schen

echnung

Methode der kleinsten
Quadrate

Von

Prof. Wilh. Weitbrecht

I. Teil
Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln

Mit 8 Figuren

GJG

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Jede Nummer in eleg. Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ein aus[illegible] erschienenen Nummer[illegible] Bändchens

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden 80 Pfennig.

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

ehrer in
m Text.
Nr. 435.

g. Mit
Nr. 436.

r Ober-
Nr. 402.

an der
Nr. 507.

Nr. 41.

rofessor
Nr. 142.

Nr. 143.

rofessor
Figuren
Nr. 508.

Figuren
Nr. 99.

Nr. 97.

Vom 1. Januar 1913 ab beträgt der Preis der Sammlung Göschen 90 Pf. für den Band

Niedere Analysis m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.

Wenden!

Sammlung Göschen

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von

Wilh. Weitbrecht
Professor der Geodäsie in Stuttgart

Zweite, veränderte Auflage

I. Teil

Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln

Mit 8 Figuren

Franz Magnus

Berlin und Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.
1912

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

2. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder gleichgenauer Beobachtungen.

3. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

III. Abschnitt.

Bedingte Beobachtungen.

Einleitung.

Bei der Feststellung von Tatsachen und Größen mittels sinnlicher Wahrnehmung sind wir Irrtümern und Fehlern unterworfen, welche teils der menschlichen Unvollkommenheit, teils der Mangelhaftigkeit der angewandten Hilfsmittel und Methoden entspringen. Dies zeigt sich an den dabei auftretenden Widersprüchen, sobald irgendein von mehreren Menschen beobachteter Vorgang genau festgestellt, oder wenn die Ausdehnung, die chemische oder physikalische Eigenschaft eines und desselben Gegenstandes auch nur von einem einzigen Beobachter mehrmals unabhängig bestimmt werden will. Es zeigt sich auch, wenn man mehrere Größen, welche vermöge eines Naturgesetzes in bestimmter Beziehung zueinander stehen, einzeln und unabhängig mißt (z. B. die beiden Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, die drei Winkel eines Dreiecks usw.).

Will man daher Widersprüche in der Feststellung von Größen oder Tatsachen vermeiden, so muß man entweder die Augen vor etwa vorhandenen überschüssigen und daher den anderen unter allen Umständen widersprechenden Beobachtungsergebnissen verschließen, oder — auf überschüssige Beobachtungen überhaupt verzichten. Beide Auskunftsmittel wären identisch mit dem Verfahren eines Richters, der über jeden einzelnen Vorgang nur einen einzigen Zeugen hören wollte, auch wenn er von mehreren mehr oder weniger abweichend beobachtet wurde. Das Ergebnis einer solchen Untersuchung hätte wenig Aussicht, die Wahrheit zu treffen. Dagegen wird man der gesuchten Wahrheit um so näher kommen, je mehr Beobachtungen bei der Feststellung eines Vorganges oder einer Größe berücksichtigt werden und je zuverlässiger sie sind.

Wollen wir alle, teilweise einander widersprechenden Beobachtungen zu einem einheitlichen Ergebnis — dem richterlichen Urteil gleich — verarbeiten, so müssen wir jede von dem ihr anhaftenden Fehler zu befreien, sie **„auszugleichen"** suchen. Bei Beobachtungen an der leblosen Natur kann die Fehlerursache außer in der Unzulänglichkeit unserer Sinne bloß noch in der Mangelhaftigkeit der verwendeten Methoden und Instrumente liegen. Die Feststellung von Größe und Ursache der Fehler liefert daher neben ihrem eigentlichen Zweck — der Verarbeitung überschüssiger Beobachtungen zu einem einheitlichen Resultat — noch wertvolle Fingerzeige für künftige Einschränkung der Beobachtungsfehler.

§ 1. Einteilung der Beobachtungsfehler.

Die Ursache, welcher ein Beobachtungsfehler seine Entstehung verdankt, ist häufig auch bestimmend für dessen Eigenschaft und Größe, so daß man umgekehrt aus letzteren häufig auf die Ursache schließen kann.

Entspringt der Fehler z. B. äußeren Einflüssen (Witterungsunbilden und anderen Naturereignissen, Böswilligkeit dritter usw.), oder ungewöhnlicher Nachlässigkeit des Beobachters, so läßt er die Beobachtungsgröße meist um erhebliche Beträge und zwar ebenso wahrscheinlich in der einen, wie in der anderen Richtung unrichtig erscheinen, er ist ein **„grober Fehler"**.

Die groben Fehler lassen sich in den meisten Fällen vermeiden, jedenfalls aber durch überschüssige Beobachtungen und geeignete Beobachtungsverfahren ihrer Größe und Richtung nach erkennen und nachträglich ausmerzen. Sie gehören nicht zu denjenigen, welche der Ausgleichung unterliegen, und wir werden uns mit ihnen im folgenden nicht beschäftigen.

Außer diesen, sowohl nach Richtung und Größe, als auch nach ihrer Ursache meist leicht erkennbaren groben Fehlern gibt es aber noch kleinere Fehler (Abweichungen des Beobachtungsergebnisses vom wahren Wert), die sich zwar durch geeignete Hilfsmittel und Beobachtungsverfahren und namentlich durch erhöhte Aufmerksamkeit und Erfahrung des Beobachters wesentlich einschränken, niemals aber ganz vermeiden lassen. — Die Feststellung dieser **unvermeidlichen** Fehler an den Beobachtungsergebnissen nach wahrscheinlicher Ursache und Größe und ihre Ausmerzung bildet die **Aufgabe der Ausgleichungsrechnung.**

Auch sie zeigen übrigens bei näherem Zusehen prinzipielle Verschiedenheiten, die der Verschiedenartigkeit der Fehlerquellen entstammen, und die uns zwingen, sie in zwei Gruppen getrennt zu betrachten. Wenn es nämlich im einzelnen Beobachtungsfall auch kaum möglich ist, jede einzelne Fehlerquelle und ihren Anteil am schließlichen Gesamtfehler der Beobachtungsgröße festzustellen, so zeigt doch die einfachste Überlegung, daß die eine Fehlerursache eine nach ihrem Vorzeichen sich gleichbleibende, in gesetzmäßiger Abhängigkeit von der Beobachtungsgröße wachsende Fehlerwirkung ausüben kann, während die andere einen Fehleranteil erzeugt, der nach Größe und Vorzeichen von Beobachtung zu Beobachtung wechselt.

Wird z. B. eine Strecke durch mehrfaches Anlegen eines Maßstabes gemessen, der um ein gewisses, wenn auch kaum erkennbares Maß zu kurz ist, so liefert diese Messung, falls der Längenabmangel des Maßstabs die einzige Fehlerquelle darstellt, unter allen Umständen ein zu großes Maß für die Strecke, und zwar wächst der hieraus entspringende Streckenfehler proportional zur festgestellten Anzahl von Maßstablagen, also proportional zur Streckenlänge. Einen solchen Fehler nennt man **„regelmäßigen Fehler“**.

Hat umgekehrt der Maßstab zwar die richtige Länge, aber es schleicht sich bei jeder neuen Lage ein zufälliger kleiner Anlegefehler ein, so wird dieser ebenfalls das Gesamtresultat der Strecke schädlich beeinflussen. Da aber der Fehler in den einzelnen Maßstablagen gleich wahrscheinlich in der Vorwärts- wie in der Rückwärtsrichtung wirken kann, so werden einige der positiv wirkenden Fehlerelemente einige der entsprechenden negativen aufheben. Als Gesamtwirkung dieser Fehlerquelle auf die Strecke wird daher nur der Überschuß der einen Fehlerrichtung über die andere auftreten. Dieser kann ebensogut positiv wie negativ, und wird seiner absoluten Größe nach im günstigsten (aber unwahrscheinlichen) Fall gleich 0 sein, wenn nämlich die Gesamtwirkung der positiven gleich derjenigen der negativen Fehlerteile ist. Im ungünstigsten (ebenso unwahrscheinlichen) Fall (wenn alle Fehlerelemente in gleicher Richtung wirken) wäre die Gesamtwirkung wie im Fall des regelmäßigen Fehlers proportional zur Streckenlänge. Weder der eine noch der andere dieser äußersten Fälle wird regelmäßig auftreten. Sicher ist daher, daß die wahrscheinliche Gesamtwirkung dieses **„zufälligen“** (unregelmäßigen) Fehlers langsamer wächst, als die des regelmäßigen Fehlers.

Wenn nach Vorstehendem das Wachstum des regelmäßigen und des unregelmäßigen Fehlers verschiedenen Gesetzen folgt, und wenn weiter die Möglichkeit vorliegt, daß beide Fehlergruppen in den auszugleichenden Beobachtungsresultaten gleichzeitig auftreten, so wird nur die Trennung beider die richtige Erkenntnis der Fehlerursachen und die Fehlerverbesserung an der richtigen Stelle ermöglichen.

Eine solche Trennung läßt sich in einzelnen Fällen durch einfache Überlegung bewirken. Wird z. B. ein und dieselbe Größe (etwa eine Strecke) mit denselben Geräten unter denselben äußeren Umständen und nach derselben Methode mehrmals gemessen und weisen die Messungsresultate Unterschiede auf, die zu klein sind, um als Folgen grober Fehler angesehen werden zu können, so können diese Unterschiede nur zufälligen, unregelmäßigen Fehlerquellen entspringen. Sind aber die verschiedenen Wiederholungen der Messung je mit anderen Geräten nach anderen Methoden, oder unter veränderten Umständen ausgeführt worden, so können die auftretenden kleinen Unterschiede zwischen den verschiedenen Resultaten ebensowohl zufälligen, als regelmäßigen Fehlern und ihrem **Zusammenwirken** entspringen. Durch Vergleichung der im ersten Fall festgestellten mit den Beobachtungsunterschieden, die sich beim zweiten Fall ergeben, können wir den Anteil beider Gruppen von Fehlern an den letzteren ermitteln. Wir werden uns im folgenden hauptsächlich mit der Ausgleichung der zufälligen Fehlerteile beschäftigen, die Beseitigung der regelmäßigen aber durch passende Anordnung der Beobachtungsgrößen und durch passende Beobachtungsverfahren anstreben.

§ 2. Wahrscheinlichster Wert L einer Größe aus einer Reihe gleichgenauer, nur mit zufälligen Fehlern behafteter Beobachtungsresultate l.

Ist die Beobachtung einer Größe mit denselben Hilfsmitteln und Methoden und unter denselben äußeren Verhältnissen ausgeführt worden, kann also jedes der erhaltenen, um geringe Beträge voneinander abweichenden Resultate als gleich zuverlässig angesehen werden, so würde die Annahme irgend eines dieser Beobachtungsresultate als endgültigen Wert der Beobachtungsgröße eine Vergewaltigung der übrigen und eine nutzlose, unwirtschaftliche Arbeitsvergeudung darstellen. Denn letztere hätten, falls es sich bei ihrer Beobachtung etwa nur um Schutz gegen das Einschleichen grober Fehler handelte (Kontrollbeobachtungen), zum mindesten mit geringerem Aufwand an Sorgfalt und Zeit ermittelt werden können. Wählen wir dagegen den endgültigen Wert L der Beobachtungsgröße unter gleichmäßiger Berücksichtigung aller beobachteten Einzelwerte l aus, so erzielen wir damit zweifellos eine Genauigkeitssteigerung, weil zum mindesten ein Teil der zufälligen — ebenso wahrscheinlich positiven wie negativen — Einzelfehler sich gegenseitig aufhebt.

Die Voraussetzung, daß sämtliche Beobachtungen mit gleicher Sorgfalt, also vermutlich auch gleicher Genauigkeit ausgeführt sind, führt zum Zweck der Auswahl eines endgültigen ausgeglichenen Mittelwertes L für die Beobachtungsgröße zu der Forderung, an sämtlichen Beobachtungswerten l gleichgroße, im Vorzeichen wechselnde Verbesserungszuschläge v anzubringen, welche dem bei der Beobachtung eingeschlichenen gleich wahrscheinlich positiven wie negativen und gleichgroßen zufälligen Fehler entsprechen. Diese Forderung läßt sich aber nur im Fall zweifacher Beobachtung erfüllen.

Trägt man nämlich die Beobachtungswerte $l_1, l_2 \dots$ als Ordinaten zu einer beliebigen Abszissenachse auf (Fig. 1a), so läßt sich nur dann eine Parallele zu dieser Abszissenachse finden, die von den Endpunkten der Ordinaten gleichen Abstand v hat, wenn die Zahl der letzteren 2 ist.

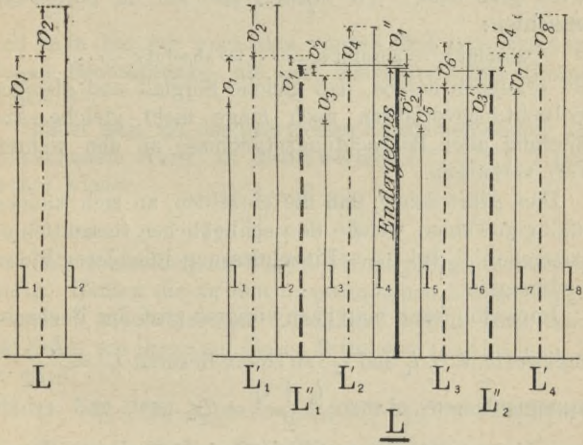

Fig. 1a. Fig. 1b.

In diesem Fall sind die Verbesserungszuschläge $v_1 = -v_2$. Legt man der vom Endpunkt der l aus in der Ordinatenrichtung verlaufenden Verbesserung v das Vorzeichen $+$, der andern das Vorzeichen $-$ bei, so wird

(1) $$v_1 + v_2 = 0$$

und der wahrscheinlichste Wert L der Beobachtungsgröße

$$L = l_1 + v_1$$
$$L = l_2 + v_2$$

woraus (2a) $$L = \frac{(l_1 + l_2) + (v_1 + v_2)}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Ist die Zahl der Beobachtungswiederholungen 2^n und trägt man wieder alle Beobachtungswerte l_1, l_2 ... als Ordinaten zu einer und derselben Abszissenachse auf (s. Fig. 1 b), so ist es unmöglich, eine Parallele zur letzteren zu ziehen, deren Abstände v von allen erhaltenen Ordinatenendpunkten gleich groß sind. Wir müssen also auf die Forderung verzichten:

$$\text{absolut}\, v_1 = \text{absolut}\, v_2 = \cdots = \text{absolut}\, v_r = \cdots$$

und erkennen daraus, daß gleiche Sorgfalt und gleiches Beobachtungsverfahren noch lange nicht gleiche Annäherung aller Beobachtungsergebnisse an den wahren Wert verbürgen.

Dies rührt daher, daß die einzelnen, an sich kleinen zufälligen Fehler, welche den schließlichen Gesamtfehler erzeugen, sich bei jeder Einzelmessung in anderer Weise kombinieren.

Immerhin kann man nach vorigem zwei der Beobachtungswerte, z. B. l_1 und l_2, zu einem Resultat $L_1' = \frac{l_1 + l_2}{2}$ zusammenfassen, ebenso $\frac{l_3 + l_4}{2} = L_2'$ usw. und erhält damit ebenso viele Werte L', als Beobachtungs**paare** vorhanden sind. Gleichzeitig ist dann wie vorhin

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 = 0 \\ v_3 + v_4 = 0 \\ \;\vdots \qquad \vdots \end{array}\right\} [v]^{*}) = 0\,.$$

*) Das von K. F. **Gauß** (geb. 30. April 1777, gest. 23. Febr. 1855), dem Begründer der Methode der kleinsten Quadrate, eingeführte Zeichen [ ], für die Summe einer endlichen Zahl gleichartiger Größen, entsprang dem griechisshen Σ = Summe aller. Der einfacheren Schreibweise halber entstand daraus das Zeichen [und zur genauen Begrenzung des zusammenzufassenden Ausdrucks, [ ]. Es wird aus sachlichen und aus Gründen der Pietät im folgenden beibehalten werden.

Faßt man jetzt je zwei der so gefundenen Werte L' wieder zu einem Wert L'' zusammen und heißt die dabei an den Werten L' anzubringenden Verbesserungen v', so ist wieder

$$\left.\begin{array}{l} v_1' + v_2' = 0 \\ v_3' + v_4' = 0 \\ \vdots \quad\;\; \vdots \end{array}\right\} [v'] = 0$$

und man hat nur noch den vierten Teil der ursprünglichen Beobachtungs- als sich widersprechende Einzelwerte L''.

Fährt man mit der paarweisen Zusammenfassung der gewonnenen Werte zu Mittelwerten L''', L'''' ... fort, wobei wieder

$$[v''] = 0$$
$$[v'''] = 0 \quad \text{usw.},$$

so bleibt schließlich ein Wert L als endgültiger Mittelwert übrig. Heißen die an den ursprünglichen Beobachtungswerten l anzubringenden Zuschläge, welche nötig sind, um jeden von ihnen auf diesen Mittelwert L zu bringen, V, so wird:

$$(1)\quad (L-l_1)+(L-l_2)+\cdots=[v]+[v']+[v'']+\cdots=\boldsymbol{[V]=0}$$

als **Eigenschaft des endgültigen Mittelwertes L aus den Ergebnissen l von 2^n gleichgenauen Beobachtungen.**

Die in (1) gefundene Eigenschaft des endgültigen Mittelwertes L aus einer Anzahl 2^n nur mit zufälligen Fehlern behafteter, gleich genauer Beobachtungen l wohnt dem wahrscheinlichen Mittelwert inne, auch wenn die Beobachtungszahl nicht gerade 2^n ist. Denn die ungefähr gleichgroßen zufälligen Beobachtungsfehler V werden gleich wahrscheinlich positiv wie negativ auftreten, sich also bis auf einen im Vergleich zu $[l]$ sehr kleinen Rest um so eher aufheben, je größer die Zahl der Beobachtungen l ist. Mit großer Wahrscheinlichkeit dürfen wir daher Gleichung (1) als allgemein gültige Bedingung für die Auswahl des wahrscheinlichsten Mittelwertes L einer beliebigen Anzahl gleichgenauer Beobachtungen l festsetzen. Wir gewinnen damit allerdings nur eine Hypothese für ein Naturgesetz, die aber um so gesicherter sein wird, je mehr künftig daraus zu ziehende Schlüsse mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Wie man auch den wahrscheinlichsten Wert L der Beobachtungsgröße wählen möge, immer wird, wenn man mit $l_1, l_2 \ldots$ die Beobachtungsergebnisse und mit $v_1, v_2 \ldots$ die an ihnen anzubringenden Verbesserungen bezeichnet, die Beziehung bestehen:

$$\begin{aligned} L &= l_1 + v_1 \\ L &= l_2 + v_2 \\ &\vdots \\ L &= l_n + v_n, \end{aligned}$$

durch Addition erhält man daraus:

$$n L = [l] + [v],$$

und unter Berücksichtigung von (1) ($[v] = 0$):

$$(2) \quad \boldsymbol{L = \frac{[l]}{n}},$$

d. h.: **der wahrscheinlichste Wert einer beobachteten Größe ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den einzelnen Beobachtungsergebnissen.** Dieser Satz stimmt vollständig überein mit unserem natürlichen Empfinden. Denkt man sich nämlich die Beobachtungswerte l und ebenso den Wert $L = \frac{[l]}{n}$ auf einer Geraden von einem und demselben Anfangspunkt aus als Strecken abgetragen, so stellt der Endpunkt des letzteren den Schwerpunkt vor der durch sämtliche Beobachtungswerte bestimmten Streckenendpunkte (s. auch S. 20).

Wir erkennen, daß jeder nachträglich erlangte Beobachtungswert l einen neuen Widerspruch v gegen den Mittelwert L und damit eine kleine Veränderung des letzteren bedingt. Je größer aber die Zahl n der zur Mittelbildung bereits verwendeten Beobachtungswerte l und je größer ihre Genauigkeit ist, um so geringer wird der Einfluß einiger neu hinzukommender ebenso genauer Beobachtungswerte auf das Endergebnis sein. Die Veränderung des Endresultates durch neu hinzutretende Beobachtungswerte würde aber erst dann gleich 0, wenn die Zahl der bereits verwendeten ∞ groß wäre. Dann hätte man den auf dem Weg der Beobachtung tatsächlich unerreichbaren wahren Wert X der Beobachtungsgröße gefunden.

§ 3. Grundbedingung für die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Einteilung der Ausgleichungsaufgaben.

Die Bedingung (1) führt auf einem sehr einfachen Weg zur eindeutigen Erlangung des wahrscheinlichsten Wertes L aus einer Anzahl gleichgenauer Beobachtungen l, wenn, graphisch betrachtet, die gesuchte Ausgleichungslinie (s. Fig. 1 b) ihrer Richtung nach (hier als Parallele zur x-Achse) zum voraus bekannt ist. Trifft dies nicht zu, so genügt die Bedingung $[v] = 0$ nicht zur eindeutigen Auswahl dieser Ausgleichungslinie. Ist z. B. die beobachtete Größe L (statt wie bisher konstant) abhängig von einer zweiten veränderlichen Größe, so kann man zwar die Beobachtungswerte l, wie in Fig. 1a und 1b, als Ordinaten und zwar diesmal zu den korrespondierenden Werten der zweiten Veränderlichen als Abszissen aufzeichnen.

Es mögen z. B. bei gleichbleibender Temperatur, aber veränderlichem Luftdruck, an einem Quecksilber- und gleichzeitig an einem Federbarometer korrespondierende Ablesungen gemacht worden sein, um die Beziehung zu finden zwischen der Anzahl von Teilen, um welche sich der Zeiger des Aneroidbarometers fortbewegt, und der Anzahl von mm, um welche sich aus denselben Ursachen die Höhe der Quecksilbersäule verändert. Es sei ferner festgestellt worden, daß die gesuchte Beziehung zwischen den Höhen b der Quecksilbersäulen und den Aneroidablesungen a von linearer Form ist:

$$b = a x + c .$$

Trägt man daher die Quecksilberablesungen b als Ordinaten zu den zugehörigen Aneroidablesungen a als Abszissen auf und verbindet die so erhaltenen Bildpunkte, so ergibt sich bei fehlerfreien Ablesungen eine Gerade. Ihr Richtungskoeffizient (tg des Richtungswinkels) stellt die gesuchte Multiplikationskonstante x vor, ihr Abschnitt auf der y-Achse die (uns zunächst nicht interessierende) Additionalkonstante c. Nun sind aber die Ablesungen an beiden Barometern mit kleinen Fehlern behaftet, welche zur Folge haben, daß die Verbindungslinie der Bildpunkte keine Gerade wird, wenn die Zahl der letzteren > 2, d. h. wenn Überbestimmung vorhanden ist. Die Abweichungen einer den Bildpunkten möglichst angepaßten Geraden von diesen sind auch hier nichts anderes, als die Verbesserungen v (s. Fig. 2), welche an den Quecksilberablesungen b anzubringen sind, damit die jeder Aneroidablesung a entsprechende gemittelte Quecksilberablesung B erscheint, und deren algebraische Summe wir laut Bedingung (1) zu 0 machen sollen.

Fig. 2.

Nun kann man aber jede beliebige Richtung parallel mit sich selbst so verschieben, daß schließlich [algebr. v] = 0 wird, jede neue liefert ein anderes c und x, d. h. es gibt unendlich viele Gerade, welche der gestellten Bedingung $[v] = 0$ entsprechen. Zur Auswahl der bestmöglichen Ausgleichungslinie brauchen wir eine weitere Bedingung, welche die unter (1) aufgestellte ersetzt oder ergänzt. Als solche weitere Bedingung könnte man etwa wählen:

$$[\text{absolut } v] = \text{Minimum}.$$

Diese Form wurde in der Tat von Laplace im Jahre 1802 aufgestellt und begründet.

Sie leidet aber an verschiedenen Mängeln. In erster Linie tut sie den Verbesserungen v, welche ohne Vorzeichen undenkbar sind, Zwang an, indem sie ihnen das Vorzeichen raubt. Sodann verursacht die Aufstellung eines allgemein gültigen Ausdruckes für den absoluten Wert jedes einzelnen v oder für deren Summe [abs. v], welche zum Minimum werden soll, erhebliche Schwierigkeiten. Denn je nach der Größe des Beobachtungswertes l, bzw. desjenigen von L ist abwechselnd abs. $v = L - l$ oder abs. $v = l - L$. Endlich nimmt die Bedingung [abs. v] = Min. keine Rücksicht auf die Wertung der einzelnen Beobachtungsfehler v nach ihrer Größe. Handelt es sich nämlich darum, die Güte einer Beobachtungsreihe im ganzen zu beurteilen, so wird man dazu am besten den Wert derjenigen Funktion der Beobachtungsfehler v verwenden, die man zum Zweck und anläßlich der Auswahl des bestmöglichen Mittelwertes L zum Minimum gemacht hat, im vorliegenden Fall also [abs. v] oder

$$d = \frac{[\text{abs.}\, v]}{n}. \tag{3}$$

Der Wert d stellt dabei den absoluten Durchschnittswert aus n Beobachtungsfehlern v, den „durchschnittlichen Fehler einer Beobachtung" vor.

Möge nun z. B. ein bestimmter Beobachter mit einem gewissen Instrument und unter Einhaltung einer gewissen Messungsmethode beim Nivellement gleichlanger geschlossener Schleifen etwa folgende Abschlußdifferenzen gegen den (in diesem Fall bekannten) Sollwert 0 erzielt haben:

Schleife	Abschlußdifferenz v	
	+ mm	− mm
1	4	
2	5	
3		6
4	5	
5		5
6	5	
7		5
8		6
9	5	
10		4
	24	26

[abs. v] = 50

$$d = \frac{[\text{abs. } v]}{n} = 5 \text{ mm.}$$

Ein zweiter Beobachter habe dagegen beim Nivellement derselben Schleifen mit anderem Instrument oder nach anderer Methode folgende Abschlußdifferenzen erzielt:

Schleife	Abschlußdifferenz v	
	+ mm	− mm
1	1	
2		1
3	1	
4		10
5		12
6	0	
7		1
8		0
9		15
10		9
	2	48

[abs. v] = 50

$$d = \frac{[\text{abs. } v]}{n} = 5 \text{ mm.}$$

Beide Beobachtungsreihen zeigen denselben Betrag für [abs. v] und daher denselben durchschnittlichen Fehler d. Trotzdem sind die dadurch ausgeführten Höhenbestimmungen durchaus nicht gleich zuverlässig. Schon der Umstand, daß die Zahl der positiven Abweichungen v in der zweiten Reihe gegenüber derjenigen der negativen erheblich verschieden ist, widerspricht ihrer Eigenschaft als zufällige Fehler und weist auf die Einwirkung grober oder regelmäßiger Fehler hin, die sich möglicherweise bis auf den schließlich festgestellten Betrag gegenseitig aufgehoben haben können.

Noch mehr aber spricht die absolute Größe der Abschlußdifferenzen gegen die Gleichwertigkeit der beiden Gruppen von Messungen. Jede dieser Differenzen setzt sich nämlich zusammen aus einer Reihe von in ihrer Ursache und

Wirkung teilweise unbekannten Fehlerelementen, die sichteils addieren, teils gegenseitig aufheben. Die Abschlußdifferenz ist nur ihr in die Erscheinung tretender Rest. Ist dieser Rest in den einzelnen Beobachtungsfällen sehr verschieden, so beweist dies, daß die Fehlerelemente selbst verhältnismäßig groß sind, so daß einige von ihnen, welche ausnahmsweise der Regel widersprechen, gleichwahrscheinlich positiv wie negativ zu sein, hinreichen, das Beobachtungsresultat und die Abschlußdifferenz merklich zu beeinflussen. Das zufällige, eben hieraus erklärliche Vorkommen einiger auffallend kleiner Abschlußdifferenzen ändert an der Tatsache der geringen Zuverlässigkeit ebensowenig, als etwa einige zufällige Kernschüsse denjenigen zum hervorragenden Schützen stempeln, der mit anderen seiner Schüsse nicht einmal die Scheibe trifft. Wird ja auch nicht derjenige Mensch als der brauchbarere von zweien angesehen, der zwar im Falle zufällig glücklicher Disposition einmal eine ganz hervorragende Leistung vollbringt, aber zwischenherein, vielleicht gerade wenn man ihn nötig braucht, versagt!

Sollen daher nach dem Ausgeführten die Beobachtungsfehler v in dem Sinne gewertet werden, daß größere Fehler progressiv wachsend in die Wagschale fallen, so bleibt nichts übrig, als irgend eine Potenz von ihnen in Vergleich zu ziehen. Dabei hat eine Potenz mit geradem Exponenten noch den Vorzug, das lästige Vorzeichen des Fehlerbetrages v auf natürliche Weise zum Verschwinden zu bringen. Die Frage, welche gerade Potenz der v gewählt werden soll, beantwortet sich aus der Eigenschaft der Fehler als Naturerscheinungen, die gewissen (uns zunächst unbekannten) Gesetzen unterworfen sind: Im Zweifelsfalle ist die einfachste Form die richtige, sofern sie anderen, bereits festgestellten Gesetzen $\left(\text{im vorliegenden Falle (1): [algeb. } v] = 0 \text{ und (2): } L = \frac{[l]}{n}\right)$ nicht widerspricht.

Unter letzterer Voraussetzung und an Stelle der als unrichtig erkannten Annahme [abs. v] = Min. setzen wir jetzt für die Wertung der erreichten Beobachtungsgenauigkeit sowohl, als für die Auswahl des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße L die Bedingung

$$[v\,v] = \mathbf{Min.} \tag{4}$$

Ob diese Bedingung den für gleichgenaue Beobachtungen einleitend angegebenen Gesetzen (1) und (2) nicht widerspricht, untersuchen wir wie folgt:

Behaftet man d. an den Beobachtungswerten l anzubringenden Verbesserungsbeträge v mit algebraischen Vorzeichen, so ist allgemein gültig, welcher Wert auch für L gewählt werden möge:

$$\left\{\begin{array}{llll} v_1 = L - l_1 & \text{also} & v_1^2 = L^2 - 2\,L\,l_1 + l_1^2 \\ v_2 = L - l_2 & \text{„} & v_2^2 = L^2 - 2\,L\,l_2 + l_2^2 \\ \vdots & & \vdots \\ v_n = L - l_n & \text{„} & v_n^2 = L^2 - 2\,L\,l_n + l_n^2 \\ \hline [v] = n\,L - [l] & & [v\,v] = n\,L^2 - 2\,L\,[l] + [l\,l]\,. \end{array}\right.$$

Soll nun der wahrscheinlichste Wert L so ausgewählt werden, daß $[v\,v] = \text{Min.}$, so muß sein

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,L} = 2\,\mathrm{n}\,L - 2\,[\mathrm{l}] = 0$$

oder

$$L = \frac{[l]}{n}, \quad \text{woraus} \quad [v] = n \cdot \frac{[l]}{n} - [l] = 0\,.$$

Die Gleichung (4) steht also in Übereinstimmung mit den Gleichungen (2) (und) (1). Sie stellt die S. 17 als notwendig erkannte weitere Ausgleichungsbedingung vor und **bildet** damit **die Grundlage für die gesamte Ausgleichungsrechnung.** Nach ihr erhielt letztere die Bezeichnung **„Methode der kleinsten Quadrate“** (besser wäre: Methode der kleinsten Quadratsumme). Die Gleichung (4) läßt schließlich, wie Gleichungen (1) und (2), eine bemerkenswerte mechanische Deutung zu. Denkt man sich nämlich wie S. 14 die Beobachtungswerte l als Ordinaten aufgetragen, so stellen deren Abweichungen v vom Mittelwert L die Ordinaten ihrer Endpunkte vor in bezug auf die durch den Endpunkt dieses Mittelwertes parallel zur Abszisse gezogene Achse. Betrachtet man diese Ordinatenendpunkte als Massenpunkte, deren jedem vermöge der gleichen Beobachtungsgenauigkeit je dasselbe Gewicht 1 zukommt, und denkt sich die Gewichte in ihnen angreifend und parallel zur Achse wirkend, so bedeutet $[v]$ die Summe der statischen Momente für Drehung um den Endpunkt des Mittelwertes L, und (1) $[v] = 0$ das vorhandene Gleichgewicht. $[v\,v]$ stellt das axiale Trägheitsmoment für die durch den genannten Endpunkt gehende Achse vor, und (4) $[v\,v] =$ Min. bedeutet (wie (1) $[v] = 0$), daß dieser Endpunkt des Mittelwertes L den Schwerpunkt des Systems gleich gewichtiger Massenpunkte vorstellt.

Zum Schluß möge noch untersucht werden, welche Werte die Summen der Quadrate der Abschlußdifferenzen in beiden Beobachtungsreihen des Beispiels S. 18 annehmen.

Die erste Reihe liefert:

$$16 + 25 + 36 + 25 + 25 + 25 + 25 + 36 + 25 + 16 = 254.$$

Die zweite Reihe liefert:

$$1 + 1 + 1 + 100 + 144 + 0 + 1 + 0 + 225 + 81 = 554.$$

Es ergibt sich also, wie vorauszusehen war, die Summe der Fehlerquadrate in der zweiten Reihe größer und damit, übereinstimmend mit dem praktischen Gefühl, die Beobachtungsgenauigkeit geringer als in der ersten.

Einteilung der Ausgleichungsaufgaben.

In den §§ 2 und 3 sind zwei Aufgabenfälle angedeutet worden, deren erster durch die Bedingung $[v] = 0$ eindeutig gelöst werden konnte, während dieser Bedingung im zweiten Falle eine unendlich große Zahl von Lösungen entsprach. Dies zeigt, daß beide Fälle prinzipielle Verschiedenheiten aufweisen müssen. In der Tat hat es sich im ersten um die Auswahl eines bestmöglichen Wertes L für die direkt und mehrfach beobachtete Größe X gehandelt, während im zweiten Falle andere zu ihr in Beziehung stehende Größen beobachtet wurden, durch deren Vermittlung die gesuchte Multiplikationskonstante x erschlossen werden mußte.

Im ersten Falle handelte es sich um die Ausgleichung **direkter**, im zweiten um die Ausgleichung **vermittelnder** Beobachtungen.

Es ist auch möglich, daß zwar die mehrfach beobachteten Größen selbst gesucht, daß sie aber unter sich nicht unabhängig sind, sondern streng zu erfüllenden Bedingungen unterliegen (Winkel im Dreieck usw.). In diesem Falle spricht man von der Ausgleichung **bedingter direkter** Beobachtungen. Endlich können die direkt beobachteten Größen zur Bestimmung anderer Größen dienen, die aber ihrerseits gewisse Bedingungen erfüllen müssen (z. B. Einschaltung eines durch Winkelbeobachtung bestimmten Dreiecknetzes in ein als fehlerfrei anzunehmendes Netz höherer Ordnung): man hat den Fall der Ausgleichung **bedingter vermittelnder** Beobachtungen. Für jeden dieser Aufgabenfälle wird ein besonderer, gerade für ihn einfacher und zweckmäßiger Gang der Lösung aufzustellen sein. Doch ist diese Unterscheidung keineswegs so scharf, daß sich nicht auf spezielle Aufgaben sowohl die eine als die andere Lösung anwenden ließe.

Die Ausgleichung selbst kann auf rein rechnerischem Wege durchgeführt, oder durch graphische Darstellung unterstützt werden. Das erstere Verfahren hat den Vorzug größerer Genauigkeit, das letztere denjenigen größerer Übersichtlichkeit und des Erkennenlassens etwaiger bei der Beobachtung unterlaufener grober Fehler vor Abschluß der Ausgleichung.

I. Abschnitt.

Ausgleichung direkter Beobachtungen.

1. Kapitel.

Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

§ 4. Untersuchung der einer Einzelbeobachtung innewohnenden Genauigkeit.

Die wichtigste Aufgabe der Ausgleichungsrechnung: Feststellung des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße, haben wir für den Fall gleichgenauer direkter Beobachtungen bereits gelöst [s. Gleichung (2)]. Von Interesse namentlich im Hinblick auf die Auswahl möglichst zweckmäßiger Beobachtungsmethoden ist nun noch die Beurteilung der Einzelbeobachtungen in bezug auf die ihnen innenwohnende Genauigkeit. Wir haben zu diesem Zweck auf S. 18 die durchschnittliche Abweichung d der Beobachtungen vom Sollwert der beobachteten Größe berechnet. Wir haben aber dabei erkannt, daß dieser Durchschnittsbetrag d einen einwandfreien Maßstab für die erreichte Genauigkeit der Einzelmessung nicht abzugeben vermag, weil Beobachtungsreihen von ganz verschiedener Zuverlässigkeit identische Werte für d ergaben.

