öschen

ichkeits=
rechnung

Von

Prof. Dr. Franz Hack

Mit 15 Figuren

r. bibl

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden **80 Pfennig.**

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I. Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

— — **II:** Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Ebene Geometrie m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.

— — **II.** Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.

Stereometrie mit 66 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.

Niedere Analysis m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Wenden!

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Versicherungsmathematik v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.

Vektoranalysis mit 11 Figuren von Privatdoz. Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Astronomie mit 36 Abbildungen und einer Karte von Professor Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold. Bd. I. Nr. 11.

— — Bd. II. Mit Abbildungen. Nr. 529.

Astrophysik mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.

Vermessungskunde von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

Sammlung Göschen

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Von

Dr. Franz Hack
Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart

Mit 15 Figuren im Text

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1911

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.

Inhalt.

Literatur.

A. Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt.

J. Bertrand, Calcul des probabilités. Paris 1888.

H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre Leipzig 1906.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Auflage, 2 Bände. Band I. Leipzig 1908.

N. Herz, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. Sammlung Schubert. Leipzig 1900.

H. Poincaré, Calcul des probabilités. Paris 1896.

B. Ausgleichungsrechnung.

E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

F. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Auflage. Leipzig 1907.

C. Statistik und Versicherungswesen.

E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. Leipzig 1906.

C. Landré, Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung. 3. Auflage. Jena 1905.

Über das ganze Gebiet und dessen Literatur siehe ferner die einschlägigen (nicht für den Anfänger bestimmten) Artikel der: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. I. Band 2. Teil. D. 1, 2, 4a, 4b. Leipzig 1900—1904.

Die in dem vorliegenden Band der Sammlung Göschen als bekannt vorausgesetzten Ergebnisse der algebraischen Analysis und Infinitesimalrechnung finden sich fast ausnahmslos in den Bänden 53, 87 und 88; die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist in Band 302, die Versicherungsmathematik in Band 180 eingehend behandelt.

I. Abschnitt.

Die Grundlehren.

§ 1. Die mathematische Wahrscheinlichkeit und deren unmittelbare Bestimmung; Gegensatz zwischen Wahrscheinlichkeit a priori und a posteriori.

1. Über das Eintreffen eines Ereignisses E oder das Vorhandensein eines Tatbestandes sei bekannt, daß unter m möglichen Fällen deren g $(g < m)$ das Eintreffen von E bedeuten oder, wie man gewöhnlich sagt, dem Ereignis E günstig sind; man bezeichnet dann den echten Bruch $w = \frac{g}{m}$ als die mathematische Wahrscheinlichkeit von E. Ob E in einem Einzelfall wirklich stattfindet, wissen wir nicht; darüber entscheidet nach der üblichen Ausdrucksweise der Zufall (vgl. § 21), selbst dann, wenn w noch so nahe an 0 oder 1 liegt.

Sind z. B. in einer Urne 7 Kugeln, worunter 5 weiße und 2 schwarze, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel gleich $^5/_7$.

Ist $g = 0$, so wird $w = 0$; ist $g = m$, so wird $w = 1$; die Zahlenwerte $w = 0$ und $w = 1$ bezeichnen also die Unmöglichkeit und die Gewißheit; von Wahrscheinlichkeit kann man hier genau genommen nicht mehr sprechen, da dem Zufall kein Platz mehr übrigbleibt.

Ist $g = \frac{1}{2} m$, also $w = \frac{1}{2}$, so kann E ebensowohl eintreffen als ausbleiben, oder man kann 1 gegen 1 wetten, daß E stattfindet; häufig bezeichnet man in diesem Fall das Ereignis schlechthin als wahrscheinlich.

Sind g Fälle günstig für E, so sind $m-g$ Fälle ungünstig; setzt man also $w' = \frac{m-g}{m}$, so ist:

$$w + w' = 1\,;$$

w', auch Gegenwahrscheinlichkeit genannt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß E nicht stattfindet.

2. Die vorangehende Begriffsbestimmung bedarf noch einer wichtigen Ergänzung: die in Betracht gezogenen Fälle müssen gleichwertig (gleichmöglich, gleichberechtigt) sein. Zur Erläuterung diene ein einfaches Beispiel. Ich habe zwei Kästchen A, B, jedes mit zwei Fächern a, b; in jedem Fach liegt eine Münze von folgender Beschaffenheit:

	A:	B:
a:	Gold,	Gold,
b:	Gold,	Silber.

Ich wähle ein Kästchen, öffne ein Fach und finde darin eine Goldmünze; welches ist die Wahrscheinlichkeit, in dem zweiten Fach eine Silbermünze zu finden?

Der Anfänger schließt vielleicht: entweder habe ich A gewählt oder B, der erste Fall ist ungünstig, der zweite günstig, folglich $w = \frac{1}{2}$. Aber dies ist irrig; möglich sind drei Fälle: Aa, Ab, Ba; günstig ist nur der letztgenannte, also $w = \frac{1}{3}$. Der Fehlschluß war, daß die Fälle A und B als gleichwertig behandelt wurden; tatsächlich umfaßt A zwei Fälle, B nur einen.

Kann man, wie hier, durch Zerlegung in „Elementarfälle“ die Schwierigkeit beheben, so bleibt dem Mathematiker nur die Abzählung der Fälle, zumeist auf Grund der Regeln der Kombinatorik.

3. Unsere Betrachtungen beschränken sich nicht auf den Fall, daß eine solche unmittelbare Bestimmung der Wahrscheinlichkeit möglich sei. Läßt sich die letztere auf rein deduktivem Weg feststellen, ohne irgendwie die Erfahrung heranzuziehen, so spricht man von Wahrscheinlichkeit a priori. Im Gegensatz hierzu kann man darauf ausgehen, auf Grund von Versuchen, statistischen Erhebungen usw. ein Urteil über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu gewinnen. Eine Wahrscheinlichkeit, bei deren Berechnung die Erfahrung mitgewirkt hat, wird als Wahrscheinlichkeit a posteriori[1]) bezeichnet; ist in n beobachteten, gleichwertigen Fällen das Ereignis E α-mal eingetreten, so nennt man $\frac{\alpha}{n}$ die relative Häufigkeit von E. Die Abschnitte I, II und III unserer Darstellung beziehen sich im allgemeinen auf die Wahrscheinlichkeit a priori; dabei ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß die Erfahrung zum Vergleich herangezogen wird. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit a priori, mit einer Münze Wappen zu werfen, $^1/_2$; die Erfahrung ergibt, daß bei einer großen Zahl von Versuchen tatsächlich etwa in der Hälfte der Fälle Wappen geworfen wird. In den Abschnitten IV, V und VI dient die Erfahrung als wesentliche Grundlage der Wahrscheinlichkeitsbestimmung[2]).

---

[1]) Der Begriff wurde in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt von Jakob (I) Bernoulli, Ars conjectandi (1713), vierter Teil, Kap. IX; deutsch von R. Haußner: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 107 und 108, Leipzig 1899.

[2]) Über den Sinn der Wahrscheinlichkeitssätze s. u. a. J. v. Kries, Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg 1886, bes. S. 1—23.

§ 2. Vollständige und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit bei Wiederholung von Versuchen.

1. Eine Urne möge 11 Kugeln enthalten, darunter 5 weiße, 4 schwarze, 2 rote. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, eine schwarze oder rote Kugel zu ziehen. Unter den 11 möglichen Fällen sind $4 + 2$ günstig; daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{4+2}{11} = \frac{4}{11} + \frac{2}{11}$; man muß also die einzelnen Wahrscheinlichkeiten addieren.

Wird allgemein das Ereignis E verwirklicht durch das Eintreffen eines einzelnen der sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_r$, und ist g_i die Zahl der für E_i günstigen Fälle, so ist die Zahl der für E günstigen Fälle:

$$g = g_1 + g_2 + \cdots + g_r \,.$$

Sind nun im ganzen m Fälle möglich ($m \geqq g$), so folgt:

$$\frac{g}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \ldots + \frac{g_r}{m} \,.$$

Ist daher $\frac{g}{m} = w$ die Wahrscheinlichkeit von E, $\frac{g_i}{m} = w_i$ diejenige von E_i, so ergibt sich:

$$w = w_1 + w_2 + \ldots + w_r \,.$$

Der hierin enthaltene Satz heißt auch Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung; w selbst heißt vollständige (auch alternative) Wahrscheinlichkeit, es ist die Wahrscheinlichkeit des „Entweder—Oder“.

2. Wir gehen nun zu einem völlig anders gearteten Fall über. Außer der vorhin beschriebenen Urne sei eine

zweite vorhanden; diese soll 13 Kugeln, worunter 6 weiße, 7 schwarze, enthalten. Ich ziehe aus jeder Urne eine Kugel; welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß es beidemal eine weiße Kugel sei?

Hier sind offenbar $11 \cdot 13$ Fälle möglich, davon $5 \cdot 6$ günstig; also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{5 \cdot 6}{11 \cdot 13} = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{13}$; man hat somit die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zu multiplizieren.

Gilt allgemein E als eingetroffen, wenn jedes der Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_r$ stattgefunden hat, und sind g_i, m_i die Zahlen der günstigen bzw. möglichen Fälle für E_i, g, m die entsprechenden Zahlen für E, so ist:

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_r, \qquad m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r.$$

Hieraus folgt, wenn $\frac{g}{m} = w$, $\frac{g_i}{m_i} = w_i$ gesetzt wird:

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_r.$$

Dies ist der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung; er drückt die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer, voneinander unabhängiger Ereignisse aus; w heißt in diesem Fall die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, es ist die Wahrscheinlichkeit des „Sowohl—Als auch".

Beschränken wir uns auf zwei Ereignisse E_1, E_2, so kann es vorkommen, daß die Wahrscheinlichkeit von E_2 davon abhängt, ob E_1 eingetreten ist. Es sei z. B. bei der in 1. genannten Urne nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß zweimal nacheinander eine weiße Kugel gezogen wird, wobei jedoch die zuerst gezogene weiße Kugel aus der Urne entfernt bleibt. Hier hat man $w_1 = \frac{5}{11}$,

aber $w_2 = \frac{5-1}{11-1} = \frac{4}{10}$, daher $w = \frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 10} = \frac{2}{11}$.
Zu dem gleichen Ergebnis kommt man indessen auch, wenn mit einem Griff zwei Kugeln gezogen werden; dann ist die Zahl der möglichen bzw. günstigen Fälle $\binom{11}{2}$ bzw. $\binom{5}{2}$.

3. Die Ereignisse E_1, E_2 mögen einander ausschließen und die Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2 haben; hierbei ist $w_1 + w_2 \lesseqgtr 1$; das Gleichheitszeichen gilt, wenn E_2 in dem Nichteintreffen von E_1 besteht.

Die Wahrscheinlichkeit w_0 dafür, daß bei $x+y$-maligem Versuch E_1 in x, E_2 in y Fällen und zwar in bestimmter Reihenfolge eintritt, ergibt sich aus dem Multiplikationssatz:

$$w_0 = w_1^x \cdot w_2^y .$$

Ist die Reihenfolge beliebig, so ist auf Grund des Additionssatzes die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = m \cdot w_0 ,$$

wenn m die Zahl der Permutationen von $x+y$ Elementen, worunter je x und je y gleiche, bedeutet. Man hat also[1]:

$$w = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} w_1^x w_2^y = \binom{x+y}{x} w_1^x w_2^y = \binom{x+y}{y} w_1^x w_2^y .$$

Offenbar ist w ein Glied in der Entwicklung von $(w_1 + w_2)^{x+y}$, daher $w < 1$, wie es sein muß.

Einfache Beispiele liefern die vorerwähnten Urnen.

Setzt man $x+y=n$, sowie $x=n, n-1, \ldots, n-r$, $y = 0, 1, \ldots, r$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n-maligem Versuch:

E_1 in n, E_2 in 0 Fällen eintrifft: w_1^n,

[1]) Sammlung Göschen, Nr. 53, § 16.

$$E_1 \text{ „ } n-1, \quad E_2 \text{ „ } 1 \text{ Fall} \quad \text{eintrifft: } \binom{n}{1} w_1^{n-1} w_2,$$

$$E_1 \text{ „ } n-2, \quad E_2 \text{ „ } 2 \text{ Fällen} \quad \text{„ } : \binom{n}{2} w_1^{n-2} w_2^2,$$

. . . .

$$E_1 \text{ „ } n-r, \quad E_2 \text{ „ } r \quad \text{„} \quad \text{„ } : \binom{n}{r} w_1^{n-r} w_2^r.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei n-maligem Versuch nur E_1 oder E_2, und zwar E_1 mindestens $n-r$-mal stattfindet:

$$W = w_1^n + \binom{n}{1} w_1^{n-1} w_2 + \binom{n}{2} w_1^{n-2} w_2^2 + \ldots + \binom{n}{r} w_1^{n-r} w_2^r.$$

Für $r = n$ wird hieraus:

$$W_n = (w_1 + w_2)^n,$$

entsprechend den früheren Formeln; W_n ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in jedem der n Fälle entweder E_1 oder E_2 eintritt.

Ist $r < n$, aber $w_1 + w_2 = 1$, so ist W einfacher die Wahrscheinlichkeit dafür, daß E_1 mindestens $n-r$-mal stattfindet.

Ist endlich $r = n$ und $w_1 + w_2 = 1$, so wird $W_n = 1$.

§ 3. Relative Wahrscheinlichkeit; Abhängigkeit von Ereignissen.

1. Unter relativer Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E in bezug auf ein anderes F versteht man die Wahrscheinlichkeit von E unter der Voraussetzung, daß F eingetreten ist (oder zugleich eintritt). Eine Urne enthalte 17 Kugeln, davon 11 weiße, 4 schwarze, 2 rote; jemand zieht eine Kugel und teilt mir mit, daß sie nicht

rot ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine weiße Kugel gezogen wurde, nach § 1: $W_1 = \frac{11}{11+4} = \frac{11}{15}$.

In diesem Beispiel sind $w_1 = \frac{11}{17}$, $w_2 = \frac{4}{17}$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen bzw. schwarzen Kugel; die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit ist $W_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$.

Der Sachverhalt kann allgemein so dargestellt werden: unter den überhaupt möglichen Fällen wird nur ein bestimmter Komplex F betrachtet, der aus dem Eintreffen eines der einander ausschließenden Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_r$ mit den absoluten Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \ldots, w_r$ besteht. Nach dem Additionssatz hat F die Wahrscheinlichkeit $w_1 + w_2 + \ldots + w_r$; E_1 kommt nun dadurch zustande, daß zunächst F und dann E_1 eintritt. Ist also W_1 die Wahrscheinlichkeit von E_1 unter der Voraussetzung des Eintreffens von F, kürzer „unter der Voraussetzung F", so ergibt der Multiplikationssatz:

$$w_1 = (w_1 + w_2 + \ldots + w_r) \cdot W_1\,,$$

oder:

$$W_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + \ldots + w_r}\,.$$

Dieser Quotient ist die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit.

2. Wir wollen mit $W(E, F)$ die Wahrscheinlichkeit von E unter der Voraussetzung F bezeichnen, mit $W(E, F_0)$ diejenige unter einer von F verschiedenen Voraussetzung; für Gewißheit und Unmöglichkeit sollen die Symbole 1 und 0 benutzt werden.

Ist nun E tatsächlich von F abhängig, so kann dieser Sachverhalt durch die Beziehung:

$$W(E, F) \neq W(E, F_0)$$

gekennzeichnet werden; hingegen bedeutet

$$W(E, F) = W(E, F_0)$$

die Unabhängigkeit der Ereignisse E, F.

Folgt aus dem Bestehen von F notwendig dasjenige von E, so gilt:

$$W(E, F) = 1 .$$

Schließen hingegen die Ereignisse E, F einander gegenseitig aus, so ist:

$$W(E, F) = W(F, E) = 0 .$$

§ 4. Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: unendliche Anzahl der Fälle.

1. Das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wir suchen, soll darin bestehen, daß eine unbekannte reelle Zahl x zwischen gegebene Grenzen a, b $(a < b)$ falle; x selbst soll alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen können, jedoch so, daß die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl x durch:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

dargestellt wird.

Die Bedeutung von $\varphi(x)$ läßt sich folgendermaßen erläutern: ist Δx so klein, daß die Änderung von $\varphi(x)$ vernachlässigt werden kann, während x in $x + \Delta x$ übergeht, so wird die Zahl der Fälle, in welchen x zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$ liegt, dem Produkt $\varphi(x_0) \cdot \Delta x$ proportional sein; nimmt man z. B. $x_0 = 0$ und $= 3$, so werden Zahlen zwischen 0 und Δx zehnmal so häufig sein als solche zwischen 3 und $3 + \Delta x$. Die Anzahl der günstigen und möglichen Fälle ist hier unendlich; die seitherige Definition versagt also.

Da wir aber nur das Verhältnis dieser Anzahlen suchen, so beantwortet sich die eingangs gestellte Frage dadurch, daß man den Quotienten der beiden Integrale:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

bildet; das erstere hat den Wert $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a$, das letztere den Wert π; mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a)\,.$$

Die Integrale können geometrisch gedeutet werden (Fig. 1); das erste ist die schraffierte Fläche, das zweite die ganze Fläche zwischen der Kurve und der Abszissenachse[1]).

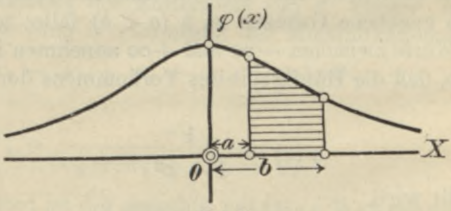

Fig. 1.

2. Wird einer geometrischen Figur eine zu ihrer Bestimmung nicht hinreichende Zahl von Bedingungen auferlegt, so kann die Figur noch unendlich viele Formen

[1]) Sammlung Göschen, Nr. 88, § 24.

annehmen. Man stellt nun gewisse Forderungen auf und fragt nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine beliebig gezeichnete Figur diesen Forderungen entspricht; Beispiele hierzu werden in § 11 gegeben werden. Auch bei dieser geometrischen Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Fälle unendlich groß und entzieht sich deshalb der Abzählung; die Lösung der Aufgabe kann wie in 1. mit Hilfe der Integralrechnung oder auch auf elementarem Weg erfolgen.

3. Probleme der angeführten Art haben zu einer Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs Anlaß gegeben[1]): Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis aus dem Inhalt der Mannigfaltigkeit der ihm günstigen Fälle zu der Mannigfaltigkeit aller als gleichwertig vorausgesetzten Fälle.

Diese Definition umfaßt ebenso die Fälle, wo der Inhalt der Mannigfaltigkeit sich durch Zählung bestimmen läßt (diskrete Mannigfaltigkeit), wie die anderen, wo die Messung (nötigenfalls im mehrdimensionalen Raum) Platz greifen muß (kontinuierliche Mannigfaltigkeit). Was die Gleichwertigkeit der Fälle anlangt, so liegt den Aufgaben der geometrischen Wahrscheinlichkeit im allgemeinen die Annahme einer homogenen Struktur des Kontinuums zugrunde; hiernach entfällt z. B. auf ein der Größe nach gegebenes Intervall einer Geraden überall die gleiche Punktmenge, unabhängig von der Lage des Intervalls. Dieser Voraussetzung über die Struktur des Kontinuums, dem die Elemente angehören, entspricht die Aussage, daß jedes herausgegriffene Element schlechthin willkürlich gewählt sei. So kann auch der in 1. ge-

[1]) E. Czuber, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, 2, D. 1, S. 753. 1900—1904.

fundene Wert w als geometrische Wahrscheinlichkeit dafür gedacht werden, daß ein willkürlich zwischen der Kurve und der Abszissenachse gewählter Punkt in das schraffierte Gebiet fällt.

§ 5. Mathematischer Erwartungswert, mathematisches Risiko.

1. Hat A aus einem Ereignis E_1, dessen Wahrscheinlichkeit w_1 ist, den Gewinn a_1 zu erwarten, so nennt man $e_0 = a_1 w_1$ den mathematischen Erwartungswert; der Geldbetrag e_0 bedeutet hiernach einen Ersatz für die unsichere Einnahme a_1, um den Preis e_0 kann A seinen Gewinnanspruch zum Verkauf anbieten. Mann kann e_0 auch als Durchschnittswert auffassen: unter einer großen Anzahl n von Fällen werden etwa $n w_1$ den Gewinn a_1 bringen, die übrigen nichts; also ist der durchschnittliche Gewinn $a_1 n w_1 : n = a_1 w_1$.

Es sollen nun r Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_r$ möglich sein derart, daß sie einander ausschließen, aber eines unter ihnen eintreten muß; für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt dann:

$$(1) \qquad w_1 + w_2 + \ldots + w_r = 1 .$$

Fällt für das Eintreffen von E_i dem A der Gewinn a_i zu (die a_i können auch $= 0$ und im Fall des Verlustes < 0 sein), so ist der Erwartungswert des A in Bezug auf die Gesamtheit der r Ereignisse:

$$(2) \qquad e_0 = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_r w_r .$$

Da also $e_0 = (a_1 w_1 + \ldots + a_r w_r) : (w_1 + \ldots + w_r)$ ist, so kann e_0 als Mittelwert der mit den Gewichten w_i versehenen Größen a_i gelten; in dem eingangs angeführten Fall ist E_2 das Ausbleiben von E_1 und $a_2 = 0$. Läßt man allgemein aus (2) von vornherein diejenigen Glieder fort, deren $a_i = 0$ ist, so ist für die übrigen Ereignisse die Summe der Wahrscheinlichkeiten < 1.

2. An einem Glücksspiel mögen sich r Spieler beteiligen, mit der irgendwie ermittelten Wahrscheinlichkeit $w_1, w_2, \ldots, w_r$, zu gewinnen; dabei sei:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_r = 1 .$$

Ferner seien die Einsätze der Spieler $e_1, e_2, \ldots, e_r$, sowie

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_r = s$$

die dem Gewinner zufallende Summe. Soll nun das Spiel billig sein, so muß:

$$e_1 : e_2 : \ldots : e_r = w_1 : w_2 : \ldots : w_r ,$$

also auch

$$e_i : s = w_i : 1$$

oder

$$e_i = s\,w_i , \tag{3}$$

d. h. der Einsatz jedes Spielers gleich seinem Erwartungswert sein.

3. Auf das Eintreffen eines Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit w (Gegenwahrscheinlichkeit $w' = 1 - w$) sei von dem Unternehmer A der Preis a ausgesetzt; der Spieler B hat dann den Einsatz:

$$e_0 = a\,w \tag{4}$$

zu leisten. Gewinnt B, so ist sein Reingewinn:

$$a - e_0 = a(1 - w) = a\,w'$$

und der zugehörige Erwartungswert:

$$h_0 = a\,w\,w' = e_0 \cdot w' . \tag{5}$$

Verliert dagegen B, so ist sein Verlust e_0, der zugehörige Erwartungswert:

$$k_0 = e_0\,w' = h_0 . \tag{6}$$

Für A gilt das Umgekehrte; $h_0 = k_0$ heißt mathematisches Risiko; die Zahl $h_0/e_0 = k_0/e_0 = w'$ bezeichnet man als relatives Risiko, sowohl für A als für B.

Um sein Risiko zu verringern, leistet B einem zweiten Unternehmer A' die Zahlung k_0, wofür ihm A' im Fall des Verlustes den Betrag e_0 auszuzahlen hat.

Gewinnt nun B, so ist sein Reingewinn $a - e_0 - h_0$, das zugehörige Risiko, wie eine leichte Rechnung ergibt:

$$(7) \qquad h_1 = a\,w \cdot w'^2 = e_0 \cdot w'^2 .$$

Verliert B, so ist die Summe k_0 verloren; das Risiko ist:

$$(8) \qquad k_1 = k_0 \cdot w' = e_0\, w'^2 = h_1 .$$

Die Fortsetzung ist einleuchtend; ist $k_r = e_0 \cdot w'^{r+1}$, so hätte B, um gegen jeden Verlust gedeckt zu sein, den Betrag aufzuwenden:

$$(9) \qquad e_0 + k_0 + k_1 + k_2 + \ldots = \frac{e_0}{1 - w'} = \frac{e_0}{w} = a ;$$

aber dann gewinnt er auch nichts.

4. Für mehrere, einander ausschließende Ereignisse E_i, unter welchen eines eintreten muß, seien die Wahrscheinlichkeiten w_i vorhanden und die Preise a_i ausgesetzt; alsdann ist:

$$(10) \qquad \sum_1^r w_i = 1 ;$$

der Erwartungswert, zugleich der von dem Spieler zu leistende Einsatz ist:

$$(11) \qquad e_0 = \sum_1^r a_i\, w_i .$$

Ist nun $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} > e_0$; $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_r \lesseqgtr e_0$, so ist die Gewinnerwartung:

$$(12) \qquad h_0 = \sum_1^{n-1} (a_i - e_0)\, w_i ;$$

die Verlusterwartung:

(13) $$k_0 = \sum_n^r (e_0 - a_i)\, w_i\,.$$

Dabei ist:

$$h_0 - k_0 = \sum_1^r a_i w_i - e_0 \sum_1^r w_i = 0\,, \qquad \text{also} \qquad h_0 = k_0$$

Als relatives Risiko gilt wiederum der Quotient $h_0/e_0 = k_0/e_0$.

Erhält z. B. der Spieler so viel ℳ, als der Spielwürfel Punkte zeigt, so ist $r = 6$, $w_i = \frac{1}{6}$ für jeden Wert von i, $e_0 = \frac{1}{6}(6+5+4+3+2+1) = 3{,}5$ ℳ; ferner $n = 3$, und

$$h_0 = \frac{1}{6}(2{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5) = 0{,}75\ \text{ℳ},$$

$$k_0 = \frac{1}{6}(0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5) = 0{,}75\ \text{ℳ};$$

endlich

$$h_0/e_0 = k_0/e_0 = \frac{0{,}75}{3{,}5} = \frac{3}{14} \qquad \text{oder} \qquad 21{,}4\,\%.$$

II. Abschnitt.

Anwendung der Grundlehren auf spezielle Probleme.

§ 6. Aufgaben zur Erläuterung der Grundformeln.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln eine der Summen 2 bis 12 zu werfen?

Die Anzahl m der möglichen Fälle ist $6^2 = 36$; die Anzahl g der günstigen Fälle und die entsprechende Wahrscheinlichkeit $w = g/m$ ist aus nebenstehendem Täfelchen zu entnehmen.

Summe	g	w
2; 12	1	$^1/_{36}$
3; 11	2	$^1/_{18}$
4; 10	3	$^1/_{12}$
5; 9	4	$^1/_9$
6; 8	5	$^5/_{36}$
7	6	$^1/_6$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel im ersten, zweiten oder dritten Wurf die Zahl 1 zu werfen?

