Über die Eisenarmierung kreisrunder Betonplatten.

Von der
Königl. Sächsischen Technischen Hochschule
zu Dresden zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Kurt Eifler
aus Chemnitz.

Referent: Geheimer Hofrat Professor G. C. Mehrtens.
Korreferent: Professor M. Foerster.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1911.

Inhaltsverzeichnis.

Literaturverzeichnis.

Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. 1862.

Grashof, Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues. 1866.

Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Mechanik. 1878.

Hertz, Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten. Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie Bd. 22. 1884.

Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. 3: Festigkeitslehre. Bd. 5: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie.

Bach, Elastizität und Festigkeit.

Bach, Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten. Z. d. V. D. I. 1890.

Bach, Versuche über die Formänderung und die Widerstandsfähigkeit ebener Wandungen. Z. d. V. D. I. 1908.

Z. d. V. D. I. = Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

Einleitung.

Vorliegende Zeilen sollen einen Beitrag liefern zur Dimensionierung kreisrunder Platten in Eisenbeton. Die grundlegenden Theorien für die Berechnung von Platten finden wir schon bei Winkler, Clebsch und Grashof, während in neuerer Zeit eine umfassende theoretische Behandlung von Föppl gegeben worden ist. Daneben haben wir die vielseitigen Arbeiten Bachs, der auf dem Wege des Versuches wichtige Aufschlüsse über die Art der Beanspruchung von Platten gegeben hat. Alle diese Arbeiten erfordern nun aber zu ihrem Verständnis ein gut Teil theoretische Vorarbeiten. Soweit sie uns handliche, für die Praxis brauchbare Formeln liefern, sind diese zumeist für die Bedürfnisse des Maschineningenieurs bezw. des Eisenkonstrukteurs zugeschnitten. Dementsprechend finden wir also praktisch gut verwendbare Werte für die größten Beanspruchungen in der Mitte bezw. an den Auflagern der Platten. Für die Dimensionierung eiserner Platten mag dies im wesentlichen ausreichen. Anders ist es bei den Aufgaben, die auf diesem Gebiete heute häufig an den Bauingenieur herantreten. Hier handelt es sich zumeist um die Dimensionierung von Decken, Schachtsohlen, Fundamentplatten u. dgl. Als Konstruktionsmaterial kommt hierfür in erster Linie Beton und Eisenbeton in Frage. Hier genügt es uns nicht mehr, die Höchstwerte der Spannungen an besonders stark beanspruchten Stellen zu kennen. Für eine sachgemäße Anordnung einer Eisenarmierung ist vielmehr eine klare Darstellung des Verlaufs der Momente und der Querkräfte unerläßlich. Vorliegende Zeilen sollen es dem entwerfenden Ingenieur ermöglichen, die Momenten- und Querkraftkurven mit wenig Mühe aufzuzeichnen, ohne sich erst in die nicht ganz einfachen Theorien vertiefen zu müssen, die die Berechnung von Platten erfordert. Die Lösung der Aufgabe ist auf kreisrunde Platten beschränkt. Für quadratische könnte eine ähnliche Darstellung versucht werden, während für beliebig geformte Platten wohl kaum eine einfache, praktisch verwendbare Lösung möglich sein dürfte. Für die meisten Fälle der Praxis wird dies aber auch kaum erforderlich sein.

Die Anregung zu der im folgenden gewählten Darstellung haben die Kurven gegeben, die Zimmermann und Schwedler für Momente, Querkräfte und Durchbiegungen eines endlosen Stabes auf durchweg elastischer Unterlage ermittelten. (Vgl. Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues 1888 und Schwedler, Beiträge zur Theorie des Eisenbahnoberbaues, Zeitschrift für Bauwesen 1889 S. 366.) Die Verwendbarkeit dieser Kurven für die Praxis ist ungemein bequem. Verfasser hatte selbst Gelegenheit, dieselben für die Dimensionierung von Eisenbetonlangschwellen, von Fundamenten für Fahrkrane, von Ablaufbahnen für Hellinge und ähnlicher sonst schwer zu berechnender Konstruktionsteile zu verwenden. Man mag gegen die Benutzung derartiger theoretisch gefundener Werte in der Praxis geltend machen, daß die Voraussetzungen über die elastischen Eigenschaften der Baustoffe, besonders des Eisenbetons, so unsicher sind, daß die gewonnenen Resultate auch nur beschränkten Wert haben. Dann dürfte man aber auf Eisenbetonkonstruktionen eine Menge anderer Theorien auch nicht übertragen, deren praktische Anwendbarkeit aber doch durch die Erfahrung bewiesen ist. Außerdem soll sich ja auch der entwerfende Ingenieur nicht ängstlich an die theoretisch gefundenen Resultate halten. Es muß ihm stets überlassen bleiben, diese an den vorliegenden praktischen Fall anzupassen. Es ist aber zweifellos von Bedeutung, den Verlauf der Kräfte, wie er sich theoretisch ergibt, in einer anschaulichen Weise darzustellen. Um so leichter wird es dann sein, praktischen Rücksichten Rechnung zu tragen.

Bei eisenarmierten Betonplatten finden wir heute allgemein eine kreuzweise Armierung. Man ist sich dabei wohl von vornherein klar, daß diese Anordnung den in der Platte wirklich auftretenden Beanspruchungen nicht entspricht. Am besten beweist dies ein Blick in die Arbeiten Bachs „Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten“ und „Versuche über die Formänderung und die Widerstandsfähigkeit ebener Wandungen“. Dort sind die Linien gleicher Durchbiegung für verschiedene Platten gezeichnet. Wir sehen klar, daß die Platte in ein System kreisrunder Wellen verworfen wird. Zur vollen Ausbildung kommt dieses Wellensystem, wie Hertz bewiesen hat, z. B. bei einer unendlich großen Platte auf elastischer Unterlage, belastet durch eine Einzellast. Je nach der Lagerung kommen diese Wellen mehr oder weniger vollkommen zur Ausbildung. Man betrachte dazu die Linien gleicher Durchbiegung für die quadratische Platte in der Bachschen Arbeit. In der Mitte bilden diese Kreise, während sie am Auflager entsprechend der Umgrenzung verzerrt werden. Bei kreisrunden Platten mit symmetrischer Belastung werden die Kurven gleicher Durchbiegung zur Plattenmitte konzentrische Kreise sein. Entsprechend dieser Formänderung treten nun in der kreisrunden Platte radiale und tangentiale Beanspruchungen auf, und man wird folgerichtig zu einer entsprechenden doppelten Armierung kommen. Ein System radial verlaufender Eisen hat die auftretenden radialen Zugspannungen, ein System konzentrisch zur Mitte eingelegter Eisenringe die tangentialen Zugspannungen oder Ringspannungen aufzunehmen. Zur Dimensionierung dieser Armierungen wollen wir einmal das Moment berechnen, das in einer Meridianebene, d. h. in einer radialen lotrechten Schnittebene, auf einen konzentrisch zur Mitte gelegten Ringschnitt wirkt. Wir nennen es der Kürze halber das Radialmoment. Sodann berechnen wir das Moment, das auf einen Meridianschnitt in einer dazu senkrechten Ebene wirkt. Wir nennen es das Tangentialmoment. Nach dem Radialmomente dimensionieren wir die radialen Eiseneinlagen, nach dem Tangentialmoment die ringförmige Armierung.

Die vorhin erwähnte einfache Darstellung erreichen wir nun, indem wir die Momente für Punkte der Platte berechnen, deren Lage unabhängig ist von der Größe des Plattenhalbmessers r, also für gewisse Teilpunkte des Halbmessers, z. B. 1/10 r, 2/10 r usw. Wir werden finden, daß sich die für die Momente gefundenen Ausdrücke, dann aus einem konstanten Faktor, abhängig von der Belastung und den Abmessungen der Platte, und einer mit der Lage des Punktes veränderlichen, unbenannten Zahl zusammensetzen. Letztere Ausdrücke werden wir für gewisse Teilpunkte berechnen. Ihre Multiplikation mit dem konstanten Faktor gibt uns dann das gesuchte Moment.

In gleicher Weise werden wir zur Darstellung der Querkräfte und Durchbiegungen verfahren. Bei der Platte auf elastischer Unterlage tritt an Stelle des Plattenhalbmessers, den wir in gleiche Teile teilten, die Länge der Wellen, in die die Platte verworfen wird. Diese Wellenlänge ist eine von den Abmessungen und elastischen Eigenschaften der Platte und ihrer Unterlage allein abhängige Größe. Zur numerischen Berechnung der erwähnten unbekannten Veränderlichen ist es allerdings erforderlich, über die Größe des Verhältnisses von Längs- zur Querdehnung, über die sogenannte Poissonsche Zahl m, eine Annahme zu machen, da diese in ziemlich unhandlichen Verbindungen mit anderen unbenannten Zahlen vorkommt. In den vorliegend durchgeführten Rechnungen ist dafür der Wert 4 eingesetzt worden. Endgültige Versuchsergebnisse über die Größe der Zahl m für Beton liegen noch nicht vor. Es ist aber zu bedenken, daß größere Schwankungen nicht vorkommen können. Kleinere Abweichungen werden aber, wie man sich aus den Rechnungen überzeugen kann, ohne wesentlichen Einfluß auf die Endresultate sein.

Die Rechnungen sind nun durchgeführt für gleichmäßig über die Platte verteilte Belastung und für eine Einzellast in Plattenmitte. Als Stützung ist berücksichtigt: Einspannung am ganzen Umfange, Auflagerung am ganzen Umfange oder auf einem zur Plattenmitte konzentrischen Kreise, Lagerung auf durchweg elastischer Unterlage. Den Bedürfnissen der Praxis dürfte damit in den meisten Fällen genügt sein. Bei der frei aufliegenden Platte soll noch die Frage gelöst werden, wie weit die Platte über den Unterstützungskreis überstehen muß, um eine möglichst gute Materialausnutzung zu erreichen, d. h. um die Beanspruchungen in Plattenmitte und über dem Unterstützungskreis ihrem absoluten Werte nach gleichzumachen.

Die allgemeinen Rechnungsgrundlagen.

Wir stützen uns im wesentlichen auf die Entwicklungen, die Föppl in seinen „Vorlesungen über Technische Mechanik“, Bd. 3: „Festigkeitslehre“, Abschn. 7 und Bd. 5: „Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie“, Abschn. 2 § 20 gibt. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf die Fälle gleichmäßig verteilter Belastung oder einer Einzellast in der Mitte sowie auf den Fall einer zur Mitte konzentrischen Unterstützung der Platte. Es wird dies auch in den weitaus meisten Fällen der Praxis tatsächlich eintreten. Wir setzen genau wie bei der Untersuchung des einfachen Balkens voraus, 1. daß die Ordinaten der elastischen Fläche (entsprechend der elastischen Linie des Balkens) von der ursprünglichen Lage der wagerechten Schwerebene an gerechnet kleine bleiben, 2. daß elastische Verschiebungen von Punkten der Mittelebene parallel zur Mittelebene gegenüber den Verschiebungen senkrecht zur Mittelebene vernachlässigt werden können, und 3. daß alle Punkte der Platte, die vorher auf einer zur Mittelebene senkrecht gezogenen Geraden liegen, auch nach der Formänderung noch auf einer Geraden liegen, die der Symmetrie wegen die Symmetrieachse der Platte schneiden muß (entsprechend der Bernouillischen Annahme, daß die Querschnitte eines Balkens nach der Biegung eben bleiben).

Durch die Biegung treten nun in jedem Punkte der Platte Dehnungen in radialer und in tangentialer Richtung auf, die wir ε_r und ε_t nennen wollen. Die tangentialen Dehnungen entstehen dadurch, daß sich der Umfang eines durch den betrachteten Punkt konzentrisch zur Plattenmitte gelegten Kreises vergrößert bezw. verkleinert. Der Umfang des Kreises verändert sich nun in gleichem Verhältnis wie sein Radius. Unter Einführung der in Fig. 1 angeschriebenen Bezeichnungen verändert sich der Radius x um die Größe $z \cdot \sin\varphi$, wenn z der Abstand des betrachteten Punktes von der Schwerebene der Platte ist. Bei kleinen Werten von φ, die allein in Frage kommen, können wir schreiben

$$z \cdot \sin\varphi = z \cdot \varphi.$$

Die tangentiale Dehnung beträgt also:

$$\varepsilon_t = \frac{z\varphi}{x}. \tag{1}$$

Die radialen Dehnungen entstehen dadurch, daß die durch den betrachteten Punkt gehenden radialen Fasern ebenfalls ihre Länge ändern. Zwischen zwei Normalen, die im Abstand dx zur elastischen Mittelfläche gezogen sind, beträgt diese Längenänderung $z \cdot d\varphi$. Die ursprüngliche Länge war dx, mithin die Dehnung

$$\varepsilon_r = \frac{z \cdot d\varphi}{dx}. \tag{1'}$$

Die den Dehnungen entsprechenden Spannungen in radialer und tangentialer Richtung, σ_r und σ_t, ergeben sich nach dem Elastizitätsgesetze aus den Gleichungen

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{m} \cdot \sigma_t\right); \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{1}{m} \cdot \sigma_r\right),$$

wenn E die Elastizitätszahl und m die Poissonsche Zahl bedeuten.

Hieraus ergibt sich:

$$\sigma_r = \frac{m \cdot E}{m^2 - 1}\left(m\,\varepsilon_r + \varepsilon_t\right); \quad \sigma_t = \frac{m \cdot E}{m^2 - 1}(m\,\varepsilon_t + \varepsilon_r)$$

oder nach Einführung der oben für die Dehnung gefundenen Werte:

$$\sigma_r = \frac{m \cdot E}{m^2 - 1} z \left(m \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right); \quad \sigma_t = \frac{m \cdot E}{m^2 - 1} z \left(m \cdot \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right). \tag{2}$$

Wir betrachten jetzt das Gleichgewicht eines Plattenelementes, das herausgeschnitten wird durch zwei den Winkel $d\alpha$ einschließende Meridianebenen und zwei um dx voneinander abstehende konzentrische Ringschnitte. Das Plattenelement ist in Fig. 2 im Grund- und Aufriß dargestellt. Die an den Schnittflächen auftretenden Spannungen σ_r und σ_t sowie die Schubspannungen τ müssen untereinander im Gleichgewicht sein. Wir betrachten zunächst die Spannungen σ_t. Auf das Flächenteilchen dF entfällt dann die Kraft $\sigma_t \cdot dF$. Die in zwei benachbarten Meridianschnitten wirkenden Kräfte sind gleich und entgegengesetzt gerichtet und schneiden sich in der Symmetrieebene des Plattenelements. Ihre Resultierende fällt in die Symmetrieebene und hat die Größe $\sigma_t \cdot dF\, d\alpha$. Jede dieser Kräfte eines einzelnen Flächenteilchens des Meridianschnittes hat auf einen in der Schwerebene gelegenen Punkt bezogen das Moment $\sigma_t \cdot z\, dF\, d\alpha$. Das Gesamtmoment aller dieser Kräfte läßt sich daher schreiben

$$d\alpha \int \sigma_t \cdot z \cdot dF.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2) kann man daher schreiben:

$$\text{Moment der } \sigma_t = d\alpha \int \sigma_t \cdot z \cdot dF = d\alpha \cdot \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right)\int z^2 \cdot dF.$$

Das Integral ist das Trägheitsmoment des Meridianschnittes und läßt sich daher schreiben

$$\int z^2 \cdot dF = dx \cdot \frac{h^3}{12},$$

womit wir erhalten:

$$\text{Moment der } \sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(m \cdot \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) \cdot dx \cdot d\alpha. \tag{3}$$

Wir betrachten weiter die Spannungen σ_r. In einer Ringfläche, die zum Radius x gehört, ist das Gesamtmoment dieser Kräfte wie vorhin auf einen in der Schwerebene gelegenen Punkt bezogen:

$$\int \sigma_r \cdot z \cdot dF.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2) kann man daher schreiben:

$$\int \sigma_r \cdot z \cdot dF = \frac{m \cdot E}{m^2-1}\left(m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right)\int z^2\, dF.$$

Das Integral ist hier das Trägheitsmoment des Ringschnittes, eines Rechtecks von der Breite $x d\alpha$ und der Höhe h. Der vorige Ausdruck geht über in

$$\frac{mE}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\, x \left(m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right) d\alpha. \tag{4}$$

Dazu kommt das im entgegengesetzten Sinne drehende Moment der Spannungen σ_t in dem Ringschnitte, der zum Radius $(x+dx)$ gehört. Es kommt also nur auf die Differenz beider Momente an. Diese finden wir durch Differentiation des vorigen Ausdrucks und erhalten:

$$\text{Moment der } \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\cdot\left(mx\frac{d^2\varphi}{dx^2}+m\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}\right)dx\cdot d\alpha.$$

Wir betrachten endlich die Schubspannungen τ. Im Ringschnitte mit dem Halbmesser x sei die Querkraft V zu übertragen. Dieser muß durch die Schubspannungen τ im Schnitte das Gleichgewicht gehalten werden. Auf den zwischen den beiden Meridianschnitten gelegenen Teil kommt davon

$$V\cdot\frac{d\alpha}{2\pi}.$$

Im Schnitte mit dem Halbmesser $(x+dx)$ ist die Querkraft um ein Differential größer. Bei Aufstellung des Momentes kommt es aber auf diesen von höherer Ordnung unendlich kleinen Unterschied nicht an. Wir erhalten daher direkt

$$\text{Moment der } \tau = V\frac{d\alpha}{2\pi}\cdot dx.$$

Das Gleichgewicht des Plattenelementes erfordert, daß die algebraische Summe der Momente der σ_t, σ_r und τ gleich Null werde.

Berücksichtigen wir durch Betrachtung der Figur den Drehsinn der einzelnen Momente, so können wir anschreiben:

$$-\frac{m\cdot E}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(m\frac{\varphi}{x}+\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{m\cdot E}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right.$$
$$\left.+m\cdot\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{V}{2\pi}=0,$$

wobei die gemeinsamen Faktoren $d\alpha$ und dx fortgehoben sind. Durch Umformen erhalten wir:

$$\frac{m^2E}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(x\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x}\right)+\frac{V}{2\pi}=0. \tag{5}$$

Der Winkel φ gibt uns zugleich den Neigungswinkel, den die Tangente an die Meridianlinie der elastischen Fläche mit der x-Achse bildet. Wir können also schreiben

$$\frac{d\varphi}{dx}=-\operatorname{tg}\varphi.$$ dy bzw. $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi$

Da der Winkel φ klein ist, kann an Stelle der Tangente auch der Winkel selbst gesetzt werden.

$$-\varphi = \frac{dy}{dx}. \tag{6}$$

Die Gleichung (5) gibt uns also erschöpfende Auskunft über die Gestalt der elastischen Fläche. Von dieser Gleichung werden wir daher bei Betrachtung der einzelnen Fälle stets ausgehen und mit ihrer Hilfe die Biegelinie der Platte aufzeichnen.

Entsprechend dem Zwecke unserer Untersuchungen wollen wir jetzt dazu übergehen, Ausdrücke aufzustellen für die auftretenden Biegungsmomente, die erstens auf einen Ringschnitt mit dem Halbmesser x und zweitens auf einen Meridianschnitt in dazu senkrechten Ebenen wirken; das erstere Moment wollen wir der Kürze halber das Radialmoment, das letztere das Tangentialmoment nennen.

Zur Bestimmung des Radialmomentes M_r betrachten wir, wie früher, die Spannungen σ_r. Das Moment aller dieser Spannungen stellt uns das Radialmoment dar. Für den durch zwei Meridianebenen herausgeschnittenen Teil eines Ringschnittes ergab sich das Moment nach Gleichung (4) zu

$$\frac{m \cdot E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} x \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right) d\alpha.$$

Um das auf den ganzen Umfang wirkende Moment zu finden, haben wir vorstehenden Wert mit $\frac{2\pi x}{x\,d\alpha}$ zu multiplizieren und erhalten

$$M_r = \frac{m}{m^2 - 1} \frac{\pi E h^3}{6} x \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right) \tag{7}$$

oder bezogen auf die Längeneinheit eines Ringschnittes

$$M_r^I = \frac{m}{m^2 - 1} \cdot \frac{E h^3}{12} \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right). \tag{8}$$

Zur Bestimmung des Tangentialmomentes M_t betrachten wir die Spannungen σ_t. Das Moment aller dieser Spannungen stellt uns das Tangentialmoment dar. Im Flächenteilchen dF eines Meridianschnittes greift die Kraft $\sigma_t\,dF$ an, deren Moment nach früherem $\sigma_t \cdot z \cdot dF$ lautet. Das Gesamtmoment entsprechend

$$\int \sigma_t \cdot z \cdot dF,$$

wofür man nach (2) schreiben kann:

$$\frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \cdot \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) \int z^2 \cdot dF.$$

Radialer lotrechter Längsschnitt der deformierten Platte.

Fig. 1.

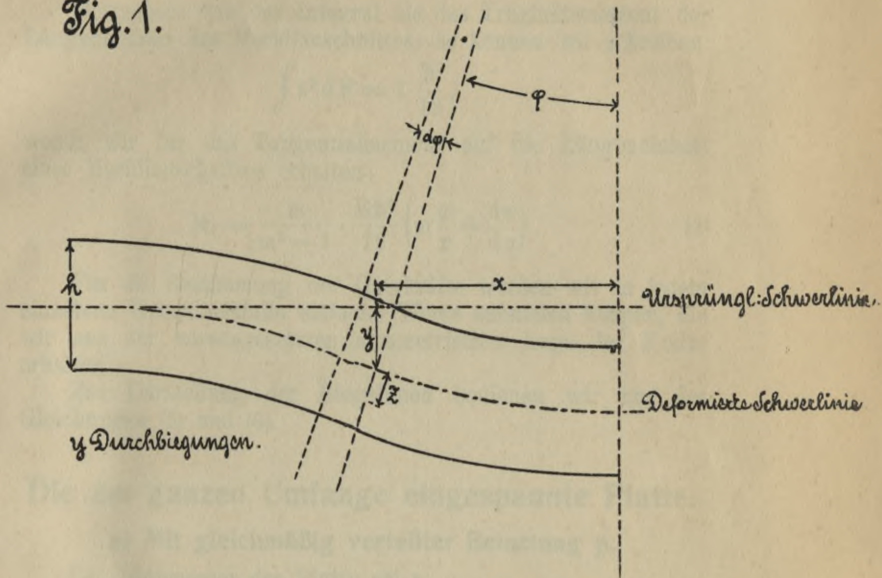
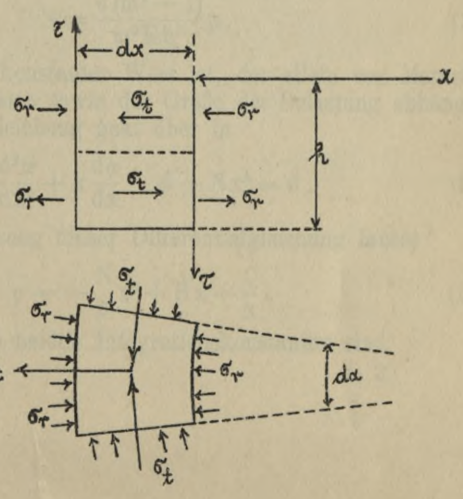


Fig: 2. Gleichgewicht eines Plattenelementes.



...adiale lotrechter Längsschnitt der deformierten Platt...

Fig. 1.

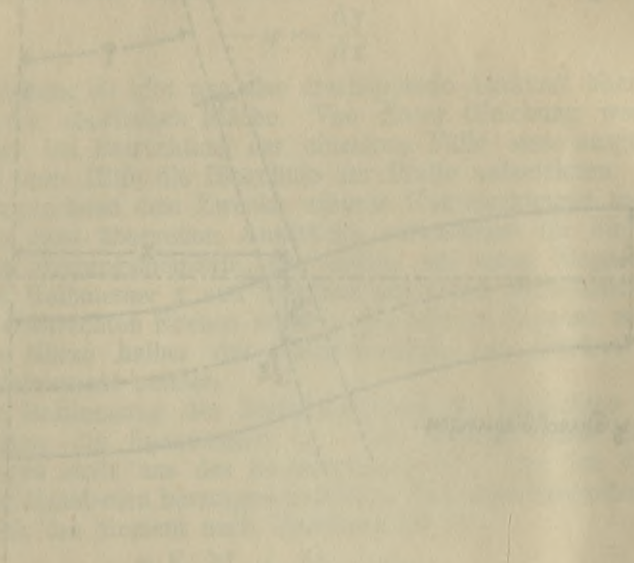
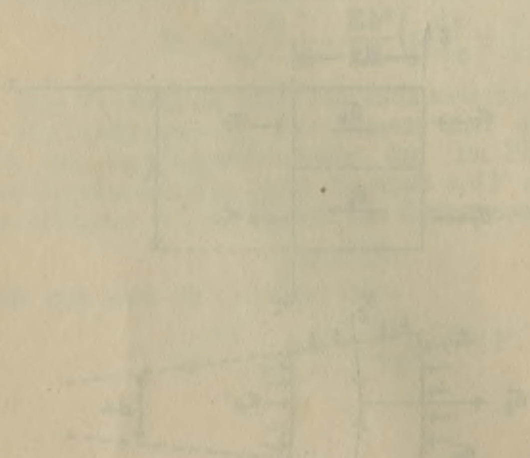


Fig. 2. Seitenansicht eines Plattenelementes.



Betrachten wir das Integral als das Trägheitsmoment der Längeneinheit des Meridianschnittes, so können wir schreiben:

$$\int z^2 \, dF = 1 \cdot \frac{h^3}{12},$$

womit wir für das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes erhalten:

$$M_t = \frac{m}{m^2 - 1} \cdot \frac{E h^3}{12} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right). \tag{9}$$

Für die Bestimmung der Querkräfte werden wir in jedem einzelnen Belastungsfalle einfache Werte aufstellen können, die wir aus der vorausgesetzten symmetrischen Lage der Kräfte erhalten.

Zur Darstellung der Biegelinien bedienen wir uns der Gleichungen (5) und (6).

Die am ganzen Umfange eingespannte Platte.

a) Mit gleichmäßig verteilter Belastung p.

Der Halbmesser der Platte sei r.

Die Querkraft in einem Ringschnitte mit dem Radius x berechnet sich zu:

$$V = x^2 \pi p.$$

Gleichung (5) geht daher über in

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(x \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x} \right) + \frac{x^2 p}{2} = 0.$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$N = \frac{6 (m^2 - 1)}{m^2 E h^3} p, \tag{10}$$

wobei N also ein konstanter Wert ist, der allein von Material und Stärke der Platte sowie der Größe der Belastung abhängig ist. Die vorige Gleichung geht über in

$$x^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi + N x^3 = 0. \tag{11}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 + B x + \frac{C}{x}, \tag{12}$$

worin B und C die beiden Integrationskonstanten sind.

Ihre Bestimmung erfolgt aus den Grenzbedingungen.

1. In Plattenmitte, also für $x = 0$, muß auch $\varphi = 0$ werden, daher auch:

$$C = 0.$$

2. Am Plattenrande, also für $x = r$, soll die Platte eingespannt sein, d. h. die elastische Fläche soll die ursprüngliche Mittelebene im Kreise $x = r$ berühren, also auch für $x = r$ muß $\varphi = 0$ werden, daher nach Gleichung (11)

$$0 = -\frac{N}{8} r^3 + B r,$$

woraus folgt:

$$B = \frac{N}{8} r^2.$$

Setzen wir die für C und B gefundenen Werte in die Gleichung (12) ein, so lautet diese:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{N}{8}(r^2 x - x^3) = \frac{3}{4}\frac{(m^2-1)}{m^2 E h^3} p \cdot (r^2 x - x^3), \\ &\text{mithin auch:} \\ \frac{\varphi}{x} &= \frac{N}{8}(r^2 - x^2) = \frac{3}{4}\frac{(m^2-1)}{m^2 E h^3} p \cdot (r^2 - 3x^2), \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{N}{8}(r^2 - 3x^2) = \frac{3}{4}\frac{(m^2-1)}{m^2 E h^3} p\, (r^2 - x^2). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Setzen wir die in (13) gefundenen Werte in die Gleichungen (7), (8) und (9) ein, so erhalten wir für das Radialmoment auf den ganzen Umfang eines Ringschnittes

$$M_r = \frac{1}{8m} \pi p x \left\{ (m+1) r^2 - (3m+1) x^2 \right\}. \quad (14)$$

Das Radialmoment auf die Längeneinheit eines Ringschnittes finden wir hieraus durch Division mit $2\pi x$, also:

$$M^I_r = \frac{1}{16m} p \left\{ (m+1) r^2 - (3m+1) x^2 \right\}, \quad (15)$$

für das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes

$$M_t = \frac{1}{16m} p \left\{ (m+1) r^2 - (m+3) x^2 \right\}. \quad (16)$$

Die Querkraft auf den ganzen Umfang eines Ringschnittes ergibt sich nach einfacher Überlegung zu

$$V = x^2 \pi p. \quad (17)$$

Zur Darstellung der Biegelinien erinnern wir uns, daß nach Gleichung (6) ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi.$$

In Verbindung mit (13) geht dies über in:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N}{8}(r^2 x - x^3) = \frac{N}{8}(x^3 - r^2 x).$$

Durch Integration erhalten wir:

$$y = \frac{N}{8}\left(\frac{x^4}{4} - r^2 \frac{x^2}{2}\right) + C.$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Grenzbedingung, daß für $x = r$ die Durchbiegung y gleich Null sein muß. Also

$$0 = \frac{N}{8}\left(\frac{r^4}{4} - r^2 \cdot \frac{r^2}{2}\right) + C$$

oder

$$C = \frac{N r^4}{32}.$$

Die vorige Gleichung geht nach Einsetzung dieses Wertes über in:

$$y = \frac{N}{32}(x^4 - 2 r^2 x^2 + r^4)$$

oder unter Einführung des Wertes für N

$$y = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2 E h^3} p (x^4 - 2 r^2 x^2 + r^4). \tag{18}$$

In den Gleichungen (14) bis (18) haben wir also Ausdrücke für die Momente, die Querkräfte und die Durchbiegungen gefunden. Betrachten wir diese Gleichungen näher, so sehen wir, daß die Größen r und x in ihrem Auftreten eine gewisse Regelmäßigkeit zeigen, die es uns ermöglicht, statt der Veränderlichen x das Verhältnis $\left(\frac{x}{r}\right)$ als Veränderliche einzuführen. Wir erhalten danach:

$$M_r = \frac{\pi}{8 m} p r^3 \left(\frac{x}{r}\right) \left\{(m + 1) - (3 m + 1)\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$M_r^I = \frac{1}{16 m} p r^2 \left\{(m + 1) - (3 m + 1)\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$M_t = \frac{1}{16 m} p r^2 \left\{(m + 1) - (m + 3)\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$V = \pi p r^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$y = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2 E h^3} p r^4 \left\{ \left(\frac{x}{r}\right)^4 - 2 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + 1 \right\}.$$

Wir sehen, daß die vor den Klammerwerten stehenden Ausdrücke konstante Werte darstellen, die allein vom Material und den Abmessungen der Platte sowie von der Belastung abhängig sind. Die Klammerwerte selbst können wir für verschiedene Werte des Verhältnisses $\left(\frac{x}{r}\right)$ berechnen. Diese Werte haben dann für alle kreisförmigen, am Rande eingespannten Platten mit irgendeiner gleichmäßig verteilten Last Gültigkeit. Lediglich über die Poissonsche Zahl m müssen wir eine Annahme machen. Alle anderen Größen der Platte, wie E, r, sowie die Belastung p treten nur in dem konstanten Faktor auf, mit dem die einmal berechneten Klammerwerte zu multiplizieren sind. Wir wollen jetzt

$$m = 4$$

setzen. Dann gehen unsere Gleichungen über in:

$$M_r = 0{,}0982\, p r^3 \left(\frac{x}{r}\right) \left\{ 5 - 13 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}$$

$$M_r^I = 0{,}0156\, p r^2 \left\{ 5 - 13 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}$$

$$M_t = 0{,}0156\, p r^2 \left\{ 5 - 7 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}$$

$$V = 3{,}1416\, p r^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$y = 0{,}1758 \frac{p r^4}{E h^3} \left\{ \left(\frac{x}{r}\right)^4 - 2 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + 1 \right\}.$$

Wir denken uns jetzt den Plattenhalbmesser in 10 gleiche Teile geteilt. Für diese Punkte berechnen wir jeweils die Klammerwerte und multiplizieren sie noch mit den dabeistehenden unbenannten Zahlen. Diese Werte sind nun in Tafel 1 aufgetragen. Eine einfache Multiplikation mit dem jedesmal angeschriebenen Faktor, der abhängig ist von den Größen E, h, r und p, ermöglicht uns, für Platten beliebiger Abmessung und beliebiger gleichförmiger Belastung mit den berechneten 10 Ordinaten den Verlauf der Momente, Querkräfte und Durchbiegungen festzulegen.