Um die größeren Abweichungsbeträge v bei der Beurteilung der erreichten Genauigkeit stärker in die Wagschale zu werfen, haben wir statt ihrer selbst eine Potenz von ihnen verglichen und hierfür die zweite Potenz gewählt. Wir haben schließlich für die richtige Auswahl des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße die Bedingung festgesetzt: $[v\,v] = \text{Min.}$ Diese zum Minimum zu machende Quadratsumme der Abweichungen v kann nämlich aus dreierlei Ursachen heraus einen großen Betrag erreichen: 1. durch unzweckmäßige Auswahl des Endwertes L aus den Beobachtungswerten l, 2. durch fehlerhafte Beobachtungen l und 3. durch große Anzahl n der Beobachtungen l, also der Abweichungen v. Wurde L nach Gleichung (2) gewählt, so ist $[v\,v] = \text{Min.}$, also ein kleinerer Wert $[v\,v]$ durch andere Auswahl von L nicht zu erreichen. Dann ist der Wert von $[v\,v]$ lediglich noch abhängig von der Beobachtungsgenauigkeit und von der Zahl n der Beobachtungen. Da die Genauigkeit jeder Einzelbeobachtung von deren Wiederholungszahl unabhängig ist, so ist zu ihrer Erkenntnis die Quadratsumme $[v\,v]$ durch Division mit der Wiederholungszahl n auf das Quadrat des Fehlers einer Beobachtung zurückzuführen, und man erhält unter der Voraussetzung, daß die Abweichungen v **wahre** Beobachtungsfehler vorstellen (was wir durch Einführung der Bezeichnung v_w ausdrücken wollen), als Maßstab für die im Mittel bei einer Beobachtung erreichte Genauigkeit:

$$(5a)\begin{cases} m^2 = \dfrac{[v_w v_w]}{n} \\[2ex] m = \pm\sqrt{\dfrac{[v_w v_w]}{n}} = \text{mittlerer Fehler einer Beobachtung.} \end{cases}$$

Die Voraussetzung, daß wir es in den Unterschieden zwischen Soll- und Istwerten mit wahren Beobachtungsfehlern zu tun haben, trifft in denjenigen Fällen zu, in denen der Sollwert der Beobachtungsgröße zum voraus bekannt ist (Winkelsumme im Dreieck oder im Vieleck; Summe der Projektionen der Seiten eines geschlossenen Vielecks auf eine beliebige Achse; Summe der Höhenunterschiede innerhalb einer Nivellementsschleife, Flächen-berechnung einerseits aus Originalzahlen, anderseits graphisch usw.).

So liefert das hierhergehörige Beispiel S. 18 und 21 als mittleren Fehler einer Beobachtung der ersten Reihe

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{254}{10}} = \pm 5{,}04 \text{ mm},$$

als mittleren Fehler einer Beobachtung der zweiten Reihe

$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{554}{10}} = \pm 7{,}45 \text{ mm}.$$

Der Vergleich des mittleren mit dem durchschnittlichen Fehlerbetrag d (s. S. 18) zeigt im vorliegenden Fall nebenbei, daß der mittlere Fehler nicht bloß ein gerechterer, sondern auch ein strengerer Richter ist, als der durchschnittliche Fehler.

Ist der Wert L der Beobachtungsgröße nicht zum voraus fehlerfrei bekannt, muß er vielmehr erst aus einer endlichen Zahl von Beobachtungen l nach Gleichung (2) erschlossen werden, so ist er selbst **nicht fehlerfrei,** also sind es auch nicht die Unterschiede v zwischen ihm und den Beobachtungswerten l.

Möge der nach Gleichung (2) berechnete Mittelwert L um den nach Vorzeichen und Größe unbekannten Betrag $\pm M$ unrichtig sein, so daß sein wahrer (aber unzugänglicher) Wert $X = L + M$ ist, möge ferner die unzugängliche, wahre Abweichung jedes einzelnen Beobachtungswertes l von ihm mit v_w, die uns zugängliche Abweichung vom Mittelwert L mit v bezeichnet werden, so ist

$$\begin{aligned}
v_{w_1} &= (L + M) - l_1 = L - l_1 + M = v_1 + M \\
v_{w_2} &= (L + M) - l_2 = L - l_2 + M = v_2 + M \\
&\vdots \\
v_{w_n} &= (L + M) - l_n = L - l_n + M = v_n + M,
\end{aligned}$$

woraus durch Quadrieren und Addieren:

$$[v_w v_w] = [v v] + n M^2 + 2 M [v]$$

und, da nach Gleichung (1) $[v] = 0$,

$$(6) \qquad [v_w \cdot v_w] = [v v] + n M^2 .$$

Jedes der drei Glieder ist als Summe quadratischer Einzelsummanden positiv, folglich $[v_w v_w] > [v v]$.

Hieraus geht hervor: Treten an Stelle der wahren Abweichungen v_w in Gleichung (5a) die wahrscheinlichen Abweichungen v, so wird dadurch der Zähler $[v v]$ kleiner, also muß dies beim Nenner n im gleichen Verhältnis der Fall sein. Die Bestimmung des Reduktionsverhältnisses ist aber einwandfrei jetzt noch nicht möglich, weil wir den wahren Fehler M des Mittelwertes L der Beobachtungsgröße [s. Gleichung (6)] nicht berechnen können. Immerhin können wir erkennen, daß, falls in der Gleichung (5a) für den mittleren Beobachtungsfehler M die Form unverändert bleibt und lediglich v_w durch v ersetzt wird, der an Stelle von n tretende Nenner so beschaffen sein muß, daß er: 1) kleiner ist als n, 2) im Falle mangelnder Überbestimmung, d. h. wenn nur eine Beobachtung l vorhanden ist, für die dabei erreichte Genauigkeit, d. h. für M einen unbestimmten Wert liefert, weil diese hieraus überhaupt nicht erschlossen werden kann; 3) im Falle vorhandener Überbestimmung gegen die Wiederholungszahl n konvergiert, wie der Ausdruck $[v v]$ gegen $[v_w v_w]$. Alles dies trifft zu für den Nenner $n - 1$.

Denn im Falle einer einzigen Beobachtung wird die Abweichung v ihres Resultates vom Mittelwert L gleich 0, ebenso der Nenner $n-1=0$, folglich

$$m^2 = \frac{[v v]}{n-1} = \frac{0}{0} = \text{unbestimmt.}$$

Im Falle einer sehr großen Zahl n von Beobachtungen nähert sich L dem wahren Wert, v also der wahren Abweichung v_w und $n-1$ der Wiederholungszahl n, folglich

$$m^2 = \frac{[v v]}{n-1} \sim \frac{[v_w v_w]}{n} .$$

Wir führen daher vorbehältlich später zu erbringenden strengeren Beweises (s. S. 36) unter Ersetzung der wahren, unzugänglichen Abweichungen v_w durch die zugänglichen Abweichungen v einer Beobachtung l vom wahrscheinlichen Wert L ein:

$$(5\,b)\quad \begin{cases} m^2 = \dfrac{[v\,v]}{n-1} \\ m = \pm\sqrt{\dfrac{[v\,v]}{n-1}} = \text{mittlerer Fehler einer Beobachtung.} \end{cases}$$

Satz. **Das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Abweichungen je vom Mittelwert, dividiert durch die Zahl der überschüssigen Beobachtungen.**

Aus den Fehlergleichungen S. 14 und 20

$$v = L - l \quad \text{oder} \quad L = l + v$$

erkennen wir, daß die Abweichungen v Größen gleicher Art und Gattung vorstellen, wie die Beobachtungsgrößen. Sie bedeuten Verbesserungszuschläge zu den Beobachtungswerten l, welche nötig sind, um diese in den Mittelwert L überzuführen.

Als benannte Größen lassen sie sich aber weder quadrieren noch differenzieren, wie dies S. 20, 24 und 26—27 geschah!

Den hierin liegenden Widerspruch überwinden wir, indem wir jedes v mittels Division durch seine eigene Maßeinheit auf eine unbenannte Zahl zurückführen, ohne dabei an der absoluten Zahlengröße etwas zu ändern. Zum Schluß führen wir dann für den mittleren Fehler m die der Verbesserung v geraubte Benennung wieder ein.

§ 5. Praktische Ausrechnung des Mittelwertes L und der Summe $[v\,v]$ der Fehlerquadrate aus den Beobachtungswerten l.

Sind die Beobachtungswerte l durch große Zahlen ausgedrückt, oder gar mit Benennungen versehen, deren Beziehung zueinander nicht dezimal ist (z. B. Winkel in Grad, Minuten und Sekunden, sexagesimaler Teilung), so wird die Ausrechnung des Mittelwertes L nach Formel (2) $L = \frac{[l]}{n}$ sehr schwerfällig. Führen wir dagegen einen dem Mittelwert L sich möglichst anschmiegenden Näherungswert N ein und bezeichnen die an diesem anzubringenden kleinen Zuschläge mit ν, so daß

$$\begin{aligned} \text{Beobachtungswert } l_1 &= N + \nu_1 \\ l_2 &= N + \nu_2 \\ &\vdots \\ l_n &= N + \nu_n \\ \hline \text{so wird } [l] &= n \cdot N + [\nu] \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$L = \frac{[l]}{n} = N + \frac{[\nu]}{n}. \tag{7}$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung brauchen wir nach Gleichung (5b) die Summe $[v\,v]$ der Fehlerquadrate, welche wir durch Quadrierung der Verbesserungszuschläge $v = L - l$ [s. Gleichung (1)] erhalten. Wir können aber die Fehlerquadratsumme auch direkt finden. Quadrieren wir nämlich die Verbesserungsbeträge

$$\begin{aligned} v_1 &= L - l_1, \text{ womit: } v_1^2 = L^2 - 2\,L\,l_1 + l_1^2 \\ &\vdots \\ v_n &= L - l_n, \text{ womit: } v_n^2 = L^2 - 2\,L\,l_n + l_n^2 \text{ und addieren,} \\ \text{so erhalten wir } & \quad [v\,v] = n\,L^2 - 2\,L\,[l] + [l\,l] \end{aligned}$$

und durch Einsetzung von $L = \frac{[l]}{n}$ bzw. $L^2 = \frac{[l]^2}{n^2}$

$$[v\,v] = -\frac{[l]^2}{n} + [l\,l].$$

Diese Gleichung ist praktisch nicht verwertbar. Dagegen können wir sie verbinden mit der zur Ableitung von (7) verwendeten Gleichung $\nu = l - N$. Aus dieser kommt

$$\begin{aligned} \nu_1^2 &= l_1^2 - 2\,l_1 N + N^2 \\ &\;\vdots \\ \nu_n^2 &= l_n^2 - 2\,l_n N + N^2. \\ \hline [\nu\,\nu] &= [l\,l] - 2\,N[l] + n \cdot N^2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung von $[l\,l] = [v\,v] + \frac{[l]^2}{n}$ und $L = \frac{[l]}{n}$ kommt

$$[\nu\,\nu] = [v\,v] + n\,L^2 - 2\,N \cdot n\,L + n\,N^2 = [v\,v] + n(L - N)^2$$

oder

$$(8)\begin{cases} [v\,v] = [\nu\,\nu] - n\,(L - N)^2 \text{ und unter Beachtung von (7)} \\ \qquad = [\nu\,\nu] - \dfrac{[\nu]^2}{n}. \end{cases}$$

Mittels Gleichung (5b) läßt sich hieraus der mittlere Fehler meiner Beobachtung ohne vorgängige Ausrechnung der einzelnen Beobachtungsfehler v, ja sogar ohne Berechnung des Mittelwertes L der Beobachtungsgröße gewinnen. Gleichung (8) zeigt in Übereinstimmung mit (4), daß für $L \gtrless N$ unter allen Umständen $[\nu\,\nu] > [v\,v]$.

§ 6. Mittlerer Fehler M des aus einer Reihe gleichgenauer Beobachtungen l gewonnenen Mittelwertes L.

Wir haben schon S. 26 das Bedürfnis empfunden, einen Einblick in die Genauigkeit des Mittelwertes (2) $L = \frac{[l]}{n}$ zu erlangen. Auch praktisch ist es oft wichtiger, die Genauigkeit des schließlichen Endwertes L, als diejenige der einzelnen Beobachtungswerte l zu kennen. Allerdings wird es uns kaum möglich sein, seinen **wahren** Fehler festzustellen. Wir werden uns vielmehr auch hier mit einer Annäherung, nämlich mit dem **mittleren** Fehler M des Endergebnisses begnügen müssen. Um ihn zu finden, ziehen wir in (2) den Summenzähler $[l]$ auseinander und schreiben

$$L = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \cdots + \frac{l_n}{n}.$$

Wir erkennen dann, daß bei n-facher Beobachtungswiederholung von jedem Beobachtungswert l der n-te Teil in den schließlichen Mittelwert L eingeht, der sich derart gleichsam aus n Teilen zusammensetzt. Unsere Aufgabe besteht daher jetzt darin, zu ergründen:

1. Welcher Teil des mittleren Fehlers m einer Beobachtung l der Größe L geht auf den Anteil $\frac{l}{n}$ über?
2. Wie pflanzen sich die Fehler der Einzelgrößen $\frac{l}{n}$ auf deren Summe fort?

Die Frage 1. fassen wir allgemeiner wie folgt: Wie groß ist der mittlere Fehler eines durch Multiplikation mit einem fehlerfreien Faktor a berechneten Vielfachen $X = a \cdot L$ der Beobachtungsgröße L, wenn L aus den durch mehrfache gleichgenaue Beobachtung erhaltenen Werten $l_1, l_2 \ldots l_n$ erschlossen ist und jedem der letzteren der mittlere Fehler m zukommt?

Wären die den Beobachtungswerten l anhaftenden wahren Messungsfehler $v_{w_1}, v_{w_2} \ldots v_{w_n}$ nach Vorzeichen und Größe bekannt, so würde sich durch algebraische Addition der wahre Wert von L wie folgt ergeben:

$$L_w = l_1 + v_{w_1} = l_2 + v_{w_2} = \ldots l_n + v_{w_n}.$$

Jeder Beobachtungswert l liefert nun durch Multiplikation mit a einen Wert der unbekannten Größe X,

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a\,l_1 \\ X_2 &= a\,l_2 \\ \vdots\ &\quad \vdots \\ X_n &= a\,l_n \end{aligned}\right\}, \quad \text{den wir mit deren wahrem Wert } X = a L_w \begin{aligned}[t] &= a(l_1 + v_{w_1}) \\ &= a(l_2 + v_{w_2}) \\ &\quad \vdots \\ &= a(l_n + v_{w_n}) \end{aligned}$$

vergleichen können. Bilden wir zu diesem Zweck:

$$
\begin{aligned}
X - X_1 &\equiv V_{w_1} = a(l_1 + v_{w_1}) - a l_1 = a v_{w_1} \quad \text{und} \quad V_{w_1}^2 = a^2 v_{w_1}^2 \\
&\vdots \\
X - X_n &\equiv V_{wn} = a(l_n - v_{wn}) - a l_n = a v_{wn} \quad \text{und} \quad V_{w_n}^2 = a^2 v_{w_n}^2
\end{aligned}
$$

so erhalten wir durch Addition $\qquad [V_w V_w] = a^2 [v_w v_w]$

und mittels Gleichung (5a)

$$
(9) \quad m_X \equiv m_{aL} = \pm \sqrt{\frac{[V_w V_w]}{n}} = \pm a \sqrt{\frac{[v_w v_w]}{n}} = \pm a \cdot m_l .
$$

Die Frage 2. fassen wir ebenfalls allgemeiner wie folgt: Wie groß ist der mittlere Fehler einer Bestimmung der Größe $\quad X = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n$,

wenn die mittleren Fehler $m_1, m_2 \ldots$ je einer Beobachtung $l_1', l_1'', \ldots, l_2', l_2'', \ldots, l_n', l_n'', \ldots$ der Summanden $L_1, L_2 \ldots$ bekannt sind?

Die Art der Bestimmung von X selbst unterscheidet sich von der vorigen dadurch, daß dort der wahrscheinlichste Wert L eines, aber nur dieses einzigen Teiles der Beobachtungsgröße (durch beliebig oft wiederholte Beobachtung) ein für allemal gemessen wurde. Die gesuchte Größe X wurde dann durch Multiplikation dieses Wertes mit einem (fehlerfreien) Faktor a gewonnen, während hier für jeden einzelnen der n Teile von X je in w-facher Wiederholung sowohl dessen Mittelwert L, als der mittlere Fehler m einer Beobachtung ermittelt wird.

Beschränken wir uns zunächst auf 2 Summanden: $X = L_1 \pm L_2$ und bezeichnen

mit $v_{w_1}', v_{w_1}'', \ldots, v_{w_1}^{n_1}$ die (nach Vorzeichen und Größe allerdings unbekannten) wahren Verbesserungen der n_1 Beobachtungswerte l von L_1,

mit $v_{w_2}', v_{w_2}'', \ldots, v_{w_2}^{n_2}$ die (nach Vorzeichen und Größe allerdings unbekannten) wahren Verbesserungen der n_2 Beobachtungswerte l von L_2,

aus welchen wir mittels Gleichung (5a) die mittleren Fehler m je einer Beobachtung jener Größe L_1 bzw. L_2 berechnen können $\left(m^2 = \dfrac{[v_w v_w]}{n}\right)$, so kann sich — bei Bildung der

Summe oder Differenz $X = L_1 \pm L_2$ durch Zusammensetzung je zweier von den Beobachtungswerten l — mit jedem Fehler v_{w_1} der ersten irgend ein Fehler v_{w_2} der zweiten Beobachtungsreihe zusammenfinden.

Es können also, je nachdem man zur Bildung von X den einen oder anderen der zu den einzelnen Summanden L gehörigen Beobachtungswerte l benützt, im Ganzen $n_1 \times n_2$ Fehlerkombinationen (entsprechend den $n_1 \times n_2$ Wertkombinationen) als Fehler der Summe X beider Größen entstehen, und zwar wenn die Fehler ihrem **absoluten** Wert nach eingeführt werden:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
\uparrow & \pm v'_{w_1} \pm v'_{w_2} & \pm v''_{w_1} \pm v'_{w_2} & \cdots & \pm v^{n_1}_{w_1} \pm v'_{w_2} \\
n_2 \text{ Zeilen} & \pm v'_{w_1} \pm v''_{w_2} & \pm v''_{w_1} \pm v''_{w_2} & \cdots & \pm v^{n_1}_{w_1} \pm v''_{w_2} \\
 & \vdots \quad \vdots & & & \vdots \\
\downarrow & \pm v'_{w_1} \pm v^{n_2}_{w_2} & \pm v''_{w_1} \pm v^{n_2}_{w_2} & \cdots & \pm v^{n_1}_{w_1} \pm v^{n_2}_{w_1}
\end{array}$$

$\longleftarrow$ n_1 Gruppen $\longrightarrow$

Dem durch irgendwelche Kombination von l_1 und l_2 gewonnenen Wert von X haftet im Mittel als Fehler jedenfalls ein Mittelwert der vorstehenden Fehlerkombinationen an. Der Feststellung dieses Mittelwertes tritt aber das bei allen Fehlern auftretende Doppelvorzeichen störend in den Weg. Wir bringen es zum Verschwinden, wenn wir, statt eines Mittelwertes der Fehlerkombinationen selbst, einen solchen ihrer Quadrate bilden und aus ihm hernach die Quadratwurzel ziehen. Die Quadrierung der Fehlerkombinationen und Addition liefert für die:

$$\begin{array}{ll}
\text{Gruppe } 1: & n_2 \cdot v'^2_{w_1} \pm 2\, v'_{w_1} [v_{w_2}] + [v_{w_2} v_{w_2}] \\
\text{Gruppe } 2: & n_2 \cdot v''^2_{w_1} \pm 2\, v''_{w_1} [v_{w_2}] + [v_{w_2} v_{w_2}] \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\text{Gruppe } n_1: & n_2 \cdot v^{n_1^2}_{w_1} \pm 2\, v^{n_1}_{w_1} [v_{w_2}] + [v_{w_2} v_{w_2}],
\end{array}$$

woraus wir erhalten als Summe der Quadrate der $n_1 \times n_2$ Fehlerkombinationen:

$$n_2 [v_{w_1} v_{w_1}] \pm 2 [v_{w_1}] [v_{w_2}] + n_1 [v_{w_2} v_{w_2}] .$$

Da nun nach Gleichung (1) $[v] = 0$, ist auch $[v_w]$ jedenfalls nahezu gleich 0. Also ist dies beim ganzen zweiten Summanden der Fall, womit das arithmetische Mittel aller Quadrate der Fehlerkombinationen, d. h. das Quadrat des mittleren Fehlers einer Bestimmung von X übergeht in

$$(10) \quad \begin{cases} m_X^2 \equiv m_{L_1 \pm L_2}^2 = \dfrac{n_2 [v_{w_1} v_{w_1}] + n_1 [v_{w_2} v_{w_2}]}{n_1 n_2} \\ \qquad\qquad = \dfrac{[v_{w_1} v_{w_1}]}{n_1} + \dfrac{[v_{w_2} v_{w_2}]}{n_2} = m_1^2 + m_2^2 . \end{cases}$$

Wird die festzustellende Größe X statt aus zwei Summanden $L_1 \pm L_2$ aus deren drei zusammengesetzt: $X \equiv L_1 \pm L_2 \pm L_3$ und kommt je einer Bestimmung jedes der letzteren der mittleren Fehler m_1 bzw. m_2 bzw. m_3 zu, so können wir uns X jetzt auch aus zwei, nämlich aus dem Summanden $L_1 \pm L_2$ mit dem mittleren Fehler $m_{L_1 \pm L_2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ und aus dem Summanden $\pm L_3$ mit dem mittleren Fehler m_3 einer Bestimmung zusammengesetzt denken und wir erhalten dann als mittleren Fehler einer Bestimmung der Gesamtsumme aus **(10)**

$$m_X \equiv m_{(L_1 \pm L_2) \pm L_3} = \pm \sqrt{m_{(L_1 \pm L_2)}^2 + m_{L_3}^2}$$
$$= \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} .$$

Ist die Zahl der Einzelgrößen, aus denen sich X zusammensetzt, gleich 4, so können wir auch sie in zwei

Summanden, nämlich $L_1 \pm L_2 \pm L_3$ einer-, L_4 andrerseits anordnen, womit wir erhalten aus

$$(10)\left\{\begin{aligned} m_X &\equiv m_{(L_1 \pm L_2 \pm L_3) \pm L_4} = \pm\sqrt{m^2_{(L_1 \pm L_2 \pm L_3)} + m^2_{L_4}} \\ &= \pm\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2} \end{aligned}\right.$$

usw. für 5, 6, . . ., n Summanden.

Spezieller Fall. Sind die mittleren Beobachtungsfehler m der zu addierenden oder zu subtrahierenden Größen einander gleich (Zusammensetzung eines Winkels aus n einzelnen direkt und gleichgenau gemessenen Teilen, Messen einer Strecke durch n-maliges Anlegen einer Meßstange mit gleichem Anlegefehler), so wird der Fehler der Summe oder Differenz

$$(10\text{a})\; m_{L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n} = \pm\sqrt{\overset{\frown}{\underset{1}{m^2}} + \overset{\frown}{\underset{2}{m^2}} + \cdots + \overset{\frown}{\underset{n}{m^2}}} = m\sqrt{n}\,.$$

Für zwei Summanden ergibt sich die Richtigkeit des Vorstehenden wie folgt: Ist jeder von ihnen um den Betrag $\pm v$ unrichtig, so sind folgende vier Fehlerkombinationen möglich:

$$\begin{aligned} V_1 &= v + v = 2v \quad \text{also} \quad & V_1^2 &= 4v^2, \\ V_2 &= v - v = 0 & V_2^2 &= 0, \\ V_3 &= -v - v = -2v & V_3^2 &= 4v^2, \\ V_4 &= -v + v = 0 & V_4^2 &= 0. \end{aligned}$$

$$m^2 = \text{Mittel der } V^2 = \frac{[V^2]}{4} = 2v^2,$$

$$m = v\sqrt{2}\,.$$

Nun kehren wir zur eigentlichen Aufgabe des § 6 zurück. Gleichung (9) zeigt, daß, wenn einer Bestimmung der Größe L der mittlere Fehler m zukommt, auf die durch Multiplikation erlangte a-fache Größe auch der a-fache Fehler am, auf die $\frac{1}{n}$-fache Größe also der Fehler $\frac{m}{n}$ übergeht. Demgemäß kommt jedem der Teile $\frac{l_1}{n}, \frac{l_2}{n}, \ldots \frac{l_n}{n}$, aus denen sich der Mittelwert L gerade so zusammensetzt, als ob jeder von ihnen nur einmal beobachtet worden wäre, der mittlere Fehler $\frac{m}{n}$ zu, und der Summe der Teile, d. h. **dem Mittelwert L aus n gleichgenauen Beobachtungen l je vom mittleren Fehler m** nach Gleichung (10) **der mittlere Fehler:**

$$(11)\quad M_L = \pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_{1} + \underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_{2} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_{n}} = \pm\frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Die Gleichung (11) kann man sich durch folgende Überlegung plausibel machen. Die Genauigkeit des Mittels aus einer Reihe gleichgenauer Beobachtungen kann nur abhängen von der Genauigkeit der Einzelbeobachtungen und von ihrer zur Mittelbildung verwendeten Anzahl. Kann man — etwa durch Wahl einer besseren Beobachtungsmethode — den Fehler jeder Einzelbeobachtung l reduzieren, so wird im gleichen Verhältnis auch der Fehler des Mittelwertes L abnehmen. Ebenso läßt sich der letztere aber auch verringern durch Steigerung der Wiederholungszahl n. Nur wird die Wirkung letzterer Genauigkeitssteigerung unmöglich proportional zur Wiederholungszahl sein können, weil der wahre Wert der Beobachtungsgröße, d. h. der Fehler 0 für den Mittel-

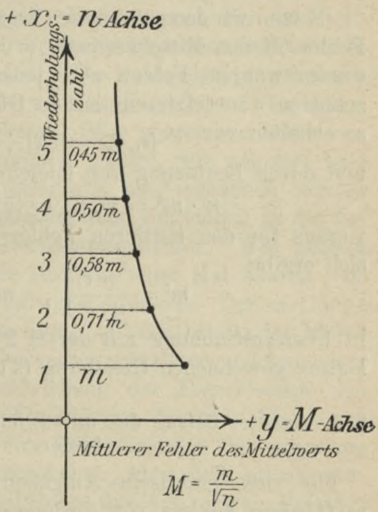

Fig. 3.

wert L erst durch ∞ viele Beobachtungswiederholungen erzielt werden könnte (s. S. 15). Denkt man sich die Zahl der Wiederholungen als Abszissen, die zugehörigen, im Mittelwert L noch zurückbleibenden Fehler als Ordinaten aufgetragen und die so erhaltenen Punkte durch eine stetige Linie verbunden, so muß demnach diese Linie sich der Abszissenachse asymptotisch nähern. Dies trifft zu für die Beziehung $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ (s. Fig. 3). Die langsame Abnahme von M im Falle auch erheblicher Steigerung der Wiederholungszahl über 2 oder 3 hinaus zeigt, daß es i. A. viel wirtschaftlicher ist, etwa wünschenswerte Genauigkeitssteigerung durch Verbesserung der Beobachtungsmethoden- und Instrumente, als durch Steigerung der Wiederholungszahl herbeizuführen.

Setzen wir den gefundenen Ausdruck für den mittleren Fehler M des Mittelwertes L, der zwar nicht gleich dessen wahrem Fehler, aber jedenfalls nicht allzu verschieden von letzterem ist, in Gleichung (6) S. 26 ein, so erhalten wir

$$[v_w v_w] = [v\,v] + m^2$$

und durch Benützung von Gleichung (5a)

$$n \cdot m^2 = [v_w v_w] = [v\,v] + m^2\,,$$

woraus für den mittleren Fehler m einer Beobachtung sich ergibt:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-1}\,, \quad m = \pm\sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$$

in Übereinstimmung mit der S. 27 durch direkte Überlegung gewonnenen Gleichung (5b).

§ 7. Größter Betrag des unvermeidlichen Beobachtungsfehlers.

Für viele praktische Aufgaben ist die Kenntnis des mittleren Fehlers von geringerer Bedeutung, als diejenige des, sei es bei einer einfachen Messung, sei es beim Mittel aus mehreren Messungen, äußerstenfalls zu befürchtenden Maximalfehlers.

Soll z. B. eine bauliche Anlage (Brücke usw.) auf Grund vorgängiger Messung konstruiert und zum Versetzen fertig hergerichtet werden, so darf der Fehler der Maßangabe ohne erhebliche Unzuträglichkeiten einen gewissen Maximalbetrag nicht überschreiten. Ebenso werden amtliche Genauigkeitsvorschriften da, wo solche im öffentlichen Verkehr nötig werden, die äußerstenfalls noch zulässige Abweichung des durch Messung oder Wägung usw. ermittelten Maßes eines Gegenstandes vom richtigen Betrag feststellen müssen. —

In Übereinstimmung mit dem Bisherigen nehmen wir an, daß grobe Fehler durch entsprechende Sicherungsmaßregeln erkannt und aus den Beobachtungsergebnissen ausgemerzt sind, ehe die Weiterverarbeitung der letzteren beginnt. Diese enthalten also nur noch die aus mehr oder weniger Fehlerelementen sich zusammensetzenden unvermeidlichen Fehler. Die Fehlerelemente sind uns nun weder nach Ursache, noch nach Größe und Vorzeichen im einzelnen sicher bekannt. Wir wissen von ihnen nur, daß sie gleichwahrscheinlich positiv, wie negativ; bald größer, bald kleiner, jedenfalls aber erheblich kleiner sind, als die am Messungsergebnis schließlich in die Erscheinung tretenden Beobachtungsfehler. Wir können uns vorstellen, daß sie sich das eine Mal häufen, das andere Mal ganz oder teilweise aufheben. Der mittlere Fehler m einer Beobachtung ist der bei ihr im Mittel, d. h. unter Ausschluß besonders günstigen und besonders ungünstigen Zusammenwirkens der Einzelbeträge am Schlußresultat in die Erscheinung tretende Überschuß der Summe der positiven über diejenige der negativen Fehlerelemente, oder umgekehrt. Aber auch im ungünstigsten Falle, in welchem die einzelnen Fehlerelemente ihren Maximalbetrag und dazu noch gleiches Vorzeichen erlangen, wird ihre Summe, d. h. die Abweichung irgend eines Beobachtungs- vom wahren oder vom Mittelwert L ein gewisses Maß nicht überschreiten, das abhängig ist einerseits von der möglichen Größe der Fehlerelemente, d. h. der Beobachtungsgenauigkeit im allgemeinen*), andererseits von der Zahl der Beobachtungswiederholungen. Je größer die letztere ist, um so wahrscheinlicher wird unter den verschiedenen Abweichungen v vom Sollwert einmal eine besonders große sich befinden**). Dieses Maß ist der Maximalfehler einer Beobachtung.

Durch nähere Untersuchung auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man, daß durch Häufung der unvermeidlichen Fehlerelemente der:

---

*) Die mehrfache Messung z. B. einer Streckenlänge wird erheblich größere unvermeidliche Abweichungen der Einzelwerte gegenüber dem Mittelwert ergeben, wenn sie mittels optischer Distanzmessung, oder Abschreitens, oder gar Schätzens, als wenn sie normalerweise mit Meßgeräten erfolgte.

**) Experimentelle Erklärung. Läßt man von einer und derselben Stelle einer schiefen Ebene aus, auf der, beliebig verteilt, Hindernisse (etwa in Form eingeschlagener Stiftchen) angebracht sind, nach Größe und Gewicht gleiche Kugeln, eine nach der anderen abrollen, so werden die Hindernisse die abrollenden Körper vorübergehend ebenso vom richtigen Weg (der Linie des stärksten Gefälles) ablenken, wie die während der Beobachtung auftretenden Fehlerelemente das Messungsergebnis vom Ziele der Messung, dem wahren Werte der Beobachtungsgröße. Die Kugeln werden den Böschungsfuß an verschiedenen Punkten erreichen. Größere Abweichungen vom mittleren Ort des Auftreffens werden aber viel seltener sein als kleine. Eine gewisse, nur bei sehr vielen Kugeln einmal erreichte Maximalabweichung wird keine der Kugeln überschreiten.

Mathematische Erklärung (nach Wellisch, Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung): Denken wir uns die Fehlerelemente, von denen bei jeder Beobachtungsart eine bestimmte, für sie eigentümliche Zahl n (im folgenden Beispiel sei $n = 6$) zur Wirkung kommt, gleichgroß und bezeichnen wir sie mit $\pm \varepsilon$, so können unter ihnen folgende mögliche Kombinationen eintreten:

1 fache	mittl.	Fehler	m	unter	3	Beob.	wahrscheinl.	1	mal
2 „	„	„	$2m$	„	22	„	„	1	„
3 „	„	„	$3m$	„	368	„	„	1	„
4 „	„	„	$4m$	„	15 800	„	„	1	„
5 „	„	„	$5m$	„	1 750 000	„	„	1	„

überschritten wird. (Vgl. hierüber u. a. Koll, Methode d. kl. Quadr.; Jordan, Ausgleichungsrechnung.)

Benützt man also (wie man zumeist genötigt ist) die Größe des auftretenden Beobachtungs-

---

1)	alle 6ε sind positiv,	ihre Gesamtwirkung ist also	$v = +6\varepsilon$
2)	5ε sind pos., 1 negativ,	„ „ „ „	$v = +4\varepsilon$
3)	4ε „ „ 2 „	„ „ „ „	$v = +2\varepsilon$
4)	3ε „ „ 3 „	„ „ „ „	$v = 0$
5)	2ε „ „ 4 „	„ „ „ „	$v = -2\varepsilon$
6)	1ε „ „ 5 „	„ „ „ „	$v = -4\varepsilon$
7)	0ε „ „ 6 „	„ „ „ „	$v = -6\varepsilon$

Da die 6 Elemente sich beliebig zusammenfinden können, ist

$$\left.\begin{array}{lll} \text{der } 1^{\text{te}} \text{ u. } 7^{\text{te}} \text{ Fall je} & & 1 \text{ mal} \\ \text{„ } 2^{\text{te}} \text{ u. } 6^{\text{te}} \text{ „} & \binom{6}{1} = \binom{6}{5} = & 6 \text{ mal} \\ \text{„ } 3^{\text{te}} \text{ u. } 5^{\text{te}} \text{ „} & \binom{6}{2} = \binom{6}{4} = & 15 \text{ „} \\ \text{„ } 4^{\text{te}} \text{ „} & \binom{6}{3} \phantom{= \binom{6}{4}} = & 20 \text{ „} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{möglich (Kombination} \\ \text{bei } n \text{ Elementen ohne} \\ \text{Wiederholung).}\end{array}$$

Die Gesamtzahl der möglichen Fälle ist also

$$2 + 12 + 30 + 20 = 64,$$

die Gesamtsumme der Quadrate der möglichen Fehler

$$(2 \times 36 + 12 \times 16 + 30 \times 4 + 20 \times 0)\,\varepsilon^2 = 384\,\varepsilon^2.$$

Wir erkennen aus diesem speziellen Beispiel (aus dem wir nebenbei imstande sind, den mittleren Fehler m in den Fehlerelementen ε auszudrücken:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v_w v_w]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{384\,\varepsilon^2}{64}} = \pm 2{,}1\,\varepsilon):$$

1) Bei den im ganzen 64 Möglichkeiten ist die Wahrscheinlichkeit für den Maximalfehler 6ε nur $\frac{2}{64}$, diejenige für den Minimalfehler 0 dagegen $\frac{20}{64}$! Wir folgern aber

widerspruches v zur Entscheidung darüber, ob man es im einzelnen Falle mit einem groben (durch Nachbeobachtung auszumerzenden), oder mit einem unvermeidlichen (einteilbaren) Fehler zu tun hat, so läuft man Gefahr, ohne daß tatsächlich ein grober Fehler vorläge, der zur Nachbeobachtung zwingen würde, d. h. lediglich weil die an sich unvermeidlichen Fehlerelemente sich ungünstig kombinieren

unter	je	3	Beob.	1	wiederholen	zu	müssen,	wenn	man	1 m
„	„	22	„	1	„	„	„	„	„	2 m
„	„	368	„	1	„	„	„	„	„	3 m

als äußerste Abweichung einer Beobachtung vom Mittelwert noch zuläßt.

Die Annahme des dreifachen mittleren, als äußerstenfalls zu duldenden **Maximalfehlers** einer Beobachtung:

$$F_{\mathrm{Max}} = 3\,m \tag{12}$$

ist in der Vermessungspraxis allgemein.

Sie zwingt im Laufe eines Jahres zur unverschuldeten Aufwendung einer Tagesarbeit für Nachmessungen, weil grobe Fehler da vermutet wurden, wo der durch unglückliche Häufung der Fehlerelemente entstandene unvermeidliche den dreifachen mittleren Fehler zufälligerweise überschritt, läßt aber andererseits auch tatsächlich grobe Fehler bis zum Betrage 3 m durchschlüpfen!

---

gleichzeitig allgemein: Kleine Fehler sind wahrscheinlicher als große.

2) Gleichgroße negative und positive Fehler sind gleich wahrscheinlich.

3) Für jede Beobachtungsart gibt es eine Fehlergröße, außerhalb welcher nur noch **grobe** Fehler liegen können.

2. Kapitel.

Direkte Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

§ 8. Wahrscheinlichster Wert einer Beobachtungsgröße aus einer Reihe verschiedengenauer Beobachtungen. Gewicht der Beobachtung. Gewichtseinheit.

