

W. DZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

2392

L. inw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297283









ÜBER  
RAUMFACHWERKE

NEUE FORMEN UND BERECHNUNGSWEISEN  
FÜR  
KUPPELN UND SONSTIGE DACHBAUTEN

VON

DR. ZIMMERMANN  
GEH. OBERBAURATH

MIT 36 ABBILDUNGEN IM TEXT

*G. Nr. 24736*



BERLIN 1901

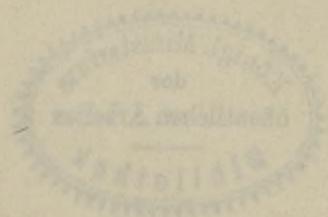
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN  
(GROPIUS'SCHE BUCH- UND KUNSTHANDLUNG)

*79/110*

Alle Rechte vorbehalten.

**BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW**

H. 2392



Akc. Nr.

1339/49

## VORWORT.

---

Die in vorliegendem Schriftchen dargestellten Formen und Berechnungsweisen verdanken ihre Entstehung den Bedürfnissen einer schwierigen Aufgabe und haben zum Theil schon vor zwölf Jahren bei deren Lösung zugleich ihre erste Probe bestanden. Wenn ich sie trotzdem noch als neu bezeichne, so ist das nur so gemeint, daß sie bisher noch nicht veröffentlicht sind. Wer sich nicht damit begnügt, seinen Gegenstand richtig zu behandeln, sondern ihn auch so klar und einfach zu gestalten sucht, daß ihn sich der Leser mit einem Mindestmaße von Mühe aneignen kann, für den ist vom Finden zum Veröffentlichen ein weiter, beschwerlicher Weg. Wenn dann auch noch die Unruhe und die Sorgen einer alle Kräfte in Anspruch nehmenden Berufsthätigkeit fortwährend davon ablenken, so können wohl Jahre vergehen, bevor man ans Ziel gelangt. So erklärt sich im vorliegenden Falle die lange Frist. Nun es hinauswandern soll, darf ich wohl dem Erzeugnisse so mancher nächtlichen Mußestunde den Wunsch mitgeben, daß es eine freundliche Aufnahme und nachsichtige Beurtheilung finden möge!

Berlin, im Juni 1901.

Zimmermann.



## INHALTS-VERZEICHNISS.

Einleitung . . . . .	Seite 1
----------------------	------------

### Erster Abschnitt.

#### Das Raumfachwerk auf rechteckigem Unterbau („Reichstagskuppel“).

§ 1. Form, Stützung, Belastung und innere Kräfte des Raumfachwerkes . . . . .	4
§ 2. Die vierzig Bedingungen für das Gleichgewicht des Raumfachwerkes bei allgemeinster Belastung . . . . .	10
§ 3. Allgemeine Berechnung der Diagonalspannungen . . . . .	12
§ 4. Allgemeine Berechnung der übrigen Kräfte . . . . .	21
§ 5. Einzelne Belastungsfälle.	
1. Nur senkrechte Belastung . . . . .	24
2. Symmetrische, im übrigen allgemeine Belastung . . . . .	26
3. Sonderung der Lasten. Eigengewicht und Winddruck . . . . .	29
§ 6. Zahlenbeispiele . . . . .	32
1. Nur eine lothrechte Last . . . . .	33
2. Nur eine wagerechte Kraft am unteren Ring . . . . .	36
3. Nur eine wagerechte Kraft am oberen Ring . . . . .	40
4. Gleichzeitige Belastung durch mehrere Kräfte . . . . .	43

### Zweiter Abschnitt.

#### Das Raumfachwerk mit beliebiger Eckenzahl.

§ 7. Allgemeine Betrachtung. Der Ausschnitt als Grundeinheit. Hauptarten des Fachwerkes . . . . .	46
§ 8. Bezeichnungen am mehreckigen Fachwerk . . . . .	49
§ 9. Gleichgewicht der Kräfte am Fachwerksausschnitt. Allgemeine Beziehung zwischen den Spannungen dreier aufeinanderfolgender Diagonalen . . . . .	51

	Seite
§ 10. Anwendung auf einige besondere Fälle.	
1. Fachwerk ohne Eckfäche (Schwedlerkuppel) und gemischtes Fachwerk . . . . .	55
2. Fachwerk mit rechteckigen Mittelfächen . . . . .	57
3. Kreisfachwerk . . . . .	57
§ 11. Das sechseckige Kreisfachwerk als Beispiel.	
1. Allgemeine Belastung . . . . .	60
2. Einige besondere Belastungsfälle . . . . .	66

### Dritter Abschnitt.

#### Abgeleitete Formen.

§ 12. Fachwerk mit schräger Stützung. Einfluß der Stützenneigung im allgemeinen . . . . .	67
§ 13. Berechnung der Diagonalspannungen für ein rechteckiges, symmetrisch belastetes Fachwerk auf schrägen Stützen . . . . .	71
§ 14. Berechnung der Diagonalspannungen für ein mehreckiges, beliebig belastetes Fachwerk auf schrägen Stützen . . . . .	73
§ 15. Mehrgeschossige Fachwerke. Laternen . . . . .	79
§ 16. Gratfachwerk . . . . .	83
§ 17. Eingeschränkte Fachwerke im allgemeinen . . . . .	86
§ 18. Das Firstfachwerk auf sechs Stützpunkten als Beispiel . . . . .	89

#### Berichtigungen.

- Auf Seite 29 ist in Gl. 81) links überall  $\mathfrak{Z}$  statt  $T$  zu setzen.  
 „ „ 30 in der letzten Gleichung von 83) desgl.  
 „ „ 32 in Gl. 91) desgl.

## Einleitung.

Im Jahrgang 1897 der Zeitschrift für Bauwesen sind die ganz eigenartigen Verhältnisse in ihren Hauptlinien geschildert worden, die im Jahre 1889 vorlagen, als der Beschluß gefaßt wurde, ein großes Kuppeldach auf hohem Unterbau über dem Hauptsitzungs- saale des Reichstagshauses zu errichten.<sup>\*)</sup> Es lag die Schwierigkeit vor, daß die schon bis etwa zur Dachhöhe aufgeführten Umfassungs- mauern dieses Saales nur eine Stärke besaßen, die wohl zum Tragen eines gewöhnlichen, mälsig geneigten Satteldaches ausreichte, nicht aber für die Aufnahme der Last einer weiteren bedeutenden Mauer- masse und einer hohen, weitgespannten Kuppel, in Verbindung mit dem sehr erheblichen wagerechten Druck, den der Wind naturgemäß auf einen solchen Bau ausübt. Daß der zu überdeckende Raum ge- rade der Hauptsaal war, verschärfte die Schwierigkeiten doppelt. Denn erstens mußten die ohnehin schon schwachen Umfassungs- mauern wegen des großen Lichtbedarfes noch durch Fenster von ganz gewaltigen Abmessungen weiter verschwächt werden, und dann war die Möglichkeit ausgeschlossen, die Wände durch breite Vorlagen oder sonstige Zugaben von der Innenseite her gegen den äußeren Winddruck abzustifen.

So lag die Sache, als ich im Jahre 1889 nach einigen von an- derer Seite ohne Erfolg angestellten Versuchen damit betraut wurde, eine befriedigende Lösung dieser ungewöhnlichen Aufgabe ausfindig zu machen. Schon die erste Proberechnung zeigte, daß die ungefähr

---

<sup>\*)</sup> Das Kuppeldach über dem Sitzungssaale des Reichstagshauses in Berlin von Lodemann, S. 511 u. f. — Der damalige Regierungs- Baumeister (jetzt Baurath) Lodemann hat mir seinerzeit bei der Ausarbeitung der Entwürfe für die Reichstagskuppel werthvolle Hilfe geleistet und später auch in freundlicher Weise die genannte Veröffentlichung besorgt, weil mir die Zeit dazu fehlte. Daß er hierbei auf die theoretischen Grundlagen der Kuppelanordnung nicht näher eingegangen ist, lag in der Natur der Sache, da ich die betreffenden Untersuchungen schon abgeschlossen hatte, ehe Herr Lodemann in das Reichstagsbaubureau eintrat, und da ich außerdem beabsichtigte, diesen Gegenstand selbst einmal eingehender zu be- handeln — was jetzt geschehen soll.

40 m hohen Wände des Kuppelunterbaues für sich ganz außer Stande waren, auch nur den auf sie selbst entfallenden Winddruck auszuhalten, geschweige denn den Druck auf das Kuppeldach. Es mußte also jedenfalls darauf Bedacht genommen werden, diese Wände in irgend einer Weise wirksam auszusteiern; da dies aber unter den obwaltenden Umständen auf große Schwierigkeiten stieß, so war es dringend geboten, für das Dachgerüst eine Anordnung zu wählen, bei der das tragende Mauerwerk durch den Winddruck auf das Dach möglichst wenig in Mitleidenschaft gezogen wird. In welcher Weise ich diese beiden Anforderungen erfüllt habe, ist an dem oben genannten Orte näher dargelegt. Was den Unterbau angeht, so kann es bei den dortigen Mittheilungen sein Bewenden haben, da eine ähnliche Ausführung kaum je wieder vorkommen wird. Das Raumfachwerk der Kuppel verdient dagegen wohl eine etwas eingehendere Erörterung, als ihm in jenem Aufsätze meines früheren Mitarbeiters Lodemann zu Theil geworden ist.

Die beim Reichstags Hause ausgeführte neue Anordnung besitzt nämlich so viele Vorzüge, daß ihre Wiederverwendung zu empfehlen ist, sobald es sich um eine Kuppel auf rechteckigem oder quadratischem Unterbau handelt, für die sich alle sonst zu Kuppelbauten verwandten Raumfachwerke wenig eignen. Damit ist ihre Bedeutung aber noch nicht erschöpft; denn sie bildet den Ausgangspunkt für eine ganze Reihe von neuen Formen, die alle auf demselben Grundgedanken beruhen und nach gleichen Regeln zu berechnen sind. Es liegt z. B. sehr nahe, die zunächst für einen rechteckigen (oder quadratischen) Unterbau entworfene Anordnung auf Bauwerke von größerer Eckenzahl auszudehnen. Untersuchungen hierüber habe ich schon während der Bearbeitung des ersten Entwurfes angestellt und später fortgesetzt. Dabei zeigte sich, daß die Gleichungsgruppe, die in einem gegebenen Falle die Grundlage für die Lösung der Aufgabe bildet, aus Einzelgleichungen besteht, deren jede — ganz unabhängig von der Zahl der Ecken — stets nur die Spannungen dreier aufeinander folgender Diagonalen als Unbekannte enthält. Ist das Fachwerk nach einem regelmäßigen Vieleck errichtet, so lassen sich auch diese Gleichungen so regelmäßig und einfach gestalten, daß man sie nach einem leicht zu merkenden Verfahren, ohne irgend welche statische Betrachtungen nöthig zu haben, unmittelbar hinschreiben kann, wie auch die Zahl der Ecken und die Art der Belastung des Fachwerkes gewählt sein möge. Die fraglichen Gleichungen bilden dann in gewissem Sinne, und zwar auch ihrer Form nach, ein Seitenstück zu den Clapeyronschen Gleichungen für Träger auf mehreren Stützen. Diese Beziehung ist um so merkwürdiger, als die Fachwerke meiner Bauart immer statisch bestimmt sind, mithin des Eingehens auf die Formänderungen zu ihrer

Berechnung nicht bedürfen. Wie günstig die Verhältnisse in dieser Hinsicht liegen, das erkennt man übrigens noch besser bei Anordnungen mit unregelmäßigem Grundrifs, also z. B. Kuppeln auf rechteckigem oder elliptischem Unterbau. Auch in solchen Fällen lassen sich die Grundgleichungen leicht für jede beliebige Eckenzahl und Belastungsweise ableiten. Es kann dies sogar geschehen, ohne daß man die Gleichgewichtsbedingungen für alle Knotenpunkte aufzustellen braucht. Das allgemeine Verfahren, welches ich hierfür gefunden habe und weiterhin beschreiben werde, leistet für Raumfachwerke ähnliches wie das bekannte Rittersche Verfahren für ebene Fachwerke.

Damit wäre etwa das angeführt, was sich über die inneren Vorzüge des neuen Raumfachwerkes sagen läßt. Es besitzt aber außerdem auch eine Eigenschaft, die sich auf sein Verhalten gegen den Unterbau bezieht und gleichfalls von Bedeutung ist. Die Art seiner Lagerung hat nämlich zur Folge, daß die wagerechten Auflagerkräfte die Umfassungsmauern nur in ihrer Fluchtrichtung, also in der günstigsten Weise beanspruchen, die überhaupt möglich ist. Gerade dieses Ziel war es ja, wonach ich (wie oben schon erwähnt) bei den Entwurfsarbeiten für das Reichstagshaus in erster Linie streben mußte. Bei künftig noch zu errichtenden Kuppeldächern werden die Verhältnisse wohl nicht ganz so, aber doch ähnlich liegen, da mit solchen Dächern fast immer weite Räume überdeckt werden sollen, in deren Innerem die Querwände und Decken nicht angebracht werden können, die bei gewöhnlichen Bauten schon zu anderen Zwecken vorhanden sein müssen und die Aussteifung der Umfassungsmauern gegen Winddruck nebenher mit besorgen.

Bevor wir zur genaueren Beschreibung der Bauart des in Rede stehenden Raumfachwerkes und zur Berechnung seiner Stab- und Auflagerkräfte schreiten, bleibt jetzt nur noch einiges über die gewählte Bezeichnungsweise und über die Eintheilung des Stoffes zu sagen. Es ist eine Eigenthümlichkeit dieses Fachwerkes, daß der obere und der untere Ring nicht die gleiche Eckenzahl haben. Bei den Formen, die ich Hauptformen nennen will, hat der obere Ring stets nur halb so viel Ecken wie der untere. Es vereinfacht daher die Bezeichnung, wenn man die einzelnen Glieder des Fachwerkes so viel wie möglich auf den oberen Ring bezieht und nach der Zahl seiner Ecken beziffert. Es empfiehlt sich dann, auch das ganze Fachwerk danach zu benennen, also z. B. von einer viereckigen Anordnung zu reden, wenn der obere Ring vier Ecken hat. Der letztere hat auch noch in einer anderen Richtung eine grössere Bedeutung als der untere Ring. Ob das Fachwerk nach dem für regelmäßige Anordnungen geltenden vereinfachten Verfahren berechnet werden kann oder nicht, hängt nämlich in erster Linie davon ab,

dafs der obere Ring ein regelmässiges Vieleck im mathematischen Sinne ist. Der untere Ring braucht kein solches zu sein; seine Form mufs nur die Bedingung erfüllen, dafs sie durch regelmässige Abstumpfung der Ecken eines Vielecks von gleicher Art wie das des oberen Ringes erzeugt werden kann. Wäre der obere Ring z. B. ein Quadrat, so müfste der untere Ring ein Achteck sein, wie es entsteht, wenn man jede Seite eines Quadrats von beiden Ecken her um beliebig grofse, aber gleiche Stücke verkürzt und die Schnittpunkte durch vier schräge Linien verbindet. Wir beginnen die Darstellung mit der Untersuchung der Hauptformen und behandeln im ersten Abschnitte als Beispiel einer unregelmässigen Anordnung das rechteckige Raumfachwerk, wie es für die Reichstagskuppel benutzt und zum Ausgangspunkte für die anderen neuen Formen geworden ist. Wir bedienen uns dazu noch der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte, theils der Vollständigkeit wegen, theils um den Unterschied gegenüber dem oben erwähnten weit bequemeren neuen Verfahren zu zeigen, das im zweiten Abschnitte entwickelt werden und zur Untersuchung der regelmässigen Fachwerke von beliebiger Eckenzahl dienen wird. Nach den regelmässigen und unregelmässigen Hauptformen sollen zum Schluß auch noch einige andere Anordnungen besprochen werden, die man als abgeleitete Formen bezeichnen kann, da sie aus den Hauptformen hervorgehen, wenn man einzelne Glieder wegläfst oder neue hinzufügt. Es lassen sich auf diesem Wege neue Raumfachwerke schaffen, die ihrer Wirkungsweise nach Kuppeln sind, aber eine ganz andere äufere Gestaltung zeigen und auch anderen Zwecken dienstbar zu machen sind. Näheres hierüber findet der Leser im dritten Abschnitt. Als Beispiel möge hier nur die zweieckige oder Satteldachkuppel erwähnt werden, mit deren Hülfe man langgestreckte hohe, in das Dachgeschofs hineinreichende Räume überdecken kann.

## Erster Abschnitt.

### Das Raumfachwerk auf rechteckigem Unterbau.

#### („Reichstagskuppel“.)

##### § 1. Form, Stützung, Belastung und innere Kräfte des Raumfachwerks.

Es ist wichtig, dafs man sich ein recht klares Bild von der geometrischen Anordnung unseres Raumfachwerkes verschafft, bevor zur Erörterung seiner statischen Eigenschaften geschritten wird. Wir nehmen der Allgemeinheit wegen an, dafs es über einem recht-

eckigen Grundrisse errichtet werden soll und bezeichnen die beiden Hauptachsen dieses Rechteckes als  $a$ -Achse und  $b$ -Achse. Dieselben Buchstaben benutzen wir zur Unterscheidung der in die eine oder die andere der beiden so festgelegten Hauptrichtungen des Raumfachwerkes fallenden Längen und Kräfte. Ein Loth im Schnittpunkte des Achsenkreuzes bildet die senkrechte Hauptachse des Fachwerkes und möge  $h$ -Achse heißen. Die Anordnung kann nun leicht in folgender Weise festgelegt werden: Das Fachwerk besteht aus einem oberen viereckigen und einem unteren achteckigen Ring, acht die Ecken dieser Ringe mit einander verbindenden Rippen oder Sparren und vier zwischen je zwei solchen eingeschalteten Diagonalen. Der obere Ring ist ein Rechteck, dessen Mittelpunkt auf der senkrechten Hauptachse liegt und dessen Seiten nach den wagerechten Hauptachsen ausgerichtet sind. Die Länge der zur  $a$ -Achse gleichlaufenden Seiten sei  $a_o$ , diejenige der zur  $b$ -Achse gleichlaufenden  $b_o$ . Der untere Ring ist ein in Bezug auf die wagerechten Hauptachsen symmetrisches Achteck, dessen Mittelpunkt gleichfalls in der  $h$ -Achse, also lothrecht unter demjenigen des oberen Ringes liegt und von dessen Gegenseiten ein Paar in die Richtung der  $a$ -Achse, das andere in die der  $b$ -Achse fällt. Die betreffenden Seiten, die wir Mittelseiten nennen wollen, haben dieselben Längen  $a_o$  und  $b_o$  wie die ihnen gleichlaufenden Seiten des oberen Ringes. Die übrigen vier Seiten des unteren Ringes nennen wir Eckseiten; ihre Länge sei  $c$ . Die acht Rippen verbinden paarweise die Endpunkte der einander benachbarten gleichlaufenden und gleich langen Seiten des oberen und des unteren Ringes, bilden also mit diesen zusammen vier Rechtecke mit je zwei wagerechten Seiten  $a_o$  und  $b_o$  und zwei geneigten Seiten. Die letzteren liegen in lothrechten Ebenen, deren wagerechte Spuren in die Richtung der wagerechten Hauptachsen fallen. Demgemäß bezeichnen wir die Längen der Rippen oder Sparren nach ihren Richtungen im Grundriß mit  $a$  und  $b$ , im Raume mit  $s_a$  und  $s_b$ . Die letzten vier Stäbe des Fachwerkes, die Diagonalen, verbinden je zwei gegenüberliegende Ecken der vorgenannten vier Rechtecke. Je nachdem sie  $a$ - oder  $b$ -Rippen verbinden, wird ihre Länge mit  $d_a$  oder  $d_b$  bezeichnet. Wir nehmen an, daß die Diagonalen alle im gleichen Sinne steigen oder fallen, d. h. daß sie, z. B. vom Innern der Kuppel aus gesehen, alle von links unten nach rechts oben gehen. Faßt man die Ringe als Gurte auf, so können die Rippen und Diagonalen als Wandglieder und die zwischen je zwei Rippen liegenden Theile der Wand als Fache bezeichnet werden. Es ist eine Eigenthümlichkeit des in Rede stehenden Fachwerkes, daß immer ein rechteckiges Fach (Mittelfach) mit einem dreieckigen (Eckfach) abwechselt.

In Abb. 1 ist ein Fachwerk von solcher Anordnung in schräger

Ansicht dargestellt, und zwar mit ausgezogenen Linien für die vorn liegenden, mit gestrichelten für die dahinter liegenden (durch die Kuppelfläche verdeckt gedachten) Stäbe. Die vier oberen Ecken sind mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, die acht unteren, so weit sie sichtbar, mit  $A_I, B_I$  bis  $A_{IV}, B_{IV}$  bezeichnet. Die Abb. 2 giebt einen Grundriß und eine Seitenansicht des

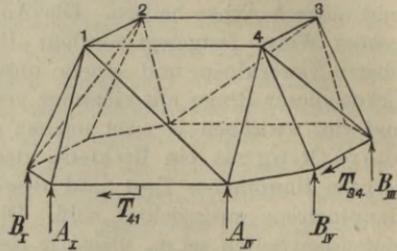


Abb. 1. Schaubild des Stabgerippes.

Stabgerippes und zugleich die Buchstaben, mit denen wir die verschiedenen Längen bezeichnen haben. Ferner sind auch die Winkel, die in den weiterhin folgenden Untersuchungen eine Rolle spielen, nach einer leicht zu erkennenden Regel mit griechischen Buchstaben kenntlich gemacht. Dabei ist zu beachten, daß die Maße und Winkel zum Theil in ihrer richtigen Größe, sondern nur in der Projection erscheinen. Es sollen also unter  $d_a$  und  $d_b$  die wirklichen Längen der Diagonalen und unter  $\delta_a$  und  $\delta_b$  die Winkel verstanden werden, die ihre Richtung im Raum mit der Richtung der Rippen bildet, die sie verbinden. Die lothrechte Höhe des oberen Ringes über dem unteren nennen wir  $h$ .

Was die Stützungsweise des Fachwerkes betrifft, so wird vorausgesetzt, daß in den acht Eckpunkten des unteren Ringes, also am Fusse der acht Rippen, Lager angebracht sind, die nur lothrechte Drücke zulassen. Zur Aufnahme wagerechter Kräfte dienen vier weitere Lager, die an den vier mittleren Stäben des unteren Ringes angreifen und so ausgebildet sein müssen, daß sie nur in der Richtung ihrer Stäbe auf diese einwirken können. In Abb. 1 sind die Lagerdrücke für die Vorderseite des Fachwerkes als Pfeile eingetragen.

Wir bezeichnen die lothrechten Gegendrücke mit denselben Buchstaben wie die Auflagerknotenpunkte, zu denen sie gehören, und nehmen sie als positiv an, wenn sie von unten nach oben gerichtet sind. Es ist leicht zu erkennen, daß je

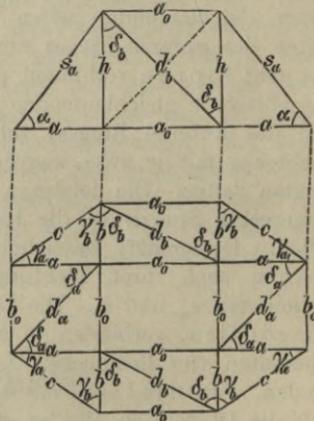


Abb. 2. Längen und Winkel der Stäbe (Ansicht in Richtung der  $b$ -Achse und von oben).

zwei unter derselben oberen Ecke (z. B. 1) befindliche Lager mit der entsprechenden römischen Ziffer (also I) bezeichnet, aber durch die Buchstaben  $A$  und  $B$  von einander unterschieden worden sind. Die wagerechten („tangentialen“) Lagerdrücke werden mit  $T$  und den beiden Ziffern bezeichnet, die den Enden des in dem gleichen Fache gelegenen oberen Ringstabes entsprechen. Sie sollen als positiv gelten, wenn sie die Richtung haben, in der jene Ziffern wachsen. Es ist also z. B.  $T_{12}$  ein von 1 nach 2 gerichteter wagerechter Gegendruck.

Statt der Lager im gewöhnlichen Sinne (Flächenlager) können natürlich auch Gelenkstäbe dazu dienen, das Fachwerk in der geschilderten Weise zu stützen. Sie müssen nur so angeordnet werden, daß sie auf die Lagerpunkte lediglich Kräfte in der vorgeschriebenen Richtung ausüben. Abb. 3 zeigt eine solche Anordnung, bei der die senkrechten Drücke durch je eine lothrechte Stütze, die wagerechten durch je zwei geneigte Streben aufgenommen werden. Alle diese

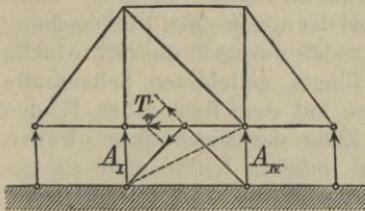


Abb. 3. Ersatz der Flächenlager durch Gelenkstäbe mit festen Fußpunkten.

Stäbe sind gelenkig einerseits mit den Lagerpunkten des Fachwerkes, andererseits mit einer festen Unterlage verbunden zu denken. Daß die wagerechten Lager nicht gerade in der Mitte der unteren Ringstäbe zu liegen brauchen, sondern auch mehr nach einer Seite hin und sogar in der Verlängerung dieser Stäbe angeordnet werden können, versteht sich von selbst.

In Abb. 3 ist beispielsweise durch eine gestrichelte Linie angedeutet, wie man die Verstrebung anordnen muß, wenn man das Lager für  $A_{IV}$  zugleich zur Aufnahme des wagerechten Druckes  $T_{41}$  benutzen will. Ob man die Lagerung in der einen oder anderen Weise ausbildet, ist für das statische Verhalten des Fachwerkes gleichgültig, denn es ändern sich dabei nur die Spannungen in den die wagerechten Kräfte in die Lager führenden Ringstäben. Die Anbringung der Lager in der Mitte dieser Stäbe besitzt aber gewisse praktische Vorzüge. Sie bewirkt nämlich, daß die Mitte des Fachwerkes auch bei beliebigen Wärmeänderungen genau über der Mitte des Unterbaues bleibt, und daß die durch solche Aenderungen hervorgerufenen seitlichen Verschiebungen der senkrechten Lager möglichst klein werden. Außerdem sind die Mitten der Umfassungswände meist besser zur Aufnahme von wagerechten in die Richtung der Mauerflucht fallenden Kräften geeignet, als die mehr nach den Ecken hin gelegenen Stellen.

Als Belastung nehmen wir zunächst in jedem der zwölf Knoten-

punkte des Fachwerkes eine beliebig gerichtete Kraft an. An den vier oberen Knotenpunkten zerlegen wir diese Kräfte in je drei Seitenkräfte, und zwar nach drei zu einander rechtwinkligen Achsen, von denen die eine lothrecht ist, die beiden anderen in die Richtungen der Hauptachsen fallen. Demgemäß werden die wagerechten Seitenkräfte mit dem Buchstaben  $W$ , dem Richtungszeiger  $a$  oder  $b$  und der Ziffer des Knotenpunktes bezeichnet, an dem sie angreifen. Sie werden positiv gerechnet in der Richtung nach dem Innern der Kuppel. Die lothrechte Seitenkraft wird mit  $P$  und der Knotenpunktziffer bezeichnet und positiv nach unten gerechnet. Aehnlich können auch die Kräfte in den acht unteren Knotenpunkten zerlegt werden. Dabei stellt sich aber heraus, daß die senkrechten Antheile ohne weiteres in die Auflager übergehen, die Stäbe des Raumfachwerkes also nicht beanspruchen, und daß die in die Richtung der Mittelstäbe des unteren Ringes fallenden Seitenkräfte durch diese sogleich den wagerechten Lagern zugeführt werden, mithin auf die Spannungen der übrigen Fachwerkstäbe ebenfalls keinen Einfluß ausüben. Diese beiden Kraftantheile können daher bei der allgemeinen Untersuchung des Fachwerkes fortgelassen werden, sodaß nur noch die rechtwinklig zu den Mittelstäben des unteren Ringes gerichteten Seitenkräfte übrig bleiben. Wir bezeichnen diese mit dem Buchstaben  $V$ , den Richtungszeigern  $a$  oder  $b$  und der Ziffer des zugehörigen oberen Knotenpunktes. Die so festgesetzten äußeren Kräfte sind als gefiederte Pfeile an ihren Angriffspunkten in die Abb. 4 eingetragen. (Da diese einen Grundriß darstellt, konnten die lothrechten Kräfte  $A_I, B_I$  bis  $A_{IV}, B_{IV}$  und  $P_1$  bis  $P_4$  natürlich nicht in solcher Weise sichtbar gemacht werden. Sie sind deshalb nur mit Buchstaben bezeichnet. Die wagerechten Auflagerdrücke  $T_{12}$  bis  $T_{41}$  sind, um sie deutlicher hervortreten zu lassen, neben die Unterringstäbe gesetzt, in deren Richtung sie wirken.)

Ferner enthält die Abb. 4 auch die Bezeichnungen, die wir den inneren Kräften geben. Die dabei befolgte Regel ist so einfach, daß sie mit wenigen Worten wiedergegeben werden kann. Die Spannungen der Rippen heißen  $A$  oder  $B$ , je nach der zugehörigen Achsenrichtung, die Spannungen der Eckstäbe des unteren Ringes  $C$ , die der Diagonalen  $D$ . Die Spannungen der Stäbe des oberen und der Mittelstäbe des unteren Ringes werden mit  $O$  und  $U$  bezeichnet. Die verschiedenen  $A, B$  und  $C$  können den vier Ecken des oberen Ringes zugeordnet und durch die betreffende Knotenpunktziffer kenntlich gemacht werden. Die  $O$  treten dagegen immer an zwei Knotenpunkten auf und erhalten deshalb die entsprechenden beiden Ziffern als Kennzeichen. Ebenso wird bei den mittleren Stäben  $U$  des unteren Ringes verfahren, wobei jedoch die (bequemeren) Ziffern der nächstgelegenen oberen Knotenpunkte benutzt werden. Hier ist

aufserdem noch die Unterscheidung der zwei in ein und demselben Stabe zu beiden Seiten des wagerechten Lagers auftretenden Spannungen durch die Reihenfolge der Kennziffern bewirkt. So bezeichnet z. B.  $U_{14}$  die Spannung im Stabe  $U$  zwischen dem zu 1 gehörigen Punkte und dem nach 4 hin gelegenen wagerechten Lager;  $U_{41}$  dagegen die Spannung auf der anderen Seite, also zwischen dem zu 4 gehörigen Punkte und dem jetzt in der Richtung nach 1 hin folgenden wagerechten Lager. Die Diagonalspannungen  $D$  endlich, die ebenso wie die  $O$  immer in zwei verschiedene Knotenpunktgruppen eingreifen, sind in derselben Weise wie die letzteren beziffert.

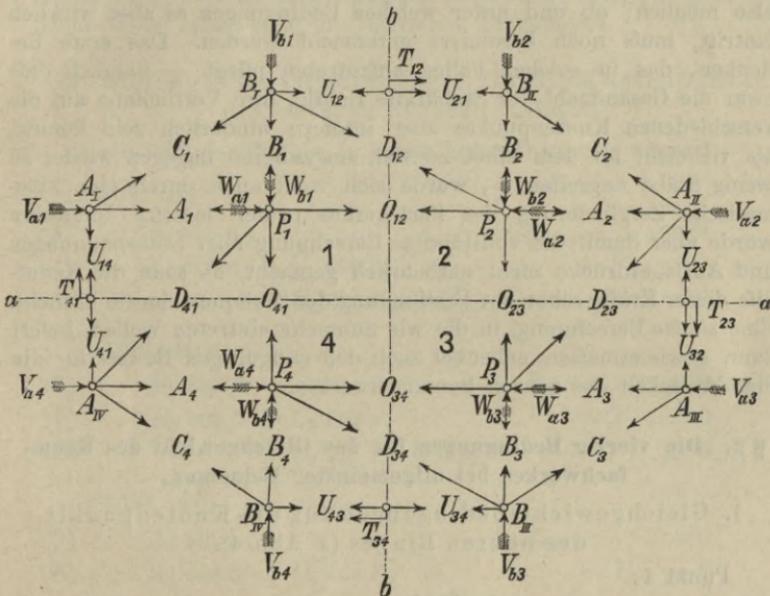


Abb. 4. Äußere und innere Kräfte an den Knotenpunkten (Ansicht von oben).

Wir betrachten die Spannungen durchweg als positiv, wenn sie auf Zug wirken, setzen aber voraus, daß alle Stäbe auch Druckkräften widerstehen können.

Um nun zu ermitteln, ob ein so angeordnetes und belastetes Stabgebilde im Gleichgewichte sein kann, und welche Spannungen dabei in den Stäben auftreten, denken wir uns die letzteren sämtlich in der bekannten Weise durchschnitten und so die inneren Kräfte in äußere verwandelt. Wir haben dann an den vier oberen und acht unteren Knotenpunkten zusammen zwölf räumliche Gruppen

von Kräften, die sich in je einem Punkte schneiden. Jede solche Gruppe liefert bekanntlich drei Gleichgewichtsbedingungen. Um diese zu finden, müssen die Kräfte auf drei beliebige Achsen bezogen werden. Wir wählen dafür am einfachsten die  $a$ -,  $b$ - und  $h$ -Achsen. Außerdem treten an den wagerechten Lagern noch vier Gruppen auf, die aber nur Kräfte enthalten, welche in dieselbe Linie fallen. Eine solche Gruppe liefert nur eine Gleichgewichtsbedingung. Im ganzen haben wir also deren  $3 \times 12 + 4 = 40$ . An unbekanntenen Kräften sind vorhanden 4 Spannungen im oberen Ring, 12 im unteren, 12 in den Wandgliedern, 8 senkrechte und 4 wagerechte Auflagerdrücke; das sind zusammen gleichfalls 40. Das Gleichgewicht ist also möglich; ob und unter welchen Bedingungen es aber wirklich eintritt, muß noch besonders untersucht werden. Das erste Bedenken, das in solchen Fällen aufzutreten pflegt — nämlich daß zwar die Gesamtzahl der Stabkräfte richtig, ihre Vertheilung auf die verschiedenen Knotenpunkte aber insofern hinderlich sein könnte, als vielleicht an dem einen zu viel, am anderen dagegen wieder zu wenig Stäbe angreifen —, würde sich wohl auch durch eine kinematische Zergliederung des Fachwerkes prüfen lassen. Immerhin würde aber damit die vollständige Berechnung aller Stabspannungen und Auflagerdrücke nicht entbehrlich gemacht, da man die Kenntniß dieser Kräfte schon zur Bestimmung der Stabquerschnitte braucht. Eine solche Berechnung, in die wir nunmehr eintreten wollen, liefert dann gewissermaßen nebenbei auch den endgültigen Beweis für die Standfestigkeit des ganzen Raumfachwerkes.

## § 2. Die vierzig Bedingungen für das Gleichgewicht des Raumfachwerkes bei allgemeiner Belastung.

### 1. Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte des oberen Ringes (s. Abb. 4).

Punkt 1:

$$\begin{aligned} 1) & A_1 \sin \alpha + B_1 \sin \beta + D_{41} \cos \delta_a \sin \alpha + P_1 = 0 \\ 2) & A_1 \cos \alpha + D_{41} \cos \delta_a \cos \alpha - O_{12} - W_{a1} = 0 \\ 3) & B_1 \cos \beta - D_{41} \sin \delta_a - O_{41} - W_{b1} = 0. \end{aligned}$$

Punkt 2:

$$\begin{aligned} 4) & B_2 \sin \beta + A_2 \sin \alpha + D_{12} \cos \delta_b \sin \beta + P_2 = 0 \\ 5) & B_2 \cos \beta + D_{12} \cos \delta_b \cos \beta - O_{23} - W_{b2} = 0 \\ 6) & A_2 \cos \alpha - D_{12} \sin \delta_b - O_{12} - W_{a2} = 0. \end{aligned}$$

Punkt 3:

$$\begin{aligned} 7) & A_3 \sin \alpha + B_3 \sin \beta + D_{23} \cos \delta_a \sin \alpha + P_3 = 0 \\ 8) & A_3 \cos \alpha + D_{23} \cos \delta_a \cos \alpha - O_{34} - W_{a3} = 0 \\ 9) & B_3 \cos \beta - D_{23} \sin \delta_a - O_{23} - W_{b3} = 0. \end{aligned}$$

Punkt 4:

- $$\begin{aligned}
 10) & B_4 \sin \beta + A_4 \sin \alpha + D_{34} \cos \delta_b \sin \beta & + P_4 & = 0 \\
 11) & B_4 \cos \beta & + D_{34} \cos \delta_b \cos \beta - O_{41} - W_{b4} & = 0 \\
 12) & A_4 \cos \alpha - D_{34} \sin \delta_b & - O_{34} - W_{a4} & = 0.
 \end{aligned}$$

Die zwölf Gleichungen enthalten je vier verschiedene  $A$ ,  $B$ ,  $D$  und  $O$ , also 16 Unbekannte. Diese Zahl läßt sich am bequemsten dadurch vermindern, daß man immer zwei zusammengehörige  $A$  und  $B$  durch ein und dieselbe dritte GröÙe ausdrückt; und zwar bietet sich als solche das zugehörige  $C$  dar, das zu  $A$  und  $B$ , wie sich weiterhin zeigen wird, in einer sehr einfachen Beziehung steht. In ganz ähnlicher Weise erhält man die folgenden Gleichungen.

## 2. Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte des unteren Ringes (s. Abb. 4).

Erste Gruppe: Punkte, in denen keine Diagonale angreift.

Punkt  $A_I$ :

- $$\begin{aligned}
 13) & A_1 \sin \alpha & + A_I & = 0 \\
 14) & A_1 \cos \alpha + C_1 \cos \gamma_a & + V_{a1} & = 0 \\
 15) & -C_1 \sin \gamma_a + U_{14} & & = 0.
 \end{aligned}$$

Punkt  $B_{II}$ :

- $$\begin{aligned}
 16) & B_2 \sin \beta & + B_{II} & = 0 \\
 17) & B_2 \cos \beta + C_2 \cos \gamma_b & + V_{b2} & = 0 \\
 18) & -C_2 \sin \gamma_b + U_{21} & & = 0.
 \end{aligned}$$

Punkt  $A_{III}$ :

- $$\begin{aligned}
 19) & A_3 \sin \alpha & + A_{III} & = 0 \\
 20) & A_3 \cos \alpha + C_3 \cos \gamma_a & + V_{a3} & = 0 \\
 21) & -C_3 \sin \gamma_a + U_{32} & & = 0.
 \end{aligned}$$

Punkt  $B_{IV}$ :

- $$\begin{aligned}
 22) & B_4 \sin \beta & + B_{IV} & = 0 \\
 23) & B_4 \cos \beta + C_4 \cos \gamma_b & + V_{b4} & = 0 \\
 24) & -C_4 \sin \gamma_b + U_{43} & & = 0.
 \end{aligned}$$

Zweite Gruppe: Punkte, in denen eine Diagonale angreift.

