

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw. ~~26~~

~~26~~

II

Perspektive ebener Gebilde
Kegelschnitte

Von

Prof. Dr. Robert Haußner

Mit 80 Figuren





Sammlung

Götschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

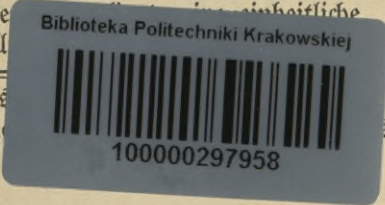
Jede Nummer in eleg. Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung
G. m. b. H. Berlin W. 35

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“ ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollständig erschienen wäre, eine einheitliche systematische Darstellung bilden dürfte.

Ein aus
Nummer

erschienenen
3 Bändchens



Vom 1. Januar 1913 ab
beträgt der Preis der
Sammlung Göschen
90 Pf. für den Band

Dem 1. Januar 1912 ab
besteht der Preis der
Sammlung 60 Pf.
90 Pf. für den Band

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden 80 Pfennig.

- Geschichte der Mathematik** von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Arithmetik u. Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.
- Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.
- Ebene Geometrie** m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.
- Ebene und sphärische Trigonometrie** mit 70 Figuren von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.
- Stereometrie** mit 66 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.
- Niedere Analysis** m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.
- Höhere Analysis I: Differentialrechnung** mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.
- Höhere Analysis II: Integralrechnung** mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.
- Analytische Geometrie der Ebene** mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene** mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.
- Analytische Geometrie des Raumes** mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes** mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.
- Projektive Geometrie** in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.
- Darstellende Geometrie I** mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.
- — **II.** Mit 40 Figuren. Nr. 143.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung** von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Figuren im Text. Nr. 508.
- Vierstellige Logarithmen** von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigen Druck. Nr. 81.
- Fünfstellige Logarithmen** von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.
- Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik** mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Wenden!

- Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.
- Vektoranalysis** mit 11 Figuren von Professor Dr. Siegf. Valentiner. Nr. 354.
- Determinanten** von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.
- Algebraische Kurven** von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I. Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.
- — **II: Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung.** Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.
- Koordinatensysteme** von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichtenfelde. Nr. 507.
- Einführung in die geometrische Optik** von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.
- Einleitung in die Funktionentheorie** (Theorie der komplexen Zahlenreihen) von Oberlehrer Max Rose in Berlin-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Nr. 581.
- Versicherungsmathematik** v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.
- Geometrisches Zeichnen** mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.
- Vermessungskunde** von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.
- Astronomie.** Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold.
- I: Das Planetensystem.** Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.
- — **II: Kometen, Meteore und das Sternsystem.** Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Astrophysik** mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.
- Astronomische Geographie** mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.
- Nautik.** Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schifffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.
- Luft- und Meeresströmungen** von Dr. Franz Schulze. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.
-

Sammlung Göschen

Darstellende Geometrie

Zweiter Teil

Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte

Von

Dr. Robert Haußner

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena

Mit 80 Figuren im Texte



Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1908

D/53/2

I 301414

KD 515 (023)

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

~~I 26~~

Akc. Nr. 3721 149

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

BPK-B-1/2017

Inhalt.

I. Abschnitt.

Elemente der Perspektive ebener Gebilde im Raume und in der Ebene.

	Seite
1— 2. Messen von Strecken und Winkeln	7
3— 4. Das Abstandsverhältnis	9
5. Das Doppelverhältnis	12
6. Harmonische Punkte und Strahlen	13
7. Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses bei der Pro- jektion	15
8. Aufgabe über Doppelverhältnisse	17
9—10. Perspektive von Geraden	18
11—13. Perspektive ebener Figuren im Raume	20
14. Besondere Arten der Perspektive	24
15—16. Zwei perspektive Figuren bleiben perspektiv bei Drehung ihrer Ebenen	24
17—20. Perspektive Figuren in derselben Ebene	28
21. Satz von Desargues; Aufgabe	33

II. Abschnitt.

Harmonische Eigenschaften des Vierecks und des Kreises.

22. Das vollständige Viereck und Vierseit	36
23. Perspektive Verwandlung eines beliebigen Vierecks in ein Rechteck	37
24—25. Harmonische Eigenschaften des Vierecks	39
26—27. Potenz und Potenzlinie bei Kreisen	42
28. Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise	43
29—31. Perspektive Verwandtschaft zweier Kreise	44
32—33. Harmonische Eigenschaften des Kreises	50
34. Sätze über Pol und Polare eines Kreises	53
35. Harmonische Pole und Polaren eines Kreises	57
36. Perspektive Abbildung eines Kreises auf sich selbst	58
37. Satz über den Kreis	60

III. Abschnitt.

Projektive Eigenschaften der Kegelschnitte.

Seite

38.	Definition der Kegelschnitte	62
39.	Grundeigenschaften der Kegelschnitte	63
40—41.	Pol und Polare von Kegelschnitten	64
42—43.	Verschiedene Arten von Kegelschnitten	66
44.	Mittelpunkt und Durchmesser	68

Die Ellipse.

45.	Sätze über Tangenten und Polaren einer Ellipse	69
46.	Zwei konjugierte Durchmesser bestimmen eine Ellipse	72
47.	Konstruktion der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern	73
48.	Jede Tangente schneidet auf zwei parallelen Tangenten Strecken ab, deren Produkt konstant ist	74
49.	Abschnitte einer Tangente auf zwei konjugierten Durchmessern	75
50.	Tangenten- und Sehnenviereck	76
51.	Je zwei konjugierte Halbmesser bilden ein Dreieck von konstantem Inhalte	76
52.	Produkt der Strecken einer Tangente zwischen zwei konjugierten Durchmessern	78

Die Hyperbel.

53—55.	Sätze über die Hyperbel	80
56—58.	Zwei konjugierte Durchmesser bestimmen eine Hyperbel; drei Konstruktionen derselben	86
59.	Bestimmung der Achsen aus zwei konjugierten Durchmessern	89
60.	Bestimmung der Asymptoten einer gezeichnet vorliegenden Hyperbel	90
61—62.	Sätze über Tangenten; Tangenten- und Sehnenviereck	92
63.	Die gleichseitige Hyperbel	95

Die Parabel.

64—65.	Sätze über die Parabel	96
66.	Zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bestimmen eine Parabel; Konstruktion derselben und Bestimmung der Achse	103
67.	Zwei Punkte, die Tangente in einem derselben und die Durchmesserichtung bestimmen eine Parabel; Konstruktion derselben und Bestimmung der Achse	105
68.	Eine Parabel ist durch Angabe des Parameters ihrer Gestalt nach bestimmt	107

IV. Abschnitt.

Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte:
Brennpunkteigenschaften.

	Seite
69—70. Schnitte des geraden Kreiskegels	108
71—73. Brennpunkte der Kegelschnitte	110
74. Leitlinien der Kegelschnitte	116
75—76. Winkel zwischen der Tangente eines Kegelschnittes und den Brennstrahlen	118
77—78. Konstruktion der Ellipse und Hyperbel aus den Brenn- punkten und der Parabel aus Brennpunkt und Leitlinie. Konfokale Kegelschnitte	121
79—80. Eigenschaft der Brennpunkte	124
81. Sätze über Tangenten aller Kegelschnitte	125
82—84. Eigenschaften der Tangenten der Ellipse und Hyperbel	127
85—86. Eigenschaften der Tangente einer Parabel	132
87. Alle Kegelschnitte können aus geraden Kreiskegeln er- halten werden	135

V. Abschnitt.

Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte:
Krümmungskreise.

88—89. Hilfsformeln	138
90. Krümmungskreis einer Kurve	141
91—92. Beziehung zwischen den Krümmungsradien einer Kurve und ihrer Projektion. Besondere Fälle	142
93. Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise einer Ellipse	145
94—95. Formeln für den Krümmungsradius in einem Punkte einer Ellipse oder Hyperbel	147
96—98. Konstruktionen des Krümmungskreises einer Ellipse oder Hyperbel	152
99. Formel für den Krümmungsradius in einem Punkte einer Parabel	158
100. Konstruktion des Krümmungskreises einer Parabel	162

Wegen der angewandten Bezeichnungen siehe die Tafel
auf den Seiten 7 und 8 des ersten Teiles.

Literatur.

- K. Pohlke**, Darstellende Geometrie. Berlin, I. Abteilung, 4. Auflage 1876; II. Abteilung 1876.
- W. Fiedler**, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Leipzig, I. Teil, 4. Auflage 1904; II. und III. Teil, 3. Auflage 1885 und 1888.
- Chr. Wiener**, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, I. Band 1884; II. Band 1887.
- K. Rohn** und **E. Papperitz**, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, 3. Auflage in drei Bänden, 1906.
-

I. Abschnitt.

Elemente der Perspektive ebener Gebilde im Raume und in der Ebene.

Messen von Strecken und Winkeln.

1. In der elementaren Planimetrie zieht man nur die Länge einer Strecke in Betracht, ohne auf die Richtung, in welcher ihre Länge gemessen ist, Rücksicht zu nehmen. Für die folgenden Betrachtungen dagegen ist es von grundlegender Bedeutung, auch die Richtung, in welcher die Länge gemessen ist, zu beachten.

Ist eine Strecke von den beiden Punkten A und B begrenzt, so soll ihre absolute Länge, d. i. ihre Länge ohne Rücksicht auf die Richtung, in welcher die Strecke beim Messen durchlaufen wird, mit AB oder BA bezeichnet werden. Faßt man aber auch die Richtung ins Auge, so soll die Strecke mit \overline{AB} oder \overline{BA} bezeichnet werden, je nachdem die Strecke von A nach B oder von B nach A gemessen werden soll. In diesem Falle kennzeichnet also die Reihenfolge der Buchstaben die Richtung der Strecke (gerichtete Strecke).

Um in der Rechnung den Unterschied der beiden Richtungen einer Strecke zum Ausdruck zu bringen, nimmt man ihre Länge positiv oder negativ, je nachdem die Strecke in der einen oder der anderen Richtung durchlaufen wird. Dementsprechend bezeichnet man die eine Richtung der Strecke als die positive, die entgegen-

gesetzte als die negative Richtung. Welche von beiden Richtungen man als positive wählt, ist willkürlich; nur wählt man für alle Strecken einer Geraden g dieselbe Richtung als positive. In der Figur 1 bezeichnet der der Geraden g beigelegte Pfeil die positive Richtung. Ist die

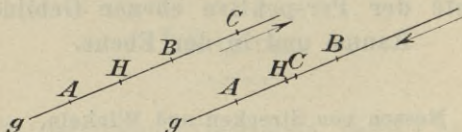


Fig. 1.

absolute Länge der Strecke AB gleich a Längeneinheiten, so ist also für die linksstehende Figur $\overline{AB} = a$, $\overline{BA} = -a$ und für die rechtsstehende $\overline{AB} = -a$, $\overline{BA} = a$. Wie man mithin auch die positive Richtung wählen mag, stets ist für eine gerichtete Strecke

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \quad \text{oder} \quad \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Zwei gerichtete Strecken von gleicher absoluter Länge können demnach nur dann einander gleich sein, wenn sie in derselben oder in parallelen Geraden liegen und gleichgerichtet sind.

Nimmt man auf g einen dritten Punkt C noch hinzu, so überzeugt man sich, wie auch C zu A und B liegen mag, leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \quad \text{oder} \quad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

2. Um den von zwei sich schneidenden Geraden (Strahlen) a und b gebildeten Winkel unzweideutig bestimmen zu können, setzt man zunächst für jede Gerade die positive Richtung und ferner für die Ebene ab den positiven Drehsinn willkürlich fest. Dann soll $\sphericalangle ab$

den Winkel bezeichnen, um den man den Strahl a in positivem Sinne um $0 = a \times b$ drehen muß, bis er mit dem Strahle b so zusammenfällt, daß sich auch die positiven Richtungen decken. Die Figuren 2 veranschaulichen die verschiedenen Möglichkeiten; die den Kreisbögen an-

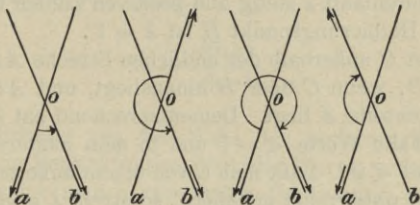


Fig. 2.

gefügte Pfeilspitze gibt den positiven Drehsinn und zugleich $\sphericalangle ab$ an. Für jede mögliche Annahme aber gilt stets

$$\sphericalangle ab + \sphericalangle ba = 360^\circ$$

und mithin

$$\sin ab = -\sin ba.$$

Das Abstandsverhältnis.

3. Das Verhältnis zweier gerichteter Strecken derselben Geraden g ist nach § 1 eine positive oder negative Zahl, je nachdem beide Strecken gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Im besonderen ist das Abstandsverhältnis

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda$$

eines Punktes C von den Endpunkten einer

Strecke AB eine positive Zahl, wenn C ein innerer, d. h. zwischen A und B gelegener Punkt ist (z. B. Fig. 1, rechts), dagegen eine negative Zahl, wenn C ein äußerer Punkt ist (z. B. Fig. 1, links).

Läßt man nun C die ganze unendliche Gerade g durchlaufen, so nimmt λ alle Zahlenwerte von $-\infty$ bis $+\infty$ an. Fällt nämlich C mit A zusammen, so ist λ gleich Null; durchläuft dann C die Strecke von A nach B , so wächst AC , während CB abnimmt, und folglich durchläuft λ stetig alle positiven Zahlen bis $+\infty$. Für den Halbierungspunkt H ist $\lambda = 1$.

Liegt C außerhalb der endlichen Strecke AB , so ist $AC > CB$, wenn C über B hinausliegt, und $AC < CB$, wenn C jenseits A liegt. Dementsprechend hat λ in dem ersteren Falle Werte < -1 und in dem letzteren solche > -1 und < 0 . Läßt man C von einem äußeren Punkte her sich B unbegrenzt annähern, so strebt λ gegen $-\infty$. Wenn aber C unendlich fern liegt, sei es auf der Seite von A oder auf der von B , so ist

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{CB}}{\overline{CB}} = -1,$$

da AB endlich, CB unendlich groß, also $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = 0$ ist.

Bedient man sich der Ausdrucksweise, daß jede Gerade nur einen unendlich fernen Punkt besitzt — einer Ausdrucksweise, deren Zweckmäßigkeit sich fortwährend zeigen wird —, so entspricht auf einer Geraden g , nach Wahl der beiden Punkte A und B , jedem beliebigen Punkte C ein bestimmtes Abstandsverhältnis $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda$, und umgekehrt jedem Werte von λ ein bestimmter Punkt C ; nur dem Punkte B entsprechen die uneigentlichen Zahlen $+\infty$ und $-\infty$.

4. In ganz ähnlicher Weise bestimmt man die Lage eines durch den Schnittpunkt O zweier Strahlen a und b gehenden dritten Strahles c durch das Abstandsverhältnis λ eines beliebigen seiner Punkte P von a und b . Der Wert dieses Abstandsverhältnisses ist, wie leicht ersichtlich, für alle Punkte von c gleich

$$\lambda = \frac{\sin ac}{\sin cb}$$

und unabhängig von der Wahl der positiven Richtung von c . Die Betrachtungen über die Werte, welche λ annimmt, wenn man c eine halbe Umdrehung ausführen

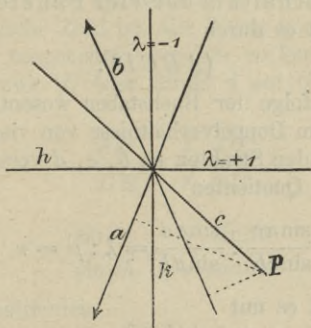


Fig. 3.

läßt, sind dieselben wie in § 3, und der an seinem Schlusse ausgesprochene Satz läßt sich wörtlich auf Strahlen übertragen. Der Wert $\lambda = 1$ entspricht dem Halbierungsstrahle h des Winkels ab , der Wert $\lambda = -1$ dem Halbierungsstrahle k seines Nebenwinkels (Fig. 3).

Das Doppelverhältnis.

5. Nimmt man zu dem Punkte C , der die Strecke AB in dem Verhältnisse $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda$ teilt, noch einen vierten Punkt D (vgl. Fig. 4) hinzu, der dieselbe Strecke in dem Verhältnisse $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \mu$ teilt, so nennt man den Quotienten dieser beiden Abstandsverhältnisse

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \lambda : \mu = \nu$$

das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D und bezeichnet es durch

$$(A B C D),$$

wo die Reihenfolge der Buchstaben wesentlich ist*).

Unter dem Doppelverhältnisse von vier durch einen Punkt O gehenden Strahlen a, b, c, d versteht man entsprechend den Quotienten

$$\frac{\sin ac}{\sin cb} : \frac{\sin ad}{\sin db} = \lambda : \mu = \nu$$

und bezeichnet es mit

$$(a b c d).$$

Wie man sich leicht überzeugt, bleibt der Wert von $(a b c d)$ ungeändert, wenn man als positive Richtung

*) Zur Bildung des Doppelverhältnisses aus dem Symbole

$(A B C D)$ merke man sich das Schema $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \vee & \vee & \vee & \vee \\ \hline A & B & C & D \\ \hline \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \\ \hline \end{array}$.

eines oder mehrerer Strahlen die der gewählten entgegengesetzte Richtung nimmt.

Wählt man

drei $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte } A, B, C \text{ auf einer Geraden } g \\ \text{Strahlen } a, b, c \text{ durch einen Punkt } O \end{array} \right\}$ fest, so

gehört jedem beliebigen vierten $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte } D \\ \text{Strahle } d \end{array} \right\}$ ein

bestimmter Wert ν des Doppelverhältnisses zu, und umgekehrt entspricht jedem Werte von ν ein

und nur ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt } D \text{ auf } g \\ \text{Strahl } d \text{ durch } O \end{array} \right\}$. Denn durchläuft der

Punkt D die Gerade g , bzw. dreht sich der Strahl d um O , so nimmt μ und folglich auch — aber in anderer

Reihenfolge — der Quotient $\lambda : \mu = \nu$, da λ eine bestimmte endliche Zahl ist, alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$

an. Ist aber umgekehrt ν gegeben, so kann man den zugehörigen Punkt D oder Strahl d auf Grund der Gleichung

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{1}{\nu} \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},$$

bzw.

$$\frac{\sin ad}{\sin db} = \frac{1}{\nu} \frac{\sin ac}{\sin cb}$$

eindeutig bestimmen.

6. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, daß der Wert ν des Doppelverhältnisses gleich -1 ist. Vier Punkte oder Strahlen, deren Doppelverhältnis den Wert -1 besitzt, nennt man harmonische Punkte bzw. harmonische Strahlen.

Da aus $\nu = -1$ folgt, daß $\mu = -\lambda$ ist, also die Abstandsverhältnisse der Punkte C, D (Strahlen c, d) von den Punkten A, B (Strahlen a, b) einander entgegen-

gesetzt gleich sind, so muß einer der Punkte C und D zwischen A und B , der andere außerhalb liegen, bzw. der eine der beiden Strahlen c und d den $\sphericalangle ab$, der andere seinen Nebenwinkel teilen.

Ist λ z. B. > 0 , so teilt der Punkt C die Strecke AB innerlich, der Punkt D die Strecke AB äußerlich in demselben absoluten Verhältnisse. Da aber

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} = (CDAB)$$

ist, so teilen auch die Punkte A und B die Strecke CD harmonisch, d. h. so, daß

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$$

ist.

Vier harmonische Punkte gruppieren sich also in zwei Paare getrennter Punkte. Die Punkte jedes Paares bezeichnet man als zueinander konjugierte Punkte (A und B ; C und D); die Punkte des einen Paares konjugierter Punkte liegen durch die Punkte des anderen Paares harmonisch getrennt.

Ist besonders $\lambda = 1$, so ist $\mu = -1$, d. h. es ergibt sich (vgl. § 3) der Satz: Zu dem Halbierungspunkte einer Strecke gehört als konjugierter harmonischer Punkt der unendlich ferne Punkt der durch die Strecke bestimmten Geraden.

Für vier harmonische Strahlen findet man auf gleiche Weise, daß die Strahlen des einen Paares konjugierter Strahlen den von den Strahlen des anderen Paares bestimmten Winkel und seinen Nebenwinkel harmonisch, d. h. in demselben absoluten Abstandsverhältnisse, teilen.

Für $\lambda = 1$ halbiert der Strahl c den Winkel ab und der Strahl d den Nebenwinkel, und folglich erhält man den Satz:

Halbiert von vier harmonischen Strahlen ein Strahl den von seinen beiden benachbarten gebildeten Winkel, so steht der konjugierte Strahl auf ihm senkrecht und umgekehrt (vgl. Fig. 3, wo die Strahlen $a, b; h, k$ vier derartige harmonische Strahlen sind).

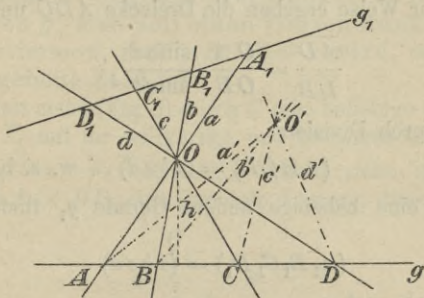


Fig. 4.

7. Für die Doppelverhältnisse von vier Strahlen und von ihren vier Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden gilt der folgende wichtige Satz:

Vier durch einen Punkt O gehende Strahlen a, b, c, d schneiden eine beliebige Gerade g in vier Punkten A, B, C, D so, daß das Doppelverhältnis der vier Strahlen gleich dem der vier Punkte ist.

Beweis. (Fig. 4.) Bezeichnet h den senkrechten Abstand des Punktes O von g , so erhält man, indem man die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke ACO

und CBO in zweifacher Weise ausdrückt, die auch dem Vorzeichen nach richtige Gleichung

$$\frac{\overline{AC} \cdot h}{\overline{CB} \cdot h} = \frac{OA \cdot OC \cdot \sin ac}{OC \cdot OB \cdot \sin cb}$$

oder

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin ac}{\sin cb}.$$

In gleicher Weise ergeben die Dreiecke ADO und DBO

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin ad}{\sin db},$$

folglich durch Division

$$(1) \quad (ABCD) = (abcd), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Für eine beliebige andere Gerade g_1 findet man ebenso

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (abcd)$$

und folglich auch

$$(2) \quad (ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1),$$

d. h. projiziert man vier beliebige Punkte einer Geraden g von einem nicht auf ihr gelegenen Punkte O aus auf irgend eine andere Gerade in der durch O und g bestimmten Ebene, so haben die Projektionen der Punkte das gleiche Doppelverhältnis wie die Punkte selbst.

Verbindet man andererseits A, B, C, D mit einem Punkte O' durch die Strahlen a', b', c', d' , so ist auch

$$(ABCD) = (a'b'c'd')$$

und folglich

$$(3) \quad (abcd) = (a'b'c'd'),$$

d. h. schneiden sich vier von einem Punkte ausgehende Strahlen mit vier von einem anderen Punkte ausgehenden Strahlen so, daß die Schnittpunkte entsprechender Strahlen ($a \times a', \dots$) auf einer Geraden liegen, so ist das Doppelverhältnis der ersten vier Strahlen gleich dem der zweiten.

8. Die Sätze des vorigen Paragraphen geben sofort auch die Lösung der folgenden

Aufgabe. Gegeben drei Punkte A, B, C einer Geraden g ; man soll einen vierten Punkt D auf g so bestimmen, daß $(ABCD) = \nu$ wird, wo ν eine vorgegebene Zahl ist.

Man ziehe (Fig. 5) durch C eine beliebige Gerade g_1 , wähle B_1 auf ihr willkürlich und bestimme dann A_1 so, daß $\overline{A_1C} = -\nu \cdot \overline{CB_1}$ ist*). Darauf ziehe man durch $O = AA_1 \times BB_1$ eine Parallele d zu g_1 ; diese schneidet

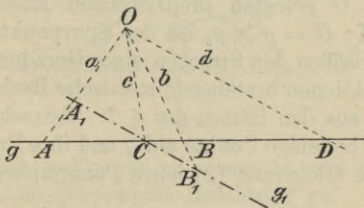


Fig. 5.

g in dem gesuchten Punkte D . Denn wenn D_1 den unendlich fernen Punkt von g_1 bezeichnet, so ist $\overline{A_1D_1} : \overline{D_1B_1} = -1$, und da nach Konstruktion $\overline{A_1C_1} : \overline{C_1B_1} = -\nu$ ist, so ist $(A_1 B_1 C_1 D_1) = \nu$, und folglich nach § 8 (2)

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = \nu.$$

*) Figur 5 entspricht der Annahme eines negativen Wertes für ν .

Diese Lösung ist für jeden Wert von ν brauchbar, gleichgültig ob C ein innerer oder äußerer Punkt der Strecke AB ist.

Die entsprechende Aufgabe für Strahlen von einem Punkte S aus führt man am einfachsten auf die soeben gelöste zurück, indem man die drei gegebenen Strahlen a, b, c mit einer beliebigen Geraden g in A, B, C schneidet und zu ihnen den Punkt D so bestimmt, daß $(ABCD) = \nu$ ist; $SD = d$ ist dann der gesuchte vierte Strahl.

Perspektive von Geraden.

9. Die Zentralprojektionen oder perspektiven Bilder aller Punkte einer Geraden g auf eine Ebene Π (Bildebene) liegen [vgl. I, 4*)] auf der Projektion g_e der Geraden; die Bildgerade g_e ist die Schnittgerade der durch g und das Projektionszentrum oder Zentrum der Perspektive O gelegten projizierenden Ebene mit der Bildebene Π ; $G = g \times g_e$ ist der Spurpunkt von g .

Die zwischen den Strecken einer Geraden und ihren Zentralprojektionen bestehende metrische Beziehung folgt unmittelbar aus den Sätzen des § 7. Betrachtet man in Figur 6 vier beliebige Punkte auf g und ihre Projektionen, so liefert die Gleichung (2) jenes Paragraphen

$$(ABCD) = (A_e B_e C_e D_e),$$

d. h. die Doppelverhältnisse von vier Punkten einer Geraden und von ihren Zentralprojektionen auf eine beliebige Ebene sind einander gleich.

*) In dieser Weise werden kurz die Paragraphen des ersten Bändchens zitiert.

Ist $g \parallel \Pi$, so ist $g_c \parallel g$ und dann geht der vorstehende Satz in den einfacheren über: Zur Projektionsebene parallele Strecken verhalten sich wie ihre Projektionen.

Rückt O in das Unendliche, so werden alle Projektionsstrahlen AA_c, BB_c, \dots einander parallel, die Dreiecke $AG A_c, BG B_c, \dots$ einander ähnlich, und man erhält den eben ausgesprochenen speziellen Satz für beliebig gerichtete Strecken (I, 9).

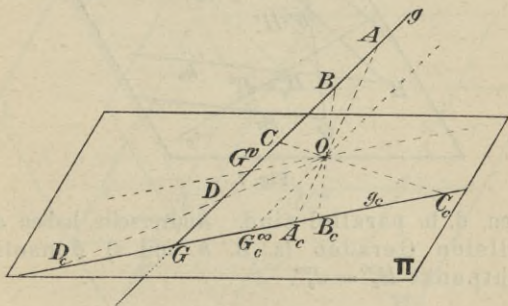


Fig. 6.

10. Einem Punkte auf g sowohl, wie einem auf g_c kommt eine ausgezeichnete Bedeutung zu.

Zieht man durch O den Projektionsstrahl, welcher parallel zu g_c ist, so verschwindet die Projektion des Punktes G^v , in welchem er g schneidet, im Unendlichen. Man nennt daher G^v den Verschwindungspunkt der Geraden g . Der g parallel gerichtete Projektionsstrahl dagegen schneidet g_c in dem Punkte G_c^∞ , welcher als Projektion eines auf g — gleichgültig nach der einen oder andern Seite — in das Unendliche entflohenen Punktes aufzufassen ist; er heißt der zu g gehörende Fluchtpunkt.

Aus dem Vorstehenden folgt sofort weiter (Fig. 7), daß die perspektiven Bilder aller Geraden, welche den Verschwindungspunkt gemeinsam haben (z. B. g und h), sich im Unendlichen schneiden

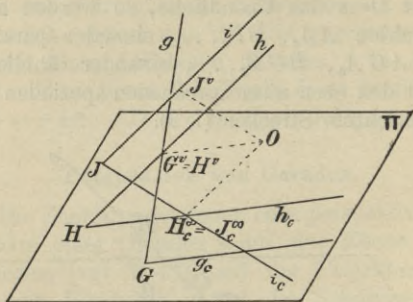


Fig. 7.

müssen, d. h. parallel sind. Andererseits haben alle parallelen Geraden (z. B. h und i) denselben Fluchtpunkt $H_c^\infty = J_c^\infty$.

Perspektive ebener Figuren.

11. Bei der Zentralprojektion einer nicht durch O gehenden Ebene E auf die Ebene Π erhält man in gleicher Weise zwei ausgezeichnete Gerade e^v und e_c^∞ .

Legt man (Fig. 8) durch O zwei projizierende Ebenen, die eine parallel zu Π , die andere parallel zu E , so schneidet die erstere die Ebene E in der Verschwindungslinie e^v , die letztere die Ebene Π in der zu E gehörenden Fluchtlinie e_c^∞ . Alle Punkte der Ebene E , deren Projektionen in das Unendliche fallen, müssen auf e^v liegen; umgekehrt projizieren sich alle unendlich fernen Punkte von E in die Punkte von e_c^∞ . Die beiden

Geraden e^v und e_c^∞ sind untereinander und zu der Spurlinie e von E in Π parallel.

Legt man noch durch O eine Ebene $\perp e$, welche E in der Falllinie u schneidet, so erkennt man sofort, daß

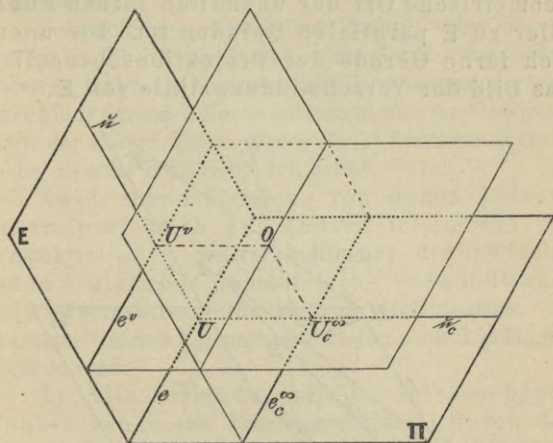


Fig. 8.

der senkrechte Abstand des Zentrums O von der Verschwindungslinie (bzw. Fluchtlinie) gleich dem senkrechten Abstände der Spurlinie von der Fluchtlinie (bzw. Verschwindungslinie), also $OU^v = U_c^\infty U$, $OU_c^\infty = U^v U$ ist.