Wir haben in Gleichung (2) das einfache arithmetische Mittel aus den vorhandenen n Beobachtungswerten l als den wahrscheinlichsten Wert einer Beobachtungsgröße festgestellt: $L = \frac{[l]}{n}$, unter der Voraussetzung, daß den Beobachtungswerten l gleiche Genauigkeit innewohnt. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, d. h. ist ein Beobachtungswert einer schärferen Beobachtung entsprungen als der andere, so wäre es eine unbillige Zurücksetzung des genaueren ersten, wollte man dem letzteren wahllos denselben Einfluß auf die Gestaltung des endgültigen Resultates einräumen, wie ihm. Niemand würde es z. B. einfallen, als wahrscheinlichsten Wert L für eine Streckenlänge das einfache arithmetische Mittel zweier Beobachtungswerte l einzuführen, deren einer mittels genauer Meßgeräte und -methoden, deren anderer durch bloßes Abschreiten erlangt wurde! Dagegen verursacht die Frage, auf welche Weise der verschiedenen Zuverlässigkeit der Einzelbeobachtungen bei der Bildung des gemeinsamen Endresultates Rechnung getragen werden soll, zunächst noch Schwierigkeiten*), die wir notwendig überwinden müssen.

*) Diese Schwierigkeiten können dazu zwingen, vorübergehend, d. h. bis zu ihrer Überwindung, entweder auf die differentielle Behandlung verschiedengenauer Beobachtungen, oder auf die Mitbenützung weniger zuverlässiger Beobach-

Der Unterschied in der Genauigkeit der beobachteten Einzelwerte kann verschiedenerlei Ursachen entspringen. Hat z. B. die mehrfache Beobachtung einer Größe L

$$\begin{array}{lll} n_1\text{-mal} & \text{den Wert} & l_1 \\ n_2\text{-mal} & ,, \quad ,, & l_2 \\ \vdots & & \vdots \\ n_n\text{-mal} & ,, \quad ,, & l_n \end{array}$$

ergeben, so ist ohne weiteres klar, daß nicht etwa

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} \ (?),$$

sondern nach Gleichung (2) zu setzen ist:

$$(13\text{a})\begin{cases} L = \dfrac{\overbrace{l_1 + \cdots + l_1}^{n_1} + \overbrace{l_2 + \cdots + l_2}^{n_2} + \cdots + \overbrace{l_n + \cdots + l_n}^{n_n}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n} \\ \quad = \dfrac{n_1 l_1 + n_2 l_2 + \cdots + n_n l_n}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n} = \dfrac{[n\,l]}{[n]}. \end{cases}$$

Die fehlerfreien Zahlenwerte n, welche im vorliegenden Falle angeben, wie oft ein und derselbe Wert l bei mehrfacher Beobachtung einer gewissen Größe aufgetreten ist, nennt man das ihm zukommende „Gewicht“.

Es ist nun aber auch denkbar, daß die Werte l_1 bzw. $l_2 \ldots$ nicht eigentliche Beobachtungswerte darstellen, sondern selbst wieder entstanden sind als Mittel aus n_1 bzw. $n_2 \ldots$ Beobachtungen von durchweg gleicher Genauigkeit, die man aus irgendwelchen Gründen (z. B. infolge zeitlicher

tungen bei der Bildung des Endergebnisses überhaupt zu verzichten. Dies geschieht z. B. in bezug auf eine vielumstrittene, häufig mehr nach taktischen, als sachlichen Erwägungen beurteilte Frage: die des politischen Wahlrechtes (einerseits allgemeines, gleiches Wahlrecht, anderseits Ausschluß als inferior gehaltener Personen überhaupt vom Wahlrecht).

Beobachtungsunterbrechung) gruppenweise zusammengefaßt hat.

Bezeichnen wir sie zur Unterscheidung gegen vorhin diesmal mit L', L'' ... und die zu ihrer Gewinnung verwendeten Urbeobachtungen mit

$$l_1' \, l_2' \ldots l_{n_1}'; \quad l_1'' \, l_2'' \ldots l_{n_2}''; \quad \ldots; \quad l_{\overline{1}}^{n} \, l_{\overline{2}}^{n} \ldots l_{\overline{n_n}}^{n},$$

so daß nach Gleichung (2) gewonnen wurde

$$L' = \frac{[l']}{n_1}, \quad L'' = \frac{[l'']}{n_2}, \quad \ldots, \quad L^{\overline{n}} = \frac{[l^{\overline{n}}]}{n_n},$$

so könnten wir zur Bildung des Endwertes L die ursprünglichen Beobachtungswerte benützen, d. h. die bereits gemittelten Werte L' wieder auseinanderziehen. Gleichung (2) würde dann liefern:

$$L = \frac{l_1' + l_2' + \cdots + l_{n_1}' + l_1'' + \cdots + l_{n_2}'' + \cdots + l_{\overline{1}}^{n} + \cdots + l_{\overline{n_n}}^{n}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}$$

$$= \frac{[l'] + [l''] + \cdots + [l^{\overline{n}}]}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (2) auch $n_1 \cdot L' = [l']$ usf., so daß der obige Bruch übergeht in

$$\text{(13b)} \quad \boldsymbol{L} = \frac{n_1 L' + n_2 L'' + \cdots + n_n L^{\overline{n}}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n} = \frac{[\boldsymbol{nL'}]}{[\boldsymbol{n}]},$$

wobei L' die aus den Urbeobachtungen gewonnenen Zwischenmittel und n die dazu jeweils verwendete Anzahl der ersteren vorstellen.

Die Gleichung (13b) entspricht vollkommen der Gleichung (13a) und zeigt, daß das jedem Einzelwert zukommende Gewicht n auch gedeutet werden kann als Anzahl der zu seiner Bildung verwendeten gleich genauen Urbeobachtungen.

Der Wert L des endgültigen Mittels der Beobachtungsgröße bleibt ferner unverändert, wenn man jedes der Gewichte n mit einer konstanten Zahl ϱ multipliziert, denn man hat:

$$L = \frac{n_1 L' + n_2 L'' + \cdots}{n_1 + n_2 + \cdots} = \frac{\varrho n_1 L' + \varrho n_2 L'' + \cdots + \varrho n_n L^n}{\varrho n_1 + \varrho n_2 + \cdots + \varrho n_n}$$

oder durch Einsetzung von $\varrho n = p$

$$(13c) \quad L = \frac{p_1 L' + p_2 L'' + \cdots + p_n L^n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[p L']}{[p]}.$$

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, die Beobachtungen seien ursprünglich von gleicher Genauigkeit und ihre in Gleichung (13a) bis (13c) einzuführenden Beträge l bzw. L' nur deshalb verschiedenwertig, weil sie als Extrakt aus einer verschieden großen Zahl von Urbeobachtungen gewonnen seien. Die Gewichte p ergaben sich in diesem Falle gleich (oder proportional) den Repetitionszahlen.

Entspringt die Verschiedenwertigkeit anderen Ursachen, z. B. der Verwendung verschiedengenauer Instrumente oder Beobachtungsmethoden usw., so müssen die den einzelnen tatsächlichen und ungleich genauen Beobachtungswerten L' zukommenden Gewichte p erst erschlossen werden, etwa aus der ihnen innewohnenden Genauigkeit, d. h. ihrem irgendwie festzustellenden mittleren Fehler m. Möge der mittlere Fehler m einer solchen Beobachtung L', die wir aber jetzt als tatsächliche Beobachtung wieder mit l bezeichnen wollen, bekannt, derjenige einer — mit irgend einem Instrument, nach irgend einer Methode, oder vielleicht nur gedachten, überhaupt nicht ausgeführten — Normalbeobachtung $= \mu$ irgendwie gewählt sein, so kann man jeden der Beobachtungswerte l sich gewonnen denken als Mittel aus einer Anzahl p solcher Normalbeobachtungen, durch deren Zusammenfassung statt des Einheitsfehlers μ für das

Zwischenresultat $l_1 \ldots$ der mittlere Fehler $m_1 \ldots$ erzielt wurde. Die hierfür nötige Zahl p von Normalbeobachtungen stellt dann vor: das **Gewicht** einer solchen wirklichen Beobachtung und ergibt sich nach Gleichung (11) aus

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}$$

zu

$$p = \frac{\mu^2}{m^2}. \tag{14a}$$

Die (nach dem Vorstehenden eventuell nur gedachte, nicht wirklich ausgeführte) Normalbeobachtung heißt **„Gewichtseinheit"**, ihr mittlerer Fehler μ **„mittlerer Fehler der Gewichtseinheit"**. Damit geht die Gleichung (13b) bzw. (13c) über in

$$\left\{\begin{aligned} L &= \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{\frac{\mu^2}{m_1^2} l_1 + \frac{\mu^2}{m_2^2} l_2 + \cdots + \frac{\mu^2}{m_n^2} l_n}{\frac{\mu^2}{m_1^2} + \frac{\mu^2}{m_2^2} + \cdots + \frac{\mu^2}{m_n^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{m_1^2} l_1 + \frac{1}{m_2^2} l_2 + \cdots + \frac{1}{m_n^2} l_n}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \cdots + \frac{1}{m_n^2}} = \frac{\left[\frac{l}{m\,m}\right]}{\left[\frac{1}{m\,m}\right]}. \end{aligned}\right. \tag{13d}$$

Das Verschwinden von μ aus der Gleichung (13d) sagt: **Das Resultat L einer Beobachtungsreihe wird durch veränderte Annahme der Gewichtseinheit nicht geändert.**

Sind endlich die Beobachtungen l nicht bloß mit verschiedengroßen mittleren Fehlern m behaftet, sondern die in (13d) einzuführenden Werte l selbst wieder je aus einer veränderlichen Zahl n solcher verschiedengenauer Beobachtungen gemittelt, so wächst ihr Gewicht entsprechend

Gleichung (13a) proportional dieser Wiederholungszahl und es ist allgemein:

das **Gewicht** p des aus n-facher, je mit dem mittleren Fehler m behafteter Wiederholung erschlossenen Beobachtungswertes

$$p = \frac{n \cdot \mu^2}{m^2}, \tag{14}$$

der wahrscheinlichste Wert, das **„allgemeine arithmetische Mittel“** aus einer Reihe verschiedengenauer Beobachtungen

$$L = \frac{[p l]}{[p]} = \frac{\left[\frac{n \mu^2 l}{m^2}\right]}{\left[\frac{n \mu^2}{m^2}\right]}. \tag{13}$$

Aus (14a) ergibt sich für das Verhältnis der Gewichte zweier, aus gleichoftmaliger Wiederholung ungleichgenauer Beobachtung entsprungener Beobachtungswerte l_1 und l_2, denen bzw. die mittleren Fehler m_1 und m_2 zukommen:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\mu^2}{m_1^2} \\ p_2 &= \frac{\mu^2}{m_2^2} \end{aligned}\right\} p_1 : p_2 = m_2^2 : m_1^2, \quad \text{oder}$$

$$m_1 : m_2 = \sqrt{p_2} : \sqrt{p_1}, \tag{15}$$

d. h. **die mittleren Fehler der Beobachtungswerte verhalten sich umgekehrt, wie ihre Gewichtswurzeln.**

Die Gleichung (13) läßt eine schöne Deutung aus dem Gebiete der Mechanik zu: Denkt man sich die Beobachtungswerte l als Ordinaten zu einer beliebigen Abszisse aufgetragen und die Endpunkte je mit dem Gewicht p der zugehörigen Beobachtung behaftet, so bezeichnet das endgültige Mittel L die Ordinate des Schwerpunktes des so gewonnenen Systems von Massenpunkten, weil die Summe der statischen Momente ist

$$[p]L - [p\,l] = 0\,.$$

§ 9. Eigenschaften des allgemeinen arithmetischen Mittels.

Wir haben in Gleichung (13) für den endgültigen Wert L aus einer Reihe verschiedengenauer Beobachtungen l, denen die Gewichte p zukommen, ermittelt:

$$L = \frac{[p\,l]}{[p]}\,.$$

Rückwärts können wir jetzt die Verbesserungen (Zuschläge) v berechnen, welche an den einzelnen Beobachtungswerten l anzubringen sind, um sie zum Mittelwert zu ergänzen:

$$l_1 + v_1 = L\,, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} v_1 &= L - l_1 \quad \text{und analog} \\ v_2 &= L - l_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} p_1 v_1 &= p_1 L - p_1 l_1 \\ &\vdots \\ p_n v_n &= p_n L - p_n l_n \end{aligned}$$

woraus durch Addition

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_n v_n \equiv [p\,v] = L\,[p] - [p\,l]\,,$$

oder wegen Gleichung (13)

$$(16) \qquad \mathbf{[p\,v] = 0}\,,$$

übereinstimmend mit Gleichung (1), wo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ und $[v] = 0$ war. Gleichung (16) liefert eine wertvolle Rechenprobe für die richtige Bildung des Mittelwertes L. Sie zeigt aber auch eine schöne Analogie mit der Statik (Kräftepolygon).

Wir haben schon im vorigen Paragraphen aus der Gleichung $[p]L - [pl] = 0$ erkannt, daß der endgültige Mittelwert L die Ordinate des Schwerpunktes vorstellt eines Systems von Massenpunkten (nämlich der Endpunkte der Ordinaten l), wenn man jeden von ihnen mit dem der betreffenden Beobachtung l zugehörigen Gewicht p behaftet. Die Abstände der einzelnen Massenpunkte von der durch den Schwerpunkt gezogenen Parallelen zur x-Achse sind dann die Verbesserungsbeträge $L - l = v$ und es muß (eine Eigenschaft des Schwerpunktes) das (17) **Trägheitsmoment in bezug auf diese Parallele, d. h. $[pvv]$ ein Minimum** sein.

Zur Probe bilden wir

$$\begin{aligned} v_1^2 &= L^2 - 2Ll_1 + l_1^2 \\ &\vdots \\ v_n^2 &= L^2 - 2Ll_n + l_n^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} p_1 v_1 v_1 &= p_1 L^2 - 2p_1 L l_1 + p_1 l_1^2 \\ &\vdots \\ p_n v_n v_n &= p_n L^2 - 2p_n L l_n + p_n l_n^2, \end{aligned}$$

woraus durch Addition: $\overline{[pvv] = L^2[p] - 2L[pl] + [pll]}$.

Verlangen wir nun die Auswahl des endgültigen Wertes L so, daß

$$[pvv] = \text{Min.},$$

so erhalten wir

$$\frac{d[pvv]}{dL} = 2L[p] - 2[pl] = 0,$$

woraus

$$L = \frac{[pl]}{[p]}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (13) [und mit Gleichung (4), wenn man beachtet, daß die Gewichte p der einzelnen Beobachtungswerte dort gleich 1 waren].

§ 10. Praktische Ausrechnung des Mittelwertes L und des Trägheitsmomentes $[p\,v\,v]$.

Die Berechnung des Mittelwertes L direkt mittels Gleichung (13) ist schwerfällig. Führen wir dagegen analog § 5 einen Näherungswert N möglichst nahe bei L ein und betrachten als neue Unbekannte den ihm algebraisch zuzufügenden Zuschlag x, so daß $L = N + x$, zerlegen wir ferner jeden Beobachtungswert l in zwei Summanden, so daß

$$\begin{aligned} l_1 &= N + \nu_1 \\ &\;\vdots \qquad \vdots \\ l_n &= N + \nu_n, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} p_1 l_1 &= p_1 N + p_1 \nu_1 \\ &\;\vdots \qquad\quad \vdots \\ p_n l_n &= p_n N + p_n \nu_n, \end{aligned}$$

somit

$$[p\,l] = N[p] + [p\,\nu]$$

und

$$L = \frac{[p\,l]}{[p]} = N + \frac{[p\,\nu]}{[p]} \tag{18}$$

analog Gleichung (7), wenn man beachtet, daß jedes Gewicht dort $p = 1$ war.

Den Wert des Trägheitsmomentes $[p\,v\,v]$ können wir, nachdem L gefunden ist, aus v direkt berechnen. Wir können aber auch entwickeln:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= l_1 - N, \\ &\;\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \nu_1^2 &= l_1^2 - 2\,l_1 N + N^2 \\ &\;\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_1 \nu_1 \nu_1 &= p_1 l_1^2 - 2\,p_1 l_1 N + p_1 N^2 \\ &\;\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Durch Addition kommt:

$$[p\,\nu\,\nu] = [p\,l\,l] - 2N[p\,l] + N^2[p].$$

Um $[p\,l\,l]$ zu eliminieren und gleichzeitig $[p\,v\,v]$ in die Gleichung einzuführen, substituieren wir aus der S. 48 angeschriebenen Minimumsbedingung

$$[p\,v\,v] = L^2\,[p] - 2\,L\,[p\,l] + [p\,l\,l]\,,$$

oder weil $L = \dfrac{[p\,l]}{[p]}$

$$[p\,v\,v] = \frac{[p\,l]^2}{[p]} - 2\,\frac{[p\,l]^2}{[p]} + [p\,l\,l]\,,$$

wodurch

$$[p\,\nu\,\nu] = [p\,v\,v] + \frac{[p\,l]^2}{[p]} - 2N[p\,l] + N^2[p]$$

$$= [p\,v\,v] + [p]\left(\frac{[p\,l]}{[p]} - N\right)^2,$$

also [in Übereinstimmung mit Gleichung (8), wo $p_1 = p_2 = \cdots = 1$]

$$\textbf{(19)} \qquad [p\,v\,v] = [p\,\nu\,\nu] - [p]\,(L - N)^2.$$

Alle 3 Summanden von (19) sind als Quadrate positiv, also ist $[p\,v\,v] < [p\,\nu\,\nu]$, solange $L - N$ nicht gleich 0, in Übereinstimmung mit Gleichung (17).

§ 11. Erreichte Beobachtungsgenauigkeit. Gewicht und Genauigkeit des Endwertes.

Im § 8 haben wir festgestellt, daß das Gewicht p einer mit dem mittleren Fehler m behafteten Beobachtung l nichts anderes ist, als diejenige Anzahl von (wirklich ausgeführten oder nur gedachten) Beobachtungswiederholungen je vom mittleren Fehler μ, welche nötig ist, um μ auf den mittleren Fehler m herabzudrücken. Dasselbe trifft natürlich auch zu für das Gewicht P des endgültigen Wertes L: es ist gleich der Anzahl der zur Erzielung seines mittleren Fehlers M benötigten Beobachtungen je vom mittleren Fehler μ. Sind demnach die zur Ermittlung des Endwertes L benützten Beobachtungswerte l_1, l_2 ... ungleichgenau und kommt dem Beobachtungswert

l_1 d. Gewicht p_1 zu, so sind zu seiner Bildg. p_1 Beobgen. v. Gew. 1
l_2 „ „ p_2 „ „ „ „ „ „ p_2 „ „ „ 1
⋮ ⋮

verwendet worden. Die Zahl der zur Bildung des Endwertes L verwendeten — gleichgültig, ob tatsächlich ausgeführten oder (vgl. § 8) nur gedachten — Beobachtungen vom Gewicht 1 ist daher

$$(20)\qquad \boldsymbol{P} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = [\boldsymbol{p}], \quad \text{d. h.}$$

der aus einer Anzahl von Beobachtungswerten $l_1, l_2, \ldots$, denen bzw. die Gewichte $p_1, p_2, \ldots$ zukommen, gebildete Endwert L hat das Gewicht $[p]$. Diese Eigenschaft des Endwertes L entspricht der in § 8 und 9 gegebenen statischen Deutung: Die im Schwerpunkt angreifende Gegenresultante muß beim Vorhandensein nur parallel wirkender Einzelkräfte p gleich der Summe der letzteren sein, wenn Gleichgewicht bestehen soll.

Ist — etwa aus der Beobachtungsreihe heraus oder durch beliebige Annahme — der mittlere Fehler μ einer Normalbeobachtung (Gewichtseinheit) bekannt, so sind wir jetzt imstande, sowohl den mittleren Fehler m_r irgend eines Beobachtungswertes l_r von bekanntem Gewicht p_r als auch den mittleren Fehler M des Endwertes L abzuleiten. Die Gleichung (15) liefert hierfür:

$$(21)\qquad \mu^2 : m_r^2 = p_r : 1\,, \text{ also } \boldsymbol{m_r^2 = \frac{\mu^2}{p_r}}$$

$$\mu^2 : M^2 = P : 1\,, \text{ also}$$

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{M^2 = \dfrac{\mu^2}{P}} \quad \text{oder} \\[2ex] \boldsymbol{\dfrac{1}{M^2} = \dfrac{[p]}{\mu^2}} = \dfrac{1}{m_1^2} + \dfrac{1}{m_2^2} + \cdots = \left[\boldsymbol{\dfrac{1}{m\,m}}\right]. \end{array}\right.$$

Bei der Ableitung der Gleichungen (20) bis (22) haben wir vorausgesetzt, es sei nicht bloß das Gewicht p jedes einzelnen Beobachtungswertes l, sondern auch der mittlere Fehler μ der Gewichtseinheit von vornherein bekannt (wie das z. B. zutrifft, wenn die Zwischenwerte l als Teilmittel aus gleichgenauen, wirklich ausgeführten Beobachtungsreihen erschlossen werden). Sie benützend, ist es gelungen, **vor der Ausgleichung** aller Beobachtungen, d. h. vor ihrer Vereinigung zu einem Endwert L, den mittleren Fehler M des letzteren zu ermitteln: auf die Kenntnis von p und μ gründete sich die Ableitung von P, m und M.

In vielen praktischen Fällen der Vereinigung ungleichwertiger Beobachtungen l_1, l_2, l_n sind aber neben deren Werten nur ihre Gewichte p oder ihre mittleren Fehler m bekannt. Auch im ersteren Falle muß uns ein Einblick in die erreichte Beobachtungsgenauigkeit möglich sein, denn wir können nach Gleichung (13) den Endwert der Beobachtungsgröße

$$L = \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{\left[\frac{l}{m\,m}\right]}{\left[\frac{1}{m\,m}\right]}$$

und aus ihm die an den Beobachtungswerten anzubringenden Verbesserungszuschläge v berechnen:

$$\begin{aligned} v_1 &= L - l_1 \\ v_2 &= L - l_2 \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Je kleiner die nötigen Beträge v sind, welche jeden Beobachtungswert l zum wahrscheinlichen, dem Endwert L ergänzen, um so genauer sind offenbar die Beobachtungen

l ausgeführt, um so sicherer ist also auch der Endwert L bestimmt. Ihr Mittelwert stellt somit ein Genauigkeitsmaß für die Beobachtungen dar.

Diese Genauigkeitsermittlung stützt sich aber im Gegensatz zu derjenigen nach Gleichung (21) und (22) auf das Ergebnis L der Ausgleichung. Etwa daraus errechnete mittlere Fehler der Beobachtungswerte l und des Endwertes L müssen daher als mittlere Fehler **nach der Ausgleichung** bezeichnet werden. Selbstverständlich müßte da, wo beide sich überhaupt berechnen lassen, strenggenommen der mittlere Fehler vor — dem entsprechenden nach der Ausgleichung gleich sein. (Entgegengesetzten Falles wäre zu ergründen, wodurch eine Verschiedenheit beider Werte für dieselbe Größe verursacht werden kann, s. S. 56.) Die Beziehungen zwischen den Verbesserungsbeträgen v und den mittleren Fehlern m einer Beobachtung bzw. M des Endwertes gewinnen wir durch folgende Überlegung:

Wären statt der n Beobachtungswerte $l_1 \ldots l_n$, denen je bzw. die Gewichte $p_1 \ldots p_n$ zukommen, die Werte λ der Urbeobachtungen je vom Gewicht 1 bekannt, von denen

$$
\begin{array}{ll}
p_1 \text{ zur Ermittlung des Wertes } & l_1 = \dfrac{\lambda_1' + \lambda_1'' + \cdots + \lambda_1^{p_1}}{p_1} \\
\vdots & \vdots \\
p_n \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, & l_n = \dfrac{\lambda_n' + \lambda_n'' + \cdots + \lambda_n^{p_n}}{p_n} \\
\text{somit } [p] \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, & L = \dfrac{[\lambda]}{[p]}
\end{array}
$$

dienten, so hätte man den Fall gleichgenauer Beobachtungen. Man erhielte nach Gleichung (5a) und (5b) den mittleren Fehler einer solchen Urbeobachtung

$$(23) \qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[\varphi_w \varphi_w]}{[p]}} = \pm\sqrt{\frac{[\varphi \varphi]}{[p] - 1}},$$

wenn die Werte φ die Verbesserungszuschläge darstellen, welche jeden eingewichtigen Beobachtungswert λ zum zugehörigen Zwischenmittel l ergänzen. Vergleichen wir die Werte λ der Urbeobachtungen statt mit Zwischenmitteln l direkt mit dem Endwert L, so nähern sich die Verbesserungen φ, nämlich:

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= L - \lambda_1' \\
&\vdots \\
\varphi_1^{p_1} &= L - \lambda_1^{p_1} \\
&\vdots \\
\varphi_n^{p_n} &= L - \lambda_n^{p_n}
\end{aligned}$$

deren wahren Werten φ_w, und dies um so mehr, je größer die Zahl der eingewichtigen Urbeobachtungen λ und ihre Genauigkeit ist, je näher also der Endwert L dem wahren Wert der Beobachtungsgröße kommt. Wir können also nach Gleichung (5a) sehr genähert setzen: Mittlerer Fehler einer Urbeobachtung λ, berechnet aus der:

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\text{1-ten Beobachtungsgruppe} & l_1 \div \cdot \mu & = \pm\sqrt{\dfrac{[\varphi_1\varphi_1]}{p_1}} \\
\text{2-ten} \quad " & l_2 \div \cdot \mu & = \pm\sqrt{\dfrac{[\varphi_2\varphi_2]}{p_2}} \\
\quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\
\text{aus allen Beobachtungsgruppen zus.} & \mu & = \pm\sqrt{\dfrac{[\varphi\varphi]}{[p]}}\,.
\end{array}\right.$$

Wenn es uns also gelingt, die Zähler der Radikanden vorstehender Gleichungen zu berechnen, so haben wir damit die Möglichkeit erlangt, die mittleren Fehler m der (verschiedengewichtigen) Beobachtungswerte l und des Endwertes L aus den Verbesserungen φ der Urbeobachtungen zu errechnen. Nun sind uns zwar diese selbst ebensowenig bekannt als ihre Verbesserungen φ. Wir wollen aber versuchen, die letzteren aus den an den Beobachtungswerten l (deren jeder als Mittel aus p Urbeobachtungen erscheint) anzubringenden Verbesserungen v zu erschließen. Zu diesem Zweck erinnern wir uns, daß (5b) für das Quadrat des mittleren Fehlers einer von n gleichgenauen Beobachtungen (die durch die Zuschläge v_1 bzw. $v_2 \ldots$ zum wahrscheinlichsten Wert der betreffenden Größe ergänzt werden) liefert:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-1} = \frac{1}{n-1}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots),$$

während nach (11) das Quadrat des mittleren Fehlers des Resultates von allen n Beobachtungen sich ergibt aus:

$$M^2 = \frac{m^2}{n} = \frac{[v\,v]}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{v_1^2}{n} + \frac{v_2^2}{n} + \cdots\right).$$

Die Quadrate der mittleren Fehler stehen also bei gleicher Zahl n der Beobachtungswiederholungen im selben Verhältnis zueinander, wie die Quadrate der Einzelverbesserungen, oder:

$$m^2 : \mu^2 = v^2 : \varphi^2, \quad \text{d. h.}$$

$$\varphi_1^2 = v_1^2 \cdot \frac{\mu^2}{m_1^2} = v_1^2 \cdot p_1, \quad \varphi_2^2 = v_2^2 \frac{\mu^2}{m_2^2} = v_2^2 p_2 \text{ usw.}$$

Wir haben damit für jeden der n Beobachtungswerte $l_1 l_2 \ldots$ einen Mittelwert der den zugehörigen Urbeobachtungen λ zuzuschlagenden Verbesserungsbeträge φ gewonnen. Allein die Gleichung (23) setzt die Kenntnis nicht des mittleren, sondern sämtlicher $[p]$ Verbesserungsbeträge φ voraus. Wir müssen daher entweder unsere Summe $[\varphi_{\text{Mittel}}\,\varphi_{\text{Mittel}}]$ auf den Betrag erweitern, den diese Summe annimmt, wenn die Zahl der Verbesserungen φ von n auf $[p]$

erhöht wird, d. h. $[\varphi\varphi] = [pvv]$ mit $\frac{[p]}{n}$ erweitern, wodurch wir erhalten

$$(23\text{a})\quad \mu = \pm\sqrt{\frac{[\varphi_w \varphi_w]}{[p]} \cdot \frac{[p]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v_w v_w]}{n}},$$

oder besser der von $[p]$ auf n reduzierten Zahl von Summanden entsprechend auch den Nenner reduzieren, wodurch der **mittlere Fehler der Gewichtseinheit** wird

$$(23\text{a})\quad \boldsymbol{\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\,v_w v_w]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-1}}}.$$

Wir erhalten daraus schließlich durch Einsetzung von μ in (21) und (22) als **mittlere Fehler nach der Ausgleichung:**

$$(23\text{b})\quad \left.\begin{array}{r}\text{mittl. Fehl. d.}\\ \text{Beob.-Wertes } l_r\end{array}\right\} \div \cdot \boldsymbol{m_r} = \frac{\mu}{\sqrt{p_r}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{(n-1)\,p_r}},$$

$$(23\text{c})\quad \left.\begin{array}{r}\text{mittl. Fehl. d.}\\ \text{Endwertes } L\end{array}\right\} \div \cdot \boldsymbol{M} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{(n-1)[p]}}.$$

Die mittleren Fehler vor der Ausgleichung, die wir aus dem mittleren Fehler μ der Gewichtseinheit und den zugehörigen Gewichten nach Gleichungen (21) und (22) und diejenigen nach der Ausgleichung, die wir mittels Gleichungen (23) aus den Verbesserungsbeträgen v berechnen können, sollten einander gleich sein. Etwaige Verschiedenheit würde das Vorhandensein grober, bzw. regelmäßiger, neben den in vorstehenden Ableitungen allein vorausgesetzten zufälligen Fehlern beweisen.

II. Abschnitt.

Vermittelnde Beobachtungen.

1. Kapitel.

Übertragung von Beobachtungsfehlern auf Funktionen der Beobachtungsgrößen.

§ 12. Mittlerer Fehler M und Gewicht P einer Funktion F der mit den mittleren Fehlern $m_1, m_2 \ldots m_n$ behafteteten Beobachtungsgrößen $L_1, L_2 \ldots L_n$.

Eine Größe X sei aus den Beobachtungsgrößen L_1 $L_2 \ldots L_n$ mittels der Gleichung

(24 a) $$X = F(L_1, L_2 \ldots L_n)$$

zu errechnen. Sind die Beobachtungswerte um die Beträge $\pm v_{w_1}$, $\pm v_{w_2} \ldots \pm v_{w_n}$ unrichtig, so würde

$$F(L_1 \pm v_{w_1}, L_2 \pm v_{w_2}, \ldots, L_n \pm v_{w_n})$$

den wahren Wert, der Unterschied

$$V_w \equiv F_{(L_1 \pm v_{w_1},\, L_2 \pm v_{w_2}, \ldots,\, L_n \pm v_{w_n})} - F_{(L_1,\, L_2,\, \ldots,\, L_n)}$$

also den aus den Beobachtungsfehlern entspringenden wahren Fehler an X darstellen. Entwickeln wir den Minuenden obiger Gleichung mittels der Taylorschen Reihe und setzen wir gleichzeitig die notwendigen Verbesserungen v_w der Beobachtungswerte L als so klein voraus, daß höhere Potenzen von ihnen gegenüber den Verbesserungen selbst verschwinden, so erhalten wir als wahren Fehler der berechneten Größe X:

$$V_w = \pm \frac{\partial F}{\partial L_1} \cdot v_{w_1} \pm \frac{\partial F}{\partial L_2} v_{w_2} \pm \cdots \pm \frac{\partial F}{\partial L_n} v_{wn},$$

oder wenn wir:

$$(24\text{b}) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{L}_1} \textbf{ durch } \boldsymbol{l}_1, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{L}_n} \textbf{ durch } \boldsymbol{l}_n$$

ersetzen:

$$V_w = \pm l_1 v_{w_1} \pm l_2 v_{w_2} \pm \cdots \pm l_n v_{wn}\,.$$

Nun sind uns aber die wahren Beobachtungsfehler v_w der Größen L weder nach Vorzeichen noch nach Größe bekannt. Wir kennen nur deren mittlere Fehler. Wir können aber (wie S. 32) die ersteren durch die letzteren ersetzen, wenn wir alle möglichen zusammengehörigen Kombinationen der Produkte $l \cdot v_w$ bilden, quadrieren und mitteln, wobei wir (wie dort unter Vernachlässigung der sich nahezu hebenden Produktensummen) für das Quadrat des mittleren Fehlers M der berechneten Größe X erhalten:

$$(24\text{c}) \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{M}_X^2 &= \frac{[V_w V_w]}{n} \\ &= l_1^2 \frac{[v_{w_1} v_{w_1}]}{n} + l_2^2 \frac{[v_{w_2} v_{w_2}]}{n} + \cdots + l_n^2 \frac{[v_{w_n} v_{w_n}]}{n} \\ &= l_1^2 m_1^2 + l_2^2 m_2^2 + \cdots + l_n^2 m_n^2 = [\boldsymbol{mmll}]\,. \end{aligned} \right.$$

Das Gewicht P_X der Unbekannten X erhalten wir durch Vergleichung der mittleren Fehler nach Gleichung (15). Ist nämlich μ der (ev. beliebig festgesetzte) mittlere **Fehler der Gewichtseinheit** ($p=1$), so ist

$$P_x : 1 = \mu^2 : M^2\,,$$

woraus

$$(24\text{d}) \quad \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{P_x}} = \frac{\boldsymbol{M}^2}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}[\boldsymbol{mmll}] = \frac{m_1^2}{\mu^2} l_1^2 + \frac{m_2^2}{\mu^2} l_2^2 + \cdots$$

Durch Einführung der Gewichte p für die Beobachtungsgrößen L und unter Benutzung von (14) wird hieraus

$$\text{(24d)} \qquad \frac{1}{P_x} = \frac{l_1^2}{p_1} + \frac{l_2^2}{p_2} + \cdots = \left[\frac{l\,l}{p}\right].$$

Die Gleichungen (24c) und (24d) bilden eine Bestätigung der früher direkt abgeleiteten Gleichungen (9) und (10). Letztere stellen lediglich spezielle Fälle der ersteren dar. Für $X = a \cdot L$ liefern nämlich die Gleichungen (24c) und (24d) unter der Voraussetzung, daß a ein fehlerfreier Faktor und L eine mit dem mittleren Fehler m behaftete Beobachtungsgröße ist, welcher das Gewicht p zukommt:

$$M_{a\,.\,L}^2 = [m\,m\,l\,l] = m^2 \left(\frac{\partial X}{\partial L}\right)^2 = a^2 m^2$$

$$M_{a\,.\,L} = a \cdot m_L$$

und

$$\frac{1}{P_X} = \left[\frac{l\,l}{p}\right] = \frac{a^2}{p}, \quad \text{d. h.} \quad P_X = P_{a\,.\,L} = \frac{p}{a^2}.$$

Ebenso liefern sie für den mittleren Fehler M und das Gewicht P der Größe $X = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n$, wenn $L_1 \ldots$ beobachtete Größen sind, denen die Gewichte $p_1 \ldots$ und die mittleren Fehler $m_1 \ldots$ zukommen:

$$M_X^2 = [m\,m\,l\,l] = m_1^2 \left(\frac{\partial X}{\partial L_1}\right)^2 + m_2^2 \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial L_2}\right)^2 + \cdots$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2 = [m\,m] \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{P_X} = \left[\frac{l\,l}{p}\right] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \left[\frac{1}{p}\right].$$

Sind die Gewichte p und die mittleren Fehler m der Summanden L einander gleich (wie das z. B. beim Wägen einer Masse in n Teilen, beim Messen von Strecken für jede einzelne der n Stangen- oder Bandlagen, bei Bildung eines Winkels durch Zusammensetzen aus n Teilen usw. der Fall ist), so wird

$$M_{L_1 \pm L_2 \pm \ldots} = \pm\sqrt{[m\,m]} = \pm\sqrt{n \cdot m^2} = m\sqrt{n}$$

$$\frac{1}{P_{L_1 \pm L_2 \pm \ldots}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{n}{p}$$

$$P_{L_1 \pm L_2 \pm \ldots} = \frac{p}{n},$$

d. h. der **mittlere Fehler** einer Summe oder Differenz gleichwertiger Einzelgrößen wächst proportional der Wurzel aus ihrer Anzahl,

das **Gewicht** einer Summe oder Differenz gleichwertiger Einzelgrößen nimmt ab proportional ihrer Anzahl.

Es zeigt sich hier ein bemerkenswerter Unterschied, der für die Genauigkeit einer Größe bezeichnend ist:

Wird eine Größe gewonnen als Mittel aus n Beobachtungen je vom Gewicht $p = 1$, so ist das Gewicht des Mittelwertes L: $P = n$,

wird eine Größe gewonnen durch Addition oder Subtraktion von n Einzelgrößen je vom Gewicht $p = 1$, so ist ihr Gewicht: $P = \frac{1}{n}$,

wird eine Größe gewonnen durch Multiplikation einer beobachteten Größe vom Gewicht $p = 1$ mit einer fehlerfreien Konstanten n, so ist ihr Gewicht $P = \frac{1}{n^2}$ (Distanzmesser usw.).

Es bedürfte also im zweiten Falle n-facher, im dritten Falle n^2-facher Beobachtungswiederholung der Teilgröße, um auf diesem Weg das Gewicht und die Genauigkeit einer einzigen einfachen direkten Beobachtung für die Gesamtgröße zu erzielen.

2. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder gleichgenauer Beobachtungen.

Durch den Abschnitt I wurden wir in die Lage versetzt, den wahrscheinlichsten Wert L einer direkt und mehrfach beobachteten Größe, seinen mittleren Fehler M und sein Gewicht P zu bestimmen. Dagegen hat er uns nicht gelehrt, in überschüssiger Zahl vorhandene Beobachtungen auszugleichen, welche zur Bestimmung einer oder mehrerer anderer von ihnen abhängiger Größen dienen sollen.

Auch das erste Kapitel des gegenwärtigen Abschnittes zeigte uns nicht, wie die Beobachtungswerte L für solche vermittelnde, in überschüssiger Zahl vorhandene Größen auszugleichen sind, sondern nur, wie sich der ihnen anhaftende Fehler m auf einen (nicht überbestimmten) Funktionswert fortpflanzt.

Jetzt wollen wir Beobachtungswerte, welche zur Berechnung anderer von ihnen abhängiger Größen dienen sollen und in überschüssiger Zahl vorhanden sind, so ausgleichen, daß letztere sich übereinstimmend ergeben, gleichgültig, welche der ersteren auch zur Rechnung benützt werden mögen.

Ist die Zahl der gesuchten Unbekannten nicht größer als 2, so läßt sich die Ausgleichung der zu ihrer Berechnung dienenden Beobachtungswerte häufig auf **graphischem** Wege bewirken, womit der Vorzug erhöhter Anschaulichkeit und der alsbaldigen Erkenntnis etwaiger grober Beobachtungsfehler verbunden ist. Der **rechnerische** Weg der Ausgleichung ist aber häufig, und namentlich dann vorzuziehen, wenn die Zahl der Unbekannten größer ist als 2. Wir behandeln zuerst:

§ 13. Die graphische Ausgleichung zusammengehöriger beobachteter Argument- und Funktionswerte, welche in (bekannter oder unbekannter) Abhängigkeit voneinander stehen.

Um zu untersuchen, ob zwei Größen voneinander abhängig sind, und zutreffendenfalls, welche Beziehung zwischen ihnen besteht, kann man korrespondierende (zuzammengehörige) Beobachtungswerte beider als Abszissen bzw. Ordinaten in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem auftragen und die dadurch erhaltenen Punkte durch eine stetige Linie: die „Funktionskurve" verbinden. Verläuft die Linie gesetzlos oder parallel, bzw. senkrecht zur Abszisse, so besteht entweder keine Beziehung zwischen den korrespondierenden Beobachtungswerten, sie sind voneinander unabhängig, oder die beobachteten Funktionswerte sind nicht bloß von den der Beobachtung unterworfenen, sondern überdies noch von anderen Einflüssen abhängig.

Im letzteren Fall kann man die korrespondierenden Beobachtungen unter gewissen (abgewarteten oder künstlich herbeigeführten) die Wirkung jener weiteren Einflüsse vorübergehend ausschaltenden Umständen wiederholen.

Läßt die „Funktionskurve" nach den Sätzen der analytischen Geometrie ein gewisses Gesetz erkennen — gerade Linie zeigt lineare Beziehung, n-fache Oszillation algebraische Beziehung $(n+1)$-ten Grades an —, so kann man der Zeichnung die Bestimmungsgrößen für Lage und Form der Linie (Abschnitt auf der y-Achse, Richtungskoeffizient, Parameter usw.) wenigstens angenähert entnehmen: Die Verbindungslinie der mit den zusammengehörigen Beobachtungswerten als Koordinaten aufgetragenen Punkte (Funktionslinie) vermittelt uns die Kenntnis der zwischen beiden bestehenden Beziehung.

Dabei wird das Wesen der Funktionskurve von der Wahl der Verjüngungsverhältnisse für die Abszissen und die Ordinaten und von der Lage der Koordinatenachsen nicht berührt. Ja, es kann sich sogar empfehlen (auch ohne daß die zusammengehörigen Beobachtungswerte Größen verschiedener Gattung sind, in welchem Falle ohne weiteres für jeden von beiden je ein für ihn passendes Verjüngungsverhältnis gewählt werden muß), Ordinaten und Abszissen in verschiedener Verjüngung zu zeichnen, wenn sie sich erheblich voneinander unterscheiden, oder wenn man auf scharfe Darstellung von Veränderungen gerade einer von ihnen besonderen Wert legt.

Wären die Beobachtungswerte fehlerfrei, so müßte die zu zeichnende Funktionskurve durch sämtliche auf Grund solcher zusammengehöriger Werte gezeichnete Punkte gehen. Es zeigt sich in der Durchführung jedoch, namentlich wenn ein genügend großer Maßstab gewählt wird, sofort, daß die derart zu zeichnende Linie Unregelmäßigkeiten aufweisen würde, die nicht in der Natur der Beziehung zwischen beiden Beobachtungsgrößen liegen können. Dies tritt besonders in solchen Fällen in die Erscheinung, in denen das Wesen der Beziehung auch noch auf deduktivem Weg erschlossen werden kann. Solche Unregelmäßigkeiten rühren von den den Beobachtungswerten anhaftenden Fehlern v her, und unsere Aufgabe besteht jetzt darin, eine der erschlossenen Beziehung entsprechende oder (falls die zwischen beiden Beobachtungsgruppen bestehende Beziehung nicht kurzerhand aus der Form der gezeichneten Linie in aller Strenge erschlossen werden kann) eine möglichst einfache Funktionslinie den gezeichneten Punkten so anzupassen, daß die in der Ordinatenrichtung gemessenen Abweichungen v der Linie von jenen Punkten den Bedingungen (1) $[v] = 0$ und (4) $[v\,v] = \text{Min.}$ entsprechen.

Als Nebenprodukt der graphischen Lösung ergibt sich dann auf bequemste Weise:

a) diejenige Stelle der Kurve, d. h. diejenige Größe der Argumentwerte, bei welchen zur sicheren Ermittelung der bestehenden Beziehung und Zeichnung der Funktionslinie die korrespondierenden Beobachtungen zu häufen sind, bzw. wo andererseits Häufung unnütz wäre,

b) der Nachweis etwaiger grober Fehler,
c) der dem einzelnen Beobachtungswert anhaftende, durch Ausgleichung wegzuschaffende Fehler v,
d) der irgend einem Argumentwerte zugehörige ausgeglichene Funktionswert.

§ 14. Rechnerische Ausgleichung in überschüssiger Zahl vorhandener Beobachtungswerte L für die von ihnen abhängigen gesuchten Größen $X, Y \ldots$ bis zur Aufstellung der Normalgleichungen.

A. Die zwischen den Beobachtungsgrößen L und den von ihnen abhängigen Unbekannten $X, Y \ldots$ bestehenden Beziehungen mögen von der **expliziten** Form sein:

$$(25) \qquad \left\{\begin{matrix} F_1(X, Y, Z \ldots) - L = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{matrix}\right\}$$

so daß sie jede Beobachtungsgröße L als **explizite** Funktion der Unbekannten $X, Y \ldots$ ergeben. Diese Gleichungen werden von den Beobachtungswerten L nur dann scharf erfüllt sein können, wenn letztere entweder fehlerfrei sind, oder wenn keine Überbestimmung vorhanden ist. Beides ist für unsere gegenwärtige Betrachtung ausgeschlossen. Wir müssen vielmehr, um die Beziehungen scharf zu erfüllen, unseren Beobachtungswerten kleine, zunächst noch unbekannte Verbesserungszuschläge beifügen, die wir wie bisher mit v bezeichnen wollen. Dann stellt $L + v$ den wahrscheinlichsten Beobachtungswert und v den Beobachtungsfehler vor, und die Gleichung (25) geht über in die Form

$$(25\text{a}) \qquad \left\{\begin{matrix} F_1(X, Y, Z \ldots) - L = v \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{matrix}\right\}$$

Wir suchen nun zunächst diese Beziehungen in lineare Form überzuführen, eine Aufgabe, die allgemein nur möglich ist, wenn es uns gelingt, die Unbekannten $X, Y, Z \ldots$ durch andere x, y, z zu ersetzen, die so klein sind, daß wir höhere Potenzen von ihnen vernachlässigen dürfen. Zu diesem Zweck schlagen wir folgenden Weg ein: Wir zerlegen jede der Unbekannten analog Gleichung (7) und (18) in 2 Summanden, nämlich einen möglichst genauen, irgendwie zu gewinnenden Näherungswert N_X, N_Y und einen kleinen, nach Richtung und Größe unbekannten Zuschlag $x, y \ldots$, wodurch $X = N_x + x$, $Y = N_y + y \ldots$ Damit geht unsere Gleichung (25a) über in

$$\text{(25b)} \left\{\begin{matrix} F_1\{(N_X + x), (N_Y + y), (N_Z + z), \ldots\} - L_1 = v_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{matrix}\right\}$$

Sodann entwickeln wir nach Taylor in eine Reihe und erhalten unter vorstehender Voraussetzung:

$$\text{(25c)} \left\{\begin{array}{l} F_1(N_X, N_Y, N_Z \ldots) + x\dfrac{\partial F_1}{\partial N_X} + y\dfrac{\partial F_1}{\partial N_Y} + z\dfrac{\partial F_1}{\partial N_Z} + \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \cdots - L_1 = v_1 . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}\right.$$

Fassen wir die ihrem Wert nach bekannten Summanden [wozu jetzt auch $F(N_X, N_Y, N_Z \ldots)$ gehört] zusammen und führen zur Vereinfachung der Schreibweise folgende Bezeichnungen ein:

$$\text{(25d)} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{N_X}} = \boldsymbol{a}, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{N_Y}} = \boldsymbol{b}, \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{N_Z}} = \boldsymbol{c} \ldots \\ \qquad \boldsymbol{F(N_X, N_Y, N_Z \ldots) - L = l}, \end{array}\right.$$

so geht die gegebene Beziehung (25) in die Form der **„Fehlergleichung"** über:

$$\text{(25e)} \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + l_1 = v_1} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{matrix}\right\}$$

Solcher Fehlergleichungen haben wir ebenso viele, als Beobachtungen L vorhanden sind, nämlich λ. Überbestimmung ist vorhanden und Ausgleichung der Beobachtungswerte L kann erst eintreten, wenn ihre Zahl λ größer ist, als die Zahl $\varkappa$ der Unbekannten. Erst dann treten überhaupt Verbesserungen v der Beobachtungswerte L auf, welche für $\lambda = \varkappa$ zu Null würden.

Aus den λ Fehlergleichungen für die $\varkappa$ Unbekannten $x, y \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots + l_2 = v_2 \\ \vdots \\ a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda z + \cdots + l_\lambda = v_\lambda\,, \end{array}\right\} \lambda \text{ Gleichg.}$$

$\leftarrow \varkappa$ Unbekannte $\rightarrow$

wo $\lambda > \varkappa$, ergeben sich die Werte der unbekannten Zuschläge $x, y \ldots$, die wir künftig kurz als Unbekannte bezeichnen wollen, eindeutig, wenn wir noch die in Gleichung (4) ausgedrückte Bedingung zu Hilfe nehmen, daß die Summe der Quadrate der an den Beobachtungswerten L anzubringenden Verbesserungen v ein Minimum sei:

$$[v\,v] = \text{Min.}$$

Man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= a_1^2 x^2 + 2 a_1 b_1 x y + 2 a_1 c_1 x z + \cdots + 2 a_1 l_1 x + b_1^2 y^2 \\ &\quad + 2 b_1 c_1 y z + \cdots + 2 b_1 l_1 y + c_1^2 z^2 + \cdots + 2 c_1 l_1 z + \cdots + l_1^2 \\ v_2^2 &= a_2^2 x^2 + 2 a_2 b_2 x y + 2 a_2 c_2 x z + \cdots + 2 a_2 l_2 x + b_2^2 y^2 \\ &\quad + 2 b_2 c_2 y z + \cdots + 2 b_2 l_2 y + c_2^2 z^2 + \cdots + 2 c_2 l_2 z + \cdots + l_2^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

woraus durch Addition

$$\begin{aligned} [v^2] &= [a a]\, x^2 + 2 [a b]\, x y + 2 [a c]\, x z + \cdots + 2 [a l]\, x + [b^2]\, y^2 \\ &\quad + 2 [b c]\, y z + \cdots + 2 [b l]\, y + [c^2]\, z^2 + \cdots + 2 [c l]\, z + [l^2]\,. \end{aligned}$$

Hieraus haben wir diejenigen Werte für x, y ... zu suchen, für welche $[v\,v] =$ Min., und welche sich ergeben aus:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [v\,v]}{\partial x} &= 2[a\,a]\,x + 2\,[a\,b]\,y + 2\,[a\,c]\,z + \cdots + 2\,[a\,l] = 0 \\
\frac{\partial [v\,v]}{\partial y} &= 2[a\,b]\,x + 2\,[b\,b]\,y + 2\,[b\,c]\,z + \cdots + 2\,[b\,l] = 0 \\
\frac{\partial [v\,v]}{\partial z} &= 2[a\,c]\,x + 2\,[b\,c]\,y + 2\,[c\,c]\,z + \cdots + 2\,[c\,l] = 0. \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Eine kurze Überlegung zeigt, daß wir auf dieselbe Weise wie hier ganz allgemein ebenso viele Gleichungen für die Unbekannten x, y, z ... erhalten, als Unbekannte vorhanden sind, und damit ein Mittel für die eindeutige Bestimmung der letzteren. Durch Kürzung mit 2 erhalten wir schließlich aus ihnen die **„Normalgleichungen“** zur algebraischen Bestimmung der Unbekannten:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned}
&[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \cdots + [a\,l] = 0 \\
&[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + \cdots + [b\,l] = 0 \\
&[a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + \cdots + [c\,l] = 0 \\
&\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned} \right.$$

mit deren Aufstellung die Ausgleichungsaufgabe prinzipiell gelöst ist.

B. Sind die Beziehungen zwischen den Beobachtungsgrößen L_1 ... und den Unbekannten X, Y ... nur in impliziter Form darstellbar, lauten sie also:

$$(25') \quad \left\{ \begin{aligned} &F_1(L_1\,,\, L_2 \ldots L_\lambda\,,\, X,\, Y,\, Z \ldots) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\}$$

so werden diese Gleichungen, falls ihre Zahl λ größer ist, als die Zahl $\varkappa$ der Unbekannten, so wenig als die

Gleichungen (25) von den beobachteten mit Fehlern behafteten Werten L befriedigt sein können. Sie werden vielmehr die Werte annehmen:

$$(25\text{a}')\quad \left\{\begin{matrix} F_1(L_1, L_2, \ldots, L_\lambda, X, Y, Z\ldots) + w_1 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{matrix}\right\}$$

Um den Widerspruch w_1 gegen den Sollwert 0 zum Verschwinden zu bringen, müssen wir auch hier, wie bei (25 a), den Beobachtungswerten L kleine Verbesserungsbeträge v zufügen, wodurch die Gleichungen (25′) übergehen in:

$$(25\text{b}')\quad \left\{\begin{matrix} F_1(L_1+v_1, L_2+v_2, \ldots, L_\lambda+v_\lambda, N_x+x, N_y+y, N_z+z\ldots)=0 \\ \vdots \end{matrix}\right\}$$

Entwickeln wir auch diese Gleichungen nach Taylor, so wird daraus:

$$(25\text{c}')\quad \left\{\begin{aligned} & F_1(L_1, L_2, \ldots, L_\lambda, N_x, N_y, N_z\ldots) \\ & + \frac{\partial F_1}{\partial L_1} v_1 + \frac{\partial F_1}{\partial L_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial L_\lambda} v_\lambda + \frac{\partial F_1}{\partial N_x} x \\ & + \frac{\partial F_1}{\partial N_y} y + \frac{\partial F_1}{\partial N_z} z + \cdots = 0\,. \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}\right.$$

Die Einzelverbesserungen v sind uns nun ebensowenig bekannt, wie die Zuschläge $x, y, z\ldots$, welche die Näherungswerte $N_x, N_y \ldots$ zu den eigentlichen Unbekannten $X, Y \ldots$ ergänzen. Wir haben aber mit Gleichungen (25 a′) den Einfluß der ersteren auf die Werte der Funktionen F bereits ausgedrückt und können daher jetzt setzen:

$$(25\text{d}')\quad \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial L_1} v_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial L_2} v_2 + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial L_\lambda} v_\lambda = -w_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{matrix}\right\}$$

womit unter Wiederbenutzung der in (25d) eingeführten Substitutionen die Gleichungen (25c′) übergehen in die Fehlergleichungen:

$$(25\mathrm{e}')\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots \\ \quad + \{l_1 \equiv F_1(L_1, L_2, \ldots, L_\lambda, N_x, N_y, N_z \ldots)\} = + w_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}\right\}$$

Diese Fehlergleichungen haben ganz dieselbe Form wie die Gleichungen (25e). Die Absolutglieder l sind auch hier nichts anderes, als die Werte, welche die allerdings jetzt etwas anders gebauten Funktionen (25′) annehmen, wenn man statt der endgültigen noch unbekannten Werte $(L + v)$, X, Y, Z ... deren Näherungsbeträge L, N_x, N_y ... einsetzt. Nur die w stellen nicht mehr wie in (25a) die Fehler der Einzelbeobachtungen L, sondern die Einflüsse dieser Fehler auf die Funktionswerte F dar. Sie sind nicht gleichwertig, wir können die Lösung daher erst in Kapitel 3 weiter verfolgen.

§ 15. Spezielle Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen.

a) Ist nur eine einzige Unbekannte X zu bestimmen, welche mit den λ Beobachtungswerten L in der Beziehung steht

$$F(X) - L = 0\,,$$

so erhält man nach § 14 durch Einführung eines Näherungswertes N_X für X (so daß $X = N_x + x$) die λ Fehlergleichungen von der Form

$$\frac{\partial F}{\partial N_X} x + (F_{(N_X)} - L) = v\,,$$

oder mit Benutzung der unter (25d) eingeführten Zeichen

$$\begin{array}{c} a_1 x + l_1 = v_1 \\ a_2 x + l_2 = v_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}$$

woraus

$$\begin{aligned} v_1^2 &= a_1^2 x^2 + 2\, a_1 l_1 x + l_1^2 \\ v_2^2 &= a_2^2 x^2 + 2\, a_2 l_2 x + l_2^2 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Der gesuchte Zuschlag x ist nun nach § 14 so zu bestimmen, daß damit:

$$[v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,l]\,x + [l\,l] = \text{Min.}$$

wird.

Diese Forderung liefert die Normalgleichung:

$$\frac{d\,[v\,v]}{dx} = 2\,[a\,a]\,x + 2\,[a\,l] = 0\,,$$

letztere den gesuchten Zuschlag:

$$(27) \quad \boldsymbol{x = -\frac{[a\,l]}{[a\,a]}}\,, \qquad \text{woraus} \qquad \boldsymbol{X = N_X + x}\,.$$

Die Gleichung (27) steht im Einklang mit Gleichung (7), welche den gesuchten Zuschlag zum Näherungswert N lieferte zu: $x = \frac{[\nu]}{n}$, die Unbekannte selbst zu $X \equiv L = N + \frac{[\nu]}{n}$. Denn die Koeffizienten a der Unbekannten in (27) waren dort alle gleich 1. Nur ist zu beachten, daß der zur Berechnung dieses gesuchten Zuschlages x dienende reduzierte Beobachtungswert dort hieß ν = Beobachtung — Näherung $= l - N$, während er jetzt heißt $l = F(N_X \ldots) - L$, d. h. Näherung — Beobachtung. Das Absolutglied l ist also jetzt mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt.

Auch die Gleichung (1) $[v] = 0$ stellt nur einen speziellen Fall der aus (27) resultierenden Gleichung (28) dar.

Multiplizieren wir nämlich jede Fehlergleichung des gegenwärtigen Paragraphen mit ihrem Koeffizienten $\boldsymbol{a}$:

$$\begin{array}{l} a_1^2 x + a_1 l_1 = a_1 v_1 \\ a_2^2 x + a_2 l_2 = a_2 v_2 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array}$$

so erhalten wir durch vertikale Addition die linke Seite der Normalgleichung, also

$$[a\,a]\,x + [a\,l] = \boldsymbol{[a\,v] = 0}\,, \tag{28}$$

eine Gleichung, die für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ in (1) übergeht.

b) Beim Vorhandensein von zwei Unbekannten X und Y haben die Beziehungen zwischen ihnen und den Beobachtungsgrößen L die Form:

$$F(X,\ Y) - L = 0\,,$$

woraus [wie bisher, s. (25d), durch Einführung der Näherungswerte N_X und N_Y, für welche $X = N_X + x$, $Y = N_Y + y$, und der Bezeichnungen $a = \dfrac{\partial F}{\partial N_X}$, $b = \dfrac{\partial F}{\partial N_Y}$, $l = F(N_X,\ N_Y) - L$] die Fehlergleichungen entstehen:

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + l_2 = v_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{array}$$

Aus ihnen ergeben sich durch Quadrierung, vertikale Addition und partielle Differentiation des Ausdruckes für $[v\,v]$ die zwei Normalgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Zuschläge x und y:

$$\left\{\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\ \\ \underline{[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0}\,. \end{array}\right.$$

Zum Zwecke der Reduktion der Zahl der Unbekannten um eine und Ausrechnung der andern könnte man irgend eine der bekannten algebraischen Methoden anwenden. In Rücksicht auf möglichst bequeme, schematische Durchführung der Rechnung und unter Berücksichtigung der symmetrischen Anordnung der Koeffizienten von x und y (in der einen Diagonalen, von links oben nach rechts unten, stehen nur Quadratsummen, in der anderen identische Produktensummen) hat jedoch der Schöpfer der Methode der kleinsten Quadrate, Gauß, im Jahr 1810 einen vom üblichen etwas abweichenden Rechnungsweg gewiesen, dem wir folgen wollen. Hiernach wird grundsätzlich zuerst die links stehende Unbekannte eliminiert und zu diesem Zwecke die mit $-\dfrac{\text{2 tem Koeffiz. der I. Reihe}}{\text{1 ten Koeffiz. der I. Reihe}}$ multiplizierte erste Gleichung zur unveränderten zweiten Gleichung addiert. Dabei ergibt sich als Gleichung der ersten (und einzigen) Reduktionsstufe:

$$\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right) y + \left([b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]\right) = 0\,,$$

$$\text{woraus} \quad y = -\frac{[b\,l] - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]}{[b\,b] - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]}\,.$$

Für die schwerfälligen Differenzausdrücke im Zähler und im Nenner obiger Gleichung hat Gauß Symbole eingeführt, welche durch die Ziffer 1 ausdrücken, daß es sich um Erzeugnisse der ersten Reduktionsstufe handelt. Jeder Ausdruck der ersten Reduktionsstufe hat (vgl. obige Reduktionsregel) als Nenner des Subtrahenden das Summenglied $[a\,a]$, also braucht das Symbol diesen Nenner nicht besonders anzugeben. Der Zähler des Subtrahenden ist ein Produkt zweier Faktoren, deren jeder wieder die Summe von Produkten je zweier Faktoren ist, von denen je einer a heißt, während der andere je einer der Faktoren des Minuenden ist. Es genügt daher zur eindeutigen Bezeichnung

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{des Zählers} & [b\,l] - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] & \text{das Symbol} & [b\,l\cdot 1] \\ \quad ,,\ \text{Nenners} & [b\,b] - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] & \quad ,, \qquad ,, & [b\,b\cdot 1] \\ \left.\begin{array}{l}\text{allgemein d.}\\ \text{Ausdrucks}\end{array}\right\} & \boldsymbol{[b\,r] - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,r]} & \quad ,, \qquad ,, & \boldsymbol{[b\,r\cdot 1]} \end{array}\right.$$

womit die obige Gleichung übergeht in

$$(30)\qquad y = -\frac{[b\,l\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}.$$

Um den Wert der l i n k s stehenden Unbekannten x zu berechnen, könnte man jetzt entweder den berechneten Wert der anderen (y) in eine der Normalgleichungen einsetzen, oder statt der links stehenden jetzt die rechts stehende Unbekannte eliminieren. Damit würde aber der Schematismus in der Berechnung gestört, auf den man Wert zu legen hat, wenn es sich um häufig auftretende Rechenarbeiten handelt, deren mechanische Ausführung man untergeordneten Hilfskräften übertragen will. Der erstgenannte Weg der Einsetzung verhindert überdies die Berechnung des Gewichtes und mittleren Fehlers der zuletzt bestimmten Unbekannten, wie wir später sehen werden. Man zieht es daher vor, die N o r m a l g l e i c h u n g e n s o u m z u s t e l l e n, daß die Diagonale der Quadratsummen dieselbe Richtung hat wie zuerst, aber die bisher links stehende Unbekannte x nun rechts erscheint:

$$\begin{cases}[b\,b]\,y + [a\,b]\,x + [b\,l] = 0 \\ [a\,b]\,y + [a\,a]\,x + [a\,l] = 0\,.\end{cases}$$

Jetzt ergibt sich der Wert von x genau auf demselben Weg, wie vorher derjenige von y.

Auch im Falle der Berechnung zweier Unbekannten erhält man ein Analogon zu Gleichung (1): Multipliziert man nämlich die

1te Fehlergl. mit a_1, so erhält man $a_1^2 x + a_1 b_1 y + a_1 l_1 = a_1 v_1$
2te " " a_2, " " " $a_2^2 x + a_2 b_2 y + a_2 l_2 = a_2 v_2$
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

woraus vertikale Addition als linke Seite der entstehenden Gleichung die erste Normalgleichung liefert:

$$(31) \qquad [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = \boldsymbol{[a\,v] = 0}\,.$$

Multiplikation der Fehlergleichungen mit b_1, b_2, ... und vertikale Addition liefern ebenso $\boldsymbol{[b\,v] = 0}$. Beide Gleichungen stehen in Analogie mit den Gleichungen (1) und (28), die also nur spezielle Fälle des gegenwärtigen darstellen.

c) Auflösung der Normalgleichungen für drei und mehr Unbekannte.

Die Normalgleichungen für die drei unbekannten Zuschläge x, y, z zu den Näherungswerten N_x, N_y, N_z sind in § 14 aufgestellt worden und lauten:

$$\begin{cases}[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0\,.\end{cases}$$

Gerade wie bei der Bestimmung zweier Unbekannten zeigt sich auch hier in der Anordnung der Koeffizienten eine bemerkenswerte Symmetrie. Die Diagonale durch die Koeffizienten von links oben nach rechts unten trifft lauter Quadratsummen. Zu beiden Seiten von ihr symmetrisch angeordnet sind identische Produktensummen. Die Entwicklung in § 14 läßt erkennen, daß dieselbe Symmetrie auch für 4, 5 ... $\varkappa$ Unbekannte zutrifft. Wir verwenden daher in allen Fällen das dieser Eigentümlichkeit Rechnung tragende Gaußsche Reduktionsverfahren, mit Hilfe dessen wir grundsätzlich zur Bildung

der 1ten	Reduktionsstufe	die 1te	Unbekannte	links	eliminieren,
„ 2ten	„	„ 2te	„	„	„
„ 3ten	„	„ 3te	„	„	„
⋮		⋮			

bis schließlich in der ($\varkappa$ — 1)-ten Reduktionsstufe von den $\varkappa$ Unbekannten nur noch eine, die in den Normalgleichungen rechts stehende, übrig ist.

Die Eliminierung der jeweils links stehenden Unbebekannten erfolgt allgemein in jeder Reduktionsstufe, indem wir von der

2ten	Normalgl.	die	mit	$\frac{\text{2tem Koeff. d. I. Reihe}}{\text{1ten Koeff. d. I. Reihe}}$	multipl.	1. Gl.	subtrah.
3ten	„	„	„	$\frac{\text{3tem Koeff. d. I. Reihe}}{\text{1ten Koeff. d. I. Reihe}}$	„	1. „	„
4ten	„	„	„	$\frac{\text{4tem Koeff. d. I. Reihe}}{\text{1ten Koeff. d. I. Reihe}}$	„	1. „	„
⋮						⋮	

Dabei verlieren die Gleichungen jeder folgenden Reduktionsstufe gegenüber denjenigen der vorhergehenden eine Unbekannte, und ihre Zahl geht um 1 zurück. Auf obige drei Gleichungen angewandt, ergibt dieses Verfahren unter

Benutzung der Symbole (29) als erste Reduktionsstufe zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und derselben bemerkenswerten Symmetrie der Koeffizienten wie bisher:

$$\text{I. Reduktionsstufe}\quad\begin{cases}[b\,b\cdot 1]\,y + [b\,c\cdot 1]\,z + [b\,l\cdot 1] = 0\\[b\,c\cdot 1]\,y + [c\,c\cdot 1]\,z + [c\,l\cdot 1] = 0\end{cases}$$

Wenden wir das Gaußsche Reduktionsverfahren jetzt auf die Gleichungen der ersten Reduktionsstufe an und addieren deren mit $-\frac{[b\,c\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}$ multiplizierte erste Gleichung zur zweiten, so erhalten wir als einzige Gleichung der zweiten Reduktionsstufe:

$$\left\{[c\,c\cdot 1] - \frac{[b\,c\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}[b\,c\cdot 1]\right\} z + \left\{[c\,l\cdot 1] - \frac{[b\,c\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}[b\,l\cdot 1]\right\} = 0$$

und daraus die letzte, dritte Unbekannte:

$$z = -\frac{[c\,l\cdot 1] - \frac{[b\,c\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}[b\,l\cdot 1]}{[c\,c\cdot 1] - \frac{[b\,c\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}[b\,c\cdot 1]}.$$

Der Ausdruck ist ebenso schwerfällig, wie der auf S. 72 für y erhaltene. Für die zweite und (im Falle von mehr als drei Unbekannten) für jede folgende Reduktionsstufe müssen wir daher zur Schreibvereinfachung die in (29) eingeführte Symbolik fortsetzen. An Stelle des Nenners $[a\,a]$ der ersten tritt für die zweite Reduktionsstufe allgemein der Nenner $[b\,b\cdot 1]$, und es bedeutet in ihr ganz analog wie in (29)

$$(29)\quad\left.\begin{aligned}[c\,l\cdot 1] - \frac{[b\,c\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}[b\,l\cdot 1] &= [c\,l\cdot 2]\\ \boldsymbol{[d\,f\cdot 1] - \frac{[b\,d\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}[b\,f\cdot 1]} &\boldsymbol{= [d\,f\cdot 2]}\end{aligned}\right\}\text{usw.,}$$

für die dritte Reduktionsstufe kommt allgemein der Nenner $[cc \cdot 2]$, und es bedeutet beispielsweise

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &[ef \cdot 2] - \frac{[ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[cf \cdot 2] = [ef \cdot 3] \\ &[fl \cdot 2] - \frac{[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[cl \cdot 2] = [fl \cdot 3] \end{aligned} \right\} \text{usw.,}$$

für die vierte Reduktionsstufe kommt der Nenner $[dd \cdot 3]$, und es bedeutet

$$(29) \qquad [fl \cdot 3] - \frac{[df \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}[dl \cdot 3] = [fl \cdot 4] \quad \text{usw.,}$$

für die fünfte Reduktionsstufe kommt der Nenner $[ee \cdot 4]$, und es bedeutet u. a.

$$(29) \qquad [fl \cdot 4] - \frac{[ef \cdot 4]}{[ee \cdot 4]}[el \cdot 4] = [fl \cdot 5] \quad \text{usw.}$$

Damit geht der oben gefundene Ausdruck für z über in:

$$(32) \qquad z = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}.$$

Auch bei drei und mehr Unbekannten erhält man durch Multiplikation der Fehlergleichungen $1, 2 \ldots \lambda$ der Reihe nach mit $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$, bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_\lambda$, bzw. $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$, Addition der vertikalen Reihen und Vergleichung mit den Normalgleichungen:

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} &[aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] = [av] = 0 \\ &[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] = [bv] = 0 \\ &[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] = [cv] = 0 \end{aligned} \right.$$

in Übereinstimmung mit Gleichungen (31) und (28).

Auf gleiche Weise bestimmen wir jetzt die bisher vorletzte Unbekannte (y), nachdem wir die Normalgleichungen so umstellten, daß sie als letzte erscheint und die Quadratsummenkoeffizienten in derselben Diagonale von links oben nach rechts unten stehen wie folgt:

$$[c\,c]z + [a\,c]x + [b\,c]y + [c\,l] = 0$$

$$[a\,c]z + [a\,a]x + [a\,b]y + [a\,l] = 0$$

$$[b\,c]z + [a\,b]x + [b\,b]y + [b\,l] = 0\,.$$

Ist y bestimmt, so sorgen wir endlich durch abermalige Umstellung nach der vorgeführten Regel, daß die jetzt zu bestimmende letzte Unbekannte x hinten steht. Die Anordnung der Gleichungen wird dann die folgende:

$$[b\,b]y + [b\,c]z + [a\,b]x + [b\,l] = 0$$

$$[b\,c]y + [c\,c]z + [a\,c]x + [c\,l] = 0$$

$$[a\,b]y + [a\,c]z + [a\,a]x + [a\,l] = 0\,.$$

Die Arbeit der Reduktion und Auflösung der Gleichungen kann auf diese Weise völlig schematisch erfolgen.

Wir haben damit einen Weg der Auflösung gefunden, der sich in ganz gleicher Weise für beliebig viele Unbekannte anwenden läßt. Die Zahl der nötigen Reduktionsstufen ist dabei immer um eins kleiner als die Zahl der Unbekannten.

Das Ergebnis der Auflösung war für:

eine Unbekannte $\left\{ x = -\dfrac{[a\,l]}{[a\,a]}, \qquad [a\,v] = 0\,, \right\}$ (27) u. (28)

zwei Unbekannte $\left\{ y = -\dfrac{[b\,l\cdot 1]}{[b\,b\cdot 1]}, \qquad \begin{matrix}[a\,v] = 0\\ [b\,v] = 0\,,\end{matrix} \right\}$ (30) u. (31)

drei Unbekannte $\left\{ z = -\dfrac{[c\,l\cdot 2]}{[c\,c\cdot 2]}, \qquad \begin{matrix}[a\,v] = 0\\ [b\,v] = 0\\ [c\,v] = 0\,.\end{matrix} \right\}$ (32) u. (33)

Die Fortsetzung des Verfahrens ergibt [was sich durch Analogieschluß voraussehen läßt) als Wert der letzten von:

$$\text{vier Unbekannten}\left\{ x_4 = -\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}, \quad \begin{matrix}[av]=0\\ [bv]=0\\ [cv]=0\\ [dv]=0,\end{matrix} \right\} \text{(34) u. (35)}$$

$$\text{fünf Unbekannten}\left\{ x_5 = -\frac{[el\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}, \quad \begin{matrix}[av]=0\\ \vdots\\ [ev]=0\end{matrix} \right\} \text{(34) u. (35)}$$

usw.

§ 16. Bestimmung der mittleren Fehler m der Beobachtungswerte L aus den den letzteren zuzuschlagenden Verbesserungsbeträgen v.

Die ursprünglichen Beziehungen zwischen den Unbekannten $X \ldots$ und den Beobachtungswerten $L_1 \ldots L_n$ hießen

$$(25) \qquad \begin{cases} F_1(X, Y\ldots) - L_1 = 0. \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

I Da die Beobachtungswerte L unmöglich fehlerfrei sein können, sahen wir uns genötigt, ihnen — zunächst noch unbekannte — Verbesserungsbeträge $+v$ zuzuschlagen, so daß wir uns mit den Gleichungen genügen lassen mußten:

$$(25\text{a}) \qquad \begin{cases} F_1(X, Y\ldots) - L_1 = v_1, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{cases}$$

womit die verbesserten Werte der Beobachtungsgrößen lauteten

$$\begin{matrix} L_1 + v_1. \\ \vdots \quad\; \vdots \end{matrix}$$

Wir haben sodann zum Zweck der Erzielung linearer Form der Beziehungen und größerer Rechenbequemlichkeit die Unbekannten

$$\left.\begin{matrix} X \\ Y \\ \vdots \end{matrix}\right\} \text{ersetzt durch} \left\{\begin{matrix} N_X + x \\ N_Y + y \\ \vdots \end{matrix}\right.$$

wobei N_X, N_Y ... Näherungswerte der Unbekannten und x, y ... die jetzt als neue Unbekannte aufzufassenden kleinen Zuschläge zu diesen Näherungswerten darstellten. Die Fehlergleichungen gingen damit über in die Form:

$$\text{(25e)} \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + \cdots + l_1 = v_1\,, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{cases}$$

so daß an Stelle des negativen Wertes der Beobachtung L der Überschuß l desjenigen Wertes über ihn trat, den man durch Einsetzen der Näherungswerte N_X, N_Y ... in die Beziehungen $F(X, Y, \ldots)$ errechnete.

Der an der Beobachtungsgröße L anzubringende Verbesserungszuschlag $+v$ erlitt jedoch durch diese Additionalkonstante $F(N_X, N_Y, \ldots)$ natürlich keine Änderung. Dasselbe ist daher mit der von v abhängigen, der Beobachtung oder der gesuchten Größe X ... (s. § 18) innewohnenden Genauigkeit der Fall.