Punkt  $B_I$ :

- $$\begin{aligned}
 25) & B_1 \sin \beta & + D_{12} \cos \delta_b \sin \beta & + B_I & = 0 \\
 26) & B_1 \cos \beta + C_1 \cos \gamma_b + D_{12} \cos \delta_b \cos \beta & & + V_{b1} & = 0 \\
 27) & -C_1 \sin \gamma_b + D_{12} \sin \delta_b & + U_{12} & & = 0.
 \end{aligned}$$

Punkt  $A_{II}$ :

$$\begin{aligned} 28) \quad & A_2 \sin \alpha && + D_{23} \cos \delta_a \sin \alpha && + A_{II} &= 0 \\ 29) \quad & A_2 \cos \alpha + C_2 \cos \gamma_a + D_{23} \cos \delta_a \cos \alpha && && + V_{a2} &= 0 \\ 30) \quad & - C_2 \sin \gamma_a + D_{23} \sin \delta_a && + U_{23} && &= 0. \end{aligned}$$

Punkt  $B_{III}$ :

$$\begin{aligned} 31) \quad & B_3 \sin \beta && + D_{34} \cos \delta_b \sin \beta && + B_{III} &= 0 \\ 32) \quad & B_3 \cos \beta + C_3 \cos \gamma_b + D_{34} \cos \delta_b \cos \beta && && + V_{b3} &= 0 \\ 33) \quad & - C_3 \sin \gamma_b + D_{34} \sin \delta_b && + U_{34} && &= 0. \end{aligned}$$

Punkt  $A_{IV}$ :

$$\begin{aligned} 34) \quad & A_4 \sin \alpha && + D_{41} \cos \delta_a \sin \alpha && + A_{IV} &= 0 \\ 35) \quad & A_4 \cos \alpha + C_4 \cos \gamma_a + D_{41} \cos \delta_a \cos \alpha && && + V_{a4} &= 0 \\ 36) \quad & - C_4 \sin \gamma_a + D_{41} \sin \delta_a && + U_{41} && &= 0. \end{aligned}$$

Außer den schon in den Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte des oberen Ringes enthaltenen Größen treten jetzt 20 neue Unbekannte auf, nämlich die 8 Auflagerdrücke  $A_I$  bis  $A_{IV}$  und  $B_I$  bis  $B_{IV}$ , die 8 Ringspannungen  $U_{14}$  bis  $U_{13}$  und  $U_{12}$  bis  $U_{41}$  und schliesslich die vier Ringspannungen  $C_1$  bis  $C_4$ . An jedem der acht Punkte kommen aber in der zweiten Gleichung von diesen 20 Größen nur die vier letzten vor, und zwar in der ersten Gruppe in Verbindung nur mit  $A$  und  $B$ , in der zweiten ausserdem noch mit  $D$ . Dieser Umstand liefert das oben erwähnte Mittel zum Ersatz der acht  $A$  und  $B$  durch die vier  $C$ . Ehe dazu übergegangen wird, mögen aber des Zusammenhanges wegen die vier letzten, noch übrigen Gleichgewichtsbedingungen des ganzen Raumbauwerkes hier angeführt werden, obgleich sie zunächst für die weitere Rechnung nicht in Betracht kommen.

### 3. Gleichgewichtsbedingungen für die wagerechten Stützpunkte.

Es ergibt sich aus Abb. 4 sofort

$$\begin{aligned} 37) \quad & U_{12} - U_{21} - T_{12} = 0 \\ 38) \quad & U_{23} - U_{32} - T_{23} = 0 \\ 39) \quad & U_{34} - U_{43} - T_{34} = 0 \\ 40) \quad & U_{41} - U_{14} - T_{41} = 0. \end{aligned}$$

Hierin sind alle 12 Werthe unbekannt.

### § 3. Allgemeine Berechnung der Diagonalspannungen.

Die in obigen Gleichungen enthaltenen Winkelgrößen sind für die weitere Berechnung insofern ungünstig, als sie zu sehr langen

und unübersichtlichen Ausdrücken führen. Bei der großen Zahl von Unbekannten hängt nun, wenn nicht die Möglichkeit, so doch die Brauchbarkeit einer allgemeinen Auflösung in hohem Grade davon ab, ob sich die mathematische Entwicklung genügend vereinfachen läßt. Ein wirksames Mittel hierzu bildet im vorliegenden Falle, wie ein Versuch lehrt, die Einführung der Stablängen an Stelle der Winkelgrößen. Das geschieht mittels der nachstehenden Formeln, die sich leicht aus der Abb. 2 herauslesen lassen.

	Für die $a$ -Achse:	Für die $b$ -Achse:
41)	$\sin \alpha = \frac{h}{s_a}$	$\sin \beta = \frac{h}{s_b}$
	$\cos \alpha = \frac{a}{s_a}$	$\cos \beta = \frac{b}{s_b}$
	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a}$	$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{b}$
	$\cos \gamma_a = \frac{a}{c} = \sin \gamma_b$	$\cos \gamma_b = \frac{b}{c} = \sin \gamma_a$
	$\sin \delta_a = \frac{b_0}{d_a}$	$\sin \delta_b = \frac{a_0}{d_b}$
	$\cos \delta_a = \frac{s_a}{d_a}$	$\cos \delta_b = \frac{s_b}{d_b}$

Damit ist aber noch nicht genug gethan; eine sehr wesentliche weitere Abkürzung und Vereinfachung der Formeln wird erreicht, indem man nicht die Kräfte selber, sondern diejenigen Größen als Unbekannte betrachtet, die sich ergeben, wenn man die Kräfte durch gewisse unveränderliche Zahlenwerthe theilt. Es empfiehlt sich natürlich, für diese neuen Unbekannten besondere, kurze Bezeichnungen einzuführen. So setzen wir nun:

42)	$\frac{A_1}{s_a} = \mathfrak{A}_1;$	$\frac{B_1}{s_b} = \mathfrak{B}_1;$	$\frac{C_1}{c} = \mathfrak{C}_1;$	$\frac{D_{12}}{d_b} = \mathfrak{D}_{12}$
	$\frac{A_2}{s_a} = \mathfrak{A}_2;$	$\frac{B_2}{s_b} = \mathfrak{B}_2;$	$\frac{C_2}{c} = \mathfrak{C}_2;$	$\frac{D_{23}}{d_a} = \mathfrak{D}_{23}$
	$\frac{A_3}{s_a} = \mathfrak{A}_3;$	$\frac{B_3}{s_b} = \mathfrak{B}_3;$	$\frac{C_3}{c} = \mathfrak{C}_3;$	$\frac{D_{34}}{d_b} = \mathfrak{D}_{34}$
	$\frac{A_4}{s_a} = \mathfrak{A}_4;$	$\frac{B_4}{s_b} = \mathfrak{B}_4;$	$\frac{C_4}{c} = \mathfrak{C}_4;$	$\frac{D_{41}}{d_a} = \mathfrak{D}_{41}.$

Ferner:

$$43) \left\{ \begin{array}{l} \frac{O_{12}}{a} = \mathfrak{D}_{12}; \quad \frac{U_{12}}{a} = \mathfrak{U}_{12}; \quad \frac{U_{21}}{a} = \mathfrak{U}_{21}; \quad \frac{T_{12}}{a} = \mathfrak{T}_{12} \\ \frac{O_{23}}{b} = \mathfrak{D}_{23}; \quad \frac{U_{23}}{b} = \mathfrak{U}_{23}; \quad \frac{U_{32}}{b} = \mathfrak{U}_{32}; \quad \frac{T_{23}}{b} = \mathfrak{T}_{23} \\ \frac{O_{34}}{a} = \mathfrak{D}_{34}; \quad \frac{U_{34}}{a} = \mathfrak{U}_{34}; \quad \frac{U_{43}}{a} = \mathfrak{U}_{43}; \quad \frac{T_{34}}{a} = \mathfrak{T}_{34} \\ \frac{O_{41}}{b} = \mathfrak{D}_{41}; \quad \frac{U_{41}}{b} = \mathfrak{U}_{41}; \quad \frac{U_{14}}{b} = \mathfrak{U}_{14}; \quad \frac{T_{41}}{b} = \mathfrak{T}_{41} \end{array} \right.$$

Weiter:

$$44) \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_I}{h} = \mathfrak{A}_I; \quad \frac{B_I}{h} = \mathfrak{B}_I \\ \frac{A_{II}}{h} = \mathfrak{A}_{II}; \quad \frac{B_{II}}{h} = \mathfrak{B}_{II} \\ \frac{A_{III}}{h} = \mathfrak{A}_{III}; \quad \frac{B_{III}}{h} = \mathfrak{B}_{III} \\ \frac{A_{IV}}{h} = \mathfrak{A}_{IV}; \quad \frac{B_{IV}}{h} = \mathfrak{B}_{IV}. \end{array} \right.$$

Damit sind die 40 Unbekannten durch ebenso viele andere ersetzt. Es empfiehlt sich, jetzt auch mit den gegebenen äußeren Kräften eine ähnliche Umwandlung vorzunehmen, indem man die folgenden neuen Bezeichnungen einführt:

$$45) \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_1}{h} = \mathfrak{P}_1; \quad \frac{V_{a1}}{a} = \mathfrak{B}_{a1}; \quad \frac{V_{b1}}{b} = \mathfrak{B}_{b1}; \\ \frac{P_2}{h} = \mathfrak{P}_2; \quad \frac{V_{a2}}{a} = \mathfrak{B}_{a2}; \quad \frac{V_{b2}}{b} = \mathfrak{B}_{b2}; \\ \frac{P_3}{h} = \mathfrak{P}_3; \quad \frac{V_{a3}}{a} = \mathfrak{B}_{a3}; \quad \frac{V_{b3}}{b} = \mathfrak{B}_{b3}; \\ \frac{P_4}{h} = \mathfrak{P}_4; \quad \frac{V_{a4}}{a} = \mathfrak{B}_{a4}; \quad \frac{V_{b4}}{b} = \mathfrak{B}_{b4}; \\ \\ \frac{W_{a1}}{a} = \mathfrak{B}_{a1}; \quad \frac{W_{b1}}{b} = \mathfrak{B}_{b1} \\ \frac{W_{a2}}{a} = \mathfrak{B}_{a2}; \quad \frac{W_{b2}}{b} = \mathfrak{B}_{b2} \\ \frac{W_{a3}}{a} = \mathfrak{B}_{a3}; \quad \frac{W_{b3}}{b} = \mathfrak{B}_{b3} \\ \frac{W_{a4}}{a} = \mathfrak{B}_{a4}; \quad \frac{W_{b4}}{b} = \mathfrak{B}_{b4}. \end{array} \right.$$

Der Nutzen dieses scheinbar etwas umständlichen und willkürlichen Verfahrens wird sogleich klar hervortreten. Es ist übrigens leicht im Gedächtnis zu behalten, wenn man sich die Regel merkt: Die wagerechten Kräfte in der Richtung der  $a$ -Achse werden durch  $a$ , die in der Richtung der  $b$ -Achse durch  $b$ , die lothrechten durch  $h$  und die schrägen durch die Länge der Stäbe getheilt, zu denen sie gehören. Umgekehrt sind natürlich die durch Ausrechnung der Bedingungsgleichungen erhaltenen Werthe der (mit deutschen Buchstaben bezeichneten) Unbekannten mit jenen Zahlen zu vervielfältigen, wenn man die Kräfte selbst berechnen will. Ferner ist bemerkenswerth, daß die neu eingeführten Größen Kräfte auf die Längeneinheit darstellen. Sie sollen daher auch fernerhin Kräfte genannt werden.

Wir beschreiten nun den schon früher angedeuteten Weg, indem wir die  $A$  und  $B$  durch die  $C$  oder, was auf dasselbe hinausläuft, die  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  durch die  $\mathfrak{C}$  ausdrücken. Es ergibt sich mit 41) und 42) aus den Gleichungen

$$46) \quad \begin{array}{l} \underbrace{14) \ 17) \ 20) \ 23):} \\ \underbrace{26) \ 29) \ 32) \ 35):} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 = -\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_{a1}; \quad \mathfrak{B}_1 = -\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{B}_{b1} \\ \mathfrak{B}_2 = -\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_{b2}; \quad \mathfrak{A}_2 = -\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{B}_{a2} \\ \mathfrak{A}_3 = -\mathfrak{C}_3 - \mathfrak{B}_{a3}; \quad \mathfrak{B}_3 = -\mathfrak{C}_3 - \mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{B}_{b3} \\ \mathfrak{B}_4 = -\mathfrak{C}_4 - \mathfrak{B}_{b4}; \quad \mathfrak{A}_4 = -\mathfrak{C}_4 - \mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{B}_{a4}. \end{array} \right.$$

Setzt man dies in die (gemäß 41) bis 45) umgewandelten) Gleichungen 1) bis 12), so nehmen sie die nachstehende Form an:

$$47) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{41} = -\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{B}_{a1} + \mathfrak{B}_{b1} \\ -\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{B}_{a1} + \mathfrak{B}_{a1} \\ -\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{D}_{12} - \frac{b_0}{b} \mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{D}_{41} = \mathfrak{B}_{b1} + \mathfrak{B}_{b1} \end{array} \right.$$

$$48) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{12} = -\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{B}_{b2} + \mathfrak{B}_{a2} \\ -\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{B}_{b2} + \mathfrak{B}_{b2} \\ -\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{D}_{23} - \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{B}_{a2} + \mathfrak{B}_{a2} \end{array} \right.$$

$$49) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2\mathfrak{C}_3 - \mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{23} = -\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{B}_{a3} + \mathfrak{B}_{b3} \\ -\mathfrak{C}_3 + \mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{34} = \mathfrak{B}_{a3} + \mathfrak{B}_{a3} \\ -\mathfrak{C}_3 - \mathfrak{D}_{34} - \frac{b_0}{b} \mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{B}_{b3} + \mathfrak{B}_{b3} \end{array} \right.$$

$$50) \left\{ \begin{array}{l} -2\mathfrak{C}_4 - \mathfrak{D}_{41} + \mathfrak{D}_{34} = -\mathfrak{P}_4 + \mathfrak{B}_{b4} + \mathfrak{B}_{a4} \\ -\mathfrak{C}_4 + \mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{D}_{41} = \mathfrak{B}_{b4} + \mathfrak{B}_{b4} \\ -\mathfrak{C}_4 - \mathfrak{D}_{41} - \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{D}_{34} = \mathfrak{B}_{a4} + \mathfrak{B}_{a4}. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen sind von großer Einfachheit und Uebersichtlichkeit. Ohne die in 42) bis 45) enthaltene abgekürzte Bezeichnungswiese würden sie viel verwickelter, die weiterhin folgenden Gleichungen aber noch schwerer zu übersehen sein.

Wir lösen nun die zweite Gleichung jeder Gruppe nach  $\mathfrak{C}$  auf und erhalten

$$51) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a1} \\ \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{b2} \\ \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{a3} \\ \mathfrak{C}_4 = \mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{b4}. \end{array} \right.$$

Wenn man diese Werthe in die ersten Gleichungen der vier Gruppen einführt, die nur von den gegebenen äußeren Kräften abhängigen Größen auf die rechte Seite bringt, zur Vereinfachung die so gewonnenen Ausdrücke

$$52) \left\{ \begin{array}{l} -\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{B}_{a1} + \mathfrak{B}_{b1} - 2\mathfrak{B}_{a1} = \mathfrak{D}_1 \\ -\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{B}_{b2} + \mathfrak{B}_{a2} - 2\mathfrak{B}_{b2} = \mathfrak{D}_2 \\ -\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{B}_{a3} + \mathfrak{B}_{b3} - 2\mathfrak{B}_{a3} = \mathfrak{D}_3 \\ -\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{B}_{b4} + \mathfrak{B}_{a4} - 2\mathfrak{B}_{b4} = \mathfrak{D}_4 \end{array} \right.$$

setzt und dann nach den  $\mathfrak{D}$  auflöst, so ergibt sich

$$53) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_{12} = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{41} + \mathfrak{D}_1) \\ \mathfrak{D}_{23} = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_2) \\ \mathfrak{D}_{34} = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_3) \\ \mathfrak{D}_{41} = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{41} + \mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_4). \end{array} \right.$$

Entfernt man jetzt die  $\mathfrak{C}$  aus den dritten Gleichungen der vier Gruppen 47) bis 50), indem man die Werthe aus 51) einführt, oder — noch einfacher — die dritten Gleichungen von den zweiten abzieht, so erhält man vier neue Gleichungen, in denen außer den  $\mathfrak{D}$  nur noch die  $\mathfrak{D}$  auftreten<sup>1)</sup>. Um diese Gleichungen möglichst einfach

<sup>1)</sup> Es zeigt sich dabei der Nutzen der vorliegenden eigenthümlichen „offenen“ Schreibweise, die ich schon seit langer Zeit anwende und in meinem Buche über die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues (Berlin 1888) durchweg befolgt habe. Man braucht nur von jedem Gliede der zweiten Gleichungen das genau darunterstehende der dritten abzuziehen, um sofort wieder eine vollständig geordnete Gleichung zu haben. Das Verfahren erleichtert die Rechnung sehr, bietet daher weniger Gelegenheit zu Fehlern als die übliche, geschlossene Schreibweise und übertrifft diese weit an Uebersichtlichkeit (vgl. Seite IV u. f. des Vorwortes zu dem genannten Werke).

zu gestalten, bedienen wir uns auch hier wieder einer abgekürzten Bezeichnung für die auf der rechten Seite stehenden, nur von den gegebenen äußeren Kräften abhängigen Ausdrücke, nämlich

$$54) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_{a_1} - \mathfrak{B}_{b_1} + \mathfrak{W}_{a_1} - \mathfrak{W}_{b_1} = \mathfrak{R}_1 \\ \mathfrak{B}_{b_2} - \mathfrak{B}_{a_2} + \mathfrak{W}_{b_2} - \mathfrak{W}_{a_2} = \mathfrak{R}_2 \\ \mathfrak{B}_{a_3} - \mathfrak{B}_{b_3} + \mathfrak{W}_{a_3} - \mathfrak{W}_{b_3} = \mathfrak{R}_3 \\ \mathfrak{B}_{b_4} - \mathfrak{B}_{a_4} + \mathfrak{W}_{b_4} - \mathfrak{W}_{a_4} = \mathfrak{R}_4. \end{cases}$$

Damit erhalten die fraglichen Gleichungen die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{12} + \frac{b+b_0}{b} \mathfrak{D}_{41} + \mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{D}_{12} &= \mathfrak{R}_1 \\ \mathfrak{D}_{23} + \frac{a+a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{23} &= \mathfrak{R}_2 \\ \mathfrak{D}_{34} + \frac{b+b_0}{b} \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{34} &= \mathfrak{R}_3 \\ \mathfrak{D}_{41} + \frac{a+a_0}{a} \mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{D}_{41} &= \mathfrak{R}_4. \end{aligned}$$

Wenn man nun hierin die  $\mathfrak{D}$  durch ihre Werthe aus 53) ersetzt, so enthalten die vier Gleichungen außer den gegebenen Größen nur noch die vier Unbekannten  $\mathfrak{D}_{12}$ ,  $\mathfrak{D}_{23}$ ,  $\mathfrak{D}_{34}$  und  $\mathfrak{D}_{41}$ . Wir vervielfältigen mit 2, bringen die von den gegebenen äußeren Kräften abhängigen Glieder auf die rechte Seite und drücken sie wiederum durch je ein Zeichen aus; und zwar, indem wir sie als algebraische Summen betrachten, durch den Buchstaben  $\mathfrak{E}$  mit einer Ordnungsziffer, wobei zugleich die Reihenfolge dahin abgeändert werden soll, daß die letzte Gleichung vor die drei übrigen gestellt wird. Mit

$$55) \quad \begin{cases} 2 \mathfrak{R}_4 - (\mathfrak{D}_3 - \mathfrak{D}_4) = \mathfrak{E}_{34} \\ 2 \mathfrak{R}_1 - (\mathfrak{D}_4 - \mathfrak{D}_1) = \mathfrak{E}_{41} \\ 2 \mathfrak{R}_2 - (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}_{12} \\ 2 \mathfrak{R}_3 - (\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_3) = \mathfrak{E}_{23} \end{cases}$$

wird dann, wenn man nach den  $\mathfrak{D}$  ordnet:

$$56) \quad \begin{cases} 0 + \mathfrak{D}_{23} + 2 \frac{a+a_0}{a} \mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{41} = \mathfrak{E}_{34} \\ \mathfrak{D}_{12} + 0 + \mathfrak{D}_{34} + 2 \frac{b+b_0}{b} \mathfrak{D}_{41} = \mathfrak{E}_{41} \\ 2 \frac{a+a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{23} + 0 + \mathfrak{D}_{41} = \mathfrak{E}_{12} \\ \mathfrak{D}_{12} + 2 \frac{b+b_0}{b} \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{34} + 0 = \mathfrak{E}_{23}. \end{cases}$$

Wir haben also jetzt nur noch vier Unbekannte in ebensoviel Gleichungen. Um diese aufzulösen, ziehen wir die erste von

der dritten und die zweite von der vierten ab. Es ergibt sich daraus:

$$57) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{34} = \frac{1}{2} \frac{a}{a + a_0} (\mathfrak{S}_{12} - \mathfrak{S}_{34}) \\ \mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{41} = \frac{1}{2} \frac{b}{b + b_0} (\mathfrak{S}_{23} - \mathfrak{S}_{41}). \end{cases}$$

Fügt man dagegen die erste zur dritten und die zweite zur vierten hinzu, so erhält man die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} (a + a_0) (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{34}) + a \cdot (\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{41}) &= \frac{1}{2} a (\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{34}) \\ b \cdot (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{34}) + (b + b_0) (\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{41}) &= \frac{1}{2} b (\mathfrak{S}_{23} + \mathfrak{S}_{41}), \end{aligned}$$

in denen man die zwei  $\mathfrak{D}$ -Summen als neue Unbekannte betrachten kann. Löst man nach diesen auf, indem man zur Abkürzung die Determinante<sup>2)</sup>

$$58) \quad (a + a_0)(b + b_0) - ab = F$$

setzt, so ergibt sich

$$59) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{34} = \frac{a(b + b_0)}{2F} (\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{34}) - \frac{ba}{2F} (\mathfrak{S}_{23} + \mathfrak{S}_{41}) \\ \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{41} = \frac{b(a + a_0)}{2F} (\mathfrak{S}_{23} + \mathfrak{S}_{41}) - \frac{ab}{2F} (\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{34}). \end{cases}$$

Durch 57) sind die Unterschiede, durch 59) die Summen der gesuchten Spannkkräfte  $\mathfrak{D}$  bestimmt, womit diese selbst sich in einfachster Weise berechnen lassen, sobald die Abmessungen des Fachwerkes und die angreifenden Kräfte in Zahlen gegeben sind.

Das könnte im einzelnen Falle in der Weise geschehen, daß man zunächst aus 52) die Zahlenwerthe der  $\mathfrak{D}$  bestimmt (die man ja ohnehin gebraucht, wenn man die  $\mathfrak{D}$  aus 53) berechnen will), daß man ferner die Zahlenwerthe der  $\mathfrak{R}$  aus 54) und dann mit diesen und den  $\mathfrak{D}$  die  $\mathfrak{S}$  aus 55) berechnet. Nach Einsetzung der so gefundenen Werthe von  $\mathfrak{S}$  erhält man  $\mathfrak{D}_{12}$  und  $\mathfrak{D}_{23}$  am bequemsten, indem man die Gleichungen der Gruppe 57) zu den entsprechenden Gleichungen von 59) hinzufügt; ferner  $\mathfrak{D}_{34}$  und  $\mathfrak{D}_{41}$ , indem man die ersteren von den letzteren abzieht. Das Verfahren ist zwar sehr übersichtlich, hat aber den Nachtheil, daß die Endergebnisse nur für den einen bei Bestimmung der  $\mathfrak{S}$  angenommenen Belastungsfall gelten, daß man also bei jedem Lastwechsel die ganze Rechnung wiederholen muß. Noch größer ist der Mangel, der darin liegt, daß man dabei den Antheil der einzelnen Lasten an der Gesamtwirkung nicht erkennen

<sup>2)</sup>  $F$  ist offenbar eine Fläche, die zu der Grundriffsfläche des Fachwerkes in einer leicht ersichtlichen Beziehung steht (vgl. Abb. 2).

kann, worauf es bei der Untersuchung der Eigenschaften einer neuen Bauart doch gerade ankommt. Hierzu bedürfen wir nicht der zahlenmäßigen, sondern einer allgemeinen Auflösung jener Gleichungen, wobei auch für die  $\mathfrak{S}$  die allgemeinen Ausdrücke festzuhalten sind. Aus 52), 54) und 55) ergeben sich diese wie folgt:

$$60) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2} + \mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{b1} + 2(\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2}) \\ \mathfrak{S}_{23} = \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3 + \mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{b3} + \mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{a2} + 2(\mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{b3}) \\ \mathfrak{S}_{34} = \mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_4 + \mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{a4} + \mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{b3} + 2(\mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{a4}) \\ \mathfrak{S}_{41} = \mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{b1} + \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a4} + 2(\mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{b1}). \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe in 57) und 59) ein, so entstehen daraus vier Gleichungen mit sehr vielen Gliedern, die neu geordnet werden müssen.

Diese Rechnung ist zwar ziemlich mühsam, aber nicht schwierig; wir verzichten deshalb darauf, sie hier vorzuführen, und begnügen uns mit der Wiedergabe der Ergebnisse. Um an Raum zu sparen, wählen wir dafür die Form einer Tafel, in deren vier ersten Spalten die Ausdrücke angegeben sind, mit denen die in der letzten Spalte stehenden Unterschiede der angreifenden Kräfte vervielfältigt werden müssen, wenn man die am Kopfe aufgeführten  $\mathfrak{D}$  berechnen will. Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$61) \quad \begin{cases} \frac{a}{a + a_o} = \mathfrak{P}_a; & \frac{b}{b + b_o} = \mathfrak{P}_b \\ \frac{ab}{F} = \mathfrak{P}_{ab} = \frac{ba}{F} = \mathfrak{P}_{ba} \\ \frac{ab_o}{F} = \mathfrak{P}_{b_o}; & \frac{ba_o}{F} = \mathfrak{P}_{a_o}. \end{cases}$$

Hierin hat  $F$  die durch 58) gegebene Bedeutung, nämlich

$$F = (a + a_o)(b + b_o) - ab.$$

Damit ist die Aufgabe für jede denkbare Art der Belastung ganz allgemein und in einer Weise gelöst, die an Einfachheit wohl nichts zu wünschen übrig läßt. Man erkennt aus der Tafel ohne weiteres, daß die Diagonalspannungen, mithin auch alle übrigen Stabkräfte stets bestimmte, endliche Werthe haben, in welcher Weise das Raumbauwerk auch belastet werden möge, sofern nur  $F$  nicht Null ist; d. h. nach 58) so lange nicht  $a_o$  und  $b_o$  gleichzeitig Null werden, womit der obere Ring zu einem Punkt zusammenschrumpfen und das Fachwerk in eine Spitze auslaufen würde. Schließen wir diesen Fall vorläufig aus, so ist die unbedingte Standsicherheit erwiesen. Aber auch die sonstigen Eigenschaften des Fachwerkes lassen sich entweder unmittelbar aus der Tafel ablesen, oder doch wenigstens mit ihrer Hülfe leicht ermitteln, wie in der Folge an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Tafel zur Berechnung der Diagonalspannungen.  
 Die Bedeutung der Buchstaben ergibt sich aus Abb. 4 und den Gleichungen 42), 45) und 61).

$\mathfrak{D}_{12} =$	$\mathfrak{D}_{23} =$	$\mathfrak{D}_{34} =$	$\mathfrak{D}_{41} =$	Angreifende Kräfte:
$\mathcal{P}_a + 2\mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_b + 2\mathcal{P}_{ba} + \mathcal{P}_{a0}$	$-\mathcal{P}_a + 2\mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{b0}$	$-\mathcal{P}_b + 2\mathcal{P}_{ba} + \mathcal{P}_{a0}$	$\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3)$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_4)$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_1)$
$-\mathcal{P}_a + 2\mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{b0}$	$-\mathcal{P}_b + 2\mathcal{P}_{ba} + \mathcal{P}_{a0}$	$\mathcal{P}_a + 2\mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_b + 2\mathcal{P}_{ba} + \mathcal{P}_{a0}$	
$\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_{b0}$	$-\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_{a0}$	$-\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_{a0}$	$\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2})$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{B}_{a2} - \mathfrak{B}_{a3})$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{a4})$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{B}_{a4} - \mathfrak{B}_{a1})$
$-\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_{a0}$	$\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_{b0}$	$-\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_{a0}$	
$\mathcal{P}_a - \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{a0}$	$\mathcal{P}_a - \mathcal{P}_{b0}$	$-\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{a0}$	$\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{b2})$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{b3})$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{B}_{b3} - \mathfrak{B}_{b4})$ $\cdot \frac{1}{4} (\mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{b1})$
$-\mathcal{P}_a - \mathcal{P}_{b0}$	$-\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{a0}$	$-\mathcal{P}_a - \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{a0}$	
$\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_{ba}$	$-\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_{ba}$	$\cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2})$ $\cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{a2} - \mathfrak{B}_{a3})$ $\cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{a4})$ $\cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{a4} - \mathfrak{B}_{a1})$
$-\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_{ba}$	$\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{b0}$	$\mathcal{P}_{ba}$	
$\mathcal{P}_{ab}$	$\mathcal{P}_{ba} + \mathcal{P}_{a0}$	$\mathcal{P}_{ab}$	$-\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{ba} + \mathcal{P}_{a0}$	$\cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{b2})$ $\cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{b3})$ $\cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{b3} - \mathfrak{B}_{b4})$ $\cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{b1})$
$\mathcal{P}_{ab}$	$-\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{ba} + \mathcal{P}_{a0}$	$\mathcal{P}_{ab}$	$\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_{ba} + \mathcal{P}_{a0}$	

#### § 4. Allgemeine Berechnung der übrigen Kräfte.

Nachdem die vier Diagonalspannungen  $\mathfrak{D}$  aus der vorstehenden Tafel ermittelt sind, ergeben sich die übrigen Stabspannungen und die Auflagerkräfte durch Einsetzen der  $\mathfrak{D}$ -Werthe in die betreffenden Gleichgewichtsbedingungen. Dabei ist, wenn unnöthige Arbeit vermieden werden soll, eine bestimmte Reihenfolge einzuhalten.

Zuerst sind nämlich die vier Spannungen  $\mathfrak{D}$  des oberen Ringes aus 53) zu berechnen, weil in diesen Gleichungen andere Stabkräfte als die  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}$  nicht vorkommen.

Mit den so gefundenen Werthen der  $\mathfrak{D}$  ergeben sich dann die vier Spannungen  $\mathfrak{C}$  in den Eckstäben des unteren Ringes ohne weiteres aus 51). Führt man die Rechnung aus, so erhält man mit Rücksicht auf 52):

$$63) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C}_1 = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{D}_{12}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{b1}) \\ \mathfrak{C}_2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{23}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{a2}) \\ \mathfrak{C}_3 = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{34}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{b3}) \\ \mathfrak{C}_4 = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{D}_{41}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_4 - \mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{a4}). \end{array} \right.$$

Diese Werthe in die Gleichungen 46) einsetzend, findet man die acht Spannungen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  in den Rippen wie folgt:

$$64) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{41}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{b1}) \\ \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{12}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{a2}) \\ \mathfrak{A}_3 = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{D}_{23}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{b3}) \\ \mathfrak{B}_4 = \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{D}_{34}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_4 + \mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{a4}). \end{array} \right.$$

$$65) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_1 = -\frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{41}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{a1}) \\ \mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{12}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{B}_{a2} - \mathfrak{B}_{b2}) \\ \mathfrak{B}_3 = -\frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{23}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{B}_{b3} - \mathfrak{B}_{a3}) \\ \mathfrak{A}_4 = -\frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{41} + \mathfrak{D}_{34}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_4 + \mathfrak{B}_{a4} - \mathfrak{B}_{b4}). \end{array} \right. \text{)}^3$$

Hieran reiht sich am zweckmäßigsten die Bestimmung der acht lothrechten Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}_I$  bis  $\mathfrak{A}_{IV}$  und  $\mathfrak{B}_I$  bis  $\mathfrak{B}_{IV}$ , die sich leicht mit den vorstehenden Werthen der  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  aus den Gleichungen 13), 16), 19), 22) und 25), 28), 31), 34) ergeben, wenn man diese durch Einführung der Längen für die Winkelwerthe nach

<sup>3)</sup> Obige Gleichungen ergeben, wenn man die  $\mathfrak{A}$  zu den gleich bezifferten  $\mathfrak{B}$  hinzufügt, die Beziehungen:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 = -\mathfrak{D}_{41} - \mathfrak{F}_1; \quad \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 = -\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{F}_2; \\ \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{B}_3 = -\mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{F}_3; \quad \mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4 = -\mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{F}_4. \end{array}$$

Diese bilden nur einen anderen Ausdruck für die Gleichgewichtsbedingungen 1), 4), 7) und 10), also eine Art Rechenprobe.

41) und durch Anwendung der abgekürzten Bezeichnungen 42) bis 45) dafür umformt. So erhält man:

$$66) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_I = -\mathfrak{N}_I = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}_{a1}; \quad \mathfrak{B}_I = -(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{D}_{12}) = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}_{b1} \\ \mathfrak{B}_{II} = -\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{B}_{b2}; \quad \mathfrak{N}_{II} = -(\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{D}_{23}) = \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{B}_{a2} \\ \mathfrak{M}_{III} = -\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{B}_{a3}; \quad \mathfrak{B}_{III} = -(\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{D}_{34}) = \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{B}_{b3} \\ \mathfrak{B}_{IV} = -\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{C}_4 + \mathfrak{B}_{b4}; \quad \mathfrak{N}_{IV} = -(\mathfrak{N}_4 + \mathfrak{D}_{41}) = \mathfrak{C}_4 + \mathfrak{B}_{a4} \end{array} \right.$$

Die Hinzufügung der Ausdrücke in  $\mathfrak{C}$  (gemäß 46)) giebt nach zwei Richtungen hin bemerkenswerthe Aufschlüsse. Erstens ist damit nämlich eine Rechenprobe ermöglicht; denn setzt man für die an einen herausgeschnittenen Auflagerknotenpunkt angreifenden Kräfte die Summe der Momente in Bezug auf denjenigen nächstgelegenen Stab des oberen Ringes als Drehachse, der dem Ringstabe des fraglichen unteren Knotenpunktes gleich gerichtet ist, gleich Null, so erhält man eine Gleichung, die nur einen Auflagerdruck und die dazugehörigen Werthe von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{B}$  enthält. Beispielsweise ist für das Auflager  $A_I$  nach Abb. 5:

$$A_I \cdot a - \left( C_1 \frac{a}{c} + V_{a1} \right) h = 0$$

$$\text{oder } \frac{A_I}{h} = \frac{C_1}{c} + \frac{V_{a1}}{a},$$

was mit der ersten Gleichung der Gruppe 66) übereinstimmt. Genau ebenso ist beim Auflager  $B_I$  zu verfahren, wo nur  $b$  an Stelle von  $a$  und  $\mathfrak{B}_{b1}$  an Stelle von  $\mathfrak{B}_{a1}$  tritt. (Die Spannung  $\mathfrak{D}_{12}$  der an diesem Knotenpunkt angreifenden Diagonale hat offenbar das Moment Null, da sie die Drehachse 2—1 schneidet.) Aehnlich findet man die Gleichungen 66) bei den übrigen Auflagerpunkten bestätigt.

Zweitens folgt aus diesen Gleichungen:

$$67) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N}_I - \mathfrak{B}_I = \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{b1} = \frac{V_{a1}}{a} - \frac{V_{b1}}{b} \\ \mathfrak{N}_{II} - \mathfrak{B}_{II} = \mathfrak{B}_{a2} - \mathfrak{B}_{b2} = \frac{V_{a2}}{a} - \frac{V_{b2}}{b} \\ \mathfrak{N}_{III} - \mathfrak{B}_{III} = \mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{b3} = \frac{V_{a3}}{a} - \frac{V_{b3}}{b} \\ \mathfrak{N}_{IV} - \mathfrak{B}_{IV} = \mathfrak{B}_{a4} - \mathfrak{B}_{b4} = \frac{V_{a4}}{a} - \frac{V_{b4}}{b} \end{array} \right.$$

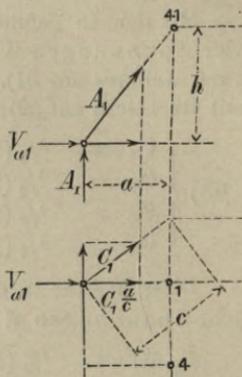


Abb. 5. Kräfte am Auflagerknotenpunkt  $A_I$ . Zur Berechnung des Momentes um den Stab 4 bis 1 des oberen Ringes.

D. h. die Auflagerdrücke an je zwei zu derselben Ecke des Raumbachwerkes gehörenden Stützpunkten werden einander gleich, wenn die an diesen Punkten angreifenden wagerechten äußeren Kräfte  $V$  Null sind, oder sich wie die ihnen gleichgerichteten Längen  $a$  und  $b$  verhalten; in welcher Weise die übrigen unteren, sowie die oberen Knotenpunkte belastet sind, ist gleichgültig.

Die acht Spannungen  $U$  in den mittleren Stäben des unteren Ringes ergeben sich aus den Gleichungen 15), 18), 21), 24) und 27), 30), 33), 36), die noch durch Einführung der Längen an Stelle der Winkelwerthe nach 41) und durch Anwendung der abgekürzten Bezeichnungen 42), 43) zu vereinfachen sind. Man findet hiermit:

$$68) \left\{ \begin{array}{ll} U_{21} = \mathfrak{C}_2; & U_{12} = \mathfrak{C}_1 - \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} \\ U_{32} = \mathfrak{C}_3; & U_{23} = \mathfrak{C}_2 - \frac{b_0}{b} \mathfrak{D}_{23} \\ U_{43} = \mathfrak{C}_4; & U_{34} = \mathfrak{C}_3 - \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{34} \\ U_{14} = \mathfrak{C}_1; & U_{41} = \mathfrak{C}_4 - \frac{b_0}{b} \mathfrak{D}_{41}. \end{array} \right.$$

Da die  $\mathfrak{C}$  in 63) bereits durch die  $\mathfrak{D}$  ausgedrückt sind, so ist die Einführung der letzteren in die vorstehenden Gleichungen entbehrlich.

