

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

~~20~~

Druk, U. J. Zam. 356. 10.000.

Dr. W. Sternberg

I

Die Elemente
der Potentialtheorie

Mit 5 Figuren



901

© 533406

Sammlung Götschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren, allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Götschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Belt & Comp.

Berlin W. 10 und Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“
ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leicht-
verständliche und übersichtliche Einführung
in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und
Technik zu geben; in engem Rahmen, auf
streng wissenschaftlicher Grundlage und unter
Berücksichtigung des neuesten Standes der
Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen
zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne
Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber
dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zu-
sammenhange miteinander, so daß das Ganze,
wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche,
systematische Darstellung unseres gesamten
Wissens bilden dürfte.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

A u
ber b



100000295840

l f f c
postfrei

Bibliothek zur Mathematik u. Astronomie

a u s d e r S a m m l u n g G ö s c h e n

- Geschichte der Mathematik** von Oberstudienrat
Dr. H. Wieleitner. 2 Bände Nr. 226, 875
- Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarith-
mische und trigonometrisches Rechnen in zwei
Farben** zusammengestellt von Prof. Dr. Hermann
Schubert. Neue Ausgabe von Prof. Dr. Robert Haufner. Nr. 81
- Fünfstellige Logarithmen** von Direktor Prof. Aug. Adler. Nr. 423
- Mathematische Formelsammlung** v. Prof. O. Th. Bürk-
len. Neubearb. von Dr. F. Ringleb. Mit 36 Fig. Nr. 51
- Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades** von
Prof. Dr. H. Schubert, Neubearb. von Prof. P. B. Fischer. Nr. 47
- Elementare Algebra** von Prof. P. B. Fischer. Mit 20 Fig. Nr. 930
- Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra** v. Prof.
Dr. Herm. Schubert, Neubearb. v. Prof. P. B. Fischer. M. 8 Fig. Nr. 48
- Höhere Algebra** von Prof. Dr. H. Hasse. 2 Bände Nr. 931, 932
- Praktisches Zahlenrechnen** v. Prof. Dr.-Ing. P. Werk-
meister. Mit 58 Figuren Nr. 405
- Elementare Reihenlehre** von Prof. Dr. H. Falckenberg.
Mit 4 Fig. im Text Nr. 943
- Mengenlehre** von Prof. Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren Nr. 999
- Determinanten** von Prof. P. B. Fischer Nr. 402
- Gruppentheorie** von Dr. Ludw. Baumgartner. Mit 6 Fig. Nr. 837
- Niedere Analysis** von Prof. Dr. B. Sporer. Mit 5 Figuren Nr. 53
- Höhere Analysis I: Differentialrechnung** von Rektor
Dr. F. Junker, Neubearb. von Prof. Dr. A. Witting. Mit
167 Übungsbeispielen und 67 Figuren Nr. 87
- Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differential-
rechnung** von Rektor Dr. Friedr. Junker. Neubearb. von
Prof. Dr. A. Witting. Mit 47 Figuren Nr. 146
- Höhere Analysis II: Integralrechnung** von Rektor
Dr. Friedrich Junker. Mit 89 Figuren Nr. 88
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integral-
rechnung** von Rektor Dr. Fried. Junker. Mit 50 Figuren Nr. 147
- Gewöhnliche Differentialgleichungen** v. Dr. G. Hoheisel Nr. 920
- Partielle Differentialgleichungen** v. Prof. Dr. G. Hoheisel Nr. 1003
- Einleitung in die Funktionentheorie** (Theorie der
komplexen Zahlenreihen) v. Oberl. M. Rose. Mit 10 Fig. Nr. 581
- Funktionentheorie** von Prof. Dr. Konrad Knopp.
- I. Grundlagen der allg. Theorie der analyt. Funktionen. Mit 8 Fig. Nr. 668
- II. Anwendungen u. Weiterführung d. allgem. Theorie. M. 7 Fig. Nr. 703
- Aufgabensammlung zur Funktionentheorie** von Prof.
Dr. K. Knopp. 2 Bde. Nr. 877, 878
- Einführung in die konforme Abbildung** von Prof.
Dr. Ludwig Bieberbach Nr. 768
- Potentialtheorie** v. Dr. W. Sternberg. 2 Bände. Mit 6 Fig. Nr. 901, 944
- Vektoranalysis** von Prof. Dr. Siegr. Valentiner. Mit 13 Fig. Nr. 354
- Graphische Integration** v. Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig. Nr. 801
- Numerische Integration** von Dr. F. A. Willers. Mit 2 Fig. Nr. 864
- Ebene Geometrie** v. Prof. G. Mahler. M. 110 zweifarb. Fig. Nr. 41
- Ebene und sphärische Trigonometrie** von Prof. Dr.
Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren Nr. 99
- Sammlung v. Aufgaben aus d. ebenen u. sphärischen
Trigonometrie** v. Studienrat Dr. Fritz Heiland. Mit 26 Fig. Nr. 848

Stereometrie von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 81 Figuren	Nr. 97
Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren	Nr. 779
Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung von Prof. Dr. K. Doehlemann. 2 Bände. Mit 114 Figuren .	Nr. 72, 876
Darstellende Geometrie von Prof. Dr. Robert Haufner. 2 Bände. Mit 98 Figuren	Nr. 142, 143
Nichteuclidische Geometrie von Prof. Dr. R. Baldus. Mit 71 Fig.	Nr. 970
Geometrisches Zeichnen von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln	Nr. 58
Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs. Mit 56 Figuren	Nr. 532
Graphische Darstellung in Wissenschaft u. Technik von Obering. Prof. Dr. Marcello Pirani. Mit 58 Fig. . .	Nr. 728
Analytische Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haufner. Mit 60 Fig. im Text	Nr. 65
Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haufner. Mit 31 Figuren .	Nr. 256
Analytische Geometrie des Raumes von Prof. Dr. M. Simon. Mit 27 Figuren	Nr. 89
Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 8 Figuren	Nr. 309
Koordinatensysteme von Prof. P. B. Fischer. Mit 8 Figuren	Nr. 507
Algebraische Kurven. Neue Bearb. v. Prof. Dr. H. Wieleitner. I. Gestaltl. Verhältnisse. Mit 97 Figuren	Nr. 435
II. Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren	Nr. 436
Wahrscheinlichkeitsrechnung von Prof. Dr. O. Knopf. 2 Bände. Mit 10 Figuren	Nr. 508, 871
Politische Arithmetik von Prof. Dr. E. Förster	Nr. 879
Ausgleichsrechnung n. d. Methode d. Kleinsten Quadrate von Prof. W. Weitbrecht. 2 Bde. Mit 16 Fig. Nr.	302, 641
Vermessungskunde von Prof. Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 3 Bände. Mit 294 Figuren	Nr. 468, 469, 862
Geodäsie (Landesvermessung und Erdmessung) von Prof. Dr. G. Förster. Mit 33 Figuren	Nr. 102
Mathematische Instrumente v. Dr. Fr. A. Willers. M. 68 Fig.	Nr. 922
Astronomische Geographie von Prof. Dr. Siegmund Günther. Mit 52 Abbildungen	Nr. 92
Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neubearb. v. Prof. Dr. Herm. Kobold. I. Das Planetensystem. Mit 33 Figuren	Nr. 11
II. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Fig. und 2 Sternkarten	Nr. 529
Astrophysik von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Neubearb. von Dr. H. Ludendorff. Mit 14 Figuren	Nr. 91
Kartenkunde von Dr. M. Groll, neubearb. v. Dr. Otto Graf. I. Die Projektionen. Mit 56 Abbildungen	Nr. 30
II. Der Karteninhalt u. d. Messen auf Karten. Mit 39 Abb.	Nr. 599
Kartographische Aufnahmen u. geogr. Ortsbestimmung auf Reisen von Prof. Dr.-Ing. R. Hegershoff u. Prof. Dr.-Ing. O. Israel. I. Topograph. Aufnahmen. Mit 66 Figuren.	Nr. 607
Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie von Prof. Dr. Hans Dock. Mit 57 Abbildungen	Nr. 699
Versicherungsmathematik von Prof. Dr. Friedr. Boehm. 2 Bände	Nr. 180, 917

Sammlung Göschen

Potentialtheorie

Von

Dr. W. Sternberg

Privatdozent in Heidelberg

I

Die Elemente der Potentialtheorie

Mit 5 Figuren



Berlin und Leipzig

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1925



I 26

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.

I 301456

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.
967825.

Akc. Nr. 3282 / 51

BPK-B-1/2017

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung. Grundbegriffe.

	Seite
1. Mengen, Gebiete	7
2. Kurven, Flächen	13
3. Abteilungsweise Stetigkeit, Ableitungen auf der Begrenzung . . .	17

Kapitel I.

Definition und wichtigste Eigenschaften des Potentials.

4. Newtonsches Potential eines Körpers	20
5. Logarithmisches Potential einer Fläche	25
6. Potentiale der einfachen und der doppelten Belugung	27
7. Die Laplacesche Gleichung	32
8. Verhalten der Potentiale im Unendlichen	35
9. Das Potential als Lösung der Laplaceschen Gleichung	39
10. Niveaulächen und Kraftlinien	45
11. Beispiele zum Potential	48

Kapitel II.

Die Greenschen Formeln.

12. Der Integralsatz von Gauß	51
13. Die Formeln von Green	56
14. Fortsetzung	61
15. Analytischer Charakter des Potentials	69
16. Entwicklung im Unendlichen	73
17. Die Lage der Extrema	79

Kapitel III.

Beziehung zur Funktionentheorie.

18. Die konjugierte Potentialfunktion	82
19. Entwicklung in kartesischen und in Polarkoordinaten	87
20. Umkehrung des Gedankenganges von § 18.	90
21. Invarianz des Potentials gegenüber konformer Abbildung.	93

Kapitel IV.

Die Stetigkeits- und Unstetigkeits-
eigenschaften der einzelnen Potentiale.

	Seite
22. Hilfsbetrachtungen	96
23. Stetigkeit des Raumpotentials und des Flächenpotentials der einfachen Schicht	101
24. Unstetigkeit des Potentials der Doppelschicht	104
25. Unstetigkeit der Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht	109
26. Die Normalableitung des Potentials der Doppelschicht	115
27. Die Gleichung von Poisson	123
28. Analoge Sätze für das logarithmische Potential	127
29. Dirichlets charakteristische Eigenschaften des Potentials	130
30. Anwendungen	134

Literatur.

Die grundlegende Arbeit von Gauß: „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstößungskräfte“ ist abgedruckt in seinen Gesammelten Werken Bd. 5, S. 200ff., sowie in Ostwalds Klassikern Nr. 2, herausgegeben von A. Wangerin.

S. ferner

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften:

Bd. II A 7b: Potentialtheorie. Von H. Burkhardt und Fr. Meyer. 1900.

Bd. II C3: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.

Von L. Lichtenstein. 1918.

Lehrbücher und wichtige Originalarbeiten sind:

A. Harnack, Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene. Leipzig 1887.

H. A. Schwarz, Gesammelte Mathematische Abhandlungen. 2. Bd. S. 144—171 und S. 175—210. Berlin 1890.

A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie. Bd. 1 u. 2. Berlin 1899.

E. R. Neumann, Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Leipzig 1905. (Jablonowski-Preisschrift Nr. 37.)

J. Horn, Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Insbesondere VII. Abschnitt. Leipzig 1910.

Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. 5. Auflage. Bd. I. Abschnitt 11 bis 13. Braunschweig 1910. 6. Aufl., völlig neubearbeitet, herausgegeben von R. von Mises. 1925.

J. Plemelj, Potentialtheoretische Untersuchungen. Leipzig 1911. (Jablonowski-Preisschrift Nr. 40.)

E. R. Neumann, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie. Leipzig 1912. (Jablonowski-Preisschrift Nr. 41.)

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. Vierter Abschnitt. Leipzig, 2. Auflage 1912, 3. Auflage 1920.

A. Wangerin, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Berlin, Bd. I Neudruck 1922, Bd. II 1921.

E. Goursat, Cours d'analyse mathématique. Bd. III, 3. Auflage. Kapitel 27 u. 28. Paris 1923.

Wegen des engen Zusammenhanges zwischen Potential- und Funktionentheorie sowie konformer Abbildung sei noch hingewiesen auf die in dieser Sammlung erschienene „Funktionentheorie“ von K. Knopp, 2. Auflage, Bd. I 1918, Bd. II 1920 (Nr. 668 u. 703), sowie „Einführung in die konforme Abbildung“ von L. Bieberbach, 1915 (Nr. 768).

Für das Studium der Potentialtheorie ist im allgemeinen nur die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung, an einzelnen Stellen auch die der Elemente der Funktionentheorie erforderlich.

Einleitung.

Grundbegriffe¹⁾.

§ 1. Mengen. Gebiete.

Eine Punktmenge im Raume ist eine Gesamtheit von Punkten, welche so erklärt ist, daß man von jedem Punkte des Raumes entscheiden kann, ob er zu der Gesamtheit gehört oder nicht. Entsprechend wird die Punktmenge in der Ebene oder auf der Geraden definiert. Wir werden es insbesondere mit Mengen in der Ebene und im Raume zu tun haben²⁾. Beispiele für Punktfolgen in der Ebene sind:

- I. Die auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogenen Punkte $P(x, y)$, deren Koordinaten x und y ganze Zahlen sind.
- II. Die Punkte mit den Koordinaten $x = \frac{1}{m}$, $y = \frac{1}{n}$,
wo m und n unabhängig voneinander die Reihe der positiven ganzen Zahlen 1, 2, ... durchlaufen.
- III. Die Punkte im Innern des Kreises um den Ursprung als Mittelpunkt mit dem Radius 1 (Einheitskreis).

¹⁾ Die drei Paragraphen der Einleitung könnten zunächst überschlagen und die Lektüre bei § 4 begonnen werden. Wenn sich dann das Bedürfnis zeigt, möge der Leser auf die Einleitung zurückgreifen!

²⁾ Über Punktfolgen auf der Geraden siehe z. B. K. Knopp, Funktionentheorie I, 2. Aufl., §§ 3—5.

- IV. Die Punkte im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises.
- V. Die Punkte außerhalb des Einheitskreises.
- VI. Die Punkte, deren Koordinaten den Ungleichungen $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ genügen. Sie erfüllen die Kreisringfläche, welche von zwei konzentrischen Kreisen um den Ursprung mit den Radien 1 und 2 begrenzt wird.
- VII. Die Punkte der Ebene mit Ausschluß der Punkte der positiven Halbachse der x .

Beispiele für Punktmenge im Raume sind:

- VIII. Die Punkte $P(x, y, z)$, deren Koordinaten ganze Zahlen sind.
- IX. Die Punkte mit den Koordinaten $x = \frac{1}{m}$, $y = \frac{1}{n}$, $z = \frac{1}{p}$, wo m, n, p unabhängig voneinander die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen (unter Ausschluß der Null) durchlaufen.
- X. Die Punkte, deren Koordinaten den Ungleichungen $|x| < c$, $|y| < c$, $|z| < c$ bei gegebenem c genügen. Sie bilden offenbar das Innere eines Würfels.

Eine Punktmenge in der Ebene bzw. im Raume heißt „beschränkt“, wenn sich eine eo ipso positive Konstante k angeben läßt, so daß alle Punkte der Menge im Innern des Kreises bzw. der Kugel um den Ursprung mit dem Radius k liegen. Die Entfernung eines beliebigen Punktes der Menge vom Ursprung und auch die Beträge der Koordinaten eines solchen Punktes sind dann $< k$, also beschränkt. Welche der obigen Mengen sind beschränkt?

Unter „Umgebung“ eines Punktes P verstehen wir die Punkte einer Kreisfläche bzw. eines Kugelkörpers mit P als Mittelpunkt und irgendeinem Radius δ .

Ein Punkt heißt „Häufungspunkt“ einer Menge, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung von ihm (d. h. der Radius δ mag so klein sein, wie man will) stets unendlich viele Punkte der Menge liegen.

Die Menge I hat keinen Häufungspunkt, II hat unendlich viele, nämlich $(0, \frac{1}{n})$, $(\frac{1}{m}, 0)$ und $(0, 0)$, sämtliche Punkte von III sind Häufungspunkte.

Ein Häufungspunkt braucht nicht selbst Punkt der Menge zu sein. So ist es z. B. bei dem Häufungspunkte $(0, 0)$ von II; er gehört der Menge nicht an. Ein anderes Beispiel liefert III; die Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises sind Häufungspunkte, die der Menge nicht angehören.

Es gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß: *Jede aus unendlich vielen Punkten bestehende beschränkte Menge hat wenigstens einen Häufungspunkt¹⁾*.

Ein Punkt, welcher der Menge angehört, wird „innerer“ Punkt genannt, wenn eine genügend kleine Umgebung von ihm ganz aus Punkten der Menge besteht.

Ein Punkt, welcher der Menge angehört, heißt „isolierter“ Punkt, wenn eine genügend kleine Umgebung von ihm gar keinen Punkt der Menge (außer dem vorgelegten Punkte selbst) enthält.

Ein Punkt wird „Randpunkt“ oder „Grenzpunkt“ der Menge genannt, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung von ihm unendlich viele Punkte der Menge liegen und wenigstens ein Punkt, der nicht zur Menge gehört. Ein Grenzpunkt kann zur Menge gehören, braucht es aber nicht. Es ist klar, daß ein nicht zur Menge gehöriger Häufungspunkt Grenzpunkt sein muß.

¹⁾ Einen Beweis, den wir wegen Raummangels unterdrücken, findet man z. B. bei Knopp, I. c., § 6.

Die Menge II hat nur isolierte Punkte; ferner sind ihre Häufungspunkte nicht zur Menge gehörige Grenzpunkte. Die Punkte von III sind sämtlich innere Punkte; ferner sind die Punkte der Kreisperipherie nicht zur Menge gehörige Grenzpunkte. Im Falle IV sind die Punkte der Kreisperipherie Grenzpunkte, die der Menge angehören.

Man prüfe alle oben erklärten Mengen auf innere, isolierte und Grenzpunkte!

Folgende Sätze ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen: Gehört ein Häufungspunkt der Menge an, so ist er entweder innerer oder Grenzpunkt. Ein Punkt der Menge, welcher kein Häufungspunkt ist, muß ein isolierter Punkt sein. Eine Menge kann also keine anderen Punkte als innere, Grenz- und isolierte Punkte haben.

Eine Menge heißt „abgeschlossen“, wenn alle ihre Grenzpunkte ihr angehören. Z. B. ist IV abgeschlossen, III nicht. Die Gesamtheit der Grenzpunkte nennen wir „Begrenzung“ oder „Rand“. Eine Menge heißt „offen“, wenn sie nur innere Punkte enthält, wie z. B. III.

Ein nicht zur Menge gehöriger Punkt, der kein Grenzpunkt ist, soll „äußerer“ Punkt genannt werden.

Offenbar muß ein nicht zur Menge gehöriger Punkt entweder Grenzpunkt oder äußerer Punkt sein.

Eine offene Menge heißt „zusammenhängend“, wenn irgend zwei ihrer Punkte durch einen geradlinigen Streckenzug von endlicher Seitenzahl, dessen sämtliche Punkte der Menge angehören, verbunden werden können. Die Mengen III, V, VII, X sind zusammenhängend. Die Menge der Punkte der Ebene, deren Koordinaten entweder der Ungleichung $x^2 + y^2 < 1$ oder der Ungleichung $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 < 1$ genügen, ist nicht zusammenhängend. Sie besteht aber offenbar aus zwei Teilmengen, deren jede für sich zusammenhängend ist.

Eine offene zusammenhängende Menge nennen wir „Gebiet“. Ist T ein Gebiet, S seine Begrenzung, so heißt $T + S$ ein „Bereich“. Die Mengen III, V, VII und X sind Gebiete, IV und VI sind Bereiche. Mit Gebieten und Bereichen werden wir es im folgenden immer zu tun haben.

Wir werden das Unendlichferne der Ebene und ebenso das Unendlichferne des Raumes als einen einzigen Punkt ansehen. Die Berechtigung und Notwendigkeit dieser Auffassung ergibt sich immer dort, wo die Transformation durch reziproke Radien angewandt wird (§ 16). So ist es z. B. auch in der Funktionentheorie¹⁾, dagegen nicht in der projektiven Geometrie. Die Transformation durch reziproke Radien, auch Spiegelung am Einheitskreise bzw. an der Einheitskugel genannt, besteht in folgendem. Man ordnet jedem Punkte P der Ebene bzw. des Raumes denjenigen Punkt P_1 zu, der mit P auf demselben Halbstrahl durch den Nullpunkt 0 liegt und dessen Entfernung R_1 von 0 zu der Entfernung R des Punktes P von 0 reziprok ist, so daß die Gleichung $R \cdot R_1 = 1$ besteht. Hierdurch wird jedem im Endlichen gelegenen und von 0 verschiedenen Punkte P ein endlicher und von 0 verschiedener Punkt P_1 zugeordnet. Nur dem Punkte 0 selbst entspricht zunächst kein Punkt. Nun ist zu bedenken, daß, wenn R unbegrenzt abnimmt, also P dem Nullpunkte beliebig nahekommt, R_1 unbegrenzt zunimmt. Man beseitigt daher die Ausnahmestellung von 0 , indem man das Unendlichferne der Ebene bzw. des Raumes zu einem einzigen Punkte zusammenfaßt und diesen Punkt, „den“ unendlich fernen Punkt, dem Nullpunkte zuordnet. Die Transformation durch reziproke Radien wird dadurch zu einer ausnahmslos umkehrbar eindeutigen gemacht.

¹⁾ Vgl. etwa K. Knopp, l. c., I. S. 7.

Jetzt entspricht *jedem* Punkte im Innern des Einheitskreises bzw. der Einheitskugel ein Punkt im Äußern und *jedem* Punkte im Äußern ein Punkt im Innern, während übrigens die Punkte der Begrenzung einzeln in sich übergehen. — Unter Umgebung des unendlich fernen Punktes verstehen wir das Äußere eines Kreises bzw. einer Kugel um den Nullpunkt.

Wir kehren zur Untersuchung der Gebiete zurück. Es kann vorkommen, daß die Begrenzung eines Gebietes sich auf einen einzigen Punkt reduziert. Ein Beispiel ist die Menge aller Punkte der Ebene bzw. des Raumes mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes („eigentliche“ Ebene, bzw. „eigentlicher“ Raum) oder aber die Menge aller Punkte mit Einschluß des unendlich fernen Punktes und Ausschluß irgendeines endlichen Punktes, etwa des Ursprungs. Man bemerke übrigens, daß diese Gebiete keine äußeren Punkte zulassen. Ein anderes Beispiel für das Fehlen äußerer Punkte bietet die Menge VII.

Wir nennen „Querschnitt“ eines ebenen Gebietes T einen aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzten, sich selbst nicht durchschneidenden Streckenzug, der zwei Randpunkte von T verbindet, sonst ganz im Innern von T verläuft. Die beiden genannten Randpunkte müssen nicht notwendig voneinander verschieden sein.

Ein ebenes Gebiet heißt „einfach zusammenhängend“, wenn es durch jeden Querschnitt zerstückelt, d. h. in zwei mit einander nicht zusammenhängende Teilgebiete zerlegt wird. Ein ebenes Gebiet heißt „ m -fach zusammenhängend“, wenn es durch m Querschnitte stets zerstückelt wird, während es andererseits $m - 1$ geeignete Querschnitte gibt, durch die es nicht zerstückelt wird. Offenbar ist III einfach, dagegen ein Kreisringgebiet zweifach zusammenhängend.

Sei T irgendein einfach zusammenhängendes Gebiet, z. B. das Innere des Einheitskreises. Nimmt man einen ganz in seinem Innern gelegenen Bereich oder auch einen innern Punkt hinweg, so erhält man ein zweifach zusammenhängendes Gebiet. Entfernt man zwei innere Bereiche, so erhält man ein dreifach zusammenhängendes Gebiet usw. Die Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes ist einfach zusammenhängend, ebenso die Ebene mit Ausschluß des Nullpunktes und Einschluß des unendlich fernen Punktes. Die Ebene mit Ausschluß eines endlichen und des unendlich fernen Punktes ist zweifach zusammenhängend.

Im Falle eines einfach zusammenhängenden Gebietes begrenzt jede ganz im Gebiete liegende geschlossene Kurve (über Kurven und Flächen s. § 2) ein ganz aus inneren Punkten bestehendes Teilgebiet. Im Falle eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes aber gibt es stets ganz im Gebiete liegende Kurven, die ein Gebiet begrenzen, welches Randpunkte des vorgelegten Gebietes enthält. Wird ein Gebiet von einer einzigen, bzw. von m getrennten geschlossenen Kurven begrenzt, so ist es offenbar einfach, bzw. m -fach zusammenhängend. Hierbei darf sich jede Begrenzungskurve auf einen Punkt zusammenziehen. — Ein räumliches Gebiet nennen wir einfach zusammenhängend, wenn seine Begrenzung aus einer geschlossenen Fläche, m -fach zusammenhängend, wenn sie aus m getrennten geschlossenen Flächen besteht. Jede Begrenzungsfläche darf sich auch auf einen Punkt reduzieren.

§ 2. Kurven. Flächen.

Unter einer „geschlossenen Jordanschen Kurve“ verstehen wir eine beschränkte Punktmenge in der Ebene, die

umkehrbar eindeutig und stetig auf den Einheitskreis abgebildet werden kann. Eine solche Kurve läßt sich durch das Gleichungssystem

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (1)$$

darstellen, wo f und g stetige Funktionen von t mit der Periode 2π sind. Der Parameter t bezeichnet hierbei die Bogenlänge auf dem Einheitskreise. Für diesen selbst hat man

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Eine „offene Jordansche Kurve“ ist eine beschränkte Punktmenge, die umkehrbar eindeutig und stetig auf ein Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ bezogen werden kann. Sie läßt sich durch (1) darstellen, wo nun f und g im Intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$ stetig sind. Aus der Eineindeutigkeit der Abbildung folgt, daß eine Jordansche Kurve keine mehrfachen Punkte haben kann, da ja einem mehrfachen Punkte mehrere verschiedene Punkte des Einheitskreises bzw. des Intervalls $t_0 \dots t_1$ entsprechen müßten. Bedeuten also (x_1, y_1) die Koordinaten irgendeines ihrer Punkte, so haben die Gleichungen $x_1 = f(t)$, $y_1 = g(t)$ nur eine Lösung $t = t_1$, bzw. nur solche Lösungen, die sich um additive Vielfache von 2π unterscheiden. Eine Jordansche Kurve braucht in keinem ihrer Punkte eine Tangente zu besitzen.

Im folgenden werden aber gewöhnlich speziellere Klassen von Kurven, insbesondere Kurven ohne mehrfache Punkte mit stetig sich drehender Tangente auftreten. Diese können durch Gleichungen der Form (1) dargestellt werden, wo nun f und g nicht bloß stetig sind, sondern auch stetige Ableitungen erster Ordnung $f'(t)$, $g'(t)$ besitzen, die als nirgends gleichzeitig verschwindend vorausgesetzt werden. Ein Punkt, in welchem keine eindeutig bestimmte Tangente existiert, d. h. ein singulärer Punkt, z. B. ein mehrfacher Punkt oder eine Spitze oder eine Ecke, hat die Eigen-

schaft, daß in ihm gleichzeitig $f'(t) = 0$, $g'(t) = 0$ ist. Ein nicht singulärer Punkt wird auch gewöhnlicher oder regulärer Punkt der Kurve genannt. Für einen solchen ist also die Ungleichung $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 > 0$ hinreichend.

Nimmt man an, daß die in (1) auftretenden Funktionen f und g auch stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzen, so hat die Kurve stetige Krümmung.

Eine Kurve heißt analytisch, wenn sie sich in der Form (1) darstellen läßt und f und g Funktionen bedeuten, die in der Umgebung jedes Punktes t_0 ihres Definitionsintervalls in Potenzreihen von $t - t_0$ entwickelt werden können.

Gelegentlich werden stetige Kurven vorkommen, die aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Tangente bzw. stetiger Krümmung bzw. analytischem Charakter bestehen. Ein Punkt, in dem zwei Stücke zusammenstoßen, darf dann eine Ecke oder Spitze sein. Er kann als singulärer Punkt der Gesamtkurve angesehen werden.

Wollen wir eine Kurve im Kleinen darstellen, d. h. in der beliebig kleinen Umgebung eines als regulär vorausgesetzten Punktes $P_0(x_0, y_0)$ mit dem Parameterwert t_0 , so lösen wir, wenn etwa $f'(t_0) \neq 0$ ist, die erste der beiden Gleichungen (1) nach t auf. Nach dem Fundamentalsatz aus der Theorie der Umkehrfunktionen existiert nämlich eine Funktion $t = \varphi(x)$, die in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$ eindeutig bestimmt ist, die erste Gleichung (1) identisch befriedigt und für $x = x_0$ den Wert t_0 annimmt. Führen wir diese Funktion $\varphi(x)$ für t in die zweite Gleichung (1) ein, so gewinnen wir y als Funktion von x etwa in der Form

$$y = F(x).$$

Dabei ist die eindeutige Funktion $F(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ mit stetiger erster, bzw. mit stetiger zweiter

Ableitung versehen, bzw. in eine Potenzreihe von $x - x_0$ entwickelbar, je nachdem die Kurve in der Umgebung von P_0 mit stetiger Tangente oder mit stetiger Krümmung ausgestattet oder analytisch ist.

Ist eine Kurve durch eine Gleichung der Form $f(x, y) = 0$ dargestellt, wo f stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, so ist $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 > 0$ hinreichend für einen regulären Punkt.

Eine geschlossene bzw. nicht geschlossene Jordansche Fläche ist eine beschränkte Punktmenge im Raume, die umkehrbar eindeutig und stetig auf die Einheitskugel bzw. auf einen beschränkten ebenen Bereich abgebildet werden kann. Sie braucht in keinem ihrer Punkte eine Tangentialebene zu besitzen.

Im folgenden werden aber gewöhnlich Flächen mit stetig sich drehender Tangentialebene (oder, was auf dasselbe hinauskommt, Normale) und noch spezieller solche mit stetiger Krümmung auftreten. Denkt man sich derartige Flächen mit Hilfe Gaußscher Parameter in der Form

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v) \quad (2)$$

dargestellt, so haben die Funktionen f, g, h in ihrem Definitionsgebiete in der (u, v) -Ebene stetige partielle Ableitungen erster, bzw. außerdem noch solche zweiter Ordnung.

Sind die Funktionen f, g, h in der Umgebung jeder Stelle u_0, v_0 ihres Definitionsgebietes in Potenzreihen von $u - u_0, v - v_0$ entwickelbar, so heißt die Fläche analytisch.

Es wird vorausgesetzt, daß die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nirgends gleichzeitig verschwinden. Ein singulärer Punkt der Fläche, z. B. die Spitze eines Kegels, in welchem keine eindeutig bestimmte Tangentialebene existiert, hat die Eigenschaft, daß in ihm alle drei Determinanten gleichzeitig verschwinden. Für einen regulären Punkt ist also die obige Voraussetzung hinreichend.

Gelegentlich werden Flächen auftreten, die aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Tangentialebene bzw. Krümmung bzw. analytischem Charakter bestehen. Zwei solche Stücke stoßen dann längs einer Kante zusammen, deren Punkte keine eindeutig bestimmte Tangentialebene besitzen müssen, also singulär sein können.

Ist $f(x, y, z) = 0$ die Flächengleichung, so ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 > 0$$

hinreichend für einen regulären Punkt.

§ 3. Abteilungsweise Stetigkeit. Ableitungen auf der Begrenzung.

Den Begriff der Stetigkeit einer Funktion setzen wir natürlich als bekannt voraus.