Die den Beobachtungswerten L zuzuschlagenden Verbesserungen v lassen sich nun nach erfolgter Ausrechnung der neuen Unbekannten $x, y \ldots$ oder der Unbekannten $X, Y \ldots$ aus Gleichung (25e) bzw. (25a) berechnen. Je kleiner sie aber sind, um so genauer ist die Beobachtung ausgeführt, um so genauer also werden die Unbekannten $X \ldots$ sich ergeben. Als Kriterium für die erreichte Beobachtungsgenauigkeit kann demnach die Größe dieser Verbesserungszuschläge v dienen. Dabei hat uns aber schon die bisherige Untersuchung gezeigt, daß nicht etwa der durchschnittliche Wert $d = \frac{[\text{absol. } v]}{n}$ dieser Verbesserungszuschläge einen zutreffenden Genauigkeitsmaßstab liefert, sondern daß wir, um größere Beobachtungsfehler stärker in die Wagschale zu werfen und gleichzeitig den störenden Vorzeichenunterschied wegzubringen, die Quadrate dieser Verbesserungen betrachten müssen. Wir verfahren dabei in Übereinstimmung mit der Bedingung

$[v\,v] = \text{Min.}$, welche uns die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten lieferte. Denn es liegt nichts näher, als den Wert derjenigen Funktion der Beobachtungsfehler, welche wir durch entsprechende Auswahl der Unbekannten zum Min. machen wollen, gleichzeitig als Maßstab für die erreichte Beobachtungsgenauigkeit zu benutzen.

Ist nur eine einzige Unbekannte vorhanden, zu deren Bestimmung n Beobachtungswerte L dienen, so daß unsere Fehlergleichungen heißen

$$\begin{array}{c} a_1 x + l_1 - v_1 = 0\,, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}$$

so tritt $a\,x$ an Stelle von L in Gleichung (2), und wir haben wie dort nach Gleichung (5b) direkt den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}\,.$$

Es fragt sich aber, ob der Nenner $(n - 1)$ auch im Falle der Bestimmung von $2, 3 \ldots \varkappa$ Unbekannten aus λ Beobachtungen bzw. λ unabhängigen Bestimmungsgleichungen gilt. Diese Frage läßt sich durch direkte Entwicklung, einfacher aber noch durch folgende Überlegung beantworten:

a) Welches auch die allgemeine Formel für die Berechnung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung aus den Verbesserungen v sein möge, für den Fall der Bestimmung einer einzigen Unbekannten aus λ Beobachtungen heißt sie:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{\lambda - 1}\,. \tag{5b}$$

b) Ist $\lambda < \varkappa$, so lassen sich aus den λ Gleichungen nicht einmal die Werte der $\varkappa$ Unbekannten, also noch viel weniger die bei der Beobachtung erreichte Genauigkeit errechnen. Die Einsetzung von λ und $\varkappa$ in die gesuchte Formel für m muß also zu einem imaginären Wert führen.

c) Ist $\lambda = \varkappa$, so lassen sich wohl die Werte der Unbekannten $X, Y \ldots$, aber keine den Beobachtungswerten zuzuschlagenden Verbesserungen v berechnen. Die zwischen den Werten für die Unbekannten und den Beobachtungsgrößen bestehenden Beziehungen werden durch die Beobachtungswerte, so fehlerhaft sie sein mögen, genau erfüllt. Der mittlere Beobachtungsfehler m bleibt somit unbestimmt, was die für ihn aufzustellende Formel zum Ausdruck bringen muß.

d) Ist $\lambda > \varkappa$, so ist für die Unbekannten Überbestimmung vorhanden, folglich gehen jetzt die Beziehungen (25) in die Fehlergleichungen (25a) und (25e) über. Letztere liefern λ, den Beobachtungswerten L zuzuschlagende Verbesserungen v, aus denen sich der mittlere Beobachtungsfehler m um so sicherer ergibt, je größer λ ist.

e) Der gesuchte Ausdruck für den mittleren Beobachtungsfehler m kann nach dem Vorstehenden nicht bloß abhängig sein von $[v\,v]$ und der Zahl λ von Bestimmungsgleichungen, sondern auch von der Zahl $\varkappa$ der Unbekannten, muß also lauten:

$$m = F([v\,v]\,,\,\lambda\,,\,\varkappa)\,.$$

f) Er darf nur für den Fall m zu 0 ergeben, daß die Beobachtungswerte fehlerfrei sind, $v_1 = v_2 = \cdots = 0$ (was bei wirklichen Beobachtungen nie zutrifft).

Alle diese Forderungen sind erfüllt durch die Gleichung:

$$m_L^2 = \frac{[v\,v]}{\lambda - \varkappa}\,. \tag{36}$$

Sie liefert:

a) für $\varkappa = 1$ $\quad m^2 = \dfrac{[v\,v]}{\lambda - 1}$;

b) für $\lambda < \varkappa$ $\quad m^2 = \dfrac{[v\,v]}{\text{negativ}} = \text{negativ} \begin{cases}\text{was auch } v \text{ sein möge,}\\ \text{folglich } m \text{ imaginär;}\end{cases}$

c) für $\lambda = \varkappa$ $\quad m^2 = \dfrac{[v\,v]}{0}$

$$= \frac{0}{0} = \text{unbestimmt (weil } v_1 = v_2 = \cdots = 0);$$

d) für $\lambda > \varkappa$ $\quad m^2 = \dfrac{[v\,v]}{> 1}$.

Je größer λ, um so größer auch die Zahl der zur Berechnung von m verwendeten v. Um so sicherer also die Bestimmung von m.

f) Für $\lambda > \varkappa$ wird m nur $= 0$, wenn $[v\,v] = 0$, weil jeder Einzelbetrag v^2 eine endliche positive Größe darstellt, die mit $\lambda - \varkappa$ wächst.

§ 17. Ableitung des Wertes der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ als Nebenprodukt der Reduktion der Normalgleichungen.

Die Berechnung der zur Erkenntnis der Beobachtungsgenauigkeit nötigen Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ durch Einsetzung der für die Unbekannten $x \ldots$ oder $X \ldots$ erhaltenen Werte in die Fehlergleichungen ist schwerfällig. Wir suchen daher auf anderem Weg zum Ziel zu gelangen. In § 14 haben wir für $[v\,v]$ beim Vorhandensein von drei Unbekannten die Gleichung aufgestellt:

$$[v\,v] = [a\,a]x^2 + 2[a\,b]x\,y + 2[a\,c]x\,z + 2[a\,l]x + [b\,b]y^2 \\ + 2[b\,c]y\,z + 2[b\,l]y + [c\,c]z^2 + 2[c\,l]z + [l\,l],$$

welche für jede beliebige andere Zahl von Unbekannten ganz analog lautet (vgl. z. B. § 15 für eine Unbekannte). Aus obiger Gleichung wollen wir nun versuchen, die Unbekannten x, y, z zu eliminieren. Zu diesem Zweck kehren wir zur Auflösung der Normalgleichungen zurück (S. 75), deren erste wir — quadriert und durch $[a\,a]$ dividiert — von dem obigen Ausdruck für $[v\,v]$ subtrahieren. Der Wert von $[v\,v]$ wird dadurch nicht verändert und wir erhalten dafür unter gleichzeitiger Einsetzung der Gaußschen Symbole:

$$[v\,v] = [b\,b \cdot 1]y^2 + 2[b\,c \cdot 1]y\,z + 2[b\,l \cdot 1]y + [c\,c \cdot 1]z^2 + 2[c\,l \cdot 1]z + [l\,l \cdot 1]\,.$$

Subtrahieren wir von dem jetzt gewonnenen Ausdruck für $[v\,v]$ die linke Seite der quadrierten und mit $[b\,b \cdot 1]$ durchdividierten ersten Gleichung der ersten Reduktionsstufe (s. S. 76), deren Wert gleichfalls 0 ist, so erhalten wir unter wiederholter Anwendung der Gaußschen Symbolyk

$$[v\,v] = [c\,c \cdot 2]z^2 + 2[c\,l \cdot 2]z + [l\,l \cdot 2]\,.$$

Subtrahieren wir endlich von dem obigen Ausdruck für $[v\,v]$ die linke Seite der quadrierten und durch $[c\,c \cdot 2]$ dividierten Gleichung der zweiten Reduktionsstufe $[c\,c \cdot 2]z + [c\,l \cdot 2] = 0$, so erhalten wir als Quadratsumme der Verbesserungen v an den Beobachtungswerten L im Falle von drei Unbekannten:

$$(37) \qquad [v\,v] = [l\,l \cdot 3]\,.$$

Im Falle der Bestimmung von $\varkappa$ Unbekannten ergibt sich genau auf demselben Wege:

$$(37) \qquad [v\,v] = [l\,l \cdot \varkappa]\,.$$

Im Falle der Bestimmung einer einzigen Unbekannten kann man noch bequemer in der Gleichung (s. S. 70):

$$[v\,v] = [a\,a]x^2 + 2[a\,l]x + [l\,l]\,.$$

direkt einsetzen:

$$(27) \qquad x = -\frac{[a\,l]}{[a\,a]} \quad \text{und} \quad x^2 = \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]^2}\,.$$

Damit kommt

$$(37)\quad [vv]=\frac{[al]^2}{[aa]}-2\frac{[al]^2}{[aa]}+[ll]=[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]=[ll\cdot 1].$$

Erwägt man,

daß aus: $[ll]$ sich ergibt $[ll\cdot 1]=[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]$

„ „ $[ll\cdot 1]$ „ „ $[ll\cdot 2]=[ll\cdot 1]-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]$

„ „ $[ll\cdot 2]$ „ „ $[ll\cdot 3]=[ll\cdot 2]-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cl\cdot 2]$,

so wird klar, daß man die Quadratsumme der Verbesserungen v gelegentlich der Reduktion der Normalgleichungen in demselben Augenblick erhält, in welchem die zuhinterst stehende, also zuerst gesuchte Unbekannte gefunden wird. Man hat zu diesem Zwecke außer den Koeffizienten $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$, $[al]$, $[bb]$, ... nur noch die Quadratsumme $[ll]$ einzuführen und bei der Reduktion ebenso zu behandeln, wie jene.

Da die an den Beobachtungswerten anzubringenden Verbesserungen v, also auch $[vv]$ ihren Wert natürlich nicht ändern, wenn man statt der bisher zuhinterst stehenden nach erfolgter Umstellung die vorher zweitletzte Unbekannte usw. bestimmt, so erhält man dadurch eine Rechenprobe für die richtige Durchführung der ganzen Reduktionsarbeit, daß die Endwerte $[ll\cdot \varkappa]$ der Reduktion für alle Unbekannte einander gleich sein müssen.

§ 18. Mittlerer Fehler M und Gewicht P der berechneten Unbekannten aus den Verbesserungszuschlägen v der Beobachtungswerte L.

Von den gesuchten Größen X, Y... besitzt jede dieselbe Genauigkeit, wie die ihr entsprechende, durch Subtraktion des Näherungswertes N_X, N_Y... daraus entstandene neue Unbekannte $x, y \ldots$ Beide bedürfen derselben unbekannten Verbesserung, um zum unzugänglichen wahren Wert bzw. Zuschlag ergänzt zu werden, beide haben denselben mittleren Fehler M.

Dieser mittlere Fehler M der $X \ldots$ oder $x \ldots$ hängt jedenfalls vom mittleren Fehler m, oder den wahrscheinlichen Verbesserungen v der Beobachtungswerte L ab, denn je kleiner diese (und je größer ihre Zahl), um so genauer lassen sich auch die gesuchten Größen bestimmen, deren Kenntnis sie vermitteln (s. Satz S. 55). Nachdem wir mittels Gleichung (36) gelernt haben, aus den Verbesserungen v die — im vorliegenden Falle gleich großen — mittleren Fehler m der Beobachtungswerte L zu berechnen, gibt uns § 12 die Möglichkeit, auch diejenigen der unbekannten Zuschläge $x, y \ldots$ oder der Unbekannten $X, Y \ldots$ zu finden, sobald es uns gelingt, aus den $\varkappa$ Normalgleichungen

$$\begin{array}{cccc} [a\,a]x + & [a\,b]y + \cdots + & [a\,l] = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

explizite Funktionen für die Unbekannten zu bilden von der Form $X = F(L_1, L_2 \ldots)$, oder $x = \varphi(l_1, l_2 \ldots)$, oder noch besser in linearer Form:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n ; \\ y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots + \beta_n l_n . \end{cases}$$

Dabei steht, falls letztere lineare Form im Hinblick auf die Kleinheit der unbekannten Zuschläge $x, y \ldots$ genügt, von vornherein fest, daß die zu bestimmenden Koeffizienten

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots$$
$$\beta_1, \beta_2 \ldots$$

Funktionen der Koeffizienten $a, b \ldots$ der Fehlergleichungen sind.

Zur Umwandlung der Normalgleichungen in explizite Form für die Unbekannten wollen wir den Fall zweier Unbekannten nehmen, für welchen Gleichung (30) lieferte:

$$y = -\frac{[b\,l \cdot 1]}{[b\,b \cdot 1]}.$$

Der Nenner ist unabhängig von l, kommt also für die gewünschte auseinandergezogene Form (a) nicht weiter in Betracht. Der Zähler lautet auseinandergezogen

$$\begin{aligned}[b\,l \cdot 1] &= [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \\ &= b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots + b_n l_n - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_n l_n),\end{aligned}$$

woraus wir erhalten

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{aligned} y = -\frac{1}{[b\,b \cdot 1]}\Big\{&\Big(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\Big)l_1 + \Big(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\Big)l_2 + \cdots \\ &+ \Big(b_n - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_n\Big)l_n\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Die Vergleichung der Gleichungen (a) und (b) liefert

$$\text{(c)}\quad \left\{\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{1}{[b\,b \cdot 1]}\Big(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\Big), \\ \beta_2 &= -\frac{1}{[b\,b \cdot 1]}\Big(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\Big), \\ &\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}\right.$$

und mit diesen Koeffizienten die Möglichkeit, den Wert der Unbekannten y nach Gleichung (a) zu berechnen. Daran haben wir nun kein Interesse, wohl aber an der Berechnung von

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l_1}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial l_2}\right)^2 \ldots,$$

weil nach Gleichungen (24b), (24c) und (24d)

$$M_y^2 = \left[m^2\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{\mu^2}\left[m^2\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right].$$

Setzen wir den allen Beobachtungswerten gemeinschaftlichen mittleren Beobachtungsfehler m gleichzeitig als mittleren Fehler μ der Gewichtseinheit fest (behaften jede der Beobachtungen L mit dem Gewicht 1), so kommt daraus:

$$\text{(d)} \qquad M_y^2 = m^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]$$

$$\text{(e)} \qquad \frac{1}{P_y} = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right].$$

Wir erhalten nun aus Gleichungen (a) und (c)

$$\frac{\partial y}{\partial l_1} = \beta_1 = -\frac{1}{[b\,b \cdot 1]}\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial l_2} = \beta_2 = -\frac{1}{[b\,b \cdot 1]}\left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_2\right) \quad \text{usw.,}$$

also

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l_1}\right)^2 = \frac{1}{[b\,b \cdot 1]^2}\left(b_1^2 - 2\,a_1\,b_1\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + a_1^2\,\frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l_2}\right)^2 = \frac{1}{[b\,b \cdot 1]^2}\left(b_2^2 - 2\,a_2\,b_2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + a_2^2\,\frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right] = \frac{1}{[b\,b \cdot 1]^2}\left([b^2] - 2\,\frac{[a\,b]^2}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\right)$$

$$= \frac{1}{[b\,b \cdot 1]^2}\left([b\,b] - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\right) = \frac{1}{[b\,b \cdot 1]}.$$

Einsetzung in (d) und (e) und in Gleichung (36) liefert für den Fall der Bestimmung von zwei Unbekannten:

$$\text{(38)} \quad \boldsymbol{M_y^2 = \frac{m^2}{[b\,b \cdot 1]} = \frac{[v\,v]}{(\lambda - 2)[b\,b \cdot 1]} = \frac{[l\,l \cdot 2]}{(\lambda - 2)[b\,b \cdot 1]}}$$

$$\text{39)} \quad \boldsymbol{P_y = \frac{1}{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]} = [b\,b \cdot 1]}\,.$$

Der Ausdruck $[b\,b \cdot 1]$ für das Gewicht der Unbekannten y ist [in Übereinstimmung mit Gleichung (2)] der Nenner des zur Bestimmung dieser Unbekannten dienenden Bruchs. Er ergibt sich gelegentlich der Reduktion der Normalgleichungen.

Durch Analogieschluß, oder durch Überlegungen und Ableitungen, ähnlich den vorhergehenden, kommt man zum Gewicht P und zum mittleren Fehler M der bei der Reduktion der Normalgleichungen jeweils zuhinterst stehenden Unbekannten, gleichgültig, wie groß ihre Zahl auch sei.

Z. B. liefert Gleichung (32) für drei Unbekannte

$$P_{x_3} = [c\,c \cdot 2]\,, \tag{39}$$

woraus

$$M_{x_3}^2 = \frac{m_L^2}{P_{x_3}} = \frac{[v\,v]}{(\lambda-3)[c\,c\cdot 2]} = \frac{[l\,l\cdot 3]}{(\lambda-3)[c\,c\cdot 2]} \tag{38}$$

Gleichung (34) für vier Unbekannte

$$P_{x_4} = [d\,d \cdot 3]\,, \tag{39}$$

woraus

$$M_{x_4}^2 = \frac{m_L^2}{P_{x_4}} = \frac{[v\,v]}{(\lambda-4)[d\,d\cdot 3]} = \frac{[l\,l\cdot 4]}{(\lambda-4)[d\,d\cdot 3]} \tag{38}$$

usw.

§ 19. Praktische Ausrechnung der Koeffizienten für die Normalgleichungen. Bedürfnis veränderter Größe der Unbekannten oder der Maßeinheit. Vereinfachte Schreibweise. Rechenproben.

In § 14 haben wir erfahren, wie wir aus den vorhandenen Beziehungen zwischen den Unbekannten $X, Y\ldots$ und den Beobachtungsgrößen L von der Form (25) $F(X, Y\ldots) - L = 0$ oder $F_{(x,\,y,\,\ldots,\,L_1,\,L_2,\,\ldots)} = 0$ die Fehlergleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} a\,x + b\,y + \cdots + l = v \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{array}\right. \tag{25e}$$

und aus ihnen die Normalgleichungen

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + \cdots + [a\,l] = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

erhalten.

Die darauf folgenden Paragraphen haben uns die Auflösung dieser Normalgleichungen gezeigt. Jetzt handelt es sich um die praktische Ausführung der Rechnung.

Die Koeffizienten a, b ... der Fehlergleichungen mögen bereits gewonnen sein. Diejenigen der Normalgleichungen sind zu berechnen. Sie sind teils **Quadratsummen** $[a\,a]$, $[b\,b]$ ... $[l\,l]$, teils Produktensummen $[a\,b]$, $[a\,c]$...$[b\,c]$.... Für die **Bildung der einzelnen Quadrate und Produkte,** wie für die Reduktion der Normalgleichungen verwendet man, soweit die damit erzielbare Genauigkeit von drei Stellen ausreicht, den gewöhnlichen logarithmischen Rechenstab, für größere Genauigkeit Quadrat- bzw. Produktentafeln, oder größere Rechenschieber bzw. Rechenwalzen, und, falls auch deren Stellenzahl nicht ausreicht, Logarithmentafeln bzw. Rechenmaschinen. Besonders bequem ist die Benutzung der Quadrattafeln mittels derer man nicht allein die Quadrate $a_1^2, a_2^2 \ldots a_n^2$, $b_1^2, b_2^2 \ldots b_n^2$ usw. selbst, sondern auch die Summen der Produkte $[a\,b]$, ..., $[a\,l]$, ..., $[b\,l]$ usw. gewinnen kann. Bildet man nämlich neben den Quadraten von $a, b, \ldots, l$ auch diejenigen von $(a+b) \ldots (a+l)$, $(b+l) \ldots$, so erhält man aus $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$:

$$a\,b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2},$$

also

$$[a\,b] = \frac{[(a+b)^2] - [a\,a] - [b\,b]}{2}$$

und ebenso

$$[b\,l] = \frac{[(b+l)^2] - [b\,b] - [l\,l]}{2} \quad \text{usw.}$$

Sind die einzelnen Koeffizienten und Absolutglieder $a, b \ldots l$ sehr ungleich, so nötigt das Vorhandensein besonders kleiner Werte (< 1), wenn sie bei der Quadrat- und Produktenbildung neben den großen überhaupt noch zum Ausdruck kommen sollen, zum Mitschleppen vieler Stellen, zumal in den quadratischen Summen. Dadurch wird die praktische Rechnung erheblich erschwert. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn es gelingt, **den Koeffizienten und Absolutgliedern ungefähr gleiche Stellenzahl und womöglich ähnlichen Wert** zu verschaffen. Hierfür gibt es zwei Wege. Bei dem einen führen wir statt der Unbekannten mit den abnorm kleinen oder großen Koeffizienten in den Fehlergleichungen ihren 10-ten, 100-ten ... Teil oder ihr 10-faches, 100-faches ... als neue Unbekannte ein, wodurch die zugehörigen Koeffizienten auf den 10-fachen, 100-fachen ... Betrag steigen, bzw. auf den 10-ten, 100-ten Teil ermäßigt werden. Bei Begehung des andern wählen wir die Maßeinheiten für die Unbekannten und für die Beobachtungsgrößen nach Bedarf in Abweichung von den bisher eingeführten. (Längen in m oder dm oder cm usw., Winkel in Minuten oder Sekunden oder in analytischem Maß, Gewichte in kg oder g usw., jedoch konsequent in einer und derselben Aufgabe immer gleich.)

Die schon in § 15 erkannte symmetrische Anordnung gleicher Koeffizienten der Normalgleichungen, welche zu einem eigentümlichen Reduktions- und Auflösungsverfahren führte, ermöglicht uns auch eine einfachere, **ab-**

gekürzte Schreibweise. Betrachten wir z. B. die Normalgleichungen für vier Unbekannte:

$$[a\,a]\,x_1 + [a\,b]\,x_2 + [a\,c]\,x_3 + [a\,d]\,x_4 + [a\,l] = 0$$

$$[a\,b]\,x_1 + [b\,b]\,x_2 + [b\,c]\,x_3 + [b\,d]\,x_4 + [b\,l] = 0$$

$$[a\,c]\,x_1 + [b\,c]\,x_2 + [c\,c]\,x_3 + [c\,d]\,x_4 + [c\,l] = 0$$

$$[a\,d]\,x_1 + [b\,d]\,x_2 + [c\,d]\,x_3 + [d\,d]\,x_4 + [d\,l] = 0,$$

so erkennen wir, daß wir genau dieselben Koeffizienten in derselben Reihenfolge erhalten, wenn wir statt der Gleichungen selbst jede Zeile zunächst vertikal von oben nach unten bis zur Diagonale der Quadratsummen und dann von ihr ab nach rechts horizontal weiter lesen. Unter dieser Voraussetzung können wir also den Aufschrieb der Glieder links von der Quadratsummendiagonale sparen. Daß diese Schreibkürzung angewendet wird, deuten wir durch Unterstreichen des ersten (quadratischen) Koeffizienten auf jeder Zeile an und ersetzen überdies die fehlenden Glieder eventuell durch Punkte. Auf den Beischrieb der Unbekannten x, y . . . und die Beibehaltung der Gleichungsform müssen wir in diesem Fall verzichten.

Für die Weiterbehandlung ist dies jedoch völlig bedeutungslos, weil die Gleichheit der zueinander symmetrisch angeordneten Koeffizienten auch in den verschiedenen Reduktionsstufen besteht, ihr Mitschleppen also lediglich eine nutzlose Arbeitsvermehrung bedeuten würde. Die Unbekannten spielen bei der Reduktion nur die passive Rolle, daß in jeder folgenden Reduktionsstufe eine von ihnen, nämlich die in der vorhergehenden Stufe links stehende verschwindet. Geändert werden durch das Reduktionsgeschäft nur die Koeffizienten $[a\,a]$, $[a\,b]$ . . . $[b\,b]$ . . . $[l\,l]$, $[b\,b \cdot 1]$ . . . $[l\,l \cdot 1]$, $[c\,c \cdot 2]$ . . . usw.

An Stelle der Normalgleichungen tritt daher jetzt als abgekürzter Anschrieb ihrer Koeffizienten:

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
\underline{[a\,a]} & [a\,b] & [a\,c] & [a\,d] & [a\,l] \\
\cdot & \underline{[b\,b]} & [b\,c] & [b\,d] & [b\,l] \\
\cdot & \cdot & \underline{[c\,c]} & [c\,d] & [c\,l] \\
\cdot & \cdot & \cdot & \underline{[d\,d]} & [d\,l]
\end{array}\right.$$

Genau dieselben Schreibkürzungen wenden wir bei jeder Reduktionsstufe an.

Ein wichtiges Erfordernis für die stufenweise Ausführung längerer Rechnungen, von denen sich eine auf der anderen aufbaut, ist endlich die Herstellung von **Rechenproben.** Die bloße Wiederholung der Rechnung genügt hierfür nicht. Eine durchgreifende Probe für die Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen, wie auch für deren Reduktion erhält man durch Einführung der Summe s der Koeffizienten und Absolutglieder jeder Fehlergleichung:

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{l}
s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \cdots + l_1 \\
s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \cdots + l_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}\right.$$

Multipliziert man nämlich die erste Zeile dieser Summengleichung (40) mit a_1, die zweite mit a_2 usw. und addiert vertikal, so erhält man die Kontrollgleichung

$$(41)\qquad \boldsymbol{[a\,s] = [a\,a] + [a\,b] + [a\,c] + \cdots + [a\,l]}\,.$$

Führt man dieselbe Multiplikation mit

$$\begin{array}{l}
b_1,\;\; b_2 \ldots \\
\vdots \\
l_1,\;\; l_2 \ldots \\
s_1,\;\; s_2 \ldots
\end{array}$$

durch und addiert, so erhält man

$$(41)\quad \begin{cases} [b\,s] = [a\,b] + [b\,b] + [b\,c] + \cdots + [b\,l] \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ [l\,s] = [a\,l] + [b\,l] + [c\,l] + \cdots + [l\,l] \\ [s\,s] = [a\,s] + [b\,s] + [c\,s] + \cdots + [l\,s] \end{cases}$$

Rechnet man also außer den zur Gewinnung der Unbekannten jedenfalls erforderlichen Produktsummen

$$\begin{array}{llll} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \ldots & [a\,l] \\ & [b\,b] & [b\,c] \ldots & [b\,l] \\ & & \cdot & \vdots \end{array}$$

noch die Produktensummen

$$[a\,s],\ [b\,s],\ \ldots,\ [l\,s],$$

so ist nach Gleichung (41) durch jede dieser letzteren eine Zeile der Koeffizienten der Normalgleichungen summarisch geprüft. Die Quadratsumme $[l\,l]$, welche zum Zweck der Ableitung von $[v\,v]$ nach Gleichung (36) berechnet werden muß, wird durch die vorletzte der Kontrollgleichungen (41), und sämtliche Koeffizienten der Normalgleichungen einschließlich der Kontrollproduktensummen $[a\,s] \ldots [l\,s]$ werden durch $[s\,s]$ geprüft.

Will man daher auf die zeilenweise Kontrolle verzichten, so genügt nach (41), letzte Gleichung als einzige summarisch durchgreifende Probe die Berechnung von

$$[s\,s] = [a\,a] + [a\,b] + \cdots + [b\,b] + [b\,c] + \cdots + [c\,l] + [l\,l]$$

(s. schematische Darstellung unten, in welcher jede Zeile rechts und links des Vertikalstrichs und die beiden durch fetten Druck hervorgehobenen Flächen je gleiche Wertsummen beherbergen).

$$
(41)\quad \left\{
\begin{array}{lllll|l}
\multicolumn{5}{c|}{\text{Koeffiz. der Normalgleichungen}} & \text{Probe} \\
[a\,a] & [a\,b] & [a\,c] & \ldots & [a\,l] & [a\,s] \\
[a\,b] & [b\,b] & [b\,c] & \ldots & [b\,l] & [b\,s] \\
[a\,c] & [b\,c] & [c\,c] & \ldots & [c\,l] & [c\,s] \\
\vdots & & & & & \vdots \\
[a\,l] & [b\,l] & [c\,l] & \ldots & [l\,l] & [l\,s] \\
\hline
[a\,s] & [b\,s] & [c\,s] & \ldots & [l\,s] & [s\,s]
\end{array}
\right.
$$

oder abgekürzt geschrieben

$$
(41)\quad \left\{
\begin{array}{ccccc|c}
 & & & & & \text{Probe} \\
\underline{[a\,a]} & [a\,b] & [a\,c] & \ldots & [a\,l] & [a\,s] \\
\cdot & \underline{[b\,b]} & [b\,c] & \ldots & [b\,l] & [b\,s] \\
\cdot & \cdot & \underline{[c\,c]} & \ldots & [c\,l] & [c\,s] \\
 & & & & \vdots & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[l\,l]} & [l\,s] \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[s\,s]}
\end{array}
\right.
$$

Dehnt man die Reduktionsarbeit auch auf die Summenglieder $[a\,s]$, $[b\,s]$ ... der Kontrollgleichungen (41) aus, so ändert sich dadurch an den zur Berechnung der Unbekannten dienenden Koeffizienten der verschiedenen Reduktionsstufe n natürlich nicht das geringste. Man erhält aber auch für sie Kontrollgleichungen:

$$
(42)\quad \left\{
\begin{array}{l|l}
[b\,b\cdot 1]+[b\,c\cdot 1]+\cdots+[b\,l\cdot 1] & -[b\,s\cdot 1]=0 \\
[b\,c\cdot 1]+[c\,c\cdot 1]+\cdots+[c\,l\cdot 1] & -[c\,s\cdot 1]=0 \\
\vdots & \quad\vdots \\
[b\,l\cdot 1]+[c\,l\cdot 1]+\cdots+[l\,l\cdot 1] & -[l\,s\cdot 1]=0 \\
\hline
-[b\,s\cdot 1]-[c\,s\cdot 1]-\cdots-[l\,s\cdot 1] & +[s\,s\cdot 1]=0
\end{array}
\right.
$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{cccc|c}
 & & & & \text{Probe} \\
\underline{[bb\cdot 1]} & [bc\cdot 1] & \cdots & [bl\cdot 1] & [bs\cdot 1] \\
\cdot & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \underline{[ll\cdot 1]} & [ls\cdot 1] \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [ss\cdot 1]
\end{array}\right.$$

d. h. dieselbe zeilenweise und Gesamtsummenprobe, wie in Gleichung (41) für die Koeffizienten der Normalgleichungen.

Die Fortsetzung der Reduktion liefert die Koeffizienten der zweiten Reduktionsstufe, welche den Kontrollgleichungen genügen müssen:

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{c|l}
[cc\cdot 2] + \cdots + [cl\cdot 2] & -[cs\cdot 2] = 0 \\
\vdots & \quad\vdots \\
[cl\cdot 2] + \cdots + [ll\cdot 2] & -[ls\cdot 2] = 0 \\
\hline
-[cs\cdot 2] - \cdots - [ls\cdot 2] & +[ss\cdot 2] = 0
\end{array}\right.$$

oder abgekürzt geschrieben

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{ccc|c}
 & & & \text{Probe} \\
\underline{[cc\cdot 2]} & \cdots & [cl\cdot 2] & [cs\cdot 2] \\
\cdot & & \vdots & \vdots \\
\cdot & \cdot & \underline{[ll\cdot 2]} & [ls\cdot 2] \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \underline{[ss\cdot 2]}
\end{array}\right.$$

Ist beispielsweise die Zahl der Unbekannten gleich 3, so fallen die obigen, weitere Glieder andeutenden Vorzeichen und Punkte weg, und es ergibt sich die bei der Reduktion noch übriggebliebene rechtsstehende Unbekannte

$$z = -\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}.$$

Die Fortsetzung der Reduktion liefert dann als dritte Reduktionsstufe, welche keine Unbekannte mehr enthält:

$$(44) \qquad \left\{ \begin{array}{r} [l\,l \cdot 3] - [l\,s \cdot 3] = 0 \\ -[l\,s \cdot 3] + [s\,s \cdot 3] = 0\,, \end{array} \right.$$

oder als **Haupt- und Schlußprobe** in Verbindung mit (37)

$$(44) \qquad \boldsymbol{[l\,l \cdot 3] = [l\,s \cdot 3] = [s\,s \cdot 3] = [v\,v]}$$

drei gleichgroße Zahlen, deren Wert die Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ vorstellt.

Ist die Zahl der Unbekannten gleich $\varkappa$, so liefert die $\varkappa$-te Reduktionsstufe

$$[l\,l \cdot \varkappa] = [l\,s \cdot \varkappa] = [s\,s \cdot \varkappa] = [v\,v]\,.$$

3. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

---

§ 20. Erweiterung der für gleichwertige Beobachtungen aufgestellten Ausgleichungsgrundsätze auf ungleichwertige Beobachtungen.

Wenn die einzelnen Beobachtungswerte L, aus denen die Unbekannten $X, Y\ldots$ errechnet werden sollen und die wir bisher als gleichwertig vorausgesetzt haben, von **ungleicher Genauigkeit** sind (etwa deshalb, weil sie mit verschiedenerlei Instrumenten, oder nach verschiedenerlei Beobachtungsmethoden, oder auf Grund verschiedenoftmaliger Wiederholung gewonnen wurden, oder weil sie verschiedene Größe haben und der Beobachtungsfehler — wie z. B. bei Streckenmessungen — von dieser Größe abhängt, so ändert dies weder an den nach (25) zwischen beiderlei Größen direkt bestehenden, noch an den durch Einführung von Näherungswerten N_x, $N_y \ldots$ für X, $Y \ldots$ gebildeten reduzierten Beziehungen (25e) $ax + \cdots + l = v$ das geringste. Der — im Falle vorhandener Überbestimmung jedem Beobachtungswert L zuzuschlagende und etwa durch Einsetzung der gefundenen Werte für die Unbekannten in Gleichungen (25a) oder (25e) zu ermittelnde — Verbesserungsbetrag v, welcher infolge der unvermeidlichen Beobachtungsungenauigkeiten nötig wird, wird natürlich um so kleiner sein, je genauer die Beobachtungswerte L selbst sind. Es ist daher nicht mehr angängig, diese Verbesserungszuschläge unterschiedslos den weiteren Untersuchungen zugrunde zu legen, wie es im vorigen Kapitel geschah. Wir sind damit nun auch für den Fall A des § 14 (in L explizite Form der zwischen den Beobachtungsgrößen L und den Unbekannten X, $Y \ldots$ bestehenden Beziehungen) da angelangt, wo wir im Fall B (implizite Form der Beziehungen zwischen L_1, $L_2 \ldots L_n$, X, $Y \ldots$) stehengeblieben sind: die rechten Seiten der Fehlergleichungen (das eine Mal v, das andere Mal w) sind ungleichwertig. Der einzige Unterschied zwischen beiden Fällen besteht jetzt darin, daß v im Falle A die an der jeweils auftretenden Beobachtungsgröße L anzubringende und nur von der Genauigkeit der letzteren abhängige Verbesserung, w im Fall B dagegen eine Funktion sämtlicher in der betr. Beziehung beteiligter Einzelverbesserungen (s. Gleichung 25d′) vorstellt.

Wir beschreiten nun denselben Weg wieder, den wir im 2. Kapitel des I. Abschnittes eingeschlagen haben: denjenigen der Einführung von Gewichten p für die Beobachtungswerte L, oder für die Verbesserungsbeträge v bzw. w. Im Fall A des § 14, mit dem wir uns von

§ 14 an bis zum § 19 ausschließlich beschäftigt haben, ist klar, daß der negative Wert von L in Gleichung (25) dieselbe Genauigkeit, also auch dasselbe Gewicht hat, wie der eigentliche (positive) Beobachtungswert und wie das Absolutglied l in (25e), welches gewonnen wurde durch Zuschlag der fehlerfreien Größe $F(N_X, N_Y \ldots)$ zum negativen Beobachtungswert. Sind die Gewichte p oder die mittleren Fehler m der Beobachtungswerte L bekannt, so können wir damit die an den letzteren anzubringenden Verbesserungen v auf diejenigen Beträge zurückführen, welche sich ergeben hätten, wenn den einzelnen Beobachtungswerten L nicht diese veränderlichen Gewichte $p_1 \ldots p_n$, sondern allen das gleiche Gewicht 1 zukäme. Durch die Steigerung des Beobachtungsgewichtes von 1 auf p wurde nämlich auch die Beobachtungsgenauigkeit, und zwar auf das $\sqrt{p}$-fache gesteigert (Gleichung 15), also der mittlere Beobachtungsfehler m und der nötige Verbesserungsbetrag v im selben Verhältnis herabgedrückt. An Stelle des nötigen Verbesserungsbetrages v der mit dem Gewicht p behafteten Beobachtung L wäre daher $v\sqrt{p}$ getreten, wenn die Beobachtung nur das Gewicht 1 gehabt hätte. Wir können also alle an den Beobachtungswerten vom Gewicht $p_1, p_2 \ldots$ anzubringenden Verbesserungen v auf die im 2. Kapitel behandelten eingewichtigen Verbesserungen und die jetzt zu suchende Lösung auf die dort gefundene zurückführen, wenn wir jeden dieser Verbesserungszuschläge v mit der Wurzel aus dem zugehörigen Beobachtungsgewicht multiplizieren, statt v also setzen $v\sqrt{p}$.

