

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

2390

0,71- 3989385
13560078

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

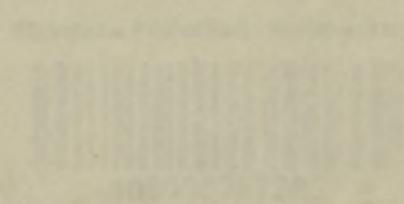
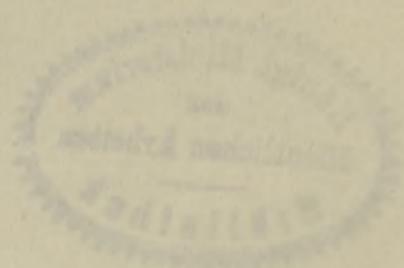


100000297285

THEORIE GÉNÉRALE
DU
CIMENT ARMÉ



X
1731



ROMMAG

THÉORIE GÉNÉRALE
DU
CIMENT ARMÉ

73.



J. 19a
93

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

49968 Quai des Grands-Augustins, 55.

Projet de Travaux publics
THÉORIE GÉNÉRALE

DU

CIMENT ARMÉ

PAR

CHARLES AMAR,

INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS CIVILES.



GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1912

5.490
93

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

112390

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

Akc. Nr. 1337/49

AVANT-PROPOS.

Ce travail s'adresse autant aux praticiens qu'aux théoriciens.

Nous avons essayé d'exposer et de justifier, dans cette Théorie générale, les formules générales pratiques du calcul du Ciment armé, en usage chez plusieurs constructeurs. Nous nous proposons, dans un prochain travail, de présenter, dans le même esprit, les méthodes et formules spéciales de calcul des ouvrages de toute espèce en ciment armé tels que fondations, bâtiments, toitures, murs de soutènement, ponts, réservoirs, silos, tuyaux, dômes, jetées, etc.

En présentant ce travail, nous désirons attirer l'attention de nos lecteurs sur un errement assez répandu. Il s'agit de l'usage irrationnel qu'on fait souvent de formules empiriques. Celles-ci doivent disparaître de plus en plus, au fur et à mesure que nos connaissances sur le sujet se développent pour faire place aux calculs rationnels basés sur la Résistance des Matériaux.

Certes l'empirisme a été le départ de la théorie, mais une fois celle-ci établie il est logique et nécessaire d'abandonner les anciennes méthodes qui, la plupart

du temps, n'aboutissent pas à des résultats comparables. Pour faire des comparaisons justes et utiles, les ouvrages doivent être calculés d'après des méthodes et des lois rationnelles. Il ne suffit pas, en effet, qu'un ouvrage tienne pour justifier l'emploi de tel ou tel procédé empirique. C'est ce que beaucoup d'entrepreneurs, de bonne ou mauvaise foi, ne veulent pas appliquer; mais il appartient aux ingénieurs éclairés de donner la préférence, entre deux études dont les résultats peuvent être tous deux plausibles en ce qui concerne la stabilité de la construction, à celle qui offre la sécurité désirée.

En d'autres termes, il faut, dans les projets, que le coefficient de sécurité soit respecté et deux projets ne peuvent loyalement concourir que si la sécurité offerte est la même.

CHARLES AMAR.



THÉORIE GÉNÉRALE

DU

CIMENT ARMÉ.

GÉNÉRALITÉS.

La théorie qui va suivre a pour objet l'étude des ouvrages en ciment armé, en accord avec les principes et formules de la résistance des matériaux et les prescriptions du Règlement français de 1906 sur le béton armé.

1. Charges de ruptures. Charges pratiques de travail. Coefficient de sécurité. — Suivant la composition des dosages du béton et la nature des aciers employés, les matériaux se rompent sous certaines charges qui sont les *charges de rupture*.

Pour la sécurité des constructions, on fait travailler les matériaux à des charges inférieures aux charges de rupture et qui constituent les *charges pratiques de travail*.

Le rapport entre la charge de rupture et la charge pratique de travail constitue le *coefficient de sécurité*.

2. Hypothèses fondamentales du ciment armé. — 1° On admet qu'on peut considérer les solides en ciment armé comme des solides homogènes, dans lesquels on peut remplacer l'acier par une quantité équivalente de béton;

2° On admet, comme dans la résistance des matériaux, qu'une section plane d'un solide en ciment armé reste plane après déformation;

3° On admet, bien que le béton travaille dans une faible mesure à l'extension, que le travail du béton à l'extension est nul.

3. Forces extérieures et forces moléculaires ou intérieures. Travaux moléculaires. — On a vu, dans la résistance des matériaux, que dans une section plane quelconque d'un solide prismatique homogène, soumis à une flexion simple, les *forces extérieures* (surcharges et poids morts) donnent lieu à un *couple fléchissant*, dont les forces sont dans un même plan, appelé *plan de flexion*, et sont normales à la section et à un *effort tranchant* dirigé suivant l'intersection du plan de flexion et de la section.

Le couple fléchissant donne lieu, en chaque point de la section (ou unité de surface autour de chaque point), à une *force moléculaire de flexion* (compression ou tension). Le rapport entre cette force moléculaire et l'unité de surface autour du point constitue le *travail de flexion* (compression ou tension).

De même, l'effort tranchant donne lieu, en chaque point de la section, à une *force moléculaire de cisaillement* et à un *travail de cisaillement*.

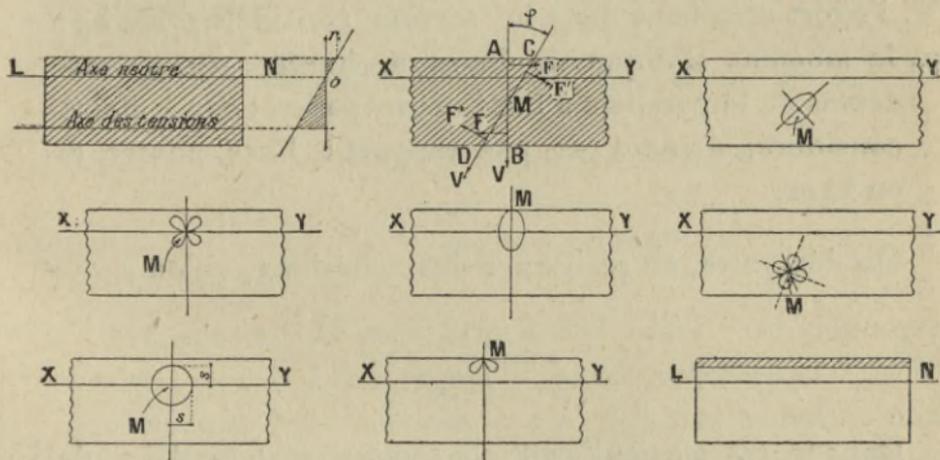
La matière doit être distribuée de telle sorte que, quelle que soit l'orientation de la section choisie, les travaux moléculaires de flexion et de cisaillement ne dépassent en aucun point les charges pratiques de travail de la matière par unité de surface.

4. Variation des travaux moléculaires dans un solide prismatique en ciment armé. Axe neutre. — Étant donnée une section quelconque AB ou CD (*fig. 2*) d'un solide prismatique en ciment armé, soumis à la flexion simple, il existe une ligne LN (*fig. 1*) qu'on appelle l'*axe neutre*, au-dessus de laquelle toutes les fibres travaillent à la

compression et au-dessous de laquelle toutes les fibres travaillent à la tension.

On appelle *surface neutre* le lieu de tous les axes neutres dans le solide entier.

Fig. 1 à 9.



Nous appellerons *axe longitudinal* de la pièce, l'intersection de la surface neutre avec le plan de flexion.

Soient :

M , moment de flexion de la section considérée en kgm ;
 n , distance d'un point quelconque de la section à l'axe neutre, en cm ;

I , moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre;
 r , travail de flexion en un point quelconque de la section, en $\text{kg} : \text{cm}^2$.

On démontre, en résistance des matériaux, qu'on a

$$(1) \quad r = \frac{Mn}{I}.$$

Il résulte de (1) que, dans une section quelconque, normale ou oblique à l'axe longitudinal et perpendiculaire au plan de flexion, le travail de flexion est nul sur la fibre neutre, maximum sur les fibres extrêmes et croît propor-

tionnellement à la distance du point considéré à l'axe neutre.

Soient :

s , le travail de cisaillement en un point quelconque de la section en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

V , l'effort tranchant dans la section considérée en kg ;

μ , le moment statique de l'aire hachurée (*fig. 9*) au-dessus de la parallèle à l'axe neutre passant par le point considéré, moment pris par rapport à l'axe neutre et en kgm .

On démontre, en résistance des matériaux, qu'on a

$$(2) \quad s = \frac{V\mu}{In}.$$

Dans le cas particulier d'une section rectangulaire de côtés a et b en centimètres, on a

$$(2 \text{ bis}) \quad s = \frac{V}{ab} \left(\frac{3}{2} - \frac{6n^2}{b^2} \right).$$

Il résulte de (2 bis) que, dans une section quelconque, normale, ou oblique à l'axe longitudinal et perpendiculaire au plan de flexion, le travail de cisaillement est maximum sur la fibre neutre (car, en effet, le maximum a lieu lorsque la dérivée par rapport à n s'annule, c'est-à-dire pour $n = 0$) et que le travail est nul sur les fibres extrêmes, car pour $n = \frac{b}{2}$, $s = 0$.

Soit M un point quelconque à l'intérieur du solide; menons par ce point deux plans AB et CD , l'un normal, l'autre oblique à l'axe longitudinal, ces deux plans étant perpendiculaires au plan de flexion (*fig. 2*).

Soient :

r , travail de flexion en M dans le plan normal en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

s , travail de cisaillement en M dans le plan normal en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

φ , angle des deux plans;

r' , travail de flexion en M dans le plan oblique en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

s' , travail de cisaillement en M dans le plan oblique en $\text{kg} : \text{cm}^2$.

On démontre, en résistance des matériaux, qu'on a

$$(3) \quad r' = \frac{1}{2} r(1 + \cos 2\varphi) + s \sin 2\varphi,$$

$$(4) \quad s' = -\frac{1}{2} r \sin 2\varphi + s \cos 2\varphi.$$

Traçons avec M pour pôle, les vecteurs r' et s' lorsque φ varie, c'est-à-dire lorsque la section pivote autour de M , nous aurons deux courbes à coordonnées polaires. Les figures 3, 4 et 5 représentent la variation du travail de flexion lorsque le point M se trouve en un point quelconque, sur l'axe neutre ou sur une fibre extrême du solide. Les figures 6, 7 et 8 représentent la variation du travail de cisaillement dans les mêmes conditions.

Ces courbes montrent que :

1° En un point quelconque du solide, il existe un plan oblique pour lequel le travail de flexion est maximum et un autre plan oblique pour lequel le travail de cisaillement est maximum;

2° En un point quelconque de la fibre extrême, le travail de flexion maximum correspond à la section normale;

3° En un point quelconque de l'axe neutre, le travail de cisaillement est maximum dans le plan normal à l'axe longitudinal et dans le plan horizontal contenant celui-ci.

On trouverait facilement que :

En un point quelconque du solide, la flexion maximum

a lieu pour $\text{tang } 2\varphi = \frac{2s}{r}$ et que ce maximum a pour valeur $r' = \frac{1}{2}(r + \sqrt{4s^2 + r^2})$; le cisaillement maximum a lieu pour $\text{tang } 2\varphi = -\frac{2r}{s}$ et a pour valeur $s' = \sqrt{4s^2 + r^2}$;

En un point quelconque de la fibre extrême, la flexion maximum a lieu pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et a pour valeur $r' = r$;

En un point quelconque de la fibre neutre, le cisaillement maximum a lieu pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et a pour valeur $s' = s$.

D'autre part, dans toute direction non contenue dans le plan de flexion, il n'y a ni travail de flexion, ni travail de cisaillement.

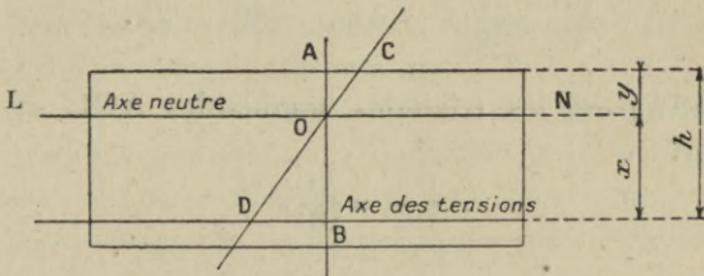
Nous distribuerons la matière dans le solide, de telle sorte que, dans une section normale quelconque à l'axe longitudinal, les travaux de flexion et de cisaillement maxima ne dépassent pas les limites pratiques; de cette sorte, nous serons certains qu'en aucun point du solide la limite pratique n'est dépassée; en effet, si nous considérons une section oblique quelconque, le maximum de flexion a lieu sur les fibres extrêmes, mais ce maximum, d'après ce qui précède, est inférieur à la flexion normale aux points d'intersection des fibres extrêmes et du plan oblique. De même, ce plan coupe la fibre neutre en un point où le cisaillement normal est supérieur au cisaillement maximum en ce point, dans le plan considéré.

En résumé, il suffira, en pratique, de ne considérer que les sections normales du solide et de veiller à ce que, dans ces sections, la flexion et le cisaillement ne dépassent pas les limites permises.

§. Position de l'axe neutre dans une section transversale d'un solide en ciment armé. — Considérons un solide prismatique en ciment armé soumis à la flexion simple.

Soit AB une section normale à l'axe longitudinal, après déformation, elle devient CD, plane par hypothèse. Nous supposons qu'au-dessous de l'axe neutre, le béton est

Fig. 10.



suffisant pour absorber toute la compression. Au-dessous de l'axe neutre, comme nous admettons que le travail du béton à l'extension est nul, nous disposerons une ou plusieurs files de barres, dont l'axe constituera l'axe des tensions.

Soient :

h , la hauteur théorique du solide, c'est-à-dire la distance entre la fibre extrême et l'axe des tensions en cm ;

E_b , le coefficient d'élasticité du béton, c'est-à-dire la charge en kg : cm² sous laquelle la fibre se raccourcit d'une unité de longueur ;

E_a , le coefficient d'élasticité de l'acier, c'est-à-dire la charge en kg : cm² sous laquelle la fibre s'allonge d'une unité de longueur ;

$m = \frac{E_a}{E_b}$, la plupart des constructeurs admettent pour valeur pratique de m , $m = 15$;

r , le travail réel du béton en kg : cm² ;

R , le travail réel de l'acier en kg : cm² ;

y , la distance de la fibre extrême à l'axe neutre.

\overline{AC} représente le raccourcissement de la fibre la plus comprimée ;

\overline{BD} représente l'allongement de la fibre la plus tendue.

D'après la loi de Hooke, écrivons que les allongements sont proportionnels aux charges

$$\frac{\overline{AC}}{r} = \frac{1}{E_b}, \quad \text{d'où} \quad \overline{AC} = \frac{r}{E_b},$$

$$\frac{\overline{BD}}{R} = \frac{1}{E_a}, \quad \text{d'où} \quad \overline{BD} = \frac{R}{E_a}.$$

D'autre part, les triangles semblables AOC et BOD donnent

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD},$$

ou

$$\frac{y}{x} = \frac{\left(\frac{r}{E_b}\right)}{\left(\frac{R}{E_a}\right)} = \frac{rE_a}{RE_b} = \frac{mr}{R},$$

ou

$$\frac{y}{x+y} = \frac{mr}{R+mr};$$

or

$$x+y = h,$$

d'où

$$(1) \quad y = \frac{mrh}{R+mr}.$$

REMARQUE. — La formule (1) donne exactement, sous les diverses hypothèses précédentes, la position de l'axe neutre, r et R étant les travaux réels du béton et de l'acier sur les fibres extrêmes. Cette formule est vraie, quelle que soit la forme du solide prismatique.

EFFORTS TRANCHANTS.

6. Théorie des efforts tranchants. — Pour qu'une section quelconque normale ou oblique à l'axe longitudinal se cisaille, il faut que toutes les fibres cèdent à la fois. Si la section prismatique est telle qu'une fibre doive

travailler théoriquement à plus de la limite permise, en pratique les fibres voisines la soulageront en travaillant davantage, et la section ne se cisailera pas. Ceci explique que les poutres peuvent être évidées sans inconvénient sous la réserve que le travail moyen de cisaillement absorbé par les parties pleines, ne dépasse pas la limite pratique du travail de cisaillement.

Il suffit donc, dans une section quelconque, *que la matière, quelle que soit sa distribution, puisse absorber totalement l'effort tranchant*, sans que le travail de cisaillement dépasse la limite pratique. Bien entendu, il n'en vaudrait que mieux de distribuer la matière proportionnellement à l'intensité du cisaillement.

Dans une section quelconque du solide, l'effort tranchant sera absorbé :

1° Par le béton, à raison d'un travail limite pratique de $\frac{1}{10} r \text{ kg} : \text{cm}^2$, conformément au Règlement français de 1906 sur le béton armé; r étant la limite pratique du travail du béton à la compression en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

2° Par les armatures supérieure et inférieure rencontrées par la section, à raison de $\frac{4}{5} R \text{ kg} : \text{cm}^2$, R étant la limite pratique du travail de l'acier à la compression en $\text{kg} : \text{cm}^2$.

Si la section est normale, ou oblique à l'axe longitudinal, perpendiculaire au plan de flexion, elle rencontre toujours les armatures supérieure et inférieure de la poutre. Nous avons vu qu'il suffit de vérifier que le cisaillement est satisfait, tout le long de la poutre, dans les sections normales. Nous appellerons ce cisaillement : le *cisaillement vertical*.

Si la section est parallèle à l'axe longitudinal et toujours perpendiculaire au plan de flexion, elle ne rencontre plus les armatures supérieure et inférieure de la poutre et il y a lieu, lorsque le béton est insuffisant pour absorber l'effort total de cisaillement, d'ajouter des attaches verti-

cales ou inclinées, à volonté, pour absorber l'excès du cisaillement total sur celui absorbé par le béton. Nous appellerons cet effort de cisaillement, le *cisaillement horizontal* ou *glissement longitudinal*.

7. **Cisaillement vertical des poutres et hourdis.** — Soient :

s , section d'acier à la tension en cm^2 ;

s' , section d'acier, dans la partie comprimée, en cm^2 ;

V , effort tranchant vertical dans une section quelconque normale en kg ;

a , largeur de la pièce en cm ;

h , hauteur théorique de la pièce en cm ;

r , travail limite pratique du béton en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

R , travail limite pratique de l'acier à la tension en $\text{kg} : \text{cm}^2$.

On doit avoir, d'après ce qui précède, dans une section quelconque normale à l'axe longitudinal,

$$s + s' \geq \frac{V - ah \frac{r}{10}}{\frac{4}{5} R}.$$

REMARQUE. — Il n'y a lieu de vérifier le cisaillement vertical d'une pièce quelconque qu'aux points où l'effort tranchant est maximum et où la section d'acier offerte au cisaillement est minimum.

8. **Cisaillement horizontal des poutres et hourdis.** — Soient :

H , cisaillement horizontal total de O à A en kg ;

$d = \overline{OA}$ en cm ;

$T = \overline{AC}$ en kg ;

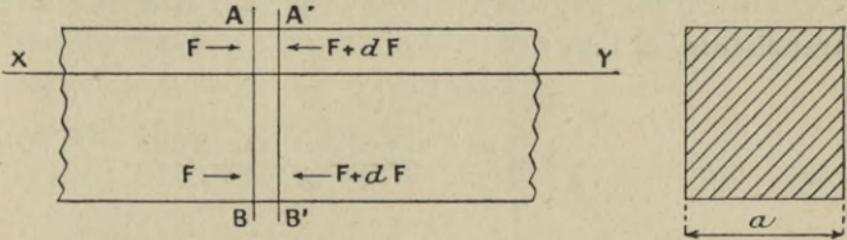
z , bras de levier du couple fléchissant en cm ;

V, effort tranchant vertical dans une section quelconque normal en kg;

M, moment fléchissant dans la même section en kgm;

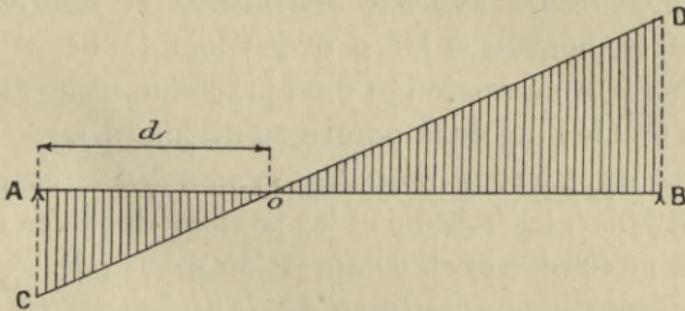
F, force du couple fléchissant dans la même section en kg.

