...hen

Aufgabensammlung

zur

Analytischen Geometrie der Ebene

von

Prof. O. Th. Bürklen

Mit 32 Figuren

Kleine mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden **80 Pfennig.**

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

Ebene Geometrie m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.

Niedere Analysis m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Versicherungsmathematik v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.

Statik I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper mit 82 Figuren von Diplom-Ingenieur W. Hauber. Nr. 178.

Statik II: Angewandte Statik mit 61 Figuren von Diplom-Ingenieur W. Hauber. Nr. 179.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Astronomie mit 36 Abbildungen und einer Karte von Professor Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 11.

Astrophysik mit 11 Abb. von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 91.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Prof. Dr. C. Reinhertz. Nr. 102.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sammlung Göschen

Aufgabensammlung

zur

Analytischen Geometrie der Ebene

von

O. Th. Bürklen

Prof. am Königl. Realgymnasium in Schwäb. Gmünd

Mit 32 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1905

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Punkte und Strecken.

II. Abschnitt.

Die gerade Linie.

III. Abschnitt.

Der Kreis.

IV. Abschnitt.

Die Parabel.

IX. Abschnitt.

Aufgaben über höhere Kurven.

I. Abschnitt.

Punkte und Strecken.

§ 1. **Punkte und Strecken auf einer Koordinatenachse.**

Die Grundgerade werde X-Achse genannt, der Nullpunkt oder Ursprung mit O bezeichnet.

1. Bezeichne auf der eingeteilten Grundgeraden die Punkte, deren Abszissen $+5$, $+3\frac{1}{2}$, -3, $-5\frac{2}{3}$, $-2\frac{1}{4}$, $\frac{ab}{c}$, $\frac{a^2+b^2}{c}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ sind. (a, b, c gegebene Strecken.)

2. Welche Punkte der X-Achse entsprechen den Gleichungen:

$$1)\ 3x = 15, \qquad 2)\ 7x = -28, \qquad 3)\ 2x = a + b,$$

$$4)\ cx = a \cdot b, \quad 5)\ \frac{x+a}{x-a} = \frac{5}{4}, \quad 6)\ ax = a^2 - b^2,$$

$$7)\ a^2 x = b^3.$$

(a, b, c gegebene Strecken; bei 3), 4), 6), 7) die Konstruktion angeben.)

3. Desgleichen die Punkte zu bestimmen, welche den Gleichungen

$$1)\ x^2 - 7x + 12 = 0\,,\quad 2)\ x^2 - x + 20 = 0\,,$$

$$3)\ x^2 + 4x = 0\,,\quad 4)\ x^2 - (a+b)x + ab = 0\,,$$

$$5)\ x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0\,,$$

$$6)\ 3x^3 - 7x^2 \cancel{+}\, 7x + 3 = 0\,,$$

$$7)\ x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

entsprechen.

Res.: 5) $a+b$, $a-b$, 6) -1, 3, $\frac{1}{3}$, 7) ± 2, ± 3.

4. Die Punkte P_1 und P_2 der X-Achse haben die Abszissen

$$x_1 = 3;\quad -2;\quad +3;\quad -4;\quad +a;\quad 2a - b;$$

$$x_2 = 12;\quad +7;\quad -5;\quad -6;\quad -3a;\quad a - 2b.$$

a) Was ist die Größe der Strecke $P_1 P_2$ nach Länge und Vorzeichen? b) Durch welche Gleichungen ist jedes der durch x_1 und x_2 gegebenen Punktepaare darstellbar?

5. Welche Gleichungen entsprechen den Punktepaaren, bzw. Punktetripeln: 1) 2, 3; 2) 3, -5; 3) 0, -7; 4) 3, ∞; 5) 1, 2, 3; 6) 0, a, $-b$; 7) ∞, 5, -2?

6. Die Strecke $P_1 P_2$ wird durch Punkt O im Verhältnis $\lambda : 1$ $(m : n)$ geteilt; es soll die Abszisse α des Teilpunktes ermittelt werden, wenn die Abszissen von P_1 und P_2 bzw. x_1 und x_2 sind.

Beispiele:

a) $x_1 = +3$, $x_2 = +11$, $\lambda : 1 = 3 : 1$;

b) -3, $+7$, $4 : 1$; c) $+1$, $+7$, $-3 : 1$;

d) $+1, \quad +7, \quad -\frac{1}{2}:1$; e) $+8, \quad -4, \quad \frac{1}{3}:1$;

f) $-3, \quad -18, \quad 2:5$.

7. Von den harmonischen Punkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 (P_1 und P_2 zugeordnet) mit den Abszissen a_1, a_2, α_1, α_2 ist gegeben: 1) $a_1 = 2$, $a_2 = 15$, $\alpha_1 = 8$; 2) $a_1 = -12$, $a_2 = +6$, $\alpha_1 = +3$; 3) $a_1 = +9$, $\alpha_1 = +1$, $\alpha_2 = -8$. Es soll die fehlende Abszisse berechnet werden.

Res.: -76; $10{,}5$; $-1{,}88$.

8. Untersuche, ob die Punkte mit den Abszissen 3, 8, 11, 23 harmonisch sind oder nicht.

9. Zu beweisen: Sind P_1, P_2, P_3, P_4 harmonische Punkte (P_1 und P_3 zugeordnet) mit den Abszissen x_1, x_2, x_3, x_4, so ist

$$\overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_4}^2 = (\overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4})^2 .$$

10. Sind P_1, P_2, Q_1, Q_2 harmonische Punkte (P_1 und P_2 zugeordnet) und ist O die Mitte von P_1P_2, so ist $OP_1^2 = OP_2^2 = OQ_1 \cdot OQ_2$.

11. Zu beweisen: Sind P_1, P_2, P_3, P_4 beliebige Punkte einer Geraden, so ist

$$P_1P_3 \cdot P_2P_4 = P_1P_2 \cdot P_3P_4 + P_1P_4 \cdot P_2P_3 .$$

12. Ein Punkt P hat die Abszisse $\overset{x}{a}$, ein Punkt O' die Abszisse a. Wie groß ist die Abszisse x' von P, wenn O' als neuer Nullpunkt betrachtet wird?

Res.: $x' = x - a$.

§ 2. Punkte und Strecken in der Ebene; Teilpunkt einer Strecke.

Bei Aufgaben, bei welchen über den Achsenwinkel nichts angegeben ist, ist das Koordinatensystem rechtwinklig zu nehmen.

13. Ein Punkt P hat die Koordinaten $a|b$; wie groß ist seine Entfernung von O? [1])

1) $a = 8$, $b = 6$; 2) $-5|12$; 3) $21|20$.

14. Die Punkte P_1 und P_2 haben die Koordinaten $a_1|b_1$ und $a_2|b_2$. Wie lang ist $P_1 P_2$?

1) $a_1 = 5$, $b_1 = 4$, $a_2 = 9$, $b_2 = 7$; 2) $a_1 = -2$, $b_1 = 7$, $a_2 = 5$, $b_2 = -17$; 3) $a_1 = 0$, $b_1 = 6$, $a_2 = 5$, $b_2 = 18$.

Res.: 1) 5; 2) 25; 3) 13.

15. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 14, es sei aber der Achsenwinkel 45^0.

Res.: 1) $2\sqrt{25 + 12\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{169 - 60\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt{841 - 420\sqrt{2}}$.

16. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 14, aber der Achsenwinkel sei 60^0.

Res.: 1) $\sqrt{37}$; 2) $\sqrt{793}$; 3) $\sqrt{721}$.

17. Ein regelmäßiges Sechseck liegt so, daß sein Mittelpunkt nach O fällt und zwei Gegenecken auf der

---

[1]) Es ist zweckmäßig, zu den Zahlenbeispielen die Figuren zu zeichnen; bei rechtwinkligen Koordinaten ist es nützlich, quadriertes, sogenanntes Millimeterpapier zu verwenden.

X-Achse liegen. Was sind die Koordinaten der Ecken, wenn die Seitenlänge a ist?

18. Von einem regelmäßigen Fünfeck mit der Seitenlänge a liegt eine Seite, welche einen Endpunkt in O hat, auf der $+X$-Achse. Die Gegenecke dieser Seite liegt im ersten Feld; es sollen die Koordinaten der Ecken berechnet werden.

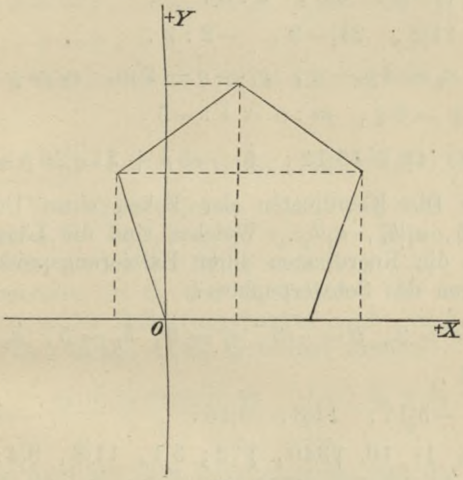

Fig. 1.

$$\text{Res.:}\quad a|0\,;\qquad \frac{a}{4}(\sqrt{5}+3)\left|\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right.;$$

$$\frac{a}{2}\left|\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right.;\quad -\frac{a}{4}(\sqrt{5}-1)\left|\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right..$$

19. Die Koordinaten der Endpunkte P_1 und P_2 einer Strecke sind $x_1|y_1$ und $x_2|y_2$. Welches sind die

Koordinaten des Punktes Q, der $P_1 P_2$ im Verhältnis $m : n$ teilt?

1) $x_1 = 5$, $y_1 = 10$, $x_2 = 35$, $y_2 = 20$, $m : n = 1 : 2$.

2) $-3|8$, $12|-12$, $3 : 2$.

3) $7|-8$, $6|6$, $4 : 3$.

4) $11|2$, $24|-3$, $-2 : 3$.

5) $x_1 = 3p - q$, $y_1 = q - 2p$, $x_2 = p + 2q$, $y_2 = 5p - 3q$, $m : n = 4 : -3$.

Res.: 4) $-15|12$; 5) $-5p + 11q|26p - 15q$.

20. Die Koordinaten der Ecken eines Dreieckes sind $a|b$, $a_1|b_1$, $a_2|b_2$. Welches sind die Längen der Seiten, die Koordinaten ihrer Halbierungspunkte und diejenigen des Schwerpunktes?

1) $a = 2$, $b = -3$, $a_1 = 8$, $b_1 = 5$, $a_2 = 14$, $b_2 = 11$.

2) $-5|17$, $11|3$, $3|15$.

Res. 1) 10, $\sqrt{340}$, $\sqrt{72}$; $5|1$, $11|8$, $8|4$; $8|4\frac{1}{3}$.
2) $\sqrt{452}$, $\sqrt{68}$, $\sqrt{208}$; $3|10$, $7|9$, $-1|16$; $3|11\frac{2}{3}$.

21. Von einer Strecke $P_1 P_2$ sind die Koordinaten $a_1|b_1$ des Anfangspunktes und diejenigen $\alpha|\beta$ des Punktes, der $P_1 P_2$ im Verhältnis $m : n$ teilt, gegeben. Es sollen die Koordinaten $a_2|b_2$ des Endpunktes ermittelt werden.

1) $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $m : n = 1 : 2$.

2) $a_1 = 7$, $b_1 = 2$, $\alpha = 12$, $\beta = -1$, $m : n = 5 : 3$.

Res.: $a_2 = \frac{\alpha(m+n) - na}{m}, \quad b_2 = \frac{\beta(m+n) - nb}{m}$.

22. Von einem Dreieck sind gegeben die Koordinaten $a|b$ und $a_1|b_1$ zweier Ecken, sowie diejenigen des Schwerpunktes $\alpha|\beta$. Es sind die Koordinaten $a_2|b_2$ der dritten Ecke zu suchen.

1) $a = -7$, $b = -1$, $a_1 = -2$, $b_1 = -9$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

2) $a = 2$, $b = 11$, $a_1 = 15$, $b_1 = 3$, $\alpha = 4$, $\beta = 10$.

Res.: $a_2 = 3\alpha - (a + a_1)$, $b_2 = 3\beta - (b + b_1)$.

23. Von einem Viereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ sind die Koordinaten $a_1|b_1$, $a_2|b_2$, $a_3|b_3$, $a_4|b_4$ der Ecken gegeben. Die Seiten werden der Reihe nach in Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, die Diagonalen in Q_5 und Q_6 halbiert. Es sollen die Koordinaten der Halbierungspunkte $\alpha_1|\beta_1$, $\alpha_2|\beta_2$, $\alpha_3|\beta_3$ von $Q_1 Q_3$, $Q_2 Q_4$, $Q_5 Q_6$ berechnet werden.

Res.: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}, \quad \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4}$.

Was folgt aus dem Resultat, wenn man das Viereck samt seinen Diagonalen als Projektion eines Tetraeders betrachtet?

24. Von einem Fünfeck $P_1 P_2 \ldots P_5$ sind die Koordinaten der Ecken $a_1|b_1$ usf. gegeben. Die Seiten sind der Reihe nach in $Q_1, Q_2, \ldots Q_5$ halbiert. Der Halbierungspunkt M der $Q_1 Q_3$ wird mit P_5 verbunden und $P_5 M$ durch S im Verhältnis $4:1$ geteilt. Es sollen die Koordinaten von S berechnet werden.

Was ist der Fall, wenn man $Q_2 Q_4$ für $Q_1 Q_3$ und P_1 für P_5 nimmt?

25. Die Seiten eines beliebigen Sechseckes sind der Reihe nach in $Q_1 Q_2 \ldots Q_6$ halbiert; bestimme den Schwerpunkt von $\triangle\, Q_1 Q_3 Q_5$ und ebenso von $\triangle\, Q_2 Q_4 Q_6$; was zeigt sich?

26. Eine Strecke ist über ihre Endpunkte $a_1|b_1$ und $a_2|b_2$ hinaus je um ihr λfaches verlängert; welches sind die Abszissen der Endpunkte der Verlängerungen?

Res.: $(1+\lambda)\,a_1 - \lambda\, a_2$; $\quad (1+\lambda)\,a_2 - \lambda\, a_1$.

27. Die Koordinaten dreier in gerader Linie liegender Punkte sind $a_1|b_1$, $a_2|b_2$, $a_3|b_3$. Es sollen die Koordinaten des vierten harmonischen Punktes berechnet werden, wenn der erste und der dritte einander zugeordnet sind?

Res.: $$\frac{2\,a_1\,a_3 - a_2\,(a_1 + a_3)}{a_1 + a_3 - 2\,a_2}.$$

Was ergibt sich, wenn $a_2|b_2$ die Mitte zwischen $a_1|b_1$ und $a_2|b_2$ ist?

28. Einen Punkt zu bestimmen, der gleichweit von O und von den Punkten $6|2$ und $3|7$ entfernt ist.

Res.: $2\frac{5}{18}|3\frac{1}{6}$.

II. Abschnitt.

Die gerade Linie.

§ 3. **Punkt und Gerade; mehrere gerade Linien.**

29. Zu untersuchen, ob Punkt $3|5$, ebenso $-2|1$, $5|0$, $0|-7$ auf einer der folgenden Geraden liegt, deren Gleichungen sind:

a) $6x + 7y = 53$; b) $2x - 3y = 10$;

c) $4y - 9x = 22$; d) $7x - 5y = 35$.

30. Ebenso, ob Punkt

$$a|b \text{ auf } \left(a - \frac{p}{2}\right) y = b \left(x - \frac{p}{2}\right),$$

$$a\left|\frac{b}{2}\right. \text{ auf } bx - (2a - \alpha) y - b \frac{\alpha}{2} = 0,$$

$$\frac{2a+c}{2}\left|\frac{h}{2}\right. \text{ auf } y - \frac{h}{2} = \frac{2a-c}{h}\left(x - \frac{c}{2} - a\right),$$

$$-f|0 \text{ und } 0\left|-\frac{bf^2}{\beta^2}\right. \text{ auf } \frac{x}{f} - \frac{\beta^2 y}{bf^2} = 1.$$

31. Bestimme die Gleichung für die Geraden, welche durch Punkt $-2|7$ geht und auf der Y-Achse ein Stück von der Länge 19 abschneidet.

Res.: $y = 6x + 19$.

32. Bestimme die Achsenabschnitte der Geraden in Aufgabe 29 und 30.

33. Zeichne die Lage der Geraden, die durch folgende Gleichungen dargestellt sind, wenn der Achsenwinkel a) 90^0, b) 60^0 ist.

1) $x = 5$; 2) $y = +3$; 3) $y = -7$;
4) $x - y = 0$; 5) $x - y = 2$; 6) $x - y = -2$;
7) $x + y = 2$; 8) $y = 2x$; 9) $y = \frac{x}{2}$;
10) $y = 2x + 3$; 11) $4x - 3y = -24$;
12) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$; 13) $-\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1$.

34. Die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte $x_1|y_1$, $x_2|y_2$ anzugeben.

$x_1 = 5$	-2	7	0	$2a$	$\frac{p}{2}$	$\frac{a_1 + a_2}{2}$
$y_1 = 3$	8	0	0	0	0	$\frac{b_1 + b_2}{2}$
$x_2 = 7$	-5	2	8	a_1	a	$2a_1 - a$
$y_2 = 4$	$+5$	-3	3	b_1	b	$2b_1 - b$

Res.: $x - 2y = -1$; $x - y = -10$;

$-3x + 5y = -21$; $3x - 8y = 0$;

$$b_1 x + (2a - a_1) y = 2ab_1;$$

$$\left(a - \frac{p}{2}\right) y - bx = -\frac{bp}{2};$$

$$(a - a_1) y - (b - b_1) x = ab_1 - a_1 b.$$

35. Die Gleichung einer Geraden anzugeben, welche durch Punkt $x_1|y_1$ geht und den Richtungswinkel α (Winkel mit der $+X$-Achse) hat.

1) $x_1 = 8$, $y_1 = 3$, $\alpha = 60^0$; 2) $3|0$, 135^0;

3) $0|-2$, 70^0.

36. Die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden L und L_1 zu berechnen.

a) L_1: $6x + 11y = 67$, L_2: $2x - 5y = 31$;

b) $3x + 5y = 28$; $11x + 3y = -20$;

c) $8x - 3y = 5$, $9y - 24x = -15$;

d) $ax - by = a^2 - b^2$, $(a + b)x + (a - b)y = a^2 + 2ab - b^2$;

e) $(a + b)x + (a - b)y = 2(a^2 + b^2)$, $(a - b)x + (a + b)y = 2(a^2 - b^2)$.

37. Zu untersuchen, ob folgende Punktetripel auf einer und derselben Geraden liegen, und was ist zutreffenden Falles ihre Gleichung?

a) $6|6$, $3|5$, $-6|2$;

b) $7|10$, $-4|7$, $0|8$;

c) $a|-b$, $a + b|a - b$, $a + 2b|2a - b$.

Res.: a) $x - 3y = -12$; c) $ax - by = a^2 + b^2$.

38. Zu untersuchen, ob die drei geraden Linien, welche je durch eine der folgenden Gruppen von Gleichungen dargestellt sind, durch einen und denselben Punkt gehen oder nicht. Was sind die Koordinaten des gemeinschaftlichen Punktes?

a) $7x + 3y = 41\,, \quad 3x - 4y = 7\,,$

$$-10x + y = -48\,;$$

b) $5x - 6y = -31\,, \quad 7x - 3y = 24{,}5\,,$

$$3x + 11y = 32{,}5\,;$$

c) $4x + 5y = 19\,, \quad 2x + 9y = -29\,,$

$$11x - 10y = -8\,;$$

d) $7x + 3y = 14a + 3b\,, \quad 2x - 5y = 4a - 5b\,,$

$$3ax + 7by = 6a^2 + 7b^2\,.$$

Res.: a) $5|2$, b) $-2|3\frac{1}{2}$, d) $2a|b$.

Gang der Lösung. A) Berechne aus zwei der gegebenen Gleichungen die gemeinschaftlichen Werte von x und y und untersuche, ob dieselben die dritte Gleichung befriedigen.

Oder B) benutze einen der folgenden Sätze:

1) Sind $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, so stellt die Gleichung $L_1 + \lambda L_2 = 0$, worin λ ein beliebiger Zahlfaktor ist, eine Gerade dar, welche durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht (λ Prinzip oder Prinzip der linearen Kombination).

2) Sind $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ die Gleichungen dreier Geraden, so gehen diese durch einen gemeinsamen Punkt, wenn sich λ_1, bzw. λ_1 und λ_2 so bestimmen lassen, daß

$$L_1 + \lambda_1 L_2 \equiv L_3\,,$$

oder daß

$$L_1 + \lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_3 \equiv 0\,.$$

39. Die Gleichung einer Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt $x_1|y_1$ 1) parallel, 2) senkrecht zu L gezogen wird.

a) $x_1 = 0\,,\quad y_1 = 0\,,\quad L\colon\ m x + n y = c\,;$

b) $5|6\,,\qquad 7x + 4y = 12\,;$

c) $4|-3\,,\qquad 9x - 11y = 0\,;$

d) $a|2b\,,\qquad (a+b)x + (a-b)y = c\,;$

e) $4|-2\,,\qquad y = 3x - 8\,;$

f) $0|-8\,,\qquad y = \frac{2}{5}x + 3\,.$

Res. 2): b) $4x - 7y = -22$; c) $11x + 9y = 17$;

d) $(a-b)x - (a+b)y = a^2 - 3ab - 2b^2$;

e) $x + 3y = -2$; f) $5x + 2y = -16$.

40. Von einem Parallelogramm $P_1 P_2 P_3 P_4$ sind die Koordinaten der Ecken P_1, P_2, P_3 gegeben, es sollen die von P_4 berechnet werden.

Res.: $x_4 = x_1 + x_3 - x_2$.

41. Auf der Geraden $x - 3y + 6 = 0$ einen Punkt so zu bestimmen, daß er von dem Punkt der Geraden, welcher zu der Abszisse 1 gehört, den Abstand 5 hat.

Res.: $x = 1 \pm \sqrt{22{,}5}\,,$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{22{,}5}}{3}\,. \quad \text{(Zwei Punkte.)}$$

42. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2. In der Mitte M von $P_1 P_2$ wird das Lot errichtet; es soll auf diesem ein Punkt gefunden werden, der von M den gegebenen Abstand d hat.

$$P_1 : 3|-2\,, \quad P_2 : 11|12\,, \quad d = \tfrac{1}{7}\sqrt{260}\,.$$

Res.: Zwei Punkte, $9\left|\frac{27}{7}\right.$, $\quad 5\left|\frac{43}{7}\right.$.

43. Von einem im ersten und zweiten Feld liegenden Quadrat liegt eine Ecke in O, eine zweite im Punkt $x_1|y_1$. Welches sind die Koordinaten der anderen Ecken?

Res.: $x_1 + y_1|x_1 - y_1\,, \quad -y_1|x_1\,.$

44. Von den in Nr. 22 angegebenen Dreiecken die Gleichungen und Längen der Seiten, der Schwerlinien und der Mittellote zu den Seiten anzugeben, sowie aus den betreffenden Gleichungen, oder allgemein, nachzuweisen, daß die Höhen, die Schwerlinien, die Mittellote der Seiten je sich in einem Punkt H, bzw. S, O schneiden, ferner zu zeigen, daß diese drei Punkte in gerader Linie liegen und daß sich $HS : SO = 1 : 2$ verhält.

Res.: Höhen: $19\,y + 11\,x = -96$;

$$11\,y + 16\,x = -131\,; \quad 8\,y - 5\,x = 35\,.$$

Schwerlinien: $x - 7\,y = 0$; $\quad 9\,x - 2\,y = 0$;

$$10\,x - 9\,y = 0\,.$$

Mittellote: $19\,y + 11\,x = 48$;

$$11\,y + 16\,x = 65\tfrac{1}{2}\,; \quad 8\,y - 5\,x = -17\tfrac{1}{2}\,.$$

Anmerkung: Für den allgemeinen Nachweis bezüglich H, S, O kann man eine Seite, etwa P_1P_2 als X-Achse und den Halbierungspunkt von P_1P_2 als Nullpunkt nehmen.

45. Durch den zu der Abszisse $x = 4$ gehörigen Punkt der Geraden $5\,x + 3\,y = 30$ eine Gerade zu

ziehen, welche auf der $+X$-Achse ein Stück von der Länge 7 abschneidet.

Res.: $10x + 9y - 70 = 0$.

46. Die Gleichung einer Geraden L_3 zu finden, welche durch den Schnittpunkt der Geraden L_1 und L_2 und durch den Punkt $x_1|y_1$ geht.

$L_1 : 31x + 47y - 12 = 0$, $L_2 : 15x - 19y + 24 = 0$,

1) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; 2) $x_1 = -1$, $y_1 = -2$.

Res.: 1) $77x + 75y = 0$;

2) $832x + 197y + 438 = 0$.

47. Durch den Schnittpunkt der Geraden

1) $4x + 7y - 15 = 0$, 2) $9x - 14y - 4 = 0$

eine Gerade zu ziehen, welche

a) parallel zur Y-Achse,

b) parallel zu der Geraden 3) $2x - 3y - 9 = 0$,

c) senkrecht zu der ersten Geraden ist,

d) mit $+X$- und Y-Achse ein Dreieck vom Inhalt $\frac{1681}{210}$ bildet.

Res.: a) $x = 2$, b) $2x - 3y - 1 = 0$,

c) $7x - 4y - 10 = 0$, d) $3x + 35y = 41$,

$35x + 12y = 82$. (Zwei Lösungen.)

48. Auf der $+X$-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist $OB = a$, auf der $+Y$-Achse $OC = b$ abgetragen und auf OB in B und auf OC in C je in der Richtung der negativen Achse ein Lot $BD = OB$ bzw. $CE = OC$ errichtet, ferner ist $OH \perp BC$ gezogen.

Es soll bewiesen werden, daß CD und BE — Hilfslinien des Euklidischen Beweises des Kathetensatzes — sich mit OH in einem Punkt schneiden.

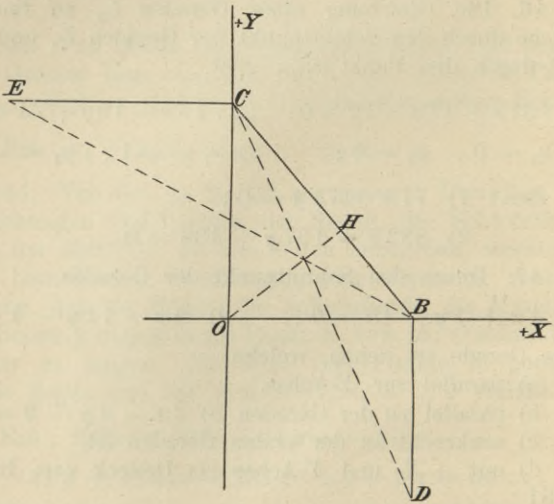

Fig. 2.

49. Durch den Schnittpunkt der Geraden $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ eine Gerade zu ziehen, welche auch durch den Schnittpunkt der Geraden $L_3 = 0$ und $L_4 = 0$ geht.

$L_1 : 3x - 4y - 47 = 0\,,\qquad L_2 : 7x + 8y - 23 = 0\,,$

$L_3 : 4x + 11y + 65 = 0\,,\quad L_4 : 9y - 10x - 53 = 0\,.$

Res.: $2x + 17y + 67 = 0\,.$

50. Zu beweisen: Fällt man vom Fußpunkt einer Höhe eines Dreieckes Lote auf die beiden anderen Höhen

und die zu diesen gehörigen Seiten, so liegen die Fußpunkte dieser vier Lote in einer Geraden.

51. Auf der $+X$-Achse eines beliebigen Koordinatensystemes liegt Punkt A, auf der Y-Achse B, auf der $-X$-Achse C, auf der $-Y$-Achse D. Von einem

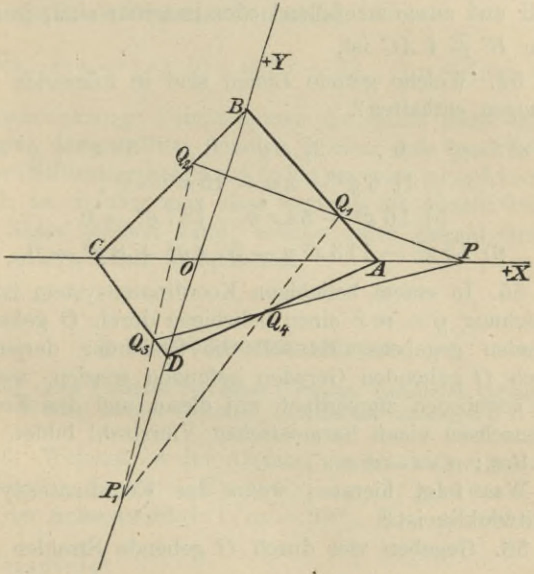

Fig. 3.

Punkt P der X-Achse werden zwei Geraden gezogen, von welchen die eine AB in Q_1, BC in Q_2, die andere CD in Q_3, DA in Q_4 trifft. Es soll nachgewiesen werden, daß $Q_1 Q_4$ und $Q_2 Q_3$ sich in einem Punkt der Y-Achse treffen.

52. Durch welche gemeinsame Gleichung kann man die Geraden, deren Gleichungen $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ und $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ sind, darstellen?

53. Beweise, daß die homogene Gleichung $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ zwei durch den Ursprung gehende gerade Linien darstellt, und daß sie reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär sind, je nachdem $B^2 \gtreqless 4\,AC$ ist.

54. Welche gerade Linien sind in folgenden Gleichungen enthalten?

1) $x^2 - y^2 = 0$, 2) $xy = 0$, 3) $x^2 + y^2 = 0$,

4) $6\,y^2 - xy - 15\,x^2 = 0$,

5) $16\,x^2 - 54\,xy - 187\,y^2 = 0$,

6) $15\,x^3 - 113\,x^2 y - 57\,xy^2 + 8\,y^3 = 0$.

55. In einem beliebigen Koordinatensystem ist die Gleichung $y = mx$ einer beliebigen durch O gehenden Geraden gegeben. Es soll die Gleichung derjenigen durch O gehenden Geraden gefunden werden, welche, der gegebenen zugeordnet, mit dieser und den Koordinatenachsen einen harmonischen Vierstrahl bildet.

Res.: $y = -mx$.

Was folgt hieraus, wenn das Koordinatensystem rechtwinklig ist?

56. Gegeben vier durch O gehende Strahlen

1) $y = m_1 x$, 2) $y = m_2 x$, 3) $y = m_3 x$, 4) $y = m_4 x$.

Es soll die Bedingung dafür gefunden werden, daß diese Strahlen ein harmonisches Büschel bilden, wobei 1) und 3) zugeordnet sind.

Res.: $(m_1 + m_3)(m_2 + m_4) = 2\,(m_1 m_3 + m_2 m_4)$.

Anmerkung: Leite aus diesem Resultat Nr. 55 ab.

57. Es soll die Beziehung a) zwischen Réaumur- und Celsiusgraden und ebenso zwischen b) Réaumur- und Fahrenheit- und c) Celsius- und Fahrenheitgraden durch eine Gleichung ausgedrückt werden, indem man dabei die gegebene Réaumur-, bzw. Celsiuszahl als Abszisse und die gesuchte Celsius- oder Fahrenheitgradzahl als Ordinate betrachtet.

Res.: a) $y = \frac{5}{4}x$; b) $y = \frac{9}{4}x + 32$; c) $y = \frac{9}{5}x + 32$.

Anmerkung: Zeichnet man die durch diese Gleichungen dargestellten geraden Linien auf quadriertes Papier (Millimeterpapier) auf, so hat man eine graphische Tafel, an welcher man ohne weiteres die Anzahl Grade einer Skala ablesen kann, welche einer Anzahl Grade einer andern Skala entsprechen.

§ 4. **Größenbestimmungen.**

Abstand eines Punktes von einer Geraden, paralleler Geraden, Winkel zweier Geraden, Inhaltsbestimmungen.

58. Welches ist der Abstand des Punktes $x_1|y_1$ von der Geraden 1) $Ax + By + C = 0$, 2) $y = mx + c$, wenn der Achsenwinkel I. $\omega = 90^0$, II. $\omega = 60^0$ ist?

Beispiele:

a) $3x + 4y - 14 = 0, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 7$;

b) $15x - 8y + 13 = 0, \quad 3|3$; c) $y = 5x, \quad 0|7$;

d) $\dfrac{x}{20} - \dfrac{y}{21} = 1, \quad -10|-11$.

Res.: I. a) 4; b) 2; c) $7:\sqrt{26}$; d) $\frac{410}{29}$.[1]

II. a) $\frac{10}{13}\sqrt{39}$; b) $\frac{17\sqrt{3}}{13}$; c) $0{,}7\sqrt{10}$;

$$\text{d)}\ -\frac{205\sqrt{3}}{\sqrt{1161}}.$$

59. Welches ist der Abstand des Ursprungs von jeder der Geraden in Nr. 58, $\omega = 90^0$?

Res.: a) $2{,}8$; b) $13:17$; c) 0; d) $\frac{420}{29}$.

60. Wie groß ist der Abstand der parallelen Geraden L_1 und L_2?

a) $L_1: 6x + 8y - 11 = 0, \quad L_2: 3x + 4y - 20{,}5 = 0;$

b) $7x + 24y + 10 = 0, \quad 7x + 24y - 35 = 0;$

c) $12x - 5y - 29 = 0, \quad 12x - 5y - 10 = 0.$

Res.: a) 3; b) $1{,}8$; c) 1.

61. Die Gleichung einer durch Punkt $x_1|y_1$ gehenden Geraden zu finden, welche von O den Abstand p hat.

62. Die Gleichung einer durch den Punkt $x_1|y_1$ gehenden Geraden zu finden, welche von dem Punkt $x_2|y_2$ den Abstand d hat.

$$x_1 = 3,\quad y_1 = 7,\quad x_2 = -5,\quad y_2 = 4,\quad d = \frac{19}{17}.$$

---

[1]) Da hinsichtlich der Zeichen für die Abstände keine Übereinstimmung herrscht, so sind in den Resultaten nur die absoluten Werte der Abstände angegeben.

Res.: Es gibt zwei Gerade der gesuchten Art;

$$y = \frac{8}{15}x + \frac{27}{5} \quad \text{und} \quad y = \frac{280}{1209}x + \frac{7623}{1209}.$$

63. Durch den Punkt $5|1$ eine Gerade zu ziehen, welche die Strecke zwischen den Punkten $2|7$ und $4|-3$ im Verhältnis $\lambda:1$ teilt. Was ergibt sich, wenn $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ ist?

Res.: $$y - 1 = \frac{4\lambda - 6}{3 + \lambda}(x - 5).$$

$\lambda = 0$ gibt $y = -2x + 11$, geht durch $2|7$;
$\lambda = \infty$ „ $y = 4x - 19$, „ „ $4|-3$;
$\lambda = 1$ „ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$;
$\lambda = -1$ „ $y = -5x + 26$, $\parallel P_2P_3$

64. Durch den Punkt $x_1|y_1$ eine Gerade so zu ziehen, daß ihre Abstände von den Punkten $x_2|y_2$ und $x_3|y_3$ sich wie $\lambda:1$ verhalten. Was ergibt sich, wenn $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = \infty$, $\lambda = -1$ wird?

Res.: $$y - y_1 = \frac{y_2 + \lambda(y_3 - y_1) - y_1}{x_2 + \lambda(x_3 - x_1) - x_1}(x - x_1).$$

65. Durch den Schnittpunkt der Geraden

$$1)\ y = x + 10, \quad 2)\ y = 5x + 22$$

eine Gerade zu ziehen, deren Abstand vom Punkt $0|7$ die Länge 5 hat.

Res.: $y - 7 = \pm\frac{5}{4}i(x + 3)$. (Deutung.)

66. Zu beweisen, daß, wenn man durch den Schwerpunkt S eines Dreieckes $P_1P_2P_3$ (s. Nr. 44, Anm.) eine

beliebige Gerade zieht und auf dieselbe von den Ecken Lote fällt, das auf der einen Seite der Geraden liegende Lot gleich der Summe der beiden auf der andern Seite liegenden Lote ist.

67. Welche Beziehung muß zwischen den Konstanten a, b, c der Gleichung $ax + by + c = 0$ bestehen, damit die dadurch dargestellte Gerade L die Strecke zwischen den Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ im Verhältnis $\lambda : 1$ teilt? Was muß der Fall sein, wenn L a) die Strecke P_1P_2 halbieren, b) wenn L durch P_1, c) durch P_2 gehen, d) $L \parallel P_1P_2$ sein soll?

Res.: $ax_1 + by_1 + c + \lambda(ax_2 + by_2 + c) = 0$.

68. Den Richtungswinkel für jede der folgenden Geraden zu bestimmen:

a) $y = x$, b) $y = -x + 5$, c) $y = -\frac{1}{2}x + 12$, d) $y = x\sqrt{3} - 4$, e) $8x + 15y = 21$, f) $x\cos 70^0 + y\sin 70^0 - 12 = 0$, g) $7x - 12y + 18 = 0$ (hierbei Achsenwinkel $\omega = 72^0$).

Res.: a) 45^0, b) 135^0, c) $153^0 26' 6''$, d) 60^0, e) $151^0 55' 39''$, f) 160^0, g) $22^0 58' 7''$.

69. Durch den gegebenen Punkt $x_1|y_1$ eine Gerade zu ziehen, deren Richtungswinkel a) α, b) $2R - \alpha$, c) 30^0, d) 120^0, e) 40^0 bei Achsenwinkel $\omega = 110^0$.

