en

keits=

Von

Prof. Dr. Otto Knopf

II

Mit 10 Figuren

GJG

871

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen in kurzen, klaren, allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen

Jeder Band in Leinwand geb. RM. 1.62

Bei gleichzeitiger Abnahme gleicher oder inhaltlich zusammengehöriger Bände treten folgende Gesamtpreise in Kraft: 10 Exemplare RM. 14.40; 25 Exemplare RM. 33.75; 50 Exemplare RM. 63.—

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.
Berlin W 10 und Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, syste... unseres gesamten

Aus ... sse
der bie... stfrei

3·25.

Einführung in die Konforme Abbildung von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach . . . . Nr. 768

Potentialtheorie v. Dr. W. Sternberg. 2 Bände. Mit 6 Fig. Nr. 901, 944

Vektoranalysis von Prof. Dr. Siegfr. Valentiner. Mit 13 Fig. Nr. 354

Graphische Integration v. Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig. Nr. 801

Numerische Integration von Dr. F. A. Willers. Mit 2 Fig. Nr. 864

Ebene und sphärische Trigonometrie von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren . . . . Nr. 99

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung von Prof. Dr. K. Doehlemann. 2 Bände. Mit 114 Figuren . Nr. 72, 876

Aufgabensammlung zur Projektiven Geometrie von Prof. Dr. H. Timerding. Mit 65 Figuren . . . . Nr. 1060

Darstellende Geometrie v. Prof. Dr. Rob. Haußner u. Dr. Wolfgang Haack. 4 Bde. Mit zahlreich. Figuren. Nr. 142, 143, 144, 1063

Nichteuklidische Geometrie von Prof. Dr. R. Baldus. Mit 71 Fig. . . . . Nr. 970

Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs. Mit 56 Figuren . . . . Nr. 532

Analytische Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haußner. Mit 60 Fig. im Text . . . . Nr. 65

Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haußner. Mit 22 Figuren . . . . Nr. 256

Analytische Geometrie des Raumes von Prof. Dr. R. Haußner. Mit 36 Figuren . . . . Nr. 89

Koordinatensysteme von Prof. P. B. Fischer. Mit 8 Figuren Nr. 507

Algebraische Kurven. Neue Bearb. v. Prof. Dr. H. Wieleitner.

I. Gestaltl. Verhältnisse. Mit 97 Figuren . . . . Nr. 435

II. Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren . . . . Nr. 436

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Prof. Dr. O. Knopf. 2 Bände. Mit 10 Figuren . . . . Nr. 508, 871

Politische Arithmetik von Dr. E. Förster . . . . Nr. 879

Versicherungsmathematik von Prof. Dr. Friedr. Boehm. 2 Bände . . . . Nr. 180, 917

Ausgleichungsrechnung n. d. Methode d. kleinsten Quadrate von Prof. W. Weitbrecht. 2 Bde. Mit 16 Fig. Nr. 302, 641

Vermessungskunde von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. 3 Bände. Mit 294 Figuren . . . . Nr. 468, 469, 862

Geodäsie (Landesvermessung und Erdmessung) von Prof. Dr. G. Förster. Mit 33 Figuren . . . . Nr. 102

Mathematische Instrumente v. Dr. Fr. A. Willers. M. 68 Fig. Nr. 922

Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neubearb. v. Prof. Dr. Herm. Kobold.

I. Das Planetensystem. Mit 33 Figuren . . . . Nr. 11

II. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Fig. und 2 Sternkarten . . . . Nr. 529

Sammlung Göschen

Wahrscheinlichkeits-rechnung

Von

Dr. Otto Knopf
o. Professor der Astronomie an der Universität Jena

II

Mit 10 Figuren im Text

Berlin und Leipzig
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
1923

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Inhalt.

I. Abschnitt
Geometrische Wahrscheinlichkeit.

II. Abschnitt.
Wahrscheinlichkeit bei weit ausgedehnter Versuchsreihe.

III. Abschnitt.
Wahrscheinlichkeit einer Ursache auf Grund der Erfahrung.

IV. Abschnitt.
Die mathematische Erwartung.

V. Abschnitt.

Der moralische Wert und die moralische Erwartung.

VI. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeit auf Grund statistischer Erhebungen.

Literatur.

A. Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt.

Bernoulli, Jakob. Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi, 1713), übersetzt und herausgegeben von R. Haußner. Ostwalds Klassiker der exakt. Wiss., Nr. 107 u. 108. Leipzig 1899.

Bernoulli, Daniel. Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Comment. Acad. Scient. Petrop. V, 1738; deutsch von A. Pringsheim. Leipzig 1896.

Laplace, P. S. de. Théorie analytique des probabilités. Paris 1812. Oeuvr. compl. t. VII. 1886.

— — Essai philosophique des probabilités. Deutsch von Tönnies, Heidelberg 1819, und von N. Schwaiger, Leipzig 1886.

Czuber, E. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 2. Aufl.; 2 Bände. Band I. Leipzig 1908.

— — Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Jahresber. d. Deutsch. Mathem.-Vereinigung, VII. Band. Leipzig 1899.

— — Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Leipzig 1884.

Herz, N. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung. Sammlung Schubert XIX. Leipzig 1900.

Bruns, H. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906.

Bertrand, J. Calcul des Probabilités. Paris 1888.

Poincaré, H. Calcul des Probabilités. Paris 1896.

Markoff, A. A., Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch von H. Liebmann. Leipzig 1912.

B. Ausgleichsrechnung.

Czuber, E. Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

Helmert, F. Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Aufl. Leipzig 1907.

C. Statistik und Versicherungswesen.

Blaschke, E. Vorlesungen über mathematische Statistik. Leipzig 1906.

Landré, C. Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung, 3. Aufl. Jena 1905.

Über das ganze Gebiet und seine Literatur siehe auch die einschlägigen (nicht für den Anfänger bestimmten) Artikel der **Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen**, I. Band, 2. Teil, D. 1, 2, 4a, 4b, Leipzig 1900—1904.

Die in dem vorliegenden Band der Sammlung Göschen als bekannt vorausgesetzten Ergebnisse der algebraischen Analysis und Infinitesimalrechnung finden sich in den Bänden 53, 87 und 88; die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist in Band 302 und 641, die Versicherungsmathematik in Band 180 eingehend behandelt.

I. Abschnitt.

Geometrische Wahrscheinlichkeit.

§ 1. Definition.

Bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, wie sie im 1. Bändchen der „Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Nr. 508 der Sammlung) stets vorzunehmen war, handelte es sich darum, die Anzahl der günstigen und der möglichen Fälle zu suchen. Die einzelnen Fälle waren alle voneinander unterschieden und leicht auseinander zu halten, so daß ihre genaue Abzählung möglich war. So ist beispielsweise bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine gerade Zahl Augen zu werfen, der Bereich der günstigen und der möglichen Fälle numerisch genau angebbar. Wenn aber nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, daß beim Zerbrechen eines Stabes das eine der beiden Stücke mindestens doppelt so lang wird als das andere, so gibt es unendlich viel mögliche und günstige Fälle. Den letzteren gehören alle diejenigen Fälle an, bei denen die Bruchstelle im ersten oder im letzten Drittel der Länge des Stabes liegt. Der Bereich der günstigen Bruchstellen ist also $\frac{2}{3}$ mal so groß als der Bereich der überhaupt möglichen Bruchstellen, und wenn kein Grund vorliegt für eine Bevorzugung des Bruches innerhalb eines bestimmten Teilstückes des Stabes, so wird $\frac{2}{3}$ als die Wahrscheinlichkeit gelten müssen, daß bei Brechen eines Stabes der eine Teil mindestens doppelt so groß ausfällt als der andere.

Bei Wahrscheinlichkeitsbestimmungen dieser Art wird also nicht die Anzahl der einzelnen günstigen Fälle mit der Anzahl der einzelnen möglichen Fälle verglichen, sondern es werden stetig zusammenhängende Bereiche, innerhalb welcher die günstigen und die möglichen Fälle liegen, verglichen. Da diese Bereiche häufig geometrische Gebilde sind wie Linien, Flächen, Körper, so nennt man die durch Vergleich solcher kontinuierlicher Bereiche bestimmte Wahrscheinlichkeit geometrische Wahrscheinlichkeit.

§ 2. Beispiele.

Aufgabe 1. Eine gerade Linie werde nach Willkür in 3 Teile geteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich aus den drei Stücken ein Dreieck bilden läßt?

1. Lösung. Hat die gerade Linie vor der Teilung die Länge a und sind x, y, z die drei Teilstrecken, so ist

$$x + y + z = a,$$

und ferner muß sein, weil die Dreiecksseiten die Bedingung erfüllen, daß die Summe zweier größer ist als die dritte,

$$x + y \geqq z, \quad y + z \geqq x, \quad z + x \geqq y,$$

oder weil $x + y + z = a$,

$$z \leqq \frac{a}{2}, \quad x \leqq \frac{a}{2}, \quad y \leqq \frac{a}{2}.$$

Faßt man x, y, z als rechtwinklige Koordinaten auf, so bedeutet die Gleichung $x + y + z = a$ eine Ebene, welche auf den drei Koordinatenachsen die Strecke a abschneidet (s. Fig. 1). Da der Natur der Aufgabe gemäß nur positive Werte von x, y, z in Betracht kommen, so geben die Koordinaten der unendlich vielen Punkte des im ersten Oktanten liegenden Stückes ABC der Ebene die sämtlichen Wertsysteme x, y, z wieder, welche die drei Teilstücke der Strecke a sein können.

Soll die Bildung eines Dreieckes aus den drei Stücken möglich sein, so muß x wie auch y und z zwischen 0 und $\frac{a}{2}$ liegen. Wenn aber x zwischen 0 und $\frac{a}{2}$ liegen soll, so kommen nur die Punkte der Fläche ABC in Betracht, welche zwischen der yz-Ebene und einer dieser parallelen, die x-Achse in der Entfernung $\frac{a}{2}$ vom Koordinatenanfang schneidenden Ebene liegen, also nur Punkte des Flächenstückes $BCVW$. Wegen $y \leqq \frac{a}{2}$ kommen nur Punkte des Flächenstückes $ACUW$ in Betracht, und wegen $z \leqq \frac{a}{2}$ nur Punkte des Flächenstückes $ABUV$. Das diesen drei Flächenstücken gemeinsame Dreieck UVW enthält demnach alle Punkte, deren drei Koordinaten zwischen 0 und $\frac{a}{2}$ liegen. Es enthält demnach alle Punkte, deren Koordinaten gleich den für die Konstruktion eines Dreiecks günstigen Wertsystemen x, y, z sind, es stellt den Bereich der günstigen Fälle dar, während die Fläche ABC den Bereich aller bei Dreiteilung der Strecke a möglichen Fälle darstellt. Es ist aber offenbar $UVW = \frac{1}{4} ABC$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{4}$.

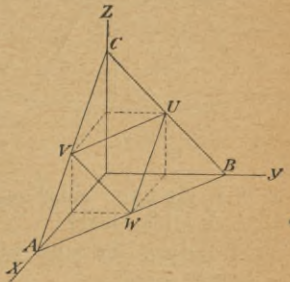

Fig. 1.

2. Lösung. Ist a die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABC (s. Fig. 2), so ist die Summe der von einem beliebigen Punkte P auf die Seiten gefällten Lote $x + y + z = a$; denn der Inhalt des Dreiecks ist einerseits gleich $\frac{1}{2} a s$, wenn s die Seite ist, und andererseits gleich $\frac{1}{2} s \cdot x + \frac{1}{2} s \cdot y + \frac{1}{2} s \cdot z$. Nur wenn P innerhalb des Dreiecks UVW liegt, dessen Ecken die Seiten des Dreiecks ABC halbieren, ist

$$x \leqq \frac{a}{2}; \quad y \leqq \frac{a}{2}; \quad z \leqq \frac{a}{2}.$$

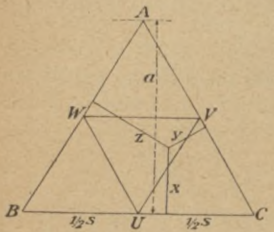

Fig. 2.

Daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich aus drei gegebenen Strecken x, y, z, die unter einer gemeinsamen Grenze a liegen, ein Dreieck bilden läßt?

Lösung. Es muß wieder $x + y \geqq z$, $y + z \geqq x$, $z + x \geqq y$ sein.

Fassen wir x, y, z wieder als die Koordinaten eines Punktes auf, so ist der Bereich aller Punkte, deren jede Koordinate $\leqq a$ sein soll, durch einen Würfel von der Seitenlänge a gegeben, dessen eine Ecke im Koordinatenanfang liegt und von welchem drei Kanten in die drei positiven Koordinatenachsen fallen (s. Fig. 3).

Wie man ohne weiteres sieht, erfüllen die Punkte der Diagonale AB die Bedingung $x + y = z$, wobei hier übrigens $z = a$ ist. Und legt man einen Schnitt parallel zur xy-Ebene, so wird für die Punkte der zu AB parallelen Geraden, in welcher jener Schnitt die Ebene OAB schneidet, ebenfalls $x + y = z$ sein. Die Punkte, deren Koordinaten die Gleichung $x + y = z$ erfüllen, liegen daher in dieser

Ebene OAB, und die Punkte des Würfels, welche die Ungleichung $x+y \geqq z$ erfüllen, liegen demnach alle zwischen dem Schnitt AOB und der in die xy-Ebene fallenden Würfelseite. Ebenso liegen alle Punkte des Würfels, deren Koordinaten der Ungleichung $y+z \geqq x$ genügen, zwischen dem Schnitt AOC und der in die yz-Ebene fallenden Würfelseite. Und ebenso liegen endlich alle Punkte von der Eigenschaft, daß $z+x \geqq y$, zwischen dem Schnitt BOC und der xz-Ebene.

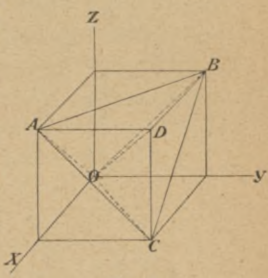

Fig. 3.

Die Punkte, deren Koordinaten die Ungleichungen erfüllen: $x+y \geqq z$, $y+z \geqq x$, $z+x \geqq y$, gehören demnach dem Teil $OABCD$ des Würfels an, welcher aus den drei dreiseitigen Pyramiden $ABDO$, $ACDO$ und $BCDO$ besteht und, wie leicht zu finden, gleich $\frac{1}{2}a^3$ ist. Der Bereich der Punkte, deren Koordinaten die verlangten Bedingungen erfüllen, verhält sich daher zu dem Bereich der Punkte, deren drei Koordinaten sämtlich kleiner als a sind, wie $\frac{1}{2}a^3 : a^3$; die Wahrscheinlichkeit, daß sich aus den drei gegebenen Strecken ein Dreieck bilden läßt, ist demnach gleich $\frac{1}{2}$.

§ 3. Buffons Nadelproblem [1]).

Es wird eine Nadel von der Länge $2l$ auf ein horizontal liegendes System paralleler Geraden geworfen, die voneinander um $2a$ abstehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine Gerade schneidet?

---

[1]) G. Buffon, Essai d'Arithmétique Morale. Suppl. Hist.-Nat. IV. 1777.

Da die gesuchte Wahrscheinlichkeit nicht davon abhängt, ob der Mittelpunkt der Nadel zwischen diese oder jene zwei parallele Gerade und ob er mehr nach dieser oder jener Seite hin zu liegen kommt, so brauchen wir nur diejenigen Lagen der Nadel in Betracht zu ziehen, bei denen die Nadelmitte auf einer den Abstand zweier Parallelen angebenden Geraden $A\,A'$ liegt (s. Fig. 4). Da ferner die Nadelmitte mit gleicher Wahrscheinlichkeit in die untere oder obere Hälfte der Strecke $A\,A'$ fallen kann und in jedem dieser Fälle für das Schneiden einer der Parallelen (nämlich der näheren) die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht, andererseits aber die Nadelmitte unbedingt in eine der beiden Hälften von $A\,A'$ fallen muß, so kann die Aufgabe auch so formuliert werden: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Nadel, welche so geworfen wird, daß ihre Mitte auf die der Parallelen L nähere Hälfte von $A\,A'$ fällt, diese Parallele schneidet?

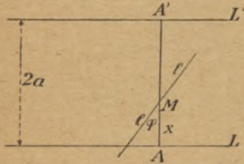

Fig. 4.

Die Entfernung der Nadelmitte von der ihr näheren Parallelen L sei $AM = x$ und der Winkel, welchen x mit der Nadel bildet, sei φ.

Die Nadel wird die Parallele L schneiden, wenn φ liegt zwischen $-w$ und $+w$, sowie zwischen $\pi - w$ und $\pi + w$, wobei $w = \arc\cos\frac{x}{l}\cdot$ Die Nadel wird also, wenn ihre Mitte auf M liegt, eine günstige Lage einnehmen, wenn die Nadelhälfte l sich in einem Winkelbereich von im Ganzen $4\,w$ befindet. Möglich sind aber für l alle Richtungen, mit anderen Worten der Winkelbereich $2\,\pi$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel, wenn ihre

Mitte auf M fällt, die Gerade L schneidet, ist demnach

$$\frac{4\,w}{2\,\pi} = \frac{2 \arccos \frac{x}{l}}{\pi}.$$

Dieser Wert kann auch als die Wahrscheinlichkeit für das Schneiden von L gelten, wenn die Nadelmitte auf einen Punkt unendlich nahe an M gefallen ist, oder, anders ausgedrückt, wenn die Nadelmitte auf einen Punkt des den Punkt M enthaltenden Linienelementes dx gefallen ist.

Die Wahrscheinlichkeit aber, daß die Nadelmitte auf das Linienelement dx fällt, während nach dem Obigen alle Punkte auf der der Parallelen L näheren Hälfte von $A\,A'$ in Betracht kommen, ist $\frac{dx}{a}$.

Es ist nun die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der beiden Ereignisse zu bestimmen, erstlich daß die Nadelmitte auf dx fällt, und zweitens, daß die Richtung der Nadel eine solche ist, daß L geschnitten wird.

Da die Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses von dem ersten Ereignis abhängig ist, indem die Wahrscheinlichkeit für das Schneiden von L eine andere wird, wenn die Nadelmitte anderswohin zu liegen kommt, so haben wir die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse miteinander zu multiplizieren, die Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses unter der Voraussetzung berechnet, daß das erste Ereignis eingetroffen sei.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadelmitte auf dx fällt, ist aber $\frac{dx}{a}$, und wenn dies Ereignis eingetroffen ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel eine für das Schneiden von L günstige Lage einnimmt, gleich

$\dfrac{2 \arccos \dfrac{x}{l}}{\pi}$, folglich ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse gleich $\dfrac{dx}{a} \cdot \dfrac{2 \arccos \dfrac{x}{l}}{\pi}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadelmitte auf die sich anschließende Strecke von $x + dx$ bis $x + 2\,dx$ fällt und daß die Nadel die Gerade L schneidet, ist

$$\frac{dx}{a} \cdot \frac{2 \arccos \dfrac{x + dx}{l}}{\pi} \quad \text{usw.}$$

Ist nun $l < a$, so ist ein Schneiden von L nur noch möglich, wenn x höchstens gleich l wird. Die Wahrscheinlichkeit für einen günstigen Wurf der Nadel ist demnach in diesem Fall

$$\frac{2}{\pi a} \int_0^l \arccos \frac{x}{l}\, dx.$$

Ist dagegen $l > a$, so ist ein Schneiden von L immer möglich, wenn x von Null bis auf a wächst, dem größten Wert, den wir nach dem Obigen für x in Betracht zu ziehen haben. Die Wahrscheinlichkeit für einen günstigen Wurf ist dann

$$\frac{2}{\pi a} \int_0^a \arccos \frac{x}{l}\, dx.$$

Ein besonders elegantes Resultat erhält man für $l < a$. Es wird nämlich

$$p = \frac{2}{\pi a} \int_0^l \arccos \frac{x}{l}\, dx = \frac{2\,l}{\pi a} \int_0^1 \arccos x\, dx;$$

setzt man in letzterem Integral $\arccos x = y$, so wird

$$\int_0^1 \arccos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y \, d(\cos y) = \Big[y \cdot \cos y\Big]_{\frac{\pi}{2}}^0$$

$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy = 1\,;$$

folglich ist für $l < a$

$$p = \frac{2\,l}{\pi\,a}\,.$$

Bestimmt man die Wahrscheinlichkeit p durch Versuche, so kann man π finden. R. Wolf in Zürich bekam aus 5000 Würfen $p = 0{,}5064$, woraus, da $l = 18$ mm und $a = 22{,}5$ mm war, sich ergab $\pi = 3{,}1596$.

Für $l > a$ bekommt man in ganz ähnlicher Weise

$$p' = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{l} + \frac{2\,l}{\pi\,a}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2}\right).$$

Für $l = a$ geht die letzte Formel über in $p' = \frac{2}{\pi}$, welches Resultat man auch aus $p = \frac{2\,l}{\pi\,a}$ erhält, wenn $l = a$ ist.

§ 4. Wahrscheinlichkeit des Schnittes einer ebenen Figur durch eine Gerade.

Wenn eine Gerade von gegebener Richtung eine nach außen überall konvexe Figur schneiden soll, so muß sie innerhalb des Bereiches liegen, welcher durch den Abstand der beiden in jener Richtung an die Kurve zu legenden Tangenten bestimmt ist (Fig. 5). Als Maßzahl für die Menge der Geraden von gegebener Richtung, welche die Figur schneiden, kann daher dieser Abstand a dienen. Dann wird als Maßzahl für die Menge der Geraden, welche innerhalb eines Richtungsunterschiedes $d\varphi$ liegen, das Produkt $a \cdot d\varphi$ gelten können. Und die Menge der in allen möglichen Richtungen die Figur schneidenden Geraden ist dann gegeben durch $\int\limits_0^\pi a\, d\varphi$, wo a eine Funktion der Richtung φ ist, wenn die Figur nicht gerade ein Kreis ist.

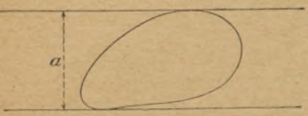

Fig. 5.

Nehmen wir einen Punkt im Innern der Figur an, durch welchen wir die den Abstand a angebende Strecke legen, so können wir a in die beiden Lote l und l' zerlegen, welche sich von dem angenommenen Punkt auf die beiden parallelen Tangenten fällen lassen. Es ist also

$$\int\limits_0^\pi a\, d\varphi = \int\limits_0^\pi l\, d\varphi + \int\limits_0^\pi l'\, d\varphi .$$

Drücken wir die Abhängigkeit des l von φ durch $l = f(\varphi)$ aus, so ist $l' = f(\varphi + \pi)$ zu setzen, weil l in l' übergeht, wenn wir φ um π wachsen lassen. Es ist demnach

$$\int\limits_0^\pi l'\, d\varphi = \int\limits_0^\pi f(\varphi + \pi)\, d\varphi .$$

Führen wir die neue Variable $\psi = \varphi + \pi$ ein, so gehen die Grenzen des letzten Integrals in π und 2π über, und wir erhalten

$$\int_0^\pi l' \, d\varphi = \int_\pi^{2\pi} f(\psi) \, d\psi .$$

Schreiben wir für die Integrationsvariable ψ jetzt wieder φ, so bekommen wir, wie auch eine geometrische Betrachtung leicht genug als richtig erkennen läßt,

$$\int_0^\pi a \, d\varphi = \int_0^\pi l \, d\varphi + \int_\pi^{2\pi} l \, d\varphi = \int_0^{2\pi} l \, d\varphi .$$

Die Produkte $l\,d\varphi$ sind aber gleich den Kurvenelementen in den Berührungspunkten von Kurve und Tangente, und die Summe sämtlicher Kurvenelemente von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ ist gleich dem Umfang der Figur, wenn, wie vorausgesetzt, dieselbe überall konvex ist. Der Umfang einer an allen Stellen nach außen konvexen Figur kann demnach als Maß für die Schar der sämtlichen diese Figur schneidenden Geraden angesehen werden.

Hat die die Figur begrenzende Kurve eine Einbuchtung wie Fig. 6 bei B, so wird die Möglichkeit des Schnittes der Figur durch eine Gerade dieselbe sein, wie wenn die Einbuchtung durch eine sie überbrückende Tangente $A\,C$ beseitigt wäre. Denn alle durch den Flächenraum $ABCA$ gelegten Geraden durchschneiden auch die Figur $ABCDA$; unter den durch die Figur $ABCDA$ gehenden Geraden sind also auch die sämtlichen Geraden enthalten, welche durch die Fläche $ABCA$ gehen. Die Menge der möglichen Schnittgeraden wird daher nicht vermehrt, wenn zu der Fläche $ABCDA$ noch die Fläche

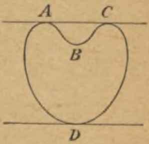

Fig. 6.

$ABCA$ hinzugefügt wird. Die Menge der Geraden, welche eine mit Einbuchtungen versehene Figur schneiden, ist demnach dieselbe, wie wenn durch einen um die Figur gelegten Faden die Einbuchtungen beseitigt worden wären. Als Maß für die Schar der Geraden, welche sich durch eine mit Einbuchtungen versehene Figur legen lassen, kann daher die Länge des Fadens dienen, mit dem sich jene Figur umschließen läßt.

Aufgabe. Es soll die Wahrscheinlichkeit gefunden werden, mit welcher eine in einen Kreis vom Radius R eingezeichnete Sehne einen innerhalb der ersten liegenden zweiten Kreis vom Radius r schneidet.

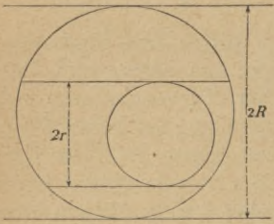

Fig. 7.

Die Zahl der möglichen Sehnen des ersten Kreises kann ausgedrückt werden durch $2R\pi$; von diesen werden den zweiten Kreis schneiden $2r\pi$, folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{2r\pi}{2R\pi} = \frac{r}{R}$.