Fig. 11.



Soient deux sections AB et A'B' normales à l'axe longitudinal et infiniment voisines. En AB, nous avons un

Fig. 12.



couple de flexion M dont les forces sont F; en A'B', nous avons le couple M + dM et les forces F + dF. La section horizontale de surface adx tend à se cisailer sous l'action de la force $(F + dF) - F = dF$. Or

$$F = \frac{100 M}{s},$$

d'où

$$\frac{dF}{dx} = \frac{100}{s} \times \frac{dM}{dx}.$$

La limite de $\frac{dF}{dx}$, lorsque dx tend vers 0, est $\frac{V}{s}$, car $V = \frac{100 dM}{dx}$, x étant exprimé en cm.

De O à A, la somme de ces forces élémentaires de cisaillement a pour expression

$$H = \int_0^d \frac{V dx}{z} = \frac{1}{z} \int_0^d V dx.$$

Or l'intégrale représente de O à A l'aire des efforts tranchants, et l'on a

$$H = \frac{T_1 \frac{d}{2}}{z} = \frac{\text{aire des efforts tranchants}}{z}.$$

REMARQUE. — Le raisonnement précédent est vrai quelle que soit la courbe des efforts tranchants \bar{V} .

9. Définitions relatives aux hourdis et aux poutres. —

Nous appellerons *hourdis ordinaires* et *poutres ordinaires*, les hourdis et les poutres dont le béton suffit à absorber la compression et dont la section d'acier est constante tout le long de la poutre ou du hourdis.

Nous appellerons *hourdis symétriques* et *poutres symétriques*, les hourdis et les poutres dont les sections d'acier en tension et en compression sont égales.

Nous appellerons *poutres d'égale résistance*, les poutres dont la section d'acier en tension varie le long de la poutre, en se proportionnant à la courbe des moments fléchissants.

10. Espacements successifs des attaches verticales dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée, ou parfaitement ou partiellement encastrée à ses deux extrémités et uniformément chargée. —

Proposons-nous de déterminer les espacements successifs des attaches dans une poutre ainsi définie. Une méthode analogue pourra être appliquée pour des poutres dont les dispositions de charge et d'appui seraient différentes.

Soient :

d_1, d_2, d_3 , espacements successifs des attaches en cm ;
 R , travail limite pratique de l'acier à la tension en kg : cm² ;
 n , nombre d'armatures à la tension dans la section normale ;

s , section du fil constituant les attaches en cm² ;

z , bras de levier du couple fléchissant en cm ;

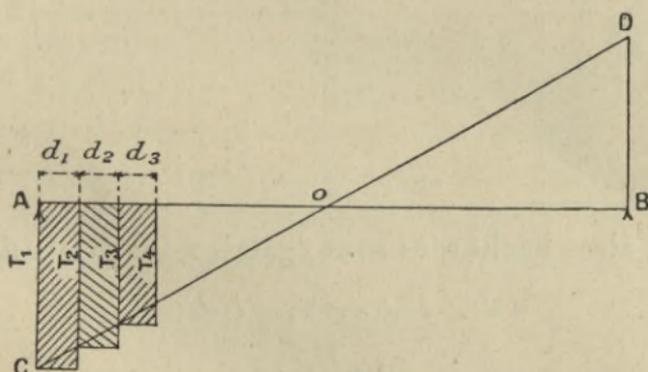
T_1 , effort tranchant aux appuis en kg ;

a , largeur de la poutre en cm ;

r , travail limite pratique du béton à la compression en kg : cm² ;

$$t = \frac{azr}{10} .$$

Fig. 13.



Soit CD la droite des efforts tranchants. Divisons l'aire AOC en un certain nombre de trapèzes de surface équivalente. Si nous substituons à ces trapèzes les rectangles figurés, nous aurons absorbé le cisaillement horizontal par excès.

Au droit des ordonnées T_1, T_2, T_3 , etc, nous allons placer une ou plusieurs attaches verticales reliant les barres des armatures supérieure et inférieure de la poutre. Nous aurons $2n$ brins d'attaches et une surface d'acier $2ns$ par section, offerte au cisaillement horizontal.

Le premier espacement d_1 sera, d'après ce qui précède, défini par la relation

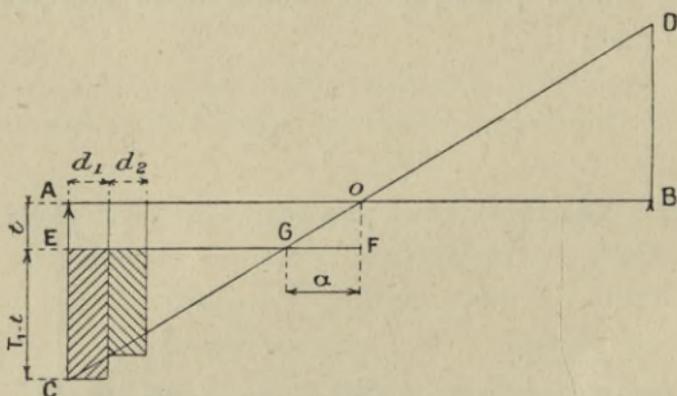
$$2ns \frac{4}{5} R = \frac{T_1 d_1}{z} - \frac{a d_1 r}{10} = \frac{T_1 d_1 - \frac{a z r d_1}{10}}{z} = \frac{(T_1 - t) d_1}{z},$$

d'où

$$d_1 = \frac{8}{5} \times \frac{R n s z}{T_1 - t}.$$

Traçons l'horizontale EF telle que $AE = t$ (fig. 14).

Fig. 14.



Les deux aires hachurées sont égales, nous avons donc

$$(T_1 - t) d_1 = (T_2 - t) d_2;$$

d'où

$$d_2 = \frac{(T_1 - t) d_1}{T_2 - t};$$

on trouverait de même

$$d_3 = \frac{(T_1 - t) d_1}{T_3 - t},$$

et ainsi de suite.

Mais les triangles semblables de la figure donnent

$$\frac{T_1 - t}{T_2 - t} = \frac{GE}{GE - d_1},$$

$$\frac{T_1 - t}{T_3 - t} = \frac{GE}{GE - (d_1 + d_2)},$$

et ainsi de suite.

Posons $GE = K$. On peut donc écrire que

$$d_2 = \frac{Kd_1}{K - d_1},$$

$$d_3 = \frac{Kd_1}{K - (d_1 + d_2)},$$

et ainsi de suite.

Or

$$\frac{GE}{T_1 - t} = \frac{x}{t} = \frac{\frac{l}{2} - GE}{t},$$

d'où

$$t\overline{GE} = \frac{l}{2}(T_1 - t) - T_1\overline{GE} + t\overline{GE},$$

d'où

$$K = \frac{l(T_1 - t)}{2T_1}.$$

Ayant déterminé K numériquement, il sera facile, avec la règle à calcul, de déterminer rapidement les divers espacements successifs, en divisant la constante Kd_1 par les différences successives $K - d_1$, $K - (d_1 + d_2)$, etc.

En résumé, les espacements successifs des attaches sont donnés par les formules

$$d_1 = \frac{8}{5} \times \frac{Rnsz}{T_1 - t},$$

$$d_2 = \frac{Kd_1}{K - d_1},$$

$$d_3 = \frac{Kd_1}{K - (d_1 + d_2)},$$

.....

avec la relation

$$K = \frac{l}{2} \times \frac{T_1 - t}{T_1}.$$

REMARQUES. — I. En pratique, on fait $K = \frac{l}{2}$, ce qui n'a pas d'inconvénient, puisque cela réduit légèrement des espacements successifs. En effet, d_3 , par exemple, peut

s'écrire

$$d_3 = \frac{K d_1}{K - (d_1 + d_2)} = \frac{d_1}{1 - \frac{d_1 + d_2}{K}};$$

K augmentant, $\frac{d_1 + d_2}{K}$ diminue, $1 - \frac{d_1 + d_2}{K}$ augmente et d_3 diminue.

II. Si, au lieu d'attaches verticales, on dispose des barres inclinées, il suffira que la section totale horizontale $\frac{S}{2}$ des aciers cisailés entre O et A satisfasse à l'inégalité

$$\frac{\text{aire } A\overline{OC}}{z} - \frac{alr}{2 \times 10} \leq \frac{S}{2} \times \frac{4}{5} R.$$

11. Poids théorique moyen par mètre courant des attaches verticales nécessaires dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée, ou parfaitement ou partiellement encastrée à ses deux extrémités et uniformément chargée. — Soient :

l , portée d'axe en axe de la poutre en cm ;

z , bras de levier du couple fléchissant en cm ;

a , largeur de la poutre en cm ;

s , section du fil constituant les attaches en cm^2 ;

S , section totale des attaches dans toute la portée en cm^2 ;

r , travail limite pratique du béton à la compression en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

R , travail limite pratique de l'acier à la tension en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

T_1 , effort tranchant aux appuis en kg ;

$$t = \frac{azr}{10} ;$$

7,85, densité de l'acier ($\text{kg} : \text{dm}^3$) ;

ω , poids théorique moyen d'attaches par mètre courant de poutre, en kg.

On a, d'après le paragraphe 10,

$$\frac{T_1 l}{4z} - \frac{alr}{2 \times 10} = \frac{S}{2} \times \frac{4}{5} R,$$

ou

$$\frac{T_1 l}{2z} - \frac{alr}{10} = \frac{4}{5} SR,$$

ou

$$\frac{l}{z} \left(\frac{T_1}{2} - t \right) = \frac{4}{5} SR,$$

ou

$$S = \frac{5l(T_1 - 2t)}{8Rz}.$$

La section horizontale moyenne d'attaches par mètre courant sera

$$\frac{5l(T_1 - 2t)}{8Rz} \frac{l}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{62,5(T_1 - 2t)}{Rz}.$$

En donnant 0^m,10 de longueur à chaque crochet des attaches, le volume d'acier sera

$$62,5 \times \frac{T_1 - 2t}{R} \times \frac{z + 10}{z} \text{ centimètres cubes,}$$

ou

$$\frac{62,5}{1000} \times \frac{T_1 - 2t}{R} \times \frac{z + 10}{z} \text{ décimètres cubes.}$$

Le poids cherché sera donc

$$0,0625 \times 7,85 \times \frac{T_1 - 2t}{R} \times \frac{z + 10}{z},$$

ou

$$\omega = 0,49 \times \frac{T_1 - 2t}{R} \times \frac{z + 10}{z} \text{ kilogrammes.}$$

12. Nombre théorique de sections planes contenant des attaches dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée, ou parfaitement ou partiellement encastree à ses deux extrémités et uniformément chargée. — Soit, en plus des notations précédentes :

N, nombre théorique de sections planes contenant des attaches.

Au droit des ordonnées T_1, T_2, T_3, \dots , tout le long de la portée de la poutre, nous avons N sections planes contenant des attaches. Tous les trapèzes (*fig. 14*) ayant une surface équivalente, écrivons, pour la moitié de la poutre, que la somme de leurs aires est égale à l'aire du triangle ECG. Il vient

$$\frac{N}{2}(T_1 - t) d_1 = (T_1 - t) \frac{\overline{EG}}{2};$$

or,

$$\overline{EG} = k = \frac{l}{2} \frac{T_1 - t}{T_1},$$

d'où

$$N = \frac{k}{d_1};$$

mais

$$d_1 = \frac{8 R n z}{5(T_1 - t)} \quad (\S 10),$$

d'où

$$N = \frac{\frac{l}{2} \frac{T_1 - t}{T_1}}{\frac{8 R n s z}{5(T_1 - t)}},$$

ou

$$N = \frac{5}{16} \frac{l(T_1 - t)^2}{R n s z T_1}.$$

13. Nombre pratique de sections planes contenant des attaches dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée, ou parfaitement ou partiellement encastree à ses deux extrémités et uniformément chargée. — Soit, en plus des notations précédentes :

N, nombre pratique de sections planes contenant des attaches.

Nous avons vu (§ XII) que

$$N = \frac{k}{d_1};$$

or, approximativement,

$$K = \frac{l}{2},$$

d'où

$$N = \frac{l}{2d_1}.$$

14. Poids pratique moyen des attaches par mètre courant de poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée, ou parfaitement ou partiellement encastree à ses deux extrémités et uniformément chargée. — Soit, en plus des notations précédentes :

ω , poids pratique moyen des attaches par mètre courant en kg.

Nous venons de voir que le nombre total de sections d'attaches dans la poutre est

$$N = \frac{l}{2d_1}.$$

Le nombre moyen de section d'attaches par mètre courant sera

$$\left(\frac{l}{2d_1} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{50}{d_1} \cdot \left(\frac{l}{100} \right)$$

Dans un plan d'attaches, nous avons une section d'acier de $2ns$; la section moyenne d'attaches par mètre courant sera donc

$$\frac{50}{d_1} \times 2ns \quad \text{ou} \quad \frac{100ns}{d_1}.$$

Le cube moyen d'attaches par mètre courant sera par suite

$$\frac{100ns}{d_1} (z + 10) \text{ centimètres cubes,}$$

ou

$$\frac{ns}{10d_1} (z + 10) \text{ décimètres cubes,}$$

et le poids moyen d'attaches par mètre courant sera

$$\frac{7,85 ns(z + 10)}{10 d_1},$$

ou

$$(1) \quad \omega = \frac{0,785 ns(z + 10)}{d_1} \text{ kilogrammes.}$$

Autre expression de ω . — Nous pouvons remplacer dans (1) d_1 par sa valeur

$$d_1 = \frac{8 R ns z}{5(T_1 - t)},$$

il vient

$$\omega = \frac{0,785 \times 5}{5} \frac{ns(z + 10)(T_1 + t)}{R ns z},$$

ou

$$\omega = 0,49 \times \frac{T_1 - t}{R} \frac{z + 10}{z} \text{ kilogrammes}$$

avec

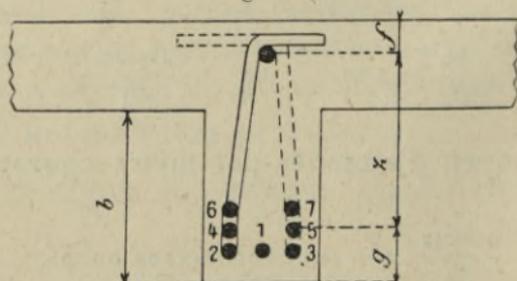
$$t = \frac{a z r}{10}.$$

15. Longueur moyenne d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée, pour un groupe de sept barres. — Soient, en plus des notations précédentes :

l_m , la longueur moyenne d'acier de même section en cm ;

s_1 , la section de chacune des barres du groupe en cm².

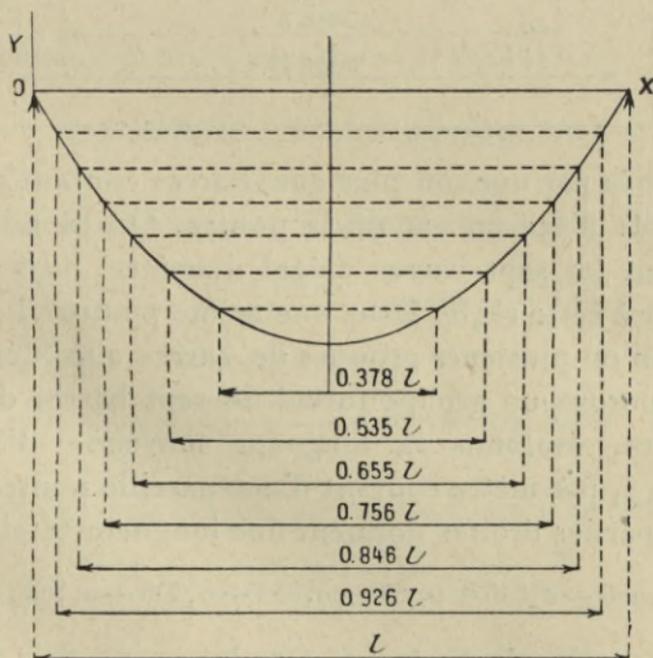
Fig. 15.



La poutre d'égale résistance, librement appuyée, sera définie de la façon suivante : traçons la para-

bole $M = \frac{px}{2} (l - x)$ des moments fléchissants, OX et OY étant les axes de coordonnées. Divisons la flèche en un certain nombre de parties égales. Nous le prendrons ici égal à sept. Nous disposerons un groupe de sept barres dans la partie basse de la poutre de la façon suivante : une barre centrale 1 sur toute la portée d'axe en axe de la poutre ; les six autres barres 2, 3, 4, 5, 6, 7, deux à deux dans un même plan horizontal, auront pour longueur les cordes interceptées sur la parabole par les horizontales

Fig. 16.

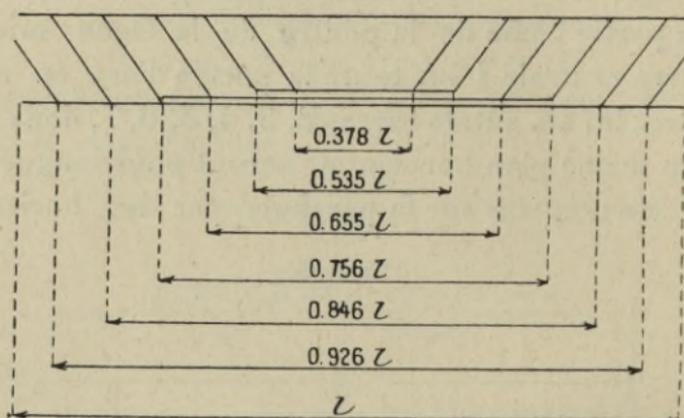


passant par les points de division de la flèche (*fig. 16*). Il est facile de calculer ces diverses longueurs qui sont :

- barre 1 = l ,
- barre 2 = $0,926 l$,
- barre 3 = $0,846 l$,
- barre 4 = $0,756 l$,
- barre 5 = $0,655 l$,
- barre 6 = $0,535 l$,
- barre 7 = $0,378 l$.

Les deux extrémités de chaque barre se prolongeront par des parties à 45° se terminant par des crochets qui viendront prendre appui sur l'armature supérieure (fig. 17),

Fig. 17.



constituée par une ou plusieurs barres courant sur toute la portée d'axe en axe de la poutre. On prendra généralement les sept barres d'égal diamètre, mais on peut déroger à cette règle. Dans une même poutre, il pourra y avoir un ou plusieurs groupes de barres ainsi constitués.

Supposons un groupe formé de sept barres de même diamètre, évaluons la longueur moyenne d'acier de section de s , par mètre courant d'une pareille poutre.

Les parties droites donnent une longueur totale de

$$l(1 + 0,926 + 0,846 + 0,756 + 0,655 + 0,535 + 0,378) = 5,096l.$$

Les parties inclinées à 45° donnent une longueur totale de

$$12\sqrt{2}s = 16,97s.$$

Nous supposons l'armature supérieure placée au centre de compression. Nous désignons par s la distance du centre de compression à l'axe des tensions qui coïncide sensiblement avec l'axe des barres intermédiaires 4 et 5.