Res.: a) $y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_1)$,

$$\text{e) } y - y_1 = \frac{\operatorname{tg} 40^0 (1 + \cos 110^0)}{\sin 110^0}(x - x_1).$$

70. Die Winkel des von den Geraden

$$L_1 : 3x + 4y - 11 = 0\,, \quad L_2 : 7x - 24y - 33 = 0\,,$$
$$L_3 : 12x - 5y + 25 = 0$$

gebildeten Dreieckes zu berechnen.

Res.: $53^0\,7'48''$, $75^0\,45'1''$, $51^0\,7'12''$.

71. Die Gleichungen der Halbierungslinien der Innen- und der Außenwinkel des in der vorigen Aufgabe gegebenen Dreieckes zu berechnen.

Res.: Halbierungslinien von

1) $\sphericalangle(L_1L_2): 4x + 22y = 11\,, \quad 11x - 2y = 44\,,$

2) $\sphericalangle(L_2L_3): \begin{cases} 209x + 187y = -1054\,, \\ 391x - 437y = -196\,, \end{cases}$

3) $\sphericalangle(L_3L_1): \begin{cases} -21x + 77y = 268 \\ 11x + 3y = 2\,. \end{cases}$

72. Zu beweisen, daß die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel senkrecht aufeinanderstehen. (Beispiele s. Nr. 71.)

73. Von einem Dreieck sind die Koordinaten der Ecken gegeben; es soll der Inhalt berechnet werden.

a) $0|0$, $6|2$, $3|7$; b) $5|-1$, $2|7$, $-3|-4$;

c) $5|3$, $7|4$, $9|5$.

Res.: a) 18; b) $36\frac{1}{2}$; c) 0.

74. Den Inhalt J des von den drei Geraden 1) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, 2) $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, 3) $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ gebildeten Dreieckes zu berechnen.

Res.: $J = \frac{1}{2}[a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3)$
$+ a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)]^2$
$: 2(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3)$.

Was ergibt sich aus $J = 0$ und $J = \infty$?

75. Beweise, unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Dreiecksflächen, daß, wie auch die Punkte O und O_1 liegen mögen, stets

$$\triangle OP_1P_2 + OP_2P_3 \ldots + OP_nP_1$$
$$= O_1P_2P_3 + \ldots + O_1P_nP_1 .$$

76. Den Inhalt des Vieleckes $P_1P_2\ldots P_n$ zu ermitteln.

Res.: $\frac{1}{2}[a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + \ldots$
$+ a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} + a_n b_1 - a_1 b_n]$.

77. Die beiden Punkte P_1 und P_2 der Geraden $2y - x - 1 = 0$ haben die Abszissen $x_1 = 1$ und $x_2 = 6$. Zwei weitere Punkte P_3 und P_4 haben die Koordinaten $5|4\frac{1}{2}$, $2|4$. Was ist der Inhalt des Viereckes $P_1P_2P_3P_4$?

Res.: 8.

§ 5. Die gerade Linie als geometrischer Ort.

78. Was ist die Gleichung des geometrischen Ortes für einen Punkt, der sich so bewegt, daß seine Abstände von der X- und der Y-Achse sich wie $\lambda : 1$ verhalten? a) Für das rechtwinklige, b) das schiefwinklige System, c) wenn $\lambda = 1$ ist.

79. Gegeben eine durch O gehende Gerade $y = mx$. Ein Punkt P bewegt sich so, daß sein Abstand e

von der X-Achse zu seinem Abstand e_1 von jener Geraden wie $\lambda:1$ sich verhält. Was ist der Ort von P a) im rechtwinkligen, b) im schiefen System (Achsenwinkel ω)?

Res.: $$y = \lambda \frac{(y - m x)\sin\omega}{\pm\sqrt{1 + m^2 - 2m\cos\omega}}.$$

80. Es ist der geometrische Ort des Punktes zu bestimmen, der von den Punkten $x_1|y_1$ und $x_2|y_2$ gleiche Entfernungen hat.

Res.: $$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + y_1^2 - y_2^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

81. Es ist der geometrische Ort für einen Punkt zu bestimmen, der sich so bewegt, daß seine Abstände von den Geraden $ax + by + c = 0$ und $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ einander gleich sind.

Res.: $$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}.$$

Wie lautet das Ergebnis der Aufgabe, wenn die Geradengleichungen in Normalform gegeben sind, und was ergibt sich, wenn die Abstände sich wie $\lambda:1$ verhalten sollen?

82. Es soll der geometrische Ort eines Punktes P bestimmt werden, dessen Abstand von O sich zu seinem Abstand von der Geraden $y = \frac{3}{2}x$ wie $2:1$ verhält.

Res.: $23x^2 - 48xy + 3y^2$. Der Ort zerfällt in die beiden Geraden $y = (8 \pm \frac{1}{3}\sqrt{47})x$.

83. Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, für welchen die Differenz der Quadrate seiner Ab-

stände von den Punkten $x_1|y_1$ und $x_2|y_2$ gleich einem gegebenen Wert d^2 ist.

Res.: $2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + y_1^2 - y_2^2 - x_1^2 + x_2^2 \pm d^2 = 0$.

84. Auf der $+X$-Achse liegt Punkt A $(a|0)$. Gesucht der Ort des Punktes P, der sich so bewegt, daß $\operatorname{tg} POA = k \operatorname{tg} PAO$ ist.

Res.: $$x = \frac{a}{1+k}.$$

85. Gegeben sind drei Punkte P_1, P_2, P_3; ein Punkt P bewegt sich so, daß $\triangle PP_1P_2 : PP_2P_3 = \lambda : 1$. Was ist der Ort von P?

Res.: Nimmt man $P_2P_3 (= a_1)$ als $+X$-, P_2P_1 $(= a_3)$ als $+Y$-Achse, so folgt als Ortsgleichung:

$$y = \frac{a_3}{\lambda a_1} X.$$

Was ergibt sich mit $\lambda = 1$? — Wo liegt P, wenn $\triangle PP_1P_2 = PP_2P_3 = PP_3P_1$?

86. Zu beweisen, daß der geometrische Ort für alle Punkte, deren Abstände von zwei festen Geraden eine gegebene Summe oder Differenz haben, ein System von vier geraden Linien ist.

87. In ein unveränderliches Dreieck $P_1P_2P_3$ sind über P_2P_3 alle möglichen Rechtecke gezeichnet. Es soll bewiesen werden, daß der geometrische Ort des Schnittpunktes der Rechtecksdiagonalen eine Gerade ist, welche durch die Halbierungspunkte von P_2P_3 und der zu dieser Seite gehörigen Höhe geht.

88. Den Ort eines Punktes zu finden, dessen Entfernungen von einer Anzahl Geraden eine gegebene Summe haben.

89. In dem Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ist ein beweglicher Punkt P. Es ist $PD \parallel P_1 P_2$ bis $P_2 P_3$, $PE \parallel P_2 P_3$ bis $P_3 P_1$, $PF \parallel P_3 P_1$ bis $P_1 P_2$ gezogen.

Was ist der Ort von P, a) wenn $PD = \lambda \cdot PF$, b) $PD + PE + PF = s$, c) $PD + PE = PF$?

Res.: a) $y = \lambda \dfrac{x \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$,

$$\text{b)}\ c\,x(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + \sin \alpha_1 (c - a) y = c(s - a) \sin \alpha_1 ,$$

$$\text{c)}\ c\,x(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) + \sin \alpha_1 (a - c) y = a c \sin \alpha_1 .$$

Es sind hierbei $P_2 P_3$ und $P_2 P_1$ als $+X$-, bzw. $+Y$-Achse genommen,

$\sphericalangle P_2 P_1 P_3 = \alpha_1$ usf., $P_2 P_3 = a$, $P_1 P_2 = c$.

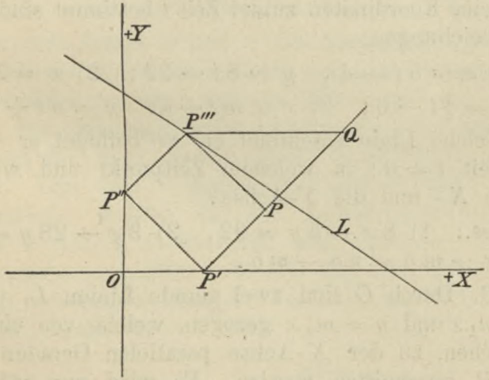

Fig. 4.

90. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie auf den Achsen eines rechtwinkligen Systems die gleichen Stücke

OP' und OP'' abschneidet; über $P'P''$ ist ein Rechteck $PP'P''P'''$ so konstruiert, daß sich P''' auf einer festen Geraden L bewegt, welche auf der X-Achse a, auf der Y-Achse b abschneidet. Was ist der Ort der Ecke P? (S. Fig. 4.)

Res.: $$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 .$$

Anmerkung: Was ergibt sich, wenn $P'P''$ parallel der Geraden $y = mx$ ist?

91. Was ist der geometrische Ort des Schnittpunktes Q der $P'P$ (s. Nr. 90) mit einer durch P''' zur X-Achse gezogenen Parallelen?

Res.: $y(a + 2b) - bx = ab$; der Ort geht durch $-a|0$ und $2b|b$.

92. Ein Punkt P bewegt sich in der Ebene so, daß seine Koordinaten zu der Zeit t bestimmt sind durch die Gleichungen

1) $x = 5t - 4$, $y = 8t - 22$; 2) $x = 7t$, $y = \frac{3}{4}t - 6$; 3) $x = mt + a$, $y = nt + b$.

Welche Linie beschreibt er, wo befindet er sich zu der Zeit $t = 0$; in welchem Zeitpunkt und wo trifft er die X- und die Y-Achse?

Res.: 1) $8x - 5y = 92$, 2) $3x - 28y = 168$, 3) $nx - my = na - mb$.

93. Durch O sind zwei gerade Linien L_1 und L_2 $y = m_1 x$ und $y = m_2 x$ gezogen, welche von einer beweglichen, zu der X-Achse parallelen Geraden in P_1 und P_2 geschnitten werden. Es wird nun auf L_1 in P_1 und auf L_2 in P_2 das Lot errichtet; beide Lote treffen sich in P. Was ist der Ort von P?

Res.: $(1 - m_1 m_2)x + (m_1 + m_2)y = 0$.

94. Von einem Dreieck $P_1 P_2 P_3$ liegt die Seite $P_2 P_3$ auf der $+X$-Achse und P_2 in O. Es soll bewiesen werden, daß der Ort für den Schwerpunkt, den Um- und Inkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt des Dreieckes je eine Gerade ist, wenn $\sphericalangle P_1 P_2 P_3$ unveränderlich bleibt und $P_2 P_3$ sich parallel weiter bewegt.

95. Eine Gerade schneidet die Schenkel eines Winkels, dessen Spitze in P_1 ist, in P_2 und P_3. Was ist der Ort für einen Punkt P, welcher $P_2 P_3$ im Verhältnis $\lambda : 1$ teilt, wenn sich $P_2 P_3$ so bewegt, daß die Summe oder Differenz von $P_1 P_3$ und $P_1 P_2$ a ist?

Res.: Betrachtet man $P_1 P_2$ als $+X$- und $P_1 P_3$ als $+Y$-Achse, so hat der Ort die Gleichung:

$$x \pm \lambda y = \frac{a \lambda}{1 + \lambda}.$$

96. Die Ecken B und C des Dreieckes ABC sind fest, und die dritte bewegt sich auf einer Geraden. Es soll bewiesen werden, daß die Ecken und der Mittelpunkt des einbeschriebenen Quadrates, von dem eine Seite auf BC liegt, gerade Linien beschreiben.

97. Von dem beweglichen Punkt P einer festen Geraden L, welche auf den Koordinatenachsen die Stücke a und b abschneidet, sind Lote auf die Koordinatenachsen gefällt. Es soll der Ort des Punktes gesucht werden, welcher die Verbindungsstrecke dieser Lote im Verhältnis $\lambda : 1$ teilt.

Res.: $$\lambda b x + a y = \frac{a b \lambda}{1 + \lambda}.$$

III. Abschnitt.

Der Kreis.

§ 6. Die Kreisgleichung; Punkt und Kreis.

98. Wie lautet die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt $a|b$ und dessen Halbmesser r ist? Was ergibt sich, wenn r zu Null wird?

1) $a = 3$, $b = 4$, $r = 7$; 2) $-5|0$, 6;
3) $-4|-6$, 3; 4) $0|8$, 8; 5) $8|15$, 17.

99. Bestimme die Schnittpunkte der in der vorigen Aufgabe gegebenen Kreise mit den Koordinatenachsen.

100. Unter welcher Bedingung liegt Punkt $x_1|y_1$ außerhalb, auf, innerhalb des Kreises um Punkt $a|b$ mit Halbmesser r?

101. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes und den Halbmesser des Kreises, der durch die Gleichung

a) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P = 0$,

b) $Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + F = 0$

dargestellt ist. Was ist der Fall, wenn $A = 0$ wird?

Beispiele:

1) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$,

2) $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 48 = 0$,

3) $4x^2 + 4y^2 - 20y - 24 = 0$,

4) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 + 10x + 7y - \frac{15}{4} = 0$.

Res.: 1) $(x-4)^2+(y-3)^2=3^2$,

2) $(x+7)^2+(y-5)^2=26$,

3) $x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$,

4) $\left(x+\frac{15}{2}\right)^2+\left(y+\frac{21}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\sqrt{159}\right)^2$.

102. Gib die geometrische Bedeutung von P in Nr. 101a an.

103. Von einem Kreis sind die Mittelpunktskoordinaten a und b und ein Punkt $x_1|y_1$ gegeben; wie lautet seine Gleichung?

104. Auf welche bestimmte Form läßt sich die Gleichung eines Kreises bringen, dessen Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt der Geraden $y=Mx$ ist und der durch Punkt $x_1|y_1$ geht?

Auflösung: Setzt man in der Kreisgleichung

$$1)\quad x^2+y^2-2ax-2by+P=0\,;$$

$$a=\frac{a'}{\lambda},\quad b=\frac{b'}{\lambda},\quad P=\frac{p'}{\lambda},$$

so geht 1) über in

$$2)\quad x^2+y^2-\frac{2a'x+2b'y-p'}{\lambda}=0\,;$$

hieraus folgt durch Multiplikation mit λ

$$3)\quad \lambda(x^2+y^2)-2a'x-2b'y+p'=0\,.$$

Mit $\lambda=0$ wird $a=\infty$, $b=\infty$ und es geht 3) über in

$$4)\quad -2a'x-2b'y+p'=0$$

oder in

$$4')\quad +2x+2\frac{b'}{a'}y+\frac{p'}{a'}=0\,.$$

Da $a|b$ auf $y = Mx$ liegt, so ist $b = Ma$, also auch $b' = Ma'$, folglich $\lim \frac{b}{a} = \lim \frac{b'}{a'} = M$. Hiermit geht 4') über in

$$5)\quad 2x + 2My - \lim \frac{p'}{a'} = 0\,;$$

und da $x_1|y_1$ auf dem Kreis liegt, so muß sein

$$6)\quad 2x_1 + 2My_1 - \lim \frac{p_1}{a_1} = 0\,.$$

Aus 5) und 6) folgt durch Entfernung von $\lim \frac{p'}{a'}$ als gesuchte Kreisgleichung:

$$7)\quad 2(x - x_1) + 2M(y - y_1) = 0$$

oder

$$7')\qquad y - y_1 = -\frac{1}{M}(x - x_1)\,.$$

Geometrische Deutung von 7')!

105. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, der durch die Punkte $x_1|y_1$, $x_2|y_2$ geht uud dessen Mittelpunkt auf der Geraden $y = Mx$ liegt?

$x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 4$, $y_2 = -3$, $y = 3x - 19$.

Res.: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

106. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, der die X-Achse im Punkt $5|0$ berührt und aus der Y-Achse eine Sehne von der Länge 10 ausschneidet?

Res.: $(x - 5)^2 + (y - 5\sqrt{2})^2 = 50$.

107. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, der die X-Achse in O berührt und durch den Punkt $15|25$ geht?

Res.: $x^2 + (y - 17)^2 = 17^2$.

108. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 geht.

Beispiele: a) $0|0$, $4|6$, $12|10$; b) $0|11$, $2|-4$, $8|12$; c) $1|2$, $13|7$, $1|7$.

Res.: a) $14{,}75|-5{,}5$, $15{,}66$;

b) $\frac{301}{61}\Big|\frac{491}{122}$ oder rund $5|4$, $8{,}5$;

c) $7|4{,}5$, $6{,}5$.

109. Die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser 50 zu finden, welcher auf der $+X$-Achse eine Sehne von der Länge 28 ausschneidet und durch den Punkt $0|8$ geht.

Res.: $(x-30)^2+(y-48)^2=50^2$.

110. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch den Punkt $32|81$ geht und die beiden Koordinatenachsen berührt.

Res.: $r=41$ oder 185.

111. Die Koordinaten der Ecken eines Dreieckes seien $x_1|y_1$ usf., die des Umkreismittelpunktes $x_0|y_0$. Es soll bewiesen werden, daß die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises der neun Punkte

$$\frac{x_1+x_2+x_3-x_0}{2} \quad \text{und} \quad \frac{y_1+y_2+y_3-y_0}{2}$$

sind.

112. Es soll die Gleichung in x und y für die Linie gefunden werden, welche bestimmt ist durch die beiden Gleichungen

$$x=a+r\cos t\,, \quad y=b+r\sin t\,,$$

wobei t ein veränderlicher Parameter und r konstant ist.

113. Ebenso, wenn $x = 2r\cos^2 t$, $y = r\sin 2t$.

114. Graphische Tafel zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke. Man bezeichne zwei durch einen Hauptpunkt O eines quadratischen Netzes (Millimeter- oder besser Doppelmillimeterpapier) gehende gerade Netzlinien als Koordinatenachsen, beschreibe um O mit den Halbmessern 1; 1,5; 2; 2,5; 3 usf. Kreise und beziffere jeden mit der zugehörigen Halbmesserzahl. Soll nun z. B. aus der Hypotenuse von der Länge 8 eines rechtwinkligen Dreieckes und der einen Kathete 3,1 die andere Kathete bestimmt werden, so sucht man auf dem Kreis 8 denjenigen Punkt, der zu der Abszisse 3,1 gehört. Die Maßzahl 7,38 seiner Ordinate, welche man abliest, gibt die Länge der andern Kathete an. — Sind die beiden Katheten 4,2 und 9,7 gegeben, so wird die Hypotenuse durch die Ziffer des Kreises angegeben, der durch den Punkt mit den Koordinaten $4{,}2|9{,}7$ geht. Ist unter den gezeichneten Kreisen keiner, der durch diesen Punkt geht, so wird ein solcher mit dem Auge eingeschaltet (d. h. seine Ziffer wird geschätzt).

Wie berechnet man mit Hilfe dieser Tafel und etwa einer noch einzuzeichnenden Geraden:

1. die Höhen von gleichseitigen Dreiecken aus der Seitenlänge und die Seite aus der Höhe?

2. die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreieckes aus der Kathete und umgekehrt?

3. die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes aus der Hypotenuse und dem spitzen Winkel β?

4. die Länge der Sehne aus dem Kreishalbmesser und ihrem Mittelpunktsabstand?

115. Ein kreisbogenförmiger Brückenbogen AA_1 soll eine Spannweite $AA_1 = 80$ m und eine Scheitelhöhe $BS = 20$ m erhalten. Wie groß sind die zu den in

Abständen von je 10 m angenommenen Punkten C_1, $C_2 \ldots$ der AA_1 gehörigen Höhen C_1D_1, C_2D_2, $\ldots$?

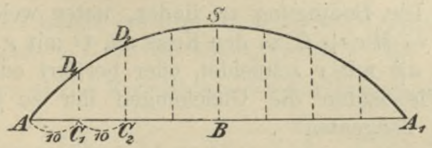

Fig. 5.

Res.: $$C_1D_1 = 10\,,$$
$$C_2D_2 = -30 + 10\sqrt{21} = 15{,}83\,,$$
$$C_3D_3 = -30 + 20\sqrt{6} = 18{,}99\,.$$

§ 7. **Kreis und Gerade; Pol und Polare.**

116. Die Koordinaten der gemeinschaftlichen Punkte eines Kreises und einer Geraden zu finden.

Beispiele:

1) $x^2 + y^2 = 289\,,\quad 8x - 15y = 289\,;$

2) $x^2 + y^2 = 100\,,\quad 7x + 24y = 300\,;$

3) $5x^2 + 5y^2 + 24x - 12y + 16 = 0\,,$
$$3x - 4y + 12 = 0\,.$$

Res.: 1) $8|-15$; 2) imaginär; 3) $-\frac{4}{12}\Big|\frac{12}{5}$, $-4|0$.

117. Die Gleichung der Tangente zu finden, welche an den um O mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis in dem zu der Abszisse x_1 gehörigen im ersten Feld liegenden Punkt gezogen ist.

a) $r = 25$, $x_1 = 7$; b) $r = 13$, $x_1 = 12$.

Res.: a) $7x + 24y = 25^2$; b) $12x + 5y = 13^2$.

118. Die Bedingung zu finden, unter welcher die Gerade $y = Mx + C$ a) den Kreis um O mit r, b) den Kreis um $a|b$ mit r schneidet, oder berührt oder nicht trifft. Wie lauten die Gleichungen der zu $y = Mx$ parallelen Tangenten?

Res.: a) $r\sqrt{1 + M^2} \lesseqgtr |C|$;

b) $r\sqrt{1 + M^2} \lesseqgtr |b - Ma - C|$.

119. Die Gleichungen der vom Punkt $x_1|y_1$ an den um O mit r beschriebenen Kreis gezogenen Tangenten zu finden.

Beispiel: $6|7$, $r = 2$.

Res.: $$y - b = \frac{-ab \pm r\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{r^2 - a^2}(x - a);$$

$3x - 4y + 10 = 0$, $15y - 8y - 34 = 0$.

120. Die Bedingung zu finden, unter welcher die durch O gehende Gerade $y = Mx$ den um Punkt $a|b$ mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis schneidet, berührt oder nicht trifft.

Res.: $$\left|\frac{b - Ma}{\sqrt{1 + M^2}}\right| \lesseqgtr r.$$

121. An den um O mit r beschriebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, daß

a) das zwischen die $+X$- und $+Y$-Achse fallende Stück derselben eine gegebene Länge s habe;

b) die zwischen dem Berührungspunkt und den Koordinatenachsen liegenden Stücke sich wie $\lambda:1$ verhalten;

c) der Inhalt des Dreieckes, das die Tangente mit der $+X$- und $+Y$-Achse bildet, gleich f^2 ist.

Res.: a) Die Koordinaten des Berührungspunktes sind

$$\frac{r}{2\sqrt{s}}\left(\sqrt{s+2r} \pm \sqrt{s-2r}\right), \quad s \geqq r\sqrt{2}\,.$$

Ist die Gleichung der Tangente in der Form $x\cos\alpha + y\sin\alpha - r = 0$ gesucht, so ergibt sich α aus

$$\sin 2\alpha = \frac{r\sqrt{2}}{s}\,.$$

b) $\sphericalangle\,\alpha$ folgt aus $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\lambda}\,.$

c) $\sphericalangle\,\alpha$ ergibt sich aus $\sin 2\alpha = \frac{r^2}{f^2}\,.$

122. Von dem Ursprung sind Tangenten an den um Punkt $a|b$ mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis gezogen. Welches sind die Gleichungen und die Längen der Tangenten?

Res.: $y = \frac{ab \pm r\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2-r^2}\,x; \quad \sqrt{a^2+b^2-r^2}\,.$

Was ergibt sich, wenn $a = r$ oder $b = r$?

123. An den um O mit $r = 12$ beschriebenen Kreis eine Tangente so zu legen, daß das zwischen dem Berührungspunkt und der $+X$-Achse liegende Stück die Länge 35 habe.

Res.: $12x + 35y = 444\,.$

124. Die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser $r = 53$ zu finden, der die Gerade $45x + 28y - 1433 = 0$ im Punkt mit der Abszisse $x_1 = 25$ berührt.

Res.: Zwei Kreise,

$$(x + 20)^2 + (y + 17)^2 = 53^2,$$

$$(x - 70)^2 + (y - 39)^2 = 53^2.$$

125. Die Gleichung eines um den Punkt $6|7$ beschriebenen Kreises zu finden, der die Gerade $y = \frac{5}{12}x - 2$ berührt.

Res.: $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 6^2$.

126. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch Punkt $9|2$ geht und die Koordinatenachsen berührt.

Res.: Zwei Kreise,

$$(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 17^2,$$

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2.$$

127. Die Koordinaten des Mittelpunktes eines Kreises zu berechnen, der durch die Punkte $3|1$ und $9|5$ geht und die X-Achse berührt.

Res.: Zwei Kreise, $\dfrac{3 \pm \sqrt{65}}{2} \Big| \dfrac{39 \mp 3\sqrt{65}}{4}$.

128. Die Gleichung des Inkreises zu finden für das von den Geraden $y = 0$, $y = \frac{3}{4}x + 3$, $y = -\frac{5}{12}x + 25$ gebildete Dreieck.

Res.: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$.

129. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der die Gerade $3x + 2y = 11$ in dem Punkt mit der Abszisse 3 berührt und durch den Punkt $9|3$ geht.

Res.: $\left(x - \frac{63}{11}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{11}\right)^2 = \frac{1300}{121}$.

130. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch die Punkte $2|4$, $5|0$ und die zu ihnen in bezug auf die Y-Achse symmetrischen Punkte geht.

Res.: $4x^2 + 4y^2 + 5y - 100 = 0$.

131. Die Gleichungen der beiden Tangenten zu finden, welche an den um O mit $r = 17$ beschriebenen Kreis so gezogen werden können, daß sie senkrecht zu der Geraden $15x - 8y = 10$ sind.

Res.: $8x + 15y = \pm 17^2$.

132. Die Gleichung der Polaren des Punktes $x_1|y_1$ in bezug auf den um O mit r beschriebenen Kreis zu finden und zu zeichnen,

$r = 12$; $7|2$, $3|4$, $5|0$, $0|-6$, $1|2$, $0|0$.

133. Die Gleichung der Polaren in Beziehung auf den um O mit r beschriebenen Kreis für den durch die Gerade $y = Mx + C$ gegebenen unendlich fernen Punkt zu finden.

Res.: $x + My = 0$.

134. Wie lautet die Gleichung der Polaren des Punktes $x_1 y_1$ a) für einen Kreis um O, dessen Halbmesser unendlich klein, b) für einen Kreis, dessen Halbmesser unendlich groß ist? In letzterem Fall sei

der Kreis (Gerade gleich Kreis von unendlich großem Halbmesser) gegeben durch die Gleichung

$$Ax + By + C = 0 .$$

Res.: a) $x_1 x + y_1 y = 0$, die Polare geht also durch O und steht auf seiner Verbindungslinie mit dem Pol senkrecht.

b) $A(x + x_1) + B(y + y_1) + 2C = 0$.

135. Die Koordinaten des Poles für die Gerade $Ax + By + C = 0$ bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ zu finden.

Beispiele:

$r = 6$: a) $7x - 5y + 12 = 0$, b) $x - 3 = 0$.

Res.: $$-\frac{Ar^2}{C} \,\Big|\, -\frac{Br^2}{C} .$$

136. Zu beweisen, daß die Polaren zu vier harmonischen Punkten ein harmonisches Büschel bilden. (S. Nr. 56.)

137. Es soll bewiesen werden, daß, wenn man von jedem von zwei Punkten auf die Polare des anderen das Lot fällt, die Längen dieser Lote sich verhalten wie die Abstände der Punkte vom Mittelpunkte. (Satz von Salmon.)

§ 8. **Der Kreis als geometrischer Ort.**

138. Durch O werden Geraden gezogen und von dem festen Punkte P auf der $+X$-Achse ($OP = c$) Lote auf sie gefällt. Es soll der Ort der Fußpunkte dieser Lote gefunden werden.

139. Durch die Punkte des um O mit r beschriebenen Kreises werden Parallelen von der Länge a in den beiden Richtungen der Geraden $y = mx + c$ abgetragen. Was ist der Ort der Endpunkte der Parallelen?

Res.: $$\left(x \mp \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 + \left(y \mp \frac{am}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 = r^2.$$

Was ist der Fall, wenn $a = r$ ist?

140. Auf der X-Achse eines Koordinatensystemes sind zwei Punkte P_1 und P_2 mit den Abszissen $+a$ und $-a$ gegeben. Durch P_1 und P_2 wird je eine Gerade gezogen, welche die Y-Achse in Q_1, bzw. Q_2 schneidet. Was ist der Ort des Schnittpunktes P der P_1Q_1 und P_2Q_2, wenn die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 sich so bewegen, daß $OQ_1 \cdot OQ_2 = a^2$ ist, und Q_1 und Q_2 stets auf derselben Seite bleiben?

Res.: $x^2 + y^2 = a^2$.

141. Gegeben Kreis K um O mit Halbmesser r. Ein Punkt P bewegt sich so,

a) daß die von ihm an K gezogenen Tangenten die Länge c haben,

b) den $\sphericalangle 2\alpha$ einschließen (besonderer Fall $2\alpha = 90^0$),

c) daß die Berührungssehne die Länge $2s$ hat.

Was ist die Gleichung für den Ort von P?

Res.: a) $x^2 + y^2 = r^2 + c^2$, b) $x^2 + y^2 = \dfrac{r^2}{\sin^2\alpha}$

$$\text{c)}\quad x^2 + y^2 = \frac{r^4}{r^2 - s^2}.$$

142. Die Grundlinie $BC = a$ eines Dreieckes ABC ist fest. Die Spitze A bewegt sich so, daß $AB:AC$

$= \lambda : 1$. Was ist der Ort von A? Was ergibt sich für $\lambda = 1$?

Res.: Nimmt man BC als $+X$-Achse, B als Ursprung, so ergibt sich

$$(1 - \lambda^2)(x^2 + y^2) + 2\lambda^2 a x - \lambda^2 a^2 = 0 .$$

143. Auf der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind zwei Punkte A_1 und A_2 mit den Abszissen $+a$ und $-a$ gegeben. Ein Punkt P bewegt sich so, daß

a) $A_1P^2 + \lambda A_2P^2 = c^2$, (Probe mit $\lambda = 1$, $c = 2a$).

b) $\triangle A_1PA_2 = \lambda A_1P^2$,

c) $\operatorname{tg} A_2A_1P = \lambda \operatorname{tg} A_1PA_2$.

Was ist der geometrische Ort von P?

Res.: a) $(1 + \lambda)(x^2 + y^2) - 2ax(1 - \lambda)$

$$+ (1 + \lambda)a^2 - c^2 = 0 ,$$

b) $\lambda(x^2 + y^2) - 2\lambda a x - a y + \lambda a^2 = 0$,

c) $x^2 + y^2 + 2\lambda a x - a^2(1 + 2\lambda) = 0$, $\quad y = 0$.

144. Was ergibt sich als Ort von P, wenn P' sich so bewegt, wie P in Nr. 143 a, b, c, und wenn P Schwerpunkt des Dreieckes A_1A_2P' ist?[1])

Res.: a) $9(1 + \lambda)(x^2 + y^2) - 6a(1 - \lambda)x$

$$+ (1 + \lambda)a^2 - c^2 = 0 ,$$

b) $9\lambda(x^2 + y^2) - 6\lambda a x - 3ay + \lambda a^2 = 0$,

c) $\left(x \pm \frac{\lambda a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}(\lambda \pm 1)$.

---

[1]) S. Neuffer, Progr. d. R.-G. Ulm 1902.

145. Um Punkt A_1 der vorigen Aufgabe ist ein Kreis mit Halbmesser r beschrieben; von dem Punkt A_2 ist nach dem beweglichen Punkt P' des Kreises ein Strahl $A_2 P'$ gezogen. Dieser ist durch P a) halbiert, b) im Verhältnis $\lambda : 1$ geteilt. Was ist der Ort von P?

Res.: $$\left(x + \frac{a(1-\lambda)}{1+\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2 \lambda^2}{(1+\lambda)^2}.$$

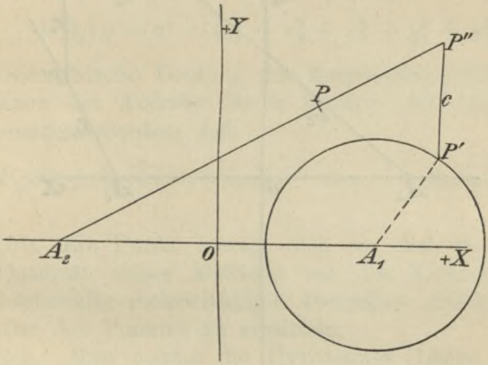

Fig. 6.

146. Durch den Punkt P' des Kreises in Aufgabe 145 ist die Parallele zu der Y-Achse gezogen und darauf in der Richtung der $+Y$-Achse $P'P'' = c$ abgetragen. Es wird AP'' durch P im Verhältnis $\lambda : 1$ geteilt.

Es ist der Ort des Teilungspunktes zu suchen. Was ergibt sich mit $c = 0$?

Res.: $$\left(x + \frac{a(1-\lambda)}{1+\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{\lambda c}{1+\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^2 r^2}{(1+\lambda)^2}.$$

147. Verallgemeinere Aufgabe 146 dahin, daß $P'P'' = c$ von P' aus in einer der beiden Richtungen $y = Mx$ abgetragen wird.

148. Um die Punkte $A_1(+a|0)$ und $A_2(-a|0)$ der X-Achse drehen sich zwei Strahlen L_1 und L_2 mit gleicher Winkelgeschwindigkeit; die Richtungs-

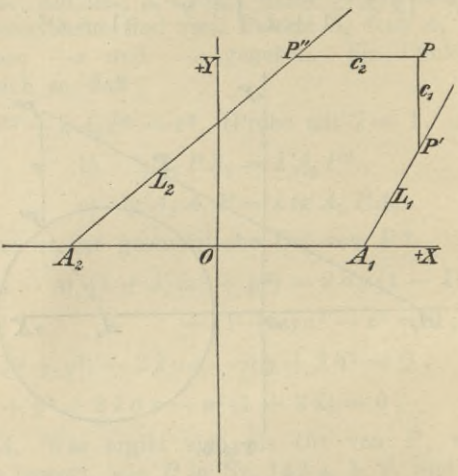

Fig. 7.

winkel ihrer Anfangslagen sind um $\sphericalangle\, \alpha$ verschieden. Auf L_1 bewegt sich der Punkt P', auf L_2 Punkt P''. Was ist der Ort eines Punktes P, der sich so bewegt, daß $P'P = c_1$ und parallel zur Y-Achse, $P''P = c_2$ und parallel zur X-Achse ist?

$$\text{Res.:}\ \operatorname{tg}\alpha\,(x^2 + y^2 - c_2 x - c_1 y + a^2 - a c_2) = c_1 x + (2a - c_2) y + c_1 c_2 - a c_1 .$$

Besondere Fälle:

$$1)\ \alpha = 45^0;\quad 2)\ \alpha = 45^0,\quad c_2 = c_1 .$$

149. Den geometrischen Ort eines Punktes P zu ermitteln, der sich so bewegt, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von drei gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3 gleich c^2 ist.

Res.: $3(x^2+y^2) - 2(x_1+x_2+x_3)x - 2(y_1+y_2$
$+ y_3)y = c^2 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)$.

Geometrische Deutung des Kreismittelpunktes.

Kann die Aufgabe für n Punkte und dahin verallgemeinert werden, daß

$$k_1 \cdot P_1P^2 + k_2P_2P^2 + k_3P_3P^2 + \ldots + k_nP_nP^2 = c^2$$

ist?

150. Ein Punkt bewegt sich so, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Katheten eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieckes gleich d^2 ist; den Ort des Punktes zu ermitteln.

Res.: Man nehme die Hypotenuse (Länge $2c$) als X-Achse, ihren Halbierungspunkt als O, dann ergibt sich der Kreis $x^2 + (y-c)^2 = d^2$.

151. Gegeben sei ein Kreis K von Halbmesser r um O. Von dem festen gegebenen Punkt P wird ein Strahl PP' nach K gezogen und durch Q im Verhältnis $\lambda : 1$ geteilt. Es soll der Ort von Q gefunden werden, wenn P' auf K wandert.

Res.: Die Koordinaten von P seien $x_1|y_1$;

$$\left(x - \frac{x_1}{1+\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1}{1+\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\lambda r}{1+\lambda}\right)^2.$$

152. Auf der Strecke $P_1 P_2 = 2a$ sind in P_1 und P_2 zwei Lote L_1 und L_2 errichtet; durch P_1 und P_2 werden zwei Strahlen gezogen, welche L_2 und L_1 auf der nämlichen Seite von $P_1 P_2$ in Q_2 und Q_1 treffen. Es soll der Ort des Schnittpunktes P von $P_1 Q_2$ und $P_2 Q_1$ gefunden werden, wenn sich die Strahlen um P_1 und P_2 so drehen, daß stets $P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2 = 4a^2$ ist.

Res.: Ein Kreis über $P_1 P_2$ als Durchmesser.

153. Die Punkte Q_1 und Q_2 (s. Aufgabe 152) bewegen sich auf derselben Seite von $P_1 P_2$ so, daß $P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2 = a^2$ ist. Q_1 und Q_2 werden mit dem Halbierungspunkt O von $P_1 P_2$ verbunden, ferner werden P_1 und P_2 mit den Halbierungspunkten C_1 und C_2 von $O Q_1$ und $O Q_2$ verbunden. Was ist der Ort des Schnittpunktes P von $P_1 C_1$ und $P_2 C_2$?

Res.: O Ursprung, $P_1 P_2$ X-Achse, $x^2 + y^2 = a^2$.

154. Ein um O mit r beschriebener Kreis schneidet die Y-Achse in P_1. Auf der in P_1 gezogenen Tangente bewegt sich Punkt P'; von P' wird die zweite Tangente gezogen, welche K in P'' berührt. Es soll der Ort für den Höhenschnittpunkt P im Dreieck $P_1 P' P''$ gefunden werden.