12. Da sich die unendlich fernen Punkte aller Parallelen in denselben Punkt, ferner alle unendlich fernen Punkte von E in eine einzige Gerade projizieren, und da alle zu E parallelen Ebenen dieselbe Fluchtlinie e_c^∞ besitzen, so sagt man, die in § 3 eingeführte Ausdrucksweise in folgerichtiger Weise weiterbildend:

Parallele Gerade besitzen denselben unendlich fernen Punkt. Jede Ebene E besitzt nur eine unendlich ferne Gerade, die sie mit allen parallelen Ebenen gemeinsam hat und die der geometrische Ort der unendlich fernen Punkte aller zu E parallelen Geraden ist. Die unendlich ferne Gerade der Projektionsebene Π ist das Bild der Verschwindungslinie von E .

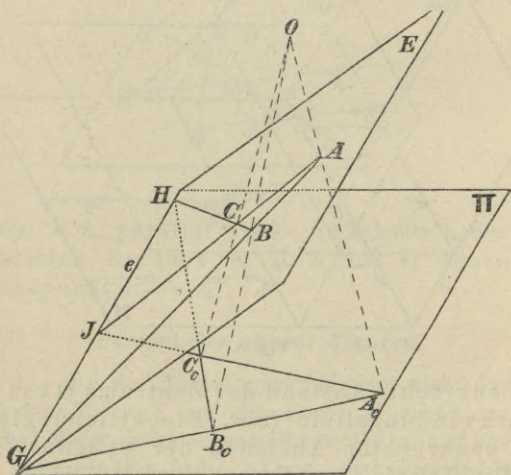


Fig. 9.

13. Projiziert man (Fig. 9) das in der Ebene E gelegene Dreieck ABC auf die Ebene Π , so erhält man — falls, wie vorausgesetzt wird, O nicht in E liegt — wieder ein Dreieck $A_c B_c C_c$. Jede Seite und ihre Projektion müssen sich in der Spur e der Ebene E schneiden,

z. B. AB und $A_c B_c$ in G . Umgekehrt kann man aber auch ABC als Zentralprojektion des Dreiecks $A_c B_c C_c$ ansehen. Dann hat e_c^∞ die Bedeutung der Verschwindungslinie und e^v die der Fluchtlinie für die Ebene Π als Originalebene.

Demnach entspricht jedem Punkte, jeder Geraden der einen Ebene ein Punkt, eine Gerade der andern Ebene so, daß beide Zentralprojektionen voneinander sind; jeder Figur der einen Ebene entspricht also eine bestimmte Figur der andern Ebene. Jeder Punkt der Schnittgeraden beider Ebenen entspricht sich selbst.

Zwei ebene Figuren, von denen jede die Zentralprojektion der andern ist, nennt man **perspektiv** oder **zentral-kollinear**; die zwischen ihnen bestehende geometrische Verwandtschaft heißt **Perspektive** oder **zentrale Kollineation**. Die charakteristischen Eigenschaften zweier zentral kollinear Figuren sind:

1) Alle Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen (als Projektionsstrahlen) durch denselben Punkt; sie heißen auch Perspektivitäts- oder Kollineationsstrahlen, das Projektionszentrum auch Zentrum der Perspektive oder Kollineationszentrum.

2) Die Schnittpunkte je zweier entsprechender Geraden liegen in einer Geraden, der Schnittlinie der Ebenen beider Figuren, welche Achse der Perspektive oder Kollineationsachse heißt (vgl. auch I, 11).

Ist im besonderen eine Gerade der Achse der Perspektive parallel, so ist es auch die ihr entsprechende Gerade und es gilt für beide der spezielle Satz des § 9.

14. Die Perspektive umfaßt als spezielle Fälle:

1) Die perspektive Ähnlichkeit oder Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage, bei welcher die Kollinationsachse im Unendlichen liegt und daher die beiden Ebenen einander parallel sind. Man erkennt leicht, daß in diesem besonderen Fall die Originalfigur und ihr Bild einander ähnlich sind.

2) Die perspektive Affinität, bei welcher das Zentrum O unendlich fern liegt und daher die Projektionsstrahlen einander parallel sind (I, 11).

Die perspektive Symmetrie ergibt sich als besonderer Fall von (1), wenn das Kollinationszentrum in der Mitte zwischen der Bild- und der Originalebene liegt. Die affine Symmetrie und die Kongruenz sind als besondere Fälle von (2) bereits in I, 11 besprochen; die Kongruenz kann auch noch als besonderer Fall von (1) aufgefaßt werden.

15. Zwei perspektive Figuren bleiben zueinander perspektiv, wenn die Ebene E der einen um die Achse e in eine beliebige neue Lage gedreht wird. Das Zentrum dreht sich hierbei um die Fluchtlinie e_c^∞ von E um denselben Winkel und in derselben Richtung, wie E um die Achse e .

Beweis. (Fig. 10.) Die Ebene E ist um e in die neue Lage E_A gedreht, wodurch die Figur $AB\dots$ in die neue Lage $A_A B_A \dots$ gekommen ist*). Zieht man nun eine beliebige Gerade in E und die ihr entsprechenden in E_A und Π , z. B. AB , $A_A B_A$ und $A_c B$, welche sich in G auf e schneiden, und bezeichnet die unendlich

*) Wegen der besseren Übersichtlichkeit sind in der Figur nur die Punkte A , B ; A_A , B_A ; A_c , B_c gezeichnet.

fernen Punkte der Geraden GA , GA_A , GA_c mit G^∞ , G_A^∞ , G_c^∞ , so ist nach Voraussetzung

$$(G G^\infty AB) = (G G_c^\infty A_c B_c).$$

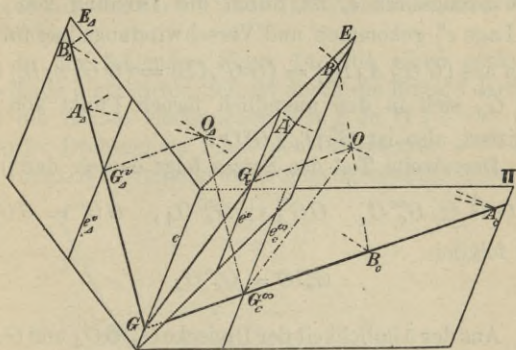


Fig. 10.

Da infolge der Drehung von E in die Lage E_A die Punkte A , B , G^∞ affin den Punkten A_A , B_A , G_A^∞ entsprechen, so ist

$$(G G^\infty AB) = (G G_A^\infty A_A B_A)$$

und folglich auch

$$(G G_A^\infty A_A B_A) = (G G_c^\infty A_c B_c).$$

Die Strahlen $A_A A_c$, $B_A B_c$ und die Parallele zu GA_A durch den Punkt G_c^∞ müssen sich also nach der Umkehrung des zweiten Satzes*) in § 7 in

*) Diese Umkehrung lautet: „Sind die Punkte zweier Geraden g und g_1 einander so zugeordnet, daß für drei beliebige Punkte A , B , C auf g und ihre entsprechenden Punkte A_1 , B_1 , C_1 auf g_1 stets $(G ABC) = (G A_1 B_1 C_1)$ ist, wo $G = g \times g_1$, so gehen die Verbindungslinien ent-

einem Punkte O_A , dem Projektionszentrum für E_A und Π , schneiden, und folglich ist auch die gedrehte Figur $A_A B_A \dots$ perspektiv zu $A_c B_c \dots$. Die Verschwindungslinie e_v ist durch die Drehung von E in die Lage e_A^v gekommen und Verschwindungslinie für E_A ; denn aus $(G G_A^v A_A B_A) = (G G^v A B) = (G G_c^v A_c B_c)$ folgt, daß G_A^v sich in den unendlich fernen Punkt von $G A_c$ projiziert, also ist $G_A^v O_A \parallel G^v O$.

Der zweite Teil des Satzes folgt daraus, daß*)

$$G G^v \# G_c^\infty O, \quad G G_A^v \# G_c^\infty O_A, \quad G G^v = G G_A^v$$

und folglich

$$G_c^\infty O = G_c^\infty O_A$$

ist.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $G_c^\infty O O_A$ und $G A A_A$ folgt noch, daß $O O_A \parallel A A_A$ ist; die Verbindungslinie der beiden Zentren O und O_A ist also den Sehnen der Kreisbögen parallel, die die Punkte von E bei der Drehung in die Lage E_A beschreiben.

16. Der Satz gilt augenscheinlich noch, wenn die Ebene E in der einen oder der andern Richtung so weit gedreht wird, bis sie mit der Ebene Π zusammenfällt. Folglich:

Die Zentralprojektion einer ebenen Figur ist zu der in die Projektionsebene umgelegten

sprechender Punkte von g und g_1 durch denselben Punkt.“ Man bestimme $O = A A_1 \times B B_1$ und verbinde O mit C und C_1 . Angenommen, OC falle nicht mit OC_1 zusammen, sondern schneide g_1 in C' . Dann ist nach § 7 (2) $(G A B C) = (G A_1 B_1 C')$ und wegen der Voraussetzung auch $(G A_1 B_1 C_1) = (G A_1 B_1 C')$, was unmöglich ist nach § 3, wenn C' nicht mit C_1 zusammenfällt.

*) # bedeutet parallel und gleich.

Originalfigur perspektiv. Die Schnittgerade beider Ebenen ist die Achse, und das um die Fluchtlinie e_c^∞ in gleicher Richtung umgelegte Projektionszentrum ist das Zentrum der Perspektive.

In der folgenden Figur 11, die einen senkrecht zu e längs Π geführten Schnitt durch die Figur 8 darstellt, sind die beiden Umlegungen von E in Π [— · — · und Index θ : Drehung im Sinne des Uhrzeigers, — · · — · · und Index Δ : Drehung im entgegengesetzten Sinne] aus-

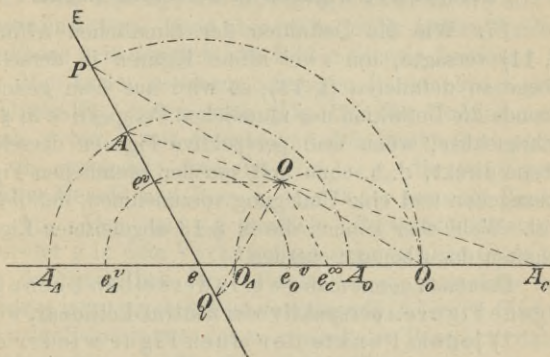


Fig. 11.

geführt. Der Abstand der umgelegten Verschwindungslinie von der Achse ist gleich dem Abstände des umgelegten Zentrums von der Fluchtlinie. Je nach der Richtung, in der die Umlegung geschieht, liegen Verschwindungslinie und Fluchtlinie zwischen der Achse und dem Zentrum, oder die beiden letzteren liegen zwischen den ersteren.

Man erkennt leicht, daß — von einem Falle abgesehen — ein umgelegter Punkt nicht mit seiner

Zentralprojektion, z. B. A_A , bzw. A_0 nicht mit A_e zusammenfallen kann. Da $OO_0 \parallel AA_0$ ist (§ 15), so fällt jedoch der Punkt P , in dem OO_0 die Ebene E trifft, nach der Umlegung mit seinem Bildpunkte P_e und mit O_0 zusammen; desgleichen bei der Umlegung in dem entgegengesetzten Sinne $Q = OO_A \times E$ mit O_A . Nach erfolgter Umlegung von E in Π ist also außer den Punkten der Achse der Perspektive nur das Zentrum der Perspektive ein sich selbst entsprechender Punkt.

Perspektive Figuren in derselben Ebene.

17. Wie die Definition der räumlichen Affinität (I, 11) versagte, um zwei affine Figuren in derselben Ebene zu definieren (I, 13), so wird aus dem gleichen Grunde die Definition der räumlichen Perspektive in § 13 unbrauchbar, wenn man perspektive Figuren derselben Ebene direkt, d. h. ohne erst von der räumlichen Figur auszugehen und eine Umlegung vorzunehmen, definieren will. Wohl aber können die in § 13 abgeleiteten Eigenschaften dazu benutzt werden.

Demnach nennt man zwei in derselben Ebene gelegene Figuren **perspektiv** oder **zentral-kollinear**, wenn

1) jedem Punkte der einen Figur wieder ein Punkt der andern, jeder Geraden wieder eine Gerade entspricht,

2) alle Verbindungslinien entsprechender Punkte (Perspektivitäts- oder Kollineationsstrahlen) durch denselben Punkt (Zentrum der Perspektive oder Kollineationszentrum) gehen und

3) die Schnittpunkte je zweier entsprechender Geraden in einer Geraden (der Achse der Perspektive oder Kollineationsachse) liegen.

Hieraus folgt, daß jeder Punkt der Achse der Perspektivität und ebenso jede durch ihr Zentrum gehende Gerade sich selbst entsprechen. Nach § 7 (2) haben auch vier Punkte und die ihnen perspektiv entsprechenden dasselbe Doppelverhältnis. Für zur Achse parallele Strecken gilt wieder der spezielle Satz des § 9.

Um auf Grund dieser Definition zu einer Figur die perspektive zu konstruieren, kann man noch gewisse Elemente willkürlich wählen, z. B. die Achse e , das Zentrum O und zwei einander entsprechende Punkte A und A_0 , die nur in gerader Linie mit O liegen müssen. Dann aber ist zu jedem andern Punkte der Ebene sein perspektives Bild eindeutig bestimmt.

Man findet zu einem beliebigen Punkte B den perspektiven B_0 , indem man (Fig. 12) die Verbindungsgerade g von A mit B zieht und den Punkt $G = g \times e$ mit A_0 verbindet; dann ist $GA_0 = g_0$ die zu g perspektive Gerade und $B_0 = g_0 \times BO$ der gesuchte Punkt.

18. Der zu g_0 parallele Perspektivitätsstrahl schneidet g in dem Verschwindungspunkte G_v , dem also der unendlich ferne Punkt von g_0 perspektiv zugeordnet ist; umgekehrt ist dem unendlich fernen Punkte von g der Schnittpunkt des zu g parallelen Perspektivitätsstrahles mit g_0 als Fluchtpunkt G_0^∞ zugeordnet.

Zieht man durch G_v und G_0^∞ die Parallelen e^v und e_0^∞ zu e und durch O, A, A_0 die Senkrechten zu e , so erhält man die beiden Paare ähnlicher Dreiecke A_0LG, OF^vG^v und $AKG, OF_0^\infty G_0^\infty$, mithin

$$A_0L : OF^v = A_0G : OG^v, \quad AK : OF_0^\infty = AG : OG_0^\infty.$$

Nun sind weiter die Dreiecke $AA_0G, AOG^v, OA_0G_0^\infty$ einander ähnlich, daher

$$A_0G : OG^v = AA_0 : AO, \quad AG : OG_0^\infty = AA_0 : A_0O,$$

und schließlich mit Hilfe der ersten Proportionen

$$OF^v = \frac{AO}{AA_0} \cdot A_0L, \quad OF_0^\infty = \frac{A_0O}{AA_0} \cdot AK.$$

Die Längen der Strecken auf der rechten Seite hängen nur von den Konstanten der Perspektive (e, O, A, A_0), nicht von der besonderen Wahl der durch A gezogenen

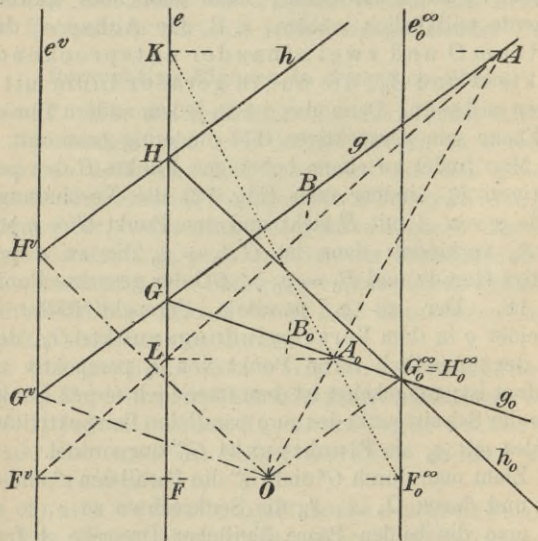


Fig. 12.

Geraden g ab. OF^v und OF_0^∞ sind daher für alle durch A gehenden Geraden g konstant. Wiederholt man nun die ganze Konstruktion für eine beliebige andere durch A gehende Gerade, so müssen demnach die durch

ihren Verschwindungs- und Fluchtpunkt gezogenen Parallelen zu e mit e^v und e_0^∞ zusammenfallen.

Zieht man ferner eine Parallele h zu g , so gehört zu beiden, da sie denselben unendlich fernen Punkt besitzen, derselbe Fluchtpunkt G_0^∞ . Die Dreiecke $G_0^\infty GH$ und $OG^v H^v$ sind aber kongruent ($\sphericalangle G = \sphericalangle G^v$, $G_0^\infty G \parallel OG^v$, $GH \parallel G^v H^v$); folglich ist auch $G_0^\infty H \parallel OH^v$, d. h. H^v ist der Verschwindungspunkt von h .

Daher sind e^v und e_0^∞ die geometrischen Orte der Verschwindungs- und Fluchtpunkte aller Geraden der Ebene und heißen deshalb auch Verschwindungs- und Fluchtlinie. Es kommen ihnen alle Eigenschaften zu, die die gleichnamigen Linien bei der Perspektive zweier verschiedener Ebenen besitzen. Insbesondere folgt auch, da $OG_0^\infty \parallel G^v G$ ist, daß $OF_0^\infty = F^v F$ ist, d. h. (wie in § 16)

$$\text{Abst. } (O, e_0^\infty) = \text{Abst. } (e^v, e),$$

und daß entweder e^v und e_0^∞ zwischen O und e oder umgekehrt liegen.

19. Der Punkt F_0^∞ ist der Fluchtpunkt aller zu e senkrechten Geraden. Man kann mithin, wenn e^v und e_0^∞ bestimmt sind, den zu A perspektiven Punkt (vgl. Fig. 12) in bequemer Weise auch dadurch bestimmen, daß man von A das Lot auf e fällt, seinen Fußpunkt K mit F_0^∞ verbindet; diese Verbindungslinie, die die perspektive Gerade zu dem Lote von A ist, schneidet OA in dem gesuchten Punkte A_0 .

Hieraus erkennt man, daß zur Festlegung einer Perspektive in einer Ebene auch das Zentrum und zwei parallele Gerade als Achse und Verschwindungslinie oder als Achse und Fluchtlinie gegeben werden

können, wo diese Bestimmungsstücke nur die am Ende des vorigen Paragraphen angegebenen Bedingungen erfüllen müssen.

20. Dreht man (Fig. 13) die Ebene mit g und e^v um e in eine beliebige räumliche Lage E_A und bezeichnen

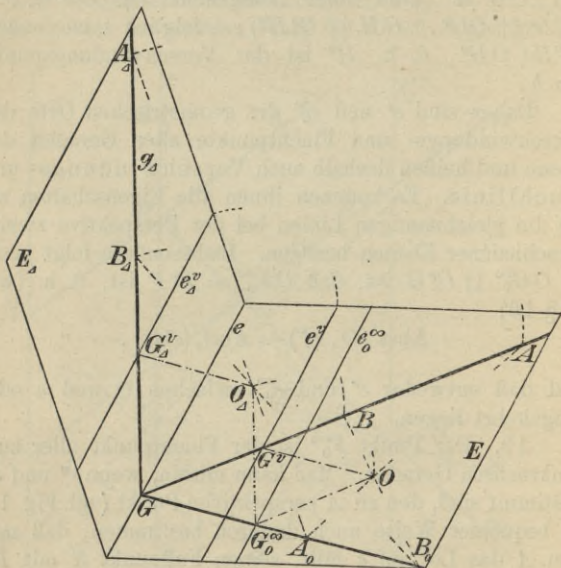


Fig. 13.

G^∞ , G_A^∞ , G_0^∞ die unendlich fernen Punkte von g , g_A , g_0 , so ist wegen der Drehung von g in g_A und der perspektiven Beziehung zwischen g und g_0

$$(G_A^v G A_A B_A) = (G^v G A B) = (G_0^\infty G A_0 B_0),$$

$$(G_A^\infty G A_A B_A) = (G^\infty G A B) = (G_0^\infty G A_0 B_0).$$

Folglich müssen sich (nach dem Satze in der Anmerkung auf S. 25) die Strahlen $A_A A_0$, $B_A B_0$, $G_A^e G_0^e \parallel g_0$, $G_A^\infty G_0^\infty \parallel g_A$ in demselben Punkte O_A schneiden. Mithin ist auch $GG_A^e = G_0^\infty O_A$, d. h. das neue Zentrum der Perspektive erhält man durch Drehung von O um e_0^∞ in demselben Sinne und um den gleichen Winkel, wie e^e um e gedreht ist.

Zwei perspektive Figuren in derselben Ebene werden daher durch jede beliebig große Drehung der einen Figur um die Achse stets in solche Lage gebracht, daß sie Zentralprojektionen voneinander sind. Die beiden Definitionen der Perspektive (§ 13 und § 17) sind also völlig gleichbedeutend.

Satz von Desargues.

21. Nach diesen Darlegungen kann man jeden Satz, der für perspektive Figuren des Raumes bewiesen ist, ohne weiteres auf perspektive Figuren in derselben Ebene übertragen. Oft kann man auf diese Weise wichtige Sätze für die Ebene aus sinnfälligen, räumlichen Beziehungen gewinnen. Als Beispiel hierfür diene der berühmte Satz von Desargues*):

Gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Dreiecke ABC und $A_0 B_0 C_0$ (Fig. 14) durch denselben Punkt O , so schneiden sich die entsprechenden Seiten beider Dreiecke auf einer Geraden e und umgekehrt.

*) **Desargues**, Gérard, geb. 1593 in Lyon, gest. 1661 oder 1662 ebenda. D. war zuerst Offizier und machte die Belagerung von La Rochelle mit; dann lebte er als Privatmann in Paris und auf seinem Landgute bei Condrieux. Der obige Satz ist bewiesen in dem von Bosse herausgegebenen Werk *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective*, Paris 1648.

Für den Raum (vgl. Fig. 9) ist der Satz selbstverständlich, wenn man ABC und $A_0B_0C_0$ als Schnitte der dreiseitigen Pyramide $OABC$ auffaßt. Denn entsprechende Seiten beider Dreiecke müssen sich auf $e = E \times \Pi$ schneiden, da sie in derselben dritten Ebene liegen. Folglich gilt der Satz auch für die Ebene.

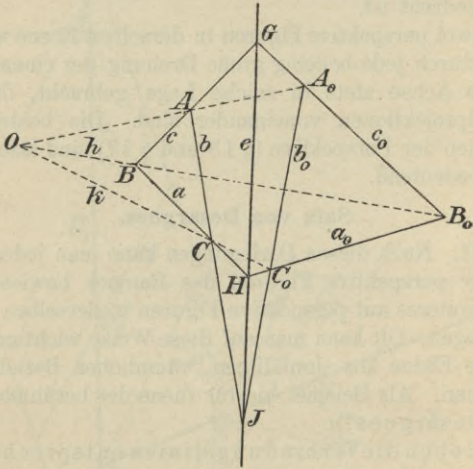


Fig. 14.

Liegt e unendlich fern, so erhält man den besonderen Fall ähnlicher und ähnlich gelegener Dreiecke.

Man kann diesen Satz benutzen, um eine Gerade durch einen gegebenen Punkt, z. B. A , nach dem Schnittpunkte zweier Geraden, z. B. h und k , zu ziehen, der entweder unzugänglich oder (wenn die Geraden unter sehr spitzem Winkel zusammentreffen) nur ungenau gegeben ist. Man schneide h und k

durch zwei beliebige Gerade a und a_0 in B, C und B_0, C_0 , verbinde B mit A durch c und ziehe c_0 durch B_0 willkürlich. Hierauf verbinde man $G = c \times c_0$ mit $H = a \times a_0$ und ziehe noch durch den Schnittpunkt J von AC mit GH die Gerade JC_0 , die c_0 in A_0 schneidet. Dann ist AA_0 die gesuchte Gerade. — Legt man keinen Wert darauf, das Ziehen von Parallelen zu vermeiden, was die eben gegebene Konstruktion tut, so ist es einfacher, e als die unendlich ferne Gerade anzunehmen, also $a_0 \parallel a$ (a beliebig) und dann $b_0 \parallel CA$, $c_0 \parallel AB$ zu ziehen, um $A_0 = b_0 \times c_0$ zu erhalten.



II. Abschnitt.

Harmonische Eigenschaften des Vierecks und des Kreises.

Perspektive Verwandlung eines beliebigen Vierecks in ein Rechteck.

22. Man bezeichnet vier Punkte A, B, C, D einer Ebene, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, und ihre sechs Verbindungslinien als Ecken und Seiten des vollständigen Vierecks $ABCD$. Je zwei

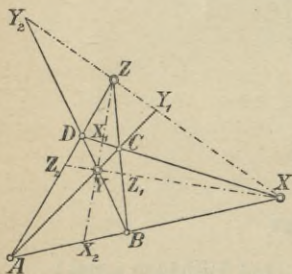


Fig. 15^a.

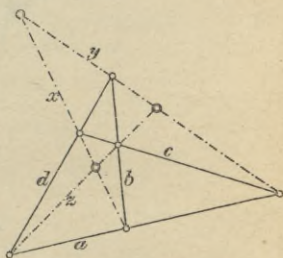


Fig. 15^b.

Seiten, die sich nicht in einer Ecke schneiden, nennt man Gegenseiten, deren es demnach drei Paare (Fig. 15^a) gibt: AB, CD ; AC, BD ; AD, BC . Die Schnittpunkte X, Y, Z dieser Gegenseitenpaare nennt man Diagonalepunkte des vollständigen Vierecks; sie bilden das Diagonaldreieck XYZ .

Als Seiten und Ecken eines vollständigen Vierseits bezeichnet man vier Gerade a, b, c, d einer Ebene (Fig. 15^b), von denen nicht drei durch einen Punkt gehen, und ihre sechs Schnittpunkte. Je zwei Ecken, die nicht auf derselben Seite liegen, heißen Gegenecken, deren es drei Paare gibt: $a \times b, c \times d$; $a \times c, b \times d$; $a \times d, b \times c$. Die Verbindungslinien x, y, z dieser Gegenecken heißen Diagonalen des vollständigen Vierseits; sie bilden das Diagonaldreieck xyz .

Für die Zwecke dieses Bändchens genügt es, die Betrachtungen für das vollständige Viereck durchzuführen. Durch die parallel durchgeführten Untersuchungen für das vollständige Viereck erhält man analoge Sätze über harmonische Strahlen, wie sie im folgenden für harmonische Punkte abgeleitet werden.

Bilden A, B, C, D die Ecken eines Parallelogramms (Fig. 16), so fallen die beiden Diagonalpunkte X und Z

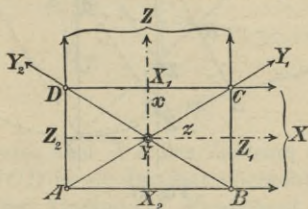


Fig. 16.

und die sie verbindende Seite des Diagonaldreiecks ins Unendliche. Der dritte Diagonalpunkt Y liegt im Schnittpunkte der beiden Diagonalen des Parallelogramms und die durch ihn gehenden Seiten x, z des Diagonaldreiecks sind den Seiten des Parallelogramms parallel.

23. Soll ein beliebiges Viereck $ABCD$ in ein perspektives Parallelogramm verwandelt werden, so braucht

man nur die Perspektive so zu wählen, daß die Schnittpunkte zweier Gegenseitenpaare, z. B. $AB \times CD = X$ und $AD \times BC = Z$ auf der Verschwindungslinie e^v liegen (Fig. 17). Wie man dann auch die Achse der Perspektive e ($\parallel e^v$) und das Zentrum O wählen mag, stets muß das zu $ABCD$ perspektive Viereck ein Parallelogramm sein (vgl. § 10). Wählt man O auf dem über

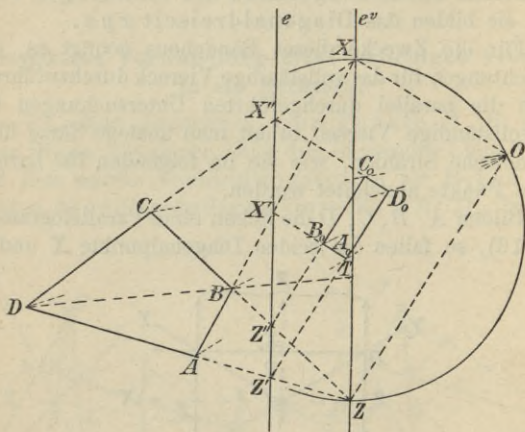


Fig. 17.

XZ als Durchmesser konstruierten Kreise, so wird $A_0 B_0 C_0 D_0$ ein Rechteck, da $OX \perp OZ$ ist und man die Seiten von $A_0 B_0 C_0 D_0$ erhält, indem man (nach § 18) durch die Schnittpunkte X' , X'' der Seiten AB und CD mit e Parallelen zu OX , durch die Schnittpunkte Z' , Z'' von AD und BC mit e Parallelen zu OZ zieht.

Schneidet die Diagonale BD die Verschwindungslinie e^v in T , so ist die Diagonale $B_0 D_0$ des Rechtecks $\parallel OT$.

Folglich wird das zu $ABCD$ perspektive Rechteck zum Quadrate, wenn noch $\sphericalangle XOT = \sphericalangle TOZ = 45^\circ$ ist. Konstruiert man also über XT oder TZ als Sehne einen Kreis, in dem über dieser Sehne der Peripheriewinkel 45° , d. h. der Zentriwinkel 90° steht, so ist sein Schnittpunkt

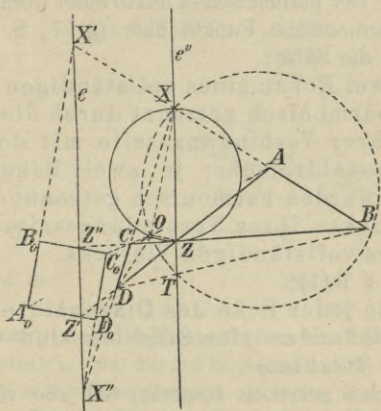


Fig. 18.

mit dem Kreise über XZ das Zentrum O (Fig. 18), für welches $ABCD$ in ein Quadrat übergeht, dessen Seitengröße von dem Abstände (e, e^v) abhängt und mit ihm beliebig verändert werden kann.

Harmonische Eigenschaften des Vierecks.