Für eine beliebige, aber bestimmte Richtung der Sehne läßt sich die Richtigkeit des Resultates $\frac{r}{R}$ aus der Fig. 7 ohne weiteres ersehen. Wenn die Wahrscheinlichkeit aber für eine beliebige Richtung der Sehne gleich $\frac{r}{R}$ ist, so ist sie es auch für sämtliche Richtungen.

Ohne Schwierigkeit läßt sich jetzt auch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit beantworten, daß eine Kreisscheibe vom Radius r, welche auf ein System paralleler Geraden vom Abstande a geworfen wird (wobei $a > r$), auf eine dieser Parallelen zu liegen kommt.

Denkt man sich nämlich die Kreisscheibe vom Radius r auf eine solche vom Radius a gelegt und diese letztere auf das System der parallelen Geraden geworfen, so wird sie zweifellos von einer der Geraden geschnitten. Die Frage läßt sich daher ohne weiteres durch die bereits behandelte ersetzen: Mit welcher Wahrscheinlichkeit schneidet eine Sehne des Kreises vom Radius a den in ihm liegenden Kreis vom Radius r? Als Resultat erhalten wir demnach $\frac{r}{a}$.

Ebenso läßt sich auch das Buffonsche Nadelproblem (s. § 3) als ein spezieller Fall des oben behandelten allgemeineren Problems auffassen.

Denken wir uns nämlich die Nadel auf einer Kreisscheibe vom Radius a befestigt und diese Scheibe auf das System der parallelen Geraden vom Abstand $2a$ geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit zu suchen, daß die Sehne, in welcher die Kreisscheibe von einer der Parallelen geschnitten wird, auch die Nadel schneide. Die Gestalt dieser letzteren können wir aber als eine Ellipse auffassen, deren große Halbachse gleich l und deren kleine Halbachse gleich Null ist. Die Wahrscheinlichkeit ist demnach gleich dem Quotienten aus dem Umfange der Ellipse, welcher gleich $4l$ ist, und dem Umfang der Kreisscheibe, also gleich

$$\frac{4l}{2a\pi} = \frac{2l}{a\pi},$$

wie auch früher gefunden wurde.

§ 5. Das Bertrandsche Paradoxon.

Auf verschiedene, einander widersprechende Resultate kommt man bei manchen Aufgaben der geometrischen Wahrscheinlichkeit, wenn man zu ihrer Lösung verschiedene

Wege einschlägt. Als Beispiel diene zunächst die folgende, als Bertrandsches Paradoxon bezeichnete Aufgabe.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine in einen Kreis beliebig eingezeichnete Sehne größer ist als die Seite eines dem Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks?

1. Lösung. Der ganze Bereich der Möglichkeiten für das Ziehen einer Sehne wird erschöpft, wenn ich von jedem Punkt der Peripherie nach jedem andern Punkt derselben eine Gerade ziehe; es wird hierbei sogar jede Sehne in beiderlei Richtung gezogen. Der Bereich der günstigen Lagen der Sehne ist dagegen erschöpft, oder es findet vielmehr auch hier eine doppelte Erschöpfung statt, wenn ich von jedem Punkt der Peripherie nur nach allen den Punkten, die nach der einen wie nach der anderen Seite um einen größeren Bogen als $\frac{2\pi}{3}$ abstehen, gerade Linien ziehe. Die Punkte, nach welchen die günstig gelegenen Sehnen sich von einem festen Punkt aus ziehen lassen, liegen demnach auf einem Bogen von der Größe $2\pi - 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, während die Endpunkte der von einem festen Punkt aus überhaupt möglichen Sehnen auf der ganzen Peripherie 2π liegen können. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher gleich $\frac{2\pi}{3} : 2\pi = \frac{1}{3}$.

2. Lösung. Errichtet man in jedem Punkte eines Kreisdurchmessers auf diesem ein Lot, so erhält man eine Schar paralleler Sehnen, und verfährt man so auf allen möglichen Kreisdurchmessern, so erhält man alle überhaupt möglichen Sehnen. Diejenigen Sehnen, welche größer sind als die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, werden erhalten, wenn auf jedem möglichen Durch-

messer in allen Punkten vom Zentrum bis zur Mitte des Radius Lote errichtet werden.

Da der Bereich der Punkte vom Zentrum des Kreises bis zur Mitte des Radius halb so groß ist wie der Bereich der Punkte bis zum Ende des Radius, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß die beliebig gezogene Sehne größer ist als die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, gleich $\frac{1}{2}$.

3. Lösung. Da die Lage einer Sehne durch ihren Mittelpunkt eindeutig bestimmt ist und die Mittelpunkte sämtlicher möglicher Sehnen die Kreisfläche ausfüllen, so kann die Annahme einer beliebig gelegenen Sehne ersetzt werden durch die Annahme eines beliebigen Punktes der Kreisfläche als Mittelpunktes jener Sehne.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Sehne größer sei als die Seite des gleichseitigen eingeschriebenen Dreiecks wird dann gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit, daß der angenommene Sehnenmittelpunkt innerhalb eines Kreises vom Radius $\frac{1}{2} r$ liege. Der Bereich der Mittelpunkte dieser größeren Sehnen ist gleich $\frac{1}{4} r^2 \pi$, während der Bereich der Mittelpunkte sämtlicher Sehnen gleich $r^2 \pi$ ist; folglich ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{4}$.

Die Verschiedenheit der Resultate rührt von der nicht völligen Bestimmtheit der Aufgabe her. Nennen wir der Kürze halber die Sehnen, welche größer sind als die Seite des dem Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks die großen und die anderen die kleinen Sehnen, so besteht die Aufgabe darin, das Verhältnis der Zahl der großen Sehnen zu der aller möglichen Sehnen anzugeben. Da es aber unendlich viele große und kleine Sehnen gibt, so ist das Resultat zunächst $\frac{\infty}{\infty}$. Welchen speziellen Wert dieser im allgemeinen unbestimmte Ausdruck in unserem Falle hat, hängt davon ab, in welcher Weise die Vermehrung der Sehnen zur unbegrenzten Anzahl hin vorgenommen wird.

Bei der 1. Lösung geschieht dies in der Weise, daß die Anzahl der äquidistanten Teilpunkte auf der Peripherie, von deren jedem nach allen anderen Teilpunkten Sehnen gezogen werden, größer und größer angenommen wird; bei der 2. Lösung so, daß man die gleichen Teile, in welche ein jeder Kreisdurchmesser geteilt wird, immer kleiner macht und dadurch die Teilpunkte, in denen die Sehnen senkrecht zum Durchmesser errichtet werden, immer enger aneinander rücken läßt. Wieder anders ist es bei der 3. Lösung, wo man die Kreisfläche immer dichter mit Punkten, welche Mittelpunkte der Sehnen sein sollen, besetzt denkt.

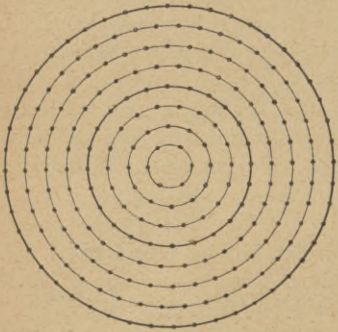

Fig. 8.

Werden, wie zur näheren Ausführung der letzteren Bemerkung noch hinzugefügt sein möge, um den Mittelpunkt der gegebenen Kreisfläche vom Radius r $2m$ konzentrische äquidistante Kreise mit den Radien ϱ, 2ϱ, $3\varrho \cdots 2m\varrho = r$ geschlagen (s. Fig. 8) und auf den Peripherien dieser Kreise Punkte angegeben, die um $\frac{\varrho\pi}{3}$ auf der Peripherie gemessene Längeneinheiten auseinander liegen, so ist die Anzahl dieser Punkte bis zum Kreis vom Radius $m\varrho$ gleich $\frac{m(m+1)}{2} \cdot 6$ und bis zum Kreis vom Radius $2m\varrho$ gleich

$\frac{2m(2m+1)}{2} \cdot 6$. Je größer nun m angenommen wird, um so mehr nähert sich das Verhältnis der beiden, die Zahl der großen und die Zahl sämtlicher Sehnen angebenden Ausdrücke dem Wert $\frac{1}{4}$.

Die Anordnung der unendlich vielen möglichen Sehnen ist demnach in den drei Lösungen verschieden angenommen, infolgedessen haben sich drei verschiedene Resultate ergeben.

§ 6. Zwei weitere Aufgaben mit mehrfachen Lösungen.

Aufgabe 1. Einer Ebene werde eine beliebige Lage gegen den Horizont gegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ihre Neigung gegen den Horizont mehr als 45^0 betrage?

1. Lösung. Die Neigung kann zwischen 0^0 und 90^0 liegen. Nimmt man die verschieden großen Neigungswinkel als gleich wahrscheinlich an, so ist die Antwort auf die gestellte Frage: $\frac{1}{2}$.

2. Lösung. Die Neigung kann man sich durch das Lot bestimmt denken, welches man von einem festen Punkt, der um die Strecke a vertikal über einem Punkte der Schnittlinie beider Ebenen liegt, auf die willkürlich gelegte Ebene fällen kann. Fällt letztere Ebene mit dem Horizont zusammen, so ist die Länge des Lotes gleich a; steht sie senkrecht auf dem Horizont, so ist die Länge des Lotes gleich Null. Ist die Neigung größer als 45^0, so hat das Lot eine Länge, welche zwischen 0 und $a \cos 45^0 = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ liegt. Werden die verschiedenen möglichen Lotlängen als gleich wahrscheinlich angesehen, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Lotlänge liege zwischen 0 und $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$, zur Wahrscheinlichkeit, daß sie zwischen 0 und a liege,

wie $\frac{1}{2}\sqrt{2}:1$. Die Wahrscheinlichkeit einer größeren Neigung als 45^0 ist demnach gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}71$; also wesentlich verschieden von der vorigen Lösung.

Aufgabe 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei auf einer Kugeloberfläche gewählte Punkte nicht weiter als um den Bogen α auseinander liegen? [1])

1. Lösung. Hinsichtlich des Resultates wird offenbar nichts geändert, wenn wir den einen Punkt auf der Kugelfläche fest annehmen und nun fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zweiter, beliebig gewählter Punkt der Kugeloberfläche nicht weiter als um den Bogen α abliegt? Da es ferner gleichgültig ist, auf welchem durch den festen Punkt gelegten Großkreis wir den zweiten Punkt annehmen, so können wir irgendeinen Großkreis auswählen und die Frage nunmehr dahin beschränken: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein auf einem Großkreis gewählter Punkt von einem festen Punkt desselben nicht mehr als um den Bogen α abstehe? Diese Wahrscheinlichkeit ist, da der Abstand nach beiden Richtungen liegen kann, unter der Voraussetzung, daß die Möglichkeit der Wahl von Punkten auf einer Linie deren Länge proportional ist, gleich $\frac{2\alpha}{2\pi}=\frac{\alpha}{\pi}$.

$\alpha = 10'$ ergibt die Wahrscheinlichkeit 0,00092593.

2. Lösung. Der willkürlich gewählte Punkt gehört einer Kugelhaube an, deren Mittelpunkt der fest angenommene Punkt ist und deren halber Öffnungswinkel gleich α ist. Werden gleiche Flächenstücke als gleiche

---

[1]) Die Frage hatte praktische Bedeutung, als man zur Entscheidung darüber kommen wollte, ob die vielen zu zweien ganz nahe beieinander stehenden Sterne nur zufällig auf fast denselben Punkt des Himmels sich projizierende, sog. optische, oder durch das Band der Gravitation miteinander verbundene, sog. physische Doppelsterne seien.

Möglichkeiten für die Annahme von Punkten bietend angesehen, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite Punkt auf der Haube liege, zur Wahrscheinlichkeit einer ganz beliebigen Lage desselben auf der Kugeloberfläche wie $2\pi(1-\cos\alpha):4\pi$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher gleich $\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=\sin^2\frac{1}{2}\alpha$.

$\alpha = 10'$ liefert das Resultat 0,0000021154, als etwa $\frac{1}{438}$ der vorigen Lösung.

Für kleine Werte von α, welche $\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ gleich $\frac{1}{4}\alpha^2$ zu setzen erlauben, ist das Verhältnis des zweiten Resultates zum ersten gleich $\frac{\pi\alpha}{4}$, nähert sich also bei verschwindend geringem α der Null. Für verschwindend kleine α ist demnach das Resultat der ersten Lösung unendlich viel mal größer als das der zweiten Lösung derselben Aufgabe.

§ 7. Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Lage eines Punktepaares in einem Kreise.

Mehrfache Lösungen, deren zwei gegeben werden mögen, bietet auch die folgende Aufgabe.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei in einem Kreis willkürlich angenommene Punkte auf zwei verschiedenen Seiten einer ebenfalls willkürlich angenommenen Sehne liegen?

1. Lösung. Der Bereich der Möglichkeiten besteht darin, daß für jede beliebige Lage der Sehne AB (s. Fig. 9) jeder der beiden Punkte, die M und N heißen mögen, an jeder Stelle des Kreises liegen kann. Der Bereich der Lagen ist für jeden Punkt gleich $r^2\pi$, und da jede Lage des einen Punktes mit jeder Lage des anderen Punktes zusammentreffen kann, so ist die Gesamtheit der Lagen,

welche die beiden Punkte zueinander einnehmen können, auszudrücken durch $(r^2 \pi)^2$. Da es aber bei irgendwelcher Lage des Punktepaares gleichgültig ist, welcher der beiden Punkte mit M und welcher mit N bezeichnet ist, so ist die Gesamtheit der Lagen des Punktepaares gleich $\frac{1}{2}(r^2 \pi)^2$ zu setzen.

Die Lagen der beiden Punkte können nun bei jeder Lage der Sehne vorkommen, und es ist daher die Gesamtheit der Lagen des Punktepaares mit der Gesamtheit der Lagen der Sehne AB zu multiplizieren, wenn man alle Möglichkeiten für das Zusammentreffen einer beliebigen Lage der Sehne AB mit einer beliebigen Lage des Punktepaares MN erfassen will.

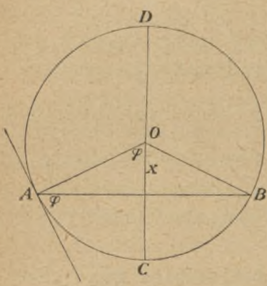

Fig. 9.

Der Bereich der möglichen Lagen von $A\,B$ kann dadurch erschöpft werden, daß man von einem beliebigen Punkt A der Kreisperipherie aus nach jedem anderen Punkt derselben eine Sehne zieht und sodann für den Ausgangspunkt A der Sehne jeden Punkt der Peripherie nimmt.

Die von A aus möglichen Sehnen erhält man, wenn man B zunächst mit A zusammenfallen und sodann nach einer Richtung hin, etwa über C hinweg, auf der Peripherie bis wieder zu A wandern läßt. Der Tangentialwinkel φ bei A wächst hierbei von 0 bis π; durch π wird demnach der ganze Winkelbereich ausgedrückt, welcher den von A aus möglichen Sehnenlagen zugehört. Nun kann aber A jede Lage auf der Peripherie $2\,r\,\pi$ einnehmen, und wir würden demnach die Gesamtheit sämtlicher Kreissehnen gleich $2\,r\,\pi^2$ bekommen. Hierbei würde aber jede

Sehne doppelt gezählt werden; es ist daher die Gesamtheit der Kreissehnen durch $r\pi^2$ auszudrücken.

Da die Lagemöglichkeiten des Punktepaares M, N durch $\frac{1}{2}(r^2\pi)^2$ gegeben sind, so ist der Bereich der Möglichkeiten für das Zusammentreffen irgendwelcher Lage des Punktepaares M, N mit irgendwelcher Lage der Sehne AB auszudrücken durch $r\pi^2 \cdot \frac{1}{2}(r^2\pi)^2 = \frac{1}{2}r^5\pi^4$.

Der damit zu vergleichende Bereich der günstigen Fälle besteht darin, daß bei allen möglichen Lagen der Sehne AB die Punkte M und N auf verschiedenen Seiten von AB liegen.

Das Segment ACB hat den Flächeninhalt $r^2\varphi - r^2\cos\varphi\sin\varphi$, das Segment ADB den Flächeninhalt $r^2\pi - r^2\varphi + r^2\cos\varphi\sin\varphi$. Der Bereich der Möglichkeiten, daß beide Punkte sich auf verschiedenen Seiten einer bestimmten gegebenen Lage von AB befinden, ist daher

$$r^4(\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi\sin\varphi).$$

Geben wir der Sehne jede von A ausgehende mögliche Lage, so haben wir, um den erweiterten Bereich der Möglichkeiten zu erhalten, den eben gefundenen Ausdruck mit $d\varphi$ zu multiplizieren und nach φ von 0 bis π zu integrieren.

Den Bereich sämtlicher Möglichkeiten der Lage beider Punkte M und N auf verschiedenen Seiten einer ganz beliebig gezogenen Sehne erhalten wir endlich, den verschiedenen Lagemöglichkeiten von A auf der Peripherie Rechnung tragend, durch Multiplizieren jenes Integrales mit $r\pi$, wobei wir berücksichtigen, daß die in entgegengesetzten Richtungen gezogenen, zusammenfallenden Sehnen nicht doppelt gezählt werden dürfen.

Da $\frac{1}{2}r^5\pi^4$ den Bereich aller möglichen Fälle darstellt, so haben wir als Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Punkte zu verschiedenen Seiten der beliebig gezogenen Sehne liegen,

$$P_1 = \frac{2}{\pi^3}\int_0^\pi (\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi^3}\int_0^\pi (\pi\varphi - \pi\cos\varphi\sin\varphi - \varphi^2 + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi - \cos^2\varphi\sin^2\varphi)\,d\varphi\,.$$

Die Integration läßt sich leicht ausführen; es ist z. B.

$$\int 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \int \varphi\,d\sin^2\varphi = \varphi\sin^2\varphi - \int\sin^2\varphi\,d\varphi;$$

$$\int\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi;$$

$$\int\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{8}\int\sin^2 2\varphi\,d\,2\varphi = \frac{1}{32}\int(1-\cos 4\varphi)\,d\,4\varphi = \frac{1}{8}\varphi - \frac{1}{32}\sin 4\varphi\,.$$

Demnach erhält man

$$P_1 = \frac{2}{\pi^3}\left[\frac{1}{2}\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi\right] = \frac{1}{3} - \frac{5}{4\pi^2} = 0{,}2067\,.$$

2. Lösung. Die beliebig gezogene Sehne AB (Fig. 9) sei als einer Schar paralleler Sehnen angehörig betrachtet.

Ziehen wir den auf dieser Schar paralleler Sehnen senkrechten Durchmesser CD, so kann die Mannigfaltigkeit der Sehnen dieser Richtung mit $2\,r$ bezeichnet werden. Die Mannigfaltigkeit der Richtungen des Durchmessers ist aber, wenn wir die Richtungen nach entgegengesetzten Seiten nur einfach zählen, gleich π und folglich der Bereich der Möglichkeiten für die Lage einer Sehne gleich $2\,r\,\pi$. Die Lagemöglichkeiten der Punkte M und N sind aber gegeben durch $\frac{1}{2}(r^2\,\pi)^2$, folglich ist der Bereich der Möglichkeiten für das Zusammentreffen einer beliebigen Lage des Punktepaares M, N mit einer beliebigen Lage der Sehne gleich $r^5\,\pi^3$.

Der Bereich der Möglichkeiten, daß einer der beiden Punkte M und N in den einen, der andere in den anderen Kreisabschnitt fällt, ist nach dem Obigen

$$r^4(\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi\sin\varphi).$$

Bezeichnen wir mit x den Abstand der die beiden Kreisabschnitte trennenden Sehne vom Kreismittelpunkt, so daß also $x = r\cos\varphi$ ist, so ist der Bereich der Möglichkeiten, daß der eine der beiden Punkte M und N auf diese, der andere auf jene Seite einer der Sehnen fällt, welche auf dem nämlichen Kreisdurchmesser senkrecht stehen, auszudrücken durch

$$2\,r^4\int_0^r(\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\,dx.$$

Um endlich den Bereich der Möglichkeiten zu bekommen, daß bei jeder beliebigen Lage des Durchmessers die Punkte M und N auf verschiedenen Seiten einer auf dem Durchmesser senkrechten Sehne liegen, haben wir das Integral noch mit π zu multiplizieren, wodurch wir, wenn zugleich φ als Integrationsvariable eingeführt wird, erhalten

$$2\,\pi\, r^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi) \sin\varphi \, d\varphi\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Punkte M und N in verschiedenen Kreisabschnitten liegen, ist demnach

$$P_2 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi) \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\pi\,\varphi - \pi \cos\varphi \sin\varphi - \varphi^2 + 2\,\varphi \cos\varphi \sin\varphi - \cos^2\varphi \sin^2\varphi] \sin\varphi \, d\varphi\,.$$

Es ist aber

$$\int \varphi \sin\varphi \, d\varphi = - \int \varphi \, d\cos\varphi = - \varphi \cos\varphi + \sin\varphi\,,$$

$$\int \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \int \sin^2\varphi \, d\sin\varphi = \frac{1}{3} \sin^3\varphi\,,$$

$$\int \varphi^2 \sin\varphi \, d\varphi = - \int \varphi^2 \, d\cos\varphi$$

$$= - \varphi^2 \cos\varphi + \int 2\,\varphi \cos\varphi \, d\varphi\,,$$

$$\int \varphi \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3} \int \varphi \, d\sin^3\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\, \varphi \sin^3\varphi - \frac{1}{3} \int \sin^3\varphi \, d\varphi\,,$$

$$\int \sin^3\varphi\, d\varphi = -\int (1 - \cos^2\varphi)\, d\cos\varphi$$
$$= -\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\,,$$

$$\int \sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi = -\int (1 - \cos^2\varphi)\cos^2\varphi\, d\cos\varphi$$
$$= -\frac{1}{3}\cos^3\varphi + \frac{1}{5}\cos^5\varphi\,.$$

Demnach

$$P_2 = \frac{128}{45\,\pi^2}$$
$$= 0{,}2882\,.$$

II. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeit bei weit ausgedehnter Versuchsreihe.

§ 8. Das Gesetz der großen Zahlen.

Wenn für zwei einander ausschließende Ereignisse E und E', z. B. für das Ziehen einer weißen oder schwarzen Kugel aus einer nur mit Kugeln dieser Farben gefüllten Urne, die Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ bestehen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei $s = m + n$ Versuchen das eine Ereignis m-, das andere n-mal in einer beliebigen, vorher bestimmten Reihenfolge stattfindet, gleich $p^m q^n$.

Ist die Aufeinanderfolge gleichgültig, so ist dieser Wert mit der Anzahl der Möglichkeiten, wie oft die Faktoren des ausführlich hingeschriebenen Produktes sich permutieren lassen, also mit $\frac{s!}{m!\,n!} = \binom{s}{n}$ zu multiplizieren. Die Wahrscheinlichkeit des m-maligen Eintreffens des einen und des n-maligen Eintreffens des anderen Ereignisses ohne Rücksicht auf die Anordnung ist demnach gleich

$$\binom{s}{n} p^m q^n \quad \text{oder} \quad \binom{s}{n} p^{s-n} q^n .$$

Dieser Ausdruck ist aber das allgemeine Glied in der Entwicklung von $(p+q)^s$. Es geben demnach in der Reihe

$$\left.\begin{aligned}(p+q)^s = p^s + \binom{s}{1} p^{s-1} q + \binom{s}{2} p^{s-2} q^2 + \cdots \\ + \binom{s}{n} p^{s-n} q^n + \cdots + \binom{s}{s} q^s\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die einzelnen Glieder die Wahrscheinlichkeiten wieder, daß in einer Reihe von Versuchen das Ereignis E eine bestimmte Anzahl von Malen und das Ereignis E' in den übrigen Fällen eintritt.

Bezeichnen wir die einzelnen Glieder der Reihe nach mit A_s, A_{s-1}, $A_{s-2} \cdots A_0$, so daß A_m die Wahrscheinlichkeit für den m-maligen Eintritt von E und den $n = s - m$-maligen Eintritt von E' bedeutet, so haben wir bei umgekehrter Anordnung der Glieder

$$1 = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_s,$$

welche Gleichung die triviale Wahrheit ausdrückt, daß mit Sicherheit darauf zu rechnen ist, daß bei s Versuchen das Ereignis E entweder gar nicht oder einmal oder zweimal $\cdots$ oder s-mal eintritt. $A_0 = q^s$ gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, daß E nicht eintritt, $A_1 = s\,p\,q^{s-1}$ die Wahrscheinlichkeit, daß E einmal eintritt, $1 - A_0 = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$ die Wahrscheinlichkeit, daß E mindestens einmal eintritt, $1 - A_0 - A_1 = A_2 + A_3 + \cdots + A_s$ die Wahrscheinlichkeit, daß E mindestens zweimal eintritt, $A_0 + A_1$ die Wahrscheinlichkeit für höchstens einmaligen Eintritt usw.

Will man wissen, ein wie häufiger Eintritt des Ereignisses E bei s Versuchen am wahrscheinlichsten ist, so hat man in der Binomialreihe (1) das größte Glied zu suchen.

Es nehmen aber, wie wir sogleich zeigen wollen, im allgemeinen die Glieder der Binomialreihe vom ersten an bis zu einem größten zu und von da an bis zum letzten wieder ab; in besonderen Fällen kann das größte Glied der Reihe mit dem ersten oder mit dem letzten zusammenfallen, so daß nur Abnahme oder nur Zunahme der Glieder stattfindet.

Der Quotient der beiden aufeinanderfolgenden Glieder

$$\frac{s!}{(s-n)!\,n!}\,p^{s-n}\,q^n \quad \text{und} \quad \frac{s!}{(s-n-1)!\,(n+1)!}\,p^{s-n-1}\,q^{n+1}$$

in (1) ist nämlich gleich $\frac{n+1}{s-n} \cdot \frac{p}{q}$; für das erste Glied der Reihe ist $n = 0$, für das vorletzte ist $n = s - 1$. Es nimmt daher, wenn n die Reihe der natürlichen Zahlen von 0 bis $s-1$ durchläuft, $\frac{n+1}{s-n}$ von $\frac{1}{s}$ bis s zu, und demnach $\frac{n+1}{s-n} \cdot \frac{p}{q}$ von $\frac{1}{s} \cdot \frac{p}{q}$ bis $s \cdot \frac{p}{q}$.