Eine in einem Intervalle $a \leq x \leq b$ eindeutig erklärte Funktion $f(x)$ heißt abteilungsweise stetig, wenn sie mit Ausschluß einer endlichen Anzahl von inneren Punkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ($n \geq 1$) stetig ist und in den Unstetigkeitspunkten endliche Sprünge macht: D. h. für jeden Punkt ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) existieren die Grenzwerte $f(\xi_i - 0)$ und $f(\xi_i + 0)$ und sind voneinander verschieden. In jedem der Intervalle $a\xi_1, \xi_1\xi_2, \dots, \xi_n b$ kann die Funktion durch Festsetzung geeigneter Werte in den Endpunkten zu einer auch

in den Endpunkten stetigen gemacht werden. Man gibt ihr im Punkte ξ_1 von $a\xi_1$ den Wert $f(\xi_1 - 0)$, im Punkte ξ_1 von $\xi_1\xi_2$ den Wert $f(\xi_1 + 0)$ usw.

Eine in einem ebenen Bereiche erklärte Funktion f zweier Variablen heißt abteilungsweise stetig, wenn sie mit Ausschluß einer endlichen Anzahl einander nicht schneidender Kurven, die entweder geschlossen sind oder zwei Punkte der Begrenzung verbinden, stetig ist und beim Durchgange durch die Unstetigkeitslinien endliche Sprünge macht: D. h. für jeden Punkt einer solchen Linie existieren zwei Grenzwerte, die man erhält, wenn man von der einen bzw. von der anderen Seite der Linie her jenem Punkt beliebig nahe kommt. Durch die Unstetigkeitskurven ist der gegebene Bereich in eine endliche Anzahl von Teilbereichen zerlegt, in deren jedem die Funktion durch Festsetzung geeigneter Randwerte zu einer stetigen gemacht werden kann. Wir werden immer annehmen, daß die Unstetigkeitskurven mit stetiger Tangente versehen sind.

Die abteilungsweise Stetigkeit in einem räumlichen Bereiche für eine Funktion dreier Variablen wird in völlig analoger Weise erklärt.

Es liege ein beschränktes ebenes Gebiet T vor. Die Randkurve S möge eine stetige Tangente besitzen oder aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Tangente zusammengesetzt sein, wobei in den Punkten, in welchen zwei Stücke zusammenstoßen, Ecken zugelassen werden. Sei $f(x, y)$ eine in $T + S$ stetige Funktion, welche in T stetige partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ besitzt. Die in irgendeiner festen Richtung (l) genommene Ableitung

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dl}$$

ist dann ebenfalls in T stetig. Es möge $\frac{df}{dl}$ bei Annäherung an einen bestimmten Punkt s des Randes S längs jeder beliebigen ganz in T liegenden Punktmenge, die s zum Häufungspunkt hat, stets gegen denselben Grenzwert konvergieren. Definieren wir die Ableitung $\frac{df}{dl}$ im Punkte s durch diesen Grenzwert, den wir mit $\frac{df(s)}{dl}$ bezeichnen, so ist $\frac{df}{dl}$ zu einer auch im Randpunkte s stetigen Funktion gemacht. Existiert $\frac{df(s)}{dl}$ in dem angegebenen Sinne in allen Punkten des Randes, so ist $\frac{df}{dl}$ in ganz $T + S$ als stetige Funktion erklärt.

Jetzt sei s ein gewöhnlicher Punkt von S , in dem also eine eindeutig bestimmte Tangente existiert. Wir denken uns in s die Normale (n) konstruiert, die ins Innere von T hinein positiv gerechnet wird. Auf (n) nehmen wir in T irgendeinen Punkt $P(x, y)$ an und bilden dort die Ableitung in Richtung der positiven Normalen $\frac{df(x, y)}{dn}$. Konvergiert $\frac{df(x, y)}{dn}$ bei Annäherung des Punktes P an s längs der Normalen gegen einen bestimmten Grenzwert, so wird dieser Grenzwert als Normalableitung $\frac{df(s)}{dn}$ im Randpunkte s bezeichnet. Die Normalableitung kann vorhanden sein, ohne daß $\frac{\partial f}{\partial x}$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}$ in s existieren. Es möge $\frac{df(s)}{dn}$ in allen Randpunkten vorhanden sein¹⁾. Bil-

¹⁾ In diesem Falle darf die Randkurve S keine singulären Punkte enthalten.

den die Werte $\frac{df(s)}{dn}$ eine stetige Funktion des Ortes auf dem Rande, so sagen wir, die Funktion f habe auf S eine stetige Normalableitung.

Die obigen Definitionen lassen sich ohne Schwierigkeit auf räumliche Gebiete übertragen.

Kapitel I.

Definition und wichtigste Eigenschaften des Potentials.

§ 4. Newtonsches Potential eines Körpers.

Zwei materielle Punkte P und Q des dreidimensionalen Raumes mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) bzw. (ξ, η, ζ) und den Massen m bzw. μ üben eine wechselseitige Anziehung aufeinander aus, die durch das *Newtonsche Gravitationsgesetz* bestimmt wird. Ist

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

die Entfernung der beiden Punkte voneinander, k eine von ihrer Lage und ihren Massen unabhängige Größe, die sog. Gravitationskonstante, so gilt für die Anziehungskraft K die Gleichung

$$K = k \cdot \frac{m\mu}{r^2}. \quad (\text{A})$$

Die Kraft ist also den Massen der Punkte direkt, dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional. Die Richtung der Kraft fällt in die Verbindungsgerade der Punkte. Was die physikalische Bedeutung der Gravitationskonstanten be-

trifft, so ist sie offenbar die Kraft, mit der zwei um die Längeneinheit voneinander entfernte Masseneinheiten sich wechselseitig anziehen, da aus $m = \mu = 1$ und $r = 1$ die Gleichung $K = k$ folgt. Ihr Wert hängt also von der Wahl der obengenannten Einheiten ab.

Wir untersuchen die von Q auf P ausgeübte Anziehung, betrachten also Q als anziehenden, P als angezogenen Punkt, so daß K von P nach Q gerichtet ist. Für die drei Komponenten X, Y, Z dieser Kraft in Richtung der Koordinatenachsen hat man die Formeln

$$X = K \cos \alpha, \quad Y = K \cos \beta, \quad Z = K \cos \gamma, \quad (1)$$

wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Richtung PQ mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet. Wegen

$$\cos \alpha = \frac{\xi - x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{\eta - y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{\zeta - z}{r}$$

kann man schreiben

$$X = km\mu \frac{\xi - x}{r^3}, \quad Y = km\mu \frac{\eta - y}{r^3}, \quad Z = km\mu \frac{\zeta - z}{r^3}. \quad (1^*)$$

Wir werden im folgenden, und zwar lediglich der Einfachheit halber, $km = 1$ annehmen, was man z. B. durch Wahl von m oder durch Wahl der zur Bestimmung von x maßgebenden Einheiten bewirken kann. Wir haben also

$$X = \mu \frac{\xi - x}{r^3}, \quad Y = \mu \frac{\eta - y}{r^3}, \quad Z = \mu \frac{\zeta - z}{r^3}. \quad (1^{**})$$

Lagrange hat nun die höchst bedeutungsvolle und folgenschwere Entdeckung gemacht, daß die *Kraftkomponenten als Differentialquotienten einer und derselben Funk-*

tion in Richtung der Koordinatenachsen angesehen werden können. Setzt man nämlich

$$U = \frac{\mu}{r}, \quad (2)$$

so findet man, indem man P als variabel, Q als fest ansieht, nach leichter Rechnung

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (I)$$

Die Funktion $U(x, y, z)$ heißt das *Potential* der in Q befindlichen Masse μ im Punkte $P(x, y, z)$. Der Punkt P hat die Bezeichnung *Aufpunkt*.

Das Potential, welches durch die im Punkte Q befindliche Masse μ erzeugt wird, ist eine im ganzen Raume mit Ausschluß von Q selbst stetige und beliebig oft differentiierebare Funktion von x, y, z . Im Punkte Q dagegen hat es keinen Sinn, da, wenn P mit Q zusammenfällt, der Nenner $r = 0$ wird.

Die große Bedeutung der Lagrangeschen Entdeckung liegt in der Hauptsache nicht darin, daß das Potential zur Vereinfachung der Rechnungen dient, indem man statt der drei Größen X, Y, Z in vielen Fällen nun bloß die eine U gebraucht, sondern darin, daß das Potential tatsächlich eine physikalische Größe ist, die in engster Beziehung zum Energiebegriff steht. Das Potential U ist nämlich gleich der mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen potentiellen Energie des aus den beiden materiellen Punkten Q und P bestehenden Systems oder auch gleich der Arbeit, die von dem System geleistet wird, wenn P durch die von Q herrührende Anziehung aus dem Unendlichen nach der Stelle (x, y, z) gebracht wird. Näher können wir hierauf nicht eingehen.

Wirken n materielle Punkte Q_s [$s = 1, 2, \dots, n$] mit den Koordinaten ξ_s, η_s, ζ_s und den Massen μ_s auf P , so sind die Komponenten der Anziehung jedes einzelnen der Punkte Q_s , wenn

$$r_s = \sqrt{(x - \xi_s)^2 + (y - \eta_s)^2 + (z - \zeta_s)^2}$$

gesetzt wird,

$$X_s = \mu_s \frac{\xi_s - x}{r_s^3}, \dots \quad [s = 1, 2, \dots, n].$$

Die Komponenten der Gesamtkraft, welche von dem System Q_1, \dots, Q_n auf P ausgeübt wird, sind gegeben durch

$$X = \sum_{s=1}^n X_s = \sum_{s=1}^n \mu_s \frac{\xi_s - x}{r_s^3}, \dots \quad (3)$$

womit die Gesamtkraft nach Größe und Richtung bestimmt ist. Das Potential ist

$$U = \sum_{s=1}^n \frac{\mu_s}{r_s}, \quad (4)$$

da für diese Funktion die drei Relationen (I) durch einfache Rechnung bestätigt werden können. Es ist wieder eine im allgemeinen stetige und sogar beliebig oft differenzierbare Funktion, die aber ihre Bedeutung verliert, wenn der Aufpunkt P mit einem der anziehenden Massenpunkte Q_s zusammenfällt.

Der Fall eines oder endlich vieler Massenpunkte ist eine bloße Abstraktion. Nun sei statt dessen eine kontinuierlich ausgebreitete Masse gegeben. Die Masse erfülle ein beschränktes räumliches Gebiet T . Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, nehmen wir an, daß die Begrenzung des Raumes T von einer geschlossenen Jordanschen Fläche gebildet wird. Der Aufpunkt $P(x, y, z)$ liege außerhalb der

anziehenden Masse. An dieser Voraussetzung wird in dem ganzen Kapitel I festgehalten werden (vgl. im Gegensatz dazu Kapitel IV). Das den Punkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$ von T enthaltende Raumelement $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$ sei von der unendlich kleinen Masse $d\mu$ erfüllt. Die X -Komponente der Anziehung dieses Massenelementes $d\mu$ auf den Punkt P ist $\frac{\xi - x}{r^3} d\mu$, wo r die obige Bedeutung der Entfernung von P und Q hat. Für die Komponente der Gesamtanziehung ergibt sich statt einer Summe das Integral über den ganzen mit Masse erfüllten Raum

$$\begin{aligned} X &= \iiint_T \frac{\xi - x}{r^3} d\mu, & Y &= \iiint_T \frac{\eta - y}{r^3} d\mu, \\ Z &= \iiint_T \frac{\zeta - z}{r^3} d\mu. \end{aligned} \quad (5)$$

Das Potential ist

$$U = \iiint_T \frac{d\mu}{r}, \quad (6)$$

da man wieder und zwar durch Differentiation unter dem Integralzeichen die Gleichungen (I) bestätigen kann. Es ist nicht nur einmalige, sondern beliebig oft wiederholte Differentiation unter dem Integral zulässig; denn wegen der Lage des Aufpunktes ist der Integrand als Funktion von x, y, z stetig und beliebig oft differentierbar, wo auch $Q(\xi, \eta, \zeta)$ im Integrationsbereiche liegen mag. Wir wollen den in (5) und (6) auftretenden Integralen noch eine andere Form geben, indem wir die *Dichte* ρ einführen. Diese ist definiert als Quotient von Massen- und Volumenelement, also

$$\rho = \frac{d\mu}{d\tau}.$$

Wir erhalten daher

$$X = \iiint_T \frac{(\xi - x) \varrho}{r^3} d\tau, \quad Y = \iiint_T \frac{(\eta - y) \varrho}{r^3} d\tau, \quad (5^*)$$

$$Z = \iiint_T \frac{(\zeta - z) \varrho}{r^3} d\tau,$$

$$U = \iiint_T \frac{\varrho}{r} d\tau. \quad (6^*)$$

Die Dichte ϱ braucht durchaus keine stetige Funktion von ξ, η, ζ zu sein. Es genügt, sie ihrer physikalischen Bedeutung gemäß als beschränkt und als integrierbar vorauszusetzen.

Das durch (6) oder (6*) gegebene Potential $U(x, y, z)$ wird als „Newtonsches“ Potential bezeichnet im Gegensatz zum „logarithmischen“ Potential, zu dem wir jetzt kommen werden. Wir bemerken noch, daß U eine beliebig oft differenzierbare Funktion von x, y, z ist, wenn P außerhalb T variiert.

§ 5. Logarithmisches Potential einer Fläche.

In der Ebene seien zwei Punkte P und Q mit den kartesischen Koordinaten x, y bzw. ξ, η gegeben. Sie mögen einander anziehen mit einer Kraft K , welche in die Verbindungsgerade PQ fällt und nach dem Gesetze

$$K = k \cdot \frac{m\mu}{r} \quad (B)$$

wirkt. Dabei ist

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

die Entfernung der beiden Punkte, m und μ kann man noch im übertragenen Sinne als Masse von P bzw. Q bezeichnen, k stellt eine von der Lage und den Massen der Punkte unabhängige allgemeine Konstante dar. Der

wesentliche Unterschied zwischen dem Newtonschen Gesetze (A) und dem Gesetze (B) besteht darin, daß die Kraft nicht dem Quadrate der Entfernung, sondern der Entfernung selbst umgekehrt proportional ist. Sind α und β die Winkel, welche die Richtung von P nach Q mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so erhält man für die Komponenten der von Q auf P ausgeübten Anziehungskraft in Richtung dieser Achsen

$$X = K \cos \alpha, \quad Y = K \cos \beta, \quad (7)$$

oder, wenn man $km = 1$ setzt und die Gleichungen

$$\cos \alpha = \frac{\xi - x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{\eta - y}{r}$$

berücksichtigt,

$$X = \mu \frac{\xi - x}{r^2}, \quad Y = \mu \frac{\eta - y}{r^2}. \quad (7^*)$$

Auch hier existiert ein Potential, nämlich

$$U = \mu \log \frac{1}{r}, \quad (8)$$

da offenbar

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (I^*)$$

ist. Die Form der durch (8) definierten Funktion $U(x, y)$ erklärt die Bezeichnung „logarithmisches“ Potential.

Hat man n anziehende Punkte Q_s [$s = 1, 2, \dots, n$], so erhält man unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise

$$X = \sum_{s=1}^n \mu_s \frac{\xi_s - x}{r_s^2}, \quad Y = \sum_{s=1}^n \mu_s \frac{\eta_s - y}{r_s^2}, \quad (9)$$

$$U = \sum_{s=1}^n \mu_s \log \frac{1}{r_s}. \quad (10)$$

Ist ein beschränktes ebenes Gebiet T , dessen Begrenzung eine Jordansche Kurve sein möge, kontinuierlich mit Masse erfüllt und wird das Flächenelement mit $d\omega$, die Dichte wieder mit ρ bezeichnet, so sind die Anziehungskomponenten und das Potential gegeben durch

$$X = \iint_T \frac{(\xi - x)\rho}{r^2} d\omega, \quad Y = \iint_T \frac{(\eta - y)\rho}{r^2} d\omega, \quad (11)$$

$$U = \iint_T \log \frac{1}{r} \rho d\omega. \quad (12)$$

Natürlich gilt (I*), da wegen der Lage des Aufpunktes $P(x, y)$ außerhalb T die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführbar ist. Man kann auch $\rho d\omega$ durch $d\mu$ ersetzen.

Das logarithmische Potential spielt in der Ebene in gewissem Sinne dieselbe Rolle wie das Newtonsche im Raume.

Es ist eine beliebig oft differentiierebare Funktion der Koordinaten des Aufpunktes, wenn dieser außerhalb der anziehenden Masse variiert.

§ 6. Potentiale der einfachen und der doppelten Belegung.

Wir nehmen jetzt an, daß eine krumme Fläche S Trägerin von Masse sei, die nach dem Newtonschen Gesetze (A) wirkt.

Die Fläche S soll im Endlichen liegen und mit stetiger Tangentialebene versehen sein oder aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Tangentialebene bestehen, die Kanten bilden. Ferner dürfen eine endliche Anzahl körperlicher Ecken (z. B. die Spitze eines Kegels) auftreten.

Kraftkomponenten und Potential erhält man hier durch Doppelintegrale ausgedrückt, welche über S zu erstrecken sind. Ist $d\omega$ das Flächenelement, κ die Dichte der Massenbelegung, welche als beschränkte integrable Funktion des Ortes auf S vorausgesetzt wird, so hat man

$$X = \iint \frac{(\xi - x) \kappa}{r^3} d\omega, \quad Y = \iint \frac{(\eta - y) \kappa}{r^3} d\omega, \quad (13)$$

$$Z = \iint \frac{(\zeta - z) \kappa}{r^3} d\omega,$$

$$V = \iint \frac{\kappa}{r} d\omega. \quad (14)$$

Man bezeichnet V als Newtonsches „Potential der einfachen Belegung“ im Gegensatz zum „Potential der Doppelbelegung“. Zu diesem gelangt man auf folgende Weise:

Es möge eine von Singularitäten freie, also ausnahmslos mit stetiger Normale versehene Fläche S elektrische oder magnetische Masse tragen. Ihr Potential ist wie oben¹⁾

$V = \iint \frac{\kappa}{r} d\omega$. In einem beliebigen Punkte der Fläche denken wir uns die Normale konstruiert und ihre beiden Richtungen als positiv und negativ unterschieden. Die Festsetzung der positiven Richtung ist willkürlich; bei geschlossenen Flächen werden wir aber immer die nach innen gerichtete Normale positiv rechnen. Auf den positiven Normalen der sämtlichen Flächenpunkte werden kleine gleiche Strecken h abgetragen, deren Endpunkte eine zu der Fläche S parallele Fläche S_1 bilden. Entsprechende Punkte Q und Q_1 der beiden Flächen haben dieselbe Normale. Wir setzen

¹⁾ Man bedenke, daß elektrische oder magnetische Massen nach dem Coulombschen Gesetze wirken, welches in der Form dem Newtonschen Gesetze völlig gleicht.

voraus, daß bei genügend kleinem h die Parallelfäche S_1 sich nicht selbst durchschneidet.

Nun sei das $d\omega$ auf S_1 entsprechende Flächenelement $d\omega_1$ ebenfalls mit Masse belegt, und diese soll der Masse von $d\omega$ entgegengesetzt gleich sein; d. h. es ist

$$d\mu_1 = -d\mu \quad \text{oder} \quad \alpha_1 d\omega_1 = -\alpha d\omega,$$

wenn α_1 die Belegungsdichte auf S_1 ist. Eine derartige Bedingung ist z. B. in der Elektrostatik bei einer Leidener Flasche annähernd realisiert. Das Potential der Parallelfäche S_1 ist $V_1 = \iint \frac{\alpha_1 d\omega_1}{r_1}$, wo r_1 natürlich die Entfernung

des Aufpunktes P von Q_1 bezeichnet. Für die Summe der beiden Potentiale erhält man

$$V + V_1 = \iint_S \frac{\alpha d\omega}{r} + \iint_{S_1} \frac{\alpha_1 d\omega_1}{r_1} = \iint_S \alpha h \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} d\omega.$$

Läßt man nun h gegen 0 konvergieren und andererseits α derart zunehmen, daß der endliche Grenzwert

$$\lim_{h=0} (\alpha h) = \nu$$

gleichmäßig für alle Punkte von S existiert, so wird offenbar

$$-\lim_{h=0} \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)}{h} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n},$$

d. h. gleich dem Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ in Richtung der Normalen. Man findet daher durch den Grenzübergang $h \rightarrow 0$

$$W = \iint_S \nu \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega = -\lim_{h=0} (V + V_1). \quad (15)$$

Diese Funktion W , die also den Grenzwert der Summe zweier Potentiale der einfachen Belegung¹⁾ darstellt, wird als Potential der „Doppelbelegung“ oder „Doppelschicht“ bezeichnet; ν heißt das „Moment“ der Doppelbelegung. Es wird als stetige Funktion des Ortes auf S vorausgesetzt. Wir wollen W noch eine andere Form geben. Es gelten die Identitäten

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n}$$

und ferner

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \\ &= - \left\{ \cos(r, x) \cos(n, x) + \cos(r, y) \cos(n, y) \right. \\ &\quad \left. + \cos(r, z) \cos(n, z) \right\} \\ &= - \cos(r, n), \end{aligned}$$

da offenbar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial n} &= \cos(n, x), \dots \\ \frac{\partial r}{\partial \xi} &= \frac{\xi - x}{r} = - \cos(r, x), \dots \end{aligned}$$

ist. Hierbei bedeuten $(n, x), \dots (r, x), \dots$ die Winkel, welche die positive Normale bzw. die Richtung r mit den positiven Koordinatenachsen bildet, und es wird dem Radiusvektor r die Richtung von Q nach P beigelegt. Man erhält schließlich

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = \frac{\cos(r, n)}{r^2},$$

¹⁾ Dabei ist vom Vorzeichen abgesehen. Würde man die Normale positiv in der Richtung von S_1 nach S rechnen, so würde man in (15) statt des negativen das positive Vorzeichen bekommen.

also

$$W = \iint \frac{\nu \cos(r, n)}{r^2} d\omega. \quad (15^*)$$

Das Potential der Doppelschicht ist von Helmholtz in die Theorie eingeführt worden.

Der Vollständigkeit halber sei das Newtonsche Potential einer einfachen Linienbelegung erwähnt, welches in leicht verständlicher Bezeichnungsweise durch ein Kurvenintegral in der Form $\int \frac{d\mu}{r} = \int \frac{\kappa ds}{r}$ definiert ist. Wir kommen aber hierauf nicht mehr zurück.

In der Ebene sei eine beschränkte Kurve S gegeben, die aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Tangente zusammengesetzt ist. Sie möge mit nach dem Gesetze (B) wirkender Masse der Dichte κ belegt sein. Dann ergibt sich das logarithmische Potential der einfachen Schicht als Kurvenintegral über S

$$V = \int \kappa \log \frac{1}{r} ds = \int \log \frac{1}{r} d\mu, \quad (16)$$

wenn ds das Linienelement von S bezeichnet.

Durch einen dem obigen analogen Grenzübergang kommt man zum logarithmischen Potential der doppelt belegten Linie, das schließlich definiert ist durch die Gleichung

$$W = \int \nu \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds = \int \frac{\nu \cos(r, n)}{r} ds. \quad (17)$$

Die positive Fortschreitungsrichtung auf der Kurve S , d. h. diejenige, welche zunehmenden Werten von s entspricht und nach der integriert wird, kann willkürlich festgesetzt werden. Die positive Normalenrichtung, nach der in (17) differenziert wird, ist dann diejenige, welche zur

positiven Kurven- oder Tangentenrichtung so orientiert ist, wie die positive y -Achse zur positiven x -Achse. Verkehrt man die positive Richtung auf der Kurve, so ist damit zugleich die positive Normalenrichtung umgekehrt. Im Falle einer geschlossenen Kurve S nehmen wir immer die Richtung positiv, bei der die eingeschlossene Fläche zur

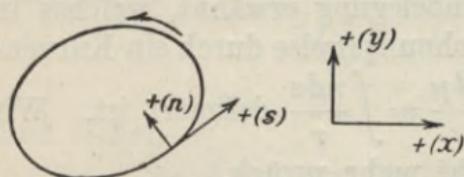


Fig. 1.

Linken liegt; die positive Normale ist dann¹⁾ augenscheinlich (s. Fig. 1.) die innere.

Auch die Potentiale der einfachen und der Doppelschicht sind stetige und beliebig oft differentiiierbare Funktionen der Koordinaten des Aufpunktes, solange sich dieser außerhalb der wirkenden Masse (bzw. des Integrationsgebietes) bewegt.

§ 7. Die Laplacesche Gleichung.

Wir wollen uns nun mit einer sehr wichtigen Eigenschaft der Potentiale beschäftigen, die ihnen allen gemeinsam ist. Beachten wir, daß die Funktion

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}},$$

die ja nach (2) als Newtonsches Potential eines Punktes von der Masse $\mu = 1$ angesehen werden kann, einer Differentialgleichung genügt. Man findet nämlich

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} = \frac{\xi - x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5}$$

¹⁾ Bei der üblichen Orientierung des Koordinatensystems.

und entsprechende Formeln für die Ableitungen nach y und z . Hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = 0. \quad (18)$$

Das ist die die ganze Potentialtheorie beherrschende *Differentialgleichung von Laplace*. Führen wir zur Abkürzung das Zeichen

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (19)$$

ein, so genügt zunächst einmal das Punktpotential $U = \frac{\mu}{r}$ der Gleichung

$$\Delta u = 0. \quad (II)$$

Die Laplacesche Gleichung ist eine lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Aus ihrem linearen homogenen Charakter schließt man, daß, wenn u_1, u_2, \dots, u_m Lösungen sind, auch das mit konstanten Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_m gebildete Aggregat $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m$ eine Lösung darstellt. Demnach ist auch das durch (4) definierte Potential

$U = \sum_{s=1}^n \frac{\mu_s}{r_s}$ eine Lösung von (II), da ja jeder Summand

einzelnen dieser Gleichung genügt. Was das Körperpotential (6) oder (6*) betrifft, so findet man durch Differentiation unter dem Integralzeichen

$$\Delta U = \int \int \int_T \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \rho \, d\tau = 0.$$

Dasselbe gilt auch für die Flächenpotentiale V und W

von (14) bzw. (15). Bei W muß man bloß berücksichtigen,

daß der Ausdruck $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}$, in welchem bei der Differentiation in Richtung der Normalen ξ, η, ζ die Variablen sind, als Funktion von x, y, z die Laplacesche Gleichung erfüllt, da

$$\Delta\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right) = 0$$

ist.

Beim logarithmischen Potential hat man entsprechend

$$\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = \frac{\xi - x}{r^2}, \quad \frac{\partial^2\left(\log\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(\xi - x)^2}{r^4}$$

nebst den analogen Formeln für die Ableitungen nach y . Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial^2\left(\log\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\log\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} = 0. \quad (20)$$

Setzt man also bei Funktionen zweier unabhängiger Variablen

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (21)$$

so genügt zunächst das logarithmische Punktpotential (8) der Laplaceschen Gleichung in der Ebene

$$\Delta u = 0. \quad (\text{II}^*)$$

Auch sämtliche anderen logarithmischen Potentiale sind Lösungen der Laplaceschen Gleichung.

§ 8. Verhalten der Potentiale im Unendlichen.

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der einzelnen Potentiale und ihrer Ableitungen erster Ordnung für den Fall, daß der Aufpunkt P ins Unendliche rückt. Wir beginnen mit dem Newtonschen Körperpotential

$$U = \iiint_T \frac{d\mu}{r}.$$

Bezeichnet man mit g bzw. G die untere bzw. obere Grenze der Entfernungen r des Punktes P von den Punkten Q des beschränkten Raumes T , ist also für alle Punkte Q von T

$$g \leq r \leq G,$$

so folgt

$$\iiint \frac{d\mu}{G} < \iiint \frac{d\mu}{r} < \iiint \frac{d\mu}{g}$$

oder

$$\frac{M}{G} < U < \frac{M}{g},$$

wo

$$M = \iiint d\mu = \iiint \rho d\tau \quad (22)$$

die Gesamtmasse des Körpers darstellt. Rückt nun $P(x, y, z)$ ins Unendliche, was wir durch die Limesgleichung $\lim_{R=\infty}$ ausdrücken, wobei

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die Entfernung des Punktes P vom Nullpunkte bedeutet, so wird $\lim_{R=\infty} G = \infty$ und $\lim_{R=\infty} g = \infty$, daher

$$\lim_{R=\infty} U = 0. \quad (23)$$

Das Newtonsche Körperpotential verschwindet also im Unendlichen. Genauer hat man

$$\lim_{R=\infty} \frac{G}{R} = 1, \quad \lim_{R=\infty} \frac{g}{R} = 1,$$

woraus wegen

$$M \frac{R}{G} < RU < M \frac{R}{g}$$

$$\lim_{R=\infty} (R \cdot U) = M \quad (24)$$

folgt. Ferner gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \iiint \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\xi - x}{r} d\mu,$$

demnach, da $\frac{|\xi - x|}{r} \leq 1$ ist,

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| < \iiint \frac{d\mu}{r^2} = J.$$

Nun ergibt sich mittels der eben auf U angewandten Schlußweise für J unmittelbar

$$\lim_{R=\infty} (R^2 \cdot J) = M.$$

Daher liegt $R^2 \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|$ für große R unter einer von R unabhängigen Schranke C . Dasselbe gilt allgemein für die drei Ableitungen erster Ordnung, die wir zusammenfassend mit $D_1 U$ bezeichnen. Wir haben also

$$R^2 |D_1 U| < C. \quad (25)$$

Darin ist das weniger scharfe Resultat $\lim_{R=\infty} D_1 U = 0$ enthalten. Die Relationen (24) und (25) gelten natürlich

auch für die Punktpotentiale (2) und (4), wobei die Masse M durch μ bzw. durch $\sum_{s=1}^n \mu_s$ gegeben ist, und ebenso für das Flächenpotential V der einfachen Belegung mit

$$M = \iint d\mu = \iint \kappa d\omega. \quad (22^*)$$

Was schließlich das Potential der Doppelschicht W betrifft, so zeigt die Form (15*) desselben, da hier im Integranden der Nenner r^2 auftritt, daß nicht bloß RW , sondern sogar R^2W unter einer von R unabhängigen Schranke bleibt. Daher ist

$$\lim_{R=\infty} (R \cdot W) = 0. \quad (26)$$

Diese Gleichung kann mit (24) identifiziert werden, wenn man festsetzt, daß beim Potential der Doppelschicht die Masse $M = 0$ ist. Das ist zulässig, da die Masse beim Potential W noch gar nicht definiert ist, und zweckmäßig, damit übereinstimmende Formeln für alle Potentiale gelten. Ferner ist nicht bloß $R^2 |D_1 W|$, sondern sogar

$$R^3 |D_1 W| < C, \quad (25^*)$$

d. h. beschränkt. Dies besagt mehr als die Ungleichung (25), welche also a fortiori gültig ist.