Das Radialmoment ist für den ganzen Umfang eines Ringschnittes berechnet aufgetragen worden. Es dürfte das für praktische Zwecke am handlichsten sein. In Plattenmitte, wo der Umfang des Schnittes Null wird, wird dann sinngemäß auch das Moment zu Null werden. Zum besseren Vergleiche der radialen und tangentialen Beanspruchungen ist in den Tabellen das Radialmoment auch für die Längeneinheit des Ringschnittes berechnet und auf den Tafeln mit gestrichelten Linien eingetragen worden. In Plattenmitte müssen dann Radial- und Tangentialmoment für die Längeneinheit gleich werden, denn was in Plattenmitte Tangentialbeanspruchungen eines Meridianschnittes sind, sind Radialbeanspruchungen des dazu senkrechten Schnittes.

Bei der Darstellung auf den beigefügten Tafeln ist noch zu beachten, daß der Multiplikator der Ordinaten des Radialmoments richtigerweise von der Dimension cm kg ist. Der Multiplikator der Ordinaten des Tangentialmomentes hat die Dimension kg. Es ist dabei zu ergänzen: „für die Längeneinheit“, also ergibt sich wiederum cm kg.

Auf S. 13 sind die berechneten und auf den Tafeln aufgetragenen Werte zusammengestellt.

Die am ganzen Umfange eingespannte Platte mit gleichförmig verteilter Belastung.

Die Veränderliche $\left(\frac{x}{r}\right)$	Das Radialmoment auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Das Radialmoment auf die Längeneinheit eines Ringschnittes	Das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes	Die Querkraft auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Die Durchbiegungen
0,0	+ 0,0000	+ 0,0780	+ 0,0780	0,0000	0,1758
0,1	+ 0,0478	+ 0,0760	+ 0,0769	0,0314	0,1723
0,2	+ 0,0880	+ 0,0699	+ 0,0736	0,1257	0,1620
0,3	+ 0,1128	+ 0,0603	+ 0,0682	0,2827	0,1456
0,4	+ 0,1147	+ 0,0456	+ 0,0602	0,5027	0,1240
0,5	+ 0,0859	+ 0,0273	+ 0,0507	0,7854	0,0989
0,6	+ 0,0189	+ 0,0050	+ 0,0387	1,1310	0,0721
0,7	— 0,0942	— 0,0214	+ 0,0245	1,5394	0,0457
0,8	— 0,2608	— 0,0518	+ 0,0081	2,0106	0,0228
0,9	— 0,4887	— 0,0863	— 0,0104	2,5447	0,0063
1,0	— 0,7856	— 0,1248	— 0,0312	3,1416	0,0000

b) Mit einer Einzellast P in der Mitte.

Die Querkraft in einem Zylinderschnitte mit dem Radius x berechnet sich zu:

$$V = P.$$

Gleichung (5) geht daher über in:

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(x\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x}\right) + \frac{P}{2\pi} = 0.$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$Q = \frac{6(m^2 - 1)}{\pi m^2 E h^3} P. \tag{19}$$

Die vorige Gleichung lautet dann:

$$x^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Qx = 0. \tag{20}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ergibt:

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \cdot \ln x + Bx + \frac{C}{x}, \tag{21}$$

wobei B und C die beiden willkürlichen Integrationskonstanten sind.

Ihre Bestimmung erfolgt aus den Grenzbedingungen:

1. In Plattenmitte, also für $x = 0$, muß wie früher $\varphi = 0$ werden, daher auch

$$C = 0.$$

2. Am Plattenrande, also für $x = r$, muß ebenfalls wie früher $\varphi = 0$ werden, daher nach Gleichung (21)

$$0 = -\frac{Q}{2} r \cdot \ln r + Br,$$

woraus folgt:

$$B = \frac{Q}{2} \ln r.$$

Unter Einsetzung der für B und C gefundenen Werte geht Gleichung (21) über in:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\frac{Q}{2} x \cdot \ln\frac{x}{r} = -\frac{3(m^2-1)}{\pi m^2 E h^3} P \cdot x \cdot \ln\frac{x}{r}, \\ &\text{mithin auch} \\ \frac{\varphi}{x} &= -\frac{Q}{2} \ln\frac{x}{r} = -\frac{3(m^2-1)}{\pi m^2 E h^3} P \cdot \ln\frac{x}{r} \\ \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{Q}{2}\left(\ln\frac{x}{r} + 1\right) = -\frac{3(m^2-1)}{\pi m^2 E h^3} P\left(\ln\frac{x}{r} + 1\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Setzen wir diese Werte in (7), (8), (9) ein, so erhalten wir:

$$M_r = -\frac{P}{2m} x \left\{ (m+1) \ln \frac{x}{r} + m \right\}$$

$$M^I_r = -\frac{P}{4\pi m} \left\{ (m+1) \ln \frac{x}{r} + m \right\}$$

$$M_t = -\frac{P}{4\pi m} \left\{ (m+1) \ln \frac{x}{r} + 1 \right\}.$$

Die Querkraft auf den ganzen Umfang eines Ringschnittes ergibt sich nach einfacher Überlegung zu:

$$V = P. \tag{24}$$

Zur Darstellung der Biegelinien gehen wir wieder von Gleichung (6) aus. In Verbindung mit (22) erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2} x \cdot \ln \frac{x}{r}.$$

Durch Integration erhalten wir:

$$y = \frac{Qx^2}{4} \ln \frac{x}{r} - \frac{Qx^2}{8} + C.$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Grenzbedingung, daß für $x = r$ die Durchbiegung $y = 0$ sein muß, also:

$$0 = \frac{Q \cdot r^2}{4} \cdot \ln \frac{r}{r} - \frac{Qr^2}{8} + C$$

oder

$$C = \frac{Qr^2}{8}.$$

Die vorige Gleichung geht hiernach über in:

$$y = \frac{Q}{8} \left(r^2 - x^2 + 2x^2 \ln \frac{x}{r} \right)$$

oder unter Einführung des Wertes für Q:

$$y = \frac{3(m^2-1)}{4\pi m^2 E h^3} P \left(r^2 - x^2 + 2x^2 \ln \frac{x}{r} \right). \tag{25}$$

Führen wir wieder die Veränderliche $\frac{x}{r}$ ein, so gehen die Gleichungen (23), (24) und (25) über in:

$$M_r = -\frac{Pr}{2m} \left(\frac{x}{r} \right) \left\{ (m+1) \ln \frac{x}{r} + m \right\}$$

$$M^I{}_r = -\frac{P}{4\pi m}\left\{(m+1)\ln\frac{x}{r}+m\right\}$$

$$M_t = -\frac{P}{4\pi m}\left\{(m+1)\ln\frac{x}{r}+1\right\}$$

$$V = P$$

$$y = \frac{3(m^2-1)}{4\pi m^2 E h^3} P\cdot r^2\left\{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2+2\left(\frac{x}{r}\right)^2\ln\frac{x}{r}\right\}.$$

Nach Einführung der Zahl $m = 4$ schreiben wir dafür:

$$M_r = -0{,}1250\cdot P\cdot r\left(\frac{x}{r}\right)\left\{5\ln\left(\frac{x}{r}\right)+4\right\}$$

$$M^I{}_r = -0{,}0199\,P\left\{5\ln\left(\frac{x}{r}\right)+4\right\}$$

$$M_t = -0{,}0199\,P\left\{5\ln\left(\frac{x}{r}\right)+2\right\}$$

$$V = P$$

$$y = 0{,}2238\,\frac{P\cdot r^2}{E h^3}\left\{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2+2\left(\frac{x}{r}\right)^2\ln\frac{x}{r}\right\}.$$

Auf S. 21 sind die hiernach berechneten und auf Tafel 2 aufgetragenen Werte zusammengestellt.

Wir sehen jetzt aber, daß die Momente, bezogen auf die Längeneinheit in Plattenmitte, unendlich groß werden. Dies hat seinen Grund darin, daß wir die Last auf einen Punkt konzentriert angenommen haben. Dies wird in Wirklichkeit nie der Fall sein, da die Last stets über eine gewisse Fläche verteilt ist.

Um nun ein Bild zu gewinnen, welchen Einfluß die Verteilung der Last auf eine gewisse Fläche hat, wollen wir die Rechnung durchführen unter der Annahme, daß sich die Last P gleichmäßig über einen Kreis vom Halbmesser a verteilt. Die Größe a wollen wir dann beispielsweise gleich 1/10 r setzen und die dann gewonnenen Werte für die Momente mit den vorhin erhaltenen vergleichen.

Unsere Kurven setzen sich jetzt aus zwei Ästen zusammen. Der innere Ast reicht von $x = 0$ bis $x = a$. Innerhalb dieser Grenzen haben wir es mit einer gleichmäßig verteilten Last zu tun. Der äußere Ast reicht dann von $x = a$ bis $x = r$.

Für den inneren Ast haben wir dann nach Gleichung (12)

$$\varphi = -\frac{N}{8}x^3 + Bx + \frac{C}{x}, \tag{26}$$

für den äußeren Ast dagegen nach (21)

$$\varphi' = -\frac{Q}{2} x \ln x + D x + \frac{F}{x}. \tag{27}$$

Die Integrationskonstanten sind hier mit anderen Buchstaben, D und F, bezeichnet. Die Werte φ, M, V, y im äußeren Aste erhalten zum Unterschiede die Bezeichnung φ', M', V', y'.

Zur Bestimmung der vier Integrationskonstanten brauchen wir vier Grenzbedingungen. Diese sind:

1. In Plattenmitte muß $\varphi = 0$ sein, mithin wie früher

$$C = 0.$$

2. Für den Punkt $x = a$, der beiden Ästen gemeinsam ist, muß

$$\varphi = \varphi'$$

sein, mithin:

$$-\frac{N}{8} a^3 + B a = -\frac{Q}{2} a \cdot \ln a + D \cdot a + \frac{F}{a}.$$

3. Für den Punkt $x = a$ müssen zu beiden Seiten des Schnittes die Radialspannungen die gleichen sein. Betrachten wir aber Gleichung (2), so sehen wir, daß dies nur möglich ist, wenn auch

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi'}{dx}$$

ist.

Differentieren wir die Gleichungen (26), (27) nach x und setzen die erhaltenen Differentialquotienten einander gleich, so erhalten wir

$$-\frac{3}{8} N a^2 + B = -\frac{Q}{2} \ln a - \frac{Q}{2} + D - \frac{F}{a^2}.$$

4. Für den Punkt $x = r$ muß wieder wie früher $\varphi = 0$ sein, also:

$$0 = -\frac{Q}{2} r \cdot \ln r + D r + \frac{F}{r}.$$

Beachten wir ferner, daß nach Gleichung (10) und (19)

$$N = \frac{6(m^2-1)}{m^2 \cdot E h^3} p \text{ und } Q = \frac{6(m^2-1)}{\pi m^2 E h^3} P = \frac{6(m^2-1)}{\pi m^2 E h^3} \cdot p \cdot a^2 \pi$$

ist, so erhalten wir im vorliegenden Falle die Beziehung

$$N a^2 = Q. \tag{28}$$

Unter Einführung dieser Vereinfachung können wir aus den vier aus den Grenzbedingungen erhaltenen Gleichungen die vier unbekannten Integrationskonstanten berechnen.

Es ergibt sich:

$$C = 0$$

$$F = -\frac{a^2 Q}{8}$$

$$D = \frac{Q}{8}\left(4 \cdot \ln r + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$B = \frac{Q}{8}\left(4 \ln \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2}\right) \cdot$$

Unter Einführung dieser Werte in die Gleichungen (26), (27) erhalten wir für den inneren Ast:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{8}\left(\frac{a^2}{r^2} x - \frac{x^3}{a^2} - 4x \cdot \ln \frac{a}{r}\right) \\ \frac{\varphi}{x} &= \frac{Q}{8}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{x^2}{a^2} - 4 \ln \frac{a}{r}\right) \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{Q}{8}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{3x^2}{a^2} - 4 \ln \frac{a}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

für den äußeren Ast:

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= \frac{Q}{8}\left(\frac{a^2}{r^2} x - \frac{a^2}{x} - 4x \cdot \ln \frac{x}{r}\right) \\ \frac{\varphi'}{x} &= \frac{Q}{8}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{x^2} - 4 \ln \frac{x}{r}\right) \\ \frac{d\varphi'}{dx} &= \frac{Q}{8}\left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{x^2} - 4 - 4 \ln \frac{x}{r}\right) \cdot \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Nach (7), (8), (9) ergibt sich weiter unter Einsetzung dieser Werte für den inneren Ast:

$$M_r = \frac{P}{8m} x \left\{ (m+1)\frac{a^2}{r^2} - (3m+1)\frac{x^2}{a^2} - (m+1) \cdot 4 \cdot \ln \frac{a}{r} \right\}$$

$$M^I{}_r = \frac{P}{16\pi m}\left\{ (m+1)\frac{a^2}{r^2} - (3m+1)\frac{x^2}{a^2} - (m+1) \cdot 4 \ln \frac{a}{r} \right\}$$

$$M_t = \frac{P}{16\pi m}\left\{ (m+1)\frac{a^2}{r^2} - (m+3)\frac{x^2}{a^2} - (m+1) \cdot 4 \ln \frac{a}{r} \right\}$$

für den äußeren Ast:

$$M'_r = \frac{P}{8\,m}\,x\left\{(m+1)\frac{a^2}{r^2} + (m-1)\frac{a^2}{x^2} - 4\,m - (m+1)\cdot 4\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M'^{I}_r = \frac{P}{16\pi m}\left\{(m+1)\frac{a^2}{r^2} + (m-1)\frac{a^2}{x^2} - 4\,m - (m+1)\cdot 4\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M'_t = \frac{P}{16\pi m}\left\{(m+1)\frac{a^2}{r^2} - (m-1)\frac{a^2}{x^2} - 4 - 4\,(m+1)\ln\frac{x}{r}\right\}$$

Machen wir jetzt die willkürliche Annahme, daß $a = 1/10\,r$ sei, so vereinfachen sich die Gleichungen wie folgt

für den inneren Ast:

$$M_r = \frac{P}{2\,m}\,x\left\{2{,}3051\,(m+1) - 25\,(3\,m+1)\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$M^{I}_r = \frac{P}{4\,\pi\,m}\left\{2{,}3051\,(m+1) - 25\,(3\,m+1)\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$M_t = \frac{P}{4\,\pi\,m}\left\{2{,}3051\,(m+1) - 25\,(m+3)\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

und für den äußeren Ast:

$$M'_r = \frac{P}{2\,m}\,x\left\{0{,}0025\,(m+1) + 0{,}0025\,(m-1)\left(\frac{r}{x}\right)^2 - m - (m+1)\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M'^{I}_r = \frac{P}{4\,m\pi}\left\{0{,}0025\,(m+1) + 0{,}0025\,(m-1)\left(\frac{r}{x}\right)^2 - m - (m+1)\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M'_t = \frac{P}{4\,m\pi}\left\{0{,}0025\,(m+1) - 0{,}0025\,(m-1)\left(\frac{r}{x}\right)^2 - 1 - (m+1)\ln\frac{x}{r}\right\}$$

Unter Einführung des Wertes $m = 4$ vereinfachen sich die Gleichungen weiter

für den inneren Ast:

$$M_r = 0{,}1250\,P\cdot r\left(\frac{x}{r}\right)\left\{11{,}5255 - 325\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$M^{I}_r = 0{,}0199\,P\left\{11{,}5255 - 325\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$M_t = 0{,}0199\,P\left\{11{,}5255 - 175\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

für den äußeren Ast:

$$M_r = 0{,}1250\,P \cdot r\left(\frac{x}{r}\right)\left\{-3{,}9875 + 0{,}0075\left(\frac{r}{x}\right)^2 - 5\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M'^{I}_{r} = 0{,}0199\,P\left\{-3{,}9875 + 0{,}0075\left(\frac{r}{x}\right)^2 - 5\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M'_t = 0{,}0199\,P\left\{-0{,}9875 - 0{,}0075\left(\frac{r}{x}\right)^2 - 5\ln\frac{x}{r}\right\}.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen sind nun die Momente erneut berechnet worden. Auf S. 21 sind die gefundenen Werte in Klammer unter diejenigen gesetzt worden, die unter Annahme einer in der Mitte konzentrierten Einzellast gefunden worden waren. Die auf Tafel 2 aufgezeichneten Werte sind danach, soweit erforderlich, abgeändert worden.

Die Annahme, daß sich die Last auf einen Kreis mit dem Halbmesser 1/10 r gleichmäßig verteile, ist natürlich ganz willkürlich. Man gewinnt aber durch die für den Sonderfall durchgeführte Rechnung einen Einblick, welchen Einfluß eine Lastverteilung überhaupt auf den Verlauf der Kurven hat. Es ist daraus ersichtlich, daß dieser Einfluß weiter von der Mitte entfernt fast ganz verschwindet. Es wird nach Betrachtung der nebeneinandergestellten Zahlen leichter sein, den Einfluß der Lastverteilung in jedem praktischen Falle richtig einzuschätzen, ohne die Rechnung erneut durchzuführen.

Im vorliegenden Falle hätten wir beispielsweise die für $x = 1/10\,r$ gefundenen Werte auch für $x = 0$ gelten lassen können, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen.

Die entsprechende Korrektur ist auch in der Querkraftkurve vorgenommen worden, da wir sonst ein sinnwidriges Resultat erhalten würden, denn ein Ringschnitt mit dem Radius 0 hat auch den Umfang 0, kann somit nur eine Querkraft 0 übertragen.

Die am ganzen Umfang eingespannte Platte mit einer Einzellast in der Mitte.

Die Veränderliche $\left(\frac{x}{r}\right)$	Das Radialmoment auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Das Radialmoment auf die Längeneinheit eines Ringschnittes	Das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes	Die Querkraft auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Die Durchbiegungen
0,0	+ 0,0000 (+ 0,0000)	+ ∞ (+ 0,2294)	+ ∞ (+ 0,2294)	1,0000	0,2238
0,1	+ 0,0939 (+ 0,1034)	+ 0,1495 (+ 0,1644)	+ 0,2291 (+ 0,1953)	1,0000	0,2112
0,2	+ 0,1012 (+ 0,1067)	+ 0,0805 (+ 0,0848)	+ 0,1402 (+ 0,1368)	1,0000	0,1860
0,3	+ 0,0760 (+ 0,0793)	+ 0,0402 (+ 0,0420)	+ 0,0999 (+ 0,0985)	1,0000	0,1552
0,4	+ 0,0291 (+ 0,0321)	+ 0,0116 (+ 0,0128)	+ 0,0713 (+ 0,0706)	1,0000	0,1224
0,5	— 0,0334 (— 0,0367)	— 0,0106 (— 0,0117)	+ 0,0491 (+ 0,0487)	1,0000	0,0903
0,6	— 0,1084 (— 0,1060)	— 0,0288 (— 0,0281)	+ 0,0309 (+ 0,0308)	1,0000	0,0609
0,7	— 0,1939 (— 0,1915)	— 0,0441 (— 0,0435)	+ 0,0156 (+ 0,0155)	1,0000	0,0359
0,8	— 0,2884 (— 0,2860)	— 0,0574 (— 0,0568)	+ 0,0023 (+ 0,0023)	1,0000	0,0166
0,9	— 0,3907 (— 0,3885)	— 0,0691 (— 0,0686)	— 0,0094 (— 0,0094)	1,0000	0,0043
1,0	— 0,5000 (— 0,4975)	— 0,0796 (— 0,0791)	— 0,0199 (— 0,0198)	1,0000	0,0000

Die in Klammer beigefügten Zahlen entsprechen der Annahme, daß sich die Last in der Mitte auf einen Kreis mit dem Halbmesser 1/10 r gleichmäßig verteilt.

Die frei aufliegende Platte.

a) Mit gleichmäßig verteilter Belastung.

α) Die Platte liegt am ganzen Umfang frei auf.

Die Querkraft in einem Ringschnitte mit dem Radius x berechnet sich zu:

$$V = x^2 \pi p.$$

Gleichung (5) geht daher über in

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left(x \frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \frac{d \varphi}{d x} - \frac{\varphi}{x} \right) + \frac{x^2 p}{2} = 0.$$

Zur Abkürzung setzen wir wie früher bei der eingespannten Platte:

$$N = \frac{6\,(m^2 - 1)}{m^2\,E\,h^3} \cdot p.$$

Die vorige Gleichung lautet dann:

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{d\,x^2} + x \frac{d\varphi}{d\,x} - \varphi + N\,x^3 = 0. \tag{31}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 + B\,x + \frac{C}{x}, \tag{32}$$

worin B und C die beiden willkürlichen Integrationskonstanten sind.

Ihre Bestimmung erfolgt aus den Grenzbedingungen:

1. In der Plattenmitte, also für $x = 0$, muß $\varphi = 0$ sein, mithin wie früher:

$$C = 0.$$

2. Am Plattenrande, also für $x = r$, soll die Platte frei aufliegen.

Es können mithin keine radialen Spannungen übertragen werden. Diese müssen vielmehr zu Null werden. Nach Gleichung (2) wird mithin:

$$0 = \left(m \frac{d\varphi}{d\,x} + \frac{\varphi}{x}\right).$$

Bilden wir also aus Gleichung (32) die Werte $\frac{d\varphi}{d\,x}$ und $\frac{\varphi}{x}$ und setzen sie in vorstehende Gleichung ein, so erhalten wir

$$-(3\,m + 1)\frac{N x^2}{8} + (m + 1)\,B = 0$$

oder

$$B = \frac{3\,m + 1}{m + 1} \frac{N\,r^2}{8}.$$

Setzen wir die nunmehr für B und C gefundenen Werte in Gleichung (32) ein, so erhalten wir:

$$\varphi = \frac{N}{8}\left(\frac{3\,m + 1}{m + 1} r^2 x - x^3\right) = \frac{3}{4} \frac{(m^2 - 1)}{m^2\,E h^3} p \left(\frac{3\,m + 1}{m + 1} r^2 x - x^3\right),$$

woraus dann folgt:

$$\frac{d\varphi}{d\,x} = \frac{N}{8}\left(\frac{3\,m + 1}{m + 1} r^2 - 3\,x^2\right) = \frac{3}{4} \frac{(m^2 - 1)}{m^2\,E h^3} p \left(\frac{3\,m + 1}{m + 1} r^2 - 3\,x^2\right),$$

$$\frac{\varphi}{x} = \frac{N}{8}\left(\frac{3\,m + 1}{m + 1} r^2 - x^2\right) = \frac{3}{4} \frac{(m^2 - 1)}{m^2\,E h^3} p \left(\frac{3\,m + 1}{m + 1} r^2 - x^2\right). \tag{33}$$

Unter Einsetzung dieser Werte gehen die Gleichungen (7), (8), (9) über in:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{1}{8\,m}\,\pi p x \left\{ (3m+1)\,r^2 - (3m+1)\,x^2 \right\} \\ M^I_r &= \frac{1}{16\,m}\,p \left\{ (3m+1)\,r^2 - (3m+1)\,x^2 \right\} \\ M_t &= \frac{1}{16\,m}\,p \left\{ (3m+1)\,r^2 - (m+3)\,x^2 \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Die Querkraft ergibt sich wie früher zu:

$$V = \pi x^2 p. \qquad (35)$$

Zur Darstellung der Biegelinien erinnern wir uns, daß nach Gleichung (6) ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi.$$

In Verbindung mit (33) geht dies über in:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1}\,r^2 x - x^3\right) = \frac{N}{8}\left(x^3 - \frac{3m+1}{m+1}\,r^2 x\right).$$

Durch Integration erhalten wir:

$$y = \frac{N}{8}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3m+1}{m+1}\cdot\frac{r^2 x^2}{2}\right) + C.$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Grenzbedingung, daß für $x = r$ die Durchbiegung y gleich Null sein muß. Also:

$$0 = \frac{N}{8}\left(\frac{r^4}{4} - \frac{3m+1}{m+1}\cdot r^2\frac{r^2}{2}\right) + C$$

oder

$$C = \frac{N}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1}\cdot\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\right).$$

Die vorstehende Gleichung geht nach Einsetzung dieses Wertes über in:

$$y = \frac{N}{32}\left(x^4 - \frac{6m+2}{m+1}\,r^2 x^2 + \frac{5m+1}{m+1}\cdot r^4\right)$$

oder unter Einführung des Wertes für N

$$y = \frac{3\,(m^2-1)}{16\,m^2 E h^3}\,p\left(x^4 - \frac{6m+2}{m+1}\,r^2 x^2 + \frac{5m+1}{m+1}\,r^4\right). \qquad (36)$$

Wir formen jetzt die Gleichungen (34), (35), (36) wie früher so um, daß an Stelle von x die Größe $\frac{x}{r}$ als Veränderliche erscheint. Wir erhalten darnach:

$$M_r = \frac{\pi}{8\,m}\,p\,r^3 \left(\frac{x}{r}\right) \left\{ (3\,m+1) - (3\,m+1) \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}$$

$$M^I{}_r = \frac{1}{16\,m}\,p\,r^2 \left\{ (3\,m+1) - (3\,m+1) \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}$$

$$M_t = \frac{1}{16\,m}\,p\,r^2 \left\{ (3\,m+1) - (m+3) \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}$$

$$V = \pi\,p\,r^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$y = \frac{3}{16}\,\frac{m^2-1}{m^2 E h^3}\,p\,r^4 \left\{ \left(\frac{x}{r}\right)^4 - \frac{6\,m+2}{m+1} \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{5\,m+1}{m+1} \right\}.$$

Setzen wir m = 4, so gehen die vorstehenden Gleichungen über in:

$$M_r = 0{,}0982\,p\,r^3 \left(\frac{x}{r}\right) \left\{ 13 - 13 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}$$

$$M^I{}_r = 0{,}0156\,p\,r^2 \left\{ 13 - 13 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}$$

$$M_t = 0{,}0156\,p\,r^2 \left\{ 13 - 7 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \right\}.$$

$$V = 3{,}1416\,p\,r^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$y = 0{,}1758\,\frac{p\,r^4}{E\,h^3} \left\{ \left(\frac{x}{r}\right)^4 - 5{,}2 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + 4{,}2 \right\}.$$

Die vorstehenden Ausdrücke sind wiederum für 10 verschiedene Werte der Veränderlichen berechnet und auf Tafel 3 aufgetragen worden. Die berechneten Werte sind gleichzeitig auf S. 25 zusammengestellt worden.

β) Die Platte liegt auf einem zur Mitte konzentrischen Kreise frei auf.

Wir haben in den vorhergehenden Entwicklungen angenommen, daß die Platte direkt im Umfange frei aufliegt, daß also schon für x = r die Radialspannungen gleich Null werden müssen. In praktischen Fällen wird das nicht immer zutreffen. Die Platte wird vielmehr allseitig ein Stück über den Unterstützungskreis überstehen können. Beim einfachen Balken verhält sich die Sache ähnlich. Dort hat aber das überstehende Ende, solange es unbelastet ist, keinen Einfluß auf den zwischen den Stützen gelegenen Teil, solange von dem Einfluß des Eigengewichts abgesehen wird. Anders verhält sich die Sache bei der Platte.

Hier wird ein überstehender Rand, auch wenn er gar nicht belastet ist, doch einen gewissen versteifenden Einfluß ausüben. Es dürfte daher von Interesse sein, sich Rechenschaft von der Größe dieses versteifenden Einflusses zu geben bezw. die Frage zu beantworten, wie groß wohl die Breite des überstehenden Randes sein muß, um eine möglichst günstige Materialbeanspruchung zu erzielen. Dies wird dann eintreten, wenn Radial- und Tangentialmoment, bezogen auf die Längeneinheit des betreffenden Schnittes, sowohl für Plattenmitte wie für Plattenrand absolut genommen gleiche Werte zeigen. Wir bleiben vorläufig bei dem betrachteten Fall einer gleichförmig verteilten Belastung, die sich auch über den überstehenden Rand erstrecken möge.

Die am ganzen Umfange frei aufliegende Platte mit gleichförmig verteilter Belastung.

Die Veränderliche $\frac{x}{r}$	Das Radialmoment auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Das Radialmoment auf die Längeneinheit eines Ringschnittes	Das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes	Die Querkraft auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Die Durchbiegungen
0,0	+0,0000	+0,2028	+0,2028	0,0000	0,7384
0,1	+0,1264	+0,2008	+0,2017	0,0314	0,7292
0,2	+0,2451	+0,1947	+0,1984	0,1257	0,7021
0,3	+0,3485	+0,1845	+0,1930	0,2827	0,6575
0,4	+0,4289	+0,1704	+0,1853	0,5027	0,5966
0,5	+0,4787	+0,1521	+0,1755	0,7854	0,5208
0,6	+0,4902	+0,1298	+0,1635	1,1310	0,4320
0,7	+0,4557	+0,1034	+0,1484	1,5394	0,3326
0,8	+0,3677	+0,0730	+0,1337	2,0106	0,2253
0,9	+0,2183	+0,0385	+0,1143	2,5447	0,1132
1,0	+0,0000	+0,0000	+0,0936	3,1416	0,0000

Den Radius des Unterstützungskreises nennen wir b. Jede der darzustellenden Kurven setzt sich dann aus zwei Ästen zusammen, von denen sich der innere von $x = 0$ bis $x = b$, der äußere von $x = b$ bis $x = r$ erstreckt.

