Geisteswelt

…ändlicher Darstellungen

P. Crantz

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Die Sammlung

„Aus Natur und Geisteswelt"

verdankt ihr Entstehen dem Wunsche, an der Erfüllung einer bedeutsamen sozialen Aufgabe mitzuwirken. Sie soll an ihrem Teil der unserer Kultur aus der Scheidung in Kasten drohenden Gefahr begegnen helfen, soll dem Gelehrten es ermöglichen, sich an weitere Kreise zu wenden, und dem materiell arbeitenden Menschen Gelegenheit bieten, mit den geistigen Errungenschaften in Fühlung zu bleiben. Der Gefahr, der Halbbildung zu dienen, begegnet sie, indem sie nicht in der Vorführung einer Fülle von Lehrstoff und Lehrsätzen oder etwa gar unerwiesenen Hypothesen ihre Aufgabe sucht, sondern darin, dem Leser Verständnis dafür zu vermitteln, wie die moderne Wissenschaft es erreicht hat, über wichtige Fragen von allgemeinstem Interesse Licht zu verbreiten, und ihn dadurch zu einem selbständigen Urteil über den Grad der Zuverlässigkeit jener Antworten zu befähigen.

Es ist gewiß durchaus unmöglich und unnötig, daß alle Welt sich mit geschichtlichen, naturwissenschaftlichen und philosophischen Studien befasse. Es kommt nur darauf an, daß jeder an einem Punkte die Freiheit und Selbständigkeit des geistigen Lebens gewinnt. In diesem Sinne bieten die einzelnen, in sich abgeschlossenen Schriften eine Einführung in die einzelnen Gebiete in voller Anschaulichkeit und lebendiger Frische.

In den Dienst dieser mit der Sammlung verfolgten Aufgaben haben sich denn auch in dankenswertester Weise von Anfang an die besten Namen gestellt. Andererseits hat dem der Erfolg entsprochen, so daß viele der Bändchen bereits in neuen Auflagen vorliegen. Damit sie stets auf die Höhe der Forschung gebracht werden können, sind die Bändchen nicht, wie die anderer Sammlungen, stereotypiert, sondern werden — was freilich die Aufwendungen sehr wesentlich erhöht — bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet und völlig neu gesetzt.

So sind denn die schmucken, gehaltvollen Bände durchaus geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen kleinen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden. Durch den billigen Preis ermöglichen sie es tatsächlich jedem, auch dem wenig Begüterten, sich eine kleine Bibliothek zu schaffen, die das für ihn Wertvollste „Aus Natur und Geisteswelt" vereinigt.

Die …

in …

Jedes Bändchen … den M. 1.25

Leipzig … Teubner

Mathematik. Astronomie.

Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. 2 Bde. Mit zahlr. Fig. (Bd. 120, 205, auch in 1 Bd. geb.)
I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 2. Aufl. Mit 9 Fig. (Bd. 120.)
II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 3. Aufl. Mit 23 Fig. (Bd. 205.)

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 99 Fig. (Bd. 340.)

Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit Fig. (Bd. 431.)

Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 2. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 197.)

Differential- u. Integralrechnung. Von Dr. M. Lindow. (Bd. 387.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

Praktische Mathematik. Von Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graphisches u. numerisches Rechnen. Mit 62 Fig. u. 1 Tafel. (Bd. 341.)

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl. Mit 70 Fig. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildnissen E. Laskers und P. Morphys, 1 Schachbrettafel u. 43 Darst. von Übungsbeispielen. (Bd. 281.)

Der Bau des Weltalls. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 4. Aufl. Mit 26 Fig. (Bd. 24.)

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 110.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)

Probleme der modernen Astronomie. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. (Bd. 355.)

Die Sonne. Von Dr. A. Krause. Mit zahlr. Abb. (Bd. 357.)

Der Mond. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 31 Abb. (Bd. 90.)

Die Planeten. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 18 Fig. (Bd. 240.)

Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)

ANuG 10: Mathematik. 6. 13.

Philosophie.

Einführung in die Philosophie. Von Prof. Dr. R. Richter. 3. Aufl. von Dr. M. Brahm. (Bd. 155.)

Die Philosophie. Einführung in die Wissenschaft, ihr Wesen und ihre Probleme. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. (Bd. 186.)

Führende Denker. Geschichtliche Einleitung in die Philosophie. Von Prof. Dr. J. Cohn. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)

Griechische Weltanschauung. Von Privatdoz. Dr. M. Wundt. (Bd. 329.)

Entstehung der Welt und der Erde. Von Prof. Dr. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)

Die Weltanschauungen der großen Philosophen der Neuzeit. Von weil. Prof. Dr. L. Busse. 5. Aufl., herausgeg. von Prof. Dr. R. Falckenberg. (Bd. 56.)

Rousseau. Von Prof. Dr. P. Hensel. 2. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 180.)

Immanuel Kant. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Külpe. 3. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 146.)

Schopenhauer. Seine Persönlichkeit, seine Lehre, seine Bedeutung. Von Realschuldirektor H. Richert. 2. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 81.)

Herbarts Lehren und Leben. Von Pastor O. Flügel. Mit 1 Bildn. (Bd. 164.)

Herbert Spencer. Von Dr. K. Schwarze. Mit 1 Bildn. (Bd. 245.)

Die Philosophie der Gegenwart in Deutschland. Eine Charakteristik ihrer Hauptrichtungen. Von Prof. Dr. O. Külpe. 5. Aufl. (Bd. 41.)

Aesthetik. Von Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)

Prinzipien der Ethik. Von E. Wentscher. (Bd. 397.)

Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. Von Dr. J. Unold. 3. Aufl. (Bd. 12.)

Sittliche Lebensanschauungen der Gegenwart. Von weil. Prof. Dr. O. Kirn. 2. Aufl. (Bd. 177.)

Das Problem der Willensfreiheit. Von Prof. Dr. G. F. Lipps. (Bd. 383.)

Die Seele des Menschen. Von Prof. Dr. J. Rehmke. 4. Aufl. (Bd. 36.)

Die Mechanik des Geisteslebens. Von Prof. Dr. M. Verworn. 2. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 200.)

Psychologie des Kindes. Von Prof. Dr. R. Gaupp. 3. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 213.)

Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. (Bd. 199.)

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen
431. Bändchen

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht

Von

Paul Crantz
Professor am Askanischen Gymnasium
zu Berlin

Mit 50 Figuren im Text

Franz Magnus

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1914

Vorwort.

Die freundliche Aufnahme, welche meine für den Selbstunterricht bestimmten Bändchen über einzelne Gebiete der Elementarmathematik gefunden haben, hat mich veranlaßt, auch die Trigonometrie für denselben Zweck zu bearbeiten. Ich habe wieder versucht, den Stoff möglichst einfach und leicht verständlich zu behandeln und durch zahlreiche Beispiele, die vielfach den Anwendungen der Trigonometrie angehören, zu erläutern.

Berlin-Friedenau, im Mai 1913.

P. Crantz.

Inhalt.

Seite

Erster Abschnitt.

Die trigonometrischen Funktionen und die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke.

Zweiter Abschnitt.

Die Funktionen stumpfer Winkel und die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke.

Dritter Abschnitt.

Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel und die graphische Darstellung der Funktionen.

Vierter Abschnitt.

Die Additionstheoreme und ihre Anwendung.

Erster Abschnitt.

Die trigonometrischen Funktionen und die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke.

§ 1. Einleitung.

Eine wichtige praktische Anwendung findet die Mathematik bei der Bestimmung nicht unmittelbar meßbarer Entfernungen und Höhen. Die erste berühmte Anwendung dieser Art machte Thales (um 560 v. Chr.), als er mit Hilfe der Tatsache, daß im gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel einander gleich sind, und ihrer Umkehrung die Höhe einer ägyptischen Pyramide aus ihrem Schatten bestimmte (vgl. Planimetrie[1]) § 16, 4). Auch die Kongruenzsätze gestatten die Ermittlung unzugänglicher Entfernungen auf der Erde. Hierbei sind aber stets von den Dreiecken, in denen die zu bestimmende Entfernung eine Seite ist, einige Stücke zu messen, und dann ist ein Dreieck, das dem, in welchem die zu ermittelnde Strecke sich befindet, kongruent ist, abzustecken (vgl. Planimetrie § 17, 11). Aus diesem Dreieck wird dann die gewünschte Länge durch Messung bestimmt. Diese Art der Entfernungsbestimmung setzt aber voraus, daß ein ebenes Gelände zur Absteckung des zweiten Dreiecks vorhanden ist.

Der pythagoreische Lehrsatz gab zuerst die Möglichkeit, ohne Zeichnung nur nach der Bestimmung der Länge zweier Strecken durch Messung eine gesuchte Entfernung durch Rechnung zu ermitteln (vgl. Planimetrie § 32, 7). Die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes war nicht mehr möglich, wenn es sich um die Bestimmung einer Höhe handelte, da in diesem Falle stets nur eine Kathete des rechwinkligen Dreiecks, in dem die Höhe die zweite Kathete war, gemessen werden konnte.

Es bedeutete daher einen großen Fortschritt, als man die Abhängigkeit der Seiten eines Dreiecks von den Winkeln, wie sie in der Ähnlichkeitslehre behandelt wird, gefunden hatte. Nun war es möglich, Höhen von Türmen, Felswänden usw., selbst solcher, an deren Fuß man

---

1) Vgl. Crantz, Planimetrie zum Selbstunterricht (ANuG Bd. 340).

nicht gelangen konnte, zu bestimmen, auch Entfernungen zu ermitteln, ohne große und umständliche Konstruktionen auszuführen, wie sie die Kongruenzsätze verlangt hatten (vgl. Planimetrie § 41). Aber immer noch war ein dem gegebenen Dreieck ähnliches Dreieck in verkleinertem Maßstabe herzustellen, und in diesem waren Längenmessungen vorzunehmen. Hierin liegt ein großer Nachteil dieser Methode. Kleine Fehler der Messung und Zeichnung, die nicht zu vermeiden sind, wachsen bei dem Grad der Verkleinerung, der angewendet werden muß, zu bedeutenden Fehlern an.

In der Astronomie stellte sich vor allem die Notwendigkeit heraus, nach anderen Methoden zu suchen. Wir verdanken daher neue Mittel und Wege, die bei der Berechnung der Dreiecke angewendet werden können, dem großen Astronomen des Altertums **Claudius Ptolemaeus** (etwa 150 n. Chr.). Er entwickelt in der zweiten Hälfte des ersten Buches seines Almagest die zur Astronomie nötigen Elemente der Dreiecksberechnung. Bemerkt sei nur noch, daß man die Lehre von der Berechnung der Dreiecke nach einem der griechischen Sprache entlehnten Worte **Trigonometrie** nennt. Dieses Wort ist zusammengesetzt aus dem Substantiv *τρίγωνον* (trigonon), das Dreieck, und dem Verbum *μετρεῖν* (metrein), welches „messen" bedeutet. Die zur Berechnung der Dreiecke eingeführten Größen nennt man die trigonometrischen Funktionen.

§ 2. Das Messen. Maßzahl und Verhältnis.

1. Das Messen. Eine gegebene Strecke messen heißt, eine zweite Strecke von festgesetzter Länge **(die Maßeinheit)** auf ihr von dem einen Endpunkte bis zu dem anderen so oft abtragen, wie es geht, und dann angeben, wie oft das Abtragen möglich war.

Die Zahl, welche angibt, wie oft das Abtragen möglich war, heißt **die Maßzahl** der Strecke für die gewählte Längeneinheit.

Ist $AB = a$ (Fig. 1) die zu messende Strecke und $CD = e$ die Maßeinheit, so ist, wie man aus der Figur erkennen kann, die Maßzahl gleich 4. Es ist also $a = 4 \cdot e$.

Allgemein ist, wenn a die zu messende Strecke, e die Maßeinheit und n die Maßzahl ist,

$$a = n \cdot e.$$

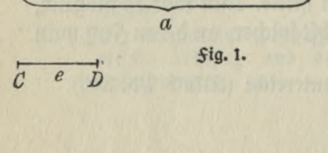


Fig. 1.

Aus dieser Gleichung folgt

$$n = \frac{a}{e}.$$

Man kann also die Maßzahl durch einen Bruch darstellen, dessen Zähler die Strecke ist, die gemessen werden soll, und dessen Nenner die Maßeinheit ist, mit der man die Messung ausführt.

2. Abhängigkeit der Maßzahl einer Strecke von der Maßeinheit. Wenn man dieselbe Strecke mit verschiedenen Maßeinheiten mißt, so findet man auch verschiedene Maßzahlen. Ist z. B. eine Maßeinheit doppelt so groß wie eine zweite, so findet man für die erste Maßeinheit eine Maßzahl, die nur halb so groß ist wie die Maßzahl für die zweite Maßeinheit.

Die Maßzahl einer Strecke ist abhängig von der gewählten Maßeinheit und zwar ist sie um so kleiner, je größer die Maßeinheit ist.

Will man durch die Maßzahlen von Strecken ein Mittel haben, die Längen der Strecken miteinander zu vergleichen, so muß man entweder überall dieselbe Maßeinheit beim Messen benutzen, oder man muß die Beziehungen kennen, welche zwischen den zur Ausmessung benutzten Maßeinheiten bestehen.

3. Das Verhältnis. Wenn man zwei beliebige Strecken a und b mit irgendeiner Maßeinheit, die durch e bezeichnet werden möge, mißt und die gefundenen Maßzahlen mit n bzw. m bezeichnet, so bestehen die Gleichungen $a = n \cdot e$ und $b = m \cdot e$. Durch Division findet man hieraus die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}.$$

Den auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Bruch $\frac{n}{m}$, der eine unbenannte Zahl ist, nennt man das Verhältnis der beiden Strecken a und b. Man hat also die

Erklärung: Unter dem **Verhältnis zweier Strecken** versteht man den Quotienten ihrer Maßzahlen.

Hätte man die Strecken a und b mit einer anderen Maßeinheit, etwa e_1 gemessen, die mit der zuerst genommenen Maßeinheit durch die Gleichung $e = q \cdot e_1$ verknüpft ist, so hätte man $a = n \cdot q \cdot e_1$ und $b = m \cdot q \cdot e_1$ gefunden. Hieraus hätte man durch Division wieder die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ erhalten. Man erkennt hieraus:

Das Verhältnis zweier Strecken ist unabhängig von der zur Ermittlung ihrer Maßzahlen gewählten Maßeinheit, also eine unveränderliche Größe.

Selbstverständlich ist, daß zur Bestimmung des Verhältnisses zweier Strecken durch Division ihrer Maßzahlen beide Strecken stets mit derselben Maßeinheit gemessen sein müssen.

§ 3. Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks.

Wie aus der Ähnlichkeitslehre bekannt ist, nennt man zwei Dreiecke einander ähnlich, wenn

erstens: die Winkel beider Dreiecke einander gleich sind,

zweitens: die Verhältnisse entsprechender Seiten d. h. solcher Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich sind.

In den vier Ähnlichkeitssätzen sind die Eigenschaften zweier Dreiecke angegeben, aus denen man den Schluß ziehen kann, daß die beiden Dreiecke einander ähnlich sind.

Besonders einfach sind die Bedingungen, aus denen man die Ähnlichkeit zweier rechtwinkligen Dreiecke folgern kann, da diese Dreiecke stets in dem einen rechten Winkel übereinstimmen müssen. Mit Benutzung des zweiten Ähnlichkeitssatzes findet man den

Lehrsatz: Alle rechtwinkligen Dreiecke, die in **einem** spitzen Winkel übereinstimmen, sind einander ähnlich.

Da in ähnlichen Dreiecken die Verhältnisse entsprechender Seiten einander gleich sind, so folgt hieraus:

Durch die Größe eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck sind die Verhältnisse der Seiten des Dreiecks eindeutig bestimmt.

Auf Grund des ersten und des vierten Ähnlichkeitssatzes findet man ferner den

Lehrsatz: Alle rechtwinkligen Dreiecke, die im Verhältnis zweier Seiten übereinstimmen, sind einander ähnlich.

Die Ähnlichkeit der Dreiecke folgt nach dem ersten Ähnlichkeitssatz, wenn das Verhältnis der Katheten in beiden Dreiecken dasselbe ist, sie folgt nach dem vierten Ähnlichkeitssatz, wenn das Verhältnis der Hypotenuse und einer Kathete in beiden Dreiecken denselben Wert besitzt.

Da in ähnlichen Dreiecken die entsprechenden Winkel einander gleich sind, so ergibt sich hieraus:

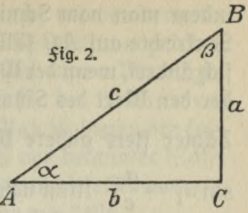
Durch die Größe des Verhältnisses zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind die Winkel des Dreiecks eindeutig bestimmt.

Der soeben ausgesprochene Satz gibt die Möglichkeit, die Größe eines jeden **spitzen** Winkels, aber nur eines solchen, dadurch zu bestimmen, daß man ihn als den einen spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks betrachtet und nun angibt

erstens: die Größe des Verhältnisses zweier Seiten dieses rechtwinkligen Dreiecks,

zweitens: die Lage des Winkels zu den beiden gewählten Seiten.

Fig. 2.



Bezeichnet man in einem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 2) die Seiten und Winkel wie es in der Figur angegeben ist, so kann man zur Bestimmung des Winkels α jedes der sechs Verhältnisse

$$\frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$$

benutzen. In welcher Weise dies geschehen ist, soll nun im folgenden auseinandergesetzt werden.

§ 4. Der Sinus eines Winkels.

1. Erklärung des Sinus. Zunächst benutzen wir zur Bestimmung des spitzen Winkels α von den sechs Verhältnissen, die am Ende des vorigen Paragraphen genannt sind, nur das Verhältnis $a:c$, d.h. das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse. Man nennt dieses Verhältnis aus Gründen, die später (§ 22,1) angegeben werden, den Sinus des Winkels α und hat daher die folgende

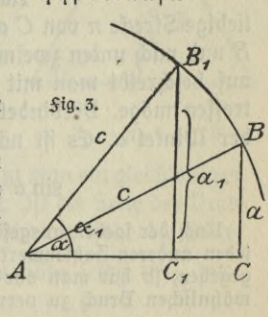
Erklärung: Unter dem **Sinus** eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Man schreibt:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Gesprochen wird dies: „Sinus α gleich a durch c".

Fig. 3.



2. Eigenschaften des Sinus. Da in jedem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse stets größer ist als die Kathete, so folgt als erste Eigenschaft des Sinus:

Der Sinus eines Winkels ist stets kleiner als eins.

Beschreibt man mit der Hypotenuse c des rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 3) um A den Kreis, läßt nun den Winkel α sich ändern und konstruiert für jeden neuen Winkel α_1 das rechtwinklige Dreieck, indem man vom Schnittpunkt B_1 seines Schenkels mit dem Kreise die Senkrechte auf AC fällt, so erkennt man, daß der Sinus eines Winkels sich ändert, wenn der Winkel sich ändert. Es bleibt nämlich in dem Bruche, der den Wert des Sinus angibt, der Nenner ungeändert, während der Zähler stets andere Werte annimmt. In Fig. 3 ist $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{c}$. Man nennt nun eine Größe, die mit einer zweiten Größe so verknüpft ist, daß sie sich ändert, wenn die zweite Größe andere Werte annimmt, eine **Funktion** dieser zweiten Größe. Hiernach erkennt man:

Der Sinus eines Winkels α ist eine Funktion von α.

Da man den Sinus zur Berechnung von Dreiecken benutzt, hat man die Sinusfunktion eine **trigonometrische Funktion** genannt.

Man erkennt aus der oben angestellten Betrachtung auch leicht die Art, wie der Sinus eines Winkels sich ändert, wenn der Winkel andere Werte annimmt. Es gilt für diese Änderung der folgende Satz:

Der Sinus eines Winkels wächst, wenn der Winkel wächst, und nimmt ab, wenn der Winkel abnimmt.

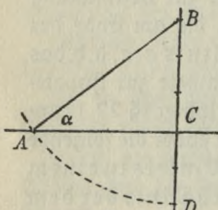


Fig. 4.

3. Konstruktion eines Winkels mit Hilfe des Sinus. Es ist leicht, wenn das Verhältnis $a:c$ oder $\sin\alpha$ in Zahlen gegeben ist, mit Hilfe des gegebenen Zahlenwertes den Winkel α geometrisch zu konstruieren. Ist z. B. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, so zeichnet man eine Gerade (Fig. 4) und errichtet auf ihr in einem beliebigen Punkte C die Senkrechte. Auf dieser Senkrechten trägt man dann eine beliebige Strecke n von C aus nach oben dreimal hintereinander ab bis B und nach unten zweimal $(5-3=2)$ hintereinander ab bis D. Hierauf beschreibt man mit BD um B den Kreis, der die Gerade in A treffen möge. Verbindet man nun A mit B, dann ist Winkel BAC der Winkel α. Es ist nämlich

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{3n}{5n} = \frac{3}{5}.$$

Nach der soeben ausgeführten Konstruktion ist auch die Konstruktion für jeden anderen Zahlenwert des Sinus klar. Ist der Sinus als Dezimalbruch gegeben, so hat man vor der Konstruktion den Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

4. Bestimmung der Maßzahl eines Winkels mit Hilfe des Sinus. Man könnte, nachdem die Konstruktion eines Winkels mit Hilfe des Sinus ausgeführt ist, nun die Größe des Winkels durch Messung in der konstruierten Figur ermitteln. Diese Bestimmung würde aber umständlich sein und durch Ungenauigkeiten bei der Konstruktion und bei der Messung fehlerhaft werden. Es muß daher nach einem Mittel gesucht werden, wie man aus dem gegebenen Wert für den Sinus von α die Größe von α in anderer Weise finden kann. Man ist hierzu den folgenden Weg gegangen. Zuerst hat man für Winkel von bekannter Maßzahl α den Wert ihres Sinus ermittelt, dann hat man diese Sinuswerte in einer Tabelle, wie etwa die folgende, zusammengestellt.

37^0	Sinus	37^0	Sinus
$0'$	0,6018	$20'$	0,6065
$10'$	0,6041	$30'$	0,6088

Eine solche Tabelle, die sich in jeder Logarithmentafel findet, benutzt man dann nicht nur, um die Sinus gegebener Winkel daraus abzulesen, sondern auch umgekehrt zu der Aufgabe, aus dem gegebenen Wert eines Sinus den zugehörigen Winkel zu ermitteln. Ist z. B. $\sin\alpha = 0{,}6065$ gegeben, so findet man aus obiger Tabelle $\alpha = 37^0 20'$.

Es kommt also zunächst darauf an, für die einzelnen Winkel die Werte ihrer Sinus zu bestimmen.

Die eben genannte Aufgabe ist nur einfach ausführbar für Winkel von 45^0, 30^0 und 60^0. Zur Bestimmung von $\sin 45^0$ benutzt man ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck (Fig. 5). Bezeichnet man in diesem Dreieck die Katheten durch a, dann ist die Hypotenuse $a\sqrt{2}$, und man findet nach der Erklärung des Sinus

$$\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

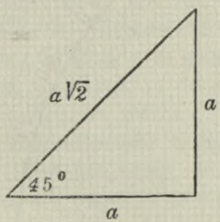


Fig. 5.

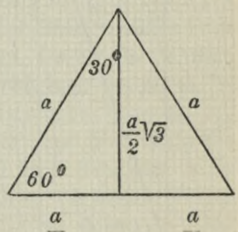


Fig. 6.

Um $\sin 30^0$ und $\sin 60^0$ zu bestimmen, benutzt man ein gleichseitiges Dreieck (Fig. 6), in welchem man die Höhe fällt. Ist die Seite des Dreiecks gleich a, dann sind die Abschnitte, in welche die Höhe die Seite, auf die sie gefällt ist, teilt, gleich $\frac{a}{2}$, und die Höhe selbst ist $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Man findet daher

$$\sin 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin 60^0 = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Es lassen sich in dieser Weise mit Hilfe des Bestimmungsdreiecks des regelmäßigen Zehnecks, dessen Schenkel gleich r, und dessen Basis gleich $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$ ist, auch noch die Werte von $\sin 18^0$ und $\sin 72^0$ angeben. Damit ist dann aber die Reihe der Winkel erschöpft, deren Sinus man auf so einfache Art bestimmen kann. Die höhere Mathematik besitzt in unendlichen Reihen Hilfsmittel, durch die man in verhältnismäßig kurzer Zeit die Werte der Sinus aller Winkel auf eine größere Anzahl von Dezimalstellen ermitteln kann. In dieser Weise sind die in den Logarithmentafeln stehenden Tabellen berechnet worden. Hier kann auf diese Berechnung nicht eingegangen werden.

5. Graphische Bestimmung der Werte des Sinus. Durch eine Zeichnung ist man imstande, die Werte der Sinus annähernd zu bestimmen. Man beschreibt um den Scheitel O eines rechten Winkels (Fig. 7), den man am besten auf Millimeterpapier zeichnet, mit dem Radius $r = 10$ cm $= 100$ mm den Kreis.*) Die Schnittpunkte dieses Kreises mit den Schenkeln des Winkels seien A und B. Hierauf teilt man den Kreisquadranten AB nach Art eines Transporteurs in 90 gleiche Teile. Nummeriert man diese Teile von A an, so bezeichnet die Nummer jedes Teilpunktes die Anzahl der Grade des Winkels, den die Linie von O nach dem betreffenden Punkt mit OA bildet, wie es vom Transporteur

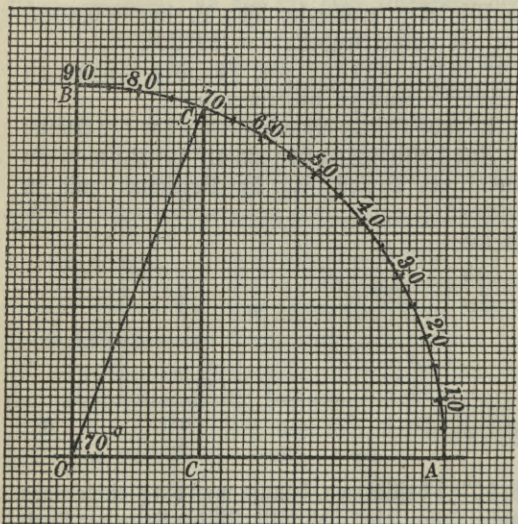


Fig. 7.

*) In Fig. 7 und Fig. 14 sind wegen des Formats des Buches 2 mm durch 1 mm dargestellt.

bekannt ist. Fällt man nun von den Teilpunkten die Senkrechten auf OA, so erhält man den Sinus des durch die Gerade nach dem Teilpunkt bestimmten Winkels, wenn man die Länge der Senkrechten in Millimetern bestimmt und die gefundene Maßzahl durch 100 dividiert. Der Grund hierfür ist an dem folgenden Beispiel leicht einzusehen. Das von dem Punkte C, bei dem 70^0 steht, auf die Gerade OA gefällte Lot CC_1 ist, wie man durch Messung findet oder auf dem Millimeterpapier ablesen kann, 94 mm lang. Nach der Erklärung des Sinus ist nun in dem rechtwinkligen Dreieck OCC_1, in welchem nach der Figur Winkel $COC_1 = 70^0$ ist,

$$\sin 70^0 = \frac{CC_1}{OC} = \frac{94}{100} = 0{,}94.$$

6. Die Logarithmen der Sinus. Gewöhnlich werden die Dreiecksberechnungen mit Hilfe der Logarithmen ausgeführt. Man findet daher in allen Logarithmentafeln ausführlich nicht die Werte des Sinus, wie sie in der obigen Tabelle stehen, angegeben, sondern die Logarithmen dieser Werte. Ein Bruchstück einer solchen Tafel findet sich Seite 10.

Zu der Einrichtung dieser Tafel sei das Folgende bemerkt. Über der Tafel stehen die Grade des Winkels, in der ersten mit Min. überschriebenen Vertikalreihe die zu dem Winkel gehörenden Minuten. Man findet dann in der neben den Minuten stehenden, mit Sinus überschriebenen Spalte in gleicher Höhe mit der Minutenzahl den Logarithmus des Sinus des Winkels. Für das richtige Ablesen dieses Logarithmus ist aber noch eine Erklärung zu geben. Da die Werte aller Sinus stets kleiner als eins sind (vgl. 1), so erscheinen sie, wenn sie durch einen Dezimalbruch angegeben werden, stets in der Form 0, ... Die Logarithmen solcher Dezimalbrüche besitzen nun aber stets die Kennziffer 0, ... — n. Man hat daher, um nicht stets den negativen Teil des Logarithmus mit angeben zu müssen, die Tafeln so eingerichtet, daß man stets 10 von der in den Tafeln stehenden Zahl subtrahieren muß, um den richtigen Logarithmus zu erhalten. Findet man z. B. in der Tabelle bei $37^0 2'$ die Zahl 9,77980, so ist

$$\log \sin 37^0 2' = 9{,}77980 - 10.$$

In dieser Form läßt man dann auch den Logarithmus bei den Berechnungen stehen.

Die Logarithmentafeln sind weiter so eingerichtet, daß die Anzahl der Grade nur von 0^0 bis 44^0 oberhalb der Tabelle steht, von 45^0 an steht die Gradzahl unter der Tabelle. Die zu diesen Winkeln gehörenden Minuten stehen dann in der Tabelle auf der rechten Seite und werden von unten nach oben gezählt, während die Logarithmen der Sinus sich in der Spalte befinden, unter der Sinus steht. Es ist also log sin $52^0 11' = 9{,}89761 - 10$.

37 Grad								
Min.	sin	Diff.	tng	C.D.	cot	Diff.	cos	
0	9,77946	17	9,87711	27	10,12289	10	9,90235	60
1	9,77963	17	9,87738	26	10,12262	9	9,90225	59
2	9,77980	17	9,87764	26	10,12236	10	9,90216	58
3	9,77997	16	9,87790	27	10,12210	9	9,90206	57
4	9,78013	17	9,87817	26	10,12183	10	9,90197	56
5	9,78030	17	9,87843	26	10,12157	9	9,90187	55
6	9,78047	16	9,87869	26	10,12131	10	9,90178	54
7	9,78063	17	9,87895	27	10,12105	9	9,90168	53
8	9,78080	17	9,87922	26	10,12078	10	9,90159	52
9	9,78097	16	9,87948	26	10,12052	10	9,90149	51
10	9,78113	17	9,87974	26	10,12026	9	9,90139	50
11	9,78130	17	9,88000	27	10,12000	10	9,90130	49
12	9,78147	16	9,88027	26	10,11973	9	9,90120	48
13	9,78163	17	9,88053	26	10,11947	10	9,90111	47
14	9,78180		9,88079		10,11921		9,90101	46
—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—
46	9,78707	16	9,88916	26	10,11084	10	9,89791	14
47	9,78723	16	9,88942	26	10,11058	10	9,89781	13
48	9,78739	17	9,88968	26	10,11032	10	9,89771	12
49	9,78756	16	9,88994	26	10,11006	9	9,89761	11
50	9,78772	16	9,89020	26	10,10980	10	9,89752	10
51	9,78788	17	9,89046	27	10,10954	10	9,89742	9
52	9,78805	16	9,89073	26	10,10927	10	9,89732	8
53	9,78821	16	9,89099	26	10,10901	10	9,89722	7
54	9,78837	16	9,89125	26	10,10875	10	9,89712	6
55	9,78853	16	9,89151	26	10,10849	9	9,89702	5
56	9,78869	17	9,89177	26	10,10823	10	9,89693	4
57	9,78886	16	9,89203	26	10,10797	10	9,89683	3
58	9,78902	16	9,89229	26	10,10771	10	9,89673	2
59	9,78918	16	9,89255	26	10,10745	10	9,89663	1
60	9,78934		9,89281		10,10719		9,89653	0
	cos	Diff.	cot	C.D.	tng	Diff.	sin	Min.
52 Grad								

Man schlage in der Logarithmentafel auf $\log \sin 24^0 15' = 9{,}61354 - 10$, $\log \sin 58^0 43' = 9{,}93177 - 10$, $\log \sin 3^0 54' = 8{,}83261 - 10$ usw.

Bemerkung. Sind Bruchteile der Minute gegeben, so interpoliert man ähnlich wie bei dem Aufschlagen der Logarithmen gewöhnlicher Zahlen. Soll z. B. $\log \sin 37^0 9{,}4'$ aufgeschlagen werden, so macht man folgende Überlegung: Es ist $\log \sin 37^0 9' = 9{,}78097 - 10$, ferner ist $\log \sin 37^0 10' = 9{,}78113 - 10$. Wächst also der Winkel um eine Minute, so wachsen die letzten Ziffern des Logarithmus des Sinus um 16 (diese Differenz der aufeinanderfolgenden Logarithmen steht in der Tafel in der Spalte hinter Sinus, die mit Diff. überschrieben ist). Nun schließt man weiter: wächst der Winkel, wie in unserem Falle, um $0{,}4'$, so wachsen die letzten Ziffern des Logarithmus um $0{,}4 \cdot 16 = 6{,}4$ oder 6. Der genauere Wert für $\log \sin 37^0 9{,}4'$ ist also $9{,}78103 - 10$.

Beispiele: $\log \sin 42^0 37{,}5' = 9{,}83072 - 10$; $\log \sin 71^0 58{,}6' = 9{,}97815 - 10$; $\log \sin 22^0 24{,}7' = 9{,}58122 - 10$.

Mit Hilfe der Tabelle für die Logarithmen der Sinus kann man nun auch zu jedem gegebenen Wert für den Logarithmus eines Sinus den zugehörigen Winkel finden. Man sucht den gegebenen Logarithmus in der Tafel in der Spalte auf, über der oder unter der Sinus steht. Steht die Zahl in der Tafel in der Spalte, **über** der Sinus steht, so stehen die Grade des Winkels **oben** und die Minuten **links** in derselben Reihe mit der gegebenen Zahl. Ist $\log \sin \alpha = 9{,}78063 - 10$, so findet man $\alpha = 37^0 7'$. Steht die Zahl in der Tafel in der Spalte, **unter** der Sinus steht, so stehen die Grade des Winkels **unten** und die Minuten **rechts**. Aus $\log \sin \alpha = 9{,}89712 - 10$ findet man $\alpha = 52^0 6'$.

Man bestimme mit Hilfe der Tafel α aus den folgenden Gleichungen. $\log \sin \alpha = 9{,}40490 - 10$ ($\alpha = 14^0 43'$), $\log \sin \alpha = 9{,}86116 - 10$ ($\alpha = 46^0 35'$), $\log \sin \alpha = 8{,}88654 - 10$ ($\alpha = 4^0 25'$).

Bemerkung. Steht die gegebene Zahl nicht in der Tafel, wie z. B., wenn gegeben ist $\log \sin \alpha = 9{,}78088 - 10$, so sucht man in der Tafel die nächst kleinere Zahl auf, in unserem Falle also $9{,}78080 - 10$. Für diese Zahl findet man $\alpha = 37^0 8'$. Nun interpoliert man in folgender Weise: Wachsen die letzten Ziffern des in der Tafel stehenden Logarithmus ($9{,}78080 - 10$) um 17 (Differenz mit der nächst höheren Zahl), so wächst der Winkel um eine Minute; wachsen die letzten Ziffern um eins, so wächst der Winkel um $\frac{1}{17}$ Minute, wachsen die letzten

Ziffern um 8 (Differenz mit der gegebenen Zahl), so wächst also der Winkel um $\frac{8}{17} = 0{,}47$ oder 0,5 Minuten. Der genauere Wert für α ist demnach $\alpha = 37^0 8{,}5'$.

Beispiele: $\log \sin \alpha = 9{,}68270 - 10$ ($\alpha = 28^0 47{,}4'$); $\log \sin \alpha = 9{,}90352 - 10$ ($\alpha = 53^0 12{,}3'$); $\log \sin \alpha = 9{,}54084 - 10$ ($\alpha = 20^0 19{,}7'$).

7. Berechnung rechtwinkliger Dreiecke. Sind von einem rechtwinkligen Dreieck zwei voneinander unabhängige Stücke gegeben, so kann man mit Hilfe des Sinus alle übrigen Stücke berechnen. Man hat nur die beiden gegebenen Stücke mit einem der gesuchten Stücke durch eine Gleichung zu verknüpfen, die man auf Grund der Erklärung des Sinus aufstellen kann. Nur in zwei Fällen gelingt dies nicht unmittelbar, nämlich erstens, wenn ein Winkel und die dem Winkel anliegende Kathete gegeben sind, und zweitens, wenn die beiden Katheten bekannt sind. Im ersten Falle hilft man sich dadurch, daß man zunächst den zweiten spitzen Winkel des Dreiecks bestimmt, im zweiten Falle berechnet man zuerst mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes die Hypotenuse. Wie man, um diese Rechnungen zu vermeiden, neue trigonometrische Funktionen eingeführt hat, wird an späterer Stelle (§ 6,1 und § 5,9) auseinandergesetzt werden. Zunächst sei die Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks an zwei Aufgaben klargemacht.

Aufgabe 1: In einem rechtwinkligen Dreieck ist der eine spitze Winkel $\alpha = 36^0 24'$ und die Hypotenuse $c = 68{,}54$ cm. Wie groß sind β, a und b?

Lösung: I. $\beta = 90^0 - \alpha$

$$\begin{aligned} 90^0 &= 89^0 60' \\ \alpha &= 36^0 24' \\ \hline \beta &= 53^0 36' \end{aligned}$$

II. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $a = c \sin \alpha$

$$\begin{aligned} \log a &= \log c + \log \sin \alpha \\ \log c &= 1{,}83594 \\ \log \sin \alpha &= 9{,}77336 - 10 \\ \hline \log a &= 11{,}60930 - 10 \\ a &= 40{,}673 \text{ cm.} \end{aligned}$$

III. Zur Berechnung von b bietet sich ein doppelter Weg dar.

a) Berechnung von b durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes.

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a) \cdot (c - a).$$

$$2 \log b = \log (c + a) + \log (c - a).$$

$$\begin{array}{rl} c = & 68{,}54 \\ a = & 40{,}673 \\ \hline c + a = & 109{,}213 \\ c - a = & 27{,}867 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(c+a) = & 2{,}03827 \\ \log(c-a) = & 1{,}44509 \\ \hline 2\log b = & 3{,}48336 \\ \log b = & 1{,}74168 \\ b = & 55{,}168 \text{ cm.} \end{array}$$

b) Berechnung von b durch Benutzung des Sinus des Winkels β.

$$\sin\beta = \frac{b}{c};\; b = c\cdot\sin\beta.$$

$$\log b = \log c + \log\sin\beta.$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 1{,}83594 \\ \log\sin\beta = & 9{,}90574 - 10 \\ \hline \log b = & 11{,}74168 - 10;\quad b = 55{,}168 \text{ cm.} \end{array}$$

Aufgabe 2: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete $a = 587{,}6$ cm und die Hypotenuse $c = 988{,}4$ cm. Wie groß sind die Winkel und die andere Kathete?