Mit Hülfe der so bestimmten  $U$  ergeben sich jetzt die vier wagerechten Auflagerdrücke  $\mathfrak{I}$ , indem man von den Bezeichnungen 43) Gebrauch macht, aus den Gleichungen 37) bis 40) wie folgt:

$$69) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{I}_{12} = U_{12} - U_{21} = \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2 - \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} \\ \mathfrak{I}_{23} = U_{23} - U_{32} = \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_3 - \frac{b_0}{b} \mathfrak{D}_{23} \\ \mathfrak{I}_{34} = U_{34} - U_{43} = \mathfrak{C}_3 - \mathfrak{C}_4 - \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{34} \\ \mathfrak{I}_{41} = U_{41} - U_{14} = \mathfrak{C}_4 - \mathfrak{C}_1 - \frac{b_0}{b} \mathfrak{D}_{41}. \end{array} \right.$$

Will man diese  $\mathfrak{I}$  finden, ohne die  $U$  oder die  $\mathfrak{C}$  vorher zu berechnen, also unmittelbar aus den  $\mathfrak{D}$ , so sind die folgenden Gleichungen zu benutzen, die sich aus 69) ergeben, wenn man für die  $\mathfrak{C}$  ihre Werthe aus 63) einführt.

$$70) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{I}_{12} &= -\frac{a+a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} + \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{41}) + \frac{1}{2} \\ &\quad [\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 - (\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2}) - (\mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{b2})] \\ \mathfrak{I}_{23} &= -\frac{b+b_0}{b} \mathfrak{D}_{23} + \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{12}) + \frac{1}{2} \\ &\quad [\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3 - (\mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{b3}) - (\mathfrak{B}_{a2} - \mathfrak{B}_{a3})] \\ \mathfrak{I}_{34} &= -\frac{a+a_0}{a} \mathfrak{D}_{34} + \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{41} + \mathfrak{D}_{23}) + \frac{1}{2} \\ &\quad [\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_4 - (\mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{a4}) - (\mathfrak{B}_{b3} - \mathfrak{B}_{b4})] \\ \mathfrak{I}_{41} &= -\frac{b+b_0}{b} \mathfrak{D}_{41} + \frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{34}) + \frac{1}{2} \\ &\quad [\mathfrak{F}_4 - \mathfrak{F}_1 - (\mathfrak{B}_{b4} - \mathfrak{B}_{b1}) - (\mathfrak{B}_{a4} - \mathfrak{B}_{a1})]. \end{aligned} \right.$$

Damit sind sämtliche Stabspannungen und Auflagerdrücke bestimmt. Die gefundenen, mit deutschen Buchstaben bezeichneten Werthe stellen zwar noch nicht diese Kräfte selbst dar; um letztere zu erhalten, braucht man erstere aber nur — wie schon früher bemerkt — mit den ihnen nach 42), 43) und 44) zugeordneten Längen zu vervielfältigen.

### § 5. Einzelne Belastungsfälle.

#### 1. Nur senkrechte Belastung.

Es liegt nahe, zu fragen, ob die wagerechten Lager wohl auch dann in Wirksamkeit treten, wenn das Raumfachwerk nur senkrechte Lasten trägt. Um die Antwort hierauf zu geben, berechnen wir die  $\mathfrak{D}$  aus 62) unter der Annahme, daß alle äußeren Kräfte außer den  $\mathfrak{F}$  Null seien. Die gefundenen Werthe führen wir in die Gleichungen 70) ein. Die dadurch entstehenden, anfänglich etwas umfangreichen Ausdrücke lassen sich sehr zusammenziehen; und wenn wir für die  $\varphi$  wieder ihre Werthe aus 61) setzen, so erhalten wir schliesslich mit Rücksicht auf 43) und 45) die ganz einfachen Gleichungen

$$71) \left\{ \begin{aligned} T_{12} = T_{34} &= -\frac{ab(2a+a_0)}{2Fh} (P_1 - P_2 + P_3 - P_4) \\ T_{23} = T_{41} &= \frac{ba(2b+b_0)}{2Fh} (P_1 - P_2 + P_3 - P_4). \end{aligned} \right.$$

Da außer diesen wagerechten Kräften andere nicht vorhanden sind, so müssen sie unter sich im Gleichgewichte sein. Daß zwei von den drei Bedingungen hierfür erfüllt sind, lassen die Gleichungen 71) ohne weiteres erkennen; denn sie ergeben für die Summen der Kräfte in der Richtung der beiden Hauptachsen (Abb. 4) richtig:

$$T_{12} - T_{34} = 0 \text{ und } T_{23} - T_{41} = 0.$$

Um zu sehen, ob auch die Summe der Momente Null ist, wählen wir als Drehpunkt die Mitte des unteren Ringes. Dann haben  $T_{12}$  und  $T_{34}$  die Hebelarme  $\frac{1}{2}(2b + b_0)$ ,  $T_{23}$  und  $T_{34}$  die Hebelarme  $\frac{1}{2}(2a + a_0)$ . Bezeichnen wir zur Abkürzung den Klammerausdruck in  $P$  mit  $\Sigma P$ , so lautet die Momentengleichung richtig:

$$(T_{12} + T_{34}) \frac{2b + b_0}{2} \left\{ - \frac{ab(2a + a_0)(2b + b_0)}{2Fh} \Sigma P \right\} + (T_{23} + T_{34}) \frac{2a + a_0}{2} \left\{ + \frac{ba(2b + b_0)(2a + a_0)}{2Fh} \Sigma P \right\} = 0.$$

Betrachten wir nun die Gleichung 71) etwas näher, so zeigt sich, daß die  $T$  nur verschwinden, wenn  $P_1 + P_3 = P_2 + P_4$  ist. D. h. die wagerechten Lager treten außer Wirkung, wenn die Summe der Lasten, die in zwei sich schräg gegenüberliegenden oberen Ecken des Fachwerkes angreifen, ebenso

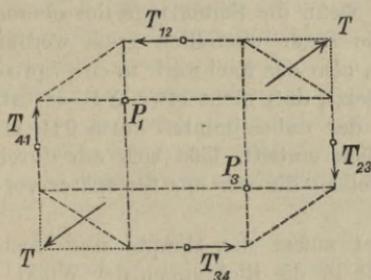


Abb. 6. Wagerechter Schub  $T$  zweier übereck angreifender Lasten.

groß ist wie die Summe der in den beiden anderen oberen Ecken vorhandenen Lasten. Diese Bedingung läßt sich in einfacher Weise veranschaulichen. Denkt man sich nämlich die Lasten durch lothrechte Strecken dargestellt, die in ihren Angriffspunkten (natürlich unter Beachtung des Vorzeichens) aufgetragen sind, so besagt der vorstehende Satz, daß die wagerechten Auflagerdrucke verschwinden, wenn die

Endpunkte der vier Strecken in einer Ebene liegen. Das Fachwerk verhält sich dann gewissermaßen wie ein Balkenträger, während es einen wagerechten Schub ausübt, also mit einem Bogenträger verglichen werden kann, wenn die angegebene Bedingung nicht erfüllt ist. Wir wollen diesen Fall etwas näher untersuchen.

Nehmen wir, um möglichst einfache Verhältnisse zu bekommen,  $P_2 = P_4 = 0$  an, so wird

$$T_{12} = T_{34} = - \frac{ab(2a + a_0)}{2Fh} (P_1 + P_3)$$

$$\text{und } T_{23} = T_{41} = \frac{ba(2b + b_0)}{2Fh} (P_1 + P_3).$$

Setzen wir  $P_1$  und  $P_3$  positiv, so haben die Gegendrucke der wagerechten Lager den in Abb. 6 angegebenen Richtungssinn. Nun

muß der wagerechte Schub des Fachwerkes auch einerseits mit der Mittelkraft aus  $T_{12}$  und  $T_{23}$ , andererseits mit der Mittelkraft aus  $T_{34}$  und  $T_{41}$  im Gleichgewicht sein. Das ist nach Abb. 6 nur möglich, wenn er durch die Schnittpunkte von  $T_{12}$  mit  $T_{23}$  und von  $T_{34}$  mit  $T_{41}$  geht. Zwei übereck angebrachte, lothrecht nach unten wirkende Kräfte erzeugen also einen wagerechten Schub nach außen in der Richtung gegen die beiden anderen Ecken.

Wir wollen jetzt annehmen, das Fachwerk sei quadratisch. Dann folgt mit  $b = a$  und  $b_0 = a_0$  aus 58)

$$F = (a + a_0)^2 - a^2 = a_0(2a + a_0),$$

und die Gleichungen 71) gehen über in

$$72) \left\{ \begin{array}{l} T_{12} = T_{34} \\ T_{23} = T_{41} \end{array} \right\} = \mp \frac{a^2}{2a_0 h} (P_1 - P_2 + P_3 - P_4).$$

Man erkennt hieraus, daß die wagerechten Auflagerdrücke wachsen, wenn  $a_0$  abnimmt, d. h. wenn die Seitenlänge des oberen Ringes kleiner wird, und daß sie sogar unendlich groß werden müßten, wenn man  $a_0 = 0$  machen, also das Fachwerk in eine Spitze auslaufen lassen wollte — vorausgesetzt, daß nicht etwa  $\Sigma P = 0$  ist; denn sonst würden sich die  $T$  in der unbestimmten Form 0:0 ergeben. Was in diesem Falle wirklich eintritt, läßt sich nur durch eine besondere Untersuchung feststellen, die wir uns für später vorbehalten.

Das quadratische Fachwerk hat außer den Hauptachsen noch zwei weitere Symmetrie-Achsen, die in die Richtungen der Winkelhalbierenden des oberen Ringes fallen. Die in den vier Eckpunkten des letzteren angebrachten Lasten  $P_1$  bis  $P_4$  haben also in Bezug auf ein solches Fachwerk eine symmetrische Lage. Man braucht daher nur noch ihre Größe passend zu wählen, um eine völlig symmetrische Belastung zu erhalten. Dies geschieht z. B., wenn man  $P_2 = P_4 = 0$  und  $P_1 = P_3$  annimmt. Es ist bemerkenswerth, daß der wagerechte Schub in diesem Falle keineswegs verschwindet, wie Gleichung 72) zeigt.

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, daß sich an diesen Ergebnissen nichts ändert, wenn man die wagerechten Lager nicht gerade in der Mitte der Fachwerkseiten annimmt, sondern sie mehr nach dem einen oder anderen senkrechten Lager hin rückt, oder auch ganz mit einem solchen zusammenfallen läßt.

## 2. Symmetrische, im übrigen allgemeine Belastung.

Dieser Fall ist besonders wichtig, weil er in der Wirklichkeit am häufigsten vorkommt. Die angreifenden Kräfte setzen sich bei Dach-

bauten in der Regel aus den Wirkungen des Eigengewichtes, der Schneelast und des Winddruckes zusammen. Das Eigengewicht ist fast immer regelmässig, auf die hier allein in Betracht kommenden oberen Knotenpunkte meist sogar gleich vertheilt. Bei dem Schnee ist das weniger sicher; man darf jedoch mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass auf allen Flächen gleicher Neigung, die ein und derselben Dachseite angehören, auch gleich viel Schnee liegen bleiben wird. Das ergibt bei einem regelmässig geformten Dach entweder unmittelbar eine symmetrische Belastung, oder doch wenigstens eine solche, die durch Vereinigung mehrerer einzelner, je für sich symmetrischer Belastungen entstanden gedacht werden kann. Das Gleiche gilt in noch höherem Grade für den Winddruck, wenn man, wie dies allgemein üblich ist, von der Reibung der Luft an der Dachhaut absieht. Wäre also z. B. von einer rechteckigen Kuppel die eine Dachseite so mit Schnee bedeckt, dass dessen Last für die Flächeneinheit in allen gleich geneigten Flächentheilen gleich gross angenommen werden könnte, wären ferner die anderen Seiten nach demselben Gesetz, aber alle in verschiedener Stärke belastet oder vielleicht auch ganz lastfrei, und käme dazu noch der Druck eines aus beliebiger Richtung wehenden Windes, so hätte man einen sehr allgemeinen Belastungszustand, der aber dennoch insofern hierher gehört, als er sich aus lauter symmetrischen Theilbelastungen zusammensetzt. Ebenso wird die Gesamtwirkung natürlich gefunden als Summe der Wirkungen aller Theile. Es genügt daher zur Klarlegung des Rechnungsganges, wenn wir nur den Einfluss einer symmetrischen Vertheilung der Lasten in Bezug auf eine Hauptachse untersuchen. Nehmen wir hierfür die  $a$ -Achse an, so müssen zwischen den Lasten die folgenden Gleichungen bestehen:

$$73) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}_4 = \mathfrak{P}_1 ; \mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_2 ; \mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_4 = -(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2) \\ \mathfrak{B}_{a4} = \mathfrak{B}_{a1} ; \mathfrak{B}_{a3} = \mathfrak{B}_{a2} ; \mathfrak{B}_{a3} - \mathfrak{B}_{a4} = -(\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2}) \\ \mathfrak{B}_{b4} = \mathfrak{B}_{b1} ; \mathfrak{B}_{b3} = \mathfrak{B}_{b2} ; \mathfrak{B}_{b3} - \mathfrak{B}_{b4} = -(\mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{b2}) \\ \mathfrak{W}_{a4} = \mathfrak{W}_{a1} ; \mathfrak{W}_{a3} = \mathfrak{W}_{a2} ; \mathfrak{W}_{a3} - \mathfrak{W}_{a4} = -(\mathfrak{W}_{a1} - \mathfrak{W}_{a2}) \\ \mathfrak{W}_{b4} = \mathfrak{W}_{b1} ; \mathfrak{W}_{b3} = \mathfrak{W}_{b2} ; \mathfrak{W}_{b3} - \mathfrak{W}_{b4} = -(\mathfrak{W}_{b1} - \mathfrak{W}_{b2}). \end{array} \right.$$

Hieraus folgt, dass die in der letzten Spalte der Tafel 62) der Diagonalspannungen stehenden Ausdrücke zur Hälfte wegfallen, und dass die übrigbleibenden paarweise entgegengesetzt gleich werden. Das erstere hat zur Folge, dass

$$74) \quad \mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{D}_{41} = 0$$

wird; das andere, dass sich für  $\mathfrak{D}_{12}$  und  $\mathfrak{D}_{34}$  entgegengesetzt gleiche Werthe ergeben. Ersetzen wir aber die Diagonale  $\mathfrak{D}_{34}$  durch eine solche, die zu  $\mathfrak{D}_{12}$  symmetrisch verläuft und die wir  $\mathfrak{D}_{43}$  nennen wollen, dann wird

$$75) \quad \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{D}_{43} = \frac{a}{2(a + a_0)}$$

$$[(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) + (\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2}) - (\mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{b2}) + 2(\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2})].$$

Statt die Diagonalspannungen in solcher Weise mit Hilfe der Tafel 62) zu berechnen, kann man auch auf die Gleichungen 57) und 59) zurückgreifen. Mit den durch 73) bestimmten Werthen der  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  folgt nämlich aus 60):

$$\mathfrak{E}_{12} = (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) + (\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2}) - (\mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{b2}) + 2(\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2})$$

$$\mathfrak{E}_{34} = -\mathfrak{E}_{12}$$

$$\mathfrak{E}_{23} = \mathfrak{E}_{41} = 0.$$

Damit ergibt sich aus 57) und 59):

$$\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{34} = \frac{a}{a + a_0} \mathfrak{E}_{12}$$

$$\mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{41} = 0.$$

$$\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{34} = 0$$

$$\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{41} = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen in Verbindung mit der vierten lehrt übereinstimmend mit 74), daß  $\mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{D}_{41} = 0$  ist. Setzt man in der ersten und dritten, wie vorher,  $-\mathfrak{D}_{43}$  an Stelle von  $\mathfrak{D}_{34}$ , so liefern beide zusammen wieder die Gleichung 75).

Mit diesen Werthen der Diagonalspannungen ergeben sich nun die übrigen Stabspannungen und die Auflagerkräfte nach den im § 4 entwickelten Regeln. Man findet (immer unter der Voraussetzung, daß die Diagonale  $\mathfrak{D}_{34}$  durch eine solche ersetzt wird, die zu  $\mathfrak{D}_{12}$  symmetrisch liegt und dann auch die gleiche Spannung hat) zunächst aus 52) und 53) die Spannungen im oberen Ringe:

$$76) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{D}_{43} = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{B}_{a1} + \mathfrak{B}_{b1} - 2\mathfrak{B}_{a1}) \\ \mathfrak{D}_{23} = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{B}_{b2} + \mathfrak{B}_{a2} - 2\mathfrak{B}_{b2}) \\ \mathfrak{D}_{41} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{B}_{b1} + \mathfrak{B}_{a1} - 2\mathfrak{B}_{b1}). \end{cases}$$

Durch die Vertauschung der Diagonale  $\mathfrak{D}_{34}$  mit  $\mathfrak{D}_{43}$  ändern sich die Spannungen in den das betreffende Fach umrahmenden Stäben, also besonders auch in dem zugehörigen Stabe des oberen Ringes. Um hierauf hinzuweisen, ist in vorstehenden Gleichungen  $\mathfrak{D}_{43}$  an Stelle von  $\mathfrak{D}_{34}$  gesetzt.

Aus 63) folgt ferner für die Spannungen der Eckstäbe des unteren Ringes:

$$77) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_4 = \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{b1}) \\ \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_3 = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{a2}). \end{cases}$$

Weiter ergeben sich aus 64) und 65) die Spannungen in den Rippen:

$$78) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_4 = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{B}_{a1} + \mathfrak{B}_{b1}) \\ \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_4 = \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{B}_{b1} + \mathfrak{B}_{a1}) \\ \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{B}_{a2} + \mathfrak{B}_{b2}) \\ \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3 = \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{B}_{b2} + \mathfrak{B}_{a2}). \end{cases}$$

Hiermit findet man die lothrechten Auflagerdrücke aus 66):

$$79) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_I = \mathfrak{A}_{IV} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{b1}) \\ \mathfrak{B}_I = \mathfrak{B}_{IV} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{a1}) \\ \mathfrak{A}_{II} = \mathfrak{A}_{III} = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{B}_{a2} - \mathfrak{B}_{b2}) \\ \mathfrak{B}_{II} = \mathfrak{B}_{III} = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{a2}). \end{cases}$$

Die Gleichungen 68) liefern die Spannungen in den mittleren Stäben des unteren Ringes:

$$80) \quad \begin{cases} \mathfrak{u}_{21} = \mathfrak{u}_{23} = \mathfrak{C}_2 \\ = \mathfrak{u}_{32} = \mathfrak{u}_{34} = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{B}_{b2} - \mathfrak{B}_{a2}) \\ \mathfrak{u}_{14} = \mathfrak{u}_{41} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{b1}) = \mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{u}_{12} = \mathfrak{u}_{43} = \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(-\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{b1}) \\ -\frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} \end{array} \right]. \end{cases}$$

Endlich ergeben sich die wagerechten Auflagerdrücke aus 70) zu

$$81) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{12} = -T_{34} = -\mathfrak{B}_{a1} + \mathfrak{B}_{a2} - \mathfrak{B}_{b1} + \mathfrak{B}_{b2} \\ \text{und } T_{23} = T_{41} = 0, \end{array} \right.$$

was mit dem vorher aus 71) abgeleiteten Satze übereinstimmt, nach welchem die lothrechten Lasten keinen wagerechten Auflagerdruck hervorrufen, wenn  $P_1 - P_2 + P_3 - P_4$  verschwindet. Da dies bei der jetzt angenommenen symmetrischen Belastung der Fall ist, so müssen die wagerechten Auflagerdrücke den wagerechten in der Richtung der Symmetrie-Achse auf das Fachwerk wirkenden äußeren Kräften das Gleichgewicht halten, rechtwinklig dazu aber Null sein.

Hiermit sind alle Stabspannungen und Auflagerkräfte bestimmt. Die so gefundenen Formeln sind bei der Berechnung des Kuppeldaches für das Reichstagshaus benutzt worden.

### 3. Sonderung der Lasten. Eigengewicht und Winddruck.

Zur Bestimmung der größten Werthe, die die Stab- und Auflagerkräfte annehmen können, sind die einzelnen Lastentheile nach

ihrer Herkunft zu sondern, womit man nebenbei noch den Vortheil einer leichteren Uebersicht gewinnt. Wir trennen jetzt deshalb die Lasten in solche, die vom Eigengewicht herrühren, und in solche, die durch den Winddruck erzeugt werden.

Die Eigengewichtslasten sind in der Regel für alle vier Knotenpunkte des oberen Ringes gleich groß. Wir nennen sie  $G$  und setzen (im Sinne der abgekürzten Bezeichnungsweise, die wir mit 42) bis 45) eingeführt und bisher durchweg angewendet haben):

$$82) \quad \frac{G}{h} = \mathfrak{G}.$$

Dann ist in obigen Gleichungen

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{G},$$

während alle übrigen äußeren Kräfte Null sind. Hiermit ergeben sich die Diagonalspannungen

$$83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{D}_{34} = \mathfrak{D}_{41} = 0; \\ \text{die Spannungen im oberen Ring:} \\ \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{D}_{34} = \mathfrak{D}_{41} = -\frac{1}{2} \mathfrak{G}; \\ \text{die Spannungen der Eckstäbe des unteren Ringes:} \\ \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_4 = \frac{1}{2} \mathfrak{G}; \\ \text{die Spannungen der Rippen:} \\ \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_4 \\ = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_4 \quad \left. \vphantom{\mathfrak{A}_1} \right\} = -\frac{1}{2} \mathfrak{G}; \\ \text{die lothrechten Auflagerdrücke:} \\ \mathfrak{A}_I = \mathfrak{A}_{II} = \mathfrak{A}_{III} = \mathfrak{A}_{IV} \\ = \mathfrak{B}_I = \mathfrak{B}_{II} = \mathfrak{B}_{III} = \mathfrak{B}_{IV} \quad \left. \vphantom{\mathfrak{A}_I} \right\} = \frac{1}{2} \mathfrak{G}; \\ \text{die Spannungen in den mittleren Stäben des unteren Ringes:} \\ \mathfrak{U}_{12} = \mathfrak{U}_{23} = \mathfrak{U}_{34} = \mathfrak{U}_{41} \\ = \mathfrak{U}_{21} = \mathfrak{U}_{32} = \mathfrak{U}_{43} = \mathfrak{U}_{14} \quad \left. \vphantom{\mathfrak{U}_{12}} \right\} = \frac{1}{2} \mathfrak{G}; \\ \text{die wagerechten Auflagerdrücke:} \\ \mathfrak{T}_{12} = \mathfrak{T}_{23} = \mathfrak{T}_{34} = \mathfrak{T}_{41} = 0. \end{array} \right.$$

Diese äußerst einfachen Ergebnisse hätten sich auch leicht unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen ableiten lassen.

Von dem Winddruck wollen wir annehmen, daß er nur auf die linke Seite des Fachwerkes, also in der Richtung der  $a$ -Achse wirke. Dann haben wir als wagerechte Knotenpunktlasten nur  $V_{a1}$  am unteren,  $W_{a1}$  am oberen Ring. Trägt letzterer irgend einen Aufbau, wie z. B. eine Laterne, so ist der entsprechende wagerechte Druck in  $W_{a1}$  mit einzurechnen. Außerdem kann aber durch diesen Druck auch ein Kippmoment hervorgerufen werden, das den vorderen

Knotenpunkt entlastet, den hinteren belastet. Die hieraus entspringenden lothrechten Kräfte in Verbindung mit dem lothrechten Antheil des Winddruckes auf die vordere Dachfläche denken wir uns zu den beiden bisher mit  $P_1$  und  $P_2$  bezeichneten Lasten zusammengefaßt. In Abb. 7 ist dieser Zustand dargestellt. Um die ihm entsprechenden Stabspannungen und Auflagerkräfte möglichst einfach ausdrücken zu können, benutzen wir wieder einige Abkürzungen, indem wir die nur von den Grundriffsmaßen  $a$  und  $a_0$  abhängigen Verhältniszahlen

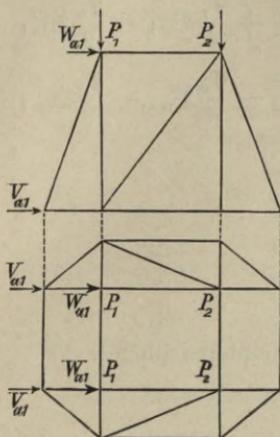


Abb. 7. Wirkungsweise des Winddruckes.

$$84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a + 2a_0}{a + a_0} = \varphi_1 \\ \frac{3a + 2a_0}{a + a_0} = \varphi_2 \\ \frac{3a + 4a_0}{a + a_0} = \varphi_3, \end{array} \right.$$

$$\text{und wie in 61)} \quad \frac{a}{a + a_0} = \varphi_a$$

setzen. Hiermit ergeben sich die Diagonalspannungen:

$$85) \quad \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{D}_{43} = \frac{\varphi_a}{2} \mathfrak{P}_1 - \frac{\varphi_a}{2} \mathfrak{P}_2 + \frac{\varphi_a}{2} \mathfrak{B}_{a1} + \varphi_a \mathfrak{B}_{a1};$$

die Spannungen im oberen Ring:

$$86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{D}_{43} = -\frac{\varphi_1}{4} \mathfrak{P}_1 - \frac{\varphi_a}{4} \mathfrak{P}_2 - \frac{\varphi_1}{4} \mathfrak{B}_{a1} - \frac{\varphi_1}{2} \mathfrak{B}_{a1} \\ \mathfrak{D}_{23} = \frac{\varphi_a}{4} \mathfrak{P}_1 - \frac{\varphi_2}{4} \mathfrak{P}_2 + \frac{\varphi_a}{4} \mathfrak{B}_{a1} + \frac{\varphi_a}{2} \mathfrak{B}_{a1} \\ \mathfrak{D}_{41} = -\frac{\varphi_2}{4} \mathfrak{P}_1 + \frac{\varphi_a}{4} \mathfrak{P}_2 + \frac{\varphi_1}{4} \mathfrak{B}_{a1} - \frac{\varphi_a}{2} \mathfrak{B}_{a1}; \end{array} \right.$$

die Spannungen in den Eckstäben des unteren Ringes:

$$87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_4 = \frac{\varphi_1}{4} \mathfrak{P}_1 + \frac{\varphi_a}{4} \mathfrak{P}_2 - \frac{\varphi_2}{4} \mathfrak{B}_{a1} - \frac{\varphi_a}{2} \mathfrak{B}_{a1} \\ \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 = \frac{\varphi_a}{4} \mathfrak{P}_1 + \frac{\varphi_1}{4} \mathfrak{P}_2 + \frac{\varphi_a}{4} \mathfrak{B}_{a1} + \frac{\varphi_a}{2} \mathfrak{B}_{a1}; \end{array} \right.$$

die Spannungen in den Rippen:

$$88) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_4 = -\frac{\mathcal{P}_1}{4} \mathfrak{P}_1 - \frac{\mathcal{P}_a}{4} \mathfrak{P}_2 - \frac{\mathcal{P}_1}{4} \mathfrak{B}_{a1} + \frac{\mathcal{P}_a}{2} \mathfrak{B}_{a1} \\ \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_4 = -\frac{\mathcal{P}_2}{4} \mathfrak{P}_1 + \frac{\mathcal{P}_a}{4} \mathfrak{P}_2 + \frac{\mathcal{P}_1}{4} \mathfrak{B}_{a1} - \frac{\mathcal{P}_a}{2} \mathfrak{B}_{a1} \\ \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = -\frac{\mathcal{P}_a}{4} \mathfrak{P}_1 - \frac{\mathcal{P}_1}{4} \mathfrak{P}_2 - \frac{\mathcal{P}_a}{4} \mathfrak{B}_{a1} - \frac{\mathcal{P}_a}{2} \mathfrak{B}_{a1} \\ = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3 = -\mathfrak{C}_2; \end{array} \right.$$

die lothrechten Auflagerdrücke:

$$89) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_I = \mathfrak{A}_{IV} = -\mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_{II} = \mathfrak{A}_{III} = -\mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{B}_{II} = \mathfrak{B}_{III} = -\mathfrak{B}_2 \\ \mathfrak{B}_I = \mathfrak{B}_{IV} = \mathfrak{C}_1; \end{array} \right.$$

die Spannungen in den mittleren Stäben des unteren Ringes:

$$90) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_{21} = \mathfrak{U}_{23} = \mathfrak{C}_2 \\ = \mathfrak{U}_{32} = \mathfrak{U}_{34} = \mathfrak{C}_3 \\ \mathfrak{U}_{14} = \mathfrak{U}_{41} = \mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{U}_{12} = \mathfrak{U}_{43} = \frac{\mathcal{P}_a}{4} \mathfrak{P}_1 + \frac{\mathcal{P}_1}{4} \mathfrak{P}_2 - \frac{\mathcal{P}_3}{4} \mathfrak{B}_{a1} - \frac{\mathcal{P}_1}{2} \mathfrak{B}_{a1}; \end{array} \right.$$

Die wagerechten Auflagerdrücke:

$$91) \quad T_{12} = -T_{34} = -\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a1}.$$

Hiernach läßt sich nun der Einfluß jeder einzelnen lothrechten oder wagerechten Last unmittelbar berechnen. Daß man dazu nur der vier Beiwerte  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$  und  $\mathcal{P}_a$  bedarf, von denen überdies der dritte nur einmal vorkommt, ist ein augenscheinlicher Beweis für die große Einfachheit der Kräftevertheilung in dem betrachteten Raumfachwerk.

### § 6. Zahlenbeispiele.

Die gewonnenen Ergebnisse sollen jetzt durch einige Zahlenbeispiele veranschaulicht werden. Wir wählen dazu absichtlich eine vom Quadrat stark abweichende Anordnung und berechnen hierfür die den wichtigsten Belastungsfällen entsprechenden Spannungen und Auflagerdrücke.

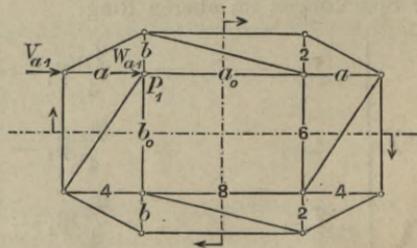


Abb. 8. Grundrissanordnung des zu den Zahlenbeispielen benutzten Fachwerkes.

Das Fachwerk möge den in Abb. 8 dargestellten Grundrifs haben.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist} \quad a &= 4; & b &= 2 \\ a_o &= 8; & b_o &= 6 \\ a + a_o &= 12; & b + b_o &= 8 \\ ab &= 8 = ba \\ ab_o &= 24 \text{ und } ba_o = 16. \end{aligned}$$

Die durch 58) und 61) bestimmten Hilfsgrößen werden

$$F = (a + a_o)(b + b_o) - ab = 88$$

$$\varphi_a = \frac{a}{a + a_o} = \frac{1}{3} = \frac{44}{132}; \quad \varphi_b = \frac{b}{b + b_o} = \frac{1}{4} = \frac{33}{132}$$

$$\varphi_{ab} = \frac{ab}{F} = \frac{1}{11} = \frac{12}{132};$$

$$\varphi_{b_o} = \frac{ab_o}{F} = \frac{3}{11} = \frac{36}{132}; \quad \varphi_{a_o} = \frac{ba_o}{F} = \frac{2}{11} = \frac{24}{132}.$$

Nunmehr ist die Art der Belastung festzusetzen.

#### 1. Nur eine lothrechte Last $P_1$ (s. Abb. 4 u. 8).

Aus Tafel 62) ergeben sich mit vorstehenden Zahlenwerthen und mit Rücksicht auf 42) bis 45) die Diagonalspannungen:

$$\frac{D_{12}}{d_b} = \mathfrak{D}_{12} = \frac{44 + 24 + 36}{132} \frac{\mathfrak{F}_1}{4} = \frac{104}{132} \frac{P_1}{4h}$$

$$\frac{D_{23}}{d_a} = \mathfrak{D}_{23} = - \frac{-33 + 24 + 24}{132} \frac{\mathfrak{F}_1}{4} = - \frac{15}{132} \frac{P_1}{4h}$$

$$\frac{D_{34}}{d_b} = \mathfrak{D}_{34} = \frac{-44 + 24 + 36}{132} \frac{\mathfrak{F}_1}{4} = \frac{16}{132} \frac{P_1}{4h}$$

$$\frac{D_{41}}{d_a} = \mathfrak{D}_{41} = - \frac{33 + 24 + 24}{132} \frac{\mathfrak{F}_1}{4} = - \frac{81}{132} \frac{P_1}{4h}$$

Die Hilfsgrößen  $\mathfrak{D}$  in 52) sind Null bis auf  $\mathfrak{D}_1 = -\mathfrak{F}_1$ . Hiermit und mit den vorstehenden Werthen der  $\mathfrak{D}$  ergeben sich aus 53) die Spannungen im oberen Ring:

$$\frac{O_{12}}{a} = \mathfrak{D}_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{104 - 81}{132} - \frac{528}{132} \right) \frac{P_1}{4h} = - \frac{505}{132} \frac{P_1}{8h}$$

$$\frac{O_{23}}{b} = \mathfrak{D}_{23} = \frac{1}{2} \left( - \frac{15 + 104}{132} + 0 \right) \frac{P_1}{4h} = \frac{89}{132} \frac{P_1}{8h}$$

$$\frac{O_{34}}{a} = \mathfrak{D}_{34} = \frac{1}{2} \left( - \frac{16 - 15}{132} + 0 \right) \frac{P_1}{4h} = \frac{1}{132} \frac{P_1}{8h}$$

$$\frac{O_{41}}{b} = \mathfrak{D}_{41} = \frac{1}{2} \left( - \frac{81 + 16}{132} + 0 \right) \frac{P_1}{4h} = - \frac{65}{132} \frac{P_1}{8h}$$

Die Spannungen in den Eckstäben des unteren Ringes werden jetzt am bequemsten aus 51) berechnet, worin die  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  bei der hier angenommenen Belastung Null sind. Man findet

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{c} = \mathfrak{C}_1 &= \frac{-162 + 505}{132} \frac{P_1}{8h} = \frac{343}{132} \frac{P_1}{8h} = \mathfrak{u}_{14} = \frac{U_{14}}{b} \\ \frac{C_2}{c} = \mathfrak{C}_2 &= \frac{208 - 89}{132} \frac{P_1}{8h} = \frac{119}{132} \frac{P_1}{8h} = \mathfrak{u}_{21} = \frac{U_{21}}{a} \\ \frac{C_3}{c} = \mathfrak{C}_3 &= \frac{-30 - 1}{132} \frac{P_1}{8h} = -\frac{31}{132} \frac{P_1}{8h} = \mathfrak{u}_{32} = \frac{U_{32}}{b} \\ \frac{C_4}{c} = \mathfrak{C}_4 &= \frac{32 + 65}{132} \frac{P_1}{8h} = \frac{97}{132} \frac{P_1}{8h} = \mathfrak{u}_{43} = \frac{U_{43}}{a} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen ergeben nach 68) auch die Werthe der auf der rechten Seite stehenden vier Spannungen in den mittleren Stäben des unteren Ringes. Die vier übrigen finden sich mit  $a_0 : a = 2$  und  $b_0 : b = 3$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{U_{12}}{a} = \mathfrak{u}_{12} &= \frac{343 - 2 \cdot 208}{132} \frac{P_1}{8h} = -\frac{73}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{U_{23}}{b} = \mathfrak{u}_{23} &= \frac{119 + 3 \cdot 30}{132} \frac{P_1}{8h} = \frac{209}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{U_{34}}{a} = \mathfrak{u}_{34} &= \frac{-31 - 2 \cdot 32}{132} \frac{P_1}{8h} = -\frac{95}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{U_{41}}{b} = \mathfrak{u}_{41} &= \frac{97 + 3 \cdot 162}{132} \frac{P_1}{8h} = \frac{583}{132} \frac{P_1}{8h} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Spannungen in den Rippen werden am besten die Gleichungen 46) oder 66) benutzt, in denen die  $\mathfrak{B}$  bei der hier angenommenen Belastung verschwinden. Man findet mit Rücksicht auf 42):

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{s_a} = \mathfrak{A}_1 &= -\mathfrak{C}_1 = -\frac{343}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{B_2}{s_b} = \mathfrak{B}_2 &= -\mathfrak{C}_2 = -\frac{119}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{A_3}{s_a} = \mathfrak{A}_3 &= -\mathfrak{C}_3 = \frac{31}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{B_4}{s_b} = \mathfrak{B}_4 &= -\mathfrak{C}_4 = -\frac{97}{132} \frac{P_1}{8h} \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{s_b} = \mathfrak{B}_1 &= \frac{-343 - 208}{132} \frac{P_1}{8h} = -\frac{551}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{A_2}{s_a} = \mathfrak{A}_2 &= \frac{-119 + 30}{132} \frac{P_1}{8h} = -\frac{89}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{B_3}{s_b} = \mathfrak{B}_3 &= \frac{31 - 32}{132} \frac{P_1}{8h} = -\frac{1}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{A_4}{s_a} = \mathfrak{A}_4 &= \frac{-97 + 162}{132} \frac{P_1}{8h} = \frac{65}{132} \frac{P_1}{8h}. \end{aligned}$$

Die lothrechten Auflagerdrücke sind nach 44) und 66) aus den schon berechneten  $\mathfrak{C}$  zu ermitteln. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{A_I}{h} = \frac{B_I}{h} = \mathfrak{A}_I = \mathfrak{B}_I = \mathfrak{C}_1 &= \frac{343}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{A_{II}}{h} = \frac{B_{II}}{h} = \mathfrak{A}_{II} = \mathfrak{B}_{II} = \mathfrak{C}_2 &= \frac{119}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{A_{III}}{h} = \frac{B_{III}}{h} = \mathfrak{A}_{III} = \mathfrak{B}_{III} = \mathfrak{C}_3 &= -\frac{31}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{A_{IV}}{h} = \frac{B_{IV}}{h} = \mathfrak{A}_{IV} = \mathfrak{B}_{IV} = \mathfrak{C}_4 &= \frac{97}{132} \frac{P_1}{8h}. \end{aligned}$$

Die wagerechten Auflagerdrücke ergeben sich mit den zuvor gefundenen  $\mathfrak{H}$  aus 43) und 69):

$$\begin{aligned} \frac{T_{12}}{a} = \mathfrak{T}_{12} &= \frac{-73 - 119}{132} \frac{P_1}{8h} = -\frac{192}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{T_{23}}{b} = \mathfrak{T}_{23} &= \frac{209 + 31}{132} \frac{P_1}{8h} = \frac{240}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{T_{34}}{a} = \mathfrak{T}_{34} &= \frac{-95 - 97}{132} \frac{P_1}{8h} = -\frac{192}{132} \frac{P_1}{8h} \\ \frac{T_{41}}{b} = \mathfrak{T}_{41} &= \frac{583 - 343}{132} \frac{P_1}{8h} = \frac{240}{132} \frac{P_1}{8h}. \end{aligned}$$

Hiermit haben wir alle Stabspannungen und Auflagerkräfte so weit bestimmt, daß ihre Zahlenwerthe mit Leichtigkeit berechnet werden können, wenn die bisher noch allgemein gelassenen Größen  $h$  und  $P_1$ , d. h. die Höhe des Fachwerkes und die lothrechte Last im Knotenpunkte 1, in Zahlen gegeben sind. Als Probe für die ganze Rechnung sollen die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen

der Last  $P_1$  und den Auflagerkräften dienen. Die Summe der lothrechten Gegendrücke ist nach obigem richtig

$$2 \frac{343 + 119 - 31 + 97}{132} \frac{P_1}{8} = P_1.$$

Dafs die Summe der wagerechten Kräfte für beide Achsenrichtungen Null ist, erkennt man aus den gefundenen Werthen ohne weiteres, wenn man beachtet, dafs  $T_{12}$  und  $T_{34}$  sowie  $T_{23}$  und  $T_{41}$  nach der Annahme in Abbildung 4 in entgegengesetzter Richtung positiv gerechnet worden sind. Es bleibt daher nur noch die Momentenbedingung übrig. Das Moment für die lothrechte Mittelachse ist allgemein

$$(T_{12} + T_{34}) \frac{2b + b_0}{2} + (T_{23} + T_{41}) \frac{2a + a_0}{2},$$

d. h. im vorliegenden Falle

$$\left[ \frac{-4 \cdot 2 \cdot 192}{132} \frac{10}{2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 240}{132} \frac{16}{2} \right] \frac{P_1}{8h}$$

$$= -\frac{7680}{132} + \frac{7680}{132} = 0.$$

Auch diese Probe stimmt also.