24. Da also jedes Viereck in ein perspektives Rechteck übergeführt werden kann, so kommen jedem beliebigen Vierecke die harmonischen Eigenschaften des Rechtecks zu. Nun halbieren im Rechtecke die beiden im Endlichen gelegenen Seiten seines Diagonaldreiecks,

die sich im Mittelpunkte Y des Rechtecks schneiden, die Seiten des Rechtecks; die Ecken irgend einer Seite, ihr Halbierungspunkt und ihr unendlich ferner Punkt bilden vier harmonische Punkte (§ 6, S. 14). Bei der perspektiven Verwandlung einer Figur in eine andere gehen aber vier harmonische Punkte einer Geraden wieder in vier harmonische Punkte über (§ 17, S. 29). Man erhält also die Sätze:

Je zwei Ecken eines vollständigen Vierecks werden harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungsseite mit den Seiten des Diagonaldreiecks; je zwei Ecken dieses letzteren werden harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungsseite mit den Seiten des vollständigen Vierecks.

Nach § 7 (1):

Die in jeder Ecke des Diagonaldreiecks zusammenstoßenden vier Strahlen sind vier harmonische Strahlen.

Nebenbei sei noch bemerkt, daß die vier Punkte $X_1 Z_1 X_2 Z_2$ (Fig. 15^a) ein zweites vollständiges Viereck bestimmen, dessen Diagonaldreieck $Y Y_1 Y_2$ ist. Dies erkennt man leicht aus Figur 16, da dort $X_1 Z_2 \parallel X_2 Z_1 \parallel AC$ und $X_1 Z_1 \parallel X_2 Z_2 \parallel BD$ ist. Zieht man in der Figur 15^a noch diese Linien, so treffen in jedem Punkte, mit Ausnahme der Ecken A, B, C, D , vier harmonische Strahlen zusammen.

25. Die obigen Sätze kann man benutzen, um eine Strecke AB harmonisch zu teilen, wenn einer der Teilpunkte, z. B. X , gegeben ist (Fig. 19). Nimmt man dann Z willkürlich an und zieht durch X eine beliebige Gerade, deren Schnittpunkte C und D mit ZA und ZB im Verein mit A und B ein

Viereck bestimmen; verbindet man schließlich Z mit $Y = AC \times BD$, so erhält man den gesuchten Punkt als Schnittpunkt X_2 von ZY mit AB . — Das Bemerkenswerte an dieser Lösung ist, daß sie nur die Benutzung des Lineals, nicht auch des Zirkels erfordert.

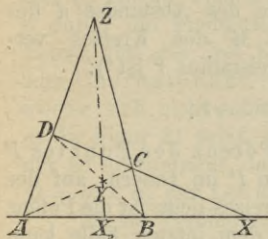


Fig. 19.

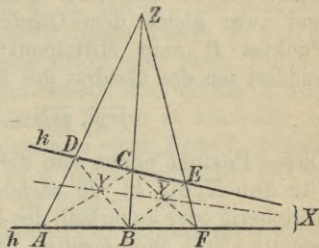


Fig. 20.

Man kann auch die Eigenschaften des vollständigen Vierecks benutzen, um die auf S. 34 mit Hilfe des Satzes von Desargues gelöste Aufgabe zu lösen, durch einen gegebenen Punkt Y eine Gerade nach dem unzugänglichen oder ungenau bestimmten Schnittpunkte X zweier Geraden h und k zu ziehen (Fig. 20). Man ziehe durch Y zwei Gerade beliebig, die h und k in A, B und C, D schneiden. Dann verbinde man A mit D und B mit C und ziehe durch $Z = AD \times BC$ eine beliebige Gerade, welche h und k in F und E schneidet. $\bar{Y} = CF \times BE$ mit Y verbunden, gibt die gesuchte Gerade YX .

Mit Hilfe der Sätze über das vollständige Viereck kann man auch vier harmonische Punkte oder Strahlen rein geometrisch, ohne Benutzung des Doppelverhältnisses, definieren.

Potenz, Potenzlinie und Ähnlichkeitspunkte.

26. In der Planimetrie wird gezeigt, daß für jede beliebige durch einen Punkt P gezogene Gerade, die von einem Kreise k in den Punkten A und B geschnitten wird, das Produkt ihrer Abschnitte $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ konstant und zwar gleich dem Quadrate des Abstandes d des Punktes P vom Mittelpunkte M des Kreises vermindert um das Quadrat des Kreisradius r ist*):

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2 .$$

Dieses Produkt nennt man die Potenz des Punktes P für den Kreis k . Je nachdem P im Innern, auf der Peripherie oder außerhalb des Kreises liegt, ist die Potenz negativ, Null oder positiv. In dem letzten Falle kann man von P zwei Tangenten an k ziehen; berühren ihn diese in T_1 und T_2 , so ist die Potenz von P dann auch gleich $PT_1^2 = PT_2^2$.

27. Für je zwei nicht konzentrische Kreise gibt es eine Gerade, die Potenzlinie oder Chordale, die der geometrische Ort aller Punkte gleicher Potenz für beide Kreise ist. Besitzen beide Kreise gemeinsame Tangenten, schneiden oder berühren sie sich, so verbindet die Chordale offenbar die Halbierungspunkte der gemeinsamen Tangenten (vgl. Fig. 22^b), bzw. die Schnittpunkte der Kreise oder ist ihre gemeinsame Tangente im Berührungspunkte; in jedem Falle steht die Chordale auf der Zentrale senkrecht. Haben die Kreise keinen Punkt gemeinsam,

*) Bezeichnet H den Halbierungspunkt von AB , so ist

$$\begin{aligned} \overline{PA} \cdot \overline{PB} &= (\overline{PH} + \overline{HA})(\overline{PH} - \overline{BH}) = PH^2 - HA^2 \\ &= (PH^2 + HM^2) - (HA^2 + HM^2) \\ &= PM^2 - MA^2 = d^2 - r^2 . \end{aligned}$$

so liegt die Chordale außerhalb beider Kreise*) (vgl. Fig. 21 und 22).

Es seien drei Kreise k , k_0 , k_1 gegeben und es bezeichne p die Chordale von k und k_0 , q die von k und k_1 , q_0 die von k_0 und k_1 . Dann besitzt der Schnittpunkt von q und q_0 gleiche Potenz für k , k_0 und k_1 , also muß auch p durch ihn hindurchgehen; diesen Punkt P gleicher Potenz für alle drei Kreise nennt man ihren Potenz- oder Chordalpunkt. Man benutzt ihn, um die Chordale zweier sich nicht schneidender Kreise zu zeichnen, wie es die Figur 21 zeigt, indem man einen Kreis k_1 beliebig, nur so hinzunimmt, daß er k und k_0 schneidet, und von $Q = q \times q_0$ das Lot auf die Zentrale fällt**).

28. Die Verbindungslinien (Ähnlichkeitsstrahlen) der Endpunkte je zweier paralleler, gleichgerichteter Radien zweier Kreise, z. B. MA und N_0A_0 in Figur 21, schneiden sich sämtlich in demselben Punkte S der Zentrale, dem äußeren Ähnlichkeitspunkte beider Kreise; ebenso schneiden sich die Ähnlichkeitsstrahlen,

*) Angenommen, es gebe für zwei beliebige Kreise k und k_0 (Radien r und r_0) stets einen Punkt, z. B. D (Fig. 21), der für beide gleiche Potenz hat. Dann falle man von D das Lot DC auf die Zentrale. Nach Voraussetzung ist $DM^2 - r^2 = DN_0^2 - r_0^2$. Auf beiden Seiten CD^2 subtrahiert, gibt nach dem pythagoreischen Satze: $CM^2 - r^2 = CN_0^2 - r_0^2$. Ist E irgend ein anderer Punkt der Senkrechten DC und addiert man wieder CE^2 auf beiden Seiten, so ist $EM^2 - r^2 = EN_0^2 - r_0^2$. E hat also auch für beide Kreise gleiche Potenz, und folglich alle Punkte der Geraden CD . (Die Verbindungslinien von D und E mit M und N_0 sind in der Figur 21 nicht gezogen.)

**) Aus dieser Konstruktion folgt zugleich, daß die Annahme des in der vorigen Anmerkung gegebenen Beweises stets zutrifft und daß zwei Kreise auch nur eine Chordale besitzen.

die irgend zwei parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Radien, z. B. MA und N_0B_0 , verbinden, in demselben Punkte S' der Zentrale, dem inneren Ähnlichkeitspunkte. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SMA und SN_0A_0 bzw. $S'MA$ und $S'N_0B_0$ folgt

$$\overline{SM} : \overline{SN_0} = \overline{MS'} : \overline{S'N_0} = r : r_0$$

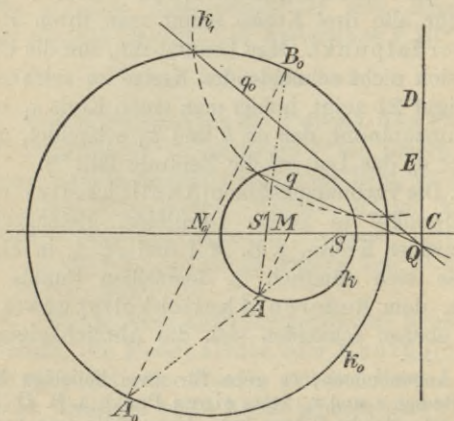


Fig. 21.

und damit nicht nur die vorstehenden Behauptungen, sondern weiter: Die Zentrale zweier Kreise wird von den beiden Ähnlichkeitspunkten harmonisch geteilt. Durch jeden Ähnlichkeitspunkt gehen (falls sie existieren, wie z. B. in Fig. 22^b) je zwei gemeinsame Tangenten beider Kreise.

Perspektive Verwandtschaft zweier Kreise.

29. Soll ein Kreis k einem anderen Kreise k_0 perspektiv entsprechen, so muß jedem Punkte des einen

Kreises ein Punkt des anderen und der Tangente des ersten Punktes die des zweiten entsprechen.

Von dem Falle, daß sämtliche Tangenten von k den perspektiv entsprechenden von k_0 parallel sind, kann man absehen. Denn dann liegt die Achse, auf der sich entsprechende Tangenten schneiden, im Unendlichen. Das Zentrum der Perspektive liegt im äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkte, wie man leicht erkennt, wenn man beachtet, daß die Endpunkte paralleler Radien als Berührungspunkte paralleler Tangenten einander perspektiv entsprechen. Es liegt also der besondere Fall der ähnlichen Lage vor.

30. Kann zwischen den beiden Kreisen k und k_0 eine allgemeine perspektive Beziehung hergestellt werden, so schneiden sich alle entsprechenden Tangenten beider Kreise im Endlichen, nur die zur Achse e parallelen im Unendlichen. Folglich sind die zu e parallelen Tangenten p, q und p_0, q_0 und daher auch ihre Berührungspunkte P, Q und P_0, Q_0 [Fig. 22*)] einander perspektiv zugeordnet; mithin entsprechen sich auch die zu e senkrechten Durchmesser PQ und P_0Q_0 . Da sich diese aber auch auf e schneiden müssen, so liegen sie in der Zentrale MN_0 beider Kreise. In diese fallen aber auch die Perspektivitätsstrahlen PP_0 und QQ_0 ; folglich muß das Zentrum der Perspektive O auf der Zentrale MN_0 liegen und die Achse der Perspektive auf der Zentrale senkrecht stehen.

Um nun das Zentrum der Perspektive O zu bestimmen, denke man sich einen beliebigen Strahl durch O gezogen, welcher die Kreise in den entsprechenden

*) Der besseren Übersichtlichkeit wegen sind p, q, p_0, q_0 nicht gezeichnet.

Punkten A, B und A_0, B_0 schneidet (Fig. 22). Da ferner die Tangenten in diesen Punkten einander entsprechen, so sind auch ihre Schnittpunkte H und H_0 einander perspektiv zugeordnet. Die von diesen Punkten auf OA ge-

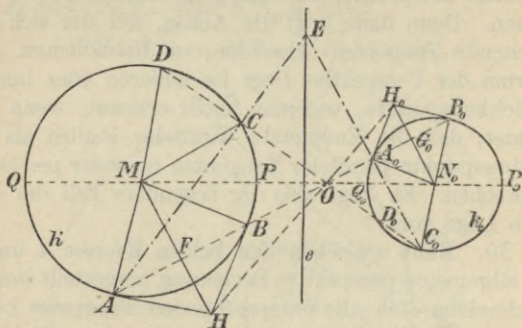


Fig. 22^a.

fällten Senkrechten HF und $H_0 G_0$ müssen durch die Mittelpunkte M und N_0 gehen. Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke OFH und $OG_0 H_0$, OFM und $OG_0 N_0$ folgt

$$(1) \quad HF : FM = H_0 G_0 : G_0 N_0$$

und aus den rechtwinkligen Dreiecken $HAM, H_0 B_0 N_0$ ferner

$$(2) \quad AF^2 = HF \cdot FM, \quad B_0 G_0^2 = H_0 G_0 \cdot G_0 N_0;$$

aus (1) und (2) ergibt sich aber

$$HF : FA : FM = H_0 G_0 : G_0 B_0 : G_0 N_0,$$

d. h.

$$\triangle HFA \sim \triangle H_0 G_0 B_0, \quad \triangle AFM \sim \triangle B_0 G_0 N_0,$$

daher, da noch AF und $B_0 G_0$ in derselben zu HM und $H_0 N_0$ senkrechten Geraden liegen,

$$HA \parallel H_0 B_0, \quad AM \parallel B_0 N_0$$

und ebenso

$$HB \parallel H_0 A_0, \quad BM \parallel A_0 N_0.$$

Folglich muß der Perspektivitätsstrahl AA_0 durch einen Ähnlichkeitspunkt gehen. Sollen sich also zwei Kreise perspektiv entsprechen, so muß einer ihrer Ähnlichkeitspunkte als Zentrum der Perspektive genommen werden. In Figur 22^a ist der innere, in Figur 22^b der äußere Ähnlichkeitspunkt als Zentrum der Perspektive gewählt. Als entsprechende Punkte sind die Schnittpunkte eines Perspektivitätsstrahles mit beiden Kreisen einander zuzuordnen, in denen die Tangenten nicht parallel sind, also A und A_0 , B und B_0 .

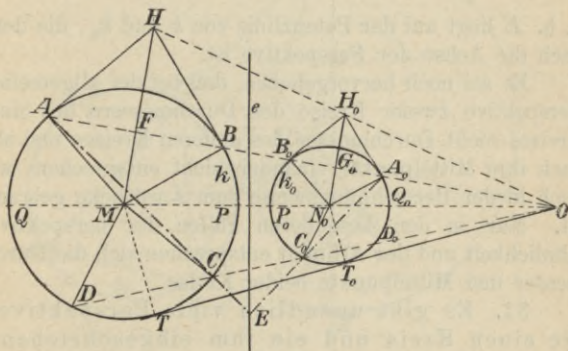


Fig. 22^b.

Um nun die Achse der Perspektive e zu bestimmen, ziehe man durch O einen zweiten Perspektivitätsstrahl, der k und k_0 in C, D und C_0, D_0 schneidet. Dann sind z. B. AC und $A_0 C_0$ perspektiv entsprechende Gerade und ihr Schnittpunkt E muß auf der Achse liegen. Beachtet man, daß $MA \parallel N_0 B_0$, $MD \parallel N_0 C_0$ ist, so folgt

$$\sphericalangle C_0 A_0 B_0 = \frac{1}{2} \sphericalangle C_0 N_0 B_0 = \frac{1}{2} \sphericalangle DMA = \sphericalangle DCA \\ = 180^\circ - \sphericalangle ACC_0 .$$

In Figur 22^a ist also

$$\sphericalangle AA_0 C_0 = 180^\circ - \sphericalangle C_0 A_0 B_0 = \sphericalangle ACC_0 .$$

Durch die vier Punkte ACA_0C_0 läßt sich daher ein Kreis legen, nach dem Satze über die Peripheriewinkel über demselben Bogen. Für Figur 22^b folgt dasselbe, da $\sphericalangle C_0 A_0 B_0 + \sphericalangle ACC_0 = 180^\circ$ und folglich ACC_0A_0 ein Sehnenviereck ist. In jedem Falle ist mithin nach § 26

$$\overline{EA} \cdot \overline{EC} = \overline{EA_0} \cdot \overline{EC_0} ,$$

d. h. E liegt auf der Potenzlinie von k und k_0 , die demnach die Achse der Perspektive ist.

Es sei noch hervorgehoben, daß bei der allgemeinen Perspektive zweier Kreise den Durchmessern des einen Kreises nicht Durchmesser des anderen Kreises und also auch ihre Mittelpunkte einander nicht entsprechen, was auch in der Bezeichnungsweise zum Ausdrucke gebracht ist. Nur in den besonderen Fällen der perspektiven Ähnlichkeit und der Affinität entsprechen sich die Durchmesser und Mittelpunkte beider Kreise.

31. Es gibt unendlich viele Perspektiven, die einen Kreis und ein ihm eingeschriebenes Sehnenviereck in einen Kreis und ein Sehnrechteck überführen oder, was dasselbe ist, die einen Kreis so in einen anderen Kreis überführen, daß einem beliebigen Punkte Y im Innern des einen Kreises der Mittelpunkt Y_0 des anderen Kreises entspricht.

Man hat nur die Konstruktion des § 23 mit dem Resultate des vorigen Paragraphen zu vereinigen, indem

man (Fig. 23) $X = AB \times CD$ mit $Z = AD \times BC$ verbindet, über XZ einen Halbkreis beschreibt und diesen mit der Geraden NY oder ihrer Verlängerung schneidet; dieser Schnittpunkt O ist dann das Zentrum der Perspektive. Wie später (§ 34) gezeigt wird, ist stets $NY \perp e^v$, und folglich braucht der zu k perspektive Kreis k_0 nur so gewählt zu werden, daß O für beide Kreise (äußerer oder innerer) Ähnlichkeitspunkt ist. Wählt man Y_0 auf der Geraden NO ganz willkürlich, so hat

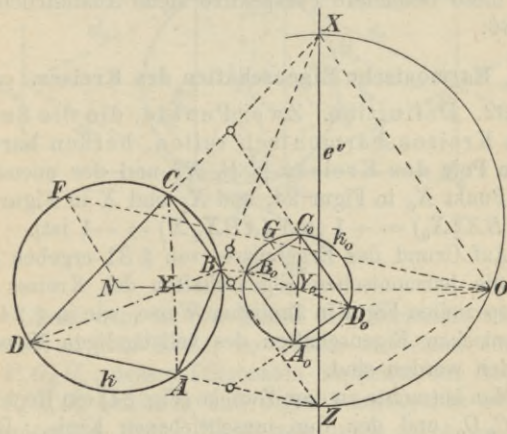


Fig. 23.

man zu einem beliebigen Radius NF von k eine Parallele durch Y_0 zu ziehen und diese mit OF zum Schnitte G zu bringen; dann ist Y_0G der Radius des zu k perspektiven Kreises k_0 , dessen Mittelpunkt Y_0 dem Punkte Y im Innern von k entspricht. OD schneidet k_0 in der Ecke D_0 des Rechtecks, dessen Seiten parallel zu OX und OZ sind. Die Achse der Perspektive ist die

Potenzlinie beider Kreise, die in der Figur nur durch die Schnittpunkte (\circ) entsprechender Seiten angedeutet ist. — Von der Wahl des Punktes Y_0 auf NO hängt die Größe des Radius von k_0 und natürlich auch die Lage der Achse ab. Nimmt man im besonderen an, daß Y_0 mit dem Mittelpunkte N des Kreises k zusammenfällt, so geht der Kreis k bei der Perspektive in sich selbst über; das Sehnenviereck $ABCD$ und das zu ihm perspektive Rechteck sind also dann demselben Kreise eingeschrieben. Über diese besondere Perspektive siehe Ausführlicheres in § 36.

Harmonische Eigenschaften des Kreises.

32. Definition. Zwei Punkte, die die Sehne eines Kreises harmonisch teilen, heißen **harmonische Pole** des Kreises [z. B. X_2^0 und der unendlich ferne Punkt X_0 in Figur 24, und X_2 und X in Figur 25, da $(ABX_2^0X_0) = -1$ und $(ABX_2X) = -1$ ist].

Auf Grund des Ergebnisses von § 31 ergeben sich auch die harmonischen Eigenschaften des Kreises aus einer speziellen Figur in ähnlicher Weise, wie in § 24 die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks gefunden worden sind.

Man betrachte zu dem Zwecke (Fig. 24) ein Rechteck $A_0B_0C_0D_0$ und den ihm umschriebenen Kreis. Dann sind der Halbierungspunkt einer beliebigen Sehne und ihr unendlich ferner Punkt harmonische Pole. Nun haben alle parallelen Sehnen denselben unendlich fernen Punkt; folglich liegen alle Punkte, die mit diesem unendlich fernen Punkte ein Paar harmonischer Pole bilden, auf dem zu den parallelen Sehnen senkrechten Kreisdurchmesser. In Figur 24 z. B. gehören in dieser Weise der unendlich ferne Punkt Z_0 der Richtung

$A_0 D_0 \parallel X_1^0 X_2^0 \parallel B_0 C_0$ und der Durchmesser $x_0 \perp A_0 D_0$ zusammen. Umgekehrt sind die dem Kreismittelpunkte, d. i. dem Halbierungspunkte aller Durchmesser, zugeordneten harmonischen Pole die Punkte der unendlich fernen Geraden.

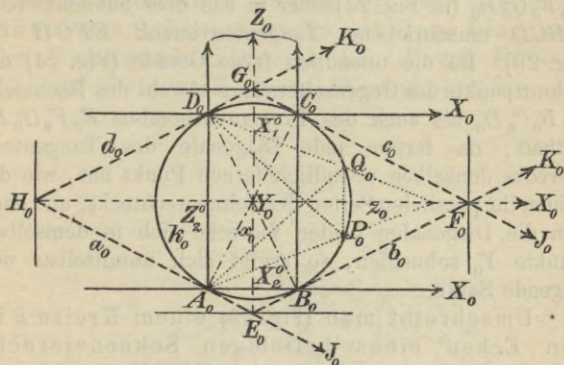


Fig. 24.

Zieht man in den Ecken des Rechtecks die Tangenten an den Kreis, so bilden sie einen Rhombus $E_0 F_0 G_0 H_0$, dessen Diagonalen die Seiten des Rechtecks $A_0 B_0 C_0 D_0$ halbieren und deren Schnittpunkt im Kreismittelpunkte liegt. Zieht man noch durch die Ecken E_0, F_0, G_0, H_0 Parallele zu den Seiten des eingeschriebenen Rechtecks, so bildet jede dieser Parallelen mit der Diagonale der betreffenden Ecke zwei konjugierte Strahlen, welche die von dieser Ecke ausgehenden Tangenten harmonisch trennen (§ 6, S. 15).

33. Da nun durch eine geeignet gewählte Perspektive ein Kreis und ein ihm eingeschriebenes beliebiges Sehnenviereck in einen Kreis und ein ein-

geschriebenes Rechteck umgewandelt werden kann, so ergeben sich unmittelbar die harmonischen Eigenschaften des Kreises in voller Allgemeinheit.

Bei dieser perspektiven Verwandlung geht das dem Rechteck $A_0 B_0 C_0 D_0$ umschriebene Tangentenviereck $E_0 F_0 G_0 H_0$ (in Fig. 24) über in das dem Sehnenviereck $ABCD$ umschriebene Tangentenviereck $EFGH$ (in Fig. 25). Da die unendlich ferne Gerade (Fig. 24) die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare sowohl des Rechtecks $A_0 B_0 C_0 D_0$ als auch des Tangentenrhombus $E_0 F_0 G_0 H_0$ enthält, da ferner jede Diagonale des Tangentenvierecks denselben unendlich fernen Punkt hat, wie die beiden ihr parallelen Seiten des Sehnenrechtecks, und endlich die Diagonalen beider Vierecke sich in demselben Punkte Y_0 schneiden, so ergibt sich unmittelbar der folgende Satz:

• Umschreibt man (Fig. 25) einem Kreise k in den Ecken eines beliebigen Sehnenvierecks $ABCD$ ein Tangentenviereck $EFGH$, so schneiden sich die Gegenseitenpaare des Sehnenvierecks sowohl, als des Tangentenvierecks in den Punkten $X, Z; J, K$ einer Geraden y . Ferner geht jede Diagonale des Tangentenvierecks durch den Schnittpunkt zweier Gegenseiten des Sehnenvierecks

$$(X = AB \times CD \times FH, Z = AD \times BC \times EG)$$

und endlich schneiden sich die Diagonalen AC, BD des Sehnenvierecks und EG, FH des Tangentenvierecks in demselben Punkte Y .

Mit Benutzung der für das vollständige Vierseit gebrauchten Benennungen (§ 22, S. 37) kann man diesem Satze, wie aus dem perspektiven Rechtecke leicht zu

folgern ist, auch die folgende kürzere und zugleich allgemeinere Fassung geben:

Umschreibt man (Fig. 25) einem Kreise k in den Ecken eines beliebigen vollständigen Sehnenvierecks $ABCD$ ein vollständiges Tangentenvierseit $abcd$, so liegen je zwei Diagonalepunkte des Sehnenvierecks auf einer Diagonale des Tangentenvierseits (X, Y auf $FH = z$; Y, Z auf $EG = x$; Z, X auf $JK = y$).

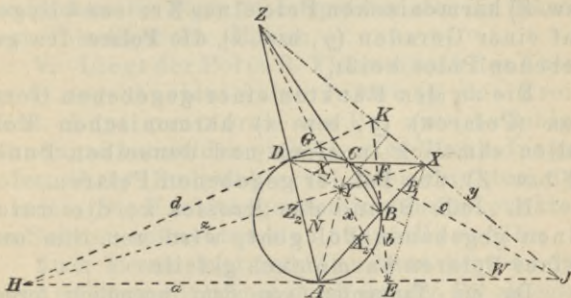


Fig. 25.

Das Diagonaldreieck XYZ des ersteren fällt mit dem Diagonaldreieck des letzteren zusammen.

34. Da jede zu x_0 parallele Gerade*) einer Geraden durch den Punkt Z entspricht und x_0 der geometrische Ort der harmonischen Pole zu Z_0 ist, so folgt, daß auch die zu x_0 perspektive Gerade z der geometrische Ort der

*) Bei diesen Betrachtungen beziehen sich die mit dem Index 0 versehenen Buchstaben auf Figur 24, die ohne diesen Index auf Figur 25.

harmonischen Pole, die zu Z gehören, ist. Umgekehrt gehört zu allen Punkten des Durchmessers x_0 als harmonischer Pol der unendlich ferne Punkt Z_0 des zu x_0 senkrechten Durchmessers. Folglich ist auch Z harmonischer Pol zu allen Punkten der zu x_0 perspektiven Geraden x .

In gleicher Weise erkennt man, daß y geometrischer Ort der harmonischen Pole zu Y und umgekehrt ist.

Folglich gelten die Sätze:

I. Die zu einem gegebenen Pole (z. B. Y , bzw. Z) harmonischen Pole eines Kreises k liegen auf einer Geraden (y , bzw. x), die **Polare** des gegebenen Poles heißt.

Die zu den Punkten einer gegebenen Geraden (Polaren) (y , bzw. x) harmonischen Pole fallen sämtlich in einen und denselben Punkt (Y bzw. Z), den **Pol** der gegebenen Polaren.

II. Jede Sehne des Kreises k , die durch einen gegebenen Pol geht, wird von ihm und seiner Polaren harmonisch geteilt.

Da die Tangenten von dem unendlich fernen Punkte Z_0 parallel zu x_0 sind, also den Kreis in seinen Schnittpunkten mit der Polare x_0 des Poles Z_0 berühren, und da die vier Verbindungslinien der Endpunkte zweier zu x_0 senkrechter Sehnen, z. B. A_0D_0 und P_0Q_0 , sich auf x_0 schneiden, so folgt:

III. Liegt der Pol (z. B. Z) außerhalb des Kreises k , so schneiden sich die vier Verbindungslinien der Punkte, in denen zwei beliebige durch den Pol gezogene Sekanten den Kreis schneiden, auf der Polare (x) des Poles (Z). Diese geht auch durch die Berührungspunkte der durch den Pol gehenden Kreistangenten.

Das letztere muß auch noch gelten, wenn der Pol auf dem Kreise liegt. Dann aber fallen die beiden Tangenten in die eine zusammen, deren Berührungspunkt der gegebene Pol ist. Folglich:

IV. Liegt der Pol auf dem Kreise, so fällt seine Polare mit der Kreistangente dieses Punktes zusammen.

Die Tangenten in den Endpunkten eines jeden Durchmessers schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden (y_0), der Polare des Mittelpunktes (Y_0). Den Durchmessern in Figur 24 entsprechen aber die Sehnen durch Y in Figur 25. Mithin:

V. Liegt der Pol (z. B. Y) innerhalb des Kreises k , so schneidet seine Polare (y) den Kreis nicht. Legt man durch den Pol zwei beliebige Sehnen, so schneiden sich die vier Verbindungslinien ihrer Endpunkte in zwei Punkten der Polaren. Die Kreistangenten in den Endpunkten der Sehnen schneiden sich ebenfalls auf ihr.

Auch hieraus folgt Satz IV. Denn liegt der Pol auf k , so haben alle Sehnen durch ihn den Pol als einen Endpunkt und folglich auch die Kreistangente in ihm gemeinsam.

Die Sätze III und V gestatten, die zu einem gegebenen Pole in bezug auf einen Kreis gehörige Polare zu konstruieren. Man zieht durch den gegebenen Pol zwei den Kreis schneidende Gerade; die vier Verbindungslinien ihrer vier Schnittpunkte mit dem Kreise schneiden sich in zwei Punkten der gesuchten Polaren.

Aus den Sätzen III und V folgt auch, daß für den Kreis die Polare senkrecht auf der Verbindungslinie des Poles mit dem Kreismittelpunkte steht. Denn liegt der Pol außerhalb, so ist seine Polare die Berührungsehne

der von ihm an den Kreis gezogenen Tangenten. Liegt der Pol im Innern des Kreises, so muß seine Polare parallel sein zu den Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers, der den Pol mit dem Mittelpunkte verbindet. Hiermit ist auch die im § 31, S. 49 ohne Beweis aufgestellte Behauptung, daß in Figur 23 die Gerade $NY \perp e^v = XZ$ ist, als richtig nachgewiesen, da e^v die Polare von Y in bezug auf k ist.

Da die Pole aller Durchmesser eines Kreises auf der unendlich fernen Geraden liegen, und da umgekehrt die Polaren aller unendlich fernen Punkte die Durchmesser sind, so folgt durch perspektive Übertragung von Figur 24 auf Figur 25 der wichtigste Satz der Polarentheorie:

VI. Dreht sich eine Gerade um einen Punkt (z. B. Y oder Z), so bewegt sich ihr Pol auf der Polare des Punktes (y , bzw. z) und umgekehrt.

