Das Elektrische Potential

oder

Grundzüge der Elektrostatik.

Das

ELEKTRISCHE POTENTIAL

oder

Grundzüge der Elektrostatik.

Die neuere Theorie der elektrischen Erscheinungen in elementarer Darstellung.

Von

A. SERPIERI

Professor der Physik an der Universität und dem Lyceo Raffaello zu Urbino.

Aus dem Italienischen in's Deutsche übertragen von

Dr. R. v. Reichenbach.

Autorisirte Ausgabe.

Mit 44 Abbildungen.

WIEN. PEST. LEIPZIG.

A. HARTLEBEN'S VERLAG.

1884.

K. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme in Wien.

Aus der Vorrede des Verfassers.

— Es ist mir nicht bekannt, dass ein elementarer Cursus, eingerichtet nach den neuen Methoden und Ansichten, welche aus dem Begriffe und der Anwendung des elektrischen Potentials so vieles Licht ziehen und so fruchtbar sind an wichtigen, unerwarteten Folgerungen, bereits bei einer andern Nation zusammengestellt worden sei. Die Musterwerke, welche darüber die Herren Fleeming Jenkin, Brisse und André (1873), D'Almeida (1874), Abria (1876) und Blavier (1881) geliefert haben, entsprechen nicht dem Programme eines Schulcurses, während sie wohl offen beweisen, wie wünschenswerth und für nothwendig erachtet eine vollständige Arbeit dieser Art sei und wie es möglich sein müsse, solche auszufertigen, ohne daraus ein ganzes Gerüst von Differentialen und Integralen zu machen, wie es die staunenswerthen Abhandlungen von Maxwell, Wüllner, Mascart, Ferrini und Anderen sind und auch der schöne dem Cursus von Jamin und Bouty angehängte Grundriss. Es ist diese Art, gemeinfasslich zu werden zum Vortheil der Mittelschulen, noch nicht in weiterem Umfange angestrebt worden und zeigt sich darnach heute auch in Italien ein sehr lebhaftes Bedürfniss, wenn man nach den letzten an's Tageslicht gekommenen Lehrbüchern der Elementar-Physik urtheilen darf und insbesondere nach den bis jetzt erschienenen Theilen der Elemente von Roiti.

Mittlerweile habe ich hier am Lyceum von Urbino den Versuch gemacht, in den Unterricht von der Elektricität das ganze System der neuen auf dem Begriffe des elektrischen Potentials beruhenden Betrachtungen einzuführen und habe, nachdem ich mich durch die bei meinen Zuhörern erzielten Ergebnisse sehr befriedigt fand, den Entschluss gefasst, diejenigen wichtigsten Theile eines Elementar-Curses der Elektrostatik niederzuschreiben, welche mir gelungen war, gemäss den neueren Theorien vorzutragen, ohne andere mathematische Kenntnisse vorauszusetzen, als jene, welche in den ersten Jahrgängen des Lyceums beigebracht werden. So ist die gegenwärtige Abhandlung entstanden, welche ich nunmehr dem Drucke übergebe, in der Absicht, zur raschen und allgemeinen Durchführung der erwünschten Reform beim Unterrichte in der Elektricitätslehre Einiges beizutragen, einer Reform, welche den Studirenden der Naturwissenschaften sehr zu Statten kommen wird, weil die neuen Lehren, indem sie sich auf's innigste verknüpft zeigen mit den allgemeinen Theorien von der mechanischen und calorischen Energie, die bewundernswerthe Einheit aller Theile der Wissenschaft mächtig hervortreten lassen.

Ich vermag jedoch nicht zu verhehlen, dass ich wohl fühle, wie sehr mein Unternehmen ein grosses Wagniss ist, hauptsächlich wegen der Schwierigkeit des Versuches, die raschen und erfolgreichen Verfahren der Infinitesimal-Rechnung durch einfache geometrische oder algebraische Beweise zu ersetzen, wobei man sogar von irgend welcher Kenntniss der Trigonometrie absehen soll, nachdem diese im Lyceal-Unterricht nicht inbegriffen ist. Ausserdem musste ich manche Kenntnisse und Entdeckungen, weche nirgends beim Unterrichte an Mittelschulen vorkommen, herbeiziehen und die Gesammtheit aller dieser neuesten Theorien und Gesetze in eine wohlgeordnete Reihe bringen, so dass jeder Lehrsatz durch die ihm vorangehenden aufgehellt werde, wie in einer Kette geometrischer Beweise. Allein wenn auch dem gewagten Unternehmen meine schwachen Kräfte nicht ganz entsprechen sollten, so tröstet mich der Gedanke, dass in dem Maasse, wie die zahlreichen und grossen Schwierigkeiten, die ich zu überwinden hatte, so auch die Nachsicht wachsen werde, mit welcher mein Werk von den Sachkennern beurtheilt werden wird. Und schliesslich darf ich hoffen, dass aus meinem Beispiele Andere Anlass nehmen mögen, es besser zu machen und dass es so durch den Wetteifer vereinter und vervielfachter Arbeiten gelingen werde, dem gemeinsamen Wunsche entsprechend ein Elementar-Lehrbuch der Elektrostatik zu verfassen, welches der gegenwärtigen Schule würdig sei.

A. Serpieri.

Vorwort des Uebersetzers.

Das Original des vorliegenden kleinen Werkchens hat den Titel: „Il Potenziale Elettrico nell' insegnamento elementare della Elettrostatica. La moderna teoria dei fenomeni elettrici trattata in modo elementare per i Licei e gli Istituti Tecnici Italiani per A. Serpieri, Prof. di Fisica nella Università e nel Liceo Raffaello di Urbino. Milano 1882." Der Herr Verfasser unternahm die Bearbeitung desselben in der Absicht, die wichtige Lehre vom Elektrischen Potentiale zwar streng wissenschaftlich, aber zugleich so darzustellen, dass sie auch allen Jenen zugänglich würde, welche die Infinitesimal-Rechnung noch nicht kennen und allein mit der Elementar-Mathematik vertraut sind. Nachdem nun, unseres Wissens, bis jetzt kein Lehrbuch in deutscher Sprache vorhanden ist, welches diesen Gegenstand aus demselben Gesichtspunkte und gleich ausführlich behandelte, so ist der Herr Verleger gerne auf meinen Vorschlag eingegangen, durch Herausgabe einer Uebersetzung die deutsche Literatur mit der Arbeit eines ausländischen Gelehrten zu bereichern, welcher es verstanden hat, jener keineswegs leichten Aufgabe in so vorzüglicher Weise gerecht zu werden. Da übrigens für schöne Ausstattung und correcten Druck bestens gesorgt wurde, so darf das Studium dieses Buches namentlich allen denen empfohlen werden, welche sich dem Fache der Elektrotechnik widmen wollen; sowie es auch geeignet sein wird, zur Vorbereitung für höhere Studien die besten Dienste zu leisten.

Es lässt sich somit auch für diese deutsche Ausgabe des Werkes von Prof. Serpieri eine nicht minder freundliche Aufnahme erwarten, als solche dem italienischen Originale bereits zu Theil wurde.

R.

Inhalts-Verzeichniss.

Zehntes Capitel.

Von der Entladung der Condensatoren.

Eilftes Capitel.

Ladungen in Cascade.

Zwölftes Capitel.

Potentielle Energie der einfachen Conductoren und der Condensatoren.

Dreizehntes Capitel.

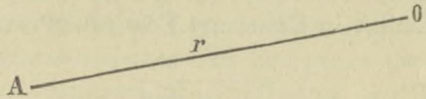
Potentielle Energie bei den unvollständigen Entladungen.

Erstes Capitel.

Definition des Potentials und seine Eigenschaften.

1. Es sei im Punkte O die elektrische Einheit ausgesetzt der anziehenden Wirkung der im Punkte A angesammelten Masse q, wobei die Entfernung $A\,O = r$ ist. Nimmt man als Einheit diejenige Kraft, womit die Masseneinheiten sich in der Einheit der Entfernung

Fig. 1.



anziehen, so haben wir nach dem Gesetze von Coulomb den Werth der auf den Punkt O ausgeübten Kraft ausgedrückt durch $\frac{q}{r^2}$, welcher negativ genommen zu werden pflegt, wenn, wie im gegenwärtigen Falle, Anziehung vorhanden ist, das heisst, ein Streben nach Verminderung der Entfernung zwischen den beiden wirkenden Massen, weshalb man schreibt

$$f = -\frac{q}{r^2}.$$

Im Falle von Abstossung müsste man setzen

$$f = +\frac{q}{r^2}.$$

Und es ist augenfällig, dass das Zeichen $+$ oder $-$ einfach sich ergiebt aus der Betrachtung der Massen mit den zugehörigen Zeichen.

Denken wir uns nun die Function

$$V = -\frac{q}{r}$$

nämlich das Product der beiden wirkenden Massen $-q$ und $+1$, getheilt durch ihre Entfernung. Diese Function, in die Wissenschaft eingeführt von G. Green, welcher sie Potential-Function nannte, wird heutzutage einfach das Potential des Punktes O genannt oder auch das Potential der elektrischen Kräfte in O. Ihre Bedeutsamkeit beruht hauptsächlich auf einer kennzeichnenden Eigenschaft, die sie besitzt und von der man aus dem Folgenden einen Begriff gewinnen kann.

Nehmen wir eine unendlich kleine Aenderung d in der Entfernung r an, welche sonach in $r + d$ umgeändert würde, wobei der Werth von d sowohl positiv als negativ sein kann, so wird man für die neue Lage der elektrischen Einheit in Bezug auf q das neue Potential haben

$$V' = -\frac{q}{r + d}$$

und der unendlich kleine Unterschied zwischen den Potentialen beider Punkte wird sein

$$V' - V = \frac{q}{r^2 + r\,d}\,d,$$

woraus folgt

$$\frac{V' - V}{d} = \frac{q}{r^2 + r\,d}$$

und weiter, wenn man zur Grenze übergeht und deshalb das Glied $r\,d$ neben r^2 vernachlässigt,

$$lim\,\frac{V' - V}{d} = \frac{q}{r^2} = -f,$$

ein Ausdruck, den wir von nun an kürzer schreiben werden, indem wir das Wort *limes* weglassen und die beiden Glieder des Verhältnisses als dem Verschwinden ganz nahe betrachten.

Fasst man ferner die Fälle von Anziehung und von Abstossung in einen zusammen und setzt in O die Masse m anstatt der einfachen elektrischen Einheit, so erhält man als Ausdruck des Potentials

$$V = \mp \frac{q\,m}{r}$$

und als Ausdruck der Kraft

$$\frac{V' - V}{d} = \pm \frac{q\,m}{r^2},$$

welcher beim Vergleich der Werthe von f zeigt, wie:

das Potential eine Function der Entfernung beider wirkenden Massen ist von der Art, dass das Verhältniss zwischen ihrer unendlich kleinen Aenderung und der entsprechenden unendlich kleinen Aenderung der Entfernung den Werth der Kraft ausdrückt, mit verwechseltem Zeichen.

Zusatz. In der Differenzial-Rechnung heisst jene Verhältnissgrenze zwischen den Zuwachsen der Function und der Veränderlichen die Ableitung der Function und wird hier, da r die Veränderliche ist, ausgedrückt durch

$$\frac{d\,V}{d\,r},$$

Benennungen und Symbole, welche als einfache Zeichen übereinkömmlich gebraucht werden, könnten, auch wenn man innerhalb der Grenzen der Elementer-Algebra verbleibt.*)

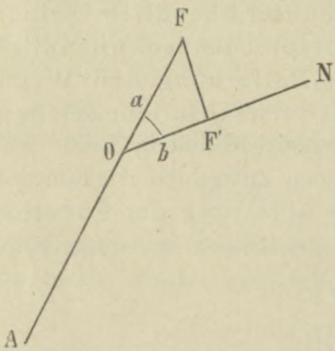
2. Die Eigenschaft, welche die Function V besitzt, nämlich der Grösse und Richtung nach die ganze Kraft zu liefern, erstreckt sich auch auf ihre Componenten oder Seitenkräfte.

Man zerlege die Kraft $O\,F$ nach den Seiten eines rechtwinkeligen Parallelepipedons, in welchem $O\,F$ die

*) Siehe Blavier, Des grandeurs électriques et de leur mesure etc. Paris 1881.

Diagonale sein wird. Bekanntlich ist jede Seitenkraft die Projection von OF auf die Richtungen der Seiten. Fällt man daher aus F die Senkrechte FF' auf die Richtung ON, so wird OF' eine der Seitenkräfte sein. Denken wir uns einen unendlich kleinen Zuwachs Oa in der Entfernung AO genommen, so dass das Potential, welches in O gleich V war, nunmehr V' in a werde. Beschreibt man mit dem Radius Aa einen Bogen, welcher OF' in b trifft, so wird V' noch das Potential des Punktes b sein. Setzen wir $Oa = d$, $Ob = e$, und nehmen ab als rechtwinkelig und senkrecht in a, so werden wir aus den beiden ähnlichen Dreiecken Oab, $OF'F$ erhalten

Fig. 2.



$$OF : OF' = e : d$$

und, indem wir für OF seinen Werth nach § 1

$$OF = -\frac{V' - V}{d}$$

einsetzen, wird sich ergeben

$$OF' = -\frac{V' - V}{e},$$

das heisst: das Verhältniss zwischen der unendlich kleinen Aenderung des Potentials und einem unendlich kleinen, auf der Richtung der Seitenkraft genommenen, Elemente ist gleich dem Werthe dieser Seitenkraft (Componente) mit verwechseltem Zeichen. Was natürlich ebenso gilt für jede der drei Seiten des genannten rechtwinkeligen Parallelepipedons.

Zusatz. Bezeichnet man x, y, z die drei durch jene Seiten des Parallelepipedons bestimmten Richtungen und bedient sich der im vorigen Zusatze angedeuteten

Benennungen und Symbole, so lassen sich die soeben angeführten Verhältnisse darstellen durch

$$\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz},$$

worin dx, dy, dz sehr kleine Stücke von Abschnitten bedeuten, welche in den Richtungen x, y, z liegen.

3. Dasselbe im Falle von mehreren wirkenden Massen.

Es befinden sich in den Punkten A, B, C . . . die elektrischen Massen (Fig. 3)

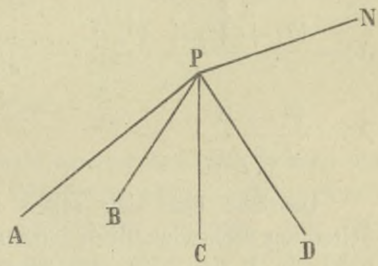
$$q', q'' q'''$$

in den Entfernungen

$$r', r'', r'''$$

von einem Punkte P, in welchem die elektrische Einheit den Wirkungen jener Massen unterworfen ist. Wir haben sodann in P die besonderen Potentiale

Fig. 3.



$$V_a = \frac{q'}{r'}, V_b = \frac{q''}{r''}, \ldots\ldots$$

und das ganze Potential

$$V = \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \frac{q'''}{r'''} + \ldots\ldots$$

welches man auszudrücken pflegt durch

$$V = \Sigma \frac{q}{r}$$

oder auch, wenn in P die Masse m sich befindet anstatt der blossen Einheit,

$$V = m \Sigma \frac{q}{r}.$$

Betrachtet man abgesondert und nacheinander ein jedes der genannten Potentiale, so wird man, wie im vorigen Paragraph, erhalten:

$$\frac{V'_a - V_a}{e}, \quad \frac{V'_b - V_b}{e}, \quad \frac{V'_c - V_c}{e}$$

für die Werthe der Componenten oder Seitenkräfte (mit verwechseltem Zeichen) in irgend einer Richtung PN, wo e ein unendlich kleines Element, in dieser Richtung genommen, ist, und ihre Summe wird der Werth sein von der ganzen Seitenkraft, welche wir X nennen wollen, welche in der erwähnten Richtung von den gleichzeitigen Wirkungen der Massen q', q'', q''' ..... hervorgebracht wird.

Demnach ist

$$X = \frac{V'_a + V'_b + V'_c + \ldots - V_a - V_b - V_c - \ldots}{e}$$

$$X = \frac{V' - V}{e}.$$

Dasselbe lässt sich sagen für die beiden anderen Seiten des rechtwinkeligen Parallelepipedons, welches eine Ecke in P hat und eine Seite in der Richtung PN. Daraus ergiebt sich, dass im Falle eines zusammengesetzten Potentials $\Sigma \frac{q}{r}$ der Werth der ganzen Seitenkraft nach einer gegebenen Richtung erhalten wird, indem man für jedes Potential die Operation wiederholt, welche für den Fall eines einfachen Potantials angegeben wurde und sodann die Ergebnisse summirt. Deshalb wird das Potential, mag es nun aus einem einzigen Gliede oder aus mehreren Gliedern hervorgehen, zu den Werthen der Seitenkräfte immer die nämliche Beziehung beibehalten.

Zusatz. Benutzte man die im vorigen Zusatze angezeigten Symbole, so würden die Summen der Seitenkräfte nach den Richtungen x, y, z auszudrücken kommen durch

$$X = -\left(\frac{d V_a}{d x} + \frac{d V_b}{d x} + \ldots\ldots\right)$$

$$Y = -\left(\frac{d V_a}{d y} + \frac{d V_b}{d y} + \ldots\ldots\right)$$

$$Z = -\left(\frac{d V_a}{d z} + \frac{d V_b}{d z} + \ldots\ldots\right)$$

oder einfacher, da, wie oben,

$$V = V_a + V_b + V_c + \ldots\ldots$$

ist, durch

$$X = -\frac{d V}{d x}$$

$$Y = -\frac{d V}{d y}$$

$$Z = -\frac{d V}{d z}.$$

4. Potential eines Conductors. Das Elektricum, welches sich auf der Oberfläche eines Leiters befindet, bringt selbst auch ein bestimmtes Potential auf allen Punkten der Oberfläche hervor, sowie auf den inneren und äusseren Punkten, und das Potential was immer eines Punktes wird die Summe sein aller auf diesem Punkte von den unbestimmten Elementen der Oberfläche erzeugten Potentialen.

Nennen wir

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \ldots\ldots$$

alle die Elemente der Oberfläche und bezeichnen wir die elektrischen Dichtigkeiten beziehungsweise mit

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \ldots\ldots,$$

so dass die elektrischen Massen, welche sich in den genannten Elementen befinden, sein werden

$$\sigma_1 \mu_1, \sigma_2 \mu_2, \sigma_3 \mu_3, \sigma_4 \mu_4 \ldots\ldots$$

Demnach wird an irgend einem Punkte, welcher die Entfernungen

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots\ldots$$

von den verschiedenen Punkten jener Oberfläche haben mag, das Potential sein

$$V = \Sigma \frac{\sigma \mu}{r}.$$

Folgesatz. Nähern wir einem elektrisirten Körper A einen andern mit der nämlichen Art Elektricität geladenen Körper B, so wird sich augenblicklich das Potential aller Punkte von A erhöhen, weil dem eigenen Werthe V dieser Punkte eine andere Summe von Gliedern gleichen Zeichens, wie die ersten, hinzugefügt wird. Aber wenn B die entgegengesetzte Elektricität von A hätte, würde das Potential des letzteren abnehmen, weil die hinzugefügten Glieder von entgegengesetztem Zeichen sind.

5. Das Potential in Bezug auf das Gleichgewicht. Nachdem (§§ 1, 2, 3) die auf einen Punkt in irgend einer Richtung wirkende Kraft proportional ist der Differenz zwischen dem Potentiale dieses Punktes und dem Potentiale des benachbarten Punktes nach der Richtung, in welcher man sich die Kraft wirkend denkt, so folgt nothwendig, dass, wenn ein Punkt dasselbe Potential hat, wie alle ihn umstehenden Punkte, demselben jede Kraft abgehen wird, um sich nach irgend einer Richtung zu bewegen; und umgekehrt, damit in einem Punkte jede Kraft auf Null herabsinke und jede Verrückung eines elektrischen Moleküls unmöglich werde, wird nothwendig sein, dass dieser Punkt und alle ihn umstehenden Punkte ein gleichartiges oder identisches Potential haben.

In der That, hätte einer der umliegenden Punkte ein abweichendes Potential, so würde die in der Geraden, welche ihn mit dem ersten verbindet, thätige Kraft wirksam verbleiben. Sobald nun das Elektricum in einem Leiter zu einem vollkommenen Gleichgewichte gelangt ist, bewegt sich kein Molekül mehr, weder eines von jenen, welche die neutrale noch nicht zerlegte Elektricität bilden, noch eines von jenen, welche die freie Elektricität bilden; kein Molekül geht von der Oberfläche in's Innere, noch aus dem Innern zur Oberfläche, noch von einem Punkte der Oberfläche zu einem andern derselben.

Folglich, wann das Elektricum an einem Conductor im Gleichgewichte ist, giebt es ein constantes Potential an allen Punkten desselben; und ebenso, wann ein elektrisirter Conductor an allen Punkten ein constantes Potential hat, befindet sich seine Elektricität nothwendig im Zustande des Gleichgewichtes.

Diese Lehrsätze lassen die besondere Wichtigkeit der charakteristischen Eigenthümlichkeiten des Potentials erkennen, wie solche in den §§ 1, 2, 3 erklärt sind. Und wenn wir erwägen, wie verschiedenartig die Zustände der verschiedenen Punkte eines elektrisirten Körpers sein mögen, welcher Elektricum an seiner Oberfläche besitzt und innerhalb nicht, welcher sehr wechselnde Dichtigkeiten an wechselnden Punkten der Oberfläche hat und auch, in Folge von Induction, mit Ladungen von entgegengesetzten Zeichen behaftet sein kann, so begreifen wir leicht, wie beachtenswerth die Eigenschaft des Potentials sei, sich einer so grossen Mannigfaltigkeit von Dingen mit einem bestimmten und beständigen Werthe auf allen Punkten des Körpers anzupassen. So weiss man z. B., dass an einem Körper von ellipsoidischer Gestalt die bezüglichen elektrischen Dichtigkeiten an den Enden der beiden Axen proportional sind dem Werthe derselben Axen; aber, wie gross immer deren Unterschied sein mag, haben doch alle Punkte ein gleiches Potential, sowohl an der Oberfläche als im inneren Raume, wo die Elektricität noch im neutralen Zustande vorhanden ist.

6. Das Potential in Bezug zur Ladung. Der Ausdruck (§ 4)

$$V = \Sigma \frac{\sigma \mu}{r}$$

zeigt, dass man durch Multipliciren aller zugehörigen Dichtigkeiten der einzelnen Elemente der Oberfläche eines gegebenen Körpers mit einer Zahl n ein neues Potential erhalten wird, das n-mal grösser ist als das vorige; das heisst, durch Auflegen anderer gleicher und gleichmässig vertheilter Ladungen auf die erste Ladung wächst das Potential im Verhältnisse von deren Anzahl. Also allgemein: das Potential eines gegebenen Leiters wächst im Verhältnisse seiner Ladung.

Es besteht sonach eine unmittelbare Beziehung zwischen dem Potentiale eines gegebenen Körpers und seiner Ladung und es scheint sich die grösste Analogie herauszustellen zwischen dem Potentiale und der Temperatur hinsichtlich der Quantitäten von Elektricum und von Caloricum, da wo es sich um einen bestimmten Körper handelt. Aber für verschiedene Leiter hört die genannte Abhängigkeit und Verhältnissmässigkeit auf, und ein Leiter, welcher eine geringere Ladung hat als ein anderer, kann sich auf einem höheren Potential befinden als der andere.

Es wird schliesslich gut sein, zu bemerken, dass in dem soeben nachgewiesenen Gesetze folgender Hauptsatz inbegriffen ist: Zwei oder mehr Ladungen von der Art, dass sie sich einzeln auf einem Conductor im Gleichgewichte zu halten vermögen, stehen noch im Gleichgewichte, auch wenn sie sich zusammen darauf befinden. Dieser Hauptsatz, welchen man den von der Uebereinanderlagerung der Gleichgewichte nennt, hat sehr mannigfache und ausgedehnte Anwendung. Derselbe lässt sich in allen Fällen hinreichend rechtfertigen und einleuchtend machen durch die einfache Erwägung, dass bei jeder der Gleichgewichtsarten, welche sich übereinander gelagert denken lassen, alle Kraft, welche die Vertheilungsweise des Elektricums zu ändern strebt, wirklich gleich Null ist.

7. Elektrischer Verkehr. Potential der Erde. Daraus, dass die Beständigkeit des Potentials in allen Theilen eines Körpers eine wesentliche Bedingung des Gleichgewichtes ist, folgt weiter, dass, wo verschiedene Potentiale sind, die Elektricität sich in Bewegung setzen wird, um eine neue Art der Vertheilung anzunehmen. Wenn also zwei Körper von verschiedenem Potentiale da sind, unabhängig voneinander, weil zu entfernt, als dass der eine inducirend auf den andern wirken könnte, und man verbindet sie mit einem dünnen Metalldrahte, welcher sie gleichsam zu einem einzigen Körper macht, so wird das Elektricum sich von dem einen zum andern bewegen müssen, bis ein solcher neuer Bestand der Dichtigkeiten herausgebildet ist, der in ihnen ein gleichartiges und gemeinschaftliches Potential bedingt. Aber das Potential sinkt in einem gegebenen Körper mit Verminderung der Ladung (§ 6); folglich wird das Elektricum vom Körper von höherem Potentiale weggehen zu dem von niedrigerem Potentiale. Indem so zur selben Zeit das erste sinkt und das zweite steigt, wird es bald dahin kommen, dass beide gleich geworden sind. Bei diesem Punkte ist das Gleichgewicht hergestellt und hört jede Bewegung auf.

Dasselbe geschieht natürlich auch bei den verschiedenen Theilen eines gegebenen Körpers, welche auf verschiedene Potentiale gebracht sind, oder bei den nicht elektrisirten Körpern, welche man mit einer constanten Elektricitätsquelle in Verbindung setzt. Wenn ein Körper im neutralen Zustande in Verbindung gebracht wird mit einem elektrisirten ellipsoidischen Körper (§ 5), wird er demzufolge dasselbe Potential erlangen, an welchem Punkte des Ellipsoides immer man den Draht, der sie verbindet, anbringen mag, obgleich die verschiedenen Punkte des Ellipsoides verschiedene Dichtigkeiten haben.

Aus diesen Betrachtungen wird es deutlich, wieso eine grosse Analogie bestehe zwischen den elektrischen Potentialen und den hydrostatischen Drücken flüssiger Massen in communicirenden Gefässen, wovon die Gleichbedeutung von Potential mit Potentialhöhe oder elektrischer Höhe herkommt. Und es bewahrheitet sich, wieso das Potential zum Elektricum dieselbe Beziehung habe, welche die Temperatur hat zum Caloricum (§ 6). „Elektricität, Flüssigkeiten, Caloricum, sie sind sämmtlich bestrebt, von einem Orte zu einem andern überzugehen, wenn das Potential, der Druck, die Temperatur grösser sind am ersten Orte als am zweiten" (Maxwell).

Folgesatz. Es ist eine Thatsache, dass, wenn ein mit positiver oder negativer elektrischer Masse beladener Körper in Verbindung mit der Erde gebracht wird, derselbe alsdann kein Zeichen von elektrischer Thätigkeit mehr von sich giebt. Nachdem nun nach § 6 das Potential des Körpers

$$V = \Sigma \frac{\sigma \mu}{r}$$

ist, so urtheilen wir, dass es auf Null herabgehe, weil jeder Theil $\sigma \mu$ von seiner Ladung verschwunden ist, und da wir ferner wissen, dass die in Verbindung stehenden Körper gleiche Potentiale annehmen, so urtheilen wir, dass auch das Potential der Erde gleich Null sei. Es ist aber auch eine Thatsache, dass, wenn zwei entfernte Punkte der Erdoberfläche z. B. durch Telegraphendrähte miteinander in Verkehr gesetzt werden, man oft in diesen Drähten einen Strom von Elektricum hat, der von einem Punkte zum andern geht und den Potential-Unterschied beider Punkte offenbart; und ferner giebt es bei der Annäherung zweier Körper, welche im neutralen Zustande zu sein scheinen, Erscheinungen von gegenseitiger Induction dann, wenn man an der freien Luft experimentirt.

Um diese Thatsachen unter sich in Uebereinstimmung zu bringen, wird man voraussetzen dürfen, dass weite Strecken der Erdoberfläche ein gegebenes Potential gemeinschaftlich haben, welches von allen in diesem Raume zur Erde geleiteten Körpern angenommen wird, in welchen daher jede elektrische Bewegung und jede bezügliche Erscheinung gehemmt bleibt. Sonach würde das wahrnehmbare Potential eines Körpers ein relatives Potential sein, d. h. ein Ueberschuss oder Abgang an seinem absoluten Potentiale, in Bezug auf jenes, welches die Erde an dem Beobachtungsorte hat. Fleeming Jenkin schreibt: „Wenn man vom Potential eines Körpers oder eines Punktes spricht, so will man damit den Unterschied bezeichnen zwischen dem Potentiale des Körpers oder des Punktes und dem der Erde."

8. Mechanische Bedeutung des Potentials. Das Potential lässt sich auch in ganz mechanischem Sinne auffassen.

Nehmen wir in A eine Masse q an, welche die elektrische Einheit, die sich in O befindet, durch OP fortschiebe oder zurücktreibe. Bei dieser Bewegung leistet die elektrische Einheit eine Arbeit, welche sich in der Regel deutlich kundgiebt durch das Caloricum, welches erregt wird, sobald das durchlaufene Mittel einen merkbaren Widerstand leistet, wie es auch in einem Metalldrahte vorkommt; und diese Arbeit wird naturgemäss gemessen durch das Product der Kraft in dem durchlaufenen Raum. Nachdem aber die Kraft beständig wechselt mit dem Wechseln der Entfernung, so wird die ganze Arbeit sich auswerthen lassen, indem man die in unendlich kleinen einander folgenden Zeittheilchen gethanen Arbeiten, innerhalb deren jeder die Kraft als constant angesehen werden darf, summirt. Zu diesem

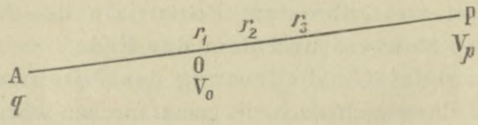
Ende theile man die Strecke $O\ P$ in unendlich kleine Abschnitte, wobei r_1 die Entfernung von O bis A, und $r_2\ r_3\ r_4 \ldots.$ die Entfernungen der folgenden Theilungspunkte von A sind. An den Enden des ersten Abschnittes hat man die Kräfte

$$\frac{q}{r_1^{\,2}},\ \frac{q}{r_2^{\,2}},$$

und ihre Mittlere, welche man an Stelle der veränderlichen Kraft setzen kann für die ganze Zeit, wo die elektrische Einheit diesen ersten Abschnitt durchläuft, wird sein

$$\frac{1}{2}\ q\left(\frac{r_2^{\,2} + r_1^{\,2}}{r_1^{\,2}\ r_2^{\,2}}\right)$$

Fig. 4.



welche, wenn man im Zähler $r_2 = r_1 + d$ setzt, entwickelt und d^2 vernachlässigt, sich ausdrücken lässt durch

$$q\,r_1\left(\frac{r_1 + d}{r_1^{\,2}\ r_2^{\,2}}\right) = \frac{q}{r_1\ r_2}.$$

Eine ähnliche mittlere Kraft wird man erhalten für alle einander folgenden Abschnitte, wonach die einander folgenden auf denselben geleisteten Arbeiten sein werden

$$\frac{q}{r_1\ r_2}\,(r_2 - r_1) = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$$

$$\frac{q}{r_2\ r_3}\,(r_3 - r_2) = \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_3}$$

. . . .

$$\frac{q}{r_{p-1}\ r_p}\,(r_p - r_{p-1}) = \frac{q}{r_{p-1}} - \frac{q}{r_p},$$

welche summirt die ganze gesuchte Arbeit geben, oder

$$L = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_p},$$

wo augenscheinlich die Glieder $\frac{q}{r_1}, \frac{q}{r_p}$ die Potentiale der Punkte O, P sind; daher wird sich die Arbeit, welche von der elektrischen Einheit beim Laufen von O bis P, unter Einwirkung der Masse q vom Punkte A aus, geleistet wird, ausdrücken lassen durch

$$L = V_o - V_p.$$

Daraus der Lehrsatz:

Die Potential-Differenz zweier Punkte entspricht der Arbeit, welche von der herrschenden elektrischen Kraft geleistet würde beim Zurücktreiben der elektrischen Einheit vom höheren Potentialpunkte zum niedrigeren Potentialpunkte.

Und da man sich den Punkt P in unendlicher Ferne denken kann, in welchem Falle sein Potential V_p gleich Null wird, so ergiebt sich weiter, dass das Potential irgend eines Punktes gleich ist der Arbeit, welche von der herrschenden elektrischen Kraft geleistet würde beim Zurücktreiben der elektrischen Einheit von diesem Punkte an in unendliche Ferne.

Da ausserdem die Arbeit, welche man leisten müsste, um die elektrische Einheit durch dieselbe Entfernung in entgegengesetzter Richtung fortzutreiben, der vorigen gleich ist, so wird man ebenso sagen dürfen: Das Potential eines Punktes ist gleich der Arbeit, welche man auf die elektrische Einheit verwenden muss, um sie aus unendlicher Ferne bis dem genannten Punkte zu bringen, unter Ueberwindung der herrschenden elektrischen Kraft.

Es wird ferner gut sein, zu beachten, dass, wie das Potential in unendlicher Ferne Null ist, so auch das Potential der Erde (§ 7, Zusatz) mit Null zu bewerthen ist; und deshalb pflegt man ebensowohl zu sagen, dass das Potential eines Punktes der Arbeit gleich ist, welche unter der Einwirkung der herrschenden Kräfte die elektrische Einheit verrichten würde, um sich von diesem Punkte aus in die Erde zu entladen.

Diese Lehrsätze lassen sich nach Fleeming Jenkin*) in folgenden Definitionen zusammenfassen: „Die Potential-Differenz zweier Punkte A und B entspricht der Arbeit, welche erfordert wird, um die elektrische Einheit der Abstossung von A nach B entgegen zu bewegen; oder auch, was dasselbe ist, sie entspricht der Arbeit, welche die elektrische Einheit leisten würde, während sie von B nach A getrieben wird, ... kurz, der Arbeit, welche auf die elektrische Einheit oder von der elektrischen Einheit zu verrichten ist, bei ihrem Uebergange von dem einen Punkte zum andern . . . . . Und das Potential eines Punktes misst sich an der Arbeit, welche die positive Elektricitätseinheit vollbringt, indem sie von diesem Punkte zur Erde übergeht."

9. Allgemeiner Beweis desselben. Der oben gegebene Beweis, welcher sich auf den möglich einfachsten Fall bezieht, wie es der einer einzigen auf die elektrische Einheit wirkenden Masse q ist, stellt den Begriff, um dessen Erläuterung es sich handelt, hinreichend in's Klare. Für Fälle aller Art wird aber der folgende Beweis dienen.

Es seien in den Punkten O und P die Potentiale V_o, V_p hervorgebracht von den elektrischen Massen

$$q', q'', q''' \ldots\ldots$$

welche concentrirt sind in den Punkten

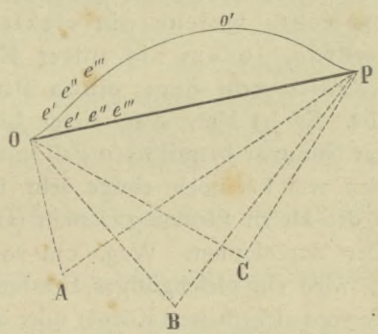
$$A, B, C \ldots\ldots$$

*) Treatise of Electricity and Magnetism. London.

Die elektrische Einheit, welche sich in O befindet, mag von O nach P getrieben werden vermöge einer Reihe von aufeinander folgenden Seitenkräften (Componenten), welche entweder alle nach $O\,P$ gerichtet sind, oder verschiedentlich geneigt, in der Art, dass sie die Elemente einer krummen Bahn, wie $O\,O'\,P$ bilden. In jedem Falle werden wir, nachdem die Bahn in eine unbestimmte Zahl sehr kleiner Seiten

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\ \ldots\ldots$$

Fig. 5.



abgetheilt und die Potentiale, welche an den äusseren Enden derselben statthaben, durch

$$V_o,\ V_1,\ V_2,\ V_3\ \ldots\ldots\ V_p$$

dargestellt sind, für die nacheinander folgenden Werthe der Seitenkräfte haben (§ 3)

$$f = \frac{V_o - V_1}{e_1},\ f_1 = \frac{V_1 - V_2}{e_2},\ f_2 = \frac{V_2 - V_3}{e_3}\ \ldots\ldots.$$

und folglich für die zugehörigen Elementar-Arbeiten die Ausdrücke

$$\begin{aligned} f \times e_1 &= V_o - V_1 \\ f_1 \times e_2 &= V_1 - V_2 \\ f_2 \times e_3 &= V_2 - V_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{p-1} \times e_p &= V_{p-1} - V_p, \end{aligned}$$

deren Summe oder die ganze, von der elektrischen Einheit beim Fortgang durch irgend eine Bahn O nach P geleistete, Arbeit sich ergiebt als

$$L = V_o - V_p$$

und, wenn m die von O nach P getriebene Masse wäre,

$$L = m\,(V_o - V_p).$$

Daraus folgert man allgemein:

Die von einem bestimmten Systeme von elektrischen Kräften an irgend welchen zwei Punkten des Raumes hervorgebrachten Potentiale haben unter sich eine Differenz, die der Arbeit entspricht, welche die elektrische Einheit thun würde, indem sie unter Einwirkung derselben Kräfte von dem einen Punkte zum andern geht. Es ist klar, dass dieser Lehrsatz auch den in voriger Nummer betrachteten Fall in sich schliesst.

Und hier will ich noch einige sehr bezeichnende Erklärungen des Herrn Fleeming Jenkin (Op. cit. § 8) anführen: Der durchlaufene Weg, um von O nach P zu gelangen, wird ein gleichgiltiger Umstand sein, was die gesammte vom elektrisirten Körper oder auf denselben vollbrachte Arbeit anbelangt. Man hat genau den analogen Fall bei der Schwerkraft: ein Körper im Gewichte von 1 Kilogramm wird, beim Fallen aus einer Höhe von 40 Meter auf eine Höhe von 20 Meter über der Meeresfläche, nothwendig 20 Kilogramm-Meter Arbeit vermöge dieses Fallens leisten, gleichgiltig, welchem Wege er folge; er kann in einer sehr schiefen oder ganz senkrechten Linie fallen: die gethane Arbeit wird dieselbe sein; er kann unter die Höhe A fallen und sich darauf wieder bis A erheben; die ganze Summe der Arbeit wird sich dabei nicht ändern, indem sie einfach abhängig ist von dem Höhenunterschiede zwischen dem ersten und dem letzten Punkte.

Zweites Capitel.

Potential der Kugel und der sphärischen Umhüllungen.

10. Nehmen wir eine elektrisirte Kugel an und halten wir fest, dass vermöge allbekannter Experimental-Beweise ihr Elektricum sich einzig auf ihrer Oberfläche verbreitet vorfindet, wo es naturgemäss eine Schichte von gleichförmiger Dichte bildet und von so geringer Dicke, dass sie mit der Oberfläche der Kugel selbst verwechselt werden darf. Nachdem in solcher Weise das Gleichgewicht sichergestellt und deshalb das Potential aller Punkte der Kugel (nach § 5) ein constantes ist, wird sich dessen Werth finden lassen, sobald es für irgend einen Punkt der Kugel bestimmt worden ist. Nun bringt jede elementare Masse m, welche an den Punkten der Oberfläche haftet, im Centrum das Potential $\frac{m}{R}$ hervor. Die ganze Ladung wird daher für das Centrum das Potential $V = \Sigma \frac{m}{R}$ geben; und macht man $\Sigma\, m = M$, so wird

$$V = \frac{M}{R}$$

das allen Punkten der Oberfläche und des Inneren der Kugel gemeinschaftliche Potential sein, indem M die gleichförmig auf der Oberfläche vertheilte elektrische Masse und R der Halbmesser der Kugel ist. Daraus folgen die Lehrsätze:

Das Potential einer Kugel ist gleich ihrer Ladung getheilt durch den Halbmesser.

Für gleiche Ladungen stehen die Potentiale verschiedener Kugeln im umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser.

Je kleiner der Halbmesser einer Kugel ist, einer umso geringeren Ladung bedarf es, um sie auf ein gegebenes Potential zu bringen.

Folgesatz 1. Will man die unendlich kleine Höhe d der elektrischen Schichte von gleichförmiger Dichte einführen, welche die Oberfläche der Kugel einnimmt, so können wir zunächst das Volumen dieser Schichte ausdrücken durch

$$\frac{4}{3}\pi(R+d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3,$$

welches bei Vernachlässigung der Glieder in d^2 und d^3 zurückgeht auf

$$4\pi R^2 d$$

und daraus, da μ die gleichförmige Dichte der Schichte ist, wird man erhalten

$$M = 4\pi R^2 \mu d;$$

endlich, weil man durch R die Entfernung der Schichte vom Centrum ausdrücken kann,

$$V = 4\pi R \mu d.$$

Folgesatz 2. Die Beständigkeit des Potentials an allen inneren Punkten einer Kugel, die mit einer elektrischen Schichte von gleichförmiger Dichte und Dicke bedeckt ist, beweist, wie man (aus § 5) weiss, dass alle von dieser Schichte auf irgend einen Punkt der Kugel ausgeübten Wirkungen eine Resultante Null haben. Daraus fliesst der folgende Lehrsatz, auf welchen Bezug zu nehmen in manchen Fällen von Wichtigkeit ist: Irgend ein innerhalb einer Kugelhülle befindlicher Punkt empfängt von jeder Seite gleiche und entgegengesetzte Einwirkungen, welche sich untereinander aufheben: — sobald die von der Materie der Hülle ausgeübten Kräfte im geraden Verhältnisse der Massen und im umgekehrten der Quadrate der Entfernungen stehen.

Dieser Lehrsatz wurde zuerst von Newton für die Schwerkräfte festgestellt.

Durch leichte Schlussfolgerungen liesse sich auch beweisen, dass, wenn das Elektricum über der Oberfläche eines Ellipsoides mit gleichförmiger Dichte und solcher Dicke verbreitet ist, welche in jedem Punkte der Entfernung zweier concentrischer und homologer ellipsoidischer Oberflächen entspricht, die Resultante seiner Wirkungen auf irgend einen innerlichen Punkt gleichfalls Null ist.

Zusatz. Der Ausdruck $V = \frac{M}{R}$ bietet das Mittel dar, um die Potential-Einheit aufzustellen, indem man das Potential Eins jenes einer Kugel nennt, welche die Ladung Eins und den Halbmesser Eins hat. Darnach würde irgend ein Körper das Potential 2, 3, 4.... haben, wenn die Kugel vom Halbmesser Eins die Ladungen 2, 3, 4.... besitzen müsste, um sich mit jenem Körper im Gleichgewichte zu befinden, wann sie mit demselben in Verbindung gesetzt würde (§ 7). Was die Einheit von elektrischer Masse betrifft, so ist sie diejenige Menge von Elektricum, welche, in einem Punkte vereinigt, mit der Kraft Eins auf eine gleiche Menge Elektricum wirkt, die in einem andern Punkte in der Entfernung einer Linear-Einheit vom ersten wirksam ist (§ 38).

11. Erwägt man, dass das Potential

$$V = \frac{M}{R}$$

auch den Punkten der Oberfläche der Kugel angehört, so wird es klar, dass auf jeden Punkt der Oberfläche die ganze Masse M wirkt, wie wenn sie im Mittelpunkt der Kugel angesammelt wäre. Dies lässt uns vorhersehen, dass für einen ausserhalb der Kugel in der Entfernung D vom Mittelpunkt befindlichen Punkt das Potential

$$V = \frac{M}{D}$$

sein wird, wie sich wirklich in Kürze mittelst höherer Rechnung streng beweisen lässt. Im Anhange zu diesem Werke (Nota III) gebe ich davon einen elementaren Beweis, welcher sich auf eine Näherung gründet, gemäss denselben geometrischen Betrachtungen, wie sie Newton gemacht hat, welchem man auch diesen zweiten höchst wichtigen Lehrsatz über die Attractionen der Kugeln verdankt; und in jener Note wird zugleich bewiesen, dass eine elektrische Masse eine mit der Masse M beladene Kugeloberfläche so anzieht oder abstösst, wie wenn letztere Masse, anstatt gleichförmig auf jener Kugelfläche verbreitet zu sein, gänzlich in deren Mittelpunkt vereinigt wäre. Es wirken daher zwei elektrisirte Kugelflächen aufeinander, wie wenn ihre Elektricitäten in ihren bezüglichen Mittelpunkten angesammelt wären: sind also M M' ihre Ladungen und D die Entfernung ihrer Mittelpunkte, so üben sie aufeinander die Kraft aus

$$F = \frac{M \,.\, M'}{D^2}.$$

Folgesatz. Gesetzt, die beiden Kugeln haben die Halbmesser R R', so sind ihre Potentiale (§ 10)

$$V = \frac{M}{R},\ V' = \frac{M'}{R'}$$

und wir haben sonach

$$F = \frac{R R'}{D^2}\, V V'.$$

Es ist daher für zwei in bestimmter Entfernung gegebene Kugeln (abgesehen von jeder aus ihrer gegenseitigen Influenz herrührenden Wirkung) die Kraft F proportional dem Producte ihrer Potentiale; und wenn diese gleich sind, so ist die Kraft proportional dem Quadrate des gemeinsamen Potentials (siehe § 33) oder auch das Potential verhält sich wie die Quadratwurzel aus der Kraft.

12. Man habe eine zwischen zwei concentrischen Kugelflächen von den Halbmessern r und R eingeschlossene Umhüllung, und untersuche, unter der Voraussetzung, dass dieselbe gänzlich mit Elektricum von gleichförmiger Dichte erfüllt sei, welches Potential sie in ihrem Mittelpunkte hervorbringen würde.

Denken wir uns die ganze Dicke der Hülle eingetheilt in eine Anzahl n concentrischer Kugelschichten, welche die denkbar kleinste Höhe haben sollen, und seien

$$r, R', R'', R''' \ldots\ldots\ldots\ldots R$$

die nacheinander folgenden Halbmesser derselben. Jede dieser Kugelschichten von äusserster Dünnheit erzeugt im Mittelpunkte das Potential $4\pi\mu d$ multiplicirt mit dem zugehörigen Halbmesser (§ 10, Folgesatz 1) und sonach wird man für die Wirkungen aller erhalten

$$V = 4\pi\mu d\,[r + R' + R'' + \ldots\ldots + (R - d)]$$

oder:

$$V = 4\pi\mu d \times n \,.\, \frac{r + R - d}{2};$$

folglich, da $nd = R - r$ und d unendlich klein ist,

$$V = 2\pi\mu\,(R^2 - r^2).$$

Wie nun für jede elementare Schichte das Potential im Mittelpunkte jedem andern inneren Punkte angehört, so würde auch das obige Potential allen Punkten des in der Umhüllung vom Halbmesser r eingeschlossenen Kugelraumes angehören.

13. Wenn eine Kugel vom Halbmesser R ganz erfüllt wäre mit Elektricum von gleichförmiger Dichte μ, so wird das Potential eines inneren Punktes F, der vom Mittelpunkt um r absteht, gefunden, indem man die Kugel in zwei Theile theilt, nämlich in einen centralen Kugelkern vom Halbmesser r und in die Kugelhülle von der Dicke $R - r$. Somit wird sich zufolge der in voriger

Nummer gefundenen Formel und den Beweisen in den §§ 10 und 11 das Potential von P ergeben

$$V = 2\pi\mu(R^2 - r^2) + \frac{\frac{4}{3}\pi\mu r^3}{r}$$

$$V = 2\pi\mu R^2 - \frac{2}{3}\pi\mu r^2.$$

Aus diesem dem Punkte P eigenen Potentiale, der in die elektrische Masse eingetaucht ist, von welcher man voraussetzt, dass sie die ganze Kugel einnimmt, können wir nunmehr den Werth der Kraft F ableiten, welcher P in der Richtung des Halbmessers r unterworfen ist, indem wir uns einen unendlich kleinen Zuwachs im Werthe von r denken (§ 1). Auf diese Weise ergiebt sich

$$V' = 2\pi\mu R^2 - \frac{2}{3}\pi\mu(r + d)^2.$$

Entwickelt man, vernachlässigt das Glied in d^2 und reducirt, so hat man

$$\frac{V' - V}{d} = -\frac{4}{3}\pi\mu r = -f,$$

das heisst, der Punkt P wird vom Mittelpunkt ab in der Richtung des Halbmessers mit der Kraft

$$\frac{4}{3}\pi\mu r$$

abgestossen. Daraus begreift sich, dass in einer ganz mit Elektricum erfüllten Kugel ein Gleichgewicht nicht stattfinden kann.

Zusatz. Die in der inneren Kugel vom Halbmesser r enthaltene elektrische Masse ist

$$\frac{4}{3}\pi r^3\mu$$

und wirkt auf den Punkt P, wie wenn sie im Mittelpunkt vereinigt wäre (§ 11); sie giebt daher die Kraft

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\mu}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\mu r$$

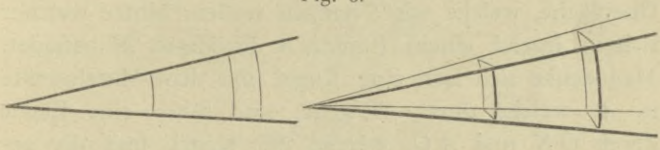
gleich dem oben gefundenen Werthe von F. Sonach bestätigt sich, dass die gesammte zwischen r und R eingeschlossene Hülle auf den Punkt P zur Resultante Null hat, gemäss dem Lehrsatze von Newton (§ 10).

Drittes Capitel.

Beziehung zwischen den innerhalb irgend einer Oberfläche eingeschlossenen elektrischen Massen und der Summe der Normalkräfte, welche auf dieselbe ausgeübt werden.

14. Man denke sich eine elektrische Masse M im Mittelpunkt einer Kugel von beliebiger Grösse; nennt

Fig. 6.



man R ihren Halbmesser, so wird man auf jedes Element s der Oberfläche die Normalkraft

$$f_n = \frac{M s}{R^2}$$

wirkend haben und sonach auf die ganze Oberfläche der Kugel die Kraftsumme

$$\Sigma f_n = \frac{M}{R^2} \Sigma s = \frac{M}{R^2} 4 \pi R^2$$

$$\text{oder } \Sigma f_n = 4 \pi M,$$

ein Werth, welcher unabhängig ist von R, was beweist, wie auf allen Kugeln, wie immer sie allmählich erweitert oder verengt gedacht werden, die Summe der Normalkräfte constant ist, wenn in ihrem Mittelpunkte oder in einer andern kleineren concentrischen Kugel (§ 11) sich beständig die nämliche wirkende Masse M befindet.

Folgesatz. In Betracht der gleichförmigen Vertheilung der genannten Kräfte ergiebt sich, dass ihre Summen auch gleich sein werden auf den an verschiedenen Kugeln durch eine concentrische Kegelfläche abgeschnittenen Stücken.

15. Dasselbe Gesetz findet statt für Oberflächen von was immer für einer Gestalt, das heisst, eine elektrische Masse M, welche sich innerhalb einer beliebigen Oberfläche befindet, erzeugt, was immer für einen Punkt des von letzter eingeschlossenen Raumes sie einnehmen mag, auf derselben eine Summe von Normalkräften gleich $4\pi M$. Dies wird leicht durch den höheren Calcul erwiesen; man kann indessen, meines Erachtens, einen elementaren Beweis auf folgende Art zusammenstellen.

Es sei ON eine Normale in O auf die gegebene Oberfläche, welche wir S nennen wollen, hinter welcher sich in irgend einem Punkte A die Masse M befindet. Man denke sich nun eine Kugel mit dem Mittelpunkte in A, welche durch O gehe, und führe eine Ebene durch ON und AO, welche die Kugel und die gegebene Oberfläche in den Linien HH' und KK' durchschneide, auf welchen, beziehungsweise, senkrecht stehen der Halbmesser AO, welcher bis N verlängert werde und die ON. Ein unendlich kleines Element der Kugel, welches um O herum liegt, werde, mehrerer Deutlichkeit halber, durch ein ziemlich grosses Segment BC des Durchschnittes HH' dargestellt; und dieses Element der Kugeloberfläche diene als Basis für einen mit der Kugel concentrischen Kegel ABC, welcher auf der gegebenen Oberfläche S ein durch DE vorgestelltes Element abschneiden wird. Ist R der Halbmesser der Kugel, so wird

$$\frac{M}{R^2}$$

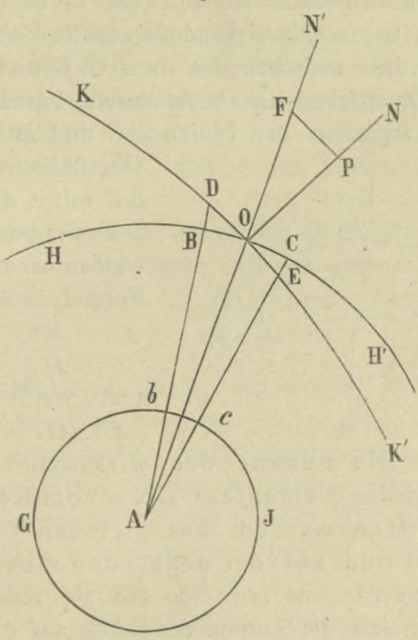
die in O wirksame Kraft sein, welche man auf der Verlängerung von AO durch OF darstelle. Die auf der

Oberfläche S normale Seitenkraft $f n$ wird gleich sein der Projection $O P$ der $O F$ auf $O N$, oder

$$f_n = O P.$$

Betrachtet man nun die kleinen Bögen $B C$, $D E$ als geradlinig, berücksichtigt die Gleichheit der Winkel $D O B = F O P$, und beachtet ferner, dass die Winkel $D B O$, $O P F$

Fig. 7.



als Rechte gleich sind, so finden sich die Dreiecke $B O D$, $F O P$ ähnlich und man hat

$$B O : O D = O P : O F$$
$$B O . O F = O D . f_n$$

und ebenso

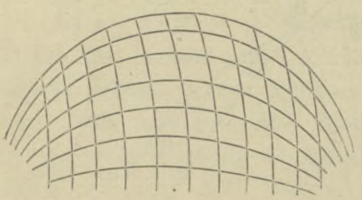
$$O C . O F = O E . f_n;$$

daher, wenn man Glied für Glied summirt,

$$B C . O F = D E . f_n.$$

Weil aber die Bögen $B\,C$, $D\,E$ unendlich klein sind, so kann man die Kraft f_n als constant auf allen Punkten von $B\,C$ ansehen, und so ergiebt sich, nachdem die $O\,F$ auch auf allen Punkten von $B\,C$ constant ist, dass die Summe der auf den Bogen $B\,C$ wirkenden Normalkräfte gleich ist der Summe der auf den Bogen $D\,E$ wirkenden Normalkräfte. Nun sieht man, dass $B\,C$ die orthogonale Projection ist von $D\,E$. Wenn wir ferner annehmen, wie es hinreichend einleuchtet (siehe Anhang, Note IV), dass zwischen den durch $B\,C$ und $D\,E$ vorgestellten Oberflächen-Elementen dasselbe Verhältniss statthabe, wie zwischen den Linien $B\,C$ und $D\,E$, und das Oberflächen - Element B C mit e, das Element $D\,E$ mit ε bezeichnen, so werden wir nach obiger Formel setzen können

Fig. 8.



$$\frac{B\,C}{D\,E} = \frac{e}{\varepsilon}$$

und werden erhalten

$$e \times O\,F = \varepsilon \times f_n;$$

das heisst: Die Summe der wirksamen Normalkräfte auf die Elemente, welche vom Kegel $D\,A\,C$ abgeschnitten werden, hat gleichen Werth auf der Kugel und auf der gegebenen Oberfläche S.