I. $\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \log\sin\alpha = \log a - \log c.$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 12{,}76908 - 10 \\ \log c = & 2{,}99493 \\ \hline \log\sin\alpha = & 9{,}77415 - 10;\quad \alpha = 36^0 28{,}9'. \end{array}$$

II. $\beta = 90^0 - \alpha;\quad \beta = 53^0 31{,}1'.$

III. $\sin\beta = \frac{b}{c};\quad b = c\cdot\sin\beta.$

$$\log b = \log c + \log\sin\beta.$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 2{,}99493 \\ \log\sin\beta = & 9{,}90528 - 10 \\ \hline \log b = & 12{,}90021 - 10;\quad b = 794{,}72 \text{ cm.} \end{array}$$

Aufgabe 3: Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist $a = 36{,}74$ cm und der ihr gegenüberliegende Winkel $\alpha = 25°50'$. Wie groß sind die Hypotenuse und die zweite Kathete? ($c = 84{,}314$ cm, $b = 75{,}888$ cm).

8. Praktische Anwendungen. Aufgabe 1: Auf den Gipfel eines Berges führt in gerader Linie eine Drahtseilbahn von 856 m Länge, die unter dem Winkel $\alpha = 23^0 15'$ ansteigt. Wie hoch ist der Berg? (337,90 m).

Aufgabe 2: Zwei Orte A und B, die in Luftlinie $a = 12{,}5$ km voneinander entfernt sind, sollen durch eine Eisenbahn miteinander verbunden werden. Man ist durch Bodenschwierigkeiten gezwungen,

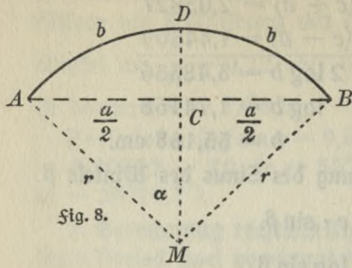


Fig. 8.

dem Schienenstrang die Gestalt eines Kreisbogens zu geben, dessen Radius $r = 8$ km beträgt. Wie lang wird die Eisenbahn, welche beide Orte miteinander verbindet?

Lösung. (Fig. 8.) Man berechnet zunächst aus dem rechtwinkligen Dreieck AMC den Winkel $AMC = \alpha$ mit Hilfe des Sinus. Durch diesen Zentriwinkel α kann man nun den Bogen AD bestimmen. Es besteht nämlich, wenn b die Länge des Bogens bezeichnet, die Gleichung

$$b : 2\pi r = \alpha : 360,$$

aus der b berechnet werden kann. Zu merken ist hierbei nur, daß α nur in Graden angegeben sein darf. Wäre z. B. $\alpha = 37^0 25{,}8'$, so müßte man $\alpha = 37{,}43^0$ setzen. — Man findet die Länge der Bahn gleich 14,347 km.

Aufgabe 3: Um ein Rad von $2\,r = 1{,}8$ m Durchmesser ist ein Treibriemen gelegt, der um eine $e = 2{,}4$ m vom Mittelpunkt des Rades entfernte Achse läuft. Wie lang ist der Treibriemen?

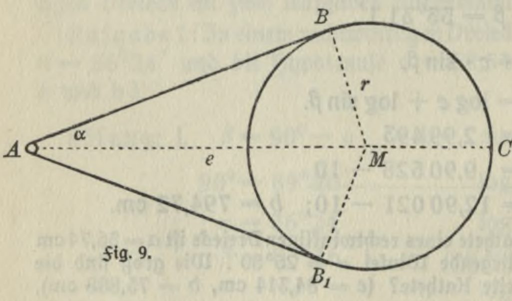


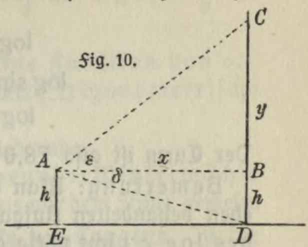
Fig. 9.

Lösung. (Fig. 9). Die Teile des Treibriemens, die nicht auf dem Rade liegen, sind Tangenten an den Radkreis. Dreieck AMB ist also bei B rechtwinklig. Man kann daher Winkel $BAM = \alpha$ durch die Gleichung $\sin \alpha = \frac{r}{e}$ berechnen. Durch α ist auch Winkel AMB bestimmt, und die Gleichung für den Sinus dieses Winkels AMB dient zur Berechnung von AB. Mit Hilfe des Winkels AMB findet man dann den Zentriwinkel BMC und kann nun, wie bei Aufgabe 2 angegeben, den Bogen BC berechnen. — Die Länge des ganzen Treibriemens ist 7,9692 m.

§ 5. Der Tangens eines Winkels.

1. Höhenmessung. Bei Höhenmessungen benutzt man ein um eine horizontale Achse (A, Fig. 10) drehbares Fernrohr. Das Fernrohr wird zunächst horizontal in die Richtung AB eingestellt. Will man nun einen höher gelegenen Punkt C betrachten, so muß man das Fernrohr nach oben um einen Winkel $CAB = \varepsilon$ drehen, den man den **Elevationswinkel oder Erhebungswinkel** nennt. Soll dagegen ein tiefer gelegener Punkt D beobachtet werden, so muß man das Fernrohr nach unten um den Winkel $DAB = \delta$ drehen. Diesen Winkel nennt man den **Depressionswinkel oder Senkungswinkel.**

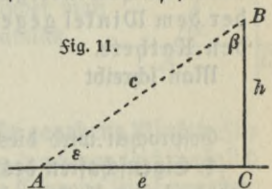
Fig. 10.



Hat man von einem Punkt der Ebene aus, der von dem Fußpunkt eines Turmes (einer senkrecht aufsteigenden Felswand) um die durch Messung bestimmte Strecke e entfernt ist, den Elevationswinkel ε für die Spitze des Turmes (den höchsten Punkt der Felswand) bestimmt, so ist es leicht, mit Hilfe von e und ε die Höhe des Turmes (der Felswand) zu berechnen. Es ist dies eine häufig vorkommende Aufgabe. Wie sie mit Benutzung der Sinusfunktion gelöst werden kann, soll im folgenden an einem Beispiel gezeigt werden.

2. Aufgabe: Die Spitze B eines Turmes CB erscheint von einem Punkt A der Ebene, auf welcher der Turm steht, unter dem Erhebungswinkel $CAB = \varepsilon = 18^0 45'$. Der Punkt A ist um die Strecke $AC = e = 230$ m vom Fußpunkt des Turmes entfernt. Wie hoch ist der Turm?

Fig. 11.



Lösung: (Fig. 11). Da die gegebenen Größen e und ε nicht durch eine Gleichung nach der Erklärung des Sinus miteinander verknüpft werden können, bestimmt man zunächst den Winkel $ABC = \beta$. Es ist

$$\beta = 90^0 - \varepsilon = 71^0 15'.$$

Nun kann man mit Hilfe von β und e zunächst die Hypotenuse $AB = c$ berechnen. Es ist

$$\sin\beta = \frac{e}{c};\ c = \frac{e}{\sin\beta}.$$

$$\log e = 2{,}36173$$

$$\log\sin\beta = 9{,}97632 - 10$$

$$\log c = 2{,}38541.$$

Nach der Bestimmung von $\log c$ findet man die gesuchte Höhe des Turmes $BC = h$ durch die Gleichung

$$\sin\varepsilon = \frac{h}{c};\ h = c\cdot\sin\varepsilon.$$

$$\begin{array}{r l}
\log c = & 2{,}38541 \\
\log\sin\varepsilon = & 9{,}50710 - 10 \\
\hline
\log h = & 11{,}89251 - 10;\ \boldsymbol{h = 78{,}075.}
\end{array}$$

Der Turm ist also 78,075 m hoch.

Bemerkung: Man erkennt leicht, daß man bei der Lösung der eben behandelten Aufgabe die Ermittlung des Winkels β und des $\log c$ **nicht nötig** gehabt hätte, wenn man unter den sechs Verhältnissen, die nach § 3 zur Bestimmung eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck benutzt werden können, das Verhältnis der beiden Katheten gewählt hätte. Es ist daher — gerade wegen des häufigen Vorkommens ähnlicher Aufgaben — auch das Verhältnis der Katheten zur Bestimmung des Winkels eingeführt worden.

3. Der Tangens eines Winkels.

Erklärung: Unter dem **Tangens** eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden Kathete.

Man schreibt $$\operatorname{tng}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Gesprochen wird dies: Tangens α gleich a durch b.

4. Eigenschaften des Tangens. Da in einem rechtwinkligen Dreieck jede der beiden Katheten jeden beliebigen Wert annehmen kann, so braucht der Tangens eines Winkels nicht wie der Sinus stets kleiner als eins zu sein. Man erkennt vielmehr:

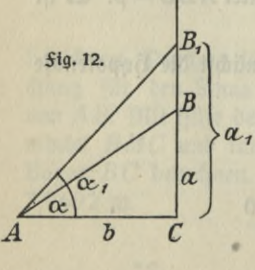


Fig. 12.

Der Tangens eines Winkels kann jeden beliebigen Wert annehmen.

Verlängert man die Kathete $CB = a$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 12) über B hinaus, und läßt nun den Winkel α sich ändern, indem man seinen Schenkel AB um A dreht, so wird der Schenkel AB die Linie CB in einem Punkte B_1 schneiden. Man erkennt aus dem neu entstehenden Dreieck ACB_1, daß der Tangens eines Winkels sich ändert, wenn der

Winkel sich ändert. Es bleibt nämlich in dem Bruche, der den Wert des Tangens angibt, der Nenner ungeändert, während der Zähler stets andere Werte annimmt, denn es ist $\operatorname{tng} \alpha = \frac{a}{b}$ und $\operatorname{tng} \alpha_1 = \frac{a_1}{b}$. Es folgt hieraus:

Der Tangens eines Winkels α ist eine Funktion von α.

Der Tangens ist nach dem Sinus die zweite trigonometrische Funktion.

Weiter erkennt man über die Art der Änderung:

Der Tangens eines Winkels wächst, wenn der Winkel wächst.

Diese letzte Eigenschaft hat also der Tangens mit dem Sinus gemein.

5. Konstruktion eines Winkels mit Hilfe des Tangens. Ist für einen Winkel α der Zahlenwert seines Tangens gegeben, so kann man den Winkel durch einfache Konstruktion finden. Ist z. B. $\operatorname{tng} \alpha = \frac{7}{4}$, so zeichnet man eine Gerade (Fig. 13) und errichtet auf ihr in einem beliebigen Punkte C die Senkrechte. Auf dieser Senkrechten trägt man dann von C aus eine beliebige Strecke p siebenmal hintereinander ab bis B und hierauf auf der Geraden von C aus viermal hintereinander dieselbe Strecke bis A. Verbindet man nun A mit B, so ist $\angle BAC = \alpha$. Es ist nämlich

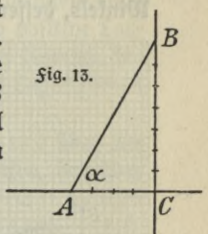


Fig. 13.

$$\operatorname{tng} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{7p}{4p} = \frac{7}{4}.$$

6. Ermittlung der Werte des Tangens für gegebene Winkel. Für diejenigen Winkel, für welche die Bestimmung des Sinus leicht möglich war (vgl. § 4, 4), läßt sich auch der Wert des Tangens leicht angeben. So ist für das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck (Fig. 5)

$$\operatorname{tng} 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$

Da der Tangens mit wachsendem Winkel wächst, so erkennt man hieraus, daß der Tangens aller Winkel, die kleiner als 45^0 sind, kleiner als eins ist, und daß der Tangens aller Winkel, die größer als 45^0 sind, größer als eins sein muß.

Aus dem gleichseitigen Dreieck (Fig. 6) findet man

$$\operatorname{tng} 30^0 = \frac{\frac{1}{2} a}{\frac{1}{2} a \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tng} 60^0 = \frac{\frac{1}{2} a \sqrt{3}}{\frac{1}{2} a} = \sqrt{3}.$$

Für die Bestimmung des Tangens der übrigen Winkel ist eine umständlichere Rechnung nötig. Sie ist aber nicht so schwierig wie die Rechnung, die zur Bestimmung des Sinus vorgenommen werden mußte. Man kann nämlich die Werte von $\operatorname{tng} \alpha$ mit Benutzung der für $\sin \alpha$ ermittelten Werte berechnen, wie später (§ 7, 5) gezeigt werden wird.

7. Graphische Bestimmung des Tangens. Auch für den Tangens eines Winkels kann man ähnlich wie für den Sinus (§ 4, 5) den Zahlenwert angenähert durch eine Zeichnung bestimmen. Man stellt sich wieder einen nach Art eines Transporteurs geteilten Quadranten in einem Kreise mit dem Radius $r = 10$ cm $= 100$ mm her (Fig. 14). Dann errichtet man in A auf OA die Senkrechte und verlängert den Schenkel des Winkels, dessen Tangens man ermitteln will, bis zu dem Schnittpunkt mit dieser Senkrechten. Bestimmt man nun die Länge der Strecke von diesem Schnittpunkt bis zu dem Punkte A in Millimetern, so erhält man den Tangens des Winkels, wenn man die gefundene Maßzahl durch 100 dividiert. Dies läßt sich in folgender Weise an einem Beispiel erklären. Es soll z. B. $\operatorname{tng} 50^0$ bestimmt werden. Aus dem Dreieck COA, in dem, wie aus der Figur ersicht-

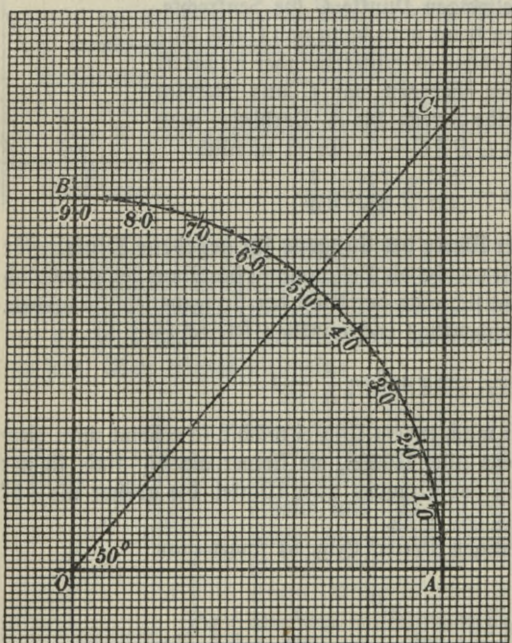


Fig. 14.

lich ist, Winkel COA gleich 50^0 ist, folgt nach der Erklärung des Tangens

$$\operatorname{tng} 50^0 = \frac{AC}{OA} = \frac{119}{100} = 1{,}19.$$

Bemerkung. Die Senkrechte, welche man auf dem Radius eines Kreises in seinem Endpunkte errichtet, ist Tangente des Kreises. Es ist daher die Gerade AC, auf der man die Werte des Tangens abliest, Tangente des Kreises um O. Man erkennt hieraus schon den Grund, weshalb man dieser Funktion den Namen „Tangens" gegeben hat.

8. Die Logarithmen des Tangens. In jeder Logarithmentafel findet sich neben der Spalte, in welcher die Logarithmen der Sinus der Winkel stehen, auch eine Spalte, die die Logarithmen für den Tangens der Winkel enthält. Sie ist mit Tangens überschrieben oder unterschrieben. Man vergleiche die Tabelle Seite 10. Auch bei den Logarithmen der Tangensfunktion ist, wie bei dem Sinus, von der in den Tafeln stehenden Zahl stets 10 zu subtrahieren. Da der Tangens auch Werte annehmen kann, die größer als eins sind, die also positive Logarithmen haben, so findet man in den Tafeln vor dem Komma bei den Logarithmen auch die Zahlen 10, 11, 12, ... Diese Logarithmen sind nach Subtraktion der 10 noch positiv.

Über das Aufschlagen der Logarithmen des Tangens und über das dabei etwa nötig werdende Interpolieren gilt genau dasselbe, was über das Aufschlagen und Interpolieren beim Sinus § 4, 6 gesagt worden ist. Man schlage in der Tafel auf: $\operatorname{tng} 36^0 40'$ $(9{,}87185 - 10)$, $\operatorname{tng} 72^0 25'$ $(10{,}49908 - 10)$, $\operatorname{tng} 42^0 17{,}4'$ $(9{,}95885 - 10)$, $\operatorname{tng} 54^0 50{,}7'$ $(10{,}15228 - 10)$. Ferner bestimme man mit Hilfe der Tafeln α aus den folgenden Gleichungen: $\log \operatorname{tng} \alpha = 9{,}73023 - 10$ $(\alpha = 28^0 15')$, $\log \operatorname{tng} \alpha = 10{,}58839 - 10$ $(\alpha = 75^0 32')$, $\log \operatorname{tng} \alpha = 9{,}58730 - 10$ $(\alpha = 21^0 8{,}3')$, $\log \operatorname{tng} \alpha = 10{,}13576 - 10$ $(\alpha = 53^0 48{,}8')$.

9. Vereinfachte Lösung trigonometrischer Aufgaben mit Hilfe des Tangens. Nach Einführung unserer zweiten trigonometrischen Funktion kann man nun die im Anfange dieses Paragraphen behandelte Aufgabe (2) weit einfacher lösen. Man setzt

$$\operatorname{tng} \varepsilon = \frac{h}{e}, \quad h = e \cdot \operatorname{tng} \varepsilon.$$

$$\begin{array}{rl} \log e = & 2{,}36173 \\ \log \operatorname{tng} \varepsilon = & 9{,}53078 - 10 \\ \hline \log h = & 11{,}89251 - 10; \quad h = 78{,}075. \end{array}$$

Auch bei der Aufgabe, aus den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks die Winkel des Dreiecks zu bestimmen, von der § 4, 7 gesprochen wurde, gestaltet sich die Lösung mit Benutzung des Tangens weit einfacher als mit Benutzung des Sinus. Dies soll an der folgenden Aufgabe, die auf beide Arten gelöst werden soll, klargemacht werden.

Aufgabe: Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die beiden Katheten $a = 47{,}56$ cm und $b = 38{,}72$ cm. Die Winkel des Dreiecks sind zu berechnen.

Lösung mit Benutzung des Sinus.

I. $c^2 = a^2 + b^2$

$$\log a = 1{,}67724 \qquad \log b = 1{,}58794$$
$$2\log a = 3{,}35448 \qquad 2\log b = 3{,}17588$$
$$a^2 = 2261{,}9 \qquad b^2 = 1499{,}3$$

Hieraus folgt: $c^2 = a^2 + b^2 = 3761{,}2$

$$2\log c = 3{,}57532.$$

II. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\log\sin\alpha = \log a - \log c$.

$$\log a = 11{,}67724 - 10$$
$$\log c = 1{,}78766$$
$$\log\sin\alpha = 9{,}88958 - 10; \quad \alpha = 50^0 51{,}0'.$$

III. $\beta = 90^0 - \alpha$; $\beta = 39^0 9{,}0'$.

Lösung mit Benutzung des Tangens.

I. $\operatorname{tng}\alpha = \frac{a}{b}$; $\log\operatorname{tng}\alpha = \log a - \log b$.

$$\log a = 11{,}67724 - 10$$
$$\log b = 1{,}58794$$
$$\log\operatorname{tng}\alpha = 10{,}08930 - 10; \quad \alpha = 50^0 51{,}0'.$$

II. $\beta = 90^0 - \alpha$; $\beta = 39^0 9{,}0'$.

10. Praktische Anwendungen.

Aufgabe 1. Wie weit ist man vom Fuße einer $h = 947$ m hohen, steil aufsteigenden Felswand entfernt, wenn man ihren höchsten Punkt unter dem Erhebungswinkel $\varepsilon = 30^0 37'$ erblickt? (1600,2 m).

Aufgabe 2. An zwei einander gegenüberliegenden Punkten an den beiden Ufern eines Flusses sind die Pfähle A und B eingerammt. Man hat an dem einen Ufer von A aus eine Standlinie $AC = a = 87{,}5$ m senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Pfähle abgesteckt und durch

Visieren gefunden, daß $\angle ACB = \alpha = 72^0 35'$ ist. Es soll die Breite des Flusses berechnet werden. (278,93 m).

Aufgabe 3. Von der Plattform eines $h = 82{,}5$ m hohen Turmes erblickt man einen Punkt der Ebene, auf der der Turm steht, unter dem Senkungswinkel $\delta = 4^0 12'$. Wie weit ist der Punkt vom Fuße des Turmes entfernt? (1123,4 m).

Aufgabe 4. Man erblickt einen Luftballon, der gerade senkrecht über einem $h = 79{,}5$ m hohen Turme schwebt, unter dem Erhebungswinkel $\varepsilon = 63^0 17'$. Nachher bestimmt man von dem Beobachtungsorte aus den Erhebungswinkel für die Spitze des Turmes und findet $\varepsilon_1 = 20^0 45'$. In welcher Höhe befand sich der Ballon? (416,91 m).

Man benutze Fig. 12, bestimme zunächst log AC aus dem Dreieck ACB, dann aus Dreieck ACB_1 die Höhe.

Aufgabe 5. Von einem $h = 30{,}75$ m hohen Turm erblickt man den höchsten Punkt einer senkrecht aus der Ebene aufsteigenden Felswand unter dem Erhebungswinkel $\varepsilon = 10^0 20'$ und ihren tiefsten Punkt unter dem Senkungswinkel $\delta = 2^0 30'$. Wie hoch ist die Felswand, und wie weit ist der Turm von ihr entfernt? (Höhe 159,17 m, Entfernung 704,30 m).

Man benutze Fig. 10, bestimme aus Dreieck AED, in dem $AE = h$ und $\angle EDA = \delta$ ist, die Entfernung ED, dann aus Dreieck ABC mit Hilfe von ε und $AB = ED$ die Strecke BC. Es ist dann die Höhe gleich $h + BC$.

Aufgabe 6. Wie hoch steht die Sonne über dem Horizont, wenn ein $l = 2{,}50$ m langer Stab, der lotrecht aufgestellt ist, einen Schatten von $l_1 = 3{,}14$ m Länge wirft? ($38^0 31{,}6'$).

Erklärung. Unter Höhe der Sonne versteht man den Erhebungswinkel, unter dem der Mittelpunkt der Sonnenscheibe erscheint. Die Richtung des Fernrohrs nach dem Mittelpunkt der Sonnenscheibe gibt die Richtung der Sonnenstrahlen an. Die Richtung der Sonnenstrahlen wird auch bestimmt durch die Gerade, welche einen schattenwerfenden Punkt mit seinem Schatten auf der Erdoberfläche verbindet.

Aufgabe 7. Zu einer Zeit, wo die Höhe der Sonne $h = 42^0 19'$ ist, wirft ein Turm einen Schatten von $l = 73{,}5$ m Länge. Wie hoch ist der Turm? (66,919 m).

§ 6. Der Kosinus und der Kotangens eines Winkels.

1. Der Kosinus eines Winkels. In § 4, 7 ist gesagt, daß man zur Berechnung der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem ein spitzer Winkel und die dem Winkel anliegende Kathete gegeben sind, zunächst den zweiten spitzen Winkel des Dreiecks bestimmen müsse. Diese

Rechnung ist nicht nötig, wenn man zur Bestimmung eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck auch das Verhältnis der dem Winkel anliegenden Kathete zur Hypotenuse benutzt.

Erklärung: Unter dem **Kosinus** eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der dem Winkel anliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Man schreibt:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\cdot$$

Gesprochen wird dies: „Kosinus α gleich b durch c."

Der Kosinus des Winkels α ist nach der gegebenen Erklärung, wenn man bedenkt, daß $\sin\beta = \frac{b}{c}$ ist, und daß β der Komplementwinkel zu α, also gleich $90^0 - \alpha$, ist, nichts weiter als der Sinus des Komplementwinkels zu α. Nun heißt „Sinus des Komplements" lateinisch complementi sinus oder, abgekürzt geschrieben, co. sin. Hieraus ist der Name für das obengenannte Verhältnis entstanden.

2. Eigenschaften des Kosinus. Der Kosinus eines Winkels muß nach den zuletzt angestellten Betrachtungen die Eigenschaften eines Sinus besitzen. Man hat also die Sätze:

Der Kosinus eines Winkels ist stets kleiner als eins.

Der Kosinus eines Winkels α ist eine Funktion von α.

In einer Eigenschaft nur muß sich der Kosinus vom Sinus unterscheiden. Beachtet man, daß der Kosinus von α gleich dem Sinus von $90^0 - \alpha$ ist, und bedenkt, daß mit wachsendem Wert von α der Komplementwinkel $90^0 - \alpha$ immer kleiner werden muß, so erkennt man sofort:

Der **Kosinus** eines Winkels **nimmt ab**, wenn der **Winkel wächst**, und wächst, wenn der Winkel abnimmt.

Es läßt sich diese Eigenschaft des Kosinus auch leicht mit Hilfe der Fig. 3 erkennen. Wächst der Winkel α und geht in den Winkel α_1 über, so bleibt in dem Bruche, der den Wert des Kosinus darstellt, der Nenner ($AB = AB_1 = c$) ungeändert, während der Zähler kleiner wird; aus AC wird die kleinere Strecke AC_1.

3. Der Kotangens eines Winkels. Nach Einführung des Kosinus liegt es nahe, zur Bestimmung eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck auch das Verhältnis der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden zu benutzen, und dadurch eine dem Tangens verwandte Funktion zu schaffen.

Erklärung: Unter dem **Kotangens** eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältnis der dem Winkel anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden Kathete.

Man schreibt:
$$\cot\alpha = \frac{b}{a}.$$

Gesprochen wird dies: „Kotangens α gleich b durch a".

Der Kotangens eines Winkels α ist der Tangens des Komplementwinkels von α, also der Tangens von $90^0-\alpha$. Er hat daher seinen Namen erhalten, denn „Tangens des Komplements" heißt lateinisch „complementi tangens oder in abgekürzter Schreibweise co. tng.

4. Eigenschaften des Kotangens. Da $\cot\alpha = \operatorname{tng}(90^0-\alpha)$ ist, so besitzt der Kotangens folgende Eigenschaften mit dem Tangens gemeinsam:

Der Kotangens eines Winkels kann jeden beliebigen Wert annehmen.

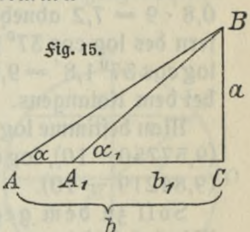
Der Kotangens eines Winkels ist eine Funktion von α.

Ähnlich wie der Kosinus vom Sinus unterscheidet sich aber der Kotangens vom Tangens durch die Art, wie er bei Änderung des Winkels seinen Wert ändert. Es gilt nämlich für den Kotangens der Satz:

Der **Kotangens** eines Winkels **nimmt ab**, wenn der **Winkel wächst**, und wächst, wenn der Winkel abnimmt.

Es erklärt sich dies wieder dadurch, daß $90^0-\alpha$ abnimmt, wenn α wächst. Auch an der Fig. 15 läßt es sich leicht erkennen. Bewegt man, während die Kathete BC ungeändert bleibt, die Ecke A nach C hin bis zu dem Punkte A_1, so wird die dem Winkel bei A anliegende Kathete dadurch kleiner, der Winkel bei BA_1C aber ist größer als der Winkel BAC als Außenwinkel des Dreiecks AA_1B.

Fig. 15.



5. Die Werte des Kosinus und des Kotangens für 45°, 30°, 60°. Aus dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck (Fig. 5) findet man

$$\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \cot 45^0 = 1.$$

Mit Benutzung des gleichseitigen Dreiecks (Fig. 6) erhält man

$$\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \cot 30^0 = \sqrt{3}$$

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2} \qquad \cot 60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

6. Die Logarithmen des Kosinus und des Kotangens. In den Logarithmentafeln finden sich neben den Logarithmen des Sinus und Tangens auch noch Spalten, in denen die Logarithmen des Kosinus und des Kotangens angegeben sind. Über die Einrichtung und Benutzung dieser Tafeln ist keine Erklärung mehr nötig. Man schlage auf $\cos 33^0 17'$ (9,92219 — 10), $\cos 54^0 48'$ (9,76075 — 10), $\cot 40^0 36'$ (10,06697 — 10), $\cot 73^0 18'$ (9,47714 — 10). Ferner bestimme man den Winkel α aus den folgenden Gleichungen: $\log\cos\alpha = 9{,}96493 - 10$ ($22^0 43'$), $\log\cos\alpha = 9{,}42599 - 10$ ($74^0 32'$), $\log\cot\alpha = 10{,}46180 - 10$ ($19^0 3'$), $\log\cot\alpha = 9{,}82352 - 10$ ($56^0 20'$).

Nur das Interpolieren gestaltet sich bei den beiden neuen Funktionen anders als bisher. Es ist hierbei zu beachten, daß bei wachsendem Winkel sowohl der Kosinus wie der Kotangens abnehmen, und deshalb auch die Logarithmen dieser Werte mit wachsendem Winkel kleiner werden. Ein Blick auf die beigedruckte Tafel (S. 10) zeigt dies. Ist z. B. $\log\cos 37^0 1{,}8'$ aufzuschlagen, so stellt man folgende Überlegung an. Nach der Tafel ist $\log\cos 37^0 1'$ gleich 9,90225 — 10. Wächst der Winkel um 1 Minute, so nehmen die letzten Ziffern des Logarithmus des Kosinus um 9 ab, wächst der Winkel um 0,8 Minuten, so müssen demnach die letzten Ziffern um $0{,}8 \cdot 9 = 7{,}2$ abnehmen. Subtrahiert man nun von den letzten Ziffern des $\log\cos 37^0 1'$ die Zahl 7, so erhält man als genaueren Wert $\log\cos 37^0 1{,}8' = 9{,}90218 - 10$. In ähnlicher Weise verfährt man bei dem Kotangens.

Man bestimme $\log\cos 27^0 13{,}6'$ (9,94900 — 10), $\log\cos 67^0 47{,}4'$ (9,57750 — 10), $\log\cot 36^0 49{,}7'$ (10,12560 — 10), $\log\cot 55^0 11{,}3'$ (9,84219 — 10).

Soll zu dem gegebenen Logarithmus eines Kosinus der Winkel bestimmt werden, so sucht man nicht, wie bei den Logarithmen gewöhnlicher Zahlen und bei den Logarithmen des Sinus und Tangens die nächst niedrige Zahl, sondern die nächst höhere Zahl in den Tafeln auf und schreibt zunächst den bei dieser Zahl stehenden Winkel auf. Ist z. B. gegeben $\log\cos\alpha = 9{,}78023 - 10$, so nimmt man aus der Tabelle (S. 10) die Zahl 9,78030 — 10. Bei dieser Zahl steht $52^0 55'$. Nun macht man folgende Schlüsse: Nimmt der Logarithmus in den letzten Ziffern um 17 (Tafeldifferenz) ab, so wächst der Winkel um 1 Minute, daher muß, wenn die letzten Ziffern um 1 kleiner werden, der Winkel um $1 : 17$ Minuten wachsen. Nimmt nun der Logarithmus in den letzten Ziffern um 7 (Differenz mit der gegebenen Zahl) ab, so wächst der Winkel um $7 : 17 = 0{,}41$ Minuten. Der genauere Wert für α ist also $\alpha = 52^0 55{,}4'$. Die Logarithmen des Kotangens werden in derselben Weise behandelt.

Man bestimme α aus den folgenden Gleichungen: $\log\cos\alpha = 9{,}87615 - 10$ ($\alpha = 41^0 14{,}8'$), $\log\cos\alpha = 9{,}23366 - 10$ ($\alpha = 80^0 8{,}3'$), $\log\cot\alpha = 10{,}13567 - 10$ ($\alpha = 36^0 11{,}6'$), $\log\cot\alpha = 9{,}45423 - 10$ ($\alpha = 74^0 6{,}8'$).

7. Anwendungen. Aufgabe 1. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist $a = 52{,}63$ cm und die Halbierungslinie des ihr anliegenden Winkels $w_\beta = 59{,}48$ cm. Die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten a und w_β findet man $\cos\frac{\beta}{2} = a : w_\beta$ und hieraus $\frac{\beta}{2} = 27^0 46{,}1'$.

Aufgabe 2. Aus einem Schiffe wird ein Gewicht in das Wasser gelassen, das an einer $l = 50$ m langen Schnur befestigt ist. Das Gewicht schleift bei der Fahrt auf dem Boden des Sees, und die Schnur bildet mit der Vertikalen durch ihren Befestigungspunkt den Winkel $\alpha = 23^0 14'$. Wie tief ist der See an der Stelle, wo sich das Schiff befindet? (45,945 m.)

Aufgabe 3. Der Erdradius ist $r = 6370$ km lang. Wie groß ist der Radius des Parallelkreises durch Berlin, wenn die geographische Breite von Berlin $\varphi = 52^0 30'$ beträgt?

Lösung. Der Kreis Fig. 16 stelle den Meridian von Berlin dar, WO den Durchmesser des Äquators, $CB = \varrho$ den gesuchten Halbmesser des Parallelkreises. Die geographische Breite eines Ortes ist der Winkel, den der Erdradius nach diesem Ort mit der Ebene des Äquators bildet. Es ist also $\angle BMO$ die geographische Breite von Berlin, ihm ist als Wechselwinkel an Parallelen $\angle CBM$ gleich. Man hat also zur Bestimmung von ϱ die Gleichung $\varrho = r\cos\varphi$ und findet $\varrho = 3877{,}8$ km.

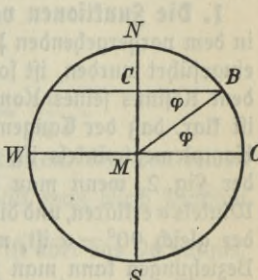


Fig. 16.

8. Die Funktionen der Winkel von 0^0 und 90^0. Wenn man in dem Dreieck ABC (Fig. 2) die Ecke B auf der Kathete BC immer näher an C heranrückt bis schließlich B mit C zusammenfällt, so wird Winkel α gleich 0^0, $a = 0$ und die Hypotenuse fällt mit der Kathete b zusammen. Es wird also $b = c$. Bestimmt man für diesen Fall nach den gegebenen Erklärungen die Werte der vier trigonometrischen Funktionen, so erhält man

$$\sin 0^0 = 0, \quad \cos 0^0 = 1, \quad \operatorname{tng} 0^0 = 0, \quad \cot 0^0 = \infty.$$

Verschiebt man die Kathete B C parallel zu ihrer ursprünglichen Lage so, daß C näher an A heranrückt, so wird α immer größer und schließlich, wenn C mit A zusammenfällt, gleich 90^0. Gleichzeitig ist dann auch $a = c$. Nach den Erklärungen findet man dann für die Funktionen des Winkels von 90^0 die folgenden Werte:

$$\sin 90^0 = 1, \quad \cos 90^0 = 0, \quad \operatorname{tng} 90^0 = \infty, \quad \cot 90^0 = 0.$$

9. Bemerkung. Nach Einführung der vier trigonometrischen Funktionen Sinus, Tangens, Kosinus und Kotangens bleiben von den sechs Verhältnissen, von denen am Ende des § 3 gesagt wurde, daß sie zur Bestimmung der Winkel im rechtwinkligen Dreieck benutzt werden könnten, noch zwei Verhältnisse übrig. Es sind dies die Verhältnisse $c:a$ und $c:b$. Man nennt $c:b$ den Sekans des Winkels α und $c:a$ den Kosekans dieses Winkels. Beide Funktionen werden nur selten gebraucht. Auch in den folgenden trigonometrischen Berechnungen werden sie nicht angewendet und sollen daher nur an dieser Stelle erwähnt werden.

§ 7. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen.

1. Die Funktionen von Komplementwinkeln. Aus der Art, wie in dem vorhergehenden Paragraphen der Kosinus und der Kotangens eingeführt wurden, ist sofort klar, daß der Sinus eines Winkels gleich dem Kosinus seines Komplementwinkels ist, und umgekehrt. Ebenso ist klar, daß der Tangens eines Winkels gleich dem Kotangens seines Komplementwinkels ist, und umgekehrt. Man erkennt dies auch aus der Fig. 2, wenn man die Gleichungen, welche die Funktionen des Winkels α erklären, und die Gleichungen für die Funktionen des Winkels β, der gleich $90^0 - \alpha$ ist, nebeneinander schreibt. Die soeben genannten Beziehungen kann man zusammenfassen in dem

Lehrsatz: Ersetzt man in den trigonometrischen Funktionen den Winkel durch seinen Komplementwinkel, so muß man die Funktionsnamen ändern, und zwar Sinus mit Kosinus und Tangens mit Kotangens vertauschen.

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha), \quad \operatorname{tng}\alpha = \cot(90^0 - \alpha),$$
$$\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha), \quad \cot\alpha = \operatorname{tng}(90^0 - \alpha).$$

Auf der in dem obigen Lehrsatz ausgesprochenen Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen beruht die Einrichtung der Tafeln für die

Logarithmen dieser Funktionen. Die Tafeln brauchten nur bis zu 45^0 aufgestellt zu werden, dann konnte man dieselben auch für Winkel von 45^0 bis 90^0 benutzen, indem man die Zahl der Grade unter die Tabellen schrieb und unter die mit Sinus, Tangens, Kotangens und Kosinus bezeichneten Spalten bzw. Kosinus, Kotangens, Tangens und Sinus setzte.

2. Beziehung zwischen dem Sinus und Kosinus. Erhebt man die Gleichungen, durch welche Sinus und Kosinus erklärt werden, in das Quadrat, so findet man

$$\sin^2\alpha^{1)} = \frac{a^2}{c^2} \text{ und } \cos^2\alpha = \frac{b^2}{c^2}.$$

Addiert man die erhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2+b^2}{c^2}.$$

Nun ist aber nach dem pythagoreischen Lehrsatz $a^2+b^2=c^2$, also ist

$$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.}$$

Aus dieser Formel folgt

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

3. Beziehung zwischen dem Tangens und Kotangens. Multipliziert man die beiden Gleichungen, welche den Tangens und den Kotangens erklären, so findet man

$$\mathbf{\operatorname{tng}\alpha \cdot \cot\alpha = 1.}$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{tng}\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \quad \text{und} \quad \cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tng}\alpha}.$$

4. Beziehungen zwischen den vier Funktionen. Aus den beiden Gleichungen $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ erhält man durch Division $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber das Verhältnis, welches der Tangens des Winkels α genannt wurde, es ist also

$$\mathbf{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tng}\alpha.}$$

Dividiert man $\cos\alpha$ durch $\sin\alpha$, so findet man

$$\mathbf{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha.}$$

1) Statt $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$, $(\operatorname{tng}\alpha)^2$ und $(\cot\alpha)^2$ schreibt man $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\operatorname{tng}^2\alpha$ und $\cot^2\alpha$ und spricht dies „Sinus Quadrat α“, „Kosinus Quadrat α“ usw.