Diesen Satz kann man, da der Pol Z von z auf y , der Polaren von Y , liegt, auch so aussprechen:

VI'. Liegt der Pol einer Geraden auf einer zweiten Geraden, so liegt auch der Pol der letzteren auf der ersteren. Geht umgekehrt die Polare eines Punktes durch einen zweiten Punkt, so geht auch die Polare des letzteren durch den ersten Punkt.

Besitzt ein Dreieck die Eigenschaft, daß in bezug auf einen Kreis k jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite ist, so nennt man es ein Polardreieck des Kreises k .

VII. Umschreibt man einem Kreise k in den Ecken eines beliebigen vollständigen Sehnenvierecks $ABCD$ ein vollständiges Tangentenvierseit $abcd$, so ist das Diagonaldreieck XYZ des ersteren, das mit dem Diagonaldreieck xyz des letzteren zusammenfällt, ein Polardreieck.

Die Sätze VI oder VI' gestatten, den Pol zu konstruieren, wenn die Polare gegeben ist. Man bestimmt nämlich zu zwei beliebigen Punkten derselben nach dem auf S. 55 gegebenen Verfahren die Polaren, deren Schnittpunkt der gesuchte Pol ist.

35. Mit Hilfe des Satzes VI' kann man auch die in § 32 gegebene Definition harmonischer Pole erweitern und zugleich harmonische Polaren allgemein definieren.

Harmonische Pole in bezug auf einen Kreis nennt man je zwei Punkte, von denen jeder auf der Polare des andern gelegen ist.

Harmonische Polaren in bezug auf einen Kreis nennt man je zwei Gerade, deren jede durch den Pol der andern hindurchgeht.

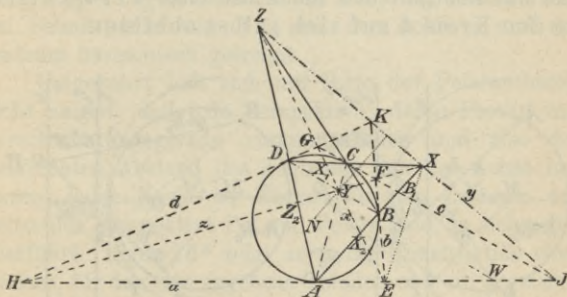


Fig. 25.

Daß diese Definition harmonischer Pole die frühere als speziellen Fall umfaßt, ist ohne weiteres ersichtlich (z. B. X und Y in Fig. 25). Sie gilt aber auch dann noch, wenn die Gerade durch die beiden Pole den Kreis nicht schneidet, in welchem Falle die frühere Definition versagt, z. B. für X und Z in Figur 25.

Falls zwei harmonische Polaren sich außerhalb des Kreises schneiden, so teilen sie den Winkel, den die von ihrem Schnittpunkte an den Kreis gelegten Tangenten einschließen, und seinen Nebenwinkel harmonisch. Z. B. sind in Figur 25 EX und EY zwei harmonische Polaren, denn X ist der Pol von EY , und folglich liegt nach VI' der Pol von EX auf EY ; es ist nämlich E der Pol von AB und also $X_2 = EY \times AB$ der Pol von EX . Nun ist aber $(ABX_2 X) = -1$ (nach § 32), also sind die Strahlen von E nach A, B, X_2, X vier harmonische Strahlen.

Jede Kreistangente ist ihre eigene harmonische Polare.

36. Ein beliebiger, aber nicht auf dem Kreise k gelegener Punkt und seine Polare in bezug auf k bilden stets das Zentrum und die Achse einer Perspektive, die den Kreis k auf sich selbst abbildet.

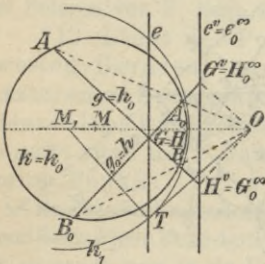


Fig. 26^a.

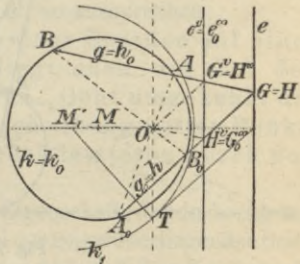


Fig. 26^b.

Ist in den Figuren 26 der Punkt O der Pol der Geraden e , so schneidet jeder Strahl durch O den Kreis k in sich entsprechenden Punkten, z. B. A und A_0, B und B_0 . Die Verbindungslinien $g = AB$ und $g_0 = A_0 B_0$ schneiden

sich nach den Sätzen III und V auf der Polare e , die also Achse der Perspektive ist. Faßt man aber A_0 als Originalpunkt auf, so ist A sein Bildpunkt und folglich auch, wenn $g_0 = h$ als Originalgerade betrachtet wird, $h_0 = g$ ihre Bildgerade. Demnach fallen die Verschwindungspunkte von g und h mit den Fluchtpunkten von h und g und daher auch die Verschwindungslinie e^v mit der Fluchtlinie e_0^∞ zusammen. Da (§ 11) $\text{Abst.}(O, e^v) = \text{Abst.}(e, e_0^\infty)$ ist, so muß $e^v = e_0^\infty$ den senkrechten Abstand des Poles O von der Polaren e halbieren.

Diese besondere Perspektive, bei der das Bild A_0 eines Punktes A zugleich der Originalpunkt des in A liegenden Bildpunktes ist, nennt man involutorische Perspektive oder wohl auch perspektive Spiegelung. Zwei zugeordnete Punkte A und A_0 werden durch den Schnittpunkt von AA_0 mit der Achse e und das Zentrum harmonisch getrennt.

Umgekehrt läßt sich mit Hilfe der Polarentheorie leicht zeigen, daß jede Perspektive, deren Flucht- und Verschwindungsgerade zusammenfallen und also den senkrechten Abstand des Zentrums von der Achse halbieren, jeden Kreis der Ebene, für den Zentrum und Achse der Perspektive Pol und Polare sind, in sich selbst überführt. Figur 26^a zeigt an k_1 die Konstruktion eines Kreises, für den eine gegebene Gerade e und ein gegebener Punkt O Polare und Pol sind: Gerade OT beliebig durch O , durch ihren Schnittpunkt T mit e eine Senkrechte zu OT ; letztere schneidet das von O auf e gefällte Lot in dem Mittelpunkte M_1 des gesuchten Kreises, dessen Radius M_1T ist. Soll O innerhalb der Kreise liegen, so führt man die gleiche Konstruktion für die Hilfsgerade $\parallel e$ durch O und den Fußpunkt des von O auf e gefällten Lotes aus, wie es Figur 26^b zeigt.

37. Von der perspektiven Spiegelung soll jetzt Anwendung gemacht werden, um einen Satz über den Kreis abzuleiten.

In I, 18 sind die folgenden Sätze für den Kreis bewiesen worden:

Schneidet man die Geraden, die einen beliebigen Punkt P (Fig. 27) eines Kreises mit den Endpunkten eines Durchmessers AB verbinden, durch irgend eine Parallele FG zu den Tangenten in A und B , so schneiden sich die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte G und F

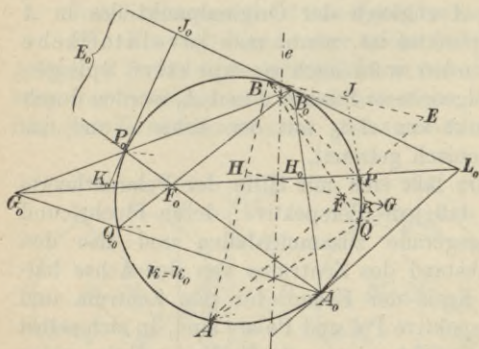


Fig. 27.

mit A und B in einem Punkte Q des Kreises. Die Halbierungspunkte der Strecken, welche von AP und BP auf beliebigen Parallelen zu den Tangenten in A und B ausgeschnitten werden, liegen auf der Tangente in P ; z. B. $BJ = JE$, $FK = KG$.

Unterwirft man nun die Figur des vorstehenden Satzes der perspektiven Spiegelung, bei der dem Durch-

messer AB eine beliebig vorgegebene Sehne A_0B_0 entspricht, dann ist $AA_0 \times BB_0 = O$ das Zentrum und die Polare von O die Achse dieser Perspektive. Den Tangenten in A und B und ihrem unendlich fernen Punkte entsprechen die Tangenten in A_0 und B_0 und ihr Schnittpunkt L_0 , der Pol von A_0B_0 . Durch L_0 geht auch die Bildgerade F_0G_0 von FG . Da ferner $BJ = JE$, $FK = KG$ ist, so folgt, daß B_0, E_0, J_0, L_0 und F_0, G_0, K_0, L_0 je vier harmonische Punkte sind. Mithin lassen sich die obigen Kreissätze folgendermaßen verallgemeinern:

I. Schneidet man die Geraden, die einen beliebigen Punkt P_0 eines Kreises k mit den Endpunkten einer beliebigen Sehne A_0B_0 verbinden, durch eine Gerade, die durch den Pol L_0 von A_0B_0 geht, so schneiden sich die Verbindungslinien dieser Punkte G_0 und F_0 mit A_0 und B_0 in einem Punkte Q_0 des Kreises.

II. Die Tangente in P_0 teilt zusammen mit L_0 die Strecke, die auf einer beliebigen durch den Pol L_0 gehenden Geraden von den Geraden A_0P_0 und B_0P_0 ausgeschnitten wird, harmonisch.

III. Abschnitt.

Projektive Eigenschaften der Kegelschnitte.

Die perspektiven Bilder des Kreises.

38. In dem vorigen Abschnitte sind diejenigen besonderen Perspektiven behandelt, die einen Kreis in einen andern Kreis oder in sich selbst verwandeln. Jetzt sollen diejenigen Kurven untersucht werden, die eine willkürlich gewählte Perspektive aus einem Kreise entstehen läßt.

Definition. Die perspektiven Bilder von Kreisen nennt man **Kegelschnitte**.

Läßt man den Kegelschnitt durch Zentralprojektion eines Kreises auf eine andere Ebene entstehen, so bilden die Projektionsstrahlen den Mantel eines geraden oder schiefen Kreiskegels, je nachdem das Projektionszentrum senkrecht über dem Mittelpunkte des Kreises liegt oder nicht. Jede zu einem Kreise perspektive Kurve kann daher als Schnitt der Bildebene mit dem Mantel eines Kreiskegels aufgefaßt werden, wodurch die Benennung Kegelschnitte für die zu einem Kreise perspektiven Kurven gerechtfertigt ist (vgl. § 69).

Nach den Ergebnissen von § 15—20 kann man zwei perspektive Figuren nach Belieben durch eine ebene oder eine räumliche Perspektive miteinander verbunden betrachten. Hiervon wird im folgenden Gebrauch gemacht; zunächst werden für die Herleitung der Grundeigenschaften und der Lehre von den konjugierten Durch-

messern Kreis und Kegelschnitt in derselben Ebene liegend angenommen und dann im folgenden Abschnitte die metrischen Eigenschaften aus den Schnitten eines Kreis-kegels abgeleitet.

39. Bei der Zentralprojektion ändern sich die Lagebeziehungen zweier ebener Gebilde nicht. Aus dieser Bemerkung folgen eine Reihe der wichtigsten Sätze über Kegelschnitte.

Da dem Schnittpunkte zweier Kurven der Schnittpunkt ihrer perspektiven Bilder entspricht, und da jeder Kreis von einer Geraden seiner Ebene in höchstens zwei Punkten geschnitten wird, so gilt auch:

Jeder Kegelschnitt kann von einer Geraden seiner Ebene in **höchstens** zwei Punkten geschnitten werden.

Fallen die Schnittpunkte der Sekante eines Kreises in einen einzigen zusammen, so geschieht das gleiche für die Schnittpunkte der entsprechenden Sekante eines zu dem Kreise perspektiven Kegelschnittes. Daher entspricht der Tangente eines Kreises und ihrem Berührungspunkte eine Tangente des perspektiven Kegelschnittes und ihr Berührungspunkt, wenn (entsprechend I, 17) als Tangente eines Kegelschnittes jede Gerade seiner Ebene bezeichnet wird, die mit ihm nur **einen** Punkt, den Berührungspunkt, gemeinsam hat.

Von einem Punkte der Ebene eines Kreises lassen sich höchstens zwei Tangenten an denselben legen, folglich:

Von einem Punkte der Ebene eines Kegelschnittes lassen sich **höchstens** zwei Tangenten an ihn legen.

Nur von den Punkten außerhalb der geschlossenen Kreislinie lassen sich stets zwei Tangenten an den Kreis legen, während sich von den Punkten innerhalb des

Kreises keine Tangente an ihn legen läßt. Dementsprechend sagt man:

Ein Kegelschnitt teilt die Punkte seiner Ebene in außerhalb und innerhalb gelegene; von den ersteren lassen sich zwei Tangenten an den Kegelschnitt legen, von den letzteren keine.

Aus diesen Sätzen folgt unmittelbar weiter, daß der in § 33 aufgestellte Satz unverändert für Kegelschnitte gilt:

Umschreibt man einem Kegelschnitte in den Ecken eines vollständigen Sehnenvierecks ein vollständiges Tangentenvierseit, so liegen je zwei Diagonalepunkte des Sehnenvierecks auf einer Diagonale des Tangentenvierseits. Das Diagonaldreieck des ersteren fällt mit dem Diagonaldreiseit des letzteren zusammen.

Pol und Polare von Kegelschnitten.

40. Ferner ist nach § 7 das Doppelverhältnis von vier Punkten oder Strahlen gleich dem ihrer perspektiven Bilder. Vier harmonischen Elementen entsprechen also wieder vier harmonische Elemente und mithin gelten die in § 34, I—VII und § 35 aufgestellten Definitionen und Sätze über Pol und Polare ohne weiteres für Kegelschnitte. Je ein Punkt und je eine Gerade in der Ebene eines Kegelschnittes sind also einander als Pol und Polare so zugeordnet, daß die auf einer beliebigen durch den Pol gehenden Geraden vom Kegelschnitte ausgeschnittene Sehne durch den Pol und die Polare harmonisch geteilt wird. Von einer Wiedergabe der Sätze der Polarentheorie für die Kegelschnitte kann, um Raum zu sparen, hier abgesehen werden, da in den obengenannten Sätzen alles ungeändert bleibt bis auf das Wort „Kreis“, das stets

durch „Kegelschnitt“ zu ersetzen ist, genau so, wie aus dem Satze in § 33 der Satz des vorigen Paragraphen hergeleitet ist.

Auch die auf den Seiten 55 und 57 angegebenen Konstruktionen, für einen gegebenen Pol die zugeordnete Polare und für eine gegebene Polare den zugeordneten Pol zu finden, übertragen sich unverändert auf Kegelschnitte*).

Man kann auch auf Grund der Polarentheorie die Punkte der Ebene eines Kegelschnittes in innere und äußere unterscheiden. Allen Punkten im Innern des Kegelschnittes sind Polaren zugeordnet, die ihn nicht schneiden; allen Punkten außerhalb des Kegelschnittes aber sind Polaren zugeordnet, die ihn in zwei getrennten Punkten schneiden. Liegt der Punkt auf dem Kegelschnitte, so ist seine Polare die Tangente des Kegelschnittes in diesem Punkte.

Um von einem Punkte P außerhalb eines Kegelschnittes die Tangenten an ihn zu ziehen, konstruiert man nach § 34, III seine Polare und verbindet die beiden Punkte, in denen sie den Kegelschnitt trifft, mit P .

41. In den Sätzen des § 37 sind nur Beziehungen enthalten, die durch Zentralprojektion nicht geändert werden. Folglich gelten beide Sätze unverändert auch für Kegelschnitte.

Der Pol L_0 der gegebenen Sehne A_0B_0 ist als Schnittpunkt der Tangenten an den Kegelschnitt in den Endpunkten A_0 und B_0 der Sehne bestimmt (§ 34, V).

*) Um Mißverständnisse von vornherein auszuschließen, sei hier aber ausdrücklich betont, daß die Polare in bezug auf einen Kegelschnitt im allgemeinen nicht auf der Verbindungslinie des Poles mit dem Mittelpunkte (§ 41) des Kegelschnittes senkrecht steht, was bei dem Kreise stets der Fall ist (S. 56).

Folglich ist ein Kegelschnitt bestimmt durch drei seiner Punkte und die Tangenten in zweien derselben. Mit Hilfe des Satzes I in § 37 können dann beliebig viele weitere Punkte des Kegelschnittes unmittelbar — also ohne auf die perspektive Beziehung des Kegelschnittes zum Kreise zurückzugehen — konstruiert werden: Sind A_0 , B_0 und P_0 die gegebenen Punkte und L_0 der Schnittpunkt der ebenfalls gegebenen Tangenten in A_0 und B_0 , so schneidet man die Strahlen A_0P_0 und B_0P_0 mit einer beliebigen Geraden durch L_0 ; ihre Schnittpunkte F_0 und G_0 mit jenen Strahlen verbindet man mit B_0 und A_0 und erhält in dem Schnittpunkte Q_0 dieser Verbindungslinien einen weiteren Punkt des Kegelschnittes.

Aus dem Vorstehenden folgt aber weiter:

Das perspektive Bild eines Kegelschnittes ist wieder ein Kegelschnitt.

Denkt man sich nämlich den gegebenen Kegelschnitt nach dem obigen Verfahren aus drei Punkten und den Tangenten in zweien derselben erzeugt, so entsprechen den gegebenen Bestimmungsstücken bei einer beliebigen Perspektive drei Punkte und zwei Tangenten der zu dem Kegelschnitte perspektiven Kurve. Weitere Punkte dieser letzteren Kurve können ebenfalls nach dem obigen Verfahren ermittelt werden, da dieses bei jeder Projektion unbeeinflusst bleibt.

Verschiedene Arten der Kegelschnitte.

42. Von besonderer Bedeutung für das perspektive Bild ist die Lage des Kreises k zu der Verschwindungslinie e^v der gewählten Perspektive. Da nur die perspektiven Bilder der Punkte von e^v ins Unendliche fallen, so hat der zu k perspektive Kegelschnitt k_0 keinen, einen oder zwei unendlich ferne Punkte, je nachdem der Kreis k

die Verschwindungslinie nicht schneidet, sie berührt oder sie in zwei Punkten schneidet. Demnach erhält man drei verschiedene Arten von Kegelschnitten, die man als Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln unterscheidet.

Die Ellipse besitzt keinen unendlich fernen Punkt und ist eine im Endlichen geschlossene Kurve. Die jetzt definierte Ellipse stimmt mit der als affines Bild des Kreises definierten (I, 15) gleichnamigen Kurve überein, wie in § 46 gezeigt werden wird.

Die Parabel besitzt einen unendlich fernen Punkt, und da dieser das perspektive Bild des Punktes der Verschwindungslinie e^v ist, in dem sie den Kreis k tangiert, so sagt man: Die Parabel besitzt in ihrem unendlich fernen Punkte die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene als Tangente.

Die Hyperbel hat zwei unendlich ferne Punkte, die die perspektiven Bilder der zwei getrennten Schnittpunkte des Kreises k mit e^v sind. Da die Kreistangenten in diesen Schnittpunkten nicht mit e^v zusammenfallen, so können ihre perspektiven Bilder nicht mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, sondern liegen im Endlichen. Diese beiden Hyperbeltangenten, deren Berührungspunkte mit der Hyperbel ihre unendlich fernen Punkte sind, nennt man Asymptoten der Hyperbel.

Da durch eine Parallelprojektion die unendlich fernen Elemente einer Ebene sich in die unendlich fernen Elemente der Bildebene projizieren, so folgt mit Benutzung des Satzes am Ende von § 41:

Durch Parallelprojektion geht ein Kegelschnitt stets in einen Kegelschnitt gleicher Art über.

43. Die Perspektive, durch welche ein Kreis k in einen Kegelschnitt k_0 übergeführt werden soll, mag durch

Angabe der Achse e , des Zentrums O und der Verschwindungslinie e^v bestimmt sein. Um dann zu Punkten von k die entsprechenden von k_0 zu finden, wendet man am bequemsten das in § 19 gegebene Verfahren an und

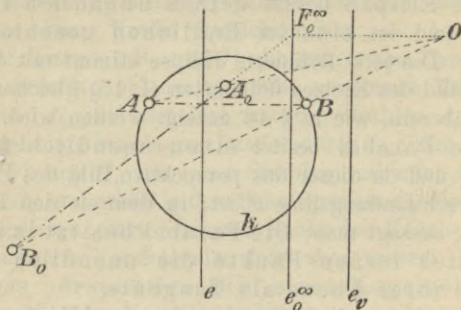


Fig. 28.

bestimmt danach die perspektiven Bilder der Endpunkte von Kreissehnen, die senkrecht zu e^v sind, wie es Figur 28 für die Sehne AB zeigt. Auf diese Weise sind die zu dem Kreise k perspektiven Kegelschnitte in den Figuren 29, 35 und 45 konstruiert.

Mittelpunkt und Durchmesser.

44. Alle Kreissehnen durch den Pol M der Verschwindungslinie werden durch den Pol und ihre Schnittpunkte mit der Verschwindungslinie harmonisch geteilt. Da die perspektiven Bilder der letzteren Punkte unendlich fern liegen, so halbiert das perspektive Bild M_0 von M alle durch M_0 gehenden Sehnen des Kegelschnittes k_0 . Aus diesem Grunde nennt man M_0 , das Bild des Poles M der Verschwindungslinie e^v , den **Mittelpunkt** des Kegelschnittes k_0 und die

durch ihn gehenden Sehnen Durchmesser desselben.

Zwei Durchmesser des Kegelschnittes, die zwei harmonischen Polaren (§ 35) des Kreises durch den Pol M der Verschwindungslinie entsprechen, nennt man **konjugierte Durchmesser**.

Zwei konjugierte Durchmesser eines Kegelschnittes, die aufeinander senkrecht stehen, heißen **Achsen** derselben; ihre Endpunkte **Scheitel**.

Der unendlich ferne Punkt eines Durchmessers ist in bezug auf den Kegelschnitt der Pol des konjugierten Durchmessers.

Die auf den Mittelpunkt und die Durchmesser eines Kegelschnittes bezüglichen Untersuchungen führt man am besten für die drei Arten von Kegelschnitten gesondert durch.

Die Ellipse.

45. Bei einer Perspektive, die aus einem Kreise k eine Ellipse k_0 entstehen läßt, schneidet die Verschwindungslinie e^v den Kreis nicht; folglich liegt ihr Pol M in bezug auf den Kreis k innerhalb desselben und der zu ihm perspektive Mittelpunkt M_0 der Ellipse ebenfalls in ihrem Innern. Jede durch M gehende Gerade wird von k in zwei Punkten geschnitten; jeder Durchmesser der Ellipse schneidet sie also ebenfalls in zwei Punkten (vgl. Fig. 29).

Um für den Kreis k irgend zwei harmonische Polaren durch M zu erhalten, braucht man nur*) zwei beliebige Sehnen AC und BD durch M zu ziehen, deren Endpunkte auf vier Geraden liegen, die sich nach Satz V

*) Vgl. Figur 25, in der man sich M statt Y , e^v statt y gesetzt denke.

des § 35 paarweise in zwei Punkten X und Z auf der Polare e^v von M schneiden. Dann sind $MX = x$, die Polare von Z , und $MZ = x$, die Polare von X , zwei harmonische Polaren. Jede Sehne durch X wird von X und x harmonisch geteilt (§ 35, I); ebenso wird jede Sehne durch Z von Z und x harmonisch geteilt. Die Tangenten in den Schnittpunkten von x , bzw. x mit k gehen durch die Pole X und Z . Die Tangenten in A und B und die in C und D schneiden sich auf x , während sich die Tangenten in A und D und die in B und C auf x schneiden.

Bei der perspektiven Abbildung des Kreises k in die Ellipse k_0 werden die Bilder aller Geraden, die sich in einem Punkte von e^v schneiden, einander parallel (nach § 18), und folglich liefern die vorstehenden Bemerkungen für die Ellipse die Sätze:

I. Die zu einem Durchmesser parallelen Sehnen werden von dem konjugierten Durchmesser halbiert (vgl. I, 16).

II. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel dem konjugierten Durchmesser. Die Tangenten in den Scheiteln einer Achse stehen auf ihr senkrecht (vgl. I, 17).

In Figur 25 liegen die Pole E von AB und X_2 von EX auf der Geraden x , deren zugeordnete harmonische Polare z sich mit AB und EX in X auf $y = e^v$ schneidet. Für die Ellipse folgt also daraus der weitere Satz:

III. Die Polare eines Punktes ist parallel zu dem Durchmesser, der zu dem durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmesser konjugiert ist.

Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne schneiden sich auf dem Durchmesser, der

zu dem der Sehne parallelen konjugiert ist. (Z. B. projiziert man die Figur 25 so, daß der Kreis k in eine Ellipse übergeht, so schneiden sich die Tangenten in den Punkten A_0 und B_0 auf dem Durchmesser x_0 , da sich in Figur 25 die entsprechenden Tangenten in A und B auf der Geraden x schneiden.)

Die Pole paralleler Sehnen liegen auf dem zu ihrer Richtung konjugierten Durchmesser.

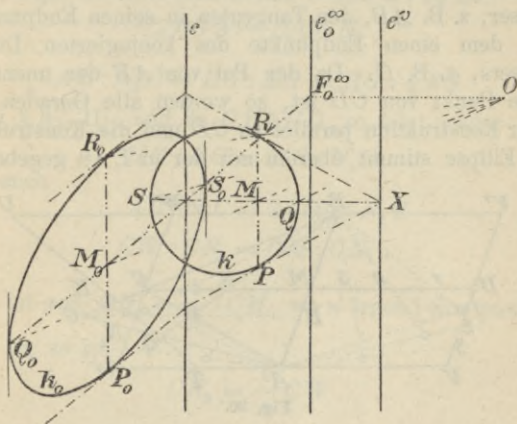


Fig. 29.

In Figur 29 sind als harmonische Polaren x und x des Kreises die Parallele und die Senkrechte zu e^v durch M genommen; der Pol der letzteren Geraden ist der unendlich ferne Punkt von e^v (nach § 34, III). Die Figur zeigt die Konstruktion der ihnen entsprechenden konjugierten Durchmesser der Ellipse und der Tangenten in ihren Endpunkten. Zugleich ersieht man, daß die

Ellipse ganz zwischen den Tangenten in den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers liegt.

46. Eine Ellipse ist völlig bestimmt durch irgend zwei (ihrer Länge und Lage nach gegebene) konjugierte Durchmesser.

Denn sind (Fig. 30) zwei konjugierte Durchmesser AB und CD *) gegeben, so sind damit auch die Tangenten in ihren Endpunkten gegeben; die Ellipse kann also nach § 41 konstruiert werden aus einem Durchmesser, z. B. AB , den Tangenten in seinen Endpunkten und dem einen Endpunkte des konjugierten Durchmessers, z. B. C . Da der Pol von AB der unendlich ferne Punkt von CD ist, so werden alle Geraden FG jener Konstruktion parallel zu CD und die Konstruktion der Ellipse stimmt überein mit der in I, 18 gegebenen.

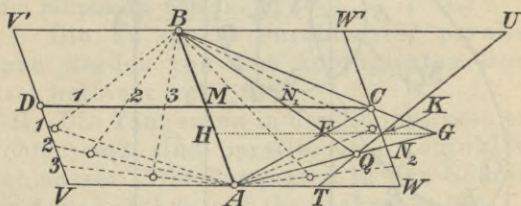


Fig. 30.

Hieraus folgt aber unmittelbar, daß die als **perspektives** Bild des Kreises definierte Ellipse übereinstimmt mit der in I, 15 als **affines** Bild des Kreises definierten gleichnamigen Kurve. Es gelten mithin alle früher (I, 15—27) abgeleiteten Haupteigenschaften und Konstruktionen unverändert. Dort

*) Der Index 0 ist fortan bei allen auf die Ellipse bezüglichen Bezeichnungen fortgelassen.

ist auch gezeigt, daß die Ellipse Achsen besitzt, und ihre Konstruktion angegeben.

Hier sollen nur einige früher nicht erwähnte Eigenschaften abgeleitet werden.

47. Bezeichnet man in der Konstruktion des vorigen Paragraphen den Schnittpunkt von AG und der Tangente in C mit N_2 und von CD und BF mit N_1 (Fig. 30), ferner die Schnittpunkte der Ellipsentangente in Q und der Tangenten in A und B mit T und U , so ist

$$\triangle BGA \sim \triangle CGN_2,$$

also

$$AB : N_2 C = HG : KG = HG : \frac{1}{2} FG$$

(nach § 37, II); und da $GH \parallel CD$, so folgt weiter

$$HG : FG = MC : N_1 C,$$

also auch

$$AB : N_2 C = 2 \cdot MC : N_1 C$$

$$CW : CN_2 = CM : CN_1.$$

Ist nun $CN_1 = \frac{1}{n} \cdot CM$, wo n irgend eine positive Zahl ist, so ist

$$CN_2 = \frac{1}{n} CW.$$

Hiermit hat man folgende Ellipsenkonstruktion aus zwei konjugierten Durchmessern $2a_1$, $2b_1$ gefunden:

Man zeichnet das Parallelogramm, das die Tangenten in den Endpunkten beider Durchmesser bilden, schneidet dann DM und DV (bzw. CM und CW) durch eine Parallele zu der Diagonale VW' (bzw. $V'W$) und verbindet ihren Schnittpunkt auf DC mit B , den auf DV (bzw. CW) mit A ; der Punkt, in dem sich diese beiden Geraden schneiden, ist ein Punkt der gesuchten Ellipse.

In Figur 30 ist die Konstruktion in der Weise ausgeführt, daß $DM=b_1$, $DV=a_1$ und $CM=b_1$, $CW=a_1$ in dieselbe Anzahl (4) gleicher Teile geteilt sind. Will man auch für die obere Hälfte des Parallelogramms Ellipsenpunkte konstruieren, so hat man die Teilpunkte auf DC mit A und diejenigen auf DV' bzw. CW' mit B zu verbinden.