Les crochets, en les prenant chacun d'une longueur de $0^m,10$, donnent une longueur totale de $12 \times 10 = 120^{\text{cm}}$.

De sorte que la longueur moyenne d'acier de section s_1 par mètre courant de poutre est

$$l_m = \frac{5,096 l + 16,97 z + 120}{l}.$$

16. Poids moyen d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée, pour un groupe de sept barres. — Soit, en plus des notations précédentes :

ω , poids moyen d'acier par mètre courant de poutre en kg.

Nous avons vu au paragraphe précédent que

$$l_m = \frac{5,096 l + 16,97 z + 120}{l} \text{ centimètres.}$$

Le volume moyen d'acier par mètre courant sera

$$\frac{5,096 l + 16,97 z + 120}{l} s_1 \text{ centimètres cubes,}$$

ou

$$\frac{5,096 l + 16,97 z + 120}{1000 l} s_1 \text{ décimètres cubes}$$

et le poids moyen d'acier par mètre courant de poutre sera

$$\frac{(5,096 l + 16,97 z + 120) 7,85 s_1}{1000 l},$$

ou

$$\omega = \frac{0,00785 s_1 (5,096 l + 16,97 z + 120)}{l} \text{ kilogrammes.}$$

17. Longueur moyenne d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée, pour un groupe de cinq barres. — L'équation de la parabole des moments fléchissants est

$$M = \frac{v x}{2} (l - x).$$

Divisons la flèche en cinq parties égales et, adoptant une disposition de barres, analogue à celle du paragraphe 15, on trouverait facilement que les diverses longueurs de barres sont :

$$\begin{aligned} \text{barre 1} &= l, \\ \text{barre 2} &= 0,895 l, \\ \text{barre 3} &= 0,775 l, \\ \text{barre 4} &= 0,633 l, \\ \text{barre 5} &= 0,448 l. \end{aligned}$$

Nous supposerons le groupe formé de cinq barres de même diamètre s_1 centimètres carrés.

Les parties droites donnent une longueur totale de

$$l(1 + 0,895 + 0,775 + 0,633 + 0,448) = 3,751 l.$$

Les parties inclinées à 45° donnent une longueur totale de

$$8\sqrt{2}z = 11,312 z.$$

Nous supposons l'armature supérieure placée au centre de compression. Nous désignons par z la distance du centre de compression à l'axe des tensions qui coïncide sensiblement avec l'horizontale passant par le milieu de la distance de centre à centre des deux rangées de barres.

Les crochets, en les prenant chacun d'une longueur de $0^m,10$, donnent une longueur totale de $8 \times 10 = 80^{\text{cm}}$. De sorte que la longueur moyenne d'acier de section s_1 par mètre courant est

$$l_m = \frac{3,751 l + 11,312 z + 80}{l}.$$

18. Poids moyen d'acier d'une même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée, pour un groupe de cinq barres. — Nous venons de voir que pour un groupe de cinq barres

de même section s_1

$$l_m = \frac{3,751l + 11,312z + 80}{l} \text{ centimètres.}$$

Le volume moyen d'acier par mètre courant de poutre sera

$$\frac{3,751l + 11,312z + 80}{l} s_1 \text{ centimètres cubes,}$$

ou

$$\frac{3,751l + 11,312z + 80}{1000l} s_1 \text{ décimètres cubes}$$

et le poids moyen d'acier par mètre courant de poutre sera

$$\frac{(3,751l + 11,312z + 80)7,85s_1}{l},$$

ou

$$\omega = \frac{0,00785s_1(3,751l + 11,312z + 80)}{l} \text{ kilogrammes.}$$

19. Longueur moyenne d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastrée, uniformément chargée, pour un groupe de sept barres. — L'équation de la parabole des moments fléchissants est, OX et OY étant les axes de coordonnées,

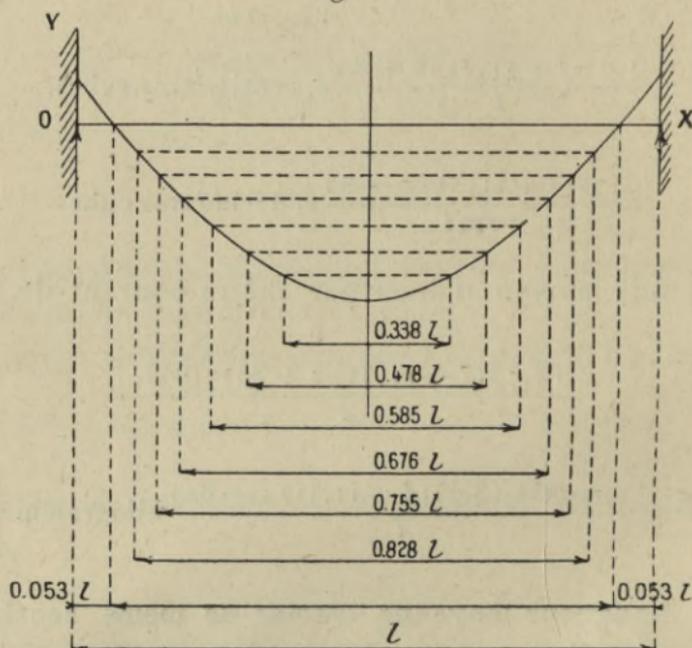
$$M = \frac{1}{2}p \left(lx - x^2 - \frac{l^2}{20} \right),$$

si nous admettons que le moment maximum est $\frac{pl^2}{10}$. Il est facile de voir que les intersections de cette courbe avec l'axe des x sont à une distance de $0,053l$ des appuis.

Les *moments négatifs* maxima ont lieu aux appuis et seront absorbés par des aciers disposés à la partie supérieure de la poutre. Ces aciers pourront être de section constante ou de section décroissante, à partir des appuis où la section d'acier nécessaire est égale au quart de celle au milieu de la poutre, car la valeur du moment négatif

maximum est $\frac{pl^2}{40}$. Quant à la longueur de ces *barres négatives*, on la prend pratiquement égale à $0,06 l$, ce qui dépasse légèrement la longueur théorique de $0,053 l$.

Fig. 18.

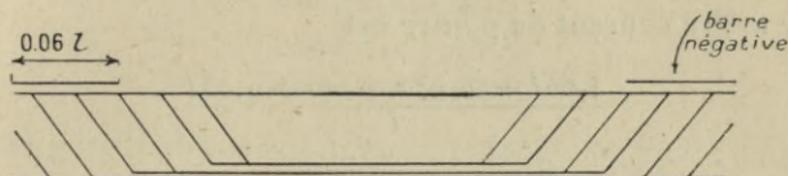


Pour ce qui est des fers à la tension, nous diviserons la flèche comprise entre l'axe des x et le sommet de la parabole en un certain nombre de parties égales, ici sept. Nous disposerons ces barres suivant le même principe qu'au paragraphe 15. Il est facile de calculer les longueurs interceptées sur la parabole par les horizontales passant par les points de division de la flèche. Ces longueurs sont :

- barre 1 = l ,
- barre 2 = $0,828 l$,
- barre 3 = $0,755 l$,
- barre 4 = $0,676 l$,
- barre 5 = $0,585 l$,
- barre 6 = $0,478 l$,
- barre 7 = $0,338 l$.

Nous supposons le groupe formé de sept barres de même diamètre.

Fig. 19.



Les parties droites donnent une longueur totale de

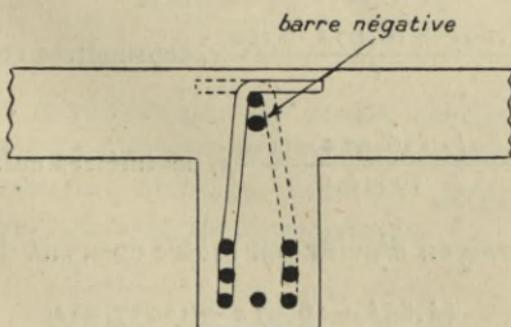
$$l(1 + 0,828 + 0,755 + 0,676 + 0,585 + 0,478 + 0,338) = 4,66 l.$$

Les parties inclinées à 45° donnent une longueur totale de

$$16\sqrt{2}z = 16,97z.$$

Nous supposons l'armature supérieure placée au centre de compression. Nous désignons par z la distance

Fig. 20.



du centre de compression à l'axe des tensions qui coïncide sensiblement avec l'axe de la rangée de barres intermédiaires.

Les crochets, en les prenant chacun d'une longueur de $0^m,10$, donnent une longueur totale de $12 \times 10 = 1^m,20$.

Enfin les barres négatives ont pour longueur totale $2 \times 0,06 l = 0,12 l$, et comme leur section est $\frac{1}{4} s_1$,

la longueur équivalente d'acier de section s_1 est $\frac{0,12}{4} l$ ou $0,03 l$.

De sorte que la longueur moyenne d'acier de section s_1 par mètre courant de poutre est

$$\frac{4,66 l + 16,97 z + 120 + 0,03 l}{l},$$

ou

$$l_m = \frac{4,69 l + 16,97 z + 120}{l}.$$

20. Poids moyen d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastree, uniformément chargée, pour un groupe de sept barres. — Nous venons de voir que pour un groupe de sept barres de même section s_1

$$l_m = \frac{4,69 l + 16,97 z + 120}{l} \text{ centimètres.}$$

Le volume moyen d'acier par mètre courant de poutre sera

$$\frac{4,69 l + 16,97 z + 120}{l} s_1 \text{ centimètres cubes}$$

ou

$$\frac{4,69 l + 16,97 z + 120}{1000 l} s_1 \text{ décimètres cubes,}$$

et le poids moyen d'acier par mètre courant de poutre sera

$$\frac{(4,69 l + 16,97 z + 120) 7,85 s_1}{1000 l},$$

ou

$$\omega = \frac{0,00785 s_1 (4,69 l + 16,97 z + 120)}{l}.$$

21. Longueur moyenne d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastree, uniformément chargée, pour un groupe de cinq barres. — On trouverait facilement que les longueurs des

parties droites sont :

$$\begin{aligned} \text{barre 1} &= l, \\ \text{barre 2} &= 0,800 l, \\ \text{barre 3} &= 0,692 l, \\ \text{barre 4} &= 0,566 l, \\ \text{barre 5} &= 0,458 l. \end{aligned}$$

Les parties droites donnent une longueur totale de

$$l(1 + 0,800 + 0,692 + 0,566 + 0,458) = 3,546 l.$$

Les parties à 45° donnent une longueur totale de

$$8\sqrt{2}z = 11,312z.$$

Les crochets donnent une longueur totale de

$$8 \times 10 = 80 \text{ centimètres.}$$

Enfin, les barres négatives donnent une longueur totale de

$$0,03 l,$$

d'où

$$l_m = \frac{(3,546 l + 11,312 z + 80)}{l}.$$

22. Poids moyen d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastree, uniformément chargée, pour un groupe de cinq barres. — On trouverait facilement que

$$\omega = \frac{0,00785 s_1 (3,546 l + 11,312 z + 80)}{l}.$$

CALCUL DES HOURDIS.

23. Calcul des hourdis ordinaires. — Soient :

- y , la distance de la fibre extrême à l'axe neutre en cm;
- z , le bras de levier du couple fléchissant en cm;
- h , la hauteur effective du hourdis en cm;

m , le rapport des coefficients d'élasticité de l'acier et du béton ;

F , la force du couple fléchissant en kg ;

M , le moment du couple fléchissant en kgm ;

s , la section d'acier à la tension en cm^2 ;

r , le travail réel du béton à la compression en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

R , le travail réel de l'acier à la tension en $\text{kg} : \text{cm}^2$.

Dans un hourdis ordinaire, d'après le paragraphe 5, la position de l'axe neutre est donnée exactement par

$$(1) \quad y = \frac{mrh}{R + mr}.$$

Écrivons, d'autre part, que le travail de la partie comprimée est égal à celui de la partie tendue, nous aurons

$$\frac{100yr}{2} = sR,$$

ou

$$(2) \quad 50yr = sR.$$

Le moment fléchissant M donne lieu à un couple fléchissant F , ayant pour bras de levier z , distance entre le centre de gravité de la partie comprimée et l'axe des tensions et tel que

$$(3) \quad F = \frac{100M}{z}.$$

Le bras de levier du couple fléchissant a pour expression en centimètres

$$(4) \quad z = h - \frac{1}{3}y.$$

Enfin, la section d'acier nécessaire à la tension sera donnée par

$$(5) \quad s = \frac{F}{R}.$$

En résumé, les cinq formules exactes relatives à un hourdis définissant les cinq inconnues y , z , r , F , s peuvent se grouper comme suit

$$(1) \quad y = \frac{mrh}{R + mr},$$

$$(2) \quad 50 yr = sR,$$

$$(3) \quad z = h - \frac{1}{3}y,$$

$$(4) \quad F = \frac{100M}{z},$$

$$(5) \quad s = \frac{F}{R}.$$

REMARQUE. — En place de (2) on peut aussi écrire la formule équivalente

$$(2 \text{ bis}) \quad 50 y^2 = ms(h - y),$$

en égalant les moments statiques des portions tendues et comprimées par rapport à l'axe neutre.

24. Hauteur économique des hourdis ordinaires. — Soient, en plus de la notation du paragraphe 23 :

7,85, densité de l'acier (kg : cm³);

α , prix du m³ de béton;

β , prix du kg d'acier.

Le prix du mètre carré de hourdis varie avec son épaisseur théorique et la quantité d'acier, car le cintrage est toujours le même et la portion au-dessus de l'axe des tensions a une épaisseur constante.

Nous avons donc à chercher le minimum de l'expression

$$P = \frac{h}{100} \times 1 \times 1 \times \alpha + \frac{s}{100} \times 10 \times 7,85\beta,$$

ou

$$P = \frac{h z}{100} + 0,785 s \beta.$$

Dérivons l'expression du prix par rapport à z , il vient

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\alpha}{100} \times \frac{dh}{dz} + 0,785 \beta \frac{ds}{dz}.$$

Des formules du paragraphe 23 on tire

$$s = \frac{100M}{Rz};$$

d'où

$$\frac{ds}{dz} = - \frac{100M}{Rz^2};$$

d'autre part,

$$z = h - \frac{1}{3}y,$$

ou

$$\begin{aligned} z &= h - \frac{mrh}{3(R+mr)} \\ &= \frac{h(3R+2mr)}{3(R+mr)}, \end{aligned}$$

ou

$$h = \frac{3(R+mr)}{3R+2mr}z,$$

d'où

$$\frac{dh}{dz} = \frac{3(R+mr)}{3R+2mr}.$$

Remplaçons les dérivées par leurs valeurs dans l'expression de la dérivée du prix et annulons cette dérivée, alors P passera par un minimum.

On a donc

$$\frac{\alpha}{100} \times \frac{3(R+mr)}{3R+2mr} - \frac{0,785 \times 100M\beta}{Rz^2} = 0,$$

ou

$$3R\alpha(R+mr)z^2 = 7850M\beta(3R+2mr),$$

ou remplaçant z en fonction de h , il vient

$$\frac{3R\alpha(R+mr)h^2(3R+2mr)^2}{9(R+mr)^2} = 7850M\beta(3R+2mr),$$

ou

$$\frac{R\alpha h^2(3R+2mr)}{3(R+mr)} = 7850M\beta,$$

d'où

$$h^2 = \frac{23550(R + mr)\beta M}{R(3R + 2mr)\alpha}$$

et

$$h = \sqrt{\frac{23550(R + mr)\beta M}{R(3R + 2mr)\alpha}}$$

25. Formules théoriques des hourdis ordinaires. — Des formules du paragraphe 23 tirons la valeur de s en fonction des données.

Éliminons F entre (4) et (5), il vient

$$(6) \quad s = \frac{100M}{zR}.$$

Éliminons z entre (3) et (6), il vient

$$s = \frac{100M}{\left(h - \frac{1}{3}y\right)R},$$

ou

$$(7) \quad s = \frac{300M}{(3h - y)R}.$$

Éliminons r entre (1) et (2); on tire de (1)

$$Ry + mry = mry,$$

ou

$$r = \frac{Ry}{m(h - y)};$$

on tire de (2)

$$r = \frac{sh}{50y},$$

d'où

$$\frac{sR}{50y} = \frac{Ry}{m(h - y)},$$

ou

$$(8) \quad 50y^2 = ms(h - y).$$

Éliminons y entre (7) et (8), de (7) on tire

$$3Rsh - Rsy = 300M,$$

ou

$$y = \frac{2 R s h - 300 M}{R s};$$

portons cette valeur dans (8), il vient

$$\frac{50(3 R s h - 300 M)^2}{R^2 s^2} = m s \left(h - \frac{3 R s h - 300 M}{R s} \right),$$

ou

$$450(R s h - 100 M)^2 = R m s^2(300 M - 2 R s h),$$

ou

$$(9) \quad 225(R s h - 100 M)^2 = R m s^2(150 M - R s h).$$

En résumé, les formules théoriques des hourdis ordinaires économiques peuvent s'écrire

$$h = \sqrt{\frac{23550(R + mr)\beta}{R(3R + 2mr)\alpha}} M,$$

$$225(R s h - 100 M)^2 = R m s^2(150 M - R s h),$$

$$F = s R,$$

$$z = \frac{100 M}{F},$$

$$y = 3(h - z),$$

$$r = \frac{s R}{50 y}.$$

Dans ces formules, r est la valeur réelle du travail du béton.

26. Formules pratiques du calcul des hourdis en usage chez plusieurs constructeurs. — La détermination de la section d'acier par la formule (9) étant compliquée, plusieurs constructeurs se contentent, en pratique, en renonçant à la condition d'économie, de déterminer h par la condition d'utiliser convenablement la matière en faisant travailler le béton et le métal à leur maximum, c'est-à-dire à leur limite pratique.

Ils admettent donc r et R comme fixés. Calculons, dans ces conditions, s et h en fonction des données. Reportons-nous aux formules du paragraphe 23.

De (2) on tire

$$s = \frac{50 \gamma r}{R};$$

remplaçant γ par sa valeur tirée de (1), il vient

$$s = \frac{50 mr^2 h}{R(R + mr)} \text{ centimètres carrés.}$$

Si l'on désire s en mm^2 , on emploiera la formule

$$s = \frac{5000 mr^2 h}{R(R + mr)} \text{ millimètres carrés.}$$

D'autre part

$$50 \gamma r = s R = F = \frac{M}{z} = \frac{300 M}{3h - \gamma},$$

ou

$$50 \gamma r (3h - \gamma) = 300 M;$$

remplaçons γ par sa valeur tirée de (1)

$$\frac{50 mr^2 h}{R + mr} \left(3h - \frac{mrh}{R + mr} \right) = 300 M,$$

ou

$$50 mr^2 h^2 (3R + 2mr) = 300 M (R + mr)^2,$$

ou

$$h^2 = \frac{300 M (R + mr)^2}{50 mr^2 (3R + 2mr)},$$

ou

$$h = \sqrt{\frac{6(R + mr)^2}{mr^2(3R + 2mr)}} M \text{ centimètres.}$$

En résumé, les formules pratiques du calcul des hourdis ordinaires sont

$$h = \sqrt{\frac{6(R + mr)^2}{mr^2(3R + 2mr)}} M \text{ centimètres,}$$

$$s = \frac{50 mr^2 h}{R(R + mr)} \text{ centimètres carrés,}$$

$$\gamma = \frac{mrh}{R + mr} \text{ centimètres,}$$

$$F = s R \text{ kilogrammes,}$$

$$z = \frac{100 M}{F} \text{ centimètres.}$$

Dans ces formules, r représente la valeur limite pratique du travail du béton.

REMARQUES. — I. Dans un hourdis, calculé suivant les formules pratiques précédentes, le béton absorbe exactement la compression en travaillant à sa limite pratique car $F = sR = 50yr$. Il n'y a donc pas lieu, dans ce cas, de vérifier que le béton suffit à absorber la compression.

