - \mathfrak{u})\} = 0.$$

Im zweiten Falle stützt man sich auf Satz 2, im ersten auf Satz 2*, wobei man benutzen muß, daß u zwischen endlichen Grenzen bleibt, weil es eine konvergente Zahlenfolge durchläuft und eine solche stets beschränkt ist.

Aus den beiden letzten Relationen ergibt sich weiter mit Hilfe des Satzes 1

$$\lim \{u(v - \mathfrak{v}) + \mathfrak{v}(u - \mathfrak{u})\} = \lim (uv - \mathfrak{u}\mathfrak{v}) = 0.$$

Wenn man v gleich einer Konstanten c setzt, so geht der obige Satz in folgenden über: Aus $\lim u = \mathfrak{u}$ folgt, wenn c eine Konstante ist, $\lim (cu) = c\mathfrak{u}$.

Insbesondere ist also $\lim (-u) = -\mathfrak{u}$. Vereinigt man dieses Ergebnis mit Satz 1, so findet man, daß aus $\lim u = \mathfrak{u}$, $\lim v = \mathfrak{v}$ folgt $\lim (v - u) = \mathfrak{v} - \mathfrak{u}$, daß also der Grenzwert der Differenz gleich der Differenz der Grenzwerte ist. Man hat in der Tat

$$\lim (v - u) = \lim v + \lim (-u) = \mathfrak{v} - \mathfrak{u}.$$

6. **Grenzwert eines Quotienten.** Aus $\lim u = \mathfrak{u}$ folgt, wenn $\mathfrak{u}$ nicht gleich Null ist, $\lim (1 : u) = 1 : \mathfrak{u}$.

In der Tat ist
$$\frac{1}{u} - \frac{1}{\mathfrak{u}} = \frac{1}{u\mathfrak{u}}(\mathfrak{u} - u),$$

und man kann daher nach Satz 2* aus $\lim (\mathfrak{u} - u) = 0$ folgern

$$\lim \left\{\frac{1}{u\mathfrak{u}}(\mathfrak{u} - u)\right\} = \lim \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\mathfrak{u}}\right) = 0,$$

Nur muß man sich noch vergewissern, daß der Faktor $1 : u\mathfrak{u}$ zwischen endlichen Grenzen bleibt. Nehmen wir an, daß u beim Grenzübergang die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ durchläuft[1]). Dann wäre zu zeigen, daß

$$\frac{1}{u_1 \mathfrak{u}}, \; \frac{1}{u_2 \mathfrak{u}}, \; \frac{1}{u_3 \mathfrak{u}}, \ldots$$

eine beschränkte Zahlenfolge ist. Nun liegen in jeder Umgebung von $\mathfrak{u}$ fast alle u_n, also z. B. auch in dem Intervall

$$\left(\frac{1}{2}\mathfrak{u}, \; \frac{3}{2}\mathfrak{u}\right),$$

dessen Mitte $\mathfrak{u}$ ist. Fast alle Quotienten $1 : u_n \mathfrak{u}$ werden daher in dem Intervall

$$\left(\frac{2}{3\mathfrak{u}^2}, \; \frac{2}{\mathfrak{u}^2}\right)$$

enthalten sein. Nur eine endliche Anzahl solcher Quotienten wird dies nicht tun. Daraus erkennt man, daß sie sich alle in ein Intervall (a, b) einschließen lassen.

Aus $\lim u = \mathfrak{u}$, $\lim v = \mathfrak{v}$ folgt, wenn $\mathfrak{u}$ nicht gleich Null ist, $\lim (v : u) = \mathfrak{v} : \mathfrak{u}$. Es ist mit anderen Worten

$$\lim \left(\frac{v}{u}\right) = \frac{\lim v}{\lim u},$$

d. h. der Grenzwert des Quotienten gleich dem Quotienten der Grenzwerte, vorausgesetzt, daß der Grenzwert im Nenner von Null verschieden ist. Man hat in der Tat

$$\lim v = \mathfrak{v}, \; \lim \left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{\mathfrak{u}},$$

folglich nach Nr. 5

$$\lim \left(v \cdot \frac{1}{u}\right) = \lim \left(\frac{v}{u}\right) = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}}.$$

7. **Grenzwert eines absoluten Betrages.** Aus $\lim u = \mathfrak{u}$ folgt[2]) $\lim |u| = |\mathfrak{u}|$. Es ist mit andern Worten

$$\lim |u| = |\lim u|,$$

d. h. der Grenzwert des absoluten Betrages gleich dem absoluten Betrage des Grenzwerts.

1) Wir setzen voraus, daß alle u_n von Null verschieden sind.

2) Mit $|a|$ bezeichnet man nach Weierstraß den absoluten Betrag der Zahl a. Es ist also $|a| = a$, wenn $a > 0$, und $|a| = -a$, wenn $a < 0$.

u durchlaufe bei dem Grenzübergang die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Ist $\mathfrak{u} > 0$, so sind fast alle u_n positiv, weil sie fast alle zwischen $\frac{1}{2}\,\mathfrak{u}$ und $\frac{3}{2}\,\mathfrak{u}$ liegen, und man hat daher fast immer $|u_n| = u_n$. Nach einer endlichen Anzahl von Streichungen sind also die Folgen $|u_1|, |u_2|, |u_3|, \ldots$ und $u_1, u_2, u_3, \ldots$ identisch. Mithin haben (vgl. § 4) beide den Grenzwert $\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|$. Im Falle $\mathfrak{u} < 0$ sind die Folgen $|u_1|, |u_2|, |u_3|, \ldots$ und $-u_1, -u_2, -u_3, \ldots$ nach einer endlichen Anzahl von Streichungen identisch. Mithin haben beide den Grenzwert $-\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|$. Es bleibt nur noch der Fall $\mathfrak{u} = 0$ übrig. In diesem Falle haben $u_1, u_2, u_3, \ldots$ und $-u_1, -u_2, -u_3, \ldots$ beide den Grenzwert Null. Dasselbe gilt daher von der Folge $u_1, -u_1, u_2, -u_2, u_3, -u_3, \ldots$ (vgl. § 4). Hiervon ist $|u_1|, |u_2|, |u_3|, \ldots$ eine Teilfolge. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge hat aber denselben Grenzwert wie diese (vgl. § 4).

8. **Grenzübergang bei Ungleichungen.** Ist $\lim u = \mathfrak{u}$, $\lim v = \mathfrak{v}$ und gilt immer die Ungleichung $u \leqq v$, so kann man schließen, daß $\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{v}$ ist, d. h. aus $u \leqq v$ folgt $\lim u \leqq \lim v$. Da $v - u \geqq 0$ ist, so kann der Grenzwert von $v - u$ unmöglich negativ sein. Um eine negative Zahl lassen sich nämlich Umgebungen konstruieren, die nur negative Zahlen enthalten. Es ist also

$$\lim (v - u) = \mathfrak{v} - \mathfrak{u} \geqq 0.$$

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Sätze in Nr. 4 und 5 für jede endliche Anzahl von Summanden bzw. Faktoren gelten. Ist z. B.

$$\lim u = \mathfrak{u},\ \lim v = \mathfrak{v},\ \lim w = \mathfrak{w}$$

so hat man

$$\lim (u + v + w) = \lim \{u + (v + w)\}$$

$$= \lim u + \lim (v + w) = \lim u + \lim v + \lim w$$

und

$$\lim (uvw) = \lim \{u \cdot (vw)\} = \lim u \cdot \lim (vw)$$

$$= \lim u \cdot \lim v \cdot \lim w.$$

Insbesondere ist

$$\lim (u^3) = (\lim u)^3,\ \lim (u^4) = (\lim u)^4 \text{ usw.}$$

§ 10. Häufungswerte als Grenzwerte von Teilfolgen.

Wir wollen jetzt noch einmal zu dem Begriff Häufungswert zurückkehren, der den Ausgangspunkt unserer ganzen Betrachtungen bildete. $\mathfrak{h}$ ist ein Häufungswert der Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$, wenn in jeder Umgebung von $\mathfrak{h}$ unendlich viele Glieder dieser Folge enthalten sind, Es sei jetzt u_1' das erste Glied der Folge, das in dem Intervall $(\mathfrak{h}-1, \mathfrak{h}+1)$, u_2' das zweite Glied, das in $\left(\mathfrak{h}-\frac{1}{2}, \mathfrak{h}+\frac{1}{2}\right)$, u_3' das dritte Glied, das in $\left(\mathfrak{h}-\frac{1}{3}, \mathfrak{h}+\frac{1}{3}\right)$ und allgemein u_n' das n-te Glied, das in $\left(\mathfrak{h}-\frac{1}{n}, \mathfrak{h}+\frac{1}{n}\right)$ enthalten ist. Es gibt ein n-tes Glied dieser Art, weil unendlichviele Glieder der Folge in $\left(\mathfrak{h}-\frac{1}{n},\right.$ $\left.\mathfrak{h}+\frac{1}{n}\right)$ liegen. Wenn der Leser die Sache genau überlegt, wird er bemerken, daß $u_1', u_2', u_3' \ldots$ eine Teilfolge von $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ist, d. h. daß u_2' in $u_1, u_2, u_3, \ldots$ später als u_1' kommt, ebenso u_3' später als u_2' usw. Durchläuft nun n die Folge 1, 2, 3, ..., so wird

$$\lim (1:n) = 0,$$

weil offenbar in jeder Umgebung von Null fast alle Glieder der Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ enthalten sind. $\mathfrak{h}-\frac{1}{n}$ und $\mathfrak{h}+\frac{1}{n}$ konvergieren somit beide nach $\mathfrak{h}$, und dasselbe gilt von u_n', welches zwischen ihnen liegt. $\mathfrak{h}$ ist also der Grenzwert der Folge $u_1', u_2', u_3', \ldots$, d. h. jeder Häufungswert läßt sich als Grenzwert einer Teilfolge betrachten. Ist umgekehrt $u_1', u_2', u_3', \ldots$ irgendeine konvergente Teilfolge von $u_1, u_2, u_3, \ldots$, so ist ihr Grenzwert ein Häufungswert von $u_1, u_2, u_3, \ldots$; denn in jeder Umgebung von ihm liegen fast alle u_n', also jedenfalls unendlichviele u_n.

§ 11. Größter und kleinster Häufungswert einer beschränkten Zahlenfolge.

Wir wollen jetzt noch eine kleine Betrachtung über beschränkte Zahlenfolgen anstellen. Sie soll zugleich dazu dienen, den Leser in der Handhabung der erworbenen Begriffe zu üben. $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sei eine beschränkte Zahlenfolge, d. h. es sei stets $a < u_n < b$.

Wenn die Zahl α von unendlichvielen u_n übertroffen wird, die Zahl β dagegen nicht, so wollen wir (α, β) ein ausgezeichnetes Intervall nennen. Ist γ die Mitte von (α, β), so gibt es zwei Möglichkeiten:

γ wird von unendlichvielen u_n übertroffen. Dann ist offenbar (α, γ) kein ausgezeichnetes Intervall, wohl aber (γ, β).

γ wird nicht von unendlichvielen u_n übertroffen. Dann ist offenbar (α, γ) ein ausgezeichnetes Intervall, (γ, β) aber nicht.

Man sieht, daß ein ausgezeichnetes Intervall eine und nur eine ausgezeichnete Hälfte hat.

Offenbar ist nun (a_1, b_1) ein ausgezeichnetes Intervall. a wird in der Tat von unendlichvielen u_n übertroffen (nämlich von allen) und b nicht (nämlich überhaupt von keinem u_n). Es gibt daher in (a, b) eine ausgezeichnete Hälfte (a_1, b_1). Ebenso gibt es aber in (a_1, b_1) eine ausgezeichnete Hälfte (a_2, b_2), in (a_2, b_2) eine ausgezeichnete Hälfte (a_3, b_3) usf. Wir erhalten also eine Folge von ausgezeichneten Intervallen:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots.$$

Sie hat die Eigentümlichkeit, daß immer (a_{n+1}, b_{n+1}) eine Hälfte von (a_n, b_n) ist. Wir haben es hier also mit einem Satz von Intervallen zu tun (vgl. § 6), und zwar reduziert sich das Grenzintervall (A, B) dieses Satzes auf einen Punkt. Es ist nämlich

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

und daher offenbar

$$\lim (b_n - a_n) = 0.$$

Andererseits hat man (nach § 9, Nr. 5)

$$\lim (b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n = B - A.$$

Es ist also $A = B$.

Konstruiert man nun um A eine Umgebung $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, so ist bei genügend großem n das Intervall (a_n, b_n) ganz in ihr enthalten. Da a_n von unendlichvielen u_n übertroffen wird, b_n aber nicht, so liegen in $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ unendlichviele u_n. Daraus sehen wir, daß A ein Häufungswert von $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ist. Da $A + \varepsilon$, ebenso wie b_n, nur von endlichvielen u_n übertroffen wird, so kann es keinen Häufungswert A' geben, der größer als A ist. Um das zu erkennen, braucht man nur ε so zu verkleinern, daß die Intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ und $(A' - \varepsilon, A' + \varepsilon)$ ganz auseinanderliegen. Dann gibt es in dem zweiten Intervall nur endlichviele u_n, weil $A + \varepsilon$ nur von endlichvielen u_n übertroffen wird. Es kann daher A' kein Häufungswert sein. A ist somit der **größte Häufungswert** der Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Ganz ähnlich überzeugt man sich von der Existenz eines **kleinsten Häufungswertes**. **Unter den Häufungswerten einer beschränkten Zahlenfolge gibt es also einen größten und einen kleinsten.**

Wenn diese beiden äußersten Häufungswerte zusammenfallen, so liegt eine beschränkte Zahlenfolge mit einem einzigen Häufungswerte vor. Das ist aber, wie wir wissen (vgl. § 4), eine konvergente Zahlenfolge, und der Häufungswert ist ihr Grenzwert.

Zweites Kapitel.

Differentialrechnung.

§ 12. Veränderliche und Konstanten.

Eine Veränderliche (Variable) ist eine Größe, die verschiedene Werte annimmt, eine Konstante dagegen eine Größe, die ihren Wert nicht ändert. So sind z. B. Größe und Gewicht eines heranwachsenden Menschen Veränderliche, Meter und Kilogramm, mit denen wir jene messen, Konstanten. Auch die seit einem bestimmten Zeitpunkt verflossene Zeit ist eine Veränderliche, während die Sekunde, mit der wir sie messen, eine Konstante ist.

§ 13. Funktionen einer Veränderlichen.

y heißt eine Funktion der Veränderlichen x, wenn zu jedem Wert von x ein Wert von y gehört. Bezeichnen wir z. B. mit x das genaue Lebensalter eines Menschen, mit y die Größe (oder das Gewicht) dieses Menschen im Alter x, so gehört offenbar zu jedem Wert von x ein Wert von y. Größe und Gewicht eines Menschen sind also Funktionen seines Alters.

Andere Beispiele für Funktionen sind folgende:

Oberfläche und Inhalt einer Kugel sind Funktionen ihres Radius.

Die Endgeschwindigkeit eines fallenden Körpers ist eine Funktion der Fallhöhe.

Das Volumen einer Gasmenge ist (bei gegebener Temperatur) eine Funktion des Druckes.

Wir empfehlen dem Leser, weitere Beispiele für Funktionen aus Geometrie, Physik und Chemie selbst herauszusuchen, um sich dadurch den Funktionsbegriff möglichst klar zu machen. Dieser ist nämlich der wichtigste Begriff der höheren Mathematik.

Wenn y eine Funktion von x ist, so nennt man x die unabhängige, y die abhängige Veränderliche.

Um auszudrücken, daß y eine Funktion von x ist, schreibt man

$$y = f(x) \quad (\text{d. h. „}y\text{ gleich }f\text{ von }x\text{"}.)$$

Hat man gleichzeitig verschiedene Funktionen zu betrachten, so wendet man die Bezeichnungen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, ... oder $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, ... an. Es werden alle Buchstaben (große und kleine) zur Bezeichnung von Funktionen benutzt.

§ 14. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

z heißt eine Funktion der beiden Veränderlichen x und y, wenn zu jedem Wertsystem x, y ein Wert von z gehört. Man nennt x und y die unabhängigen Veränderlichen, z die abhängige Veränderliche und schreibt

$$z = f(x, y).$$

Sind neben $f(x, y)$ noch andere Funktionen von x und y zu betrachten, so nimmt man bei ihnen statt f andere Buchstaben.

Der Inhalt eines Rechtecks ist eine Funktion der beiden Seiten. Das Volumen einer Gasmenge ist eine Funktion von Druck und Temperatur. Der Leser möge selbst weitere Beispiele bilden.

In durchaus entsprechender Weise definiert man Funktionen von drei, vier, fünf, ... Veränderlichen.

§ 15. Geometrische Darstellung der Funktionen.

Wenn man eine Funktion $y = f(x)$ geometrisch darstellen will, so kann man die Abbildung der Zahlenpaare auf die Punkte der Ebene benutzen. Man sucht für jeden Wert[1]) der unabhängigen Veränderlichen x den Punkt auf, dessen Abszisse gleich x und dessen Ordinate gleich $f(x)$ ist. Diese Punkte bilden eine Linie oder Kurve. Sie heißt die Bildkurve der Funktion $f(x)$ und $y = f(x)$ die Gleichung dieser Kurve. Man kann, wenn die Bildkurve gezeichnet ist, an ihr ablesen, welcher Wert der abhängigen Veränderlichen jedem Wert der unabhängigen entspricht.

Will man eine Funktion $z = f(x, y)$ geometrisch darstellen, so kann man die Abbildung der Zahlentripel auf die Punkte des Raumes benutzen. Zu jedem Wertsystem x, y sucht man den Punkt, dessen Koordinaten der Reihe nach gleich $x, y, f(x, y)$ sind. Diese Punkte bilden eine Fläche, die Bildfläche der Funktion $f(x, y)$, und $z = f(x, y)$ ist die Gleichung dieser Fläche.

Erwähnt sei noch die geometrische Darstellung eines Paares von Funktionen einer Veränderlichen, $y = f(x)$, $z = g(x)$. Man erhält sie dadurch, daß man für jeden Wert von x den Punkt aufsucht, dessen Koordinaten der Reihe nach gleich $x, f(x), g(x)$ sind. Diese Punkte

1) In der Praxis muß man sich begnügen, dies für eine Anzahl von x-Werten auszuführen. Man erhält so eine angenäherte Darstellung der Bildkurve. Ähnliches gilt für die Bildfläche von $f(x, y)$.

bilden eine Kurve im Raum. Sie ist die Bildkurve des Funktionenpaares $f(x)$, $g(x)$.

Solche geometrischen Darstellungen spielen auch in den Naturwissenschaften und in der Technik eine wichtige Rolle. Gewöhnlich legt man die Koordinatenachsen so, daß sie zueinander rechtwinklig sind.

§ 16. Die elementaren Funktionen einer Veränderlichen.

Die m-te Potenz von x (m eine positive ganze Zahl) ist offenbar eine Funktion von x; denn zu jedem Wert x gehört ein ganz bestimmter Wert von x^m. Wenn $a_0, a_1, \ldots a_m$ Konstanten vorstellen, so ist auch

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

eine Funktion von x. Eine solche Funktion heißt, wenn a_0 nicht null ist, eine ganze rationale Funktion m-ten Grades. Eine ganze rationale Funktion 0-ten Grades ist eine Konstante, ihre Bildkurve eine Parallele zur x-Achse. Die Bildkurve[1]) einer ganzen rationalen Funktion ersten Grades ist eine gerade Linie. Die Bildkurve einer ganzen rationalen Funktion zweiten Grades ist eine Parabel, eine Kurve, die der Leser von der Schule her kennen wird. Sie besteht aus allen Punkten, die von einer festen Geraden (der Leitlinie) und einem festen Punkt (dem Brennpunkt) gleich weit entfernt sind.

Ein Quotient aus zwei ganzen rationalen Funktionen, also ein Ausdruck von der Form

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n}$$

wird als rationale Funktion bezeichnet. Einen Spezialfall davon bilden die ganzen rationalen Funktionen.

Zu den elementaren Funktionen rechnet man auch die Exponentialfunktion a^x, wobei a eine positive Konstante bedeutet, ferner die Funktion Logarithmus. Zu jedem positiven x gehört ein y derart, daß $a^y = x$ ist[2]). y heißt der Logarithmus von x zur Basis a und wird ${}^a\log x$ geschrieben. Die gebräuchlichen Logarithmentafeln beziehen sich auf die Basis 10. Der Leser möge versuchen die Bildkurven von a^x und ${}^a\log x$ für den Fall $a = 10$ zu zeichnen.

1) Wir legen immer ein rechtwinkliges Achsensystem zu Grunde. Der Leser zeichne z. B. die Bildkurven von $y = 3x + 4$, $y = x^2$, indem er Millimeterpapier benutzt.

2) a ist positiv, darf aber nicht gleich 1 sein.

Hiermit sind die elementaren Funktionen noch nicht erschöpft. Bevor wir weitergehen, müssen wir einiges über die Bogenmessungen sagen.

Betrachten wir ein rechtwinkliges Achsensystem. Wenn wir die x-Achse um einen rechten Winkel drehen, so wird sie mit der y-Achse zusammenfallen, und wenn wir in geeignetem Sinn gedreht haben, werden auch die positiven Richtungen der Achsen zusammenfallen. Dieser Drehungssinn, der in Fig. 9 durch einen Pfeil angedeutet ist, soll der positive heißen, der andere der negative. Wir wollen jetzt um den Anfangspunkt einen Kreis beschreiben, dessen Radius die Längeneinheit ist. Man nennt ihn den Einheitskreis. Er schneidet auf der positiven x-Achse einen Punkt A aus. Der Punkt A kann sich auf dem Einheitskreis in zwei verschiedenen Weisen bewegen. Wenn der Radius OA sich in positivem Sinn dreht, so sagen wir, daß A sich auf dem Kreise in positivem Sinne bewegt, andernfalls in negativem Sinne.

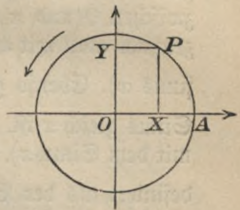

Fig. 9.

Beschreibt der Punkt A, während er sich in positivem Sinne bewegt, ein Bogenstück von der Länge α, so sagen wir, daß er den Bogen α zurückgelegt hat; beschreibt A, während er sich in negativem Sinne bewegt, ein Bogenstück von der Länge α, so sagen wir, daß er den Bogen $-\alpha$ zurückgelegt hat.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die beiden Funktionen Kosinus und Sinus, die der Leser aus der Trigonometrie kennt, zu definieren. Ist x gegeben, so lassen wir den Punkt A, den wir oben eingeführt haben, sich so bewegen, daß er den Bogen x zurücklegt. Er gelange dadurch nach P. Die Abszisse von P nennen wir $\cos x$ (Kosinus x), die Ordinate $\sin x$ (Sinus x). Es ist also

$$\overline{OX} = \cos x, \qquad \overline{OY} = \sin x.$$

Aus der Figur entnimmt man sofort die Relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Von großer Wichtigkeit sind die beiden folgenden Formeln:

$$\cos(x + x') = \cos x \cos x' - \sin x \sin x',$$

$$\sin(x + x') = \sin x \cos x' + \cos x \sin x',$$

die in der Elementarmathematik bewiesen werden.

$\cos x$ und $\sin x$ gehören zu den trigonometrischen Funktionen. Außer diesen beiden erwähnen wir noch die trigonometrischen Funktionen $\operatorname{tg} x$ (Tangens x) und $\cot x$ (Kotangens x), welche in folgender Weise definiert sind:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Wir empfehlen dem Leser die Bildkurven von $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$ zu zeichnen.

Es fehlen in der Aufzählung der elementaren Funktionen noch die sogenannten zyklometrischen Funktionen. Wenn x gegeben ist, so gibt es, falls x zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt, immer zwischen 0 und π einen Bogen, dessen Kosinus gleich x ist. Ihn bezeichnet man mit $\operatorname{arc}\cos x$ (Arkuskosinus x, d. h. Bogen mit dem Kosinus x). Ebenso gibt es zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ einen Bogen, dessen Sinus gleich x ist. Ihn nennt man $\operatorname{arc}\sin x$ (Arkussinus x, d. h. Bogen mit dem Sinus x). In ähnlicher Weise wird $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ (Arkustangens x) definiert als der Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, dessen Tangens gleich x ist) und $\operatorname{arc}\cot x$ (Arkuskotangens x) als der Bogen zwischen 0 und π, dessen Kotangens gleich x ist). Bei $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{arc}\cot x$ darf x alle Werte annehmen, während bei $\operatorname{arc}\cos x$ und $\operatorname{arc}\sin x$ das x auf die Werte zwischen -1 und $+1$ (diese eingeschlossen) beschränkt war.

Auch diejenigen Funktionen, die sich aus einer endlichen Anzahl elementarer Funktionen zusammensetzen lassen, wie z. B. $\cos(ax+b)$, $\log(\sin^2 x)$ und dgl., nennt man elementare Funktionen.

§ 17. Der Differenzenquotient von $f(x)$.

y sei eine Funktion von x, also $y = f(x)$. Erteilen wir dem x einen positiven oder negativen Zuwachs $\triangle x = h$, so verwandelt sich $f(x)$ in $f(x+h)$ und y erfährt also den Zuwachs

$$\triangle y = f(x+h) - f(x).$$

Den Quotienten aus dem Zuwachs von y und dem Zuwachs von x, also den Bruch

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

bezeichnet man als den Differenzenquotienten von $f(x)$. Um ihn zu bilden, muß man also durch den Zuwachs $\triangle x$ der unabhängigen Veränderlichen den entsprechenden Zuwachs $\triangle y$ der abhängigen Veränderlichen dividieren.

Der Differenzenquotient hat eine einfache geometrische Bedeutung. In Fig. 10 ist die Bildkurve von $f(x)$ gezeichnet. P und Q sind die Kurvenpunkte, die den Werten x und $x+h$ entsprechen. Die Sekante PQ bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel, der in der Figur mit φ bezeichnet ist. PR ist nämlich parallel zur x-Achse gezogen. Betrachtet man nun das rechtwinklige Dreieck PRQ, so sieht man, daß

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \operatorname{tg}\varphi$$

ist. $\operatorname{tg}\varphi$ pflegt man die Richtungskonstante der Geraden PQ zu nennen. Es ist also der Differenzenquotient gleich der Richtungskonstanten der Sekante PQ.

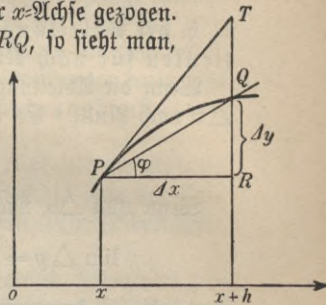

Fig. 10.

Man kann den Differenzenquotienten noch auf eine andere Weise deuten. Wir wollen x als die von einem bestimmten Anfang gerechnete Zeit betrachten und uns dann einen Punkt denken, der sich so auf der Zahlenlinie bewegt, daß er zur Zeit x immer mit dem Bildpunkt der Zahl $f(x)$, oder, kurz gesagt, dem Punkt $f(x)$ zusammenfällt. Während des Zeitintervalls $(x, x+h)$ ist er von $f(x)$ nach $f(x+h)$ gelangt. Hätte er sich während dieser Zeit gleichförmig bewegt, so wäre dazu die Geschwindigkeit (Weg durch Zeit)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nötig gewesen. Diese Geschwindigkeit nennt man die mittlere Geschwindigkeit des Punktes während des Zeitintervalls $(x, x+h)$. Sie ist, wie man sieht, gleich dem Differenzenquotienten.

§ 18. Die Ableitung von $f(x)$.

Wir wollen jetzt h nach Null konvergieren lassen. h soll also irgend eine Folge $h_1, h_2, h_3, \ldots$ mit dem Grenzwert Null durchlaufen[1]). Es kann sein, daß dabei der Differenzenquotient immer einem und demselben Grenzwert g zustrebt, daß man also immer

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \mathrm{g}$$

hat, wenn $\lim h = 0$ ist. In diesem Falle sagt man, daß $f(x)$ an der Stelle x eine **Ableitung** besitzt und diese Ableitung gleich g ist.

1) Alle h_n müssen von Null verschieden sein. Es genügt übrigens monotone Folgen zu betrachten (vgl. § 7).

Man bezeichnet die Ableitung, um ihre Beziehung zu $y = f(x)$ hervortreten zu lassen, mit y' oder $f'(x)$. Es ist also

$$f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad (\lim h = 0)$$

d. h. die Ableitung ist der Grenzwert des Differenzenquotienten für nach Null konvergierendes h.

Wenn die Ableitung $f'(x)$ existiert, konvergiert $\triangle y$ gleichzeitig mit $\triangle x$ nach Null.[1]) Es ist nämlich

$$\triangle y = \frac{\triangle y}{\triangle x} \cdot \triangle x$$

Wenn nun $\triangle x$ nach Null konvergiert, so wird (vgl. § 9, Nr. 5)

$$\lim \triangle y = \lim \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right) \cdot \lim \triangle x = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

$\triangle x$ und $\triangle y$ konvergieren also beide nach Null und dabei strebt ihr Quotient $\triangle y : \triangle x$ dem Grenzwert $f'(x)$ zu. Daher nennt Newton $f'(x)$ die „ultima ratio incrementorum evanescentium“ (das letzte Verhältnis der verschwindenden Inkremente). Um Newton richtig zu verstehen, stelle sich der Leser vor, daß in Fig. 10 der Punkt Q auf der Kurve nach P hinrückt. Gerade in dem Augenblick, wo er mit P zusammenfällt, wird das Verhältnis $\triangle y : \triangle x$ gebildet und das ist dann die Ableitung $f'(x)$. Die Ableitung ist also das Verhältnis der Größen $\triangle y$ und $\triangle x$ gerade in dem Augenblick, wo sie aufhören zu sein. Newton hat noch eine andere Erklärung der Ableitung. Wenn der Punkt P auf der Kurve fortzurücken beginnt und man bildet gerade in dem Augenblick, wo er die Stelle P verläßt, das Verhältnis $\triangle y : \triangle x$, so ist es die Ableitung $f'(x)$. Sie erscheint hier als das erste Verhältnis der eben entstehenden Inkremente (prima ratio incrementorum modo nascentium). Hier werden also die Inkremente in dem Augenblick betrachtet, wo sie anfangen zu sein. Newton fühlte selbst, daß in diesen Begriffen „prima ratio“ und „ultima ratio“ eine Schwierigkeit steckt. Für uns kommt nur der zweite Begriff in Frage, und wir können ihm eine moderne Fassung geben, indem wir statt „ultima ratio incrementorum evanescentium“ sagen „Grenzverhältnis der nach Null konvergierenden Inkremente.“

Ebenso wie der Differenzenquotient hat auch die Ableitung eine einfache geometrische Bedeutung. Läßt man h nach Null konvergieren,

1) Diese Eigenschaft, daß aus $\lim \triangle x = 0$ folgt $\lim \triangle y = 0$, nennt man die Stetigkeit.

so konvergiert der Punkt Q nach der Lage P (nämlich jede der Koordinaten von Q nach der entsprechenden von P). Die Gerade PQ dreht sich um den festen Punkt P so, daß ihre Richtungskonstante dem Grenzwert $f'(x)$ zustrebt. Man sagt, daß ihre Grenzlage diejenige Gerade PT ist, deren Richtungskonstante den Wert $f'(x)$ hat. (vgl. Fig 10). Diese Gerade nennt man die Tangente der Kurve im Punkte P. Wie der Differenzenquotient gleich der Richtungskonstanten einer Sekante war, so ist die Ableitung gleich der Richtungskonstanten der Tangente.[1])

Wenn wir x als die Zeit betrachteten und $f(x)$ als die Abszisse eines auf der Zahlenlinie sich bewegenden Punktes, so war der Differenzenquotient gleich der mittleren Geschwindigkeit während des Zeitintervalls $(x, x+h)$.

Wenn diese bei nach Null konvergierendem h einem Grenzwert zustrebt, so pflegt man ihn als die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit x zu bezeichnen. Die Ableitung $f'(x)$ erscheint hier also als eine Geschwindigkeit.

§ 19. Das Differential von $f(x)$.

Als **Differential** von $f(x)$ bezeichnet Leibniz das Produkt aus der Ableitung $f'(x)$ und der Größe h (dem Zuwachs von x). Er schreibt dafür $df(x)$. Es ist also

$$df(x) = f'(x)h.$$

Wenn man die Bildkurve von $f(x)$ durch ihre Tangente im Punkte P ersetzt, so ist der Zuwachs, den die Funktion beim Übergange von x zu $x+h$ erfährt, nicht mehr $f(x+h) - f(x)$ oder $\Delta f(x)$, sondern $f'(x)h$ oder $df(x)$. In Fig. 10 ist $df(x) = RT$, $f(x+h) - f(x) = RQ$.

Benutzen wir die andere Deutung (x die Zeit und $f(x)$ die Abszisse eines auf der Zahlenlinie sich bewegenden Punktes), so ist folgendes zu sagen: Wenn der Punkt die Geschwindigkeit $f'(x)$, die er zur Zeit x hat, immer hätte, so würde er in dem Zeitintervall $(x, x+h)$ die Strecke $f'(x)h$ beschreiben, nicht die Strecke $f(x+h) - f(x)$.

Dem Begriff des Differentials, der von Leibniz herrührt, liegt, wie wir sehen, der Gedanke zugrunde, eine Kurve in der Umgebung eines Punktes durch eine Gerade oder eine beliebige Bewegung in der Umgebung eines Zeitpunktes durch eine gleichförmige zu ersetzen.