Die Wahrscheinlichkeit, im ersten Wurf 1 nicht zu werfen, ist $^5/_6$; also nach dem Multiplikationssatz die Wahrscheinlichkeit, in keinem der drei ersten Würfe 1 zu werfen, $w' = (^5/_6)^3$; somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit $w = 1 - w' = \dfrac{91}{216}$. Umgekehrt kann man aus gegebenem w die Zahl der Würfe berechnen.

3. Zwei gleiche Urnen enthalten je nur weiße und schwarze Kugeln; die erste a_1 weiße, b_1 schwarze, die zweite a_2 weiße und b_2 schwarze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, sowohl die erste Urne zu wählen, als auch aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, ist $w_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1}{a_1 + b_1}$; die entsprechende Wahrscheinlichkeit für die zweite Urne ist $w_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2}$. Nach dem Additionssatz ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} \right).$$

4. In einer Urne sind n Kugeln, darunter a weiße, b schwarze ($a + b \leq n$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, mit drei aufeinanderfolgenden Zügen zwei weiße und eine schwarze Kugel in beliebiger Reihenfolge zu erhalten, wenn die Kugeln nicht wieder hineingelegt werden?

Die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine weiße, dann nochmals eine weiße, zum Schluß eine schwarze Kugel zu ziehen, ist:

$$w_0 = \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{b}{n-2};$$

ebenso groß sind, wie man leicht sieht, die Wahrscheinlichkeiten für die beiden anderen Reihenfolgen; folglich ist:

$$w = 3\,w_0 = \frac{3\,a(a-1) \cdot b}{n(n-1)\,(n-2)}.$$

5. Ein Kästchen enthält n Schrotkörner; welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Griff eine ungerade bezw. eine gerade Anzahl zu erfassen?

In den beiden Fällen ist:

$$w_1 = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots}{N} = \frac{Z_1}{N}, \quad w_2 = \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots}{N} = \frac{Z_2}{N},$$

wo
$$N = Z_1 + Z_2 .$$

Setzt man die aus dem binomischen Satz folgenden Werte [1]) von Z_1, Z_2, N ein, so wird:

$$w_1 = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} = \tfrac{1}{2}(1 + \theta), \quad w_2 = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} = \tfrac{1}{2}(1 - \theta),$$

wo
$$\theta = \frac{1}{2^n - 1} .$$

Demnach ist $w_1 > w_2$, aber $\lim\limits_{n=\infty}(w_1 - w_2) = \lim\limits_{n=\infty}\theta = 0$.

6. A und B spielen mit zwei Würfeln; A wirft zuerst und gewinnt, wenn er die Summe 6 hat; andernfalls würfelt B und gewinnt, wenn er die Summe 7 erhält. Wie müssen sich die Einsätze verhalten?

Ist G der Gewinn, so ist der Erwartungswert des A: $a = \frac{5}{36} G$, derjenige des B: $b = \frac{31}{36} \cdot \frac{1}{6} G$; also ist das Verhältnis der Einsätze $a : b = 30 : 31$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel unentschieden bleibt, ist

$$\frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{155}{216} = 0{,}717 .$$

7. A und B lassen den C würfeln; geben die beiden Würfel die Summe 7, so soll der Gewinn dem A zufallen, geben sie die Summe 10, dem B; in allen anderen Fällen soll zwischen A und B gleich geteilt werden. Wie müssen sich die Einsätze des A und B verhalten?

---

[1]) Sammlung Göschen Nr. 53, § 23.

G sei der Gewinn, dann ist der Erwartungswert des A: $\frac{1}{6}G + \frac{1}{12} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}G = \frac{13}{24}G$; des B: $\frac{1}{12}G + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}G = \frac{11}{24}G$. Die Einsätze müssen sich folglich wie $13:11$ verhalten.

8. n Personen spielen mit einem Würfel und bezahlen je 1 ℳ Einsatz. Wer den höchsten Wurf tut, bekommt n ℳ; werfen mehrere gleichviel und mehr als die übrigen, so wird der Gewinn gleichmäßig verteilt. A beginnt und wirft a Augen; wie groß ist sein Erwartungswert?

Für jeden anderen Spieler ist die Wahrscheinlichkeit des Wurfes a gleich $1:6$, diejenige eines geringeren gleich $(a-1):6$. A muß mit $r-1$ $(1 \gtreqless r \gtreqless n)$ anderen Spielern teilen, wenn diese den Wurf a, die $n-r$ übrigen einen geringeren Wurf tun; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{r-1}\left(\frac{a-1}{6}\right)^{n-r} = \frac{(a-1)^{n-r}}{6^{n-1}}.$$

Nun kann aber die Zahl $r-1$ auf $\binom{n-1}{r-1}$ verschiedene Arten zustande kommen; mithin ist der Erwartungswert des A:

$$e_r = \binom{n-1}{r-1}\frac{(a-1)^{n-r}}{6^{n-1}} \cdot \frac{n}{r} = \binom{n}{r}\frac{(a-1)^{n-r}}{6^{n-1}}.$$

Um alle Fälle zu erschöpfen, in denen A gewinnt, muß man $E = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ bilden; die übrigen Fälle bleiben (vgl. S. 19) unberücksichtigt. Es ist aber:

$$e_0 + e_1 + \ldots + e_n = \frac{1}{6^{n-1}} \cdot [(a-1)+1]^n = \frac{a^n}{6^{n-1}},$$

$$e_0 = \frac{(a-1)^n}{6^{n-1}};$$

mithin:

$$E = \frac{a^n - (a-1)^n}{6^{n-1}} = 6 \cdot \left[\left(\frac{a}{6}\right)^n - \left(\frac{a-1}{6}\right)^n\right].$$

Hieraus folgt noch:

$$\lim_{n=\infty} E = \begin{cases} 6 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad a \begin{cases} = 6 \\ < 6 \end{cases};$$

in der Tat werden bei sehr großer Teilnehmerzahl etwa $\frac{n}{6}$ den Wurf 6 tun; auf jeden entfällt dann der Gewinn $n : n/6 = 6$ *ℳ*; die anderen gehen leer aus.

§ 7. Das „Jeu du Treize" und das Rencontrespiel; das Problem von Moivre.

1. Eine Urne enthält n (13), mit 1 bis n bezifferte Karten, welche nacheinander herausgezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine Karte an der durch ihre Ziffer bezeichneten Stelle erscheint?

Die n Elemente[1]) geben $n!$ Permutationen; dies ist die Zahl der möglichen Fälle. Hält man 1 fest, so geben die $n-1$ übrigen Elemente $(n-1)!$ Permutationen; 1 ist also nicht an seinem Platz in:

$$z_1 = n! - (n-1)!$$

Fällen. Unter diesen gibt es solche, wo 2 an seinem Platz ist; die $n-1$ übrigen Elemente geben dann entsprechend z_1 die Zahl von $(n-1)! - (n-2)!$ Fällen, wo 2, aber nicht 1 am richtigen Platz ist, wie man auch unmittelbar bestätigen kann. Somit ist:

$$z_2 = n! - 2(n-1)! + (n-2)!$$

---

[1]) Zur Verdeutlichung mag man etwa $n = 5$ wählen.

die Zahl der Fälle, wo weder 1 noch 2 an seinem Platz ist. Hält man 3 fest, so geben die $(n-1)$ übrigen Elemente entsprechend z_2 die Zahl von:

$$(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$$

Fällen, wo 3, aber weder 1 noch 2 am richtigen Platz sich befindet. Folglich gibt:

$$z_3 = n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!$$

die Zahl der Fälle an, wo keines der Elemente 1, 2, 3 den richtigen Platz einnimmt. Allgemein ist:

$$z_r = n! - \binom{r}{1}(n-1)! + \binom{r}{2}(n-2)! - \ldots \pm (n-r)!$$

die Zahl der Fälle, in denen keines der r ersten Elemente den durch seine Ziffer bezeichneten Platz hat; man erhärtet dies leicht durch den Schluß von r auf $r+1$. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist:

$$w_r = 1 - \binom{r}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{r}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)} - \ldots \pm \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Mit $r = n$ ergibt sich:

$$w_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}.$$

Bei dem „Jeu du Treize“ ist $n = 13$; aber schon für mäßig große n kann man $w_n = e^{-1}$ setzen. Die Wahrscheinlichkeit, welche wir suchen, ist $1 - w_n$ oder sehr nahezu

$$\frac{e-1}{e} = 0{,}6321\,.$$

Setzt man $n = 32$, so hat man den Fall des auch von Euler behandelten Rencontrespiels: A und B haben je ein Spiel von 32 Karten und decken gleichzeitig je ein Blatt auf; so oft gleiche Blätter erscheinen, findet ein

Rencontre statt. A wettet auf das Stattfinden, B auf das Ausbleiben eines Rencontres; wie verhalten sich ihre Aussichten, zu gewinnen?

Da für $n = 32$ der Unterschied zwischen w_n und e^{-1} unmerklich wird, so lautet die Antwort auf vorstehende Frage: die Wahrscheinlichkeiten des Gewinnens verhalten sich wie $(e - 1) : 1$; also rund wie $7 : 4$.

2. Das „Problem von Moivre" hat folgenden Wortlaut: In einer Urne sind p, mit 1 bis p bezeichnete Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in n Ziehungen je einer Kugel, die jedesmal zurückgelegt wird, die Summe s zu erhalten?

Der Ausdruck:

$$Y = (x + x^2 + \ldots + x^p)^n$$

liefert entwickelt als Koeffizienten von x^s die Zahl:

$$g = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}.$$

Hierbei sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Null oder positiv ganzzahlig; ferner:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots &= s, \\ \alpha + \beta + \gamma + \ldots &= n. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Summe s ist:

$$W = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} \cdot w^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots},$$

wenn $w = \frac{1}{p}$ die Wahrscheinlichkeit für den einmaligen Zug einer jeden Kugel ist, die mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnete Kugel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ mal gezogen wird und die obigen Bedingungen gelten.

Nun läßt sich Y in der Form:

$$Y = x^n)1 - x^p)^n\,(1 - x)^{-n} = x^n \cdot y$$

schreiben; folglich ist g der Faktor von x^{s-n} in der Entwicklung von y. Der binomische Satz ergibt:

$$(1-x^p)^n = 1 - \binom{n}{1} x^p + \binom{n}{2} x^{2p} - + \ldots,$$

$$(1-x)^{-n} = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n+1}{2} x^2 + \ldots$$

Hiernach wird:

$$g = \binom{s-1}{s-n} - \binom{s-1-p}{s-n-p}\binom{n}{1} + \binom{s-1-2p}{s-n-2p}\binom{n}{2} - + \ldots,$$

und da:

$$\binom{\sigma}{\alpha} = \binom{\sigma}{\sigma-\alpha}$$

ist, so hat man, wenn noch:

$$s-1 = s_0, \quad n-1 = n_0$$

gesetzt wird, einfacher:

$$g = \binom{s_0}{n_0} - \binom{s_0-p}{n_0}\binom{n}{1} + \binom{s_0-2p}{n_0}\binom{n}{2} - + \ldots$$

Die Reihe ist so lange fortzusetzen, als $s_0 - \lambda p \geqq n_0$ oder $s - n \geqq \lambda p$ ist für ein positives, ganzzahliges λ. Durch g ist auch:

$$W = g \cdot p^{-n}$$

bestimmt.

Beispiel: Für $p = 5$, $n = 4$, $s = 14$ erhält man $g = 68$, $W = 0{,}1088$.

Setzt man in obigen Formeln $p = 6$, so hat man zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür gefunden, durch einen Wurf mit n Würfeln die Summe s zu erhalten; ist z. B. $n = 3$, $s = 8$, so wird $W = \binom{7}{2} \cdot 6^{-3} = {}^{7}/_{72}$.

Laplace berechnete im Anschluß an die eben durchgeführten Betrachtungen die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß die Summe der Neigungen von 10 Planetenbahnen den durch Beobachtung gefundenen Wert von 92^0 neuer Teilung nicht überschreite; er erhielt $w = 12 \cdot 10^{-8}$, mit anderen Worten: es ist äußerst unwahrscheinlich, daß diese Neigungen ein Werk des Zufalls seien.

§ 8. Das Teilungsproblem; Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeits- und Differenzenrechnung.

1. A und B hören zu spielen auf, als dem A noch m, dem B noch n Partien zum Sieg fehlen; ihre Wahrscheinlichkeiten[1]), ein einzelnes Spiel zu gewinnen, sind p und q $(p + q = 1)$. Wie haben sie sich in den Gewinn zu teilen?

Anstatt der seither angewendeten kombinatorischen Behandlungsweise legen wir ein auf Pascal zurückzuführendes Verfahren zugrunde. Da der Gewinn im Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten zu teilen ist, welche A und B für den Sieg besitzen, so genügt es, diese Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln; diejenige für A sei $y_{m,n}$. Entweder nun gewinnt A die nächste Partie; dafür ist p die Wahrscheinlichkeit und es fehlen ihm noch $m - 1$ Partien zum Sieg, dann ist $p\,y_{m-1,n}$ die Wahrscheinlichkeit, daß A siegen wird. Oder aber verliert A beim nächsten Spiel; q ist hierfür die Wahrscheinlichkeit und dem B fehlen noch $n - 1$ Partien; in diesem Fall ist $q\,y_{m,n-1}$ die Wahrscheinlichkeit des Sieges für A. Daher läßt sich $y_{m,n}$ als vollständige Wahrscheinlichkeit angeben:

$$(\mathrm{Y}) \qquad y_{m,n} = p\,y_{m-1,n} + q\,y_{m,n-1}\,.$$

Hierbei ist offenbar:

$$y_{0,\lambda} = 1\,, \quad y_{\mu,0} = 0$$

1) Wie diese ermittelt sind, kommt nicht in Betracht.

für jedes positive, ganzzahlige λ, μ. Setzt man also $n = 1$, so bekommt man:

$$y_{11} = p, \quad y_{21} = p^2, \quad y_{31} = p^3, \quad \ldots,$$

ferner

$$y_{12} = p + pq, \quad y_{22} = p^2(1 + 2q), \quad \ldots$$

Auf diesem Wege kann man durch Rekursion jedes beliebige $y_{m,n}$ ermitteln; aber eine allgemeine Formel für $y_{m,n}$ erhält man zunächst nicht.

Um die mit (Y) bezeichnete Funktionalgleichung aufzulösen, setzen wir mit Lagrange[1]):

$$m = x, \quad n = t$$

und schreiben demgemäß statt (Y), indem wir zugleich jeden Zeiger um 1 erhöhen:

$$p\,y_{x,t+1} + q\,y_{x+1,t} - y_{x+1,t+1} = 0.$$

Lagrange zeigt nun mit Hilfe einer Reihenentwicklung, daß dieser Gleichung durch einen Ausdruck von folgender Form[2]) genügt wird:

$$y_{x,t} = p^x \left[1 + xq + \frac{x(x+1)}{2!} q^2 + \ldots\right];$$

dabei ist die Summe bis zu dem Glied mit q^{t-1} auszudehnen.

Ersetzt man wieder x, t durch ihre Werte m, n, so ergibt sich:

$$y_{m,n} = p^m \left[1 + mq + \frac{m(m+1)}{2!} q^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!} q^{n-1}\right];$$

---

[1]) Oeuvres, T. IV, p. 221 ff. Paris 1869.

[2]) Die obige Gleichung ist nur formal verschieden von derjenigen bei Lagrange.

wie man sieht, steht dieser Wert mit den Grenzbedingungen $y_{0,\lambda} = 1$, $y_{\mu,0} = 0$ im Einklang, man überzeugt sich auch leicht von der Übereinstimmung mit den S. 31 angegebenen speziellen Werten. Am kürzesten läßt sich das Ergebnis in der Form:

$$y_{m,n} = p^m \sum_{0}^{n-1} {}_r \binom{m+r-1}{r} q^r$$

darstellen. Die Wahrscheinlichkeit des Sieges für den anderen Spieler B erhält man durch Vertauschung von m, n und p, q:

$$z_{m,n} = q^n \sum_{0}^{m-1} {}_r \binom{n+r-1}{r} p^r .$$

Ist z. B. $m = 1$, $n = 2$, so wird:

$$y_{m,n} = p + pq\,, \quad z_{m,n} = q^2\,, \quad y_{m,n} + z_{m,n} = 1\,.$$

2. Lagrange führt a. a. O. eine weitere, minder einfache Lösung durch, welche unmittelbar an die Grundbegriffe der Differenzenrechnung anknüpft. Diese liefert für die Lösung von Wahrscheinlichkeitsproblemen eine Methode, deren Grundzüge wir — unter Beschränkung auf gewöhnliche Differenzengleichungen — kurz darlegen wollen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit y_x hänge von einer ganzzahligen Veränderlichen x ab und es sei eine Beziehung von der Form:

$$F(x, y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+r}) = 0$$

bekannt. Nun ergibt das Schema der Hauptreihe und ihrer Differenzenreihen[1]):

[1]) Sammlung Göschen Nr. 53, § 32.

$$\begin{array}{cccc} y_x & y_{x+1} & y_{x+2} & \cdots \\ & \Delta y_x & \Delta y_{x+1} & \cdots \\ & & \Delta^2 y_x & \cdots \end{array}$$

für $r = 1, 2, \ldots, r$:

$$y_{x+r} = y_x + \binom{r}{1} \Delta y_x + \binom{r}{2} \Delta^2 y_x + \cdots + \Delta^r y_x \, .$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werte in $F = 0$ ein, so erhält man eine gewöhnliche Differenzengleichung $r$ter Ordnung:

$$\Phi(x, y_x, \Delta y_x, \ldots, \Delta^r y_x) = 0 \, .$$

Kann man $F = 0$ oder $\Phi = 0$ integrieren, so ist auch das Wahrscheinlichkeitsproblem gelöst.

Sei insbesondere die lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstantem Koeffizienten vorgelegt:

$$F = y_{x+2} + 2\, a_1\, y_{x+1} + a_2\, y_x = 0 \, ,$$

so gehört zu ihr die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\, a_1 \lambda + a_2 = 0 \, .$$

Ist nun, was wir hier voraussetzen wollen:

$$a_1^2 - a_2 > 0 \, ,$$

so genügen der charakteristischen Gleichung zwei reelle verschiedene Werte λ_1, λ_2 und die allgemeine Lösung von $F = 0$ ist, wie man leicht bestätigt:

$$y_x = C_1 \cdot \lambda_1^x + C_2\, \lambda_2^x \, ,$$

wo C_1, C_2 zwei willkürliche Konstanten sind.

Laplace führte, um die Differenzengleichungen zu integrieren, den Begriff der erzeugenden Funktion u von y_x ein, nämlich für ganze positive x:

$$u = \Sigma\, y_x\, t^x \, ;$$

alsdann erzeugt:

$$u \cdot (a + b t^{-1}) = \Sigma(a y_x + b y_{x+1}) t^x$$

die Funktion $a y_x + b y_{x+1}$ usf. Indessen hat dieses Verfahren nur noch historische Bedeutung.

§ 9. Das Problem der Spieldauer und seine Lösung durch eine Differenzengleichung.

1. A besitzt m, B n ℳ, $(m + n = s)$; beide spielen die Partie zu 1 ℳ so lange, bis einer von beiden nichts mehr besitzt. Die Wahrscheinlichkeit, eine Partie zu gewinnen[1]), sei p für A und q für B, $(p + q = 1)$; man ermittle für jeden die Wahrscheinlichkeit, seinen ganzen Besitz dem Spiel zu opfern.

Sei y_x die gesuchte Wahrscheinlichkeit für B in dem Augenblick, wo er x ℳ besitzt; da B das nächste Spiel entweder verliert oder gewinnt, so ist:

$$y_x = p\, y_{x-1} + q\, y_{x+1}\,,$$

oder, wenn jeder Index um 1 erhöht wird:

$$q\, y_{x+2} - y_{x+1} + (1 - q) \cdot y_x = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung ist:

$$q\, \lambda^2 - \lambda + (1 - q) = 0$$

oder:

$$(\lambda - 1) \cdot [q(\lambda + 1) - 1] = 0\,.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = \frac{1 - q}{q} = \frac{p}{q}\,.$$

Daher wird die allgemeine Lösung:

$$y_x = C_1 + C_2 \cdot \lambda_2^x$$

---

[1]) Vgl. die Fußnote S. 30.

Die Grenzbedingungen sind offenbar:

$$y_0 = 1\,, \quad y_s = 0\,;$$

man eliminiert also C_1, C_2 mit Hilfe der Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_x & 1 & \lambda_2^x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda_2^s \end{vmatrix} = 0$$

und findet:

$$y_x = \frac{\lambda_2^s - \lambda_2^x}{\lambda_2^s - 1}\,.$$

Setzt man $x = n$, $\lambda_2 = p/q$ und $s = m + n$, so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für den Ruin des B:

$$y_n = \frac{p^n(p^m - q^m)}{p^{m+n} - q^{m+n}}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Ruin des A ist:

$$z_m = \frac{q^m(p^n - q^n)}{p^{m+n} - q^{m+n}}\,.$$

Hieraus folgt zunächst: $y_n + z_m = 1$; d. h. das Spiel kann nicht unentschieden bleiben; für $n = m$ vereinfachen sich die Formeln. Sei ferner:

α) $p > q$, $\lambda_2 > 1$. Kann man dann 1 gegenüber λ_2^s vernachlässigen, so ist:

$$y_n = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m;$$

ist also A erheblich geschickter als B, so hat B nur dann einige Aussicht, dem Ruin zu entgehen, wenn A im Vergleich mit B sehr wenig besitzt.

β) $p = q = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$. Hier wird y_n unbestimmt; die bekannte Regel[1]) ergibt:

---

[1]) **Sammlung Göschen Nr. 87, § 41.**

$$y_n = \frac{s\lambda_2^{s-1} - n\lambda_2^{n-1}}{s\lambda_2^{s-1}} = \frac{s-n}{s} = \frac{m}{s}.$$

Man findet dies auch durch Zurückgehen auf die Differenzengleichung, welche in diesem Fall die beiden partikulären Integrale $y_x = 1$, $y_x = x$ hat. Je kleiner also n gegen m ist, desto sicherer ist der Untergang des B.

γ) $p < q$, $\lambda_2 < 1$. Aus:

$$y_n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_2^s}{1 - \lambda_2^s}$$

folgt für unendlich zunehmendes s:

$$\lim_{s=\infty} y_n = \lambda_2^n = \left(\frac{p}{q}\right)^n;$$

ist also B der geschicktere Spieler, so entrinnt er dem Untergang um so eher, je größer sein Besitz ist, vgl. α).

2. Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß A spätestens mit einem bestimmten Spiel den gesamten Besitz des B an sich gebracht hat, so ist die Lösung erheblich schwieriger und gibt zu weitläufigen Rechnungen Anlaß, auf welche hier nicht eingegangen werden kann. Besonders die französischen Mathematiker des 18. Jahrhunderts haben dieser Aufgabe Untersuchungen gewidmet; als Ergebnis sei die Formel von Laplace[1]) angeführt, welche unter der Voraussetzung $m = \infty$ die Wahrscheinlichkeit angibt, daß B mit dem $(n + 2x)$ten Spiel seinen Besitz verloren haben wird:

$$y = p^n \sum_0^x A_x p^x q^x,$$

wobei

---

[1]) Théorie analytique des probabilités, p. 235. Paris 1812. = Oeuvres, T. 7, p. 238. Paris 1886.

$$A_0 = 1\,, \quad A_x = \frac{n(n+x+1)(n+x+2)\ldots(n+2x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x}$$

ist; für $x = 0$ ist die Formel leicht zu bestätigen.

§ 10. Das Petersburger Problem, der moralische Erwartungswert.

1. Die in der Überschrift genannte, zu einer gewissen Berühmtheit gelangte Aufgabe von N. Bernoulli führt auf ein zunächst befremdendes Ergebnis.

A wirft ein Geldstück in die Luft, zeigt es Wappen, so zahlt er an B 2 ℳ aus und das Spiel ist zu Ende; andernfalls wirft A noch einmal, erscheint jetzt Wappen, so zahlt er $2^2 = 4$ ℳ aus usf. Allgemein: wenn erst im $n$ten Wurf Wappen zum Vorschein kommt, so muß A dem B 2^n ℳ ausbezahlen. Wieviel muß B vor Beginn des Spieles dem A geben, damit das Spiel gerecht ist?[1])

Da die Wahrscheinlichkeit, erst mit dem $n$ten Wurf Wappen zu bekommen, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist, so hat B den in ℳ ausgedrückten Erwartungswert:

$$E = \frac{1}{2}\cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2^3 + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots\,;$$

mithin ist $E = \infty$; A kann also von B beliebig viel fordern, dieser aber wird nur eine bescheidene Summe für die Teilnahme an dem Spiel opfern wollen; hierauf darf A nicht eingehen.

2. Damit das Spiel zustande kommt, zeigte Poisson folgenden Weg. A ist nicht unendlich reich, sein Besitz,

---

[1]) Der Wortlaut der Aufgabe ist gegenüber dem ursprünglichen unwesentlich abgeändert; vgl. die Seite 38 angeführte Bearbeitung der Abhandlung von D. Bernoulli: Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis (1738).

einschließlich der Zahlung des B, sei $< 2^{p+1}$ ℳ, aber $\geqq 2^p$ ℳ; dann ist der Erwartungswert des B, falls A höchstens 2^p ℳ ausbezahlt:

$$E' = \frac{1}{2}\cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot 2^p + \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} \cdot 2^p + \ldots,$$

oder:

$$E' = p + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = p + 1 .$$

Besitzt etwa A 2000 ℳ, so ist $p = 10$ und $E' = 11$ ℳ.

3. D. Bernoulli führte[1]) den Begriff der moralischen Erwartung ein. Hat jemand das Vermögen x und wächst x um dx, so ist der „moralische Vorteil" dy dieser Zunahme proportional zu $\frac{dx}{x}$; ob dies immer zutrifft, soll unerörtert bleiben. Aus:

$$dy = c \cdot \frac{dx}{x}$$

folgt aber[2]):

$$y_1 - y = c \cdot \mathrm{Log} \frac{x_1}{x} .$$

Setzt man noch $c = 1$, $x_1 = x + \Delta x$ und ist w die Wahrscheinlichkeit des Zuwachses, so ist:

$$\mathfrak{e} = (y_1 - y)\, w = w \,\mathrm{Log} \frac{x + \Delta x}{x}$$

der moralische Erwartungswert; für $\Delta x = 0$ wird auch $\mathfrak{e} = 0$.

Ist x_0 das ursprüngliche, x das um den Einsatz ver-

---

1) Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen; herausgegeben von A. Pringsheim. Leipzig 1896.

2) Log bedeutet durchweg den natürlichen Logarithmus.

minderte Vermögen des B ($x \geqq 0$), so ist sein moralischer Erwartungswert:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{x+2}{x_0} + \frac{1}{4} \operatorname{Log} \frac{x+4}{x_0} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{Log} \frac{x+2^n}{x_0} + \dots;$$

$\mathfrak{E}$ ist also (vgl. S. 18) der Mittelwert der einzelnen Vorteile, da $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$ ist.