II. Les formules pratiques des hourdis ordinaires conduisent à des valeurs de s et h qu'on augmente toujours, en pratique; la première à cause des dimensions commerciales des fers, la seconde pour avoir un chiffre rond de centimètres comme épaisseur du hourdis. Soient S et H les valeurs adoptées définitivement.

Les inconnues y , z , r , F seront alors définies par les formules

$$\begin{aligned} y &= \frac{mrH}{R + mr}, \\ z &= h - \frac{1}{3}y, \\ F &= SR, \\ 50yr &= SR, \end{aligned}$$

le métal travaillant toujours à sa limite pratique R .

Du fait de ces deux modifications de s et h , examinons ce qui se passe au point de vue de la compression.

Supposons d'abord que h seul augmente et que l'on conserve la section calculée. Nous avons $sR = F$, donc F reste constant; or

$$F = 50yr = \frac{50mr^2h}{R + mr} = \frac{50mh}{\frac{R}{r^2} + \frac{m}{r}},$$

ou

$$\frac{R}{r^2} + \frac{m}{r} = \frac{50mh}{F};$$

si h augmente, le second membre augmente, donc le

premier aussi et par suite r diminue. Or

$$r = \frac{F}{50y},$$

r diminuant, y augmente, l'axe neutre baisse.

Supposons maintenant que h soit constant et que s augmente seul.

On a

$$s = \frac{F}{R};$$

s augmentant, F augmente; or

$$F = \frac{50mh}{\frac{R}{r^2} + \frac{m}{r}};$$

F augmentant, le dénominateur $\frac{R}{r^2} + \frac{m}{r}$ diminue, d'où r augmente, mais

$$y = \frac{mrh}{R + mr} = \frac{mh}{\frac{R}{r} + m},$$

r augmentant, $\frac{R}{r}$ diminue, d'où y augmente : l'axe neutre baisse encore.

Donc l'axe neutre réel est toujours plus bas que l'axe neutre pratique déduit de $y = \frac{mrh}{R + mr}$, où r et R représentent les travaux limites pratiques.

Les deux effets précédents se produisent simultanément, il en résulte au total une augmentation de F et une augmentation ou une diminution de r , avec une augmentation de la surface comprimée. Ne sachant pas si la limite pratique de r n'est pas dépassée, il y a lieu de vérifier la compression.

III. On peut se donner arbitrairement h et faire

travailler l'acier à sa limite pratique R . Il peut alors se présenter deux cas : le béton suffit ou ne suffit pas à absorber la compression.

S'il suffit, les cinq équations du paragraphe 23 définiront les cinq inconnues y , z , r , F , s .

S'il ne suffit pas, il y a lieu d'ajouter de l'acier à la compression.

La section d'acier s' en cm^2 nécessaire sera définie par la relation

$$s' = \frac{F - 50 y r}{m r''},$$

r'' étant le travail du béton au centre de gravité de l'emplacement qu'occupe l'acier, en $\text{kg} : \text{cm}^2$ et nous avons pour définir r''

$$\frac{r''}{r} = \frac{y - f}{y},$$

ou

$$r'' = \frac{y - f}{y} r,$$

f étant la distance de la fibre la plus comprimée à l'axe des aciers de compression. Le béton travaille alors à sa limite pratique r .

Pour trouver z , écrivons que la somme des moments des composantes du béton et de l'acier comprimé par rapport à l'axe neutre est égal au moment de la résultante.

En appelant x la distance du centre de gravité de la partie comprimée ou *centre de compression* à l'axe neutre, nous aurons

$$ms'(y - f) + 2 \frac{100 r^2}{3} = (100 y + ms') x,$$

d'où

$$x = \frac{ms'(y - f) + \frac{200 y^2}{3}}{100 y + ms'}$$

et

$$\begin{aligned}
 z &= h - y + x = h - y + \frac{ms'(y - f) + \frac{200y^2}{3}}{100y + ms'} \\
 &= \frac{h(100y + ms') - 100y^2 - ms'y + ms'y - ms'f + \frac{200y^2}{3}}{100y + ms'} \\
 &= \frac{ms'(h - f) + 100hy - \frac{100y^2}{3}}{100y + ms'}.
 \end{aligned}$$

Écrivons, d'autre part, que les moments statiques des parties comprimées et tendues par rapport à l'axe neutre sont égaux

$$50y^2 + ms'(y - f) = ms(h - y).$$

En résumé, les six formules définissant les six inconnues y , z , r'' , F , s , s' sont

$$\begin{aligned}
 50y^2 + ms'(y - f) &= ms(h - y), \\
 z &= \frac{ms'(h - f) + 100hy - \frac{100y^2}{3}}{100y + ms'}, \\
 r'' &= \frac{y - f}{y} r, \\
 F &= \frac{100M}{z}, \\
 s &= \frac{F}{R}, \\
 s' &= \frac{F - 50yr}{mr''}.
 \end{aligned}$$

27. Formules pratiques des hourdis symétriques. — Il peut arriver que s' soit plus grand que s . Dans ce cas, on adopte un hourdis symétrique et l'on recommence le calcul en négligeant complètement le béton, tant à la compression qu'à la tension.

Dans ce hourdis symétrique, les sections s et s' sont

égales, et le bras de levier du couple fléchissant est pris égal à la distance des armatures.

Les formules se réduisent alors à trois équations à trois inconnues z , F , s :

$$z = h - f,$$

$$F = \frac{100 M}{z},$$

$$s' = s = \frac{F}{R}.$$

La hauteur de ce hourdis sera définie par la condition économique.

28. **Hauteur économique des hourdis symétriques sans attaches.** — Dans ces hourdis, la section d'acier doublant, pour obtenir le minimum du prix, nous avons à chercher le minimum de l'expression

$$P = \frac{h\alpha}{100} + 1,57s\beta,$$

dans laquelle s est la section d'acier d'une des armatures en cm^2 .

Dérivons par rapport à z et annulons la dérivée pour avoir le minimum du prix

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\alpha}{100} \times \frac{dh}{dz} + 1,57\beta \frac{ds}{dz} = 0.$$

Or, on déduit du paragraphe 27 qu

$$\frac{dh}{dz} = 1$$

et que

$$s = \frac{100 M}{z R},$$

d'où

$$\frac{ds}{dz} = -\frac{100 M}{R z^2};$$

d'où, en portant les valeurs des dérivées dans l'expression

de la dérivée du prix

$$\frac{\alpha}{100} - \frac{1,57 \times 100 M \beta}{R z^2} = 0,$$

ou

$$\alpha R z^2 = 15700 \beta M,$$

$$z^2 = \frac{15700 \beta M}{\alpha R},$$

$$(h - f)^2 = \frac{15700 \beta M}{\alpha R},$$

$$h = \sqrt{\frac{15700 \beta}{\alpha R} M} + f.$$

29. Hauteur économique des hourdis symétriques parfaitement encastés avec attaches. — Soient :

ω , poids d'attaches moyen par mètre courant de hourdis en kg;

γ , prix du kg d'attaches;

p , charge par m² courant de hourdis en kg;

T_1 , effort tranchant aux appuis en kg;

$\alpha = 100^{\text{cm}}$, largeur du mètre courant de hourdis;

$$t = \frac{\alpha z r}{10};$$

l , portée d'axe en axe du hourdis en cm.

Les autres notations restant les mêmes que précédemment, nous avons à chercher le minimum de l'expression

$$P = \frac{h\alpha}{100} + 1,57 s \beta + \omega \gamma.$$

Annulons la dérivée de P par rapport à z

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\alpha}{100} \times \frac{dh}{dz} + 1,57 s \beta \frac{ds}{dz} + \gamma \frac{d\omega}{dz} = 0.$$

Or,

$$z = h - f,$$

d'où

$$\frac{dh}{dz} = 1, \quad s = \frac{100 M}{R z},$$

d'où

$$\frac{ds}{dz} = - \frac{100M}{Rz^2}.$$

Évaluons $\frac{d\omega}{dz}$.

Les hourdis sont assimilables à des poutres de largeur $a = 100^{\text{cm}}$.

Nous avons vu (§ 14) que le poids pratique moyen d'attaches par mètre courant de poutre a pour expression

$$\omega = 0,49 \times \frac{T_1 - t}{R} \times \frac{z + 10}{z}.$$

Mais ici, nous nous contenterons pour les crochets de 4^{cm} au lieu de 10^{cm} , de sorte que

$$\omega = 0,49 \times \frac{T_1 - t}{R} \times \frac{z + 4}{z};$$

d'autre part

$$t = \frac{azr}{10} = \frac{100zr}{10} = 10zr.$$

Écrivons T_1 en fonction de M . Nous avons

$$T_1 = \frac{pl}{2 \times 100}.$$

Le hourdis étant parfaitement encastré, on a

$$M = \frac{pl^2}{12 \times 100 \times 100},$$

ou

$$M = \frac{pl}{200} \times \frac{l}{600} = \frac{Tl}{600},$$

d'où

$$T_1 = \frac{600M}{l},$$

de sorte que

$$\omega = 0,49 \times \frac{\frac{600M}{l} - 10zr}{R} \times \frac{z + 4}{z}$$

et

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{0,49 \times 600M}{Rl} \left[\frac{z - (z + 4)}{z^2} \right] - \frac{0,49 \times 10r}{R},$$

ou

$$\frac{d\omega}{dz} = - \left(\frac{1176M}{Rl z^2} + \frac{4,9r}{R} \right).$$

Portons les valeurs de ces trois dérivées dans l'expression de la dérivée du prix, on a

$$\frac{\alpha}{100} - \frac{1,57\beta \times 100M}{Rz^2} - \frac{1176M\gamma}{Rl z^2} - \frac{4,9r\gamma}{R} = 0,$$

ou

$$\frac{157Ml\beta + 1176M\gamma}{Rl z^2} = \frac{\alpha}{100} - \frac{4,9r\gamma}{R} = \frac{R\alpha - 490r\gamma}{100R},$$

d'où

$$z^2 = \frac{(157l\beta + 1176\gamma) \times 100M}{l(R\alpha - 490r\gamma)};$$

or

$$z = h - f,$$

d'où

$$(1) \quad h = \sqrt{\frac{100(157l\beta + 1176\gamma)}{l(R\alpha - 490r\gamma)} M} + f.$$

REMARQUE. — L'expression précédente peut se simplifier si l'on néglige les crochets. On a alors

$$\omega = 0,49 \times \frac{T_1 - t}{R} = 0,49 \times \frac{600 \frac{M}{l} - 10zr}{R},$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dz} = - \frac{4,9r}{R}$$

et

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\alpha}{100} - \frac{157\beta M}{Rz^2} - \frac{4,9r\gamma}{R} = 0,$$

ou

$$\frac{157\beta M}{Rz^2} = \frac{\alpha}{100} - \frac{4,9r\gamma}{R} = \frac{R\alpha - 490r\gamma}{100R},$$

$$z^2 = \frac{15700\beta M}{R\alpha - 490r\gamma}$$

et

$$(2) \quad h = \sqrt{\frac{15700\beta}{Rz - 490r\gamma}} M + f.$$

30. **Hauteur économique des hourdis symétriques librement appuyés avec attaches.** — Dans les formules (1) et (2) précédentes, il suffit de multiplier M par le

rapport $\frac{\frac{\rho l^2}{8 \times 100 \times 100}}{\frac{\rho l^2}{12 \times 100 \times 100}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ dans le terme provenant de $\frac{d\omega}{dz}$; et l'on trouvera

$$(3) \quad h = \sqrt{\frac{100(157l\beta + 1764\gamma)}{l(Rz - 490r\gamma)}} M + f,$$

si l'on tient compte des crochets, et

$$(4) \quad h = \sqrt{\frac{15700\beta}{Rz - 490r\gamma}} M + f,$$

si l'on néglige les crochets.

31. **Résumé des formules économiques des hourdis.** —

1° Hourdis ordinaires, $h = \sqrt{\frac{23550(R + mr)\beta}{R(3R + 2mr)z}} M;$

2° Hourdis symétriques encastés ou libres sans attaches, $h = \sqrt{\frac{15700\beta}{Rz}} M + f;$

3° Hourdis symétriques encastés ou libres avec attaches, $h = \sqrt{\frac{15700\beta}{Rz - 490r\gamma}} M + f;$

32. **Calcul des hourdis s'appuyant sur quatre côtés.** — Il n'existe pas, jusqu'à présent, de théorie satisfaisante du calcul des hourdis s'appuyant sur quatre côtés.

Dans ces hourdis, on dispose des barres principales dans les deux sens et à angle droit, et voici les formules

que le Règlement français de 1906 sur le béton armé recommande :

1° *Hourdis s'appuyant sur un rectangle et parfaitement encastré.* — Soient :

M_1 , moment fléchissant suivant une des portées, en kgm ;

M_2 , moment fléchissant suivant l'autre portée, en kgm ;

l_1 , portée correspondant à M_1 en mètres ;

l_2 , portée correspondant à M_2 en mètres ;

p , poids mort et surcharge uniformément répartie en kg : cm² ;

s_1 , section d'acier correspondant à M_1 en cm² ;

s_2 , section d'acier correspondant à M_2 en cm² ;

On a

$$M_1 = \frac{pl_1^2}{12} \times \frac{1}{1 + 2 \frac{l_1^3}{l_2^3}}$$

et

$$M_2 = \frac{pl_2^2}{12} \times \frac{1}{1 + 2 \frac{l_2^3}{l_1^3}}$$

Les hauteurs théoriques du hourdis correspondant à M_1 et M_2 , c'est-à-dire h_1 et h_2 , ainsi que les sections d'acier s_1 et s_2 se détermineront par les formules ordinaires des hourdis. On prendra, parmi les valeurs h_1 et h_2 , la plus grande et l'on disposera un réseau de barres de section s_1 par mètre courant dans le sens correspondant à M_1 , et de section s_2 par mètre courant dans le sens correspondant à M_2 .

2° *Hourdis s'appuyant sur un carré et parfaitement encastré.* — Dans ce cas, les portées sont les mêmes dans les deux sens, ainsi que les moments et les sections de barres, et l'on a

$$M = \frac{pl^2}{36}$$

REMARQUE I. — Si les hourdis sont simplement appuyés, les formules deviennent

1^o rectangle :

$$M_1 = \frac{pl_1^2}{8} \frac{1}{1 + 2 \frac{l_1^2}{l_2^2}},$$

$$M_2 = \frac{pl_2^2}{8} \frac{1}{1 + 2 \frac{l_2^2}{l_1^2}};$$

2^o carré :

$$M = \frac{pl^2}{24}.$$

REMARQUE II. — Si le hourdis est partiellement encastré, les formules deviennent

1^o rectangle :

$$M_1 = \frac{pl_1^2}{10} \frac{1}{1 + 2 \frac{l_1^2}{l_2^2}};$$

2^o carré :

$$M = \frac{pl^2}{30}.$$

33. Calcul des hourdis à la charge concentrée. — Le Règlement français de 1906 sur le béton armé autorise à substituer à la surcharge concentrée la même surcharge uniformément répartie sur un rectangle de côtés e et $e + \frac{l}{3}$ définis comme suit :

Soient :

e , somme des épaisseurs du hourdis, de la chaussée et de la largeur de la jante en mètres ;

l , portée d'axe en axe du hourdis en mètres ;

P , charge concentrée en kilogrammes ;

On trouverait facilement les formules dérivant du résultat de cette substitution et qui sont :

1^o *hourdis simplement appuyés :*

$$M = \frac{P}{4} \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{l}{3} + e},$$

ou

$$M = 0,25 P \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{l}{3} + e};$$

2^o *hourdis partiellement encastés :*

$$M = 0,8 \frac{P}{4} \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{l}{3} + e},$$

ou

$$M = 0,20 P \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{l}{3} + e};$$

3^o *hourdis parfaitement encastés :*

$$M = \frac{P}{8} \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{l}{3} + e},$$

ou

$$M = 0,125 P \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{l}{3} + e}.$$

REMARQUE. — On ne doit pas oublier, dans le calcul des hourdis à la charge concentrée, d'ajouter aux moments précédents les moments dus à la charge morte.

CALCUL DES POUTRES.

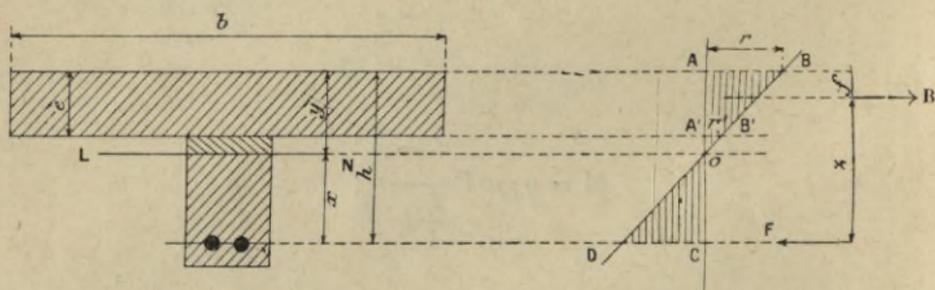
34. Calcul des poutres ordinaires. — Soient en plus des notations précédentes :

Ω , aire de la partie comprimée en centimètres carrés (dans le hourdis seulement);

r' , travail du béton à la compression dans la fibre inférieure du hourdis en kilogrammes par centimètre carré ;

b , largeur du hourdis intéressée à la compression, en centimètres.

Fig. 21.



Considérons une poutre ou élément de plancher comme le montre la figure 21. La position de l'axe neutre est encore donnée par la formule

$$(1) \quad y = \frac{mrh}{R + mr},$$

puisque l'établissement de cette formule est indépendant de la forme de la section du solide prismatique; r et R sont les valeurs réelles du travail du béton et de l'acier.

Supposons que l'axe neutre tombe en dehors du hourdis, ce qui est le cas général. Écrivons que le travail de la partie tendue est égal à celui de la partie comprimée, en négligeant la surface doublement hachurée.

Nous avons

$$\frac{be(r+r')}{2} = sR.$$

Or $be = \Omega$, d'où

$$(2) \quad \frac{\Omega(r+r')}{2} = sR.$$

Les triangles semblables AOB et A'OB' donnent

$$\frac{r}{r'} = \frac{y}{y-e},$$

d'où

$$\frac{r}{r+r'} = \frac{y}{2y-e},$$

ou

$$(3) \quad \frac{r+r'}{2} = \frac{2y-e}{2y} r.$$

Calculons le bras de levier z du couple fléchissant

$$z = h - f,$$

or

$$f = \frac{AA'}{3} \frac{2A'B' + AB}{A'B' + AB} = \frac{e}{3} \frac{2r' + r}{r' + r};$$

or

$$r' = \frac{y-e}{y} r,$$

d'où

$$f = \frac{e}{3} \frac{\frac{2(y-e)}{y} r + r}{\frac{(y-e)}{y} r + r} = \frac{e}{3} \frac{2(y-e) + y}{(y-e) + y} = \frac{e}{3} \frac{3y - 2e}{2y - e}$$

et

$$(4) \quad z = h - \frac{e}{3} \frac{3y - 2e}{2y - e}.$$

On a aussi

$$(5) \quad F = \frac{100M}{z},$$

$$(6) \quad s = \frac{F}{R}.$$

En résumé, pour définir les six inconnues y, z, r, r', F, s d'une poutre, nous avons le groupe de relations

$$(1) \quad y = \frac{mrh}{R + mr},$$

$$(2) \quad \frac{\Omega(r + r')}{2} = sR,$$

$$(3) \quad \frac{r + r'}{2} = \frac{2y - e}{2y} r,$$

$$(4) \quad z = h - \frac{e}{3} \frac{3y - 2e}{2y - e},$$

$$(5) \quad F = \frac{100M}{z},$$

$$(6) \quad s = \frac{F}{R}.$$

REMARQUE. — En place de (2), on peut aussi écrire la formule équivalente

$$(2 \text{ bis}) \quad \Omega\left(y - \frac{e}{2}\right) = ms(h - y)$$

qu'on obtient en égalant les moments statiques, par rapport à l'axe neutre, des parties tendues et comprimées.