Res.: $x^2 + (y - r)^2 = r^2$.

155. In dem Endpunkt P_2 einer Strecke $P_1 P_2$ ist ein Lot gezogen, auf welchem sich ein Punkt P' bewegt. Auf $P_1 P'$ liegt P so, daß $P_1 P' \cdot P_1 P = 4r^2$ ist. Es soll der Ort von P gefunden werden.

Res.: P_2 Nullpunkt, $P_1 P_2$ Y-Achse, $x^2 + (y - r)^2 = r^2$.

156. Von dem Punkt P_1 wird nach einem auf der Geraden L beweglichen Punkt P' der Strahl $P_1 P'$

gezogen und auf demselben Punkt P so bestimmt, daß $P_1P \cdot P_1P' = a^2$ ist. Es ist der Ort von P zu finden. Der Abstand des Punktes P_1 von L ist b; P_1P und PP' sollen gleichgerichtet sein. L sei X-Achse, das Lot von P_1 auf L sei Y-Achse.

Res.: $$x^2 + \left(y - \frac{2\,b^2 - a^2}{2\,b}\right)^2 = \frac{a^4}{4\,b^2}\,.$$

Was ergibt sich mit

1) $a = 0$, 2) $b = 0$, 3) $b = a$?

Anmerkung: Nimmt man P_1 als Pol und das Lot $P_1P_2 \perp L$ als Polarachse eines Koordinatensystemes, so ist die Ortsgleichung $r = \frac{a^2}{b}\cos\varphi$.

157. Von dem Ursprung O ist nach dem auf einem Kreis (Mittelpunkt $\alpha|\beta$, Halbmesser ϱ) wandernden Punkt P_1 der Strahl OP_1 gezogen und auf ihm P so bestimmt, daß $OP \cdot OP_1 = k^2$. Es soll der Ort von P bestimmt und für den Fall, daß der Kreis durch O geht, untersucht werden. (Reziproke Radien.)

Res.:
$$(\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2)(x^2 + y^2) - 2\,k^2\,(\alpha\,x + \beta\,y) + k^4 = 0\,.$$

Geht der Kreis durch O, so ist $\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = 0$, also $\alpha\,x + \beta\,y - \frac{k^2}{2} = 0$ Ortsgleichung.

158. Im Abstand a von O auf der $+X$-Achse ist der Punkt P_1 gegeben, von welchem aus die in dem um O mit Halbmesser r beschriebenen Kreis bewegliche und veränderliche Sehne $P'P''$ stets unter einem

rechten Winkel gesehen wird. Was ist der Ort des Poles P von $P'P''$?

Res.: $(a^2 - r^2)(x^2 + y^2) - 2\,a\,r^2 x + 2\,r^4 = 0$.

159. Den geometrischen Ort des Halbierungspunktes der Sehne $P'P''$ von Aufgabe 158 zu finden. Was ist der Fall: 1) wenn $a = 0$, 2) wenn $a = r$ ist? (Geometrische Betrachtung dieses Falles!)

Res.: $$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2\,r^2 - a^2}{4}\,.$$

160. Den Ort des Fußpunktes des von P_1 auf die Sehne $P'P''$ in Aufgabe 158 gefällten Lotes zu finden.

Res.: Derselbe Ort wie in 159. (Geometrischer Nachweis!)

161. Durch den Endpunkt P_1 eines Durchmessers $P_1 P_2$ eines Kreises vom Halbmesser r ist die Sehne $P_1 P'$ gezogen; sie wird über P' hinaus 1) um $P'P = P_1 P'$, 2) $P'P = \lambda \cdot P_1 P'$ verlängert. Was ist der Ort von P, wenn P' auf dem Kreis wandert? $P_1 P_2$ $+X$-Achse, P_1 Nullpunkt.

Res.: 2) $(x - \lambda\, r)^2 + y^2 = (\lambda\, r)^2$.

162. Zu beweisen, daß der Ort eines Punktes, der sich so bewegt, daß die Fußpunkte der Lote, die von ihm auf die drei Seiten eines Dreieckes gefällt werden, in gerader Linie liegen, der Umkreis desselben ist.

§ 9. Zwei oder mehrere Kreise.

163. Ein Kreis K_1 ist gegeben durch seinen Mittelpunkt $a_1|b_1$ und seinen Halbmesser r_1, ein zweiter K_2 durch $a_2|b_2$ und r_2.

Welche Bedingungen müssen stattfinden,

a) wenn K_1 und K_2 sich in zwei reellen und verschiedenen Punkten treffen,

b) wenn sie sich von außen,

c) wenn sie sich von innen berühren sollen,

d) wenn K_2 völlig außerhalb K_1,

e) wenn K_2 völlig innerhalb K_1 liegen soll, ohne daß sie einen Punkt gemeinschaftlich haben?

164. Was ist die Bedingung dafür, daß die Kreise

$$1)\quad x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

und

$$2)\quad x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

konzentrisch sind?

165. Wie lautet die Gleichung eines beliebigen Kreises, welcher durch die Schnittpunkte des Kreises $K_1 = 0$ mit dem Kreis $K_2 = 0$ geht?

Res.: $K_1 + \lambda K_2 = 0$.

Beispiele:

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0\,,$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0\,.$$

166. Wie lautet die Gleichung eines Kreises, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise des vorigen Beispieles und a) durch den Nullpunkt, b) durch den Punkt $5|-2$ geht?

Res.: a) $13x^2 + 13y^2 - 90x - 8y = 0\,,\quad \lambda = \frac{10}{3}$;

b) $6x^2 + 6y^2 - 43x - 11y + 19 = 0\,,\quad \lambda = \frac{17}{11}$.

167. Es soll nachgewiesen werden, daß die Kreise

$$1)\ x^2 + y^2 - 400 = 0\,,$$

$$2)\ x^2 + y^2 - 10x - 24y + 120 = 0$$

sich berühren; es soll sodann die Gleichung eines dritten Kreises gefunden werden, der die X-Achse und die beiden Kreise in ihrem Berührungspunkt berührt.

Res.: $5x^2 + 5y^2 - 96x - 40y + 80 = 0\,,$

$$x^2 + y^2 - 480y - 200x + 1000 = 0\,.$$

168. Durch die Schnittpunkte zweier Kreise K_1 und K_2 einen Kreis von gegebenem Halbmesser r zu legen.

Beispiel: $K_1 \equiv x^2 + y^2 + 24x - 14 = 0\,,$

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 24 = 0\,, \quad r = 5\,.$$

Res.: Zwei Kreise:

$$8x^2 + 8y^2 + 24x - 182 = 0\,,$$

$$9x^2 + 9y^2 - 12x - 221 = 0\,.$$

169. Durch die Schnittpunkte der Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ einen Kreis zu legen, dessen Mittelpunkt auf der Geraden L liegt.

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0\,,$$

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0\,,$$

$$L \equiv 8x - 3y - 2 = 0\,.$$

Res.: $x^2 + y^2 - 14x - 36y + 92 = 0\,.$

170. Die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kreise zu finden.

171. Gegeben ist die Gleichung eines Kreises $K_1 = 0$ und die einer ihn in P berührenden Geraden $L = 0$; es soll die Gleichung irgend eines Kreises angegeben werden, der K in P berührt.

Res.: $K + \lambda L = 0$.

Was ist der Fall, wenn an Stelle von K ein Punkt (Nullkreis) tritt?

172. Die Gleichung eines Kreises K_4 zu finden, der drei gegebene Kreise K_1, K_2, K_3 berührt.

173. Was ist die Potenz π des Punktes $x|y$ in Beziehung auf den Kreis 1) um $a|b$ mit r, 2) um O mit r, und was ist 3) die Potenz des Nullpunktes in bezug auf den Kreis um $a|b$ mit r?

Res.: 1) $\pi = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$,

2) $x^2 + y^2 - r^2$, 3) $a^2 + b^2 - r^2$.

174. Was ist der Ort eines Punktes, dessen Potenz in Beziehung auf den um $a|b$ mit r beschriebenen Kreis π ist?

Res.: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 + \pi$.

175. Gegeben sind zwei Kreise K_1 und K_2 durch ihre Gleichungen

1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 25 = 0$,

2) $x^2 + y^2 - 15x - 2y + 2 = 0$.

a) Was ist die Gleichung ihrer Potenzlinie?

b) Welcher Punkt der X-Achse hat gleiche Potenz für beide Kreise und was ist diese?

Res.: a) $3x + 2y = 9$, b) $3|0$; 34.

176. Den Punkt gleicher Potenz für drei Kreise

$$1)\ x^2+y^2-36=0\,,\quad 2)\ x^2+y^2-2x-5y-5=0\,,$$
$$3)\ x^2+y^2+6x+11y-125=0$$

zu finden und die Länge der von diesem Punkt an die Kreise gezogenen Tangenten zu berechnen.

Res.: $13|1$; $\sqrt{134}$.

177. Es soll ein Kreis gefunden werden, der den Kreis $x^2+y^2-2x+5y-5=0$ rechtwinklig schneidet, durch den gegebenen Punkt $6|1$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $9x+4y=47$ liegt.

Res.: Der Mittelpunkt ist $7|-4$, der Halbmesser $\sqrt{26}$.

178. Den Ort für den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden, der die Peripherie zweier gegebener Kreise halbiert.

Res.: Sind $a|b$ und $a_1|b_1$ die Mittelpunktskoordinaten, r und r_1 die Halbmesser, so ist die Ortsgleichung:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+r^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+r_1^2$$

oder

$$2(a_1-a)x+2(b_1-b)y=a_1^2+b_1^2+r_1^2-(a^2+b^2+r^2),$$

der Ort ist also eine Parallele zur Potenzlinie.

179. Zu beweisen, daß die Kreise, welche über den als Durchmesser genommenen Diagonalen eines vollständigen Vierseits beschrieben werden, dieselbe Potenzlinie haben.

180. Zu suchen ist der Ort für einen Punkt P, der sich so bewegt, daß die Summe der Quadrate der von ihm an zwei gegebene Kreise K_1 und K_2 gezogenen Tangenten PP' und PP'' gleich a^2 ist.

Res.: Wird M_1 als Ursprung, $M_1 M_2$ als X-Achse und $M_1 M_2 = c$ genommen, so ergibt sich als Ort der Kreis

$$x^2 + y^2 - r_1^2 + (x - c)^2 + y^2 - r_2^2 = a^2 .$$

Bemerkungen:

1) Besondere Fälle: a) $r_1 = 0$, b) $r_2 = 0$.

2) Welcher Ort ergibt sich, wenn statt der Summe die Differenz der beiden Quadrate genommen wird, welcher Ort, wenn $m_1 PP'^2 + m_2 PP''^2 = a^2$ sein soll?

3) Läßt sich die gegebene Aufgabe auf mehr als zwei Kreise ausdehnen?

181. Gegeben ist die Gleichung

$$1)\quad x^2 + y^2 - 2\lambda y + p = 0 ,$$

worin λ ein veränderlicher Faktor ist. Es soll bewiesen werden:

a) daß alle Kreise, welche durch 1) dargestellt sind, die X-Achse in denselben beiden Punkten schneiden, also ein Büschel bilden;

b) daß die Polaren des festen Punktes $x_1|y_1$ in bezug auf diese Kreise alle durch einen und denselben Punkt gehen, und es sollen die Koordinaten dieses Punktes angegeben werden.

Gang für b): Schreibe die Gleichung der Polaren des Punktes $x_1|y_1$ in bezug auf 1) an; sie kann in die Form $L_1 + \lambda L_2 = 0$ gebracht werden, wobei L_1 und L_2 lineare Ausdrücke in x und y sind, folglich geht die Polare für jeden Wert von λ durch den Schnittpunkt der Geraden $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$. Schnittpunkt:

$$\frac{y_1^2 - p}{x_1} \Big| y_1 .$$

182. Gegeben eine Gerade $y = c$. Es sollen die Koordinaten ihres Poles in bezug auf das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - 2\lambda y + p = 0$ gefunden und ermittelt werden, welche Werte man der Konstanten c zu geben hat, wenn die Gerade in bezug auf jeden Kreis des Büschels denselben Pol haben soll.

Res.: $0 | \pm \sqrt{p}$.

183. Den Ort der Mittelpunkte der Kreise zu finden, die von zwei gegebenen Punkten O und Q unter gegebenen Winkeln α und β gesehen werden.

Res.: Nimmt man O als Ursprung und OQ (Länge a) als $+X$-Achse, so findet man den Kreis

$$(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)(x^2 + y^2) + 2\sin^2\beta\, a\, x = a^2 \sin^2\beta\,.$$

Beispiel:

$$\alpha = 90^0, \quad \beta = 45^0; \quad (x + 2a)^2 + y^2 = 6a^2\,.$$

IV. Abschnitt.

Die Parabel.

---

§ 10. Hauptlagen; wichtigste Gleichungsformen.

Der Parameter, welcher gleich dem vierfachen Abstand des Brennpunktes vom Scheitel ist, sei mit $2p$ bezeichnet.

Die Gleichung der Parabel, deren Scheitel in O und deren Achse auf der X-Achse liegt, ist

$$y^2 = 2px\,.$$

Je nachdem $2p$ positiv oder negativ ist, fällt die Parabelachse mit der $+X$- oder $-X$-Achse zusammen, d. h. öffnet sich die Parabel in der Richtung der $+X$- oder $-X$-Achse.

184. Wie lautet die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel die Koordinaten $a|b$ sind, deren Parameter die Länge $2p$ und deren Achse die Richtung 1) der $+X$-, 2) $-X$-, 3) der $+Y$-, 4) der $-Y$-Achse hat?

Res.: a) $(y-b)^2 = 2p(x-a)$,

b) $(y-b)^2 = -2p(x-a)$,

c) $(x-a)^2 = 2p(y-b)$,

d) $(x-a)^2 = -2p(y-b)$.

Zeichne für jeden der vier Fälle aus freier Hand den ungefähren Verlauf der Kurve in dem Koordinatensystem, wenn a und b positiv sind; ebenso wenn $a=0$ und $b \gtrless 0$, $a \gtrless 0$ und $b=0$ ist.

185. Zeige durch Zurückführung auf eine der in Nr. 184 gegebenen Formen, daß jede der folgenden Gleichungen eine Parabel darstellt, und gib für jede die Lage und Bestimmungsstücke an.

1) $y^2 - 6y - 12x + 57 = 0$,

2) $y^2 + 6x + 2y + 31 = 0$,

3) $y^2 + 10x + 50 = 0$,

4) $y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$,

5) $x^2 + 6x + \frac{1}{2}y + 6\frac{1}{2} = 0$,

6) $x^2 - \frac{9}{4}y - 18 = 0$,

7) $x^2 + Bx + Cy + D = 0$,

8) $y^2 + Bx + Cy + D = 0$.

Res.: 1) $(y-3)^2 = 12(x-4)$, Scheitelkoordinaten $4|3$, Parameter 12, Achsenrichtung in der $+X$-Achse;

$$7)\ -\frac{B}{2}\Big|\frac{B^2-4D}{4C},\ C;\quad 8)\ \frac{C^2-4D}{4B}\Big|-\frac{C}{2},\ B.$$

186. Von einer Parabel, deren Scheitel in O und deren Achse auf der $+X$-Achse liegt, ist ein Punkt $x_1|y_1$ gegeben. Es soll ihre Gleichung gefunden werden.

187. Es soll die Gleichung einer Parabel gefunden werden, wenn drei Punkte derselben durch ihre Koordinaten gegeben sind und ihre Achse parallel einer Koordinatenachse ist.

Beispiele: Bei 1), 2), 4) ist die Kurvenachse parallel der X-Achse, bei 3) und 5) parallel zur Y-Achse.

1) $0|0$, $0|0$, $\frac{5}{3}|5$; 2) $-5|3$, $1|9$, $19|-9$;
3) $-12|2$, $-18|8$, $0|98$; 4) $0|-17$, $0|7$, $6|+1$.

$$5)\ 0|-(a+2b),\quad \frac{2b^2}{p}-a-2b|+a,$$
$$\frac{2b^2}{p}-a-2b|-a.$$

Res.: 1) $y^2 = 15x$; 2) $(y-3)^2 = 6(x+5)$;
3) $(x+14)^2 = 2y$; 4) $(y+5)^2 = -18(x-8)$;

$$5)\ y^2 = \frac{a^2 p}{2b^2}(x+a+2b).$$

188. Zu zeigen, daß ein kleiner Teil einer Kreislinie annäherungsweise als Bogen einer Parabel, deren Parameter gleich dem Kreisdurchmesser ist, aufgefaßt

werden kann. Welches ist dann die Lage des Brennpunktes? (Brennspiegel = Paraboloidsegment = Kugelhaube von kleiner Höhe.)

189. Ein Brückenbogen $A_1 O A$ soll die Form einer Parabel vom Parameter 10 erhalten; die Spannweite $A_1 A$ soll 24 m werden. Wie groß sind die Höhen

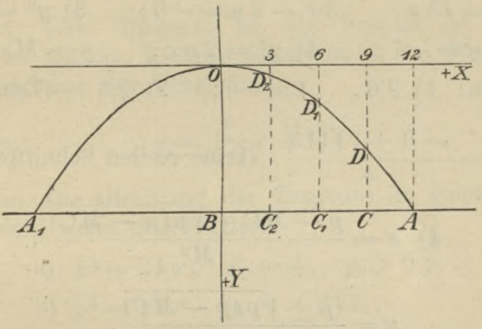

Fig. 8.

CD, $C_1 D_1 \ldots$, welche zu den in Abständen von je 3 m angenommenen Punkten C, $C_1 \ldots$ gehören?

Res.: 6,3; 10,8; 13,5; 14,4 m.

190. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten $-10|42$, $5|-3$. Die Strecke $P_1 P_2$ wird durch Q im Verhältnis $\lambda : 1$ geteilt. Es soll λ so bestimmt werden, daß Q auf der Parabel $y^2 = 18\,x$ liegt.

Res.: $\lambda = 4$ oder -6.

§ 11. **Sekante, Tangente.**

191. Die gemeinschaftlichen Punkte einer Parabel und einer Geraden zu finden.

Beispiele: 1) $y^2 = 18x$, $6x + y = 18$; 2) $y^2 = 15x$, $3x - 2y = -5$; 3) $y^2 = 10x$, $2x - y = -7$, 4) $y^2 = 2px$, $y = Mx + C$.

Res.: 1) $2|6$, $4{,}5|-9$; 2) $\frac{5}{3}|5$ (Tangente);

3) $x = \dfrac{-9 \pm i\sqrt{115}}{4}$ (keine reellen Schnittpunkte);

$$4)\quad x = \frac{p - MC \pm \sqrt{p(p - MC)}}{M^2},$$

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p(p - MC)}}{M}.$$

192. Beweise aus dem Ergebnis des Beispieles 4) von Nr. 191, daß die Halbierungspunkte paralleler Sehnen, deren Richtungskoeffizient M ist, auf dem Durchmesser $y = \dfrac{p}{M}$ liegen.

193. Beweise, daß die Gerade $y = Mx + \dfrac{p}{2M}$ die Parabel $y^2 = 2px$ berührt und daß $y = \dfrac{p}{M}$ die Ordinate des Berührungspunktes ist. Zeige ferner hieraus und aus dem Abschnitt der Tangente auf der Y-Achse, daß der Scheitel die Subtangente halbiert. (Hieraus folgt eine Tangentenkonstruktion.)

194. An die Parabel $y^2 = 2px$ ist eine Tangente zu ziehen, welche mit der $+X$-Achse einen Winkel von a) 45^0, b) 60^0, c) α^0 macht. — Wie viel zu einer Geraden parallele Tangenten an eine Parabel sind möglich?

Res.: c) $y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{p}{2} \operatorname{ctg} \alpha$.

195. Eine Tangente an die Parabel $y^2 = 2px$ schneidet auf der Y-Ache das Stück C ab. Wie lautet die Gleichung der Tangente?

Res.: $$y = \frac{p}{2C} x + C.$$

196. Die Gleichung der Tangente im Punkt $x_1 | y_1$ zu finden, wenn gegeben ist:

a) $y^2 = 24x, \quad x_1 = \frac{2}{3}, \quad y_1 > 0$;

b) $y^2 = 14x, \quad y_1 = -2\sqrt{7}$;

c) $y^2 = -10x, \quad x_1 = -\frac{2}{5}, \quad y_1 < 0$.

Res.: a) $y = 3x + 2$; b) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{7}(x + 2)$;

c) $y = 2{,}5x + 1$.

197. Die Gleichung einer Parabel zu finden, welche die Gerade $y = Mx + C$ berührt, ihren Scheitel in O und ihre Achse auf der $+X$-Achse hat.

Res.: $y^2 = 2CMx$.

198. Die Gleichungen der beiden vom Punkt $x_1 | y_1$ an die Parabel $y^2 = 2px$ möglichen Tangenten zu finden.

Res.: $$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1}(x - x_1).$$

Wann sind die beiden Tangenten reell und verschieden, wann reell und zusammenfallend oder imaginär?

199. Die Gleichungen der Tangenten, die vom Nullpunkt an die Parabel $(y-b)^2 = 2p(x-a)$ gezogen werden können, zu finden.

Res.: $$y = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 2ap}}{2a} x .$$

200. Die Gleichung der Normalen im Punkt $x_1|y_1$ der Parabel, sowie die Länge der Subnormalen und die der Normalen — letztere zwischen $x_1|y_1$ und der X-Achse genommen — zu finden.

Res.: $y_1 x + py = x_1 y_1 + p y_1$; p; $\sqrt{p^2 + y_1^2}$.

Aus der Länge der Subnormalen folgt eine Konstruktion der Normalen im Punkt $x_1|y_1$.

201. Die Gleichungen der vom Punkt P $(x_1|0)$ der X-Achse an der Parabel $y^2 = 2px$ möglichen Normalen zu finden. Wie verlaufen diese für $x_1 = \frac{3p}{2}$, wie für $x_1 = p$? Für welche Werte von x_1, d. h. für welche Lage von P sind keine Normalen möglich?

Res.: $py = \pm (x - x_1)\sqrt{2p(x_1 - p)}$.

202. Die Gleichung der Tangente zu finden, die senkrecht auf der Geraden $y = Mx + C$ steht.

Res.: $$y = -\left(\frac{x}{M} + \frac{Mp}{2}\right).$$

203. An die Parabel $y^2 = 2px$ eine Normale zu ziehen, welche senkrecht zu der Geraden $y = -\frac{2}{5}x + 12$ ist.

Res.: $10x - 4y = 412{,}5$.

204. Durch den Punkt $x_1|y_1$ die Sehne zu ziehen, welche in diesem Punkt halbiert wird.

Beispiel: $y = -12x$; $x_1 = 3$, $y_1 = 7$.

Res.: $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$; $6x + 7y = 67$.

205. Wie lautet für die Parabel $y^2 = 2px$ die Gleichung des Durchmessers, der die unter dem Winkel von 45^0 gegen die Achse gezogenen Sehnen halbiert?

Res.: $y = p$.

206. Die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten für die Parabel $y^2 = 2px$ und den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ zu finden.

Beispiel: $y^2 = 15x$, $x^2 + y^2 = 8^2$.

Res.: $y = \pm\frac{3}{4}x \pm 10$.

207. Um den Punkt $a|0$ der X-Achse soll ein Kreis beschrieben werden, der die Parabel $y^2 = 2px$ berührt.

Res.: $(x - a)^2 + y^2 = p(2a - p)$.

Wie verläuft der Halbmesser zum Berührungspunkt? Für welche Werte von a ergibt sich kein Kreis? Wie gestaltet sich die Berührung, wenn $a = p$?

208. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 2px$ und auf ihr der Punkt P $(a|b)$. Es soll die Gleichung dieser Parabel für ein Koordinatensystem gefunden werden, dessen Abszissenachse (PX') der durch P gezogene Durchmesser und dessen Ordinatenachse (PY') die in P gezogene Parabeltangente ist.

Res.: $y'^2 = 2(2a + p)x' = 2p'x'$.

Anmerkung: Man nennt $2(2a+p)$ den Nebenparameter.

209. Zu beweisen, daß der Nebenparameter $2p'$ gleich der durch den Brennpunkt parallel zur Y-Achse gezogenen Sehne ist.

210. Die Gleichung der Tangente in Punkt $a'|b'$ an die Parabel in dem in Nr. 208 gegebenen schiefen System zu finden.

Res.: $b'y' = p'(x' + a')$.

§ 12. Pol und Polare.

211. Die Gleichung der Polaren eines Punktes in Beziehung auf eine Parabel zu finden.

Beispiele:

a) $y^2 = 14x$, $\quad 7|8$; b) $y^2 = -5x$, $\quad 3|-7$.

212. Die Koordinaten des Poles der Geraden

a) $y = Mx + C$, b) $mx + ny = c$,

in bezug auf die Parabel $y^2 = 2px$ zu finden. Wo liegt der Pol, wenn $m = 0$, oder $n = 0$, oder $c = 0$?

Res.: $\dfrac{C}{M}\Big|\dfrac{p}{M}$; $\quad -\dfrac{c}{m}\Big|-\dfrac{pn}{m}$.

213. Die Gleichung der Polaren des durch die Gerade $y = Mx + C$ gegebenen unendlich fernen Punktes zu bestimmen.

Res.: $y = \dfrac{p}{M}$ (Verlauf, Folgerung, vgl. Nr. 192).

214. Den Pol des Durchmessers $y = k$ zu finden.

Res.: Es ist der unendlich ferne Punkt der Geraden

$$y = \frac{p}{k}.$$

215. Zu beweisen, daß, wenn man durch einen Punkt P einen Durchmesser zieht, welcher die Parabel in C und seine Polare in D trifft, $PC = CD$ ist.

216. Es soll durch den Punkt $x_1|y_1$ eine Sehne in der Parabel $y^2 = 2px$ gezogen werden, welche durch den Durchmesser $y = k$ halbiert wird.

Res.: $y - y_1 = \frac{p}{k}(x - x_1)$; besonderer Fall $k = 0$.

217. Die Gleichung der Polaren des Brennpunktes der Parabel $y^2 = 2px$ zu finden.

218. Zu beweisen, daß die Lote, welche man von zwei beliebigen Punkten der Scheiteltangente auf die zugehörigen Polaren fällt, sich auf der X-Achse schneiden.

219. Zu beweisen, daß das vom Brennpunkt auf eine Tangente gefällte Lot sie in einem Punkt der Scheiteltangente trifft.

220. Zu beweisen, daß die Länge einer durch den Brennpunkt gezogenen Parabelsehne gleich dem vierfachen Brennstrahl nach dem Berührungspunkt der ihr parallelen Tangente ist.

221. Zwei Punkte P_1 und P_2 haben die Polaren L_1 und L_2. Es soll bewiesen werden, daß der Quotient aus dem Verhältnis der durch eine Gerade L_3 auf P_1P_2 erzeugten Abschnitte und dem Verhältnis der Abstände des Poles der L_3 von L_1 und L_2 konstant ist.

§ 13. Geometrische Örter.

222. Vom Scheitel O der Parabel $y^2 = 2px$ werden Sehnen gezogen und es wird jede Sehne OP a) um sich selbst, b) um ihr Doppeltes, c) um ihre Hälfte, d) um das λ fache bis P_1 verlängert. Was ist der Ort von P_1?

Res.: d) $y^2 = 2(1 + \lambda)px$.

223. Vom Scheitel O der Parabel $y^2 = 2px$ werden Sehnen gezogen und es wird jede Sehne OP von O aus durch P_1 a) halbiert, oder im Verhältnis b) $2:3$, c) $\lambda:1$ geteilt. Was ist der Ort von P_1?

Res.: c) $y^2 = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda}px$.

224. Durch jeden Punkt P der Parabel $y^2 = 2px$ wird eine Parallele zur X-Achse gezogen und darauf in der Richtung a) der $+X$-Achse, b) der $-X$-Achse, c) der $+Y$-Achse, d) der $-Y$-Achse ein Stück $PP_1 = c$ abgetragen. Was ist der Ort von P_1?

Res.: $y^2 = 2p(x \mp c)$: $(y \mp c)^2 = 2px$.

225. Die Ordinaten der Parabel $y^2 = 2px$ werden a) halbiert, b) von der Achse aus im Verhältnis $\lambda:1$ geteilt, c) um sich selbst, d) um das λ fache verlängert. Was ist der Ort des Teilpunktes, bzw. des Endpunktes der Verlängerungen?

Res.: a) und b) $y^2 = \dfrac{2\lambda^2}{(\lambda+1)^2}px$,

c) und d) $y^2 = 2(\lambda+1)^2 px$.

226. Durch jeden Punkt der Parabel $y^2 = 2px$ wird eine Parallele zur X-Achse gezogen und darauf die Länge der zugehörigen Ordinate abgetragen. Was ist der Ort des Endpunktes des abgetragenen Stückes? (Die negativen Ordinaten sind in der Richtung der $-X$-Achse abzutragen.)

Res.: $$(y+p)^2 = 2p\left(x+\frac{p}{2}\right).$$

227. Jeder Punkt der Parabel $y^2 = 2px$ wird um die Strecke c in der Richtung einer Geraden, die mit

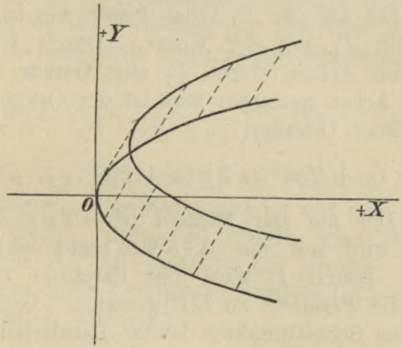

Fig. 9.

der $+X$-Achse den Winkel α macht, verschoben. Was ist der Ort der erhaltenen Punkte?

Res.: $(y - c\sin\alpha)^2 = 2p(x - c\cos\alpha)$.

228. Durch den Punkt $x_1|y_1$ werden Sekanten an die Parabel $y^2 = 2px$ gezogen. Was ist der Ort der

Halbierungspunkte der auf ihnen abgeschnittenen Sehnen? Was ergibt sich, wenn $x_1 = 0$ und

1) $x_1 \gtreqless 0$, 2) $x_1 = \frac{p}{2}$ 3) $x_1 = -\frac{p}{2}$ oder 4) $x_1|y_1$

ein Parabelpunkt ist?

Wink: Der Ortspunkt ist Schnittpunkt der Sekante mit dem Durchmesser, der ihrer Richtung zugeordnet ist.

Res.: $$\left(y - \frac{y_1}{2}\right)^2 = p\left(x + \frac{y_1^2}{4p} - x_1\right).$$

229. Durch einen Punkt P der Parabel $y^2 = 2px$ wird das Lot auf die X-Achse gefällt bis zum zweiten Schnittpunkt P_1 mit der Kurve. Durch P wird die Parallele zur Achse, durch P_1 eine Gerade unter 45^0 gegen die Achse gezogen; was ist der Ort des Schnittpunktes dieser Geraden?

Res.: $(y + 2p)^2 = 2p(x + 2p)$.

230. Der auf der Parabel $y^2 = 2px$ bewegliche Punkt P wird auf die X-Achse senkrecht nach Q projiziert. Durch P wird die Parallele zur Achse, durch Q die Parallele zu OP gezogen. Gesucht wird der Ort des Schnittpunktes beider Parallelen.

Res.: $y^2 = px$.

231. Vom Brennpunkt der Parabel $y^2 = 2px$ werden Strahlen nach den Punkten der Kurve gezogen und jeder wird um sein λ faches verlängert. Was ist der Ort der Endpunkte der Verlängerungen?

Res.: $$y^2 = 2p(\lambda + 1)\left(x + \frac{\lambda p}{2}\right).$$

232. Es soll der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis (diesen von außen) berühren, gefunden werden.

Man nehme die Gerade als Y-Achse und das Lot FO vom Mittelpunkt F dieses Kreises auf sie als X-Achse. Es sei $FO = c$, der Kreishalbmesser r.

Res.: $y^2 = 2(r+c)\left(x + \frac{r-c}{2}\right)$. (Probe aus $r = 0$.)

233. Den Ort für den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, der eine gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Kreis vom Halbmesser r rechtwinklig schneidet.

Die Gerade sei Y-Achse, das Lot vom Mittelpunkt auf sie sei X-Achse, die Abszisse des Mittelpunktes sei c.

Res.: $y^2 = 2c\left(x + \frac{r^2 - c^2}{2c}\right)$. (Probe aus $r = 0$.)

234. Zu der X-Achse ist die Parallele L im Abstand b gezogen. Der Nullpunkt ist mit dem Punkt P' der L verbunden, durch P' ist die Parallele zu der Y-Achse und auf OP' in O das Lot gezogen. Welchen Ort beschreibt der Schnittpunkt P dieser beiden Geraden, wenn P' auf L wandert?

Res.: $x^2 = -by$.

235. Über $BC = a$ steht das Dreieck ABC mit der zu BC gehörigen Höhe h. Welchen Ort beschreibt der Höhenschnitt H des Dreieckes, wenn A sich auf einer Parallelen zu BC bewegt? (BC sei X-Achse, O Nullpunkt.)

Res.: $$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = -h\left(y - \frac{a^2}{4h}\right).$$

236. In dem auf der Parabel $y^2 = 2px$ wandernden Punkt P ist die Tangente gezogen, welche die Y-Achse in P_1 trifft. Was ist der Ort des Schnittpunktes der Mittellote auf OP und OP_1 (Umkreismittelpunkt des Dreieckes OPP_1)?

Res.: $$y^2 = \frac{p}{4}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

237. Auf der Geraden $y = b$ bewegt sich der Punkt P. Von P wird das Lot auf seine in bezug auf die Parabel $y^2 = 2px$ genommene Polare gefällt. Was ist der Ort des Fußpunktes dieses Lotes?

Res.: $$y(p^2 - b^2) + 2bpx = p^2 b.$$

238. Ein um O mit r beschriebener Kreis trifft die $+X$-Achse in A; von dem auf dem Kreis beweglichen Punkt P wird das Lot PC auf die Y-Achse gefällt und um sich selbst über P hinaus verlängert bis P_1. Was ist der Ort des Schnittpunktes von OP und AP_1?

Res.: $$y^2 = 2r\left(x + \frac{r}{2}\right).$$

239. Auf dem um O mit r beschriebenen Kreis bewegt sich der Punkt P, die durch ihn gezogene Tangente schneidet das im Schnittpunkt A des Kreises mit der $+X$-Achse errichtete Lot in C. Durch C ist die Parallele zur X-Achse gezogen; sie schneidet die OP in Q. Es soll der Ort von Q gefunden werden.

Res.: $$y^2 = -2r\left(x - \frac{r}{2}\right).$$

240. Auf der Geraden $x = a$ bewegt sich ein Punkt P. Von ihm wird auf seine in bezug auf die

Parabel $y^2 = 2px$ genommene Polare das Lot gefällt. Was ist der Ort des Fußpunktes dieses Lotes?

Res.: $$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(a + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Besprechung für $a = 0$, $a = \frac{p}{2}$, $a = -\frac{p}{2}$.

241. Von dem auf der Parabel $y^2 = 2px$ wandernden Punkt P wird auf die Scheiteltangente das Lot PC gefällt und dieses um sich selbst über C hinaus verlängert bis Q; Q wird mit O verbunden. Die durch P zu OQ gezogene Parallele schneidet die Parabel in P_1. Was ist der Ort der Mitte von PP_1?

Res.: $y^2 = \frac{1}{5}px$.

242. Durch den Scheitel O der Parabel $y^2 = 2px$ wird eine Sehne OP und zu dieser der zugeordnete Durchmesser gezogen. Von seinem Schnittpunkt mit der Leitlinie wird das Lot auf OP gefällt. Es soll der Ort des Fußpunktes gefunden werden.

Res.: $$\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{16}.$$

243. In dem Punkt P der Parabel $y^2 = 2px$ ist die Normale PN gezogen; P ist mit dem Brennpunkt F verbunden und durch den Scheitel O ist zu PN die Parallele gezogen, welche FP in Q trifft. Was ist der Ort von Q, wenn P sich auf der Parabel bewegt?

Res.: $$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}.$$

244. Gegeben ist ein Kreis O mit Halbmesser r, der die $+X$-Achse in A schneidet. Über OA als

Durchmesser ist ein zweiter Kreis beschrieben. An diesem gleitet eine Tangente. Welchen Ort beschreibt ihr in bezug auf den Kreis um O genommener Pol?

Res.: $y^2 = -4\,r\,(x - r)$.

245. Durch einen Punkt $P\,(x_1|y_1)$ ist eine Gerade gezogen, welche die Leitlinie der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$

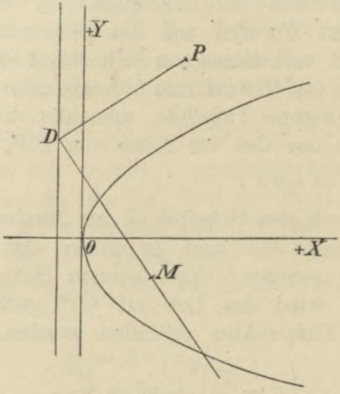

Fig. 10.

in D trifft. Auf PD ist in D das Lot errichtet. Was ist der Ort des Halbierungspunktes M der auf diesem Lot von der Parabel ausgeschnittenen Sehne?

Res.: $y^2\,(p - 2\,x_1) - 2\,p\,y_1\,y = p^2\left(x + \frac{p}{2}\right)$.

246. Was ist in bezug auf die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ der Ort des Poles einer Geraden, welche die Parabel $x^2 = 2\,p\,y$ berührt?

Res.: $$x\,y = -\frac{p^2}{2}.$$

247. An die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ ist in P die Tangente gezogen. Was ist der Ort des in bezug auf den um O mit r beschriebenen Kreis genommenen Poles?