Je nach den Werten von $\frac{p}{q}$ und s wird $\frac{n+1}{s-n} \cdot \frac{p}{q}$ entweder von einem echten Bruch an über Eins hinaus oder nicht über Eins hinaus oder von einem unechten Bruch an weiter wachsen. Im ersten Fall ist anfangs jedes folgende Glied der Binomialreihe größer als das vorhergehende, später aber umgekehrt, so daß ein inneres Glied das größte ist, im zweiten Fall ist das letzte, im dritten Fall das erste das größte Glied. Wird $\frac{n+1}{s-n}\,\frac{p}{q}$ für ein bestimmtes n genau gleich Eins, so gibt es in der Binomialreihe zwei gleiche, nebeneinander stehende größte Glieder.

Den ersten der drei Fälle können wir als den allgemeinen, die beiden anderen in sich schließenden betrachten. Es sei das größte Glied der Reihe (1) $\frac{s!}{(s-n)!\,n!} p^{s-n} \cdot q^n$ oder, indem $s-n$ wieder gleich m gesetzt wird, $\frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n$; bei s Versuchen sei also der m-malige Eintritt des Ereignisses E und der n-malige des gegenteiligen Ereignisses E' am wahrscheinlichsten. Dann muß sein

$$\frac{s!}{(m+1)!\,(n-1)!} p^{m+1} q^{n-1} < \frac{s!}{m!\,n!} p^m q^n$$
$$> \frac{s!}{(m-1)!\,(n+1)!} p^{m-1} q^{n+1};$$

woraus

$$\frac{n}{m+1} \cdot \frac{p}{q} < 1 > \frac{m}{n+1} \frac{q}{p}.$$

Setzt man $n = s - m$ und $q = 1 - p$, so ergibt sich aus diesen beiden Ungleichungen

$$m > (s+1)p - 1,$$
$$m < (s+1)p.$$

Werden s Versuche angestellt, bei deren jedem der Eintritt des Ereignisses E die Wahrscheinlichkeit p hat, so wird die Anzahl m der Eintritte von E, welche die am wahrscheinlichsten vorkommende sein wird, zwischen den gefundenen Grenzen liegen. Ist $(s+1)p$ eine gebrochene Zahl, so ist m, da es eine ganze Zahl ist, eindeutig bestimmt. Ist $(s+1)p$ eine ganze Zahl, so ist für zwei um eine Einheit verschiedene Anzahlen mit größerer Wahrscheinlichkeit als für jede andere Anzahl das Eintreffen von E zu erwarten. Wir haben dann den vorhin schon erwähnten Spezialfall vor uns, daß die beiden Glieder

$$\frac{s!}{m!\,n!}\,p^m\,q^n \quad \text{und} \quad \frac{s!}{(m-1)!\,(n+1)!}\,p^{m-1}\,q^{n+1}$$

einander gleich und zugleich die größten Glieder der Binomialreihe sind, daß also der m- und der $m-1$-malige Eintritt von E gleich wahrscheinlich ist und zwar wahrscheinlicher als der häufigere oder seltenere Eintritt von E; denn aus der Gleichsetzung der beiden Glieder folgt $m = (s+1)p$.

Aus den Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{s} &> p - \frac{1-p}{s}, \\ \frac{m}{s} &< p + \frac{p}{s}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

statt deren im speziellen Fall die Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m-1}{s} &= p - \frac{1-p}{s}, \\ \frac{m}{s} &= p + \frac{p}{s}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ersieht man, daß, je größer die Anzahl s der Versuche ist, um so enger die Grenzen für das Verhältnis der am wahrscheinlichsten stattfindenden Anzahl von Eintritten des Ereignisses E zur Gesamtzahl der Versuche den Wahrscheinlichkeitswert p einschließen, mit welchem das Ereignis E aus einem Einzelversuch zu erwarten ist.

Dividiert man die Ungleichungen (2) durch die aus ihnen folgenden

$$\frac{n}{s} < q + \frac{q}{s},$$
$$\frac{n}{s} > q - \frac{p}{s}$$

und die Gleichungen (3) durch die mit ihnen übereinstimmenden

$$\frac{n+1}{s} = q + \frac{q}{s},$$
$$\frac{n}{s} = q - \frac{p}{s},$$

se erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{n} &> \frac{p - \frac{q}{s}}{q + \frac{q}{s}}, \\ \frac{m}{n} &< \frac{p + \frac{p}{s}}{q - \frac{p}{s}} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und im Spezialfall zweier größter Wahrscheinlichkeiten des Eintrittes von E

$$\left.\begin{aligned} \frac{m-1}{n+1} &= \frac{p - \frac{q}{s}}{q + \frac{q}{s}}, \\ \frac{m}{n} &= \frac{p + \frac{p}{s}}{q - \frac{p}{s}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ist die Anzahl der Versuche sehr groß, so daß $\frac{p}{s}$ und $\frac{q}{s}$ gegen p und q vernachlässigt werden können, so wird

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

und wir erhalten das von Jakob Bernoulli[1]) gefundene, von Poisson[2]) so benannte Gesetz der großen Zahlen:

In einer ausgedehnten Versuchsreihe, in welcher nur zwei einander ausschließende Ereignisse eintreten können, verhalten sich die mit der größten Wahrscheinlichkeit zu erwartenden Anzahlen für die Häufigkeit des Eintretens der beiden Ereignisse wie die Wahrscheinlichkeiten ihres Eintrittes bei einem Einzelversuche.

Am Ende des Paragraphen werden wir noch eine allgemeinere Fassung des Gesetzes aufstellen können.

Beispiel. Es werde s-mal mit einem Würfel gewürfelt. Die Wahrscheinlichkeit, eine Eins zu erhalten, ist $p = \frac{1}{6}$; für einen anderen Wurf ist sie $q = \frac{5}{6}$. Das folgende Täfelchen gibt zu verschiedenen Zahlen s die zugehörigen Werte m und $\frac{m}{n}$, wo m angibt, wie oft der Wurf Eins, und n, wie oft ein anderer Wurf am wahrscheinlichsten fallen wird.

Hervorgehoben sei, um einem falschen Verständnis des Gesetzes der großen Zahlen vorzubeugen, daß die Proportion $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, allerdings nur näherungsweise, zwar von jeder großen Zahl s erfüllt wird, daß aber die Näherung nicht bei jedem geringen Wachstum von s zunimmt. So entfernt

---

1) Jakob Bernoulli, *Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi).* Ostwalds Klassiker der exakt. Wiss., Bd. 108, S. 88 ff.

2) Comptes rend. 1 (1835), p. 478 ff.

s	m	$\frac{m}{n}$	s	m	$\frac{m}{n}$
10	1	0,1111	100	16	0,19048
11	$\begin{cases}1\\2\end{cases}$	0,1000 0,2222	995	$\begin{cases}165\\166\end{cases}$	0,19880 0,20024
12	2	0,2000	996	166	0,20000
13	2	0,1818	997	166	0,19976
14	2	0,1667	998	166	0,19952
15	2	0,1538	999	166	0,19928
16	2	0,1429	1000	166	0,19904
17	$\begin{cases}2\\3\end{cases}$	0,1333 0,2143	1001	$\begin{cases}166\\167\end{cases}$	0,19880 0,20024
18	3	0,2000	1002	167	0,20000
19	3	0,1875	10000	1666	0,19990
20	3	0,1765	100000	16666	0,19999

sich in obigem Beispiel, wenn die Zahl s der Versuche von 996 um je 1 bis 1000 wächst, $\frac{m}{n}$ sogar von dem mit $\frac{p}{q}$ genau übereinstimmenden Wert 0,20000 bis auf 0,19904, worauf die dann folgende Zahl $s = 1001$ für m die beiden Werte 166 und 167 liefert, denen $\frac{m}{n} = 0{,}19880$ und $0{,}20024$ entspricht.

Der Wert $\frac{m}{n}$ kann schon für eine geringe Versuchszahl s, z. B. für $s = 12$ und $s = 18$, mit $\frac{p}{q} = \frac{1}{5}$ genau übereinstimmen, die Werte $\frac{m}{n}$ schwanken aber, je größer s wird, in um so engeren Grenzen um den Wert $\frac{p}{q} = \frac{1}{5}$ herum. Insofern läßt sich dann allerdings, wenn auch etwas ungenau, kurz sagen: der Wert $\frac{m}{n}$ nähert sich bei wachsender Versuchszahl s dem Werte $\frac{p}{q}$.

Ferner sei darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn auch bei Erweiterung einer Versuchsreihe die wahrscheinlichsten Anzahlen für die Eintritte der Ereignisse E und E' größer werden, so doch die Wahrscheinlichkeit für diesen häufigeren Eintritt von E und E' eine geringere wird[1]). Es erscheint dies auch verständlich, da mit der Vermehrung der Versuche eine Vermehrung der Möglichkeiten, daß Eintritte der Ereignisse E und E' in verschiedener Zahl zusammenkommen — eine Vermehrung der Glieder der Binomialreihe — Hand in Hand geht. So ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 100-maligem Würfeln mit einem Würfel 16 mal die Eins und 84 mal andere Zahlen erscheinen, gleich

$$\frac{100!}{16!\,84!}\left(\frac{1}{6}\right)^{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{84} = 0{,}107$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß bei 1000-maligem Würfeln die Eins 166 mal und die anderen Zahlen insgesamt 834 mal erscheinen, gleich

$$\frac{1000!}{166!\,834!}\left(\frac{1}{6}\right)^{166}\left(\frac{5}{6}\right)^{834} = 0{,}034\,.$$

In § 10 wird der numerische Zusammenhang zwischen der Anzahl der Versuche und der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Ereignisse E und E' in der Häufigkeit, für welche diese Wahrscheinlichkeit ihr Maximum hat, abgeleitet werden.

Das Gesetz der großen Zahlen läßt sich offenbar auch auf den Fall ausdehnen, daß bei den einzelnen Versuchen nicht nur zwei, sondern mehrere einander ausschließende Ereignisse $E, E', E'' \cdots$ eintreten können. Sind in einer Urne a weiße, a' schwarze, a'' rote Kugeln vorhanden, so ist bei einer großen Anzahl von Ziehungen, wo die gezogene Kugel nach Konstatierung ihrer Farbe immer wieder in die Urne zurückgelegt wird, nach dem Obigen das Ver-

[1]) Um dies zu beweisen, muß man zeigen, daß das größte Glied der der erweiterten Versuchsreihe entsprechenden Binomialreihe, dividiert durch das größte Glied der der nichterweiterten Versuchsreihe entsprechenden Binomialreihe, ein echter Bruch ist. Dazu sind die Fakultäten mittels der in § 9 abgeleiteten Stirlingschen Formel durch Potenzen auszudrücken.

hältnis der gezogenen weißen Kugeln zu der Gesamtheit der Kugeln am wahrscheinlichsten gleich $\frac{a}{a+a'+a''}$, das Verhältnis der gezogenen schwarzen Kugeln zur Gesamtheit der Kugeln am wahrscheinlichsten gleich $\frac{a'}{a+a'+a''}$ und das Verhältnis der gezogenen roten Kugeln zur Gesamtheit der Kugeln am wahrscheinlichsten gleich $\frac{a''}{a+a'+a''}$. Das als das wahrscheinlichste zu erwartende Verhältnis der gezogenen weißen, schwarzen und roten Kugeln ist daher gleich $a:a':a''$, oder, wenn mit p, p', p'' die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen, schwarzen, roten Kugel bezeichnet werden, gleich $p:p':p''$.

Wir können dem Gesetz der großen Zahlen daher folgende allgemeinere Fassung geben:

Werden die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen die einander ausschließenden Ereignisse E, E', $E''\cdots$ aus einem Einzelversuch hervorgehen können, mit $p, p', p''\cdots$ bezeichnet, so werden bei einer weit ausgedehnten Versuchsreihe die Anzahlen, in welchen die Ereignisse $E, E' E''\cdots$ auftreten, sich am wahrscheinlichsten verhalten wie $p:p':p''\cdots$

§ 9. Die Stirlingsche Formel.

In den Ausdrücken für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses treten oft die Fakultäten von Zahlen auf, deren numerischer Wert, wenn die Zahl groß ist, sich nur mühsam berechnen läßt. Außerdem aber sind die Fakultäten Funktionen, die einer mathematischen Umformung sehr wenig zugänglich sind, und man hat daher oft den Wunsch, sie wenigstens genähert durch andere, der mathematischen Behandlung zugänglichere, geschmeidigere Ausdrücke zu ersetzen.

Diesem Zweck dient die Stirlingsche[1]) Formel

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2 \pi n},$$

wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bedeutet. Im folgenden wollen wir, wenn auch keine ihre Auffindung erkennen lassende Ableitung, so doch den Beweis ihrer Richtigkeit geben.

Da $n!$ eine Funktion von n ist, so können wir setzen

$$n! = n^n e^{-n} f(n) \tag{1}$$

und haben nun zu beweisen, daß $f(n) = \sqrt{2 \pi n}$.

Schreiben wir in (1) $n + 1$ für n, so haben wir

$$(n + 1)! = (n + 1)^{n+1} e^{-n-1} f(n + 1),$$

und dividieren wir diese Formel durch (1), so bekommen wir

$$\frac{f(n + 1)}{f(n)} = e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \tag{2}$$

Bekanntlich ist $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ gleich e; die rechte Seite der Gleichung ist demnach für große Werte von n nur wenig von 1 verschieden und möge daher auf die Form $1 + \varepsilon$ gebracht werden, wo ε eine von n abhängige, mit größer werdendem n gegen die Null konvergierende Größe ist. Zu dem Zweck setzen wir

$$e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = z,$$

[1]) James Stirling, 1696?—1770, Agent einer Bergbaugesellschaft in Schottland.

dann ist

$$l z = 1 - n l \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2 n^2} + \frac{1}{3 n^3} - \cdots\right),$$

demnach mit Vernachlässigung von Gliedern der Größenordnung $\frac{1}{n^2}$

$$z = e^{\frac{1}{2 n}}.$$

Es ist aber

$$e^{\frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{2 n} + \left(\frac{1}{2 n}\right)^2 + \cdots,$$

demnach wieder mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$z = \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1 + \frac{1}{2 n}.$$

Ferner ist aber auch

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2 n} + \cdots,$$

folglich

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

Es ist demnach $f(n)$ proportional $\sqrt{n}$, oder wenn k eine Konstante bedeutet,

$$f(n) = k \cdot \sqrt{n},$$

demnach

$$n! = k\, n^n e^{-n} \sqrt{n}. \tag{3}$$

Nach Wallis[1]) ist aber, wie am Ende des Paragraphen bewiesen werden soll, um so genauer, je mehr n sich der Grenze ∞ nähert,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \tag{4}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1)^2} \cdot \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

oder auch

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n)^2} \cdot \frac{2^{4n}}{2n+1}. \tag{5}$$

Nach (3) ist aber

$$n! = k \cdot n^n \cdot e^{-n} \sqrt{n}$$

und

$$(2n)! = k \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \sqrt{2n}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für $n!$ und $(2n)!$ in (5) ein, so kommt

$$\frac{\pi}{2} = k^2 \frac{n}{2(2n+1)},$$

woraus für sehr große n

$$k = \sqrt{2\pi}.$$

Demnach ist näherungsweise

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \tag{6}$$

womit die Stirlingsche Formel bewiesen ist.

Die Formel von Wallis, für welche auch auf Sammlung Göschen Nr. 88, § 25 verwiesen sei, wird folgendermaßen bewiesen.

---

[1]) **John Wallis, 1616—1703, Prof. der Geometrie in Oxford.**

Für

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

ist

$$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x,$$

folglich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx.$$

Es ist aber, wie man durch wiederholte partielle Integration findet,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx = \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

§ 10. Wahrscheinlichkeit eines Streuungsbereiches.

Sind für zwei einander ausschließende Ereignisse E und E' die Wahrscheinlichkeiten ihres Eintrittes bei einem Versuch p und $q = 1 - p$, so ist für das Zusammentreffen des m-maligen Eintrittes von E mit dem n-maligen Eintritt von E', gleichgültig in welcher Folge, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{s!}{m!\,n!}\,p^m\,q^n.$$

Dieser Wert hat nach § 8 sein Maximum, wenn $\frac{m}{s} = p$ und $\frac{n}{s} = q$.

Die Wahrscheinlichkeit des m-maligen Eintrittes von E und des n-maligen von E', wo $m = p \cdot s$ und $n = q \cdot s$, ist demnach größer, als wenn bei den s Versuchen E und E' in anderer Häufigkeit auftreten. Diese Maximalwahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{s!}{(p\,s)!\,(q\,s)!}\,p^{ps} \cdot q^{qs}.$$

Durch Anwendung der Stirlingschen Formel geht dieser Ausdruck über in

$$\frac{s^s \cdot e^{-s}\sqrt{2\,\pi\,s} \cdot p^{ps} \cdot q^{qs}}{(p\,s)^{ps} \cdot e^{-ps}\sqrt{2\,\pi\,p\,s} \cdot (q\,s)^{qs} \cdot e^{-qs}\sqrt{2\,\pi\,q\,s}}$$

oder, da $p + q = 1$, in

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s\,p\,q}},$$

welcher Ausdruck demnach jene Wahrscheinlichkeit genähert darstellt.

Bei 600-maligem Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Eins 100 mal fällt und die anderen Augenzahlen 500 mal, näherungsweise gleich

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi \cdot 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = 0{,}044.$$

Bei 2400-maligem Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Eins 400 mal fällt und sonst andere Zahlen, halb so groß, also näherungsweise gleich 0,022.

Bei einer großen Anzahl von Versuchen nimmt, wie auch die beiden Beispiele zeigen, die Wahrscheinlichkeit, daß zwei sich ausschließende Ereignisse E und E' in den Häufigkeitszahlen zusammentreffen, für welche die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens ihren größten Wert hat, bei Vermehrung der Versuche im Verhältnis der Quadratwurzel aus der Anzahl der Versuche ab.

Da das Produkt $p\,q = p\,(1-p)$ seinen Maximalwert für $p = \frac{1}{2}$, also für $p = q$ hat, so hat der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s\,p\,q}}$ für $p = q$ sein Minimum.

Bei 600-maligem Würfeln mit einem Würfel ist die Wahrscheinlichkeit, daß 300 mal eine gerade und 300 mal eine ungerade Augenzahl fällt, nur 0,0326, und bei 2400-maligem Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, daß 1200 mal eine gerade und 1200 mal eine ungerade Augenzahl fällt, nur gleich 0,0163.

Ist in einer Urne, welche weiße und schwarze Kugeln enthält, das Mischungsverhältnis der letzteren gleich $m:n$, so wird man bei s aufeinander folgenden Ziehungen je einer Kugel, wobei diese immer wieder zurückgelegt wird, am wahrscheinlichsten m weiße und $s-m=n$ schwarze Kugeln ziehen. Ist die Anzahl der Kugeln eine sehr große, so daß ihr gegenüber die Zahl s nicht ins Gewicht fällt, so braucht die entnommene Kugel gar nicht wieder in die Urne zurückgelegt zu werden. Oder es können auch die s-Kugeln mit einem Griff aus der Urne genommen werden. Am wahrscheinlichsten wird man hierbei also m weiße und n schwarze Kugeln ergreifen.

Ist das Mischungsverhältnis der weißen und schwarzen Kugeln 1 : 1, so erhält man am wahrscheinlichsten gleich viele weiße wie schwarze Kugeln. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber, wie wir vorhin erkannten, geringer als jene, mit welcher man bei einem anderen Mischungsverhältnis $m:n$ die weißen und schwarzen Kugeln in diesem Verhältnis ergreifen wird. Je mehr das Mischungsverhältnis der weißen und schwarzen Kugeln von 1 : 1 abweicht, mit um so größerer Wahrscheinlichkeit wird man mit einem Griff weiße und schwarze Kugeln in dem Verhältnis ihres Vorhandenseins ziehen. Sind nur weiße Kugeln in der Urne, so wird man mit der Wahrscheinlichkeit Eins nur weiße und keine schwarzen Kugeln ziehen.

Aus diesem von vornherein klaren Grenzfall läßt sich schon erkennen, daß die Maximalwahrscheinlichkeit, welche beim Ziehen von Kugeln in dem Verhältnis ihrer Mischung stattfindet, nicht ihren größten Wert hat, wenn das Mischungsverhältnis 1:1 vorliegt, wie man vielleicht im ersten Augenblick vermuten könnte, sondern vielmehr ihren kleinsten Wert. Denn die den verschiedenen Mischungsverhältnissen zukommenden Maximalwahrscheinlichkeiten der Ziehungsmöglichkeiten werden sich, wenn das Mischungsverhältnis sich von 1 : 1 nach 1 : 0 hin ändert, jedenfalls auch immer nur nach einer Richtung hin ändern; da es aber größere Wahrscheinlichkeiten als Eins nicht gibt, so muß die Änderung nach diesem, dem Grenzfall entsprechenden Wert hin von einem kleineren Wert aus erfolgen und die dem Mischungsverhältnis 1 : 1 zugehörige Maximalwahrscheinlichkeit daher ein Minimumwert sein.

Unsere Näherungsformel $\frac{1}{\sqrt{2\pi s p q}}$ liefert für den Grenzfall, daß p oder q gleich Null ist, den Wert ∞ statt 1 für die Maximalwahrscheinlichkeit. Dieses widersinnige

Resultat erklärt sich daraus, daß der bei Ableitung der Formel befolgte Gedankengang für den Grenzfall nicht paßt, insbesondere aber auch die Stirlingsche Näherungsformel auf 0! nicht angewendet werden darf.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis E $m + x = p s + x$ und das Ereignis E' $n - x = q s - x$ mal eintritt, wo x ein im Verhältnis zu s kleiner Wert sei, ist

$$\frac{s!}{(p s + x)!\,(q s - x)!}\, p^{p s + x} \cdot q^{q s - x}$$

oder, mit Benutzung der Stirlingschen Formel, näherungsweise

$$\frac{s^s \cdot e^{-s} \sqrt{2 \pi s} \cdot p^{p s + x} \cdot q^{q s - x}}{(p s + x)^{p s + x} \cdot e^{-p s - x} \sqrt{2 \pi (p s + x)}\, (q s - x)^{q s - x} \cdot e^{-q s + x} \cdot \sqrt{2 \pi (q s - x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \pi s p q} \left(1 + \frac{x}{p s}\right)^{p s + x + \frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{q s}\right)^{q s - x + \frac{1}{2}}}.$$

Es ist aber

$$l \left(1 + \frac{x}{p s}\right)^{p s + x + \frac{1}{2}} = \left(p s + x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{p s} - \frac{x^2}{2 p^2 s^2} + \cdots\right)$$

$$= x + \frac{x^2}{2 p s} + \frac{x}{2 p s},$$

$$l \left(1 - \frac{x}{q s}\right)^{q s - x + \frac{1}{2}} = \left(q s - x + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{x}{q s} - \frac{x^2}{2 q^2 s^2} - \cdots\right)$$

$$= - x + \frac{x^2}{2 q s} - \frac{x}{2 q s},$$

folglich

$$l\left(1+\frac{x}{p\,s}\right)^{p\,s+x+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{q\,s}\right)^{q\,s-x+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{x^2}{2\,s\,p\,q}+\frac{x}{2\,s}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right).$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis E x mal öfter und E' x mal seltener vorkommt als in der Anzahl, für welche die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von E und E' ihren größten Wert hat, näherungsweise gleich

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s\,p\,q}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\,s\,p\,q}-\frac{x}{2\,s}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Ist nun x gegen s klein — beispielsweise $x = 5$; $s = 100$ — und p von q nicht allzu verschieden, so kann das zweite Glied des Exponenten gegen das erste vernachlässigt werden, und wir bekommen als Wahrscheinlichkeit für das x mal öftere Vorkommen von E

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s\,p\,q}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\,s\,p\,q}}.$$

Da dieser Ausdruck x nur in einer geradzahligen Potenz enthält, so gibt er auch innerhalb der von uns bei der Ableitung eingehaltenen Genauigkeitsgrenzen die Wahrscheinlichkeit wieder für ein um x minder häufiges Eintreffen von E, als es der größten Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens entspricht, während doch die Glieder der Reihe (1) in § 8, S. 32, vom Höchstwert ab nach beiden Seiten unsymmetrisch abfallen, wenn nicht $p = q$ ist.

Durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s\,p\,q}}\sum_{-x}^{+x} e^{-\frac{x^2}{2\,s\,p\,q}}$$

D n oscheireintsrechnug. II.

ist die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, daß die Häufigkeitszahlen für das Zusammentreffen der Ereignisse E und E' von den Werten, welche mit der größten Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind, bis zu x nach beiden Seiten abweichen.

Nehmen wir den Fall, daß die Ereignisse E und E' in den wahrscheinlichsten Häufigkeitszahlen auftreten, als den normalen an, so sind die Werte x, um welche die Häufigkeitszahlen von den wahrscheinlichsten verschieden sind, als Abweichungen von dem normalen Fall zu betrachten. Die letzte Formel kann dann als die Wahrscheinlichkeit des Streuungsbereiches der Abweichungen innerhalb der Grenzen $-x$ und $+x$ gelten.

Bezeichnet dx eine geringe Zunahme von x, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{x^2}{2spq}} \cdot dx$$

die Wahrscheinlichkeit des Streuungsbereiches von x bis $x + dx$, und nehmen wir, was sich namentlich im Interesse einer bequemeren mathematischen Behandlung empfiehlt, eine stetige Folge der Häufigkeitszahlen für das Zusammentreffen der Ereignisse E und E' an, so geht die obige Summenformel über in

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} \int_{-x}^{+x} e^{-\frac{x^2}{2spq}} dx.$$

Da $e^{-\frac{x^2}{2spq}}$ eine mit zunehmendem x außerordentlich rasch fallende Funktion ist, so können wir hier die Beschränkung, daß x gegen s nur mäßige Werte annehmen solle, fallen und x selbst über s hinaus bis Unendlich wachsen lassen. Der Betrag, welcher durch die Ausdehnung des Integrals von mäßigen Werten des x bis zu $x = \infty$ hinzukommt, ist so gering, daß er praktisch von keiner Bedeutung ist.