Wir wenden uns jetzt dem logarithmischen Potential zu, welches ein von dem des Newtonschen gänzlich verschiedenes Verhalten im Unendlichen zeigt. Für das Flächenpotential (12) bekommen wir, wenn wir die Entfernung des Aufpunktes P von den Punkten der wirkenden Masse schon so groß annehmen, daß ständig $r > 1$, also $\log r > 0$ ist,

$$-U = |U| = \iint \log r d\mu,$$

demnach unter Verwendung von Bezeichnungen, die den oben gebrauchten analog sind,

$$M \log g < |U| < M \log G.$$

Daraus folgt

$$\lim_{R=\infty} U = -\infty \quad (27)$$

im Gegensatz zu (23). Genauer erhält man wegen

$$\lim_{R=\infty} \frac{\log g}{\log R} = 1, \quad \lim_{R=\infty} \frac{\log G}{\log R} = 1$$

unmittelbar

$$\lim_{R=\infty} \frac{|U|}{\log R} = M$$

oder

$$\lim_{R=\infty} \frac{U}{\log \frac{1}{R}} = M. \quad (28)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \iint \frac{1}{r} \cdot \frac{\xi - x}{r} d\mu,$$

woraus leicht die Beschränktheit von $R \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|$ folgt. Allgemein ist für große R

$$R |D_1 U| < C. \quad (29)$$

Die beiden Relationen (28) und (29) gelten auch für die logarithmischen Punktpotentiale und für die Linienpotentiale V und W . Beim Linienpotential der Doppelschicht ist wieder die Masse $M = 0$ zu setzen. Aus der Darstellung

$W = \int \frac{\nu \cos(r, n)}{r} ds$ schließt man sofort, da r im

Nenner des Integranden auftritt, daß $R \cdot W$ beschränkt bleibt, also

$$\lim_{R=\infty} W = 0$$

ist. Das besagt noch mehr als $\lim_{R=\infty} \frac{W}{\log R} = 0$. Ferner ist für große R nicht bloß $R |D_1 W|$, sondern sogar $R^2 |D_1 W| < C$.

Aufgabe: Man führe den Beweis der Ungleichung (25*), wonach $R^3 |D_1 W|$ beschränkt bleibt, für $\frac{\partial W}{\partial x}$ rechnerisch

bis ins einzelne durch, indem man in $W = \iint \nu \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega$ die Umformung

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\xi - x}{r} \cos(n, x) + \frac{\eta - y}{r} \cos(n, y) + \frac{\zeta - z}{r} \cos(n, z) \right\}$$

vornimmt und dann die Differentiation nach x unter dem Integral ausführt!

Ebenso führe man den Beweis der Beschränktheit von $R^2 |D_1 W|$ beim logarithmischen Potential der Doppelschicht!

§ 9. Das Potential als Lösung der Laplaceschen Gleichung.

Wie wir gesehen haben, ist jedes unserer in den §§ 4—6 definierten Potentiale für Punkte außerhalb der wirkenden Masse beliebig oft differentierbar und Lösung der Laplaceschen Gleichung. Wir wollen nun umgekehrt diese Gleichung zum Ausgangspunkt nehmen und das Potential geradezu als Lösung derselben definieren. Wir stellen folgende Definition auf:

Eine in einem beschränkten Gebiete G des Raumes bzw. der Ebene nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung von

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II})$$

bzw.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

heißt in G reguläres Potential. G heißt Regularitätsgebiet. Statt reguläres Potential ist auch die Bezeichnung „harmonische Funktion“ gebräuchlich. Man sagt auch, daß das Potential sich in T regulär verhält. Ein Potential heißt in einem bestimmten endlichen Punkte regulär, wenn es sich in einer gewissen Umgebung desselben regulär verhält.

Die in den §§ 4—6 erklärten Potentiale sind ausnahmslos im Sinne der neuen Definition reguläre Potentiale in jedem endlichen außerhalb der wirkenden Masse liegenden Punkte. Die neue Definition ist also jedenfalls nicht enger als die frühere. Daß sie auch nicht weiter ist, werden wir später sehen (Kap. II, § 14), wo sich zeigen wird, daß jede in einem beschränkten Gebiete reguläre Potentialfunktion als Aggregat eines Potentials der einfachen Schicht und eines der Doppelschicht dargestellt werden kann.

Nun müssen wir noch den Begriff der Regularität im unendlich fernen Punkte entwickeln. Ein Potential heißt im unendlich fernen Punkte regulär, wenn es sich in einer gewissen Umgebung desselben (ihn selbst zunächst nicht mitgerechnet), d. h. für alle endlichen Punkte außerhalb einer genügend großen Kugel bzw. eines genügend großen Kreises um den Nullpunkt regulär verhält und für $R \rightarrow \infty$ im Newtonschen (d. h. dreidimensionalen) Falle

$$\lim u(x, y, z) = c, \quad R^3 |D_1 u| \text{ beschränkt,} \quad (30)$$

im logarithmischen (d. h. zweidimensionalen) Falle

$$\lim u(x, y) = c, \quad R^2 |D_1 u| \text{ beschränkt} \quad (31)$$

ist, wo c eine Konstante bedeutet, R wie stets die Entfernung des Punktes (x, y, z) vom Nullpunkte. Wir werden später (Bd. 2, §8) sehen, daß beim logarithmischen Potential sich bereits aus der Existenz von $\lim u$ die Regularität im Unendlichen ergibt. Die Bedingungen (31) sind also nicht voneinander unabhängig, wohl aber die Bedingungen (30).

Da das Potential auf eine neue von den Integraldarstellungen der §§ 4—6 unabhängige Art definiert worden ist, erscheint es wünschenswert, auch den Begriff der Masse in einer von jenen Darstellungen unabhängigen Weise zu erklären. Ist für genügend große R im Newtonschen Falle

$$u = \frac{M}{R} + v, \quad (32)$$

im logarithmischen Falle

$$u = M \log \frac{1}{R} + v, \quad (33)$$

wo v ein im Unendlichen reguläres Potential, M eine Konstante bedeutet, so heißt M die Masse von u .

Es ist klar, daß $\frac{1}{R}$ im Unendlichen nicht regulär ist, da die zweite der Bedingungen (30) nicht erfüllt ist. Ebenso wenig ist $\log \frac{1}{R}$ im Unendlichen regulär, da schon die erste der Bedingungen (31) nicht befriedigt ist.

Aus den obigen Definitionen folgert man unmittelbar, daß ein Potential dann und nur dann im Unendlichen regulär ist, wenn seine Masse M verschwindet.

Jetzt ist noch nachzuweisen, daß die neue Definition der Masse durch die Gleichungen (32) und (33) nicht

im Widerspruch zu der früheren [s. (22), (22*)] steht. Untersuchen wir z. B. das Newtonsche Körperpotential

$U = \iiint \frac{d\mu}{r}$, dessen Masse ursprünglich durch das Integral $M = \iiint d\mu$ erklärt wurde. Wir müssen zeigen, daß

$$U - \frac{M}{R} = \iiint \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) d\mu = u(x, y, z)$$

sich im Unendlichen regulär verhält. Zunächst ist für

$R \rightarrow \infty$ offenbar $\lim u = 0$, da $\lim \frac{1}{R} = 0$ und nach (23)

$\lim U = 0$ gilt. Demnach ist die erste der Bedingungen (30) mit $c = 0$ erfüllt. Ferner hat man

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \iiint \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\xi - x}{r} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{x}{R} \right) d\mu, \\ R^3 \frac{\partial u}{\partial x} &= \iiint \frac{R^3}{r^3} \xi d\mu + x \iiint \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) d\mu. \end{aligned}$$

Nun ist $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{r}{R} = 1$, und zwar gleichmäßig für alle Punkte $Q(\xi, \eta, \zeta)$ von T .

Daher bleibt der Wert des ersten Integrals rechts beschränkt. Das zweite formen wir um

$$x \iiint \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) d\mu = \frac{x}{R} \iiint \frac{r^3 - R^3}{R^2} \cdot \frac{R^3}{r^3} d\mu.$$

Es ist $\left| \frac{x}{R} \right| \leq 1$, $\frac{R^3}{r^3}$ beschränkt wegen $\lim \frac{R^3}{r^3} = 1$,
 $\frac{r^3 - R^3}{R^2} = (r - R) \frac{r^2 + rR + R^2}{R^2}$ ebenfalls beschränkt,

da $\lim \frac{r^2 + rR + R^2}{R^2} = 3$ und $|r - R|$ kleiner als die

Entfernung des Punktes Q vom Anfangspunkte ist (nach dem Satze, daß eine Dreiecksseite die Differenz der beiden anderen übertreffen muß). Da alle Limesrelationen und Ungleichungen für die Punkte von T gleichmäßig gelten, so bleibt auch das zweite Integral und daher schließlich

$R^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|$ beschränkt, ebenso allgemein $R^3 |D_1 u|$, w. z. b. w.

In ganz ähnlicher Weise zeigt man für alle anderen Newtonschen Potentiale die Übereinstimmung der beiden Massendefinitionen.

Wir können zum logarithmischen Potential übergehen und wollen den entsprechenden Beweis für das Flächenpotential $U = \iint \log \frac{1}{r} d\mu$ führen. Es ist zu zeigen, daß für $M = \iint d\mu$ das Potential

$$U - M \log \frac{1}{R} = \iint \left(\log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{R} \right) d\mu = u(x, y)$$

im Unendlichen regulär ist. Man kann schreiben

$$u = - \iint \log \frac{r}{R} d\mu.$$

Wegen $\lim \frac{r}{R} = 1$, $\lim \log \frac{r}{R} = 0$ ergibt sich $\lim u = 0$, so daß die erste der Bedingungen (31) mit $c = 0$ erfüllt ist. Die hiermit bewiesene Limesgleichung

$$\lim_{R=\infty} \left\{ U - M \log \frac{1}{R} \right\} = 0$$

ist schärfer als die Gleichung (28) des § 8. Ferner hat man

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \iint \left(\frac{\xi - x}{r^2} + \frac{x}{R^2} \right) d\mu,$$

also

$$R^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \iint \frac{R^2}{r^2} \xi d\mu + x \iint \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) d\mu.$$

Das erste Integral rechts ist wegen $\lim_{r^2} \frac{R^2}{r^2} = 1$ beschränkt.

In dem zweiten nehmen wir die Umformung vor

$$x \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) = \frac{x}{R} \cdot \frac{r+R}{r} \cdot \frac{R}{r} (r-R),$$

woraus man die Beschränktheit direkt ablesen kann.

Daher ist $R^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|$ und allgemein $R^2 |D_1 u|$ beschränkt,

w. z. b. w.

Wir können nun den wichtigen Schluß ziehen, daß auch die neue Definition der Masse eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Bedeutung hat, da dies offenbar für die frühere Definition zutrifft¹⁾. Nehmen wir also z. B. im Newtonschen Falle ein zweites Koordinatensystem (x_1, y_1, z_1) hinzu, so kann die durch (32) definierte

Funktion $u = \frac{M}{R} + v$ auch in der Form $u = \frac{M}{R_1} + v_1$

dargestellt werden, wo $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ die Entfernung des Aufpunktes von dem Anfangspunkte des zweiten Systems und v_1 ein im Unendlichen reguläres Potential in den Variablen x_1, y_1, z_1 ist.

Aufgabe: Man beweise die Übereinstimmung der beiden Massendefinitionen ausführlich für die Punktpotentiale und das Potential der einfachen Schicht!

Beim Potential der Doppelschicht W läuft die Behauptung, wegen $M = 0$ (§ 8), darauf hinaus, daß W sich im Unendlichen regulär verhält. Das geht aber aus den Rela-

¹⁾ Die neue Potentialdefinition ist ja nicht weiter als die frühere (s. § 14).

tionen (26) und (25*) für das Newtonsche, bzw. den entsprechenden für das logarithmische Potential bereits hervor.

Aus den obigen Ausführungen ergibt sich, daß *nur das Potential der Doppelschicht sowohl im Newtonschen wie im logarithmischen Falle im Unendlichen regulär ist, da nur für dieses die Masse verschwindet. Alle anderen Potentiale sind im Unendlichen nicht regulär.*

Gemäß der neuen Definition des Potentials als Lösung von (II) ist die Potentialtheorie nichts anderes als die Theorie der Laplaceschen Gleichung. Da diese die einfachste partielle Differentialgleichung vom elliptischen Typus darstellt, so bildet die Potentialtheorie die Grundlage und das Vorbild für die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen überhaupt.

(Über die Einteilung der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in elliptische, hyperbolische und parabolische s. z. B. J. Horn, Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, § 28. Leipzig 1910.)

§ 10. Niveaulächen und Kraftlinien.

Sei u ein Newtonsches Potential, welches in einem bestimmten Punkte P seines Regularitätsgebietes den Wert a annimmt. Dann stellt die Gleichung

$$u(x, y, z) = a \quad (34)$$

eine durch P gehende Fläche dar. Eine solche Fläche wird Äquipotential- oder Niveauläche genannt. Sie besitzt im allgemeinen eine stetige Normale und auch stetige Krümmung, da u ja stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich aufweist. Sie kann nur in den Punkten sich singular verhalten, wo die drei Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$

gleichzeitig verschwinden. Die Gleichung (34) stellt bei variablem a eine einparametrische Schar von Niveaulächen dar. Durch einen Punkt des Regularitätsgebietes von u kann nur eine Niveauläche gehen, da u in demselben Punkte nicht mehrere verschiedene Werte annehmen kann.

Sei P ein regulärer Punkt der durch ihn hindurchgehenden Niveauläche. Bilden wir in P die Ableitung von u in irgendeiner der Fläche angehörenden, d. h. tangentialen Richtung s , so folgt, da u bei jeder Verrückung auf der Fläche konstant bleibt,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0. \quad (35)$$

Das bedeutet, daß die Kraftkomponente K_s in jeder tangentialen Richtung verschwindet¹⁾. Die Kraft in irgendeinem Punkte P ist also stets senkrecht zu der durch diesen Punkt gehenden Niveauläche gerichtet

$$K = \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (36)$$

Man bezeichnet als Kraftlinie eine Kurve, deren Richtung (oder Tangente) in jedem ihrer Punkte mit der zugehörigen Kraftrichtung übereinstimmt. Nach (36) stehen die Kraftlinien überall auf den Niveaulächen senkrecht; sie bilden die rechtwinkligen Trajektorien der Niveaulächen.

Entsprechend erhält man beim logarithmischen Potential die durch

$$u(x, y) = \text{const}$$

definierte Schar der Niveaulinien und die zu ihnen rechtwinklige Trajektorienschar der Kraftlinien.

¹⁾ Unter Kraft verstehen wir hier einfach den Vektor, dessen Komponenten nach den Koordinatenachsen mit den entsprechenden Ableitungen von u übereinstimmen.

Im Falle eines anziehenden Punktes $Q(\xi, \eta, \zeta)$ hat man für die Niveaulflächen offenbar

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} = \text{const.}$$

Sie sind also konzentrische Kugeln um Q als Mittelpunkt. Die Kraftlinien sind die durch Q gehenden Geraden, d. h. die Radien der Kugeln. Analog erhält man beim logarithmischen Potential im Falle eines anziehenden Punktes konzentrische Kreise und die zugehörigen Radien.

Die Kraftlinien sind bei gegebenem Potential u allgemein als Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt, die wir jetzt ableiten wollen. Die Richtungskosinus der Normalen einer Niveaulfläche $u = \text{const}$ ver-

halten sich wie $\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial z}$. Mit der Richtung dieser

Normalen stimmt aber die Tangente der Kraftlinie in dem betreffenden Punkte überein. Daher ist

$$dx : dy : dz = \frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial z} \quad (37)$$

das gesuchte Differentialgleichungssystem, wobei dx, dy, dz die Komponenten der Verrückung auf der Kraftlinie sind.

Beim logarithmischen Potential findet man ebenso

$$dx : dy = \frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} \quad (37^*)$$

als Differentialgleichung der Kraftlinien.

Betrachten wir das Beispiel $u = x^2 - y^2$! Offenbar genügt u der Laplaceschen Gleichung. Dieses Potential u ist im Endlichen überall regulär. Die Niveaulinien $x^2 - y^2 = \text{const}$ bilden eine Schar gleichseitiger Hyperbeln. Sie haben im allgemeinen keine singulären Punkte. Ausgenommen ist nur die ausgeartete Hyperbel $x^2 - y^2 = 0$,

welche in das Geradenpaar $y = x$, $y = -x$ zerfällt. Auf ihr ist der Anfangspunkt, in welchem $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ist, ein

singulärer Punkt, und zwar ein Doppelpunkt. Die beiden Äste der ausgearteten Hyperbel, d. h. die beiden Geraden $y = x$ und $y = -x$ schneiden einander dort rechtwinklig.

Die Kraftlinien erhält man aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \text{ oder } \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \text{ leicht in der Form } x \cdot y = \text{const.}$$

Sie sind ebenfalls gleichseitige Hyperbeln.

Aufgabe: Man bestimme die Kraftlinien für die Niveauflächen

$$u = x^2 + y^2 - 2z^2 = \text{const!}$$

§ 11. Beispiele zum Potential.

Wir machen jetzt Anwendungen der in den vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze und berechnen die Potentiale spezieller gegebener Massenverteilungen. Da das Potential einer gegebenen Masse durch ein bestimmtes Integral dargestellt wird, so kann man sich die Aufgabe stellen, dieses Integral in jedem vorliegenden speziellen Falle zu vereinfachen und, wenn möglich, auszuwerten. Es zeigt sich aber, daß man oft rascher zum Ziele gelangt, wenn man die zweite Definition des Potentials als Lösung der Laplaceschen Gleichung benutzt. Hier erkennt man die Fruchtbarkeit der neuen Auffassung.

Bestimmen wir zuerst das Potential einer von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Masse, wenn die Dichte konstant oder wenigstens lediglich eine Funktion der Entfernung vom Mittelpunkte der Kugeln ist, den wir zum Ursprung machen. Aus Gründen der Symmetrie schließt

man, daß auch das Potential U nur von der Entfernung $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ des Aufpunktes P vom Mittelpunkte abhängt. Wir transformieren daher die Laplacesche Gleichung, indem wir $U(x, y, z) = U(R)$ als zusammengesetzte Funktion von x, y, z ansehen. Dann ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dR} \cdot \frac{x}{R},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{d^2 U}{dR^2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \frac{dU}{dR} \left(\frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3}\right)$$

nebst entsprechenden Formeln für die Ableitungen nach y und z und daraus

$$\Delta U = \frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{dU}{dR} = 0.$$

Setzen wir $\frac{dU}{dR} = f(R)$, so wird $\frac{df}{dR} + \frac{2f}{R} = 0$, $\frac{df}{f} + \frac{2dR}{R} = 0$,

$\log f + \log R^2 = \text{const}$, $f \cdot R^2 = \text{const} = -a$, $f = -\frac{a}{R^2}$
und schließlich

$$U = \frac{a}{R} + b,$$

wo b wieder eine Konstante ist.

Nun müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, daß P außerhalb der größeren oder innerhalb der kleineren Kugel liegt. Im ersten Falle erhalten wir wegen (24) $\lim (R \cdot U) = M$ die Konstantenbestimmung $a = M, b = 0$, also

$$U = \frac{M}{R}. \quad (38_1)$$

Im zweiten Falle wird, da U im Anfangspunkte, der außerhalb
Sternberg, Potentialtheorie. I.

halb der gegebenen Masse liegt, regulär sein muß, $a = 0$, mithin

$$U = b = \text{const.} \quad (38_2)$$

Die Bestimmung dieser Konstanten b ist mittels der Integraldarstellung des Potentials U in § 30 ausgeführt.

Aus (38₁) ergibt sich, daß das Potential außerhalb der größeren Kugel denselben Wert hat, als wenn die ganze Masse M im Mittelpunkte konzentriert wäre. Das gilt natürlich auch für die Kraftkomponenten

$$X = -\frac{Mx}{R^3}, \quad Y = -\frac{My}{R^3}, \quad Z = -\frac{Mz}{R^3}.$$

Die Gleichung (38₂) lehrt, da jetzt die drei Kraftkomponenten verschwinden, daß auf einen innerhalb der kleineren Kugel befindlichen Punkt gar keine Kraft ausgeübt wird. Nimmt man den Radius der kleineren Kugel $= 0$, so gibt die Gleichung (38₁) das Potential der Vollkugel im Außenraum.

Geht man zum Newtonschen Flächenpotential der einfachen Schicht über, so erhält man für den Fall, daß eine Kugelfläche mit Masse von konstanter Dichte belegt ist, das analoge Resultat: Das Potential ist außerhalb der Kugelfläche durch (38₁), innerhalb durch (38₂) gegeben, wenn M die Masse der Belegung ist.

Wir berechnen noch das logarithmische Potential eines von zwei konzentrischen Kreisen gebildeten Ringes unter der Voraussetzung, daß die Dichte eine Funktion der Entfernung vom Kreismittelpunkt allein ist. Dasselbe gilt dann vom Potential $U = U(R)$. Die Transformation der Laplaceschen Differentialgleichung ergibt

$$\Delta U = \frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dU}{dR} = 0.$$

Für $\frac{dU}{dR} = f(R)$ bekommt man also $\frac{df}{dR} + \frac{f}{R} = 0$, $f = -\frac{a}{R}$,

$$U = a \log \frac{1}{R} + b,$$

wo a und b Konstante bedeuten. Liegt P außerhalb des größeren Kreises, so berücksichtigen wir die im § 9 bewiesene Limesgleichung $\lim_{R=\infty} \left\{ U - M \log \frac{1}{R} \right\} = 0$, woraus

$\lim_{R=\infty} \left\{ (a - M) \log \frac{1}{R} + b \right\} = 0$, $a = M$ und $b = 0$, also

$$U = M \log \frac{1}{R}$$

folgt. Liegt P innerhalb des kleineren Kreises, so ist $a = 0$, daher

$$U = b.$$

Kapitel II.

Die Greenschen Formeln.

§ 12. Der Integralsatz von Gauß.

Wir kommen jetzt zu den Integralsätzen von Gauß und von Green, die in der Potentialtheorie eine fundamentale Bedeutung haben.

Sei T ein räumliches beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer mit stetiger Tangentialebene versehenen Fläche S begrenzt wird. Jede Parallele

zur x -Achse möge S in höchstens zwei Punkten schneiden.

Sei $A(x, y, z)$ eine nebst ihrer Ableitung $\frac{\partial A}{\partial x}$ in $T + S$ stetige Funktion. Wir untersuchen das Integral

$$\iiint_T \frac{\partial A}{\partial x} d\tau = \iint d y d z \int \frac{\partial A}{\partial x} d x.$$

Indem wir bei konstanten Werten von y, z , also längs einer Parallelen zur x -Achse die Integration nach x ausführen, erhalten wir

$$\int \frac{\partial A}{\partial x} d x = A(x_2, y, z) - A(x_1, y, z),$$

wenn die Parallele die Fläche S in den $P_1(x_1, y, z)$ und $P_2(x_2, y, z)$ mit $x_2 > x_1$ schneidet. Denken wir uns auf

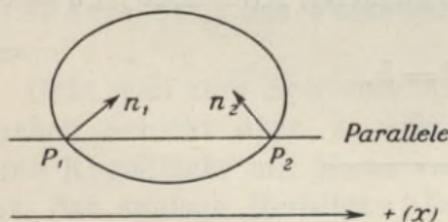


Fig. 2.

dem Flächenelement $d y d z$ der (y, z) -Ebene, das den Schnittpunkt der obigen Parallelen mit der (y, z) -Ebene enthält, ein rechtwinkliges Parallelepiped errichtet, so schneidet dieses auf S zwei Flächen-

elemente $d\omega_1$ und $d\omega_2$ heraus, welche P_1 bzw. P_2 enthalten. Es ist nun

$$\frac{d y d z}{d\omega_1} = |\cos(n_1, x)|, \quad \frac{d y d z}{d\omega_2} = |\cos(n_2, x)|,$$

wobei n_1, n_2 die inneren Normalen in den Punkten P_1, P_2 bezeichnen. Die unmittelbare Anschauung¹⁾ zeigt, daß in P_1 , wo die Parallele ins Gebiet T eintritt, der Winkel

¹⁾ Die beigegebene Figur ist schematisch. Die Normalen n_1 und n_2 brauchen nicht in einer Ebene zu liegen.

(n_1, x) ein spitzer, und daß in P_2 , wo sie austritt, der Winkel (n_2, x) ein stumpfer ist. Daher wird

$$dy dz = \cos(n_1, x) d\omega_1 = -\cos(n_2, x) d\omega_2,$$

also

$$dy dz \int \frac{\partial A}{\partial x} dx$$

$$= -[A(x_1, y, z) \cos(n_1, x) d\omega_1 + A(x_2, y, z) \cos(n_2, x) d\omega_2].$$

Mittels dieser Gleichung wird die weitere Integration von der (y, z) -Ebene auf S übertragen. Mithin bekommen wir für unser Raumintegral

$$\iiint_T \frac{\partial A}{\partial x} d\tau = - \iint_S A \cos(n, x) d\omega, \quad (1)$$

wo das rechtsstehende Integral über die gesamte Oberfläche S zu erstrecken ist. *Die obige Formel rührt von Gauß her.* Ihre Bedeutung liegt darin, daß ein Raumintegral in ein Integral über die Begrenzung des Raumes umgewandelt wird.

Erweitern wir die Voraussetzungen, indem wir zulassen, daß eine Parallele zur x -Achse die Fläche S in mehr als zwei Punkten, aber nur in einer endlichen Anzahl von Punkten schneiden darf, so ist die Anzahl der Schnittpunkte gerade, da S geschlossen ist. Die Schnittpunkte P_i ($i = 1, 2, 3, 4, \dots$) sind abwechselnd Ein- und Austrittsstellen, die Winkel (n_i, x) also abwechselnd spitz und stumpf. Demnach bleibt (1) völlig ungeändert bestehen. Auch die Voraussetzung des einfachen Zusammenhanges von T erweist sich als unnötig. T darf von mehreren getrennten geschlossenen Flächen S_1, S_2, \dots, S_k begrenzt sein. Die Formel (1) bleibt gültig, wenn man unter S die gesamte Begrenzung versteht, so daß
$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \dots + \iint_{S_k}$$

wird. Die innere Normale bedeutet stets die ins Innere von T zeigende Normale; sie kann bezüglich des von einer der Flächen S_1, S_2, \dots eingeschlossenen Raumes die äußere Normale sein. Ferner darf S eine endliche Anzahl von Kanten besitzen. Durch die Kanten wird S in eine endliche Anzahl von Teilstücken zerlegt, und das Integral über S ist nichts anderes als die Summe der Integrale über die einzelnen Stücke. Auf jedem Teilstück, auch auf der begrenzenden Kante, ist aber die Normale eindeutig und stetig, so daß das zugehörige Integral einen bestimmten Wert hat. Auch eine endliche Anzahl von isolierten singulären Punkten ist zulässig. Ein solcher Punkt, z. B. die Spitze eines Kegels, wird zunächst aus dem Integrationsgebiete ausgeschlossen, indem man den Körper durch eine Ebene abstumpft. Für den abgestumpften Körper ist (1) gültig. Geht man dann zur Grenze über, indem man die Entfernung der Spitze von der schneidenden Ebene zu 0 abnehmen läßt, so ergibt sich (1) für den vorliegenden Raum T selbst.

Ebenso bekommt man

$$\int_T \int \int \frac{\partial B}{\partial y} d\tau = - \int_S B \cos(n, y) d\omega,$$

$$\int_T \int \int \frac{\partial C}{\partial z} d\tau = - \int_S C \cos(n, z) d\omega,$$

wenn S auch von den Parallelen zur y -Achse und zur z -Achse nur in einer endlichen Zahl von Punkten geschnitten wird und wenn $B, \frac{\partial B}{\partial y}, C, \frac{\partial C}{\partial z}$ in $T + S$ stetig sind. Durch Addition ergibt sich

$$\begin{aligned} & \iiint_T \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right\} d\tau \\ = & - \iint_S \{ A \cos(n, x) + B \cos(n, y) + C \cos(n, z) \} d\omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Ist T ein ebenes beschränktes Gebiet, dessen Rand S aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Tangente besteht und von jeder Parallelen zu den Koordinatenachsen nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten wird, sind ferner die Funktionen $A, \frac{\partial A}{\partial x}, B, \frac{\partial B}{\partial y}$ in $T + S$ stetig, so erhalten wir in analoger Weise

$$\iint_T \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right\} d\omega = - \int_S \{ A \cos(n, x) + B \cos(n, y) \} ds \quad (3)$$

oder auch

$$\iint_T \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) d\omega = \int_S (A dy - B dx). \quad (3^*)$$

Dabei sind die Formeln

$$dx = \cos \alpha ds = \cos(n, y) ds,$$

$$dy = \sin \alpha ds = -\cos(n, x) ds$$

benutzt, worin α den Winkel der positiven Tangente in einem Punkte von S mit der positiven x -Achse bezeichnet.

Wir erinnern daran, daß über die geschlossene Kurve S so integriert wird, daß das begrenzte Gebiet T zur Linken liegt, und daß die Normale

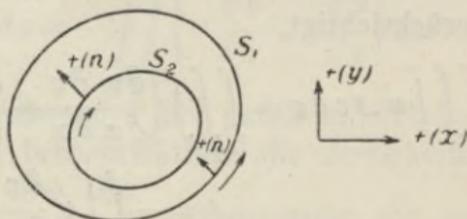


Fig. 3.

ins Innere von T positiv ist. In obenstehender Figur ist T ein zweifach zusammenhängendes Gebiet. Der Rand S besteht aus den beiden Kurven S_1 und S_2 . Die Richtung der positiven Normale und der Integration sind auf beiden Kurven durch Pfeile angegeben.

Aufgabe: Man stelle mit Benutzung von (3) oder (3*) den Flächeninhalt von T durch ein Kurvenintegral dar!

§ 13. Die Formeln von Green.

Wir machen über das räumliche Gebiet T dieselben Voraussetzungen wie im vorigen Paragraphen. Seien $u(x, y, z)$ und $v(x, y, z)$ zwei Funktionen, welche in $T + S$ stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich besitzen. Dann können wir in (1) die Funk-

tion $A = u \frac{\partial v}{\partial x}$ setzen und erhalten

$$\iint_T u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} d\tau + \iiint_T \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\tau = - \iint_S u \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) d\omega.$$

Durch Vertauschung von x mit y bzw. z bekommt man zwei analoge Formeln, und durch Addition dieser drei Gleichungen findet man, wenn man noch die Identität

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(n, z) \quad (4)$$

berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \iint_T u \Delta v d\tau + \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\tau \\ = - \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Ebenso ist die Formel richtig, die aus (5) durch Vertauschung von u und v entsteht, und durch Subtraktion gewinnt man schließlich

$$\iint_T \{u \Delta v - v \Delta u\} d\tau = - \iint_S \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega. \quad (6)$$

Die Identitäten (5) und insbesondere (6) werden als Greensche Formeln bezeichnet.

Da in den Flächenintegralen über S nur die ersten Ableitungen von u und v und zwar nur die in Richtung der Normalen genommenen auftreten, so können wir die Voraussetzungen erweitern. Die Formeln (5) und (6) bleiben gültig, wenn u und v bloß in T stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen, während u und v , sowie $\frac{\partial u}{\partial n}$ und $\frac{\partial v}{\partial n}$ auch noch bei Annäherung an S stetig bleiben.

Zum Beweise konstruieren wir, indem wir jetzt voraussetzen, daß S ganz ohne singuläre Punkte, also durchweg mit stetiger Normale versehen ist, im Abstände h eine ganz in T gelegene zu S parallele Fläche S_1 (vgl. § 6), von der angenommen wird, daß sie sich bei genügend kleinem h nicht selbst durchschneidet. Das von S_1 begrenzte Gebiet heiße T_1 . Auf T_1 können wir, da $T_1 + S_1$ ganz in T liegt, die Greenschen Formeln anwenden und erhalten z. B.

$$\iint_{T_1} \{u \Delta v - v \Delta u\} d\tau = - \iint_{S_1} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega.$$

Lassen wir nun den Abstand h der parallelen Flächen gegen 0 abnehmen und berücksichtigen die Stetigkeitseigenschaften von u , v , $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$, so bekommen wir unmittelbar (6).