Für den inneren Ast haben wir nach Gleichung (31)

$$x^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + N x^3 = 0. \tag{37}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\varphi = -\frac{N}{8}x^3 + Bx + \frac{C}{x}. \tag{38}$$

Um einen für den äußeren Ast gültigen Wert von φ' zu finden, gehen wir von der Grundgleichung (5) aus. Durch Überlegen finden wir, daß die Querkraft im überstehenden Plattenrande

$$V = -(r^2\pi p - x^2\pi p)$$

lautet.

Unter Einführung dieses Wertes in Gleichung (5) erhalten wir

$$\frac{m^2 E}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(x\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d\varphi'}{dx} - \frac{\varphi'}{x}\right) - \frac{r^2 p}{2} + \frac{x^2 p}{2} = 0$$

oder mit Benutzung der Gleichung (10)

$$\left(x^2 \cdot \frac{d^2\varphi'}{dx^2} + x\frac{d\varphi'}{dx} - \varphi'\right) - N r^2 x + N x^3 = 0. \tag{39}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentiatgleichung lautet:

$$\varphi' = -\frac{N}{8}x^3 + \frac{N}{2}r^2 x \ln x + Dx + \frac{F}{x}. \tag{40}$$

Die Werte M, V, y, φ sollen im äußeren Aste die Bezeichnung M', V', y', φ' erhalten. Es handelt sich jetzt darum, die in den Gleichungen (38) und (40) vorkommenden vier Integrationskonstanten B, C, D, F aus den Grenzbedingungen zu ermitteln.

1. In Plattenmitte muß $\varphi = 0$ sein, mithin wie früher

$$C = 0.$$

2. Für den Punkt $x = b$, der beiden Ästen gemeinsam ist, muß

$$\varphi = \varphi'$$

sein, mithin aus (38) und (40)

$$B \cdot b = \frac{N}{2} r^2 b \ln b + D \cdot b + \frac{F}{b}.$$

3. Für den Punkt $x = b$ müssen zu beiden Seiten des Schnittes die Radialspannungen die gleichen sein. Aus Gleichung (2) sehen wir, daß dies nur möglich ist, wenn auch

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi'}{dx'} \text{ ist.}$$

Differentiieren wir die Gleichungen (38) und (40) nach x und setzen wir die erhaltenen Differentialquotienten einander gleich, so erhalten wir

$$B = \frac{N}{2} r^2 + \frac{N}{2} r^2 \ln b + D - \frac{F}{b^2}.$$

4. Am Plattenrande, also im Punkte $x = r$, kann keine Radialspannung mehr übertragen werden, dieselbe muß Null werden. Nach Gleichung (2) also

$$m \frac{d\varphi'}{dx} + \frac{\varphi'}{x} = 0.$$

Bilden wir aus Gleichung (40) die Größen $\frac{d\varphi'}{dx}$ und $\frac{\varphi'}{x}$ und setzen sie in vorstehende Gleichung ein, so erhalten wir:

$$m\left(\frac{N r^2}{8} + \frac{N r^2}{2} \ln r + D - \frac{F}{r^2}\right) + \left(-\frac{N}{8} r^2 + \frac{N}{2} r^2 \ln r + D + \frac{F}{r^2}\right) = 0.$$

Aus den vier Gleichungen, die wir aus vorstehenden vier Bedingungen erhalten haben, können wir jetzt die vier Integrationskonstanten berechnen. Setzen wir wieder zur Vereinfachung der Rechnung

$$m = 4,$$

so erhalten wir folgende Werte:

$$C = 0$$

$$F = \frac{N}{4} r^2 b^2$$

$$D = -\frac{3}{40} N r^2 - \frac{1}{2} N r^2 \ln r + \frac{3}{20} N b^2$$

$$B = \frac{7}{40} N r^2 + \frac{3}{20} N b^2 + \frac{1}{2} N r^2 \ln \frac{b}{r}.$$

Wir führen diese Werte in die Gleichungen (38) und (40) ein und erhalten so

für den inneren Ast:

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 + \frac{7}{40} N r^2 x + \frac{3}{20} N b^2 x + \frac{1}{2} N r^2 x \ln \frac{b}{r}$$

und hieraus:

$$\frac{\varphi}{x} = -\frac{N}{8} x^2 + \frac{7}{40} N r^2 + \frac{3}{20} N b^2 + \frac{1}{2} N r^2 \ln \frac{b}{r} \qquad (41)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{3}{8} N x^2 + \frac{7}{40} N r^2 + \frac{3}{20} N b^2 + \frac{1}{2} N r^2 \ln \frac{b}{r},$$

für den äußeren Ast:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi' &= -\frac{N}{8}x^3 - \frac{3}{40}Nr^2x + \frac{3}{20}Nb^2x + \frac{N}{2}r^2x\ln\frac{x}{r} + \frac{N}{4}\frac{r^2b^2}{x} \\
&\text{und hieraus:} \\
\frac{\varphi'}{x} &= -\frac{N}{8}x^2 - \frac{3}{40}Nr^2 + \frac{3}{20}Nb^2 + \frac{N}{2}r^2\ln\frac{x}{r} + \frac{N}{4}\frac{r^2b^2}{x^2} \\
\frac{d\varphi'}{dx} &= -\frac{3}{8}Nx^2 - \frac{17}{40}Nr^2 + \frac{3}{20}Nb^2 + \frac{N}{2}r^2\ln\frac{x}{r} - \frac{N}{4}\frac{r^2b^2}{x^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Wir hatten uns die Aufgabe gestellt, zu ermitteln, um wie viel die Platte überstehen muß, damit eine möglichst gute Materialausnutzung erfolgt. Es wird dies erreicht, wenn sowohl die Radial- wie auch die Tangentialbeanspruchungen über dem Auflagerkreis gleich denen in Plattenmitte sind. Aus der Gleichung (2) geht hervor, daß die Radialspannungen gleich werden, wenn

$$\left(m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right) \text{ oder } \left(4\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right)$$

sowohl für $x = 0$ wie für $x = b$ den gleichen Wert annimmt. Die Werte werden, wie leicht einzusehen, mit verschiedenen Vorzeichen anzuschreiben sein, da das Moment in der Mitte entgegengesetzten Drehsinn hat, wie das über der Stütze. Es wird also:

$$\left(+\frac{7}{8}r^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{5}{2}r^2\ln\frac{b}{r}\right) = -\left(+\frac{7}{8}r^2 - \frac{7}{8}b^2 + \frac{5}{2}r^2\ln\frac{b}{r}\right).$$

Der gemeinsame Faktor N ist weggehoben. Durch Umformen ergibt sich:

$$14 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 + 40\ln\left(\frac{b}{r}\right) = 0.$$

Die Gleichung wurde graphisch gelöst und ergab:

$$\left(\frac{b}{r}\right) = 0{,}715.$$

Daß dieser Wert der Gleichung genügt, kann man sich durch Einsetzen leicht überzeugen. Die Tangentialspannungen in Plattenmitte und über dem Unterstützungskreis werden gleich, wenn der Wert

$$\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right)$$

für beide Punkte gleich wird. Unter Berücksichtigung des Vorzeichens können wir demnach jetzt schreiben:

$$\left(+\frac{7}{8}r^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{5}{2}r^2\ln\frac{b}{r}\right)=-\left(-\frac{1}{8}b^2+\frac{7}{8}r^2+\frac{5}{2}r^2\ln\frac{b}{r}\right)$$

oder:

$$14+5\left(\frac{b}{r}\right)^2+40\ln\frac{b}{r}=0\,.$$

Die graphische Lösung ergab:

$$\left(\frac{b}{r}\right)=0{,}665\,.$$

Für die Dimensionierung der Platte würde es daher am günstigsten sein, wenn für $\left(\frac{b}{r}\right)$ ein Mittelwert, etwa rd.

$$\left(\frac{b}{r}\right)=0{,}700$$

gewählt wird, d. h. wenn die Platte um $^3/_{10}$ ihres Halbmessers übersteht.

Vergleichen wir noch die gefundenen Resultate mit den für den einfachen Balken bekannten. Für den gleichförmig belasteten Balken mit überstehenden Enden erhalten wir die gleichen Momente über den Stützen und in Balkenmitte, wenn das dem Werte $\left(\frac{b}{r}\right)$ entsprechende Verhältnis zwischen Balkenlänge und Stützweite 0,586 wird. Wir sehen, daß bei der Platte die Stütze weiter nach außen rücken muß, wenn das gleiche Resultat erreicht werden soll. Dies geht überdies schon aus der einfachen Überlegung hervor, daß bei der Platte nicht allein die Belastung des überstehenden Randes, sondern auch schon der Rand selbst durch seinen versteifenden Einfluß vermindernd auf das Moment in Plattenmitte einwirkt.

Um eine anschauliche Darstellung des Einflusses des überstehenden Randes auf Momente, Querkräfte und Durchbiegungen zu gewinnen, wollen wir uns die entsprechenden Kurven für den Fall darstellen, daß die Platte mit $^3/_{10}$ ihres Halbmessers über den Unterstützungskreis übersteht.

Unter Einführung des Wertes $b={}^7/_{10}\,r$ gehen die Gleichungen (41), (42) über in:

für den inneren Ast:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= -0{,}1250\,\mathrm{N}x^3 + 0{,}0702\,\mathrm{N}r^2x\\ \frac{\varphi}{x} &= -0{,}1250\,\mathrm{N}x^2 + 0{,}0702\,\mathrm{N}r^2\\ \frac{d\varphi}{dx} &= -0{,}3750\,\mathrm{N}x^2 + 0{,}0702\,\mathrm{N}r^2,\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

für den äußeren Ast:

$$\left.\begin{aligned}\varphi' &= -0{,}1250\,\mathrm{N}x^3 - 0{,}0015\,\mathrm{N}r^2x\\ &\qquad + 0{,}1225\,\mathrm{N}\frac{r^4}{x} + 0{,}5000\,\mathrm{N}r^2x\ln\frac{x}{r}\\ \frac{\varphi'}{x} &= -0{,}1250\,\mathrm{N}x^2 - 0{,}0015\,\mathrm{N}r^2\\ &\qquad + 0{,}1225\,\mathrm{N}\frac{r^4}{x^2} + 0{,}5000\,\mathrm{N}r^2\ln\frac{x}{r}\\ \frac{d\varphi'}{dx} &= -0{,}3750\,\mathrm{N}x^2 + 0{,}4985\,\mathrm{N}r^2\\ &\qquad - 0{,}1225\,\mathrm{N}\frac{r^4}{x^2} + 0{,}5000\,\mathrm{N}r^2\ln\frac{x}{r}.\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (7), (8), (9) ein, so erhalten wir:

für den inneren Ast:

$$\left.\begin{aligned}M_r &= \frac{1}{4}\pi p x\,(-1{,}6250\,x^2 + 0{,}3510\,r^2)\\ M_r^I &= \frac{1}{8}p\,(-1{,}6250\,x^2 + 0{,}3510\,r^2)\\ M^t &= \frac{1}{8}p\,(-0{,}8750\,x^2 + 0{,}3510\,r^2),\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

für den äußeren Ast:

$$\left.\begin{aligned}M_r' &= \frac{1}{4}\pi p x\Big(-1{,}6250\,x^2 + 1{,}9925\,r^2\\ &\qquad - 0{,}3675\,\frac{r^4}{x^2} + 2{,}5000\,r^2\ln\frac{x}{r}\Big)\\ M_r^{I\prime} &= \frac{1}{8p}\Big(-1{,}6250\,x^2 + 1{,}9925\,r^2\\ &\qquad - 0{,}3675\,\frac{r^4}{x^2} + 2{,}5000\,r^2\ln\frac{x}{r}\Big)\\ M_t' &= \frac{1}{8p}\Big(-0{,}8750\,x^2 + 0{,}4925\,r^2\\ &\qquad + 0{,}3675\,\frac{r^4}{x^2} + 2{,}5000\,r^2\ln\frac{x}{r}\Big)\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Durch einfache Überlegung erhalten wir für die Querkraft:

für den inneren Ast:

$$V = x^2 \pi p, \tag{47}$$

für den äußeren Ast:

$$V' = x^2 \pi p - r^2 \pi p. \tag{48}$$

Zur Darstellung der Biegelinie erinnern wir uns, daß nach Gleichung (6) ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi.$$

In Verbindung mit (43), (44) erhalten wir dann:

für den inneren Ast:

$$-\varphi = +0{,}1250\, N x^3 - 0{,}0702\, N r^2 x = \frac{dy}{dx},$$

woraus durch Integration folgt:

$$y = +0{,}03125\, N x^4 - 0{,}03510\, N r^2 x^2 + L,$$

für den äußeren Ast:

$$-\varphi = 0{,}1250\, N x^3 + 0{,}0015\, N r^2 x - 0{,}1225\, N \frac{r^4}{x}$$
$$- 0{,}5000\, N r^2 x \ln \frac{x}{r} = \frac{dy}{dx},$$

woraus durch Integration folgt:

$$y' = 0{,}0313\, N x^4 + 0{,}1258\, N r^2 x^2 - 0{,}1225\, N r^4 \ln x$$
$$- 0{,}2500\, N r^2 x^2 \ln \frac{x}{r} + M.$$

Die Integrationskonstanten L und M finden sich aus den Bedingungen, daß im Unterstützungskreis, also für $x = b = 0{,}7\, r$ die Durchbiegungen y zu Null werden müssen.

Wir erhalten:

$$L = 0{,}0097\, N r^4$$
$$M = -0{,}1562\, N r^4 + 0{,}1225\, N r^4 \ln r.$$

Unter Einführung dieser Werte in die obigen Gleichungen gehen diese über in

$$y = +0{,}0313\, N x^4 - 0{,}0351\, N r^2 x^2 + 0{,}0097\, N r^4$$
$$y' = +0{,}0313\, N x^4 - 0{,}1562\, N r^4 + 0{,}1258\, N r^2 x^2$$
$$- 0{,}1225\, N r^4 \ln \frac{x}{r} - 0{,}2500\, N r^2 x^2 \ln \frac{x}{r}.$$

Unter Einführung des Wertes für N wird dann:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{45}{8}\,\frac{p}{Eh^3}\left(+\,0{,}0313\,x^4 - 0{,}0351\,r^2x^2 + 0{,}0097\,r^4\right) \\ y' &= \frac{45}{8}\,\frac{p}{Eh^3}\Big(+\,0{,}0313\,x^4 + 0{,}1258\,r^2x^2 - 0{,}1562\,r^4 \\ &\qquad - 0{,}1225\,r^4 \ln\frac{x}{r} - 0{,}2500\,r^2x^2 \ln\frac{x}{r}\Big). \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Die frei aufliegende Platte mit überstehendem Rande mit gleichförmig verteilter Belastung.

Die Veränderliche $\frac{x}{r}$	Das Radialmoment auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Das Radialmoment auf die Längeneinheit eines Ringschnittes	Das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes	Die Querkraft auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Die Durchbiegungen
0,0	+ 0,0000	+ 0,0439	+ 0,0439	+ 0,0000	+ 0,0546
0,1	+ 0,0263	+ 0,0418	+ 0,0428	+ 0,0314	+ 0,0540
0,2	+ 0,0449	+ 0,0358	+ 0,0395	+ 0,1256	+ 0,0473
0,3	+ 0,0482	+ 0,0256	+ 0,0340	+ 0,2826	+ 0,0383
0,4	+ 0,0285	+ 0,0114	+ 0,0264	+ 0,5024	+ 0,0270
0,5	— 0,0218	— 0,0069	+ 0,0165	+ 0,7850	+ 0,0163
0,6	— 0,1103	— 0,0293	+ 0,0045	+ 1,1304	+ 0,0068
0,7	— 0,2448	— 0,0557	— 0,0097	+ 1,5396 — 1,6024	+ 0,0000
0,8	— 0,1029	— 0,0225	— 0,0064	— 1,1311	+ 0,0006
0,9	— 0,0289	— 0,0051	— 0,0033	— 0,5970	+ 0,0022
1,0	— 0,0000	— 0,0000	— 0,0019	— 0,0000	+ 0,0045

Wir formen jetzt die Gleichungen (45) bis (49) so um, daß für x die Größe $\left(\frac{x}{r}\right)$ als Veränderliche erscheint. Wir erhalten danach:

für den inneren Ast:

$$M_r = 0{,}7854\,p\,r^3\left(\frac{x}{r}\right)\left\{-\,1{,}6250\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 0{,}3510\right\}$$

$$M_r^I = 0{,}1250\,p\,r^2\left\{-\,1{,}6250\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 0{,}3510\right\}$$

$$M_t = 0{,}1250\,p\,r^2\left\{-\,0{,}8750\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 0{,}3510\right\}$$

$$V = 3{,}1416\, p\, r^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$y = 5{,}6250 \frac{p r^4}{E h^3} \left\{ 0{,}0313 \left(\frac{x}{r}\right)^4 - 0{,}0351 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + 0{,}0097 \right\},$$

für den äußeren Ast:

$$M_r' = 0{,}7854\, p\, r^3 \left(\frac{x}{r}\right) \left\{ - 1{,}6250 \left(\frac{x}{r}\right)^2 - 0{,}3675 \left(\frac{r}{x}\right)^2 + 1{,}9925 + 2{,}5000 \ln \frac{x}{r} \right\}$$

$$M_r^{I\prime} = 0{,}1250\, p\, r^2 \left\{ - 1{,}6250 \left(\frac{x}{r}\right)^2 - 0{,}3675 \left(\frac{r}{x}\right)^2 + 1{,}9925 + 2{,}5000 \ln \frac{x}{r} \right\}$$

$$M_t' = 0{,}1250\, p\, r^2 \left\{ - 0{,}8750 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + 0{,}3675 \left(\frac{r}{x}\right)^2 + 0{,}4925 + 2{,}5000 \ln \frac{x}{r} \right\}$$

$$V' = 3{,}1416\, p\, r^2 \left\{ \left(\frac{x}{r}\right)^2 - 1 \right\}$$

$$y' = 5{,}6250 \frac{p r^4}{E h^3} \left\{ 0{,}0313 \left(\frac{x}{r}\right)^4 + 0{,}1258 \left(\frac{x}{r}\right)^2 - 0{,}1225 \ln \frac{x}{r} - 0{,}2500 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \ln \frac{x}{r} - 0{,}1562 \right\}$$

Die vorstehenden Ausdrücke sind wiederum für 10 verschiedene Werte von $\left(\frac{x}{r}\right)$ berechnet und auf Tafel 4 aufgetragen worden. Die berechneten Werte sind außerdem auf S. 32 zusammengestellt.

b) Mit einer Einzellast in der Mitte.

α) Die Platte liegt am ganzen Umfange frei auf.

Die Querkraft in einem Ringschnitte mit dem Radius x ergibt sich zu

$$V = P.$$

Gleichung (5) geht daher über in

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left(x \frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \frac{d \varphi}{d x} - \frac{\varphi}{x} \right) + \frac{P}{2 \pi} = 0.$$

Führen wir nun aus Gleichung (19) den Wert Q ein, so geht die Gleichung über in

$$x^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Qx = 0. \tag{50}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi = -\frac{Q}{2}x\ln x + Bx + \frac{C}{x}, \tag{51}$$

wobei B und C die beiden Integrationskonstanten sind.

Ihre Bestimmung erfolgt aus den Grenzbedingungen:

1. In Plattenmitte, also für $x = 0$, muß wie früher $\varphi = 0$ werden, daher auch:

$$C = 0.$$

2. Am Plattenrande, also für $x = r$, soll die Platte frei aufliegen. Es können also keine radialen Spannungen übertragen werden. Diese müssen vielmehr zu Null werden. Nach Gleichung (2) wird mithin:

$$0 = \left(m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right).$$

Bilden wir also aus der Gleichung (51) die Werte $\frac{d\varphi}{dx}$ und $\frac{\varphi}{x}$ und setzen sie in vorstehende Gleichung ein, so erhalten wir:

$$-(m+1)\frac{Q}{2}\ln x + (m+1)B - m\cdot\frac{Q}{2} = 0$$

oder

$$B = \frac{Q}{2}\ln r + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{Q}{2}.$$

Setzen wir nunmehr die für B und C erhaltenen Werte in Gleichung (51) ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi = \frac{Q}{2}x\left(+\frac{m}{m+1} - \ln\frac{x}{r}\right) = \frac{3(m^2-1)}{\pi m^2 E h^3}P\left(+\frac{m}{m+1} - \ln\frac{x}{r}\right),\\
&\text{woraus dann folgt:}\\
&\frac{d\varphi}{dx} = \frac{Q}{2}\left(-\frac{1}{m+1} - \ln\frac{x}{r}\right) = 3\cdot\frac{(m^2-1)}{\pi m^2 E h^3}\cdot P\left(-\frac{m}{m+1} - \ln\frac{x}{r}\right)\\
&\frac{\varphi}{x} = \frac{Q}{2}\left(\frac{m}{m+1} - \ln\frac{x}{r}\right) = \frac{3(m^2-1)}{\pi m^2 E h^3}P\left(\frac{m}{m+1} - \ln\frac{x}{r}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Mit diesen Werten gehen die Gleichungen (7), (8), (9) über in:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -\frac{P}{2\,m}\,x\left\{+(m+1)\ln\frac{x}{r}\right\} \\ M_r^I &= -\frac{P}{4\pi m}\left\{+(m+1)\ln\frac{x}{r}\right\} \\ M_t &= -\frac{P}{4\pi m}\left\{+(m+1)\ln\frac{x}{r}-(m-1)\right\} \end{aligned}\right| \qquad (53)$$

Die Querkraft ergibt sich zu:

$$V = P. \qquad (54)$$

Zur Darstellung der Biegelinie setzen wir den in Gleichung (51) gefundenen Wert φ in Gleichung (6) ein und erhalten so:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{Q}{2}\,x\left(\frac{m}{m+1}-\ln\frac{x}{r}\right).$$

Die Integration ergibt:

$$y = \frac{Q\,x^2}{4}\ln x - \frac{Q\,x^2}{4}\ln r - \frac{3\,m+1}{m+1}\,\frac{Q\,x^2}{8} + C.$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Grenzbedingung, daß für $x = r$ die Durchbiegung y gleich Null sein muß. Also:

$$0 = \frac{Q\,r^2}{4}\ln r - \frac{Q\,r^2}{4}\ln r - \frac{3\,m+1}{m+1}\,\frac{Q\,r^2}{8} + C$$

oder

$$C = \frac{Q\,r^2}{8} + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{Q\,r^2}{4}.$$

Obige Gleichung geht nach Einsetzung dieses Wertes über in:

$$y = \frac{3\,(m^2-1)}{4\pi m^2 E h^3}\,P\left\{\frac{3\,m+1}{m+1}\,r^2 - \frac{3\,m+1}{m+1}\,x^2 + 2\,x^2\ln\frac{x}{r}\right\}, \qquad (55)$$

wenn man gleichzeitig den Wert für Q einführt.

Wir formen jetzt die Gleichungen (53), (54), (55) so um, daß an Stelle von x die Größe $\left(\frac{x}{r}\right)$ als Veränderliche erscheint. Wir erhalten danach:

$$M_r = -\frac{P\,r}{2\,m}\cdot\left(\frac{x}{r}\right)\left\{+(m+1)\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M_r^I = -\frac{P}{4\pi m}\left\{+(m+1)\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M_t = -\frac{P}{4\pi m}\left\{+(m+1)\ln\frac{x}{r} - (m-1)\right\}$$

$$V = P$$

$$y = \frac{3\cdot(m^2-1)}{4\pi m^2}\cdot\frac{Pr^2}{Eh^3}\left\{\frac{3m+1}{m+1} - \frac{3m+1}{m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{r}\right)^2 \ln\frac{x}{r}\right\}.$$

Die am ganzen Umfange frei aufliegende Platte mit einer Einzellast in der Mitte.

Die Veränderliche $\frac{x}{r}$	Das Radialmoment auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Das Radialmoment auf die Längeneinheit eines Ringschnittes	Das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes	Die Querkraft auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Die Durchbiegungen
0,0	+ 0,0000 (+ 0,0000)	+ ∞ (+ 0,3086)	+ ∞ (+ 0,3086)	1,0000	0,5819
0,1	+ 0,1394 (+ 0,1532)	+ 0,2290 (+ 0,2439)	+ 0,2888 (+ 0,2737)	1,0000	0,5657
0,2	+ 0,2012 (+ 0,2057)	+ 0,1601 (+ 0,1637)	+ 0,2198 (+ 0,2160)	1,0000	0,5298
0,3	+ 0,2280 (+ 0,2286)	+ 0,1198 (+ 0,1213)	+ 0,1795 (+ 0,1777)	1,0000	0,4810
0,4	+ 0,2291 (+ 0,2310)	+ 0,0912 (+ 0,0919)	+ 0,1509 (+ 0,1498)	1,0000	0,4232
0,5	+ 0,2166 (+ 0,2180)	+ 0,0690 (+ 0,0694)	+ 0,1287 (+ 0,1279)	1,0000	0,3588
0,6	+ 0,1916 (+ 0,1926)	+ 0,0508 (+ 0,0513)	+ 0,1105 (+ 0,1100)	1,0000	0,2901
0,7	+ 0,1561 (+ 0,1541)	+ 0,0355 (+ 0,0350)	+ 0,0952 (+ 0,0947)	1,0000	0,2185
0,8	+ 0,1116 (+ 0,1120)	+ 0,0222 (+ 0,0223)	+ 0,0819 (+ 0,0815)	1,0000	0,1455
0,9	+ 0,0593 (+ 0,0595)	+ 0,0105 (+ 0,0105)	+ 0,0692 (+ 0,0699)	1,0000	0,0735
1,0	+ 0,0000 (+ 0,0000)	+ 0,0000 (+ 0,0000)	+ 0,0597 (+ 0,0594)	1,0000	0,0000

Die in Klammer beigefügten Zahlen entsprechen der Annahme, daß sich die Last in der Mitte auf einen Kreis mit dem Halbmesser 1/10 r gleichmäßig verteilt.

Setzen wir m = 4, so gehen die vorstehenden Gleichungen über in:

$$M_r = -0{,}1250\,Pr\left(\frac{x}{r}\right)\left\{5\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M_r^I = -0{,}0199\,P\left\{5\ln\frac{x}{r}\right\}$$

$$M_t = -0{,}0199\,P\left\{5\ln\frac{x}{r} - 3\right\}$$

$$V = P$$

$$y = 0{,}2238\,\frac{P\,r^2}{E\,h^3}\left\{2{,}6 - 2{,}6\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{r}\right)^2 \ln\left(\frac{x}{r}\right)\right\}.$$

Die vorstehenden Ausdrücke sind wiederum für 10 Werte der Veränderlichen berechnet und auf Tafel 5 aufgetragen worden. Die Werte sind gleichzeitig auf S. 36 zusammengestellt worden.

Aus den gleichen Gründen wie bei der eingespannten Platte wollen wir die Rechnung wiederholen für den Fall, daß die Last in der Mitte nicht auf einen einzigen Punkt konzentriert ist, sondern daß sie sich auf einen kleinen Kreis mit dem Halbmesser a gleichförmig verteilt. Unsere Kurven setzen sich dann, wie früher, aus zwei Ästen zusammen.

Für den inneren Ast haben wir nach Gleichung (12):

$$\varphi = -\frac{N}{8}x^3 + B\,x + \frac{C}{x}$$

oder, wenn wir nach (28) $N\,a^2 = Q$ setzen:

$$\varphi = -\frac{Q\,x^3}{8\,a^2} + B\,x + \frac{C}{x}, \tag{56}$$

für den äußeren dagegen nach Gleichung (51):

$$\varphi' = -\frac{Q}{2}\,x\ln x + D\,x + \frac{F}{x}. \tag{57}$$

Die Werte φ, M, V, y im äußeren Aste erhalten zum Unterschiede die Bezeichnungen φ', M', V', y'. Zur Bestimmung der 4 Integrationskonstanten B, C, D, F brauchen wir 4 Grenzbedingungen. Diese sind:

1. In Plattenmitte muß $\varphi = 0$ sein, mithin wie früher

$$C = 0.$$

2. Für den Punkt $x = a$, der beiden Ästen gemeinsam ist, muß

$$\varphi = \varphi'$$

sein, mithin:

$$-Q\,a\ln a + D\,a + \frac{F}{a} = -\frac{Q}{8}a + B\,a.$$

3. Für den Punkt $x = a$ müssen zu beiden Seiten des Schnittes die Radialspannungen die gleichen sein. Aus Gleichung (2) sehen wir, daß dies nur möglich ist, wenn auch

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi'}{dx'}$$

ist. Differentiieren wir also die Gleichungen (56), (57) nach x und setzen die erhaltenen Differentialquotienten einander gleich, so erhalten wir

$$-\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2}\ln a + D - \frac{F}{a^2} = -\frac{3Q}{8} + B.$$

4. Am Plattenrande, also für $x = r$, müssen die Radialspannungen zu Null werden, mithin nach (2)

$$m\frac{d\varphi'}{dx} + \frac{\varphi'}{x}\ 0.$$

Bilden wir aus (57) die Werte $\frac{d\varphi'}{dx}$ und $\frac{\varphi'}{x}$ und setzen sie in diese Gleichung ein, so ergibt sich:

$$+m\left(-\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2}\ln\frac{r}{a} + B + \frac{Q}{8}\frac{a^2}{r^2}\right) + \left(-\frac{Q}{2}\ln r + \frac{Q}{2}\ln a + B - \frac{Q}{8}\frac{a^2}{r^2}\right) = 0$$

und hieraus:

$$B = \frac{m}{m+1}\frac{Q}{2} + \frac{Q}{2}\ln\frac{r}{a} - \frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{Q}{8}\cdot\frac{a^2}{r^2}.$$

Unter Einführung dieses Wertes erhalten wir für die anderen Integrationskonstanten:

$$F = -\frac{Q}{8}a^2$$

$$D = \frac{m}{m+1}\frac{Q}{2} + \frac{Q}{2}\ln r - \frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{Q}{8}\cdot\frac{a^2}{r^2}.$$

Unter Einsetzung der für die Integrationskonstanten gefundenen Werte in die Gleichungen (56), (57) erhalten wir:

für den inneren Ast:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \frac{Q}{8}\left\{4x\ln\frac{r}{a} + \frac{4m}{m+1}x - \frac{m-1}{m+1}\frac{a^2 x}{r^2} - \frac{x^3}{a^2}\right\}\\
\frac{\varphi}{x} &= \frac{Q}{8}\left\{4\ln\frac{r}{a} + \frac{4m}{m+1} - \frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{a^2}{r^2} - \frac{x^2}{a^2}\right\}\\
\frac{d\varphi}{dx} &= \frac{Q}{8}\left\{4\ln\frac{r}{a} + \frac{4m}{m+1} - \frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{a^2}{r^2} - \frac{3x^2}{a^2}\right\}
\end{aligned}\right\}\qquad (58)$$

und für den äußeren Ast:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi' &= \frac{Q}{8}\left\{-4\,x\ln\frac{x}{r}+\frac{4m}{m+1}x-\frac{m-1}{m+1}\frac{a^2}{r^2}x-\frac{a^2}{x}\right\}\\
\frac{\varphi}{x} &= \frac{Q}{8}\left\{-4\ln\frac{x}{r}+\frac{4m}{m+1}-\frac{m-1}{m+1}\frac{a^2}{r^2}-\frac{a^2}{x^2}\right\}\\
\frac{d\varphi}{dx} &= \frac{Q}{8}\left\{-4-4\ln\frac{x}{r}+\frac{4m}{m+1}-\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^2}{r^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Nach (7), (8), (9) ergibt sich unter Einführung dieser Werte: für den inneren Ast:

$$\left.\begin{aligned}
M_r &= \frac{P}{8m}\,x\left\{4(m+1)\ln\frac{r}{a}+4m-(m-1)\frac{a^2}{r^2}-(3m+1)\frac{x^2}{a^2}\right\}\\
M_r^I &= \frac{P}{16\pi m}\left\{4(m+1)\ln\frac{r}{a}+4m-(m-1)\frac{a^2}{r^2}-(3m+1)\frac{x^2}{a^2}\right\}\\
M_t &= \frac{P}{16\pi m}\left\{4(m+1)\ln\frac{r}{a}+4m-(m-1)\frac{a^2}{r^2}-(3+m)\frac{x^2}{a^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

für den äußeren Ast:

$$\left.\begin{aligned}
M_r &= \frac{P}{8m}\,x\left\{-4(m+1)\ln\frac{x}{r}-(m-1)\frac{a^2}{r^2}+(m-1)\frac{a^2}{x^2}\right\}\\
M_r^I &= \frac{P}{16\pi m}\left\{-4(m+1)\ln\frac{x}{r}-(m-1)\frac{a^2}{r^2}+(m-1)\frac{a^2}{x^2}\right\}\\
M_t &= \frac{P}{16\pi m}\left\{-4-4(m+1)\ln\frac{x}{r}+4m-(m-1)\frac{a^2}{x^2}-(m-1)\frac{a^2}{x^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Machen wir jetzt wieder die Annahme, daß $a = 1/10\,r$ sei, und führen den Wert $m = 4$ ein, so lauten die Gleichungen: für den inneren Ast:

$$M_r = 0{,}1250\,P\,r\left(\frac{x}{r}\right)\left\{15{,}5055 - 325\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$M_r^I = 0{,}0199\,P\left\{15{,}5055 - 325\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

$$M_t = 0{,}0199\,P\left\{15{,}5055 - 175\left(\frac{x}{r}\right)^2\right\}$$

für den äußeren Ast:

$$M'_r = 0{,}1250\, P\, r \left(\frac{x}{r}\right) \left\{ -5 \ln \frac{x}{r} - 0{,}0075 + 0{,}0075 \left(\frac{r}{x}\right)^2 \right\}$$

$$M'^{I}_r = 0{,}0199\, P \left\{ -5 \ln \frac{x}{r} - 0{,}0075 + 0{,}0075 \left(\frac{r}{x}\right)^2 \right\}$$

$$M'_t = 0{,}0199\, P \left\{ -5 \ln \frac{x}{r} + 2{,}9925 - 0{,}0075 \left(\frac{r}{x}\right)^2 \right\}$$

Bei der Ausrechnung ist gleichzeitig an Stelle von x die Größe $\left(\frac{x}{r}\right)$ als Veränderliche eingeführt worden.