Da die Abweichungen, welche in einer Versuchsreihe vorkommen, zweifellos innerhalb des Bereiches $-\infty$ und $+\infty$ liegen müssen, so muß die Wahrscheinlichkeit dafür den Wert 1 haben. Von unserem als Näherungswert abgeleiteten Integral können wir daher erwarten, daß es bei Ausdehnung der Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ nahezu den Wert 1 liefert. Es liefert jedoch, diese Erwartung übertreffend, genau den Wert 1, denn setzen wir $\frac{x}{\sqrt{2\,s\,p\,q}} = t$, so geht es über in

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt,$$

dessen Wert gleich 1 ist, wie Euler, nach dem darum das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ benannt worden ist, gefunden hat.

§ 11. Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Ausgleichsrechnung.

Das Auftreten eines Fehlers bei einer Messung kann man sich dadurch bewirkt denken, daß von einer großen Zahl gleich möglicher, positiver und negativer, kleiner Fehlereinheiten, die wir als Elementarfehler bezeichnen können, eine Anzahl zusammentreten, die sich mehr oder weniger, aber nicht vollständig aufheben. Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers ist dann dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit, daß aus einer Urne, welche sehr zahlreiche weiße und schwarze Kügelchen und zwar, wegen der als gleich wahrscheinlich anzunehmenden positiven und negativen Fehler, beide Arten von Kügelchen in gleicher Häufigkeit enthält, bei einem Griff die Kügelchen der einen Art in einer gewissen Überzahl erhalten werden.

Nehmen wir s Kügelchen aus der Urne, so ist, weil $p = q = \frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\frac{s}{2} + x$ Kügelchen der einen Farbe und $\frac{s}{2} - x$ Kügelchen der anderen Farbe gezogen werden, gleich

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot s}} \cdot e^{-\frac{2x^2}{s}}$$

oder, wenn wir $\sqrt{\frac{2}{s}} = h$ setzen, gleich

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}.$$

Dieser Ausdruck gibt also die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x wieder.

Für $x = 0$ hat er seinen Maximalwert $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ und nimmt bei zunehmendem x stetig ab.

Je größer h ist, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit eines um Null herumliegenden Fehlers, um so zuverlässiger ist also die Messung. Gauß hat daher h das Maß der Genauigkeit genannt.

Es könnte im ersten Augenblick befremden, daß die Genauigkeit um so größer ist, je kleiner s ist, womit wir die Anzahl der zusammenwirkenden Elementarfehler oder, zur Veranschaulichung, die Anzahl der der Urne entnommenen Kügelchen bezeichnet haben. Es ist aber in der

Tat, wie aus der in § 10 abgeleiteten Formel $\frac{1}{\sqrt{2\pi s p q}}$ hervorgeht, wahrscheinlicher, bei Entnahme einer geringen Zahl Kügelchen gleich viele von jeder Farbe zu erhalten als bei Entnahme einer großen Zahl.

Die dem Fall $s = 8$ und demnach $h = \frac{1}{2}$ entsprechende Fehlerwahrscheinlichkeit wird durch die flachste der drei Kurven in Figur 10, deren Gleichung ist

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}},$$

geometrisch dargestellt.

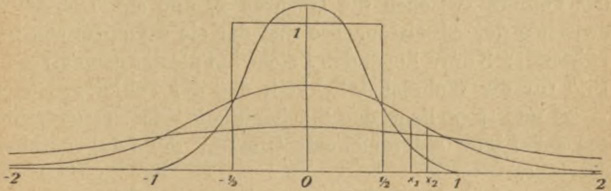

Fig. 10.

Es hindert offenbar nichts, dem h in der Gleichung der Kurve der Fehlerwahrscheinlichkeit oder der Fehlerverteilung einen viel höheren Wert als $\frac{1}{2}$ beizulegen, wenn auch s dann nicht mehr als die Anzahl der weißen und schwarzen Kügelchen gedeutet werden kann, die mit einem Griff der Urne entnommen werden.

Will man die Veranschaulichung der positiven und negativen Elementarfehler durch die weißen und schwarzen einer Urne zu entnehmenden Kügelchen beibehalten, so könnte man annehmen, in der Urne seien außer ihnen noch „neutrale", halb weiß, halb schwarze Kügelchen vorhanden.

Bei einer Entnahme von s Kügelchen wird dann das Auftreten einer Überzahl von weißen oder schwarzen Kügelchen weniger wahrscheinlich sein als früher.

Die drei Kurven in Fig. 10 geben die Fehlerverteilung bei $h=\frac{1}{2}$, $h=1$ und $h=2$. Die durch das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-h^2 x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{h x_1}^{h x_2} e^{-t^2}\,dt$$

bestimmte Fläche zwischen den zu x_1 und x_2 gehörigen Ordinaten gibt die Wahrscheinlichkeit an für das Fallen des Fehlers zwischen die Grenzen x_1 und x_2. Die ganze zwischen der Abszissenachse und der sie asymptotisch berührenden Kurve liegenden Fläche hat als das geometrische Bild für die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liege, den Flächeninhalt Eins, dessen Größe das der Figur eingezeichnete Quadrat der Längeneinheit darstellt.

Die Bedeutung der Größe h als Genauigkeitsmaß können wir sehr gut aus folgendem erkennen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Messungsreihe, welche durch die Konstante h charakterisiert ist, ein Fehler zwischen $-\delta$ und $+\delta$ liege, ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2 x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\delta}^{+h\delta} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+h\delta} e^{-t^2}\,dt.$$

Ist für eine zweite Messungsreihe, welcher die Konstante h' zukommt, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers δ'

geradeso groß wie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers δ für die erste Messungsreihe, so ist demnach

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\delta} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h'\delta'} e^{-t^2}\,dt.$$

Damit die beiden Integrale einander gleich seien, müssen die Grenzen einander gleich sein, also $h\,\delta = h'\,\delta'$. Dann verhält sich

$$h : h' = \delta' : \delta .$$

Die Werte h zweier Messungsreihen verhalten sich also umgekehrt wie gleich wahrscheinliche Fehler der letzteren. Da man nun den Messungsreihen eine um so größere Genauigkeit zuerkennt, je kleiner gleich wahrscheinliche Fehler sind, so rechtfertigt sich die Bezeichnung des Wertes h als Genauigkeitsmaß.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung mündet hier in das spezielle Gebiet der Ausgleichsrechnung oder der Methode der kleinsten Quadrate ein, deren Aufgabe es ist, aus einer größeren Reihe von Messungen das Resultat zu finden, welches die größte Wahrscheinlichkeit besitzt, der gesuchte richtige Wert zu sein.

Hier sei darüber nur noch mitgeteilt, daß Gauß das arithmetische Mittel gleichwertiger Messungen als den wahrscheinlichsten, besten Wert der gesuchten Größe annimmt, was gewiß im allgemeinen gerechtfertigt ist. Eine andere, besonders vorteilhafte Fassung dieses Axioms ist die, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen der direkten Messungen von den mit den errechneten gesuchten Größen, deren es ja mehrere sein können, dafür gelieferten Werten ein Minimum sein muß.

Aus den Abweichungen der Einzelmessungen von den wahrscheinlichsten Werten läßt sich die Genauigkeit der Messungsreihe beurteilen, zu deren Kennzeichnung Gauß, abgesehen von der oben besprochenen Größe h, den durchschnittlichen, den wahrscheinlichen und den mittleren Fehler eingeführt hat.

Der durchschnittliche Fehler ist definiert als das arithmetische Mittel der Abweichungen der Einzelmessungen vom wahrscheinlichsten Wert, also von ihrem arithmetischen Mittel, ohne Berücksichtigung des Vorzeichens der Abweichungen. Der wahrscheinliche Fehler ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß kleinere Fehler als er ebenso wahrscheinlich sind wie größere. Und der mittlere Fehler ist dadurch definiert, daß sein Quadrat gleich dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Abweichungen der Einzelmessungen vom wahrscheinlichsten Wert ist.

Zu den Aufgaben der Ausgleichsrechnung gehört weiterhin, den wahrscheinlichsten Wert der gesuchten Größe zu finden, wenn die Einzelmessungen nicht von gleicher Zuverlässigkeit sind, ferner, wenn die gesuchten Größen nicht direkt gemessen sind, sondern mit den gemessenen in irgendwelchem funktionellen Zusammenhang stehen, wie es in der Astronomie der Fall ist, wenn die wahrscheinlichsten Werte der Bestimmungsstücke einer Planetenbahn, beispielsweise die halbe große Achse der Bahnellipse, ihre Exzentrizität und ihre Lage im Raum gefunden werden soll, während nur Örter des Planeten an der Himmelskugel beobachtet worden sind. In der Geodäsie kommt besonders häufig die Aufgabe vor, die wahrscheinlichsten Werte gemessener Größen zu finden, wenn dieselben noch gewisse Bedingungen streng erfüllen müssen, wie beispielsweise, daß die um einen Punkt herumliegenden Winkel 360 Grad betragen müssen, oder die drei Dreieckswinkel 180 Grad plus dem sphärischen Exzeß.

III. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeit einer Ursache auf Grund der Erfahrung.

§ 12. Wahrscheinlichkeit einer Ursache, wenn die verschiedenen möglichen Ursachen von vornherein gleich wahrscheinlich sind.

Bei unseren bisherigen Wahrscheinlichkeitsbestimmungen haben wir keine Rücksicht auf die Erfahrung genommen. Sie beruhten einfach auf der Definition von der Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines Ereignisses: Anzahl der günstigen Fälle, dividiert durch die Anzahl der möglichen Fälle.

Ob wirklich, um bei dieser Gelegenheit auch diese Frage zu besprechen, bei sechsmaligem Würfeln mit einem Würfel, im allgemeinen wenigstens, eine Eins erscheint, so daß es sich empfiehlt, eine Wette darauf einzugehen, darüber gibt die Wahrscheinlichkeitsrechnung keinen Aufschluß. Hier muß die Erfahrung zu Rate gezogen werden. In der Tat haben weit ausgedehnte Versuchsreihen eine durchaus befriedigende Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gezeigt, auch hat sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine sichere Grundlage für alle die Betriebe erwiesen, wo das von Zufälligkeiten abhängige Eintreffen oder Nichteintreffen von Ereignissen in Frage kommt, z. B. für das Versicherungswesen (s. Abschnitt VI).

Außer den Bestimmungen der Wahrscheinlichkeit *a priori*, wie wir sie bisher vorgenommen haben, können wir jedoch auch solche *a posteriori* vornehmen, d. h. solche, bei denen auf die Erfahrung Rücksicht genommen wird. Erhalten wir z. B. bei 20 Zügen aus einer Urne immer eine weiße Kugel, so werden wir mit großer Wahrscheinlichkeit auch für die 21. Ziehung eine weiße Kugel erwarten dürfen, da die Erfahrung uns auf ein höchstwahrscheinlich starkes Überwiegen der weißen Kugeln über die etwa in der Urne noch vorhandenen andersfarbigen schließen läßt.

Eine Tatsache, welche ein Ereignis herbeiführt, wird die Ursache desselben genannt. So kann auch das Mischungsverhältnis der Kugeln in der Urne, welche das 20-malige Ziehen einer weißen Kugel zur Folge hatte, als Ursache dieses Ereignisses aufgefaßt werden, obwohl ein anderer Ausdruck wie zugrunde liegender Tatbestand, Entstehungsart, Voraussetzung, Bedingung, Hypothese in diesem oder in anderen Fällen besser am Platze wäre.

Kann ein Ereignis aus mehreren „Ursachen" hervorgegangen sein — z. B. das 20-malige Ziehen einer weißen Kugel aus mehreren Mischungsverhältnissen —, so tritt die Frage auf, welche Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Ursache für den Eintritt des Ereignisses zukommt.

Die Antwort auf diese Frage soll uns das folgende Beispiel liefern helfen.

Von n gleich aussehenden Urnen $U_1, U_2 \cdots U_n$ enthalte die erste m_1 Kugeln und darunter μ_1 weiße, die zweite m_2 Kugeln, worunter μ_2 weiße usw. Jemand, der vor die n-Urnen geführt wird, nehme aus einer derselben eine Kugel heraus, worauf festgestellt wird, daß sie weiß ist. Es wird gefragt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel der Urne U_i entstammt?

Die Wahrsch., aus U_1 eine weiße Kugel zu ziehen, sei $p_1 = \frac{\mu_1}{m_1}$,

„ „ „ U_2 „ „ „ „ „ „ $p_2 = \frac{\mu_2}{m_2}$

$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots$

Offenbar wird die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer weißen Kugel aus einer Urne nicht geändert, wenn die Anzahl der Kugeln in derselben vermehrt wird, sofern nur das Mischungsverhältnis dasselbe bleibt. Ist m das kleinste gemeinsame Vielfache von $m_1, m_2 \cdots m_n$, so daß also $m = \lambda_1 m_1 = \lambda_2 m_2 = \cdots = \lambda_n m_n$, wo λ eine ganze Zahl, so wird bei Vermehrung der Kugeln der einzelnen Urnen auf das λ_1-, λ_2-$\cdots$$\lambda_n$-fache unter Beibehaltung des früheren Mischungsverhältnisses die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer weißen Kugel aus den verschiedenen Urnen dieselbe geblieben sein wie früher.

Geben wir jetzt sämtlichen Kugeln der Urne U_1 den Index 1, sämtlichen Kugeln der Urne U_2 den Index 2 usf., und schütten sie in eine große Urne U, so wird die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel aus der Urne U zu ziehen, dieselbe sein wie früher die Wahrscheinlichkeit, aus einer der n Urnen eine weiße Kugel zu ziehen. Und die Wahrscheinlichkeit, daß die aus U gezogene weiße Kugel den Index i trage, wird ebenso groß sein wie die Wahrscheinlichkeit, daß die aus einer willkürlich gewählten Urne gezogene weiße Kugel der Urne U_i entstamme.

Da aber in der großen Urne $\lambda_i \mu_i$ weiße Kugeln den Index i tragen und $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \cdots + \lambda_n \mu_n$ weiße Kugeln überhaupt darin enthalten sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogene weiße Kugel den Index i trägt,

$$P_i = \frac{\lambda_i \mu_i}{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \cdots + \lambda_n \mu_n}$$

$$= \frac{\frac{m}{m_i} \mu_i}{\frac{m}{m_1} \mu_1 + \frac{m}{m_2} \mu_2 + \cdots + \frac{m}{m_n} \mu_n},$$

$$P_i = \frac{\frac{\mu_i}{m_i}}{\frac{\mu_1}{m_1} + \frac{\mu_2}{m_2} + \cdots + \frac{\mu_n}{m_n}}$$

$$= \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n};$$

mit Worten: Kann ein Ereignis durch verschiedene, von vornherein gleich wahrscheinliche Ursachen hervorgebracht worden sein, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es aus einer bestimmten Ursache hervorgegangen ist, gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der es aus dieser Ursache folgen konnte, dividiert durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten, mit welchen es aus allen einzelnen Ursachen folgen konnte.

Da Bayes[1]) der erste war, welcher sich mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursache eines Ereignisses abgab, so nennt man diesen Satz, wenn auch Laplace ihm erst seine Fassung gegeben hat, das Bayessche Theorem.

§ 13. Beispiele.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jemand mit drei Würfeln gewürfelt hat, wenn er mit einem Wurf 4 Augen geworfen hat?

Würfelte die Person mit 1 Würfel, so konnten die 4 Augen nur auf eine Weise zustande gekommen sein; wir haben hier nur eine Entstehungsart, nur eine mögliche „Ursache“.

---

[1]) Th. Bayes, An Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances. Lond. Phil. Trans. 53. 1764.

Beim Spiel mit 2 Würfeln konnten 4 Augen auf dreierlei Weise fallen, nämlich 1, 3; 2, 2; 3, 1.

Beim Spiel mit 3 Würfeln konnten 4 Augen auf die 3 Weisen fallen: 1, 1, 2; 1, 2, 1; 2, 1, 1.

Beim Spiel mit 4 Würfeln konnten 4 Augen nur auf die eine Weise fallen: 1, 1, 1, 1.

Die Wahrscheinlichkeit, 4 Augen zu werfen, ist demnach beim Spiel mit 1 Würfel gleich $\frac{1}{6}$, mit 2 Würfeln gleich $\frac{3}{6^2}$, mit 3 Würfeln gleich $\frac{3}{6^3}$ und mit 4 Würfeln gleich $\frac{1}{6^4}$.

Als Wahrscheinlichkeit, daß 3 Würfel benutzt wurden, ergibt sich sonach

$$p = \frac{\frac{3}{6^3}}{\frac{1}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{1}{6^4}} = 0{,}0525.$$

Beispiel 2. Es wird jemand vor 3 gleich aussehende Schränkchen geführt, deren jedes 3 Schubfächer hat. In den Schubfächern des ersten Schränkchens liegt je eine Goldmünze, in den Schubfächern des zweiten Schränkchens je eine Silbermünze und in 2 Schubfächern des dritten Schränkchens je eine Goldmünze, im dritten Schubfach aber eine Silbermünze. Die Person zieht eines der Schubfächer heraus und findet eine Goldmünze darin. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das gezogene Schubfach dem dritten Schränkchen angehörte?

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher das dritte Schränkchen bei Ziehen eines Faches eine Goldmünze enthält, ist

$\frac{2}{3}$; für das erste Schränkchen ist sie gleich 1, für das zweite gleich 0; folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+0+\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}.$$

Man hätte die Aufgabe auch auf Grund folgender Erwägung lösen können. Da in dem gezogenen Schubfach sich ein Goldstück befand, so konnte nur ein Schubfach von Schränkchen 1 oder Schränkchen 3 gezogen worden sein. Jedes der fünf Schubfächer, welche Goldstücke enthielten, konnte mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt worden sein. Zwei der fünf Fälle, welche eine Goldmünze lieferten, waren für die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß die Goldmünze dem dritten Schränkchen entstamme, günstige Fälle, folglich mußte die Lösung sein $\frac{2}{5}$.

Bei nicht genügender Überlegung könnte man, weil nur zwei Schränkchen als Goldmünzen enthaltend in Frage kommen, jedes Schränkchen aber mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt werden konnte, $\frac{1}{2}$ als die richtige Lösung ansehen wollen. Aber es handelt sich hier nicht darum, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Schränkchen 3 gewählt werden konnte, sondern um die Wahrscheinlichkeit, daß es gewählt wurde, wobei zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit die Tatsache dienen soll, daß ein Goldstück in dem Schubfach gefunden wurde. Hätte jedes Schränkchen 10 Fächer besessen und jedes Fach des ersten Schränkchens eine Goldmünze, ferner jedes Fach des zweiten Schränkchens eine Silbermünze, dagegen nur 1 Fach des dritten Schränkchens eine Goldmünze, die 9 übrigen Fächer aber Silbermünzen, so würde die Wahrscheinlichkeit für die Herkunft der gefundenen Goldmünze aus dem dritten Schränkchen offenbar $\frac{1}{11}$ sein, welches Resultat gewiß auch plausibler erschiene als $\frac{1}{2}$.

Beispiel 3. Aus einer n Kugeln enthaltenden Urne werde in r Ziehungen, wobei die gezogene Kugel immer wieder in die Urne zurückgelegt wird, stets eine weiße Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auch beim $r+1$. Zug eine weiße Kugel zu erhalten?

Das Ereignis der r-maligen Ziehung einer weißen Kugel kann hervorgegangen sein aus den Mischungsverhältnissen:

1 weiße Kugel,	$n-1$	nicht-weiße	Kugeln,		
2 weiße Kugeln,	$n-2$	"	"	" ,	
$\vdots$	$\vdots$				
n " " ,	0	"	"	" .	

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher das r-malige Ziehen einer weißen Kugel aus dem erstangenommenen Mischungsverhältnis folgte, ist

$$p_1 = \left(\frac{1}{n}\right)^r; \text{ analog } p_2 = \left(\frac{2}{n}\right)^r; p_3 = \left(\frac{3}{n}\right)^r \cdots p_n = \left(\frac{n}{n}\right)^r \cdot$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Mischungsverhältnisse bestimmen sich nach der Formel

$$P_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Daß bei Vorliegen des 1. Mischungsverhältnisses der $r+1$. Zug wieder eine weiße Kugel liefert, dafür ist die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{n}\cdot$ Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen des 1. Mischungsverhältnisses und des Ziehens einer weißen Kugel auch beim $r+1$. Zug gleich $P_1 \cdot \frac{1}{n}\cdot$ Ganz analog ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß bei Vorliegen des 2. Mischungsverhältnisses auch beim $r + 1$. Zug eine weiße Kugel erscheint, gleich $P_2 \cdot \frac{2}{n}$.

Demnach die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel beim $r + 1$. Zug, da dieser entweder bei Vorliegen des ersten oder des zweiten $\cdots$ Mischungsverhältnisses stattgefunden haben kann,

$$P = P_1 \cdot \frac{1}{n} + P_2 \cdot \frac{2}{n} + \cdots + P_n \cdot \frac{n}{n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{r+1} + \left(\frac{2}{n}\right)^{r+1} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^{r+1}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{r} + \left(\frac{2}{n}\right)^{r} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1^{r+1} + 2^{r+1} + \cdots + n^{r+1}}{1^r + 2^r + \cdots + n^r}.$$

$n = 4$, $r = 5$ gibt $P = \frac{489}{520}$.

§ 14. Wahrscheinlichkeit einer Ursache, wenn die verschiedenen möglichen Ursachen von vornherein nicht gleich wahrscheinlich sind.

Zur Behandlung dieses Falles wollen wir das in § 12 gebrauchte Beispiel etwas umändern.

Von n gleich aussehenden Urnen mögen ν_1 Urnen U_1 je m_1 Kugeln und darunter μ_1 weiße enthalten; ferner ν_2 Urnen U_2 je m_2 Kugeln, worunter μ_2 weiße, usf. Eine Person, welche vor die Urnen geführt wird, ziehe aus einer derselben eine weiße Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieselbe aus einer der ν_i Urnen U_i stamme?

Ist m wieder das kleinste gemeinsame Vielfache von $m_1, m_2 \cdots$, so daß $m = \lambda_1 m_1 = \lambda_2 m_2 = \cdots$, so möge die Zahl der Kugeln einer jeden Urne unter Beibehaltung des Mischungsverhältnisses auf m gebracht, sodann sämtliche Kugeln der ν_1 Urnen U_1 mit dem Index 1, die Kugeln der ν_2 Urnen U_2 mit dem Inder 2 usw. versehen und hierauf die Kugeln aller Urnen in eine große Urne U geschüttet werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine aus dieser Urne U gezogene weiße Kugel den Index i trage, ist offenbar gerade so groß wie die Wahrscheinlichkeit, daß die weiße Kugel, welche von der vor die n Urnen geführten Person aus einer der Urnen gezogen wird, einer der Urnen U_i entstamme. Jene Wahrscheinlichkeit ist aber

$$P_i = \frac{\nu_i \lambda_i \mu_i}{\nu_1 \lambda_1 \mu_1 + \nu_2 \lambda_2 \mu_2 + \cdots},$$

wofür wir auch schreiben können

$$P_i = \frac{\frac{\nu_i}{n} \cdot \frac{m}{m_i} \cdot \mu_i}{\frac{\nu_1}{n} \cdot \frac{m}{m_1} \mu_1 + \frac{\nu_2}{n} \cdot \frac{m}{m_2} \mu_2 + \cdots}$$

oder

$$P_i = \frac{\frac{\nu_i}{n} \cdot \frac{\mu_i}{m_i}}{\frac{\nu_1}{n} \cdot \frac{\mu_1}{m_1} + \frac{\nu_2}{n} \cdot \frac{\mu_2}{m_2} + \cdots}.$$

Bezeichnen wir, wie früher, die Wahrscheinlichkeit, aus einer der Urnen der ersten, zweiten, $\cdots$ Art eine weiße Kugel zu ziehen, mit $p_1, p_2 \cdots$, und ferner die Wahrscheinichkeit, aus den n Urnen eine der ν_1 Urnen U_1 zu wählen, mit π_1 und die für die anderen Urnengruppen geltenden Wahrscheinlichkeiten mit π_2, $\pi_3 \cdots$, so bekommen wir

$$P_i = \frac{\pi_i p_i}{\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \cdots};$$

es ist aber $\pi_i\, p_i$ gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses aus der Ursache i, und es läßt sich daher der in § 12 für gleich wahrscheinliche Ursachen ausgesprochene Satz auch auf nicht gleich wahrscheinliche Ursachen übertragen. Es ist ganz allgemein die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis aus einer bestimmten Ursache hervorgegangen ist, gleich der Wahrscheinlichkeit, mit welcher es aus dieser Ursache zu erwarten war, dividiert durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten, mit welchen es aus sämtlichen möglichen Ursachen folgen konnte.

Auch die folgende Aufgabe, die als eine Vereinfachung der vorigen angesehen werden kann, läßt sich mit Hilfe des eben gefundenen Theorems lösen.

In einer Urne seien m Kugeln. Den Index 1 mögen m_1 Kugeln, darunter μ_1 weiße, tragen; den Index 2 m_2 Kugeln, darunter μ_2 weiße, usw. Eine aus der Urne gehobene Kugel zeige weiße Farbe. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese weiße Kugel den Index i trage?

Bezeichnen wir die den nämlichen Index tragenden Kugeln wieder als eine Gruppe, so können wir die verschiedenen Gruppen als die verschiedenen „Ursachen" ansehen, aus welchen das Ereignis, nämlich das Erscheinen der weißen Kugel, hervorgehen konnte.