Denken wir uns nun eine centrale Kugel $G\,J$, so wissen wir, dass die Summe der Kräfte auf das Element $B\,C$ gleich ist jener auf das Element $b\,c$, das von der nämlichen Kegelfläche auf der genannten Mittelpunktskugel abgeschnitten wird (§ 14, Folgesatz). Stellt man sich nun unendlich viele mit der centralen Kugel concentrische Kegelflächen vor, bedingt durch die vielfachen Elemente, in welche jene durch eine unendlich grosse Reihe von, den geographischen ähnlichen, Parallelen und Meridianen abgetheilt würde, so ist klar, dass ihre Gesammtheit sowohl die gegebene Oberfläche als die centrale Kugel umfassen würde; und deshalb wird die Gesammtsumme der auf die beliebige geschlossene Oberfläche S wirkenden Normalkräfte gleich sein der bekannten Summe $4\pi M$, welche für die centrale Kugel gilt (§ 14); was sich durch folgenden Lehrsatz ausdrücken lässt:

Die Summe aller auf einer geschlossenen Oberfläche von beliebiger Gestalt normalen Seitenkräfte ist gleich der aus irgend einem Punkte ihres Innern wirkenden Masse M multiplicirt mit dem constanten Factor 4π, wie wenn diese Oberfläche einer Kugel, mit M in ihrem Centrum, angehörte.

Bezeichnet also $f n$ die auf die Oberfläche normalen Seitenkräfte, so wird dieser Lehrsatz ausgedrückt durch die Formel

$$\Sigma f_n = 4\pi M.$$

Folgesätze: 1. Bleibt der Werth der in einem Raume eingeschlossenen Masse M ungeändert, so bleibt auch die Summe der auf die Oberfläche normalen Kräfte constant, wie immer M den Ort wechsle oder die Oberfläche in Umfang und Gestalt wechsle. Die Experimente von Faraday, welche wir im folgenden § 32 anführen werden, haben dieses Gesetz längst erkennen lassen, bevor man, wie jetzt, eine genaue Erklärung davon geben konnte.

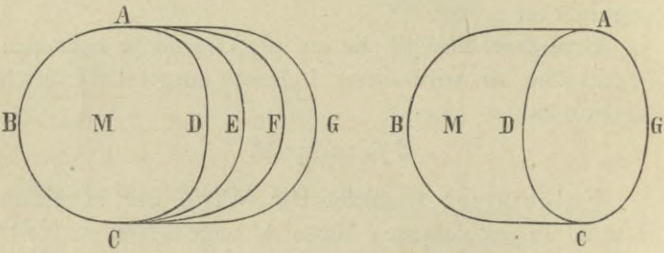
2. Im Falle mehrere getrennte Massen an verschiedenen Punkten im Innern einer Oberfläche aufgestellt sind, wird Σf_n gleich deren Summe sein multiplicirt mit 4π.

3. Wenn die Oberfläche nicht geschlossen ist, wird offenbar sein

$$\Sigma f_n < 4\pi M.$$

4. Legt man um die Masse M mehrere Oberflächen $ABCD$, $ABCE$, $ABCF$, $ABCG$..... herum, welche einen gemeinsamen Theil ABC haben, so werden die Summen der auf den verschiedenen Stücken D, E, F, G..... vorhandenen Normalkräfte sämmtlich unter sich gleich sein; weil in Beziehung auf den Gesammtwerth $4\pi M$ von jeder dieser Summen sich sagen lässt, sie ergänze die dem gemeinsamen Antheile ABC zugehörige Summe. Nun sind augenscheinlich für zwei dieser Oberflächen, z. B. für D und G, welche die geschlossene Oberfläche $ADGC$ bilden, von den fraglichen Kräften, in Bezug

Fig. 9.



auf den von denselben eingeschlossenen Raum, die einen, die auf ADC, nach innen gerichtet, die andern, nämlich die auf AGC, nach aussen. Man wird daher, in Bezug auf den inneren Raum, ihrer entgegengesetzten Wirkungsweise Rechnung tragen, indem man eine Gruppe mit negativem Zeichen nimmt, und zwar gerade mit negativem Zeichen die Gruppe der gegen das Innere gerichteten Kräfte nimmt, nachdem immer die von innen nach aussen gerichteten Kräfte an einer gegebenen Oberfläche als positiv betrachtet werden. Es werden folglich, wann die wirkende Masse ausserhalb einer gegebenen Oberfläche sich befindet, die von dieser Masse auf der ganzen Oberfläche erregten Kräfte, betrachtet nach ihren Richtungen bezüglich des Innern derselben, eine Summe geben gleich Null oder

$$\Sigma f_n = 0.$$

Für die wellenförmigen Oberflächen findet dasselbe Gesetz statt. Wegen weiterer Auseinandersetzungen kann man die Abhandlung des Professors R. Ferrini zu Rathe ziehen.*)

Viertes Capitel.

Aequipotentielle Oberflächen.

16. Der Ort der Punkte des Raumes oder eines Conductors, welche ein gleiches Potential haben, heisst äquipotentielle Oberfläche oder Gleichgewichtsfläche oder Niveaufläche (Höhestandsfläche) nach Analogie mit den Oberflächen der Flüssigkeiten im Gleichgewichte, bei welchen auch das Potential der irdischen Schwerkraft constant ist. So ist die Oberfläche eines elektrisirten in den Zustand von Gleichgewicht gelangten Conductors eine äquipotentielle Oberfläche oder Niveaufläche (§ 5), welche durch den constanten Werth ihres Potentials vollkommen gesondert und gekennzeichnet ist. So sind auch, wenn eine elektrische Masse M ganz in einem Punkte angesammelt und alleinig wirksam ist, alle Kugeloberflächen, welche diesen Punkt als Mittelpunkt haben, ebenso viele Niveauflächen, weil in einer jeden, wenn R der Halbmesser heisst, jeder Punkt das nämliche Potential $\frac{M}{R}$ hat.

17. Bei äquipotentiellen Kugelflächen ist leicht einzusehen, dass die resultirende Kraft, welche auf alle Punkte derselben wirkt, auf der Oberfläche normal ist. Aber dasselbe muss auch zutreffen für jede andere Niveau-

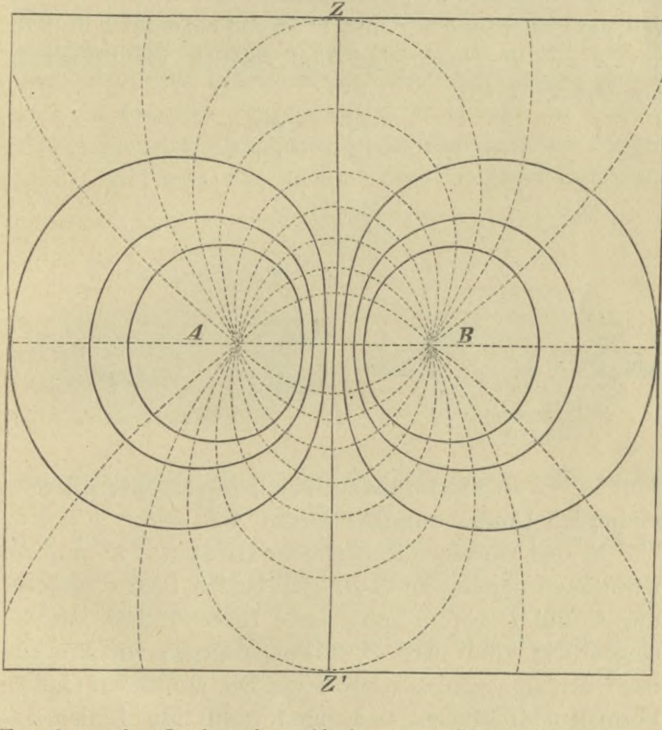
*) Fisica tecnologica. Electricità e Magnetismo. Milano 1878, p. 9.

fläche. In der That, wenn die resultirende Kraft in einem Punkte irgend einer äquipotentiellen Oberfläche schief zur Oberfläche wirken würde, so liesse sie sich zerlegen in eine normale Componente und in eine tangentiale Componente und letztere würde nach dem Verlaufe der Oberfläche wirken. Aber nach dieser Richtung ist keine Wirkung möglich, weil alle Punkte der Oberfläche, nach Voraussetzung, gleiche Potentiale haben (§ 5). Folglich sind die Resultanten der auf irgend eine äquipotentielle Oberfläche wirkenden Kräfte immer und überall senkrecht auf der Oberfläche. Und umgekehrt, in Bezug auf elektrisirte Conductoren steht fest, dass Gleichgewicht an einem Conductor nicht möglich ist, ausser unter der Bedingung, dass die Resultanten aller in jedem Punkte seiner Oberfläche wirkenden Kräfte auf derselben senkrecht stehen. Ohne dieses läuft das Elektricum weiter und verbreitet sich seitwärts, nach Art einer Flüssigkeit, um die Höhenstände auszugleichen. Nach dem eben genannten Gesetze wird das elektrische Pendel, das von einem elektrisirten Körper angezogen war, sofort senkrecht zur Oberfläche desselben abgestossen, und wenn es entfernt und nicht elektrisirt ist, wird es angezogen senkrecht zur Niveaufläche, die es durchkreuzen muss; man schliesst deshalb zunächst aus der Richtung seiner Bewegungen auf den Verlauf jener Niveaufläche.

18. Ist irgend eine Niveaufläche im Raume gegeben, so wird sich natürlicherweise in ihrer Nähe eine andere befinden von sehr wenig davon abweichendem Potentiale, und nahe dieser zweiten wird es eine dritte und weiter folgende andere geben, welche das ganze Feld unterabtheilen werden; in der Nähe der Conductoren werden diese Flächen sich nach deren Formen richten, aber entfernt von letzteren werden sie jede Aehnlichkeit mit ihnen verlieren können. Die elektrische Einheit, welche

das von diesen Oberflächen abgeschnittene Feld durchkreuzen muss, wird sich schrittweise nach auf denselben normalen Linien bewegen und ihre Bahn wird in jedem Punkte eine Tangente zu diesen Normalen sein. Die Elemente einer solchen Bahn wurden Kraftlinien von

Fig. 10.



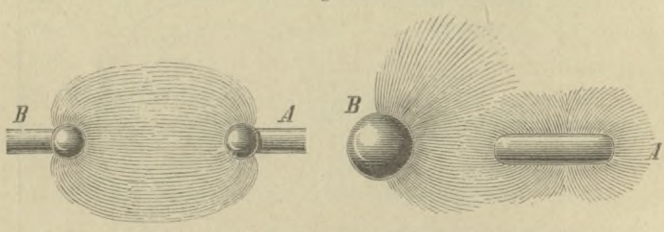
Faraday oder Inductionslinien von Maxwell genannt. Ein Feld, wo in jedem Punkte die Grösse und Richtung der resultirenden Kraft constant ist, heisst ein gleichförmiges Feld.

Als ein Beispiel der Gestalt der mannigfachen Niveauflächen gebe ich hier eine von Maxwell entworfene genaue Zeichnung, welche einen Durchschnitt jener Oberflächen und der Kraftlinien für den Fall darstellt, dass das Feld einzig durch zwei Ladungen m von entgegengesetzten Zeichen beherrscht werde, welche in A und B ihre Mittelpunkte haben.

Die Senkrechte $Z\,Z'$ auf $A\,B$, in deren Halbirungspunkte, entspricht der Oberfläche vom Potentiale Null, weil die Entfernungen r und r' irgend eines ihrer Punkte von A und B gleich sind und folglich ihr Potential, ausgedrückt durch

$$V = \frac{m}{r} - \frac{m}{r'},$$

Fig. 11.



Null ist. Es ist sodann einleuchtend, dass die Niveauflächen sämmtlich Umdrehungsflächen um $A\,B$ sind.

In den einzelnen Punkten der Geraden $Z\,Z'$ sind die Kraftlinien parallel zu $A\,B$. Zu beiden Seiten giebt es um A und B herum sphäroidale Niveauflächen, welche eingedrückt sind nach $Z\,Z'$ hin, dagegen vorspringend nach der entgegengesetzten Seite. Die auf diesen Curven normalen Kraftlinien sind durch punktirte Linien angedeutet.

Dies Alles kann man wirklich sehen, wenn man zwei voneinander etwas entfernte kleine Kugeln, welche den Punkten A und B entsprechen, mit den Polen einer Elektrisirmaschine in Verbindung bringt, mittelst eines Haarsiebes (oder eines Bäuschchens) Lykopodiumpulver oder feinste Feilspäne dazwischen fallen lässt und sie in einer Dunkelkammer durch einen Sonnenstrahl beleuchtet. Man sieht alsdann, wie das Pulver von der einen Seite zur andern hüpft, wobei es ellipsoidische Streifen und Büschel bildet, welche dem Verlaufe dieser Kraftlinien folgen. Professor Ricco, welcher zuerst diese Versuche machte, stellte die Anordnungen und Bewegungen der Pulver zwischen den beiden elektrisirten Körpern durch nachstehende Zeichnung dar, wo in 1. *A* und *B* mit den Polen einer Elektrisirmaschine in Verbindung stehen; in 2. *B* Inductor und *A* inducirter Isolator ist. Diesen Kraftlinien der Elektricität gleich sind jene des Magnetismus, wie man sie durch Eisenfeile gezeichnet sieht,

Fig. 12

die über Papier ausgebreitet wurden, unter welchem sich die Pole eines Magnets befinden.

19. Setzt man voraus, es seien zwei Niveauflächen einander unendlich nahe und es heissen d' d'' d''' . . . die Abschnitte an den gemeinsamen Normalen oder Kraftlinien, so werden wir für die Werthe der Kräfte die Ausdrücke

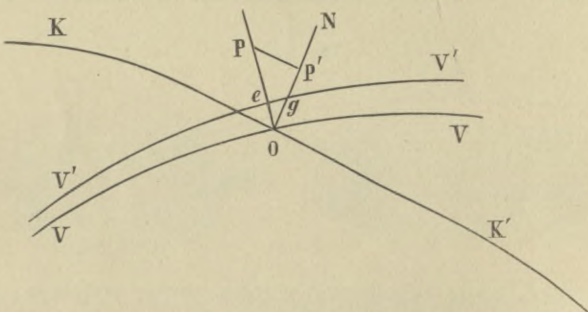
$$-\frac{V''-V'}{d'},\quad -\frac{V''-V'}{d''},\quad -\frac{V''-V'}{d'''}\ \cdots\cdots$$

erhalten, welche beweisen, dass die resultirende Kraft, welche an den verschiedenen Punkten einer Niveaufläche statthat, sich richtet nach dem umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen dieser Punkte von der folgenden ihr unendlich nahe liegenden Niveaufläche. Aus dem blossen Anblicke einer Zeichnung, welche mehrere aufeinander folgende äquipotentielle Oberflächen darstellt, lässt sich demnach erschliessen, wo die Kraft grösser und wo sie kleiner ist.

20. Man beschreibe im Raume irgend eine geschlossene Oberfläche KK' und hinter dieser Oberfläche befinde sich an irgend einem Punkte die Masse M, so dass die Summe aller auf ebendieselbe wirkenden Normalkräfte, wie im § 15 gezeigt wurde, sei

$$\Sigma f_n = 4\pi M.$$

Fig. 13.



Diese Formel lässt sich nunmehr ausdrücken als eine Function der verschiedenen Potentiale, in Bezug auf alle Punkte derselben Oberfläche.

Durch einen beliebigen Punkt O unter ihnen, dessen Potential V sei, wollen wir die Niveaufläche $V\,V$ gelegt denken. Die einem unendlich kleinen Zuwachse von V entsprechende Niveaufläche wird dann $V'\,V'$ sein, welche der ersten unendlich nahe kommt. Die in O normal auf $V\,V$ wirkende Kraft (§ 17) sei $O\,P$. Ihre Projection $O\,P'$, normal auf die gegebene Oberfläche $K\,K'$, wird die Componente sein, welche im Punkte O normal auf $K\,K'$ wirkt. Sind $O\,e$, $O\,g$ die Stückchen, welche von $O\,P$,

$O\,P'$ zwischen den beiden Niveauflächen abgeschnitten werden, so haben wir aus den ähnlichen Dreiecken $O\,e\,g$, $O\,P'\,P$

$$O\,P' = O\,P\,\frac{O\,e}{O\,g}.$$

Substituirt man für $O\,P$ seinen Werth $-\dfrac{V' - V}{O\,e}$, so erhält man

$$O\,P' = \frac{V' - V}{O\,e} \cdot \frac{O\,e}{O\,g}$$

und, wenn man mit e_n das unendlich kleine Element $O\,g$ der Normalen $O\,P'$ bezeichnet,

$$O\,P' = -\frac{V' - V}{e_n}.$$

Was für den Punkt O gesagt worden ist, gilt natürlich auch für alle Punkte der Oberfläche $K\,K'$. Indem man sonach mit V das Potential irgend eines Punktes der Oberfläche und mit V' das Potential eines unendlich nahe liegenden Punktes bezeichnet, dann festhält, dass für ein unendlich kleines Element der Oberfläche die Kraft constant sei, so wird man auf ein Element σ die Normalkraft

$$f_n = -\frac{V' - V}{e_n}\,\sigma$$

haben. Wenn man ferner mit

$$\Sigma\,\frac{V' - V}{e_n}\,\sigma$$

die Summe der Normalkräfte anzeigt, welche auf die ganze Oberfläche stattfinden und sich erinnert, dass diese (nach § 15) dem Werthe $4\,\pi\,M$ gleichkommt, sobald die Oberfläche gänzlich geschlossen ist, so wird sich augenscheinlich für diesen Fall ergeben

$$\Sigma\,\frac{V' - V}{e_n}\,\sigma = -4\,\pi\,M.$$

Diese Formel stellt in's Klare, wie alle auf irgend eine geschlossene Oberfläche, innerhalb welcher sich die

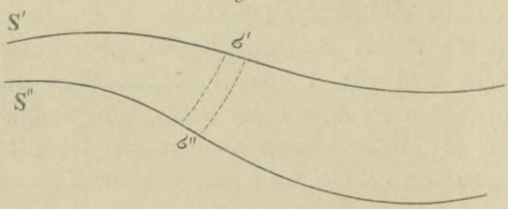
Masse M befinde, normalen Componenten abhängen von den bezüglichen Potentialen ihrer vielfachen Punkte. Es ist diese Formel von hoher Bedeutung und bekannt unter dem Titel Lehrsatz des Green, weil sie aus einem allgemeineren von Green gefundenen Ausdrucke hervorgeht.

Zusatz. Wollte man sich der in § 1 angegebenen Bezeichnung bedienen, so würde man schreiben

$$\Sigma \frac{d\,V}{d\,n}\,d\,s = -\ 4\,\pi\,M.$$

21. Der in § 15 aufgestellte Lehrsatz, wovon Green's Formel ein mehr umfassender Ausdruck ist, ist fruchtbar an wichtigen Folgesätzen, welche sich leicht aus der

Fig. 14.



Betrachtung der orthogonalen Canäle ableiten lassen, von denen ich jetzt handeln will.

Man habe zwei Niveauflächen S' S'' und denke sich eine Röhre oder einen Canal von unendlich kleinem Durchmesser von der einen zur andern gehend, welcher ringsum aus lauter Kraftlinien gebildet sei, das heisst aus gemeinschaftlichen Normalen auf beide Oberflächen. Ein solcher Canal heisst ein orthogonaler und die Elemente σ' σ'' der beiden Oberflächen, welche die Basen oder Grundflächen des Canales bilden, heissen correspondirende.

Bemerken wir zunächst, dass auf der seitlichen Oberfläche (~~Umfläche~~) des Canales, deren Punkte sämmtlich in den Kraftlinien liegen, keine auf dieselbe Fläche normalen Kräfte vorhanden sein können. Es werden sich daher alle Normalkräfte, welche auf die Umfläche des durch den Canal zwischen den beiden Flächen S' S'' gebildeten Cylinders wirksam sind, auf jene allein reduciren, welche auf die Basen σ' σ'' wirken. Bezeichnen wir sie mit f' f'' und erwägen, dass es im Innern des Canales keine elektrische Masse giebt, so werden wir (§ 15 Folgesatz IV) haben

$$f'\sigma' + f''\sigma'' = 0$$

und folglich

$$f'\sigma' = -f''\sigma''$$

das heisst: die Summen von Normalkräften, welche auf die Basen eines orthogonalen Canales wirken, sind einander gleich, wie dies schon in einem besonderen Falle im § 14 Folgesatz vorgekommen ist.

22. Wenn der orthogonale Canal die eine seiner Basen σ'' in einer Niveaufläche ausserhalb des elektrisirten Körpers hat und die andere σ' innerhalb dieses Körpers, so wird er in sich selbst ein Element σ der elektrisirten Oberfläche einschliessen; nennt man daher μ die Dichte, welche hier das Elektricum besitzt, so wird er in seinem Innern die Masse $\mu\,\sigma$ enthalten. In solchem Falle wird sein, weil die innere Basis σ' keine Summe von Kräften giebt (§ 5)

$$f''\sigma'' = 4\,\pi\,\mu\,\sigma,$$

daher

$$f''\frac{\sigma''}{\sigma} = 4\,\pi\,\mu.$$

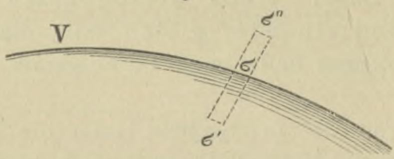
Stellt man sich nun vor, der Canal verkürze sich fortwährend von aussen und von innen am elektrisirten Körper, indem sich seine Basen gegen die Oberfläche hin ziehen, so werden wir an der Grenze haben $\sigma'' = \sigma$ und daher

$$f'' = 4\,\pi\,\mu,$$

eine Formel, welche den Werth der Normalkraft ausdrückt, die in einem Punkte der Oberfläche des elektrisirten Körpers vermöge seiner ganzen Ladung vorhanden ist und beweist, dass die Kraft, von einem elektrisirten Leiter auf die einem Punkte seiner Oberfläche unendlich nahe elektrische Einheit ausgeübt, einzig abhängig ist von der elektrischen Dichte an diesem Punkte und gleich dem Producte dieser Dichte in dem constanten Factor 4π.

Folgesatz 1. Für ein Element σ der Oberfläche, in welchem die Dichte μ constant ist, wird man die

Fig. 15.



Wirkung $4\pi\mu\sigma$ erhalten und für die gesammte Oberfläche

$$4\pi\Sigma\mu\sigma,$$

welche augenscheinlich gleich $4\pi M$ ist.

2. Nachdem V das Potential des Leiters ist, wird die normale Resultirende, welche an jedem seiner Punkte stattfindet (§§ 17 und 19) ausgedrückt sein durch

$$-\frac{V'-V}{d},$$

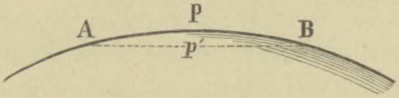
wo d die Entfernung der nächsten Niveaufläche mit dem wenig von V abweichenden Potentiale V' ist. Daraus folgt die besondere Beziehung

$$-\frac{V'-V}{d}=4\pi\mu,$$

welche zeigt, wie die Dichte der Ladung auf den verschiedenen Punkten des Leiters im umgekehrten Verhältnisse steht zu den Entfernungen dieser Punkte von einer nächsten Niveaufläche.

23. Nunmehr lässt sich leicht erweisen, dass die Hälfte der obigen Kraft $4\pi\mu$ ausgeübt wird von dem der elektrischen Einheit angrenzenden Oberflächen-Elemente allein, welche wir uns der Oberfläche unendlich nahe denken. Es sei wirklich $A\,B$ das Oberflächen-Element, welchem gegenüber in nächster Nähe der Punkt P steht. Ein anderer demselben Elemente unterhalb der Oberfläche angrenzender Punkt P' empfängt vom ganzen Leiter eine Wirkung gleich Null. Folglich wirkt das Element $A\,B$ auf P' mit einer resultirenden Kraft f', gleich und entgegengesetzt der f, welche aus der ganzen übrigen Oberfläche hervorgeht. Es ist nun klar, dass $A\ B$ auf P wird wirken müssen mit derselben Kraft f', blos mit verändertem Zeichen; und indem man sich gegenwärtig hält, dass

Fig. 16.



die aus der übrigen Oberfläche hervorgehende f dieselbe bleibt für P wie für P', wird man als totale Kraft auf P erhalten

$$f + f' = 2f' = 4\pi\mu,$$

daher

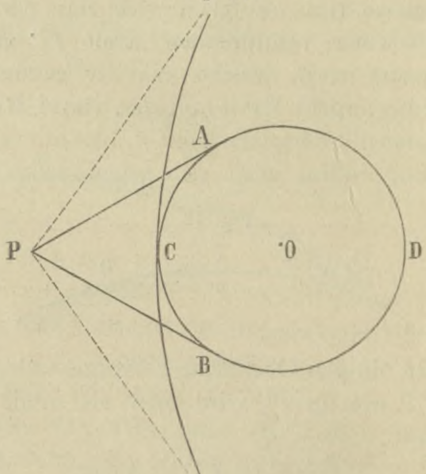
$$f' = 2\pi\mu,$$

das heisst: ein der Oberfläche eines elektrisirten Körpers benachbarter Punkt empfängt vom Oberflächen-Elemente, dem er sich gegenüber befindet, die Kraft $2\pi\mu$, während er von der gesammten Oberfläche die Kraft $4\pi\mu$ empfängt.

Diese Ableitung erweist sich richtig, für einen einer elektrischen Kugel nahe gebrachten Punkt, auch sobald man annimmt (wie im Anhange, Note 3 II. bewiesen wird), dass die beiden Kugelabschnitte C und D, welche zur gemeinsamen Basis die Berührungslinie zwischen der

Kugel O und dem umschriebenen Kegel APB haben, auf den Punkt P, als Spitze des Kegels, gleiche Wirkungen ausüben. In der That wird, wenn man sich P der Kugel unendlich nahe denkt, der vordere Kugelabschnitt zu einem unendlich kleinen Elemente der Oberfläche und seine Wirkung, welche immer die Hälfte der ganzen Wirkung $4\pi\mu$ ist, wird sonach sein $2\pi\mu$.

Fig. 17.



Folgesatz 1. Mittelst der Differentialrechnung lässt sich leicht beweisen, dass eine gleiche Wirkung, nämlich vom Werthe $2\pi\mu$, von einer unbegrenzten mit gleichförmiger Dichte μ beladenen Ebene ausgeübt wird auf einen in beliebiger Entfernung von letzter gelegenen Punkt; das heisst der Punkt wird normal auf die Ebene mit der Kraft $2\pi\mu$ angezogen oder abgestossen. Von diesem Satze kann man eine, meines Erachtens genügende, elementare Erklärung geben, indem man von dem oben bewiesenen Gesetze ausgeht, welches für die Wirkungen der Kugelabschnitte CD Geltung hat. In der That,

nachdem die Entfernung des Punktes P von der Oberfläche der Kugel eine beliebige, aber bestimmte, ist, so geht klar hervor, dass der Winkel des umschriebenen, die beiden Abschnitte bestimmenden Kegels wächst mit dem Wachsen des Halbmessers der Kugel: und sobald der Halbmesser unendlich ist, wird der vordere Abschnitt zu einer unbegrenzten Ebene S ausgedehnt und der Halbmesser R lässt sich betrachten als gleich der Entfernung D des Punktes P vom Centrum der Kugel, da es unendliche Längen sind, welche unter sich eine endliche Differenz haben. Nun wird die Wirkung der ganzen Kugel auf den Punkt P ausgedrückt durch (§ 11)

$$\frac{4\,\pi\,R^2\,\mu}{D^2},$$

was also in unserem Falle, wegen erwähnter Gleichheit von R und D, gleichwerthig ist mit $4\,\pi\,\mu$. Aber jeder Kugelabschnitt wirkt mit der Hälfte der Kraft der ganzen Kugel; folglich hat die unbegrenzte Ebene S auf den Punkt P, der von derselben beliebig weit absteht, die Wirkung $2\,\pi\,\mu$, was bewiesen werden wollte.

Folgesatz 2. Nachdem man gefunden hat, dass die ganze Oberfläche eines elektrisirten Leiters, vermindert um das Element $A\,B$ (Fig. 16), auf den an $A\,B$ unendlich nahen Punkt P die Wirkung $2\,\pi\,\mu$ hat, so muss man zulassen, dass eben dieselbe Oberfläche, nämlich die ganze um $A\,B$ verminderte, mit gleicher Kraft auf das Elektricum wirkt, welches das genannte Element $A\,B$ besitzt, in Betracht des unendlich kleinen Unterschieds der Entfernungen. Nun befindet sich im Elemente $A\,B$ die Masse $\mu \times A\,B$; es wird folglich in demselben die abstossende Kraft

$$2\,\pi\,\mu^2 . A\,B$$

entstehen und im Einheits-Elemente

$$2\,\pi\,\mu^2,$$

was die Stärke oder Anstrengung ausdrückt, womit das Elektricum sich vom Leiter wegzuschleudern strebt. Dieser Anstrengung giebt man den Namen der elektrischen Spannung oder Pressung, welche sonach von einem Punkte der Oberfläche zum andern nach dem Quadrate der Dichte sich ändert.

Daraus tritt der Unterschied zwischen dem Potential und der Spannung deutlich hervor, indem man erwägt, dass an einem Conductor im Gleichgewichte die Dichte an verschiedenen Punkten ungleich sein kann bei einem an allen Punkten gleichen Potentiale (§ 7). Umgekehrt kann die Dichte oder Spannung an zwei Conductoren gleich und ihr Potential verschieden sein. Man habe z. B. zwei Kugeln von den Halbmessern R und $2\,R$, so ist die Oberfläche der zweiten das Vierfache der ersten; wenn also die zweite die Ladung $4\,M$ und die erste M hat, so haben sie gleiche Dichten und deshalb gleiche Spannungen. Aber ihre Potentiale sind (§ 10)

$$\frac{M}{R}, \ \frac{4\,M}{2\,R}$$

das heisst: das Potential der zweiten ist das Doppelte vom ersten und es geht daher, wenn sie in Verbindung gebracht werden, ein Theil des Elektricums von der zweiten über zur ersten, ungeachtet die Punkte, welche verbunden werden, gleiche Spannung haben.

24. Gesetzt, zwei elektrisirte Leiter im Gleichgewichte befinden sich einander gegenüber, so wird ein orthogonaler Canal zwischen ihnen, welcher auf ihren Oberflächen die Elemente σ' σ'' abschneide, wo die Dichten beziehungsweise μ' μ'' seien, so wie im Falle des § 21, an seinen Seiten und an seinen Basen eine Summe von Normalkräften gleich Null haben. Drückt man daher solche Kräfte auf die soeben gezeigte Art aus, so wird sein

$$4\,\pi\,\mu'\,\sigma' + 4\,\pi\,\mu''\,\sigma'' = 0,$$

woraus folgt

$$\mu' \sigma' = - \mu'' \sigma'',$$

das heisst: *Zwei elektrisirte Körper haben gleiche Mengen entgegengesetzter Elektricitäten an den entsprechenden Elementen* (§ 21) *ihrer Oberflächen*, und daher werden, wenn diese Elemente gleich sind, die Dichten hier gleich sein.

25. Gehen wir nun weiter, um von den erdichteten oder *fictiven, an den Niveauflächen gleichmächtigen Leitern* zu sprechen. Erinnern wir uns zu diesem Ende, dass nach § 19

$$- \frac{V' - V}{d}$$

der Ausdruck für die in irgend einem Punkte einer Niveaufläche vom Potential V wirkende Normalkraft und dass

$$4 \pi \mu$$

der Werth der Kraft an der Oberfläche eines Leiters auf einen Punkt von der Dichte μ ist (§ 22), so leuchtet ein, dass in den Kräften nichts sich ändert, wenn jene Niveaufläche ersetzt wird durch die Oberfläche eines elektrisirten Leiters, welcher mit der Kraft

$$4 \pi \mu = - \frac{V' - V}{d}$$

wirkt. Daraus ergiebt sich der Werth der Dichte, welche derselbe wird haben müssen

$$\mu = - \frac{1}{4 \pi} \cdot \frac{V' - V}{d}.$$

Und was die Gesammtmasse betrifft, welche man sich auf dem fictiven Leiter denken muss, so ist leicht zu erweisen, dass dieselbe wird gleich sein müssen jener des wirklichen Leiters. In der That besitzt in einem und demselben Elemente σ' der fictive Leiter die nämliche Summe von Kräften wie die Niveaufläche; aber diese hat eine Summe von Kräften gleich jener des entsprechenden Elementes σ des wirklichen Leiters (§ 21); heissen also μ' und μ die Dichten des fictiven und des wirklichen Leiters, so wird sein

$$4\,\pi\,\mu'\,\sigma' = 4\,\pi\,\mu\,\sigma$$

oder

$$\mu'\,\sigma' = \mu\,\sigma$$

und für den ganzen Umfang beider Leiter

$$\Sigma\,\mu'\,\sigma' = \Sigma\,\mu\,\sigma.$$

So hat man z. B. an einer sphärischen durch eine Centralmasse M erzeugten Niveaufläche

$$\frac{V' - V}{d} = \frac{M}{R^2},$$

woraus man mittelst der Gleichung

$$4\,\pi\,\mu = \frac{M}{R^2}$$

ableitet

$$\mu = \frac{1}{4\,\pi} \cdot \frac{M}{R^2}$$

und daraus ergiebt sich die auf dem fictiven Leiter, von der Oberfläche $4\,\pi\,R^2$, zu vertheilende Masse

$$\mu\,\Sigma\,s = M.$$

Noch wolle man bemerken, dass durch Wegnahme des wirklichen Leiters, nachdem der fictive Leiter an der Stelle einer Niveaufläche eingeführt worden ist, sich in den Potentialen der anderen um denselben herum befindlichen Oberflächen gar nichts ändert. Denn es werden die Basen der orthogonalen Canäle, die auf demselben ruhen, die nämlichen Kräfte wie zuvor in sich schliessen und wird man deshalb auch an den entgegengesetzten Basen der nämlichen Canäle identische Kräfte haben.

Fünftes Capitel.

Elektrisches Fassungsvermögen (Capacität).

26. Wir haben gesehen, dass das Potential eines gegebenen Leiters wächst im Verhältnisse seiner Ladung (§ 6); heisst also C die Ladung, welche bei einem Leiter das Potential Eins hervorbringt (§ 10, Zusatz), so werden wir mit der Ladung

$$M = 2\,C, = 3\,C = \ldots\ldots$$

die Potentiale 2, 3 ...... und allgemein $V = \frac{n\,C}{C} = n$

oder

$$V = \frac{M}{C}$$

erhalten, wohlverstanden, wenn nicht äusserliche Einwirkungen dazu kommen, welche das Potential des Körpers abändern.

Die Quantität C heisst die elektrische Capacität des Körpers; und da, für $V = 1$, $C = M$ wird, so werden wir sagen, dass die elektrische Capacität eines Körpers gemessen werde durch die Menge von Elektricum, welcher er bedarf, um das Potential Eins zu erlangen.

Zusatz. Wenn man erwägt, dass auch die Wärme-Capacität jene ist, durch welche die Menge von Caloricum bestimmt wird, die erforderlich ist, um einen Körper auf eine gegebene Temperatur zu bringen, so erkennt man leicht zwischen beiden Arten von Capacität eine grosse Analogie, bei Vergleichung des Potentials mit der Temperatur in der bekannten Gleichung für die Menge q von Caloricum:

$$q = p\,c\,t.$$

Aber die Analogie ist keine vollständige. Denn die Wärme-Capacität, wie sie gewöhnlich verstanden wird, betrifft das Gewicht von 1 Kilogramm und kann man deshalb sagen, dass sie im Verhältnisse des Gewichtes wachse, während die elektrische Capacität sich weder auf ein Gewicht, noch auf ein bestimmtes Volumen bezieht, sondern auf den ganzen Körper, was immer sein Gewicht und Volumen sei; und es zeigt sich, dass sie für ähnliche Körper einfach im Verhältnisse ihrer Abmessungen wachse und keineswegs im Verhältnisse des Gewichtes oder des Volumens, wie man es (§ 27) bei der Kugel sehen wird. Ferner wechselt die Wärme-Capacität mit dem Wechseln der Stoffe und der Temperaturen, und nichts dergleichen kommt vor bei der elektrischen Capacität, welche sich dagegen ändert in Folge der Einwirkung der umstehenden Körper, die auf den Werth des Potentials Einfluss nehmen (§ 4, Folgesatz). Indem man sich aber diese Unterschiede gegenwärtig hält und das Product pc betrachtet als Ausdruck der Wärme-Capacität des ganzen Körpers vom Gewichte p, ist die genannte Analogie nicht ausser Acht zu lassen, insbesondere um dem Ausdrucke $M = CV$ eine mehr allgemeine Bedeutung zu geben.

27. Die Capacität der Kugel ergiebt sich unmittelbar aus dem Werthe ihres Potentials (§ 10)

$$V = \frac{M}{R},$$

woraus folgt

$$C = R.$$

Die Capacität einer Kugel ist gleich ihrem Halbmesser.

Will man also mehrere Kugeln auf das nämliche Potential bringen, so hat man ihnen Ladungen zu ertheilen proportional ihren Halbmessern. So würde z. B. die Erdkugel eine fast unendlich grosse Ladung erfordern, um auch nur ein kleines Potential zu erlangen, welches der ganzen Kugel eigen zu nennen wäre. Eine sehr kleine

Kugel wird die geringste Ladung verlangen, um auf ein hohes Potential zu kommen; und kann man daher, wenn sie mittelst eines dünnen Metalldrahtes mit einem entfernten elektrisirten Leiter in Verbindung gebracht wird (§ 7), behaupten, dass in letzterem das Potential wegen des der Kugel mitgetheilten Elektricums keine merkliche Veränderung erleiden werde, wie es auch mit der Temperatur eines Körpers der Fall ist, an welchen man ein Thermometer bringt; weshalb eine sehr kleine in solcher Weise benutzte Kugel den Namen eines Potential-Thermometers erhielt.

Weil bei gleichem Potentiale die Ladungen zweier Kugeln den Halbmessern proportional sind, so werden wir, wenn R', R'', μ', μ'' die Halbmesser und die Dichten bezeichnen, haben

$$4\pi R'^2 \mu' : 4\pi R''^2 \mu'' = R' : R''$$

und daraus

$$\frac{\mu'}{\mu''} = \frac{R''}{R'},$$

sonach stehen allgemein auf mehreren Kugeln, welche miteinander in Verbindung oder von gleichem Potentiale sind, die elektrischen Dichtigkeiten im umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser. Daher stehen die Spannungen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Halbmesser (§ 23, Folgesatz 2). Zwei Kugeln z. B. von den Halbmessern 1 und 10 werden bei gleichem Potential die Spannungen 100 und 1 haben; miteinander verbunden aber werden sie dennoch im Gleichgewichte sein. Es ist dies ein neuer Beweis des grossen Unterschiedes zwischen Spannung und Potential und der besonderen Eigenthümlichkeiten des Potentials, auf welche im § 5 hingewiesen wurde.

28. Hat man mehrere Körper auf verschiedenen Potentialen V', V'', V''' .... und bringt man sie mit-

einander in Verbindung, so wird ein gemeinschaftliches Potential V entstehen, und nennt man C', C'', C''' .... ihre bezüglichen Capacitäten, so wird man zwischen ihren anfänglichen Ladungen und den neuen die Gleichung haben

$$V'C' + V''C'' + V'''C''' \ldots = VC' + VC'' + VC''' + \ldots$$

welche sich benutzen lässt zur Lösung irgend eines Problems über die Vertheilung der Ladungen oder über das gemeinsame Potential, welches mehrere zusammenhängende Körper annehmen.

Eine ähnliche Gleichung hat man für die Endtemperatur ϑ eines Gemisches mehrerer Körper von verschiedenen Temperaturen t', t'', t''' ...... nämlich:

$$p'c't' + p''c''t'' + \ldots\ldots = \vartheta\,(p'c' + p''c'' + \ldots\ldots)$$

gemäss der in § 26 (Zusatz) gemachten Bemerkung. Diesen ähnlich ist auch der Ausdruck für die Geschwindigkeit, welche aus dem Stosse harter Körper von den Massen m', m'', m''' und deren Anfangsgeschwindigkeiten v', v'', v''' ..... resultirt, nämlich

$$m'v' + m''v'' + \ldots\ldots = U\,(m' + m'' + \ldots\ldots),$$

wo die Massengrössen m', m'', m''' die Aufnahmsfähigkeit (Capacität) durch die Kraft darstellen.

Zusatz. Ich muss hier ein- für allemal bemerken, dass alle Vorstellungen und alle Redensarten, hinsichtlich der elektrischen Massen und der beiden Arten von Elektricität, des unerschöpflichen Vorrathes derselben und ihrer Uebertragung auf die wägbare Materie, nichts sind, als vorläufige theoretische Formen, welche eben den Thatsachen entsprechen, wie sie äusserlich erscheinen. Eine anders geartete Sprechweise würde entweder zu schwerfällig werden oder bedeutungslos ausfallen; nachdem, bei unserer Unwissenheit über die wahre und wesentliche Beschaffenheit des geheimnissvollen Agens, welches wir Elektricität nennen, uns nichts übrig bleibt, als die Gesetze seiner Wirkungsweise durch eine übereinkömmliche Kunstsprache auszudrücken, deren Klarheit und Stärke blos auf einfachen Beziehungen der Analogie beruhen kann.

Sechstes Capitel.

Elektrostatische Induction.

29. Man habe eine mit der elektrischen Masse M geladene Kugel und in geringer Entfernung von der Kugel einen isolirten Leiter BC. Die Masse M wirkt ringsum, wie wenn sie gänzlich im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre (§ 11) und macht ihre Wirksamkeit allen Punkten des benachbarten Raumes und der umstehenden Körper fühlbar. Die elektrischen Moleküle, welche in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte der Kugel im Innern von BC im neutralen Zustande sind, haben verschiedene Potentiale und es besteht daher kein Gleichgewicht. Betrachtet man sonach die elektrischen Atome $+ a$, $- a$ der im Innern von BC enthaltenen neutralen Moleküle, so sieht man ein, dass die $+ a$ nach der einen Seite von BC und die $- a$ nach der andern Seite sich bewegen und vereinigen werden; und wenn M positiv ist, werden sich die ersteren an dem entferntesten Theile C, die letzteren am nächsten B ansammeln, wo beide zwei rasch anwachsende getrennte Summen bilden. Aber diese Summen wirken auch noch auf die neutralen Moleküle von BC, und da ihre Wirksamkeit in fortwährendem Wachsen ist, wird dieselbe bald den entgegengesetzten Wirkungen, welche von M ausgehen, gleichkommen. Alsdann hört die Zersetzung der neutralen Moleküle auf, weil die Bewegung der Elektrica unmöglich geworden ist und der inducirte Körper mit seinen entgegengesetzten Ladungen den Gleichgewichtszustand

angenommen hat. In Kürze könnte man sagen, dass das elektrische Atom $\pm a$ unterworfen sei den Kräften

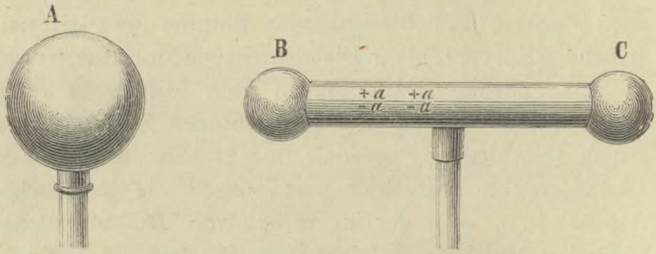
von der Seite von M . . . . $\pm \alpha$
„ „ „ „ B neg. . . . . . $\mp \beta$
„ „ „ „ C pos. . . . . . $\mp \gamma$

und daher hat man, sobald β und γ bis zu dem Punkte gewachsen sind, dass

$$\mp \beta \mp \gamma = \pm \alpha$$

wird, in jedem neutralen Molekül gleiche und entgegengesetzte Kräfte, welche Gleichgewicht geben. Aehnliches geht vor bei einer inducirenden Masse — *M*. Gebraucht man die von Riess eingeführten Benennungen, so wird

Fig. 18.



man sonach sagen, dass, wenn die Resultirende der Einwirkungen der Inducirten erster Art (der in *B* angezogenen) und der Inducirten zweiter Art (der in *C* abgestossenen) in jedem Punkte gleichkommt der Einwirkung der Inducirenden, alsdann im inducirten Körper Gleichgewicht eintritt, folglich werden:

1. die inducirten Massen grösser sein, wenn der Inductor eine grössere Ladung hat oder dem inducirten Körper näher ist, weil in solchem Falle der Werth von α wächst und daher zum Gleichgewichte auch die Werthe von β und γ wachsen müssen.

2. Wenn der inducirte Cylinder an der Seite *C* verlängert würde, so würden die nämlichen Kräfte β, γ,

welche von den an seinen Enden angehäuften Elektrica ausgeübt werden, nicht mehr für das Gleichgewicht genügen, wegen der vergrösserten Entfernungen der Inducirten zweiter Art und des neu hinzugekommenen Cylinderstückes. Die Erfahrung bestätigt diese Folgerung, indem sie eine Zunahme der Abweichung der an den Enden des inducirten Cylinders angehängten Pendelpaare zeigt, sobald derselbe, z. B. nach Art der Stücke eines Fernrohrs, verlängert wird.

3. Wenn daher der inducirte Körper in Verbindung mit der Erde steht, was so viel bedeutet, als das Ende C in unendliche Ferne verlegen, so wird die Inducirte erster Art ihren höchsten Werth erreichen, indem sich für jeden Punkt $\beta = \alpha$ macht. In solchem Falle ist das Potential des inducirten Körpers Null (§ 7, Folgesatz), und man bemerke wohl, dass es die freie Wirkung und nicht einen Zustand von Versteckung der Inducirten ersten Art zu erkennen giebt.

4. Der Gleichgewichtszustand, in welchem sich der inducirte Körper befindet, macht begreiflich, dass in seinem Innern das Potential überall constant und daher hier jede Resultirende der äusseren Einwirkungen auf Null gebracht ist. Aus dieser Eigenheit der inducirten Körper zieht man Vortheil, um feine elektrische Apparate gegen äussere Einflüsse zu schützen, indem man sie mit einem Metallnetze oder mit Stanniolblättern überzieht. Daher kommt der Name elektrische Schutzwände oder Schirme, welchen man Leitern gegeben hat, an deren Oberfläche die Wirkungen der Inductionen sich ansammeln.

Als elektrische Schutzwand dient auch eine Metallplatte, welche mit dem Boden verkehrt. Denn man kann sich dieselbe vorstellen als Theil einer Kugel von unendlichem Halbmesser; und darum wird sie hinter sich das constante Potential Null haben, so wie es an allen Theilen eine Kugel von beliebigem Halbmesser haben würde, welche in Verbindung mit dem Boden gebracht wäre.

Mit isolirenden Körpern könnte ein elektrischer Schirm nicht hergestellt werden. Ihre Moleküle lassen aufeinanderfolgende Inductionen und Polarisationen zu, wodurch sich eine elektrische Thätigkeit mit voller Wirksamkeit jenseits derselben fortsetzt. Sie werden daher, zum Unterschiede von den leitenden Körpern, dielektrische genannt, nach Analogie mit den diaphanen und diathermanen Körpern.

30. Man habe einen isolirten Cylinder *AA* mit schwacher Ladung, z. B. positiver, und während die beiden an seinen Enden *A* angehängten Pendel um einen gewissen Winkel abweichen, nähere man allmählich an *A* einen geriebenen Glascylinder. Man sieht die beiden Pendel sich einander nähern, sich berühren und hierauf von neuem auseinandergehen. Dies zeigt, dass die vom Glascylinder erregte Inducirte erster Art, stufenweise, wie sie sich an *A* näherte, an diesem Theile die anfängliche Ladung ausgeglichen und dann noch überschritten hat. Und beim Zurückbringen des Glascylinders sieht man, dass die Pendel zuerst von neuem sich annähern, sich berühren und dann wieder sich öffnen, indem sie den Anfangszustand wieder einnehmen. Dieser Versuch, welchen man Canton verdankt, beweist klar die folgenden Gesetze:

1. Ein elektrisirter Körper verhält sich nicht unzugänglich gegen Inductionen, sondern ist dafür empfindlich, wie wenn er nicht elektrisirt wäre.

2. Die inducirten Elektrica überlagern das ursprüngliche Elektricum, indem sie eine Bestätigung des Grundsatzes (§ 6) liefern, genannt die Ueberlagerung der Gleichgewichte.

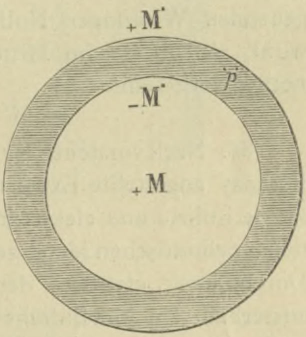
Daraus leitet man umgekehrt folgendes dritte Gesetz ab:

3. Ein der Induction unterworfener Körper ist befähigt, irgend welche neue Ladung aufzunehmen, welche hier

diejenige Vertheilungsweise annimmt, welche sie haben würde, wenn sie allein da wäre. Andere Ladungsweisen, welche man sich erdenken wollte, indem man sich einfache Verschiebungen oder Neutralisationen im Elektricum vorstellte, das der Körper anfangs besass, müssten schliesslich dem gleichzeitigen Dasein der übergelagerten Ladungen gleichwerthig sein, um dieselben resultirenden Wirkungen zu ergeben.

31. Es sei ein Conductor mit mehreren Höhlungen in seinem Innern, welche die gesonderten elektrischen Massen $m' \, m'' \, m''' \ldots$ enthalten. Man denke sich eine geschlossene Oberfläche *S S* in der Dicke des Conductors um die genannten Höhlungen gezogen. Nachdem Alles im Gleichgewichte ist, wird das Potential des Conductors überall constant sein und es werden deshalb die auf alle Punkte der genannten Oberfläche *S S* wirkenden Kräfte Null sein nach was immer für einer Richtung, wonach man für die Normalkräfte auf ebendieselbe haben wird (§ 15)

Fig. 19.



$$\Sigma f_n = 4 \pi M = 0$$

und somit $M = O$; was beweist, dass an den inneren Wänden der gedachten Höhlungen sich durch Induction eine Menge von Elektricum bildet, gleich der Summe

$$m' + m'' + m''' + \ldots\ldots$$

und von entgegengesetztem Zeichen. Es wird demnach eine gleiche Menge an der Oberfläche des Conductors auftreten.

Die Wände eines Saales und alle Gegenstände, welche die elektrisirten Körper umgeben, erlangen immer in ihrem Innern ebenso viel Elektricum von entgegengesetztem Zeichen, als sich auf ersteren befindet, wobei sich jenes von gleichem Zeichen in die Erde entladet.

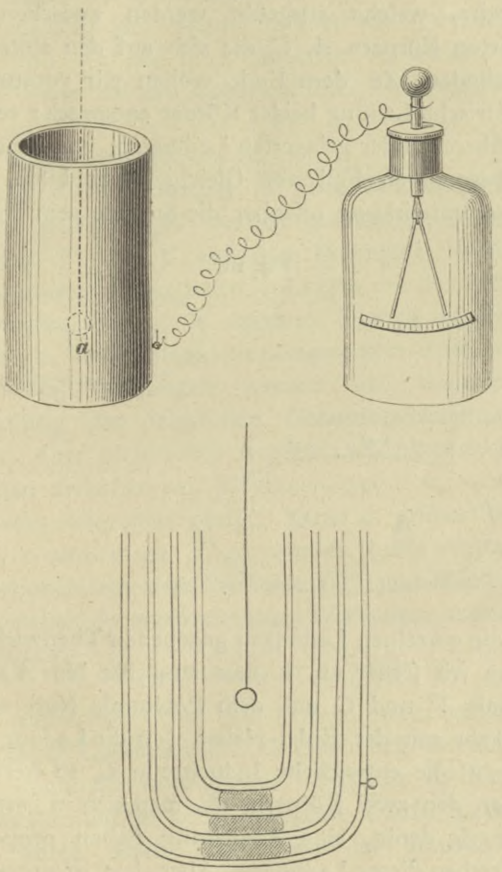
Zusatz. Für eine Kugelhülle von irgend einer Dicke, welche im Mittelpunkte die Masse $+M$ enthält, könnte man einfacher so sprechen: Seien $+M'$, $-M'$ die an der äussern und innern Oberfläche der Hülle inducirten Mengen. Im Gleichgewichtszustande hat man an jedem Punkte p der Hülle eine Resultante Null; aber das gleichförmig auf der Oberfläche einer Kugel vertheilte Elektricum giebt Resultanten Null an jedem inneren Punkte: folglich muss die Summe der von $-M'$ und von M ausgehenden Wirkungen Null sein. Und da die $-M'$ so wirkt, als ob sie im Mittelpunkt wäre (§ 11), so wird nothwendig sein

$$-M' = +M.$$

32. Nach vorstehender Theorie erklären sich ältere von Faraday angestellte Experimente. Derselbe versenkte eine kleine isolirte und elektrisirte Kugel a in das Innere eines tiefen cylindrischen Metallgefässes von bedeutend grösserem Durchmesser als dem der Kugel, an welchem Gefässe ausserhalb ein Metalldraht angesetzt war, der zu einem entfernten Elektoskope ging. Kaum tritt die Kugel in den Cylinder ein, welcher wohl isolirt sein muss, so gehen die Goldplättchen des Elektroskops auseinander, und die Abweichung nimmt zu, wie die Kugel mehr und mehr in die Tiefe sinkt; aber bei einem gewissen Punkte bleibt sie still stehen, mag man nun die Kugel weiter senken oder seitwärts verschieben oder sogar mit der innern Wand in Berührung bringen. In Betracht der Kleinheit der Kugel gegenüber der Oberfläche des Gefässes lässt sich nun im letzten Falle sagen, dass die gesammte Elektricität der Kugel in das Gefäss übergegangen sei. Sie neutralisirt daher einfach und vollständig die Inducirte erster Art, welche an der innern Wand vorhanden war,

und deshalb waren beide Ladungen gleich; und ihnen gleich war die Inducirte zweiter Art, die im Elektroskop zurückgestossen wurde.

Fig. 20.

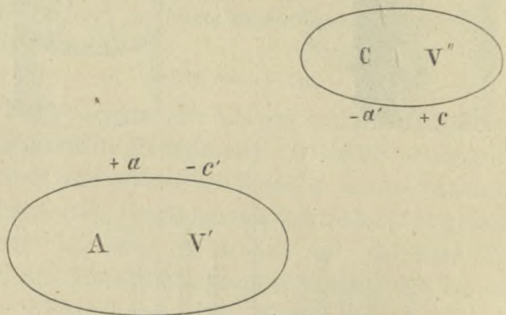


Das Experiment Faraday's wird noch bezeichnender, wenn das Kügelchen in die Mitte mehrerer concentrischer cylindrischer Gefässe eingeführt wird, welche voneinander durch kleine Scheidewände aus Schellack isolirt sind.

Das mit dem äussersten Cylinder in Verbindung gesetzte Elektroskop zeigt die nämliche Abweichung, welche man mit einem Cylinder allein hatte.