48. Aus der Figur 30 läßt sich noch ein weiterer Satz über die Ellipse ableiten (Fig. 31). Die Gerade QK ist (nach 37, II) die Ellipsentangente in Q ; es ist also $VTUV'$ ein Tangentenvierseit, dessen Berührungs-

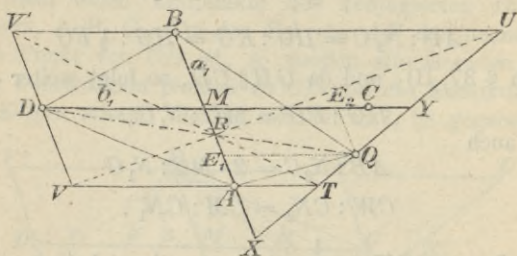


Fig. 31.

punkte die Ecken des Sehnenvierecks $AQBD$ sind. Der Diagonalepunkt $R = DQ \times AB$ des letzteren muß nach dem letzten Satze in § 39 auf den Diagonalen VU und $V'T$ des Tangentenvierseits liegen. Folglich ist

$$\triangle RBU \sim \triangle RAV$$

und

$$\triangle RAT \sim \triangle RBV',$$

mithin

$$\overline{BU} : \overline{VA} = \overline{BR} : \overline{RA},$$

$$\overline{AT} : \overline{V'B} = \overline{RA} : \overline{BR}$$

und also $\overline{BU} \cdot \overline{AT} = \overline{VA} \cdot \overline{V'B} = \overline{DM}^2 = b_1^2$:

Das Produkt der von den Berührungspunkten aus gemessenen Strecken, die auf zwei parallelen Tangenten einer Ellipse von einer beweglichen dritten Tangente abgeschnitten werden, ist konstant und zwar gleich dem Quadrate des den beiden festen Tangenten parallelen Ellipsenhalmessers.

Man kann diesen Satz benutzen, um die Gleichung der Ellipse bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen abzuleiten.

49. Es sollen noch die Abschnitte berechnet werden, die eine Tangente der Ellipse auf zwei konjugierten Durchmessern abschneidet.

Zieht man in der Figur 31 durch den Berührungspunkt Q der Tangente XY noch die Parallelen QE_1 und QE_2 zu den konjugierten Durchmessern, so ist (nach Satz III) X der Pol von QE_1 und Y derjenige von QE_2 in bezug auf die Ellipse. Folglich wird der Durchmesser AB durch die Punkte X und E_1 harmonisch geteilt, d. h.

$$\overline{AX} : \overline{BX} = \overline{E_1A} : \overline{BE_1}$$

oder, da

$$\overline{BM} = \overline{MA}$$

ist,

$$\begin{aligned} & (\overline{MX} - \overline{MA}) : (\overline{MX} + \overline{MA}) \\ &= (\overline{MA} - \overline{ME_1}) : (\overline{MA} + \overline{ME_1}), \end{aligned}$$

woraus der gesuchte Abschnitt \overline{MX} folgt:

$$\overline{MX} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{ME_1}} = \frac{a_1^2}{\overline{ME_1}}.$$

In gleicher Weise findet man

$$\overline{MY} = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{ME}_2} = \frac{b_1^2}{E_1 Q}.$$

50. Umschreibt man einer Ellipse k (Fig. 32) ein beliebiges Tangentenparallelogramm $EFGH$, so sind seine Diagonalen, da sie (nach § 39) harmonische Polaren und zugleich Durchmesser sind, konjugierte Durchmesser. In ihren unendlich fern liegenden Polen schneiden sich aber die Gegenseiten des einbeschriebenen Sehnenvierecks $ABCD$, die daher jenen Durchmessern parallel sind. Da aber jedem Tangentenparallelogramm ein Sehnenparallelogramm einbeschrieben werden kann und umgekehrt, so gilt allgemein:

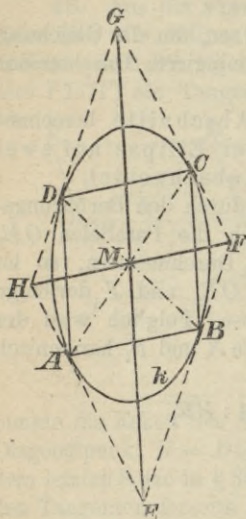


Fig. 32.

Die Diagonalen eines beliebigen Tangentenparallelogramms einer Ellipse sind konjugierte Durchmesser; die Seiten eines Sehnenparallelo-

grammes sind konjugierten Durchmessern parallel und seine Diagonalen schneiden sich im Mittelpunkte der Ellipse.

51. Zum Schlusse sollen noch zwei Sätze abgeleitet werden, deren erster sich am einfachsten ergibt, wenn man die Ellipse wieder als senkrechte Projektion eines Kreises auffaßt und dabei den folgenden Hilfssatz benutzt.

Hilfssatz. Der Flächeninhalt J' der senkrechten Projektion eines Dreiecks auf eine Ebene Π ist gleich dem Flächeninhalte J des gegebenen Dreiecks multipliziert mit $\cos \varepsilon$, wo ε den Neigungswinkel der Dreiecksebene gegen die Projektionsebene bezeichnet.

Beweis. (Fig. 33.) Durch eine Ecke des gegebenen Dreiecks ABC , z. B. B , zieht man in der Dreiecksebene die Parallele BD

zuder Projektionsebene Π und fällt von den beiden andern Ecken A und C die Lote AE und CF auf BD . Dann ist die Projektion $B'D'$ parallel und gleich BD , und es sind $A'E'$ und $C'F'$ ebenfalls senkrecht zu $B'D'$ (I, 64). Die Neigungswinkel zwischen den Loten AE , CF und

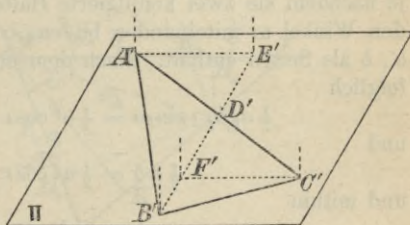
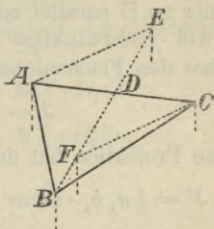


Fig. 33.

ihren Projektionen sind daher gleich ε . Folglich ist

$$A'E' = AE \cdot \cos \varepsilon, \quad C'F' = CF \cdot \cos \varepsilon$$

und

$$\begin{aligned} J' &= \frac{1}{2} B'D' \cdot \{A'E' + C'F'\} \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot \{AE + CF\} \cdot \cos \varepsilon \\ &= J \cdot \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Projiziert man nun einen Kreis vom Radius a auf eine Ebene Π , deren Neigungswinkel ε gegen die Kreisebene durch $\cos \varepsilon = \frac{b}{a}$ bestimmt ist, so sind bekanntlich (I, 16) die Projektionen je zweier zueinander senkrechter Kreisdurchmesser zwei konjugierte Ellipsendurchmesser; die beiden zueinander senkrechten Kreisdurchmesser, deren einer zu Π parallel ist, ergeben die Achsen. Jedes durch zwei rechtwinklige Kreishalbmesser bestimmte Dreieck hat den Flächeninhalt

$$J = \frac{1}{2} a^2 .$$

Seine Projektion hat den Flächeninhalt

$$J' = \frac{1}{2} a_1 b_1 \cdot \sin \omega , \quad \text{bzw.} \quad J' = \frac{1}{2} a b ,$$

je nachdem sie zwei konjugierte Halbmesser a_1, b_1 , die den Winkel ω miteinander bilden, oder die Halbachsen a, b als Seiten enthält. Nach dem obigen Hilfssatze ist folglich

$$\frac{1}{2} a_1 b_1 \cdot \sin \omega = \frac{1}{2} a^2 \cos \varepsilon$$

und

$$\frac{1}{2} a b = \frac{1}{2} a^2 \cos \varepsilon$$

und mithin

$$a b = a_1 b_1 \sin \omega ,$$

d. h.: Verbindet man die Endpunkte zweier beliebiger konjugierter Halbmesser einer Ellipse, so entsteht ein Dreieck von konstantem Flächeninhalte.

52. Mit Hilfe dieses Satzes und der für die Durchmesserabschnitte einer Tangente in § 49 gefundenen Werte läßt sich leicht noch ein Satz über das Produkt der beiden Strecken einer Tangente zwischen ihrem Berührungs-

punkte und ihren Schnittpunkten mit zwei beliebigen konjugierten Durchmessern ableiten.

Sind (Fig. 34) $MA = a_1$, $MC = b_1$ zwei konjugierte Halbmesser, XY die Tangente in dem Ellipsenpunkte Q und zieht man

$$QE_1 \parallel b_1, \quad QE_2 \parallel a_1$$

$$QH_1 \perp a_1, \quad QH_2 \perp b_1,$$

so ist der doppelte Flächeninhalt der Dreiecke XQM und QYM gleich

$$XQ \cdot KM = MX \cdot H_1Q$$

und

$$QY \cdot KM = MY \cdot H_2Q.$$

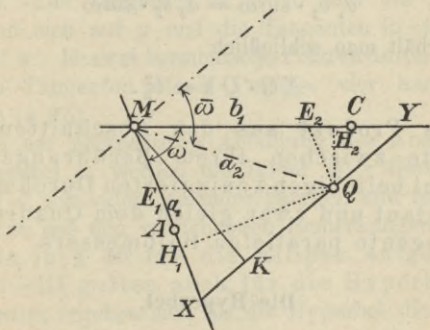


Fig. 34.

Man setze noch $KM = d$, $MQ = a_2$, den zu MQ konjugierten Halbmesser, der parallel zur Tangente XY ist, gleich b_2 , und die von a_1 und b_1 , bzw. a_2 und b_2 eingeschlossenen spitzen Winkel gleich ω , bzw. $\bar{\omega}$. Setzt man ferner für MX und MY die in § 49 gefundenen Werte ein, wobei jetzt nur die Längen in Betracht ge-

zogen zu werden brauchen, so liefern die obigen Gleichungen:

$$XQ \cdot d = \frac{a_1^2}{ME_1} \cdot ME_2 \sin \omega ,$$

$$QY \cdot d = \frac{b_1^2}{ME_2} \cdot ME_1 \sin \omega ,$$

folglich ist

$$XQ \cdot QY \cdot d^2 = a_1^2 b_1^2 \cdot \sin^2 \omega .$$

Da nun

$$d = a_2 \cdot \sin \bar{\omega}$$

und nach dem Satze des vorigen Paragraphen

$$a_1 b_1 \cdot \sin \omega = a_2 b_2 \cdot \sin \bar{\omega}$$

ist, so erhält man schließlich

$$XQ \cdot QY = b_2^2 .$$

Das Produkt aus den Abschnitten einer Tangente zwischen ihrem Berührungspunkte und zwei beliebigen konjugierten Durchmessern ist konstant und zwar gleich dem Quadrate des der Tangente parallelen Halbmessers.

Die Hyperbel.

53. Bei einer Perspektive, die aus einem Kreise k eine Hyperbel k_0 entstehen läßt, liegt der Pol M der Verschwindungslinie e^v außerhalb des Kreises, da e^v den Kreis schneidet. Der Mittelpunkt M_0 der Hyperbel liegt daher außerhalb der Hyperbel. Die von M an den Kreis k gelegten Tangenten berühren ihn in seinen Schnittpunkten mit e^v ; ihre Bilder geben also die Asymptoten der Hyperbel, die sich in ihrem

Mittelpunkte schneiden; in jeder Asymptote liegen (vgl. § 35, Schluß) zwei konjugierte Durchmesser vereinigt.

Um für den Kreis k irgend zwei harmonische Polaren durch M zu erhalten, braucht man nur*) zwei beliebige Sekanten AB und CD durch M zu ziehen; die vier Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte mit dem Kreise k schneiden sich paarweise in zwei Punkten Y und Z auf der Polare e^p von M . Dann sind MY und MZ , von denen die eine den Kreis k schneidet, die andere ihn nicht schneidet, harmonische Polaren. Jede Sehne durch Y oder Z wird von Y und y bzw. Z und z harmonisch geteilt. Die Tangenten in den Schnittpunkten von y und z mit k schneiden sich in den Polen Y und Z dieser Geraden. Die Tangenten in A, C und die in B, D schneiden sich auf y und die Tangenten in A, D und B, C auf z . Je zwei harmonische Polaren durch M bilden mit den Tangenten dieses Punktes vier harmonische Strahlen (§ 35).

Bei der perspektiven Abbildung des Kreises k in die Hyperbel k_0 werden die Bilder aller Geraden, die sich auf e^p schneiden, einander parallel, und folglich erkennt man aus den vorstehenden Bemerkungen:

Die in § 45 für die Ellipse aufgestellten Sätze I—III gelten auch für die Hyperbel.

Ferner ergeben sich für die Hyperbel die weiteren Sätze:

IV. Je zwei konjugierte Durchmesser teilen die von den Asymptoten gebildeten Winkel harmonisch.

Aus diesem Satze folgt sofort auf Grund des Satzes am Ende von § 6:

*) Vgl. Figur 25, in der man sich jetzt M statt X , e^p statt x gesetzt denke.

V. Die Hyperbel besitzt, wie die Ellipse, zwei Achsen, und diese sind die Halbierungslinien der von den Asymptoten gebildeten Winkel.

In Verbindung mit Satz I folgt, daß die Achsen Symmetrielinien für die Hyperbel sind. Man braucht also nur einen Hyperbelquadranten genau zu zeichnen und kann dann die anderen durch bloßes Umklappen um die Achsen erhalten.

Da, wie oben bemerkt, von zwei harmonischen Polaren durch M nur die eine den Kreis schneidet, so folgt:

VI. Von zwei konjugierten Durchmessern schneidet nur der eine die Hyperbel, der andere nicht.

In den Endpunkten des ersteren Durchmessers sind also Hyperbeltangenten vorhanden, die nach § 45, II parallel zu dem konjugierten Durchmesser sind.

Die Hyperbel hat also nur zwei Scheitel, während die Ellipse deren vier hat (vgl. I, 16). Die Hyperbelachse, auf welcher diese Scheitel liegen, heißt Hauptachse, die andere Nebenachse. In gleicher Weise sollen zwei konjugierte Durchmesser als Haupt- und Nebendurchmesser unterschieden werden.

In Figur 35 sind als harmonische Polaren x und x wieder die zu e^v senkrechte Sekante und die (in der Figur nicht gezeichnete) Parallele zu e^v gewählt und die Bilder P_0, R_0 der Schnittpunkte P, R der ersteren mit k konstruiert. Ferner sind die Asymptoten u_0, v_0 konstruiert, die durch M_0 und die Schnittpunkte der Kreistangenten u und v mit der Achse e gehen müssen. Die beiden Asymptoten teilen die Ebene in vier Winkel, von denen nur zwei, sich als Scheitelwinkel gegenüberliegende die Hyperbel enthalten. Die Hyperbel besteht daher aus zwei Ästen oder Zweigen, die im End-

lichen nicht zusammenhängen; beide nähern sich den Asymptoten zwar unbegrenzt an, erreichen sie aber nicht im Endlichen.

Ferner ist in der Figur die Halbierungslinie a_0 des Asymptotenwinkels gezeichnet, welche die Hauptachse

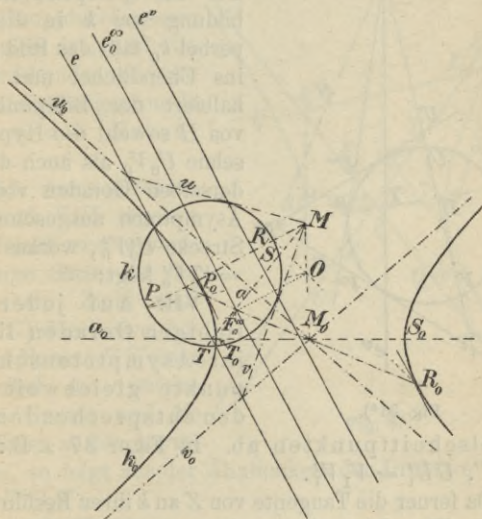


Fig. 35.

der Hyperbel enthält. Diese Halbierungslinie ist das perspektive Bild der Verbindungslinie a von M mit dem Schnittpunkte von a_0 und e . Die Bilder der Schnittpunkte S, T von a und k ergeben die Scheitel S_0, T_0 der Hyperbel.

54. Zieht man (Fig. 36) durch irgend einen Punkt Z auf e^v eine beliebige Gerade, die den Kreis k in U, V ,

die Tangenten u, v in U', V' und die zu Z gehörige Polare z in H schneidet, so ist, da die Strahlen u, v, y, z vier harmonische Strahlen sind, $(U'V'ZH) = -1$

und, da z die Polare von Z ist, auch $(UVZH) = -1$. Bei der perspektiven Abbildung von k in die Hyperbel k_0 fällt das Bild von Z ins Unendliche, und daher halbiert der Bildpunkt H_0 von H sowohl die Hyperbelsehne U_0V_0 als auch die auf derselben Geraden von den Asymptoten ausgeschnittene Strecke $U'_0V'_0$, woraus $U_0U'_0 = V_0V'_0$ folgt:

VII. Auf jeder beliebigen Geraden liegen ihre Asymptotenschnittpunkte gleichweit von den entsprechenden Hyperbelschnittpunkten ab. In Figur 37 z. B.: $UU' = VV', UU'_1 = V_1V'_1$.

Da ferner die Tangente von Z an k ihren Berührungspunkt in $W = k \times z$ hat, so ist auch $(U''V''ZW) = -1$ und daher:

VIII. Der Berührungspunkt jeder beliebigen Hyperbeltangente halbiert die von den Asym-

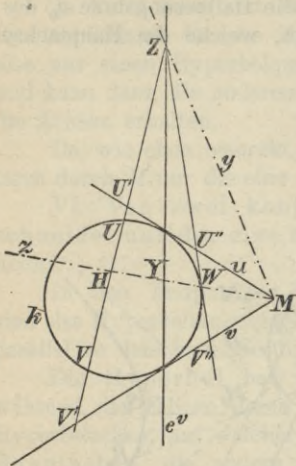


Fig. 36*).

*) Figur 36 ist als Ergänzung von Figur 35 zu betrachten; die entsprechenden Hyperbelpunkte sind der besseren Übersichtlichkeit wegen in Figur 36 nicht eingetragen; man findet sie in Figur 37, wo aber, wie weiterhin bei allen auf die Hyperbel bezüglichen Bezeichnungen, der Index 0 fortgelassen ist.

ptoten ausgeschnittene Strecke derselben. In Figur 37 z. B.: $T_1V = VT_2$.

Es mag die zwischen den Asymptoten gelegene Strecke einer Tangente bezeichnet werden als Länge des Nebendurchmessers, der dem nach dem Berührungspunkte gehenden Hauptdurchmesser konjugiert ist, und die entsprechende Strecke der Scheiteltangenten als Länge der Nebenachse.

55. Aus den Sätzen VII und VIII ergeben sich leicht zwei weitere wichtige Sätze für die Hyperbel. Zieht man (Fig. 37) durch zwei beliebige Punkte UV einer Hyperbel die verbindende Gerade und die Parallelen zu den Asymptoten, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $V'P_2U$ und $V'Q_2V$:

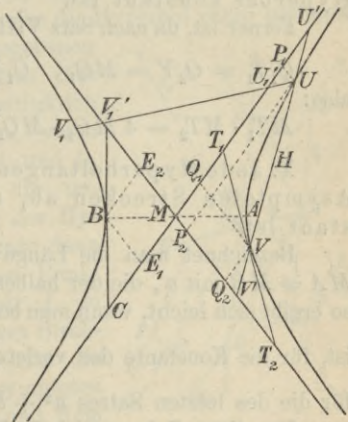


Fig. 37.

$$P_2V' : Q_2V' = P_2U : Q_2V = MP_1 : MQ_1.$$

Mit Hilfe von Satz VII schließt man, daß:

$$\triangle VQ_2V' \cong \triangle U'P_1U, \text{ also } Q_2V' = P_1U = MP_2$$

und $P_2V' = P_2Q_2 + Q_2V' = MQ_2$ ist. Die vorstehende Proportion liefert daher:

$$(1) \quad MP_1 \cdot MP_2 = MQ_1 \cdot MQ_2.$$

Da U und V beliebige Punkte der Hyperbel sind, so gilt der Satz:

IX. Die Parallelen zu den Asymptoten durch einen Hyperbelpunkt schneiden auf ihnen Strecken ab, deren Produkt für alle Punkte der Hyperbel konstant ist.

Ferner ist, da nach Satz VIII $\triangle Q_1 T_1 V \cong \triangle Q_2 V T_2$,

$$Q_1 T_1 = Q_2 V = M Q_1, \quad Q_1 V = Q_2 T_2 = M Q_2,$$

also:

$$M T_1 \cdot M T_2 = 4 M Q_1 \cdot M Q_2 = 4 M P_1 \cdot M P_2.$$

X. Jede Hyperbeltangente schneidet auf den Asymptoten Strecken ab, deren Produkt konstant ist.

Bezeichnet man die Länge der halben Hauptachse $MA = MB$ mit a , die der halben Nebenachse BC mit b , so ergibt sich leicht, wenn man beachtet, daß $ME_1 = ME_2$

ist, für die Konstante des vorletzten Satzes $\frac{a^2 + b^2}{4}$ und

für die des letzten Satzes $a^2 + b^2$.

Dem Satze X kann auch die Fassung gegeben werden:

Die Hyperbeltangenten bilden mit den Asymptoten Dreiecke von konstantem Flächeninhalte.

Bezeichnen a_1, b_1 die halben Längen zweier konjugierter Durchmesser (z. B. MV und VT_1) und ω den von ihnen eingeschlossenen Winkel, so ist mithin

$$ab = a_1 b_1 \cdot \sin \omega.$$

56. Eine Hyperbel ist völlig bestimmt durch irgend zwei (ihrer Länge und Lage nach gegebene) konjugierte Durchmesser (Fig. 38). Es seien $AB = 2 a_1$ der gegebene Hauptdurchmesser und $CD = 2 b_1$ der kon-

jugierte Nebendurchmesser*). Man ziehe durch A die zu CD parallele Gerade, die Tangente in A ist, und trage von A aus nach beiden Seiten die Länge b_1 ab; dann sind MT_1 und MT_2 die Asymptoten t_1, t_2 der Hyperbel. Mithin sind jetzt drei Punkte der Hyperbel (A und die unendlich fernen Punkte) und die Tangenten in ihnen bekannt. Nach § 41 ist also die Hyperbel völlig bestimmt.

Aus der dort gegebenen allgemeinen Konstruktion läßt sich eine einfache Konstruktion der Hyperbel ableiten, wenn man für die dort mit A_0 und B_0 bezeichneten Punkte die unendlich fernen Punkte der Hyperbel wählt. Nimmt man dann als weiteren gegebenen Punkt (P_0 in § 41) den Punkt A , so entsprechen den früheren Strahlen A_0P_0 und B_0P_0 jetzt die Parallelen zu den Asymptoten durch den Punkt A und dem Punkte L_0 der Mittelpunkt M ;

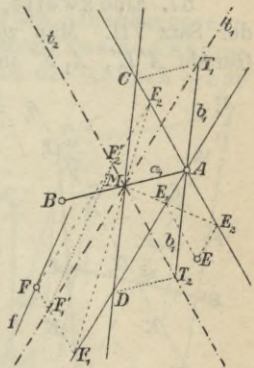


Fig. 38.

ebenso entsprechen den Strahlen A_0G_0 und B_0F_0 Parallelen zu den Asymptoten. Folglich ergibt sich als erste Konstruktion der Hyperbel die folgende.

Durch A zieht man die Parallelen zu den Asymptoten und schneidet diese mit beliebigen Strahlen E_1E_2, F_1F_2 durch M . Hierauf zieht man durch E_1 und E_2, F_1 und F_2 Parallelen zu t_2 und t_1 , die sich in den Hyperbelpunkten E und F schneiden. Will man noch

*) Die Punkte CD sind also nicht Hyperbelpunkte, sondern geben nur die Länge des Nebendurchmessers an.

die Tangente in einem dieser Punkte, z. B. F , konstruieren, so hat man nur durch F die Parallele f zu der Verbindungslinie der Punkte F'_1, F'_2 , in denen F_1F, F_2F die Asymptoten schneiden, zu ziehen; denn $F'_1F'_2$ wird von MF halbiert und also das zwischen t_1 und t_2 gelegene Stück von f durch den Punkt F , folglich ist f Tangente (Satz VIII).

57. Eine zweite, einfachere Konstruktion liefert der Satz VII. Man zieht (Fig. 39) durch A beliebige Gerade $A'E', A_1F'$ und trägt die zwischen A und t_1 gelegenen Strecken $A'A, A_1A$ von den Schnittpunkten der betreffenden Geraden mit t_2 ab: $E'E = A'A, F'F = A_1A$. E und F sind dann Punkte der Hyperbel. — Will man noch die Tangente in F konstruieren, so verfährt man wie oben: $FF'_2 \parallel t_1, FF'_1 \parallel t_2; f \parallel A_1F'_2$.

58. Eine Konstruktion, die zuerst die Tangenten der Hyperbel liefert, folgt aus Satz X. Denkt man sich nämlich (Fig. 39) noch eine beliebige Tangente U_1U_2 gezogen, so ist nach jenem Satze:

$MU_1 : MT_1 = MT_2 : MU_2$, mithin $\triangle U_1MT_2 \sim \triangle T_1MU_2$ und folglich $T_1U_2 \parallel T_2U_1$. Hieraus folgt die dritte Konstruktion:

Man ziehe durch T_1 und T_2 beliebige Parallelen ($T_1U_2 \parallel T_2U_1, T_1V_2 \parallel T_2V_1$); die Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte mit den Asymptoten (U_1U_2, V_1V_2) sind Tangenten der Hyperbel, die von ihnen in den Halbierungspunkten F, E berührt wird.

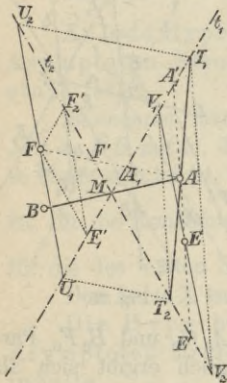


Fig. 39.

Nimmt man umgekehrt CD als Haupt- und AB als Nebendurchmesser, so erhält man eine zweite Hyperbel, die dieselben Asymptoten hat wie die erste, aber in den Nebenwinkeln der Asymptoten liegt. Man bezeichnet zwei solche Hyperbeln, die dieselben Durchmesser haben und in den vier Asymptotenwinkeln liegen, als konjugierte Hyperbeln.

59. Aus zwei konjugierten Durchmessern oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus den Asymptoten und einem Punkte sind die Achsen einer Hyperbel zu bestimmen.

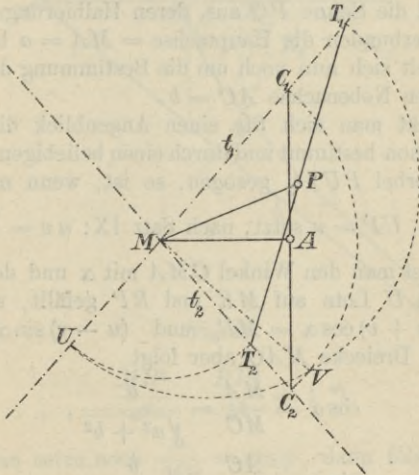


Fig. 40.

Ist $T_1 T_2$ (Fig. 40) die Tangente in dem gegebenen Punkte P und $C_1 C_2$ die gesuchte Scheiteltangente, so muß nach Satz X:

$$MT_1 \cdot MT_2 = MC_1 \cdot MC_2 = MC_1^2$$

sein. Man erhält also für MC_1 die folgende Konstruktion: Man trägt $MT_2 = MU$ auf t_1 ab und konstruiert die mittlere Proportionale MV zu MT_1 und MU , die gleich der gesuchten Länge ist. C_1C_2 ist dann die Nebenachse, $MA(\perp C_1C_2)$ die halbe Hauptachse.

60. Für eine gezeichnet vorliegende Hyperbel sollen die Asymptoten bestimmt werden.

Man zieht (Fig. 41) zwei Paare paralleler Sehnen und erhält in dem Schnittpunkte der Verbindungslinien H_1H_2 und K_1K_2 ihrer Halbierungspunkte den Mittelpunkt M . Ein beliebiger Kreis um M schneidet aus der Hyperbel die Sehne PQ aus, deren Halbierungspunkt R mit M verbunden die Hauptachse $= MA = a$ bestimmt. Es handelt sich nun noch um die Bestimmung der Länge der halben Nebenachse $AC = b$.

Denkt man sich für einen Augenblick die Asymptoten schon bestimmt und durch einen beliebigen Punkt P der Hyperbel $PU \parallel t_2$ gezogen, so ist, wenn man noch

$$MU = u, UP = v \text{ setzt, nach Satz IX: } uv = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Bezeichnet man den Winkel CMA mit α und denkt sich noch von U Lote auf MR und RP gefällt, so erhält man: $(u + v) \cos \alpha = MR$ und $(u - v) \sin \alpha = RP$. Aus dem Dreiecke MAC aber folgt

$$\cos \alpha = \frac{MA}{MC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{MC} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

und mithin gilt für jeden Hyperbelpunkt P :

$$\frac{MR^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{RP^2}{\sin^2 \alpha} = (u + v)^2 - (u - v)^2 = 4uv = a^2 + b^2$$

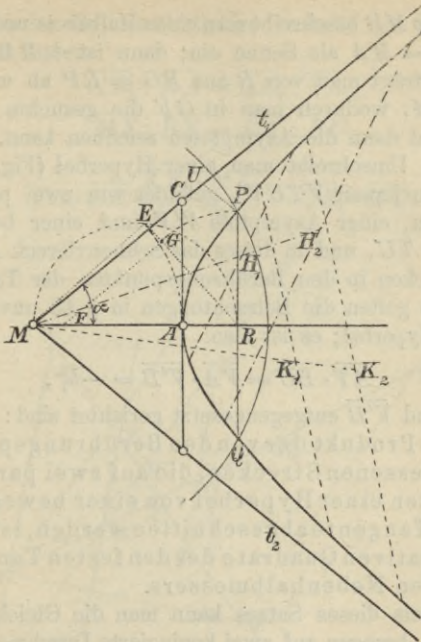


Fig. 41.

oder

$$\frac{MR^2}{a^2} - \frac{RP^2}{b^2} = 1 \text{ *)}.$$

Man setze noch $\frac{a}{MR} = \cos \varphi$, dann folgt aus der letzten Gleichung $b = RP \cdot \cot \varphi$ und damit die weitere Konstruktion:

*) Setzt man $MR = x$, $RP = y$, so hat man damit die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Achsen als Koordinatenachsen.

Über MR beschreibt man einen Halbkreis und trägt in ihn $ME = MA$ als Sehne ein; dann ist $\sphericalangle RME = \varphi$. Auf ER trägt man von R aus $RG = RP$ ab und zieht $GF \parallel EM$, wodurch man in GF die gesuchte Länge b erhält und dann die Asymptoten zeichnen kann.