Wir haben daher

$$P_i = \frac{\pi_i p_i}{\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \cdots},$$

$$P_i = \frac{\frac{m_i}{m} \cdot \frac{\mu_i}{m_i}}{\frac{m_1}{m} \cdot \frac{\mu_1}{m_1} + \frac{m_2}{m} \cdot \frac{\mu_2}{m_2} + \cdots}$$

$$= \frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots},$$

welches Resultat sich auch sofort aus der einfachen Erwägung ergeben hätte, daß $\mu_1 + \mu_2 + \cdots$ weiße Kugeln überhaupt in der Urne waren, darunter μ_i mit dem Index i, und daß daher die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogene weiße Kugel den Index i trug, gleich sein mußte der Anzahl μ_i der dem Ereignis günstigen Fälle, dividiert durch die Anzahl der möglichen Fälle, überhaupt eine weiße Kugel zu ziehen.

§ 15. Anwendung auf Zeugenaussagen.

Bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer Zeugenaussage oder, wie man eigentlich sagen müßte, bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit einer Zeugenaussage handelt es sich darum, die Wahrscheinlichkeit festzustellen, daß ein Ereignis, welches nach Aussage des Zeugen stattgefunden hat, auch tatsächlich stattgefunden habe.

Von zwei allein möglichen oder wenigstens in Betracht kommenden, einander ausschließenden Ereignissen E und F besitze das erstere die Wahrscheinlichkeit p' seines Eintrittes. Unter n Fällen, z. B. bei n Versuchen, durch welche dem E die Gelegenheit zum Eintritt gegeben wird, wird daher das Ereignis E $p'n$- und das Ereignis F $(1-p')n$-mal eintreten.

Ist ferner p die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge richtig beobachtet hat, so wird seine Aussage unter ν Fällen $p\nu$-mal eintreffen und $(1-p)\nu$-mal nicht. Bei den $p'n$ Versuchen, welche von n Versuchen das Ereignis E herbeigeführt haben, wird der nach bestem Wissen aussagende Zeuge daher $pp'n$-mal richtig den Eintritt des Ereignisses E behaupten.

Das Ereignis F, welches $(1-p')n$-mal in der Versuchsreihe eintritt, wird er $p(1-p')n$-mal richtig bei seinem Eintritt beobachten, $(1-p)(1-p')n$-mal wird er sich aber irren und glauben, E sei eingetreten. Er wird also bei den n Versuchen $pp'n$-mal den Eintritt von E zu Recht behaupten und $(1-p)(1-p')n$-mal zu Unrecht, im ganzen also $pp'n+(1-p)(1-p')n$-mal.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge mit seiner Behauptung des Eintrittes von E Recht hat, ist demnach

$$P=\frac{pp'}{pp'+(1-p)(1-p')}.$$

Die Formel zeigt volle Analogie mit der das Bayessche Theorem ausdrückenden Formel in § 12, S. 60. In der Tat läßt sich die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß der Zeuge mit seiner Aussage Recht hat, so auffassen, daß sich das Bayessche Theorem auf sie anwenden läßt. Das Ereignis, welches aus mehreren Ursachen hervorgegangen sein kann, ist hier die Aussage des Zeugen, es sei E eingetreten. Die eine „Ursache" für jenes, in der Zeugenaussage bestehenden, Ereignisses ist die, daß der Zeuge richtig beobachtet hat und in der Tat also E eingetreten ist, die andere, daß er sich geirrt hat und F eingetreten ist. Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher aus der ersten Ursache die Aussage des Zeugen zu erwarten ist, ist aber $p'p$; die Wahrscheinlichkeit, mit welcher sie aus der zweiten Ursache folgt, ist $(1-p')(1-p)$. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zeugenaussage, es sei E eingetreten, aus der ersten der beiden möglichen Ursachen hervorgegangen sei, mit anderen Worten: die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Zeugenaussage ist demnach

$$\frac{p'p}{p'p+(1-p')(1-p)},$$

wie vorhin durch Aufsuchen der Zahl der günstigen und der möglichen Fälle gefunden.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge, wenn er den Eintritt von F beobachtet zu haben glaubt, mit seiner Behauptung, F sei eingetreten, Recht hat, ergibt sich, indem wir in diesem Ausdruck p' durch $1-p'$ ersetzen, gleich

$$Q=\frac{p(1-p')}{p(1-p')+(1-p)p'}.$$

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge fälschlicherweise den Eintritt von E behauptet,

$$R=\frac{(1-p)(1-p')}{pp'+(1-p)(1-p')}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß er fälschlich den Eintritt von F behauptet,

$$S=\frac{(1-p)p'}{p(1-p')+(1-p)p'}.$$

Wie von vornherein als richtig zu erkennen, ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge den Eintritt von E entweder zu Recht oder zu Unrecht behauptet, $P+R=1$, und ebenso die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge den Eintritt von F entweder zu Recht oder zu Unrecht behauptet, $Q+S=1$.

Da p die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Aussage des Zeugen im allgemeinen ist, P aber die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit, wenn er E als eingetroffen behauptet, so wird für $p' = \frac{1}{2}$, wenn also die Wahrscheinlichkeit des Eintritts von E und F dieselbe ist und der Zeuge die gleich häufig eintretenden Ereignisse E und F auch gleich oft als eingetreten richtig erkennen wird, P in p übergehen müssen.

In der Tat gibt

$$p' = \frac{1}{2}: \quad P = p;\ Q = p;\ R = 1 - p;\ S = 1 - p;$$

und ferner

$$p' = 0: \quad P = 0;\ Q = 1;\ R = 1;\ S = 0;$$

$$p' = 1: \quad P = 1;\ Q = 0;\ R = 0;\ S = 1;$$

wie ebenfalls von vornherein klar.

Man könnte denken, daß aus der Wahrscheinlichkeit P für eine richtige Aussage des Zeugen, wenn er das Ereignis E als eingetroffen bezeichnet, und aus der Wahrscheinlichkeit Q für eine richtige Zeugenaussage, wenn der Eintritt von F behauptet wird, die Wahrscheinlichkeit p für eine richtige Aussage des Zeugen schlechthin durch Bildung von $P + Q$ erhalten würde, weil eine richtige Aussage des Zeugen doch nur auf eine der beiden einander ausschließenden Arten, entweder durch Behauptung des Eintritts von E oder durch Behauptung des Eintritts von F erfolgen kann. Es ist dies aber nicht der Fall, weil die zweite einschränkende Bedingung für Anwendbarkeit des Additionssatzes, daß der Bereich der möglichen Fälle für beide Wahrscheinlichkeiten derselbe sein muß, hier nicht erfüllt ist, denn die Zahl der möglichen Fälle für den Eintritt von E ist von der für den Eintritt von F im allgemeinen verschieden. Wohl aber ist p gleich einem Bruch, dessen Zähler die Anzahl der richtigen sich auf E und auf F beziehenden Aussagen enthält, der Nenner dagegen die

Zahl der richtigen Aussagen, vermehrt um die Zahl der unrichtigen Aussagen. Ist n die Zahl der angestellten Versuche, so ist in der Tat

$$\frac{p p' n + p(1-p') n}{p p' n + p(1-p') n + (1-p) p' n + (1-p)(1-p') n} = p.$$

Beispiel. Sind in einer Urne a weiße und b gelbe Kugeln und behauptet ein vom Inhalt unterrichteter Zeuge, daß die gezogene Kugel weiß sei, so haben wir, um die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit seiner Aussage durch unsere Formel für P ausdrücken zu können, $p' = \frac{a}{a+b}$ zu setzen und erhalten

$$P = \frac{ap}{ap + b(1-p)},$$

oder wenn das Verhältnis der Zahl der gelben Kugeln zu der der weißen Kugeln $\frac{b}{a} = \lambda$ gesetzt wird,

$$P = \frac{p}{p + \lambda(1-p)}.$$

Je weniger gelbe Kugeln im Verhältnis zu den weißen Kugeln in der Urne vorhanden sind, um so mehr nähert sich die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Zeugenaussage, daß eine weiße Kugel gezogen sei, der Gewißheit; für $\lambda = 0$ ist $P = 1$.

Je größer dagegen die Zahl der gelben Kugeln im Vergleich zu der der weißen ist, um so mehr nähert sich P der Null.

Sind weiße und gelbe Kugeln in gleicher Zahl vorhanden, ist also $\lambda = 1$, so ist $P = p$.

Ohne Schwierigkeit ergibt sich ferner die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Zeugenaussage, wenn eine gelbe Kugel gezogen worden sein soll,

$$Q = \frac{\lambda p}{1 - p + \lambda p};$$

die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge zu Unrecht eine weiße Kugel als gezogen angibt, ist

$$R = \frac{\lambda(1 - p)}{p + \lambda(1 - p)}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß er zu Unrecht eine gelbe Kugel als gezogen angibt,

$$S = \frac{1 - p}{1 - p + \lambda p}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten, P, Q, R, S hängen außer von dem durch die Beobachtungs- und Auffassungsgabe des Zeugen bedingten Wert p nur von dem Verhältnis, in welchem die weißen und gelben Kugeln in der Urne vorkommen, ab. Ist $p = \frac{3}{4}$ und $\lambda = \frac{3}{2}$, so ist

$$P = \frac{2}{3};\ Q = \frac{9}{11};\ R = \frac{1}{3};\ S = \frac{2}{11}.$$

§ 16. Beispiel zur Bestimmung der Zuverlässigkeit von Zeugenaussagen.

Aus einer der beiden Urnen U_1 und U_2, von denen die erstere n_1 weiße, die letztere n_2 gelbe Kugeln enthält, wurde eine Kugel gezogen und in die andere Urne gelegt und sodann aus dieser Urne eine Kugel gezogen. Die erste Ziehung wurde vom Zeugen Z_1, die zweite vom Zeugen Z_2 beobachtet, und beide Zeugen behaupten, es sei eine weiße Kugel gezogen worden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit ihrer Behauptungen, wenn die Wahrscheinlichkeit der richtigen Wahrnehmung für Z_1 gleich p_1 und für Z_2 gleich p_2 ist?

Das Ereignis, daß beide Zeugen behaupten, es sei eine weiße Kugel entnommen worden, kann auf 4 verschiedene Arten zustande gekommen sein.

1. Beide Zeugen haben richtig beobachtet. Es ist dann zunächst Urne U_1 gewählt und aus ihr eine Kugel, die natürlich von weißer Farbe war, gezogen worden, was Z_1 richtig beobachtet hat. Nachdem die weiße Kugel in Urne U_2 zu den n_2 gelben Kugeln gelegt worden ist, wird sie trotz vorheriger Mischung der Kugeln wieder gezogen, was Z_2 richtig beobachtete. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser Einzelereignisse ist

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p_1 \cdot \frac{1}{n_2 + 1} \cdot p_2.$$

2. Z_1 hat richtig, Z_2 falsch beobachtet. Es ist dann Urne U_1 gewählt, aus ihr eine weiße Kugel gezogen und dies von Z_1 richtig beobachtet worden. Nachdem die weiße Kugel in die Urne U_2 gelegt war, wurde aus dieser eine der n_2 gelben Kugeln genommen, was Z_2 falsch beobachtete. Die Wahrscheinlichkeit für diese Aufeinanderfolge von Einzelereignissen ist $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p_1 \cdot \frac{n_2}{n_2 + 1} \cdot (1 - p_2)$.

3. Z_1 hat falsch, Z_2 richtig beobachtet. Dies ist nur dann möglich, wenn für den ersten Zug die Urne U_2 gewählt und aus ihr eine gelbe Kugel gezogen worden war. Bei der Beobachtung dieses Ereignisses täuschte sich Z_1. Die gelbe Kugel wurde zu den n_1 weißen Kugeln der Urne U_1 getan und aus ihr eine der n_1 weißen Kugeln gezogen, welches Ereignis Z_2 richtig beobachtete. Die Wahrscheinlichkeit dieser Folge von Begebenheiten ist

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 - p_1) \cdot \frac{n_1}{n_1 + 1} \cdot p_2 \cdot$$

4. Z_1 und Z_2 täuschen sich. Dann ist zunächst Urne U_2 gewählt und der Zug einer der n_2 gelben Kugeln von Z_1 falsch beobachtet worden. Die gelbe Kugel wurde sodann in die Urne U_1 gelegt und hierauf wieder aus ihr gezogen, wobei Z_2 sich täuschte. Die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 - p_1) \cdot \frac{1}{n_1 + 1} \cdot (1 - p_2)$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß beidemal eine weiße Kugel gezogen worden ist, daß beide Zeugen also richtige Aussagen abgelegt haben, ist daher nach der Bayesschen Regel gleich

$$\frac{\frac{p_1 p_2}{n_2 + 1}}{\frac{p_1 p_2}{n_2 + 1} + p_1 (1 - p_2) \frac{n_2}{n_2 + 1} + (1 - p_1) p_2 \frac{n_1}{n_1 + 1} + \frac{(1 - p_1)(1 - p_2)}{n_1 + 1}} .$$

Je mehr n_2 wächst, um so mehr nähert sich die Wahrscheinlichkeit der Null. Je unwahrscheinlicher das von den Zeugen behauptete Ereignis, um so unglaubwürdiger ist die Zeugenaussage.

IV. Abschnitt.

Die mathematische Erwartung.

§ 17. Definition.

Nach Laplace wird das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und dem Gewinn, den sein Eintreffen für eine Person hat, die mathematische Hoffnung der letzteren oder vielleicht besser ihre mathematische Erwartung genannt.

Sind bei einem Spiel die mathematischen Erwartungen der Spieler einander gleich, so ist das Spiel als ein ehrliches anzusehen.

Macht z. B. A mit B die Wette, daß er von letzterem 5 ℳ bekommen solle, wenn er mit einem Würfel eine Sechs wirft, dagegen 1 ℳ geben wolle, wenn eine geringere Augenzahl fällt, so ist für A die mathematische Erwartung gleich $\frac{1}{6} \cdot 5$ ℳ und für B gleich $\frac{5}{6} \cdot 1$ ℳ, also gerade so groß. Bei sehr häufiger Wiederholung des Spieles wächst die Wahrscheinlichkeit einer Ausgleichung von Gewinn und Verlust, da das Verhältnis der wahrscheinlichsten Anzahlen für die Eintritte der beiden Ereignisse, daß eine Sechs geworfen und daß sie nicht geworfen wird, je länger man das Spiel fortsetzt, in um so engeren Grenzen um das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten jener beiden Ereignisse bei einem Einzelversuch herumschwankt (s. § 8, S. 38).

§ 18. Das Petersburger Problem.

Eine gewisse Berühmtheit hat die folgende Aufgabe erlangt, welche, von Nikolaus Bernoulli (1687—1759) stammend, von dessen Vetter Daniel Bernoulli (1700—1782) in den Abhandlungen der Petersburger Akademie der Wissenschaften[1]) behandelt wurde und daher den Namen des Petersburger Problems erhalten hat; sie heißt:

---

[1]) Comment. Acad. Scient. imper. Petropol., V. 1738. — Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von A. Pringsheim unter dem Titel Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen (Leipzig 1896, Duncker u. Humblot) als Nr. 9 der Sammlung älterer und neuerer staatswissenschaftlicher Schriften neu erschienen.

Peter wirft eine Münze so oft in die Höhe, bis sie nach dem Niederfallen Kopf zeigt. Geschieht dies gleich beim ersten Wurf, so hat er an Paul 1 Dukaten zu geben; wenn erst beim zweiten: 2, beim dritten 4, beim vierten 8 usf. in der Weise, daß bei jedem folgenden sich nötig machenden Wurf die Anzahl der Dukaten verdoppelt wird. Wie groß ist die Gewinnhoffnung Pauls?

Wir wollen die beiden Spieler A und B nennen und statt von Dukaten von Mark sprechen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die von A geworfene Münze Kopf zeigen wird, ist $\frac{1}{2}$. B wird daher mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf die Auszahlung von einer Mark nach dem ersten Wurf seitens des A rechnen können.

Daß es zu einem 2. Wurf der Münze kommen wird, dafür ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$; und daß dann Kopf fällt, dafür ist die Wahrscheinlichkeit wieder $\frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, durch den 2. Wurf zu einem Gewinn zu kommen, ist für B also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, und da er dann 2 *M* erhält, so ist seine mathematische Erwartung aus dem 2. Wurf gleich $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ *M*.

Beim 3. Wurf, der mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ zustande kommt, fällt Kopf wieder mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Der Gewinn ist in diesem Falle gleich 4 *M*, folglich die mathematische Erwartung aus dem 3. Wurf $\frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$ *M*.

Wie leicht zu erkennen, ist die mathematische Erwartung aus jedem Wurfe $\frac{1}{2}$ ℳ.

B hat dem A vor Beginn des Spieles so viel zu zahlen, als seine mathematische Erwartung aus den sämtlichen möglicherweise zustande kommenden Würfen beträgt. Wird h als höchste Zahl der Würfel festgesetzt, so daß das Spiel, wenn Kopf nicht früher fällt, spätestens mit dem h. Wurf endet, so hat B dem A, da jedes Spiel ihm die mathematische Erwartung von $\frac{1}{2}$ ℳ gewährt, vor Beginn des Spieles $\frac{h}{2}$ ℳ auszuhändigen. Ist die Zahl der Würfe nicht beschränkt, soll also A so oft würfeln, bis endlich Kopf fällt, so muß unserer Überlegung gemäß der Einsatz des B unendlich groß sein.

Sicherlich würde wohl niemand an Stelle des B eine irgendwie erhebliche Summe auf den erhofften Gewinn setzen wollen, vielmehr würde ein verhältnismäßig kleiner Betrag als gerechter Einsatz angesehen werden.

Das Resultat scheint daher mit den Anforderungen des gesunden Menschenverstandes in Widerspruch zu stehen.

Und doch ist das Resultat richtig! Freilich darf das Spiel nicht nur einmal oder wenige Male gespielt werden, wenn ein Ausgleich von Gewinn und Verlust der beiden Spieler stattfinden soll.

Mußte doch schon das in § 17 angeführte Glücksspiel, wo A 5 ℳ gewinnen sollte, wenn beim Würfeln eine Sechs fiele, dagegen B 1 ℳ, wenn weniger Augen fielen, mindestens sechsmal gespielt werden, ehe überhaupt ein Ausgleich von Gewinn und Verlust eintreten konnte. Je öfter gewürfelt wurde, mit um so größerer Hoffnung war auf einen Ausgleich zu rechnen.

Sind bei dem Petersburger Spiel nur 10 Würfe verabredet, so sind nicht weniger als $2^{10} = 1024$ Spiele nötig, wenn alle Fälle, die bei zehnmaligem Werfen einer Münze mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten können, erschöpft werden sollen, wodurch in der Tat ein Ausgleich herbeigeführt wird.

Bezeichnen wir das Fallen von Kopf und Wappen mit K und W, so können bei zehnmaligem Werfen der Münze folgende Fälle vorkommen:

1. K K K K K K K K K K
2. K K K K K K K K K W
3. K K K K K K K K W K
4. K K K K K K K K W W

⋮ ⋮ ⋮

1024. W W W W W W W W W W

Jedes der 1024 Spiele wird beim ersten Auftreten von K abgebrochen.

Wie man unschwer erkennt, kommt der Ausgleich in folgender Weise zustande.

Bei	512	Spielen fällt K beim	1. Wurf,	*B* erhält folglich	512 mal	1 ℳ,	also	512 ℳ
„	256	„ „ „	2. „	„ „	256 „	2	„	512
„	128	„ „ „	3. „	„ „	128 „	4	„	512
„	64	„ „ „	4. „	„ „	64 „	8	„	512
„	32	„ „ „	5. „	„ „	32 „	16	„	512
„	16	„ „ „	6. „	„ „	16 „	32	„	512
„	8	„ „ „	7. „	„ „	8 „	64	„	512
„	4	„ „ „	8. „	„ „	4 „	128	„	512
„	2	„ „ „	9. „	„ „	2 „	256	„	512
„	1	„ „ „	10. „	„ „	1 „	512	„	512
„	1	„ „ überhaupt	nicht,	„ „	1 „	0	„	0
	1024 Spiele							5120 ℳ

Vor jedem der 1024 Spiele hat *B* dem *A* $\frac{h}{2} = 5$ ℳ, im ganzen also 5120 ℳ zu geben, ebenso groß ist sein Gewinn, folglich findet, wenn die den 1024 möglichen Variationen zweier Elemente zur 10. Klasse entsprechenden Spiele sämtlich — jedes einmal — gespielt werden, Ausgleich zwischen Gewinn und Verlust statt. Natürlich wird ein einzelner Satz von 1024 Spielen, da er nicht die sämtlichen obigen Einzelspiele enthalten wird, noch keinen Ausgleich bringen, es müssen zu diesem Behufe sehr vielmals 1024 Spiele gespielt werden.

Ist die Zahl der Würfe eines Spieles unbeschränkt, so kann erst durch unendlich viele Spiele ein Ausgleich herbeigeführt werden. Und unendlich viele Sätze von unendlich vielen Spielen sind nötig, wenn man mit einiger Sicherheit auf einen Ausgleich rechnen will.

Werden sehr zahlreiche Spiele gespielt, so wird Kopf auch einmal erst bei einem sehr späten Wurf fallen, so daß B einen großen Gewinn ausgezahlt erhält, bei unendlich mal unendlich vielen Spielen ist sogar ein Ausgleich zu erwarten, wenn B jedesmal einen unendlich großen Einsatz geleistet hat.

Widerspricht daher die Lösung, welche uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung für das Petersburger Problem liefert, keineswegs dem gesunden Menschenverstand, so ist andererseits doch nicht nötig, daß stets, wenn sich für B bei jedem neuen notwendig werdenden Wurfe der Gewinn vervielfacht und die Zahl der Würfe eines Spieles unbeschränkt ist, eine unendlich große Summe von B dem A als Gegenleistung gezahlt werde[1]).

Ist die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes beim 1. Wurf gleich w, des Gewinnes beim 2. Wurf gleich w^2 usf., und ist der in Aussicht stehende Gewinn beim 1. Wurf gleich 1, bei jedem folgenden Wurf aber das n-fache des früheren, so ist die mathematische Erwartung aus h Würfen

---

[1]) K. Bögel, Zum Petersburger Problem. Zeitschr. math. nat. Unterricht **50** (1919), S. 138 ff.

$$\begin{aligned} E &= w + w^2 n + w^3 n^2 + \cdots + w^h n^{h-1} \\ &= w(1 + nw + n^2 w^2 + \cdots + n^{h-1} w^{h-1}) \\ &= w \cdot \frac{1 - n^h w^h}{1 - nw}. \end{aligned}$$

Werden n und w so gewählt, daß $nw = 1$ wird, so wird $\frac{1 - n^h w^h}{1 - nw} = \frac{0}{0} = h$, wie man nach bekannter Regel findet. Ist die Anzahl h der Würfe unbegrenzt, so wird demnach $E = \infty$.

Ist jedoch $nw < 1$, also $n < \frac{1}{w}$, so ist E endlich.

Beispiel 1. Wie groß muß der Einsatz des B sein, wenn A so oft eine Münze in die Höhe wirft, bis Kopf fällt, und, wenn dies beim ersten Wurf geschieht, dem B 1 ℳ geben muß, dagegen bei jedem folgenden nötig werdenden Wurf das $\frac{3}{2}$-fache?

Hier ist $w = \frac{1}{2}$; $n = \frac{3}{2}$; folglich $E = 2$ ℳ.

Beispiel 2. Wie groß muß der Einsatz des B sein, wenn A mit einem Würfel würfelt und dem B, falls er beim ersten Wurf eine Sechs wirft, 1 ℳ geben muß, bei jedem folgenden nötigen Wurf aber $\frac{11}{10}$-mal soviel wie beim vorhergehenden?

Die Wahrscheinlichkeit, daß A beim 1., 2., 3. $\cdots$ Wurf eine Sechs wirft, ist $\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdots$ Die mathematische Erwartung aus h Würfen wird demnach, wenn wir für $\frac{11}{10}$ zunächst allgemein n schreiben, sein

$$E = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot n + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}n^2 + \cdots$$
$$+ \left(\frac{5}{6}\right)^{h-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot n^{h-1}$$
$$= \frac{1}{6-5n}\cdot\left(1 - \left(\frac{5}{6}n\right)^h\right).$$

$n = \frac{11}{10}$ bringt für eine unbegrenzte Zahl h der Würfe $E = 2$ ℳ.

In beiden Beispielen ist die mathematische Erwartung trotz der ins Unbegrenzte zugelassenen Spieldauer nur ein ganz geringer Betrag.

V. Abschnitt.

Der moralische Wert und die moralische Erwartung.

§ 19. Der moralische Wert eines Vermögenszuwachses.

Ein Vermögenszuwachs pflegt um so freudiger begrüßt zu werden, je größer er ist. Andererseits wird aber einem wenig Bemittelten ein Vermögenszuwachs von bestimmter Größe viel willkommener sein als einem Reichen. Denn dem bereits vorhandenen Vermögen des letzteren gegenüber spielt derselbe Vermögenszuwachs eine viel geringere Rolle als dem Grundvermögen des wenig Bemittelten gegenüber. Daniel Bernoulli [1]) setzt daher — veranlaßt

[1]) Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen. Deutsch von A. Pringsheim. Sammlung älterer und neuerer staatswissenschaftlicher Schriften, Nr. 9. Leipzig 1896.

merkwürdiger- und unberechtigterweise durch das den Forderungen des gesunden Menschenverstandes scheinbar widersprechende Resultat des Petersburger Problems — den Wert, den ein Vermögenszuwachs für eine Person hat, einesteils seinem Betrage direkt proportional, andernteils aber dem Grundvermögen umgekehrt proportional, diese letztere Bestimmung offenbar wegen ihrer Einfachheit vor anderen, die auch jenem Umstande hätten Rechnung tragen können, bevorzugend.