An den Ergebnissen des vorliegenden Zahlenbeispiels ist bemerkenswerth, dafs im oberen Ringe keineswegs durchweg Druckspannungen herrschen, wie man von vornherein vermuthen könnte, sondern dafs vielmehr die beiden Stäbe, die die unbelasteten Knotenpunkte verbinden, auf Zug beansprucht sind; ähnlich bei den Rippen- $A_3$  und  $A_4$ . Bei den Unterringspannungen  $C_3$ ,  $U_{12}$ ,  $U_{32}$  und  $U_{34}$ , tritt die entgegengesetzte Erscheinung hervor, dafs diese Theile Druck erliden. Am meisten fallen aber die negativen Auflagerdrücke  $A_{III}$  und  $B_{III}$  ins Auge. Zur Erleichterung der Uebersicht sind die Vorzeichen sämtlicher Kräfte in die Grundriffszeichnung Abbildung 9 an ihren Stellen eingetragen.

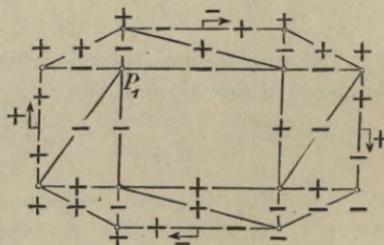


Abb. 9. Vorzeichen der Stabspannungen und Auflagerkräfte bei Belastung mit  $P_1$ .

2. Nur eine wagerechte Kraft  $V_{a1}$  am unteren Ring (s. Abb. 4 u. 8).

Aus Tafel 62) ergeben sich für diesen Fall mit den obigen Zahlenwerthen der Hilfsgrößen  $\varphi$  die Diagonalspannungen:

$$\begin{aligned} \frac{D_{12}}{d_b} = \mathfrak{D}_{12} &= \frac{44 + 36 \mathfrak{B}_{a1}}{132 \cdot 4} = \frac{80}{132} \frac{V_{a1}}{16} \\ \frac{D_{23}}{d_a} = \mathfrak{D}_{23} &= - \frac{33 - 24 \mathfrak{B}_{a1}}{132 \cdot 4} = - \frac{9}{132} \frac{V_{a1}}{16} \\ \frac{D_{34}}{d_b} = \mathfrak{D}_{34} &= \frac{-44 + 36 \mathfrak{B}_{a1}}{132 \cdot 4} = - \frac{8}{132} \frac{V_{a1}}{16} \\ \frac{D_{41}}{d_a} = \mathfrak{D}_{41} &= - \frac{-33 - 24 \mathfrak{B}_{a1}}{132 \cdot 4} = \frac{57}{132} \frac{V_{a1}}{16}. \end{aligned}$$

Es kommt dabei in Betracht, daß nach 45)  $\mathfrak{B}_{a1} = V_{a1} : a$ , und daß im vorliegenden Falle  $a = 4$  angenommen ist. Die Größen  $\mathfrak{D}$  in 52) sind wiederum Null bis auf  $\mathfrak{D}_1 = -\mathfrak{B}_{a1}$ . Damit ergeben sich nach 53) die Spannungen im oberen Ring:

$$\begin{aligned} \frac{O_{12}}{a} = \mathfrak{D}_{12} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{80 + 57}{132} - \frac{528}{132} \right) \frac{V_{a1}}{16} = - \frac{391}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{O_{23}}{b} = \mathfrak{D}_{23} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{9 + 80}{132} + 0 \right) \frac{V_{a1}}{16} = \frac{71}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{O_{34}}{a} = \mathfrak{D}_{34} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{8 - 9}{132} + 0 \right) \frac{V_{a1}}{16} = - \frac{17}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{O_{41}}{b} = \mathfrak{D}_{41} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{57 - 8}{132} + 0 \right) \frac{V_{a1}}{16} = \frac{49}{132} \frac{V_{a1}}{32}. \end{aligned}$$

In 51) sind die  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  Null bis auf  $\mathfrak{B}_{a1} = V_{a1} : 4$ . Die Spannungen in den Eckstäben des unteren Ringes werden daher:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{c} = \mathfrak{C}_1 &= \left( \frac{114 + 391}{132} - \frac{1056}{132} \right) \frac{V_{a1}}{32} = - \frac{551}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \mathfrak{U}_{14} = \frac{U_{14}}{b} \\ \frac{C_2}{c} = \mathfrak{C}_2 &= \left( \frac{160 - 71}{132} + 0 \right) \frac{V_{a1}}{32} = \frac{89}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \mathfrak{U}_{21} = \frac{U_{21}}{a} \\ \frac{C_3}{c} = \mathfrak{C}_3 &= \left( \frac{-18 + 17}{132} + 0 \right) \frac{V_{a1}}{32} = - \frac{1}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \mathfrak{U}_{32} = \frac{U_{32}}{b} \\ \frac{C_4}{c} = \mathfrak{C}_4 &= \left( \frac{-16 - 49}{132} + 0 \right) \frac{V_{a1}}{32} = - \frac{65}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \mathfrak{U}_{43} = \frac{U_{43}}{a}. \end{aligned}$$

Auch hier haben wir die aus 68) folgenden vier Werthe der Spannungen in den mittleren Stäben des unteren Ringes auf der rechten Seite hinzugefügt. Für die übrigen vier Ringspannungen findet man mit  $a_0 : a = 2$  und  $b_0 : b = 3$  aus jenen Gleichungen die Werthe:

$$\begin{aligned} \frac{U_{12}}{a} = \mathfrak{U}_{12} &= \frac{-551 - 2 \cdot 160}{132} \frac{V_{a1}}{32} = -\frac{871}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{U_{23}}{b} = \mathfrak{U}_{23} &= \frac{89 + 3 \cdot 18}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{143}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{U_{34}}{a} = \mathfrak{U}_{34} &= \frac{-1 + 2 \cdot 16}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{31}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{U_{41}}{b} = \mathfrak{U}_{41} &= \frac{-65 - 3 \cdot 114}{132} \frac{V_{a1}}{32} = -\frac{407}{132} \frac{V_{a1}}{32}. \end{aligned}$$

In den Gleichungen 46) sind alle  $\mathfrak{B}$ , außer  $\mathfrak{B}_{a1} = V_{a1} : 4$ , Null. Man erhält die Spannungen in den Rippen wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{s_a} = \mathfrak{A}_1 &= \left( \frac{551}{132} - \frac{1056}{132} \right) \frac{V_{a1}}{32} = -\frac{505}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{B_2}{s_b} = \mathfrak{B}_2 &= -\mathfrak{C}_2 = -\frac{89}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{A_3}{s_a} = \mathfrak{A}_3 &= -\mathfrak{C}_3 = \frac{1}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{B_4}{s_b} = \mathfrak{B}_4 &= -\mathfrak{C}_4 = \frac{65}{132} \frac{V_{a1}}{32}. \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{s_b} = \mathfrak{B}_1 &= \frac{551 - 160}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{391}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{A_2}{s_a} = \mathfrak{A}_2 &= \frac{-89 + 18}{132} \frac{V_{a1}}{32} = -\frac{71}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{B_3}{s_b} = \mathfrak{B}_3 &= \frac{1 + 16}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{17}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{A_4}{s_a} = \mathfrak{A}_4 &= \frac{65 - 114}{132} \frac{V_{a1}}{32} = -\frac{49}{132} \frac{V_{a1}}{32}. \end{aligned}$$

Die lothrechten Auflagerdrücke sind nach 66) zur Hälfte den Rippenspannungen entgegengesetzt gleich, zur Hälfte stimmen ihre Werthe mit denen der  $\mathfrak{C}$  überein. Man findet daher:

$$\begin{aligned} \frac{A_I}{h} = \mathfrak{A}_I = -\mathfrak{A}_1 &= \frac{505}{132} \frac{V_{a1}}{32}; \quad \frac{B_I}{h} = \mathfrak{B}_I = \mathfrak{C}_1 = -\frac{551}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{B_{II}}{h} = \mathfrak{B}_{II} = -\mathfrak{B}_2 &= \frac{89}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{A_{II}}{h} = \mathfrak{A}_{II} = \mathfrak{C}_2 = \frac{89}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{A_{III}}{h} = \mathfrak{A}_{III} = -\mathfrak{A}_3 &= -\frac{1}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{B_{III}}{h} = \mathfrak{B}_{III} = \mathfrak{C}_3 = -\frac{1}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{B_{IV}}{h} = \mathfrak{B}_{IV} = -\mathfrak{B}_4 &= -\frac{65}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{A_{IV}}{h} = \mathfrak{A}_{IV} = \mathfrak{C}_4 = -\frac{65}{132} \frac{V_{a1}}{32}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 69) liefern mit den für die II gefundenen Werthen die wagerechten Auflagerdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{T_{12}}{a} = \mathfrak{T}_{12} &= \frac{-871 - 89}{132} \frac{V_{a1}}{32} = - \frac{960}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{T_{23}}{b} = \mathfrak{T}_{23} &= \frac{143 + 1}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{144}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{T_{34}}{a} = \mathfrak{T}_{34} &= \frac{31 + 65}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{96}{132} \frac{V_{a1}}{32} \\ \frac{T_{41}}{b} = \mathfrak{T}_{41} &= \frac{-407 + 551}{132} \frac{V_{a1}}{32} = \frac{144}{132} \frac{V_{a1}}{32} \end{aligned}$$

Hiermit sind auch die durch die wagerechte Last  $V_{a1}$  hervorgerufenen Stabspannungen und Auflagerkräfte sämtlich bestimmt. Die mit letzteren anzustellende Probe ergibt für die lothrechte Richtung die Kraftsumme

$$505 - 501 + 2(89 - 1 - 65) = 0.$$

Für die Richtung der  $b$ -Achse ist die Kraftsumme  $T_{23} - T_{41}$  offenbar ebenfalls Null. Für die  $a$ -Achse lautet die Summengleichung nach Abb. 4 mit obigen Werthen der  $T$  (da  $a = 4$  ist):

$$\begin{aligned} &V_{a1} + T_{12} - T_{34} \\ &= \left( 1 - \frac{960 + 96}{132 \cdot 8} \right) V_{a1} = 0. \end{aligned}$$

Das Moment für die lothrechte Mittelachse ist mit  $a = 4$  und  $b = 2$ :

$$\begin{aligned} &V_{a1} \cdot 3 + (T_{12} + T_{34}) 5 + (T_{23} + T_{41}) 8 \\ &= V_{a1} \left[ 3 + \frac{-960 + 96}{132 \cdot 8} 5 + \frac{144 + 144}{132 \cdot 16} 8 \right] = 0. \end{aligned}$$

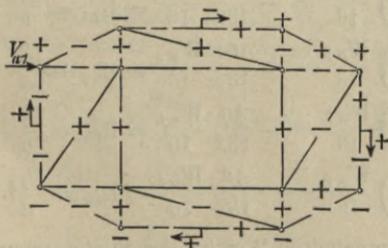


Abb. 10. Vorzeichen der Stabspannungen und Auflagerkräfte bei Belastung mit  $V_{a1}$ .

Es sind also alle vier Auflagerbedingungen richtig erfüllt.

Bemerkenswerth ist, daß zwei Oberringstäbe und fünf Auflager Zug erhalten, während drei von den vier Eckstäben und fünf von den acht Mittelstäben des unteren Ringes auf Druck beansprucht sind. In Abb. 10 sind die Vorzeichen aller Stabspannungen und Auflagerkräfte wiederum zusammengestellt.

3. Nur eine wagerechte Kraft  $W_{a1}$  am oberen Ring  
(s. Abb. 4 u. 8).

In derselben Weise wie früher finden wir aus Tafel 62) die Diagonalspannungen:

$$\begin{aligned} \frac{D_{12}}{d_b} = \mathfrak{D}_{12} &= \frac{44 + 12 + 36}{132} \frac{\mathfrak{B}_{a1}}{2} = \frac{92}{132} \frac{W_{a1}}{8} \\ \frac{D_{23}}{d_a} = \mathfrak{D}_{23} &= - \frac{12}{132} \frac{\mathfrak{B}_{a1}}{2} = - \frac{12}{132} \frac{W_{a1}}{8} \\ \frac{D_{34}}{d_b} = \mathfrak{D}_{34} &= \frac{-44 + 12 + 36}{132} \frac{\mathfrak{B}_{a1}}{2} = \frac{4}{132} \frac{W_{a1}}{8} \\ \frac{D_{41}}{d_a} = \mathfrak{D}_{41} &= - \frac{12}{132} \frac{\mathfrak{B}_{a1}}{2} = - \frac{12}{132} \frac{W_{a1}}{8}. \end{aligned}$$

Hierin ist nach 45)  $\mathfrak{B}_{a1} = W_{a1} : a = W_{a1} : 4$ . In 52) sind die Größen  $\mathfrak{D}$  Null bis auf  $\mathfrak{D}_{12} = -2\mathfrak{B}_{a1} = -W_{a1} : 2$ . Damit erhält man aus 53) die Spannungen im oberen Ring:

$$\begin{aligned} \frac{O_{12}}{a} = \mathfrak{D}_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{92 - 12}{132} - \frac{528}{132} \right) \frac{W_{a1}}{8} = - \frac{448}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{O_{23}}{b} = \mathfrak{D}_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{-12 + 92}{132} + 0 \right) \frac{W_{a1}}{8} = \frac{80}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{O_{34}}{a} = \mathfrak{D}_{34} &= \frac{1}{2} \left( \frac{4 - 12}{132} + 0 \right) \frac{W_{a1}}{8} = - \frac{8}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{O_{41}}{b} = \mathfrak{D}_{41} &= \frac{1}{2} \left( \frac{-12 + 4}{132} + 0 \right) \frac{W_{a1}}{8} = - \frac{8}{132} \frac{W_{a1}}{16}. \end{aligned}$$

In 51) verschwinden die Größen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  mit Ausnahme von  $\mathfrak{B}_{a1} = W_{a1} : 4$ . Die Spannungen in den Eckstäben des unteren Ringes ergeben sich demgemäß wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{c} = \mathfrak{C}_1 &= \left( \frac{-24 + 448}{132} - \frac{528}{132} \right) \frac{W_{a1}}{16} = - \frac{104}{132} \frac{W_{a1}}{16} = \mathfrak{U}_{14} = \frac{U_{14}}{b} \\ \frac{C_2}{c} = \mathfrak{C}_2 &= \left( \frac{184 - 80}{132} + 0 \right) \frac{W_{a1}}{16} = \frac{104}{132} \frac{W_{a1}}{16} = \mathfrak{U}_{21} = \frac{U_{21}}{a} \\ \frac{C_3}{c} = \mathfrak{C}_3 &= \left( \frac{-24 + 8}{132} + 0 \right) \frac{W_{a1}}{16} = - \frac{16}{132} \frac{W_{a1}}{16} = \mathfrak{U}_{32} = \frac{U_{32}}{b} \\ \frac{C_4}{c} = \mathfrak{C}_4 &= \left( \frac{8 + 8}{132} + 0 \right) \frac{W_{a1}}{16} = \frac{16}{132} \frac{W_{a1}}{16} = \mathfrak{U}_{43} = \frac{U_{43}}{a}. \end{aligned}$$

Die auf der rechten Seite hinzugefügten Werthe der Spannungen in vier mittleren Stäben des unteren Ringes entsprechen den Gleichungen 68). Diese liefern weiter mit  $a_0 : a = 2$  und  $b_0 : b = 3$  die übrigen vier Spannungen im unteren Ringe:

$$\begin{aligned} \frac{U_{12}}{a} = u_{12} &= \frac{-104 - 2 \cdot 184}{132} \frac{W_{a1}}{16} = -\frac{472}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{U_{23}}{b} = u_{23} &= \frac{104 + 3 \cdot 24}{132} \frac{W_{a1}}{16} = \frac{176}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{U_{34}}{a} = u_{34} &= \frac{-16 - 2 \cdot 8}{132} \frac{W_{a1}}{16} = -\frac{32}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{U_{41}}{b} = u_{41} &= \frac{16 + 3 \cdot 24}{132} \frac{W_{a1}}{16} = \frac{88}{132} \frac{W_{a1}}{16} \end{aligned}$$

Die Berechnung der Spannungen in den Rippen aus den Gleichungen 46), in denen alle  $\mathfrak{B}$  Null sind, ergibt

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{s_a} = \mathfrak{A}_1 = -\mathfrak{C}_1 &= \frac{104}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{B_2}{s_b} = \mathfrak{B}_2 = -\mathfrak{C}_2 &= -\frac{104}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{A_3}{s_a} = \mathfrak{A}_3 = -\mathfrak{C}_3 &= \frac{16}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{B_4}{s_b} = \mathfrak{B}_4 = -\mathfrak{C}_4 &= -\frac{16}{132} \frac{W_{a1}}{16} \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{s_b} = \mathfrak{B}_1 &= \frac{104 - 184}{132} \frac{W_{a1}}{16} = -\frac{80}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{A_2}{s_a} = \mathfrak{A}_2 &= \frac{-104 + 24}{132} \frac{W_{a1}}{16} = -\frac{80}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{B_3}{s_b} = \mathfrak{B}_3 &= \frac{16 - 8}{132} \frac{W_{a1}}{16} = \frac{8}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{A_4}{s_a} = \mathfrak{A}_4 &= \frac{-16 + 24}{132} \frac{W_{a1}}{16} = \frac{8}{132} \frac{W_{a1}}{16} \end{aligned}$$

In 66) verschwinden alle  $\mathfrak{B}$ ; die lothrechten Auflagerdrücke ergeben sich daher ohne weiteres aus den schon berechneten  $\mathfrak{C}$ . Man findet also:

$$\begin{aligned} \frac{A_I}{h} = \frac{B_I}{h} = \mathfrak{A}_I = \mathfrak{B}_I = \mathfrak{C}_1 &= -\frac{104}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{A_{II}}{h} = \frac{B_{II}}{h} = \mathfrak{A}_{II} = \mathfrak{B}_{II} = \mathfrak{C}_2 &= \frac{104}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{A_{III}}{h} = \frac{B_{III}}{h} = \mathfrak{A}_{III} = \mathfrak{B}_{III} = \mathfrak{C}_3 &= -\frac{16}{132} \frac{W_{a1}}{16} \\ \frac{A_{IV}}{h} = \frac{B_{IV}}{h} = \mathfrak{A}_{IV} = \mathfrak{B}_{IV} = \mathfrak{C}_4 &= \frac{16}{132} \frac{W_{a1}}{16} \end{aligned}$$

Die Gleichungen 69) ergeben schliesslich die wagerechten Auflagerdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{T_{12}}{a} = \mathfrak{F}_{12} &= \frac{-472 - 104 W_{a1}}{132 \cdot 16} = -\frac{576 W_{a1}}{132 \cdot 16} \\ \frac{T_{23}}{b} = \mathfrak{F}_{23} &= \frac{176 + 16 W_{a1}}{132 \cdot 16} = \frac{192 W_{a1}}{132 \cdot 16} \\ \frac{T_{34}}{a} = \mathfrak{F}_{34} &= \frac{-32 - 16 W_{a1}}{132 \cdot 16} = -\frac{48 W_{a1}}{132 \cdot 16} \\ \frac{T_{41}}{b} = \mathfrak{F}_{41} &= \frac{88 + 104 W_{a1}}{132 \cdot 16} = \frac{192 W_{a1}}{132 \cdot 16} \end{aligned}$$

Damit sind alle durch die wagerechte Last  $W_{a1}$  erzeugten Stabspannungen und Auflagerkräfte gefunden. Wir wollen auch in diesem Falle zur Probe die Gleichgewichtsbedingungen für die letzteren Kräfte aufstellen. Dafs die Summe der lothrechten Drücke Null ist, ergibt sich augenscheinlich, da alle Werthe paarweise einander entgegengesetzt gleich sind. Ebenso ist die Bedingung für die wagerechten Kräfte in der Richtung der  $b$ -Achse erfüllt. In der  $a$ -Richtung wirken (mit  $a=4$ ) die Kräfte

$$\begin{aligned} W_{a1} + T_{12} - T_{34} \\ = \left( 1 + \frac{-576 + 48}{132 \cdot 4} \right) W_{a1} = 0. \end{aligned}$$

Das Moment für die lothrechte Mittelachse ist mit  $a=4$  und  $b=2$ :

$$\begin{aligned} W_{a1} \cdot 3 + (T_{12} + T_{34}) 5 + (T_{23} + T_{41}) 8 \\ = W_{a1} \left[ 3 + \frac{-576 - 48}{132 \cdot 4} 5 + \frac{192 + 192}{132 \cdot 8} 8 \right] = 0. \end{aligned}$$

Die Auflagerbedingungen sind demnach alle erfüllt.

Bei diesem Belastungsfall ist bemerkenswerth, dafs zwei von den vier Diagonalspannungen gleich grofs sind. Dasselbe gilt von den Oberringspannungen. Die Spannungen in den Eckstäben des unteren Ringes sind einander paarweise entgegengesetzt gleich; ebenso die lothrechten Auflagerdrücke, wie schon früher hervorgehoben. Die Spannungen in den Rippen sind paarweise theils gleich, theils entgegengesetzt gleich. In Abb. 11 sind diese

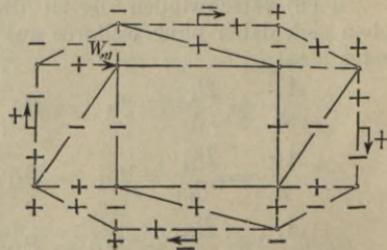


Abb. 11. Vorzeichen der Stabspannungen und Auflagerkräfte bei Belastung mit  $W_{a1}$ .

Ergebnisse zur besseren Veranschaulichung ebenso wie in den beiden früher behandelten Fällen zusammengestellt.

#### 4. Gleichzeitige Belastung durch mehrere Kräfte.

Nach der eingehenden Vorführung des Rechnungsganges für drei verschiedene Arten von Einzellasten brauchen wir wohl nicht noch durch Zahlenbeispiele zu zeigen, wie die Stabspannungen und Auflagerkräfte zu finden sind, wenn mehrere Lasten zugleich wirken; denn es handelt sich dabei immer nur um Einsetzung der Werthe der Hilfsgrößen  $q$  in die Tafel 62) und Zusammenziehung aller Glieder, die ein und dieselbe angreifende Kraft enthalten. Wir wollen aber die Frage noch kurz erörtern, wie die gesuchten Größen bei Vorhandensein mehrerer Lasten aus den schon für jede einzelne derselben berechneten Werthen zusammengesetzt werden können. Dafs dies möglich sein muß, ist ja selbstverständlich; es kann sich also nur darum handeln, die dabei zu beachtenden Regeln kennen zu lernen.

In erster Linie kommt für die fragliche Aufgabe in Betracht, dafs die Wirkung, die eine gegebene Kraft auf einen bestimmten Stab ausübt, nur von der gegenseitigen Lage beider, nicht aber von der Art ihrer Bezeichnung abhängen kann. Es muß also z. B. eine Kraft  $W_{a_1}$  (s. Abb. 4) auf die Diagonale  $D_{2_3}$  genau ebenso einwirken wie eine gleich große Kraft  $W_{a_3}$  auf die Diagonale  $D_{4_1}$ . Daraus folgt, dafs bei gleichzeitiger Wirkung von  $W_{a_1}$  und  $W_{a_3}$  die Spannung  $D_{4_1}$  gleich der Summe derjenigen Spannungen sein muß, die  $W_{a_1}$  allein in  $D_{4_1}$  und  $D_{2_3}$  erzeugen würde. Es gilt aber offenbar auch die Umkehrung: die Spannung, die  $W_{a_1}$  und  $W_{a_3}$  zusammen in  $D_{2_3}$  erzeugen, ist gleich der Summe der Spannungen, die  $W_{a_1}$  allein in  $D_{2_3}$  und  $D_{4_1}$  erzeugt. Beide Kräfte zusammen rufen also in den beiden Diagonalen gleiche Wirkungen hervor. Dasselbe läßt sich für jedes andere Stabpaar beweisen, dessen einer Stab gegen die eine der angreifenden Kräfte dieselbe Lage hat wie der andere gegen die zweite Kraft. Sind die beiden Kräfte nicht gleich, so ändert sich an dieser Schlußfolgerung nur wenig. Beispielsweise würde eine beliebig große Kraft  $W_{a_3}$  auf die Diagonale  $D_{4_1}$  dieselbe Wirkung ausüben wie eine ebenso große gedachte Kraft  $W_{a_1}$  auf die Diagonale  $D_{2_3}$ . Tritt nun aber ein anderes  $W_{a_1}$  mit  $W_{a_3}$  zusammen auf, so entsteht in  $D_{4_1}$  eine Spannung, die der Summe aus den beiden Spannungswerthen gleich ist, welche man erhält, wenn man  $D_{4_1}$  mit letzterem und  $D_{2_3}$  mit ersterem Werthe von  $W_{a_1}$  berechnet.

Wendet man denselben Gedankengang auch auf die Kräfte  $P_1$  und  $V_{a_1}$  an, so ergibt sich, dafs alle unter 1 bis 3 für die Belastung der Ecke 1 gefundenen Ergebnisse in der geschilderten Weise sofort auf den Fall übertragen werden können, dafs die Ecke 3 belastet ist. Damit ist dann natürlich auch der Einfluß einer gleichzeitigen Be-

lastung dieser beiden Ecken zu bestimmen. Dagegen läßt sich eine solche Uebertragung auf die Ecken 2 und 4 nicht ohne weiteres ausführen, weil diese beiden eine wesentlich andere Lage gegen das Fachwerk haben als 1. Es rührt das von der (willkürlichen) Annahme her, die wir im § 1 hinsichtlich der Richtung der Diagonalen gemacht haben. In dieser Erkenntniß liegt auch das Mittel zur Beseitigung der fraglichen Lücke.

Kehrt man nämlich die Richtung der Diagonalen um und verlegt man gleichzeitig die drei Kräfte  $P_1$ ,  $V_{a1}$  und  $W_{a1}$  von den in Abb. 8 gewählten nach den in Abb. 12 dargestellten Angriffspunkten, dann stellt die letztere Anordnung ein Spiegelbild der ersteren dar; es treten daher in beiden dieselben Kräfte nur in entgegengesetzter Reihenfolge auf.  $P$ ,  $V$  und  $W$  müßten jetzt nach der Bezeichnungsweise der Abb. 4 die Ziffer 4 erhalten, also  $P_4$ ,  $V_{a4}$  und  $W_{a4}$  genannt werden. Vorbehaltlich der Bestimmung des Einflusses der geänderten Diagonalenrichtung gelten mit- hin die unter 1, 2 und 3 gefundenen Formeln ohne weiteres auch für den Fall der Belastung des Knotenpunktes 4. Unter dieser Bedingung lassen sie sich dann aber auch auf die Ecke 2 übertragen. Die Aenderung der Diagonalenrichtung hat bekanntlich nur die Folge, daß sich das Vorzeichen der Diagonalspannung umkehrt, und daß in den das betreffende Fach umrahmenden Stäben Spannungen von der Größe der gleichgerichteten Seitenkräfte der Diagonalspannung hinzutreten. Der Zuwachs ist eine Druck- oder Zugspannung, je nachdem die Diagonale in ihrer neuen Lage Zug oder Druck erhält.

Alle bisher betrachteten Belastungsweisen erstreckten sich nur auf Kräfte, die lothrecht oder in der Richtung der  $a$ -Achse wirken. Auf Kräfte in der  $b$ -Richtung lassen sich die obigen Ergebnisse nicht übertragen, da die Aenderung der Achsenrichtung die gegenseitige Vertauschung der Werthe  $a$ ,  $a_0$  mit  $b$ ,  $b_0$  bei der Berechnung der Hilfsgrößen  $\varphi$  erfordert. Nur wenn das Fachwerk quadratisch ist, gelten die für die eine Achse gefundenen Ergebnisse natürlich auch für die anderen.

Da man bei derartigen Uebertragungen leicht Fehler begehen kann, so ist besondere Vorsicht nöthig. Etwaige Zweifel beseitigt man am schnellsten mit Hülfe der Tafel 62). Auch läßt sich bei Anstellung von Gleichgewichtsproben mit Nutzen von dem Um-

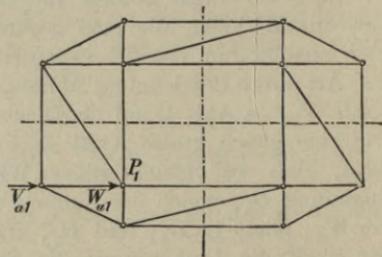


Abb. 12. Spiegelbild der Anordnung in Abb. 8.

stande Gebrauch machen, daß die Spannungen der Eckstäbe des unteren Ringes von Aenderungen der Diagonalenrichtung nicht beeinflusst werden.

Als Beispiel möge die Ermittlung einiger Spannungen für den in § 5 unter 3 angenommenen, durch Abb. 7 erläuterten Belastungsfall dienen, wobei jedoch (um nicht zu viel Raum aufwenden zu müssen)  $P_2 = 0$  gesetzt werden soll. Die Last  $P_1$  im Knotenpunkt 1 ergab für das in Abb. 8 dargestellte Fachwerk die unter 1 aufgeführten Diagonalspannungen. Nehmen wir nun noch eine gleiche Last im Knotenpunkt 4 an, so findet man für dieselben Diagonalen nach den vorher entwickelten Regeln andere Spannungswerthe. Wir setzen beide Reihen nachstehend unter einander und ziehen sie zu der dritten Reihe zusammen, die dann den Einfluß der gleichzeitigen Wirkung beider Lasten darstellt:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 \mathcal{D}_{12} & \mathcal{D}_{23} & \mathcal{D}_{34} & \mathcal{D}_{41}
 \end{array} \\
 = \left\{ \begin{array}{cccc}
 \frac{104}{132} & -\frac{15}{132} & \frac{16}{132} & -\frac{81}{132} \\
 -\frac{16}{132} & +\frac{15}{132} & -\frac{104}{132} & +\frac{81}{132}
 \end{array} \right. \times \frac{P_1}{4h} \\
 = \frac{88}{132} \quad 0 \quad -\frac{88}{132} \quad 0 \quad \times \frac{P_1}{4h}.
 \end{array}$$

Ebenso verfahren wir jetzt mit der wagerechten Kraft  $V_{a1}$ . Es ergibt sich mit den unter 2 gefundenen Zahlenwerthen:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 \mathcal{D}_{12} & \mathcal{D}_{23} & \mathcal{D}_{34} & \mathcal{D}_{41}
 \end{array} \\
 = \left\{ \begin{array}{cccc}
 \frac{80}{132} & -\frac{9}{132} & -\frac{8}{132} & \frac{57}{132} \\
 +\frac{8}{132} & +\frac{9}{132} & -\frac{80}{132} & -\frac{57}{132}
 \end{array} \right. \times \frac{V_{a1}}{16} \\
 = \frac{88}{132} \quad 0 \quad -\frac{88}{132} \quad 0 \quad \times \frac{V_{a1}}{16}.
 \end{array}$$

Dasselbe Verfahren auf die wagerechte Last  $W_{a1}$  angewandt, ergibt mit den Zahlenwerthen unter 3:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 \mathcal{D}_{12} & \mathcal{D}_{23} & \mathcal{D}_{34} & \mathcal{D}_{41}
 \end{array} \\
 = \left\{ \begin{array}{cccc}
 \frac{92}{132} & -\frac{12}{132} & \frac{4}{132} & -\frac{12}{132} \\
 -\frac{4}{132} & +\frac{12}{132} & -\frac{92}{132} & +\frac{12}{132}
 \end{array} \right. \times \frac{W_{a1}}{8} \\
 = \frac{88}{132} \quad 0 \quad -\frac{88}{132} \quad 0 \quad \times \frac{W_{a1}}{8}.
 \end{array}$$

Beachtet man nun, daß wir früher  $\mathfrak{D}_{43} = -\mathfrak{D}_{34}$  eingeführt haben, und daß für die der ganzen Rechnung zu Grunde liegende in Abb. 8 dargestellte Anordnung, wie oben schon gezeigt wurde,  $\mathfrak{B}_{a1} = V_{a1} : 4$  und  $\mathfrak{B}_{a1} = W_{a1} : 4$ , sowie  $q_a = 44 : 132$  ist, so ergibt sich die Uebereinstimmung zwischen diesen Zahlenreihen und der Gleichung 85) in § 5. Das Verfahren läßt deutlich erkennen, wie die bei Annahme einer symmetrischen Belastung eintretende Vereinfachung der Wirkungsweise der Lasten zustande kommt. Für den praktischen Gebrauch ist aber die Rechnung nach den in § 5 entwickelten Formeln sicherer und bequemer.

## Zweiter Abschnitt.

### Das Raumfachwerk mit beliebiger Eckenzahl.

#### § 7. Allgemeine Betrachtung. Der Ausschnitt als Grundeinheit. Hauptarten des Fachwerkes.

Wenn man das im ersten Abschnitt behandelte rechteckige Fachwerk daraufhin untersucht, ob sich eine Gruppe von Stäben bilden läßt, durch die seine wesentlichen Formeigenschaften in dem Sinne bestimmt sind, daß man nur eine Reihe solcher Gruppen zusammensetzen braucht um das vollständige Fachwerk zu erhalten, so findet man, daß dies in der That möglich ist. Denkt man sich nämlich durch die beiden Hauptachsen zwei lothrechte Ebenen gelegt, so zerschneiden diese das Fachwerk in vier Theile, die einander paarweise gleich und abwechselnd symmetrisch sind. Ein solcher Theil werde kurz Ausschnitt und der Winkel seiner Begrenzungsebenen Eckwinkel genannt. Jeder Ausschnitt enthält ein Eckfach und zu dessen beiden Seiten je ein halbes Mittelfach. In Abb. 4 (Seite 9) sind die vier Ausschnitte wie die zugehörigen Eckpunkte des oberen Ringes, also mit den Ziffern 1 bis 4 bezeichnet. In derselben Weise kann man sich auch jedes mehreckige Fachwerk aus so viel Ausschnitten zusammengesetzt denken, wie Ecken vorhanden sind. Dabei ergibt sich aber nur dann eine geschlossene Anordnung, wenn die Ausschnitte zwei Bedingungen erfüllen. Erstens muß nämlich die Summe ihrer Eckwinkel  $= 360^\circ$  sein. Die Eckwinkel müssen also kleiner werden, wenn die Zahl der Ausschnitte wächst. Diese müssen ferner so gestaltet sein, daß sie in der Reihenfolge ihrer Zusammensetzung an einander passen. Im übrigen können die Stäbe eines jeden Ausschnittes ganz beliebige Längen haben.

Wollte man nun von dieser Freiheit in der Formgebung vollen Gebrauch machen, so würde man in der Lage sein Stabgebilde zu entwerfen, die bei denkbar allgemeinsten Anordnung doch wesentlich dieselben statischen Eigenschaften besitzen wie das früher behandelte Fachwerk. In Abb. 13 ist beispielsweise ein solches, ganz willkürliches Stabnetz mit siebeneckigem oberen und vierzehneckigem unteren Ring im Grundriss dargestellt. Es erscheint nur als eine geschlossene Kette aus 21 Dreiecken, deren freie Seiten die Ringe und deren zusammenfallende Seiten die Wandglieder bilden. Welche der letzteren man hierbei als Diagonalen und welche man als Rippen betrachten will, ist gleichgültig; auch ist es nicht nöthig, daß die Ringe ebene Vielecke sind. Ein so allgemeines Stabwerk den weiteren Betrachtungen zu Grunde zu legen, hätte jedoch keinen Zweck, da

solche Anordnungen in der Wirklichkeit nicht vorkommen und da die Unbestimmtheit der Form die Lösung der Aufgabe immerhin etwas erschweren würde. Es genügt deshalb darauf hinzuweisen, daß sich auch derartige willkürliche Stabwerke nach dem weiterhin entwickelten Verfahren berechnen lassen.<sup>4)</sup>

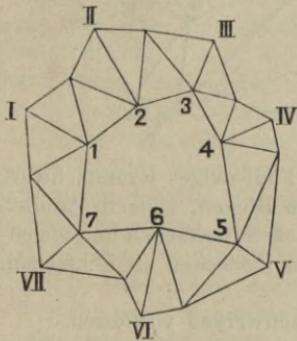


Abb. 13. Siebeneckiges Raumfachwerk allgemeinsten Form.

Um nun für diese Entwicklung eine bequemere Grundlage zu gewinnen, nehmen wir jetzt an, beide Ringe seien ebene, wagerecht liegende Vielecke. Die Form des oberen Ringes sei eine ganz beliebige, die des unteren eine solche, wie sie sich ergeben würde, wenn man an einem Vieleck von gleicher Eckenzahl, dessen Seiten denen des oberen Ringes parallel sind, die Ecken abschneidet und die benachbarten Schnittpunkte durch gerade Linien mit einander verbindet. Ueber die Art dieser Abschrägung setzen wir nur voraus, daß für jede Ecke die beiden Abschnitte einander gleich seien, oder, anders ausgedrückt, daß die Abschnitte mit den die Schnittpunkte verbindenden Eckseiten gleichschenklige Dreiecke bilden. Derartiger Dreiecke sind natürlich so viele vorhanden, wie der obere Ring Ecken hat. Wir bezeichnen diese wie früher fortlaufend mit deut-

<sup>4)</sup> Obige Behauptung stützt sich nicht etwa nur auf theoretische Erwägungen, sondern auch auf ausgeführte Berechnungen. Es ist sogar möglich, die Diagonalspannungen eines solchen Fachwerkes mit nicht ebenen Ringen durch allgemeine Formeln auszudrücken, die sich freilich sehr umfangreich gestalten.

schen Ziffern, die Spitzen der zugehörigen Abschrägungsdreiecke mit den entsprechenden römischen. Zum Schluß nehmen wir noch an, daß der wagerechte Abstand der gleich gerichteten Seiten des oberen und unteren Ringes überall derselbe ist. Abb. 14 zeigt als Beispiel ein fünfeckiges Fachwerk der durch die vorstehenden Annahmen gekennzeichneten Art. Man ersieht daraus, daß eine solche Anordnung, bei der die Mittelfache nicht Rechtecke, sondern willkürliche Parallelogramme sind, trotz der sonstigen einschränkenden Voraussetzungen immer noch einen hohen Grad von Allgemeinheit besitzt und große Freiheit in der Formgebung, der Vertheilung der Lager usw. gewährt. Wir werden deshalb zuerst die Berechnung eines derartigen Fachwerkes vorführen.