Aus den vorstehenden Gleichungen sind die Momente erneut berechnet und auf S. 36 in Klammer unter die früher gefundenen Werte gesetzt worden. Die Kurven der Tafel 5 sind, soweit erforderlich, entsprechend abgeändert worden.

Die allgemeinen Betrachtungen, die wir an die entsprechende Rechnung für die eingespannte Platte geknüpft hatten, haben auch hier ihre Gültigkeit.

β) Die Platte liegt auf einem zur Mitte konzentrischen Kreise frei auf.

Wir wollen auch für den vorliegenden Belastungsfall einer Einzellast in der Mitte den versteifenden Einfluß eines über den Unterstützungskreis überstehenden Randes untersuchen.

Wir nennen den Radius des Unterstützungskreises wiederum b. Ferner nehmen wir von vornherin an, daß sich die Last gleichförmig über einen Kreis von dem kleinen Halbmesser a verteilt. Jede der darzustellenden Kurven setzt sich dann aus 3 Ästen zusammen, von denen der innere von $x = 0$ bis $x = a$, der mittlere von $x = a$ bis $x = b$ und der äußere von $x = b$ bis $x = r$ reicht. Wie nach den früheren Entwicklungen jetzt leicht einzusehen, gelten für die 3 Äste dann folgende Gleichungen:

für den inneren Ast:

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi + N x^3 = 0,$$

für den mittleren Ast:

$$x^2 \frac{d^2\varphi'}{dx^2} + x \frac{d\varphi'}{dx} - \varphi' + Q x = 0 \qquad (62)$$

und für den äußeren Ast:

$$x^2 \frac{d^2\varphi''}{dx^2} + x \cdot \frac{d\varphi''}{dx} - \varphi'' = 0.$$

Letztere Gleichung erhalten wir aus der Überlegung, daß die Querkraft im überstehenden Rande gleich Null werden muß. Die Auflösung dieser drei Differentialgleichungen ergibt uns

für den inneren Ast:

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 B x + \frac{C}{x} = -\frac{Q x^3}{8 a^2} + B x + \frac{C}{x},$$

für den mittleren Ast:

$$\varphi' = -\frac{Q}{2} x \ln x + D x + \frac{F}{x} \qquad (63)$$

und für den äußeren Ast:

$$\varphi'' = H \cdot x + \frac{K}{x} \cdot$$

Die sechs Integrationskonstanten B, C, D, F, H, K bestimmen wir aus den Grenzbedingungen:

1. In Plattenmitte, also für $x = 0$, muß $\varphi = 0$ sein, mithin wie früher

$$C = 0.$$

2. Für $x = a$ muß sein

$$\varphi = \varphi'$$

oder

$$-\frac{Q}{2} \ln a + D a + \frac{F}{a} = -\frac{Q a}{8} + B a.$$

3. Für $x = a$ muß sein

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi'}{dx}$$

oder

$$-\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2} \ln a + D - \frac{F}{a^2} = -\frac{3Q}{8} + B.$$

4. Für $x = b$ muß sein

$$\varphi' = \varphi''$$

oder

$$-\frac{Q}{2} b \ln b + D b + \frac{F}{b} = H \cdot b + \frac{K}{b} \cdot$$

5. Für $x = b$ muß sein

$$\frac{d\varphi'}{dx} = \frac{d\varphi''}{dx}$$

oder

$$-\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2} \ln b + D - \frac{F}{b^2} = H - \frac{K}{b} \cdot$$

6. Für $x = r$ muß sein

$$m \frac{d\varphi'}{dx} + \frac{\varphi'}{x} = 0$$

oder

$$H(m+1) - \frac{K}{r^2}(m-1) = 0.$$

Aus diesen sechs Bedingungsgleichungen ergeben sich die sechs Integrationskonstanten zu:

$$B = \frac{m-1}{4(m+1)} Q \cdot \frac{b^2}{r_2} - \frac{m-1}{8(m+1)} Q \cdot \frac{a^2}{r^2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{2} \ln \frac{b}{a},$$

$$C = 0,$$

$$D = \frac{m-1}{4(m+1)} Q \frac{b^2}{r^2} - \frac{m-1}{8(m+1)} Q \frac{a^2}{r^2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{2} \ln b,$$

$$F = -\frac{Q a^2}{8},$$

$$H = \frac{m-1}{4(m+1)} Q \frac{b^2}{r^2} - \frac{m-1}{8(m+1)} Q \cdot \frac{a^2}{r^2},$$

$$K = \frac{Q}{4} b^2 - \frac{Q}{8} a^2.$$

Führen wir zur Vereinfachung der Rechnung schon jetzt für m den Wert 4 ein und setzen wie früher $a = 1/10\, r$, so vereinfachen sich die Werte für die Integrationskonstanten wie folgt:

$$B = 0{,}1500\, Q \frac{b^2}{r^2} + 1{,}4006\, Q + 0{,}5000\, Q \ln \frac{b}{r},$$

$$C = 0,$$

$$D = 0{,}1500\, Q \frac{b^2}{r^2} + 0{,}2493\, Q + 0{,}5000\, Q \ln b,$$

$$F = -0{,}0013\, Q r^2,$$

$$H = 0{,}1500\, Q \frac{b^2}{r^2} - 0{,}0008\, Q,$$

$$K = 0{,}2500\, Q \cdot b^2 - 0{,}0013\, Q r^2.$$

Unter Einführung dieser Werte in die Gleichungen (63) gehen diese über in:

für den inneren Ast:

$$\varphi = -12{,}5000\,Q\frac{x^3}{r^2} + 0{,}1500\,Q\frac{b^2x}{r^2} + 1{,}4006\,Q\,x + 0{,}5000\,Q\,x\ln\frac{b}{r},$$

woraus folgt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -37{,}5000\,Q\frac{x^2}{r^2} + 0{,}1500\,Q\frac{b^2}{r^2} + 1{,}4006\,Q + 0{,}5000\,Q\ln\frac{b}{r},$$

$$\frac{\varphi}{x} = -12{,}5000\,Q\frac{x^2}{r^2} + 0{,}1500\,Q\frac{b^2}{r^2} + 1{,}4006\,Q + 0{,}5000\,Q\ln\frac{b}{r},$$

für den mittleren Ast:

$$\varphi' = +0{,}1500\,Q\frac{b^2x}{r^2} + 0{,}2493\,Q\,x - 0{,}0013\,Q\frac{r^2}{x} - 0{,}5000\,Q\,x\ln\frac{x}{b},$$

woraus folgt:

$$\frac{d\varphi'}{dx} = +0{,}0013\,Q\cdot\frac{r^2}{x^2} + 0{,}1500\,Q\frac{b^2}{r^2} - 0{,}2508\,Q - 0{,}5000\,Q\ln\frac{x}{b}, \qquad (64)$$

$$\frac{\varphi'}{x} = -0{,}0013\,Q\frac{r^2}{x^2} + 0{,}1500\,Q\frac{b^2}{r^2} + 0{,}2493\,Q - 0{,}5000\,Q\ln\frac{x}{b},$$

für den äußeren Ast:

$$\varphi'' = +0{,}1500\,Q\frac{b^2x}{r^2} - 0{,}0008\,Q\,x - 0{,}0013\,Q\cdot\frac{r^2}{x} + 0{,}2500\,Q\frac{b^2}{x},$$

woraus folgt:

$$\frac{d\varphi''}{dx} = +0{,}0013\,Q\frac{r^2}{x^2} + 0{,}1500\,Q\frac{b^2}{r^2} - 0{,}0008\,Q - 0{,}2500\,Q\frac{b^2}{x^2},$$

$$\frac{\varphi''}{x} = -0{,}0013\,Q\frac{r^2}{x^2} + 0{,}1500\,Q\frac{b^2}{r^2} - 0{,}0008\,Q + 0{,}2500\,Q\frac{b^2}{x^2}.$$

Wir wollen nun den Wert des Verhältnisses $\frac{b}{r}$ ermitteln, für den sowohl die Radial- wie die Tangentialspannungen ihrem absoluten Werte nach in Plattenmitte gleich denen über dem Auflagskreis werden.

Führen wir die Rechnung in derselben Weise wie bei der Platte mit gleichförmig verteilter Belastung durch, so sehen wir bald, daß wir für das Verhältnis $\frac{b}{r}$ keine reellen Werte erhalten, d. h. der versteifende Einfluß des überstehenden Randes kann ohne Belastuung, natürlich auch ohne Berücksichtigung seines Eigengewichtes, nie so groß werden, daß die Beanspruchungen in Plattenmitte und über dem Stützkreis einander gleich werden. Um uns aber überhaupt einmal ein anschauliches Bild über den versteifenden Einfluß des über den Stützkreis hinausragenden Randes bei dieser Belastung zu verschaffen, sollen Momente, Querkräfte und Durchbiegungen für den vorhin behandelten Fall, daß die Platte um $^3/_{10}$ ihres Halbmessers übersteht, auch für die Belastung mit einer Einzellast ermittelt werden.

Unter Einführung des Wertes $b = 7/10\ r$ gehen die vorhin aufgestellten Gleichungen für φ, $\frac{d\varphi}{dx}$ und $\frac{\varphi}{x}$ über in:

für den inneren Ast:

$$\varphi = -12{,}5000\, Q \frac{x^3}{r^2} + 1{,}2957\, Q x,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -37{,}5000\, Q \frac{x^2}{r^2} + 1{,}2957\, Q,$$

$$\frac{\varphi}{x} = -12{,}5000\, Q \frac{x^2}{r^2} + 1{,}2957\, Q,$$

für den mittleren Ast:

$$\varphi' = -0{,}0013\, Q \frac{r^2}{x} + 0{,}1444\, Q x - 0{,}5000\, Q x \ln \frac{x}{r},$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = +0{,}0013\, Q \frac{r^2}{x^2} - 0{,}3556\, Q - 0{,}5000\, Q \ln \frac{x}{r},$$

$$\frac{\varphi'}{x} = -0{,}0013\, Q \frac{r^2}{x^2} + 0{,}1444\, Q - 0{,}5000\, Q \ln \frac{x}{r},$$

für den äußeren Ast:

$$\varphi'' = +0{,}1213\, Q \frac{r^2}{x} + 0{,}0728\, Q x,$$

$$\frac{d\varphi''}{dx} = -0{,}1213\,Q\frac{r^2}{x^2} + 0{,}0728\,Q,$$

$$\frac{\varphi''}{x} = +0{,}1213\,Q\frac{r^2}{x^2} + 0{,}0728\,Q.$$

Führen wir diese Werte in die Gleichungen (7), (8), (9) ein, so erhalten wir schließlich:

für den inneren Ast:

$$M_r = 0{,}1250\,Pr\left(\frac{x}{r}\right)\left\{-325\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 12{,}9571\right\},$$

$$M^I{}_r = 0{,}0199\,P\left\{-325\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 12{,}9571\right\},$$

$$M_t = 0{,}0199\,P\left\{-175\left(\frac{x}{r}\right)^2 + 12{,}9571\right\},$$

für den mittleren Ast:

$$M_r' = 0{,}1250\,Pr\left(\frac{x}{r}\right)\left\{+0{,}0075\left(\frac{r}{x}\right)^2 - 2{,}5559 - 5{,}0000\ln\frac{x}{r}\right\},$$

$$M^I{}_r' = 0{,}0199\,P\left\{+0{,}0075\left(\frac{r}{x}\right)^2 - 2{,}5559 - 5{,}0000\ln\frac{x}{r}\right\}, \qquad (65)$$

$$M_t' = 0{,}0199\,P\left\{-0{,}0075\left(\frac{r}{x}\right)^2 + 0{,}4441 - 5{,}0000\ln\frac{x}{r}\right\},$$

für den äußeren Ast:

$$M_r'' = 0{,}1250\,Pr\left(\frac{x}{r}\right)\left\{-0{,}7275\left(\frac{r}{x}\right)^2 + 0{,}7275\right\},$$

$$M^I{}_r'' = 0{,}0199\,P\left\{-0{,}7275\left(\frac{r}{x}\right)^2 + 0{,}7275\right\},$$

$$M_t'' = 0{,}0199\,P\left\{+0{,}7275\left(\frac{r}{x}\right)^2 + 0{,}7275\right\}.$$

Für die Querkraft erhalten wir:

für den inneren Ast:

$$V = x^2\pi\left(\frac{P}{a^2\pi}\right) = 100\,P\left(\frac{x}{r}\right)^2,$$

für den mittleren Ast: (66)

$$V = P,$$

für den äußeren Ast:

$$V = 0.$$

Zur Darstellung der Biegelinien wollen wir wie früher die Verteilung der Last auf den kleinen Kreis von Radius a unberücksichtigt lassen, da dies die Größe der Durchbiegungen nur verschwindend beeinflußt.

Die Biegelinie setzt sich dann aus 2 Ästen zusammen. Entsprechend den früheren Untersuchungen gelten folgende Gleichungen

für den inneren Ast:

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \ln\frac{x}{b} + \frac{3}{20} Q \frac{b^2 x}{r^2} + \frac{Q}{4} x = -\frac{dy}{dx},$$

woraus durch Integration folgt:

$$y = -\frac{Q}{4} x^2 + \frac{Q}{4} x^2 \ln\frac{x}{b} - \frac{3}{40} Q b^2 \frac{x^2}{r^2} + L.$$

Die Integrationskonstante L bestimmt sich aus der Bedingung, daß y für $x = b$ Null werden muß, daher

$$L = \frac{Q}{4} b^2 + \frac{3}{40} Q \cdot \frac{b^4}{r^2}$$

und

$$y = \frac{Q}{8} \left\{ 2 \cdot b^2 - 2x^2 + 2x^2 \ln\frac{x}{b} + \frac{3}{5}\frac{b^4}{r^2} - \frac{3}{5}\frac{b^2 x^2}{r^2} \right\}$$

für den äußeren Ast:

$$\varphi' = \frac{3}{20} Q \frac{b^2 x}{r^2} + \frac{1}{4} Q \cdot \frac{b^2}{x} = -\frac{dy'}{dx},$$

woraus durch Integration folgt:

$$y' = -\frac{3}{40} Q \frac{b^2 x^2}{r^2} - \frac{1}{4} Q b^2 \ln x + M.$$

Die Integrationskonstante M bestimmt sich aus der Bedingung, daß y für $x = b$ Null werden muß, daher

$$M = \frac{3}{40} Q \frac{b^4}{r^2} + \frac{1}{4} Q b^2 \ln b$$

und

$$y' = \frac{Q}{8} \left\{ -2 b^2 \ln\frac{x}{b} + \frac{3}{5}\frac{b^4}{r^2} - \frac{3}{5}\frac{b^2 x^2}{r^2} \right\}.$$

Setzen wir nun $b = 7/10\, r$ und führen den Wert von Q ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0{,}1097 \frac{P r^2}{E h^3} \left\{ + 2{,}2940 - 3{,}2257 \left(\frac{x}{r}\right)^2 + 4{,}0816 \left(\frac{x}{r}\right)^2 \ln\frac{x}{r} \right\} \\ y' &= 0{,}1097 \frac{P r^2}{E h^3} \left\{ - 0{,}4194 - 0{,}6000 \left(\frac{x}{r}\right)^2 - 2 \ln\left(\frac{x}{r}\right) \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Aus den Gleichungen (65), (66), (67) sind die Werte der Momente, Querkräfte und Durchbiegungen für 10 verschiedene Werte von $\left(\frac{x}{r}\right)$ berechnet und auf Tafel 6 aufgetragen worden. Die berechneten Werte sind außerdem auf S. 47 zusammengestellt. Ein Vergleich der Kurven mit den für die am Rande frei aufliegende Platte gezeichneten Kurven zeigt uns, daß der überstehende Rand zwar die Beanspruchungen in der Mitte verkleinert, daß aber sein Einfluß nicht so beträchtlich ist, wie man vielleicht hätte erwarten können.

Die frei aufliegende Platte mit überstehendem Rande und einer Einzellast in der Mitte.

Die Veränderliche $\frac{x}{r}$	Das Radialmoment auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Das Radialmoment auf die Längeneinheit eines Ringschnittes	Das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes	Die Querkraft auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Die Durchbiegungen
0,0	+0,0000	+0,2578	+0,2578	0,0000	+0,2517
0,1	+0,1213	+0,1932	+0,2230	1,0000	+0,2378
0,2	+0,1420	+0,1130	+0,1652	1,0000	+0,2087
0,3	+0,1330	+0,0706	+0,1270	1,0000	+0,1713
0,4	+0,1036	+0,0412	+0,0991	1,0000	+0,1294
0,5	+0,0588	+0,0187	+0,0772	1,0000	+0,0856
0,6	+0,0014	+0,0004	+0,0593	1,0000	+0,0419
0,7	−0,0664	−0,0151	+0,0440	1,0000	±0,0000
0,8	−0,0410	−0,0081	+0,0371	0,0000	−0,0391
0,9	−0,0192	−0,0034	+0,0324	0,0000	−0,0762
1,0	−0,0000	−0,0000	+0,0290	0,0000	−0,1118

Die durchweg elastisch gelagerte Platte mit einer Einzellast in der Mitte.

Wir gehen wie früher von der Gleichung (5) aus und schreiben diese in folgender Form:

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x}+\frac{6\,(m^2-1)}{m^2\cdot E h^3}\cdot\frac{V}{\pi}=0\,. \qquad (68)$$

In den bisher behandelten Fällen war es uns ohne weiteres möglich, die Querkraft V in einem Ringschnitte vom Halbmesser x anzugeben. Dies können wir aber hier nicht ohne weiteres. Wir wissen aber, daß V um den Auflagerdruck eines ringförmigen Flächenenelementes von der Breite d x abnimmt, wenn sich der Halbmesser x um d x vergrößert. Zur Berechnung des Auflagerdruckes dieses ringförmigen Flächenelementes führen wir eine neue Größe K ein, die abhängig ist von dem elastischen Widerstande, den das Bettungsmaterial einem Einsinken der Platte entgegensetzt. K soll dann diejenige Belastung für die Flächeneinheit bezeichnen, die erforderlich ist, um das Bettungsmaterial um die Längeneinheit zusammenzudrücken. K würde demnach die Dimension kg cm^{-3} besitzen. Unter der Annahme, daß der Auflagerdruck der Einsenkung proportional ist, ergibt sich

$$\frac{dV}{dx} = -2\pi x y \cdot K,$$

wenn y wieder die Einsenkung aller Punkte eines Kreises mit dem Halbmesser x ist.

Differentiieren wir (68) nach x und setzen den für $\frac{dV}{dx}$ gefundenen Wert ein, so bekommen wir:

$$x \cdot \frac{d^3\varphi}{dx^3} + 2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x^2} - \frac{12\,(m^2-1)\,K}{m^2 E h^3}\, x y = 0. \tag{69}$$

Zur Abkürzung führen wir ein:

$$\frac{12\,(m^2-1)\,K}{m^2 E h^3} = \frac{1}{\alpha^4}. \tag{70}$$

α hat somit die Dimensionen cm.

Dann schreiben wir:

$$x \frac{d^3\varphi}{dx^3} + 2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x^2} - \frac{xy}{\alpha^4} = 0.$$

Beachten wir, daß nach (6)

$$\varphi = -\frac{dy}{dx}$$

gesetzt werden kann, so läßt sich die Gleichung auch schreiben:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{2}{x} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\alpha^4} = 0. \tag{71}$$

Zur Vereinfachung führen wir jetzt statt der Veränderlichen x und y die Veränderlichen x′ und y′ ein nach folgenden Beziehungen:

$$\frac{x}{\alpha} = x' \qquad \text{und} \qquad \frac{y}{\alpha} = y'. \tag{72}$$

Gleichung (71) geht damit über in:

$$\frac{d^4y'}{dx'^4}+\frac{2}{x'}\cdot\frac{d^3y'}{dx'^3}-\frac{1}{x'^2}\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{1}{x'^3}\cdot\frac{dy'}{dx'}+y'=0. \tag{73}$$

Diese Gleichung können wir auch in anderer Form schreiben, nämlich:

$$\left(\frac{d^2}{dx'^2}+\frac{1}{x'}\cdot\frac{d}{dx'}\right)\left(\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{1}{x'}\frac{dy'}{dx'}\right)+y'=0. \tag{74}$$

Von der Richtigkeit überzeugen wir uns, indem wir die Differentiation in (74) wirklich ausführen. Wir erhalten dann wieder Gleichung (73).

Führen wir für die in (74) verlangte Differentiation die Abkürzung

$$E^2=\frac{d^2}{dx'^2}+\frac{1}{x'}\frac{d}{dx'}$$

ein, so können wir (74) schreiben:

$$E^4y'+y=0. \tag{75}$$

Diese Gleichung ist also gleichbedeutend mit Gleichung (73). Sie ist die Differentialgleichung der Biegelinie eines Meridianschnittes durch die betrachtete Platte. Nach ihrer Lösung können wir genau wie früher Momente, Querkräfte und Durchbiegungen der Platte bestimmen.

Die Lösung stellt ein rein mathematisches Problem dar. Wir geben hier die Lösung wieder, wie wir sie bei Föppl finden.

„Die Differentialgleichung ist linear und ihre vollständige Lösung setzt sich aus vier mit den willkürlichen Integrationskonstanten behafteten Gliedern zusammen, von denen jedes eine partikuläre Lösung angibt.

Sie ist also von der Form:

$$y'=c_1F_1(x')+c_2F_2(x')+c_3F_3(x')+c_4F_4(x'). \tag{76}$$

Die beiden ersten partikulären Lösungen lassen sich mit Hilfe von Potenzreihen darstellen. Um dies einzusehen, führe man zunächst die Operation E^4 an einer Potenz $a_n x'^n$ aus. Man findet durch Ausführung der Differentiation und Zusammenziehung der Glieder

$$E^4a_nx'^n=n^2(n-2)^2a_nx'^{n-4}. \tag{77}$$

Damit Gleichung (75) durch eine Potenzreihe befriedigt werde, muß daher jedem Gliede $a_n x'^n$ ein Glied $a_{n-4}\,x'^{n-4}$ gegenüberstehen, so daß:

$$a_{n-4}\,x'^{n-4}+n^2(n-2)^2\cdot a_n x'^{n-4}=0$$

wird. Hieraus erkennt man das Gesetz, nach dem die Koeffizienten der Potenzreihe fortschreiten müssen, nämlich

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2}.$$

Beachtet man ferner, daß

$$E^4 a_0 = 0 \quad \text{und} \quad E^4 a_2 x'^2 = 0$$

ist, wie aus der Ausführung der Differentiationen hervorgeht, so erhält man die folgenden beiden partikulären Integrale der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} F_1(x') &= 1 - \frac{x'^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x'^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x'^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \cdots \\ F_2(x') &= x'^2 - \frac{x'^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x'^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \frac{x'^{14}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 14^2} + \cdots \end{aligned} \tag{78}$$

Zu einer dritten Lösung der Gleichung gelangt man, indem man setzt:

$$F_3(x') = F_1(x') \ln x' + X'_3,$$

wobei X'_3 eine Funktion von x' ist, die sich wiederum durch eine Potenzreihe darstellen läßt. Um dies zu beweisen, führe man an $F_3(x')$ die Differentiationen aus, die zur Operation E^4 gehören; man findet dann nach einigen Rechnungen zunächst

$$E^4(F_1(x') \ln x') = \frac{4}{x'} \frac{d^3 F_1(x')}{d x'^3} + \ln x' \, E^4 F_1(x'),$$

und im ganzen erhält man daher beim Einsetzen von $F_3(x')$ in Gleichung (75)

$$\frac{4}{x'} \frac{d^3 F_1(x')}{d x'^3} + \ln x' \, E^4 F_1(x') + E^4 X'_3 + \ln x' \, F_1(x') + X'_3 = 0.$$

Nun war aber $F_1(x')$ bereits eine Lösung der Differentialgleichung (75), und hiernach heben sich in der letzten Gleichung die mit $\ln x'$ behafteten Glieder gegeneinander fort. Man behält daher für X'_3 die Gleichung

$$E^4 X'_3 + X'_3 + \frac{4}{x'} \frac{d^3 F_1(x')}{d x'^3} = 0.$$

Entnimmt man den dritten Differentialquotienten von $F_1(x')$ aus Gleichung (78), so wird dies

$$\begin{aligned} &E^4 X'_3 + X'_3 \\ &+ 4\left\{-\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} x'^4 - \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} x'8 + \cdots\right\}. \end{aligned} \tag{79}$$

Hat man irgendeine Lösung dieser Differentialgleichung gefunden, so darf man ihr natürlich auch jede beliebige Lösung von

$$E^4 X'_3 + X'_3 = 0,$$

d. h. von Gleichung (75) hinzufügen. Diese weiteren Lösungen sind aber bei unserem Verfahren schon berücksichtigt, und es handelt sich nur noch um eine partikuläre Lösung, die mit den früheren nichts zu tun hat. Man erhält sie, indem man

$$X'_3 = b_4 x'^4 + b_8 x'^8 + b_{12} x'^{12} + \cdots$$

setzt und die Koeffizienten b so bestimmt, daß Gleichung (79) befriedigt wird. Da nach (77)

$$E^4 b_4 x'^4 = 4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4,$$

hat man für b_4 die Gleichung

$$2^2 \cdot 4^2 \cdot b_4 - 4 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} = 0,$$

woraus für b_4

$$b_4 = + \frac{3}{128}$$

folgt.

Ebenso findet man, indem man die Summe der mit x'^4 behafteten Glieder in Gleichung (79) gleich Null setzt:

$$6^2 \cdot 8^2 b_8 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} = 0,$$

woraus für b_8

$$b_8 = - \frac{25}{1769472}.$$

Allgemein wird, wenn b_n irgendeinen der folgenden Koeffizienten bedeutet und b_{n-4} dem Absolutbetrage nach eingesetzt wird:

$$b_n = \pm \frac{1}{n^2 (n-2)^2} \left\{ b_{n-4} + 4 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots . n^2} \right\}.$$

Die Vorzeichen sind abwechselnd positiv und negativ. Also

$$F_3(x') = F_1(x') \ln x' + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \cdots \tag{80}$$

Für $x' = 0$ wird übrigens $F_1(x') = 1$ und daher $F_3(x')$ unendlich groß von der Ordnung $\ln 0$; daher ist für die Anwendung, die wir von der Lösung der Differentialgleichung hier zu machen beabsichtigen, nachträglich die Konstante c_3 in Gleichung (76) gleich Null zu setzen, so daß $F_3(x')$ ganz wegfällt.

Die vierte partikuläre Lösung finden wir in derselben Weise wie $F_3(x')$, indem wir entsprechend

$$F_4(x') = F_2(x') \ln x' + X'_4$$

setzen. Die weiteren Rechnungen spielen sich hier in derselben Weise ab. Wir erhalten entsprechend:

$$E^4 X'_4 + X'_4 + \frac{4}{x'} \frac{d^3 F_2(x')}{d x'^3} = 0,$$

woraus man durch Einsetzen von $F_2(x')$ aus Gleichung (78) erhält:

$$E^4 X'_4 + X'_4 + 4\left\{-\frac{4\cdot5\cdot6}{4^2\cdot6^2}x'^2 + \frac{8\cdot9\cdot10}{4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10^2}x'^6 - \frac{12\cdot13\cdot14}{4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10^2\cdot12^2\cdot14^2}x'^{10} + \cdots\right\} = 0. \quad (81)$$

Man genügt dieser Gleichung durch:

$$X'_4 = b_6 x'^6 + b_{10} x'^{10} + b_{14} x'^{14} + \cdots,$$

falls man die Koeffizienten b passend bestimmt, und zwar erhält man durch Einsetzen in Gleichung (81)

$$b_6 = 4\cdot\frac{4\cdot5\cdot6}{4^4\cdot6^4} = +\frac{5}{3456} = +0{,}001447$$

$$b_{10} = -\frac{1}{8^2\cdot10^2}\left(4\cdot\frac{4\cdot5\cdot6}{4^4\cdot6^4} + 4\frac{8\cdot9\cdot10}{4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10^2}\right) = -\frac{231}{663\,552\,000} = -0{,}0\,000\,003\,481.$$

Jeden der folgenden Koeffizienten findet man aus dem vorhergehenden, wenn man nur die Absolutbeträge einsetzt nach der Formel:

$$b_n = \pm\frac{1}{n^2(n-2)^2}\left(b_{n-4} + 4\frac{n(n-1)(n-2)}{4^2\cdot6^2\ldots\ldots n^2}\right),$$

und die Vorzeichen sind abwechselnd positiv und negativ. Also:

$$F_4(x') = F_2(x') \ln x' + 0{,}001447\, x'^6 - 0{,}0\,000\,003\,481\, x'^{10} + \cdots \quad (82)$$

Im ganzen wird hiernach, wenn man den Koeffizienten von c_3 in Gleichung (76) aus einem vorher schon angegebenen Grunde gleich Null setzt,

$$\left.\begin{aligned} y' = c_1 & \left\{1 - \frac{x'^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x'^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\} \\ + c_2 & \left\{x'^2 - \frac{x'^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x'^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\} \\ + c_4 & \left\{\ln x' \left(x'^2 - \frac{x'^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x'^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \cdots\right)\right. \\ & \left. \quad + 0{,}001447\, x'^6 - 0{,}0000003481\, x'^{10} + \cdots\cdots \right\} \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Dies ist die Lösung der Gleichung (73).