5. Berechnung der drei übrigen Funktionen eines Winkels, wenn eine Funktion gegeben ist. Mit Hilfe der soeben gefundenen Formeln kann man, wenn der Sinus eines Winkels gegeben ist, die drei anderen Funktionen berechnen. Ist z. B. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, so ist $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, ferner ist $\operatorname{tng}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$ und $\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tng}\alpha} = \frac{3}{4}$. Ebenso kann man, wenn der Kosinus eines Winkels bekannt ist, die Werte der übrigen Funktionen bestimmen. Aus $\cos\alpha = \frac{35}{37}$ folgt $\sin\alpha = \frac{12}{37}$, $\operatorname{tng}\alpha = \frac{12}{35}$, $\cot\alpha = \frac{35}{12}$.

Soll man aus dem gegebenen Wert eines Tangens oder Kotangens die Werte der übrigen Funktionen berechnen, so erkennt man, daß man wohl den Kotangens bzw. Tangens berechnen kann, daß aber die Werte des Sinus und Kosinus mit Hilfe der oben gefundenen Formeln nicht bestimmbar sind. Es müssen daher für diesen Zweck geeignete Formeln aufgestellt werden. Diese erhält man in folgender Weise: Dividiert man die Formel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ durch $\cos^2\alpha$, so findet man

$$1 + \operatorname{tng}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Dividiert man durch $\sin^2\alpha$, so ergibt sich

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln löst man nun die

Aufgabe: Es ist $\operatorname{tng}\alpha = \frac{11}{60}$, wie groß sind die übrigen Funktionen des Winkels α?

Lösung: $\cot\alpha = \frac{60}{11}$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{3600}{3721}$, $\cos\alpha = \frac{60}{61}$; $\sin\alpha = \operatorname{tng}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{11}{61}$. — Die zuletzt benutzte Gleichung folgt unmittelbar aus der ersten der in 4. gegebenen Formeln.

§ 8. Die Bestimmung eines Winkels aus einer Gleichung zwischen seinen Funktionen.

1. Die Gleichung enthält nur eine Funktion. Ist zur Bestimmung eines Winkels eine Gleichung gegeben, in der nur eine Funktion des unbekannten Winkels vorkommt, so löst man die Gleichung genau so wie die Gleichungen mit einer Unbekannten x. Dann bestimmt man aus dem für die Funktion gefundenen Wert mit Hilfe der Logarithmentafel den Wert des gesuchten Winkels.

Aufgabe 1. Den spitzen Winkel α aus der Gleichung $8 \sin^2 \alpha - 10 \sin \alpha + 3 = 0$ zu bestimmen.

Lösung. Aus der gegebenen Gleichung erhält man $\sin \alpha_1 = \frac{3}{4}$ und $\sin \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Die spitzen Winkel, die der gegebenen Gleichung genügen, sind $\alpha_1 = 48^0 35{,}4'$ und $\alpha_2 = 30^0$.

2. Die Gleichung enthält verschiedene Funktionen. Die Bestimmung des Winkels aus einer Gleichung wird schwerer, wenn verschiedene Funktionen des Winkels in der Gleichung vorkommen. Man hat dann stets zunächst die verschiedenen Funktionen durch nur eine Funktion auszudrücken. Hierzu benutzt man die in dem vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln. Die folgenden Aufgaben, in denen stets der spitze Winkel bestimmt werden soll, der der Gleichung genügt, sollen einige Beispiele für diese Bestimmung liefern.

Aufgabe 1. $7 \sin \alpha = 3 \cos \alpha$.

Dividiert man die Gleichung durch $7 \cos \alpha$, so erhält man

$$\operatorname{tng} \alpha = \frac{3}{7}. \quad (\alpha = 23^0 11{,}9').$$

Aufgabe 2. $5 \cos^2 \alpha + 30 \sin^2 \alpha = 14$.

Man setzt $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ und findet

$$\sin \alpha = 0{,}6. \quad (\alpha = 36^0 52{,}2').$$

Aufgabe 3. $39 \sin^2 \alpha + 10 \cos \alpha = 15$.

Ersetzt man $\sin^2 \alpha$ durch $1 - \cos^2 \alpha$, so findet man für $\cos \alpha$ eine quadratische Gleichung. Die einzige für den spitzen Winkel brauchbare Wurzel dieser Gleichung ist $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. $(\alpha = 22^0 37{,}2')$.

Aufgabe 4. $3 \operatorname{tng} \alpha = 2 \cos \alpha$.

Multipliziert man die Gleichung mit $\cos \alpha$, so erhält man

$$3 \sin \alpha = 2 \cos^2 \alpha.$$

Nun ist $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ zu setzen, und man findet eine quadratische Gleichung für $\sin \alpha$. Die brauchbare Wurzel dieser Gleichung ist $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. $(\alpha = 30^0)$.

Aufgabe 5. $19 \operatorname{tng} \alpha + \frac{2}{\cos^2 \alpha} = 12$.

Man setzt $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tng}^2\alpha$ und erhält eine quadratische Gleichung für $\operatorname{tng}\alpha$. Aus dieser Gleichung findet man als einzig brauchbaren Wert $\operatorname{tng}\alpha = 0{,}5$. $(\alpha = 26^0 33{,}9')$.

Aufgabe 6. $\quad 2\sin\alpha + \cos\alpha = 2$.

Ersetzt man den Kosinus durch den Sinus, so findet man

$$2\sin\alpha + \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 2.$$

Wird diese Gleichung, nachdem man die Wurzel isoliert hat, in das Quadrat erhoben, so entsteht eine quadratische Gleichung. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $\sin\alpha_1 = 1$ und $\sin\alpha_2 = \frac{3}{5}$, sie liefern die Werte $\alpha_1 = 90^0$ und $\alpha_2 = 36^0 52{,}2'$.

Bemerkung. Die eben auseinandergesetzte Lösung der Aufgabe 6 kann zu recht unbequemen Rechnungen führen, wenn große Zahlen als Koeffizienten von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ auftreten. Es gibt für die Lösung dieser Aufgabe noch einen anderen, stets bequemen Weg, der aber erst an späterer Stelle (§ 27, A Aufgabe 7) gezeigt werden kann.

§ 9. Verwandlung der Funktionen eines Winkels in Funktionen des halben Winkels.

1. Kommt in einer Gleichung, aus der der Wert eines Winkels berechnet werden soll, außer der Funktion des Winkels auch noch eine Funktion des halben Winkels vor, so ist die Gleichung nur mit Hilfe der bisher gefundenen Formeln nicht lösbar. Auf jeden Fall ist es zur Lösung der Aufgabe erforderlich, die gegebene Gleichung so umzuformen, daß in ihr entweder nur Funktionen des ganzen Winkels oder nur Funktionen des halben Winkels vorhanden sind. Man hat daher Formeln aufzustellen, die diese Umformungen ermöglichen, und dies soll im folgenden geschehen.

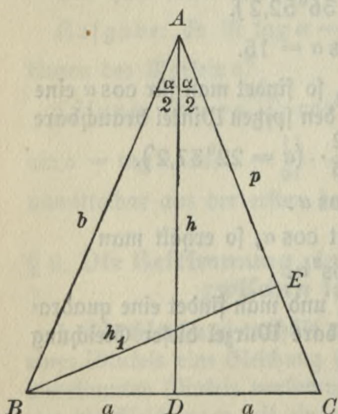


Fig. 17.

2. Der Sinus eines Winkels ersetzt durch Funktionen des halben Winkels. Man zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Fig. 17), das an der Spitze A einen spitzen Winkel α besitzt, und bezeichne die Basis BC dieses Dreiecks durch $2a$, den Schenkel durch b. Fällt man in diesem Dreieck die Höhe $AD = h$ auf die Basis und von der Ecke B der Grundlinie die Höhe $BE = h_1$ auf den Schenkel, so kann man den Inhalt des Dreiecks doppelt ausdrücken, erstens durch $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h$ und zweitens durch $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h_1$. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke erhält man die Gleichung

$$b \cdot h_1 = 2a \cdot h.$$

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck BEA $h_1 = b \sin \alpha$. Ferner findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD, in welchem $BD = a$ und $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$ ist, da die Basishöhe im gleichschenkligen Dreieck die Basis und den Winkel an der Spitze halbiert, $a = b \sin \frac{\alpha}{2}$ und $h = b \cos \frac{\alpha}{2}$. Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhält man nach Division durch b^2

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Mit Hilfe dieser Formel ist es möglich, den Sinus eines Winkels durch Funktionen des halben Winkels auszudrücken.

3. Der Kosinus eines Winkels ersetzt durch Funktionen des halben Winkels. Nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz ist in jedem Dreieck das Quadrat der Seite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus der einen dieser beiden Seiten und der Projektion der anderen auf sie. Diesen Satz wendet man auf das Dreieck ABC (Fig. 17) an, in welchem nach der Festsetzung in 2. $\angle A = \alpha$ ein spitzer Winkel ist. Man findet dann, wenn man die Projektion von AB auf AC mit p bezeichnet ($p = EA$), die Gleichung

$$4a^2 = b^2 + b^2 - 2bp \quad \text{oder}$$
$$2a^2 = b^2 - bp.$$

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck ADB wie vorher $a = b \sin \frac{\alpha}{2}$, und in dem rechtwinkligen Dreieck AEB ist $p = b \cos \alpha$. Setzt man diese Werte in die vorher gefundene Gleichung ein, so erhält man nach Division durch b^2

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

oder
$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$
Diese Gleichung ermöglicht es, den Kosinus eines Winkels durch eine Funktion des halben Winkels zu ersetzen. Es lassen sich aber aus ihr noch zwei andere Formeln herleiten, die denselben Zweck erfüllen. Ersetzt man in der gefundenen Formel $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ durch $1-\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (§ 7, 2), so findet man
$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1.$$
Addiert man die beiden für $\cos\alpha$ gefundenen Formeln, so erhält man, wenn man das Ergebnis durch zwei dividiert,
$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$
Man hat also für den Kosinus drei Formeln, die den Übergang zum halben Winkel gestatten.

4. Der Tangens eines Winkels ersetzt durch Funktionen des halben Winkels. Aus der in 2. gefundenen Formel für $\sin\alpha$ und der dritten in 3. für $\cos\alpha$ ermittelten Formel findet man durch Division
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tng}\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$
Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite dieser Gleichung durch $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, so erhält man die Formel
$$\operatorname{tng}\alpha = \frac{2\operatorname{tng}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tng}^2\frac{\alpha}{2}}.$$
Die in diesem Paragraphen gefundenen Formeln werden noch an späterer Stelle (§ 26, 2) in anderer Weise abgeleitet werden.

5. Anwendungen. Die Formeln für den Übergang zum halben Winkel gebraucht man, wie schon in 1. erwähnt, zur Auflösung von Gleichungen, in denen trigonometrische Funktionen eines unbekannten Winkels mit Funktionen des halben Winkels gemeinsam vorkommen.

Beispiel 1. $\qquad 2\sin\alpha - 3\sin\frac{\alpha}{2} = 0.$

Ersetzt man $\sin\alpha$ durch die Funktionen des halben Winkels, so erhält man

$$4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 3\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\frac{\alpha}{2}\left(4\cos\frac{\alpha}{2} - 3\right) = 0.$$

Hieraus folgt: $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$, also $\frac{\alpha}{2} = 0^0$ und $\alpha_1 = 0^0$. Weiter folgt $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$, also $\frac{\alpha}{2} = 41^0 24{,}6'$ und $\alpha_2 = 82^0 49{,}2'$.

Beispiel 2. $4\sin\frac{\alpha}{2} + 6\cos\alpha = 5$.

Setzt man $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so erhält man eine quadratische Gleichung. Die einzige brauchbare Wurzel dieser Gleichung ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2},$$

aus ihr findet man $\frac{\alpha}{2} = 30^0$ und $\alpha = 60^0$.

Die gefundenen Formeln spielen auch eine wichtige Rolle bei der Vereinfachung von Ausdrücken, in denen trigonometrische Funktionen vorkommen. Besonders häufig gebraucht man hierbei die beiden folgenden Formeln, die sich aus den beiden ersten für $\cos\alpha$ in 3. gefundenen Formeln ohne weiteres ergeben:

$$\mathbf{1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},}$$

$$\mathbf{1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.}$$

Beispiel 1. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$

Beispiel 2. $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tng}\frac{\alpha}{2}.$

§ 10. Berechnung geradliniger Figuren, die sich in kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen lassen.

1. Bemerkung. Ebenso wie sich die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen ausführen läßt, können auch alle diejenigen geradlinig begrenzten Figuren berechnet werden, die in kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden können. Die

Berechnung eines der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke genügt für die Bestimmung aller Stücke der ganzen Figur. Figuren dieser Art sind das Rechteck, das durch die Diagonale in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, und das gleichschenklige Dreieck, in dem durch die Höhe auf der Basis die Teilung ausgeführt wird. Ferner gelingt auch die Berechnung regelmäßiger Vielecke. Diese Vielecke sind durch ihr gleichschenkliges Bestimmungsdreieck vollständig bestimmt. Man hat nur zu beachten, daß bei einem regelmäßigen n-Eck der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks gefunden wird, wenn man 360^0 durch n dividiert. Auch der Rhombus kann berechnet werden, denn seine Diagonalen, die aufeinander senkrecht stehen, teilen denselben in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke.

2. Beispiele. Aufgabe 1. Die eine Seite eines Rechtecks ist $a = 52{,}7$ cm und der ihr gegenüberliegende Winkel, unter dem die Diagonalen sich schneiden, $\delta = 64^0 28'$. Wie groß sind die Diagonale und die zweite Seite? ($d = 98{,}805$ cm, $b = 83{,}578$ cm.)

Der Winkel δ ist als Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks doppelt so groß wie der Winkel, der im rechtwinkligen Dreieck der Seite a gegenüberliegt.

Aufgabe 2. Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ist $b = 48{,}76$ cm und der Schenkel $s = 32{,}84$ cm. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks? (Winkel an der Spitze gleich $95^0 52{,}2'$, Basiswinkel gleich $42^0 3{,}9'$.)

Aufgabe 3. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Höhe auf der Basis $h = 15{,}87$ cm und der Winkel an der Spitze $\gamma = 78^0 42'$. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks? (Basis 26,026 cm, Schenkel 20,523 cm.)

Aufgabe 4. Einem Kreise, dessen Radius $r = 3{,}47$ cm lang ist, ist ein regelmäßiges 15-Eck eingeschrieben. Der Umfang und der Inhalt des 15-Ecks sollen berechnet werden. ($u = 21{,}644$ cm, $f = 36{,}731$ qcm.)

Aufgabe 5. Der eine Winkel eines Rhombus ist $\alpha = 128^0 34'$ und die durch ihn hindurchgehende Diagonale $d = 22{,}76$ cm. Wie groß sind die Seiten und die zweite Diagonale? ($s = 26{,}226$ cm, $d_1 = 47{,}257$ cm.)

Zweiter Abschnitt.

Die Funktionen stumpfer Winkel und die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke.

§ 11. Vorbemerkungen.

Die sechs Bestimmungsstücke eines Dreiecks sind die drei Seiten und die drei Winkel. In der Planimetrie ist durch die vier Kongruenzsätze gezeigt, daß in vier Fällen ein Dreieck durch drei Stücke, die aus seinen sechs Stücken ausgewählt sind, eindeutig bestimmt ist. Es war daher möglich, mit Hilfe der in jedem Kongruenzsatze genannten drei Stücke die Größe der übrigen Stücke durch Konstruktion zu ermitteln. Eine Berechnung der Stücke aus den Maßzahlen der gegebenen Stücke war aber unmöglich, solange man zwischen den Maßzahlen der Winkel und denen der Strecken keine Beziehungen kannte. Der pythagoreische Lehrsatz allein gestattete aus zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte zu bestimmen. Ferner konnte man für den Fall, daß die drei Seiten des Dreiecks gegeben waren, einzelne Berechnungen ausführen. Von den hierbei in Betracht kommenden Formeln verdienen besonders genannt zu werden die Formeln für die Radien der vier berührenden Kreise und für den Inhalt des Dreiecks. Die Trigonometrie erst lehrt, wie man mit Hilfe der in jedem Kongruenzsatze genannten drei Stücke die Größe der übrigen Stücke durch Rechnung bestimmen kann. Den vier Kongruenzsätzen entsprechend gibt es also vier trigonometrische Grundaufgaben für die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke.

Da in den schiefwinkligen Dreiecken auch stumpfe Winkel auftreten können, wird es nötig, um allgemein gültige Formeln aufstellen zu können, die nur für spitze Winkel erklärten trigonometrischen Funktionen auch auf stumpfe Winkel anzuwenden.

§ 12. Die Funktionen stumpfer Winkel.

1. Der Sinus eines stumpfen Winkels. Die in § 9,2 abgeleitete Formel $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ führt uns, wenn $\frac{\alpha}{2}$ den Wert von 45^0

überschreitet, auf den Sinus eines stumpfen Winkels. Da die rechte Seite der Gleichung dann noch eine stets berechenbare Größe ist, so sind damit die Werte der Sinus stumpfer Winkel bestimmt. Es handelt sich nur darum, zu ermitteln, in welcher Beziehung diese Werte zu den Werten der Funktionen spitzer Winkel stehen. Man findet diese Beziehung durch folgende Überlegung. Ist α ein stumpfer Winkel und sein Sinus erklärt durch die Gleichung

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

so besteht für den spitzen Supplementwinkel des Winkels α die Gleichung

$$\sin\left(180^0 - \alpha\right) = 2\sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\S\,7, 1\right).$$

Hieraus erkennt man, da die rechten Seiten beider Gleichungen übereinstimmen, daß

$$\sin\alpha = \sin\left(180^0 - \alpha\right)$$

sein muß.

Der Sinus eines stumpfen Winkels ist gleich dem Sinus seines spitzen Supplementwinkels.

Diese Eigenschaft des Sinus muß bei der Berechnung schiefwinkliger Dreiecke wohl beachtet werden. Hat man nämlich den Logarithmus für den Sinus eines unbekannten Winkels gefunden, so kann der Winkel sowohl gleich dem spitzen Winkel sein, den man in den Tafeln findet, als auch der stumpfe Supplementwinkel dieses Winkels. Ob beide Winkel oder nur einer von ihnen brauchbar sind, das ergibt sich aus der Natur der Aufgabe.

2. Der Kosinus eines stumpfen Winkels. Für $\cos\alpha$ war § 9, 3 die Formel gefunden $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot$ Auch diese Formel führt, wenn α größer als 45^0 wird, auf den Kosinus eines stumpfen Winkels und kann, da die rechte Seite der Formel stets berechenbar ist, zur Erklärung der Kosinus stumpfer Winkel benutzt werden. Die Beziehung dieser Kosinus zu den Funktionen spitzer Winkel findet man durch eine ähnliche Überlegung wie oben. Ist α ein stumpfer Winkel und sein Kosinus erklärt durch die Gleichung

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

so besteht für den spitzen Supplementwinkel des Winkels α die Gleichung

$$\cos(180^0 - \alpha) = 1 - 2\sin^2\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot (\S\,7, 1).$$

Durch Addition beider Gleichungen findet man

$$\cos\alpha + \cos(180^0 - \alpha) = 2 - 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Nun ist aber der in der Klammer stehende Ausdruck nach § 7, 2 gleich eins. Man erhält also die Gleichung

$$\cos\alpha + \cos(180^0 - \alpha) = 0$$

oder

$$\mathbf{\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha).}$$

Der Kosinus eines stumpfen Winkels ist gleich dem Kosinus seines spitzen Supplementwinkels mit negativem Vorzeichen.

Der Kosinus eines stumpfen Winkels ist also stets negativ.

3. Erklärt man den Tangens und den Kotangens nach § 7, 4 als den Quotienten von Sinus und Kosinus, so findet man aus den beiden obigen Formeln

$$\mathbf{\operatorname{tng}\alpha = -\operatorname{tng}(180^0 - \alpha),}$$
$$\mathbf{\cot\alpha = -\cot(180^0 - \alpha).}$$

Die gefundenen Ergebnisse lassen sich zusammenfassen in den

Satz: Die Werte der Funktionen stumpfer Winkel sind gleich den absoluten Werten der entsprechenden Funktionen ihrer spitzen Supplementwinkel, aber negativ mit Ausnahme des Sinus, der auch für stumpfe Winkel positiv bleibt.

§ 13. Der Sinussatz.

1. Der Sinussatz. Fällt man in einem Dreieck ABC (Fig. 18 I und II) die Höhe $CD = h_c$, so ist nach der Erklärung des Sinus in dem rechwinkligen Dreieck ADC die Höhe $h_c = b\sin\alpha$. In dem rechtwinkligen Dreieck BDC ist, wenn β ein spitzer Winkel ist (Fig. I), $h_c = a\sin\beta$, wenn aber β ein stumpfer Winkel ist (Fig. II), $h_c = a\sin(180^0 - \beta)$. Nun ist aber nach § 12 $\sin(180^0 - \beta) = \sin\beta$. Man findet also auf jeden Fall, mag β ein spitzer oder ein stumpfer Winkel sein, $h_c = a\sin\beta$. Setzt man die beiden für h_c gefundenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$a\sin\beta = b\sin\alpha,$$

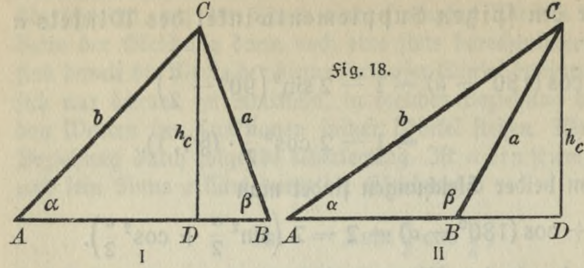


Fig. 18.

Dividiert man diese Gleichung durch $b \sin\beta$, so nimmt sie die Form an

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Diese Formel heißt **der Sinussatz**. Der Inhalt dieses Satzes läßt sich in Worten folgendermaßen aussprechen:

In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Bemerkung. Der Sinussatz gibt zuerst die Beziehung, welche zwischen den Seiten eines Dreiecks und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln besteht, durch eine Gleichung an. Seitdem Thales die Gleichheit der Basiswinkel in einem gleichschenkligen Dreieck ausgesprochen, hatte man in der Planimetrie nur soviel ermittelt, daß in jedem Dreieck der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüberliegen müsse, ohne jedoch über die gegenseitige Beziehung etwas Näheres angeben zu können.

2. Anwendung des Sinussatzes bei der Berechnung schiefwinkliger Dreiecke. Der Sinussatz wird angewendet zur Berechnung von Dreiecken, von denen eine Seite und zwei Winkel oder zwei Seiten und der der einen von diesen beiden Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind. Mit Hilfe des Sinussatzes löst man also diejenigen trigonometrischen Grundaufgaben, welche dem zweiten und vierten Kongruenzsatz entsprechen.

Bei der Lösung der Aufgabe, die dem vierten Kongruenzsatz entspricht, findet man zunächst eine Formel, durch die der der zweiten Seite gegenüberliegende Winkel berechnet werden kann. Hier ist nun zu beachten, was § 12, 1 gesagt wurde, daß in diesem Falle sowohl der in der Tafel stehende spitze Winkel wie auch sein stumpfer Supplementwinkel genommen werden kann. Ist der in der Aufgabe gegebene Winkel stumpf, so kommt selbstverständlich nur der spitze Winkel in Betracht. Ist der gegebene Winkel spitz, und die ihm gegenüberliegende Seite größer als die andere, so kann man auch nur den spitzen Winkel gebrauchen, da der kleineren von zwei Dreieckseiten kein stumpfer Winkel gegenüberliegen kann. Man erhält also nur ein Dreieck, wie es auch sein muß, da in diesem Falle die Bedingungen des vierten Kongruenzsatzes erfüllt sind. Nur für den Fall, daß die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite kleiner ist als die andere, muß man sowohl den spitzen wie den stumpfen Winkel nehmen und erhält zwei Dreiecke, deren Stücke zu berechnen sind.

Aufgabe 1. In einem Dreieck ABC ist $c = 537{,}4$ cm, $\alpha = 37^0\,15{,}7'$ und $\beta = 79^0\,42{,}4'$. Wie groß sind die beiden anderen Seiten?

Lösung. I. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$; $\quad \gamma = 63^0\,1{,}9'$.

II. $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, $\qquad$ III. $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$,

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}. \qquad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log c = & 2{,}73030 \\
\log\sin\alpha = & 9{,}78208 - 10 \\ \hline
\log Z^{1)} = & 12{,}51238 - 10 \\
\log\sin\gamma = & 9{,}95000 - 10 \\ \hline
\log a = & 2{,}56238 \\
a = & 365{,}08 \text{ cm.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log c = & 2{,}73030 \\
\log\sin\beta = & 9{,}99295 - 10 \\ \hline
\log Z = & 12{,}72325 - 10 \\
\log\sin\gamma = & 9{,}95000 - 10 \\ \hline
\log b = & 2{,}77325 \\
b = & 593{,}27 \text{ cm.}
\end{array}$$

Aufgabe 2. Von einem Dreieck ABC kennt man $a = 25{,}76$ cm, $c = 18{,}45$ cm und $\alpha = 36^0\,15'$. Es sollen die beiden anderen Winkel und die dritte Seite berechnet werden.

Lösung. I. $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{a}$; $\qquad \sin\gamma = \dfrac{c \cdot \sin\alpha}{a}$.

$$\begin{array}{rl}
\log c = & 1{,}26600 \\
\log\sin\alpha = & 9{,}77181 - 10 \\ \hline
\log Z = & 11{,}03781 - 10 \\
\log a = & 1{,}41095 \\ \hline
\log\sin\gamma = & 9{,}62686 - 10; \quad \gamma = 25^0\,3{,}4'.
\end{array}$$

Hier darf der stumpfe Winkel für γ nicht genommen werden, da a größer als c ist.

II. $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$; $\quad \beta = 118^0\,41{,}6'$.

---

1) Z ist Abkürzung für Zähler.

III. $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$; $\qquad b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

$$\begin{aligned}
\log a &= 1{,}41095 \\
\log\sin\beta &= 9{,}94310 - 10 \\
\hline
\log Z &= 11{,}35405 - 10 \\
\log\sin\alpha &= 9{,}77181 - 10 \\
\hline
\log b &= 1{,}58224; \quad b = 38{,}215 \text{ cm}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. In einem Dreieck ABC ist $a = 27{,}66$ cm, $b = 36{,}79$ cm und $\beta = 43^0 57'$. Wie groß sind die beiden anderen Winkel und die dritte Seite? ($\alpha = 31^0 27{,}2'$, $\gamma = 104^0 35{,}8'$, $c = 51{,}298$ cm.)

3. Praktische Anwendungen. Aufgabe 1: Zwei Punkte P und P_1 sind durch unzugängliches Gelände voneinander getrennt. Um ihre Entfernung voneinander zu bestimmen, hat man von P aus eine Standlinie $PQ = a = 136$ m abgesteckt und durch Visieren gefunden, daß $\angle P_1PQ = \alpha = 42^0 15'$ und $\angle PQP_1 = \beta = 73^0 30'$ ist. Die gesuchte Entfernung soll hieraus berechnet werden. (144,78 m).

Aufgabe 2. Die Spitze eines Berges erscheint von einem Punkt der Ebene unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 36^0 17'$. Nähert man sich dem Berge um $c = 236$ m, so erblickt man die Spitze unter dem Erhebungswinkel $\beta = 38^0 23'$. Wie hoch ist der Berg? (2366,5 m.)

Lösung. Der erste Beobachtungspunkt sei A, der zweite B, die Spitze des Berges C und der Fußpunkt des von C auf die Ebene gefällten Lotes D. Dann ist $\angle ACB = \beta - \alpha$ nach dem Satz vom Außenwinkel, und nach dem Sinussatz findet man aus dem Dreieck ABC die Gleichung $AC = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC ergibt sich dann

$$CD = AC \cdot \sin\alpha = \frac{c \cdot \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Aufgabe 3. Von einem Luftballon aus erblickt man den Fußpunkt eines $h = 31{,}5$ m hohen Turmes unter dem Senkungswinkel $\delta = 82^0 45'$ und die Spitze des Turmes unter dem Senkungswinkel $\delta_1 = 82^0 10'$. Wie hoch schwebt der Ballon über der Ebene, auf welcher der Turm steht? (418,31 m.)

Lösung. In Fig. 19 ist AB der Turm, C der Ballon. Aus dem Dreieck ABC findet man $BC : h = \sin(90^0 + \delta_1) : \sin(\delta - \delta_1)$. Da nun $\sin(90^0 + \delta_1) = \sin(90^0 - \delta_1)$, weil $90^0 - \delta_1$ der Supplementwinkel zu $90^0 + \delta_1$ ist, und $\sin(90^0 - \delta_1) = \cos\delta_1$ nach § 7, 1, so ist

$$BC = \frac{h\cos\delta_1}{\sin(\delta - \delta_1)}.$$

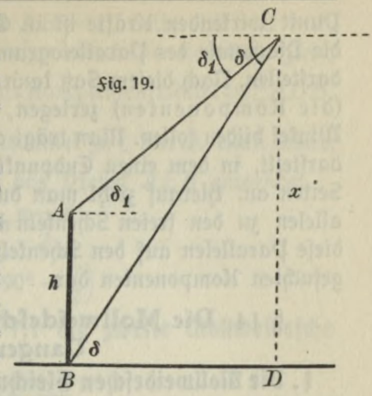


Fig. 19.

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck BDC die Seite $CD = x = BC \sin\delta$, man kann also nach Einsetzung des für BC gefundenen Wertes x berechnen.

Aufgabe 4. Auf einem Schiffe, das in der Richtung $N\ 15^0 20'\ O$ fährt, peilt man das Feuer eines Leuchtturms in $N\ 22^0 17'\ O$. Nach einer Fahrt von 8,4 Seemeilen peilt man das Feuer in $S\ 30^0 15'\ O$. Wie weit war man zu der Zeit der Peilungen von dem Leuchtturm entfernt? (7,5593 km und 1,2806 km.)

Erklärungen. $N\ 15^0 20'\ O$ bedeutet $15^0 20'$ von der Nordrichtung nach Osten abweichend. — Peilen heißt in der Seemannssprache, die Richtung, in der man einen Gegenstand erblickt, durch den Kompaß bestimmen. — Eine Seemeile ist 1852 m.

Lösung. Ist A (Fig. 20) der Ort der ersten Peilung, AB die Richtung, in der das Schiff fährt, und AN die Richtung nach Norden, dann ist nach der Aufgabe $\angle NAB = 15^0 20'$ und, wenn L der Leuchtturm ist, $\angle NAL = 22^0 17'$. Durch die zweite Peilung, die in B vorgenommen wird, wird $\angle SBL = 30^0 15'$ bestimmt. Dadurch ist in dem Dreieck ABL der Winkel ABL bekannt, weil $\angle ABS = \angle BAN$ als Wechselwinkel an Parallelen. Man kann nun mit Hilfe des Sinussatzes die gesuchten Strecken berechnen.

Aufgabe. 5. Auf einen Punkt wirkt eine Kraft von 97,56 kg. Diese Kraft wird in zwei Komponenten zerlegt, die mit ihr die Winkel $\alpha = 75^0 15'$ und $\beta = 38^0 29'$ bilden. Die Größe der beiden Komponenten soll berechnet werden. (103,06 kg und 66,32 kg.)

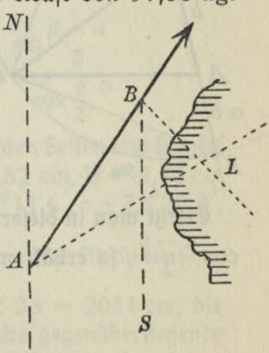


Fig. 20.

Erklärung. Kräfte werden ihrer Größe und Richtung nach durch Strecken dargestellt. Zwei einen Punkt angreifende Kräfte können stets durch eine dritte Kraft, die man ihre Resultierende oder Resultante nennt, ersetzt werden. Über diese Resultierende gibt Aufschluß der Satz vom Parallelogramm der Kräfte: die Resultierende zweier auf einen

Punkt wirkenden Kräfte ist in Größe und Richtung bestimmt durch die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten die beiden Kräfte darstellen. Nach diesem Satz kann man auch eine Kraft in zwei andere (die Komponenten) zerlegen, die mit der ersten Kraft gegebene Winkel bilden sollen. Man trägt an die Strecke, die die gegebene Kraft darstellt, in dem einen Endpunkt die gegebenen Winkel nach beiden Seiten an. Hierauf zieht man durch den anderen Endpunkt die Parallelen zu den freien Schenkeln der angetragenen Winkel. Die durch diese Parallelen auf den Schenkeln abgeschnittenen Strecken stellen die gesuchten Komponenten dar.

§ 14. Die Mollweideschen Gleichungen und der Tangentialsatz.

1. Die Mollweideschen Gleichungen. Beschreibt man um die Ecke C eines Dreiecks ABC (Fig. 21) mit a den Kreis, so schneidet dieser die Verlängerungen von AC in zwei Punkten, D und E. Diese Punkte verbinde man mit der Ecke B. Es ist dann in dem Dreieck ABD Seite $AB = c$, Seite $AD = a + b$ und $\angle ADB = \frac{\gamma}{2}$, da der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ($\triangle CBD$) halb so groß ist wie der Außenwinkel an der Spitze.

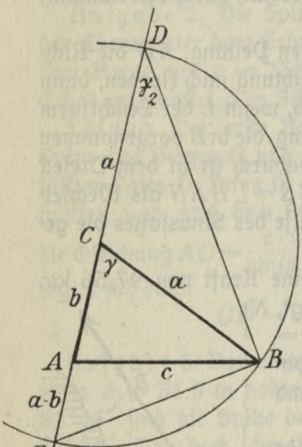


Fig. 21.

Ferner ist $\angle ABD = \frac{\gamma}{2} + \beta$

$$= 90^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \beta$$

$$= 90^0 - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Wendet man auf das Dreieck ABD den Sinussatz an, so findet man

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(90^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung nach § 7,1 $\sin\left(90^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ durch $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, so erhält man **die erste Mollweidesche Gleichung:**

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

In dem Dreieck AEB ist Seite $AB = c$, Seite $AE = a - b$, ferner, da der Winkel EBD als Peripheriewinkel im Halbkreis gleich einem Rechten ist, $\angle AEB = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ als Komplementwinkel zu $\angle ADB$, und $\angle ABE = \frac{\alpha - \beta}{2}$ als Komplementwinkel zu $\angle ABD$. Man erhält daher, wenn man den Sinussatz auf das Dreieck AEB anwendet,

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right)}$$

und hieraus mit Benutzung von § 7,1 **die zweite Mollweidesche Gleichung:**

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Bemerkung. Es sei hier bemerkt, daß die gefundenen Formeln, ebenso wie alle übrigen für die Dreiecksberechnung aufgestellten Formeln, durch die in ihnen vorkommenden für das allgemeine Dreieck stereotypen Bezeichnungen uns nur über die gegenseitige Lage der Stücke, die sie zueinander in Beziehung setzen, Auskunft geben. Man muß nach ihnen auch für jede andere Bezeichnung der Dreiecksstücke die entsprechenden Formeln aufstellen können. Vielfach bietet es dem Anfänger Schwierigkeit nach diesen Formeln zu rechnen, wenn einmal bei derselben Bezeichnung der Stücke b größer als a gegeben ist. Er kommt auf negative Differenzen, mit denen er nichts anzufangen weiß. Es muß dann bedacht werden, daß in der zur Ableitung der Formeln benutzten Figur a größer als b war. Ist einmal b größer als a, so muß bei derselben Bezeichnung den beiden Formeln die Form gegeben werden

$$\frac{b+a}{c} = \frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{b-a}{c} = \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

2. Anwendungen. Aufgabe 1: Die unbekannten Seiten und Winkel des Dreiecks zu berechnen, in dem $a + b = 7{,}52$ cm, $c = 4{,}46$ cm und $\alpha - \beta = 11^0 16'$ ist. ($\alpha = 59^0 27{,}6'$, $\beta = 48^0 11{,}6'$, $\gamma = 72^0 20{,}8'$, $a = 4{,}0311$ cm, $b = 3{,}4888$ cm.)

Man bestimmt zuerst die Winkel mit Hilfe der ersten Mollweideschen Gleichung, dann mit dem Sinussatz die Seiten.

Aufgabe 2. Der Umfang eines Dreiecks ist $2s = 2034$ cm, die eine Seite ist $a = 904$ cm, und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel $\alpha = 105^0 46'$. Die unbekannten Winkel und Seiten zu berechnen.

($\beta = 41^0 44{,}0'$, $\gamma = 32^0 30{,}0'$, $b = 625{,}30$ cm, $c = 504{,}72$ cm.)

Aufgabe 3. Die Richtungen zweier Kräfte, von denen die eine 26,57 kg größer ist als die andere, bilden miteinander den Winkel $\alpha = 125^0 22'$. Die Resultierende der beiden Kräfte ist $r = 63{,}15$ kg. Wie groß sind die beiden Kräfte, und welche Winkel bilden ihre Richtungen mit der Richtung der Resultierenden? ($a = 77{,}100$ kg, $b = 50{,}531$ kg, $\alpha = 84^0 38{,}1'$, $\beta = 40^0 43{,}9'$.)

Man vergleiche die Bemerkung zu § 13,3 Aufgabe 5.

3. Der Tangentialsatz. Aus den beiden Mollweideschen Gleichungen erhält man durch Division

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tng}\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \operatorname{tng}\frac{\gamma}{2}\,.$$

Vertauscht man die beiden Seiten dieser Gleichung und schafft dann $\operatorname{tng}\frac{\gamma}{2}$ auf die rechte Seite, so erhält man mit Benutzung von § 7,3

$$\operatorname{tng}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2}\,.$$

Diese Gleichung heißt **der Tangentialsatz.**

4. Anwendungen. Der Tangentialsatz wird angewendet zur Berechnung von Dreiecken, von denen zwei Seiten und der von den beiden Seiten eingeschlossene Winkel gegeben sind. Man löst also mit Hilfe des Tangentialsatzes die trigonometrische Grundaufgabe, welche dem ersten Kongruenzsatze entspricht.

Sind von einem Dreieck die Seiten a und b und der Winkel γ gegeben, so bestimmt man zunächst $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$, dann berechnet man mit dem Tangentialsatz $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Aus $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ findet man durch Addition α und durch Subtraktion β. Sind die Winkel bekannt, so kann c durch den Sinussatz berechnet werden.

Bei der Anwendung des Tangentialsatzes beachte man auch das, was bei den Mollweideschen Gleichungen in 1. Bemerkung gesagt ist.

Aufgabe 1. In einem Dreieck ABC ist $a = 517{,}6$ cm, $b = 302{,}8$ cm und $\gamma = 38^0 40'$. Wie groß sind die beiden anderen Winkel und die dritte Seite?