Hieraus ergeben sich dann ohne weiteres auch die Regeln für die Berechnung des Fachwerkes mit rechteckigen Mittelfachen, das offenbar nur einen besonderen Fall der vorigen Anordnung darstellt und seiner größeren Einfachheit wegen meist vorgezogen werden wird. Daß auch diese Form noch eine sehr vielseitige Anwendung gestattet, zeigt Abb. 15, die den Grundriß einer danach gebildeten, länglich runden sechzehneckigen Kuppel (mit Weglassung der Diagonalen) darstellt. Die Gleichheit der Fachlängen ist übrigens nicht notwendig, sondern in Abb. 15 nur als Beispiel gewählt.

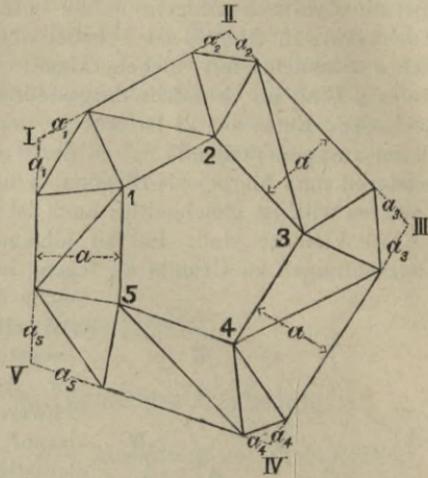


Abb. 14. Fünfeckiges Raumfachwerk mit ebenen Ringen, ebenen Parallelogrammen als Mittelfachen und gleichschenkligen Dreiecken als Eckfächer.

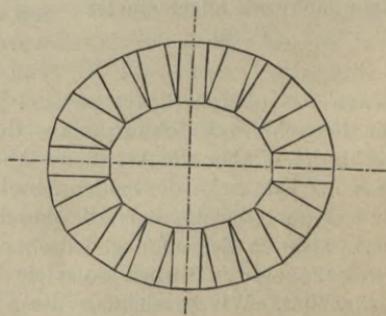


Abb. 15. Sechzehneckiges Raumfachwerk mit rechteckigen Mittelfachen.

Noch wesentlich einfacher läßt sich natürlich die ganze Betrachtung und ebenso der Gang der Rechnung gestalten, wenn die Grundrißform des Fachwerkes eine solche ist, daß sie einem Kreise eingeschrieben werden kann. Dann werden die Ausschnitte einander gleich, wenn alle Oberringstäbe dieselbe Länge erhalten, d. h. wenn der Oberring ein regelmäßiges Vieleck im mathematischen Sinne bildet. Dies ist der in der Wirklichkeit am häufigsten vorkommende Fall, den wir deshalb eingehender behandeln werden.

### § 8. Bezeichnungen am mehreckigen Fachwerk.

Im ersten Abschnitt war als Grundform des Fachwerkes ein Rechteck angenommen. Deshalb wurde auch die Bezeichnung der Stablängen und der Kräfte so gewählt, daß sie dieser Form (insbesondere durch Einführung der zwei Hauptachsen  $a$  und  $b$ ) Rechnung trug. Das paßt natürlich nicht mehr auf ein Fachwerk, dessen Grundform ein Vieleck ist. Wir sind daher genöthigt, die bisherige Bezeichnung abzuändern, wollen aber doch so viel wie möglich davon beibehalten. Demgemäß werden die Ecken des oberen Ringes wie früher fortlaufend von 1 bis  $n$  beziffert. Die Ecken des unteren Ringes erhalten eine doppelte Bezifferung, und zwar nach der Regel, daß immer je zwei mit demselben oberen Eckpunkt durch Rippen verbundene untere Ecken die Nummer dieses Punktes als ersten Zeiger führen, an zweiter Stelle dagegen als unterscheidendes Merkmal die Ziffer des ersten Zeigers des ihnen jeweilig nächsten, vorausgehenden und folgenden Eckpunktes. Diese Bezeichnungsweise stimmt genau mit derjenigen überein, die wir im § 1 für die Spannungen der mittleren Stäbe des unteren Ringes eingeführt haben. Die Höhe des oberen Ringes über dem unteren nennen wir  $h$ , wie bisher;  $a$  sei der wagerecht gemessene,  $s$  der schräge Abstand der Oberringstäbe von den gleich gerichteten Unterringstäben. Die Längen dieser Stäbe und der Diagonalen bezeichnen wir wie früher mit den Buchstaben  $a$  und  $d$ , fügen aber jetzt bei beiden als Unterscheidungsmerkmal immer die Ziffern der unteren Knotenpunkte hinzu, von denen die Diagonalen ausgehen. Die Ziffern geben dann offenbar zugleich die Nummern der beiden Ausschnitte an, zu denen der betreffende Stab gehört. Die Bezeichnung der übrigen Stablängen braucht hier noch nicht festgesetzt zu werden. Einige Hilfslinien und Winkel werden weiterhin bei Abb. 16 besprochen werden.

Was die Kräfte betrifft, so können die früheren Bezeichnungsregeln unverändert beibehalten werden für die lothrechten Lasten  $P$ , die Spannungen  $D$  der Diagonalen,  $O$  der Stäbe des oberen,  $U$  und  $C$  derjenigen des unteren Ringes, sowie für die wagerechten Auflager-

kräfte. Bei den früher mit  $A$  und  $B$  bezeichneten Spannungen der Rippen und den lothrechten Lagerdrücken hat dagegen die Unterscheidung nach den Achsenrichtungen  $a$  und  $b$  jetzt keinen Sinn mehr. Es soll deshalb fernerhin der Buchstabe  $A$  nur noch für die Auflagerdrücke, für die (meist bogenförmigen) Rippen dagegen der Buchstabe  $B$  benutzt werden, und zwar in Verbindung mit den beiden Ziffern des zugehörigen unteren Knotenpunktes. Die wagerechten äußeren Kräfte waren früher nach den Achsenrichtungen  $a$  und  $b$  zerlegt worden; auch hierfür muß also eine neue Festsetzung getroffen werden. Wir zerlegen die an den unteren Knotenpunkten angreifenden Kräfte  $V$  in je zwei Seitenkräfte, deren eine in die Richtung des benachbarten mittleren Ringstabes fällt, während die

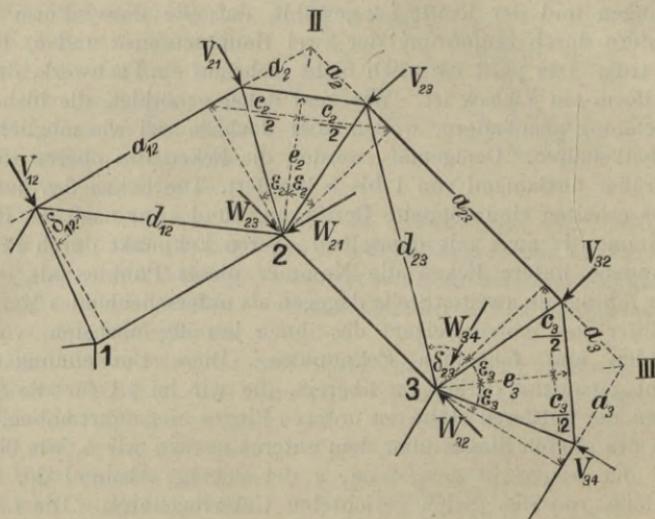


Abb. 16.

Bezeichnungen am mehreckigen Fachwerk.

andere rechtwinklig dazu gerichtet ist. Die erstere Seitenkraft wird von diesem Stabe unmittelbar aufgenommen und in das zugehörige wagerechte Lager geführt; sie kommt also (wie schon im § 1 bemerkt) für die Berechnung der übrigen Stabspannungen nicht weiter in Betracht. Die andere Seitenkraft bezeichnen wir mit den beiden Ziffern des Knotenpunktes, an dem sie angreift. Für die in den oberen Knotenpunkten wirkenden Kräfte  $W$  könnten zwei verschiedene Arten der Zerlegung in Betracht kommen, nämlich entweder nach den Richtungen der beiden zu demselben Ausschnitt gehörenden  $V$ ,

oder nach der Richtung der beiden Stäbe des oberen Ringes, die im Angriffspunkte der  $W$  zusammenstoßen. Beim rechteckigen Fachwerk stimmen diese zwei Zerlegungsweisen überein; bei einer mehr-eckigen Anordnung ist das aber offenbar nicht mehr der Fall. Da die Rechnung, wie ein Versuch lehrt, sich bei der zweiten Art der Zerlegung wesentlich einfacher gestaltet, so soll diese gewählt und die Richtung einer jeden Seitenkraft durch Beifügung der Ziffern des Knotenpunktes, in dem sie angreift, sowie desjenigen, nach dem sie hinzielt, bezeichnet werden. Die im Punkt 2 angreifende, nach 3 gerichtete Kraft heißt also  $W_{23}$ , dagegen die in 3 angreifende, nach 2 gerichtete  $W_{32}$ .

In Abb. 16 ist als Beispiel hierzu ein die Ecken 2 und 3 umfassender Theil eines Fachwerkes mit den daran wirkenden Kräften im Grundrifs dargestellt. Dabei sind nicht nur die eben erörterten Bezeichnungen angewendet, sondern noch einige andere, die wir zu den folgenden Entwicklungen gebrauchen. Zunächst sind die mittleren Seiten des unteren Ringes bis zum gegenseitigen Schnitt verlängert. Die so erhaltenen, schon im § 8 besprochenen Punkte sind mit römischen Ziffern bezeichnet, wie dort angegeben; die Eckabschnitte mit  $a$  und den entsprechenden deutschen Ziffern. Ferner sind von den oberen Eckpunkten Lothe auf die Seiten des unteren Ringes gefällt. Die die Mittelseiten treffenden haben voraussetzungsgemäß alle die gleiche Grundrifs-länge  $a$ , mithin auch den gleichen Neigungswinkel  $\alpha$  gegen die Ebene dieses Ringes. Den gegenseitigen Abstand der Fußpunkte je zweier von demselben oberen Eckpunkte ausgehenden Lothe bezeichnen wir mit  $e$ , den von ihnen im Grundrifs eingeschlossenen Eckwinkel mit  $2\varepsilon$ , die Grundrifs-länge der nach den Mitten der Eckseiten gerichteten Lothe mit  $e$ , immer mit Hinzufügung der betreffenden Ecknummer. Den Winkel, den eine Diagonale mit der Richtung der zu ihrem Fache gehörigen Lothe bildet, bezeichnen wir wie bisher mit dem Buchstaben  $\delta$  und den beiden Ziffern der fraglichen Diagonale.

### § 9. Gleichgewicht der Kräfte am Fachwerkausschnitt.

Allgemeine Beziehung zwischen den Spannungen dreier auf einander folgender Diagonalen.

Wenn man bei der Abtrennung eines Ausschnittes von dem (irgendwie belasteten und eine beliebige Zahl von Ecken besitzenden) Fachwerk an den durchschnittenen sechs Stäben deren Spannungen  $D$ ,  $O$  und  $U$  als äußere Kräfte angebracht denkt, so müssen diese mit den übrigen auf den Ausschnitt einwirkenden Kräften im Gleichgewicht sein. Als solche sind vorhanden eine lothrechte Last  $P$ ,

zwei untere und zwei obere wagerechte Kräfte  $V$  und  $W$ , sowie zwei lothrechte Auflagerdrücke  $A$ . In Abb. 17 sind alle Kräfte mit Ausnahme der lothrechten beispielsweise für einen Ausschnitt 2 sichtbar gemacht. Wir benutzen nun zur Aufsuchung der Beziehungen zwischen diesen Kräften die bekannte Regel, daß die Summe der Momente einer im Gleichgewicht befindlichen Kräftegruppe für jede beliebige Achse des Raumes Null sein muß. Nimmt man als eine solche Drehachse die lothrechte Gerade an, die durch den Schnittpunkt II der beiden Unterringspannungen  $U_{21}$  und  $U_{23}$  geht, so verschwinden nicht nur diese Kräfte aus der Rechnung, sondern auch alle diejenigen, welche die Richtung der Drehachse haben, also die beiden Auflagerdrücke  $A_{21}$  und  $A_{23}$ , die Last  $P_2$  und die lothrechten Seitenkräfte der beiden Diagonalspannungen  $D_{12}$  und  $D_{23}$ . Von letzteren hat  $D_{12}$  in

der Richtung des zugehörigen Oberringstabes die wagerechte Seitenkraft  $D_{12} \sin \delta_{12}$ , in der Richtung des Lothes auf den Unterringstab die geneigte Seitenkraft  $D_{12} \cos \delta_{12}$ . Diese läßt sich wieder in eine nicht weiter in Betracht kommende lothrechte und in eine wagerechte Seitenkraft  $D_{12} \cos \delta_{12} \cos \alpha$  zerlegen. Es braucht das natürlich nicht gerade im oberen Eckpunkte zu geschehen; die Zerlegung kann vielmehr in jedem beliebigen Punkte der Diagonale vorgenommen werden. Wählen wir dazu den unteren Endpunkt, so fällt die Seitenkraft  $D_{12} \sin \delta_{12}$  fort, da sie

die Drehachse schneidet, und es bleibt nur noch die Seitenkraft  $D_{12} \cos \delta_{12} \cos \alpha$  übrig. Ihr Hebelarm ist  $a_{12} + a_2$ , wie man aus Abb. 16 ersieht. Die Spannung der zweiten Diagonale hat eine wagerechte, die Drehachse schneidende Seitenkraft in der Richtung von  $U_{23}$  und eine geneigte  $D_{23} \cos \delta_{23}$  (in der Richtung des Lothes vom Punkt 2 auf den Unterringstab  $U_{23}$ ), die sich wiederum in eine lothrechte, kein Drehmoment erzeugende und in eine wagerechte Seitenkraft  $D_{23} \cos \delta_{23} \cos \alpha$  mit dem Hebelarm  $a_2$  zerlegen läßt. Alle übrigen Kräfte sind an sich wagerecht, und ihre Hebelarme sind aus Abb. 17 unmittelbar zu ersehen. Beachtet man nun, daß  $\cos \alpha = a : s$ ,  $\cos \delta_{12} = s : d_{12}$ ,  $\cos \delta_{23} = s : d_{23}$  ist, so kann man die fragliche

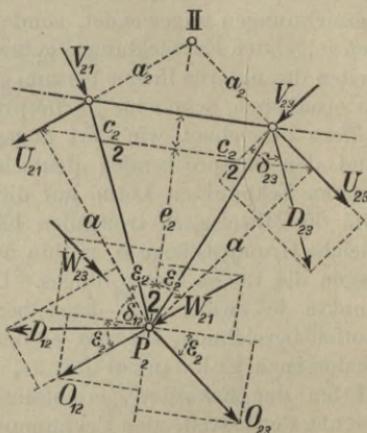


Abb. 17. Kräfte und Hebelarme am Fachwerkausschnitt.

Gleichgewichtsbedingung leicht in der nachstehenden Form anschreiben:

$$\frac{a(a_{12} + a_2)}{d_{12}} D_{12} + \frac{aa_2}{d_{23}} D_{23} + a(O_{12} - O_{23}) - a_2(V_{21} - V_{23}) + a(W_{21} - W_{23}) = 0. \quad (91)$$

Wählt man dagegen zur Aufstellung der Momentengleichung die durch die beiden Auflagerpunkte gehende wagerechte Gerade, so verschwinden die Kräfte  $A_{21}$ ,  $A_{23}$ ,  $D_{23}$ ,  $U_{21}$ ,  $U_{23}$ ,  $V_{21}$  und  $V_{23}$  gänzlich, und von den übrigen die in die Richtung der Drehachse fallenden oder diese schneidenden Seitenkräfte. Wir zerlegen  $D_{12}$  wieder genau ebenso wie vorher im unteren Endpunkte der Diagonale. Dann fallen die beiden wagerechten Seitenkräfte fort, da sie die Drehachse schneiden, und es bleibt nur die lothrechte Seitenkraft  $D_{12} \cos \delta_{12} \sin \alpha$  übrig mit dem Hebelarm  $a_{12} \sin \varepsilon_2$  (s. Abb. 16). Die Spannungen  $O_{12}$  und  $O_{23}$  der Oberringstäbe und die gleichgerichteten wagerechten Lasten  $W_{21}$  und  $W_{23}$  schliessen mit der rechtwinklig zur Drehachse durch den Knotenpunkt 2 gelegten wagerechten Geraden II 2 den Winkel  $90^\circ - \varepsilon$  ein. Alle diese Kräfte werden also in der Richtung der Drehachse und rechtwinklig dazu zerlegt, indem man sie mit  $\cos \varepsilon_2$  und  $\sin \varepsilon_2$  vervielfältigt. Die in die letztere Richtung fallenden Seitenkräfte haben sämtlich den Hebelarm  $h$ . Die lothrechte Last  $P_2$  hat nach Abb. 17 den Hebelarm  $e_2$ . Da nun, wie leicht ersichtlich,  $\sin \alpha = h : s$ ,  $\cos \delta_{12} = s : d_{12}$  und  $\sin \varepsilon_2 = \frac{1}{2} c_2 : a$  ist, so erhält man die zweite Momentengleichung in der Form

$$92) \quad \frac{a_{12}}{d_{12}} \frac{c_2 h}{2a} D_{12} + \frac{c_2 h}{2a} (O_{12} + O_{23}) + e_2 P_2 + \frac{c_2 h}{2a} (W_{21} + W_{23}) = 0.$$

Theilt man 91) durch  $a$  und 92) durch  $c_2 h : 2a$ , so ergibt sich

$$93) \quad \begin{cases} (a_{12} + a_2) \frac{D_{12}}{d_{12}} + a_2 \frac{D_{23}}{d_{23}} + O_{12} - O_{23} = \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23}) - (W_{21} - W_{23}) \\ a_{12} \frac{D_{12}}{d_{12}} + O_{12} + O_{23} = -2 \frac{a e_2}{h c_2} P_2 - (W_{21} + W_{23}). \end{cases}$$

Fügt man die zweite Gleichung zur ersten, so erhält man

$$94) \quad (2a_{12} + a_2) \frac{D_{12}}{d_{12}} + a_2 \frac{D_{23}}{d_{23}} + 2O_{12} = -2 \frac{a e_2}{h c_2} P_2 + \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23}) - 2W_{21}.$$

Dies gilt für den Ausschnitt 2, den wir ganz willkürlich unserer Betrachtung zu Grunde gelegt haben. Es ist klar, daß wir für jeden beliebigen anderen Ausschnitt genau die gleiche Rechnung hätten anstellen können, und daß wir dabei auch hätten zu demselben Ergebnis kommen müssen, nur mit dem Unterschiede natürlich, daß an die Stelle der in 94) enthaltenen Längen und Kräfte die ent-

sprechenden, zu jenem anderen Ausschnitt gehörigen Größen getreten wären. Für den Ausschnitt 3 hätte sich also ergeben:

$$95) \quad (2a_{23} + a_3) \frac{D_{23}}{d_{23}} + a_3 \frac{D_{34}}{d_{34}} + 2O_{23} = -2 \frac{ae_3}{hc_3} P_3 + \frac{a_3}{a} (V_{32} - V_{34}) - 2W_{32}.$$

Man sieht das leicht ein, wenn man erwägt, daß die gleichartigen, zu verschiedenen Ausschnitten gehörigen Größen — abgesehen von dem überall gleichen  $a$  und  $h$  — sich bei der gewählten Bezeichnungweise nur durch ihre Bezifferung unterscheiden, und zwar so, daß alle Ziffern um eine Einheit zunehmen, wenn man von einem Ausschnitt zum folgenden übergeht.

Wir ziehen jetzt die zweite Gleichung der Gruppe 93) von der ersten ab und erhalten

$$96) \quad a_2 \frac{D_{12}}{d_{12}} + a_2 \frac{D_{23}}{d_{23}} - 2O_{23} = 2 \frac{ae_2}{hc_2} P_2 + \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23}) + 2W_{23}.$$

Fügt man nun dies zu 95), so gelangt man zu dem folgenden wichtigen Ergebnis:

$$97) \quad \alpha_2 \frac{D_{12}}{d_{12}} + (a_2 + 2a_{23} + a_3) \frac{D_{23}}{d_{23}} + a_3 \frac{D_{34}}{d_{34}} = 2 \frac{a}{h} \left( \frac{e_2}{c_2} P_2 - \frac{e_3}{c_3} P_3 \right) + \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23}) \\ + 2 (W_{23} - W_{32}) + \frac{a_3}{a} (V_{32} - V_{34}).$$

Wir haben also hiermit eine ganz allgemeine Beziehung zwischen den Spannungen dreier auf einander folgender Diagonalen eines irgendwie belasteten Raumfachwerkes mit beliebiger Eckenzahl gefunden. Dabei ist hinsichtlich der Form dieses Fachwerkes nur vorausgesetzt, daß die Mittelfache ebene Parallelvierecke von gleicher Höhe und Neigung, und daß die Eckfache gleichschenklige Dreiecke sind, wie bei dem in Abb. 14 dargestellten Beispiel.<sup>5)</sup>

Der Werth dieses Ergebnisses liegt darin, daß man für jedes derartige Fachwerk nach Formel 97) ohne weiteres so viele Gleichungen anschreiben kann, wie das Fachwerk Diagonalen hat, und daß die Gleichungen nur die Spannungen der letzteren als Unbekannte enthalten. Sind diese bestimmt, so ist die Aufgabe im wesentlichen gelöst; denn mit den  $D$  ergeben sich die  $O$  sofort aus den nach 95) oder 96) zu bildenden Gleichungen, und sodann die übrigen Stab-

<sup>5)</sup> Es ist vielleicht nicht überflüssig, nochmals hervorzuheben, daß das hier entwickelte Verfahren — wie schon im § 7 bemerkt — auch auf Fachwerke allgemeiner Form anwendbar ist. Für ein Fachwerk der im ersten Abschnitte behandelten Art, bei dem die Eckfache nicht gleichschenklige sind, gestaltet sich die Rechnung nach diesem Verfahren trotzdem äußerst einfach. Man gelangt so auf viel kürzerem Wege als dort zu den im § 3 nach dem bisher gebräuchlichen Verfahren entwickelten Gleichungen 56).

spannungen und die Auflagerdrücke aus den Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte. Ferner umfaßt aber das gefundene allgemeine Ergebniss selbstverständlich auch die durch Vereinfachungen verschiedener Art entstehenden Sonderfälle. Wir wollen hierauf etwas näher eingehen.

### § 10. Anwendung auf einige besondere Fälle.

Es ist lehrreich und erleichtert das Verständniß der allgemeinen Gleichung 97), wenn wir jetzt untersuchen, welche Aenderungen sie bei der Anwendung auf einfacher gestaltete Fachwerke erleidet.

#### 1. Fachwerk ohne Eckfache (Schwedlerkuppel) und gemischtes Fachwerk.

Denkt man sich bei dem in Abb. 14 dargestellten Fachwerk die Eckabschnitte des unteren Ringes immer mehr verkleinert, bis sie schliesslich ganz verschwinden, so fallen die beiden zu demselben oberen Eckpunkt gehörigen Rippen in eine zusammen, und es entsteht die Form der (ingeschossigen) Schwedlerkuppel. Mit  $a_1 = a_2 = a_3 \dots = 0$  nimmt unsere Gleichung 97) die folgende Form an:

$$98) \quad a_{23} \frac{D_{23}}{a_{23}} = \frac{a}{h} \left( \frac{e_2}{e_2} P_2 - \frac{e_3}{e_3} P_3 \right) + W_{23} - W_{32}.$$

Hiernach sind die Spannungen der Diagonalen der einzelnen Fache jetzt unabhängig von einander, sodafs eine jede für sich aus der nach vorstehendem Muster ohne weiteres anzuschreibenden Gleichung berechnet werden kann. Ferner ist bemerkenswerth, dafs die wagerechten Kräfte  $V$  ganz verschwunden sind. Den inneren Grund hierfür sieht man leicht ein, wenn man beachtet, dafs die zu derselben Ecke eines Fachwerkes der allgemeineren Art gehörigen beiden lothrechten Lager, die bisher rechtwipklig zur Richtung der mittleren Stäbe des Untergurtes frei beweglich waren, in dem Augenblicke zu festen Lagern werden, wo sie zusammenfallen. Die in den betreffenden Knotenpunkten angreifenden  $V$  können dann auf andere Stäbe als die des unteren Ringes offenbar keine Wirkung mehr ausüben.

Wir wollen nun die Gleichung 98) dadurch einer Prüfung unterziehen, dafs wir die Diagonalspannung  $D_{23}$  für ein solches Fachwerk unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen. Denkt man sich zu diesem Zwecke den in Abb. 17 dargestellten Ausschnitt 2 der obigen Annahme gemäß abgeändert, so läfst sich die Spannung  $O_{23}$  leicht in der Weise berechnen, dafs man die Summe der Momente in Bezug auf den Unterringstab I—II gleich Null setzt. Als wirksame Kräfte treten dann nur  $O_{23}$ ,  $P_2$  und  $W_{23}$  auf, da  $O_{12}$  die Richtung der Drehachse hat und alle anderen Kräfte diese schneiden. Die Richtung von  $O_{23}$  und  $W_{23}$  bildet mit dem Loth auf die Drehachse im Grundriß den Winkel  $90^\circ - 2\epsilon_2$ ; die wirksame Seitenkraft beider ist also

$(O_{23} + W_{23}) \sin 2\varepsilon_2 = 2(O_{23} + W_{23}) \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2$  mit dem Hebelarm  $h$ , während  $P_2$  am Hebelarm  $a$  wirkt.

Da nun

$$\sin \varepsilon_2 = \frac{c_2}{2a} \quad \text{und} \quad \cos \varepsilon_2 = \frac{a}{c_2}, \quad \text{also} \quad 2 \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 = \frac{c_2}{c_2}$$

ist, so lautet die fragliche Momentengleichung, wenn wir  $O_{23}$  gleich auf die linke Seite bringen:

$$99) \quad O_{23} = -\frac{a c_2}{h c_2} P_2 - W_{23}.$$

Aehnlich ist nun bei dem Ausschnitt 3 vorzugehen, wobei man die Abb. 16 benutzen kann, indem man sich die Eckfäche zu Null geworden denkt. Wir wählen jetzt als Drehachse den Unterringstab III—IV und denken uns die Spannung der Diagonale  $D_{23}$  nach den Richtungen des Oberringstabes und der Rippe 3—III zerlegt. Dann schneidet die in letztere Richtung fallende Seitenkraft die Drehachse, während die andere, die die Größe  $D_{23} a_{23} : d_{23}$  hat, mit der Oberringspannung  $O_{23}$  und der wagerechten Last  $W_{32}$  zusammenfällt. Diese drei Kräfte bilden mit dem Loth auf die Drehachse im Grundriß den Winkel  $90^\circ - 2\varepsilon_3$ ; ihre wirksamen Seitenkräfte, die wieder am Hebelarm  $h$  wirken, sind also ganz ähnlich wie vorher durch Vervielfältigung mit  $2 \sin \varepsilon_3 \cos \varepsilon_3 = c_3 : c_3$  zu berechnen. Außerdem ist nur noch  $P_3$  am Hebelarm  $a$  wirksam; alle anderen Kräfte schneiden die Drehachse oder fallen in ihre Richtung. Die Momentengleichung, die wir jetzt alsbald nach  $D_{23}$  auflösen, lautet daher:

$$a_{23} \frac{D_{23}}{d_{23}} = -\frac{a c_3}{h c_3} P_3 - O_{23} - W_{32}.$$

Setzt man nun hierin für  $O_{23}$  den Werth 99), so ergibt sich in der That auch auf diesem Wege die Gleichung 98), deren Richtigkeit mithin nachgewiesen ist.

Wir hatten oben zunächst angenommen, daß sämtliche Eckfäche beseitigt werden sollen. Man kann aber natürlich ebenso gut nur ein solches oder auch einzelne in beliebiger Auswahl unterdrücken, ohne daß dadurch die geringste Schwierigkeit herbeigeführt wird. Es sind eben in den nach 97) gebildeten Gleichungen nur diejenigen Werthe der  $a$  gleich Null zu setzen, deren Ziffern mit den Nummern der beseitigten Eckfäche übereinstimmen. Damit ist die Aufgabe, eine aus Theilen einer Kuppel nach Schwedler und eines Fachwerkes nach meiner Bauart auf irgend eine Weise zusammengesetzte, willkürlich belastete Anordnung zu berechnen, ganz allgemein gelöst. Diese Lösung schließt selbstverständlich auch die Entscheidung der besonderen Fragen ein, die an solche Anordnungen gestellt werden können. Daß diese statisch

bestimmt sind, folgt aus Gleichung 97) ohne weiteres; ob sie auch standsicher sind, hängt davon ab, ob die zu der Gruppe sämtlicher gemäß 97) zu bildender Gleichungen gehörige Föppl'sche Determinante einen von Null verschiedenen Werth hat oder nicht.

## 2. Fachwerk mit rechteckigen Mittelfachen.

Bei rechteckigen Mittelfachen fallen die Rippen mit den von den oberen Ecken auf die Mittelstäbe des unteren Ringes gefällten, in Abb. 16 u. 17 gestrichelt angegebenen Lothen zusammen. Man findet leicht, daß in diesem Falle das Loth auf die Eckseite beispielsweise für den Ausschnitt 2 die Grundrifsänge  $e_2 = a \cos \varepsilon_2$  hat. Da ferner  $\frac{1}{2}c_2 = a_2 \cos \varepsilon_2$  ist, so hat der in Gleichung 97) auftretende Ausdruck  $2e_2 : c_2$  jetzt den Werth  $a : a_2$ . Aehnlich ist  $2e_3 : c_3 = a : a_3$ . Sonst ändert sich durch die Annahme rechteckiger Mittelfache nichts. Wir erhalten also für diesen Fall die neue Grundgleichung:

$$a_2 \frac{D_{12}}{d_{12}} + (a_2 + 2a_{23} + a_3) \frac{D_{23}}{d_{23}} + a_3 \frac{D_{34}}{d_{34}} = \frac{a^2}{h} \left( \frac{P_2}{a_2} - \frac{P_3}{a_3} \right) + \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23})$$

100)

$$+ 2(W_{23} - W_{32}) + \frac{a_3}{a} (V_{32} - V_{34}).$$

Es ist zu beachten, daß bei der jetzigen Annahme die Längen der Eckabschnitte  $a_1, a_2, a_3$  usw. nicht mehr ganz beliebig gewählt werden können, sondern durch die Größen der Eckwinkel bedingt sind, da nach Abb. 16 z. B.

$$a_2 = a \operatorname{tg} \varepsilon_2$$

ist. Daraus folgt, daß die Eckabschnitte alle gleich groß werden, wenn der Eckwinkel  $\varepsilon$  für alle Ausschnitte denselben Werth hat. In diesem Falle vereinfacht sich die Grundgleichung ganz wesentlich. Die Unveränderlichkeit des Eckwinkels kann in zweierlei Weise zu Stande kommen. Sie läßt sich z. B. bei einem länglich runden Fachwerk, wie es in Abb. 15 dargestellt ist, durch eine passende Wahl der Fachlängen  $a_{12}, a_{23}, a_{34}$  usw. erreichen; und zwar müssen diese wachsen, wenn man von einem Punkte stärkster Krümmung nach den Stellen mit flacherer Krümmung hin fortschreitet. Ist das Fachwerk einem Kreise eingeschrieben, so werden alle Eckwinkel gleich, wenn die Fachlängen einander gleich sind, also wenn der obere Ring ein regelmäßiges Vieleck im mathematischen Sinne ist. Ein derartiges Fachwerk selbst ein regelmäßiges zu nennen, wäre aus naheliegenden Gründen nicht zweckmäßig; wir wählen deshalb dafür den bezeichnenderen Namen Kreisfachwerk.

## 3. Kreisfachwerk.

Nehmen wir zunächst den Grenzfall an, daß es sich um eine Anordnung ohne Eckfäche, also eine eingeschossige Schwedlerkuppel handle, so gilt hierfür die Gleichung 98), natürlich mit den

entsprechenden Vereinfachungen. Diese bestehen erstens darin, daß alle Stäbe des Unterringes und alle Diagonalen gleiche Länge erhalten; wir setzen demgemäß  $a_{12} = a_{23} = a_{34} = \dots = a_u$  und  $d_{12} = d_{23} = d_{34} = \dots = d$ . Ferner sind die  $e$  und  $c$  für alle Ecken gleich, sodafs die unterscheidenden Ziffern wegfallen können. Hiermit geht 98) über in

$$101) \quad \frac{D_{23}}{d} = \frac{ae}{a_u c} \left( \frac{P_2}{h} - \frac{P_3}{h} \right) + \frac{W_{23}}{a_u} - \frac{W_{32}}{a_u}.$$

Als zweiter Fall möge angenommen werden, daß Eckfelder von durchweg gleicher Gröfse vorhanden seien. Wir setzen demgemäß  $a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_1$  und benutzen im übrigen die soeben eingeführten Bezeichnungen. Damit erhält die Grundgleichung 97) die neue Form:

$$102) \quad a_1 \frac{D_{12}}{d} + 2(a_1 + a_u) \frac{D_{23}}{d} + a_1 \frac{D_{34}}{d} = 2 \frac{ae}{hc} (P_2 - P_3) + \frac{a_1}{a} (V_{21} - V_{23}) \\ + 2 (W_{23} - W_{32}) + \frac{a_1}{a} (V_{32} - V_{34}).$$

Wir theilen mit  $a_1$  und setzten nach dem Vorbilde der im ersten Abschnitt angewandten Bezeichnungsweise:

$$103) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D_{12}}{d} = \mathfrak{D}_{12}; \quad \frac{D_{23}}{d} = \mathfrak{D}_{23}; \quad \frac{D_{34}}{d} = \mathfrak{D}_{34} \dots \\ \frac{P_1}{h} = \mathfrak{P}_1; \quad \frac{P_2}{h} = \mathfrak{P}_2; \quad \frac{P_3}{h} = \mathfrak{P}_3 \dots \\ \frac{V_{12}}{a} = \mathfrak{V}_{12}; \quad \frac{V_{23}}{a} = \mathfrak{V}_{23}; \quad \frac{V_{34}}{a} = \mathfrak{V}_{34} \dots \\ \frac{V_{21}}{a} = \mathfrak{V}_{21}; \quad \frac{V_{32}}{a} = \mathfrak{V}_{32}; \quad \frac{V_{43}}{a} = \mathfrak{V}_{43} \dots \\ \frac{W_{12}}{a_1} = \mathfrak{W}_{12}; \quad \frac{W_{23}}{a_1} = \mathfrak{W}_{23}; \quad \frac{W_{34}}{a_1} = \mathfrak{W}_{34} \dots \\ \frac{W_{21}}{a_1} = \mathfrak{W}_{21}; \quad \frac{W_{32}}{a_1} = \mathfrak{W}_{32}; \quad \frac{W_{43}}{a_1} = \mathfrak{W}_{43} \dots \end{array} \right.$$

Damit erhält man statt 102) die einfacher geformte Gleichung:

$$104) \quad \mathfrak{D}_{12} + 2 \frac{a_1 + a_u}{a_1} \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{34} = 2 \frac{ae}{a_1 c} (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3) + \mathfrak{V}_{21} - \mathfrak{V}_{23} \\ + 2 (\mathfrak{W}_{23} - \mathfrak{W}_{32}) + \mathfrak{V}_{32} - \mathfrak{V}_{34}.$$

Sie gilt für jede beliebige Länge  $a_1$  des Eckabschnittes mit Ausnahme von  $a_1 = 0$ . Wählt man  $a_1$  so, daß die Mittelfache

Rechtecke werden, so wird (wie unter 2 gezeigt)  $2e : c = a : a_1$ , und damit, wenn man die Fachlänge jetzt  $a_0$  nennt, die Grundgleichung für diesen Fall

$$105) \quad \mathfrak{D}_{12} + 2 \frac{a_1 + a_0}{a_1} \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{34} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 (\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3) + \mathfrak{B}_{21} - \mathfrak{B}_{23} + 2 (\mathfrak{W}_{23} - \mathfrak{W}_{32}) + \mathfrak{B}_{32} - \mathfrak{B}_{34}.$$

Wir wollen dies zur Probe auf ein quadratisches Fachwerk anwenden. Da für ein solches der Eckwinkel  $90^\circ$  und  $a_1 = a$  ist, so ergibt sich, wenn wir zur Abkürzung

$$106) \quad \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{B}_{21} - \mathfrak{B}_{23} + \mathfrak{B}_{32} - \mathfrak{B}_{34} + 2 (\mathfrak{W}_{23} - \mathfrak{W}_{32}) = \mathfrak{E}_{23}$$

setzen

$$\mathfrak{D}_{12} + 2 \frac{a + a_0}{a} \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{34} = \mathfrak{E}_{23}.$$

Läßt man das im ersten Abschnitt behandelte rechteckige Fachwerk ebenso in ein quadratisches übergehen, so wird  $b = a$  und  $b_0 = a_0$ . Dann stimmt die letzte Gleichung der Gruppe 56) genau mit der hier gefundenen überein, da die rechts stehende Größe  $\mathfrak{E}_{23}$

in beiden Fällen dieselbe Bedeutung hat. Der Unterschied zwischen 106) und der zweiten Gleichung der Gruppe 60) ist nämlich offenbar nur ein solcher der Bezeichnungswiese (vgl. § 8).

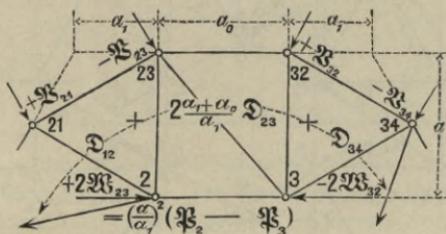


Abb. 18. Gedächtnisregel zur Berechnung der Diagonalspannungen.

Wir wollen nun noch zeigen, wie man den Bau der Grundgleichungen veranschaulichen und ihre einzelnen Glieder dem Gedächtnis einprägen kann.