Die wirklichen Durchbiegungen y finden wir dann aus der Beziehung

$$y = \alpha y'.$$

Wir wollen jetzt eine gleiche graphische Darstellung versuchen wie früher. Die Werte der vier partikulären Integrale rechnen wir also für verschiedene Werte der Veränderlichen x' aus und tragen sie auf Tafel 7 auf.

Berechnet wurden die Werte für folgende Werte der Veränderlichen:

$$x' = \frac{x}{\alpha} = 0{,}0 - 0{,}5 - 1{,}0 - 1{,}5 - 2{,}0 - 2{,}5$$
$$- 3{,}0 - 3{,}5 - 4{,}0 - 4{,}5 - 5{,}0.$$

Aus (70) sehen wir, daß die Größe α eine Konstante ist, lediglich abhängig von den Abmessungen und elastischen Eigenschaften der Platte und ihrer Unterlage. Aus den Werten für die partikulären Integrale ersehen wir, daß für kleine Werte von x' die Reihen ziemlich schnell konvergieren. Für größere Werte dagegen macht die Berechnung ziemliche Schwierigkeiten. Es wird aber genügen, die Rechnung auf etwa die gewählten 10 Werte zu beschränken, da naturgemäß der Einfluß der Last bei größerer Entfernung von ihrem Angriffspunkte mehr und mehr verschwinden muß.

Es sind jetzt noch die verbleibenden drei Integrationskonstanten aus drei Grenzbedingungen zu bestimmen.

1. Die radialen Spannungen müssen am Plattenrande, also für $x = r$ zu Null werden.

Nach (2) muß dann auch:

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} = 0 \qquad \text{für } x = r$$

werden. Da nach (6)

$$\varphi = -\frac{dy}{dx}$$

ist, läßt sich der vorige Ausdruck schreiben:

$$m\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{für } x = r$$

oder

$$m\frac{d^2y'}{dx'^2} + \frac{1}{x'}\frac{dy'}{dx'} = 0 \qquad \text{für } x' = \frac{r}{a}.$$

Bildet man die Differentialquotienten von y' nach x' aus Gleichung 82 und setzt sie in vorstehenden Ausdruck ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
& m c_1 \left\{ -\frac{3}{16}\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{7}{18432}\left(\frac{r}{a}\right)^6 - \frac{11}{44236800}\left(\frac{r}{a}\right)^{10} + \cdots\cdots\right\} \\
& + m c_2 \left\{ 2 - \frac{5}{96}\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{9}{368640}\left(\frac{r}{a}\right)^8 - \frac{13}{7431782400}\left(\frac{r}{a}\right)^{12} + \cdots\right\} \\
& + m c_4 \left\{ \ln\left(\frac{r}{a}\right)\left[2 - \frac{5}{96}\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{9}{368640}\left(\frac{r}{a}\right)^6 + \cdots\right] \right. \\
& \qquad \left. + 3 + 0{,}024063\left(\frac{r}{a}\right)^4 - 0{,}00002618\left(\frac{r}{a}\right)^6 + \cdots \right\} \quad (83) \\
& + c_1 \left\{ -\frac{1}{16}\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{18432}\left(\frac{r}{a}\right)^6 - \frac{1}{44236800}\left(\frac{r}{a}\right)^{10} + \cdots\cdots\right\} \\
& + c_2 \left\{ 2 - \frac{1}{96}\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{1}{368640}\left(\frac{r}{a}\right)^8 - \frac{1}{7431782400}\left(\frac{r}{a}\right)^{12} + \cdots\right\} \\
& + c_4 \left\{ \ln\left(\frac{r}{a}\right)\left[2 - \frac{1}{96}\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{1}{368640}\left(\frac{r}{a}\right)^8 \cdots\right] \right. \\
& \qquad \left. + 1 + 0{,}006896\left(\frac{r}{a}\right)^4 - 0{,}00000321\left(\frac{r}{a}\right)^8 + \cdots \right\} = 0.
\end{aligned}
$$

2. Die Schubspannungen am Plattenrande müssen ebenfalls zu Null werden. Dies geschieht, wenn die Querkraft selbst zu Null wird. Gleichung (68) läßt sich unter Einführung des Wertes a schreiben:

$$x \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x} + \frac{V}{2\pi K a^4} = 0,$$

woraus für V folgt:

$$V = -2\pi K \alpha^4 \left(x \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x}\right)$$

oder unter Berücksichtigung der Bezeichnung:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi,$$

$$V = 2\pi K \alpha^4 x \left(\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right). \tag{84}$$

Unter Einführung der Veränderlichen x' erhalten wir dafür:

$$V = 2\pi K \alpha^3 x' \left(\frac{d^3y'}{dx'^3} + \frac{1}{x'}\frac{d^2y'}{dx'^2} - \frac{1}{x'^2}\cdot\frac{dy'}{dx'}\right). \tag{85}$$

Dieser Ausdruck muß also für $x = r$ bezw. für $x' = \frac{r}{\alpha}$ zu Null werden, mithin:

$$\left(\frac{d^3y'}{dx'^3} + \frac{1}{x'}\frac{d^2y'}{dx'^2} - \frac{1}{x'^2}\cdot\frac{dy'}{dx'}\right) = 0 \quad \text{für } x' = \frac{r}{\alpha}. \tag{86}$$

Diesen Ausdruck können wir auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{d}{dx'}\left(\frac{d^2y'}{dx'^2} + \frac{1}{x'}\frac{dy'}{dx'}\right) = 0 \quad \text{für } x' = \frac{r}{\alpha} \tag{87}$$

oder in anderer Schreibweise

$$\frac{d}{dx'} E^2 y' = 0 \quad \text{für } x' = \frac{r}{\alpha}. \tag{88}$$

Von der Richtigkeit der Umformung überzeugen wir uns, indem wir die Differentiation an Gleichung (87) ausführen; wir erhalten dann Gleichung (86).

Wir führen jetzt die Operation E^2 an y' in Gleichung (82) wirklich aus.

Dies liefert uns:

$$\begin{aligned} E^2 y' = c_1 &\left\{-\frac{x'^2}{2^2} + \frac{x'^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \frac{x'^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \cdots\cdots\cdots\right\} \\ + c_2 &\left\{4 - \frac{x'^4}{4^2} + \frac{x'^8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x'^{12}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right\} \\ + c_4 &\left\{\ln x' \left[4 - \frac{x'^4}{4^2} + \frac{x'^8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdots\cdots\right]\right. \\ &\left. + 4 - 0{,}030959\, x'^4 - 0{,}00002939\, x'^8 + \cdots\cdots\right\}. \end{aligned} \tag{89}$$

Differentiieren wir diesen Ausdruck, wie in (88) vorgeschrieben, nach x', setzen dann $x' = \frac{r}{\alpha}$ und setzen den ganzen Ausdruck gleich Null, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&c_1 \left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^5 - \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^9 + \cdots\cdots \right\} \\
&+ c_2 \left\{ -\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^3 + \frac{1}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^7 - \frac{1}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{11} + \cdots \right\} \quad (90) \\
&+ c_4 \left\{ \ln\left(\frac{r}{\alpha}\right)\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^3 + \frac{1}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^7 \cdots\cdots \right] \right. \\
&\qquad \left. + 4\left(\frac{\alpha}{r}\right) + 0{,}061\,336\left(\frac{r}{\alpha}\right)^3 - 0{,}000\,208\left(\frac{r}{\alpha}\right)^7 + \cdots \right\} = 0.
\end{aligned}
$$

3. Die dritte Bedingung finden wir aus der Betrachtung, daß die Querkraft in einem Ringschnitte von sehr kleinem Halbmesser a der Last P das Gleichgewicht halten muß. Setzen wir also in (85) die Veränderliche x' gleich dem sehr kleinen Werte $\frac{a}{\alpha}$, so können wir anschreiben:

$$P - 2\pi a \cdot K\alpha^2 \left(\frac{d^3 y'^3}{dx'^3} + \frac{1}{x'}\frac{d^2 y'}{dx'^2} - \frac{1}{x'^2}\frac{dy'}{dx'} \right) = 0 \quad \text{für } x' = \frac{a}{\alpha}.$$

Nach den aus (86), (87), (88) ersichtlichen Entwicklungen können wir dafür schreiben:

$$P - 2\pi a \cdot K\alpha^2 \left[\frac{d}{dx'}\left(\frac{d^2 y'}{dx'^2} + \frac{1}{x'}\frac{dy'}{dx'} \right) \right] = 0 \quad \text{für } x' = \frac{a}{\alpha}$$

oder

$$P - 2\pi a \cdot K\alpha^2 \left[\frac{d}{dx'} E^2 y' \right] = 0 \quad \text{für } x' = \frac{a}{\alpha}. \tag{91}$$

Differentiieren wir also (89) nach x' und setzen x' gleich der sehr kleinen Zahl $\frac{a}{\alpha}$, so heben sich alle übrigen Glieder fort, bis auf:

$$\left[\frac{d}{dx'} E^2 y' \right] = 4 c_4 \cdot \frac{\alpha}{a},$$

und indem wir dies in (91) einführen, erhalten wir

$$c_4 = \frac{P}{8\pi K \alpha^3}. \tag{92}$$

Wir haben also aus den Grenzbedingungen die 3 Gleichungen (83), (90), (92) gefunden, die uns zur Bestimmung der drei Integrationskonstanten genügen. Die Konstante c_4 bestimmt sich ohne weiteres aus (92). Sie ist nur von der Größe der Last und den elastischen Eigenschaften der Platte und der Bettung abhängig. Sie ist aber unabhängig vom Halbmesser der Platte. Die beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 sind aus den Gleichungen (83) und (90) zu berechnen, sobald c_4 gefunden ist. Sie sind beide abhängig vom Plattenhalbmesser, werden also ihre Größe ändern, wenn sich der Plattenhalbmesser ändert.

Auch die Konstanten c_1, c_2, c_4 wollen wir jetzt graphisch auftragen. Dies ist auf Tafel 7 geschehen. Die Konstanten sind dabei für verschiedene Plattenhalbmesser, also für verschiedene Werte von $\frac{r}{\alpha}$ berechnet worden, nämlich für

$$\left(\frac{r}{\alpha}\right) = 1{,}0 — 1{,}5 — 2{,}0\,.$$

Die Größe c_4 ist, wie schon erwähnt, für alle Plattenhalbmesser konstant, die Größen c_1 und c_2 dagegen nicht. Sie nähern sich aber, wie aus den berechneten Werten ersichtlich, bei wachsendem Halbmesser sehr rasch einer bestimmten Grenze, die wir finden würden, wenn wir den Halbmesser der Platte unendlich groß annehmen. Die gewählte Darstellung in Potenzreihen eignet sich aber nicht für sehr große Werte der Veränderlichen, da sie gegen unendlich konvergieren.

Die Theorie der Besselschen Zylinderfunktionen lehrt nun, wie man diese Reihen auch durch bestimmte Integrale ersetzen kann, an denen der Grenzübergang $r = \infty$ vorgenommen werden kann.

In seiner Arbeit „Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten" hat Hertz diese Rechnung vorgenommen und den Wert der Größen c_1, c_2 und c_4 bestimmt.

Der erwähnte Aufsatz findet sich in Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie 1884 Bd. 22 S. 44ff. sowie in Hertz' Gesammelten Werken Bd. 1 S. 288. Nach Hertz würden die gesuchten Grenzwerte unter Einführung der bisher gewählten Bezeichnungen lauten:

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \frac{P}{8\,\alpha^3 K} &&= +\,1{,}0000\,\frac{P}{8\,\alpha^3 K},\\
c_2 &= -\frac{(1 + \ln 2 - C)}{\pi}\;\frac{P}{8\,\alpha^3 K} &&= -\,0{,}3552\,\frac{P}{8\,\alpha^3 K},\\
c_4 &= \frac{1}{\pi}\;\frac{P}{8\,\alpha^3 K} &&= +\,0{,}3183\,\frac{P}{8\,\alpha^3 K}.
\end{aligned}\right\} \quad (93)$$

Hierzu ist zu bemerken, daß die bei der Bestimmung von c_2 vorkommende Größe C eine konstante ist, die sich zu

$$C = 0{,}577216$$

ergibt. (Vgl. hierzu Handbuch der Kugelfunktionen von Heine Bd. 1 S. 244.)

Aus der Darstellung auf Tafel 7 können wir also die Integrationskonstanten für beliebige Plattenhalbmesser abgreifen.

Unter Einsetzung der Werte können wir dann aus Gleichung (82) die Größen y' und somit auch y, d. h. die wirklichen Durchbiegungen, für beliebige Plattenhalbmesser berechnen. Dies ist für den Fall eines unendlich großen Plattenhalbmessers durchgeführt. Die erhaltenen Werte sind auf Tafel 8 dargestellt worden. Die Werte der partikulären Integrale waren dabei für die Werte der Veränderlichen

$$\frac{x}{a} = 0{,}0 \text{ bis } \frac{x}{a} = 5{,}0$$

berechnet worden. Für die entsprechenden Werte sind dann auch die Größen y' dargestellt worden. Wir sehen schon, daß die Werte der Durchbiegungen von der Mitte weg sehr rasch abnehmen. Erschöpfende Auskunft auch für größere Werte von $\frac{x}{a}$ gibt uns wieder die Hertzsche Arbeit.

Hertz benutzt nämlich für große Werte eine semikonvergente Reihe, die wie folgt lautet:

$$y = \frac{P}{2\pi K a^2} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\frac{x}{a}}}} \left\{ \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{8x} \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) + \cdots\cdots \right\}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß etwa in der Entfernung $\frac{7}{8}\pi\sqrt{2}\,a = 3{,}887\,a$ die Größe y ihr Vorzeichen wechselt, die Platte also etwas aufgehoben wird. Weiter sehen wir, daß beständig mit der Periode $\pi\sqrt{2}\,a = 4{,}443\,a$ sich Hebungen und Senkungen folgen, die Platte also in ein vollständiges System kreisrunder Wellen verworfen wird, deren Höhe aber sehr schnell abnimmt.

Wir gehen weiter zur Berechnung der Momente über. Unter Berücksichtigung von

$$\varphi = -\frac{dy}{dx}$$

gehen die allgemeinen Gleichungen für die Momente (7), (8), (9) über in:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -\frac{m}{m^2-1}\cdot\frac{\pi E h^3}{6}\cdot x\left\{m\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}\\ M_r^I &= -\frac{m}{m^2-1}\,\frac{Eh^3}{12}\left\{m\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx}\right\}\\ M_t &= -\frac{m}{m^2-1}\,\frac{Eh^3}{12}\left\{m\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

oder unter Einführung der Veränderlichen x′ und y′:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -\frac{m}{m^2-1}\,\frac{\pi E h^3}{6}\cdot x'\left\{m\frac{d^2y'}{dx'}+\frac{1}{x'}\cdot\frac{dy'}{dx'}\right\}\\ M_r^I &= -\frac{m}{m^2-1}\cdot\frac{Eh^3}{12}\cdot\frac{1}{\alpha}\left\{m\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{1}{x'}\cdot\frac{dy'}{dx'}\right\}\\ M_t &= -\frac{m}{m^2-1}\,\frac{Eh^3}{12}\,\frac{1}{\alpha}\left\{m\frac{1}{x'}\,\frac{dy'}{dx'}+\frac{d^2y'}{dx'^2}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Wir wollen diese Werte graphisch darstellen. Es sind zu diesem Zwecke zunächst die ersten und zweiten Differentialquotienten von y′ für die früheren 10 Werte der Veränderlichen berechnet und auf Tafel 8 aufgetragen worden. Die dabei erhaltenen absoluten Zahlenwerte wollen wir mit $\frac{d\eta}{d\zeta}$ und $\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}$ bezeichnen, so daß wir schreiben können:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{P}{8K\alpha^3}\,\frac{d\eta}{d\zeta} \text{ und } \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{P}{8\alpha^3}\,\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}.$$

Gleichung (95) geht dann, wenn wir gleichzeitig m = 4 setzen, über in:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -0{,}01745\,\frac{Eh^3}{K\alpha^3}P\left\{x'\left(4\cdot\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}+\frac{1}{x'}\,\frac{d\eta}{d\zeta}\right)\right\}\\ M_r^I &= -0{,}00277\,\frac{Eh^3}{K\alpha^4}P\left\{4\cdot\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}+\frac{1}{x'}\,\frac{d\eta}{d\zeta}\right\}\\ M_t &= -0{,}00277\,\frac{Eh^3}{K\alpha^4}P\left\{4\cdot\frac{1}{x'}\,\frac{d\eta}{d\zeta}+\frac{d^2\eta}{d^2\zeta}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Momente für 10 Punkte berechnet und auf Tafel 9 aufgetragen worden. Die Werte sind auf S. 61 nochmals zusammengestellt. Um die Kurve des Tangentialmomentes in der Mitte zum Schluß zu bringen, müßte man wiederum eine Verteilung der Last auf einen kleinen Kreis annehmen. Die Berechnung ist nicht besonders durchgeführt. Wir können aber nach dem Früheren die für $\left(\frac{x}{a}\right) = 0{,}5$ berechnete Ordinate auch für $\left(\frac{x}{a}\right) = 0{,}0$ einsetzen. Dies würde etwa einer Verteilung der Last auf eine Kreisfläche vom Halbmesser $\left(\frac{x}{a}\right) = 0{,}5$ entsprechen.

Die Querkraft auf die ganze Länge eines Ringschnittes berechnet sich nach (85) zu:

$$V = 2\pi K a^3 x' \left\{\frac{d^3 y}{d x'^3} + \frac{1}{x'}\frac{d^2 y'}{d x'^2} - \frac{1}{x'^2}\frac{d y'}{d x'}\right\},$$

wofür wir auch nach den aus (86), (87), (88) ersichtlichen Entwicklungen schreiben können:

$$V = 2\pi K a^3 x' \left[\frac{d}{d x'} E^2 y'\right] \tag{97}$$

Die verlangte Differentiation finden wir in den Gleichungen (89), (90) bereits ausgeführt. Berücksichtigen wir dies und setzen gleichzeitig die in (93) für die Konstanten gefundenen Werte ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} V = 0{,}7854 \cdot P \cdot x' \Bigg\{ & 1{,}0000 \left(-\frac{x'}{2} + \frac{x'^5}{384} - \frac{x'^9}{1474560} + \cdots\right) \\ & - 0{,}3552 \left(-\frac{x'^3}{4} + \frac{x'^7}{4608} - \frac{x'^{11}}{44\,236\,800} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right) \\ & + 0{,}3183 \Bigg(\ln x' \left[-\frac{x'^3}{4} + \frac{x'^7}{4608} - \cdots\right] \\ & \qquad + \frac{4}{x'} + 0{,}061336\, x'^3 - 0{,}000208\, x'^7 \cdots\Bigg)\Bigg\} \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Hieraus sind die Querkräfte wiederum für 10 Werte der Veränderlichen berechnet und auf Tafel 9 aufgetragen worden.

Zu der Darstellung bemerken wir noch, daß der Wert $V = 1{,}0000\,P$ in Plattenmitte nicht erreicht wird, da bei Bestimmung der Integrationskonstanden c_4 die Verteilung der Last über eine Kreisfläche von sehr kleinem Halbmesser angenommen worden war.

Die Tafel 9 gibt uns also ein leichtes Mittel, Momente, Querkräfte und Durchbiegungen für eine elastisch gelagerte Platte mit unendlichem Halbmesser und einer Einzellast P zu berechnen. Würde die Platte durch beliebige Lasten belastet, so würde sich die Lösung durch einfache Summation der Einflüsse der einzelnen Lasten ergeben. Die Aufgabe wäre somit ganz allgemein gelöst.

Nach dem Vorstehenden böte es auch keine Schwierigkeiten mehr, eine elastisch gelagerte Platte mit endlichem Halbmesser und einer Einzellast in der Mitte zu untersuchen. Die partikulären Integrale der allgemeinen Gleichung (73) sind im vorstehenden berechnet und ebenso wie die Integrationskonstanten für beliebige Plattenhalbmesser von Tafel 7 zu entnehmen. Es genügte also die Multiplikation mit anderen Konstanten. Die äußerst zeitraubenden Reihenentwicklungen wären dagegen nicht zu wiederholen. Momente, Querkräfte und Durchbiegungen könnten daher ohne Schwierigkeiten für beliebige Plattenhalbmesser aufgezeichnet werden. Aus den Kurven der Integrationskonstanten ersehen wir aber schon, daß wir bei einigermaßen großen Plattenhalbmessern direkt die für unendlichen Halbmesser gefundenen Werte einsetzen können, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen.

Die durchweg elastisch gelagerte Platte mit unendlich großem Halbmesser und einer Einzellast in der Mitte.

Die liche Veränder- $x' = \frac{x}{a}$.	Das Radialmoment auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Das Radialmoment auf die Längeneinheit eines Ringschnittes	Das Tangentialmoment auf die Längeneinheit eines Meridianschnittes	Die Querkraft auf die gange Länge eines Ringschnittes	Die Durchbiegungen
0,0	+0,00000	$+\infty$	$+\infty$	±0,000	+0,125
0,5	+0,01584	+0,005030	+0,010066	+0,901	+0,114
1,0	+0,00218	+0,000346	+0,004751	+0,811	+0,079
1,5	−0,01319	−0,001396	+0,002269	+0,439	+0,053
2,0	−0,02110	−0,001673	+0,000953	+0,220	+0,030
2,5	−0,02443	−0,001551	+0,000402	+0,060	+0,017
3,0	−0,02368	−0,001252	+0,000102	+0,013	+0,009
3,5	−0,01960	−0,000890	+0,000025	−0,013	+0,002
4,0	−0,01391	−0,000551	−0,000047	−0,028	−0,001
4,5	−0,00883	−0,000313	−0,000039	−0,031	−0,002
5,0	−0,00517	−0,000163	−0,000030	−0,028	−0,003

Beispiele zur Benutzung der Tafeln.

1. Beispiel.

Um einen Flußlauf mittels Horizontalvortriebs untertunneln zu können, sind auf beiden Ufern kreisrunde Einsteigschächte aus Eisenbeton von 12,0 m lichtem Durchmesser mittels Preßluft abgesenkt worden. Die Schächte sollen unten durch eine 1,50 m starke Eisenbetonsohle abgeschlossen werden. Unterkante der Schachtsohle kommt 10,6 m unter dem höchsten Hochwasserstande zu liegen. Wegen der Durchlässigkeit des Bodens ist der volle Auftrieb auf die Schachtsohle in Rechnung zu stellen. Die Armierung der Sohle ist so zu bemessen, daß sämtliche auftretenden Zugspannungen durch die Armierung aufgenommen werden.

Da die Unterkante der Sohle 10,6 m unter dem höchsten Wasserspiegel liegt, beträgt der volle Auftrieb auf die Sohle 10,6 tm^{-2}. Das Eigengewicht der Sohle, das in entgegengesetzter Richtung wirkt, berechnet sich zu 3,6 tm^{-2}. Es verbleibt somit eine von unten nach oben wirkende gleichmäßig verteilte Belastung von 7,0 tm^{-2} auf die Platte übrig. Die Platte soll als im ganzen Umfange frei aufliegend berechnet werden. Wir benutzen Tafel 3. Der konstante Faktor, mit dem die Ordinaten der Radialmomentenkurven zu multiplizieren sind, ergibt sich zu:

$$m = p r^3 = 7{,}0 \cdot 6{,}0^3 = 1512 \text{ mt}.$$

Der entsprechende Faktor für die Tangentialmomentkurve zu

$$m = 1 \cdot p r^{2} = 7{,}0 \cdot 6{,}0^3 = 252 \text{ mt}.$$

Durch Multiplikation der auf Tafel 3 verzeichneten Ordinaten mit diesen Faktoren erhalten wir sofort Radial- und Tangentialmomente für 10 Punkte des Halbmessers.

Dieselben sind in der Tabelle zusammengestellt. Um die erforderlichen Eiseneinlagen überschläglich berechnen zu können, wollen wir die jeweils aufzunehmende Zugkraft nach der Formel

$$Z = \frac{M}{5/6\,h}$$

ermitteln, wobei h die Plattenhöhe bedeutet. Rechnen wir mit einer zulässigen Beanspruchung des Eisens von $\sigma = 1000$ kgm^{-2}, so ergibt sich der erforderliche Eisenquerschnitt zu

$$F_e^{cm^2} = \frac{Z}{\sigma} = \frac{M^{mt}}{125}.$$

Auch diese Werte sind in der Tabelle zusammengestellt.

Abstand von Plattenmitte	Radialmoment auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Erforderliche Eiseneinlage auf die ganze Länge eines Ringschnittes	Umfang des Ringschnittes	Tangentialmoment auf 1 lfd. m eines Meridianschnittes	Erforderliche Eiseneinlage auf 1 lfd. m eines Meridianschnittes
0,0 m	0,00 mt	0 cm²	0,00 m	51,11 mt	41 cm²
0,6 m	190,51 mt	152 cm²	3,77 m	50,90 mt	41 cm²
1,2 m	370,44 mt	296 cm²	7,54 m	49,90 mt	40 cm²
1,8 m	527,69 mt	422 cm²	11,31 m	48,64 mt	39 cm²
2,4 m	650,16 mt	520 cm²	15,08 m	46,62 mt	37 cm²
3,0 m	724,25 mt	579 cm²	18,85 m	44,35 mt	35 cm²
3,6 m	740,88 mt	593 cm²	22,62 m	41,33 mt	33 cm²
4,2 m	689,47 mt	552 cm²	26,39 m	37,30 mt	30 cm²
4,8 m	556,42 mt	445 cm²	30,16 m	33,77 mt	27 cm²
5,4 m	329,62 mt	264 cm²	33,93 m	28,73 mt	23 cm²
6,0 m	0,00 mt	0 cm²	37,70 m	23,44 mt	18 cm²

Um zu sehen, wie dicht die Eisen in jedem Ringschnitte zu liegen kommen, ist jedesmal die Länge des betreffenden Kreisumfanges berechnet. Alles Weitere ist aus den Figuren ersichtlich. Die Anzahl und Länge der Eisen ist auf äußerst einfache Art graphisch ermittelt. An ihren Enden werden die Radialeisen vorteilhaft in die Ringeisen eingehakt. Ebenso werden sie in Plattenmitte durch einen Ring zusammengehalten. Nachdem man so die Eisenarmierung auf einfachste Weise ermittelt hat, kann man dazu übergehen, nach den Regeln des Eisenbetonbaues die wirklich auftretenden Normalspannungen im Beton und Eisen sowie die Schubspannungen zu berechnen. Es dürfte dies keinerlei Schwierigkeiten bieten.

2. Beispiel.

Eine durchweg auf dem Untergrunde aufliegende Betonfundamentplatte hat an einzelnen Stellen Einzellasten von 80 t aufzunehmen. Die Plattenstärke sei 80 cm. Der Untergrund erleidet bei einer Belastung von 1 kg cm^{-2} eine Einsenkung von 1,25 mm. An den Angriffsstellen der Lasten soll die Platte durch eine Eisenarmierung verstärkt werden.

Der Halbmesser der Platte kann genau genug als unendlich groß angesehen werden. Es berechnet sich die Bettungsziffer zu:

$$K = \frac{1,000}{0,125} = 8 \text{ kg cm}^{-3}.$$

Nehmen wir für Beton die Elastizitätszahl $E = 200\,000$ kg cm^{-2} an, so ergibt sich für die Hilfsgröße

$$a^4 = 4 \cdot \frac{Eh^3}{45K} = \frac{4 \cdot 200000 \cdot 80^3}{45 \cdot 8} = 1137800000 \text{ cm}^4$$

oder

$$a = 184 \text{ cm}.$$

Die Multiplikatoren der Tafel 9 berechnen sich zu:

für das Radialmoment: $m = \frac{E \cdot h^3}{100 \cdot K \cdot a^3} P = 16{,}45$ mt,

für das Tangentialmoment: $m = \frac{1 \cdot Eh^3}{1000 K a^4} \cdot P = 0{,}89$ mt,

für die Querkraft: $m =$ $P = 80{,}00$ t,

für die Biegelinie: $m = \frac{1}{K a^2}$ $P = 0{,}2954$ cm.

Die hieraus berechneten Momente für die Punkte $x = 0{,}0a$, $x = 0{,}5a$, $x = 1{,}0a$ usw. bis $x = 5{,}0a$ sind in der Tabelle, wie im vorigen Beispiel, zusammengestellt. Die erforderlichen Eisenquerschnitte ergeben sich jetzt zu:

$$F_e^{cm^2} = \frac{M}{5/6 h \sigma} = \frac{M^{mt}}{0{,}67}.$$

Diese Werte, ebenso wie die Umfangslängen der Ringschnitte, sind in der Tabelle enthalten.