1) Wegen dieses Zusammenhanges nannten Leibniz und seine Zeitgenossen die Differentialrechnung, die die Berechnung der Ableitungen lehrt, eine „nova methodus tangentium" (eine neue Tangentenmethode).

Die Ableitung der Funktion x ist gleich 1, weil schon der Differenzenquotient $\frac{(x+h)-x}{h}=1$ ist. Infolgedessen gilt für das Differential von x die Formel

$$dx=h.$$

Das Differential von x ist also h selbst. Wir können daher in der Formel $df(x)=f'(x)h$ für h auch dx einsetzen und erhalten dann

$$df(x)=f'(x)dx.$$

Hieraus ergibt sich

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

Die Ableitung ist also ein Quotient zweier (zu demselben h gehöriger) Differentiale, ein **Differentialquotient.** Man sagt deshalb statt „Ableitung von $f(x)$" auch „Differentialquotient von $f(x)$".

Die Berechnung des Differentials oder auch des Differentialquotienten einer Funktion nennt man **Differentiation** (Differenzieren).

§ 20. Differentiation einer Summe, einer Differenz, eines Produktes und eines Quotienten von zwei Funktionen.

Wir nehmen an, daß die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x Ableitungen $f'(x)$, $g'(x)$ besitzen.

1. Wenn $F(x)=f(x)+g(x)$ ist, so hat man

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Die rechte Seite strebt bei nach Null konvergierendem h dem Grenzwert $f'(x)+g'(x)$ zu, folglich existiert $F'(x)$, und es ist

$$F'(x)=f'(x)+g'(x)$$

oder kurz

$$(f+g)'=f'+g'.$$

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen.

Der Satz gilt für eine beliebige endliche Anzahl von Summanden.

2. Genau ebenso beweist man, daß

$$(f-g)'=f'-g'$$

ist.

Die Ableitung einer Differenz ist gleich der Differenz der Ableitungen.

3. Jetzt sei

$$F(x)=f(x)\cdot g(x).$$

Dann wird

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x+h)+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)$$

$$=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)$$

$$+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h.$$

Im Falle $\lim h=0$ konvergiert dieser Ausdruck nach

$$g'(x)\cdot f(x)+f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f'(x)\cdot 0.$$

Also existiert $F'(x)$, und man hat

$$F'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

oder kurz

$$(fg)'=f'g+fg'.$$

Wenn $g(x)$ eine Konstante c ist, so wird $g'(x)=0$. Die Ableitung einer Konstanten ist gleich Null, weil schon ihr Differenzenquotient gleich Null ist. Im Falle $g(x)=c$ lautet die obige Formel:

$$(cf)'=cf'.$$

Dies kann man ebenso leicht direkt beweisen, indem man bemerkt, daß sich der Differenzenquotient von cf aus dem von f durch Multiplikation mit c ergibt.

Bei einem Produkt von drei Funktionen f, g, k hat man

$$(fgk)'=f'gk+f(gk)'=f'gk+fg'k+fgk'.$$

Um ein Produkt von m Faktoren zu differenzieren, multipliziert man die Ableitung jedes Faktors mit allen andern Faktoren und addiert diese m Produkte.

4. Wenn $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ und $g(x)$ an der Stelle x ungleich Null ist, so wird

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$=\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{hg(x)g(x+h)}$$

$$=\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)}{g(x)\left\{g(x)+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot h\right\}}.$$

Im Falle $\lim h = 0$ konvergiert dieser Ausdruck nach

$$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)\{g(x) + g'(x) \cdot 0\}}.$$

Also existiert $F'(x)$, und man hat

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

oder kurz

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Vorausgesetzt ist hierbei $g(x) \gtrless 0$.

Multipliziert man die obigen Formeln für

$$(f+g)', \quad (f-g)', \quad (fg)' \quad \text{und} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'$$

mit dx, so nehmen sie folgende Gestalt an:

1. $$d(f+g) = df + dg,$$
2. $$d(f-g) = df - dg,$$
3. $$d(fg) = fdg + gdf, \quad d(cf) = cdf,$$
4. $$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Diese vier Differentiationsregeln findet man bereits in Leibniz erster Publikation über Differentialrechnung (1684).

§ 21. Differentiation der rationalen Funktionen.

Wir haben schon oben bemerkt, wie ein Produkt von m Faktoren differenziert wird. Man multipliziert die Ableitung jedes Faktors mit allen andern Faktoren und addiert diese m Produkte.

Sind alle m Faktoren gleich $f(x)$, so findet man die Formel

$$(f^m)' = mf^{m-1}f'$$

oder (mit dx multipliziert)

$$d(f^m) = mf^{m-1}df.$$

Im Falle $f = x$ lautet diese Formel

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Wir sind jetzt imstande eine ganze rationale Funktion

$$G(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

zu differenzieren. Dazu brauchen wir uns nur zu erinnern, daß das Differential einer Summe mit irgend einer endlichen Anzahl von Summanden gleich der Summe der Differentiale dieser Summanden ist, ferner, daß das Differential einer Konstanten gleich Null ist.

Dann finden wir

$$dG(x) = (m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}) dx,$$

oder, wenn wir die Ableitung haben wollen,

$$G'(x) = m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}.$$

Betrachten wir jetzt die rationale Funktion $G(x) : H(x)$, wobei

$$H(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$$

sein möge. Nach der Regel 4 des vorigen Paragraphen ist dann, wenn $H(x) \gtrless 0$,

$$\left(\frac{G}{H}\right)' = \frac{HG' - GH'}{G^2}$$

oder

$$d\left(\frac{G}{H}\right) = \frac{HdG - GdH}{G^2}.$$

dG und dH wissen wir aber zu berechnen. Wir können somit jede rationale Funktion differenzieren.

Beispiele. 1. Die Ableitung von $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ (m eine positive ganze Zahl) lautet $-mx^{-(m+1)}$, wenn $x \gtrless 0$ ist.

2. Die Ableitung von $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ wird:

$$y' = \frac{(cx+d)(ax+b)' - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2}$$

oder

$$y' = \frac{(cx+d)a - (ax+b)c}{(cx+d)^2}$$

oder endlich

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

Vorausgesetzt ist dabei $cx + d \gtrless 0$.

§ 22. Differentiation der Exponentialfunktion.

Wir wollen jetzt die Ableitung von a^x berechnen, wobei a eine positive Konstante ist. Der Differenzenquotient lautet hier

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}.$$

Es kommt also darauf an zu zeigen, daß

$$\frac{a^h-1}{h}$$

bei nach Null konvergierendem h einem Grenzwert zustrebt, und diesen Grenzwert zu bestimmen.

Wir wollen zuerst h in der Weise nach Null konvergieren lassen, daß es die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ durchläuft, und außerdem $a>1$ voraussetzen.

Für $h=\frac{1}{n}$ wird

$$\frac{a^h-1}{h}=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Es handelt sich also um die Folge

$$(*) \qquad a-1,\quad 2\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right),\quad 3\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right),\ \ldots\ .$$

Wenn wir zur Abkürzung

$$a^{\frac{1}{n(n+1)}}=b$$

setzen, so wird[1])

$$n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=n\left(b^{n+1}-1\right)=n(b-1)\left(1+b+\cdots+b^n\right),$$

dagegen

$$\begin{aligned}(n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)&=(n+1)\left(b^n-1\right)\\&=(n+1)(b-1)\left(1+b+\cdots+b^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch Subtraktion:

$$\begin{aligned}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)&-(n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)\\&=(b-1)\left(nb^n-1-b-\cdots-b^{n-1}\right).\end{aligned}$$

1) Vgl. die Formel (*) auf Seite 6.

Offenbar ist nun $b > 1$, weil $a > 1$ angenommen wurde. Daher sind die n Zahlen $1, b, \ldots, b^{n-1}$ kleiner als b^n und ihre Summe kleiner als nb^n, die obige Differenz also positiv. Wir sehen hieraus, daß (*) eine absteigende Folge ist.

Schreiben wir

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n(a-1)\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{a-1} = \frac{n(a-1)}{1 + a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \cdots + a^{\frac{n-1}{n}}}$$

und bemerken, daß die n Summanden im Nenner kleiner als a, also zusammen kleiner als na sind, so ergibt sich

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) > \frac{a-1}{a}.$$

Die absteigende Folge (*) ist also ganz in dem Intervall $\left(\frac{a-1}{a}, a-1\right)$ enthalten.

Nach § 5 können wir schließen, daß sie einen Grenzwert hat. Wir wollen ihn mit $\varphi(a)$ bezeichnen, so daß

$$\varphi(a) = \lim \left\{ n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right\}$$

ist. Der Grenzwert muß offenbar demselben Intervall[1]) angehören, in welchem die Folge liegt.[2]) Wir können also sicher sein, daß $\varphi(a) > 0$ ist.

Wir werden jetzt zeigen, daß $(a^h - 1):h$ auch dann dem Grenzwert $\varphi(a)$ zustrebt, wenn wir h irgendwie anders durch positive Werte nach Null konvergieren lassen.

Nach § 7 können wir uns auf den Fall beschränken, daß h absteigend nach Null konvergiert.[3]) p sei die größte ganze Zahl, die sich von $1:h$ fortnehmen läßt. Dann ist

$$p \leqq \frac{1}{h} < p + 1,$$

also

$$p\left(a^{\frac{1}{p+1}} - 1\right) < \frac{a^h - 1}{h} < (p+1)\left(a^{\frac{1}{p}} - 1\right).$$

Wenn jetzt h absteigend nach Null konvergiert, so durchläuft p eine

1) Die Grenzen des Intervalls rechnen wir mit dazu.

2) Sonst ließe sich um ihn eine Umgebung konstruieren, die kein Glied der Folge enthält.

3) Man erreicht dies durch eine Umrangierung der Werte, die h annimmt.

Teilfolge von 1, 2, 3, ..., wobei ihm endliche Ruhepausen gestattet sind.[1]) D. h. es darf sich jeder Wert eine endliche Anzahl von Malen wiederholen. Machte das p bei einem bestimmten Werte p_0 eine unendliche Ruhepause, d. h. bliebe es überhaupt immer bei diesem Werte stehen, so würden fast alle Quotienten $1:h$ kleiner als p_0+1 und fast alle h größer als $1:(p_0+1)$ sein, was mit $\lim h=0$ unvereinbar ist.

Was machen nun

$$p\left(a^{\frac{1}{p+1}}-1\right) \quad \text{und} \quad (p+1)\left(a^{\frac{1}{p}}-1\right)?$$

Sie durchlaufen Teilfolgen von

$$0\,(a^1-1), \quad 1\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right), \ldots \quad \text{bzw.} \quad 2\,(a^1-1), \quad 3\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right), \ldots,$$

wobei auch wieder endliche Ruhepausen gestattet sind. Es ist aber

$$\lim\left\{(n-1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right\}=\lim\left\{n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}=\varphi(a)$$

und

$$\lim\left\{(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right\}=\lim\left\{n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=\varphi(a)$$

ist, weil

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Also können wir (auf Grund der Bemerkungen 1 und 3 in § 4) schließen, daß auch

$$\lim\left\{p\left(a^{\frac{1}{p+1}}-1\right)\right\}=\varphi(a)$$

und

$$\lim\left\{(p+1)\left(a^{\frac{1}{p}}-1\right)\right\}=\varphi(a)$$

ist. Dann folgt aber weiter (nach Bemerkung 6 in § 4)

$$(\dagger) \qquad \lim\frac{a^h-1}{h}=\varphi(a).$$

Konvergiert h durch **negative** Werte nach Null, so konvergiert $-h$ durch positive Werte nach Null. Schreibt man nun

$$\frac{a^h-1}{h}=\frac{a^{-h}-1}{-h}:\left(1-\frac{a^{-h}-1}{-h}\cdot h\right),$$

---

1) Nur endlichviele h-Werte sind größer als 1. Streichen wir sie, so ist immer $p>0$.

so findet man

$$\lim \frac{a^h - 1}{h} = \varphi(a) : \{1 - \varphi(a) \cdot 0\} = \varphi(a),$$

also wieder die Relation (†).

Konvergiert h durch positive und negative Werte nach Null, so kann es sein, daß fast alle diese Werte gleiches Zeichen haben. Dann kommt man durch eine endliche Anzahl von Streichungen auf die beiden schon erledigten Fälle und kann auf Grund der Bemerkung 2 in § 4 schließen, daß nach wie vor die Relation (†) gilt. Es kann aber auch sein, daß es unendlichviele positive und unendlichviele negative h gibt. In diesem Falle muß man sich auf die Bemerkungen 4 und 5 in § 4 stützen, um wieder zu der Relation (†) zu gelangen.

Wir wollen uns jetzt noch von der Annahme $a > 1$ befreien. Ist a positiv und kleiner als 1, so ist $c = 1 : a$ größer als 1. Nun schreiben wir

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{1 - c^h}{h c^h} = \frac{-\dfrac{c^h - 1}{h}}{1 + \dfrac{c^h - 1}{h} \cdot h}$$

und erhalten dann sofort

$$\lim \frac{a^h - 1}{h} = -\frac{\varphi(c)}{1 + \varphi(c) \cdot 0} = -\varphi(c).$$

Hieraus ersehen wir, daß $\varphi(a)$, der Grenzwert von $(a^h - 1) : h$ bei nach Null konvergierendem h, auch im Falle $0 < a < 1$ existiert. Im Falle $a = 1$ ist $(a^h - 1) : h$ beständig gleich Null, also auch der Grenzwert gleich Null. Daher ist $\varphi(1) = 0$ zu setzen.

Hiermit ist $\varphi(a)$ für alle positiven Werte von a definiert, und wir wissen, daß $\varphi(a)$ positiv oder negativ ist, je nachdem $a > 1$ oder $a < 1$, und daß es nur für $a = 1$ verschwindet.

Um nun $\varphi(a)$ zu bestimmen, bemerken wir, daß im Falle $\delta \gtrless 0$

$$\varphi(10^\delta) = \lim \frac{(10^\delta)^h - 1}{h} = \lim \left\{\frac{10^{h\delta} - 1}{h\delta} \cdot \delta\right\} = \varphi(10) \cdot \delta$$

ist, wenn $\lim h = 0$. Auch im Falle $\delta = 0$ gilt die Gleichung

$$(\ast) \qquad \varphi(10^\delta) = \varphi(10) \cdot \delta,$$

weil sich dann beide Seiten auf Null reduzieren.

Wir wissen, daß jede positive Zahl a sich in der Form 10^{δ} darstellen läßt und δ der Logarithmus von a ist, also $\delta = \operatorname{Log} a$. Setzen wir also $10^{\delta} = a$, so verwandelt sich $\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\end{smallmatrix}\right)$ in

$$(**) \qquad \varphi(a) = \varphi(10) \cdot \operatorname{Log} a.$$

$\varphi(a)$ unterscheidet sich also von $\operatorname{Log} a$ um den konstanten positiven Faktor $\varphi(10)$.

Wenn wir statt 10 die Basis

$$e = 10^{1:\varphi(10)}$$

benutzen und mit $\log a$ den Logarithmus von a zur Basis e bezeichnen, so ist

$$a = e^{\log a} = 10^{\frac{\log a}{\varphi(10)}},$$

also

$$\frac{\log a}{\varphi(10)} = \operatorname{Log} a.$$

Die Formel $(**)$ können wir jetzt in folgender Form schreiben:

$$\varphi(a) = \log a.$$

$\varphi(a)$ ist also der Logarithmus von a zur Basis e. Man nennt diese Logarithmen natürliche Logarithmen. Eine bequeme Methode zur Berechnung ihrer Basis e werden wir später kennen lernen.

Nun wollen wir zur Differentiation der Funktion a^x zurückkehren. Der Differenzenquotient lautete

$$a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}.$$

Konvergiert h nach Null, so strebt er dem Grenzwert zu

$$a^x \varphi(a) = a^x \log a.$$

a^x hat also die Ableitung

$$(a^x)' = a^x \log a$$

und das Differential

$$d a^x = a^x \log a \cdot dx.$$

Setzen wir $a = e$, so wird $\log a = 1$, weil nämlich $e^1 = e$ ist. e^x hat also die Ableitung

$$(e^x)' = e^x,$$

d. h. die Ableitung ist hier gleich der Funktion.

§ 23. Differentiation der trigonometrischen Funktionen.

Wir beginnen mit der Funktion $\sin x$. Der Differenzenquotient lautet

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x\,\frac{\sin h}{h}-\sin x\,\frac{1-\cos h}{h}.$$

Hierbei haben wir benutzt, daß

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$$

ist.

Zunächst müssen wir zusehen, was $\frac{\sin h}{h}$ macht, wenn h nach Null konvergiert. Da

$$\frac{\sin(-h)}{-h}=\frac{-\sin h}{-h}=\frac{\sin h}{h}$$

ist, so genügt es h durch positive Werte nach Null konvergieren zu lassen, und wir können überdies annehmen, daß h absteigend nach Null konvergiert. Wenn h hierbei die Folge $\frac{\pi}{1}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \cdots$ durchläuft, so läßt sich leicht zeigen, daß $\frac{\sin h}{h}$ beständig zunimmt und dem Grenzwert 1 zustrebt.

Der Leser wird leicht bestätigen, daß das einbeschriebene reguläre n-Eck des Einheitskreises die Seite $2\sin\frac{\pi}{n}$, also den Umfang $2n\sin\frac{\pi}{n}$ hat.

Wenn n die Folge 1, 2, 3, ... durchläuft, konvergiert der Umfang des n-Ecks zunehmend nach dem Umfang des Einheitskreises, d. h. nach 2π. Also konvergiert der durch 2π dividierte Umfang des n-Ecks, d. h.

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

zunehmend nach 1.

Auf diesen Spezialfall läßt sich nun der allgemeine reduzieren, und zwar nach der in § 22 angewandten Methode. p sei die größte ganze Zahl, die sich von $\pi:h$ fortnehmen läßt. Dann ist

$$p\leqq\frac{\pi}{h}<p+1,$$

also[1])

$$\sin\frac{\pi}{p+1}<\sin h\leqq\sin\frac{\pi}{p}$$

und

$$\frac{p}{\pi}\sin\frac{\pi}{p+1}<\frac{\sin h}{h}<\frac{p+1}{\pi}\sin\frac{\pi}{p}.$$

1) Wir dürfen annehmen, daß $p>0$ ist.

Wenn h jetzt absteigend nach Null konvergiert, so durchlaufen die einschließenden Größen Teilfolgen von

$$\frac{0}{\pi}\sin\frac{\pi}{1},\quad \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2},\ \ldots \text{ bzw. } \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{1},\quad \frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{2},\ \ldots,$$

eventuell mit endlichen Ruhepausen (vgl. S. 38). Da nun

$$\lim\left(\frac{n-1}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)=\lim\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right\}=1$$

und

$$\lim\left(\frac{n+1}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)=\lim\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right\}=1$$

ist, so kann man nach § 4 schließen, daß auch

$$\frac{p}{\pi}\sin\frac{\pi}{p+1} \quad \text{und} \quad \frac{p+1}{\pi}\sin\frac{\pi}{p}$$

beide dem Grenzwert 1 zustreben. Dasselbe gilt dann von der eingeschlossenen Größe $\frac{\sin h}{h}$. Es ist also, wenn $h\,(\gtrless 0)$ irgendwie nach Null konvergiert,

$$\lim\left(\frac{\sin h}{h}\right)=1.$$

In dem Differenzenquotienten von $\sin x$ kam noch ein anderer Ausdruck vor, dessen Verhalten bei nach Null konvergierendem h wir untersuchen müssen, nämlich

$$\frac{1-\cos h}{h}.$$

Nun ist aber

$$\cos h=\cos^2\frac{h}{2}-\sin^2\frac{h}{2},\quad \text{also } 1-\cos h=2\sin^2\frac{h}{2}.$$

Daher können wir schreiben:

$$\frac{1-\cos h}{h}=\frac{h}{2}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2.$$

Da $\frac{h}{2}$ gleichzeitig mit h nach Null konvergiert, ist

$$\lim\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=1.$$

Also können wir schließen:

$$\lim\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)=0\cdot 1=0.$$

Kehren wir zu dem Differenzenquotienten von $\sin x$ zurück, so ergibt sich sofort, daß er dem Grenzwert

$$\cos x\cdot\lim\left(\frac{\sin h}{h}\right)-\sin x\cdot\lim\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)=\cos x$$

zustrebt. $\sin x$ hat also die Ableitung

$$(\sin x)'=\cos x$$

und das Differential

$$d\sin x=\cos x\,dx.$$

Bei der Funktion $\cos x$ kommt man in ganz ähnlicher Weise zum Ziele. Es ist

$$\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\ \sin h,$$

also

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x\frac{\sin h}{h}-\cos x\frac{1-\cos h}{h}.$$

Konvergiert h nach Null, so strebt dieser Differenzenquotient dem Grenzwert $-\sin x$ zu. Daher hat $\cos x$ die Ableitung

$$(\cos x)'=-\sin x$$

und das Differential

$$d\cos x=-\sin x\,d\,x.$$

Die Differentiation von

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

erledigt sich mittelst der Regel 4 in § 20. Danach ist nämlich

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$\operatorname{tg}x$ hat also die Ableitung

$$(\operatorname{tg}x)'=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

und das Differential

$$d\operatorname{tg}x=(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx=\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Ebenso ergibt sich aus

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{\sin x(\cos x)'-\cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-1-\cot^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

daß $\cot x$ die Ableitung

$$(\cot x)' = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

und das Differential

$$d \cot x = -(1 + \cot^2 x)\, d\, x = -\frac{d\, x}{\sin^2 x}$$

hat.

§ 24. Umkehrung einer stetigen Funktion.

Wir wollen in dem Intervall (a, b) eine Funktion $f(x)$ betrachten, die die Eigenschaft $f(a) \gtrless f(b)$ hat. Die Funktionswerte an den Grenzen des Intervalles sollen also verschieden sein, und zwar möge $f(a) < f(b)$ sein.[1])

Nehmen wir eine Zahl C, die zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, so kann es sein, daß C kein Funktionswert ist, daß es also in (a, b) keine Stelle x gibt, wo $f(x) = C$ ist. Nun wollen wir ein Intervall (α, β), welches die Eigenschaft

$$f(\alpha) < C < f(\beta)$$

besitzt, ein ausgezeichnetes Intervall nennen. Nimmt man die Mitte γ eines solchen Intervalles, so hat man entweder $f(\gamma) > C$ oder $f(\gamma) < C$, weil eben $f(\gamma) = C$ ausgeschlossen ist. Im ersten Falle ist (α, γ) ausgezeichnet und (γ, β) nicht, im zweiten Falle (γ, β) und (α, γ) nicht. Ein ausgezeichnetes Teilintervall enthält also eine und nur eine ausgezeichnete Hälfte.

Da (a, b) selbst ein ausgezeichnetes Intervall ist, so gibt es darin eine ausgezeichnete Hälfte (a_1, b_1), in (a_1, b_1) wieder eine ausgezeichnete Hälfte (a_2, b_2) usw. Wir wissen von früher (vgl. S. 23), daß ein und nur ein Punkt $\mathfrak{x}$ existiert, der in allen diesen Intervallen (a_n, b_n) enthalten ist. An dieser Stelle $\mathfrak{x}$ muß nun die Funktion $f(x)$ unstetig sein. Die Stetigkeit besteht, wie wir wissen (vgl. S. 30), darin, daß $f(\mathfrak{x} + h) - f(\mathfrak{x})$ gleichzeitig mit h nach Null konvergiert, d. h. daß aus $\lim x = \mathfrak{x}$ folgt $\lim f(x) = f(\mathfrak{x})$.

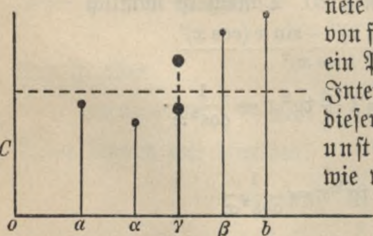

Fig. 11.

Wäre also $f(x)$ an der Stelle $\mathfrak{x}$ stetig, so müßte

$$\lim f(a_n) = f(\mathfrak{x}) \text{ und } \lim f(b_n) = f(\mathfrak{x})$$

sein, weil

$$\lim a_n = \mathfrak{x} \text{ und } \lim b_n = \mathfrak{x}$$

1) Sollte $f(a) > f(b)$ sein, so brauchen wir nur statt $f(x)$ die Funktion $-f(x)$ zu betrachten.

ist. Alle $f(a_n)$ sind aber kleiner als C, folglich $f(\mathfrak{x}) \leqq C$, alle $f(b_n)$ größer als C, folglich $f(\mathfrak{x}) \geqq C$. Es könnte also nur $f(\mathfrak{x}) = C$ sein. Das geht aber nicht, weil C laut Annahme kein Funktionswert sein soll.

Wir können unser Resultat so aussprechen: Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall (a, b) einen Zwischenwert ausläßt, so ist sie irgendwo unstetig.

Nimmt sie z. B. in (x_1, x_2) einen Wert K nicht an, der zwischen den Werten $f(x_1)$ und $f(x_2)$ liegt, so gibt es in dem Intervall (x_1, x_2) eine Unstetigkeitsstelle.[1]) Was wir nämlich für (a, b) bewiesen haben, können wir auf (x_1, x_2) anwenden.

Der obige Satz läßt sich keineswegs umkehren. Eine Funktion, die keinen Zwischenwert ausläßt, kann trotzdem irgendwo unstetig sein. Man kann das durch Beispiele beweisen, worauf wir aber hier nicht eingehen. Wir wollen nur noch eine andere Fassung des obigen Satzes angeben:

Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall (a, b) überall stetig ist, auch an den Grenzen a und b, so nimmt sie jeden Zwischenwert an.

Jetzt können wir die Frage nach der Umkehrung einer stetigen Funktion behandeln.

$y = f(x)$ sei in dem Intervall (a, b), einschließlich der Grenzen a und b, stetig. Wir wollen versuchen diese Funktion umzukehren, d. h. x als Funktion von y zu betrachten. Soll dies möglich sein, so darf die Funktion keinen Wert mehr als einmal annehmen; sonst würden nämlich zu manchem Wert von y mehrere Werte von x gehören, was unserem Funktionsbegriff widerspräche (wonach jedem Wert der unabhängigen nur ein Wert der abhängigen Veränderlichen zugeordnet sein soll).

Wenn also c und c_1 zwei verschiedene Werte aus (a, b) sind, so ist immer $f(c) \gtrless f(c_1)$. Wir wollen jetzt irgend drei Werte x_1, x_2, x_3 aus (a, b) herausgreifen, die in der Beziehung $x_1 < x_2 < x_3$ stehen, so daß x_2 zwischen x_1 und x_3 liegt. Es läßt sich zeigen, daß dann auch $f(x_2)$ zwischen $f(x_1)$ und $f(x_3)$ liegt. Würde nämlich der Wert $f(x_2)$ außerhalb des Intervalls $(f(x_1), f(x_3))$ liegen, so gäbe es einen Wert C, der sowohl zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ als auch zwischen $f(x_2)$ und $f(x_3)$ liegt. Da die Funktion $f(x)$ stetig ist, so müßte sie diesen Wert C an einer Stelle c zwischen x_1 und x_2 und auch an einer Stelle c_1 zwischen x_2 und x_3 annehmen. Es wäre also $f(c) = f(c_1)$ und $c < c_1$.

1) Diese kann auch mit x_1 oder x_2 zusammenfallen.

Aus dem Obigen geht hervor, daß $f(x)$, wenn x von a bis b zunimmt, entweder beständig wächst oder beständig abnimmt.[1])

Um einen bestimmten Fall zu haben, wollen wir uns denken, daß $f(x)$ bei zunehmendem x beständig wächst[2]). Wir können uns leicht überzeugen, daß eine solche Funktion sich umkehren läßt. $A = f(a)$ ist der kleinste und $B = f(b)$ der größte Wert von $f(x)$ und jede Zahl C zwischen A und B ist ebenfalls ein Funktionswert. Die Werte von $f(x)$ füllen also das ganze Intervall (A, B) aus. Da jeder Wert von der Funktion nur einmal angenommen wird, so entspricht jedem y in (A, B) ein und nur ein x in (a, b) derart, daß $y = f(x)$ ist. x ist also in dem Intervall (A, B) eine Funktion von y:

$$x = \varphi(y).$$

Diese Funktion nennt man die Umkehrung (die inverse Funktion) von $y = f(x)$[3]). Bei zunehmendem y wächst offenbar $\varphi(y)$ beständig.

$\varphi(y)$ ist ferner in dem Intervall (A, B) stetig.

Offenbar hat $\varphi(y)$ die Eigenschaft, alle Zwischenwerte anzunehmen. Diese Eigenschaft ist aber bei einer monotonen Funktion mit der Stetigkeit gleichbedeutend, d. h. eine monotone Funktion, die keinen Zwischenwert ausläßt, ist stetig. Es genügt, wenn wir das bei $\varphi(y)$ zeigen.

Lassen wir z. B. y aufsteigend nach $\mathfrak{y}$ konvergieren, so durchläuft $\varphi(y)$ eine aufsteigende Folge, deren Glieder kleiner als $\varphi(\mathfrak{y})$ sind. Wäre nun $\lim \varphi(y)$ kleiner als $\varphi(\mathfrak{y})$, so könnte die Funktion einen Wert c, der zwischen beiden liegt, nicht annehmen. Es ist also sicher $\lim \varphi(y) = \varphi(\mathfrak{y})$, und dies gilt auch, wenn y absteigend nach $\mathfrak{y}$ konvergiert. Aus § 7 läßt sich entnehmen, daß dieselbe Relation besteht, wenn wir y irgendwie nach $\mathfrak{y}$ konvergieren lassen.

Wir können unser Resultat so formulieren: Eine stets wachsende[4]) oder stets abnehmende stetige Funktion, läßt sich umkehren, und die Umkehrung ist von derselben Beschaffenheit.

Fig. 12 soll dazu dienen, die Beziehung zwischen den beiden Funktionen $y = f(x)$ und $x = \varphi(y)$ zu veranschaulichen. Es ist $\overline{OX} = x$

1) Man nennt solche Funktionen monoton, gebraucht aber diese Bezeichnung manchmal auch, wenn man nur sagen kann, daß $f(x)$ bei wachsendem x nie abnimmt oder nie zunimmt.

2) Wenn $f(x)$ mit zunehmendem x abnimmt, so betrachten wir $-f(x)$.

3) Ebenso ist $y = f(x)$ die Umkehrung von $x = \varphi(y)$.

4) D. h. wachsend beim Zunehmen der unabhängigen Veränderlichen.

und $\overline{OY}=y$. Wenn der Punkt X sich auf der x-Achse in positiver Richtung von X_0 nach X_1 bewegt $(\overline{OX_0}=a,\ \overline{OX_1}=b)$, so bewegt sich der Punkt Y auf der y-Achse in positiver Richtung von Y_0 nach Y_1 $(\overline{OY_0}=A,\ \overline{OY_1}=B)$ und umgekehrt. Geometrisch kommt die Umkehrung einer Funktion auf eine Vertauschung der beiden Koordinatenachsen hinaus.

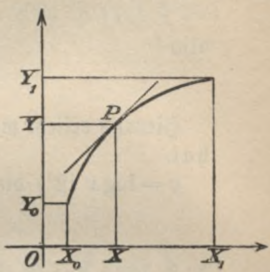

Fig. 12.

§ 25. Beispiele.

1. $y=e^x$ hat die Umkehrung $x=\log y$.

2. $y=\sin x$ ist stetig und nimmt beständig zu (von -1 bis 1), wenn x von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ wächst. $y=\sin x$ läßt sich also in dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ umkehren. Offenbar lautet die Umkehrung $x=\operatorname{arc}\sin y$.

In demselben Intervall hat $y=\operatorname{tg} x$ die Umkehrung $x=\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$.

Die inverse Funktion zu $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ ist $x=\operatorname{arc}\cos y$.

$y=\cot x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ hat die inverse Funktion $x=\operatorname{arc}\cot y$.

Die zyklometrischen Funktionen sind also die inversen der trigonometrischen.

3. $y=x^m$ läßt sich, wenn m eine der Zahlen 1, 3, 5, ... in jedem Intervall (a, b) umkehren. Die Umkehrung lautet $\sqrt[m]{y}$.

Ist m eine der Zahlen 2, 4, 6, ..., so läßt sich $y=x^m$ nicht in jedem Intervall umkehren, wohl aber in jedem Intervall, welches die Null nicht umschließt. Die Umkehrung lautet $x=+y^{\frac{1}{m}}$ oder $x=-y^{\frac{1}{m}}$, je nachdem es sich um ein positives oder negatives Intervall handelt.

§ 26. Differentiation der inversen Funktionen.

$x=\varphi(y)$ und $y=f(x)$ seien im Sinne des § 24 zueinander invers.[1]) Wir wollen ferner annehmen, daß $\varphi'(y)$ existiert und nicht verschwindet. Erteilen wir x das Inkrement $\triangle x$, so erfährt y das Inkrement $\triangle y$, und es ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=1:\frac{\triangle x}{\triangle y}.$$

1) Die Funktionen sind also stetig und stets zunehmend oder stets abnehmend.

Lassen wir nun $\triangle x$ nach Null konvergieren, so konvergiert auch $\triangle y$ nach Null und dabei wird

$$\lim \left(\frac{\triangle x}{\triangle y}\right) = \varphi'(y),$$

also

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = 1 : \varphi'(y).$$

Hieraus ersieht man, daß $f'(x)$ existiert und den Wert $1:\varphi'(y)$ hat.