Res.: $$y^2 = -\frac{2\,r^2}{p}\,x.$$

§ 14. **Benutzung der Parabel zum graphischen Rechnen.**

248. Graphische Tafel zum Quadrieren und Quadratwurzelausziehen. — Zeichne die Parabel $y = x^2$ auf Millimeter- oder Doppelmillimeter-Papier, dann kann an der Ordinate des zu x gehörigen Parabelpunktes x^2 und an der zu y gehörigen Abszisse $\sqrt{y}$ abgelesen werden. Die Kurve kann bei der Aufzeichnung an den zu $x = 10, 20 \ldots$ gehörigen Punkten gebrochen und die Fortsetzung an der X-Achse bei $x = 10, 20 \ldots$ wieder angesetzt werden.

Genauigkeit ein bis zwei Dezimalen, wenn als Einheit 1 cm oder 2 cm genommen wird.

249. Beweise, daß die vom Punkt $P\,(a|b)$ an die Parabel $x^2 = 4\,y$ gezogenen Tangenten auf der X-Achse Stücke abschneiden, deren Länge gleich den Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung

$$x^2 - a\,x + b = 0 \tag{1}$$

ist. Zeige ferner, daß, wenn man um P mit F (F Brennpunkt) einen Kreisbogen beschreibt, welcher die Leitlinie in P_1 und P_2 trifft, die Abszissen von P_1 und P_2 doppelt so groß als die Wurzeln der Gleichung (1) sind. Wird die Parabel auf Millimeterpapier auf-gezeichnet und die Skala auf der Leitlinie für doppelte Größe numeriert, so kann Gleichung (1) durch einen Kreisbogen um P mit PF graphisch gelöst werden.

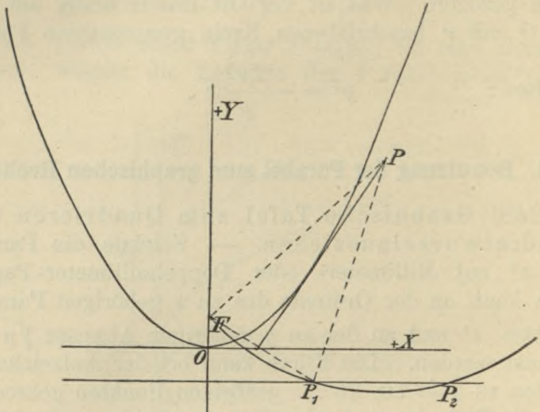

Fig. 11.

Zeige, daß, wenn $a|b$ außerhalb, auf, innerhalb der Parabel liegt, Gleichung (1) zwei reelle und verschiedene, zwei reelle und zusammenfallende, zwei imaginäre Wurzeln hat.

250. Es sei die Funktion

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

gegeben. Für welchen Wert von x erreicht y einen kleinsten oder größten Wert?

Auflösung: Man bringe die gegebene Gleichung, welche eine Parabel darstellt, auf die Form

$$(x - a)^2 = 2p(y - b)\,,$$

so sind $a|b$ Scheitelkoordinaten der Parabel und es erreicht, wie aus der Figur ersichtlich, y für $x = a$ den kleinsten oder größten Wert b je nachdem die Parabelachse die Richtung der $+Y$- oder der $-Y$-Achse hat, d. h. je nachdem $2p \gtrless 0$ ist.

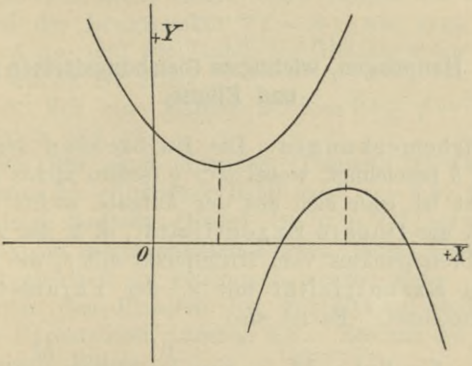

Fig. 12.

251. Ein Rechteck soll einen Umfang von 200 m erhalten. Wie müssen die Seitenlängen gewählt werden, damit es einen größten Inhalt erhält?

Res.: Je 50 m. (Quadrat.)

252. Eine gegebene Strecke a so in zwei Teile zu teilen, daß die Summe der Quadrate derselben ein Minimum wird.

Res.: Die Teile sind $\frac{a}{2}$, das Minimum $\frac{a^2}{2}$.

V. Abschnitt.

Die Ellipse.

§ 15. Hauptlagen, wichtigste Gleichungsformen; Punkt und Ellipse.

Vorbemerkungen: Die Halbachsen seien mit a und b bezeichnet, wobei $a > b$ (sofern nichts anderes bemerkt ist oder sich aus der Aufgabe nichts anderes ergibt), die lineare Exzentrizität, d. h. der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkt mit f, die numerische Exzentrizität mit ε, der Parameter mit $2p$ bezeichnet. Es ist also

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}\,, \quad \varepsilon = \frac{f}{a}\,, \quad p = \frac{b^2}{a}\,.$$

Ellipsen sind ähnlich, wenn die Halbachsen proportional sind.

Ähnliche und ähnlich liegende (homothetische) Ellipsen sind bei konstantem k und veränderlichem a dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k\,a)^2} = 1\,,$$

ebenso bei konstantem a und b und bei veränderlichem k durch

$$\frac{x^2}{(k\,a)^2} + \frac{y^2}{(k\,b)^2} = 1\,.$$

253. Die große, auf der X-Achse liegende Achse einer Ellipse ist 34, die kleine, welche auf der Y-Achse liegt, ist 16. Wie lautet ihre Gleichung und was ist der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkt?

Res.: $f = 15$.

254. Die große Achse einer Ellipse ist 10, der Abstand der Brennpunkte $2f = 8$; wie groß ist die kleine Achse und wie lautet die Gleichung der Kurve? (Lage wie in Nr. 253.)

255. Für eine Ellipse ist $b = 24$, $f = 7$; wie groß ist a und ε?

256. Für einen Kometen (Tempel) ist die große Halbachse der elliptischen Bahn rund $a = 3{,}5$, $f = 1{,}4$; für einen anderen (Enke) ist $a = 2{,}2$, $\varepsilon = 0{,}85$. Zeichne die entsprechenden Kurven, wobei die Längeneinheit gleich 3 cm genommen werden soll.

Unter den Planeten hat der Merkur weitaus die größte Exzentrizität, nämlich 0,2. Zeichne die ihr entsprechende Ellipse.

257. Es ist $a = 25$, $\varepsilon = 0{,}96$; wie groß ist f und b?

258. Es ist $p = 7{,}2$, $\varepsilon = 0{,}6$; wie groß ist f, a und b?

259. Von einer Ellipse, deren Achsen auf den Koordinatenachsen liegen, sind zwei Punkte $10|5$, $6|13$ gegeben; es sollen die Halbachsen berechnet werden.

$$\text{Res.:}\quad a = \frac{10}{3}\sqrt{10}\,, \qquad b = 5\sqrt{10}\,.$$

260. Eine Ellipse berührt die Y-Achse in einem Punkt mit der Ordinate 3, sie schneidet die X-Achse in Punkten mit den Abszissen 3 und 7. Wie lautet ihre Gleichung?

Res.: $$\frac{(x-5)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{\frac{75}{7}}=1\,.$$

261. Die Achsen einer Ellipse sind parallel zu den Koordinatenachsen, die Mittelpunktskoordinaten sind a_1 und b_1, die Halbachsen a und b. Wie lautet die Gleichung der Kurve? Wie lautet sie:

a) wenn die Ellipse im ersten Feld liegt und beide Koordinatenachsen berührt,

b) wenn die Ellipse die Y-Achse in O berührt und der Mittelpunkt auf der $+X$-Achse liegt (Scheitelgleichung),

c) wenn die Ellipse die X-Achse berührt und der Mittelpunkt auf der $-Y$-Achse liegt?

Res.: $$\frac{(x-a_1)^2}{a^2}+\frac{(y-b_1)^2}{b^2}=1\,.$$

262. Unter welcher Bedingung stellt die Gleichung $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ eine Ellipse dar? Wann ist diese ein Kreis?

263. Gib von den durch die folgenden Gleichungen dargestellten Ellipsen die Mittelpunktskoordinaten und die Halbachsen an:

a) $25x^2+9y^2-50x-54y-119=0$;

b) $9x^2+4y^2-6x+10y-15=0$;

c) $4x^2+25y^2-40x+150y-225=0$;

d) $x^2+4y^2+ax+by-c^2=0$.

Res.: a) $$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{25}=1\,;$$

b) $\frac{1}{3} \big| -\frac{5}{4}$, $\frac{1}{6}\sqrt{89}$, $\frac{1}{4}\sqrt{89}$;

c) $5 \big| -3$, $\frac{5}{2}\sqrt{22}$, $\sqrt{22}$;

d) $-\frac{a}{2} \Big| -\frac{b}{8}$, $\frac{1}{4}\sqrt{4a^2 + b^2 + 16c^2}$,

$$\frac{1}{8}\sqrt{4a^2 + b^2 + 16c^2}\,.$$

264. Von der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sind gegeben die Koordinaten $10|27$ eines Punktes und die Achse $2a = 4$; wie groß ist die andere Achse?

Res.: $2b = 18$.

265. Untersuche, ob die Punkte $3|7$, $6|-2$, $-11|1$ innerhalb oder außerhalb der Ellipse

$$5^2x^2 + 12^2y^2 = 5^2 \cdot 12^2$$

liegen.

266. In die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Seiten sich wie $\lambda : 1$ verhalten ($a > b$, $\lambda > 1$) und den Koordinatenachsen parallel sind.

Res.: $x = \frac{ab}{\sqrt{\lambda^2 b^2 + a^2}}$, $y = \frac{ab}{\lambda\sqrt{\lambda^2 b^2 + a^2}}$.

267. In die Ellipse der vorigen Aufgabe ein Rechteck so zu zeichnen, daß zwei Gegenecken in die Brennpunkte fallen. Was sind die Koordinaten der im ersten Feld liegenden Ecke? Was ist der Fall, wenn $b = f$ ist?

Res.: $x = \frac{a}{f}\sqrt{f^2 - b^2}$, $y = \frac{b^2}{f}$. Das Rechteck ist nur möglich, wenn $f > b$.

268. Die Gleichung in x und y für die Linie zu finden, für welche

$$x = a\cos t\,, \quad y = b\sin t\,.$$

269. Ebenso für

$$x = \alpha + a\cos t\,, \quad y = \beta + b\sin t\,.$$

270. Ebenso für

$$x = \frac{a(1-t^2)}{b(1+t^2)}\,, \quad y = \frac{2bt}{1+t^2}\,.$$

Res.: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

271. Um den Punkt P der X-Achse ($OP = a_1$) soll ein Kreis beschrieben werden, der die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ berührt. Wie groß ist der Halbmesser des Kreises und wann ist ein solcher Kreis nicht mehr möglich?

Res.: $r^2 = b^2(f^2 - a_1^2) : f^2$

272. Die Gleichung einer Parabel von gegebenem Parameter $2p$, deren Achse auf die X-Achse fällt, so zu bestimmen, daß diese Kurve die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ berührt.

Res.: $y^2 = \pm 2p(x - a_1)$, wobei $a_1 = \mp \dfrac{b^4 + p^2a^2}{2pb^2}$.

273. Die Gleichung einer Parabel aufzustellen, welche die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ in dem auf der $+Y$-Achse liegenden Scheitel berührt und durch die Brennpunkte geht.

Res.: $$x^2 = -\frac{f^2}{b}(y - b)\,.$$

§ 16. **Ellipse und Gerade; Pol und Polare.**

274. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $y = Mx + C$ mit der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Wie muß C gewählt werden, damit die Gerade die Ellipse schneidet, berührt oder nicht trifft?

Res.: $$|C| \lesseqgtr \sqrt{b^2 + a^2 M^2}\,.$$

275. Beweise vermittels der in Nr. 274 berechneten Schnittpunktskoordinaten, daß die Halbierungspunkte paralleler Sehnen auf einem Durchmesser liegen.

276. An die Ellipse
$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{32^2} = 1$$
sollen zwei Tangenten gelegt werden, welche parallel zu der Geraden $24x + 7y = 11$ sind.

Res.: $24x + 7y = \pm 280$.

277. Leite vermittels des Ergebnisses von Nr. 274 die Gleichung der Tangente und daraus die der Normalen an die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ im Punkte $x_1|y_1$ her.

278. Ebenso die Gleichungen der vom Punkt $x_1|y_1$ gezogenen Tangenten. Besonderer Fall: $a = b = r$.

Res.:
$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}(x - x_1)\,.$$

279. Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Ellipse
$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{24^2} = 1\,,$$

welche auf der $+X$- und $+Y$-Achse gleiche Stücke abschneidet? (Umbeschriebenes Quadrat.)

Res.: $y = -x + 25$.

280. Wie lautet die Gleichung der an die Ellipse in Nr. 277 gezogenen Tangente, wenn ihre Abschnitte auf der $+Y$- und $+X$-Achse sich wie $\lambda : 1$ verhalten?

Res.: $$y = -\lambda x \pm \sqrt{b^2 + \lambda^2 a^2}\,.$$

281. Unter welcher Bedingung berührt die Gerade $ux + vy + 1 = 0$, die Ellipse von Nr. 277?

Res.: $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$, Gleichung der Ellipse in Linienkoordinaten.

282. Die Gleichung der Tangente im Punkt $x_1 | y_1$ an eine Ellipse zu finden, deren Achsen parallel den Koordinatenachsen sind und die Größe $2a$ und $2b$ haben und deren Mittelpunktskoordinaten a_1 und b_1 sind.

Res.: $$\frac{(x_1 - a_1)(x - a_1)}{a^2} + \frac{(y_1 - b_1)(y - b_1)}{b^2} = 1\,.$$

283. Es soll die Gleichung einer Ellipse gefunden werden, deren Mittelpunkt in O, deren eine Achse $(= 2a)$ auf der X-Achse liegt, welche die Gerade $y = mx + c$ berührt.

Res.: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2 - m^2 a^2} = 1\,.$$

284. Untersuche, ob es eine Normale gibt, die durch einen Brennpunkt der Ellipse geht.

Res.: Die Normale im Punkt mit den Koordinaten $\frac{a^2}{f}$ und $-\frac{b^2}{f}i$ geht durch einen Brennpunkt, d. h. es gibt keine solche Normale.

285. Bestimme die Ausdrücke für die Abschnitte, welche die Normale auf den Achsen abschneidet, und ermittele aus diesen Ausdrücken die Ellipsenpunkte, für welche jeder Abschnitt seinen größten und seinen kleinsten Wert erlangt. Was ist die Grenze dieser äußersten Werte?

Res.: $x_1 = a, \quad x_1 = 0; \quad \frac{f^2}{a}, \quad -\frac{f^2}{b}.$

286. Die gemeinschaftlichen Tangenten an die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und die Parabel $y^2 = 2px$ zu finden.

Res.: Die Gleichungen der Tangenten sind gegeben durch

$$y = Mx + \frac{p}{2M},$$

wobei

$$M = \pm\sqrt{\frac{-b^2 \pm \sqrt{b^4 + a^2p^2}}{2a^2}}.$$

287. Wie muß p bestimmt werden, damit die Gerade $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ berührt?

Res.: $p^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$.

288. Beweise mit Hilfe von Nr. 274, daß die Gerade $y = Mx + C$ die dort gegebene Ellipse berührt, wenn sie auf dem in den Scheiteln der $2a$ Achse errichteten Lote Stücke abschneidet, deren Produkt b^2 ist.

289. Beweise, daß, wenn man über dem Stück einer Ellipsentangente, das zwischen den Scheiteltangenten der großen Achse liegt, als Durchmesser einen Kreis beschreibt, dieser durch die Brennpunkte geht.

290. Beweise, daß das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Ellipsentangente konstant und gleich b^2 ist.

291. Die Gleichung der Polaren eines Punktes $x_1|y_1$ in Beziehung auf eine gegebene Ellipse zu finden.

Beispiele:

$$1)\quad \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\,,\quad x_1=4\,,\quad y_1=9\,;$$

$$2)\quad \frac{x^2}{\frac{3\alpha^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{\beta^2}{5}}=1\,,\quad x_1=\alpha\,,\quad y_1=-\frac{\beta}{2}\,,$$

Res.:

$$1)\ 4x+25y=25\,;\quad 2)\ 8\beta x-3\alpha y=6\alpha\beta\,.$$

292. Auf der Geraden $10x+9y=40{,}8$ einen Punkt so zu bestimmen, daß seine Polare in bezug auf die Ellipse $9x^2+25y^2=225$ a) parallel, b) senkrecht zu der gegebenen Geraden ist.

Res.: a) $3\left|\frac{6}{5}\right.$; b) $\frac{51}{8}\left|-\frac{51}{20}\right.$.

293. Die Gleichung der Polaren des unendlich fernen Punktes, der durch die Geradengleichung $Ax+By=0$ gegeben ist, in bezug auf die Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ zu finden.

Res.: $$\frac{Bx}{a^2}-\frac{Ay}{b^2}=0\,.$$

Anmerkung: Diese beiden Geraden heißen konjugierte Durchmesser, jeder geht durch den Pol des anderen.

294. Für dieselbe Ellipse den Pol der Geraden $Ax + By + C = 0$ zu bestimmen.

Res.: $$x_1 = -\frac{a^2 A}{C}, \quad y_1 = -\frac{b^2 B}{C}.$$

Was folgt hieraus 1) für einen Durchmesser, 2) für die unendlich ferne Gerade?

295. Durch den Punkt $x_1|y_1$ eine Gerade zu ziehen, von welcher durch die in Nr. 294 gegebene Ellipse eine Sehne abgeschnitten wird, welche in diesem Punkt halbiert wird.

Res.: Die gesuchte Gerade ist parallel zu dem Durchmesser, welcher der Verbindungslinie von $x_1|y_1$ mit O zugeordnet ist (s. 293).

296. Durch den Punkt $x_1|y_1$ in der Ellipse
$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$
eine Sehne zu ziehen, welche durch den Durchmesser $Ax + By = 0$ halbiert wird.

Res.: $$\frac{A(x - x_1)}{a^2} - \frac{B(y - y_1)}{b^2} = 0.$$

297. Gegeben ist der Punkt $x_1|y_1$ und die Gerade $Ax + By + C = 0$; wie müssen die auf den Koordinatenachsen liegenden Halbachsen einer Ellipse gegeben werden, damit die Gerade Polare des Punktes ist?

Res.: $$a^2 = -\frac{Cx_1}{A}, \quad b^2 = -\frac{Cy_1}{B}.$$

298. Zu beweisen: Wenn zwei Ellipsen die Brennpunkte gemeinschaftlich haben und es wird eine Tangente der einen Kurve als Polare in Beziehung auf die zweite genommen, so liegt der zugehörige Pol auf der

durch den Berührungspunkt jener Tangente gehenden Normalen der ersten Kurve.

299. Beweise, daß die Brennpunkte und die Punkte N und T, in welchen die zu einem Punkt P der Ellipse gehörige Normale und die Tangente die große Achse schneiden, harmonisch liegen.

300. Es soll bewiesen werden, daß, wenn man von dem Punkt, in welchem eine Tangente die kleine Achse schneidet, auf den längeren der beiden zum Berührungspunkt gehörigen Brennstrahlen das Lot fällt, dieses auf dem Brennstrahl ein Stück gleich der kleinen Achse abschneidet.

301. Welche Beziehung muß zwischen den Koordinaten $x_1|y_1$, $x_2|y_2$ zweier Punkte P_1 und P_2 bestehen, damit ihre Verbindungslinien mit dem Mittelpunkt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ konjugierte Durchmesser sind?

Res.: $$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 0 .$$

302. Zwei konjugierte, einander gleiche Durchmesser für die Ellipse von Nr. 301 zu bestimmen.

Res.: $y = \pm \frac{b}{a} x$; Länge $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

303. Beweise, daß, wenn die Punkte P_1 und P_2 von Nr. 301 Endpunkte konjugierter Durchmesser mit den Längen $2A$ und $2B$ sind, dann folgende Beziehungen gelten:

1) $x_1^2 + x_2^2 = a^2$;

2) $y_1^2 + y_2^2 = b^2$;

3) $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$.

304. Beweise, das jedes Dreieck $P_1 O P_2$, das durch zwei konjugierte Halbmesser OP_1 und OP_2 einer Ellipse gebildet wird, unveränderlichen Inhalt $\frac{ab}{2}$ hat.

305. Welche Beziehung muß zwischen M und M_1 bestehen, damit $y = Mx$ und $y = M_1 x$ konjugierte Durchmesser der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ sind? Was folgt für die konjugierten Durchmesser, wenn $a = b$ ist?

Res.: $$MM_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

306. Bestimme vermittels eines konjugierten Durchmessers die Berührungspunkte der Tangenten, die parallel zu einer gegebenen Geraden an eine gegebene Ellipse gezogen werden können.

307. Beweise, daß, wenn man einen beliebigen Ellipsenpunkt mit den Endpunkten eines Durchmessers verbindet, die Verbindungslinien zwei konjugierten Durchmessern parallel sind. — Hieraus folgt:

Die Seiten jedes einer Ellipse einbeschriebenen Parallelogrammes sind konjugierten Durchmessern parallel.

308. Beweise, daß die Diagonalen des einer Ellipse umbeschriebenen Parallelogrammes konjugierte Durchmesser sind.

309. Gegeben ist die Ellipse $5x^2 + 9y^2 = 45^2$ und der Punkt $10|21$. Durch diesen wird der Durchmesser gezogen. Es soll die Gleichung des zu ihm konjugierten gefunden werden.

Res.: $50x + 189y = 0$.

310. Jede Seite eines einer Ellipse umbeschriebenen Parallelogrammes wird durch ihren Berührungspunkt so

in zwei Abschnitte geteilt, daß das Rechteck derselben gleich ist dem Quadrat des parallelen Halbmessers.

311. Die Länge der zu dem Ellipsenpunkt $x_1|y_1$ gehörigen Brennstrahlen zu finden.

Res.: $r = a - x_1 \varepsilon$, $r_1 = a + x_1 \varepsilon$.

312. Das Rechteck aus den Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes ist gleich dem Quadrat des Halbmessers, welcher dem durch den Punkt gehenden konjugiert ist.

313. Wird einer Ellipse ein — veränderliches — Rechteck umbeschrieben, so bestimmen die Berührungspunkte ein Parallelogramm von konstantem Umfang.

§ 17. **Geometrische Örter.**

314. Von dem Punkt P des um O mit r beschriebenen Kreises wird das Lot PQ auf die Y-Achse gefällt und PQ über P hinaus

a) um sich selbst,

b) um die Hälfte von PQ,

c) um das $\frac{2}{3}$ fache,

d) um das λ fache

verlängert bis P'. Was ist der Ort von P', wenn P auf dem Kreis wandert?

Res.: d) $x^2 + (1 + \lambda)^2 y^2 = (1 + \lambda)^2 r^2$.

315. Von dem auf der negativen Y-Achse liegenden Scheitel S der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ wird die Sehne SP gezogen und über P hinaus

a) um sich selbst,

b) um das λ fache

verlängert bis P'. Was ist der Ort von P', wenn sich die Sehne um S dreht, und was ist

c) der Ort von Q, wenn Q Halbierungspunkt von SP ist?

Res.: b) $$\frac{x^2}{(1+\lambda)^2 a^2} + \frac{(y-\lambda b)^2}{(1+\lambda)^2 b^2} = 1\,;$$

c) $$\frac{x^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{\left(y+\frac{b}{2}\right)^2}{\frac{b^2}{4}} = 1\,.$$

316. a) Durch den Punkt $x_1|0$ werden Sekanten in die Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ gezogen; jede darauf abgeschnittene Sehne wird halbiert. Was ist der Ort des Halbierungspunktes Q?

b) Dieselbe Aufgabe für den Punkt $x_1|y_1$.

Anmerkung: Q kann als Schnittpunkt der Sekante mit dem ihrer Richtung konjugierten Durchmesser angesehen werden.

Res.: b) $$\frac{\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2}{\frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{4\,b^2}} + \frac{\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2}{\frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{4\,a^2}} = 1\,.$$

Was ergibt sich, wenn $x_1|y_1$ 1) auf die Ellipse, 2) nach O, 3) ins Unendliche fällt, und 4) wenn $b = a = r$ ist?

317. Der Punkt P der Ellipse von Nr. 316 wird auf die X-Achse nach Q projiziert; durch P wird eine Parallele zur X-Achse und durch Q eine Parallele zu OP gezogen. Was ist der Ort des Schnittpunktes dieser Parallelen?

Res.: $$\frac{(x-2\,a)^2}{4\,a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

318. Es ist ein Kreis K um O mit r gegeben; er schneidet die $+X$-Achse in A. Über OA ist ein zweiter Kreis K_1 beschrieben. Es soll der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise gefunden werden, welche K und K_1 zugleich berühren.

Res.: $$\frac{\left(x-\frac{r}{4}\right)^2}{\frac{9r^2}{16}}+\frac{y^2}{\frac{r^2}{2}}=1\,.$$

319. Gesucht der Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der den Kreis um O vom Halbmesser r von innen und den Kreis vom Halbmesser $\frac{r}{3}$ um $\frac{r}{3}\Big|0$ von außen berührt.

Res.: $$\frac{\left(x-\frac{r}{6}\right)^2}{\frac{4r^2}{9}}+\frac{y^2}{\frac{5r^2}{12}}=1\,.$$

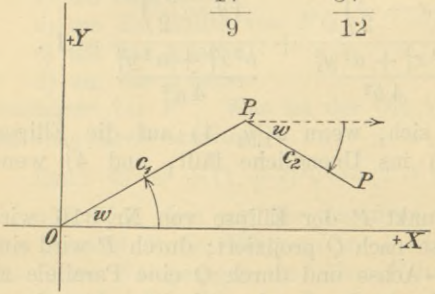

Fig. 13.

320. Um O dreht sich $OP_1=c_1$ mit der Winkelgeschwindigkeit w, um P_1 dreht sich $P_1P=c_2$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-w$. Was ist der Ort von P, wenn P_1 und P im Anfang der Bewegung auf der $+X$-Achse liegen und P_1 zwischen O und P liegt?

Res.: $$\frac{x^2}{(c_1 + c_2)^2} + \frac{y^2}{(c_1 - c_2)^2} = 1 .$$

321. Der Punkt P der vorigen Aufgabe wird mit dem Punkt A_1 auf der $+X$-Achse ($OA_1 = a_1$) verbunden. Was ist der Ort des Halbierungspunktes Q von AP?

Res.: $$\frac{\left(x - \frac{a_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{c_1 - c_2}{2}\right)^2} = 1 .$$

322. Von dem Punkt P der Ellipse

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

ist auf die Y-Achse das Lot PC gefällt und um sich selbst über P hinaus verlängert bis P_1. Es soll der Ort des Schnittpunktes der OP mit der AP_1 gefunden werden, wobei A der auf der $+X$-Achse liegende Scheitel ist.

Res.: $$y^2 = \frac{2\, b^2}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right).$$

Diese Parabel geht durch die Scheitel auf der Y-Achse.

323. In dem auf der $+Y$-Achse liegenden Scheitel der Ellipse von Nr. 322 ist die Tangente und in dem beweglichen Punkt P der Ellipse ebenfalls die Tangente gezogen, welche die erstere in C trifft; durch C ist die Parallele zur Y-Achse gezogen, welche die OP in Q schneidet. Was ist der Ort von Q?

Res.: $$x^2 = -\frac{2\, a^2}{b}\left(y - \frac{b}{2}\right).$$

324. In dem auf der $+X$-Achse liegenden Scheitel der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist die Tangente gezogen. Von jedem ihrer Punkte ist auf seine zugehörige Polare das Lot gefällt. Was ist der Ort der Fußpunkte dieser Lote?

Res.: $$\left(x - \frac{2a^2 - b^2}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{4a^2} \, .$$

325. In dem einen Scheitel S_1 der großen auf der X-Achse liegenden Achse $(2a)$ einer Ellipse wird die

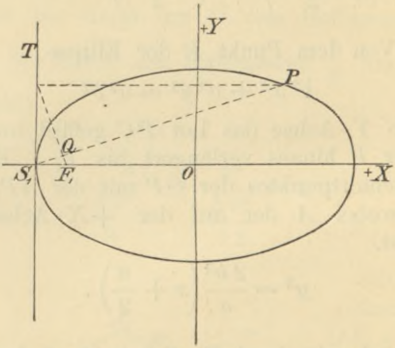

Fig. 14.

Tangente S_1T gezogen. Der zunächst liegende Brennpunkt F_1 wird mit dem auf der Kurve wandernden Punkt P verbunden und von P das Lot PT auf S_1T gefällt. Es ist der Ort des Schnittpunktes Q der S_1P und der F_1T zu finden.

Res.:

$$b^2(2ax - fx + a^2)^2 + a^2(f - a)^2y^2 = a^2b^2(x - f)^2 \, .$$

326. Auf der Achse der Parabel $y^2 = 2px$ sind in gleichen Abständen vom Scheitel O die Punkte A_1 und A_2 gegeben ($OA_1 = a$). Punkt P bewegt sich auf der Kurve. A_2P schneidet die Scheiteltangente in C; durch C ist die Parallele CQ zu OA_1 gezogen. Was ist der Ort des Schnittpunktes dieser Parallelen mit A_1P?

Res.: $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{ap}{2}} = 1$. Besonderer Fall: $a = \frac{p}{2}$.

327. Was ist der Ort des Höhenschnittpunktes in dem Dreieck A_1A_2P, wenn A_1A_2 eine Achse und P beweglicher Punkt der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist? ($A_1A_2 = 2a$).

Besonderer Fall $b = a$.

Res.: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^4}{b^2}} = 1\,.$$

328. In der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ bewegt sich die Sehne P_1P_2 parallel zur Y-Achse (s. Fig. 15); P_1P_2 schneidet die X-Achse in C. Was ist der Ort des Schnittpunktes R der B_1C mit OP_2, wenn B_1 der mit P_1 auf derselben Seite liegende Scheitel auf der Y-Achse ist?

Res.: $$x^2 = \frac{2b^2}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right).$$

329. Was ist (s. Nr. 328) der Ort des Schnittpunktes U der A_1P_2 mit B_1C? A_1 ist der Scheitel auf der $+X$-Achse (s. Fig. 15).

330. $P_1 C$ (s. Nr. 328) sei über P_1 hinaus verlängert um $P_1 L = P_1 C$, L sei mit B_1 verbunden und es sei $B_1 L$ in V halbiert. Was ist der Ort von V?

Res.: $$\frac{x^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \,.$$

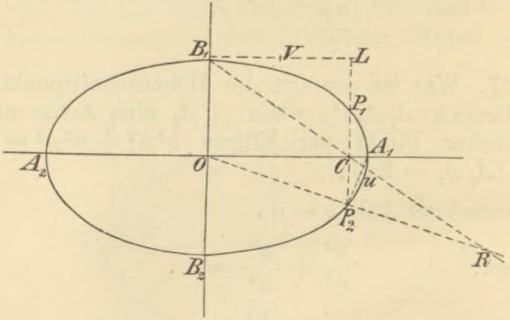

Fig. 15.

331. An der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bewegt sich eine Tangente. Sie wird als Polare des Hauptkreises $x^2 + y^2 = a^2$ betrachtet. Was ist der Ort ihres Poles?

Res.: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^4}{b^2}} = 1 \,.$$

332. Der Punkt P bewegt sich auf der einen Leitlinie der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$; die zu P gehörige Polare sei QR. Vom Mittelpunkt O wird auf QR das

Lot gefällt. Es soll der Ort des Schnittpunktes dieses Lotes mit QR gefunden werden.

Res.: $$\left(x - \frac{f}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{f^2}{4}.$$

333. Der auf der Ellipse von Nr. 332 sich bewegende Punkt P wird auf die Y-Achse projiziert; die Projektion C wird mit dem auf der $+X$-Achse liegenden Scheitel A_1 verbunden. Es soll der Ort des Schnittpunktes Q der A_1C mit der OP gefunden werden.

Res.: $$y^2 = -\frac{2b^2}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

334. Eine Strecke von unveränderlicher Länge bewegt sich so, daß der eine Endpunkt P_1 auf der X-Achse, der andere P_2 auf der Y-Achse gleitet. Welchen Ort beschreibt der Punkt Q der Strecke, der sie in die Abschnitte $P_2Q = a$ und $QP_1 = b$ teilt? Besonderer Fall: $a = b$.

Res.: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Anwendung auf den Ellipsenzirkel.

335. Die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ schneide die X-Achse in den Punkten A_1 und A_2; P sei ein auf der Kurve wandernder Punkt. Was ist der Ort für den Schwerpunkt 1) des Dreieckes A_1A_2P, 2) des Dreieckes OA_1P?

Res.: 1) $$\frac{x^2}{\frac{a^2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{9}} = 1;$$ 2) $$\frac{\left(x - \frac{a}{3}\right)^2}{\frac{a^2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{9}} = 1.$$

336. Die Ellipse von Nr. 335 hat die Brennpunkte F und F_1. Über FF_1 als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben. Um ihn bewegt sich eine ihn berührende Gerade. Was ist der Ort ihres Poles in bezug auf die Ellipse?

Res.: $$\frac{x^2}{\frac{a^4}{f^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^4}{f^2}} = 1 .$$

337. In der Ellipse von Nr. 335 ist über OA_1 als Durchmesser ein Kreis beschrieben. An ihm bewegt sich eine Tangente. Was ist der Ort ihres in bezug auf die Ellipse genommenen Poles?

Res.: $$y^2 = -\frac{4\,b^4}{a^3}(x - a) .$$

338. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie die Ellipse $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2}$ berührt. Was ist der Ort ihres Poles in bezug auf die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

Res.: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

339. Der Punkt P der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist mit dem Brennpunkt F verbunden; durch F benachbarten Scheitel A_1 auf der X-Achse wird die Parallele A_1Q zu der durch P gehenden Normalen PN gezogen. Was ist der Ort des Schnittpunktes der PF mit der A_1Q?

Res.: $$(x - f)^2 + y^2 = \frac{a^2\,(a^2 - f^2)}{f^2} .$$

340. Von dem einen Brennpunkt der Ellipse von

Nr. 339 wird auf jede ihrer Tangenten das Lot gefällt. Was ist der Ort für den Fußpunkt dieses Lotes?

Res.: $x^2 + y^2 = a^2$.

Dieser Kreis über der großen Achse $2a$ heißt **Hauptkreis der Ellipse**.

341. Von dem Punkt P der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist das Lot PC auf die X-Achse gefällt; es schneidet den Hauptkreis (s. Nr. 340) in R. Durch R ist die Parallele zu A_1A_2 gezogen. Was ist der Ort ihres Schnittpunktes Q mit dem Lot, das man von O auf die in P gezogene Tangente fällt?

Res.: $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,.$$

342. Im Punkt P der Ellipse von Nr. 341 ist die Normale gezogen, welche die große Achse $A_1A_2\ (= 2a)$ in N trifft; verlängere PN um sich selbst über P bis R, ziehe OR und durch A_1 zu PN die Parallele. Was ist der Ort ihres Schnittpunktes mit OR, wenn P auf der Ellipse wandert?

Res.: $$x = \frac{a(a^2 + b^2)}{f^2}\,.$$

343. Durch den Punkt P der Ellipse von Nr. 341 ist die Parallele PQ zur großen und durch Punkt C die Parallele CQ zu der kleinen Achse gezogen. Was ist der Ort des Schnittpunktes Q der Parallelen?

Res.: $$\frac{x^2}{\frac{f^4}{a^2}} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

344. Es wird der Punkt Q der Aufgabe 343 mit O verbunden und zu OQ der konjugierte Durchmesser OQ' gezogen. Was ist der Ort seines Schnittpunktes mit der Geraden, welche durch A_1 (Scheitel auf der $+X$-Achse) parallel zu der in P gelegten Tangente gezogen wird?

Res.: $$x = \frac{a^3}{b^2}.$$

345. Was ist der Ort für die Spitze eines rechten Winkels, der sich so bewegt, daß seine Schenkel stets Tangenten an der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sind?

Res.: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

346. Beweise, daß die Potenzlinie zwischen dem in Nr. 345 gefundenen Kreis und dem Leitkreis der Ellipse (Kreis um $f|0$ mit Halbmesser $2a$) Leitlinie der Ellipse ist.

347. Gegeben sind zwei konfokale Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Ein rechter Winkel bewegt sich so, daß der eine Schenkel die eine, der andere Schenkel die andere Ellipse berührt. Was ist der Ort der Spitze?

Anmerkung: Zwei Ellipsen heißen konfokal, wenn sie die Brennpunkte gemeinschaftlich haben, wenn also $a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2$ ist.

Res.: $x^2 + y^2 = a^2 + b_1^2$ oder $x^2 + y^2 = a_1^2 + b^2$.

Wie ergibt sich hieraus der Ort von Nr. 345? Wie ist das Resultat zu deuten, wenn $b_1 = b = 0$ wird?

348. Zu beweisen: Verändert sich ein Parallelogramm, das einer Ellipse umbeschrieben ist so, daß

sein Umfang konstant bleibt, so bewegen sich die Eckpunkte in einer Ellipse, welche der gegebenen konfokal ist und deren Halbachsen a_1 und b_1 sich aus den Halbachsen der gegebenen Ellipse durch

$$a_1 = \sqrt{a(a+b)}\,, \quad b_1 = \sqrt{b(a+b)}$$

bestimmen.

349. Über der großen Achse $A_1 A_2 = 2a$ der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ ist ein Kreis beschrieben.