Abstand von Plattenmitte	Radialmoment (auf die ganze Länge eines Ringschnittes)	Erforderliche Eisenquerschnitte (auf die ganze Länge eines Ringschnittes)	Umfang des Ringschnittes	Tangentialmoment (auf 1 lfd. m eines Meridianschnittes)	Erforderliche Eisenquerschnitte (auf 1 lfd. m eines Meridianschnittes)
0,00 m	+ 0,00 mt	0 cm²	0,00 m		
0,92 m	+ 26,06 mt	39 cm²	5,78 m	+ 8,97 mt	13,4 cm²
1,84 m	+ 3,59 mt	6 cm²	11,56 m	+ 4,23 mt	6,3 cm²
2,76 m	— 21,70 mt	31 cm²	17,34 m	+ 2,02 mt	3,0 cm²
3,68 m	— 34,71 mt	52 cm²	23,12 m	+ 0,85 mt	1,3 cm²
4,60 m	— 40,19 mt	60 cm²	28,90 m	+ 0,36 mt	0,5 cm²
5,52 m	— 38,95 mt	58 cm²	34,56 m	+ 0,09 mt	0,2 cm²
6,48 m	— 32,24 mt	48 cm²	40,84 m	— 0,02 mt	0,0 cm²
7,36 m	— 22,88 mt	34 cm²	45,87 m	— 0,04 mt	0,1 cm²
8,28 m	— 14,53 mt	22 cm²	52,15 m	— 0,03 mt	0,1 cm²
9,20 m	— 8,50 mt	12 cm²	57,80 m	— 0,03 mt	0,1 cm²

Die Verteilung der Eisen erfolgte in einfachster Weise auf graphischem Wege. Die wirklich auftretenden Normal- und Schubspannungen sind nun auf die übliche Weise nochmals nachzurechnen. Für die Betonspannungen sind dabei natürlich die sogen. „reduzierten Spannungen“ maßgebend, die sich aus den Radial- und Tangentialbeanspruchungen nach der Formel

$$\sigma_{red} = \sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t \text{ bezw. } \sigma_{red} = \sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r$$

bestimmen. Schließlich wollen wir noch die Durchbiegungen in Plattenmitte bestimmen. Nach Tafel 9 ergibt sie sich zu

$$y = m \cdot 0{,}125 = 0{,}295 \cdot 0{,}125 \text{ cm} = 0{,}4 \text{ mm}.$$

Aus den vorstehenden beiden Beispielen dürfte die Verwendbarkeit der Tafeln zur Genüge hervorgehen.

Schlußwort.

Vorliegende Zeilen sollen es ermöglichen, die wertvollen Arbeiten Grashofs und Föppls auch für die Praxis des Eisenbetons nutzbar zu machen, und sie sollen einen neuen Vorschlag bieten für die Berechnung und Dimensionierung kreisförmiger Eisenbetonplatten. Gleichwichtig wäre die Aufstellung eines ebenso einfachen Verfahrens für quadratische Platten. Man könnte hier eine entsprechende Armierung wählen, eine radial von Plattenmitte aus laufende und eine zweite, die etwa mit den Linien gleicher Durchbiegung zusammenfiele. Ihre Berechnung könnte wie im vorliegenden Falle erfolgen. Man müßte dabei von der allgemeinen Differentialgleichung der elastischen Fläche ausgehen. Vorteilhaft wäre dabei die Form in rechtwinkligen Koordinaten, wenn man das Achsenkreuz durch Plattenmitte und parallel den Umgrenzungsseiten wählt. Vor allem wäre es aber erwünscht, praktische Versuchsergebnisse, nach Art der Bachschen, auch für Eisenbetonplatten zu erhalten, um mit ihnen die theoretisch gefundenen Werte vergleichen zu können.

In Ermanglung solcher Versuche wollen wir unsere Resultate mit denen vergleichen, die Bach aus seinen Versuchen mit guß- und flußeisernen Platten gefunden hat. Ganz allgemein kommt Bach zu dem Ergebnis, daß die Widerstandsfähigkeit ebener Platten proportional ist dem Quadrate der Stärke h. Die im vorliegenden für die Radial- und Tangentialmomente für die Längeneinheit gefundenen Werte zeigen die Form

$$M_r^I = \mu p r^2 \text{ bezw. } \mu P$$

$$M_t = \mu p r^2 \text{ bezw. } \mu P,$$

wobei μ eine unbenannte Zahl ist. Die Normal- bezw. Tangentialbeanspruchungen erhalten wir durch Division mit dem zugehörigen Widerstandsmomente für die Längeneinheit

$$\frac{1 \cdot h^2}{6},$$

also in der Form:

$$\sigma_r = \mu \cdot \frac{p\,r^2}{h^2} \text{ bezw. } \mu \cdot \frac{P}{h^2},$$

$$\sigma_t = \mu \frac{p\,r^2}{h^2} \text{ bezw. } \mu \cdot \frac{P}{h^2}$$

und die reduzierten Spannungen aus

$$\sigma_{red} = \sigma_r - \frac{1}{m} \cdot \sigma_t \text{ bezw. } \sigma_t - \frac{1}{m} \cdot \sigma_r$$

wieder in der Form

$$\sigma_{red} = \mu \cdot \frac{p\,r^2}{h^2} \text{ bezw. } \mu \frac{P}{h^2}.$$

Die Beanspruchungen sind also umgekehrt proportional dem Quadrate der Plattenstärke h, die Widerstandsfähigkeit mithin direkt proportional dem Quadrate der Stärke h, übereinstimmend mit den Ergebnissen Bachs.

Vergleichen wir noch in einigen Sonderfällen die von Bach für die größten Durchbiegungen und Beanspruchungen durch Versuche gefundenen Werte mit unseren Resultaten. Wir rechnen, da es sich nicht mehr um Beton- sondern um Eisenplatten handelt, unsre Werte um, indem wir für die Poissonsche Zahl $\frac{10}{3}$ einsetzen.

Für die am ganzen Umfange frei aufliegende Platte mit gleichförmig verteilter Belastung erhalten wir dann für die Momente in Plattenmitte aus Gleichung (34)

$$M_r^I = M_t = \frac{33}{160} p\,r^2,$$

mithin

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{99}{80} \frac{p\,r^2}{h^2}$$

und

$$\sigma_{red} = 0{,}87 \frac{p\,r^2}{h^2}.$$

Bach gibt für diese Beanspruchung

$$\sigma_{red} = \mu \cdot \frac{p\,r^2}{h^2},$$

wobei μ ein durch Versuche gefundener Wert ist, der zwischen 1,2 und 0,67 schwankt. Der theoretische Wert 0,87 liegt also ziemlich in der Mitte der Versuchswerte. Die größte Durchbiegung ergibt sich theoretisch aus Gleichung (36) zu

$$y = 0{,}69\,\frac{p\,r^4}{E\,h^3},$$

während sich nach Bachschen Versuchen ergibt

$$y = 0{,}60\,\frac{p\,r^4}{E\,h^3}.$$

Für die frei aufliegende Platte mit einer Einzellast P in der Mitte, die sich auf einen Kreis verteilt, dessen Radius gleich $^1/_{10}$ des Plattenhalbmessers ist, erhalten wir nach Gleichung (60) für Plattenmitte

$$M_r^I = M_t = 0{,}32\,P,$$

mithin

$$\sigma_r = \sigma_t = 1{,}92\,\frac{P}{h^2},$$

oder

$$\sigma_{red} = 1{,}34\,\frac{P}{h^2}.$$

Für die gleiche Lastverteilung ergibt sich aus den Bachschen Versuchen ebenfalls

$$\sigma_{red} = 1{,}34\,\frac{P}{h^2}.$$

Die größte Durchbiegung ergibt sich nach Gleichung (55) zu

$$y = 0{,}55\,\frac{P\,r^2}{E\,h^3},$$

während Bach findet

$$y = 0{,}4 \text{ bis } 0{,}5\,\frac{P\,r^2}{E\,h^3}.$$

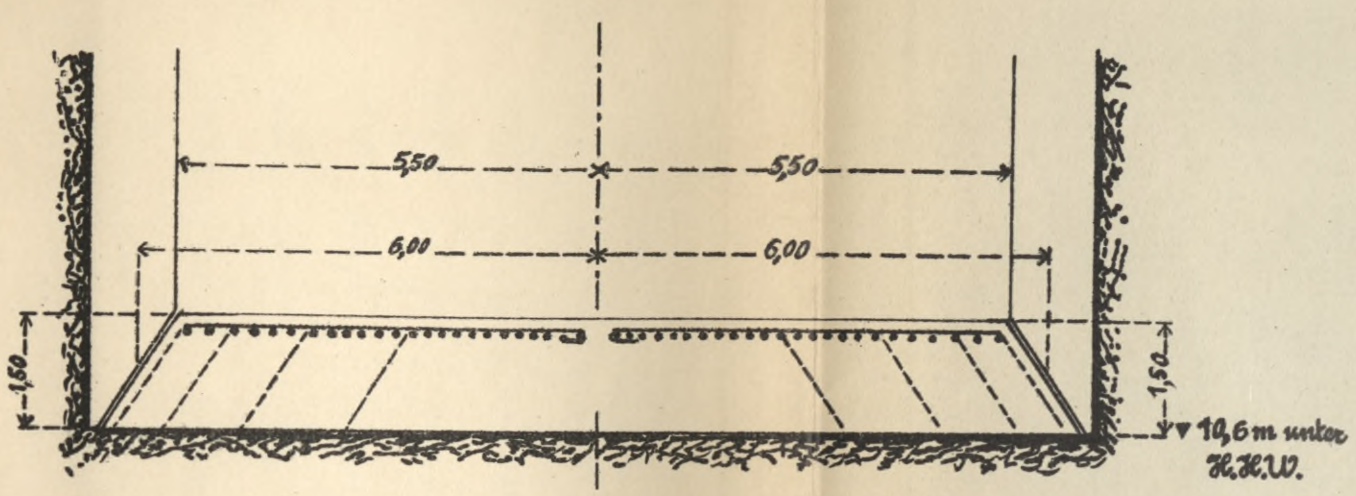
Diese Vergleiche dürften die Berechtigung der Anwendung unsrer Theorie auf die Praxis bestätigen.

Spezialdruckerei für Dissertationen, Robert Noske, Borna-Leipzig.

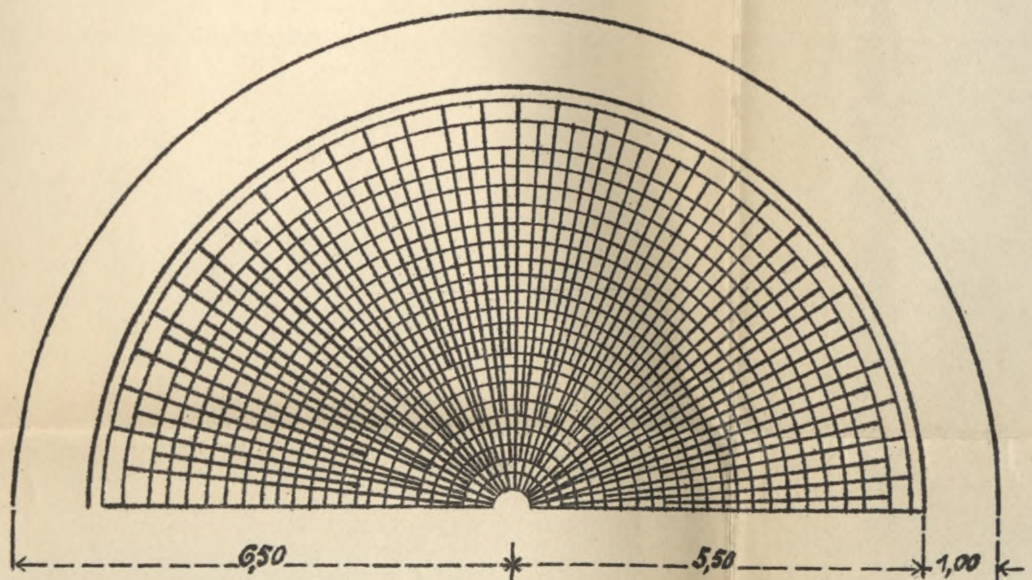
1. Beispiel.

Maßstab 1:100.

Querschnitt.



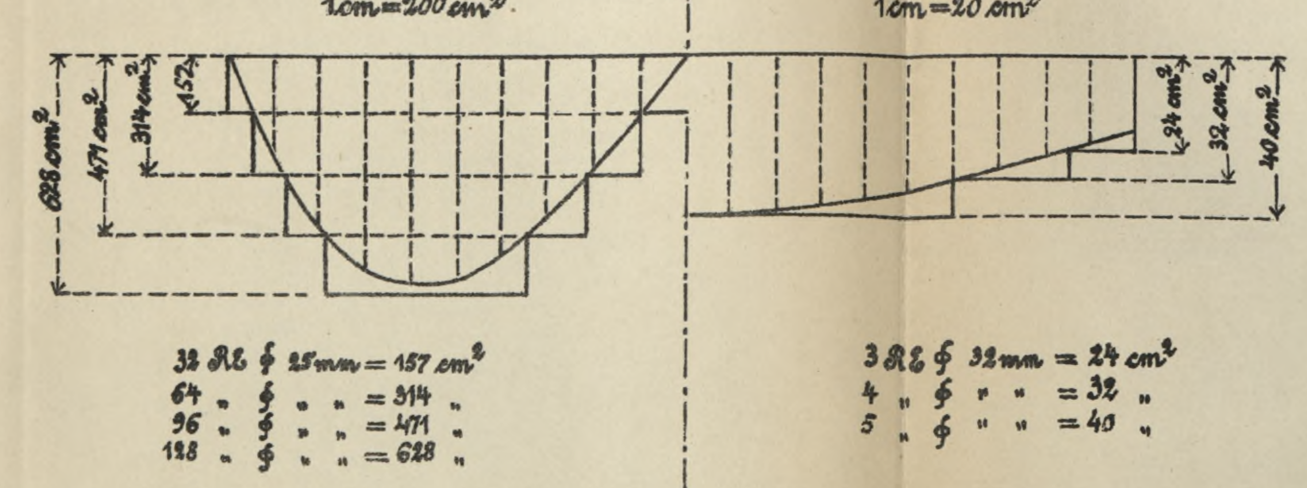
Grundriß.



Erforderliche Eisenquerschnitte

für die Radialarmierung auf den ganzen Umfang eines Cylinderschnittes 1 cm = 200 cm²

für die Ringarmierung auf das laufende m eines Meridianschnittes. 1 cm = 20 cm²



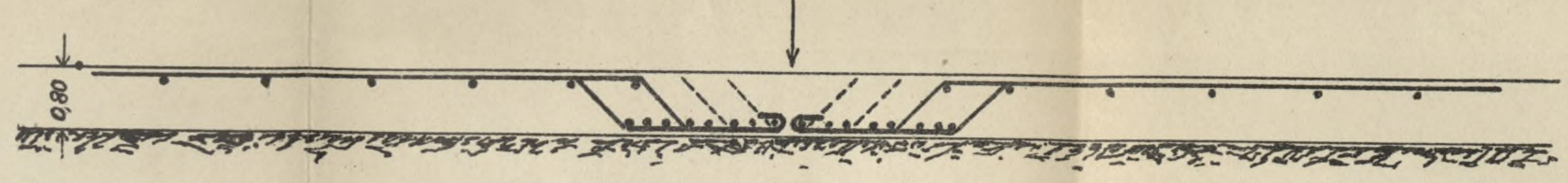
32 RE ∮ 25 mm = 157 cm²
64 „ ∮ „ „ = 314 „
96 „ ∮ „ „ = 471 „
128 „ ∮ „ „ = 628 „

3 RE ∮ 32 mm = 24 cm²
4 „ ∮ „ „ = 32 „
5 „ ∮ „ „ = 40 „

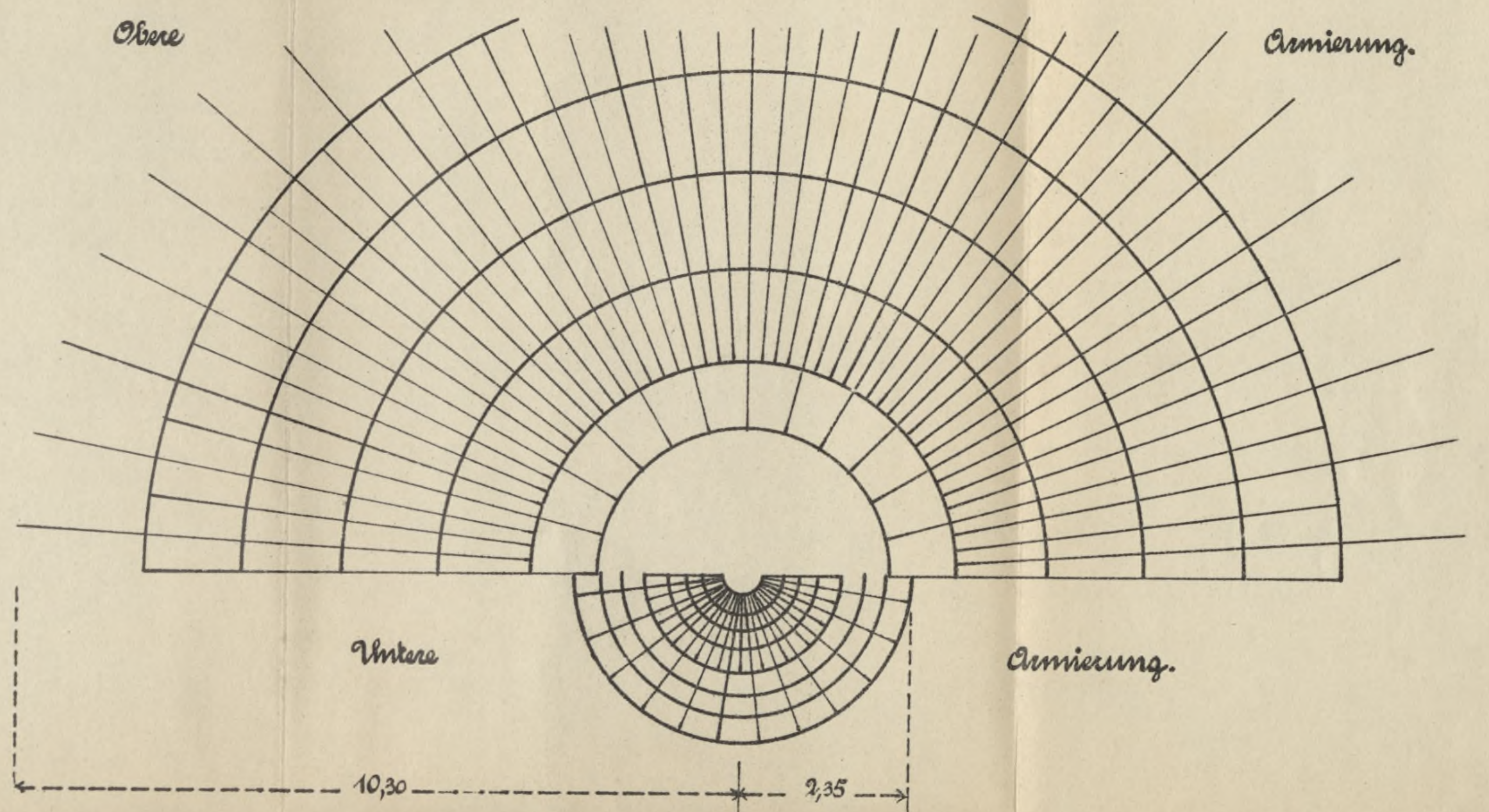
2. Beispiel.

Maßstab 1:100.

Querschnitt.



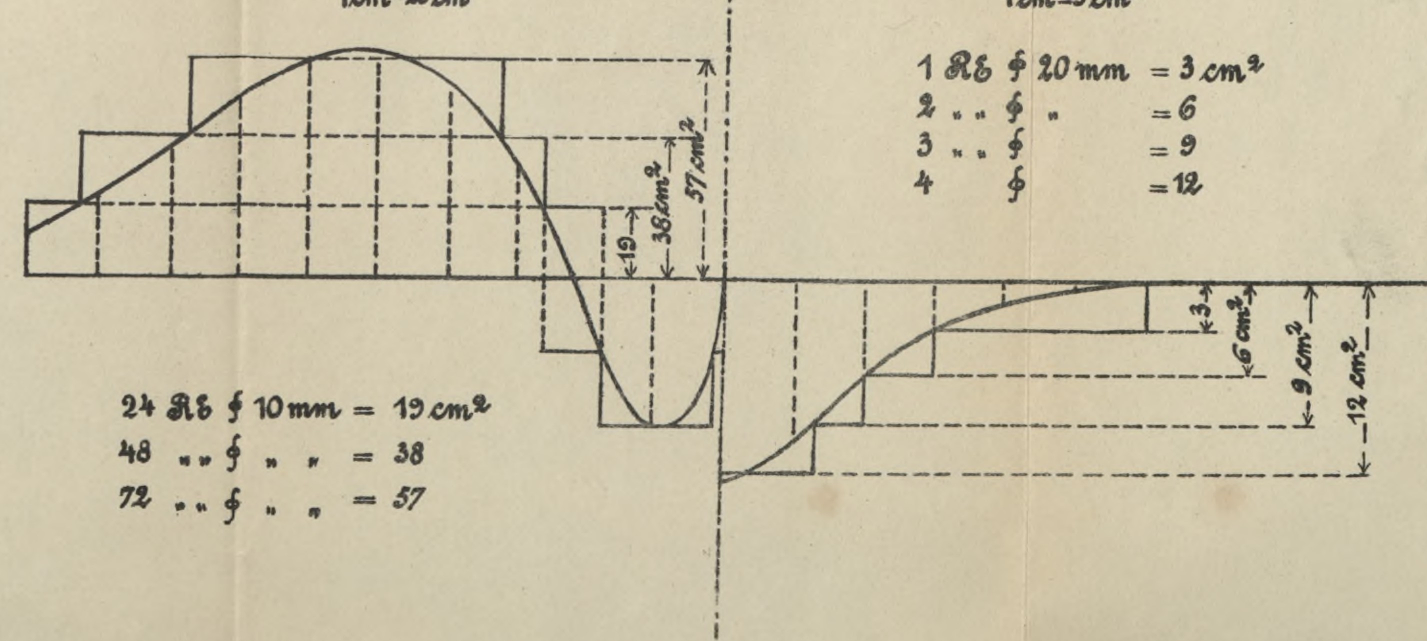
Grundriß.



Erforderliche Eisenquerschnitte.

für die Radialarmierung auf den ganzen Umfang eines Cylinderschnittes. 1 cm = 20 cm²

für die Ringarmierung auf das laufende m eines Meridianschnittes. 1 cm = 5 cm²

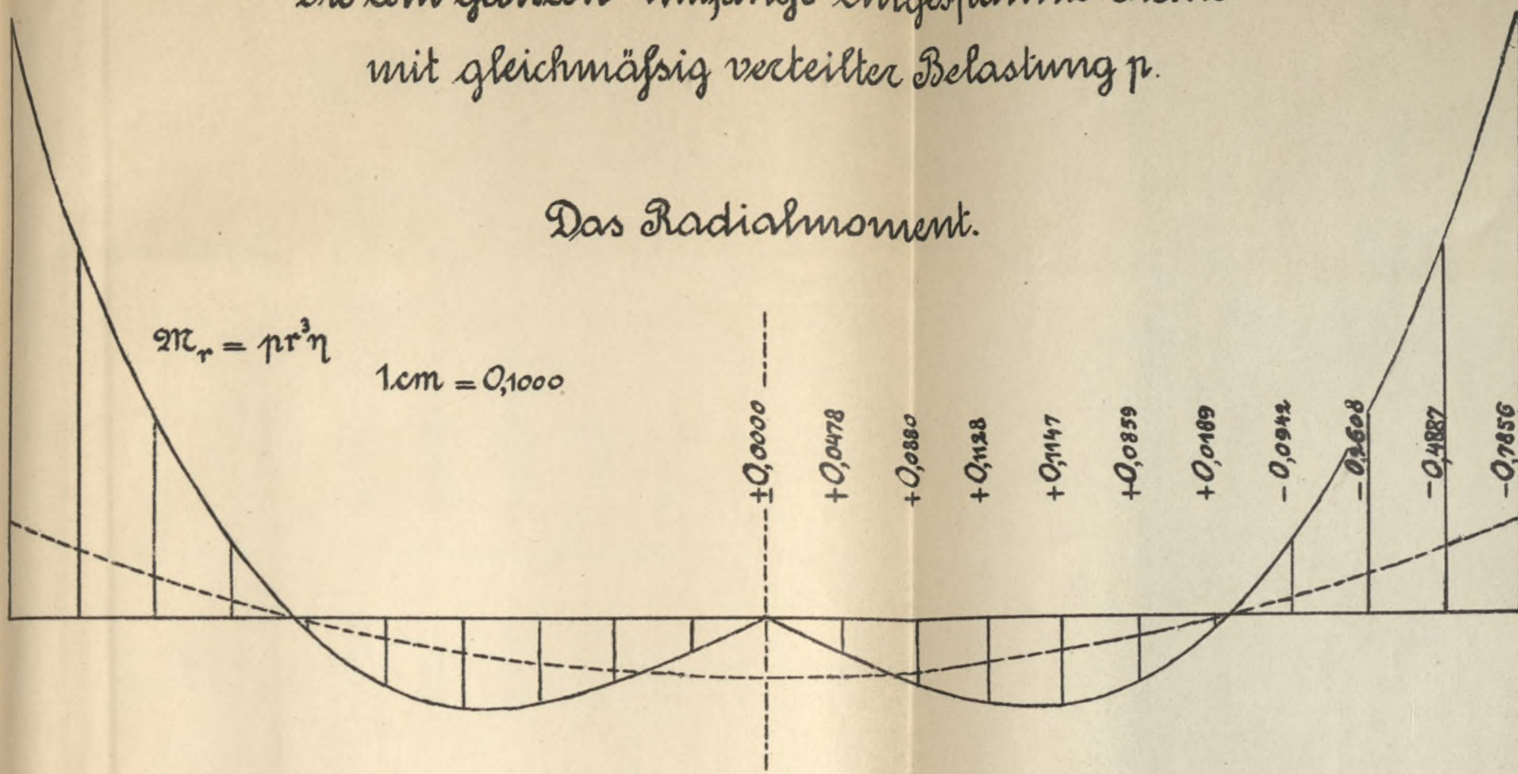


1 RE ∮ 20 mm = 3 cm²
2 „ „ ∮ „ = 6
3 „ „ ∮ = 9
4 ∮ = 12

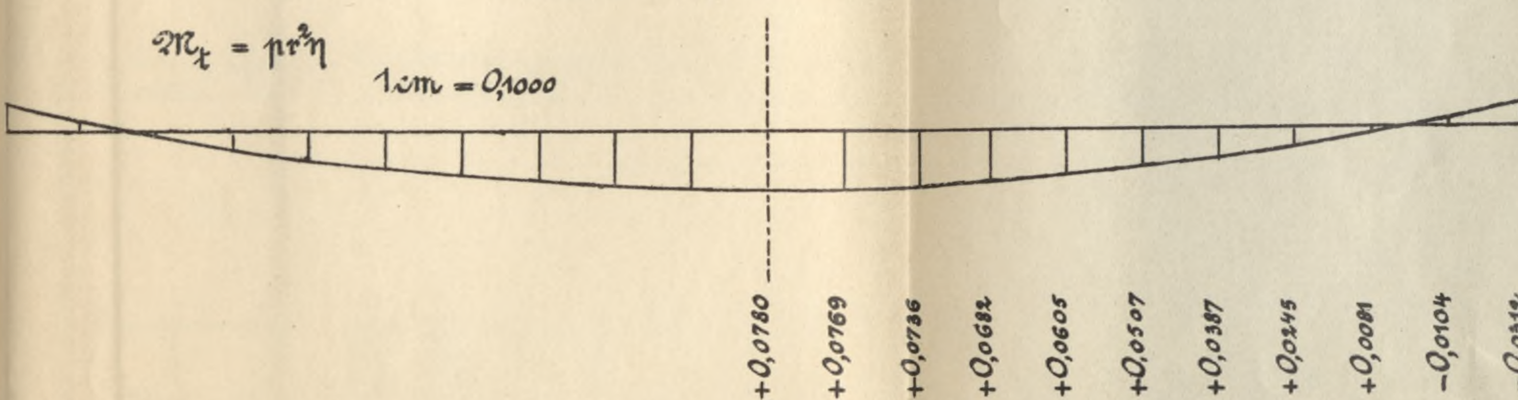
24 RE ∮ 10 mm = 19 cm²
48 „ „ ∮ „ „ = 38
72 „ „ ∮ „ „ = 57

Die am ganzen Umfange eingespannte Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung p.

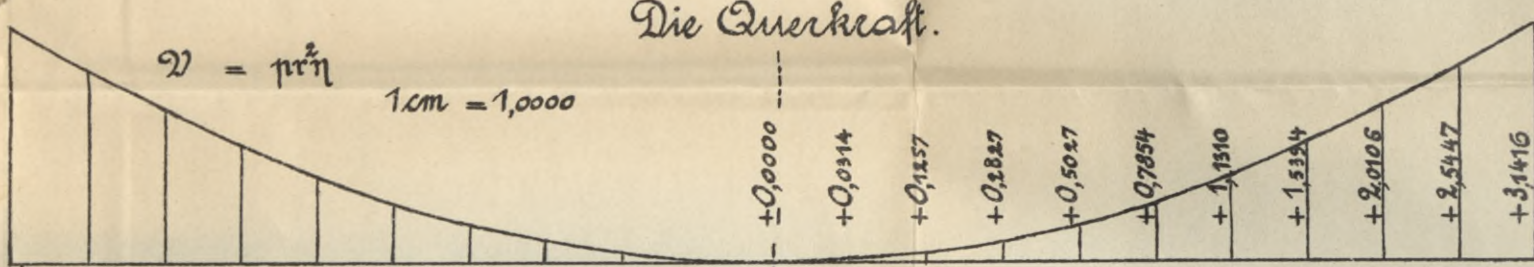
Das Radialmoment.



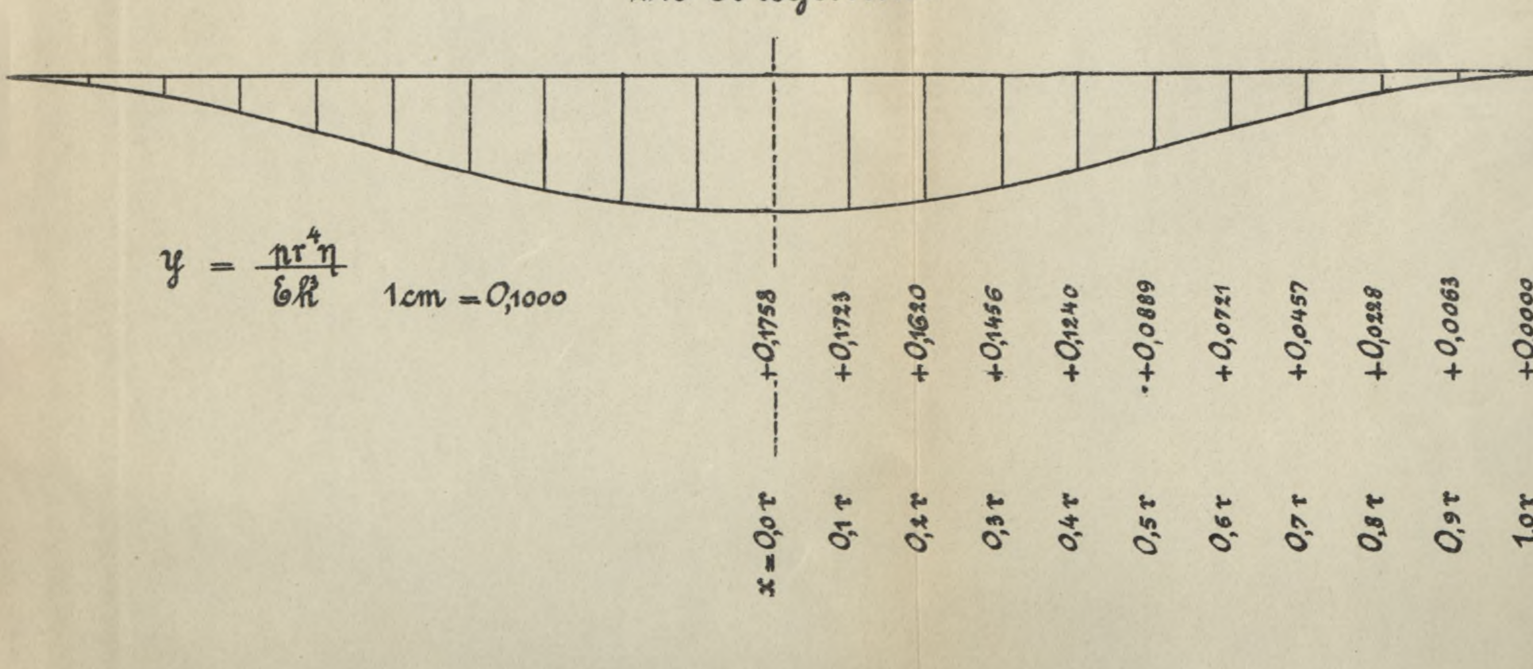
Das Tangentialmoment.