Lösung. I. $90^0 = 89^0 60'$

$$\frac{\gamma}{2} = 19^0 20'$$
$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 70^0 40'.$$

II. $a = 517{,}6$

$$b = 302{,}8$$
$$a - b = 214{,}8$$
$$a + b = 820{,}4$$

III. $\operatorname{tng}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$

$$\begin{aligned}
\log(a-b) &= 2{,}33203 \\
\log\cot\tfrac{\gamma}{2} &= 10{,}45488-10 \\
\hline
\log Z &= 12{,}78691-10 \\
\log(a+b) &= 2{,}91403 \\
\hline
\log\operatorname{tng}\tfrac{\alpha-\beta}{2} &= 9{,}87288-10 \\
\tfrac{\alpha+\beta}{2} &= 70^0 40{,}0' \\
\tfrac{\alpha-\beta}{2} &= 36^0 43{,}9' \\
\hline
\alpha &= 107^0 23{,}9' \\
\beta &= 33^0 56{,}1'.
\end{aligned}$$

IV. $c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$.

$$\begin{aligned}
\log b &= 2{,}48116 \\
\log\sin\gamma &= 9{,}79573-10 \\
\hline
\log Z &= 12{,}27689-10 \\
\log\sin\beta &= 9{,}74683-10 \\
\hline
\log c &= 2{,}53006 \\
c &= 338{,}89 \text{ cm.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. In einem Dreieck ABC ist $a=72{,}79$ cm, $b=93{,}56$ cm und $\gamma=42^0 42'$. Die beiden anderen Winkel und die dritte Seite sollen berechnet werden. ($\alpha=50^0 56{,}1'$, $\beta=86^0 21{,}9'$, $c=63{,}577$ cm.)

Aufgabe 3. In einem Dreieck ABC ist $b=841$ cm, $c=725$ cm und $\alpha=9^0 31{,}6'$. Wie groß sind die beiden anderen Winkel und die dritte Seite? ($\beta=126^0 52{,}4'$, $\gamma=43^0 36{,}0'$, $a=174{,}00$ cm.)

Aufgabe 4. In einem Dreieck ist $a=47{,}56$ cm, $b=25{,}38$ cm und $\gamma=58^0 36'$. Wie lang ist die Linie, welche den Winkel α halbiert? (22,252 cm.)

Zuerst berechne man aus dem gegebenen Dreieck α, dann aus dem Teildreieck mit dem Sinussatz die gesuchte Linie.

Aufgabe 5. Auf einen Punkt wirken zwei Kräfte $K_1=53{,}84$ kg und $K_2=48{,}26$ kg, deren Richtungen den Winkel $\alpha=112^0 45'$ miteinander bilden. Die Resultierende der beiden Kräfte soll berechnet werden. (56,730 kg.)

§ 15. Inkreis, Ankreise und Inhalt des Dreiecks.

1. Der Umfang des Dreiecks. Unter dem Umfang eines Dreiecks versteht man die Summe seiner drei Seiten. Den Umfang pflegt man durch $2s$ zu bezeichnen, so daß man die Gleichung hat

$$a+b+c=2s.$$

Subtrahiert man von beiden Seiten dieser Gleichung $2a$, so erhält man

$$-a+b+c=2s-2a=2(s-a).$$

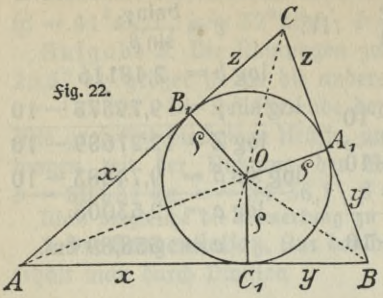


Fig. 22.

Ähnlich findet man

$$a - b + c = 2(s - b),$$
$$a + b - c = 2(s - c).$$

2. Der Inkreis. Unter dem Inkreis eines Dreiecks ABC (Fig. 22) versteht man den innerhalb des Dreiecks liegenden Kreis, der die drei Seiten des Dreiecks berührt. Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt O der drei Linien, welche die Winkel des Dreiecks halbieren. Der Radius des Inkreises wird durch ϱ bezeichnet. Man findet ihn, wenn man von O die Senkrechten auf die Seiten fällt. Es ist $OA_1 = OB_1 = OC_1 = \varrho$.

Die Abschnitte, in welche die Seiten durch die Berührungspunkte des Inkreises geteilt werden, lassen sich in einfacher Weise durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken. Bezeichnet man die Strecken von den Ecken bis zu den Berührungspunkten des Inkreises, die als Tangenten von einem Punkt an einen Kreis einander gleich sein müssen, wie es in der Figur geschehen, bzw. mit x, y und z, dann ist

$$2x + 2y + 2z = 2s \text{ oder}$$
$$x + y + z = s.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $y + z$ durch a, dann findet man

$$x = s - a.$$

Ersetzt man in derselben Gleichung $x + z$ durch b und dann $x + y$ durch c, so erhält man

$$y = s - b \quad \text{und} \quad z = s - c.$$

3. Der Halbwinkelsatz. Nach dem soeben gefundenen Ergebnis ist in dem rechtwinkligen Dreieck AOC_1 die Seite AC_1 gleich $s - a$, ferner ist $OC_1 = \varrho$ und nach der Konstruktion $\angle OAC_1 = \frac{\alpha}{2}$. Es besteht also die Gleichung

$$\operatorname{tng} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s - a}.$$

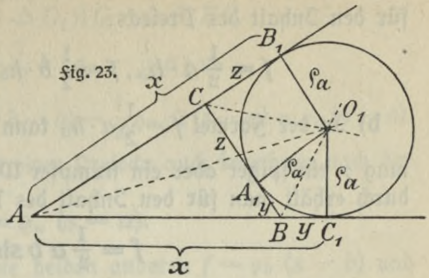
Diese Gleichung heißt **der Halbwinkelsatz.**

Für die übrigen Winkel des Dreiecks hat man entsprechend

$$\operatorname{tng} \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s - b} \text{ und } \operatorname{tng} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s - c}.$$

4. Die Ankreise. Unter einem Ankreise eines Dreiecks ABC (Fig. 23) versteht man einen Kreis, der eine Seite des Dreiecks zwischen den Ecken und die beiden anderen Seiten in ihren Verlängerungen berührt. In der Figur ist der Ankreis an die Seite a gezeichnet. Der Mittelpunkt O_1 dieses Ankreises ist der Punkt, in welchem sich die Halbierungslinie des Winkels bei A und die Halbierungslinien der Außenwinkel bei B und C schneiden. Man nennt den Radius dieses Ankreises ϱ_a. Es ist $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = \varrho_a$. Die Radien der Ankreise, welche die Seiten b und c zwischen den Ecken berühren, heißen ϱ_b und ϱ_c.

Fig. 23.



Bezeichnet man die Strecken von den Ecken bis zu den Berührungspunkten des Ankreises, wie es in der Figur geschehen ist, mit x, y und z, dann ist

$$AB_1 = x = b + z$$
$$AC_1 = x = c + y.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen folgt $2x = b + c + z + y$. Nun ist aber, wie aus der Figur ersichtlich ist, $y + z = a$, also ist $2x = a + b + c = 2s$ und

$$x = s.$$

5. Die trigonometrische Formel für den Radius eines Ankreises. Nach dem soeben gefundenen Ergebnis ist in dem rechtwinkligen Dreieck AO_1C_1 die Seite AC_1 gleich s, ferner ist $O_1C_1 = \varrho_a$ und $\angle O_1AC_1 = \frac{\alpha}{2}\cdot$ Es besteht daher die Gleichung

$$\operatorname{tng}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{s} \text{ oder } \varrho_a = s \operatorname{tng}\frac{\alpha}{2}\cdot$$

Die Formeln für die Radien der beiden anderen Ankreise sind

$$\varrho_b = s \operatorname{tng}\frac{\beta}{2} \text{ und } \varrho_c = s \operatorname{tng}\frac{\gamma}{2}\cdot$$

6. Formeln für den Inhalt des Dreiecks. **a)** In der Planimetrie ist der Satz gefunden: Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus seiner Grundlinie und Höhe. Da man jede Seite des Dreiecks als die Grundlinie ansehen kann, so hat man hiernach drei Formeln für den Inhalt des Dreiecks:

$$f = \frac{1}{2} a \cdot h_a,\ f = \frac{1}{2} b \cdot h_b,\ f = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

b) In der Formel $f = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ kann man $h_a = b \sin \gamma$ setzen, es mag γ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel sein (vgl. § 13, 1). Hierdurch erhält man für den Inhalt des Dreiecks die Formel

$$f = \frac{1}{2} a b \sin \gamma.$$

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkels.

c) Nach dem Sinussatz ist $\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, also $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$. Setzt man diesen Wert für b in die soeben für den Inhalt gefundene Formel ein, so findet man

$$f = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}.$$

Die dieser Formel entsprechenden Formeln für die Seiten b und c lassen sich leicht bilden.

d) Verbindet man den Mittelpunkt O des Inkreises des Dreiecks ABC (Fig. 22) mit den Ecken des Dreiecks, so teilen diese Verbindungslinien das Dreieck in drei Teildreiecke mit der Höhe ϱ und den Grundlinien a, b und c. Es ist daher

$$\begin{aligned} f = \triangle ABC &= \triangle OBC + \triangle OCA + \triangle OAB \\ &= \frac{1}{2} a \cdot \varrho + \frac{1}{2} b \cdot \varrho + \frac{1}{2} c \cdot \varrho \\ &= \frac{1}{2} \varrho (a + b + c) = \frac{1}{2} \varrho \cdot 2s = \varrho s. \end{aligned}$$

Der Inhalt eines Dreiecks ist also auch bestimmt durch die Formel

$$f = \varrho s.$$

e) Verbindet man den Mittelpunkt O_1 des Ankreises des Dreiecks ABC (Fig. 23) mit den Ecken des Dreiecks, so entstehen drei Dreiecke mit der Höhe ϱ_a, deren Grundlinien a, b und c sind. Der Inhalt des Dreiecks ABC läßt sich als algebraische Summe der Inhalte dieser Dreiecke darstellen. Wie man aus der Figur leicht erkennt, ist

$$f = \triangle ABC = \triangle O_1AB + \triangle O_1AC - \triangle O_1BC$$
$$= \frac{1}{2}\, c \cdot \varrho_a + \frac{1}{2}\, b \cdot \varrho_a - \frac{1}{2}\, a \cdot \varrho_a$$
$$= \frac{1}{2}\, \varrho_a (c + b - a) = \frac{1}{2}\, \varrho_a \cdot 2\,(s - a) = \varrho_a (s - a).$$

Man kann daher den Inhalt eines Dreiecks auch berechnen nach der Formel

$$f = \varrho_a\, (s - a).$$

Dieser Formel entsprechen die beiden anderen $f = \varrho_b\, (s - b)$ und $f = \varrho_c\, (s - c)$.

7. Die heronische Formel. Hero von Alexandrien, der um 110 v. Chr. lebte und ein Lehrbuch für Feldmesser verfaßt hat, hat eine Formel aufgestellt, durch welche es möglich ist, den Inhalt eines Dreiecks unmittelbar aus den Maßzahlen der Seiten zu berechnen. Man kann diese Formel in folgender Weise herleiten.

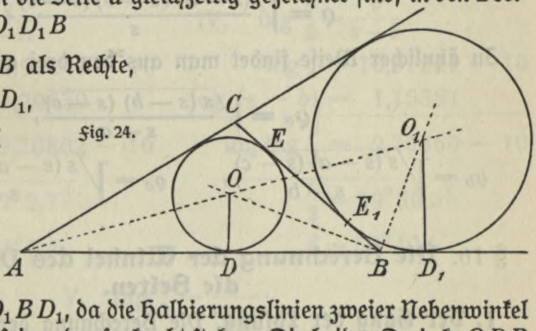
Multipliziert man die in 6. d) und e) gefundenen Formeln $f = \varrho s$ und $f = \varrho_a\, (s - a)$, so erhält man

$$f^2 = \varrho \cdot \varrho_a\, s\, (s - a).$$

Nun ist in Fig. 24, in welcher für das Dreieck ABC der Inkreis und der Ankreis an die Seite a gleichzeitig gezeichnet sind, in den Dreiecken ODB und O_1D_1B

$\angle ODB = \angle O_1D_1B$ als Rechte,
$\angle OBD = \angle BO_1D_1$,
weil beide Winkel Komplementwinkel des Winkels O_1BD_1 sind. Der Winkel OBD ist der Komplementwinkel zu Winkel O_1BD_1, da die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel (BO und BO_1) aufeinander senkrecht stehen. Die beiden Dreiecke ODB und O_1D_1B sind daher einander ähnlich. Aus der Ähnlichkeit folgt

Fig. 24.



$$\varrho : (s - c) = (s - b) : \varrho_a$$

oder, da in jeder Proportion das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren ist,

$$\varrho\varrho_a = (s - b)\,(s - c).$$

Setzt man diesen Wert für $\varrho\varrho_a$ in die Formel für f^2 ein, so findet man

$$f = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Die letzte Gleichung heißt **die heronische Formel.**

Bemerkung. Es gibt Dreiecke, deren Inhalt sich mit Hilfe der Maßzahlen der Seiten durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt. Ein solches Dreieck war schon dem Hero bekannt. Es ist das Dreieck, dessen Seiten $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm sind. Der Inhalt dieses Dreiecks beträgt 84 qcm. Weitere Dreiecke sind: $a = 4$ cm, $b = 13$ cm, $c = 15$ cm, $f = 24$ qcm; $a = 5$ cm, $b = 29$ cm, $c = 30$ cm, $f = 72$ qcm; $a = 13$ cm, $b = 30$ cm, $c = 37$ cm, $f = 180$ qcm.

8. Die Berechnung der Radien des Inkreises und der Ankreise durch die Seiten. Die vier in 6. gefundenen Formeln $f = \varrho s$, $f = \varrho_a (s-a)$, $f = \varrho_b (s-b)$, $f = \varrho_c (s-c)$ machen es mit Hilfe der heronischen Formel möglich, auch die Radien der die Seiten des Dreiecks berührenden Kreise durch die Maßzahlen der Seiten zu berechnen. Aus der Formel $f = \varrho s$ findet man

$$\varrho = \frac{f}{s} = \frac{\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{s} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s^2}}$$

und hieraus

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}.$$

In ähnlicher Weise findet man aus den drei anderen Formeln

$$\varrho_a = \sqrt{\frac{s\,(s-b)\,(s-c)}{s-a}},$$

$$\varrho_b = \sqrt{\frac{s\,(s-a)\,(s-c)}{s-b}}, \qquad \varrho_c = \sqrt{\frac{s\,(s-a)\,(s-b)}{s-c}}.$$

§ 16. Die Berechnung der Winkel des Dreiecks durch die Seiten.

1. Der Gang der Lösung. Die Berechnung der Winkel des Dreiecks durch die Seiten kann mit Hilfe von zwei Formeln ausgeführt werden, die in dem vorhergehenden Paragraphen gefunden sind. Durch die gegebenen Maßzahlen der Seiten bestimmt man zunächst $2s$ und hieraus s, dann berechnet man $s-a$, $s-b$ und $s-c$ und nun $\log \varrho$ mit Benutzung der Formel § 15, 8.

Ist $\log \varrho$ gefunden, dann kann man die Winkel des Dreiecks durch den Halbwinkelsatz berechnen.

Bemerkung. Es empfiehlt sich, stets alle drei Winkel durch den Halbwinkelsatz zu berechnen und nicht nach Ermittlung von zwei Winkeln, etwa α und β, den dritten Winkel durch die Gleichung $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ zu bestimmen. Man hat dann, wenn jeder Winkel für sich berechnet ist, die Möglichkeit, die Rechnung durch Addition der drei für die Winkel gefundenen Werte zu prüfen. Sollte hierbei die Summe der Winkel nicht genau 180^0 betragen, sondern ein wenig mehr oder weniger, so braucht die Rechnung nicht falsch zu sein. Derartige kleine Abweichungen sind bei der Rechnung mit Logarithmen möglich.

2. Anwendungen. Aufgabe 1. Die Seiten eines Dreiecks sind $a = 26{,}78$ cm, $b = 28{,}54$ cm und $c = 30{,}26$ cm. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

Lösung: I.

$$\begin{aligned} a &= 26{,}78 \\ b &= 28{,}54 \\ c &= 30{,}26 \\ \hline 2s &= 85{,}58 \\ s &= 42{,}79 \\ s-a &= 16{,}01 \\ s-b &= 14{,}25 \\ s-c &= 12{,}53 \end{aligned}$$

II. $$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$$

$$\begin{aligned} \log(s-a) &= 1{,}20439 \\ \log(s-b) &= 1{,}15381 \\ \log(s-c) &= 1{,}09795 \\ \hline \log Z &= 3{,}45615 \\ \log s &= 1{,}63134 \\ \hline 2\log\varrho &= 1{,}82481 \\ \log\varrho &= 0{,}91241 \end{aligned}$$

III. $$\operatorname{tng}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}.$$

$$\begin{aligned} \log\varrho &= 10{,}91241 - 10 \\ \log(s-a) &= 1{,}20439 \\ \hline \log\operatorname{tng}\frac{\alpha}{2} &= 9{,}70802 - 10 \\ \frac{\alpha}{2} &= 27^0 2{,}7' \\ \alpha &= 54^0 5{,}4' \end{aligned}$$

IV. $$\operatorname{tng}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}.$$

$$\begin{aligned} \log\varrho &= 10{,}91241 - 10 \\ \log(s-b) &= 1{,}15381 \\ \hline \log\operatorname{tng}\frac{\beta}{2} &= 9{,}75860 - 10 \\ \frac{\beta}{2} &= 29^0 50{,}3' \\ \beta &= 59^0 40{,}6' \end{aligned}$$

V. $$\operatorname{tng}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}.$$

$$\begin{aligned} \log\varrho &= 10{,}91241 - 10 \\ \log(s-c) &= 1{,}09795 \\ \hline \log\operatorname{tng}\frac{\gamma}{2} &= 9{,}81446 - 10 \\ \frac{\gamma}{2} &= 33^0 7{,}0' \\ \gamma &= 66^0 14{,}0'. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Die Seiten eines Dreiecks sind $a = 37{,}56$ cm, $b = 34{,}68$ cm und $c = 31{,}42$ cm. Die Winkel des Dreiecks sollen berechnet werden. ($\alpha = 69^0 3{,}0'$, $\beta = 59^0 34{,}4'$, $\gamma = 51^0 22{,}4'$.)

Aufgabe 3. Eine Schnur von 34,5 m Länge ist an den Enden zusammengeknüpft. Sie wird durch drei Pfähle straff gespannt, die so aufgestellt sind, daß die zwischen ihnen liegenden Teile der Schnur sich wie 3 : 5 : 7 verhalten. Wie groß sind die Winkel, welche von der Schnur an den einzelnen Pfählen gebildet werden? ($\alpha = 21^0 47{,}2'$, $\beta = 38^0 12{,}8'$, $\gamma = 120^0$.)

Um die Länge der Teile der Schnur zu bestimmen, dividiert man 34,5 durch $3 + 5 + 7 = 15$ und multipliziert dann den Quotienten der Reihe nach mit 3, 5 und 7.

3. Zusammenfassung der Ergebnisse für die Dreiecksberechnung. Mit der eben behandelten Aufgabe sind die vier Grundaufgaben der Trigonometrie (vgl. § 11) gelöst. Die Wege der Lösung sind, um sie noch einmal kurz zusammenzustellen, folgende:

Sind von einem Dreieck **eine Seite und zwei Winkel** gegeben (zweiter Kongruenzsatz) oder **zwei Seiten und der der einen Seite gegenüberliegende Winkel** (vierter Kongruenzsatz), so rechnet man mit dem **Sinussatz.**

Sind von einem Dreieck **zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel** gegeben (erster Kongruenzsatz), so bestimmt man zunächst die unbekannten Winkel mit Hilfe des **Tangentialsatzes** und dann die dritte Seite durch den **Sinussatz.**

Sind von einem Dreieck **die drei Seiten** gegeben (dritter Kongruenzsatz), so bestimmt man zunächst s, $s - a$, $s - b$, $s - c$, dann $\log \varrho$ und hierauf die Seiten mit dem **Halbwinkelsatz.**

4. Bemerkung. Auch ohne die in 3. genannten Wege einzuschlagen, kann man lediglich mit Benutzung der Gleichungen, welche die trigonometrischen Funktionen erklären, und mit Hilfe der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke, wie sie im ersten Abschnitt gelehrt wurde, die vier trigonometrischen Grundaufgaben lösen. Man hat hierzu nur nötig, die schiefwinkligen Dreiecke durch eine geeignete Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zu zerlegen und dann zunächst durch die gegebenen Stücke die Höhe zu berechnen. Ist die Höhe gefunden, so erkennt man aus der Figur leicht, wie die Berechnung der einzelnen Dreiecksstücke nun ausgeführt werden kann. Wenn von einem Dreieck a, α, β gegeben ist, so zieht man die Höhe h_c. Kennt man a, b, γ, so ist entweder h_a oder h_b zu ziehen, ist a, b, α gegeben, so wird die

Höhe h_c gezogen. Sind die drei Seiten des Dreiecks a, b und c gegeben, so zieht man am besten die Höhe, welche auf der größten Seite senkrecht steht. Nun aber stößt man zunächst auf Schwierigkeiten, da keins der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke die Berechnung der Höhe gestattet. In diesem Falle gelingt die Berechnung der Höhe mit Hilfe der heronischen Formel. Nach dieser Formel ist

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nun ist aber, wenn a die größte Seite ist, also h_a berechnet werden soll, auch $f = \frac{1}{2} a h_a$. Setzt man diese beiden Werte für f einander gleich, so erhält man eine Gleichung, aus der h_a berechnet werden kann.

§ 17. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz und der Kosinussatz.

1. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz. In der Planimetrie besitzt der allgemeine pythagoreische Lehrsatz zwei verschiedene Formen. Man muß unterscheiden, ob die Seite, die man berechnen soll, einem spitzen oder einem stumpfen Winkel gegenüberliegt. Für den ersten Fall (Fig. 25) lautet der Satz:

In jedem Dreieck ist das Quadrat der Seite, die einem **spitzen Winkel** gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten **vermindert** um das doppelte Rechteck aus der einen dieser beiden Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

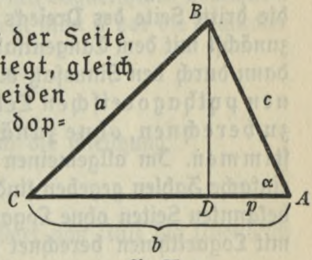


Fig. 25.

Die Formel hierfür ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bp.$$

Ist der der gesuchten Seite gegenüberliegende Winkel stumpf (Fig. 26), so nimmt der Satz die Form an:

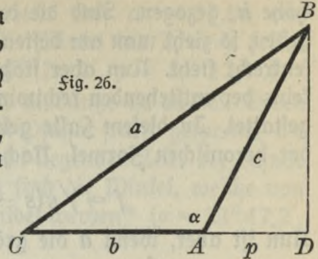
In jedem Dreieck ist das Quadrat der Seite, die einem **stumpfen Winkel** gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten **vermehrt** um das doppelte Rechteck aus der einen dieser beiden Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

Die Formel hierfür ist

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bp.$$

Mit Benutzung der trigonometrischen Funktionen kann man die Projektion p in den beiden genannten Formeln durch die Seite c und den Winkel α ausdrücken. Wie man leicht aus der Fig. 25 erkennt, ist im ersten Falle $p = c\cos\alpha$. Im zweiten Falle (Fig. 26) ist

Fig. 26.



$$p = c\cos(180^0 - \alpha)$$

oder, da $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$ ist (§ 12, 2), $p = -c\cos\alpha$. Setzt man diese Werte für p in die obigen Gleichungen ein, so erhält man in beiden Fällen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Dies ist der pythagoreische Lehrsatz in trigonometrischer Form. Er ist für den spitzen und stumpfen Winkel gleichlautend. Ist α ein stumpfer Winkel, so wird wegen des negativen Wertes des Kosinus das Minuszeichen in ein Pluszeichen verwandelt.

2. **Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes.** Handelt es sich darum, aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die dritte Seite des Dreiecks zu berechnen, so muß man nach § 14, 4 zunächst mit dem Tangentialsatz die unbekannten Winkel berechnen und dann durch den Sinussatz die gesuchte Seite. Durch den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz ist es möglich, die dritte Seite zu berechnen, ohne zunächst die unbekannten Winkel zu bestimmen. Im allgemeinen wird sich dies aber nur empfehlen, wenn einfache Zahlen gegeben sind, die eine Berechnung der Quadrate der bekannten Seiten ohne Logarithmen gestatten. Müssen die Quadrate mit Logarithmen berechnet werden, so wird man, auch wenn es sich nur um die Berechnung der dritten Seite handelt, besser tun, wenn man zunächst mit dem Tangentialsatz die Winkel bestimmt und dann den Sinussatz zur Berechnung der Seite benutzt.

3. **Vereinfachung der logarithmischen Rechnung durch Einführung eines Hilfswinkels.** Die Logarithmen, welche bei der Berechnung eines Produkts, eines Quotienten, einer Potenz und einer Wurzel große Rechenvorteile gewähren, werden unbequem, sobald es sich um die Berechnung einer Summe oder einer Differenz handelt. Man hat, wie bekannt, dann jedes Glied einzeln mit Logarithmen zu berechnen und hierauf die gefundenen Numeri zu addieren. Auf Grund der beiden Formeln

$$1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \ (\S\ 7,2) \quad \text{und} \quad 1 + \operatorname{tng}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ (\S\ 7,5)$$

kann man aber die Rechnung einfacher gestalten.

I. Hat man **eine Differenz $a - b$**, in der $a > b$ ist, so setzt man den Minuendus a vor die Klammer und erhält dann

$$a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right).$$

Nun setzt man

$$\frac{b}{a} = \sin^2\varphi.$$

Dies ist stets möglich, d. h. es läßt sich stets ein Winkel φ finden, der die aufgestellte Gleichung erfüllt, da $\sin\varphi$ alle Werte von 0 bis 1 annehmen kann, und der Bruch $\frac{b}{a}$, weil nach der Voraussetzung $a > b$ ist, stets einen Wert besitzen muß, der kleiner als eins ist. Durch die Einführung von $\sin^2\varphi$ erhält man nun die Gleichung

$$a - b = a(1 - \sin^2\varphi) \quad \text{oder}$$
$$a - b = a\cos^2\varphi.$$

Das auf der rechten Seite stehende Produkt, welches den Wert der Differenz $a - b$ darstellt, läßt sich nun leicht mit Logarithmen berechnen.

II. Hat man **eine Summe $a + b$**, so setzt man a vor die Klammer und erhält

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Nun bestimmt man einen Winkel φ durch die Gleichung

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tng}^2\varphi.$$

Dies ist immer möglich, da $\operatorname{tng}\varphi$ jeden Wert von Null bis Unendlich annehmen kann. Man erhält hierdurch

$$a + b = a(1 + \operatorname{tng}^2\varphi) \quad \text{oder nach § 7, 5}$$
$$a + b = \frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Die Berechnung der Summe ist damit auf die Berechnung eines Quotienten zurückgeführt.

Die eben auseinandergesetzte Art der Berechnung einer Differenz und einer Summe nennt man die Berechnung durch Einführung eines Hilfswinkels.

Mit Benutzung eines Hilfswinkels kann man die unmittelbare Berechnung der Seite c eines Dreiecks, von dem a, b und γ gegeben sind, einfach gestalten. In die rechte Seite der Gleichung

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

fügt man die Differenz $2ab - 2ab$ ein. Hierdurch wird der Wert der rechten Seite nicht geändert, da die eingefügte Größe gleich Null ist, und man erhält

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab\cos\gamma \\ &= (a+b)^2 - 2ab(1+\cos\gamma) \\ &= (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2} \quad (\S\ 9,\ 5) \\ &= (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2}\right]. \end{aligned}$$

Setzt man nun den in der eckigen Klammer stehenden Subtrahendus gleich $\sin^2\varphi$, so erhält man $c^2 = (a+b)^2\cos^2\varphi$ oder

$$c = (a+b)\cos\varphi.$$

4. Der Kosinussatz. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz kann auch benutzt werden, um die Winkel eines Dreiecks zu berechnen, dessen Seiten bekannt sind. Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ folgt durch einfache Rechnung

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Diese Gleichung, der für die Winkel β und γ ähnliche Gleichungen entsprechen, heißt **der Kosinussatz.**

5. Herleitung neuer Formeln durch den Kosinussatz. Der Kosinussatz wird wegen der unbequemen Berechnung der rechten Seite selten zur Bestimmung der Winkel eines Dreiecks gebraucht. Es lassen sich aber mit Hilfe des Kosinussatzes recht brauchbare Formeln für die Berechnung der Winkel herleiten.

Addiert man die Gleichung, welche den Kosinussatz darstellt, zu der identischen Gleichung $1 = 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} 1 + \cos\alpha &= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \end{aligned}$$

oder, da die Differenz zweier Quadrate gleich dem Produkt aus Summe und Differenz der Grundzahlen ist,

$$1 + \cos\alpha = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (§ 9, 5), die in den Klammern stehenden Ausdrücke auf der rechten Seite kann man ersetzen durch $2s$ und $2(s-a)$ (§ 15, 1). Dadurch erhält man

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Subtrahiert man die Gleichung, welche den Kosinussatz darstellt, von der identischen Gleichung $1 = 1$, so findet man

$$1 - \cos\alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

Nun ist $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (§ 9, 5), und die in den Klammern auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke kann man durch $2(s-b)$ und $2(s-c)$ ersetzen. Hierdurch findet man aus der zuletzt erhaltenen Gleichung

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Durch Division der beiden für $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ gefundenen Werte erhält man schließlich

$$\operatorname{tng}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

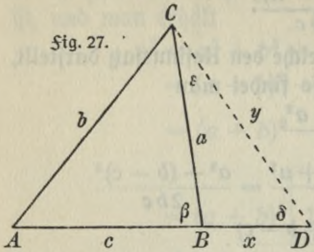
Die Formel für den Kotangens erhält man, wenn man bedenkt, daß der Kotangens der reziproke Wert des Tangens ist.

6. Anwendungen. Jede der drei soeben gefundenen Formeln ist dazu geeignet, die Winkel des Dreiecks aus den Seiten zu berechnen. Die Berechnung ist aber, wenn alle drei Winkel bestimmt werden sollen, nicht ganz so einfach, wie die nach der in § 16, 1 angegebenen Methode. Ist es aber nur nötig einen Winkel des Dreiecks zu berechnen, so wendet man am besten eine dieser Formeln an.

Aufgabe. Drei Punkte A, B und C liegen in einer Ebene so, daß die Entfernung von A bis B 7,5 km, von A bis C 9,4 km und von B bis C 5,8 km beträgt. Auf der geradlinigen Verlängerung von AB über B hinaus liegt der Punkt D so, daß von ihm aus die Entfernung von B bis C unter dem Gesichtswinkel $\delta = 12^0 45'$ erscheint. Es sollen die Entfernungen des Punktes D von A, B und C berechnet werden.

Lösung. (Fig. 27). Es handelt sich darum, aus dem Dreieck BDC die Seiten $BD = x$ und $CD = y$ zu berechnen. Ist x bestimmt, so ist damit auch $AD = c + x$ gefunden. In dem Dreieck BDC sind nun aber nur a und δ bekannt, man kann aber $\angle\, CBD$ berechnen, so wie man aus dem Dreieck ABC, dessen Seiten gegeben sind, den Winkel β berechnet hat. Da es sich in dem Dreieck ABC also nur um die Bestimmung eines Winkels handelt, rechnet man nach der Formel

Fig. 27.



$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}.$$

Ist β gefunden, so kann man die gesuchten Strecken x und y aus dem Dreieck BDC nach dem Sinussatz berechnen. Man findet $DC = 26{,}276$ km, $DB = 25{,}527$ km und $DA = 33{,}027$ km.

7. Ableitung der heronischen Formel durch die gefundenen Formeln. Ersetzt man in der Gleichung

$$f = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha \quad (\S\ 15, 6\,\mathrm{b})$$

den Sinus des Winkels α nach § 9, 2 durch die Funktionen des halben Winkels, so erhält man

$$f = bc \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Wenn man in dieser Gleichung für $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ die in 5. gefundenen Werte einsetzt, so erhält man, da bc sich heben läßt, die heronische Formel (§ 15, 7).

§ 18. Berechnung eines Dreiecks mit Benutzung von Hilfsdreiecken.

1. Zur Berechnung eines Dreiecks sind häufig nicht nur Seiten und Winkel gegeben, sondern auch Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierende usw. Man verfährt dann ähnlich wie bei der Konstruktion von Dreiecken aus solchen Stücken. Man zeichnet ein Dreieck und in diesem Dreieck die Stücke, welche zur Berechnung des Dreiecks gegeben sind. Nun sucht man unter den dadurch entstehenden Teil- oder Hilfsdreiecken dasjenige aus, welches man durch die gegebenen Stücke nach den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Regeln berechnen kann. Durch dieses Hilfsdreieck gelingt es dann, Stücke des zu berechnenden

Dreiecks zu ermitteln, so daß schließlich die Berechnung desselben mit Hilfe bekannter Seiten und Winkel ausgeführt werden kann. Das soeben Gesagte wird am besten durch die folgenden Aufgaben klar werden.

2. Aufgaben. Bei den folgenden Aufgaben zeichne man sich stets nach den Angaben der Aufgabe die Figur und verfolge dann an dieser Figur die für die Lösung der Aufgabe gemachten Andeutungen.

Aufgabe 1. Von einem Dreieck ABC kennt man die Seite $a = 86{,}44$ cm, den ihr gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 57^0 23'$ und die von C auf AB gefällte Höhe $CD = h_c = 65{,}78$ cm. Die unbekannten Seiten und Winkel zu berechnen.

Lösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC findet man durch die Gleichung, welche sin α erklärt, b. Nun wendet man auf das Dreieck ABC den Sinussatz an. ($b = 78{,}096$ cm, $c = 98{,}175$ cm, $\beta = 49^0 33{,}1'$, $\gamma = 73^0 3{,}9'$.)

Aufgabe 2. In einem Dreieck ABC ist $\alpha = 42^0 15'$ und $\beta = 63^0 25'$. Die Halbierungslinie des dritten Winkels ist $CF = w_\gamma = 25{,}67$ cm. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

Lösung. Man bestimmt zunächst $\frac{\gamma}{2}$, dann berechnet man aus dem Dreieck AFC durch den Sinussatz die Seite b. Nun wendet man auf das Dreieck ABC wieder den Sinussatz an. ($a = 28{,}216$ cm, $b = 37{,}529$ cm, $c = 40{,}406$ cm.)

Aufgabe 3. Die eine Seite eines Dreiecks ABC ist $b = 68{,}56$ cm, Höhe und Mittellinie von der Ecke C sind $CD = h_c = 45{,}23$ cm und $CE = m_c = 57{,}88$ cm. Die beiden unbekannten Seiten und die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Lösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC findet man durch b und h_c den Winkel α. Nun kann man aus dem Dreieck AEC durch den Sinussatz zunächst $\angle AEC$ und dann $AE = \frac{c}{2}$ berechnen. Die noch fehlenden Stücke des Dreiecks findet man jetzt, wenn man auf das Dreieck ABC den Tangentialsatz anwendet. ($a = 49{,}745$ cm, $c = 30{,}818$ cm, $\alpha = 41^0 16{,}7'$, $\beta = 114^0 36{,}0'$, $\gamma = 24^0 7{,}3'$.)

Aufgabe 4. Man kennt von einem Dreieck ABC die Seite $AC = b = 841$ cm, die Mittellinie $CE = m_c = 586{,}5$ cm und $\angle CEB = \delta = 81^0 28'$. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

Lösung. Aus dem Dreieck AEC, in welchem $\angle AEC = 180^0 - \delta$ ist, bestimmt man durch den Sinussatz α und $AE = \frac{c}{2}\cdot$ Hierauf findet man aus dem Dreieck ABC mit Hilfe des Tangentialsatzes die beiden anderen Winkel. ($\alpha = 43^0 36{,}2'$, $\beta = 53^0 8{,}0'$, $\gamma = 83^0 15{,}8'$.)

Aufgabe 5. Von einem Dreieck ABC kennt man $b = 16{,}9$ cm, $\alpha = 67^0 22'$ und $CE = m_c = 17{,}2$ cm. Wie groß sind die beiden anderen Seiten und die Winkel?

Lösung. Durch den Sinussatz findet man aus dem Dreieck AEC den Winkel AEC und $AE = \frac{c}{2}$, nun wendet man auf das Dreieck ABC den Tangentialsatz an. ($a = 26{,}158$ cm, $c = 27{,}502$ cm, $\beta = 36^0 36{,}4'$, $\gamma = 76^0 1{,}6'$.)

§ 19. Aufgaben, die durch die Beziehungen zwischen den Dreiecksstücken auf einfachere zurückgeführt werden können.

1. Bemerkung. In den Aufgabensammlungen werden vielfach Aufgaben gegeben, in denen die Berechnung der Seiten und Winkel des Dreiecks gefordert wird durch Stücke, die wohl in den praktischen Anwendungen der Trigonometrie niemals zur Ermittlung der Dreiecksstücke gegeben sind. Solche Aufgaben sind aber ein wertvolles Hilfsmittel, die trigonometrischen Formeln einzuüben und zu befestigen und die Erfindungsgabe des Lernenden zu bilden. Es sollen daher im Folgenden auch einige Aufgaben dieser Art besprochen werden. Man versuche zunächst, die Aufgabe zu lösen, ohne die angegebene Lösung, die nicht immer die einzige zu sein braucht, zu benutzen.

2. Beispiele. Aufgabe 1. Die eine Seite eines Dreiecks ist $c = 34{,}88$ cm, die Summe der beiden anderen Seiten $a + b = 87{,}96$ cm, und der Radius des der ersten Seite angeschriebenen Kreises $\varrho_c = 25{,}42$ cm. Es sollen die beiden unbekannten Seiten und die Winkel berechnet werden. ($a = 48{,}974$ cm, $b = 38{,}987$ cm, $\alpha = 82^0 51{,}5'$, $\beta = 52^0 10{,}5'$, $\gamma = 44^0 58{,}0'$).

Lösung. Aus $a + b$ und c bestimmt man $2s$, dann γ nach der Formel $\varrho_c = s \operatorname{tng} \frac{\gamma}{2}$. Nun kann eine der Mollweideschen Formeln angewendet werden.

Aufgabe 2. In einem Dreieck ist der Winkel $\alpha = 48^0 30'$, der Radius des Ankreises der dem gegebenen Winkel gegenüberliegenden Seite $\varrho_a = 112{,}5$ cm, und der Abstand des Scheitels des gegebenen Winkels von den Punkten, wo der Inkreis seine Schenkel berührt, $s - a = 95{,}6$ cm. Die beiden anderen Winkel und die Seiten des

Dreiecks zu berechnen. ($\beta = 88^0 47{,}8'$, $\gamma = 42^0 42{,}2'$, $a = 154{,}14$ cm, $b = 205{,}75$ cm, $c = 139{,}59$ cm.)