In Abb. 18 ist als Beispiel ein aus den Abschnitten 2 und 3 bestehender Theil eines Kreisfachwerkes mit rechteckigen Mittelfachen im Grundriß dargestellt. Die an ihm wirkenden äußeren Kräfte sind soweit beigelegt, wie sie in der betreffenden Gleichung — in diesem Falle 105) — auftreten, und zwar mit den ihnen zukommenden Vorzeichen und Beiwerthen. Dazwischen stehen (durch einen gestrichelten Kreisbogen mit einander verbunden) die drei Glieder der linken Seite von 105) in derselben Ordnung wie die drei Diagonalen, auf die sie sich beziehen. Diese einfache Gedächtnisregel bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

### § 11. Das sechseckige Kreisfachwerk als Beispiel.

#### 1. Allgemeine Belastung.

Das Fachwerk möge rechteckige Mittelfache haben und in ganz beliebiger Weise belastet sein. Abb. 19 stellt ein solches Fachwerk mit den daran

wirkenden äußeren Kräften im Grundriss und in der Seitenansicht dar. Die Bezeichnungen entsprechen den im § 8 erörterten Regeln. Die sechs Gleichungen für die Diagonalspannungen haben hiernach die Form 105). Da die Behandlung einer solchen Gleichungsgruppe natürlich an sich schon eine etwas mühsame Sache ist, so müssen wir auf thunlichste Abkürzung bedacht sein. Wir bezeichnen deshalb den achtgliedrigen Ausdruck auf der rechten Seite mit nur einem Buchstaben, und zwar nach dem Vorbilde der Gleichungen 60) mit  $\mathfrak{S}$ . Diese Wahl empfiehlt sich besonders deswegen,

weil die durch 60) bestimmten  $\mathfrak{S}$  in der That nur Sonderwerthe der hier auftretenden, allgemeineren Ausdrücke sind. Wie dort, so unterscheiden wir auch hier die einzelnen  $\mathfrak{S}$  durch Hinzufügung zweier Ziffern, als welche sich die Zeiger der in ihnen enthaltenen beiden Werthe von  $\mathfrak{P}$  darbieten. Es ist also

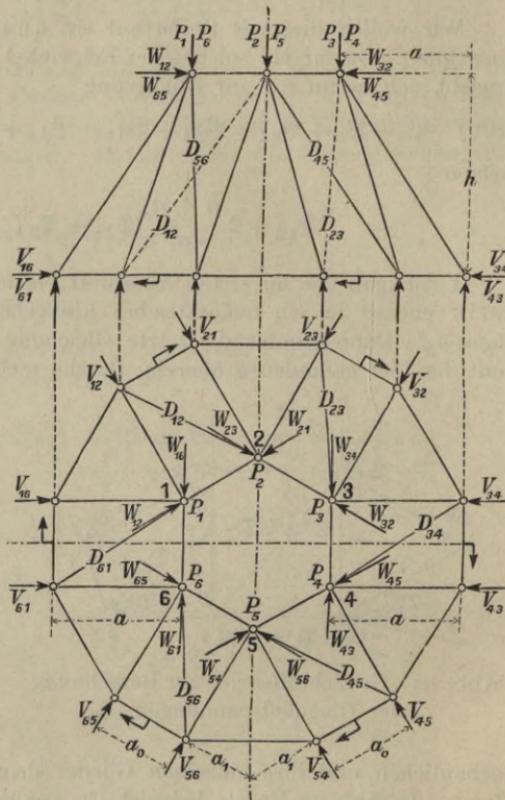


Abb. 19. Diagonalspannungen und äußere Kräfte am sechseckigen Kreisfachwerk.

$$107) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_{12} &= \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2) + \mathfrak{B}_{16} - \mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{B}_{21} - \mathfrak{B}_{23} + 2(\mathfrak{B}_{12} - \mathfrak{B}_{21}) \\ \mathfrak{S}_{23} &= \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3) + \mathfrak{B}_{21} - \mathfrak{B}_{23} + \mathfrak{B}_{32} - \mathfrak{B}_{34} + 2(\mathfrak{B}_{23} - \mathfrak{B}_{32}) \\ \mathfrak{S}_{34} &= \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 (\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_4) + \mathfrak{B}_{32} - \mathfrak{B}_{34} + \mathfrak{B}_{43} - \mathfrak{B}_{45} + 2(\mathfrak{B}_{34} - \mathfrak{B}_{43}) \\ \mathfrak{S}_{45} &= \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 (\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{P}_5) + \mathfrak{B}_{43} - \mathfrak{B}_{45} + \mathfrak{B}_{54} - \mathfrak{B}_{56} + 2(\mathfrak{B}_{45} - \mathfrak{B}_{54}) \\ \mathfrak{S}_{56} &= \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 (\mathfrak{P}_5 - \mathfrak{P}_6) + \mathfrak{B}_{54} - \mathfrak{B}_{56} + \mathfrak{B}_{65} - \mathfrak{B}_{61} + 2(\mathfrak{B}_{56} - \mathfrak{B}_{65}) \\ \mathfrak{S}_{61} &= \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 (\mathfrak{P}_6 - \mathfrak{P}_1) + \mathfrak{B}_{65} - \mathfrak{B}_{61} + \mathfrak{B}_{16} - \mathfrak{B}_{12} + 2(\mathfrak{B}_{61} - \mathfrak{B}_{16}). \end{aligned} \right.$$

Weiter setzen wir zur Abkürzung

$$108) \quad 2 \frac{a_1 + a_0}{a_1} = \varphi.$$

Damit erhalten wir nun aus 105) die sechs Grundgleichungen:

$$109) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{D}_{61} + \varphi \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{23} &= \mathfrak{S}_{12} \\ \mathfrak{D}_{12} + \varphi \mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{34} &= \mathfrak{S}_{23} \\ \mathfrak{D}_{23} + \varphi \mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{45} &= \mathfrak{S}_{34} \\ \mathfrak{D}_{34} + \varphi \mathfrak{D}_{45} + \mathfrak{D}_{56} &= \mathfrak{S}_{45} \\ \mathfrak{D}_{45} + \varphi \mathfrak{D}_{56} + \mathfrak{D}_{61} &= \mathfrak{S}_{56} \\ \mathfrak{D}_{56} + \varphi \mathfrak{D}_{61} + \mathfrak{D}_{12} &= \mathfrak{S}_{61}. \end{aligned} \right.$$

Um diese Gleichungen nach den  $\mathfrak{D}$  aufzulösen, fügen wir die vierte zur ersten, die fünfte zur zweiten und die sechste zur dritten hinzu; ferner ziehen wir die vierte von der ersten, die fünfte von der zweiten und die sechste von der dritten ab. So ergeben sich die neuen Gleichungen

$$110) \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{D}_{61} + \mathfrak{D}_{34}) + \varphi (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{45}) + (\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{56}) &= \mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{45} \\ (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{45}) + \varphi (\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{56}) + (\mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{61}) &= \mathfrak{S}_{23} + \mathfrak{S}_{56} \\ (\mathfrak{D}_{23} + \mathfrak{D}_{56}) + \varphi (\mathfrak{D}_{34} + \mathfrak{D}_{61}) + (\mathfrak{D}_{45} + \mathfrak{D}_{12}) &= \mathfrak{S}_{34} + \mathfrak{S}_{61} \end{aligned} \right.$$

und

$$111) \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{D}_{61} - \mathfrak{D}_{34}) + \varphi (\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{45}) + (\mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{56}) &= \mathfrak{S}_{12} - \mathfrak{S}_{45} \\ (\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{45}) + \varphi (\mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{56}) + (\mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{D}_{61}) &= \mathfrak{S}_{23} - \mathfrak{S}_{56} \\ (\mathfrak{D}_{23} - \mathfrak{D}_{56}) + \varphi (\mathfrak{D}_{34} - \mathfrak{D}_{61}) + (\mathfrak{D}_{45} - \mathfrak{D}_{12}) &= \mathfrak{S}_{34} - \mathfrak{S}_{61}. \end{aligned} \right.$$

Betrachten wir nun hierin die Summen und Unterschiede der  $\mathfrak{D}$  als neue Unbekannte, so ist die Auflösung der sechs Gleichungen 109) auf die getrennte Berechnung der drei Summenwerthe aus 110) und

der drei Werthe der Unterschiede aus 111) zurückgeführt. Das vereinfacht zwar die Sache erheblich, erfordert aber immer noch sehr umfangreiche Rechnungen, wenn man nicht auf weitere Abkürzungen Bedacht nimmt. Wir schreiben deshalb die Gleichungen nochmals in einer anderen Form an, indem wir die Summen und Unterschiede der  $\mathfrak{D}$  mit  $\sigma$  und  $\delta$ , diejenigen der  $\mathfrak{S}$  mit  $\Sigma$  und  $\mathcal{A}$  bezeichnen und diesen Buchstaben zur Kennzeichnung der einzelnen Werthe je zwei Ziffern beifügen. Nach welcher Regel letzteres geschehen ist, ergibt sich leicht durch einen Vergleich mit 110) und 111). Wir erhalten so

$$112) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{36} + \varphi \sigma_{14} + \sigma_{25} = \Sigma_{14} \\ \sigma_{14} + \varphi \sigma_{25} + \sigma_{36} = \Sigma_{25} \\ \sigma_{25} + \varphi \sigma_{36} + \sigma_{14} = \Sigma_{36} \end{array} \right.$$

und ähnlich

$$113) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\delta_{36} + \varphi \delta_{14} + \delta_{25} = \mathcal{A}_{14} \\ \delta_{14} + \varphi \delta_{25} + \delta_{36} = \mathcal{A}_{25} \\ \delta_{25} + \varphi \delta_{36} - \delta_{14} = \mathcal{A}_{36}. \end{array} \right.$$

Jetzt bietet die Auflösung keine Schwierigkeiten mehr. Bezeichnet man die Nennerdeterminante der ersten Gruppe mit  $N_\sigma$ , die der zweiten mit  $N_\delta$ , so erhält man

$$114) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_\sigma = \varphi^3 - 3\varphi + 2 = (\varphi - 1)^2 (\varphi + 2) \\ N_\delta = \varphi^3 - 3\varphi - 2 = (\varphi + 1)^2 (\varphi - 2). \end{array} \right.$$

Nach den Regeln der Determinantenlehre folgt hiermit aus 112):

$$115) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{14} \cdot N_\sigma = (\varphi - 1) [(\varphi + 1) \Sigma_{14} \quad - \Sigma_{25} \quad - \Sigma_{36}] \\ \sigma_{25} \cdot N_\sigma = (\varphi - 1) [ \quad - \Sigma_{14} + (\varphi + 1) \Sigma_{25} \quad - \Sigma_{36}] \\ \sigma_{36} \cdot N_\sigma = (\varphi - 1) [ \quad - \Sigma_{14} \quad - \Sigma_{25} + (\varphi + 1) \Sigma_{36}]. \end{array} \right.$$

Ebenso ergibt sich aus 113):

$$116) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{14} \cdot N_\delta = (\varphi + 1) [(\varphi - 1) \mathcal{A}_{14} \quad - \mathcal{A}_{25} \quad + \mathcal{A}_{36}] \\ \delta_{25} \cdot N_\delta = (\varphi + 1) [ \quad - \mathcal{A}_{14} + (\varphi - 1) \mathcal{A}_{25} \quad - \mathcal{A}_{36}] \\ \delta_{36} \cdot N_\delta = (\varphi + 1) [ \quad + \mathcal{A}_{14} \quad - \mathcal{A}_{25} + (\varphi - 1) \mathcal{A}_{36}]. \end{array} \right.$$

Die vor den eckigen Klammern stehenden Größen heben sich gegen die nach 114) in  $N_\sigma$  und  $N_\delta$  enthaltenen gleichen Werthe. Wir bezeichnen die übrig bleibenden Ausdrücke zur Abkürzung mit besonderen Buchstaben, indem wir

$$117) \quad (\varphi - 1)(\varphi + 2) = \Phi_1 \quad \text{und} \quad (\varphi + 1)(\varphi - 2) = \Phi_2$$

setzen. Dann ergeben sich die  $\sigma$  und  $\delta$  aus 115) und 116), indem man auf beiden Seiten mit vorstehenden Werthen theilt. Die ge-

suchten  $\mathfrak{D}$  findet man hierauf als die halben Summen und Unterschiede je zweier gleich bezifferter  $\sigma$  und  $\delta$  wie folgt:

$$118) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_{12} \\ \mathfrak{D}_{45} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1/2 \left[ \frac{\varphi}{\Phi_1} \Sigma_{14} + \frac{1}{\Phi_1} (\Sigma_{14} - \Sigma_{25} - \Sigma_{36}) \right] \\ \pm 1/2 \left[ \frac{\varphi}{\Phi_2} \mathcal{A}_{14} - \frac{1}{\Phi_2} (\mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{25} - \mathcal{A}_{36}) \right] \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_{23} \\ \mathfrak{D}_{56} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1/2 \left[ \frac{\varphi}{\Phi_1} \Sigma_{25} + \frac{1}{\Phi_1} (-\Sigma_{14} + \Sigma_{25} - \Sigma_{36}) \right] \\ \pm 1/2 \left[ \frac{\varphi}{\Phi_2} \mathcal{A}_{25} - \frac{1}{\Phi_2} (\mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{25} + \mathcal{A}_{36}) \right] \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_{34} \\ \mathfrak{D}_{61} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1/2 \left[ \frac{\varphi}{\Phi_1} \Sigma_{36} + \frac{1}{\Phi_1} (-\Sigma_{14} - \Sigma_{25} + \Sigma_{36}) \right] \\ \pm 1/2 \left[ \frac{\varphi}{\Phi_2} \mathcal{A}_{36} - \frac{1}{\Phi_2} (-\mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{25} + \mathcal{A}_{36}) \right]. \end{array} \right\}$$

In diese Gleichungen hat man nun für die  $\Sigma$  und  $\mathcal{A}$  die aus 110) und 111) folgenden Summen und Unterschiede der  $\mathfrak{S}$  und hierauf deren Werthe aus 107) einzusetzen. Damit sind dann die sechs Diagonalspannungen  $\mathfrak{D}$  als Functionen der äusseren Kräfte bestimmt. Das ist aber leichter gesagt als gethan; denn man geräth dabei in ausserordentlich weitläufige und schwer zu übersehende Entwicklungen, wie der Leser bei einem Versuche sehr bald bemerken wird. Wir müssen deshalb darauf verzichten, die Rechnung im einzelnen vorzuführen und uns mit der Wiedergabe der Ergebnisse in der folgenden, nach dem Muster von 62) angeordneten Tafel 122) begnügen. Selbst hierzu ist aber noch die Einführung einer Reihe abkürzender Bezeichnungen erforderlich, die so zu wählen sein werden, daß sie sich leicht merken und den Gang der Rechnung möglichst klar hervortreten lassen.

Demgemäß sollen die Beiwerte der  $\mathfrak{P}$  allgemein mit  $p$ , diejenigen der  $\mathfrak{V}$  mit  $v$  und die der  $\mathfrak{W}$  mit  $w$  bezeichnet und diesen Buchstaben als weitere Unterscheidungsmerkmale Ziffern angefügt werden. Wir setzen

$$119) \left\{ \begin{array}{l} 1/2 \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 \left[ \frac{1}{\varphi - 1} + \frac{\varphi}{(\varphi - 2)(\varphi + 1)} \right] = p_1 \\ 1/2 \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 \left[ \frac{1}{\varphi - 1} - \frac{\varphi}{(\varphi - 2)(\varphi + 1)} \right] = p_2 \\ 1/2 \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 \left[ \frac{2}{(\varphi - 2)(\varphi + 1)} \right] = p_3; \end{array} \right.$$

ferner

$$120) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\varphi + 1} + \frac{\varphi}{(\varphi + 2)(\varphi - 1)} \right] = v_1 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{-1}{\varphi + 1} + \frac{\varphi}{(\varphi + 2)(\varphi - 1)} \right] = v_2 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{(\varphi + 2)(\varphi - 1)} \right] = v_3; \end{array} \right.$$

und schliesslich noch

$$121) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi + 1}{(\varphi + 2)(\varphi - 1)} + \frac{\varphi - 1}{(\varphi - 2)(\varphi + 1)} = w_1 \\ \frac{\varphi + 1}{(\varphi + 2)(\varphi - 1)} - \frac{\varphi - 1}{(\varphi - 2)(\varphi + 1)} = w_2 \\ \frac{1}{(\varphi + 2)(\varphi - 1)} + \frac{1}{(\varphi - 2)(\varphi + 1)} = w_3 \\ \frac{1}{(\varphi + 2)(\varphi - 1)} - \frac{1}{(\varphi - 2)(\varphi + 1)} = w_4. \end{array} \right.$$

Die hierin auftretende Gröfse  $\varphi$  ist durch 108) bestimmt, nämlich

$$\varphi = 2 \frac{a_1 + a_0}{a_1}.$$

Die Bedeutung von  $a$ ,  $a_1$  und  $a_0$  ergibt sich aus Abb. 19. Im übrigen ist zur Erläuterung der Tafel 122) nur noch zu bemerken, daß sie die Werthe angiebt, mit denen die in der letzten Spalte aufgeführten äusseren Kräfte vervielfältigt werden müssen, wenn man die am Kopfe stehenden Diagonalspannungen berechnen will. Die fetter gedruckten Buchstaben sollen die Regel andeuten, nach der sich die Beiwerthe beim Fortschritt von einer Diagonale zur anderen verschieben.

Diejenigen Leser, die es vielleicht als eine Lücke empfinden, daß wir die langwierige Umformung der Gleichungen 118) beiseite gelassen haben, können sich von der Richtigkeit unserer Rechnung leicht durch probeweise Einsetzung der Tafelwerthe in die Gleichungen 109) überzeugen. Es ist ganz lehrreich zu sehen, wie in der That die Beiwerthe aller auf der rechten Seite einer solchen Gleichung nicht vorhandenen äusseren Kräfte zu Null werden, wenn man mit Hülfe der Tafel 122) den auf der linken Seite stehenden Ausdruck bildet und für die  $p$ ,  $v$  und  $w$  ihre Werthe aus 119) bis 121) einführt.

Wir wollen zum Schlufs nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß die Tafel 122) auch für ein Fachwerk gilt, dessen Mittelfache keine Rechtecke sind. Es ändert sich dann nur

122) Tafel zur Berechnung der Diagonalspannungen eines sechseckigen Kreisfachwerkes.  
Die Bedeutung der Buchstaben ergibt sich aus Abb. 19 und den Gleichungen 103), 108) und 119) bis 121).

$\mathfrak{D}_{12} =$	$\mathfrak{D}_{23} =$	$\mathfrak{D}_{34} =$	$\mathfrak{D}_{45} =$	$\mathfrak{D}_{56} =$	$\mathfrak{D}_{61} =$	Angreifende Kräfte:
$p_1$	$-p_3$	$-p_2$	$p_2$	$p_3$	$-p_1$	$\mathfrak{P}_1$
$-p_1$	$p_1$	$-p_3$	$-p_2$	$p_2$	$p_3$	$\mathfrak{P}_2$
$p_3$	$-p_1$	$p_1$	$-p_3$	$-p_2$	$p_2$	$\mathfrak{P}_3$
$p_2$	$p_3$	$-p_1$	$p_1$	$-p_3$	$-p_2$	$\mathfrak{P}_4$
$-p_2$	$p_2$	$p_3$	$-p_1$	$p_1$	$-p_3$	$\mathfrak{P}_5$
$-p_3$	$-p_2$	$p_2$	$p_3$	$-p_1$	$p_1$	$\mathfrak{P}_6$
$v_1$	$-v_3$	$v_2$	$v_2$	$-v_3$	$v_1$	$\mathfrak{B}_{16} - \mathfrak{B}_{12}$
$v_1$	$v_1$	$-v_3$	$v_2$	$v_2$	$-v_3$	$\mathfrak{B}_{21} - \mathfrak{B}_{23}$
$-v_3$	$v_1$	$v_1$	$-v_3$	$v_2$	$v_2$	$\mathfrak{B}_{32} - \mathfrak{B}_{34}$
$v_2$	$-v_3$	$v_1$	$v_1$	$-v_3$	$v_2$	$\mathfrak{B}_{43} - \mathfrak{B}_{45}$
$v_2$	$v_2$	$-v_3$	$v_1$	$v_1$	$-v_3$	$\mathfrak{B}_{54} - \mathfrak{B}_{56}$
$-v_3$	$v_2$	$v_2$	$-v_3$	$v_1$	$v_1$	$\mathfrak{B}_{65} - \mathfrak{B}_{61}$
$w_1$	$-w_3$	$-w_4$	$w_2$	$-w_4$	$-w_3$	$\mathfrak{W}_{12} - \mathfrak{W}_{21}$
$-w_3$	$w_1$	$-w_3$	$-w_4$	$w_2$	$-w_4$	$\mathfrak{W}_{23} - \mathfrak{W}_{32}$
$-w_4$	$w_3$	$w_1$	$-w_3$	$-w_4$	$w_2$	$\mathfrak{W}_{34} - \mathfrak{W}_{43}$
$w_2$	$-w_4$	$-w_3$	$w_1$	$-w_3$	$-w_4$	$\mathfrak{W}_{45} - \mathfrak{W}_{54}$
$-w_4$	$w_2$	$-w_4$	$-w_3$	$w_1$	$-w_3$	$\mathfrak{W}_{56} - \mathfrak{W}_{65}$
$-w_3$	$-w_4$	$w_2$	$-w_4$	$-w_3$	$w_1$	$\mathfrak{W}_{61} - \mathfrak{W}_{16}$

die Bedeutung der Größen  $p$ ,  $v$  und  $w$  insofern, als man in 108)  $a_u$  statt  $a_0$ , und in 119) an Stelle von  $\frac{1}{2} a^2 : a_1^2$  zu setzen hat  $ae : a_1 e$ . Dafs dem so ist, erkennt man leicht aus einem Vergleich von 105) mit 104).

## 2. Einige besondere Belastungsfälle.

Es würde zu weit führen, wenn wir hier eine vollständige Untersuchung auch nur der wichtigsten Belastungsfälle anstellen wollten. Wir überlassen es dem Leser, sich die ihm etwa wünschenswerth scheinenden weiteren Aufklärungen selbst zu verschaffen, was ja mit Hilfe der Tafel 122) sehr leicht zu bewirken ist. Um aber die Art ihres Gebrauches doch wenigstens an einigen Beispielen zu veranschaulichen, wollen wir zwei besondere Fälle kurz behandeln.

Zuerst möge eine symmetrische, lothrechte Belastung angenommen werden. Setzt man in Abb. 19

$$\mathfrak{F}_6 = \mathfrak{F}_1, \quad \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_3,$$

so ergibt sich aus Tafel 122), dafs die Beiwerthe der  $\mathfrak{F}$  für die Diagonalspannungen  $\mathfrak{D}_{34}$  und  $\mathfrak{D}_{61}$  aus je zwei entgegengesetzt gleichen Theilen bestehen, dafs also

$$\mathfrak{D}_{34} = \mathfrak{D}_{61} = 0$$

wird. Die übrigen vier Diagonalspannungen nehmen die folgenden Werthe an:

$$\mathfrak{D}_{12} = (p_1 - p_3) \mathfrak{F}_1 - (p_1 + p_2) \mathfrak{F}_2 + (p_2 + p_3) \mathfrak{F}_3$$

$$\mathfrak{D}_{23} = -(p_2 + p_3) \mathfrak{F}_1 + (p_1 + p_2) \mathfrak{F}_2 - (p_1 - p_3) \mathfrak{F}_3$$

$$\mathfrak{D}_{45} = (p_2 + p_3) \mathfrak{F}_1 - (p_1 + p_2) \mathfrak{F}_2 + (p_1 - p_3) \mathfrak{F}_3$$

$$\mathfrak{D}_{56} = -(p_1 - p_3) \mathfrak{F}_1 + (p_1 + p_2) \mathfrak{F}_2 - (p_2 + p_3) \mathfrak{F}_3.$$

Wie vorauszusehen war, ist also  $\mathfrak{D}_{12} = -\mathfrak{D}_{56}$  und  $\mathfrak{D}_{23} = -\mathfrak{D}_{45}$ . Setzt man nun für die  $p$  ihre Werthe aus 119), so folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{12} &= -\mathfrak{D}_{56} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q+1} \right) \mathfrak{F}_1 - \frac{2}{q-1} \mathfrak{F}_2 + \left( \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q+1} \right) \mathfrak{F}_3 \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{23} &= -\mathfrak{D}_{45} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 \left[ - \left( \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q+1} \right) \mathfrak{F}_1 + \frac{2}{q-1} \mathfrak{F}_2 - \left( \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q+1} \right) \mathfrak{F}_3 \right]. \end{aligned}$$

Dies gilt für eine Belastung, die zur wagerechten Achse des Grundrisses in Abb. 19 symmetrisch ist. Wenn auch noch in Bezug auf die lothrechte Achse Symmetrie bestehen soll, so mufs

$$\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1$$

sein, und damit ergibt sich aus vorstehenden Gleichungen:

$$\mathfrak{D}_{12} = -\mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{D}_{45} = -\mathfrak{D}_{56} = \frac{1}{q-1} \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2).$$

Ersetzt man die Diagonalen  $\mathfrak{D}_{23}$  und  $\mathfrak{D}_{56}$  durch ihre Gegen-  
diagonalen, so werden alle vier Spannungen gleich; was auch ein-  
leuchtet, da das Fachwerk dann nicht nur hinsichtlich seiner Be-  
lastung, sondern auch in Bezug auf seine räumliche Anordnung zwei-  
achsig symmetrisch ist.

Als zweiten Fall wollen wir annehmen, daß das Fachwerk durch  
die am oberen Ringe angreifenden wagerechten Kräfte auf Ver-  
drehung beansprucht sei, wie es etwa eintreten könnte, wenn eine  
auf dem Fachwerk angebrachte Laterne durch einen Wirbelsturm  
erfaßt würde. Wir setzen in Abb. 19

$$\mathfrak{R}_{12} = \mathfrak{R}_{23} = \mathfrak{R}_{34} = \mathfrak{R}_{45} = \mathfrak{R}_{56} = \mathfrak{R}_{61} = \mathfrak{R}$$

und  $\mathfrak{R}_{21} = \mathfrak{R}_{32} = \mathfrak{R}_{43} = \mathfrak{R}_{54} = \mathfrak{R}_{65} = \mathfrak{R}_{16} = 0.$

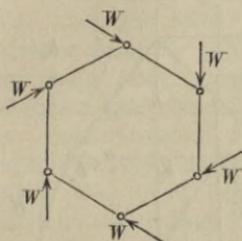


Abb. 20. Verdrehende  
Kräfte am oberen Ring.

Dieser Belastungszustand ist in Ab-  
bildung 20 der größeren Deutlichkeit  
wegen nochmals besonders dargestellt.  
Damit ergibt sich aus Tafel 122), daß  
alle Diagonalspannungen gleich groß  
werden. Bezeichnet man ihren gemein-  
schaftlichen Werth mit  $\mathfrak{D}$ , so wird

$$\mathfrak{D} = [w_1 + w_2 - 2(w_3 + w_4)] \mathfrak{R}.$$

Die Einsetzung der  $w$  aus 121) liefert

$$\mathfrak{D} = \frac{2\varphi}{(\varphi + 2)(\varphi - 1)} \mathfrak{R}.$$

In allen diesen Gleichungen hat  $\varphi$   
nach 108) den Werth  $\varphi = 2(a_1 + a_0):a_1$ , während die Bedeutung  
der übrigen Größen aus 103) und Abb. 19 hervorgeht.

## Dritter Abschnitt.

### Abgeleitete Formen.

#### § 12. Fachwerk mit schräger Stützung. Einfluss der Stützen- neigung im allgemeinen.

Im § 1 wurde vorausgesetzt, daß in den Eckpunkten des unteren  
Ringes des rechteckigen Fachwerkes Lager angebracht seien, die nur  
lotrechte Drücke zulassen. Wir haben diese Annahme auch im  
zweiten Abschnitt für das mehreckige Fachwerk stillschweigend bei-  
behalten. Das ist nicht etwa geschehen, weil das Fachwerk einer  
solchen Stützung notwendig bedürfte, sondern nur, weil sich die  
Rechnung dabei etwas einfacher gestaltet als bei Annahme einer

allgemeineren Stützungsweise, und weil es keine Schwierigkeit bietet, aus den für die lothrechte Stützung gewonnenen Ergebnissen nachträglich auch den Einfluß einer schrägen Stützung abzuleiten. Um dies nun durchzuführen, können wir uns die schrägen Lagerdrücke in ähnlicher Weise durch Gelenkstäbe ausgeübt denken, wie es im § 1 bei den lothrechten Drücken geschah und in Abb. 3 (Seite 7) veranschaulicht ist.

Geht man wieder von dem rechteckigen Fachwerk aus, so tritt an Stelle der vorerwähnten Anordnung eine solche, wie sie Abb. 21 im Grundriß und Querschnitt zeigt. Die allgemeinste Art der Stützung ergibt sich, wenn man annimmt, daß die Stützen gegen alle drei Hauptachsen schräg gestellt seien; in Abb. 21 ist bei zwei Stützen eine derartige Lage durch gestrichelte Linien angedeutet. Zerlegt man dann aber diese Stützendrücke nach der Richtung jener drei Achsen, so zeigt sich, daß die in die Richtung der mittleren Stäbe des Unterringes fallenden Seitenkräfte von diesen Stäben unmittelbar in die wagerechten Lager geleitet werden, also auf die übrigen Theile des Fachwerkes keine Wirkung ausüben können. Man darf daher zur Abkürzung der Untersuchung die schrägen Stützen von vornherein rechtwinklig zu den mittleren Stäben des unteren Ringes annehmen, ohne daß dadurch die Allgemeinheit der Ergebnisse beeinträchtigt wird. Eine solche Richtung der Stützen ist in Abb. 21 durch die ausgezogenen Linien dargestellt und soll den weiteren Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Bei dieser Annahme stimmt der Neigungswinkel einer jeden Stütze mit demjenigen der Ebene überein, die man durch sie und den zugehörigen mittleren Unterringstab legen kann, und die wir Stützungsebene nennen wollen.

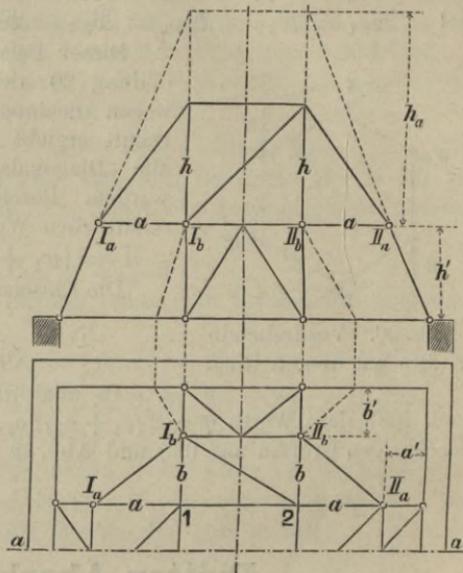


Abb. 21. Rechteckiges Fachwerk mit schräger Stützung.

Man darf daher zur Abkürzung der Untersuchung die schrägen Stützen von vornherein rechtwinklig zu den mittleren Stäben des unteren Ringes annehmen, ohne daß dadurch die Allgemeinheit der Ergebnisse beeinträchtigt wird. Eine solche Richtung der Stützen ist in Abb. 21 durch die ausgezogenen Linien dargestellt und soll den weiteren Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Bei dieser Annahme stimmt der Neigungswinkel einer jeden Stütze mit demjenigen der Ebene überein, die man durch sie und den zugehörigen mittleren Unterringstab legen kann, und die wir Stützungsebene nennen wollen.

Vergleicht man nun die Wirkungsweise der lothrechten und der schrägen Stützung, so zeigt sich, daß bei der ersteren die in den Lagerknotenpunkten des Fachwerkes angreifenden lothrechten Kräfte vollständig von den Lagern oder den sie vertretenden Gelenkstäben aufgenommen und ohne irgend welche Einwirkung auf das Fachwerk in den Unterbau geführt werden, während die geneigten Stützen natürlich nur die in ihre Richtung fallenden Antheile jener Kräfte aufnehmen und ohne Beeinflussung des Fachwerkes ableiten können. Zerlegt man also die in den Auflagerknotenpunkten angreifenden lothrechten Kräfte nach der Richtung der zugehörigen Stützen und nach der wagerechten Richtung, so wirken die wagerechten Seitenkräfte als äußere Kräfte am unteren Ring des Fachwerkes. Sie treten also zu den dort schon vorhandenen wagerechten Lasten, die wir bisher mit  $V$  bezeichnet haben, hinzu (s. Abb. 4, S. 9). Hieraus folgt, daß alle bisher abgeleiteten Formeln auch für den Fall der schrägen Stützung gültig bleiben, wenn man die Bedeutung der  $V$  in dem Sinne ändert, daß darunter nicht mehr die unmittelbar gegebenen wagerechten Lasten, sondern die Summen aus diesen und den hinzutretenden, durch die schräge Stützung erzeugten wagerechten Schüben der lothrechten Lasten verstanden werden. Damit hierbei aber nicht Verwechslungen entstehen, bezeichnen wir diese an Stelle der Größen  $V$  zu setzenden Summen fernerhin mit  $V'$ ; dann kann  $V$  seine bisherige Bedeutung behalten.

Um nun die  $V'$  zu berechnen, hat man zuerst die lothrechten Lasten für die Auflagerknotenpunkte zu ermitteln. Als solche wirken selbstverständlich die Auflagerdrücke des Fachwerkes, die wir im § 1 mit  $A_I$  bis  $A_{IV}$  und  $B_I$  bis  $B_{IV}$  bezeichnet haben (s. Abb. 4). Außerdem müssen aber jetzt auch die etwaigen lothrechten Antheile der auf die Lagerpunkte einwirkenden äußeren Kräfte berücksichtigt werden, die wir früher außer acht lassen konnten, weil sie bei lothrechter Stützung keine Wirkung auf das Fachwerk ausübten. Wir wollen diese neu hinzukommenden Kräfte mit dem Buchstaben  $P$  bezeichnen und in derselben Weise durch die Richtungszeiger  $a$  und  $b$  und die Ziffern 1 bis 4 von einander unterscheiden wie die in den gleichen Punkten angreifenden Kräfte  $V$ . Wird nun noch angenommen, daß die Stützung ebenso wie das Fachwerk selbst in Bezug auf die beiden Hauptachsen symmetrisch angeordnet sei, und wird die in die Richtung der  $a$ -Achse fallende Grundrißlänge der geneigten Stützen mit  $a'$ , die in die Richtung der  $b$ -Achse fallende mit  $b'$ , die Höhe der Stützen mit  $h'$  bezeichnet, so sind alle zur Berechnung der wagerechten Schübe  $V'$  erforderlichen Unterlagen gegeben. Am einfachsten findet man die Werthe der  $V'$ , indem man sie als Gegenkräfte des Fachwerkes betrachtet und als Bedingungen für das Gleichgewicht der schrägen Stützen die Summe der Momente für die

unteren Enden der letzteren gleich Null setzt. So erhält man z. B. nach Abb. 21 u. 22 für den Knotenpunkt Ia

$$(-V'_{a1} + V_{a1})h' + (P_{a1} + A_1)a' = 0,$$

wodurch die gesuchte GröÙe  $V'_{a1}$  bestimmt ist. Die Auflösung ergibt

$$V'_{a1} = V_{a1} + \frac{a'}{h'}(P_{a1} + A_1).$$

Es empfiehlt sich, diese Gleichung noch etwas umzugestalten; denn in den Formeln, die wir früher für den Fall der lothrechten Stützung abgeleitet haben, treten nicht die Kräfte selbst auf, sondern die durch die Gleichungen 42) bis 45) eingeführten, mit deutschen Buchstaben bezeichneten GröÙen, welche Kräfte auf die Längeneinheit bedeuten. Die Benutzung der früheren Ergebnisse wird erleichtert, wenn wir hier dieselbe Bezeichnungsweise anwenden. Dies kann ohne weiteres geschehen, da sich die Gleichung für  $V'_{a1}$  offenbar auch in der Form

$$123) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{V'_{a1}}{a} &= \frac{V_{a1}}{a} + \frac{a'}{h'} \frac{h}{a} \left( \frac{P_{a1}}{h} + \frac{A_1}{h} \right) \\ &= \mathfrak{B}'_{a1} = \mathfrak{B}_{a1} + \frac{a'}{h'} \frac{h}{a} (\mathfrak{P}_{a1} + \mathfrak{A}_1) \end{aligned} \right.$$

schreiben läÙt. Hierin sind nur die — übrigens nach dem Muster der  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{P}$  in 45) gebildeten — Bezeichnungen  $\mathfrak{B}'_{a1}$  und  $\mathfrak{P}'_{a1}$  neu.

Verlängert man die Richtungen der schrägen Stützen nach oben, bis sie die durch die Ecken des oberen Ringes gehenden Lothe schneiden, und bezeichnet man die Höhen der so erhaltenen Schnittpunkte über dem unteren Ring (die für die beiden Hauptachsenrichtungen nicht gleich groß zu sein brauchen) mit  $h_a$  und  $h_b$ , wie dies in Abb. 21 für die Richtung der  $a$ -Achse ausgeführt ist, so findet man leicht, daß

$$\frac{a'}{h'} = \frac{a}{h_a}, \text{ und ähnlich } \frac{b'}{h'} = \frac{b}{h_b}$$

sein muß. Damit wird die Gleichung für  $\mathfrak{B}'_{a1}$  noch etwas einfacher

$$124) \quad \mathfrak{B}'_{a1} = \mathfrak{B}_{a1} + \frac{h}{h_a} (\mathfrak{P}_{a1} + \mathfrak{A}_1).$$

In derselben Weise kann man alle übrigen  $\mathfrak{B}'$  berechnen. Wie dann die so gefundenen Ausdrücke weiter zu verwerthen sind, läÙt sich am bequemsten an einem Beispiel zeigen.

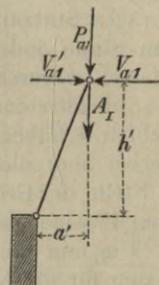


Abb. 22.  
Gleichgewicht der Kräfte an einer schrägen Stütze.

### § 13. Berechnung der Diagonalspannungen für ein rechteckiges, symmetrisch belastetes Fachwerk auf schrägen Stützen.

Wir wählen diesen Belastungsfall, weil er für die Zwecke der Anwendung vorzugsweise in Betracht kommt und dabei einfacher zu behandeln ist, als der Fall einer allgemeineren Belastung.

Zunächst sind die  $\mathfrak{B}'$  zu berechnen. Setzt man zur Abkürzung

$$125) \quad \frac{h}{h_a} = a \text{ und } \frac{h}{h_b} = b,$$

so erhalten die nach dem Muster von 123) aufzustellenden Gleichungen die Form

$$126) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}'_{a1} = \mathfrak{B}_{a1} + a (\mathfrak{P}_{a1} + \mathfrak{A}_I) \\ \mathfrak{B}'_{a2} = \mathfrak{B}_{a2} + a (\mathfrak{P}_{a2} + \mathfrak{A}_{II}) \\ \mathfrak{B}'_{b1} = \mathfrak{B}_{b1} + b (\mathfrak{P}_{b1} + \mathfrak{B}_I) \\ \mathfrak{B}'_{b2} = \mathfrak{B}_{b2} + b (\mathfrak{P}_{b2} + \mathfrak{B}_{II}). \end{array} \right.$$

Hierin sind die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}_I$ ,  $\mathfrak{A}_{II}$ ,  $\mathfrak{B}_I$  und  $\mathfrak{B}_{II}$  nicht bekannt. Um sie zu bestimmen, muß man die vier Gleichungen 79) aus § 5 heranziehen. Da in diesen die Diagonalspannung  $\mathfrak{D}_{12}$  auftritt, die ihrerseits wieder von den  $\mathfrak{B}'$  abhängt, so ist auch noch die Gleichung 75) zu benutzen. Im ganzen sind also neun Gleichungen und ebensoviel Unbekannte vorhanden, mit deren Berechnung die Aufgabe gelöst ist. Als Endziel wählen wir die Ableitung einer allgemeinen, von den übrigen Unbekannten freien Formel für die Diagonalspannung.