Wird mit dw der Wert bezeichnet, den für eine das Vermögen x besitzende Person der Vermögenszuwachs dx hat, so ist nach Daniel Bernoulli

$$dw = k \cdot \frac{dx}{x} \cdot$$

Die Konstante k gibt an, welchen Wert jemand der Verdoppelung seines Vermögens ($dx = x$) beimessen würde, wenn die Wertschätzung der Zunahme seines Vermögens x von hier ab proportional der Vermögensvermehrung wüchse. Sie ist offenbar von dem Charakter, von der Denkweise der Person, welcher der Vermögenszuwachs zuteil wird, abhängig. Beim Geizhals ist sie größer als beim leichtsinnigen Verschwender.

Eine Vermögensabnahme ist natürlich als eine negative Vermögenszunahme anzusehen.

Wir könnten den Wert, den ein Vermögenszuwachs für eine bestimmte Person hat, den persönlichen oder relativen Wert nennen. Laplace hat die Bezeichnung moralischer Wert eingeführt.

Aus $dw = k \cdot \frac{dx}{x}$ folgt, wenn mit a das Anfangsvermögen und mit g der Vermögenszuwachs bezeichnet wird,

$$w = k\int_a^{a+g}\frac{dx}{x} = k\cdot l\,\frac{a+g}{a}.$$

Für jemand, der kein Anfangsvermögen hat ($a = 0$), würde nach der letzten Formel die Erlangung eines Vermögens den moralischen Wert $w = \infty$ haben. Diese Schwierigkeit sucht Bernoulli durch die Bemerkung zu beseitigen, daß niemand ganz ohne Vermögen sei, bestehe es auch nur in seiner Fähigkeit, durch seiner Hände Arbeit Geld zu verdienen, oder, wie beim Bettler, durch Betteln sich seinen Unterhalt zu verschaffen. Selbst wer Schulden besitzt, würde sich nicht durch Darbietung einer Summe zu deren Begleichung und eine geringe Mehrgabe verpflichten wollen, von seiner Arbeitskraft zum weiteren Erwerb seines Lebensunterhalts keinen Gebrauch zu machen; er schätze also sein, wenn auch nicht in Geld bestehendes Vermögen höher ein, als ihm die Schuldentilgung und jene Mehrgabe wert sei. Nur von dem, der tatsächlich am Verhungern sei, könne man sagen, daß er gar nichts besitze.

Immerhin wird man der Bernoullischen Formel, so zutreffend und nützlich sie sich innerhalb gewisser Grenzen erweist, keine unbeschränkte Gültigkeit beimessen dürfen.

Daniel Bernoulli erkannte sehr wohl die volkswirtschaftliche Bedeutung, welche seiner Lehre zukommt, er ahnte aber nicht, daß sie auch auf physiologischem Gebiet Geltung besitzt. Auf dieses Gebiet übertragen wird die Bernoullische Lehre vom moralischen Wert des Vermögenszuwachses zum Fechnerschen psycho-physischen Grundgesetz: Die Zunahme der Empfindung ist proportional der Zunahme des Logarithmus des Reizes.

Denn wenn wir mit E die Empfindung und mit R den

Reiz bezeichnen, so ist die den letzten Satz ausdrückende Formel $dE = kdlR$, wofür auch $dE = k\frac{dR}{R}$ geschrieben werden kann; diese Formel stimmt aber mit der für den moralischen Wert eines Vermögenszuwachses überein.

Hiernach wird dieselbe Empfindungszunahme bewirkt, wenn das Verhältnis der Reizzunahme zum Reiz selbst das nämliche ist. Vermehre ich das auf der Hand gehaltene Gewicht von 100 g um 10 g, so verspüre ich dieselbe Druckvermehrung, wie wenn ich das Gewicht von 200 g um 20 g erhöhe.

Erwähnt sei jedoch, daß sich nicht für jede noch so kleine Reizzunahme eine Empfindungszunahme wahrnehmen läßt; es besitzt vielmehr $\frac{dR}{R}$ einen Minimalwert, den man die Reizschwelle nennt. Das Fechnersche Gesetz gilt eben wie jedes von uns abgeleitete Naturgesetz nur innerhalb gewisser Grenzen.

Auch in der Photometrie der Sterne findet die Bernoullische Formel vom moralischen Wert eines Vermögenszuwachses Anwendung, da auch hier Reiz und Empfindung in der Beziehung zueinander stehen, wie es im Fechnerschen Gesetz ausgedrückt ist.

Bekanntlich teilt man die Sterne in Größenklassen ein und weist dabei zwei Sterne zwei aufeinander folgenden Größenklassen zu, wenn sich unserer Empfindung nach ihre Helligkeiten um einen bestimmten Betrag unterscheiden. Ein Stern der n. Größenklasse hat aber die 2,5-fache Lichtintensität wie ein Stern $n + 1$. Größenklasse, dieser wieder die 2,5-fache Intensität eines Sternes $n + 2$. Größenklasse usf. Unsere Empfindung wächst also arithmetisch, während der Reiz, die Lichtintensität, geometrisch wächst. Das muß aber in der Tat der Fall sein, wenn die Helligkeit oder die dafür gesetzte Größenklasse m mit der Intensität in der Beziehung stehen soll $dm = -k\frac{dJ}{J}$, wo das Minuszeichen gesetzt ist, weil, je höher die Größenklasse ist, um so schwächer die Sterne sind, die ihr zuerteilt werden. Integriert kommt nämlich

$$m - m_0 = -k\,l\frac{J}{J_0},$$

wenn m_0 und J_0 zusammengehörige Werte sind, und hieraus

$$J = J_0 \cdot e^{\frac{m_0 - m}{k}} = J_0 \cdot a^{m_0 - m},$$

wo dem a der numerische Wert 2,5 zukommt. Einer Verminderung der Größenklasse um 1 entspricht demnach eine Vermehrung der Intensität auf das 2,5-fache.

Selbst allgemeine Lust- und Schmerzempfindungen scheinen sich dem Fechnerschen Gesetz und somit der Bernoullischen Formel zu fügen. Wenn ich z. B. erfahre, daß bei einem Unglück nicht 3 Personen, wie erst gemeldet wurde, sondern 4 Personen umgekommen seien, so wird mein Schmerz in höherem Grade vermehrt, als wenn ich erfahre, daß nicht 300, sondern 301 Personen umgekommen seien.

Wie man sieht, läßt sich die Bernoullische Lehre vom moralischen Wert des Vermögenszuwachses auf manche andere Gebiete übertragen. Bringt sie doch das für viele Fälle ganz richtige Prinzip der Bemessung des Wertes einer Sache nach einem mit der Größe derselben veränderlichen Maßstabe zum Ausdruck.

§ 20. Die moralische Erwartung.

Nach dem Obigen ist der moralische Wert eines Vermögenszuwachses g bei einem Stammvermögen a gleich

$$k\int_a^{a+g}\frac{dx}{x} = k\,l\,\frac{a+g}{a}.$$

Findet der Vermögenszuwachs mit der Wahrscheinlichkeit p statt, so ist in dem Integral für $d\,x$ zu setzen $p\,d\,x$, und der moralische Wert des mit der Wahrscheinlichkeit p eintretenden Vermögenszuwachses ist gleich

$$k\,p\,l\frac{a+g}{a} = k\,l\left(\frac{a+g}{a}\right)^p.$$

Hat jemand mehrere Vermögensvermehrungen $g', g'' \cdots$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p', p'' \cdots$ zu erwarten, so beträgt der moralische Wert derselben

$$k\,l\left(\frac{a+g'}{a}\right)^{p'} + k\,l\left(\frac{a+g''}{a}\right)^{p''} + \cdots$$
$$= k\,l\left(\frac{a+g'}{a}\right)^{p'}\cdot\left(\frac{a+g''}{a}\right)^{p''}\cdots.$$

Man kann nun die Frage aufwerfen: Welcher sichere Vermögenszuwachs hat für eine Person denselben moralischen Wert wie jene nur erhofften Zuwachse?

Nennen wir diesen von Laplace[1]) als moralische Hoffnung, wofür wir auch moralische Erwartung sagen können, bezeichneten Zuwachs x, so haben wir demnach zu seiner Bestimmung

---

[1]) Philosophischer Versuch über Wahrscheinlichkeiten. Deutsch von N. Schwaiger. Leipzig 1886.

$$k\,l\,\frac{a+x}{a} = k\,l\left(\frac{a+g'}{a}\right)^{p'}\left(\frac{a+g''}{a}\right)^{p''}\cdots$$

oder

$$\frac{a+x}{a} = \left(\frac{a+g'}{a}\right)^{p'}\cdot\left(\frac{a+g''}{a}\right)^{p''}\cdots$$

Sind die Vermögenszuwachse $g', g'' \cdots$ klein gegen a, so daß wir $\left(\frac{g}{a}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigen können, so können wir schreiben

$$1+\frac{x}{a} = \left(1+p'\,\frac{g'}{a}\right)\left(1+p''\,\frac{g''}{a}\right)\cdots$$

$$= 1+p'\,\frac{g'}{a}+p''\,\frac{g''}{a}+\cdots,$$

folglich

$$x = p'\,g' + p''\,g'' + \cdots$$

Für den Fall geringer Vermögenszuwachse wird demnach die moralische Erwartung gleich der mathematischen Erwartung.

§ 21. Anwendungen.

1. Die moralische Erwartung besteht für einen Spieler, dem ein gleich großer Gewinn und Verlust mit gleicher Wahrscheinlichkeit in Aussicht steht, stets in einem Verlust.

Wird der Gewinn mit g, der ihm im Betrage gleiche Verlust folglich mit $-g$ und die Wahrscheinlichkeit des Eintrittes für jeden der beiden Fälle mit p bezeichnet, so ergibt sich die moralische Erwartung x aus der Gleichung

$$\frac{a+x}{a} = \left(\frac{a+g}{a}\right)^{p}\left(\frac{a-g}{a}\right)^{p}$$

$$= \frac{(a^2-g^2)^p}{a^{2p}},$$

woraus

$$x = -a\left(1-\left[1-\left(\frac{g}{a}\right)^2\right]^p\right).$$

Da negative Vermögenswerte nicht auftreten dürfen und daher $g < a$ sein muß, so ergibt sich x stets negativ, die moralische Erwartung demnach als ein Verlust.

Macht jemand, der ein Vermögen von 1000 ℳ besitzt, die Wette, daß er, wenn eine geworfene Münze Kopf zeigt, 100 ℳ von seinem Gegner bekommen, dagegen, wenn Wappen fällt, ihm 100 ℳ geben solle, so ist für ihn wie für seinen Gegner die Wette mit der moralischen Erwartung eines Verlustes von 5 ℳ verbunden.

Auch eine Wette bei gleichen Gewinn- und Verlustaussichten ist daher bei Zugrundelegung des Prinzips von der moralischen Erwartung für jeden Spieler von Nachteil.

2. Will man wissen, einen wie großen Vorteil man beim Einsatz des Geldes vor seinem Mitspieler voraus haben müsse, um sich ohne Schaden auf ein beiden Spielern die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ des Gewinnens gewährendes Spiel einlassen zu können, so hat man, unter y den zu machenden Einsatz verstanden, die Gleichung

$$\frac{a+o}{a} = \left(\frac{a+g}{a}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{a-y}{a}\right)^{1/2}$$

nach y aufzulösen. Man erhält

$$y = \frac{a\,g}{a+g}; \quad g-y = \frac{g^2}{a+g}.$$

Für $a = 1000$ ℳ; $g = 100$ ℳ kommt $g-y = 9{,}09$ ℳ als Differenz der beiden Einsätze.

3. Bernoulli gibt u. a. folgendes Beispiel: Ein Kaufmann in St. Petersburg hat in Amsterdam Waren liegen,

die er in St. Petersburg für 10 000 Rubel verkaufen könnte. Von 100 Schiffen pflegen aber um jene Jahreszeit durchschnittlich 5 verlorenzugehen. Eine Versicherungsgesellschaft verlangt von ihm für Versicherung der Waren auf dem Transport 800 R. Welche Höhe muß das Grundvermögen des Kaufmanns mindestens haben, wenn eine Versicherung sich für ihn nicht mehr empfehlen soll?

Der moralische Wert des ihm in Aussicht stehenden Vermögenszuwachses beträgt für den Kaufmann, wenn er die Versicherung nicht eingeht, $k\,l\left(\frac{a+10000}{a}\right)^{\frac{19}{20}}$.

Versichert er seine Waren jedoch, so ist ihr moralischer Wert, weil er mit Sicherheit den Vermögenszuwachs von 9200 R. buchen kann, $k\,l\,\frac{a+9200}{a}$.

Aus der Gleichsetzung der beiden Werte kommt

$$\left(\frac{a+10000}{a}\right)^{\frac{19}{20}} = \frac{a+9200}{a}$$

oder

$$(a+10000)^{19}\cdot a = (a+9200)^{20},$$

woraus sich für a näherungsweise 5043 ergibt.

Der moralische Wert eines Vermögenszuwachses von 10 000 R., die der Kaufmann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{20}$ erhält, ist für ihn also, wenn er 5043 R. besitzt, gleich 9200 R.

Besitzt er, abgesehen von den im Ausland befindlichen Waren, weniger als 5043 R., so empfiehlt sich die Versicherung; besitzt er mehr, so empfiehlt sie sich nicht. Zu bemerken ist jedoch, daß dieser Ratschlag sich nicht auf einen einzelnen Fall beziehen kann, sondern nur dann Beachtung in Anspruch nehmen darf, wenn eine große Anzahl solcher Fälle vorliegt, so daß eine Ausgleichung der Wechselfälle möglich und wahrscheinlich wird.

4. Welches Vermögen muß die Versicherungsgesellschaft mindestens besitzen, wenn für sie die Versicherung mit 800 R. ratsam sein soll?

Analog wie unter 2. haben wir für diesen Fall

$$1 = \left(\frac{a + 800}{a}\right)^{\frac{19}{20}} \cdot \left(\frac{a - 9200}{a}\right)^{\frac{1}{20}}$$

oder

$$a^{20} = (a + 800)^{19} \cdot (a - 9200),$$

woraus sich für a näherungsweise 14243 findet.

Soll eine kleinere Versicherungssumme genügen, so muß das Kapital der Gesellschaft größer sein, z. B. muß es bei einer Versicherungssumme von 600 R. mindestens 29878 R. betragen. Sollte die Versicherungssumme von 500 R. genügen, so müßte es unendlich groß sein. Hat die Gesellschaft ein noch so großes, endliches Vermögen, so wird dies eine Verminderung erleiden, falls sie Versicherungen von 10000 R. unter den angegebenen Umständen für 500 R. anzunehmen pflegt.

5. Eine schätzenswerte Folgerung aus der Bernoullischen Lehre vom moralischen Wert besteht in dem Satz: Es ist ratsamer, Güter in mehrere Teile getrennt, als alle auf einmal einer Gefahr auszusetzen.

Die Richtigkeit des Satzes möge für die Teilung eines Gutes g, welches der Gefahr einer mit der Wahrscheinlichkeit p eintretenden Vernichtung ausgesetzt werden muß, in zwei gleiche Teile nachgewiesen werden.

Hat jemand zu seinem Stammvermögen a den Zuwachs g mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwarten, so ist der moralische Wert x des Zuwachses für ihn zu berechnen aus der Formel

$$\frac{a+x}{a} = \left(\frac{a+g}{a}\right)^p.$$

Teilt er das Gut g in zwei Teile $\frac{g}{2}$, die nun unabhängig voneinander der gleich großen Gefahr wie früher das Gut g ausgesetzt sind, so können entweder beide Teile die Gefahr überstehen, wofür die Wahrscheinlichkeit p^2 vorhanden ist, oder der eine Teil bleibt unversehrt, während der andere zugrunde geht, was mit der Wahrscheinlichkeit $p(1-p)$ für jeden Teil, im ganzen also mit der Wahrscheinlichkeit $2p(1-p)$ eintrifft, oder endlich beide Teile gehen zugrunde, was mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)^2$ geschieht.

Der moralische Wert y des Gewinnes ist in diesem Falle der Teilung des Gutes zu finden aus

$$\frac{a+y}{a} = \left(\frac{a+g}{a}\right)^{p^2} \left(\frac{a+\frac{g}{2}}{a}\right)^{2p(1-p)} \left(\frac{a+0}{a}\right)^{(1-p)^2}.$$

Um zu beweisen, daß $x < y$, ist zu zeigen, daß

$$\left(\frac{a+g}{a}\right)^p < \left(\frac{a+g}{a}\right)^{p^2} \left(\frac{a+\frac{g}{2}}{a}\right)^{2p(1-p)}$$

oder

$$1+\frac{g}{a} < \left(1+\frac{g}{a}\right)^p \left(1+\frac{g}{2a}\right)^{2(1-p)}$$

oder

$$1 < \left(1+\frac{g}{a}\right)^{-(1-p)} \left(1+\frac{g}{2a}\right)^{2(1-p)}$$

oder

$$1 < \frac{\left(1 + \frac{g}{2a}\right)^2}{1 + \frac{g}{a}},$$

was in der Tat der Fall ist, da $\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 > 1 + \alpha.$

Besitzt beispielsweise ein Kaufmann, der ein Barvermögen von 40 000 ℳ hat, auswärts noch Waren, die an Ort und Stelle 80 000 ℳ wert, wegen der unsicheren Transportverhältnisse nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ in seine Hände gelangen können, so wird, da $a = 40\,000$, $g = 80\,000$, $p = \frac{9}{10}$ ist, seine moralische Erwartung sein $x = 67\,515$ ℳ. Läßt er die Waren in zwei Hälften nacheinander kommen, so ist seine moralische Erwartung $y = 70\,335$ ℳ.

VI. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeit auf Grund statistischer Erhebungen.

§ 22. Allgemeines.

Sehr häufig dienen als Grundlage für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit statistische Erhebungen. Fragt man z. B. nach der Wahrscheinlichkeit, daß ein neugeborenes Kind die so gefährlichen ersten zwei Jahre überstehen werde, so läßt sich aus statistischen Tabellen finden, bei wie vielen von je 10000 Neugeborenen dies der Fall ist, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher gleich dieser Zahl dividiert durch 10000.

Es ist klar, daß eine solche auf die Ergebnisse der Statistik sich gründende Wahrscheinlichkeitsbestimmung kein so sicheres Resultat liefert als unsere früheren Wahrscheinlichkeitsbestimmungen, wo die Zahl der günstigen und der möglichen Fälle scharf angegeben werden konnte. Denn die statistischen Erhebungen sind naturgemäß mit manchen Mängeln behaftet, außerdem ändern sich aber auch im Laufe der Zeiten die Verhältnisse, von denen der Eintritt des in Frage stehenden Ereignisses abhängt, so daß die statistischen Erhebungen zu verschiedenen Zeiten verschiedene Resultate liefern.

So findet beispielsweise eine Verminderung der Sterblichkeit statt, wenn sich der Wohlstand der Bevölkerung hebt oder wenn die Ursache von Seuchen erkannt und Heilmittel entdeckt werden, und es wächst demzufolge die Wahrscheinlichkeit der Erreichung eines hohen Alters. Ebenso wird durch Verbesserung und Vermehrung der Feuerwehren die Zahl der großen Brände und damit die Wahrscheinlichkeit großer Schadenersatzleistungen der Versicherungsgesellschaften verringert.

In diesen und zahllosen anderen Fällen sind die Resultate der Statistik nicht von dauernder Gültigkeit und die auf sie sich gründenden Wahrscheinlichkeitsbestimmungen daher von beschränkter Zuverlässigkeit.

Scheinbar in Widerspruch damit steht es, daß im III. Abschnitt, welcher von der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer Ursache auf Grund der Erfahrung handelte, die dort gefundenen Resultate für so einwandfrei gelten wie irgendwelche andere. Wie man jedoch leicht erkennt, ist der Grund der, daß dort durch die Erfahrung nur der Bereich der möglichen Fälle begrenzt, die scharfe Bestimmung der günstigen Fälle innerhalb dieses Bereiches aber nicht beeinträchtigt wurde. Bei der Wahrscheinlichkeitsbestimmung auf Grund statistischer Erhebungen ist jedoch die Abzählung der günstigen, zutreffenden Fälle eine unsichere, wodurch natürlich auch das Verhältnis der günstigen Fälle zu den überhaupt möglichen ein unsicheres wird.

§ 23. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Versicherungswesen, insbes. die Lebensversicherung.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung für das Versicherungswesen, welches wegen seines wohltätigen Einflusses auf die wirtschaftlichen Verhältnisse der Menschen im Laufe der letzten hundert Jahre eine immer größere Ausdehnung und Bedeutung gewonnen hat. Der Zweck der Versicherung besteht bekanntlich darin, das wirtschaftliche Unglück, das von dem einzelnen, den es trifft, schwer zu tragen wäre, auf die Schultern der Allgemeinheit abzuwälzen, von der es sehr wenig drückend empfunden wird. Solche Unglücksfälle sind der Tod des Ernährers, der Verlust von Vermögen durch Feuer, Diebstahl, Viehseuchen, die Unmöglichkeit ferneren Erwerbs infolge Alters, Krankheit, Unfalles usw. Man hat daher Lebensversicherungen, Feuer-, Diebstahl-, Hagel-, Viehversicherung, Kranken- und Invaliditätsversicherung, Unfallversicherung u. a. Um die Vorteile der Versicherung auch dem, der die Möglichkeit von Unglücksfällen nicht gebührend beachten und aus eigenem Antrieb keine Maßregeln für den Fall ihres Eintreffens vorsehen würde, zuteil werden zu lassen und andererseits der Allgemeinheit nicht die ganze Last der für ihn möglicherweise einmal nötig werdenden Unterstützung aufzubürden, hat der Staat auf verschiedenen Gebieten bekanntlich die Zwangsversicherung eingeführt.

Die ältesten der vielen Versicherungsarten, die auch die verschiedensten Formen angenommen hat, ist die Lebensversicherung, durch welche den Erben des Versicherten bei dessen Tode oder dem Versicherten selbst bei Erreichung eines bestimmten Alters eine gewisse Summe ausgezahlt wird, nachdem er bei seiner Aufnahme in die Versicherungsgesellschaft durch einen einmaligen oder durch jährliche Beiträge eine kleinere, durch Zinseszins sich vermehrende Summe eingezahlt hat.

Das statistische Material wird hier durch die Volkszählungen beschafft, welche die Anzahl der in den verschiedenen Lebensaltern stehenden Männer und Frauen geben.

In der folgenden, gekürzt wiedergegebenen sog. Sterbetafel oder Absterbeordnung[1]) geben die Werte A_m für das Jahrzehnt 1901—1910 an, wieviel männliche Personen im Alter von m Jahren im Deutschen Reich auf je 10000 im ersten Lebensjahr stehende Knaben kommen.

Die entsprechende Tabelle für die Frauen weist günstigere Sterblichkeitsverhältnisse auf, doch möge von ihrer Mitteilung hier Abstand genommen werden.

Aus den Zahlen A_m läßt sich nicht ohne weiteres schließen, daß von je 10000 Knaben unter einem Jahr A_m das Alter von m Jahren erreichen. Wohl träfe dies zu bei einer sich gleichbleibenden Bevölkerungszahl, oder wenn durch Einwanderung eine Bevölkerungszunahme in der Weise stattfände, daß sämtliche Lebensalter proportional

---

[1]) Entnommen aus der „Statistik des Deutschen Reiches", Bd. 246; bearbeitet im Kaiserl. Statistischen Amt, Berlin 1913.

der Zahl der in den verschiedenen Lebensaltern stehenden Personen daran teilhätten.

Wächst jedoch die Bevölkerungszahl dadurch, daß sich die Geburten jährlich um $p\,^0/_{000}$ vermehren, so ist die Zahl der 0 Jahre alten Kinder in den aufeinanderfolgenden m Jahren

$$10000; \quad 10000\left(1+\frac{p}{10000}\right);$$

$$10000\left(1+\frac{p}{10000}\right)^2 \cdots 10000\left(1+\frac{p}{10000}\right)^m;$$

und in den vorhergehenden Jahren

$$10000\left(1+\frac{p}{10000}\right)^{-1};$$

$$10000\left(1+\frac{p}{10000}\right)^{-2} \cdots 10000\left(1+\frac{p}{10000}\right)^{-m}.$$

Wird daher bei einer Volkszählung gefunden, daß auf 10000 Kinder im Alter von 0 Jahren A_m Personen von m Jahren kommen, und, durch Vergleich mit früheren Volkszählungen, daß die Geburten sich jährlich um $p\,^0/_{000}$ vermehrt haben, so sind die A_m Personen übriggeblieben von den $10000\left(1+\frac{p}{10000}\right)^{-m}$ Personen, die m Jahre früher geboren wurden.

Wir wollen jedoch hier von einer Volksvermehrung absehen, so daß wir, wenn B_m die Zahl derer bedeutet, die von je 10000 nulljährigen Knaben im Alter von m Jahren sterben, $B_m = A_m - A_{m+1}$ haben. Diese Werte B_m liefert die 3. Spalte der Tabelle.