61. Umschreibt man einer Hyperbel (Fig. 42) ein Tangentenvierseit $VTUV'$, gebildet von zwei parallelen Tangenten, einer Asymptote $V'V$ und einer beliebigen Tangente TU , und in dieses das Sehnenviereck $AQBD$, dessen Ecken in den Berührungspunkten der Tangenten liegen, so gelten die Betrachtungen in § 48 unverändert für die Hyperbel; es ist also

$$\overline{AT} \cdot \overline{BU} = \overline{VA} \cdot \overline{V'B} = -b_1^2,$$

da \overline{VA} und $\overline{V'B}$ entgegengesetzt gerichtet sind:

Das Produkt der von den Berührungspunkten aus gemessenen Strecken, die auf zwei parallelen Tangenten einer Hyperbel von einer beweglichen dritten Tangente abgeschnitten werden, ist gleich dem negativen Quadrate des den festen Tangenten parallelen Nebenhalmmessers.

Mittels dieses Satzes kann man die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser, als Koordinatenachsen ableiten.

Der Abschnitt \overline{MX} (Fig. 42) einer Hyperbeltangente auf einem Hauptdurchmesser $2a_1$ berechnet sich in gleicher Weise wie in § 49 zu

$$\overline{MX} = \frac{a_1^2}{ME_1}.$$

Dagegen versagt das dort angewandte Verfahren bei der Berechnung des Abschnittes \overline{MY} auf dem Nebendurchmesser, da er die Hyperbel nicht schneidet; hierzu benutzt

man vielmehr die vier ähnlichen Dreiecke mit der Spitze in X und findet

$$\overline{XE}_1 : \overline{XA} = \overline{QE}_1 : \overline{TA},$$

$$\overline{MX} : \overline{BX} = \overline{MY} : \overline{BU},$$

folglich

$$\overline{TA} \cdot \overline{BU} \frac{\overline{XE}_1 \cdot \overline{MX}}{\overline{BX} \cdot \overline{XA}} = \overline{QE}_1 \cdot \overline{MY}.$$

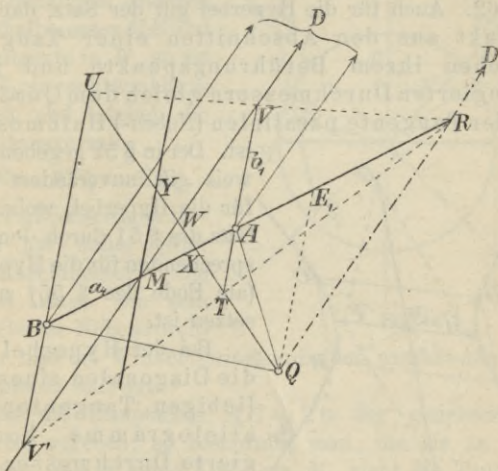


Fig. 42.

Nun ist $\overline{XA} = \overline{MA} - \overline{MX}$, $\overline{BX} = \overline{MA} + \overline{MX}$,
 $\overline{XE}_1 = \overline{ME}_1 - \overline{MX}$, also mit Berücksichtigung des
 Wertes von \overline{MX} :

$$\frac{\overline{XE}_1 \cdot \overline{MX}}{\overline{BX} \cdot \overline{XA}} = \frac{\overline{ME}_1 \cdot \overline{MX} - \overline{MX}^2}{\overline{MA}^2 - \overline{MX}^2} = 1.$$

Da nach dem obigen Satze noch

$$\overline{AT} \cdot \overline{BU} = -\overline{TA} \cdot \overline{BU} = -b_1^2$$

ist, so folgt schließlich

$$\overline{MY} = \frac{b_1^2}{QE_1},$$

welcher Wert, vom Vorzeichen abgesehen, mit dem entsprechenden Werte für die Ellipse (§ 49) übereinstimmt.

62. Auch für die Hyperbel gilt der Satz, daß das Produkt aus den Abschnitten einer Tangente zwischen ihrem Berührungspunkte und zwei konjugierten Durchmessern gleich dem Quadrate des der Tangente parallelen (Neben-) Halbmessers ist.

Der in § 52 gegebene Beweis gilt unverändert auch für die Hyperbel, wobei der Satz des § 51 durch den entsprechenden für die Hyperbel (am Ende des § 55) zu ersetzen ist.

Bei der Hyperbel sind die Diagonalen eines beliebigen Tangentenparallelogramms konjugierte Durchmesser und die Seiten eines Sehnenparallelogramms konjugierten Durchmessern parallel, während sich seine Diagonalen im Mittelpunkte der Hyperbel schneiden (Fig. 43).

Der Beweis ist derselbe wie für den entsprechenden Ellipsensatz (§ 50), da die ihm zugrunde liegenden Sätze für Ellipse und Hyperbel gelten.

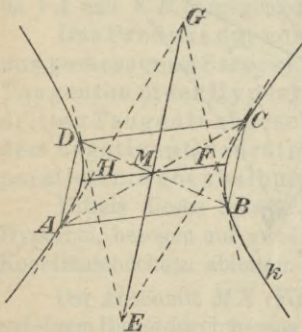


Fig. 43.

63. Wie aus dem Kreise durch senkrechte Projektion sich alle Ellipsen ableiten lassen, so kann man in gleicher Weise alle Hyperbeln aus einer besonderen Hyperbel, der sogenannten gleichseitigen Hyperbel, erhalten. Die gleichseitige Hyperbel ist dadurch ausgezeichnet, daß die Asymptoten aufeinander senkrecht stehen und also Haupt- und Nebenachse die gleiche Länge haben. Zieht man (Fig. 44) einen beliebigen anderen Haupthalbmesser ME und die Tangente in E , so ist E_1ME_2 ein rechtwinkliges Dreieck und folglich die Mitteltransversale

$$ME = EE_1 = EE_2.$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel hat daher jeder Hauptdurchmesser die gleiche Länge wie sein konjugierter Nebendurchmesser und die Winkel zwischen beiden werden von den Asymptoten halbiert.

Ist die Hauptachse $AB = 2a$ der gleichseitigen Hyperbel gegeben, so beschreibt man, um sie zu konstruieren, mit a einen Kreis um M , zieht die Tangente in A und bringt mit dieser einen beliebigen Radius MS zum Schnitte Q ; durch Q zieht man die Parallele zu AB und trägt auf ihr von Q aus die zwischen Q und dem Kreise gelegene Strecke SQ ab, $SQ = QP$. Dann ist P ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel. Denn es ist

$$\begin{aligned} MU &= FU + MF = (RP + MR) \cos 45^\circ, \\ UP &= (RP - MR) \cos 45^\circ, \end{aligned}$$

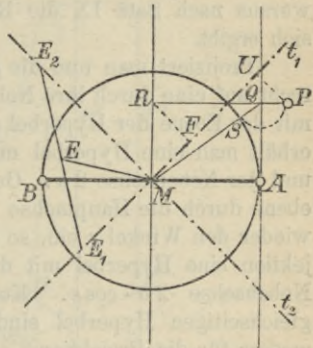


Fig. 44.

also

$$MU \cdot UP = (RP^2 - MR^2) \cos^2 45^\circ.$$

Nun ist $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und nach Konstruktion $RP = MQ$,

also

$$2 \cdot MU \cdot UP = MQ^2 - AQ^2 = MA^2 = a^2,$$

woraus nach Satz IX die Richtigkeit der Konstruktion sich ergibt.

Projiziert man nun die gleichseitige Hyperbel senkrecht auf eine durch ihre Nebenachse gehende Ebene, die mit der Ebene der Hyperbel den Winkel ε einschließt, so erhält man eine Hyperbel mit der Hauptachse $2a \cdot \cos \varepsilon$ und der Nebenachse $2a$. Geht dagegen die Projektionsebene durch die Hauptachse und schließen beide Ebenen wieder den Winkel ε ein, so entsteht als senkrechte Projektion eine Hyperbel mit der Hauptachse $2a$ und der Nebenachse $2a \cdot \cos \varepsilon$. Konjugierte Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel sind auch konjugierte Durchmesser für die Projektion.

Die Parabel.

64. Soll aus einem Kreise durch eine Perspektive eine Parabel entstehen, so muß die Verschwindungslinie e^v den Kreis berühren, und der Berührungspunkt M ist zugleich der Pol von e^v in bezug auf den Kreis k . Die Bilder aller Sehnen durch M sind mithin parallele Gerade. Ihre Richtung findet man leicht (Fig. 45), indem man (nach § 43) das Bild des Durchmessers $MP(\perp e)$ konstruiert ($MP \times e = E$, $F_0^\infty E$ ist das Bild von ME und ist $\parallel OM$ [§ 18]; dem Punkte P entspricht $P_0 = OP \times F_0^\infty E$); das Bild einer anderen Sehne MS ist dann die Parallele zu $F_0^\infty E$ durch den Punkt $(e \times MS)$.

Der Pol N jeder Sehne MS durch M liegt auf e^v , da er der Schnittpunkt der Kreistangente t in S mit e^v ist. Andererseits aber liegt der Pol M von e^v auf jeder Sehne durch M . Mithin ist jede Sehne durch M harmonische Polare zu e^v und daher ihre Bildgerade konjugierter Durchmesser der Parabel zu der unendlich fernen Geraden:

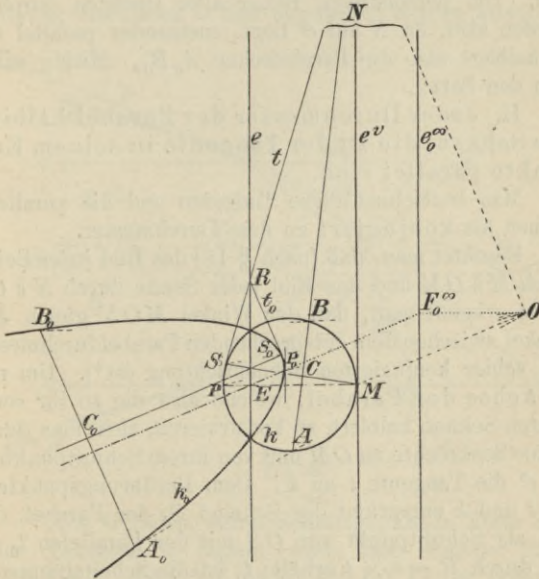


Fig. 45.

I. Die sämtlichen Durchmesser der Parabel sind einander parallel und schneiden die Parabel nur in je einem (im Endlichen gelegenen) Punkte.

Von einem Mittelpunkt (im eigentlichen Sinne) kann man daher bei der Parabel nicht reden, ebensowenig

wie von Sehnen, die zu einem Durchmesser parallel sind. Es bedürfen somit die Sätze I und II in § 45 gewisser Abänderungen.

Zieht man durch den Pol N einer Sehne MS eine beliebige Gerade, so wird die auf ihr von k ausgeschnittene Sehne AB durch $C = MS \times AB$ und N harmonisch geteilt. Die perspektiven Bilder aller Geraden durch N werden aber, da N auf e^v liegt, zueinander parallel und C_0 halbiert also die Parabelsehne A_0B_0 . Mithin erhält man den Satz:

II. Jeder Durchmesser der Parabel halbiert alle Sehnen, die zu der Tangente in seinem Endpunkte parallel sind.

Man bezeichnet diese Tangente und die parallelen Sehnen als konjugiert zu dem Durchmesser.

Beachtet man, daß (nach § 18) das Bild jeder Sehne durch $M \parallel OM$ und das Bild jeder Sehne durch $N \parallel ON$ ist, so erkennt man, daß der Winkel MON gleich dem Winkel zwischen dem entsprechenden Parabeldurchmesser und seiner konjugierten Sehnenrichtung ist*). Um nun die Achse der Parabel, welche also die zu ihr senkrechten Sehnen halbiert, zu konstruieren, zieht man durch O eine Senkrechte zu OM und von ihrem Schnittpunkte N mit e^v die Tangente t an k . Dem Berührungspunkte S von t und k entspricht der Scheitel S_0 der Parabel, den man als Schnittpunkt von OS mit der Parallelen t_0 zu ON durch $R = e \times t$ erhält; t_0 ist die Scheiteltangente. Da für die Parabel die Achse Symmetrielinie ist, so braucht man nur eine Hälfte der Parabel genau zu zeichnen und kann die andere durch Umklappen um die Achse erhalten.

*) In der Figur ist speziell $ON \perp OM$ angenommen.

65. Um weitere Sätze für die Parabel abzuleiten, denke man sich die Figur 25 einer Perspektive unterworfen, deren Verschwindungslinie e^p mit der Tangente a in dem Punkte A zusammenfällt. Figur 46 veranschaulicht das Ergebnis dieser perspektiven Verwandlung; die Bezeichnung ist dieselbe wie in Figur 25, da von der Anfügung des Index 0 hier abgesehen werden konnte.

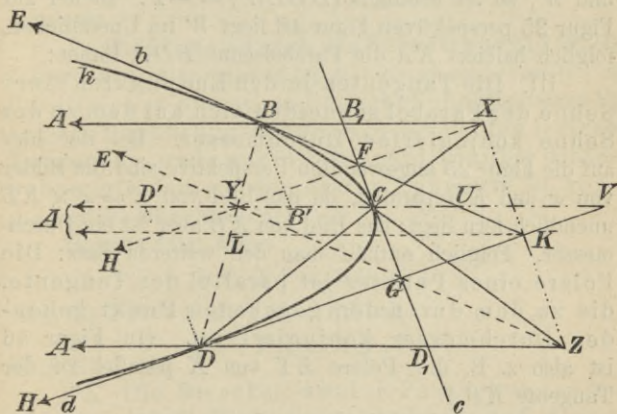


Fig. 46.

Alle Geraden, deren Schnittpunkte in Figur 25 auf der Tangente a liegen, sind hier einander parallel ($FG \parallel XZ$, $BE \parallel YZ \parallel XE$, $DH \parallel XY$); im besonderen sind BA , CA , DA und KA in Figur 46 Durchmesser der Parabel. Da sich in Figur 25 die Geraden XH und ZE in $Y = BD \times AC$ schneiden, so schneidet sich hier die Parallele zu DH durch X mit der Parallelen zu BE durch Z in dem Schnittpunkte Y von BD mit dem Durchmesser durch C . Nach § 24 sind die vier Strahlen,

die in den Diagonalepunkten X, Y, Z des vollständigen Vierecks $ABCD$ zusammentreffen, harmonische Strahlen. Bezeichnet man noch in Figur 25 den Schnittpunkt von BD und a mit W , so wird durch die vier harmonischen Strahlen aus Y die Strecke HE in A und W harmonisch geteilt. Projiziert man diese vier Punkte von K aus auf BD in die Punkte D, B, L (in Fig. 25 nicht gezeichnet) und W , so ist ebenfalls $(DBLW) = -1$. In der zur Figur 25 perspektiven Figur 46 liegt W im Unendlichen, folglich halbiert KA die Parabelsehne BD . Daher:

III. Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne der Parabel schneiden sich auf dem zu der Sehne konjugierten Durchmesser. Bei der hier auf die Figur 25 angewandten Perspektive sind die Bilder von x und KB parallel, da das Bild von $E = x \times KB$ unendlich fern liegt; das Bild von XB aber ist ein Durchmesser. Folglich enthält man den weiteren Satz: Die Polare eines Punktes ist parallel der Tangente, die zu dem durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmesser konjugiert ist. (In Figur 46 ist also z. B. die Polare ZY von X parallel zu der Tangente KB .)

Umgekehrt erhält man einen Durchmesser der Parabel, wenn man den Schnittpunkt zweier Tangenten mit dem Halbierungspunkte ihrer Berührungsehne verbindet.

Die vier harmonischen Strahlen in X (Fig. 25) schneiden die Tangente c in den vier harmonischen Punkten C, B_1, F, J . Da das Bild von J im Unendlichen liegt, so halbiert F die Strecke B_1C . Mithin ist $\triangle FCU \cong \triangle FB_1B$, und folglich $BF = FU$, $BB_1 = B'C = CU$.

IV. Die Strecke einer beliebigen Parabeltangente zwischen dem Berührungspunkte und

dem Schnittpunkte mit irgend einem Durchmesser wird von der Tangente in dem Endpunkte des letzteren halbiert.

Der Endpunkt jedes Durchmessers halbiert die Strecke, welche von einer konjugierten Sehne und den Tangenten in ihren Endpunkten auf ihm abgeschnitten wird.

Aus der Figur 46 ist unmittelbar der folgende Satz abzulesen:

V. Zieht man durch die Schnittpunkte (F, G) einer Parabeltangente (e) mit zwei anderen (b, d) Parallelen zu diesen, so liegt ihr Schnittpunkt (Y) auf der Berührungssehne (BD) der beiden letzten Tangenten, und zwar in dem Schnittpunkte dieser Sehne mit dem zu der ersten Tangente (e) konjugierten Durchmesser.

Hieraus folgt sofort

$$BF : FY = YG : GD$$

oder, da $YF = GK$, $YG = FK$ ist,

$$BF : FK = KG : GD,$$

folglich:

VI. Die Strecken zweier Parabeltangenten zwischen den Berührungspunkten und ihrem Schnittpunkte werden von jeder dritten Tangente in gleichem Verhältnisse geteilt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke B_1XC und D_1DC , B_1BC und D_1ZC folgt ferner

$$B_1C : CD_1 = B_1X : DD_1$$

und

$$B_1C : CD_1 = BB_1 : D_1Z,$$

also

$$\begin{aligned} B_1C^2 : CD_1^2 &= BB_1 \cdot B_1X : DD_1 \cdot D_1Z \\ &= B_1B : D_1D = CB' : CD', \end{aligned}$$

da $B_1X = D_1Z$ ist.

Bezeichnet man die Strecken, die auf einem festen, aber willkürlich gewählten Durchmesser und seiner konjugierten Tangente von Parallelen durch einen Parabelpunkt abgeschnitten werden, als Abszisse und Ordinate dieses Punktes, so liefert die vorstehende Proportion den Satz:

VII. Für jeden Punkt der Parabel ist das Verhältniß des Quadrates der Ordinate zu der Abszisse konstant*).

Der Wert dieser Konstanten hängt ab von der Wahl des Durchmessers. Sie werde für den Fall, daß man

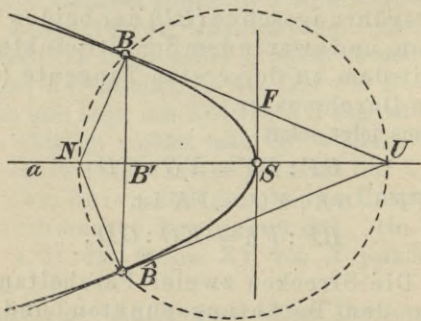


Fig. 47.

Abszisse und Ordinate auf die Achse und die Scheiteltangente bezieht, mit $2p$ bezeichnet. Dann ist also (Fig. 47) für einen beliebigen Punkt B der Parabel $B'B^2 : SB' = 2p$.

*) Bezeichnet man die Abszisse mit x , die Ordinate mit y und die Konstante mit 2κ , so gibt der Satz die Gleichung der Parabel: $y^2 = 2\kappa \cdot x$.

Zieht man in B die Tangente bis zum Schnitte mit der Achse und die Normale BN , so folgt aus den ähnlichen Dreiecken $UB'B$ und $BB'N$:

$$UB' : B'B = B'B : B'N,$$

und, da (nach Satz IV) $US = SB'$ ist,

$$B'B^2 : 2 SB' = B'N,$$

also $B'N = p$.

Man bezeichnet $B'N$, die Projektion der Normale auf die Achse, als Subnormale und p als Parameter der Parabel:

VIII. Alle Subnormalen einer Parabel haben dieselbe Länge wie ihr Parameter.

66. Eine Parabel ist völlig bestimmt durch zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte.

Diese Behauptung widerspricht scheinbar dem allgemeinen Satze des § 41, nach dem drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben nötig sind, um einen Kegelschnitt zu bestimmen. Der dritte Punkt ist aber hier durch die Forderung gegeben, daß der Kegelschnitt eine Parabel sein soll. Denn zieht man (vgl. Fig. 46 oder 48^a) die Gerade durch den Mittelpunkt der Berührungsehne L und den Schnittpunkt K der gegebenen Tangenten, so ist sie (nach Satz III) ein Durchmesser der Parabel, womit ihr unendlich ferner Punkt bestimmt ist.

Die Figur 46 liefert unmittelbar zwei Konstruktionen der Parabel aus den gegebenen Stücken und damit die Richtigkeit der Behauptung.

Erste Konstruktion (Fig. 48^a). Sind die Punkte B, D einer Parabel und die Tangenten BK, DK gegeben, so bestimme man zuerst, wie oben angegeben, den Durchmesser KL , zu dem die Sehne BD konjugiert ist. Der Mittelpunkt von LK ist der Schnitt dieses Durchmessers

mit der Parabel. Wählt man dann auf BK einen Punkt F willkürlich, zieht $FY \parallel KD$ und durch den Schnittpunkt Y dieser Parallelen mit BD die Gerade $YG \parallel BK$, so verhält sich $BF : FK = BY : YD = KG : GD$, also ist (nach Satz VI und V) FG eine Tangente der Parabel, deren Berührungspunkt C gefunden wird als Schnittpunkt von FG mit dem Durchmesser durch Y .

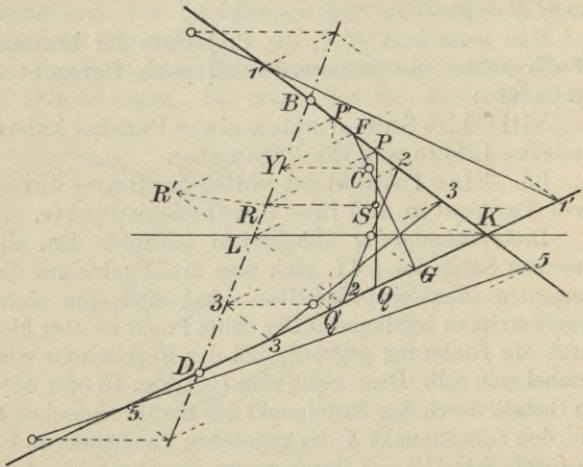


Fig. 48^a.

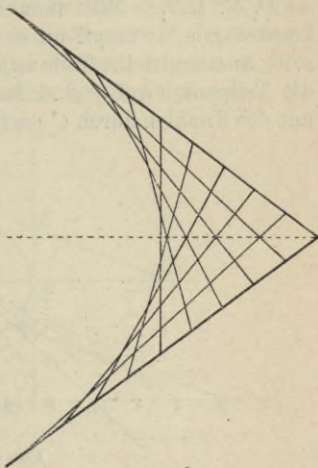
Um noch die Achse der Parabel zu finden, zieht man eine beliebige Senkrechte $P'Q'$ zu der Durchmesser-richtung. Den Schnittpunkt R' der durch P' und Q' zu den gegebenen Tangenten gezogenen Parallelen verbindet man mit K und erhält in $R = R'K \times BD$ einen Punkt der Achse. Die Parallelen durch R zu den gegebenen Tangenten bestimmen auf ihnen die Punkte P und Q der Scheiteltangente.

Die Konstruktion gestaltet sich besonders bequem, wenn man BK , KD , BD in dieselbe Anzahl gleicher Teile teilt; die Verbindungslinien der entsprechenden Teilpunkte auf den gegebenen Tangenten liefern Tangenten der Parabel, deren Berührungspunkte auf ihnen von den Durchmessern durch die entsprechenden Teilpunkte der Strecke BD ausgeschnitten werden. — Auf jeder Geraden kann man auch die betreffende Teilstrecke über die Endpunkte hinaus abtragen, um weitere Tangenten der Parabel zu erhalten, wie es Figur 48^a zeigt ($55, I'I'$).

Sind B und D gleichweit von K entfernt, so ist KL die Achse der Parabel und die Figur wird symmetrisch für diese (Fig. 48^b).

67. (Fig. 49.) Ist eine Parabeltangente c nebst ihrem Berührungspunkte C , ein zweiter Parabelpunkt D und die Durchmesserrihtung DD_1 gegeben, so empfiehlt sich die folgende zweite Konstruktion, die unmittelbar aus der Figur 46 und den an diese geknüpften Untersuchungen sich ergibt.

Man zieht durch C einen beliebigen Strahl CZ und durch seinen Schnittpunkt Z mit DD_1 eine Parallele zur Tangente c , welche die Sehne DC in X schneidet. Der Durchmesser durch X schneidet den Strahl CZ in dem

Fig. 48^b.

Punkte B der Parabel. Bezeichnet B_1 wieder den Schnittpunkt von BX mit der Tangente c , so ist $B_1C : CD_1 = B_1X : DD_1$ und, da $B_1X = D_1Z$ ist, auch $B_1C : CD_1 = D_1Z : DD_1$. Will man also mehrere Parabelpunkte konstruieren, so empfiehlt es sich, DD_1 und D_1C in dieselbe Anzahl gleicher Teile zu teilen; die Durchmesser durch die Teilpunkte auf c sind dann zum Schnitte zu bringen mit den Strahlen durch C nach den Teilpunkten auf DD_1 .

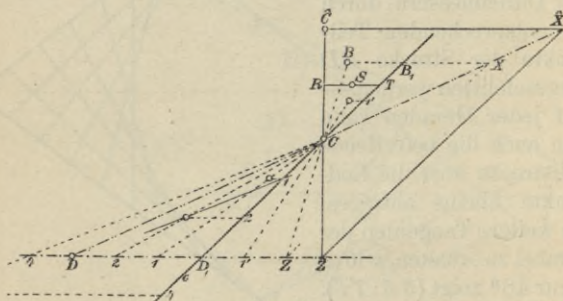


Fig. 49.

Um die Achse und den Scheitel zu erhalten, hat man nach dem obigen Verfahren nur den Parabelpunkt \hat{C} zu bestimmen, der zu C symmetrisch in bezug auf die Achse liegt ($C\hat{Z} \perp DD_1$, $\hat{Z}\hat{X} \parallel c$, $\hat{X} = \hat{Z}\hat{X} \times DC$, $\hat{X}\hat{C} \parallel DD_1$, $\hat{C} = \hat{X}\hat{C} \times C\hat{Z}$). Die Parallele zu DD_1 durch die Mitte R von $C\hat{C}$ ist die Achse; halbiert man noch die von R und der Tangente c begrenzte Strecke RT der Achse, so erhält man den Scheitel S der Parabel.

Die Tangente b in B muß B mit dem Halbierungspunkte von CB_1 verbinden (nach Satz IV); es kann also auf Grund dieser Bemerkung die Tangente für jeden Parabelpunkt leicht konstruiert werden.

68. Eine Parabel ist der Gestalt nach bestimmt durch Angabe des Parameters p .

Man nehme einen beliebigen Strahl a als Achse und seinen Endpunkt S als Scheitel der Parabel an (vgl. Fig. 47). Um die senkrecht zu irgend einem Punkte B' der Achse gelegenen Parabelpunkte zu konstruieren, trage man die Strecke SB' auf der Verlängerung des Strahles a über S

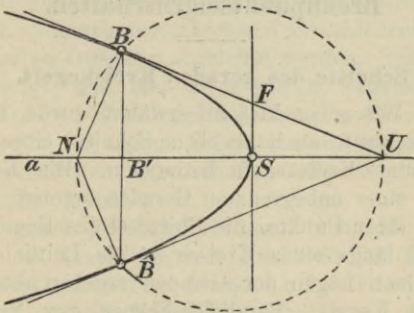


Fig. 47.

hinaus bis U und von B' aus die gegebene Länge p bis N ab. Der Kreis über UN als Durchmesser schneidet die Senkrechte zu a durch B' in den beiden Punkten B und \hat{B} der Parabel. UB , $U\hat{B}$ sind die Tangenten und BN , $\hat{B}N$ die Normalen der Parabel in diesen beiden Punkten.

Liegt eine Parabel genau gezeichnet vor, so ermittelt man ihre Durchmesserriechung als Verbindungsline der Mitten zweier beliebiger paralleler Sehnen; der Halbierungspunkt einer zur Durchmesserriechung senkrechten Sehne bestimmt dann einen Punkt der Achse.

IV. Abschnitt.

Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte: Brennpunkteigenschaften.

Schnitte des geraden Kreiskegels.

69. Wie schon in § 38 erwähnt wurde, kann man die Kegelschnitte auch als ebene Schnitte eines schiefen oder geraden Kreiskegels betrachten. Ein Kreiskegel wird von einer unbegrenzten Geraden erzeugt, die sich um einen ihrer Punkte, die Spitze O des Kegels, dreht und dabei längs eines Kreises k_1 als Leitlinie gleitet. Die einzelnen Lagen der Geraden ergeben die Mantellinien des Kegels. Parallele Ebenen zur Ebene des Kreises k_1 schneiden den Kegel ebenfalls in Kreisen (§ 14, 1).

Legt man nun zu einer gegebenen Ebene Π eine parallele Ebene Π' durch die Spitze O , so schneidet sie den Kegel entweder gar nicht, oder berührt ihn längs einer Mantellinie, oder schneidet ihn in zwei Mantellinien. Die Ebene Π selbst ist mithin keiner, einer oder zwei Mantellinien des Kegels parallel, und folglich hat ihre Schnittkurve mit dem Kegel keinen, einen oder zwei unendlich ferne Punkte, ist also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. In dem Falle, daß Π einer Mantellinie parallel ist, gibt diese die Richtung der Parabeldurchmesser; ist Π zwei Mantellinien parallel, so sind diese den Asymptoten der Hyperbel parallel.

Faßt man den Kegel als Perspektive auf, die Mantellinien also als Projektionsstrahlen, so ist die Schnittlinie von Π' mit der Ebene des Kreises k_1 die Verschwindungslinie e^v , die in dem ersten der obigen Fälle k_1 nicht schneidet, in dem zweiten k_1 berührt und in dem letzten k_1 schneidet, in Übereinstimmung mit der Definition der drei Kurven in § 42.

Jetzt sollen im besonderen die ebenen Schnitte eines geraden Kreiskegels betrachtet und verschiedene wichtige Eigenschaften derselben abgeleitet werden. Später (§ 82) wird gezeigt, daß man auch jeden Kegelschnitt aus einem geraden Kreiskegel ausschneiden kann, und daß also alle für die ebenen Schnitte eines geraden Kreiskegels gefundenen Eigenschaften allgemein für alle Kegelschnitte gelten.

Bei einem geraden Kreiskegel steht die durch die Spitze O und den Mittelpunkt des Leitkreises k_1 gehende Gerade senkrecht auf der Ebene von k_1 und heißt Achse des Kegels. Jede Mantellinie schließt mit der Kegelachse denselben spitzen Winkel ein, der gleich dem halben Öffnungswinkel des Kegels ist, wo als Öffnungswinkel 2φ der Winkel bezeichnet ist, den zwei in einer durch die Achse gehenden Ebene gelegene Mantellinien einschließen.