Setzt man:

$$\mathfrak{E} = \operatorname{Log} \frac{x+y}{x_0},$$

so ist y ein einmaliger Vermögenszuwachs, welcher gleichwertig ist mit dem aus dem Spiel zu erwartenden Gewinn. Mithin ist:

$$\text{(Y)} \quad x + y = (x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+4)^{\frac{1}{4}} \cdot \dots \cdot (x+2^n)^{\frac{1}{2^n}} \dots$$

Sei zunächst $x = 0$, so gilt für den zugehörigen Wert y_0:

$$\operatorname{Log} y_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{4} \operatorname{Log} 4 + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{Log} 2^n + \dots = K \operatorname{Log} 2;$$

hierbei ist:

$$K = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots,$$

folglich:

$$K - \tfrac{1}{2} K = 1, \quad K = 2; \quad y_0 = 4.$$

Multipliziert man (Y) beiderseits mit $u = x^{-1}$, so wird:

$$\text{(U)} \qquad 1 + u y = \prod_1^\infty (1 + 2^n u)^{\frac{1}{2^n}},$$

$$\operatorname{Log}(1+uy)=\sum_{1}^{\infty}u_n=\sum_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{Log}(1+2^n u)}{2^n};$$

da nun $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$ ist, so konvergiert sowohl die Reihe als das Produkt; man kann also aus u den Wert y finden; solange der Einsatz $x_0-x<y$ ist, bleibt $\mathfrak{E}>0$. Nebenstehende Tafel gibt einige Zahlenwerte.

u	x	y
∞	0	4,0
1	1	4,3
10^{-1}	10	5,5
10^{-2}	100	7,9
10^{-3}	1000	11

Da das Vermögen des A unberücksichtigt bleibt, so ist dies keine befriedigende Lösung des Petersburger Problems; hingegen hat das logarithmische Gesetz in der Wertlehre und Psychologie Eingang gefunden.

4. Buffon nahm auch die Erfahrung zu Hilfe, in 2048 Spielen mußte A durchschnittlich 10 ℳ, niemals über 512 ℳ ausbezahlen; der durchschnittliche Betrag wuchs langsam mit der Zahl der Spiele. Ändert man die Aufgabe dahin ab, daß A nicht 2^n, sondern $2\,n$ ℳ zahlen muß, so findet man 4 ℳ als Erwartungswert des B, da:

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 4+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 6+\ldots=4$$

ist; nach Buffons Zahlen wird die durchschnittliche Leistung des A in diesem Fall 3,95 ℳ.

§ 11. Geometrische Wahrscheinlichkeit; das Nadelproblem und andere Beispiele.

1. Die eigentümlichen Schwierigkeiten dieser Gruppe von Aufgaben lassen sich am besten aus einem Beispiel

ersehen, welches gewöhnlich als das Paradoxon von Bertrand bezeichnet wird. Die Frage ist folgende:

Gegeben ist ein Kreis vom Halbmesser 1; man zieht in ihm eine Sehne, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese größer als die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist?

Erste Lösung (Fig. 2). Sieht man den Endpunkt A als gegeben an und ist $\sphericalangle BOC = \pi/3$, so sind günstig diejenigen Fälle, wo der andere Endpunkt P der Sehne zwischen B und C liegt. Da wir gleichmäßige Verteilung der Punkte P auf der Kreislinie voraussetzen (§ 4), so ist:

$$w_1 = \frac{\operatorname{arc} BC}{\operatorname{arc} AB} = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

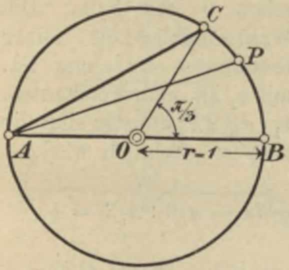

Fig. 2.

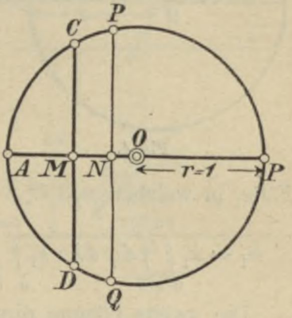

Fig. 3.

Zweite Lösung (Fig. 3). Wir nehmen an, die Sehne soll auf dem Halbmesser AO senkrecht stehen. Ist M die Mitte von AO, N die Mitte der Sehne, so sind günstig diejenigen Fälle, in welchen $ON < OM$ ist. Da nun die Punkte N die Strecke OA gleichmäßig erfüllen, so ist:

$$w_2 = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2}.$$

Der Grund des Widerspruches ist leicht zu sehen: die Voraussetzungen sind verschieden; wenn die Punkte P auf dem Kreisumfang gleichmäßig verteilt sind, so können dies nicht auch die Punkte N auf dem Durchmesser AB sein (vgl. die harmonische Bewegung).

Es ist nicht ohne Interesse, den einfachen Fall auch rechnerisch zu behandeln (Fig. 4).

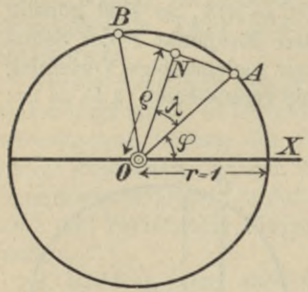

Fig. 4.

Bei der ersten Lösung kann man in voller Allgemeinheit die Sehne AP als bestimmt ansehen durch die Winkel φ und λ; OX ist eine feste Richtung, φ liegt zwischen 0 und 2π, λ zwischen 0 und $\pi/2$. Die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Annahme ist, mit k_1 als einer Konstanten, $k_1 \cdot d\varphi\, d\lambda$; günstig sind die Fälle, in welchen $\pi/3 \lesseqgtr \lambda \lesseqgtr \pi/2$ ist. Folglich wird

$$w_1 = k_1 \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi\, d\lambda : k_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi\, d\lambda = \pi/6 : \pi/2 = \tfrac{1}{3}\,.$$

Die zweite Lösung nimmt $\varphi + \lambda = \vartheta$ und $ON = \varrho$ als gegeben an; die Wahrscheinlichkeit irgendeiner Annahme ist $k_2 \cdot d\vartheta\, d\varrho$, für die günstigen Fälle ist $\varrho \leqq \frac{1}{2}$, also:

$$w_2 = k_2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} d\vartheta\, d\varrho : k_2 \int_0^{2\pi}\int_0^{1} d\vartheta\, d\varrho = \tfrac{1}{2}\,.$$

Die Verschiedenheit der Annahmen zeigt sich darin, daß die Integrale nicht ineinander überführbar sind; aus:

$$\vartheta = \varphi + \lambda\,, \quad \varrho = \cos\lambda$$

folgt nämlich:

$$\frac{\partial(\vartheta, \varrho)}{\partial(\varphi, \lambda)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sin\lambda \end{vmatrix} = -\sin\lambda\,;$$

somit ist:

$$\iint d\vartheta\, d\varrho = -\iint \sin\lambda\, d\varphi\, d\lambda\,;$$

das rechts stehende Integral ist verschieden von dem in der ersten Lösung auftretenden.

2. Eine Strecke a sei in drei Teile x, y, z zerlegt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man aus x, y, z ein Dreieck bilden kann?

Zeichnet man (Fig. 5) ein gleichseitiges Dreieck ABC

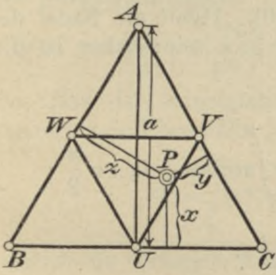

Fig. 5.

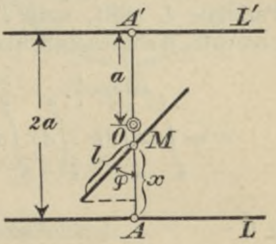

Fig. 6.

mit der Höhe a und fällt aus dem Punkt P im Innern Lote x, y, z auf die drei Seiten, so ist $x + y + z = a$. Wie man leicht sieht, muß

$$x \leqq a/2\,, \quad y \leqq a/2\,, \quad z \leqq a/2$$

sein, den $\left\{\begin{matrix}\text{möglichen}\\\text{günstigen}\end{matrix}\right\}$ Fällen entspricht also die Fläche von $\left\{\begin{matrix}\triangle\, ABC\\\triangle\, UVW\end{matrix}\right\}$, wenn U, V, W die Mitten von BC, CA, AB sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{1}{4}$.

Zu dem gleichen Ergebnis führt auch eine einfache stereometrische Betrachtung, bei welcher $\triangle ABC$ als Fläche eines regulären Oktaeders betrachtet wird, während x, y, z die Koordinaten eines Punktes dieser Fläche, bezogen auf den Oktaedermittelpunkt, sind.

3. Das Nadelproblem fragt nach der Wahrscheinlichkeit, daß eine Nadel von der Länge $2l$ eine unter einer Schar von Parallelen im Abstand $2a$ $(a > l)$ trifft (Fig. 6).

Die Bestimmungsstücke für die Lage der Nadel sind, wenn M die Mitte der Nadel ist, der senkrechte Abstand $OM = x$ $(a \geqq x \geqq 0)$ und der Winkel φ zwischen OM und der Nadel. $(\pi/2 \geqq \varphi \geqq 0)$. Damit die Nadel die Parallele L trifft, muß $l \cos\varphi \geqq x$ sein; daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \int_0^l dx \int_0^{\arccos\frac{x}{l}} d\varphi : \int_0^a dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \int_0^l \arccos\frac{x}{l}\, dx : a\frac{\pi}{2};$$

d. h.
$$w = \frac{2l}{a\pi}.$$

Die Fälle symmetrischer Lage der Nadel ändern w nicht.

4. In einem Kreis zieht man eine Sehne und nimmt zwei Punkte an; welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Punkte auf der gleichen Seite der Sehne liegen? (Fig. 7.)

Bestimmt man, wie bei der zweiten Lösung des Bertrandschen Paradoxons, die Sehne UV durch den Abschnitt AM des zu UV senkrechten Durchmessers AB und sind F_1, F_2 die Flächen der beiden entstandenen Segmente, so ist

$$\mathfrak{G} = \int_0^{2r} (F_1^2 + F_2^2)\, dx$$

das Maß der Mannigfaltigkeit der günstigen Fälle. Setzt man $\sphericalangle COV = \varphi$, $(OC \perp AB)$, so ist:

$$x = r(1 - \sin\varphi)\,,$$

$$dx = -r\cos\varphi\, d\varphi\,,$$

$$F_1^2 + F_2^2 = 2\,r^4[\pi^2/4 + (\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)^2]\,.$$

Die unschwierige Ausführung der Integration ergibt:

$$\mathfrak{G} = 2\,r^5\left(\pi^2 - \frac{128}{45}\right).$$

Das Maß der Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle ist:

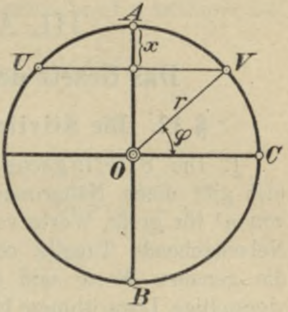

Fig. 7.

$$\mathfrak{M} = \int_0^{2r} (r^4\pi^2)\, dx = 2\,r^5\pi^2\,,$$

folglich die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \mathfrak{G}/\mathfrak{M} = 1 - \frac{128}{45\,\pi^2} = 0{,}712\,;$$

die Gegenwahrscheinlichkeit ist $w' = \dfrac{128}{45\,\pi^2} = 0{,}288\,.$

Das Ergebnis gilt jedoch nur, wenn die Sehne in der angegebenen Weise gezogen wird.

III. Abschnitt.

Das Gesetz der großen Zahlen.

§ 12. Die Stirlingsche Formel für n!

1. Die Stirlingsche Formel gibt einen Näherungswert von $n!$ für große Werte von n. Nebenstehende Tabelle enthält die genauen Werte und deren vierstellige Logarithmen bis zu $n = 10$. Für größere Beträge von n ist die Berechnung von $n!$ ziemlich mühsam; außerdem genügt in den Anwendungen häufig ein angenäherter Wert.

n	$n!$	$\log n!$
1	1	0.0000
2	2	0.3010
3	6	0.7782
4	24	1.3802
5	120	2.0792
6	720	2.8573
7	5040	3.7024
8	40 320	4.6055
9	362 880	5.5598
10	3 628 800	6.5598

Für jedes positive n gilt die Reihe:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots,$$

die auch in der Form:

$$N = \left(n + \frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots$$

geschrieben werden kann. Ersetzt man rechts alle Koeffizienten $3, 5, \ldots$ durch 3, zo zeigt die Summation der geometrischen Reihe, daß:

$$1 < N < 1 + \frac{1}{12\, n(n+1)},$$

also auch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen ist:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12\, n(n+1)}}$$

sein muß. Sei nun:

$$u_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)!\, e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}},$$

also:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

so geht die vorstehende Ungleichung über in:

$$1 < \frac{u_n}{u_{n+1}} < e^{\frac{1}{12\, n(n+1)}}.$$

Da aber

$$\frac{1}{12\, n(n+1)} = \frac{1}{12\, n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

ist, so ergibt sich:

$$u_n \cdot e^{-\frac{1}{12 n}} < u_{n+1}\, e^{-\frac{1}{12(n+1)}} < u_{n+1} < u_n .$$

Folglich nehmen mit wachsendem n die Zahlen u_n ab, die Zahlen $u_n' = u_n \cdot e^{-\frac{1}{12 n}}$ hingegen zu, aber so, daß $u_n' < u_n$ ist. Sei nun:

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} u'_n = a\,,$$

so liegt (Fig. 8) a beständig zwischen u_n und u'_n; es gilt also, wenn θ zwischen 0 und 1 liegt:

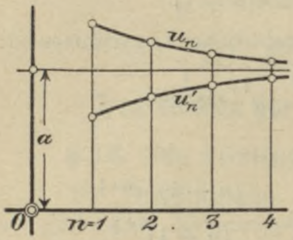

Fig. 8.

$$a = u_n \cdot e^{-\frac{\theta}{12n}}\,,$$

$$u_n = a \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\,,$$

mithin:

$$n! = a \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}\,.$$

2. Es handelt sich noch darum, a zu bestimmen. Die Formel von Wallis[1]) ergibt unmittelbar:

$$\lim_{n=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

oder auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Führt man hier den in 1. gefundenen Wert von $n!$ bezw. $(2n)!$ ein und vernachlässigt $\theta/12n$, so erhält man:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a\,n}{\sqrt{2n(2n+1)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,, \quad \text{d. h.} \quad a = \sqrt{2\pi}\,.$$

Damit ist die Stirlingsche Formel bewiesen:

$$\underline{n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}\,.}$$

Je größer n, desto genauer ist die Formel, d. h. desto kleiner ist der begangene Fehler im Verhältnis zu $n!$

[1]) Sammlung Göschen Nr. 88, § 25.

selbst. Für $n = 10$ findet man als Näherungswert etwa 3598700, der Fehler ist also rund 30100 oder 0,83 %; für $n = 20$ sinkt der prozentuale Fehler etwa auf die Hälfte dieses Wertes herab.

§ 13. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ und verwandte Integrale.

1. Das Integral:

$$J_0 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

hat einen Sinn, da $x^n e^{-x^2}$ für jedes n bei unendlich zunehmendem x nach Null konvergiert; ferner hat, da der Integrand eine gerade Funktion ist, das zwischen den Grenzen $\mp\infty$ genommene Integral den Wert $2\,J_0$. Wir betrachten mit Poisson das Doppelintegral:

$$\iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,;$$

die Gleichung $z = e^{-(x^2+y^2)}$ bedeutet eine Drehfläche, deren Meridianfigur (Glockenkurve) in Fig. 9a dargestellt ist. Geht man durch die Gleichungen

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta$$

zu Polarkoordinaten über, so wird das Flächenelement der XY-Ebene[1]) $r\,dr\,d\theta$; das Integral verwandelt sich in:

$$\iint e^{-r^2}\,dr\,d\theta\,.$$

Einerseits ist nun, wenn über einem Quadrat mit der Seite $2\,a$ (vgl. Fig. 9b) integriert wird:

$$J_1 = \int\limits_{-a}^{+a}\int\limits_{-a}^{+a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-a}^{+a} e^{-y^2}\,dy = \left[\int\limits_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx\right]^2;$$

[1]) Sammlung Göschen Nr. 88, § 51.

andererseits, wenn die Integration über eine Kreisfläche vom Halbmesser r erstreckt wird:

$$J_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^r e^{-r^2} r\,dr = \pi(1 - e^{-r^2}) .$$

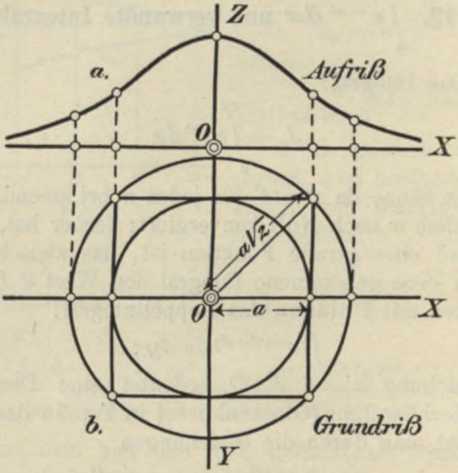

Fig. 9.

Offenbar liegt nun (Fig. 9b) J_1 zwischen denjenigen Werten von J_2, die zu $r = a$ und $r = a\sqrt{2}$ gehören. Mithin ist:

$$\pi(1 - e^{-a^2}) < \left[\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx\right]^2 < \pi(1 - e^{-2a^2}) .$$

Geht man zur Grenze $a = \infty$ über, so folgt:

$$4\,J_0^2 = \pi\,, \quad J_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,; \quad \text{d. h.}$$

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

2. Setzt man hier $x = h\,u$, so folgt:

$$\int_0^\infty e^{-h^2u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot h^{-1}\,.$$

Differentiiert man diese Gleichung p-mal nach dem Parameter h, so bekommt man, indem sich jedesmal der Faktor $2\,h$ auf die rechte Seite bringen läßt und die Minuszeichen sich wegheben:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-h^2u^2}u^{2p}\,du &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot h^{-(2p+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2p-1)}{2^p}\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot h^{-(2p+1)}\frac{(2p)!}{2^{2p}\cdot p!}\,.\end{aligned}$$

Nimmt man wieder x als Integrationsbuchstaben, so ist das Ergebnis:

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-h^2x^2}x^{2p}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{(2\,h)^{2p+1}}\cdot\frac{(2p)!}{p!}\,.$$

3. Sei:

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\,\alpha\,x)\,dx\,,$$

so ist:

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \int_0^\infty \sin(2\,\alpha\,x)\cdot d(e^{-x^2}) = -2\,\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\,\alpha\,x)\,dx = -2\,\alpha\,J,$$

wie man durch partielle Integration sogleich erkennt.

Hieraus folgt mit $\log J_0$ als Integrationskonstante:

$$\log J = -\alpha^2 + \log J_0 ,$$

wo J_0 (für $\alpha = 0$) aus (1) bekannt ist; man erhält hiernach:

$$J = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot e^{-\alpha^2} .$$

Wir setzen:

$$x = \lambda\sqrt{P}, \qquad 2\,\alpha\sqrt{P} = u$$

und finden:

$$(3) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-P\lambda^2}\cos(u\,\lambda)\cdot d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{P}}\cdot e^{-\frac{u^2}{4P}} .$$

Differentiiert man diese Gleichung 4 mal nach u, so ergibt eine leichte Rechnung:

$$(4) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^4\, e^{-P\lambda^2}\cos(u\,\lambda)\,d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{P}}\, e^{-\frac{u^2}{4P}}\cdot k(u) \\ \text{für} \quad k(u) = \dfrac{3}{4\,P^2} - \dfrac{3\,u^2}{4\,P^3} + \dfrac{u^4}{16\,P^4} . \end{cases}$$

Von dieser Beziehung wird in § 25 Gebrauch gemacht werden; für $u = 0$ hat k ein Maximum $k_0 = \dfrac{3}{4\,P^2}$.

§ 14. Das Wahrscheinlichkeitsintegral.

1. Die weiteren Untersuchungen werden häufig auf ein bestimmtes Integral $\Phi(t)$ führen, dessen Eigenschaften nun abgeleitet werden sollen. Setzen wir:

$$(1) \qquad \Phi(t) = \int\limits_0^t e^{-t^2}\,dt , \qquad \Psi(t) = \int\limits_t^{\infty} e^{-t^2}\,dt ,$$

so ist nach § 13, (1):

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Die Reihenentwicklung für e^{-t^2} ergibt die konvergente Reihe:

$$\Phi(t) = t - \frac{t^3}{3 \cdot 1!} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - + \dots; \tag{2}$$

allein diese Reihe ist nur für kleine Werte von t zur wirklichen Berechnung von $\Phi(t)$ brauchbar. Eine für große Werte von t taugliche Entwicklung erhält man wie folgt. Die partielle Integration liefert:

$$\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt = \int_t^\infty \frac{2\,t \cdot e^{-t^2}}{2\,t^{2n+1}}\,dt$$

$$= \frac{e^{-t^2}}{2\,t^{2n+1}} - \frac{2\,n+1}{2} \int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\,dt.$$

Für $n = 0, 1, 2, \dots$ bekommt man:

$$\Psi(t) = \frac{e^{-t^2}}{2\,t} - \frac{1}{2} \int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt,$$

$$\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-t^2}}{2\,t^3} - \frac{3}{2} \int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt,$$

$$\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt = \frac{e^{-t^2}}{2\,t^5} - \frac{5}{2} \int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^6}\,dt,$$

. . . .

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, -\frac{1}{2}, +\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}, \ldots$, so folgt:

$$(3) \qquad \Psi(t) = \frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2t^2)^2} - + \ldots\right].$$

Diese Reihe ist halbkonvergent; d. h. sie hat die Eigenschaft, daß der Rest R stets kleiner bleibt, als das letzte berücksichtigte Glied. Begnügt man sich z. B. mit den angegebenen Gliedern, so ist:

$$|R| = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^6} dt.$$

Da e^{-t^2} für zunehmendes t abnimmt, so ist das letztere Integral:

$$< e^{-t^2} \int_t^\infty \frac{dt}{t^6}, \quad \text{d. h.} \quad < \frac{e^{-t^2}}{5 \cdot t^5};$$

somit:

$$|R| < \frac{e^{-t^2}}{2t} \cdot \frac{1 \cdot 3}{(2t^2)^2}.$$

Aus $\Psi(t)$ erhält man auch $\Phi(t) = \frac{\pi}{2} - \Psi(t)$.

Geeignete Hilfsmittel zur Berechnung bietet auch die mechanische Quadratur.

Fig. 10 stellt für $t \geqq 0$ den Wertverlauf von e^{-t^2} und $\Phi(t)$ dar; im Anhang S. 121 ist eine dreistellige Tafel der Werte von:

$$(4) \qquad \theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

gegeben.

2. Über die **mechanische Quadratur** führen wir noch einen sogleich zu verwendenden Satz an. Ist $y = f(x)$, $y_n = f(n)$, so ergibt die Trapezformel[1]) die Näherung:

$$2\int_0^r f(x)\,dx = y_0 + 2\,y_1 + 2\,y_2 + \dots + 2\,y_{r-1} + y_r\,;$$

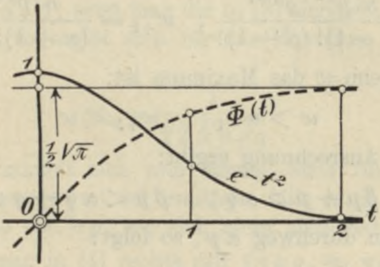

Fig. 10.

ist insbesondere $f(x)$ eine gerade Funktion, so kann man auch schreiben, indem man $y_{-r} - y_r (= 0)$ addiert:

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \sum_{-r}^{+r} y_n - y_r \quad \text{oder} \quad \sum_{-r}^{+r} y_n = \int_{-r}^{+r} f(x)\,dx + y_r\,;$$

die Summe kann also angenähert durch das Integral ersetzt werden, wenn man letzteres um y_r vermehrt.

§ 15. Das Theorem von **Bernoulli.**

1. Ein Ereignis E und das entgegengesetzte F haben die Wahrscheinlichkeiten p, q, wobei $p + q = 1$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n-maligem Versuch E

[1]) Sammlung Göschen Nr. 88, § 29.

in α, F in β Fällen $(\alpha+\beta=n)$ eintrifft, ist nach § 2, S. 12: .

$$w=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}\,p^{\alpha}\,q^{\beta}\,. \tag{1}$$

Betrachtet man w als Funktion von α, so wird w für ein bestimmtes α ein Maximum werden. Sei:

$$w_{-1}=\frac{n!\,p^{\alpha-1}\,q^{\beta+1}}{(\alpha-1)!\,(\beta+1)!}\,,\quad w_{+1}=\frac{n!\,p^{\alpha+1}\,q^{\beta-1}}{(\alpha+1)!\,(\beta-1)!}\,,$$

so muß, wenn w das Maximum ist:

$$w>w_{-1}\,,\qquad w_{+1}<w$$

sein. Die Ausrechnung ergibt:

$$\beta p+p>\alpha q\,,\qquad \beta p<\alpha q+q\,; \tag{2}$$

addiert man durchweg αp, so folgt:

$$np+p>\alpha>np-q\,.$$

Mithin liegt die ganze Zahl α zwischen zwei im allgemeinen nicht ganzzahligen Werten, deren Unterschied $p+q=1$ ist; hierdurch ist α im allgemeinen eindeutig bestimmt. Sind ausnahmsweise die Grenzen ganze Zahlen, so kann α jede dieser Zahlen sein; z. B. gibt die Annahme $n=101$, $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$ für α den Wert 68 oder 67.