Setzt man die  $\mathfrak{B}'$  aus 126) an Stelle der  $\mathfrak{B}$  in 79), so erscheinen die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}_I$  bis  $\mathfrak{A}_{IV}$  und  $\mathfrak{B}_I$  bis  $\mathfrak{B}_{IV}$  auch auf der rechten Seite dieser Gleichungen. Wir bringen überall die Größe, die der links stehenden gleich ist, auf die andere Seite, und fassen der Abkürzung wegen alle Glieder, die nur gegebene äußere Kräfte enthalten, zu einem einzigen mit  $K$  bezeichneten Ausdruck zusammen. So ergibt sich mit leicht verständlicher Unterscheidung der verschiedenen  $K$ :

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2} a) \mathfrak{A}_I &= -\frac{1}{2} \mathfrak{D}_{12} - \frac{1}{2} b \mathfrak{B}_I + K_{a1} \\ (1 - \frac{1}{2} a) \mathfrak{A}_{II} &= \frac{1}{2} \mathfrak{D}_{12} - \frac{1}{2} b \mathfrak{B}_{II} + K_{a2} \\ (1 - \frac{1}{2} b) \mathfrak{B}_I &= -\frac{1}{2} \mathfrak{D}_{12} - \frac{1}{2} a \mathfrak{A}_I + K_{b1} \\ (1 - \frac{1}{2} b) \mathfrak{B}_{II} &= \frac{1}{2} \mathfrak{D}_{12} - \frac{1}{2} a \mathfrak{A}_{II} + K_{b2}. \end{aligned}$$

Wenn man die zweite von der ersten und die vierte von der zweiten Gleichung abzieht, die Unterschiede der  $K$  kurz mit  $\mathcal{A}K$  bezeichnet und neu ordnet, so folgt:

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2} a) (\mathfrak{A}_I - \mathfrak{A}_{II}) + \frac{1}{2} b (\mathfrak{B}_I - \mathfrak{B}_{II}) &= -\mathfrak{D}_{12} + \mathcal{A}K_a \\ \frac{1}{2} a (\mathfrak{A}_I - \mathfrak{A}_{II}) + (1 - \frac{1}{2} a) (\mathfrak{B}_I - \mathfrak{B}_{II}) &= -\mathfrak{D}_{12} + \mathcal{A}K_b. \end{aligned}$$

Wir fügen die zweite Gleichung zur ersten hinzu und ziehen sie davon ab. Dadurch ergeben sich zwei neue, für die Auflösung etwas bequemere Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_I - \mathfrak{M}_{II}) + (\mathfrak{B}_I - \mathfrak{B}_{II}) &= -2 \mathfrak{D}_{12} + \mathcal{A}K_a + \mathcal{A}K_b \\ (1 - \alpha) (\mathfrak{M}_I - \mathfrak{M}_{II}) - (1 - \beta) (\mathfrak{B}_I - \mathfrak{B}_{II}) &= \mathcal{A}K_a - \mathcal{A}K_b. \end{aligned}$$

Hieraus findet man nach den Regeln der Determinantenlehre leicht:

$$127) \begin{cases} \mathfrak{M}_I - \mathfrak{M}_{II} = -2 \frac{1}{2 - \alpha - \beta} \mathfrak{D}_{12} + \frac{1}{2 - \alpha - \beta} \left[ (2 - \beta) \mathcal{A}K_a - \beta \mathcal{A}K_b \right] \\ \mathfrak{B}_I - \mathfrak{B}_{II} = -2 \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha - \beta} \mathfrak{D}_{12} + \frac{1}{2 - \alpha - \beta} \left[ -\alpha \mathcal{A}K_a + (2 - \alpha) \mathcal{A}K_b \right]. \end{cases}$$

Es sind nunmehr auch in der Gleichung 75) an Stelle der  $\mathfrak{B}$  die durch 126) bestimmten  $\mathfrak{B}'$  zu setzen. So ergibt sich eine Gleichung für  $\mathfrak{D}_{12}$ , die aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen besteht. Sie enthält nämlich erstens die unmittelbar gegebenen äußeren Kräfte  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{B}$ ; diesen Theil von  $\mathfrak{D}_{12}$  wollen wir zur Abkürzung mit  $\mathfrak{D}'_{12}$  bezeichnen. Ferner enthält sie aber auch die Auflagerdrücke  $\mathfrak{M}_I$ ,  $\mathfrak{M}_{II}$  und  $\mathfrak{B}_I$ ,  $\mathfrak{B}_{II}$ , die selbst Functionen von  $\mathfrak{D}_{12}$  sind. Es wird nämlich

$$\mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{D}'_{12} + \frac{a}{2(a + a_0)} \left[ \alpha (\mathfrak{M}_I - \mathfrak{M}_{II}) - \beta (\mathfrak{B}_I - \mathfrak{B}_{II}) \right].$$

Setzt man in diese Gleichung die durch 127) bestimmten Werthe ein, so enthält sie nur noch die Unbekannte  $\mathfrak{D}_{12}$ . Mit Beseitigung der nur zur Abkürzung der Zwischenrechnungen eingeführten Größen  $\mathcal{A}K_a$  und  $\mathcal{A}K_b$  läßt sich die Gleichung dann auf die nachstehende Form bringen:

$$128) \mathfrak{D}_{12} = \frac{a \left[ (1 - \beta) (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2) + \alpha (\mathfrak{P}_{a1} - \mathfrak{P}_{a2}) - \beta (\mathfrak{P}_{b1} - \mathfrak{P}_{b2}) \right]}{2(1 - \beta)a + (2 - \alpha - \beta)a_0} + \frac{a \left[ (\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2}) - (\mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{b2}) + (2 - \alpha - \beta) (\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2}) \right]}{2(1 - \beta)a + (2 - \alpha - \beta)a_0}.$$

In dieser Formel wird der Einfluß der Stützenneigung durch die Größen  $\alpha = h : h_a$  und  $\beta = h : h_b$  zum Ausdruck gebracht, welche nach Abb. 21 das Verhältniß der Tangenten der Neigungswinkel der Rippen und der zugehörigen Stützen darstellen. Die Gleichung 128) gilt für alle von Null verschiedenen Neigungswinkel der letzteren mit Ausnahme des Falles, daß sämtliche Stützen dieselbe Neigung haben wie die von ihnen getragenen Rippen; denn es würde dann  $\alpha = \beta = 1$  und damit im allgemeinen  $\mathfrak{D}_{12} = \infty$  werden.<sup>5)</sup> Stimmt

<sup>5)</sup> Mit  $\alpha = \beta = 1$  wird nämlich der Nenner des Bruches, der nach 128) den Werth von  $\mathfrak{D}_{12}$  angiebt, Null. Nur wenn der Belastungszustand zufällig ein solcher ist, daß gleichzeitig auch der Zähler dieses Bruches verschwindet, wird  $\mathfrak{D}_{12}$  nicht  $= \infty$ , sondern  $= 0 : 0$ . Das Fachwerk befindet sich dann in einem unsicheren (labilen) Gleichgewichtszustand.

die Neigung der Stützen nur auf zwei von den vier Seiten des Fachwerkes mit der der Rippen überein, ist also nur  $\alpha = 1$  oder  $\beta = 1$ , so behält die Gleichung (128) ihre Gültigkeit. Ist  $\beta = 1$ , so ist die Diagonalspannung unabhängig von der Größe der in den oberen Knotenpunkten angebrachten lothrechten Lasten  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$ . Ist  $\alpha = 0$ , so werden die in den unteren Knotenpunkten angreifenden lothrechten Lasten  $\mathfrak{P}_{a_1}$  und  $\mathfrak{P}_{a_2}$  wirkungslos; ist  $\beta = 0$ , so tritt dasselbe für die entsprechenden Lasten  $\mathfrak{P}_{b_1}$  und  $\mathfrak{P}_{b_2}$  ein. Ist  $\alpha = \beta = 0$ , so sind alle Stützen lothrecht, und geht Formel (128) richtig in die für diesen Fall geltende Gleichung (75) über.

Wir haben schon im Eingang des § 12 hervorgehoben, daß nichts im Wege stehen würde, den Einfluß der Stützenneigung von vornherein bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte des Fachwerkes zu berücksichtigen. Wenn wir dies im ersten Abschnitt gethan hätten, so wären wir unmittelbar zu der allgemeineren Lösung gelangt, welche die Gleichung (128) (allerdings nur für symmetrische Belastung) darstellt, und hätten daraus leicht die besonderen, auf die lothrechte Stützung bezüglichen Ergebnisse ableiten können.<sup>6)</sup> Wir wollen jetzt auch dieses Verfahren durch ein Beispiel erläutern.

#### § 14. Berechnung der Diagonalspannungen für ein mehreckiges, beliebig belastetes Fachwerk auf schrägen Stützen.

Es gelten auch für diesen Fall die allgemeinen Betrachtungen des § 12. Wir fanden dort, daß bei schräger Stützung die am unteren Ring angreifenden wagerechten Kräfte  $V'$  nicht mehr unmittelbar gegeben, sondern Functionen der lothrechten Auflagerdrücke  $A$  sind. Berechnet man die letzteren zunächst nach den Regeln für lothrechte Stützung, und setzt man dann für die  $V'$  ihre Functionswerthe in  $A$ , so ergeben sich ebenso viele Gleichungen, wie Größen  $A$  vorhanden sind. Diese können mithin jedenfalls auf solche Art bestimmt werden. Das Verfahren ist aber schon bei dem rechteckigen Fachwerk mit symmetrischer Belastung ziemlich unbequem, wie das im § 13 vorgeführte Beispiel zeigt. Mit der Zahl der Ecken wächst auch die der aufzulösenden Gleichungen; und bei unregelmäßiger Anordnung und Belastung des Fachwerkes wird die Rechnung immer verwickelter. Es treten daher mit zunehmender Ecken-

<sup>6)</sup> In dem Erläuterungsberichte zum Entwurf der Kuppel für das Reichstagshaus in Berlin habe ich thatsächlich diesen Weg eingeschlagen. Da ich das Obergeschoß der Kuppel als Fachwerk auf geneigten Stützen auszuführen beabsichtigte, so mußte ich die Formeln für eine solche Anordnung ohnehin entwickeln. Damit ergab sich ganz von selbst auch die Lösung für das lothrecht gestützte Untergeschoß.

zahl bald sehr große Schwierigkeiten ein, die bewirken, daß das theoretisch zwar ganz richtige Verfahren doch für die Anwendung nahezu unbrauchbar wird.

Um nun womöglich einen besseren Weg zur Lösung der Aufgabe zu finden, wollen wir an § 9 anknüpfen und uns die Frage stellen, ob sich nicht vielleicht bei der Untersuchung des Gleichgewichtes der Kräfte an einem beliebigen Fachwerk-ausschnitte die schrägen Stützendrücke ebenso von vornherein ausschalten lassen, wie es im § 9 mit den lothrechten Auflagerdrücken geschehen ist. Da das dort benutzte Momentenverfahren hierfür nur ein Hilfsmittel, nämlich die Wahl der Drehachsen darbietet, so hängt die Entscheidung der Frage davon ab, ob es gelingt, zwei verschiedene Achsen zu finden, in Bezug auf welche sowohl die schrägen Stützendrücke, als auch die Unterringspannungen  $U$  keine Momente ausüben. Eine nähere Prüfung zeigt, daß dies in der That unter allen Umständen möglich ist. Denn als eine solche Achse haben wir erstens die im § 9 schon benutzte, durch beide Auflagerpunkte gehende wagerechte Gerade, die selbstverständlich bei jeder beliebigen Richtung der Stützendrücke der gestellten Bedingung entspricht. Es bleibt daher auch die im § 9 für diese Achse ermittelte Momentengleichung für den jetzt vorliegenden Fall in Gültigkeit. Zweitens läßt sich noch eine andere Gerade angeben, die stets von den vier auszuschaltenden Kräften geschnitten wird. Jeder Stützendruck bestimmt nämlich mit der zugehörigen Unterringspannung  $U$  eine Ebene, die wir im § 12 Stützungsebene genannt haben. Jede in einer solchen Ebene liegende Gerade schneidet die Richtungen dieser beiden Kräfte; folglich muß die Gerade, in der sich zwei zu demselben Ausschnitt gehörige Stützungsebenen schneiden, ihrerseits von allen vier in diesen Ebenen liegenden Kräften geschnitten werden. Sie stellt mithin die gesuchte zweite Drehachse dar; und da eine solche Schnittgerade immer vorhanden sein muß, wie auch die Stützendrücke gerichtet sein mögen, so ist klar, daß das im § 9 zur Berechnung der Diagonalspannungen eines Fachwerkes mit lothrechter Stützung benutzte Verfahren auch bei ganz beliebiger Stützenrichtung anwendbar bleibt.<sup>7)</sup>

Wir wollen die Aufgabe jedoch nicht in solcher Allgemeinheit weiter behandeln, sondern sie, um zu möglichst übersichtlichen Ergebnissen zu gelangen, durch die Annahme etwas einschränken, die zu demselben Ausschnitt gehörigen Stützungsebenen

<sup>7)</sup> Dies gilt offenbar auch für den Fall, daß die Unterringspannungen  $U$  sich nicht schneiden, sondern kreuzen; also für ein Fachwerk mit windschiefer unteren Ring.

seien gleich geneigt. Das hat zur Folge, daß sich die betreffenden Stützendrücke nicht krenzen, sondern schneiden, und daß ihr Schnittpunkt zusammen mit demjenigen der Unterringspannungen  $U$  die Lage der in Rede stehenden Drehachse in einfacher Weise bestimmt. Nach den Annahmen, die wir im § 7 über die gleichschenklige Eckabschrägung des Fachwerkes gemacht haben, muß nämlich der Schnittpunkt je zweier auf denselben Ausschnitt wirkender und gleich geneigter Stützendrücke lothrecht über der Halbierungslinie des zugehörigen Eckwinkels liegen; diese Linie stellt also den Grundriß der fraglichen Drehachse dar. Ihre Lage im Raume ist bestimmt, sobald die Höhe irgend eines Punktes über der Ebene des unteren Ringes gegeben ist.

Wir wählen dazu den Schnittpunkt der Drehachse mit dem Loth durch den oberen Eckpunkt und bezeichnen seine Höhe über jener Ebene mit  $h$  und der Ziffer des Ausschnittes, also z. B. mit  $h_2$  für den Ausschnitt 2, den wir der weiteren Entwicklung zu Grunde legen wollen. Da dieses Loth die Ebene des Unterringes im Abstand  $a$  vom Schnitte dieser und der Stützebenen trifft, so ergibt sich  $h_2$  als Product aus  $a$  und der Tangente des Neigungswinkels der letzteren Ebenen. Damit läßt sich dann auch der Neigungswinkel der Drehachse leicht berechnen, da ja der wagerechte Abstand des Fußpunktes der Höhe  $h_2$  vom Punkt II der Drehachse durch die Abmessungen des Fachwerkes bestimmt ist. Bezeichnet man den fraglichen Winkel mit  $\alpha$  und der Ecknummer, also im vorliegenden Falle mit  $\alpha_2$ , so ergibt sich aus dem in Abb. 23 dargestellten Grundriß und Schnitt

$$129) \quad \text{tang } \alpha_2 = \frac{h_2}{a_2 \sin \varepsilon_2 + e_2}.$$

Was die Art der Belastung betrifft, so behalten wir die Annahmen des § 9 sämtlich bei, indem wir uns nur an jedem Fachwerk-ausschnitt diejenigen Kräfte hinzugefügt denken, die nach den im § 12 dargelegten Gesichtspunkten den Einfluß der Stütze-neigung zum Ausdruck bringen. Es sind das erstens die wagerechten Seitenkräfte der Stützendrücke, von denen wir auch hier annehmen, daß sie rechtwinklig zu den mittleren Stäben des unteren Ringes wirken; und ferner die in den unteren Knotenpunkten angreifenden lothrechten Lasten  $P$ . Diese erhalten jetzt als Zeiger die beiden Ziffern des betreffenden Knotenpunktes, genau so wie die lothrechten Seitenkräfte  $A$  der Stützendrücke und die am unteren Ring wirkenden wagerechten Lasten  $V$ .

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun dazu übergehen, die Momentengleichung für die in Rede stehende Drehachse aufzustellen. Das nächstliegende wäre, sämtliche Kräfte nach der Richtung

dieser Achse und rechtwinklig zu ihr zu zerlegen, die Hebelarme der in die letztere Richtung fallenden Seitenkräfte zu berechnen und damit das Gesamtmoment in der gebräuchlichen Weise zu bestimmen. Man kann aber das letztere auch aus den Momenten für zwei beliebige Achsen zusammensetzen, die sich auf der vorgeschriebenen Drehachse schneiden und mit ihr in derselben Ebene liegen, wobei bekanntlich ganz nach der gleichen Regel zu verfahren ist wie bei der Zusammensetzung von Kräften. Demgemäß wird, wenn man als zwei solche Achsen das Loth im Punkt II und den Grundriß der eigentlichen Drehachse wählt und die betreffenden Momente mit  $M_1$  und  $M_2$  bezeichnet, das gesuchte Moment

$$M = M_1 \sin \alpha_2 + M_2 \cos \alpha_2 = 0$$

oder

$$130) \quad M_1 + \frac{M_2}{\tan \alpha_2} = 0.$$

Das Moment  $M_1$  stimmt bis auf ein Glied, welches den jetzt hinzutretenden Einfluß der wagerechten Seitenkräfte der Stützendrücke darstellt, mit dem ersten in § 9 berechneten Moment überein. Da diese Seitenkräfte die Größe  $A_{21} a : h_2$  und  $A_{23} a : h_2$ , und die Hebelarme  $a_2$  haben, so ergibt sich

$$131) \quad M_1 = M' - \frac{a a_2}{h_2} (A_{21} - A_{23}).$$

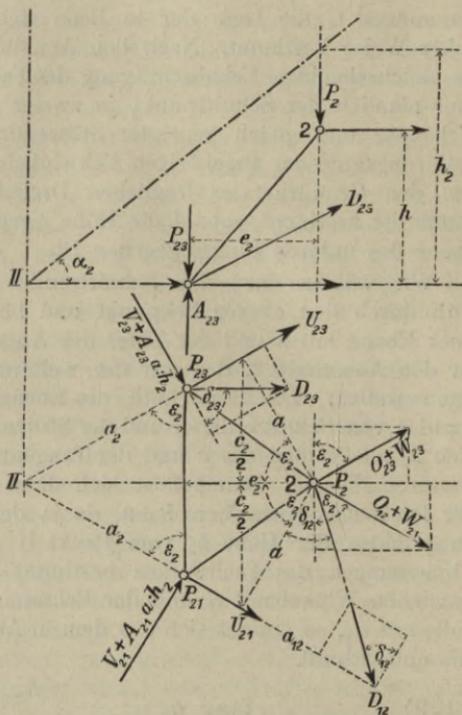


Abb. 23. Kräfte am Fachwerkausschnitt bei schräger Stützung.

Hierin soll  $M'$  den auf der linken Seite der Gleichung 91) stehenden Ausdruck bezeichnen.

Für das Moment  $M_2$  um die wagerechte Drehachse II — 2 (s. Abb. 23, Grundriss) kommen die folgenden Kräfte und Hebelarme in Betracht. Die lothrechten Seitenkräfte  $A_{21}$  und  $A_{23}$  der Stützendrücke wirken aufwärts, die lothrechten Knotenpunktlasten  $P_{21}$  und  $P_{23}$  abwärts am Hebelarm  $a_2 \cos \varepsilon_2$ . Die Diagonalspannung  $D_{12}$  denken wir uns in ihrem unteren Endpunkte nach der Richtung des Unterringstabes und rechtwinklig dazu zerlegt. Die in erstere Richtung fallende Seitenkraft schneidet die Drehachse, hat also kein Moment. Die zweite Seitenkraft  $D_{12} \cos \delta_{12}$  zerlegen wir wiederum in eine wagerechte, die Drehachse gleichfalls schneidende, und in eine senkrechte Seitenkraft  $D_{12} \cos \delta_{12} \sin \alpha$ , die rechtwinklig zur Drehachse gerichtet ist und am Hebelarm  $(a_{12} + a_2) \cos \varepsilon_2$  nach abwärts wirkt. Die Diagonalspannung  $D_{23}$  ist ganz in derselben Weise an ihrem unteren Endpunkte zu zerlegen. Die allein wirksame, senkrecht nach oben gerichtete Seitenkraft  $D_{23} \cos \delta_{23} \sin \alpha$  wirkt am Hebelarm  $a_2 \cos \varepsilon_2$ . Die Oberringspannungen  $O_{12}$  und  $O_{23}$  und die gleichgerichteten äußeren Kräfte  $W_{21}$  und  $W_{23}$  haben rechtwinklig zur Drehachse die Seitenkräfte  $(O_{12} + W_{21}) \cos \varepsilon_2$  nach links, und  $(O_{23} + W_{23}) \cos \varepsilon_2$  nach rechts wirkend, beide am Hebelarm  $h$ . Mit  $\cos \delta_{12} \sin \alpha = h : d_{12}$  und  $\cos \delta_{23} \sin \alpha = h : d_{23}$  ergibt sich hiernach das Moment

$$132) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_2 = [a_2 (A_{21} - A_{23}) \quad - a_2 (P_{21} - P_{23}) \\ \quad - h (a_{12} + a_2) \frac{D_{12}}{d_{12}} - a_2 \cdot h \cdot \frac{D_{23}}{d_{23}} \\ \quad - h (O_{12} - O_{23}) \quad - h (W_{21} - W_{23})] \cos \varepsilon_2. \end{array} \right.$$

Theilt man dies gemäß 130) mit  $\tan \alpha_2$ , so erscheint rechts der Beiwerth  $\cos \varepsilon_2 : \tan \alpha_2$ . Nach Abb. 23 ist aber

$$\cos \varepsilon_2 = \frac{a}{a_2 \sin \varepsilon_2 + e_2};$$

mit Rücksicht auf 129) ist also

$$\frac{\cos \varepsilon_2}{\tan \alpha_2} = \frac{a}{h_2}.$$

Bezeichnet man nun den von  $A_{21}$  und  $A_{23}$  freien Theil des Klammerausdruckes in 132) vorübergehend kurz mit  $X$ , und setzt man den eben gefundenen Werth von  $M_2 : \tan \alpha_2$ , sowie auch denjenigen von  $M_1$  aus 131) in 130) ein, so wird

$$\begin{aligned} M &= M' - \frac{a a_2}{h_2} (A_{21} - A_{23}) \\ &\quad + \frac{a a_2}{h_2} (A_{21} - A_{23}) + \frac{a}{h_2} X = 0. \end{aligned}$$

Die beabsichtigte Ausschaltung der Auflagerdrücke ist hiernach in der That erreicht. Theilt man jetzt noch durch  $a$  und ersetzt man  $M'$  und  $X$  durch ihre Werthe aus 91) und 132), so ergibt sich nach einigen Umformungen die Gleichung

$$(133) \quad (a_{12} + a_2) \frac{D_{12}}{d_{12}} + a_2 \frac{D_{23}}{d_{23}} + O_{12} - O_{23} = \frac{h_2}{h_2 - h} \left[ \frac{a_2}{h_2} (P_{21} - P_{23}) + \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23}) \right] - (W_{21} - W_{23}).$$

Dies tritt an die Stelle der ersten Gleichung der Gruppe 93) im § 9. Die zweite Gleichung dieser Gruppe bleibt, wie oben schon bemerkt wurde, auch jetzt gültig. Sie lautete

$$(134) \quad a_{12} \cdot \frac{D_{12}}{d_{12}} + O_{12} + O_{23} = -2 \frac{a e_2}{h c_2} P_2 - (W_{21} + W_{23}).$$

Mit diesen beiden Gleichungen ist nun wieder ganz so zu verfahren, wie im § 9 mit den Gleichungen 93). Wir fügen die letzte zu der vorhergehenden hinzu und erhalten

$$(135) \quad (2a_{12} + a_2) \frac{D_{12}}{d_{12}} + a_2 \frac{D_{23}}{d_{23}} + 2O_{12} = -2 \frac{a e_2}{h c_2} P_2 + \frac{h_2}{h_2 - h} \left[ \frac{a_2}{h_2} (P_{21} - P_{23}) + \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23}) \right] - 2W_{21}.$$

Dieselbe Gleichung für den Ausschnitt 3 aufgestellt würde lauten

$$(136) \quad (2a_{23} + a_3) \frac{D_{23}}{d_{23}} + a_3 \frac{D_{34}}{d_{34}} + 2O_{23} = -2 \frac{a e_3}{h c_3} P_3 + \frac{h_3}{h_3 - h} \left[ \frac{a_3}{h_3} (P_{32} - P_{34}) + \frac{a_3}{a} (V_{32} - V_{34}) \right] - 2W_{32}.$$

Zieht man 134) von 133) ab, so ergibt sich

$$(137) \quad a_2 \frac{D_{12}}{d_{12}} + a_2 \frac{D_{23}}{d_{23}} - 2O_{23} = 2 \frac{a e_2}{h c_2} P_2 + \frac{h_2}{h_2 - h} \left[ \frac{a_2}{h_2} (P_{21} - P_{23}) + \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23}) \right] + 2W_{23}.$$

Fügt man dies zur vorhergehenden Gleichung hinzu, so wird schliesslich

$$(138) \quad a_2 \frac{D_{12}}{d_{12}} + (a_2 + 2a_{23} + a_3) \frac{D_{23}}{d_{23}} + a_3 \frac{D_{34}}{d_{34}} = 2 \frac{a}{h} \left( \frac{e_2}{c_2} P_2 - \frac{e_3}{c_3} P_3 \right) + 2(W_{23} - W_{32}) + \frac{h_2}{h_2 - h} \left[ \frac{a_2}{h_2} (P_{21} - P_{23}) + \frac{a_2}{a} (V_{21} - V_{23}) \right] + \frac{h_3}{h_3 - h} \left[ \frac{a_3}{h_3} (P_{32} - P_{34}) + \frac{a_3}{a} (V_{32} - V_{34}) \right].$$

Diese Gleichung tritt an die Stelle von 97), wenn die Stützen geneigt sind. Sie geht in 97) über, wenn  $h_2 = h_3 \dots = \infty$

wird, d. h. wenn die Stützen lothrecht angeordnet werden. Sie läßt sich sehr vereinfachen bei gleicher Neigung aller Stützen, sowie für die im § 10 eingehend erörterten, besonderen Arten von Fachwerken. Nach den dort gegebenen Beispielen wird der Leser das im Bedarfsfalle leicht selber ausführen können.

### § 15. Mehrgeschossige Fachwerke.

Wir haben bisher immer nur das eingeschossige Fachwerk in Betracht gezogen. Da bei größeren Bauten die Anordnung mehrerer Geschosse häufig nicht zu umgehen ist, so wollen wir jetzt untersuchen, wie ein solches zusammengesetztes Fachwerk aus dem eingeschossigen entsteht und wie man es berechnet.

Die älteren Raumbauwerke, so z. B. die nach Schwedler benannten Kuppeln, setzen feste Stützpunkte voraus und haben oben

und unten Ringe von gleicher Eckenzahl. Durch diese beiden Umstände wird der mehrgeschossige Aufbau sehr erleichtert, da der obere Ring eines Geschosses ohne weiteres als unterer Ring des darüber liegenden benutzt werden kann. Unser Fachwerk verlangt dagegen eine in gewissem Sinne bewegliche Stützung und weist im oberen Ring stets nur halb so viel Ecken auf wie im unteren.

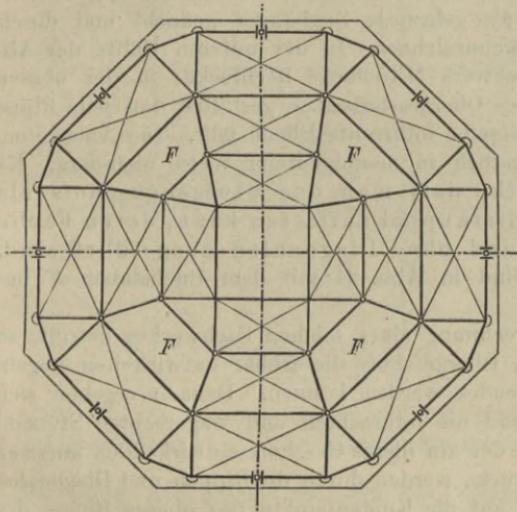


Abb. 24. Grundriss einer dreigeschossigen Kuppel auf achteckigem Unterbau.

Es ist daher nicht möglich, zwei gleichgestaltete und nur in ihren Abmessungen verschiedene eingeschossige Fachwerke dieser Art unmittelbar zu einem zweigeschossigen zusammenzufügen. Die Aufgabe läßt sich aber in anderer Weise lösen. Wenn man nämlich ein eingeschossiges Fachwerk nach dem im § 12 beschriebenen Verfahren auf schräge Stützen stellt, so bilden die letzteren zusammen schon ein zweites Geschoss, das wir Stützengeschoss nennen wollen; und benutzt man als Fußpunkte der Stützen die Eckpunkte des

oberen Ringes eines darunter liegenden weiteren Fachwerkes, so hat man noch ein drittes Geschofs usw. Natürlich müssen die beiden Ringe, zwischen denen das Stützengeschofs liegt, dieselbe Zahl von Ecken haben. Ein mehrgeschossiges Fachwerk unserer Bauart setzt sich also zusammen aus eingeschossigen Fachwerken oder Fachwerkgeschossen und dazwischen geschalteten Stützengeschossen. Es endet oben natürlich immer mit einem Fachwerkgeschofs; die untere Begrenzung kann entweder ein ebensolches; auf Flächenlagern ruhendes bilden oder ein Stützengeschofs auf festen Stützpunkten. In Abb. 24 ist als Beispiel der Grundriß einer dreigeschossigen Kuppel (in zwei etwas von einander abweichenden Formen je zur Hälfte) dargestellt. Es ist angenommen, daß das Untergeschofs auf 16 allseitig beweglichen Flächenlagern ruht und durch 8 wagerechte Lager festgehalten wird. (Die Stützflächen der letzteren sind in Abb. 24 durch kurze Striche angedeutet). Die Diagonalen sind als gekreuzte Zugbänder gedacht und durch schwächere Linien gekennzeichnet. In der unteren Hälfte der Abbildung sind alle Fachwerk-Mittelfache Rechtecke; in der oberen sind die Mittelfache des Obergeschosses so gestaltet, daß jede Rippe mit ihrer Stütze in dieselbe lothrechte Ebene fällt. Die Anordnung läßt sich selbstverständlich in mannigfaltiger Weise abändern. Es ist bemerkenswerth, daß man das Stützengeschofs als Theil einer Schwedlerkuppel auffassen kann, deren Fache abwechselnd mit und ohne Diagonalen ausgeführt sind. Diese leeren Fache sind in Abb. 24 mit dem Buchstaben *F* bezeichnet.<sup>8)</sup>

Was nun die Berechnung eines solchen Fachwerkes betrifft, so ist klar, daß auf das Obergeschofs die früher entwickelten Regeln ohne weiteres angewendet werden können. Danach ergeben sich die Stabspannungen und die lothrechten und wagerechten Stützendrücke als Functionen der auf dieses Geschofs einwirkenden äußeren Kräfte. Die Stützendrücke werden durch die Rippen und Diagonalen des Stützengeschosses auf die Knotenpunkte des oberen Ringes des Untergeschosses übertragen und verbinden sich mit den dort angreifenden äußeren Kräften. Da hiernach die Belastung des Untergeschosses bekannt ist, so läßt sich jetzt auch dieses nach den früher gegebenen Regeln berechnen. Man hat also nur von oben nach unten fortschreitend immer wieder ein und dasselbe Verfahren anzuwenden.

<sup>8)</sup> Eine solche Anordnung ist offenbar nur möglich, wenn das betreffende Stützgeschofs eine gerade Anzahl von Fachen hat; diese Bedingung ist aber auch stets erfüllt, weil der hierfür maßgebende untere Ring eines Fachwerkes meiner Bauart immer eine gerade Zahl von Seiten besitzt.

In manchen Fällen empfiehlt es sich, das Stützengeschoss nicht auf ein Fachwerkgeschoss zu stellen, sondern es innerhalb eines solchen anzuordnen, wie dies das Beispiel in Abb. 25 zeigt. Hier sind die acht Stützen des oberen Geschosses in die Mittelfache des unteren eingeschaltet. Der untere Ring des ersteren liegt in derselben Ebene, wie der obere des letzteren, und die Stäbe beider Ringe fallen zum Theil zusammen. Die wagerechten Auflagerdrücke

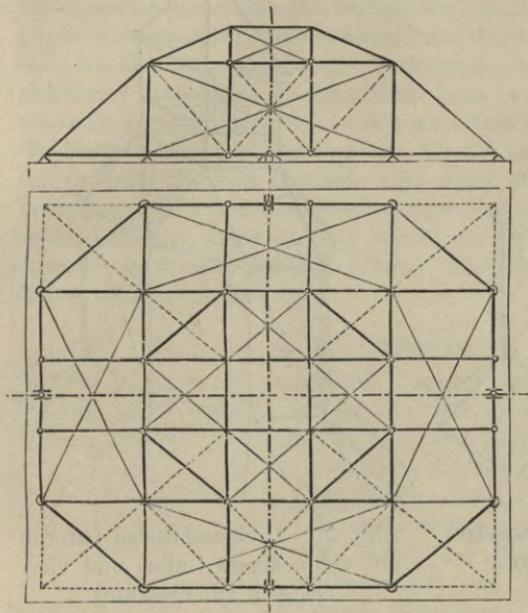


Abb. 25. Zweigeschossige Kuppel auf rechteckigem Unterbau (v. Reichstagshaus in Berlin).

des oberen Geschosses gehen daher unmittelbar in das untere über. Die lothrechten Auflagerdrücke werden durch die Stützen gleich auf den unteren Ring des unteren Geschosses übertragen. Will man die Ringstäbe nicht auf Biegung beanspruchen und die Stützen auch nicht unmittelbar auf das Mauerwerk lagern (was in manchen Fällen wohl zulässig sein würde), so kann man in die durch die Rippen und die Stützen gebildeten Theilfache Diagonalen einführen, wie in Abb. 25 für eine Seite des Fachwerkes durch gestrichelte Linien angedeutet ist. Diese Diagonalen können dann zugleich die Hauptdiagonalen des Faches ersetzen. Die Anordnung besitzt gegenüber der in Abb. 24 dargestellten manche Vorzüge. Sie ermöglicht nämlich erstens den Aufbau eines mehrgeschossigen Fachwerkes aus Einzelfachwerken von gleicher Art, wodurch die Berechnung vereinfacht und die Ausführung von Bauwerken mit vorgeschriebener Grundrißform erleichtert wird. Sie bietet ferner in den die Mittelfache des Untergeschosses theilenden Stützen ein oft willkommenes Mittel zur Verminderung der Fettestützweite.<sup>9)</sup> Sie empfiehlt sich

des oberen Geschosses gehen daher unmittelbar in das untere über. Die lothrechten Auflagerdrücke werden durch die Stützen gleich auf den unteren Ring des unteren Geschosses übertragen. Will man die Ringstäbe nicht auf Biegung beanspruchen und die Stützen auch nicht unmittelbar auf das Mauerwerk lagern (was in manchen Fällen wohl zulässig sein würde), so kann man in die durch die Rippen und die Stützen gebildeten Theilfache Diagonalen einführen,

<sup>9)</sup> Will man auf diesen Vortheil verzichten, so kann man die

besonders für viereckigen Grundrifs und ist deswegen beim Bau der Kuppel des Reichstagshauses in Berlin angewendet worden.

Nach den Regeln für die Ausbildung der Geschosse sind auch die Aufbauten zu behandeln, die man Laternen oder Dachreiter zu nennen pflegt. Da der obere Ring feste Stützpunkte darbietet,

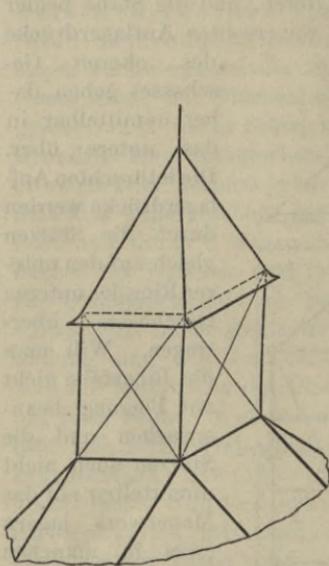


Abb. 26. Eingeschossige viereckige Laterne.

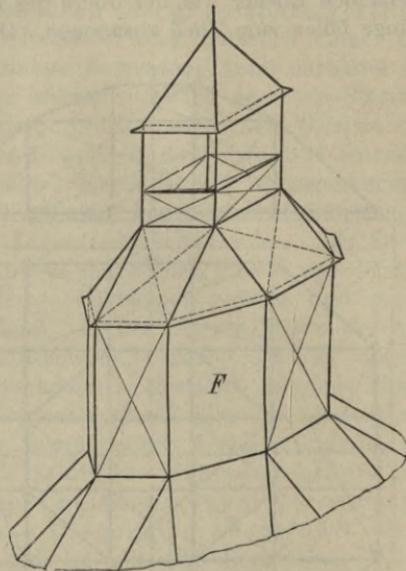


Abb. 27. Dreigeschossige Laterne mit achteckigem Unter- und viereckigem Obergeschoss.

so kann das Laternengeschofs als „Schwedlerkuppel mit lothrechten Rippen“ ausgebildet und berechnet werden. Abb. 26 zeigt hierfür ein einfaches Beispiel. Wenn der den Abschluß bildende Helm vier

Stützen auch schräg von den oberen zu den unteren Lagerpunkten führen. Sie bilden dann mit den Mittelstäben des oberen und unteren Ringes ein Sprengwerk, für das besondere Diagonalen nicht erforderlich sind, weil schon die Diagonalen des Untergeschosses gegenseitige Verschiebungen der beiden Ringe verhindern. Bei der Reichstagskuppel ist noch ein etwas anderer Weg eingeschlagen. Dort wurden die Stützen (gewissermaßen als Nebenrippen) bis zum unteren Ring so herabgeführt, wie es Abb. 25 zeigt. Von ihren Kreuzungspunkten mit der vorletzten Fette wurden dann Streben nach den Lagerpunkten des Untergeschosses geführt, die mit dem zwischen den Stützen liegenden, als Querriegel dienenden Theil der Fette und dem Mittelstabe des unteren Ringes gleichfalls ein den letzteren entlastendes Sprengwerk bilden.

Sparren hat, so ist er bekanntlich einfach statisch unbestimmt. Läßt man die (als Zugbänder gedachten) Diagonalen in einem Fach des Laternengeschosses weg, so wird die Anordnung statisch bestimmt. In Abb. 27 ist eine Laterne dargestellt, die sich aus einem achteckigen Stützengeschoss mit den leeren Fachen  $F$ , einem viereckigen Fachwerkgeschoss und einem offenen Obergeschoss zusammensetzt. Die Brustwehr ist wieder als Fachwerk mit lothrechten Rippen auf festen Stützpunkten gedacht. Die Rippen sind nach oben verlängert, sodafs sie als eingespannte Stiele wirken, und durch den viereckigen Fußring des Helmes mit einander verbunden. Die hierbei auftretende mehrfache statische Unbestimmtheit kann wegen der geringen Bedeutung, die das Geschoss für den ganzen Bau hat, außer acht bleiben; die Beanspruchungen der einzelnen Theile und die Einwirkung auf das darunter liegende Geschoss sind dann leicht näherungsweise zu berechnen. Es lassen sich noch mancherlei andere Formen für derartige Laternen angeben, das würde uns aber etwas abseits von unserer eigentlichen Aufgabe führen; wir begnügen uns deshalb mit den vorstehenden Beispielen.