35. Hauteur économique des poutres ordinaires partiellement encastées. — Soient en plus des notations précédentes :

a , largeur de la poutre en centimètres ;

b , saillie de la poutre en centimètres ;

ω , poids moyen pratique d'attaches par mètre courant de poutre en kilogrammes ;

γ , prix du kilogramme d'attaches ;

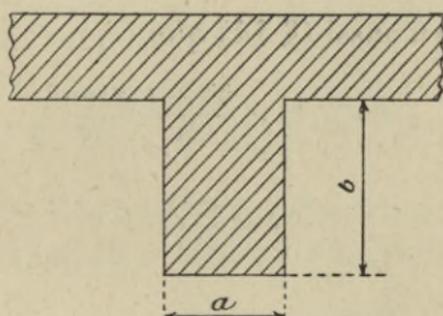
δ , prix du mètre carré de cintrage ;

R , travail limite de l'acier en tension en kilogrammes par centimètre carré ;

r , travail réel du béton à la compression en kilogrammes par centimètre carré ;

- f , distance du centre de compression à la fibre la plus comprimée, en centimètres ;
 g , distance de l'axe des tensions à la fibre extrême inférieure de la poutre en centimètres ;
 e , épaisseur réelle du hourdis en centimètres ;
 l , portée d'axe en axe de la poutre en centimètres.

Fig. 22.



Le prix d'un mètre courant de poutre ordinaire peut s'écrire :

$$P = \frac{a}{100} \times \frac{b}{100} \times 1 \times z + \frac{s}{100} \times 10 \times 7,85\beta + \omega\gamma + \frac{2b}{100} \delta$$

$$= \frac{abz}{10000} + 0,785s\beta + \omega\gamma + \frac{b\delta}{50}.$$

Annulons la dérivée de P par rapport à z pour avoir le minimum du prix

$$\left(\frac{az}{10000} + \frac{\delta}{50} \right) \frac{db}{dz} + 0,785\beta \frac{ds}{dz} + \gamma \frac{d\omega}{dz} = 0.$$

Or

$$b = z + f + g - e,$$

f pourrait être déterminé exactement en fonction de z , mais cela conduirait à des calculs complexes et sans utilité pratique. Nous admettons que, approximativement, on a toujours

$$f + g - e = 0,$$

de sorte que

$$\frac{db}{dz} = 1;$$

d'autre part

$$s = \frac{100M}{zR},$$

d'où

$$\frac{ds}{dz} = -\frac{100M}{z^2 R^2}.$$

Nous avons vu aussi (§ 14) que

$$\omega = 0,49 \times \frac{T_1 - t}{R} \frac{z + 10}{z}$$

avec

$$t = \frac{azr}{10}.$$

Or,

$$T_1 = \frac{pl}{2 \times 100},$$

$$M = \frac{pl^2}{10 \times 100 \times 100} = \frac{pl}{200} \times \frac{l}{500} = \frac{T_1 l}{500};$$

d'où

$$T_1 = \frac{500M}{l}$$

et, par suite,

$$\omega = 0,49 \times \frac{\frac{500M}{l} - \frac{azr}{10}}{R} \times \frac{z + 10}{z};$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= \frac{0,49 \times 500M}{lR} \left[\frac{z - (z + 10)}{z^2} \right] - \frac{0,49ar}{10R} \\ &= \frac{245M}{lR} \times \frac{10}{z^2} - 0,049 \frac{ar}{R} \\ &= - \left(\frac{2450M}{lRz^2} + 0,049 \frac{ar}{R} \right). \end{aligned}$$

Portons toutes ces dérivées dans l'expression du prix, il vient

$$\frac{\alpha z}{10000} - \frac{78,5\beta M}{Rz^2} - \frac{2450M\gamma}{lRz^2} - \frac{0,049ar\gamma}{R} + \frac{\delta}{50} = 0,$$

ou

$$\frac{ax}{10000} - \frac{0,049ar\gamma}{R} + \frac{\delta}{50} = \frac{78,5\beta Ml + 2450M\gamma}{lRz^2},$$

ou

$$\frac{R(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}{10000R} = \frac{78,5\beta Ml + 2450M\gamma}{lRz^2}$$

et

$$z^2 = \frac{785000\beta Ml + 2450000M\gamma}{lR(ax + 200\delta) - 490ar\gamma l},$$

et, comme nous supposons que $z = b$,

$$b = \sqrt{\frac{785000\beta l + 2450000\gamma}{lR(ax + 200\delta) - 490ar\gamma l}} M.$$

REMARQUE. — L'expression précédente peut se simplifier, si l'on néglige les crochets. On a alors

$$\omega = \frac{0,49(T_1 - t)}{R} = \frac{0,49\left(\frac{500M}{l} - \frac{azr}{10}\right)}{R}$$

et

$$\frac{d\omega}{dz} = -0,049 \frac{ar}{R};$$

d'où

$$\frac{ax}{10000} - \frac{78,5\beta M}{Rz^2} - \frac{0,049ar\gamma}{R} + \frac{\delta}{50} = 0,$$

ou

$$\frac{78,5\beta M}{Rz^2} = \frac{ax}{10000} - \frac{0,049ar\gamma}{R} + \frac{\delta}{50}$$

et

$$z^2 = \frac{785000\beta M}{R(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}$$

et, comme $z = b$ approximativement,

$$b = \sqrt{\frac{785000\beta}{R(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}} M.$$

36. Hauteur économique des poutres ordinaires, librement appuyées. — Ces poutres ne diffèrent des poutres

ordinaires partiellement encastées que par l'expression de $\frac{d\omega}{dz}$, dans laquelle il suffit de remplacer M par la

$$\text{valeur } \frac{\frac{pl^2}{8 \times 100 \times 100}}{\frac{pl^2}{10 \times 100 \times 100}} \text{ ou } 1,25 M.$$

Cela revient à multiplier, dans le résultat final, le coefficient 24500000γ par $1,25$ et la formule devient

$$b = \sqrt{\frac{785000 \beta l + 24500000 \times 1,25 \gamma}{lR(ax + 200\delta) - 490ar\gamma l}} M,$$

ou

$$b = \sqrt{\frac{785000 \beta l + 30625000 \gamma}{lR(ax + 200\delta) - 490ar\gamma l}} M.$$

REMARQUE. — L'expression précédente peut se simplifier si nous négligeons les crochets; nous avons alors, comme dans la remarque précédente,

$$\frac{d\omega}{dz} = -0,049 \frac{ar}{R},$$

expression indépendante de M .

Nous arrivons donc au même résultat que dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire à

$$b = \sqrt{\frac{785000 \beta}{R(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}} M.$$

37. Formules théoriques des poutres ordinaires. — Dans les formules du paragraphe 34, nous donnerons h et R ; h par la condition que la poutre soit la plus économique, et R égal à la limite pratique du travail de l'acier. Cherchons à déterminer la position exacte de la fibre neutre définie par y directement en fonction des données.

Éliminons r' entre (2) et (3), il vient

$$(7) \quad \frac{\Omega(2y - e)}{2y} r = sR.$$

Éliminons F entre (5) et (6), il vient

$$(8) \quad s = \frac{100M}{zR}.$$

Éliminons s entre (7) et (8), il vient

$$(9) \quad \frac{\Omega(2y - e)}{2y} r = \frac{M}{z}.$$

Éliminons z entre (4) et (9), il vient

$$\frac{200My}{\Omega(2y - e)r} = \frac{3h(2y - e) - e(3y - 2e)}{(2y - e)},$$

ou

$$(10) \quad \frac{200My}{\Omega r} = 3h(2y - e) - e(3y - 2e).$$

Éliminons r entre (1) et (10), il vient

$$Ry + mry = m rh,$$

ou

$$r = \frac{Ry}{m(h - y)}$$

et

$$r = \frac{200My}{\Omega[3h(2y - e) - e(3y - 2e)]},$$

ou

$$R\Omega(6hy - 3eh - 3ey + 2e^2) = 200Mmh + 3R\Omega eh - 2R\Omega e^2$$

et

$$(11) \quad y = \frac{200Mmh + 3R\Omega eh - 2R\Omega e^2}{6R\Omega h - 3R\Omega e + 200Mm}.$$

En résumé, les formules théoriques des poutres ordinaires, permettant de calculer les six inconnues y , z , r , r' , F , s , peuvent s'écrire

$$(11) \quad y = \frac{200Mmh + 3R\Omega eh - 2R\Omega e^2}{6R\Omega h - 3R\Omega e + 200Mm},$$

$$(12) \quad r = \frac{Ry}{m(h - y)}$$

et

$$(2) \quad \Omega \left(\frac{r + r'}{2} \right) = s R,$$

$$(4) \quad z = h - \frac{e}{3} \frac{3y - 2e}{2y - e},$$

$$(5) \quad F = \frac{100 M}{z},$$

$$(6) \quad s = \frac{F}{R}.$$

38. Formules pratiques du calcul des poutres ordinaires, en usage chez plusieurs constructeurs. — La formule (11) du paragraphe précédent est trop compliquée. En pratique, plusieurs constructeurs lui substituent la formule (1), dans laquelle r et R sont les limites pratiques de travail. Les formules pratiques du calcul des poutres ordinaires deviennent alors

$$(1) \quad y = \frac{mrh}{R + mr},$$

$$(4) \quad z = h - \frac{e}{3} \frac{3y - 2e}{2y - e},$$

$$(5) \quad F = \frac{100 M}{z},$$

$$(6) \quad s = \frac{F}{R},$$

$$(3) \quad \frac{r + r'}{2} = \frac{2y - e}{2y} r.$$

La formule

$$(2) \quad \frac{\Omega(r + r')}{2} = s R$$

reste vraie, mais est superflue. Ces cinq équations permettent de déterminer les cinq inconnues y , z , F , s , r' .

Examinons quelles sont les conséquences de la substitution de ces formules pratiques aux formules théoriques.

Comme il ne s'agit ici que de poutres ordinaires, il est évident que le travail réel du béton est inférieur ou égal à

la limite pratique du travail. S'il est égal, l'axe neutre réel et l'axe pratique coïncident, et les formules précédentes sont alors rigoureuses; s'il est inférieur, il en résulte que :

1° *L'axe neutre pratique est plus bas que l'axe neutre réel.* En effet, de (1) on tire $y = \frac{mh}{\frac{R}{r} + m}$; r augmentant,

$\frac{R}{r}$ diminue et y augmente, la fibre neutre baisse.

2° *Le travail moyen pratique du béton est supérieur au travail moyen réel.* — En effet, de (3) on tire

$$\frac{r + r'}{2} = \left(1 - \frac{e}{2y}\right)r;$$

r augmentant et $\frac{e}{2y}$ diminuant, puisque y augmente, $\left(1 - \frac{e}{2y}\right)$ augmente; donc, pour ces deux raisons, le second membre augmente et par suite $\frac{r + r'}{2}$ augmente.

3° *La section d'acier pratique est supérieure à la section d'acier théorique.* — En effet, dans la formule (2), $\frac{r + r'}{2}$ augmentant, s augmente.

4° *L'effort de compression pratique est supérieur à l'effort de compression réel.* — En effet, dans la formule (6), s augmentant, F augmente.

5° *Le bras de levier pratique du couple fléchissant est inférieur au bras réel.* — En effet, dans la formule (5), F augmentant, z diminue.

Il résulte de ce qui précède que l'emploi de la formule simple $y = \frac{mrh}{R + mr}$, où l'on remplace r et R par les valeurs limites pratiques, se justifie, en pratique, car, en ce qui concerne l'acier, elle conduit à une section d'acier supérieure à celle qui est nécessaire; en ce qui concerne la

compression, on admet un effort plus grand que l'effort réel et un travail moyen de béton supérieur au travail réel : pour ces deux raisons, les calculs pratiques de la compression sont justifiés.

En résumé, les formules pratiques des poutres ordinaires sont

$$y = \frac{mrh}{R + mr},$$

$$z = h - \frac{e}{3} \frac{3y - 2e}{2y - e},$$

$$F = \frac{100M}{z},$$

$$s = \frac{F}{R},$$

$$\frac{r + r'}{2} = \frac{2y - e}{y} r,$$

avec la formule économique

$$b = \sqrt{\frac{785000\beta}{R(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}} M.$$

REMARQUES. — I. *Tableau des z*. — Admettons les formules pratiques précédentes, lorsque le coefficient de sécurité est adopté et, par suite, les limites pratiques de travail, y se présente sous la forme $y = Kh$, K étant une constante numérique. On pourra alors facilement établir un Tableau des z , lorsque l'épaisseur de e du hourdis varie et avec les différentes hauteurs de poutres. On aura recours à ce Tableau, établi une fois pour toutes, pour le calcul pratique et rapide des poutres. Ce Tableau et les formules (5) et (6) permettront de déterminer rapidement s .

II. *Tableau des hauteurs économiques*. — La formule économique se présente aussi sous la forme $b = \sqrt{KM}$, K étant une autre constante. On établira également, une fois pour toutes, un Tableau permettant, à une seule

inspection, de voir quelle est la hauteur économique correspondant à un moment donné.

III. *Compression.* — En appliquant les formules pratiques du calcul des poutres, il peut arriver que le béton ne suffise pas à absorber la compression. Dans ce cas, on doit ajouter des fers additionnels à la compression et tels que, le béton travaillant à sa limite pratique, le reste de l'effort de compression soit absorbé par cet acier additionnel.

La section s' d'acier additionnel est donnée par la formule

$$s' = \frac{F - \Omega \left(\frac{r + r'}{2} \right)}{mr''} \text{ centimètres carrés,}$$

r'' étant le travail du béton à l'emplacement qu'occupe l'acier, et l'on a pour définir r'' la relation

$$r'' = \frac{y - f}{y} r,$$

f étant la distance en centimètres de la fibre la plus comprimée à l'axe des aciers de compression.

Si l'axe neutre tombe dans le hourdis, on ne considère naturellement à la compression que la portion du hourdis au-dessus de lui.

La largeur b du hourdis, travaillant à la compression, est prise égale aux trois quarts de la distance d'axe en axe des poutres, suivant la portée du hourdis, ou au tiers de la portée d'axe en axe de la poutre, si cette quantité est inférieure à la précédente, d'après le Règlement français de 1906 sur le béton armé.

IV. *Formules des poutres, lorsque le hourdis ne suffit pas à la compression.* — Dans les formules théoriques et pratiques précédentes, nous avons négligé la

partie doublement hachurée (*fig. 21*). Si nous tenons compte, d'autre part, du fer additionnel à la compression, les formules se modifient comme suit :

Pour trouver le z exact, écrivons que la somme des moments des composantes du béton et de l'acier, par rapport à l'axe neutre, est égal au moment de la résultante.

Soit x la distance du centre de compression à l'axe neutre, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} be\left(y - \frac{e}{2}\right) + a \frac{(y - e)^2}{2} + ms'(h - f) \\ = [ms' + be + a(y - e)]x, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} z = h - y + x \\ = h - y + \frac{be\left(y - \frac{e}{2}\right) + a \frac{(y - e)^2}{2} + ms'(h - f)}{ms' + be + a(y - e)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire, d'autre part, que les moments statiques, par rapport à l'axe neutre, des parties tendues et comprimées, sont égaux

$$be\left(y - \frac{e}{2}\right) + a \frac{(y - e)^2}{2} + ms'(y - f) = ms(h - y).$$

De sorte que, *en résumé*, le groupe de formules à employer pourra s'écrire

$$z = h - y + \frac{be\left(y - \frac{e}{2}\right) + a \frac{(y - e)^2}{2} + ms'(h - f)}{ms' + be + a(y - e)},$$

$$be\left(y - \frac{e}{2}\right) + a \frac{(y - e)^2}{2} + ms'(y - f) = ms(h - y),$$

$$\frac{r + r'}{2} = \frac{2r - e}{2y} r,$$

$$F = \frac{100M}{z},$$

$$s = \frac{F}{\bar{R}}$$

et

$$r'' = \frac{\gamma - f}{\gamma} r,$$

$$s' = \frac{F - \Omega \left(\frac{r + r'}{2} \right) - a(\gamma - e)r''}{m r''},$$

$$r''' = \frac{\gamma - e}{2\gamma} r,$$

avec la formule économique.

Ces huit équations permettront de déterminer rigoureusement les huit inconnues γ , z , r' , r'' , r''' , F , s , s' , le béton sur la fibre la plus comprimée travaillant à sa limite pratique r .

39. Formules pratiques des poutres symétriques. — Il peut arriver que la section s' , précédemment calculée, se trouve supérieure à la section s . Il peut aussi arriver qu'il n'existe pas de hourdis en béton armé à la compression, dans ces cas, on adopte une poutre symétrique.

Pour calculer cette poutre, on néglige le béton tant à la compression qu'à la tension, et le bras de levier du couple fléchissant est pris égal à la distance des armatures. Les formules pratiques des poutres symétriques sont alors

$$z = h - f,$$

$$F = \frac{100 M}{z},$$

$$s = s' = \frac{F}{R}.$$

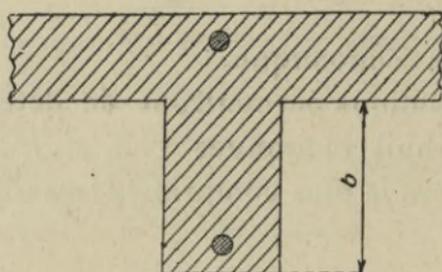
40. Hauteur économique des poutres symétriques partiellement encastées. — Ces poutres ne diffèrent des poutres ordinaires, partiellement encastées, qu'en ce que la section d'acier s a doublé. Il suffit donc, dans le résultat (§ 35), de doubler le coefficient de β , ce qui conduit à la formule

$$b = \sqrt{\frac{1570000\beta l + 24500000\gamma}{lR(ax + 200\delta) - 490ar\gamma l}} M.$$

Remarquons toutefois que cette formule est rigoureuse, alors que, dans le cas des poutres ordinaires, elle n'était qu'approximative. En effet, nous avons

$$b = z + f + g - e;$$

Fig. 23.

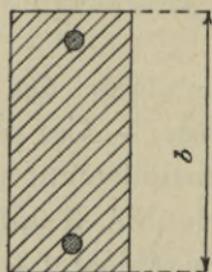


f , g , e étant constants, nous avons rigoureusement ici $\frac{db}{dz} = 1$, alors que (§ 35) f était variable et que nous avons supposé qu'approximativement $f + g - e = 0$, ce qui nous avait conduit à la même dérivée.

REMARQUE I. — Si nous négligeons les crochets, un raisonnement analogue au précédent nous conduira à la formule plus simple

$$b = \sqrt{\frac{1570000\beta}{R(ax + 200\delta) - 490a\gamma}} M.$$

Fig. 24.



REMARQUE II. — Si $e = 0$, la formule précédente subsiste (fig. 24).

41. **Hauteur économique des poutres symétriques librement appuyées.** — Ces poutres ne diffèrent des poutres ordinaires, librement appuyées, qu'en ce que la section d'acier a doublé; la formule économique est donc

$$b = \sqrt{\frac{1570000\beta l + 30625000\gamma}{lR(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}} M.$$

REMARQUE I. — Si nous négligeons les crochets, la formule se simplifie comme précédemment et devient

$$b = \sqrt{\frac{1570000\beta}{R(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}} M.$$

REMARQUE II. — Si $e = 0$, la formule précédente subsiste (*fig.* 24).

42. **Formules pratiques des poutres d'égale résistance.** — Ces formules sont exactement les mêmes que celles des poutres ordinaires (§ 36), mais la section ainsi calculée est celle où le moment fléchissant est maximum. Répétons ces formules

$$(1) \quad y = \frac{mrh}{R + mr},$$

$$(4) \quad z = h - \frac{e}{3} \frac{3y - 2e}{2y - e},$$

$$(5) \quad F = \frac{100M}{z},$$

$$(6) \quad s = \frac{F}{R},$$

$$(3) \quad \frac{r + r'}{2} = \frac{2v - e}{2y} r$$

et

$$(2) \quad \frac{\Omega(r + r')}{2} = sR,$$

qui est vraie mais superflue.