Addiert man zu (2) überall βq, so findet sich:

$$nq-p<\beta<nq+q\,.$$

Mithin ist:

$$\alpha \text{ nahezu } = np\,,\qquad \beta \text{ nahezu } = nq\,. \tag{3}$$

Unter der Voraussetzung, daß n, α, β hinlänglich groß sind, kann w nach der Stirlingschen Formel berechnet werden. Man erhält:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!} = \frac{n^n}{\alpha^\alpha\,\beta^\beta}\sqrt{\frac{n}{2\,\pi\,\alpha\,\beta}}\,;$$

also wird aus (1):

(4) $$w = \left(\frac{n\,p}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{n\,q}{\beta}\right)^\beta \sqrt{\frac{n}{2\,\pi\,\alpha\,\beta}}\,.$$

Dies gilt noch für jedes mit $\alpha + \beta = n$ verträgliche Wertepaar α, β; setzt man die in (3) angegebenen Näherungen ein, so ergibt sich für das Maximum von w die Näherung:

(5) $$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,n\,p\,q}}\,.$$

2. Es handelt sich nun darum, auch für w selbst einen Näherungswert zu ermitteln, falls α, β Werte annehmen, die von $n\,p$, $n\,q$ sich nicht allzuweit entfernen. Erweitert man in (4) rechts mit $\sqrt{n\,p\,q}$, so wird:

$$w = w_0 \left(\frac{n\,p}{\alpha}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n\,q}{\beta}\right)^{\beta+\frac{1}{2}},$$

oder, da $\left(\frac{n\,p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\left(\frac{n\,q}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ von 1 wenig verschieden sind:

$$w = w_0 \left(\frac{n\,p}{\alpha}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{n\,q}{\beta}\right)^\beta,$$

$$\operatorname{Log} w = \operatorname{Log} w_0 - \alpha \operatorname{Log}\frac{\alpha}{n\,p} - \beta \operatorname{Log}\frac{\beta}{n\,q}\,.$$

Sei nun:

(6) $$\alpha = n\,p + \lambda\sqrt{n}\,, \quad \beta = n\,q - \lambda\sqrt{n}\,,$$

ferner:

$$A = \alpha \operatorname{Log}\frac{\alpha}{n\,p}\,, \quad B = \beta \operatorname{Log}\frac{\beta}{n\,q}\,.$$

Mit Hilfe der Reihenentwicklung für den natürlichen Logarithmus ergibt sich:

$$A = \lambda\sqrt{n}\cdot\left(1+\frac{\lambda}{p\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{2p\sqrt{n}}+\frac{\lambda^2}{3p^2n}-\ldots\right),$$

und bei Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung n^{-r}, wo $r \geqq \frac{1}{2}$ ist:

$$A = \lambda\sqrt{n}+\frac{\lambda^2}{2p}; \qquad \text{ebenso} \qquad B = -\lambda\sqrt{n}+\frac{\lambda^2}{2q}.$$

Folglich ist:

$$A+B = \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \frac{\lambda^2}{2pq};$$

also:

$$(7) \qquad w = w_0\cdot e^{-(A+B)} = w_0\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}.$$

Wir setzen jetzt $\lambda\sqrt{n} = x$ und verfügen über λ so, daß x eine ganze Zahl ist, ebenso ersetzen wir np durch die nächstliegende ganze Zahl α_0; für w_0 wird sein Wert (5) eingeführt und w durch y ersetzt. Alsdann ist genähert:

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}},$$

die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von E in $\alpha_0 \pm x$ Fällen. Nimmt man:

$$x = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm r,$$

so ist $\sum\limits_{-r}^{+r}{}' y_n$ die vollständige Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von E in mindestens $\alpha_0 - r$ und höchstens $\alpha_0 + r$ Fällen; nach § 14, S. 53 kann man dafür schreiben:

$$(8)\qquad w_{-r}^{+r} = \int\limits_{-r}^{+r} \frac{e^{-\frac{x^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}\,dx + \frac{e^{-\frac{r^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}\,.$$

Um vollends auf das Wahrscheinlichkeitsintegral zu kommen, setzen wir:

$$(9)\qquad \frac{x}{\sqrt{2npq}} = t\,, \qquad \frac{r}{\sqrt{2npq}} = \gamma\,;$$

dann wird, wenn $\theta(\gamma)$ die in § 14, (4) angegebene Bedeutung hat:

$$(10)\qquad w_{-r}^{+r} = \theta(\gamma) + w_0\, e^{-\gamma^2}\,.$$

Für einigermaßen beträchtliche Werte von n kann man in (8) und (10) das zweite Glied rechts unterdrücken.

Die Gleichungen (3), (5) und (10) bilden zusammen das Theorem von J. Bernoulli[1]): (3) gibt an, für welches Wertepaar α_0, β_0 die Wahrscheinlichkeit des α, β-maligen Eintreffens von E, F das in (5) angegebene Maximum w_0 erreicht, (10) enthält eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, daß E in mindestens $\alpha_0 - r$, höchstens $\alpha_0 + r$ Fällen eintrifft, wobei $\gamma = \dfrac{r}{\sqrt{2npq}}$ ist.

§ 16. Folgerungen aus dem Theorem von Bernoulli, das Gesetz der großen Zahlen.

1. Zunächst soll ein Zahlenbeispiel zu den Formeln des § 15 durchgeführt werden. Wir wählen $n = 100$; $p = 0{,}7$; $q = 0{,}3$; dann wird $\alpha_0 = 70$, $\beta_0 = 30$; $w_0 = 0{,}087$. Sei ferner $r = 5$, so ergibt sich $\gamma = 0{,}772$, hieraus nach S. 121 $\theta(\gamma) = 0{,}725$, $w_0 \cdot e^{-\gamma^2} = 0{,}048$, $w_{-r}^{+r} = 0{,}773$. Mit dieser Wahrscheinlichkeit steht also

[1]) Der Satz wurde erst von Laplace vollständig aufgestellt.

zu erwarten, daß das Ereignis E in wenigstens 65 und höchstens 75 Fällen eintreffen werde.

Die Ergebnisse werden noch anschaulicher, wenn man von einem bestimmten Wert von $\theta(\gamma)$, nämlich $\theta(\gamma) = \frac{1}{2}$ ausgeht, der zugehörige Wert $\gamma = 0{,}477$ sei mit ϱ bezeichnet. Soll nun $w_{-r}^{+r} = \frac{1}{2}$ werden, so erhält ϱ eine geringfügige Verbesserung $\varDelta\varrho$, die in dem Zusatzglied der Formel (10) unberücksichtigt bleiben kann. Man hat also:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho+\varDelta\varrho} e^{-t^2}\, dt + w_0 \cdot e^{-\varrho^2}$$

oder

$$0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\varrho}^{\varrho+\varDelta\varrho} e^{-t^2}\, dt + w_0 \cdot e^{-\varrho^2}.$$

Aber auch für das Integral kann e^{-t^2} konstant $= e^{-\varrho^2}$ angenommen werden; somit ist:

$$\varDelta\varrho = -\frac{w_0\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2npq}}.$$

In obigem Beispiel wird $\varDelta\varrho = -0{,}077$; $\gamma = \varrho + \varDelta\varrho = 0{,}400$; hierzu gehört $r = 2{,}6$.

2. Wir wollen nun n so groß wählen, daß man ohne Schaden der Genauigkeit $\varDelta\varrho$ vernachlässigen kann. Bezeichnet man mit u den zu $\gamma = \varrho$ gehörigen Wert von r, so folgt: $u = \varrho\sqrt{2npq}$. Nun wird $pq = p(1-p)$ ein Maximum für $p = q = \frac{1}{2}$, und da $\varDelta\varrho$ stets < 0 ist, so wird:

$$u = \varrho\sqrt{\frac{n}{2}} = 0{,}337\sqrt{n}$$

der größte Wert von r unter der Voraussetzung $w_{-r}^{+r} = \frac{1}{2}$. Für $n = 4040$ wird z. B. in runder Zahl $u = 21$; also kann man 1 gegen 1 wetten, daß bei 4040 Würfen mit einer Münze mindestens 1999 mal und höchstens 2041 mal Wappen fällt. Bei Buffons Versuch (vgl. S. 40) ergab sich die Zahl 2048.

Wie man sieht, wächst u zugleich mit n, aber nicht wie n selbst, sondern nur wie $\sqrt{n}$.

3. Kehren wir nochmals zu den Endformeln des § 15 zurück; das Zusatzglied soll vernachlässigt und γ als gegeben betrachtet werden. Die relative Häufigkeit von E ist dann zwischen den Grenzen $\frac{\alpha_0 \mp r}{n}$ enthalten, mithin ist:

$$\varDelta = \pm \frac{r}{n} = \pm \gamma \cdot \sqrt{\frac{2pq}{n}}$$

die zu erwartende Abweichung gegenüber $\frac{\alpha_0}{n}$. Nun ist schon für $\gamma = 2$ der Wert $\theta(\gamma)$ von 1 sehr wenig verschieden; läßt man also n unbegrenzt wachsen, so kann man mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit die Zahl $\varDelta$ unter jede angegebene Grenze herabdrücken. Dies ist der genaue Ausdruck des Gesetzes der großen Zahlen.

Es liegt nahe, die Erfahrung zum Vergleich heranzuziehen, und dies ist auch in umfangreichem Maß geschehen (Lotterien, Versuche mit Münzen, Würfeln u. a.). Hierbei kann jedoch schon für ein kleines n zufällig $\varDelta = 0$ sein und für ein großes n sich ein Wert von $\varDelta$ ergeben, welcher den erwarteten erheblich übertrifft. Ferner setzen z. B. unsere Formeln ideale Würfel voraus, bei denen alle Würfe gleich möglich sind; von den zu den Versuchen benutzten Würfeln gilt dies sicher nicht. Ein minder anfechtbares Beispiel liefert die Verteilung der Endziffern einer Zahlentafel, obschon auch diese kein Werk des Zufalls sind; so enthält die in den fünfstelligen Tafeln von F. G. Gauß S. 118—120 angegebene Sehnentafel 109 mal die Endziffer 0, der Theorie nach sollte diese $0{,}1 \cdot 1080 = 108$ mal auftreten (vgl. S. 7).

Erwähnt sei noch, daß Poisson dem Theorem von Bernoulli eine Erweiterung für den Fall gegeben hat, daß sich die Wahrscheinlichkeiten während der Versuche ändern; wir können jedoch hierauf nicht eingehen.

IV. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeit auf Grund der Erfahrung.

§17. Wahrscheinlichkeit der Ursachen; Beispiele hierzu.

1. Es seien r Urnen $U_1, U_2, \ldots, U_r$ vorhanden, deren jede eine Anzahl von weißen Kugeln enthält; für jede Urne U_i sei die Wahrscheinlichkeit w_i des Zuges einer weißen Kugel bekannt. Jemand tritt an die Urnen heran, zieht eine Kugel und teilt mir mit, daß sie weiß ist. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel der Urne U_i entstammt?

Will man die Frage auf den Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückführen, so nehme man an, daß die Urne U_i im ganzen n_i Kugeln, darunter a_i weiße enthält. Nun vermehrt man die Kugeln unter Beibehaltung ihres Zahlenverhältnisses so, daß:

$$(1) \qquad \lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2 = \ldots = \lambda_r n_r = n$$

wird; hierdurch ändert sich an den Wahrscheinlichkeiten nichts. Dann ist die Zahl der günstigen Fälle $\lambda_i a_i$, diejenige der möglichen:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r n_r ,$$

daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W_i = \frac{\lambda_i a_i}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r n_r} .$$

Ersetzt man hier die Größen λ durch ihre aus (1) folgenden Werte, hebt n weg und beachtet, daß $a_i : n_i = w_i$ ist, so folgt:

$$(2) \qquad W_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + \ldots + w_r}.$$

W_i erscheint hier als relative Wahrscheinlichkeit, was sich auch unmittelbar begründen läßt. Schon das in § 1, S. 8 erwähnte Beispiel läßt sich nach (2) behandeln; die dortige Frage ist gleichbedeutend mit der, ob die Goldmünze aus dem Kästchen B stammt; nun ist $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{1}{2}$, also $W = \frac{1}{2} : (1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$.

Es kann vorkommen, daß für die Wahl der Urne U_i eine besondere Wahrscheinlichkeit u_i besteht, etwa wenn die Urnen mit verschiedenem Anstrich versehen sind und die Versuchsperson bestimmte Farben bevorzugt. In solchen Fällen muß man in (2) die Wahrscheinlichkeit w_i ersetzen durch die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $u_i w_i$; das Ergebnis ist alsdann:

$$(3) \qquad W_i' = \frac{u_i w_i}{u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_r w_r}.$$

Um die allgemeine Bedeutung dieser Formel übersichtlich darzustellen, bedienen wir uns der in § 3 eingeführten Bezeichnungsweise; unter den U_i verstehen wir Ursachen, die einander ausschließen und deren jede das Ereignis E herbeiführen kann; $W(A, B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß A unter der Voraussetzung B eintrifft. Gl. (3) lautet dann:

$$W(U_i, E) = \frac{W(U_i) \cdot W(E, U_i)}{W(U_1) \cdot W(E, U_1) + \ldots + W(U_r) \cdot W(E, U_r)}$$

für Gl. (2) kommen die $W(U_i)$ in Wegfall.

2. Eine Urne enthält weiße und schwarze Kugeln in der Gesamtzahl n; der erste Zug liefert eine weiße Kugel, welche wieder zurückgelegt wird; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, α) daß m weiße Kugeln vorhanden sind, β) daß der zweite Zug nochmals eine weiße Kugel gibt?

α) Enthält die Urne $1, 2, \ldots, n$ weiße Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu bekommen: $1/n, 2/n, \ldots, n/n$; die Summe dieser Zahlen ist $n(n+1) : 2n = (n+1) : 2$.

Gl. (2) gibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit; der Zähler ist $m : n$, der Nenner $(n+1) : 2$, also:

$$W_m = \frac{2m}{n(n+1)}.$$

β) Hier ist die Wahrscheinlichkeit, daß m weiße Kugeln vorhanden sind und der zweite Zug wieder eine weiße Kugel gibt:

$$W_m \cdot \frac{m}{n} = \frac{2m^2}{n^2(n+1)} = P_m.$$

Hieraus folgt die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \frac{2}{n^2(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

d. h. $$P = \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n},$$

also:

$$\lim_{n=\infty} P = \frac{2}{3}.$$

Würde die gezogene Kugel nicht zurückgelegt, so würde man erhalten:

$$P_m = \frac{2m(m-1)}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}, \qquad P = \frac{2}{3}.$$

3. Bei der eben durchgeführten Rechnung setzten wir voraus, daß das Vorhandensein jeder Anzahl von weißen Kugeln gleich wahrscheinlich sei. Wir wollen jetzt annehmen, die Urne sei in folgender Weise gefüllt worden: A hat eine Münze n-mal in die Luft geworfen, je nachdem sie Schrift oder Wappen zeigte, hat er in die Urne eine weiße oder schwarze Kugel gelegt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein von r weißen Kugeln (§ 2):

$$u_r = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Diesmal muß Gl. (3) benutzt werden; der Zähler ist:

$$u_m \cdot \frac{m}{n} = \binom{n}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{m}{n} = \binom{n-1}{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

der Nenner:

$$\frac{1}{n}\left[\binom{n}{1}\cdot 1 + \binom{n}{2}\cdot 2 + \ldots + \binom{n}{n}\cdot n\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Differentiiert man die Identität:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

nach x und setzt $x = 1$, so erkennt man, daß der in eckigen Klammern stehende Ausdruck den Wert $n \cdot 2^{n-1}$ hat. Mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit unter der neuen Annahme:

$$W'_m = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \binom{n-1}{m-1}.$$

Für $n = 6$, $m = 3$ wird $W_m = \frac{1}{7}$, $W'_m = \frac{5}{16}$.

§ 18. Stetig veränderliche Ursachen.

1. Der Fall einer stetig veränderlichen Ursache kommt häufig in folgender Form vor. Ein Ereignis E habe die unbekannte Wahrscheinlichkeit x; in $n = \alpha + \beta$ Fällen ist E tatsächlich α-mal eingetroffen und β-mal ausgeblieben; dieses Ereignis F hat, da eine bestimmte Reihenfolge vorliegt, die Wahrscheinlichkeit a priori:

$$w = x^{\alpha}(1 - x)^{\beta} . \tag{1}$$

Man kann nun x als Ursache von F auffassen; x ist zwischen 0 und 1 enthalten und stetig veränderlich. Dann ist die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, x habe bei den n Versuchen zwischen x und $x + dx$ gelegen, proportional zu $w \cdot dx$, also etwa $k \cdot w \cdot dx$. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, x habe zwischen den Grenzen a, b $(a < b)$ gelegen:

$$W = k\int_a^b w\,dx .$$

Für $a = 0$ und $b = 1$ muß $W = 1$ sein; also:

$$1 = k\int_0^1 w\,dx .$$

Durch Division wird k eliminiert; es folgt:

$$W = \int_a^b w\,dx : \int_0^1 w\,dx . \tag{2}$$

Diese, zu § 17, (2) analoge Formel wurde unter der Annahme aufgestellt, daß alle Werte von x gleich wahrscheinlich seien. Kommt hingegen jedem Wert von x eine besondere, als Funktion von x zu betrachtende Wahrscheinlichkeit u zu, so tritt an Stelle von w die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit uw; die Gl. (2) ist zu ersetzen durch:

$$W' = \int_a^b u\,w\,dx : \int_0^1 u\,w\,dx\,. \tag{3}$$

Dies ist die Übertragung von § 17, (3) auf den Fall der stetig veränderlichen Ursache; auch diese Formel läßt sich verdeutlichen, wenn man die Zeichen:

$$u = W(x)\,, \qquad w = W(F, x)$$

einführt.

2. Wir wollen noch feststellen, für welchen Wert der Veränderlichen x der Betrag von w möglichst groß wird. Differentiiert man (1) logarithmisch und setzt die Ableitung $= 0$, so folgt:

$$\frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{1-x} = 0\,,$$

d. h.

$$x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{n}\,, \qquad 1 - x = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{n}\,; \tag{4}$$

daß diese Werte ein Maximum von w bedingen, ist leicht ersichtlich. Man hat also das Ergebnis: w wird ein Maximum, wenn man für x und $1 - x$ die Wahrscheinlichkeiten a posteriori wählt.

3. Zum Schluß berechnen wir das in (2) auftretende Integral:

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^1 w\,dx = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta\,dx\,. \tag{5}$$

Die Integration nach Teilen liefert sogleich:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha+1}\int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\,.$$

Beachtet man die Identität $x = 1 - (1 - x)$, so wird der letzte Integrand:

$$x^\alpha (1-x)^{\beta-1} - x^\alpha (1-x)^\beta ,$$

infolgedessen ist:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha + 1} J(\alpha, \beta - 1) - \frac{\beta}{\alpha + 1} J(\alpha, \beta)$$

und

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha + \beta + 1} J(\alpha, \beta - 1) .$$

Setzt man diese Schlußweise fort, bis man bei:

$$J(\alpha, 0) = \frac{1}{\alpha + 1}$$

angelangt ist, so findet sich:

$$(6) \quad J(\alpha, \beta) = \frac{\beta!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha!\,\beta!}{(n+1)!} .$$

Schreibt man statt dessen:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\alpha!\,\beta!}{n!}$$

und wendet die Stirlingsche Formel an, so wird:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{2\pi\alpha\beta}{n}} \cdot \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\beta}{n}\right)^\beta .$$

Für große n kann man $n + 1$ durch n ersetzen und hat die Näherungsformel:

$$(7) \qquad J(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{n}\right)^\beta \cdot \sqrt{\frac{2\pi\alpha\beta}{n^3}} .$$

§ 19. Das Theorem von Bayes.

1. Die vorstehenden Entwicklungen führen unmittelbar auf den in der Überschrift genannten Satz. Unter der

Annahme, daß alle Werte von x gleich möglich sind, suchen wir diejenigen Beträge von W, welche zu einem in der Nachbarschaft von $p = \alpha/n$ liegenden Wert von x gehören.

Man setzt also in § 18, (2): $a = p - \varepsilon$, $b = p + \varepsilon$, wo ε eine kleine Größe bedeutet; dann ist nur noch das erste Integral Z auszuwerten.

Sei: $x = p + z$, $q = 1 - p = \dfrac{\beta}{n}$, so wird:

$$Z = \int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon} w\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (p+z)^\alpha (q-z)^\beta\,dz$$

$$= p^\alpha q^\beta \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left(1+\frac{z}{p}\right)^\alpha \left(1-\frac{z}{q}\right)^\beta dz\,.$$

Da z eine kleine Zahl ist, so kann man:

$$\operatorname{Log}\left(1+\frac{z}{p}\right)^\alpha = \alpha\left(\frac{z}{p} - \frac{z^2}{2p^2}\right),$$

$$\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{q}\right)^\beta = -\beta\left(\frac{z}{q} + \frac{z^2}{2q^2}\right)$$

setzen; also wird der Logarithmus des letzten Integranden:

$$z\left(\frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{q^2}\right) = -\frac{n^3 z^2}{2\alpha\beta}\,.$$

Sei nun:

$$z\sqrt{\frac{n^3}{2\alpha\beta}} = t\,,\quad \varepsilon\sqrt{\frac{n^3}{2\alpha\beta}} = \gamma\,,\quad dz = dt\sqrt{\frac{2\alpha\beta}{n^3}}\,,$$

so folgt:

$$Z = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{n}\right)^\beta \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{n^3}} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-t^2}\,dt\,,$$

oder einfacher nach § 18, (7) und § 14, (4):

$$Z = J(\alpha, \beta) \cdot \theta(\gamma) .$$

Nun ist $J(\alpha, \beta)$ das zweite Integral in § 18, (2); mithin ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W = \theta(\gamma) .$$

Der Sinn dieses, nach Bayes benannten Satzes ist folgender: ist das Ereignis E unter n Fällen α-mal eingetroffen und β-mal ausgeblieben, so ist die Wahrscheinlichkeit a posteriori oder relative Häufigkeit von E, nämlich $\alpha : n$, zugleich die nächstliegende Annahme für die unbekannte Wahrscheinlichkeit a priori, welche dem Ereignis E zukommt; eine Abweichung ε von $\alpha : n$ ist mit der Wahrscheinlichkeit $\theta(\gamma)$ zu erwarten, wo γ den oben angegebenen Wert hat.

2. Da α, β im allgemeinen mit n von gleicher Größenordnung sind, so kann man über n so verfügen, daß zu einem gegebenen ε die Wahrscheinlichkeit $\theta(\gamma)$ der Einheit beliebig nahe kommt; dieser, auf das Theorem von Bayes gegründete Schluß ist die Umkehrung des Gesetzes der großen Zahlen.

Sei, um noch ein Zahlenbeispiel durchzuführen, $\alpha = 6 \cdot 10^3$, $\beta = 4 \cdot 10^3$, $n = 10^4$, $\varepsilon = 10^{-2}$, so wird:

$$\gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{10^6}{48}} = \frac{10}{\sqrt{48}} = 1{,}44 \; ; \qquad \theta(\gamma) = 0{,}96 \; ;$$

man kann also 24 gegen 1 wetten, daß die Wahrscheinlichkeit a priori zwischen 0,59 und 0,61 enthalten war; nimmt man hingegen unter sonst gleichen Voraussetzungen $\varepsilon = 10^{-3}$, so ergibt sich $\gamma = 0{,}144$, $\theta(\gamma) = 0{,}161$; erst für $\alpha = 6 \cdot 10^5$, $\beta = 4 \cdot 10^5$, $n = 10^6$ gehört zu $\varepsilon = 10^{-3}$ wieder der Wert $\theta(\gamma) = 0{,}96$. Will man daher eine

Wahrscheinlichkeit auf empirischem Weg mit einiger Genauigkeit bestimmen, so muß die Zahl der Versuche sehr groß sein.

§ 20. Wahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse.

1. Nach § 17, (3) ist, wenn alle Buchstaben ihre Bedeutung beibehalten:

$$W_i' = \frac{u_i w_i}{u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_r w_r}$$

die Wahrscheinlichkeit a posteriori der Ursache U_i. Ein bevorstehendes Ereignis G möge aus jeder der Ursachen U_i mit der Wahrscheinlichkeit a priori v_i hervorgehen können; dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß G aus U_i entspringen wird: $v_i W_i'$, mithin die vollständige Wahrscheinlichkeit von G:

$$\mathfrak{W} = v_1 W_1' + v_2 W_2' + \ldots + v_r W_r',$$

oder:

$$(1) \qquad \mathfrak{W} = \frac{u_1 v_1 w_1 + u_2 v_2 w_2 + \ldots + u_r v_r w_r}{u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_r w_r}.$$

Die Formel vereinfacht sich, wenn alle u_i gleich sind.

Eine Urne enthalte 3, schwarze oder weiße Kugeln; 3 Versuche, mit jedesmaligem Zurücklegen der Kugel, ergaben 2 weiße, 1 schwarze Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Versuch eine weiße Kugel liefert?

Als gleich wahrscheinliche Ursachen U_i sind anzusehen das Vorhandensein entweder von 2 weißen, 1 schwarzen oder von 1 weißen, 2 schwarzen Kugeln. Das Versuchsergebnis hat in dem einen oder anderen Fall die Wahrscheinlichkeit a priori:

$$w_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}, \qquad w_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}.$$

Aus U_1 geht das künftige Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit $v_1 = \frac{2}{3}$, aus U_2 mit der Wahrscheinlichkeit $v_2 = \frac{1}{3}$ hervor; die u_i fallen weg, also ist nach (1):

$$\mathfrak{W} = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{3(4+2)} = \frac{5}{9}.$$

2. Sind, wie in § 18, u, v, w Funktionen einer zwischen 0 und 1 stetig veränderlichen Wahrscheinlichkeit x, so geht (1) über in:

$$\mathfrak{W} = \int_0^1 u\,v\,w\,dx : \int_0^1 u\,w\,dx. \tag{2}$$

Auch hier tritt eine Vereinfachung ein, wenn u konstant ist.

3. Die wichtigste Anwendung ist folgende. Ein Ereignis ist in $n = \alpha + \beta$ Fällen α-mal eingetroffen, β-mal ausgeblieben; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in weiteren $n_1 = \alpha_1 + \beta_1$ Fällen das Ereignis α_1-mal eintreffen, β_1-mal ausbleiben wird?

Wir gehen von (2) unter Annahme eines konstanten Wertes von u aus; dann ist:

$$w = x^\alpha (1-x)^\beta, \qquad v = \frac{n_1!}{\alpha_1!\,\beta_1!} \cdot x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1};$$

der Koeffizient bei v ist beigefügt, da wir über die Reihenfolge der zukünftigen Fälle nichts wissen; ein derartiger Faktor bei w würde das Ergebnis nicht beeinflussen.

Mit Hilfe von § 18, (6) lassen sich die in (2) auftretenden Integrale, aus welchen u wegfällt, sogleich ausführen; man erhält die von C o n d o r c e t aufgestellte Formel:

$$\mathfrak{W} = \frac{(\alpha+\alpha_1)!\,(\beta+\beta_1)!\,(n+1)!\,n_1!}{\alpha!\,\alpha_1!\,\beta!\,\beta_1!\,(n+n_1+1)!}. \tag{3}$$

Die Formel kann auch in Binomialkoeffizienten geschrieben werden. Nimmt man $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $n_1 = n$ an und benutzt die Stirlingsche Formel, so ergibt sich, da $(n+1):(2n+1)$ für unbegrenzt wachsendes n nach $1:2$ konvergiert:

$$\frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2} = \frac{2^{2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}}, \quad \frac{(2\beta)!}{(\beta!)^2} = \frac{2^{2\beta}}{\sqrt{\beta\pi}}, \quad \frac{(n+1)!\,n!}{(2n+1)!} = \frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n+1}};$$

mithin:

$$\mathfrak{W}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\alpha\beta\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi n p q}}, \tag{4}$$

wenn $p = \alpha : n$, $q = \beta : n$ ist. Vergleicht man dies mit § 15, (5), so wird:

$$w_0 = \mathfrak{W}_0 \sqrt{2}; \tag{5}$$

die Verschiedenheit der Ergebnisse rührt davon her, daß in § 15 p, q die sicher bekannten Wahrscheinlichkeiten a priori waren, wogegen in (4) p, q die aus n Versuchen ermittelten Wahrscheinlichkeiten a posteriori sind.