Es genügt ferner vorauszusetzen, daß die Ableitungen zweiter Ordnung von u und v in T nur abteilungsweise stetig sind. Dann gelten die Formeln zunächst für die Teilgebiete, in die T durch die Unstetigkeitsflächen der zweiten Ableitungen zerlegt wird. Durch Addition der für die einzelnen Teilgebiete gültigen Formeln entsteht nun wieder die ursprüngliche; denn die Integrale über die Unstetigkeitsflächen heben sich, wie man leicht erkennt, gegenseitig auf, da in ihnen nur Ableitungen erster Ordnung vorkommen.

Wir wollen aus den Greenschen Formeln durch Spezialisierung der Funktionen u und v einige bedeutsame Folgerungen ziehen.

Setzt man in (6) die Funktion $v = 1$, so folgt

$$\iiint_T \Delta u \, d\tau = - \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, d\omega. \quad (7)$$

Für $u = v$ erhält man aus (5)

$$\begin{aligned} & \iiint_T \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \\ &= - \iiint_T u \Delta u \, d\tau - \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Ist u ein in T reguläres Potential, so wird wegen $\Delta u = 0$

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, d\omega = 0 \quad (9)$$

bzw.

$$\iiint_T \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = - \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\omega. \quad (10)$$

Ferner findet man aus (6), wenn u und v beide harmonisch sind,

$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\omega = 0. \quad (11)$$

Wir können den Gültigkeitsbereich der für reguläre Potentiale bestehenden Formeln (9), (10), (11) erweitern, indem wir die Annahme der Beschränktheit des Gebietes T fallen lassen. Die Formeln bleiben auch bei Gebieten, die sich ins Unendliche erstrecken, richtig, wenn u und v im Unendlichen regulär sind (§ 9, Gl. (30)). Zum Beweise denken wir uns um den Ursprung als Mittelpunkt eine Kugel K mit beliebig großem Radius R konstruiert und untersuchen zunächst denjenigen beschränkten Teil T_1 von T , welcher innerhalb K liegt. Um einen konkreten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, daß T das Außengebiet einer geschlossenen Fläche S ist, und wählen R so groß, daß S von K nicht geschnitten wird. Dann nimmt z. B. die Formel (10), da die Begrenzung von T_1 aus S und K besteht, die Gestalt an

$$\begin{aligned} & \iiint_{T_1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \\ &= - \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\omega - \iint_K u \frac{\partial u}{\partial n} d\omega. \end{aligned}$$

Führt man auf K Polarkoordinaten ein, so ergibt sich $d\omega = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, also

$$\iint_K u \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = \iint_K u \frac{\partial u}{\partial n} R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Wegen der Regularität von u im Unendlichen ist aber, da u bei wachsendem R einem bestimmten Grenzwert c

zustrebt und $R^2 \frac{\partial u}{\partial n}$ gegen 0 konvergiert, für genügend großes R , also etwa für $R > R_0$

$$|u| < |c| + 1, \quad R^2 \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| < \varepsilon,$$

wo ε eine beliebig kleine vorgegebene positive Größe ist. Daher ergibt sich

$$\left| \int_K \int u \frac{\partial u}{\partial n} d\omega \right| < (|c| + 1) \varepsilon \int \int \sin \vartheta d\vartheta d\varphi^1 = 4\pi (|c| + 1) \varepsilon,$$

mithin

$$\lim_{R=\infty} \int_K \int u \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = 0,$$

woraus unmittelbar (10) folgt. Ebenso wird der Beweis für (9) und (11) geführt.

Ist aber u im Unendlichen nicht regulär, so werden (9) bis (11) für unendliche Gebiete im allgemeinen nicht gelten. So würde z. B. für $u = \frac{1}{R} + c$ die Limesgleichung $\lim_{R=\infty} \int_K \int u \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = 0$ nicht richtig sein.

Für das logarithmische Potential gelten die den Formeln (5) bis (11) entsprechenden und werden völlig analog bewiesen. Wir bezeichnen sie mit Sternchen, also (5*), (6*), ... So ist z. B.

$$\int_T \int \left\{ u \Delta v - v \Delta u \right\} d\omega = - \int_S \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds, \quad (6^*)$$

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad \text{usw.} \quad (9^*)$$

¹⁾ Das Integral gibt die Oberfläche der Einheitskugel, also 4π .

Auch die Ausdehnung der Formeln (9*) bis (11*) auf unendliche Gebiete für im Unendlichen reguläre logarithmische Potentiale kann auf Grund der Relationen (31) des § 9 leicht gerechtfertigt werden.

Aufgabe: Man beweise die Gleichung (9*) durch Auswertung des Integrals, wenn $u = x^2 - y^2$ und S der Einheitskreis ist!

§ 14. Fortsetzung.

In (6) setzen wir speziell

$$v = \frac{1}{r} \left(r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \right),$$

wobei ξ, η, ζ die Integrationsvariablen und x, y, z Parameter sind. Es wird zuerst der Fall untersucht, daß $P(x, y, z)$ außerhalb T liegt. Dann ist v als Funktion von ξ, η, ζ in T ein reguläres Potential, und es ergibt sich wegen $\Delta v = 0$

$$\iiint_T \frac{\Delta u}{r} d\tau = \iint_S \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega. \quad (12)$$

Ist u in T ein reguläres Potential, so hat man

$$\iint_S \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega = 0. \quad (13)$$

Liegt aber $P(x, y, z)$ innerhalb T , so gestaltet sich die Anwendung von (6) ganz anders. Jetzt muß P als singuläre Stelle von v aus dem Integrationsgebiete ausgeschlossen werden. Wir umgeben also P mit einer kleinen Kugel K

vom Radius h und wenden (6) auf das von S und K begrenzte Gebiet T^* an. Nachher nehmen wir den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ vor. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \iiint_{T^*} \frac{\Delta u}{r} d\tau &= \iint_S \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega \\ &+ \iint_K \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Auf K ist nun $r = \text{const} = h$ und $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$, wobei zu beachten ist, daß die Normale ins Innere von T^* , also ins Außengebiet der Kugel K gerichtet ist. Ferner wird, wenn man Polarkoordinaten r, ϑ, φ mit P als Anfangspunkt einführt, das Flächenelement der Kugel $d\omega = h^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Demnach ist

$$\iint_K -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = -h \iint \frac{\partial u}{\partial n} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad \text{also}$$

$$\lim_{h=0} \iint_K -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = 0, \quad \text{ferner}$$

$$\iint_K u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = - \iint_K \frac{u}{r^2} d\omega = - \iint u(h, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

$$\text{mithin} \quad \lim_{h=0} \iint_K u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = -4\pi u_P,$$

wenn u_P den Wert von u im Punkte P , d. h. für $h = 0$ bezeichnet. Wegen der Stetigkeit der Funktion u im Punkte P ist der Grenzwert $\lim u(h, \vartheta, \varphi) = u_P$ von ϑ, φ unabhängig;

er ist eben nichts anderes als der Funktionswert $u(x, y, z)$ im Punkte P selbst. Da nun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_K \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega = -4\pi u_P,$$

so bekommen wir

$$4\pi u_P = \iint_S \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega - \iint_T \iint \frac{\Delta u}{r} d\tau. \quad (14)$$

Ist u in T harmonisch, so erhält man die fundamentale Formel, die ebenfalls von Green herrührt:

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega. \quad (15)$$

Liegt P auf S selbst und zwar in einem regulären Punkte von S , so gilt die Formel

$$u_P = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega.$$

Sie ergibt sich leicht, wenn man um P eine kleine Kugel K vom Radius h legt, das in T gelegene Stück von K mit K_1 , das von K aus S herausgeschnittene, P nicht enthaltende Stück mit S_1 bezeichnet, auf das von S_1 und K_1 begrenzte Gebiet die Formel (6) anwendet und dann den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ ausführt. Man bedenke, daß in dem beim Beweise auftretenden Integral $\iint u(h, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ hier bloß über die halbe Einheitskugel zu integrieren ist.

Man kann aus (15) sofort den Satz ablesen: Die Werte eines regulären Potentials im Innern des Regularitätsgebietes T sind bekannt, wenn man die Werte des Potentials und seiner Normalableitung auf der Begrenzung S von T kennt. Dabei erinnern wir an die Voraussetzung, daß u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an S stetig

bleiben. Ferner lehrt (15): *Jedes reguläre Potential läßt sich als Aggregat aus einem Potential der einfachen Schicht und einem Potential der Doppelschicht darstellen¹⁾*. (Vgl. Kap. I, § 9, wo hierauf hingewiesen worden war.) Wir wollen noch vor einem Irrtum warnen. Man darf aus (15) keineswegs den Schluß ziehen, daß die Werte einer Potentialfunktion *und* ihrer Normalableitung beide auf der Begrenzung S willkürlich vorgeschrieben werden dürfen, etwa als stetige Funktionen des Ortes. Wir werden später sehen (Kap. V), daß man nur *entweder* u *oder* $\frac{\partial u}{\partial n}$ beliebig auf S

vorschreiben kann. Nimmt man in dem Integral von (15) statt u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf S willkürliche stetige Funktionen f

bzw. g , so stellt das Integral $\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ f \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \cdot g \right\} d\omega$

zwar ein in T reguläres Potential w dar. Es wird aber im allgemeinen bei Annäherung des Aufpunktes P an einen Punkt von S weder w gegen f noch $\frac{\partial w}{\partial n}$ gegen g konvergieren.

¹⁾ Dabei ist $-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n}$ die Dichte der einfachen, $\frac{u}{4\pi}$ das Moment der Doppelschicht.

Setzt man in (5) die Funktion $v = \frac{1}{r}$, so findet man mittels des obigen Verfahrens

$$\begin{aligned} \iint_T \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \zeta} \right\} d\tau \\ = - \iint_S u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega + \begin{cases} 4\pi u_P \\ 2\pi u_P \\ 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (16)$$

je nachdem P in T oder auf S oder im Außenraume von S liegt.

Wendet man die Greensche Formel in der Ebene (6*) auf $v = \log \frac{1}{r}$ ($r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$) und ein reguläres logarithmisches Potential u an, so erhält man, wenn $P(x, y)$ außerhalb T liegt,

$$0 = \int_S \left\{ u \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds, \quad (17)$$

wenn $P(x, y)$ innerhalb T liegt, aber

$$u_P = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ u \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds. \quad (18)$$

Liegt P in einem regulären Punkte von S selbst, so ist

$$u_P = \frac{1}{\pi} \int_S \left\{ u \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds. \quad (18_1)$$

Beim Beweise von (18) schließt man P durch einen kleinen Kreis vom Radius h aus dem Integrationsgebiete T aus

und macht dann den Grenzübergang $h \rightarrow 0$. Im Gegensatz zu (15) tritt hier $\frac{1}{2\pi}$ statt $\frac{1}{4\pi}$ als Faktor der rechten Seite auf, da die Länge der Peripherie des Einheitskreises $= 2\pi$ ist. Man kann in (15) und (18) beliebig oft unter dem Integralzeichen nach den Koordinaten von P differenzieren, da P ja nicht auf S liegt (vgl. das Ende von § 6). *Jedes Potential besitzt also in seinem Regularitätsgebiete partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung.* Wir wollen dieses Resultat in einer Form aussprechen, die seinen bedeutsamen Charakter klar erkennen läßt: Genügt eine Funktion, die in einem gewissen Gebiete T partielle stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich besitzt, der Gleichung von Laplace, so besitzt sie Ableitungen jeder beliebigen Ordnung.

Jede Ableitung genügt übrigens wieder der Laplaceschen Gleichung, was ohne Schwierigkeit zu beweisen ist, stellt also auch ihrerseits ein reguläres Potential dar.

Wir wollen die Fundamentalformeln (15) und (18) mit den entsprechenden Modifikationen auf Potentiale mit unendlichem Regularitätsgebiete übertragen. Es sei z. B. das logarithmische Potential u außerhalb der geschlossenen Kurve S regulär. Beschreiben wir um den Punkt $P(x, y)$ des Regularitätsgebietes einen großen Kreis K mit Radius l^1 , dann ist zunächst

$$u_P = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ u \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_K \left\{ u \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds.$$

¹⁾ Dabei ist l so groß angenommen, daß S ganz im Innern von K liegt.

Nun wird

$$-\int_K \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds = l \log l \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} d\varphi.$$

Wegen der Beschränktheit von $l^2 \frac{\partial u}{\partial n}$ (vgl. § 9) ist

$$\lim_{l=\infty} l \log l \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

daher der Grenzwert des obigen Integrals 0.

Ferner hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_K u \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \frac{\partial (\log r)}{\partial r} r d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u}{r} r d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(l, \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{l=\infty} u = c$ ist also der Grenzwert dieses Integrals selbst $= c$. Demnach erhalten wir schließlich

$$u_P = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ u \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds + c, \quad (19)$$

entsprechend beim Newtonschen Potential

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega + c. \quad (20)$$

Nimmt das Potential im Unendlichen den Wert 0 an, so stimmen diese Formeln völlig mit den früheren (18)

bzw. (15) überein. Die Formeln (19) und (20) bleiben gültig für Potentiale, die im Unendlichen nicht regulär sind, sondern eine bestimmte Masse M besitzen, also die Form $u = M \log \frac{1}{R} + v$, bzw. $u = \frac{M}{R} + v$ mit im Unendlichen regulären v haben. In diesem Falle ist unter c der Grenzwert von $\lim_{R=\infty} v$ zu verstehen.

Es genügt zu beweisen, daß auch jetzt für $l \rightarrow \infty$ der Grenzwert des über K erstreckten Integrals $= c$ wird. Berücksichtigen wir nun, daß die Masse von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, so können wir unter dem Integral

$$u = M \log \frac{1}{r} + v_1, \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{M}{r} + v_1$$

setzen, indem wir P zum Anfangspunkt machen. Es ist dann auch $\lim v_1 = c$. Nun wird z. B. beim logarithmischen Potential

$$\begin{aligned} & \lim_{l=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_K \left\{ u \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds \\ &= \lim_{l=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_K \left\{ M \log \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} M \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right\} ds \\ &+ \lim_{l=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_K \left\{ v_1 \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial n} \right\} ds \\ &= 0 + \lim_{l=\infty} v_1 = c, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

§ 15. Analytischer Charakter des Potentials.

Wir wollen jetzt den Satz beweisen: *Jedes Potential kann in der Umgebung irgendeines regulären Punktes in eine Potenzreihe entwickelt werden, stellt also in jedem ganz aus regulären Punkten bestehenden Gebiete eine analytisch-reguläre Funktion seiner Argumente dar.* Wegen der Fundamentalformeln (15) und (18) genügt es, zu zeigen, daß die Potentiale der einfachen und der Doppelschicht in Potenzreihen entwickelbar sind. Wir führen den Beweis fürs Newtonsche Potential und beginnen mit dem Potential der einfachen Schicht

$V = \iint_S \frac{x}{r} d\omega$. Wir denken uns einen beliebigen regulären Punkt von V , der also im Endlichen und nicht auf S liegt, und machen ihn der Einfachheit halber zum Ursprung O des Koordinatensystems. Wir umgeben ihn mit einer Kugel K , deren Radius so klein ist, daß für alle Punkte $P(x, y, z)$ von K und alle Punkte $Q(\xi, \eta, \zeta)$ von S die Ungleichung $\frac{R}{l} < \frac{1}{8}$ gilt, wo $l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ und

wie immer $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist. Dann kann zunächst $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$ in eine nach positiven Potenzen von x, y, z fortschreitende Reihe entwickelt werden. Zum Beweise schreiben wir

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{l^2 - (2x\xi + 2y\eta + 2z\zeta - R^2)}} = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{(1-q)^{\frac{1}{2}}},$$

wobei

$$\frac{2x\xi}{l^2} + \frac{2y\eta}{l^2} + \frac{2z\zeta}{l^2} - \frac{R^2}{l^2} = q$$

gesetzt ist. Nun ist die Entwicklung in die Binomialreihe

$$(1 - q)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{q}{2} + \dots \quad \text{für } |q| < 1 \text{ gültig.}$$

Andrerseits hat man

$$|q| \leq \frac{2|x|}{l} + \frac{2|y|}{l} + \frac{2|z|}{l} + \frac{R^2}{l^2} < \frac{6R}{l} + \frac{R^2}{l^2} < \frac{7R}{l} < \frac{7}{8}$$

Daher wird

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{q}{2} + \dots \right) = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{x\xi}{l^2} + \frac{y\eta}{l^2} + \frac{z\zeta}{l^2} + \dots \right).$$

Durch Punkte sind die Glieder von mindestens zweiter Ordnung in x, y, z angedeutet. Diese nach Potenzen von x, y, z fortschreitende Reihe konvergiert absolut, wie sich aus der Abschätzung für q ergibt, so daß man tatsächlich berechtigt ist, die ursprünglich nach Potenzen von q fortschreitende Reihe, indem man q in seine Summanden auflöst, in eine Potenzreihe von x, y, z umzuordnen. Die aus den absoluten Beträgen dieser Reihe gebildete Reihe ist offenbar gleichmäßig konvergent für alle Punkte P von K und Q von S . Die obige Entwicklung für $\frac{1}{r}$ ist nichts anderes als die Taylorsche Reihe in den Variablen x, y, z ; ihre Koeffizienten sind Funktionen von ξ, η, ζ . Die Entwicklung ist nur auf eine Art möglich, was aus der Theorie der Potenzreihen bekannt ist. Nach Multiplikation mit κ und gliedweiser Integration über S , welche wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz in ξ, η, ζ gestattet ist, erhält man die Entwicklung von V nach Potenzen von x, y, z .

Beim Potential der Doppelschicht $W = \iint_S \nu \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega$ setzen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \\ &= -\left\{ \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right\}. \end{aligned}$$

Offenbar ist ja $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}, \dots$ Nun kann man

die drei Ableitungen von $\frac{1}{r}$ nach x, y, z einzeln in Potenzreihen von x, y, z entwickeln, indem man die Potenzreihe für $\frac{1}{r}$ gliedweise differentiiert, was bei Potenzreihen im Innern des Konvergenzgebietes stets zulässig ist. Daraus ergibt sich unmittelbar ebenso wie bei V durch Anwendung der gliedweisen Integration die Entwicklung von W .

Auf Grund von (15) können wir jetzt $u = V + W$ setzen, indem wir κ und ν mit den Werten von $-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. von $\frac{u}{4\pi}$ auf S identifizieren, und bekommen die Entwicklung von u in der Umgebung irgendeines regulären Punktes O etwa in der Form

$$u(x, y, z) = \sum_{m, n, p=0}^{\infty} c_{mnp} x^m y^n z^p. \quad (21)$$

Die Entwicklung ist nur auf eine Art möglich. Die konstanten Koeffizienten sind bestimmt durch die Formeln

$$c_{mnp} = \frac{\partial^{m+n+p} u}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p} \Big|_{x=0, y=0, z=0}.$$

Die Reihe kann beliebig oft gliedweise differentiiert werden.

Hat der Punkt des Regularitätsgebietes, in dessen Umgebung man u entwickeln will, die Koordinaten x_0, y_0, z_0 , so erhält man eine Potenzreihe von $x - x_0, y - y_0, z - z_0$.

Für das logarithmische Potential ergibt sich in ganz analoger Weise die Reihe

$$u(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n, \quad (21^*)$$

welche in der Umgebung des beliebigen zum Anfangspunkte gemachten Punktes O des Regularitätsgebietes konvergiert.

Aus diesen Reihenentwicklungen folgt: *Verschwundet ein in T reguläres Potential in allen Punkten eines Teilgebietes T_1 von T , so verschwindet es in ganz T identisch.* Der Beweis ergibt sich durch die aus der Funktionentheorie bekannte, bei der analytischen Fortsetzung angewandte Methode der übereinander greifenden Konvergenzkreise.

Sei nämlich O ein Punkt von T_1 und P ein beliebiger Punkt von T . Wir konstruieren eine Anzahl Kugeln (bzw. Kreise), von denen die erste ganz in T_1 liegt und O zum Mittelpunkte, die letzte P zum inneren Punkte hat und die so übereinander greifen, daß der Mittelpunkt einer jeden innerer Punkt der unmittelbar vorhergehenden ist. Nun verschwindet nach Voraussetzung die Reihenentwicklung in der ersten Kugel identisch, folglich auch die in der zweiten usf. Daher muß das Potential auch in P verschwinden, w. z. b. w.

Stimmen zwei Potentiale in allen Punkten eines Teilgebietes ihres gemeinsamen Regularitätsgebietes T überein, so stimmen sie in ganz T überein; denn ihre Differenz muß in ganz T verschwinden. Ist ein Potential in einem Teilgebiete seines Regularitätsgebietes T konstant $= c$, so gilt diese Identität in ganz T .

§ 16. Entwicklung im Unendlichen.

Um die Reihenentwicklungen in der Umgebung des unendlich fernen Punktes für ein im Unendlichen reguläres Potential zu gewinnen, knüpfen wir an die Formeln (19) und (20) des § 14 an. Wir werden wieder die dort auftretenden Potentiale der einfachen und der Doppelschicht jedes für sich entwickeln.

Wir beginnen mit dem logarithmischen Potential und wenden die Transformation durch reziproke Radien an (vgl. § 1). Sie hat die Form

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (22)$$

und umgekehrt durch Auflösung nach x, y

$$x = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \quad (22_1)$$

Für $R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ ist $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \rightarrow 0$, so daß die Umgebung des unendlich fernen Punktes auf die Umgebung des Nullpunktes 0 abgebildet wird. Beim Potential der einfachen Schicht $V = \int_S \log \frac{1}{r} \alpha ds$ verfahren wir nun folgendermaßen. Wir setzen

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = x^2 + y^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2 \\ &= R^2 - 2(x\xi + y\eta) + l^2 \quad [l^2 = \xi^2 + \eta^2] \\ &= R^2 \{1 - 2(x_1\xi + y_1\eta) + R_1^2 l^2\}, \end{aligned}$$

also

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{R} - \frac{1}{2} \log \{1 - (2x_1\xi + 2y_1\eta - R_1^2 l^2)\}.$$

Nun gilt für $|z| < 1$ die Potenzreihenentwicklung

$$-\log(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

Daher ist für alle Punkte (x, y) mit genügend kleinem R_1 oder genügend großem R und alle Punkte (ξ, η) von S die gleichmäßig konvergente Entwicklung statthaft

$$\begin{aligned} & -\log\{1 - (2x_1\xi + 2y_1\eta - R_1^2 l^2)\} \\ &= (2x_1\xi + 2y_1\eta - R_1^2 l^2) + \frac{(\dots)^2}{2} + \frac{(\dots)^3}{3} + \dots \\ &= 2(x_1\xi + y_1\eta) + \dots \end{aligned}$$

Durch Punkte deuten wir hier und im folgenden die Glieder von mindestens zweiter Ordnung in bezug auf x_1, y_1 an. Die Auflösung von $z = 2x_1\xi + 2y_1\eta - R_1^2 l^2$ in seine Summanden wird ebenso wie in § 15 die von q gerechtfertigt. Es folgt

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{R} + x_1\xi + y_1\eta + \dots \quad (23)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} V &= \log \frac{1}{R} \int_S d\mu + x_1 \int_S \xi d\mu + y_1 \int_S \eta d\mu + \dots \\ &= M \log \frac{1}{R} + A x_1 + B y_1 + \dots, \end{aligned}$$

wo A, B, \dots Konstante sind. Wir schreiben endgültig

$$\begin{aligned} V &= M \log \frac{1}{R} + A \frac{x}{x^2 + y^2} + B \frac{y}{x^2 + y^2} + \dots \\ &= M \log \frac{1}{R} + V_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Die Reihenentwicklung ist außerhalb eines genügend großen Kreises um den Nullpunkt der (x, y) -Ebene gültig.

Um die Reihe für $W = \int_S v \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds$ zu erhalten, schließen wir zunächst aus (23), da R von ξ, η nicht abhängt,

$$\frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} = x_1 \frac{\partial \xi}{\partial n} + y_1 \frac{\partial \eta}{\partial n} + \dots,$$

daher etwa mit Konstanten C, D, \dots

$$W = C x_1 + D y_1 + \dots = C \frac{x}{x^2 + y^2} + D \frac{y}{x^2 + y^2} + \dots \quad (25)$$

Bei der Entwicklung von u_P auf Grund der Formel (19) des § 14 ist jetzt nur noch zu berücksichtigen, daß, da

man $\kappa = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}$ zu setzen hat, die Gesamtmasse

$$M = \int_S \kappa ds = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0^1) \text{ wird (vgl. § 13, Gl. 9*).$$

Daher folgt unmittelbar für jedes im Unendlichen reguläre Potential eine Entwicklung der Form

$$u = c + a \frac{x}{x^2 + y^2} + b \frac{y}{x^2 + y^2} + \dots, \quad (26)$$

wo a, b, \dots Konstante sind.

Wir behaupten jetzt, daß $u(x, y)$ durch die Transformation (22) in eine Funktion von x_1, y_1 übergeführt wird,

¹⁾ Das Verschwinden der Masse war vorauszusehen, da ja die Regularität im Unendlichen nach § 9 hierdurch charakterisiert ist.

welche auch in diesen Variablen der Laplaceschen Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0$ genügt, also ein Potential ist. Da u durch (19) in einer Form dargestellt ist, in welcher die Variablen x, y nur in der Kombination $\log \frac{1}{r}$ auftreten, so ist es hinreichend, wenn man die Behauptung für das spezielle Potential $\log \frac{1}{r}$ oder auch für $\log(r^2)$ beweist.

Nun ist

$$\begin{aligned} \log(r^2) &= \log\{R^2 - 2(x\xi + y\eta) + l^2\} \\ &= -\log(R_1^2) + \log\{1 - 2(x_1\xi + y_1\eta) + R_1^2 l^2\} \end{aligned}$$

oder, wenn man $\frac{\xi}{l^2} = \xi_1, \frac{\eta}{l^2} = \eta_1, \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = l_1$ setzt,

$$\log(r^2) = -\log(R_1^2) - \log(l_1^2) + \log\{R_1^2 - 2(x_1\xi_1 + y_1\eta_1) + l_1^2\}.$$

Offenbar genügt jeder der drei Logarithmen rechts der Gleichung von Laplace.

Aus unseren Ergebnissen geht unmittelbar der folgende Satz hervor: *Ein logarithmisches Potential ist dann und nur dann im unendlich fernen Punkte der (x, y) -Ebene regulär, wenn es durch die Transformation mittels reziproker Radien (22) in ein im Nullpunkte der (x_1, y_1) -Ebene reguläres Potential übergeführt wird.*

Die Entwicklungen für das Newtonsche Potential sind jetzt nicht schwer. Unter Benutzung der Transformation

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{x}{R^2}, \quad y_1 = \frac{y}{R^2}, \quad z_1 = \frac{z}{R^2}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ x = \frac{x_1}{R_1^2}, \quad y = \frac{y_1}{R_1^2}, \quad z = \frac{z_1}{R_1^2}, \quad R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \end{aligned} \quad (27)$$

findet man

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \\ &= R \sqrt{1 - 2(x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta) + R_1^2 l^2}, \quad [l^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2] \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} \{1 - (2x_1 \xi + 2y_1 \eta + 2z_1 \zeta - R_1^2 l^2)\}^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

also für genügend kleines R_1

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (2x_1 \xi + 2y_1 \eta + 2z_1 \zeta - R_1^2 l^2) + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{R} + \xi \frac{x_1}{R} + \eta \frac{y_1}{R} + \zeta \frac{z_1}{R} + \dots \\ &= \frac{1}{R} + \xi \frac{x}{R^3} + \eta \frac{y}{R^3} + \zeta \frac{z}{R^3} + \dots, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = \frac{\partial \xi}{\partial n} \frac{x}{R^3} + \frac{\partial \eta}{\partial n} \frac{y}{R^3} + \frac{\partial \zeta}{\partial n} \frac{z}{R^3} + \dots,$$

daher

$$V = \iint_S \frac{\kappa}{r} d\omega = \frac{M}{R} + A_1 \frac{x}{R^3} + A_2 \frac{y}{R^3} + A_3 \frac{z}{R^3} + \dots, \quad (28)$$

$$W = \iint_S \nu \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = B_1 \frac{x}{R^3} + B_2 \frac{y}{R^3} + B_3 \frac{z}{R^3} + \dots \quad (29)$$

und schließlich als Entwicklung eines beliebigen im Unendlichen regulären Potentials, weil $\kappa = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n}$ und $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = 0$ ist, also die Masse verschwindet,

$$\begin{aligned} u &= c + a_1 \frac{x}{R^3} + a_2 \frac{y}{R^3} + a_3 \frac{z}{R^3} + \dots \\ &= c + R_1 (a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 + \dots). \end{aligned} \quad (30)$$

Eine wesentliche Abweichung vom Verhalten des logarithmischen Potentials besteht darin, daß die aus $u(x, y, z)$ durch (27) hervorgehende Funktion $u\left(\frac{x_1}{R_1^2}, \frac{y_1}{R_1^2}, \frac{z_1}{R_1^2}\right)$ in den neuen Variablen x_1, y_1, z_1 nicht der Laplaceschen Gleichung genügt. Dagegen ist $\frac{u}{R_1}$ wieder ein Potential in x_1, y_1, z_1 . Es ist hinreichend, den Beweis für das spezielle Potential $\frac{1}{r}$ zu führen. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cdot R_1} &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{R_1^2} - \xi\right)^2 + \left(\frac{y_1}{R_1^2} - \eta\right)^2 + \left(\frac{z_1}{R_1^2} - \zeta\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2(x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta) + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}}. \end{aligned}$$

Setzt man noch

$$\frac{\xi}{l^2} = \xi_1, \quad \frac{\eta}{l^2} = \eta_1, \quad \frac{\zeta}{l^2} = \zeta_1, \quad \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2} = l_1 = \frac{1}{l},$$

so wird

$$\frac{1}{r \cdot R_1} = \frac{l_1}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + (z_1 - \zeta_1)^2}},$$

und diese Funktion ist offenbar ein Potential in x_1, y_1, z_1 .

Wir können den Satz aussprechen: *Ein Newtonsches Potential ist dann und nur dann im unendlich fernen Punkte des (x, y, z) -Raumes regulär, wenn es in diesem Punkte einen bestimmten Grenzwert c hat und durch die Transformation mittels reziproker Radien (27) in eine Funktion von x_1, y_1, z_1 übergeführt wird mit der Eigenschaft, daß $\frac{u-c}{R_1}$*

ein im Nullpunkte des (x_1, y_1, z_1) -Raumes reguläres und dort verschwindendes Potential darstellt.

Ein Potential der Masse M gestattet in der Umgebung des unendlich fernen Punktes die Entwicklung

$$u = c + \frac{M}{R} + a_1 \frac{x}{R^3} + a_2 \frac{y}{R^3} + a_3 \frac{z}{R^3} + \dots$$

Es wird durch (27) in eine Funktion von x_1, y_1, z_1 übergeführt mit der Eigenschaft, daß das Potential $\frac{u-c}{R_1}$ im Nullpunkte des (x_1, y_1, z_1) -Raumes regulär ist und dort den Wert M annimmt.

§ 17. Die Lage der Extrema.