Im Fall B des § 14 muß das Gewicht p aus dem mittleren Betrag M von w erst besimmt werden, den wir aus (25d′) mittels (24c) erhalten:

$$(25\,g') \quad \begin{cases} M_r^2 = \left(\dfrac{\partial \omega_r}{\partial L_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\dfrac{\partial \omega_r}{\partial L_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\dfrac{\partial \omega_r}{\partial L_\lambda}\right)^2 m_\lambda^2, \\ \text{woraus} \\ p_1 = \dfrac{\text{Konstante}}{M_1^2}, \; p_2 = \dfrac{\text{Konstante}}{M_2^2}, \; p_r = \dfrac{\text{Konstante}}{M_r^2}. \end{cases}$$

Für die Auswahl der wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten haben wir daher statt der Bedingung: $[v\,v] = \text{Min.}$ (s. S. 66) jetzt wieder die schon in § 9 aufgestellte Bedingung (17):

$$\mathbf{[p\,v\,v] = Min.} \quad \text{bzw.} \quad [p\,w\,w] = \text{Min.}$$

Wenden wir sie auf die Fehlergleichungen (25e) bzw. (25e′) an, indem wir aus diesen, wie in § 14, zunächst v_1^2, $v_2^2 \ldots$ bilden, jeden der dafür gewonnenen Ausdrücke sodann mit p_1, $p_2 \ldots$ durchmultiplizieren und schließlich addieren, so erhalten wir die durch entspechende Auswahl der Unbekannten $x, y \ldots$ zum Min. zu machende Summe:

$$\begin{aligned} [p\,v\,v] = [p\,a\,a]\,x^2 + 2[p\,a\,b]xy + 2[p\,a\,c]xz + \cdots + 2[p\,a\,l]x \\ + [p\,b\,b]y^2 + 2[p\,b\,c]yz + \cdots + 2[p\,b\,l]y \\ + [p\,c\,c]\,z^2 + \cdots + 2\,[p\,c\,l]\,z + [p\,l\,l]\,. \end{aligned}$$

Durch partielle Ableitung und Kürzung mit 2 entstehen die Normalgleichungen:

$$(26\,a) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial [p\,v\,v]}{\partial x} = [p\,a\,a]\,x + [p\,a\,b]\,y + [p\,a\,c]\,z + \cdots + [p\,a\,l] = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial [p\,v\,v]}{\partial y} = [p\,a\,b]\,x + [p\,b\,b]\,y + [p\,b\,c]\,z + \cdots + [p\,b\,l] = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial [p\,v\,v]}{\partial z} = [p\,a\,c]\,x + [p\,b\,c]\,y + [p\,c\,c]\,z + \cdots + [p\,c\,l] = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

deren wir wieder ebenso viele erhalten, als partielle Ableitungen möglich, d. h. als Unbekannte vorhanden sind.

Die Normalgleichungen (26a) unterscheiden sich von den entsprechenden Gleichungen (26) in § 14 nur dadurch, daß an Stelle jedes der dortigen Koeffizienten a, b . . . oder Absolutglieder l der Fehlergleichungen jetzt getreten sind: $a\sqrt{p}$, $b\sqrt{p} \cdots l\sqrt{p}$.

Es ist daher nicht nötig, die auf die Normalgleichungen gegründeten Ableitungen des 2. Kapitels hier zu wiederholen. Wir erhalten vielmehr durch Beachtung dieser Modifikation:

a) im Falle der Bestimmung einer einzigen Unbekannten x:

$$x = -\frac{[p\,a\,l]}{[p\,a\,a]} \tag{27a}$$

$$[p\,a\,v] = 0 \tag{28a}$$

$$[p\,v\,v] = [p\,l\,l \cdot 1] \tag{37a}$$

und für die mittleren Fehler und Gewichte nach der Ausgleichung: mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1

$$\div \cdot \mu = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{\lambda - 1}}, \tag{36a}$$

mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht p

$$\div \cdot m = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{p\,(\lambda - 1)}}, \tag{36b}$$

Gewicht P der Unbekannten x

$$P_x = [p\,a\,a], \tag{39a}$$

mittlerer Fehler der Unbekannten x

$$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p\,a\,a]\,(\lambda - 1)}}. \tag{38a}$$

Analog ändern sich die Gleichungen des § 15 bei Bestimmung von zwei, drei oder mehr Unbekannten und lauten z. B.:

b) im Falle der Bestimmung von **vier** Unbekannten und unter Erweiterung der in Gleichung (29) aufgestellten Symbole zu:

$$
(29\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} [p\,d\,l\cdot 3] = [p\,d\,l\cdot 2] - \dfrac{[p\,c\,d\cdot 2]}{[p\,c\,c\cdot 2]}\,[p\,c\,l\cdot 2] \\ [p\,d\,d\cdot 3] = [p\,d\,d\cdot 2] - \dfrac{[p\,c\,d\cdot 2]}{[p\,c\,c\cdot 2]}\,[p\,c\,d\cdot 2] \\ [p\,l\,l\cdot 4] = [p\,l\,l\cdot 3] - \dfrac{[p\,d\,l\cdot 3]}{[p\,d\,d\cdot 3]}\,[p\,d\,l\cdot 3] \quad \text{usw.} \end{cases}
$$

$$
(34\,\mathrm{a})\qquad \boldsymbol{x_4 = -\frac{[p\,d\,l\cdot 3]}{[p\,d\,d\cdot 3]}}
$$

$$
(35\,\mathrm{a})\qquad \begin{cases} [p\,a\,v] = 0 \\ [p\,b\,v] = 0 \\ [p\,c\,v] = 0 \\ [p\,d\,v] = 0 \end{cases}
$$

$$
(37\,\mathrm{d})\qquad \boldsymbol{[p\,v\,v] = [p\,l\,l\cdot 4].}
$$

Für die mittleren Fehler und Gewichte **nach der Ausgleichung** erhält man:

mittlerer Fehler einer **Beobachtung vom Gewicht 1**

$$
(36\,\mathrm{a})\qquad \boldsymbol{\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{\lambda - 4}}},
$$

mittlerer Fehler einer **Beobachtung vom Gewicht** $\boldsymbol{p}$

$$
(36\,\mathrm{b})\qquad \boldsymbol{m = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{p(\lambda - 4)}}}.
$$

Gewicht der bei der Reduktion rechts stehenden Unbekannten

$$
(39\,\mathrm{a})\qquad \boldsymbol{P = [p\,d\,d\cdot 3]},
$$

mittlerer Fehler der rechts stehenden Unbekannten

$$
(38\,\mathrm{a})\qquad \boldsymbol{M = \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p\,d\,d\cdot 3]\,(\lambda - 4)}}}
$$

usw.

Auch die in § 19 aufgestellten **Rechenproben** durch Einführung der Summen s der in jeder Fehlergleichung vorhandenen Koeffizienten a, b ... und des Absolutgliedes l bleiben analog bestehen, wie folgende Untersuchung zeigt:

Wenn die ursprünglich zwischen den Unbekannten X, $Y\ldots$ und den Beobachtungswerten $L_1\ldots$ vorhandenen Beziehungen lauteten

$$(25)\qquad \begin{cases} F_1(X,\ Y\ldots) - L_1 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \vdots \\ F_\lambda(X,\ Y\ldots) - L_\lambda = 0 \end{cases}$$

oder

$$(25')\qquad \begin{cases} F_1(L_1,\ L_2\ldots L_\lambda,\ X,\ Y\ldots) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ F_\lambda(L_1,\ L_2\ldots L_\lambda,\ X,\ Y\ldots) = 0 \end{cases}$$

wobei den Beobachtungswerten L_1, L_2, ... die Gewichte p_1, $p_2\ldots$ zukamen, so haben wir diese Urbeziehungen durch Einführung von Näherungswerten N_X, $N_Y\ldots$ nach dem in § 14 gezeigten Verfahren linear gemacht und die Fehlergleichungen geschaffen:

$$(25\text{e})\ \text{bzw.}\ (25\text{e}')\ \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + l_1 = v_1\ \text{bzw.}\ w_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots + l_2 = v_2\ \text{bzw.}\ w_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Den Absolutgliedern $l_1\ldots$ kamen dabei im Fall der Gleichungsform (25) dieselben Gewichte p_1, $p_2\ldots$ zu, wie den Beobachtungswerten L_1, $L_2\ldots$, im Fall der Form (25′) dagegen die in Gleichung (25g′) entwickelten Gewichte. Wir haben sodann, um die Verbesserungen v bzw. w je auf die Gewichtseinheit zurückzuführen, die Fehlergleichungen (25e) in die Form umgewandelt:

$$\begin{matrix}(25\text{f})\\ \text{bzw.}\\ (25\text{f}')\end{matrix}\ \begin{cases} a_1\sqrt{p_1}x + b_1\sqrt{p_1}y + c_1\sqrt{p_1}z + \cdots + l_1\sqrt{p_1} = v_1\sqrt{p_1}\ \text{bzw.}\ w_1\sqrt{p_1} \\ a_2\sqrt{p_2}x + b_2\sqrt{p_2}y + c_2\sqrt{p_2}z + \cdots + l_2\sqrt{p_2} = v_2\sqrt{p_2}\ \text{bzw.}\ w_2\sqrt{p_2} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

so daß die Koeffizienten und Absolutglieder der neuen Fehlergleichungen heißen

$$a_1\sqrt{p_1},\ b_1\sqrt{p_1},\ c_1\sqrt{p_1},\ \ldots\ l_1\sqrt{p_1}\quad \text{usw.}$$

Wir können jetzt für die Ausgleichung ungleichwertiger Beobachtungen genau dieselben Summengleichungen (40) bilden, welche wir in § 19 zur Schaffung von Rechenproben gebildet haben, indem wir setzen:

$$(40\text{a})\quad \left\{\begin{array}{l} a_1\sqrt{p_1}+b_1\sqrt{p_1}+c_1\sqrt{p_1}+\cdots+l_1\sqrt{p_1}=s_1\sqrt{p_1} \\ a_2\sqrt{p_2}+b_2\sqrt{p_2}+c_2\sqrt{p_2}+\cdots+l_2\sqrt{p_2}=s_2\sqrt{p_2} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}\right.$$

Durch Multiplikation der ersten Zeile mit $a_1\sqrt{p_1}$, der zweiten mit $a_2\sqrt{p_2}$ usw. und vertikale Addition kommt dann:

$$(41\text{a})\quad [p\,a\,a]+[p\,a\,b]+[p\,a\,c]+\cdots+[p\,a\,l]=[p\,a\,s],$$

und ebenso durch Multiplikation mit $b_1\sqrt{p_1}$ bzw. $b_2\sqrt{p_2}$ usw. bzw. $c_1\sqrt{p_1}$, $c_2\sqrt{p_2}\ldots$ bzw. $l_1\sqrt{p_1}$, $l_2\sqrt{p_2}\ldots$ bzw. $s_1\sqrt{p_1}$, $s_2\sqrt{p_2}\ldots$ kommt:

$$(41\text{a})\quad \left\{\begin{array}{l} [p\,a\,b]+[p\,b\,b]+[p\,b\,c]+\cdots+[p\,b\,l]=[p\,b\,s], \\ [p\,a\,l]+[p\,b\,l]+[p\,c\,l]+\cdots+[p\,l\,l]=[p\,l\,s], \\ [p\,a\,s]+[p\,b\,s]+[p\,c\,s]+\cdots+[p\,l\,s]=[p\,s\,s]. \end{array}\right.$$

Wir haben also für die Koeffizienten der Normalgleichungen hier genau dieselben Rechenproben, wie in § 19, sobald wir nicht bloß jeden Koeffizienten und jedes Absolutglied der Fehlergleichungen, sondern auch ihre Summe s mit der Wurzel aus dem zugehörigen Gewicht multiplizieren.

Ganz ebenso verhält es sich mit den Koeffizienten der ersten Reduktionsstufe, wo

$$(42\text{a})\quad \left\{\begin{array}{l|l} [p\,b\,b\cdot1]+[p\,b\,c\cdot1]+\cdots+[p\,b\,l\cdot1] & -[p\,b\,s\cdot1]=0 \\ [p\,b\,c\cdot1]+[p\,c\,c\cdot1]+\cdots+[p\,c\,l\cdot1] & -[p\,c\,s\cdot1]=0 \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\quad\vdots \\ [p\,b\,l\cdot1]+[p\,c\,l\cdot1]+\cdots+[p\,l\,l\cdot1] & -[p\,l\,s\cdot1]=0 \\ \hline -[p\,b\,s\cdot1]-[p\,c\,s\cdot1]-\cdots-[p\,l\,s\cdot1] & +[p\,s\,s\cdot1]=0 \end{array}\right.$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(42\text{a})\quad \left\{\begin{array}{cccc|c} & & & & \text{Probe} \\ \underline{[p\,b\,b\cdot1]} & [p\,b\,c\cdot1] & \ldots & [p\,b\,l\cdot1] & [p\,b\,s\cdot1] \\ \cdot & \underline{[p\,c\,c\cdot1]} & \ldots & [p\,c\,l\cdot1] & [p\,c\,s\cdot1] \\ & & & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[p\,l\,l\cdot1]} & [p\,l\,s\cdot1] \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[p\,s\,s\cdot1]}. \end{array}\right.$$

In der zweiten Reduktionsstufe ist:

$$(43\,\mathrm{a})\quad \left\{\begin{array}{l|l} [pcc\cdot 2] + \cdots + [pcl\cdot 2] & -[pcs\cdot 2] = 0 \\ \vdots & \\ [pcl\cdot 2] + \cdots + [pll\cdot 2] & -[pls\cdot 2] = 0 \\ \hline -[pcs\cdot 2] - \cdots - [pls\cdot 2] & +[pss\cdot 2] = 0 \end{array}\right.$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(43\,\mathrm{a})\quad \left\{\begin{array}{ccc|c} & & & \text{Probe} \\ \underline{[pcc\cdot 2]} & \ldots & [pcl\cdot 2] & [pcs\cdot 2] \\ & & \vdots & \\ \cdot & & \cdot\ \underline{[pll\cdot 2]} & [pls\cdot 2] \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[pss\cdot 2]}\,. \end{array}\right.$$

Endlich kommt die Schlußprobe, welche für den Fall von drei Unbekannten lautet:

$$(44\,\mathrm{a})\qquad [pll\cdot 3] = [pls\cdot 3] = [pss\cdot 3] = [pvv]\,.$$

Sind die einzelnen L gleichartige, mit demselben Instrument und nach denselben Methoden gewonnene Beobachtungswerte, so sind die Gewichte p, die wir bisher als bekannt annahmen, einfach proportional den Wiederholungszahlen. Sind sie aber ungleichartig, oder mit verschiedenen Methoden und Instrumenten gewonnen, so wissen wir über ihre Gewichte zunächst nichts.

Wir schätzen in diesem Falle zweckmäßigerweise, etwa auf Grund früherer Erfahrungen und unter Beachtung der Wirkung (Winkelfehler erzeugen Quer-, Streckenfehler Längsverfehlung in der Lage des durch diese Elemente bestimmten Punktes), die ihnen anhaftenden mittleren Fehler m und berechnen hieraus unter beliebiger Annahme eines Gewichtseinheitsfehlers μ ihr zugehöriges Gewicht nach Gleichung (15)

$$m_1 : \mu = \sqrt{1} : \sqrt{p_1}\,, \quad \text{also} \quad p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}$$

$$\text{oder für } \mu = 1: \quad p_1 = \frac{1}{m_1^2} \quad \text{usw.}$$

Führt man mit den so erhaltenen Gewichten, denen gewisse angenommene mittlere Felder m zugrunde liegen (mittlere Fehler vor der Ausgleichung), die Ausgleichung durch, so erhält man nach Gleichungen (36a) und (36b) mittlere Fehler nach der Ausgleichung, welche mit den ersteren übereinstimmen müßten, wenn diese richtig gewählt worden wären und keine einseitigen Fehlerquellen auf die Beobachtungen einwirkten. Nötigenfalls kann man die Rechnung mit ihnen bzw. den aus ihnen abgeleiteten Gewichten wiederholen.

Nach dem soeben Erkannten ist

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2}, \quad p_2 = \frac{1}{m_2^2} \quad \text{usw.},$$

folglich der Faktor, mit dem sämtliche Koeffizienten und die Absolutglieder und Verbesserungszuschläge v einer Fehlergleichung multipliziert wurden, $\sqrt{p} = \frac{1}{m}$.

Da m eine Größe gleicher Gattung ist wie l und v, so werden diese durch die Multiplikation mit $\sqrt{p}$ unbenannte Zahlen, was schon zur Ermöglichung der durchzuführenden Differentiationen, Multiplikationen und Quadrierungen vorausgesetzt war.

III. Abschnitt.

Bedingte Beobachtungen.

§ 21. Erklärung. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Beobachtungsgrößen an sich voneinander unabhängig sind, bzw. nur insoweit zusammenhängen, als sie zur Ermittelung anderer Größen gemeinsam beitragen.

Nun gibt es aber eine Reihe von Aufgaben, in denen die je mehrfach beobachteten Größen infolge ihrer Zugehörigkeit zu einem in sich abgeschlossenen Gebilde noch einer Anzahl (β) voneinander unabhängiger, streng zu erfüllender mathematischer Bedingungen begnügen müssen. Wir haben dann die Aufgabe der Ausgleichung **„bedingter direkter Beobachtungen“.**

Sind z. B. die drei Winkel α, β, γ eines Dreiecks je mehrfach gemessen, so müssen sie (unbeschadet der Berechnung jedes einzelnen von ihnen nach der Formel $L = \frac{[p\,l]}{[p]}$) der Bedingung genügen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R + \text{sphär. Exz.}$$

Die (etwa durch Einwägung ermittelten) Höhenunterschiede Δh der Endpunkte der Seiten eines geschlossenen Vielecks müssen (abgesehen von der Mittelbildung im Falle mehrfacher Bestimmung jedes einzelnen von ihnen der Bedingung genügen $[\Delta h] = 0$.

Ebenso müssen die Seiten s und die Brechungswinkel β eines geschlossenen Polygons, gleichgültig, ob sie je aus mehrfacher Beobachtung gemittelt sind oder nicht, den drei Bedingungen genügen:

$$\left\{\begin{array}{r} [\beta] = k \cdot 2R \\ [\Delta x] = [s \cdot \cos\varphi] = 0 \\ [\Delta y] = [s \cdot \sin\varphi] = 0, \end{array}\right\}$$

in denen φ die aus den Brechungswinkeln β abzuleitenden Richtungswinkel jeder Polygonseite in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem darstellen.

Die erste, wichtigste und häufig schwierigste Aufgabe der Ausgleichung ist im vorliegenden Falle die nach Zahl und Form richtige **Aufstellung der Bedingungsgleichungen.**

Ist die Zahl der beobachteten — nur durch den durch die Zugehörigkeit zu einem einheitlichen Gebilde bedingten Zusammenhang miteinander in Verbindung stehenden, sonst aber voneinander unabhängigen — Größen gleich der Zahl der zur individuellen Existenz jenes Gebildes nötigen Bestimmungsstücke, so ist keine Überbestimmung vorhanden, also tritt auch keine Bedingungsgleichung auf. Jede weiter hinzutretende Beobachtungsgröße, welche in jenen mathematischen Zusammenhang eingeschlossen ist, liefert eine Bedingungsgleichung.

Die Aufgabe der Ausgleichung bedingter Beobachtungen tritt in der geodätischen Praxis am häufigsten auf bei der Einschaltung von Nivellements- und Dreiecksnetzen.

Suchen wir daher als Beispiel die an einigen Dreiecksnetzen auftretenden Bedingungsgleichungen auf.

Im Falle ausgeführter Winkelbeobachtungen haben wir dreierlei Gruppen solcher Gleichungen, nämlich:

1) **Punktgleichungen.** Die Summe der in ununterbrochener Folge um einen Punkt herumliegenden Winkel soll $4R$ betragen. Zur gegenseitigen Festlegung von s von einem Punkt ausgehenden Strahlen braucht man

$$w = (s - 1)$$

unabhängige Winkel zwischen ihnen. Übersteigt die Zahl der in einen Punkt gemessenen Winkel $(s - 1)$, so liefert dieser Punkt eine Punktgleichung.

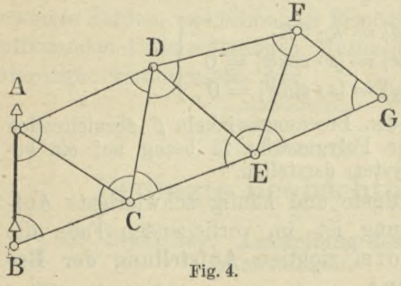

Fig. 4.

2) **Winkelsummengleichungen.** Die Summe der drei Dreieckswinkel soll betragen:

$$2R + \text{Exzeß}.$$

Jedes Dreieck, in welchem drei, jedes Viereck, in welchem vier usw. Winkel gemessen sind, liefert eine Winkelsummengleichung. Reiht sich Dreieck an Dreieck so an, daß man von einer gegebenen Dreiecksseite ausgehend die anderen nur in bestimmter Reihenfolge auf bestimmtem Weg ableiten kann, „Dreieckskette“ (s. Fig. 4), so können

in 2 Dreiecken	1 Seite	und 6 Winkel	= 7 Stücke		
„ 3 „	1 „	„ 9 „	= 10 „		
„ 4 „	1 „	„ 12 „	usw.		

bekannt sein, mittels welcher die gegenseitige Lage von 4, 5, 6 ... Punkten bestimmt ist.

Notwendig zu dieser Bestimmung sind bei p Punkten allgemein $(2p-3)$ voneinander unabhängige Stücke (worunter sich etwa befinden können 1 Seite und $2p-4$ Winkel), also

bei 4 Punkt.	od. 2 Dreieck.	5 unabhäng.	Bestimmungsstücke
„ 5 „	„ 3 „	7 „	„
„ 6 „	„ 4 „	9 „	„
⋮	⋮	⋮	

Also sind im Falle der Messung sämtlicher Dreieckswinkel bei

der aus 2 Dreiecken	bestehenden Kette	2 Stücke
„ „ 3 „	„	„ 3 „
„ „ 4 „	„	„ 4 „
⋮		⋮

überschüssig, welche 2, 3, 4 ... Winkelsummengleichungen (für jedes Dreieck eine) liefern.

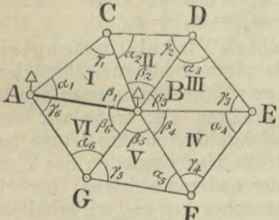

Fig. 5.

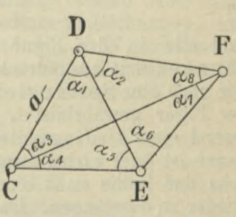

Fig. 6.

3) **Seitengleichungen.** Sind diagonale Strahlen beobachtet (s. Fig. 6), oder sind die Dreiecke so gruppiert, daß man zur Berechnung der Länge irgend einer ihrer Seiten von einer bekannten Seite ausgehend verschiedenerlei Winkel und Dreiecke wählen kann, „Dreiecknetze“ (s. Fig. 5 u. 7), so

gewährleistet die Erfüllung der Punkt- und Winkelsummengleichungen noch nicht eine geschlossene Figur. Denn keine Methode der Winkelausgleichung wird uns die wahren Werte der gemessenen Winkel α verschaffen; auch die ausgeglichenen Werte sind noch mit Fehlern behaftet. Demgemäß werden sich für irgend eine der Strecken verschiedene Längen ergeben, wenn wir sie, unter Benutzung der, wenn auch nach Punkt- und Winkelsummengleichungen verbesserten Winkel, je aus anderen Dreiecken berechnen.

Im ganzen sind (wie oben angegeben) zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von p Punkten $2p - 3$ unabhängige Stücke nötig. Sind eine Dreiecksseite und $[w]$ Winkel bekannt, so ist demnach die Zahl der überschüssigen Beobachtungsgrößen

$$\underline{\beta = [w] - 2p + 4\,.} \tag{69}$$

Dies ist gleichzeitig die Zahl der aufzustellenden Bedingungsgleichungen.

In Fig. 6 der gegenseitigen Festlegung von vier Punkten sind $2p - 3 = 5$ unabhängige Bestimmungsstücke nötig. Sind acht Winkel gemessen und eine Seite bekannt, so sind also $9 - 5 = 4$ Stücke übrig: wir müssen $\beta = 4$ voneinander unabhängige Bedingungsgleichungen aufstellen. Durch die drei unabhängigen Winkelsummengleichungen.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 = 2R \tag{a}$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_6 + \alpha_7 \tag{b}$$

$$\alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_8 \tag{c}$$

sind alle in der Figur möglichen Winkelsummengleichungen mit ausgedrückt. Als vierte Bedingung brauchen wir noch eine Seitengleichung, welche den linearen Schluß der Figur gewährleistet. Wir erhalten sie, wenn wir von irgend einer Umfangsseite a (gleichgültig, ob ihre Länge bekannt ist oder nicht) ausgehend, die Umfangsseiten des Vierecks der Reihe nach eine aus der anderen ableiten, bis wir wieder zu a gelangen. Dann hebt sich a weg und wir erhalten:

$$\frac{\sin\alpha_3 \sin\alpha_2 \sin\alpha_7 \sin\alpha_5}{\sin\alpha_8 \sin\alpha_6 \sin\alpha_4 \sin\alpha_1} = 1\,. \tag{d}$$

In Fig. 5 haben wir neben einer Punkt- und sechs Winkelsummengleichungen die auf gleiche Weise erhaltene Seitengleichung:

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \sin\alpha_4 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6}{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin\gamma_3 \sin\gamma_4 \sin\gamma_5 \sin\gamma_6} = 1 \quad \text{usw.}$$

Da wir eine Seitengleichung im Falle der Dreiecks**kette** nicht nötig hatten, dagegen eine solche (und eine weitere Winkelsummengleichung) bekommen, sobald wir in die Kette noch irgend einen **zweiseitig beobachteten diagonalen** Strahl einschalten (Fig. 6) oder die erstere durch Rückkehr auf die Ausgangsbasis zum **Netz** ausgestalten (Fig. 5), so erkennen wir: Ist nur eine Dreiecksseite bekannt, so ist die **Zahl der Seitengleichungen** gleich der Zahl der Dreiecksseiten, welche gestrichen werden müssen, um aus dem Dreiecksnetz eine Kette zu machen, die Zahl der Winkelsummengleichungen ist im Falle bloß zweiseitig beobachteter Strahlen gleich der Zahl von Dreiecken der durch Strahlenausschaltung erzielten Kette + der Zahl der gestrichenen Seiten. (Ist ein Punkt im Netz durch reinen Vorwärts- oder Rückwärtseinschnitt festgelegt, so liefert seine Existenz und diejenige seiner Bestimmungsstrahlen keine Winkelsummengleichung, beide bleiben für die Feststellung der Zahl der Bedingungsgleichungen außer Betracht.) Für jeden bloß einseitig beobachteten Strahl kommt aus der nach vorigem festgestellten Zahl von Winkelsummengleichungen eine in Fortfall. Die übrigen Bedingungsgleichungen bis zur Gesamtzahl von $\beta = [w] - 2p + 4$ sind Punktgleichungen.

In Fig. 7 sind in 10 Dreiecken 30 Winkel gemessen, 1 Seite muß mindestens bekannt sein, gibt zusammen 31 bekannte Stücke. Nötig sind für die gegenseitige Festlegung der 10 Punkte: $2p - 3 = 17$ unabhängige Stücke. Also haben wir im ganzen $31 - 17 = 14$ Bedingungsleichungen, und zwar 2 Punktgleichungen (bei D und F), 10 Winkelsummengleichungen und 2 Seitengleichungen. (Zum Zwecke der Zurückführung auf die Kette seien z. B. die Seiten AK und KJ gestrichen.)

Man kann die Zahl der Bedingungsgleichungen statt in der Zahl der gemessenen Winkel auch in der Zahl der beobachteten Strahlen auzdrücken. Sind in einem Punkte w unabhängige Winkel gemessen, so ersetzen sie $w + 1$ Richtungen. Folglich ersetzen $[w]$ in p Punkten gemessene unabhängige Winkel $[w] + p$ Richtungen. Setzen wir jeden Strahl als zweiseitig beobachtet voraus, so haben wir also mit $[w]$ in p Punkten gemessenen unabhängigen Winkeln: $s = \frac{[w] + p}{2}$ je zweiseitig beobachtete Strahlen. Daraus erkennen wir: Sind s je zweiseitig beobachtete Strahlen im Dreiecksnetz vorhanden, so ist — eine einzige Dreiecksseite als bekannt vorausgesetzt — die Zahl der Bedingungsgleichungen im ganzen

$$\beta = [w] - 2p + 4 = 2s - 3p + 4. \tag{70}$$

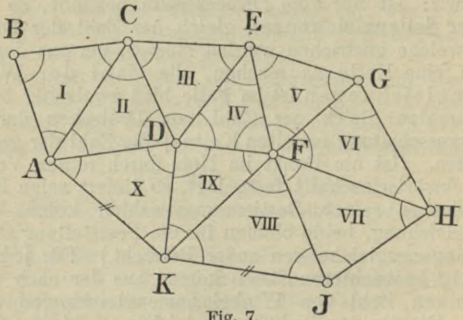

Fig. 7.

Daraus ergibt sich folgende

Zusammenstellung der obigen Untersuchungen:

Zahl der Netzpunkte (exkl. reine Vor- od. Rückwärtseinschnitte) $p =$	Zahl der zur Kettenverbindung nötigen Dreiecke	Zahl der zur Kette nötigen Strahlen	Von s zweiseitig beobachteten Netzstrahlen sind für die Dreieckskette überschüssig	Zahl der Winkelsummengleichungen
3	1	3	$s-3=0$	$0 \quad +1=1$
4	2	5	$s-5$	$(s-5)+2=s-3$
5	3	7	$s-7$	$(s-7)+3=s-4$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p	$p-2$	$2p-3$	$s-(2p-3)$	$\{s-(2p-3)\}+p-2$ $=s-p+1$

Sind von den s Strahlen s' nur einseitig beobachtet, so tritt an Stelle von s die Differenz $s - s'$, also Zahl der Winkelsummengleichungen

$$(s - s') - p + 1. \tag{71}$$

Treten Richtungs- an Stelle der bisher vorausgesetzten Winkelbeobachtungen, so fallen die Punktgleichungen weg.

Die Zahl der zur Festlegung unserer p Dreieckspunkte je zweiseitig beobachteten Strahlen sei wieder s,

d. Gesamtzahl d. Bedingungsgleichungen also $\beta = 2s - 3p + 4$,
die Zahl der Winkelsummengleichungen ist $s - p + 1$,
folglich die Zahl der Seitengleichungen $s - 2p + 3$.

Sind unter den s Strahlen s' nur einseitig beobachtete (etwaige reine Vor- oder Rückwärtseinschnitte bleiben für die Zählung der Punkte und der Richtungen außer Betracht), so wird

die Zahl der Winkelsummengleichungen $= (s - s') - p + 1$,
die Zahl der Seitengleichungen $= s - 2p + 3$,
d. Gesamtz. d. Bedingungsgleichungen $\beta = 2s - s' - 3p + 4$.

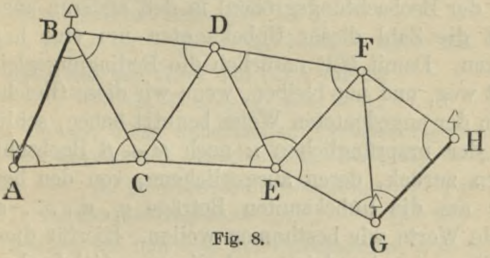

Fig. 8.

Sind mehr als 2 Festpunkte durch ihre Koordinaten gegeben, so liefert der Anschlußzwang weitere Bedingungen. So sind in Fig. 8 in 6 Dreiecken 18 Winkel gemessen und überdies durch die 4 Festpunkte A, B, G und H 5 unabhängige Stücke unabänderlich bekannt. Nötig sind für die Bestimmung der gegenseitigen Lage der 8 Punkte

13 unabhängige Stücke, also brauchen wir für die Ausgleichung $18 + 5 - 13 = 10$ Bedingungsgleichungen. Hierunter sind 6 Winkelsummen- und 4 weitere Gleichungen, welche die Festhaltung der als fehlerfrei vorausgesetzten Bestimmungselemente für die gegenseitige Lage der 4 Festpunkte verbürgen. Von den letzteren sichern zwei das fehlerfrei gegebene Verhältnis der Streckenlängen AB und GH bzw. AG und BH, zwei deren gegebene Divergenz.

§ 22. Ausgleichung bedingter direkter durch Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen.

Bestehen zwischen den $\varkappa$ beobachteten Größen L β streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen (wobei natürlich $\varkappa > \beta$), so setzt uns jede der letzteren in den Stand, eine der in ihr auftretenden Unbekannten (hier den ausgeglichenen, zunächst noch unbekannten Wert einer der Beobachtungsgrößen) in den anderen aus-, und damit die Zahl dieser Unbekannten um eine herabzudrücken. Damit fällt natürlich die Bedingungsgleichung selbst weg, und uns bleiben, wenn wir diese Gleichungen alle in der angedeuteten Weise benutzt haben, schließlich statt der ursprünglichen $\varkappa$ noch $\varkappa - \beta$ Beobachtungsgrößen zurück, deren ausgeglichene, von den beobachteten um die unbekannten Beträge $v_1, v_2, \ldots$ abweichende Werte wir bestimmen wollen. Hierfür dient uns die allgemeine Ausgleichungsbedingung $\{(4)\ [v\,v] = \text{Min.}$ oder (im Fall ungleicher Beobachtungsgenauigkeit): (17) $[p\,v\,v] = \text{Min.}\}$, welche aus den Ausdrücken für die die Beobachtungswerte $L_1, L_2, \ldots$ zu den wahrscheinlichsten Werten $X, Y, \ldots$ der Beobachtungsgrößen ergänzenden Verbesserungsbeträge v die Normalgleichungen liefert zur Berechnung dieser Verbesserungszuschläge, sowie ihrer Gewichte und mittleren Fehler nach dem Verfahren der Ausgleichung **vermittelnder** Beobachtungen.

Das Verfahren möge an einem Beispiel mit einer einzigen Bedingungsgleichung gezeigt werden:

Die (ein- oder mehrfache) Beobachtung der drei Winkel eines Dreiecks habe für sie an Stelle der unbekannten bestmöglichen Werte α, β und γ die mit gleichgroßen Ungenauigkeiten behafteten Werte L_1, L_2 und L_3 ergeben. Letztere werden wegen dieser Ungenauigkeiten die Bedingungsgleichung

(72a) $$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

nicht scharf erfüllen. Vielmehr wird ein Widerspruch w sich einstellen, über dessen Vorzeichen wir hier nach allgemeinem Gebrauch wie folgt verfügen wollen:

$$w = \text{Ist} - \text{Soll}.$$

Wir erhalten dann:

(72b) $$L_1 + L_2 + L_3 - 2R = w$$

und müssen nun jedem der Beobachtungswerte L für die Unbekannten α, β und γ eine Verbesserung v zuschlagen, so daß die Bedingungsgleichung (72a) durch die verbesserten Beobachtungswerte erfüllt ist:

(72c) $$(L_1 + v_1) + (L_2 + v_2) + (L_3 + v_3) = 2R$$

und wobei sich aus (72c) und (72b) ergibt:

(72d) $$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0.$$

Dabei müssen diese unbekannten Verbesserungszuschläge v noch der allgemeinen Ausgleichungsbedingung entsprechen:

$$\left\{\begin{array}{lll} (4) & \text{für gleichgenaue Beobachtung:} & [v\,v] = \text{Min.} \\ (17) & \text{für verschiedengenaue} \quad ,, & [p\,v\,v] = \text{Min.} \end{array}\right\}$$

Drücken wir nun eine der Unbekannten, z. B. γ, mittels der Bedingungsgleichung (72a) in den beiden andern aus, so erhalten wir:

$$\alpha = L_1 + v_1$$
$$\beta = L_2 + v_2$$
$$\gamma = L_3 + v_3 = 2R - (\alpha + \beta) = 2R - (L_1 + v_1 + L_2 + v_2).$$

Führen wir, wie bisher, für die Unbekannten α und β Näherungswerte ein, und bestimmen die ihnen noch zuzufügenden

Zuschläge x und y als neue Unbekannte, erklären wir endlich die Beobachtungswerte L_1 und L_2 selbst als solche Näherungswerte, womit

$$\alpha = L_1 + x$$
$$\beta = L_2 + y$$
$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta),$$

so erhalten wir die Fehlergleichungen

$$v_1 = \alpha - L_1 \qquad\qquad = x$$
$$v_2 = \beta - L_2 \qquad\qquad = \quad y$$
$$v_3 = \gamma - L_3 = 2R - (L_1 + v_1 + L_2 + v_2) - L_3$$
$$= 2R - (L_1 + L_2 + L_3) - v_1 - v_2 = -x - y - w,$$

deren Absolutglieder $0, \cdot 0, -w$ durch Abzug der festen, und als solche fehlerfreien Näherungswerte an Stelle von L_1, L_2, L_3 getreten sind und mit ihnen gleiches Gewicht haben. Aus den Koeffizienten und Absolutgliedern dieser Fehlergleichungen erhalten wir wie bisher diejenigen der Normalgleichungen:

	Absolutglieder u. Koeffizienten der Fehlergleichungen			Probe	Koeffizienten der Normalgleichungen						Probe
	a	b	l	s	aa	ab	al	bb	bl	ll	ss
1.	$+1$	0	0	$+1$	$+1$	0	0	0	0	0	$+1$
2.	0	$+1$	0	$+1$	0	0	0	$+1$	0	0	$+1$
3.	-1	-1	$-w$	$-w-2$	$+1$	$+1$	$+w$	$+1$	$+w$	$+w^2$	(w^2+4w+4)
$[\,]=$	0	0	$-w$	$-w$	$+2$	$+1$	$+w$	$+2$	$+w$	$+w^2$	w^2+4w+6

womit letztere lauten:

$$2x + y \;+ w = 0$$
$$x + 2y + w = 0$$

oder in abgekürzter Form samt den Koeffizientenproben:

$$\begin{array}{ccc|l} \underline{+2} & +1 & +w & 3+w \\ \cdot & \underline{+2} & +w & 3+w \\ \cdot & \cdot & \underline{w^2} & w^2+2w \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \underline{w^2+4w+6} \end{array}$$

(in Übereinstimmung mit der direkten Rechnung).