Ist σ der Neigungswinkel der Kegelachse gegen die schneidende Ebene Π , wobei es genügt, σ als nicht stumpfen Winkel vorauszusetzen, so erhält man als Schnittkurve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem σ größer, gleich oder kleiner als φ ist, wie man leicht erkennt, wenn man die zu Π parallele Ebene Π' durch O legt. Für $\sigma = 90^\circ$ gehen die Schnittellipsen in Kreise über.

70. Beschreibt man einem Winkel φ einen Halbkreis (Fig. 50) so ein, daß sein Durchmesser in dem einen

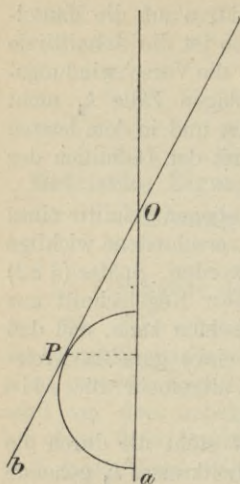


Fig. 50.

Schenkel a liegt und er den andern Schenkel b berührt, so entsteht durch Drehung der Figur um den ersten Schenkel a ein gerader Kreiskegel mit einer eingeschriebenen Kugel. Einem geraden Kreiskegel können also unendlich viele Kugeln eingeschrieben werden, deren Mittelpunkte auf der Kegelachse liegen und deren jede den Kegel längs eines Kreises (mit zur Kegelachse senkrechter Ebene) berührt.

Ist nun noch eine den Kegel schneidende Ebene Π gegeben, so gibt es unter diesen Kugeln augenscheinlich zwei, die die Ebene berühren, wenn $\sigma \geq \varphi$ ist, und nur eine, wenn $\sigma = \varphi$ ist. Diese beiden Kugeln sollen benutzt werden, um

die wichtigsten Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte abzuleiten [Verfahren von Dandelin*]).

Brennpunkte und Leitlinien.

71. Die folgenden drei Figuren 51, 53 und 54 entsprechen den drei Fällen $\sigma > \varphi$, $\sigma < \varphi$, $\sigma = \varphi$ und zeigen in schiefer Parallelprojektion**) einen Kegel, der

*) **Dandelin**, Germinal Pierre, geb. 12. April 1794 in Bourget bei Paris, gest. 15. (oder 17.) Februar 1847 in Brüssel. D. war zuerst Professor der Bergbaukunst an der Universität Lüttich, dann Professor der Physik in Namur, zuletzt belgischer Ingenieuroberst und Mitglied der Akad. d. Wiss. zu Brüssel.

**) Die Projektionsstrahlen fallen ziemlich steil auf die Projektionsebene auf und das Verkürzungsverhältnis (I, 30) ist

von einer Ebene Π geschnitten wird, und die eingeschriebenen Kugeln, die die Ebene Π berühren. Als Zeichenebene Ψ ist die Ebene durch die Kegelachse, die $\perp \Pi$ ist, gewählt.

Eine besondere Begrenzung der Ebene Π ist nicht gezeichnet, sondern nur ihre Schnittkurve k mit dem Kegel angegeben. Die Kugeln mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 berühren den Kegel längs der Kreise k_1, k_2 und die Ebene in den Punkten F_1, F_2 . Die parallelen Ebenen dieser Kreise sind ebenfalls nicht besonders begrenzt; es sind nur ihre Schnittgeraden l_1 und l_2 mit der Ebene Π angegeben. Da alle drei Ebenen auf der Zeichenebene senkrecht stehen, so sind auch die Geraden l_1 und l_2 senkrecht zu ihr.

Die Zeichenebene Ψ schneidet die Kreise in den Durchmessern $A_1 B_1, A_2 B_2$ und den Kegelschnitt in der Achse AB ; das letztere folgt daraus, daß Ψ eine Symmetrieebene für die ganze Raumfigur ist. Die Punkte A und B sind also Scheitel des Kegelschnittes. Auf der Achse AB liegen die Berührungspunkte F_1, F_2 der Kugeln.

In allen drei Figuren ist ferner eine beliebige Mantellinie gezogen, die k, k_1 bzw. k_2 in den Punkten P, P_1 , bzw. P_2 schneidet, und P mit den Punkten F_1 und F_2 verbunden.

72. In dem Falle $\sigma > \varphi$ (Fig. 51) liegen die beiden Kugeln in derselben Hälfte des Kegels, die deshalb auch nur gezeichnet ist (vgl. I, 27).

sehr klein gewählt. Infolgedessen können als scheinbare Umrisse des Kegels und der Kugeln mit hinreichender Genauigkeit ihre Schnittlinien mit der Projektionsebene angesehen werden. Im Interesse der Deutlichkeit mußte die Notwendigkeit vermieden werden, noch besondere scheinbare Umrisse zeichnen zu müssen.

Nun ist $PF_1 = PP_1$ und $PF_2 = PP_2$, da alle von einem Punkte an eine Kugel gezogenen Tangenten gleiche Länge haben, wie auch aus der Erzeugung des Kegels und einer eingeschriebenen Kugel in § 70 folgt. Mithin ist

$$PF_1 + PF_2 = P_1P + PP_2 = P_1P_2 .$$

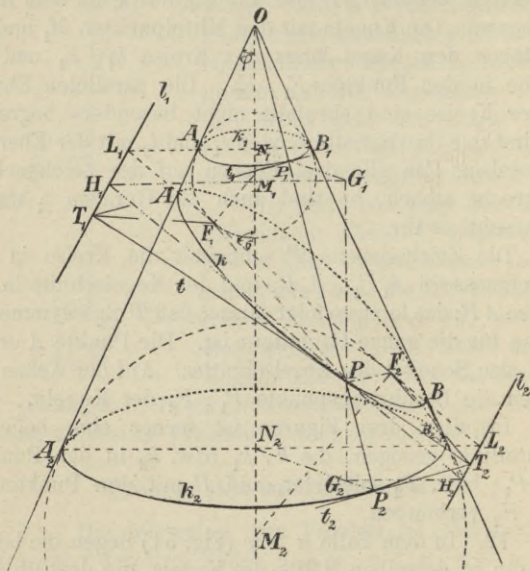


Fig. 51.

Die Länge P_1P_2 ist aber von der Lage des Punktes P auf k unabhängig, da alle Mantellinien zwischen k_1 und k_2 gleiche Länge haben. Bezeichnet man diese Länge mit $2a$, so ist also für alle Punkte P der Ellipse:

$$(1) \quad PF_1 + PF_2 = 2a .$$

Läßt man P mit A oder B zusammenfallen, so ist auch $AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = 2a$, woraus folgt, daß $AF_1 = BF_2$ und $AF_1 + AF_2 = BF_2 + BF_1 = AB = 2a$ ist.

Errichtet man in dem Mittelpunkte M von AB (Fig. 52) eine Senkrechte zu AB , die die Ellipse in den Punkten C und D schneidet, so ist $CF_1 = CF_2 = a$, und, wenn man noch $F_1F_2 = 2e$ ($e < a$), $CD = 2b$ setzt,

$$(2) \quad b^2 = a^2 - e^2.$$

Die beiden Punkte F_1, F_2 liegen somit auf der großen Achse der Ellipse und heißen die Brennpunkte. Aus dem Vorstehenden ergibt sich zugleich ihre Konstruktion, wenn die Achsen der Ellipse gegeben sind.

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich in den Satz zusammenfassen:

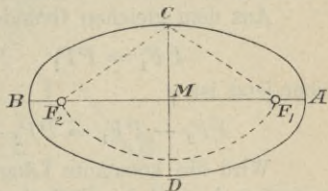


Fig. 52.

Für alle Punkte einer Ellipse ist die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten der großen Achse — den Brennpunkten — gleich der Länge der großen Achse. Die Brennpunkte liegen auf der großen Achse innerhalb der Ellipse und in gleicher Entfernung von den Scheiteln.

Den Abstand e eines Brennpunktes vom Mittelpunkte nennt man die lineare Exzentrizität der Ellipse, im Gegensatz zu der numerischen Exzentrizität, unter der man das Verhältnis der linearen Exzentrizität

zu der halben großen Achse $\frac{e}{a}$ versteht; für die Ellipse ist $\frac{e}{a} < 1$.

Die letztere Größe kann auch durch die Winkel φ und σ ausgedrückt werden. Beachtet man, daß die Kugelradien $M_1P_1, M_2P_2 \perp P_1P_2$ und $M_1F_1, M_2F_2 \perp F_1F_2$ sind, so ergibt sich $P_1P_2 = M_1M_2 \cdot \cos \varphi$ und $F_1F_2 = M_1M_2 \cdot \cos \sigma$, also

$$(3) \quad \frac{e}{a} = \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi}.$$

73. Ist $\sigma < \varphi$, so sind die beiden Kugeln den beiden Kegelhälften (einem Kegel und seinem Scheitelkegel) eingeschrieben (Fig. 53). Aus jeder Kegelhälfte schneidet die Ebene Π einen Zweig der Hyperbel aus.

Aus dem gleichen Grunde wie im vorigen Falle ist

$$PF_1 = PP_1, \quad PF_2 = PP_2,$$

aber jetzt ist

$$PF_2 - PF_1 = PP_2 - PP_1 = P_1P_2.$$

Wird die konstante Länge P_1P_2 aller Mantellinien zwischen k_1 und k_2 wieder mit $2a$ bezeichnet, so gilt für alle Punkte P des einen Hyperbelzweiges:

$$(1) \quad PF_2 - PF_1 = 2a,$$

bzw. für einen Punkt des andern Zweiges:

$$(1') \quad PF_1 - PF_2 = 2a.$$

Läßt man P in die Scheitel A und B fallen, so ist

$$AF_2 - AF_1 = BF_1 - BF_2 = 2a,$$

woraus leicht

$$AF_1 = BF_2$$

und

$$AF_2 - AF_1 = AF_2 - BF_2 = AB = 2a$$

folgt.

Für alle Punkte einer Hyperbel ist demnach die Differenz ihrer Abstände von zwei festen

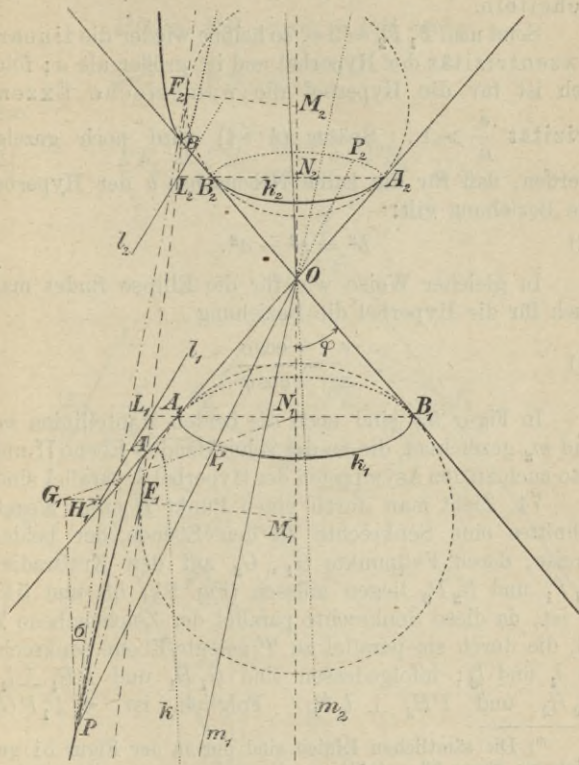


Fig. 53.

Punkten der Hauptachse — den Brennpunkten — gleich der Länge der Hauptachse. Die Brenn-

punkte liegen innerhalb der Hyperbel auf ihrer Hauptachse und in gleicher Entfernung von den Scheiteln.

Setzt man $F_1 F_2 = 2e$, so heißt e wieder die lineare Exzentrizität der Hyperbel und ist größer als a ; folglich ist für die Hyperbel die numerische Exzentrizität $\frac{e}{a} > 1$. Später (§ 84) wird noch gezeigt werden, daß für die halbe Nebenachse b der Hyperbel die Beziehung gilt:

$$(2) \quad b^2 = e^2 - a^2.$$

In gleicher Weise wie für die Ellipse findet man auch für die Hyperbel die Beziehung

$$(3) \quad \frac{e}{a} = \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi}.$$

In Figur 53 sind noch die beiden Mantellinien m_1 und m_2 gezeichnet, die zu der schneidenden Ebene Π und also auch zu den Asymptoten der Hyperbel k parallel sind.

74. Zieht man durch einen Punkt P eines Kegelschnittes eine Senkrechte zu den Ebenen der beiden Kreise, deren Fußpunkte G_1, G_2 auf den Kreisradien $N_1 P_1$ und $N_2 P_2$ liegen müssen (Fig. 51, 53 und 54), so ist, da diese Senkrechte parallel der Zeichenebene Ψ ist, die durch sie parallel zu Ψ gelegte Ebene senkrecht zu l_1 und l_2 ; infolgedessen sind $G_1 H_1$ und $P H_1 \perp l_1$, $G_2 H_2$ und $P H_2 \perp l_2$ *). Folglich ist $\sphericalangle P_1 P G_1$

*) Die sämtlichen Linien sind nur in der Figur 51 gezeichnet; Figur 53 enthält von diesen Linien nur alle mit dem Index 1 versehenen. Im Falle der Figur 54 gibt es, wie erwähnt, nur eine die Ebene Π berührende eingeschriebene Kugel; es kommen also alle Elemente mit dem Index 2 überhaupt nicht vor.

$= \sphericalangle P_2 P G_2 = \varphi$ und $\sphericalangle H_1 P G_1 = \sphericalangle H_2 P G_2 = \sigma$. Aus den rechtwinkligen Dreiecken $P_1 G_1 P$, $H_1 G_1 P$ ergibt sich

$$P G_1 = P P_1 \cdot \cos \varphi = P F_1 \cdot \cos \varphi$$

und

$$P G_1 = P H_1 \cdot \cos \sigma,$$

also

$$(4) \quad P F_1 = P H_1 \cdot \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi} = P H_1 \cdot \frac{e}{a},$$

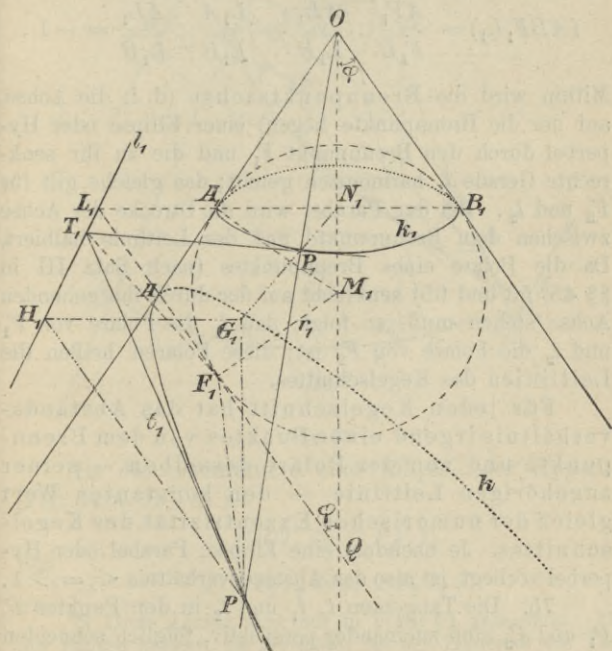


Fig. 54.

und ebenso erhält man für die beiden ersten Fälle

$$(4') \quad PF_2 = PH_2 \cdot \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi} = PH_2 \cdot \frac{e}{a}.$$

Für die Scheitelpunkte im besonderen ist

$$AF_1 = L_1 A \cdot \frac{e}{a}, \quad BF_1 = BL_1 \cdot \frac{e}{a},$$

folglich

$$(ABF_1L_1) = \frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}} : \frac{\overline{AL_1}}{\overline{L_1B}} = \frac{\overline{L_1A}}{\overline{L_1B}} : \frac{\overline{AL_1}}{\overline{L_1B}} = -1.$$

Mithin wird die Brennpunktsachse (d. i. die Achse, auf der die Brennpunkte liegen) einer Ellipse oder Hyperbel durch den Brennpunkt F_1 und die zu ihr senkrechte Gerade l_1 harmonisch geteilt; das gleiche gilt für F_2 und l_2 . Bei der Parabel wird die Strecke der Achse zwischen dem Brennpunkte und der Leitlinie halbiert. Da die Polare eines Brennpunktes (nach Satz III in §§ 45, 53 und 65) senkrecht auf der durch ihn gehenden Achse stehen muß, so folgt, daß l_1 die Polare von F_1 und l_2 die Polare von F_2 ist; diese Polaren heißen die Leitlinien des Kegelschnittes.

Für jeden Kegelschnitt hat das Abstandsverhältnis irgend eines Punktes von dem Brennpunkte und von der Polare desselben — seiner zugehörigen Leitlinie — den konstanten Wert gleich der numerischen Exzentrizität des Kegelschnittes. Je nachdem eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel vorliegt, ist also das Abstandsverhältnis $<, =, > 1$.

75. Die Tangenten t , t_1 und t_2 in den Punkten P , P_1 und P_2 sind zueinander perspektiv, folglich schneiden sich t und t_1 in einem Punkte T_1 auf l_1 , t und t_2 in

einem Punkte T_2 auf l_2 *). Alle drei Tangenten liegen in derselben Ebene, die den Kegel längs der Mantellinie OP berührt (Tangentialebene).

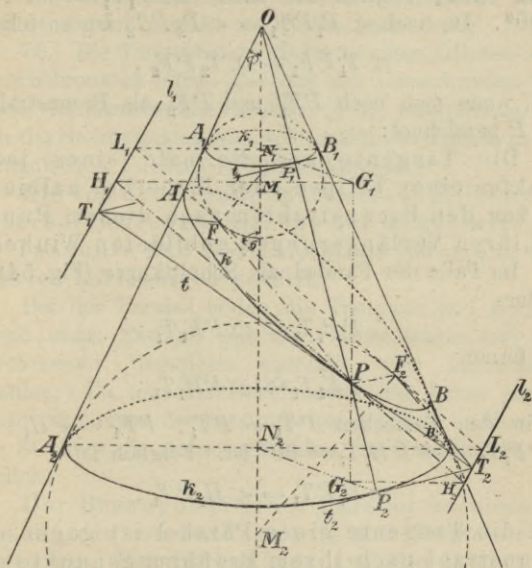


Fig. 51.

Ist die Schnittkurve eine Ellipse oder Hyperbel (Fig. 51 u. 53), so ist

und

$$\triangle PP_1T_1 \cong \triangle PF_1T_1$$

$$\triangle PP_2T_2 \cong \triangle PF_2T_2 ,$$

*) Diese Linien sind nur in Figur 51 gezeichnet. Bei der Ellipse halbiert die Normale, bei der Hyperbel die Tangente den von den Brennstrahlen selbst eingeschlossenen Winkel.

weil die entsprechenden Seiten der Dreiecke einander gleich sind als Tangenten an Kugeln. Die linksstehenden Dreiecke sind rechtwinklig bei P_1 und P_2 , da t_1 und $t_2 \perp OP$ sind; folglich ist auch $\sphericalangle PF_1 T_1 = \sphericalangle PF_2 T_2 = 90^\circ$. Da noch $\sphericalangle P_1 P T_1 = \sphericalangle P_2 P T_2$ ist, so folgt

$$\sphericalangle T_1 P F_1 = \sphericalangle T_2 P F_2,$$

d. h., wenn man noch PF_1 und PF_2 als Brennstrahlen von P bezeichnet:

Die Tangente und Normale eines jeden Punktes einer Ellipse oder Hyperbel halbieren die von den Brennstrahlen nach diesem Punkte und ihren Verlängerungen gebildeten Winkel.

Im Falle der Parabel als Schnittkurve (Fig. 54) ist wieder

$$\triangle PP_1 T_1 \cong \triangle PF_1 T_1;$$

und ferner

$$\triangle PF_1 T_1 \cong \triangle PH_1 T_1,$$

da in den Dreiecken $PT_1 = PT_1$, $PF_1 = PH_1$ und $\sphericalangle PF_1 T_1 = \sphericalangle PH_1 T_1 = 90^\circ$ ist. Folglich ist

$$\sphericalangle F_1 P T_1 = \sphericalangle H_1 P T_1,$$

d. h. die Tangente einer Parabel ist gegen den Brennstrahl nach ihrem Berührungspunkte und gegen die Achse gleich geneigt.

(Bemerkung. Auf diesen Sätzen beruht die Verwendung von Ellipse und Parabel in der Optik. Nach dem Reflexionsgesetze wird ein auf einer spiegelnden Linie oder Fläche auffallender Lichtstrahl so reflektiert, daß auffallender und zurückgeworfener Lichtstrahl mit der Normale der spiegelnden Linie gleiche Winkel bilden. Jeder von dem einen Brennpunkte einer spiegelnden Ellipse ausgehende Strahl wird also von ihr in den anderen

Brennpunkt reflektiert; jeder in der Richtung eines Parabeldurchmessers auffallende Lichtstrahl wird von der Parabel als Spiegel in den Brennpunkt reflektiert, und alle vom Brennpunkte einer Parabel ausgehenden Lichtstrahlen werden parallel zur Achse reflektiert.)

76. Die Tangente und Normale eines Ellipsen- oder Hyperbelpunktes bilden also mit den Brennstrahlen desselben vier harmonische Strahlen (§ 6); jede Gerade, also auch die Brennpunktsachse, wird mithin von ihnen in vier harmonischen Punkten (§ 7) geschnitten:

Die von den Brennpunkten einer Ellipse oder Hyperbel begrenzte Strecke der Achse wird von der Tangente und Normale eines jeden Kurvenpunktes harmonisch geteilt.

Bei der Parabel bilden die Tangente und Normale irgend eines Punktes mit dem Brennstrahle und dem Durchmesser desselben ebenfalls vier harmonische Strahlen. Da nun der Durchmesser der Achse parallel ist, so liegt einer der harmonischen Punkte, in denen die vier Strahlen die Achse schneiden, im Unendlichen, und folglich:

Der Brennpunkt einer Parabel halbiert die Strecke, die von der Tangente und Normale eines beliebigen Parabelpunktes auf der Achse begrenzt wird.

77. Die Sätze in § 72 und 73 kann man auch benutzen, um eine Ellipse oder Hyperbel aus ihren Brennpunkten F_1 , F_2 und der großen bzw. Hauptachse $2a$ zu konstruieren, indem man (Fig. 55) Kreise um die Brennpunkte beschreibt und die Schnittpunkte je zweier Kreise um F_1 und F_2 , für die die Summe bzw. Differenz der Radien gleich $2a$ ist, miteinander verbindet. Diese Konstruktion empfiehlt sich jedoch nur, wenn es sich

darum handelt, mehrere Ellipsen und Hyperbeln mit denselben Brennpunkten zu konstruieren, wie es Figur 55 zeigt, wo zwei Ellipsen mit den großen Achsen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ durch Kreise \circ und zwei Hyperbeln mit den Hauptachsen $G_1 H_1$, $G_2 H_2$ durch Kreuzchen \times hervorgehoben sind. Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten bezeichnet man als konfokale (focus = Brennpunkt).

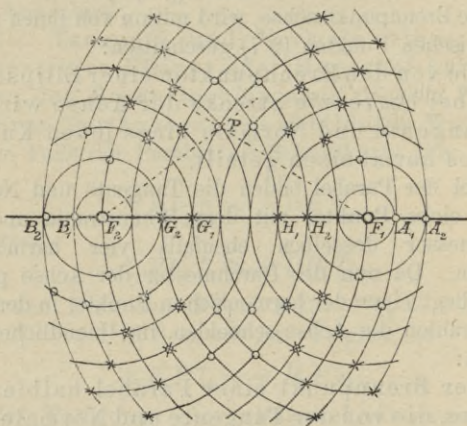


Fig. 55.

Eine Ellipse schneidet jede konfokale Hyperbel rechtwinklig und umgekehrt, d. h. die Tangenten in den Schnittpunkten beider Kurven stehen aufeinander senkrecht. Denn die Hyperbeltangente in P halbiert nach dem ersten Satze in § 73 den von den Brennstrahlen eingeschlossenen Winkel und die Ellipsentangente seine Nebenwinkel. Zwei konfokale Ellipsen oder Hyperbeln schneiden sich dagegen nicht.

78. Für die Parabel liefert der Satz in § 74 eine Konstruktion aus der Leitlinie und dem Brennpunkte F , die sich besonders auch für die Konstruktion mehrerer konfokaler Parabeln empfiehlt. Die von F auf die Richtung der Leitlinie l_1 gefällte Senkrechte FA_1 (Fig. 56)

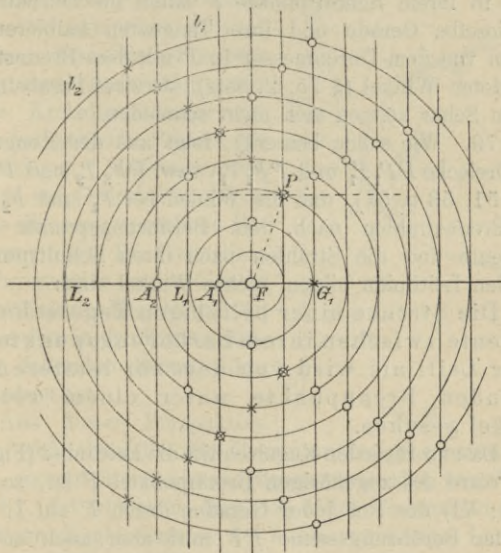


Fig. 56.

ist die Achse. Punkte der Parabel erhält man dann als Schnittpunkte des in einem beliebigen Punkte G_1 der Achse errichteten Lotes mit dem Kreise um F , dessen Radius gleich dem senkrechten Abstände G_1L_1 des Punktes G_1 von der Leitlinie l_1 ist. Je nachdem die Leitlinie rechts oder links von F gelegen ist, erhält man

zwei Scharen von konfokalen Parabeln, von denen in der Figur zwei Parabeln der einen Schar (mit den Scheiteln A_1, A_2) und eine der anderen Schar (mit dem Scheitel G_1) durch O bzw. \times bezeichnet sind. Jede Parabel der einen Schar schneidet jede der anderen Schar rechtwinklig, denn in ihrem Schnittpunkte P fallen die Durchmesser in dieselbe Gerade und ihre Tangenten halbieren die beiden von dem Durchmesser in P mit dem Brennstrahle gebildeten Winkel (§ 75, 2. Satz). Je zwei Parabeln derselben Schar können sich nicht schneiden.

79. Wie schon bemerkt, folgt aus der Kongruenz der Dreiecke PP_1T_1 und PF_1T_1 , bzw. PP_2T_2 und PF_2T_2 (Fig. 51, 53 u. 54), daß die Winkel bei F_1 und F_2 , die die Brennstrahlen nach dem Berührungspunkte einer Tangente und die Strahlen nach ihren Schnittpunkten mit den Leitlinien bilden, rechte Winkel sind:

Die Strecke einer beliebigen Kegelschnittstangente zwischen ihrem Berührungspunkte und einer Leitlinie wird von dem zur letzteren gehörenden Brennpunkte unter einem rechten Winkel gesehen.

Da nun für jeden Kegelschnitt die Leitlinie l (Fig. 57) die Polare des zugehörigen Brennpunktes F ist, so liegt (§ 34; VI) der Pol jeder Geraden durch F auf l . Der Pol der Berührungssehne PF muß aber auch auf der Tangente in P liegen, ist also ihr Schnittpunkt T mit l . Der Pol von TF liegt daher (nach § 35, VI') auch auf PF und ist folglich der Schnittpunkt S beider Geraden:

In den Brennpunkten eines Kegelschnittes stehen je zwei harmonische Polaren aufeinander senkrecht.

80. Wenn man einen Kreis in einen Kegelschnitt durch eine Perspektive überführt, deren Zentrum in dem

Mittelpunkte des Kreises liegt, so ist er zugleich ein Brennpunkt des Kegelschnittes. Denn je zwei zueinander senkrechte Durchmesser des Kreises sind harmonische Polaren, da der unendlich ferne Punkt des einen der Pol des anderen ist. Da nun aber jeder durch das Zentrum der Perspektive gehende Strahl sich selbst entspricht, so sind bei dieser besonderen Perspektive je zwei zueinander senkrechte Kreisdurchmesser zugleich harmonische Polaren des perspektiven Kegelschnittes, woraus auf Grund des obigen Satzes die ausgesprochene Behauptung folgt. Die Fluchtlinie der Perspektive ergibt hierbei die Leitlinie des Kegelschnittes, welche dem in den Kreismittelpunkt fallenden Brennpunkte zugeordnet ist.

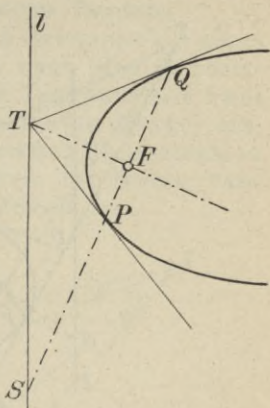


Fig. 57.

Aus dieser Perspektive lassen sich ebenfalls alle Brennpunkteigenschaften ableiten, worauf hier nicht eingegangen werden kann*).

81. Ist wiederum (Fig. 58) F der Brennpunkt eines beliebigen Kegelschnittes k , l die zugehörige Leitlinie und sind TP und TQ zwei Tangenten an k , so ist ihre Berührungsehne PQ die Polare ihres Schnittpunktes T ; folglich muß der Pol von FT auf PQ und auf der Polare l von F liegen, ist also der Punkt $S = l \times PQ$. Mithin sind FS und FT harmonische Polaren und stehen, da sie

*) Dies ist z. B. in Rohn-Papperitz, Lehrbuch d. darst. Geom., III. Bd., S. 61 (1906) geschehen.

durch den Brennpunkt gehen, nach dem vorigen Paragraphen aufeinander senkrecht. Andererseits ist $G = FT \times PQ$ der Pol von TS und mithin harmonischer Pol zu S . Die Sehne PQ wird daher von G und S harmonisch geteilt, und die Strahlen FP , FQ , FG , FS sind also har-

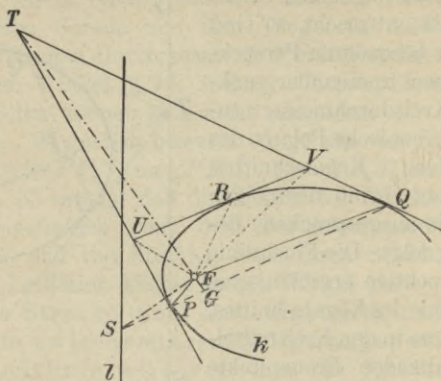


Fig. 58.

monische Strahlen, deren beide letzte einen rechten Winkel einschließen; folglich halbiert (nach dem letzten Satze in § 6) FG den Winkel PFQ . Daher gilt der Satz:

Die Strahlen von einem Brennpunkte nach den Berührungspunkten zweier Tangenten eines beliebigen Kegelschnittes sind gleich geneigt gegen den Strahl, der diesen Brennpunkt mit dem Schnittpunkte der beiden Tangenten verbindet.