Wendet man die Formel (15) des § 14 auf eine ganz im Regularitätsgebiete liegende um P als Mittelpunkt mit dem Radius h beschriebene Kugel K an, so erhält man

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \iint_K \left\{ u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\omega$$

und

$$\iint_K -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = -\frac{1}{h} \iint_K \frac{\partial u}{\partial n} d\omega = 0$$

wegen Gleichung (9) des § 13, sowie

$$\iint_K u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = \iint_K \frac{u}{h^2} d\omega,$$

also

$$u_P = \frac{1}{4\pi h^2} \iint_K u d\omega. \quad (31)$$

Da $\iint_K d\omega = 4\pi h^2$ ist, haben wir den Satz: *Der Wert eines Newtonschen Potentials im Mittelpunkte einer Kugel des Regularitätsgebietes ist ein Mittelwert der Oberflächenwerte.*

Den entsprechenden Satz fürs logarithmische Potential erhalten wir, wenn wir um den Punkt P des Regularitätsgebietes T einen in T liegenden Kreis K vom Radius h beschreiben. Es wird dann

$$u_P = \frac{1}{2\pi h} \int_K u \, ds. \quad (32)$$

Aus den Mittelwertsätzen schließt man, daß ein Potential, abgesehen von dem trivialen Fall der Konstanten, im Innern des Regularitätsgebietes kein Maximum und kein Minimum haben kann, daß also die Extrema immer auf der Begrenzung des Regularitätsgebietes liegen müssen. Denn man nehme z. B. an, das logarithmische Potential u habe im regulären Punkte P ein Maximum. Beschreibt man um P einen in T liegenden Kreis K mit genügend kleinem Radius h , so muß für alle Punkte Q von K nach der Definition des Maximums $u_P \geq u_Q$ sein. Aus (32) ergibt sich, daß für alle Peripheriepunkte von K genau $u_P = u_Q$ sein muß. Dasselbe gilt für alle Kreise mit Radius $< h$. Daher ist für alle Punkte der Kreisfläche K , mit andern Worten, in einer gewissen Umgebung von P , ständig $u = u_P = \text{const.}$ Schließlich muß im ganzen Regularitätsgebiete (vgl. Schluß von § 15) $u = \text{const.}$ sein, w. z. b. w. Wir weisen darauf hin, daß auch die Möglichkeit des „uneigentlichen“ Extremums ad absurdum geführt ist, da wir von $u_P \geq u_Q$ (nicht $u_P > u_Q$) ausgingen.

Der Beweis beim Newtonschen Potential ist analog.

Wir formulieren den Satz, indem wir von dem Fall der Konstanten absehen, folgendermaßen: *Ein in T reguläres,*

in $T + S$ stetiges Potential kann weder sein Maximum noch sein Minimum in T annehmen.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß der Satz gültig bleibt, wenn das Regularitätsgebiet den unendlich fernen Punkt enthält, daß also ein im Unendlichen reguläres Potential auch im unendlich fernen Punkte kein Extremum annehmen kann. Würde nämlich zunächst das logarithmische Potential in dem unendlich fernen Regularitätspunkte etwa ein Maximum c annehmen, so müßte das

Potential $u\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)$ im regulären Punkte

$x_1 = 0, y_1 = 0$ ebenfalls das Maximum c annehmen, was unmöglich ist. Beim Newtonschen Potential schließt man folgendermaßen: Hätte das im unendlich fernen Punkte reguläre Potential $u(x, y, z)$ dort das Maximum c , so würde

die Funktion $u\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \frac{z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right) - c$ im Nullpunkte des (x_1, y_1, z_1) -Raumes das Maximum 0 an-

nehmen. Dann müßte aber auch die Funktion $\frac{u - c}{R_1}$,

da ja $R_1 \geq 0$ ist, für $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ das Maximum 0 haben, was unmöglich ist, weil sie in diesem Punkte ein reguläres Potential darstellt.

Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß das Potential $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, das im unendlich fernen Punkte nicht regulär ist, dort das Minimum 0 annimmt.

Kapitel III.

Beziehung zur Funktionentheorie.

§ 18. Die konjugierte Potentialfunktion.

In diesem Kapitel wird nur vom logarithmischen, nicht vom Newtonschen Potential die Rede sein. Wir werden die enge Beziehung erörtern, die zwischen der Theorie des logarithmischen Potentials und der Funktionentheorie besteht, wozu es beim Newtonschen Potential kein Gegenstück gibt. Unser Ausgangspunkt ist die Gleichung (9*) des § 13

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Darin ist die Integration über die ganze Begrenzung S des Regularitätsgebietes T des Potentials u zu erstrecken. Jetzt nehmen wir an, daß T einfach zusammenhängend ist. Bedeutet C irgendeine geschlossene ganz in T gelegene Kurve, von der lediglich vorausgesetzt wird, daß sie aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Tangente zusammengesetzt und ohne mehrfache Punkte ist, so gilt

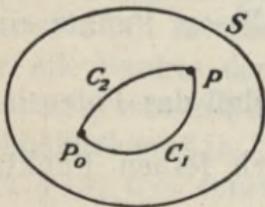


Fig. 4.

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \quad (1)$$

Sind also P_0 und P irgend zwei Punkte von T und verbindet man sie durch zwei in T verlaufende, im allgemeinen mit stetiger Tangente versehene, sonst aber gar keinen Beschränkungen unterworfenen Kurven C_1 und C_2 (s. Fig. 4),

welche zusammen eine geschlossene Kurve C ergeben, so ist

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{C_2} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

wenn auf C_1 in Richtung von P_0 nach P , auf C_2 in Richtung von P nach P_0 integriert wird. Nimmt man aber auch auf C_2 die Integrationsrichtung von P_0 nach P , so erhält man

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{C_2} \frac{\partial u}{\partial n} ds. \quad (2)$$

Das Integral $\int_{P_0}^P \frac{\partial u}{\partial n} ds$ hat also für alle den obigen

Bedingungen genügenden Kurven denselben Wert. Es ist ausschließlich von den Punkten P_0 und P , nicht aber von der sie verbindenden Kurve abhängig. Halten wir den einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ fest, betrachten dagegen $P(x, y)$ als veränderlich, so ist

$$v = - \int_{P_0}^P \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (3)$$

eine eindeutig bestimmte Funktion von x, y . Nun hat man (vgl. die §§ 12, 13)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -\sin \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \cos \alpha, \quad (5)$$

$$dx = ds \cos \alpha, \quad dy = ds \sin \alpha,$$

wenn α den Winkel der positiven Tangente mit der positiven x -Achse bezeichnet. Daher folgt

$$\frac{\partial u}{\partial n} ds = -\frac{\partial u}{\partial x} dy + \frac{\partial u}{\partial y} dx,$$

also

$$v = \int_{P_0}^P \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right). \quad (6)$$

Aus dieser Darstellung von v ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7)$$

Um das einzusehen, bilden wir

$$v(x+h, y) = \int_{P_0}^{P'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right),$$

wo P' die Koordinaten $x+h, y$ hat und bei genügend kleinem $|h|$ sicher in T liegt. Da das Integral vom Wege unabhängig ist, können wir festsetzen, daß dieser von P_0 nach P und dann von P längs einer Parallelen zur x -Achse nach P' führt. Demnach erhält man

$$v(x+h, y) = \int_{P_0}^P + \int_P^{P'} = v(x, y) + \int_P^{P'}$$

und folglich

$$v(x+h, y) - v(x, y) = \int_P^{P'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = \int_P^{P'} -\frac{\partial u}{\partial y} dx,$$

weil längs PP' offenbar $dy = 0$ ist. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert das Ergebnis

$$v(x+h, y) - v(x, y) = -h \cdot \frac{\partial u(x+\theta h, y)}{\partial y} \quad [0 < \theta < 1].$$

Mithin ist

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} = - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y},$$

wobei noch die Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial y}$ in $P(x, y)$ zu berücksichtigen ist. Analog beweist man die andere der Gleichungen (7).

Aus (7) folgt weiter

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

also

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

Außerdem besitzt v ebenso wie u nach (7) stetige Ableitungen erster und zweiter, sogar beliebiger Ordnung in ganz T . Daher ist v ein reguläres Potential. Man nennt v das zu u „konjugierte Potential“. Es ist durch (7) bis auf eine willkürliche additive Konstante, durch (3) oder (6), wo noch die Bedingung $v(x_0, y_0) = 0$ hinzukommt, völlig bestimmt.

Das zu v konjugierte Potential ist $-u$, da ja

$$\frac{\partial(-u)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial(-u)}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}$$

gilt.

Aus (7) ergibt sich $\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial v}{\partial x}$. Das ist bekanntlich die Bedingung dafür, daß jede Kurve $u = \text{const}$ auf jeder Kurve $v = \text{const}$ senkrecht steht. (Der Leser führe den Beweis!) Sieht man also die Kurven $u = \text{const}$ als Niveaulinien (vgl. § 10) an, so ist $v = \text{const}$ die Schar der zugehörigen Kraftlinien. Ebenso kann man umgekehrt

die Schar $v = \text{const}$ als Niveau- und $u = \text{const}$ als Kraftlinien deuten. In § 10 wurden bei gegebenem Potential u die Kraftlinien $v = \text{const}$ als Lösungen der Differentialgleichung $dy : dx = \frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial x}$ bestimmt. Es blieb aber die Frage offen, wie man deren Lösungen findet. Jetzt sind wir imstande, durch Berechnung des konjugierten Potentials v mittels (3) oder (6) zugleich die Kraftlinien $v = \text{const}$ und die Lösungen der obigen Differentialgleichung zu gewinnen. In der Tat wird durch die Gleichung $v(x, y) = \text{const}$, welche y implizite als Funktion von x mit einer willkürlichen Konstanten definiert, das allgemeine Integral der obigen Differentialgleichung erster Ordnung geliefert. Man hat nämlich

$$dy : dx = -\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = dv = 0,$$

also $v = \text{const}$, w. z. b. w.

Die Gleichungen (7) sind die aus der Funktionentheorie wohlbekannten *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*. In der Funktionentheorie beweist man (s. z. B. Osgood, Funktionentheorie, 3. Aufl., 6. Kap. § 6), daß die beiden Komponenten u und v einer analytischen Funktion f der komplexen Variablen $z = x + iy$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (9)$$

konjugierte Potentialfunktionen sind und daß auch umgekehrt das Aggregat $u + iv$ aus zwei konjugierten Potentialfunktionen eine analytische Funktion $f(z)$ von $z = x + iy$ darstellt. Das Regularitätsgebiet von f stimmt mit dem von u und v überein.

Man erhält also alle logarithmischen Potentiale, und zwar immer gleich je zwei konjugierte, indem man alle analy-

tischen Funktionen bildet und die Zerlegung in den reellen und den rein imaginären Teil vornimmt. Das ist eine sehr einfache Methode zur Bildung von logarithmischen Potentialen. Beispiele hierfür sind

$$z = x + iy, \quad z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \quad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$; ferner nach Einführung von Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

$$\log z = \log r + i\varphi,$$

so daß $\log(\sqrt{x^2 + y^2})$ und $\arctg \frac{y}{x}$ konjugierte Potentiale sind.

§ 19. Entwicklung in kartesischen und in Polarkoordinaten.

Da jedes reguläre Potential als Realteil einer analytischen Funktion angesehen werden kann, ist es nicht schwer, die bereits in § 15 hergeleitete Potenzreihenentwicklung aufs neue zu beweisen. Die neue Beweismethode setzt aber den obigen aus der Funktionentheorie übernommenen Satz voraus und ist ferner nur aufs logarithmische, nicht aufs Newtonsche Potential anwendbar. Wir gehen jetzt zu ihrer Darlegung über. Die Funktion $f(z)$, deren Realteil das vorgelegte Potential u ist, kann in der Umgebung irgendeines regulären Punktes z_0 in eine Potenzreihe von $z - z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

entwickelt werden, wo die c_n Konstante sind. Die Reihe möge etwa für $|z - z_0| < k$ konvergieren. Um die Spaltung in reellen und rein imaginären Teil vorzunehmen, setzen wir

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad c_n = a_n + ib_n$$

und bekommen

$$\begin{aligned} c_n(z - z_0)^n &= (a_n + ib_n)(x - x_0 + i(y - y_0))^n \\ &= (a_n + ib_n) \left\{ (x - x_0)^n - \binom{n}{2} (x - x_0)^{n-2} (y - y_0)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + i \left(\binom{n}{1} (x - x_0)^{n-1} (y - y_0) - \dots \right) \right\}, \end{aligned}$$

also¹⁾

$$\begin{aligned} u &= \Re [f(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} \Re [c_n(z - z_0)^n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \left\{ (x - x_0)^n - \binom{n}{2} (x - x_0)^{n-2} (y - y_0)^2 + \dots \right\} \right. \\ &\quad \left. - b_n \left\{ \binom{n}{1} (x - x_0)^{n-1} (y - y_0) - \dots \right\} \right]. \end{aligned}$$

In dieser Entwicklung sind zunächst diejenigen Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$, deren Exponentensumme gleich ist, in der eckigen Klammer zu einem „homogenen“ Polynom zusammengefaßt. Daß es nun gestattet ist, die homogenen Polynome zu zerreißen und in ihre Summanden aufzulösen, muß besonders bewiesen werden. Es genügt zu zeigen, daß die auf diese Weise entstehende Doppelreihe in $x - x_0$, $y - y_0$ absolut konvergiert. In der Tat ist

¹⁾ Wir bezeichnen den reellen Teil irgendeiner Größe g mit $\Re[g]$.

$$\begin{aligned}
& |a_n| \left\{ |x - x_0|^n + \binom{n}{2} |x - x_0|^{n-2} |y - y_0|^2 + \dots \right\} \\
& + |b_n| \left\{ \binom{n}{1} |x - x_0|^{n-1} |y - y_0| + \binom{n}{3} |x - x_0|^{n-3} |y - y_0|^3 + \dots \right\} \\
& < |c_n| \left\{ |x - x_0|^n + \binom{n}{1} |x - x_0|^{n-1} |y - y_0| + \dots \right\} \\
& = |c_n| (|x - x_0| + |y - y_0|)^n.
\end{aligned}$$

Ferner konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (|x - x_0| + |y - y_0|)^n$ für $|x - x_0| + |y - y_0| < k$; denn $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z - z_0|^n$ konvergiert für $|z - z_0| < k$. Demnach konvergiert auch die Doppelreihe für u absolut, wenn $|x - x_0| + |y - y_0| < k$, also sicher, wenn $|x - x_0| < \frac{k}{2}$ und $|y - y_0| < \frac{k}{2}$ ist. Mithin ist die Entwicklung in die Taylorsche Reihe

$$u(x, y) = \sum_{i,s=0}^{\infty} c_{is} (x - x_0)^i (y - y_0)^s.$$

in einer genügend kleinen Umgebung von x_0, y_0 gerechtfertigt (vgl. § 15, Gl. 21).

Wir wollen noch, indem wir der Einfachheit halber $x_0 = y_0 = 0$ setzen, Polarkoordinaten

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi$$

einführen und gewinnen folgende Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n e^{n\varphi i} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + i b_n) R^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi),$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (b_n \cos n\varphi + a_n \sin n\varphi).$$

Die Entwicklung von u und von v gilt ebenso wie die von f innerhalb des größten Kreises um den Nullpunkt, dessen Inneres noch ganz zum Regularitätsgebiete gehört.

Man bemerkt übrigens, daß, wenn u nebst den nach x und y genommenen Ableitungen bis zur m -ten Ordnung einschließlich im Nullpunkte verschwindet, die Koeffizienten c_{is} der Taylorsche Reihe für $i + s \leq m$ und daher, wie leicht ersichtlich, die a_n und b_n für $n \leq m$ sämtlich verschwinden.

§ 20. Umkehrung des Gedankenganges von § 18.

Im § 18 haben wir zu einer gegebenen regulären Potentialfunktion u die konjugierte v durch (3) oder (6) bestimmt und das Bestehen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (7) bewiesen. Jetzt wollen wir den Gedankengang umkehren und folgenden Satz ableiten: *Sind zwei Funktionen u und v in einem beschränkten einfach zusammenhängenden Gebiete T nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig und genügen sie den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dann sind sie in T reguläre Potentiale.* Dieser Satz gestattet es offenbar, den Begriff des regulären Potentials ohne Benutzung von Ableitungen zweiter Ordnung zu definieren.

Zum Beweise bilden wir das Integral

$$\int_{S'} (u dx - v dy),$$

erstreckt über irgendeine geschlossene doppelpunktfreie mit stetiger Tangente versehene Kurve S' , die ganz in T liegt. Bezeichnet T' das von S' begrenzte Gebiet, so ist nach dem Integralsatz von Gauß (§ 12)

$$\int_{S'} (u dx - v dy) = - \int_{T'} \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\omega.$$

Wegen der Voraussetzung $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ folgt hieraus

$$\int_{S'} (u dx - v dy) = 0. \quad (10)$$

Da das Integral über eine beliebige geschlossene Kurve S' verschwindet, ist das Integral über irgendeine offene Kurve mit den Endpunkten P_0 und P

$$\int_{P_0}^P (u dx - v dy) = F(x, y) \quad (11)$$

vom Integrationswege unabhängig, solange dieser auf T beschränkt ist, und nur von den Endpunkten abhängig. Bei festem P_0 und variablem P ist das Integral also eine eindeutige Funktion von x, y in ganz T . Für diese mit $F(x, y)$ bezeichnete Funktion gilt nun (vgl. § 18)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -v, \quad (12)$$

mithin

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial y},$$

daher wegen der Voraussetzung $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \quad (13)$$

Somit besitzt die Funktion $F(x, y)$ in T stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und genügt der Laplace'schen Gleichung. Sie stellt demnach in T ein reguläres Potential dar. Folglich sind auch die mit den Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $-\frac{\partial F}{\partial y}$ identischen Funktionen u, v in T reguläre Potentiale (§ 14), w. z. b. w.

Anmerkung. Beim Beweise war die Voraussetzung wesentlich, daß die Ableitungen erster Ordnung von u und v in T nicht bloß überall endliche Werte haben, sondern auch stetig sind. Denn sonst wäre erstens der Integralsatz von Gauß nicht anwendbar. (Die Formel (1) des § 12 war nur unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitung $\frac{\partial A}{\partial x}$ bewiesen worden.) Und zweitens wäre die Funktion $F(x, y)$, wenn sie bloß endliche, nicht auch stetige Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ in T hätte, kein reguläres Potential im Sinne des § 9. Der unserm Satze entsprechende in der Funktionentheorie lautet: Ist die Funktion $f(z) = f(x + iy)$ in T stetig und besitzt sie in T einen stetigen ersten Differentialquotienten $\frac{df(z)}{dz}$, so besitzt sie stetige Ableitungen beliebiger Ordnung. Sie ist dann eine analytische Funktion von z .

Nun ist es E. Goursat gelungen, durch Milderung der Voraussetzungen über $\frac{df(z)}{dz}$ einen erheblichen Fortschritt in der Grundlegung der Funktionentheorie zu erzielen. Es genügt bereits die Annahme der bloßen Existenz einer ersten Ableitung. Die Stetigkeit der ersten Ableitung, sowie die Existenz und Stetigkeit aller höheren Ableitungen ergibt sich dann als Folgerung (vgl. z. B. K. Knopp, Funktionentheorie I, § 19, Satz 3).

Der entsprechende Satz der Potentialtheorie, den wir hier ohne Beweis angeben, lautet: Sind u und v in T stetig und besitzen sie dort den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügende Ableitungen erster Ordnung, gilt ferner für sie die Voraussetzung der voll-

ständigen Differentiierbarkeit, so sind u und v in T reguläre Potentiale. Die Voraussetzung der vollständigen Differentiierbarkeit für eine Funktion w besagt, daß

$$\Delta w = w(x + \Delta x, y + \Delta y) - w(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \varepsilon$$

gesetzt werden kann, wo ε unendlich klein von höherer Ordnung als Δx und Δy ist in der Weise, daß für $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$

$$\lim \frac{\varepsilon}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0$$

wird; sie ist sicher erfüllt, wenn die Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ stetig sind, kann aber auch ohne Stetigkeit der Ableitungen gelten.

Bezüglich des Beweises bemerken wir nur in aller Kürze folgendes: Aus den Voraussetzungen über u und v erschließt man die Existenz einer endlichen Ableitung $\frac{df}{dz}$ von $f = u + iv$ in ganz T (s. z. B. W. F. Osgood, Funktionentheorie, 3. Aufl., 6. Kap. § 6). Durch Anwendung des Satzes von Goursat folgert man weiter, daß f eine analytische Funktion von z ist. Und hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

§ 21. Invarianz des Potentials gegenüber konformer Abbildung.

Sei $Z = X + iY = f(z) = f(x + iy)$ eine analytische Funktion von z , welche sich im Punkte $z = z_0$ regulär verhält und dort eine nicht verschwindende Ableitung besitzt, also $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} \neq 0$. Dann ist aus der Funktionentheorie

bekannt, daß durch diese Funktion die Umgebung des Punktes z_0 der z -Ebene umkehrbar eindeutig und konform (winkeltreu) auf die Umgebung des Punktes $Z_0 = f(z_0)$ der Z -Ebene abgebildet wird¹⁾. Die Umkehrfunktion $z = F(Z)$ ist analytisch regulär in der Umgebung von $Z = Z_0$. Wollen wir im reellen Gebiete bleiben, so können wir sagen: Besitzen die Funktionen $X(x, y)$ und $Y(x, y)$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $x = x_0, y = y_0$ stetige Ableitungen erster Ordnung, welche den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen,

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad (14)$$

und ist für $x = x_0, y = y_0$ die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (15)$$

so wird durch die Gleichungen

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y) \quad (16)$$

die Umgebung des Punktes (x_0, y_0) der (x, y) -Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf die Umgebung des Punktes $(X_0 = X(x_0, y_0), Y_0 = Y(x_0, y_0))$ der (X, Y) -Ebene abgebildet. Es besitzen X, Y als Funktionen von x, y in der Umgebung von (x_0, y_0) und x, y als Funktionen von X, Y in der Umgebung von (X_0, Y_0) Ableitungen beliebiger Ordnung. Wegen (14) ergibt sich übrigens

$$D = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2; \text{ daher ist die Funktionaldetermi-}$$

¹⁾ S. z. B. L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung. 1915. § 1.

nante im Punkte (x_0, y_0) und wegen der Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x}$ in einer genügend kleinen Umgebung von (x_0, y_0) überall positiv.

Sei nun $u(x, y)$ ein in der Umgebung von (x_0, y_0) reguläres Potential. Durch Umkehrung von (16) erscheint u als eine Funktion von X, Y , die in der Umgebung von (X_0, Y_0) Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt, da u nach x und y sowie x, y nach X und Y in der Umgebung der zusammengehörigen Stellen (x_0, y_0) bzw. (X_0, Y_0) beliebig oft differenzierbar sind.

Wir wollen zeigen, daß u auch als Funktion von (X, Y) ein Potential darstellt, also der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0$ genügt. Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (14) leicht

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) \\ &= D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right). \end{aligned}$$

Wegen $D \neq 0$ ergibt sich somit aus $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ die gesuchte Gleichung. Den nun bewiesenen Sachverhalt kann man auch so ausdrücken: *Ein reguläres Potential bleibt einer konformen Abbildung gegenüber invariant.*

Kapitel IV.

Die Stetigkeits- und Unstetigkeitseigenschaften der einzelnen Potentiale.

§ 22. Hilfsbetrachtungen.

Nachdem wir gesehen haben, daß alle Potentiale analytisch-reguläre Funktionen der Koordinaten des Aufpunktes sind, solange sich dieser außerhalb der wirkenden Masse bzw. des bei der Integraldarstellung zugrunde liegenden Integrationsgebietes bewegt, werfen wir jetzt die Frage auf, wie sich die einzelnen Potentiale verhalten, wenn der Aufpunkt beliebig nahe an das Integrationsgebiet heranrückt oder auch in diesem selbst variiert. Wir behandeln die hierher gehörigen Probleme ausführlich für das Newtonsche Potential und lassen die entsprechenden fürs logarithmische Potential geltenden Sätze, die nach denselben Methoden in einfacherer Weise abgeleitet werden können, ohne Beweis folgen.

Zunächst werden einige Hilfsbetrachtungen vorausgeschickt. Wir behaupten, daß das Raumpotential

$$\iiint_T \frac{\rho d\tau}{r}$$

auch dann einen Sinn hat, wenn der Aufpunkt $P(x, y, z)$ der Masse selbst angehört, d. h. in $T + S$ liegt. Die Begrenzung S möge eine Jordansche Fläche sein. Zum Beweise führen wir Polarkoordinaten r, ϑ, φ mit P als Anfangspunkt ein. Dann wird wegen $d\tau = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ unser Integral $= \iiint \varrho r \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$. Es ist also durch die Transformation aus einem uneigentlichen in ein eigentliches absolut konvergentes verwandelt worden. Ebenso ergibt sich die absolute Konvergenz von

$$\iiint_T \frac{\varrho(\xi - x)}{r^3} d\tau = \iiint \frac{\varrho(\xi - x)}{r} \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

und der beiden andern die Kraftkomponenten darstellenden Integrale, wobei $\frac{|\xi - x|}{r} \leq 1, \dots$ zu berücksichtigen ist.

Um tiefer einzudringen, müssen wir einige Integralabschätzungen¹⁾ vornehmen.

Wir wollen für das Integral

$$\iiint_T \frac{1}{r} d\tau$$

eine von der Lage des Aufpunktes $P(x, y, z)$ unabhängige, nur von dem etwa mit τ bezeichneten Volumen des beschränkten Raumgebietes T abhängige obere Schranke finden. Wir schlagen um P als Mittelpunkt diejenige Kugel K , deren Volumen ebenfalls τ ist. Sie hat den Radius $l = \left(\frac{3\tau}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$, da ja $\frac{4}{3}l^3\pi = \tau$ sein muß. Jetzt behaupten wir, daß die Ungleichung

$$\iiint_T \frac{1}{r} d\tau \leq 2\pi \left(\frac{3\tau}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (1)$$

¹⁾ Vgl. E. Schmidt, Bemerkung zur Potentialtheorie. Schwarz-Festschrift. Berlin 1914. § 1.

besteht, mag P innerhalb T oder auf der Begrenzung S oder ganz außerhalb T liegen. Ist nämlich K_1 das K und T gemeinsame Gebiet und τ_1 das Volumen von K_1 , so ist zunächst

$$\iiint_K \frac{1}{r} d\tau = \int_0^l r dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{l^2}{2} \cdot 4\pi = 2\pi \left(\frac{3\tau}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Nun hat man einerseits

$$\begin{aligned} \iiint_K \frac{d\tau}{r} &= \iiint_{K_1} \frac{d\tau}{r} + \iiint_{K-K_1} \frac{d\tau}{r} \\ &\geq \iiint_{K_1} \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{l} \iiint_{K-K_1} d\tau = \iiint_{K_1} \frac{d\tau}{r} + \frac{\tau - \tau_1}{l}, \end{aligned}$$

da im Gebiete $K - K_1$ überall $r \leq l$ ist, und andererseits

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{d\tau}{r} &= \iiint_{K_1} \frac{d\tau}{r} + \iiint_{T-K_1} \frac{d\tau}{r} \\ &\leq \iiint_{K_1} \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{l} \iiint_{T-K_1} d\tau = \iiint_{K_1} \frac{d\tau}{r} + \frac{\tau - \tau_1}{l}, \end{aligned}$$

da in $T - K_1$ überall $r \geq l$ ist.

Daraus folgt

$$\iiint_T \frac{d\tau}{r} \leq \iiint_{K_1} \frac{d\tau}{r} + \frac{\tau - \tau_1}{l} \leq \iiint_K \frac{d\tau}{r} = 2\pi \left(\frac{3\tau}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

w. z. b. w.

Es gilt ferner für jede beliebige Lage von P die Ungleichung

$$\iiint_T \frac{d\tau}{r^2} \leq 4\pi \left(\frac{3\tau}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2)$$

Sie wird völlig analog bewiesen, indem man berücksichtigt, daß

$$\iiint_K \frac{d\tau}{r^2} = \iiint_K \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi l = 4\pi \left(\frac{3\tau}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ist.

In der Ebene findet man ebenso, wenn ω der Flächeninhalt des ebenen Gebietes T ist,

$$\iint_T \frac{d\omega}{r} \leq 2\pi \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Hier muß man bedenken, daß der Kreis K um $P(x, y)$ mit dem Flächeninhalt ω den Radius $l = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ hat und daß

$$\iint_K \frac{d\omega}{r} = \iint_T dr \, d\varphi = 2\pi l = 2\pi \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Ganz entsprechend beweist man die etwas allgemeinere für $0 < \sigma < 2$ gültige Formel

$$\iint_T \frac{d\omega}{r^{2-\sigma}} \leq \frac{2\pi}{\sigma} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{\sigma}{2}}, \quad (3^*)$$

die auf $\iint_K \frac{d\omega}{r^{2-\sigma}} = \frac{2\pi l^\sigma}{\sigma}$ beruht. Sie geht für $\sigma = 1$ in (3) über.

Schließlich untersuchen wir noch das Integral

$$\iint_S \frac{d\omega}{r},$$

erstreckt über irgendeine beschränkte mit stetiger Normale versehene Fläche S . Durch eine Drehung des Koordinatensystems kann immer bewirkt werden, daß in

einem bestimmten Punkte Q von S die Normale parallel zur z -Achse, also $\cos(n, z) = 1$ ist. Ist nun c eine vorgeschriebene, den Ungleichungen $0 < c < 1$ genügende Konstante, so läßt sich wegen der Stetigkeit der Normalen eine genügend kleine Umgebung¹⁾ von Q auf der Fläche abgrenzen, so daß für alle Punkte dieser Umgebung ständig $\cos(n, z) \geq c$ ist. Wir setzen die Fläche S von vornherein als klein genug voraus, daß die obige Ungleichung überall erfüllt ist. Dann gilt, wo auch der Aufpunkt $P(x, y, z)$ liegen mag,

$$\iint_S \frac{d\omega}{r} \leq \frac{2\pi}{c} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

wenn ω den Flächeninhalt der Projektion T von S auf die (x, y) -Ebene bezeichnet. Es sei nämlich r' die Projektion von r auf die (x, y) -Ebene und $d\omega'$ diejenige von $d\omega$.

Nun ist $\frac{d\omega'}{d\omega} = \cos(n, z)$, also $d\omega = \frac{d\omega'}{\cos(n, z)} \leq \frac{d\omega'}{c}$,

ferner $r' \leq r$. Daher folgt

$$\iint_S \frac{d\omega}{r} \leq \frac{1}{c} \iint_T \frac{d\omega'}{r'} \leq \frac{2\pi}{c} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{nach (3).}$$

Analog wird wiederum die allgemeinere Ungleichung

$$\iint_S \frac{d\omega}{r^{2-\sigma}} \leq \frac{2\pi}{c \cdot \sigma} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{\sigma}{2}} \quad (4^*)$$

für $0 < \sigma < 2$ nachgewiesen.

¹⁾ Damit ist hier der von einer Kugel mit Q als Mittelpunkt aus S ausgeschnittene Teil gemeint.

§ 23. Stetigkeit des Raumpotentials und des Flächenpotentials der einfachen Schicht.

Wir können nun zeigen: *Das Raumpotential*

$$U = \iiint \frac{\varrho}{r} d\tau$$

bleibt auch dann stetig, wenn der Aufpunkt $P(x, y, z)$ im Innern oder auf der Begrenzung von T liegt. Es muß bewiesen werden, daß man, wenn ε eine gegebene positive beliebig kleine Zahl ist,

$$|U_P - U_{P_1}| < \varepsilon^1 \quad (5)$$

machen kann, dadurch, daß man die Entfernung $\overline{PP_1}$ genügend klein macht. Zuerst möge P in T (nicht auf S) liegen. Wir beschreiben um P eine ganz in T befindliche

Kugel K von so kleinem Radius δ , daß $\left| \iiint_K \frac{\varrho}{r} d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

wird, wo auch der Aufpunkt liegen mag. Bezeichnet man das Maximum von $|\varrho|$ in $T + S$ mit N , so ist nur nötig, da ja wegen (1) die Abschätzung

$$\left| \iiint_K \frac{\varrho}{r} d\tau \right| \leq N \iiint_K \frac{d\tau}{r} \leq N 2\pi \delta^2$$

gilt, den Radius δ der Ungleichung $2\pi N \delta^2 < \frac{\varepsilon}{3}$ entsprechend zu wählen. Nachdem man so δ , also auch K bestimmt hat, setzt man

$$U = \iiint_K \frac{\varrho}{r} d\tau + \iiint_{T-K} \frac{\varrho}{r} d\tau = U^{(1)} + U^{(2)}$$

¹⁾ Mit U_P bzw. U_{P_1} bezeichnen wir den Wert der Funktion U im Punkte P bzw. im Punkte P_1 .

und hat zunächst $|U_P^{(1)}| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|U_{P_1}^{(1)}| < \frac{\varepsilon}{3}$, demnach

$$|U_P^{(1)} - U_{P_1}^{(1)}| < \frac{2\varepsilon}{3}, \quad (6)$$

wo auch P_1 liegen mag.