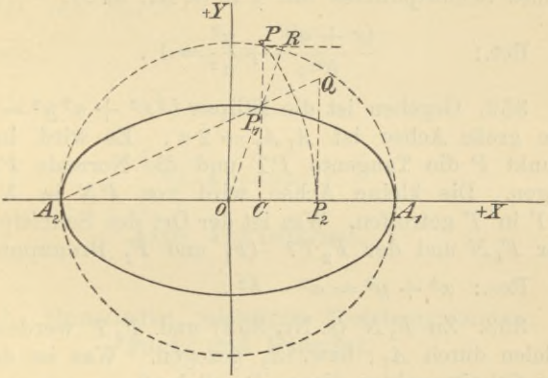

Fig. 16.

Von dem Punkt P des Kreises ist auf $A_1 A_2$ das Lot PC gefällt, das die Ellipse in P_1 schneidet. Auf OA_1 ist P_2 so bestimmt, daß $A_2 P_2 = A_2 P$ ist. Was ist der Ort des Schnittpunktes Q der durch P_2 zu $A_1 A_2$ gezogenen Senkrechten mit $A_2 P_1$?

Res.: $$\frac{(x+a)^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1\,.$$

350. Durch den Punkt P (s. Fig. 16) wird PR parallel zu OA_1 gezogen. Was ist der Ort des Schnittpunktes R der OP_1 mit PR?

Res.: $$\frac{x^2}{\frac{a^4}{b^2}} - \frac{y^2}{a^2} = 1\,.$$

351. Durch A_2 (s. Fig. 16) wird zu der in P_1 gezogenen Tangente das Lot gefällt. Was ist der Ort seines Schnittpunktes mit PR (s. Nr. 342)?

Res.: $$\frac{(x+a)^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,.$$

352. Gegeben ist die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, die große Achse ist $A_1A_2 = 2a$. Es wird in dem Punkt P die Tangente PT und die Normale PN gezogen. Die kleine Achse wird von PN in N, von PT in T getroffen. Was ist der Ort des Schnittpunktes der F_1N und der F_2T? (F_1 und F_2 Brennpunkte.)

Res.: $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

353. Zu F_1N (s. Nr. 352) und F_2T werden Parallelen durch A_1, bzw. A_2 gezogen. Was ist der Ort des Schnittpunktes dieser Parallelen?

Res.: $x^2 + y^2 = a^2$.

354. Durch den Punkt P der Ellipse von Nr. 352 ist die Normale gezogen, welche die große Achse A_1A_2 in N_1 trifft. PN_1 wird über P hinaus um sich selbst verlängert bis P_1; P_1 wird mit dem Fußpunkt C des von P auf A_1A_2 gefällten Lotes verbunden. Was ist der Ort des Schnittpunktes der P_1C mit dem zu PN parallel gezogenen Durchmesser?

Res.: $$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{\frac{4a^4}{b^2}} = 1\,.$$

355. Von dem auf der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ wandernden Punkt P wird auf die dem Brennpunkt F_1 $(f|0)$ zugehörige Leitlinie das Lot PD gefällt, und der Fußpunkt D wird mit dem Punkt D_1 der großen Achse $2a$ verbunden, der von F_1 ebensoweit entfernt ist, als jene Leitlinie. Was ist der Ort des Schnittpunktes der DD_1 mit $F_1 P$?

Res.: $$x^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}\,.$$

VI. Abschnitt.

Die Hyperbel.

§ 18. Hauptlagen, wichtigste Gleichungsformen; Punkt und Hyperbel.

Vorbemerkungen: Die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf ihre Kurvenachsen als Koordinatenachsen, lautet, falls die reelle Achse auf der X-Achse liegt:

$$1)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

falls diese auf der Y-Achse liegt:

$$2)\quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\,.$$

1) und 2) heißen konjugierte Hyperbeln. Die Brennpunkte F_1 und F_2 haben vom Mittelpunkt O die Entfernung $f=\sqrt{a^2+b^2}$; f heißt die lineare, $\varepsilon=\frac{f}{a}$ die numerische Exzentrizität der Hyperbel.

Ist $b=a$, so heißt die Hyperbel gleichseitig. $2p=\frac{2b^2}{a}$ heißt der Parameter.

Hyperbeln sind ähnlich, wenn die Halbachsen proportional sind.

Ähnliche und ähnlich liegende (homothetische) Hyperbeln sind bei konstantem k und veränderlichem a dargestellt durch die Gleichung

$$3)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(k\,a)^2}=1\,,$$

ebenso bei konstantem a und b und bei veränderlichem k durch die Gleichung

$$4)\quad \frac{x^2}{(k\,a)^2}-\frac{y^2}{(k\,b)^2}=1\,.$$

356. Von einer Hyperbel ist gegeben

1) $f=5\,,\quad a=3\,,\qquad$ 2) $f=25\,,\quad a=24\,,$

3) $f=17\,,\quad b=8\,.$

Wie lautet die Gleichung der Hyperbel, wenn die reelle Achse a) auf der X-Achse, b) auf der Y-Achse liegt?

357. Aus der numerischen Exzentrizität ε und der reellen Achse $2\,a$ die imaginäre zu finden.

Res.: $b^2=a^2(\varepsilon^2-1)\,.$

358. Zeige, daß, wenn in Gleichung 4) $k=0$ wird, die Hyperbel in ein Geradenpaar ausartet, das

für die durch 4) dargestellte Schar ähnlicher Hyperbeln die gemeinsamen Asymptoten bildet.

359. Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Hyperbel sind a_1 und b_1. Die reelle Achse hat die Größe $2a$, die imaginäre die Größe $2b$. Was ist die Gleichung der Kurve, wenn die reelle Achse a) parallel der X-Achse, b) parallel der Y-Achse ist?

Res.: a) $\frac{(x-a_1)^2}{a^2} - \frac{(y-b_1)^2}{b^2} = 1$;

b) $\frac{(y-b_1)^2}{b^2} - \frac{(x-a_1)^2}{a^2} = 1$.

360. Zeige, daß jede Gleichung von der Form

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

wobei A und C entgegengesetzte Zeichen haben, eine Hyperbel darstellt, deren Achsen parallel den Koordinatenachsen sind, und bestimme, durch Umänderung dieser Gleichung in die Form a) oder b) in Nr. 359, die Mittelpunktskoordinaten und die Halbachsen der Kurve.

1) $9x^2 - 25y^2 - 18x + 200y - 616 = 0$;

2) $5x^2 - 7y^2 + 20x + 42y - 78 = 0$;

3) $4a^2x^2 - b^2y^2 - 8a^3x - 60a^4 = 0$;

4) $9a^2y^2 - 3b^2x^2 + 6a^2by - 3a^2b^2 = 0$.

Res.: 1) $\frac{(x-1)^2}{5^2} - \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1$;

2) $\frac{(x+2)^2}{7} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$;

$$3)\quad \frac{(x-a)^2}{(4a)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{8a^2}{b}\right)^2} = 1\,;$$

$$4)\quad \frac{\left(y+\frac{b}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}b\right)^2} - \frac{x^2}{\frac{4a^2}{3}} = 1\,.$$

361. In der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ die Sehne P_1P_2 parallel zur Y-Achse so zu ziehen, daß sie Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, für welches die Spitze des rechten Winkels in dem Brennpunkt F_1 $(f|0)$ liegt.

Res.: $$x = \frac{a^2f \mp ab^2\sqrt{2}}{a^2-b^2}\,.$$

362. Es soll ein Rechteck so bestimmt werden, daß zwei Gegenecken in den Brennpunkten F und F_1 und die beiden anderen Ecken auf der Hyperbel von Nr. 361 liegen.

Res.: $$x = \pm a\sqrt{b^2+f^2} : f\,.$$

363. Gegeben ist der Kreis $x^2+y^2=a^2$ und die gleichseitige Hyperbel $x^2-y^2=a^2$. An den Kreis wird in einem beliebigen Punkt P die Tangente gezogen, welche die X-Achse in C schneidet. Es soll gezeigt werden, daß die Tangente PC gleich der zu C gehörigen Ordinate der Hyperbel ist.

364. Von einer Hyperbel, deren reelle Achse auf der X-Achse und deren Mittelpunkt in O liegt, sind zwei Punkte durch ihre Koordinaten $4{,}5|-1$, $6|8$ gegeben. Es sollen die Halbachsen gefunden werden.

Res.: $$a = \sqrt{20}\,,\quad b = \sqrt{80}\,.$$

365. Eine Hyperbel, deren Mittelpunkt M auf der negativen X-Achse im Abstand 15 von O liegt, deren imaginäre Achse parallel zur Y-Achse ist, und für welche O ein Brennpunkt ist, schneidet die Y-Achse in Punkten mit den Ordinaten ± 12. Was ist die Gleichung der Kurve?

Res.: $$\frac{(x+15)^2}{9^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1\,.$$

366. Gegeben ist die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Es soll durch den Punkt $x_1|y_1$ eine zu der gegebenen ähnliche und ähnlich liegende gelegt werden.

Res.: $$b^2x^2 - a^2y^2 = b^2x_1^2 - a^2y_1^2\,.$$

367. Durch den gegebenen Punkt $x_1|y_1$ eine Hyperbel zu legen, deren Halbachsen a und b sich wie $1:k$ verhalten, deren reelle Achse auf die X-Achse und deren Mittelpunkt nach O fällt.

Was ist die Bedingung dafür, daß die Hyperbel reell oder imaginär ist, oder daß sie in ein Geradenpaar ausartet, und was ist dessen Gleichung?

Res.: $$a = \frac{\sqrt{k^2x_1^2 - y_1^2}}{k}\,, \qquad b = ka = \sqrt{k^2x_1^2 - y_1^2}\,.$$

$$a \gtrless 0\,, \quad a = 0\,.$$

368. Gegeben ist die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Es soll eine Parabel gefunden werden, deren Achse auf die Y-Achse fällt, und welche die Hyperbel in den Punkten berührt, in welchen sie von der Geraden $y = b_1$ geschnitten wird.

Res.: $$x^2 = \frac{2\,b_1 a^2}{b^2}\left(y - \frac{b_1^2 - b^2}{2\,b_1}\right).$$

369. Beweise, daß eine Hyperbel und eine Ellipse, welche die Brennpunkte gemeinschaftlich haben, also konfokal sind, sich rechtwinklig schneiden.

370. Zu beweisen: Subtrahiert man von dem Quadrat einer Ordinate einer Asymptote das Quadrat der zugehörigen Ordinate der Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, so ist diese Differenz gleich b^2.

371. Zu beweisen, daß die Gleichungen $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \operatorname{tg} t$ eine Hyperbel darstellen.

372. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten parallel zu den Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystemes sind, und deren Mittelpunkt die Koordinaten a und b hat?

Res.: $(x - a)(y - b) = \pm c^2$.

373. Beweise durch Zurückführung auf die Gleichung von Nr. 372, daß jede Gleichung von der Form $Axy + Bx + Cy + D = 0$ eine Hyperbel darstellt, deren Asymptoten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Beispiele:

1) $xy - 6x - 5y + 16 = 0$;

2) $xy + 8x - y + 1 = 0$;

3) $xy - 11y - 25 = 0$;

4) $6xy - 15x + 14y - 185 = 0$.

Es sind für jede die Mittelpunktskoordinaten und die Asymptoten anzugeben.

374. Die Gleichung einer Hyperbel zu finden, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind, und welche durch die Schnittpunkte der Geraden

1) $y - x = 0$, 2) $y = 2x + 3$, 3) $y = -x + 8$ geht.

Res.: $3xy - 5x + 2y - 36 = 0$.

§ 19. Hyperbel und Gerade; Pol und Polare.

375. Bestimme die Schnittpunkte des Durchmessers $y = mx$ mit der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Wann sind sie reell und verschieden, reell und zusammenfallend, imaginär?

Res.: $$|m| \lesseqgtr \frac{b}{a}.$$

Für $m = \pm\frac{b}{a}$ wird $x = \infty$ und $y = \infty$, d. h. der Durchmesser wird zur Asymptote.

Je nachdem $m \gtrless \frac{b}{a}$, heißt der Durchmesser imaginär oder reell.

376. Es soll parallel zu $y = Mx + C$ eine Tangente an die Hyperbel von Nr. 375 gelegt werden.

Res.: Es gibt zwei Tangenten, ihre Gleichungen sind $y = Mx \pm \sqrt{-b^2 + a^2M^2}$; sie sind reell und verschieden, reell und zusammenfallend, imaginär, je nachdem

$$-b^2 + a^2M^2 \gtreqless 0, \quad \text{also} \quad |M| \gtreqless \frac{b}{a}.$$

Reelle Tangenten sind also nur in Richtungen von imaginären Durchmessern möglich.

377. Leite vermittels des Resultates von Nr. 376 die Gleichungen der Tangenten vom Punkt $x_1|y_1$ an die Hyperbel her.

Res.:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{-b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 + a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}(x - x_1).$$

Von welchen Punkten der Ebene sind keine Tangenten möglich?

378. Leite aus Nr. 377 die Gleichung der Tangente im Punkt $x_1|y_1$ her.

379. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte der Hyperbel $\frac{x^2}{18^2} - \frac{y^2}{24^2} = 1$ mit folgenden Geraden:

$$1)\ 33y - 52x + 504 = 0, \quad 2)\ 20x - 9y - 288 = 0,$$
$$3)\ 5x - 3y + 15 = 0.$$

Res.: 1) $30|32$, $38\frac{1}{4}|45$; 2) $22\frac{1}{2}|18$, Tangente; 3) Die Schnittpunkte sind imaginär.

380. Gib für die Hyperbel in Nr. 379 Gleichungen beliebiger reeller und ebenso imaginärer Durchmesser an.

381. Die Bedingung anzugeben, unter welcher die Gerade $ux + vy + 1 = 0$ die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ berührt.

Res.: $a^2u^2 - b^2v^2 = 1$. (Gleichung der Hyperbel in Linienkoordinaten.)

382. Gib die Gleichungen der Asymptoten für die Hyperbeln

$$\frac{(x - a_1)^2}{a^2} - \frac{(y - b_1)^2}{b^2} = 1$$

und

$$\frac{(y - b_1)^2}{a^2} - \frac{(x - a_1)^2}{b^2} = 1$$

an.

Res.: $$y - b_1 = \pm \frac{b}{a}(x - a_1).$$

383. Die Länge der Subtangente und Subnormale für die Hyperbel von Nr. 379 zu bestimmen.

384. Zu beweisen: Es seien über derselben reellen Achse eine Reihe von Hyperbeln konstruiert und zu dieser Achse ein beliebiges Lot gezogen, welches die Kurven schneidet. Zieht man in den Schnittpunkten Tangenten an die Hyperbeln, so schneiden sie jene Achse in demselben Punkt.

385. Auf der X-Achse einen Punkt $x_1|0$ derart zu bestimmen, daß die von ihm an die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gezogenen 1) Tangenten, 2) Normalen mit den zugehörigen Sehnen ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck bilden. Was ist der Fall für $a \gtreqless b$?

Res.: 1) $x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$, 2) $x_1 = f : \sqrt{a^2 - b^2}$.

386. Dieselbe Aufgabe für einen Punkt der Y-Achse.

387. Die Gleichung der Tangente im Punkte $x_1|y_1$ an die Hyperbel $xy = c^2$ zu finden.

Res.: $ay + bx = 2c^2$.

388. Zu beweisen: Das zwischen den Asymptoten gelegene Stück einer Hyperbeltangente wird durch den Berührungspunkt halbiert.

Zum Beweise bestimme die Länge der Abschnitte der Tangente auf den Asymptoten.

Welche Konstruktion der Tangente in einem Hyperbelpunkt folgt aus obigem Satze?

389. Zu beweisen: Die zwischen den Asymptoten und der Hyperbel liegenden Abschnitte auf einer Sekante sind einander gleich.

Hieraus folgt die Konstruktion einer Hyperbel aus einem ihrer Punkte und den beiden Asymptoten.

390. Durch den auf der $+Y$-Achse im Abstand b von O liegenden Punkt P eine die Hyperbel $xy = c^2$

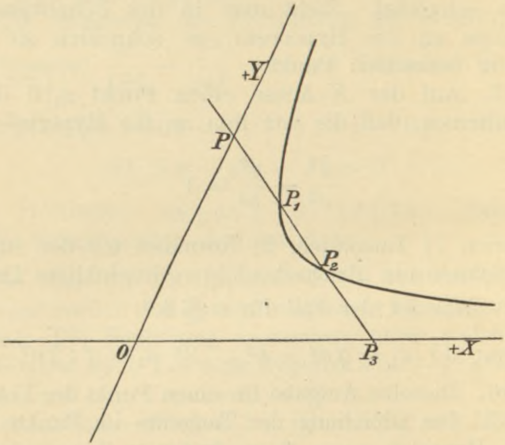

Fig. 17.

in P_1 und P_2 schneidende Gerade so zu ziehen, daß $PP_1 = P_1P_2$ ist.

Res.: $9c^2y + 2b^2x = 9bc^2$.

391. In dem Punkt $x_1|y_1$ der Hyperbel

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ist die Tangente gezogen und auf sie von dem Brennpunkt $f|0$ das Lot gefällt. Es soll bewiesen werden, daß das Produkt aus der Länge des Lotes und der Länge der in $x_1|y_1$ gezogenen Normalen (Stück zwischen $x_1|y_1$ und der X-Achse) gleich dem Produkt aus dem Halbparameter p und dem zu $x_1|y_1$ gehörigen Brennstrahl ist.

392. An die Hyperbel von Nr. 391 eine Tangente zu ziehen, die vom Nullpunkt einen gegebenen Abstand c hat.

Res.: $$y = m x \pm \sqrt{-b^2 + a^2 m^2}\,,$$

wobei

$$m^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2 - c^2}, \qquad \text{also} \qquad y = m x \pm \frac{c f}{\sqrt{a^2 - c^2}}\,.$$

393. Gegeben ist die Gerade $y = m x$ und der Punkt $x_1|y_1$. Es soll die Gleichung einer durch diesen Punkt gehenden Hyperbel gefunden werden, deren Mittelpunkt nach O, deren reelle Achse auf die X-Achse fällt, und für welche die gegebene Gerade Asymptote ist.

Res.: $$a^2 = \frac{m^2 x_1^2 - y_1^2}{m^2}, \qquad b^2 = m^2 x_1^2 - y^2\,.$$

394. Die Gleichung einer Hyperbel zu finden, deren Mittelpunkt nach O, deren reelle Achse auf die X-Achse fällt, und welche die Geraden $y = m x + c$ und $y = m_1 x + c_1$ berührt.

Res.: $$a^2 = \frac{c^2 - c_1^2}{m^2 - m_1^2}, \qquad b^2 = \frac{m^2 c_1^2 - m_1^2 c^2}{m^2 - m_1^2}\,.$$

395. An die Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ sind die beiden Scheiteltangenten und eine beliebige dritte Tangente gezogen. Es soll bewiesen werden, daß das

zwischen den Scheiteltangenten liegende Stück der dritten Tangente von jedem Brennpunkt aus unter rechtem Winkel gesehen wird.

Dieser Satz läßt sich auf folgenden erweitern: Der Winkel, unter welchem das zwischen zwei festen Tangenten liegende Stück einer beweglichen Tangente von einem Brennpunkt aus gesehen wird, ist unveränderlich.

Dieser und der vorige Satz gelten auch für die Ellipse und damit für den Kreis.

396. Die reelle Achse $2a = 10$ einer Hyperbel liege auf der X-Achse, die imaginäre $2b = 6$ auf der Y-Achse. Es soll die Gleichung der Polaren des Punktes $x_1|y_1$ gefunden werden, wenn

1) $x_1 = 9$, $y_1 = 7$; 2) $x_1 = 9$, $y_1 = 0$;
3) $x_1 = 0$, $y_1 = -8$; 4) $x_1 = 5$, $y_1 = 11$,
5) $x_1|y_1$ ein Brennpunkt.

397. Was ist die Gleichung der Polaren eines unendlich fernen Punktes in bezug auf die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, wenn er durch die Gleichung $y = mx$ gegeben ist?

Res.: Der Durchmesser $y = \frac{b^2}{a^2 m} x$.

Anmerkung: Dieser Durchmesser und der gegebene heißen einander zugeordnet (konjugiert). Die Sehnen, welche parallel zu dem einen sind, werden durch den anderen halbiert.

Die Durchmesser $y = mx$ und $y = m_1 x$ sind zugeordnet, wenn $m m_1 = \frac{b^2}{a^2}$ ist.

398. Zeige, daß die Polare des unendlich fernen Punktes einer Asymptote diese Asymptote selbst ist.

399. Beweise a) geometrisch (mit Nr. 398), b) analytisch, daß die Polare jedes Punktes einer Asymptote parallel zu dieser Asymptote ist.

400. Zu beweisen: Zieht man in den Endpunkten eines Durchmessers Tangenten, so sind diese dem zugeordneten Durchmesser parallel.

401. Zu beweisen: Zieht man von einem beliebigen Punkt eines Durchmessers Tangenten, so wird die zugehörige Berührungssehne von dem Durchmesser halbiert.

402. Ebenso: Verbindet man einen beliebigen Hyperbelpunkt mit den Endpunkten eines Durchmessers, so sind diese Verbindungslinien zwei konjugierten Durchmessern parallel.

403. Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2$ stellt eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b dar. Wird $\lambda = 0$, so artet sie in ein Geradenpaar aus. Was ist in Beziehung auf dieses Geradenpaar die Gleichung der Polaren des Punktes $x_1 | y_1$?

Res.:
$$\frac{x_1\,x}{a^2} - \frac{y_1\,y}{b^2} = 0\,.$$

404. Was sind die Koordinaten des Poles $x_1 | y_1$ für folgende gerade Linien in bezug auf die angegebenen Hyperbeln?

1) $4x - 25y = 25\,, \quad \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1\,;$

2) $4x - 5y = 0\,, \quad \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{7} = 1\,;$

3) $mx + ny = c\,, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$

Res.: 1) $4|9$; 2) der durch $y = \frac{35}{24}x$ bestimmte unendlich ferne Punkt; 3) $\frac{m a^2}{c} \Big| -\frac{n b^2}{c}$.

405. Die Gleichung einer durch den Punkt $x_1|y_1$ gehenden Geraden zu finden, von welcher die Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ eine Sehne abschneidet, welche in diesem Punkt halbiert wird.

Res.: $$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) .$$

406. Durch den Punkt $x_1|y_1$ eine Gerade so zu ziehen, daß die von der Hyperbel von Nr. 405 auf ihr abgeschnittene Sehne von dem Durchmesser $y = mx$ halbiert wird.

Res.: $$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2 m}(x - x_1) .$$

407. Es sollen zwei konjugierte Durchmesser OD und OD_1 der Hyperbel so bestimmt werden, daß OD den Winkel zwischen der $+X$-Achse und OD_1 halbiert.

Res.: $y = mx\,(OD)$ und $y = m_1 x\,(OD_1)$, wobei

$$m = \frac{\pm b}{\sqrt{2a^2 + b^2}}, \quad m_1 = \frac{b^2}{a^2 m} .$$

408. Die Gleichungen zweier konjugierter Durchmesser zu bestimmen, die einen Winkel von 45^0 miteinander bilden.

Res.: Die Richtungsfaktoren der Durchmesser sind

$$m = \frac{-(a^2 + b^2) \pm \sqrt{4a^2 b^2 + (a^2 + b^2)^2}}{2a^2},$$

$$m_1 = \frac{b^2}{a^2 m} .$$

409. Die Längen der zu einem Punkt P (Abszisse x_1) der Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ gehörigen Brennstrahlen zu finden.

Res.: $x_1 \varepsilon - a$; $x_1 \varepsilon + a$.

410. Von dem Schnittpunkt der zu dem Brennpunkt F gehörigen Leitlinie mit der reellen Achse ist an die Hyperbel eine Tangente gezogen. Von einem beliebigen Punkt P dieser Tangente ist auf die reelle Achse das Lot PC gefällt, welches die Kurve in E schneidet. Es soll bewiesen werden, daß $FE = PC$ ist.

411. Zu beweisen: Wenn zwei Hyperbeln, oder eine Ellipse und eine Hyperbel die beiden Brennpunkte gemeinschaftlich haben und es wird eine Tangente der ersten Kurve als Polare in Beziehung auf die zweite genommen, so liegt der zugehörige Pol auf der durch den Berührungspunkt jener Tangente gehenden Normalen der ersten Kurve.

412. Zu beweisen: Eine Ellipse berührt in ihren Scheiteln die Seiten eines Rechteckes, dessen Diagonalen Asymptoten einer Hyperbel sind, deren reelle Achse mit einer der Ellipsenachsen zusammenfällt. Zieht man aus einem beliebigen Punkt P (s. Fig. 18) der einen Kurve zwei Tangenten an die andere, so ist die durch die Berührungspunkte gelegte Gerade eine Tangente der ersten Kurve. Zieht man aus ihrem Berührungspunkt P_1 wieder zwei Tangenten an die zweite Kurve, so berührt die durch die neuen Berührungspunkte bestimmte Gerade die erste Kurve im Punkt P. Zeige ferner, daß

P und P_1 symmetrisch zu der gemeinschaftlichen Achse beider Kurven liegen.

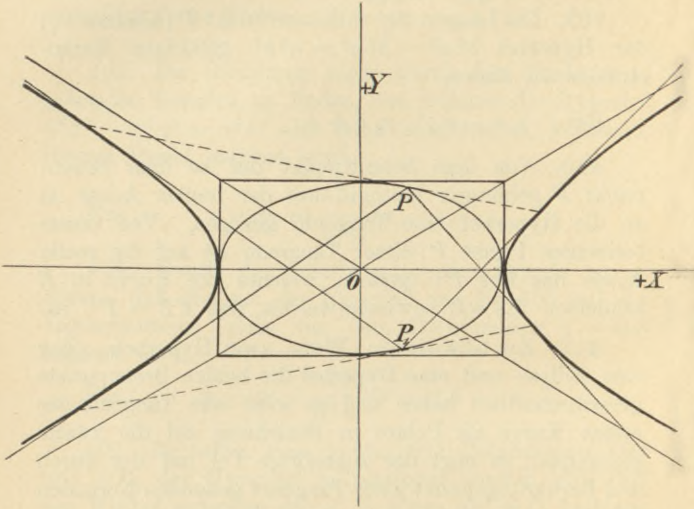

Fig. 18.

413. Zu beweisen: Das Lot von einem Punkt der Leitlinie einer Hyperbel auf die Polare dieses Punktes trifft diese Polare im Brennpunkt. (Ebenso für Ellipse und Parabel.)

414. Zieht man von einem Hyperbelpunkt eine Parallele zu einer Asymptote bis zu einer der Leitlinien, so hat diese Parallele die Länge des Abstandes des Hyperbelpunktes von dem entsprechenden Brennpunkt.

§ 20. Geometrische Örter.

415. Auf der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystemes sind die Punkte F und F_1 mit den Abszissen $+f$ und $-f$ gegeben. Um den Punkt F_1 ist ein Kreis mit dem Halbmesser r_1 beschrieben. Es soll der Ort des Punktes P gefunden werden, der sich so bewegt, daß die Differenz zwischen der von ihm an den Kreis gezogenen Tangente und seinem Abstand von F eine gegebene Größe $2a$ habe. $(f > a.)$ Was ergibt sich mit $r_1 = 0$?

416. Erweitere die vorige Aufgabe dahin, daß an Stelle des Abstandes PF die Länge der Tangente von P an den um F mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis tritt. $(f > a.)$

Res.: $$(f^2 - a^2)x^2 + \frac{fx}{2}(r^2 - r_1^2) - a^2 y^2$$
$$= a^2(f^2 - a^2) - \tfrac{1}{16}(r^2 - r_1^2)^2 + \tfrac{1}{2}a^2(r^2 + r_1^2)\,.$$

417. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie beständig die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ berührt. Was ist der Ort ihres Poles in bezug auf die Parabel $y^2 = 2ax$?

Res.: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

418. Was ist der Ort für den Fußpunkt des von einem Brennpunkt auf eine Hyperbeltangente gefällten Lotes?

Res.: Der Kreis über der reellen Achse.

419. Vom Ursprung werden nach den Punkten der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ Sehnen OP, $OP_1 \ldots$ gezogen und jede über $P, P_1 \ldots$ hinaus um das a) $\frac{2}{5}$ fache,

b) $\frac{m}{n}$ fache verlängert. Was ist der geometrische Ort der Endpunkte der Verlängerungen?

$$\text{Res.:} \quad \text{b)} \quad \frac{x^2}{\frac{(m+n)^2 a^2}{n^2}} - \frac{y^2}{\frac{(m+n)^2 b^2}{n^2}} = 1 .$$

420. Es ist ein Rechteck $OP_1P_2P_3$ gegeben, für welches $OP_1 = a$, $OP_3 = b$ ist. Ein Punkt P bewegt sich so, daß das Produkt seiner Abstände von den Gegenseiten OP_1 und P_2P_3 das m fache des Produktes der Abstände von P_1P_2 und OP_3 ist. Was ist der Ort von P? (OP_1 X-Achse, OP_3 Y-Achse.)

Res.: $x^2 \pm y^2 - ax \mp bx = 0$, wobei je die oberen und die unteren Zeichen aufeinander zu beziehen sind.

421. Was ist der Ort für einen Punkt, der sich so bewegt, daß die von ihm an die Hyperbel

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

gezogenen Tangenten senkrecht aufeinander stehen? ($a \gtreqless b$.)

Res.: $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

422. Gegeben sind zwei konfokale Hyperbeln. Ein rechter Winkel bewegt sich so, daß der eine Schenkel Tangente an die eine, der andere Tangente an die andere Hyperbel ist. Was ist der Ort der Spitze des Winkels?

Res.: $x^2 + y^2 = a^2 - b_1^2 (= a_1^2 - b^2)$.
a, b und a_1, b_1 seien die Halbachsen.

423. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie beständig Tangente an die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ bleibt. Was ist der Ort ihres Poles a) in bezug auf die Ellipse

$b_1^2 x^2 + a_1^2 y^2 = a_1^2 b_1^2$, b) in bezug auf die Hyperbel $b_1^2 x^2 - a_1^2 y^2 = a_1^2 b_1^2$?

Res.: $$\frac{x^2}{\left(\frac{a_1^2}{a}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b_1^2}{b}\right)^2} = 1 .$$

424. Ein Punkt P bewegt sich auf der einen Leitlinie der Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$. Die zu P gehörige Polare sei QR. Vom Mittelpunkt O der Kurve wird auf QR das Lot gefällt. Es soll der Ort des Fußpunktes ermittelt werden.

Res.: $$\left(x - \frac{f}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{f^2}{4} .$$

425. Auf der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystemes liegen die beiden festen Punkte A und A_1 in gleichen Abständen a von O. Durch A und A_1 sind Parallelen zu der Y-Achse gezogen, welche von einer beweglichen, zur X-Achse parallelen Geraden in P und P_1 geschnitten werden. Es wird AP_1 und A_1P und zu AP_1 in A das Lot gezogen, welches A_1P in Q trifft. Was ist der Ort von Q?

Res.: $x^2 - y^2 = a^2$.

426. Auf der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$, deren Scheitel P_1 und P_2 sind, bewegt sich Punkt P. Was ist der Ort des Höhenschnittpunktes des Dreieckes PP_1P_2?

Res.: $(x^2 - a^2)(x^2 - y^2 - a^2) = 0$.

Diese Gleichung zerfällt in

$x^2 - a^2 = 0$ (Scheiteltangenten, parasitische Gebilde) und

$x^2 - y^2 - a^2 = 0$ (die ursprüngliche Hyperbel).

Inwiefern entspricht dieses letztere Ergebnis dem Satz vom Winkel im Halbkreis?

427. Auf der $+X$-Achse ist der Punkt A mit der Abszisse a gegeben. Auf der Y-Achse bewegt sich Punkt P_1. Durch P_1 wird die Parallele zur X-Achse gezogen und darauf in der Richtung der $+X$-Achse $P_1 P = A P_1$ abgetragen. Was ist der Ort von P?

Res.: $x^2 - y^2 = a^2$.

428. Gegeben ist die gleichseitige Hyperbel

$$x^2 - y^2 = a^2;$$

ferner auf der X-Achse zwei Punkte A und A_1 mit den Abszissen $+a$ und $-a$. Von dem auf der Hyperbel beweglichen Punkt Q ist das Lot QP_1 auf die Y-Achse gefällt und über Q hinaus um sich selbst verlängert bis P. Was ist der Ort des Schnittpunktes der AP mit der $A_1 P_1$?

Res.: $$y^2 = -2a\left(x + \frac{a}{2}\right).$$

429. In dem auf der Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ beweglichen Punkt P ist die Tangente gezogen. Es soll der Ort des Höhenschnittpunktes in dem von dieser Tangente, dem Durchmesser OP und der reellen Achse gebildeten Dreieck ermittelt werden. Was ist der Fall, wenn $b = a$ ist?

Res.: $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{a^4}{b^2}} = 1.$$

430. In der Hyperbel von Nr. 429 ist die zu der reellen Achse senkrechte und bewegliche Sehne $Q_1 Q_2$

gezogen. Q_1 ist mit dem Brennpunkte F_1, Q_2 mit F_2 verbunden. Es soll der Ort des Schnittpunktes P von $F_1 Q_1$ und $F_2 Q_2$ gefunden werden.

Res.: $$\frac{x^2}{f^4} + \frac{y^2}{f^2 b^2} = \frac{1}{a^2}.$$

431. Die reelle Achse der Hyperbel in Nr. 429 ist Grundlinie eines Dreieckes, dessen Spitze sich auf der Kurve bewegt. Es soll der Ort a) des Schwerpunktes, b) des Höhenschnittpunktes des Dreieckes gefunden werden.

Res.: a) $\dfrac{x^2}{\frac{a^2}{3}} - \dfrac{y^2}{\frac{b^2}{3}} = 1$, b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\frac{a^4}{b^2}} = 1$.

432. In dem beweglichen Punkt P der Hyperbel von Nr. 429 ist die Normale gezogen, welche die reelle Achse $A_1 A_2$ in N schneidet. PN ist über P hinaus um sich selbst verdoppelt bis P_1 und von P ist auf $A_1 A_2$ das Lot PC gefällt. Es soll der Ort für den Schnittpunkt der $P_1 C$ mit dem zu der Normalen parallelen Durchmesser ermittelt werden.

Res.: $$\frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{\frac{4a^4}{b^2}} = 1.$$

433. Jeder Punkt der gleichseitigen Hyperbel $xy = c^2$ wird in der Richtung der Halbierungslinie des ersten Feldes um die Strecke $2s$ parallel verschoben. Was ist die Gleichung der entstehenden Linie? (S. Fig. 19.)

Res.: $(x - s\sqrt{2})(y - s\sqrt{2}) = c^2$.

434. Durch den auf der $+Y$-Achse im Abstand C liegenden Punkt P ist nach dem auf der Hyperbel

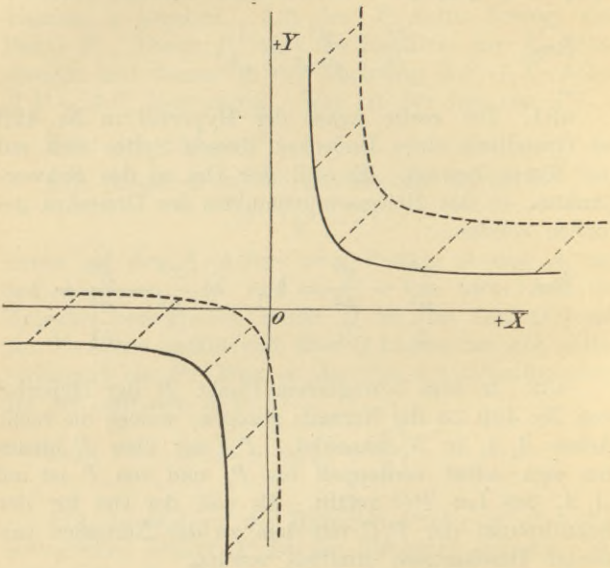

Fig. 19.

$xy = c^2$ liegenden Punkt P_1 der Strahl PP_1 gezogen; er wird um sich selbst über P_1 hinaus verlängert bis P_2. Was ist der Ort von P_2, wenn P_1 auf der Kurve wandert?

Res.: $x(y + b) = 4c^2$.

Was sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven?

435. Erweitere die Aufgabe Nr. 434 dahin, daß der Punkt P nicht auf der Y-Achse liegt, sondern die Koordinaten $a|b$ hat.

436. Durch den Punkt $a_1|b_1$ wird eine Sekante an die Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ gezogen. Was ist der Ort des Halbierungspunktes der auf ihr abgeschnittenen Sehne, wenn sich die Sekante um $a|b$ dreht?

Res.: $$\frac{\left(x - \frac{a_1}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y - \frac{b_1}{2}\right)^2}{b^2} = \frac{a_1^2}{4a^2} - \frac{b_1^2}{4b^2}\,.$$

Besondere Fälle: Punkt $a_1|b_1$ fällt 1) auf die Hyperbel, 2) nach O, 3) ins Unendliche; 4) $a = b$.

437. Dieselbe Aufgabe für die Hyperbel $xy = c^2$.

Res.: $$\left(x - \frac{a_1}{2}\right)\left(y - \frac{b_1}{2}\right) = \frac{a_1 b_1}{4}\,.$$

Was folgt daraus, daß diese Gleichung c nicht enthält?

In welchem Zusammenhang steht dieses Resultat mit demjenigen, das sich für dieselbe Aufgabe in Beziehung auf den Kreis ergibt? (Vgl. auch Nr. 436, Fall 4.)

Was ergibt sich, wenn $c = 0$ ist?