Lösung. Mit Hilfe der Formel $\varrho^a = s \operatorname{tng} \frac{\alpha}{2}$ findet man s, dann durch s und $s - a$ die Seite a und $b + c$. Nun kann die Mollweidesche Formel angewendet werden.

Aufgabe 3. Der Umfang eines Dreiecks ist $2s = 129{,}8$ cm, und sein Inhalt beträgt $f = 782{,}7$ qcm. Wie groß sind die Seiten und die unbekannten Winkel des Dreiecks, wenn Winkel $\gamma = 72^0 44'$ ist? ($a = 44{,}138$ cm, $b = 37{,}142$ cm, $c = 48{,}522$ cm, $\alpha = 60^0 18{,}0'$, $\beta = 46^0 58{,}0'$.)

Lösung. Man bestimmt ϱ durch die Formel $f = \varrho s$, dann $s - c$ aus der Gleichung $\varrho = (s - c) \operatorname{tng} \frac{\gamma}{2}$. Nun kann durch s und $s - c$ die Seite c und $a + b$ ermittelt werden. Die übrigen Stücke werden dann durch die Mollweidesche Formel gefunden.

Aufgabe 4. Ein Dreieck besitzt den Winkel $\gamma = 41^0 30'$, und die Radien der beiden Kreise, welche die diesem Winkel gegenüberliegende Seite berühren, sind $\varrho = 20{,}44$ cm und $\varrho_c = 43{,}86$ cm. Wie groß sind die beiden unbekannten Winkel und die Seiten? ($\alpha = 82^0 40{,}7'$, $\beta = 55^0 49{,}3'$, $a = 92{,}536$ cm, $b = 77{,}185$ cm, $c = 61{,}82$ cm).

Lösung. Durch die Formeln $\varrho = (s - c) \operatorname{tng} \frac{\gamma}{2}$ und $\varrho_c = s \operatorname{tng} \frac{\gamma}{2}$ berechnet man $s - c$ und s, dann kann man c und $a + b$ bestimmen und nun die Mollweidesche Formel anwenden.

Aufgabe 5. Von einem Dreieck kennt man einen Winkel $\gamma = 73^0 30'$, die Summe der ihn einschließenden Seiten $a + b = 153{,}4$ cm und den Radius des Inkreises $\varrho = 20{,}6$ cm. Wie groß sind die beiden unbekannten Winkel und die Seiten? ($\alpha = 74^0 14{,}0'$, $\beta = 32^0 26{,}0'$, $a = 98{,}505$ cm, $b = 54{,}896$ cm, $c = 98{,}058$ cm.)

Lösung. Man berechnet zunächst $s - c$ durch die Formel $s - c = \varrho \cot \frac{\gamma}{2}$, dann bestimmt man c und wendet darauf die Mollweidesche Formel an.

Aufgabe 6. Es sollen die unbekannten Seiten und die Winkel des Dreiecks berechnet werden, von dem der Inhalt $f = 1657$ qcm, die eine Seite $a = 52{,}74$ cm und der Radius des Ankreises dieser Seite $\varrho_a = 37{,}85$ cm gegeben sind. ($b = 76{,}895$ cm, $c = 63{,}400$ cm, $\alpha = 42^0 49{,}6'$, $\beta = 82^0 22{,}2'$, $\gamma = 54^0 48{,}2'$.)

Lösung. Durch die Formel $f = \varrho_a\,(s - a)$ (§ 15, 6) findet man $s - a$, dann mit Hilfe von a den Wert von s und $b + c$. Nun kann man α berechnen durch die Formel $\varrho_a = s \operatorname{tng} \frac{\alpha}{2}$ und hierauf die Mollweidesche Formel benutzen.

Aufgabe 7. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist $a+b=64$ cm, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel $\gamma = 30^0$, und der Inhalt beträgt $f = 247$ qcm. Es sollen die unbekannten Winkel und die Seiten berechnet werden. ($\alpha = 109^0 59{,}0'$, $\beta = 40^0 1{,}0'$, $a = 38$ cm, $b = 26$ cm, $c = 20{,}223$ cm.)

Lösung. Aus der Formel $f = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma$ berechnet man ab. Hierauf kann man mit Hilfe einer quadratischen Gleichung a und b bestimmen und dann den Tangentialsatz anwenden.

Bemerkung. Bei der Aufgabe 7 können die Werte für a und b und entsprechend auch die Werte für α und β miteinander vertauscht werden. Dasselbe gilt auch für die Aufgaben, in denen bei Anwendung der Mollweideschen Formel die halbe Differenz zweier Winkel durch den Kosinus bestimmt wurde. Da nämlich $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$ ist (§ 23, 5), so muß auch $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$ sein.

Dritter Abschnitt.

Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel und die graphische Darstellung der Funktionen.

§ 20. Winkel von beliebiger Größe.

Man kann sich einen Winkel BAC (Fig. 28) dadurch entstanden denken, daß von zwei Geraden AB und AC, die ursprünglich aufeinanderlagen, sich die eine, etwa AC, um den beiden Geraden gemeinsamen Punkt A in der Richtung des Pfeiles in der Figur gedreht hat, während die andere festlag. Der Winkel ist dann anzusehen als das Maß der Drehung der Geraden AC gegen die Gerade AB.

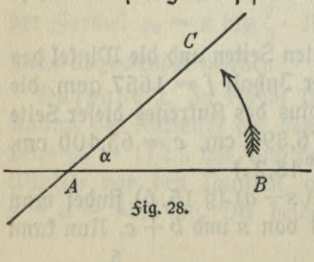


Fig. 28.

Bei dieser Auffassung des Winkels kann man auch von Winkeln sprechen, die größer als ein gestreckter (180^0) sind. Der Winkel kann jede beliebige Größe annehmen. Sagt man z. B. von einer Geraden AC, sie habe sich gegen eine andere, festliegende Gerade AB um einen Winkel von 750^0 gedreht, so heißt dies, daß die Gerade AC sich von ihrer Anfangslage, wo sie sich mit AB deckte, zweimal ganz um den Punkt A gedreht hat und dann noch weiter um einen Winkel von 30^0.

Will man auch für solche Winkel trigonometrische Funktionen einführen, d. h. will man auch solche Winkel durch Verhältnisse von Strecken bestimmen, so muß man für die trigonometrischen Funktionen andere Erklärungen geben, und diese neuen Erklärungen müssen die bisherigen Erklärungen als besondere Fälle in sich einschließen. Es geschieht dies mit Benutzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems.

§ 21. **Das rechtwinklige Koordinatensystem.**

1. Nimmt man auf einer beliebigen Geraden XX_1 (Fig. 29) einen festen Punkt O an, so kann man die Lage eines jeden Punktes A der Geraden bestimmen, wenn man erstens die Strecke OA angibt, um welche der Punkt A von dem festen Punkt O entfernt ist, und zweitens hinzufügt, ob der Punkt A rechts oder links von dem festen Punkt O sich befindet. Um diese letzte Angabe einfach machen zu können, ist man übereingekommen, die Entfernung OA mit einem positiven Vorzeichen zu versehen, wenn der Punkt A rechts von O liegt, mit einem negativen, wenn er sich links von O befindet. Nach dieser Vereinbarung ist also jeder Punkt der Geraden durch seine mit einem Vorzeichen versehene Entfernung von O eindeutig bestimmt.

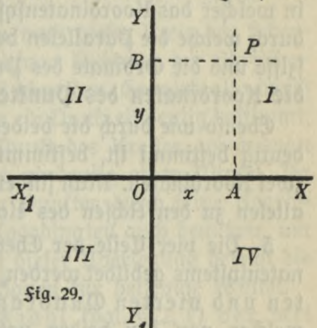


Fig. 29.

Die mit dem zugehörigen Vorzeichen versehene Entfernung eines Punktes der Geraden von dem festen Punkt O heißt die **Abszisse** des Punktes.

Man bezeichnet die Abszissen gewöhnlich durch x (x_1, x_2, . . .) und nennt die Gerade X_1X **Abszissenachse** oder **X-Achse**.

Errichtet man auf der Abszissenachse im Punkte O die Senkrechte YY_1, so ist die Lage eines jeden Punktes B dieser Senkrechten durch seine Entfernung von dem festen Punkt O eindeutig bestimmt, wenn man festsetzt, daß die Entfernung positiv genannt werden soll, wenn der Punkt oberhalb der Abszissenachse liegt, negativ dagegen, wenn er sich unterhalb dieser Achse befindet.

Die mit dem zugehörigen Vorzeichen versehene Entfernung eines Punktes der Senkrechten von dem festen Punkt O heißt die **Ordinate** des Punktes.

Man bezeichnet die Ordinaten gewöhnlich durch y ($y_1, y_2, \ldots$) und nennt die Senkrechte YY_1 die **Ordinatenachse** oder **Y-Achse.**

Die beiden aufeinander senkrechten Geraden XX_1 (die Abszissenachse) und YY_1 (die Ordinatenachse) bilden ein **rechtwinkliges Koordinatensystem**. Der Punkt O heißt **der Nullpunkt oder der Anfangspunkt** des Systems.

2. Hat man auf der Abszissenachse einen Punkt A durch seine Abszisse x bestimmt und auf der Ordinatenachse einen Punkt B durch seine Ordinate y und legt dann durch A und B die Parallelen zu den Achsen, so schneiden sich diese in einem und nur einem Punkt P. (Fig. 29). Die beiden Parallelen bestimmen also eindeutig einen Punkt der Ebene, in welcher das Koordinatensystem liegt. Die Abszisse und die Ordinate, durch welche die Parallelen bestimmt werden, nennt man auch die Abszisse und die Ordinate des Punktes P oder mit gemeinsamem Namen **die Koordinaten des Punktes P.**

Ebenso wie durch die beiden Koordinaten ein Punkt der Ebene eindeutig bestimmt ist, bestimmt auch jeder Punkt der Ebene eindeutig zwei Koordinaten. Man findet sie, indem man durch den Punkt die Parallelen zu den Achsen des Koordinatensystems legt.

3. Die vier Teile der Ebene, welche durch die Achsen des Koordinatensystems gebildet werden, nennt man den ersten, zweiten, dritten und vierten Quadranten. Der erste Quadrant ist derjenige, welcher von den beiden positiven Richtungen der Achsen begrenzt wird. Von ihm aus zählt man dann die übrigen Quadranten im positiven Drehungssinn d. h. in der Richtung, die der Richtung, in der der Zeiger einer Uhr sich bewegt, entgegengesetzt ist. In der Figur 29 sind die einzelnen Quadranten durch I, II, III und IV bezeichnet.

4. Im ersten Quadranten liegen alle Punkte, deren Koordinaten positiv sind. Für Punkte im zweiten Quadranten ist die Abszisse negativ und die Ordinate positiv. Die Punkte im dritten Quadranten besitzen negative Koordinaten. Im vierten Quadranten ist für jeden Punkt die Abszisse positiv und die Ordinate negativ.

§ 22. Erklärung der trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel.

1. Sinus und Kosinus. Um eine für alle Winkel gültige Erklärung der trigonometrischen Funktionen geben zu können, denkt man sich den Scheitel des Winkels α (Fig. 30) auf den Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Koordinatensystems gelegt und seinen einen Schenkel mit der positiven Richtung der Abszissenachse zusammenfallend. Den zweiten Schenkel des Winkels α zeichnet man dort, wohin eine Gerade gelangt, die auf der Abszissenachse lag und sich dann um den Anfangspunkt des Koordinatensystems im positiven Drehungssinn um den Winkel α gedreht hat.

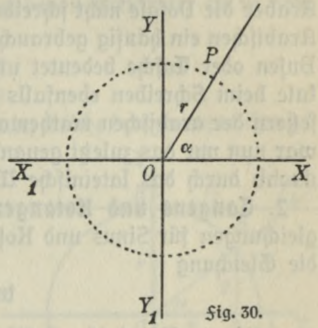


Fig. 30.

Beschreibt man nun um den Anfangspunkt O des Koordinatensystems mit einem beliebigen Radius r den Kreis, so muß dieser Kreis den Schenkel des Winkels, der nicht mit der positiven Richtung der Abszissenachse zusammenfällt, in einem Punkte P schneiden. Es wird also durch den Schenkel des Winkels auf dem Kreise ein Punkt eindeutig bestimmt. Umgekehrt bestimmt aber auch jeder Punkt des Kreises, wenn man von ihm aus den Radius nach O zieht, eindeutig einen Winkel. Da nun nach § 21, 2 die Lage eines jeden Punktes durch seine Koordinaten bestimmt ist, so kann man die Koordinaten auch benutzen, um durch sie den Winkel zu bestimmen. Auf dieser Überlegung beruht die Erklärung der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel.

Erklärung. Man nennt die Maßzahl (vgl. § 2, 1) der mit dem Radius r gemessenen Ordinate des Punktes P den **Sinus des Winkels** α und die Maßzahl der Abszisse den **Kosinus des Winkels** α.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}. \text{ (Fig. 31.)}$$

Diese Erklärung schließt die früher gegebenen Erklärungen in sich ein, gestattet aber von dem Sinus und Kosinus eines jeden Winkels zu sprechen.

Bemerkung. An dieser Stelle kann jetzt eine **Erklärung der Entstehung der Bezeichnung Sinus** gegeben werden. Der Name Sinus ist wahrscheinlich in folgender Weise entstanden: Die Strecke PQ (Fig. 31), deren Maßzahl der Sinus ist, ist die Hälfte der zu dem Peripheriewinkel α gehörenden Sehne. Die indischen Mathematiker haben zuerst diese halbe Sehne zur Bestimmung des Winkels benutzt, während Ptolemäus noch die ganze Sehne gebrauchte. Im Indischen heißt die Halbsehne jiva. Dieses Wort kam als technisches Fremdwort zu den Arabern, wurde von ihnen durch dschiba wiedergegeben und, da die Araber die Vokale nicht schreiben, dschb geschrieben. Nun gibt es im Arabischen ein häufig gebrauchtes Wort dschaib, welches auf Deutsch Busen oder Tasche bedeutet und das wegen des Fortlassens der Vokale beim Schreiben ebenfalls dschb geschrieben wurde. Den Übersetzern der arabischen mathematischen Werke in die lateinische Sprache war nun nur das zuletzt genannte Wort bekannt, sie übersetzten daher dschb durch das lateinische Wort sinus, welches Busen bedeutet.

2. **Tangens und Kotangens.** Nach Aufstellung der Definitionsgleichungen für Sinus und Kosinus liegt es nahe, den Tangens durch die Gleichung

$$\operatorname{tng}\alpha = \frac{y}{x}$$

zu erklären. Eine solche Erklärung ist aber nicht brauchbar, da jetzt die Funktionen als Maßzahlen von Strecken für den Radius als Maßeinheit erklärt werden. Es ist daher nötig, um auch den Tangens als Maßzahl einer Strecke erklären zu können, die man mit dem Radius r mißt, den Bruch $\frac{y}{x}$ durch einen gleichwertigen Bruch zu ersetzen, dessen Nenner r ist. Dies gelingt in folgender Weise. Legt man in A (Fig. 31) an den Kreis die Tangente, welche den zweiten Schenkel des Winkels in T schneidet, und bezeichnet die Strecke AT mit t, dann besteht nach dem Strahlensatz die Proportion

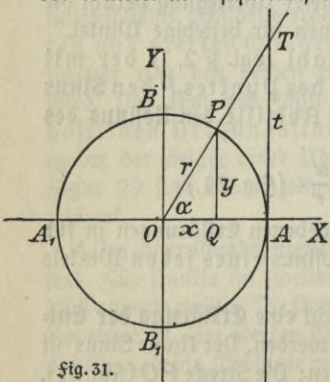


Fig. 31.

$$\frac{y}{x} = \frac{t}{r}.$$

Hierdurch ist der für die Erklärung des Tangens brauchbare Ausdruck

$$\operatorname{tng}\alpha = \frac{t}{r}$$

gefunden. In Worten heißt diese

Erklärung. Legt man an den Kreis in seinem Schnittpunkt mit der positiven Richtung der Abszissenachse die Tangente, so ist die Maßzahl der Strecke vom Berührungspunkt der Tangente bis zu ihrem Schnittpunkt mit dem zweiten Schenkel des Winkels α **der Tangens des Winkels α.**

Bemerkung. Die soeben für $\operatorname{tng}\alpha$ gegebene Erklärung erklärt zugleich den für diese Funktion gewählten Namen (vgl. § 5, 7 Bem.).

Für den Kotangens kann man in ähnlicher Weise eine geeignete Erklärung finden. Nach der in § 6, 3 gegebenen Erklärung ist in dem rechtwinkligen Dreieck OQP (Fig. 32)

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}.$$

Zieht man in B an den Kreis die Tangente, welche den zweiten Schenkel des Winkels in T_1 schneidet, dann ist $\triangle OQP \sim \triangle OBT_1$, denn es ist $\angle Q = \angle B$ als Rechte und $\angle POQ = \angle OT_1B$ als Wechselwinkel an Parallelen. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke folgt $x : y = t_1 : r$.

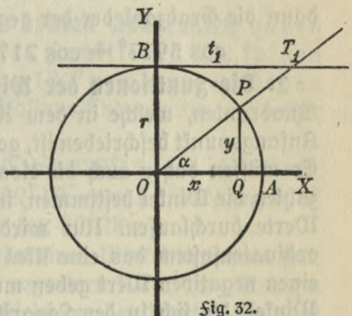


Fig. 32.

Es ist daher

$$\cot\alpha = \frac{t_1}{r}.$$

Erklärung. Legt man an den Kreis in seinem Schnittpunkt mit der positiven Richtung der Ordinatenachse die Tangente, so ist die Maßzahl der Strecke vom Berührungspunkt der Tangente bis zu ihrem Schnittpunkt mit dem zweiten Schenkel des Winkels α **der Kotangens des Winkels α.**

§ 23. Die Werte der Funktionen beliebiger Winkel.

1. Die Funktionen der Winkel über 360°. Es ist leicht einzusehen, daß man nur die Funktionen der Winkel von 0° bis 360° zu untersuchen hat. Übersteigt nämlich die Größe des Winkels den Wert von 360°, so rückt der Schenkel des Winkels, durch dessen Drehung die Winkel entstehen, wieder in den ersten Quadranten. Die Funktionen müssen daher wieder dieselben Werte annehmen, die sie vorher hatten, als der Winkel von 0° bis 360° wuchs. Man kann dies aussprechen in dem

Lehrsatz: Die Funktionen der Winkel ändern sich nicht, wenn man den Winkel um ein beliebiges ganzes Vielfaches von 360° vermehrt oder vermindert.

Bedeutet k eine beliebige ganze Zahl, so hat man die Formeln

$$\sin\alpha = \sin(\alpha \mp k\cdot 360^0),\quad \operatorname{tng}\alpha = \operatorname{tng}(\alpha \mp k\cdot 360^0),$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha \mp k\cdot 360^0),\quad \cot\alpha = \cot(\alpha \mp k\cdot 360^0).$$

Auf Grund dieser Formeln kann man jede Funktion eines Winkels, der 360^0 übersteigt, auf dieselbe Funktion eines Winkels zwischen 0^0 und 360^0 zurückführen. So ist z. B.

$$\sin 410^0 = \sin(410^0 - 1\cdot 360^0) = \sin 50^0,$$
$$\sin 850^0 = \sin(850^0 - 2\cdot 360^0) = \sin 130^0.$$

Man hat nur die Anzahl der Grade durch 360 zu dividieren und den bei der Division bleibenden Rest zu bestimmen. Der Rest gibt dann die Gradzahl der der gegebenen Funktion gleichen Funktion an.

$$\cos 5977^0 = \cos 217^0,\qquad \operatorname{tng} 1896^0 = \operatorname{tng} 96^0.$$

2. Die Funktionen der Winkel zwischen 0^0 und 360^0. Die vier Quadranten, welche in dem Kreise, der mit dem Radius r um den Anfangspunkt beschrieben ist, gebildet werden, sind einander kongruent. Es müssen daher auch die Koordinaten der Kreispunkte, deren Maßzahlen die Winkel bestimmen, in allen Quadranten dieselben absoluten Werte durchlaufen. Nur wird man ihnen wegen der Lage im Koordinatensystem das eine Mal einen positiven Wert, das andere Mal einen negativen Wert geben müssen. Die Tafeln der Funktionen spitzer Winkel, die sich in den Logarithmentafeln finden und die bisher benutzt wurden, genügen also für die Funktionen aller möglichen Winkel.

Wichtig ist nur, daß man sich darüber klar wird, wie man die absoluten Werte der Funktionen der Winkel in den einzelnen Quadranten auf die absoluten Werte der Funktionen von Winkeln im ersten Quadranten zurückführt. Es läßt sich dies leicht aus Fig. 33 erkennen, in der $\angle P_1OA$ einen Winkel im ersten Quadranten (einen spitzen Winkel), $\angle P_2OA$ einen Winkel im zweiten Quadranten (einen stumpfen Winkel) darstellt. $\angle P_3OA$ ist, von A aus im positiven Drehungssinn gerechnet, ein Winkel im dritten Quadranten, und, ebenso gerechnet, $\angle P_4OA$ ein Winkel im vierten Quadranten. Da die Dreiecke P_1OQ, P_2OQ_1,

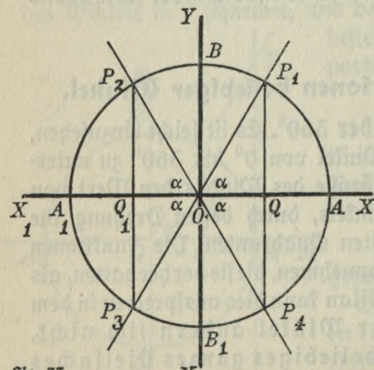


Fig. 33.

P_3OQ_1 und P_4OQ, deren Katheten die Sinus und Kosinus und damit auch die Quotienten dieser Funktionen, den Tangens und Kotangens, bestimmen, einander kongruent sind, so findet man mit Berücksichtigung der durch die Lage der Strecken bedingten Vorzeichen:

I. **Die Funktionen der Winkel im zweiten Quadranten** haben dieselben absoluten Werte wie die Funktionen ihrer spitzen Supplementwinkel. Der Sinus ist ebenfalls positiv, aber der Kosinus ist negativ, und daher besitzen auch die Quotienten dieser beiden Funktionen, der Tangens und der Kotangens, negative Werte.

Es stimmt dies mit dem überein, was in § 12 über die Funktionen stumpfer Winkel ermittelt wurde.

II. **Die Funktionen der Winkel im dritten Quadranten** haben dieselben absoluten Werte wie die Funktionen der spitzen Winkel, die man erhält, wenn man 180^0 von dem gegebenen Winkel abzieht. Der Sinus und der Kosinus sind negativ und daher Tangens und Kotangens positiv.

Beispiele: $\sin 112^0 20' = \sin 67^0 40'$, $\sin 228^0 15' = -\sin 48^0 15'$, $\cos 157^0 42' = -\cos 22^0 18'$, $\cos 350^0 12' = \cos 9^0 48'$, $\operatorname{tng} 166^0 26' = -\operatorname{tng} 13^0 34'$, $\operatorname{tng} 250^0 28' = \operatorname{tng} 70^0 28'$.

Bemerkung. Findet man, wenn man einen Winkel berechnen soll, für eine Funktion dieses Winkels einen negativen Wert, ist z. B. $\operatorname{tng} \alpha = -0{,}728$, so kann man aus dieser Gleichung den Wert von α nicht bestimmen, da man eine negative Zahl nicht logarithmieren kann. Bedenkt man aber, daß für stumpfe Winkel der Tangens negativ ist, so erkennt man zunächst, daß α ein stumpfer Winkel sein muß. Da nun die absoluten Werte der Funktionen stumpfer Winkel gleich den Werten der Funktionen ihrer spitzen Supplementwinkel sind, so muß $\operatorname{tng}(180^0 - \alpha) = 0{,}728$ sein. Hieraus findet man $\log \operatorname{tng}(180^0 - \alpha) = 9{,}86213 - 10$ und $180^0 - \alpha = 36^0 3{,}3'$. Es ist also $\alpha = 143^0 56{,}7'$.

III. **Die Funktionen der Winkel im vierten Quadranten** haben dieselben absoluten Werte wie die Funktionen der spitzen Winkel, die man erhält, wenn man den gegebenen Winkel von 360^0 abzieht. Der Sinus ist negativ, der Kosinus aber positiv, und daher sind Tangens und Kotangens negativ.

Faßt man das über die Vorzeichen gesagte zusammen, so findet man:

Der Sinus ist positiv im ersten und zweiten Quadranten, negativ im dritten und vierten.

Der Kosinus ist positiv im ersten und vierten Quadranten, negativ im zweiten und dritten.

Tangens und Kotangens sind positiv im ersten und dritten Quadranten, negativ im zweiten und vierten.

Nach diesen Überlegungen kann man die Funktionen eines jeden beliebigen Winkels auf Funktionen von Winkeln im ersten Quadranten zurückführen.

3. Die Werte der Funktionen für ganze Vielfache von 90^0. Für einen Winkel von 0^0 ist die Ordinate 0 und die Abszisse $+r$. Daher sind die Maßzahlen, wenn man mit dem Radius mißt, 0 und $+1$, d. h. $\sin 0^0 = 0$ und $\cos 0^0 = 1$. Für den Winkel von 90^0 ist es gerade umgekehrt, also $\sin 90^0 = 1$ und $\cos 90^0 = 0$. Ist der Winkel gleich 180^0, so ist die Ordinate 0 und die Abszisse $-r$. Daher sind die Maßzahlen, wenn man mit dem Radius mißt, 0 und -1, d. h. $\sin 180^0 = 0$ und $\cos 180^0 = -1$. Für Winkel von 270^0 ist es wieder umgekehrt, also $\sin 270^0 = -1$ und $\cos 270^0 = 0$. Für Winkel von 360^0 erhält man wieder dieselben Werte wie für 0^0. Die Werte für Tangens und Kotangens ermittelt man durch Division aus den Werten für Sinus und Kosinus. Die einzelnen Werte sind noch einmal in der nebenstehenden Tabelle zusammengestellt.

	0^0	90^0	180^0	270^0
sin	0	$+1$	0	-1
cos	$+1$	0	-1	0
tng	0	$+\infty$	0	$-\infty$
cot	$+\infty$	0	$-\infty$	0

Bemerkung. Daß für bestimmte Winkel Tangens und Kotangens unendlich groß werden, erkennt man auch recht gut an Fig. 31 und an Fig. 32 Wird z. B. der Winkel α gleich 90^0, so muß (Fig. 31) OT parallel zu AT werden, und daher die Strecke AT, deren Maßzahl den Wert des Tangens gibt, einen unendlich großen Wert annehmen. Ähnlich ist es beim Kotangens, da für Winkel von 0^0 die Linie OT_1 (Fig. 32), der Tangente BT_1 parallel wird.

4. Änderung der Werte der Funktionen in den einzelnen Quadranten. Was über die Änderung der Funktionen spitzer Winkel, also solcher Winkel, die im ersten Quadranten liegen, bei der Besprechung der einzelnen Funktionen im ersten Abschnitt gesagt ist, gilt nicht gleichzeitig auch für die übrigen Quadranten. Denkt man sich in Fig. 31 den Schenkel OP im positiven Drehungssinne bewegt, wobei der Winkel größer wird, und verfolgt dabei die Änderungen, welche die Abszisse und die Ordinate des Schnittpunktes erleiden, so bekommt man einen klaren Einblick in die Art der Änderung der Funktionen. Berücksichtigt man hierbei auch noch die durch die Lage bedingten Vorzeichen der Funktionen, so kann man die Ergebnisse der Beobachtung in die folgenden Sätze zusammenfassen.

Der Sinus wächst mit wachsendem Winkel im ersten Quadranten von 0 bis 1, im zweiten und dritten nimmt er ab von 1 bis 0 und dann von 0 bis — 1, im vierten Quadranten wächst er wieder von — 1 bis 0.

Der Kosinus nimmt mit wachsendem Winkel im ersten und zweiten Quadranten ab von 1 bis 0 und von 0 bis — 1, in dem dritten und vierten Quadranten wächst er von — 1 bis 0 und von 0 bis 1.

Der Tangens wächst in allen Quadranten mit wachsendem Winkel, während der Kotangens stets mit wachsendem Winkel kleiner wird.

5. Die Funktionen negativer Winkel. Bisher ist der Winkel stets dadurch entstanden gedacht, daß sich der eine Schenkel von der positiven Richtung der Abszissenachse ausgehend im positiven Drehungssinn um den Anfangspunkt des Koordinatensystems drehte. Die Drehung kann aber auch im anderen Sinne erfolgen. Der Schenkel kann, ebenfalls von der positiven Richtung der Abszissenachse ausgehend, auch im negativen Drehungssinn d.h. in der Richtung, in welcher der Zeiger einer Uhr sich bewegt, sich um 0 drehen. In diesem Falle pflegt man der Maßzahl des entstehenden Winkels ein negatives Vorzeichen zu geben.

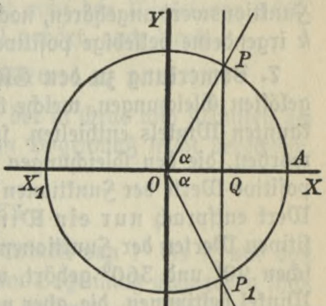


Fig. 34.

Ist Winkel POA (Fig. 34) gleich α, so versteht man unter dem Winkel $-\alpha$ den ihm absolut gleichen Winkel P_1OA, den man erhält, wenn man von P auf die Abszissenachse das Lot fällt, dieses bis zum Schnittpunkt mit dem Kreise in P_1 verlängert und nun P_1 mit O verbindet.

Aus der Kongruenz der Dreiecke OQP und OQP_1 erkennt man sofort, daß die absoluten Werte der Funktionen beider Winkel einander gleich sein müssen. Aus der Lage der homologen Stücke aber wird es klar, daß der Sinus des negativen Winkels negativ ist, der Kosinus aber auch für den negativen Winkel positiv sein muß. Dies hat zur Folge, daß sowohl Tangens wie Kotangens negative Werte besitzen müssen. Man erhält also die Formeln

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \operatorname{tng}(-\alpha) = -\operatorname{tng}\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha, \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

Bemerkung. Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel und solcher Winkel, die größer als 180^0 sind, finden unter anderm An=

wendung bei der Lösung binomischer Gleichungen. (Vgl. Arithmetik und Algebra, zweiter Teil. ANuG Bd. 205).

6. Mehrdeutigkeit der trigonometrischen Funktionen. Jeder Winkel bestimmt eindeutig den Wert eines Sinus, eines Kosinus, eines Tangens oder eines Kotangens. Die in diesem Abschnitt angestellten Betrachtungen zeigen aber, daß das Umgekehrte nicht der Fall ist. Es wird also durch eine der genannten Funktionen der Wert eines Winkels nicht eindeutig bestimmt. Betrachtet man nur Winkel zwischen 0^0 und 360^0, so entsprechen jedem Werte einer Funktion zwei voneinander verschiedene Winkel. Ist z. B. für den Sinus eines Winkels ein positiver Wert gegeben, so gehört dazu ein Winkel im ersten Quadranten und ein Winkel im zweiten Quadranten (vgl. § 12,1). Kennt man für den Tangens eines Winkels einen negativen Wert, so gehört dazu ein Winkel im zweiten Quadranten und ein Winkel im vierten Quadranten usw. Läßt man beliebig große Winkel zu, so gehören zu einem Funktionswert alle die unzählig vielen Winkel, die man erhält, wenn man zu den beiden zwischen 0^0 und 360^0 liegenden Winkeln, die dem Funktionswert angehören, noch $\pm k \cdot 360^0$ addiert (vgl. § 23,1), wenn k irgendeine beliebige positive Zahl bedeutet.

7. Bemerkung zu den Gleichungen. Bei den in § 8 und § 9, 5 gelösten Gleichungen, welche trigonometrische Funktionen eines unbekannten Winkels enthielten, sind nur die spitzen Winkel gesucht worden, die den Gleichungen genügten. Es konnten daher auch nur positive Werte der Funktionen gebraucht werden, und jedem positiven Wert entsprach nur ein Winkel. Man erkennt jetzt, daß zu den positiven Werten der Funktionen auch noch ein zweiter Winkel zwischen 90^0 und 360^0 gehört, und daß auch die negativen Werte Winkel bestimmen, die aber nicht im ersten Quadranten liegen. Weiter ist nach dem oben Gesagten klar, daß man zu allen diesen Winkeln auch noch $\pm k \cdot 360^0$ hinzufügen muß. Jede Gleichung, in der trigonometrische Funktionen unbekannter Winkel vorkommen, hat unendlich viel Lösungen.

§ 24. Die Bestimmung der Winkel durch Bogenmaß. Graphische Darstellung der Funktionen.

1. Beschreibt man um den Scheitel A eines Winkels α (Fig. 35) mit einem beliebigen Radius r den Kreis, so wird durch die Schenkel des Winkels auf der Peripherie des Kreises ein Bogen b abgeschnitten, zu dem α als Zentriwinkel gehört. Da sich Bogen desselben Kreises wie die zu ihnen gehörenden Zentriwinkel verhalten, und da man auch den ganzen Kreisumfang ($2\pi r$) als einen Bogen auffassen kann, zu dem als Zentriwinkel ein Winkel von 360^0 gehört, so besteht die Gleichung

$$b : 2\pi r = \alpha : 360.$$

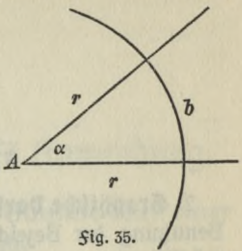


Fig. 35.

Aus dieser Gleichung findet man

$$\frac{b}{r} = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Maßzahl des Bogens dar, wenn man r als Maßeinheit nimmt (§ 2, 1). Diese Maßzahl ist also für denselben Winkel α eine unveränderliche Größe und unabhängig von der Größe des gewählten Radius. Die Maßzahl ändert sich aber, wenn der Winkel ein anderer wird, ist also eine Funktion des Winkels. Man hat daher diese Maßzahl auch zur Bezeichnung des Winkels benutzt.

Da die Länge des Halbkreises, wenn der Radius des Kreises gleich r ist, den Wert πr besitzt, so bezeichnet man den Winkel von 180^0, der zu dem Halbkreis als Zentriwinkel gehört, auch durch

$$\frac{\pi r}{r} = \pi = 3{,}1415926 \ldots .$$

Hiernach läßt sich für jeden Winkel, der in Grad und Minuten gegeben ist, die ihn darstellende Zahl im Bogenmaß leicht berechnen. Für einen Winkel von 1^0 findet man

$$\frac{\pi}{180} = 0{,}0174533 \ldots .$$

Die folgende Tabelle, in welcher für Winkel von 1^0 bis 9^0 und von $1'$ bis $9'$ die sie darstellenden Zahlen im Bogenmaß angegeben sind, ermöglicht eine leichte Umrechnung der in Grad und Minuten gegebenen Maßzahl eines Winkels in Bogenmaß.

$1^0 \sim 0{,}0174533$	$1' \sim 0{,}0002909$
$2^0 \sim 0{,}0349066$	$2' \sim 0{,}0005818$
$3^0 \sim 0{,}0523599$	$3' \sim 0{,}0008727$
$4^0 \sim 0{,}0698132$	$4' \sim 0{,}0011636$
$5^0 \sim 0{,}0872665$	$5' \sim 0{,}0014544$
$6^0 \sim 0{,}1047198$	$6' \sim 0{,}0017453$
$7^0 \sim 0{,}1221730$	$7' \sim 0{,}0020362$
$8^0 \sim 0{,}1396263$	$8' \sim 0{,}0023271$
$9^0 \sim 0{,}1570796$	$9' \sim 0{,}0026180.$

Ist ein Winkel von $37^0 25{,}8'$ durch Bogenmaß auszudrücken, so findet man nach der Tabelle

$$\begin{array}{r}
30^0 \sim 0{,}523599 \\
7^0 \sim 0{,}122173 \\
20' \sim 0{,}005818 \\
5' \sim 0{,}001454 \\
0{,}8' \sim 0{,}000233 \\
\hline
37^0 25{,}8' \sim 0{,}653277.
\end{array}$$

2. Graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen. Mit Benutzung der Bezeichnung der Winkel durch das Bogenmaß ist es möglich, eine graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen zu geben. Man trägt hierbei die Maßzahlen der Winkel als Abszissen und die zugehörigen Funktionswerte als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein. In dieser Weise sind die Figuren 36 und 37 entstanden. Fig. 36 ist die graphische Darstellung für $\sin\alpha$ (die Sinuslinie), und Fig. 37 stellt die Funktion $\operatorname{tg}\alpha$ graphisch dar. Man erkennt auch aus den beiden Kurven leicht, was in § 23, 6 gesagt wurde, daß jedem Winkel nur ein Funktionswert, jedem Funktionswert aber unzählig viele Werte des Winkels entsprechen. Zieht man nämlich durch den Punkt der Ordinatenachse, welcher dem gegebenen Funktionswert

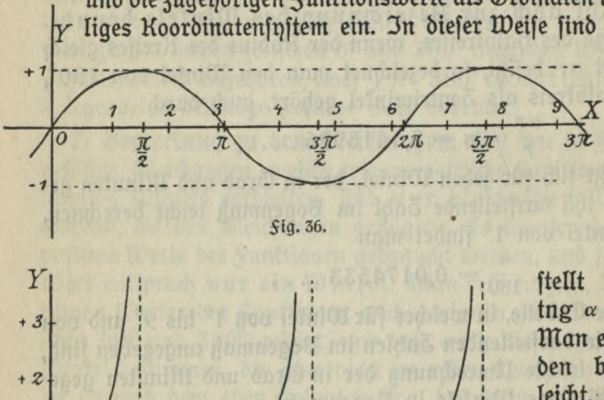


Fig. 36.

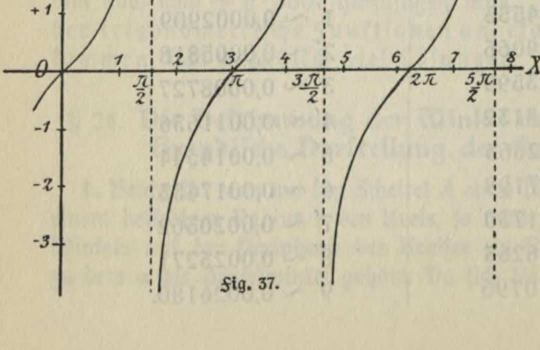


Fig. 37.

entspricht, die Parallele zu der Abszissenachse, so schneidet diese Parallele die Kurve unzählig oft, und die Abszisse eines jeden dieser Schnittpunkte stellt den Wert eines Winkels dar, der dem gegebenen Funktionswert genügt.

Vierter Abschnitt.

Die Additionstheoreme und ihre Anwendung.

§25. Formeln für die Funktionen einer Summe oder einer Differenz von Winkeln.