Für $U^{(2)}$ ist aber P ein äußerer Punkt, also die Stetigkeit trivial, daher

$$|U_P^{(2)} - U_{P_1}^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (7)$$

wenn man $\overline{PP_1}$ klein genug wählt. Aus (6) und (7) ergibt sich (5).

Liegt P auf S , so kann der Beweis wörtlich wiederholt werden, wenn man unter K denjenigen Teil der kleinen Kugel versteht, der zu T gehört.

Der Beweis der Stetigkeit (für Punkte der Masse) von

$$X = \iiint_T \varrho \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\tau = \iiint_T \frac{\varrho}{r^2} \cdot \frac{\xi - x}{r} d\tau,$$

sowie von Y und Z ist nach Benutzung der Ungleichung (2) dem obigen analog. Daraus folgt aber noch nicht, daß die

für Punkte außerhalb der Masse triviale Gleichung $\frac{\partial U}{\partial x} = X$

auch jetzt gelten muß. Vielmehr erfordert der Satz, daß auch jetzt die Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt werden darf, eine besondere Betrachtung. Wir umgeben den Massenpunkt P mit einem schmalen geraden Kreiszyylinder, dessen Achse parallel der x -Achse ist. Der Radius des Grundkreises sei δ , die Höhe eine beliebige Konstante, z. B. 1. Der Punkt P sei Mittelpunkt der Zylinder-Achse. Nehmen wir von T denjenigen Teil T_1 des

Zylinders fort, der zu T gehört, so entsteht ein etwa mit T_2 bezeichnetes Gebiet. Die über T_1 bzw. T_2 erstreckten Integrale heißen $U^{(1)}$, $X^{(1)}$ bzw. $U^{(2)}$, $X^{(2)}$. Dann ist, weil P für T_2 ein äußerer Punkt ist,

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} = X^{(2)},$$

und diese Gleichung gilt in P selbst und überhaupt in den inneren Punkten der Achse. Sind also x' , y , z die Koordinaten eines solchen Punktes, so erhält man durch Integration

$$U^{(2)}(x, y, z) - U^{(2)}(x', y, z) = \int_{x'}^x X^{(2)}(t, y, z) dt.$$

Nun ergibt sich aus (1) und (2), daß zugleich mit dem Radius δ auch die Integrale $U^{(1)}$ und $X^{(1)}$ gegen 0 konvergieren, und zwar gleichmäßig für jede Lage des Aufpunktes. Machen wir also den Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$, so kann, da $X^{(2)}$ gleichmäßig gegen X konvergiert, oben die Reihenfolge von Integration und Grenzübergang vertauscht werden, und es folgt

$$U(x, y, z) - U(x', y, z) = \int_{x'}^x X(t, y, z) dt.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X. \quad (8)$$

Ebenso werden die entsprechenden Gleichungen für Y und Z abgeleitet. Aus den obigen Ergebnissen folgt: *Die Ableitungen erster Ordnung des Raumpotentials U sind ebenfalls im ganzen Raume stetig.*

Wir behaupten jetzt: *Das Flächenpotential der einfachen Schicht*

$$V = \iint_S \frac{\alpha}{r} d\omega$$

bleibt auch in den Punkten P von S selbst stetig. Da ja α als beschränkt vorausgesetzt wird, so folgt zunächst aus (4) die absolute Konvergenz des Integrals V auch für Punkte P von S . Um die Stetigkeit zu beweisen, verfahren wir ganz ähnlich wie beim Raumpotential. Es genügt, den Beweis zu skizzieren. Wir schalten aus S eine kleine Umgebung S_1 von P aus. Der übrige Teil von S heiße S_2 . Die zugehörigen Integrale werden mit $V^{(1)}$ und $V^{(2)}$ bezeichnet. Dann ist $V = V^{(1)} + V^{(2)}$. Man kann nun $|V^{(1)}|$, wie man sofort aus (4) schließt, dadurch, daß man S_1 genügend klein macht, unter $\frac{\varepsilon}{3}$ herabdrücken, und zwar gleichmäßig für jede Lage des Aufpunktes. Für $V^{(2)}$ ist aber P ein äußerer Punkt.

§ 24. Unstetigkeit des Potentials der Doppelschicht.

Im Gegensatz zum Potential der einfachen Schicht ist das der Doppelschicht

$$W = \iint_S \nu \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = \iint_S \frac{\nu \cos(r, n)}{r^2} d\omega \quad (9)$$

in einem Punkte von S selbst nicht stetig. Wir werden folgenden Satz beweisen: *Das Potential der Doppelschicht zeigt beim Durchgange des Aufpunktes P durch S eine*

sprungweise Unstetigkeit. Setzen wir zur Abkürzung den Winkel $(r, n) = \psi$, so ist

$$W = \iint_S \frac{\nu \cos \psi}{r^2} d\omega. \quad (9^*)$$

Wir nehmen zunächst an, daß S eine geschlossene Fläche ist, und behandeln den speziellen Fall $\nu = 1$, untersuchen also das Integral

$$I = \iint_S \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = \iint_S \frac{\cos \psi}{r^2} d\omega. \quad (10)$$

Die Unstetigkeit von I wird man leicht erkennen, wenn man sich die geometrische Bedeutung des Integrationselements $\frac{\cos \psi}{r^2} d\omega$ klarmacht. Wir denken uns das Flächenelement $d\omega$ von P aus auf die um P als Mittelpunkt gelegten Kugeln K und K_1 mit den Radien 1 bzw. r projiziert, deren Flächenelemente $d\sigma$ bzw. $d\sigma_1$ genannt werden.

Dann ist offenbar $d\sigma_1 = |\cos \psi| d\omega$ und $d\sigma = \frac{d\sigma_1}{r^2}$, daher

$$d\sigma = \frac{|\cos \psi| d\omega}{r^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos \psi}{r^2} d\omega = \pm d\sigma, \quad (11)$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem ψ spitz oder stumpf ist. Hieraus folgt nun leicht für den Fall, daß P im Innenraume von S liegt,

$$I = \iint d\sigma = 4\pi = \text{Oberfläche der Einheitskugel.} \quad (12_1)$$

Das ist unmittelbar klar, wenn jeder Halbstrahl durch P die Fläche S bloß in einem Punkte schneidet, weil dann dieser Punkt „Austrittsstelle“ und an einer solchen ψ spitz ist. Im allgemeinen schneidet jeder Halbstrahl durch P die Fläche S in einer ungeraden Anzahl von Punkten, weil

sie geschlossen ist. Es ist eine Austrittsstelle mehr als Eintrittsstellen da. Die Elemente $+d\sigma$, $-d\sigma, \dots$ vernichten sich bis auf ein einziges positives, und man erhält wieder (12₁).

Liegt P im Außenraume von S , so ist

$$I = 0, \quad (12_2)$$

weil auf jedem Halbstrahl durch P eine gerade Anzahl von Schnittpunkten mit S liegt und die zugehörigen Elemente $+d\sigma$, $-d\sigma \dots$ einander aufheben.

Befindet sich P auf S selbst, so ist, wenn P ein gewöhnlicher Punkt von S ist,

$$I = 2\pi, \quad (12_3)$$

weil die Elemente $d\sigma$, in welche die $d\omega$ von P aus projiziert werden, nur eine Hälfte der Einheitskugel erfüllen.

Lassen wir zu, daß S eine endliche Anzahl von Kanten oder konischen Punkten (z. B. die Spitze eines Kegels) besitzt, so wird, wenn P ein singulärer Punkt von S ist,

$$I = \gamma; \quad (12_3^*)$$

dabei bezeichnet γ den „räumlichen Winkel“, welchen der Kegel der Flächentangenten in P bildet, d. h. den Flächeninhalt des Teiles der Einheitskugel um P , welcher von dem obigen Kegel ausgeschnitten wird. In einem gewöhnlichen Punkte ist $\gamma = 2\pi$, so daß (12₃) auch als Spezialfall von (12₃^{*}) angesehen werden kann. Die Gleichungen (12) setzen die Unstetigkeit von I beim Durchgange des Punktes P durch S in Evidenz.

Wir kehren nun zu $W = \iint_S \frac{\nu \cos \phi}{r^2} d\omega$ zurück und schreiben, wenn ν_s den Wert von ν in einem bestimmten Punkte s von S bedeutet,

$$W = \nu_s \iint_S \frac{\cos \phi}{r^2} d\omega + \iint_S (\nu - \nu_s) \frac{\cos \phi}{r^2} d\omega$$

oder

$$W - \nu_s I = \int \int_S (v - \nu_s) \frac{\cos \phi}{r^2} d\omega = f. \quad (13)$$

Wir werden zeigen, daß f beim Durchgange von P durch s stetig bleibt. Dies vorausgesetzt, erhalten wir, wenn wir den Wert einer Funktion im Punkte s selbst, bzw. die Grenzwerte beim Heranrücken von innen oder von außen durch die Indizes s, i, a bezeichnen,

$$I_i = 4\pi, \quad I_a = 0, \quad I_s = \begin{cases} 2\pi \\ \gamma \end{cases}; \quad f_i = f_a = f_s.$$

Ist also s ein gewöhnlicher Punkt, so wird, wenn man die Definition von f durch (13) bedenkt,

$$W_i - 4\pi \nu_s = W_a = W_s - 2\pi \nu_s,$$

mithin

$$W_i = W_s + 2\pi \nu_s, \quad W_a = W_s - 2\pi \nu_s. \quad (14)$$

Diesen Gleichungen kann man auch die Form geben

$$\frac{1}{2}(W_i - W_a) = 2\pi \nu_s, \quad \frac{1}{2}(W_i + W_a) = W_s. \quad (15)$$

Ist s ein singulärer Punkt, so hat man

$$W_i - 4\pi \nu_s = W_a = W_s - \gamma \nu_s,$$

daher

$$W_i = W_s + (4\pi - \gamma) \nu_s, \quad W_a = W_s - \gamma \nu_s. \quad (14^*)$$

Wenn die Fläche S nicht geschlossen ist, so ergänze man sie zu einer im allgemeinen mit stetiger Normale versehenen geschlossenen Fläche S' , wobei man ν als stetige Funktion des Ortes im übrigen willkürlich fortsetzt. Für das über S' erstreckte Potential W' gelten die Gleichungen (14) bzw. (14*). Für das über $S' - S$ erstreckte Potential $W' - W$ ist aber der Punkt s , falls er nicht auf dem Rande von S liegt, ein äußerer Punkt; daher ist dieses Potential

in s stetig. Daraus folgt sofort die Gültigkeit von (14) bzw. (14*) auch für W selbst, falls die Lage von s auf dem Rande von S ausgeschlossen wird. Unter W_i bzw. W_a versteht man hier die Grenzwerte der Funktion W bei Annäherung an s von derjenigen Seite her, nach der die Normale positiv bzw. negativ gerechnet ist.

Wir tragen jetzt den Beweis der Stetigkeit von $f = \iint_S (\nu - \nu_s) \frac{\cos \phi}{r^2} d\omega$ im Punkte s von S nach. Um s als Mittelpunkt werde eine kleine Kugel vom Radius δ gelegt, welche auf S eine kleine Umgebung S_1 von s ausschneidet; der übrige Teil von S heiße S_2 . Wir zerlegen nun f in die über S_1 und S_2 erstreckten Integrale f_1 bzw. f_2 , also $f = f_1 + f_2$. Bedeutet N das Maximum von $|\nu - \nu_s|$ auf S_1 , welches wegen der Stetigkeit von ν gleichzeitig mit δ gegen 0 konvergiert, so ist

$$|f_1| \leq N \iint_{S_1} \frac{|\cos \phi|}{r^2} d\omega \leq N \iint_S \frac{|\cos \phi|}{r^2} d\omega.$$

Das Integral $\iint_S \frac{|\cos \phi|}{r^2} d\omega$ liegt aber unter einer von

der Lage des Aufpunktes P unabhängigen Schranke. Ist nämlich m die Höchstzahl der Punkte, in denen die Fläche S von irgendeiner Geraden geschnitten wird, so ergibt sich unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung von $\frac{|\cos \phi|}{r^2} d\omega$ die Ungleichung $\iint_S \frac{|\cos \phi|}{r^2} d\omega < 4\pi m$, also

$|f_1| < 4\pi m N$. Wählt man δ genügend klein, so kann N , demnach auch $|f_1|$ unter jeden Betrag herabgedrückt werden, wo auch P liegen mag. Andererseits ist s für f_2 ein äußerer Punkt. Daraus folgt nach der im vorigen

Paragraphen wiederholt angewandten Schlußweise die Stetigkeit von f in s .

Aufgabe: Man beweise durch Anwendung der Formel (9) des § 13 zuerst die Gleichung (12₂), dann auch (12₁), indem man eine Kugel um P zu Hilfe nimmt, die ganz in dem von S eingeschlossenen Gebiete liegt!

§ 25. Unstetigkeit der Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht.

Das Potential der einfachen Schicht war definiert durch das Integral

$$V = \iint_S \frac{\kappa}{r} d\omega. \quad (16)$$

Die Fläche S möge jetzt überall stetige Krümmung besitzen. Die Dichte κ sei eine stetige Funktion des Ortes auf S . Wir denken uns in einem beliebigen Punkte s von S , der jedoch, wenn S eine offene Fläche ist, nicht auf der Begrenzung liegen darf, die Normale n_s und wählen den Aufpunkt P irgendwo auf n_s . Solange P eine endliche Entfernung von s hat, können alle Differentiationen unter dem Integral ausgeführt werden, und wir bekommen für die Ableitung in Richtung der positiven Normalen (die im Falle einer offenen Fläche willkürlich gewählt werden darf)

$$\frac{\partial V}{\partial n_s} = \iint_S \kappa \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n_s} d\omega. \quad (17)$$

Wir untersuchen nun, wie sich $\frac{\partial V}{\partial n_s}$ verhält, wenn P von der positiven bzw. von der negativen Seite her nach s

rückt, und bezeichnen die zugehörigen Grenzwerte mit $\frac{\partial V_i}{\partial n_s}$ bzw. $\frac{\partial V_a}{\partial n_s}$ (der Gleichförmigkeit halber auch im Falle einer offenen Fläche). Wir werden folgenden Satz ableiten: *Die Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht zeigt beim Durchgange des Aufpunktes P durch die mit Masse belegte Fläche S eine sprunghafte Unstetigkeit.* Ähnlich wie beim Potential der Doppelschicht können wir folgende Umformung vornehmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial n_s} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n_s} + \dots = \frac{x - \xi}{r} \cos(n_s, x) + \dots \\ &= \cos(r, x) \cos(n_s, x) + \dots = \cos(r, n_s), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n_s} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n_s} = - \frac{\cos(r, n_s)}{r^2},$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial n_s} = - \iint_S \frac{\kappa \cos(r, n_s)}{r^2} d\omega. \quad (17^*)$$

Jetzt setzen wir, wenn n_Q die positive Normale im Punkte Q^1) von S bezeichnet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n_s} &= - \iint_S \frac{\kappa \cos(r, n_Q)}{r^2} d\omega + \iint_S \kappa \frac{\cos(r, n_Q) - \cos(r, n_s)}{r^2} d\omega \quad (18) \\ &= -W \quad + C. \end{aligned}$$

Offenbar ist W das Potential einer Doppelschicht mit dem Moment κ . Von dem Integral C werden wir beweisen, daß es beim Durchgange des Punktes P durch s stetig

¹⁾ Wie immer sind die Koordinaten ξ, η, ζ von Q die Integrationsvariablen, während $P(x, y, z)$ den Aufpunkt darstellt.

bleibt. Wir haben demnach die Gleichungen (s. § 24, Gl. (14))

$$W_i = 2\pi \kappa_s + W_s, \quad W_a = -2\pi \kappa_s + W_s,$$

da eine stetig gekrümmte Fläche keine singulären Punkte besitzt, und ferner $C_i = C_s = C_a$. Hieraus folgt

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_s} = -2\pi \kappa_s - W_s + C_s, \quad \frac{\partial V_a}{\partial n_s} = +2\pi \kappa_s - W_s + C_s.$$

Andrerseits ist nach der Definition von W und C ¹⁾

$$-W_s + C_s = - \iint_S \frac{\kappa \cos(r_{Qs}, n_s)}{r_{Qs}^2} d\omega.$$

Demnach wird

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_s} = -2\pi \kappa_s + E, \quad \frac{\partial V_a}{\partial n_s} = 2\pi \kappa_s + E \quad (19)$$

oder

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial n_s} - \frac{\partial V_a}{\partial n_s} \right) = -2\pi \kappa_s, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial n_s} + \frac{\partial V_a}{\partial n_s} \right) = E, \quad (20)$$

wo zur Abkürzung

$$E = - \iint_S \frac{\kappa \cos(r_{Qs}, n_s)}{r_{Qs}^2} d\omega \quad (21)$$

gesetzt ist.

Die Stetigkeit von¹⁾

$$C = \iint_S \kappa \frac{\cos(r_{QP}, n_Q) - \cos(r_{QP}, n_s)}{r_{QP}^2} d\omega$$

beim Durchgange von P durch s wird folgendermaßen bewiesen. Wir schlagen um s eine kleine Kugel mit dem Radius δ , bezeichnen den von ihr aus S herausgeschnittenen Teil mit S_1 , den Rest von S mit S_2 und

¹⁾ Es bedeutet r_{Qs} die Entfernung der Punkte Q und r_{QP} die der Punkte Q und P voneinander, oder auch die Richtung von Q nach s bzw. nach P .

zerlegen in der üblichen Weise $C = C_1 + C_2$. Dann genügt es zu zeigen, daß $|C_1|$ durch Verkleinern von δ unter jede noch so kleine positive Zahl herabgedrückt werden kann, wo auch P auf n_s liegen mag. Hierzu werden wir die Abschätzungsformel

$$|\cos(r_{QP}, n_s) - \cos(r_{QP}, n_Q)| < a \cdot r_{Qs} \quad (22)$$

ableiten¹⁾. Aus dieser folgt

$$|C_1| < a \iint_{S_1} |x| \frac{r_{Qs}}{r_{QP}^2} d\omega;$$

Es ist aber $\frac{r_{Qs}}{r_{QP}} \leq 1$. Das ist trivial, wenn P mit s zusammenfällt. Andernfalls hat man zu berücksichtigen, daß im Dreieck PsQ der der Seite r_{QP} gegenüberliegende Winkel mit dem Scheitel s , welcher ja bei Annäherung von Q gegen s den Grenzwert $\frac{\pi}{2}$ hat, der größte sein muß, wenn man nur S_1 oder δ genügend klein annimmt. Schließlich folgt

$$|C_1| < a \iint_{S_1} \frac{|x|}{r_{QP}} d\omega, \quad (23)$$

so daß $|C_1|$ tatsächlich nach Ungleichung (4) des § 22 beliebig klein gemacht werden kann. Um (22) zu beweisen, schreiben wir zur Abkürzung $\sphericalangle(r_{QP}, n_s) = \alpha$, $\sphericalangle(r_{QP}, n_Q) = \beta$. Dann wird

$$\begin{aligned} \cos(r_{QP}, n_s) - \cos(r_{QP}, n_Q) &= \cos \alpha - \cos \beta \\ &= -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}, \end{aligned}$$

$$|\cos(r_{QP}, n_s) - \cos(r_{QP}, n_Q)| \leq 2 \sin \left| \frac{\alpha - \beta}{2} \right| < a_1 \sin |\alpha - \beta|,$$

da $|\alpha - \beta|$ bei genügend kleinem δ beliebig klein wird.

¹⁾ Mit a und im folgenden a_1, a_2, \dots werden positive Konstante bezeichnet.

Zieht man durch Q die Parallele zur Normale n_s , so entsteht bei Q eine dreiseitige Ecke, deren Kanten diese Parallele, die Normale n_Q und der Radiusvektor r_{QP} sind. Nun ist die Differenz der beiden Kantenwinkel $|\alpha - \beta|$ kleiner als der dritte Kantenwinkel $\sphericalangle(n_s, n_Q) = \mathcal{F}$. Demnach wird

$$|\cos(r_{QP}, n_s) - \cos(r_{QP}, n_Q)| < a_1 \sin \mathcal{F}.$$

Um endlich $\sin \mathcal{F} < a_2 r_{Qs}$ zu beweisen, führen wir ein neues Koordinatensystem ein mit s als Anfangspunkt, n_s als z -Achse und dem Schnitt der Tangentialebene in s und der Ebene durch Q und n_s als x -Achse. Die Gleichung von S_1 sei $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$. Wegen der Stetigkeit der Krümmung existieren stetige Ableitungen von ζ bis zur zweiten Ordnung. In s ist $\xi = \eta = \zeta = 0$, ferner $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$.

Offenbar ist der dritte Richtungskosinus der Normalen n_Q

$$\cos \mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2 + 1}},$$

also

$$\sin \mathcal{F} \leq \sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2}.$$

Die Taylorsche Formel liefert die Darstellung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \xi \frac{\partial^2 \zeta(\theta \xi, \theta \eta)}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^2 \zeta(\theta \xi, \theta \eta)}{\partial \xi \partial \eta}, \quad (0 < \theta < 1)$$

daher

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right| < a_3 (|\xi| + |\eta|) < 2 a_3 r_{Qs}, \quad \text{ebenso} \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| < 2 a_3 r_{Qs},$$

da ja die Beträge der Ableitungen zweiter Ordnung von ζ wegen ihrer Stetigkeit unter einer Konstanten a_3 liegen. Mithin ist $\sin \mathcal{F} < 3 a_3 r_{Qs}$. Damit ist der Beweis vollendet.

Die Gleichungen (19) oder (20) gelten nun auch unter geringeren Voraussetzungen über die Fläche S , worauf wir jetzt eingehen. Wir führen unter Beibehaltung des obigen Achsensystems Zylinderkoordinaten ein

$$\xi = l \cos \varphi, \quad \eta = l \sin \varphi, \quad \zeta$$

und setzen voraus, daß die Funktion ζ in der Umgebung von s in der Form

$$\zeta = l^{1+\sigma} g(l, \varphi), \quad (\sigma > 0)$$

dargestellt werden kann, wo g beschränkte partielle Ableitungen erster Ordnung nach l und φ besitzt. (Diese Voraussetzung war oben mit $\sigma = 1$ erfüllt.)

Nun ergibt sich

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\xi}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial l} - \frac{\eta}{l^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{\eta}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial l} + \frac{\xi}{l^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}$$

und

$$\frac{\partial \zeta}{\partial l} = (1 + \sigma) l^\sigma g(l, \varphi) + l^{1+\sigma} \frac{\partial g(l, \varphi)}{\partial l},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = l^{1+\sigma} \frac{\partial g(l, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Daraus schließt man, daß $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|$ und $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right|$ kleiner als $a_4 l^\sigma$ sein müssen. Mithin ist $\sin \vartheta < a_5 l^\sigma$. Wegen

$$r_{sQ}^2 = l^2 + \zeta^2, \quad l \leq r_{sQ}$$

hat man $\sin \vartheta < a_5 r_{sQ}^\sigma$ und $|\cos(r, n_s) - \cos(r, n_Q)| < a_6 r_{sQ}^\sigma$. Anstatt (23) findet man also jetzt

$$|C_1| < a \int_{S_1} \frac{|\chi|}{r_{PQ}^{2-\sigma}} d\omega,$$

so daß wieder $|C_1|$ nach Ungleichung (4*) des § 22 durch Verkleinerung von S_1 unter jeden Betrag herabgedrückt werden kann.

§ 26. Die Normalableitung des Potentials der Doppelschicht.

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der Normalableitung des Potentials

$$W = \iint_S v \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = \iint_S \frac{v \cos(r, n)}{r^2} d\omega$$

bei Annäherung des Aufpunktes P an S . Die Fläche S möge geschlossen sein und stetige Krümmung besitzen. In einem beliebigen Punkte s von S errichten wir die Normale, nehmen auf ihr zwei Punkte P_1 und P_2 zu beiden Seiten von s in gleicher Entfernung δ an und bilden die nach der positiven Richtung genommenen Normalableitungen $\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_1}$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_2}$. Wir wollen zeigen, daß

$$\lim_{\delta=0} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_1} - \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_2} \right\} = 0 \quad (24)$$

ist. Aus dieser Limesgleichung darf man keineswegs den Schluß ziehen, daß die Grenzwerte $\lim_{\delta=0} \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_1}$ und $\lim_{\delta=0} \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_2}$ einzeln existieren. Das ist im allgemeinen im Gegensatz zum Potential der einfachen Belegung nicht der Fall. Man kann aber aus (24) folgern: *Existiert der eine der beiden Grenzwerte der Normalableitung von W , so existiert auch der andere und ist dem ersten gleich.*

Wir gehen nun zum Beweise¹⁾ über und machen die positive Normale in s zur positiven z -Achse, so daß die

¹⁾ Vgl. A. Tauber, Über einige Sätze der Potentialtheorie. Monatshefte für Math. u. Phys. Jahrgang IX. Wien 1898. S. 74—88, insbes. S. 78—83.

Tangentialebene (x, y) -Ebene ist. Das Potential $W(x, y, z)$ wird, wenn P auf die z -Achse beschränkt bleibt, eine Funktion von z allein, und wir schreiben

$$W(0, 0, z) \equiv F(z). \quad (25)$$

Dann ist die Limesgleichung zu beweisen

$$\lim_{z=0} \{F'(z) - F'(-z)\} = 0. \quad (24^*)$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das Moment ν in s verschwindet. Denn ist dies von vornherein nicht der Fall, so setzen wir

$$W = \iint_S (\nu - \nu_s) \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega + \nu_s \iint_S \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega.$$

Für das erste der beiden rechts stehenden Potentiale mit dem Momente $\nu - \nu_s$ ist dann die Voraussetzung erfüllt. Das zweite hat für alle inneren Punkte den konstanten Wert $4\pi\nu_s$, für alle äußeren Punkte den konstanten Wert 0; daher sind die Normalableitungen einzeln 0, ebenso ihre Grenzwerte und deren Differenz, so daß der Satz für dieses spezielle Potential richtig ist.

Die Gleichung von S kann in einer genügend kleinen Umgebung von s auf die Form gebracht werden

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta), \quad (26)$$

wo ζ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt. Im Punkte s ist $\xi = \eta = \zeta = 0$, also $\zeta(0, 0) = 0$ und ferner $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$. Entwickelt man daher ζ nach der

Taylor'schen Formel, so wird

$$\zeta = \xi^2 \frac{\partial^2 \zeta(\theta \xi, \theta \eta)}{\partial \xi^2} + 2\xi \eta \frac{\partial^2 \zeta(\theta \xi, \theta \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial^2 \zeta(\theta \xi, \theta \eta)}{\partial \eta^2}. \quad (0 < \theta < 1)$$

Führen wir Zylinderkoordinaten $\xi = l \cos \varphi$, $\eta = l \sin \varphi$, ζ ein, so sehen wir, daß $\frac{|\zeta|}{l^2}$, wie klein auch l werden mag, unter einer von l unabhängigen Schranke M bleibt. Ebenso bleibt $\frac{1}{l} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial l} \right|$ beschränkt, weil die Ableitung $\frac{\partial \zeta}{\partial l}$ bei der Entwicklung nach der Taylorsche Formel nur die Glieder ersten Grades in ξ, η enthält, während das konstante Glied verschwindet. Wir haben demnach

$$|\zeta| < Ml^2, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial l} \right| < Ml \quad (27)$$

in genügend kleiner Umgebung von s , also etwa für $0 \leq l \leq l_0$. Über die Wahl von l_0 wird später eine genaue Festsetzung getroffen werden. Den Teil von S , dessen Punkte der Ungleichung $0 \leq l \leq l_0$ genügen, nennen wir S_1 , den übrigen Teil S_2 und setzen

$$W = \iint_{S_1} v \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega + \iint_{S_2} v \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega = W_1 + W_2. \quad (28)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \cos(r, n) = & \{(x - \xi) \cos(n, x) + (y - \eta) \cos(n, y) \\ & + (z - \zeta) \cos(n, z)\} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

und ferner, wenn man die Gleichungen für die Richtungskosinus der Normalen $\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z)$

$$= \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} : \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} : -1 \text{ berücksichtigt,}$$

$$\begin{aligned} \cos(n, z) d\omega &= d\xi d\eta, \\ \cos(n, x) d\omega &= \frac{\cos(n, x)}{\cos(n, z)} d\xi d\eta = -\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} d\xi d\eta, \\ \cos(n, y) d\omega &= \frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} d\xi d\eta = -\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Wir können also schreiben

$$W_1(x, y, z) = \iint \frac{(\xi - x) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + (\eta - y) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - (\zeta - z)}{r^3} \nu d\xi d\eta,$$

wo die Integration über die Projektion von S_1 auf die (x, y) -Ebene zu erstrecken ist. Mithin wird

$$F_1(z) = \iint \frac{\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - (\zeta - z)}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \nu d\xi d\eta = W_1(0, 0, z) \quad (29)$$

und wegen $\frac{\partial \zeta}{\partial l} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\xi}{l} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \frac{\eta}{l}$

$$F_1(z) = \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} \frac{l \frac{\partial \zeta}{\partial l} + z - \zeta}{[l^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} \nu l dl d\varphi. \quad (29^*)$$

Setzen wir zur Abkürzung $g = \frac{l \frac{\partial \zeta}{\partial l} + z - \zeta}{r^3}$, so ist

$$F_1(z) = \int_0^{l_0} l dl \int_0^{2\pi} g \nu d\varphi, \quad (29^{**})$$

daher

$$F_1'(z) = \int_0^{l_0} l dl \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial z} \nu d\varphi. \quad (30)$$

Wir schreiben noch $r_0 = \sqrt{l^2 + z^2}$, $\lambda = \frac{r^2}{r_0^2} - 1$ und erinnern an $r = \sqrt{l^2 + (z - \zeta)^2}$. Offenbar ist r_0 die Entfernung des Punktes $P(0, 0, z)$ von der Projektion des Punktes $Q(\xi, \eta, \zeta)$ auf die (x, y) -Ebene.

Wenn der Punkt (ξ, η, ζ) sich dem Punkte $s(0, 0, 0)$ unbegrenzt nähert, so konvergiert ζ gegen 0, r gegen r_0 , was dann mit $|z|$ übereinstimmt, und λ gegen 0. Schließlich definieren wir N durch die Gleichung

$$\frac{r_0^5}{r^5} = 1 - N\lambda.$$

Wegen $\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \lambda$ hat man

$$\frac{r_0^5}{r^5} = (1 + \lambda)^{-\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5}{2}\lambda + \dots$$

für $|\lambda| < 1$, wo die Punkte eine konvergente mit dem quadratischen Gliede beginnende Potenzreihe von λ andeuten. Hieraus schließt man, daß N mit abnehmendem λ gegen $\frac{5}{2}$ konvergiert; macht man also l_0 und folglich auch λ klein genug, so kann $2 < N < 3$ angenommen werden.