33. Wir können nunmehr einen Ausdruck finden für die Kräfte, welche ausgeübt werden zwischen zwei elektrisirten Körpern A, C, die sich auf den Potentialen V' V befinden. Zu dem Ende wollen wir voraussetzen, die elektrische Ladung beider Körper entspreche verschiedenen übereinander gelagerten Ladungen, von denen jede einen besonderen Fall von Gleichgewicht bilde, wobei die Gesammtwirkung offenbar die Summe sein wird der

Fig. 21.



durch die einzelnen Ladungen gegebenen Theilwirkungen. Nehmen wir ferner an, 1. dass zunächst blos A auf dem Potentiale V' und C auf dem Potentiale Null sei oder in Verkehr mit der Erde. Heisst $+ a$ die Ladung von a und $- a'$ die entwickelte Inducirte in C, so werden wir zwischen den zwei Körpern, die man sich in bestimmter Entfernung denkt, eine Anziehung haben proportional den Werthen dieser Ladungen. Aber $+ a$ ist proportional zu V'; $- a'$, der Effect von $+ a$, ist ebenfalls proportional zu V'; sonach ist die Anziehung, welche daraus entspringt, proportional zu V'^2 und wird sich angeben lassen durch

$$- h V'^2,$$

wo h ein mit den Gestalten beider Körper, mit ihren Abmessungen und Stellungen veränderlicher Coëfficient ist (wegen des Zeichens *minus* siehe § 1).

Nehmen wir 2. an, dass blos C auf dem Potentiale V und A auf Null sich befinde. Nennen wir $+c$ die Ladung von C und $-c'$ die in A Inducirte, so werden wir auf gleiche Weise für den Ausdruck ihrer Anziehung erhalten

$$-kV^2,$$

wo k verschieden ist von h.

Sind diese Ladungen in denselben Körpern übereinander gelagert, so werden gleichzeitig A auf dem Potentiale V' und C auf dem Potentiale V sein, weil die zusammen vorhandenen Ladungen mit den Potentialen Null weder V' noch V ändern; folglich werden beide Körper in den anfangs vorausgesetzten Zuständen sein und beide Wirkungen werden sich summiren zur Herstellung der wirklichen Gesammtanziehung beider Körper. Aber gleichzeitig werden zwei Abstossungskräfte entstehen zwischen den Elektrica $+a$, $+c$, $-a'$, $-c'$. Und weil, wie oben gesagt, a und a' proportional sind zu V', c und c' zu V, so werden beide Abstossungen proportional sein dem Producte VV', und somit wird die Gesammtheit der wechselseitigen Wirkungen auszudrücken sein durch

$$-hV'^2 - kV^2 + lVV',$$

wo l ein dritter, von den beiden ersten verschiedener beständiger Coëfficient ist. Endlich begreift man leicht, dass, wenn der Conductor C um eine Axe beweglich ist, das Moment der vom Conductor A auf ihn ausgeübten Kraft durch einen Werth von der nämlichen Form auszudrücken sein wird.*)

Folgesatz. Mit $V = V'$ ergiebt sich die Wirkung proportional V^2, wie man es auch fand für zwei entfernte

*) Diese sehr einfache Art von Beweis verdankt man Mascart, Traité d'électr. T. I, § 297.

elektrisirte Kugeln von demselben Potentiale (§ 11, Folgesatz).

Man sieht leicht ein, dass die Wirkung eine anziehende sein wird, wann die Potentiale V und V' entgegengesetzte Zeichen haben, und dass sie eine anziehende oder eine abstossende sein wird, je nach den verschiedenen Fällen, wann die Potentiale das nämliche Zeichen haben.

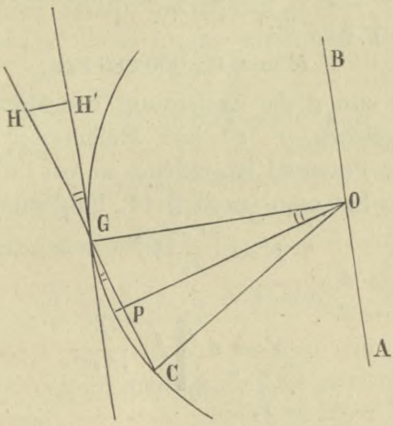
Siebentes Capitel.

Vom Masse der Potentiale.

34. Zum Messen der Potentiale kann die Wage von Coulomb dienen, insofern sie den Werth der Kraft zu erkennen giebt, welche zwischen ihren Kügelchen zur Wirksamkeit gelangt. Ich will zunächst daran erinnern, wie diese Kraft ermittelt wird, indem ich wegen Beschreibung des Apparates auf die gewöhnlichen Lehrbücher verweise.

Es seien die beiden Kügelchen der Wage mit den elektrischen Massen m', m'' geladen und die Kraft der Torsion des Fadens befinde sich im Gleichgewichte mit der Abstossungskraft der beiden Kügelchen in der Entfernung CG, welche Sehne dem Verschiebungswinkel $COG = \alpha$ entspricht. Man nehme von der Verlängerung von GC die GH ab, welche den Werth der abstossenden Kraft F vorstelle, und es sei GH' ihre Componente in der Richtung der Tangente. Denken wir uns in O zwei Kräfte OA, OB angebracht, einander entgegengesetzt, aber gleich und parallel der GH'. Die GH' und OA machen zusammen ein Kräftepaar aus, welches auf die Nadel im umgekehrten Sinne der Torsion des Fadens wirkt, und die OB, welche den Faden aus der Verticalen zu verschieben sucht, bleibt ohne merkliche Wirkung wegen ihres geringen Werthes und wegen des Gewichtes der Nadel und ihres Bügels. Nun weiss man, dass, wenn c der Torsions-Coëfficient des Fadens ist, die von der Torsion hervorgebrachte Wirkung sich verhält, wie der Verschiebungswinkel α sammt dem Winkel β, um welchen wir das obere Mikrometer gedreht haben; und da im Zustande des Gleichgewichts das Moment der Torsion und das Moment des erwähnten Kräftepaares, dessen

Fig. 22.



Hebelarm der Radius $GO = R$ ist, einander gleich sind, so werden wir haben

$$c(\alpha + \beta) = GH' . R.$$

Fällt man auf die Sehne CG die Senkrechte OP herab, so hat man aus den ähnlichen Dreiecken HGH' OGP

$$GH' = \frac{PO}{R} GH.$$

Folglich

$$c(\alpha + \beta) = \frac{PO}{R} . GH . R;$$

daraus

$$G\,H = F = \frac{c}{R} \cdot \frac{(\alpha + \beta)}{\frac{PO}{R}}$$

und, da man $P\,O = R$ nehmen kann, wenn α nicht allzu gross ist, werden wir erhalten

$$F = \frac{c}{R}\,(\alpha + \beta),$$

was zeigt, wie das Moment des Abstossungs-Kräftepaares proportional ist der Torsion des Fadens. Wenn man z. B. bei $\alpha + \beta = 1^0$ hat $F = 0{\cdot}00000277 8^{gr}$, so wird sein für $\alpha + \beta = 30^0$

$$F = 0^{\,gr},000\,083\,34.$$

Wenn nun d die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kügelchen, r' r'' ihre Halbmesser und V das gemeinsame Potential ist, welches sie vor ihrer Trennung besitzen, so hat man (nach § 11, Folgesatz)

$$F = \frac{r'\,r''}{d^2}\,V^2,$$

woraus

$$V = d\,\sqrt{\frac{F}{r'\,r''}}$$

und, für $r' = r'' = r$,

$$V = \frac{d}{r}\sqrt{F}$$

wird. Man kann in diesem Falle auch noch den Werth von m' und m'' erhalten, welche gleich sein werden, indem sich offenbar ergiebt

$$m' = m'' = d\,\sqrt{F}.$$

Im oben angeführten Zahlenbeispiele erhält man für $d = 10$ Centimeter

$$m' = m'' = \pm\,0{\cdot}09128.$$

Wenn eines der beiden Kügelchen ersetzt wird durch irgend ein Körperchen von der Capacität c, dann nimmt es mit dem Potential V die Masse $m' = cV$ auf, und da c an die Stelle von r tritt, so wird sein

$$V = d\sqrt{\frac{F}{r'' c}}.$$

Zusatz. Bedient man sich der trigonometrischen Functionen, so wird man genauer setzen können

$$F = \frac{c}{R} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

und will man daraus wieder den Werth von m ableiten, wenn $m' = m'' = m$ ist, so wird man haben

$$\frac{m^2}{C\,G^2} = \frac{c}{R} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

woraus, wenn

$$C\,G = 2\,R \sin\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt wird, man erhält

$$m^2 = 4\,c\,R\,(\alpha + \beta)\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}$$

oder auch

$$m = 2\,R\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{F}$$

$$m = d\sqrt{F}.$$

35. Bei der Coulomb'schen Drehwage wird es schwierig, den Werth der Entfernung d genau zu bekommen. Man hat daher für scharfe Messungen andere Elektrometer ersonnen. Ich will zunächst das Wage-Elektrometer anführen, in seiner einfachsten Anordnung, welches eine wahre Wage ist, deren eine Schale dazu dient, die Gewichte aufzunehmen, die zum Messen der Kraft bestimmt sind, während die andere aus einer flachen Scheibe S besteht, unter welcher sich eine breitere, feste und isolirte Ebene A befindet. Ist die Wage in's Gleichgewicht gebracht, so stellt sich zwischen S und A ein

Potential-Unterschied her, sowie man dieselben mit zwei Elektricitätsquellen in Verbindung setzt, oder auch die eine mit der Erde und die andere mit der Quelle, deren Potential man messen will. Alsdann ziehen sich die beiden Ebenen an und, um die Stärke ihrer wechselseitigen Anziehung zu messen, legt man Gewichte auf die andere Schale, bis die Wage zu ihrer anfänglichen Gleichgewichtslage bleibend zurückgeführt ist. Ein Querstück von Metall, mit einer Scala versehen, wird noch dazu benutzt, die Schale S festzuhalten und mit Hilfe eines Fernrohrs bemerkt man leicht die Verschiebungen der Schale.

Nun weiss man, dass die etwas grössere elektrisirte Scheibe A auf einen in beliebiger Entfernung befindlichen Punkt P (§ 23, Folgesatz 1) eine Normalwirkung vom Betrage $2\pi\mu$ ausübt, wo μ die beständige Dichte des auf der Ebene A verbreiteten Elektricums ist. Da jedoch auch die Scheibe S immer elektrisirt ist, so wird die Anziehung gleichfalls von der in S vorhandenen elektrischen Masse abhängen, welche dieselbe Dichte hat, wie die Ladung von A (§ 24) und daher hier in jedem Elemente s die Ladung μs bildet. Es wird daher jedes Element mit der Kraft $2\pi\mu \times \mu s$ angezogen und die ganze Oberfläche mit

$$F = 2\pi\mu^2 S$$

und, mit Rücksicht auf den Werth von μ, den man aus der Gleichung des § 22, Folgesatz 2 entnimmt, werden wir haben

$$F = \frac{S}{8\pi d^2}(V' - V)^2,$$

eine Formel, welche voraussetzt, dass beide Platten einander sehr nahe, dass $V' - V$ die Differenz ihrer Potentiale und d ihre Entfernung seien.

Hat man sonach den Werth der F erhalten mittelst des Gewichtes, welches die Scheibe S in ihre anfängliche

Lage zurückbringt, so wird die gesuchte Differenz der beiden Potentiale $V\,V'$ sich ermitteln lassen durch den Ausdruck

$$V - V' = d \sqrt{\frac{8\pi F}{S}}$$

oder es wird, wenn S mit der Erde verkehrt, das Potential V bestimmt sein durch die Gleichung

$$V = d \sqrt{\frac{8\pi F}{S}} = 4\pi\mu \,.\, d.$$

Man leitet aus derselben Gleichung folgendes allgemeine Gesetz ab: Die Anziehung zwischen zwei elektrisirten parallelen Ebenen ist proportional dem Quadrate des Unterschiedes ihrer Potentiale und steht in umgekehrtem Verhältnisse zum Quadrate ihrer Entfernung.

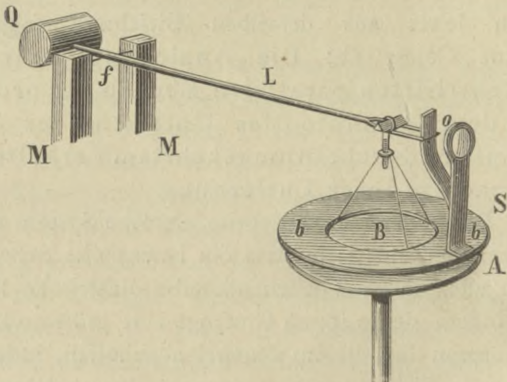
36. Das soeben beschriebene einfache System bringt den Uebelstand mit sich, dass die bewegliche Scheibe S nicht an allen ihren Theilen dieselbe elektrische Dichte besitzt, indem sie an ihrem Umfange eine grössere Dichte hat. Thomson hat diesem Mangel abgeholfen, indem er das folgende Elektrometer zusammenstellte, welches auch in anderer Hinsicht weit vollkommener ist, als das vorige.

Die obere Platte S geht aus zwei Stücken hervor, nämlich einer festen ringförmigen Zone $b\,b$, genannt Schutzring, und einer beweglichen Mittelscheibe B, welche sich dem erwähnten Kranze genau in der Art einfügt, dass sie mit ihm eine einzige Ebene bildet. Die Scheibe B ist vermittelst metallischer Drähte an einem Hebel oder einer Stange L aufgehängt, welcher durch das Gegengewicht Q im Gleichgewichte erhalten wird und um den zwischen zwei Stützen M gespannten Faden f drehbar ist. Der Hebel L endigt auf Seite der Scheibe in eine horizontale Gabel, in welcher ein sehr feines

Haar *o* ausgespannt ist, das mit einem in einem festen Stab angebrachten Zeichen zusammentrifft, wenn *B* in der Ebene der Zone *b b* liegt. Indem die Scheibe *B* in ununterbrochener Verbindung mit dem erwähnten Kranze steht, entweder mittelst einer sehr feinen Feder oder mittelst Drähten, welche ihn mit *M*, *f*, *L* verbinden, erzielt man, dass diese Scheibe eine gleichbleibende Dichte habe, wie wenn sie ein Theil einer weit grösseren Ebene wäre.

Das Instrument lässt sich auf zweierlei Art gebrauchen.

Fig. 23.



1. Man bewegt das Gegengewicht *Q*, indem man es ein wenig von *f* entfernt, oder besser, man bringt auf den Hebel einen leichten Reiter bei *Q* an, damit die Stange sich nach dieser Seite biege und so die Scheibe ein wenig über den Ring erhebe. Sodann bringt man auf *B* ein passendes Gewicht *p* an, um es in die Ebene des Ringes zurückzubringen, wobei man das Haar *o* beobachtet, um sich darnach zu richten. Man merkt sich den Betrag von *p*, und nimmt es weg, indem man *B* wieder über den Ring aufsteigen lässt. Während man hierauf *B* und den Ring in Verkehr mit der Erde hält, setzt man die Platte *A* in Verbindung mit der Quelle,

deren Potential man ermitteln will. Es entsteht Induction und Anziehung von A gegen B und B sinkt herab. Mittelst einer Mikrometerschraube, welche sich am Apparate befindet, verschiebt man A aus seiner Lage, bis man sieht, dass B genau in die Ebene des Ringes zurückkehrt. Dies beweist, dass A in der Entfernung, in welcher es sich jetzt von B befindet, auf B eine Anziehung ausübt, gleichwerthig dem Gewichte p. Auf diesem Punkte muss man die Entfernung bestimmen, welche zwischen beiden Platten statthat. Zu diesem Ende hebt man mittelst der Mikrometerschraube die Platte A, bis sie mit dem Ringe zusammenfällt. Die Höhe des Schraubenganges, multiplicirt mit der Anzahl der gemachten Umdrehungen, bezeichnet den Werth von d, welcher, zugleich mit dem Werthe von $F = p$ in die Formel eingeführt, das gesuchte Potential zur Kenntniss bringen wird.

2. Aber besser noch ist jenes Verfahren, welches sich auf die Einführung eines Hilfspotentials gründet, wie es das der inneren Belegung einer Leydener Flasche sein kann, deren äussere Belegung mit der Erde verkehrt.

Man bringe die Ebene A auf das Hilfspotential V_a und indem man verfährt wie im vorigen Falle, wird man als seinen Werth haben

$$V_a = d\sqrt{\frac{8\pi p}{S}}.$$

Während man nun A bei diesem Potentiale erhält, bringe man B auf das Potential V, welches man ermitteln will. Um sodann B zur Ebene des Ringes zurückkehren zu lassen, muss man die Entfernung d ändern. Demnach wird kraft der allgemeinen Gleichung (§ 30) sein

$$V_a - V = (d - \delta)\sqrt{\frac{8\pi p}{S}}$$

und zieht man beide Gleichungen, Glied für Glied, voneinander ab,. so hat man

$$V = \delta \sqrt{\frac{8 \pi p}{S}}.$$

Anstatt also die Entfernung d zwischen den beiden Platten zu messen, genügt es nunmehr, blos den Unterschied δ zu messen, welchen man aus der Bewegung der Mikrometerschraube ableitet, die bei der zweiten Operation gemacht wird, und diese Messung kann sehr genau geschehen, wogegen die Messung der Entfernung d ziemlich unsicher ausfiel, da man nicht eben sicher war, beim Zusammenschieben beider Platten den rechten Augenblick ihrer vollständigen Berührung zu treffen.

3. Wenn man einfach den Unterschied ermitteln will, welcher zwischen zwei Potentialen V' V'' vorkommt, wie z. B. denen der Pole einer Säule, so kann man A beständig auf dem Hilfspotentiale V_a erhalten, während man B nacheinander in Verbindung bringt mit den beiden Quellen auf den Potentialen V' V''. Man würde so zuerst den Werth von $V' - V_a$, hierauf den von $V'' - V_a$ erhalten mit der Aenderung δ in der Entfernung d, und zieht man die beiden Gleichungen voneinander ab, so würde der gesuchte Unterschied

$$V'' - V' = \delta \sqrt{\frac{8 \pi p}{S}}$$

sich ergeben.

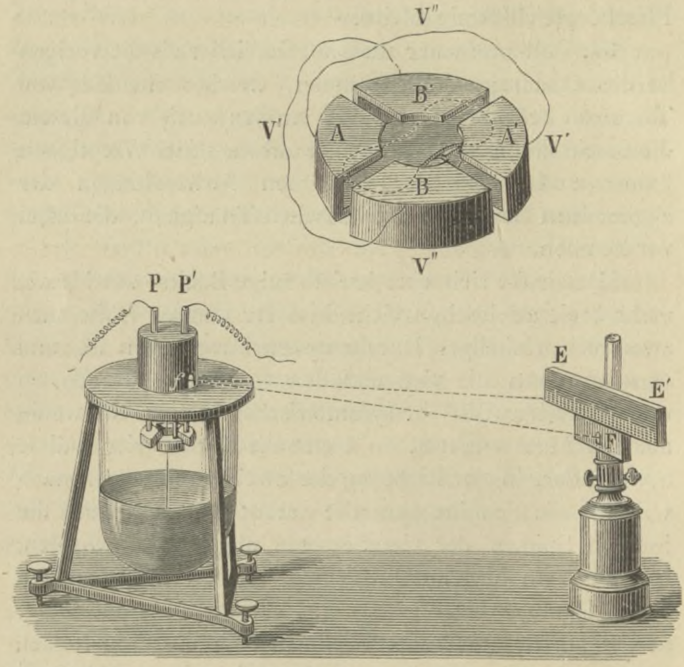
Zusatz. Um seine Wage-Elektrometer zu verbessern und zu vervollständigen, fügte Thomson denselben noch andere wichtige Stücke bei, welche einfach zu nennen für uns genügen wird. Es sind dies: 1. Eine Leydener Flasche, in welcher der ganze Apparat eingeschlossen und die dazu bestimmt ist, das Hilfspotential zu liefern, von dem die Rede war. Hiervon wird eine Zeichnung bei dem Elektrometer gegeben, welcher in der folgenden Nummer erklärt wird. 2. Ein Reproductor oder Wiederhersteller, eine kleine Elektrisirmaschine, mit welcher man nach Belieben das Potential dieser Leydener Flasche erhöhen oder erniedrigen kann. 3. Eine Messvorrichtung, welche dient, mittelst der Abweichungen eines sehr leichten Hebels zu zeigen, ob die Ladung der Flasche gleichförmig bleibt.

37. Vollkommener und empfindlicher als die vorigen ist das Quadranten-Elektrometer, welches ebenfalls von Thomson erdacht wurde. Wir wollen auch von diesem die Beschreibung und die Theorie geben, seiner Wichtigkeit halber und wegen der vielfachen Anwendungen der allgemeinen Gesetze der elektrischen Thätigkeit, die dabei vorkommen.

Man denke sich eine kreisförmige Büchse aus Metall, mehr breit als hoch, welche in ihrer ganzen Höhe nach zwei rechtwinkeligen Durchmessern zerschnitten ist, und es seien dann die vier entfallenden Stücke (Sectoren oder Quadranten) in symmetrischer Weise ein wenig aus der Mitte entfernt. So bietet die Büchse vier radiale Spalten dar, in der Richtung der zwei Durchmesser, nach welchen die Schnitte gemacht waren; nachdem noch die inneren Spitzen der vier Sectoren abgestumpft wurden, hat man im Mittelpunkte einen kleinen kreisförmigen leeren Raum, Alles wie es Fig. 24 zeigt. Innerhalb dieser so getrennten Quadranten befindet sich die Zeigernadel, was ein sehr feiner Streifen aus Aluminium ist, zerschnitten in Form zweier gegenüberstehender Kreisausschnitte, wonach die an den Enden der beiden entgegengesetzten Bögen liegenden vier Ecken sich abrunden mögen. Diese Nadel könnte über einem Zapfen schweben, so dass sie inmitten des inneren leeren Raumes der Büchse horizontal steht; besser aber pflegt man sie an einem höchst feinen Metalldrahte aufzuhängen, versehen mit einer kleinen

Magnetnadel, die der richtenden Wirkung eines festen darunter befindlichen Magneten unterworfen ist; oder an zwei Drähten (Bifilar-Aufhängung), in welchem Falle noch für kleine Abweichungen das Drehungsmoment den Abweichungen proportional ist.

Fig. 24.



Das ganze Instrument ist eingeschlossen in eine umgekehrte Glocke aus best isolirendem Flintglase und in einen cylindrischen Hut (Laterne), der sich über dem Metalldeckel der Glocke erhebt und den Aufhänge-Apparat verschliesst und schützt. Die Quadranten werden innerhalb der Glocke von vier Glasstäbchen getragen, welche durch den Deckel in einem kleinen Zwischenraum in die Laterne aufsteigen und sich einander mehr weniger nähern lassen, indem man sie in den radialen Spalten des Deckels bewegt, um die Quadranten einander mehr weniger nahe zu bringen und so nach Belieben die Empfindlichkeit des Instrumentes abzuändern. Die Quadranten sind ferner kreuzweise je zwei und zwei miteinander verbunden und die Drähte, welche zu dieser Verbindung dienen, gehen fort zu den Knöpfen *PP'*.

Die Glasplatte ist äusserlich an ihrer unteren Hälfte mit Stanniolblatt bekleidet, welches immer mit der Erde verkehrt, und enthält am Boden Schwefelsäure. So kann sie sich laden wie eine Leydener Flasche. Die innere Belegung, welche die Schwefelsäure ist, theilt ihr eigenes Potential der Aluminium-Nadel mit, weil diese mit der Säure mittelst eines Platindrahtes verkehrt, welcher ein in die Säure getauchtes Gewicht von reinem Platin trägt. Dieses Gewicht dient dazu, die Schwingungen der Nadel rasch abzuschwächen, während die Säure noch dazu nützt, das Innere des Instrumentes bei vollkommener Trockenheit zu erhalten.

Da ferner die Abweichungen der Nadel sich nicht weit erstrecken sollen, um nicht deren Lage gegen die Quadranten zu stark zu verändern, dachte Thomson daran, dieselben (wie bei anderen Instrumenten) dadurch zu erweitern, dass er an die Drähte, welche die Nadel tragen, einen kleinen sehr leichten Hohlspiegel hing, welcher das durch eine Flamme von innen stark beleuchtete Bild einer Spalte *F* aus dem Fenster *f* der Laterne auf die entfernte Scala *EE'* zurückwirft. An den in England hergestellten Apparaten wiegen die Aluminium-Nadeln $0{\cdot}07^{gr}$ und die Spiegel $0{\cdot}04^{gr}$.

Dreht man nun in geeigneter Weise die Aufhängeaxe der Nadel, so gelangt man dahin, sie mit einer der Durchmesserspalten parallel zu stellen, und obwohl sie auf ein Potential elektrisirt sein mag, welches wir *V* nennen wollen, wird sie doch unbeweglich bleiben inmitten der symmetrischen und gleichen Inductionen, welche sie gegen die Quadranten macht; und sie würde sich auch nicht bewegen, wenn diese gleiche Ladungen hätten. Man bringe aber die verbundenen Quadranten $A A'$, $B B'$ auf die verschiedenen Potentiale V', V'': sogleich weicht die Nadel ab und bleibt stehen auf dem Punkte, wo das Drehungsmoment des Fadens in Gleichgewicht ist mit dem resultirenden Kräftepaare, welches sich in folgender Weise auswerthen lässt.

Wenn nur ein einziges Quadrantenpaar da wäre, so könnte man auf diesen Fall einfach anwenden, was in § 33 gesagt wurde, nachdem die Sectoren A oder B, welche den Theil C der Nadel umfassen und die Sectoren A' oder B', welche deren Theil C' umfassen, unter den nämlichen Bedingungen stehen, wie die zwei in jener Nummer betrachteten Körper A und C. Sonach würde das Paar $A A'$, wenn es allein wäre, auf die Nadel eine Anziehung ausüben, die dargestellt wird durch den Ausdruck

$$- h V'^2 - k V^2 + l V V'$$

und das Paar $B B'$ würde für sich allein die entgegengesetzte Wirkung

$$+ h V''^2 + k V^2 - l V V''$$

thun, welche Ausdrücke summirt

$$(1) \qquad l V (V' - V'') + h (V''^2 - V'^2)$$

geben.

Allein es finden neue Wirkungen statt wegen der gleichzeitigen Gegenwart der beiden Paare, weil das eine Elektricität im andern inducirt und jedes auf die vom andern in der Nadel inducirte Elektricität einwirkt.

Die folgende Figur, gezeichnet in Uebereinstimmung mit der des § 33 und unter Zugabe der Andeutungen der Elektricitäten β und α, welche von B auf A und von A auf B inducirt werden, zeigt, dass man jetzt die

Wirkungen verbinden muss, welche ausgeübt werden zwischen

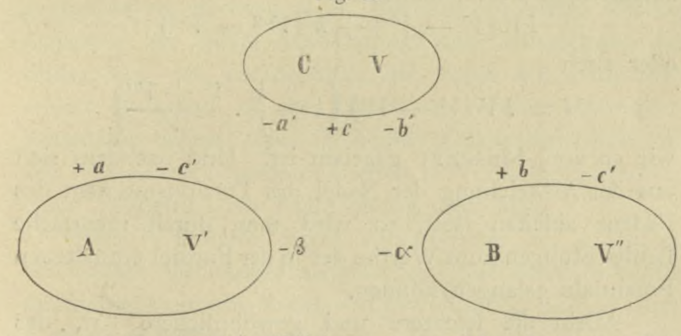
$$\left.\begin{array}{l} -b' \text{ und } (+a - c') \\ -\beta \text{ und } (-a' - b' + c) \end{array}\right\} \text{von } A \text{ her}$$

$$\left.\begin{array}{l} -a' \text{ und } (+b - c') \\ -\alpha \text{ und } (-b' - a' + c) \end{array}\right\} \text{von } B \text{ her.}$$

Nun lässt sich, in Betracht der vollkommenen Gleichheit und der symmetrischen Lage aller Theile des Instrumentes, ansehen

$$\alpha = m\,a \qquad a' = n\,a$$
$$\beta = m\,b \qquad b' = n\,b$$

Fig. 25.



und deshalb sind die Wirkungen, welche den von den vier ersten Gliedern der Klammern angezeigten Elektrica entsprechen, im Vereine mit den äusseren, der Ordnung nach proportional

$n\,b \times a \quad = n\,a\,b$ . . . . . Anziehung gegen A
$m\,b \times n\,a = m\,n\,a\,b$ . . . . . Abstossung gegen B
$n\,a \times b \quad = n\,a\,b$ . . . . . Anziehung gegen B
$m\,a \times n\,b = m\,n\,a\,b$ . . . . . Abstossung gegen A,

was gleiche Anziehung (im ersten und dritten) und gleiche Abstossung (im zweiten und vierten) an entgegengesetzten Seiten bedeutet; und darum ist ihr Gesammterfolg, in Betreff der Umdrehung des Körpers C, unter den vorhandenen Bedingungen gleich Null. Es bleiben daher blos die in den beiden letzten Colonnen angezeigten Wirkungen zu verbinden, welche, wenn nach § 33 gefolgert wird, unschwer hervorgehen als proportional

$$\begin{array}{l} + V'' V \\ + V''^2, - V'' V \\ - V' V \\ - V'^2, + V' V \end{array}$$

und demzufolge können sämmtliche Glieder, welche die wechselseitigen Wirkungen der beiden Quadrantenpaare auf die Aluminium-Nadel ausdrücken, allgemein zusammengefasst werden in einem Ausdrucke von der oben aufgestellten Form, nämlich

$$l V (V' - V'') + h (V''^2 - V'^2)$$

oder auch

$$M = l V (V' - V'') \left(1 - \frac{h}{l} \cdot \frac{V' + V''}{V}\right)$$

wie er von Mascart gegeben ist. Und nachdem sich aus der Abweichung der Nadel das Torsionsmoment des Fadens ableiten lässt, so wird man durch mehrfache Beobachtungen zum Werthe der in der Formel enthaltenen Potentiale gelangen können.

Allein die leichtere und gewöhnlichere Art, das Quadranten-Elektrometer zu benutzen, besteht darin, dass man die beiden Quadrantenpaare in Verkehr setzt mit den beiden Polen einer Säule. Alsdann ist $V' = - V''$ und die Gleichung geht zurück auf

$$M = l V (V' + V'')$$

wo $V' + V''$ den Unterschied der Potentiale der beiden Pole der Säule ausdrückt. Wenn also die Nadel ein festes Potential hat, so ist ihre Abweichung proportional dem Unterschiede der Potentiale der beiden Quadrantenpaare; und dieser Unterschied wird immer bestimmt als eine Function des Potentials der Nadel.

Wenn die beiden Quadrantenpaare beständig mit den Polen einer Säule in Verbindung stehen, dann ist die Abweichung der Nadel proportional ihrem Potentiale; und dieses letzte erscheint als Function des Unterschiedes der Potentiale der beiden Pole der Säule.

Wenn das Potential V sehr gross ist gegenüber den beiden anderen V', V'', so genügt es, blos das erste Glied obiger Formel beizubehalten, nämlich*)

$$M = l\,V(V' - V'')$$

Zusatz. Um eine Vorstellung von der grossen Empfindlichkeit der Quadranten-Elektrometer zu gewinnen genügt es zu erfahren, dass Thomson mit einem solchen Apparate bei Bifilar-Aufhängung eine Abweichung des Bildes von 60 Theilstrichen der Scala EE' (Fig. 24) erhielt, während er die Nadel auf einem constanten Potentiale beliess und die beiden Quadrantenpaare mit den Polen eines Elementes Daniell in Verbindung brachte. Jeder Theilstrich der Scala betrug 0·62 Mm.

Branly änderte dieses Elektrometer ab, indem er sich einfach vier ebener metallischer Quadranten bediente, mit der Aluminium-Nadel von gewöhnlicher Gestalt einer 8, über denselben angebracht. Die Theorie bleibt, wie klar ist, dieselbe. Lässt man die Nadel mit dem Pole einer Säule von vielen Elementen *Zn /Aq/ Cu/ Zn* verkehren, deren anderer Pol zur Erde geht, und sorgt man für gute Isolirung der Säule dadurch, dass man sie aus Fläschchen bildet, die mit Paraffin verschlossen und noch in Paraffin eingetaucht sind, so erzielt man eine vollkommene Beständigkeit im Potentiale der Nadel, ohne anderer Kunstgriffe zu bedürfen. Stanniolstreifen, an der

*) Ferrini, Fisica Tecnologica, Elettricità e Magnetismo. Milano 1878, p. 114, wo man auch die Rechnung über Bifilar-Aufhängung findet.

inneren Wand des Glasgefässes angebracht, welches den Apparat umschliesst, und mit dem Boden im Verkehr gehalten, dienen zum Schutze der Nadel gegen äussere Einflüsse. (§ 29, 4.)

Achtes Capitel.

Andeutungen über das gebräuchlichste System absoluter Maasse nebst Anwendungen.

38. Jedermann weiss, dass das Gewicht, welches man einem gegebenen Körper zuschreibt, wie z. B. der Masse, welche wir Gramm nennen, verschiedenen Werth hat in den mancherlei Ländern, wegen der Aenderungen der Schwerkraft. Diese Unsicherheit in den Werthen der Gewichte, die man verwendet, fällt zurück auf die Werthe der Kräfte, der Massen, der Potentiale und vieler anderen Elemente. Man hat daher daran gedacht, ein System von absoluten Maassen aufzustellen, auf welches sich alle jene gemeinen Maasse zurückführen liessen, welche blos relative Werthe baben. Drei Einheiten sind Grundlagen für ein ganzes System von absoluten Maassen; es sind die Einheiten der Masse, der Länge, der Zeit. Dem allgemeinen Gebrauche gemäss nimmt man zur Massen-Einheit die Masse des Grammes und will damit den tausendsten Theil der Masse verstanden haben, welche das Kilogramm ausmacht und in den Archiven von Paris aufbewahrt wird, obgleich diese Masseneinheit, in verschiedene Länder gebracht, verschiedene Gewichte vorstellt. Zur Längen-Einheit nimmt man das Centimeter und versteht damit den hundertsten Theil des Model-Meters bei Null Grad, welches ebenfalls in Paris verwahrt ist. Zur Zeiteinheit nimmt man die Secunde mittlerer Zeit oder $\frac{1}{86400}$ der mittleren Tageslänge, welche

seit so vielen Jahrhunderten unverändert fortdauert. Das ganze auf diese Fundamental-Einheiten begründete System heisst das Centimeter-Gramm-Secunden-System und wird ausgedrückt durch die Anfangsbuchstaben:

(*C. G. S.*).

Indem man davon Gebrauch macht, darf man nicht vergessen, dass das Gramm nicht als ein Gewicht betrachtet wird, sondern als eine Masse ohne Schwere, welche Gramm-Masse heissen kann.

Wir wollen nunmehr sehen, wie sich aus den Einheiten (*C. G. S.*) einige andere wichtige Einheiten ableiten lassen.

1. Dichte. Man muss sich erinnern, dass man hat

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$$

und demnach die Einheit der Dichte auszudrücken sein wird durch das Verhältniss der Gramm-Masse zum Kubik-Centimeter. So wird die Dichte des Wassers auch im absoluten Systeme ausgedrückt werden durch 1. Wenn man mit Beibehaltung der Gramm-Masse das Meter zur Längeneinheit genommen hätte, so würde die absolute Dichte des Wassers geworden sein

$$D = \frac{1000000^{gr}}{1^{mc}},$$

d. h. die Dichte des Wassers würde eine Million absolute Dichte-Einheiten betragen haben und alle Werthe der specifischen Dichten der vielerlei Stoffe hätten sich allzu sehr ändern müssen, um sich auf absolute Werthe bringen zu lassen. Es ist dies einer der Gründe, weshalb, nach Annahme des Grammes als Masseneinheit, es zweckmässig war, das Centimeter als Längeneinheit zu wählen.

2. Kraft. Um von einer wohlbekannten Thatsache auszugehen, will ich daran erinnern, dass wir gewohnt sind, die Schwerkraft zu betrachten als vertreten durch

die Beschleunigung g, welche am Meeresspiegel und unter der Breite von 45 Grad den Werth hat

$$9{\cdot}80552^m.$$

Man ist nun auf den Gedanken gekommen, auf die nämliche Weise die absolute Kraft zu messen, nämlich mittelst einer Beschleunigung; und man nennt absolute Krafteinheit jene Kraft, welche in jeder Secunde der Gramm-Masse die Geschwindigkeit von 1 Centimeter beibringt. Diese Krafteinheit wird öfter mit dem Ausdrucke Dyna bezeichnet.

Will man also z. B. den Werth der irdischen Schwerkraft in absoluten Krafteinheiten haben, so wird es genügen, den obigen Werth von g in Centimetern anzugeben, was wir ausdrücken werden durch

$$g^c = 980{\cdot}552;$$

d. h. am Meeresspiegel und unter der Breite 45^0 beträgt die Schwerkraft 980·552. Ihr Werth wird sich ergeben:

am Pole	983·089
in Paris	980·88
in Mailand	980·59
in Rom	980·27
in Neapel	980·17
am Aequator	978·009

Vom Aequator zum Pole wächst die Schwerkraft um fünf absolute Einheiten.

Nachdem dies die Kraft ist, welche die Gramm-Masse in ihrem Falle antreibt, so wird z. B. die Kraft oder das Gewicht des Kilogramms auszudrücken sein durch

980552 Dyna.

Wie man endlich für das Gewicht, welches wir Gramm nennen,

$$1^{gr} = 980{\cdot}552 \text{ Dyna}$$

hat, so wird sein

$$1 \text{ Dyna} = \frac{1^{gr}}{980{\cdot}552} = 0{\cdot}0010198.$$

3. Arbeit. Ist die absolute Einheit der Kraft definirt, so geht daraus leicht die Definition der absoluten Arbeitseinheit hervor und wird die Arbeit sein, welche von der Kraft geleistet wird beim Fortbewegen der Gramm-Masse durch den Raum von 1 Centimeter. Diese Einheit wird von den Engländern Erg genannt.

So macht z. B. unter der Einwirkung der Schwere die Gramm-Masse beim Falle durch die Höhe von einem Centimeter 980,552 Ergs oder allgemein g^c Ergs.

Die Arbeitseinheit der Praxis, das Kilogramm-Meter, wird sein

$$1^{km} = 100^c \,.\, 1000^{gr} \,.\, 980 = 10^5 \,.\, g^c\, Ergs.$$

4. Wärme-Einheit. Vorausgesetzt, dass eine Calorie (bezogen auf das Kilogramm) gleichwerthig sei mit 430 Kilogramm-Meter, so wird sie werth sein

$$430 \,.\, 10^5 \,.\, g^c\, Ergs.$$

Folglich wird die Calorie, bezogen auf das Gramm, für $g^c = 980{\cdot}552$ werth sein

$$\frac{430 \,.\, 10^5 \,.\, g^c}{1000} = 42163736$$

oder circa 42 Millionen Ergs.

Und wenn ein Gramm Wasser sich um einen Grad erwärmt für 42 Millionen Ergs, so würde eine einzige absolute Arbeitseinheit blos $0{\cdot}000000024^{gr}$ Wasser um einen Grad erwärmen. Nun nennt man im Systeme (*C. G. S.*) Wärme-Einheit jene Menge Wärme, welche der Arbeitseinheit entspricht, wie solche oben definirt wurde; daher ist die absolute Wärme-Einheit jene kleinste Menge von Wärme, welche die Masse 0·000000042 Wasser um einen Grad erwärmt.

Indem wir nunmehr auf einige absolute Einheiten in Bezug auf elektrische Masse zu sprechen kommen, können wir die folgenden klarstellen:

5. Elektrische Masse. Die elektrische Masseneinheit ist die Menge von Elektricität, welche

in der Entfernung von einem Centimeter mit der Kraft Einer Dyna ($0 \cdot 0010198^{gr}$) eine gleiche Menge Elektricität derselben Art zurückstösst.

6. Elektrisches Potential. Erinnern wir uns, dass eine elektrische Masse q auf der in der Entfernung r befindlichen Elektricitätseinheit das Potential

$$V = \frac{q}{r}$$

hervorbringt, weshalb als Potentialeinheit dasjenige Potential festgestellt wird, welches von der Masseneinheit in der Einheit der Entfernung, d. h. in der Entfernung von einem Centimeter, hervorgebracht wird.

Man könnte diese Einheit wohl auch auf eine kleine Kugel beziehen, welche einen Halbmesser von einem Centimeter und die Ladung Eins hätte, indem das Potential $V = \frac{M}{R}$ ist (§ 10, Zusatz).

7. Elektrische Capacität. Aus der Beziehung

$$C = \frac{M}{V}$$

ist abzuleiten, dass die absolute Capacitätseinheit die eines Körpers ist, welcher mit der Masseneinheit das Potential Eins aufnimmt; oder auch, welcher, mit einer constanten Quelle vom Potential Eins in Verbindung gebracht, die Ladung Eins erlangt.

Zusatz. Einige nehmen als Grundeinheiten das Meter, das Gramm und die Secunde an, ungeachtet des schweren oben bei 1. bemerkten Uebelstandes. Ein solches System wird bezeichnet mit

$$(M.\ G.\ S.).$$

Es wird leicht sein, in dieses System die Einheiten des andern umzuwandeln. So wird z. B. die Krafteinheit in diesem Systeme gleichkommen 100 Dyna und das

Gewicht des Kilogrammes (2.) wird 9805·52 absolute Einheiten sein am Meeresspiegel und unter 45 Grad.

39. Da man hat (§ 38, 2.)

$$1^{gr} = g^c \text{ Dyna},$$

wo g^c die Beschleunigung durch die Schwerkraft ist, ausgedrückt nicht in Metern, wie gewöhnlich, sondern in Centimetern, so wird man erhalten, wenn man beide Glieder mit n multiplicirt,

$$n^{gr} = n\, g^c \text{ Dyna}$$

und daraus folgende Regel, um die praktischen in Gramm ausgedrückten Gewichtseinheiten umzuwandeln in absolute Einheiten (Dyna) und umgekehrt: die Zahlen n, welche praktische Gewichtseinheiten (Gramme) ausdrücken, werden auf absolute Einheiten (Dyna) zurückgeführt, indem man sie mit g^c multiplicirt; und eine Anzahl von absoluten Einheiten wird auf die entsprechende Zahl n von praktischen Einheiten gebracht, indem man sie mit g^c dividirt.

40. Wir können nunmehr eine Probe von numerischen Anwendungen der dargelegten vornehmsten Theorien und Formeln geben.

1. Thomson bestimmte mit seinem Wage-Elektrometer den Unterschied der Potentiale der Pole einer Säule Daniell von 1000 Elementen; und indem er die beiden Platten des Elektrometers in der Entfernung $0{\cdot}1^c$ hatte, fand er eine Anziehungskraft von $0{\cdot}057^{gr}$ für den Quadrat-Centimeter. Diese Kraft wird in absolute Einheiten umgewandelt, indem man sie mit g^c multiplicirt, während $g = 9{\cdot}814^m$ die Beschleunigung zu Glasgow ist, wo Thomson experimentirte; man hat dann

$$0{\cdot}057^{gr} \times 981{\cdot}4 = 55{\cdot}94 \text{ absolute Einheiten.}$$

Sonach ergiebt sich der Unterschied der Potentiale beider Pole genannter Säule, welcher die elektromotorische Kraft der Säule heisst (§ 35),

$$V - V' = 0{\cdot}1^{c} \sqrt{\frac{8\pi \,.\, 55{\cdot}94}{1^{cq}}} = 3{\cdot}74$$

und theilt man durch 1000, so kommt die elektromotorische Kraft eines einzigen Elementes auf

0·00374.

Zusatz. Wenn die absolute Krafteinheit im Systeme (*M. G. S.*) genommen würde, und daher gleich 100 Dyna wäre (§ 38, Zusatz), so würde man erhalten

$$V - V' = 0{\cdot}001^{m} \sqrt{\frac{8\pi \,.\, 0{\cdot}5594}{0{\cdot}0001^{mq}}} = 0{\cdot}374$$

und für Ein Element

0·000374.

2. Dieselbe Formel dient, um die Anziehung zu berechnen, welche zwischen zwei ebenen Scheiben stattfindet, deren Potential und Entfernung man kennt. Nehmen wir an, die Scheiben seien in der Entfernung $0{\cdot}1^{c}$ und die eine auf dem Potentiale 300, die andere in Verkehr mit der Erde. Man erhält

$$F = \frac{V^2}{d^2 \,.\, 8\pi} = \frac{3581}{d^2}$$

$$= 358100 \text{ absolute Einheiten,}$$

welche, auf praktische Einheiten reducirt, für die Breite 45 Grad und den Meeresspiegel geben

$$F = \frac{358100}{980{\cdot}552} = 365^{gr}.$$

3. Wir wollen untersuchen, welche Ladung eine Kugel aufnimmt von 1 Centimeter Durchmesser, welche mit einem Pole der im Beispiele (1.) bezeichneten Säule in Berührung gebracht wird, während der andere Pol mit der Erde in Verbindung steht, und welche Kraft sie ausüben wird gegen eine andere ebenso stark geladene Kugel, die sich in der Entfernung von 1 Meter befindet, wobei wir absehen von irgend welchem wechselseitigen Einflusse derselben.

In der genannten, an einem Pole mit der Erde verkehrenden Säule hat man am anderen Pole das Potential 3·74. Die Kugel nimmt daher die Ladung auf

$$M = RV = 0{\cdot}5^c \times 3{\cdot}74 = 1{\cdot}87.$$

Demnach wird die gesuchte Abstossung sein

$$\frac{1{\cdot}87 \,.\, 1{\cdot}87}{(100^c)^2} = 0{\cdot}00035 \text{ absolute Einheiten}$$

und in praktischen Einheiten

$$\frac{0{\cdot}00035}{980{\cdot}552} = 0{\cdot}00000036^{gr}.$$

4. Nehmen wir an, eine Kugel von 1 Centimeter Durchmesser sei auf das Potential 300 gebracht, das nahezu jenes einer Elektrisirmaschine ist, welche Funken von 30 Centimeter giebt, und berechnen wir die Spannung des Elektricums an ihrer Oberfläche nach dem Ausdrucke $2\pi\mu^2$ (§ 23, Folgesatz).

Diese Kugel wird die Ladung haben

$$M = 0{\cdot}5^c \times 300 = 150$$

und die Dichte

$$\frac{150}{4\pi(0{\cdot}5)^2} = 47{\cdot}7,$$

$\sigma_{pm} = 2\pi\left(\frac{150}{4\pi 0{,}5^2}\right)^2 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{0}\right.$

woraus die Spannung für jeden Quadrat-Centimeter 14296 Dyna = 14'6^{gr} folgt, was ungefähr der siebzigste Theil des atmosphärischen Druckes ist.

Anmerkung. Eine mehr allgemein gehaltene Abhandlung über die elektrischen Maasse erschien mir an dieser Stelle des gegenwärtigen Elementarbuches nicht am Orte, während es doch nothwendig war, durch Zahlenbeispiele die Anwendung zu zeigen, welche sich von den aufgestellten Formeln machen lässt. Ich habe daher eine vollständigere Auseinandersetzung für den Anfang (Note VI) aufgespart, woraus die Anfänger nach Belieben Nutzen ziehen mögen, um ihre Kenntnisse in Betreff der Theorie und der Praxis der elektrischen Rechnungsarten zu befestigen. In diese neue kleine

Abhandlung habe ich auch das System der elektromagnetischen Messungen einbezogen, um einen Begriff zu geben von den neuerlich auf dem Congresse der Elektriker zu Paris angenommenen praktischen Maassen (Ohm, Volt, Ampère, Coulomb, Farad). Es versteht sich, dass dieser Theil erst durchgenommen werden soll, nachdem man die theoretischen Grundsätze der dynamischen Elektricität studirt hat.

Neuntes Capitel.

Von den Condensatoren im Allgemeinen und von ihrer Ladung.

41. Um eine allgemeine Vorstellung von den Condensatoren zu geben, wollen wir bemerken, dass das Potential eines elektrisirten Körpers sich sogleich erniedrigen muss, sobald ihm ein anderer Körper im neutralen Zustande genähert wird. Denn das blos von der Ladung des Körpers erzeugte Potential (§ 4)

$$V = \Sigma \frac{\sigma \mu}{r} \text{ oder auch } V = \Sigma \frac{q}{r}$$

wird abgeändert durch die in dem genäherten Körper inducirten Elektricitäten, und da die entgegengesetzte Elektricität (die inducirte der ersten Art) dem inducirenden Körper näher ist als die gleiche (inducirte der zweiten Art), so wird der Werth von V mehr erniedrigt durch die erste, als erhöht durch die zweite.

Um genauer vorzugehen, wollen wir unsere Gedanken auf jedes neutrale Molekül richten, dessen elektrische Atome durch die Induction getrennt wurden (§ 29). Wenn der Inductor positiv ist, ging jedes Atom $+a$ weiter von ihm weg, als sein begleitendes Atom $-a$. Benennen wir also mit r', r'' die Entfernungen, welche sie, gleich an Zahl, beziehungsweise von irgend einem Punkte des Inductors eingenommen haben, so werden wir in seinem neuen Potentiale

$$V' = \Sigma \frac{q}{r} + \Sigma \frac{a}{r'} - \Sigma \frac{a}{r''}$$

alle Entfernungen r' grösser, als die r'' haben und daher

$$V' < V;$$

und man wird grösste Erniedrigung des Potentials erhalten, wenn der Inducirte mit der Erde in Verbindung gesetzt wird, indem alsdann $\Sigma \frac{a}{r'} = 0$ ist.

Aber währenddem hat sich die Ladung des Inductors nicht verändert. Die Beziehung

$$M = C V$$

zeigt daher, dass im Inductor der Werth von C gewachsen ist; woraus der allgemeine Lehrsatz fliesst:

Die elektrische Capacität eines Leiters wird grösser, wenn man nahe zu ihm oder um ihn herum einen andern Körper bringt, auf welchen der erste eine Induction ausübt, und die Capacitäts-Zunahme erreicht ihr Maximum, wenn der inducirte Körper mit der Erde verkehrt.

Steht also ein Leiter in Verbindung mit einer beständigen Elektricitätsquelle, wie es der Conductor einer in beständiger Thätigkeit gehaltenen Elektrisirmaschine oder der Pol einer Säule ist, so wird er eine grössere Ladung aufnehmen, um das Potential der Quelle zu erreichen, wenn er nahe bei oder um sich her einen andern Körper hat, auf welchen er inducirend wirkt. Die Zunahme an Ladung, welche abhängt von jener Zunahme an Capacität, macht die Erscheinung der Condensation aus, weil eine grössere Ladung eine grössere Dichte bedeutet.

Ein Condensator besteht also im Wesentlichen aus einem Systeme von zwei Leitern, die voneinander durch eine Schichte von Luft oder einem anderen isolirenden Stoffe getrennt sind, von denen der eine mit einer Elektricitätsquelle in Verbindung gesetzt wird, welche keiner Abnahme ihres Potentials ausgesetzt ist, der andere aber zur Erde geht oder isolirt gehalten wird. Der erste heisst Collector, der andere nimmt den Namen des ganzen Systems an, indem er Condensator genannt wird, weil seiner Gegenwart die grössere Ladung des ersten eigentlich zu verdanken ist; beide führen den gemeinschaftlichen Namen der Belegungen der zwischenliegenden abhaltenden oder trennenden Schichte.

42. Nennt man C und C' die Capacitäten des belegten und nicht belegten Collectors, so wird er mit dem Potentiale V die Ladungen haben

$$M = C V, \quad M' = C' V$$

und es wird sein

$$\frac{M'}{M} = \frac{C'}{C} = x.$$

Dieses Verhältniss heisst die condensirende Kraft, welche sich nicht mit dem Potentiale ändert und am grössten ist, wenn der Condensator mit der Erde verkehrt.

Den Werth dieser Kraft kann man erhalten, indem man zuerst den Collector für sich allein und gesondert auf das Potential V einer Elektricitätsquelle bringt und ihn hierauf, so geladen, von der Quelle entfernt und mit dem Condensator belegt; heisst nun V' das niedrigere Potential, welches er alsdann zeigen wird, so werden wir haben

$$M = C V, \quad M = C' V$$

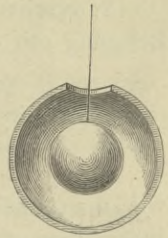
und daher

$$\frac{C'}{C} = \frac{V}{V'} = x.$$

43. Wir wollen jetzt die Theorie der Leydener Flasche geben, jenes wohlbekannten Condensators, dessen Belegungen gewöhnlich cylindrische Gestalt haben. Wir

werden sie aber als kugelförmig voraussetzen, weil so ihre Theorie einfacher ausfällt und andererseits die den Thatsachen entsprechenden Gesetze, mit nicht allzu grossen Unterschieden, allen Condensatoren gemeinsam sind. Betrachten wir also eine Leydener Flasche mit concentrischen sphärischen Belegungen, getrennt durch einen isolirenden Stoff, wobei in der äusseren Belegung eine Oeffnung ist, durch deren Mitte ein Metalldraht geht, welcher die innere Belegung zu berühren kommt, und nehmen wir nunmehr an, dass die inducirenden Kräfte unabhängig seien von der Natur der abhaltenden Schichte (§ 46).

Fig. 26.



Indem wir zunächst von der auf gewöhnliche Weise geladenen Flasche handeln, so nämlich geladen, dass blos die innere Belegung in Verbindung mit einer Elektricitätsquelle gesetzt wird, unterscheiden wir den Fall, in welchem die äussere Belegung isolirt gehalten oder aber mit der Erde in Verkehr gesetzt ist.

1. Isolirte Flasche. Es sei M die der inneren Belegung der Flasche ertheilte Ladung. An den beiden Oberflächen, der inneren und äusseren, der anderen Belegung entstehen durch Induction die Ladungen $-M$ und $+M$. Benennt man also der Grössenfolge nach mit R, R', R'' die Halbmesser der drei Oberflächen, so werden wir in der inneren Belegung das Potential haben (§ 10, 31):

$$V = \frac{M}{R} - \frac{M}{R'} + \frac{M}{R''}$$

oder

$$V = M\left(\frac{1}{R} - \frac{R'' - R'}{R' R''}\right)$$

und, wenn wir die Dicken

$$R' - R = e, \quad R'' - R' = e'$$

setzen,

$$V = M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{(R+e)\left(\frac{R+e}{e'}+1\right)}\right) = \frac{M}{C'}$$

Folglich wird (§ 27) die condensirende Kraft sein

$$\frac{C'}{R} = \frac{1}{1 - \frac{R}{(R+e)\left(\frac{R+e}{e'}+1\right)}} = x,$$

ein Ausdruck, welcher ersichtlich macht, wie die condensirende Kraft zunimmt mit dem Abnehmen der Dicke der isolirenden Schichte und mit dem Wachsen der Dicke der äusseren Belegung.

2. Nicht isolirte Flasche. Wenn die äussere Belegung mit der Erde in Verkehr steht, wird sein

$$V = \frac{M}{R} - \frac{M}{R'} = M\,\frac{R' - R}{R R'}$$

$$V = M \,.\, \frac{e}{R\,(R+e)}$$

wie man auch im vorangehenden Falle gehabt hätte, indem man $e' = \infty$ setzte.

Folglich ist

$$C' = \frac{R\,(R+e)}{e}$$

die Capacität der Leydener Flasche, wie sie gewöhnlich geladen wird, und aus dem Vergleiche mit der Capacität R, welche die innere Kugel hat, wenn sie ganz allein ist, geht hervor, dass die Gegenwart der äusseren Belegung die Zunahme $\frac{R^2}{e}$ zur Folge hat. Die condensirende Kraft wird sein

$$\frac{C'}{R} = \frac{R+e}{e} = x.$$

In diesem Falle ist also die condensirende Kraft unabhängig von der Dicke der äusseren Belegung und wächst, wie im vorigen Falle, mit Verminderung der Dicke der isolirenden Platte.