Deutsche Sterbetafel für männliche Personen für das Jahrzehnt 1901—1910.

m	A_m	B_m	C_m	Wahrscheinl. Lebensdauer	Mittlere Lebenserwartung	$\log A_m$
0	10000	2023	2023	55,2	44,9	4,0000
1	7977	319	400	61,7	55,1	3,9018
2	7658	114	149	61,7	56,4	3,8841
3	7544	71	95	61,0	56,2	3,8776
4	7473	52	69	60,2	55,8	3,8735
5	7421	39	53	59,4	55,1	3,8705
6	7382	31	43	58,5	54,4	3,8682
7	7351	27	36	57,6	53,7	3,8663
8	7324	22	30	56,7	52,9	3,8648
9	7302	19	27	55,7	52,0	3,8635
10	7283	18	24	54,8	51,2	3,8623
11	7265	16	22	53,8	50,3	3,8612
12	7249	16	21	52,9	49,4	3,8603
13	7233	15	22	52,0	48,5	3,8593
14	7218	17	24	51,0	47,6	3,8584
15	7201	20	28	50,0	46,7	3,8574
16	7181	24	33	49,1	45,8	3,8562
17	7157	27	38	48,2	45,0	3,8547
18	7130	31	44	47,3	44,2	3,8531
19	7099	34	48	46,3	43,4	3,8512
20	7065	36	50	45,4	42,6	3,8491
21	7029	35	51	44,6	41,8	3,8469
22	6994	36	50	43,7	41,0	3,8447
23	6958	35	50	42,8	40,2	3,8425
24	6923	35	51	41,9	39,4	3,8403
25	6888	35	51	41,0	38,6	3,8381
26	6853	36	52	40,0	37,8	3,8359
27	6817	35	52	39,2	37,0	3,8336
28	6782	36	53	38,3	36,2	3,8313
29	6746	37	54	37,4	35,4	3,8290
30	6709	37	56	36,5	34,6	3,8267
31	6672	38	57	35,6	33,7	3,8243

m	A_m	B_m	C_m	Wahr-scheinl. Lebens-dauer	Mittlere Lebens-erwartung	$\log A_m$
32	6634	39	59	34,7	32,9	3,8218
33	6595	41	62	33,8	32,1	3,8192
34	6554	44	66	32,9	31,3	3,8165
35	6510	45	70	32,1	30,5	3,8136
36	6465	47	73	31,2	29,7	3,8106
37	6418	50	78	30,3	29,0	3,8074
38	6368	53	83	29,4	28,2	3,8040
39	6315	55	87	28,6	27,4	3,8004
40	6260	58	92	27,7	26,6	3,7966
41	6202	61	98	26,9	25,9	3,7925
42	6141	64	104	26,1	25,1	3,7883
43	6077	67	110	25,2	24,4	3,7837
44	6010	70	117	24,4	23,7	3,7789
45	5940	73	124	23,6	22,9	3,7738
46	5867	78	132	22,8	22,2	3,7684
47	5789	81	140	22,0	21,5	3,7626
48	5708	85	149	21,2	20,8	3,7565
49	5623	89	159	20,5	20,1	3,7500
50	5534	94	169	19,7	19,4	3,7430
51	5440	98	181	19,0	18,8	3,7356
52	5342	103	193	18,2	18,1	3,7277
53	5239	108	205	17,5	17,4	3,7192
54	5131	112	220	16,8	16,8	3,7102
55	5019	119	236	16,1	16,2	3,7006
56	4900	123	251	15,4	15,5	3,6902
57	4777	127	266	14,7	14,9	3,6792
58	4650	132	284	14,1	14,3	3,6674
59	4518	137	304	13,4	13,7	3,6550
60	4381	143	326	12,7	13,1	3,6415
61	4238	149	351	12,1	12,6	3,6272
62	4089	155	379	11,5	12,0	3,6116
63	3934	160	408	10,9	11,5	3,5949
64	3774	166	439	10,3	10,9	3,5768
65	3608	170	471	9,8	10,4	3,5573
66	3438	174	507	9,3	9,9	3,5363

m	A_m	B_m	C_m	Wahr-scheinl. Lebens-dauer	Mittlere Lebens-erwartung	$\log A_m$
67	3264	180	551	8,7	9,4	3,5137
68	3084	184	597	8,2	8,9	3,4891
69	2900	186	642	7,7	8,5	3,4624
70	2714	189	694	7,2	8,0	3,4335
71	2525	191	756	6,7	7,5	3,4023
72	2334	192	826	6,3	7,1	3,3682
73	2142	193	899	5,9	6,7	3,3307
74	1949	190	977	5,5	6,3	3,2898
75	1759	187	1064	5,1	6,0	3,2452
76	1572	182	1154	4,8	5,6	3,1963
77	1390	173	1246	4,5	5,3	3,1431
78	1217	164	1351	4,2	5,0	3,0853
79	1053	154	1462	3,9	4,7	3,0222
80	899	142	1579	3,6	4,4	2,9536
81	757	129	1708	3,4	4,1	2,8790
82	628	116	1848	3,1	3,8	2,7976
83	512	103	1996	2,9	3,6	2,7089
84	409	88	2154	2,7	3,4	2,6121
85	321	74	2316	2,5	3,2	2,5068
86	247	61	2480	2,3	3,0	2,3923
87	186	50	2651	2,2	2,8	2,2686
88	136	38	2831	2,0	2,6	2,1348
89	98	30	3015	1,9	2,5	1,9903
90	68	22	3200	1,8	2,4	1,8344
91	46	15	3387	1,7	2,2	1,6665
92	31	11	3577	1,5	2,1	1,4871
93	20	8	3766	1,5	2,0	1,2945
94	12	4,6	3954	1,3	1,9	1,0899
95	7,4	3,0	4140	1,3	1,8	0,8716
96	4,4	1,9	4321	1,2	1,6	0,6395
97	2,5	1,1	4497	1,2	1,5	0,3927
98	1,4	0,67	4664	1,1	1,3	0,1335
99	0,73	0,35	4822	1,1	1,2	9,8609
100	0,38	0,2	4967	1,0	1,0	9,5752

Bilden wir den Quotienten $A_{m+1} : A_m = p_m$, so erhalten wir den Bruchteil der m Jahre alten männlichen Personen, welcher das nächste Jahr erlebt, während $B_m : A_m = q_m$ den Bruchteil ergibt, welcher in diesem Lebensjahre stirbt. Man nennt p_m die Lebenswahrscheinlichkeit zum Alter m und q_m die Sterbenswahrscheinlichkeit zum Alter m. Es ist $q_m = 1 - p_m$.

Unter $C_m = 10\,000\, q_m$ ist die Zahl der männlichen Personen angegeben, welche von je 10 000 im Alter von m Jahren sterben. Für 12 jährige Knaben ist danach die Sterblichkeit am geringsten.

Behufs bequemerer analytischer Behandlung pflegt man bei vielen Untersuchungen die Werte A_m als kontinuierlich ineinander übergehend zu betrachten. Bildet man dann den Differentialquotienten $\frac{d A_m}{dm}$, so gibt der nahe bei q_m liegende Wert $-\frac{d A_m}{dm} : A_m$ die Sterblichkeitskraft oder die Sterbensintensität beim Alter m an.

Zur Erläuterung der Tabelle, insbesondere auch der beiden Spalten 5 und 6, seien im folgenden Paragraphen einige leichte Aufgaben behandelt.

Die auf die allerhöchsten, nur selten erreichten Altersjahre sich beziehenden Tabellenwerte sind natürlich von geringerer Zuverlässigkeit, weil ihre Ableitung sich nur auf wenige Daten stützen konnte.

§ 24. Beispiele.

Aufgabe 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen im ersten Lebensjahre stehenden Knaben, ein Alter von 65 Jahren zu erreichen?

Lösung. Von je 10 000 im ersten Lebensjahr stehenden Knaben erreichen 3608 das Alter von 65 Jahren.

Es ist daher 3608 die Zahl der günstigen Fälle bei 10000 möglichen Fällen, folglich $\frac{3608}{10\,000}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit, daß ein im ersten Lebensjahr stehendes Kind ein Alter von m Jahren erreicht, ist

$$P = \frac{A_m}{A_0}.$$

Aufgabe 2. Wie groß ist für einen 20 jährigen die Wahrscheinlichkeit 65 Jahre alt zu werden?

Lösung. Von 7065 Jünglingen im Alter von 20 Jahren werden 3608 65 Jahre alt, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach $\frac{3608}{7065} = 0{,}511$.

Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit für einen m-jährigen, noch mindestens n Jahre zu leben,

$$P = \frac{A_{m+n}}{A_m}.$$

Von k m-jährigen Personen werden demnach $k \cdot \frac{A_{m+n}}{A_m}$ das Alter von $m + n$ Jahren erreichen und

$$k - k\frac{A_{m+n}}{A_m} = k \cdot \frac{A_m - A_{m+n}}{A_m}$$

vor Erreichung dieses Alters sterben.

Ist $\frac{A_{m+n}}{A_m} = \frac{1}{2}$, so ist für einen m-jährigen die Wahrscheinlichkeit, noch weitere n Jahre zu leben, ebenso groß wie vor dem n^{ten} Jahr zu sterben. Man bezeichnet dann n als die wahrscheinliche Lebensdauer des m-jährigen.

Für $m = 20$ ergibt sich $m + n = 65{,}44$, folglich

$n = 45{,}44$. Die Hälfte der 20-jährigen wird demnach ein Alter von 65,44 Jahren erreichen.

In Spalte 5 der Sterbetafel ist die wahrscheinliche Lebensdauer für die verschiedenen Alter eingetragen.

Aufgabe 3. Welche Wahrscheinlichkeit besitzt ein 20-jähriger, im Alter von 65 Jahren zu sterben?

Lösung. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit setzt sich aus der Wahrscheinlichkeit des 20-jährigen zusammen, 65 Jahre alt zu werden und in diesem Lebensjahr zu sterben.

Die erste Wahrscheinlichkeit ist, wie bereits gefunden, $\frac{3608}{7065}$; die zweite Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Erwägung, daß für die sämtlichen 3608 Männer, welche von den 10 000 nulljährigen Knaben 65 Jahre alt geworden sind, die Möglichkeit vorhanden ist, im nächsten Jahr zu sterben, daß aber nach Ausweis der Tabelle im nächsten Jahr nur 170 sterben. Die Zahl der möglichen Fälle ist also 3608 und die der zutreffenden Fälle 170; folglich die verlangte Wahrscheinlichkeit $P = \frac{3608}{7065} \cdot \frac{170}{3608} = \frac{170}{7065}$.

Kürzer hätte man das Resultat finden können durch die Überlegung: Die 7065 Männer, die von 10 000 nulljährigen Knaben nach 20 Jahren noch leben, könnten möglicherweise sämtlich im Alter von 65 Jahren sterben; es sterben aber von ihnen in diesem Alter nur 170, folglich $P = \frac{170}{7065}$.

Als allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit, daß eine m-jährige Person im Alter von $m + n$ Jahren stirbt, gilt

$$P = \frac{B_{m+n}}{A_m}.$$

Aufgabe 4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ehepaar, wenn der Mann mit 26, die Frau mit 20 Jahren heiratet, die goldene Hochzeit erlebt?

Lösung. Wir wollen bei dieser Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsbestimmung für verbundene Leben annehmen, daß nur der Tod für die Trennung der Ehe in Betracht komme und daß die Sterblichkeit von Männern und Frauen die gleiche sei.

Wie ohne Schwierigkeit zu finden, ist

$$P = \frac{1572}{6853} \cdot \frac{2714}{7065} = \frac{1}{8}.$$

Allgemein wird die Wahrscheinlichkeit eines für die nächsten n Jahre verbundenen Lebens zweier Personen von m und μ Jahren sein $P_1 = \frac{A_{m+n}}{A_m} \cdot \frac{A_{\mu+n}}{A_\mu}$; ferner die Wahrscheinlichkeit, daß nur die erste Person noch nach n Jahren lebt, $P_2 = \frac{A_{m+n}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{\mu+n}}{A_\mu}\right)$ und die Wahrscheinlichkeit, daß keine nach n Jahren noch lebt

$$P_3 = \left(1 - \frac{A_{m+n}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{\mu+n}}{A_\mu}\right).$$

Von k Ehen, bei deren Beginn der Mann m, die Frau μ Jahre zählte, werden nach n Jahren noch $k \cdot \frac{A_{m+n}}{A_m} \cdot \frac{A_{\mu+n}}{A_\mu}$ bestehen. Von $k\frac{A_{m+n}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{\mu+n}}{A_\mu}\right)$ Ehen lebt nur der Mann noch, von $k\frac{A_{\mu+n}}{A_\mu}\left(1 - \frac{A_{m+n}}{A_m}\right)$ Ehen nur die Frau, von $k\left(1 - \frac{A_{m+n}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{\mu+n}}{A_\mu}\right)$ Ehen weder Mann, noch Frau.

Ist $\frac{A_{m+n}}{A_m} \cdot \frac{A_{\mu+n}}{A_\mu} > \frac{1}{2}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren die Ehe noch besteht, größer, als daß sie nicht mehr besteht. Ist $\frac{A_{m+n}}{A_m} \cdot \frac{A_{\mu+n}}{A_\mu} = \frac{1}{2}$, so ist eine längere Dauer der Ehe als n Jahre ebenso wahrscheinlich als eine kürzere Dauer. Eine n-jährige Dauer wird in diesem Fall daher entsprechend der wahrscheinlichen Lebensdauer als die wahrscheinliche Dauer einer Ehe zwischen einem m-jährigen Mann und einer μ-jährigen Frau zu bezeichnen sein. Ist z. B. der Mann bei der Eheschließung 30, die Frau 22 Jahre alt, so findet sich — wieder unter der Annahme gleicher Sterblichkeit für Männer und Frauen — die wahrscheinliche Dauer einer solchen Ehe aus

$$\frac{A_{30+n}}{A_{30}} \cdot \frac{A_{22+n}}{A_{22}} = \frac{1}{2}.$$

Mit Benutzung von Spalte 7 der Sterbetafel erhält man

$$\log(A_{30+n} \cdot A_{22+n}) = 7{,}3704\,.$$

Um n zu finden, sucht man nun in derselben Spalte einige Wertepaare $\log A_m$ und $\log A_{m-8}$, deren Summe in der Nähe von 7,3704 liegt. Solche Wertepaare sind

$$\log A_{58} + \log A_{50} = 7{,}4104\,,$$
$$\log A_{59} + \log A_{51} = 7{,}3906\,,$$
$$\log A_{60} + \log A_{52} = 7{,}3692\,,$$
$$\log A_{61} + \log A_{53} = 7{,}3464\,.$$

Da 7,3704 zwischen 7,3906 und 7,3692 liegt, so liegt $30 + n$ zwischen 59 und 60. Durch eine leichte Interpolation findet man $30 + n = 59{,}95$, folglich $n = 29{,}95$.

Man kann demnach 1 gegen 1 wetten, daß eine von einem 30-jährigen Mann und einer 22-jährigen Frau geschlossene Ehe einen Bestand von mindestens 29,95 Jahren haben wird.

Aufgabe 5. Welches ist die wahrscheinliche gemeinsame Lebensdauer dreier 20-jähriger Jünglinge?

Lösung. Aus $\left(\frac{A_{20+n}}{A_{20}}\right)^3 = \frac{1}{2}$ folgt

$$A_{20+n} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} A_{20}$$

und mit Hilfe der Sterbetafel

$$\log A_{20+n} = 3{,}7488\,,$$

woraus, wieder mit Benutzung der Sterbetafel,

$$20 + n = 49{,}2\,.$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist daher der Tod des von den dreien zuerst Sterbenden nach 29,2 Jahren zu erwarten.

Aufgabe 6. Unter der mittleren oder durchschnittlichen Lebenserwartung versteht man den Zeitraum, welcher das arithmetische Mittel ist der von einer Anzahl Personen von einem bestimmten Zeitpunkt ab durchlebten Zeiträume. Es werde die mittlere Lebenserwartung der m-jährigen Personen gesucht.

Lösung. Von A_m Personen sterben im Alter von m Jahren $A_m - A_{m+1}$. Nimmt man an, daß die Todesfälle sich gleichmäßig über das ganze Jahr verteilen, so lebt jede der $A_m - A_{m+1}$ Personen im Durchschnitt $\frac{1}{2}$ Jahr. Die übrigen A_{m+1} Personen leben das ganze Jahr hindurch.

Im Laufe des nächsten Jahres sterben $A_{m+1} - A_{m+2}$ Personen. Durchschnittlich wird jede von ihnen $\frac{1}{2}$ Jahr leben, die übrigen A_{m+2} Personen erleben das ganze Jahr.

Es wird also durchlebt das Jahr m von

$$\frac{1}{2}(A_m - A_{m+1}) + A_{m+1} \text{ Personen},$$

das Jahr $m+1$ von

$$\frac{1}{2}(A_{m+1} - A_{m+2}) + A_{m+2} \text{ Personen},$$

. . . .

das Jahr $m+n-1$ von

$$\frac{1}{2}(A_{m+n-1} - A_{m+n}) + A_{m+n} \text{ Personen}$$

Summe der durchlebten Jahre

$$\frac{1}{2}A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots + A_{m+n-1} + \frac{1}{2}A_{m+n}.$$

Von den durch Todesfälle sich fortwährend vermindernden A_m Personen werden daher in den nächsten n Jahren

$$\frac{1}{2}A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots + A_{m+n-1} + \frac{1}{2}A_{m+n} \text{ Jahre}$$

durchlebt, im Durchschnitt also von einer Person

$$\frac{1}{2} + \frac{A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots + A_{m+n-1} + \frac{1}{2}A_{m+n}}{A_m} \text{ Jahre.}$$

Die durchschnittliche Zahl von Jahren, welche von einer m-jährigen Person bis zu ihrem Tode noch erlebt wird, bekommen wir, wenn wir die Reihe im Zähler der erhaltenen Formel bis zu Null als letztem Glied fortsetzen; sie ist gleich

$$\frac{1}{2} + \frac{A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots}{A_m}.$$

Spalte 6 der Sterbetafel gibt diese Werte der „mittleren Lebenserwartung" für die verschiedenen Alter.

$m = 60$ liefert als die mittlere Lebenserwartung eines 60-jährigen Mannes 13,1 Jahre.

Bei Knaben im ersten Lebensjahre kann man auf ein durchschnittlich von ihnen zu erreichendes Alter rechnen von

$$\frac{1}{2} + \frac{A_1 + A_2 + \cdots}{A_0} = 44{,}9 \text{ Jahren.}$$

Die Ausdrücke $\frac{A_m}{A_0}$, d. i. die für ein Kind im ersten Lebensjahre geltende Wahrscheinlichkeit, das Alter von m Jahren zu erreichen, ferner p_m, die Lebenswahrscheinlichkeit zum Alter m; q_m, die Sterbenswahrscheinlichkeit zum Alter m; $-\frac{dA_m}{dm} : A_m$, die Sterblichkeitskraft, sowie die wahrscheinliche Lebensdauer und die mittlere Lebenserwartung werden als biometrische Funktionen bezeichnet.

§ 25. Formeln für die Zahl der Überlebenden.

Mehrfach hat man schon für die Werte A_m, die Zahlen der Überlebenden der Sterbetafel, eine mathematische Formel aufzustellen gesucht. Von Moser[1]) rührt die Formel her:

$$\frac{A_x}{A_0} = 1 - a\sqrt[4]{x} - b\sqrt[4]{x^9} - c\sqrt[4]{x^{17}}, \tag{1}$$

wo x, wie bisher m, das in Jahren ausgedrückte Alter der Überlebenden angibt und a, b, c drei Konstante sind, die aus drei Werten A_x der Sterbetafel bestimmt werden müssen.

---

[1]) L. F. Moser, Gesetze der Lebensdauer. Königsberg 1839.

Benutzt man hierzu die Werte A_{20}, A_{50}, A_{80} der obigen Deutschen Sterbetafel, so ergibt sich

$$\log a = 9{,}13597 - 10,$$
$$\log b = 4{,}56668 - 10,$$
$$\log c = 1{,}54588 - 10.$$

Das folgende Täfelchen läßt erkennen, wie weit die nach der Moserschen Formel berechneten Werte A_x für einige Lebensalter von den Werten der Sterbetafel abweichen. Auch ist in der letzten Spalte das Alter angegeben, welches nach der Sterbetafel von der Anzahl von Männern erreicht wird, die nach der Moserschen Formel das in der ersten Spalte stehende Alter erreichen.

Alter in Jahren x	A_x nach der Moserschen Formel	A_x nach der Sterbetafel	Zu den Werten der 2. Spalte nach der Sterbetafel gehöriges Alter
20	7065	7065	20,0
30	6655	6709	31,4
40	6186	6260	41,3
50	5534	5534	50,0
60	4556	4381	58,7
70	3081	2714	68,0
80	899	899	80,0
81	633	757	82,0
82	357	628	84,6
83	71	512	89,9

Für noch höhere Werte von x liefert die Mosersche Formel negative Werte von A_x.

Gompertz[1]) geht bei Aufstellung seiner Formel von der freilich nicht streng richtigen, für die Kinderjahre

[1]) On the nature of the function expressive of the law of human mortality. Lond. Transactions (part II), 1825.

jedenfalls nicht zutreffenden Annahme aus, daß die nach dem Alter der Personen geordneten Sterbensintensitäten eine geometrische Reihe bildeten. Er setzt daher

$$-\frac{dA_x}{dx} : A_x = b\,c^x. \tag{2}$$

Da A_x abnimmt, wenn x wächst, so ist die linke Seite der Gleichung eine positive Größe, wie das ja auch aus dem Begriff der Sterbensintensität, deren Wert sie angibt, schon hervorgeht. Folglich ist auch b und c positiv. Da ferner die Sterbensintensität, abgesehen von den Kinderjahren, für welche die Formel nicht gilt, bei wachsendem x zunimmt, so muß $c > 1$ sein.

Aus (2) folgt, wenn unter Log der natürliche Logarithmus verstanden wird,

$$-d\,\mathrm{Log}\,A_x = b\,c^x\,dx = \frac{b}{\mathrm{Log}\,c}\,dc^x.$$

Integriert man von $x = n$ an, wo wegen des Ausschlusses der Kinderjahre $n > 15$ zu nehmen ist, so kommt

$$\mathrm{Log}\,A_n - \mathrm{Log}\,A_x = \frac{b}{\mathrm{Log}\,c}\,c^x - \frac{b}{\mathrm{Log}\,c}\,c^n.$$

Setzt man

$$\frac{b}{\mathrm{Log}\,c} = -\,\mathrm{Log}\,g,$$

wo g offenbar ein echter Bruch sein wird, so bekommt man

$$\mathrm{Log}\,A_n - \mathrm{Log}\,A_x = -\,\mathrm{Log}\,g^{c^x} + \mathrm{Log}\,g^{c^n}$$

oder

$$\mathrm{Log}\,\frac{g^{c^n}A_x}{A_n} = \mathrm{Log}\,g^{c^x},$$

woraus, wenn noch

$$A_n g^{-c^n} = k$$

gesetzt wird, folgt

$$A_x = k \cdot g^{c^x}. \tag{3}$$

Drei der Sterbetafel entnommene Werte A_x benutzt man zur Bestimmung der Konstanten k, g, c, wie nachher gezeigt werden wird.

Einen ähnlichen Ausdruck wie Gompertz nimmt Makeham[1]) für die Sterbensintensität, indem er setzt

$$-\frac{d A_x}{d x} : A_x = a + b \cdot c^x. \tag{4}$$

Zunächst folgt

$$-d \operatorname{Log} A_x = a\, d x + b \cdot c^x\, d x.$$

Integriert man wieder von $x = n$ an, wo $n > 15$ sein muß, so kommt

$$\operatorname{Log} A_n - \operatorname{Log} A_x = a x + \frac{b}{\operatorname{Log} c} c^x - \frac{b}{\operatorname{Log} c} c^n.$$

Setzt man $a = -\log s$ und, wie vorhin, $\frac{b}{\operatorname{Log} c} = -\operatorname{Log} g$ und $A_n g^{-c^n} = k$, so ergibt sich

$$A_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x}. \tag{5}$$

Die 4 Konstanten k, s, g, c lassen sich auf folgende Weise aus 4 Gleichungen für $A_x, A_{x+t}, A_{x+2t}, A_{x+3t}$ bestimmen.

Durch Logarithmieren von (5) bekommen wir, wobei wir unter log den gemeinen Logarithmus verstehen wollen,

---

[1]) Journal of the Institut of Actuaries, 1860 (January).

$$\left.\begin{aligned}
\log A_x &= \log k + x \log s + c^x \log g \\
\log A_{x+t} &= \log k + (x+t) \log s + c^{x+t} \log g \\
\log A_{x+2t} &= \log k + (x+2t) \log s + c^{x+2t} \log g \\
\log A_{x+3t} &= \log k + (x+3t) \log s + c^{x+3t} \log g.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Bildet man die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Gleichungen, wobei nach üblicher Bezeichnungsweise $\log A_{x+1} - \log A_x = \varDelta \log A_x$ gesetzt werden möge, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta \log A_x &= t \log s + c^x (c^t - 1) \log g \\
\varDelta \log A_{x+t} &= t \log s + c^{x+t} (c^t - 1) \log g \\
\varDelta \log A_{x+2t} &= t \log s + c^{x+2t} (c^t - 1) \log g
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Durch nochmaliges Bilden der Differenzen je zweier Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta^2 \log A_x &= c^x (c^t - 1)^2 \log g \\
\varDelta^2 \log A_{x+t} &= c^{x+t} (c^t - 1)^2 \log g.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Dividiert man die letzte Gleichung durch die vorhergehende und nimmt den Logarithmus, so hat man endlich

$$\log \varDelta^2 \log A_{x+t} - \log \varDelta^2 \log A_x = t \log c. \quad (9)$$

Aus (9) erhält man c, sodann aus (8) g, aus (7) s und aus (6) k.

Nimmt man zur Bestimmung der 4 Konstanten aus der Sterbetafel die Werte A_{20}, A_{40}, A_{60}, A_{80}, so erhält man

$$\begin{aligned}
\log c &= 0{,}035800, \\
\log g &= -\,0{,}0011173, \\
\log s &= -\,0{,}0014066, \\
\log k &= 3{,}883036.
\end{aligned}$$

Um beurteilen zu können, wie die Formel (5) nach Einsetzung dieser für die Konstanten gefundenen Werte die Größen A_x der Sterbetafel darstellt, wurden einige weitere Werte A_x berechnet und wieder ein Täfelchen, wie vorhin, aufgestellt.

Alter in Jahren x	A_x nach der Makehamschen Formel	A_x nach der Sterbetafel	Zu den Werten der 2. Spalte nach der Sterbetafel gehöriges Alter
20	7065	7065	20,0
30	6723	6709	29,6
40	6260	6260	40,0
50	5543	5534	49,9
60	4381	4381	60,0
70	2669	2714	70,2
80	899	899	80,0
90	37	68	91,5

Wie schon wegen der größeren Zahl der für die Makehamsche Formel zu bestimmenden Konstante zu erwarten war, ist hier ein engerer Anschluß an die Sterbetafel erzielt als durch die Mosersche Formel; den Anspruch jedoch, mehr als eine für die Interpolation weiterer Werte A_x brauchbare Formel zu sein, kann natürlich keine der Formeln erheben.