1. Vorbemerkungen. Unter den Additionstheoremen versteht man trigonometrische Formeln, durch welche die Funktionen einer Summe oder Differenz zweier Winkel z. B. $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ durch Funktionen der einzelnen Winkel, α und β, ausgedrückt werden. Eine solche Formel kann zur Berechnung der Werte der Funktionen von großem Nutzen sein. Kennt man nämlich den Wert von $\sin 1^0$, womit auch $\cos 1^0$, $\operatorname{tng} 1^0$, $\cot 1^0$ gegeben sind (vgl. § 7,5), so kann man mit Hilfe eines Additionstheorems $\sin 2^0 = \sin(1^0 + 1^0)$ berechnen, dann $\sin 3^0 = \sin(2^0 + 1^0)$ usw.

Ptolemäus hat eine besondere Eigenschaft des Sehnenvierecks entdeckt, die in dem folgenden Satze, der seinen Namen trägt, ausgesprochen ist.

Der ptolemäische Lehrsatz. In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte je zweier Gegenseiten.

Mit Hilfe dieses Satzes gelang es Ptolemäus, eine Beziehung zwischen dem Sinus der Summe zweier Winkel und den Funktionen der einzelnen Winkel herzuleiten. Er berechnete darauf mit vieler Mühe den Wert von $\sin 1^0$. Nun konnte er mit Hilfe seiner Formel die Werte der Sinus der übrigen Winkel in der Weise, wie es oben angedeutet worden ist, berechnen.

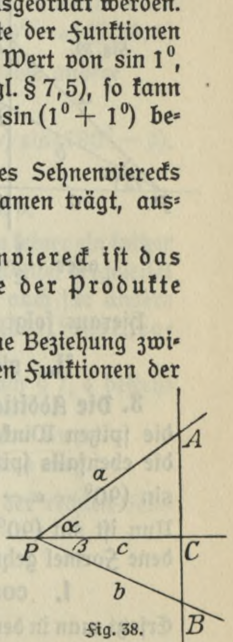


Fig. 38.

Hier soll die Formel, die Ptolemäus fand, in ganz einfacher Weise hergeleitet werden.

2. Die Additionstheoreme für den Sinus. Man trage an eine Gerade in einem Punkte P (Fig. 38) auf der einen Seite den spitzen Winkel α und auf der anderen Seite den spitzen Winkel β an. Hierauf errichte man auf der Geraden in einem beliebigen Punkte C, welcher auf dem den beiden Winkeln gemeinsamen Schenkel liegt, die Senkrechte und bezeichne ihren Schnittpunkt mit dem zweiten Schenkel des Winkels α durch A, ihren Schnittpunkt mit dem zweiten Schenkel des Winkels β durch B. Es ist dann

$$\varDelta PAB = \varDelta PAC + \varDelta PBC$$

und daher, wenn man $PA = a$, $PB = b$ und $PC = c$ setzt nach § 15, 6b

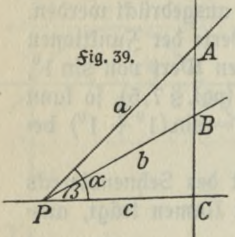
$$\frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} ac \sin\alpha + \frac{1}{2} bc \sin\beta.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\frac{1}{2} ab$, so findet man

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{c}{b} \sin\alpha + \frac{c}{a} \sin\beta.$$

Nun ist aber, wie man aus der Figur erkennt,

Fig. 39.



$$\frac{c}{b} = \cos\beta \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} = \cos\alpha,$$

also erhält man die Gleichung

$$\text{I.} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Trägt man an die Gerade im Punkte P die Winkel α und β $(\alpha > \beta)$ auf derselben Seite an, so ist (Fig. 39)

$$\varDelta PAB = \varDelta PAC - \varDelta PBC$$

oder $\frac{1}{2} ab \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} ac \sin\alpha - \frac{1}{2} bc \sin\beta.$

Hieraus folgt nach Division der Gleichung durch $\frac{1}{2} ab$

$$\text{II.} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

3. Die Additionstheoreme für den Kosinus. Wendet man die für die spitzen Winkel α und β gefundene Formel für $\sin(\alpha - \beta)$ auf die ebenfalls spitzen Winkel $(90^0 - \alpha)$ und β an, so erhält man

$$\sin(90^0 - \alpha - \beta) = \sin(90^0 - \alpha) \cos\beta - \cos(90^0 - \alpha) \sin\beta.$$

Nun ist $\sin(90^0 - \alpha - \beta) = \sin(90^0 - [\alpha + \beta])$, die soeben gefundene Formel geht daher mit Benutzung von § 7, 1 über in die andere

$$\text{I.} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Ersetzt man in der für $\sin(\alpha + \beta)$ gefundenen Formel α durch $(90^0 - \alpha)$, so findet man

$\sin(90^0 - \alpha + \beta) = \sin(90^0 - \alpha)\cos\beta + \cos(90^0 - \alpha)\sin\beta.$ Hieraus folgt, da $\sin(90^0 - \alpha + \beta) = \sin(90^0 - [\alpha - \beta])$ ist, wie oben

$$\text{II.}\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

4. Bemerkung. Die soeben abgeleiteten Additionstheoreme gelten nach ihrer Herleitung nur für spitze Winkel. Es läßt sich aber zeigen, daß sie für jeden Winkel gültig sind. Ist z. B. α ein Winkel im dritten Quadranten und β ein stumpfer Winkel, dann sind $(\alpha - 180^0)$ und $(180^0 - \beta)$ spitze Winkel. Für diese spitzen Winkel gilt nach 2, 1 die Formel

$$\sin(\alpha - 180^0 + 180^0 - \beta)$$
$$= \sin(\alpha - 180^0)\cos(180^0 - \beta) + \cos(\alpha - 180^0)\sin(180^0 - \beta).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich $\sin(\alpha - \beta)$. Auf der rechten Seite ist

$$\sin(\alpha - 180^0) = \sin[-(180^0 - \alpha)] = -\sin(180^0 - \alpha) \quad (\S\,23, 5)$$
$$\cos(\alpha - 180^0) = \cos[-(180^0 - \alpha)] = +\cos(180^0 - \alpha) \quad (\S\,23, 5)$$

Dadurch erhält man aus der gefundenen Gleichung die andere

$$\sin(\alpha - \beta)$$
$$= -\sin(180^0 - \alpha)\cos(180^0 - \beta) + \cos(180^0 - \alpha)\sin(180^0 - \beta).$$

Aus dieser Gleichung folgt nach § 12, 1 und 2

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Man findet also für die Winkel α und β, von denen keiner ein spitzer Winkel ist, genau dieselbe Formel, die oben für spitze Winkel hergeleitet wurde. In ähnlicher Weise kann man den Beweis auch für andere Winkel und für die anderen Formeln führen. Die Additionstheoreme gelten also ganz allgemein.

5. Die Additionstheoreme für den Tangens. Nach § 7, 4 besteht die Gleichung

$$\operatorname{tng}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch $\cos\alpha\cos\beta$, so erhält man

$$\text{I.}\ \operatorname{tng}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tng}\alpha + \operatorname{tng}\beta}{1 - \operatorname{tng}\alpha\operatorname{tng}\beta}.$$

Ähnlich findet man

$$\text{II.}\ \operatorname{tng}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tng}\alpha - \operatorname{tng}\beta}{1 + \operatorname{tng}\alpha\operatorname{tng}\beta}.$$

§ 26. Formeln für die Summe zweier Funktionen.

1. Die Formeln für die Summe zweier Funktionen. Aus den Additionstheoremen kann man Formeln herleiten, durch die man imstande ist, die Summe zweier Funktionen in ein Produkt zu verwandeln. Für zwei beliebige Winkel x und y gelten nach den Additionstheoremen die Gleichungen

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Aus diesen Formeln folgt durch Addition bzw. Subtraktion

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y,$$
$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y,$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y.$$

Setzt man in diesen Formeln $x + y = \alpha$ und $x - y = \beta$, dann ist, wie man durch Addition bzw. Subtraktion findet, $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ zu setzen, und man erhält

$$\textbf{I.}\ \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$
$$\textbf{II.}\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$
$$\textbf{III.}\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$
$$\textbf{IV.}\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

2. Neue Herleitung früher erhaltener Formeln. Mit Hilfe der soeben gefundenen Formeln kann man den Tangentialsatz (§ 14,3) einfach in folgender Weise herleiten. Es ist nach dem Sinussatz

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Sind zwei Brüche gleich, so ist die Differenz aus Zähler und Nenner dividiert durch die Summe aus Zähler und Nenner bei beiden Brüchen gleich. Hiernach folgt aus der obigen Gleichung

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$= \frac{\operatorname{tng}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tng}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Beachtet man nun noch, daß $\frac{\gamma}{2}$ im Dreieck das Komplement zu $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, so kann man nach § 7, 1 $\operatorname{tng}\frac{\alpha+\beta}{2}$ durch $\cot\frac{\gamma}{2}$ ersetzen und erhält dann den Tangentialsatz in der früher gefundenen Form.

Auch die **Formeln für den Übergang zum halben Winkel** lassen sich jetzt ganz einfach herleiten. Setzt man in den beiden Formeln 1, I und II $\beta = 0^0$, so findet man, da $\sin 0^0 = 0$ ist, aus jeder der beiden Formeln

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man in den beiden Formeln 1, III und IV $\beta = 0^0$, so findet man, da $\cos 0^0 = 1$ ist,

$$\cos\alpha + 1 = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \cos\alpha - 1 = -2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{und} \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Dies sind dieselben Formeln, welche § 9, 2 und 3 in anderer Weise abgeleitet worden sind. Aus ihnen folgt durch Addition und Division durch 2 die dritte Formel $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Bemerkung. Man könnte auch die Formeln für den Übergang zum halben Winkel aus dem in § 25 gefundenen Additionstheorem herleiten. Setzt man in der Formel § 25, 2 I $\beta = \alpha$, so erhält man

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Diese Formel sagt ebenso wie die oben gefundene Formel, daß der Sinus eines Winkels gleich dem doppelten Produkt aus Sinus und Kosinus des halb so großen Winkels ist.

In ähnlicher Weise erhält man, wenn man $\beta = \alpha$ setzt, aus der Formel § 25, 3 I

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

und aus § 25, 5 die Formel für tng 2α.

§ 27. Anwendungen der Additionstheoreme.

A. Anwendungen bei Gleichungen.

Aufgabe 1. Den Winkel α zu berechnen aus der Gleichung $\cos(\alpha + 36^0) + \cos(\alpha + 12^0) = 0{,}74$.

Lösung. Mit Benutzung der Formel § 26, 1 III erhält man aus der gegebenen Gleichung $2\cos(\alpha + 24^0)\cos 12^0 = 0{,}74$. Hierdurch findet man $\alpha + 24^0 = 67^0 46{,}4'$ und $\alpha = 43^0 46{,}4'$.

Aufgabe 2. Die Winkel α und β zu berechnen, wenn gegeben ist, $\sin\alpha + \sin\beta = 0{,}976$ und $\alpha + \beta = 58^0 50'$.

Lösung. Aus der ersten Gleichung findet man $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0{,}976$ und hieraus $\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot$ ($\alpha = 35^0 55'$, $\beta = 22^0 55'$.)

Aufgabe 3. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{9}{4}$; $\alpha + \beta = 87^0 40'$.

Lösung: Nach dem Satz: Sind zwei Brüche gleich, so ist die Summe aus Zähler und Nenner dividiert durch die Differenz aus Zähler und Nenner bei beiden Brüchen gleich, erhält man

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

und hieraus nach Anwendung von § 26, 1 I und II

$$\cot\frac{\alpha-\beta}{2} = 2{,}6\cdot\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot (\alpha = 64^0 6{,}1',\ \beta = 23^0 33{,}9'.)$$

Aufgabe 4. $\frac{\operatorname{tng}\alpha}{\operatorname{tng}\beta} = \frac{14}{5}$; $\alpha - \beta = 27^0 50'$.

Lösung. Ersetzt man den Tangens durch den Quotienten aus Sinus und Kosinus und wendet auf die dadurch erhaltene Gleichung den bei Aufgabe 3 genannten Satz an, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{19}{9}.$$

Hieraus findet man nach § 25, 2

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{19}{9}\sin(\alpha - \beta)\cdot - (\alpha = 54^0 3{,}7',\ \beta = 26^0 13{,}7'.)$$

Aufgabe 5. $\sin\alpha\sin\beta = 0{,}274$; $\alpha + \beta = 69^0 20'$.

Lösung. Nach § 26, 1 ist $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.[1]) Man findet demnach aus der ersten Gleichung $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 0{,}548$ und hieraus $\cos(\alpha-\beta)$. ($\alpha = 47^0 31{,}6'$, $\beta = 21^0 48{,}4'$.)

Aufgabe 6. $\operatorname{tng}\alpha - \operatorname{tng}\beta = 2{,}3$; $\alpha - \beta = 54^0 20'$.

Lösung. Wenn man Tangens durch Sinus und Kosinus ausdrückt und dann die erhaltenen Brüche auf denselben Nenner bringt, so erhält man einen Bruch, dessen Zähler $\sin(\alpha-\beta)$ ist. Für den Nenner $\cos\alpha\cos\beta$ findet man nach § 26, 1 $\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$. Es ergibt sich eine Gleichung zur Bestimmung von $\cos(\alpha+\beta)$. ($\alpha = 68^0 37{,}4'$, $\beta = 14^0 17{,}4'$.)

Aufgabe 7. Den Winkel α zu berechnen aus der Gleichung $43{,}47\sin\alpha - 52{,}85\cos\alpha = 25{,}89$. — ($\alpha = 72^0 47{,}5'$.)

Bemerkung. Man könnte die obige Gleichung ähnlich lösen wie die Aufgabe 6 in § 8, 2. Hierdurch würde man aber auf eine recht unbequem zu lösende quadratische Gleichung kommen. Die Additionstheoreme geben in diesem Falle die Möglichkeit zu einer weit einfacheren Lösung, deren Gang hier allgemein auseinandergesetzt werden soll.

Ist zur Bestimmung von α eine Gleichung gegeben von der Form

$$a\sin\alpha \mp b\cos\alpha = c,$$

so dividiert man die Gleichung zunächst durch den Koeffizienten von $\sin\alpha$. Hierdurch erhält man

$$\sin\alpha \mp \frac{b}{a}\cos\alpha = \frac{c}{a}.$$

Nun führt man einen Hilfswinkel φ ein (vgl. § 17, 3) durch die Gleichung

$$\operatorname{tng}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Die Gleichung lautet dann

$$\sin\alpha \mp \operatorname{tng}\varphi\cos\alpha = \frac{c}{a}$$

und, wenn man mit $\cos\varphi$ multipliziert,

$$\sin\alpha\cos\varphi \mp \cos\alpha\sin\varphi = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Durch Anwendung des Additionstheorems (§ 25, 2) erhält man hieraus $\sin(\alpha\mp\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$. Aus dieser letzten Gleichung berechnet man $\alpha\mp\varphi$ und hat damit auch den gesuchten Winkel α gefunden.

---

1) Die Formel ist aus der Gleichung $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y$ herzuleiten.

Aufgabe 8. $\operatorname{tng}\alpha + \operatorname{tng}\beta = 3{,}66$; $\alpha - \beta = 31^0 10'$.

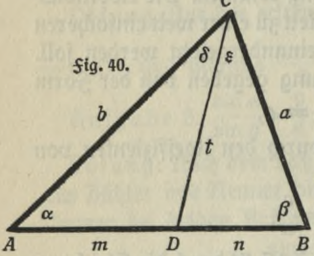
Lösung. Die Aufgabe ist ähnlich zu behandeln wie Aufgabe 6. Sie führt aber auf eine Gleichung wie Aufgabe 7. ($\alpha = 70^0 35{,}4'$, $\beta = 39^0 25{,}4'$.)

B. Planimetrische und praktische Anwendungen.

Aufgabe 1. Von einem Dreieck ABC sind der Winkel $\gamma = 43^0 24'$ und die Höhe $CD = h_c = 236{,}4$ cm bekannt. Wie groß sind die Seiten, wenn $\sin\alpha = 3 \sin\beta$ ist? ($a = 817{,}12$ cm, $b = 272{,}38$ cm, $c = 646{,}89$ cm.)

Aufgabe 2. In einem Dreieck ABC ist durch die Ecke C eine Gerade gezogen, die AB in D so schneidet, daß $AD = m = 83{,}56$ cm und $BD = n = 54{,}85$ cm ist. Ferner ist $\angle ACD = \delta = 36^0 16'$ und $\angle BCD = \varepsilon = 28^0 20'$. Wie groß sind die Seiten AC und BC und die ihnen gegenüberliegenden Winkel? ($AC = 140{,}71$ cm, $BC = 115{,}12$cm, $\beta = 66^0 41{,}5'$, $\alpha = 48^0 42{,}5'$.)

Fig. 40.



Lösung. (Fig. 40). Im Dreieck ADC ist nach dem Sinussatz $\frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{t}{m}$, im Dreieck DBC ist $\frac{\sin\beta}{\sin\varepsilon} = \frac{t}{n}$. Durch Division findet man aus beiden Gleichungen $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n \sin\delta}{m \sin\varepsilon}$. Aus dieser Gleichung kann man wie in A. Aufgabe 3 die Winkel α und β berechnen. Die gesuchten Seiten findet man dann aus dem Dreieck ABC nach dem Sinussatz.

Aufgabe 3. Das Verhältnis der drei Seiten eines Dreiecks ist $a:b:c = 18:26:35$. Wie groß sind die Teile, in welche die Mittellinie m_a den Winkel α teilt?

Lösung. (Fig. 41.) Da zwei Dreiecke, die im Verhältnis der Seiten übereinstimmen, einander ähnlich sind, und in ähnlichen Dreiecken die Winkel gleich sind, so kann man zunächst die Winkel des Dreiecks berechnen aus dem Dreieck, dessen Seiten 18 cm, 26 cm und 35 cm lang sind. Man findet $\alpha = 29^0 56{,}8'$, $\beta = 46^0 8{,}6'$ und $\gamma = 103^0 54{,}6'$.

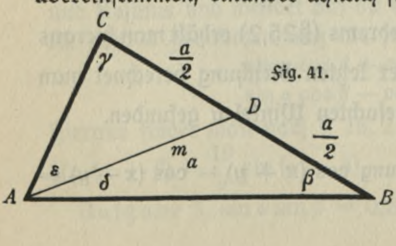


Fig. 41.

Nun ist nach dem Sinussatz im

Dreieck ADC $\frac{m_a}{\frac{a}{2}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\varepsilon}$ und in dem Dreieck ADB $\frac{m_a}{\frac{a}{2}} = \frac{\sin\beta}{\sin\delta}$.

Da die linken Seiten beider Gleichungen einander gleich sind, so kann man auch die rechten Seiten einander gleichsetzen und erhält nach Vertauschung der inneren Glieder der Proportion $\frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$.

Aus der letzten Gleichung findet man ähnlich wie in *A.* Aufgabe 3

$$\operatorname{tng}\frac{\varepsilon+\delta}{2}\cdot\cot\frac{\varepsilon-\delta}{2} = \operatorname{tng}\frac{\gamma+\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma-\beta}{2}.$$

Da nun $\frac{\varepsilon+\delta}{2} = \frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ ist, so kann man diese Werte in die obige Gleichung einsetzen und bekommt die Gleichung

$$\cot\frac{\varepsilon-\delta}{2} = \cot^2\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\gamma-\beta}{2},$$

aus der dann $\frac{\varepsilon-\delta}{2}$ berechnet werden kann. Man findet für ε und δ die Werte $\varepsilon = 17^0 14{,}0'$ und $\delta = 12^0 42{,}8'$.

Aufgabe 4. Auf dem Gipfel eines Berges steht ein $h = 50$ m hohen Turm. Man erblickt von der Ebene aus die Spitze des Turmes unter dem Erhebungswinkel $\varepsilon = 58^0 23'$ und den Fuß des Turmes unter dem Winkel $\varepsilon_1 = 55^0 45'$. Wie hoch ist der Berg?

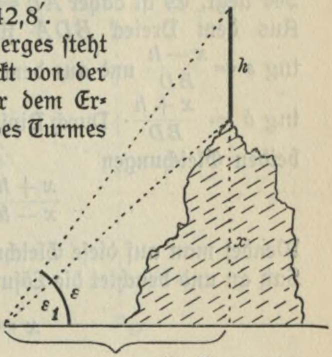


Fig. 42.

Lösung. (Fig. 42.) Bezeichnet man die Höhe des Berges durch x und die Entfernung des Beobachtungspunktes von dem Punkt, in welchem die Vertikallinie durch den Turm die Ebene trifft, mit y, dann findet man die Gleichungen

$$\operatorname{tng}\varepsilon = \frac{h+x}{y} \quad \text{und} \quad \operatorname{tng}\varepsilon_1 = \frac{x}{y}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Division eine Gleichung, aus der man x bestimmen kann.

Man findet

$$x = \frac{h\cdot\operatorname{tng}\varepsilon_1}{\operatorname{tng}\varepsilon - \operatorname{tng}\varepsilon_1}.$$

Der Ausdruck für x läßt sich noch umformen (vgl. *A.* Aufgabe 6) und man erhält schließlich

$$x = \frac{h \sin \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \varepsilon_1)}.$$

Die Höhe des Berges ist 471,58 m.

Aufgabe 5. Von der Spitze eines $h = 200$ m hohen Berges erblickt man einen Punkt einer Wolke unter dem Erhebungswinkel $\varepsilon = 67^0 15'$, während man das Spiegelbild dieses Wolkenpunktes in einem in der Nähe des Berges befindlichen See unter dem Senkungswinkel $\delta = 70^0 30'$ beobachtet. Wie hoch schwebt die Wolke über der Erde?

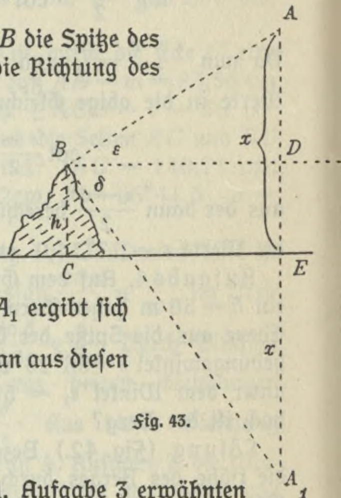


Fig. 43.

Lösung. (Fig. 43.) In der Figur stellt B die Spitze des Berges, A den Wolkenpunkt dar, CE ist die Richtung des Wasserspiegels und A_1 das Bild des Wolkenpunktes im See. Aus der Optik ist bekannt, daß das Bild des Wolkenpunktes ebenso tief unter dem Spiegel des Sees liegen muß, wie der Punkt über dem See liegt. Es ist daher $AE = A_1E = x$. Aus dem Dreieck BDA findet man $\operatorname{tng} \varepsilon = \frac{x - h}{BD}$ und aus dem Dreieck BDA_1 ergibt sich $\operatorname{tng} \delta = \frac{x + h}{BD}$. Durch Division findet man aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{x + h}{x - h} = \frac{\operatorname{tng} \delta}{\operatorname{tng} \varepsilon}.$$

Wendet man auf diese Gleichung den in A. Aufgabe 3 erwähnten Satz an und beachtet die Lösung von A. Aufgabe 4, so findet man

$$x = \frac{h \sin(\delta + \varepsilon)}{\sin(\delta - \varepsilon)}.$$

Die Wolke schwebt 2372 m über der Erde.

§ 28. Die trigonometrische Landesaufnahme.

1. Erklärung. Zum Zwecke der Landesaufnahme wird das ganze zu vermessende Land in Dreiecke zerlegt (Fig. 44). Diese Dreiecke schafft man sich dadurch, daß man einzelne weithin sichtbare Punkte als Ecken der Dreiecke festlegt. Man benutzt dazu unter anderm Turmspitzen oder hohe Schornsteine. Sind solche Punkte nicht vorhanden, so stellt man sogenannte trigonometrische Zeichen auf. Diese bestehen aus drei großen Pfählen, die in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks in Form einer dreiseitigen Pyramide aufgestellt werden, an deren Spitze man eine Fahne oder dergleichen befestigt.

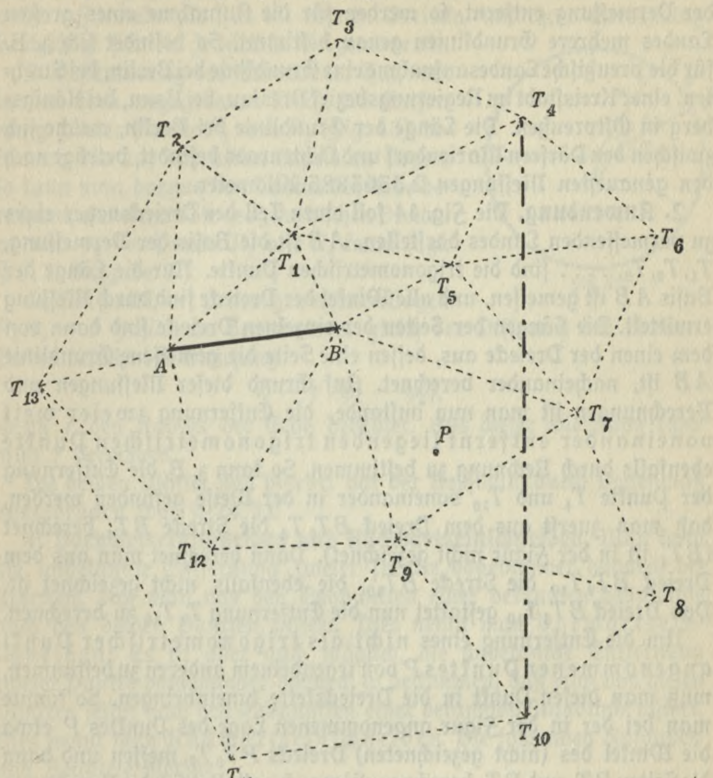


Fig. 44.

Die Ausmessung aller dieser Dreiecke des das ganze Land überdeckenden Dreiecksnetzes geschieht dadurch, daß man an einer Stelle eine Strecke, die Grundlinie oder Basis der Vermessung, mit größter Genauigkeit ausmißt. Diese Grundlinie wird zur Seite eines Dreiecks gewählt, das zu der Kette der das Land überdeckenden Dreiecke gehört. Nun werden nur noch Winkelmessungen durch Visieren von einem trigonometrischen Punkt nach den benachbarten Punkten ausgeführt. Die Seiten aller Dreiecke werden dann, indem man von der gemessenen Basis ausgeht, durch Rechnung ermittelt. Da sich bei dieser Berechnung wegen der unvermeidlichen Fehler bei der Messung kleine Fehler einschleichen können, die immer mehr anwachsen, je weiter man sich von der Basis der Vermessung entfernt, so werden für die Aufnahme eines großen Landes mehrere Grundlinien genau bestimmt. So befindet sich z. B. für die preußische Landesaufnahme eine Grundlinie bei Berlin, bei Strehlen, einer Kreisstadt im Regierungsbezirk Breslau, bei Bonn, bei Königsberg in Ostpreußen. Die Länge der Grundlinie bei Berlin, welche sich zwischen den Dörfern Mariendorf und Lichtenrade befindet, beträgt nach den genauesten Messungen 2,3363885 Kilometer.

2. Anwendung. Die Fig. 44 soll einen Teil des Dreiecksnetzes eines zu vermessenden Landes darstellen. AB ist die Basis der Vermessung, $T_1, T_2, T_3, \ldots$ sind die trigonometrischen Punkte. Nur die Länge der Basis AB ist gemessen, und alle Winkel der Dreiecke sind durch Messung ermittelt. Die Längen der Seiten der einzelnen Dreiecke sind dann von dem einen der Dreiecke aus, dessen eine Seite die gemessene Grundlinie AB ist, nacheinander berechnet. Auf Grund dieser Messungen und Berechnungen ist man nun imstande, die Entfernung zweier weit voneinander entfernt liegenden trigonometrischen Punkte ebenfalls durch Rechnung zu bestimmen. So kann z. B. die Entfernung der Punkte T_4 und T_{10} voneinander in der Weise gefunden werden, daß man zuerst aus dem Dreieck BT_5T_4 die Strecke BT_4 berechnet (BT_4 ist in der Figur nicht gezeichnet). Dann berechnet man aus dem Dreieck BT_9T_{10} die Strecke BT_{10}, die ebenfalls nicht gezeichnet ist. Das Dreieck BT_4T_{10} gestattet nun die Entfernung T_4T_{10} zu berechnen.

Um die Entfernung eines nicht als trigonometrischer Punkt angenommenen Punktes P von irgendeinem anderen zu bestimmen, muß man diesen Punkt in die Dreieckskette hineinbringen. So könnte man bei der in der Figur angenommenen Lage des Punktes P etwa die Winkel des (nicht gezeichneten) Dreiecks PT_9T_7 messen und dann die Seiten PT_9 und PT_7 berechnen. Hiernach gestaltet sich die Berechnung der Entfernung wieder so, wie oben angegeben.

Bemerkung. Größere Entfernungen auf der Erdoberfläche sind wegen der Kugelgestalt der Erde keine geraden Linien, sondern Kreisbogen. Aus diesem Grunde sind auch größere Dreiecke auf der Erdoberfläche keine ebenen, von geraden Linien begrenzte Figuren, sondern Kugeldreiecke oder sphärische[1]) Dreiecke. Die sphärischen Dreiecke unterscheiden sich von den Dreiecken, die in der ebenen Trigonometrie

1) „Sphaira", griech. die Kugel.

behandelt werden, unter anderm dadurch, daß die Summe ihrer Winkel keinen unveränderlichen Wert besitzt, sondern stets um einen veränderlichen Betrag größer als zwei Rechte ist. Für diese Dreiecke gelten andere Formeln als für die ebenen Dreiecke, mit ihrer Berechnung beschäftigt sich die sphärische Trigonometrie.

3. Bestimmung des Erdradius. Hat man in der eben angegebenen Weise die Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 (Fig. 45) bestimmt, die auf demselben Meridian liegen, so kann man daraus den Radius der Erde berechnen, wenn man die geographischen Breiten φ_1 und φ_2 der Punkte P_1 und P_2 kennt (vgl. § 6, 7 Aufgabe 3.)

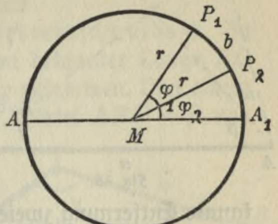


Fig. 45.

Es ist nämlich der zu dem gemessenen Bogen $P_1P_2 = b$ gehörende Zentriwinkel gleich der Differenz der Breiten. Daher besteht die Gleichung

$$b = r\ (\varphi_1 - \varphi_2),$$

wenn r den Radius der Erde bedeutet. Aus dieser Gleichung kann man r berechnen.

Die beiden Winkel sind hierbei vor der Rechnung durch Bogenmaß auszudrücken (vgl. § 24, 1).

4. Vorwärtseinschneiden und Rückwärtseinschneiden. Man kann die unbekannte Entfernung zweier Punkte voneinander dadurch bestimmen, daß man von den Endpunkten einer bekannten Standlinie nach den beiden Punkten visiert. Dies nennt man Vorwärtseinschneiden. Es ist aber auch möglich, die unbekannte Entfernung zweier Punkte voneinander dadurch zu bestimmen, daß man von diesen Punkten selbst nach den Endpunkten einer bekannten Standlinie visiert. Dies nennt man Rückwärtseinschneiden. Die folgenden Aufgaben sind Beispiele hierfür.

5. Aufgabe (Vorwärtseinschneiden). Um die unbekannte Entfernung zweier Punkte P und P_1 voneinander zu bestimmen, hat man von den Endpunkten einer bekannten Standlinie $AB = a$ nach ihnen visiert und gefunden $\angle PAP_1 = \alpha$, $\angle P_1AB = \beta$, $\angle ABP = \gamma$ und $\angle PBP_1 = \delta$. Es soll hieraus die Länge der Strecke PP_1 berechnet werden.

Lösung. (Fig. 46.) Man findet nach dem Sinussatz aus dem Dreieck ABP

$$AP = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)},$$

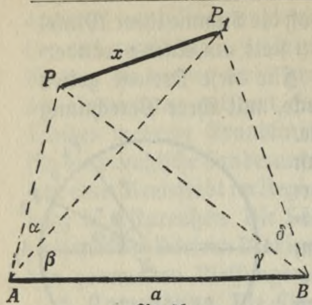


Fig. 46.

denn der der Seite a gegenüberliegende Winkel APB ist $180^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$. Aus dem Dreieck ABP_1 erhält man

$$AP_1 = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}.$$

Hierdurch kennt man von dem Dreieck AP_1P zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel und kann die gesuchte Entfernung nach dem Tangentialsatz berechnen.

6. Die Hansensche Aufgabe, (Rückwärtseinschneiden). Um die unbekannte Entfernung zweier Punkte P und P_1 voneinander zu bestimmen, hat man von ihnen aus nach den Endpunkten einer bekannten Standlinie $AB = a$ visiert und gefunden $\angle APB = \alpha$, $\angle BPP_1 = \beta$, $\angle AP_1P = \gamma$, $\angle AP_1B = \delta$. Es soll hieraus die Länge der Strecke PP_1 berechnet werden.

Lösung. (Fig. 47.) Man setze $\angle P_1AB = \varepsilon$ und $\angle PBA = \zeta$. Nun findet man nach dem Sinussatz aus dem Dreieck APB

$$\frac{a}{AP} = \frac{\sin\alpha}{\sin\zeta}$$

und aus dem Dreieck APP_1

$$\frac{x}{AP} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin\gamma}.$$

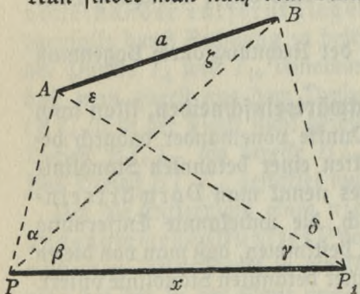


Fig. 47.

Aus den beiden Gleichungen findet man durch Division

$$\frac{a}{x} = \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\zeta\cdot\sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Ähnlich läßt sich mit Hilfe des Sinussatzes noch ein zweiter Ausdruck für $\frac{a}{x}$ finden. Man bestimmt in dem Dreieck ABP_1 das Verhältnis $a : BP_1$ und in dem Dreieck PP_1B das Verhältnis $x : BP_1$. Durch Division findet man aus den erhaltenen Gleichungen

$$\frac{a}{x} = \frac{\sin\delta\sin\beta}{\sin\varepsilon\cdot\sin(\beta + \gamma + \delta)}.$$

Setzt man die beiden für $\frac{a}{x}$ gefundenen Werte einander gleich, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\zeta} = \frac{\sin\delta\sin\beta\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma\sin(\beta + \gamma + \delta)}.$$

Da $\varepsilon + \zeta = \beta + \gamma$ sein muß, weil beide Summen den Winkel, unter dem sich die Linien AP_1 und BP schneiden, zu zwei Rechten ergänzen, so kann man jetzt nach § 27A, Aufgabe 3 die Winkel ε und ζ berechnen. Sind diese Winkel gefunden, so kann man x aus einer der im Anfang erhaltenen Gleichungen berechnen.

7. Die Pothenotsche Aufgabe (Rückwärtseinschneiden). In einem Punkte C treffen zwei Standlinien von bekannter Länge $AC = b$ und $BC = a$ unter dem Winkel $ACB = \gamma$ zusammen. Von einem Punkte P aus hat man durch Visieren die Winkel $APC = \beta$ und $BPC = \alpha$ bestimmt. Es sollen die Entfernungen des Punktes P von A, B und C berechnet werden.

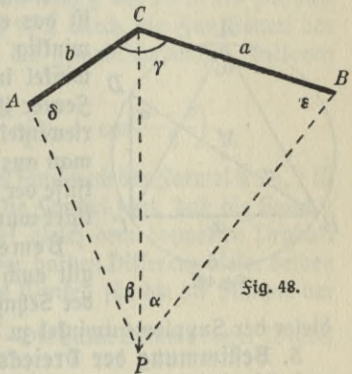


Fig. 48.

Lösung (Fig. 48). Die Winkel bei A und bei B bezeichne man mit δ bzw. ε. Nun kann man die Strecke PC sowohl aus dem Dreieck APC wie aus dem Dreieck BPC mit Hilfe des Sinussatzes bestimmen und findet

$$PC = \frac{b \sin \delta}{\sin \beta} = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin \alpha}.$$

Hieraus erhält man eine Gleichung für $\sin \delta : \sin \varepsilon$. Da nun $\delta + \varepsilon = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$ ist, so kann man jetzt δ und ε berechnen (vgl. § 27A, Aufgabe 3) und findet dann die gesuchten Strecken durch den Sinussatz.

§ 29. Die Bestimmung der Dreiecksstücke durch die Winkel und den Radius des Umkreises.

1. Vorbemerkung. Sind von einem Dreieck die Winkel bekannt, so ist dadurch die Gestalt des Dreiecks vollständig bestimmt, weil Dreiecke, die in den Winkeln übereinstimmen, einander ähnlich sind. Kennt man nun von einem Dreieck außer den Winkeln noch irgendein Stück, so ist durch dieses eine Stück die Größe aller übrigen Stücke des Dreiecks bestimmt. Man kann also alle Stücke berechnen, wenn man Formeln kennt, durch welche die Stücke durch das eine gegebene Stück ausgedrückt sind. Es lassen sich nun einfache Formeln herleiten, durch die man die einzelnen Stücke des Dreiecks aus dem Radius des Umkreises r und den Winkeln berechnen kann. Die Herleitung dieser Formeln gelingt auf Grund des folgenden Lehrsatzes, der sich mit Hilfe der Eigenschaft des Kreises, daß sämtliche Peripheriewinkel über demselben Bogen einander gleich sind, leicht beweisen läßt.

2. Lehrsatz. Jede Sehne eines Kreises ist gleich dem Produkt aus dem Durchmesser und dem Sinus des zu der Sehne gehörenden Peripheriewinkels.

$$a = 2r \sin \alpha.$$

Beweis (Fig. 49). $BC = a$ sei eine beliebige Sehne des Kreises um M und $\angle BAC = \alpha$ der zu ihr gehörende Peripheriewinkel. Zieht man von B aus den Durchmesser BD und verbindet D mit C, dann ist das entstehende Dreieck BCD bei C rechtwinklig, da der Winkel BCD als Peripheriewinkel im Halbkreis gleich einem Rechten ist. Ferner ist $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen. Nun findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD mit Hilfe der Gleichung, durch welche der Sinus erklärt wurde, die Behauptung.

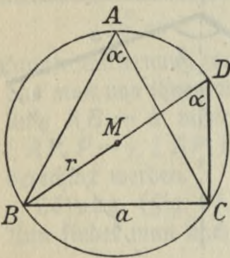


Fig. 49.

Bemerkung. Die soeben bewiesene Formel gilt auch für den im anderen Kreisbogen über der Sehne a befindlichen Peripheriewinkel, da dieser der Supplementwinkel zu α ist, und $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ ist.