438. Ein auf der Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ beweglicher Punkt P wird auf die Y-Achse nach Q projiziert und es wird Q mit dem auf der $+X$-Achse liegenden Scheitel S verbunden. Was ist der Ort des Schnittpunktes dieser Verbindungslinien mit dem vom Ursprung nach P gezogenen Strahl?

Res.: $$y^2 = \frac{2b^2}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

439. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie beständig Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ bleibt. Was ist der Ort ihres Poles in bezug auf die Hyperbel

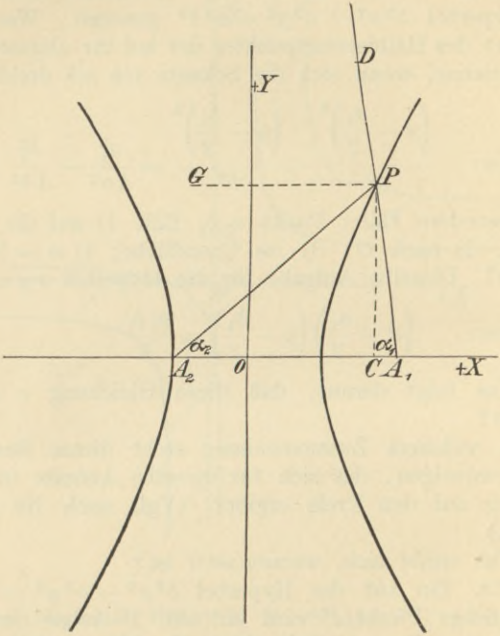

Fig. 20.

$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ und was ist der Fall, wenn $b = a = r$ ist?

Res.: $$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{r^2}.$$

440. An der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ gleitet eine Tangente; was ist der Ort ihres Poles in bezug auf die Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$?

Res.: Die Ellipse selbst.

441. Suche den Ort des Poles in Aufgabe Nr. 411.

442. Dreiteilung des Winkels (s. Fig. 20): Die Spitze P eines Dreieckes PA_1A_2, dessen Grundlinie A_1A_2 von unveränderlicher Länge $3a$ ist, bewege sich so, daß der Außenwinkel A_2PD an der Ecke P das Dreifache des Winkels PA_2A_1 ist. Es soll der Ort der Spitze gefunden werden.

Gang: Man nehme den Punkt O, der A_2A_1 im Verhältnis $2:1$ teilt, als Nullpunkt ($A_2O = a$, $OA_1 = 2a$), OA_1 als X-Achse. Es ist nun $\sphericalangle DPA_2 = 3\alpha_2$, $\sphericalangle PA_1A_2 = \alpha_1 = 2\alpha_2$. Sind x und y die Koordinaten von P, so läßt sich $\operatorname{tg}\alpha_1$ und ebenso $\operatorname{tg}\alpha_2$ in x, y und a und $\operatorname{tg}\alpha_1$ in $\operatorname{tg}\alpha_2$ ausdrücken. Hieraus folgt als gesuchte Ortsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1 .$$

Verbindet man einen beliebigen Punkt P dieser Hyperbel mit A_1 und A_2, so ist also $\sphericalangle PA_2A_1 = \frac{1}{3} A_2PD$. Die Parallele PG zu A_1A_2 schneidet also ein Drittel von $\sphericalangle A_2PD$ ab.

VII. Abschnitt.

Die Kegelschnitte im allgemeinen.

§ 21. Vorbemerkungen.

a) Bezeichnung: Die allgemeine Gleichung zweiten Grades lautet:

1) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

oder

2) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$;

symbolische Bezeichnung:

$$3) \quad f(x, y) = 0 .$$

b) 1) bzw. 2) stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem

$$B^2 - 4AC \lesseqgtr 0 , \quad \text{oder} \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \lesseqgtr 0 .$$

c) Die Koordinaten des Mittelpunktes ergeben sich aus

$$\tfrac{1}{2}f'_x \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

und

$$\tfrac{1}{2}f'_y \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 ,$$

oder als Schnittpunkte der Mittelparallelen der beiden zur X-Achse bzw. Y-Achse parallelen Tangenten.

d) Die Gleichung des Durchmessers, der zu der Richtung $y = mx$ zugeordnet ist, lautet:

$$f'_x + mf'_y = 0 .$$

e) Die Richtungen der Hauptachsen können dadurch ermittelt werden, daß man diejenige Sehnenrichtung sucht, die auf ihrem zugeordneten Durchmesser senkrecht steht.

f) Die Gerade $y = mx + c$ (oder $x = ny + d$) ist Asymptote eines Kegelschnittes, wenn die beiden Linien zwei zusammenfallende unendlich ferne Punkte gemeinschaftlich haben, wenn also die Auflösung der Gleichungen der Geraden und des Kegelschnittes nach x (oder y) zwei Wurzeln $x = \infty$ (bzw. $y = \infty$) liefert. Aus den beiden Bedingungen hierfür ergeben sich m und c (bzw. n und d).

g) Die Gleichung der Tangente im Punkt $x_1 | y_1$ lautet:

$$(x - x_1) f'_{x_1} + (y - y_1) f'_{y_1} = 0 \quad \text{oder} \quad y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1).$$

h) Die Gleichung der Polaren des Punktes $x_1 | y_1$ lautet:

$$(x - x_1) f'_{x_1} + (y - y_1) f'_{y_1} + 2 f(x_1 | y_1) = 0 .$$

i) Koordinatenänderung[1]):

α) Parallele Verschiebung durch die Einsetzung

$$x = a + \xi , \quad y = b + \eta \quad (a | b \text{ neuer Nullpunkt}).$$

β) Drehung um O um den Winkel φ durch die Einsetzung

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi ,$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \sin\varphi .$$

[1]) Über: „Bestimmung von Gestalt und Lage eines Kegelschnittes aus einer Gleichung zweiter Ordnung ohne Koordinatenänderung" s. Thaer, Progr. Nr. 817, 1902.

Die Richtung der Hauptachsen, von welchen die eine mit der X-Achse den Winkel α bildet, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Durch Drehung des Koordinatensystemes um den Winkel α kommt in der Gleichung 2. Grades das Glied mit xy in Wegfall.

k) Kegelschnittbüschel. Sind $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ die Gleichungen von Kegelschnitten, $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ Gleichungen von Geraden, so bedeutet

1) $K_1 + \lambda K_2 = 0$ einen Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte von $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ geht;

2) $K_1 + \lambda L_1 L_2 = 0$ einen Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte von $K_1 = 0$ mit den Geraden $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ geht;

3) $K_1 + \lambda L_1^2 = 0$ einen Kegelschnitt, der $K_1 = 0$ in seinen Schnittpunkten mit $L_1 = 0$ berührt;

4) $L_1 L_2 + \lambda L_3 L_4 = 0$ einen Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte des Geradenpaares $L_1 L_2 = 0$ mit dem Geradenpaar $L_3 L_4 = 0$ geht;

5) $L_1 L_2 + \lambda L_3^2 = 0$ einen Kegelschnitt, der das Geradenpaar $L_1 L_2 = 0$ in seinen Schnittpunkten mit $L_3 = 0$ berührt.

§ 22. Gemeinsame Gleichungen der Kegelschnitte; allgemeine Gleichung 2. Grades.

443. Beweise, daß durch die Gleichung

$$1)\quad y^2 = 2px + qx^2,$$

ebenso durch

$$2)\quad y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

Ellipse, Parabel oder Hyperbel dargestellt ist, je nachdem $q \lesseqgtr 0$, bzw. $\varepsilon \lesseqgtr 1$ ist. Wie liegt das Koordinatensystem zu der betreffenden Kurve?

444. Zeige, daß, wenn die große Achse einer Ellipse auf der $+X$-Achse und ein Scheitel in O liegt, sie sich durch die Gleichung

$$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2$$

darstellen läßt ($2\,p$ Parameter, $2\,a$ große Achse).

445. Zeige ähnliches für die Hyperbel.

446. Was wird aus der Ellipse von Nr. 444, wenn $a = \infty$ wird?

447. Zeige durch Auflösung nach x oder y, daß folgende Gleichungen reelle oder imaginäre Geradenpaare darstellen:

a) $21\,x^2 + x\,y - 10\,y^2 = 0$;

b) $4\,x\,y - 11\,x^2 + 34\,x - 12\,y - 3 = 0$;

c) $4\,x^2 + 20\,x\,y + 25\,y^2 - 18\,x - 45\,y + 8 = 0$;

d) $x^2 + 9\,y^2 + 12\,y + 10\,x + 29 = 0$;

e) $x^2 - 14\,x\,y + 49\,y^2 + 25 = 0$;

f) $18\,x^2 + 30\,x\,y + 13\,y^2 + 18\,x + 13\,y + 2 = 0$.

Als Ausartung welches Kegelschnittes ist nach dem Kennzeichen $B^2 - 4\,A\,C$ jedes dieser Geradenpaare aufzufassen?

448. Zeige durch Zerlegung der linken Seite in Faktoren, daß folgende Gleichungen (reelle oder imaginäre) Geradenpaare darstellen:

a) $x\,y = 0$; b) $x\,y - a\,y + b\,x - a\,b = 0$;

c) $x^2 - xy - ax = 0$; d) $x^2 - y^2 = 0$;

e) $x^2 + y^2 = 0$.

449. Den Ort der Halbierungspunkte der Sehnen zu finden, die in folgenden Kegelschnitten parallel a) zu der X-Achse, b) zu der Y-Achse gezogen werden, und die Koordinaten der Mittelpunkte zu bestimmen.

1) $3x^2 + 2xy - 6x + 8y - 4 = 0$;

2) $x^2 - 6xy + 2y^2 - 6 = 0$.

Res.: 1) $3x + y - 3 = 0$, $x + 4 = 0$, $-4|15$.

2) $x - 3y = 0$, $-3x + 2y = 0$, $0|0$.

450. Die Gleichungen der a) zu der X-Achse, b) zu der Y-Achse parallelen Tangenten an die Kegelschnitte von Aufgabe Nr. 449 zu finden.

1) $y = 12 \pm \sqrt{204}$, $x = -4$ (Asymptote);

2) die Tangenten parallel zur X- und Y-Achse sind imaginär,

$$y = \pm i\sqrt{\frac{7}{6}}, \quad x = \pm i\sqrt{\frac{12}{7}}.$$

451. Gib die Art der Kegelschnitte, die durch folgende Gleichungen dargestellt sind, an, löse die Gleichung bei 1) nach y, bei 2) nach x, bei 3) nach x und y auf.

Gib die geometrische Bedeutung der Werte von x und y an, die aus der Nullsetzung der sich einstellenden Quadratwurzel fließen, und bestimme die Schnittpunkte oder Berührungspunkte der Kurven mit den Achsen.

Bestimme die Lage des Mittelpunktes, wo ein solcher vorhanden ist, ferner bei 2) die Asymptoten und skizziere aus den erhaltenen Ergebnissen den Verlauf jeder Kurve.

1) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$;

2) $4x^2 + 2xy + 3y - 12 = 0$;

3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0$;

4) $x^2 - 6xy + 11y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$.

Res.: 1) Reelle Ellipse, Mittelpunkt $2|1$.

2) Reelle Hyperbel; Asymptoten $2x + 3 = 0$, $2x + y - 3 = 0$; Mittelpunkt $-\frac{3}{2}\Big|6$.

3) Parabel, berührt die X-Achse im Punkt $1|0$, schneidet die Y-Achse im Punkt $0|4 \pm \sqrt{3}$.

4) Imaginäre Ellipse.

452. Für die Kegelschnitte

1) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$,

2) $4x^2 + 2xy + 3y - 12 = 0$ (s. Nr. 451, 1 u. 2)

die Geraden, auf welchen die Hauptachsen liegen, zu finden.

Res.: 1) $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$;

2) $y - 6 = (-2 \pm \sqrt{5})(x + \frac{3}{2})$.

453. Verschiebe für folgende Kegelschnitte das Koordinatensystem parallel, je durch den Mittelpunkt:

1) $4xy - 11x^2 + 34x - 12y - 3 = 0$ (s. Nr. 447b),

2) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$ (s. Nr. 451_1),

3) $4x^2 + 2xy + 3y - 12 = 0$ (s. Nr. 451_2).

454. Bestimme für die dritte Kurve in Nr. 451 die Richtung der Hauptachse und der Scheiteltangente; bringe durch Drehung des Koordinatensystemes um O das Glied mit xy zum Wegfall. Was sind die Scheitelkoordinaten der Parabel für das ursprüngliche und das neue System?

Res.: Richtung der Hauptachse $y = 2x$, der Scheiteltangente $y = -\frac{1}{2}x$.

Gleichung der Parabel im neuen System:

$$\left(y' + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{24}{5\sqrt{5}}\left(x' - \frac{7}{50}\sqrt{5}\right);$$

Scheitelkoordinaten im neuen System

$$\frac{7}{50}\sqrt{5} \,\Big|\, -\frac{4}{5\sqrt{5}},$$

im ursprünglichen System

$$\frac{23}{50} \,\Big|\, \frac{3}{25}.$$

455. Löse die Aufgaben Nr. 451, 452, 454 auch für folgende Kurven:

1) $x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 5 = 0$,

2) $x^2 - 10xy + 26y^2 + 2x - 7y - 9 = 0$,

3) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 6y - 12 = 0$.

456. Beweise, daß, wenn in der allgemeinen Gleichung 2. Grades $A = C$ und $B \gtrless 0$ ist, das Glied mit xy wegfällt, wenn das Koordinatensystem um 90^0 gedreht wird.

457. Die Gleichungen der Tangenten zu finden, welche parallel zu der Geraden

a) $y = 8x - 1$, b) $y = 3x + 4$, c) $y = 4x + 1$ an die Kurve

$$8x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 5 = 0$$

gezogen werden können.

Res.: a) $y = 8x - 10 \pm \sqrt{24}$,

b) imaginär,

c) $y = 4x - 2$; es gilt nur eine Tangente, diese ist Asymptote.

458. Suche die Schnittpunkte der Geraden

$$y = 2x + c$$

mit der Kurve in Nr. 457, was zeigt sich? Welchen Wert hat man c zu geben, damit beide Schnittpunkte in einen zusammenfallen? Welche geometrische Bedeutung hat alsdann die Gerade? ($c = 2$, Asymptote.)

459. Die Gleichungen der Tangenten zu finden, die parallel zu der Geraden $y = 3x - 1$ an die Kurve

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 6y - 12 = 0$$

gezogen werden können.

Res.: $$y = 3x - \frac{139}{8}.$$

Warum ergibt sich nur eine Tangente?

460. Die Gleichung für den Ort der Halbierungspunkte der Sehnen zu finden, welche parallel zu der Geraden $y = 5x + 2$ in dem Kegelschnitt

$$6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$$

gezogen werden können.

Res.: $4x + 43y = 82$.

461. Dieselbe Aufgabe für die imaginäre Ellipse von Nr. 451_4.

Res.: $7x - 26y - 7 = 0$.

462. Löse dieselbe Aufgabe auch für die Geradenpaare in Nr. 447, a, b, c.

463. Untersuche Art und gegenseitige Lage der Kurven

$$x^2 + 2xy - c^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2xy - c^2 = 0 .$$

Ziehe an jede in den Schnittpunkten mit der Geraden $x = c$ Tangenten; wo schneiden diese die Y-Achse?

464. Wie muß m gewählt werden, damit die Halbierungspunkte der Sehnen, die in dem Kegelschnitt

$$4x^2 + 2xy + 3y - 12 = 0$$

parallel der Geraden

$$y = mx + c$$

gezogen werden,

a) auf einer Parallelen zu der X-Achse liegen,

b) auf einer Geraden liegen, welche auf der Y-Achse ein Stück von der Länge 9 abschneidet,

c) auf einer Parallelen zu der Geraden $y = -5x + 2$,

d) auf einer durch O gehenden Geraden liegen?

Res.: a) $m = -4$; b) $m = -6$; c) $m = 1$; d) $m = 0$.

465. Was ist die Bedingung dafür, daß die durch die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

dargestellte Kurve

a) durch O geht,
b) die X-Achse,
c) die Y-Achse berührt,
d) die X-Achse in O berührt,
e) die Y-Achse in O berührt,
f) die X-Achse in einem unendlich fernen Punkt schneidet, d. h. daß sie eine Parallele zur X-Achse als Asymptote hat,
g) die X-Achse in zwei unendlich fernen Punkten trifft, daß also die X-Achse selbst Asymptote ist,
h) symmetrisch zu der X-Achse,
i) symmetrisch zur Y-Achse ist,
k) den Mittelpunkt als Ursprung hat,
l) symmetrisch zu der Halbierungslinie des ersten und dritten Feldes,
m) symmetrisch zu der Halbierungslinie des zweiten und vierten Feldes ist?

466. Aus der numerischen Exzentrizität ε eines Kegelschnittes, den Koordinaten $x_0|y_0$ eines Brennpunktes F und der Gleichung $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ der zu dem gegebenen Brennpunkt gehörigen Leitlinie soll die Gleichung des Kegelschnittes gefunden werden[1]).

Auflösung: Ist $P(x|y)$ ein Punkt der Kurve, PD sein Abstand von der Leitlinie, so ist $\frac{PF}{PD} = \varepsilon$, hieraus ergibt sich die Ortsgleichung von P

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

wobei

$$\varepsilon^2\cos^2\alpha - 1 = a,$$

[1]) S. Ad. Breuer, Die Normalgleichung der allgem. Kegelschnittsgleichung. 1888.

$$\varepsilon^2 \cos\alpha \cos\beta = b\,,$$

$$\varepsilon^2 \cos^2\beta = c\,,$$

$$x_0 - \varepsilon^2 p \cos\alpha = d\,,$$

$$y_0 - \varepsilon^2 p \cos\beta = e\,,$$

$$\varepsilon^2 p^2 - x_0^2 - y_0^2 = f\,.$$

Anmerkung: Zwischen den Koeffizienten a, b, c besteht die Beziehung

$$b^2 - ac - a - c = 1\,.$$

467. Die Gleichung einer Parabel zu finden, für welche der Abstand p der Leitlinie vom Nullpunkt die Länge 2 hat. Der Richtungswinkel α von p sei gegeben durch $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, der Brennpunkt habe die Koordinaten $6|5$.

Res.: Mit Hilfe der Formeln der vorigen Aufgabe erhält man

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 240x - 170y + 1425 = 0\,.$$

468. Die Gleichung einer Ellipse zu finden, wenn gegeben sind: die Koordinaten $3|13$ des Brennpunktes, der am nächsten bei O liegt, die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{4}{5}$, die große Halbachse 10 und der Richtungswinkel α der großen Achse durch $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

Res.: $$3825x^2 - 1920xy + 1921y^2 - 24690x - 106586y + 750894 = 0\,.$$

§ 23. Geometrische Örter; Kegelschnittbüschel; vermischte Aufgaben.

469. Gegeben sind die beiden Kegelschnitte

$$\text{I.} \quad A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0 \,,$$

$$\text{II.} \quad A_1 x^2 + B_1 x y + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \,.$$

a) In wieviel (imaginären oder reellen) Punkten schneiden sie sich?

b) Die Gleichung eines beliebigen oder durch die Schnittpunkte von I. und II. gehenden Kegelschnittes lautet:

$$\begin{aligned}\text{III.} \quad & (A + \lambda A_1) x^2 + (B + \lambda B_1) x y + (C + \lambda C_1) y^2 \\ & + (D + \lambda D_1) x + (E + \lambda E_1) y + F + \lambda F_1 = 0 \,.\end{aligned}$$

Wie muß λ gewählt werden, daß der Kegelschnitt III

c) durch O geht,

d) die X-Achse,

e) die Y-Achse berührt,

f) durch den Punkt $a|b$ geht,

g) die Gerade $y = m x + c$ berührt,

h) die Strecke zwischen den Punkten $P(a|b)$ und $P_1(a_1|b_1)$ im Verhältnis $k : 1$ teilt,

i) eine Ellipse oder Hyperbel ist, deren Achsen den Koordinatenachsen parallel sind,

k) eine Parabel ist?

470. Gegeben ist ein Kreis K um O mit dem Halbmesser r und eine zu der X-Achse parallele Gerade L im Abstand $+b$. Es soll durch die Schnittpunkte der L mit K und durch die Schnittpunkte der X-Achse mit K

1) ein Kreis,

2) eine Parabel,

3) eine gleichseitige Hyperbel, deren reelle Achse parallel der X-Achse ist,

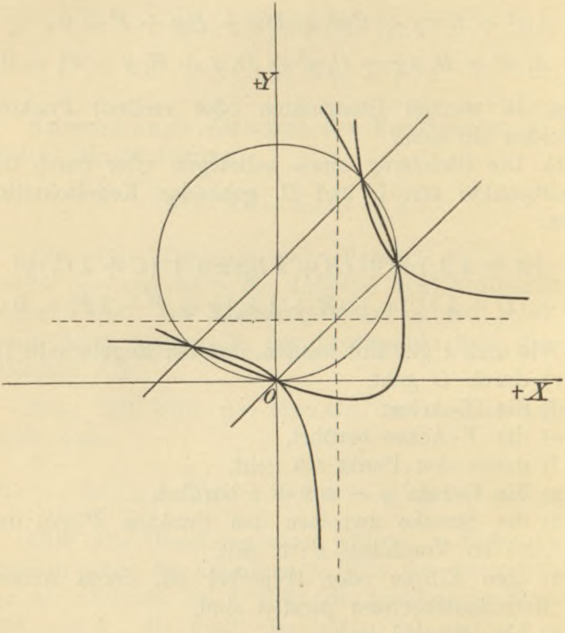

Fig. 21.

4) eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Abstand $\frac{b}{3}$ von O liegt, gelegt werden.

Wie lautet die betreffende Gleichung?

Res.: $x^2 + (1 + \lambda) y^2 - \lambda b y - r^2 = 0$,

λ hat hierbei die Werte 0, -1, -2, $\frac{2}{3}$.

Untersuche jede der gefundenen Kurven für den Fall, daß $b = r$ ist.

471. Gegeben ist ein Kreis vom Halbmesser r (s. Fig. 21), dessen Mittelpunkt auf der $+Y$-Achse liegt, und der die X-Achse in O berührt, ferner die beiden Geraden $x = \frac{r}{2}$, $y = \frac{r}{2}$. Sie sind Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel, die durch O geht. Es soll die Gleichung einer Parabel gefunden werden, welche durch die Schnittpunkte beider Kurven geht. Welche Stücke schneidet diese Parabel auf den Koordinatenachsen ab und wie lautet die Gleichung ihrer Tangente in O?

Res.: Es gibt zwei Parabeln:

$$x^2 + 2xy + y^2 - rx - 3ry = 0,$$

$$x^2 - 2rxy + y^2 + rx - ry = 0.$$

Die zweite zerfällt in zwei parallele Linien.

472. Durch die Schnittpunkte der Geraden

1) $x - 3y - 12 = 0$, 2) $2x - 5y + 10 = 0$

mit den Geraden

3) $y - 4 = 0$, 4) $3x + y - 6 = 0$

soll ein Kegelschnitt gelegt werden, der

a) durch O geht,

b) auf der X-Achse ein Stück von der Länge $\sqrt{88}$ abschneidet,

c) eine Parabel ist,

d) die Y-Achse berührt.

Res.: Die gesuchte Gleichung ist von der Form

$$L_1 L_2 + \lambda L_3 L_4 = 0 ,$$

hierbei hat λ den Wert

$$\text{a) } 5, \quad \text{b) } -\frac{7}{6}, \quad \text{c) } \frac{37 \pm 4\sqrt{85}}{9},$$

$$\text{d) } 195 \pm 12\sqrt{10} .$$

473. Die Gleichung eines Kegelschnittes zu bestimmen, der durch die Punkte $1|0$, $0|3$, $2|7$, $4|1$ und durch den Nullpunkt geht.

Res.: $7x^2 - 17xy + 8y^2 - 7x - 24y = 0$.

474. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 2px$ und die Gerade $x = a$. Es soll die Gleichung eines Kreises gefunden werden, der die Parabel in den Schnittpunkten mit der Geraden berührt.

Res.: $x^2 + y^2 - 2(a + p)x + a^2 = 0$.

Welche Berührungsart entsteht, wenn $a = 0$ wird?

475. Es soll eine gleichseitige Hyperbel durch die Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel in der vorigen Aufgabe so gelegt werden, daß sie die Parabel in ihren Schnittpunkten mit der Geraden berührt und ihre Achsen parallel den Koordinatenachsen sind.

Res.: $y^2 - (x - [a - p])^2 = p(2a - p)$.

Untersuchung für $2a \gtreqless p$ und für $a = 0$.

476. Die Gleichung einer Parabel zu finden, welche die X-Achse und die Halbierungslinie des ersten und dritten Feldes in den Schnittpunkten mit den Geraden $x - a = 0$ berührt. Was ist der Fall, wenn $a = 0$ wird?

Res.: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2ax + a^2 = 0$.

477. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch die Schnittpunkte der Geraden

1) $y - 3 = 0$, 2) $y - x = 0$, 3) $y - 5x - 12 = 0$

geht.

Der durch die Gleichung

$$L_1 L_2 + \lambda_1 L_2 L_3 + \lambda_2 L_3 L_1 = 0$$

dargestellte Kegelschnitt geht durch die Schnittpunkte von $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$. Er ist ein Kreis, wenn die Faktoren von x^2 und y^2 einander gleich und der Faktor von xy Null ist. Hieraus bestimmen sich λ_1 und λ_2.

Res.: $5x^2 + 5y^2 - 6x + 6y - 90 = 0$.

478. Die Gleichungen einer Hyperbel zu finden, welche den Kegelschnitt

1) $3x^2 - 2xy + 5y^2 - x + y = 0$

in den Schnittpunkten mit der Geraden

2) $x - 2y + 1 = 0$

berührt, und für welche die eine Asymptote parallel zur X-Achse ist.

Res.: $10xy - 7y^2 - 7x + 13y - 3 = 0$.

479. Auf der X-Achse ist ein Punkt mit der Abszisse $+1$ und auf der Y-Achse ein Punkt mit der Ordinate $+2$ gegeben.

a) Es soll die Gleichung der Parabel gefunden werden, welche die Koordinatenachsen in diesen Punkten berührt.

b) Es soll der Ort der Mittelpunkte aller Zentralkegelschnitte gefunden werden, welche die Koordinatenachsen in diesen Punkten berühren.

Res.: a) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$
und

$$(2x + y - 2)^2 = 0\,, \quad \text{Doppelgerade;}$$

b) $y = 2x$.

480. Gegeben sind die Kegelschnitte

$$1)\quad 4(x-2)^2 + 25y^2 = 100\,,$$

$$2)\quad 9x^2 - 16(y-3)^2 = 144\,.$$

a) Welches ist die Gleichung einer beliebigen Linie 2. Grades, welche durch die Schnittpunkte von 1) und 2) geht?

b) Unter welcher Bedingung ist diese Linie ein Kreis?

c) Was ist der Ort der Mittelpunkte aller möglichen durch die Schnittpunkte von 1) und 2) gehenden Zentralkegelschnitte?

Res.: a) $4(x-2)^2 + 25y^2 - 100$

$$+ \lambda(9x^2 - 16[y-3]^2 - 144) = 0\,,$$

b) $\lambda = \frac{21}{25}$,

c) $289xy - 192x - 128y + 384 = 0$.

481. Die Gleichung einer Parabel zu finden, welche den Kreis um O mit r in seinen Schnittpunkten mit der $+X$- und $+Y$-Achse berührt.

Res.: $x^2 - 2xy + y^2 + 2r(x+y) - 3r^2 = 0$.

482. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der die Hyperbel $x^2 - 4y^2 = 1$ in ihren Schnittpunkten mit der Geraden $2y - 3 = 0$ berührt.

Res.: $x^2 - 4y^2 + \lambda(2y-3)^2 = 0$, wobei $\lambda = \frac{5}{4}$.

483. Es ist die Hyperbel $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ und auf ihr im ersten Feld ein Punkt mit der Abszisse 13 gegeben. Es soll ein Kegelschnitt gefunden werden, welcher die Hyperbel in dem gegebenen Punkt berührt und durch den Punkt $1|2$ geht.

Res.: $117\,x^2 - 325\,y^2 - 1027\,x + 1580\,y - 950 = 0$.

484. Um einen Punkt M der X-Achse ist ein Kreis mit dem Halbmesser a beschrieben, der durch O geht; ferner ist die Gerade $x = \frac{a}{2}$ gezogen. Es sollen die Gleichung einer Parabel und ihre Bestimmungsstücke so ermittelt werden, daß die Parabel den Kreis in seinen Schnittpunkten mit der Geraden berührt.

Res.: $$(x - a)^2 = -a\left(y - \frac{5a}{4}\right).$$

485. Sind $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte und ist, bei veränderlich gedachtem λ, $K_1 + \lambda K_2 = 0$ die Gleichung des Kegelschnittbüschels, das durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmt ist, wie findet man dann

a) die Parabeln, die in dem Büschel enthalten sind,

b) die Geradenpaare desselben,

c) den Ort der Mittelpunkte der Zentralkegelschnitte des Büschels?

486. Den Ort der Mittelpunkte zu finden für die Kegelschnitte, welche durch die Schnittpunkte der Geraden

1) $x - 12 = 0$, 2) $x + y - 5 = 0$

und der Parabel

$$3)\quad y^2 - 10x = 0$$

gehen.

Res.: $2xy + y^2 - 17y + 5x - 60 = 0$,

eine Hyperbel, deren Asymptoten

$$2y + 5 = 0 \quad \text{und} \quad 5x + 2y - 39 = 0$$

und deren Mittelpunktskoordinaten

$$\frac{44}{5} \Big| -\frac{5}{2}$$

sind.

487. Es ist ein die Y-Achse in O berührender Kreis vom Halbmesser r (der Mittelpunkt auf der $+X$-Achse) und Punkt $P(a|b)$ gegeben. Durch P zieht man eine beliebige, die Y-Achse in C schneidende Gerade. Was ist der Ort für den Punkt, in welchem die Polare von C in Beziehung auf den Kreis die PC schneidet? Wann ist der Ort eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, ein Kreis, eine gleichseitige Hyperbel? Zeige, daß der Ort durch P und den Punkt $a|0$ geht.

Res.: $rx^2 - bxy + ay^2 - arx = 0$,

je nachdem $b^2 - 4ar \lesseqgtr 0$, Kreis, wenn $b = 0$ und $a = r$, gleichseitige Hyperbel, wenn $b = 0$ und $a = -r$ ist.

Wenn P sich auf der Parabel $y^2 - 4rx = 0$ bewegt, bleibt der Ort eine Parabel.

488. Es ist ein Rechteck $OP_1P_2P_3$ gegeben, wobei $OP_1 = a$, $OP_3 = b$. Durch P_2 wird eine bewegliche, die OP_1 in Q_1 und die OP_3 in Q_2 schneidende Gerade gezogen. Was ist der Ort des Schnittpunktes P von Q_1P_3 mit Q_2P_1?

Res.: Es werde OP_1 als X- und OP_3 als Y-Achse genommen, dann ist die Ortsgleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 + a b x y - a b^2 x - a^2 b y = 0 .$$

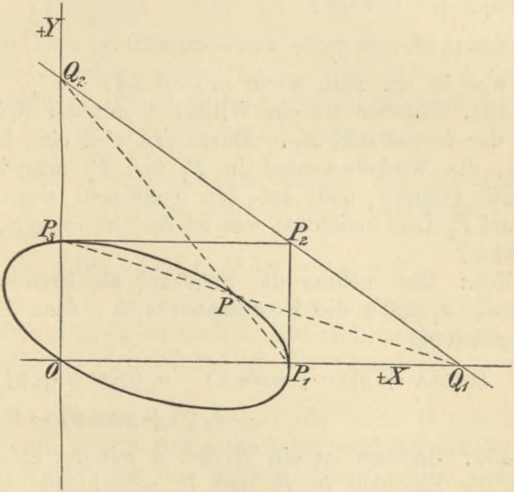

Fig. 22.

Der Ort ist eine Ellipse, welche durch O, P_1 und P_3, sowie durch den Punkt $\frac{2a}{3} \Big| \frac{2b}{3}$ geht. Die Tangente in O ist der Diagonale $P_1 P_3$ parallel; $P_1 P_2$ berührt in P_1, $P_2 P_3$ in P_3.

489. Zu beweisen: Wenn die Seiten eines Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ sich um drei feste Punkte A_1, A_2, A_3 drehen und es bewegen sich zwei Ecken P_1 und P_2 auf zwei festen Geraden L_1 und L_2, dann ist der Ort der dritten Ecke ein Kegelschnitt.

490. Eine Ecke eines Dreieckes liegt in O, eine zweite B auf der $+X$-Achse im Abstand a von O. Was ist der Ort für die dritte Ecke, wenn der Höhenschnittpunkt des Dreieckes sich auf der Geraden $y = mx + c$ bewegt?

Res.: $x^2 + mxy - ax + cy = 0$.

Was ist der Fall, wenn $m = 0$ ist?

491. Gegeben ist ein Winkel α mit der Spitze A und der feste Punkt A_1. Durch A_1 wird eine bewegliche, die Winkelschenkel in P_1 und P_2 schneidende Gerade gezogen und auf den Schenkeln werden in P_1 und P_2 Lote errichtet; was ist der Ort ihres Schnittpunktes?

Res.: Man nehme die Schenkel als Koordinatenachsen, A_1 habe die Koordinaten $a_1|b_1$, dann ist die Ortsgleichung

$$(x\cos\alpha + y)(x + y\cos\alpha) - a_1(x\cos\alpha + y) - b_1(x + y\cos\alpha) = 0\,.$$

492. Gegeben ist ein Winkel α mit der Spitze A. Eine die Schenkel in P_1 und P_2 schneidende Gerade bewegt sich so, daß der Inhalt des Dreieckes AP_1P_2 unveränderlich und gleich a^2 ist. In P_1 wird auf AP_1, in P_2 auf AP_2 je das Lot errichtet. Es soll die Gleichung für den Ort der Schnittpunkte dieser Lote gefunden werden.

Res.: $(x + y\cos\alpha)(y + x\cos\alpha) = \pm\dfrac{a^2}{\sin\alpha}$.

AP_1 und AP_2 sind Koordinatenachsen, der Ort besteht aus zwei konjugierten Hyperbeln, deren Mittelpunkt A, deren eine Achse die Halbierungslinie des

Winkels α ist und deren Asymptoten die Lote auf den Schenkeln in O sind.

493. Die allgemeine Gleichung einer Parabel zu finden, die durch die drei Ecken eines gegebenen Dreieckes OAB geht.

Auflösung: Nimmt man OA als X-Achse und OB als Y-Achse, wobei $OA = a$ und $OB = b$, so ist die Gleichung irgend einer durch O gehenden Parabel

$$(y - \lambda x)^2 + Dx + Ey = 0\,.$$

D und E ergeben sich daraus, daß die Parabel durch A und B gehen soll, λ bleibt unbestimmt; man erhält also

$$(y - \lambda x)^2 - \lambda^2 a x - b y = 0\,.$$

494. Den geometrischen Ort der Spitze P eines Dreieckes PP_1P_2 zu finden, die sich so bewegt, daß die Differenz der Winkel an der Grundlinie konstant und gleich α bleibt.

Res.: Es sei $P_1P_2 = 2a$, die Mitte O von P_1P_2 Nullpunkt, P_1 auf der $+X$-Achse und der an P_1 liegende Winkel sei der größere, dann ergibt sich als Ortsgleichung

$$x^2 - y^2 + 2xy\operatorname{ctg}\alpha - a^2 = 0\,.$$

Der Ort ist also eine Hyperbel. Bringt man das Glied mit xy durch Drehung um O um $\sphericalangle \dfrac{R - \alpha}{2}$ zum Wegfall, so lautet die Ortsgleichung

$$\xi^2 - \eta^2 = a^2 \sin\alpha\,.$$

Wenn P in das Unendliche fällt, so sind P_1P und P_2P parallel; sie haben dann die Richtung einer Asymptote. Die Winkel in P_1 und P_2 sind dann

$$R + \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad R - \frac{\alpha}{2}.$$

495. Gegeben ist eine Gerade L und außerhalb derselben zwei Punkte P_1 und P_2. Man soll den Ort eines Punktes P finden, der sich so bewegt, daß die von ihm durch P_1 und P_2 gezogenen Geraden von L ein Stück von der Länge c ausschneiden.

Res.: Nimmt man L als X-Achse und sind $a_1|b_1$ und $a_2|b_2$ die Koordinaten von P_1 und P_2, dann erhält man als Ortsgleichung

$$(a_1 - a_2 - c)\,y^2 - (b_1 - b_2)\,x\,y$$
$$+ (c\,[b_1 + b_2] + a_2\,b_1 - a_1\,b_2)\,y - b_1\,b_2\,c = 0\,.$$

Der gesuchte Ort ist also eine Hyperbel, die durch P_1 und P_2 geht, weil $a_1|b_1$ und $a_2|b_2$ die Gleichung befriedigen.

Sind $P_1 P$ und $P_2 P$ parallel, so geben sie eine Asymptotenrichtung an. Zieht man durch P_1 die Parallele zu L und trägt darauf $P_1 Q_1$ und $P_1 Q_2 = c$ nach beiden Seiten hin ab, so sind $P_2 Q_1$ und $P_2 Q_2$ die Asymptotenrichtungen. Der Mittelpunkt liegt auf L.

Wie vereinfacht sich die Ortsgleichung,

a) wenn $P_1 P_2$ parallel L ist,

b) wenn $P_1 P_2$ als Y-Achse angenommen wird, wobei aber $P_1 P_2$ nicht parallel zu L ist?

496. Gegeben sei eine Gerade L, ein Punkt O auf ihr und zwei Punkte P_1 und P_2 außerhalb. Es soll der Ort eines Punktes P gefunden werden, der sich so bewegt, daß die von ihm durch P_1 und P_2 gezogenen Geraden gleich lange Stücke von O aus gerechnet auf L abschneiden.