Ist allgemein $n_1 = \lambda n$, $\alpha_1 = \lambda\alpha$, $\beta_1 = \lambda\beta$, so ergibt eine dem § 15 entsprechende Untersuchung, daß man in den dortigen Gleichungen (5), (9) und (10) n, w_0, w_{-r}^{+r} durch $n_1(\lambda+1)$, $\mathfrak{W}_0$, $\mathfrak{W}_{-r}^{+r}$ ersetzen muß; $\mathfrak{W}_{-r}^{+r}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses in $\alpha_1 - r$ bis $\alpha_1 + r$ Fällen. Je größer also n_1 gegen n ist, desto größer wird λ und desto unsicherer die Vorhersagung.

§ 21. Empirische Wahrscheinlichkeitsbestimmung.

Wie wir schon in § 1 sahen, wird die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit a priori erschwert durch die Forderung der Gleichwertigkeit der möglichen Fälle, welch letztere kaum jemals sicher feststehen dürfte. Beim Würfel kann die Bearbeitung der Würfelflächen, die Art des Würfelns, die Beschaffenheit des Spieltisches einen Einfluß ausüben; beim Zug aus der Urne können die Kugeln mehr oder weniger gut gemischt worden sein; die Zahl der Endnullen auf einer Seite der Logarithmentafel ist durch die Eigenschaften der Zahlen völlig bestimmt. Wenn wir trotzdem die Fälle als gleichwertig behandeln, so tun wir dies, weil wir über ihre Beschaffenheit nichts Näheres wissen, und wir dürfen es tun, solange nicht das Ergebnis unserer Überlegung in auffallenden Widerspruch zu der Erfahrung tritt. Beobachten wir, daß ein Ereignis bald eintrifft, bald ausbleibt, so sagen wir, dies sei das Werk des Zufalls; in Wirklichkeit ist jedes Ereignis, jeder Tatbestand abhängig von einer Menge von Ursachen, die einander bald verstärken, bald aufheben: aus diesem Grund stimmt die Zahl der Endnullen in einer Logarithmentafel annähernd mit der a priori zu erwartenden überein.

Die hervorgehobenen Mängel der Wahrscheinlichkeitsbestimmung a priori haften natürlich auch denjenigen Problemen an, in welchen die Zahl der Fälle unendlich ist oder die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe zusammengesetzter Formeln ermittelt wird.

Im Hinblick hierauf darf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori das gleiche Recht beanspruchen, als wissenschaftliche Methode angesehen zu werden. Hierzu kommt das ausschlaggebende Moment, daß fast auf allen Gebieten der Anwendungen die Wahrscheinlichkeitsbestimmung a priori ein Ding der Unmöglichkeit ist. Fragt man: welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Theodolit einen Winkel auf n'' genau zu messen, oder die Wahrscheinlichkeit, daß eine Operation gelingt, oder diejenige, daß ein jetzt 30jähriger Mann 70 Jahre alt wird, so haben alle diese Fragen einen wohlbegründeten Sinn, aber nur die Erfahrung kann die Antwort geben; nicht die deduktive Untersuchung der Urteilsmaterie löst die Aufgabe, sondern die empirische Zusammenstellung der relativen Häufigkeit des Ereignisses in den seither beobachteten Fällen. Andererseits haben wir am Schluß von § 19 und § 20 die Schwierigkeiten kennen gelernt, welche einer empirischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit entgegenstehen: nur ein sehr umfangreiches Beobachtungsmaterial liefert genaue und weiterhin verwendbare Ergebnisse.

Man wird also Poincaré beipflichten müssen, wenn er am Schluß seiner Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]) erklärt, daß schon das Wort „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ einen Widerspruch in sich schließt, und das Verdienst dieses Zweigs der Mathematik darin besteht, uns zu zeigen, „daß wir nichts wissen können“.

---

[1]) Vgl. S. 7.

V. Abschnitt.

Theorie der Beobachtungsfehler.

§ 22. Einteilung der Beobachtungsfehler; wahre und scheinbare Beobachtungsfehler.

1. Man unterscheidet grobe, regelmäßige (systematische) und zufällige Messungsfehler. Erstere, durch Nachlässigkeit des Beobachters herbeigeführt, scheiden aus unserer Betrachtung aus; die Fehler der zweiten Gruppe können, soweit sie ihren Grund in der Beschaffenheit der Meßinstrumente haben, durch Untersuchung der Meßwerkzeuge vorher berechnet und unschädlich gemacht werden; in diese Gruppe gehört ferner der Einfluß der Erdkrümmung, der normalen Strahlenbrechung und ähnliches. Es bleiben noch die jedem Beobachter wohlbekannten zufälligen Fehler; diese haben allgemein folgende Eigenschaften: sie entspringen einer großen Zahl von möglichen Ursachen, sie können ebensowohl positiv als negativ sein, ihre Häufigkeit nimmt mit wachsender Größe rasch ab; endlich überschreiten sie eine gewisse Grenze nicht, aber diese Grenze rückt mit der Zahl der Beobachtungen immer weiter hinaus.

Daraus folgt, daß die Unterscheidung zwischen groben und zufälligen Fehlern keine ganz scharfe ist; gerade in dieser Beziehung wird sich die Theorie der Beobachtungsfehler nützlich erweisen. Allein auch zwischen regelmäßigen und zufälligen Fehlern wird in der Praxis nicht immer streng unterschieden; z. B. ist es bei der Winkelmessung mit einem gewöhnlichen Feldmeßtheodolit nicht üblich, die Achsen- und Teilungsfehler in Rechnung zu stellen, man richtet vielmehr die Beobachtungen so ein, daß diese Fehler bald positiv, bald negativ auftreten und dadurch den Charakter zufälliger Fehler erlangen.

2. Den Gegensatz zwischen wahren und scheinbaren Beobachtungsfehlern wollen wir an einem Beispiel kennen lernen. Die Polhöhe einer Sternwarte sei durch mehrjährige, sorgfältige Messungen auf $0{,}1''$ genau bestimmt; den so gefundenen Wert ψ wird man mit großer Annäherung als wahren Wert der (ohnehin nicht ganz konstanten) Polhöhe betrachten dürfen. Nun mißt man an einem Abend mit einem kleinen Universalinstrument, welches nur $20''$ Nonienablesung gibt, n-mal die Polhöhe und findet die Werte $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$; alsdann gilt das arithmetische Mittel aus diesen Beobachtungen:

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_n}{n}$$

als wahrscheinlichster Wert (Axiom vom arithmetischen Mittel). Die Unterschiede $u_i = \psi - \psi_i$ nennt man wahre, die Unterschiede $v_i = \psi_0 - \psi_i$ scheinbare Beobachtungsfehler; da $\psi = \psi_i + u_i$, $\psi_0 = \psi_i + v_i$ ist, so sind u_i, v_i die anzubringenden Verbesserungen und nicht die Fehler, die angegebene Bezeichnung ist aber allgemein üblich.

In den meisten Fällen ist der wahre Wert einer unmittelbar zu messenden Größe nicht, oder wenigstens nicht mit absoluter Genauigkeit bekannt; denn in der Regel sind die zu messenden Objekte geometrisch nicht streng definiert, außerdem unterliegen sie zeitlichen Veränderungen. Man wird indessen dem wahren Wert einer Beobachtungsgröße immer näher kommen, je genauer man die regelmäßigen Fehler kennt und je zahlreicher und sorgfältiger die Messungen sind.

§ 23. Das Fehlergesetz auf Grund des arithmetischen Mittels (C. F. Gauß).

1. Für eine zu bestimmende Größe haben die Beobachtungen die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ergeben; welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert zwischen z und $z + dz$ liegt?

Das Ereignis besteht in dem Auftreten der n Beobachtungen, als Ursache gilt der Wert von z. Sei nun $\varphi(x_r, z)\,dx_r$ die Wahrscheinlichkeit, daß die $r$te Beobachtung zwischen x_r und $x_r + dx_r$ fällt, so ist:

$$w = \varphi(x_1, z) \cdot \varphi(x_2, z) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n, z)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungssystems. Die Wahrscheinlichkeit a priori, daß die Ursache z in das Intervall dz falle, sei:

$$u = \psi(z)\,dz\,.$$

Da z zwischen $-\infty$ und $+\infty$ enthalten sein kann, so ist nach den Regeln über die Wahrscheinlichkeit der Ursachen die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$(1) \qquad W = u\,w : \int_{-\infty}^{+\infty} u\,w\,dz\,.$$

2. Wir vereinfachen nun die Rechnung durch folgende Annahmen:

α) $\psi(z)$ sei konstant, d. h. jedes z gleich wahrscheinlich, ehe über die Beobachtungen etwas bekannt ist;

β) das Axiom vom arithmetischen Mittel soll gelten, d. h. es soll:

$$\varphi(x_1, z) \cdot \varphi(x_2, z) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n, z) = \text{Maximum}$$

sein, wenn $z = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{[x]}{n}$ ist[1]).

γ) $\varphi(x_r, z) = \varphi(z - x_r)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung soll nur von der Größe ihres Fehlers abhängen.

Da aus (1) auch die dx_r fortfallen und das Integral einen konstanten Wert besitzt, so muß, wenn $v_r = z - x_r$ gesetzt wird:

$$\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(v_r) = \text{Maximum}$$

sein. Hierzu tritt die aus β) sich ergebende Bedingung: $nz - [x] = [z - x] = 0$ oder:

$$(2) \qquad [v] = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0 .$$

Differentiiert man die vorangehende Gleichung logarithmisch nach z und setzt:

$$F(v_r) = \frac{\varphi'(v_r)}{\varphi(v_r)},$$

so muß auch:

$$(3) \qquad F(v_1) + F(v_2) + \ldots + F(v_n) = 0$$

sein; (2) und (3) sagen offenbar das gleiche aus, wenn — für λ als eine Konstante —:

$$F(v_r) = 2\lambda v_r$$

ist; man zeigt auch leicht die Unmöglichkeit einer anderen Lösung. Hieraus folgt weiter, mit μ als zweiter Konstante:

---

[1]) Die Bezeichnung $[x]$ ist aus einem Summenzeichen entstanden und wird gelesen: „Summe der x"; wir werden sie auch künftig benutzen.

$$\mathrm{Log}\,\varphi(v_r) = \lambda v_r^2 + \mu\,,$$
$$\varphi(v_r) = e^{\lambda v_r^2 + \mu} = e^{\mu}\, e^{\lambda v_r^2}\,.$$

Läßt man den Zeiger r weg, beachtet, daß $\varphi(v)$ mit wachsendem v abnehmen, also $\lambda = -h^2$ sein muß, und ersetzt e^{μ} durch C, so wird:

$$\varphi(v) = C \cdot e^{-h^2 v^2}\,.$$

Gemäß der Bedeutung des Buchstabens φ ist $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\, dv = 1$, folglich (§ 13, S. 51):

$$C \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{h} = 1\,, \qquad C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Damit ist das nach C. F. Gauß benannte Fehlergesetz aufgestellt:

$$\underline{\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 v^2}\,.} \tag{4}$$

3. Vorstehende Herleitung ist, wie auch Gauß selbst bemerkt hat, durchaus nicht einwandfrei, vor allem infolge der willkürlichen Voraussetzungen α) und γ); in der Tat lassen sich auch minder einfache Fehlergesetze aufstellen, welche von diesen Einschränkungen frei sind. Zur Rechtfertigung von β) kann man anführen: z als arithmetisches Mittel der x genügt auch der Forderung einer kleinsten Quadratsumme der Fehler; in der Tat folgt aus:

$$(z - x_1)^2 + (z - x_2)^2 + \ldots + (z - x_n)^2 = \text{Minimum}$$

durch Differentiieren sogleich: $n z = [x]$, wie oben.

Nimmt man ferner an, der Mittelwert z_0 bestimme sich aus:

$$n\, f(z_0) = [f(x)]\,,$$

und die x_r unterscheiden sich nur wenig von z_0, so gilt angenähert:

$$n f(z_0) = [f(z_0 + \overline{x - z_0})] = n f(z_0) + f'(z_0) \cdot [x - z_0]\,,$$

d. h. $\quad [x - z_0] = 0\,, \quad n z_0 = [x]\,, \quad z_0 = z\,;$

man wird also auf das arithmetische Mittel geführt, welches auch die Funktion f sei.

Bedeutet endlich z wie anfangs den wahren Wert, z_0 das arithmetische Mittel und setzt man gemäß (4):

$$\Phi = \prod_1^n \varphi(z - x_r) = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2 N}\,,$$

wo

$$N = n z^2 - 2 n z z_0 + [x^2] = n(z - z_0)^2 + [x^2] - n z_0^2$$

ist, so ergibt sich der Mittelwert μ von $z - z_0$ aus[1]):

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0)\, \Phi\, dz : \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\, dz\,.$$

Ersteres Integral ist bis auf einen konstanten, endlichen Faktor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0)\, e^{-h^2 n (z - z_0)^2}\, d(z - z_0)\,;$$

mithin verschwindet es, weil der Integrand eine ungerade Funktion von $z - z_0$ ist; das zweite Integral verschwindet nicht, folglich ist $\mu = 0$, d. h. bei Annahme des Gaußschen Gesetzes ist das arithmetische Mittel z_0 der Durchschnittsbetrag der unendlich vielen wahren Werte z. Ein zwingender Grund zugunsten des arithmetischen Mittels und des Gaußschen Fehlergesetzes liegt natürlich auch hierin nicht.

---

[1]) Deutet man $z - z_0$ als Koordinate, Φ als Masse eines materiellen Punktes einer Geraden, so ist μ die Koordinate des Schwerpunktes; vgl. Sammlung Göschen Nr. 88, § 40.

§ 24. Hilfssätze über bestimmte Integrale.

1. Um das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ auszuwerten, zerlegen wir es in Teilintegrale mit den Grenzen $0, \pi, 2\pi, \ldots$; dadurch verwandelt sich (Fig. 11) das Integral in eine Reihe, deren Glieder bei abwechselndem Vorzeichen gegen

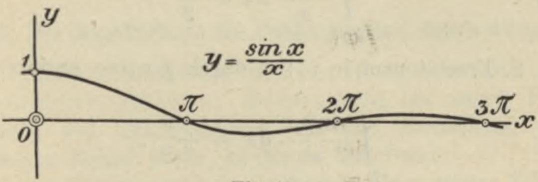

Fig. 11.

Null abnehmen. Folglich hat das Integral einen Sinn und einen positiven Zahlenwert.

Geht man von der für echt gebrochene x gültigen Beziehung[1]:

$$\sin\alpha + x\sin 2\alpha + x^2\sin 3\alpha + \ldots = \frac{\sin\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

aus und integriert zwischen 0 und x, so wird:

$$x\sin\alpha + \frac{x^2}{2}\sin 2\alpha + \ldots = \operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\pi}{2} - \alpha\,.$$

Es genügt hier, $0 < \alpha < \pi/2$ vorauszusetzen, man muß aber $\alpha = 0$ ausschließen; im übrigen konvergiert die letztere Reihe, wenn $0 \leqq x \leqq 1$ ist. Für $x = 1$ erhält man:

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha + \ldots = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

[1]) Sammlung Göschen Nr. 53, § 81.

oder

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\sin 2\,\alpha}{2\,\alpha} + \frac{\sin 3\,\alpha}{3\,\alpha} + \ldots\right)\alpha = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

Läßt man nun α unbegrenzt abnehmen, so geht die linke Seite in das vorgelegte Integral, die rechte in $\pi/2$ über; daher ist:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Ersetzt man in (1) x durch $p\,x$, so ergibt sich:

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin p\,x}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2},$$

wo das $+$Zeichen für positive, das $-$Zeichen für negative p gilt; ist $p = 0$, so verschwindet auch das Integral. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Differenz:

$$\varDelta = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x-u)\,\lambda}{\lambda}\,d\lambda - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x-u-du)\,\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

den Wert 0 hat, wenn $x < u$ oder $> u + du$ ist ($du > 0$ vorausgesetzt); für $u < x < u + du$ gilt $\varDelta = 1$; an den Grenzen $x = u$ und $x = u + du$ ist $\varDelta = \frac{1}{2}$. Da nun:

$$\sin(u + du - x)\,\lambda - \sin(u - x)\,\lambda = \frac{d\sin(u-x)\,\lambda}{du}\,du$$
$$= \lambda\cdot\cos(x-u)\,\lambda\cdot du$$

ist, so ergibt sich durch Vereinigung der Integrale:

$$\varDelta = \frac{du}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x-u)\,\lambda\cdot d\lambda.$$

Fügt man dem letzten Integranden die ungerade Funktion $i \sin(x-u)\lambda$ hinzu, so folgt:

$$(3) \qquad \Delta = \frac{du}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-u)\lambda}\, d\lambda = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

wenn die Werte $x = u$ und $x = u + du$ ausgeschlossen werden und im übrigen die angegebenen Grenzen gelten.

§ 25. Die Begründung des Fehlergesetzes durch Bessel.

1. Das Fehlergesetz von Gauß bezieht sich auf scheinbare Fehler v; Bessel geht bei seiner Herleitung des Fehlergesetzes auf die Entstehung der wahren Fehler u ein; er nimmt dabei an:

α) u kommt zustande als Summe einer großen Zahl n von Elementarfehlern $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

β) diese Elementarfehler sind von gleicher Größenordnung;

γ) positive und negative Elementarfehler sind gleich wahrscheinlich; ihre Fehlergesetze $\varphi_r(x_r)$ sind also gerade Funktionen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß

$$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

zwischen u und $u + du$ liegt, ist:

$$\psi(u)\, du = \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,.$$

Ersetzt man in § 24, (3) x durch $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, so ist $\Delta = 1$, wenn der Fehler zwischen u und $u + du$ liegt; führt man also Δ als Diskontinuitätsfaktor ein, so wird:

$$2\pi \cdot \psi(u) = \int e^{-iu\lambda}\, \Phi\, d\lambda\,,$$

wenn

$$\Phi = \int \ldots \int e^{i\lambda x_1} \varphi_1(x_1) \ldots e^{i\lambda x_n} \varphi_n(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

ist; die Integrationsgrenzen sind für λ: $\mp\infty$, für x_r: $\mp a_r$; nach β) sind die a_r alle von gleicher Größenordnung. Die in Φ auftretenden Integrale können einzeln ausgeführt werden; beachtet man γ) und läßt den Zeiger weg, so ist:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = \int_{-a}^{+a} \varphi(x) \cos(\lambda x)\, dx = A\,.$$

Wir entwickeln $\cos\lambda x$ in die Potenzreihe und setzen:

$$\int_{-a}^{+a} x^2 \varphi(x)\, dx = p^2\,, \qquad \int_{-a}^{+a} x^4 \varphi(x)\, dx = q^4\,, \qquad \ldots;$$

nach dem ersten Mittelwertsatz liegen p, q zwischen 0 und a, da die Integration von $\varphi(x)\, dx$ zwischen $\mp a$ den Wert 1 ergibt. Die Reihenentwicklung und Integration liefert:

$$A = 1 - \frac{p^2 \lambda^2}{2!} + \frac{q^4 \lambda^4}{4!} - \ldots,$$

$$\operatorname{Log} A = -\frac{p^2 \lambda^2}{2} - \frac{(3\,p^4 - q^4)\,\lambda^4}{24} - \ldots,$$

$$\operatorname{Log} \Phi = -\frac{[p^2]}{2}\lambda^2 - \frac{3[p^4] - [q^4]}{24}\lambda^4 - \ldots,$$

$$\Phi = e^{-\frac{[p^2]}{2}\lambda^2} \cdot \left(1 - \frac{3[p^4] - [q^4]}{24}\lambda^4 - \ldots\right).$$

Gebraucht man für die in Φ auftretenden Brüche die Abkürzungen P, Q, so folgt:

$$2\pi\,\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P\lambda^2}(1 - Q\lambda^4 - \ldots) \cos(u\lambda)\, d\lambda\,.$$

Wir wenden nun § 13, Gl. (3) und (4) an und finden sogleich:

$$2\pi\psi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{P}}\, e^{-\frac{u^2}{4P}} \{1 - Q \cdot k(u) - \ldots\}.$$

Ersetzt man $k(u)$ durch seinen größten Wert k_0 und beachtet, daß p, q mit a von gleicher Größenordnung sind, so ergeben sich für P, Q, k_0 die Größenordnungen $n a^2$, $n a^4$, $n^{-2} a^{-4}$. Infolgedessen gehört $k_0 Q$ zur Größenordnung n^{-1}, das nächstfolgende Glied, wie eine einfache Überlegung zeigt, zur Größenordnung n^{-2} u. s. f. Da wir nun n als große Zahl voraussetzen, so ergibt sich die Näherung:

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[p^2]}}\, e^{-\frac{u^2}{2[p^2]}}.$$

Dies ist das Fehlergesetz in der von Gauß angegebenen Form, aber für wahre Fehler. Obgleich auch die Besselschen Annahmen nicht völlig einwandfrei sind, so ist doch die Beweisführung minder willkürlich als jene auf Grund des arithmetischen Mittels.

§ 26. Genauigkeitsmaß; wahrscheinlicher, durchschnittlicher und mittlerer Fehler.

1. Das Gesetz der wahren oder scheinbaren Fehler x einer Beobachtungsreihe sei:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}; \tag{1}$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß x zwischen den Grenzen $\mp s$ enthalten sei:

$$w(s) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-s}^{+s} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-h^2 x^2}\, dx.$$

Setzt man $h\,x = t$ und ist $h\,s = \gamma$, so wird:

(2) $$w(s) = \theta(h\,s) = \theta(\gamma)\,.$$

Hieraus erklärt sich die Bedeutung von h; hat man nämlich eine zweite Beobachtungsreihe mit den entsprechenden Größen h', s', wobei $h\,s = h'\,s'$ ist, so folgt: $w(s') = w(s)$. Ist also z. B. $h : h' = 5:1$, $s : s' = 1:5$, so ist ein Fehler zwischen 0 und $\pm 5\,s$ in der zweiten Gruppe ebenso wahrscheinlich, als ein Fehler zwischen 0 und $\pm s$ in der ersten; kurz gesagt, die erste Beobachtungsreihe ist 5 mal so genau als die zweite. Aus diesem Grund nennt man h das Genauigkeitsmaß.

2. Unter dem wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtungsreihe verstehen wir denjenigen besonderen Wert r von s, für welchen:

$$\theta(h\,r) = 0{,}5\,, \qquad h\,r = 0{,}477$$

ist; es gilt also für r die Gleichung:

(3) $$r = 0{,}477 : h = 1 : 2{,}097\,h\,.$$

Der durchschnittliche Fehler k berechnet sich aus:

$$k = \int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx : \int_0^\infty \varphi(x)\,dx\,;$$

diese Gleichung kann so gedeutet werden: k ist die Abszisse des Schwerpunkts der positiven X-Achse, wenn in dem Punkt mit der Abszisse x die Masse $\varphi(x)$ angebracht wird. Nun ist:

$$\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\,h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-h^2x^2}\,d(h^2x^2) = \frac{1}{2\,h\sqrt{\pi}}\,;$$

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\,;$$

folglich:

(4) $$k = 1 : h\sqrt{\pi}\,.$$

k ist der Durchschnittswert der absoluten Beträge von x; in ähnlicher Weise bestimmen wir den mittleren Fehler m aus:

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx : \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx\,,$$

(hiernach läßt sich m als Trägheitsradius deuten), wobei das zweite Integral $= 1$ ist. Nach § 13, (2) wird:

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3} = \frac{1}{2h^2}\,,$$

(5) $$m = 1 : h\sqrt{2}\,.$$

(Wie man leicht sieht, sind $\pm m$ die Abszissen der Wendepunkte von $y = \varphi(x)$.) Somit ist: $m > k > r$ und:

$$k = m\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}798\,m\,; \quad r = 0{,}477\,m\sqrt{2} = 0{,}674\,m\,.$$

Mit Hilfe von § 13, (2) lassen sich solche Durchschnittswerte auch für die höheren geraden Potenzen finden; zur Beurteilung einer Beobachtungsreihe genügt indessen die Angabe von m.

3. Wir bestimmen noch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Beobachtungsfehler den p-fachen mittleren Fehler nicht überschreite; man braucht nur in (2) $s = pm$, also gemäß (5): $hs = 0{,}707\,p$ zu setzen. Man erhält das nebenstehende Täfelchen. Die letzte (auf Grund genauerer Werte der θ berechnete) Spalte gibt an, unter wieviel Beobachtungen der p-fache mittlere Fehler einmal überschritten wird; denn für $p = 2$ ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß $2\,m$ überschritten wird: 0,046;

p	θ	$1:(1-\theta)$
0,5	0,383	2
1	0,683	3
1,5	0,866	7
2	0,954	22
2,5	0,988	81
3	0,997	370

mithin wird unter 1000 Beobachtungen dieser Fall durchschnittlich 46 mal eintreten, unter 22 Beobachtungen einmal. Man wird diese Betrachtungen anwenden, wenn es sich um die Ausscheidung widersprechender Bebachtungen handelt.

§ 27. Genauigkeit einer Beobachtungsreihe; theoretische und wirkliche Fehlerzahl.

1. Der Unterschied zwischen wahren Beobachtungsfehlern u_r und scheinbaren v_r darf nur bei großer Zahl n der Beobachtungen vernachlässigt werden. Sei allgemein:

$$u_r = v_r + \lambda\,, \tag{1}$$

d. h. λ der Unterschied zwischen wahrem Wert und arithmetischem Mittel; hierbei muß $[v] = 0$ sein. Daher kann man $\lambda, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ als unabhängige Veränderliche betrachten, durch welche $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bestimmt sind. Nun ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der u, wenn $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = [u\,u]$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[u\,u]}\, du_1\, du_2 \ldots du_n\,. \tag{2}$$

Wir führen in (2) an Stelle der u die eben genannten Veränderlichen ein; es wird zufolge (1), da $[v] = 0$:

$$[u\,u] = [v\,v] + n\,\lambda^2\,;$$

sowie, da $u_n = -(v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}) + \lambda$ ist:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)}{\partial(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \lambda)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = n;$$

den Wert der Determinante erhält man durch Addition ihrer $n-1$ ersten Reihen zur letzten. Mithin geht (2) über in:

$$(3) \qquad n \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[vv] - nh^2\lambda^2} dv_1 \ldots dv_{n-1} d\lambda .$$

Da nun für λ keine Grenze festgesetzt ist, so bilden wir zunächst:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nh^2\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{n}} .$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der v:

$$\sqrt{n} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[vv]} dv_1 \ldots dv_{n-1} .$$

Hier ist h noch verfügbar; man wird die Wahl so treffen, daß das beobachtete System scheinbarer Fehler eine möglichst große Wahrscheinlichkeit erhält. Die logarithmische Differentiation ergibt:

$$\frac{n-1}{h} - 2h[vv] = 0 ,$$

woraus (§ 26):

$$\frac{1}{2h^2} = m^2 = \frac{[vv]}{n-1} .$$

Dies ist die von Helmert gegebene Herleitung der „klassischen Formel“:

$$(4) \qquad m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}\,;$$

sie liefert den auf Grund des Fehlergesetzes wahrscheinlichsten Wert von m.