$y = \log x$ ist[1]) die Umkehrung vor $x = e^y$. Also ist (vgl. § 22)

$$(\log x)' = \frac{1}{e^y},$$

d. h. $\log x$ hat die Ableitung

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

und das Differential

$$d \log x = \frac{dx}{x}.$$

$y = \arcsin x$ ist die Umkehrung von $x = \sin y$. Also ist (vgl. § 23)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}$$

d. h. $\arcsin x$ hat die Ableitung

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und das Differential

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hierbei darf x nicht gleich 1 oder -1 sein, und die Wurzel ist positiv zu nehmen, weil nach der Definition (vgl. § 16) y zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, also einen positiven Kosinus hat.

$y = \arccos x$ ist die Umkehrung von $x = \cos y$. Also ist (vgl. § 23)

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y},$$

d. h. $\arccos x$ hat die Ableitung

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und das Differential

$$d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1) Es wird $x > 0$ vorausgesetzt.

Hierbei ist wieder $x^2 < 1$ vorauszusetzen, und die Wurzel ist positiv, weil nach der Definition (vgl. § 16) y zwischen 0 und π liegt, also einen positiven Sinus hat.

$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ist die Umkehrung von $x = \operatorname{tg} y$. Also ist (vgl. § 23)

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

d. h. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ hat die Ableitung

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

und das Differential

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

$y = \operatorname{arc} \cot x$ ist die Umkehrung von $x = \cot y$. Also ist (vgl. § 23)

$$(\operatorname{arc} \cot x)' = \frac{1}{-1 - \cot^2 y},$$

d. h. $\operatorname{arc} \cot x$ hat die Ableitung

$$(\operatorname{arc} \cot x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

und das Differential

$$d \operatorname{arc} \cot x = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

§ 27. Differentiation der zusammengesetzten Funktionen.

$F(u)$ sei eine Funktion von u, die für $\alpha \leqq u \leqq \beta$ definiert ist; $f(x)$ eine Funktion von x, die für $a \leqq x \leqq b$ definiert ist; außerdem sei $f(x)$ so beschaffen, daß in dem Intervall (a, b)

$$\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$$

ist. Setzen wir dann

$$u = f(x), \qquad y = F(u),$$

so gehört zu jedem Wert x in (a, b) ein Wert von u in (α, β) und zu diesem ein Wert von y. Es entspricht also durch Vermittelung von u jedem Wert von x ein Wert von y, so daß y eine Funktion von x ist. Wie y von x abhängt, drückt die Formel

$$y = F(f(x))$$

aus. Man nennt $F(f(x))$ eine zusammengesetzte Funktion.

Wir wollen nun annehmen, daß die Ableitungen $f'(x)$ und $F'(u)$ existieren und zusehen, ob dann auch $F(f(x))$ eine Ableitung hat.

Erteilen wir dem x das Inkrement $\triangle x$, so erfährt u ein Inkrement $\triangle u$ und y ein Inkrement $\triangle y$.

Es handelt sich für uns um den Differenzenquotienten $\triangle y : \triangle x$ bzw. um sein Verhalten bei nach Null konvergierendem $\triangle x$.

$\triangle x$ durchlaufe die Nullfolge $h_1, h_2, h_3, \ldots$ mit lauter nicht verschwindenden Gliedern. Dann wird $\triangle u$ ebenfalls eine Nullfolge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ durchlaufen (vgl. S. 30). Es ist aber nicht gesagt, daß auch alle k_n von Null verschieden sind.

Wenn fast alle k_n von Null verschieden sind, so können wir durch eine endliche Anzahl von Streichungen den Fall $\triangle u \gtrless 0$ herbeiführen. Dann dürfen wir aber schreiben

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x},$$

und es ergibt sich

$$(*) \qquad \lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = F'(u) \cdot f'(x).$$

Sind fast alle k_n gleich Null, so können wir durch eine endliche Anzahl von Streichungen den Fall $\triangle u = 0$ herstellen. Dann ist aber auch $\triangle y = \triangle F(u) = 0$. Man hat also

$$\frac{\triangle u}{\triangle x} = 0, \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = 0$$

und daher

$$\lim \frac{\triangle u}{\triangle x} = f'(x) = 0, \quad \lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = 0,$$

so daß auch jetzt die Gleichung (*) gilt. Sind unendlich viele k_n von Null verschieden und unendlich viele k_n gleich Null, so können wir uns auf die Bemerkungen 4 und 5 in § 4 stützen und erhalten wieder die Gleichung (*). Sie sagt uns, daß die Ableitung von

$$y = F(f(x))$$

existiert und folgenden Wert hat:

$$\{F(f(x))\}' = F'(f(x)) f'(x).$$

Das Differential entsteht aus der Ableitung durch Multiplikation mit dx. Es ist also

$$dy = F'(u) f'(x) dx$$

oder, da

$$du = f'(x) dx$$

ist,

$$dy = F'(u) du.$$

Das Differential von $y = F(u)$ würde genau so aussehen, wenn u selbst die unabhängige Veränderliche wäre. Das ist einer der Vorteile, den das Differential im Vergleich zur Ableitung bietet.

Wir wollen dieses Resultat anwenden, um die Differentiationsregel der inversen Funktionen noch einmal abzuleiten (vgl. § 26). $y=f(x)$ sei zu $x=\varphi(y)$ invers. Existiert die Ableitung $\varphi'(y)$ und ist sie von Null verschieden, so existiert, wie wir gesehen haben, auch $f'(x)$. Weiß man dies einmal, so kann man bei der Berechnung von $f'(x)$ so verfahren. Das Differential von $x=\varphi(y)$ lautet

$$dx=\varphi'(y)\,dy,$$

ob nun y oder x die unabhängige Variable ist. Betrachten wir x als die unabhängige Variable, so ergibt sich

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 28. Beispiele.

1. $y=e^{f(x)}$.

$$dy=e^{f(x)}\,df(x)=e^{f(x)}f'(x)\,dx.$$

2. x^μ ($x>0$ und μ eine beliebige Zahl) läßt sich so schreiben:

$$x^\mu=e^{\mu\log x}.$$

Nach Nr. 1 ist also

$$d(x^\mu)=e^{\mu\log x}\,d(\mu\log x)=\mu e^{\mu\log x}\frac{dx}{x}$$

oder

$$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx.$$

3. $y=\log f(x)$.

$$dy=\frac{df(x)}{f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

Z. B. ist[1])

$$d\log\sin x=\cot x\,dx,$$

$$d\log\cos x=-\operatorname{tg} x\,dx,$$

$$d\log\operatorname{tg} x=\frac{dx}{\sin x\cos x}=\frac{2\,dx}{\sin 2x},$$

$$d\log\cot x=-\frac{dx}{\sin x\cos x}=-\frac{2\,dx}{\sin 2x}.$$

4. $y=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

$$dy=\frac{d\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{dx+d\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

---

1) Man muß $f(x)>0$ voraussetzen.

Nach Nr. 2 ist

$$d\sqrt{1+x^2} = d(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1+x^2)$$

$$= \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Man findet schließlich

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

§ 29. Der Mittelwertsatz.

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz, der folgendermaßen lautet: Wenn $f(x)$ in dem Intervall (a, b), einschließlich der Grenzen, stetig ist, so gibt es in (a, b) einen Funktionswert $f(\xi)$, der von keinem andern übertroffen, ebenso einen Funktionswert $f(\bar{\xi})$, der von keinem andern untertroffen wird. (Weierstraß.)

Der Anfänger sagt gewöhnlich, daß dies selbstverständlich ist. Es muß eben unter den Werten, die $f(x)$ in dem Intervall (a, b) annimmt, einen größten und einen kleinsten geben. Er möge aber bedenken, daß es sich hier um den größten und kleinsten Wert unter unendlich vielen handelt. Da ist die Existenz eines größten und kleinsten Wertes keineswegs so selbstverständlich. Z. B. gibt es unter den Werten

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \ldots$$

weder einen größten noch einen kleinsten. Der obige Satz bedarf also tatsächlich des Beweises. Es genügt aber die Existenz von $f(\xi)$ festzustellen. $-f(\bar{\xi})$ ist nämlich für $-f(x)$ ein größter Wert.

Ein in (a, b) enthaltenes Intervall (α, β) wollen wir ein ausgezeichnetes Teilintervall von (a, b) nennen, wenn es in (a, b) keinen Funktionswert gibt, der die sämtlichen Funktionswerte in (α, β) übertrifft.

Wenn man (a, b) mittelst des Wertes $c = \frac{a+b}{2}$ in (a, c) und (c, b) zerlegt, so ist wenigstens eins der beiden Teilintervalle ein ausgezeichnetes. Sonst ließen sich nämlich in (a, b) x_1 und x_2 so wählen, daß

$$\text{für } a \leqq x \leqq c \qquad f(x) < f(x_1),$$
$$\text{für } c \leqq x \leqq b \qquad f(x) < f(x_2)$$

wäre. Einer der beiden Werte $f(x_1)$, $f(x_2)$ wäre alsdann größer als alle Funktionswerte in (a, b), was offenbar ein Widerspruch ist. Es gibt also in (a, b) sicher eine ausgezeichnete Hälfte (a_1, b_1), ebenso in (a_1, b_1) eine ausgezeichnete Hälfte (a_2, b_2) usw. Ist ξ der gemeinsame Grenzwert von a_n und b_n, so läßt sich zeigen, daß $f(\xi)$ von keinem Funktionswert in (a, b) übertroffen wird. Wäre z. B. $f(\xi_0) > f(\xi)$, so gäbe es

in (a_1, b_1) eine Stelle ξ_1, so daß $f(\xi_1) \geqq f(\xi_0)$,
in (a_2, b_2) eine Stelle ξ_2, so daß $f(\xi_2) \geqq f(\xi_1)$,
in (a_3, b_3) eine Stelle ξ_3, so daß $f(\xi_3) \geqq f(\xi_2)$

ist, usw. Da $\lim \xi_n = \xi$ ist, so hat man wegen der Stetigkeit

$$\lim f(\xi_n) = f(\xi).$$

Andererseits ist aber $\lim f(\xi_n) \geqq f(\xi_0) > f(\xi)$.

Jetzt kommen wir zu einem grundlegenden Satze, den man als das **Theorem von Rolle** bezeichnet.

$f(x)$ sei weder bei a noch bei b unstetig und habe zwischen a und b überall eine Ableitung. Ist dann $f(a) = f(b) = 0$, so gibt es zwischen a und b eine Stelle, wo die Ableitung verschwindet.

Zwischen den beiden Nullstellen der Funktion liegt also sicher eine Nullstelle der Ableitung.

Da aus der Existenz der Ableitung die Stetigkeit folgt (vgl. S. 30), so ist $f(x)$ auch zwischen a und b überall stetig und erfüllt also die Voraussetzung unseres Hilfssatzes. Es gibt daher einen größten Wert $f(\xi)$ und einen kleinsten Wert $f(\bar{\xi})$.

Sind ξ und $\bar{\xi}$ mit a oder b identisch, so bedeutet dies, daß sowohl der größte als auch der kleinste Funktionswert gleich Null ist. Dann ist aber die Funktion $f(x)$ in dem ganzen Intervall (a, b) gleich Null und hat an jeder Stelle x zwischen a und b die Ableitung Null.

Liegt dieser triviale Fall nicht vor, so befindet sich wenigstens eine der beiden Stellen ξ, $\bar{\xi}$ zwischen a und b. Ist nun z. B. $a < \xi < b$, so ist von den beiden Differenzenquotienten

$$u = \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}, \quad v = \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \qquad (h > 0)$$

der erste nicht positiv, der zweite nicht negativ. Da nämlich $f(\xi)$ von keinem Funktionswert übertroffen wird, so hat man

$$f(\xi + h) - f(\xi) \leqq 0, \quad f(\xi - h) - f(\xi) \leqq 0,$$

und der Nenner ist bei u positiv, bei v negativ.

Läßt man nun h durch positive Werte nach Null konvergieren, so wird

$$\lim u = f'(\xi) \text{ und } \lim v = f'(\xi).$$

Wegen $u \leqq 0$ muß dann $f'(\xi) \leqq 0$ und wegen $v \geqq 0$ muß $f'(\xi) \geqq 0$ sein. Also folgt $f'(\xi) = 0$.

Ebenso zeigt man im Falle $a < \xi < b$, daß $f'(\xi) = 0$ sein muß. Immer gibt es also zwischen a und b eine Stelle, wo $f'(x)$ verschwindet.

Anwendung. Die kubische Gleichung

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

kann nur dann drei verschiedene reelle Wurzeln haben, wenn die quadratische Gleichung

$$f'(x) = 3 a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2 = 0$$

zwei verschiedene reelle Wurzeln hat. Sind nämlich x_1, x_2, x_3 die drei Nullstellen von $f(x)$ und ist $x_1 < x_2 < x_3$, so gibt es nach dem Theorem von Rolle zwischen x_1 und x_2 eine Nullstelle x_1' und zwischen x_2 und x_3 eine Nullstelle x_2' von $f'(x)$. Nun weiß man, daß x_1', x_2' reell sind, wenn

$$a_1^2 - 3 a_0 a_2 > 0$$

ist. Nur unter dieser Bedingung kann also die kubische Gleichung drei verschiedene reelle Wurzeln haben.

Wir wollen jetzt die Voraussetzung $f(a) = f(b) = 0$ fallen lassen, die übrigen Voraussetzungen des Rolleschen Theorems aber festhalten.

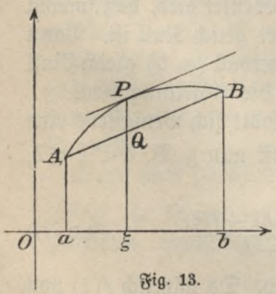

Fig. 13.

In Fig. 13 ist die Bildkurve von $f(x)$ zu sehen. Die Gerade AB in Fig. 13 ist die Bildkurve der Funktion

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{x-b}{a-b} f(a).$$

Die Bildkurve muß eine Gerade sein, weil $\varphi(x)$ offenbar die Form $mx + p$ hat[1]) (m und p Konstanten). Daß die Gerade durch die Punkte A und B hindurchgeht, erkennt man sofort, wenn man $x = a$ bzw. $x = b$ setzt. Dann ergibt sich nämlich

$$\varphi(a) = f(a), \quad \varphi(b) = f(b).$$

1) Vgl. Seite 26.

Betrachten wir nun die Funktion[1])

$$F(x) = f(x) - \varphi(x)$$

so erfüllt sie alle Bedingungen des Rolleschen Satzes.

Die Differenz von zwei stetigen Funktionen ist, wie unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit hervorgeht, stetig[2]). Ferner hat $F(x)$ zwischen a und b überall eine Ableitung, weil $f(x)$ und $\varphi(x)$ eine solche haben. Endlich ist $F(a) = F(b) = 0$.

Nach dem Rolleschen Satze gibt es zwischen a und b eine Stelle ξ, wo die Ableitung von $F(x)$ verschwindet, wo also

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi)$$

ist.

Berechnet man nun $\varphi'(x)$, so findet man

$$\varphi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es gilt also folgender Satz (der sogenannte Mittelwertsatz):

Wenn $f(x)$ weder bei a noch bei b unstetig ist und zwischen a und b überall eine Ableitung hat, so gibt es zwischen a und b eine Stelle ξ derart, daß

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

ist.

In Fig. 13 hat die Sehne AB die Richtungskonstante

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Andererseits ist $f'(\xi)$ die Richtungskonstante der Kurventangente im Punkte P mit der Abszisse ξ. Der Mittelwertsatz besagt, daß diese Tangente parallel zur Sehne ist.

Setzt man $a = x$ und $b = x + h$ oder $b = x$ und $a = x + h$, so wird sich ξ, da es zwischen x und $x + h$ liegt, in der Form $\xi = x + \vartheta h$ schreiben lassen, wobei $0 < \vartheta < 1$ ist. Die Formel des Mittelwertsatzes lautet dann

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \vartheta h). \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Falls man $a = x$ und $b = x + h$ gesetzt hat, ist h positiv; falls man $b = x$ und $a = x + h$ gesetzt hat, ist h negativ. Die Formel gilt, sobald $f(x)$ bei x und bei $x + h$ stetig ist und zwischen x und

1) Offenbar ist $F(x)$ die Maßzahl von QP.

2) $\varphi(x)$ ist überall stetig, weil es überall eine Ableitung hat.

$x+h$ überall eine Ableitung hat. Sie lehrt, daß der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ zu den Werten gehört, die die Ableitung $f'(x)$ zwischen x und $x+h$ annimmt.

Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich, **daß eine Funktion, die in einem Intervall überall die Ableitung Null hat, daselbst eine Konstante ist.**

Sind nämlich x und $x+h$ irgend zwei Werte in jenem Intervall, so hat man nach jenem Satze:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\vartheta h)=0,$$

also $f(x+h)=f(x)$. Dieses Resultat ist für die Integralrechnung von Wichtigkeit.

Zum Schluß wollen wir noch eine andere Schreibweise des Mittelwertsatzes angeben. Bezeichnet man $f(x+h)-f(x)$ und $hf'(x)$ in der üblichen Weise mit $\triangle y$ bzw. dy, so besagt der Mittelwertsatz, daß

$$\triangle y=(dy)_{x+\vartheta h}$$

ist. Dabei hat man rechts, nach Bildung des Differentials, x durch $x+\vartheta h$ zu ersetzen.

§ 30. Steigen und Fallen einer Funktion.

$f(x)$ erfülle in (a, b) alle Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Weiß man überdies, daß die Ableitung für $a<x<b$ stets positiv ist, so kann man schließen, daß $f(x)$ bei wachsendem x zunimmt oder steigt. Weiß man, daß die Ableitung für $a<x<b$ stets negativ ist, so kann man schließen, daß $f(x)$ bei wachsendem x abnimmt oder fällt. Ist nämlich $a\leqq x_1<x_2\leqq b$, so hat man nach dem Mittelwertsatz

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi). \qquad (x_1<\xi<x_2)$$

$f(x_2)-f(x_1)$ hat also das Zeichen von $f'(\xi)$.

Der gewöhnliche Fall ist der, daß $f(x)$ nicht nur zwischen a und b, sondern auch an den Grenzen von a und b eine Ableitung hat[1]), und daß die Ableitung zwischen a und b ein bestimmtes Vorzeichen bewahrt. Der Sachverhalt ist dann also folgender:

Für $a\leqq x\leqq b$ existiert $f'(x)$,

„ $a<x<b$ ist $f'(x)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\ \text{negativ.}\end{array}\right.$

Für $a\leqq x\leqq b$ $\left.\begin{array}{l}\text{steigt}\\ \text{fällt}\end{array}\right\}$ $f(x)$ bei zunehmendem[2]) x.

1) Daraus folgt die Stetigkeit an den Grenzen von (a, b). Vgl. S. 30.
2) Diesen Zusatz „bei zunehmendem x“ läßt man gewöhnlich fort.

Wir wollen jetzt einige Aufgaben behandeln, wo es sich um das Steigen oder Fallen von Funktionen handelt.

1. Wir betrachten alle Rechtecke mit dem Umfang $4a$ und fragen, welches unter ihnen den größten Inhalt hat.

Nennen wir die eine Rechteckseite x, so muß die andere $2a-x$ sein, damit der Umfang gleich $4a$ wird. Der Inhalt des Rechtecks ist

$$x(2a-x)=2ax-x^2=f(x).$$

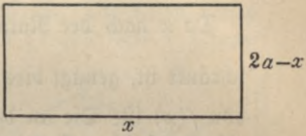

Fig. 14.

Nun finden wir durch Differentiation

$$f'(x)=2a-2x$$

und können folgendes konstatieren:

$$\begin{array}{l|l} x<a,\ f'(x)>0 & f(x) \text{ steigt für } x\leqq a, \\ x>a,\ f'(x)<0 & f(x) \text{ fällt für } x\geqq a. \end{array}$$

Daraus geht hervor, daß $f(a)$ der größte Wert von $f(x)$ ist. Im Falle $x=a$ ist aber das Rechteck ein Quadrat. Das Quadrat hat also unter allen Rechtecken mit gegebenem Umfang den größten Inhalt.

2. Von einem quadratischen Blech mit der Seite a werden an den Ecken vier gleiche Quadrate fortgeschnitten. Die überragenden Rechtecke werden heraufgebogen, so daß eine Schachtel entsteht. Wie muß man es einrichten, damit die Schachtel einen möglichst großen Inhalt bekommt?

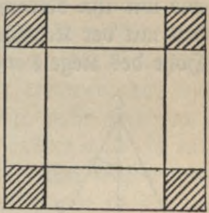
Fig. 15.

Die Basis der Schachtel (das innere Quadrat in Fig. 15) ist $(a-2x)^2$, die Höhe der Schachtel offenbar x, also der Inhalt

$$(a-2x)^2 x=f(x).$$

Differenziert man

$$f(x)=a^2x-4ax^2+4x^3,$$

so ergibt sich

$$f'(x)=a^2-8ax+12x^2.$$

Es ist also

$$\frac{f'(x)}{12}=x^2-\frac{2ax}{3}+\frac{a^2}{12}$$

$$=\left(x-\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{36}=\left(x-\frac{a}{3}-\frac{a}{6}\right)\left(x-\frac{a}{3}+\frac{a}{6}\right)$$

$$=\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{6}\right).$$

Wir können nun folgendes konstatieren:

$x < \frac{a}{6}$,	$f'(x) > 0$	$f(x)$ steigt für $x \leqq \frac{a}{6}$
$\frac{a}{6} < x < \frac{a}{2}$,	$f'(x) < 0$	$f(x)$ fällt für $\frac{a}{6} \leqq x \leqq \frac{a}{2}$.

Da x nach der Natur der Aufgabe auf das Intervall $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ beschränkt ist, genügt dies schon. Wir sehen, daß $f\left(\frac{a}{6}\right)$ der größte Wert von $f(x)$ ist. Die an den Ecken herausgeschnittenen Quadrate müssen also den sechsten Teil der Seite des ganzen Quadrates als Seite haben. Die Basis der Schachtel hat dann die Seite $a - \frac{2a}{6} = \frac{4a}{6}$. Die Schachtel ist also viermal so breit als hoch.

3. Wir betrachten alle Kegel mit der Seitenlinie a. Welcher von ihnen hat den größten Inhalt?

Lassen wir Fig 16 um die Achse DC rotieren, so entsteht ein Kegel, wie wir ihn betrachten. Nennen wir den Winkel, den die Erzeugenden mit der Kegelachse bilden, x, so ist der Grundradius $a \sin x$, die Höhe des Kegels $a \cos x$, also der Inhalt

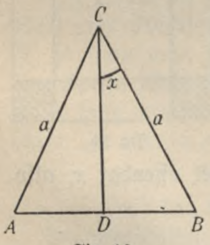

Fig. 16.

$$\frac{\pi a^3}{3} \sin^2 x \cos x = \frac{\pi a^3}{3} f(x).$$

Nun finden wir (vgl. § 20 und 23)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin x \cos x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot \sin x \\ &= \sin x \cos^2 x \,(2 - \operatorname{tg}^2 x) \end{aligned}$$

und können daher, wenn wir

$$\operatorname{arctg} \sqrt{2} = \alpha$$

setzen, folgendes konstatieren:

$0 < x < \alpha$,	$f'(x) > 0$	$f(x)$ steigt für $0 \leqq x \leqq \alpha$,
$\alpha < x < \frac{\pi}{2}$,	$f'(x) < 0$	$f(x)$ fällt für $\alpha \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$.

Da x auf das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ beschränkt ist, genügt dies. Wir sehen, daß $f(\alpha)$ der größte Wert von $f(x)$ ist. Der Kegel hat also den größten Inhalt, wenn die Erzeugenden mit der Achse den Winkel α

einschließen, dessen Tangens gleich $\sqrt{2}$ ist. Der Winkel α ist ungefähr[1]) $54^0\ 44'\ 8''$. Die Öffnung des Maximalkegels beträgt somit etwa $109^0\ 28'\ 16''$.

4. Eine berühmte Aufgabe ist die von der **Bienenzelle**. Der Leser schneide die Figur 15 aus Papier aus. Sie wird längs der stark gezeichneten Linien geknickt und daraus ein sechsseitiges Gefäß[2]) zurechtgebogen, dessen Basis ein reguläres Sechseck ist. Die Ecken dieses Sechsecks sind die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (7 fällt mit 1 zusammen). An der Basis wollen wir das Gefäß offen lassen. Am anderen Ende wollen wir es aber schließen. Dies läßt sich durch drei gleiche Rhomben bewirken, wie der Leser an seinem Papiermodell sofort bemerken wird. Sind diese drei Rhomben angebracht[3]), so hat man eine Bienenzelle vor sich. Bei einiger Überlegung wird der Leser erkennen, daß das Volumen der Bienenzelle nur von a und b abhängt, nicht aber von x (vgl. Fig. 17). Hält man also a und b fest und ändert x ab, so entstehen lauter Bienenzellen von gleichem Volumen. Wir fragen nun, welche unter ihnen die kleinste Oberfläche hat. Diese Frage ist für den Bau der Bienenzelle deshalb von Wichtigkeit, weil man um so weniger Material braucht, je kleiner die Oberfläche ist.

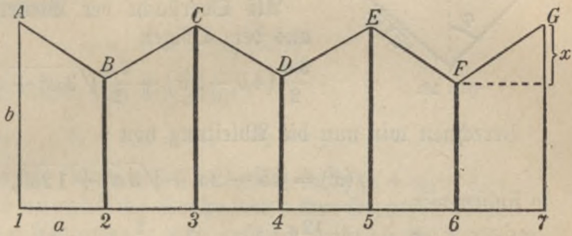

Fig. 17.

Die Oberfläche der Bienenzelle setzt sich zusammen aus sechs Trapezen und drei Rhomben. Der Inhalt jedes Trapezes ist

$$\frac{a(2b-x)}{2}.$$

Um den Inhalt eines Rhombus zu finden bemerke man, daß aus A, C, E, G beim Zurechtbiegen der Figur ein ebensolches Dreieck wird wie aus den Punkten 1, 3, 5, 7. Dann findet man sofort, daß die

1) Man findet das mit Hilfe einer logarithmisch-trigonometrischen Tafel, wie sie auf der Schule benutzt wird.

2) Es ist vorläufig an beiden Seiten offen.

3) Man schneidet sie aus Papier aus und klebt sie fest.

eine Diagonale des Rhombus $a\sqrt{3}$ ist. Die Seite des Rhombus ist aber $\sqrt{a^2+x^2}$. Also gelten für den Winkel φ (Fig. 18) die Gleichungen

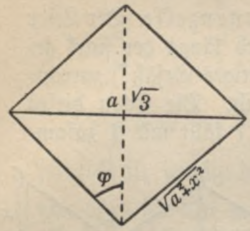

Fig. 18.

$$\sin\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+x^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Der Inhalt des Rhombus ist somit

$$2(a^2+x^2)\cos\varphi\sin\varphi = \frac{a}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}.$$

Als Oberfläche der Bienenzelle ergibt sich aus dem Obigen

$$\frac{3a}{2}(4b-2x)+\frac{3a}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}=\frac{3a}{2}f(x).$$

Berechnen wir nun die Ableitung von

$$f(x) = 4b-2x+\sqrt{3a^2+12x^2},$$

so finden wir

$$f'(x) = -2+\frac{12x}{\sqrt{3a^2+12x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3a^2+12x^2}}\left(6x-\sqrt{3a^2+12x^2}\right)$$

und können folgendes konstatieren:

Solange $6x<\sqrt{3a^2+12x^2}$, d. h. $36x^2<3a^2+12x^2$, also

$$x<\frac{a}{\sqrt{8}},$$

ist $f'(x)<0$. Sobald aber

$$x>\frac{a}{\sqrt{8}},$$

ist $f'(x)>0$. Daher fällt $f(x)$, solange $x\leqq\frac{a}{\sqrt{8}}$, und es steigt, sobald $x\geqq\frac{a}{\sqrt{8}}$ ist. $f\left(\frac{a}{\sqrt{8}}\right)$ ist somit der kleinste Wert[1]) von $f(x)$.

Nach unseren Formeln ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+4x^2}}.$$

Im Falle $x=\frac{a}{\sqrt{8}}$ wird also

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}.$$

---

1) x ist auf das Intervall $(0, b)$ beschränkt. Wir müssen, damit $a:\sqrt{8}$ in dieses Intervall fällt, annehmen, daß $b>\frac{a}{\sqrt{8}}$ ist.

2φ hat dann, wie wir wissen (vgl. S. 59) ungefähr den Wert $109^0\ 28'$. Durch Messungen an Bienenzellen hat Maraldi (1712) gefunden, daß die Bienen tatsächlich ihre Zellen ungefähr mit diesem Winkel bauen. Sie bauen also mit möglichst großer Materialersparnis.

§ 31. Allgemeines über unendliche Reihen.

Wir müssen hier einige Bemerkungen über unendliche Reihen einschalten.

Durch die Gleichung

$$(*) \qquad s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

pflegt man auszudrücken, daß die Folge

$$u_1, \quad u_1 + u_2, \quad u_1 + u_2 + u_3 \cdots,$$

den Grenzwert[1]) s hat. Man nennt in diesem Falle $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ eine konvergente unendliche Reihe und s ihre Summe. Andernfalls, d. h. wenn der Grenzwert s nicht existiert, heißt die Reihe divergent. Die Gleichung (*) ist also nur eine andere Schreibweise der Limesrelation

$$(\substack{*\\*}) \qquad \lim (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = s. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Sie besagt, daß $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, die n-te Partialsumme der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, dem Grenzwert s zustrebt.

Jeder Grenzwert läßt sich als Summe einer unendlichen Reihe darstellen. Hat z. B. die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ den Grenzwert s und setzt man $u_1 = s_1$, $u_2 = s_2 - s_1$, $u_3 = s_3 - s_2 \ldots$, so wird

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{und daher} \quad s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

Es ist also die Theorie der konvergenten unendlichen Reihen im Grunde dasselbe wie die Theorie der Grenzwerte.

Der Leser wird auf Grund dieses Zusammenhanges leicht die Richtigkeit folgender Regeln erkennen:

Aus $s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ kann man schließen:

$$c + s = c + u_1 + u_2 + \cdots,$$

$$cs = cu_1 + cu_2 + \cdots,$$

$$s = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots$$

1) Es handelt sich um einen eigentlichen Grenzwert.

Um z. B die Richtigkeit der letzten Gleichung festzustellen, wird der Leser bemerken, daß die Partialsummen der hier auftretenden Reihe offenbar $s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, \ldots$ lauten. Sie bilden eine Teilfolge der konvergenten Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Es gilt hier also die Bemerkung 1 in § 4.

Aus der ersten und dritten Regel ergibt sich, daß die Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{und} \quad u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

gleichen Charakter haben, d. h. beide konvergent oder beide divergent sind. Aus $\sigma = u_2 + u_3 + \cdots$ folgt nämlich nach der ersten Regel

$$u_1 + \sigma = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

und aus $s = u_1 + u_2 + \cdots$ nach der ersten und dritten Regel

$$s - u_1 = (-u_1 + u_1 + u_2) + u_3 + \cdots = u_2 + u_3 + \cdots$$

Da auch $u_2 + u_3 + \cdots$ und $u_3 + u_4 + \cdots$ den gleichen Charakter haben, so gilt dasselbe von $u_1 + u_2 + \cdots$ und $u_3 + u_4 + \cdots$ Überhaupt haben $u_1 + u_2 + \cdots$ und $u_\nu + u_{\nu+1} + \cdots$ (der ν-te Rest von $u_1 + u_2 + \cdots$) den gleichen Charakter.

Ferner ist leicht zu erkennen, daß aus

$$s = u_1 + u_2 + \cdots \quad \text{und} \quad t = v_1 + v_2 + \cdots$$

folgt

$$s + t = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \cdots \quad \text{(Addition der Reihen.)}$$

Setzt man nämlich

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad t_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

so ist die $(2n)$-te Partialsumme obiger Reihe offenbar $s_n + t_n$, die $(2n-1)$-te aber $s_n + t_{n-1}$. Beide haben also den Grenzwert $s + t$. Im übrigen ist hier die Bemerkung 5 aus § 4 anzuwenden.

Statt $u_1 + (-v_1) + u_2 + (-v_2) + \cdots$ schreibt man kürzer

$$u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + \cdots$$

Wenn $s = u_1 + u_2 + \cdots$, $t = v_1 + v_2 + \cdots$ ist, so kann man zunächst schließen $-t = (-v_1) + (-v_2) + \cdots$ und erhält dann durch Addition:

$$s - t = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + \cdots \quad \text{(Subtraktion der Reihen.)}$$

Reihen mit positiven Gliedern. Wenn alle u_n positiv[1]) sind, so bilden die Partialsummen der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ eine aufsteigende Zahlenfolge. In der Tat ist

$$s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geqq s_n, \quad \text{weil} \quad u_{n+1} \geqq 0.$$

1) Sie dürfen auch gleich Null sein.

Bei einer solchen Reihe braucht man nur zuzusehen, ob s_n unterhalb einer endlichen Grenze bleibt oder ob es bei zunehmendem n über alle Grenzen wächst. Im ersten Falle ist die Reihe konvergent, im zweiten Falle divergent. Das geht aus § 5 hervor.

Eine Reihe mit positiven Gliedern ist dann und nur dann konvergent, wenn ihre Partialsummen unterhalb einer endlichen Grenze liegen.

Z. B. ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

divergent, weil[1])

$$s_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

und $\sqrt{n}$ bei zunehmendem n über alle Grenzen wächst.