Nennt man S die innere Oberfläche der inneren Belegung, so hat man

$$R^2 = \frac{S}{4\pi}$$

und folglich

$$M = \frac{SV}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{R}\right)$$

und bei sehr kleinem e

$$M = \frac{S}{4\pi e} V,$$

d. h. die Capacität der nicht isolirten Flasche wird sehr annähernd dargestellt durch $\frac{S}{4\pi e}$.

Ihre Ladung wächst im geraden Verhältnisse zur Oberfläche und zum Potentiale und im umgekehrten Verhältnisse zur Dicke der isolirenden Schichte.*)

44. Will man aber denselben Gegenstand ganz allgemein behandeln, so muss man die Voraussetzung machen, dass beide Belegungen der Flasche mit zwei beständigen Quellen von verschiedenen Potentialen V, V' in Verkehr stehen, z. B. mit zwei Polen einer Holtz-schen Maschine. Benennt man in diesem Falle mit V und M das Potential und die Ladung der inneren Belegung, mit V' das Potential der äusseren Belegung und mit M' deren gesammte Ladung, welche auch die Wirkung der Induction von Seite der inneren Ladung M in sich begreift, und betrachtet man als Null die Dicke derselben äusseren Belegung, die immer sehr klein und

---

*) Es lässt sich hier noch sprechen von der abwechselnden Entladung, indem man der Auseinandersetzung folgt, welche unten am Ende des § 50 unter der Aufschrift „Anderer einfacherer Beweis" gegeben wird.

deren Werth zu vernachlässigen ist, so werden wir augenscheinlich setzen können*)

$$(1) \qquad V = \frac{M}{R} + \frac{M'}{R + e}$$

und in Betreff der äusseren Belegung, deren Potential von ihrer Masse M' abhängt und von der M, welche so wirkt, als ob sie im Mittelpunkt wäre, werden wir haben

$$V' = \frac{M'}{R + e} + \frac{M}{R + e}$$

oder

$$(2) \qquad V' = \frac{M + M'}{R + e}$$

woraus man zieht

$$(3) \qquad M = \frac{R(R + e)}{e}(V - V')$$

$$(4) \qquad M' = \frac{R + e}{e}\{(R + e)V' - RV\}.$$

Alle Experimente, welche sich mit der Leydener Flasche machen lassen, finden, wie sich zeigen wird, ihre Erklärung in den vorstehenden Formeln.

1. Bei der äusseren Belegung in Verkehr mit der Erde, nämlich für $V' = 0$, ergiebt sich

$$M = \frac{R(R + e)}{e} V = -M'$$

in Uebereinstimmung mit den Inductionsgesetzen und mit dem, was im vorangehenden Paragraphe gefunden wurde.

2. Für $V = V'$ erhält man

$$M = 0, \qquad M' = (R + e)V'$$

d. h. die äussere Belegung behält die Capacität, welche sie hätte, wenn sie allein wäre.

*) M. Bouty, Théor. des phénom. électr. — Supplément au Cours de Phys. de Jamin. 1878.

3. Man beachte, dass, was immer die Potentiale seien, auf welche die beiden Belegungen gebracht werden, die Ladung der inneren Belegung einzig von dem Unterschiede $V - V'$ abhängt und folglich von den absoluten Werthen der Potentiale unabhängig erscheint. Und nachdem, bei der äusseren Belegung zur Erde, V an die Stelle von $V - V'$ tritt, so ist klar, dass, wenn man bei einem Experimente, mit der äusseren Belegung zur Erde, die andere auf ein Potential bringt, welches dem Unterschiede gleichkommt, den man bei einem anderen Experimente zwischen den Potentialen beider Belegungen hatte, man in beiden Fällen dieselbe Ladung M haben wird. Dies trifft genau zu bei einer Holtz'schen Maschine, welche an ihren Polen die Potentiale V und $-V$ hat; sobald man den einen mit der Erde verkehren lässt, nimmt sie am andern ein doppeltes Potential an, welches dem Unterschiede der anfänglichen gleichkommt.

4. Die zwei Werthe (3), (4), geschrieben wie nachstehend,

$$(5) \qquad -M = (V' - V)\,\frac{R\,(R + e)}{e}$$

$$(6) \qquad M' = (V' - V)\,\frac{R\,(R + e)}{e} + V'\,(R + e)$$

zeigen, wie die Ladung M' der äusseren Belegung von der Ladung mit entgegengesetzten Zeichen der inneren Belegung um die Grösse $V'(R + e)$ abweicht, welches die zur Herstellung des Potentials V' auf derselben Belegung geeignete Ladung ist, wenn sie allein wäre, d. h. getrennt von der andern.

Allein in der Praxis werden öfters beide Ladungen gleich erhalten, weil das erste Glied des Werthes von M', so wie $V' - V$ einen erheblichen Werth hat, viel grösser ist, als das andere, wegen der Kleinheit von e gegenüber von R.

5. Die Gleichungen (1) und (2) geben ferner

$$M = VR - \frac{R}{R+e} M'$$

$$M' = V' (R + e) - M.$$

Setzt man nun die eine oder andere Belegung in Verbindung mit der Erde, indem man nämlich V oder V' gleich Null macht, so verliert die erste, d. h. die innere Belegung, die Ladung VR, und die andere verliert $V' (R + e)$, was jene Ladungen sind, welche die Belegungen aufgenommen haben würden, wenn sie allein und abgesondert auf die nämlichen Potentiale gebracht worden wären. Von daher kam die Benennung freie Elektricität an jeder der erwähnten Ladungen.

6. Steht eine Elektricitätsquelle auf constantem Potential V zu Gebote, so kann man fragen, welche Belegung mit derselben in Verbindung zu bringen sei, um die grösste Ladung zu erzielen, während man die andere Belegung mit dem Boden verkehren lässt.

Die Formeln (3) und (4) geben, wenn man die innere Belegung ladet,

$$M = \frac{R+e}{e} R V \qquad M' = -\frac{R+e}{e} R V;$$

wenn man dagegen die äussere Belegung ladet, so geben sie

$$M = -\frac{R+e}{e} R V \qquad M' = \frac{(R+e)^2}{e} V.$$

Augenscheinlich hat man die grössere Ladung, wenn man die äussere Belegung in Verbindung mit der Quelle hält.

7. Aus (3) leitet man ab

$$M = (V - V') \frac{R^2}{e} \left(1 + \frac{e}{R}\right)$$

und mit Vernachlässigung von $\frac{e}{R}$,

$$M = (V - V') \frac{R^2}{e}.$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke, wie im § 43, 2.,

$$R^2 = \frac{S}{4\pi},$$

so erhält man

$$(7) \qquad M = \frac{S}{4\pi e}(V - V').$$

Der Factor $\frac{S}{4\pi e}$, dem wir schon im vorigen Paragraph begegneten, drückt die Capacität der inneren Belegung der Flasche aus und beweist, dass im Allgemeinen die Ladung im geraden Verhältnisse mit der Oberfläche S wächst und im umgekehrten mit der Dicke der isolirenden Scheibe.

Durch Versuche mit einer Franklin'schen Tafel, wo er Glasscheiben mehrerer Art zwischenlegte, bestätigte Professor Rosetti*) die Richtigkeit dieses Gesetzes bezüglich der Dicke von $e = 2$ Millimeter bis $e = 11$ Millimeter.

Aus dem, was in § 31 gesagt wurde, lässt sich entnehmen, dass jeder elektrisirte Körper durch den Einfluss der umstehenden Körper seine eigene Capacität mehr weniger erhöht und daher gewissermassen immer unter den Bedingungen eines Condensators steht; aber selbst ein sehr grosser Werth von e thut dieser Thatsache keinen Abbruch. Eine Kugel von 10 Centimeter Halbmesser, gehalten in Mitte eines Saales von 10 Meter Breite, erhöht ihre Capacität um ein Fünfzigstel, in einem Saale von 4 Meter Breite wird diese um ein Zwanzigstel erhöht.**)

Um eine Oberfläche von sehr grosser Ausdehnung zu erlangen, pflegt man Stanniolblätter zu einer Säule aufzubauen, abwechselnd mit isolirenden Schichten (Glas,

*) Nuovo Cimento. An. 1871—72. Tom. VII. e VIII. pag. 27.

**) Journ. de Phys. di J. D'Almeida, Tom. IV, pag. 149.

Glimmer, mit Paraffin getränktes Papier), wobei die Blätter von ungerader Anzahl unter sich in Verkehr gebracht werden, um die eine, und die von gerader Anzahl, um die andere Belegung herzustellen.

8. Alles, was hier für eine einzige Flasche gesagt ist, gilt auch für eine gewöhnliche Batterie, nämlich für eine Anzahl gleicher oder ungleicher Flaschen, welche ihre gleichnamigen Belegungen in Verbindung haben. Denn alle inneren Belegungen werden ein und dasselbe Potential V und alle äusseren das Potential V' besitzen. Heissen also s, s', s'' . . . die Oberflächen der einzelnen inneren Belegungen, so wird man nach (7) für die gesammte Ladung erhalten:

$$M = \frac{V - V'}{4\pi e}(s + s' + s'' + \ldots\ldots),$$

was zeigt, dass eine Batterie sich betrachten lässt als eine einzige Flasche, welche eine Oberfläche hat gleich der Summe der Oberflächen aller Flaschen der Batterie.

9. Die Dichte der an allen Punkten der Oberfläche als gleichförmig angesehenen Ladung wird den Werth haben

$$\frac{M}{S} = \frac{V - V'}{4\pi e}$$

und, bringt man die Belegung in Verkehr mit der Erde, so wird sein

$$\frac{M}{S} = \frac{V}{4\pi e}.$$

Sonach entsprechen gleichen Potentialen gleiche Dichten und Spannungen (§ 23).

45. Es lässt sich leicht erweisen, dass der oben gefundene Ausdruck (7) sehr nahezu giltig ist für Condensatoren von beliebiger Gestalt, deren Belegungen gleich und einander sehr nahe und parallel sind. Denn die vorspringenden Flächen solcher Belegungen sind zu betrachten als zwei Niveauflächen bei constanter sehr

kleiner Entfernung e; und deshalb wird an jedem Punkte der inneren Belegung die Kraft ausgeübt:

$$\frac{V' - V}{e} = -4\pi\mu;$$

man hat sonach für die gesammte Oberfläche

$$\frac{V' - V}{e} S = -4\pi M$$

und daraus $$M = \frac{S}{4\pi e}(V - V').$$

Allein diese Formel würde sich weit von der Wahrheit entfernen, wenn die Dicke der isolirenden Schichte nicht sehr klein wäre.

Zusatz. Für einen cylindrischen Condensator, z. B. bei äusserer Belegung im Verkehr mit der Erde, während R der Halbmesser der Oberfläche, r der Halbmesser der inneren Belegung, l die Länge des Cylinders und k das specifische Inductionsvermögen des isolirenden Stoffes ist, das bisher gleich 1 vorausgesetzt wurde (siehe Folgesatz § 46), findet man

$$M = \frac{k\,l\,V}{2\,log\,nat\,\frac{R}{r}}$$

oder auch $$M = \frac{0{\cdot}4342945\,k\,l\,V}{2\,log\,\frac{R}{r}}.$$

Im Falle eines nicht sehr grossen Unterschiedes zwischen R und r zieht man daraus den einfacheren Ausdruck

$$M = \frac{k\,S\,V}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{2\,r}\right),$$

welcher nur, wenn e sehr klein gegen $2\,r$ ist, mit der oben gefundenen Näherungsformel zusammenfällt.

46. Bei allen bisherigen Beweisführungen wurde die verschiedenartige Beschaffenheit des zwischen die zwei Belegungen eingeschalteten abhaltenden Mittels nicht berücksichtigt. Nun weiss man, dass bei der Induction

durch die ganze Masse des Abhalters (Dielektricum) eine Aufeinanderfolge von Wirkungen von Molekül zu Molekül stattfindet und dass die Elektrica in den Molekülen der verschiedenen Abhalter ungleich reichlich und rasch sich trennen, um mit derselben Raschheit beim Nachlassen der äusseren Wirkung wieder zusammenzutreten, indem sonach die verschiedene Beschaffenheit der Abhalter bei den Wirkungen der Condensatoren eine grosse Rolle spielt. Um diesem Einflusse Rechnung zu tragen, nimmt man als Einheit das Inductionsvermögen der trockenen Luft bei 0 Grad und beim Druck von 760 Millimeter und sagt, ein Abhalter (Nichtleiter) habe das specifische Inductionsvermögen

$$2,\ 3,\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ k,$$

wenn er bei einer Dicke e die Induction mit derselben Stärke überträgt, wie eine Luftschichte von der Dicke

$$\frac{e}{2},\ \frac{e}{3},\ \frac{e}{4}\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{e}{k}.$$

Stellt man also im Allgemeinen mit k das specifische Inductionsvermögen des zwischen die Belegungen eines Condensators eingeschalteten Stoffes vor, so muss man anstatt der Entfernung e der Belegungen die Entfernung $\frac{e}{k}$ setzen, wodurch die Formel (7) des § 44, die mit genügender Näherung auf jede Art von Condensatoren anwendbar ist, übergeht in

$$M = \frac{k\,S}{4\,\pi\,e}\,(V - V'), \tag{8}$$

was der vollständige und allgemeine Ausdruck für die Ladung eines Condensators ist, dessen Capacität, ausgedrückt durch

$$\frac{k\,S}{4\,\pi\,e}$$

als veränderlich gedacht sein will nach Maassgabe des Inductionsvermögens des Stoffes der abhaltenden Schichte.

Ein Condensator mit isolirender Luftschichte hat die Capacität $\frac{S}{4\pi e}$. Daher ist das Verhältniss zweier Capacitäten k. Von da kommt der Name specifische Inductions-Capacität, welcher dem Werthe dieses Coëfficienten k beigelegt wird.

Lange und gründliche Untersuchungen wurden wiederholt durchgeführt, um die Inductions-Capacitäten vieler Körper zu ermitteln. Eine sehr umfangreiche Tabelle der erhaltenen Ergebnisse wurde mitgetheilt in dem neuerlichen Werke von J. E. H. Gordon, das von J. Raynaud aus dem Englischen in's Französische übertragen wurde.*) Es finden sich darin z. B. die folgenden von Golden vor Kurzem bestimmten Zahlenwerthe:

Mittel mehrerer Flint- und Krongläser . .	3·24
Eine Gattung von Paraffin	1·99
Schwefel	2·58
Gummilack	2·74
Kautschuk	2·22 bis 2·50
Guttapercha	2·46
Dieselbe nach Anderen	3·59 bis 4·20
Schwefelkohlenstoff	1·81

Aber was immer für Stoff ändert beträchtlich sein Inductionsvermögen bei geringer Veränderung in seiner Zusammensetzung oder in der Anordnung seiner Moleküle. Die Inductionsvermögen der Gase sind sämmtlich sehr nahe gleich; so hat man z. B. für

Wasserstoff	0·999674
Kohlensäure	1·000356
Kohlenoxyd	1·000100
Oelbildendes Gas (C_2 H_4) . .	1·000722
Sumpfgas (CH_4)	1·000354.

*) J. E. H. Gordon, Traité expérim. d'électr. et magn. 1881, pag. 214, T. I.

47. Ich theile schliesslich einige numerische Anwendungen der auf die Condensatoren bezüglichen Formeln mit, wobei ich die von Blavier und Raynaud gegebenen Beispiele benutze.*) Wie im § 40, folgen wir auch hier dem Systeme (*C. G. S.*) absoluter Maasse.

1. Man habe einen Condensator von 1 Quadratmeter Oberfläche mit einfach durch eine Luftschichte von der Dicke 2 Millimeter getrennten Belegungen und suche die Ladung, welche er aufnimmt, wenn seine innere Belegung mit dem Pole einer Säule Daniell von 1000 Elementen in Verbindung steht, während der andere Pol der Säule zur Erde gebracht ist.

Das Potential des Pols der Säule (§ 40, 1) hat den Werth 3·74; daher hat man aus (8)

$$M = \frac{k S V}{4 \pi e} = \frac{10000^{cq} \times 3{\cdot}74}{4 \pi \times 0{\cdot}2^{c}}$$

oder $M = 1488$ absoluten Einheiten.

Bringt man zwischen die Belegungen eine abhaltende Scheibe von der nämlichen Dicke $0{\cdot}2^c$ und vom Inductions-Vermögen $k = 3$, so hat man $M = 4464$.

2. Eine Batterie von sechs gleichen Flaschen, von denen jede die Oberfläche 450^{cq} hat, mit eingeschaltetem Glase von der Dicke von 2 Millimeter und dem Inductions-Vermögen $k = 3$, wird durch eine Maschine vom Potentiale 300 bis zur Sättigung geladen. Man verlangt den Werth der gesammten von den inneren Belegungen erworbenen Ladung.

Wir haben zunächst für die Capacität der Batterie

$$C = \frac{k S}{4 \pi e} = \frac{3 \times 450 \times 6}{4 \pi \times 0{\cdot}2} = 3223$$

und daher

$$M = C V = 966900.$$

*) Blavier, Des grandeurs électriques. Paris 1881, pag. 80. Traité expér. d'électr. et de magnétisme par Gordon, trad. par J. Raynaud. Paris 1881, pag. 268, T. I.

3. Ein unterseeisches Kabel ist zu betrachten als ein cylindrischer Condensator (§ 45, Zusatz) von unbestimmter Länge l, dessen äussere Belegung durch das umgebende Wasser gebildet wird. Suchen wir die Capacität, welche es in der Länge Eines Kilometers besitzt, wobei es aus einem Kupferdraht besteht, durch einen isolirenden Stoff vom Inductionsvermögen $k = 3$ eingehüllt, der die zwei Halbmesser hat

$$r = 0{\cdot}213^c, \qquad R = 0{\cdot}596^c,$$

was die Dimensionen des französischen transatlantischen Kabels sind.

Die Formel des § 45, Zusatz, giebt:

$$C = \frac{0{\cdot}4342945 \times 100000^c \times 3}{2 \, log \; 2{\cdot}80} = 145684.$$

Sonach kann man sagen, dass die Capacität eines Kilometers des genannten Kabels der einer Kugel vom Halbmesser 1457 Meter entspricht.

Und nachdem das ganze Kabel eine Länge von ungefähr 4000 Kilometer hat, ist seine Gesammtcapacität

582736000

gleich der einer Kugel, welche einen Halbmesser von

5827360 Meter

haben würde, was sehr nahe der Halbmesser der Erdkugel ist.

4. Mit Stanniolblättern und $^1/_3$ Millimeter dickem Papiere, dessen inducirendes Vermögen $k = 2$ sei, will man einen Condensator herstellen, welcher gleiche Capacität mit dem genannten in's Meer versenkten Kabelkilometer haben soll. Man fragt, welche Ausdehnung die Stanniolblätter haben müssen.

Man setze

$$\frac{k\,S}{4\,\pi\,e} = \frac{2\,S}{4\,\pi \times 0{\cdot}033^c} = 145684,$$

so ergiebt sich $\qquad S = 30207^{cq},$

oder sehr nahe 3 Quadratmeter.

Es wäre also eine Oberfläche von etwa 12000^{mq} nöthig, um eine Capacität zu erhalten, gleich der des ganzen in Rede stehenden Kabels. Und es werden wirklich so grosse Condensatoren construirt, indem man sich an das im § 44, 7, angegebene Verfahren hält und die Stanniolblätter in eine mehr oder weniger grosse Anzahl von Kisten einfügt.

5. Ein in der Luft ausgespannter Telegraphendraht befindet sich ebenfalls unter den Bedingungen eines Condensators in Folge des Einflusses, welcher von der Erde durch die zwischenliegende Luftschichte ausgeht; und es ist leicht nachzuweisen, dass, wenn d die Höhe des Drahtes über der Erde bedeutet, seine Capacität auf dieselbe Art auszudrücken kommt, wie jene der unterseeischen Kabel, sobald man in der bekannten Formel (Beispiel 3. und § 45) $R = 2\,d$ macht. Sonach hat man für einen Telegraphendraht, der ferne von anderen Drähten in der Luft ausgespannt ist,

$$C = \frac{l}{2\,log\,nat\,\frac{2\,d}{r}} = \frac{0{\cdot}4342945\,l}{2\,log\,\frac{2\,d}{r}}.$$

Nimmt man also einen Telegraphendraht an von 2 Millimeter Halbmesser, in der Höhe von 4 Meter über der Erde horizontal gespannt, so wird man für 1 Kilometer seiner Länge haben

$$C = \frac{0{\cdot}4342945 \times 100000^c}{2\,log\,\frac{800^c}{0{\cdot}2}}$$

$$C = 6028.$$

Vergleicht man diese Capacität mit der von 1 Kilometer des obigen transatlantischen Kabels (3.), so sieht man, dass sie ungefähr 24mal kleiner ist.

Zehntes Capitel.

Von der Entladung der Condensatoren.

48. Die plötzliche Entladung zwischen den beiden Belegungen eines Condensators, wie solche allgemein dadurch bewerkstelligt wird, dass man das eine Ende des Ausladers an die eine Belegung anlegt und das andere Ende in die Nähe der andern Belegung bringt, erfolgt in grösserer oder geringerer Entfernung, je nach dem mehr oder weniger grossen Unterschiede der Potentiale beider Belegungen.

Als Thomson mit zwei parallelen Platten experimentirte, einer ebenen, direct elektrisirten und einer schwach convexen, mit dem Boden verkehrenden, fand er, dass, so lange die Schlagweite kleiner ist als 1 Millimeter, der Unterschied der Potentiale weniger rasch zunimmt, als die Schlagweite; aber der Schlagweite proportional wird für grössere Entfernungen, die sich zwischen 1 Millimeter und 1·5 Millimeter halten, wie man auf der folgenden Tafel*) ersieht, welche nach dem absoluten Millimeter-Milligramm-Secunden-System berechnet ist:

Schlagweite d mm	Potential-Unterschied V	$\frac{V}{d}$
0·0254	1·353	53·27
0·0508	1·886	37·13
0·0762	2·419	31·74
0·1016	2·744	27·01
0·1270	2·999	23·62
0·1524	3·323	21·81
....	.....	.....
1·0414	13·01	12·49
1·1303	13·89	12·29

*) Mascart, Tr. d'électr, T. II, pag. 72 und 91.

Schlagweite d mm	Potential-Unterschied V	$\frac{V}{d}$
1·2192	14·70	12·06
1·3208	15·50	11·74
1·3970	16·27	11·65
1·4732	17·02	11·56
1·5240	17·68	11·60

Aus neueren Versuchen des Herrn J. B. Baille*) jedoch, die nach der nämlichen Methode, wie Thomson's, angestellt wurden, müssen wir entnehmen, dass die erste Reihe von Schlagweiten, worin die Potentiale weniger rasch wachsen, als die letzteren, sich noch weiter ausdehnen lässt, wenn man dieselben Beobachtungen mit anderen Hilfsmitteln wiederholt; wie man es auf der folgenden Tafel sieht, wo d und V die Schlagweiten und die zugehörigen Potentiale sind, welche Baille aus seinen Versuchen ableitete und wo V' die nach Maassgabe der Schlagweiten zwischen zwei aufeinander folgenden Versuchen berechneten Potentiale anzeigt:

d mm	V	V'
0·025	1·90	....
0·1	3·16	7·6
0·5	8·71	15·8
1	14·67	17·4
2	25·51	29·3
3	35·35	38·3
4	44·77	47·1
5	54·47	55·9
6	63·82	65·4
7	73·78	74·5
8	84·86	84·3
9	94·72	95·5
10	105·50	105·2

*) Comptes R. de l'Acad. des Sc. Paris 2 Janv. 1882, pag. 38.

Was aber sicher ist, das ist, dass, nachdem sich eine gewisse Verhältnissmässigkeit zwischen den Potential-Unterschieden und den Schlagweiten herausgestellt hat, bei fortgesetzter Vermehrung des Potential-Unterschiedes die Schlagweiten viel rascher zunehmen und man bei einem gewissen Punkte mit den kleinsten Zunahmen an Potential sehr grosse Zunahmen an Schlagweite erhält. Nachstehende von Mascart (T. II, pag. 90) zusammengestellte Daten mögen einen Begriff geben von dieser Thatsache:

d *mm*	*V*
50	17·3
60	18·5
70	19·6
80	20·5
90	21·1
100	21·7
110	22·1
120	22·5
130	23·3

Auf dasselbe Gesetz stiess Professor Righi, als er die Schlagweite zwischen zwei Platinkügelchen untersuchte und, beispielsweise, mit den Potential-Unterschieden

	5·4	17·0	46·0
die Schlagweiten	1	4	15

fand. Es ist bemerkenswerth, wie Mascart sagt, dass „von einer gewissen Schlagweite ab das Potential ..... einer Grenze zuzustreben scheint: ein Ergebniss, welches sich vorhersehen liess, weil man wohl begreift, dass, wenn ein vollständig isolirter Conductor eine genügende Ladung empfängt, die Elektricität durch die Luft entweichen muss, was immer die Entfernung der umstehenden Körper sein mag, und würde in diesem Falle die Länge des Funkens, sozusagen, eine unbegrenzte sein; ein sehr sonderbarer Umstand, welcher beweist, wie man schwer irren würde, die Stärke einer Elektrisirmaschine anzusehen als proportional der Länge der Funken, welche sich daraus ziehen lassen: und so findet auch die wunderbare Weite, auf welche sich die Blitze erstrecken, ein Gegenstück in den Experimenten an den mit sehr hohen Potentialen begabten Elektrisirmaschinen".

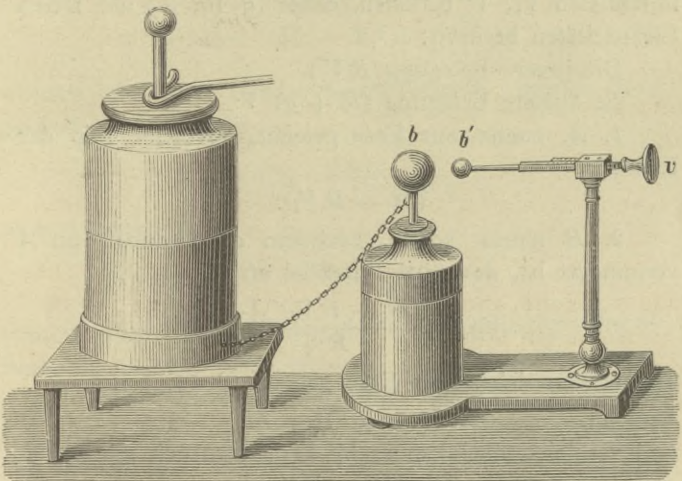
Immer aber bleibt es ausgemacht, dass die kleinen und gewöhnlichen Schlagweiten vom Funken nicht übersprungen werden, bevor die einander gegenübergestellten Körper einen bestimmten Potential-Unterschied erreicht haben. Und da das Potential proportional der Ladung ist, so folgt klar, dass, so lange die Schlagweite unverändert bleibt, jedes Funkenknistern die Bildung einer Ladung von constantem Werthe bedeutet.

(In Betreff einiger bemerkenswerthen Abänderungen an den eben dargelegten Gesetzen sehe man den folgenden § 80, Zusatz.)

49. Auf dieses Princip gründet sich die elektrische Maassflasche von Lane, welche zur Messung der den Condensatoren ertheilten Ladungen gebraucht wird. Sie besteht aus einer Leydener Flasche, deren Knopf *b* einem andern Knopfe *b'* gegenüber sich befindet, welchen man mittelst einer Mikrometerschraube *v* beliebig an *b* annähern kann, während er in beständiger Verbindung mit der äusseren Belegung der Flasche und mit der Erde bleibt. Nachdem man die Flasche oder Batterie, deren Ladung man messen will, während dieselbe ihrer inneren Belegung beigebracht wird, auf eine isolirende Unterlage gestellt hat, setzt man die äussere Belegung dieser Batterie oder Flasche mittelst eines dicken Metalldrahtes in Verkehr mit der inneren Belegung der Lane'schen Flasche. Diese ladet sich alsdann auf Kosten der Elektricität, welche von der äusseren Belegung der gegebenen Batterie oder Flasche abgestossen wird; der Knopf *b* vermehrt allmählich das ihm angehörige Potential, bis er eine Entladung nach *b'*

hin zu bewirken im Stande ist, und es werden neue Entladungen erfolgen jedesmal, da neue gleiche Massen in die Lane'sche Flasche eingetreten sind. Heisst m die Masse, welche den ersten Funken giebt, so wird $n \times m$ die Summe der n Funken entsprechenden Massen sein. Und da man annehmen darf, dass die der inneren Belegung der gegebenen Flasche oder Batterie gelieferte Elektricitätsmenge gleichkomme der Menge, welche von

Fig. 27.



ihrer äusseren Belegung abgeht, um die Lane zu laden, so wird man in der Zahl n den Werth der Masse M haben, indem als Maasseneinheit die Masse m gilt, eine Einheit, die natürlich wechselt, wenn sich die Schlagweite $b\,b'$ ändert. So lange aber diese Weite constant erhalten wird, sind alle erreichten Maasse oder alle Werthe von n, als Werthe der Ladungen betrachtet, untereinander vergleichbar.

50. Wir wollen nunmehr das Gesetz aufsuchen, nach welchem sich die stille oder wechselweise

Entladung einer Leydener Flasche vollzieht, eine Entladung, welche man bewerkstelligt, indem man die Flasche wohl isolirt hält und ihre Belegungen abwechslungsweise mit dem Boden in Verbindung setzt, so lange, als sich in denselben noch ein Rückstand von freier Elektricität vorfindet.

Bezeichnen wir mit A die innere und mit B die äussere Belegung und nehmen wir an, dass sie sich anfänglich bei den Ladungen M, M' und auf den Potentialen V_1, V' befinden, daher (§ 45, 5.) die freien Elektricitäten besitzen:

Die innere Belegung $R\,V_I$;

die äussere Belegung $(R + e)\;V'$.

1. A, zuerst zur Erde geleitet, verbleibt mit der Ladung

$$(M - R\,V_I).$$

2. B nimmt sofort, nachdem die Ladung von A vermindert ist, das neue Potential an (§ 44, 2.):

$$V'' = \frac{(M - R\,V_I) + M'}{R + e}$$

und verliert daher, zur Erde geleitet (§ 44, 5.):

$$(M - R\,V_I) + M'$$

und verbleibt, nachdem es M′ besass, zurück mit

$$-\,(M - R\,V_I).$$

Man bemerke, dass dieser Rückstand an Werth gerade dem gleich ist, welcher sich jetzt in der inneren Belegung findet.

3. A hat inzwischen das neue Potential

$$V_{II} = \frac{M - R\,V_I}{R} - \frac{M - R\,V_I}{R + e}$$

angenommen, oder

$$V_{II} = \frac{e\,(M - R\,V_I)}{R\,(R + e)}$$

und verliert daher, zur Erde geleitet,

$$\frac{e\,(M - R\,V_I)}{R + e},$$

verbleibt sonach mit der Ladung:

$$(M - R\,V_I)\,\frac{R}{R + e}.$$

4. B nimmt sogleich das neue Potential

$$V''' = \frac{(M - R\,V_I)\,\frac{R}{R+e} - (M - R\,V_I)}{R + e}$$

an oder

$$V''' = -\,(M - R\,V_I)\,\frac{e}{(R + e)^2}$$

wonach es, gemäss dem bewussten Gesetze, kaum zur Erde geleitet verlieren wird

$$-\,(M - R\,V_1)\,\frac{e}{R + e}$$

und verbleibt mit

$$-\,(M - R\,V_1)\,\frac{R}{R + e},$$

was, wie im vorigen Falle, gleich ist der in der inneren Belegung verbliebenen Ladung.

5. Fährt man fort in der nämlichen Weise zu folgern, so findet sich, dass, wenn man die Belegung A von neuem zur Erde leitet, dieselbe verbleibt mit

$$(M - R\,V_1)\left(\frac{R}{R + e}\right)^2.$$

6. Und bringt man hierauf B zur Erde, so bleibt hier zurück

$$-\,(M - R\,V_1)\left(\frac{R}{R + e}\right)^2.$$

Das Fortschreiten dieser Ausdrücke ist in die Augen fallend und man kann im Allgemeinen den Satz aufstellen, dass, wenn man abwechselnd die beiden auf die Potentiale V_I, V' geladenen Belegungen eines Condensators mit dem Boden in Verkehr bringt, die Ladungen in einer geometrischen Reihe abnehmen, deren Quotient $\frac{R}{R+e}$ ist, wobei sie nach jeder Berührung der äusseren Belegung einander gleich bleiben und nach n Berührungen der Rest der Ladung auszudrücken kommt durch

$$(M - R\,V_1)\left(\frac{R}{R+e}\right)^{n-1}.$$

Daraus erhält man durch Division und bei Vernachlässigung der Glieder mit e^2, e^3, . . .

$$(M - R\,V_1)\left(1 - \frac{e}{R}\right)^{n-1}$$

und nach Entwicklung der Potenz

$$(M - R\,V_1)\left(1 - \frac{(n-1)\,e}{R}\right)$$

was gleich Null wird für

$$n = \frac{R+e}{e}.$$

Folgesatz. Man beachte, wie alle Rückstände, welche abwechslungsweise in den beiden Belegungen vorkommen, unabhängig sind von den aufeinander folgenden Potentialen V', V'' V''' . . . . ., welche die äussere Belegung durchgeht. Wenn ursprünglich die äussere Belegung beim Potential Null gewesen wäre, so wie es bei der gewöhnlichsten Art zu experimentiren zu sein pflegt, so würden sich die Ordnung und das Gesetz der in den Belegungen nacheinander zurückgebliebenen Ladungen durchaus nicht geändert haben.

Anderer mehr einfacher Beweis. Wollte man in einem elementaren Lehrbuche die Theorie der Leydener Flasche nicht in der Weise vortragen, wie sie im § 44 gegeben ist, so kann man wohl auch gleich nach § 43 von der stillen wechselweisen Entladung handeln, indem man der Reihe nach die im Folgenden erklärten

Sätze beweist, welche zugleich für die niederen Curse die Theorie der Leydener Flasche vollständig genug herstellen, unter der Voraussetzung, dass sie immer auf gewöhnliche Weise geladen werde, d. h. bei Verbindung ihrer äusseren Belegung mit der Erde.

1. Verschaffen wir uns zunächst einen analytischen Ausdruck des Potentials Null der äusseren Belegung. Zu dem Ende genügt es zu erwägen, dass dasselbe abhängt von der zur äusseren Belegung gehörigen Ladung, die wir allgemein M' nennen wollen, und von der zur inneren Belegung gehörigen Ladung M, wie wenn dies M im Mittelpunkt vereinigt wäre (§ 11). So wird in jedem Falle das Potential Null der äusseren Belegung auszudrücken kommen durch die algebraische Summe

$$V = \frac{M'}{R+e} + \frac{M}{R+e} = 0$$

und folglich wird nothwendig sein

$$M = -M'$$

oder:

a) *Wenn die äussere Belegung eines Condensators sich auf dem Potential Null befindet, sind beide Ladungen, die innere und die äussere, immer gleich und von entgegengesetztem Zeichen.*

Diese Folgerung stimmt mit Allem überein, was als Grundlage der in §§ 31 und 32 dargelegten Theorien immer vorausgesetzt wurde.

2. Das Potential der inneren Belegung

$$V = \frac{M}{R} + \frac{M'}{R+e},$$

worin $M' = -M$, wenn die äussere Belegung sich auf dem Potential Null befindet, giebt

$$M = RV - \frac{R}{R+e} M'.$$

Nehmen wir nun an, dass die Flasche, in irgend einer Weise geladen, auf eine isolirende Unterlage gestellt und dann ihre innere Belegung mit dem Erdboden in Verkehr gesetzt werde. Es ist klar, dass vom Werthe von M blos der Antheil $R\,V$ verschwinden wird. Ein Schluss, welcher allemal richtig bleibt, wie immer M' sei und folglich, was immer das Potential der äusseren Belegung sein mag.

Ferner beachte man, dass das Product $R\,V$ die Ladung vorstellt, welche die innere Kugel erlangen würde, wenn sie bei ihrer natürlichen Capacität R auf das Potential V elektrisirt würde, d. h. ohne in der äusseren Belegung eingeschlossen zu sein. Daraus folgt der allgemeine Lehrsatz:

b) Die innere Belegung eines Condensators, wenn zur Erde geleitet, verliert immer so viel von ihrer Ladung, als sie auf demselben Potentiale besitzen würde, wenn sie allein wäre.

Dieser Menge von Elektricum, welche in den Boden ablaufen kann, ungeachtet der Anziehung der in der äusseren Belegung vorhandenen Elektricität, giebt man den Namen freie Elektricität.

Wenn nun die äussere Belegung sich beim Potential Null befindet, in welchem Falle, wie oben gesagt, die beiden Ladungen, die innere und äussere, gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, nämlich $M' = - M$, alsdann beweist dieselbe Formel, dass der Rückstand der Ladung in der inneren Belegung, nach Ableitung zur Erde,

$$\frac{R}{R+e}\,\mathrm{M}$$

ist, welche Thatsache wir durch folgenden Satz ausdrücken werden:

c) Ist eine isolirte Flasche mit der äusseren Belegung vom Potential Null gegeben, und man bringt ihre innere Belegung in Verkehr mit der Erde, so entladet sich ein Theil ihres Elektricums in die Erde und es verbleibt ihr der Bruchtheil $\frac{R}{R+e}$ von der Ladung, welche vorher darin war.

3. Die Ausdrücke

$$V = \frac{M}{R} - \frac{M'}{R+e}$$

$$V' = -\frac{M'}{R+e} + \frac{M}{R+e},$$

welche die Werthe der Potentiale der inneren und äusseren Belegung ausdrücken, wenn die Flasche an einer positiven Quelle geladen wurde, während die äussere Belegung in Verbindung mit der Erde gehalten war, beweisen deutlich, dass,

d) wenn an einer Flasche, deren äussere Belegung sich auf dem Potential Null befindet, die innere Ladung vermindert wird, aussen ein negatives Potential entsteht, und dass umgekehrt, wenn an einer Flasche, welche innen das Potential Null hat, die äussere Ladung vermindert wird, innen ein positives Potential entsteht.

4. Mittelst dieser leicht nachgewiesenen Sätze versteht man jetzt unschwer, was bei der stillen wechselweisen Entladung vor sich geht. Denn gesetzt, es werde die bei Verbindung der äusseren Belegung mit der Erde oder auf irgend eine Weise geladene und dann mit der äusseren Belegung zur Erde abgeleitete Flasche auf eine isolirende Unterlage gestellt, so wird sie in den Belegungen gleiche Ladungen besitzen. Ich berühre die innere Belegung oder lasse sie mit der Erde verkehren: es entladet sich $R\,V$ und verbleibt der Bruchtheil $\frac{R}{R+e}$ der Ladung, welche da war, oder

$$\frac{R}{R+e}M.$$

In demselben Augenblicke entsteht ein negatives Potential in der äusseren Belegung. Ich berühre diese und sie kommt auf Null, indem sie bei derselben Ladung verbleibt, wie die innere Belegung. Wegen des jetzt von der äusseren Belegung erlittenen Verlustes erzeugt sich ein positives Potential V' auf der inneren Belegung. Ich berühre sie, und das Potential kommt wieder auf Null, indem die Ladung $R\,V'$ davon weggeht und der Bruchtheil $\frac{R}{R+e}$ der vorhergehenden Ladung oder

$$\left(\frac{R}{R+e}\right)^2 M$$

zurückbleibt.

In Folge des neuen Verlustes auf Seite der inneren Belegung erhebt sich ein negatives Potential an der äusseren, welches ich verschwinden mache, indem ich sie berühre und auf gleiche Ladung mit der inneren Belegung bringe. So entsteht wieder ein positives Potential von innen, welches ich wiederum vernichte, indem ich sie zur Erde ableite und die Restladung

$$\left(\frac{R}{R+e}\right)^3 M$$

verbleiben mache. Fährt man so fort, so wird die Flasche entleert sein nach einer Anzahl n von Berührungen, welche abhängig ist von der Beziehung

$$\left(\frac{R}{R+e}\right)^n M = 0,$$

und schreibt man statt dessen blos

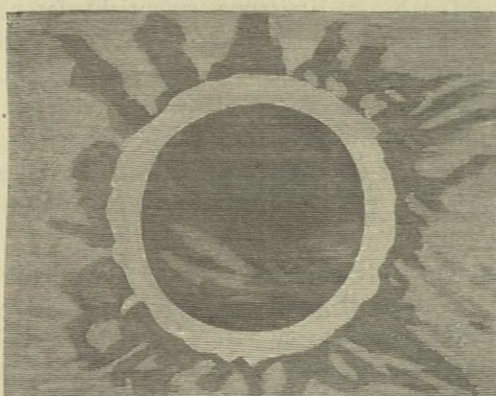
$$\frac{M}{\left(1+\frac{e}{R}\right)^n} = 0,$$

so ersieht man leicht, dass die gesammte Entladung eine umso grössere Anzahl abwechselnder Berührungen erfordert, je dünner die zwischen den beiden Belegungen befindliche abhaltende oder nicht leitende Schichte ist.

51. Wir haben schliesslich noch eine andere Art von Entladung bei den Condensatoren zu betrachten, nämlich die innere Entladung, welche sich im Momente des gewöhnlichen äusserlichen Funkens mit einem dumpfen Geräusche ankündigt, mit einem Poltern, wie Villari sagt; und zu gleicher Zeit erscheinen violette, baumartige Spritzer auf dem mit Gummilack überzogenen Glase.

Was ist die Ursache und der Vorgang bei dieser inneren Entladung? Ich will die Erklärung mittheilen, welche Professor Villari davon gegeben hat, indem ich

Fig. 28.



die Beschreibung der folgenden Thatsache vorausschicke, welche von ihm mit Sorgfalt beobachtet worden ist. Rings um eine elektrisirte Belegung, durch eine der Grenzlinie der Belegung selbst anliegende ganze Zone, befindet sich die Oberfläche des Nichtleiters wirklich im neutralen Zustande, wie man allgemein glaubt; allein gleich daneben befindet sich auf dem Nichtleiter eine zweite Zone, welche eine jener der Belegung entgegengesetzte Elektricität besitzt. Wonach es scheint, dass die Belegung rings um ihre Begrenzung her eine der eigenen entgegengesetzte Elektricität errege oder inducire, und dass die Inducirte und die Inducirende im Zwischenraume sich neutralisiren, nämlich dicht am Rande der Belegung, wodurch sie die neutrale Zone erzeugen. Als Villari mit einer Franklin'schen Tafel von kreisförmigen Belegungen experimentirte und, wie man zu thun pflegt, die bekannte Mischung von Mennige und Schwefel darüber blies, von denen die erste an die negative, der zweite an die positive Oberfläche sich anhängt, erhielt er die in Fig. 28 angedeuteten Erscheinungen. „Die Mittelscheibe stellt die Belegung vor, welche durch Influenz (Vertheilung) geladen war; sie war mit Mennige bedeckt und hatte daher negative Ladung. Die lichte Kreiszone entspricht der neutralen Zone.... Dieselbe war gänzlich frei von Pulver geblieben. Hierauf folgt in der Figur eine zweite concentrische Zone, weiter ausgedehnt und dunkel, welche sich allmählich verliert und verschwindet. Diese war auf der Tafel mit Schwefel bedeckt und war demnach mit positiver Elektricität geladen, oder entgegengesetzter der Ladung der zugehörigen Belegung.

Auf der der direct geladenen entgegengesetzten Seite hatte die Belegung positive Elektricität und war mit Schwefel bedeckt; von da an kam die neutrale Zone und hierauf die negative mit Mennige bedeckte.*)

Demnach wird es sehr wahrscheinlich, dass die innere Entladung verursacht werde durch die Vereinigung eines Theiles der Elektricitäten der Belegungen mit der entgegengesetzten Elektricität, welche jenseits der neutralen Zone auf dem Nichtleiter verbreitet ist. Und in der That finden sich nach der Entladung die genannten Zonen mehr weniger vollkommen zerstört und an ihrer Stelle bemerkt man verworrene Figuren und Verästelungen.

Nach mannigfacher Abänderung des Versuches konnte Villari folgende Gesetze feststellen:

*) E. Villari, Sulle scariche interne dei condensatori (Mem. dell' Istit. di Bologna. Serie IV, Tom. II. November 1880).

1. Die durch die innere Entladung entwickelte Wärme ist zu vernachlässigen oder Null bei schwachen Ladungen; aber von einem gegebenen Punkte an macht sie sich mit Zunahme der Ladung sehr bemerkbar und wächst dann äusserst rasch. Im Allgemeinen nimmt die innere Entladung zu mit der Zunahme des Potentials des Condensators.

2. Ferner wird die innere Entladung sehr merklich, wenn man die äussere zwischen Kügelchen von 20 bis 30 Millimeter Durchmesser herbeiführt; nimmt aber ab und geht endlich auf die Hälfte herab, wenn man aussen den Funken zwischen einer Spitze und einem Kügelchen überspringen macht.

3. Wenn die innere Belegung höher ist als die äussere, so hat die innere Entladung dieselbe Intensität, wie wenn beide Belegungen von gleicher Höhe sind; wenn aber die innere Belegung weniger hoch ist als die äussere, gewinnt die innere Entladung eine weit grössere Intensität.

4. Die von der inneren Entladung einer Quecksilber-Flasche gelieferte Wärme ist merklich höher, als die von gleichen Flaschen mit Stanniolbelegungen; und mit Quecksilber hat man auch dann eine grössere Wirkung, wenn es eine niedrigere Belegung herstellt, als die äussere ist.

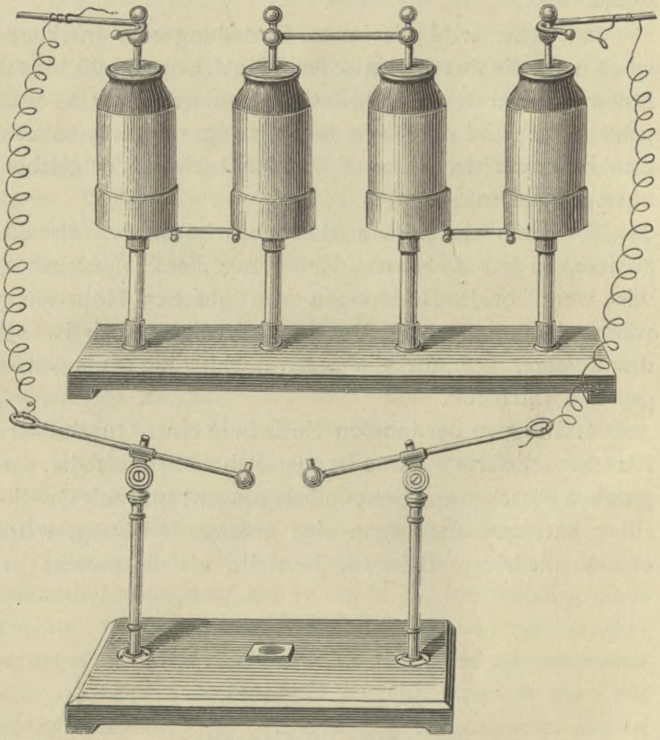
Elftes Capitel.

Ladungen in Cascade.

52. Gewöhnlich stellt man eine sogenannte Ladung in Cascade oder Franklin'sche Batterie dadurch her, dass man mehrere gleiche Flaschen in eine Reihe stellt und die innere Belegung der ersten Flasche mit einer Elektricitätsquelle in Verbindung bringt, ihre äussere

Belegung mit der inneren der zweiten Flasche, die äussere der zweiten Flasche mit der inneren der dritten, die äussere der dritten mit der inneren der vierten verbindet, und so fort, und endlich die äussere Belegung der letzten

Fig. 29.



Flasche mit der Erde in Verkehr setzt. Auf solche Weise nimmt die innere Belegung der ersten Flasche das Potential der Quelle an, welches wir V_1 nennen wollen, und die letzte äussere Belegung das Potential Null.

Aber wie man eine einfache Flasche ladet, indem man ihre Belegungen auf verschiedene Potentiale bringt, so kann man auch eine Reihe von Flaschen in Cascade dadurch laden, dass man die beiden äussersten Belegungen auf verschiedene Potentiale bringt, indem man sie z. B. mit den beiden Polen einer Holtz'schen Maschine in Verbindung setzt. Dieser Fall, welcher auch den andern in sich schliesst, soll im gegenwärtigen Capitel studirt werden.

Auch die gewöhnlichen Batterien lassen sich in Cascade zusammenstellen. Nachdem man aber weiss, dass eine Batterie einer einfachen Flasche gleichkommt, deren Oberfläche gleich ist der Summe der Oberflächen aller Elemente der Batterie (§ 44, 8.), so ist klar, dass Alles, was für eine Cascade von einfachen, sämmtlich gleichen Flaschen zu sagen ist, auch anwendbar sein wird auf eine Cascade von gleichen Batterien. Wir werden jedoch nicht ermangeln, schliesslich noch den allgemeinen Fall der aus unter sich ungleichen Flaschen oder Batterien zusammengesetzten Cascaden in Betrachtung zu ziehen.

Die Cascade liesse sich auch auf eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Weise zusammensetzen; man kann nämlich die äussere Belegung der ersten Flasche verbinden mit der äusseren der zweiten, die innere der zweiten mit der inneren der dritten etc., wie in Fig. 29.

Allein für beide Arten der Anordnung gilt dieselbe Theorie, nachdem, in Gemässheit der im § 44, 4. im Allgemeinen angegebenen Bedingungen, die eine Belegung gewissermassen die Dienste der andern leistet, indem sich die eine wie die andere mit ziemlich gleichen Massen beladet.

53. Beschränken wir uns für jetzt, wie gesagt, auf die Betrachtung einer Cascade von ganz gleichen Flaschen oder Batterien oder sämmtlich von gleicher Capacität, welche wir c nennen und, anstatt die letzte Belegung in Verkehr mit dem Boden vorauszusetzen, nehmen wir sogleich

den allgemeinsten Fall in Untersuchung, dass nämlich die ganze Cascade zwischen zwei constanten elektrischen Quellen eingeschaltet sei, welche ihre Potentiale der ersten inneren und der letzten äusseren Belegung der Cascade mittheilen. Heisst p die Anzahl ihrer Elemente, so werden wir mit

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots\ldots\ V_p$$
$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots\ldots\ M_p$$

die Potentiale und die Ladungen der aufeinander folgenden inneren Belegungen bezeichnen können; und, wenn wir bei der gewöhnlichsten Art (§ 52), die verschiedenen Flaschen unter sich zu verbinden, stehen bleiben, werden die Potentiale der äusseren Belegungen auszudrücken sein durch

$$V_2,\ V_3,\ \ldots\ldots\ V_{p+1}$$

und wird die ganze Cascade eingeschlossen sein zwischen den Potentialen V_1, V_{p+1}.

Für jede Flasche (oder Element der Cascade), einzeln betrachtet, hat man nach § 46 (8)

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} M_1 = c\,(V_1 - V_2) \\ M_2 = c\,(V_2 - V_3) \\ M_3 = c\,(V_3 - V_4) \\ M_4 = c\,(V_4 - V_5) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_p = c\,(V_p - V_{p+1}) \end{cases}$$

und ergiebt sich daher als Summe der Ladungen aller inneren Belegungen

$$\Sigma M = c\,(V_1 - V_{p+1}),$$

das heisst: Vereinigt man mehrere Flaschen von gleicher Capacität zu einer Cascade, so erhält man in der Gesammtheit ihrer inneren Belegungen eine Summe von Elektricität, gleich jener, welche man in einer einzigen dieser Flaschen haben würde, wenn ihre Belegungen auf dieselben Potentiale gebracht worden wären, auf welche die äussersten Belegungen der Cascade gebracht wurden.

Man gewinnt also keinen Vortheil in Betreff der Grösse der Ladung dadurch, dass man statt einer einzigen Flasche eine lange Reihe von Flaschen in Cascade verwendet, wenn die äussersten Potentiale die nämlichen bleiben, und es nehmen daher in diesem Falle die Elemente der Cascade um so geringere eigene Ladungen auf, je grösser ihre Anzahl ist.

Ferner zeigt sich hier (§ 44, 3.), dass die Summe der Ladungen gar nicht abhängt von den absoluten Werthen der äusseren Potentiale, sondern blos von ihrem Unterschiede. Und wenn die letzte äussere Belegung zur Erde geleitet wird, so wird man in der Cascade stets dieselbe Summe ΣM erhalten, so lange das erste Potential gleichkommt der vorigen Differenz $V_1 - V_{p+1}$. Kurz, es geht daraus hervor, wie in manchen Beziehungen die Franklin'sche Batterie die grösste Aehnlichkeit hat mit einer einfachen Flasche oder mit einem einzigen von den anderen getrennten ihrer Elemente.

54. Hält man fest, dass die elektrischen Massen, welche die inneren und äusseren Belegungen einnehmen, ziemlich gleich seien, wie es sich bei den kugelförmigen Flaschen bewährt und sehr nahezu in den meisten anderen Fällen (§ 44, 4.), so wird sein, wie eingangs gezeigt wurde,

$$pM = c\,(V_1 - V_{p+1})$$

und sonach

$$V_1 - V_{p+1} = \frac{pM}{c}.$$

Wenn also die äusseren Potentiale fest bleiben und die Anzahlen der in Cascade aufgestellten Flaschen verschieden sind, so werden wir, indem wir diese Zahlen mit p und p' bezeichnen, erhalten

$$p' M' = p M$$

und

$$\frac{M'}{M} = \frac{p}{p'}$$

das heisst: die Ladungen der einzelnen inneren Belegungen verhalten sich umgekehrt, wie die Anzahl der Flaschen, wenn zwischen den äussersten Belegungen ein constanter Unterschied der Potentiale besteht; oder auch: wenn der Unterschied der Potentiale der äussersten Belegungen constant ist, so ist auch die Summe der Ladungen aller Flaschen constant, was immer ihre Anzahl sei.

Diese Gesetze wurden im Wege des Experimentes gefunden von Professor Rosetti an der Universität Padua, indem er die Stromträger einer Holtz'schen Maschine an die Enden einer Cascade anlegte.*) Er hatte zuvor nachgewiesen, dass die Anzahl der Umdrehungen der Scheibe, die nöthig war, um eine bestimmte Anzahl von Entladungen hervorzurufen, als Mass genommen werden konnte für die Menge von Elektricität, welche während dieser Zeit geliefert worden war, insofern die Schlagweite, die Umdrehungs-Geschwindigkeit und der hygrometrische Zustand unverändert blieben; indem er nun verschiedene Anzahlen von Flaschen in Cascade zwischen die Stromträger einschaltete, erhielt er nachstehende Resultate:

*) N. Cimento. Serie 2ª Tomo VII — VIII. 1872, luglio, pag. 31, 32.