Les longueurs des parties droites sont pour :

1° Poutre d'égal résistance librement appuyée, uniformément chargée avec un groupe de sept barres :

$$l, 0,926l, 0,846l, 0,756l, 0,655l, 0,535l, 0,378l;$$

2° Poutre d'égal résistance librement appuyée, uniformément chargée avec un groupe de cinq barres :

$$l, 0,895l, 0,775l, 0,633l, 0,448l;$$

3° Poutre d'égal résistance partiellement encastree, uniformément chargée avec un groupe de sept barres :

$$l, 0,828l, 0,755l, 0,676l, 0,585l, 0,478l, 0,338l;$$

4° Poutre d'égal résistance partiellement encastree, uniformément chargée avec un groupe de cinq barres :

$$l, 0,800l, 0,692l, 0,566l, 0,458l.$$

La longueur des barres négatives, à chaque appui, pour les poutres partiellement encastrees, est $0,06l$, à partir de l'axe de l'appui.

43. Hauteur économique des poutres d'égal résistance librement appuyées, uniformément chargées avec un groupe de sept barres. — Nous admettons que le cisaillement vertical est satisfait aux appuis et que les bras inclinés à 45° absorbent le cisaillement total horizontal, de sorte qu'il n'y ait point besoin d'attaches verticales supplémentaires.

Le prix par mètre courant de poutre d'égal résistance a pour expression

$$P = \frac{a}{100} \times \frac{b}{100} \times 1 \times z + \omega \beta + \frac{2b\delta}{100} = \frac{abz}{10000} + \omega \beta + \frac{b\delta}{50}.$$

Annulons la dérivée par rapport à z

$$\left(\frac{az}{10000} + \frac{\delta}{50} \right) \frac{db}{dz} + \beta \frac{d\omega}{dz} = 0,$$

ou

$$\left(\frac{ax + 200\delta}{10000}\right) \frac{db}{dz} + \beta \frac{d\omega}{dz} = 0.$$

Or

$$b = z + f + g - e.$$

Admettons approximativement que $f + g - e = 0$, il vient

$$\frac{db}{dz} = 1;$$

d'autre part, on a, d'après le paragraphe 16,

$$\omega = \frac{0,00785 s_1 (5,096l + 16,97z + 120)}{l},$$

mais

$$s_1 = \frac{s}{7}$$

et

$$s = \frac{100M}{Rz},$$

d'où

$$s_1 = \frac{100M}{7Rz}$$

et

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{0,00785 \times 100M(5,096l + 16,97z + 120)}{7Rlz} \\ &= \frac{0,1121M(5,096l + 16,97z + 120)}{Rlz}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= \frac{0,1121M}{Rl} \left[\frac{z \times 16,97 - (5,096l + 16,97z + 120)}{z^2} \right] \\ &= -\frac{0,1121M}{Rlz^2} (5,096l + 120). \end{aligned}$$

La condition économique peut donc s'écrire

$$\frac{ax + 200\delta}{10000} - \frac{0,1121M}{Rlz^2} (5,096l + 120) = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{10000 \times 0,1121M\beta(5,096l + 120)}{(ax + 200\delta)Rl} \\ &= \frac{1121\beta(5,096l + 120)}{(ax + 200\delta)Rl} M \end{aligned}$$

et, comme approximativement nous avons admis que $z = b$, on a

$$b = \sqrt{\frac{1121 \beta (5,096 l + 120)}{(ax + 200\delta) R l}} M.$$

REMARQUE. — Si nous négligeons les crochets, nous avons

$$\omega = \frac{0,1121 M}{R l z} (5,096 l + 16,97 z),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= \frac{0,1121 M}{R l} \left[\frac{z \times 16,97 - (5,096 l + 16,97 z)}{z^2} \right] \\ &= - \frac{0,5712}{R z^2} M, \end{aligned}$$

et la condition économique peut s'écrire

$$\frac{ax + 200\delta}{10000} - \frac{0,5712 M \beta}{R z^2} = 0,$$

d'où

$$z^2 = \frac{5712 \beta}{R(ax + 200\delta)} M,$$

d'où

$$b = \sqrt{\frac{5712 \beta}{R(ax + 200\delta)}} M.$$

44. Hauteur économique des poutres d'égale résistance librement appuyées, uniformément chargées avec un groupe de cinq barres. — Comme au paragraphe 43, le prix est minimum lorsque

$$\frac{(ax + 200\delta)}{10000} \times \frac{db}{dz} + \beta \frac{d\omega}{dz} = 0$$

or

$$\frac{db}{dz} = 1$$

et

$$\omega = \frac{0,00785 s_1 (3,751 l + 11,312 z + 80)}{l} \quad (\S 18).$$

Or,

$$s_1 = \frac{100 M}{5 R z} = \frac{20 M}{R z},$$

d'où

$$\omega = \frac{0,157 M (3,751 l + 11,312 z + 80)}{R l z};$$

d'où, par comparaison avec le paragraphe précédent pour éviter les transformations intermédiaires,

$$b = \sqrt{\frac{1570 (3,751 l + 80)}{(a z + 200 \delta) R l}} M.$$

REMARQUE. — Si nous négligeons les crochets, nous avons

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{0,157 M}{R l z} (3,751 l + 11,312 z), \\ \frac{d\omega}{dz} &= - \frac{0,157 M \times 3,751 l}{R l z^2} \\ &= - \frac{0,5889}{R z^2} M \end{aligned}$$

et

$$b = \sqrt{\frac{5889 \beta}{R (a z + 200 \delta)}} M.$$

45. Hauteur économique des poutres d'égale résistance partiellement encastées, uniformément chargées avec un groupe de sept barres. — Comme au paragraphe 43, le prix est minimum lorsque

$$\frac{(a z + 200 \delta)}{10000} \times \frac{db}{dz} + \beta \frac{d\omega}{dz} = 0,$$

or

$$\frac{db}{dz} = 1$$

et, d'après le paragraphe 20,

$$\omega = \frac{0,00785 s_1 (4,69 l + 16,97 z + 120)}{l};$$

d'où, par comparaison avec le paragraphe 43,

$$b = \sqrt{\frac{1121 \beta (4,69 l + 120)}{(a z + 200 \delta) R l}} M.$$

46. Hauteur économique des poutres d'égale résistance partiellement encastées, uniformément chargées avec un groupe de cinq barres. — Comme au paragraphe 43, le prix est minimum lorsque

$$\frac{(ax + 200\delta)}{10000} \times \frac{db}{dz} + \beta \frac{d\omega}{dz} = 0,$$

or

$$\frac{db}{dz} = 1$$

et, d'après le paragraphe 22,

$$\omega = \frac{0,00785s_1(3,546l + 11,312z + 80)}{l};$$

or

$$s_1 = \frac{20M}{Rz},$$

d'où

$$\omega = \frac{0,157M}{Rzl}(3,546l + 11,312z + 80);$$

d'où, par comparaison avec le paragraphe 43,

$$b = \sqrt{\frac{1570(3,546l + 80)}{(ax + 200\delta)Rl}} M.$$

REMARQUE. — Si nous négligeons les crochets, nous avons

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{0,157M}{Rlz}(3,546l + 80), \\ \frac{d\omega}{dz} &= -\frac{0,157M \times 3,546l}{Rlz^2}, \\ &= -\frac{0,5567}{Rz^2} M \end{aligned}$$

et, par comparaison avec le paragraphe 43,

$$b = \sqrt{\frac{5567\beta}{R(ax + 200\delta)}} M.$$

47. Résumé des formules économiques des poutres :

1° Poutres ordinaires appuyées ou encastrées

$$b = \sqrt{\frac{785000 \beta}{R(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}} M;$$

2° Poutres symétriques appuyées ou encastrées

$$b = \sqrt{\frac{1570000 \beta}{R(ax + 200\delta) - 490ar\gamma}} M;$$

3° Poutres d'égale résistance appuyées avec sept barres

$$b = \sqrt{\frac{5712 \beta}{R(ax + 200\delta)}} M;$$

4° Poutres d'égale résistance appuyées avec cinq barres.

$$b = \sqrt{\frac{5889 \beta}{R(ax + 200\delta)}} M;$$

5° Poutres d'égale résistance partiellement encastrées avec sept barres

$$b = \sqrt{\frac{5257 \beta}{R(ax + 200\delta)}} M;$$

6° Poutres d'égale résistance partiellement encastrées avec cinq barres

$$b = \sqrt{\frac{5567 \beta}{R(ax + 200\delta)}} M.$$

REMARQUE. — De la comparaison des deux premières formules il résulte que, en pratique, la hauteur économique d'une poutre symétrique est égale à la hauteur économique de la poutre ordinaire supportant le même moment, multipliée par $\sqrt{2}$. De telle sorte qu'il suffira d'établir un seul Tableau de poutres économiques pour ces deux cas, celui des poutres ordinaires, par exemple.

48. Hauteurs de poutres noyées dans un mur en ciment armé. — Il arrive qu'on peut profiter de l'existence d'un mur en ciment armé pour y noyer une poutre. Le béton et le cintrage n'intervenant plus dans le prix de la poutre, il y a théoriquement intérêt à ce que celle-ci soit la plus haute possible.

En effet, soient :

a , largeur du mur en cm;

A , poids d'acier par m^2 du mur en kg.

Cet acier est de même prix que celui des attaches et l'expression du prix d'un mètre courant de poutre, noyée dans le mur, peut s'écrire

$$P = 2s\beta + (\omega - Az)\gamma.$$

La poutre est prise ici symétrique, parce qu'on la suppose au-dessus du plancher et qu'il n'existe, par conséquent, pas de hourdis à la compression.

Or

$$s = \frac{100M}{Rz}$$

et

$$\omega = 0,49 \times \frac{\left(T_1 - \frac{azr}{10}\right)}{R} \frac{z + 10}{z}.$$

On voit de suite que, si z augmente, s diminue, ω aussi, car

$$\omega = 0,49 \times \frac{\left(T_1 - \frac{azr}{10}\right)}{R} \left(1 + \frac{10}{z}\right)$$

et se compose de deux facteurs qui diminuent, de plus ($-Az$) diminue. Pour ces trois raisons, lorsque z augmente, le prix diminue.

Dans la pratique, on peut définir z par la condition, par exemple, que le poids des attaches soit équivalent au

poids des armatures du mur, supprimées par le fait de la substitution de la poutre au mur. On a alors

$$0,49 \times \frac{T_1 - \frac{azr}{10}}{R} \left(\frac{z+10}{z} \right) = \Lambda z,$$

ou

$$0,49 \left(T_1 - \frac{azr}{10} \right) (z+10) = ARz^2,$$

ou

$$(0,49T_1 - 0,049azr)(z+10) = ARz^2,$$

ou

$$z^2(AR + 0,049ar) - z(0,49T_1 - 0,49ar) - 4,9T_1 = 0,$$

ou

$$(AR + 0,049ar)z^2 - 0,49(T_1 - ar)z - 4,9T_1 = 0.$$

REMARQUE. — Si nous négligeons les crochets, nous avons

$$\frac{0,49 \left(T_1 - \frac{azr}{10} \right)}{R} = \Lambda z,$$

ou

$$0,49T_1 = z(AR + 0,049ar)$$

et

$$z = \frac{0,49T_1}{AR + 0,049ar}.$$

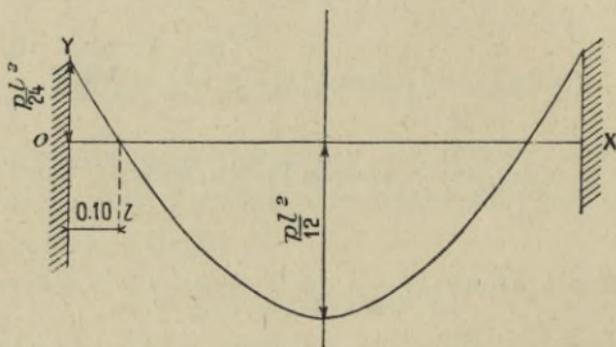
49. Moments négatifs dans les hourdis et les poutres. —
 1° Hourdis parfaitement encastés et uniformément chargés. — Lorsqu'un hourdis repose sur une construction en ciment armé (mur, poteau ou poutre), on peut le considérer comme parfaitement encasté. En prenant ox et oy comme axes de coordonnées, la parabole des moments fléchissants a pour équation

$$M = \frac{1}{2}p \left(lx - x^2 - \frac{l^2}{12} \right).$$

Traçons cette courbe (*fig. 25*). On trouverait faci-

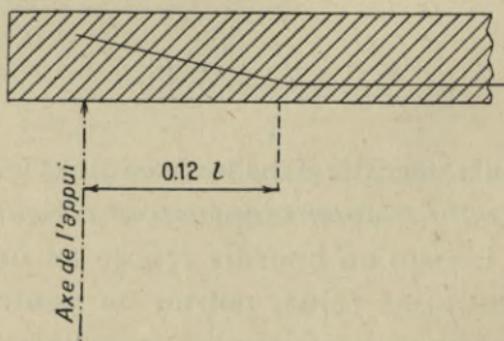
lement que le moment maximum a lieu au milieu du hourdis et a pour valeur $\frac{pl^2}{12}$; que le moment aux appuis a pour valeur $\frac{pl^2}{24}$ et qu'enfin la courbe coupe l'axe des x en deux points situés à $0,10 l$ des appuis.

Fig. 25



Il y a donc lieu, dans ces hourdis, de relever les barres principales (*fig. 26*) à partir d'une distance pratique de $0,12 l$ de l'axe de l'appui.

Fig. 26.



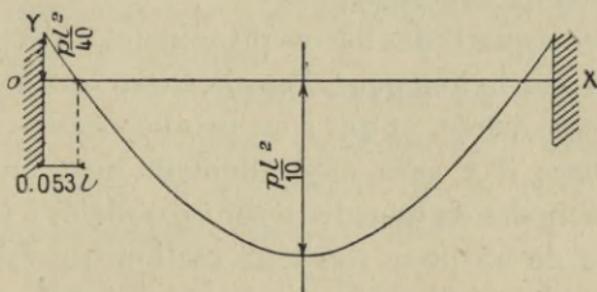
2° *Hourdis partiellement encastrés et uniformément chargés.* — Certains auteurs considèrent que le hourdis, même reposant sur une construction en ciment armé, n'est que partiellement encastré et le calculent avec un moment maximum au centre de $\frac{pl^2}{10}$. Dans ce cas, l'équation de

la parabole est

$$M = \frac{1}{2} p \left(lx - x^2 - \frac{l^2}{20} \right).$$

Traçons cette courbe (*fig. 27*). Le moment aux appuis

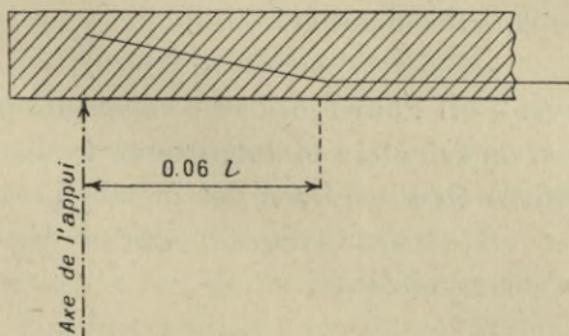
Fig. 27.



a pour valeur $\frac{pl^2}{40}$ et la courbe coupe l'axe des x en deux points situés à $0,053 ld$ es appuis.

Il y a donc lieu, dans ces hourdis, de relever les barres

ig. 2^o.



principales (*fig. 28*) à partir d'une distance pratique de $0,06 l$ de l'axe de l'appui.

3^o *Poutres ordinaires ou d'égale résistance uniformément chargées.* — Les mêmes formules que pour les hourdis s'appliquent, mais, au lieu de relever les barres aux appuis, nous trouvons plus pratique de conserver les barres à la tension droites tout le long de la poutre, et

d'ajouter des barres négatives additionnelles pour absorber les moments négatifs. Ces barres seront placées dans la partie supérieure de la poutre et seront horizontales.

De plus, nous ferons entrer en ligne de compte comme barres négatives :

a. L'armature supérieure ;

b. Les trois quarts des barres principales ou secondaires du hourdis, sur la longueur d'application des charges, sur la poutre considérée, et qui sont parallèles aux armatures de la poutre ; il y aura naturellement lieu, lorsque les barres principales du hourdis seront parallèles à la poutre, de réduire de 25 pour 100 leur section qui est utilisée à absorber leurs propres moments négatifs, en tant qu'appartenant au hourdis et de n'utiliser que les 75 pour 100 restants comme section négative dans la poutre ;

c. Des barres négatives additionnelles, s'il y a lieu, pour compléter la section nécessaire à l'absorption totale des moments négatifs et sur une longueur définie par la parabole de moments fléchissants.

REMARQUES. — I. Pour toute autre disposition d'appuis et de charges, on calculera la longueur et le diamètre des barres négatives en s'inspirant des mêmes principes que ci-dessus et en accord avec la courbe des moments fléchissants correspondants.

II. Les hourdis et les poutres symétriques ne nécessitent pas naturellement de barres négatives additionnelles.

50. **Adhérence.** — Les barres à la flexion tendent à glisser dans leur gaine de béton, sous l'action des efforts de flexion. Le frottement du béton sur la périphérie de ces barres tend à s'opposer à ce glissement.

On appelle *adhérence* entre deux sections l'effort

total horizontal, entre ces deux sections, qui tend à s'opposer au glissement de la barre. Le Règlement français de 1906 sur le béton armé indique une valeur de $\frac{1}{10}$ de r kg : cm², pour l'adhérence, à la surface périphérique du métal, r étant la limite pratique de travail du béton à la compression en kg : cm².

Il convient de vérifier que l'adhérence est satisfaite le long des barres à la flexion.

Soient F et F' les efforts de flexion en deux sections quelconques de la barre, distantes de l cm; $F - F'$ représente l'effort de glissement de la barre. Soit π le périmètre de la barre. On doit avoir

$$(F - F') \leq \frac{\pi lr}{10}.$$

Dans les poutres partiellement encastées, il convient particulièrement de vérifier l'adhérence des barres négatives dans les appuis.

De même, la longueur d'ancrage dans les poutres en porte à faux sera définie par la condition d'adhérence.

Lorsque l'adhérence n'est pas satisfaite, on y remédie en multipliant le nombre des barres, tout en leur conservant la même section totale. Quelquefois, l'on peut être conduit à ajouter des barres supplémentaires pour que la condition d'adhérence soit satisfaite.

Enfin, lorsqu'il s'agit de barres à la compression, les efforts F et F' sont ceux qui s'appliquent réellement à ces barres, déduction faite de la partie de la compression absorbée par le béton.

CALCUL DES POTEAUX.

§I. Définitions relatives aux poteaux. — Soient :

h , hauteur d'un poteau en cm ;

a , sa plus petite dimension transversale en cm.

Nous appellerons *poteaux courts* les poteaux tels que $\frac{h}{a} \leq 20$.

Nous appellerons *poteaux longs* les poteaux tels que $\frac{h}{a} > 20$.

Nous appellerons *section fictive* du poteau la section de béton fictive équivalente, obtenue en substituant au métal M fois sa section en béton.

Nous appellerons *axe neutre de flexion*, la ligne dans la section transversale du poteau, au-dessus de laquelle toutes les fibres, soumises à la flexion seulement, travaillent à la compression et au-dessous de laquelle toutes les fibres soumises à cette même flexion seule, travaillent à la tension.

Nous appellerons *axe neutre de flexion et compression* la ligne dans la section transversale du poteau, au-dessus de laquelle toutes les fibres, soumises à la fois à la flexion et à la compression directe, travaillent à la compression et au-dessous de laquelle toutes les fibres, dans les mêmes conditions, travaillent à la tension.

Nous appellerons *plan neutre de flexion* le lieu des axes neutres de flexion tout le long du poteau.