Dagegen ist die Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

konvergent. In der Tat ist hier

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Alle Partialsummen sind kleiner als 1. Die Summe der Reihe läßt sich hier sofort bestimmen. Es ist nämlich $\lim s_n = 1$, also

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

Alternierende Reihen vom Leibnizschen Typus. Wenn

$$u_1,\, u_2,\, u_3,\, \ldots$$

eine absteigende Folge positiver Zahlen ist, nennt man

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

eine alternierende[2]) Reihe vom Leibnizschen Typus. Wenn man die Partialsummen einer solchen Reihe auf der Zahlenlinie markiert, so entsteht ein Bild, wie Fig. 19 es zeigt. Um nämlich von der Stelle 0

1) Wir ersetzen alle Glieder der Partialsumme s_n durch das kleinste.

2) Alternierend heißt die Reihe, weil ihre Glieder $u_1, -u_2, u_3, -u_4, \ldots$ abwechselnd positiv und negativ sind.

zur ersten Partialsumme zu gelangen, muß man sich um u_1 nach rechts bewegen. Eine Bewegung um u_2 nach links führt dann zur zweiten Partialsumme, eine Bewegung um u_3 nach rechts zur dritten usw. Man pendelt also auf der Zahlenlinie hin und her. Die Schwingungen werden aber immer kleiner und kleiner. Daher liegen die Punkte

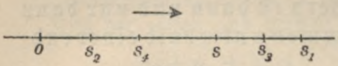

Fig. 19.

$$s_1, s_2, s_3, \dots$$

so, wie Fig. 19 es andeutet. Man sieht, daß

$$(s_2, s_1), (s_4, s_3), (s_6, s_5), \dots$$

ein Satz von Intervallen ist (vgl. § 6). (A, B) sei das Grenzintervall. Es habe also die aufsteigende Folge $s_2, s_4, s_6, \dots$ den Grenzwert A, die absteigende Folge $s_1, s_3, s_5, \dots$ den Grenzwert B. Die Reihe $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ wird dann und nur dann konvergent sein, wenn $A = B$ ist. Da nun

$$B - A = \lim u_n$$

ist, so ergibt sich folgender Satz:

Eine alternierende Reihe vom Leibnizschen Typus ist dann und nur dann konvergent, wenn das allgemeine Glied den Grenzwert Null hat. Die Summe s der Reihe ist in jedem der Intervalle $(s_2, s_1), (s_4, s_3), \dots$ enthalten.

Absolut konvergente Reihen. Die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ heißt absolut konvergent, wenn $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ konvergent ist. Um diese Benennung zu rechtfertigen, müssen wir uns zuerst überzeugen, daß die Konvergenz der zweiten Reihe die der ersten nach sich zieht. Dabei benutzen wir folgende Bemerkung:

Wenn immer $0 \leqq a_n \leqq b_n$ ist, so folgt aus der Konvergenz von $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ die Konvergenz von $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ Wenn nämlich alle Partialsummen $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ unterhalb einer endlichen Grenze liegen, so gilt dies um so mehr von den Partialsummen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, weil

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

ist.

Nun hat man

$$0 \leqq \frac{|u_n| + u_n}{2} \leqq |u_n|, \qquad 0 \leqq \frac{|u_n| - u_n}{2} \leqq |u_n|.$$

Ist nämlich $u_n \geqq 0$, so wird[1])

$$\frac{|u_n| + u_n}{2} = |u_n| \quad \text{und} \quad \frac{|u_n| - u_n}{2} = 0.$$

Ist aber $u_n < 0$, so wird

$$\frac{|u_n| + u_n}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{|u_n| - u_n}{2} = |u_n|.$$

Aus der Konvergenz der Reihe $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ folgt also nach der obigen Bemerkung die Konvergenz der Reihen

$$\frac{|u_1| + u_1}{2} + \frac{|u_2| + u_2}{2} + \frac{|u_3| + u_3}{2} + \cdots$$

und

$$\frac{|u_1| - u_1}{2} + \frac{|u_2| - u_2}{2} + \frac{|u_3| - u_3}{2} + \cdots$$

Da aus ihnen durch Subtraktion die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ entsteht, so ist sie ebenfalls konvergent.

Man sieht, daß eine absolut konvergente Reihe sich stets als Differenz von zwei konvergenten Reihen mit nicht negativen Gliedern darstellen läßt.

Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind. Nehmen wir z. B. die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots,$$

so ist sie als alternierende Reihe vom Leibnizschen Typus konvergent; denn das allgemeine Glied strebt dem Grenzwert Null zu. Aber diese Reihe ist nicht absolut konvergent, weil die Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

divergent ist (vgl. S. 63).

Eine notwendige Konvergenzbedingung. Die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

sei konvergent und habe die Summe s. Dann ist s der Grenzwert der Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$, die aus den Partialsummen der Reihe besteht. Auch die Folge $0, s_1, s_2, \ldots$ hat den Grenzwert s. Daher hat die Folge

$$s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \ldots \quad \text{oder} \quad u_1, u_2, u_3, \ldots$$

1) Man erinnere sich an die Bedeutung des Symbols $|u_n|$. Vgl. S. 20.

den Grenzwert Null. $\lim u_n = 0$ ist also eine notwendige Konvergenzbedingung. Handelt es sich um eine alternierende Reihe vom Leibnizschen Typus, so ist diese Bedingung auch hinreichend (vgl. S. 64). Aber im allgemeinen ist das nicht der Fall, wie wir an der Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

sehen.

Liegt z. B. die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

vor, so können wir sofort sagen, daß sie im Falle $|x| \geqq 1$ divergent ist. In diesem Falle sind nämlich alle Glieder der Reihe ihrem Betrage nach größer oder gleich 1. Es ist also die Bedingung $\lim u_n = 0$ nicht erfüllt.

Wenn $|x| < 1$ ist, so konvergiert die geometrische Reihe absolut, d. h. die Reihe $1 + |x| + |x|^2 + \cdots$ ist konvergent. Um dies zu erkennen bilden wir die n-te Partialsumme[1])

$$1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1} = \frac{1 - |x|^n}{1 - |x|}$$

und bemerken, daß sie kleiner als

$$\frac{1}{1 - |x|}$$

ist. Die Partialsummen der Reihe $1 + |x| + |x|^2 + \cdots$ liegen also unterhalb einer endlichen Grenze. Das genügt, wie wir wissen, für die Konvergenz dieser Reihe. Damit ist die absolute Konvergenz der Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ sichergestellt. Da bei einer konvergenten Reihe das allgemeine Glied dem Grenzwert Null zustrebt, so ist im Falle $|x| < 1$

$$\lim x^n = 0$$

und daher

$$\lim (1 + x + \cdots + x^{n-1}) = \lim \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Wir können also schreiben

$$(*) \qquad \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Nachdem man sich von der Konvergenz der geometrischen Reihe im

1) Vgl. Formel (*) auf Seite 6.

Falle $|x|<1$ überzeugt hat, kann man ihre Summe s auch in folgender Weise bestimmen. Aus

$$s=1+x+x^2+\cdots$$

folgt

$$xs=0+x+x^2+\cdots,$$

und aus beiden Gleichungen ergibt sich durch Subtraktion

$$s(1-x)=1+0+0+\cdots=1.$$

Zum Schluß wollen wir noch die Reihe

$$1+2x+3x^2+\cdots$$

betrachten, die man aus $1+x+x^2+\cdots$ erhält, indem man jedes Glied durch seine Ableitung ersetzt.

Im Falle $|x|\geqq 1$ ist bei der Reihe $1+2x+3x^2+\cdots$ nicht einmal die notwendige Konvergenzbedingung $\lim u_n=0$ erfüllt. Wenn $|x|<1$ ist, so konvergiert die Reihe absolut. Wir können nämlich

$$(\dagger) \qquad 1+2|x|+\cdots+n|x|^{n-1}$$

in die n Summanden

$$\begin{array}{r} 1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}, \\ |x|+\cdots+|x|^{n-1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ |x|^{n-1}, \end{array}$$

zerlegen. Da

$$|x|^r+\cdots+|x|^{n-1}=\frac{|x|^r-|x|^n}{1-|x|}<\frac{|x|^r}{1-|x|}$$

ist (vgl. S. 6), so wird die Summe ($\dagger$) kleiner als

$$\frac{1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}}{1-|x|}$$

sein und erst recht kleiner als

$$\left(\frac{1}{1-|x|}\right)^2.$$

Damit ist die Konvergenz der Reihe $1+2|x|+3|x|^2+\cdots$ bewiesen, und wir wissen jetzt, daß die Reihe $1+2x+3x^2+\cdots$ im Falle $|x|<1$ absolut konvergiert. Um ihre Summe s' zu bestimmen, bemerken wir, daß aus

$$s'=1+2x+3x^2+\cdots$$

folgt

$$xs'=0+x+2x^2+\cdots$$

und aus beiden Gleichungen

$$s'(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Es ist daher

$$(^{**}) \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Ableitung von $\frac{1}{1-x}$. Wir sehen also, daß man die Ableitung von $1 + x + x^2 + \cdots$ erhält, indem man gliedweise differenziert, d. h. jedes Glied der Reihe durch seine Ableitung ersetzt. Dabei wird natürlich $|x| < 1$ angenommen.

§ 32. Potenzreihen.

Als Potenzreihe bezeichnet man jede Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Eine Potenzreihe ist z. B. die geometrische Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ Sind fast alle Koeffizienten, d. h. fast alle a_n, gleich Null, so ist die Potenzreihe nichts anderes als eine ganze rationale Funktion.

Die erste Frage, die hier erledigt werden muß, ist die nach der Konvergenz der Potenzreihen.

Jede Potenzreihe konvergiert für $x = 0$, und es gibt Potenzreihen, die nur für $x = 0$ konvergieren Eine solche ist z. B. die Reihe

$$x + (2x)^2 + (3x)^3 + \cdots$$

Solange hier $x \gtrless 0$ ist, erfüllt die Reihe nicht einmal die Bedingung $\lim u_n = 0$.

Auf der anderen Seite gibt es Potenzreihen, die für alle Werte von x konvergieren (beständig konvergente Potenzreihen). Eine solche ist z. B. die Reihe

$$x + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \cdots$$

Die Glieder der Reihe

$$\left|\frac{x}{\nu}\right|^\nu + \left|\frac{x}{\nu+1}\right|^{\nu+1} + \left|\frac{x}{\nu+2}\right|^{\nu+2} + \cdots$$

sind nämlich kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\left|\frac{x}{\nu}\right|^\nu + \left|\frac{x}{\nu}\right|^{\nu+1} + \left|\frac{x}{\nu}\right|^{\nu+2} + \cdots,$$

die konvergiert, sobald $|x| < \nu$ ist.

Zu einer dritten Gattung von Potenzreihen gehört die geometrische Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ Sie konvergiert, wie wir wissen, wenn $|x| < 1$ ist, aber auch nur dann. Sie konvergiert also innerhalb des Intervalles $(-1, 1)$ und sonst nirgends.

Die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ sei nicht nur für $x = 0$, sondern auch für $x = x_0$ konvergent ($x_0 \gtrless 0$). Da die Glieder einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden, so liegen in jeder Umgebung der Null, also auch in dem Intervall $(-1, 1)$ fast alle $a_n x_0^n$. Es wird also fast immer[1]) die Ungleichung

$$|a_n x_0^n| < 1, \text{ d. h. } |a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{|x_0|}$$

stattfinden. Daraus entnehmen wir, daß die Folge

$$(*) \qquad |a_1|, \; |a_2|^{\frac{1}{2}}, \; |a_3|^{\frac{1}{3}}, \ldots$$

beschränkt ist.

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß, so oft die Folge (*) beschränkt ist, die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ nicht bloß für $x = 0$ konvergiert.

Wenn die Folge (*) beschränkt ist, gibt es unter ihren Häufungswerten einen größten (vgl § 11). Dieser heiße A. Wir wollen zunächst annehmen, daß A nicht gleich Null ist. Konstruieren wir um A eine Umgebung[2]) $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, so liegen darin unendlich viele Glieder von (*). Wir können aber sicher sein, daß fast alle Glieder von (*) kleiner als $A + \varepsilon$ sind (vgl. S. 23). Die Ungleichung

$$|a_n| > (A - \varepsilon)^n$$

wird daher unendlich oft, die Ungleichung

$$|a_n| < (A + \varepsilon)^n$$

fast immer stattfinden. Es wird also unendlich oft

$$|a_n x^n| > \{(A - \varepsilon)|x|\}^n$$

und fast immer

$$|a_n x^n| < \{(A + \varepsilon)|x|\}^n$$

sein. Hat man nun $(A - \varepsilon)|x| > 1$, so kann die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

nicht konvergieren, weil unendlich viele Glieder ihrem Betrage nach

1) d. h. für fast alle Werte des Index n.
2) ε denken wir uns kleiner als A.

größer als 1 sind, so daß nicht einmal die Bedingung $\lim u_n = 0$ erfüllt ist. Hat man $(A+\varepsilon)|x| < 1$, so sind bei passend gewähltem ν die Glieder der Reihe $|a_\nu x^\nu| + |a_{\nu+1} x^{\nu+1}| + \cdots$ kleiner als die entsprechenden Glieder der konvergenten Reihe

$$\{(A+\varepsilon)|x|\}^\nu + \{(A+\varepsilon)|x|\}^{\nu+1} + \cdots.$$

Die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ist daher absolut konvergent.

Wir wissen jetzt also, daß die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ nicht konvergiert, wenn

$$|x| > \frac{1}{A-\varepsilon}$$

und absolut konvergiert, wenn

$$|x| < \frac{1}{A+\varepsilon}$$

ist.

Da ε beliebig verkleinert werden darf, so können wir auch folgendes sagen:

Die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ konvergiert nicht, wenn

$$|x| > \frac{1}{A},$$

und konvergiert absolut, wenn

$$|x| < \frac{1}{A}$$

ist.

Wenn $A = 0$ ist, so ist 0 offenbar der einzige Häufungswert von (*), denn negative Häufungswerte kann diese Folge nicht haben, weil sie kein negatives Glied enthält. Im Falle $A = 0$ ist also (vgl. § 4)

$$\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Fast immer findet die Ungleichung

$$|a_n x^n| < (\varepsilon |x|)^n$$

statt. Sobald daher

$$|x| < \frac{1}{\varepsilon}$$

ist, konvergiert die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ absolut. Da ε beliebig verkleinert werden darf, können wir schließen, daß die Reihe für alle Werte von x absolut konvergent ist.

Man kann die obigen Resultate in folgendem Theorem zusammenfassen:

A sei der größte Häufungswert der Folge

$$|a_1|,\ |a_2|^{\frac{1}{2}},\ |a_3|^{\frac{1}{3}}, \ldots$$

Dann ist die Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ absolut konvergent im Falle

$$|x| < \frac{1}{A},$$

divergent im Falle

$$|x| > \frac{1}{A}.$$

Das Intervall $\left(-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right)$ nennt man das Konvergenzintervall der Potenzreihe. Innerhalb des Konvergenzintervalles ist also die Potenzreihe absolut konvergent, außerhalb des Konvergenzintervalles ist sie divergent. Wie sie sich an den Grenzen $-\frac{1}{A}$ und $\frac{1}{A}$ verhält, darüber läßt sich nichts Allgemeingültiges sagen.

Damit der obige Satz alle drei Gattungen von Potenzreihen umfaßt, müssen wir noch einige Vereinbarungen treffen. Wenn die Folge (*) nicht beschränkt ist, wollen wir sagen, daß ∞ der größte Häufungswert ist, und A durch ∞ ersetzen. $\frac{1}{\infty}$ soll dann soviel bedeuten wie 0. Das Konvergenzintervall reduziert sich in diesem Falle auf den Punkt 0. Endlich wollen wir, wenn $A = 0$ ist, unter $\frac{1}{A}$ soviel wie ∞ verstehen. Das Konvergenzintervall ist dann $(-\infty, \infty)$, und alle Zahlen liegen innerhalb desselben.

Zum Schluß wollen wir einen Satz beweisen, der in vielen Fällen die Bestimmung des Konvergenzintervalles erleichtert:

Es ist immer

$$\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

wenn der zweite Grenzwert existiert.[1])

Setzen wir $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{g}$, so werden fast alle $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ zwischen $\mathrm{g} - \varepsilon$ und $\mathrm{g} + \varepsilon$ liegen.[2]) Nur eine endliche Anzahl von Ausnahmen

1) Wir nehmen natürlich an, daß kein a_n gleich Null ist.

2) Im Falle $\mathrm{g} = 0$ ist $\mathrm{g} - \varepsilon$ durch 0 zu ersetzen. Im Falle $\mathrm{g} > 0$, muß man $\varepsilon < \mathrm{g}$ annehmen.

wird es geben. Ist $n = \nu - 1$ der größte Ausnahmeindex, so werden die Quotienten

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|, \quad \left|\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}}\right|, \ldots$$

alle zwischen $\mathfrak{g} - \varepsilon$ und $\mathfrak{g} + \varepsilon$ enthalten sein. Nun können wir, falls $n > \nu$ ist, schreiben

$$a_n = a_\nu \cdot \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot \frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Daraus ergibt sich[1])

$$|a_\nu|(\mathfrak{g}-\varepsilon)^{n-\nu} < |a_n| < |a_\nu|(\mathfrak{g}+\varepsilon)^{n-\nu},$$

und

$$\{|a_\nu|(\mathfrak{g}-\varepsilon)^{-\nu}\}^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{g}-\varepsilon) < |a_n|^{\frac{1}{n}} < \{|a_\nu|(\mathfrak{g}+\varepsilon)^{-\nu}\}^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{g}+\varepsilon).$$

Man sieht hieraus sofort, daß die Folge (*) beschränkt ist. Denn die einschließenden Größen durchlaufen bei zunehmendem n Folgen mit den Grenzwerten $\mathfrak{g} - \varepsilon$ bzw. $\mathfrak{g} + \varepsilon$, also jedenfalls beschränkte Folgen. Ist nun $\mathfrak{h}$ irgend ein Häufungswert der Folge (*), so wird $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ dem Grenzwert $\mathfrak{h}$ zustreben, wenn n eine passende Teilfolge von $\nu + 1, \nu + 2, \ldots$ durchläuft. Aus den obigen Ungleichungen folgt dann (vgl. § 9, Nr. 8)

$$\mathfrak{g} - \varepsilon \leqq \mathfrak{h} \leqq \mathfrak{g} + \varepsilon.$$

Da nun ε beliebig klein gewählt werden darf, kann $\mathfrak{h}$ nicht von $\mathfrak{g}$ verschieden sein. $\mathfrak{g}$ ist also der einzige Häufungswert der beschränkten Folge (*) und somit ihr Grenzwert (vgl. § 4).

Der Satz gilt übrigens auch, wenn $\mathfrak{g}$ der uneigentliche Grenzwert ∞ ist. Dann wird jede Zahl K von fast allen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ übertroffen, und aus

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| > K, \quad \left|\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}}\right| > K, \ldots, \quad \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| > K$$

folgt

$$|a_n| > |a_\nu| K^{n-\nu}$$

also

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > (|a_\nu| K^{-\nu})^{\frac{1}{n}} \cdot K.$$

---

1) Im Falle $\mathfrak{g} = 0$ steht in den folgenden Ungleichungen auf der linken Seite 0.

Die rechte Seite strebt bei zunehmendem n dem Grenzwert K zu. Daher wird fast immer

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{K}{2}$$

sein. Da K beliebig groß gewählt werden kann, sieht man hieraus, daß jede Zahl von fast allen Gliedern der Folge (*) übertroffen wird, daß diese also den uneigentlichen Grenzwert ∞ hat. (Vgl. § 5.)

Wir können nun folgenden Satz aufstellen:

Hat die Folge

(**) $$\left|\frac{a_2}{a_1}\right|, \left|\frac{a_3}{a_2}\right|, \left|\frac{a_4}{a_3}\right|, \cdots$$

den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert $\mathfrak{g}$, so ist

$$\left(-\frac{1}{\mathfrak{g}}, \frac{1}{\mathfrak{g}}\right)$$

das Konvergenzintervall der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

In der Tat hat die Folge (*) dann ebenfalls den Grenzwert $\mathfrak{g}$, der zugleich der einzige, also auch der größte Häufungswert von (*) ist, so daß A mit $\mathfrak{g}$ zusammenfällt.

§ 33. Differentiation der Potenzreihen.

In § 31 sahen wir, daß man die Ableitung der geometrischen Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ innerhalb ihres Konvergenzintervalles $(-1, 1)$ erhält, indem man gliedweise differenziert. Wir werden jetzt zeigen, daß diese Eigenschaft bei allen Potenzreihen besteht, deren Konvergenzintervall sich nicht auf Null reduziert.

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ sei eine Potenzreihe, deren Konvergenzintervall $(-\varrho, \varrho)$ von Null verschieden ist. Innerhalb des Konvergenzintervalles hat sie an jeder Stelle x eine Summe $f(x)$. Wir werden sehen, daß aus

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (|x| < \varrho)$$

folgt

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots.$$

Zunächst wollen wir uns überzeugen, daß die Reihe

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

dasselbe Konvergenzintervall hat wie $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Offenbar hat die Reihe $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$ denselben Charakter wie $a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots$, d. h. beide Reihen sind gleichzeitig konvergent bzw. divergent. Es kommt also darauf an nachzuweisen, daß die Folgen

$$(*) \qquad |a_1|, \ |a_2|^{\frac{1}{2}}, \ |a_3|^{\frac{1}{3}}, \ldots,$$

$$(**) \qquad |a_1|, \ 2^{\frac{1}{2}}|a_2|^{\frac{1}{2}}, \ 3^{\frac{1}{3}}|a_3|^{\frac{1}{3}}, \ldots$$

denselben größten Häufungswert besitzen. Man kann zeigen, daß sie überhaupt dieselben Häufungswerte haben, daß also jeder Häufungswert der ersten Folge zugleich ein Häufungswert der zweiten ist und umgekehrt

Wir wissen aus § 22, daß im Falle $x > 1$

$$x > \log x > 0$$

ist; denn wir stellten dort $\log x$ als Grenzwert einer Folge dar, die in dem Intervall $\left(\frac{x-1}{x}, x-1\right)$ lag. Auch auf anderem Wege kann man die Richtigkeit der obigen Ungleichungen leicht bestätigen. Die beiden Funktionen $x - \log x$ und $\log x$ reduzieren sich nämlich für $x = 1$ auf 1 bzw. 0 und ihre Ableitungen $1 - \frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x}$ sind für $x > 1$ positiv, die Funktionen also für $x \geqq 1$ zunehmend und daher für $x > 1$ positiv.

Schreibt man nun

$$\frac{\log n}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\log \sqrt{n}}{\sqrt{n}}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

so ergibt sich sofort, daß

$$\lim \left(\frac{\log n}{n}\right) = 0$$

ist. Denn der zweite Faktor, $\frac{\log \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, bleibt in dem Intervall (0, 1), während der erste, $\frac{2}{\sqrt{n}}$, nach Null konvergiert.

Da

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$$

ist, so folgt[1])

$$(\dagger) \qquad \lim n^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

1) Daß aus $\lim h = 0$ folgt $\lim e^h = e^0 = 1$, ersieht man aus § 22.

Ist nun $\mathfrak{h}$ ein Häufungswert von (*), so wird

$$\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = \mathfrak{h}$$

sein, wenn man n eine passende Teilfolge von 1, 2, 3,... durchlaufen läßt. Wegen (†) wird dann aber zugleich

$$\lim \left(n^{\frac{1}{n}} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \mathfrak{h}$$

sein. Jeder Häufungswert von (*) ist also auch ein Häufungswert von (**).

Ist $\mathfrak{h}$ ein Häufungswert von (**), so wird $n^{\frac{1}{n}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ dem Grenzwert $\mathfrak{h}$ zustreben, wenn man n auf eine passende Teilfolge von 1, 2, 3,... beschränkt. Dasselbe wird dann aber von

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}} |a_n|^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}}}$$

gelten, weil der Zähler den Grenzwert $\mathfrak{h}$, der Nenner den Grenzwert 1 hat. Jeder Häufungswert der Folge (**) ist also zugleich ein Häufungswert von (*).

Das Obige gilt auch, wenn $\mathfrak{h}$ der uneigentliche Häufungswert ∞ ist.

Die Reihe $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$, die aus $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, durch gliedweise Differentiation entsteht, hat also dasselbe Konvergenzintervall $(-\varrho, \varrho)$ wie diese. Setzen wir für $|x| < \varrho$

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = g(x),$$

so kommt es jetzt darauf an, zu zeigen, daß $f'(x) = g(x)$ ist.

Wenn x und $x + h$ beide im Innern des Konvergenzintervalles $(-\varrho, \varrho)$ liegen, ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a_1 + a_2 \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + a_3 \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} + \cdots,$$

also

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) = a_2 \left\{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} - 2x\right\} + \cdots,$$

Die $(n-1)$-te Partialsumme dieser Reihe lautet

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g_n(x),$$

wenn wir

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = f_n(x)$$

und

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = f_n'(x) = g_n(x)$$

setzen.

Nach dem Mittelwertsatz (vgl. § 29) ist nun

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g_n(x) = g_n(x+h_n) - g_n(x) = h_n g_n'(x_n).$$

Dabei liegt h_n zwischen 0 und h, x_n aber zwischen x und $x + h_n$, also auch zwischen x und $x + h$.

Die erwähnte Partialsumme läßt sich jetzt, da

$$g_n'(x) = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

ist, so schreiben:

$$h_n\{2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x_n + \cdots + n(n-1)a_n x_n^{\,n-2}\}.$$

Sie ist daher ihrem Betrage nach kleiner als

$$|h|\{2|a_2| + 3 \cdot 2|a_3|r + \cdots + n(n-1)|a_n|r^{n-2}\}$$

und um so mehr kleiner als

$$|h|\{2|a_2| + 3 \cdot 2|a_3|r + \cdots\}.$$

Unter r verstehen wir hierbei eine feste Zahl zwischen $|x|$ und ϱ. Wenn h genügend klein ist, wird r auch zwischen $|x+h|$ und ϱ liegen (vgl. Fig. 20). Das nehmen wir an. Wegen der Konvergenz der Reihe $2|a_2| + 3 \cdot 2|a_3|r + \cdots$ brauchen wir uns keine Sorge zu machen. Wir wissen nämlich, daß die Potenzreihe $2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots$ dasselbe Konvergenzintervall $(-\varrho, \varrho)$ hat wie $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$, und daß eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzintervalles absolut konvergent ist.

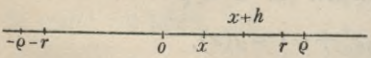

Fig. 20.

Lassen wir nun in der Ungleichung

$$\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g_n(x)\right| < |h|\{2|a_2| + 3 \cdot 2|a_3|r + \cdots\}$$

das n unbegrenzt zunehmen, so ergibt sich

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| \leqq |h|\{2|a_2| + 3 \cdot 2|a_3|r + \cdots\}.$$

Konvergiert h nach Null, so folgt hieraus

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x),$$

d. h. $f'(x)$ existiert und ist gleich $g(x)$.

§ 34. Anwendungen.

1. Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ hat die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Ist nun $|x| < 1$, so können wir schreiben (vgl. S. 66)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots.$$

Diese Potenzreihe ist aber die Ableitung von

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Aus $f'(x) = \varphi'(x)$ oder $(f-\varphi)' = 0$ folgt (vgl. S. 56), daß $f(x) - \varphi(x) = C$ ist (C eine Konstante). Da $f(0) = \varphi(0) = 0$ ist, muß auch $C = 0$ sein, und man hat also $f(x) = \varphi(x)$, d. h.

$$(*) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

wenn $|x| < 1$ ist.

Für $x = 1$ reduziert sich die Reihe auf

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots.$$

Das ist eine alternierende Reihe vom Leibnizschen Typus. Da ihre Glieder eine Nullfolge bilden, ist sie konvergent (vgl. § 31).

Bezeichnen wir ihre Summe mit s, so können wir schreiben

$$s - \log(1+x) = (1-x) - \frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1}{3}(1-x)^3 - \cdots.$$

Im Falle $0 < x < 1$ ist dies wieder eine alternierende Reihe vom Leibnizschen Typus. Um zu erkennen, daß wirklich

$$\frac{1}{n}(1-x^n) - \frac{1}{n+1}(1-x^{n+1}) > 0$$

ist, bemerke man, daß diese Funktion zwischen 0 und 1 die negative Ableitung

$$-x^{n-1} + x^n$$

hat, also in dem Intervall (0, 1) abnehmend ist. Für $x = 1$ reduziert sich die Funktion auf 0. Also ist sie zwischen 0 und 1 stets positiv. Da nun bei einer alternierenden Reihe vom Leibnizschen Typus die Summe zwischen je zwei aufeinander folgenden Partialsummen enthalten ist, können wir die Ungleichungen

$$(1-x) - \frac{1}{2}(1-x^2) < s - \log(1+x) < 1-x$$

aufstellen. Lassen wir jetzt x nach 1 konvergieren, so streben die einschließenden Größen dem Grenzwert Null zu. Dasselbe tut dann $s - \log x$, d. h. es ist $s - \log 2 = 0$. Die Gleichung (*) gilt also auch für $x = 1$.

Für $x = -1$ gilt sie dagegen nicht, weil die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

divergent ist und auch $\log(1+x)$ keinen Sinn hat. Wäre jene Reihe konvergent und σ ihre Summe, so hätte man für $-1 < x < 0$

$$-\log(1+x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots < \sigma.$$

Wenn man nun $x = \frac{1}{n} - 1$ setzt $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, so ergibt sich

$$\log n < \sigma, \text{ d. h. } n < e^\sigma.$$

Sobald $n > e^\sigma$ ist, haben wir einen Widerspruch. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

ist also divergent.

Wir sehen, daß die Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ überall, wo sie konvergiert, die Summe $\log(1+x)$ hat.

Wir wollen jetzt wieder $|x| < 1$ annehmen. Ersetzt man in (*) x durch $-x$, so ergibt sich

$$(**) \qquad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Subtrahiert man (**) von (*), so findet man

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} + \cdots\right) \qquad (|x| < 1)$$

oder, wenn man

$$\frac{1+x}{1-x}=z, \text{ also } x=\frac{z-1}{z+1}$$

setzt,

$$({}^*{}_*{}^*) \quad \log z = 2\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\cdots\right\}.$$

Diese Gleichung gilt für jedes positive z. Der Bedingung $|x|<1$ entspricht nämlich die Bedingung $z>0$.

Setzt man in $({}^*{}_*{}^*)$ $z=(n+1):n$, wobei $n>0$ sein möge, so entsteht die Formel

$$({}_*{}^*{}_*) \quad \log(n+1)-\log n = 2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\cdots\right\}.$$

Wir wollen zeigen, wie man mit ihrer Hilfe die Logarithmen der drei ersten Primzahlen 2, 3, 5 findet.

Sind n und $n+1$ zwei ganze Zahlen, die keine andern Primfaktoren als 2, 3, 5 enthalten, so ist $({}_*{}^*{}_*)$ eine lineare Gleichung mit den drei Unbekannten $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$. Die rechte Seite läßt sich um so bequemer berechnen, je größer n ist.

Benutzt man z. B. die Zahlenpaare

$$15=3\cdot 5, \quad 16=2^4,$$
$$24=2^3\cdot 3, \quad 25=5^2,$$
$$80=2^4\cdot 5, \quad 81=3^4,$$

so erhält man die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$:

$$4\log 2-\log 3-\log 5 = 2\left\{\frac{1}{31}+\frac{1}{3\cdot 31^3}+\cdots\right\}=2A,$$

$$2\log 5-3\log 2-\log 3 = 2\left\{\frac{1}{49}+\frac{1}{3\cdot 49^3}+\cdots\right\}=2B,$$

$$4\log 3-4\log 2-\log 5 = 2\left\{\frac{1}{161}+\frac{1}{3\cdot 161^3}+\cdots\right\}=2C.$$

Löst man diese Gleichungen auf, so findet man

$$\log 2 = 14A+10B+6C,$$
$$\log 3 = 22A+16B+10C,$$
$$\log 5 = 32A+24B+14C.$$

Beschränkt man sich bei der Reihe A auf die beiden ersten Glieder, so ist der Fehler

$$\frac{1}{5 \cdot 31^5} + \frac{1}{7 \cdot 31^7} + \cdots,$$

kleiner als

$$\frac{1}{5 \cdot 31^5}\left(1 + \frac{1}{31^2} + \cdots\right) = \frac{1}{5 \cdot 31^3(31^2 - 1)} = \frac{1}{5 \cdot 31^3 \cdot 30 \cdot 32}.$$

Bei $32A$ wird der Fehler also jedenfalls kleiner sein als $1:(5 \cdot 30^4)$. Noch kleiner wird der Fehler bei $24B$ und $14C$, wenn man auch dort nur die beiden ersten Reihenglieder berücksichtigt. Bei $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$ entstehen also Fehler, die kleiner sind als

$$3:(5 \cdot 30^4) = 1:(135 \cdot 10^4),$$

mithin sicher kleiner als $1:10^6$, d. h. kleiner als eine Einheit in der sechsten Dezimale.

Wir überlassen es dem Leser $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$ nach dieser Methode zu berechnen, ebenso $\log 10 = \log 2 + \log 5$. Dividiert er $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$ durch $\log 10$, so müssen die gemeinen Logarithmen von 2, 3, 5 herauskommen, wie sie in einer fünfstelligen Logarithmentafel zu finden sind.