Schlagweite	Anzahl p der Flaschen in Cascade	Anzahl n der Umgänge der Maschine für 100 Funken	Product $n \times p$
15^{mm}	1	115	115
15^{mm}	2	57	114
15^{mm}	3	38	114
15^{mm}	5	22·6	113
20^{mm}	2	68	136
20^{mm}	3	46	138
20^{mm}	5	28	140
25^{mm}	1	175	175
25^{mm}	4	44	176

Man sieht hier, dass, wenn man die Zahlen n als Ausdruck der Ladung M nimmt, welche der Reihe in Cascade ertheilt worden, man diese Ladung desto kleiner findet, je grösser die Zahl der Elemente der Cascade ist. Woraus Rosetti schloss: „In der Franklin'schen Batterie ist die Menge von Elektricität, welche nöthig ist, damit die Belegungen eine durch eine gegebene Schlagweite gemessene Spannung erreichen, umgekehrt proportional der Anzahl der Flaschen." Man gelangt natürlich zu demselben Ergebnisse, wenn man die Ladungen mit der Lane'schen Flasche misst.*)

55. In der Voraussetzung wie oben, dass die zu einer Cascade vereinten Flaschen alle von gleicher Capacität seien und von der Anzahl p, mit den Potentialen V_1, V_{p+1} der ersten inneren und der letzten äusseren Belegung und mit den nacheinander folgenden sämmtlich gleichen Ladungen M_1, M_2, M_3 . . . . ., deren Werth wir mit M bezeichnen, soll man nunmehr das Gesetz aufsuchen, nach welchem die Werthe der sich folgenden Potentiale V_1, V_2, V_3 . . . . . V_{p+1} fortschreiten. Das Gesetz, welches wir suchen, lässt sich leicht im Wege

*) Mascart, Traité d'électr. 1876. Tom. II, pag. 85.

der Induction aus besonderen Fällen ableiten, unter welchen ich den einer Reihe von vier Flaschen wähle, während Jeder beliebig sich überzeugen kann, dass die Ergebnisse, welche man für irgend einen andern Fall erhält, sich genau den Formen und Verhältnissen von denen anpassen, welche wir hier erhalten werden.

Da es sich also blos um vier Flaschen handelt, so ergiebt sich das Potential der vierten inneren Belegung aus der vierten der Gleichungen (α) des § 53 oder

$$V_4 = \frac{M}{c} + V_5.$$

Substituirt man diesen Werth in die dritte, so erhält man

$$V_3 = 2\frac{M}{c} + V_5.$$

Substituirt man diesen in die zweite, so hat man

$$V_2 = 3\frac{M}{c} + V_5$$

und substituirt man endlich diesen in die erste, so ist

$$V_1 = 4\frac{M}{c} + V_5.$$

Aehnliche Ergebnisse hat man mit Reihen von einer andern Flaschenzahl, und für p Flaschen ergiebt sich allgemein

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} V_1 &= \frac{pM}{c} + V_{p+1} \\ V_2 &= (p-1)\frac{M}{c} + V_{p+1} \\ V_3 &= (p-2)\frac{M}{c} + V_{p+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_p &= \frac{M}{c} + V_{p+1}; \end{aligned} \right.$$

woraus erhellt, dass die Potentiale der aufeinanderfolgenden Elemente einer Franklin'schen Batterie

(Cascade) allmählich nach einer arithmetischen Reihe abnehmen, deren Differenz $\frac{M}{c}$ ist.

Der obigen Reihe lässt sich als letztes Glied das Potential der letzten äusseren Belegung

$$V_{p+1} = 0 + V_{p+1}$$

hinzufügen und sonach können wir uns die beiden äussersten Potentiale als zwei verschiedene Höhestände (Niveaux) vorstellen, zwischen denen die in Mitte liegenden Potentiale eine Leiter mit Stufen von constanter Höhe $\frac{M}{c}$ bilden, in Uebereinstimmung mit dem Werthe von $p\frac{M}{c}$, der oben gefunden wurde (§ 54).

Folgesatz. Wenn die äussersten Potentiale gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, wie es für die zwischen die Pole einer Holtz'schen Maschine in Cascade gestellten Reihen eintrifft, so wird das mittlere Glied der Reihe der Potentiale Null und werden die Potentiale der einen Hälfte der Reihe positiv, jene der andern Hälfte negativ sein, während die einen wie die andern von der Mitte gegen die Enden hin wachsen.

56. Was die Capacitäten der die Cascade bildenden Flaschen betrifft, immer vorausgesetzt, dass sie alle gleich seien, so bemerken wir, dass die Gleichungen (β) des vorigen Paragraphen geben

$$M_1 = \frac{c}{p}(V_1 - V_{p+1})$$

$$M_2 = \frac{c}{p-1}(V_2 - V_{p+1})$$

$$M_3 = \frac{c}{p-2}(V_3 - V_{p+1})$$

. . . .

$$M_{p-2} = \frac{c}{3}(V_{p-2} - V_{p+1})$$

$$M_{p-1} = \frac{c}{2}(V_{p-1} - V_{p+1})$$

$$M_p \;\;= c\,(V_p - V_{p+1}).$$

Gleichungen, welche beweisen, dass jede Flasche sich so benimmt, als ob sie ihre äussere Belegung auf dem letzten Potentiale V_{p+1} hätte und ihre Capacität 2-, 3-, 4-.... p-mal kleiner wäre, je nachdem sie die 2., 3., 4. .... p^{te} Stelle einnimmt, wobei die Stellen in umgekehrter Ordnung gezählt werden. Dies wird gewöhnlich einfacher ausgedrückt, indem man sagt, dass eine Flasche eine p-mal kleinere Capacität erlangt, wenn ihr $p - 1$ andere gleiche Flaschen in Cascade nachfolgen.

Diese Gesetze werden durch die im § 54 angeführten Versuche vollkommen bestätigt.

Und nunmehr begreift sich der Vortheil, welchen man bei einigen Experimenten aus dem Gebrauche der Cascaden-Batterie ziehen kann, anstatt der Oberflächen-Batterie. Die so sehr verminderte Capacität der äussersten Belegungen macht, dass man mit kleinen Mengen von Elektricum (mit wenigen Umgängen der Holtz-Maschine) grosse Potential-Unterschiede und sehr lange Funken erzielt. Und da ferner dieser Unterschied in einer Folge von Stufen auf die Flaschen der Reihe vertheilt ist, so entgeht man der Gefahr der freiwilligen Entladung längs oder durch das Glas, wie solche bei einer einzigen auf sehr weit abstehende Potentiale geladenen Flasche vorkommt. Der Vortheil besteht also in dem Erzielen sehr glänzender Effecte mit dem geringsten Aufwande von Elektricum; und es ist klar, dass, unter Umständen, auch beide Systeme sich miteinander verbinden lassen, indem man nämlich die Reihe aus mehreren nach Oberfläche zusammengestellten Flaschengruppen bildet.

57. Will man endlich den allgemeinen Fall einer Franklin'schen Batterie erörtern, die aus mehreren gewöhnlichen Batterien gebildet ist, welche verschiedene Anzahlen von gleichen und daher mit verschiedenen Capacitäten begabte Flaschen besitzen, so kann man ganz denselben Weg der Untersuchung und Rechnung einschlagen, welcher bisher eingehalten wurde.

1. Heissen n_1 n_2 n_3 .... die Anzahlen gleicher Flaschen, welche die verschiedenen aufeinander folgenden in Cascade verbundenen Batterien zusammensetzen und heisst c die Capacität jeder Flasche, so hat man zunächst (§ 53)

$$M_1 = n_1 c\,(V_1 - V_2)$$
$$M_2 = n_2 c\,(V_2 - V_3)$$
$$M_3 = n_3 c\,(V_3 - V_4)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_p = n_p c\,(V_p - V_{p+1});$$

folglich haben die einzelnen Flaschen der aufeinander folgenden Batterien die Ladungen

$$\frac{M_1}{n_1} = c\,(V_1 - V_2)$$
$$\frac{M_2}{n_2} = c\,(V_2 - V_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und die Summe dieser Werthe ist

$$\Sigma \frac{M}{n} = c\,(V_1 - V_{p+1})$$

ein Ausdruck, aus welchem sich folgern lässt, dass, wenn man in einer Cascade von p Batterien, bestehend aus verschiedenen Anzahlen gleicher Flaschen, die Ladungen von p auf je eine Batterie genommenen Flaschen zusammenbringt, man eine Summe von Ladungen erhält, gleich der Ladung, welche eine Flasche allein aufnehmen würde, deren Belegungen auf die nämlichen äussersten

Potentiale gebracht worden wären, wie die Cascade der Batterien. Der im § 53 aufgestellte Lehrsatz ist nichts, als ein besonderer Fall des gegenwärtigen Gesetzes. Und es folgt daraus offenbar, dass in einer Cascade von gleichen Batterien die Ladung der ersten augenblicklich vermindert sein würde, wenn man irgend eine Flasche aus einer der folgenden Batterien wegnehmen wollte, und würde sich im ganzen Systeme die Art der Vertheilung der Ladungen ändern. Denn die constante Masse, welche sich aus einer Batterie in eine andere ergiesst, bedingt, indem sie sich auf eine geringere Anzahl von Flaschen vertheilt findet, in einer jeden eine grössere Theilladung und wenn daher die erste Batterie in jeder ihrer Flaschen die ursprüngliche Ladung beibehielte, würde der eben bewiesene Lehrsatz nicht mehr richtig sein. Aber davon wird später (3.) noch eingehender die Rede werden.

2. Um im Allgemeinen die Werthe der den aufeinander folgenden Batterien angehörigen Potentiale zu erhalten, wird man mit den Gleichungen (γ) ebenso verfahren wie mit den Gleichungen (α) im § 55, und indem man immer die durch M vorgestellten Massen $M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots$ als unter sich gleich betrachtet, wird man finden

$$(\delta)\quad\left\{\begin{array}{l} V_1 = \dfrac{M}{c}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \dfrac{1}{n_p}\right) + V_{p+1} \\ V_2 = \dfrac{M}{c}\left(\dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \dfrac{1}{n_p}\right) + V_{p+1} \\ V_3 = \dfrac{M}{c}\left(\dfrac{1}{n_3} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \dfrac{1}{n_p}\right) + V_{p+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_p = \dfrac{M}{c} \cdot \dfrac{1}{n_p} + V_{p+1} \end{array}\right.$$

Ausdrücke, welche zeigen, wie die Potentiale der einander folgenden Batterien allmählich abnehmen;

und heisst n_x die Anzahl der Flaschen irgend einer der Batterien der Cascade, so übertrifft ihr Potential das der nachfolgenden Batterie um $\frac{M}{c\,n_x}$. Dieser Lehrsatz umfasst als einen besonderen Fall auch den im § 55 aufgestellten.

3. Aus der ersten der Gleichungen (δ) hat man

$$M = \frac{c\,(V_1 - V_{p+1})}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \cdots\cdots + \frac{1}{n_p}},$$

woraus man ersieht, wie M sich sofort ändern muss, wenn die Anzahl der Flaschen irgend einer der Batterien wechselt, mag auch die Anzahl der Flaschen der ersten constant bleiben, wie dies oben bemerkt wurde, um den Lehrsatz des Nr. 1 zu erweisen, wovon wir jetzt ein Beispiel geben können. Nehmen wir z. B. drei Batterien in Cascade an, welche die Flaschenzahlen haben

$$n_1, \qquad n_2 = \frac{1}{2}\,n_1, \qquad n_3 = \frac{2}{3}\,n_1,$$

so erhalten wir

$$M = \frac{c\,(V_1 - V_{p+1})}{\frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_1} + \frac{3}{2\,n_1}} = \frac{2\,n_1\,c\,(V_1 - V_{p+1})}{9}.$$

Sonach wird die Ladung einer einzelnen Flasche, aus jeder Batterie entnommen (1), sein

für die erste Batterie $\frac{M}{n_1} = \frac{2\,c\,(V_1 - V_{p+1})}{9}$

für die zweite Batterie $\frac{M}{\frac{1}{2}n_1} = \frac{4\,c\,(V_1 - V_{p+1})}{9}$

für die dritte Batterie $\frac{M}{\frac{2}{3}n_1} = \frac{3\,c\,(V_1 - V_{p+1})}{9}$

Summe . . . $c\,(V_1 - V_{p+1})$

was den genannten Lehrsatz des Nr. 1 bestätigt.

Nehmen wir als Flaschenzahlen

$$n_1, \quad n_2 = \frac{1}{2} n_1, \qquad n_3 = 2 n_1,$$

so werden wir haben

$$M = \frac{2 n_1 c (V_1 - V_{p+1})}{7}$$

Folglich: für die erste Batterie $\dfrac{M}{n_1} = \dfrac{2 c (V_1 - V_{p+1})}{7}$

für die zweite Batterie $\dfrac{M}{\frac{1}{2} n_1} = \dfrac{4 c (V_1 - V_{p+1})}{7}$

für die dritte Batterie $\dfrac{M}{2 n_1} = \dfrac{c (V_1 - V_{p+1})}{7}$

Zusammen . . . $c (V_1 - V_{p+1})$

was gleichfalls dem angeführten Lehrsatze (Nr. 1) entspricht.

4. Für $n_1 = n_2 = n_3 \ldots\ldots = n$ geben die Formeln (δ) augenscheinlich

$$V_1 = \frac{M}{c} \cdot \frac{p}{n} + V_{p+1}$$

$$V_2 = \frac{M}{c} \cdot \frac{p-1}{n} + V_{p+1}$$

$$V_3 = \frac{M}{c} \cdot \frac{p-2}{n} + V_{p+1}$$

. . . .

$$V_p = \frac{M}{c} \cdot \frac{1}{n} + V_{p+1}$$

Da nun $n c$ die Capacität jeder Batterie ist, so ersieht man, wie diese Ergebnisse übereinstimmen mit den (β) des § 55, wo c die Capacität der gleichen in Cascade aufgestellten Flaschen oder Batterien vorstellte.

Zwölftes Capitel.

Potentielle Energie der einfachen Conductoren und der Condensatoren.

58. Wenn die elektrische Einheit sich in die Erde entladet, vollbringt sie eine Arbeit, welche ausgedrückt ist durch den Werth des Potentials des von ihr besetzten Punktes (§ 8); und es würde daher die Ladung M eines zur Erde geleiteten Conductors eine Arbeit thun gleich ihrem Potentiale multiplicirt mit M, wenn während der allmählichen Entladung der kleinsten Bruchtheile von M das Potential constant verbliebe. Allein dies ist nicht der Fall, weil bei jedem kleinsten Theilchen von Elektricum, welches nach und nach in die Erde übergeht, im Körper ein anderes Potential entsteht, so dass die Entladungsarbeit der einander folgenden Einheiten beständig wechselt.

Wollen wir also die gesammte Arbeit berechnen, welche der Summe dieser verschiedenen Elementararbeiten entspricht, so haben wir die Ausdrücke der vielerlei Potentiale zu suchen, die im Körper in unendlich kleinen Zeitabschnitten bei den fortdauernden kleinen Abnahmen seiner Ladung aufeinander folgen, und haben davon die Summe zu nehmen.

Indem wir uns zu dem Ende die Masse M in eine Anzahl n Massen, gleich m jede, von der äussersten Kleinheit eingetheilt denken, dürfen wir annehmen, dass der Entladung einer jeden dieser Massen ein constantes Potential entspreche. Es werden sonach die sich folgenden Elementararbeiten, deren Summe die Gesammtarbeit bildet, sein

$$m\,\frac{M}{C}$$

$$m\,\frac{M-m}{C}$$

$$m\,\frac{M-2\,m}{C}$$

$$m\,\frac{M-3\,m}{C}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$m\,\frac{M-(n-1)\,m}{C}$$

welche eine arithmetische Reihe herstellen, deren Summe, wenn M anstatt $n\,m$ gesetzt und das unendlich kleine Glied m vernachlässigt wird, als Ausdruck der Gesammtarbeit giebt:

(1) $$W=\frac{1}{2}\,\frac{M^2}{C}.$$

Diesen Ausdruck nennt man die potentielle Energie. Nun wird, auf welche Art und Weise auch die Entladung sich vollziehen mag, die ihr entsprechende Arbeit nothwendig immer eine und dieselbe (identisch) sein; deshalb wird sich die potentielle Energie im Allgemeinen ansprechen lassen als der Ausdruck für die Arbeit, welche die elektrischen Kräfte verrichten müssen, damit der Körper wieder das Potential Null annehme. Setzt man für M seinen Werth $C\,V$, so erhält man auch die Werthe

(2) $$W=\frac{1}{2}\,C\,V^2$$

(3) $$W=\frac{1}{2}\,M\,V.$$

(Im Anhange, Note V, theile ich einige eingehendere Erörterungen mit über die Energie und ihre Beziehungen zur lebendigen Kraft.)

Folgesatz 1. In irgend einem Augenblicke der Entladung, wo das Potential um $V - V'$ herabgegangen ist, wird noch ein Theil der Gesammtarbeit zu thun bleiben, der auszudrücken ist durch

$$\frac{1}{2} C V'^2$$

und es kommt daher der bis zu diesem Punkte vollbrachte Theil der Arbeit, begonnen mit dem Potential V und beendigt mit dem Potential V', auszudrücken durch

$$W = \frac{1}{2} C (V^2 - V'^2). \tag{4}$$

2. Wenn man statt eines einzigen Conductors deren eine beliebige Anzahl hat mit den Ladungen $M', M'' \ldots$ und den Potentialen V', $V' \ldots$, so wird die Energie des ganzen Systems gleich sein der Summe aller Theilenergien oder

$$W = \frac{1}{2} \Sigma M V.$$

In dieser Summe werden sich die Glieder auf Null reduciren, welche sich auf jene Körper beziehen, die, durch Induction (Vertheilung) elektrisirt, gleiche Ladungen von entgegengesetztem Zeichen besitzen. Aber diese üben noch einen mittelbaren Einfluss auf die Energie des Systemes aus, insofern sie durch ihre Gegenwart die Capacität der anderen Körper vermehren (§ 41). Dasselbe ist zu sagen von den Körpern, welche, im Verkehre mit dem Boden, ein Potential Null haben, obgleich sie mit inducirter Elektricität der ersten Art geladen sind, wie es an den Belegungen der Condensatoren bei der gewöhnlichen Art, sie zu laden, vorkommt.

3. Der für W gefundene Werth kann natürlich auch als Maass der Arbeit gelten, welche durchaus unentbehrlich ist, um die Ladung hervorzubringen. Das Mehr, welches bei den mechanischen Operationen oder anderen

zur Erzeugung der Elektricität bestimmten Thätigkeiten aufzuwenden kommt, geht verloren in äusserlichen Wirkungen anderer Art.

4. Wenn einem elektrischen Körper A sich ein anderer B nähert, welcher mit dem ersten gleiche Elektricität hat, so wächst bekanntlich das Potential beider (§ 4, Folgesatz), was ebenfalls geschieht, wenn B, mit entgegengesetzter Elektricität geladen, von A entfernt wird. Nun ist einleuchtend, dass in beiden Fällen auf B eine Arbeit gethan wird, insofern es der elektrischen Abstossung oder Anziehung entgegen bewegt wird. Aber die Zunahme von A an Potential bedeutet eine Zunahme seiner potentiellen Energie $W = \frac{1}{2} M V$, nämlich eine Zunahme der Arbeit, deren es fähig ist; diese Wirkung stellt sich also dar als das Ergebniss einer andern Arbeit, welcher sie vollkommen gleichwerthig wird sein können. Am Elektrophor und an allen Elektrophor-Maschinen hat man deutliche Beispiele dieser Thatsache, welche mit dem allgemeinen Gesetze der Umwandlungen der Energien in Einklang steht.

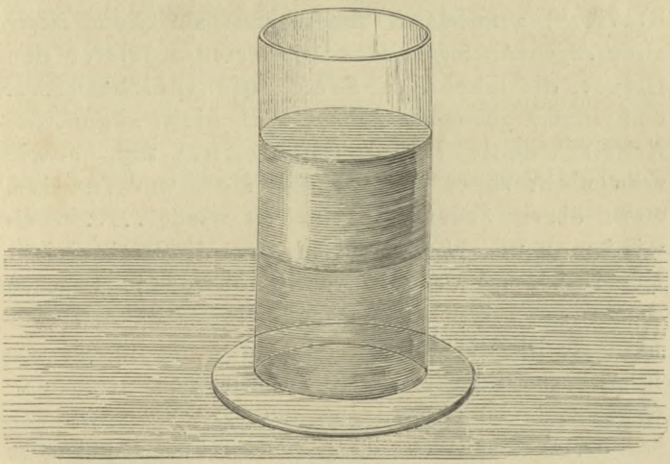
Zusatz. Es tritt nunmehr eine neue Analogie hervor zwischen den Gesetzen bezüglich der Bewegung der Flüssigkeiten und denen des Elektricums (§ 7).

Denken wir uns, um sie zu sehen, ein cylindrisches Gefäss, das eine Flüssigkeitssäule vom Gewichte P enthalte, welche aus einer Oeffnung am Boden des Gefässes ausfliesse, und setzen wir voraus, dass die Flüssigkeit, nachdem sie ausgeströmt, keine weitere neue Geschwindigkeit erlange, sondern irgend eine Arbeit verrichte (siehe Note V, II. des Anhangs), indem sie blos die durch den Druck der Flüssigkeit im Gefässe ihr beigebrachte Geschwindigkeit aufzehrt, welche durch die Beziehung

$$v = \sqrt{2 g A}$$

gegeben ist, wo A die in jedem Augenblicke vorhandene Höhe der veränderlichen Oberfläche über der Oeffnung ist. Wenn man sich die ganze über der Mündung liegende Masse in n unendlich kleine Schichten von der Masse m und Höhe a abgetheilt denkt, so werden wir nacheinander für ihre lebendigen Kräfte $\frac{m v^2}{2}$ am Ausgang der

Fig. 30.



Oeffnung die Werthe erhalten

$$m g A$$
$$m g (A - a)$$
$$m g (A - 2 a)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$m g [A - (n - 1) a],$$

deren Summe, nachdem a unendlich klein und

$$n a = A, \quad n m g = P$$

ist, sich ergiebt gleich:

$$\frac{1}{2} P A;$$

ein Ausdruck, der gleichbedeutend ist mit (3), wenn die schwere Masse der Flüssigkeit verglichen wird mit der Elektricitätsmenge und der Höhestand der Flüssigkeit gleichgestellt wird der Potentialhöhe des Elektricums.

Betrachtet man die elementaren Arbeiten, welche im Innern des Gefässes von den einzelnen Schichten bei ihrem Fallen bis zur Mündung gethan werden, so findet man durch das nämliche Rechnungsverfahren eine Gesammtarbeit von demselben Werthe. Darauf macht Blavier*) aufmerksam und schliesst auf Grund dieser eigenartigen Analogie: Das Elektricum leistet den Dienst, die lebendige Kraft aufzuspeichern..... und streng genommen lässt sich nicht sagen, die Arbeit wandle sich in Elektricität um, sowie man nicht sagt, sie wandle sich um in Gas, wenn dieses zusammengepresst wird, ... noch wird man umgekehrt sagen, dass die Elektricität sich in Wärme oder in Arbeit umwandle. Dagegen begeht man keinen Irrthum, wenn man sagt, dass zwar nicht die Elektricität, aber ihre potentielle Energie sich in wirkliche calorische oder mechanische Energie umwandle.

59. Wendet man die gefundene Formel auf einen Condensator an, dessen eine Belegung mit der Erde verkehrt, so erhält man (§ 46)

$$W = \frac{k\,S}{8\,\pi\,e}\,V^2 = \frac{M^2}{2\,\frac{k\,S}{4\,\pi\,e}} = \frac{M^2}{2\,C}$$

als Werth der potentiellen Energie des Condensators, welche die Arbeit misst, die bei der Entladung desselben erzeugt wird. Daraus ersieht man, dass

1. die Wirkungen der Entladung sich gerade verhalten wie die Oberflächen des Condensators

---

*) Blavier, Des grandeurs électriques et de leur mesure en unités absolues. Paris 1881, pag. 130.

und umgekehrt, wie die Dicke der isolirenden Scheibe, das Potential und das specifische Inductionsvermögen des Isolators als constant vorausgesetzt; oder auch:

2. wenn die Flasche oder Batterie gegeben ist und ihre Ladung wechselt, so ist die Energie proportional dem Quadrate der Ladung; und ferner

3. ist die Ladung fest gegeben, so wird man eine umso grössere Energie haben, je kleiner die Oberfläche des Condensators und je grösser die Dicke der isolirenden Scheibe ist.

Hat man mit einer Batterie von n gleichen Flaschen zu thun von der Capacität c und mit den Massen m geladen, so würde man für die Energie einer jeden den Ausdruck

$$w = \frac{1}{2} \frac{m^2}{c}$$

erhalten und folglich für die ganze Batterie

$$W = \frac{n\, m^2}{2\, c} = \frac{n^2 m^2}{2\, n\, c} = \frac{M^2}{2\, n\, c};$$

das heisst: für constante M und c nimmt die Energie zu mit Abnahme der Flaschenzahl der Batterie, oder mit Abnahme der Oberfläche des Condensators, gemäss dem eben genannten Lehrsatze 3.

60. Die Herren Cazin und Lucas untersuchten mittelst zahlreicher Experimente den Einfluss, welchen verschiedene Umstände auf die Dauer der Entladung haben können und entnahmen daraus nachstehende empirische Formel

$$t = H \frac{(1 - a^n)(1 - b^d)}{1 + c\, r^{\frac{4}{3}}}$$

worin t die Dauer des Funkens ist; H, a und b drei Constante, wovon a und b immer kleiner sind, als die

Einheit; n die Flaschenanzahl der Batterie; c ihre Capacität; d die Schlagweite; r der Widerstand der leitenden Umgebung; dabei trafen sie, bezüglich der Constanten, auf sehr abweichende Werthe bei jeder geringen Abänderung in den Bedingungen des Versuches. So war z. B. H gleich 52, wenn die Entladung zwischen zwei Kügelchen von neuem Platin erfolgte, gleich 157 für Kupfer, 248 für Zink; für dieselben Platinkügelchen, benetzt, war es 94 und ging nach vielen Entladungen auf 194. Der Werth von a schwankte von 0·68 bis 0·89; der von b von 0·83 bis 0·94.*) Eine bedeutende Abweichung von der obigen Formel ist jedoch zu beachten im Falle von Stromkreisen von grossem Widerstande, für welche man niemals den Werth $t = 0$ erhält, wie ihn die Formel geben würde.

Noch wollen wir bemerken, dass mit dem Wachsen von n der Werth von t wächst, was so viel sagen will, als dass unter gleichen Bedingungen die Dauer des Funkens wächst mit dem Anwachsen der in der Batterie angehäuften Ladung, während sich ihr Potential constant hält. Und schon Professor R. Felici fand, dass beim Constantbleiben der Spannung (§ 45) und starker Vermehrung der Ladung der Funken aus sehr vielen, nacheinanderfolgenden, abnehmenden Theilfunken besteht, welche in ihrer Gesammtheit den ganzen Funken bilden, während bei kleineren Ladungen und derselben Spannung der Funken eine so kurze Zeit andauert, dass sie mit dem feinsten Apparate sich nicht abschätzen lässt. Diese Thatsache bestätigt im Allgemeinen einen Lieblingsgedanken von Volta, welcher behauptete, dass die wechselnde Spannung (Potential im Sinne des § 45) die Ursache der wechselnden Geschwindigkeit wäre, mit welcher das Elektricum sich entladet und deshalb bei

---

*) Ann. de Chim. et de Physique. 4e Série, Tom. XXVI, pag. 477. — Mascart, Tr. d'électr. st. Tom. II, § 454.

gleicher Spannung die Dauer des Funkens für genau proportional der Masse hielt. Abgesehen von dieser strengen Proportionalität werden wir sonach im Allgemeinen der Vorstellung Volta's uns anschliessen können, indem wir einfach aussprechen, dass ein mehr fassender Condensator mehr Zeit braucht, sich zu entladen, als ein anderer weniger fassender, während beide auf das nämliche Potential geladen sind. Mit diesem Hauptsatze glaubte Volta Rechenschaft geben zu können von der verschiedenen Stärke der Schläge, welche von Flaschen verschiedener Capacität, auf dieselbe Spannung geladen, hervorgebracht werden, wobei er von Erwägungen ausging, welche auch heutzutage, meines Erachtens, noch sehr beachtenswerth sind, in Betracht der verschiedenen Dauer, welche die Entladung haben kann. Und Volta folgerte in geistreicher Weise, wie nachstehend: „...... um merklich von irgend einem Agens afficirt zu werden, müssen unsere Organe dessen Wirksamkeit einige Zeit lang ausgesetzt sein ...... Man kann, indem man die Entladung der grossen Flasche oder Batterie vergleicht mit der Entladung des 100mal weniger fassenden Fläschchens, die erste betrachten als die Wiederholung von 100 Entladungen gleich denen des Fläschchens, Entladungen, welche sich folgen und die Person 100mal nacheinander treffen; und da alle diese Schläge sehr rasch aufeinander folgen, kann man sie als vereinigt und zu einem einzigen Schlage verschmolzen ansehen. Es ist eine ausgemachte Sache, dass die auf unsere Organe bewirkten Eindrücke nicht augenblicklich erlöschen, sondern einige Zeit andauern. Wenn also, während die ersten Eindrücke noch fortbestehen, deren neue hinzukommen und nachfolgen, so häufen sich alle diese Eindrücke, sozusagen, an und es geht daraus ein um so viel mehr lebhafter und kräftiger Eindruck hervor."

An diese Ansichten Volta's wollte ich erinnern, in der Ueberzeugung, dass man zu erwägen habe, ob in dem einen oder andern Falle, wie z. B. bei den quer durch Gase geleiteten Funken, die Wirkungen der Entladungen nicht sowohl durch Ueberlagerung über dieselben Elemente entstehen, als vielmehr abgesondert und getrennt seien.

61. Sprechen wir nunmehr von der Energie einer Franklin'schen Batterie oder mehrerer Flaschen in Cascade, indem wir den gewöhnlichsten Fall behandeln, nämlich alle Flaschen gleich voraussetzen und die letzte in Verkehr mit der Erde. Wenn die Entladung dadurch geschieht, dass man die erste Belegung mit der letzten in Verbindung bringt, so werden sich alle zwischenliegenden Ladungen (wie gewöhnlich als gleich angenommen, § 54) zu zwei und zwei gegeneinander neutralisiren und man hat die Wirkung einer einzigen Flasche, deren Ladung und Potential die des ersten Elementes der Cascade wäre, und demnach ist die Energie der Cascade

$$W = \frac{1}{2} V_1 M$$

oder auch, indem man setzt (§ 54)

$$V_1 = \frac{pM}{c} \quad \text{oder} \quad M = \frac{c}{p} V_1;$$

$$W = \frac{pM^2}{2c} \tag{1}$$

$$W = \frac{cV_1^2}{2p}, \tag{2}$$

worin p die Anzahl der Elemente der Cascade zu sein pflegt und c die beständige Capacität eines jeden ihrer Elemente, welches eine einfache Flasche oder auch eine gewöhnliche Batterie sein kann. Beim Vergleiche dieses Ausdruckes (1) mit dem andern analogen des § 58 für die einfachen Condensatoren ergiebt sich, dass bei gleichen Ladungen die Energie einer Flasche, mit welcher andere Flaschen zu einer Cascade verbunden sind, im Verhältnisse mit der Anzahl der Elemente der Cascade wächst. Von diesem Gesetze wird man sich am besten überzeugen, wenn man bedenkt, dass bei gleichen Ladungen eine Flasche ein p-mal grösseres Potential erlangt, wenn ihr $p - 1$ Flaschen in Cascade nachfolgen.

Das Umgekehrte tritt dadurch ein, dass man eine einzelne Flasche oder eine Flasche, welcher andere in Cascade nachfolgen, auf gleiche Potentiale bringt; im Falle der Cascade ist nämlich die Energie p-mal kleiner, weil die Ladung p-mal kleiner ist (§ 56).

Die Werthe (1), (2) lassen sich noch auf andere Weise ausdrücken, indem man $c = \frac{s}{4\pi e}$ setzt und s als den $p$ten Theil der Oberfläche S ansieht, welche durch die Gesammtheit aller Flaschen gebildet wird, wonach $s = \frac{S}{p}$ ist. Somit ergiebt sich

$$(1)' \qquad W = \frac{2\pi e p^2}{S} M^2$$

$$(2)' \qquad W = \frac{S}{8\pi e p^2} V_1^2,$$

aus welchen Ausdrücken man deutlich ersieht, dass:

a) Wenn man über eine gegebene Menge M von Elektricum verfügen kann, die grösste Energie dann erhalten wird, wann alle Flaschen nacheinander in Cascade angeordnet sind;

b) und dagegen, wenn man über ein gegebenes Potential zu verfügen hat, die grösste Energie dadurch erhalten wird, dass man alle Flaschen zu einer einzigen gewöhnlichen Batterie zusammenstellt.

62. Im allgemeinen Falle einer Cascade von p Batterien, welche nacheinander aus n_1, n_2, n_3 gleichen Flaschen

von der Capacität c gebildet sein mögen, bei Verkehr der letzten Batterie mit der Erde, hat man für die erste (§ 57, 2.)

$$V_1 = \frac{M}{c}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots\ldots \frac{1}{n_p}\right)$$

und folglich die Energie

$$W = \frac{M^2}{2c}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots\ldots \frac{1}{n_p}\right)$$

das heisst: es ist, wie oben gefunden wurde, die Energie proportional dem Quadrate der Ladung, und die wächst, bei gleichen Ladungen, wenn man die Cascade durch neue Flaschen oder Batterien weiter verlängert.

Setzt man in den allgemeinen Ausdruck $W = \frac{1}{2} M V_1$ den aus der obigen Gleichung gezogenen Werth von M selbst ein, so hat man

$$W = \frac{c}{2} \cdot \frac{V_1^2}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n_p}}.$$

Ist also eine gewisse Anzahl Flaschen aus einer bestimmten Quelle vom Potential V_1 zu laden gegeben und man bildet mit denselben nach und nach kürzere Cascaden, indem man irgend eine der Zahlen $n_1, n_2, n_3 \ldots\ldots$ vergrössert, so wird obiger Nenner aus doppeltem Grunde vermindert und folglich die Energie vermehrt sein; und wann die Cascade auf ein einziges Glied reducirt, das ist wann sie in eine gewöhnliche Batterie (Batterie nach Quantität) umgewandelt sein wird, dann wird die Energie am grössten sein, wie dies im vorigen Paragraphe (b) gefolgert wurde.

63. Ich schliesse noch einige numerische Anwendungen an, welche den Werken der Herren Blavier und Raynaud entnommen sind. (Siehe obige Citate.)

1. Es sei im Allgemeinen eine Batterie da von n cylindrischen, sämmtlich gleichen Flaschen vom Durch-

messer b^c und der Höhe a^c, indem b und a in Centimetern gegeben sind, um die Rechnung im Systeme der absoluten Einheiten (*C. G. S.*) durchzuführen. Nachdem auf diesen Fall die Formel (§ 59)

$$W = \frac{k\,S}{8\,\pi\,e}\,V^2$$

anwendbar ist, wenn man darin

$$S = 2\,r\,\pi\,.\,a\,n = b\,\pi\,a\,n$$

setzt, so erhalten wir

$$W = \frac{n\,a\,b\,k}{8\,e}\,V^2 \text{ absolute Einheiten.}$$

Um diese Arbeit auf Kilogramm-Meter zu bringen, wollen wir uns erinnern, dass im § 38, 3., gefunden war

$$1^{km} = 10^5\,g^c \text{ absolute Einheiten (Ergs),}$$

folglich ist unter der Breite von 45 Grad und am Meeresspiegel

$$W^{km} = \frac{1}{10^5 \times 980{\cdot}55} \cdot \frac{n\,a\,b\,k}{8\,e}\,V^2$$

$$W^{km} = \frac{0{\cdot}00102}{10^5} \cdot \frac{n\,a\,b\,k}{8\,e}\,V^2.$$

Setzt man z. B.

$$e = 0{\cdot}2^c \qquad n = 10$$
$$k = 1{\cdot}80 \qquad a = 50^c$$
$$V = 300 \qquad b = 15$$

so ergiebt sich

$$W = n\,a\,b \times 0{\cdot}001033 = 7{\cdot}75^{km}.$$

Man könnte also gleichsam sagen, der Stoss, welcher bei Aufnahme dieser Entladung im menschlichen Körper entsteht, wäre wie der einer Masse vom Gewichte eines Kilogramms, das aus einer Höhe von fast 8 Meter herabfiel.

2. Man untersuche, wie viel Calorien der Entladungsarbeit obengenannter Batterie entsprechen. Aus dem obigen Werthe für W erhält man sofort

$$\frac{7{\cdot}75}{425} = 0{\cdot}018^{cal}.$$

Dasselbe Ergebniss erhält man aus dem in absoluten Arbeitseinheiten ausgedrückten Werthe von W, indem (§ 38, 4.)

$$\text{die absolute Arbeitseinheit} = \frac{1^{\,cal\,gr}}{42 \times 10^6}$$

ist, daher

$$W^{cal\ gr} = \frac{1}{42 \times 10^6} \cdot \frac{n\,a\,b\,k}{8\,e}\,V^2$$

und mit den oben angesetzten Werthen:

$$W = 18^{cal\ gr} = 0{\cdot}018^{cal\ kg}.$$

3. Wenn die Entladung derselben Batterie auf dem Potential 300 quer durch einen Eisendraht von $\frac{2}{10}$ Millimeter Durchmesser und 1 Meter Länge geschieht, wird man aus den obigen Daten die Temperatur berechnen können, welche der Draht annimmt.

Volumen des Drahtes $\pi r^2 \times 100^c = 0{\cdot}031416$.

Gewicht des Drahtes, da 7·8 sein specifisches Gewicht ist, 0·245 Gramm.

Folglich haben wir, nachdem 0·114 seine specifische Wärme ist, die Gleichung

$$18^{cal\ gr} = 0{\cdot}245 \times 0{\cdot}144 \times t$$

und daraus

$$t = 644^0.$$

Dreizehntes Capitel.

Potentielle Energie bei den unvollständigen Entladungen.

64. Man lade eine Batterie von n Flaschen, sämmtlich von der Capacität c, bei äusserer Belegung im Verkehr mit dem Erdboden, und bringe ihre innere Belegung in Verbindung mit der inneren Belegung einer andern Batterie von n' Flaschen von der Capacität c', welche

ebenfalls mit der äusseren Belegung an der Erde gehalten wird. Es erfolgt auf solche Weise eine Entladung, welche eine unvollständige heisst und aus dem Uebergange von so viel Elektricum von der ersten Batterie zur zweiten besteht, als es dessen bedarf, um in der zweiten ein Potential V' zu erzeugen gleich jenem, welches in der ersten verbleibt.

Nennen wir

M die in der ersten Batterie anfänglich gegebene Ladung;

V ihr anfängliches Potential;

M' die Masse, welche nach der unvollständigen Entladung darin verbleibt;

M'' die Masse, welche von der ersten in die zweite überfliesst, so werden wir offenbar haben

$$M' = n\,c\,V' \qquad M'' = n'\,c'\,V'$$

aus deren Summe man entnimmt

$$V' = \frac{M}{n\,c + n'\,c'};$$

woraus noch folgt

$$M' = \frac{n\,c}{n\,c + n'\,c'}\,M$$

$$M'' = \frac{n'\,c'}{n\,c + n'\,c'}\,M.$$

Die Summe der nunmehr in beiden Batterien bestehenden Energien ist

$$W_s = \frac{1}{2}\,M'\,V' + \frac{1}{2}\,M''\,V'$$

$$W_s = MV' = \frac{1}{2}\,\frac{M^2}{n\,c + n'\,c'},$$

was weniger ist als $\frac{1}{2}\,M\,V$, das heisst: weniger als die Energie W, welche die nämliche Masse M hatte, bevor sie theilweise in die zweite Batterie überging. Bedenken wir also, dass der Betrag an Energie, welcher jetzt abgeht, jener Antheil ist, welcher beim Uebergange der Masse M'

von der einen Batterie zur andern aufgebraucht wurde, so werden wir für die Energie der unvollständigen Entladung den Werth

$$(1) \qquad W_i = \frac{1}{2} M (V - V')$$

erhalten, oder auch, indem wir für V seinen Werth $\frac{M}{nc}$ und für V' den oben gefundenen Werth einsetzen,

$$(2) \qquad W_i = \frac{n' c'}{n c (n c + n' c')} \cdot \frac{M^2}{2}.$$

Diesem Ergebnisse dient ein Experiment von Riess zur Bestätigung.*) Er stellte zwei Batterien auf, eine von 5, eine von 3 Flaschen, ertheilte der ersten verschiedene Ladungen, nämlich einmal $M = 6$, dann $M = 8$, dann $M = 10$ und mass die Erwärmung, welche in dem Drahte hervorgebracht wurde, durch welchen das Elektricum sich entlud, indem es von der ersten zur zweiten Batterie überging; diese Erwärmung wird angenommen als proportional der vom Elektricum geleisteten Arbeit, nachdem sie als Umwandlung dieser Arbeit gilt. Setzt man nun in der (2) die auf diese Versuche Bezug habenden Zahlen ein, so erhält man

$$\text{im 1. Falle } W_i = \frac{1{\cdot}35}{c}$$

$$\text{im 2. Falle } \ldots = \frac{2{\cdot}40}{c}$$

$$\text{im 3. Falle } \ldots = \frac{3{\cdot}75}{c}$$

Ergebnisse, welche sich verhalten, wie

$$1{\cdot}00 : 1{\cdot}77 : 2{\cdot}77.$$

---

*) E. Verdet, Théor. mécanique de la chaleur. Tom. II, premier fasc. Paris 1870, pag. 112.

Professor Riess erhielt nun im Verbindungsdrahte die Erwärmungen

6·6 11·7 17·2

welche sich zueinander verhalten wie

1·00 : 1·77 : 2·61,

also ganz nahe wie die vorigen Ergebnisse.

Folgesätze. 1. Nennen wir s, s' die Oberflächen der Belegungen der beiden Flaschenarten, welche die beiden Batterien bilden; e, e' die Dicken ihrer isolirenden Scheiben, so ist

$$c = \frac{s}{4\pi e} \qquad c' = \frac{s'}{4\pi e'}.$$

Werden diese Werthe in (2) eingesetzt, so erhält man

$$W_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{n\,c} \cdot \frac{s'}{s} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n'} + \frac{s'}{s}},$$

ein Ausdruck, welchen zuerst Riess auf Grund des Experimentes gefunden hat.

2. Wenn die zweite Batterie in Allem gleich der ersten wäre, so würde man haben

$$W_i = \frac{1}{2\,n\,c} \cdot \frac{M^2}{2}$$

was die Hälfte ist von der Energie $\frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{C}$, welche die erste Batterie ursprünglich besass [§ 50 (1)].

3. Legt man die Werthe von W_s und W_i zusammen, so erhält man abermals die anfängliche Energie $\frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{C}$. Daraus begreift sich, dass man nichts gewinnt und nichts verliert, wenn man zuerst eine unvollständige Entladung macht und nachher die ganze Entladung der gesammten anfänglichen auf beide Batterien vertheilten Masse.

65. Führen wir in die Gleichung (2) die Werthe M als Functionen von V und von M'' gegeben ein, nämlich

$$M = n\,c\,V, \qquad M = \frac{n\,c + n'\,c'}{n'\,c'}\,M'',$$

so wird man haben

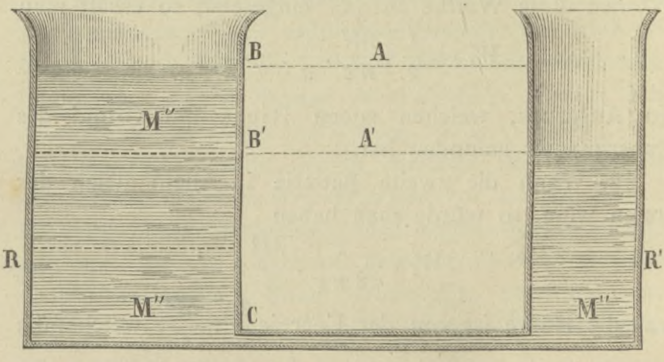
$$(3) \qquad W_i = \frac{1}{2} M'' V$$

ein sehr bemerkenswerther Ausdruck, in Betracht seiner vollkommenen Uebereinstimmung mit jenem andern, welcher die vollständige Entladung betrifft, nämlich mit [§ 58 (3)]

$$W = \frac{1}{2} M V.$$

Es wird daher gut sein, die durch obigen Werth (3) von W_i angedeutete Thatsache als einen Lehrsatz her-

Fig. 31.



vorzuheben: Die Arbeit, welche hervorgebracht wird bei der unvollständigen Entladung einer Batterie auf dem Potential *V*, entspricht jener, welche geleistet würde, wenn die übergegangene Masse sich in den Erdboden entladen hätte, im Herabfallen vom nämlichen Höhestande *V*.

Zusatz. Um auch jetzt (§ 58, Zusatz) im oben erhaltenen Ergebnisse (3) eine Analogie wieder zu erkennen mit der Arbeit, welche sich beim Ausflusse einer tropfbaren Flüssigkeit aus einem Gefässe vollzieht, wollen wir uns zwei cylindrische Behälter R, R' vorstellen, den ersten angefüllt bis zur Höhe $BC = A$, den zweiten leer, und beide durch ein horizontales, nächst den ebenen Bodenflächen angebrachtes Röhrchen von sehr kleinem Durchmesser miteinander verkehrend. Die gesammte Masse, wie sie ist und den ersten Behälter einnimmt, sinkt herab, bis ihr Höhestand gleich geworden ist dem nach und nach steigenden Höhestande im zweiten Gefässe, in welches eine Masse M'' eintritt, gleich jener, welche im ersten Gefässe von oben in Abgang kommt.

Die Arbeit, welche von der Masse M bei diesem Uebergange oder Ueberfliessen eines Theiles derselben von dem einen Gefässe in's andere geleistet wird, lässt sich leicht berechnen, indem man von einem wohlbekannten Hauptsatze der Mechanik ausgeht, welcher lautet wie folgt: „Die Arbeit der Schwere auf irgend ein materielles System ist gleich dem Gewichte des ganzen Systems multiplicirt mit der senkrecht von seinem Schwerpunkte durchlaufenen Entfernung." Wendet man diesen Satz an auf eine in irgend einem Behälter eingeschlossene flüssige Masse $B\,C$, welche in die Lage $B'\,C'$ übergehe, in der Weise, dass ein Theil $B'\,C$ beiden Lagen gemeinschaftlich bleibe, und nennt man P ihr Gewicht und A, A' die senkrechten Entfernungen ihres Schwerpunktes G, G' von einer Horizontalebene $O\,Z$, so hat man als Ausdruck der von ihr vollbrachten Arbeit.

$$L = P\,(A' - A).$$

Nennt man ferner q das Gewicht des Theiles $B'\,C$, welcher gemeinschaftlich bleibt und p die gleichen Gewichte der beiden anderen Theile $B\,B'$, $C\,C'$ und a, A_q, a' die Entfernungen ihrer bezüglichen Schwerpunkte von derselben Ebene $O\,Z$, so hat man, nach dem Gesetze von den Momenten der parallelen Kräfte, dass nämlich „das Moment der Resultirenden gleich ist der Summe der Momente der Seitenkräfte",

$$P \,.\, A = p \,.\, a + q \,.\, A_q$$
$$P \,.\, A' = p \,.\, a' + q \,.\, A_q$$

welche Gleichungen, Glied für Glied, voneinander abgezogen, geben

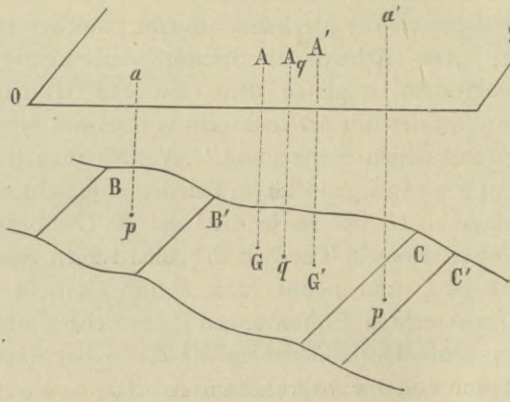
$$P(A' - A) = p\ (a' - a)$$

und daher auch

$$L = p\ (a' - a)$$

das heisst: „Wenn ein materielles System sich in der Art verrückt, dass es in zwei Lagen desselben einen gemeinschaftlichen Antheil giebt, welcher als aus materiell gleichartigen Punkten zusammengesetzt anzusehen ist,

Fig. 32.



so ist in solchem Falle die gesammte Arbeit der Schwere die, welche man haben würde, wenn man sich dächte, dass blos der nicht gemeinsame Theil von dem Orte, den er in der ersten Lage einnahm, unmittelbar zu dem Orte übertragen worden wäre, welchen derselbe in der zweiten Lage einnahm."

In unserem Falle ist die Masse, welche in den beiden Lagen, der anfänglichen und der schliesslichen, gemeinschaftlich bleibt, jene, welche im ersten Behälter die Höhe A' besetzt, und die nicht gemeinsamen Theile bestehen aus der Masse M'', deren Gewicht wir P'' nennen wollen.

Wenn man sodann die senkrechte Verrückung des Schwerpunktes der M'' beachtet, so werden wir für die geleistete Arbeit den Ausdruck

$$P''\left[\frac{1}{2}(A + A') - \frac{1}{2}A'\right] = \frac{1}{2}P''A$$

erhalten, dessen Analogie mit der Formel (3) in die Augen fällt.

Ferner wollen wir bemerken, das die Arbeit, welche zur Entleerung beider Gefässe zu thun bleiben würde,

$$\frac{1}{2}(P - P'')A' + \frac{1}{2}P''A' = \frac{1}{2}PA'$$

ist. Diese zur vorigen addirt, giebt

$$\frac{1}{2}(P''A + PA').$$

Nun verhält sich

$$P'' : P = A - A' : A,$$

daher ist

$$P'' = \frac{PA - PA'}{A}$$

welcher Werth, in obige Summe eingesetzt, dieselbe umwandelt in

$$\frac{1}{2}PA.$$

Demnach findet seine vollkommene Analogie mit der Arbeit ausströmender Flüssigkeiten auch das im § 64, Folgesatz 3, erhaltene Ergebniss, nämlich: die Arbeit der unvollständigen Entladung sammt der Arbeit, welche zur vollständigen Entladung zu thun bleibt, kommt jener gleich, welche man bei der unmittelbaren vollständigen Entladung unter den Anfangsbedingungen des Versuches erhalten haben würde.

Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wie im § 58, Zusatz, durch Berechnung der Summe der erzeugten lebendigen Kräfte beim Abflusse der Masse M'', auf welche allmählich an Höhe von A bis A' abnehmende

Flüssigkeitssäulen drücken, und der Summe der in entgegengesetzter Richtung wirksamen lebendigen Kräfte, welche aus den im Behälter R nach und nach sich anhäufenden Schichten herkommen.

66. Aufgabe 1. Man will eine Batterie auf eine p-mal kleinere Energie herabsetzen und verlangt zu wissen, wie viel Flaschen von gegebener Capacität c' man derselben hinzufügen müsse.

Es sei M die Ladung der gegebenen Batterie, n die Anzahl ihrer Elemente und c ihre Capacität. Ihre Energie wird ausgedrückt durch $\frac{1}{2}\frac{M^2}{nc}$ und, nachdem ein Theil ihres Elektricums in die x angehängten Flaschen übergangen ist, wird die Summe der Energien beider vereinigten Batterien sein (§ 64)

$$\frac{1}{2}\frac{M^2}{nc + xc'},$$

wonach man die Bedingungsgleichung hat

$$\frac{1}{2}\frac{M^2}{nc + xc'} = \frac{1}{p}\cdot\frac{M^2}{2nc},$$

welche giebt

$$x = \frac{nc(p-1)}{c'}.$$

Für $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ und $c' = c$ kommt $x = n$, wie man oben gesehen hat.

Aufgabe 2. Wenn die, wie im vorigen Falle, angehängten Flaschen gleich darauf losgemacht werden, so fragt man, wie gross deren Anzahl sein müsse, damit die erste Batterie mit einer Energie verbleibe, die p-mal kleiner ist als die anfängliche.

Nachdem die zeitweise angehängte Batterie losgetrennt ist, behält man in der ersten die Energie

$$\frac{1}{2} M' V',$$

welche für die im § 64 gefundenen Werthe im gegenwärtigen Falle auszudrücken kommt durch

$$\frac{1}{2} n c \frac{M^2}{(nc + xc')^2}.$$

Diese soll gleich werden

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{M^2}{2 n c}.$$

Sonach hat man

$$\frac{n^2 c^2}{(n c + x c')^2} = \frac{1}{p}.$$

Für $c = c'$ z. B. ergiebt sich somit

$$x = n (\sqrt{p} - 1)$$

Will man z. B. die Energie einer Batterie auf ein Viertel ihres Werthes herabsetzen, so wird man sie mit einer andern Batterie von gleicher Flaschenzahl von der nämlichen Capacität zu verbinden haben. Denn nachdem, wie man im § 64, Folgesatz 2, gesehen hat, die zwei miteinander verbundenen Batterien gleich sind, so verbraucht die unvollständige Entladung die Hälfte der Energie, und jede der beiden Batterien behält die Hälfte der verbleibenden Hälfte der ursprünglichen Energie oder ein Viertel derselben.

67. Professor Villari hat sorgfältige Studien gemacht über die Abweichungen, welche das Galvanometer zeigt, wenn es von unvollständigen Entladungen durchlaufen wird. Um davon in Kurzem einen Begriff zu geben, will ich mit A die anfänglich geladene Batterie bezeichnen, mit B die andere, nach welcher sich die erste entladet, mit M die ursprüngliche Ladung von A, und mit M'' die Menge von Elektricum, welche von A nach B überströmt.

Die Batterie A bestand fortwährend aus 18 gleichen Flaschen, die B wurde gewechselt von 2 bis zu 18 Flaschen und bei jedem Versuche wurde der A mittelst einer Holtzschen Maschine eine Ladung = 40 ertheilt, zugemessen mit der Maassflasche von Lane. Mit diesen Daten konnte er den Betrag der Elektricitätsmasse berechnen, welche durch das Galvanometer ging, indem er Anwendung machte von der Formel (§ 64)

$$M'' = \frac{n'}{n + n'} M, \quad M'' = \frac{n'}{18 + n'} \times 40.$$

Folgendes ist die Reihe der erhaltenen Ergebnisse:

Batterie A mit $M = 40$ und n Flaschen	Batterie B n' Flaschen	M'' übergegangen von A nach B	Galvan. Abweichung D	$\frac{D}{M''}$
18	2	4·00	15·36	3·84
18	3	5·71	20·2	3·54
18	4	7·27	24·0	3·30
18	5	8·69	29·8	3·43
18	6	10·00	34·1	3·41
18	8	12·31	43·5	3·53
18	10	14·30	50·8	3·55
18	12	16·00	56·7	3·54
18	14	17·50	59·8	3·42

Die Beständigkeit des Verhältnisses $\frac{D}{M''}$ zeigt, dass die galvanometrische Abweichung proportional dem Werthe der Masse ist, welche von der einen zur andern Batterie übergeht. Diese Thatsache, welche mit dem von Faraday für die vollständigen Entladungen der Batterien festgestellten allgemeinen Gesetze übereinstimmt, kann zugleich als ein schöner Beweis der gegenwärtigen Theorie gelten. Die mit der Gleichung (2) des § 64 berechneten Arbeiten ergeben sich gleich

4·4	13·7
6·3	15·9
8·1	17·8
9·6	19·4
11·1	

Getheilt durch die betreffende galvanometrische Abweichung liefern sie einen ziemlich constanten Quotienten gleich 0·3.

Vierzehntes Capitel.

Die elektrische Energie umgewandelt in calorische Energie.

(Experimente von Riess.)