Sind die u selbst (wenigstens näherungsweise) bekannt, so kann man unmittelbar:

$$n \cdot m_1^2 = [u\,u]\,,$$

$$(5) \qquad m_1 = \sqrt{\frac{[u\,u]}{n}}$$

setzen. Für große Werte von n wird der Unterschied zwischen m und m_1 unmerklich (§ 22, Schluß).

2. Eine einwandfreie Begründung des Fehlergesetzes a priori ist unmöglich; deshalb ist es von wesentlicher Bedeutung, das Gesetz mit Erfahrungstatsachen zu vergleichen. Der Weg hierzu ist folgender: aus einer Beobachtungsreihe findet man nach (4) den Wert von m und hieraus den von h. Die Anzahl der zwischen den Grenzen a und b $(0 \leqq a < b)$ enthaltenen Beobachtungsfehler ist dann der Theorie nach:

$$n \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{ha}^{hb} e^{-t^2}\,dt\,;$$

rechnet man auch die in gleicher Zahl vorhandenen Fehler zwischen $-a$ und $-b$ hinzu, so wird die Gesamtzahl der zu erwartenden Fehler:

$$\nu = n \cdot \{\theta(h\,b) - \theta(h\,a)\}\,.$$

Es folgen (in abgekürzter Gestalt) zwei Tabellen; die erste rührt von Bessel her und bezieht sich auf Fixsterndeklinationen, welche Bradley beobachtet hatte; die zweite hat eine in England ausgeführte Maßvergleichung (Maßeinheit $1 \cdot 10^{-6}$ Yard = 0,91 Mikron) zum Gegenstand. In beiden Fällen zeigt sich gute Übereinstimmung.

I. $m = \pm 1'',6$.

Grenzen in $''$	ν berechnet	ν beobachtet
0 bis 0,8	38	41
0,8 „ 1,6	30	28
1,6 „ 2,4	19	17
2,4 „ 3,2	8	8
über 3,2	5	6
Summe n =	100	100

II. $m = \pm 0,9$.

Grenzen	ν berechnet	ν beobachtet
0 bis 0,5	17	15
0,5 „ 1	12	14
1 „ 1,5	7	8
über 1,5	4	3
Summe n =	40	40

§ 28. Die Hauptaufgaben der Methode der kleinsten Quadrate.

1. Gauß hat seine (erste) Begründung des Fehlergesetzes auf die Hypothese des arithmetischen Mittels gestützt; damit gleichbedeutend ist (S. 81) die Forderung, daß die Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ ein Minimum werden soll. Um dieses Prinzip zu erläutern, geben wir noch einige einfache Beispiele[1]); diese zeigen zugleich den Zusammenhang zwischen der Theorie der Beobachtungsfehler und den Aufgaben der Messungspraxis; auch § 33 enthält eine Anwendung des Prinzips.

Nr.	Beobachtet	v	$v\,v$
1	3,324	+ 7	49
2	3,347	−16	256
3	3,336	− 5	25
4	3,319	+12	144
5	3,329	+ 2	4
	16.655	0	478

[1]) Ausführliche Behandlung in Sammlung Göschen Nr. 302.

2. Es sei nur eine Größe gesucht und diese in n Beobachtungen von gleicher Genauigkeit gemessen; z. B. mögen für die Dichte eines Augitkristalles fünf Bestimmungen vorliegen. Das Mittel ist 3,331; hieraus ergeben sich die v (in Einheiten der 3. Dezimalstelle), die vv und

$$m = \sqrt{\frac{478 \cdot 10^{-6}}{4}} = \pm 0{,}011 .$$

Hierbei ist m der mittlere Fehler der einzelnen Bestimmung; derjenige des Ergebnisses ist, wie hier nur angeführt sein möge, $m : \sqrt{n} = \pm 0{,}005$.

3. Es sollen m (2) Größen $x, y, \ldots$, die Elemente, durch vermittelnde Beobachtungen bestimmt werden; d. h. man beobachtet n ($> m$) Größen U_r:

$$U_r = f_r(x, y, \ldots), \qquad r = 1, 2, \ldots, n,$$

wobei f_r eine bekannte Funktion bedeutet. Kennt man Näherungswerte $x_0, y_0, \ldots$ der Elemente, so ist bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$f_r = (x, y, \ldots) = f_r(x_0, y_0, \ldots) + a_r(x - x_0) + b_r(y - y_0) + \cdots,$$

wo $$a_r = \frac{\partial f_r}{\partial x}\Big|_0, \qquad b_r = \frac{\partial f_r}{\partial y}\Big|_0, \qquad \ldots$$

ist[1]); wenn insbesondere f_r eine lineare Funktion ist, so ist die vorangehende Gleichung genau richtig. Setzt man:

$$x - x_0 = \xi, \quad y - y_0 = \eta, \quad \ldots, \quad f_r(x_0, y_0, \ldots) - U_r = l_r,$$

so erhält man n Gleichungen, die Fehlergleichungen:

$$a_r \xi + b_r \eta + \ldots + l_r = 0 .$$

[1]) Das Zeichen $/_0$ bedeutet, daß nach Ausführung der Differentiation $x = x_0$, $y = y_0$, ... zu nehmen ist.

Da $n > m$, so sind diese Gleichungen im allgemeinen nicht verträglich; bezeichnet man den an Stelle von 0 erscheinenden Wert der linken Seite mit v_r, so fordert das Prinzip, daß $[v\,v]$ = Minimum wird. Man hat also:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}[v\,v] = \frac{\partial}{\partial \eta}[v\,v] = \ldots = 0\,.$$

Die Ausführung ergibt sogleich:

$$[a\,a]\,\xi + [a\,b]\,\eta + \ldots + [a\,l] = 0\,,$$
$$[a\,b]\,\xi + [b\,b]\,\eta + \ldots + [b\,l] = 0\,.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus diesen m Gleichungen, den Normalgleichungen, bestimmen sich ξ, η, ..., also auch x, y, ...

Beispiel. Zur Bestimmung der Polhöhe φ wurden Mittagshöhen der Sonne beobachtet; in nachstehender Tabelle ist U die von Strahlenbrechung und Parallaxe befreite Zenitdistanz des Sonnenmittelpunktes, t die annähernd bekannte wahre Zeit, δ die Deklination der Sonne.

Unter der Annahme fehlerfreier Messungen ist:

$$U = \varphi + C\,t^2 - \delta\,;$$

für φ kennt man den Näherungswert $\varphi_0 = 48^0\,43',0$; woraus:

$$C = \frac{225}{2\,\varrho'}\,\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} = 0{,}0314\,.$$

Die Elemente sind die Polhöhe $\varphi = x$ und die Standverbesserung y der Uhr; ihre Näherungswerte sind $x_0 = \varphi_0$ und $y_0 = 0$; $C y^2$ kann vernachlässigt werden. Aus den allgemeinen Formeln wird also:

$$U = x + 2\,C\,t\,y + C\,t^2 - \delta\,,$$

mithin

$$a = 1\,, \quad b = 2\,C\,t\,, \quad l = \varphi_0 + C\,t^2 - (U + \delta)\,.$$

Die mit Rechenschieber ausführbare Rechnung liefert die Normalgleichungen und deren Auflösung:

$$\left|\begin{array}{r} 8\,\xi + 0{,}11\,\eta + 1{,}80 = 0 \\ 0{,}11\,\xi + 0{,}58\,\eta - 0{,}45 = 0 \end{array}\right| ,$$

$$\xi = -0{,}24\,, \qquad \eta = +0{,}82\,.$$

Mithin ist $\varphi = \varphi_0 + \xi = 48^0\,42',76$, $y = \eta = +0^m,82$; demnach sind die drei letzten Spalten ausgefüllt[1]); aus $[v\,v] = 0{,}3125$ folgt[2]) der mittlere Fehler der U: $\pm 0',23$, sowie derjenige von φ: $\pm 0',08$.

Nr.	U	δ	t	$t+y$	v	$v\,v$
1	$43^0\,37',0$	$5^0\,6',8$	$-6^m,0$	$-5^m,2$	$-0',26$	0,0676
2	36,0	6,7	$-4,5$	$-3,7$	$+0,43$	0,1849
3	36,3	6,7	$-2,5$	$-1,7$	$-0,17$	0,0289
4	36,0	6,7	$-1,5$	$-0,7$	$+0,09$	0,0081
5	36,3	6,7	$+1,5$	$+2,3$	$-0,07$	0,0049
6	36,7	6,7	$+3,5$	$+4,3$	$-0,06$	0,0036
7	37,3	6,6	$+5,0$	$+5,8$	$-0,08$	0,0064
8	37,7	6,6	$+6,5$	$+7,3$	$+0,09$	0,0081

4. Namentlich der geodätischen Praxis gehört der Fall den **bedingten Beobachtungen** an; wir wollen nur ein einfaches Beispiel besprechen. Drei Größen x, y, z sind beobachtet, zwischen ihnen besteht eine Beziehung $F(x, y, z) = 0$, der die Beobachtungswerte x_0, y_0, z_0 nicht völlig genügen werden. Sei:

$$x = x_0 + \xi\,, \qquad y = y_0 + \eta\,, \qquad z = z_0 + \zeta\,,$$

so folgt mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung und der auf S. 94 eingeführten Bezeichnung:

---

[1]) Die zweite Dezimale der v ist nicht mehr sicher.
[2]) Sammlung Göschen Nr. 302, §§ 16—18.

$$F(x_0, y_0, z_0) + \xi \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_0 + \eta \cdot \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_0 + \zeta \cdot \frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_0 = 0\,,$$

oder mit leicht verständlicher Abkürzung

$$a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta + l = 0\,.$$

Wie fügen nun die Forderung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{Minimum}$$

hinzu; ist k ein unbestimmter Faktor, so muß[1])

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2\,k(a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta + l) = \text{Minimum},$$

also

$$\xi + k\,a = \eta + k\,b = \zeta + k\,c = 0$$

sein. Hieraus folgt, mit $a^2 + b^2 + c^2 = N$:

$$k = -\frac{l}{N}\,, \qquad \xi = \frac{a\,l}{N}\,, \qquad \eta = \frac{b\,l}{N}\,, \qquad \zeta = \frac{c\,l}{N}\,.$$

Der Multiplikator k heißt nach Gauß Korrelate; das Rechnungsverfahren Korrelatenausgleichung im Gegensatz zu der in 3. dargelegten Elementenausgleichung. Häufig läßt sich eine Aufgabe nach beiden Methoden behandeln; die Bedürfnisse der Geodäsie haben auch zu einem Zwischentypus, den „vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen" geführt.

Folgendes ist eine einfache Anwendung: Für drei Teilstrecken eines Nickelinstabes ergab die Messung des Widerstands folgende Werte:

$$AB:\quad x_0 = 1345 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm},$$
$$BC:\quad y_0 = 846 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm},$$
$$AC:\quad z_0 = 2212 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm};$$

man soll die wahrscheinlichsten Werte x, y, z bestimmen. (Die Länge der Strecken bleibt unberücksichtigt.)

---

[1]) Sammlung Göschen Nr. 87, § 65.

Es ist:

$$F(x, y, z) = x + y - z = 0,$$

also:

$$l = x_0 + y_0 - z_0 = -21, \quad a = b = 1, \quad c = -1, \quad N = 3;$$

hieraus folgt:

$$\xi = \eta = 7, \qquad \zeta = -7.$$

Die wahrscheinlichsten Werte der drei Widerstände sind:

$$AB: \quad x = 1352 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm},$$

$$BC: \quad y = 853 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm},$$

$$AC: \quad z = 2205 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man nach vermittelnden Beobachtungen ausgleicht, wobei etwa x und y als die Elemente gelten können.

§ 29. Fehlerverteilung in der Ebene.

1. Für die rechtwinkligen Koordinaten x, y eines Punktes mögen n Beobachtungen x_r, y_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ vorliegen. Die Fehler sind dann:

$$x - x_r = u_r, \qquad y - y_r = v_r;$$

gilt nun für alle Fehlerpaare (u_r, v_r) das gleiche Gesetz, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß u_r, v_r innerhalb der Intervalle du_r, dv_r liegen:

$$w_r = \varphi(u_r, v_r)\, du_r\, dv_r.$$

Dafür, daß das Wertepaar (x, y) in das Intervall $dx\, dy$ falle, sei die Wahrscheinlichkeit a priori $\psi(x, y)\, dx\, dy$; alsdann ist (vgl. § 17 und § 23) die Wahrscheinlichkeit a posteriori der Ursache (x, y):

$$\psi(x, y)\, w_1 w_2 \ldots w_n\, dx\, dy : \iint \psi(x, y)\, w_1 w_2 \ldots w_n\, dx\, dy,$$

wobei die Differentiale du_r und dv_r die Rolle von Konstanten spielen und wegfallen.

2. Zur Ermittlung des Fehlergesetzes $\varphi(u, v)$ nehmen wir (vgl. § 23) $\psi(x, y)$ als konstant an; ferner wollen wir unter (x, y) den Schwerpunkt der Punkte (x_r, y_r), den „wahrscheinlichsten Punkt" verstehen; dadurch wird das Axiom vom arithmetischen Mittel aus dem eindimensionalen Gebiet auf die Ebene ausgedehnt. Die Größen u_r, v_r sind dann scheinbare Fehler und es bestehen die Gleichungen:

$$n x = [x], \quad n y = [y],$$

oder:

$$[u] = [v] = 0.$$

Da das Integral einen konstanten Wert hat, so kommt die Forderung darauf hinaus, daß:

$$\varphi(u_1, v_1) \ldots \varphi(u_n, v_n) = \text{Maximum}$$

werden soll. Wir differentiieren logarithmisch und setzen:

$$\frac{\partial \operatorname{Log} \varphi(u_r, v_r)}{\partial u_r} = U_r, \qquad \frac{\partial \operatorname{Log} \varphi(u_r, v_r)}{\partial v_r} = V_r;$$

dann muß:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_r = 0, \quad V_1 + V_2 + \ldots + V_r = 0$$

sein. Dies kommt mit der Bedingung $[u] = [v] = 0$ überein, wenn unter Weglassung des Zeigers r:

$$U = a u + b v, \qquad V = b u + c v$$

ist; hierbei sind a, b, c die der Funktion φ eigentümlichen Konstanten, ferner ist der Bedingung:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial^2 \operatorname{Log} \varphi(u, v)}{\partial u \, \partial v}$$

Rechnung getragen; endlich beweist man leicht, daß außer dieser augenscheinlich richtigen Lösung keine weitere möglich ist. Nunmehr wird, wenn λ eine Konstante bedeutet:

$$\operatorname{Log} \varphi(u, v) = \tfrac{1}{2} a u^2 + b u v + \tfrac{1}{2} c v^2 + \lambda ;$$

setzt man:

$$\tfrac{1}{2} a = -a_{11}, \quad b = -2 a_{12}, \quad \tfrac{1}{2} c = -a_{22}, \quad \lambda = \operatorname{Log} C,$$

so folgt:

$$\varphi(u, v) = C \cdot e^{-(a_{11} u^2 + 2 a_{12} u v + a_{22} v^2)} = C \cdot e^{-F}.$$

Die quadratische Form F muß positiv sein; dazu ist erforderlich, daß:

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} > 0, \qquad A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

ist. Integriert man $\varphi(u, v)\, du\, dv$ zwischen den Grenzen $\mp\infty$ für u und v, so muß sich 1 ergeben; um die Integration auszuführen, schreibt man:

$$F = \frac{A u^2 + (a_{12} u + a_{22} v)^2}{a_{22}},$$

nun läßt sich zuerst nach v, dann nach u integrieren. Mit Rücksicht auf § 13, (1) erhält man:

$$C \cdot \frac{\pi}{\sqrt{A}} = 1, \qquad C = \frac{\sqrt{A}}{\pi}.$$

Das Fehlergesetz in der Ebene ist also:

$$\varphi(u, v) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} e^{-(a_{11} u^2 + 2 a_{12} u v + a_{22} v^2)}.$$

3. Die Kurven $F = \text{konst.} = \sigma$ bilden eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen, in dieser Weise gruppieren sich also die Punkte gleicher Fehlerwahrscheinlichkeit um $O(u = 0, v = 0)$, s. Fig. 12; die Fläche der Ellipse $F = \sigma$ ist $\dfrac{\sigma \pi}{\sqrt{A}}$, wie man durch Transformation auf die Hauptachsen sogleich erkennt. Er-

richtet man auf der Zeichnungsebene in jedem Punkt (u, v) nach oben ein Lot $= \varphi(u, v)$, so entsteht eine Fläche, deren Horizontalschnitte Ellipsen sind; die durch O geführten Vertikalschnitte ergeben „Glockenkurven" nach Art von Fig. 9a; für $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$ bekommt man die in Fig. 9a und 9b dargestellte Drehfläche.

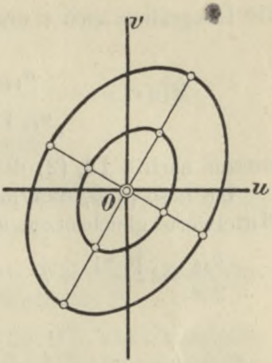

Fig. 12.

Wir zeigen noch kurz, wie sich a_{11}, a_{12} und a_{22} aus den Beobachtungen bestimmen lassen. Der Mittelwert der u^2 ist:

$$M(u^2) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-F} du\, dv = \frac{a_{22}}{2A};$$

das Doppelintegral wird ausgewertet, indem man die für F angegebene Umformung, sowie § 13, (2) benutzt.

Ebenso ist der Mittelwert der v^2:

$$M(v^2) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-F} du\, dv = \frac{a_{11}}{2A},$$

endlich derjenige der uv:

$$M(uv) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv\, e^{-F} du\, dv = -\frac{a_{12}}{2A};$$

die Integration nach v ergibt nämlich:

$$M(u\,v) = -\frac{a_{12}\sqrt{A}}{a_{22}\sqrt{a_{22}\,\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{A u^2}{a_{22}}}\,du\,,$$

woraus nach § 13, (2) der obige Wert folgt.

Ist n so groß, daß man berechnete und beobachtete Mittelwerte gleichsetzen darf, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{a_{22}}{2\,A} = \frac{[u\,u]}{n} = P\,, \qquad \frac{a_{12}}{2\,A} = -\frac{[u\,v]}{n} = Q\,,$$

$$\frac{a_{11}}{2\,A} = \frac{[v\,v]}{n} = R\,,$$

in welchen P, Q, R bekannt sind. Nun ist:

$$\frac{1}{A^2} = 4\,(PR - Q^2)\,, \qquad 2\,A = \frac{1}{2\,(PR - Q^2)}\,;$$

mithin sind auch a_{11}, a_{12} und a_{22} bestimmt:

$$a_{11} = \frac{R}{2\,(PQ - R^2)}\,, \qquad a_{12} = \frac{Q}{2\,(PQ - R^2)}\,,$$

$$a_{22} = \frac{P}{2\,(PQ - R^2)}\,.$$

4. Die Fehlerellipsen finden Anwendung bei der trigonometrischen Punktbestimmung (Andrä, Helmert) und bei Schießversuchen (Bertrand). Auf letztere bezieht sich folgende Zusammenstellung [1]: Die Scheibe wurde durch die Fehlerellipse in 10 Gebiete eingeteilt, deren jedes der Theorie nach 100 Schüsse hätte aufnehmen sollen; das Ergebnis war: 99, 106, 100, 108, 100, 118, 86, 94, 90, 99.

---

[1]) Mitgeteilt nach E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler (vgl. S. 6) S. 397.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik.

§ 30. Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

1. Die statistische Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit, vgl. § 21) ist ein nach Analogie der mathematischen Wahrscheinlichkeit gebildeter Quotient $a : n$, wobei n die Zahl der Fälle bedeutet, die man beobachtet, um eine gewisse Veränderung festzustellen, a ist die Zahl der Fälle, in welchen diese Änderung binnen der Zeiteinheit eingetreten ist. Naturgemäß stehen die verwickelten Verhältnisse des menschlichen Lebens in scharfem Gegensatz zu den Voraussetzungen der mathematischen Wahrscheinlichkeit, vor allem hinsichtlich der Gleichwertigkeit der Fälle; die Praxis wird immer dazu nötigen, die Fälle in Gruppen zusammenzufassen, z. B. „gesunde männliche Personen im Alter von 20—25 Jahren", allein innerhalb dieser Gruppe sind Lebensverhältnisse, geistige Befähigung, Berufsart usf. völlig verschieden. Ferner ist die statistische Wahrscheinlichkeit vom Zeitpunkt der angestellten Untersuchung abhängig; auch wenn man außergewöhnliche Ursachen, wie Krieg, Epidemie, beiseite läßt, zeigt die Erfahrung nur eine annähernde Konstanz der statistischen Wahrscheinlichkeit. Endlich sind wir über die Abhängigkeit der in die Statistik einbezogenen Fälle selten genügend unterrichtet; ist z. B. für

den Bergmann A_1 die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr zu sterben, w_1, und ist w_2 die entsprechende Zahl für einen anderen Bergmann A_2, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide im nächsten Jahre sterben, nur dann $w_1 w_2$, wenn die Todesfälle ganz unabhängig voneinander eintreten. Da wir aber mit der Möglichkeit eines viele dahinraffenden Grubenunglücks rechnen müssen, so ist auch der Wert $w_1 w_2$ unrichtig, falls A_1 und A_2 in der gleichen Grube arbeiten.

Wenn trotzdem die Statistik von den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung Gebrauch macht, so kann die Befugnis hierzu hergeleitet werden erstens aus der ausgleichenden Wirkung des Zufalls (vgl. § 21), sodann aus dem Umstand, daß erhebliche Schwankungen der statistischen Maßzahlen nur da vorkommen, wo die Ursachen merkliche Veränderungen aufweisen, endlich aus der Möglichkeit, das statistische Grundmaterial fortwährend zu ergänzen, die Methoden zu verfeinern und die Theorie mit der Wirklichkeit zu vergleichen.

2. Die Statistik liefert ihre Angaben teils als unbenannte (intensive), teils als benannte (extensive) Maßzahlen; die wichtigste intensive Maßzahl ist die Wahrscheinlichkeit, die wichtigste extensive das arithmetische Mittel. Beide Arten von Maßzahlen sind indessen ineinander überführbar; aus einer Tafel der Sterbenswahrscheinlichkeiten kann man die mittlere Lebensdauer, aus den gemessenen Brustumfängen von Rekruten die relative Häufigkeit eines zwischen a und b cm enthaltenen Brustumfanges bestimmen.

Von den in Abschnitt I bis V entwickelten Sätzen kommen für die mathematische Statistik namentlich die Theoreme von Bernoulli und Bayes, sowie das Fehlergesetz in Betracht; umfangreiches und sorgfältig bearbeitetes statistisches Material steht besonders für die Aufgaben der Lebensversicherung zu Gebote.

§ 31. Die Dispersionstheorie von Lexis.

1. Vernachlässigt man in § 15 (8) das Zusatzglied, setzt:

$$n = \nu\,, \quad r = \nu\varepsilon\,, \quad x = \nu u\,, \quad h^2 = \frac{\nu}{2pq}\,, \quad h\varepsilon = \gamma\,,$$

so ist:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2u^2}\,du = \theta(\gamma)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei ν maligem Versuch die gesuchte Wahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen $p-\varepsilon$ und $p+\varepsilon$ liegt. Entsprechend dem Fehlergesetz hat man h als das Genauigkeitsmaß der Versuchsgruppe (a priori) zu bezeichnen.

Zu einer anderen Bestimmung des Genauigkeitsmaßes gelangt man, wenn eine Reihe von n Versuchen in s Gruppen von je ν Versuchen eingeteilt wird; aus jeder Gruppe bildet man einen Mittelwert, wodurch die Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_s$ entstehen, hieraus das Gesamtmittel $p_0 = (p_1 + p_2 + \ldots + p_s) : s$. Alsdann ist nach § 27 (4) der mittlere Fehler der als Einzelbeobachtung geltenden Gruppe:

$$m = \sqrt{\frac{[(p_0 - p_i)^2]}{s-1}}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots s\,.$$

Hieraus folgt das Genauigkeitsmaß (a posteriori):

$$h'' = \sqrt{\frac{s-1}{2\,[(p_0 - p_i)^2]}}\,.$$

Da der wahre Wert p bei einer statistischen Erhebung niemals bekannt ist, so erhält man für h wenigstens eine Annäherung, indem man p durch p_0, q durch $q_0 = 1 - p_0$ ersetzt; an Stelle von h tritt also:

$$h' = \sqrt{\frac{\nu}{2 p_0 q_0}}.$$

Lexis spricht nun von normaler Dispersion (Streuung), wenn sich h'' ungefähr $= h$ ergibt; in diesem Falle ist gegen die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts zu sagen. Ist h'' erheblich kleiner als h', so gehen die Gruppenmittel p_i stark auseinander, dann liegt übernormale Dispersion vor; im entgegengesetzten Falle hat man unternormale Dispersion. Die Zahl $h' : h''$ heißt auch Divergenzkoeffizient[1]).

Theorie und Erfahrung zeigen nun, daß unternormale Dispersion so gut wie nie vorkommt; im Falle der übernormalen Dispersion wird man fragen müssen, ob die statistischen Ergebnisse sich einem Fehlergesetz mit dem Genauigkeitsmaß h'' unterordnen (vgl. § 27, Schluß). Trifft dies zu, so läßt sich schließen, daß p zwar nicht konstant bleibt, aber Änderungen erleidet, die dem Fehlergesetz nicht widersprechen. Zeigen hingegen die Zahlen keinen Anschluß an das Fehlergesetz, so ist die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt verfehlt.