3. Bestimmung der Dreiecksstücke durch r und die Winkel.

I. Die Seiten. Da jede Seite des Dreiecks Sehne des Umkreises des Dreiecks ist, so folgt unmittelbar aus dem in 2. bewiesenen Lehrsatz

$$\boldsymbol{a = 2r \sin \alpha,}$$
$$b = 2r \sin \beta,$$
$$c = 2r \sin \gamma.$$

II. Die Höhen. Nach § 13, 1 ist $h_a = b \sin \gamma$, es mag γ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel sein. Setzt man in dieser Formel $b = 2r \sin \beta$, so findet man

$$\boldsymbol{h_a = 2r \sin \beta \sin \gamma.}$$

Ähnlich findet man $h_b = 2r \sin \alpha \sin \gamma,$

$$h_c = 2r \sin \alpha \sin \beta.$$

Jede Dreieckshöhe ist also gleich dem Produkt aus dem Durchmesser des Umkreises und den Sinus der beiden Winkel, die der Seite anliegen, auf welche die Höhe gefällt ist.

III. Der Inhalt. Aus der § 15, 6 *b* bewiesenen Formel $f = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

folgt sofort durch Benutzung von I

$$f = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

IV. Der halbe Umfang. Ersetzt man in der Gleichung $2s = a + b + c$ die Seiten durch den Radius des Umkreises und den Sinus des ihnen gegenüberliegenden Winkels, so erhält man, wenn man noch γ durch sein Supplement $\alpha + \beta$ ersetzt,

$$2s = 2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)).$$

Hieraus folgt, wenn man $\sin\alpha + \sin\beta$ nach § 26, 1 I in ein Produkt verwandelt und $\sin(\alpha + \beta)$ nach § 9, 2 durch die Funktionen des halben Winkels ausdrückt und dann die gemeinschaftlichen Faktoren vor die Klammer setzt

$$2s = 4r \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck kann nach der Formel § 26, 1 III in ein Produkt verwandelt werden. Die Formel sagt, daß die Summe der Kosinus zweier beliebigen Winkel gleich dem doppelten Produkt der Kosinus der halben Summe und der halben Differenz dieser beiden Winkel ist. In unserem Falle sind die Winkel, für die die Summe der Kosinus gegeben ist, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Die halbe Summe dieser Winkel ist $\frac{\alpha}{2}$, ihre halbe Differenz $\frac{\beta}{2}$. Der Ausdruck in der Klammer kann daher ersetzt werden durch $2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$. Ersetzt man außerdem $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ durch $\cos\frac{\gamma}{2}$ (§ 7, 1), so findet man

$$s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

V. Der Radius des Inkreises. Durch die Formel $f = \varrho s$ (§ 15, 6 d) findet man

$$\varrho = \frac{f}{s} = \frac{2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

und, wenn man im Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung die Funktionen der halben Winkel einführt und die gleichen Faktoren im Zähler und Nenner hebt,

$$\varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

VI. Die Radien der Ankreise. In § 15, 5 war gefunden

$$\varrho_a = s \operatorname{tng}\frac{\alpha}{2}.$$

Wenn man in dieser Formel s nach IV ersetzt und $\operatorname{tng}\frac{\alpha}{2}$ durch den Quotienten aus Sinus und Kosinus ausdrückt, so erhält man, nachdem durch $\cos\frac{\alpha}{2}$ gehoben ist,

$$\varrho_a = \mathbf{4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Ähnlich findet man

$$\varrho_b = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\varrho_c = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

VII. Die Abschnitte, in welche die Seiten durch die Berührungspunkte des Inkreises geteilt werden. Aus der Formel $\operatorname{tng}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$ (§ 15, 3) folgt

$$s - a = \varrho\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$= 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\mathbf{s - a = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Ebenso findet man

$$s - b = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$s - c = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

§ 30. Die Lösung trigonometrischer Aufgaben durch r und die Winkel.

Mit Benutzung der in § 29,3 gefundenen Formeln können viele trigonometrische Aufgaben ohne jede Figur, lediglich auf algebraischem Wege gelöst werden. Vielfach kann man aber auch neben der in dieser Weise ausgeführten Lösung eine andere, mit Benutzung der Figur mögliche Lösung angeben. Es ist hier ähnlich wie bei den planimetrischen Aufgaben, von denen viele sowohl durch algebraische Analysis wie durch rein geometrische Analysis gelöst werden können. Im folgenden soll eine Anzahl von Aufgaben, die die Verwendung obiger Formeln klar machen, behandelt werden. Für die meisten dieser Aufgaben gilt dasselbe, was im Anfange von § 19 gesagt wurde.

Besonders einfach wird die Lösung trigonometrischer Aufgaben mit Hilfe der gefundenen Formeln, wenn die Winkel des Dreiecks unmittelbar oder mittelbar gegeben sind.

I. Die Winkel des Dreiecks sind unmittelbar gegeben. Befinden sich unter den drei zur Berechnung eines Dreiecks gegebenen Stücken zwei Winkel, so drückt man das dritte gegebene Stück durch r und die Winkel aus. Aus der hierdurch erhaltenen Gleichung berechnet man r und ist nun imstande, jedes gewünschte Dreiecksstück nach den in § 29,3 aufgestellten Formeln zu bestimmen.

Aufgabe 1. In einem Dreieck ABC ist $\alpha = 64^0 36'$, $\beta = 42^0 50'$, und der Radius des Inkreises $\varrho = 12{,}73$ cm. Die Seiten des Dreiecks sollen berechnet werden.

Lösung 1. Man bestimmt zunächst $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 72^0 34'$. Nun findet man aus der Formel für ϱ (§ 29,3 V) eine Gleichung für r. Die Rechnung ergibt $\log r = 1{,}44031$. Durch die Formeln § 29,3 I, werden dann die Seiten berechnet. Man findet

$$a = 49{,}796 \text{ cm}, \quad b = 37{,}477 \text{ cm}, \quad c = 52{,}592 \text{ cm}.$$

Lösung 2. Mit Hilfe der Formeln $s - a = \varrho \cot \frac{\alpha}{2}$, $s - b = \varrho \cot \frac{\beta}{2}$ usw. berechnet man $s - a = 20{,}137$, $s - b = 32{,}456$, $s - c = 17{,}340$. Die Addition dieser letzten drei Gleichungen liefert den Wert für s, denn es ist $s - a + s - b + s - c = 3s - (a + b + c) = 3s - 2s = s$. Man findet $s = 69{,}933$. Subtrahiert man von diesem Werte für s der Reihe nach $s - a$, $s - b$, $s - c$, so findet man die drei Seiten.

Aufgabe 2. Man kennt von einem Dreieck die Summe zweier Höhen $h_b + h_a = 243{,}5$ cm und die Winkel $\alpha = 53^0 20'$ und $\beta = 41^0 18'$. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

Lösung 1. Der Winkel γ ist durch α und β bestimmt ($\gamma = 85^0 22'$). Drückt man h_a und h_b durch r und die Winkel aus (§ 29, 3 II), so erhält man

$$h_b + h_a = 2r \sin\gamma (\sin\alpha + \sin\beta).$$

Da die in der Klammer stehende Summe sich für die logarithmische Rechnung schlecht eignet, so verwandelt man sie nach § 26, 1 in ein

Produkt und findet, wenn man $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$ setzt (§ 7, 1),

$$h_b + h_a = 4r\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Aus dieser Gleichung berechnet man $2r$ ($\log 2r = 2{,}22294$) und bestimmt dann die Seiten nach den Formeln $a = 2r\sin\alpha$ usw. ($a = 134{,}02$ cm, $b = 110{,}28$ cm, $c = 166{,}54$ cm).

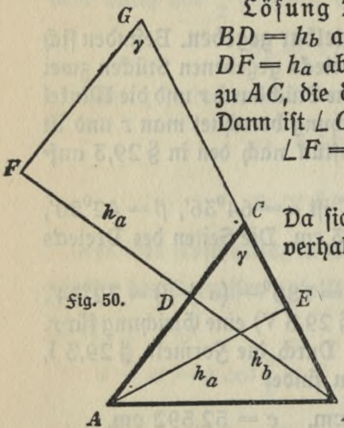


Fig. 50.

Lösung 2. (Fig. 50.) Man fälle von B die Höhe $BD = h_b$ auf AC und trage auf der Verlängerung $DF = h_a$ ab. Nun ziehe man durch F die Parallele zu AC, die die Verlängerung von BC in G schneidet. Dann ist $\angle G = \gamma$ (Gegenwinkel an Parellelen), und $\angle F = 1R$, ferner ist nach dem Strahlensatz

$$h_b : h_a = a : CG.$$

Da sich in jedem Dreieck die Höhen umgekehrt verhalten wie die Seiten, auf die sie gefällt sind, besteht aber auch die Proportion

$$h_b : h_a = a : b.$$

Aus den beiden Proportionen folgt, daß $CG = b$ sein muß. In dem rechtwinkligen Dreieck BGF ist also die Hypotenuse BG gleich $a + b$, die Kathete $BF = h_b + h_a$ und der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel gleich γ. Es besteht daher die Gleichung

$$\sin\gamma = \frac{h_b + h_a}{a+b}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man $a + b$ berechnen, findet dann durch die Mollweidesche Gleichung die Seite c und hierauf die beiden anderen Seiten durch den Sinussatz.

Aufgabe 3. Die Differenz der Radien der beiden Kreise, welche die Seite a berühren, ist in einem Dreieck $\varrho_a - \varrho = 27{,}36$ cm, ferner ist $\alpha = 48^0 34'$ und $\beta = 55^0 42'$. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?

Lösung. Nach § 29, 3 VI und V ist

$$\varrho_a - \varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\ (\S\ 25, 3\,\mathrm{I}),$$

$$\varrho_a - \varrho = 4r\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Nun kann man $\log r$ berechnen und findet dann den Inhalt durch die Formel § 29, 3 III. ($f = 1963{,}5$ qcm.)

II. **Die Winkel des Dreiecks sind mittelbar gegeben.** Man kann die Winkel eines Dreiecks leicht berechnen, wenn unter den drei zur Berechnung des Dreiecks gegebenen Stücken sich zwei Stücke befinden, die die Ähnlichkeit zweier Dreiecke bedingen, falls beide Dreiecke in ihnen übereinstimmen. Solche Stücke sind außer den Winkeln

1. das Verhältnis zweier Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel ($a : b = m : n, \gamma$).

2. das Verhältnis der drei Seiten ($a : b : c = m : n : p$).

3. das Verhältnis zweier Seiten und der der größeren von ihnen gegenüberliegende Winkel ($a : b = m : n$ [$m > n$], α).

Im ersten Falle berechnet man die Winkel des Dreiecks, in welchem zwei Seiten gleich m und n sind, und in dem der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel gleich γ ist. Im zweiten Falle berechnet man die Winkel des Dreiecks, dessen Seiten m, n und p sind. Im dritten Falle berechnet man die Winkel des Dreiecks, in dem zwei Seiten gleich m und n sind und in dem der Seite m der Winkel α gegenüberliegt.

In allen drei Fällen sind die Dreieckswinkel, welche man findet, zugleich die Winkel des zu berechnenden Dreiecks, denn in ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Winkel einander gleich.

Aufgabe 4. In einem Dreieck, dessen Inhalt $f = 237{,}6$ qcm groß ist, ist das Verhältnis zweier Seiten $a : b = 11 : 7$ und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel $\gamma = 106^0 24'$. Wie groß sind die beiden anderen Winkel und die Seiten?

Lösung 1. Aus dem Dreieck, dessen Seiten $a_1 = 11$ cm und $b_1 = 7$ cm den Winkel $\gamma = 106^0 24'$ einschließen, findet man durch Benutzung des Tangentialsatzes $\alpha = 46^0 14{,}3'$ und $\beta = 27^0 21{,}7'$. Nun berechnet man $\log r$ durch die Formel für f ($\log r = 1{,}28590$) und kann dann die Seiten bestimmen. ($a = 27{,}901$ cm, $b = 17{,}755$ cm, $c = 37{,}508$ cm.)

Lösung 2. Aus der Formel $f = \frac{1}{2}$ ab $\sin \gamma$ berechnet man ab, dann findet man mit Hilfe von $a \cdot b$ und $\frac{a}{b}$ durch Multiplikation a^2 und durch Division b^2. Dadurch kennt man von dem Dreieck zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Aufgabe 5. Das Verhältnis der Seiten eines Dreiecks ist $a : b : c = 17 : 23 : 29$, und die Summe der Radien zweier Ankreise $\varrho_a + \varrho_b = 44{,}54$ cm. Die Winkel und die Seiten des Dreiecks zu berechnen.

Lösung. Man berechnet die Winkel des Dreiecks, dessen Seiten 17 cm, 23 cm und 29 cm lang sind, und findet $\alpha = 35^0 52{,}2'$, $\beta = 52^0 26{,}6'$ und $\gamma = 91^0 41{,}2'$. Nun stellt man die Gleichung auf

$$\varrho_a + \varrho_b = 4\,r \cos\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist nach § 25, 21 gleich $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, hierfür kann man $\cos\frac{\gamma}{2}$ setzen und erhält dann

$$\varrho_a + \varrho_b = 4\,r \cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Aus dieser Gleichung berechnet man den Wert von $\log r$ und kann wieder leicht die Seiten bestimmen. ($a = 26{,}889$ cm, $b = 36{,}380$ cm, $c = 45{,}870$ cm.)

III. Nur ein Winkel ist gegeben. Man ersetzt jedes der beiden anderen gegebenen Stücke durch r und die Winkel. Die dadurch erhaltenen Formeln formt man dann so um, daß in ihnen nur noch die Summe und die Differenz der beiden unbekannten Winkel vorkommt. In dieser Weise erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Unbekannten sind r und die Differenz der Winkel. Nun schafft man aus den beiden Gleichungen r fort, gewöhnlich durch Division, und erhält dann eine Gleichung, aus der man die Differenz der unbekannten Winkel bestimmen kann. Hierdurch sind dann sämtliche Winkel des Dreiecks bekannt, und man kann aus einer der beiden zuerst entwickelten Formeln den Wert von r berechnen.

Aufgabe 6. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist $a + b = 126{,}8$ cm, die Differenz der zu den Seiten gehörenden Höhen $h_b - h_a = 87{,}5$ cm und der von den Seiten eingeschlossene Winkel $\gamma = 62^0 38'$. Wie groß sind die beiden anderen Winkel und die Seiten des Dreiecks?

Lösung. Es ist $a + b = 2\,r(\sin\alpha + \sin\beta) = 4\,r\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Ferner ist

$$h_b - h_a = 2\,r\sin\gamma\,(\sin\alpha - \sin\beta) = 8\,r\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Durch Division findet man aus den beiden erhaltenen Formeln eine Gleichung für den Tangens der halben Differenz der Winkel α und β. Zur Berechnung von r benutzt man am besten die für $a + b$ erhaltene Gleichung. ($\alpha = 110^0 37{,}3'$, $\beta = 6^0 44{,}7'$, $a = 112{,}67$ cm, $b = 14{,}138$ cm, $c = 106{,}90$ cm.)

Aufgabe 7. Die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks ist $a - b = 18$ cm, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel $\gamma = 78^0 11{,}8'$

und die Differenz aus dem Radius des Ankreises an die dritte Seite und dem Radius des Inkreises $\varrho_c - \varrho = 58{,}51$ cm. Wie groß sind die unbekannten Winkel und die Seiten?

Lösung. Man findet

$$a - b = 4\,r \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \quad \varrho_c - \varrho = 4\,r \sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

($\alpha = 62^0\,5{,}3'$, $\beta = 39^0\,42{,}9'$, $a = 65{,}00$ cm, $b = 47{,}00$ cm, $c = 72{,}00$ cm.)

Aufgabe 8. Die unbekannten Winkel und die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, von dem gegeben ist $\varrho_a - \varrho_b = 17{,}56$ cm, $a + b = 39{,}48$ cm und $\gamma = 67^0\,20'$.

Lösung. Man findet

$$\varrho_a - \varrho_b = 4r \cos\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$a + b = 4r \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

($\alpha = 80^0\,18{,}7'$, $\beta = 32^0\,21{,}3'$, $a = 25{,}588$ cm, $b = 13{,}892$ cm, $c = 23{,}953$ cm.)

IV. Es ist kein Winkel gegeben. Die gegebenen Stücke werden durch r und die Winkel ersetzt, dann werden die erhaltenen Formeln so umgewandelt, wie es in den vorhergehenden Aufgaben geschehen ist, indem man einen der Winkel von den beiden andern absondert. Man erhält dann drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

Aufgabe 9. In einem Dreieck ist Seite $c = 169$ cm, die Differenz der beiden anderen Seiten $a - b = 13$ cm und die Differenz der Radien der Ankreise an den beiden zuletzt genannten Seiten $\varrho_a - \varrho_b = 26$ cm. Wie groß sind die Winkel und die beiden unbekannten Seiten?

Lösung. Aus den Gleichungen

$$c = 4r \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$
$$a - b = 4r \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2},$$
$$\varrho_a - \varrho_b = 4r \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$$

findet man

$$\operatorname{tng}\frac{\gamma}{2} = \frac{a-b}{\varrho_a - \varrho_b} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{c} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

($\alpha = 67^0\,22{,}8'$, $\beta = 59^0\,29{,}4'$, $\gamma = 53^0\,7{,}8'$, $a = 195{,}00$ cm, $b = 182{,}00$ cm.)

Register.

Aus Natur und Geisteswelt

Jeder Band geheftet M. 1.—, in Leinwand gebunden M. 1.25

Aus dem Gebiete der Mathematik erschienen u. a.:

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Dr. Paul Crantz, Prof. am Askanischen Gymnasium in Berlin. In 2 Bänden. Mit Fig. Bd. 120, 205.

I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 3. Auflage. Mit 9 Figuren. (Bd. 120). II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 2. Auflage. Mit 21 Figuren. (Bd. 205).

Will in leicht faßlicher und für das Selbststudium geeigneter Darstellung über die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra unterrichten. Im ersten Bande werden die sieben Rechnungsarten, die Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten und die Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten, und schließlich die Logarithmen behandelt, im zweiten die Gleichungen höheren Grades, die arithmetischen und geometrischen Reihen, die Zinseszins- und Rentenrechnung, die komplexen Zahlen und der binomische Lehrsatz, wobei überall die graphische Darstellung eingehende Berücksichtigung erfährt und zahlreiche in ausführlicher Ausrechnung eingefügte Beispiele das Verständnis erleichtern.

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Dr. Paul Crantz, Professor am Askanischen Gymnasium in Berlin. Mit 99 Figuren. (Bd. 340).

Enthält die Planimetrie bis zur Ähnlichkeitslehre und der Berechnung des Kreises. Das Buch verfolgt dieselben Ziele wie die in der gleichen Sammlung erschienene „Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht." In möglichst einfacher und verständlicher Art macht es mit den Grundlehren der Planimetrie vertraut, ohne dabei der wissenschaftlichen Strenge zu entbehren. Wert ist darauf gelegt, den Zusammenhang der einzelnen Sätze und den Nutzen derselben hervorzuheben. Diesem Zweck dienen die überall gegebenen praktischen Anwendungen. Auch rein geometrische Aufgaben sind in größerer Zahl vorhanden, deren Lösung teils ausführlich besprochen, teils kurz angedeutet ist. Historische Bemerkungen sind, wo es anging, eingefügt. Ein ausführliches Register ist dem Buche zur leichteren Orientierung beigegeben.

Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Von Prof. Dr. G. Kowalewski in Prag. 2. Aufl. Mit 22 Fig. (Bd. 197.)

Bietet in allgemeinverständlicher Form eine Einführung in die Infinitesimalrechnung, ohne die heute eine streng wissenschaftliche Behandlung der Naturwissenschaften unmöglich ist, welche die nicht sowohl in dem Kalkül selbst, als vielmehr in der gegenüber der Elementarmathematik veränderten Betrachtungsweise unter den Gesichtspunkten der Kontinuität und des Unendlichen liegenden Schwierigkeiten zu überwinden lehren will.

Differential- und Integralrechnung mit Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik. Von Dr. M. Lindow. Mit 42 Abb. (Bd. 387.)

Gibt unter durchgängiger Benutzung der anschaulichen geometrischen Methode an der Hand praktisch verwendbarer Beispiele unter möglichster Vermeidnng rein theoretischer Erörterungen eine Darstellung der Grundzüge der Differential- und Integralrechnung.

Praktische Mathematik. Von Dr. R. Neuendorff, Kiel. I. Teil: Graphisches und numerisches Rechnen. Mit 62 Figuren u. 1 Tafel. (Bd. 341.)

In allgemeinverständlicher Weise werden Rechenmethoden und mathematische Apparate, die im praktischen Leben mit Vorteil Verwendung finden, erläutert und zu ihrer Verwendung Anregung gegeben. Zunächst wird der Begriff der Funktion erklärt und eingehend mit vielen Beispielen aus dem täglichen Leben die graphische Darstellung besprochen. Es folgen Kapitel über verkürztes Rechnen, Tabellenrechnen, Recheninstrumente und Rechenmaschinen. Endlich werden die verschiedenen Methoden der Flächen- und Körperberechnung behandelt, mit besonderer Berücksichtigung der Planimetrie.

Mathematische Spiele. Von Dr. Wilhelm Ahrens in Berlin. Mit 1 Titelbild und 77 Figuren. 2. Aufl. (Bd. 170.)

Sucht in das Verständnis all der Spiele, die „ungleich voll von Nachdenken" vergnügen, weil man bei ihnen rechnet, ohne Voraussetzung irgendwelcher mathematischer Kenntnisse einzuführen und so ihren Reiz für Nachdenkliche zu erhöhen. So werden unter Beigabe von einfachen, das Mitarbeiten des Lesers belebenden Fragen Wettspringen, Boß-Puzzle, Solitär- oder Einsiedlerspiele, Wanderungsspiel, Dyadische Spiele, der Baguenaudier, Nim, der Rösselsprung, die Magischen Quadrate, endlich Paradoxien der Mathematik behandelt.

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich. — Werke, die mehrere Bände umfassen, sind auch in einem Band gebunden vorrätig.

Jeder Band geheftet M. 1.—, in Leinwand gebunden M. 1.25

Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet.

Aus Theologie u. Philosophie, Pädagogik u. Bildungswesen erschienen:

Amerikanisches Bildungswesen siehe Techn. Hochschulen, Universitäten, Volksschule.

Ästhetik. Von Prof. Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)

Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. Von Dr. J. Unold. 3. Aufl. (Bd. 12.)
— siehe auch Ethik.

Bildungswesen, Das deutsche, in seiner geschichtlichen Entwicklung. Von weil. Prof. Dr. Fr. Paulsen. 3. Aufl. Von Prof. Dr. W. Münch. Mit Bildn. Paulsens. (Bd. 100.)

Buddhas Leben und Lehre. Von weil. Prof. Dr. R. Pischel. 2. Aufl. von Prof. Dr. H. Lüders. Mit 1 Taf. (Bd. 109.)

Calvin, Johann. Von Pfarrer Dr. G. Sodeur. Mit Bildn. (Bd. 247.)

Christentum. Aus der Werdezeit des Chr. Studien und Charakteristiken. Von Prof. Dr. J. Geffcken. 2. Aufl. (Bd. 54.)

Christentum und Weltgeschichte. Von Prof. D. Dr. K. Sell. 2 Bde. (Bd. 297, 298.)
— siehe auch Jesus, Mystik im Christentum.

Deutsches Ringen nach Kraft und Schönheit. Aus den literar. Zeugn. eines Jahrh. gesammelt. Von Turninspektor K. Möller. 2 Bde. Bd. II in Vorb. (Bd. 188, 189.)

Einführung in die Philosophie, Theologie siehe Philosophie, Theologie.

Entstehung der Welt und der Erde. Von Prof. Dr. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)

Erziehung, Moderne, in Haus und Schule. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 159.)
— siehe auch Großstadtpädagogik und Schulkämpfe der Gegenwart.

Ethik. Prinzipien der E. Von E. Wentscher. (Bd. 397.)
— siehe auch Aufgaben und Ziele des Menschenlebens, sittliche Lebensanschauungen, Willensfreiheit.

Fortbildungsschulwesen, Das deutsche. Von Dir. Dr. F. Schilling. (Bd. 256.)

Fröbel, Friedrich. Leben und Wirken. Von A. v. Portugall. Mit 5 Taf. (Bd 82.)

Großstadtpädagogik. Von J. Tews. (Bd. 327.)
— siehe auch Erziehung, Moderne, und Schulkämpfe der Gegenwart.

Heidentum siehe Mystik.

Herbarts Lehren und Leben. Von Pastor Dr. O. Flügel. Mit Bildn. (Bd. 164.)

Hilfsschulwesen. Von Rektor Dr. B. Maennel. (Bd. 73.)

Hochschulen siehe Techn. Hochschulen und Universitäten.

Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. 2. Aufl. (Bd. 199.)

Jesuiten, Die. Eine histor. Skizze. Von Prof. D. H. Boehmer. 3. Aufl. (Bd. 49.)

Jesus und seine Zeitgenossen. Geschichtliches und Erbauliches. Von Pastor C. Bonhoff. (Bd. 89.)
— **Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu.** Von Pfarrer D. Dr. P. Mehlhorn. 2. Aufl. (Bd. 137.)
— **Die Gleichnisse Jesu.** Zugl. Anleitung zu quellenmäßigem Verständnis der Evangelien. Von Prof. D. Dr. Weinel. 3. Aufl. (Bd. 46.)

Israelit. Religion. Die Grundzüge der israel. Religionsgeschichte. V. weil. Prof. Dr. Fr. Giesebrecht. 2. Aufl. (Bd. 52.)

Jugendfürsorge. Von Waisenhausdirektor Dr. J. Petersen. 2 Bde. (Bd. 161, 162.)

Kant, Immanuel. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Külpe. 3. Aufl. Mit Bildn. (Bd. 146.)

Knabenhandarbeit, Die, in der heutigen Erziehung. Von Sem.-Dir. Dr. A. Pabst. Mit 21 Abb. u. Titelbild. (Bd. 140.)

Lehrerbildung siehe Volksschule und Lehrerbildung der Ver. Staaten.

Luther im Lichte der neueren Forschung. Ein krit. Bericht. Von Prof. D. H. Boehmer. 3. Aufl. Mit 2 Bildn. (Bd. 113.)

Mädchenschule, Die höhere, in Deutschland. Von Oberlehrerin M. Martin. (Bd. 65.)

Mechanik des Geisteslebens. Von Prof. Dr. M. Verworn. 3. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 200.)
— siehe auch Psychologie.
Mission, Die evangelische. Von Pastor S. Baudert. (Bd. 406.)
Mittelschule siehe Volks- u. Mittelschule.
Mystik im Heidentum und Christentum. Von Prof. Dr. Edv. Lehmann. (Bd. 217.)
Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. von Negelein. 2. Aufl. (Bd. 95.)
Pädagogik, Allgemeine. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. 4. Aufl. (Bd. 33.)
Pädagogik, Experimentelle, mit bes. Rücks. auf die Erzieh. durch die Tat. Von Dr. W. A. Lay. 2. Aufl. Mit 2 Abb. (Bd. 224.)
— siehe auch Erziehung, Großstadtpädagogik u. Psychologie des Kindes.
Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Frh. v. Soden. 3. Aufl. Mit 2 Karten, 1 Plan u. 6 Ansichten. (Bd. 6.)
Palästina und seine Kultur in fünf Jahrtausenden. Von Dr. P. Thomsen. Mit 36 Abb. (Bd. 260.)
Paulus, Der Apostel, u. sein Werk. Von Prof. Dr. E. Vischer. (Bd. 309.)
Pestalozzi. Leben und Ideen. Von Prof. Dr. P. Natorp. 2. Aufl. Mit Bildn. u. Brieffaks. (Bd. 250.)
Philosophie, Die. Einführung in die Wissenschaft, ihr Wesen und ihre Probleme. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. (Bd. 186.)
— **Einführung in die Philosophie.** Von Prof. Dr. R. Richter. 3. Aufl. von Dr. M. Brahn. (Bd. 155.)
— **Führende Denker.** Geschichtl. Einleitung in die Philosophie. Von Prof. Dr. J. Cohn. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)
— siehe auch Weltanschauung.
Philosophie der Gegenwart, Die, in Deutschland. Charakteristik ihrer Hauptrichtungen. Von Prof. Dr. O. Külpe. 5. Aufl. (Bd. 41.)
Psychologie siehe Seele des Menschen.
— siehe auch Mechanik des Geisteslebens.
Psychologie des Kindes. Von Prof. Dr. R. Gaupp. 3. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 213.)
— siehe auch Pädagogik.
Religion. Die Stellung der R. im Geistesleben. Von Lic. Dr. P. Kalweit. (Bd. 225.)
— **Religion und Naturwissenschaft in Kampf und Frieden.** Ein geschichtl. Rückblick. Von Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
— **Die relig. Strömungen der Gegenwart.** Von Superintend. D. A. H. Braasch. 2. Aufl. (Bd. 66.)
Rousseau. Von Prof. Dr. P. Hensel. 2. Aufl. Mit Bildn. (Bd. 180.)

Schopenhauer. Persönlichkeit, Lehre, Bedeutung. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. Mit Bildn. (Bd. 81.)
Schule siehe Fortbildungsschulwesen, Hilfsschulwesen, Hochschule, Mädchenschule, Mittelschule, Volksschule und die folgenden Bände.
Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 33 Fig. (Bd. 96.)
Schulkämpfe der Gegenwart. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 111.)
— siehe auch Erziehung, Moderne, und Großstadtpädagogik.
Schulwesen. Geschichte des deutschen Sch. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 85.)
Seele des Menschen, Die. Von Prof. Dr. J. Rehmke. 4. Aufl. (Bd. 36.)
— siehe auch Psychologie.
Sittliche Lebensanschauungen der Gegenwart. Von weil. Prof. Dr. O. Kirn. 2. Aufl. (Bd. 177.)
— siehe auch Ethik.
Spencer, Herbert. Von Dr. K. Schwarze. Mit Bildn. (Bd. 245.)
Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Technische Hochschulen in Nordamerika. Von Prof. S. Müller. Mit zahlr. Abb., Karte u. Lageplan. (Bd. 190.)
Testament, Neues. Der Text des N. T. nach seiner geschichtl. Entwicklung. Von Div.-Pfarrer A. Pott. Mit 8 Taf. (Bd. 134.)
— siehe auch Jesus.
Theologie. Einführung in die Theologie. Von Pastor M. Cornils. (Bd. 347.)
Über Universitäten und Universitätsstudium. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. (Bd. 411.)
Universität, Die amerikanische. Von PH. D. E. D. Perry. Mit 22 Abb. (Bd. 206.)
— siehe auch Student.
Unterrichtswesen, Das deutsche, der Gegenwart. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 299.)
Volksbildungswesen, Das moderne. Bücher- und Lesehallen, Volkshochschulen und verwandte Bildungseinrichtungen in den wichtigsten Kulturländern seit der Mitte des 19. Jahrhunderts. Von Stadtbibliothekar Dr. G. Fritz. Mit 14 Abb. (Bd. 266.)
Volks- und Mittelschule, Die preußische, Entwicklung und Ziele. Von Geh. Reg.- u. Schulrat Dr. Sachse. (Bd. 432.)
Volksschule und Lehrerbildung der Vereinigten Staaten. Von Dir. Dr. F. Kuypers. Mit 48 Abb. u. Titelbild. (Bd. 150.)

Weltanschauung, Griechische. Von Privatdoz. Dr. M. Wundt. (Bd. 329.)
Weltanschauungen, Die, der großen Philosophen der Neuzeit. Von weil. Prof. Dr. L. Busse. 5. Aufl., herausg. von Prof. Dr. R. Falckenberg. (Bd. 56.)
— siehe auch Philosophie.
Willensfreiheit. Das Problem der W. Von Prof. Dr. G. F. Lipps. (Bd. 383.)
— siehe auch Ethik.
Zeichenkunst. Der Weg zur Z. Von Dr. E. Weber. Mit Abb. (Bd. 430.)

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Aus Sprachkunde, Literaturgeschichte und Kunst erschienen:

Architektur siehe Baukunst und Renaissancearchitektur.
Ästhetik. Von Prof. Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)
Bau und Leben der bildenden Kunst. Von Dir. Prof. Dr. Th. Volbehr. 2. Aufl. Mit 44 Abb. (Bd. 68.)
Baukunde siehe Abtlg. Technik.
Baukunst. Deutsche B. im Mittelalter. Von Prof. Dr. A. Matthaei. 3. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 8.)
— **Deutsche Baukunst seit dem Mittelalter bis z. Ausg. des 18. Jahrh.** Von Prof. Dr. A. Matthaei. Mit 62 Abb. und 3 Tafeln. (Bd. 326.)
— **Deutsche Baukunst im 19. Jahrh.** Von Prof. Dr. A. Matthaei. Mit Abb. (Bd. 453.)
— **Kultur des Wohnhauses, Die.** Von Reg.-Baumeister a. D. G. Langen. Mit Abb. (Bd. 434.)
Beethoven siehe Haydn.
Björnson siehe Ibsen.
Dekorative Kunst des Altertums. Von Dr. Fr. Poulsen. Mit Abb. (Bd. 454.)
Drama, Das. Von Dr. B. Busse. Mit Abb. 2 Bde.
Bd. I: Von der Antike zum französ. Klassizismus. (Bd. 287.)
Bd. II: Von Versailles bis Weimar. (Bd. 288.)
— siehe auch Shakespeare, Lessing, Schiller und Theater.
Drama, Das deutsche, des 19. Jahrh. In s. Entwickl. dargest. von Prof. Dr. G. Witkowski. 4. Aufl. Mit Bildn. Hebbels. (Bd. 51.)
— siehe auch Hebbel, Hauptmann.
Dürer, Albrecht. Von Dr. R. Wustmann. Mit 33 Abb. (Bd. 97.)
Französische Roman, Der, und die Novelle. Von O. Flake. (Bd. 377.)
Frauendichtung. Geschichte der deutschen F. seit 1800. V. Dr. H. Spiero. (Bd. 300.)
Griechische Kunst. Die Blütezeit der g. K. im Spiegel der Reliefsarkophage. Eine Einführung in die griech. Plastik. Von Dr. H. Wachtler. Mit 8 Taf. u. 32 Abb. (Bd. 272.)
— siehe auch Dekorative Kunst.
Harmonium siehe Tasteninstrumente.
Hauptmann, Gerhart. Von Prof. Dr. E. Sulger-Gebing. Mit 1 Bildn. (Bd. 283.)
Haydn, Mozart, Beethoven. Von Prof. Dr. C. Krebs. 2. Aufl. Mit 4 Bildn. (Bd. 92.)
Hebbel, Friedrich. Von Prof. Dr. O. Walzel. Mit 1 Bildn. (Bd. 408.)
Ibsen, Björnson und ihre Zeitgenossen. Von weil. Prof. Dr. B. Kahle. 2. Aufl. von Dr. Morgenstern. Mit 7 Bildn. (Bd. 193.)
Impressionismus. Die Maler des J. Von Prof. Dr. B. Lázár. Mit 32 Abb. u. 1 farb. Tafel. (Bd. 395.)
Klavier siehe Tasteninstrumente.
Kunst, Deutsche, im täglichen Leben bis zum Schlusse des 18. Jahrh. Von Prof. Dr. B. Haendcke. Mit 63 Abb. (Bd. 198.)
Kunst, Kirchliche, und Denkmalspflege. Vorträge. 2 Bde. Mit Abb. (Bd. 400/1.)
Kunst siehe auch Griechische, Ostasiatische Kunst.
Kunstpflege in Haus und Heimat. Von Superint. R. Bürkner. 2. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 77.)
Lessing. V. Dr. Ch. Schrempf. (Bd. 403.)
Lyrik. Geschichte der deutschen L. seit Claudius. Von Dr. H. Spiero. (Bd. 254.)
— siehe auch Minnesang und Volkslied.
Maler siehe Impressionismus.
Malerei, Die deutsche, im 19. Jahrh. Von Prof. Dr. R. Hamann. 2 Bände Text, 2 Bände Abbildgn. (Bd. 448—451.)
Malerei, Niederländische, im 17. Jahrh. Von Dr. H. Jantzen. Mit zahlr. Abb.
— siehe auch Rembrandt. (Bd. 373.)
Michelangelo. Einführung in das Verständn. s. Werke. Von Prof. Dr. E. Hildebrandt. Mit 44 Abb. (Bd. 392.)
Minnesang. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd. 404.)
Mozart siehe Haydn.
Musik. Geschichte der Musik siehe Haydn, Mozart, Beethoven, Wagner.
— **Die Grundlagen der Tonkunst.** Versuch e. genet. Darstellung der allgem. Musiklehre. Von Prof. Dr. H. Rietsch. (Bd. 178.)

Musikal. Kompositionsformen. Von S. G. Kallenberg. 2 Bde.
Bd. I: Die elementaren Tonverbindungen als Grundlage der Harmonielehre. (Bd. 412.)
Bd. II: Kontrapunktik und Formenlehre. (Bd. 413.)

Musikal. Romantik. Die Blütezeit der m. R. in Deutschland. Von Dr. E. Istel. Mit Silhouette. (Bd. 239.)

Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. v. Negelein. (Bd. 95.)
— siehe auch Volkssage, Deutsche.

Novelle siehe Roman.

Orchester. Die Instrumente des Orch. Von Prof. Dr. Fr. Volbach. Mit 60 Abb. (Bd. 384.)

— **Das moderne Orchester in seiner Entwicklung.** Von Prof. Dr. Fr. Volbach. Mit Partiturbeisp. u. 3 Taf. (Bd. 308.)

Orgel siehe Tasteninstrumente.

Ostasiatische Kunst und ihr Einfluß auf Europa. Von Dir. Prof. Dr. R. Graul. Mit 49 Abb. (Bd. 87.)

Personennamen, Die deutschen. Von Dir. A. Bähnisch. (Bd. 296.)

Plastik siehe Griechische Kunst.

Rembrandt. Von Prof. Dr. P. Schubring. Mit 50 Abb. (Bd. 158.)

Renaissancearchitektur in Italien I. Von Dr. P. Frankl. Mit 12 Taf. u. 27 Textabb. (Bd. 381.)

Rhetorik. Von Dr. E. Geißler. I. Richtlinien für die Kunst des Sprechens. 2. Aufl. (Bd. 455.)
— — II. Anweisungen zur Kunst der Rede. (Bd. 456.)
— siehe auch Sprechen.

Roman. Der französische Roman und die Novelle. Von O. Flake. (Bd. 377.)

Romantik, Deutsche. Von Prof. Dr. O. Walzel. 2. Aufl. (Bd. 232.)

Romantik siehe auch Musikal. Romantik.

Schiller. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. Mit Bildn. 2. Aufl. (Bd. 74.)

Shakespeare und seine Zeit. Von Prof. Dr. E. Sieper. Mit 3 Taf. u. 3 Textabb. 2. Aufl. (Bd. 185.)

Sprachbau. Die Haupttypen des menschlichen S. Von weil. Prof. Dr. F. N. Finck. (Bd. 268.)