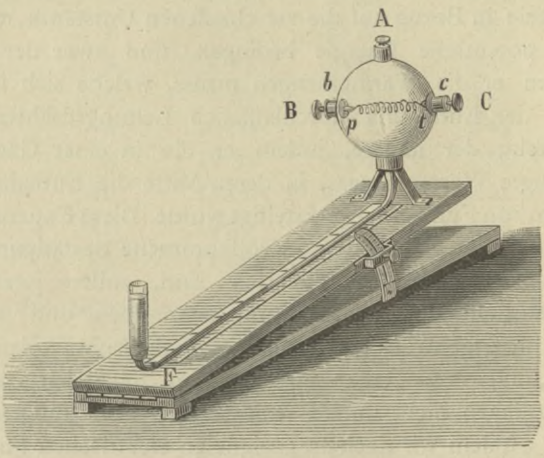
68. Die Physiker Riess und Villari haben sorgfältige und ausführliche Experimental-Untersuchungen angestellt über die Wärmewirkungen der Entladung einer Batterie in Bezug auf die verschiedenen Umstände, welche ihre potentielle Energie bedingen, und zwar der erste, indem er die Wärmemengen maass, welche sich in den von der Entladung durchlaufenen Leitungsdrähten entwickeln, der andere, indem er die in einer Gasmasse erzeugte Wärme maass, in deren Mitte die Entladung in Form von Funken bewerkstelligt wurde. Diese Experimente welche eine glänzende und vollkommene Bestätigung der auseinandergesetzten Theorien sind, sollen jetzt den Gegenstand unseres Studiums ausmachen und werden wir im gegenwärtigen Capitel über die ruhmvollen Entdeckungen von Riess sprechen, im folgenden von den neuerlichen nicht minder schwierigen Forschungen Villari's, indem wir noch die geeigneten elektrischen Thermometer beschreiben, welche dieselben erfinden mussten, um ihre Untersuchungen durchzuführen.

Das elektrische Thermometer von Riess besteht aus einem kleinen Glasballon *A B C*, welcher in Verbindung steht mit einem langen Rohre in Form eines Hebers, das eine gefärbte Flüssigkeit enthält. Der untere Arm des Hebers ist eine Capillarröhre und ruht auf einem im Charniere *F* beweglichen Tischchen, welches dem Heber mehrfache Neigungen zu geben gestattet; der dem Ballon gegenüberstehende Arm ist kurz, offen und von so grossem Durchmesser, dass der Höhestand der Flüssigkeit ziemlich beständig bleibt, während die capillare

Flüssigkeitssäule, welche einen guten Theil des unteren Armes einnimmt, bei der Ausdehnung der Luft im Ballon, verschiedene Lagen annimmt.

Der Glasballon hat zwei röhrenförmige Oeffnungen, verschliessbar durch Zapfen, welche in Mitte des Ballons eine Spirale von Platindraht *p t* aufgehängt halten, der die Bestimmung hat, durch den Entladungsstrom erwärmt

Fig. 33.



zu werden, welcher durch die Knöpfe *c*, *b* in den Ballon einzuführen kommt.

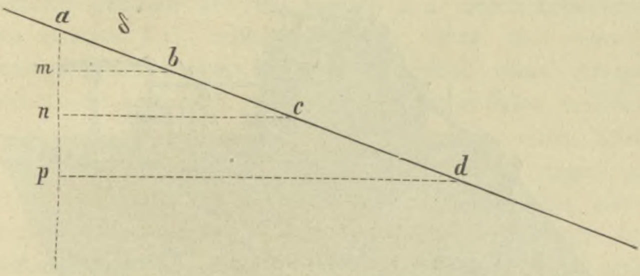
Wir wollen nachweisen, dass die Abweichungen des Thermometersäulchens mit hinreichender Genauigkeit unmittelbar die Wärmemengen messen, welche von der Spirale erreicht und sogleich der Luft des Ballons mitgetheilt werden. Man nehme an, diese Luft gehe von t Grad über zu $t + \vartheta$ Grad; indem wir ihren Druck bei 0 Grad durch H_0 und den Ausdehnungs-Coëfficienten durch α vorstellen und noch voraussetzen, dass das Volumen der Luft selbst constant bleibe, nachdem ihre Ausdehnung nur eine sehr geringfügige ist, werden wir ihre aufeinanderfolgenden Drücke darstellen können durch

$$H_t = H_0 + \alpha t H_0$$
$$H_{t+\vartheta} = H_0 + \alpha (t + \vartheta) H_0.$$

Folglich wird sein, wenn h die Zunahme an Druck bedeutet, welche durch die Erwärmung ϑ verursacht ist,

$$\frac{H_t + h}{H_t} = \frac{1 + \alpha (t + \vartheta)}{1 + \alpha t}$$

Fig. 34.



woraus folgt

$$h = \frac{\alpha \vartheta H_t}{1 + \alpha t}.$$

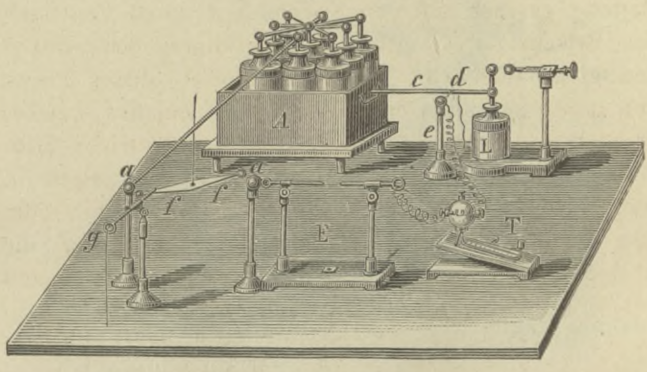
Nun hat der Bruch $\frac{H_t}{1 + \alpha t}$ für jede Temperatur den constanten Werth H_0, wie man aus der ersten Gleichung ersieht: also ist die Zunahme h des Druckes proportional der Zunahme ϑ der Temperatur. Andererseits entspricht, wenn die Flüssigkeitssäule sich um $a\,b$, $a\,c$, $a\,d$ .... und allgemein um δ zurückzieht, die Zunahme an Druck, welche auf deren obere Fläche stattfindet, den Drücken von ebenso vielen senkrechten flüssigen Säulchen $a\,m$, $a\,n$, $a\,p$ .... Aber diese sind, wie die ähnlichen Dreiecke zeigen, proportional den Abweichungen δ; folglich sind die Zunahmen h und deshalb auch die Zunahmen ϑ den genannten Abweichungen proportional.

Diese messen daher auch die von der Entladung entwickelten Wärmemengen, weil man, wenn p, p' die Gewichte des Platins und der Luft des Ballons, c und c' ihre specifischen Wärmen heissen, für die Wärmemengen den Ausdruck hat

$$q = (p\,c + p'\,c')\,\vartheta,$$

wo der Factor von ϑ als constant anzusehen ist.

Fig. 35.



Man bemerkt leicht, dass für einen gegebenen Zuwachs h des Druckes (oder auch von ϑ oder q) die Verschiebungen δ umso grösser ausfallen werden, je mehr die Thermometerröhre sich der wagrechten Lage nähert: so dass man durch Ertheilen verschiedener Neigungen die Empfindlichkeit des Instrumentes nach Belieben zu regeln vermag.

69. Das von Riess bei seinen Experimenten eingehaltene Verfahren war folgendes:

Die auf einen Isolirschemel gestellte Batterie oder Flasche hatte ihre innere Belegung in Verkehr mit der von einer isolirenden Säule getragenen Kugel a und die äussere Belegung in Verkehr mit der elektrischen Maassflasche *L* (§ 49) vermittelst des Stäbchens *c*, während *L* die mit ihrer äusseren Belegung mit dem Boden verkehrte.

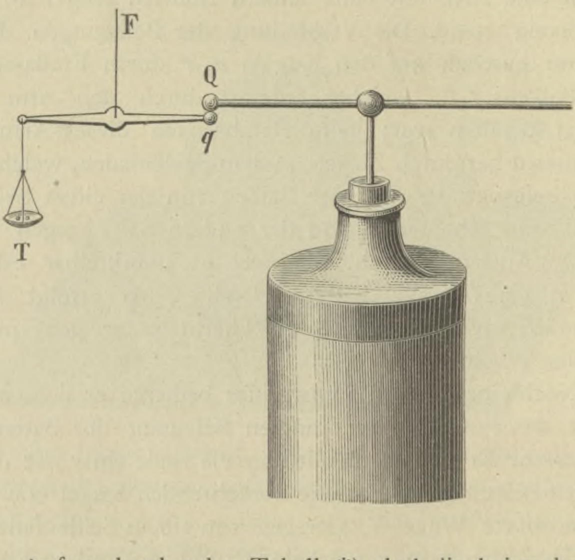
Nachdem er die Messung der Ladung mittelst der *L* gemacht hatte, brachte er auf den Draht *c* den Kupferstreifen *d*, der mit der Kugel der Isolirsäule *e* und durch diese mit der Spirale des elektrischen Thermometers *T* in Verbindung war, sowie mit dem Auslader *E*, dessen eine Arm mit einer andern isolirten Kugel *a'* in Berührung stand. Die Verbindung der Belegungen der Batterie geschah auf den Kugeln *a*, *a'* durch Freilassen des Balkens *f f'*, welcher anfangs durch den Arm *g* geneigt gehalten war; beim Herabsenken dieses Armes von aussen her durch Ziehen an dem Seidenfaden, welcher daran befestigt ist, fällt der Balken von der einen Seite auf *a'* und erhebt sich von der andern Seite gegen *a*. Ist der Auslader geschlossen, sei es unmittelbar oder mittelst eines eingeschalteten Drahtes, so erfolgt die Entladung, welche durch das Thermometer geht und dasselbe erwärmt.

Noch eines andern Kunstgriffes bediente er sich, um sofort das Potential der inneren Belegung der Batterie zu messen. Er brachte nämlich in die Nähe einer mit der inneren Belegung der Batterie verkehrenden Kugel *Q* eine kleine isolirte Wage *F*, getragen von einem Seidenfaden, mit Gewichten *p* in die Schale *T*, und am andern Ende des Balkens mit einer kleinen Kugel *q*, welche in Folge des Druckes *p* an der *Q* hängen bleibt. Diese Wage ist sichtlich ein Gewichts-Elektrometer. Indem sich die beiden Kugeln *Q* und *q* auf dasselbe Potential elektrisiren, stossen sie sich ab mit einer Kraft, proportional dem Quadrate des Potentials (§ 11, § 33, Folgesatz), und sobald die Resultirende beider Wirkungen hinreichend gross ist, wird der Balken abgestossen, da in diesem Augenblicke die Kraft gleich p ist; bezeichnet man daher mit k eine Constante, so hat man

$$V = k\sqrt{p}.$$

70. Wir wollen nunmehr die Ergebnisse der Versuche von Riess besprechen, und zwar zunächst den Einfluss des Potentials der Batterie auf die calorische Energie der Entladung.

Fig. 36.



Auf nachstehender Tabelle*) sind die bei mehreren Versuchen erhaltenen calorischen Wirkungen angegeben, wo die nämliche Ladung 4, 5, 6 ..... Batterien von verschiedener Anzahl gleicher Flaschen ertheilt wurde, und welche daher ein der Oberfläche oder Flaschenzahl proportionales Potential besassen.

*) Entnommen aus E. Verdet, Théor. méc. de la chaleur. Oeuvres T. II, pag. 109.

Ladungen		Anzahl n der Flaschen				
		2	3	4	5	6
4	$q =$	6·7	4·5	3·2	3·0	2·6
5	$q =$	9·3	7·0	5·2	4·5	3·8
6	$q =$	13·4	9·7	7·3	6·5	5·5
7	$q =$	—	15·0	11·0	8·8	7·3
8	$q =$	—	17·5	14·1	11·3	9·3
9	$q =$	—	—	17·8	14·3	11·7
10	$q =$	—	—	—	16·7	14·3

Man erkennt sogleich, dass mit dem Wachsen der Oberfläche der Batterie, während die Ladung fest bleibt, der Wärmebetrag abnimmt. Die Punkte $q \times n$ sind beziehungsweise

13·4	13·5	12·8	15·0	15·6
18 6	21·0	20·8	22·5	22·8
26·8	29·1	29·2	32·5	33·0
—	45·0	44 0	44·0	43·8
—	52·5	56·4	56·5	55·8
—	—	71·2	71·5	70·2
—	—	—	83·5	85·8

Durch die in jeder Reihe ziemlich beständigen Producte $q\ n$ wird nun erwiesen, dass die in einem Leitungsdrahte durch die Entladung einer gegebenen Menge von Elektricum erzeugten Wärmemengen in umgekehrtem Verhältnisse stehen zur Oberfläche der Batterie und deshalb in geradem Verhältnisse zu ihrem Potential.

Dieses Ergebniss entspricht vollkommen dem Werthe

$$W = \frac{1}{2} M V$$

der elektrischen Energie. Der Abgang, welchen man am Wärme-Ertrag bemerkt, wenn das Potential einen höheren Werth hat, dürfte von den stärkeren inneren Entladungen herrühren, welche in diesem Falle vorkommen. (§ 51, 1.)

De la Rive erklärte den erwähnten Einfluss des Potentials durch die Annahme, dass den höheren Potentialen eine grössere Geschwindigkeit im Entladungsstrome entspreche, wenn er auch aus derselben Menge von Elektricität bestehe, und behauptet geradezu, dass die Erwärmung gleichzeitig von der entladenen Masse und von deren Geschwindigkeit abhänge.*)

71. Um den Einfluss zu bestimmen, welchen die Ladung einer gegebenen Batterie auf die Wärmemengen hat, die von ihr erzeugt werden können, wollen wir die nämlichen Versuchsreihen benutzen, die soeben angeführt wurden. Nachdem die Wärmewirkung in Einklang steht mit dem Ausdrucke $\frac{1}{2} M V$ der potentiellen Energie und diese sich auch ausdrücken lässt durch

$$\frac{1}{2} \frac{M^2}{C},$$

so wird sich finden müssen, dass die durch Entladung einer gegebenen Batterie erzeugten Wärmemengen q proportional sind den Quadraten der Ladungen, oder es werden die Quotienten

$$\frac{M^2}{q} = \frac{M'^2}{q'} = \frac{M''^2}{q''}$$

gleich sein müssen. So ergiebt es sich in der That, wie Nachstehendes zeigt:

Flaschen		Ladungen 4	5	6
2	$\frac{M^2}{q} =$	2·4	2·7	2·7
3		3·6	3·6	3·7
4		5·0	4·8	5·0
5		5·3	5·6	5·5
6		6·6	6·6	6·5

*) De la Rive, Traité d'électr. T. II, pag. 166 etc.

das heisst: Für eine gegebene Batterie ist die durch ihre Entladung hervorgebrachte Wärme proportional dem Quadrate der in der Batterie angesammelten elektrischen Masse.

72. Wir wollen jetzt auf Grundlage der Erfahrungen von Riess untersuchen, welchen Einfluss auf die Wärmeerzeugung die Länge und der Querschnitt des im Thermometer eingeschlossenen Platindrahtes habe, während, wohl zu verstehen, der allgemeine Widerstand des Stromkreises constant bleibt, zu welchem Ende die Drähte, mit welchen man experimentirt, beide im Stromkreise, nämlich der eine im Thermometer, der andere im Auslader E behalten und sie dann miteinander vertauscht werden. Bei dieser neuen Untersuchungsreihe werden wir der Prüfung folgenden Satz unterziehen, welcher wirklich von Riess festgestellt wurde:

α) In jeder Strecke des Stromkreises steht die vom Entladungsstrome entwickelte Wärme im geraden Verhältnisse zum Widerstande eben dieser Strecke.

Die Versuche wurden zunächst mit Platindrähten von wechselnder Länge und von verschiedenem Durchmesser angestellt; wenn in solchem Falle das angeführte Gesetz den Thatsachen entspricht, so muss sich finden (indem l, l', s, s' die Längen und Querschnitte der Drähte bedeuten)

$$q : q' = \frac{l}{s} : \frac{l'}{s'}$$

und man wird, da die Wärme-Capacitäten der Drähte gleich sind und p, p' ihre Gewichte heissen, in denselben die Temperaturen

$$t = \frac{q}{cp} \qquad t' = \frac{q'}{cp'}$$

haben, wonach sein wird

$$t : t' = \frac{l}{sp} : \frac{l'}{s'p'}.$$

Und weil die Drähte hier von gleichem Stoffe vorausgesetzt werden, nämlich immer von Platin, so wird nun sein

$$p : p' = s\,l : s'\,l'$$

und folglich

$$t : t' = \frac{1}{s^2} : \frac{1}{s'^2}$$

oder auch, wenn r, r' ihre Halbmesser sind,

$$t : t' = \frac{1}{r^4} : \frac{1}{r'^4}.$$

Dies hat die Erfahrung genau bestätigt, wie z. B. in folgenden Fällen:

$l = 59{\cdot}7$ Linien	$l' = 100{\cdot}4$ Linien
$r = 0{\cdot}36$ „	$r' = 0{\cdot}58$ „
$t = 0{\cdot}3775$	$t' = 0{\cdot}0592$

indem man erhält

$$\frac{t}{t'} = 6{\cdot}377, \left(\frac{r'}{r}\right)^4 = 6{\cdot}74$$

das heisst: die Temperaturen verhalten sich umgekehrt, wie die vierten Potenzen der Halbmesser; ein Gesetz, welches nichts ist, als eine nothwendige Folgerung aus dem im Eingange angeführten allgemeineren Gesetze (α).

Man beachte zugleich, dass die Temperatur, welche ein Draht annimmt, unabhängig ist von seiner Länge. So würde z. B. für $r = r'$, wie verschieden auch l von l' wäre, sich nothwendig ergeben $t = t'$. Und in der That, wenn gemäss dem Gesetze (α) die Wärmemenge q im Verhältnisse von l wachsen soll, so wird natürlich auf jeden Theil von l immer dieselbe Menge davon entfallen und sonach die Temperatur eines jeden Abschnittes des Drahtes constant bleiben, was immer seine Länge sein mag, wofern nur der ganze Stromkreis sich unter gleichen Widerstandsbedingungen erhält. Die

Erfahrung hat diese Thatsache klar erwiesen, wie man z. B. an folgenden Angaben ersieht:

Länge des Platindrahtes im Thermometer eingeschlossen f	im Auslader eingeschaltet f'	$f+f'$	Erwärmung von f
123·7	6·0	129·7	0·238°
96·7	33·0	129·7	0·228°
67·7	62·0	129·7	0·239°
42·0	87·7	129·7	0·237°

So zeigt sich das Gesetz (α) vollkommen bestätigt in Hinsicht der zwei Elemente Länge und Querschnitt, welche den verschiedenen Widerstand mehrerer Drähte aus demselben Metalle bedingen.

Folgesatz. Heissen $\rho', \rho'', \rho'''\ldots\ldots$ die betreffenden Wärmemengen, so wird man haben

$$q' : q'' : q''' \ldots\ldots = \rho' : \rho'' : \rho''' \ldots\ldots$$

woraus allgemein

$$q : q' + q'' + q''' \ldots\ldots = \rho : \rho' + \rho'' + \rho''' \ldots\ldots$$

oder

$$q : Q = \rho : R$$

folgt, nämlich: Die Wärme, welche auf einen Theil des Stromkreises entfällt, verhält sich zu der über den ganzen Stromkreis verbreiteten Wärme, wie sich der Widerstand jener Strecke verhält zum Widerstande im gesammten Stromkreise.

73. Man nehme an, dass, während die Energie der Ladung $\frac{1}{2}\, MV$ fest gegeben ist, beim Aendern des allgemeinen Widerstandes im Stromkreise die Gesammtsumme Q der in ihm erzeugten Wärme beständig dieselbe bleibe, bezeichne mit

$$\delta = a\,Q$$

die thermometrische Abweichung, welche für einen Stromkreis von gegebenem Widerstande stattfindet und untersuche nun, was für in derselben Thermometerspirale erzeugte Erwärmungen, bei Aenderung des allgemeinen Widerstandes des Kreises, unter dieser Voraussetzung angezeigt werden müssten.

Nachdem man den Versuch mit irgend einem Stromkreise begonnen hat, schalte man in denselben nacheinander einen Kupferdraht von der Länge λ' ein, oder von λ'' oder λ''', ... und bemerke sich in jedem Falle die thermometrische Abweichung δ', δ'', δ''' . . . . . Ist L die dem genannten festen Stromkreise gleichwerthige Länge desselben Kupferdrahtes, so wollen wir die gesammten Stromkreise, welche bei den nacheinander folgenden Versuchen statthaben, durch

$$L + \lambda', \quad L + \lambda'', \quad L + \lambda''' \ldots\ldots$$

und allgemein durch

$$L + \lambda$$

vorstellen, und es werden folglich, kraft der im § 72 dargelegten Gesetze, die Kreisstrecken L und λ, beziehungsweise die Wärmemengen

$$\frac{L}{L+\lambda}\,Q, \quad \frac{\lambda}{L+\lambda}\,Q$$

aufnehmen. Die Platinspirale des Thermometers ist gleichsam ein constanter Bruchtheil der L, und wie sie daher die Abweichung $\delta = a\,Q$ hervorbringt, wenn die L die ganze Summe Q besitzt, so wird sie, wenn die L nur $\frac{\mathrm{L}}{L+\lambda}\,Q$ besitzt, die Abweichung

$$\delta' = a\,\frac{L\,Q}{L+\lambda} = \frac{a}{1+\frac{1}{L}\lambda}\,Q$$

hervorbringen. Somit ist

$$\delta : \delta' = L + \lambda : L.$$

Riess experimentirte mit einem Stromkreise, welcher ihm an sich allein, für eine gegebene Ladung der Batterie,

$$\delta = 0{\cdot}78$$

lieferte; und indem er die ganze Menge Q der im Stromkreise entwickelten Wärme als Einheit nahm, konnte er ebenfalls $a = 0{\cdot}78$ setzen. Diesem Kreise schaltete er verschiedene Strecken eines Kupferdrahtes vom Durchmesser 0·29 Linien ein und erhielt folgende Abweichungen:

Länge des eingeschalteten Drahtes λ	Thermometrische Abweichung δ
0 Zoll	0·78
9·6 „	0·69
49·4 „	0·48
98·0 „	0·34
147·7 „	0·27

Nun lässt sich aus dem obigen Ausdrucke ableiten

$$L = \frac{\delta' \lambda}{a\,Q - \delta'}$$

was in unserem Falle wird

$$L = \frac{\delta' \lambda}{0{\cdot}78 - \delta'}.$$

Wenn also der Hauptsatz, auf welchem die gegenwärtige Theorie beruht, der Wahrheit entspricht, so wird für jede angemerkte Abweichung beständig der nämliche Werth von L sich ergeben müssen. Man erhält in der That

$$L = \left.\begin{array}{r} 73{\cdot}6 \\ 78{\cdot}8 \\ 76{\cdot}4 \\ 78{\cdot}3 \end{array}\right\} \text{Mittel } 76{\cdot}8 \text{ Zoll,}$$

als merklich constante Werthe, welche also eine gute Bestätigung der über die Unveränderlichkeit der in jedem Falle im Stromkreise entwickelten Wärmesumme Q gemachten Voraussetzung darbieten. Und dieses schöne Ergebniss tritt natürlicherweise klar hervor, wenn man den gefundenen Mittelwerth von L dazu benutzt, um für jeden Versuch den Werth von Q selbst zu berechnen, welcher sich aus der obigen Formel

$$Q = \frac{1}{a}\left(\delta' + \frac{\delta'\lambda}{L}\right)$$

ergiebt. Denn setzt man in diese die Angaben der obigen Versuche ein, so hat man

$$Q = \frac{0{\cdot}776}{a}$$
$$\frac{0{\cdot}789}{a}$$
$$\frac{0{\cdot}774}{a}$$
$$\frac{0{\cdot}789}{a},$$

welche Werthe die Beständigkeit von Q in den verschiedenen Stromkreisen deutlich zeigen; oder:

β) So lange die potentielle Energie der Batterie constant bleibt, bleibt die durch die Entladung derselben im ganzen Stromkreise entwickelte Wärmemenge Q constant, welche Veränderungen auch im Widerstande des Kreises eintreten mögen.

Folgesatz. Es besteht sonach zwischen der elektrischen Energie $\frac{1}{2} M V$ und der erzeugten Wärmemenge Q ein constantes Verhältniss. Bezeichnen wir es mit k, so werden wir die besondere Gleichung

$$\frac{1}{2} M V = k Q$$

aufstellen können. Und nachdem das erste Glied eine Arbeit darstellt, so wird es einleuchtend, dass das Verhältniss k nichts Anderes ist, als das mechanische Aequivalent der Wärme oder 425 bis 430 Kilogramm-Meter, wenn Q in Calorien ausgedrückt wird. Diesem Begriffe entsprechen die Rechnungen des § 63.

Zusatz. Das erwiesene Gesetz stimmt überein mit einem anderen Gesetze, das die galvanischen Ströme betrifft, wo man für eine und dieselbe Menge chemischer Wirkung stets den nämlichen Wärmebetrag erhält, wenn man die im Innern der Säule und im äusseren Stromkreise entwickelten Wärmemengen zusammenlegt.

74. Gleichzeitig bleibt das andere Gesetz feststehend, welches den Einfluss des ganzen Stromkreises auf die in einer bestimmten Strecke desselben entwickelte Wärmemenge betrifft, ein Gesetz, das enthalten ist in der Beziehung

$$\delta : \delta' = L + \lambda : L,$$

nachdem diese Beziehung der hauptsächliche Beweis und die wesentliche Bedingung der soeben erwiesenen Wahrheit ist. Mit Hilfe der obigen Ansätze findet man

$$\delta L = 0{\cdot}78 \times 76{\cdot}8 = 59{\cdot}9$$

$L + \lambda$	$(L + \lambda)\,\delta'$	
83·2	57·4	Mittel 59·8
128·2	61·5	
174·4	59·3	
226·1	61·0	

und die Beständigkeit der erhaltenen Producte bestätigt das Gesagte. Es lässt sich demnach behaupten, dass:

γ) die in der Thermometerspirale, oder allgemein in irgend einer bestimmten Strecke des Stromkreises, entwickelten Wärmemengen in umgekehrtem Verhältnisse stehen zu deren gesammtem Widerstande; und natürlich in geradem Verhältnisse zur ganzen Wärmesumme Q wechseln würden, wenn letztere, in Folge einer Aenderung in der potentiellen Energie der Batterie, sich ändern sollte.

Beispiel. Als Q fest gegeben war, hatte man in der durch die Thermometerspirale vorgestellten Strecke die Wärmemengen proportional

$$0{\cdot}69 : 0{\cdot}34 \text{ oder } 2{\cdot}0 : 1,$$

während der Widerstand des ganzen Stromkreises sich änderte im Verhältnisse von

$$83{\cdot}2 : 174{\cdot}4 \text{ oder } 1 : 2{\cdot}1.$$

Ich habe gesagt, dass der vorstehende Lehrsatz die Bedingung und der Beweis sei für die Unveränderlichkeit von Q in was immer für einem Stromkreise, so lange die Energie der Batterie constant bleibe. Dies lässt sich auch unmittelbar nachweisen, indem man den im § 72, Folgesatz, abgeleiteten Ausdruck

$$q = \rho \frac{Q}{R}$$

wieder heranzieht, wo

q die Wärmemenge einer Kreisstrecke,

ρ der Widerstand derselben Strecke,

Q die Gesammtmenge der Wärme des Stromkreises, und

R dessen ganzer Widerstand ist.

Denn indem das Experiment zeigt, dass q einfach im umgekehrten Verhältnisse von R sich ändert, will es aussagen, dass beim Wechseln von R das $q\,R$ ein constantes Product bleibt und folglich die Summe Q unveränderlich und unabhängig von R.

75. Durch Einschaltung eines Metalldrahtes von bestimmten Abmessungen und, anstatt seiner, beliebiger anderer Drähte in den Stromkreis wird sich leicht der Widerstand dieser letzteren ermitteln lassen in Bezug auf den ersten, indem man von den oben gefundenen analytischen Ausdrücken Gebrauch macht.

Ist irgend ein Stromkreis hergestellt, in welchem sich eine gegebene elektrische Energie entladen mag, so heisse Eins die Wärmemenge Q, welche darin erzeugt wird, und nehme man somit δ als Werth von a (§ 73). Hat man einen Normaldraht gewählt, z. B. von Platin, von der Länge p, so schalte man ihn in den genannten Stromkreis ein, dessen Widerstand sich ausdrücken lässt durch eine Länge L von Platindraht von demselben Durchmesser, wie der des Normaldrahtes. Wir werden durch die Entladung dieser Batterie (§ 73), nachdem sie auf dieselbe Potential-Energie gebracht ist, die Abweichung

$$\delta' = \frac{a}{1 + \frac{1}{L} p}$$

erhalten. Daraus findet sich der Werth von L.

Man entferne nunmehr den Normaldraht von der Länge p aus dem Stromkreise und ersetze ihn durch einen Draht aus beliebigem andern Metalle von irgend einer Länge l und einem Querschnitte s. Dieser wirkt wie ein Platindraht vom Durchmesser des Normaldrahtes und von unbekannter Länge λ. Die neue thermometrische Abweichung giebt die Gleichung

$$\delta'' = \frac{a}{1 + \frac{1}{L} \lambda},$$

woraus der Werth von λ folgt.

Nun weiss man, dass der Widerstand dieses neuen Drahtes sich gerade verhält, wie seine Länge, und umgekehrt wie sein Leitungsvermögen c und sein Querschnitt s. Also hat man die Beziehung

$$\lambda = \frac{l}{c\,s},$$

welche das Mittel an die Hand giebt, den Werth von $\frac{1}{c}$, genannt specifischer Widerstand, zu bestimmen, nachdem man, wie gesagt, den Werth von λ ermittelt hat, und durch genaues Messen der Länge l und des Querschnitts.

So erhielt Riess: *)

Metalle	Specifischer Widerstand $\frac{1}{c}$
Silber	0·1045
Kupfer	0·1552
Gold	0·1746
Cadmium	0·4047
Messing	0·5602
Palladium	0·8535
Eisen	0·8789
Platin	1·8789
Zinn	1·053
Nickel	1·180
Blei	1·503
Pakfong (Neusilber)	1·752

Will man den Widerstand in Längen von Draht ausdrücken, so berechnet man für jedes Metall den Werth von

$$l = 1 : \frac{1}{c}.$$

So entsteht die folgende Tafel, wo noch die Längen in Bezug auf Kupfer, als Einheit genommen, beigesetzt sind:

	Längen von gleichem Widerstande	
	für $Pt = 1$	für $Cu = 1$
Silber	9·569	1·487
Kupfer	6·443	1
Gold	5·727	0·889
Cadmium	2·471	0.383
Messing	1·785	0·277
Palladium	1·172	0·182
Eisen	1·138	0·177
Platin	1	0·155
Zinn	0·950	0·147
Nickel	0·847	0·131
Blei	0·665	1·103
Pakfong	0·571	0·089

*) Mascart, Traité d'électr. Tom. II, pag. 20.

Die Leitungsvermögen der oben genannten Metalle in Bezug auf Quecksilber wurden von Matthiesen zu nachstehenden Werthen ermittelt: *)

	Leitungsvermögen	Widerstand
Silber bei 0^0	61·4	0·0163
Kupfer (Draht Nr 1 bei $18·8^0$)	47·5	0·0211
Gold bei $21·8^0$	33·86	0·0295
Cadmium bei $18·8^0$ . . .	13·6	0·0738
Eisen bei $20·4^0$ (Claviersaite)	8·86	0·113
Palladium bei $17·2^0$ . . .	7·75	0·129
Zinn bei $21·0^0$	7·02	0·142
Platin bei $20·7^0$	6·46	0·155
Blei bei $17·3^0$	4·77	0·210
Pakfong bei $18·7^0$	4·71	0·213

Abgesehen von geringen Unterschieden, ist die Reihenfolge dieser Metalle in beiden Scalen dieselbe. Doch ist wichtig, daran zu erinnern, dass das Leitungsvermögen der Metalle im Allgemeinen abnimmt mit dem Wachsen der Temperatur. Das Leitungsvermögen bei 0 Grad gleich 1 gesetzt, fand Matthiesen für eben dasselbe bei t Grad:

$$c_t = 1 - 0·0037647\, t + 0·00000834\, t^2.$$

Fünfzehntes Capitel.

Die elektrische Energie umgewandelt im Funken in calorische Energie.

(Experimente von E. Villari.)

76. Der Professor E. Villari an der Universität von Bologna hat das Erwärmungsvermögen des Funkens untersucht, welcher durch die Entladung einer Batterie quer durch Gase, und namentlich durch die Luft, erzeugt

*) Manuale di Fisica pratica di A. Naccari ed M. Bellati, 1874, pag. 664.

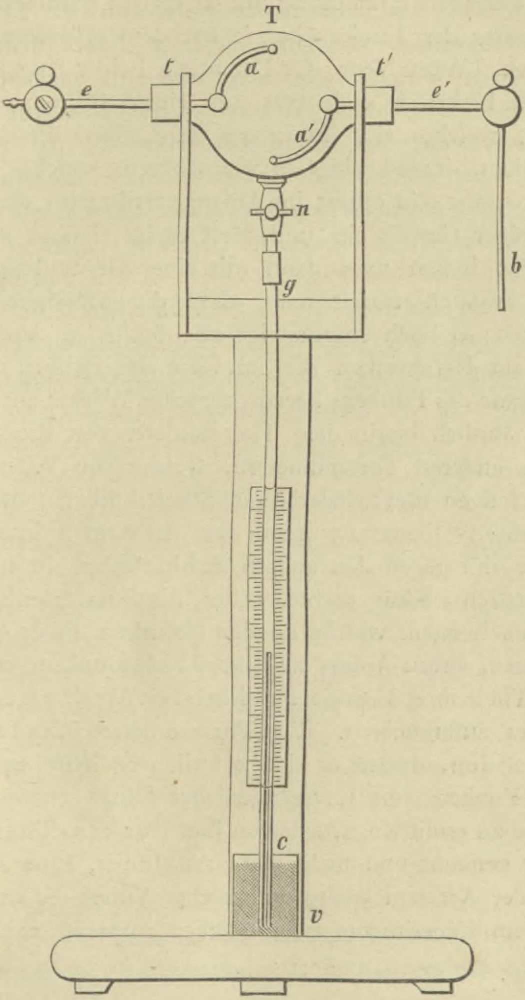
wird.*) Zu diesem Zwecke stellte er ein neues elektrisches Thermometer zusammen, welcher eine feste Elektrode hat und eine bewegliche in der Weise, dass der Funken stets die grösste Länge hatte, die dem Unterschiede der Potentiale zukam. Es ist dies ein sehr einfacher Apparat, welchem er den Namen Auslade-Thermometer gab. Derselbe besteht aus einem Glasballon *T*, der unten mittelst eines Hahnes von Bronze *n* und eines Gummirohres *g* mit einem senkrechten Glasröhrchen *g c* communicirt, welches in das kleine Gefäss *v* eingetaucht ist, ähnlich einem Gefässbarometer, indem sich in dem Gefässe und in dem unteren Theile des Röhrchens eine nicht flüchtige Flüssigkeit befindet, welche Villari durch Mischen von Wasser und Glycerin herstellte. Der Ballon trägt nach aussen zwei röhrenförmige Ansätze *t t'* an den Enden eines horizontalen Durchmessers und es treten in diese durch zwei mit einem Gemenge von Wachs, Talg und Oel wohl verkittete Korke die Elektroden *e e'* ein, bestimmt, die Entladung in's Innere des Thermometers *T* zu bringen. Die Thermometerscala befindet sich hinter dem Röhrchen mit der Glycerinflüssigkeit und ist an einer senkrechten Säule angebracht, an welche sich das Röhrchen selbst anlehnt; während sich am oberen Ende dieser Säule eine wagrechte Platte befindet, auf welcher sich zwei Brettchen von Ebonit erheben, welche den Ballon *T* stützen, indem sie in ihren oberen Löchern die Röhrenstücke *t t'* aufnehmen.

Die Elektroden tragen im Innern von *T* zwei bogenförmige Arme *a a'*, welche nahe und parallel der inneren Wand der Kugel sind und sich blos auf 90 Grad ausdehnen und in zwei Kügelchen endigen. Um den Funken entstehen zu lassen, versetzt man einen dieser Bögen in

*) E. Villari, Intorno alle leggi termiche della scintilla eccitatrice dei condensatori. Va memoria. R. Accad. dei Lincei. An. 1880—81, Vol IX, seduta del 6 marzo 1881.

Drehung, nämlich a', dadurch, dass man die Elektrode

Fig. 37.



e' mittelst des gefirnissten Glasstäbchens in ihrem Korke dreht. So gelangen die beiden äussersten Kügelchen des

Ausladers, welche anfangs fast um einen Durchmesser der Kugel voneinander abstehen, nach und nach in immer geringere Entfernung und es springt natürlich eher oder später der Funke über, je nachdem grösseren oder kleineren Unterschiede der Potentiale beider Kügelchen.

Die Elektrode *e* besteht aus einem Röhrchen von Kupfer, welches sich im Innern des Ballons öffnet und dazu dient, irgend ein Gas einzuführen, welches wohl ausgetrocknet sein muss; im Anfange treibt man dasselbe mit einiger Gewalt ein und lässt es im Gefässe *v* aufsprudeln; indem man dann mit einer Gummiblase ein wenig ansaugt, erzielt man, dass die Flüssigkeit im Röhrchen so hoch emporsteigt als nöthig ist, damit sie durch ihr Herabsinken die im Gase des Ballons durch die Wärme des Funkens hervorgebrachte Wärme anzeigen könne, ähnlich hierin dem Thermometer von Riess.

In anderen Thermometern, welche von Villari bei seinen langen und wiederholten Studien über denselben Gegenstand*) benutzt wurden, war der Arm *a'* lose und liess er ihn gegen den andern *a* hin fallen, indem er den ganzen Ballon drehte. Aber die Zusammenhangs-Unterbrechungen, welche an den Gelenken dieses Armes vorkamen, gaben Anlass zu kleinen Nebenfunken, welche einen Theil ihrer Energie an sichtbaren Abreibungen des Metalles aufbrauchten. Ein Thermometer mit festen Elektroden, dessen er sich zuweilen bediente, um die durch Funken von unveränderlicher Länge entwickelte Wärme zu ermitteln, wurde von ihm Funken-Thermometer genannt und nicht mehr Auslader. Eine Abbildung der Art und Weise, in welcher Villari die anderen zu einem Experimente erforderlichen Apparate mit dem

*) Seine Abhandlungen sind veröffentlicht in den Ann. dell' Istituto di Bologna, der R. Accademia dei Lincei in Roma und im Nuovo Cimento di Pisa.

Thermometer in Verbindung setzte, ist im folgenden § 82 zu sehen.

77. Um den Einfluss des Potentials der Batterie auf die Wärmewirkung des Funkens zu bestimmen, machte Villari eine Reihe von Versuchen, indem er nacheinander eine und dieselbe Ladung Batterien von stets verschiedener Flaschenzahl ertheilte. Wenn die erzeugte Wärmemenge im geraden Verhältnisse zu den Potentialen steht, so wird sie sich im umgekehrten Verhältnisse zur Anzahl der Flaschen der Batterie ergeben müssen, d. h. es wird sein müssen

$$n\,Q = n'\,Q' = \ldots\ldots = \text{Const.}$$

Es folge hier eine Tabelle einiger solcher von ihm erhaltenen Ergebnisse, wozu er beständig eine Ladung von 12 elektrometrischen Einheiten, an der Lane'schen Flasche gemessen, in Anwendung brachte:

Anzahl n der Flaschen	Wärme Q vom Funken geliefert	Product $n\,Q$	
24	6·9	166	
22	7·7	169	
20	9·8	186	
18	11·5	267	
16	13·8	221	
14	16·8	235	
12	19·2	230	233·3
10	23·5	235	
8	25·3	202	
6	22·8	136	
4	17·5	70	

Vergleicht man diese Ergebnisse mit jenen, welche man bei den Leitungsdrähten (§ 70) erhielt, so stellen sich starke Unterschiede heraus; bei den Drähten behauptet sich das oben erwähnte Verhältniss sehr merklich und findet auch kein beständiges Fortschreiten in den Unterschieden statt; hier dagegen zeigt die Wärme-Entwicklung zuerst ein rascheres Anwachsen als die Potentiale und nimmt schliesslich weit rascher ab, als die letzteren. Es geht daraus hervor, dass blos alsdann, wann die Potentiale einen bestimmten, weder zu hohen noch zu niedrigen Werth haben, die durch den Funken hervorgebrachte Wärmemenge in geradem Verhältnisse zu den Potentialen steht.

78. Sucht man das Gesetz auf, von welchem der Einfluss der Ladungen auf die durch den Funken hervorgebrachte Wärmesumme abhängig ist, so trifft man nothwendig dieselben Unterschiede und Ausnahmen an. Für die Entladungen in den Drähten fanden wir die Wärmewirkungen proportional den Quadraten der Ladungen (§ 71). Für die Funken wollen wir im Allgemeinen eine Beziehung von der Form

$$\frac{Q}{Q'} = \left(\frac{M}{M'}\right)^k$$

voraussetzen und den Exponenten k ermitteln. Villari fand in einer Versuchsreihe:

Constante Batterie von 34 Flaschen.

Ladungen M	Erzeugte Wärme Q	Exponent k	Mittel von k
14	4·7	3·398	3·258
16	7·4	3·285	
18	10·9	3·460	
20	15·7	2·669	
22	20·2	3·480	2·314
24	27·3	1·683	
28	35·4	1·780	
32	44·9	0·998	0·855
36	50·5	0·369	
40	52·5	1·198	
50	68·8		

Andere Versuchsreihen lieferten gleiche Ergebnisse. Das Gesetz der Quadrate wird also nicht eingehalten, ausser bei den Ladungen von einem gewissen mittleren Werthe, wie zu erwarten war.

79. Für die angetroffenen Abweichungen glaubte Villari in nachstehenden Erwägungen einige Erklärung zu finden:

„Dieses sehr sonderbare Verhalten der Funken bei der Erzeugung von Wärme findet seinen Grund, wie ich denke, in dem Phänomen der inneren Entladungen, welche die Umwandlung der elektrischen Energie in calorische mittelst der Funken vervollständigen ..... Und nachdem die über die inneren und äusseren Funken der Batterie vertheilte Gesammtwirkung (Arbeit und Wärme) der Entladung abhängen muss vom Quadrate der dieser Batterie mitgetheilten elektrischen Masse, so ist klar, dass (indem man die wechselseitigen Einflüsse der Condensatoren und jene der freien Elektricität ihrer Leiter als zu vernachlässigen voraussetzt), sowie die Wärme des Entladungsfunkens für schwache Ladungen viel rascher wächst, als das Quadrat der Ladungen, so die durch die innere Entladung entwickelte Wärme weit weniger rasch wachsen muss, als das Quadrat der Ladungen selbst. Da für die Ladungen von mittlerer Stärke die Wärme des Entladungsfunkens wächst, wie die Quadrate der Ladungen, so wird jene der inneren Entladungen ebenfalls wachsen müssen, wie diese Quadrate.

Und schliesslich muss für grössere Ladungen genannte innere Wärme mehr wachsen, als die Quadrate der Ladungen, eben weil jene äussere weit weniger wächst als dieselben Quadrate."

Die Richtigkeit dieser letzteren Schlussfolgerung vermochte Villari dadurch zu bestätigen, dass er eine Leydener Flasche in eine Art Gas-Thermometer einschloss und dieselbe von aussen her durch einen mit Knöpfen versehenen Auslader entlud. Er erhielt so für die im

Innern der Flasche erzeugten Wärmemengen aus vielen Beobachtungen folgende Mittelwerthe:

Versuchsreihe	Ladungen M	Innere Wärme Q	Exponent k	Mittel von k
I. Reihe	2	0·00		
	3	0·45	4·18	3·99
	4	1·50	3·80	
	5	3·50		
II. Reihe	1	0·00		
	2	0·09	4·20	4·60
	3	0·50	5·04	
	4	2·13		
III. Reihe	3	0·40	6·30	6·30
	4	2·45		
IV. Reihe	4	1·20	3·20	3·20
	5	2·50		
			Mittel	4·52

Diese Zahlen beweisen, in Uebereinstimmung mit der gegebenen Erklärung, dass der Wärme-Effect der inneren Entladungen Null ist für schwache Ladungen und dann sehr rasch wächst mit dem Wachsen derselben.

Die Erklärungen Villari's finden also eine grosse Stütze in der Wirklichkeit; sie bedürfen indess vielleicht einiger Vervollständigung, namentlich in Betreff der nicht befriedigenden Vergleiche mit den Experimenten von Riess (siehe voriges Capitel), dadurch, dass die verschiedenen Wirkungen in Untersuchung gezogen würden, welche in den Gasen aus der wechselnden Dauer der Entladung (§§ 60 und 70) hervorgehen können.

80. Villari schaltete in den Entladungskreis, ausser dem üblichen Auslade-Thermometer, noch ein anderes Thermometer ein, welches fast wie das erste eingerichtet war, aber feste Elektroden hatte und daher Funken von constanter Länge gab. Er mass die gleichzeitig durch beide Funken gelieferten Wärmemengen und fand, dass:

die ganze von verschiedenen, durch eine gegebene Entladung an verschiedenen Punkten des Stromkreises erzeugten, Funken entwickelte Wärme eine fast constante Summe giebt, welche sehr nahe der Wärmemenge gleichkommt, die man durch einen einzigen Funken erhalten würde: wie man auf folgender Tabelle sieht, welche die mit der constanten Ladung 40 gemachten Beobachtungen darstellt:

Thermometer mit festen Elektroden Länge des Funkens	Erzeugte Wärme Q	Auslade-Thermometer Erzeugte Wärme Q'	$Q + Q'$
0·0	0·6	52·0	52·6
0·5	6·0	47·0	53·0
1·0	9·5	41·0	50·5
1·5	12·7	36·0	48·7
2·0	15·6	33·3	48·9
3·0	19·2	27·2	46·4
4·0	21·2	27·6	48·8
6·0	27·0	26·0	53·5

Folgesatz. Aus diesen Thatsachen folgt klar, dass, wenn die zwei gleichzeitigen Funken eines und desselben Stromkreises von gleicher Dicke wären oder überhaupt so beschaffen, um Wärme im Verhältnisse ihrer Länge zu erzeugen, der eine von ihnen sich verlängern müsste, wenn der andere sich verkürzt, in der Weise, dass ihre vereinigten Längen eine constante Summe ausmachen würden. Diesem neuen Gesetze begegnete Villari wirklich in dem Falle, wo keiner der beiden Funken allzu klein war, und, diesen Fall ausgenommen, sah er eine constante Summe der zwei Längen sich behaupten, wenn sie noch um mehr als 10 und 20 Millimeter voneinander verschieden waren. Aber die Summe wich stark ab nach mehr, wenn die Länge des einen der beiden Funken bei einer gewissen Grenze von Kleinheit ankam; und nachher wuchs diese Summe immer mehr an, wenn der kleine Funken noch über jene Grenze hinaus abnahm. Alles dieses ist erwiesen durch folgende Tabelle, auf welcher die vornehmsten Ergebnisse der neueren Versuche Villari's zusammengefasst sind, indem L' die Länge des Entladungsfunkens anzeigt, der mit dem Auslader hervorgerufen wird, und L die Länge eines zweiten, Nebenfunken genannten Funkens, welcher gleichzeitig mit dem ersten an einer andern Unterbrechungsstelle des Stromkreises entsteht:

$L = 0$	$L' = 36^{mm}$
L wechselt von $0{\cdot}1^{mm}$ bis $1{\cdot}5^{mm}$	$L + L' = 39{\cdot}8$
L etwa 2^{mm}	$L + L' = 34{\cdot}8$
L wechselt von 3^{mm} bis 30^{mm} .	$L + L' = 31{\cdot}3$ constant
L' etwa $2{\cdot}5^{mm}$	$L + L' = 34{\cdot}5$
L kleiner als 2^{mm}	$L + L' = 41$

Aus diesen Ergebnissen lässt sich noch folgern, dass: ein kleiner Funken das Vermögen habe, einen andern Funken, welcher zu gleicher Zeit im Stromkreise entstehen mag, länger zu machen; eine Erscheinung, welche man auch so aussprechen könnte: die kleinen freiwilligen Entladungen, welche an einem Punkte des Stromkreises auftreten, erregen und erleichtern die grösseren Entladungen, welche an anderen Theilen desselben Stromkreises vor sich gehen können. Und aus anderen Experimenten geht noch hervor, dass dieser Einfluss der kleinen Nebenfunken umso grösser ist, je höher die Potentiale der Ladungen sind.

Zusatz. Endlich muss man wissen, dass die bisher dargelegten allgemeinen Gesetze nicht wenigen und nicht geringen Abänderungen unterworfen sind, je nach der Art und Weise, in der die Versuche gemacht wurden. Von solchen Abänderungen will ich jetzt eine Andeutung beibringen, indem ich aus der grossen Mannigfaltigkeit der von den Physikern Belli, Faraday, Becquerel De la Rive und Righi ausgeführten Experimente die am meisten beständigen Gesetze hervorsuche, welche sich auf folgende zurückführen lassen:

1. Unter gleichen Umständen sind die Funken umso länger, je kleiner der Durchmesser der Kügelchen oder Knöpfe ist, zwischen welchen sie erregt werden.

2. Wenn man einen der beiden gleichen Knöpfe mit der Erde verkehren lässt, so nimmt der Funke an Länge zu und der Gewinn ist am grössten, wenn man gerade den negativen Knopf mit der Erde verkehren lässt.

3. Die Funken sind länger, wenn sie zwischen Oberflächen von verschiedener Ausdehnung erregt werden und wenn die mehr ausgedehnte Oberfläche die negative ist.

4. Auch in diesem Falle ist es von Nutzen, um längere Funken zu erhalten, dass einer der beiden Conductoren mit der Erde in Verkehr gesetzt werde, und zwar allemal der, welcher die grösseren Abmessungen hat.

5. Man erleichtert die Entladung dadurch, dass man in die Nähe der Knöpfe des Ausladers eine Metallplatte bringt, welche mit der Erde verkehrt.

6. Endlich erleichtert man (nach allem oben Gesagten) die Entladung dadurch, dass man an irgend einer Stelle des Stromkreises einen zweiten ganz kleinen Funken entstehen lässt, welchen wir Nebenfunken nennen wollen.

Nicht alle diese Thatsachen erklären sich mit gleicher Leichtigkeit, weil es der Einflüsse gar viele giebt, von denen man sich Rechenschaft geben müsste. Allein man sieht klar, dass von erheblichem Einflusse die grössere Spannung ist, welche unter gleichen Umständen das Elektricum auf kleineren Oberflächen erlangt, die grössere absolute Höhe der Potentiale, die Zunahme an Capacität der Kugeln, zwischen welchen der Funke überspringt und zu gleicher Zeit das verschiedene Benehmen der beiden Elektricitäten beim Hinausgehen durch die Luft, indem z. B. die negative bei hoher Spannung sich leichter zerstreut, als die positive; überdies muss an diesen Vorgängen Antheil haben das Ausströmen von Metalldämpfen, welches sich mit den Unterbrechungen des Stromkreises vervielfacht (Villari). Aber noch immer verbleiben nicht wenige Dunkelheiten in den mannigfachen Erklärungen, welche sich für die einzelnen Fälle ersinnen lassen, insbesondere weil sich in verschiedenen Gasen die Erscheinungen nicht gleichartig gestalten.

81. Wenn beim Gleichbleiben der Oberfläche der Batterie derselben verschiedene Ladungen zugeführt werden, so entstehen verschiedene Potentiale und folglich hat man bei der Entladung Funken von verschiedener Länge. Wir wollen nun zwei Dinge voraussetzen:

a) dass, indem das Potential n-mal grösser wird, die Länge des Funkens in dem nämlichen Verhältnisse wachse (§ 48);

b) dass das normale Gesetz von der Wärme-Erzeugung proportional dem Quadrate der Ladung zutreffend sei.

Ist das Potential n-mal grösser geworden, so wird die Ladung vom Werthe M in den Werth nM übergegangen sein und man wird für die erzeugten Wärmemengen haben

$$Q : Q' = M^2 : n^2 M^2 = 1 : n^2.$$

Heissen $q\,q'$ die, gleichen Strecken des Funkens angehörigen Wärmemengen, z. B. die eines Centimeters desselben, welcher in dem einen Falle die Länge l und in einem andern die $n\,l$ haben soll, so werden wir erhalten

$$l q : n l q' = 1 : n^2,$$

woraus folgt:

$$q' = n q,$$

das ist: beim Gleichbleiben der Oberfläche der Batterie und Wechseln ihrer Ladung im Verhältnisse $1 : n$ wird ein Funken von constanter Länge Wärmemengen proportional den Ladungen umso mehr geben, je besser sich oben genannte Bedingungen bewahrheiten werden.

Mehrfache Versuchsreihen von Villari haben in der That ein solches Verhalten dargethan, sei es, weil die angegebenen Bedingungen statthatten, oder weil besondere nicht leicht zu bestimmende Ausgleichungen vor sich gingen. Und es steht dieses Gesetz in vollkommenem Einklange mit jenem andern, welches sich auf die galvanometrischen Abweichungen bezieht, wovon im § 67 die Rede war, dass nämlich die galvanometrischen Abweichungen, die durch vollständige oder unvollständige Entladungen der Batterie hervorgebracht werden, proportional sind den die Entladung bildenden Elektricitätsmengen, so dass nun der Funke von fest gegebener Länge in manchen Fällen vermittelst seiner Wärmewirkungen die Dienste eines Galvanometers versehen kann. *)

82. Villari stellte verschiedene Experimente über die Wärmewirkung an, welche ein Funken von bestimmter Länge beim Durchgang in mehreren Gasen erzeugt, womit er das Thermometer zu festen Elektroden anfüllte. Ehe ich die von ihm erhaltenen Ergebnisse darlege, will ich die Beschreibung und Zeichnung des ganzen Systems der von ihm gebrauchten Apparate wiedergeben, welche zur besseren Erläuterung der vielen anderen ähnlichen, im gegenwärtigen Capitel angeführten Experimente dienen werden. **)

Eine Batterie B von 18 Leydener Flaschen war vollkommen isolirt, indem sie von Glassäulen getragen wurde,

*) Siehe die Memoria di Villari, Intorno alle leggi, termiche e galvanometriche della scintilla. Bologna, Mem dell' Istituto, 23 Janr. 1879.

**) Intorno alle leggi termiche e galvanometriche della scintilla elettrica che si forma nei diversi gassi. Ricerche del prof. E. Villari 1879. Istituto di Bologna. Serie 3a, Tom. 10.