Nous appellerons *axe longitudinal* du poteau le lieu des centres de gravité des sections transversales, le long de la colonne, lorsque celle-ci est soumise à une charge concentrique.

Nous appellerons du même nom l'intersection du plan de flexion avec le plan neutre de flexion, lorsque le poteau est soumis à une charge excentrée.

52. Formules théoriques du calcul des poteaux. — Soient :

N, charge pratique limite appliquée au poteau en kg;
 Ω , section fictive du poteau en cm^2 ;

Ω_a , section des barres longitudinales en cm^2 ;

Ω_b , section transversale du béton en cm^2 ;

I , moment d'inertie de la section fictive par rapport à l'axe neutre de flexion;

Fig. 29

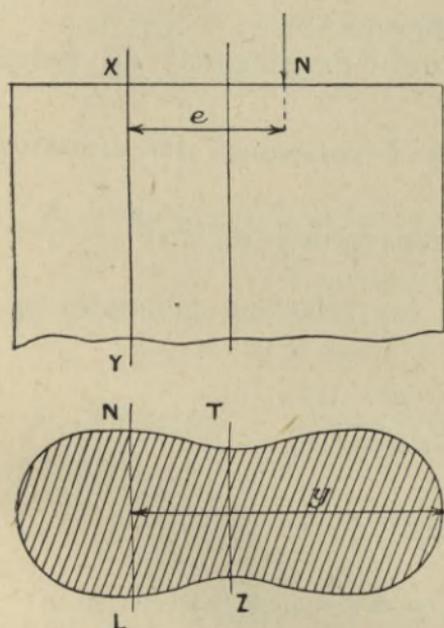
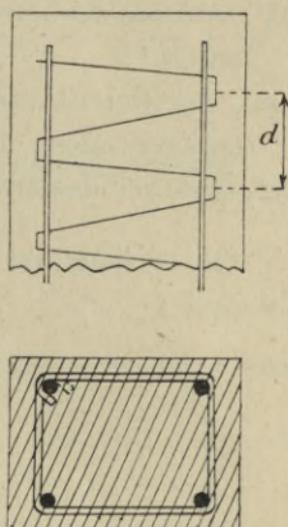


Fig. 30



I_a , moment d'inertie de la section d'acier par rapport à l'axe neutre de flexion;

I_b , moment d'inertie de la section de béton par rapport à l'axe neutre de flexion;

m , rapport entre les coefficients d'élasticité de l'acier et du béton;

r , travail pratique limite du béton à la compression en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

M , moment de flexion dû à la charge excentrée en kgm ;

e , excentricité de la charge par rapport à l'axe longitudinal en cm ;

v , distance de la fibre la plus comprimée à l'axe neutre de flexion en cm ;

v_0 , distance d'un point quelconque de la section transversale à l'axe neutre de flexion en cm ;

r_0 , travail total en ce point en kg : cm² ;

y , distance de l'axe neutre de flexion à l'axe neutre de flexion et compression en cm ;

V' , volume des armatures transversales ou obliques par unité de longueur de poteau en cm³ ;

V , volume du béton dans l'unité de longueur du poteau en cm³ ;

m' , coefficient variable avec l'écartement des armatures transversales ;

d , distance des armatures transversales en cm ;

On a dans les poteaux les relations générales suivantes :

$$\Omega = \Omega_b + (m - 1)\Omega_a,$$

$$I = I_b + (m - 1)I_a,$$

$$M = \frac{Ne}{100},$$

$$r_0 = \frac{N}{\Omega} \pm \frac{M v_0}{100 I} = N \left(\frac{1}{\Omega} \pm \frac{e v_0}{100 I} \right).$$

L'axe neutre de flexion et compression est défini par

$$\frac{1}{\Omega} - \frac{ey}{100I} = 0,$$

ou

$$y = \frac{100I}{\Omega e}.$$

En ce qui concerne la valeur numérique de m' , le Règlement français de 1906 sur le béton armé indique :

$$\text{Pour } d = \frac{1}{3} a$$

$$m' = 15;$$

$$\text{pour } d = a$$

$$m' = 8.$$

Si le poteau est fretté :

Pour $d = \frac{2}{5} a$

$$m' = 15;$$

pour $d = \frac{1}{5} a$

$$m' = 32.$$

1° *Poteaux courts chargés concentriquement :*

a. *Poteaux en béton seul*

$$N = \Omega_b r.$$

b. *Poteaux à armature longitudinale seulement*

$$N = [\Omega_b + (m - 1)\Omega_a] r,$$

ou

$$N = \Omega r.$$

c. *Poteaux à armatures longitudinale et transversale*

$$N = \Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right).$$

2° *Poteaux courts chargés excentriquement :*

a. *Poteaux en béton seul*

$$N = \frac{r}{\frac{1}{\Omega_b} + \frac{ev}{100 I_b}}.$$

b. *Poteaux à armature longitudinale seulement*

$$N = \frac{r}{\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100 I}}.$$

c. *Poteaux à armatures longitudinale et transversale*

$$N = \frac{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100 I}}.$$

3° *Poteaux longs chargés concentriquement.*
Formule de Rankine. — Soient, en plus des notations précédentes :

r' , charge pratique de travail du béton, réduite pour éviter le flambage, en $\text{kg} : \text{cm}^2$;

ρ , rayon de giration minimum dans la section transversale de béton;

k , coefficient numérique variant avec le mode d'appui du poteau.

En supposant l'axe longitudinal parfaitement rectiligne, la *formule d'Euler* est

$$N = \frac{r \Omega_b}{1 + \frac{r \Omega_b h^2}{k \pi^2 E_b I_b}}$$

Or $I_b = \Omega_b \rho^2$, d'où

$$\frac{N}{\Omega_b} \quad \text{ou} \quad r' = \frac{r}{1 + \frac{r h^2}{k \pi^2 E_b \rho^2}}$$

et

$$N = \frac{r \Omega_b}{1 + \frac{r h^2}{k \pi^2 E_b \rho^2}}$$

REMARQUE. — Pour un poteau articulé à ses deux extrémités $k = 1$.

Pour un poteau libre à une extrémité, encastré à l'autre, $k = 2$ approximativement.

Pour un poteau encastré à ses deux extrémités, $k = 4$.

a. Poteaux en béton seul

$$N = \frac{\Omega_b r}{1 + \frac{r h^2}{k \pi^2 E_b \rho^2}}$$

b. Poteaux avec armature longitudinale seulement

$$N = \frac{\Omega r}{1 + \frac{r h^2}{k \pi^2 E_b \rho^2}}.$$

c. Poteaux avec armatures longitudinale et transversale

$$N = \frac{\Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{1 + \frac{r h^2}{k \pi^2 E_b \rho^2}}.$$

4° *Poteaux longs chargés excentriquement.* — Il y a lieu de tenir compte à la fois de l'excentricité et de la formule de Rankine.

a. Poteaux en béton seul

$$N = \frac{r}{\left(\frac{1}{\Omega_b} + \frac{ev}{100 I_b} \right) \left(1 + \frac{r h^2}{k \pi^2 E_b \rho^2} \right)}.$$

b. Poteaux avec armature longitudinale seulement

$$N = \frac{r}{\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100 I} \right) \left(1 + \frac{r h^2}{k \pi^2 E_b \rho^2} \right)}.$$

c. Poteaux avec armatures longitudinale et transversale

$$N = \frac{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100 I} \right) \left(1 + \frac{r h^2}{k \pi^2 E_b \rho^2} \right)}.$$

En résumé, les formules théoriques générales des poteaux sont

$$\Omega = \Omega_b + (m - 1)\Omega_a,$$

$$I = I_b + (m - 1)I_a,$$

$$M = \frac{N e}{100}$$

et

$$r_0 = N \left(\frac{1}{\Omega} \pm \frac{ev_0}{100I} \right),$$

$$y = \frac{100I}{\Omega e}$$

avec les formules spéciales :

1° Poteaux courts chargés concentriquement avec armatures longitudinale et transversale

$$N = \Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right);$$

2° Poteaux courts chargés excentriquement avec armatures longitudinale et transversale

$$N = \frac{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100I} \right)};$$

3° Poteaux longs chargés concentriquement avec armatures longitudinale et transversale

$$N = \frac{\Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{1 + \frac{rh^2}{k\pi^2 E_b \rho^2}};$$

4° Poteaux longs chargés excentriquement avec armatures longitudinale et transversale

$$N = \frac{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100I} \right) \left(1 + \frac{rh^2}{k\pi^2 E_b \rho^2} \right)}.$$

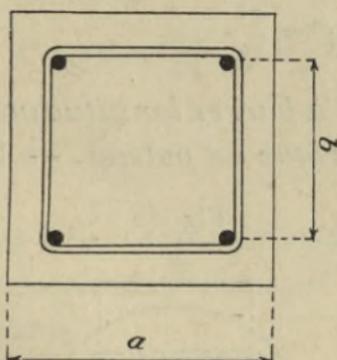
53. Formules pratiques du calcul des poteaux. — En pratique, les poteaux sont à armatures symétriques. Pour les poteaux à charge excentrée, nous négligerons, comme pour les poutres symétriques, le béton tant à la compres-

sion qu'à la tension dues à la flexion produite par la force excentrée. De sorte que l'axe neutre de flexion coïncide avec l'axe de symétrie du poteau, perpendiculaire au plan de flexion.

Les formules générales des poteaux, appliquées aux poteaux carrés et ronds, deviennent :

Poteaux carrés à barres longitudinales disposées sur un carré concentrique au poteau. — Soient :

Fig. 31.



a , côté du poteau en cm ;

b , distance d'axe en axe des barres en cm ;

ω , section totale d'acier en cm^2 .

On a

$$\Omega = a^2 + (m - 1)\omega,$$

$$I = I_b + (m - 1)I_a;$$

or

$$I_b = \frac{a^4}{12},$$

$$I_a = 2 \times \frac{\omega}{2} \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\omega b^2}{4},$$

d'où

$$I = \frac{a^4}{12} + (m - 1) \frac{\omega b^2}{4},$$

ou

$$I = \frac{a^4 + 3(m-1)\omega b^2}{12},$$

$$M = \frac{Ne}{100},$$

$$r_0 = N \left(\frac{1}{\Omega} \pm \frac{ev_0}{100I} \right),$$

$$y = \frac{100I}{\Omega e},$$

$$v = \frac{a}{2},$$

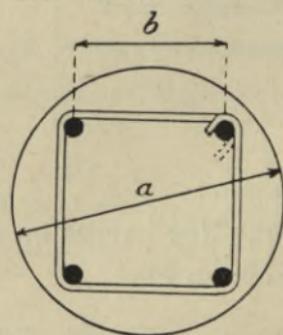
$$I = \Omega \rho^2 = \frac{a^4}{12} = a^2 \rho^2,$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{a^2}{12}.$$

Poteaux ronds à barres longitudinales disposées sur un carré concentrique au poteau. — Soient :

Fig. 32.



a , diamètre du poteau en cm ;

b , distance d'axe en axe des barres en cm ;

ω , section totale d'acier en cm^2 .

On a

$$\Omega = \frac{\pi a^4}{4} + (m-1)\omega,$$

$$I = I_b + (m-1)I_a,$$

$$I_b = \frac{\pi a^4}{64},$$

$$I_a = 2 \frac{\omega}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{\omega b^2}{4};$$

d'où

$$I = \frac{\pi a^4}{64} + \frac{(m-1)\omega b^2}{4},$$

ou

$$I = \frac{\pi a^4 + 16(m-1)\omega b^2}{64},$$

$$M = \frac{Ne}{100},$$

$$r_0 = N \left(\frac{I}{\Omega} \pm \frac{ev_0}{100I} \right),$$

$$y = \frac{100I}{\Omega e},$$

$$v = \frac{a}{2},$$

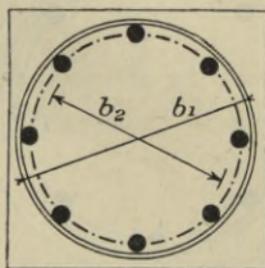
$$I = \Omega \rho^2 = \frac{\pi a^4}{64} = \frac{\pi a^2 \rho^2}{4};$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{a^2}{16}.$$

Poteaux carrés à barres longitudinales disposées sur un cercle concentrique au poteau. — Soient en plus des notations précédentes :

Fig. 33.



b_1 et b_2 , diamètres de deux cercles concentriques au poteau et interceptant une couronne équivalente à ω .

On a

$$\Omega = a^2 + (m-1)\omega,$$

$$I = I_b + (m-1)I_a,$$

$$I_b = \frac{a^4}{12},$$

$$I_a = \frac{\pi(b_1^4 - b_2^4)}{64};$$

d'où

$$I = \frac{a^4}{12} + \frac{\pi(b_1^4 - b_2^4)}{64}(m - 1),$$

ou

$$I = \frac{16a^4 + 3(m - 1)\pi(b_1^4 - b_2^4)}{192},$$

$$M = \frac{Ne}{100},$$

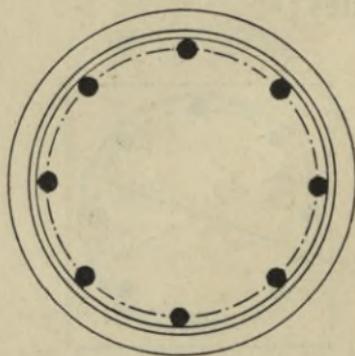
$$r_0 = N \left(\frac{1}{\Omega} \pm \frac{ev_0}{100I} \right),$$

$$v = \frac{a}{2},$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{12}.$$

Poteaux ronds à barres longitudinales disposées sur un cercle concentrique au poteau.

Fig. 34.



On a

$$\Omega = \frac{\pi a^4}{4} + (m - 1)\omega,$$

$$I = I_b + (m - 1)I_a,$$

$$I_b = \frac{\pi a^4}{64},$$

$$I_a = \frac{\pi(b_1^4 - b_2^4)}{64};$$

d'où

$$I = \frac{\pi}{64} [a^4 + (m-1)(b_1^4 - b_2^4)],$$

$$M = \frac{Ne}{100},$$

$$r_0 = N \left(\frac{l}{\Omega} \pm \frac{ev_0}{100I} \right),$$

$$y = \frac{100I}{\Omega e},$$

$$v = \frac{a}{2},$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{16}.$$

En résumé, les formules pratiques, donnant les charges limites que peuvent supporter les poteaux, deviennent :

1° *Poteaux courts carrés et ronds chargés concentriquement avec armatures longitudinale et transversale*

$$N = \Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right);$$

2° *Poteaux courts carrés et ronds chargés excentriquement avec armatures longitudinale et transversale*

$$N = \frac{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{\left(\frac{l}{\Omega} + \frac{ev}{100I} \right)};$$

3° *Poteaux longs chargés concentriquement avec armatures longitudinale et transversale :*

a. *Poteaux carrés*

$$N = \frac{\Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{1 + \frac{12r}{k\pi^2 E_b} \left(\frac{h}{a} \right)^2},$$

b. Poteaux ronds

$$N = \frac{\Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{1 + \frac{16r}{k\pi^2 E_b} \left(\frac{h}{a} \right)^2};$$

4° *Poteaux longs chargés excentriquement avec armatures longitudinale et transversale :*

a. Poteaux carrés

$$N = \frac{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100I} \right) \left[1 + \frac{12r}{k\pi^2 E_b} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]},$$

b. Poteaux ronds

$$N = \frac{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100I} \right) \left[1 + \frac{16r}{k\pi^2 E_b} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]}.$$

Dans ces formules Ω et I varient, conformément à ce qui précède, selon que le poteau est carré ou rond, et selon que les barres longitudinales sont disposées sur un carré ou sur un cercle concentriques au poteau.

CALCUL DES PIEUX.

54. **Calcul des pieux. Formules du battage.** — La portion d'un pieu à l'air libre, dans un terrain très mou ou dans l'eau, se calcule exactement avec les mêmes formules que pour les poteaux. Toutefois, le pieu doit, en plus, résister au battage et, pour cela, il faut qu'il puisse supporter une charge équivalente au battage et fournie par la formule du battage, dont il sera question plus loin.

Quant à la *longueur d'ancrage* dans le sol, elle dépend naturellement de la nature des terrains traversés, et sa

détermination théorique n'a aucun intérêt. En pratique, en effet, on détermine la longueur d'ancrage, en battant un *pieu d'essai à refus*, c'est-à-dire dans des conditions telles que l'enfoncement du pieu, sous certaines conditions de poids de mouton et de hauteur de chute, ne dépasse pas une certaine valeur donnée, d'avance, au bout d'un certain nombre de coups de mouton.

Pour un pieu de 35^{cm} de diamètre, par exemple, l'enfoncement au bout des dix derniers coups de mouton ne doit pas dépasser 2^{cm},5, le mouton pesant 1^t,5 et tombant d'une hauteur de 1^m,20.

Formule du battage. — Il existe plusieurs formules de battage des pieux. Nous adopterons celle de Saunder, qui est d'une application facile et donne d'excellents résultats.

Soient :

P, poids du mouton en kg;

H, hauteur de chute en m;

e, enfoncement dû au dernier coup de mouton, en m;

N, charge statique équivalente à l'effet du mouton en kg.

La formule de Saunder est

$$(1) \quad N = \frac{PH}{8e}.$$

REMARQUES. — I. Pour calculer un pieu, on déterminera donc la charge de battage N, on la comparera à la charge que doit supporter le pieu en tant que support et l'on calculera le pieu par les formules exposées au paragraphe 52, avec la plus grande de ces charges.

II. Étant donné un pieu, on peut se proposer de fixer les conditions de battage. Dans la formule (1), on pourra, par exemple, se donner N égal à la charge de sécurité que la construction pourrait exercer sur le pieu, puis se

donner deux des trois autres éléments P , H , e et déterminer le troisième. On s'arrangera naturellement pour que les valeurs de P , H , e ainsi définies restent dans les limites pratiques.

III. Il y a lieu également, lorsque les pieux sont longs, de s'assurer qu'ils résisteront à la flexion produite, en les manœuvrant, sous leur propre poids.

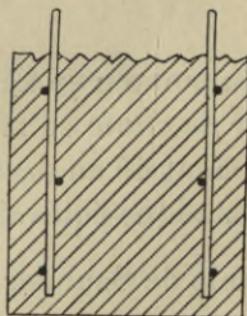
CALCUL DES MURS.

55. Calcul des murs en ciment armé. — On adopte en pratique, pour les murs en ciment armé, une arma-

Fig. 35.



Fig. 36.



ture toujours la même, quel que soit le mur, soit un quadrillage de fers horizontaux et verticaux de même diamètre et écartés horizontalement et verticalement de la même quantité.

Lorsque les murs sont *minces*, c'est-à-dire jusqu'à 15^{cm} d'épaisseur, on emploie généralement une armature simple centrale (*fig. 35*).

Lorsque les murs sont *épais*, c'est-à-dire au delà de 15^{cm} d'épaisseur, pour éviter les fissures, il convient d'employer une armature double (*fig. 36*).

Il y a lieu de déterminer, pour un mur encastré dans

deux poteaux, quelle est la condition pour que le mur se supporte de lui-même, suivant qu'il est à armature simple ou à armature double.

1° *Murs à armature simple.* — Soient :

e , épaisseur du mur en cm ;

h , hauteur du mur en cm ;

l , portée du mur d'axe en axe des poteaux en cm ;

s , section du fer de l'armature en cm² ;

d , distance verticale entre deux barres consécutives de l'armature en cm ;

R , travail limite du métal en kg : cm² ;

δ , densité du béton (kg : m³) ;

M , moment fléchissant du mur dû à son poids propre, en kgm ;

M' , moment résistant du mur à la flexion en kgm.

a. Supposons d'abord que l'axe du mur coïncide avec une barre horizontale de l'armature.

On peut considérer le mur comme constitué par une série de poutres symétriques, satisfaisant à la formule générale $s = \frac{100M}{zR}$ ou $M = \frac{sRz}{100}$.