Res.: Man nehme L als X-Achse, O als Nullpunkt; die Y-Achse gehe durch den Halbierungspunkt von $P_1 P_2$, alsdann ergibt sich, wenn $a|b_1$ und $-a|b_2$ die Koordinaten von P_1 und P_2 sind, als Ortsgleichung

$$(b_1 + b_2)\,x\,y - 2\,b_1\,b_2\,x - a\,(b_1 - b_2)\,y = 0\ .$$

Der Ort ist also eine Hyperbel, die durch P_1 und P_2 geht, ihre Asymptoten sind den Koordinatenachsen parallel und haben die Gleichungen

$$x = \frac{a_1\,(b_1 - b_2)}{b_1 + b_2}\,, \qquad y = \frac{2\,b_1\,b_2}{b_1 + b_2}\,.$$

Ist $P_1 P_2$ parallel L, so geht die Hyperbel in zwei gerade Linien über.

§ 24. Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades durch Kegelschnitte.

Führt die Elimination von y aus den Gleichungen

$$1)\quad F_1(x, y) = 0\,, \qquad 2)\quad F_2(x, y) = 0$$

auf die Gleichung

$$3)\quad \Psi(x) = 0\,,$$

so bedeuten die Wurzeln der Gleichung 3) geometrisch die Abszissen der Schnittpunkte der durch die Gleichungen 1) und 2) dargestellten Kurven.

497. Beweise, daß die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

bestimmt sind durch die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel

$$y = x^2$$

und der Geraden

$$y + p\,x + q = 0\,;$$

ebenso durch die Abszissen der Schnittpunkte des Kreises

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\frac{p^2-4q}{4}$$

mit der X-Achse.

498. Beweise, daß die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3+px+q=0$$

bestimmt sind durch die Abszissen der Schnittpunkte

1) $\begin{cases}\text{der Parabel} & y=x^2 \text{ mit der}\\ \text{gleichseitigen Hyperbel} & xy+px+q=0\,,\end{cases}$

2) $\begin{cases}\text{der Parabel} & y=x^2 \text{ und}\\ \text{der Parabel} & y^2+py+qx=0\,.\end{cases}$

In dem letzteren Falle ist von der Wurzel $x=0$ abzusehen.

499. Beweise, daß die Wurzeln der Gleichung

$$\text{A)}\quad x^4+px^2+qx+r=0$$

Abszissen der Schnittpunkte der

$\begin{cases}\text{Parabel} & 1)\ x^2=my\\ \text{mit der Parabel} & 2)\ m^2y^2+pmy+qx+r=0\end{cases}$

sind.

500. Jede der Linien 1) und 2) von Nr. 499 kann auch ersetzt werden durch eine Linie, welche durch die Schnittpunkte von 1) und 2) hindurchgeht. Die Gleichung einer beliebigen solchen Linie ist

$$3)\quad \lambda(x^2-my)+m^2y^2+pmy+qx+r=0\,.$$

Nimmt man $\lambda=m^2$, so stellt 3) einen Kreis dar mit den Mittelpunktskoordinaten

$$a = -\frac{q}{2\,m^2}, \quad b = \frac{m^2 - p}{2\,m}$$

und dem Halbmesser R, für welchen

$$R^2 = a^2 + b^2 - \frac{r}{4\,m}$$

ist.

Trifft dieser Kreis, für welchen m beliebig gewählt werden kann, die Parabel 1) in 4, 2, 0 reellen Punkten, so hat Gleichung A) 4, 2, 0 reelle Wurzeln. Ist $R^2 < 0$, so ist der Kreis imaginär.

501. Wende Nr. 499 und 500 auf die kubische Gleichung

$$x^3 + p\,x + q = 0$$

an, nachdem diese durch Multiplikation mit x auf eine Gleichung 4. Grades erweitert worden ist.

§ 25. **Flächeninhalte bei Parabel, Ellipse und Hyperbel.**

502. An die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ sind in den Punkten $P_1\,(x_1|y_1)$ und $P_2\,(x_2|y_2)$ Tangenten gezogen, die sich in T schneiden. Die zu $P_1\,P_2$ parallele Tangente berühre in Q; es sei ferner

$$P_1\,C \parallel P_2\,D \parallel Q\,T\,.$$

Es ist zu zeigen, daß

1) das zu $P_1\,P_2$ gehörige Segment

$$S = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12\,p} = \frac{x_1 - x_2}{6} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 + y_2}\,;$$

ist $P_1 P_2 \perp$ zur Achse, so ist

$$S = \frac{4}{3} x_1 y_1 ;$$

2) Segment $P_1 P_2 Q : P_1 C D P_2 = 2 : 3$;

3) Segment $P_1 P_2 Q : \Delta P_1 P_2 Q = 4 : 3$;

4) Segment $P_1 P_2 Q : \Delta P_1 P_2 T = 2 : 3$.

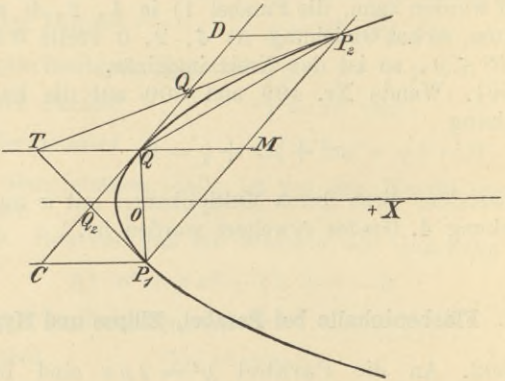

Fig. 23.

Die letzte Beziehung kann zur näherungsweisen Quadratur einer beliebigen krummlinigen Fläche Anwendung finden.

503. Der Inhalt der zwischen der kleinen Achse und der im Abstand x_1 dazu parallelen Sehne liegenden Ellipsenzone ist

$$U = \frac{b}{a}\left(x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} + a^2 \arcsin \frac{x_1}{a}\right) ;$$

die gesamte Ellipsenfläche ist

$$J = a\,b\,\pi\,.$$

Sind a_1 und b_1 die Längen zweier konjugierter Halbmesser und ist φ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so ist die Ellipsenfläche

$$J = \pi\,a_1\,b_1 \sin\varphi\,.$$

504. Inhalt des Hyperbelsegmentes, das durch die im Abstand x_1 zu der imaginären Achse gezogene Parallele abgeschnitten wird:

$$S = x_1\,y_1 - a\,b\,l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right).$$

Inhalt der von der Hyperbel $x\,y = c^2$, der X-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ eingeschlossenen Fläche:

$$U = c^2\,(l\,x_2 - l\,x_1)\,.$$

505. Es soll der Inhalt eines Segmentes gefunden werden, das die Gerade $6\,x + y = 18$ mit der Parabel $y^2 = 18\,x$ bildet.

Res.: $31\frac{1}{4}$.

506. Welches Segment schneidet die durch den Brennpunkt a) senkrecht, b) unter einem Winkel von 45^0 gegen die Achse gezogene Sehne von der Parabel $y^2 = 16\,x$ ab?

Res.: a) $42\frac{2}{3}$, b) $\frac{256}{3}\sqrt{2}$.

507. Gegeben sind die beiden Parabeln $y^2 = 12\,x$ und $y^2 = 3\,x$. Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das von ihnen und von der durch O unter 60^0 gehenden Geraden eingeschlossen wird?

Res.: $$\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

508. Von einem Parabelsegment, dessen Sehne senkrecht zu der Parabelachse ist, ist gegeben der Inhalt S und die Sehnenlänge $2y$; es soll der Parameter der Parabel gefunden werden.

Res.: $$\frac{4y_1^3}{3S}.$$

509. Zwischen Mittelpunkt und Scheitel einer Ellipse ist auf der großen Achse (Länge $= 2a$) ein Lot errichtet; wie groß ist das von diesem Lot abgeschnittene Segment?

Res.: $$ab\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

510. Von einer Ellipse ist die lineare und die numerische Exzentrizität gegeben; was ist ihr Inhalt?

Res.: $$\frac{\pi f^2}{\varepsilon^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

511. Gegeben ist eine Ellipse mit der großen Halbachse a und der linearen Exzentrizität f und eine dazu konfokale Hyperbel. Es soll die von dem einen Hyperbelzweig und der Ellipse begrenzte Fläche ermittelt werden.

Res.: $$a\sqrt{a^2-f^2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin\varepsilon\right)$$

$$-f(a+a_1)(1-\varepsilon\varepsilon_1) - a_1\sqrt{a_1^2-f^2}\,l\left(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2-1}\right).$$

VIII. Abschnitt.

Polarkoordinaten.

§ 26. **Punkt und gerade Linie.**

Bezeichnung: Die Polarkoordinaten eines Punktes seien r und φ (r_i und φ_i).

512. Bestimme die Lage der Punkte, welche folgende Polarkoordinaten haben:

$$2|30^0,\quad 5|45^0,\quad 3|72^0,\quad 1|54^0,\quad 4|-60^0,\quad 2{,}5|0^0,$$
$$3{,}25|90^0,\quad 3|180^0,\quad 3|270^0,\quad 3|360^0,\quad \sqrt{2}|45^0,$$
$$\sqrt{3}|-60^0.$$

513. Gib für die Punkte der vorigen Aufgabe die rechtwinkligen Koordinaten an.

514. Gib die Polarkoordinaten für die Punkte an, deren rechtwinklige Koordinaten sind:

$$x|y,\quad 5|0,\quad 0|4,\quad -3|0,\quad 0|-2,\quad 3\sqrt{2}|3\sqrt{2},$$
$$-1|\sqrt{3},\quad 15|-8,\quad -7|-24.$$

515. Welches ist die Polargleichung einer durch O und den Punkt $x_1|y_1$ gehenden Geraden?

516. Welches ist die Polargleichung für die Geraden

1) $x = a$, 2) $y = b$, 3) $x = -4$, 4) $y = -5$?

517. Welches ist die Polargleichung einer Geraden, für welche das Lot vom Ursprung die Länge p und den Richtungswinkel α hat?

Res.: $r\cos(\varphi - \alpha) = p$.

518. Zu der in Nr. 517 gegebenen Geraden werden die beiden im Abstand e möglichen Parallelen gezogen. Was sind ihre Gleichungen?

Res.: $r\cos(\varphi - \alpha) = p \pm e$.

519. Welches ist die Polargleichung einer Geraden, die zu der in Nr. 517 gegebenen Geraden senkrecht ist und von O den Abstand p_1 hat?

Res.: $r\cos(\varphi - [\alpha \pm R]) = p_1$.

520. Bestimme den Abstand zweier Punkte, deren Koordinaten $r_1|\varphi_1$ und $r_2|\varphi_2$ sind.

521. Die Polargleichung der Verbindungslinie der Punkte $r_1|\varphi_1$ und $r_2|\varphi_2$ zu finden.

Res.:

$$r_1 r \sin(\varphi - \varphi_1) + r_2 r \sin(\varphi - \varphi_2) + r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

522. Den Inhalt des durch $r_1|\varphi_1$, $r_2|\varphi_2$ und O bestimmten Dreieckes zu ermitteln.

Res.: $\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.

§ 27. Polargleichung des Kreises, der Ellipse, Parabel und Hyperbel.

523. Bestimme die durch die Gleichungen

$$1)\ r = 2a\cos\varphi, \qquad 2)\ r = 2a\sin\varphi$$

dargestellten Linien und ihre Lage zu der Polarachse.

524. Die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser a zu finden, dessen Mittelpunktskoordinaten $c|0$ sind.

Res.: $r^2 - 2cr\cos\varphi = a^2 - c^2$.

525. Die Polargleichung eines Kreises vom Halbmesser a zu finden, dessen Mittelpunktskoordinaten 1) $c|\alpha$, 2) $a|\alpha$ sind.

Res.: 1) $r^2 - 2\,c\,r\cos(\varphi - \alpha) = a^2 - c^2$,

2) $r = 2\,a\cos(\varphi - \alpha)$.

526. Es soll die Polargleichung 1) der Ellipse, 2) der Hyperbel gefunden werden, wenn der Mittelpunkt Pol und die große bzw. reelle Achse Polarachse ist. Aus der Gleichung soll je der kleinste und der größte Halbmesser gefolgert werden.

Res.: 1) $r^2 = \dfrac{b^2}{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi}$, 2) $r^2 = \dfrac{-b^2}{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi}$.

527. In der Ellipse der vorigen Aufgaben ist ein Halbmesser r_1 und ein weiterer auf ihm senkrechter von der Länge r_2 gezogen. Es soll, mit Hilfe der Beziehungen $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, bewiesen werden, daß

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

ist.

528. Für die Hyperbel in Nr. 526 ist ein Halbmesser r_1 und zu ihm in der konjugierten Hyperbel ein Halbmesser von der Länge r_2 gezogen. Es soll bewiesen werden, daß

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

ist.

529. Für die Ellipse in Nr. 526 denjenigen Richtungswinkel zu finden, für welchen der zugehörige Fahrstrahl die Länge f hat.

Res.: $$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{b^2}{a\sqrt{f^2 - b^2}},$$

also nur möglich, wenn $f \gtreqless b$.

530. In dem einen Brennpunkt der Ellipse von Nr. 526 wird auf der großen Achse das Lot errichtet. Es soll die Länge des zu seinem Schnittpunkt mit der Ellipse gehenden Fahrstrahles ermittelt werden.

Res.: $r = \sqrt{a^2 - b^2\varepsilon^2}$.

531. Es soll die Polargleichung der Parabel ermittelt werden, wenn der Brennpunkt Pol ist und die Richtung vom Brennpunkt zu dem Scheitel die Richtung der Polarachse ist.

Res.: $$r = \frac{\pm p}{1 \pm \cos\varphi}.$$ (Zeichen s. Nr. 532.)

532. Es soll 1) für die Ellipse, 2) für die Hyperbel die Polargleichung gefunden werden, wenn der eine Brennpunkt Pol und die Richtung von diesem Brennpunkt zu dem nächsten Scheitel der Kurve die Richtung der Polarachse ist.

Res.: $$r = \frac{\pm p}{1 \pm \varepsilon\cos\varphi}, \quad 2)\ \varrho = \frac{\pm p}{1 \pm \varepsilon\cos\varphi},$$

wobei je die oberen und ebenso die unteren Zeichen zusammengehören. Von den unteren, der Rückverlängerung des Fahrstrahles entsprechenden Zeichen kann abgesehen werden.

533. Setze in Nr. 532 $\varphi_1 = \varphi$ und $\varphi_2 = 180^0 + \varphi_1$ und beweise, daß für die zu φ_1 und φ_2 gehörigen Strahlen r_1 und r_2 der Satz gilt:

$$r_1 r_2 = \frac{p}{2}(r_1 + r_2).$$

534. Für die Kurve

$$r = \frac{c}{\sin\varphi} + \frac{c}{\cos\varphi}$$

eine Konstruktion zu finden und zu zeigen, daß sie eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten $r\sin\varphi = c$ und $r\cos\varphi = c$ ist.

Konstruktion: Ziehe zu der Polarachse die Senkrechte AA_1 ($r\cos\varphi = c$) und die Parallele BB_1 ($r\sin\varphi = c$) je im Abstand c von O. Ein durch O gehender Strahl OC_1 trifft die BB_1 in C_1, die AA_1 in C. Trägt man $C_1P = OC$ auf der Verlängerung von OC_1 ab, so ist P ein Punkt der Kurve. — Trifft erst die Rückverlängerung des Strahles OC_1 über O die AA_1 in C, so ist OC negativ zu nehmen, und umgekehrt.

535. Konstruktion, Verlauf und Art der Kurve

$$r = \frac{a\cos\varphi}{\cos 2\varphi}$$

zu finden.

Res.: Gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkt auf der Polarachse im Abstand $\frac{a}{2}$ von O. Die Polarachse ist reelle Achse.

IX. Abschnitt.

Aufgaben über höhere Kurven.

§ 28. **Die kubische Parabel.**

536. Den Verlauf der kubischen Parabel aus ihrer Gleichung

$$c^2 y = x^3$$

zu ermitteln.

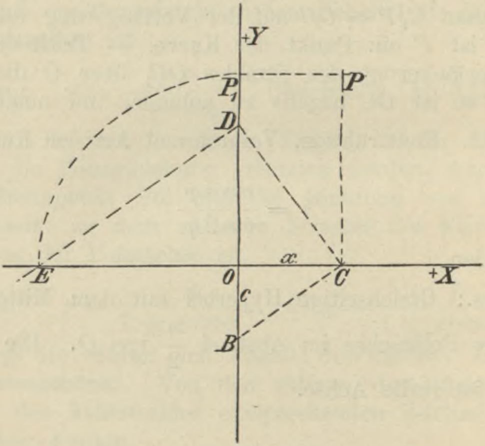

Fig. 24.

537. Eine Konstruktion der Kurve aus der Gleichungsform

$$y = \frac{x^2}{c} \cdot \frac{x}{c}$$

herzuleiten.

$OB = c$ (s. Fig. 24), $\quad OC = x, \quad \sphericalangle BCD = 90^0,$
$$\sphericalangle CDE = 90^0,$$
dann ist
$$OD = \frac{x^2}{c}, \qquad OE \cdot x = OD^2,$$
also
$$PC = P_1 O = OE = \frac{x^3}{c^2} = y.$$

538. Die Gleichung der Tangente und der Normale im Punkt $a|b$ herzuleiten und die Länge der Subtangente und der Subnormale anzugeben.

Res.: Tangente $3bx - ay = 2ab$,
Normale $3by + ax = 3b^2 + a^2$,
Subtangente $\frac{a}{3}$, Subnormale $\frac{3b^2}{a}$.

539. Aus der Gleichung der Tangente im Punkt $a|b$ eine Konstruktion für die Tangente herzuleiten, sowie die Koordinaten des dritten Schnittpunktes der Tangente mit der Kurve zu bestimmen.

Für den dritten Schnittpunkt ist $x = -2a$.

540. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes und den Krümmungshalbmesser für den Punkt $a|b$ zu bestimmen.

Res.:
$$x = \frac{a^2 - 9b^2}{2a}, \quad y = \frac{15b^2 + a^2}{6b}, \quad \varrho = \frac{(a^2 + 9b^2)^{\frac{3}{2}}}{6ab}.$$

541. Erzeugung der kubischen Parabel aus der gleichseitigen Hyperbel[1]).

[1]) Siehe Haas, Beiträge zur graphischen Darstellung der höheren Plankurven, Progr. d. Eberh.-Ludw. G. Stuttg. 1895.

Es sei die Hyperbel $xy = c^2$ gegeben. Durch den Nullpunkt wird eine beliebige, die Hyperbel in B (und B_1) schneidende Gerade gezogen. Die durch B (bzw. B_1) zur X-Achse gezogene Parallele trifft die reelle Achse der Hyperbel im C (bzw. C_1). Durch C (bzw. C_1) wird die Parallele zur Y-Achse gezogen; sie trifft die erste Gerade BB_1 in P (bzw. P_1). Es soll gezeigt werden, daß der Ort von P (und P_1) die Gleichung

$$c^2 y = x^3$$

hat.

§ 29. Die Rückkehr- oder Neilsche Parabel.

542. Den Verlauf der Neilschen Parabel, die auch semikubische Parabel genannt wird, aus ihrer Gleichung

$$c y^2 = x^3$$

zu ermitteln.

543. Bestimme den Schnittpunkt der Geraden $y = mx$ mit der Kurve und leite daraus folgende Konstruktion derselben her:

Trage von O aus auf der $-X$-Achse $OA = c$ ab, ziehe zu der Geraden $y = mx$ durch A die Parallele, welche die Y-Achse in B trifft; errichte auf AB in B das Lot, das die X-Achse in C schneidet, und errichte in C auf OC das Lot. Sein Schnittpunkt P mit der ersten Geraden ist ein Kurvenpunkt.

544. Die Gleichung der Tangente im Punkt $a|b$, ihren dritten Schnittpunkt mit der Kurve zu ermitteln und aus dem Abschnitt der Tangente auf der X- oder der Y-Achse eine Konstruktion der Tangente herzuleiten.

Res.: Tangente $3bx - 2ay = ab$.

Für den dritten Schnittpunkt ist $x = \frac{a}{4}$.

545. Beweise, daß, wenn man in den Schnittpunkten der Geraden $x = a$ mit den Rückkehrparabeln $c_1 y^2 = x^3$, $c_2 y^2 = x^3$ usf. an diese Kurven Tangenten zieht, diese die X-Achse in demselben Punkt schneiden, und daß daher umgekehrt die Berührungspunkte der von einem Punkt der X-Achse an die Kurvenschar gezogenen Tangenten auf einem Lot zur X-Achse liegen.

546. Es soll der Ort der Fußpunkte der von dem Brennpunkt der Rückkehrparabel $c y^2 = x^3$ auf die Tangenten gefällten Lote gesucht werden. Dieser Brennpunkt hat die Koordinaten $-\frac{4}{27} c | 0$ [1]).

Res.: $$y^2 = \frac{4c}{27} x + \frac{16}{27^2} c^2.$$

547. Nachzuweisen, daß die Evolute der Parabel $y^2 = 2px$ eine Rückkehrparabel ist.

548. Herleitung der Rückkehrparabel aus der Kegelschnittsparabel (s. Haas a. a. O.).

Es sei die Parabel $y^2 = 2px$ und die Gerade DD_1 (s. Fig. 25), $x = a$, gegeben; zu letzterer ziehe man eine beliebige, die Parabel in B und B_1 schneidende Parallele, ferner durch B (und B_1) die Parallele zur X-Achse, welche DD_1 in C (bzw. C_1) trifft. Ziehe OC (und OC_1) bis zum Schnitt P (und P_1) mit BB_1 und beweise, daß der Ort von P (und von P_1) die Rückkehrparabel $y^2 = \frac{2p}{a^2} x^3$, oder wenn man $\frac{a^2}{2p} = c$ setzt, $c y^2 = x^3$ ist.

---

[1]) S. Fuchs, Untersuchungen der Brennpunktseigensch. höh. alg. Kurven. 1887.

549. Untersuche den Verlauf der Kurve

$$x^3 = c(y - bx)(y + bx)$$

und zeige, daß, wenn b zu Null wird, ihr Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht.

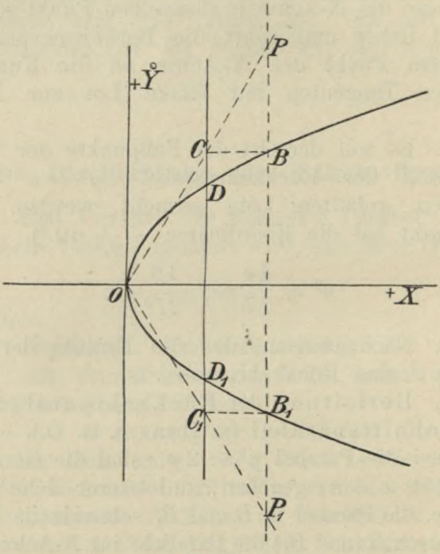

Fig. 25.

550. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 2px$, ferner die Gerade CD, $x = b$, und auf der X-Achse im Abstand $OA = a$ vom Nullpunkt O der Punkt A. Eine beliebige Parallele zur Y-Achse trifft die Parabel in B (und B_1); die Parallele durch B (bzw. B_1) zur X-Achse trifft die Gerade CD in C (bzw. C_1); CA

$(C_1 A)$ schneidet BB_1 in P (und P_1). Es soll die Gleichung des Ortes von P (und P_1) ermittelt und die dadurch dargestellte Kurve näher untersucht werden.

Res.: $(a+b)^2 y^2 = 2px(x-a)^2$.

Die Kurve berührt die Y-Achse in O, sie hat in A einen Doppelpunkt und läuft symmetrisch zur X-Achse ins Unendliche. Sie heißt Schleifenparabel. Mit $\frac{(a+b)^2}{2p} = c$ und $a = 0$ geht sie in die Rückkehrparabel über.

551. Untersuche und vergleiche den Verlauf der Kurven mit folgenden Gleichungen:

1) $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$, $\quad a < b < c$;

2) $y^2 = (x-a)(x-b)^2$, $\quad a < b$;

3) $y^2 = (x-a)^2(x-b)$, $\quad a < b$;

4) $y^2 = (x-a)^3$, besonderer Fall $a = 0$.

§ 30. **Die binomische Hyperbel.**

552. Den Verlauf der binomischen Hyperbel aus ihrer Gleichung

$$xy^2 = c^3$$

zu ermitteln.

553. Konstruktion der binomischen Hyperbel: Auf der $-X$-Achse ist $OC = c$ abgetragen; C wird mit einem beliebigen Punkt A der Y-Achse verbunden, auf AC in C wird das Lot errichtet, das die Y-Achse in B trifft. Auf BC in B wird wieder das Lot errichtet, das die $+X$-Achse in D trifft. Durch A wird die Parallele zur X-Achse, durch D eine solche zur

Y-Achse gezogen; beide Parallelen treffen sich in P. Es soll gezeigt werden, daß P die binomische Hyperbel beschreibt, wenn A auf der Y-Achse wandert.

554. Erzeugung der binomischen Hyperbel aus der Parabel $y^2 = 2px$. Es sei die Gerade DD_1 durch ihre Gleichung $x = a$ gegeben. Man ziehe zu DD_1 eine beliebige Parallele, welche die Parabel in B (und B_1) trifft; ziehe OB (und OB_1) bis zum Schnitt C (und C_1) mit DD_1 und ziehe durch C (und C_1) Parallelen zur X-Achse, welche BB_1 in P (und P_1) schneiden. Es soll der Ort von P (und P_1) gesucht werden.

Res.: $xy^2 = 2pa^2 (= c^3)$.

555. Die Gleichung der Tangente im Punkt $a|b$ an die Kurve $xy^2 = c^3$ zu finden und aus ihrem Abschnitt auf der X-Achse eine Konstruktion der Tangente herzuleiten.

Res.: $bx + 2ay = 3ab$.

§ 31. Die Kissoide.

556. In einem Kreis vom Halbmesser r sind zwei senkrechte Durchmesser OA und CD, ferner eine zu OA senkrechte Sehne EF und die zu ihr in bezug auf CD symmetrische Sehne E_1F_1 gezogen. OF und OE schneiden E_1F_1 in P und Q. Es soll für den Ort, der von P und Q beschrieben wird, wenn EF parallel verschoben wird, die Gleichung gefunden und der Verlauf der Kurve, welche Kissoide (Efeulinie) genannt wird, untersucht werden.

Res.: Nimmt man O als Nullpunkt, OA als $+X$-Achse, so ergibt sich die Gleichung

$$x^3 + y^2(x - 2r) = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$

O ist Rückkehrpunkt, die in A gezogene Tangente ist Asymptote.

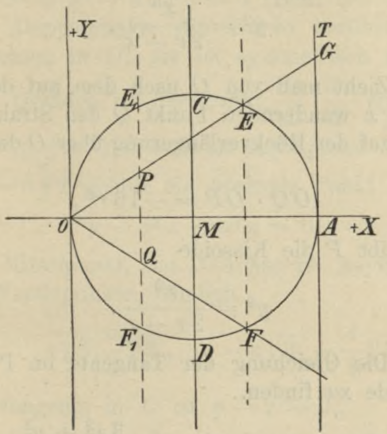

Fig. 26.

Die Schnittpunkte der OE_1 und OF_1 mit EF sind ebenfalls Punkte der Kurve.

Verlängert man OE bis zum Schnitt G mit der in A gezogenen Tangente AT, so kann der Kurvenpunkt P auch ohne Benutzung von E_1F_1, durch $OP = EG$ erhalten werden.

557. In dem Rechteck $OABC$ ist die Seite OA von unveränderlicher Länge a; die Seite OC ist ver-

änderlich. Von C wird auf die Diagonale OB das Lot CP gefällt. Es soll gezeigt werden, daß der Ort des Fußpunktes P eine Kissoide ist.

558. Herleitung der Kissoide aus der Parabel: Fällt man vom Scheitel der Parabel $y^2 = -8\,r\,x$ auf die Tangenten an diese Kurve Lote, so liegen die Fußpunkte dieser Lote auf der Kissoide

$$y^2 = \frac{x^3}{2\,r - x}.$$

559. Zieht man von O nach dem auf der Parabel $y^2 = -8\,r\,x$ wandernden Punkt Q den Strahl OQ und bestimmt auf der Rückverlängerung über O den Punkt P so, daß

$$OQ \cdot OP = -16\,r^2,$$

so beschreibt P die Kissoide

$$y^2 = \frac{x^3}{2\,r - x}.$$

560. Die Gleichung der Tangente im Punkt $x_1|y_1$ der Kissoide zu finden.

Res.: Tangente $y - y_1 = \dfrac{3\,x_1^2 + y_1^2}{2\,y_1\,(2\,r - x_1)}(x - x_1)$.

§ 32. Diskussion einzelner Gleichungen 3. Grades.

561. $\qquad x^3 + y^3 = c^3, \qquad c > 0.$

Die Kurve ist symmetrisch zu der Geraden $y = x$; $y + x = 0$ ist Asymptote.

Die Kurve verläuft durch das erste, zweite und vierte Feld und schneidet auf den Koordinatenachsen

Stücke von der Länge c ab. Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind Wendepunkte. Der Schnittpunkt mit der Symmetrieachse $y = x$ ist ein Scheitel.

Gleichung der Tangente

$$x_1^2 x + y_1^2 y = c^3 .$$

562. $$x^3 - y^3 = c^3 .$$

563. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Blatt des Descartes).

O ist Doppelpunkt, die Kurve berührt die Koordinatenachsen in O; sie ist symmetrisch zu $y = x$. Auf dieser Geraden ist der Punkt $\frac{3a}{2} \Big| \frac{3a}{2}$ ein Scheitel.

$y + x + a = 0$ ist Asymptote.

Zu $x = a\sqrt[3]{2}$ gehört ein höchster Punkt.

564. $$x^2 y - a^2 x + a^2 y = 0 .$$

O ist Mittelpunkt, die X-Achse ist Asymptote; sie hat drei Wendepunkte, nämlich

$$O, \quad a\sqrt{3} \Big| \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad -a\sqrt{3} \Big| -\frac{a}{2}\sqrt{3} .$$

Wendetangente in O ist $y - x = 0$,

höchster Punkt $a \Big| \frac{a}{2}$, tiefster $-a \Big| -\frac{a}{2}$.

565. $$x^3 + x^2 - y^2 = 0 .$$

Die Kurve ist symmetrisch zur X-Achse, O ist Doppelpunkt; $x \pm y = 0$ sind die Tangenten in O.

Höchster und tiefster Punkt $-\frac{2}{3} \Big| \pm \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

566. $$x^3 - x^2 - y^2 = 0 .$$

Die Kurve ist symmetrisch zur X-Achse; O ist Einsiedlerpunkt.

567. $$x^2 y + x^2 - y^2 = 0\,.$$

Die Kurve ist symmetrisch zur Y-Achse; $x \pm y = 0$ sind die Tangenten in dem Doppelpunkt O.

$$y = -1 \text{ ist Asymptote.}$$

568. Von dem Punkt P der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ wird auf die Scheiteltangente das Lot PD gefällt und über P hinaus um $PQ = OP$ (O Nullpunkt) verlängert. Es soll der Ort von Q gefunden werden, wenn P auf der Parabel wandert.

Res.: $x\,y^2 - p\,(x^2 - y^2) = 0\,.$

569. $$x^2 y - x^2 - y^2 = 0\,.$$

Die Kurve ist symmetrisch zur Y-Achse, O ist Einsiedlerpunkt. $\pm 2|2$ sind äußerste Punkte, also $x = \pm 2$ Tangenten an die Kurve. Die Gerade $y = 1$ ist Asymptote.

570. $$x^2 y - y + 1 = 0\,.$$

Die X-Achse und die Geraden $x = \pm 1$ sind Asymptoten. Die Gerade $y = 1$ liefert $x = \pm 0$, sie ist also Tangente in einem höchsten Punkt.

571. $$x^3 - x\,y + 1 = 0\,.$$

$x = 0$ ist Asymptote; der Schnittpunkt mit der X-Achse ist Wendepunkt; $y = 3\,x + 1$ ist Wendetangente. Die Gerade $y = b$ berührt die Kurve, wenn die Gleichung $x^3 - b\,x + 1 = 0$ zwei gleiche reelle Wurzeln hat; dies ist der Fall für $x_1 = x_2 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$, $x_3 = -2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$, $b = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

572. $$x^3 + y^3 - x = 0\,.$$

O ist Mittelpunkt;
drei Wendepunkte $0|0$, $+1|0$, $-1|0$;

Wendetangenten $x = 0$, $x = \pm 1$;
Asymptote $y = -x$;
höchste und tiefste Punkte $\sqrt{\frac{1}{3}} \,\Big|\, \pm \frac{1}{3}\sqrt{2}$.

573. $$x^2 y + x y^2 - 1 = 0\,.$$

Die Kurve ist symmetrisch zu der Halbierungslinie des ersten Feldes.
Drei Asymptoten, nämlich $x = 0$, $y = 0$, $y = -x$; höchster Punkt $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \,\Big|\, -\sqrt[3]{4}$; äußerster Punkt $-\sqrt[3]{4} \,\Big|\, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

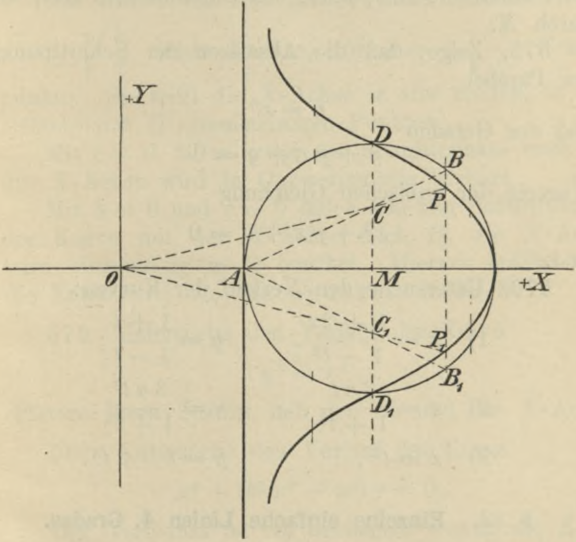

Fig. 27.

574. In dem Kreis K vom Halbmesser a (s. Fig. 27) ist der Durchmesser AMX und zu ihm der senkrechte

DMD_1 (g) gezogen. Auf der Verlängerung des Durchmessers AX ist der Punkt O gegeben. Eine Gerade parallel DD_1 trifft den Kreis in B und B_1; die Geraden AB und AB_1 treffen DD_1 in C und C_1. Ziehe OC und OC_1 bis zu den Schnittpunkten P und P_1 mit BB_1. Was ist die Gleichung des Ortes von P und P_1? Es sei OM $+X$-Achse, O Nullpunkt, $OA = AM = a$.

Res.: $x^3 + 4xy^2 - r(4y^2 + 3x^2) = 0$.

O ist Einsiedlerpunkt, $x = a$ Asymptote. Die Kurve geht durch die Endpunkte des Durchmessers DD_1 und durch X.

575. Zeige, daß die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel

$$y = x^3$$

und der Geraden

$$y + px + q = 0$$

Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

sind.

576. Untersuche den Verlauf der Kurven:

1) $x = \dfrac{1 + 2t}{1 - t^2}, \qquad y = \dfrac{1 + t}{1 - t};$

2) $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, \qquad y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3};$

3) $x = t^2, \qquad y = t - 2t^3.$

§ 33. **Einzelne einfache Linien 4. Grades.**

577. Untersuche den Verlauf der Kurve

$$a^3 y = x^4, \qquad c > 0$$

und leite aus der Gleichungsform

$$y = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{x}{a}$$

eine Konstruktion der Kurve her.

578. Untersuche den Verlauf der Kurve

$$y = x^4 - b x^2 + c ,$$

wobei

$$c > 0 , \qquad b > 0 \qquad \text{und} \qquad b^2 > 4c$$

ist.

Die Kurve hat für $x = 0$ einen höchsten, für $x = \pm\sqrt{\frac{b}{2}}$ tiefste Punkte, für $x = \pm\sqrt{\frac{b}{6}}$ Wendepunkte. Sie trifft die X-Achse in vier reellen, in Beziehung auf O symmetrischen Punkten.

Mit $c = 0$ fallen zwei der Schnittpunkte nach O, die X-Achse wird in O zweipunktig berührt.

Mit $b = 0$ und $c = 0$ fallen alle vier Schnittpunkte der Kurve mit der X-Achse nach O, die X-Achse wird vierpunktig in O berührt. Hieraus erklärt sich die Entstehung des Flachpunktes in Nr. 577.

579. Untersuche den Verlauf der Kurve

$$y^3 = x^4 ,$$

erörtere ihren Schnitt mit der X- und der Y-Achse.

580. Untersuche den Verlauf der Kurve

$$x^4 + (b^2 x^2 - y^2) y = 0 .$$

Der Nullpunkt ist ein dreifacher Punkt, die Kurve bildet also bei O zwei Schleifen. Die Tangenten in O sind

$$y = 0 , \quad bx - y = 0 , \quad bx + y = 0 .$$

Für $b = 0$ fallen alle drei Tangenten mit der X-Achse zusammen, die beiden Schleifen schrumpfen in einen Punkt, den Spitzpunkt, zusammen. Der Spitzpunkt geht also aus dem dreifachen Punkt in ähnlicher Weise wie der Rückkehrpunkt aus dem Doppelpunkt hervor.

581. Untersuche den Verlauf der Kurve

$$x^3 y = c^4$$

und suche aus der Form

$$y = \frac{c^2}{x} \cdot \frac{c}{x} \cdot \frac{c}{x}$$

eine Konstruktion derselben.