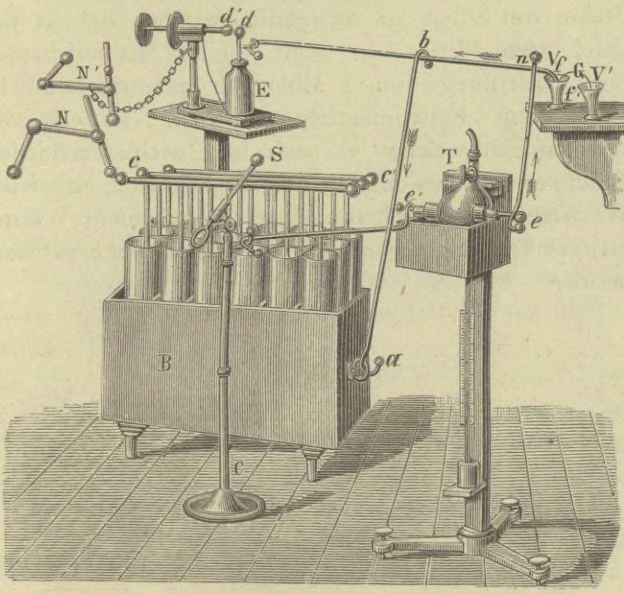
die mit einer dicken Schichte von Gummilack überzogen und auf Scheiben von Ebonit gestellt waren. Jede Flasche war etwa 47 Centimeter hoch, wovon 29 oder 30 mit Stanniol verkleidet und die übrigen 17 oder 18 innen und aussen mit einem Firniss von Gummilack überzogen waren. Die inneren Belegungen von je sechs Flaschen waren durch ein Rohr *c c'* von Messing, das in kleine Kugeln endigte, verbunden mittelst ebenso vieler dünner Röhren, welche aus dem Innern der Flaschen heraustraten, in der Weise, dass sie, ohne die Ränder zu berühren, um 15 Centimeter darüber hervorragten. So war die Isolirung der Batterie sehr gut. Es waren zwei ähnliche Batterien, von 18 Flaschen jede, vorhanden; und durch Verbindungen mittelst Messingstangen konnte man eine beliebige Anzahl von jenen Systemen zu sechs Flaschen in den Versuch und in den Stromkreis einbeziehen.

Mittelst eines dicken Messingstabes *ab*, mit hakenförmig gekrümmten und mit Metallkügelchen versehenen Enden, verkehrte die äussere Belegung der Batterie mit dem Innern *d* der Lane'schen Flasche *E*, deren Knöpfe *d d'* beständig in einer Entfernung von 5 Millimeter gehalten wurden. Die innere Belegung der Flasche *E* selbst verkehrte mittelst des Drahtes *EbV* mit dem in einem Kelchglas *V* enthaltenen Quecksilber, welches Glas inwendig und auswendig mit einer starken Lage von Gummilack überzogen und auf ein Tischchen von Ebonit gestellt war. Ein Galvanometer (Villari benutzte das Galvanometer von Wiedemann), auf dasselbe Tischchen gestellt, konnte in Verbindung gesetzt werden mit oder elektrisch getrennt von dem Quecksilber des Bechers *V* oder eines andern nahestehenden Bechers *V'*.

Das elektrische Thermometer *T* mit festen Elektroden (Funken-Elektrometer) wurde in den Stromkreis mittelst des Conductors *en* eingeführt, welcher mit dem Ende

n in das Gefäss V' einzutauchen kam, sobald auch das Galvanometer im Stromkreise sein sollte, oder sonst einfach auf den Querstab $d\,V$ sich stützte. Die andere Elektrode e' des Thermometers verkehrte mit dem Auslader, welcher aus der Messingstange S bestand, die in Knöpfe endigte und nebst einem beweglichen Gelenke durch einen Ring von Messing gehalten wurde, der an

Fig. 38.



der Spitze der Isolirsäule C befestigt war. Die Stange S, welche so in's Gleichgewicht gesetzt ist, dass sie aufrecht steht, wird verrückt und zum Fallen auf den Cylinder $c\,c'$ gebracht, sobald man es will, indem man sie mit einem Stäbchen von Ebonit bewegt. Bei ihrem Fallen schliesst sich der Stromkreis und der Strom entladet sich in der Richtung der Pfeile durch c' e' und $V'\,V\,b\,a$.

Um die Batterie zu laden, setzt man die eine der Elektroden N der Holtz'schen Maschine in Verbindung mit der inneren Belegung *c*, während man die andere Elektrode *N'* derselben in Verkehr mit der Erde hält, zugleich mit der äusseren Belegung und dem Knopfe *d'* der Maassflasche *E*. Während der Ladung der Batterie müssen *S*, *T* und *G* voneinander entfernt gehalten werden und *en* losgetrennt von *d V*.

Noch ist zu bemerken, dass es zweckmässig ist, im Thermometer anstatt der Elektroden von Platin dicke Drähte von Silber zu verwenden, welches sich in Vergleich zum Platin sehr wenig erhitzt. Mit solchen, in eine Entfernung von 5 Millimeter gebracht und bei beständigem Experimentiren mit der Batterie von 18 Flaschen, welcher er nach und nach verschiedene Ladungen *M* ertheilte, erhielt er für Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlensäure stets verschiedene Wärmemengen. Hier folgen beispielsweise einige seiner Ergebnisse.

Ladungen M	Wasserstoff Q	Stickstoff Q	Sauerstoff Q	Kohlensäure Q
20	—	5·83	—	5·20
25	2·20	6·73	6·20	—
30	3·20	7·23	7·05	7·35 Mttl.
35	3·20	8·86	8·15	—
40	4·00	10·33	8·82	10·70
45	3·90	11·53	10·50	12·00 (M = 44)
50	4·50	12·30	12·15	14·15 Mttl.
55	5·30	13·73	13·60	16·00 (M = 56)

Die grossen Unterschiede, welche man erhielt zwischen Wasserstoff und Kohlensäure, zeigen, dass das erstere dem Durchgange der Entladung einen geringeren Widerstand darbietet. Mit diesen Ergebnissen stimmen die von Warren Dela Rue und von Hugo Müller*) über die Schlagweiten in den verschiedenen Gasen gemachten Versuche überein. Dieselben benutzten zwei aus einander parallelen Messingscheiben von 38 Millimeter Durchmesser

*) Tr. d'électr. et de magn. par Gordon. T. II, pag. 183.

hergestellte Elektroden, welche mit den Polen einer Säule von 11.000 Elementen Chlorsilber verkehrten und erhielten beim gewöhnlichen Druck von einer Atmosphäre als grösste Schlagweiten

im Wasserstoff	. .	$5{\cdot}590^{mm}$
in der Luft	. . . .	$3{\cdot}300^{mm}$
in der Kohlensäure	.	$3{\cdot}096^{mm}$

Faraday fand,*) indem er den Widerstand gegen den Funken in der Luft gleich 1 setzte,

im Wasserstoff	gegen die positive Elektricität	0·597
	„ „ negative „	0·444
in der Kohlensäure	gegen die positive Elektricität	1·032
	„ „ negative „	0·952

83. Schliesslich sind, rücksichtlich der in den vorangehenden Capiteln auseinandergesetzten Theorien, von grosser Bedeutung die von Villari über die durch die Funken der unvollständigen Entladungen erzeugte Wärme durchgeführten Versuche.**)

Bei einer Versuchsreihe brachte Villari eine unveränderliche Batterie A von 18 Flaschen in Anwendung, welcher er die Ladung $M = 40$ gab und hierauf ihre innere Belegung in Verkehr setzte mit der inneren einer andern Batterie B, welche nach und nach von 2 bis 18 Flaschen gewechselt wurde, während er in die Entladungsbahn das Thermometer zu festen Elektroden T einschob, wie es die schematische Fig. 39 darstellt.

Heisst n_a die Anzahl der die Ladungsbatterie A zusammensetzenden Flaschen und n_b die Anzahl der Flaschen der Batterie B und sind M_a, M_b die Ladungen, welche beide Batterien besitzen, unmittelbar nachdem

*) Tr. d'électr. par Gavarret. T. I, pag. 198.

**) Ricerche sulle leggi termiche e galvanometriche etc. R. Accad. dei Lincei Roma. Serie 3a vol. IV. seduta del 1 Giugno 1879.

sie durch die hergestellte Verbindung auf das nämliche Potential gekommen sind, so werden wir haben

$$M_a : M_b = n_a : n_b$$

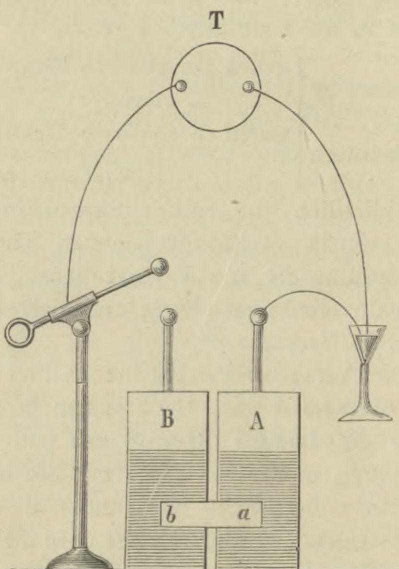
und, da die anfängliche Ladung von $A = 40$ ist, wird sein

$$M_a = 40 - M_b,$$

daher

$$40 - M_b : M_b = n_a : n_b$$

Fig. 39.



oder auch $$40 : M_b = n_a + n_b : n_b$$

und daraus

$$M^b = \frac{n_b}{n_a + n_b} \times 40;$$

ein Ausdruck, welcher, bei den in Rede stehenden Versuchen über unvollständige Entladung, den Werth der Ladung angiebt, welche von der Batterie A nach der B übergeht. Die folgende Tafel stellt die von Villari in einer seiner Versuchsreihen erhaltenen Werthe dar, nämlich die Werthe der M_b, nach obiger Formel berechnet und die Wärmemengen Q, welche in dem mit Sauerstoff angefüllten Thermometer T zu festen Elektroden entwickelt wurden; und um zu zeigen, dass diese Wärmemengen proportional sind der übergegangenen Masse M_b in Uebereinstimmung mit dem schon im § 81 gefundenen Gesetze und in vollkommenem Einklange mit den durch unvollständige Entladungen hervorgebrachten galvanometrischen Abweichungen (§ 67), werden in der letzten Colonne noch die Werthe des Quotienten $\frac{Q}{M_b}$ beigefügt, welche sich ziemlich constant zeigen:

Anfängliche Ladung der Batterie A von 40 Flaschen $M = 40$.

Batterie B Flaschen n_b	Uebergegangene Masse M_b	Wärme Q im Thermometer mit festen Elektroden	$\frac{Q}{M_b}$
2	4·00	7·4	1·85
3	5·71	8·7	1·52
4	7·27	10·0	1·37
5	8·69	12·3	1·41
6	10·00	13·7	1·37
8	12·31	15·8	1·28
10	14·30	18·5	1·29
12	16·00	20·7	1·29
14	17·50	20·1	1·15
18	20·00	23·0	1·15

Aus diesen durch so viele andere ganz ähnliche bestätigten Experimenten folgt klar das nachstehende Gesetz, welches sich auf Grund der anderen Gesetze, betreffend die unvollständigen Entladungen, vorhersagen liess:

Die Wärme, welche in einer Strecke des Funkens von constanter Länge entsteht, ist, wenn sie von einer unvollständigen Entladung erzeugt wird, der übergegangenen Elektricitätsmenge proportional; wohl zu verstehen, wenn der Entladungsstrom immer mit demselben Potentiale beginnt.

Man hat ferner in den Wärmewirkungen des Funkens noch eine Bestätigung des andern im Folgesatze 3, § 64, angeführten Gesetzes; lässt man nämlich der unvollständigen Entladung die vollständigen Entladungen beider Batterien nachfolgen, so erhält man die Gesammtmenge von Wärme, welche man aus einem einzigen Funken gehabt hätte, der von der ganzen Anfangsladung der ersten Batterie hervorgebracht worden wäre. Ich will zu diesem Ende nur Eines der vielen Versuche Villari's Erwähnung thun.

Nachdem er der Batterie A von 18 Flaschen eine bestimmte Ladung ertheilt hatte, ermittelte er zunächst die gesammte Energie derselben, indem er sie quer durch beide Thermometer, den Auslader T und den andern zu festen Elektroden T', entlud und erhielt in

$$\left.\begin{array}{lr} T \text{ die Wärme} & 47{\cdot}2 \\ T' \quad ,, \quad\quad ,, & 14{\cdot}0 \end{array}\right\} \text{zusammen } 61{\cdot}2.$$

Nachdem er die Batterie A auf denselben Grad wieder geladen, machte er ihre unvollständige Entladung nach der B, die gleichfalls aus 18 Flaschen bestand, indem er, wie vorher, die zwei nämlichen Thermometer in der Entladungsbahn behielt, und hatte nun in

$$\left.\begin{array}{lr} T \;\; . \;\; . \;\; . & 23{\cdot}1 \\ T' \;\; . \;\; . \;\; . & 7{\cdot}4 \end{array}\right\} \text{zusammen } 30{\cdot}5$$

das ist die Hälfte von vorher, was zu dem im § 64, Folgesatz 2, angedeuteten theoretischen Ergebnisse stimmt. Hierauf besorgte er abgesondert die vollständige Entladung von jeder der zwei Batterien und fand in den Thermometern

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} T \\ T' \end{array} \text{für } A \left\{ \begin{array}{r} 7{\cdot}9 \\ 8{\cdot}4 \end{array} \right. & \qquad \text{für } B \left\{ \begin{array}{r} 2{\cdot}1 \\ 5{\cdot}7 \end{array} \right. \\ \hline \text{zusammen } 16{\cdot}3 & \qquad\qquad\qquad 7{\cdot}8 \end{array}$$

welche Ergebnisse, im Vereine mit dem vorigen der unvollständigen Entladung, liefern:

$$30{\cdot}5 + 16{\cdot}3 + 7{\cdot}8 = 54{\cdot}6,$$

nicht sehr verschieden von 61·2.

Bei anderen ähnlichen Experimenten waren die Ergebnisse, in derselben Weise geordnet, folgende:

	Einzige Entladung
$37{\cdot}3 + 20{\cdot}6 + 12{\cdot}8 = 72{\cdot}7$	77·0
$34{\cdot}2 + 21{\cdot}6 + 11{\cdot}4 = 67{\cdot}2$	73·9
$17{\cdot}3 + 12{\cdot}5 + 6{\cdot}9 = 36{\cdot}7$	40·6

Der Unterschied nach weniger, welcher sich bei den nacheinander folgenden Entladungen bemerklich macht, muss hauptsächlich der grösseren Summe die Verluste und Rückstände zugeschrieben werden, welche sicherlich im Gefolge der gesonderten Entladungen sind. Aber man möge auch bedenken, dass man bei allen elektrostatischen Untersuchungen ungemein grossen Schwierigkeiten begegnet, wenn es sich darum handelt, ein Experiment in aller Vollendung durchzuführen.

Anhang.

Erläuternde Anmerkungen enthaltend.

Anmerkung I zu § 1.

Ueber die unendlich kleinen Grössen.

Behufs näherer Einsicht in gewisse algebraische Abkürzungen, welche an mehreren Orten gegenwärtiger Abhandlung vorkommen, wird es gut sein, Diejenigen, welche blos die ersten Elemente der Algebra und Geometrie sich angeeignet haben, daran zu erinnern, dass es gestattet sei, die unendlich kleinen Grössen gegenüber von endlichen Grössen zu vernachlässigen oder ausser Acht zu lassen. Beim Ableiten des Werthes der Fläche eines Kreises z. B. aus dem Vergleiche desselben mit der Fläche der umschriebenen Vielecke von immer wachsender Seitenzahl haben wir gesehen, dass man eine unendlich kleine Differenz d annimmt zwischen dem Umfange C des Kreises und dem Umfange P des Vielecks, und eine unendlich kleine Differenz a zwischen den beiden Flächen derselben, so dass, wenn R der Halbmesser des Kreises heisst und A seine Fläche, die Beziehung

$$\frac{1}{2} R (C + d) = A + a$$

entsteht und, beim Vernachlässigen der Unendlichkleinen d und a,

$$\frac{1}{2} R C = A$$

herauskommt.

Im Allgemeinen wird man sich gegenwärtig zu halten haben, dass, wenn in einer Gleichung wie

$$Q + d = Q_1 + a$$

die Grössen Q, Q_1 endliche und d, a Unendlichkleine sind, man berechtigt sei, daraus abzuleiten

$$Q = Q_1.$$

In der That braucht man nur zu beachten, dass, wenn statt dessen

$$Q = Q_1 + k$$

wäre, man erhalten würde

$$a - d = k,$$

das heisst: zwischen den beiden Unendlichkleinen d, a würde eine constante Differenz k bestehen, wie immer auch ihre Werthe sich ändern möchten, während man sie sich der Null stets näher kommend dächte. Diese Behandlungsweise der unendlichkleinen Grossen beruht wesentlich auf ihrer eigenthümlichen Natur, die darin besteht, veränderliche Grössen zu sein, welche dem Verschwinden zustreben, daher bestimmt sind, in den letzten Resultaten, welche sich auf die Grenzen der Ausdrücke beziehen, wirklich zu verschwinden.

Anmerkung II zu § 10.

Wirkung einer Kugeloberfläche auf einen innerhalb derselben befindlichen Punkt.

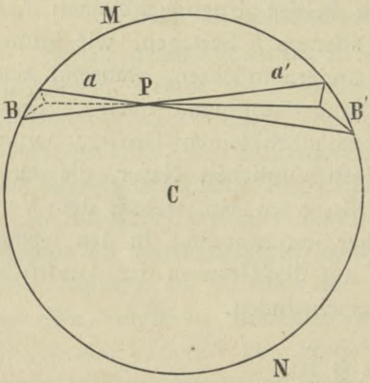
Der im Haupttexte angedeutete Beweis von Newton lässt sich auf nachstehenden zurückführen.

Es sei P ein im Innern der Kugel von allen Elementen der Oberfläche angezogener Punkt, im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen und im geraden Verhältnisse der Mengen von Materie, welche jedes Element bildet, und MN ein grösster Kreis der Kugel, dessen Ebene durch den genannten Punkt P hindurchgeht. Von diesem Punkte als Spitze denken wir uns zwei dreiseitige, entgegengesetzte Pyramiden aus-gehend, welche so sehr dünn sind, dass man bei jeder ihre Kanten als gleich und ihre Grundflächen als eben ansehen kann. Heissen also a die Kanten der einen, a' die der andern und B, B' die bezüglichen Grundflächen, so werden die Anziehungen derselben auf den Punkt P im Verhältnisse

$$\frac{B}{a^2} : \frac{B'}{a'^2}$$

stehen. Ich sage nun, dass diese Brüche gleichwerthig seien.

Fig. 40.



In der That sind, wegen der Gleichheit der Kanten jeder Pyramide und der ebenen Wechselwinkel an der Spitze P die Seitenflächen dieser Pyramiden ähnlich; und folglich sind die Grundflächen B, B', da sie ihre Seiten proportional haben, ähnliche Dreiecke; daher hat man

$$B : B' = a^2 : a'^2$$

oder

$$\frac{B}{a^2} = \frac{B'}{a'^2},$$

was man beweisen wollte.

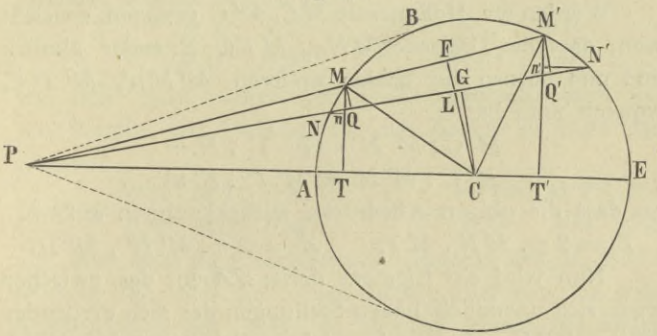
Dieselbe Schlussweise lässt sich wiederholen für alle Paare ähnlicher Pyramiden, welche es möglich ist vom Punkte P aus auf alle Elemente der Kugelfläche zu führen und deshalb sind nach jeder Richtung die Anziehungen je zwei entgegengesetzter Elemente der Kugelfläche auf den Punkt P beständig gleich und bleibt P im Gleichgewichte.

Anmerkung III zu § 11.

Wirkungen der Kugeloberflächen und der Kugeln auf die ausserhalb derselben befindlichen Punkte.

Nachdem Newton das Gesetz von den Anziehungskräften im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen und im geraden Verhältnisse der anziehenden Masse aufgestellt hatte, bewies er, dass eine Kugeloberfläche auf einen ausser ihr befindlichen Punkt so wirkt, wie wenn die ganze diese Oberfläche bildende Masse im Mittelpunkte derselben vereinigt wäre.

Fig. 41.



Die einfachen geometrischen Betrachtungen, durch welche Newton dazu gelangte, diesen wichtigen Satz festzustellen, sind von dem ausgezeichneten Professor O. F. Mossotti*) auf eine noch schärfere und elegantere Form gebracht worden und in dieser Form gebe ich sie hier wieder, mit geringen Aenderungen, welche dazu verhelfen, einen andern im Texte angeführten wichtigen Lehrsatz festzustellen und das lange Beweisverfahren ein wenig abkürzen.

1. Es sei P ein in der Entfernung D vom Mittelpunkte einer Kugel vom Halbmesser R befindlicher Punkt,

*) Lezioni elementari di Fisica matematica, Firenze. 9. Piatti 1843 T, I, pag. 295.

während ABE ein Durchschnitt derselben durch P und C ist. Man ziehe die beiden Secanten PMM', PNN', welche die unendlich kleinen Bögen MN, $M'N'$ abschneiden, die wir als geradlinig ansehen dürfen.

Richten wir nun unsere Gedanken auf die Zonen Z, Z', welche durch die Bögen MN, $M'N'$ beschrieben werden, wenn wir diese um den Durchmesser AE sich drehen lassen. Fällt man auf den Durchmesser die Senkrechten MT, $M'T'$ und auf diese die Senkrechten Nn, $N'n'$ herab, so hat man als Werthe ihrer Oberflächen

$$Z = 2\pi R \, . \, Nn, \qquad Z' = 2\pi R \, . \, N'n'.$$

Werden die Halbmesser MC, $M'C$ gezogen, so sieht man, dass die Dreiecke MNn, MTC einander ähnlich sind und ebenso die beiden anderen $M'N'n'$, $M'T'C$, wonach man hat

$$MC : MN = MT : Nn$$
$$M'C : M'N' = M'T' : N'n'$$

so dass die obigen Ausdrücke zurückkommen auf

$$Z = 2\pi \, . \, MN \, . \, MT, \qquad Z' = 2\pi \, . \, M'N' \, . \, M'T'.$$

Nun wird ein Element dieser Zonen, das zwischen zwei sich unendlich nahen Stellungen der sich drehenden Ebene PBE enthalten ist, sich ausdrücken lassen durch

$$\varepsilon Z, \qquad \varepsilon Z'$$

und werden die Wirkungen dieser Elemente auf P anzunehmen sein als ausgeübt aus constanten Entfernungen MP, $M'P$. Nennt man also φ die von der Oberflächeneinheit in der Entfernungseinheit ausgeübte Wirkung, so werden die Wirkungen dieser Elemente, wie die aller anderen, in welche jene Zonen sich abtheilen lassen, die Werthe haben:

$$\frac{\varepsilon Z \varphi}{PM^2}, \qquad \frac{\varepsilon Z' \varphi}{PM'^2}.$$

Betrachtet man sodann zwei einander diametral gegenüberstehende Elemente einer und derselben Zone, so ergiebt sich, dass die Seitenkräfte, welche davon normal auf PE ausgehen, sich gegenseitig aufheben und es verbleibt blos die Summe der beiden gleichen von P nach C gerichteten Seitenkräfte, von denen jede zur ganzen Kraft sich verhält, wie $PT : PM$; so dass aus jedem Elementenpaare nach der Richtung PC die doppelte Componente

$$\frac{2\varepsilon Z\varphi}{PM^2} \cdot \frac{PT}{PM}, \qquad \frac{2\varepsilon Z'\varphi}{PM'^2} \cdot \frac{PT'}{PM'}$$

hervorgeht. Um ihre Gesammtsumme zu erhalten, welche wir mit ψ ψ' bezeichnen wollen, hat man $\varepsilon = \frac{1}{2}$ zu machen; woraus sich ergiebt

$$\psi = \frac{Z\varphi}{PM^2} \cdot \frac{PT}{PM}, \qquad \psi' = \frac{Z'\varphi}{PM'^2} \cdot \frac{PT'}{PM'}$$

wie sich leicht vorhersehen liess. Substituirt man hier die Werthe der Oberflächen der Zonen, so wird man erhalten

$$\psi = 2\pi\varphi \frac{MN}{PM} \cdot \frac{MT}{PM} \cdot \frac{PT}{PM}, \quad \psi' = 2\pi\varphi \frac{M'N'}{PM'} \cdot \frac{M'T'}{PM'} \cdot \frac{PT'}{PM'}.$$

Nun sieht man, nachdem die Dreiecke PTM, $PT'M'$ ähnlich sind, dass die beiden letzten Factoren des ersten Ausdruckes gleich sind den beiden letzten des andern, wodurch man bekommt

$$\psi : \psi' = \frac{MN}{PM} : \frac{M'N'}{PM'}.$$

Wir ziehen MQ, $M'Q'$ senkrecht auf PN'. In den rechtwinkeligen Dreiecken MNQ, $M'N'Q'$ sind die Winkel in N und N' gleich, weil sie als durch die Tangenten in N und N' und durch dieselbe Sehne NN' gebildet zu betrachten sind. Daher sind diese zwei Dreiecke ähnlich und geben

$$MN : M'N' = MQ : M'Q'.$$

Somit lässt sich die obige Proportion umwandeln in

$$\psi : \psi' = \frac{MQ}{PM} : \frac{M'Q'}{PM'}$$

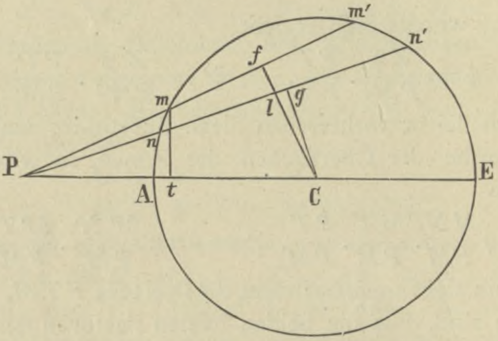
und da die zwei Dreiecke PMQ, $PM'Q'$ ähnlich sind, ergiebt sich endlich

$$\psi = \psi'$$

als erste und wichtige Schlussfolgerung, welche wir, unter Bezugnahme auf unsere Figur, dadurch bezeichnen werden, dass wir sagen:

Die Zonen ZZ', welche durch die Umdrehung der von den beiden Secanten bestimmten Bögen $MN, M'N'$ beschrieben werden, üben auf P gleiche Kräfte aus.

Fig. 42.



Ihre Gesammtkraft wird sich ausdrücken lassen durch

$$(1) \qquad \psi + \psi' = 4\pi\varphi \frac{MN}{MP} \cdot \frac{MT}{MP} \cdot \frac{PT}{MP}.$$

2. Eben dasselbe lässt sich aussagen für alle Bögen, in welche mittelst anderer Secanten die durch die Tangente PB bestimmten Stücke AB, BE des Halbkreises sich abtheilen lassen. Daraus folgt der weitere besondere Lehrsatz:

Die beiden Kugelabschnitte, welche durch die aus einem gegebenen Punkte an die Kugel gezogenen Tangenten bestimmt werden, üben auf diesen Punkt gleiche Kräfte aus.

3. Nehmen wir jetzt einen andern Punkt p an, welcher näher oder entfernter als P von derselben Kugel

sei und ziehen zwei Secanten $p\,m\,m'$, $p\,n\,n'$, welche die Sehnen $m\,m'$, $n\,n'$ gleich den früheren MM', NN' geben sollen; um dies zu erzielen, genügt es, zuerst auf die Sehnen MM', NN' die zwei Senkrechten CF, CG zu fällen und hierauf über $p\,C$ zwei rechtwinkelige Dreiecke zu errichten, welche die Katheten $f\,C = F\,C$, $C\,g = C\,G$ haben. Und in dieser neuen Figur ziehe man die ~~mit~~ mt entsprechend der MT. Auch hier wird man für die Gesammtwirkung der beiden Zonen $(m\,n)$, $(m'\,n')$ einen Werth von der Form (1) haben und zwischen den zwei Werthen von

$$\psi + \psi' \text{ und } \psi_1 + \psi_1'$$

wird das Verhältniss

$$\frac{MN}{PM} \cdot \frac{MT}{PM} \cdot \frac{PT}{PM} : \frac{mn}{pm} \cdot \frac{mt}{pm} \cdot \frac{pt}{pm} \qquad (2.)$$

bestehen.

Suchen wir nun die Werthe von MN, PM, $m\,n$, $p\,m$ in Functionen der gleichen Geraden, welche sich in beiden Figuren befinden. Die Dreiecke MNQ, MFC sind ähnlich, weil rechtwinkelig in Q und ~~N~~ T, und weil der Winkel CMF als Ergänzung zu QMC ebenso gelten kann, wie der Winkel NMQ; folglich ist

$$MN = \frac{MC}{MF} \cdot MQ.$$

Ist L der Durchschnittspunkt der CF mit PN', so hat man noch aus den ähnlichen Dreiecken PMQ, PLF

$$PM = \frac{PL}{FL} \cdot MQ.$$

Die nämlichen Beziehungen hat man auch in der andern Figur und folglich, da

$$MC = m\,C, \qquad MF = mf$$

ist und man noch behaupten kann, dass, bis auf ein Unendlichkleines,

$$FL = fl, \qquad PL = PF, \qquad pl = pf$$

sei, erhalten wir

$$\frac{MN}{PM} : \frac{mn}{pm} = \frac{1}{PF} : \frac{1}{pf}.$$

Die beiden anderen Factoren des obigen Verhältnisses (2) wandeln sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke *PMT*, *PCF* um in folgende

$$\frac{MT}{PM} = \frac{FC}{PC}, \quad \frac{PT}{PM} = \frac{PF}{PC},$$

mit analogen Werthen für die andere Figur. Macht man also alle diese Substitutionen, so ändert sich das Verhältniss (2) um in

$$\frac{1}{PF} \cdot \frac{FC}{PC} \cdot \frac{PF}{PC} : \frac{1}{pf} \cdot \frac{fC}{pC} \cdot \frac{pf}{pC}$$

woraus, da der Construction zufolge $FC = fC$ ist, folgt

$$\psi + \psi' : \psi_1 + \psi_1' = \frac{1}{PC^2} : \frac{1}{pC^2}.$$

Nachdem sich nun sowohl die eine als die andere der beiden Kugeloberflächen nach dem obigen Verfahren in eine gleiche und übereinstimmende Anzahl von Zonen eintheilen lässt, so geht daraus hervor, dass auch die Gesammtanziehung der einen sich zu jener der andern umgekehrt verhält, wie die Quadrate der Entfernungen der Punkte *P*, *p* von den Mittelpunkten *C* beider Kugeln; oder es gilt allgemein für eine gegebene Kugel der Satz:

Die Wirkung einer Kugeloberfläche auf die Punkte ausser ihr steht im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte derselben Oberfläche.

4. Im Bisherigen wurde vorausgesetzt, dass der Werth von φ constant sei. Wenn aber die Materie (oder Elektricität), welche die oberflächliche Schichte ausmacht, 2-, 3-, 4- . . . . mal grösser wäre, so dass wir dieselbe Oberfläche als aus mehreren gleichen Oberflächen zusammengesetzt betrachten könnten, was sagen will, wenn die oberflächliche Schichte eine 2-, 3-, 4- . . . .

mal grössere Dichte hätte, so ist klar, dass in solchem Falle die Wirkung auf den Punkt P gleichfalls 2-, 3-, 4- . . . . mal grösser werden würde. Sonach lautet das vollständige Gesetz über die Wirkungen einer Kugeloberflächen-Schichte: Die Schichte einer Kugeloberfläche wirkt auf die ausser ihr befindlichen Punkte im geraden Verhältnisse ihrer Masse und im umgekehrten der Quadrate der Entfernungen dieser Punkte vom Mittelpunkte der Kugel.

5. Eine andere sehr bemerkenswerthe Schlussfolgerung lässt sich aus der Formel (1) ziehen.

Wenn man eine der obigen Figur 41 ähnliche Figur verzeichnet, aber in der Art verkleinert, dass die Linien der zweiten $\frac{1}{n}$ der gleichnamigen in der ersten seien, so wird man aus der Formel (1) denselben Werth von $\psi + \psi'$ erhalten, weil man eine gleiche Anzahl von linearen Factoren im Nenner und im Zähler hat, immer jedoch vorausgesetzt, dass der Werth von φ selbst constant bleibe. Dies will sagen, dass zwei ähnliche Zonen beider Kugeln, von denen die erste grösser ist als die zweite, den betreffenden Punkt P gleich stark anziehen, und daher, indem man dieselbe Beweisführung für alle ähnlichen Zonenpaare wiederholt, in welche beide Kugeloberflächen theilbar sind, sich schliessen lasse, dass auch die beiden ganzen Kugeln eine gleiche Anziehung auf den betreffenden Punkt P ausüben; das heisst:

Zwei Kugeloberflächen von gleicher Dichte üben gleiche Wirkungen auf einen äusseren Punkt aus, wenn die Entfernungen des Punktes von den Mittelpunkten der Kugeln im Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen.

Wenn man aber beim Verkleinern des Durchmessers der Kugel voraussetzt, dass die die Oberflächenschichte bildende Materie sämmtlich beibehalten werde, so ist klar, dass dieselbe, auf einer kleineren Oberfläche angesammelt, eine grössere Dichte annehme als auf der andern Kugel und im Verhältnisse dieser Zunahme an Dichte der Werth von φ wachse. Nun würde die Dichte im umgekehrten Verhältnisse des Betrages der Oberfläche wachsen oder im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Durchmesser; folglich würde in diesem Falle die Gesammtwirkung der verkleinerten Kugel auf den angenäherten Punkt n^2-mal grösser werden. Bringt man den Punkt auf seine anfängliche Entfernung zurück, so wird sonach die Wirkung auf ihren anfänglichen Werth zurückgehen, obgleich sie nicht mehr von der ersten Kugel ausgeübt wird, sondern von einer kleineren Kugel, auf welcher sich die gesammte anziehende Materie, welche die erste Oberfläche bildete, verdichtet hat. Nun kann das Verhältniss $\frac{1}{n}$ so klein sein, als man will, und daher findet obige Schlussfolge auch dann statt, wenn die ganze Materie der ersten Oberfläche sich im Mittelpunkte verdichtet hat: Die Anziehung einer Kugeloberfläche auf ausserhalb ihr befindliche Punkte ist eine solche, wie sie sein würde, wenn die ganze, jene Oberfläche ausmachende, Materie in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

6. Was für Kugeloberflächen gesagt worden ist, gilt auch für die Kugeln, weil diese sich betrachten lassen als gleichwerthig mit einer unendlichen Reihe gleichartiger Oberflächen oder Schalen, von denen jede nach aussen so wirkt, als wäre ihre Materie in ihrem Mittelpunkte vereinigt: Eine Kugel wirkt auf äussere Punkte, wie wenn ihre Masse sämmtlich im Mittelpunkte vereinigt wäre.

7. Wenn die Kugel mit der anziehenden, darin gleichmässig vertheilten Materie ganz angefüllt ist, so

lässt sich die Wirkung, welche sie auf einen inneren Punkt hervorbringt, zerlegen in die zwei Summen, welche auf diesen Punkt die Kugeloberflächen von grösserem Halbmesser, als die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte, ausüben und die Oberflächen von kleinerem Halbmesser, als genannte Entfernung. Die ersteren geben, wie man weiss, zur Resultirenden Null. Die anderen wirken, wie wenn sie im Mittelpunkte vereint wären. Heisst also d die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte, so wird oben erwähnte Wirkung, insofern sie im geraden Verhältnisse der Masse steht, dargestellt sein durch

$\frac{4}{3} \pi d^3 \times \mu$, worin μ die Dichte bedeutet,

und wird folglich, nachdem sie mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt, einfach der Entfernung d proportional sich ergeben; das heisst:

Ein Punkt, eingeschlossen in eine Kugel, welche ganz aus anziehender, gleichmässig vertheilter Materie besteht, erleidet eine Anziehung gegen den Mittelpunkt, welche in dem Verhältnisse abnimmt, wie seine Entfernung vom Mittelpunkte abnimmt.

8. Wenn zwei Kugeln A, B einander anziehen, so muss die Wirkung aller Punkte der Kugel A auf die Punkte der B gegenseitig gleich sein der Wirkung aller Punkte der B auf die Punkte der A. Es wirken aber alle Punkte der B, wie wenn sie in ihrem Mittelpunkte vereinigt wären; folglich entspricht die Wirkung, welche A auf B macht, jener, welche dieselbe A auf die im Mittelpunkte der B vereinte Materie dieser B machen würde. Dasselbe lässt sich aussagen von der Wirkung von B auf die A, und daher ziehen sich zwei Kugeln so an, wie wenn die Materie, aus welcher sie bestehen, in ihren bezüglichen Mittelpunkten vereinigt wäre.

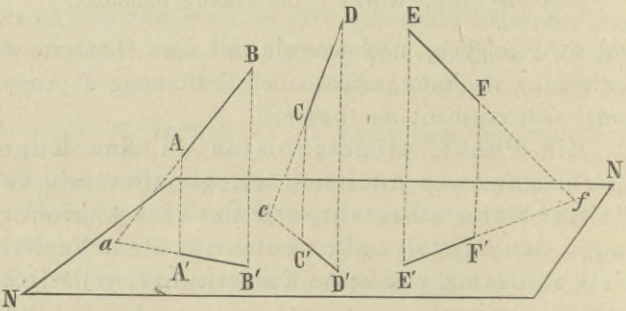
Alles, was in dieser Anmerkung über die Anziehungen gesagt worden ist, gilt natürlich auch für die Abstossungen, welche nach demselben Gesetze vom umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen vor sich gehen.

Anmerkung IV zu § 15.

Werth der orthogonalen Projectionen der Linien und der Flächeninhalte auf eine Ebene.

Es war im Texte die Rede von den Werthen der orthogonalen (rechtwinkeligen) Projectionen einer Linie l oder Oberfläche S, welche den nämlichen Winkel α mit der

Fig. 43.



Projections-Ebene machen; Werthe, welche dem Lehrsatze entsprechen: Die orthogonale Projection einer Linie oder Oberfläche auf einen Punkt ist gleich dem Producte der Linie oder Oberfläche mit dem Cosinus des Winkels, welchen sie mit der Ebene machen. Hier theile ich einen sehr einfachen Beweis dieses Hauptsatzes mit und ersetze im Laufe der Beweisführung für jene, welche mit der trigonometrischen Zeichensprache noch unbekannt sind, den Cosinus durch eine andere ganz gleichwerthige Bezeichnung.

Es seien mehrere Gerade AB, CD, EF, welche mit der Ebene NN denselben Winkel α machen und verlängert sie in a, c, f treffen, und seien $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$ ihre orthogonalen Projectionen auf die nämliche Ebene. Nachdem die Dreiecke $B\,a\,B'$, $D\,c\,D'$, $E\,f\,E'$ einander ähnlich sind, so werden wir haben

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{E'F'}{EF} = C \text{ constant,}$$

welche Constante augenscheinlich eine Function des Winkels α ist.

Diese Constante, welche das Verhältniss einer Kathete zur Hypothenuse ausdrückt, ist das was in der Trigonometrie der Cosinus des eingeschlossenen Winkels α heisst, wonach die Projection einer Geraden auf eine Ebene gleich ist der Geraden multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit der Ebene macht. Nennt man l_n die Projectionen der Geraden l auf die Ebene $n\,n$, so wird sein

$$l_n = l\,C$$

wo C ein constanter Factor ist, wenn die l alle denselben Winkel mit der Ebene machen.

Man sieht sofort, dass für ein l parallel zur Projections-Ebene $l_n = l$ sein würde.

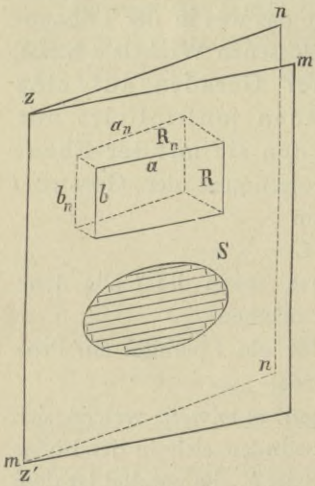
Es seien jetzt zwei Ebenen $m\,m$, $n\,n$, welche sich in der $\zeta\,\zeta'$ schneiden, und es befinden sich in der Ebene $m\,m$ das Rechteck R mit einer Seite b, die parallel ist dem Durchschnitt $\zeta\,\zeta'$ und daher auch parallel zur Ebene $n\,n$. Die Projection R_n des genannten Rechtecks R wird ebenfalls ein Rechteck sein, weil die Projectionen zweier aufeinander senkrechten Geraden auch senkrecht aufeinander stehen, wenn, wie im gegenwärtigen Falle, eine von ihnen der Projections-Ebene parallel ist. Es sind ferner die Grundlinien b, b_n gleich, weil die b parallel ist zur Projections-Ebene. Folglich verhalten sich das Rechteck R und seine Projection R_n zueinander, wie die Höhen a, a_n. Nun schliessen diese offenbar einen Winkel ein gleich dem der beiden Ebenen; daher werden wir, dem oben Gesagten zufolge, da C die Constante ($cos\ \alpha$) ist, welche dem Winkel α der beiden Geraden a, a_n oder der beiden Ebenen entspricht, haben

$$\frac{a_n}{a} = \frac{R_n}{R} = C$$

und $$R_n = R \times C.$$

Es befinde sich endlich in der Ebene $m\,m$ ein Flächenstück S von beliebigem Umfange. Theilen wir dasselbe durch sehr dichtstehende, auf dem Durchschnitt $\zeta\ \zeta'$ der beiden Ebenen senkrechte, Linien und ziehen wir von den Punkten aus, wo diese Linien den Umfang treffen, bis zur nächsten andere kleine zu $\zeta\ \zeta'$ parallele Gerade, so dass die ganze Fläche in eine sehr grosse Anzahl von Rechtecken eingetheilt werde, welche ringsum nur sehr kleine Räume dieser Fläche unbedeckt lassen. Für jedes dieser Rechtecke gilt die oben gefundene Beziehung; bezeichnet man sie also mit $r, r', r''\ \ldots.$ und erwägt man, dass die Seiten a derselben sämmtlich mit den bezüglichen Projectionen denselben Winkel machen, so erhält man

Fig. 44.



$$(r + r' + r''\ \ldots.)_n = (r + r' + r''\ \ldots.)\ C.$$

Wenn wir uns ferner vorstellen, dass die Anzahl der elementaren Rechtecke fortwährend wachse, so dass ihre Ecken sich immer näher kommen, so ist klar, dass diese wachsende Annäherung der Ecken zur Grenze die Stetigkeit hat, das heisst: die Summe der Rechtecke hat den Inhalt S der gegebenen Oberfläche zur Grenze. Dasselbe geschieht mit den Projectionen. Daher wird die obige Gleichung, welche in allen Stadien der Zunahme dieser Zahl von Rechtecken nicht aufhört, richtig zu sein, an der Grenze der Zunahme dieser Zahl werden:

$$S_n = S \times C$$

eine Schlussfolgerung, welche gleichbedeutend ist mit dem Vernachlässigen der Unendlichkleinen zweiter Ordnung, deren Summe dem Unterschiede entspricht zwischen dem ganzen Flächeninhalte und der Summe der eingeschlossenen Rechtecke. Man schliesst also, indem man sich der oben angegebenen trigonometrischen Bezeichnung bedient: Die orthogonale Projection eines Flächenstückes auf eine Ebene ist gleich dem Producte des Flächeninhaltes mit dem Cosinus des Winkels, welchen er mit der Ebene macht.

In der Fig. 7 des § 15, auf den sich vorstehende Anmerkung bezieht, bilden die Linien BC und DE denselben Winkel, wie die durch sie dargestellten Oberflächen-Elemente und deshalb geht derselbe Factor C in den Werth der Projectionen ein, womit sich die Gleichheit des im Texte angedeuteten Verhältnisses bestätigt.

Uebrigens könnte die Bezeichnung „Cosinus eines Winkels" auch von denen benutzt werden, welche nichts von Trigonometrie wissen, indem sie schreiben

$$l_n = l \cos \alpha, \qquad S_n = S \cos \alpha.$$

Anmerkung V, zu § 58.

Ueber die verschiedenen Arten von Energie und über die Beziehung der Arbeit zur lebendigen Kraft.

1. Man nennt Energie eines Systems sein Verhalten zur Arbeit und misst dieselbe nach der Menge von Arbeit, welche es wirklich hervorbringt oder hervorzubringen fähig ist.

Wenn das System mit einer Geschwindigkeit begabt sich findet, welche es in Bewegung erhält, so dass die ihm innewohnenden Kräfte schon im Zustande der Veräusserlichung sind, so heisst seine Energie eine wirkliche oder kinetische Bewegungs-Energie.

Wenn das System durch irgend welche Ursache verhindert ist, die ihm innewohnenden Kräfte zu veräusserlichen, wie es der Fall ist bei einem Condensator, der geladen ist, so sagt man darum nicht, dieses System entbehre aller Energie, sondern seine Energie wird potentielle genannt, das heisst mögliche, im Gegensatze zur actuellen, wirklichen.

Ein klares Beispiel beider Arten von Energie hat man an den Wirkungen der Schwerkraft. Bevor eine Masse vom Gewichte P herabfällt von einer Höhe A, findet sich in ihr die potentielle Energie PA. So stellt das Wasser einer Quelle, welches in der günstigen Lage ist, von einer gegebenen Höhe herabzufallen, eine potentielle Energie vor, proportional der Höhe des Gefälles. Am Ende des Fallens hat es die Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{2gA}$$

erreicht, so dass, wenn M seine Masse heisst, man hat

$$MV^2 = 2gMA$$

und, nachdem P an Stelle seines Werthes g M gesetzt worden,

$$\frac{MV^2}{2} = PA.$$

Der Ausdruck $\frac{MV^2}{2}$ heisst lebendige Kraft und stellt die wirkliche Energie vor, welche die Masse vermöge ihrer Geschwindigkeit besitzt, eine Energie, welche der vorigen potentiellen Energie gleich erscheint und von der wir wissen, dass sie die Arbeit PA wieder hervorzubringen vermag, wenn die Geschwindigkeit V der Masse M von unten nach oben ertheilt würde.

2. Die erwähnte Gleichwerthigkeit zwischen der lebendigen Kraft und der Arbeit lässt sich auf folgende mehr elementare Art allgemein erweisen.

Nehmen wir an, eine Arbeit werde verrichtet durch die einfache Masseneinheit, begabt mit der Geschwindigkeit v und es werde deren Kraft stufenweise in gleichförmigem Gange aufgezehrt, so dass sie in jedem der aufeinanderfolgenden Zeittheilchen τ um einen sehr kleinen Bruchtheil φ abnehme; und setzen wir ferner, dass die Arbeit, bis zur gänzlichen Erschöpfung aller Kraft und Geschwindigkeit eine Zeit dauere

$$n \tau = t.$$

Wenn man diese Veränderungen der Kraft in umgekehrter Ordnung betrachtet, nämlich von der Geschwindigkeit Null an bis zur Geschwindigkeit v, so wird man die Beziehung haben

$$v = \varphi t = \varphi \times n \tau$$

und folglich werden zu Anfang eines jeden der aufeinanderfolgenden Zeittheilchen der Reihe nach die Geschwindigkeiten sein:

$$\begin{array}{l} \varphi\, n \tau \\ \varphi\, (n - 1)\, \tau \\ \varphi\, (n - 2)\, \tau \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi\, [n - (n - 1)]\, \tau \end{array}$$

Nun darf man annehmen, dass in jedem Zeittheilchen eine constante Geschwindigkeit bestehe, gleich der mittleren der zwei, welche zu Anfang und zu Ende des nämlichen Zeittheilchens stattfinden; und da man es sonach mit constanten Geschwindigkeiten zu thun hat, braucht man sie nur beziehungsweise mit τ zu multipliciren, um die Ausdrücke der kleinsten in diesen Zeittheilchen τ durchlaufenen Räume zu erhalten; diese Räume oder Wege werden folglich sein:

$$\varphi \frac{2n-1}{2} \tau^2$$

$$\varphi \frac{2n-3}{2} \tau^2$$

$$\varphi \frac{2n-5}{2} \tau^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi \cdot \frac{1}{2} \tau^2.$$

Wie nun $PA = Mg \times A$ die Arbeit beim Falle der schweren Körper ausdrückt, so werden auch die Elementar-Arbeiten der Masse m in den kleinen genannten Räumen erhalten werden, indem man diese mit $m\varphi$ multiplicirt; und ihre Summe oder die gesammte bei Aufbrauch der Geschwindigkeit ν vollbrachte Arbeit wird sein

$$L = m\varphi^2 \tau^2 \left(\frac{2n-1}{2} + \frac{2n-3}{2} + \cdots\cdots \frac{1}{2}\right)$$

und, nach Summirung der arithmetischen Reihe zwischen den Klammern,

$$L = m\varphi^2 \tau^2 \times \frac{n^2}{2}.$$

Folglich ergiebt sich, nachdem $\varphi n \tau = \nu$ eingesetzt ist,

$$L = \frac{m \nu^2}{2},$$

das heisst: Die lebendige Kraft einer Masse m stellt die ganze Arbeit vor, welche die m vermöge der ihr eigenen Geschwindigkeit hervorbringen kann oder welche sie hervorbringen muss, um die ganze Geschwindigkeit, womit sie begabt ist, zu vernichten.

Wenn man dann in dem Zeitraume, in welchem die Arbeit sich vollzieht, irgend einen Moment in Betracht nimmt, wo die Geschwindigkeit von ν auf ν' herabgekommen ist, so ist klar, dass die Arbeit, welche von diesem Momente an bis zur gänzlichen Vernichtung der Geschwindigkeit noch gethan wird, sein muss

$$L' = \frac{m v'^2}{2}$$

und folglich wird die vorangegangene Arbeit, innerhalb der zwei Momente, worin m die Geschwindigkeiten v, v' gehabt hat, gewesen sein

$$l = L - L' = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v'^2}{2},$$

das heisst: Der Unterschied der lebendigen Kraft des Beweglichen, dann wenn es aus einer Lage in eine andere übergeht, ist gleich der von demselben vollbrachten Arbeit.

3. Wendet man diesen Hauptsatz auf eine Masse M an, welche senkrecht von unten nach oben geschleudert wird, so werden wir, wenn A die ganze Höhe ist, auf welche sie mit der ihr ertheilten Geschwindigkeit V steigen kann und A' die Höhe, bei welcher die Geschwindigkeit in V' umgewandelt ist, erhalten

$$\frac{1}{2} M V^2 - \frac{1}{2} M V'^2 = M A'.$$

Und nachdem sie bei der Höhe A' die potentielle Energie MA' besitzt, so geht hervor, dass, wie viel an der kinetischen Energie sie verliert, sie so viel gewinnt an der andern, so dass die Summe der beiden Energien in jedem Momente einen constanten Werth hat. Diese einfachen Ergebnisse lassen sich allgemein beweisen für jeden Fall von Bewegung, welche in (freien) materiellen Punkten hervorgebracht wird durch ihnen eigene anziehende oder abstossende Kräfte, deren Intensitäten einzig von den Entfernungen abhängen; und es ergiebt sich, dass die Abnahme der potentiellen Energie stets gleich ist der Zunahme der lebendigen Kraft und die Zunahme der potentiellen Energie stets gleich ist der Abnahme der lebendigen Kraft, oder mit anderen Worten:

Die Summe der lebendigen Kräfte und der potentiellen Energien ist constant. Dieses Gesetz führt den Namen des Princips von der Erhaltung der Kraft.

Anmerkung VI zu § 40.

Kurze Abhandlung über die absoluten, mechanischen, elektrostatischen, elektromagnetischen Maasssysteme.

(1) Bei den Systemen absoluter Maasse macht man alle Gattungen von Maasseinheiten abhängig von blos drei Einheiten, der Einheit von Länge, von Masse, von Zeit; und nach der Grösse dieser, welche Grundeinheiten genannt werden, nehmen naturgemäss alle anderen, welche sich davon ableiten und abgeleitete Einheiten heissen, einen verschiedenen Werth an. So entstanden ebenso viele Reihen von absoluten Maassen, als es Unterschiede gab in der dreifachen Grundlage, auf welcher das ganze System aufgebaut wurde und vor Allem wurden drei Systeme gegründet auf folgende Grundeinheiten:

Centimeter — Gramm — Secunde,
Millimeter — Milligramm — Secunde,
Meter — Gramm — Secunde.

Aber was auch die Werthe der Grundeinheiten seien, immer bleibt das Verfahren, um die abgeleiteten Einheiten daraus zu erhalten, ein und dasselbe. Von da ist der Gebrauch gekommen, diese letzteren durch Ausdrücke darzustellen, welche auf jedes System anwendbar sind dadurch, dass die Grundeinheiten nicht durch bestimmte Werthe bezeichnet werden, sondern durch einfache Symbole, welche man beliebig durch irgend einen andern Werth ersetzen kann. Die zu diesem Zwecke allgemein aufgenommenen Symbole sind die Buchstaben

L . . . . für die Einheit der Länge,
M . . . . für die Einheit der Masse,

T .... für die Einheit der Zeit, welche in allen Systemen die Secunde mittlerer Zeit ist,

und die als Functionen dieser Buchstaben, ohne irgend einen Coëfficienten, zusammengesetzten Formeln heissen Ausdrücke der Dimensionen der abgeleiteten Einheiten.

Dieser allgemeinen Auseinandersetzung ist die vorliegende Anmerkung gewidmet, wo zunächst von den vornehmsten mechanischen Einheiten die Rede sein wird, sodann von den elektrostatischen Einheiten, ferner von den in den Rechnungen der Elektrodynamik gebrauchten elektromagnetischen Einheiten und endlich werden die praktischen elektromagnetischen Einheiten vorgeführt werden, über welche man in neuester Zeit auf dem internationalen Congresse der Elektriker zu Paris (1881) übereingekommen ist, während zugleich immer die Bedeutung und Anwendung der Formeln durch leichte Beispiele erklärt wird.

(2) Mechanische Einheiten.

Geschwindigkeit $[v]$. Bei der gleichförmigen Bewegung hat man

$$v = \frac{s}{t}$$

und bei der veränderlichen Bewegung, worin ds einen in der unendlichkleinen Zeit dt durchlaufenen unendlichkleinen Weg bedeutet, hat man

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit wird sonach immer ausgedrückt durch das Verhältniss zwischen einem Wege und einer Zeit, und die einheitliche Geschwindigkeit wird daher ausgedrückt sein durch das Verhältniss zwischen der Lineareinheit L und der Zeiteinheit T. Folglich wird man für die Geschwindigkeitseinheit haben

$$[v] = [L\,T^{-1}].$$

Beschleunigung [γ]. Bekanntlich wird die Beschleunigung in jedem Augenblicke gemessen durch das Verhältniss jenes kleinsten Grades von Geschwindigkeit, welcher dem Beweglichen beigebracht wird, zu jener kleinsten Zeit, in welcher sie ihm beigebracht wird. Bezeichnet man also diese beiden Elemente mit $d\nu$ und dt, so hat man

$$\gamma = \frac{d\nu}{dt},$$

was ein Verhältniss ist zwischen einer Geschwindigkeit und einer Zeit; man wird daher die Formel der Beschleunigungs-Einheit herstellen durch Dividiren der Geschwindigkeits-Einheit [ν] mit der Zeiteinheit T und wird erhalten

$$[\gamma] = [L\,T^{-2}].$$

Kraft [f]. Eine Kraft ist umso grösser, je grösser die Beschleunigung ist, welche sie erzeugt und je grösser die Masse ist, in welcher sie dieselbe erzeugt; daher wird das Product der Masse mit der Beschleunigung als Maass der Kraft angenommen. Multiplicirt man also die Beschleunigungs-Einheit mit der Masseneinheit, so wird man haben

$$[f] = [L\,M\,T^{-2}].$$

Arbeit [W]. Die Arbeit ist im Allgemeinen das Product einer Kraft mit dem Wege, welchen sie ihren Angriffspunkt durchlaufen macht. Man erhält folglich die Arbeitseinheit, indem man die Krafteinheit mit der Längeneinheit multiplicirt oder indem man den Ausdruck für die [f] mit L multiplicirt; woraus sich ergiebt

$$[W] = [L^2\,M\,T^{-2}].$$

(3) Die absolute Krafteinheit in Beziehung zur Schwerkraft.