Wir werden nun zunächst das Integral

$$F'_1(z) = \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} l \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \nu dl d\varphi = \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} l \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \right) \nu dl d\varphi \quad (31)$$

untersuchen und brauchen dazu eine Abschätzung für

$$l \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \right) = l \left[\frac{l^2 - 2(z - \zeta)^2}{r^5} - \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \right] \\ - \frac{3l^2(z - \zeta)}{r^5} \frac{\partial \zeta}{\partial l}.$$

Es ist

$$\left| \frac{3l^2 \zeta \partial \zeta}{r^5 \partial l} \right| \leq \frac{3l^2 |\zeta|}{l^5} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial l} \right| < 3M^2 \quad \text{nach (27),}$$

$$\left| \frac{3l^2 z \partial \zeta}{r^5 \partial l} \right| < \frac{3|z|M}{r^2} < \frac{4|z|M}{r_0^2},$$

da man wegen $\lim_{\substack{r \\ l=0, r_0}} \frac{r}{r_0} = 1$ die Größe l_0 so klein wählen kann, daß für $0 \leq l \leq l_0$ die Ungleichung $\frac{r_0^2}{r^2} < \frac{4}{3}$ gilt.

Ferner hat man

$$\begin{aligned} & l \left[\frac{l^2 - 2(z - \zeta)^2}{r^5} - \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \right] \\ &= \frac{l}{r_0^5} [(l^2 - 2(z - \zeta)^2)(1 - N\lambda) - l^2 + 2z^2] \\ &= \frac{l}{r_0^5} [-N\lambda(l^2 - 2(z - \zeta)^2) - 2\zeta^2 + 4z\zeta] \\ &= -\frac{l\lambda}{r_0^5} [N(l^2 - 2(z - \zeta)^2) + 2r_0^2], \end{aligned}$$

wenn man $-2\zeta^2 + 4z\zeta = -2(r^2 - r_0^2) = -2\lambda r_0^2$ berücksichtigt. Nun ist

$$\begin{aligned} N(l^2 - 2(z - \zeta)^2) + 2r_0^2 &< 2r_0^2 + 2N(l^2 + (z - \zeta)^2) \\ &= 2r_0^2 + 2Nr^2 < 2r_0^2 + 6r^2 < 9r_0^2, \end{aligned}$$

da man wegen $\lim_{\substack{r \\ l_0=0, r_0}} \frac{r}{r_0} = 1$ jedenfalls $\frac{r^2}{r_0^2} < \frac{7}{6}$ annehmen darf. Daher folgt

$$\begin{aligned} \left| l \left[\frac{l^2 - 2(z - \zeta)^2}{r^5} - \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \right] \right| &< \frac{9l|\lambda|r_0^2}{r_0^5} \\ &< \frac{9|\lambda|}{r_0^2} < 9 \left(M^2 + 2M \frac{|z|}{r_0^2} \right), \end{aligned}$$

wenn man

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \frac{|\zeta^2 - 2z\zeta|}{r_0^2} \leq \frac{\zeta^2 + 2|z\zeta|}{l^2} \\ &< M^2 l^2 + 2M|z| < M^2 r_0^2 + 2M|z| \end{aligned}$$

bedenkt. Aus den obigen Abschätzungen ergibt sich

$$\left| l \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \right) \right| < 3M^2 + \frac{4|z|M}{r_0^2} + 9 \left(M^2 + \frac{2|z|M}{r_0^2} \right) \\ < 12M^2 + 24 \frac{M|z|}{r_0^2}.$$

Demnach ist

$$\left| F_1'(z) - \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} l \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \nu \, dl \, d\varphi \right| \\ < \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} \left(12M^2 + 24 \frac{M|z|}{r_0^2} \right) |\nu| \, dl \, d\varphi \\ < \nu_m \left[12M^2 \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} dl \, d\varphi + 24M \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} \frac{|z|}{l^2 + z^2} dl \, d\varphi \right],$$

wobei ν_m das Maximum von $|\nu|$ auf S_1 bedeutet. Es ist aber

$$\int_0^{l_0} \frac{|z|}{l^2 + z^2} dl < \int_0^{\infty} \frac{|z|}{l^2 + z^2} dl = \int_0^{\infty} \frac{dl}{1 + t^2} = \arctg t \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Dabei ist die Transformation $t = \frac{l}{|z|}$ angewandt, welche statthaft ist, weil $P(0, 0, z)$ nicht mit $s(0, 0, 0)$ zusammenfallen, also z nicht $= 0$ sein darf. Wir bekommen schließlich

$$\left| F_1'(z) - \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} l \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \nu \, dl \, d\varphi \right| \quad (32) \\ < \nu_m (24M^2 \pi l_0 + 24M \pi^2) = \frac{c}{2} \cdot \nu_m,$$

wenn wir zur Abkürzung $c = 48 M^2 \pi l_0 + 48 M \pi^2$ setzen. Genau dieselbe Abschätzung erhält man durch Vertauschung von z mit $-z$ für $F'_1(-z)$, wenn man bedenkt, daß $\frac{l(l^2 - 2z^2)}{r_0^5}$ als gerade Funktion von z bei dieser Vertauschung ungeändert bleibt. Durch Kombination von (32) und

$$\left| F'_1(-z) - \int_0^{l_0} \int_0^{2\pi} l \frac{l^2 - 2z^2}{r_0^5} \nu \, dl \, d\varphi \right| < \frac{c}{2} \nu_m \quad (32^*)$$

findet man

$$|F'_1(z) - F'_1(-z)| < c \cdot \nu_m. \quad (33)$$

Jetzt ist (24) bzw. (24*) leicht zu beweisen. Ist ein beliebig kleines positives ε gegeben, dann wählt man zuerst l_0 so klein, daß das Maximum ν_m von $|\nu|$ auf S_1 der Ungleichung $c \cdot \nu_m < \frac{\varepsilon}{2}$ genügt. Das ist möglich, weil die stetige Funktion ν in s verschwindet und c beschränkt bleibt, wie klein auch l werden mag. Es wird

$$|F'_1(z) - F'_1(-z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für jedes von 0 verschiedene z . Für $F'_2(z) = W_2(0, 0, z)$ ist s ein äußerer Punkt. Daher kann man eine Konstante δ finden, so daß für $0 \leq |z| \leq \delta$ die Ungleichung

$|F'_2(z) - F'_2(-z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Mithin ergibt sich endlich für $0 < |z| \leq \delta$

$$|F'(z) - F'(-z)| < \varepsilon, \quad \text{w. z. b. w.} \quad (34)$$

Ist die Fläche S nicht geschlossen, so verfährt man ebenso wie beim Potential der einfachen Schicht (vgl. § 24). Die Limesgleichung (24) behält ihre Gültigkeit.

§ 27. Die Gleichung von Poisson.

In § 23 war die Stetigkeit des Raumpotentials

$$U = \iiint_T \frac{\varrho}{r} d\tau$$

und seiner Ableitungen erster Ordnung, sowie die Gültigkeit der Formeln

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \iiint_T \varrho \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} d\tau, \dots$$

im ganzen Raume bewiesen worden. Dabei war die Grenzfläche S von T ebenso wie in den §§ 4 und 22 als Jordansche Fläche, die Dichte ϱ als beschränkte integriere Funktion vorausgesetzt. Wir wollen jetzt die Ableitungen zweiter Ordnung von U für Punkte der Masse, genauer für Punkte in T (nicht auf S), also für Punkte im Innenraume von S untersuchen. Hierbei machen wir die Voraussetzung, daß S überall eine stetige Normale, die Dichte ϱ stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Nun kann man zunächst für den Fall, daß der Aufpunkt $P(x, y, z)$ im Außenraume von S liegt, folgende Umformung vornehmen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \iiint_T \varrho \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi} d\tau = \iint_S \varrho \frac{\cos(n, x)}{r} d\omega + \iiint_T \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\tau,$$

indem man den Integralsatz von Gauß (Gl. (1) des § 12) auf die Funktion $\frac{\varrho}{r}$ anwendet. Diese Umformung bleibt aber auch richtig, wenn der Punkt P in T liegt. Umgeben

wir ihn nämlich mit einer kleinen Kugel K vom Radius h , bezeichnen den nach Wegnahme von K übrigbleibenden Teil von T mit T^* und setzen

$$U^* = \iiint_{T^*} \frac{\varrho}{r} d\tau, \quad U^{**} = \iiint_K \frac{\varrho}{r} d\tau, \quad U = U^* + U^{**},$$

so ist, weil P für T^* ein äußerer Punkt ist,

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = \iiint_{T^*} \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\tau + \iint_S \frac{\varrho \cos(n, x)}{r} d\omega + \iint_K \frac{\varrho \cos(n, x)}{r} d\omega$$

Auf K ist aber $r = \text{const} = h$, $d\omega = h^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, folglich

$$\iint_K \frac{\varrho \cos(n, x)}{r} d\omega = h \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varrho \cos(n, x) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

also

$$\lim_{h=0} \iint_K = 0.$$

Ferner folgt leicht $\lim_{h=0} \frac{\partial U^{**}}{\partial x} = 0$.

Daher tatsächlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \iiint_T \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{1}{r} d\tau + \iint_S \frac{\varrho \cos(n, x)}{r} d\omega \\ &= A(x, y, z) + B(x, y, z). \end{aligned} \quad (35)$$

Hierin ist A ein Raumpotential mit der Dichte $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}$ und B ein Flächenpotential der einfachen Schicht mit der Dichte $\varrho \cos(n, x)$. Daher besitzt A überall und B mit Ausschluß der Punkte von S selbst stetige Ableitungen erster Ordnung. Mithin hat U sicherlich in T stetige Ableitungen zweiter Ordnung. Diese sind gegeben durch

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} \\
 & = \iiint_T \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\tau + \iint_S \varrho \cos(n, x) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\omega, \\
 & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} \\
 & = \iiint_T \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} d\tau + \iint_S \varrho \cos(n, x) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} d\omega, \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (36)$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung des Körperpotentials U sind sowohl für Punkte außerhalb wie für Punkte innerhalb der Masse, aber nicht beim Durchgange durch die Grenzfläche S stetig. Sie sind für die Punkte von S gar nicht definiert. Treffen die Voraussetzungen über ϱ nur in einem Teilgebiete T_1 von T zu, dessen Grenzfläche stetige Normale besitzt, z. B. in der kugelförmigen Umgebung eines Punktes von T , so nehmen wir die Zerlegung

$$U = \iiint_{T_1} \frac{\varrho}{r} d\tau + \iiint_{T-T_1} \frac{\varrho}{r} d\tau = U_1 + U_2$$

vor. Beschränken wir die Variabilität von P auf T_1 , so gelten die Formeln (36) einerseits für U_1 , andererseits aber auch für U_2 , da die Punkte des Gebietes T_1 äußere Punkte für U_2 sind. Daher gelten die Formeln im Gebiete T_1 auch für U selbst. Aus (36) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \iiint_T \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} d\tau - \iint_S \varrho \cos(n, x) \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} d\omega, \dots$$

Demnach ist

$$\Delta U = - \int_T \int \int \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi} + \frac{\partial \varrho}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta} + \frac{\partial \varrho}{\partial \zeta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \zeta} \right\} d\tau$$

$$- \int_S \int \varrho \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega,$$

wobei man

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \dots = \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi} \cos(n, x) + \dots$$

zu beachten hat.

Wenden wir jetzt die Formel (16) des § 14 an, indem wir $u = \varrho$ setzen, so bekommen wir unmittelbar

$$\Delta U = -4\pi\varrho. \quad (37)$$

Das ist die Differentialgleichung von Poisson.

Sie gilt für die Punkte P von T (bzw. für die Punkte jedes Teilgebietes T_1 von T , in welchem ϱ nebst Ableitungen erster Ordnung stetig ist).

Das Körperpotential U genügt also für Punkte außerhalb der Masse der Laplaceschen, für Punkte im Innern der Masse der Poissonschen Gleichung. Auf der Grenzfläche ist keine dieser beiden Gleichungen richtig.

Man kann übrigens die Laplacesche Gleichung als einen speziellen Fall der Poissonschen für $\varrho = 0$ ansehen. In dem Ausdruck für das Körperpotential $U = \iiint \frac{\varrho}{r} d\tau$ denkt man sich dementsprechend die Integration über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnt, wobei dort, wo

keine Masse ist, $\varrho = 0$ gesetzt wird. Dann gilt die Gleichung von Poisson im ganzen Raume mit Ausnahme derjenigen Punkte, in denen die Funktion ϱ oder ihre Ableitungen erster Ordnung unstetig werden, also jedenfalls mit Ausnahme der Punkte von S , in denen ϱ sprungweise unstetig ist.

§ 28. Analoge Sätze für das logarithmische Potential.

Mit den in den vorigen Paragraphen entwickelten Methoden können auch die folgenden Sätze für das logarithmische Potential bewiesen werden.

Das Flächenpotential

$$U = \iint_T \varrho \log \frac{1}{r} d\omega \quad (38)$$

ist, wenn T ein von einer geschlossenen Jordanschen Kurve begrenztes Gebiet und ϱ eine beschränkte integrierbare Funktion in T ist, in der ganzen Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes endlich und stetig. Dasselbe gilt von den Ableitungen erster Ordnung, welche durch die Formeln

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \iint_T \varrho \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial x} d\omega, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \iint_T \varrho \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial y} d\omega \quad (39)$$

gegeben sind. Besitzt die Grenzlinie S von T eine stetige Tangente und hat die Funktion ϱ stetige Ableitungen erster Ordnung in T , so sind die Ableitungen zweiter Ordnung von U nicht bloß außerhalb der Masse, sondern auch in T selbst, aber nicht auf S stetig. Sie können in der Form

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial n_s} - \frac{\partial V_a}{\partial n_s} \right) = -\pi \kappa_s,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial n_s} + \frac{\partial V_a}{\partial n_s} \right) = \int_S \kappa \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{st}} \right)}{\partial n_s} dt. \quad (43)$$

Ist die Kurve S nicht geschlossen, so wird vorausgesetzt, daß der Kurvenpunkt s kein Endpunkt von S ist.

Sind die Voraussetzungen der stetigen Krümmung der Grenzlinie und der Stetigkeit von κ nur in einem Teilstücke von S erfüllt, so bleiben die Gleichungen (43) in den Punkten dieses Teilstückes mit Ausschluß der Endpunkte gültig. Das erkennt man leicht, indem man V in der üblichen Weise als Summe zweier Potentiale darstellt.

Anstatt stetige Krümmung vorauszusetzen, genügt es anzunehmen, daß S in der Umgebung jedes Punktes s , falls man ihn zum Anfangspunkt und die Tangente zur x -Achse macht, die Darstellung

$$y = x^{1+\sigma} g(x)$$

gestattet, wo die Konstante $\sigma > 0$ ist und $g(x)$ eine endliche Ableitung besitzt.

Das Linienpotential der Doppelschicht

$$W = \int_S v \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds = \int_S \frac{v \cos(r, n)}{r} ds \quad (44)$$

besitzt, wenn S überall eine stetige Normale hat und v eine stetige Ortsfunktion auf S ist, in allen Punkten von S mit Aus-

¹⁾ Hierin bedeutet natürlich r_{st} die Entfernung des in dem festen Kurvenpunkte s befindlichen Aufpunktes von dem variablen Kurvenpunkte t , der sich im Integrationselemente dt befindet. Wir haben das Integrationselement statt wie bisher mit ds , jetzt mit dt bezeichnet, um einer Verwechslung der beiden Punkte s und t vorzubeugen.

nahme der etwaigen Endpunkte Grenzwerte W_i und W_a . Sie sind im allgemeinen von einander verschieden und genügen den Relationen

$$\frac{1}{2}(W_i - W_a) = \pi \nu_s, \quad \frac{1}{2}(W_i + W_a) = W_s. \quad (45)$$

Lassen wir zu, daß S eine endliche Anzahl Ecken besitzt und ist s eine Ecke, in der die beiden Tangenten den Winkel γ miteinander bilden, so gelten statt (45) die Relationen

$$\frac{1}{2}(W_i - W_a) = \pi \nu_s, \quad \frac{1}{2}(W_i + W_a) = (\pi - \gamma) \nu_s + W_s. \quad (45^*)$$

Die Normalableitung $\frac{\partial W}{\partial n}$ hat im allgemeinen, wenn man nicht neue Voraussetzungen über S und ν hinzufügt, bei Annäherung an S keinen Grenzwert. Nimmt man an, daß S stetige Krümmung besitzt, während über ν keine neue Annahme nötig ist, so gilt die Limesgleichung

$$\lim_{\delta=0} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_1} - \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_{P_2} \right\} = 0 \quad (46)$$

in demselben Sinne wie in § 26 und darum der Satz: *Existiert der eine der beiden Grenzwerte der Normalableitung von W , so existiert auch der andere und ist dem ersten gleich.*

§ 29. Dirichlets charakteristische Eigenschaften des Potentials.

Wir sind jetzt in der Lage, die zuerst von Dirichlet angegebenen charakteristischen Eigenschaften des Newtonschen Körperpotentials

$$U = \iiint \frac{\rho}{r} d\tau$$

abzuleiten. Die Bedingungen, die wir aufstellen werden, sind charakteristisch, insofern sie zugleich notwendig und hinreichend für die Identität der ihnen genügenden Funktion mit dem Potential U sind. Wir nehmen an, daß die Funktion ϱ nebst ihren Ableitungen erster Ordnung im ganzen unendlichen Raume abteilungsweise stetig ist und außerhalb einer genügend großen Kugel um den Nullpunkt identisch verschwindet, so daß das obige Integral über den ganzen Raum erstreckt gedacht wird.

Die charakteristischen Eigenschaften sind die folgenden:

(I.) *Die Funktion U ist nebst ihren Ableitungen erster Ordnung im ganzen Raume stetig.*

(II.) *Die Ableitungen zweiter Ordnung von U sind überall mit Ausschluß der Unstetigkeitsflächen von ϱ , $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial y}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial z}$ erklärt und stetig. Sie genügen der Differentialgleichung*

$$\Delta U = -4\pi\varrho.$$

(III.) *Für $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ ist $\lim U = 0$ und $R^2 |D_1 U|$ beschränkt.*

Statt der Beschränktheit von $R^2 |D_1 U|$ könnte man auch die Bedingung benutzen, daß U sich wie ein Potential mit Masse verhält, und zwar genauer für große R die Darstellung

$$U = \frac{M}{R} + u \quad (M = \iiint \varrho d\tau)$$

gestattet, wo $\lim u = 0$ und $R^3 |D_1 u|$ beschränkt ist.

Daß die drei Bedingungen notwendig sind, daß also das Potential $\iiint \frac{\varrho}{r} d\tau$ ihnen genügt, ist für (I.) in § 23, für (II.) in § 27, für (III.) in § 8 bzw. § 9 bewiesen worden.

Daß sie hinreichend sind, daß also eine ihnen genügende Funktion U mit dem Potential $\iiint \frac{\rho}{r} d\tau$ identisch ist, kann folgendermaßen gezeigt werden. Wegen der in (I.) und (II.) vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften gilt die Identität (14) des § 14

$$4\pi U = \iint_S \left\{ U \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} d\omega - \iiint_T \frac{\Delta U}{r} d\tau.$$

Dabei ist T irgendein den Punkt $P(x, y, z)$ enthaltendes endliches Gebiet, das von einer mit stetiger Normale versehenen Fläche S begrenzt ist. Wir nehmen hierfür eine P enthaltende Kugel um den Anfangspunkt. Lassen wir nun den Radius dieser Kugel unendlich groß werden, so verschwindet wegen (III.) das Flächenintegral über S , was aus den Entwicklungen am Schluß des § 14 unmittelbar hervorgeht.

Wir erhalten also durch den obigen Grenzübergang

$$4\pi U = - \iiint \frac{\Delta U}{r} d\tau,$$

wo nun das Integral über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Infolge von $\Delta U = -4\pi\rho$ finden wir daher

$$U = \iiint \frac{\rho}{r} d\tau, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Dirichlet hat die charakteristischen Eigenschaften bei dem berühmten Problem der Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids benutzt (vgl. hierüber Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 5. Aufl., Bd. I, Zwölfter Abschnitt.)

Für das logarithmische Flächenpotential

$$U = \iint \varrho \log \frac{1}{r} d\omega,$$

in welchem die Funktion ϱ nebst ihren Ableitungen erster Ordnung in der ganzen Ebene abteilungsweise stetig ist und außerhalb eines genügend großen Kreises um den Nullpunkt identisch verschwindet, sind charakteristisch die folgenden drei Eigenschaften:

(I.) Die Funktion U ist nebst ihren Ableitungen erster Ordnung überall im Endlichen stetig.

(II.) Die Ableitungen zweiter Ordnung von U sind im Endlichen mit Ausschluß der Unstetigkeitslinien von ϱ , $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial y}$ stetig. Sie genügen der Gleichung

$$\Delta U = -2\pi\varrho.$$

(III.) Für $R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ ist

$$\lim \left(U + R \log \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) = 0$$

und $R |D_1 U|$ beschränkt.

Statt dessen kann man auch die Bedingung benutzen, daß U sich wie ein Potential mit Masse verhält, und zwar genauer für große R die Darstellung

$$U = M \log \frac{1}{R} + u \quad \left(M = \iint \varrho d\omega \right)$$

gestattet, wo $\lim u = 0$ und $R^2 |D_1 u|$ beschränkt ist.

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen geht für (I.) und (II.) aus § 28, für (III.) aus § 9 hervor. Insbesondere folgert man aus der im § 9 für das logarithmische Flächen-

potential gegebenen Darstellung $U = M \log \frac{1}{R} + u$ mit

im Unendlichen regulären und verschwindenden u leicht, daß wirklich $\lim \left(U - R \log R \frac{\partial U}{\partial R} \right) = 0$ ist, da ja

$$U - R \log R \frac{\partial U}{\partial R} = u - R \log R \frac{\partial u}{\partial R} \quad \text{und} \quad \lim u = 0,$$

$$\lim R \log R \frac{\partial u}{\partial R} = 0 \quad \text{gilt.}$$

Daß die Bedingungen auch hinreichend sind, kann ebenso wie oben beim Newtonschen Körperpotential gezeigt werden. (Der Leser führe den Beweis durch!) Wir werden später (Bd. 2, § 8) beweisen, daß aus der Existenz des Grenzwertes $\lim u$ sich die Beschränktheit von $R^2 |D_1 u|$ als Folgerung ergibt (vgl. § 9). Nehmen wir dieses Ergebnis hier voraus, so können wir (III.) die einfache Form geben:

$$(III.*) \text{ Für große } R \text{ ist } U = M \log \frac{1}{R} + u \text{ und } \lim u = 0.$$

§ 30. Anwendungen.

Im § 11 hatten wir das Potential einer von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Masse unter der Voraussetzung, daß die Dichte ρ nur von der Entfernung R vom Mittelpunkte der Kugeln abhängt, für Punkte außerhalb der Masse, d. h. für Punkte im Außenraume der größeren und im Innenraume der kleineren Kugel (Gl. (38₁) und (38₂)) bestimmt. Jetzt können wir das Potential auch für Punkte der Masse selbst berechnen.

Vorher wollen wir noch den Wert der in Gl. (38₂) des § 11 auftretenden Größe b angeben, welche das im inneren Hohlraume konstante Potential darstellt. Sie kann leicht gefunden werden, indem man das Potential U_0 im Kugelmittelpunkte O bestimmt. Bezeichnet l_1 den Radius der kleineren, l_2 den der größeren Kugel, so ist

$$\begin{aligned}
 b = U_0 &= \iiint \frac{\rho}{R} d\tau = \iiint \rho R \sin \vartheta dR d\vartheta d\varphi \\
 &= 4\pi \int_{l_1}^{l_2} R \rho(R) dR.
 \end{aligned}$$

Ist die Masse homogen, also $\rho = \text{const}$, so wird

$$b = 2\pi \rho (l_2^2 - l_1^2).$$

In einem Punkte der Masse selbst genügt nun das Potential der Gleichung von Poisson $\Delta U = -4\pi \rho$. Da aber U nur von R abhängt, kann ΔU wie in § 11 transformiert werden, und man bekommt

$$\frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{dU}{dR} = -4\pi \rho.$$

Das ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie ist inhomogen. Die zugehörige homogene Gleichung, welche entsteht, wenn man rechts 0 statt ρ setzt, war bereits in § 11 integriert worden. Ihr allgemeines, d. h. zwei willkürliche Konstanten A, B enthaltendes, Integral ist $\frac{A}{R} + B$. Das allgemeine Integral der inhomogenen Gleichung erhält man bekanntlich¹⁾, indem man zu einem partikulären, d. h. von willkürlichen Konstanten freien, Integrale derselben das allgemeine Integral der homogenen Gleichung hinzufügt. Es ergibt sich also, wenn wir uns jetzt auf den Fall eines konstanten ρ beschränken,

$$U = -\frac{2\pi \rho R^2}{3} + \frac{A}{R} + B,$$

¹⁾ S. z. B. J. Horn, Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Leipzig 1905.

da $-\frac{2\pi\rho R^2}{3}$ offenbar ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung ist.

Die Integrationskonstanten A und B werden durch die Stetigkeitseigenschaften des Newtonschen Körperpotentials bestimmt. Das Potential $U(R)$ muß beim Durchgange durch jede der beiden Kugelflächen, also für $R = l_1$ und $R = l_2$ stetig sein. Es ist daher

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi\rho l_1^2}{3} + \frac{A}{l_1} + B &= 2\pi\rho(l_2^2 - l_1^2), \\ -\frac{2\pi\rho l_2^2}{3} + \frac{A}{l_2} + B &= \frac{M}{l_2} = \frac{4\pi\rho}{3} \left(\frac{l_2^3 - l_1^3}{l_2} \right). \end{aligned}$$

Das gibt uns die Konstantenbestimmung

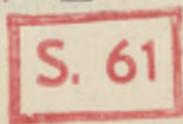
$$A = -\frac{4\pi\rho l_1^3}{3}, \quad B = 2\pi\rho l_2^2.$$

Demnach finden wir zusammenfassend

$$U = \begin{cases} 2\pi\rho(l_2^2 - l_1^2) & \text{für } 0 \leq R \leq l_1 \\ -\frac{2\pi\rho}{3} R^2 - \frac{4\pi\rho l_1^3}{3} \cdot \frac{1}{R} + 2\pi\rho l_2^2 & \text{,, } l_1 \leq R \leq l_2 \\ \frac{4\pi\rho(l_2^3 - l_1^3)}{3} \cdot \frac{1}{R} & \text{,, } l_2 \leq R. \end{cases}$$

Handelt es sich um eine homogene Vollkugel vom Radius l , ist also $l_1 = 0$, $l_2 = l$, so wird

$$U = \begin{cases} -\frac{2\pi\rho}{3} R^2 + 2\pi\rho l^2 & \text{für } 0 \leq R \leq l \\ \frac{4\pi\rho l^3}{3} \cdot \frac{1}{R} & \text{,, } l \leq R. \end{cases}$$





Mathematische Literatur

in Auswahl

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 10

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger. Wissenschaftlicher Beirat: H. Brandt, M. Dehn, G. Doetsch, A. Fraenkel, O. Haupt, F. Hausdorff, E. Hellinger, G. Kowalewski, H. Rademacher, K. Reidemeister, A. Rosenthal, C. Schaefer, W. Schmeidler, F. Schottky, O. Toeplitz. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je RM. 16.—, Band 145—147 je RM. 12.—, Band 148—151 je RM. 10.—, Band 152 RM. 12.—, Band 153 RM. 17.50, Band 154 RM. 30.—, Band 155—156 je RM. 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband III), Band 159 u. 160 je RM. 36.—

Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von Karl Ohrtmann und Felix Müller, fortgeführt von Emil Lampe. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von H. Hahn, E. Hecke, G. Herglotz, O. Hölder, A. Loewy, L. Neder, O. Perron, E. Salzkowski, G. Szegő, A. Wangerin, H. Weyl herausgegeben von Leon Lichtenstein. Band 1—49: Jahrgang 1868—1923. Band 1—44 Preise auf Anfrage, Band 45 RM. 75.—, Band 46 RM. 92.—, Band 47 RM. 74.—, Band 48 RM. 121.—, Band 49 Heft 1 und 2 je RM. 22.—, Heft 3 RM. 15.—, Heft 4 RM. 18.—. Fortsetzung im Druck.

Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ bringt eingehende Besprechungen sämtlicher periodischen und nichtperiodischen Neuerscheinungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik, Mechanik, Relativitätstheorie, Astronomie und mathematischen Physik. Auch die Geschichte und Philosophie der Mathematik wie die Fragen der Didaktik finden sorgfältige Berücksichtigung.

Geschichte der Mathematik. Von Oberstudien-Dir. Dr. H. Wieleitner. 2 Bde. (Samml. Göschen Nr. 226, 875.) Geb. je RM. 1.50
„Zum erstenmal ist hier in deutscher Sprache eine zusammenhängende Darstellung der Geschichte der Mathematik versucht worden. Trotz des engen Raumes ist sie durchaus lesbar und keineswegs eine bloße Aufzählung.“

Deutsches Philologen-Blatt.

Geschichte der Mathematik. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. Günther in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Samml. Schubert Bd. 18.) . Geb. RM. 17.40
 II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Oberstudienleiter Dr. H. Wieleitner in München. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 63.) Geb. RM. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. VI, 222 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 64.) Geb. RM. 3.50

„Es zeigt sich auch in diesem Buche wieder die große Meisterschaft des Verfassers in der zielbewußten Auswahl und klaren, anregenden Darstellung eines großen Stoffes, die auch seine anderen größeren Kompendien auszeichnet.“

Monatshefte für Mathematik und Physik.

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von Professor Dr. Johannes Tropfke, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. Lexikon-Oktav.

Band 1: Rechnen. VII, 177 Seiten. 1921. . . . RM. 7.20, geb. RM. 8.20

Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 221 Seiten. 1921.

RM. 8.50, geb. RM. 9.50

Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 1922.

RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Band 4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 1922. RM. 9.—, geb. RM. 10.—

Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 1923. . . . RM. 7.50, geb. RM. 8.50

Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 1924.

RM. 7.—, geb. RM. 8.—

Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 1924.

RM. 6.50, geb. RM. 7.50

„Dem Verfasser gebührt unser Dank für sein die neuesten Ergebnisse historischer Forschungen berücksichtigendes, durch Vollständigkeit und Klarheit sich auszeichnendes Werk. Es verdient seinen Platz im Bücherschrank eines jeden Mathematikers.“
Naturwissenschaften.

Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923. . . . RM. 0.80

In leichtverständlicher Darstellung berichtet der Verfasser über den Aufbau der Theorie der Integralgleichungen und ihre Anwendungen, die Erforschung der Grundlagen der mathematischen Physik, die Verallgemeinerung des Begriffs der konvergenten Reihen und die Entwicklung der modernen Relativitätstheorie.

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909. . . . Geb. RM. 20.—

Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben. . . . Geb. je RM. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 378 Seiten. Folio. 1923. . . . Geb. RM. 20.—
Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in französischer wie englischer Ausgabe vor. . . . Geb. je RM. 20.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. Adler. Zweite Aufl. 116 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423.) Geb. RM. 1.50

Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912. . . . Geb. RM. 7.—

In den vorliegenden Tafeln bietet der Herausgeber, unter Benutzung des wertvollen Materials, das ihm als Resultat der mit J. Bauschinger ausgeführten Bearbeitung der 8stelligen Tafeln der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stand, der rechnenden Astronomie ein Hilfsmittel von großem Nutzen.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. August, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Achtundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1927. Geb. RM. 2.—

„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein.“
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haussner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neudruck 1926. (Samml. Göschen Bd. 81.) Kart. RM. 1.50

„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten.“
Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927. Geb. RM. 1.50

„Diese Logarithmentafel zeichnet sich durch übersichtliche Anordnung und Reichtum des Gebotenen aus.“
Deutsche Schulzeitung in Polen.