### § 16. Gratfachwerk.

Das in Abb. 25 dargestellte Fachwerk überdeckt den Unterbau insofern nicht vollständig, als es nach unten mit einem Achteck endet. Um die hierdurch an den vier Ecken des Unterbaues entstehenden Lücken zu schliessen und der

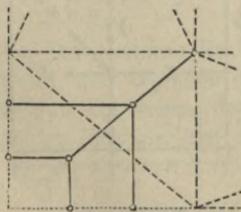
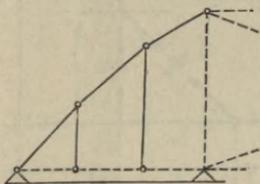


Abb. 28. Gratfachwerk zur Kuppel Abb. 25.

Dachfläche die gebräuchliche Form eines Klostergewölbes geben zu können, sind die Ecken der oberen Ringe beider Geschosse mit den Ecken des Unterbaues durch besondere Gratsparren zu verbinden. In Abb. 25 sind diese mit gestrichelten Linien in den Grundriss eingetragen. Die unteren Enden der Sparren werden zweckmäßiger durch Fußfetten mit den nächsten Auflagerknotenpunkten verbunden. Eine unzulässige Einwirkung auf das Fachwerk ist durch verschiebliche Anschlüsse zu vermeiden. Bei größeren Kuppeln werden aber die Gratsparren (besonders im Untergeschoss) so lang, daß es sich empfiehlt, sie nicht nur an den Enden, sondern auch in einigen Zwischenpunkten zu

stützen. Denkt man sich diese Punkte gelenkig, so entsteht bei Anbringung von je zwei Stützen ein räumliches Fachwerk, das wir Gratfachwerk nennen wollen. In Abb. 28 ist ein solches für die

linke untere Ecke der Abb. 25 dargestellt, wobei die angrenzenden, zum Hauptfachwerk gehörigen Stäbe mit gestrichelten Linien angegeben sind. Das Grاتفachwerk hat zwei Knotenpunkte, von denen aus je zwei Stützen nach den Fußsetten des Hauptfachwerkes gehen. Die beiden Knotenpunkte sind durch einen Gratstab mit einander verbunden; ein zweiter Gratstab geht von dem oberen Knotenpunkt des Grاتفachwerkes zum oberen Eckpunkt des Untergeschosses des Hauptfachwerkes. Die Spannungen, die in den Gratstäben und Stützen durch die an den Knotenpunkten angreifenden Kräfte erzeugt werden, lassen sich leicht berechnen, wenn man bei dem unteren Knotenpunkt anfängt. Da nämlich in diesem Punkte nur drei Stäbe zusammentreffen, so ergeben sich deren Spannungen durch einfache Zerlegung der Knotenpunktlast nach ihren drei Richtungen. Die Spannung des Gratstabes wirkt nun auf den nächst höheren Knotenpunkt zusammen mit der dort vorhandenen Last als bekannte äußere Kraft, sodafs die Spannung der beiden zugehörigen Stützen und des folgenden Stabes wieder durch bloße Zerlegung nach den drei Richtungen ermittelt werden kann. Die Spannung des obersten Gratstabes tritt schliesslich am oberen Eckpunkt des Untergeschosses des Hauptfachwerkes zu den sonstigen, dort angreifenden äußeren Kräften hinzu.

Die Zerlegung einer Kraft im Raume nach drei gegebenen Richtungen ist zwar eine bekannte, theoretisch sehr einfache Sache. Die wirkliche

Durchführung geht aber doch nicht ganz so leicht von staten, wie man wohl glauben könnte. Das

zeichnerische Verfahren ins-

besondere hat sich bei der Bearbeitung des Grاتفachwerkes der Reichstagskuppel als recht unbequem und wenig genau erwiesen. Es verdient daher m. E. die rechnerische Ermittlung den Vorzug. Um dem Leser die Mühe der Ableitung zu ersparen, geben wir nachstehend die zu einer solchen Berechnung nöthigen Formeln.

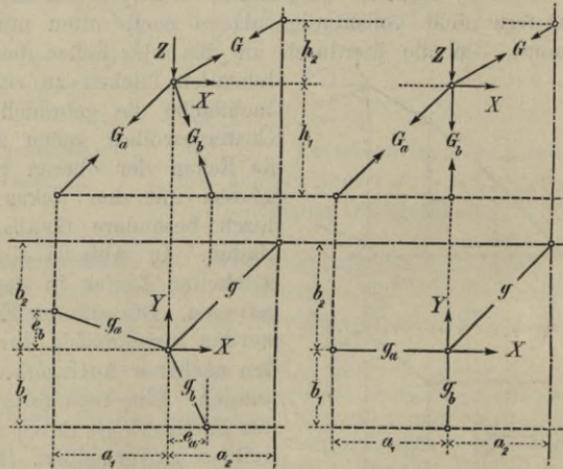


Abb. 29. Kräfte am Grاتفachwerk.

Für die in Abb. 29 links im Grundriß und Aufriß dargestellte Lage der drei Stäbe ist zu setzen:

$$139) \quad \mathcal{A} = -[a_2(b_1 + e_b) + b_2(a_1 + e_a)]h_1 + [a_1b_1 - e_ae_b]h_2.$$

Alle in dieser Gleichung auftretenden Größen sind Längen, die aus Abb. 29 entnommen werden können. Unter  $g$ ,  $g_a$  und  $g_b$  sollen dagegen nicht die in der Zeichnung erscheinenden, sondern die wirklichen Längen der drei Stäbe verstanden werden, um deren Spannungen  $G$ ,  $G_a$  und  $G_b$  es sich handelt. Zerlegt man die gegebene äußere Kraft zunächst nach den drei rechtwinkligen Achsen  $a$ ,  $b$  und  $h$  (§ 1) in die Seitenkräfte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ , so wird

$$140) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{G}{g} = \frac{1}{\mathcal{A}} [(b_1 + e_b)h_1 X + (a_1 + e_a)h_1 Y + (a_1b_1 - e_ae_b)Z] \\ \frac{G_a}{g_a} = \frac{1}{\mathcal{A}} [(b_1h_2 - b_2h_1) X + (e_a h_2 + a_2 h_1) Y + (a_2b_1 + e_a b_2)Z] \\ \frac{G_b}{g_b} = \frac{1}{\mathcal{A}} [(e_b h_2 + b_2 h_1) X + (a_1 h_2 - a_2 h_1) Y + (a_1 b_2 + e_b a_2)Z]. \end{array} \right.$$

In der Regel werden die Gratstäbe und Stützen so angeordnet sein, wie auf der rechten Seite der Abb. 29 dargestellt. Dann ist  $e_a = e_b = 0$ , und die Formel 139) wird etwas einfacher:

$$141) \quad \mathcal{A} = -[a_2b_1 + b_2a_1]h_1 + a_1b_1h_2.$$

Ebenso vereinfachen sich auch die Gleichungen 140) wie folgt:

$$142) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{G}{g} = \frac{1}{\mathcal{A}} [ \quad \quad \quad b_1h_1 X + \quad \quad \quad a_1h_1 Y + a_1b_1 Z] \\ \frac{G_a}{g_a} = \frac{1}{\mathcal{A}} [(b_1h_2 - b_2h_1) X + \quad \quad \quad a_2h_1 Y + a_2b_1 Z] \\ \frac{G_b}{g_b} = \frac{1}{\mathcal{A}} [ \quad \quad \quad b_2h_1 X + (a_1h_2 - a_2h_1) Y + a_1b_2 Z]. \end{array} \right.$$

Zur weiteren Rechnung braucht man auch die Seitenkräfte von  $G$ ,  $G_a$  und  $G_b$  nach den drei Hauptachsen. Diese sind — vom Vorzeichen abgesehen, das am besten im einzelnen Falle ermittelt wird — in der Richtung der

		$a$ -Achse	$b$ -Achse	$h$ -Achse
für	$G$ :	$a_2 \frac{G}{g}$	$b_2 \frac{G}{g}$	$h_2 \frac{G}{g}$
	„ $G_a$ :	$a_1 \frac{G_a}{g_a}$	$e_b \frac{G_a}{g_a}$	$h_1 \frac{G_a}{g_a}$
	„ $G_b$ :	$e_a \frac{G_b}{g_b}$	$b_1 \frac{G_b}{g_b}$	$h_1 \frac{G_b}{g_b}$ .

Bei Einsetzung der entsprechenden Längenmaße gelten alle diese Gleichungen für jeden beliebigen Knotenpunkt des Grاتفachwerkes. Zum Schluss ist noch zu bemerken, dass positive Werthe von  $G$ ,  $G_a$  und  $G_b$  Zugspannungen bedeuten.

### § 17. Eingeschränkte Fachwerke im allgemeinen.

Im zweiten Abschnitt sind wir vom viereckigen zum vieleckigen Fachwerk aufgestiegen. Umgekehrt lässt sich die Eckenzahl natürlich auch vermindern; es leuchtet aber ein, dass man nicht unter drei Ecken herabgehen kann, ohne die Grundlagen zu verlassen, auf denen sich unsere bisherigen Annahmen und Schlussfolgerungen aufgebaut haben. Um zu erkennen, was eintritt, wenn der obere Ring zu einer Linie oder einem Punkt zusammenschrumpft, muss man daher be-

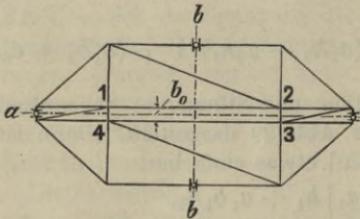


Abb. 30. Uebergang zum Firstfachwerk auf sechs Stützpunkten.

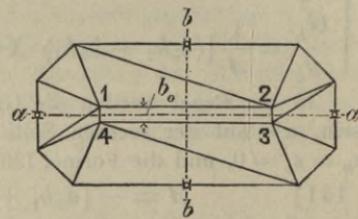


Abb. 31. Uebergang zum Firstfachwerk auf acht Stützpunkten.

sondere Untersuchungen anstellen. Bevor wir hierzu schreiten, möge der Uebergang vom vollständigen zum eingeschränkten Fachwerk an einigen Beispielen im allgemeinen erläutert werden.

Denkt man sich das in Abb. 2 (Seite 6) dargestellte rechteckige Fachwerk in der Weise verändert, dass die Längen zweier gegenüberliegender Stäbe des oberen Ringes und ebenso die der zugehörigen Diagonalen und Mittelseiten des unteren Ringes stetig und gleichmäßig abnehmen, so gelangt man zu einer Anordnung, wie sie Abb. 30 für den Fall darstellt, dass die Verkürzung in der Richtung der  $b$ -Achse vorgenommen wird. Dabei behalten offenbar alle im ersten Abschnitt entwickelten Regeln ihre Gültigkeit; es können also z. B. die Diagonalspannungen eines solchen langgestreckten Fachwerkes ohne weiteres mit Hülfe der Tafel 62) berechnet werden. Zu einer ähnlichen Anordnung etwas allgemeinerer Art gelangt man, wenn die Mittelfache nicht Rechtecke, sondern Parallelogramme sind, wie Abb. 31 zeigt. Die Diagonalspannungen sind für diesen Fall nach Gleichung 97) zu berechnen. Setzt man die Verkürzung weiter fort, bis  $b_0 = 0$  wird,

so entstehen die in Abb. 32 u. 33 dargestellten Anordnungen, für die sich der Name zweieckiges oder Firstfachwerk empfehlen dürfte.<sup>10)</sup> Der äusseren Form nach können diese Fachwerke als Verbindungen des Satteldaches mit Theilen eines Zeltdaches aufgefaßt werden. Durch Hinzufügung von Gratsparren oder Gratfachwerken nach § 16 läßt sich der Dachfläche leicht die Gestalt eines Walmdaches geben. Bei Abb. 33 kann dies auch dadurch erreicht werden, daß man nach § 10, 1 den Eckabschnitten des unteren Ringes die GröÙe Null giebt. Die Zahl der Stützpunkte vermindert sich hierbei auf vier. Die Mittelfache können bei gröÙerer Länge durch

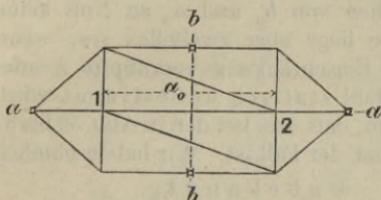


Abb. 32. Firstfachwerk auf sechs Stützpunkten.

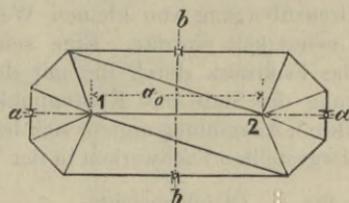


Abb. 33. Firstfachwerk auf acht Stützpunkten.

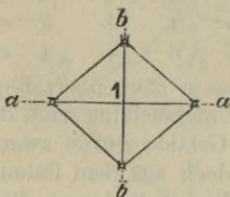


Abb. 34. Helmfachwerk auf vier Stützpunkten.

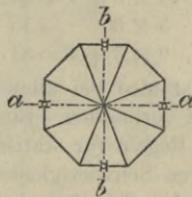


Abb. 35. Helmfachwerk auf acht Stützpunkten.

Einfügung von Zwischenrippen getheilt werden, deren Schub durch Zugbänder oder Streben abzufangen und in die Auflager überzuführen ist (wie wir bei Besprechung der Abb. 25 im § 15 näher dargestellt haben). So ausgestaltet wird das Firstfachwerk zur Ueberdeckung langgestreckter und hoher, in das DachgeschloÙ reichender Räume (Festsäule u. dgl.) in manchen Fällen mit Vortheil zu verwenden sein. Auch als Brückenpfeiler würde es sich benutzen lassen.

<sup>10)</sup> Die erstere Bezeichnung knüpft an die auf Seite 3 eingeführte und bisher festgehaltene Art der Zählung der Ecken an. Es ist nicht zu verkennen, daß diese sich für Fachwerke mit linien- oder punktförmigem Oberring weniger eignet, da man hier die Eckenzahl lieber nach der Form des unteren Ringes benennen wird.

Die Einschränkung kann nun weiter getrieben werden, indem man das Firstfachwerk in der Richtung der  $a$ -Achse verkürzt, bis  $a_0 = 0$  geworden ist; man gelangt so zu den in Abb. 34 u. 35 veranschaulichten, allgemein bekannten Formen, die im vorliegenden Zusammenhange als eineckige Fachwerke zu bezeichnen sein würden, aber ihrer Verwendungsweise entsprechend besser Zelt- oder Helm-fachwerke genannt werden.

Es fragt sich jetzt, ob und unter welchen Bedingungen etwa die für die allgemeineren Anordnungen geltenden Gesetze auch auf die eingeschränkten Fachwerke angewendet werden dürfen. Eine unmittelbare Uebertragung wäre natürlich nur zulässig, wenn bei dem Grenzübergang von kleinen Werthen von  $b_0$  und  $a_0$  zu Null keine Unstetigkeit einträte. Eine solche liegt aber zweifellos vor, wenn das Fachwerk durch die mit der Einschränkung verknüpfte Aenderung der Stab- und Knotenpunktzahl statisch unbestimmt wird. Durch Auszählung ergibt sich leicht, daß dies bei den in Abb. 32 bis 35 dargestellten Fachwerken in der That der Fall ist. Wir haben nämlich

für Abb.	Gleichgewichts- bedingungen:	U n b e k a n n t e					
		Stab- spannungen:	senkr.:	Lagerdrücke wagrecht:			
32	$8 \times 3 + 2 = 26$	17	+	6	+	4	= 27
33	$10 \times 3 + 4 = 34$	23	+	8	+	4	= 35
34	$5 \times 3 = 15$	8	+	4	+	4	= 16
35	$9 \times 3 + 4 = 31$	20	+	8	+	4	= 32.

Es ist also bei allen vier Fachwerken je eine überzählige Unbekannte vorhanden. Eine erschöpfende Untersuchung nach den bekannten Regeln für statisch unbestimmte Gebilde würde zwar keine besonderen Schwierigkeiten bieten, aber doch aus dem Rahmen des vorliegenden Schriftchens fallen. Wir wollen statt dessen die Frage in Betracht ziehen, ob man nicht die statische Bestimmtheit wieder herstellen kann, ohne die Brauchbarkeit der Fachwerke zu beeinträchtigen. Eine nähere Prüfung ergibt, daß dies beim Firstfachwerk am einfachsten durch Beseitigung eines passend gewählten Stabes, z. B. einer Diagonale zu erreichen ist; oder auch, indem man die beiden Diagonalen als Zugbänder ausbildet, da dann immer nur eine von ihnen in Wirksamkeit tritt. Ferner läßt sich aber zeigen, daß dieses Fachwerk bei den in der Wirklichkeit vorkommenden Belastungen selbst dann wie eine statisch bestimmte Anordnung berechnet werden kann, wenn man die Diagonalen druckfest macht oder vier Zugdiagonalen anbringt. Die statische Unbestimmtheit wird nämlich, soweit die Wirkung der äußeren Kräfte in Betracht kommt, dadurch behoben, daß sich die Spannungen der Diagonalen für beide Mittelfache gleich groß ergeben. Sie bleibt dagegen bestehen hinsichtlich des Einflusses unrichtiger Ablängung

oder ungleicher Erwärmung einzelner Stäbe; die hierdurch erzeugten zusätzlichen Spannungen sind natürlich nur mit Berücksichtigung der Formänderungen zu ermitteln. Das Helmfachwerk kann durch Verminderung der Zahl der wagerechten Lager von vier auf drei statisch bestimmt gemacht werden. Im übrigen sind seine Eigenschaften so bekannt, daß wir uns damit nicht weiter zu beschäftigen brauchen.<sup>11)</sup>

### § 18. Das Firstfachwerk auf sechs Stützpunkten als Beispiel.

Nach den Ausführungen im § 17 könnten wir jetzt die Stabspannungen und Auflagerkräfte des Firstfachwerkes aus den für das

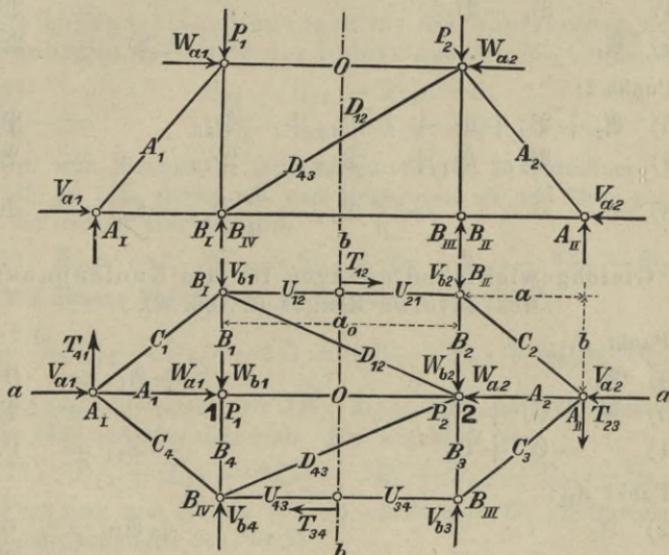


Abb. 36. Kräfte am Firstfachwerk.

vollständige Fachwerk geltenden Gleichungen ableiten. Einfacher und übersichtlicher ist es aber, die gesuchten Größen unmittelbar durch die Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte zu bestimmen. Um abzukürzen, verfahren wir dabei wie im § 3; wir benutzen also nicht die Winkelgrößen, sondern gleich deren nach 41) durch die Längen ausgedrückte Werthe, sowie die Bezeichnungen nach 42) bis 45). Der Belastungszustand sei so, wie in Abb. 36 an-

<sup>11)</sup> vgl. Hacker: Ueber Fachwerk im Raume; Zeitschrift für Bauwesen 1888, Seite 50. Ferner Müller-Breslau: Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerkes; Centralblatt der Bauverwaltung 1892, Seite 257.

gegeben. Statt der Diagonale  $D_{34}$  denken wir uns deren Gegen-  
diagonale  $D_{43}$  angebracht. Das Fachwerk ist dann symmetrisch in  
Bezug auf die  $a$ -Achse. Die unteren Knotenpunkte mögen (wie im  
ersten Abschnitte) mit den Buchstaben der in ihnen angreifenden  
Auflagerdrücke bezeichnet werden. Dann gestaltet sich die Rechnung  
wie folgt.

1. Gleichgewichtsbedingungen für die beiden oberen  
Knotenpunkte (s. Abb. 36).

Punkt 1:

$$\begin{aligned} 143) \quad \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_4 &= -\mathfrak{F}_1 \\ 144) \quad \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_4 &= \mathfrak{B}_{b1} \\ 145) \quad \mathfrak{A}_1 &- \mathfrak{D} = \mathfrak{B}_{a1}. \end{aligned}$$

Punkt 2:

$$\begin{aligned} 146) \quad \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{43} &= -\mathfrak{F}_2 \\ 147) \quad \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{43} &= \mathfrak{B}_{b2} \\ 148) \quad \mathfrak{A}_2 &- \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} - \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{43} - \mathfrak{D} = \mathfrak{B}_{a2}. \end{aligned}$$

2. Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte  
des unteren Ringes (s. Abb. 36).

Punkt  $A_I$ :

$$\begin{aligned} 149) \quad \mathfrak{A}_1 &+ \mathfrak{A}_I = 0 \\ 150) \quad \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_4 &= -\mathfrak{B}_{a1} \\ 151) \quad -\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_4 &- \mathfrak{T}_{41} = 0. \end{aligned}$$

Punkt  $A_{II}$ :

$$\begin{aligned} 152) \quad \mathfrak{A}_2 &+ \mathfrak{A}_{II} = 0 \\ 153) \quad \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 &= -\mathfrak{B}_{a2} \\ 154) \quad -\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 &+ \mathfrak{T}_{23} = 0. \end{aligned}$$

Punkt  $B_I$ :

$$\begin{aligned} 155) \quad \mathfrak{B}_1 &+ \mathfrak{D}_{12} &+ \mathfrak{B}_I &= 0 \\ 156) \quad \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 &+ \mathfrak{D}_{12} &= -\mathfrak{B}_{b1} \\ 157) \quad -\mathfrak{C}_1 &+ \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{12} &+ \mathfrak{U}_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Punkt  $B_{II}$ :

$$\begin{aligned} 158) \quad \mathfrak{B}_2 &+ \mathfrak{B}_{II} &= 0 \\ 159) \quad \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 &= -\mathfrak{B}_{b2} \\ 160) \quad -\mathfrak{C}_2 &+ \mathfrak{U}_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Punkt  $B_{III}$ :

$$\begin{array}{rcl}
 161) \mathfrak{B}_3 & & + \mathfrak{B}_{III} = 0 \\
 162) \mathfrak{B}_3 & + \mathfrak{C}_3 & = -\mathfrak{B}_{b_3} \\
 163) & - \mathfrak{C}_3 & + \mathfrak{U}_{34} = 0.
 \end{array}$$

Punkt  $B_{IV}$ :

$$\begin{array}{rcl}
 164) \mathfrak{B}_4 & & + \mathfrak{D}_{43} + \mathfrak{B}_{IV} = 0 \\
 165) \mathfrak{B}_4 & + \mathfrak{C}_4 & + \mathfrak{D}_{43} = -\mathfrak{B}_{b_4} \\
 166) & - \mathfrak{C}_4 & + \frac{a_0}{a} \mathfrak{D}_{43} + \mathfrak{U}_{43} = 0.
 \end{array}$$

3. Gleichgewichtsbedingungen für die wagerechten Stützpunkte in der Mitte der Unterringstäbe  $U$  (s. Abb. 36).

$$\begin{array}{rcl}
 167) & \mathfrak{U}_{12} - \mathfrak{U}_{21} - \mathfrak{T}_{12} = 0 \\
 168) & \mathfrak{U}_{34} - \mathfrak{U}_{43} - \mathfrak{T}_{34} = 0.
 \end{array}$$

Um nun hieraus die Diagonalspannungen zu berechnen, fügen wir 146) zu 153), ziehen 159) und 162) davon ab und lösen nach  $\mathfrak{A}_2$  auf. So ergibt sich zunächst

$$169) \mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{2} (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{43} + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{B}_{a_2} - \mathfrak{B}_{b_2} - \mathfrak{B}_{b_3}).$$

Mit diesem Werthe von  $\mathfrak{A}_2$  folgt dann aus 148):

$$170) \frac{a + 2a_0}{a} (\mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{43}) + 2\mathfrak{D} = -\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{B}_{a_2} + \mathfrak{B}_{b_2} + \mathfrak{B}_{b_3} - 2\mathfrak{B}_{a_2}.$$

Ferner verdoppeln wir 145), fügen 156) und 165) hinzu, und ziehen 143) und 150) davon ab. Das Ergebniss ist

$$171) \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{43} - 2\mathfrak{D} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{B}_{a_1} - \mathfrak{B}_{b_1} - \mathfrak{B}_{b_4} + 2\mathfrak{B}_{a_1}.$$

Fügt man nun 171) zu 170), so erhält man für die Summe der Diagonalspannungen den Werth

$$\begin{aligned}
 172) \mathfrak{D}_{12} + \mathfrak{D}_{43} = & \\
 & \frac{a}{2(a + a_0)} [(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) + (\mathfrak{B}_{a_1} - \mathfrak{B}_{a_2}) - (\mathfrak{B}_{b_1} + \mathfrak{B}_{b_4}) \\
 & \qquad \qquad \qquad + (\mathfrak{B}_{b_2} + \mathfrak{B}_{b_3}) + 2(\mathfrak{B}_{a_1} - \mathfrak{B}_{a_2})].
 \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich aus 171) die Spannung  $\mathfrak{D}$  des Firststabes

$$\begin{aligned}
 173) \mathfrak{D} = & -\frac{a + 2a_0}{4(a + a_0)} [\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{B}_{a_1} - (\mathfrak{B}_{b_1} + \mathfrak{B}_{b_4}) + 2\mathfrak{B}_{a_1}] \\
 & -\frac{a}{4(a + a_0)} [\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{B}_{a_2} - (\mathfrak{B}_{b_2} + \mathfrak{B}_{b_3}) + 2\mathfrak{B}_{a_2}].
 \end{aligned}$$

Während wir also für die Diagonalen infolge der statischen Unbestimmtheit des Fachwerkes nur die Summe der Spannungen mittels

der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen finden konnten, läßt sich  $\mathfrak{D}$  ohne weiteres daraus berechnen. Um nun auch für die einzelnen Diagonalspannungen bestimmte Werthe zu erhalten, kann man (wie schon im § 17 ausgeführt wurde) die eine Diagonale weglassen; dann ergibt sich die Spannung der anderen gleich der rechten Seite von 172). Oder man kann die beiden Spannungen gleich annehmen; dann wird eine jede von ihnen halb so groß. Die letztere Annahme entspricht der Wirklichkeit, wenn die Belastung des Fachwerkes entweder symmetrisch zur  $a$ -Achse, oder doch so beschaffen ist, daß man sie in zwei Theile zerlegen kann, von denen der eine zur  $a$ -Achse, der andere zur  $b$ -Achse symmetrisch ist.<sup>12)</sup> Die thatsächlich vorkommenden Belastungen erfüllen diese Bedingung in der Regel wenigstens näherungsweise. Im vorliegenden Falle sind die wagerechten Kräfte  $\mathfrak{B}$  die einzigen, die eine Unsymmetrie herbeiführen könnten, da alle übrigen in der  $a$ -Symmetrieebene liegen. Wenn also (s. Abb. 36)

$$174) \quad \mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_1 \text{ und } \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_2$$

ist, so werden die Diagonalspannungen

$$175) \quad \mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{D}_{43} = \frac{a}{2(a+a_0)} [(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2) + (\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2}) - 2(\mathfrak{B}_{b1} - \mathfrak{B}_{b2}) + 2(\mathfrak{B}_{a1} - \mathfrak{B}_{a2})].$$

Entspringen die Kräfte  $\mathfrak{B}$  nur aus dem Winddruck, so sind sie für die eine Seite des Fachwerkes Null, für die andere gleich groß. Sie verschwinden dann ganz aus den Gleichungen für die  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}$ . Nachdem diese beiden Spannungen so bestimmt sind, ergeben sich alle übrigen Stabspannungen und die Auflagerkräfte leicht aus den Gleichungen 143) bis 168).

Bei Betrachtung von 172) und 173) wird dem Leser aufgefallen sein, daß die Größen  $\mathfrak{B}_{b1}$  und  $\mathfrak{B}_{b2}$  in diesen Gleichungen nicht vorkommen. Eine nähere Prüfung läßt erkennen, daß die in den oberen Knotenpunkten wirkenden, quer zur Firstlinie gerichteten Kräfte in der That keinen Einfluß auf die Diagonalen und den Firststab ausüben können, und daß auch die Stabspannungen  $\mathfrak{A}_1$ ,  $\mathfrak{A}_2$  und die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}_I$ ,  $\mathfrak{A}_{II}$  davon unabhängig sind. Es erklärt sich das daraus, daß  $\mathfrak{B}_{b1}$  schon durch die Stabspannungen  $\mathfrak{B}_1$ ,  $\mathfrak{B}_4$ ,  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{C}_4$ ,  $\mathfrak{H}_{12}$ ,  $\mathfrak{H}_{43}$ , die lothrechten Auflagerdrücke  $\mathfrak{B}_I$ ,  $\mathfrak{B}_{IV}$  und die wagerechten Auflagerdrücke  $\mathfrak{Z}_{12}$ ,  $\mathfrak{Z}_{34}$ ,  $\mathfrak{Z}_{41}$  im Gleichgewicht gehalten wird; ähnliches gilt für  $\mathfrak{B}_{b2}$ . Die Größe der durch  $\mathfrak{B}_{b1}$  und  $\mathfrak{B}_{b2}$  erzeugten Stab- und Lagerkräfte ergibt sich aus den Gleichungen 143)

<sup>12)</sup> Der zweite Theil erzeugt nämlich überhaupt keine Diagonalspannungen.

bis 168) am einfachsten, wenn man alle übrigen äußeren Kräfte, sowie die von  $\mathfrak{B}_{b_1}$  und  $\mathfrak{B}_{b_2}$  unabhängigen Spannungen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{D}_{12}, \mathfrak{D}_{13}, \mathfrak{D}$  gleich Null annimmt.

Hiermit ist das statische Verhalten des Fachwerkes und der Gang der Rechnung vollständig klargestellt. Die Anwendung auf einzelne Belastungsfälle ist so einfach, daß es der Vorführung von Beispielen wohl nicht bedarf. Es wird dem Leser keine Schwierigkeiten machen, auch das nach Abb. 33 angeordnete Firstfachwerk in ähnlicher Weise zu berechnen.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW



Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn in Berlin W 66  
Wilhelmstrasse 90.

Für jede in Zimmermann's Rechentafel entdeckte falsche  
Tafelzahl erhält der erste Finder **10 Mark**.

**Vollkommen fehlerfrei, also unbedingt zuverlässig**  
hat sich erwiesen

**Dr. H. Zimmermann's**

# Rechentafel

nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerthe,  
die alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter  
1000 bezw. 100 ganz erspart, bei grösseren Zahlen  
die Rechnung erleichtert und sicher macht.

**Sechstes bis achttes Tausend.**

gr. 8<sup>o</sup>. Preis in gutem Leinenband mit Golddruck  
**nur 5 Mark.**

---

Es ist dies die einzige Rechentafel, welche die fertigen  
Producte aller Zahlen bis  $100 \times 1000$  mit sämtlichen  
Ziffern an einer Stelle und in lückenloser Folge  
angiebt, also hierfür kein Zusammensetzen aus einzelnen  
Theilen oder Suchen an verschiedenen Stellen erfordert. Die  
Tafel dient aber ausserdem zum Rechnen mit beliebig  
grossen Zahlen und liefert auch hierbei in einfachster  
Weise absolut genaue Ergebnisse.

Der grosse Nutzen und die hervorragende Brauchbarkeit dieser  
Tafel für Mathematiker, Physiker und Astronomen, für Land-  
messer, Bau-, Maschinen- und sonstige Techniker, für Ver-  
waltungs- und Rechnungs-Beamte im weitesten Sinne, für  
Banken, Versicherungsanstalten, Steuerbehörden, Berg- und  
Forstverwaltungen u. dergl. m. ist durch die ausnahmslos  
günstigen Besprechungen in den verschiedensten Fachzeit-  
schriften und Tageszeitungen, sowie durch die weite Ver-  
breitung der Tafel nachgewiesen.

**Zimmermann's** Rechentafel ist als vollkommen fehlerfrei  
zu betrachten, da im Laufe von acht Jahren, trotz des  
ausgesetzten Preises von je 10 Mark, **kein** falsches  
Product gefunden wurde. Sie übertrifft alle ähnlichen  
Werke in der sorgfältig ausgeprobten, streng gesetz-  
mässigen Gruppierung der Zahlen und leistet daher das  
Aeusserste in Bezug auf Klarheit, Uebersichtlichkeit und  
Bequemlichkeit. Zimmermann's Rechentafel allein giebt  
fertige und vollständige, an nur einer Stelle aufzu-  
suchende Producte, was für die Vermeidung von Irr-  
thümern beim flotten Arbeiten von der grössten Wichtig-  
keit ist. Diese Rechentafel ist kein theurer Foliant,  
sondern ein handlicher und billiger Octavband.

*Probefbogen stehen unberechnet und postfrei zu Diensten.*

Verlag von **Wilhelm Ernst & Sohn** in Berlin W 66  
Wilhelmstrasse 90.

## Genietete Träger

Tabellen der Trägheitsmomente, Widerstandsmomente  
und Gewichte

Mit Berücksichtigung der Nietverschwächung  
berechnet und übersichtlich zusammengestellt

von

**Dr. H. Zimmermann**

Geheimer Baurath im Ministerium der öffentlichen Arbeiten

**Dritte**, bedeutend vermehrte Auflage

1893. Mit Holzschnitten und einer Steindruck-Tafel

Preis: in Leinenband mit Golddruck 6 Mark, in Pappband 5 Mark

Die dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten hauptsächlich durch die Einfügung einer grossen Zahl neuer Querschnitte, besonders solcher mit breiten, durch ungleichschenklige Winkeleisen gebildeten Gurten. In mehreren Tabellen ist die bisher eingehaltene obere Höhengrenze von 60 cm bis zu 140 cm hinausgeschoben worden; einige andere, die bisher als untere Grenze 50 cm oder 60 cm hatten, wurden bis zu 20 cm herab erweitert. Um den Einfluss von Aenderungen der Gurtplattenbreiten bequem ermitteln zu können, sind entsprechende Hülftabellen eingefügt worden. Sämmtliche Tabellen sind mit fortlaufenden Nummern versehen, wodurch das Aufsuchen bestimmter Querschnitte sehr erleichtert wird. Im Ganzen hat die neue Auflage 23 Seiten mehr als die alte.

---

**J. W. Schwedler**

Wirkl. Geh. Ober-Baurath.

## Die Construction der Kuppeldächer.

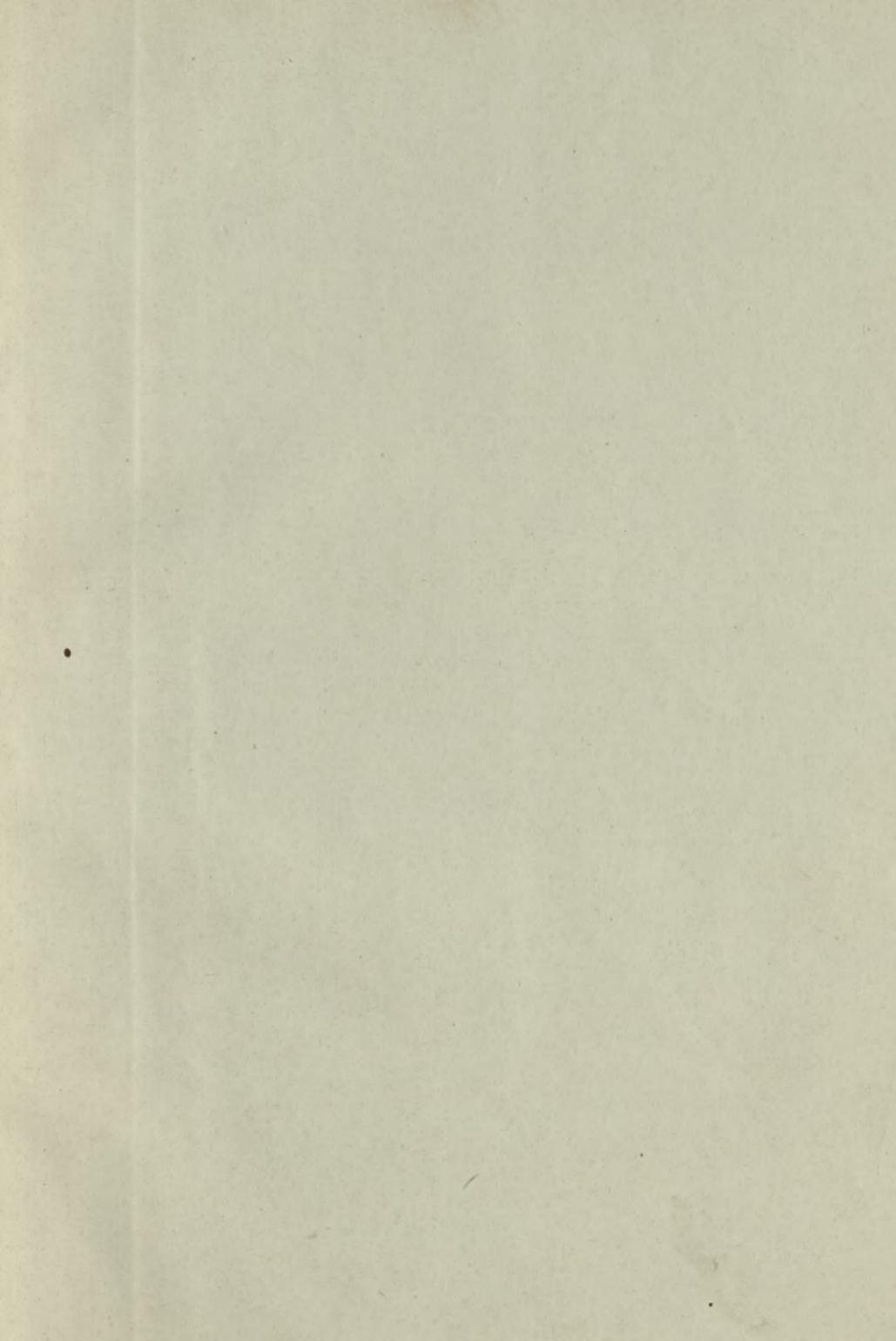
11 Tafeln mit Text. Fol. Zweite vermehrte Auflage.

Preis geh. 14 Mark.

Druck von J. Kerskes, Berlin SW., Zimmerstrasse 34.

S-96

S. 61







Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297283