2. Ein Beispiel normaler Dispersion liefert fast durchgehends das Geschlechtsverhältnis der Geborenen. Folgende Tafel bezieht sich auf das Königreich Sachsen; die Zahl der Geburten beiderlei Geschlechts lag zwischen 142 527 im Jahre 1892 und 158 579 im Jahre 1899; die Gesamtzahl war $n = 1\,507\,970$, daher kann genau

[1]) Die Bezeichnung rührt von Dormoy her, welcher aber nicht den mittleren, sondern den durchschnittlichen Fehler zugrunde legt.

genug $\nu = 150\,797$ gesetzt werden; p_i ist die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, $v_i = p_0 - p_i$.

Nr.	Jahr	p_i	$10^4\, v_i$	$10^8\, v_i^2$
1	1891	0,5121	+ 5	25
2	1892	0,5139	−13	169
3	1893	0,5121	+ 5	25
4	1894	0,5104	+22	484
5	1895	0,5121	+ 5	25
6	1896	0,5130	− 4	16
7	1897	0,5128	− 2	4
8	1898	0,5118	+ 8	64
9	1899	0,5129	− 3	9
10	1900	0,5149	−23	529
	Mittel:	$p_0 = 0{,}5126$	0	1350

Zur Berechnung der Genauigkeitsmaße hat man noch

$$q_0 = 0{,}4874\,, \qquad s = 10\,;$$

daher ist:

$$h' = 549\,, \qquad h'' = 577\,,$$

der Divergenzkoeffizient wird $h' : h'' = 0{,}95$.

Die Dispersion ist also normal; läßt man dagegen die Jahre 1894 und 1900 weg, so verrät sich diese willkürliche Änderung dadurch, daß (bei gleichbleibendem Wert von p_0) der Divergenzkoeffizient den auffallend geringen Betrag 0,48 annimmt.

§ 32. Die Konstruktion der Sterblichkeitstafeln.

1. Seit dem 17. Jahrhundert geht das Bestreben der mathematischen Statistik dahin, Absterbeordnungen aufzustellen: man sucht unter l_0 Geborenen die Zahl l_x

derjenigen zu ermitteln, welche ein Alter von l_x Jahren erreichen; l_0 (Basis, Grundmasse) bleibt willkürlich und wird meist als eine Potenz von 10 angenommen, manchmal ist es zweckmäßiger, von einer höheren Altersstufe auszugehen, also etwa $l_{20} = 10^3$ zu setzen. Die Zahl $l_x - l_{x+1} = d_x$ gibt an, wie viele Personen während des $x$ten Lebensjahres mit Tod abgehen; die Quotienten:

$$(1) \qquad \frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x\,, \qquad \frac{d_x}{l_x} = q_x$$

drücken die Wahrscheinlichkeit des Lebens oder Absterbens im $x$ten Lebensjahre aus, zwischen beiden besteht die Beziehung:

$$(2) \qquad p_x + q_x = 1\,.$$

Man nimmt nun an, daß in dem betrachteten Wertgebiet l_x eine eindeutige, stetige, differentiierbare Funktion von x sei und setzt demgemäß:

$$(3) \qquad l_x = f(x)\,;$$

wegen der Willkürlichkeit von l_0 ist $f(x)$ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Aus $f(x)$ entspringt der Grenzwert:

$$(4) \qquad \lim_{h=0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h\,f(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \varphi(x)\,.$$

Da $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ ist, so ist $\varphi(x) > 0$; man berechnet $\varphi(x)$ als Sterblichkeitskraft oder Sterbensintensität; aus einer Annahme über $\varphi(x)$ ergibt sich durch Integration ein hypothetisches Gesetz $f(x)$. Die Zahlen l_x, d_x, p_x, q_x und $\varphi(x)$ hat man biometrische Funktionen genannt; einige weitere werden in § 34 besprochen werden.

Es sei noch bemerkt, daß die Zahlenwerte von q_x und $\varphi(x)$ nicht sehr verschieden sind; man hat nämlich auf Grund des Taylorschen Satzes:

$$q_x = \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} = -\frac{f'(x) + \frac{1}{2} f''(x+\vartheta)}{f(x)},$$

wo $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist; mithin:

$$q_x = \varphi(x) + \varepsilon\,. \tag{5}$$

Über $\varepsilon = -f''(x+\vartheta) : 2 f(x)$ läßt sich folgendes sagen: ist $y = f(x)$ eine lineare Funktion von x (wie Moivre annahm), so ist $\varepsilon = 0$; bedeutet $y = f(x)$ geometrisch eine nach unten konkave, nur schwach gekrümmte Kurve, so ist ε ein kleiner, positiver, echter Bruch. Die letztere Voraussetzung trifft, wie wir sehen werden, wenigstens für die mittleren Altersstufen zu. (Fig. 15, S. 115.)

2. Von den oben aufgezählten biometrischen Funktionen genügt nach Annahme von l_0 eine, um die übrigen zu berechnen; als solche Grundfunktion wählt man aus praktischen Gründen meist q_x. Man hat dann:

$$l_1 = (1 - q_0)\, l_0\,,$$

$$l_2 = (1 - q_1)\, l_1 = (1 - q_0)\,(1 - q_1) \cdot l_0\,, \quad \ldots,$$

allgemein:

$$l_x = l_0 \prod_0^{x-1} (1 - q_r)\,. \tag{6}$$

Aus der Zahlenreihe der q_x erhält man also ohne weiteres diejenigen der l_x und $d_x = q_x\, l_x$.

Wie aus dem statistischen Rohmaterial der Versicherungsgesellschaften Näherungswerte q'_x für die q_x festgestellt werden, liegt außerhalb des Rahmens unserer

Darstellung[1]). Man hat zahlreiche Versuche unternommen, die Form der Funktion $f(x)$ anzugeben; die geläufigste Hypothese (zugleich die in praxi am besten verwendbare) spricht sich in dem Gompertz-Makehamschen Gesetz aus.

Makeham nimmt für die Sterblichkeitskraft ein Exponentialgesetz von der Form:

$$\varphi(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} = a + b \cdot r^x \tag{7}$$

an; hierbei sind a, b, r positive Konstante, die Hypothese gilt also nur, wenn $\varphi(x)$ zugleich mit x zunimmt, d. h. für $x > \alpha$, wo α erfahrungsgemäß mindestens $= 20$ ist. Die Integration von (7) liefert, mit c als willkürlicher Konstante:

$$\operatorname{Log} \frac{c}{f(x)} = a\,x + \frac{b \cdot r^x}{\operatorname{Log} r}.$$

Setzt man noch:

$$e^{-a} = k\,, \quad e^{-\frac{b}{\operatorname{Log} r}} = g\,, \tag{8}$$

so folgt:

$$\underline{f(x) = c \cdot k^x g^{r^x}}\,. \tag{9}$$

Diese Formel enthält zugleich das ältere Gompertzsche Gesetz, wenn man $a = 0$, $k = 1$ wählt. Die Konstanten k, g, r können aus speziellen Werten von $f(x)$ näherungsweise bestimmt werden; nehmen wir für den Augenblick an, dies sei geschehen, so bestimmt sich c mit Hilfe der willkürlichen Basis $l_\alpha = f(\alpha)$ aus:

$$\log c = \frac{\log l_\alpha}{\alpha \log k + r^\alpha \log g}. \tag{10}$$

[1]) Sammlung Göschen, Nr. 180, Kap. II. § 2.

§ 33. Ausgleichung und endgültige Gestalt der Sterblichkeitstafeln.

1. Das Theorem von Bayes zeigt (§ 19, Schluß), daß einer empirischen Wahrscheinlichkeit q_x' nur dann einige Genauigkeit zukommt, wenn die Kenntnis von q_x' sich auf eine große Zahl von Fällen stützt. Nimmt man noch die Schwierigkeit der statistischen Erhebungen hinzu, so leuchtet ein, daß die in ein Koordinatensystem eingetragenen Punkte (x, q_x') keinem regelmäßigen Kurvenzug angehören werden; man ist daher genötigt, eine Ausgleichung vorzunehmen. Bei der graphischen Ausgleichung wird eine stetige Kurve möglichst nahe an den Punkten (x, q_x') vorbeigeführt (vgl. Fig. 13, S. 113); die mechanische Ausgleichung besteht entweder darin, daß jedes q_x' durch das Mittel der umliegenden Werte ersetzt wird, z. B.:

$$q_{43} = \tfrac{1}{5}(q_{41}' + q_{42}' + q_{43}' + q_{44}' + q_{45}')$$

— das Verfahren kann auch wiederholt werden — oder darin, daß man die erwähnte Kurve aus Parabelstücken zusammensetzt; auch dies kommt auf eine Mittelbildung, aber mit ungleichen Gewichten hinaus. Die genannten Methoden enthalten keine Voraussetzung über die Beschaffenheit der auszugleichenden Zahlenwerte, gelten daher ebenso für jede andere empirische Zahlentafel.

2. Die analytische Ausgleichung beruht hingegen auf dem Makehamschen Gesetz. Mit Rücksicht auf § 32, Gl. (5) und (7) kann man von dem Ansatz:

$$q_x = a + b \cdot r^x \tag{1}$$

ausgehen; man führt also anstatt der Sterbensintensität die Sterbenswahrscheinlichkeit in die Rechnung ein, welche dadurch ohne erhebliche Einbuße an Genauigkeit sehr vereinfacht wird.

Zur Bestimmung von a, b, r kann man ein summarisches Verfahren anwenden; setzt man:

$$2) \quad \begin{cases} q'_{20} + q'_{21} + \cdots + q'_{39} = 20\,A\,, \\ q'_{40} + q'_{41} + \cdots + q'_{59} = 20\,B\,, \\ q'_{60} + q'_{61} + \cdots + q'_{79} = 20\,C\,, \end{cases}$$

so folgt aus (1) und (2) mit $q'_x = q_x$ und:

$$(3) \qquad 20\,R = b\,(r^{20} - 1) : (r - 1)$$

das Gleichungssystem:

$$a + r^{20}\,R = A\,, \quad a + r^{40}\,R = B\,, \quad a + r^{60}\,R = C\,.$$

Die Elimination von R und r ergibt:

$$(B - a)^2 = (A - a)(C - a)\,,$$

also:

$$(4) \qquad a = \frac{A\,C - B^2}{A + C - 2\,B}\,;$$

diejenige von R und a:

$$(5) \qquad r^{20} = \frac{C - B}{B - A}\,.$$

Hieraus folgt:

$$(6) \qquad R = \frac{(B - A)^3}{(C - B)(A + C - 2\,B)}\,.$$

Aus R bestimmt sich b mit Hilfe von (3).

Diese Methode gibt mindestens brauchbare Näherungswerte a_0, b_0, r_0 für eine systematische Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Es liegt hier der Fall der vermittelnden Beobachtungen entsprechend § 28, 3. vor; die q'_x sind die Beobachtungen, a, b und r die Elemente; man kann dabei auch Rücksicht nehmen auf die von x abhängige Unsicherheit, mit welcher die q'_x aus der Statistik hervorgehen.

Betrachtet man in (1) a, b, r als veränderlich, so ergibt die Differentiation:

$$dy = da + r^x db + x b r^{x-1} dr ;$$

setzt man ferner:

$$q_{0x} = a_0 + b_0 r_0^x ,$$

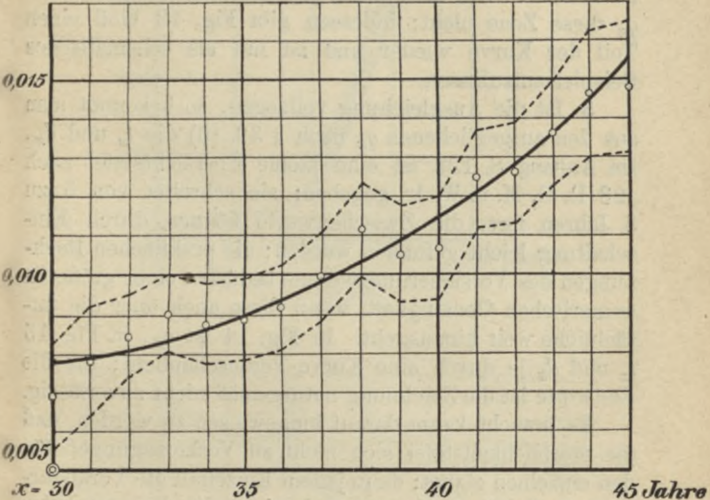

Fig. 13.

so erhält man aus jedem q'_x eine Fehlergleichung:

$$da + r_0^x db + x b_0 r_0^{x-1} dr + (q_{0x} - q'_x) = 0 ;$$

hierzu bildet man die Normalgleichungen und findet da, db, dr sowie $a = a_0 + da$, $b = b_0 + db$, $r = r_0 + dr$; daraus berechnet man die ausgeglichenen q_x.

In Fig. 13 ist eine solche Ausgleichung graphisch dargestellt; die mit Ringen bezeichneten Punkte entsprechen den beobachteten q'_x, die ausgezogene Kurve den ausgeglichenen q_x. Bedeutet m_x den mittleren Fehler eines q'_x vor der Ausgleichung, so kann man (§ 26) etwa $3\,m_x$ als Maximalfehler ansehen; die gestrichelten Zickzacklinien entsprechen den Werten $q'_x \mp 3\,m_x$ und begrenzen die Fehlerzone. Wie man sieht, überschreitet die Kurve der q_x diese Zone nicht; indessen gibt Fig. 13 bloß einen Teil der Kurve wieder und ist nur als schematisches Beispiel aufzufassen.

3. Ist die Ausgleichung vollzogen, so bekommt man aus den ausgeglichenen q_x nach § 32, (6) die l_x und d_x. Im Anhang S. 122 ist eine kleine Übersichtstafel nach „23 D. G. M. u. W. I“ gegeben; sie schreitet von 5 zu 5 Jahren fort, die Zwischenwerte können durch Einschaltung leicht gefunden werden; die praktischen Rechnungen des Versicherungswesens bedürfen einer größeren numerischen Genauigkeit, wenn diese auch über die tatsächliche weit hinausgeht. In Fig. 14 ist q_x, in Fig. 15 l_x und d_x je durch eine Kurve veranschaulicht; für die Endwerte ist die Zeichnung naturgemäß nicht zuverlässig.

Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, daß die Sterblichkeitstafel sich nicht zu Vorhersagungen für den einzelnen eignet; da in jedem Einzelfall die Veränderlichkeit des Individuums und nicht die Konstanz der Massenerscheinung den Ausschlag gibt. Aber auch, wenn die Aussage für ein, falls man so sagen darf, „durchschnittliches Individuum“ gemacht wird, muß man bedenken, daß (Näheres s. § 20, Schluß) die empirische Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit von ungünstigem Einfluß auf die Sicherheit der Vorhersagung ist. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Tafeln beständig nachzuprüfen und zu verbessern.

An der Hand der Sterblichkeitstafel beantwortet man

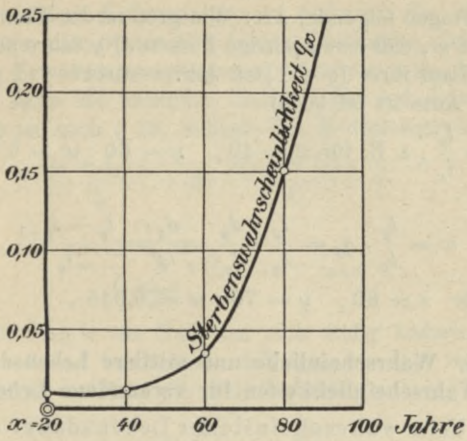
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
Sterbenswahrscheinlichkeit q_x
x=20
40
60
80
100 Jahre

Fig. 14.

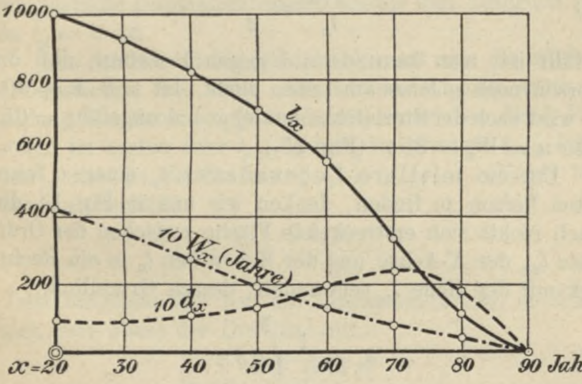
1000
800
600
400
200
l_x
10 W_x (Jahre)
10 d_x
x=20
30
40
50
60
70
80
90 Jahre

Fig. 15.

leicht Fragen folgender Art: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, daß eine $x$jährige Person a) y Jahre alt wird? b) im Lauf ihres $(y+1)$ten Jahres stirbt?

Die Antwort ist zu a)

$$w = \frac{l_y}{l_x}, \text{ z. B. für } x = 40, \quad y = 60 : w = 0{,}674 ;$$

zu b)

$$w = \frac{l_y}{l_x} \cdot q_y = \frac{l_y}{l_x} \cdot \frac{d_y}{l_y} = \frac{d_y}{l_x} = \frac{l_y - l_{y+1}}{l_y},$$

also für $x = 60, \quad y = 70 : w = 0{,}045$.

§ 34. Wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer, Wahrscheinlichkeiten für verbundene Leben.

1\. Unter wahrscheinlicher Lebensdauer $u = W_x$ einer $x$jährigen Person versteht man diejenige Zahl von Jahren, für welche die Bedingung:

$$\frac{l_{x+u}}{l_x} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

erfüllt ist; man kann dann 1 gegen 1 wetten, daß die Person noch u Jahre am Leben bleibt. Ist z. B. $x = 30$, so wird nach der Sterblichkeitstafel $x + u$ ungefähr $= 65$, also $u = W_x = 35$. (Fig. 15.)

Um die mittlere Lebensdauer e_x einer x Jahre alten Person zu finden, denken wir uns in Fig. 14 die nach rechts sich erstreckende Fläche zwischen der Ordinate l_x, der X-Achse und der Kurve der l_x in ein Rechteck mit der Höhe l_x verwandelt; dessen Grundlinie:

$$e_x = \frac{1}{l_x}\int_x^w l_z \, dz \tag{2}$$

ist die mittlere Lebensdauer; w bedeutet die höchste Altersstufe, also 90 bis 100 Jahre. Die Zahl e_x läßt sich auch als Erwartungswert deuten; nimmt man an, daß der Tod am Ende des nächsten, übernächsten usf. Jahres erfolge, so ist nach § 33, Schluß, der Erwartungswert:

$$1 \cdot \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + 2 \cdot \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} + \cdots$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_{0}^{w-x} v\,(l_{x+v-1} - l_{x+v}) \,.$$

Läßt man v von Null aus sich stetig ändern, setzt $v = z - x$ und beobachtet, daß $l_{x+v-1} - l_{x+v}$ in $-d\,l_z$ übergeht, so entsteht die neue Definition:

$$e_x = -\frac{1}{l_x} \int_x^w (z - x)\,\frac{d\,l_z}{d\,z} \cdot d\,z\,;$$

die partielle Integration ergibt wieder den Ausdruck (2), da $l_w = 0$ ist.

Aus der Sterblichkeitstafel bekommt man die mittlere Lebensdauer, wie folgt. Findet das Ableben stets zu Anfang des Rechnungsjahres statt, so erleben die l_x Personen im ersten Jahr l_{x+1} Jahre, im zweiten l_{x+2} Jahre usw., also ist die Summe $l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots$ Jahre und der Durchschnitt:

$$\left|e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x}\right. .$$

Tritt hingegen der Tod am Jahresschluß ein, so findet sich (wie oben) der Durchschnitt:

$$e_x\Big| = \frac{l_x + l_{x+1} + \cdots}{l_x}\,;$$

das Mittel aus $|e_x$ und $e_x|$ wird der Wahrheit am nächsten kommen; die Sterblichkeitstafel liefert also den Näherungswert:

$$(3) \qquad e'_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x}.$$

Zur Ausrechnung kann man sich einer Rechenmaschine bedienen; gute Annäherung bekommt man auch durch Anwendung der Simpsonschen Regel[1]) auf (2):

$$(4) \quad e''_x = \frac{5}{3} \cdot \frac{l_x + 4\,l_{x+5} + 2\,l_{x+10} + 4\,l_{x+15} + \cdots}{l_x};$$

es wird z. B. $e'_{50} = e''_{50} = 19{,}0$ Jahre, ferner $u = W_{50} = 19{,}1$ Jahre.

2. Die numerische Übereinstimmung zwischen mittlerer und wahrscheinlicher Lebensdauer erklärt sich, wenn man annimmt, daß die l_x eine abnehmende arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. Es sei:

$l_x = (w - x)\delta$, $l_{x+1} = (w - x - 1)\delta$, $\ldots$, $l_w = 0$; außerdem $w - x$ eine gerade Zahl. Durch Summation der Reihe erhält man leicht nach (3):

$$e'_x = \frac{w - x}{2};$$

andererseits ist (1) erfüllt, wenn man:

$$u = \frac{w - x}{2}$$

wählt; folglich ist $e'_x = u$. Da nun die Kurve der l_x von einer geraden Linie nicht allzusehr verschieden ist, so ist angenähert $e'_x = W_x$.

3. An der Hand der Sterblichkeitstafel (oder des Makehamschen Gesetzes) lassen sich auch die Wahr-

[1]) Sammlung Göschen Nr. 88, § 29.

scheinlichkeiten für verbundene Leben ermitteln; wir wollen annehmen, daß es sich um Ehegatten handelt und die Trennung nur durch Todesfall herbeigeführt wird. Man muß hierbei für beide Geschlechter verschiedene Tafeln benutzen; für Abschätzungen genügt die Tafel S. 122. Eine genaue Beantwortung der gestellten Fragen hätte auch darauf zu achten, ob z. B. die Sterbenswahrscheinlichkeit für eine Witwe ebenso groß ist, wie für eine gleichaltrige verheiratete Frau.

Ist A (der Mann) x, B (die Frau) y Jahre alt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach u Jahren:

A und B leben:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+n}}{l'_y},$$

A lebt, B tot ist:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}\left(1 - \frac{l'_{y+n}}{l'_y}\right),$$

A tot ist, B lebt:

$$\frac{l'_{y+n}}{l'_y}\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right),$$

A und B tot sind:

$$\left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\left(1 - \frac{l'_{y+n}}{l'_y}\right),$$

nicht mehr beide leben:

$$1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+n}}{l'_y}.$$

Man kann auch die wahrscheinliche Ehedauer u berechnen; hierfür besteht die Gleichung:

$$\frac{l_{x+u}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+u}}{l'_y} = \frac{1}{2}.$$

Ist z. B. $x = 30$, $y = 20$, so muß:

$$l_{30+u} \cdot l'_{20+u} = \tfrac{1}{2} l_{30} \cdot l'_{20}$$

sein; nach Seite 122 ist ungefähr:

$$\tfrac{1}{2} \cdot l_{30} \cdot l'_{20} = 458000 = a\,,$$

$$\text{für } u_1 = 25: \quad l_{55}\, l'_{45} = 502700 = a_1\,,$$

$$\text{für } u_2 = 30: \quad l_{60}\, l'_{50} = 401300 = a_2\,.$$

Die „regula falsi"[1]) ergibt:

$$u = u_1 + \frac{(a_1 - a)(u_2 - u_1)}{a_1 - a_2}\,,$$

also: $\quad u = 25 + 2{,}2 = 27{,}2$ Jahre.

4) In ähnlicher Weise kann man die Aufgaben über mehr als zwei verbundene Leben lösen. Wird etwa nach der gemeinsamen Lebensdauer von drei 20jährigen Personen gefragt, so gilt:

$$l^3_{20+u} = \tfrac{1}{2}\, l^3_{20}\,,$$

$$l_{20+u} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\, l_{20}\,.$$

Da $1 : \sqrt[3]{2} = 0{,}794$ ist, so ergibt die Tafel S. 122 ungefähr: $20 + u = 43{,}5$; $u = 23{,}5$. Danach darf man 1 gegen 1 wetten, daß nach 23,5 Jahren noch alle drei am Leben sind; hierbei ist vorausgesetzt, daß die Todesfälle gänzlich unabhängig voneinander eintreten, bei drei Matrosen an Bord des gleichen Schiffes wird man dies nicht als allein gültige Annahme aufstellen dürfen.

[1]) Sammlung Göschen, Nr. 53, § 114.

Anhang.

Zahlentafeln.

I. Werte von $\theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\gamma e^{-t^2} dt$.

γ	$(\theta\gamma)$	Diff.	γ	$\theta(\gamma)$	Diff.
0,00	0,000	56	0,90	0,797	24
0,05	0,056	56	0,95	0,821	22
0,10	0,112	56	1,00	0,843	37
0,15	0,168	55	1,10	0,880	30
0,20	0,223	53	1,20	0,910	24
0,25	0,276	53	1,30	0,934	18
0,30	0,329	50	1,40	0,952	14
0,35	0,379	49	1,50	0,966	10
0,40	0,428	47	1,60	0,976	8
0,45	0,475	45	1,70	0,984	5
0,50	0,520	43	1,80	0,989	4
0,55	0,563	39	1,90	0,993	2
0,60	0,604	38	2,00	0,995	2
0,65	0,642	36	2,10	0,997	1
0,70	0,678	33	2,20	0,998	1
0,75	0,711	31	2,30	0,999	0
0,80	0,742	29	2,40	0,999	1
0,85	0,771	26	2,50	1,000	
0,90	0,797				

II. Sterblichkeitstafel.

Nach: 23 D. G. M. u. W. I.[1])

x	q_x	l_x	d_x	W_x	$\log l_x$
20	0,009	1000	9	43	3,0000
25	$0{,}008_5$	956	8	39	2,9805
30	0,009	916	8	35	2,9619
35	0,010	874	9	31	2,9415
40	0,012	829	10	27	2,9186
45	0,014	777	11	23	2,8904
50	0,018	718	13	19	2,8561
55	0,025	647	16	16	2,8109
60	0,035	559	20	13	2,7474
65	0,049	454	22	10	2,6571
70	0,073	337	25	7	2,5276
75	0,106	216	23	5	2,3345
80	0,155	111	17	4	2,0453
85	0,222	40	9	3	1,6021
90	0,247	11			1,0414

[1]) Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften; normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung (1883). Die Zahlen entsprechen nicht mehr genau den jetzigen Verhältnissen.

Namenregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Bibliothek der Philosophie.

Hauptprobleme der Philosophie von Dr. Georg Simmel, Professor an der Universität Berlin. Nr. 500.

Einführung in die Philosophie von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 281.

Geschichte der Philosophie IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. Bruno Bauch, Professor an der Univers. Halle a. S. Nr. 394.

Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Grundriß der Psychophysik von Professor Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Ethik von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Allgemeine Ästhetik von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an der Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Bibliothek der Sprachwissenschaft.

Indogermanische Sprachwissenschaft von Dr. R. Meringer, Professor an der Universität Graz. Mit 1 Tafel. Nr. 59.

Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.

Romanische Sprachwissenschaft von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Universität Wien. 2 Bände. Nr. 128, 250.

Semitische Sprachwissenschaft von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.

Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft von Dr. Josef Szinnyei, Professor an der Universität Budapest. Nr. 463.

Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Deutsche Poetik von Dr. K. Borinski, Professor an der Universität München. Nr. 40.

Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung v. Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

Deutsches Wörterbuch von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Plattdeutsche Mundarten v. Prof. Dr. Hub. Grimme, Freiburg (Schweiz). Nr. 461.

Die deutschen Personennamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.

Länder- und Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Englisch-deutsches Gesprächsbuch von Professor Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.

Geschichte der lateinischen Sprache von Dr. Friedrich Stolz, Professor an der Universität Innsbruck. Nr. 492.

Grundriß der lateinischen Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch i. Magdeburg. Nr. 82.

Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Universit. Prag. Nr. 66.

Kleines russisches Vokabelbuch von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 475.

Russisch-deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar v. Dr. Erich Berneker, Prof. a. d. Univ. Prag. Nr. 67.

Geschichte der klassischen Philologie von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster. Nr. 367.

Literaturgeschichtliche Bibliothek.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

Deutsche Literaturgeschichte der Klassikerzeit von Prof. Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Prof. Dr. Karl Berger. Nr. 161.

Deutsche Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts von Prof. Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Dr. Richard Weitbrecht in Wimpfen. 2 Teile. Nr. 134, 135.

Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Herm. Jantzen, Dir. d. Königin-Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilh. Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Das Walthari-Lied. Ein Heldensang aus dem 10. Jahrhundert im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert v. Prof. Dr. H. Althof in Weimar. Nr. 46.

Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitungen und Wörterbuch herausgegeben von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin-Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Der Nibelunge Nôt in Auswahl und **mittelhochdeutsche Grammatik** mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 1.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 10.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus **Minnesang und Spruchdichtung.** Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von O. Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Die Epigonen des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Deutsche Literaturdenkmäler des 14. und 15. Jahrhunderts, ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin-Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. I: Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. II: Hans Sachs. Ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

— III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel. Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

Deutsche Literaturdenkmäler des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Paul Legband in Berlin. 1. Teil. Nr. 364.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel von Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Das deutsche Volkslied. Ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Julius Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Voßler, Prof. an der Universität Heidelberg. Nr. 125.

Spanische Literaturgeschichte von Dr. Rudolf Beer in Wien. 2 Bde. Nr. 167, 168.

Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Königl. Technischen Hochschule München. Nr. 213.

Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

Russische Literatur v. Dr. Erich Boehme, Lektor an d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa und Poesie mit ausführlichen Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 403.

— II. Teil: Всеволодъ, Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 404.

Slavische Literaturgeschichte von Dr. Josef Karásek in Wien. I: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— II: Das 19. Jahrhundert. Nr. 278.

Nordische Literaturgeschichte. I: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 254.

Die Hauptliteraturen des Orients von Dr. Mich. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. I: Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.

— II: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.

Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

Römische Literaturgeschichte von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.

Die Metamorphosen des P. Ovidius Naso. In Auswahl mit einer Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von Dr. Julius Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.

Vergil, Aeneis. In Auswahl mit einer Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von Dr. Julius Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 497.

Geschichtliche Bibliothek.

Einleitung in die Geschichtswissenschaft von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Universität Greifswald. Nr. 270.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität in Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Geschichte des alten Morgenlandes von Dr. Fr. Hommel, o. ö. Prof. der semitischen Sprachen an der Universität in München. Mit 9 Voll- und Textbildern und 1 Karte des Morgenlandes. Nr. 43.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Neutestamentliche Zeitgeschichte I: Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.

— **II:** Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze. Nr. 326.

Griechische Geschichte von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der Deutschen Universität Prag. Nr. 49.

Griechische Altertumskunde von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Römische Geschichte von Realgymnasialdirektor Dr. Julius Koch in Grunewald. Nr. 19.

Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollbild. Nr. 45.

Geschichte des Byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Deutsche Geschichte von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. I: **Mittelalter** (bis 1519). Nr. 33.

— **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500—1648) Nr. 34.

— **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648 bis 1806). Nr. 35.

Deutsche Stammeskunde von Dr. Rudolf Much, Prof. an der Universität in Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Die deutschen Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Direktor des Städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abbildungen. Nr. 124.

Abriß der Burgenkunde von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang. I: Öffentliches Leben. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel u. Abbildungen. Nr. 93.

— **II:** Privatleben. Mit Abbildungen. Nr. 328.

Quellenkunde zur Deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität in Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Österreichische Geschichte von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. I: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtafeln. Nr. 104.

— **II:** Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648) Mit 2 Stammtafeln. Nr. 105.

Englische Geschichte von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Französische Geschichte von Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Univ. Berlin. Nr. 85.

Russische Geschichte von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

Spanische Geschichte von Dr. Gust. Diercks. Nr. 266.

Schweizerische Geschichte v. Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

Geschichte der christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bayerische Geschichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

Geschichte Frankens von Dr. Christian Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D. in München. Nr. 434.

Sächsische Geschichte von Prof. Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

Thüringische Geschichte von Dr. Ernst Devrient in Leipzig. Nr. 352.

Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

Württembergische Geschichte von Dr. Karl Weller, Professor am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 462.

Geschichte Lothringens von Geh. Reg.-R. Dr. Herm. Derichsweiler in Straßburg. Nr. 6.

Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.

Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Universität Bonn. 1. Bändchen: 1800—1852. Nr. 216.

— 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univ. Berlin. Nr. 156.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Geographische Bibliothek.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Klimakunde. I: Allgemeine Klimalehre von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln u. 2 Figuren. Nr. 114.

Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt, Assistent a. Meteorologischen Observatorium u. d. öffentl. Wetterdienststelle in Aachen. Nr. 482.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Professor a. d. Universität in Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abb. im Text u. 8 Tafeln. Nr. 112.

Paläogeographie. Geologische Geschichte der Meere u. Festländer v. Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.

Das Eiszeitalter von Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.

Die Alpen von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 129.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 10 Textkärtchen und Profilen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.

Landeskunde und Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 8 Abbildungen, 6 graphischen Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.

— **von Baden** von Professor Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Königl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 176.

— **der Republik Brasilien** von Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und einer Karte. Nr. 373.

— **von Britisch-Nordamerika** von Professor Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 215.

— **von Frankreich** von Dr. Richard Neuse, Direktor der Oberrealschule in Spandau. 1. Bändchen. Mit 23 Abbildungen im Text und 16 Landschaftsbildern auf 16 Tafeln. Nr. 466.

— — 2. Bändchen. Mit 15 Abbildungen im Text, 18 Landschaftsbildern auf 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 467.

— **des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck** von Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

— **der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen u. 8 Abbild. im Text u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

— **der Großherzogtümer Mecklenburg und der Freien und Hansestadt Lübeck** von Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text, 16 Tafeln und einer Karte in Lithographie. Nr. 487.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Universität Berlin. Mit 10 Textillustrationen und 1 Karte. Nr. 244.

— **der Rheinprovinz** von Dr. V. Steinecke, Direktor des Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.

— **des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Dr. Alfred Philippson, ord. Prof. der Geographie an der Universität Halle a. S. Mit 9 Abbildungen, 7 Textkarten und einer lithographischen Karte. Nr. 359.

— **des Königreichs Sachsen** von Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnasium in Plauen. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 258.

— **der Schweiz** von Professor Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abbildungen und einer Karte. Nr. 398.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Kreisschulinspektor Heinrich Kerp in Kreuzburg. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 202.

— **der Vereinigten Staaten von Nordamerika** von Prof. Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Mit Karten, Figuren im Text und Tafeln. 2 Bändchen. Nr. 381, 382.

— **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove in Göttingen. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.

Landes- und Volkskunde Palästinas von Privatdozent Dr. G. Hölscher in Halle a. S. Mit 8 Vollbildern und einer Karte. Nr. 345.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 56 Abbildungen. Nr. 73.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo, F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm und Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, neu bearbeitet von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. Mit 71 Abbildungen. Nr. 30.

Mathematische u. astronomische Bibliothek.

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Ebene Geometrie mit 110 zweifarb. Figuren von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Dr. Rob. Haußner, Prof. an der Universität Jena. Nr. 142.

— II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Fig. von Dr. Gerhard Hessenberg, Professor an der Landwirtschaftl. Akademie Bonn-Poppelsdorf. Nr. 99.

Stereometrie mit 66 Figuren von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Nr. 97.

Niedere Analysis mit 6 Fig. von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Nr. 53.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Professor Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Fig. von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Fig. von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 309.

Höhere Analysis von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. I: **Differentialrechnung** mit 68 Figuren. Nr. 87.

— II: **Integralrechnung** mit 89 Figuren. Nr. 88.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung mit 46 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung mit 52 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Dr. K. Doehlemann, Prof. an der Universität München. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Universität Freiburg i. Br. Nr. 180.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der Kgl. Baugewerkschule zu Münster i. W. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, neu bearbeitet von Dr. H. Ludendorff in Potsdam. Mit 15 Abbildungen. Nr. 91.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Universität Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Nr. 92.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit 15 Fig. und 2 Tafeln von Wilh. Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Nr. 302.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kaiserl. Technischen Schule in Straßburg i. E. I: Feldmessen und Nivellieren. Mit 146 Abbildungen. Nr. 468.

— II: Der Theodolit. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 469.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde mit 56 Abbildungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Nr. 84.

☛ Gleichzeitig macht die Verlagshandlung auf die „Sammlung Schubert", eine Sammlung mathematischer Lehrbücher, aufmerksam. Ein vollständiges Verzeichnis dieser Sammlung, sowie ein ausführlicher Katalog aller übrigen mathematischen Werke der G. J. Göschenschen Verlagshandlung kann kostenfrei durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Naturwissenschaftliche Bibliothek.

Paläontologie und Abstammungslehre von Prof. Dr. Karl Diener in Wien. Mit 9 Abbildungen. Nr. 460.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u. Privatdozent an der Universität Wien. Mit 51 Abbildungen. Nr. 73.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Abriß der Biologie der Tiere von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 131.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Das Tierreich. I: Säugetiere, von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.

— **III: Reptilien und Amphibien,** von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 48 Abbildungen. Nr. 383.

— **IV: Fische,** von Dr. Max Rauther, Privatdozent der Zoologie an der Universität Gießen. Mit 37 Abbildungen. Nr. 356.

— **VI: Die wirbellosen Tiere,** von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. der Zoologie an der Universität Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Figuren. Nr. 439.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johs. Meisenheimer, Professor der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— **II:** Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Graz. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.

Geschichte der Zoologie von Dr. Rud. Burckhardt, weil. Direktor der Zoologischen Station des Berliner Aquariums in Rovigno (Istrien). Nr. 357.

Die Pflanze, ihr Bau und ihr Leben von Professor Dr. E. Dennert in Godesberg. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Das Pflanzenreich. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

Die Stämme des Pflanzenreichs von Privatdoz. Dr. Rob. Pilger, Kustos am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abbildungen. Nr. 485.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Morphologie, Anatomie und Physiologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Die Pflanzenwelt der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit 100 Abbildungen. Nr. 268, 269.

Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. der Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Das System der Blütenpflanzen mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Assistent am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedrich Bruck in Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildungen. Nr. 310.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Professor an d. Universität Bonn. Mit 132 Abbildungen. Nr. 29.

Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbildungen und 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Professor an der Kgl. Bergakademie Clausthal. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Kgl. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbildungen. Nr. 210.

Geschichte der Physik von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Nr. 293.

— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.

Theoretische Physik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

— II. Teil: Licht und Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

— IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.

Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Universität Breslau. Nr. 445.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Metalloide (Anorganische Chemie I. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metalle (Anorganische Chemie II. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer. III: Karbocyclische Verbindungen. Nr. 193.

— IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Analytische Chemie von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Stereochemie v. Dr. E. Wedekind, Prof. a. d. Univ. Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikal.-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.

— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Agrikulturchemie. I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Agrikulturchemische Untersuchungsmethoden von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in H. Nr. 470.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied d. Kgl. Preuß. Meteorol. Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. u. 3 Taf. Nr. 175.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Neu bearb. v. Dr. H. Ludendorff, Potsdam. Mit 15 Abbildungen. Nr. 91.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Fig. Nr. 114.

Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt in Aachen. Nr. 482.

Bibliothek der Physik.

Siehe unter Naturwissenschaften.

Bibliothek der Chemie.

Siehe unter Naturwissenschaften und Technologie.

Bibliothek der Technologie.

Chemische Technologie.

Allgemeine chemische Technologie v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Die Fette und Öle sowie die **Seifen- und Kerzenfabrikation** und die **Harze, Lacke, Firnisse** mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun. I: Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und der Fette und Öle. Nr. 335.

— II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbildungen. Nr. 336.

— III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 16 Abbildungen. Nr. 333.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor der Brauer- und Mälzerschule in Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe von Dipl.-Ing. Dr. Ernst Leher. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung und Untersuchung von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Städt. Chemisch. Laboratoriums in Stuttgart. Nr. 109.

Anorganische chemische Industrie von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz in München. 2 Bde. Mit 21 Fig. Nr. 313, 314.

Elektrometallurgie von Reg.-R. Dr. Fr. Regelsberger in Steglitz-Berlin. Mit 16 Figuren. Nr. 110.

Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter. I: Glas- und keramische Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

— II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Die Teerfarbstoffe mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Mechanische Technologie.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. 2 Bde. Nr. 340, 341.

Textil-Industrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.

— **II:** Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

— **III:** Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textil-Industrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ingenieur Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Das Holz. Aufbau, Eigenschaften und Verwendung, von Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 33 Abbildungen. Nr. 459.

Das autogene Schweiß- und Schneidverfahren von Ingenieur Hans Niese in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.

Bibliothek der Ingenieurwissenschaften.

Das Rechnen in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ingenieur Joh. Eugen Mayer in Karlsruhe i. B. Mit 30 Abb. Nr. 405.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von K. Memmler, Diplom-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Materialprüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

— **II:** Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen und ihren Legierungen, unter besonderer Berücksichtigung der Metallmikroskopie von Prof. E. Heyn und Prof. O. Bauer am Kgl. Materialprüfungsamt (Groß-Lichterfelde) der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. I: Allgemeiner Teil. Mit 45 Abbildungen im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

— **II:** Spezieller Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Statik. I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 82 Figuren. Nr. 178.

— **II:** Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Figuren. Nr. 288.

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Figuren. Nr. 491.

Hydraulik v. W. Hauber, Diplom-Ingenieur in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Schattenkonstruktionen von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Dir. d. Kgl. Baugewerkschule, Münster i. W. Mit 132 Figuren. Nr. 57.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.
I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
— II. Teil: Englisch-Deutsch. Nr. 396.
— III. Teil: Deutsch-Französisch. Nr. 453.
— IV. Teil: Französisch-Deutsch. Nr. 454.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor an der Königlich Technischen Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 42 Fig. u. 10 Tafeln. Nr. 196.
— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 103 Figuren und 16 Tafeln. Nr. 197.
— III: Die Wechselstromtechnik. Mit 126 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

Die elektrischen Meßinstrumente. Darstellung der Wirkungsweise der gebräuchlichsten Meßinstrumente der Elektrotechnik und kurze Beschreibung ihres Aufbaues von J. Herrmann, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 195 Fig. Nr. 477.

Radioaktivität von Chemiker Wilh. Frommel. Mit 18 Abbildungen. Nr. 317.

Die Gleichstrommaschine von C. Kinzbrunner, Ingenieur u. Dozent für Elektrotechnik a. d. Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen von Diplom-Elektroingenieur Josef Herzog in Budapest u. Prof. Feldmann in Delft. Mit 68 Fig. Nr. 456.

Die elektrische Telegraphie von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Figuren. Nr. 172.

Das Fernsprechwesen v. Dr. Ludw. Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. u. 1 Taf. Nr. 155.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. Oberlehrer P. Werkmeister. 2 Bändchen. Mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Maurer- u. Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.

Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kais. Technischen Schule in Straßburg i. E. I: Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken und Deckenbildungen, hölzerne Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengewerke. Mit 169 Abbildungen. Nr. 489.
— II: Dächer, Wandbekleidungen, Simsschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.

Eisenkonstruktionen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch mit Beispielen von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Der Eisenbetonbau von Reg.-Baumeister Karl Rößle in Berlin-Steglitz. Mit 77 Abbildungen. Nr. 349.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting, Direktor der Akt.-Ges. Gebrüder Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 31 Figuren. Nr. 342.
— II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 195 Fig. Nr. 343.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Professor Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Das Veranschlagen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlages von Emil Beutinger, Architekt B.D.A., Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung von Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 25 Figuren und 11 Tabellen. Nr. 399.

Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbildungen. Nr. 443.

— II: Die Schulräume. — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 444.

Öffentliche Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Wasserversorgung der Ortschaften von Dr.-Ing. Rob. Weyrauch, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Figuren. Nr. 5.

Die Kalkulation im Maschinenbau von Ingenieur H. Bethmann, Dozent am Technikum Altenburg. Mit 61 Abbildungen. Nr. 486.

Die Maschinenelemente. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Figuren. Nr. 3.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz, diplom. Chemiker in München. I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, diplomierter Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Figuren und 4 Tafeln. Nr. 152.

— II: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Lötrohrprobierkunde. Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohres von Dr. Martin Henglein in Freiberg. Mit 10 Figuren. Nr. 483.

Technische Wärmelehre (Thermodynamik) von K. Walther und M. Röttinger, Diplom-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen von M. Röttinger, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.

Die Dampfmaschine. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. prakt. Gebrauch v. Friedr. Barth, Obering., Nürnberg. Mit 48 Fig. Nr. 8.

Die Dampfkessel. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den prakt. Gebrauch v. Friedr. Barth, Obering., Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Die Gaskraftmaschinen. Kurzgefaßte Darstellung der wichtigsten Gasmaschinen-Bauarten v. Ingenieur Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ing. Hermann Wilda, Professor am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.

Die zweckmäßigste Betriebskraft von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verschiedene Kraftmaschinen. Mit 27 Abbildungen. Nr. 224.

— II: Gas-, Wasser- und Wind-Kraftanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 225.

— III: Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graphische Darstellungen. Wahl der Betriebskraft. Mit 27 Abbildungen. Nr. 474.

Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal, Kgl. Regierungsbaumeister und Oberingenieur in Hannover. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.

— II: Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit 56 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. Nr. 108.

Die Hebezeuge, ihre Konstruktion und Berechnung von Ingenieur Hermann Wilda, Prof. am staatl. Technikum in Bremen. Mit 399 Abbildungen. Nr. 414.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit 59 Abbildungen. Nr. 290.

Die landwirtschaftlichen Maschinen von Karl Walther, Diplom-Ingenieur in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 407—409.

Die Preßluftwerkzeuge von Diplom-Ingenieur P. Iltis, Oberlehrer an der Kaiserl. Technischen Schule in Straßburg. Mit 82 Figuren. Nr. 493.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

Bibliothek der Rechts- u. Staatswissenschaften.

Allgemeine Rechtslehre von Dr. Th. Sternberg, Privatdozent an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Erstes Buch: Allgemeiner Teil. I: Einleitung — Lehre von den Personen und von den Sachen von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 447.

— — II: Erwerb und Verlust, Geltendmachung und Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.

— **Zweites Buch:** Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— **Drittes Buch:** Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgemeine Lehren. Besitz und Eigentum. Nr. 480.

— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.

— **Viertes Buch:** Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Univ. Göttingen. Nr. 305.

Deutsches Handelsrecht von Prof. Dr. Karl Lehmann in Rostock. 2 Bändchen. Nr. 457, 458.

Das deutsche Seerecht von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. 2 Bände. Nr. 386, 387.

Postrecht von Dr. Alfred Wolcke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.

Allgemeine Staatslehre von Dr. Hermann Rehm, Prof. an der Universität Straßburg i. E. Nr. 358.

Allgemeines Staatsrecht von Dr. Julius Hatschek, Prof. an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.

Preußisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Deutsches Zivilprozeßrecht von Professor Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Kirchenrecht von Dr. Emil Sehling, ord. Prof. der Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Das deutsche Urheberrecht an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Der internationale gewerbliche Rechtsschutz von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Das Urheberrecht an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und der Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Das Warenzeichenrecht. Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894 von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamtes zu Berlin. Nr. 360.

Der unlautere Wettbewerb von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. Nr. 339.

Deutsches Kolonialrecht von Dr. H. Edler v. Hoffmann, Professor an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Kriegsgerichtsrat Carl Endres i. Würzburg. Nr. 401.

Forensische Psychiatrie von Prof. Dr. W. Weygandt, Direktor der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

Volkswirtschaftliche Bibliothek.

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

Gewerbewesen von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. 2 Bände. Nr. 203, 204.

Das Handelswesen von Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— II. Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Auswärtige Handelspolitik von Dr. Heinrich Sieveking, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.

Das Versicherungswesen von Dr. jur. Paul Moldenhauer, Professor der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 180.

Die gewerbliche Arbeiterfrage von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Die Arbeiterversicherung von Professor Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I. Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— II. Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Die Steuersysteme des Auslandes von Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Die Entwicklung der Reichsfinanzen von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 427.

Die Finanzsysteme der Großmächte. (Internat. Staats- u. Gemeinde-Finanzwesen.) Von O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat, Berlin. 2 Bdch. Nr. 450, 451.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Die Entwicklung der sozialen Frage von Prof. Dr. Ferd. Tönnies in Eutin. Nr. 353.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber, Professor an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

Die Wohnungsfrage von Dr. L. Pohle, Professor der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. I: Das Wohnungswesen in der modernen Stadt. Nr. 495.

— II: Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.

Das Genossenschaftswesen in Deutschland von Dr. Otto Lindecke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.

Theologische und religionswissenschaftliche Bibliothek.

Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität in Jena. Nr. 272.

Alttestamentliche Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Breslau. Nr. 292.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.

Die Entstehung d. Neuen Testaments v. Prf. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Die Entwicklung der christlichen Religion innerhalb des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 388.

Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität in Jena. I: Der historische u. kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums. Nr. 325.

— II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Nr. 326.

Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.

Abriß der vergleichenden Religionswissenschaft von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Die Religionen der Naturvölker im Umriß von Dr. Th. Achelis, weiland Professor in Bremen. Nr. 449.

Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Griechische und römische Mythologie von Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.

Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 15.

Die deutsche Heldensage von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 32.

Pädagogische Bibliothek.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität in Jena. Nr. 12.

Geschichte der Pädagogik von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

Zeichenschule von Professor K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- u. Golddruck u. 200 Voll- u. Textbildern. Nr. 39.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbildungen. Nr. 96.

Geschichte des deutschen Unterrichtswesens von Professor Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Königlichen Gymnasiums zu Luckau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— II: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Das deutsche Fortbildungsschulwesen nach seiner geschichtlichen Entwicklung und in seiner gegenwärtigen Gestalt von H. Siercks, Direktor der städt. Fortbildungsschulen in Heide i. Holstein. Nr. 392.

Die deutsche Schule im Auslande von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.

Bibliothek der Kunst.

Stilkunde von Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbildern und 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Die Baukunst des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbildungen. Nr. 74.

Die Plastik des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayr. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Die Plastik seit Beginn des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern auf amerikanischem Kunstdruckpapier. Nr. 321.

Die graphischen Künste v. Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- u. Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. u. Beilagen. Nr. 75.

Die Photographie von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.

Bibliothek der Musik.

Allgemeine Musiklehre von Professor Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Musikalische Akustik von Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) von Prof. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149, 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung von Professor Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Fuge. Erläuterung und Anleitung zur Komposition derselben von Professor Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Instrumentenlehre von Musikdirektor Franz Mayerhoff in Chemnitz. I: Text. II: Notenbeispiele. Nr. 437, 438.

Musikästhetik von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Geschichte der alten und mittelalterlichen Musik von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. I. II. Nr. 121, 347.

Musikgeschichte des 17. u. 18. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky i. Stuttgart. Nr. 239.

— seit Beginn des 19. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

Bibliothek der Land- und Forstwirtschaft.

Bodenkunde von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.

Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin und Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Allgemeine und spezielle Tierzuchtlehre von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Prof. an der Forstakadem. Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation d. forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Handelswissenschaftliche Bibliothek.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Prof. Robert Stern, Oberlehrer der Öffentlichen Handelslehranstalt und Dozent der Handelshochschule zu Leipzig. Mit Formularen. Nr. 115.

Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 182.

Französische Handelskorrespondenz von Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 183.

Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M.-A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in Kings Lynn. Nr. 237.

Italienische Handelskorrespondenz von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königlichen Institut SS. Annunziata zu Florenz. Nr. 219.

Spanische Handelskorrespondenz v. Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Russische Handelskorrespondenz von Dr. Th. v. Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.

Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer an d. Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. 3 Bde. Nr. 139, 140, 187.

Warenkunde von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie.
I: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.
— II: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Technik des Bankwesens von Dr. Walter Conrad in Berlin. Nr. 484.

Das Wechselwesen von Rechtsanwalt Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

☞ Siehe auch „Volkswirtschaftliche Bibliothek". Ein ausführliches Verzeichnis der außerdem im Verlage der G. J. Göschenschen Verlagshandlung erschienenen handelswissenschaftlichen Werke kann durch jede Buchhandlung kostenfrei bezogen werden.

Militär- und marinewissenschaftliche Bibliothek.

Das moderne Feldgeschütz. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850—1890, v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 307.

Die modernen Geschütze der Fußartillerie. I: Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 von Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Die Entwicklung der Handfeuerwaffen seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Oberleutnant im Inf.-Regt. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehrprüfungskommission. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Kriegsgerichtsrat bei dem Generalkommando des Kgl. bayr. II. Armeekorps in Würzburg. Nr. 401.

Geschichte des Kriegswesens von Dr. Emil Daniels in Berlin. I: Das antike Kriegswesen. Nr. 488.

— II: Das mittelalterliche Kriegswesen. Nr. 498.

Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe und der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat u. Schiffbau-Direktor. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Verschiedenes.

Bibliotheks- und Zeitungswesen.

Volksbibliotheken (Bücher- und Lesehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Das deutsche Zeitungswesen von Dr. Robert Brunhuber. Nr. 400.

Das moderne Zeitungswesen (System der Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber. Nr. 320.

Allgemeine Geschichte des Zeitungswesens von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Hygiene, Medizin und Pharmazie.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 15 Abbildungen. Nr. 96.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Prof. Dr. Bischoff in Berlin. Mit 4 Figuren. Nr. 464.

Die Infektionskrankheiten und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Tropenhygiene von Med.-Rat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Institutes für Schiffs- u. Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Die Hygiene des Städtebaus von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 30 Abbildungen. Nr. 348.

Die Hygiene des Wohnungswesens von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 20 Abbildungen. Nr. 363.

Gewerbehygiene von Geh. Medizinalrat Dr. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig u. Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Photographie.

Die Photographie. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

Stenographie.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.

Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Studienrat des Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.

Redeschrift. Lehrbuch der Redeschrift des Systems Stolze-Schrey nebst Kürzungsbeispielen, Lesestücken, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, amtl. bad. Landtagsstenographen in Karlsruhe i. B. Nr. 494.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Neueste Verzeichnisse sind jederzeit unberechnet durch jede Buchhandlung zu beziehen. ☚

GJG
17 85