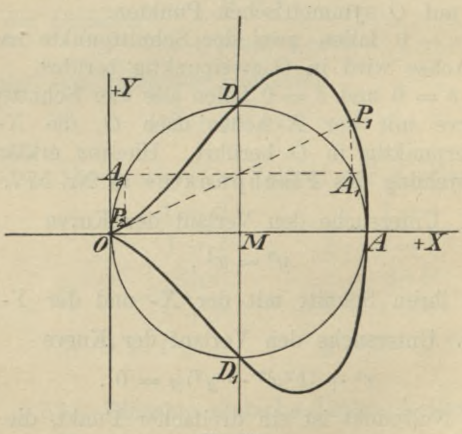

Fig. 28.

582. In einem Kreise vom Halbmesser r (s. Fig. 28) ist der Durchmesser OA und zu ihm der senkrechte DD_1 ge-

zogen. Eine zu OA parallele Sehne $A_1 A_2$ schneidet DD_1 in C und die Gerade OC trifft die durch A_1 und A_2 parallel zu DD_1 gezogenen Geraden in P_1 und P_2. Es soll die Gleichung und der Verlauf des Ortes von P_1 und P_2 ermittelt werden.

OA $+X$-Achse, O Nullpunkt.

Res.: $x^4 - 2\,r\,x^3 + r^2\,y^2 = 0$.

Die Kurve ist symmetrisch zur X-Achse, O ist Rückkehrpunkt, OA Rückkehrtangente. Aus

$$y = \pm \frac{x}{r}\sqrt{2\,r\,x - x^2}$$

folgt, daß reelle Punkte nur für $0 \leqq x \leqq 2\,r$ möglich sind.

Höchster Punkt: $\quad \dfrac{3\,r}{2} \Big| \dfrac{3\,r}{4}\sqrt{3}$;

Wendepunkte: $\quad \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\,r \Big| \pm\dfrac{r}{2}\sqrt{3\sqrt{3}-9}$.

583. Untersuchung von

$$y^2(1 - x^2) = 1\,.$$

Die Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen, also O Mittelpunkt; $x = \pm 1$ sind Asymptoten.

Aus

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{und} \quad x = \pm \frac{1}{y}\sqrt{y^2 - 1}$$

folgt, daß reelle Punkte nur für $-1 \leqq x \leqq +1$ und $|\,y\,| > 1$ möglich sind; die Kurve ist also zwischen die

Asymptoten eingeschlossen; auf jeder Seite der X-Achse ein ins Unendliche laufender Zweig.

Tiefster Punkt $0|+1$, höchster $0|-1$.

584. Untersuchung von

$$x^2 y^2 - x^2 + y^2 = 0 .$$

Res.: Die Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen, O Mittelpunkt, Doppelpunkt und Wendepunkt für die beiden in ihm sich treffenden Zweige; $x \pm y = 0$ sind die Tangenten in O; $y = \pm 1$ sind Asymptoten.

Aus

$$x = \pm \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

folgt, daß reelle Kurvenpunkte nur für $-1 \leqq y \leqq +1$ möglich sind.

585. Untersuchung von

$$y^2(1 + x^2) = 1 .$$

Res.: Die Kurve ist symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen; O ist Mittelpunkt, die X-Achse ist Asymptote für beide Zweige der Kurve, von welchen der eine zwischen $y = +1$ und $y = 0$, der andere zwischen $y = -1$ und $y = 0$ liegt. Die Schnittpunkte mit der Y-Achse sind Scheitel der Kurve. Wendepunkte für $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

586. Untersuchung von

$$x^4 - y^4 = x y .$$

Res.: O ist Mittelpunkt und Doppelpunkt; $x = 0$ und $y = 0$ sind Tangenten in O. Für sehr kleines y kann y^4 vernachlässigt werden; hierdurch vereinfacht sich die Kurvengleichung auf $x^3 = y$; ebenso kann x^4

bei sehr kleinem x vernachlässigt werden, hieraus ergibt sich $y^3 = -x$. Die Kurve zerfällt in zwei Zweige, die durch den Ursprung verlaufen wie $x^3 = y$ und $y^3 = -x$.

$y = \pm x$ sind Asymptoten für die beiden Zweige.

587. $$x^4 - y^4 = x\,.$$

Res.: Die Kurve ist symmetrisch zur X-Achse, sie schneidet die X-Achse in O und in $1|0$; sie zerfällt in zwei Zweige links und rechts von der Y-Achse, für welche $y = \pm x$ Asymptoten sind.

588. Die Konchoide des Nikomedes. Es ist der feste Punkt Q und die Gerade L gegeben. Q wird

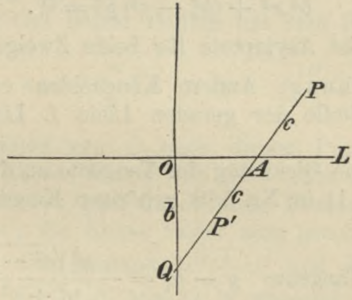

Fig. 29.

mit dem Punkt A der L verbunden; auf QA wird von A aus nach beiden Seiten $AP = AP'$ gleich der konstanten Strecke c abgetragen. Der Ort, den P und P' beschreiben, wenn A auf L wandert, heißt Konchoide (Muschellinie).

Es soll ihre Gleichung gefunden werden, wenn L X-Achse, das Lot QO von Q auf L Y-Achse und $QO = b$ ist; Q liege auf der $-Y$-Achse.

Res.: 1) $(y+b)^2(c^2-y^2)=x^2y^2$.

Legt man die X-Achse parallel zu L durch Q, so lautet die Kurvengleichung

$$2)\quad (y-b)^2(x^2+y^2)=c^2y^2 .$$

Die Kurve, welche symmetrisch zur Y-Achse ist, zerfällt in zwei durch L getrennte Zweige.

Aus 2) folgt, daß die Kurve in Q einen eigentlichen Doppelpunkt, einen Rückkehrpunkt oder einen isolierten Punkt hat, je nachdem $b \lesseqgtr c$ ist, denn die gemeinsame Gleichung der beiden Tangenten in O ist

$$b^2x^2+(b^2-c^2)y^2=0 .$$

Die L ist Asymptote für beide Zweige der Kurve.

Anmerkung: Andere Konchoiden ergeben sich, wenn an Stelle der geraden Linie L Linien anderer Art treten.

589. Die Gleichung der Tangente an die Konchoide in dem zu 1) in Nr. 588 gehörigen Koordinatensystem zu finden.

Res.: Tangente $y-y_1=-\dfrac{y_1^2\sqrt{c^2-y_1^2}}{y_1^3+c^2b}(x-x_1)$.

590. Die Lemniskate (Cassinische Kurve). Auf der X-Achse sind auf beiden Seiten von O, je im Abstand a von O, die Punkte F und F_1 gegeben. Ein Punkt P bewegt sich so, daß das Produkt seiner Entfernungen von F und F_1 konstant und gleich c^2 ist. Es soll die Gleichung des Ortes von P ermittelt und der Ort näher untersucht werden.

Res.: $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=c^4-a^4$.

Die Kurve ist symmetrisch zur X- und zur Y-Achse, O ist Mittelpunkt.

Sie verläuft nur im Endlichen.

1) $c < a$; die Kurve zerfällt in zwei getrennte, geschlossene Blätter.

2) $c = a$; die Kurve, welche in diesem Fall eigentliche oder schlichte Lemniskate heißt, geht durch O, O ist eigentlicher Doppelpunkt und Wendepunkt, die Tangenten in O haben die Gleichungen

$$y = \pm x ,$$

sie schneidet die X-Achse in der Entfernung $a\sqrt{2}$ auf beiden Seiten von O.

Höchste und tiefste Punkte hat man für

$$x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{3} , \quad y = \pm \frac{a}{2} .$$

Die Strahlen von O nach diesen Punkten bilden mit der X-Achse Winkel von 30^0. Ein Kreis um O mit a beschrieben geht durch diese Punkte.

3) $c > a$; die Kurve bildet eine geschlossene, die X-Achse in dem Abstand $\sqrt{c^2 + a^2}$ und die Y-Achse im Abstand $\sqrt{c^2 - a^2}$ von O je zweimal schneidende Linie, welche in den Schnittpunkten mit der Y-Achse einen höchsten bzw. einen tiefsten Punkt hat.

591. Zu beweisen: Fällt man vom Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 2\,a^2$$

die Lote auf die Tangenten an diese Kurve, so ist der Ort der Fußpunkte dieser Lote die Lemniskate

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\,a^2\,(x^2 - y^2) = 0 .$$

592. Zu beweisen, daß, wenn man vom Mittelpunkt O der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 2\,a^2$$

nach dem Punkt P_1 dieser Kurve den Strahl OP_1 zieht und darauf P so bestimmt, daß

$$OP \cdot OP_1 = 2\,a^2$$

ist, der Ort von P die einfache Lemniskate ist.

593. Vom Mittelpunkt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

werden Lote auf die Tangenten gefällt; es soll der Ort der Fußpunkte gefunden werden. Was muß der Fall sein, wenn $b = a$ wird?

Res.: $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$.

594. Auf der $+X$-Achse liegt im Abstand a von O der Punkt M. Um M ist mit a ein Kreis beschrieben. Von O sind auf die Tangenten des Kreises Lote gefällt. Was ist die Gleichung für den Ort der Fußpunkte?

Res.: $(x^2 + y^2)^2 - 2\,a\,x\,(x^2 + y^2) - a^2 y^2 = 0$.

Der Ort, welcher in O einen Rückkehrpunkt hat und den Kreis in seinem Schnittpunkt mit der $+X$-Achse berührt, heißt Kardioide (Herzlinie).

595. $$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)\,.$$

Geschlossene Kurve, O ist Doppelpunkt, Mittelpunkt und Wendepunkt.

Höchste Punkte: $\pm \frac{a}{2}\sqrt{2} \,\Big|\, \frac{a}{2}$.

596. $$y^2(a-x)^2 = x^3(2a-x) .$$

Reelle Punkte nur für $0 \leqq x \leqq 2a$; O ist Rückkehrpunkt; zwei durch die Asymptote $x = a$ getrennte Zweige.

597. $$y^2 = x^2(x^2 - 1 .$$

Zwei ins Unendliche laufende Zweige; Wendepunkte für $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

598. $$y^2(1-x^2) = 1 .$$

$x = \pm 1$ sind Asymptoten; reelle Punkte nur für $-1 \leqq x \leqq +1$; höchster Punkt $0|+1$, tiefster $0|-1$.

§ 34. Gleichungen algebraischer Kurven in Polarkoordinaten.

Bezeichnungen: r Radius vektor, φ Richtungswinkel, α Richtungswinkel der Tangente gegen die Polarachse, β Winkel der Kurventangente mit dem Fahrstrahl zum Berührungspunkt.

599. Folgende, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogene Gleichungen in solche in Polarkoordinaten überzuführen, wobei die $+X$-Achse Polarachse und O Pol ist:

a) $y = x^3$, b) $y = x^n$,

c) $y^2 = x^3$, d) $xy^2 = c^3$.

Res.:

a) $r^2 = \operatorname{tg}\varphi : \cos^2\varphi$, b) $r^{n-1} = \operatorname{tg}\varphi : \cos^{n-1}\varphi$,

c) $r = \operatorname{tg}^2\varphi : \cos\varphi$, d) $r^3 = c^3 : \cos\varphi\sin^2\varphi$.

600. Die Gleichung der Kissoide aus der in Nr. 556 gegebenen Konstruktion in Polarkoordinaten aufzustellen. (Der Kreisdurchmesser werde mit a bezeichnet.)

Res.: $r = a \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi$.

601. Ebenso aus der in Nr. 557 gegebenen Konstruktion.

602. Auf der Polarachse OL ist der feste Punkt Q gegeben $(OQ = c)$. In Q ist das Lot errichtet, durch O wird ein Strahl gezogen, der das Lot in A trifft; auf OA in A wird das Lot gezogen, das OL in B schneidet, und auf OL in B wird wiederum das Lot errichtet, das OA in C trifft. Es soll die Gleichung des Ortes ermittelt werden, den C beschreibt, wenn sich der Strahl OA um O dreht.

Res.: $$r = \frac{c}{\cos^3\varphi} .$$

Wendepunkte für $\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$; $r = 8c$.

603. Die Polargleichungen der beiden Zweige der Konchoide (s. Nr. 588), wenn die Parallele zu L durch Q als Polarachse und Q als Pol genommen wird.

Res.: $$r = \frac{b}{\cos\varphi} + c, \quad r = \frac{b}{\cos\varphi} - c .$$

604. Die Polargleichung der schlichten Lemniskate (s. Nr. 590) zu finden.

Res.: $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

605. Den Richtungswinkel der Tangente an die schlichte Lemniskate (s. Nr. 604) zu bestimmen.

Res.: $$\frac{\pi}{2} + 3\varphi .$$

606. Beweise, daß der Winkel, welchen die Normale der schlichten Lemniskate mit dem zugehörigen Vektor bildet, doppelt so groß als der Winkel des Vektors mit der Polarachse ist.

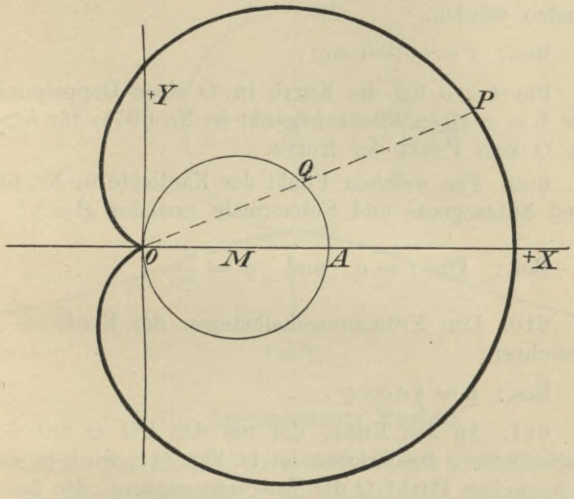

Fig. 30.

607. In einem Kreis K (s. Fig. 30) ist der Durchmesser $OA = a$ und durch O die Sehne OQ gezogen. OQ wird über Q hinaus um QP verlängert. Es soll die Polargleichung des Ortes von P gefunden und die von P erzeugte Kurve untersucht werden.

Res.: $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Der Ort ist eine Kardioide (s. Nr. 594). Höchster Punkt zu $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

608. Man verlängere die Sehne OQ (s. Nr. 607) nicht um den Durchmesser des Kreises, sondern um eine andere gegebene Länge b. Es soll die Gleichung des entstehenden Ortes (Pascalsche Schnecke) gefunden werden.

Res.: $r = b + a \cos\varphi$.

Für $b < a$ hat die Kurve in O einen Doppelpunkt, für $b = a$ einen Rückkehrpunkt (s. Nr. 607); für $b > a$ ist O kein Punkt der Kurve.

609. Für welchen Punkt der Kardioide in Nr. 607 sind Subtangente und Subnormale einander gleich?

Res.: Für $r = a$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

610. Den Krümmungshalbmesser der Kardioide zu berechnen.

Res.: $\varrho = \frac{4}{3} a \cos\varphi$.

611. An den Kreis, der um den Pol O mit dem Halbmesser a beschrieben ist (s. Fig. 31), wird in dem beweglichen Punkt Q die Tangente gezogen, die das in O errichtete Lot in S trifft; durch S wird zur Polarachse OX die Parallele gezogen, welche OQ in P trifft. Es soll die Polargleichung des Ortes von P gesucht und untersucht werden.

Res.: $r = \frac{a}{\sin^2\varphi}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi$,

hieraus folgt die Tangentenkonstruktion.

Tiefster, bzw. höchster Punkt mit $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$;

Wendepunkte zu $\sin\varphi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$.

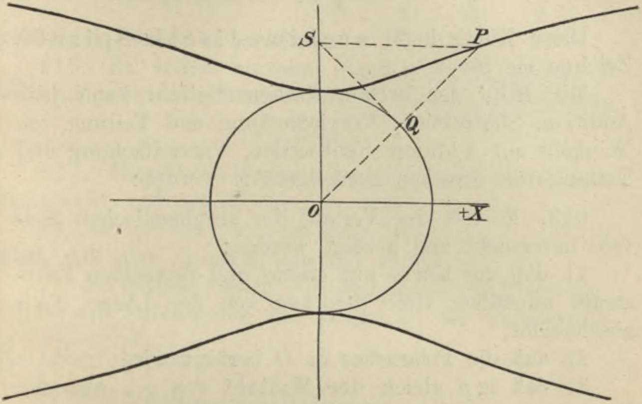

Fig. 31.

§ 35. **Transzendente Kurven.**

612. Um den Pol O dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit c ein Strahl OL und auf ihm bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit c_1 der Punkt P. Es soll die Gleichung des Ortes von P gefunden werden. Am Anfang der Bewegung liege OL auf der Polarachse OX und P in O.

Res.: $$r = \frac{c_1}{c}\varphi,$$

oder, wenn

$$\frac{c_1}{c} = a$$

gesetzt wird,

$$r = a\varphi .$$

Diese Kurve heißt **archimedische Spirale**. Zeichne sie für $a = 1$.

Mit Hilfe der archimedischen Spirale kann jede Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Teilung von Winkeln auf Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Teilung von Strecken zurückgeführt werden:

613. Es soll der Verlauf der archimedischen Spirale untersucht und gezeigt werden:

1) daß die Kurve auf einem und demselben Fahrstrahl unendlich viele Strecken von der Länge $2a\pi$ abschneidet;

2) daß die Polarachse in O berührt wird;

3) daß $\operatorname{tg}\beta$ gleich der Maßzahl von φ, also der Winkel β spitz ist und sich mit wachsendem φ der Grenze $\frac{\pi}{2}$ nähert;

4) daß die Subnormale konstant und gleich a ist; hieraus folgt Konstruktion der Normale und der Tangente;

5) daß die Subtangente gleich $a^2\varphi$ ist.

614. Den Flächeninhalt des zwischen den zwei Halbmessern r und r_1 und dem zugehörigen Kurvenbogen liegenden Sektors der archimedischen Spirale zu ermitteln.

Res.: $$\frac{1}{6a}(r_1^3 - r^3) .$$

615. Den Verlauf der parabolischen Spirale, deren Gleichung

$$r^2 = a^2 \varphi$$

ist, zu ermitteln und die zu $\varphi = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \ldots$ gehörigen Punkte zu zeichnen.

616. Es sollen einzelne Punkte der hyperbolischen Spirale konstruiert werden aus ihrer Gleichung

$$r \varphi = a .$$

617. Es soll der Verlauf der hyperbolischen Spirale untersucht und gezeigt werden, daß

1) für $\varphi = 0$, $r = \infty$ und für $\varphi = \infty$, $r = 0$ wird, daß also O asymptotischer Punkt ist;

2) die Gerade $r \sin \varphi = a$ Asymptote der Kurve ist;

3) die Subtangente die Länge a, die Subnormale die Länge $\frac{r^2}{a}$ hat;

4) der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{r}{\cos^3 OTP}$$

ist, wobei O Pol, T der Schnittpunkt der in P gezogenen Tangente mit dem in O auf OP errichteten Lot ist.

618. Den Verlauf der logarithmischen Spirale, deren Gleichung

$$r = a e^{m\varphi} (a > 0, \quad m > 0),$$

zu untersuchen.

Res.: 1) Mit $\varphi = +\infty$ wird $r = \infty$;

2) „ $\varphi = 0$ „ $r = a$;

3) „ $\varphi = -\infty$ „ $r = 0$;

es ist also O asymptotischer Punkt;

4) der Winkel zwischen Tangente und Vektor zum Berührungspunkt ist konstant;

5) die Länge der Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale ist bzw.

$$\frac{r}{m}\sqrt{1+m^2}\,, \quad r\sqrt{1+m^2}\,, \quad \frac{r}{m}\,, \quad m\,r\,.$$

Anmerkung: Über die Anwendung der logarithmischen Spirale auf das graphische Rechnen s. Favaro-Terrier, Le calcul graphique, Paris 1885.

619. Um einen Kreis vom Halbmesser a ist ein undehnbarer Faden gelegt. Derselbe wird in dem einen Endpunkt festgehalten und vom anderen Endpunkt A aus in gespanntem Zustand abgewickelt. Es soll die Gleichung des von dem Endpunkt des abgewickelten Teiles beschriebenen Ortes gefunden werden.

Res.: Man nehme den Kreismittelpunkt als Nullpunkt, die OA als $+X$-Achse und bezeichne den Richtungswinkel des Halbmessers OQ zum Berührungspunkt Q des gespannten Fadens mit φ; dann ist der Kreisevolvente genannte Ort dargestellt durch die Gleichungen

$$x = a\cos\varphi + a\,\varphi\sin\varphi\,,$$

$$y = a\sin\varphi - a\,\varphi\cos\varphi\,.$$

620. Die Zykloide. Ein Kreis vom Halbmesser a, der eine Gerade OX in O berührt, rollt auf OX. Es soll die Gleichung des Ortes gefunden werden, welchen der auf dem Halbmesser MO des Kreises im Abstand a_1 von O befindliche Punkt P beschreibt. OX sei X-Achse, O Nullpunkt.

Res.: $$x = a\,t - a_1 \sin t\,,$$
$$y = a - a_1 \cos t\,,$$

wobei $t = \operatorname{arc} PMX$, X Berührungspunkt des Kreises auf OX ist.

Ist $a_1 \gtrless a$, so heißt die Kurve verschlungene bzw. gestreckte, ist $a_1 = a$ die gewöhnliche Zykloide.

Die verschlungene Zykloide hat in der ursprünglichen Lage von P einen Doppelpunkt, die gewöhnliche einen Rückkehrpunkt, die gestreckte einen tiefsten Punkt.

621. Es soll nachgewiesen werden, daß für jede Zykloide die Normale durch den Berührungspunkt des Wälzungskreises geht.

Hieraus folgt die Konstruktion der Normale und der Tangente.

622. Es soll für die gewöhnliche Zykloide nachgewiesen werden, daß

1) die Normale die Länge $2\,a \sin \dfrac{t}{2}$,

2) der Krümmungshalbmesser die Länge $4\,a \sin \dfrac{t}{2}$,

also die doppelte Länge der Normalen hat;

3) die Evolute wieder eine gewöhnliche Zykloide,

4) die von dem einer vollen Umdrehung des Kreises entsprechenden Zykloidenbogen und der X-Achse eingeschlossene Fläche das Dreifache der Kreisfläche und

5) die Länge dieses Zykloidenbogens das Achtfache des Kreishalbmessers ist.

623. Epizykloide. Auf einem festen Kreis K mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser R rollt

auf der Außenseite ein zweiter Kreis K_1 mit dem Mittelpunkt M (Anfangslage) und dem Halbmesser r. Es soll die Gleichung des Ortes gefunden werden, welche ein bestimmter Punkt A von K_1 beschreibt.

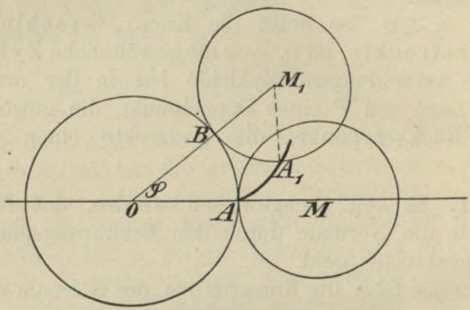

Fig. 32.

Res.: Beim Beginn der Bewegung liege der beschreibende Punkt A mit O und M in einer Geraden. Diese werde als $+X$-Achse, O als Nullpunkt angenommen; es sei M_1 irgend eine Lage von M und $\sphericalangle MOM_1 = \varphi$, dann ist der gesuchte Ort, der Epizykloide heißt, dargestellt durch

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\varphi - r\cos\dfrac{(R+r)\varphi}{r}, \\ y = (R+r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{(R+r)\varphi}{r}. \end{cases}$$

Rollt der Kreis K_1 auf der Innenseite von K, so heißt der von A beschriebene Ort Hypozykloide; ihre Gleichungen sind

$$\begin{cases} x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\dfrac{R-r}{r}\varphi\,, \\ y = (R - r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{R-r}{r}\varphi\,. \end{cases}$$

624. Zu beweisen: Die Normale der Epi- und der Hypozykloide geht durch den Berührungspunkt von K und K_1.

625. Zu beweisen: Ist $r = R$, so wird die Epizykloide zur Kardioide.

626. Wenn R und r in einem rationalen Verhältnis stehen, so gelangt der beschreibende Punkt A der Nr. 623 nach einer endlichen Anzahl von Umwälzungen des Kreises wieder an die anfängliche Stelle, und die erzeugte Kurve besteht aus einer endlichen Anzahl unter sich kongruenter Züge. Es soll die Hypozykloide gezeichnet und untersucht werden:

1) für $r = \frac{1}{2}R$ (Durchmesser OA),

2) für $r = \frac{1}{3}R$ (dreispitzige Hypozykloide, sogenannte Steinersche Kurve),

3) für $r = \frac{1}{4}R$ (vierspitzige Hypozykloide, Astroide).

627. Man nehme nicht den Punkt A des Kreises K_1 von Nr. 623 als erzeugenden Punkt, sondern einen Punkt P auf MA. Das Koordinatensystem sei dasselbe wie in Nr. 623, ferner sei $MP = h$, $\sphericalangle M_1 OM = \varphi$. Es soll gezeigt werden, daß die Gleichungen der so entstehenden allgemeineren Epizykloide

$$\begin{cases} x = (R + r)\cos\varphi - h\cos\dfrac{R+r}{r}\varphi\,, \\ y = (R + r)\sin\varphi - h\sin\dfrac{R+r}{r}\varphi\,, \end{cases}$$

und die Gleichungen der allgemeineren Hypozykloide

$$\begin{cases} x = (R - r)\cos\varphi + h \sin\dfrac{R - r}{r}\varphi\,, \\[2ex] y = (R - r)\sin\varphi - h \sin\dfrac{R - r}{r}\varphi \end{cases}$$

sind.

Ferner soll gezeigt werden, daß

1) für beliebiges h und $r = \frac{1}{2}R$ die Hypozykloide in eine Ellipse und

2) für beliebiges h und $r = R$ in eine Pascalsche Schnecke übergeht.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Verzeichnis der erschienenen Bände.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.

Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof an der Univers. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— **Musikalische,** v. Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Univers. Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik u. Algebra v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität und an der Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, v. Dr. Franz Fuhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.

Altertumskunde, Griechische, von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearb. von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

— **Römische,** von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollb. Nr. 45.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— — — Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — **II:** Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.

Analysis, Höhere, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.

— **Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Univ. Breslau. Nr. 209.

Arbeiterversicherung, Die, von Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an d. Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. F. Wislicenus, Prof. a. d. Univers. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufgabensammlg. z. Analyt. Geometrie d. Ebene v. O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.

— — **d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.

— **Physikalische,** v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 243.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr 302.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbild. Nr. 224.

— — 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbild. Nr. 225.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.

Biologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Biologie der Tiere I: Entstehung u. Weiterbild. d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.

— II: Beziehungen der Tiere z. organ. Natur von Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Univers. Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Bleicherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor d. Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbild. Nr. 303.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Rob. Stern, Oberlehrer der Öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.

— **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— — siehe auch: Metalle. — Metalloide.

Chemie, Geschichte der, von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Fig. Nr. 8.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda in Bremen. Mit 89 Abbild. Nr. 274.

Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel, Privatdozent in Breslau. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.

Elektrotechnik II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Fig. Nr. 197.

— III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Fig. Nr. 198.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Taf. Nr. 175.

Ethik von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. 1. Teil. Mit 50 Abbild. Nr. 268.

— — 2. Teil. Mit 50 Abbild. Nr. 269.

Familienrecht. Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei u. ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Lehrer a. d. Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie i. Krefeld. M. 28 Fig. Nr. 186.

Feldgeschütz, Das moderne, I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850 bis 1890, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— — II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Fig. Nr. 288.

Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Finanzwissenschaft v. Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 148.

Fischerei und Fischzucht v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Formelsammlung, Mathemat., u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.

— **Physikalische,** von G. Mahler, Prof. a. Gymn. in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

Fremdwort, Das, im Deutschen von Dr. Rud Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Gardinenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Geodäsie von Dr. C. Reinhertz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

Geographie, Astronomische, von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn Hochschule in München. Mit 52 Abbild. Nr. 92.

— **Physische,** von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbild. Nr. 26.

— s. auch: Landeskunde. – Länderkunde.

Geologie von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Taf. mit über 50 Fig. Nr 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Fig. Nr. 65.

— —**Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbild. Nr. 89.

— — **Aufgabensammlung z. Analyt. Geometrie d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. a. Realgymn. i. Schwäb.-Gmünd. M. 8 Fig. Nr. 309.

— **Darstellende,** von Dr. Robert Haußner, Prof. an der Univ. Jena. I. Mit 110 Fig. Nr. 142.

— **Ebene,** von G. Mahler, Prof, am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.

— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Fig. Nr. 72.

Geschichte, Badische, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **Bayerische,** von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

— **Deutsche, I: Mittelalter** (bis 1519) von Dr. F. Kurze, Prof. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.

Geschichte, Deutsche II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege (1500—1648) von Dr. F. Kurze, Professor am Königl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.
— — **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806) von Dr. F. Kurze, Prof am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.
— — siehe auch: Quellenkunde.
— **Französische**, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.
— **Griechische**, von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der deutschen Univers. Prag. Nr. 49.
— **des 19. Jahrhunderts** v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Univers. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.
— — 2. Bdchn.: 1853 bis Ende d. Jahrh. Nr. 217.
— **Israels** bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
— **Lothringens**, von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.
— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univers. München. M. 6 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.
— **Oesterreichische, I**: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.
— — **II**: Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. a. d. Univers. Graz. Nr. 105.
— **Römische**, von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.
— **Russische**, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.
— **Sächsische**, von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
— **Schweizerische**, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.
— **Spanische**, von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.
— **der Chemie** siehe: Chemie.

Geschichte der Malerei siehe: Malerei.
— **der Mathematik** s.: Mathematik.
— **der Musik** siehe: Musik.
— **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.
— **der Physik** siehe: Physik.
— **des deutschen Romans** s.: Roman.
— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.
— **des deutschen Unterrichtswesens** siehe: Unterrichtswesen.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 270.

Gesetzbuch, Bürgerliches. Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches, viertes Buch: Familienrecht, von Dr Heinr. Titze, Prof. an d. Univers. Göttingen. Nr. 305.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Prof. an d. Univers. Breslau. I. II. Nr. 203. 204.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gleichstrommaschine, Die, von C. Kinzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Taf. Nr. 154.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

— **Griechische, I:** Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.

— — II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.

— **Lateinische.** Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.

— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Univers. Rostock. Nr. 1.

— **Russische,** von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 66.

— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deutsche, von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.

— **Englische,** von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

— **Französ.** von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.

— **Italienische,** von Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

— **Spanische,** von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Handelspolitik, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Prof. an der Univers. Marburg. Nr. 245.

Handelswesen, Das, von Dr. Wilh. Lexis, Prof. a. d. Univers. Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— — II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Hauptliteraturen, Die, d. Orients v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Univers. Wien. I. II. Nr. 162. 163.

Heldensage, Die deutsche, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 32.

— siehe auch: Mythologie.

Industrie, Anorganische Chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Taf. Nr. 205.

— — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Taf. Nr. 206.

— — III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

— **der Silikate, der künstl. Bausteine und des Mörtels.** I: Glas- und keramische Industrie von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Taf. Nr. 233.

— — II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Taf. Nr. 234.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.

Integralrechnung. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und F. Sauter, Prof. am Realgymn. in Ulm, neu bearb. von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbild. Nr. 30.

Kirchenlied. Martin Luther, Thom. Murner, und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. und 2 Fig. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univers. Berlin. Nr. 156.

Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. und 1 Taf. Nr. 18.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Univers. Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 189.

Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. und Beilagen. Nr. 75.

Kurzschrift siehe: Stenographie.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Prof. am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. M. Profil, Abbild. und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.

— **von Britisch-Nordamerika** von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbild. und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univers. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Univers. Berlin. Mit 10 Textillustration. und 1 Karte. Nr. 244.

— **des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 258.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.

— **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Prof. der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert. Kulturhistorische Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Taf. und 30 Abbild. Nr. 93.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Prof. Dr. W. Votsch. Nr. 2.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

— **des 16. Jahrhunderts I: Martin Luther, Thom. Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— — **II: Hans Sachs.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

— — **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 162.

— II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken, von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 163.

Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Univers. Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Prof. an der Techn. Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, Prof. an der Techn. Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286. 287.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, Prof. an der Univers. Heidelberg. Nr. 125.

— **Nordische,** I. Teil: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an d. Univers. Rostock. Nr. 254.

— **Portugiesische,** von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Slavische,** von Dr. Josef Karásek in Wien. 1. Teil: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — 2. Teil: Das 19. Jahrh. Nr. 278.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Prof. an d. Univers. Breslau. Nr. 107—111.

Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor d. Öffentl. u. I. Sächs. Versuchsstat. für Brauerei u. Mälzerei, sowie der Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.

Materialprüfungswesen. Einführ. i. d. mod. Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Diplomingenieur. Ständ. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel f. Festigkeitsversuche. Mit 58 Fig. Nr. 311.

— — II: Metallprüfung u. Prüfung v. Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

Meereskunde, Physische, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Taf. Nr. 112.

Messungsmethoden, Physikalische v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr. 301.

Metalle (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Metalloide (Anorganische Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metallurgie von Dr. Aug Geitz, diplom. Chemiker in München, I. II. Mit 21 Fig. Nr. 313. 314.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Univers. Innsbruck. Mit 49 Abbild. und 7 Taf. Nr. 54.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Prof. an der Univers. Kiel. Mit 130 Abbild. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen. Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Sammlung Göschen
Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Murner, Thomas. Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

— **des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.

Musiklehre, Allgemeine, v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Mythologie, Germanische, von Dr. Eugen Mogk, Prof. an der Univers. Leipzig. Nr. 15.

— **Griechische und römische,** von Dr. Herm. Steuding, Prof. am Kgl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbild. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nôt in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Fig. Nr. 123.

Pädagogik im Grundriß von Prof. Dr. W. Rein, Direktor des Pädagog. Seminars an der Univ. Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläontologie v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Univ. Graz. Mit 87 Abbild. Nr. 95.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Breslau. Mit 121 Fig. Nr. 260.

Perspektive nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberl. an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbild. Nr. 57.

Petrographie von Dr W. Bruhns, Prof. a. d. Univers. Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbild. Nr. 44.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Pflanzenkrankheiten v. Dr. Werner Friedrich Bruck in Gießen. Mit 1 farb. Taf. u. 45 Abbild. Nr. 310.

Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 158.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Prof. a. d. Univers. Königsberg. Nr. 281.

— Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie, Die. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— **Geschichte der,** von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— — II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. d. Mathem. u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Physikalische Messungsmethoden v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr 301.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Taf. Nr. 116.

Poetik, Deutsche, von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Posamentiererei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Ind. zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, von Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Fig. Nr. 98.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der kgl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit zahlr. Abbild. Nr. 290.

Quellenkunde zur deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Univers. Tübingen. 2 Bde. Nr. 279. 280.

Rechnen, Kaufmännisches, von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. an der Univers. Göttingen. Nr. 305.

Rechtslehre, Allgemeine, von Dr. Th. Sternberg, Privatdoz. an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl.Patentamts zuBerlin. Nr.271.

Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Mit einer Taf. Nr. 61.

Religionsgeschichte, Alttestamentliche, von D. Dr. Max Löhr, Prof. an der Univers. Breslau. Nr. 292.

— **Indische,** von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

— — siehe auch Buddha.

Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden, von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Renaissance. Die Kultur d. Renaissance. Gesittung. Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdoz. an der Univ. Wien. Nr. 189.

Roman. Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 67.
— — siehe auch: Grammatik.

Sachs, Hans. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

Schattenkonstruktionen v. Prof. J. Vonderlinn in Breslau. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Schmarotzer u. Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univers. Gießen. Mit 67 Abbild. Nr. 151.

Schule, Die deutsche, im Auslande, von Hans Amrhein in Halle a. S. Nr. 259.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminaroberlehrer in Annaberg. Nr. 50.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeb. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Univers. Breslau. Nr. 138.

Sociologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Spitzenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Kgl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Sprachdenkmäler, Gotische, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Sprachwissenschaft, Germanische, v. Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.
— **Indogermanische,** v. Dr. R. Meringer, Prof. a d. Univ. Graz. Mit einer Taf. Nr. 59.

Sprachwissenschaft, Romanische, von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Univers. Wien. I: Lautlehre u. Wortlehre I. Nr. 128.
— — II: Wortlehre II u. Syntax. Nr. 250.
— **Semitische,** von Dr. C. Brockelmann, Prof. an der Univers. Königsberg. Nr. 291.

Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298 u. 299.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. an der Univers. Wien. Mit 2 Karten und 2 Taf. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, Diplom.-Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.
— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Fig. Nr. 179.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Mitglied des Kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 246.
— Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 86.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Univers. Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.

Technologie, Allgemeine chemische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Teerfarbstoffe, Die, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Lud. Rellstab. M. 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk in Jena. Nr. 272.
— Die Entstehung des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.
Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
— **III:** Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
Thermodynamik (Technische Wärmelehre) von K. Walther und M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. Mit 54 Fig. Nr. 242.
Tierbiologie I: Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Univers. Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.
— **II:** Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Univers. Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.
Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.
Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Univers. Gießen. Mit 78 Abbild. Nr. 60.
Tierreich, Das, I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.
Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.
Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Fig. Nr. 99.
Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.
— **Geschichte des deutschen Unterrichtswesens** von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
— — II. Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
Urgeschichte der Menschheit v. Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.
Urheberrecht, Das deutsche, an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.
Versicherungswesen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.
Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u. Privatdoz. an d. Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.
Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 25.
Volkswirtschaftslehre v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Prof. an der Univers. Freiburg i. B. Nr. 133.
Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.
Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.