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet sowie mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Dreißigste bis vierunddreißigste, verbesserte und vermehrte Auflage. Oktav. 148 Seiten und eine Tafel. 1925. Geb. RM. 6.—

„Die wohl allseitig bekannten Küsterschen Rechentafeln sind dem Chemiker, der sich ihrer einmal bedient hat, zum ungern entbehrten Werkzeug geworden, das sich in seiner bewährten Anordnung des Stoffes zu einem wirklich nützlichen und fast notwendigen Hilfsbuch entwickelt hat. Die Neuauflage erscheint wie üblich nach dem neuesten Stande der Forschung.“
Zeitschrift für angewandte Chemie.

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1928. RM. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit, die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschiedenen großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument. (Kreis- und Hyperbelfunktionen.) Von Dr. Carl Burrau. Vorwort in deutscher, französischer und englischer Sprache. Oktav. XX, 63 Seiten. 1907. . . Geb. RM. 4.—

Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Von Dr. F. G. Mehler. Neu bearbeitet von Oberstudien-
direktor A. Schulte-Tigges. Oktav.

Ausgabe A. 31. Auflage des Stammbuches. Mit 107 Figuren im
Text und auf 1 Tafel. XII, 280 Seiten. 1921. RM. 2.80

Ausgabe B mit Übungen. Unterstufe. 13. Auflage. Mit
6 Tafeln. IX, 223 Seiten. 1927. RM. 2.80

Ausgabe B ohne Übungen. 12. Auflage. (Sonst wie die vorige.)
Unterstufe. Mit 3 Tafeln. 156 Seiten. 1923. RM. 1.80

Oberstufe. 8. Auflage. Mit 6 Tafeln. VII, 254 Seiten. 1925. RM. 4.—

Geometrische Aufgaben und Übungen (aus der Ausgabe B).
Unterstufe. Mit 2 Tafeln. 58 Seiten. 1923. RM. 0.60

Oberstufe. 89 Seiten. 1925. RM. 1.50

Hierzu sind erschienen:
Rechentafeln für höhere Lehranstalten. 2. Auflage. I. 18 Seiten.
1929 RM. 0.30

Ferner folgende Einzelteile der Oberstufe mit Übungen:
Grundzüge und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung mit
zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Mit 1 Tafel. 63 Seiten.
1925. RM. 1.—

Grundzüge der darstellenden Geometrie mit zahlreichen Übungsaufgaben
für höhere Schulen. Mit 4 Tafeln. 63 Seiten. 1925. RM. 1.50

Mathematische Formelsammlung. Von Professor O. Th. Bürklen †.
Vollständig umgearbeitete Neuauflage von Dr. F. Ringleb. 241 Seiten.
Mit 36 Figuren. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 51.) . . . Geb. RM. 1.50

„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche
wohlgeeignet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den
Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze
System der Elementarmathematik zu geben.“ *Fortschritte der Mathematik.*

Mathematische Mußstunden. Eine Sammlung von Geduldsspielen,
Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof.
Dr. Hermann Schubert. **Vierte Auflage**, neu bearbeitet von Professor
Dr. F. Fitting, München-Gladbach. Oktav. 245 Seiten. 1924. Geb. RM. 6.—

„Das kleine, auch äußerlich hübsch ausgestattete Buch wird allen Lesern
Freude machen, und insbesondere der Lehrer wird in ihm eine Fülle von
Anregungen für den Unterricht vorfinden. Wir empfehlen die ‚Mußstunden‘
allgemeiner Beachtung.“ *Zeitschrift für das Realschulwesen.*

Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades. Von Professor Dr. Her-
mann Schubert. Dritte Auflage, neu bearbeitet von Professor P. B. Fischer,
Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. 132 Seiten. 1923. (Sam-
lung Göschen Bd. 47.) Geb. RM. 1.50

Die neue Bearbeitung des vorliegenden Bandes ist durch einen Abschnitt
über Kombinatorik bereichert.

Mengenlehre. Von Professor Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren. 159 Seiten.
1928. (Samml. Göschen Bd. 999.) Geb. RM. 1.50

Der Band behandelt die grundlegenden Tatsachen der Mengenlehre, die für
alle Zweige der Mathematik so große Bedeutung gewonnen hat. Die Definition
der Menge erfolgt im Anschluß an Cantor. Besondere Vorkenntnisse werden
nicht vorausgesetzt.

Mengenlehre. Von Dr. F. Hausdorff, o. Professor an der Universität Bonn.
Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 12 Figuren. 1927. 285 Seiten. (Göschens
Lehrbücherei Bd. 7.) RM. 12.—, geb. RM. 13.50

Das Lehrbuch setzt beim Lesen keine höheren mathematischen Kenntnisse als
die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung, allerdings aber eine
gewisse Schärfe des abstrakten Denkens voraus und wird von Studierenden in
mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden können.

- Das Kontinuum.** Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Von Dr. Hermann Weyl, Professor an der Technischen Hochschule Zürich. Groß-Oktav. V, 83 Seiten. 1918 RM. 3.—
- Einführung in die Axiomatik der Algebra.** Von Dr. H. Beck, o. Professor an der Universität Bonn. 1926. X, 198 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6.) RM. 9.—, geb. RM. 10.50
Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.
- Lehrbuch der Algebra.** Von Dr. Alfred Loewy, o. Professor an der Universität in Freiburg i. Br. I. Teil: Grundlagen der Arithmetik. Groß-Oktav. VI, 398 Seiten. 1915. RM. 12.—, geb. RM. 13.20
- Elementare Algebra.** Von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 20 Figuren. 149 Seiten. (Samml. Göschen Bd. 930.) Geb. RM. 1.50
„Der erste Teil des Bandes behandelt die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, der zweite besondere Gleichungen und Lösungsverfahren. Dem Text sind gut gewählte Zahlenbeispiele beigegeben.“ Allg. Vermessungs-Nachrichten.
- Höhere Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Halle.
 I: Lineare Gleichungen. 160 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 931.) Geb. RM. 1.50
 II: Gleichungen höheren Grades. 160 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 932.) Geb. RM. 1.50
„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der ‚allgemeinen‘ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“ Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr.
- Algebra I: Die Grundlagen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 307 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8.) RM. 10.—, geb. RM. 11.50
- Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. 1927. VIII, 243 S. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9.) RM. 8.—, geb. RM. 9.50
Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorsche Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.
- Praxis der Gleichungen.** Von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. 1921. V, 172 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2.) RM. 6.—, geb. RM. 7.—
Eine erschöpfende Darstellung der Verfahren zur numerischen Auswertung der linearen und nichtlinearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Dient das Werk auch in erster Linie den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, so findet doch auch der Lehrer viele wertvolle Anregungen darin.
- Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra.** Von Professor Dr. Hermann Schubert. Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 48.) Geb. RM. 1.50
Die bekannte Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von H. Schubert erscheint hiermit in einer neuen Bearbeitung. Änderungen gegen die alten Auflagen sind neben unerheblichen Kürzungen und mehrfachen Verbesserungen insofern eingetreten, als die Aufgaben zur Algebra ganz erheblich erweitert wurden.
- Gruppentheorie.** Von Dr. Ludwig Baumgartner in München. Mit 8 Figuren. 120 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 837.) Geb. RM. 1.50

Determinanten. Von Professor Studienrat Paul B. Fischer. Zweite, verbesserte Auflage. Neudruck. 136 Seiten. 1921. (Samml. Göschens Bd. 402.) Geb. RM. 1.50

Der in einer wesentlich umgearbeiteten Auflage vorliegende Band soll die Studierenden der Mathematik, Physik und technischen Wissenschaften in die Grundzüge der Determinanten einführen.

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholm'schen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verk. Aufl. Gr.-Okt. IV, 304 Seiten. 1925. RM. 14.—, geb. RM. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“ Schulwart

Zahlentheorie. Von Dr. Kurt Hensel, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. RM. 10.—, geb. RM. 12.—

Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Von Professor Dr. Paul Bachmann. Zweite, verbesserte Auflage. Herausgegeben von Dr. Robert Haufzner, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. 1921. XV, 246 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3.) RM. 8.50, geb. RM. 9.50

Der erste Abschnitt umfaßt die klassische Theorie der rationalen Zahlen, der zweite eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen, deren verschiedene Methoden am Beispiel des quadratischen Körpers zu einem harmonischen, in sich geschlossenen Bau zusammengefügt werden.

Synthetische Zahlentheorie. Von Dr. Rudolf Fueter, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. 1925. VIII, 277 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4.) RM. 10.—, geb. RM. 12.—

Die vorliegende zweite Auflage des bewährten Lehrbuches weist gegen die erste zahlreiche Änderungen und Ergänzungen auf.

Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung. Von Professor Dr. Paul Bachmann. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919. RM. 2.50

In der vorliegenden Abhandlung gibt der Verfasser eine Übersicht von den Beweisverfahren und den Theorien, welche Euler, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer und andere Forscher in ihren Studien über das allgemeine Fermatproblem angewandt und entwickelt haben.

Irrationalzahlen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. 1921. VIII, 186 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1.) RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Inhalt: Die Grundlagen — Der Begriff der Grenze — Potenzen und Logarithmen — Verschiedene Darstellungsformen irrationaler Zahlen — Approximation irrationaler Zahlen durch rationale — Algebraische und transzendente Zahlen.

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Fig. Sechste, verb. Aufl. Lex.-Okt. VIII, 743 S. 1925. RM. 30.—, geb. RM. 33.—

Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.

Lehrbuch der Analysis. Von Professor Edouard Goursat. I. Band. Nach der zweiten Auflage des französischen Originals übersetzt von Felix James Schwarz. Mit Begleitwort von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 53 Figuren. Groß-Oktav. XII, 592 Seiten. 1914. RM. 12.—, geb. RM. 13.50

Niedere Analysis. Von Professor Dr. Benedikt Sporer. Mit 5 Figuren. Zweite verbesserte Auflage. Sechster Abdruck. 179 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 53.) Geb. RM. 1.50

Ohne den wissenschaftlichen Boden zu verlassen, war es das Bestreben des Verfassers, alle Ableitungen in den verschiedenen Kapiteln dieses umfangreichen Gebietes so einfach und verständlich wie möglich darzustellen und durch Beispiele klarer zu machen.

Höhere Analysis. Von Dr. Fr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen (Württemberg). Erster Teil: Differentialrechnung. Mit 167 Übungsbeispielen und 67 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 204 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 87.) Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil: Integralrechnung. Mit 50 Figuren im Text. Vierte, verbesserte Auflage. 132 S. 1923. (Samml. Göschen Bd. 88.) Geb. RM. 1.50
„Die Bändchen sind eine wahre Hochschule des abstrakten Denkens, und das Werk genießt in Fachkreisen mit Recht das höchste Ansehen.“

Magazin für Pädagogik.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.

Von Rektor Dr. Fr. Junker. Vierte, verbesserte Auflage von Oberstudienrat Professor Dr. A. Witting. Mit 47 Figuren im Text. 130 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 146.) Geb. RM. 1.50

Der Band, der sich als vorzügliches Mittel zur Einübung der elementaren Sätze und Formeln der Differentialrechnung bewährt hat, erfährt bei seiner Neuauflage eine bedeutende Verbesserung und Erweiterung.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Rektor Dr. Fr. Junker. Mit 52 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 135 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 147.)

Geb. RM. 1.50

„Die reichhaltige Aufgabensammlung ist für den Selbstunterricht sehr geeignet. Das nützliche Büchlein wird weiterhin die verdiente große Verwendung finden.“

Schweizer Pädagogische Zeitschrift.

Elementare Reihenlehre. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943.) Geb. RM. 1.50

Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z. B. der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gaußsche an.

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen, und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926. RM. 14.—, geb. RM. 16.—

„Das System ist so durchgeführt, daß fast keine Vorkenntnisse gefordert und trotzdem das volle Beherrschen des Materials erzielt werden kann.“

Allgemeine Österr. Chemiker- u. Techniker-Zeitung.

Lehrbuch der Differentialgleichungen. Von Dr. Heinrich Liebmann, o. Professor an der Universität Heidelberg. Groß-Oktav. VI, 226 Seiten. Mit 31 Figuren. 1901. RM. 6.—, geb. RM. 7.20

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. Ludw. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326 Seiten. 1922. RM. 10.—, geb. RM. 11.—

Es war das Bestreben des Verfassers, durch die hier gegebene Darstellung die Theorie der Differentialgleichungen auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 920.) Geb. RM. 1.50

Der Band beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, geht aber in den späteren Teilen über die Anfangsgründe hinaus. Bei der Auswahl des Stoffes wurden Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10.) RM. 9.—, geb. RM. 10.50

Inhalt: Elementare Integrationsmethoden, Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Annäherung, numerische und graphische Näherungsmethoden, lineare Differentialgleichungen, elementare Integrationsmethoden und weitere Untersuchungen im reellen Gebiet, Existenzbeweise im komplexen Gebiet, Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten, Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.

Partielle Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Nr. 1003.) Geb. RM. 1.50

Das Buch enthält alle wichtigen Lehrsätze und Methoden für die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Trotz der Kürze sind alle wesentlichen Ideen und Wege aufgezeigt.

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.

I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920. RM. 6.—, geb. RM. 7.20

I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921. RM. 9.—, geb. RM. 10.50

II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920. RM. 14.—, geb. RM. 15.50

Das Buch will in einer für Studierende geeigneten Form den Zugang zu den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann zugleich erschließen.

Einleitung in die Funktionentheorie. (Die komplexen Zahlen und ihre elementaren Funktionen.) Von Max Rose, Oberlehrer an der Goetheschule zu Berlin-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 135 Seiten. 1918. (Samml. Göschen Bd. 581.) Geb. RM. 1.50

Der Verfasser gibt eine systematische Darstellung aller derjenigen Hilfsmittel, deren die Funktionentheorie zur Entwicklung ihrer Prinzipien bedarf. Im Anhang werden die Grundsätze der konformen Abbildung erörtert und an Beispielen erläutert.

Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 140 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 668.) Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführungen der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 138 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 703.) Geb. RM. 1.50

„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“
Monatsschrift für Mathematik und Physik

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 135 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 877.) Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 878.) Geb. RM. 1.50

Die Mehrzahl der in den beiden Bänden enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf Knopps „Funktionentheorie“ (Samml. Göschen Bd. 668 und 703). Sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen beigegeben.

Einführung in die konforme Abbildung. Von Dr. Ludwig Bieberbach, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 38 Figuren. 131 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 768.)

Geb. RM. 1.50

„Der Autor faßt seine Aufgabe, eine Einführung in die konforme Abbildung zu geben, in doppeltem Sinne auf. Er vermittelt dem Leser die eigentlich elementaren Teile der Theorie der konformen Abbildung; andererseits eröffnet er durch Eingehen auf einzelne neue Entwicklungen den Zugang zu den modernsten und tiefsten Untersuchungen der gesamten Funktionentheorie.“

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Automorphe Funktionen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. 1924. X, 205 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 5.)

RM. 8.—, geb. RM. 9.20

Im ersten Abschnitt wird die Kernfrage an einfachen Beispielen behandelt, darauf die notwendigsten Sätze aus der nichteuklidischen Geometrie unter Heranziehung der Kreisverwandtschaften. Es folgt der Diskontinuitätsbeweis der zugehörigen Gruppe von Verschiebungen und der Existenzbeweis für die zu einem Normalpolygon gehörigen automorphen Funktionen.

Elliptische Funktionen. Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11.) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Das Buch will den Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von Heinrich W. E. Jung, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923. RM. 3.50, geb. RM. 4.—

„Das überaus klar und anschaulich geschriebene Buch wird allen denjenigen, die sich mit den grundlegenden Methoden der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen vertraut machen wollen, von Nutzen sein.“

Zeitschrift für mathem. u. naturwiss. Unterricht.

Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg, Privatdozent in Heidelberg.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 901) Geb. RM. 1.50

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 944.) Geb. RM. 1.50

„Die Bände geben einen klaren Einblick in die Gedankengänge und Beweismethoden der Potentialtheorie. Da es dem Verfasser gelungen ist, trotz der räumlichen Enge alle erforderlichen Beweise exakt durchzuführen, ist das Werk als Hilfsbuch neben einer Vorlesung durchaus zu empfehlen.“

Zeitschrift für den mathem. u. naturw. Unterricht.

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58.) Geb. RM. 4.—

II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59.) Geb. RM. 4.—

„Wer in die Potentialtheorie eindringen will, findet in dem leichtverständlichen Buch einen zuverlässigen und angenehmen Führer.“

Zeitschrift f. d. mathem. u. naturwiss. Unterricht.

Numerische Integration. Von Professor Dr. F. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864.) Geb. RM. 1.50

Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.

Graphische Integration. Von Professor Dr. F. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801.) Geb. RM. 1.50

Der Verfasser versucht einem weiteren Kreise die immer noch zu wenig benutzten zeichnerischen Methoden bekanntzumachen. Er setzt dabei so wenig Vorkenntnisse wie möglich voraus.

Methoden der praktischen Analysis. Von Dr. Fr. A. Willers, o. Professor an der Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12.)

RM. 20.—, geb. RM. 21.50

Der Band gibt dem Mathematiker einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und macht den Naturwissenschaftler und Ingenieur mit den theoretischen Grundlagen bekannt.

Praktisches Zahlenrechnen. Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 58 Fig. 135 S. 1921. (Samml. Göschen Bd. 405.) Geb. RM. 1.50

Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.

Mathematische Instrumente. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit vielen Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922.) Geb. RM. 1.50

Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.

Taschenbuch für praktische Geometrie. Von Dr. H. Löschner, o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Mit 10 Figuren im Text. Klein-Oktav. X, 147 Seiten. 1922. Geb. RM. 2.—

Der vorliegende Band enthält die wichtigen Formeln der praktischen Geometrie, die Konstanten und Genauigkeitsangaben, Leitsätze für die Beobachtungen und Merkgelien für die Behandlung, Beförderung und Aufbewahrung geodätischer Instrumente und Geräte.

Ebene Geometrie. Von G. Mahler, Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm. Mit 110 zweifarbigen Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. Neudruck. 166 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 41.)

Geb. RM. 1.50

Grundzüge der ebenen Geometrie. Von Professor Dr. Fr. Bohnert in Hamburg. Mit 220 Fig. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2.)

Geb. RM. 3.90

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. F. Bohnert in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten. 1919. (Samml. Schubert Bd. 3.) Geb. RM. 4.40

Das Buch enthält die Grundbegriffe der Trigonometrie. Die beigegebenen Beispiele sollen den unentbehrlichen Übungsstoff liefern und gleichzeitig einen Überblick über die vielfache Verwendbarkeit und Bedeutsamkeit der Trigonometrie gewähren. Das letzte Kapitel bietet die wichtigsten Anwendungen der Sphärik auf die mathematische Geographie.

Ebene und sphärische Trigonometrie.. Von Dr. Gerhard Hessenberg, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 59 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 99.) Geb. RM. 1.50

„Der Verfasser hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht bloß alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.“

Archiv der Mathematik und Physik.

Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Dr. Fritz Heiland, Studienrat am Gymnasium in Jena. Mit 26 Fig. 152 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 848.) Geb. RM. 1.50

Die Sammlung schließt sich nach Anordnung und Bezeichnung dem Lehrbuch Hessenbergs (Samml. Göschen Bd. 99) an. Wichtigere Formeln sind vorangestellt, zum Teil mit Ableitung. Zu sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen angegeben.

Stereometrie. Von Professor Dr. Robert Glaser. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 81 Figuren. 139 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 97.) Geb. RM. 1.50

Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. Von Professor Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren. 168 Seiten. 1917. (Samml. Göschen Bd. 779.) Geb. RM. 1.50

Aufgaben über Prisma und Zylinder — Projektionszeichnen — Pyramiden und Kegel — Kugel und Kugelteile — konoidartige Körper — Prismatoide — schiefe abgeschnittene Prismen und Zylinder — Guldin'sche Regel.

Einführung in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1929 Geb. RM. 11.20

Das aus Vorlesungen entstandene Buch ist namentlich zum Gebrauch für Studierende bestimmt.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von Dr. Friedrich Schur, o. Professor an der Universität Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912. RM. 6.50, geb. RM. 7.70

Analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. R. Haufner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 60 Figuren. 164 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 65.) Geb. RM. 1.50

Die Darstellung beginnt elementar und setzt nur die nötigsten planimetrischen und algebraischen Schulkenntnisse voraus. Es ist nicht nur die allgemeine Theorie der analytischen Gebilde ersten und zweiten Grades vollständig gegeben, sondern auch eine größere Zahl von speziellen Sätzen, vornehmlich über die Kegelschnitte.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Von Dr. R. Haufner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 1929. (Samml. Göschen Bd. 256.) Geb. RM. 1.50

Analytische Geometrie des Raumes. Von Professor Dr. Max Simon, Straßburg i. E. Mit 28 Abbildungen. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 208 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 89.) Geb. RM. 1.50

Das Werk besitzt den Charakter eines ausführlichen Lehrbuches; es gibt eine übersichtliche und abgeschlossene Darstellung der analytischen Geometrie des Raumes nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Forschung und bietet zuverlässige Belehrung über die analytisch-geometrischen Theorien.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. Von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. 109 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 309.) Geb. RM. 1.50

Die vorliegende Sammlung ist für die erste Einführung bestimmt. Sie soll dem Schüler oder Studierenden Gelegenheit geben, die analytischen Methoden anzuwenden, die Gebilde in ihren verschiedenen Lagen und ihren besonderen Fällen sowie ihre Beziehungen zueinander zu erfassen und zugleich seine Raumanschauung zu bilden.

Koordinatensysteme. Von Paul B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 507.) Geb. RM. 1.50

Der Verfasser versucht den Koordinatenbegriff von einem allgemeinen Standpunkt aus darzustellen. Durch sorgfältig ausgewählte, zahlreiche Literaturangaben wird der Wert des Bandes erhöht.

Nichteuklidische Geometrie. Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970.) Geb. RM. 1.50

Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgezogen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.

Nichteuklidische Geometrie. Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

Kreis und Kugel. Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. an der Universität Hamburg. Mit 27 Figuren im Text. Groß-Oktav. X, 169 Seiten. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von H. Wieleitner, Oberstudien-
direktor in München.

Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Neudruck. 146 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 435.) Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. Neudruck. 120 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 436.) Geb. RM. 1.50

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. VIII, 380 Seiten. Neudruck 1928. (Samml. Schubert Bd. 34.) Geb. RM. 18.—

II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51.)
Geb. RM. 9.50

Ein besonderer Vorzug dieses vorliegenden Lehr- und Einführungsbuches sind die jedem Bande beigegebenen Übungsaufgaben, zu deren Lösung sich am Schluß eine Anleitung befindet.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. Karl Doehlemann, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule München. Fünfte, verbesserte Auflage.

Erster Teil. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 72.)
Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil. Mit 55 Figuren. 138 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 876.)
Geb. RM. 1.50

„Die Darstellung ist musterhaft klar und leichtverständlich und wird durch
übersichtliche Zeichnungen und zahlreiche Aufgaben aufs trefflichste illustriert.“
Bayerische Blätter für das Gymnasialschulwesen.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.

Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen
Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auf-
lage. XII, 482 Seiten. 1923. RM. 13.—, geb. RM. 14.50
II. Mit 110 Figuren. Dritte, verb. Auflage. XI, 582 Seiten. 1922.

RM. 15.—, geb. RM. 16.50

*Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt.
Die am Schluß beigefügten Formeltafeln und Register erhöhen den Wert des
Werkes, das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen
anregen soll.*

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.

Von Ober-
studiendirektor Dr. Viktor Kommerell in Tübingen und Prof. Dr. Karl
Kommerell in Tübingen. I. Teil. Dritte Auflage. Mit 28 Figuren. VIII,
184 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 29.) Geb. RM. 3.—
II. Teil. Dritte Auflage. Mit 13 Figuren. IV, 196 Seiten. 1921. (Samml.
Schubert Bd. 44.) Geb. RM. 3.—

*In der neuen Auflage werden u. a. die Untersuchungen Salkowskis über die
Raumkurven und die Bertrandschen Kurven berücksichtigt.*

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen An-
wendungen. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien.
Mit 37 Abb. im Text. Gr.-Okt. VI, 149 S. 1922. RM. 4.—, geb. RM. 5.—

*Das Buch stellt die Grundzüge der Vektoranalyse in engstem Zusammenhange
mit ihrer Anwendung auf Mechanik, Hydrodynamik, Elektrizitätslehre und
Relativitätstheorie dar.*

Vektoranalysis. Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der
Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auf-
lage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 354.) . Geb. RM. 1.50

Darstellende Geometrie. Von Dr. Robert Haufner, o. ö. Professor der
Mathematik an der Universität Jena. Erster Teil: Elemente; Ebenflächige
Gebilde. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren
im Text. Neudruck. 207 S. 1922. (Samml. Göschen Bd. 142.) Geb. RM. 1.50
Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Zweite, ver-
besserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. Neudruck.
168 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 143.) Geb. RM. 1.50

*In vier Abschnitten werden die Parallelprojektion ebener und räumlicher
Gebilde, die Darstellung von Punkt, Gerader und Ebene in senkrechter Projektion
auf zwei zueinander senkrechte Ebenen sowie ebenflächige Gebilde behandelt.*

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat,
weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz,
Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände.
Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener
Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen.
Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1913.
Anastatischer Nachdruck. 1921. RM. 16.50, geb. RM. 18.—
II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage.
VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1916. RM. 6.20, geb. RM. 7.20
III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und
andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X,
334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923. RM. 10.80, geb. RM. 12.—

Darstellende Geometrie. Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65.) Geb. RM. 6.—
II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schraubens- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66.) Geb. RM. 7.50

„Unter den zahlreichen guten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie steht das vorliegende mit in erster Reihe. Ausgezeichnete Figuren, klare Darstellung, reicher Inhalt sind seine besonderen Kennzeichen.“

Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturw.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 508 und 871.) Geb. je RM. 1.50

Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Wilhelm Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Zweite, veränderte Auflage.

I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 302.) Geb. RM. 1.50
II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 641.) Geb. RM. 1.50

Jeder der beiden Teile bildet ein das ganze Gebiet umfassendes, für sich geschlossenes Ganzes. Der erste enthält die Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln, während im zweiten die fertigen Ergebnisse dieser Ableitungen zusammengestellt und auf hauptsächlich dem Gebiet der Geodäsie entnommene Zahlenbeispiele angewendet werden.

Versicherungsmathematik. Von Dr. Friedrich Boehm, Professor an der Universität München.

I: Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 180.) Geb. RM. 1.50
II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 917.) Geb. RM. 1.50

Der erste Band behandelt den Zins als erste, die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, die Prämienreserve und die Versicherung verbundener Leben. Der zweite Band enthält außer einer eingehenden Behandlung der Lebensversicherungsmathematik eine Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung.

Amortisations-Tabellen für alle nach $\frac{1}{8}$ Prozent abgestuften Verzinsungen zwischen drei und fünf Prozent und für ganz-, halb- und viertel-jährliche Verrechnung. Von Dr. Conrad Hänig, Vorstand des Mathem. Statist. Bureau der Pfälz. Hypothekenbank in Ludwigshafen a. Rhein. Groß-Quart. VIII, 220 Seiten. 1905. RM. 11.—, geb. RM. 12.50

Politische Arithmetik. (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung.) Von Dr. Emil Foerster, Honorar Dozent an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 152 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 879.) Geb. RM. 1.50

In 6 Kapiteln wird der Reihe nach die einfache Zinsenrechnung, die Zinseszinsenrechnung für Einzelkapitalien und Renten, das Rechnen mit vorschüssigen Zinsen, die Schuldentilgung sowie die Kurs- und Rentabilitätsrechnung behandelt.

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Professor Dr. Marcello Pirani, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Charlottenburg. Mit 58 Figuren. Neudruck. 126 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 728.) Geb. RM. 1.50

Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechen tafeln namentlich mit der Methode der fluchtrechten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien.

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Bau gewerkschule in Erfurt. 2 Teile. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695.)

Geb. je RM. 1.50

Vorlesungen über graphische Statik. Von Dr. Fr. Schur, o. Professor an der Technischen Hochschule in Breslau. Herausgegeben unter Mitwirkung von Wolfgang Vogt. Mit zahlreichen Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 219 Seiten. 1915. RM. 7.—, geb. RM. 8.20

Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart.

I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Figuren. Sechster Neudruck. 148 S. 1921. (Samml. Göschen Bd. 178.) Geb. RM. 1.50

II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Sechster Neudruck. 149 S. 1922. (Samml. Göschen Bd. 179.) Geb. RM. 1.50

Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. I. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 58 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 307 Seiten. 1923 RM. 7.50, geb. RM. 9.—

II. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 72 Abbildungen im Text und auf zwei Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 379 Seiten. 1924 RM. 8.50, geb. RM. 10.—

„Der Vorzug des Buches liegt zweifellos in dem Umstande, daß es dem Verfasser gelingt, den Leser unter Vermeidung jedes überflüssigen Wissensballastes bis an die Probleme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung heranzuführen. Es gibt gewiß kein anderes Buch ähnlichen Umfanges, das den Studierenden gleichzeitig mit den Elementen der theoretischen Physik und mit den wichtigsten modernen Forschungsergebnissen, wie Röntgenspektroskopie, Kristallanalyse, Isotopenbestimmung usw. vertraut macht.“

Monatshefte für Mathem. u. Physik.

Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Clemens Schäfer, Professor an der Universität Breslau. I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929. (Band 2 u. 3 in Vorbereitung.) RM. 45.—, geb. RM. 48.—

„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“ *Annalen der Physik.*

Kinematik. Von Dr.-Ing. Hans Polster, Betriebsingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik Merseburg-Leuna. Mit 76 Abbildungen. Zweite Auflage. 151 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 584.) Geb. RM. 1.50

Der Band bietet dem Studierenden eine Einführung, will aber darüber hinaus den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die sich in die schwierigen Bewegungsverhältnisse von Nocken-, Schwingdaumen- und Wälzhebelsteuerungen oder von anderen Gebieten tieferen Einblick verschaffen wollen, ein bequemer Führer sein.

Ballistik. Von Dr. Theodor Vahlen, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität Greifswald. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922. RM. 9.—, geb. RM. 10.—

Im Gegensatz zu anderen Werken über Ballistik bringt dieses neue Buch gerade den mathematischen Gehalt der Ballistik zur Darstellung. Es gewinnt dadurch noch erhöhte Bedeutung, daß es seine Entstehung den praktischen Erfahrungen verdankt, die der Verfasser im Kriege machte. U. a. weist es als neu die zwischen innerer und äußerer Ballistik einzuschaltende Übergangsbalistik und als Ballistik in großen Höhen die kosmische Ballistik auf.

Festigkeitslehre. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288.) Geb. RM. 1.50

In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen.

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen. Von R. Haren. Dritte, vollständig neu bearbeitete Auflage von Josef Furtmayr, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 43 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 491.) Geb. RM. 1.50

Hydraulik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 151 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397.) Geb. RM. 1.50

Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.

Elastizitätslehre für Ingenieure. Von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957.) Geb. je RM. 1.50

Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger. Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.

Einführung in die geometrische Optik. Von Dr. W. Hinrichs, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 144 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 532.) Geb. RM. 1.50

Nach der Einleitung über die Grundgesetze der geometrischen Optik folgen die Abschnitte über die Reflexion an ebenen Flächen und sphärischen Flächen. Dann wird die Brechung an ebenen Flächen, an einer Kugelfläche und durch ein zentriertes System von Kugelflächen behandelt. In Kapitel VI finden die Linsen und Linsensysteme Beachtung.

Vorlesungen über Thermodynamik. Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Achte Auflage. Groß-Oktav. X, 287 Seiten. 1927.

Geb. RM. 11.50

VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.
IN BERLIN W 10 UND LEIPZIG

Röderdruck Leipzig.

c - 96

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301456



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000295840