Die Querkraft.

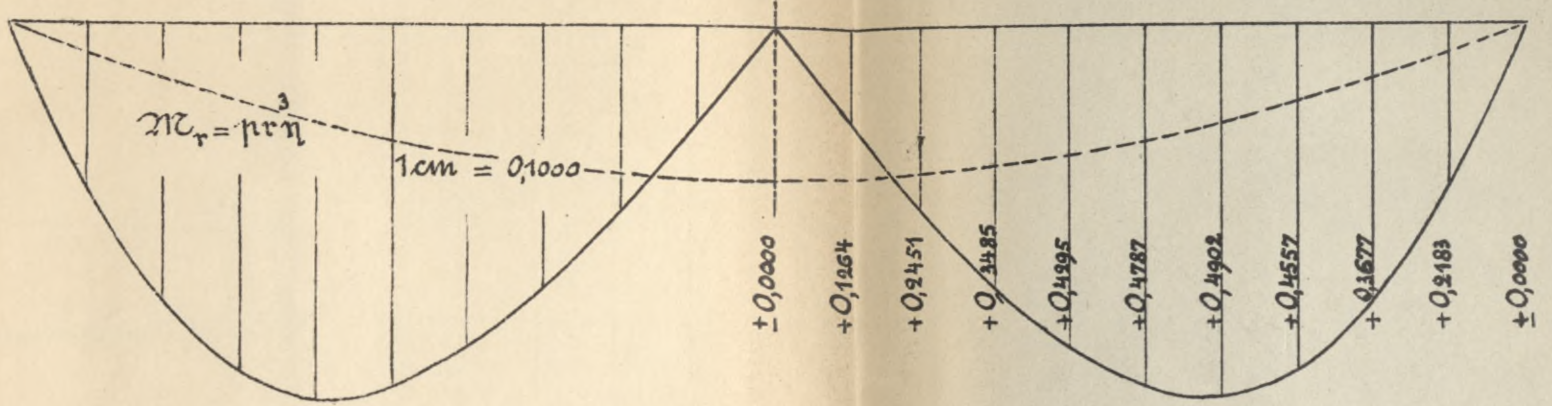


Die Biegelinie.

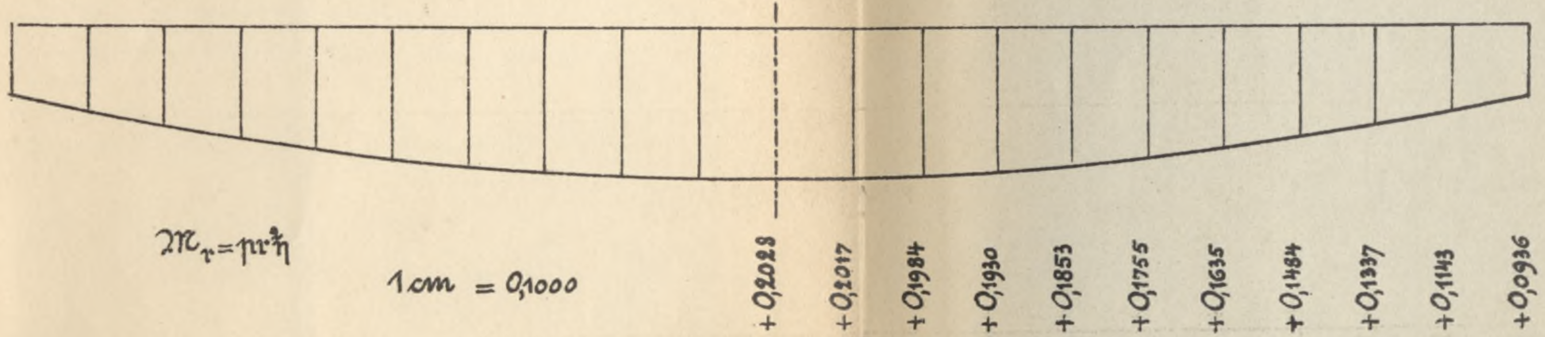


Die am ganzen Umfange frei aufliegende Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung p.

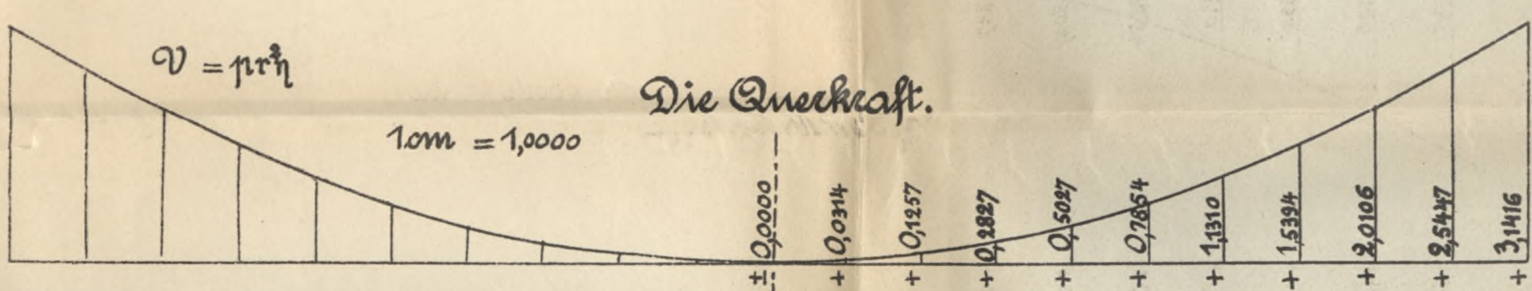
Das Radialmoment.



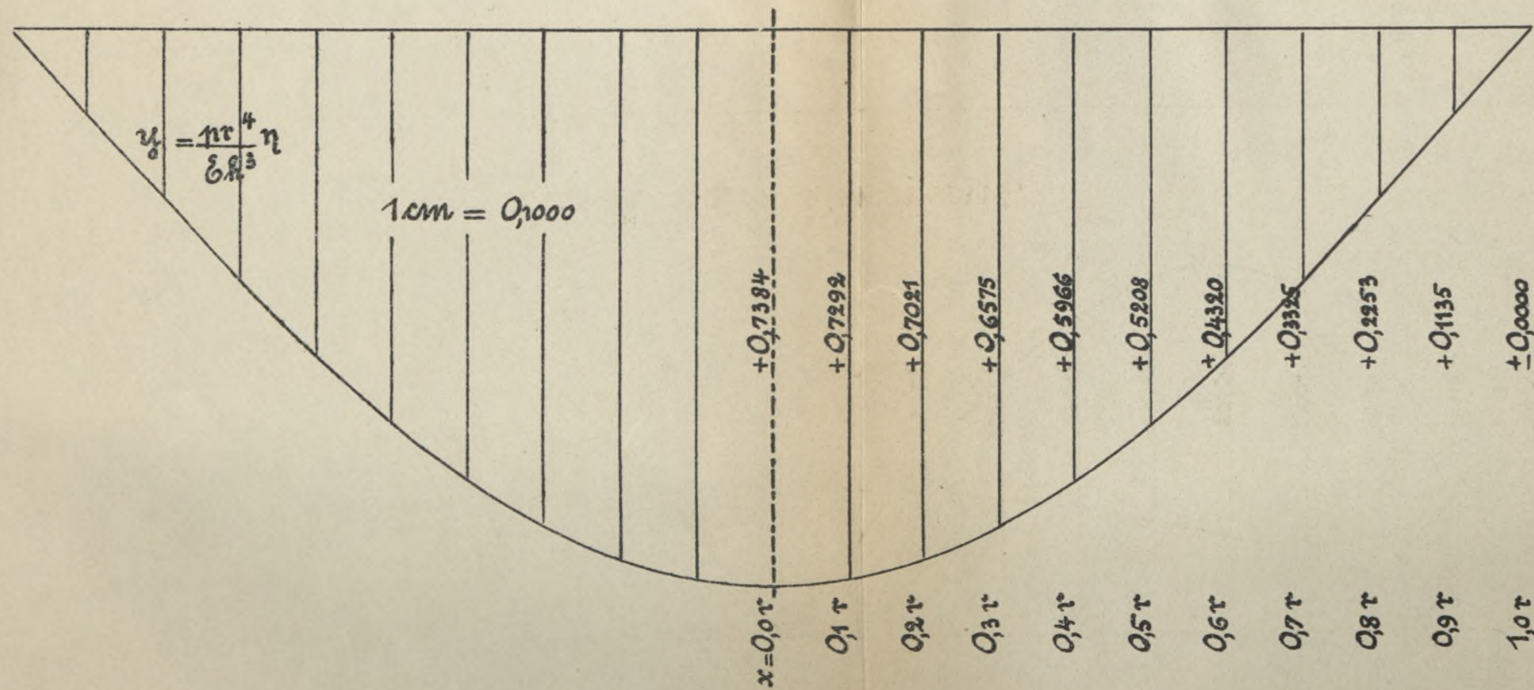
Das Tangentialmoment.



Die Querkraft.

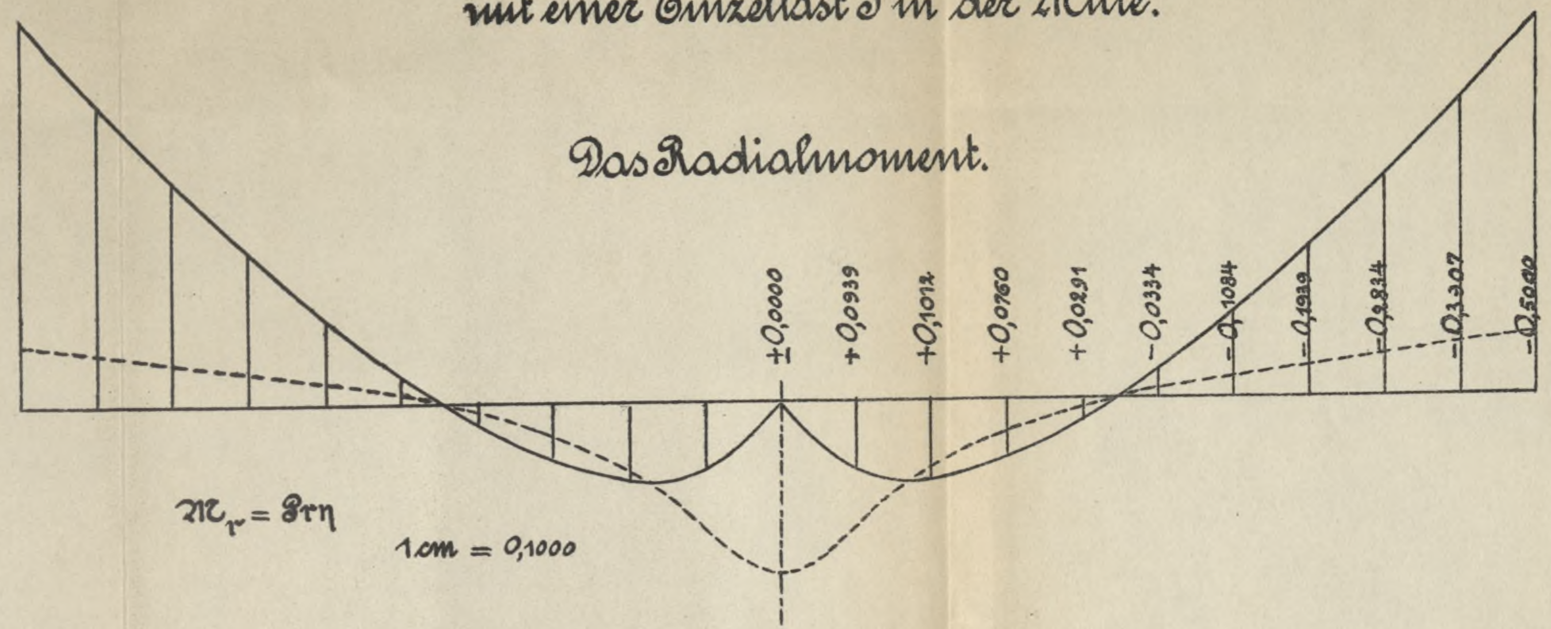


Die Biegelinie.

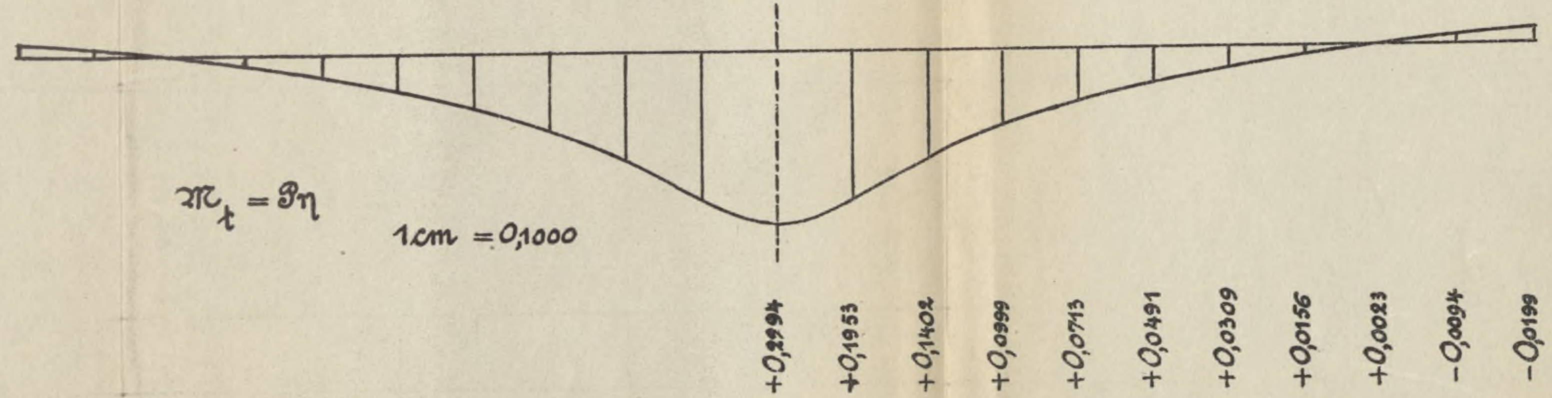


Die am ganzen Umfange eingespannte Platte mit einer Einzellast P in der Mitte.

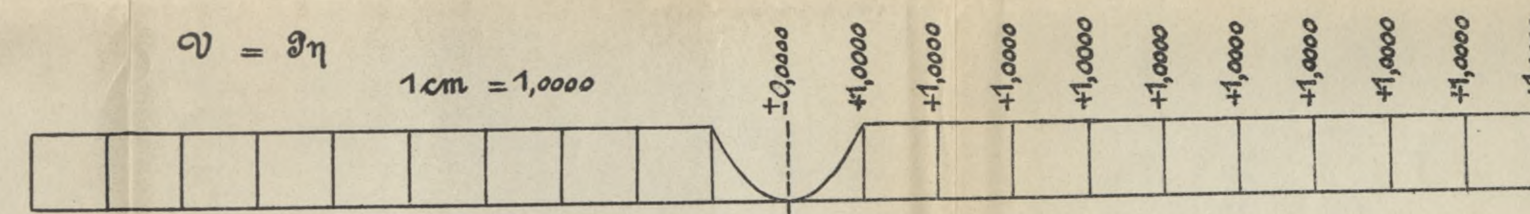
Das Radialmoment.



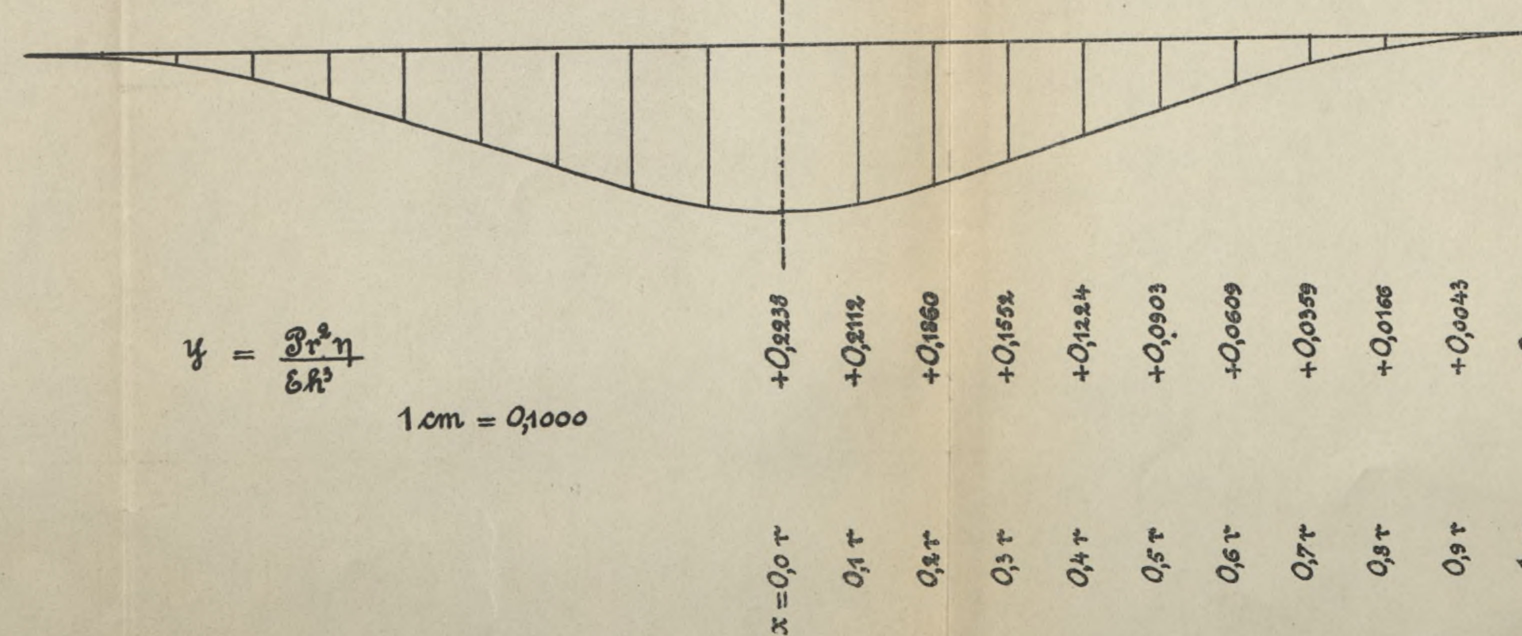
Das Tangentialmoment.



Die Querkraft.

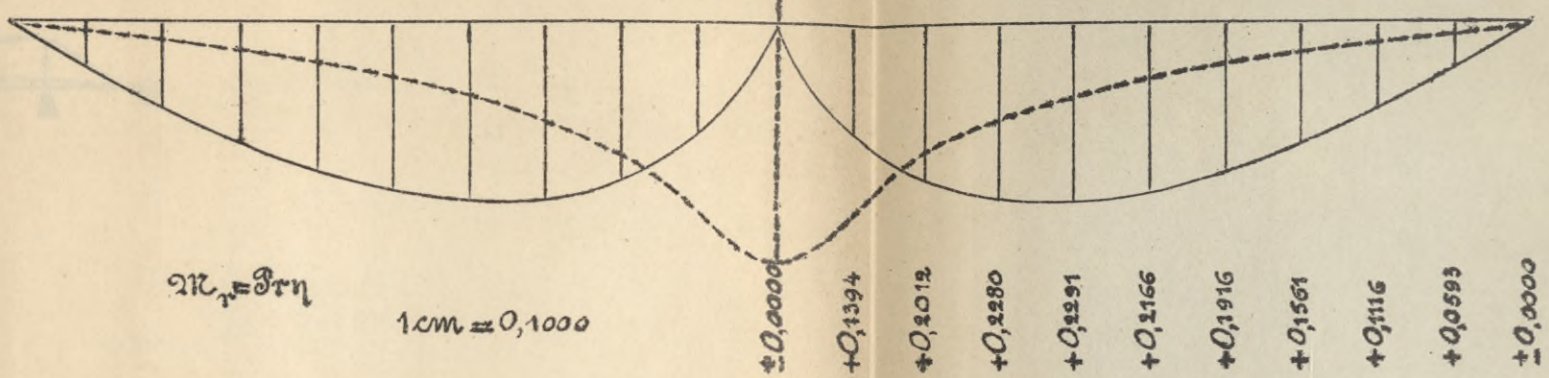


Die Biegelinie.

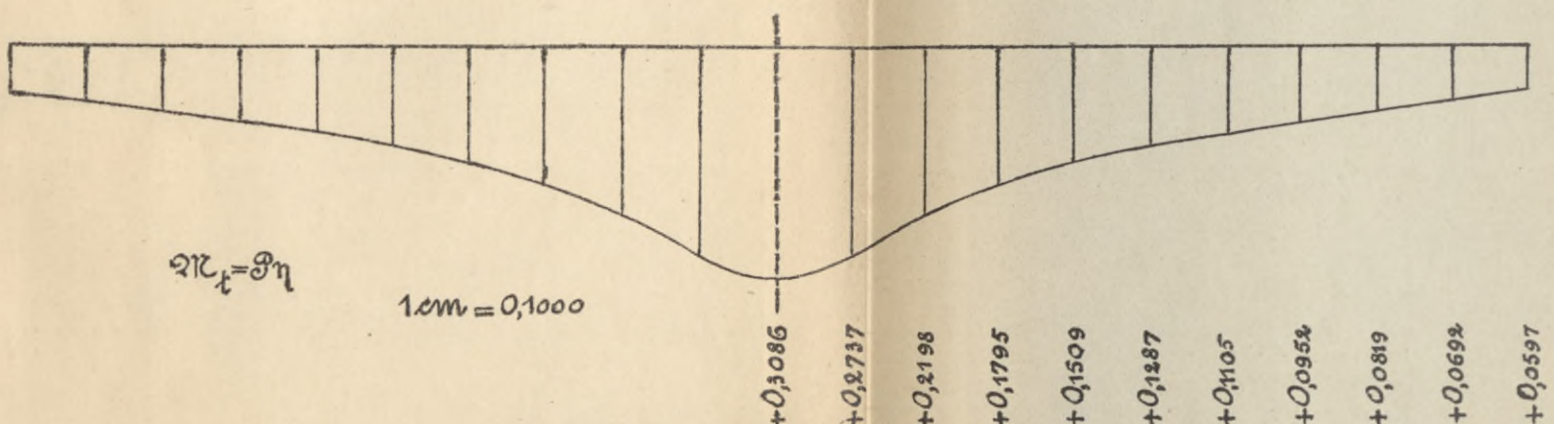


Die am ganzen Umfange frei aufliegende Platte mit einer Einzellast P in der Mitte.

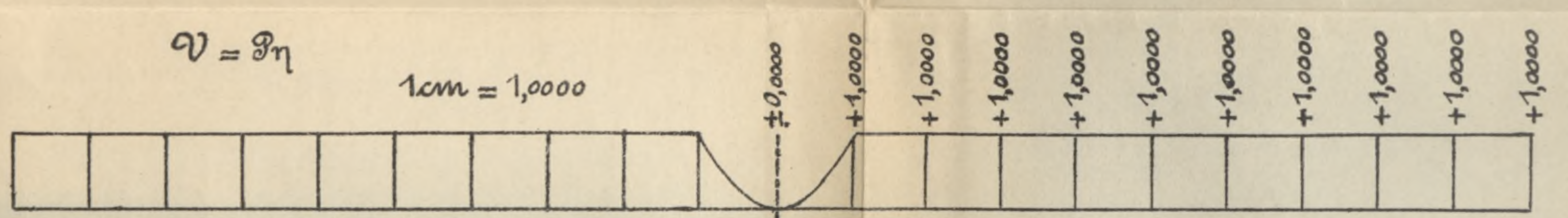
Das Radialmoment.



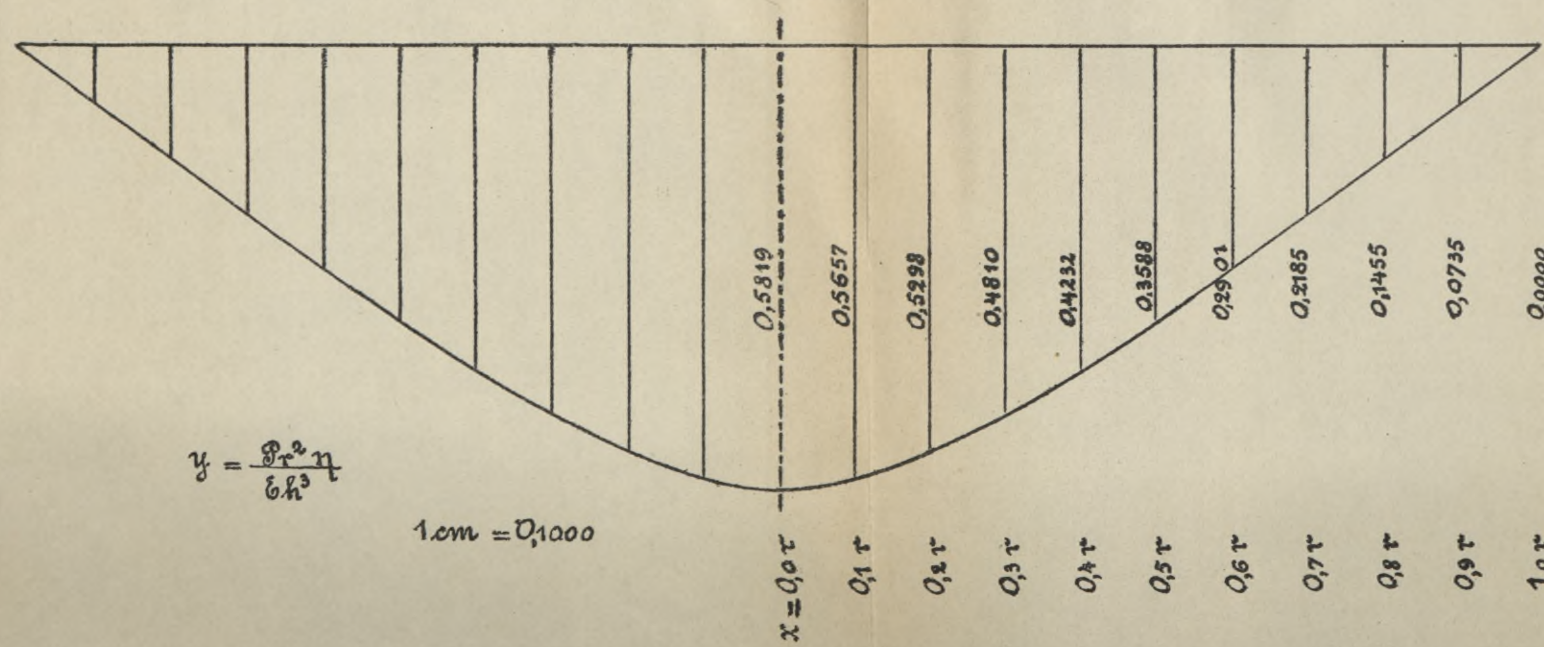
Das Tangentialmoment.



Die Querkraft.



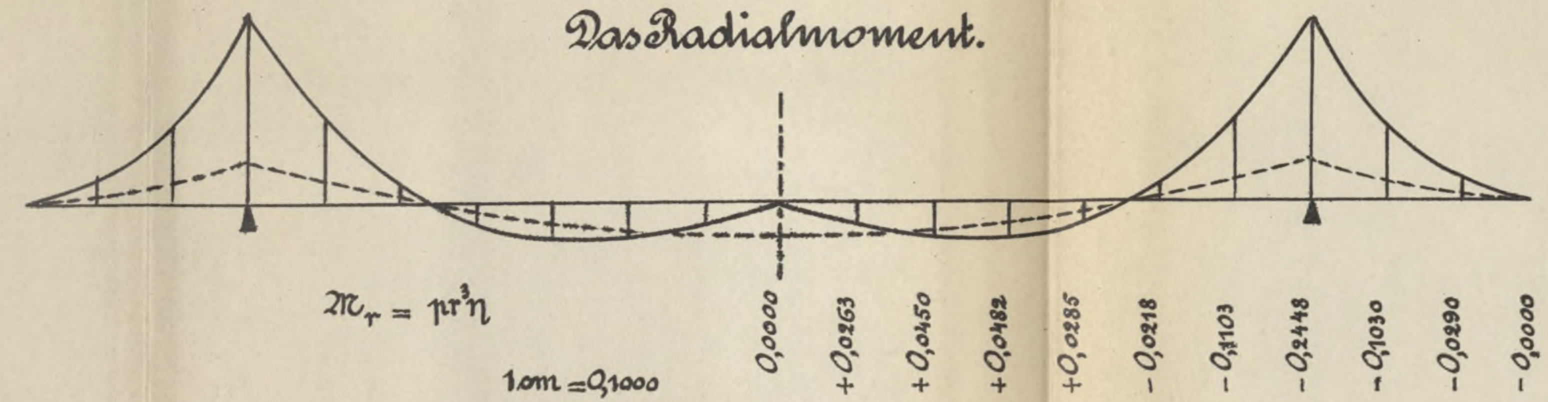
Die Biegelinie.



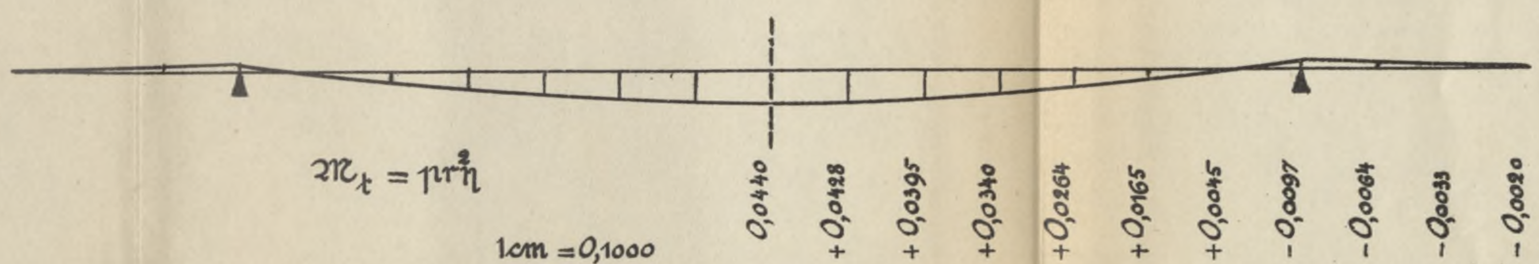
Die frei aufliegende Platte mit überstehendem Rande mit gleichmäßig verteilter Belastung p.