Die früher gezeigte, gewöhnliche Reduktion liefert hieraus:

$$y = \frac{\frac{-w}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{w}{3},$$

womit
$$\beta = L_2 - \frac{w}{3},$$
wie vorauszusehen war.

Das Gewicht des ausgeglichenen Winkels β ist:

$$P_y = P_\beta = \frac{3}{2},$$

der mittlere Fehler des Beobachtungswertes eines Winkels

$$m = \pm\sqrt{\frac{[l\,l\cdot 2]}{\lambda - \varkappa}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{w^2}{3}}{1}} = \pm\frac{w}{\sqrt{3}},$$

woraus wir erhalten: den mittleren Fehler des ausgeglichenen Winkels
$$M_y = M_\beta = \frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{w}{3}\sqrt{2}.$$

§ 23. Ausgleichung bedingter direkter gleichgenauer Beobachtungen mittels Korrelaten.

Die Wegschaffung der β Bedingungsgleichungen durch Eliminierung einer gleichgroßen Zahl von den $\varkappa$ Unbekannten ist theoretisch zwar immer möglich, führt aber häufig zu schwerfälligen Koeffizienten der Fehlergleichungen. Bequemer ist es in vielen Fällen, sämtliche $\varkappa$ Unbekannte beizubehalten, sie aber in β neuen Unbekannten k auszudrücken, über die wir hernach derart verfügen, daß aus ihnen die $\varkappa$ eigentlichen Unbekannten sich möglichst bequem ergeben. Durch sie, die „Korrelaten“, vermehren wir allerdings die

Zahl der Unbekannten auf $(\varkappa + \beta)$, während wir sie nach dem Verfahren des § 22 auf $(\varkappa - \beta)$ herabdrückten. Gelingt es uns aber, wie wir uns soeben vornahmen, die Beziehungen zwischen den β neuen und den $\varkappa$ eigentlichen Unbekannten einfach genug zu gestalten, so wird eine Rechenvereinfachung gegenüber dem Verfahren des § 22 eintreten können, sobald $\beta \leqq \varkappa - \beta$, d. h. $\beta \leqq \frac{\varkappa}{2}$.
Um jene Beziehungen zwischen den $\varkappa$ ursprünglichen und den β neuen Unbekannten (Korrelaten) einfach zu gestalten, sorgen wir zunächst dafür, daß die β durch die ausgeglichenen Werte der Beobachtungsgrößen streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen lineare Form annehmen. Zu diesem Zweck führen wir die Beobachtungs- als Näherungswerte für die direkt beobachteten Unbekannten $X\ldots$ ein und betrachten die ihnen zuzufügenden Verbesserungen v als eigentliche Unbekannte $x, y \ldots$, so daß

$$(73)\quad X = L_1 + v_1 = L_1 + x, \quad Y = L_2 + v_2 = L_2 + y \text{ usw.}$$

Wir erzielen damit nebenbei noch eine erhebliche Rechenvereinfachung.

Die ursprünglichen, durch die gesuchten endgültigen Werte $X, Y\ldots$ der Beobachtungsgrößen zu erfüllenden β Bedingungsgleichungen:

$$(73\text{a})\qquad \left\{\begin{array}{l} \\ \beta\ \text{Gl.} \\ \\ \end{array}\right.\begin{array}{l} F_1(X, Y\ldots) = 0 \\ F_2(X, Y\ldots) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

$\varkappa$ auszugleichende Beobachtungsgrößen

werden voraussichtlich durch die Beobachtungswerte $L_1, L_2 \ldots$ nicht scharf befriedigt. Letztere liefern vielmehr die Gleichungen:

$$(73\,\mathrm{b}) \qquad \begin{cases} F_1(L_1, L_2 \ldots) = w_1 \\ F_2(L_1, L_2 \ldots) = w_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

wobei die Werte w die Einflüsse der Beobachtungsfehler auf die Bedingungsgleichungen darstellen.

Die zur Wegschaffung der Widersprüche w den Beobachtungswerten L zuzufügenden Verbesserungen v sind gegenüber den Beobachtungswerten selbst jedenfalls so klein, daß wir höhere Potenzen von ihnen vernachlässigen dürfen. Dann liefert die Taylorsche Reihe an Stelle der Bedingungsgleichungen (73a) die Gleichungen:

$$(73\,\mathrm{c}) \begin{cases} F_1(X, Y \ldots) \equiv F_1(L_1 + v_1, L_2 + v_2 \ldots) \\ = F_1(L_1, L_2 \ldots) + v_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial L_1} + v_2 \dfrac{\partial F_1}{\partial L_2} + \cdots = 0 \\ F_2(X, Y \ldots) \equiv F_2(L_1 + v_1, L_2 + v_2 \ldots) \\ = F_2(L_1, L_2 \ldots) + v_1 \dfrac{\partial F_2}{\partial L_1} + v_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial L_2} + \cdots = 0\,. \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Durch Subtraktion $\{(73\,\mathrm{c})—(73\,\mathrm{b})\}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial F_1}{\partial L_1} + v_2 \frac{\partial F_1}{\partial L_2} + \cdots + w_1 &= 0 \\ v_2 \frac{\partial F_2}{\partial L_1} + v_2 \frac{\partial F_2}{\partial L_2} + \cdots + w_2 &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \end{aligned}$$

und mittels der schon früher benutzten Substitutionen

$$(25\,\mathrm{d}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial L_1} = a_1, & \dfrac{\partial F_1}{\partial L_2} = a_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial L_\varkappa} = a_\varkappa \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial L_1} = b_1, & \dfrac{\partial F_2}{\partial L_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial L_\varkappa} = b_\varkappa \\ \quad \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

die reduzierten Bedingungsgleichungen:

$$(73\text{d})\left\{\begin{array}{c|llll} & a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + w_1 = 0 & \text{oder} & [av] = -w_1 \\ \beta\text{ Gl.} & b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + w_2 = 0 & \text{,,} & [bv] = -w_2 \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots & & \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}\right.$$

$\varkappa$ gesuchte Verbesserungsbeträge v

Da $\varkappa > \beta$, reichen diese reduzierten Bedingungsgleichungen zur eindeutigen Bestimmung der $\varkappa$ unbekannten Zuschläge v nicht aus. Letztere müssen noch der allgemeinen Ausgleichungsbedingung genügen: $[vv] = \text{Min.}$

Für den jetzt vorliegenden Fall, in welchem die $\varkappa$ gesuchten Verbesserungsgrößen v außer der gewöhnlichen Minimumsbedingung noch β Nebenbedingungen genügen müssen, haben wir bekanntlich allgemein folgenden Weg der Lösung: Soll irgend eine Funktion $F(X, Y, Z\ldots)$ zum Minimum werden, während die Veränderlichen $X, Y, Z\ldots$ noch β Bedingungen von der Form

$$\begin{aligned} F_1(X, Y, Z\ldots) &= 0 \\ F_2(X, Y, Z\ldots) &= 0 \\ \vdots\qquad\quad & \;\;\vdots \end{aligned}$$

streng erfüllen müssen, so bilden wir an Stelle der Funktion F eine andere, welche die erste samt den β Bedingungsgleichungen enthält. Werte für X, Y, Z, welche dieser neuen Funktion genügen, erfüllen auch die Bedingungen $F, F_1, F_2\ldots$ Eine solche Funktion ist z. B.

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y, Z\ldots) = F(X, Y, Z\ldots) &+ \varrho_1 F_1(X, Y, Z\ldots) \\ &+ \varrho_2 F_2(X, Y, Z\ldots) + \cdots \end{aligned}$$

wobei $\varrho_1, \varrho_2\ldots$ Koeffizienten sind, über die wir nach Bedarf später verfügen wollen.

Wegen der Minimumsbedingung setzen wir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial Z} = 0\ldots$$

und erhalten damit ebenso viele Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind; nämlich $\varkappa$. Wir besitzen also jetzt einschließlich der β Nebenbedingungen $(\varkappa + \beta)$ Gleichungen für die $\varkappa + \beta$ Unbekannten $X, Y, Z\ldots \varrho_1, \varrho_2\ldots$

Für die spezielle Durchführung setzen wir im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= -2\,k_1 \\ \varrho_2 &= -2\,k_2 \\ \vdots\ & \qquad \vdots \end{aligned}$$

Multiplizieren wir damit jede der β reduzierten Bedingungsgleichungen (73 d) durch, so erhalten wir

$$\text{(73 e)} \quad \begin{cases} -2\,a_1 k_1 v_1 - 2\,a_2 k_1 v_2 - \cdots - 2\,k_1 w_1 = 0 \\ -2\,b_1 k_2 v_1 - 2\,b_2 k_2 v_2 - \cdots - 2\,k_2 w_2 = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Zu ihrer Summe addieren wir schließlich die zum Minimum zu machende Funktion

$$F_{(v)} \equiv [v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + \cdots$$

und ordnen nach v, womit wir erhalten

$$\text{(74)} \quad \begin{cases} \varphi(v_1, v_2, \ldots v_\varkappa) = v_1^2 - 2\,v_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \cdots) \\ \qquad\qquad + v_2^2 - 2\,v_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \cdots) \\ \qquad\qquad + \cdots - 2\,(k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots) = \text{Min.} \end{cases}$$

Partielle Ableitung von φ nach den $\varkappa$ Unbekannten $v_1, v_2 \ldots$ und Annullierung liefert die **„$\varkappa$ Korrelatengleichungen“**:

$$\text{(75)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_1} = 2\,v_1 - 2\,(a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \cdots) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_2} = 2\,v_2 - 2\,(a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \cdots) = 0 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

oder vereinfacht:

$$\text{(75)} \quad \left.\begin{cases} v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \cdots \\ v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \cdots \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{cases}\right\updownarrow \varkappa \text{ Unbek. } v$$

$$\longleftarrow \beta \text{ Korrelaten } k \longrightarrow$$

Damit haben wir die $\varkappa$ unbekannten Zuschläge v in den β zunächst ebenfalls noch unbekannten Korrelaten k ausgedrückt. Um letztere selbst zu finden, setzen wir die v aus (75) in die β reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) ein.

Durch Zusammenziehen erhalten wir dann β Normalgleichungen zur Berechnung der β Korrelaten k:

$$(76)\quad \underbrace{\left\{\begin{array}{l} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \cdots + w_1 + 0 \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + \cdots + w_2 + 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}\right.}_{\beta \text{ Unbekannte } k} \; \Big\updownarrow \beta \text{ Gl.}$$

Zur Ermittelung der Korrelaten k werden wir jetzt dasselbe Reduktionsverfahren und dieselben Rechenproben verwenden, wie bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Zur Erlangung der Unbekannten v, bzw. $X, Y \ldots$ setzen wir schließlich die berechneten Werte der Korrelaten in die Korrelatengleichungen (75) ein.

Hieraus ergibt sich allgemein folgender **Weg der Ausgleichung bedingter direkter gleichgenauer Beobachtungen mittels Korrelaten:**

1) Aufstellung der β Bedingungsgleichungen zwischen den $\varkappa$ Beobachtungsgrößen X, Y in der Form

$$(73\text{a})\qquad \left\{\begin{array}{l} F_1(X, Y \ldots) = 0\,. \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array}\right.$$

2) Berechnung der Werte w, welche die rechte Seite dieser Bedingungsgleichungen annimmt bei Einsetzung der beobachteten Werte l an Stelle der gesuchten $X, Y \ldots$

$$(73\text{b})\qquad \left\{\begin{array}{l} F_1(L_1, L_2 \ldots) = w_1\,. \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array}\right.$$

3) Berechnung der $\varkappa$ Koeffizienten $a, b \ldots$ aus jeder der β Bedingungsgleichungen F:

$$(25\,\mathrm{d})\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial L_1}, \; a_2 = \dfrac{\partial F_1}{\partial L_2}, \; a_3 = \dfrac{\partial F_1}{\partial L_3}, \ldots a_\varkappa = \dfrac{\partial F_1}{\partial L_\varkappa} \\ b_1 = \dfrac{\partial F_2}{\partial L_1}, \; b_2 = \dfrac{\partial F_2}{\partial L_2}, \; b_3 = \dfrac{\partial F_2}{\partial L_3}, \ldots b_\varkappa = \dfrac{\partial F_2}{\partial L_\varkappa} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

und Anschrieb der β reduzierten Bedingungsgleichungen

$$(73\,\mathrm{d})\quad \begin{cases} [a\,v] \equiv a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots = -w_1 \\ [b\,v] \equiv b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots = -w_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

4) Berechnung der Koeffizienten $[a\,a], [a\,b] \ldots [b\,b] \ldots$ und Anschrieb der β Normalgleichungen für die β Korrelaten

$$(76)\quad \begin{cases} [a\,a]k_1 + [a\,b]k_2 + \cdots + w_1 = 0\,. \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

5) Reduktion der Normalgleichungen und Ausmittelung der rechts zuletzt stehenden Korrelaten k. Umsetzung der Koeffizienten und Berechnung der nun zuletzt stehenden Korrelaten usw.

6) Einsetzung der gefundenen Korrelaten in die Korrelatengleichungen (75). Addition der nach Gleichungen (75) gefundenen Verbesserungszuschläge

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

zu $l_1, l_2 \ldots$, wodurch

$$\begin{aligned} L_1 + v_1 &= X \\ L_2 + v_2 &= Y \\ \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned}$$

7) Bildung von $[v\,v]$ aus den Korrelatengleichungen (75) und zur Rechenprobe auch direkt nach Gleichung (78).
8) Berechnung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung. Durch die β Bedingungsgleichungen sinkt die Zahl der unabhängigen Unbekannten auf $(\varkappa - \beta)$. Die Zahl der Beobachtungen ist $= \varkappa$, folglich haben wir $\varkappa - [\varkappa - \beta] = \beta$ überschüssige Beobachtungen und als **mittleren Fehler einer Beobachtung:**

$$(77) \qquad m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{\beta}}\,.$$

Die Bildung der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ direkt aus den Verbesserungen v ist zwar deshalb nicht allzu umständlich, weil die letzteren (als Unbekannte) doch berechnet werden müssen. Gleichwohl ist es schon der Probe (s. oben) wegen wünschenswert, wie bei den vermittelnden Beobachtungen $[v\,v]$ auf anderem Wege zu gewinnen. Quadrieren wir zu diesem Zweck jede der Korrelatengleichungen und addieren, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
[vv] = [a\,a]\,k_1\,k_1 &+ [a\,b]\,k_1\,k_2 + [a\,c]\,k_1\,k_3 + \cdots \\
&+ [a\,b]\,k_1\,k_2 + [b\,b]\,k_2\,k_2 + [b\,c]\,k_2\,k_3 + \cdots \\
&+ [a\,c]\,k_1\,k_3 + [b\,c]\,k_2\,k_3 + [c\,c]\,k_3\,k_3 + \cdots \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad ,
\end{aligned}$$

woraus durch Vergleichung mit den Normalgleichungen (76):

$$(78) \; [vv] = -k_1 w_1 - k_2 w_2 = k_3 w_3 - \cdots = -[k\,w]\,.$$

§ 24. Ausgleichung bedingter ungleichgenauer Beobachtungen mittels Korrelaten.

Der Bau und Inhalt der von den Unbekannten streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen (73a) und der reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) wird durch den

Genauigkeitsgrad der Beobachtungen L bzw. der ihnen zuzufügenden Zuschläge v nicht beeinflußt.

Deren ungleiche Genauigkeit ändert nur die Minimumsbedingung in $F_v \equiv [p\,v\,v] = \text{Min.}$, so daß die Gleichung (74) jetzt lautet:

$$(74\text{a}) \begin{cases} \varphi_{(v_1, v_2 \ldots)} \equiv p_1 v_1^2 - 2\,v_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots) \\ \qquad + p_2 v_2^2 - 2\,v_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots) \\ \qquad - 2(k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots) = \text{Min.} \end{cases}$$

Jetzt wird

$$(75\text{a}) \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_1} = 2\,p_1 v_1 - 2\,(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_2} = 2\,p_2 v_2 - 2\,(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots) = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \quad \text{woraus die Korrelatengleichungen:} \\ v_1 = \dfrac{a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots}{p_1} = \dfrac{a_1}{p_1} k_1 + \dfrac{b_1}{p_1} k_2 + \cdots \\ v_2 = \dfrac{a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots}{p_2} = \dfrac{a_2}{p_2} k_1 + \dfrac{b_2}{p_2} k_2 + \cdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \end{cases}$$

Wir erkennen, daß durch Einführung von Beobachtungsgewichten $p_1, p_2 \ldots$ lediglich die Koeffizienten $a, b \ldots$ der Korrelatengleichungen in

$$\frac{a_1}{p_1}, \quad \frac{b_1}{p_1} \ldots, \quad \frac{a_2}{p_2}, \quad \frac{b_2}{p_2} \ldots$$

übergehen.

Setzen wir die Ausdrücke für v wieder in die unveränderten reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) ein und ziehen wieder zusammen, so erhalten wir wieder β Normalgleichungen zur Berechnung der β Korrelaten k:

$$(76\text{a})\begin{cases} \left[\dfrac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\dfrac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\dfrac{ac}{p}\right]k_3 + \cdots + w_1 = 0 \\ \left[\dfrac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\dfrac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\dfrac{bc}{p}\right]k_3 + \cdots + w_2 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Die ganze Auflösung ist also gleich derjenigen des § 23, nur ist die rechte Seite der Korrelatengleichungen mit dem Gewicht derjenigen Beobachtung durchzudividieren, welcher die linksseitige Verbesserung v angehört.

Noch einfacher ist es, schon die reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) umzuformen, so daß sie lauten:

$$\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \dfrac{a_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \cdots + w_1 = 0 \\ \dfrac{b_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \dfrac{b_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \cdots + w_2 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array} \quad \updownarrow \ \beta \text{ Gleichg.}$$

$$\longleftarrow \varkappa \text{ Unbekannte } v \longrightarrow$$

Durch Substituierung von

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{a_1}{\sqrt{p_1}}, \quad \mathfrak{b}_1 = \frac{b_1}{\sqrt{p_1}}, \quad \mathfrak{v}_1 = v_1 \cdot \sqrt{p_1} \quad \text{usw.}$$

gehen sie über in:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{v}_2 + \cdots + w_1 &= 0 \\ \mathfrak{b}_1 \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{v}_2 + \cdots + w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Jetzt hat man mit den Koeffizienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... genau das Verfahren des § 23 anzuwenden und nur am Schluß bei Berechnung der gesuchten Zuschläge v zu beachten, daß:

$$\mathfrak{a}_1 k_1 + \mathfrak{b}_1 k_2 + \mathfrak{c}_1 k_3 + \cdots = \mathfrak{v} = v_1 \sqrt{p_1},$$

folglich

$$v_1 = \frac{\mathfrak{v}_1}{\sqrt{p_1}}$$

$$v_2 = \frac{\mathfrak{v}_2}{\sqrt{p_2}}$$

$$\vdots$$

Zur Fehlerberechnung braucht man $[p\,v\,v] = [\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]$, woraus der mittlere Beobachtungsfehler:
der Gewichtseinheit

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{\beta}} = \pm\sqrt{\frac{[\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]}{\beta}},$$

einer Beobachtung L vom Gewicht p

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}.$$

Sammlung Göschen

Jeder Band in Leinw. geb. **80 Pf.**

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Analysis, Höhere, II: Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

— — **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen. Mit 50 Figuren. Nr. 147.

— **Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterversicherung siehe: Sozialversicherung.

Archäologie von Dr. Friedrich Koepp, Prof. an der Universität Münster i. W. 3 Bändchen. M. 28 Abb. im Text u. 40 Tafeln. Nr. 538/40.

Arithmetik u. Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — **Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armeepferd, Das, und die Versorgung der modernen Heere mit Pferden v. Felix von Damnitz, General der Kavallerie z. D. u. ehemal. Preuß. Remonteinspekteur. Nr. 514.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in d. soziale Hilfsarbeit v. Dr. Adolf Weber, Prof. an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer a. d. Kgl. Akademie d. bild. Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Universität Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— — II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper v. Prof. W. F. Wislicenus. Neu bearbeitet von Dr. H. Ludendorff in Potsdam. Mit 15 Abbild. Nr. 91.

Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Aufsatzentwürfe v. Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnas. i. Stuttg. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. 2 Bändchen. Mit 15 Fig. u. 2 Taf. Nr. 302 u. 641.

Außereuropäische Erdteile, Länderkunde der, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Australien. Landeskunde u. Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Prof. d. Geographie an d. Handels-Hochschule in Köln. Mit 8 Abb., 6 graph. Tab. u. 1 Karte. Nr. 319.

Autogenes Schweiß- und Schneidverfahren von Ingen. Hans Niese in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.

Bade- u. Schwimmanstalten, Öffentliche, v. Dr. Karl Wolff, Stadtoberbaur., Hannover. M. 50 Fig. Nr. 380.

Baden. Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnas. in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **Landeskunde von Baden** von Prof. Dr. O. Kienitz i. Karlsruhe. Mit Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 199.

Bahnhöfe. Hochbauten der Bahnhöfe v. Eisenbahnbauinspekt. C. Schwab, Vorstand d. Kgl. E.-Hochbausektion Stuttgart II. I: Empfangsgebäude. Nebengebäude. Güterschuppen. Lokomotivschuppen. Mit 91 Abbildungen. Nr. 515.

Balkanstaaten. Geschichte d. christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bankwesen. Technik des Bankwesens von Dr. Walter Conrad, stellvert. Vorsteher der statist. Abteilung der Reichsbank in Berlin. Nr. 484.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung v. Archit. Emil Beutinger, Assistent an d. Techn. Hochschule in Darmstadt. M. 25 Fig. u. 11 Tabell. Nr. 399.

Baukunst, Die, des Abendlandes v. Dr. K. Schäfer, Assist. a. Gewerbemuseum, Bremen. Mit 22 Abb. Nr. 74.

— **des Schulhauses** v. Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein, Darmstadt. **I:** Das Schulhaus. M. 38 Abb. Nr. 443.

— — **II:** Die Schulräume — Die Nebenanlagen. M. 31 Abb. Nr. 444.

Bausteine. Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Baustoffkunde, Die, v. Prof. H. Haberstroh, Oberl. a. d. Herzogl. Baugewerkschule Holzminden. Mit 36 Abbildungen. Nr. 506.

Bayern. Bayerische Geschichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **Landeskunde des Königreichs Bayern** v. Dr. W. Götz, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule München. M. Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 176.

Befestigungswesen. Die geschichtliche Entwicklung des Befestigungswesens vom Aufkommen der Pulvergeschütze bis zur Neuzeit von Reuleaux, Major b. Stabe d. 1. Westpreuß. Pionierbataill. Nr. 17. Mit 30 Bildern. Nr. 569.

Beschwerderecht. Das Disziplinar- u. Beschwerderecht für Heer u. Marine v. Dr. Max E. Mayer, Prof. a. d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 517.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. 1. Teil: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verschied. Kraftmaschinen. M. 27 Abb. Nr. 224.

— — **II:** Gas-, Wasser- u. Wind-Kraftanlagen. M. 31 Abb. Nr. 225.

— — **III:** Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graph. Darstell. Wahl d. Betriebskraft. M. 27 Abb. Nr. 474.

Bewegungsspiele v. Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymn. zu Hannover. M. 15 Abb. Nr. 96.

Bleicherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Blütenpflanzen, Das System der, mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Kustos am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Bodenkunde von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.

Brandenburgisch - Preußische Geschichte von Prof. Dr. M. Thamm, Dir. des Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.

Brasilien. Landeskunde der Republik Brasilien von Bel Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 373.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Dir. der Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Britisch-Nordamerika. Landeskunde von Britisch-Nordamerika v. Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abb. und 1 Karte. Nr. 284.

Buchführung in einfachen u. doppelten Posten v. Prof. Rob. Stern, Oberl. d. Öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule zu Leipzig. M. vielen Formul. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Bürgerliches Gesetzbuch siehe: Recht des BGB.

Byzantinisches Reich. Geschichte des byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Chemie, Allgemeine u. physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Prof. an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe in München. **I:** Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — **II:** Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Chemie, Geschichte der, von Dr. Hugo Bauer, Assist. am chemischen Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis z. Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— — II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium d. Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Pharmazeutische,** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.

— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. M. 1 Tafel. Nr. 241.

— **Toxikologische,** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Chemische Industrie, Anorganische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— — III: Anorganische chemische Präparate. M. 6 Taf. Nr. 207.

Chemische Technologie, Allgemeine, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Christlichen Literaturen des Orients, Die, von Dr. Anton Baumstark. I: Einleitung. — Das christlich-aramäische u. d. koptische Schrifttum. Nr. 527.

— — II: Das christl.-arab. und das äthiop. Schrifttum. — Das christl. Schrifttum d. Armenier und Georgier. Nr. 528.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedr. Barth in Nürnberg. I: Kesselsysteme und Feuerungen. Mit 43 Fig. Nr. 9.

— — II: Bau und Betrieb der Dampfkessel. M. 57 Fig. Nr. 521.

Dampfmaschinen, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2 Bdchn. I: Wärmetheoretische und dampftechnische Grundlagen. Mit 64 Fig. Nr. 8.

— — II: Bau und Betrieb der Dampfmaschinen. Mit 109 Fig. Nr. 572.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise u. Konstruktion von Ingen. Herm. Wilda, Prof. a. staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.

Desinfektion von Dr. M. Christian, Stabsarzt a. D. in Berlin. Mit 18 Abbildungen. Nr. 546.

Determinanten von P. B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealsch. z. Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Deutsche Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Dir. d. städt. Museums in Braunschweig. M. 70 Abb. Nr 124.

Deutsche Fortbildungsschulwesen, Das, nach seiner geschichtlichen Entwicklung u. in seiner gegenwärt. Gestalt von H. Siercks, Revisor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.

Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Deutsche Geschichte von Dr. F. Kurze, Prof. a. Kgl. Luisengymnas. in Berlin. I: **Mittelalter** (bis 1519). Nr. 33.

— — II: **Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1517 bis 1648). Nr. 34.

— — III: **Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806). Nr. 35.

— — siehe auch: Quellenkunde

Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Prof. Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.

Deutsches Handelsrecht von Dr. Karl Lehmann, Prof. an der Universität Göttingen. 2 Bde. Nr. 457 u. 458.

Deutsche Heldensage, Die, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an d. Universität Würzburg. Nr. 32.

Deutsches Kolonialrecht von Prof. Dr. H. Edler von Hoffmann, Studiendirektor der Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 318.

Deutsche Kolonien. I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 441.

— **II: Das Südseegebiet und Kiautschou** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 520.

— **III: Ostafrika** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.

Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- u. Kunstepen u. zum Minnesang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. **I:** Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.

— — **II:** Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.

Deutsche Literatur des 13. Jahrhunderts. Die Epigonen d. höfischen Epos. Auswahl a. deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Deutsche Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

— **16. Jahrhunderts. I: Martin Luther u. Thom. Murner.** Ausgewählt u. mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— — **II: Hans Sachs.** Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. J. Sahr. Nr. 24.

Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos u. Fabel. Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

— **des 17. und 18. Jahrhunderts bis Klopstock. I:** Lyrik von Dr. Paul Legband in Berlin. Nr. 364.

— — **II:** Prosa v. Dr. Hans Legband in Kassel. Nr. 365.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **der Klassikerzeit** v. Carl Weitbrecht, durchgesehen u. ergänzt v. Karl Berger. Nr. 161.

— **des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, neu bearbeitet von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.

Deutschen Mundarten, Die, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.

Deutsche Mythologie. Germanische Mythologie von Dr. Eugen Mogk, Prof. a. d. Univers. Leipzig. Nr. 15.

Deutschen Personennamen, Die, v. Dr. Rud. Kleinpaul i. Leipzig. Nr. 422.

Deutsche Poetik von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Deutsche Rechtsgeschichte v. Dr. Richard Schröder, Prof. a. d. Univers. Heidelberg. **I:** Bis z. Mittelalter. Nr. 621.

Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. i. Bamberg. Nr. 61.

Deutsche Schule, Die, im Auslande von Hans Amrhein, Seminaroberlehrer in Rheydt. Nr. 259.

Deutsches Seerecht v. Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. **I:** Allgem. Lehren: Personen u. Sachen d. Seerechts. Nr. 386.

— — **II:** Die einz. seerechtl. Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts u. außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Deutsche Stadt, Die, und ihre Verwaltung. Eine Einführung i. d. Kommunalpolitik d. Gegenw. Herausgeg. v. Dr. Otto Most, Beigeordn. d. Stadt Düsseldorf. **I:** Verfassung u. Verwaltung im allgemeinen; Finanzen und Steuern; Bildungs- und Kunstpflege; Gesundheitspflege. Nr. 617.

Deutsche Stammeskunde v. Dr. Rud. Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.

Deutsches Unterrichtswesen. Geschichte des deutschen Unterrichtswesens v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. **I:** Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
— — **II:** Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
Deutsche Urheberrecht, Das, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internat. Verträge v. Dr. Gust. Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
Deutsche Volkslied, Das, ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25 u. 132.
Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Geheimer Kriegsrat u. vortragender Rat im Kriegsministerium in München. Nr. 401.
Deutsches Wörterbuch v. Dr. Richard Loewe. Nr. 64.
Deutsche Zeitungswesen, Das, von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.
Deutsches Zivilprozeßrecht von Prof. Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.
Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Ausw. mit Einltg. u. Wörterb. herausgeg. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.
Dietrichepen. Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung u. Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. a. d. Universität Würzburg. Nr. 10.
Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.
— **Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.
Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.
Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Pumpen, Druckwasser- u. Druckluft-Anlagen von Dipl.-Ingen. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumstr. a. D. in Aachen. Mit 87 Fig. Nr. 290.
Eddalieder mit Grammatik, Übersetzg. u. Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.
Eisenbahnbau. Die Entwicklung des modernen Eisenbahnbaues v. Dipl. Ing. Alfred Birk, o. ö. Prof. a. d. k. k. Deutschen Techn. Hochschule in Prag. Mit 27 Abbild. Nr. 553.
Eisenbahnen, Die Linienführung der, von H. Wegele, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 52 Abbildungen. Nr. 623.
Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal, Regierungsbaumeister u. Oberingen. in Hannover. **I:** Die Lokomotiven. Mit 89 Abbild. im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.
— — **II:** Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit Anh.: Die Eisenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 56 Abb. im Text u. 3 Taf. Nr. 108.
Eisenbahnpolitik. Geschichte d. deutschen Eisenbahnpolitik v. Betriebsinspektor Dr. Edwin Kech in Karlsruhe i. B. Nr. 533.
Eisenbahnverkehr, Der, v. Kgl. Eisenbahn-Rechnungsdirektor Th. Wilbrand in Berlin-Friedenau. Nr. 618.
Eisenbetonbau, Der, v. Reg.-Baumstr. Karl Rößle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.
Eisenbetonbrücken von Dr.-Ing. K. W. Schaechterle in Stuttgart. Mit 104 Abbildungen. Nr. 627.
Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningenieur. **I:** Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Taf. Nr. 152.
— — **II:** Das Schmiedeisen. M. 25 Fig. u. 5 Taf. Nr. 153.
Eisenkonstruktionen im Hochbau von Ingen. Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.
Eiszeitalter, Das, v. Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.
Elastizitätslehre für Ingenieure I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene Platten, Torsion, Gekrümmte Träger. Von Dr.-Ing. Max Enßlin, Prof. a. d. Kgl. Baugewerkschule Stuttgart und Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 60 Abbild. Nr. 519.

Elektrischen Meßinstrumente, Die, von J. Herrmann, Prof. an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Mit 195 Figuren. Nr. 477.

Elektrische Telegraphie, Die, von Dr. Lud. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Elektrizität. Theoret. Physik III: Elektrizität u. Magnetismus von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel in Genf. I: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 16 Fig. Nr. 252.

— — II: Experiment. Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.

Elektromagnet. Lichttheorie. Theoret. Physik IV: Elektromagnet. Lichttheorie u. Elektronik von Professor Dr. Gust. Jäger in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Elektrometallurgie von Dr. Friedrich Regelsberger, Kaiserl. Reg.-Rat in Steglitz-Berlin. M. 16 Fig. Nr. 110.

Elektrotechnik. Einführung in die Starkstromtechnik v. J. Herrmann, Prof. d. Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 95 Fig. u. 16 Taf. Nr. 196.

— — II: Die Gleichstromtechnik. Mit 118 Fig. und 16 Taf. Nr. 197.

— — III: Die Wechselstromtechnik. Mit 147 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

Elektrotechnik. Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ingenieur Prof. Hermann Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildgn. Nr. 476.

Elsaß-Lothringen, Landeskunde von, v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 215.

Englisch-deutsches Gesprächsbuch von Prof. Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.

Englische Geschichte v. Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — **Grundzüge und Haupttypen d. englischen Literaturgeschichte** von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Englische Phonetik mit Lesestücken von Dr. A. E. Dunstan, Lektor an der Univers. Königsberg i. Pr. Nr. 601.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Jena. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Figuren. Nr. 378.

— — II: Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdbau von Reg.-Baum. Erwin Link in Stuttgart. Mit vielen Abbild. Nr. 630.

Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts in Potsdam. Mit 7 Tafeln und 16 Figuren. Nr. 175.

Erdteile, Länderkunde der außereuropäischen, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Professor H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbild. Nr. 464.

Ethik von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Europa, Länderkunde von, von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakademie in Wien. Mit 14 Textkärtchen u. Diagrammen u. einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen d. häufigeren i. Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbildungen. Nr. 268 und 269.

Experimentalphysik v. Prof. R. Lang in Stuttgart. **I: Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper.** Mit 125 Figuren. Nr. 611.

Explosivstoffe. Einführung in d. Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Steglitz. Mit 6 Abbild. und 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht d. Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilhelm Massot, Prof. an der Preußischen höheren Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Feldgeschütz, Das moderne, v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer a. d. Militärtechn. Akademie in Berlin. **I:** Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschl. der Erfindung des rauchl. Pulvers, etwa 1850 bis 1890. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— — **II:** Die Entwicklung d. heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abbild. Nr. 307

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre v. W. Hauber, Dipl.-Ingenieur. Mit 56 Fig. Nr. 288.
— **Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen** von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Fig. Nr. 491.

Fette, Die, und Öle sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Lacke, Firnisse m. ihren wicht. Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. **I:** Einf. in d. Chemie, Besprech. einiger Salze u. d. Fette u. Öle. Nr. 335.

— — **II:** Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

— — **III:** Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Feuerwaffen. Geschichte d. gesamten Feuerwaffen bis 1850. Die Entwicklung der Feuerwaffen v. ihrem ersten Auftreten bis zur Einführung der gezogenen Hinterlader, unter besonderer Berücksichtig. d. Heeresbewaffnung von Major a. D. W. Gohlke, Steglitz-Berlin. Mit 105 Abbildungen. Nr. 530.

Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Geh. Regierungsr. im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Finanzsysteme der Großmächte, Die, (Internat. Staats- und Gemeinde-Finanzwesen) v. O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat in Berlin. 2 Bändchen. Nr. 450 und 451.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. **I:** Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— — **II:** Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft von Dr. Josef Szinnyei, Prof. an der Universität Budapest. Nr. 463.

Finnland. Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands von Prof. Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

Firnisse. Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Fette und Öle III.) Nr. 337.

Fische. Das Tierreich IV: Fische von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Mit 37 Abbild. Nr. 356.

Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Flora. Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen v. Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbild. Nr. 268, 269.

Flußbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 103 Abbildungen. Nr. 597.

Forensische Psychiatrie von Professor Dr. W. Weygandt, Dir. d. Irrenanstalt Friedrichsberg i. Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

Forstwissenschaft v. Dr. Ad. Schwappach, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirig. bei d. Hauptstation d. forstl. Versuchswesens. Nr. 106.

Fortbildungsschulwesen, Das deutsche, nach seiner geschichtl. Entwicklung u. i. sein. gegenwärt. Gestalt v. H. Siercks, Revisor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.

Franken. Geschichte Frankens v. Dr. Christ. Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D., München. Nr. 434.

Frankreich. Französische Geschichte v. Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 85.

Frankreich. Landesk. v. Frankreich v. Dr. Rich. Neuse, Direkt. d. Oberrealschule in Spandau. 1. Bändch. M. 23 Abb. im Text u. 16 Landschaftsbild. auf 16 Taf. Nr. 466.