2. Die Funktion $f(x) = \operatorname{arctg} x$ hat die Ableitung (vgl. § 26)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ist nun $x^2 < 1$, so können wir schreiben

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots.$$

Diese Potenzreihe ist aber die Ableitung von

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

Aus $f'(x) = \varphi'(x)$ folgt $f(x) - \varphi(x) = C$, und da $f(0) = \varphi(0) = 0$ ist, muß $C = 0$ sein. Es gilt somit für $x^2 < 1$ die Gleichung

$$(\dagger) \qquad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

Sie gilt, wie wir jetzt zeigen wollen, auch für $x^2 = 1$. Es genügt offenbar den Fall $x = 1$ zu erledigen, weil $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ ist. Solange $0 < x < 1$ ist, können wir aus (†) entnehmen[1])

$$x - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^{4p-1}}{4p-1} < \operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{4p+1}}{4p+1}.$$

1) Ähnlich hätten wir (S. 77) bei $\log(1+x)$ vorgehen können.

Denn es handelt sich um eine alternierende Reihe vom Leibnizschen Typus. Lassen wir x nach 1 konvergieren, so er ergibt sich

$$1-\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{4p-1}\leqq \operatorname{arctg} 1 \leqq 1-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4p+1}.$$

Wenn jetzt p über alle Grenzen wächst, konvergieren die einschließenden Größen nach $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$. Also ist auch $\operatorname{arctg} 1$ oder $\frac{\pi}{4}$ gleich dieser Reihe. Wir erhalten auf diese Weise die Leibnizsche Formel

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots,$$

die übrigens zur numerischen Berechnung von π höchst ungeeignet ist.

Eine für diesen Zweck sehr geeignete Formel erhält man, wenn man von dem Bogen α ausgeht, dessen Tangens gleich $\frac{1}{5}$ ist. Man hat dann

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{120}{119},$$

also

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{239}.$$

Aus

$$4\alpha-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

und

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$$

folgt aber

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

d. h.

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\cdots\right).$$

Es gibt ein französisches Gedichtchen, mit dessen Hilfe man sich die 31 ersten Ziffern von π merken kann. Es lautet:

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur!
Pour moi ton problème eut de pareils avantages!

Ersetzt man hier jedes Wort durch die Anzahl seiner Buchstaben, so entstehen die 31 ersten Ziffern von π. Hinter die erste muß das Komma gesetzt werden.

3. Wir wollen versuchen eine Potenzreihe zu finden, die für alle Werte von x die Summe e^x hat. Wir benutzen dabei eine berühmte von Leibniz herrührende Methode, die Methode der unbestimmten Koeffizienten. D. h. wir setzen die Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten an. Es sei also für alle Werte von x

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Dann folgt nach § 33

$$e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots;$$

denn e^x hat die Ableitung e^x. Es muß daher für alle Werte von x

$$a_1 - a_0 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots = 0$$

sein. Wir haben hier eine Potenzreihe vor uns, die innerhalb ihres Konvergenzintervalles überall die Summe Null hat. Es sind dann, wie wir gleich zeigen werden, alle Koeffizienten gleich Null. Im vorliegenden Falle müssen also die Gleichungen stattfinden:

$$a_1 = a_0,\ 2a_2 = a_1,\ 3a_3 = a_2, \ldots.$$

Da $e^0 = 1$ ist, muß auch $a_0 = 1$ sein, mithin

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{1\cdot 2},\ a_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots.$$

Die Potenzreihe, die wir suchen, lautet also

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots.$$

Da hier

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

ist, konvergiert sie für alle Werte von x (vgl. den Schluß von § 32). Nennen wir die Summe der Reihe $\varphi(x)$, so wissen wir von $\varphi(x)$, daß

$$\varphi(0) = 1 \text{ und } \varphi'(x) = \varphi(x)$$

ist. Der Quotient[1]) $\varphi(x) : e^x$ hat die Ableitung

$$\frac{e^x \varphi'(x) - e^x \varphi(x)}{e^{2x}} = 0.$$

1) e^x ist nie gleich Null. Daher dürfen wir durch e^x dividieren.

Daher ist $\varphi(x) : e^x = C$, und diese Konstante muß gleich 1 sein, weil $\varphi(0) : e^0 = 1$ ist. Damit haben wir die Gleichung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

in aller Strenge bewiesen. Setzen wir $x = 1$, so ergibt sich

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

eine für die angenäherte Berechnung von e sehr zweckmäßige Formel. Beschränkt man sich auf die $n+1$ ersten Glieder, so ist der Fehler kleiner als

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n!\,n},$$

so daß e zwischen

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

und

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n}$$

enthalten ist.

Hinsichtlich des oben benutzten Hilfssatzes bemerken wir folgendes: Aus

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = 0 \qquad (|x| < \varrho)$$

folgt nach § 33

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = 0,$$
$$2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + \cdots = 0,$$
$$3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4 x + \cdots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man in allen diesen Gleichungen $x = 0$, so findet man

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = 0.$$

4. Zum Schluß wollen wir eine Potenzreihe suchen, die innerhalb ihres Konvergenzintervalles die Summe $f(x) = (1+x)^\mu = e^{\mu \log(1+x)}$ hat[1]). Aus

$$(1+x)^\mu = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

folgt

$$\mu(1+x)^{\mu-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots.$$

1) Wir nehmen an, daß μ von 0, 1, 2, 3, ... verschieden ist. Damit $\log(1+x)$ einen Sinn hat, müssen wir $x > -1$ voraussetzen.

Multipliziert man mit $1+x$, so ergibt sich

$$\mu(1+x)^\mu = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots.$$

Es finden also folgende Gleichungen statt:

$$a_1 = \mu a_0, \quad a_1 + 2a_2 = \mu a_1, \quad 2a_2 + 3a_3 = \mu a_2, \ldots.$$

Da $1^\mu = 1$ ist, muß $a_0 = 1$ sein. Die Potenzreihe lautet daher

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots.$$

Hier ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mu - n}{n+1},$$

mithin

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1 \text{ und } \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Die Potenzreihe hat also das Konvergenzintervall $(-1, 1)$. Innerhalb dieses Intervalles ist, wie wir jetzt zeigen werden, ihre Summe $(1+x)^\mu$. Bezeichnen wir nämlich diese Summe mit $\varphi(x)$, so ist

$$(1+x)\varphi'(x) = \mu\varphi(x),$$

also

$$\varphi'(x) = \frac{\mu\varphi(x)}{1+x} = \frac{\mu(1+x)^{\mu-1}\varphi(x)}{(1+x)^\mu} = \frac{f'(x)\varphi(x)}{f(x)}$$

und

$$\frac{f(x)\varphi'(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} = \left\{\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right\}' = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = C,$$

und da $\varphi(0) = f(0) = 1$ ist, muß auch $C = 1$ sein. Damit ist folgende Formel bewiesen[1])

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Man nennt sie die Newtonsche Binomialformel.

Wenn μ eine positive ganze Zahl ist, brauchen wir die Bedingung $|x| < 1$ nicht mehr. Dann gestaltet sich auch der Beweis der Formel noch einfacher. Man weiß von vornherein, daß $(1+x)^\mu$ eine ganze rationale Funktion μ-ten Grades mit dem Anfangsgliede 1 ist, also

$$(1+x)^\mu = 1 + a_1x^2 + a_2x^2 + \cdots + a_\mu x^\mu.$$

1) Es bliebe noch übrig die Gültigkeit dieser Formel an den Grenzen des Intervalles zu untersuchen. Darauf gehen wir aber hier nicht ein.

Durch Differentiation findet man

$$\mu(1+x)^{\mu-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + \mu a_\mu x^{\mu-1}.$$

Es ist also

$$\mu(1+x)^\mu = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + \cdots + \mu a_\mu x^\mu$$
$$= \mu(1 + a_1 x + \cdots + a_\mu x^\mu).$$

Hieraus ergeben sich wie oben die Werte der a.

§ 35. Höhere Ableitungen und Differentiale.

Die Ableitung von $f'(x)$ nennt man die zweite Ableitung von $f(x)$ und bezeichnet sie mit $f''(x)$. Die Ableitung von $f''(x)$ heißt die dritte Ableitung von $f(x)$ und man schreibt dafür $f'''(x)$. Die n-te Ableitung von $f(x)$ wird mit $f^{(n)}(x)$ bezeichnet und ist definiert als die Ableitung von $f^{(n-1)}(x)$.

Bei $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$ usw. Alle Ableitungen sind hier gleich e^x.

$\cos x$ und $\sin x$ haben die Ableitungen $-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ bzw. $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Es ist also

$$(\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Hieraus folgt weiter

$$(\cos x)'' = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad (\sin x)'' = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

usf. Allgemein ist

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Wenn die Reihe[1])

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

das Konvergenzintervall $(a-\varrho,\ a+\varrho)$ hat, so folgt für $|x-a| < \varrho$ aus

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

nach § 33

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

und hieraus weiter

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots$$

1) Das ist eine gewöhnliche Potenzreihe. Nur ist x durch $x-a$ ersetzt.

usf. Setzt man überall $x=a$, so ergibt sich

$$c_0=f(a), \qquad c_1=\frac{f'(a)}{1}, \qquad c_2=\frac{f''(a)}{1\cdot 2}, \ldots$$

Man kann also schreiben:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots \qquad (|x-a|<\varrho)$$

Auf diese Formel kommen wir an einer späteren Stelle zurück. (§ 40.)

Wir wollen jetzt noch die höheren Differentiale erklären. Ist $y=\varphi(x)$, so haben wir $dy=\varphi'(x)dx$ als Differential von y bezeichnet. Das Differential von dy, also ddy, nennt man das zweite Differential von y und schreibt dafür kürzer d^2y. Das Differential von d^2y wird mit d^3y bezeichnet und heißt das dritte Differential von y usf. Das n-te Differential von y, wofür man d^ny schreibt, ist definiert als das Differential von $d^{n-1}y$. Hierbei wird dx, das Differential der unabhängigen Veränderlichen x, als konstant betrachtet. Es ist bei dieser Annahme

$$d^2y=d\varphi'(x)\cdot dx=\varphi''(x)dx^2,$$

$$d^3y=d\varphi''(x)\cdot dx^2=\varphi'''(x)dx^3$$

usf., allgemein also[1])

$$d^ny=\varphi^{(n)}(x)dx^n \quad \text{und} \quad \varphi^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Ist $y=F(u)$ und u eine Funktion von x, so hat man nach § 27

$$dy=F'(u)du.$$

Nun ergibt sich aber weiter

$$d^2y=dF'(u)\cdot du+F'(u)\cdot d^2u=F''(u)du^2+F'(u)d^2u.$$

Während das erste Differential von y genau so aussieht, als ob u die unabhängige Variable wäre, ist dies bei dem zweiten Differential nicht mehr der Fall, ebenso bei dem dritten, vierten usf.

Ist $u=ax+b$ (a und b konstant), so wird $du=a\,dx$, $d^2u=0$, $d^3u=0, \ldots$ In diesem Falle reduzieren sich die höheren Differentiale d^2y, d^3y, ... auf $F''(u)du^2$, $F'''(u)du^3$, ..., sehen also genau so aus, als ob u die unabhängige Veränderliche wäre.

---

1) dx^n kann nicht mit $d(x^n)$ verwechselt werden. Daher ist es unnötig dafür $(dx)^n$ zu schreiben.

Drittes Kapitel.

Integralrechnung.

§ 36. Stammfunktionen.

Wenn $F(x)$ die Ableitung $f(x)$ hat, so nennt man $F(x)$ eine **Stammfunktion** von $f(x)$ oder ein **Integral** von $f(x)dx$, und man schreibt:

$$F(x) = \int f(x)\,dx. \tag{*}$$

Die rechte Seite wird gelesen: „Integral $f(x)dx$". Die Formel (*) ist völlig gleichbedeutend mit

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Ist $F_1(x)$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$, so hat man

$$dF_1(x) = f(x)\,dx,$$

also

$$d(F_1 - F) = 0,$$

d. h. $F_1 - F = C$ oder $F_1 = F + C$. Hieraus ersieht man, daß es genügt eine einzige Stammfunktion von $f(x)$ zu kennen. Jede andere ergibt sich aus ihr durch Addition einer Konstanten. Ferner bemerke man, daß $F + C$ stets wie F eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, wie man auch die additive Konstante C wählen mag. Man hat in der Tat

$$d(F + C) = dF = f(x)\,dx.$$

Den Übergang von $f(x)$ zu einer Stammfunktion $F(x)$ nennt man **Integration.** Sie ist die Umkehrung der Differentiation, die in dem Übergange von $F(x)$ zu $f(x)$ besteht.

Wir stellen hier einige Formeln zusammen, die zum Handwerkszeug der Integralrechnung[1]) gehören.

$$1.\quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \left(n + 1 \gtrless 0\right)$$

$$2.\quad \int \frac{dx}{x} = \log x,$$

$$3.\quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a},$$

1) Die Integralrechnung lehrt Integrationen ausführen so wie die Differentialrechnung Differentiationen.

$$4.\quad \int \cos x\,dx = \sin x,$$

$$5.\quad \int \sin x\,dx = -\cos x,$$

$$6.\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x,$$

$$7.\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x,$$

$$8.\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x,$$

$$9.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$10.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Wir wissen, daß das Differential von $F(x)$ auch dann $F'(x)dx$ lautet, wenn x eine Funktion $\varphi(u)$ einer unabhängigen Veränderlichen u ist. Aus

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

folgt also

$$F(\varphi(u)) = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

Aus jeder der obigen zehn Integralformeln lassen sich auf diese Weise unendlich viele andere gewinnen.

Von Wichtigkeit sind noch folgende Integrationsregeln:

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, \qquad (c \text{ konstant})$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Differenziert man die rechten Seiten dieser Formeln, so findet man

$$f(x)dx + g(x)dx, \qquad cf(x)dx, \qquad f(x)g'(x)dx.$$

Die rechten Seiten sind also wirklich Stammfunktionen von

$$f(x)+g(x), \qquad cf(x), \qquad f(x)g'(x).$$

Weiter wollen aber diese Formeln nichts sagen.

Die letzte Regel nennt man die **partielle Integration**. Man kann die zugehörige Formel noch einfacher so schreiben:

$$\int f dg = fg - \int g df.$$

Z. B. ist

$$\int \log x\, dx = \log x \cdot x - \int x\, d \log x$$
$$= \log x \cdot x - \int dx = x(\log x - 1).$$
$$\int x e^x dx = \int x\, de^x = x e^x - \int e^x dx = e^x(x-1).$$

§ 37. Existenzbeweis für die Stammfunktionen einer stetigen Funktion.

$f(x)$ sei in dem Intervall (a, b) einschließlich der Grenzen stetig. Wir wollen zeigen, daß es dann Stammfunktionen zu $f(x)$ gibt.

Zunächst nehmen wir an, daß $f(x)$ in (a, b) durchweg positiv ist.[1]) Wir zeichnen die Bildkurve $y = f(x)$ und betrachten das Flächenstück $axXA$ in Fig. 21. Dieses wird oben durch die Kurve, unten durch die x-Achse, rechts und links durch die Ordinaten der Punkte A und X begrenzt. Der Inhalt des genannten Flächenstückes, der offenbar eine Funktion von x ist, werde mit $F(x)$ bezeichnet. Diese Funktion $F(x)$ ist, wie wir sehen werden, eine Stammfunktion von $f(x)$.

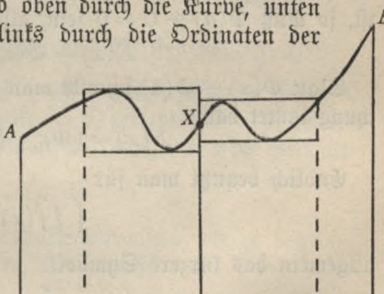

Fig. 21.

$F(x+h) - F(x)$ ist ein über $(x, x+h)$ stehender Flächenstreifen, welcher zwischen den beiden Rechtecken $hf(\xi_1)$, $hf(\xi_2)$ enthalten ist, wobei $f(\xi_1)$ der kleinste und $f(\xi_2)$ der größte Wert von $f(x)$ in dem Intervall $(x, x+h)$ sein soll[2]). Ebenso ist $F(x) - F(x-h)$ ein über $(x-h, x)$ stehender Flächenstreifen, der zwischen den beiden Rechtecken $hf(\xi_3)$, $hf(\xi_4)$ enthalten ist, wobei $f(\xi_3)$ der kleinste und $f(\xi_4)$ der größte Wert von $f(x)$

1) Dieser Fall läßt sich durch Addition einer Konstanten k herbeiführen. Man muß nachher von der Stammfunktion kx subtrahieren, um eine Stammfunktion der alten Funktion $f(x)$ zu erhalten. Vgl. Fußnote 2, S. 90.

2) h nehmen wir hier positiv an.

in dem Intervall $(x-h, x)$ sein soll[1]). Es bestehen also folgende Ungleichungen

$$f(\xi_1) < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(\xi_2),$$

$$f(\xi_3) < \frac{F(x-h)-F(x)}{-h} < f(\xi_4).$$

Konvergiert nun h nach Null, so konvergieren $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ nach x. Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ konvergieren dann $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $f(\xi_3)$, $f(\xi_4)$ nach $f(x)$. Dasselbe gilt daher von

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{F(x-h)-F(x)}{-h}.$$

Daraus ersehen wir, daß $F'(x)$ existiert und den Wert $f(x)$ hat. $F(x)$ ist also eine Stammfunktion von $f(x)$. Unter allen Stammfunktionen von $f(x)$ ist $F(x)$ durch die Eigenschaft $F(a)=0$ ausgezeichnet. Ist $\Phi(x)$ irgend eine Stammfunktion von $f(x)$, also

$$\Phi(x) = \int f(x)\,dx,$$

so unterscheidet sich, wie wir wissen, $F(x)$ davon um eine additive Konstante C, d. h. man hat $F(x) = \Phi(x) + C$. Da nun $F(a) = 0$ ist, so muß $\Phi(a) + C = 0$ sein, also

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Statt $\Phi(x) - \Phi(a)$ schreibt man gewöhnlich $(\Phi)_a^x$. Die letzte Gleichung lautet dann:

$$F(x) = (\Phi)_a^x = \left(\int f(x)\,dx\right)_a^x.$$

Endlich benutzt man für

$$\left(\int f(x)\,dx\right)_a^x$$

allgemein das kürzere Symbol

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Gelesen wird es: „Integral a bis x von $f(x)\,dx$".[2])

1) An der Stelle $x=a$ braucht man nur den ersten, an der Stelle $x=b$ nur den zweiten Flächenstreifen zu betrachten.

2) Ist $f(x)$ nicht überall positiv, so kann man eine Konstante k so wählen, daß $f(x)+k$ diese Eigenschaft hat. Dann ist

$$F(x) = \int_a^x \{f(x)+k\}\,dx - k(x-a)$$

eine Stammfunktion von $f(x)$, die an der Stelle $x=a$ verschwindet.

Der Inhalt des Flächenstückes $abBA$ (Fig. 21), oben begrenzt durch die Bildkurve von $f(x)$, ist offenbar gleich $F(b)$, d. h. gleich

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Man nennt die Berechnung eines solchen Flächenstückes eine Quadratur. Eine Quadratur läßt sich nach dem Obigen stets ausführen, sobald man eine Stammfunktion der betreffenden Funktion kennt.

Um eine Anwendung dieser Quadraturmethode zu zeigen, wollen wir das Flächenstück berechnen, welches durch die Parabel $y=\frac{x^2}{2k}$ und durch die Abszisse und Ordinate eines Parabelpunktes x, y begrenzt wird. Man findet

$$\int_0^x \frac{x^2}{2k}\,dx = \left(\frac{x^3}{6k}\right)_0^x = \frac{x^3}{6k} = \frac{xy}{3}.$$

Die Parabel trennt also von dem Rechteck xy den dritten Teil ab.

§ 38. Rein analytische Fassung des Existenzbeweises.

$f(x)$ sei wieder in dem Intervall (a, b) einschließlich der Grenzen stetig. (a, b) werde in p Teilintervalle (α, β) zerlegt. $M(\alpha, \beta)$ sei der größte Wert, den $f(x)$ in (α, β) annimmt. Wir wollen nun die Produkte

$$(\beta-\alpha)M(\alpha, \beta)$$

bilden und die Summe S der p Produkte betrachten, die zu den einzelnen Teilintervallen (α, β) gehören. Es sei also

$$S=\Sigma(\beta-\alpha)M(\alpha, \beta).$$

Wir nennen ein solches S eine äußere Summe von $f(x)$.[1])

Wenn man eins der Teilintervalle (α, β) in zwei Teile (α, γ) und (γ, β) zerlegt, so tritt an die Stelle von S eine neue äußere Summe $\bar{S}$. Offenbar unterscheidet sich $\bar{S}$ von S nur dadurch, daß ein Glied $(\beta-\alpha)M(\alpha, \beta)$ durch ein Binom

$$(\gamma-\alpha)M(\alpha, \gamma)+(\beta-\gamma)M(\gamma, \beta)$$

1) $(\beta-\alpha)M(\alpha, \beta)$ ist ein Rechteck, wobei aber alle Rechtecke, die unterhalb der x-Achse liegen, negativ gerechnet werden.

ersetzt ist. Da nun $M(\alpha, \gamma)$ und $M(\gamma, \beta)$ nicht größer als $M(\alpha, \beta)$ sind, so ist das obige Binom nicht größer als

$$(\gamma-\alpha)M(\alpha, \beta)+(\beta-\gamma)M(\alpha, \beta)=(\beta-\alpha)M(\alpha, \beta).$$

$\bar{S}$ ist daher nicht größer als S.

Durch wiederholte Ausführung solcher Zweiteilungen erkennt man, daß S sich nicht vergrößert, wenn man durch Weiterteilung zu einer neuen Zerlegung übergeht.

Jetzt sei $S_1, S_2, S_3, \ldots$ eine Folge von äußeren Summen, und zwar von der Art, daß S_{n+1} aus S_n durch Weiterteilung des Intervalles (a, b) entsteht. Außerdem sollen die Teilintervalle, die zu $S_1, S_2, S_3, \ldots$ gehören, eine Nullfolge bilden.[1] Wenn diese beiden Eigenschaften vorhanden sind, soll $S_1, S_2, S_3, \ldots$ eine ausgezeichnete Folge von äußeren Summen heißen. Jede solche Folge ist absteigend. Außerdem ist sie beschränkt. Bezeichnen wir nämlich mit $m(a, b)$ den kleinsten Wert von $f(x)$ in (a, b), so ist

$$M(a, b) \geqq M(\alpha, \beta) \geqq m(a, b),$$

mithin

$$(b-a)M(a, b) \geqq S \geqq (b-a)m(a, b)$$

Jede ausgezeichnete Folge von äußeren Summen hat also einen Grenzwert. Sie haben sogar, wie wir jetzt zeigen werden, alle denselben Grenzwert.

Wir betrachten zwei äußere Summen S und S'. Jede von ihnen werden wir nachher eine ausgezeichnete Folge durchlaufen lassen.

Wir können die Glieder von S in zwei Klassen teilen.

$$(\beta-\alpha)M(\alpha, \beta)$$

wird zur ersten Klasse gerechnet, wenn (α, β) in einem Teilintervall von S' enthalten ist, andernfalls zur zweiten Klasse. Entsprechend nennen wir (α, β) ein Teilintervall erster bzw. zweiter Klasse. Es gibt, wie der Leser sich leicht klar machen wird, höchstens $p'-1$ Teilintervalle zweiter Klasse. p' ist die Anzahl der Teilintervalle, die in S' auftreten.

Wenn wir in allen Gliedern zweiter Klasse die Faktoren $M(\alpha, \beta)$ durch $m(a, b)$ ersetzen, so wird S kleiner S'. S hat sich aber bei dieser Modifikation um weniger als

$$(p'-1)\delta\{M(a, b)-m(a, b)\}=K$$

1) Man denke sich alle Teilintervalle $\beta_1-\alpha_1$ von S_1 aufgeschrieben, dann alle Teilintervalle $\beta_2-\alpha_2$ von S_2 usf. Auf diese Weise soll eine Nullfolge herauskommen.

verkleinert, wobei wir mit δ das größte Teilintervall zweiter Klasse bezeichnen. Wenn wir also S um K verringern, so erhalten wir erst recht etwas Kleineres als S', d. h. es ist

$$S - K \leqq S'.$$

Lassen wir jetzt S eine ausgezeichnete Folge durchlaufen, so wird

$$\lim \delta = 0,$$

also auch $\lim K = 0$, und wir können aus der obigen Ungleichung schließen

$$\lim (S - K) = \lim S \leqq S'.$$

Lassen wir auch S' eine ausgezeichnete Folge durchlaufen, so erkennen wir, daß

$$\lim S \leqq \lim S'$$

ist. Vertauschen wir in der obigen Betrachtung S mit S', so erhalten wir

$$\lim S' \leqq \lim S.$$

Es muß daher

$$\lim S = \lim S'$$

sein, und wir sehen hieraus, daß alle ausgezeichneten Folgen äußerer Summen einem und demselben Grenzwert zustreben. Diesen Grenzwert wollen wir mit $\mathfrak{S}\,(a, b)$ bezeichnen. Da jede äußere Summe zwischen

$$(b-a)\; m\,(a, b) \text{ und } (b-a)\; M\,(a, b)$$

liegt, so gilt dies auch von $\mathfrak{S}(a, b)$ und $\mathfrak{S}(a, b) : (b-a)$ ist zwischen $m(a, b)$ und $M(a, b)$ enthalten, kommt also unter den Werten der stetigen Funktion $f(x)$ vor (vgl. § 24), so daß wir schreiben können

$$(*) \qquad \mathfrak{S}(a, b) = (b-a)\, f(\xi). \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

Wenn $a < c < b$ ist, so gilt die Gleichung

$$(**) \qquad \mathfrak{S}(a, c) + \mathfrak{S}(c, b) = \mathfrak{S}(a, b).$$

Ist nämlich S' eine äußere Summe, die zu dem Intervall (a, c) gehört, und S'' eine äußere Summe, die zu dem Intervall (c, b) gehört, so ist $S' + S''$ eine zu (a, b) gehörige äußere Summe. Lassen wir S' und S'' ausgezeichnete Folgen durchlaufen, so durchläuft auch $S' + S''$ eine ausgezeichnete Folge. Formel (**) besagt nur, daß

$$\lim (S' + S'') = \lim S' + \lim S''$$

ist.

Wenn wir $\mathfrak{S}(b, a)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{S}(a, b) + \mathfrak{S}(b, a) = 0$$

definieren und festsetzen, daß

$$\mathfrak{S}(a, a) = 0$$

sein soll, so treten an die Stelle von (*) und (**) die allgemeineren Formeln

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)\, f(\xi), \tag{†}$$

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2) + \mathfrak{S}(x_2, x_3) = \mathfrak{S}(x_1, x_3). \tag{††}$$

x_1, x_2, x_3 sind beliebige Werte aus (a, b). ξ gehört dem Intervall (x_1, x_2) an.

Jetzt können wir uns leicht überzeugen, daß $\mathfrak{S}(a, x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. In der Tat ist nach (††)

$$\mathfrak{S}(a, x+h) = \mathfrak{S}(a, x) + \mathfrak{S}(x, x+h)$$

und nach (†)

$$\mathfrak{S}(x, x+h) = h f(\xi),$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{S}(a, x+h) - \mathfrak{S}(a, x)}{h} = f(\xi).$$

Konvergiert h nach Null, so konvergiert ξ nach x, also wegen der Stetigkeit $f(\xi)$ nach $f(x)$, so daß

$$\lim \frac{\mathfrak{S}(a, x+h) - \mathfrak{S}(a, x)}{h} = f(x).$$

wird. $\mathfrak{S}(a, x)$ hat also die Ableitung $f(x)$. Da $\mathfrak{S}(a, a) = 0$ ist, so können wir schreiben

$$\mathfrak{S}(a, x) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Insbesondere ist also

$$\mathfrak{S}(a, b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Wenn wir die obigen Überlegungen auf die Funktion $-f(x)$ anwenden, so tritt an die Stelle von S

$$-s = -\sum (\beta - \alpha)\, m\, (\alpha, \beta)$$

$-m\,(\alpha\, \beta)$ ist nämlich der größte Wert von $-f(x)$ in dem Intervall (α, β). Beim Durchlaufen einer ausgezeichneten Folge strebt $-s$ einem

Grenzwert zu, den wir mit $-\mathfrak{s}(a, b)$ bezeichnen. $-\mathfrak{s}(a, x)$ hat dann die Ableitung $-f(x)$, also $\mathfrak{s}(a, x)$ die Ableitung $f(x)$. Da $\mathfrak{s}(a, a) = 0$ ist, so können wir schreiben:

$$\mathfrak{s}(a, x) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Insbesondere ist also

$$\mathfrak{s}(a, b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$-s$ konvergiert, wenn es eine ausgezeichnete Folge durchläuft, absteigend nach $-\mathfrak{s}(a, b)$. Daher konvergiert s selbst aufsteigend nach $\mathfrak{s}(a, b)$. Wir wollen s eine innere Summe von $f(x)$ nennen. Jede ausgezeichnete Folge von äußeren Summen konvergiert somit absteigend, jede ausgezeichnete Folge von inneren Summen aufsteigend nach

$$(*_*^*) \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Verstehen wir unter $f(\alpha, \beta)$ irgend einen Wert von $f(x)$ in (α, β), so ist offenbar die Summe

$$\sigma = \sum (\beta - \alpha) f(\alpha, \beta)$$

zwischen S und s enthalten. Daher wird auch jede ausgezeichnete Folge solcher Summen σ nach dem Integral $(*_*^*)$ konvergieren. Es wird also sein

$$\lim \sum (\beta - \alpha)\, f(\alpha, \beta) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

§ 39. Rektifikation einer ebenen Kurve.

$y = f(x)$ habe in dem Intervall (a, b) einschließlich der Grenzen eine stetige Ableitung.

Wir wollen (a, b) in p Teilintervalle zerlegen. Einer solchen Zerlegung entspricht eine bestimmte Einteilung des Kurvenbogens AB. Wenn wir jeden Teilbogen $\widehat{PQ}$ durch seine Sehne PQ ersetzen, so tritt an die Stelle des Bogens AB ein Sehnenzug.

Wir wollen zuerst die Länge dieses Sehnenzuges berechnen. Offenbar ist

$$PQ = \sqrt{\{\beta - \alpha\}^2 + \{f(\beta) - f(\alpha)\}^2}.$$

Nach dem Mittelwertsatz hat man

$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)\, f'(\xi).$$

Der Sehnenzug hat also die Länge

$$\sum PQ=\sum(\beta-\alpha)\sqrt{1+f'^2(\xi)}.$$

Das ist offenbar eine Summe σ für die Funktion

$$\varphi(x)=\sqrt{1+f'^2(x)}.$$

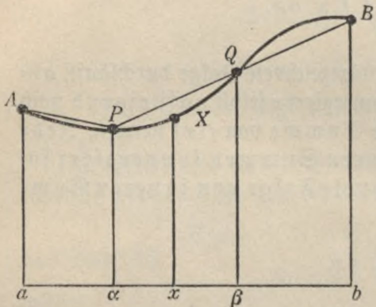

Fig. 22.

Eine ausgezeichnete Folge solcher Summen konvergiert, wie wir aus § 38 wissen, nach

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\cdot dx.$$

Dieses Integral betrachten wir als die Länge des Bogens AB. Die Berechnung einer Bogenlänge nennt man Rektifikation. Es fehlt noch der Nachweis, daß $\varphi(x)$ eine stetige Funktion ist. Wir müssen zeigen, daß aus $\lim x=x_0$ folgt $\lim\varphi(x)=\varphi(x_0)$.

Schreibt man

$$\sqrt{1+f'^2(x)}-\sqrt{1+f'^2(x_0)}=\frac{f'^2(x)-f'^2(x_0)}{\sqrt{1+f'^2(x)}+\sqrt{1+f'^2(x_0)}},$$

so erkennt man, daß $\varphi(x)-\varphi(x_0)$ dem Betrage nach kleiner als $f'^2(x)-f'^2(x_0)$ ist. $f'^2(x)-f'^2(x_0)$ konvergiert im Falle $\lim x=x_0$ nach Null, weil $\lim f'^2(x)=f'^2(x_0)$ ist, wegen der Stetigkeit von $f'(x)$. Daher konvergiert auch $\varphi(x)-\varphi(x_0)$ nach Null.

Der Bogen AX hat die Länge

$$s=\int_a^x \sqrt{1+f'^2(x)}\cdot dx.$$

s ist eine Funktion von x mit dem Differential

$$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\cdot dx.$$

Ersetzen wir $f'(x)$ durch $\frac{dy}{dx}$, so erhalten wir

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

ds nennt man das Bogendifferential der betrachteten Kurve.

Bei der Parabel $y = \frac{x^2}{2k}$ ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{x^2\,dx^2}{k^2},$$

also die Länge des Bogens OP

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} \cdot dx.$$

Wir führen die neue Veränderliche

$$\log\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} + \frac{x}{k}\right) = u$$

ein. Dann ist

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \frac{x}{k} = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \frac{dx}{k} = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\,du,$$

also

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} \cdot dx = k\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 du = \frac{k}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} + 2\right)du.$$

Es ist jetzt leicht ein Integral dieses Differentials anzugeben. Offenbar ist

$$\frac{k}{8}\left(e^{2u} - e^{-2u} + 4u\right)$$

ein solches. Daher ist

$$\frac{k}{2}\log\left(\frac{x}{k} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}$$

ein Integral von

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} \cdot dx,$$

und es wird also

$$s = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} + \frac{k}{2}\log\left(\frac{x}{k} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}\right).$$

§ 40. Der Taylorsche Lehrsatz.