Die Krafteinheit im Systeme, welches die Grundeinheiten

Centimeter — Gramm — Secunde

zur Grundlage hat und immer einfach durch

C. G. S.

bezeichnet wird, heisst Dyna; welches also die Kraft ist, die der Gramm-Masse in 1 Secunde die Beschleunigung von 1 Centimeter ertheilt.

Nun weiss man, dass die Schwerkraft jeder Gramm-Masse in 1 Secunde am Meeresspiegel und unter der Breite von 45 Grad die Geschwindigkeit 9·80552 Meter beibringt. Daher ist unter diesen Umständen die Schwerkraft gleichwerthig mit 980·552 absoluten Krafteinheiten des Systemes *C. G. S.* und umgekehrt hat in dem nämlichen Systeme *C. G. S.* die absolute Krafteinheit oder Dyna den Werth $\frac{1^{gr}}{980 \cdot 552} = 0 \cdot 0010198^{gr}$.

Setzt man im Ausdrucke der $[f]$ an Stelle von L die Werthe 1^c und 100^c, so geht unmittelbar hervor, dass im Systeme Meter — Gramm — Secunde, welches wir mit *M. G. S.* bezeichnen, die $[f]$ 100mal grösser ist und daher im Systeme *M. G. S.* die absolute Krafteinheit den Werth hat $\frac{1^{gr}}{9 \cdot 80552} = 0 \cdot 10198^{gr}$.

(4) Die absolute Arbeitseinheit in Beziehung zur Arbeit der Schwerkraft.

Wir bezeichnen mit g^c und mit g^m die von der Schwerkraft hervorgebrachte Beschleunigung, ausgedrückt in Centimeter oder in Meter, je nachdem das System *C. G. S.* oder das andere, *M. G. S.* angenommen wird.

Im Systeme *C. G. S.* ist das Gewicht des Grammes g^c absolute Krafteinheiten werth, nämlich beiläufig 981 Einheiten. Folglich entspricht der Fall des Grammes durch 1 Centimeter Höhe g^c absoluten Arbeitseinheiten und daher wird in diesem Systeme

eine absolute Arbeitseinheit $[u] = \frac{1^{gr\ centim}}{g^c} = \frac{1^{gr\ c}}{981}$ sein. = 1 erg

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für das System *M. G. S.* eine absolute Arbeitseinheit $[U] = \frac{1^{gr\ met}}{g^m} = \frac{1^{gr\ m}}{9{\cdot}81}$.

Demnach zeigt sich, dass das Kilogramm-Meter werth ist

$$10^5 \,.\, g^c\,[u] \text{ oder auch } 10^3 \,.\, g^m\,[U]$$

oder sehr nahe

$$10^5 \,.\, 981\,[u] \text{ oder auch } 10^3 \,.\, 9{\cdot}81\,[U]$$

und es geht hervor, dass

$$[U] = 10000\,[u]$$

ist, wie aus den Dimensionen von $[W]$ erhellt, wenn man darin $L = 1^c$ oder aber $L = 100^c$ setzt, und die Zahlen von gleichem Werthe

$$98100000\,[u], \quad 9810\,[U]$$

stehen natürlich im umgekehrten Verhältnisse der Einheiten, auf welche sie sich beziehen.

(5) Das mechanische Aequivalent der Wärme, in absoluten Maassen ausgedrückt.

Das mechanische Aequivalent der Kilogramm-Calorie zu 430 Kilogramm-Meter angenommen, hat man sonach in den beiden Systemen

C. G. S., *M. G. S.*

$$1^{cal\ k} = \ldots 430 \times 10^5 \,.\, g^c\,[u] \ldots = 430 \times 10^3 \,.\, g^m\,[U]$$

und folglich am Meeresspiegel und unter 45^0 Breite

$$1^{cal\ k} = 430 \times 98055200\,[u] \ldots = 430 \times 9805{\cdot}52\,[U]$$

$$1^{cal\ k} = 42163736000\,[u] \ldots = 4216376\,[U].$$

Daher entspricht die absolute Arbeitseinheit

im System *C. G. S.* $0{\cdot}0000000000237^{cal\ k}$,

oder auch $0{\cdot}0000000237^{cal\ gr}$,

im System *M. G. S.* $0{\cdot}000000237^{cal\ k}$,

oder auch $0{\cdot}000237^{cal\ gr}$.

Diese Calorien-Mengen, entsprechend den Arbeitseinheiten, werden als Wärme-Einheiten genommen.

Daraus folgt, dass, wenn man eine Anzahl N von Calorien in Arbeit umwandeln will, oder wenn man wissen will, wie viel Arbeit, in absoluten Einheiten ausgedrückt, dieselben entsprechen, man N durch die oben genannten Zahlen dividiren müsse. Handelt es sich z. B. um Gramm-Calorien und um das System *C. G. S.*, so werden sein

$$N^{cal\,gr} = \frac{N}{00000000237} = N \times 42163736 \text{ absolute}$$

Arbeitseinheiten; oder man muss, wenn ε das mechanische Wärme-Aequivalent (430 oder 425) heisst und g^c die Beschleunigung der Schwere in Centimeter ausgedrückt, N multipliciren mit $\varepsilon \times 10^2 . g^c$.

Und will man eine Anzahl von absoluten Einheiten *C. G. S.* in Gramm-Calorien umwandeln, so müssen diese multiplicirt werden mit 0·0000000237 oder dividirt werden durch 42163736.

(6) Beziehungen zwischen den gleichnamigen abgeleiteten Einheiten, welche verschiedenen Systemen von Grundeinheiten zugehören.

Es ist klar, dass mit Aenderung der Werthe der drei Grundeinheiten die Formel der Dimensionen irgend einer abgeleiteten Einheit sich nicht ändere. Daraus geht unschwer hervor, dass das Verhältniss zwischen zwei verschiedenen Systemen von Grundeinheiten sich allgemein ausdrücken lässt durch

$$\frac{[u]}{[U]} = \left(\frac{L}{L_1}\right)^p \left(\frac{M}{M_1}\right)^q \left(\frac{T}{T_1}\right)^r$$

und um daher zu bestimmen, welches Verhältniss statthabe zwischen den nämlichen Einheiten, braucht man nur allein die Grundeinheiten zu berücksichtigen, welche in den zwei Systemen verschieden sind, indem man sie durch Zahlen von der nämlichen Gattung ausdrückt und ihren Quotienten auf die Potenz erhebt, welche sie in der Formel der Dimensionen haben. Ein Beispiel ist in (4) dagewesen.

Bemerken wir noch im Allgemeinen, dass, wenn eine gegebene Grösse mit Einheiten von verschiedenem Werthe gemessen wird, z. B. mit Zollen oder mit Linien, sie nothwendig mit verschiedenen Zahlen n, N behaftet zum Vorschein kommt, und da man hat

$$n\,u = N\,U,$$

so wird sein

$$\frac{n}{N} = \frac{U}{u},$$

das heisst: Die Zahlen, welche eine und dieselbe Grösse bezeichnen, stehen im umgekehrten Verhältnisse der Werthe der Einheiten, auf die sie sich beziehen.

(7) Elektrostatische Einheiten.

Elektricitätsmenge $[q]$. Nach dem Gesetze von Coulomb hat man zwischen den gleichen Mengen q in der Entfernung l die Kraft

$$f = \frac{q^2}{l^2}, \text{ woraus } q = l f^{\frac{1}{2}}.$$

Demnach ergiebt sich für $l = L$ und $f = [f]$

$$[q] = \left[L^{\frac{3}{2}}\, M^{\frac{1}{2}}\, T^{-1}\right]$$

Potential oder elektromotorische Kraft $[e]$. In Gemässheit der Bedeutung des Potentials wollen wir die Maasseinheit desselben andeuten durch die Einheit von elektrischer Masse, getheilt durch die Einheit der Entfernung oder mit $[q]$ dividirt durch L. Darnach wird

$$[e] = \left[L^{\frac{1}{2}}\, M^{\frac{1}{2}}\, T^{-1}\right]$$

was auch die elektromotorische Kraft ausdrückt, nachdem diese, einer Differenz von Potentialen gleichkommend, nothwendig einem Potentiale entspricht.

Capacität $[c]$. Da immer die Ladung q gleich ist dem Producte der Capacität mit dem Potentiale oder mit einer Differenz von Potentialen, so werden wir die

Dimensionen der Capacitätseinheit erhalten mittelst Dividiren der $[q]$ durch die $[e]$. Darnach wird

$$[c] = [L],$$

was ersehen lässt, wie die elektrostatische Capacität eine lineare Grösse ist; wovon die Kugel ein Beispiel bietet, deren Capacität durch ihren Halbmesser vorgestellt wird.

Stromstärke $[i]$. Die Intensität oder Stärke eines Stromes wird bestimmt durch den Quotienten $\frac{q}{t}$ der Elektricitätsmenge, welche den Querschnitt eines Drahtes durchläuft, getheilt durch die Zeit, welche sie dazu verbraucht. Um die einheitliche Stärke auszudrücken, wird es also genügen, $[q]$ zu dividiren durch T, woraus sich ergiebt

$$[i] = \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}\right].$$

Widerstand $[r]$. Kraft des Ohm'schen Gesetzes $i = \frac{e}{r}$ ist klar, dass wir $[e]$ zu dividiren haben durch $[i]$ und somit ergiebt sich

$$[r] = [L^{-1} T],$$

was zeigt, wieso der Widerstand, nach elektrostatischem Maasse, das Umgekehrte von einer Geschwindigkeit ist.

(8) Verhältnisse zwischen den elektrostatischen Einheiten in den beiden Systemen *C. G. S* und *M. G. S.*

Nach den oben in (6) angedeuteten Verfahren der Vergleichung findet man unmittelbar das Verhältniss, welches zueinander zwei elektrostatische Einheiten von demselben Namen in zwei verschiedenen Systemen haben, worin nämlich verschiedene Grundeinheiten zur Basis genommen sind. Für die Systeme *C. G. S.*, *M. G. S.* ergeben sich folgende Verhältnisse:

	C. G. S.	M. G. S.
$[q]$	1	1000
$[e]$	1	10
$[c]$	1	100
$[i]$	1	1000
$[r]$	100	1

Machen wir von diesen Zahlen Anwendung auf die Formeln

$$W = i^2 r t = e i t = e q = e^2 c,$$

welche alle die Arbeit ausdrücken, die ein Strom zu leisten vermag, in Bezug auf das Gesetz von Joule: „Die vom Strom erzeugte Wärme ist proportional dem Quadrate der Stärke desselben und dem Widerstande des Stromkreises", indem sich aus dem ersten Ausdrucke die drei anderen vermöge der Gleichungen

$$i = \frac{e}{r}, \quad i = \frac{q}{t}, \quad q = c e$$

entnehmen lassen. Setzen wir also voraus, es sei ein Strom gegeben unter bestimmten Zuständen von Stärke und Widerstand, und die von ihm gethane Arbeit werde mit obigen Formeln berechnet, indem man die bald im Maasssystem *C. G. S.* und bald im andern Maasssystem *M. G. S.* ausgedrückten Werthe von i, r, e, q, c darin einführt. Diese Werthe werden wirkliche gleichartige Grössen bezeichnen, weil es immer dieselben Eigenschaften des Stromes und des Kreises sind, welche gemessen werden. Aendern sich aber in beiden Systemen die Grössen der Maasseinheiten, so werden nothwendig die für obige Factoren einzusetzenden Zahlen verschieden ausfallen, das heisst: sie werden im umgekehrten Verhältnisse der Einheiten stehen, auf welche sie sich beziehen (6). Richten wir uns daher nach der voranstehenden Tabelle, welche die Verhältnisse dieser Einheiten in den beiden obengenannten Systemen giebt, so finden wir leicht, dass die Zahlenwerthe von W folgende Verhältnisse haben werden:

System *C. G. S.*	System *M. G. S.*	
$1000^2 . 1 . t$	$1^2 . 100 . t$	10000 : 1
$10 . 1000 . t$	$1 . 1 . t$	10000 : 1
10 . 100	1 . 1	10000 : 1
$10^2 . 100$	$1^2 . 1$	10000 : 1

Das constante Ergebniss 10000 : 1, verglichen mit den schon für die absoluten Arbeitseinheiten in den nämlichen Systemen (4) gefundenen Werthe zeigt die Richtigkeit und Uebereinstimmung der bisher aufgestellten Beziehungen.

In den gegenwärtigen Bemerkungen ist auch noch die Erklärung des so sehr abweichenden Werthes zu finden, welcher gewöhnlich dem höchsten Potentiale der Elektrisirmaschinen beigelegt wird, welches jenes ist, das Funken von etwa 30 Centimeter giebt, indem einige Schriftsteller ihm den Werth 30, andere den Werth 300 und noch andere sogar 80000 beilegen. Augenscheinlich beziehen sich die Werthe 30 und 300, der erste auf das System *M. G. S.* und der zweite auf das System *C. G. S.*, indem man auf obiger Tabelle sieht, dass die Potential-Einheit im ersten einen zehnmal grösseren Werth hat als im zweiten. Sodann ist die Einheit, auf welche sich die Zahl 80000 bezieht, nichts Anderes als das Potential eines Elementes Daniell, nämlich 0·00374, indem man in der That findet, dass diese Zahl multiplicirt mit 80000 sehr nahezu 300 giebt.

(9) Elektromagnetische Einheiten.

Magnetische Menge [*Q'*]. Wie der Ausgangspunkt des Systems elektrostatischer Einheiten die Menge von Elektricität ist, welche, an einem Punkte oder auf einer kleinen Kugel angehäuft, eine gleiche elektrische Menge mit der Kraft 1 in der Entfernung 1 abstösst, so ist der Ausgangspunkt des Systems elektromagnetischer Einheiten die magnetische Menge oder der magnetische Pol, welcher einen gleichen Pol mit der Kraft 1 in der

Entfernung 1 abstösst; wobei, wohl zu verstehen, diese Kraft 1 und Entfernung 1 irgend einem Systeme absoluter Maasse angehören kann. Daher hat man, wie schon für die elektrostatische Einheitsmenge (7), so auch für die Dimensionen der Einheit von magnetischem Pole

$$[Q'] = \left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$$

Intensität $[I]$, auch Stromeinheit genannt. Ein Stromelement $d\,s$ übt auf einen magnetischen Pol eine Wirkung aus, welche ihn senkrecht auf die Ebene zu verschieben strebt, die durch das genannte Element $d\,s$ und durch denselben Punkt P bestimmt ist. Und wenn dieser Pol die magnetische Menge q enthält und in der auf dem Elemente $d\,s$ Senkrechten sich befindet, so ist die Kraft, welche ihn zu verschieben sucht, wenn i die Intensität des Stromes und l die Entfernung des $d\,s$ von P ist, in solchem Falle proportional zu

$$\frac{q\,i}{l^2}\,d\,s.$$

Wenn also ein Strom einen Kreisbogen beschreibt, welcher P zum Mittelpunkte hat, so wird die gesammte Kraft, womit P senkrecht zur Ebene des Kreises angetrieben wird, proportional sein zu

$$\frac{q\,i}{l^2}\,(d\,s + d\,s' + d\,s'' + \ldots..)$$

und, wird eine Summe wie

$$d\,s + d\,s' + d\,s'' + \ldots.. = l$$

gesetzt, nämlich blos die Strecke von Kreisstrom betrachtet, welche an Länge dem Halbmesser des Kreises gleichkommt, so wird die Kraft f einfach proportional sein

$$\frac{q\,i}{l}$$

und daher, nach Einführung einer Constante k,

$$i = k\,\frac{f\,l}{q}$$

und für $k = 1$, $f = 1$, $l = 1$, $q = 1$ wird sein $i = 1$. Daraus entsteht folgende sehr einfache Definition der einheitlichen Stromintensität im Systeme elektromagnetischer Maasse: Die Einheit der Stromintensität, auch Stromeinheit genannt, ist die Intensität eines Stromes, welcher beim Durchlaufen eines Kreisbogens von der Länge 1 und vom Halbmesser 1 die Kraft 1 ausübt auf den Pol 1 oder die magnetische Menge 1, die sich in seinem Mittelpunkte befindet.

Demnach setzt man

$$[I] = \frac{[f]\,L}{Q'}$$

und nach Einsetzung der gleichwerthigen, schon oben in (2) gefundenen Ausdrücke ergiebt sich

$$[I] = \left[L^{\frac{1}{2}}\,M^{\frac{1}{2}}\,T^{-1}\right]$$

Und nachdem der ganze Kreis 6·28mal grösser ist als der genannte dem Halbmesser an Länge gleiche Bogen, so wird man auch sagen können, der Strom von der Intensität 1 sei jener, welcher beim Durchlaufen eines Kreises vom Halbmesser 1 auf den im Mittelpunkte befindlichen Pol die Kraft von 6·28 absoluten Einheiten oder, genauer, von 2π absoluten Einheiten ausübt. Diese Kraft entspricht im Systeme *C. G. S.* nach (3)

$$0{\cdot}0010198^{gr} \times 2\,\pi = 0{\cdot}00641^{gr}.$$

Widerstand $[R]$. Der Widerstand lässt sich dadurch ermitteln, dass man das in der vorigen Nummer angeführte Gesetz von Joule benutzt und die daraus folgende die Arbeit des Stromes betreffende Gleichung

$$W = i^2\,r\,t,$$

in welche man die schon gefundenen Werthe von $[I]$ und von $[W]$ einzusetzen hat; so ergiebt sich

$$[R] = [L\,T^{-1}],$$

was zeigt, wie der elektromagnetische Ausdruck des Widerstandes durch einen dem einer Geschwindigkeit (2) analogen Ausdruck dargestellt wird.

Elektromotorische Kraft und Potential $[E]$. Lässt sich ableiten aus der Ohm'schen Formel

$$i = \frac{e}{r}$$

oder durch Multiplication der zwei schon gefundenen Einheiten von Intensität und Widerstand miteinander, und man erhält

$$[E] = \left[L^{\frac{3}{2}}\,M^{\frac{1}{2}}\,T^{-2}\right]$$

Elektricitätsmenge $[Q]$. Man erhält sie aus der in (7) gegebenen Beziehung

$$i = \frac{q}{t}$$

oder durch Multiplication der Intensitätseinheit mit der Zeiteinheit und man hat demnach

$$[Q] = \left[L^{\frac{1}{2}}\,M^{\frac{1}{2}}\right]$$

und es bestätigt sich so allemal, dass die Intensitätseinheit übereinstimmt mit der Einheit von Menge, welche den Querschnitt eines Drahtes in der Zeiteinheit durchläuft.

Capacität $[C]$. Sie entspricht bekanntlich dem Verhältnisse der Menge q, welche einen Condensator beladet, zum Potential-Unterschiede e seiner Belegungen, wonach man hat

$$[C] = [L^{-1}\,T^{2}].$$

(10) Verfährt man wie in (8), so findet man leicht, dass in den beiden Systemen *C. G. S* und *M. G. S.* die elektromagnetischen Einheiten, deren Ausdrücke soeben

hergestellt wurden, untereinander folgende Verhältnisse haben:

	C. G. S.		M. G. S.
$[Q]$	1	zu	10
$[E]$	1	„	1000
$[C]$	100	„	1
$[I]$	1	„	10
$[R]$	1	„	100

und man erhält nun auch durch Anwendung dieser Verhältnisse auf die Formeln, welche den Werth der vom Strome geleisteten Arbeit geben, vollkommen übereinstimmende Ergebnisse mit denen, welche man in (4) und (8) erhielt. In der That bekommt man für die beiden gewöhnlichen Maasssysteme

	C. G. S.	M. G. S.	
$i^2 r t$	$10^2 . 100$	$1^2 . 1$	10000 : 1
$e i t$	$1000 . 10$	$1 . 1$	10000 : 1
$e q$	$1000 . 10$	$1 . 1$	10000 : 1
$e^2 c'$	$1000^2 . 1$	$1^2 . 100$	10000 : 1

(11) Beziehung zwischen den elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten.

1. Wir wollen die Voraussetzung machen, dass eine und dieselbe Menge von Elektricität durch eine Zahl q von elektrostatischen und durch eine Zahl Q von elektromagnetischen Einheiten bezeichnet werde. Indem man die Formeln der Dimensionen dieser beiden Gattungen von Einheiten herzuzieht, wird man für die Dimensionen des Verhältnisses der zwei Zahlen q, Q erhalten

$$\frac{q}{Q} = \frac{q\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]}{Q\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}\right]} = \frac{q}{Q}\,[L\,T^{-1}].$$

Heisst nun n das Verhältniss der zwei abstracten Zahlen q, Q und beachten wir, dass $L\,T^{-1}$ eine Geschwindigkeit vorstellt, so werden wir haben

$$\frac{q}{Q} = n\,[\nu] = \nu,$$

das heisst: das gesuchte Verhältniss zwischen den zwei Gattungen von Maassen, welche eine und dieselbe Menge von Elektricität ausdrücken, bedeutet eine Geschwindigkeit.

Dasselbe findet man wieder, indem man irgend zwei andere gleichnamige Maasse der beiden Systeme miteinander vergleicht.

Aber noch mehr klar wird der Schluss auf die Einerleiheit des Verhältnisses ν zwischen allen gleichnamigen Einheiten der beiden Systeme, des elektrostatischen und des elektromagnetischen, wenn man sowohl von den einen, als von den anderen Gebrauch macht, um die Arbeit eines und desselben Stromes mittelst der schon in (8) angegebenen Formeln zu berechnen, so dass bei Verwendung kleiner Buchstaben für die elektrostatischen Maasse und grosser Buchstaben für die elektromagnetischen Maasse werden muss

$$\begin{aligned} e\,q &= E\,Q \\ e^2 c &= E^2 C \\ e\,i\,t &= E\,I\,t \\ i^2 r\,t &= I^2 R\,t \end{aligned}$$

Setzt man nun in der ersten $\frac{q}{Q} = \nu$, so erhält man aus derselben und nacheinander aus den übrigen

$$\nu = \frac{q}{Q} = \frac{E}{e} = \sqrt{\frac{c}{C}} = \frac{i}{I} = \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Diese Beziehungen zeigen, auf welche Weise ein elektrostatisches Maass sich umwandelt in das gleichwerthige elektromagnetische, oder umgekehrt, indem man hat

$$\frac{q}{\nu} = Q \qquad e\,\nu = E \qquad \frac{i}{\nu} = I$$

$$a\,\iota^2 = R \qquad \frac{c}{\nu^2} = C$$

und nachdem die Zahlen, welche gleiche Grössen ausdrücken, wie es die vorstehenden sind, im umgekehrten Verhältnisse der Werthe der bezüglichen Einheiten stehen, so werden wir für die zwei Gattungen von Einheiten die folgenden Verhältnisse haben:

$$\frac{[q]}{[Q]} = \frac{1}{\nu} \qquad \frac{[e]}{[E]} = \nu \qquad \frac{[i]}{[I]} = \frac{1}{\nu}$$

$$\frac{[r]}{[R]} = \nu^2 \qquad \frac{[c]}{[C]} = \frac{1}{\nu^2}$$

2. Viele Versuche sind ausgeführt worden, um den numerischen Werth des constanten Verhältnisses ν zu ermitteln.*) Unter den von verschiedenen Experimentatoren erhaltenen Ergebnissen findet Herr Gordon am vertrauenswürdigsten die Zahl 298.570 Kilometer in der Secunde, wonach ersichtlich ist, wieso man sich in der Praxis an den Näherungswerth 300.000 Kilometer halten darf oder**)

$$30\,000\,000\,000^c = 3 \,.\, 10^{10} \text{ im Systeme } C.\ G.\ S.$$

Und erwägt man, dass dieses Verhältniss wirklich eine Geschwindigkeit bedeutet, so bemerkt man natürlich, dass demselben genau die Geschwindigkeit des Lichtes entspricht und sonach sehr nahe die Geschwindigkeit der Elektricität selbst.

Um sich nun einen klaren Begriff zu machen von dem hohen Werthe dieses Verhältnisses, wird die nachfolgende Betrachtung nicht ohne Nutzen sein. Die elektrostatische Einheit $[q]$ drückt eine sehr kleine elektrische Masse aus, wie es die ist, welche, in einem Punkte concentrirt oder auf einer sehr kleinen Kugel angesammelt, auf eine andere gleiche in der Entfernung 1 befindliche Masse die Kraft 1 ausübt; wogegen die elektromagnetische

*) Blavier, Op. cit. pag. 436. — Gordon, Tr. d'électr. T. II, pag. 510. — G. Ricci, Nuovo Cimento. T. II. 1877.

**) Mascart et Joubert, Leçons sur l'électr. T. I. pag. 672, 673.

Einheit $[Q]$ die elektrische Masse ist, welche durch den Querschnitt eines Leiters in 1 Secunde geht, während der Strom die Intensität 1 hat; und sonach begreift man, wieso diese Masse der Geschwindigkeit des Elektricums proportional sein müsse, indem sie die elektrostatische Einheitsmenge beiweitem übertrifft. Uebrigens sind die Wechselbeziehungen zwischen Licht und Elektricität vielleicht inniger als man denkt. Das specifische Inductionsvermögen einer Substanz ist in vielen Fällen gleich dem Quadrate des Brechungs-Index derselben Substanz und zu diesem Ergebnisse gelangte Maxwell auf theoretischem Wege durch die Annahme, dass die elektromagnetische Thätigkeit sich mittelst des Aethers und mittelst transversaler Schwingungen fortpflanze, ebenso wie das Licht.

(12) Praktische elektromagnetische Einheiten.

Die elektromagnetischen Einheiten von Widerstand und von elektromotorischer Kraft, wie wir solche soeben erklärt haben, sind ausserordentlich klein und fast unendlich klein, wie man dies leicht entnimmt aus der Bemerkung, dass sie den gleichnamigen elektrostatischen Einheiten, getheilt durch ν^2 und durch ν, entsprechen. In der That ergiebt das Experiment, wie Mascart berichtet, dass das $[R]$ im Systeme *C. G. S.* nur der Widerstand wäre von $\frac{1}{20000}$ Millimeter eines Kupferdrahtes von 1 Millimeter Durchmesser, und dass $[E]$ nur wäre das $\frac{1}{100000000}$ des Potentials von einem Elemente Daniell. Sonach entsprechen auch kleine Widerstände und kleine elektromotorische Kräfte Tausenden von Millionen der genannten elektromagnetischen Einheiten und würden sich daher nur durch Zahlen von allzu grosser Ziffernmenge ausdrücken lassen, welche für die Rechnungen unbequem wären. Aus diesem Grunde hat das Comité der British Association, welches im Jahre 1861 eingesetzt wurde, um ein rationelles System von elektrischen Maassen zu begründen, praktische Einheiten von Widerstand und elektromotorischer Kraft festgestellt, welche starken Vielfachen der oben genannten einfachen elektromagnetischen Einheiten entsprechen; und hat aus diesen beiden ersten praktischen Einheiten die anderen der Stromstärke, der Menge und der Capacität abgeleitet; womit ein neues System absoluter Maasse begründet war, welches sich besser eignete für die vielfachen Bedürfnisse der Industrie, wie sie namentlich hervorgerufen wurden zuerst durch die elektrische Telegraphie und dann durch die Anwendung der Elektricität zur Beleuchtung und zur Uebertragung der Kraft auf Entfernung. Das System der British Association ist in neuester Zeit (1881) vom internationalen Congresse der Elektriker zu Paris aufgenommen und ist endgiltig beschlossen worden, dass die praktischen Maasse der British Association sich immer auf das System von Grundeinheiten *C. G. S.* stützen sollen, indem blos kleine Veränderungen in der Nomenclatur eingeführt wurden, speciell zu Ehren der französischen Wissenschaft. Von diesem praktischen Systeme geben wir nunmehr eine Uebersicht, nebst einigen Bemerkungen über die in früherer Zeit gewöhnlich benutzten Maasse.

(*a*) Ohm, oder praktische Widerstands-Einheit, welche auch früher unter demselben Namen gebraucht wurde, oder unter dem andern Ohmad und den Werth von 1 Milliarde elektromagnetischer Einheiten hat, nämlich

$$[R]\ 10^9 \ldots\ldots \text{ System } C.\ G.\ S.$$

Es entspricht sehr nahe der alten, Siemens genannten Einheit, welche gleichwerthig ist dem Widerstande einer Quecksilbersäule bei 0 Grad Celsius von 1 Quadrat-Millimeter Querschnitt und 1 Meter Länge. Aber zur genauen Uebereinstimmung müsste das Siemens eine etwas längere Quecksilbersäule haben, nämlich zwischen 104^c und 105^c. Es ist jetzt eine internationale Commission beauftragt, das bezügliche Muster festzustellen, welches für die elektrischen Widerstände das sein wird, was das Meter für die Längen ist. Mittlerweile bleibt man dabei, dass

1 Ohm den Werth von 1·0493 Siemens,

1 Siemens den Werth von 0·953 Ohm habe.

Der ganze Widerstand eines Elements Daniell wird im Mittel zu 4 Ohm geschätzt, wobei er jedoch bedeutend nach mehr oder weniger schwanken kann.

Ein Eisendraht von 4 Millimeter Durchmesser, 1 Kilometer lang, hat einen Widerstand zwischen 9·266 und 9·760 Ohm.

Ein Kupferdraht, rein, von 1 Millimeter Durchmesser, 48.638 Millimeter lang, hat einen Widerstand von 1 Ohm; das heisst: etwa 50 Meter von solchem Drahte stellen 1 Ohm vor. Der Kupferdraht des Handels hat einen grösseren Widerstand; es genügen 30 oder 40 Meter, um 1 Ohm zu machen. Eine Siemens-Einheit hat den Werth 46.381 Millimeter von demselben Drahte aus reinem Kupfer bei 0 Grad.

Im Allgemeinen entspricht der Widerstand eines Drahtes von reinem Kupfer, l Meter lang und p Gramm schwer, bei 0 Grad Celsius

$$\frac{0{\cdot}144 \times l^2}{p} \text{ Ohm},$$

so dass er 1 Meter lang und 1 Gramm schwer den Widerstand hat von 0·144 Ohm.*)

(b) Volt oder Einheit von elektromotorischer Kraft oder auch Potential-Einheit. Ist 100 Millionen elektromagnetischer Einheiten werth, nämlich

$[E]\ 10^8$ . . . . . System *C. G. S.*

*) Raynaud, Giornale di Fisica di D'Almeida. T. II, pag. 293.

und entspricht genau der elektromotorischen Kraft eines Elementes Daniell, wenn es mit einer gesättigten Lösung von salpetersaurem Kupferoxyd geladen ist und mit 1 Theil Schwefelsäure in 12 Theilen Wasser, und wie gewöhnlich hergestellt mit Zinkamalgam und Kupfer. Auch vormals war dieselbe Benennung gebräuchlich.

(*c*) Ampère, oder Einheit von Stromstärke, einfach Stromeinheit genannt; es ist die durch die elektromotorische Kraft von 1 Volt in einem Umkreise vom Widerstande eines Ohm hervorgebrachte Stromstärke; kurz gefasst, entspricht es der Krafteinheit in der Widerstandseinheit. Daher erhalten wir den Werth des Ampère, indem wir die Werthe des Volt und des Ohm einführen in die Formel

$$J = . \frac{E}{R}$$

und es ergiebt sich als Werth des Ampère

$[I]\ 10^{-1}$ . . . . . System *C. G. S.*

Diese Einheit war schon bei den Engländern in Gebrauch und wurde mit dem Namen Weber bezeichnet. In der Anwendung auf Telegraphie ist das Milliweber gewöhnlicher, welches $[I]\ 10^{-4}$ werth ist. Es bedarf z. B. 15 bis 16 Milliweber, um die Morse'schen Receptoren in Gang zu setzen.

Das Ampère ist nothwendigerweise sehr gross, weil die elektromagnetische Einheit $[I]$ nach (11, 1.) übereinstimmt mit $[i] \times v$.

(*d*) Coulomb, oder Einheit von Menge; es ist die Menge von Elektricum, welche den Querschnitt eines Drahtes in 1 Secunde durchläuft, wenn der Strom die Stärke von 1 Ampère hat. Folglich ist ein Coulomb werth

$[Q]\ 10^{-1}$ . . . . . System *C. G. S.*

und diese Einheit wird von sehr grossem Werthe sein, nachdem man schon weiss (11, 1.), wie sehr gross der

Werth der elektromagnetischen Einheit von Menge ist, welcher $[q] \times \nu$ entspricht.

(*e*) Farad, oder Capacitäts-Einheit; es ist die Capacität eines Condensators, dessen Belegungen den Potential-Unterschied eines Volt und die Ladung eines Coulomb haben. Sonach ergiebt sich aus der bekannten Beziehung $Q = CE$, dass der Werth des Farad

$$[C]\ 10^{-9} \ldots\ldots \text{ System } C.\ G.\ S.$$

ist, welcher ebenfalls sehr gross ausfallen wird, nachdem man hat $[C] = [c] \times \nu^2$.

Auch früher wurde die praktische Capacitäts-Einheit, einerlei mit der wirklichen, Farad genannt; und mittelst des Farad bestimmte man die Menge-Einheit, indem man so die in einem, auf das Potential von 1 Volt elektrisirten, Farad enthaltene Menge nannte, womit man denselben Werth des Coulomb erhielt, nämlich $[Q]\ 10^{-1}$.*)

Vielfache und Untervielfache. Bei gewissen Anwendungen ist es von Nutzen, einige Grössen durch viel grössere oder viel kleinere Maasse, als die soeben angegeben wurden, auszudrücken. Man war daher darauf bedacht, andere Maasse zu schaffen, einmillionmal grössere

---

*) Die festen, einstimmig vom Congresse der Elektriker angenommenen und der Akademie der Wissenschaften von Dumas in der Sitzung vom 3. October 1881 vorgelegten Beschlüsse waren folgende:

1. Als Grundeinheiten werden für die elektrischen Maasse angenommen: Centimeter, Masse des Grammes, Secunde; und dieses System wird abgekürzt bezeichnet mit den Buchstaben *C. G. S.*

2. Die praktischen Einheiten, das Ohm und das Volt, behalten ihre dermaligen Definitionen bei; das Ohm ist ein Widerstand gleich 10^9 absoluter Einheiten (*C. G. S.*); das Volt ist eine elektromotorische Kraft gleich 10^8 absoluten Einheiten (*C. G. S.*).

3. Die praktische Widerstands-Einheit (Ohm) wird vorgestellt durch eine Quecksilbersäule von 1^{mmq} Querschnitt bei der Temperatur 0 Grad Celsius. Eine internationale Commission wird

oder kleinere; und diese werden mit den Vorworten Mega und Mikro bezeichnet. So wird man z. B. haben

$$
\begin{aligned}
1 \text{ Megohm} &= 10^{6} \text{ Ohm} = [R]\, 10^{15},\\
1 \text{ Mikrohm} &= 10^{-6} \;\;\text{„}\;\; = [R]\, 10^{3},\\
1 \text{ Megafarad} &= 10^{6} \text{ Farad} = [C]\, 10^{-3},\\
1 \text{ Mikrofarad} &= 10^{-6} \;\;\text{„}\;\; = [C]\, 10^{-15}.
\end{aligned}
$$

Bei den Untervielfachen ist am meisten das Mikrofarad in Gebrauch; nachdem das Farad so gross ist, dass es ausser allem Verhältnisse ausfällt, selbst gegen die Maasse von höherem Werthe. Und sogar das Mikrofarad erscheint für die gewöhnlichen Maasse noch zu gross, wie aus den Dimensionen hervorgeht, welche ein Condensator von der Capacität von blos 1 Mikrofarad haben müsste. In der That müsste dieser Condensator, soweit Gordon berichtet, 300 Kreisscheiben von Zinn enthalten, getrennt durch Glimmerblätter, welche einen cylindrischen Pack von 16 Centimeter Durchmesser und 8 Centimeter Höhe bilden würden.

(13) Anwendungen.

I. Capacität der unterseeischen Kabel. Man weiss, dass für einen cylindrischen Condensator, mit der äusseren Belegung im Verkehr mit der Erde, wie es ein

---

beauftragt, durch neue Versuche, für die Praxis, die Länge der Quecksilbersäule von 1 ^{mmq} Querschnitt bei 0 Grad Celsius zu ermitteln, welche den Werth des Ohm darstellt.

4. Man nennt Ampère den Strom, der erzeugt wird durch die elektromotorische Kraft von 1 Volt in einem Umkreise, dessen Widerstand 1 Ohm ist.

5. Man nennt Coulomb die Menge der Elektricität, welche bedingt ist durch die Bestimmung, dass im Strom von 1 Ampère der Querschnitt des Leiters von einem Coulomb in der Secunde durchlaufen werde.

6. Man nennt Farad die durch die Bedingung bestimmte Capacität, dass ein Coulomb in einem Condensator, dessen Capacität 1 Farad ist, zwischen den Belegungen eine Potentialdifferenz von 1 Volt herstelle.

unterseeisches Telegraphenseil ist, die elektrostatische Capacität ausgedrückt wird durch

$$c = \frac{0 \cdot 4343\, k\, l}{2\, log\, \frac{R}{r}},$$

wo k das specifische Inductionsvermögen der isolirenden Umhüllung ist, l die Länge des Cylinders, $\frac{R}{r}$ das Verhältniss des äusseren Durchmessers der Isolirung zum Durchmesser des metallischen Leiters darin. Dieses Maass wird, durch Theilung mit $\nu^2 = (3.10^{10})^2$, umgewandelt in elektromagnetisches Maass; und durch weitere Theilung mit 10^{-15} wird es ausgedrückt in Mikrofarad; wonach man haben wird

$$C = \frac{0 \cdot 4343\, k\, l}{2\, .\, 9\, .\, 10^5\, log\, \frac{R}{r}} \text{ Mikrofarad.}$$

So ergiebt sich für 1 Seemeile, welche 1852 Meter beträgt oder im Systeme *C. G. S.* gleich 185.200 Centimeter ist, für $k = 4 \cdot 2$, was der allgemein für die unterseeischen Kabel angenommene Coëfficient ist, und für $\frac{R}{r} = 2 \cdot 92$, welches Verhältniss beim französischen atlantischen Kabel stattfindet, die Capacität zu 0·4033 Mikrofarad. Und im Mittel hat man für verschiedene unterseeische Kabel eine Capacität von

$$\frac{1}{3} \text{ Mikrofarad auf 1 Seemeile.}$$

II. Die Capacität der Erdkugel.

Die Capacität der Erdkugel entspricht in elektrostatischem Maasse ihrem Halbmesser, dessen Werth man nehmen kann zu

$$\frac{4000000000^c}{2\pi};$$

diese Capacität wird durch Division mit $3^2\, .\, 10^{20}$ in elektromagnetisches Maass umgewandelt (11), welches sein wird

$$\frac{4 \cdot 10^9}{2\pi \cdot 9 \cdot 10^{20}} = 707 \cdot 10^{-15}$$

oder

707 Mikrofarad,

was mit nicht mehr als 1753 Seemeilen des oben erwähnten transatlantischen Kabels zusammentrifft.

III. Ueber einige elektrochemische Einheiten in Beziehung zu den elektromagnetischen Einheiten.

Zum Messen der Stromstärken ist in häufigem Gebrauch eine elektrochemische Einheit, genannt Jacobi-Einheit, vom Namen des Physikers, welcher sie in die Wissenschaft einführte; sie besteht aus der Stärke eines Stromes, welcher beim Durchgang durch Wasser in 1 Minute 1 Kubik-Centimeter Knallgas liefert. Um ihre Beziehung zur elektromagnetischen Einheit (I) zu finden oder zum Ampère (oder Weber), wollen wir von folgendem mit grosser Genauigkeit durch Kohlrausch ermittelten Datum ausgehen, dass nämlich die elektromagnetische Einheit des Systems [Millimeter-Milligramm-Secunde] in 1 Minute 1·0544 Kubik-Centimeter Knallgas entwickle. Nun ist die gleichnamige Einheit des Systems *C. G. S.* 100mal grösser als die vorige, wie aus dem allgemeinen Ausdrucke für [I] in (9) hervorgeht; daher entwickelt die elektromagnetische Stromeinheit des Systems *C. G. S.* in einer Minute

105·44^{cc} Knallgas.

Sonach wird das Ampère, welches $\frac{1}{10}$ dieser Einheit ist, nur 10·544 Kubik-Centimeter Knallgas erzeugen und entspricht daher das Ampère sehr nahezu 10 Einheiten Jacobi.

Aus diesen Daten lässt sich das Gewicht des in 1 Minute von der Stromeinheit $[I]$ zersetzten Wassers ableiten. Denn die normale Dichte des Knallgases ist (nach Naccari und Bellatti, l. c.) 0·0005361 und daher ist das Gewicht des erzeugten Gases oder des zersetzten Wassers

$$105{\cdot}44 \times 0{\cdot}0005361 = 0{\cdot}05653^{gr}$$

und somit entwickelt die elektromagnetische Einheit in 1 Minute

0·006281^{gr} Wasserstoff, 0·050249^{gr} Sauerstoff.

Will man nun wissen, welches Gewicht von einem gegebenen Metalle durch dieselbe Stromeinheit in einer Minute niedergeschlagen wird, so braucht man blos nach Maassgabe der Aequivalente, den Gesetzen Faraday's gemäss, Proportionen aufzustellen. Nimmt man z. B. das Aequivalent des Kupfers gleich 31·75, das des Silbers gleich 107·93, so findet man, dass der Strom von der Stärke Eins in den beiden elektromagnetischen Systemen

			Mm. Mgr. S.	*C. G. S.*
niederschlägt	in 1 Minute	Kupfer	1·9942^{mgr}	0·19942^{gr}
		Silber	6·7791	0·67791
zersetzt	in 1 Min.	Wasser	0·5653	0·05653
	in 1 Sec.	„	0·00942	0·000942
entwickelt	in 1 Min.	Wasserstoff	0·0628	0·00628
	in 1 Sec.	„	0·00105	0·000105

Im Allgemeinen entnimmt man aus diesen Daten leicht, dass der Strom von der elektromagnetischen Intensität Eins (im Systeme *C. G. S.*) in 1 Secunde 0·0001047 Aequivalent zersetzt, wie z. B.

$$0{\cdot}0001047 \times 9^{gr} \text{ Wasser.}$$

Es dienen diese Daten dazu, irgend eine Umwandlung in Bezug auf andere zuweilen benutzte elektrochemische Einheiten zu bewerkstelligen, als da sind: die Stromstärke, welche in 1 Minute 1 Milligramm

Kupfer niederschlägt; — jene, welche in 1 Minute 1 Milligramm Wasser zersetzt; — jene, welche in 1 Secunde 9 Milligramm Wasser zersetzt, oder, was dasselbe ist, in 1 Secunde 1 Milligramm Wasserstoff entwickelt etc.

IV. Vom elektrischen Aequivalente.

Mit der Benennung elektrisches Aequivalent will man eine gegebene Menge von Elektricität bezeichnen, und zwar gerade diejenige Menge, welche nöthig ist, um ein chemisches Aequivalent eines Körpers zu zersetzen, welches 9 Milligramm Wasser entspricht.

Nun lässt sich aus den oben gelieferten Daten mittelst einer Proportion herleiten, dass zur Zersetzung von 1 Aequivalent Wasser, zu 9 Gramm gerechnet, in 1 Secunde es eines Stromes bedarf von der elektromagnetischen Intensität

9554.14 Einheiten vom Systeme *C. G. S.*

Um also 9 Milligramm Wasser zu zersetzen, braucht man nur

9·554 elektromagnetische Einheiten *C. G. S.*

Es wird folglich dies der Werth sein des elektrischen Aequivalents, ausgedrückt in elektromagnetischen Einheiten des Systems *C. G. S.* Und ferner kann man noch sagen, dass das elektrische Aequivalent, in Ampères ausgedrückt, gleich 95·5 sei.

Wollen wir dasselbe elektrische Aequivalent in elektrostatischen Einheiten des nämlichen Systems *C. G. S.* ausdrücken, so haben wir einfach die obige Zahl 9·554 zu multipliciren mit 3×10^{10} und werden erhalten

$$28{\cdot}662 \times 10^{10},$$

so dass ein Strom von der elektrostatischen Intensität Eins des Systems *C. G. S.* nicht mehr zersetzt als

$$\frac{1}{28{\cdot}662 \times 10^{10}} \text{ Aequivalent.}$$

Mit Hilfe dieser Daten wollen wir berechnen, welche Oberfläche eine Batterie haben müsste, damit sie, auf das höchste Potential 300 gebracht, die ganze Elektricitätsmenge fassen könne, welche nöthig ist, um 9 Milligramm Wasser zu zersetzen oder damit sich darauf Ein elektrisches Aequivalent verdichtet finde. Hierzu dient die bekannte Formel

$$M = \frac{kSV}{4\pi e}.$$

Macht man $k = 3$, $e = \frac{1}{3}$ Centimeter, so erhält man

$$S = \frac{4\pi \,.\, 0{\cdot}333 \,.\, 28{\cdot}622 \,.\, 10^{10}}{3 \,.\, 300} \text{ Quadrat-Centimeter}$$

$$S = 133000 \text{ Quadratmeter.}$$

Directe, von Faraday, Becquerel und Buff angestellte Versuche haben auch zu ähnlichen Ergebnissen geführt, immer nämlich solchen von sehr hohem Werthe und zwischen 100.000 und 200.000 Quadratmeter. Die oben erhaltene Zahl könnte noch in anderer Weise gedeutet werden, indem man sagte, es wären zur Zersetzung von 9 Milligramm Wasser 133.000 Entladungen eines Condensators von 1 Quadratmeter Oberfläche nöthig, welcher jedesmal auf das Potential 300 geladen würde. Eine so grosse Menge von Elektricität ist auch jene, welche bei der Verbindung von 8 Milligramm Sauerstoff mit 1 Milligramm Wasserstoff sich entwickelt.

Eine Wolke, welche mit dieser ganzen Menge von Elektricität geladen wäre und ihre elektrische Anziehung gegen eine andere gleiche an der Oberfläche der Erde angehäufte Menge von entgegengesetztem Zeichen ausüben würde, hätte eine Kraft von

$$\frac{(28{\cdot}66)^2 \,.\, 10^{20}}{d^2} \text{ absoluten Einheiten,}$$

und setzt man d gleich 1 Kilometer oder im System *C. G. S.* gleich 100.000 Centimeter, so wird diese Kraft, mit dem in (3) gefundenen Coëfficienten auf Kilogramm gebracht, im Werthe gleich sein

$$(28{\cdot}66)^2 \,.\, 10198 = 8376600 \text{ Kilogramm,}$$

was eine Gewalt giebt, die mit der der Blitze vergleichbar ist.

V. Vom Strome geleistete Arbeit.

1. Diese Arbeit lässt sich berechnen mittelst irgend eines der Ausdrücke (8)

$$W = \begin{cases} i^2 r t = e i t = e^2 c = e q \\ I^2 R t = E I t = E^2 C = E Q \end{cases}$$

und wenn man in Gramm-Centimeter oder in Kilogramm-Meter umwandeln will, so darf man sich blos erinnern, dass im Systeme *C. G. S.*, nach welchem die Werthe der Elemente i, I, r, R etc. auszudrücken sind, eine absolute Arbeitseinheit nach (4) übereinstimmt mit

$$\frac{1^{gr\,c}}{981} \text{ oder auch mit } \frac{1^{k\,m}}{10^5 \,.\, 981},$$

wonach

$$W = \frac{I^2 R t}{981} \text{ Gramm-Centimeter,}$$

oder

$$= \frac{I^2 R t}{10^5 \,.\, 981} \text{ Kilogramm-Meter}$$

wird.

2. Um den Ausdruck für die Wärme zu erhalten, welche den durch irgend einen der obigen acht Ausdrücke gegebenen absoluten Arbeitseinheiten entspricht (immer im Systeme *C. G. S.* vorausgesetzt), hat man dieselben nach (5) zu multipliciren mit

$$0{\cdot}0000000237 = \frac{1}{42000000}.$$

Ist also I und R gegeben, so wird die Wärme, welche der Strom erzeugen kann, sein

$$I^2 R t \times 0{\cdot}0000000237 \text{ Gramm-Calorien}$$

oder, wenn E und I gegeben sind:

$$EIt \times 0{\cdot}0000000237 \text{ Gramm-Calorien.}$$

Und wenn diese Calorien mittelst eines Calorimeters bestimmt worden wären, würde man umgekehrt dazu gelangen, den Werth des thermo-dynamischen Aequivalentes (mechanischen Wärme-Aequivalentes) zu finden. Aus ähnlichen Experimenten leitete Joule das Aequivalent 430 Kilogramm-Meter für die Kilogramm-Calorie ab.

3. Weil ferner die Wärme, welche der Strom nach aussen hin erzeugen kann, jener entspricht, welche bei den inneren chemischen Thätigkeiten der Säule frei wird, so ist klar, dass diese letztere mittelst des obigen Ausdruckes sich wird bestimmen lassen. Nehmen wir einmal an, es bestehe im Innern der Säule eine Thätigkeit (Verbindung), welche Wärme entwickelt und davon die Menge q_c für jedes Aequivalent liefert, und es sei noch eine andere Thätigkeit (Zersetzung) darin vorhanden, welche Wärme aufsaugt und q_c' für jedes Aequivalent verbraucht, und der Strom habe die Intensität 1. In solchem Falle hat man in 1 Secunde die Bildung und die Zersetzung von 0·0001047 Aequivalent (siehe oben III); sonach wird Wärme in derselben Proportion entwickelt und verbraucht, so dass blos eine Anzahl von Calorien frei bleibt, welche ausgedrückt ist durch

$$0{\cdot}0001047\,(q_c - q'_c),$$

und mit einem Strome von der Intensität I wird man in der Zeit t an freier Wärme erhalten den Betrag

$$0{\cdot}0001047\,(q_c - q'_c) \times It,$$

ein Ausdruck, welcher, dem vorigen (2.) gleichgesetzt, ergiebt

$$q_c - q'_c = \frac{0{\cdot}0000000237}{0{\cdot}0001047}\,E$$

$$q_c - q'_c = 0{\cdot}0002264\,E.$$

Betrifft es die Säule Daniell, so müsste man

$$E = 1{\cdot}08 \text{ Volt}$$

machen oder

$$E = 1{\cdot}08 \times 10^8 \text{ absolute Einheiten,}$$

und es würde sich ergeben

$$q_c - q'_c = 24451 \text{ Gramm-Calorien,}$$

was ein Mittelwerth ist zwischen 23653 und 25502, die von mehreren Schriftstellern angegeben werden. Ist dagegen der Werth von $q_c - q_c'$ bekannt, so kann man für irgend eine Säule den Werth von E ausmitteln.

4. Wenn die Intensität des Stromes nicht einfach durch elektromagnetische Einheiten J und R ausgedrückt wäre, sondern in Ampères, die wir mit A, und in Ohms, die wir mit O bezeichnen wollen, so würde man nach Einsetzung der Werthe dieser Einheiten erhalten

$$W = (A \,.\, 10^{-1})^2 \,.\, O \,.\, 10^9 \,.\, t = 10^7\, A^2\, O \,.\, t$$

und für den calorischen Effect würde man sofort haben

$$10^7 A^2 O t \times 0{\cdot}0000000237 = A^2 O t \times 0{\cdot}237$$

$$= \frac{A^2\, O}{4{\cdot}2} \text{ Gramm-Calorien.}$$

Und wenn die Zahlen A, O einfach Einheiten von Intensität und Widerstand ausdrücken würden, so würde wirklich die Arbeit des Stromes 10^7mal kleiner ausfallen; und da die Anzahl von entsprechenden Calorien um ebenso viel kleiner wäre, so würde diese gegeben sein durch

$$\frac{A^2\, O}{42000000}$$

übereinstimmend mit dem in (5) Gesagten.

VI. Elektromotorische Kraft des Elementes Daniell.

In elektrostatischem Maasse *C. G. S.* hat das Element Daniell die elektromotorische Kraft 0·00374, was die Differenz der Potentiale der beiden Pole ist oder auch das Potential des positiven Pols, wenn der negative zur Erde geleitet wird. Multiplicirt man dieses Maass mit $3 \cdot 10^{10}$, so wird es in elektromagnetisches Maass umgewandelt, welches sonach sein wird

$$0{\cdot}00374 \times 3 \,.\, 10^{10} \text{ elektromagnetische Einheiten}$$

und dividirt man nun mit 10^8, so erhält man

$$1{\cdot}122 \text{ Volt}$$

zufolge dem, was über das Volt in (12) bemerkt wurde.

Die von Latimer Clark für das Daniell ermittelten Werthe sind folgende:

				Volt
Daniell I.				
Zinkamalgam	1 Schwefelsäure, 4 Wasser	Kupfersulfat gesättigt	Kupfer	1·079
Daniell II.				
Zinkamalgam	1 Schwefelsäure, 12 Wasser	Kupfersulfat gesättigt	Kupfer	0·978
Daniell III.				
Zinkamalgam	1 Schwefelsäure, 12 Wasser	Kupfernitrat gesättigt	Kupfer	1·000

Das Bunsen und das Grove kommen fast auf die Kraft von 2 Volt, das Leclanché auf etwa $1^1/_2$ Volt.

Will man den Werth der elektromotorischen Kraft des Daniell aus der oben aufgestellten Beziehung

$$q_c - q'_c = 0{\cdot}0002264\, E$$

entnehmen, so hat man, wenn man $q_c - q_c' = 25505$ Calorien setzt,

$$E = \frac{25502}{0{\cdot}0002264} = 112\,641\,342,$$

welcher Werth, in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt, auf elektrostatische Einheiten gebracht wird, indem man ihn durch $\nu = 3 \cdot 10^{10}$ dividirt, womit man erhält

$$0\,000375,$$

was mit dem schon bekannten Werthe zusammentrifft.

Wollen wir die elektromotorische Kraft des Elementes Daniell aus den elektromotorischen Kräften ableiten, welche bei den Berührungen der verschiedenen Stoffe, die es zusammensetzen, stattfinden, so können wir die von den Herren Ayrton und Perry*) ermittelten Werthe benutzen, aus welchen hervorgeht, dass

1. zwischen Cu und gesättigter Lösung (L') von Kupfersulfat bei der einfachen Berührung eine Potential-Differenz hervorgebracht wird

$$Cu \mid L' = + 0{\cdot}070 \text{ Volt};$$

2. man zwischen der Lösung L' und der andern L'' von Zinksulfat bei der Berührung die Potentialdifferenz

$$L' \mid L'' = - 0{\cdot}095 \text{ Volt};$$

3. zwischen der Lösung L'' und dem darin eingetauchten Zink bei der Berührung

$$L'' \mid Zn = + 0{\cdot}430;$$

4. endlich zwischen dem Zink und Kupfer

$$Zn \mid Cu = + 0{\cdot}750$$

hat. Da nun in der Kette

$$Cu \mid L' + L' \mid L'' + L'' \mid Zn + Zn \mid Cu$$

die Potentialdifferenz zwischen den äussersten Elementen gleich ist der Summe aller inmitten liegenden Differenzen, so wird man an den Polen die Potentialdifferenz

$$0{\cdot}070 - 0{\cdot}095 + 0{\cdot}430 + 0{\cdot}750 = 1{\cdot}155 \text{ Volt}$$

haben, was von den unmittelbar bestimmten Werthen wenig abweicht.

*) Gordon, Op. cit. T. II, Chap. XLIII.