— — 2. Bändchen. Mit 15 Abb. im Text, 18 Landschaftsbild. auf 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 467.

Französisch-deutsches Gesprächsbuch von C. Francillon, Lektor am orientalisch. Seminar u. an d. Handelshochschule in Berlin. Nr. 596.

Französische Handelskorrespondenz v. Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.

Fremdwort, Das, im Deutschen v. Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 273.

Fuge. Erläuterung u. Anleitung zur Komposition derselben v. Prof. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Funktionentheorie, Einleitung in die, (Theorie der komplexen Zahlenreihen) v. Max Rose, Oberlehrer an der Goetheschule in Deutsch-Wilmersdorf. Mit 10 Fig. Nr. 581.

Fußartillerie, Die, ihre Organisation, Bewaffnung u. Ausbildg. v. Splett, Oberleutnant im Lehrbataillon der Fußartillerie-Schießschule u. Biermann, Oberleutnant in der Versuchsbatter. d. Artillerie-Prüfungskommission. Mit 35 Fig. Nr. 560.

Gardinenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ingen. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.

Gaskraftmaschinen, Die, v. Ing. Alfred Kirschke in Kiel. 2 Bändchen. Mit vielen Figuren. Nr. 316 u. 651.

Gasthäuser und Hotels von Architekt Max Wöhler in Düsseldorf. **I:** Die Bestandteile u. die Einrichtung des Gasthauses. Mit 70 Fig. Nr. 525.

— — **II:** Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Figuren. Nr. 526.

Gebirgsartillerie. Die Entwicklung der Gebirgsartillerie von Klußmann, Oberst u. Kommandeur der 1. Feld-Art.-Brigade in Königsberg i. Pr. Mit 78 Bildern und Übersichtstafeln. Nr. 531.

Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland v. Dr. Otto Lindecke in Düsseldorf. Nr. 384.

Geodäsie von Prof. Dr. C. Reinhertz in Hannover. Neubearbeitet von Dr. G. Förster, Observator a. Geodätisch. Institut Potsdam. Mit 68 Abbildungen. Nr. 102.

— **Vermessungskunde** v. Diplom-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule i. Straßburg i. E. **I:** Feldmessen u. Nivellieren. Mit 146 Abb. **II:** Der Theodolit. Trigonometrische und barometr. Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Geographie, Geschichte der, von Prof. Dr. Konrad Kretschmer i. Charlottenburg. Mit 11 Kart. im Text. Nr. 624.

Geologie in kurzem Auszug f. Schulen u. zur Selbstbelehrung zusammengestellt v. Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. u. 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene v. Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 52 Figuren. Nr. 65.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— — **des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

Geometrie, Analytische. Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie des Raumes von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.
— **Darstellende,** von Dr. Robert Haußner, Prof. an d. Univ. Jena. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.
— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.
— **Ebene,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarbigen Figuren. Nr. 41.
— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.
Geometrische Optik, Einführung in die, von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.
Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt u. Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.
Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof. a. d. Univ. Leipzig. Nr. 15.
Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe. Nr. 238.
Gesangskunst. Technik der deutschen Gesangskunst von Osk. Noë u. Dr. Hans Joachim Moser. Nr. 576.
Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, v. Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univ. Greifswald. Nr. 270.
Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie v. Mummenhoff, Major u. Lehrer an d. Fußartillerie-Schießschule in Jüterbog. I: Vom Auftreten d. gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890. Mit 50 Textbildern. Nr. 334.
— — II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.
Geschwindigkeitsregler der Kraftmaschinen, Die, von Dr.-Ing. H. Kröner in Friedberg. Mit 33 Figuren. Nr. 604.
Gesetzbuch, Bürgerliches, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.
Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten v. E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. u. 1 Tafel. Nr. 18.
Gewerbehygiene von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.
Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203, 204.
Gewerbliche Arbeiterfrage, Die, von Werner Sombart, Prof. a. d. Handelshochschule Berlin. Nr. 209.
Gewerbliche Bauten. Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. **I:** Allgemeines über Anlage und Konstruktion der industriellen und gewerblichen Bauten. Nr. 511.
— — **II:** Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.
Gewichtswesen. Maß-, Münz- u. Gewichtswesen v. Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.
Gießereimaschinen von Dipl.-Ing. Emil Treiber in Heidenheim a. B. Mit 51 Figuren. Nr. 548.
Glas- und keramische Industrie (Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels I) v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.
Gleichstrommaschine, Die, von Ing. Dr. C. Kinzbrunner in Manchester. Mit 81 Figuren. Nr. 257.
Gletscherkunde v. Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung u. Erläutergn. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.
Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue. Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl a. d. höfisch. Epos m. Anmerk. u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichs-Kollegium z. Königsberg/Pr. Nr. 22.
Graphischen Künste, Die, von Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen u. Beilagen. Nr. 75.

Hygiene des Städtebaus, Die, von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit. 30 Abb. Nr. 348.
— **des Wohnungswesens, Die,** von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 5 Abbild. Nr. 363.

Iberische Halbinsel. Landeskunde der Iberischen Halbinsel von Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. M. 8 Kärtchen u. 8 Abb. im Text u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Indogerman. Sprachwissenschaft von Dr. R. Meringer, Professor an der Univers. Graz. M. 1 Tafel. Nr. 59.

Industrielle u. gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. **I:** Allgemeines üb. Anlage u. Konstruktion d. industriellen u. gewerblichen Bauten. Nr. 511.
— — **II:** Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Insekten. Das Tierreich V: Insekten von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.

Instrumentenlehre v. Musikdir. Franz Mayerhoff in Chemnitz. **I:** Text. Nr. 437.
— — **II:** Notenbeispiele. Nr. 438.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.
— **Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. M. 52 Fig. Nr. 147.

Israel. Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Italienische Handelskorrespondenz v. Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Voßler, Professor an der Universität München. Nr. 125.

Kalkulation, Die, im Maschinenbau von Ingen. H. Bethmann, Dozent am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.

Kältemaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen von M. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.

Kamerun. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.

Kanal- und Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abb. Nr. 585.

Kant, Immanuel. (Geschichte der Philosophie Bd. 5) von Dr. Bruno Bauch, Prof. a. d. Univ. Jena Nr. 536.

Kartell u. Trust v. Dr. S. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522.

Kartenkunde von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. 2 Bändchen. **I:** Die Projektionen. Mit 56 Fig. Nr. 30.
— — **II:** Der Karteninhalt und das Messen auf Karten. Mit 39 Fig. Nr. 599.

Kartographische Aufnahmen u. geograph. Ortsbestimmung auf Reisen von Dr.-Ing. R. Hugershoff, Prof. an der Forstakademie zu Tharandt. Mit 73 Figuren. Nr. 607.

Kaufmännische Rechtskunde. I: Das Wechselwesen v. Rechtsanwalt Dr. Rud. Mothes in Leipzig. Nr. 103.
— **II:** Der Handelsstand v. Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer, Leipzig. Nr. 545.

Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer a. d. Öffentl. Handelslehranstalt d. Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III Nr. 139, 140, 187.

Keramische Industrie. Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gust. Rauter. **I:** Glas- u. keram. Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

Kerzenfabrikation. Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abb. Nr. 336.

Kiautschou. **Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou** v. Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.

Kinematik von Dipl.-Ing. Hans Polster, Assist. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. M. 76 Abb. Nr. 584.

Kirchenrecht v. Dr. E. Sehling, ord. Prof. d. Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Klima und Leben (Bioklimatologie) von Dr. Wilh. R. Eckardt, Assist. an der öffentl. Wetterdienststelle in Weilburg. Nr. 629.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Figuren. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.

Kolonialrecht, Deutsches, von Prof. Dr. H. Edler von Hoffmann, Studiendirektor d. Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 318.

Kometen. **Astronomie.** Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. **II:** Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529

Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsassessor in Berlin. Nr. 534.

Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre v. Steph. Krehl. I. II. M. viel. Notenbeispiel. Nr. 149, 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung v. Steph. Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Kirsche in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.

Koordinatensysteme v. Paul B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Mit 8 Fig. Nr. 507.

Körper, Der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Kostenanschlag siehe: Veranschlagen.

Kriegsschiffbau. **Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit.** Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat und Schiffbau-Direktor. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe u. der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.

— — II. Teil: Das Zeitalter der Dampfschiffe für die Kriegsführung zur See von 1840 bis zur Neuzeit. Mit 81 Abbildungen. Nr. 472.

Kriegswesens, Geschichte des, von Dr. Emil Daniels in Berlin. **I:** Das antike Kriegswesen. Nr. 488.

— — **II:** Das mittelalterliche Kriegswesen. Nr. 498.

— — **III:** Das Kriegswesen der Neuzeit. Erster Teil. Nr. 518.

— — **IV:** Das Kriegswesen der Neuzeit. Zweiter Teil. Nr. 537.

— — **V:** Das Kriegswesen der Neuzeit. Dritter Teil. Nr. 568.

Kristallographie v. Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbild. Nr. 210.

Kristalloptik, Einführung in die, von Dr. Eberhard Buchwald i. München. Mit 124 Abbildungen. Nr. 619.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Würzburg. Nr. 10.

Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.

Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Kurvendiskussion. **Algebraische Kurven** von Eug. Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. **I:** Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.

Kurzschrift siehe: Stenographie.

Küstenartillerie. **Die Entwicklung der Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart** v. Korvettenkapitän Huning. Mit Abbildungen und Tabellen. Nr. 606.

Lacke. **Harze, Lacke, Firnisse** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.

Lagerhäuser. Industrielle und gewerbliche Bauten. (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann, Düsseldorf. **II:** Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.

Länder- und Völkernamen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Landstraßenbau von Kgl. Oberlehrer A. Liebmann, Betriebsdirekt. a. D. i. Magdeburg. Mit 44 Fig. Nr. 598.

Landwirtschaftliche Betriebslehre v. E. Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 227.

Landwirtschaftlichen Maschinen, Die, von Karl Walther, Diplom.-Jng. in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 407—409.

Lateinische Grammatik. Grundriß der latein. Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.

— **Sprache. Geschichte der lateinischen Sprache** von Dr. Friedrich Stolz, Professor an der Universität Innsbruck. Nr. 492.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Techn. Hochschule in Wien. M. 47 Abb. Nr. 77.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

— **Fünfstellige,** von Professor August Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Lokomotiven. Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal. **I:** Die Lokomotiven. Mit 89 Abb. im Text u. 2 Tafeln. Nr. 107.

Lothringen. Geschichte Lothringens von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— **Landeskunde v. Elsaß-Lothringen** v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.

Lötrohrprobierkunde. Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohrs von Dr. Mart. Henglein in Freiberg i. Sa. Mit 10 Figuren. Nr. 483.

Lübeck. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck v. Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text und 1 lithographischen Karte. Nr. 487.

Luftsalpeter. Seine Gewinnung durch den elektrischen Flammenbogen von Dr. G. Brion, Prof. an der Kgl. Bergakademie in Freiberg. Mit 50 Figuren. Nr. 616.

Luft- und Meeresströmungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Lüftung. Heizung und Lüftung von Jng. Johannes Körting in Düsseldorf. **I:** Das Wesen und die Berechnung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.

— — **II:** Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Luther, Martin, und Thom. Murner. Ausgewählt und mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen v. Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor d. Öffentlichen und 1. Sächs. Versuchsstation für Brauerei und Mälzerei, sowie der Brauer- und Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

Maschinenbau, Die Kalkulation im, von Ingenieur H. Bethmann, Doz. am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.

— **Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Fr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maschinenzeichnen, Praktisches, von Ing. Richard Schiffner in Warmbrunn. I: Grundbegriffe, Einfache Maschinenteile bis zu den Kuppelungen. Mit 60 Tafeln. Nr. 589.

— — II: Lager, Riemen- und Seilscheiben, Zahnräder, Kolbenpumpe. Mit 51 Tafeln. Nr. 590.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Darmstadt. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Dipl.-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften.— Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

— — II: Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Prof. am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Ed. Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen Mit vielen Abbild. Nr. 419—421.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Professor A. Lüdicke in Braunschweig. 2 Bändchen. Nr. 340, 341.

Mecklenburg. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck von Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbild. im Text, 16 Taf. und 1 Karte in Lithographie. Nr. 487.

Mecklenburgische Geschichte von Oberlehrer Otto Vitense in Neubrandenburg i. M. Nr. 610.

Meereskunde, Physische, von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher bei d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Meeresströmungen. Luft- u. Meeresströmungen v. Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Menschliche Körper, Der, sein Bau u. seine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen u. ihren Legierungen unter besond. Berücksichtigung der Metallmikroskopie v. Prof. E. Heyn u. Prof. O. Bauer a. Kgl. Materialprüfungsamt (Gr.-Lichterfelde) d. K. Techn. Hochschule zu Berlin. I: Allgem. Teil. Mit 45 Abb. im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

— — II: Spez. Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Metallurgie von Dr. August Geitz in Kristianssand (Norwegen). I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.

Meteore. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternensystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Meteorologie v. Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Wien. Mit 49 Abbild. u. 7 Tafeln. Nr. 54.

Militärische Bauten von Reg.-Baumeister R. Lang in Stuttgart. Mit zahlreich. Abb. Nr. 626.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an d. Univ. Straßburg i. E. 2 Bde. Nr. 371, 372.

Mineralogie von Geheimer Bergrat Dr. R. Brauns, Prof. an d. Univ. Bonn. Mit 132 Abbild. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterb. von O. Güntter, Prof. an d. Oberrealschule u. an d. Techn. Hochschule i. Stuttgart. Nr. 23.

Mittelhochdeutsche Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitg. u. Wörterbuch herausgeg. von Dr. Hermann Jantzen, Dir. d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Mittelhochdeutsche Grammatik. Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurz. Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. a. d. Univ. Rostock. Nr. 1.

Morgenland. Geschichte des alten Morgenlandes v. Dr. Fr. Hommel, Prof. an d. Universität München. Mit 9 Bildern u. 1 Karte. Nr. 43.

Morphologie und Organographie der Pflanzen v. Prof. Dr. M. Nordhausen i. Kiel. M. 123 Abb. Nr. 141.

Mörtel. Die Industrie d. künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Mundarten, Die deutschen, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.

Mundarten, Plattdeutsche, von Dr. Hubert Grimme, Professor an der Univers. Münster i. W. Nr. 461.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther u. Thomas Murner. Ausgewählt u. m. Einleitungen u. Anmerk. versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnas. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, v. Dr. A. Möhler in Steinhaußen. 2 Bdch. Mit zahlr. Abb. u. Musikbeil. Nr. 121 u. 347.

Musikalische Akustik von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbildungen. Nr. 21.

Musikal. Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit viel. Notenbeisp. Nr. 149, 150.

Musikästhetik von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

Musikgeschichte seit Beginn des 19. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

Musiklehre, Allgemeine, von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nahrungsmittel. Ernährung u. Nahrungsmittel v. Oberstabsarzt Prof H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.

Nautik. Kurzer Abriß d. täglich an Bord von Handelsschiffen angew. Teils d. Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildgn. Nr. 84.

Neugriechisch-deutsches Gesprächsbuch mit besond. Berücksichtigung d. Umgangssprache v. Dr. Johannes Kalitsunakis, Doz. am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 585.

Neunzehntes Jahrhundert. Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univ Bonn. 1. Bdch.: 1800—1852. Nr. 216

— — 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. der Univ. in Jena. **I:** Der historische u. kulturgeschichtl. Hintergrund d. Urchristentums. M. 3 Karten. Nr. 325.

— — **II:** Die Religion d. Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit 1 Planskizze. Nr. 326.

Nibelunge Nôt, Der, in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.

Nordische Literaturgeschichte I: Die isländ. u. norweg. Literatur des Mittelalters v. Dr. Wolfg. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 254.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großherzogl. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstak. Eisenach. Mit 50 Abb. Nr. 158.

Pflanzenzellenlehre. Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbildungen. Nr. 556.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assist. a. Botan. Institut d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Pharmazeutische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.

Philologie, Geschichte d. klassischen, v. Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. a. d. Univ. Münster in Westf. Nr. 367.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Bonn. Nr. 281.

Philosophie, Geschichte d., IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. B. Bauch, Professor an der Universität Jena. Nr. 394.

— — **V: Immanuel Kant** von Dr. Bruno Bauch, Professor an d. Universität Jena. Nr. 536.

— — **VI: Die Philosophie im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts** von Arthur Drews, Prof. der Philosophie an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 571.

— **Hauptprobleme der,** v. Dr. Georg Simmel, Professor an der Universität Berlin. Nr. 500.

— **Psychologie und Logik** zur Einf. in d. Philosophie von Prof. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie, Die. Von H. Keßler, Prof. an d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Taf. und 42 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Techn. Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 24 Abbildungen. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht u. Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— — IV. Teil: Elektromagnet. Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.

Physik, Geschichte der, von Prof. A. Kistner in Wertheim a. M. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— — II: Die Physik von Newton bis z. Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Univ. Breslau. Nr. 445.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. der Mathematik u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberlehrer an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit 1 Taf. Nr. 241.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerh. Schott, Abteilungsvorst. b. d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Pilze, Die. Eine Einführung in die Kenntnis ihrer Formenreihen von Prof. Dr. G. Lindau in Berlin. Mit 10 Figurengruppen i. Text. Nr. 574.

Planetensystem. Astronomie (Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper) von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbild. Nr. 11.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayer. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

— **Die, seit Beginn des 19. Jahrhunderts** von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.

Plattdeutsche Mundarten von Dr. Hub. Grimme, Professor an der Universität Münster i. W. Nr. 461.

Poetik, Deutsche, v. Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Polarlicht. Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Kgl. Preuß. Meteorolog. Instituts zu Potsdam. Mit 7 Taf. u. 16 Figuren. Nr. 175.

Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

Pommern. Landeskunde von Pommern von Dr. W. Deecke, Prof. an der Universität Freiburg i. B. Mit 10 Abb. und Karten im Text und 1 Karte in Lithographie. Nr. 575.

Portugiesische Geschichte v. Dr. Gustav Diercks in Berlin-Steglitz. Nr. 622.

Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.

Posamentiererei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation v. Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Postrecht von Dr. Alfred Wolcke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.

Preßluftwerkzeuge, Die, von Diplom-Ing. P. Iltis, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg. Mit 82 Figuren. Nr. 493.

Preußische Geschichte. Brandenburgisch-Preußische Geschichte v. Prof. Dr. M. Thamm, Direktor d. Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.

Preußisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univ. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Psychiatrie, Forensische, von Professor Dr. W. Weygandt, Dir. der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 und 411.

Psychologie und Logik zur Einführung in d. Philosophie v. Prof. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, v. Prof. Dr. G. F. Lipps in Zürich. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Pumpen, Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Ein kurzer Überblick von Dipl.-Ing. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumeister a. D. in Aachen. Mit 87 Abbildungen. Nr. 290

Quellenkunde d. deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Radioaktivität von Dipl.-Ing. Wilh. Frommel. Mit 21 Abbildungen. Nr. 317.

Rechnen, Das, in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ing. Joh. Eug. Mayer in Freiburg i. Br. Mit 30 Abbild. Nr. 405.

— **Kaufmännisches,** von Prof. Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs. Erstes Buch: Allg. Teil. I: Einleitung — Lehre v. d. Personen u. v. d. Sachen v. Dr. P. Oertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 447.

— — II: Erwerb u. Verlust, Geltendmachung u. Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.

— Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abt.: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Oertmann, Prof. an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgem. Lehren. Besitz und Eigentum. Nr. 480.

— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Universität Göttingen. Nr. 305.

Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied d. Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Rechtswissenschaft, Einführung in die, von Dr. Theodor Sternberg in Berlin. **I:** Methoden- und Quellenlehre. Nr. 169.

— — **II:** Das System. Nr. 170.

Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Redeschrift siehe: Stenographie.

Schattenkonstruktionen von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 236.

Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart, Die Entwicklung der, von Korvettenkapitän Huning. Mit Abbild. und Tabellen. Nr. 606.

Schleswig-Holstein. Landeskunde von Schleswig-Holstein, Helgoland u. der freien und Hansestadt Hamburg von Dr. Paul Hambruch, Abteilungsvorsteher am Museum für Völkerkunde in Hamburg. Mit Abb., Plänen, Profilen und 1 Karte in Lithographie. Nr. 563.

Schleusenbau. Kanal- u. Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abbildungen. Nr. 585.

Schmalspurbahnen (Klein-, Arbeits- u. Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 99 Abbildungen. Nr. 524.

Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, a.o. Prof. a. d. Univ. Graz. Mit 67 Abb. Nr. 151.

Schreiner-Arbeiten. Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Schuldrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Prof. a.d.Univ. Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor a. d. Universität Erlangen. Nr. 324.

Schule, die deutsche, im Auslande von Hans Amrhein, Seminar-Oberlehrer in Rheydt. Nr. 259.

Schulhaus. Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbild. II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 443 und 444.

Schulpraxis. Methodik d. Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

Schweiß- und Schneidverfahren, Das autogene, von Ingenieur Hans Niese in Kiel. Mit 30 Fig. Nr. 499.

Schweiz. Schweizerische Geschichte von Dr. K. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.

— **Landeskunde der Schweiz** von Prof. Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abb. und 1 Karte. Nr. 398.

Schwimmanstalten. Öffentl. Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Professor an der Universität Berlin. Nr. 370.

Seerecht, Das deutsche, von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. **I:** Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.

— — **II:** Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und d. Kerzenfabrikation v. Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abbildgn. Nr. 336.

Semitische Sprachwissenschaft von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Univers. Königsberg. Nr. 291.

Silikate. Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. **I:** Glas u. keramische Industrie. M. 12 Taf. Nr. 233.

— — **II:** Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgeg. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Skandinavien, Landeskunde von, (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinrich Kerp, Kreisschulinspektor in Kreuzburg. Mit 11 Abb. und 1 Karte. Nr. 202.

Slavische Literaturgeschichte von Dr. Josef Karásek in Wien. **I:** Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — **II:** Das 19. Jahrh. Nr. 278

Soziale Frage. **Die Entwicklung der sozialen Frage** von Professor Dr. Ferdin. Tönnies. Nr. 353.
Sozialversicherung von Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.
Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.
Spanien. **Spanische Geschichte** von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.
— **Landeskunde der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
Spanische Handelskorrespondenz von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.
Spanische Literaturgeschichte v. Dr. Rud. Beer, Wien. I. II. Nr. 167, 168.
Speicher, Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
Spinnerei. **Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.
Spitzenfabrikation. **Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikat. u. Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
Spruchdichtung. **Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung.** Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule u. an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
Staatslehre, Allgemeine, von Dr. Hermann Rehm, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Nr. 358.
Staatsrecht, Allgemeines, von Dr. Julius Hatschek, Prof. d. Rechte an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.
Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. a. d. Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.
Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. M. 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.
Statik von W. Hauber, Dipl.-Ing. I. Teil: **Die Grundlehren der Statik starrer Körper.** Mit 82 Fig. Nr. 178.
— — II. Teil: **Angewandte Statik.** Mit 61 Figuren. Nr. 179.
—, **Graphische,** mit besond. Berücksichtig. der Einflußlinien von Kgl. Oberlehrer Dipl.-Ing. Otto Henkel in Rendsburg. 1. Teil. Mit 121 Fig. Nr. 603.
Steinhauerarbeiten. **Maurer- und Steinhauerarbeiten** von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.
Stenographie. **Geschichte der Stenographie** von Dr. Arthur Mentz in Königsberg i. Pr. Nr. 501.
Stenographie n. d. System v. F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.
— **Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems** von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.
Stenographie. **Lehrbuch d. Vereinfachten Deutschen Stenographie** (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Studienrat d. Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.
— **Redeschrift.** Lehrbuch der Redeschrift d. Systems Stolze-Schrey nebst Kürzungsbeisp., Lesestücken, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, amtl. bad. Landtagsstenograph in Karlsruhe (B.). Nr. 494.
Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.
Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 66 Fig. Nr. 97.
Sternsystem. **Astronomie.** Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univers. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
Steuersysteme des Auslandes, Die, v. Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Stilkunde v. Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbild. u. 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Stöchiometrische Aufgabensammlung von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberl. an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.

Straßenbahnen von Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 72 Abbildungen. Nr. 559.

Strategie von Löffler, Major im Kgl. Sächs. Kriegsmin. i. Dresd. Nr. 505.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen v. Jos. Herzog, Dipl.-Elektroing. in Budapest u. Clarence Feldmann, Prof. d. Elektotechnik in Delft. Mit 68 Abb. Nr. 456.

Südamerika, Das spanische. Geschichte Chiles, Argentiniens u. d. kleineren Staaten von Dr. Hermann Lufft in Berlin. Nr. 632.

Südseegebiet. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. K. Dove. M. 16 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 520.

Talmud. Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.

Talmudproben von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 583.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Technische Tabellen und Formeln von Dr.-Ing. W. Müller, Dipl.-Ing. am Kgl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. Mit 106 Figuren. Nr. 579.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke d. Maschinenbaues, Schiffbaues u. d. Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Dtsch.-Engl. Nr. 395.

— — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.

— — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.

— — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.

Technologie, Allgemeine chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg Nr. 113.

— **Mechanische,** v. Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.

Teerfarbstoffe, Die, mit bes. Berücksichtig. der synthetisch. Methoden v. Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule, Dresd. Nr. 214.

Telegraphenrecht v. Postinspektor Dr. jur. Alfred Wolcke in Bonn. **I:** Einleitung. Geschichtliche Entwicklung. Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, allgemeiner Teil. Nr. 509.

— — **II:** Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, besonderer Teil. Das Telegraphen-Strafrecht. Rechtsverhältnis d. Telegraphie z. Publikum. Nr. 510.

Telegraphie, Die elektrische, v. Dr. Lud. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments v. Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 272.

— **Die Entstehung des Neuen Testaments** v. Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Textilindustrie. I: Spinnerei und Zwirnerei v. Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt, Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

— **II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** v. Prof. M. Gürtler, Geh. Regierungsrat i. Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. M. 29 Fig. Nr. 185.

— **III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höheren Fachschule f. Textilindustr. in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. M. 54 Fig. Nr. 242.

— **Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen** v. M. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Nr. 2.

Thüringische Geschichte v. Dr. Ernst Devrient in Leipzig. Nr. 352.

Tierbiologie. Abriß der Biologie der Tiere v. Dr. Heinrich Simroth, Prof a. d. Univ. Leipzig. Nr. 131.

Tiere, Entwicklungsgeschichte der, von Dr. Johs. Meisenheimer, Prof. der Zoologie a. d. Universität Jena. **I:** Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— — **II:** Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Tiergeographie v. Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie a. d. Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. a. d. Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere v. Oberstudienr. Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorst. d. Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. M. 15 Abb. Nr. 282.
— **III: Reptilien und Amphibien** von Dr. Franz Werner, Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.
— **IV: Fische** von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Nr. 356.
— **V: Insekten** von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.
— **VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludw. Böhmig, Prof. d. Zool. a. d. Univ. Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.
— — II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. M. 97 Fig. Nr. 440.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Essen. Nr. 228.

Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Figuren auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Togo. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Prof. Dr. Gerh. Hessenberg in Breslau. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Tropenhygiene v. Medizinalrat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Instituts für Schiffs- und Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Trust. Kartell und Trust von Dr. S. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522.

Turnen, Das deutsche, v. Dr. Rudolf Gasch, Professor am König-Georg-Gymnasium in Dresden. Mit 87 Abbildungen. Nr. 628.

Turnkunst, Geschichte der, von Dr. Rudolf Gasch, Prof. a. König Georg-Gymnasium Dresden. Mit 17 Abbildungen. Nr. 504.

Ungarn. Landeskunde von Österreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Prof. an der Universität Prag. Mit 10 Textillustr. u. 1 Karte. Nr. 244.

Ungarische Literatur, Geschichte der, von Prof. Dr. Ludwig Katona und Dr. Franz Szinnyei, beide an der Universität Budapest. Nr. 550.

Ungarische Sprachlehre v. Dr. Josef Szinnyei, o. ö. Prof. an der Universität Budapest. Nr. 595.

Unterrichtswesen. Geschichte d. deutschen Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende d. 18. Jahrh. Nr. 275.
— — II. Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Untersuchungsmethoden, Agrikulturchemische, von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moritz Hoernes, Professor an der Universität Wien. Mit 85 Abbild. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken d. bildenden Künste u. Photographie v. Staatsanw. Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.
— **Das deutsche,** an literarischen, künstlerischen u. gewerbl. Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Urzeit. Kultur der Urzeit von Dr. Moritz Hoernes, o. ö. Prof. an der Univ. Wien. 3 Bändch. I: Steinzeit. Mit 40 Bildergrupp. Nr. 564.
— — **II:** Bronzezeit. Mit 36 Bildergruppen. Nr. 565.
— — **III:** Eisenzeit. Mit 35 Bildergruppen. Nr. 566.

Vektoralanalysis v. Dr. Siegfr. Valentiner, Prof. an der Bergakademie in Clausthal. Mit 16 Fig. Nr. 354.

Veranschlagen, Das, im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch üb. d. Wesen d. Kostenanschlags v. Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Fig. Nr. 385.

Vereinigte Staaten. Landeskunde der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Professor Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädt. Realgymnasium in Berlin. I. Teil: Mit 22 Karten und Figuren im Text und 14 Tafeln. Nr. 381.

— — **II.** Teil: Mit 3 Karten im Text, 17 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 382.

Vergil. Die Gedichte des P. Vergilius Maro. In Auswahl mit einer Einleitung u. Anmerkungen herausgeg. von Dr. Julius Ziehen. **I:** Einleitung und Aeneis. Nr. 497.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. **I:** Feldmessen und Nivellieren. Mit 146 Abb. Nr. 468.

— — **II:** Der Theodolit. Trigonometrische u. barometr. Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 469.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 180.

Versicherungswesen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Professor der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. **I:** Allgemeine Versicherungslehre. Nr. 262.

— — **II:** Die einzelnen Versicherungszweige. Nr. 636.

Völkerkunde v. Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos d. ethnogr. Sammlung d. naturhist. Hofmuseums u. Privatdozent a. d. Univ. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Völkernamen. Länder- u. Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Volksbibliotheken (Bücher- u. Lesehallen), ihre Einrichtung u. Verwaltung v. Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik v. Präsident Dr. R. van der Borght, Berlin. Nr. 177.

Waffen, Die blanken, und die Schutzwaffen, ihre Entwicklung von der Zeit der Landsknechte bis zur Gegenwart m. besonderer Berücksichtigung der Waffen in Deutschland, Österreich-Ungarn und Frankreich von W. Gohlke, Feuerwerks-Major a. D. in Berlin-Steglitz. Mit 115 Abbildungen. Nr. 631.

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Fig. im Text. Nr. 508.

Waldeck. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck von Professor Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer am Realgymnas. in Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide, mit Auswahl a. Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und an der Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

Walzwerke. Die, Einrichtung und Betrieb. Von Dipl.-Ing. A. Holverscheid, Oberlehrer a. d. Kgl. Maschinenbau- u. Hüttenschule in Duisburg. Mit 151 Abbild. Nr. 580.

Warenkunde von Dr. Karl Hassack, Prof. u. Leiter der k. k. Handelsakademie in Graz. **I.** Teil: Unorganische Waren. M. 40 Abb. Nr. 222.

— — **II.** Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Warenzeichenrecht, Das. Nach dem Gesetz z. Schutz d. Warenbezeichnungen v. 12. Mai 1894. Von Reg.-Rat J. Neuberg, Mitglied des Kais. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretische Physik II. T.: Licht u. Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. Mit 47 Abbildgn. Nr. 77.

Wärmekraftmaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- u. Kältemaschinen von M. Röttinger, Diplom-Ing. in Mannheim. M. 73 Fig. Nr. 2.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Wäscherei. Textilindustrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Prof. an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe v. Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ing. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung v. Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorst. d. landwirtsch. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Wasserinstallationen. Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen v. Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Wasserturbinen, Die, von Dipl.-Ing. P. Holl in Berlin. **I:** Allgemeines. Die Freistrahlturbinen. Mit 113 Abbildungen. Nr. 541.

— — **II:** Die Überdruckturbinen. Die Wasserkraftanlagen. Mit 102 Abbildungen. Nr. 542.

Wasserversorgung der Ortschaften v. Dr.-Ing. Robert Weyrauch, Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Fig. Nr. 5.

Weberei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wechselstromerzeuger von Ing. Karl Pichelmayer, Prof. an der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 40 Figuren. Nr. 547.

Wechselwesen, Das, v. Rechtsanw. Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

Wehrverfassung, Deutsche, von Geh. Kriegsrat Karl Endres, vortr. Rat i. Kriegsminist. i. München. Nr. 401.

Werkzeugmaschinen für Holzbearbeitung, Die, von Ing. Professor Hermann Wilda in Bremen. Mit 125 Abbildungen. Nr. 582.

Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung, Die, von Ing. Prof. Hermann Wilda in Bremen. **I:** Die Mechanismen der Werkzeugmaschinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaschinen. Mit 319 Abb. Nr. 561.

— — **II:** Die Bohr- und Schleifmaschinen. Die Hobel-, Shaping- u. Stoßmaschinen. Die Sägen u. Scheren. Antrieb u. Kraftbedarf. Mit 199 Abbild. Nr. 562.

Westpreußen. Landeskunde der Provinz Westpreußen von Fritz Braun, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Graudenz. Mit 16 Tafeln, 7 Textkarten u. 1 lith. Karte. Nr. 570.

Wettbewerb, Der unlautere, von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. **I:** Generalklausel, Reklameauswüchse, Ausverkaufswesen, Angestelltenbestechung. Nr. 339.

— — **II:** Kreditschädigung, Firmen- u. Namenmißbrauch, Verrat v. Geheimnissen, Ausländerschutz. Nr. 535.

Wirbellose Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. d. Zoologie an der Univ. Graz. **I:** Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen u. Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— — **II:** Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter u. Manteltiere. Mit 97 Fig. Nr. 440.

Wirkerei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wirtschaftlichen Verbände, Die, v. Dr. Leo Müffelmann in Rostock. Nr. 586.

Wirtschaftspflege. Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsass. in Berlin. Nr. 534.

Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Prof. der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. **I:** Das Wohnungswesen i. d. mod. Stadt. Nr. 495.

Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Prof. der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. **II:** Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches,** von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

— **Technisches,** enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.

— — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.

— — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.

— — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.

Württemberg. Württembergische Geschichte v. Dr. Karl Weller, Prof. a. Karlsgymn. i. Stuttgart. Nr. 462.

– **Landeskunde des Königreichs Württemberg** von Dr. K. Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. im Text. Nr. 58.

Zeitungswesen, Das deutsche, von Dr. R. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.

Zeitungswesen, Das moderne, (Syst. d. Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Zeitungswesen, Allgemeine Geschichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbild. Nr. 556.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der Königl. Baugewerkschule in Münster i. Westf. Mit 132 Fig. Nr. 57.

Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. **I:** Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken und Deckenbildungen, hölz. Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengwerke. Mit 169 Abbildungen. Nr. 489.

— — **II:** Dächer, Wandbekleidungen, Simsschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.

Zivilprozeßrecht, Deutsches, von Prof. Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.

Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Städtischen Chem. Laboratoriums Stuttgart. Nr. 109.

Zwangsversteigerung, Die, und die Zwangsverwaltung von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. Nr. 523.

Zwirnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Soeben erschien:

Das Gefühl
Eine psychologische Untersuchung

Von

Prof. Dr. Theobald Ziegler

Fünfte, durchgesehene und verbesserte Auflage

Broschiert M. 4.20, gebunden M. 5.20

Als dieses Buch vor 19 Jahren zum ersten Male erschien, da wirkte die Theorie des Verfassers von der Priorität des Gefühls und von dem Einfluß desselben auf alle Gebiete des geistigen Lebens, vor allem auch auf Bewußtsein und Apperzeption, trotz des Vorgangs von Horwicz wie ein ganz Neues, das als gegen den Strom der vorwiegend intellektualistischen oder auch schon voluntaristischen Auffassung der Psychologie schwimmend, wenig Gläubige fand. Allein es hat sich trotz dieser anfänglichen Ablehnung durchgesetzt und gehört heute zu den meist gelesenen Schriften über Psychologie; die Anschauung, die es vertritt, steht längst nicht mehr vereinzelt da. Zu diesem Sich-Durchsetzen hat auch der Stil und die ganze Haltung des Buches beigetragen, die gleichweit entfernt sind von unwissenschaftlicher Popularität wie von trockener pedantischer Gelehrsamkeit. Auch die ästhetischen und religionsphilosophischen ethischen Abschnitte haben ihm viele Freunde erworben. Die neue, fünfte Auflage, die schon nach vier Jahren wieder notwendig geworden ist, hält an dem vom Verfasser als richtig Erkannten durchaus fest, sie zieht sogar die Linien da und dort noch schärfer und bestimmter; insbesondere sind die Kapitel über das körperliche Gefühl und über die Gefühlsäußerungen in diesem Sinne und unter Berücksichtigung der neueren Forschung und ihrer Ergebnisse umgearbeitet und erweitert worden. Überhaupt trägt die neue Auflage nach, was seit dem Erscheinen der vierten Auflage zur Lehre vom Gefühl wertvolles Neues zutage gefördert worden ist, und setzt sich dabei gelegentlich auch polemisch mit allerlei Angriffen und entgegenstehenden Anschauungen auseinander. So ist das Buch durchaus auf den neuesten Stand der psychologischen Forschung gebracht und ergänzt, und doch ist es in seinen Grundanschauungen und in seiner Anlage nach wie vor das alte geblieben.

Roßberg'sche Buchdruckerei, Leipzig

GJG
1785