$f(x)$ habe in dem Intervall[1]) (a, b) stetige Ableitungen bis zur n-ten Ordnung.

Da $f(x)$ eine Stammfunktion von $f'(x)$ ist, können wir schreiben (vgl. S. 90)

$$(*) \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

1) Die Grenzen sind eingeschlossen.

Auf dieses Integral wenden wir die partielle Integration an (S. 89). Danach ist

$$\int_a^b f'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\,d(b-x)$$

$$= -\{f'(x)(b-x)\}_a^b + \int_a^b (b-x)\,d f'(x),$$

d. h.

$$\int_a^b f'(x)\,dx = (b-a)f'(a) + \int_a^b f''(x)(b-x)\,dx.$$

Setzen wir dies in (*) ein, so ergibt sich

$$(**) \qquad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b f''(x)(b-x)\,dx.$$

Auf das hier auftretende Integral wenden wir wieder die partielle Integration an. Danach ist

$$\int_a^b f''(x)(b-x)\,dx = -\tfrac{1}{2}\int_a^b f''(x)\,d(b-x)^2$$

$$= -\tfrac{1}{2}\{f''(x)(b-x)^2\}_a^b + \tfrac{1}{2}\int_a^b (b-x)^2\,d f''(x)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \tfrac{1}{2}\int_a^b f'''(x)(b-x)^2\,dx.$$

Setzen wir dies in (**) ein, so erhalten wir

$$({*}_{*}{*}) \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \tfrac{1}{2}\int_a^b f'''(x)(b-x)^2\,dx$$

und können jetzt wieder die partielle Integration anwenden u. s. f.

Auf diese Weise gelangen wir zu der Formel

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \cdots$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f(a)^{(n-1)} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}\,dx,$$

die als **Taylorsche Formel** (Taylorscher Lehrsatz) bezeichnet wird

Wenn $f(x)$ in (a, b) Ableitungen von beliebig hoher Ordnung besitzt, so kann es sein, daß bei unendlich zunehmendem n

$$(\dagger) \qquad \lim \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}\, dx \right\} = 0$$

wird. Dann können wir schreiben

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots$$

Das ist die Taylorsche Reihe.

Ersetzt man a durch 0 und b durch x, so entsteht die sogenannte Mac-Laurinsche Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \cdots,$$

die aber gegenüber der Taylorschen Reihe nichts Neues ist. Beispiele zur Mac-Laurinschen Reihe stehen in § 34. Nur sind wir dort auf anderem Wege dazu gelangt. Der Leser behandle noch $\cos x$ und $\sin x$. So oft man die Taylorsche oder Mac-Laurinsche Reihe anwendet, muß man sich überzeugen, daß die Bedingung (†) erfüllt ist.

Historische Übersicht.[1])

Die Vorläufer von Leibniz und Newton.

Die ersten Anfänge der Infinitesimalrechnung finden sich schon in den klassischen Arbeiten der großen griechischen Geometer. Insbesondere gilt das von der Integralrechnung. Archimedes (287—212) war im Besitze einer Methode, die im wesentlichen eine Integralrechnung ist. Das zeigen besonders die kürzlich von Heiberg neu aufgefundenen archimedischen Schriften. Archimedes benutzte seine Methode zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten sowie zur Bestimmung von Schwerpunkten. Berühmt ist seine Quadratur eines Parabelsegments sowie seine Kreis- und Kugelberechnung.

Im Mittelalter sank die Mathematik von der Höhe, die die griechischen Geometer erreicht hatten, völlig herab, und als man im 15. Jahrhundert das Studium der griechischen Geometer begann, fehlte das Verständnis für die Strenge der Beweise, die wir bei jenen aus-

1) Nach Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik und Zeuthens Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Benutzt sind auch die beiden Schriften von Gerhardt „Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz" und „Die Entdeckung der höheren Analysis."

gezeichneten Denkern finden. Trotzdem wirkten besonders die Schriften des Archimedes anregend.

Der berühmte Astronom Johannes Kepler (1571—1630) erreichte eine große Virtuosität in der Handhabung infinitesimaler Methoden. Er kam vermöge seines feinen mathematischen Takts fast immer zu richtigen Ergebnissen, obwohl seine Methoden nichts weniger als exakt waren. In seiner „Stereometria doliorum vinariorum“ (Stereometrie der Weinfässer), die 1615 gedruckt ist, finden wir im ersten Abschnitt eine Rekapitulation der archimedischen Arbeit über Kugel und Zylinder. Hier können wir sehen, von welcher Art Keplers infinitesimale Betrachtungen sind und wie bei ihnen jede Spur eines wirklichen Beweises fehlt. Kepler erklärt z. B., die Kugel bestehe „gewissermaßen“ aus unendlich vielen äußerst dünnen Kegeln, die ihre Spitze im Mittelpunkt und ihre Basis auf der Oberfläche der Kugel haben. So ist es dann leicht, den Inhalt der Kugel zu finden, wenn man ihre Oberfläche schon kennt. In ähnlicher Weise berechnet Kepler die Volumina von anderen Körpern. So wenig dieses leichtfertige Umgehen mit dem Unendlichkleinen den Forderungen der mathematischen Strenge entspricht, so sehr hat es doch die Forschung gefördert. Man konnte sich leichter bewegen als in der schweren Rüstung einer strengen Methode.

Keplers Buch übte freilich keinen so großen Einfluß aus. Das gelang in höherem Maße der „Methodus indivisibilium“ des Mailänders Cavalieri (1591—1647), obwohl ihre Grundlagen unklar waren und viele Angriffe erfuhren. Wir wissen aus Briefen Cavalieris, daß der große Galilei (1564—1642) eine ähnliche Methode besaß. Cavalieris Hauptidee ist es, ein ebenes Flächenstück als den Inbegriff aller zu einer festen Geraden parallelen Sehnen zu betrachten und einen Körper als den Inbegriff aller zu einer festen Ebene parallelen ebenen Schnitte. Hierin steckt im Grunde der Begriff des bestimmten Integrals, aber doch in einer sehr unklaren Form. Cavalieris Methode wurde von Torricelli, einem Schüler Galileis benutzt, um den Flächeninhalt der Zykloide zu berechnen, und erfuhr auch sonst die mannigfachsten Anwendungen.

In Frankreich haben Fermat (1601—1665), Roberval (1602 bis 1672) und Pascal (1623—1662) Methoden zur Ausführung von Quadraturen entwickelt. Sie verließen z. T. die rein geometrische Darstellungsform, indem sie im Anschluß an Vieta (1540 bis 1603), der hierin als Vorgänger Descartes' zu betrachten ist, die geometrischen Gebilde ins Analytische übersetzten.

Eine äußerst fruchtbare Tätigkeit entfaltete in England Wallis (1616—1703), der sich vielleicht am weitesten von der Strenge der griechischen Geometer entfernt. In seiner „Arithmetica infinitorum" (1655) verwendet er mit großer Kühnheit Induktions- und Analogieschlüsse, die man sonst in der mathematischen Wissenschaft nicht gewöhnt ist.

Wenn auch der Gegenstand, den Wallis behandelt, wie bei seinen Vorgängern die Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten ist, so unterscheidet er sich doch von ihnen durch das ganz ausgesprochene Hervortreten der rechnerischen Seite. Er schreibt eine Arithmetica infinitorum.

Probleme, die, wie wir wissen, mit der Differentialrechnung zusammenhängen, sind das Tangentenproblem und das Problem der Maxima und Minima. Sie sind lange vor der Erfindung der Differentialrechnung in speziellen Fällen behandelt worden.

Es ist bekannt, daß schon die Griechen die Tangenten verschiedener Kurven konstruiert haben. Torricelli und Roberval lieferten eine nach ihrer Meinung allgemeine Tangentenmethode auf kinematischer Grundlage.[1]) In vollster Allgemeinheit konnte aber das Tangentenproblem erst nach der Erfindung der analytischen Geometrie durch Descartes (1596—1650) behandelt werden. Descartes selbst bezeichnet es in seiner Géométrie (1637) als das nützlichste und allgemeinste Problem der Geometrie. Freilich ist Desartes' eigene Lösung dieses Problems, bei der er sich eines die Kurve berührenden Kreises bedient, nicht sehr brauchbar.

Fermat entwickelte eine Methode der Maxima und Minima und eine Tangentenmethode, wobei er mit einem unendlich kleinen Inkrement der unabhängigen Veränderlichen operierte. Auf Grund dieser Tatsache haben sogar französische Mathematiker Fermat als den Erfinder der Differentialrechnung bezeichnet (z. B. Laplace).

Der berühmte holländische Mathematiker und Physiker Huygens (1629—1695) kannte die Arbeiten von Fermat und hat sich mit der Weiterführung und strengeren Begründung seiner Methode beschäftigt.

Auch Barrow (1630—1677), der Lehrer Newtons, hat Verdienste um das Tangentenproblem. Er knüpfte in vielen Punkten an Torricellis Arbeiten an.

---

1) Sie lösten mit Hilfe ihrer kinematischen Betrachtungsweise viele Aufgaben, z. B. gelang Roberval die Rektifikation der Zykloide.

Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz wurde 1646 in Leipzig geboren. 15 Jahre alt wurde er 1661 in Leipzig als Student immatrikuliert. Er kam durch das Studium der Logik zur Mathematik, die aber damals an den deutschen Universitäten sehr wenig in Blüte stand. Es war nur die Elementarmathematik, die Leibniz in den Vorlesungen kennen lernte. Auch seine zeitweilige Übersiedelung nach Jena konnte seinen mathematischen Studien nicht besondere Förderung bringen.

Erst viel später, als er schon seine politische Laufbahn begonnen hatte, sollte er mit den neueren Fortschritten der Mathematik bekannt werden. Er kam im Jahre 1672 mit einer diplomatischen Mission nach Paris und lernte dort die berühmten Männer am Hofe Ludwigs XIV. kennen, unter ihnen Huygens. Dieser hatte gerade damals sein großes Werk „Horologium oscillatorium" vollendet. Es handelt von der Pendeluhr und bietet im Anschluß daran eine Fülle mechanischer und geometrischer Untersuchungen. Als Leibniz dieses Buch las, erkannte er die Unzulänglichkeit seiner mathematischen Vorbildung, und er begann mit Eifer die Schriften der großen Mathematiker Descartes, Pascal usw. zu studieren. Es dauerte nicht lange, so machte er schon eigene Entdeckungen. Er fand einen Satz, mit dessen Hilfe sich viele schon bekannte Quadraturen in einfacher Weise ausführen ließen. Bei dieser Gelegenheit kam er auch auf die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Schon damals hat sich Leibniz mit der Konvergenz alternierender Reihen beschäftigt. Von ihm rührt auch der Satz her, den wir in § 31, S. 63 angegeben haben, den er aber erst später (10. Jan. 1714) in einem Briefe an Johann Bernoulli streng beweist. Ein Brief Newtons, der ihm 1676 durch Oldenburg, den Sekretär der Londoner Gesellschaft der Wissenschaften[1]) übermittelt wurde, zeigte Leibniz, wie große Fortschritte die englischen Mathematiker auf dem von ihm betretenen Gebiet schon gemacht hatten. Der Newtonsche Brief enthält u. a. die Binomialreihe, sowie die

1) Leibniz hatte Oldenburg 1673 auf einer Reise nach London kennen gelernt.

Reihen für cos x und sin x. Leibniz ließ sich aber nicht etwa entmutigen. Vielmehr steigerten die Newtonschen Mitteilungen seine Begeisterung für den Gegenstand. Schon 1673 beschäftigte er sich außer mit Quadraturen auch mit dem Tangentenproblem, und 1675 war er schon so weit, daß er die beiden jetzt in der ganzen Welt benutzten Operationszeichen d und $\int$ einführte. Das war ein Schritt von der allergrößten Bedeutung. Mit Recht sagt Leibniz später in einem Briefe an den Marquis de l'Hôpital (1693), daß ein Teil des Geheimnisses der Analysis in der Bezeichnungsweise liegt, und er hat auch bei vielen anderen Gelegenheiten die Wichtigkeit einer zweckmäßigen Symbolik betont.[1]) Man kann mit einiger Sicherheit den Tag angeben, an welchem Leibniz zum ersten Male die beiden Symbole d und $\int$ nebeneinander benutzte. Es ist der 29. Oktober 1675. Leibniz ging sogleich daran, die einfachsten Regeln für das Rechnen mit diesen Symbolen aufzusuchen.[2]) Er war sich bewußt eine neue Rechnungsart (novum genus calculi, wie er selbst sagt), gefunden zu haben und erkannte die große Tragweite derselben. Und gerade dies gibt uns das Recht, ihn für den wahren Erfinder der Infinitesimalrechnung zu halten. Man muß zugeben, daß Leibniz sich an verschiedenen Stellen nicht klar darüber ausspricht, was seine Differentiale eigentlich bedeuten. Aber in seiner ersten Publikation über die Differentialrechnung, die 1684 in den Acta eruditorum erfolgte, finden wir im Anfang die Differentiale genau so definiert, wie wir sie jetzt definieren. Es heißt dort wörtlich: „Gegeben sei eine Achse AX und mehrere Kurven VV, WW, YY, ZZ. Ihre zur Achse senkrechten Ordinaten VX, WX, YX, ZX, wollen wir mit v, w, y, z bezeichnen, den Abschnitt AX auf der Achse mit x. Die Tangenten seien VB, WC, YD, ZE. Sie mögen die Achse bezüglich in B, C, D, E treffen. Nunmehr wollen wir mit dx eine beliebig angenommene Strecke bezeichnen und die Strecke, welche sich zu dx verhält wie v (oder w oder y oder z) zu XB (oder XC oder XD oder XE), mit dv (oder dw oder dy oder dz) ..."

1) Am 26. März 1676 schreibt er: Illustribus exemplis quotidie disco, omnem solvendi pariter problemata et inveniendi theoremata artem, tunc cum res ipsa imaginationi non subjacet aut nimis vasta est, eo redire, ut characteribus sive compendiis imaginationi subjiciatur, atque quae pingi non possunt, qualia sunt intelligibilia, ea pingantur tamen hieroglyphica quadam ratione, sed eadem et philosophica. Quod fit, si non ut pictores, mystae aut Sinenses similitudines quasdam sectemur, sed rei ipsius ideam sequamur.

2) Am 21. November 1675 fand er die Formel $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

Da, wie wir wissen, v' die Richtungskonstante der Tangente ist, so wird

$$dv = \frac{XV}{XB}\,dx = v'dx,$$

also gerade das, was wir jetzt das Differential von v nennen.

Leibniz ging 1676 als Vorstand der herzoglichen Bibliothek nach Hannover. Dieses neue Amt und seine politische und philosophische Tätigkeit nahmen ihn stark in Anspruch. Er war aber doch immer mit dem Ausbau seines neuen Kalkuls und mit Anwendungen desselben beschäftigt. Es finden sich in seinem Nachlaß verschiedene Entwürfe zu einer definitiven Publikation über den Gegenstand. Eine solche erfolgte aber, wie oben gesagt wurde, erst 1684. Inzwischen hatte sich Leibniz in einem Brief an Newton (1677) über seine Differentialrechnung ausgesprochen.

Kurfürst Friedrich III. berief Leibniz nach Berlin; hier gründete er die Akademie der Wissenschaften. Nach Hannover zurückgekehrt, war er 1713 damit beschäftigt dem Kurfürsten von Hannover die Thronfolge in England zu sichern, die ihm die Tories aberkennen wollten. Diese politische Tätigkeit trug wesentlich dazu bei, ihn mit Newton zu verfeinden, der der Partei der Tories angehörte. 1714 kam der Kurfürst von Hannover auf den englischen Thron. Aber Leibniz fiel in Ungnade und war in den letzten Lebensjahren vereinsamt. Er starb, von heftigen körperlichen Leiden geplagt, 1716.

Newton.

Isaak Newton wurde 1642 in Woolsthorpe bei Grantham in Lincolnshire geboren und kam 1661 als Student nach Cambridge. Hier studierte er Descartes' Géométrie und Wallis' Arithmetica infinitorum und hörte die Vorlesungen Barrows. Er hatte, wie man sieht, mehr Glück als Leibniz, der während seiner Studienzeit nichts von den neueren Fortschritten der Mathematik erfuhr. Newton dachte über alles, was er las, selbständig nach und „das stete Nachdenken" war, wie er selbst sagte, der Weg, auf dem er zu seinen großen Entdeckungen kam. In den Jahren 1665—67 fand er (durch das Studium von Wallis angeregt) die Binomialformel für gebrochene positive und negative Exponenten (vgl. oben S. 84) und verschiedene andere mit unendlichen Reihen zusammenhängende Resultate.[1]) Auch legte er damals schon den Grund zu seiner

1) Z. B. die Reihenentwicklung algebraischer Funktionen.

Fluxionsrechnung. Die direkte und die inverse Fluxionsrechnung sind dasselbe wie Differential- und Integralrechnung. In jene Zeit fällt auch seine große Entdeckung der allgemeinen Gravitation. Die Grundidee der Fluxionsrechnung ist die, daß jede Veränderliche oder „Fluente" als Funktion der Zeit betrachtet wird. Die Zeit ist also die allgemeine unabhängige Veränderliche. Die Geschwindigkeit, mit der eine Fluente x sich ändert, nennt Newton die „Fluxion" von x und bezeichnet sie mit $\dot{x}$. Ändert sich x gleichförmig, d. h. in gleichen Zeiten um den gleichen Betrag, so ist $\dot{x}$ konstant. Die Newtonschen Fluxionen sind also dasselbe wie die Ableitungen oder Differentialquotienten, nur daß die Zeit die unabhängige Veränderliche ist.

Es muß überraschen, daß Newton, obwohl er schon so viele Anwendungen von seiner Fluxionsrechnung besaß, in seinem großen Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica" (1686—87) keinen Gebrauch davon machte. Nach seiner eigenen Angabe hat er die meisten Resultate in diesem Buch mit Hilfe seiner Fluxionsrechnung gefunden und nach dem Erscheinen desselben zeigte auch Leibniz, wie leicht sich die meisten Resultate mittels der Infinitesimalrechnung ableiten lassen. Es kam aber Newton darauf an, so wichtige Untersuchungen, wie sie die „Principia" enthalten, in einer Form darzustellen, die den Leser nicht nötigt, erst eine neue Rechnungsart kennen zu lernen.

Publiziert hat Newton seine Fluxionsrechnung sehr spät, obwohl verschiedene Abhandlungen längst ausgearbeitet bei ihm lagen. Sein Hauptwerk über Infinitesimalrechnung „Methodus fluxionum et serierum infinitarum" wurde erst nach seinem Tode (er starb 1727) gedruckt. Newton hatte immer eine große Abneigung, öffentlich aufzutreten. Es wird gesagt, daß ihn ein Gegenstand, den er bearbeitete, nicht mehr interessierte, sobald andere etwas darüber publiziert hatten. Das mag der Grund gewesen sein, daß seine Fluxionsrechnung so spät veröffentlicht wurde, zu spät, um sich neben dem schon verbreiteten Leibnizschen Kalkul Geltung zu verschaffen.

Der Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz.

Im Jahre 1699 ließ Nicolas Fatio de Duillier (ein Genfer, der Beziehungen zu Huygens hatte und Mitglied der Royal Society war) mit Genehmigung dieser Gesellschaft eine Schrift erscheinen, in der er Leibniz vorwarf, er habe seine Differentialrechnung nicht selbständig erfunden, sondern von Newton entlehnt.

Leibniz beschwerte sich wegen dieser Beschuldigung bei der Royal Society und ließ in den „Acta Eruditorum" eine Antwort auf Fatios Angriffe erscheinen. Er führt Newtons eigenes Zeugnis an, der in den „Principia" die Unabhängigkeit seiner und der Leibnizschen Entdeckungen öffentlich anerkannt hatte (1687).

Im Jahre 1704 ließ Newton im Anhang eines optischen Werkes eine alte Abhandlung über die Quadratur der Kurven, die eine kurze Darstellung der Fluxionsrechnung enthält, drucken. Leibniz schrieb für die Acta Eruditorum eine Anzeige dieser Schrift, ohne aber seinen Namen zu nennen. In dieser Anzeige findet sich eine Bemerkung, die so aufgefaßt werden kann, als wolle sie Newton die Selbständigkeit der Erfindung absprechen und ihn von Leibniz abhängig machen. Newton scheint, damals durch politische Tätigkeit stark in Anspruch genommen, diesen Aufsatz nicht gelesen zu haben. Vielleicht hätte er sonst darauf geantwortet. Leibniz benutzte auch den Tod Jacob Bernoullis (der zusammen mit seinem Bruder Johann viel für den Ausbau und die Anwendungen des Leibnizschen Kalkuls getan hatte), um in einem Nekrolog die „Leibnizsche Infinitesimalanalysis" als eine große Erfindung hinstellen zu lassen, ohne daß dabei Newton erwähnt wurde.

Von der anderen Seite kam erst 1710 wieder ein Vorstoß. John Keill, ein Anhänger Newtons, schrieb eine Arbeit über Zentripetalkräfte und sagte darin geradezu, Leibniz habe die Newtonsche Fluxionsrechnung „unter Veränderung des Namens und der Bezeichnungsweise in den Acta Eruditorum veröffentlicht". Leibniz beschwerte sich wieder bei der Royal Society, deren Präsident damals Newton war. Es wurde dann schließlich eine Kommission eingesetzt, die den Tatbestand prüfen sollte. Sie sprach sich dahin aus, daß Newton der erste Erfinder der Infinitesimalrechnung sei. Die Schriftstücke, auf die sich das Urteil stützte, wurden gedruckt und überall verbreitet. Alle Bemühungen Leibnizens und unparteiischer Männer waren erfolglos. Während des ganzen 18. Jahrhunderts hat man die Entscheidung jener Kommission für maßgebend gehalten und erst das 19. Jahrhundert hat die Ehre unseres großen Landsmannes wiederhergestellt. Seine Unabhängigkeit von Newton ist mit ziemlicher Sicherheit nachgewiesen. Abhängig ist er nur — ebenso aber und vielleicht in noch höherem Maße Newton — von den Männern, die wir oben als die Vorläufer beider bezeichneten.

Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Von Dr. **W. Ahrens.** 2., vermehrte und verbesserte Auflage. In 2 Bänden. gr. 8. 1910. In Leinwand geb. I. Band. Mit 200 Figuren. ℳ 7.50. II. Band. [In Vorbereitung.] Kleine Ausgabe: **Mathematische Spiele.** 170. Bändchen der Sammlung **„Aus Natur und Geisteswelt."** Mit einem Titelbild und 69 Figuren. 1907. Geh. ℳ 1.—, in Leinwand geb. ℳ 1.25.

„Das mit großem Fleiße äußerst sorgfältig gearbeitete Werk ist als zuverlässiger Führer des Beifalls der Mathematiker sicher und wird sich gewiß auch bei allen Nichtmathematikern einbürgern, die einen Einblick in die geistvollen Gedanken nehmen, aus denen seit langer Zeit nach Art der Rätselfragen mannigfaltiger Stoff zu fröhlicher und befriedigender Unterhaltung entstanden ist. . . ." **(Deutsche Literaturzeitung.)**

Scherz und Ernst in der Mathematik. **Geflügelte und ungeflügelte Worte.** Von Dr. **W. Ahrens.** 1904. In Leinwand geb. ℳ 8.—

„Ein ‚Büchmann' für das Spezialgebiet der mathematischen Literatur. . . . Manch ein kurzes treffendes Wort verbreitet Licht über das Streben der in der mathematischen Wissenschaft führenden Geister. Hierdurch aber wird das sorgfältig bearbeitete Ahrenssche Werk eine zuverlässige Quelle nicht allein der Unterhaltung, sondern auch der Belehrung über Wesen, Zweck, Aufgabe und Geschichte der Mathematik."
(J. Norrenberg in der Monatsschrift für höhere Schulen.)

Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von **H. Weber** und **J. Wellstein,** Professoren an der Universität Straßburg. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. 1909. ℳ 10.—

II. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. 1907. ℳ 12.—

III. Angewandte Elementar-Mathematik. 2. Auflage. I. Teil: Mathematische Physik. Mit einem Buch über Maxima und Minima von H. Weber und J. Wellstein. Bearbeitet von Rudolph H. Weber, Professor in Rostock. Mit 254 Figuren. 1910. ℳ 12.— II. Teil: Darstellende Geometrie, graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie. Bearbeitet von J. Wellstein, H. Weber, H. Bleicher, J. Bauschinger. Mit 271 Figuren. 1912. M. 14.—

„Das Buch ist ein mathematisches Handbuch ersten Ranges und sowohl zur Neuerwerbung mathematischen Wissens als auch zur Wiederholung vortrefflich geeignet. Es kann daher jedem Freunde der Mathematik, jedem Seminarabiturienten, der auf diesem Gebiete weiterarbeiten will, jedem Studierenden der Mathematik — und noch manchem darüber hinaus auf das wärmste empfohlen werden."
(Literarische Beilage zur Pädagogischen Zeitung.)

Elemente der Mathematik. Von Professor Dr. **E. Borel.** Deutsche Ausgabe von Dr. **P. Stäckel,** Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. In 2 Bänden. In Leinwand geb.

I. Band: **Arithmetik und Algebra.** Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. 1908. ℳ 8.60.

II. Band: **Geometrie.** Mit 403 Figuren. 1909. ℳ 6.40.
Ergebnishefte zu den Aufgaben befinden sich in Vorbereitung.

„. . . Das Erscheinen dieses Buches ist ein Ereignis für den mathematischen Unterricht unserer höheren Schulen. Die Namen des französischen Verfassers und des deutschen Bearbeiters sind bereits von programmatischer Bedeutung. Einer der wichtigsten Programmpunkte in der Bewegung für die Umgestaltung und Erweiterung des Mathematikunterrichtes der höheren Schulen lautet: Pflege des auf zahlreichen Gebieten der Wissenschaft so wichtigen funktionalen Denkens schon auf der Schule. Emile Borel ist einer der hervorragendsten Funktionentheoretiker der Gegenwart und hat, so hoch die von ihm sonst bearbeiteten Teile der Analysis über den hier in Frage kommenden einfachsten Elementen auch stehen, es nicht für zu gering erachtet, Schulbücher zu verfassen und in diese die von der modernen Reformbewegung geforderten Elemente (Koordinatenbegriff und graphische Darstellung, Begriff der veränderlichen Größe und der Funktion) aufzunehmen. Seine Bücher sind für den Mathematikunterricht der französischen Schulen von größter Bedeutung geworden." **(Frankfurter Zeitung.)**

Elemente der Mathematik. Von Professor **J. Tannery.** Mit einem geschichtlichen Anhang von **P. Tannery.** Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. **P. Klaeß.** Mit einem Einführungswort von **Felix Klein.** Geh. *M* 7.—, in Leinwand geb. *M* 8.—

„Das Buch bietet schon stofflich sehr viel, da es neben der Elementarmathematik auch die zur Lektüre naturwissenschaftlicher Bücher heute unerläßlichen Grundbegriffe der höheren Mathematik vermittelt; aber sein Hauptreiz liegt in der Darstellungsform. Selten ist wohl ein mathematisches Lehrbuch geschrieben worden, das so frei ist von leerem Formelwesen, das so mutig allen unnötigen Ballast preisgibt, wie das vorliegende Werk." **(Naturwissenschaftliche Rundschau.)**

Mathematische Experimentiermappe. **Für den geometrischen Anfangsunterricht.** Von Prof. Dr. **G. Noodt,** Oberlehrer an der Hecker-Realschule zu Berlin. 9 Tafeln mit vorgezeichneten Figuren mathematischer Modelle, Werkzeug und Material zur Herstellung sowie erläuternder Leitfaden. Als Muster wird jeder Mappe ein fertiges Modell beigelegt. Preis in geschmackvollem Karton *M* 4.—

Das neue Unterhaltungs- und Bildungsmittel für Knaben im Alter von 12–16 Jahren bietet eine Anleitung zur selbsttätigen Herstellung von großenteils neuen mathematischen Modellen und das hierzu erforderliche Material und Werkzeug und will sich, gemäß den modernen Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts, in den Dienst einer intensiven Ausbildung des Anschauungsvermögens stellen. Denn gerade die Selbsttätigkeit der Schüler ist in hohem Grade geeignet, sie in frühester Jugend zum funktionalen Denken allmählich zu erziehen, indem man die Starrheit der geometrischen Gebilde aufgibt und die „Stücke" durch Bewegung von Punkten, Drehen von Strecken usf. als voneinander abhängig erkennen läßt.

Lehrbuch der Physik. Von Direktor **E. Grimsehl.** Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. 2. Auflage. Mit 1296 Figuren, zwei farbigen Tafeln und Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. Geh. *M* 15.—, in Leinwand geb. *M* 16.—

„...Das vorliegende Buch will denen, die eine höhere Schule besucht haben und das Bedürfnis fühlen, ihre erworbenen Kenntnisse lebendig zu erhalten und sie zu erweitern, ein zuverlässiger Führer und Berater sein. Auch die studierende Jugend wird vorteilhaft davon Gebrauch machen können. Beide auch deshalb, weil eine große Anzahl von Abbildungen den Text begleitet und erläutert. Im übrigen wird jeder Erwachsene dies umfangreiche Werk gern in seiner Bibliothek haben, da es an einem solchen Werke bisher fehlte, das ohne allzu große Gelehrsamkeit die in Betracht kommenden Kenntnisse übermittelt." **(Der Tag.)**

Experimentelle Elektrizitätslehre. Von Dr. **H. Starke,** Professor an der Universität Greifswald. Verbunden mit einer Einführung in die Maxwellsche und die Elektronentheorie der Elektrizität und des Lichtes. 2. Auflage. Mit 334 Abbildungen. In Leinw. geb. *M* 12.—

„Ein Lehrbuch, wie das vorliegende, das von ganz modernem, theoretisch einheitlichem Standpunkte aus unsere Kenntnis auf dem Gebiete der Ätherphysik zusammenstellt, war längst ein Bedürfnis. Die Reichhaltigkeit des mitgeteilten, bis zu den neuesten Ergebnissen der Elektronentheorie reichenden Materials ist erstaunlich. Nur durch so echt wissenschaftliche Behandlung, also durch feste theoretische Fundierung, konnte auf so kleinem Raum so viel gebracht werden, und zwar so gebracht werden, daß man es bei der Lektüre wirklich ‚erlebt'. Auch die prinzipiellen Seiten der technischen Anwendung sind sehr ausgiebig eingefügt, so daß das Buch gleichzeitig eine Einführung in die Elektrotechnik ist, wie es zurzeit keine bessere in Deutschland gibt."
(H. Th. Simon in der **Physikalischen Zeitschrift.)**

Populäre Astrophysik. Von Dr. **J. Scheiner.** 2. Auflage. Mit 20 Tafeln und 210 Figuren. In Leinwand geb. *M* 14.—

„Soweit es überhaupt möglich ist, dem Laien einen Einblick in diese schwierige Materie zu erschließen, dürfte der Verfasser seine Aufgabe mit großer Geschicklichkeit gelöst haben. Der Vortrag Scheiners ist populärwissenschaftlich im besten Sinne: klar, eindringlich, frei von allen jetzt üblichen Mätzchen der naturwissenschaftlichen Popularschriftstellerei. Vortreffliche Abbildungen unterstützen das Verständnis des vortrefflichen Textes." **(Propyläen.)**

Mathematische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementarmathematik für Schule und Leben

Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. A. Witting**

Oberlehrer an der Oberrealschule zu Barmen | Prof. am Gymnasium zum Heiligen Kreuz zu Dresden

In Kleinoktavbändchen kart. je M. —.80.

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an der Mathematik im weitesten Sinne des Wortes haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren und zu unterrichten. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung und eingehendere Bearbeitung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes mathematisches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser — ohne zu große Anforderungen an seine mathematischen Kenntnisse zu stellen — in neue Gebiete der Mathematik einführen.

Bisher sind erschienen:

1. E. Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme bei den Kulturvölkern in alter und neuer Zeit. 1912.
2. H. Wieleitner, der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Mit 10 Figuren. 1911.
3. W. Lietzmann, der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Mit 44 Figuren. 1912.
4. O. Meißner, Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen. Mit 6 Figuren. 1912.
5. H. E. Timerding, die Fallgesetze. Mit 20 Figuren. 1912.
6. M. Zacharias, Einführung in die projektive Geometrie. Mit 18 Figuren. 1912.
7. H. Wieleitner, die 7 Rechnungsarten mit allgem. Zahlen. 1912.
8. P. Meth, Theorie der Planetenbewegung. Mit 17 Figuren. 1912.
9. A. Witting, Einführung in die Infinitesimalrechnung. Mit 40 Figuren. 1912.

In Vorbereitung befinden sich:

E. Bentel, die Quadratur des Kreises.
W. Lietzmann, der Eulersche Polyedersatz.
A. Schreiber, Ortsbestimmung auf dem Lande, zur See und in der Luft.
H. Wieleitner, elemt. Mengenlehre.
M. Winkelmann, der Kreisel.
A. Witting, abgekürztes Rechnen.
— graphische Darstellungen.
— und M. Gebhardt, Beispiele zur Geschichte der Mathematik.
P. Zühlke, stereometr. Konstruktionen.

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich

Jeder Band geh. M. 1.—, in Leinwand geb. M. 1.25.

Übersicht nach Wissenschaften geordnet.