Sprachstämme des Erdkreises. Von weil. Prof. Dr. F. N. Finck. (Bd. 267.)

Sprechen. Wie wir sprechen. Von Dr. E. Richter. (Bd. 354.)
— siehe auch Rhetorik.

Stile. Die Entwicklungsgeschichte der Stile in der bildenden Kunst. Von Dr. E. Cohn-Wiener. 2 Bde.
Bd. I: Vom Altertum bis zur Gotik. Mit 57 Abb. (Bd. 317.)
Bd. II: Von der Renaissance b. z. Gegenwart. Mit 31 Abb. (Bd. 318.)

Tasteninstrumente. Klavier, Orgel, Harmonium. Das Wesen der T. Von Prof. Dr. O. Bie. (Bd. 325.)

Theater, Das. Schauspielhaus und Schauspielkunst vom griech. Altert. bis auf die Gegenwart. Von Dr. Chr. Gaehde. 2. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 230.)

Tonkunst siehe Musik.

Volkslied, Das deutsche. Über Wesen und Werden deutschen Volksgesanges. Von Dr. J. W. Bruinier. 5. Aufl. (Bd. 7.)

Volkssage, Die deutsche. Von Dr. O. Böckel. (Bd. 262.)
— siehe auch Mythologie, German.

Wagner. Das Kunstwerk Richard Wagners. Von Dr. E. Istel. Mit Bildn. (Bd. 330.)
— siehe auch Musikal. Romantik.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Aus Kultur, Geschichte u. Geographie, Recht u. Wirtschaft erschienen:

Alpen, Die. Von H. Reishauer. Mit 26 Abb. u. 2 Karten. (Bd. 276.)

Altertum, Das, im Leben der Gegenwart. Von Prof. Dr. P. Cauer. (Bd. 356.)

Amerika. Geschichte der Vereinigten Staaten von A. Von Prof. Dr. E. Daenell. (Bd. 147.)

— **Aus dem amerikan. Wirtschaftsleben.** Von Prof. J. L. Laughlin. Mit 9 graph. Darstellungen. (Bd. 127.)
— siehe ferner Lehrerbildung, Volksschule, Techn. Hochschulen, Universitäten Amerikas in Abtlg. Bildungswesen.

Amerikaner, Die. Von N. M. Butler. Deutsch von Prof. Dr. W. Paszkowski. (Bd. 319.)

Angestellte siehe Kaufmännische A.

Antike Wirtschaftsgeschichte. Von Dr. O. Neurath. (Bd. 258.)

Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. Von Prof. O. v. Zwiedineck-Südenhorst. 2. Aufl. (Bd. 78.)
— siehe auch soziale Bewegung.

Australien und Neuseeland. Land, Leute und Wirtschaft. Von Prof. Dr. R. Schachner. (Bd. 366.)

Bauernhaus. Kulturgeschichte des deutschen B. Von Reg.-Baumeister Chr. Ranck. 2. Aufl. Mit 70 Abb. (Bd. 121.)

Bauernstand. Geschichte des deutschen B. Von Prof. Dr. H. Gerdes. Mit 21 Abb. (Bd. 320.)

Bevölkerungslehre. Von Prof. Dr. M. Haushofer. (Bd. 50.)

Buch. Wie ein Buch entsteht. Von Prof. A. W. Unger. 3. Aufl. Mit 7 Taf. u. 26 Abb. (Bd. 175.)

— **Das Buchgewerbe und die Kultur.** 6 Vorträge, gehalten i. A. des Deutschen Buchgewerbevereins. Mit 1 Abb. (Bd. 182.)

— siehe auch Schrift- und Buchwesen.

Byzantinische Charakterköpfe. Von Privatdoz. Dr. K. Dieterich. Mit 2 Bildn. (Bd. 244.)

Charakterbilder aus deutscher Geschichte siehe Von Luther zu Bismarck.

Deutsch: Deutsches Bauernhaus s. Bauernhaus. — Deutscher Bauernstand s. Bauernstand. — Deutsches Dorf s. Dorf. — Deutsche Einheit s. Vom Bund zum Reich. — Deutsches Frauenleben s. Frauenleben. — Deutsche Geschichte s. Geschichte. — Deutscher Handel s. Handel. — Deutsches Haus s. Haus. — Deutsche Kolonien s. Kolonien. — Deutsche Landwirtschaft s. Landwirtschaft. — Deutsche Reichsversicherung s. Reichsversicherung. — Deutsche Schiffahrt s. Schiffahrt. — Deutsches Schulwesen s. Schulwesen. — Deutsche Städte s. Städte. — Deutsche Verfassung, Verfassungsrecht s. Verfassung, Verfassungsrecht. — Deutsche Volksfeste, Volksstämme, Volkstrachten s. Volksfeste usw. — Deutsches Weidwerk s. Weidwerk. — Deutsches Wirtschaftsleben s. Wirtschaftsleben. — Deutsches Zivilprozeßrecht s. Zivilprozeßrecht.

Deutschtum im Ausland, Das. Von Prof. Dr. R. Hoeniger. (Bd. 402.)

Dorf, Das deutsche. Von R. Mielke. 2. Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 192.)

Ehe und Eherecht. Von Prof. Dr. L. Wahrmund. (Bd. 115.)

Eisenbahnwesen, Das. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinsp. a. D. Biedermann. 2. Aufl. Mit Abbildgn. (Bd. 144.)

— siehe auch Verkehrsentwicklung in Deutschland 1800/1900.

Englands Weltmacht in ihrer Entwicklung vom 17. Jahrhundert bis auf unsere Tage. Von Prof. Dr. W. Langenbeck. 2. Aufl. Mit 19 Bildn. (Bd. 174.)

Entdeckungen, Das Zeitalter der. Von Prof. Dr. S. Günther. 3. Aufl. Mit 1 Weltkarte. (Bd. 26.)

Erbrecht. Testamentserrichtung und E. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)

Familienforschung. Von Dr. E. Devrient. (Bd. 350.)

Finanzwissenschaft. Von Prof. Dr. S. P. Altmann. (Bd. 306.)

Frauenarbeit. Ein Problem des Kapitalismus. Von Prof. Dr. R. Wilbrandt. (Bd. 106.)

Frauenbewegung, Die moderne. Ein geschichtlicher Überblick. Von Dr. K. Schirmacher. 2. Aufl. (Bd. 67.)

Friedensbewegung, Die moderne. Von A. H. Fried. (Bd. 157.)

Friedrich der Große. Sechs Vorträge. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. Mit 2 Bildnissen. (Bd. 246.)

Gartenkunst. Geschichte d. G. Von Reg.-Baumeister Chr. Ranck. Mit 41 Abb. (Bd. 274.)

— siehe auch Abt. Naturwissensch. (Blumen u. Pflanzen.)

Gartenstadtbewegung, Die. Von Generalsekr. H. Kampffmeyer. Mit 45 Abb. 2. Aufl. (Bd. 239.)

Geld, Das, und sein Gebrauch. Von G. Maier. (Bd. 398.)

— siehe auch Münze.

Germanische Kultur in der Urzeit. Von Prof. Dr. G. Steinhausen. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (Bd. 75.)

Geschichte, Deutsche siehe Von Luther zu Bismarck, Friedrich der Große, Restauration u. Revolution, Revolution (1848), Reaktion u. neue Ära, Vom Bund zum Reich, Moltke.

Gewerblicher Rechtsschutz in Deutschland. Von Patentanw. B. Tolksdorf. (Bd. 138.)

Griechische Städte. Kulturbilder aus gr. St. Von Oberlehrer Dr. E. Ziebarth. 2. Aufl. Mit 23 Abb. u. 2 Tafeln. (Bd. 131.)

Handel. Geschichte des Welthandels. Von Prof. Dr. M. G. Schmidt. 2. Aufl. (Bd. 118.)

— **Geschichte des deutschen Handels.** Von Prof. Dr. W. Langenbeck. (Bd. 237.)

Handwerk, Das deutsche, in seiner kulturgeschichtlichen Entwicklung. Von Dir. Dr. E. Otto. 4. Aufl. Mit 27 Abb. (Bd. 14.)

Haus, Das deutsche, und sein Hausrat. Von Prof. Dr. R. Meringer. Mit 106 Abb. (Bd. 116.)

Holland siehe Städtebilder, Historische.

Hotelwesen. Von P. Damm-Etienne. Mit 30 Abb. (Bd. 331.)

Japaner, Die, in der Weltwirtschaft. Von Prof. Dr. Rathgen. 2. Aufl. (Bd. 72.)

Jesuiten, Die. Eine histor. Skizze. Von Prof. Dr. H. Boehmer. 3. Aufl. (Bd. 29.)

Internationale Leben, Das, der Gegenwart. Von A. H. Fried. Mit 1 Tafel. (Bd. 226.)

Jurisprudenz im häuslichen Leben. Für Familie und Haushalt dargestellt. Von Rechtsanw. P. Bienengräber. 2 Bde. (Bd. 219, 220.)

Kaufmann. Das Recht des K. Von Rechtsanwalt Dr. M. Strauß. (Bd. 409.)

Kaufmännische Angestellte. Das Recht der k. A. Von Rechtsanw. Dr. M. Strauß. (Bd. 361.)

Schiffahrt, Deutsche, und Schiffahrtspolitik der Gegenwart. Von Prof. Dr. K. Thieß. (Bd. 169.)

Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. O. Weise. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 4.)

— siehe auch Buch.

Schulwesen. Geschichte des deutschen Schulwesens. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 85.)

Seekrieg. Eine geschichtl. Entwicklung vom Zeitalter der Entdeckungen bis zur Gegenwart. Von K. Freiherrn v. Maltzahn, Vizeadmiral a. D. (Bd. 99.)

— **Das Kriegsschiff.** Von Geh. Marinebaurat Krieger. Mit 60 Abb. (Bd. 389.)

— siehe Krieg.

Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von G. Maier. 4. Aufl. (Bd. 2.)

— siehe auch Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung.

Soziale Kämpfe im alten Rom siehe Rom.

Sozialismus. Geschichte der sozialistischen Ideen im 19. Jahrh. Von Privatdoz. Dr. Fr. Muckle. 2 Bde.
Band I: Der rationale Sozialismus. (Bd. 269.)
Band II: Proudhon und der entwicklungsgeschichtliche Sozialismus. (Bd. 270.)

Städte, Die. Geographisch betrachtet. Von Prof. Dr. K. Hassert. Mit 21 Abb. (Bd. 163.)

— **Deutsche Städte und Bürger im Mittelalter.** Von Prof. Dr. B. Heil. 3. Aufl. Mit zahlr. Abb. u. 1 Doppeltafel. (Bd. 43.)

— **Historische Städtebilder aus Holland und Niederdeutschland.** Von Reg.-Baumeister a. D. A. Erbe. Mit 59 Abb. (Bd. 117.)

— siehe auch Griechische Städte, ferner Pompeji, Rom.

Statistik. Von Prof. Dr. S. Schott. (Bd. 442.)

Strafe und Verbrechen. Von Dr. P. Pollitz. (Bd. 323.)

Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)

Telegraphie, Die, in ihrer Entwicklung und Bedeutung. Von Postrat J. Bruns. Mit 4 Fig. (Bd. 183.)

Testamentserrichtung und Erbrecht. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)

Theater, Das. Schauspielhaus und Schauspielkunst vom griech. Altertum bis auf die Gegenw. Von Dr. Chr. Gaehde. 2. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd. 230.)

Über Universitäten u. Universitätsstudium. V. Prof. Dr. Th. Ziegler. (Bd. 411.)

— siehe auch Student, Der Leipziger.

Urheberrecht. Das Recht an Schrift- und Kunstwerken. Von Rechtsanwalt Dr. R. Mothes. (Bd. 435.)

Verbrechen. Strafe und V. Von Dr. P. Pollitz. (Bd. 323.)

Verbrechen und Aberglaube. Skizzen aus der volkskundlichen Kriminalistik. Von Dr. A. Hellwig. (Bd. 212.)

Verbrecher. Die Psychologie des V. Von Dr. P. Pollitz. Mit 5 Diagrammen. (Bd. 248.)

Verfassung. Grundzüge der V. des Deutschen Reiches. Von Prof. Dr. E. Loening. 4. Aufl. (Bd. 34.)

Verfassungsrecht, Deutsches, in geschichtlicher Entwicklung. Von Prof. Dr. Ed. Hubrich. 2. Aufl. (Bd. 80.)

Verkehrsentwicklung in Deutschland. 1800 bis 1900 (fortgeführt bis zur Gegenwart). Vorträge über Deutschlands Eisenbahnen und Binnenwasserstraßen, ihre Entwicklung und Verwaltung sowie ihre Bedeutung für die heutige Volkswirtschaft. Von Prof. Dr. W. Lotz. 3. Aufl. (Bd. 15.)

— siehe auch Eisenbahnwesen.

Versicherungswesen. Grundzüge des V. Von Prof. Dr. A. Manes. 2. Aufl. (Bd. 105.)

— siehe auch Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung und Reichsversicherung.

Volksfeste und Volkssitten, Deutsche. Von H. S. Rehm. Mit 11 Abb. (Bd. 214.)

Volksstämme, Die deutschen, und Landschaften. Von Prof. Dr. O. Weise. 4. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 16.)

Volkstrachten, Deutsche. Von Pfarrer C. Spieß. (Bd. 342.)

— siehe auch Deutsche Volksfeste usw.

Vom Bund zum Reich. Neue Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Prof. Dr. R. Schwemer. 2. Aufl. (Bd. 102.)

Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbilder aus deutscher Geschichte. Von Prof. Dr. O. Weber. 2 Bde. 2. Aufl. (Bd. 123, 124.)

Wahlrecht, Das. Von Reg.-Rat Dr. O. Poensgen. (Bd. 249.)

Weidwerk, Das deutsche. Von G. Frh. v. Nordenflycht. (Bd. 436.)

Welthandel siehe Handel.

Wirtschaftliche Erdkunde. Von weil. Prof. Dr. Chr. Gruber. 2. Aufl. Bearb. von Prof. Dr. K. Dove. (Bd. 122.)

Wichtige Gebiete der Volkswirtschaft sind auch in der Abteilung Naturwissenschaft und Technik behandelt unter den Stichwörtern: **Automobil, Bierbrauerei, Bilder aus der chem. Technik, Eisenbahnwesen, Eisenhüttenwesen, Elektr. Kraftübertragung, Gartenstadtbewegung, Ingenieurtechnik, Kaffee, Kakao, Kinematographie, Kohlen, Landwirtschaftl. Maschinen, Metalle, Patente, Salz, Schmucksteine, Spinnerei, Straßenbahnen, Tabak, Tee, Wald, Wasserkraftmaschinen, Weinbau.**

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Aus Mathematik, Naturwissenschaften, Medizin u. Technik erschienen:

Landwirtschaftliche Maschinenkunde. Von Prof. Dr. G. Fischer. Mit 62 Abb. (Bd. 316.)

Lebewesen. Die Beziehungen der L. zueinander. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. Mit Abb.
— — I. Der Tiere zueinander. (Bd. 426.)
— — II. Der Pflanzen zueinander und zu den Tieren. (Bd. 427.)
— siehe Organismen, Biologie.

Leibesübungen, Die, und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Von Prof. Dr. R. Zander. 3. Aufl. Mit 19 Abb. (Bd. 13.)

Licht, Das, und die Farben. Von Prof. Dr. L. Graetz. 3. Aufl. Mit 117 Abb. (Bd. 17.)

Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus dem Gebiete der Experimentalchemie. Von Prof. Dr. R. Blochmann. 4. Aufl. Mit 115 Abb. (Bd. 5.)

Luftfahrt, Die, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. von Dr. Fr. Huth. Mit zahlr. Abb. (Bd. 300.)

Luftstickstoff, Der, und seine Verwertung. Von Prof. Dr. K. Kaiser. Mit 13 Abb. (Bd. 313.)

Lüftung. Heizung und L. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)

Maschinen siehe Hebezeuge, Dampfmaschine, Wärmekraftmaschine, Wasserkraftmaschine und die folg. Bände.

Maschinenelemente. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. Mit 184 Abb. (Bd. 301.)

Maschinenkunde siehe Landwirtschaftl. Maschinenkunde.

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

Mathematik, Praktische. Von Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graphisches u. numerisches Rechnen. Mit 62 Fig. u. 1 Tafel. (Bd. 341.)

Mathematik. Naturwissenschaften und M. im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl. Mit 70 Fig. (Bd. 170.)

Mechanik. Von Kais. Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 2 Bde.
Bd. I: Die Mechanik der festen Körper. Mit 61 Abb. (Bd. 303.)
Bd. II: Die Mechanik der flüssigen Körper. Mit 34 Abb. (Bd. 304.)

Meeresforschung und Meeresleben. Von Dr. O. Janson. 3. Aufl. Mit 41 Fig. (Bd. 30.)

Mensch. Entwicklungsgeschichte des M. Von Dr. A. Heilborn. Mit Abb. (Bd. 388.)

Mensch der Urzeit, Der. Vier Vorlesungen aus der Entwicklungsgeschichte des Menschengeschlechtes. Von Dr. A. Heilborn. 2. Aufl. Mit zahlr. Abb. (Bd. 62.)

Mensch, Der vorgeschichtliche, siehe Eiszeit.

Mensch und Erde. Skizzen von den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von weil. Prof. Dr. A. Kirchhoff. 3. Aufl. (Bd. 31.)

Mensch und Tier. Der Kampf zwischen Mensch und Tier. Von Prof. Dr. K. Eckstein. 2. Aufl. Mit 51 Fig. (Bd. 18.)

Menschlicher Körper. Bau und Tätigkeit des menschl. K. Von Prof. Dr. H. Sachs. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 32.)
— siehe auch Anatomie, Blut, Herz, Nervensystem, Sinne, Verbildungen.

Metalle, Die. Von Prof. Dr. K. Scheid. 3. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 29.)

Mikroskop, Das, seine Optik, Geschichte und Anwendung. Von Dr. Scheffer. 2. Aufl. Mit 66 Abb. (Bd. 35.)

Milch, Die, und ihre Produkte. Von Dr. A. Reitz. Mit 16 Abb. (Bd. 362.)

Moleküle — Atome — Weltäther. Von Prof. Dr. G. Mie. 3. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 58.)

Mond, Der. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 31 Abb. (Bd. 90.)

Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen N. Von Prof. Dr. F. Auerbach. 3. Aufl. Mit 79 Fig. (Bd. 40.)

Naturstoffe. Künstliche Darstellung von N. Von Prof. Dr. E. Rüst. Mit Abb. (Bd. 457.)

Naturwissenschaften im Haushalt. Von Dr. J. Bongardt. 2 Bde.
I. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Familie? Mit 31 Abb. (Bd. 125.)
II. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? Mit 17 Abb. (Bd. 126.)

Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)

Naturwissenschaft und Religion. N. und R. in Kampf und Frieden. Ein geschichtlicher Rückblick. Von Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)

Naturwissenschaften und Technik. Am sausenden Webstuhl der Zeit. Übersicht über Wirkungen der Entwicklung der N. und T. auf das gesamte Kulturleben. Von Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 23.)

Nautik. Von Dir. Dr. J. Möller. Mit 58 Fig. (Bd. 255.)

Nerven. Vom Nervensystem, seinem Bau und seiner Bedeutung für Leib und Seele in gesundem und krankem Zustande. Von Prof. Dr. R. Zander. 2. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 48.)

Obstbau. Von Dr. E. Voges. Mit 13 Abb. (Bd. 107.)

Optik siehe Auge, Brille, Licht u. Farbe, Mikroskop, Spektroskopie, Stereoskop, Strahlen.

Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie. Von weil. Privatdozent Dr. K. Hennings. Mit 34 Abb. (Bd. 142.)

— **Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere.** Von Prof. Dr. O. Maas. Mit 11 Karten und Abb. (Bd. 139.)

— **Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus).** Von Dr. Fr. Knauer. Mit 37 Fig. (Bd. 148.)

— siehe auch Lebewesen.

Tierwelt des Mikroskops (die Urtiere). Von Prof. Dr. R. Goldschmidt. Mit 39 Abb. (Bd. 160.)

Tierzüchtung. Von Dr. G. Wilsdorf. Mit 30 Abb. auf 12 Tafeln. (Bd. 369.)

— **Die Fortpflanzung der Tiere.** Von Prof. Dr. R. Goldschmidt. Mit 77 Abb. (Bd. 253.)

Trigonometrie, Ebene, zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 50 Fig. (Bd. 431.)

Tuberkulose, Die, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 2. Aufl. Mit 1 Tafel u. 8 Fig. (Bd. 47.)

Uhr, Die. Von Reg.-Bauführer a. D. H. Bock. Mit 47 Abb. (Bd. 216.)

Verbildungen, Körperliche, im Kindesalter und ihre Verhütung. Von Dr. M. David. Mit 26 Abb. (Bd. 321.)

Vererbung. Experimentelle Abstammungs- und Vererbungslehre. Von Dr. H. Lehmann. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)

Vogelleben, Deutsches. Von Prof. Dr. A. Voigt. (Bd. 221.)

Vogelzug und Vogelschutz. Von Dr. W. R. Eckardt. Mit 6 Abb. (Bd. 218.)

Volksnahrungsmittel siehe Ernährung u. V.

Wald, Der deutsche. Von Prof. Dr. H. Hausrath. 2. Aufl. Mit 15 Abb. und 2 Karten. (Bd. 153.)

Wärme. Die Lehre von der W. Von Prof. Dr. R. Börnstein. Mit 33 Abb. (Bd. 172.)

— siehe auch Luft, Wasser, Licht, Wärme.

Wärmekraftmaschinen, Die neueren. 2 Bde. I: Einführung in die Theorie und den Bau der Maschinen für gasförmige und flüssige Brennstoffe. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 4. Aufl. Mit 33 Abb. (Bd. 21.)

— II: Gasmaschinen, Gas- und Dampfturbinen. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 3. Aufl. Mit 48 Abb. (Bd. 86.)

— siehe auch Kraftanlagen.

Wasser, Das. Von Privatdozent Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)

— siehe auch Luft, Wasser, Licht, Wärme.

Wasserkraftmaschinen und die Ausnützung der Wasserkräfte. Von Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 2. Aufl. Mit 73 Fig. (Bd. 228.)

Weinbau und Weinbereitung. Von Dr. F. Schmitthenner. 34 Abb. (Bd. 332.)

Weltall. Der Bau des W. Von Prof. Dr. J. Scheiner. 4. Aufl. Mit 26 Fig. (Bd. 24.)

Weltäther siehe Moleküle.

Weltbild. Das astronomische W. im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 110.)

Weltentstehung. Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)

Wetter, Gut und schlecht. Von Dr. R. Hennig. Mit 46 Abb. (Bd. 349.)

Wind und Wetter. Von Prof. Dr. L. Weber. 2. Aufl. Mit 28 Figuren und 3 Tafeln. (Bd. 55.)

Wirbeltiere. Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane der W. Von Prof. Dr. W. Lubosch. Mit 107 Abb. (Bd. 282.)

Wohnhaus siehe Baukunde.

Zahnheilkunde siehe Gebiß.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

DIE KULTUR DER GEGENWART

IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE

HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

Eine systematisch aufgebaute, geschichtlich begründete Gesamtdarstellung unserer heutigen Kultur, welche die Fundamentalergebnisse der einzelnen Kulturgebiete nach ihrer Bedeutung für die gesamte Kultur der Gegenwart und für deren Weiterentwicklung in großen Zügen zur Darstellung bringt. Das Werk vereinigt eine Zahl erster Namen aus Wissenschaft und Praxis und bietet Darstellungen der einzelnen Gebiete jeweils aus der Feder des dazu Berufensten in gemeinverständlicher, künstlerisch gewählter Sprache auf knappstem Raume. Jeder Band ist inhaltlich vollständig in sich abgeschlossen und einzeln käuflich.

***) Jeder Band kostet in Leinw. geb. M. 2.—, in Halbfr. geb. M. 4.— mehr.**

TEIL I u. II: Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete.

Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart. Geh.*) M. 18.—. [2. Aufl. 1912. Teil I, Abt. 1.]

Inhalt: Das Wesen der Kultur: W. Lexis. — Das moderne Bildungswesen: Fr. Paulsen †. — Die wichtigsten Bildungsmittel. A. Schulen und Hochschulen. Das Volksschulwesen: G. Schöppa. Das höhere Knabenschulwesen: A. Matthias. Das höhere Mädchenschulwesen: H. Gaudig. Das Fach- und Fortbildungsschulwesen: G. Kerschensteiner. Die geisteswissenschaftliche Hochschulausbildung: Fr. Paulsen †. Die mathematische, naturwissenschaftliche Hochschulausbildung: W. v. Dyck. B. Museen. Kunst- und Kunstgewerbemuseen: L. Pallat. Naturwissenschaftliche Museen: K. Kraepelin. Technische Museen: W. v. Dyck. C. Ausstellungen. Kunst- u. Kunstgewerbeausstellungen: J. Lessing †. Naturwissenschaftl.-techn. Ausstellungen: O. N. Witt. D. Die Musik: G. Göhler. E. Das Theater: P. Schlenther. F. Das Zeitungswesen: K. Bücher. G. Das Buch: R. Pietschmann. H. Die Bibliotheken: F. Milkau. — Organisation der Wissenschaft: H. Diels.

Die Religionen des Orients und die altgermanische Religion. Geh.*) M. 8.—. [2. Aufl. 1913. Teil I, Abt. 3, I.]

Inhalt: Die Anfänge der Religion und die Religion der primitiven Völker: Edv. Lehmann. — Die ägyptische Religion: A. Erman. — Die asiatischen Religionen: Die babylonisch-assyrische Religion: C. Bezold. — Die indische Religion: H. Oldenberg. — Die iranische Religion: H. Oldenberg. — Die Religion des Islams: J. Goldziher. — Der Lamaismus: A. Grünwedel. — Die Religionen der Chinesen: J. J. M. de Groot. — Die Religionen der Japaner: a) Der Shintoismus: K. Florenz, b) Der Buddhismus: H. Haas. — Die orientalischen Religionen in ihrem Einfluß auf den Westen im Altertum: Fr. Cumont. — Altgermanische Religion: A. Heusler.

Geschichte der christl. Religion. M. 18.—*). [2. A. 1909. T. I, 4, I.]

Inhalt: Die israelitisch-jüdische Religion: J. Wellhausen. — Die Religion Jesu und die Anfänge des Christentums bis zum Nicaenum (325): A. Jülicher. — Kirche und Staat bis zur Gründung der Staatskirche: A. Harnack. — Griechisch-orthodoxes Christentum und Kirche in Mittelalter und Neuzeit: N. Bonwetsch. — Christentum und Kirche Westeuropas im Mittelalter: K. Müller. — Katholisches Christentum und Kirche in der Neuzeit: A. Ehrhard. — Protestantisches Christentum und Kirche in der Neuzeit: E. Troeltsch.

Systemat. christl. Religion. M. 6.60*). [2. A. 1909. Teil I, 4, II.]

Inhalt: Wesen der Religion u. der Religionswissenschaft: E. Troeltsch. — Christlich-katholische Dogmatik: J. Pohle. — Christlich-katholische Ethik: J. Mausbach. — Christlich-katholische praktische Theologie: C. Krieg. — Christlich-protestantische Dogmatik: W. Herrmann. — Christlich-protestantische Ethik: R. Seeberg. — Christlich-protestantische praktische Theologie: W. Faber. — Die Zukunftsaufgaben der Religion und der Religionswissenschaft: H. J. Holtzmann.

Allgemeine Geschichte der Philosophie. Geh.*) M. 14.—. [2. Auflage 1913. Teil I, Abt. 5.]

Inhalt. Einleitung. Die Anfänge der Philosophie und die Philosophie der primitiven Völker: W. Wundt. I. Die indische Philosophie: H. Oldenberg. II. Die islamische und jüdische Philosophie: J. Goldziher. III. Die chinesische Philosophie: W. Grube. IV. Die japanische Philosophie: T. Jnouye. V. Die europäische Philosophie des Altertums: H. v. Arnim. VI. Die patristische Philosophie: Cl. Bäumker. VII. Die europäische Philosophie des Mittelalters: Cl. Bäumker. VIII. Die neuere Philosophie: W. Windelband.

Systemat. Philosophie. Geh.*) M. 10.—. [2. Aufl. 1908. T. I, 6.]
Inhalt. Allgemeines. Das Wesen der Philosophie: W. Dilthey. — Die einzelnen Teilgebiete. I. Logik und Erkenntnistheorie: A. Riehl. II. Metaphysik: W. Wundt. III. Naturphilosophie: W. Ostwald. IV. Psychologie: H. Ebbinghaus. V. Philosophie der Geschichte: R. Eucken. VI. Ethik: Fr. Paulsen. VII. Pädagogik: W. Münch. VIII. Ästhetik: Th. Lipps. — Die Zukunftsaufgaben der Philosophie: Fr. Paulsen.

Die oriental. Literaturen. Geh.*) M. 10.—. [1906. Teil I, Abt. 7.]
Inhalt. Die Anfänge der Literatur und die Literatur der primitiven Völker: E. Schmidt. — Die ägyptische Literatur: A. Erman. — Die babylonisch-assyrische Literatur: C. Bezold. — Die israelitische Literatur: H. Gunkel. — Die aramäische Literatur: Th. Nöldeke. — Die äthiop. Literatur: Th. Nöldeke. — Die arab. Literatur: M. J. de Goeje. — Die ind. Literatur: R. Pischel. — Die altpers. Literatur: K. Geldner. — Die mittelpers. Literatur: P. Horn. — Die neupers. Literatur: P. Horn. — Die türkische Literatur: P. Horn. — Die armenische Literatur: F. N. Finck. — Die georg. Literatur: F. N. Finck. — Die chines. Literatur: W. Grube. — Die japan. Literatur: K. Florenz.

Die griechische und lateinische Literatur und Sprache. Geh.*) M. 12.—. [3. Auflage. 1912. Teil I, Abt. 8.]
Inhalt: I. Die griechische Literatur und Sprache: Die griech. Literatur des Altertums: U. v. Wilamowitz-Moellendorff. — Die griech. Literatur des Mittelalters: K. Krumbacher. — Die griech. Sprache: J. Wackernagel. — II. Die lateinische Literatur und Sprache: Die römische Literatur des Altertums: Fr. Leo. — Die latein. Literatur im Übergang vom Altertum zum Mittelalter: E. Norden. — Die latein. Sprache: F. Skutsch.

Die osteuropäischen Literaturen u. die slawischen Sprachen. Geh.*) M. 10.–. [1908. Teil I, Abt. 9.]
Inhalt: Die slawischen Sprachen: V. v. Jagić. — Die slawischen Literaturen. I. Die russische Literatur: A. Wesselovsky. – II. Die poln. Literatur: A. Brückner. III. Die böhm. Literatur: J. Máchal. IV. Die südslaw. Literaturen: M. Murko. — Die neugriech. Literatur: A. Thumb. — Die finnisch-ugr. Literaturen. I. Die ungar. Literatur: F. Riedl. II. Die finn. Literatur: E. Setälä. III. Die estn. Literatur: G. Suits. — Die litauisch-lett. Literaturen. I. Die lit. Literatur: A. Bezzenberger. II. Die lett. Literatur: E. Wolter.

Die romanischen Literaturen und Sprachen. Mit Einschluß des Keltischen. Geh.*) M. 12.—. [1908. Teil I, Abt. 11, I.]
Inhalt: I. Die kelt. Literaturen. 1. Sprache u. Literatur im allgemeinen: H. Zimmer. 2. Die einzelnen kelt. Literaturen. a) Die ir.-gäl. Literatur: K. Meyer. b) Die schott.-gäl. u. die Manx-Literatur. c) Die kymr. (walis.) Literatur. d) Die korn. u. die breton. Literatur: L. Ch. Stern. II. Die roman. Literaturen: H. Morf. III. Die roman. Sprachen: W. Meyer-Lübke.

Allgemeine Verfassungs- und Verwaltungsgeschichte. I. Hälfte. Geh.*) M. 10.–. [1911. Teil II, Abt. 2, I.]
Inhalt: Einleitung. Die Anfänge der Verfassung und der Verwaltung und die Verfassung und Verwaltung der primitiven Völker: A. Vierkandt. A. Die orientalische Verfassung und Verwaltung: 1. des orientalischen Altertums: L. Wenger, 2. des Islams: M. Hartmann, 3. Chinas: O. Franke, 4. Japans: K. Rathgen. — B. Die europäische Verfassung und Verwaltung (1. Hälfte): 1. des europäischen Altertums: L. Wenger, 2. der Germanen und des Deutschen Reiches bis zum Jahre 1806: A. Luschin v. Ebengreuth.

Staat u. Gesellschaft d. Griechen u. Römer. M. 8.–*). [1910. II, 4, I.]
Inhalt: I. Staat und Gesellschaft der Griechen: U. v. Wilamowitz-Moellendorff — II. Staat und Gesellschaft der Römer: B. Niese.

Staat u. Gesellschaft d. neueren Zeit. M. 9.—*). [1908. Teil II, 5, I.]
Inhalt: I. Reformationszeitalter. a) Staatensystem und Machtverschiebungen. b) Der moderne Staat und die Reformation. c) Die gesellschaftlichen Wandlungen und die neue Geisteskultur: F. v. Bezold. — II. Zeitalter der Gegenreformation: E. Gothein. — III. Zur Höhezeit des Absolutismus. a) Tendenzen, Erfolge und Niederlagen des Absolutismus. b) Zustände der Gesellschaft. c) Abwandlungen des europäischen Staatensystems: R. Koser.

Allgem. Rechtsgeschichte. [1913. Teil II, Abt. 7, I. Unt. d. Presse.]
Inhalt: Die Anfänge des Rechts: J. Kohler — Orientalisches Recht im Altertum: L. Wenger. — Europäisches Recht im Altertum: L. Wenger.

Systematische Rechtswissenschaft. Geh.*) ca. M. 14.—. [2. Auflage 1913. Unter der Presse. Teil II, Abt. 8.]

Inhalt: I. Wesen des Rechtes und der Rechtswissenschaft: R. Stammler. II. Die einzelnen Teilgebiete: A. Privatrecht. Bürgerliches Recht: R. Sohm. — Handels- und Wechselrecht: K. Gareis. — Internationales Privatrecht: L. v. Bar. B. Zivilprozeßrecht: L. v. Seuffert. C. Strafrecht u. Strafprozeßrecht: F. v. Liszt. D. Kirchenrecht: W. Kahl. E. Staatsrecht: P. Laband. F. Verwaltungsrecht. Justiz und Verwaltung: G. Anschütz. — Polizei- und Kulturpflege: E. Bernatzik. G. Völkerrecht: F. von Martitz. III. Die Zukunftsaufgaben des Rechtes und der Rechtswissenschaft: R. Stammler.

Allgemeine Volkswirtschaftslehre. Von W. Lexis. Geh.*) M. 7.—, [2. Auflage. 1913. Teil II, Abt. 10, I.]

TEIL III: Die mathematischen, naturwissenschaftlichen und medizinischen Kulturgebiete.

Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter: H. G. Zeuthen. Geh. M. 3.—. [1912. Abt. I. Lfrg. 1.]

Chemie einschl. Kristallographie u. Mineralogie. Bandredakt.: E. v. Meyer u. F. Rinne. Mit Abb. Geh.*) M. 18.—. [1913. Abt. III., 2.]

Inhalt: Entwickelung der Chemie von Robert Boyle bis Lavoisier [1660—1793]: E. v. Meyer. — Die Entwicklung der Chemie im 19. Jahrhundert durch Begründung und Ausbau der Atomtheorie: E. v. Meyer. — Anorganische Chemie: C. Engler und L. Wöhler. — Organische Chemie: O. Wallach. — Physikalische Chemie: R. Luther und W. Nernst. — Photochemie: R. Luther. — Elektrochemie: M. Le Blanc. — Beziehungen der Chemie zur Physiologie: A. Kossel. — Beziehungen der Chemie zum Ackerbau: † O. Kellner und R. Immendorf. — Wechselwirkungen zwischen der chemischen Technik: O. Witt. — Kristallographie und Mineralogie: Fr. Rinne.

Zellen- u. Gewebelehre, Morphologie u. Entwicklungsgesch. 1. Botan. Teil. Mit Abb. Geh.*) M. 10.—. [1913. Abt. IV., Bd. 2, I.] 2. Zoolog. Teil. Mit Abb. Geh.*) M. 16.—. [1913. Abt. IV., Bd. 2, II.]

Inhalt des botanischen Teils (Bandred. E. Strasburger): Pflanzl. Zellen- und Gewebelehre: E. Strasburger. — Morphologie und Entwicklungsgeschichte der Pflanzeu: W. Benecke. **Inhalt des zoologischen Teils** (Bandred. O. Hertwig): Die einzelligen Organismen: R. Hertwig. — Zellen und Gewebe des Tierkörpers: H. Poll. — Allgemeine und experimentelle Morphologie und Entwicklungslehre der Tiere: O. Hertwig. — Entwicklungsgeschichte und Morphologie der Wirbellosen: K. Heider. — Entwicklungsgeschichte der Wirbeltiere: F. Keibel. — Morphologie der Wirbeltiere: E. Gaupp.

Unter der Presse befinden sich:

Abt. I, Lfrg. 2: Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur: A. Voß. — Mathematik und Philosophie: A. Voß. — Lfrg. 3: Die Verbreitung mathemat. Auffassungen und Kenntnisse: H. E. Timerding. Abt. III, 1: Physik. Bandred.: E. Warburg. Bd. 3: Astronomie. Bandred.: J. Hartmann. Abt IV, Bd. 4: Abstammungslehre, Systematik, Paläontologie, Biogeographie. Bandredakt.: R. v. Hertwig u. R. v. Wettstein. Abt. VII, Band 1: Naturphilosophie. Bandredakt.: C. Stumpf. Bearb. von E. Becher.

TEIL IV: Die technischen Kulturgebiete.

Technik d. Kriegswesens. Mit Abb. Geh.*) M. 24.—. [1913. Bd. 12.]

Inhalt (Bandredakt. M. Schwarte): Kriegsvorbereitung, Kriegsführung: M. Schwarte. — Waffentechnik, a) in ihren Beziehungen zur Chemie: O. Poppenberg; b) in ihren Beziehungen z. Metallurgie: W. Schwinning; c) in ihren Bezieh. z. Konstruktionslehre: W. Schwinning: — d) in ihren Beziehungen zur optischen Technik: O. von Eberhard; e) in ihren Beziehungen zur Physik und Mathematik: O. Becker. — Technik des Befestigungswesens: J. Schröter. — Kriegsschiffbau: O. Kretschmer. — Vorbereitung für den Seekrieg u. Seekriegsführung: M. Glatzel. — Einfluß d. Kriegswesens auf die Gesamtkultur: A. Kersting.

Probeheft mit Inhaltsübersicht des Gesamtwerkes, mit Probeabschnitten, Resümees, Inhaltsverzeichnissen und Besprechungen der Bände steht umsonst zur Verfügung bei B. G. TEUBNER, Leipzig, Poststraße 3.