On peut donc écrire

$$M_1 = \frac{sRz_1}{100},$$

$$M_2 = \frac{sRz_2}{100},$$

$$M_3 = \frac{sRz_3}{100},$$

.....,

$$M_n = \frac{sRz_n}{100};$$

d'où, en additionnant,

$$M' = \frac{sR}{100}(z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n);$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \\ z_2 &= 2d = (2 + 0)d, \\ z_3 &= 4d = (3 + 1)d, \\ z_4 &= 6d = (4 + 2)d, \\ &\dots\dots\dots, \\ z_n &= (n + n - 2)d = 2(n - 1)d = h; \end{aligned}$$

d'où, en additionnant les termes de cette progression arithmétique,

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = \frac{0 + h}{2} n;$$

or

$$2nd - 2d = h,$$

d'où

$$n = \frac{h + 2d}{2d},$$

d'où

$$\Sigma z = \frac{h}{2} \frac{h + 2d}{2d} = \frac{h}{4d} (h + 2d)$$

et, par suite,

$$M' = \frac{sR}{100} \frac{h}{4d} (h + 2d).$$

D'autre part, le mur étant considéré comme partiellement encastré, le moment fléchissant dû à sa charge propre a pour expression

$$M = \frac{pl^2}{10 \times 100 \times 100}$$

et, pour que le mur se supporte de lui-même, il suffit qu'on ait

$$M' \geq M,$$

ou

$$\frac{sR}{100} \times \frac{h}{4d} (h + 2d) \geq \frac{pl^2}{10 \times 100 \times 100},$$

ou

$$l^2 \leq \frac{sR h (h + 2d) 250}{pd};$$

mais

$$p = 1 \times \frac{e}{100} \times \frac{h}{100} \times \delta = \frac{eh\delta}{10\,000},$$

d'où

$$l^2 \leq \frac{sRh(h+2d)250 \times 10\,000}{eh\delta d},$$

ou

$$l^2 \leq \frac{2\,500\,000sR}{d\delta} \times \frac{h+2d}{e},$$

ou

$$l \leq \sqrt{\frac{2\,500\,000sR}{d\delta}} \times \frac{h+2d}{e}.$$

b. Supposons maintenant que l'axe du mur xy tombe au milieu de deux barres d'armature.

On a alors

$$\begin{aligned} z_1 &= d = 1d, \\ z_2 &= 3d = (2+1)d, \\ z_3 &= 5d = (3+2)d, \\ z_4 &= 7d = (4+3)d, \\ &\dots\dots\dots, \\ z_n &= (n+n-1)d = (2n-1)d = h; \end{aligned}$$

d'où

$$\Sigma z = \frac{d+h}{2}n; \quad \text{or} \quad 2nd - d = h,$$

d'où

$$n = \frac{h+d}{2d},$$

d'où

$$\Sigma z = \frac{(h+d)^2}{4d} \quad \text{et} \quad M' = \frac{sR}{100} \times \frac{(h+d)^2}{4d};$$

d'autre part

$$\begin{aligned} M &= \frac{pl^2}{10 \times 100 \times 100}, \\ M &= \frac{e\delta h}{10\,000} \times \frac{l^2}{10 \times 100 \times 100}. \end{aligned}$$

On doit avoir

$$\frac{sR}{100} \times \frac{(h+d)^2}{4d} \geq \frac{e\delta h}{10\,000} \times \frac{l^2}{10 \times 100 \times 100},$$

ou

$$l^2 \leq \frac{2\,500\,000\,sR}{d\delta} \times \frac{(h+d)^2}{eh},$$

$$l \leq \sqrt{\frac{2\,500\,000\,sR}{d\delta} \times \frac{(h+d)^2}{eh}}.$$

2° *Murs à armature double.* — Il suffit dans les formules précédentes de remplacer s par $2s$, car le moment fléchissant n'a pas changé et le moment résistant a doublé. On a donc

a. L'axe xy du mur coïncide avec une barre d'armature

$$l \leq \sqrt{\frac{5\,000\,000\,sR}{d\delta} \times \frac{h+2d}{e}},$$

b. L'axe xy du mur tombe au milieu de deux barres d'armature

$$l \leq \sqrt{\frac{5\,000\,000\,sR}{d\delta} \times \frac{(h+d)^2}{eh}}.$$

REMARQUE. — S'il arrive, pour un mur donné, que le moment fléchissant est supérieur au moment résistant, on fera supporter la différence $M - M'$ à une poutre placée sous le mur.

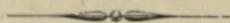


TABLE DES FORMULES PRATIQUES.

| | Formules. | Para-graphes. |
|---|---|---------------|
| Position de l'axe neutre dans une section prismatique d'un solide en ciment armé. | $\mathcal{X} = \frac{mrh}{R + mr}$ | 5 |
| Cisaillement vertical des poutres et hourdis. | $s + s' \geq \frac{V - \frac{ahr}{10}}{\frac{4}{5}R}$ | 7 |
| Cisaillement horizontal des poutres et hourdis. | $H = \frac{\text{aire des efforts tranchants}}{z}$ | 8 |
| Espacements successifs des attaches dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée ou parfaitement partiellement encastree à ses deux extrémités et uniformément chargée. | $d_1 = \frac{8}{5} \frac{Rnsz}{T_1 - t}$ $d_2 = \frac{Kd_1}{K - d_1}$ $d_3 = \frac{Kd_1}{K - (d_1 + d_2)}$ <p>.....</p> | 10 |
| | avec | |
| | $K = \frac{l}{2}$ | |

TABLE DES FORMULES PRATIQUES (suite).

| Para- graphes. | Formules. | Para- |
|-------------------|---|-------|
| 43 | $N = \frac{l}{2d_1}$ | |
| 44 | $T_1 = \frac{a s r}{10} \frac{z + 10}{z}$ $\omega = 0,49 \frac{R}{z}$ | |
| 16 | $\omega = \frac{0,00785 s_1 (5,096 l + 16,97 z + 120)}{l}$ | |
| 18 | $\omega = \frac{0,00785 s_1 (3,751 l + 11,312 z + 80)}{l}$ | |
| 20 | $\omega = \frac{0,00785 s_1 (4,69 l + 16,97 z + 120)}{l}$ | |

Nombre pratique de sections planes contenant des attaches dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée ou parfaitement ou partiellement encastrée à ses deux extrémités et uniformément chargée.

Poids pratique moyen des attaches par mètre courant de poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée ou partiellement ou partiellement encastrée à ses deux extrémités et uniformément chargée.

Poids moyen d'acier par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée pour un groupe de sept barres.

Poids moyen d'acier par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée pour un groupe de cinq barres.

Poids moyen d'acier par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastrée, uniformément chargée pour un groupe de sept barres.

TABLE DES FORMULES PRATIQUES (suite).

| Parag- raphes. | Formules. | |
|-------------------|---|--|
| 22 | $\omega = \frac{0,00785s_1(3,546l + 11,312z + 80)}{l}$ | Poids moyen d'acier par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastree, uniformément chargée pour un groupe de cinq barres. |
| 26 | $h = \sqrt{\frac{6(R + mr)^2}{mr^2(3R + 2mr)}} M,$ $s = \frac{50mr^2h}{R(R + mr)},$ $y = \frac{mrh}{R + mr},$ $F = sR,$ $z = \frac{100M}{F}.$ | Formules pratiques des hourdis ordinaires en usage chez plusieurs constructeurs. |
| 27 | $z = h - f,$ $F = \frac{100M}{z},$ $s' = s = \frac{F}{R}.$ | Formules pratiques des hourdis symétriques. |

Para-
graphes.

Formules.

Hauteur économique des hourdis symétriques encastrés ou libres sans attaches.

$$h = \sqrt{\frac{15700\beta}{R\alpha} M + f.}$$

31

Hauteur économique des hourdis symétriques encastrés ou libres avec attaches.

$$h = \sqrt{\frac{15700\beta}{R\alpha - 490r\gamma} M + f.}$$

31

Formules des hourdis parfaitement encastrés, reposant sur les quatre côtés d'un rectangle.

$$M_1 = \frac{pl_1^2}{12} \frac{1}{1 + 2 \frac{l_1}{l_2}},$$

32

$$h_1 = \sqrt{\frac{6(R + mr)^2}{mr^2(3R + mr)} M_1},$$

$$s_1 = \frac{50mr^2h_1}{R(R + mr)},$$

$$M_2 = \frac{pl_2^2}{12} \frac{1}{1 + 2 \frac{l_2}{l_1}},$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{6(R + mr)^2}{mr^2(3R + mr)} M_2},$$

$$s_2 = \frac{50mr^2h_2}{R(R + mr)}.$$

TABLE DES FORMULES PRATIQUES (suite).

| Paragraphes. | | Formules. | Para- |
|--------------|---|---|-------|
| 32 | Formules des hourdis parfaitement encastres reposant sur les quatre cotés d'un carré. | $M = \frac{pl^2}{36},$ $h = \sqrt{\frac{6(R+mr)^2}{mr^2(3R+mr)} M},$ $s = \frac{50mr^2h}{R(R+mr)},$ | |
| 33 | Formules des hourdis à la charge concentrée : 1° appuyés, | $M = 0,25 P \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{3}{2} + e},$ | |
| | 2° partiellement encastres. | $M = 0,20 P \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{3}{2} + e},$ | |
| | 3° parfaitement encastres. | $M = 0,125 P \frac{l - \frac{e}{2}}{\frac{3}{2} + e}.$ | |

TABLE DES FORMULES PRATIQUES (suite).

| Paragraphes. | Formules. | Paragraphes. |
|--------------|--|--|
| 38 | <p>Formules.</p> $y = \frac{mrh}{R + mr},$ $z = h - \frac{e}{3} \frac{3y - 2e}{2y - e},$ $F = \frac{100M}{z},$ $s = \frac{F}{R},$ $\frac{r + r'}{2} = \frac{2y - e}{y} r.$ | Formules pratiques des poutres ordinaires et d'égale résistance. |
| 39 | $s = h - f,$ $F = \frac{100M}{z},$ $s = s' = \frac{F}{R},$ | Formules pratiques des poutres symétriques. |
| 47 | $b = \sqrt{\frac{785000\beta}{R(ax + 200\delta) - 490a\gamma}} M.$ | Hauteur économique des poutres ordinaires appuyées ou encastrées. |
| 47 | $b = \sqrt{\frac{1570000}{R(ax + 200\delta) - 490a\gamma}} M.$ | Hauteur économique des poutres symétriques appuyées ou encastrées. |

TABLE DES FORMULES PRATIQUES (suite).

| | Formules. | Para- graphes. |
|---|---|-------------------|
| Hauteur économique des poutres appuyées d'égale résistance avec sept barres. | $b = \sqrt{\frac{5712\beta}{R(\alpha x + 200\delta)}} \text{ M.}$ | 47 |
| Hauteur économique des poutres appuyées d'égale résistance avec cinq barres. | $b = \sqrt{\frac{5889\beta}{R(\alpha x + 200\delta)}} \text{ M.}$ | 47 |
| Hauteur économique des poutres partiellement encastées d'égale résistance avec sept barres. | $b = \sqrt{\frac{5257\beta}{R(\alpha x + 200\delta)}} \text{ M.}$ | 47 |
| Hauteur économique des poutres partiellement encastées d'égale résistance avec cinq barres. | $b = \sqrt{\frac{5567\beta}{R(\alpha x + 200\delta)}} \text{ M.}$ | 47 |
| Hauteur des poutres noyées dans un mur en ciment armé. | $z = \frac{0,49 T_1}{AR + 0,049 ar}.$ | 48 |
| Formule de l'adhérence. | $F - F' \leq \frac{\pi lr}{10}.$ | 50 |
| Formules pratiques des poteaux. | $\Omega = \Omega_b + (m-1)\Omega a,$ $I = I_b + (m-1)I a,$ $M = \frac{Ne}{100},$ $r_0 = N \left(\frac{1}{\Omega} \pm \frac{e v_0}{100 I} \right),$ $y = \frac{100 I}{\Omega e}.$ | 52 |

TABLE DES FORMULES PRATIQUES (suite).

| | Formules. | Para- graphes. |
|--|--|-------------------|
| Charge limite des poteaux courts carrés ou ronds, chargés concentriquement avec armatures longitudinale et transversale. | $N = \Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right).$ | 53 |
| Charge limite des poteaux courts carrés et ronds, chargés excentriquement avec armatures longitudinale et transversale. | $N = \frac{\Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{1 + \frac{ev}{100I}}.$ | 53 |
| Charge limite des poteaux longs, chargés concentriquement avec armatures longitudinale et transversale : | $N = \frac{\Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{1 + \frac{12r}{k\pi^2 E_b} \left(\frac{h}{a} \right)^2},$ | 53 |
| <i>a.</i> poteaux carrés. | $N = \frac{\Omega r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{1 + \frac{16r}{k\pi^2 E_b} \left(\frac{h}{a} \right)^2}.$ | |
| <i>b.</i> poteaux ronds. | $r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)$ | |
| Charge limite des poteaux longs, chargés excentriquement avec armatures longitudinale et transversale : | $N = \frac{\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100I} \right) \left[1 + \frac{12r}{k\pi^2 E_b} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]}{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)},$ | 53 |

TABLE DES FORMULES PRATIQUES (suite et fin).

| | Formules. | Para- graphes. |
|--|--|-------------------|
| <i>b.</i> poteaux ronds. | $N = \frac{r \left(1 + m' \frac{V'}{V} \right)}{\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{ev}{100I} \right) \left[1 + \frac{16r}{k\pi^2 E_b} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]}$ $N = \frac{PH}{8e}.$ | 54 |
| Formule du battage des pieux. | | |
| Formules des murs à simple armature : | | |
| <i>a.</i> axe du mur coïncidant avec une armature. | $l \leq \sqrt{\frac{2500000sR}{d\delta} \frac{h+2d}{e}},$ | 55 |
| <i>b.</i> axe du mur au milieu de deux armatures. | $l \leq \sqrt{\frac{2500000sR}{d\delta} \frac{(h+d)^2}{eh}}.$ | |
| Formules des murs à double armature : | | |
| <i>a.</i> axe du mur coïncidant avec une armature. | $l \leq \sqrt{\frac{5000000sR}{d\delta} \frac{h+2d}{e}},$ | 55 |
| <i>b.</i> axe du mur au milieu de deux armatures. | $l \leq \sqrt{\frac{5000000sR}{d\delta} \frac{(h+d)^2}{eh}}.$ | |

N. B. — Voir la signification des lettres dans les paragraphes correspondants.

TABLE DES MATIÈRES.

GÉNÉRALITÉS.

| | Pages. |
|---|--------|
| Charges de rupture, charges pratiques de travail, coefficient de sécurité..... | 1 |
| Hypothèses fondamentales du ciment armé..... | 2 |
| Forces extérieures et forces moléculaires ou intérieures. Travaux moléculaires..... | 2 |
| Variation des forces moléculaires dans un solide prismatique en ciment armé | 2 |
| Position de l'axe neutre dans une section transversale d'un solide en ciment armé | 6 |

EFFORTS TRANCHANTS.

| | |
|---|----|
| Théorie des efforts tranchants..... | 8 |
| Cisaillement vertical des poutres et hourdis..... | 10 |
| Cisaillement horizontal des poutres et hourdis..... | 10 |
| Définitions relatives aux hourdis et aux poutres | 12 |
| Espacements successifs des attaches dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée ou parfaitement encastree à ses deux extrémités et uniformément chargée..... | 12 |
| Poids théorique moyen par mètre courant des attaches verticales nécessaires dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée ou parfaitement ou partiellement encastree à ses deux extrémités et uniformément chargée.... | 16 |
| Nombre de sections planes contenant des attaches dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée ou parfaitement ou partiellement encastree à ses deux extrémités et uniformément chargée | 17 |

| | Pages. |
|--|--------|
| Nombre pratique de sections planes contenant des attaches dans une poutre ordinaire ou symétrique, librement appuyée ou parfaitement ou partiellement encastrée à ses deux extrémités et uniformément chargée..... | 18 |
| Poids pratique moyen des attaches par mètre courant d'une poutre ordinaire ou symétrique librement appuyée, ou parfaitement ou partiellement encastrée à ses deux extrémités et uniformément chargée..... | 19 |
| Longueur moyenne d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée, pour un groupe de sept barres..... | 20 |
| Poids moyen d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée, pour un groupe de sept barres..... | 23 |
| Longueur moyenne d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée, pour un groupe de cinq barres..... | 23 |
| Poids moyen d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, librement appuyée, uniformément chargée, pour un groupe de cinq barres..... | 24 |
| Longueur moyenne d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastrée, uniformément chargée, pour un groupe de sept barres..... | 25 |
| Poids moyen d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastrée, uniformément chargée, pour un groupe de sept barres..... | 28 |
| Longueur moyenne d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastrée, uniformément chargée, pour un groupe de cinq barres..... | 28 |
| Poids moyen d'acier de même section par mètre courant de poutre d'égale résistance, partiellement encastrée, uniformément chargée, pour un groupe de cinq barres..... | 29 |

CALCUL DES HOURDIS.

| | |
|--|----|
| Calcul des hourdis ordinaires..... | 29 |
| Hauteur économique des hourdis ordinaires..... | 31 |
| Formules théoriques des hourdis ordinaires..... | 33 |
| Formules pratiques du calcul des hourdis ordinaires en usage chez plusieurs constructeurs..... | 34 |
| Formules pratiques des hourdis symétriques..... | 39 |

| | Pages. |
|--|--------|
| Hauteur économique des hourdis symétriques sans attaches... | 40 |
| Hauteur économique des hourdis symétriques parfaitement encastrés avec attaches..... | 41 |
| Hauteur économique des hourdis symétriques librement appuyés avec attaches..... | 44 |
| Résumé des formules économiques des hourdis..... | 44 |
| Calcul des hourdis s'appuyant sur quatre côtés..... | 44 |
| Calcul des hourdis à la charge concentrée..... | 46 |

CALCUL DES POUTRES.

| | |
|--|----|
| Calcul des poutres ordinaires..... | 48 |
| Hauteur économique des poutres ordinaires partiellement encastrées..... | 50 |
| Hauteur économique des poutres ordinaires librement appuyées..... | 53 |
| Formules théoriques des poutres ordinaires..... | 54 |
| Formules pratiques du calcul des poutres ordinaires en usage chez plusieurs constructeurs..... | 56 |
| Formules pratiques des poutres symétriques..... | 61 |
| Hauteur économique des poutres symétriques partiellement encastrées..... | 61 |
| Hauteur économique des poutres symétriques librement appuyées..... | 63 |
| Formules pratiques des poutres d'égale résistance..... | 63 |
| Hauteur économique des poutres d'égale résistance, librement appuyées, uniformément chargées, avec un groupe de sept barres..... | 64 |
| Hauteur économique des poutres d'égale résistance, librement appuyées, uniformément chargées, avec un groupe de cinq barres..... | 66 |
| Hauteur économique des poutres d'égale résistance, partiellement encastrées, uniformément chargées, avec un groupe de sept barres..... | 67 |
| Hauteur économique des poutres d'égale résistance, partiellement encastrées, uniformément chargées, avec un groupe de cinq barres..... | 68 |
| Résumé des formules économiques des poutres..... | 69 |
| Hauteur des poutres noyées dans un mur en ciment armé..... | 70 |
| Moments négatifs dans les hourdis et les poutres..... | 71 |
| Adhérence..... | 74 |

CALCUL DES POTEAUX.

| | Pages. |
|--|--------|
| Définitions relatives aux poteaux..... | 75 |
| Formules théoriques du calcul des poteaux..... | 76 |
| Formules pratiques du calcul des poteaux..... | 82 |

CALCUL DES PIEUX.

| | |
|---|----|
| Calcul des pieux. Formule du battage..... | 88 |
|---|----|

CALCUL DES MURS.

| | |
|-------------------------------------|----|
| Calcul des murs en ciment armé..... | 90 |
| Table des formules pratiques..... | 95 |

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

S-96

S. 61

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297285