Allgemeines Bildungswesen. Erziehung und Unterricht.

Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwicklung. Von weil. Prof. Dr. Friedrich Paulsen. 3. Aufl. Von Prof. Dr. W. Münch. Mit einem Bildnis Paulsens. (Bd. 100.)

Der Leipziger Student von 1409—1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)

Geschichte des deutschen Schulwesens. Von Oberrealschuldirektor Dr. K. Knabe. (Bd. 85.)

Das deutsche Unterrichtswesen der Gegenwart. Von Oberrealschuldirektor Dr. K. Knabe. (Bd. 299.)

Allgemeine Pädagogik. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. 3. Aufl. (Bd. 33.)

Experimentelle Pädagogik mit besonderer Rücksicht auf die Erziehung durch die Tat. Von Dr. W. A. Lay. 2. Aufl. Mit 2 Abb. (Bd. 224.)

Psychologie des Kindes. Von Prof. Dr. R. Gaupp. 3. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 213.)

Moderne Erziehung in Haus und Schule. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 159.)

Großstadtpädagogik. Von J. Tews. (Bd. 327.)

Schulkämpfe der Gegenwart. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 111.)

Die höhere Mädchenschule in Deutschland. Von Oberlehrerin M. Martin. (Bd. 65.)

Vom Hilfsschulwesen. Von Rektor Dr. B. Maennel. (Bd. 73.)

Das deutsche Fortbildungsschulwesen. Von Direktor Dr. Fr. Schilling. (Bd. 256.)

Die Knabenhandarbeit in der heutigen Erziehung. Von Seminar-Dir. Dr. A. Pabst. Mit 21 Abb. u. 1 Titelbild. (Bd. 140.)

Das moderne Volksbildungswesen. Bücher- und Lesehallen, Volkshochschulen und verwandte Bildungseinrichtungen in den wichtigsten Kulturländern in ihrer Entwicklung seit der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts. Von Stadtbibliothekar Dr. G. Fritz. Mit 14 Abb. (Bd. 266.)

Die amerikanische Universität. Von Ph. D. E. D. Perry. Mit 22 Abb. (Bd. 206.)

Technische Hochschulen in Nordamerika. Von Prof. S. Müller. Mit zahlr. Abb., Karte u. Lageplan. (Bd. 190.)

Volksschule und Lehrerbildung der Vereinigten Staaten. Von Dir. Dr. F. Kuypers. Mit 48 Abb. u. 1 Titelbild. (Bd. 150.)

Deutsches Ringen nach Kraft und Schönheit. Aus den literarischen Zeugnissen eines Jahrhunderts gesammelt. Von Turninspektor K. Möller. 2 Bde. Band II: In Vorb. (Bd. 188/189.)

Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 33 Fig. (Bd. 96.)

Jugend-Fürsorge. Von Waisenhaus-Direktor Dr. J. Petersen. 2 Bde. (Bd. 161. 162.)

Pestalozzi. Sein Leben und seine Ideen. Von Prof. Dr. P. Natorp. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis u. 1 Brieffaksimile. (Bd. 250.)

Herbarts Lehren und Leben. Von Pastor O. Flügel. Mit 1 Bildnisse Herbarts. (Bd. 164.)

Friedrich Fröbel. Sein Leben und sein Wirken. Von A. von Portugall. Mit 5 Tafeln. (Bd. 82.)

Religionswissenschaft.

Leben und Lehre des Buddha. Von weil. Prof. Dr. R. Pischel. 2. Aufl. von Prof. Dr. H. Lüders. Mit 1 Tafel. (Bd. 109.)

Germanische Mythologie. Von Prof. Dr. J. v. Negelein. 2. Aufl. (Bd. 95.)

Mystik im Heidentum und Christentum. Von Dr. E. Lehmann. (Bd. 217.)

Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Freiherr von Soden. 3. Aufl. Mit 2 Karten, 1 Plan u. 6 Ansichten. (Bd. 6.)

Palästina und seine Kultur in fünf Jahrtausenden. Von Gymnasialoberlehrer Dr. P. Thomsen. Mit 36 Abb. (Bd. 260.)

Die Grundzüge der israelitischen Religionsgeschichte. Von Prof. Dr. Fr. Giesebrecht. 2. Aufl. (Bd. 52)

Die Gleichnisse Jesu. Zugleich Anleitung zu einem quellenmäßigen Verständnis der Evangelien. Von Lic. Prof. Dr. H. Weinel. 3. Aufl. (Bd. 46.)

Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu. Von Pfarrer D. P. Mehlhorn. 2. Aufl. (Bd. 137.)

Jesus und seine Zeitgenossen. Geschichtliches und Erbauliches. Von Pastor C. Bonhoff. (Bd. 89.)

Der Text des Neuen Testamentes nach seiner geschichtlichen Entwicklung. Von Div.-Pfarrer A. Pott. Mit 8 Tafeln. (Bd. 134.)

Der Apostel Paulus und sein Werk. Von Prof. Dr. E. Vischer. (Bd. 309.)

Christentum und Weltgeschichte. Von Prof. Dr. K. Sell. 2 Bde. (Bd. 297. 298.)

Aus der Werdezeit des Christentums. Studien und Charakteristiken. Von Prof. Dr. J. Geffcken. 2. Aufl. (Bd. 54.)

Luther im Lichte der neueren Forschung. Ein kritischer Bericht. Von Prof. Dr. H. Boehmer. 2. Aufl. Mit 2 Bildn. Luthers. (Bd. 113.)

Johann Calvin. Von Pfarrer Dr. G. Sodeur. Mit 1 Bildnis. (Bd. 247.)

Die Jesuiten. Eine historische Skizze. Von Prof. Dr. H. Boehmer. 2. Aufl. (Bd. 49.)

Die religiösen Strömungen der Gegenwart. Von Superintendent D. A. H. Braasch. 2. Auflage. (Bd. 66.)

Die Stellung der Religion im Geistesleben. Von Lic. Dr. P. Kalweit. (Bd. 225.)

Religion und Naturwissenschaft in Kampf und Frieden. Ein geschichtlicher Rückblick. Von Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)

Einführung in die Theologie: Pastor M. Cornils. (Bd. 347.)

Philosophie und Psychologie.

Einführung in die Philosophie. Von Prof. Dr. R. Richter. 2. Aufl. (Bd. 155.)

Die Philosophie. Einführung in die Wissenschaft, ihr Wesen und ihre Probleme. Von Realschuldirektor H. Richert. (Bd. 186.)

Aesthetik. Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)

Führende Denker. Geschichtliche Einleitung in die Philosophie. Von Prof. Dr. J. Cohn. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)

Griechische Weltanschauung. Von Privatdoz. Dr. M. Wundt. (Bd. 329.)

Die Weltanschauungen der großen Philosophen der Neuzeit. Von weil. Prof. Dr. L. Busse. 5. Aufl., herausgegeben von Prof. Dr. R. Falckenberg. (Bd. 56.)

Die Philosophie der Gegenwart in Deutschland. Eine Charakteristik ihrer Hauptrichtungen. Von Prof. Dr. O. Külpe. 5. Aufl. (Bd. 41.)

Rousseau. Von Prof. Dr. P. Hensel. Mit 1 Bildn. (Bd. 180.)

Immanuel Kant. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Külpe. 2. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 146.)

Schopenhauer. Seine Persönlichkeit, seine Lehre, seine Bedeutung. Von Realschuldirektor H. Richert. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis. (Bd. 81.)

Herbert Spencer. Von Dr. K. Schwarze. Mit 1 Bildn. (Bd. 245.)

Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. Von Dr. J. Unold. 3. Aufl. (Bd. 12.)

Sittliche Lebensanschauungen der Gegenwart. Von weil. Prof. Dr. O. Kirn. 2. Aufl. (Bd. 177.)

Die Mechanik des Geisteslebens. Von Prof. Dr. M. Verworn. 2. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 200.)

Die Seele des Menschen. Von Prof. Dr. J. Rehmke. 3. Aufl. (Bd. 36.)

Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. (Bd. 199.)

Literatur und Sprache.

Die Sprachstämme des Erdkreises. Von weil. Prof. Dr. F. N. Finck. (Bd. 267.)

Die Haupttypen des menschlichen Sprachbaues. Von weil. Prof. Dr. F. N. Finck. (Bd. 268.)

Rhetorik. Richtlinien für die Kunst des Sprechens. Von Dr. E. Geißler. (Bd. 310.)

Wie wir sprechen. Von Dr. E. Richter. (Bd. 354.)

Die deutschen Personennamen. Von Direktor A. Bähnisch. (Bd. 296.)

Das deutsche Volkslied. Über Wesen und Werden des deutschen Volksgesanges. Von Dr. J. W. Bruinier. 4. Aufl. (Bd. 7.)

Die deutsche Volkssage. Von Dr. O. Böckel. (Bd. 262.)

Das Theater. Schauspielhaus und Schauspielkunst vom griech. Altertum bis auf die Gegenwart. Von Dr. Chr. Gaehde. Mit 20 Abb. (Bd. 230.)

Das Drama. Von Dr. B. Busse. Mit Abbildungen. 2 Bde. (Bd. 287/288.)

Bd. I: Von der Antike zum französischen Klassizismus. (Bd. 287.)

Bd. II: Von Versailles bis Weimar (Bd. 288.)

Geschichte der deutschen Lyrik seit Claudius. Von Dr. H. Spiero. (Bd. 254.)

Schiller. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. Mit Bildnis Schillers. 2. Aufl. (Bd. 74.)

Das deutsche Drama des neunzehnten Jahrhunderts. In seiner Entwicklung dargestellt von Prof. Dr. G. Witkowski. 3. Aufl. Mit 1 Bildn. Hebbels. (Bd. 51.)

Deutsche Romantik. Von Prof. Dr. O. F. Walzel. 2. Aufl (Bd. 232.)

Friedrich Hebbel. Von Dr. A. Schapire-Neurath. Mit 1 Bildn. Hebbels. (Bd. 238.)

Gerhart Hauptmann. Von Prof. Dr. E. Sulger-Gebing. Mit 1 Bildn. Gerhart Hauptmanns. (Bd. 283.)

Henrik Ibsen, Björnstjerne Björnson und ihre Zeitgenossen. Von weil. Prof. Dr. B. Kahle. Mit 7 Bildn. (Bd. 193.)

Shakespeare und seine Zeit. Von Prof. Dr. E. Sieper. Mit 3 Taf. u. 3 Textb. (Bd. 185.)

Bildende Kunst und Musik.

Bau und Leben der bildenden Kunst. Von Dir. Prof. Dr. Th. Volbehr. Mit 44 Abb. (Bd. 68.)

Die Ästhetik. Von Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)

Die Entwicklungsgeschichte der Stile in der bildenden Kunst. Von Dr. E. Cohn-Wiener. 2 Bde. Mit zahlr. Abb. (Bd. 317/318.)

Band I: Vom Altertum bis zur Gotik. Mit 57 Abb. (Bd. 317.)

Band II: Von der Renaissance bis zur Gegenwart. Mit 31 Abb. (Bd. 318.)

Die Blütezeit der griechischen Kunst im Spiegel der Reliefsarkophage. Eine Einführung in die griechische Plastik. Von Dr. H. Wachtler. Mit 8 Taf. u. 32 Abb. (Bd. 272.)

Deutsche Baukunst im Mittelalter. Von Prof. Dr. A. Matthaei. 3. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 8.)

Deutsche Baukunst seit dem Mittelalter bis zum Ausgang des 18. Jahrhunderts. Von Prof. Dr. A. Matthaei. Mit 62 Abb. u. 3 Taf. (Bd. 326.)

Die deutsche Illustration. Von Prof. Dr. R. Kautzsch. Mit 35 Abb. (Bd. 44.)

Deutsche Kunst im täglichen Leben bis zum Schlusse des 18. Jahrhunderts. Von Prof. Dr. B. Haendcke. Mit 63 Abb. (Bd. 198.)

Albrecht Dürer. Von Dr. R. Wustmann. Mit 33 Abb. (Bd. 97.)

Rembrandt. Von Prof. Dr. P. Schubring. Mit 50 Abb. (Bd. 158.)

Niederländische Malerei im 17. Jahrhundert. Von Dr. H. Jantzen. Mit zahlr. Abbild. (Bd. 373.)

Ostasiatische Kunst und ihr Einfluß auf Europa. Von Direktor Prof. Dr. R. Graul. Mit 49 Abb. (Bd. 87.)

Kunstpflege in Haus und Heimat. Von Superintendent Richard Bürkner. 2. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 77.)

Geschichte der Gartenkunst. Von Reg.-Baum. Chr. Ranck. Mit 41 Abb. (Bd. 274.)

Die Grundlagen der Tonkunst. Versuch einer genetischen Darstellung der allgemeinen Musiklehre. Von Prof Dr. H. Rietsch. (Bd. 178.)

Einführung in das Wesen der Musik. Von Prof. C. R. Hennig. (Bd. 119.)

Klavier, Orgel, Harmonium. Das Wesen der Tasteninstrumente. Von Prof. Dr. O. Bie. (Bd. 325.)

Geschichte der Musik. Von Dr. Fr. Spiro. (Bd. 143.)

Haydn, Mozart, Beethoven. Von Prof. Dr. C. Krebs. Mit 4 Bildn. (Bd. 92.)

Die Blütezeit der musikalischen Romantik in Deutschland. Von Dr. E. Istel Mit 1 Silhouette. (Bd. 239.)

Das Kunstwerk Richard Wagners. Von Dr. E. Istel. Mit 1 Bildnis R. Wagners. (Bd. 330.)

Das moderne Orchester in seiner Entwicklung. Von Prof. Dr. Fr. Volbach. Mit Partiturbeisp. u. 2 Instrumententab. (Bd. 308.)

Geschichte und Kulturgeschichte.

Das Altertum im Leben der Gegenwart. Von Prof. Dr. P. Cauer. (Bd. 356.)

Kulturbilder aus griechischen Städten. Von Oberlehrer Dr. E. Ziebarth. 2. Aufl. Mit 23 Abb. u. 2 Tafeln. (Bd. 131.)

Pompeji, eine hellenistische Stadt in Italien. Von Prof. Dr. Fr. v. Duhn. 2. Aufl. Mit 62 Abb. (Bd. 114.)

Soziale Kämpfe im alten Rom. Von Privatdoz. Dr. L. Bloch. 2. Aufl. (Bd. 22.)

Roms Kampf um die Weltherrschaft. Von Prof. Dr. J. Kromayer. (Bd. 368.)

Byzantinische Charakterköpfe. Von Privatdoz. Dr. K. Dieterich. Mit 2 Bildn. (Bd. 244.)

Germanische Kultur in der Urzeit. Von Prof. Dr. G. Steinhausen. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (Bd. 75.)

Mittelalterliche Kulturideale. Von Prof. Dr. V. Vedel. 2 Bde.
Bd. I: Heldenleben. (Bd. 292.)
Bd. II: Ritterromantik. (Bd. 293.)

Deutsches Frauenleben im Wandel der Jahrhunderte. Von Dir. Dr. E. Otto. 2. Aufl. Mit 27. Abb. (Bd. 45.)

Deutsche Städte und Bürger im Mittelalter. Von Prof. Dr. B. Heil. 3. Aufl. Mit zahlr. Abb. u. 1 Doppeltafel. (Bd. 43.)

Historische Städtebilder aus Holland und Niederdeutschland. Von Reg.-Baum. a. D. A. Erbe. Mit 59 Abb. (Bd. 117.)

Das deutsche Dorf. Von R. Mielke. Mit 51 Abb. (Bd. 192.)

Das deutsche Haus und sein Hausrat. Von Prof. Dr. R. Meringer. Mit 106 Abb. (Bd. 116.)

Kulturgeschichte des deutschen Bauernhauses. Von Reg.-Baum. Chr. Ranck. Mit 70 Abb. (Bd. 121.)

Geschichte des deutschen Bauernstandes. Von Prof. Dr. H. Gerdes. Mit 21 Abb. (Bd. 320.)

Das deutsche Handwerk in seiner kulturgeschichtlichen Entwicklung. Von Dir. Dr E. Otto. 3. Aufl. Mit 27 Abb. (Bd. 14.)

Deutsche Volksfeste und Volkssitten. Von H. S. Rehm. Mit 11 Abb. (Bd. 214.)

Deutsche Volkstrachten. Von Pfarrer C. Spieß. (Bd. 342.)

Familienforschung. Von Dr. E. Devrient. (Bd. 350.)

Die Münze als hist. Denkmal sowie ihre Bedeutung im Rechts- und Wirtschaftsleben. Von Prof. Dr. A. Luschin v. Ebengreuth. Mit 53 Abb. (Bd. 91.)

Das Buchgewerbe und die Kultur. Sechs Vorträge, gehalten im Auftrage des Deutschen Buchgewerbevereins. Mit 1 Abb. (Bd. 182.)

Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. O. Weise. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 4.)

Das Zeitungswesen. Von Dr. H. Diez (Bd. 328.)

Das Zeitalter der Entdeckungen. Von Prof. Dr. S. Günther. 3 Aufl. Mit 1 Weltk. (Bd. 26.)

Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbilder aus deutscher Geschichte. Von Prof. Dr. O. Weber. (Bd. 123. 124.)

Friedrich der Große. Sechs Vorträge. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. Mit 2 Bildn. (Bd. 246.)

Geschichte der Französischen Revolution. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. (Bd. 346.)

Napoleon I. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 195.)

Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrh. Von Prof. Dr. K. Th. v. Heigel. 2. Aufl. (Bd. 129.)

Restauration und Revolution. Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Prof. Dr. R. Schwemer. 2. Aufl. (Bd. 37.)

Die Reaktion und die neue Ära. Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der Gegenwart. Von Prof. Dr. R. Schwemer. (Bd. 101.)

Vom Bund zum Reich. Neue Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Prof. Dr. R. Schwemer. (Bd. 102.)

1848. Sechs Vorträge. Von Prof. Dr. O. Weber. 2. Aufl. (Bd. 53.)

Österreichs innere Geschichte von 1848 bis 1907. Von Richard Charmatz. 2 Bde. [I 2. Aufl.] Band I: Die Vorherrschaft der Deutschen. (Bd. 242). Band II: Der Kampf der Nationen. (Bd. 243.)

Englands Weltmacht in ihrer Entwicklung vom 17. Jahrhundert bis auf unsere Tage. Von Prof. Dr. W. Langenbeck. Mit 19 Bildn. (Bd. 174.)

Geschichte der Vereinigten Staaten von Amerika. Von Prof. Dr. E. Daenell. (Bd. 147.)

Die Amerikaner. Von N. M. Butler. Deutsche Ausg. bes. von Prof. Dr. W. Paszkowski. (Bd. 319.)

Vom Kriegswesen im 19. Jahrhundert. Von Major O. v. Sothen. Mit 9 Übersichtsk. (Bd. 59.)

Der Krieg im Zeitalter des Verkehrs und der Technik. Von Hauptmann A. Meyer. Mit 3 Abb. (Bd. 271.)

Der Seekrieg. Eine geschichtliche Entwicklung vom Zeitalter der Entdeckungen bis zur Gegenwart. Von K. Freiherrn von Maltzahn, Vize-Admiral a. D. (Bd. 99.)

Die moderne Friedensbewegung. Von A. H. Fried. (Bd. 157.)

Die moderne Frauenbewegung. Ein geschichtlicher Überblick. Von Dr. K. Schirmacher. 2. Aufl. (Bd. 67.)

Rechts- und Staatswissenschaft. Volkswirtschaft.

Deutsches Fürstentum und dtsch. Verfassungsw. Von Prof. Dr. Ed. Hubrich. (Bd. 80.)

Grundzüge der Verfassung des Deutschen Reiches. Von Prof. Dr. E. Loening. 3. Aufl. (Bd. 34.)

Moderne Rechtsprobleme. Von Prof. Dr. J. Kohler. (Bd. 128.)

Die Psychologie des Verbrechers. Von Dr. P. Pollitz. Mit 5 Diagrammen. (Bd. 248.)

Strafe und Verbrechen. Von Dr. P. Pollitz. (Bd. 323.)

Verbrechen und Aberglaube. Skizzen aus der volkskundlichen Kriminalistik. Von Kammergerichtsref. Dr. A. Hellwig. (Bd. 212.)

Das deutsche Zivilprozeßrecht. Von Rechtsanw. Dr. M. Strauß. (Bd. 315.)

Ehe und Eherecht. Von Prof. Dr. L. Wahrmund. (Bd. 115.)

Der gewerbliche Rechtsschutz in Deutschland. Von Patentanw. B. Tolksdorf. (Bd. 138.)

Die Miete nach dem B. G.-B. Ein Handbüchlein für Juristen, Mieter und Vermieter. Von Rechtsanw. Dr. M. Strauß. (Bd. 194.)

Das Wahlrecht. Von Reg.-Rat Dr. O. Poensgen. (Bd. 249.)

Die Jurisprudenz im häuslichen Leben. Für Familie und Haushalt dargestellt. Von Rechtsanw. P. Bienengräber. 2 Bde. (Bd. 219. 220.)

Finanzwissenschaft. Von Prof. Dr. S. P. Altmann. (Bd. 306.)

Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von G. Maier. 4. Aufl. (Bd. 2.)

Geschichte der sozialistischen Ideen im 19. Jahrh. Von Privatdoz. Dr. Fr. Muckle. 2 Bände. (Bd. 269. 270.) Band I: Der rationale Sozialismus. (Bd. 269.) Band II: Proudhon und der entwicklungsgeschichtliche Sozialismus. (Bd 270).

Geschichte des Welthandels. Von Prof. Dr. M. G. Schmidt. 2. Aufl. (Bd. 118.)

Geschichte d. deutschen Handels. Von Prof. Dr. W. Langenbeck. (Bd. 237.)

Deutschlands Stellung in der Weltwirtschaft. Von Prof. Dr. P. Arndt. (Bd. 179.)

Deutsches Wirtschaftsleben. Auf geographischer Grundlage geschildert. Von weil. Prof. Dr. Chr. Gruber. 3. Aufl. Neubearb von Dr. H. Reinlein. (Bd 42.)

Die Ostmark. Eine Einführung in die Probleme ihrer Wirtschaftsgeschichte. Von Prof. Dr. W. Mitscherlich. (Bd. 351.)

Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens im letzten Jahrh. Von Prof. Dr. L. Pohle. 2. Aufl. (Bd. 57.)

Das Hotelwesen. Von Paul Damm-Etienne. Mit 30 Abb. (Bd. 331.)

Die deutsche Landwirtschaft. Von Dr. W. Claaßen. Mit 15 Abb. u. 1 Karte. (Bd. 215.)

Innere Kolonisation. Von A. Brenning. (Bd. 261.)

Antike Wirtschaftsgeschichte. Von Dr. O. Neurath. (Bd. 258.)

Aus dem amerikanischen Wirtschaftsleben. Von Prof. J. L. Laughlin. Mit 9 graph. Darst. Bd. 127.)

Die Japaner in der Weltwirtschaft. Von Prof. Dr. K. Rathgen. 2. Aufl (Bd. 72.)

Die Gartenstadtbewegung. Von Generalsekr. H. Kampffmeyer. Mit 43 Abb. (Bd. 259.)

Das internationale Leben der Gegenwart. Von A. H. Fried. Mit 1 Tafel. (Bd. 226.)

Bevölkerungslehre. Von Prof. Dr. M. Haushofer. (Bd. 50.)

Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. Von Prof. Dr. O. v. Zwiedineck-Südenhorst. 2. Aufl. (Bd. 78.)

Das Recht der kaufmännischen Angestellten. Von Rechtsanwalt Dr. M. Strauß. (Bd. 361.)

Die Konsumgenossenschaft. Von Prof. Dr. F. Staudinger. (Bd. 222.)

Die Frauenarbeit. Ein Problem des Kapitalismus. Von Prof. Dr. R. Wilbrandt (Bd. 106.)

Grundzüge des Versicherungswesens. Von Prof. Dr. A. Manes. 2. Aufl. (Bd. 105.)

Verkehrsentwicklung in Deutschland. 1800—1900 (fortgeführt bis zur Gegenwart). Vorträge über Deutschlands Eisenbahnen und Binnenwasserstraßen, ihre Entwicklung und Verwaltung sowie ihre Bedeutung für die heutige Volkswirtschaft. Von Prof. Dr. W. Lotz. 3. Aufl. (Bd. 15.)

Das Postwesen, seine Entwicklung und Bedeutung. Von Postr. J. Bruns. (Bd. 165.)

Die Telegraphie in ihrer Entwicklung und Bedeutung. Von Postr. J. Bruns. Mit 4 Fig. (Bd. 183.)

Deutsche Schiffahrt und Schiffahrtspolitik der Gegenwart. Von Prof. Dr. K. Thieß. (Bd. 169.)

Erdkunde.

Mensch und Erde. Skizzen von den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von weil. Prof. Dr. A. Kirchhoff. 3. Aufl. (Bd. 31.)

Die Eiszeit und der vorgeschichtliche Mensch. Von Prof. Dr. G. Steinmann. Mit 24 Abb. (Bd. 302.)

Die Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- und Südpol von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Von Prof. Dr. K. Hassert. 2. Aufl. Mit 6 Karten. (Bd. 38.)

Die Städte. Geographisch betrachtet. Von Prof. Dr. K. Hassert. Mit 21 Abb. (Bd. 163.)

Wirtschaftl. Erdkunde. Von weil. Prof. Dr. Chr. Gruber. 2. Aufl. Bearbeitet von Prof. Dr. K. Dove. (Bd. 122.)

Politische Geographie. Von Dr. E. Schöne. (Bd. 353.)

Die deutschen Volksstämme und Landschaften. Von Prof. Dr. O. Weise. 4. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 16.)

Ostseegebiet. Von Privatdozent Dr. G. Braun. (Bd. 367.)

Die Alpen. Von H. Reishauer. Mit 26 Abb. u. 2 Karten. (Bd. 276.)

Die deutschen Kolonien. (Land und Leute.) Von Dr. A. Heilborn. 3. Aufl. Mit 26 Abb. u. 2 Karten. (Bd. 98.)

Unsere Schutzgebiete nach ihren wirtschaftlichen Verhältnissen. Im Lichte der Erdkunde dargestellt. Von Dr. Chr. G. Barth. (Bd. 290.)

Australien und Neuseeland. Land, Leute und Wirtschaft. Von Prof. Dr. R. Schachner. (Bd. 366.)

Der Orient. Eine Länderkunde. Von E. Banse. 3 Bde. Mit zahlr. Abb. u. Karten. (Bd. 277. 278. 279.) Band I: Die Atlasländer. Marokko, Algerien, Tunesien. Mit 15 Abb., 10 Kartenskizzen, 3 Diagr. u. 1 Tafel. (Bd. 277.) Band II: Der arabische Orient. Mit 29 Abb. u. 7 Diagr. (Bd. 278.) Band III: Der arische Orient. Mit 34 Abb., 3 Kartenskizzen u. 2 Diagr. (Bd. 279.)

Anthropologie. Heilwissenschaft und Gesundheitslehre.

Der Mensch der Urzeit. Vier Vorlesungen aus der Entwicklungsgeschichte des Menschengeschlechts. Von Dr. A. Heilborn. 2. Aufl. Mit zahlr. Abb. (Bd. 62.)

Die moderne Heilwissenschaft. Wesen und Grenzen des ärztlichen Wissens. Von Dr. E. Biernacki. Deutsch von Dr. S. Ebel. (Bd. 25.)

Der Arzt. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenwart. Ein Leitfaden der sozialen Medizin. Von Dr. med. M. Fürst. (Bd. 265.)

Der Aberglaube in der Medizin und seine Gefahr für Gesundheit und Leben. Von Prof. Dr. D. von Hansemann. (Bd. 83.)

Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)

Bau und Tätigkeit des menschlichen Körpers. Von Prof. Dr. H. Sachs. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 32.)

Die Anatomie des Menschen. Von Prof. Dr. K. v. Bardeleben. 5 Bde. Mit zahlr. Abb. (Bd. 201. 202. 203. 204. 263.) I. Teil: Allg. Anatomie und Entwicklungsgeschichte. Mit 69 Abb. (Bd. 201.) II. Teil: Das Skelett. Mit 53 Abb. (Bd. 202.) III. Teil: Das Muskel- und Gefäßsystem. Mit 68 Abb. (Bd. 203.) IV. Teil: Die Eingeweide (Darm, Atmungs-, Harn- u. Geschlechtsorgane). Mit 38 Abb. (Bd. 204.) V. Teil: Statik und Mechanik des menschlichen Körpers. Mit 20 Abb. (Bd. 263.)

Moderne Chirurgie. Von Prof. Dr. Feßler. Mit Abb. (Bd. 339.)

Acht Vorträge aus der Gesundheitslehre. Von weil. Prof. Dr. H. Buchner. 3. Aufl., besorgt von Prof. Dr. M. v. Gruber. Mit 26 Abb. (Bd. 1.)

Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)

Das menschliche Gebiß, seine Erkrankung und Pflege. Von Zahnarzt Fr. Jäger. Mit 24 Abb. (Bd. 229.)

Körperliche Verbildungen im Kindesalter und ihre Verhütung. Von Dr. M. David. Mit 26 Abb. (Bd. 321.)

Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 33 Fig. (Bd. 96.)

Vom Nervensystem, seinem Bau und seiner Bedeutung für Leib und Seele in gesundem und krankem Zustande. Von Prof. Dr. R. Zander. 2. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 48.)

Die fünf Sinne des Menschen. Von Prof. Dr. J. K. Kreibig. 2. Aufl. Mit 30 Abb. (Bd. 27.)

Das Auge des Menschen und seine Gesundheitspflege. Von Prof. Dr. med. G. Abelsdorff. Mit 15 Abb. (Bd. 149.)

Die menschliche Stimme und ihre Hygiene. Von Prof. Dr. P. H. Gerber. 2. Aufl. Mit 20 Abb. (Bd. 136.)

Die Geschlechtskrankheiten, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Bekämpfung und Verhütung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 2. Aufl. Mit 4 Abb. und 1 Tafel. (Bd. 251.)

Die Tuberkulose, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 2. Aufl. Mit 1 Tafel und 8 Figuren. (Bd. 47.)

Die krankheiterregenden Bakterien. Von Privatdoz. Dr. M. Loehlein. Mit 33 Abb. (Bd. 307.)

Geisteskrankheiten. Von Anstaltsoberarzt Dr. G. Ilberg. (Bd. 151.)

Krankenpflege. Von Chefarzt Dr. B. Leick. (Bd. 152.)

Gesundheitslehre für Frauen. Von weil. Privatdoz. Dr. R. Sticher. Mit 13 Abb. (Bd. 171.)

Der Säugling, seine Ernährung und seine Pflege. Von Dr. W. Kaupe. Mit 17 Abb. (Bd. 154.)

Der Alkoholismus. Von Dr. G. B. Gruber. Mit 7 Abb. (Bd. 103.)

Ernährung und Volksnahrungsmittel. Von weil. Prof. Dr. J. Frentzel. 2. Aufl. Neu bearb. von Geh. Rat Prof. Dr. N. Zuntz. Mit 7 Abb. u. 2 Tafeln. (Bd. 19.)

Die Leibesübungen und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Von Prof. Dr. R. Zander. 3. Aufl. Mit 19 Abb. (Bd. 13.)

Naturwissenschaften. Mathematik.

Naturwissenschaften u. Mathematik im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)

Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Von Prof. Dr. F. Auerbach. 3. Aufl. Mit 79 Fig. (Bd. 40.)

Die Lehre von der Energie. Von Dr. A. Stein. Mit 13 Fig. (Bd. 257.)

Moleküle — Atome — Weltäther. Von Prof. Dr. G. Mie. 3. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 58.)

Die großen Physiker und ihre Leistungen. Von Prof. Dr. F. A. Schulze. Mit 7 Abb. (Bd. 324.)

Werdegang der modernen Physik. Von Dr. H. Keller. (Bd. 343.)

Einleitung in die Experimentalphysik. Von Prof. Dr. R. Börnstein. Mit zahlr. Abb. (Bd. 371.)

Das Licht und die Farben. Von Prof. Dr. L. Graetz. 3. Aufl. Mit 117 Abb. (Bd. 17.)

Sichtbare und unsichtbare Strahlen. Von Prof. Dr. R. Börnstein u. Prof. Dr. W. Marckwald. 2. Aufl. Mit 85 Abb. (Bd. 64.)

Die optischen Instrumente. Von Dr. M. v. Rohr. 2. Aufl. Mit 84 Abb. (Bd. 88.)

Die Brille. Von Dr. M. von Rohr. Mit zahlr. Abb. (Bd. 372.)

Spektroskopie. Von Dr. L. Grebe. Mit 62 Abb. (Bd. 284.)

Das Mikroskop, seine Optik, Geschichte und Anwendung. Von Dr. W. Scheffer. Mit 66 Abb. (Bd. 35.)

Das Stereoskop und seine Anwendungen. Von Prof. Th. Hartwig. Mit 40 Abb. u. 19 Taf. (Bd. 135.)

Die Lehre von der Wärme. Von Prof. Dr. R. Börnstein. Mit 33 Abb. (Bd. 172.)

Die Kälte, ihr Wesen, ihre Erzeugung und Verwertung. Von Dr. H. Alt. Mit 45 Abb. (Bd. 311.)

Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus dem Gebiete der Experimental-Chemie. Von Prof. Dr. R. Blochmann. 3. Aufl. Mit 115 Abb. (Bd. 5.)

Das Wasser. Von Privatdoz. Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)

Natürliche und künstliche Pflanzen- und Tierstoffe. Von Dr. B. Bavink. Mit 7 Fig. (Bd. 187.)