J. L. Lagrange, Mathematische Werke. Deutsch herausg. von A. L. Crelle. 3 Bände. Oktav.

1. Band. Die Theorie der analytischen Functionen. CXXVIII, 694 S. 1823. RM. 6.—

2. Band. Vorlesungen über die Functionen-Rechnung. XXII, 1023 S. 1823. RM. 6.—

3. Band. Theorie der Gleichungen. XVI, 552 Seiten. 1824. Vergriffen.

Jacob Steiner, Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften herausg. von K. Weierstraß. 2 Bände. Okt.

1. Band. Mit 44 Figurentafeln und Steiners Bildnis. VIII, 527 S. 1881. RM. 16.—

2. Band. Mit 23 Figurentafeln. X, 743 Seiten. 1882. . . . RM. 18.—

Festschrift zur Feier des 20jährigen Bestehens der Calcutta Mathematical Society. Groß-Oktav. VIII, 310 Seiten. 1930 . . . . Geb. RM. 20.—
Dieser stattliche Festband enthält 27 wertvolle Beiträge hervorragender Mathematiker aus Amerika, Deutschland, Frankreich, Großbritannien, Japan, Indien, Italien, Österreich, Polen, Rußland, der Schweiz und Ungarn.

Geschichte der Mathematik. Von Oberstudien-Dir. Prof. Dr. H. Wieleitner. 2 Bde. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. 136 Seiten. 1922. II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. 154 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Nr. 226, 875) . . Geb. je RM. 1.62

Geschichte der Mathematik. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. Günther in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Samml. Schubert Bd. 18) . Geb. RM. 17.40
II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Oberstudien-Dir. Prof. Dr. H. Wieleitner in München. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 63.) Geb. RM. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. VI, 222 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 64.) Geb. RM. 3.50

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von Professor Dr. Johannes Tropfke, Oberstudiendirektor i. R., Berlin. Lexikon-Oktav.

Band 1: Rechnen. VII, 222 Seiten. 3. Aufl., 1930. RM. 12.—, geb. RM. 13.20
Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 266 Seiten. 3. Aufl., 1933. RM. 12.—, geb. RM. 13.20
Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 239 Seiten. 3., verbesserte u. vermehrte Aufl., 1937 . . . . . . RM 10.—, geb. RM. 11.—
Band 4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 2. Aufl., 1922. RM. 9.—, geb. RM. 10.—
Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 2. Aufl., 1923. RM. 7.50, geb. RM. 8.50
Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 2. Aufl., 1924. RM. 7.—, geb. RM. 8.—
Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 2. Aufl., 1924. RM. 6.50, geb. RM. 7.50

„Dem Verfasser gebührt unser Dank für sein die neuesten Ergebnisse historischer Forschungen berücksichtigendes, durch Vollständigkeit und Klarheit sich auszeichnendes Werk. Es verdient seinen Platz im Bücherschrank eines jeden Mathematikers.“ *Naturwissenschaften.*

Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923 . . . . RM. 0.80
Dasselbe in englischer Sprache. 1923 . . . . RM. 0.80

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909 . . . . Geb. RM. 20.—
Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben . . . . Geb. je RM. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1930 . . . . Geb. RM. 26.—
Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer und französischer Ausgabe vor . . . . Geb. je RM. 26.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Reg.-Rat Prof. A. Adler. Zweite Aufl. 117 S. u. 1 Taf. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423) Geb. RM. 1.62
Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 . . . . Geb. RM. 7.—
In den vorliegenden Tafeln bietet der Herausgeber, unter Benutzung des wertvollen Materials, das ihm als Resultat der mit J. Bauschinger ausgeführten Bearbeitung der achtstelligen Tafeln der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stand, der rechnenden Astronomie ein Hilfsmittel von großem Nutzen.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. August, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Neunundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1931 . . . . Geb. RM. 2.—
„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein."
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neue Auflage. 1934. (Samml. Göschen Bd. 81) . . . . Geb. RM. 1.62
„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten."
Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927 . . . . Geb. RM. 1.50

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Einundvierzigste bis fünfundvierzigste Auflage. Oktav. 216 Seiten. 1935 . . . . Geb. RM. 6.80

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1931. RM. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschieden großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen."
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

Mathematische Formelsammlung. Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. Ringleb. Mit 37 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. 272 Seiten. 1936. (Sammlung Göschen Bd. 51) . . . . Geb. RM. 1.62

Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Von Dr. Günther Schulz. Mit 10 Abbild. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 1110.) Geb. RM. 1.62

Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof. Dr. Hermann Schubert. Fünfte Auflage, neu bearbeitet von Professor Dr. F. Fitting, München-Gladbach. Oktav. 260 Seiten. 1935. Geb. RM. 4.80

Dieses bekannte hier in der 5. Auflage erscheinende Buch wendet sich in erster Linie an den mathematischen Laien, den es in leichtfaßlicher und spannender Form in das Wesen der verbreiteten mathematischen Spiele einführen will. Doch sind auch einzelne Abschnitte aufgenommen, welche sich, oft durch kleineren Druck gekennzeichnet, hauptsächlich an den mathematisch interessierten Leser wenden und diesem Anregungen zu eigenen Untersuchungen auf dem Gebiete der Unterhaltungsmathematik geben wollen.

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Fig. Sechste, verb. Aufl. Neue Ausg. Lex.-Okt. VIII, 743 S. 1932. Geb. RM. 15.—

Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.

Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen, bearbeitet nach den Vorlesungen von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden, o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 3 Bände. 1933. Jeder Band ist einzeln käuflich. . . . . Geb. je RM. 3.80

I. Vektorrechnung und analytische Geometrie.
II. Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. — Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung.
III. Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. — Differentialgleichungen. Differentialgeometrie. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Probleme der Variationsrechnung.

„. . . Klare und anschauliche Darstellung, mathematische Strenge, pädagogisches Geschick in der Verwertung der jeweils geeigneten Methoden (ich weise auf die durchgängige Verwendung der Vektorrechnung hin), Geschlossenheit in

dem Sinn, daß alle Hilfsmittel, die für die Darstellung nötig sind, in dem Werk selbst bereitgestellt werden, Allgemeinheit der leitenden Gesichtspunkte und Weite des Blicks sowie Veranschaulichung der vorgetragenen Theorien durch geeignete Anwendungen zeichnen es aus."

Unterrichtsblätter für Mathematik, Nr. 5, 1935.

Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Dritte Auflage, neubearbeitet von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 5 Figuren. 132 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 47) . . . . Geb. RM. 1.62

Mengenlehre. Von Dr. E. Kamke, Professor an der Universität Tübingen. Mit 6 Figuren. 160 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 999) Geb. RM. 1.62

Mengenlehre. Von Dr. F. Hausdorff, em. o. Professor an der Universität Bonn. Dritte Auflage. Mit 12 Figuren. 303 Seiten. 1935. (Göschens Lehrbücherei Bd. 7) . . . . Geb. RM. 13.50

Einführung in die Axiomatik der Algebra. Von Dr. H. Beck, o. Professor an der Universität Bonn. X, 198 Seiten. 1926. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6) . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

I: Lineare Gleichungen. Zweite. verbesserte Auflage. 152 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 931) . . . . Geb. RM. 1.62

II: Gleichungen höheren Grades. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Fig. 160 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 932) Geb. RM. 1.62

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der ‚allgemeinen' Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist." Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht.

Aufgabensammlung zur höheren Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. 160 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1082) . . . . Geb. RM 1.62

Algebraische Theorie der Körper. Von Prof. Dr. Ernst Steinitz. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehen von Dr. Reinhold Baer und Prof. Dr. Helmut Hasse. Oktav. 134 Seiten und 27 Seiten Erläuterungsheft. 1930. RM. 9.—, geb. RM. 10.20

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 301 Seiten. 1932. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8) Geb. RM. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Figuren. VIII, 261 S. 1933. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9) Geb. RM. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

Praxis der Gleichungen. Von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Eine erschöpfende Darstellung der Verfahren zur numerischen Auswertung der linearen und nichtlinearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Dient das Werk auch in erster Linie den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, so findet doch auch der Lehrer viele wertvolle Anregungen darin.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. Neudruck. 1931. (Samml. Göschen Bd. 48) Geb. RM. 1.62

Gruppentheorie. Von Dr. Ludwig Baumgartner in München. Mit 8 Figuren. 120 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 837) . . . . . Geb. RM. 1.62

Determinanten. Von Studienrat Professor Paul B. Fischer. Dritte, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1932. (Samml. Göschen Bd. 402) . . . . Geb. RM. 1.62

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. 1925 . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“ Schulwart.

Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Von Professor Dr. Paul Bachmann. Dritte, neu durchgesehene Auflage. Herausgegeben von Dr. Robert Haußner, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. XVI, 252 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3) RM. 9.50, geb. RM. 10.50

Der erste Abschnitt umfaßt die klassische Theorie der rationalen Zahlen, der zweite eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen, deren verschiedene Methoden am Beispiel des quadratischen Körpers zu einem harmonischen, in sich geschlossenen Bau zusammengefügt werden.

Synthetische Zahlentheorie. Von Dr. Rudolf Fueter, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. VIII, 277 Seiten. 1925. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4) . . . . RM. 10.—, geb. RM. 12.—

Die vorliegende zweite Auflage des bewährten Lehrbuches weist gegen die erste zahlreiche Änderungen und Ergänzungen auf.

Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung. Von Professor Dr. Paul Bachmann. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919 . . . . RM. 2.50

In der vorliegenden Abhandlung gibt der Verfasser eine Übersicht von den Beweisverfahren und den Theorien, welche Euler, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer und andere Forscher in ihren Studien über das allgemeine Fermatproblem angewandt und entwickelt haben.

Irrationalzahlen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. VIII, 186 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1) RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Punkt- und Vektor-Rechnung. Von Dr. Alfred Lotze, Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 192 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13) . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.—

Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Von Professor Dr. Hermann Weyl. Unveränderter Neudruck. V, 84 Seiten. 1932. . . . . RM. 3.—

Differentialrechnung. Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 94 Figuren und 189 Beispielen. 191 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 87) . . Geb. RM. 1.62

Integralrechnung. Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Mit 63 Figuren und 190 Beispielen. 176 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 88) . . . . Geb. RM. 1.62

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Professor Dr. A. Witting. Mit 58 Figuren und 405 Beispielen und Aufgaben. 136 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 146) . Geb. RM. 1.62

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Prof. Dr. A. Witting, Mit 32 Figuren und 305 Beispielen. 118 Seiten. 1934. (Samml. Göschen Bd. 147) . . . . Geb. RM. 1.62

Elementare Reihenlehre. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) . . . . Geb. RM. 1.62

Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 1027) . Geb. RM. 1.62

Fouriersche Reihen. Von Dr. W. Rogosinski, a. o. Professor an der Universität Königsberg i. Pr. Mit 4 Figuren. 135 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1022) . . . . Geb. RM. 1.62

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Professor Dr. L. Schlesinger und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926. RM. 14.—, geb. RM. 16.—

Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. Von Dr. Josef Lense, o. ö. Professor der Technischen Hochschule München. Mit 30 Abbildungen. 178 Seiten. 1933. . . . . Geb. RM. 9.50

Lehrbuch der Differentialgleichungen. Von Dr. Heinrich Liebmann, o. Professor an der Universität Heidelberg. Groß-Oktav. VI, 226 Seiten. Mit 31 Figuren. 1901 . . . . RM. 6.—, geb. RM. 8.—

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. Zweite, verbesserte Auflage. 159 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 920) Geb. RM. 1.62

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 197 Seiten. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10) RM. 9.—, geb. RM. 10.50

Partielle Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 1003) . . . . Geb. RM. 1.62

Partielle Differentialgleichungen. Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14) RM. 11.—, geb. RM. 12.—

In diesem einführenden Lehrbuch, das seine Eigenart ganz aus dem bewährten Programm von „Göschens Lehrbücherei" herleitet, werden sowohl lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie sie in der mathematischen Physik vorkommen, als auch nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung behandelt, sowohl Randwert- als auch Anfangswertprobleme, durchweg unter Beschränkung auf zwei unabhängige Veränderliche; es wird auch eine Einführung in die häufig benutzte Theorie der Integralgleichungen gegeben.

Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. G. Hoheisel. 148 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1059) . . . . Geb. RM. 1.62

Integralgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 136 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 1099) . . . . Geb. RM. 1.62

Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten. Von Dr. H. Dölp. Neu bearbeitet von Dr. Eugen Netto, 18. Auflage. Oktav. 214 Seiten. 1935. (Verlag von Alfred Töpelmann. Berlin W 35.) . . . . RM. 1.95

Das Bändchen stellt eine elementare Aufgabensammlung zur Differential- und Integralrechnung mit eingefügten Erläuterungen dar. Der erste Abschnitt, Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen, bringt die Differentiation der elementaren Funktionen, einschließlich implizite Funktionen, die Ermittlung der Werte unbestimmter Formen, Maxima und Minima, Taylorsche Reihe. Der zweite Abschnitt, Integralrechnung, führt das Integral als unbestimmtes ein, entwickelt die Integrationsformeln im Bereiche der elementaren Funktionen und geht dann kurz auf das bestimmte Integral ein. Schließlich werden noch verhältnismäßig ausführlich geometrische Anwendungen der Infinitesimalrechnung gebracht: Tangentenbestimmung, singuläre Punkte, Krümmung; Quadratur, Rektifikation, Kubatur.

Integralgleichungen. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 18) . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.
I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920 . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.20
I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921 . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50
II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920 . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

Das Buch will in einer für Studierende geeigneten Form den Zugang zu den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann zugleich erschließen.

Elemente der Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 23 Fig. 144 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 1109.). . . . . Geb. RM. 1.62

Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.
Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 668) . . . . Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 138 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 703) . . . . Geb. RM. 1.62

„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen."
Monatsschrift für Mathematik und Physik.

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.
Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 877) Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 878) . . . . Geb. RM. 1.62

Einführung in die konforme Abbildung. Von Dr. Ludwig Bieberbach, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Dritte Auflage. Mit 42 Zeichnungen. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 768). Geb. RM. 1.62

Automorphe Funktionen. Von Professor Dr. L. Schlesinger. X, 205 Seiten. 1924. (Göschens Lehrbücherei Bd. 5) . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.20

Elliptische Funktionen. Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Elliptische Funktionen. Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren. Oktav. XII, 356 Seiten, Neudruck 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) . . Geb. RM. 20.—

II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren. Oktav. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61) Geb. RM. 7.80

„ . . . Für denjenigen, der die Grundzüge der Theorie der analytischen und elliptischen Funktionen kennt, ein hoher Genuß, den harmonischen Aufbau der ganzen Theorie vor sich entstehen zu sehen. Vom Anfänger, der zunächst unmöglich die Notwendigkeit eines so breiten Unterbaus einsehen kann, wird ein hohes Maß von Selbstverleugnung und ein blindes Vertrauen in die Autorität des Lehrbuches verlangt, das zuguterletzt durch eine reiche Ernte von neuen Erkenntnissen gebührend belohnt wird." *Unterr.-Blätter f. Mathematik.*

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von Heinrich W. E. Jung, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923 . . . . RM. 3.50, geb. RM. 4.—

Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 901) . . . . Geb. RM. 1.62

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 944) . . . . Geb. RM. 1.62

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) . . . . Geb. RM. 4.—

II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59) Geb. RM. 4.—

Numerische Integration. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) . . . . Geb. RM. 1.62

Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.

Graphische Integration. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801) . . . . Geb. RM. 1.62

Methoden der praktischen Analysis. Von Professor Dr. Fr. A. Willers a. d. Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12) . . . . . RM. 20.—, geb. RM. 21.50

Der Band gibt dem Mathematiker einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und macht den Naturwissenschaftler und Ingenieur mit den theoretischen Grundlagen bekannt.

Praktisches Zahlenrechnen. Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405) . . . . Geb. RM. 1.62

Mathematische Instrumente. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922) . . Geb. RM. 1.62

Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene mit den vollständigen Lösungen. Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 22 Figuren im Text. 139 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 256) . . . . Geb. RM. 1.62

Analytische Geometrie des Raumes. Von Dr. Robert Haußner o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 36 Figuren im Text. 132 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 89) . . . . Geb. RM. 1.62

Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Von Professor Dr. Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 252 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Die Elementargeometrie wird nicht vom Standpunkte des Schulunterrichts, sondern von dem der Wissenschaft aus behandelt. Ausgangspunkt ist das (etwas modifizierte) Hilbertsche Axiomensystem. In der Darstellung treten zwei Momente in den Vordergrund: die geschichtliche Entwicklung und die prinzipielle Begründung der einzelnen Gebiete.

Koordinatensysteme. Von Professor Paul B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 507) . . . Geb. RM. 1.62

Nichteuklidische Geometrie. Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970) . . Geb. RM. 1.62

Nichteuklidische Geometrie. Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

Kreis und Kugel. Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von Prof. Dr. H. Wieleitner, Oberstudiendirektor in München.
Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. 146 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 435) Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. Neudruck. 123 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 436) . . . . . Geb. RM. 1.62

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. Neudruck. VIII, 380 Seiten. 1928. (Samml. Schubert Bd. 34) . . . . Geb. RM. 18.—
II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51) Geb. RM. 9.50

Projektive Liniengeometrie. Von Dr. Robert Sauer, Prof. an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 36 Abbild. Groß-Oktav. 1937. (Göschens Lehrbücherei Bd. 23.) Im Druck.

Projektive Geometrie. Von Dr. H. Timerding, Prof. an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit zahlreichen Figuren. 1937. (Samml. Göschen Bd. 72.) . . . . Geb. RM. 1.62

Aufgabensammlung zur projektiven Geometrie. Von Dr. H. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 65 Figuren. 140 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1060). Geb. RM. 1.62

Geometrische Transformationen. Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 15) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor der reinen Mathematik an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 16 Figuren. Groß-Oktav. 280 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 19) RM. 15.50 geb. RM. 17.—

Affine Differentialgeometrie. Von Dr. Erich Salkowski, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Groß-Oktav. Mit 23 Figuren. 200 Seiten. 1934. (Göschens Lehrbücherei Bd. 22) . . . . Geb. RM. 10.—

Die vorliegende Darstellung ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser an den Technischen Hochschulen Hannover und Berlin gehalten hat. Das Ziel dieses neuen Bandes von Göschens Lehrbücherei ist, den Anfänger, dem nur die Grundtatsachen der Vektorrechnung und der Differentialgeometrie geläufig sein müssen, mit den Begriffsbildungen der Tensorrechnung vertraut zu machen, die für das Verständnis der neueren differential-geometrischen und mathematisch-physikalischen Forschung unentbehrlich sind. Dabei wurde darauf Bedacht genommen, von den einfachsten, allgemein bekannten Tatsachen ausgehend und in dauernder Verbindung mit der geometrischen Anschauung den Formelapparat der Ricci-Rechnung allmählich so zu entwickeln, daß er dem Lernenden nicht als ein analytisches Kunststück entgegentritt, sondern sich als ein naturgemäßes Hilfsmittel der geometrischen Forschung aufbaut. Aus diesem Grunde wurde die Untersuchung auf die einfachsten Gegenstände beschränkt und grundsätzlich nur zweidimensionale analytische Gebilde betrachtet.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50
II. Mit 110 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI, 582 Seiten. 1922. RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Von Oberstudiendirektor Prof. Dr. V. Kommerell in Tübingen und Prof. Dr. K. Kommerell in Tübingen. I: Krümmung der Raumkurven und Flächen. Vierte Auflage. Mit 38 Figuren. 205 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 20) Geb. RM. 10.—
II: Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlensysteme. Vierte Auflage. Mit 22 Figuren. 1931 . . Geb. RM. 10.—

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 147 Seiten. 1929 . . . . RM. 5.—, geb. RM. 6.—

Vektoranalysis. Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 354) . . . Geb. RM. 1.62

Darstellende Geometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.
Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 142) . . . . Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 143) . . . . Geb. RM 1.62
Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 65 Figuren im Text. 141 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 144) . . . . Geb. RM. 1.62
Vierter Teil: Freie und gebundene Perspektive, Photogrammetrie, kotierte Projektion. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Univ. Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Techn. Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 76 Figuren im Text. 144 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1063). Geb. RM. 1.62

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände.

Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielflache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. Neudruck 1932. Geb. RM 18.90
II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten. Mit 118 Figuren. Neudruck. 1932. Geb. RM. 8.55
III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 . . . . Geb. RM. 12.—

Darstellende Geometrie. Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65) Geb. RM. 6.—
II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66) Geb. RM. 7.50

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 508 und 871) Geb. je RM. 1.62
Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Wilhelm Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Zweite, veränderte Auflage.
I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 302) Geb. RM. 1.62
II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 641) . . . . Geb. RM. 1.62
Jeder der beiden Teile bildet ein das ganze Gebiet umfassendes, für sich geschlossenes Ganzes. Der erste enthält die Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln, während im zweiten die fertigen Ergebnisse dieser Ableitungen zusammengestellt und auf hauptsächlich dem Gebiet der Geodäsie entnommene Zahlenbeispiele angewendet werden.

Versicherungsmathematik. Von Dr. Friedrich Boehm, Professor an der Universität München.
I. Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 180) . . . . Geb RM. 1.62
II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 917) . . . . Geb. RM. 1.62
Der erste Band behandelt den Zins als erste, die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, die Prämienreserve und die Versicherung verbundener Leben. Der zweite Band enthält außer einer eingehenden Behandlung der Lebensversicherungsmathematik eine Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung.

Politische Arithmetik. (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung.) Von Dr. Emil Foerster, Honorardozent an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 155 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 879) Geb. RM. 1.62
In 6 Kapiteln wird der Reihe nach die einfache Zinsenrechnung, die Zinseszinsenrechnung für Einzelkapitalien und Renten, das Rechnen mit vorschüssigen Zinsen, die Schuldentilgung sowie die Kurs- und Rentabilitätsrechnung behandelt.

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Professor Dr. M. Pirani. Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. J. Runge. Mit 71 Abbildungen. 149 Seit. 1931. (Samml. Göschen Bd. 728) Geb. RM. 1.62

Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechentafeln namentlich mit der Methode der fluchtrechten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien.

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Baugewerkschule in Erfurt. 2 Teile. 1929. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695). Geb. RM. 1.62

Statik. I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Hannover. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 178) . . . . Geb. RM. 1.62
II. Teil: Angewandte (techn.) Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 61 Abbildungen. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 179) . . . . Geb. RM. 1.62

Ballistik. Von Dr. Theodor Vahlen, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik in Berlin. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922 . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.—

Getriebelehre I: Geometrische Grundlagen. Von Dipl.-Ing. P. Grodzinski u. Dr.-Ing. H. Polster. Mit 127 Figuren. 138 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1061) . . . . Geb. RM. 1.62

Getriebelehre II: Angewandte Getriebelehre. Von Dipl.-Ing. P. Grodzinski. Mit 196 Figuren. 142 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1062). Geb. RM. 1.62

Dynamik. Von Prof. Dr. Wilhelm Müller. I: Dynamik des Einzelkörpers. Mit 70 Figuren. 160 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 902) Geb. RM. 1.62
II: Dynamik von Körpersystemen. Mit 51 Figuren. 137 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 903) . . . . Geb. RM. 1.62

Flugtechnisches Handbuch. Unter Mitarbeit zahlreicher Fachleute herausgegeben von Roland Eisenlohr.

4 Bände. I: Aerodynamik und Flugzeugbau. II: Flugzeugführung, Luftverkehr und Segelflug. III: Triebwerk und Sondergebiete des Flugwesens. IV: Flugwetterkunde, Ballone, Luftschiffe. Jeder Band kart. RM. 7.50

Aerodynamik des Fluges. Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie. Von Professor Dr. Harry Schmidt. Mit 81 Figuren. VII, 258 Seiten. 1929 . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Festigkeitslehre. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten und 1 Tafel. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288) . . . . Geb. RM. 1.62

Hydraulik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) . . . . . Geb. RM. 1.62

Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.

Elastizitätslehre für Ingenieure. Von Professor Dr.-Ing. Max Enßlin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) . . . . Geb. je RM. 1.62

Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger, Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.

Einführung in die geometrische Optik. Von Dr. W. Hinrichs, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 532) . . . . Geb. RM. 1.62

Technische Tabellen und Formeln. Von Reg.-Baurat a. D. Prof. Dr.-Ing. W. Müller. Mit 105 Figuren. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 579) . . . . . Geb. RM. 1.62

Einführung in die Differentialgleichungen der Physik. Von Professor Ludwig Hopf. Mit 49 Abbildungen. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1070) Geb. RM. 1.62

Theoretische Physik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor der Physik an der Universität Wien. 5 Bände.
I. Band: Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 76) . . . . . Geb. RM. 1.62
II. Band: Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 77) Geb. RM. 1.62
III. Band: Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 78) Geb. RM. 1.62
IV. Band: Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 374) Geb. RM. 1.62
V. Band: Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 128 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1017) . . . . Geb. RM. 1.62

Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. I. Band. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit 67 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 396 Seiten. 1930. RM. 8.50, geb. RM. 10.—
II. Band. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit 85 Abbildungen im Text und auf sechs Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 448 Seiten. 1930. RM. 8.50, geb. RM. 10.—

Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Clemens Schäfer, Professor an der Universität Breslau. I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929. RM. 45.—, geb. RM. 48.—
II. Band: Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. X, 660 Seiten. 1929 . . . . RM. 28.—, geb. RM. 30.—
III. Band. Erster Teil: Elektrodynamik und Optik. Mit 235 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 918 Seiten. 1932. RM. 37.50, geb. RM. 40.—

„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“ *Annalen der Physik.*

Das Naturbild der neuen Physik. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. Mit 8 Figuren im Text. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Groß-Oktav. V, 129 Seiten. 1932. RM. 5.—, geb. RM. 6.—

VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.
IN BERLIN W 35 UND LEIPZIG C 1

III. 1937. Buchdruckerei Otto Regel G. m. b. H., Leipzig