Breite des überstehenden Randes 3/10 Plattenhalbmesser.

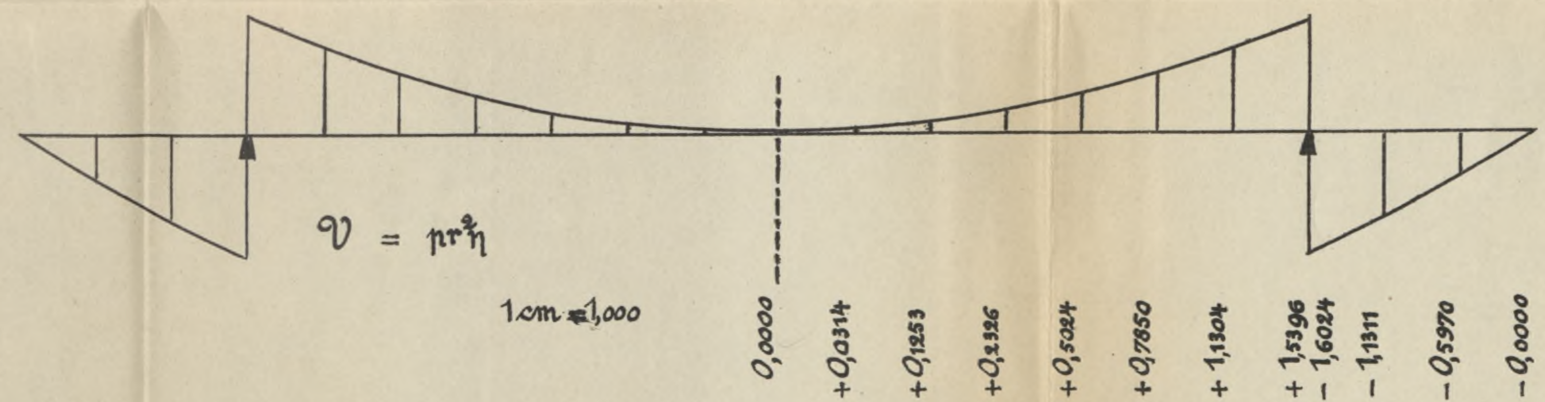
Das Radialmoment.



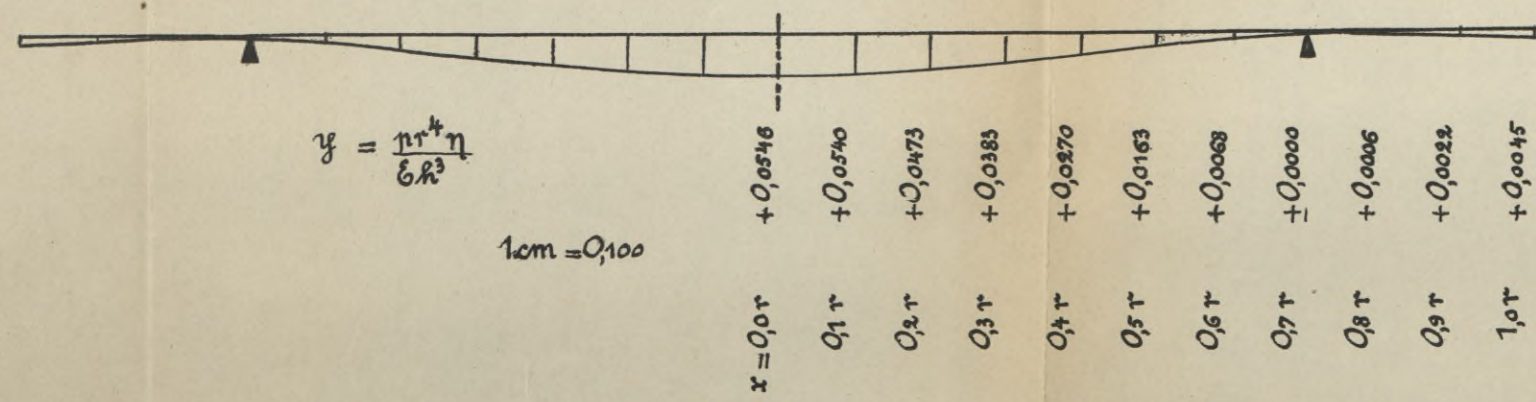
Das Tangentialmoment.



Die Querkraft.



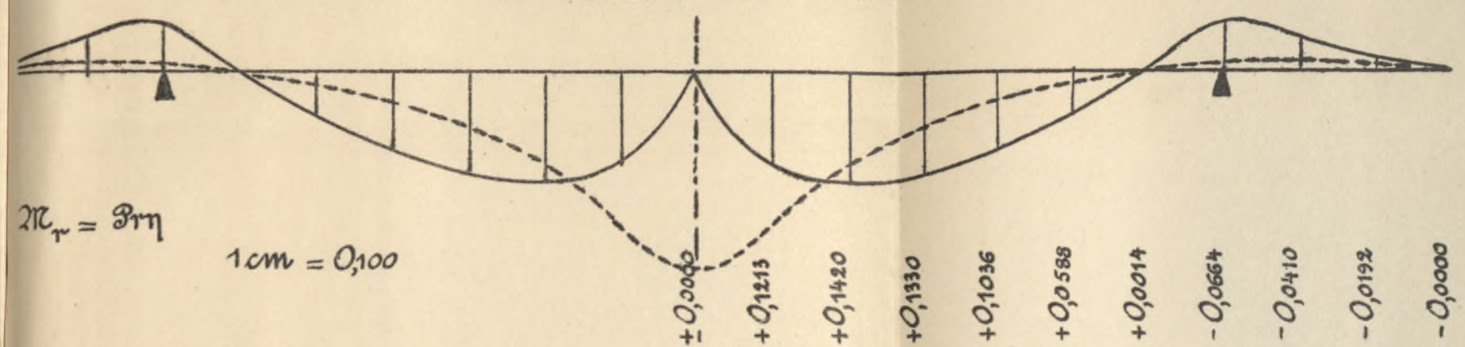
Die Biegelinie.



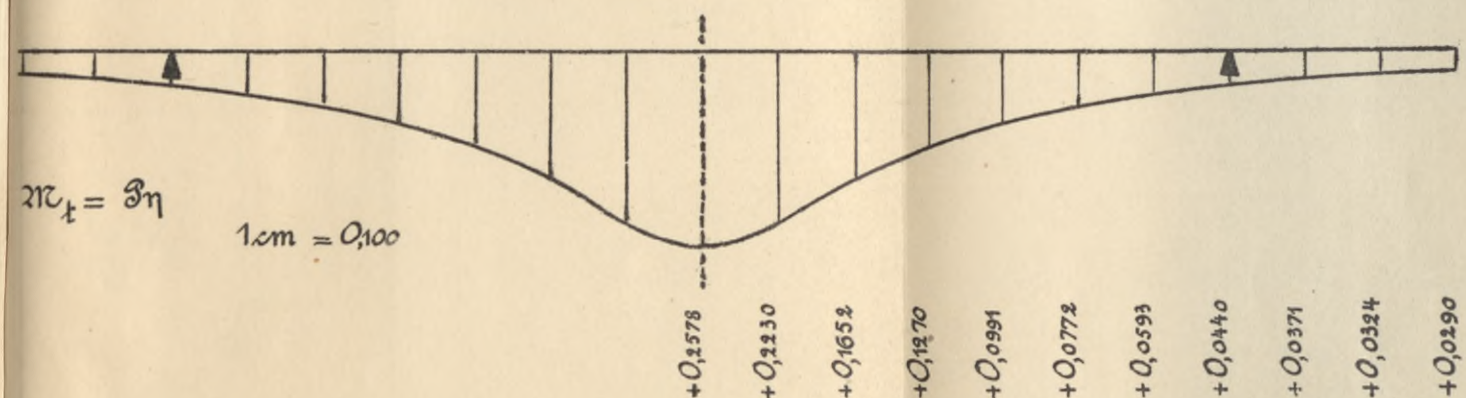
Die frei aufliegende Platte mit überstehendem Rande mit einer Einzellast P in der Mitte.

Breite des überstehenden Randes: 3/10 Plattenhalbmesser.

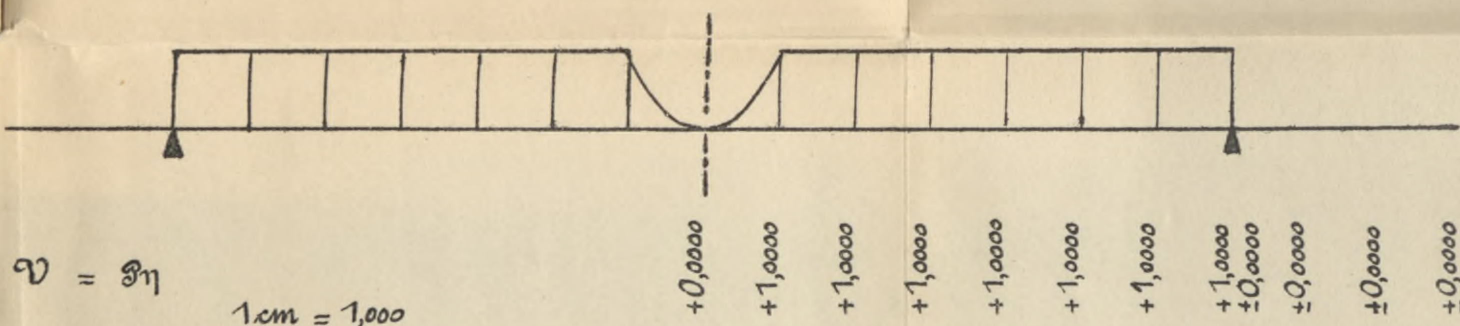
Das Radialmoment.



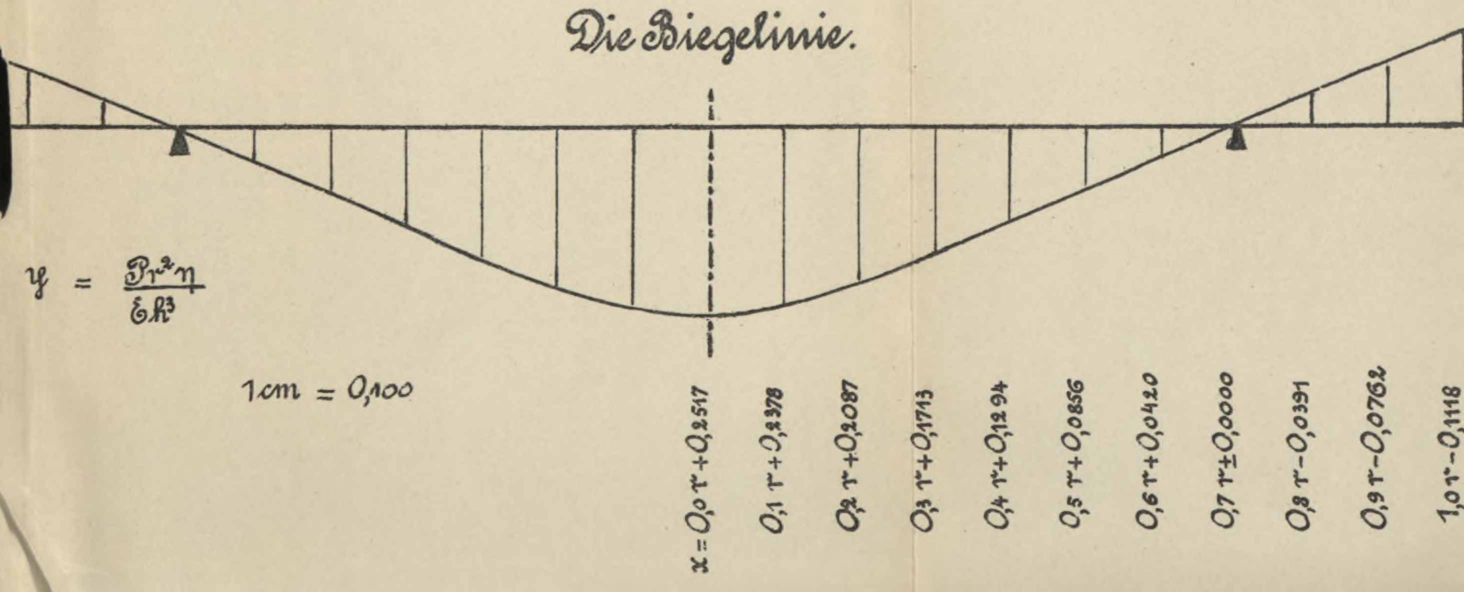
Das Tangentialmoment.



Die Querkraft.



Die Biegelinie.



Die durchweg elastisch gelagerte Platte mit einer Einzellast P in der Mitte.

Darstellung der Durchbiegungen

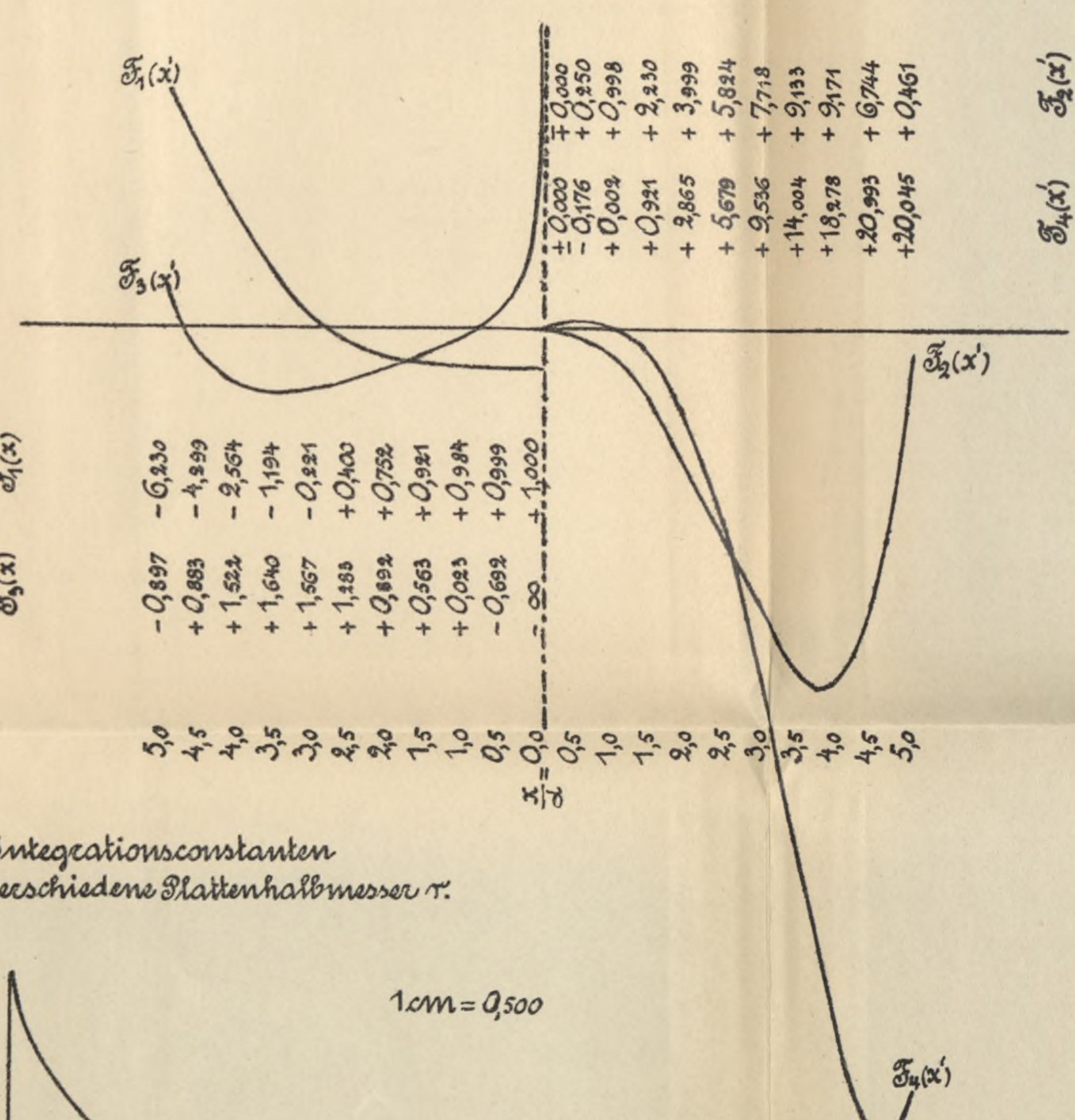
in der Form $y' = c_1 F_1(x') + c_2 F_2(x') + c_3 F_3(x') + c_4 F_4(x')$,

wobei $F_1(x')$, $F_2(x')$, $F_3(x')$, $F_4(x')$ die vier partikulären Integrale folgender Differentialgleichung darstellen:

$$\frac{d^4y'}{dx'^4} + \frac{2\,d^3y'}{x'\,dx'^3} - \frac{1\,d^2y'}{x'^2\,dx'^2} + \frac{1\,dy'}{x'^3\,dx'} + y' = 0.$$

Die vier partikulären Integrale $F_1(x')$ $F_2(x')$ $F_3(x')$ $F_4(x')$.

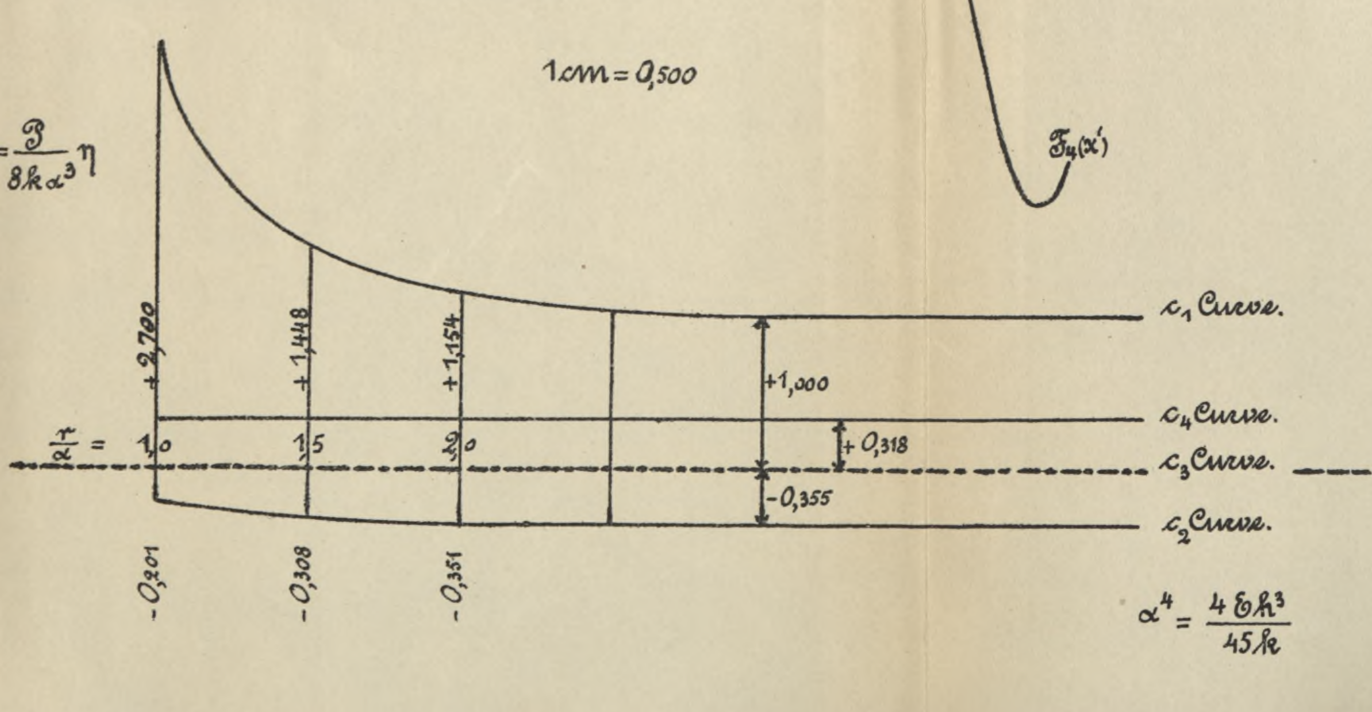
1cm = 2,000



Die vier Integrationsconstanten für verschiedene Plattenhalbmesser r.

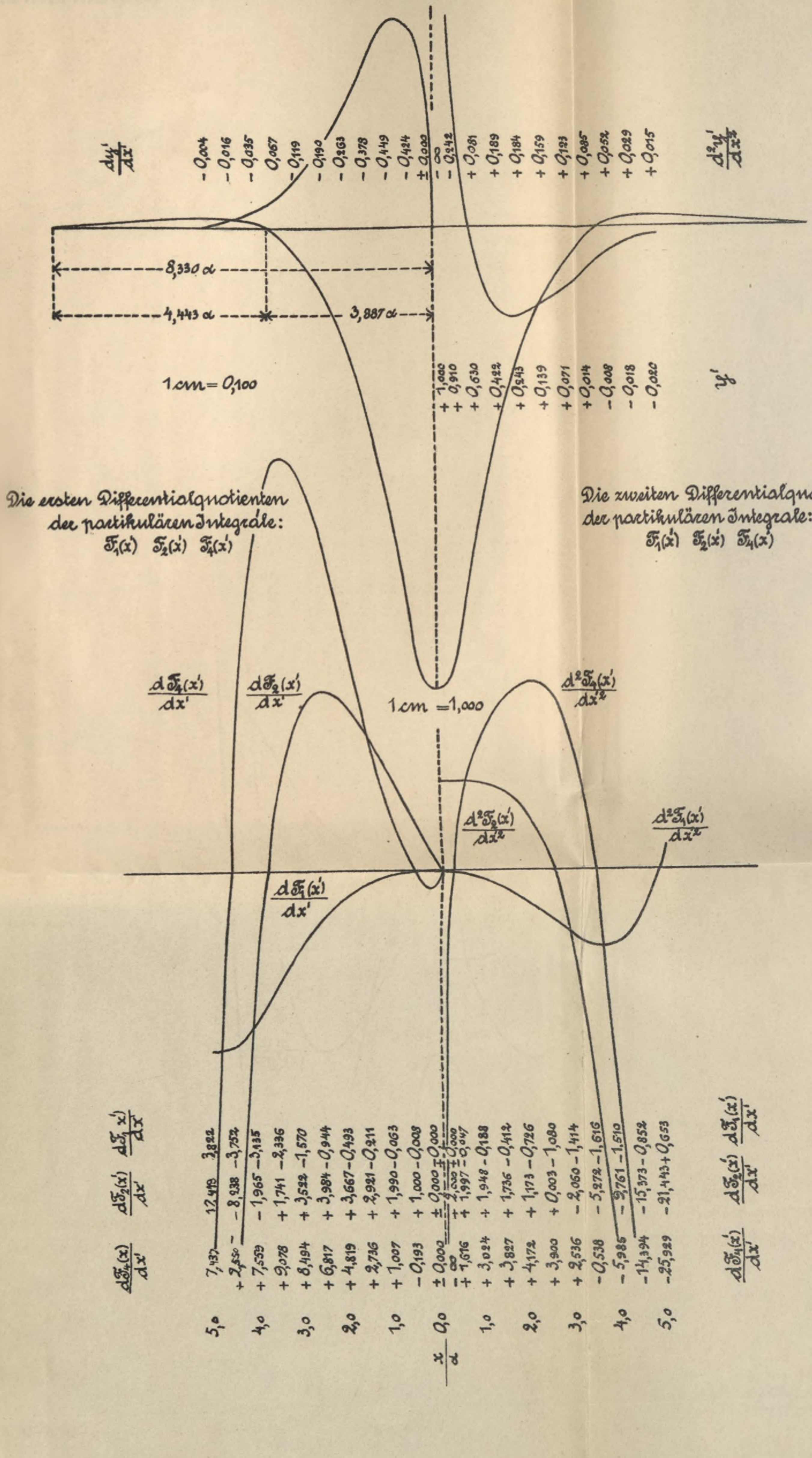
1cm = 0,500

$c = \frac{P}{8k\alpha^3}\eta$



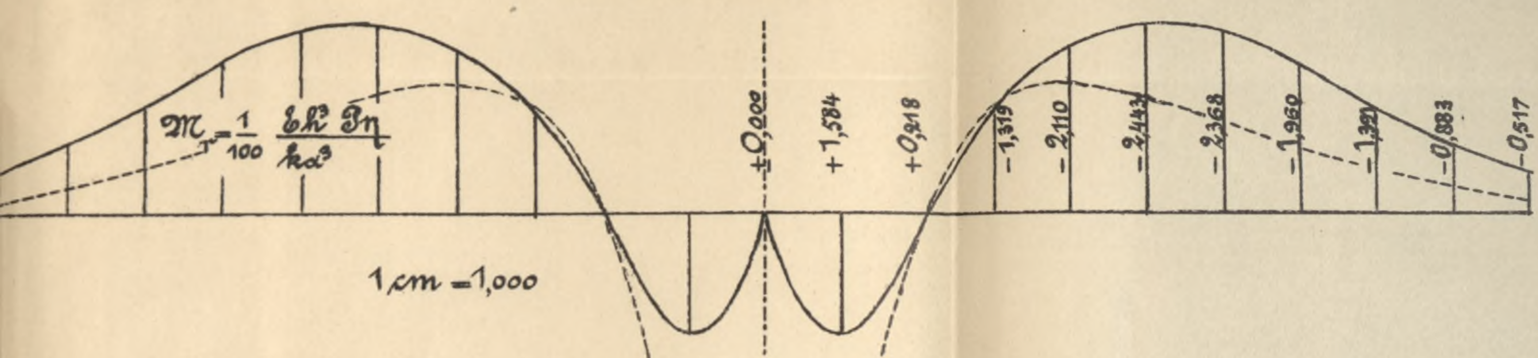
$$\alpha^4 = \frac{4Eh^3}{45k}$$

Die Durchbiegungen y' und deren beide ersten Differentialquotienten $\frac{dy'}{dx'}$ und $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ für die Platte mit unendlich grossem Halbmesser.

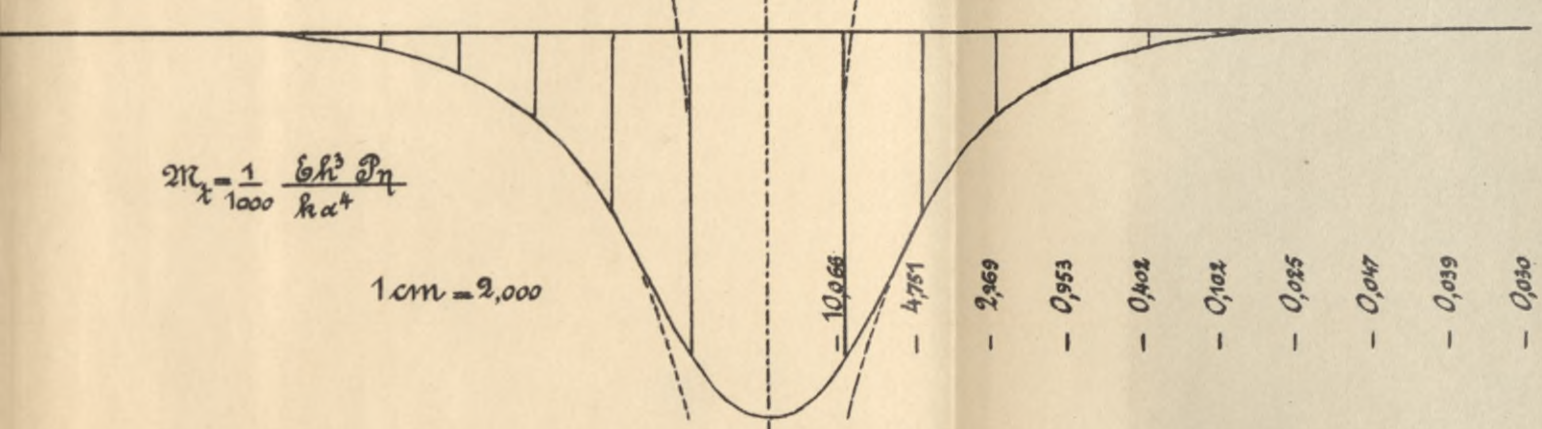


Die durchweg elastisch gelagerte Platte
mit unendlich grossem Halbmesser und mit einer Einzellast P in der Mitte.

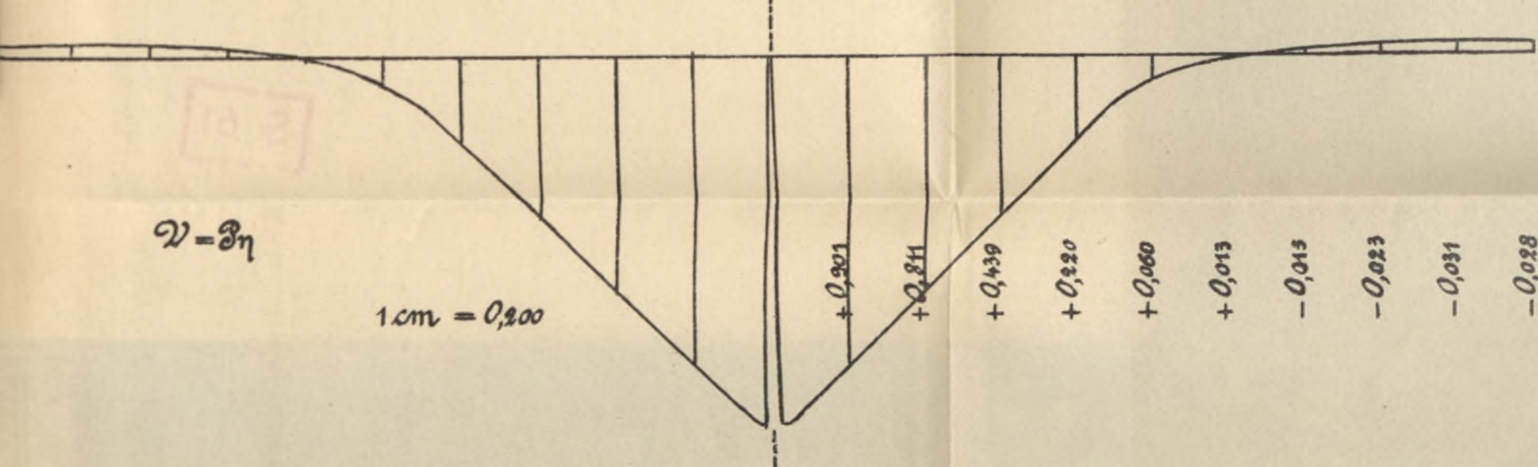
Das Radialmoment.



Das Tangentialmoment.



Die Querkraft.



Die Biegelinie.