Die Erscheinungen des Lebens. Von Prof. Dr. H. Miehe. Mit 40 Fig. (Bd. 130.)

Abstammungslehre und Darwinismus. Von Prof. Dr. R. Hesse. 3. Aufl. Mit 37 Fig. (Bd. 39.)

Experimentelle Biologie. Von Dr. C. Thesing. Mit Abb. 2 Bde. Band I: Experimentelle Zellforschung. (Bd. 336.) Band II: Regeneration, Transplantation und verwandte Gebiete. (Bd. 337.)

Einführung in die Biochemie. Von Prof. Dr. W. Löb. (Bd. 352.)

Der Befruchtungsvorgang, sein Wesen und seine Bedeutung. Von Dr. E. Teichmann. Mit 7 Abb. u. 4 Doppeltaf. (Bd. 70.)

Das Werden und Vergehen der Pflanzen. Von Prof. Dr. P. Gisevius. Mit 24 Abb. (Bd. 173.)

Aus Natur und Geisteswelt.

Jeder Band geheftet M. 1.—, in Leinwand gebunden M. 1.25.

Vermehrung und Sexualität bei den Pflanzen. Von Prof. Dr. E. Küster. Mit 38 Abb. (Bd. 112.)

Unsere wichtigsten Kulturpflanzen (die Getreidegräser). Von Prof. Dr. K. Giesenhagen. 2. Aufl. Mit 38 Fig. (Bd. 10.)

Die fleischfressenden Pflanzen. Von Dr. A. Wagner. Mit Abb. (Bd. 344.)

Der deutsche Wald. Von Prof. Dr. H. Hausrath. Mit 15 Abb. u. 2 Karten. (Bd. 153.)

Die Pilze. Von Dr. A. Eichinger. Mit 54 Abb. (Bd. 334.)

Weinbau und Weinbereitung. Von Dr. F. Schmitthenner. (Bd. 332.)

Der Obstbau. Von Dr. E. Voges. Mit 13 Abb. (Bd. 107.)

Unsere Blumen und Pflanzen im Zimmer. Von Prof. Dr. U. Dammer. (Bd. 359.)

Unsere Blumen und Pflanzen im Garten. Von Prof Dr. U. Dammer. (Bd. 360.)

Kolonialbotanik. Von Prof. Dr. F. Tobler. Mit 21 Abb. (Bd. 184.)

Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkotischen Getränke. Von Prof. Dr. A. Wieler. Mit 24 Abb. u. 1 Karte. (Bd. 132.)

Die Milch und ihre Produkte. Von Dr. A. Reitz. (Bd. 326.)

Die Pflanzenwelt des Mikroskops. Von Bürgerschullehrer E. Reukauf. Mit 100 Abb. (Bd. 181.)

Die Tierwelt des Mikroskops (die Urtiere). Von Prof. Dr. R. Goldschmidt. Mit 39 Abb. (Bd. 160.)

Die Beziehungen der Tiere zueinander und zur Pflanzenwelt. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. (Bd. 79.)

Der Kampf zwischen Mensch und Tier. Von Prof. Dr. K. Eckstein. 2. Aufl. Mit 51 Fig. (Bd. 18.)

Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie. Von weil. Privatdoz. Dr. K. Hennings. Mit 34 Abb. (Bd. 142.)

Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane der Wirbeltiere. Von Prof. Dr. W. Lubosch. Mit 107 Abb. (Bd. 282.)

Die Stammesgeschichte unserer Haustiere. Von Prof. Dr. C. Keller. Mit 28 Fig. (Bd. 252.)

Die Fortpflanzung der Tiere. Von Prof Dr. R. Goldschmidt. Mit 77 Abb. (Bd. 253.)

Tierzüchtung. Von Dr. G. Wilsdorf. (Bd. 369.)

Deutsches Vogelleben. Von Prof. Dr. A. Voigt. (Bd. 221.)

Vogelzug und Vogelschutz. Von Dr. W. R. Eckardt. Mit 6 Abb. (Bd. 218.)

Korallen und andere gesteinbildende Tiere. Von Prof. Dr. W May. Mit 455 Abb. (Bd. 231.)

Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere. Von Prof. Dr. O. Maas. Mit 11 Karten u. Abb. (Bd. 139.)

Die Bakterien. Von Prof. Dr. E. Gutzeit. Mit 13 Abb. (Bd. 233.)

Die Welt der Organismen. In Entwicklung und Zusammenhang dargestellt. Von Prof. Dr. K. Lampert. Mit 52 Abb. (Bd. 236.)

Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus). Von Dr. Fr. Knauer. Mit 37 Fig. (Bd. 148.)

Die Ameisen. Von Dr. Fr. Knauer. Mit 61 Fig. (Bd. 94.)

Das Süßwasser-Plankton. Von Prof. Dr. O. Zacharias. 2. Aufl. Mit 49 Abb. (Bd. 156.)

Meeresforschung und Meeresleben. Von Dr. O. Janson. 2. Aufl. Mit 41 Fig. (Bd. 30.)

Das Aquarium. Von E. W. Schmidt. Mit 15 Fig. (Bd. 335.)

Wind und Wetter. Von Prof. Dr. L. Weber. 2. Aufl. Mit 28 Fig. u. 3 Tafeln. (Bd. 55.)

Gut und schlecht Wetter. Von Dr. R. Hennig. (Bd. 349.)

Der Kalender. Von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. (Bd. 69.)

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 3. Aufl. Mit 26 Fig. (Bd. 24.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. B. Weinstein. (Bd. 223.)

Aus der Vorzeit der Erde. Von Prof. Dr. Fr. Frech. In 6 Bdn. 2. Aufl. Mit zahlr. Abbildungen. (Bd. 207—211, 61.) Band I: Vulkane einst und jetzt. Mit 80 Abb. (Bd. 207.) Band II: Gebirgsbau und Erdbeben. Mit 57 Abb. (Bd. 208.) Band III: Die Arbeit des fließenden Wassers. Mit 51 Abb. (Bd. 209.) Band IV: Die Arbeit des Ozeans und die chemische Tätigkeit des Wassers im allgemeinen. Mit 1 Titelbild und 51 Abb. (Bd. 210.) Band V: Kohlenbildung und Klima der Vorzeit. (Bd. 211.) Band VI: Gletscher einst und jetzt. 2. Aufl. (Bd. 61.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. Mit 24 Abb. (Bd. 110.)

Probleme der modernen Astronomie. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. (Bd. 355.)

Die Sonne. Von Dr. A. Krause. Mit zahlreichen Abb. (Bd. 357.)

Der Mond. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 31 Abb. (Bd. 90.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 18 Fig. (Bd. 240.)

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. In 2 Bdn. Mit zahlr. Fig. (Bd. 120. 205.) I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 2. Aufl. Mit 9 Fig. (Bd. 120.) II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 2. Aufl. Mit 21 Fig. (Bd. 205.)

Praktische Mathematik. Von Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graphisches u. numerisches Rechnen. Mit 62 Figuren und 1 Tafel. (Bd. 341.)

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 99 Fig. (Bd. 340.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. Mit 18 Fig. (Bd. 197.)

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl. Mit 70 Fig. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildnissen E. Laskers und P. Morphys, 1 Schachbrettafel und 43 Darst. von Übungsspielen. (Bd. 281.)

Angewandte Naturwissenschaft. Technik.

Am sausenden Webstuhl der Zeit. Von Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 23.)

Bilder aus der Ingenieurtechnik. Von Baurat K. Merckel. Mit 43 Abb. (Bd. 60.

Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Von Baurat K. Merckel. 2. Aufl. Mit 55 Abb. (Bd. 28.)

Die Handfeuerwaffen. Ihre Entwicklung und Technik. Von Hauptmann R. Weiß. Mit 69 Abb. (Bd. 364.)

Der Eisenbetonbau. Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. Mit 81 Abb. (Bd. 275.)

Das Eisenhüttenwesen. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 3. Aufl. Mit 15 Fig. (Bd. 20.)

Die Metalle. Von Prof. Dr. K. Scheid. 2. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 29.)

Mechanik. Von Kais. Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 3 Bde. (Bd. 303/305.) Band I: Die Mechanik der festen Körper. Mit 61 Abb. (Bd. 303.) Band II: Die Mechanik der flüssigen Körper. Mit 34 Abb. (Bd. 304.) Band III: Die Mechanik der gasförmigen Körper. (In Vorb.) (Bd. 305.)

Maschinenelemente. Von Prof. R. Vater. Mit 184 Abb. (Bd. 301.)

Hebezeuge. Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper. Von Prof. R. Vater. Mit 67 Abb. (Bd. 196.)

Dampf und Dampfmaschine. Von Prof. R. Vater. 2. Aufl. Mit 45 Abb. (Bd. 63.)

Einführung in die Theorie und den Bau der neueren Wärmekraftmaschinen (Gasmaschinen). Von Prof. R. Vater. 3. Aufl. Mit 33 Abb. (Bd. 21.)

Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. Von Prof. R. Vater. 2. Aufl. Mit 48 Abb. (Bd. 86.)

Die Wasserkraftmaschinen und die Ausnützung der Wasserkräfte. Von Kais. Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. Mit 73 Fig. (Bd. 228.)

Landwirtsch. Maschinenkunde. Von Prof. Dr. G. Fischer. Mit 62 Abb. (Bd. 316.)

Die Spinnerei. Von Dir. Prof. M. Lehmann. Mit Abb. (Bd. 338.)

Die technische Entwicklung der Eisenbahnen der Gegenwart. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinsp. E. Biedermann. Mit 50 Abb. (Bd. 144.)

Die Klein- und Straßenbahnen. Von Oberingenieur a. D. A. Liebmann. Mit 85 Abb. (Bd. 322.)

Das Automobil. Eine Einführung in Bau und Betrieb des modernen Kraftwagens. Von Ing. K. Blau. 2. Aufl. Mit 83 Abb. (Bd. 166.)

Grundlagen der Elektrotechnik. Von Dr. R. Blochmann. Mit 128 Abb. (Bd. 168.)

Die Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. Von Telegrapheninspektor H. Brick. Mit 58 Abb. (Bd. 235.)

Drähte und Kabel, ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik. Von Telegrapheninspektor H. Brick. Mit 43 Abb. (Bd. 285.)

Die Funkentelegraphie. Von Oberpostpraktikant H. Thurn. Mit 53 Illustr. (Bd. 167.)

Nautik. Von Dir. Dr. J. Möller. Mit 58 Fig. (Bd. 255.)

Die Luftschiffahrt, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 2. Aufl. Mit 42 Abb. (Bd. 300.)

Die Beleuchtungsarten der Gegenwart. Von Dr. W. Brüsch. Mit 155 Abb. (Bd. 108.)

Heizung und Lüftung. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)

Industrielle Feuerungsanlagen und Dampfkessel. Von Ingenieur J. E. Mayer. (Bd. 348.)

Die Uhr. Von Reg.-Bauführer a. D. H. Bock. Mit 47 Abb. (Bd. 216.)

Wie ein Buch entsteht. Von Prof. A. W. Unger. 3. Aufl. Mit 7 Taf. u. 26 Abb. (Bd. 175.)

Einführung in die chemische Wissenschaft. Von Prof. Dr. W. Löb. Mit 16 Fig. (Bd. 264.)

Bilder aus der chemischen Technik. Von Dr. A. Müller. Mit 24 Abb. (Bd. 191.)

Der Luftstickstoff und seine Verwertung. Von Prof. Dr. K. Kaiser. Mit 13 Abb. (Bd. 313.)

Agrikulturchemie. Von Dr. P. Krische. Mit 21 Abb. (Bd. 314.)

Die Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)

Chemie und Technologie der Sprengstoffe. Von Prof. Dr. R. Biedermann. Mit 15 Fig. (Bd. 286.)

Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. Mit 23 Abb. (Bd. 227.)

Die Kinematographie. Von Dr. H. Lehmann. (Bd. 358.)

Elektrochemie. Von Prof. Dr. K. Arndt. Mit 38 Abb. (Bd. 234.)

Die Naturwissenschaften im Haushalt. Von Dr. J. Bongardt. 2 Bde. Mit zahlr. Abb. (Bd. 125. 126.)
I. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Familie? Mit 31 Abb. (Bd. 125.) II. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? Mit 17 Abb. (Bd. 126.)

Chemie in Küche und Haus. Von weil. Prof. Dr. G. Abel. 2. Aufl. von Dr. J. Klein. Mit 1 Doppeltafel. (Bd. 76.)

Die Kultur der Gegenwart
ihre Entwicklung und ihre Ziele
Herausgegeben von Professor Paul Hinneberg

Von Teil I und II sind erschienen:

Teil I, Abt. 1: **Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart.** Bearb. von: W. Lexis, Fr. Paulsen, G. Schöppa, G. Kerschensteiner, A. Matthias, H. Gaudig, W. v. Dyck, E. Pallat, K. Kraepelin, J. Lessing. O. N. Witt, P. Schlenther, G. Göhler, K. Bücher, R. Pietschmann, F. Milkau, H. Diels. 2. Aufl. (XIV u. 716 S.) Lex.-8. 1912. Geh. M. 18.—, in Leinwand geb. M. 20.—

„Die berufensten Fachleute reden über ihr Spezialgebiet in künstlerisch so hochstehender, dabei dem Denkenden so leicht zugehender Sprache, zudem mit einer solchen Konzentration der Gedanken, daß Seite für Seite nicht nur hohen künstlerischen Genuß verschafft, sondern einen Einblick in die Einzelgebiete verstattet, der an Intensität kaum von einem anderen Werke übertroffen werden könnte." **(Nationalzeitung, Basel.)**

Teil I, Abt. 3, I: **Die orientalischen Religionen.** Bearb. von: E. Lehmann, A. Erman, C. Bezold, H. Oldenberg, J. Goldziher, A. Grünwedel, J. J. M. de Groot, K. Florenz, H. Haas. (VII u. 267 S.) Lex.-8. 1906. Geh. M. 7.—, in Leinwand geb. M. 9.—

„Auch dieser Band des gelehrten Werkes ist zu inhaltvoll und zu vielseitig, um auf kurzem Raum gewürdigt werden zu können. Auch er kommt den Interessen des bildungsbedürftigen Publikums und der Gelehrtenwelt in gleichem Maße entgegen. . . . Die Zahl und der Klang der Namen aller beteiligten Autoren bürgen dafür, daß ein jeder nur vom Besten das Beste zu geben bemüht war." **(Berliner Tageblatt.)**

Teil I, Abt. 4, I: **Geschichte der christlichen Religion.** Mit Einleitung: Die israelitisch-jüdische Religion. Bearbeitet von J. Wellhausen, A. Jülicher, A. Harnack, N. Bonwetsch, K. Müller, A. Ehrhard, E. Troeltsch. 2., stark vermehrte und verbesserte Auflage. (X u. 792 S.) Lex.-8. 1909. Geb. M. 18.—, in Leinwand geb. M. 20.—

Die Kultur der Gegenwart

Teil I, Abt. 4. II: Systematische christliche Religion. Bearbeitet von: E. Troeltsch, J. Pohle, J. Mausbach, C. Krieg, W. Herrmann, R. Seeberg, W. Faber, H. J. Holtzmann. 2., verb. Auflage. (VIII u. 279 S.) Lex.-8. 1909. Geh. M. 6.60, in Leinwand geb. M. 8.—

„. . . Die Arbeiten des ersten Teiles sind sämtlich, dafür bürgt schon der Name der Verfasser, ersten Ranges. Am meisten Aufsehen zu machen verspricht Troeltsch, Aufriß der Geschichte des Protestantismus und seiner Bedeutung für die moderne Kultur. . . . Alles in allem, der vorliegende Band legt Zeugnis ab dafür, welche bedeutende Rolle für die Kultur der Gegenwart Christentum und Religion spielen." **(Zeitschr. f. Kirchengeschichte.)**

Teil I, Abt. 5. Allgemeine Geschichte der Philosophie. Bearbeitet v.: W. Wundt, H. Oldenberg, J. Goldziher, W. Grube, T. Jnouye, H. v. Arnim, Cl. Baeumker. W. Windelband. (VIII u. 572 S.) Lex.-8. 1909. Geh. M. 12.—, in Leinw. geb. M. 14.—

„. . . Man wird nicht leicht ein Buch finden, das, wie die ‚Allgemeine Geschichte der Philosophie' von einem gleich hohen überblickenden und umfassenden Standpunkt aus, mit gleicher Klarheit und Tiefe und dabei in fesselnder Darstellung eine Geschichte der Philosophie von ihren Anfängen bei den primitiven Völkern bis in die Gegenwart und damit eine Geschichte des geistigen Lebens überhaupt gibt." **(Zeitschrift f. lateinl. höh. Schulen.)**

Teil I, Abt. 6: Systematische Philosophie. Bearbeitet von: W. Dilthey, A. Riehl, W. Wundt, W. Ostwald, H. Ebbinghaus, R. Eucken, Fr. Paulsen, W. Münch, Th. Lipps. 2. Aufl. (X u. 435 S.) Lex.-8. 1908. Geh. M. 10.—, in Leinwand geb. M. 12.—

„Hinter dem Rücken jedes der philosophischen Forscher steht Kant, wie er die Welt in ihrer Totalität dachte und erlebte; der ‚neukantische', rationalisierte Kant scheint in den Hintergrund treten zu wollen, und in manchen Köpfen geht bereits das Licht des gesamten Weltlebens auf." **(Archiv für systematische Philosophie.)**

„Um es gleich vorweg zu sagen: Von philosophischen Büchern, die sich einem außerhalb der engen Fachkreise stehenden Publikum anbieten, wüßte ich nichts Besseres zu nennen als diese Systematische Philosophie." **(Pädagogische Zeitung.)**

Teil I, Abt. 7: Die orientalischen Literaturen. Bearbeitet von: E. Schmidt, A. Erman, C. Bezold, H. Gunkel, Th. Nöldeke, M. J. de Goeje, R. Pischel, K. Geldner, P. Horn, F. N. Finck, W. Grube, K. Florenz. (IX u. 419 S.) Lex.-8. 1906. Geh. M. 10.—, in Leinw. geb. M. 12.—

„. . . So bildet dieser Band durch die Klarheit und Übersichtlichkeit der Anlage, Knappheit der Darstellung, Schönheit der Sprache ein in hohem Grade geeignetes Hilfsmittel zur Einführung in das Schrifttum der östlichen Völker, die gerade in den letzten Jahrzehnten unser Interesse auf sich gelenkt haben." **(Leipziger Zeitung.)**

Teil I, Abt. 8: Die griechische und lateinische Literatur und Sprache. Bearbeitet von: U. v. Wilamowitz-Moellendorff, K. Krumbacher, J. Wackernagel, Fr. Leo, E. Norden, F. Skutsch. 3. Auflage. (VIII u. 582 S.) Lex.-8. 1912. Geh. M. 12.—. in Leinwand geb. M. 14.—

„Das sei allen sechs Beiträgen nachgerühmt, daß sie sich dem Zwecke des Gesamtwerkes in geradezu bewundernswerter Weise angepaßt haben: immer wieder wird des Lesers Blick auf die großen Zusammenhänge hingelenkt, die zwischen der klassischen Literatur und Sprache und unserer Kultur bestehen." **(Byzantinische Zeitschrift.)**

Teil I, Abt. 9: Die osteuropäischen Literaturen und die slawischen Sprachen. Bearbeitet von: V. v. Jagić, A. Wesselovsky, A. Brückner. J. Máchal, M. Murko, A. Thumb, Fr. Riedl, E. Setälä, G. Suits, A. Bezzenberger, E. Wolter. (VIII u. 396 S.) Lex.-8. 1908. Geh. M. 10.—, in Leinwand geb. M. 12.—

„. . . Eingeleitet wird der Band mit einer ausgezeichneten Arbeit Jagićs über ‚Die slawischen Sprachen'. Für den keiner slawischen Sprache kundigen Leser ist diese Einführung sehr wichtig. Ihr folgt eine Monographie der russischen Literatur aus der Feder des geistvollen Wesselovsky. Die südslawischen Literaturen von Murko sind hier in deutscher Sprache wohl erstmals zusammenfassend behandelt worden. Mit Wolters Abschnitt der lettischen Literatur schließt der verdienstvolle Band, der jedem unentbehrlich sein wird, der sich mit dem einschlägigen Schrifttum bekannt machen will." **(Berliner Lokal-Anzeiger.)**

5 - 96

Zur Biologie · Botanik · Zoologie

Die Fundamente der Entstehung der Arten. Zwei in den Jahren 1842 und 1844 verfaßte Essays. Von Charles Darwin. Hrsg. von seinem Sohn Francis Darwin. Dtsch. Übersetzung v. Maria Semon. Geh. M. 4.—, in Leinw. geb. M. 5.—

Man findet in diesen Fundamenten die Keime zur Entstehung der Arten, zu fast allen späteren Werken Darwins deutlich vorgebildet.

Experimentelle Zoologie. Von Th. Hunt Morgan, Deutsche autorisierte und verb. Ausgabe von H. Rhumbler. Mit zahlr. Abb. Geh. M. 11.—, in Leinw. geb. M. 12.—

Das Verhalten der niederen Organismen unter natürlichen und experiment. Bedingungen. Von H. S. Jennings. Deutsch von Dr. E. Mangold. Mit 144 Fig. Geh. M. 9.—, in Leinwand geb. M. 10.—

„...Der klare und durchsichtige Aufbau der Gedankengänge, die sorgfältigen Zusammenfassungen in den einzelnen Abschnitten und die ansprechende Darstellung sind geeignet, das Verständnis für eine Reihe komplizierter Fragen auch in weitere, naturwissenschaftlich denkende Kreise zu tragen...." (Botanische Zeitung.)

Lebensweise und Organisation. Von Prof. Dr. P. Deegener, Privatdoz. an der Universität Berlin. Eine Einführung in die Biologie der wirbellosen Tiere. Mit 154 Abb. gr. 8. In Leinw. geb. M. 6.—

Das vorliegende Buch ist von einem bestimmten theoretischen Standpunkt aus geschrieben, ohne doch in einer Theorie zu gipfeln. Es will dem selbstdenkenden Leser Materialien an die Hand geben, ein eigenes, begründetes Urteil zu gewinnen, und enthält sich daher tunlichst breiter theoretischer Darlegungen.

Blumen und Insekten, ihre Anpassung aneinander und ihre gegenseitige Abhängigkeit. Von Prof. Dr. O. v. Kirchner. Mit 2 Taf. u. 159 Fig. Geh. M. 6.60, in Leinw. geb. M. 7.50.

Instinkt und Gewohnheit. Von C. Lloyd Morgan, F.R.S. Autoris. deutsche Übersetzung von M. Semon. Geh. M. 5.—, in Leinw. geb. M. 6.—

„Dieses sehr beachtenswerte Werk ist so flott übersetzt worden, daß seine Lektüre ein wahrer Genuß ist. Auch der naturwissenschaftlich interessierte Laie wird unbedingt auf seine Kosten kommen." (Münchener Neueste Nachr.)

Einführung in die Biologie. Von Dr. K. Kraepelin. 2. Aufl. Mit 303 Abb., 5 farbigen Taf. u. 2 Karten. In Leinw. geb. M. 4.—

„...Jeder, der naturwissenschaftlicher Betrachtungsweise nicht völlig abgeneigt ist und der die elementaren Vorkenntnisse dazu mitbringt, wird in diesem Buche mit hohem Genuß und Nutzen lesen...." (Dtsch. Literaturztg.)

Blütengeheimnisse. Eine Blütenbiologie in Einzelbildern. Von Prof. Dr. Georg Worgitzky. Mit 47 Abb., u. 1 farb. Tafel von P. Flanderky. 2., verm. Aufl. In Leinw. geb. M. 3.—

„Ein vortreffliches und reizend illustriertes kleines Buch, das allen Freunden der Pflanzenwelt willkommen sein wird...." (Gaea.)

Naturgeschichte für die Großstadt. Von W. Pfalz. 2 Teile in Leinwand geb. je M. 3.—

I. Teil: Tiere u. Pflanzen der Straßen, Plätze, Anlagen, Gärten und Wohnungen. Mit 50 Federzeichnungen.

II. Teil: Aquarium und Terrarium, Pflanzen der Gärten, Wohnungen, Anlagen und des Palmenhauses. Mit 54 Federzeichnungen.

Botanisch-Geologische Spaziergänge i. d. Umgebung v. Berlin. Von Dr. W. Gothan. Mit 23 Figur. Geh. M. 1.80, in Leinw. geb. M. 2.40.

Unsere Pflanzen. Ihre Namenserklärung und ihre Stellung in der Mythologie und im Volksaberglauben. Von Dr. Franz Söhns. 4. Auflage. Mit Buchschmuck von J. V. Cissarz. In Leinwand geb. M. 3.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mittelmeerbilder. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Theobald Fischer. Gesammelte Abhandlungen zur Kunde der Mittelmeerländer. Geb. M. 7.— Neue Folge. Mit 8 Karten. Geb. M. 7.—

„... Ein Meister länderkundlicher Darstellung spricht hier zu uns, aber in einer Sprache, die sich bei allem wissenschaftlichen Ernst doch immer in den Grenzen allgemeiner Verständlichkeit und allgemeinen Interesses hält." (Deutsche Literaturzeitung.)

Das Mittelmeergebiet. Von Dr. A. Philippson. Seine geographische und kulturelle Eigenart. 2. Aufl. Mit 9 Fig. im Text, 13 Ansichten u. 10 Karten auf 15 Tafeln. Geb. . . . . . M. 7.—

„Von dem höchsten Standpunkte aus, auf den die heutige Wissenschaft den Forscher zu stellen vermag, läßt der Verfasser seinen Leser die unendliche, von nicht auszugenießenden Reizen verklärte Mannigfaltigkeit der Naturerscheinungen am Mittelmeer überschauen." (Norddeutsche Allgemeine Zeitung.)

Ostasienfahrt. Von Professor Dr. Franz Doflein. Erlebnisse und Beobachtungen eines Naturforschers in China, Japan und Ceylon. Mit zahlr. Abbild. und Karten. Geb. M. 13.—

„... Dofleins Ostasienfahrt gehört zu den allerersten Reiseschilderungen, die Ref. überhaupt kennt. Es liegt eine solche Fülle feinster Natur- und Menschenbeobachtung in dem Werk, über das Ganze ist ein solcher Zauber künstlerischer Auffassung gegossen, daß das Ganze nicht wie eine Reisebeschreibung wirkt, sondern wie ein Kunstwerk." (Die Umschau.)

Die Polarwelt und ihre Nachbarländer. Von Professor Dr. Otto Nordenskjöld. Mit 77 Abbildungen. Geb. . . . . M. 8.—

Weltreisebilder. Von Julius Meurer. Mit 116 Abb. sowie einer Weltkarte. Geb. . . . . . . M. 9.—

„... Ich möchte behaupten, daß der ‚Meurer' unter Umständen bessere Dienste tun kann als der ‚Baedeker'." (Die Zeit.)

Lehrbuch der Physik. Von E. Grimsehl. Große Ausgabe. 2. Auflage. Mit 1296 Fig., 2 farb. Tafeln u. einem Anhange, enthaltend Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. gr. 8. 1912. Geh. M. 15.—, in Leinw. geb. M. 16.—

„Auch der gebildete Laie, der das Bedürfnis hat, auf Grund einer guten naturwissenschaftlichen Allgemeinausbildung seine physikalischen Kenntnisse zu vertiefen, wird das Buch mit Nutzen verwenden können. .... Mit einem Worte, das Buch verdient in wissenschaftlicher, methodischer und didaktischer Hinsicht volle Anerkennung." (Natur und Erziehung.)

Populäre Astrophysik. Von Dr. J. Scheiner. 2., ergänzte Auflage. Mit 30 Tafeln und 210 Figuren. gr. 8. 1912. In Leinw. geb. M. 14.—

„... Und soweit es überhaupt möglich ist, dem Laien einen Einblick in diese schwierige Materie zu erschließen, dürfte der Verfasser seine Aufgabe mit großer Geschicklichkeit gelöst haben. Der Vortrag Scheiners ist populärwissenschaftlich im besten Sinne: klar, eindringlich, frei von allen jetzt üblichen Mätzchen der naturwissenschaftlichen Popularschriftstellerei. Vortreffliche Abbildungen unterstützen das Verständnis des vortrefflichen Textes." (Propyläen.)

„Das Buch ist zum mindesten für den Laien zu einem Kompendium der Astrophysik geworden. Sehr unterstützt wird der Text durch ein passend gewähltes und vorzüglich ausgeführtes Illustrationsmaterial." (Deutsche Literaturzeitung.)

Experimentelle Elektrizitätslehre, verbunden mit einer Einführung in die Maxwellsche und die Elektronentheorie der Elektrizität und des Lichts. 2. Auflage. Mit 334 Abbildungen. gr. 8. 1910. In Leinwand geb. M. 12.—

„... Nur durch so echt wissenschaftliche Behandlung, also durch feste theoretische Fundierung, konnte auf so kleinem Raum so viel gebracht werden, und zwar so gebracht werden, daß man es bei der Lektüre wirklich ‚erlebt'. Auch die prinzipiellen Seiten der technischen Anwendung sind sehr ausgiebig eingefügt, so daß das Buch gleichzeitig eine Einführung in die Elektrotechnik ist, wie es zurzeit kaum eine bessere in Deutschland gibt. Die Ausstattung ist dem Gehalte entsprechend." (H. Th. Simon in der Physikalischen Zeitschrift.)

Wertvolle Jugendschriften

Deutsches Märchenbuch. Von Prof. Dr. Oskar Dähnhardt. Mit vielen Zeichnungen und farbigen Originallithographien von E. Kuithan und K. Mühlmeister. 2 Bände. [I. Band. 2. Auflage.] Geb. je M. 2.20.

Naturgeschichtliche Volksmärchen. Von Prof. Dr. Oskar Dähnhardt. 2 Bände. 3. Aufl. Mit Zeichnungen von O. Schwindrazheim. Geb. je M. 2.40.

Schwänke aus aller Welt. Herausg. von Prof. Dr. Oskar Dähnhardt. Mit 52 Original-Abbildungen von A. Kolb. Geb. M. 3.—

Unsere Jungs. Von F. Gansberg und H. Eildermann. Geschichten für Stadtkinder. 2. Aufl. Geb. M. 1.50.

Deutsche Heldensagen. Von K. H. Keck. 2. Auflage von Dr. B. Busse. Mit Künstler-Steinzeichnungen von R. Engels. 2 Bände. Geb. je M. 3.—

Die Sagen des klassischen Altertums. Von H. W. Stoll. 6. Auflage. Neu bearbeitet von Dr. H. Lamer. 2 Bände mit 79 Abbildungen. Geb. je M. 3.60, in einem Bande M. 6.—

Die Götter des klassischen Altertums. Von H. W. Stoll. 8. Auflage. Neu bearbeitet von Dr. H Lamer Geb. M. 4.50.

Karl Kraepelins Naturstudien (m. Zeichnungen v. O. Schwindrazheim). **Im Hause** (4. Aufl. Geb. M. 3.20); **in Wald und Feld** (3. Auflage. Geb. M. 3.60); **in der Sommerfrische** (Reiseplaudereien. 2. Auflage. Geb. M. 3.60); **in fernen Zonen** (Plaudereien in der Dämmerstunde. Geb. M. 3.60). **Volksausgabe** (Vom Hamburger Jugendschriften-Ausschuß ausgewählt). 2. Auflage. Geb. M. 1.—

Streifzüge durch Wald und Flur. Eine Anleitung zur Beobachtung der heimischen Natur in Monatsbildern. Von Prof. Bernh. Landsberg. 4. Auflage. Mit 83 Abbildungen. Geb. M. 5.—

Hinaus in die Ferne! Zwei Wanderfahrten deutscher Jungen durch deutsche Lande, erzählt von Dr. E. Neuendorff. Geb. M. 3.20.

Natur-Paradoxe. Von Dr. C. Schäffer. 2. Auflage. Mit 3 Tafeln und 79 Abbildungen. Geb. M. 3.—

Der kleine Geometer. Von G. C. und W. H. Young. Deutsch von S. und F. Bernstein. Mit 127 Abbildungen. Geb. M. 3.—

Naturwissenschaftliche Schülerbibliothek. Von Dr. Bastian Schmid. In dauerhaften Oktavbänden mit vielen Abbildungen. Preis eines jeden Bandes, wenn nicht anders angegeben, in Leinwand geb. M. 3.—

1—2. **Physikalisches Experimentierbuch.** Von H. Rebenstorff. 2 Teile. 3. **An der See.** Von Dr. P. Dahms. 4. **Große Physiker.** Von Dr. H. Keferstein. 5. **Himmelsbeobachtung mit bloßem Auge.** Von Fr. Rusch. M. 3.50. 6—7. **Geologisches Wanderbuch.** Von K. G. Volk. 2 Teile. I. Teil M. 4.—. 8. **Küstenwanderungen.** Von Dr. V. Franz. 9. **Anleitung zu photographischen Naturaufnahmen.** Von G. E. F. Schulz. 10. **Die Luftschiffahrt.** Von Dr. R. Nimführ. 11. **Vom Einbaum zum Linienschiff.** Von K. Radunz. 12. **Vegetationsschilderungen.** Von Dr. P. Graebner. 13. **An der Werkbank.** Von E. Gscheidlen. 14—15. **Chemisches Experimentierbuch.** Von Dr. K. Scheid. 2 Teile. I. Teil 3. Auflage. II. Teil. Oberstufe in Vorbereitung. — Weitere Bände befinden sich in Vorbereitung.

20.–