Zieht man noch eine beliebige dritte Tangente, welche die beiden ersten in U , V schneidet und R zum Berührungspunkte hat, so ist auf Grund dieses Satzes:

$$\sphericalangle PFU = \sphericalangle UFR = \frac{1}{2} \sphericalangle PFR,$$

$$\sphericalangle QFV = \sphericalangle VFR = \frac{1}{2} \sphericalangle QFR,$$

also

$$\sphericalangle UFV = \frac{1}{2} \sphericalangle PFQ,$$

unabhängig von der Lage der dritten Tangente:

Die Strahlen von einem Brennpunkte eines beliebigen Kegelschnittes nach den Schnittpunkten einer beweglichen Tangente mit zwei festen schließen einen konstanten Winkel ein, der gleich der Hälfte des von den Brennstrahlen nach den Berührungspunkten der festen Tangenten eingeschlossenen Winkels ist.

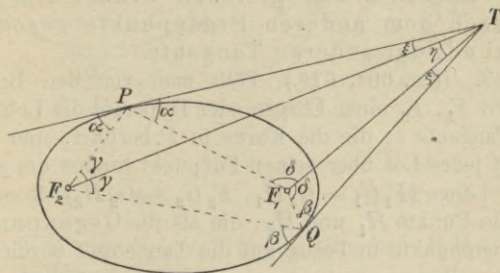


Fig. 59.

82. Die Sätze des § 75 und der erste Satz des vorigen Paragraphen gestatten leicht, einen weiteren Satz für die Ellipse und Hyperbel abzuleiten. Verbindet man (Fig. 59) den Schnittpunkt \$T\$ zweier Tangenten mit den Brennpunkten \$F_1\$ und \$F_2\$, so finden die durch die gleichen griechischen Buchstaben in der Figur angegebenen Winkelgleichheiten statt. Auf Grund des Satzes über den

Außenwinkel am Dreiecke erhält man dann die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \gamma + \xi &= \alpha, & \delta + \zeta &= 180^\circ - \beta, \\ \gamma + \eta + \zeta &= \beta, & \delta + \xi + \eta &= 180^\circ - \alpha, \end{aligned}$$

und durch Subtraktion der unteren von den darüber stehenden Gleichungen:

$$\xi - \eta - \zeta = \alpha - \beta, \quad -\xi - \eta + \zeta = \alpha - \beta,$$

woraus $\xi = \zeta$ und daher der Satz folgt:‡

Der von dem Schnittpunkte zweier Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel nach dem einen Brennpunkte gezogene Strahl schließt mit der einen Tangente den gleichen Winkel ein, wie der nach dem anderen Brennpunkte gezogene Strahl mit der anderen Tangente.

83. (Fig. 60^a, 61^a.) Fällt man von den Brennpunkten F_1, F_2 einer Ellipse oder Hyperbel die Lote auf eine Tangente t , die die Kurve in P berührt, und verlängert jedes Lot über seinen Fußpunkt hinaus um seine eigene Länge ($F_1 G_1 = G_1 H_1, F_2 G_2 = G_2 H_2$), so erhält man die Punkte H_1 und H_2 , die als die Gegenpunkte der Brennpunkte in bezug auf die Tangente t bezeichnet werden sollen.

Verbindet man noch P mit F_1, F_2, H_1, H_2 und M mit G_1, G_2 , so sind die rechtwinkligen Dreiecke $F_1 G_1 P$ und $H_1 G_1 P, F_2 G_2 P$ und $H_2 G_2 P$ kongruent. Folglich ist, da nach dem Satze in § 75 $\sphericalangle F_1 P G_1 = \sphericalangle F_2 P G_2$ ist, auch

$$\sphericalangle F_1 P G_1 = \sphericalangle H_2 P G_2 = \sphericalangle H_1 P G_1 = \sphericalangle F_2 P G_2;$$

die Linien $F_1 P H_2$ und $F_2 P H_1$ sind also gerade Linien, und es ist

$$F_2P + PH_1 = H_2P + PF_1 = F_2P + PF_1 = 2a$$

für die Ellipse (Fig. 60^a),

$$F_2P - PH_1 = H_2P - PF_1 = F_2P - PF_1 = 2a$$

für die Hyperbel (Fig. 61^a).

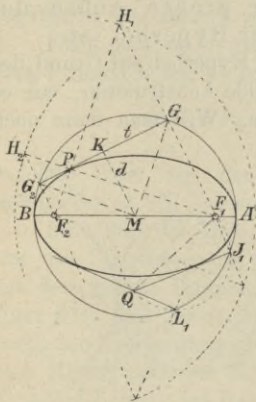


Fig. 60^a.

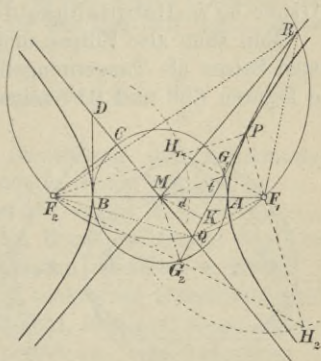


Fig. 61^a.

Weil nun G_1, G_2, M die Strecken F_1H_1, F_2H_2, F_1F_2 halbieren, so ist

$$\triangle MF_1G_1 \sim \triangle F_2F_1H_1, \quad \triangle MF_2G_2 \sim \triangle F_1F_2H_2,$$

$$\text{also } MG_1 : F_2H_1 = MG_2 : F_1H_2 = \frac{1}{2} F_1F_2 : F_1F_2,$$

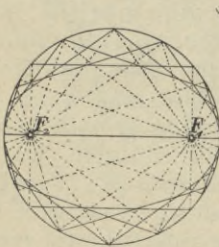
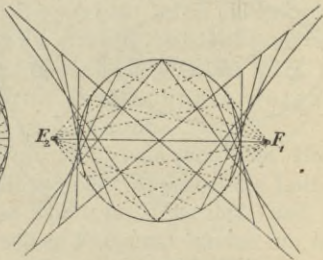
woraus $MG_1 = MG_2 = a$ folgt. Daher:

Die Fußpunkte der von den beiden Brennpunkten einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangenten gefällten Lote liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt mit dem der Kurve zusammenfällt und dessen Radius gleich der

halben großen Achse der Ellipse, bzw. der halben Hauptachse der Hyperbel ist.

Die Gegenpunkte eines Brennpunktes für alle Tangenten liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt im anderen Brennpunkte liegt und dessen Radius gleich der großen Achse der Ellipse bzw. Hauptachse der Hyperbel ist.

Man kann also Ellipse und Hyperbel auf Grund des ersten Satzes als Tangentengebilde konstruieren, wie es die Figuren 60^b und 61^b zeigen. Will man dann noch

Fig. 60^b.Fig. 61^b.

die Berührungspunkte haben, so braucht man nur die Gegenpunkte des einen Brennpunktes in bezug auf alle Tangenten zu bestimmen (nach dem zweiten Satze) und diese mit dem anderen Brennpunkte zu verbinden; der Schnitt jeder dieser Verbindungsgeraden mit der zugehörigen Tangente gibt ihren Berührungspunkt.

Will man von einem Punkte Q außerhalb einer Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte und große bzw. Hauptachse gegeben sind, die Tangenten ziehen, so braucht man nur den Kreis über QF_1 (oder QF_2) als Durchmesser zum Schnitt zu bringen mit dem Kreise

über der großen bzw. Hauptachse AB als Durchmesser; die Schnittpunkte J_1, L_1 sind die Fußpunkte der von F_1 (oder F_2) auf die gesuchten Tangenten gefällten Lote, wodurch diese (J_1Q, L_1Q) bestimmt sind (vgl. Fig. 60^a). Die Berührungspunkte ermittelt man nach dem oben angegebenen Verfahren, wie es die Figur erkennen läßt.

Fällt man noch von M das Lot MK auf t , dessen Länge gleich d sei, so ist

$$\sin G_1 P F_1 = \sin K G_2 M = \frac{d}{a},$$

welcher Wert bei der Ermittlung der Krümmungshalbmesser (§ 95) Verwendung finden wird.

84. Für die Hyperbel ergibt sich noch, wenn man die Tangenten von den Brennpunkten an den Kreis mit der halben Hauptachse um M zieht, z. B. F_2C in Fig. 61^a, daß die zu F_2C senkrechte Hyperbeltangente durch den Kreismittelpunkt geht, also, weil dieser zugleich auch Mittelpunkt der Hyperbel ist, eine Asymptote der Hyperbel liefert. Ist $BD = b$ die Scheiteltangente, so ist $\triangle MCF_2 \cong \triangle MBD$ und folglich $MD = MF_2$. Die halbe Exzentrizität MF_2 war mit e bezeichnet worden, und folglich besteht zwischen a, b, e für die Hyperbel die in § 73 erwähnte Beziehung

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Ist also a und b gegeben, so trägt man a auf den Asymptoten ab, errichtet in den Endpunkten Lote, die die Hauptachse in den Brennpunkten F_1 und F_2 schneiden.

Eine weitere Eigenschaft der Hyperbel ergibt sich noch aus dem zweiten Satze des § 81. Schneidet (Fig. 61^a) die Tangente t in P die Asymptoten in R und Q , so ist auf Grund jenes Satzes, da die Strahlen von den Brenn-

punkten nach den Berührungspunkten der Asymptoten diesen letzteren parallel sind,

$$\sphericalangle RF_2Q = \frac{1}{2} \sphericalangle RMQ = \sphericalangle RMF_1,$$

$$\sphericalangle RF_1Q = \frac{1}{2} \sphericalangle (360^\circ - RMQ) = \sphericalangle RMF_2;$$

folglich ist

$$\sphericalangle RF_1Q + \sphericalangle RF_2Q = 180^\circ.$$

Nach dem Satze über das Sehnenviereck liegen daher die Punkte R, Q auf einem durch die Brennpunkte gehenden Kreise:

Jede Hyperbeltangente schneidet die Asymptoten in zwei Punkten, die auf einem durch beide Brennpunkte gehenden Kreise liegen.

Auch diesen Satz kann man zur Konstruktion von Hyperbeltangenten benutzen, wenn die Brennpunkte und die Hauptachsen der Hyperbel gegeben sind.

85. Für die Parabel erfahren die Sätze des § 83 eine Abänderung. Wie in § 74 gezeigt ist, halbiert der Scheitel A die Strecke der Achse zwischen dem Brennpunkte F und der Leitlinie l (Fig. 62^a), folglich halbiert die Scheiteltangente a auf jedem durch den Brennpunkt gehenden Strahle die Strecke, die zwischen ihm und der Leitlinie l liegt. Fällt man nun von P das Lot PH auf l und verbindet H mit F und G mit P , so ist $PF = PH$ und $FG = HG$, also

$$\triangle FGP \cong \triangle HGP$$

und

$$\sphericalangle FPG = \sphericalangle HPG, \quad \sphericalangle FGP = \sphericalangle HGP = 90^\circ.$$

Die Linie PG ist also die Tangente der Parabel in P und steht senkrecht auf FG :

Die Fußpunkte der von dem Brennpunkte auf die Tangenten einer Parabel gefälltten Lote

liegen auf ihrer Scheiteltangente, die Gegenpunkte auf der Leitlinie.

Man kann den ersten Teil dieses Satzes benutzen, um die Parabel als Tangengebilde zu zeichnen (Fig. 62^b). Den Berührungspunkt jeder Tangente erhält man, indem man den auf ihr senkrechten Brennstrahl bis zum Schnitte mit der Leitlinie verlängert und durch diesen Punkt eine Parallele zur Achse zieht, die die Tangente in dem Berührungspunkte schneidet.

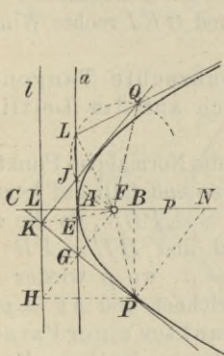


Fig. 62^a.

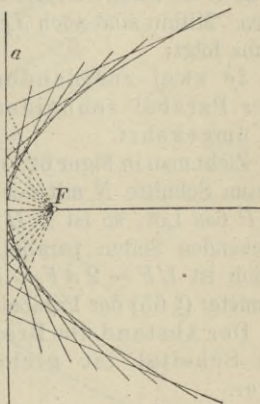


Fig. 62^b.

Um von einem Punkte Q die beiden Tangenten an eine Parabel zu ziehen (Fig. 62^a), beschreibt man den Kreis über dem Durchmesser FQ ; durch seine Schnittpunkte J und L mit der Scheiteltangente a gehen die gesuchten Tangenten JQ und LQ .

Zieht man von dem Punkte K , in dem eine Tangente der Parabel die Leitlinie schneidet, die zweite Tangente an die Parabel und verbindet den Punkt J , in

dem sie die Scheiteltangente schneidet, mit dem Brennpunkte F , so steht nach dem vorigen Satze diese Linie FJ senkrecht auf der Tangente KJ . Es ist also $FJKG$ ein Sehnenviereck in dem Kreise, der FK zum Durchmesser hat. Nun halbiert aber die Scheiteltangente diese Diagonale, da die Projektionen von FE und EK auf die Achse, nämlich FA und AL , gleiche Länge haben; folglich ist der Diagonalenschnittpunkt E des Sehnenvierecks der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und auch die andere Diagonale JG ein Durchmesser desselben. Mithin sind auch JFG und GKJ rechte Winkel, woraus folgt:

Je zwei zueinander senkrechte Tangenten einer Parabel schneiden sich auf der Leitlinie und umgekehrt.

Zieht man in Figur 62^a noch die Normale im Punkte P bis zum Schnitte N mit der Achse und fällt auf letztere von P das Lot, so ist $\triangle HL'F \cong \triangle PBN$, da die entsprechenden Seiten parallel sind und $HL' = PB$ ist; folglich ist $L'F = 2AF = BN = p$, wo p wieder den Parameter (§ 65) der Parabel bezeichnet, und $AF = p/2$:

Der Abstand des Brennpunktes einer Parabel vom Scheitel ist gleich ihrem halben Parameter.

86. Auch für die Parabel gestattet der letzte Satz in § 81 die Ableitung eines Satzes, der dem letzten Satze über die Hyperbel in § 84 entspricht.

Zieht man drei Tangenten an eine Parabel (Fig. 63), die sich in R, S, T schneiden, bezeichnet die unendlich fernen Punkte von RT, ST mit U, V und beachtet, daß die unendlich ferne Gerade ebenfalls Tangente der Parabel ist, so ist, wenn man RS und die unendlich ferne Gerade als die festen Tangenten jenes Satzes auffaßt

und ihn auf die beiden anderen Tangenten anwendet,
 $\sphericalangle RFU = \sphericalangle SFV$. Hieraus folgt sofort

$$\sphericalangle RTS = \sphericalangle UFV = \sphericalangle RFS.$$

Aus der Gleichheit dieser Winkel ergibt sich der Satz:
 Der durch die Schnittpunkte je dreier Tangenten einer Parabel gelegte Kreis geht auch durch ihren Brennpunkt.

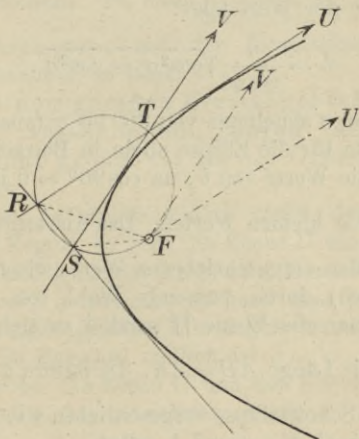


Fig. 63.

87. Es ist nun noch die in § 69 ausgesprochene Behauptung zu beweisen, daß man jeden Kegelschnitt als Schnitt eines geraden Kreiskegels erhalten kann.

In § 46 und 56 ist gezeigt worden, daß eine Ellipse oder Hyperbel durch zwei konjugierte Durchmesser, also auch durch die Achsen, und in § 68, daß eine Parabel durch den Parameter p bestimmt ist.

Bezeichnet wieder φ den halben Öffnungswinkel eines geraden Kreiskegels und σ den Neigungswinkel der schneidenden Ebene Π gegen die Kegelachse, so waren in § 72 die folgenden Beziehungen zwischen diesen Winkeln und den Achsen einer Ellipse abgeleitet:

$$\frac{e}{a} = \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi}, \quad b^2 = a^2 - e^2,$$

woraus für b der Wert folgt:

$$b = \frac{a}{\cos \varphi} \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \sigma}.$$

Läßt man nun σ abnehmen von 90° bis φ (ausschließlich), welche Werte für die Ellipse allein in Betracht kommen, so nehmen die Werte von b , da $\cos 90^\circ = 0$ ist, ab von a bis zu beliebig kleinen Werten. Das Achsenverhältnis $\frac{b}{a}$ kann also jeden vorgeschriebenen Wert zwischen 1 und 0 (ausschließlich) durch passende Wahl von σ erhalten. Verschiebt man die Ebene Π parallel zu sich, so ändert man damit die Länge $AB = 2a$. Da mithin a und $\frac{b}{a}$ beliebig für die Schnittellipse vorgeschrieben werden können, so gilt dies auch für a und b selbst.

Aus jedem geraden Kreiskegel können also alle möglichen Ellipsen ausgeschnitten werden.

Für die Hyperbel waren die Formeln abgeleitet (§ 73):

$$\frac{e}{a} = \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi}, \quad b^2 = e^2 - a^2,$$

also

$$b = \frac{a}{\cos \varphi} \sqrt{\cos^2 \sigma - \cos^2 \varphi}.$$

Da $\sigma < \varphi$ ist, so ist $\cos \sigma > \cos \varphi$, und die Werte von b wachsen von beliebig kleinen Werten bis zu $a \cdot \operatorname{tg} \varphi$, wenn σ von φ (ausschließlich) abnimmt bis zu Null; das Achsenverhältnis $\frac{b}{a}$ kann daher jeden Wert von 0 (ausschließlich) bis $\operatorname{tg} \varphi$ annehmen. Durch Parallelverschiebung der Ebene läßt sich wieder die Länge der Hauptachse beliebig verändern. Da aber $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$ ist, wenn α den von den Asymptoten mit der Hauptachse gebildeten Winkel bezeichnet, so folgt:

Aus einem geraden Kreiskegel läßt sich jede Hyperbel ausschneiden, deren Asymptotenwinkel nicht größer ist als der Öffnungswinkel des Kegels.

Ist der Asymptotenwinkel gleich dem Öffnungswinkel des Kegels, so geht die Ebene Π durch die Achse des Kegels und schneidet ihn in zwei Mantellinien. Wählt man also noch φ passend, so kann man jede Hyperbel als Schnitt eines geraden Kreiskegels erzeugen.

Für die Parabel endlich ist $\sigma = \varphi$, und wenn r_1 den Radius der die Ebene Π und den Kegel berührenden Kugel (vgl. Fig. 54) bezeichnet, so ist

$$AF_1 = r_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi .$$

Der Abstand AF_1 des Brennpunktes der Parabel von ihrem Scheitel war aber gleich der Hälfte des Parameters p gefunden. Folglich ist

$$p = 2 r_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi .$$

Durch Parallelverschiebung der Ebene Π kann aber r_1 und somit p beliebig verändert werden. Folglich:

Aus jedem geraden Kreiskegel können alle möglichen Parabeln ausgeschnitten werden.

V. Abschnitt.

Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte: Krümmungskreise.

Ableitung einer Hilfsformel.

88. Der Radius r des einem Dreiecke PQR umschriebenen Kreises ist gleich dem Produkte der drei Seiten, dividiert durch den vierfachen Flächeninhalt des Dreiecks.

Beweis. Zieht man (Fig. 64) den durch eine der Ecken des Dreiecks, z. B. R gehenden Durchmesser RS des umschriebenen Kreises, erner die Verbindungslinie von S mit P und fällt von R die Höhe RH auf die Gegenseite, so ist

$$\triangle SPR \sim \triangle QHR$$

und mithin verhält sich

$$SR : RP = QR : RH .$$

Da aber $SR = 2r$ und der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta = \frac{1}{2} PQ \cdot RH$ ist, so folgt

$$r = \frac{PQ \cdot QR \cdot RP}{4 \Delta} , \quad \text{w. z. b. w.}$$

89. Projiziert man nun das Dreieck PQR von einem beliebigen Punkte O des Raumes aus auf irgend eine

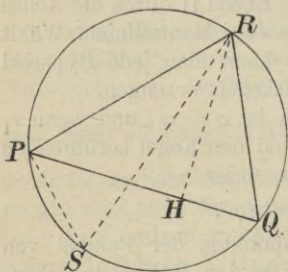


Fig. 64.

Bildebene Π (Fig. 65) und haben r_c und Δ_c die gleiche Bedeutung für das Dreieck $P_c Q_c R_c$, wie r und Δ für das ursprüngliche Dreieck, so ist

$$r_c = \frac{P_c Q_c \cdot Q_c R_c \cdot R_c P_c}{4 \Delta_c}$$

und daher

$$(1) \quad \frac{r}{r_c} = \frac{PQ}{P_c Q_c} \cdot \frac{QR}{Q_c R_c} \cdot \frac{RP}{R_c P_c} \cdot \frac{\Delta}{\Delta_c}.$$

Das Volumen V der Pyramide $OPQR$ kann ausgedrückt werden, indem man das Dreieck PQR als Grundfläche und den senkrechten Abstand h des Punktes O von der Dreiecksebene als Höhe benutzt:

$$V = \frac{1}{3} \Delta \cdot h.$$

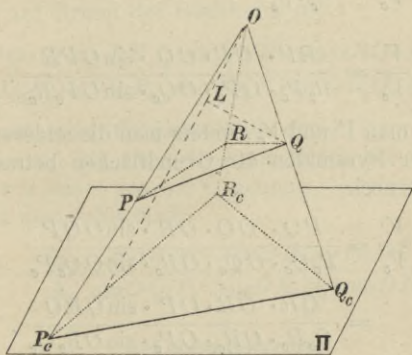


Fig. 65.

Fällt man von einer Ecke des Dreiecks PQR , z. B. von Q , das Lot QL auf die gegenüberliegende Seitenfläche der Pyramide, so ist auch, da der Flächeninhalt von ORP gleich $\frac{1}{2} RP \cdot OP \cdot \sin OPR$ ist,

$$V = \frac{1}{6} RP \cdot OP \cdot \sin OPR \cdot QL.$$

Bezeichnet β den Neigungswinkel von OQ gegen die Seitenfläche ORP , so ist

$$QL = OQ \cdot \sin \beta$$

und folglich

$$V = \frac{1}{6} RP \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin OPR \cdot \sin \beta .$$

Bezeichnet V_c das Volumen der Pyramide $OP_c Q_c R_c$ und h_c den senkrechten Abstand des Punktes O von der Ebene Π , so findet man in gleicher Weise

$$V_c = \frac{1}{3} \Delta_c \cdot h_c = \frac{1}{6} R_c P_c \cdot OP_c \cdot OQ_c \cdot \sin OP_c R_c \cdot \sin \beta ,$$

folglich

$$(2) \quad \frac{V}{V_c} = \frac{\Delta \cdot h}{\Delta_c \cdot h_c}$$

und

$$(3) \quad \frac{V}{V_c} = \frac{RP \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin OPR}{R_c P_c \cdot OP_c \cdot OQ_c \cdot \sin OP_c R_c} .$$

Berechnet man V und V_c , indem man die anderen Seitenflächen der Pyramiden als Grundflächen betrachtet, so erhält man noch

$$(4) \quad \frac{V}{V_c} = \frac{PQ \cdot OQ \cdot OR \cdot \sin OQP}{P_c Q_c \cdot OQ_c \cdot OR_c \cdot \sin OQ_c P_c}$$

$$(5) \quad = \frac{QR \cdot OR \cdot OP \cdot \sin ORQ}{Q_c R_c \cdot OR_c \cdot OP_c \cdot \sin OR_c Q_c} .$$

Drückt man andererseits den Flächeninhalt des Dreiecks ORP durch

$$\frac{1}{2} OP \cdot OR \cdot \sin ROP$$

aus, so erhält man

$$V = \frac{1}{6} OP \cdot OQ \cdot OR \cdot \sin ROP \cdot \sin \beta ,$$

ebenso

$$V_c = \frac{1}{6} OP_c \cdot OQ_c \cdot OR_c \cdot \sin ROP \cdot \sin \beta$$

und daher auch

$$(6) \quad \frac{V}{V_c} = \frac{OP \cdot OQ \cdot OR}{OP_c \cdot OQ_c \cdot OR_c}$$

Multipliziert man nun die Gleichungen (3), (4) und (5) ineinander, so wird

$$\left(\frac{V}{V_c}\right)^3 = \frac{PQ \cdot QR \cdot RP}{P_c Q_c \cdot Q_c R_c \cdot R_c P_c} \cdot \left\{ \frac{OP \cdot OQ \cdot OR}{OP_c \cdot OQ_c \cdot OR_c} \right\}^2 \cdot \frac{\sin OQP \cdot \sin ORQ \cdot \sin OPR}{\sin OQ_c P_c \cdot \sin OR_c Q_c \cdot \sin OP_c R_c}$$

und also auf Grund der Gleichung (6)

$$\frac{V}{V_c} = \frac{PQ \cdot QR \cdot RP}{P_c Q_c \cdot Q_c R_c \cdot R_c P_c} \cdot \frac{\sin OQP \cdot \sin ORQ \cdot \sin OPR}{\sin OQ_c P_c \cdot \sin OR_c Q_c \cdot \sin OP_c R_c}$$

Ersetzt man die linke Seite durch ihren Wert aus der Gleichung (2) und den ersten Bruch auf der rechten Seite durch seinen aus der Gleichung (1) folgenden Wert, so erhält man schließlich:

$$(7) \quad \frac{r_c}{r} = \frac{h_c}{h} \cdot \frac{\sin OQP \cdot \sin ORQ \cdot \sin OPR}{\sin OQ_c P_c \cdot \sin OR_c Q_c \cdot \sin OP_c R_c}$$

Krümmungskreis.

90. Liegen die drei Punkte P , Q , R auf einer Kurve k (Fig. 66) und bewegen sich die Punkte Q und R auf der Kurve k dem Punkte P zu, so ändern sich für jede Lage der beweglichen Punkte auch die Lage und Größe des durch sie und den festen Punkt P gehenden Kreises. Tritt nun der Fall ein, daß dieser Kreis in einen

bestimmten Grenzkreis übergeht, wenn schließlich die Punkte Q und R mit dem Punkte P zusammenfallen, so nennt man diesen Grenzkreis den Krümmungskreis der Kurve k in dem Punkte P ; sein Radius heißt der Krümmungsradius und sein Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt. Bei diesem Grenzübergange gehen

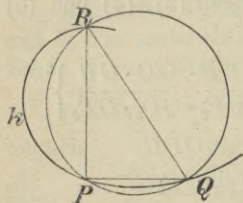


Fig. 66.

die Sekanten PQ und PR schließlich in die Tangente über, die die Kurve k in dem Punkte P berührt. Folglich liegt der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der Normale der Kurve k in dem Punkte P und hat mit der Kurve die Tangente im Punkte P gemeinsam. Von allen Kreisen, die

mit einer Kurve k die Tangente in einem Punkte P gemeinsam haben, schmiegt sich nach der oben geschilderten Erzeugung der Krümmungskreis am innigsten der Kurve an.

Auf Grund dieser Erzeugung des Krümmungskreises und der bei der Tangente, als Grenzlage einer Sekante gebrauchten Ausdrucksweise (vgl. I, 17) sagt man, daß er drei unendlich benachbarte Punkte und zwei unendlich benachbarte Tangenten mit der Kurve gemeinsam hat.

Ist im besonderen die Kurve k ein Kreis, so fällt der Krümmungskreis in jedem Punkte ganz mit k zusammen.

Die Konstruktion des Krümmungskreises empfiehlt sich oft, um eine Kurve genauer zeichnen zu können.

Beziehung zwischen den Krümmungsradien einer Kurve und ihrer Projektion.

91. Bewegen sich die Punkte Q und R auf einer ebenen Kurve k dem Punkte P zu, so bewegen sich ihre Pro-

jektionen (Fig. 67) auf der Projektion k_c von k der Projektion P_c von P zu und fallen mit der letzteren zusammen, wenn Q und R mit P zusammenfallen. Die

durch die Punkte P, Q, R und P_c, Q_c, R_c bestimmten Kreise gehen mithin gleichzeitig in die Krümmungskreise und die Sekanten PQ, PR und P_cQ_c, P_cR_c in die Tangenten t, t_c der Kurven k, k_c in den Punkten P und P_c über. Zugleich ersieht man hieraus, daß die Kurve k_c in einem Punkte P_c einen Krümmungs-

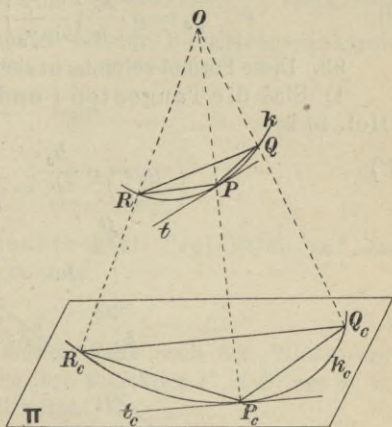


Fig. 67.

kreis besitzt, wenn dies für die Kurve k in dem entsprechenden Punkte P der Fall ist.

Die Winkel OQP, ORQ, OPR gehen bei dieser Bewegung in einen der Winkel über, den der Strahl OP mit der Tangente t bildet. Die Sinus dieser Winkel also werden gleich $\sin \gamma$, wenn γ den spitzen Winkel zwischen dem Projektionsstrahle OP und der Tangente t bezeichnet. In gleicher Weise werden $\sin OQ_cP_c, \sin OR_cQ_c$ und $\sin OP_cR_c$ gleich $\sin \gamma_c$, wenn γ_c der spitze Winkel zwischen OP_c und t_c ist. Sind noch ϱ und ϱ_c die Krümmungsradien von k und k_c in P und P_c , d. h. also die Werte, die r und r_c bei dem obigen Grenzübergange schließlich annehmen, so liefert die Formel (7) des vorigen

Paragrafen die folgende Beziehung*) zwischen den Krümmungsradien in entsprechenden Punkten einer Kurve und ihrer Zentralprojektion:

$$(I) \quad \varrho_c = \varrho \cdot \frac{h_c}{h} \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_c} \right)^3.$$

92. Diese Formel vereinfacht sich in gewissen Fällen.

1) Sind die Tangenten t und t_c einander parallel, so ist

$$(I') \quad \varrho_c = \varrho \cdot \frac{h_c}{h}.$$

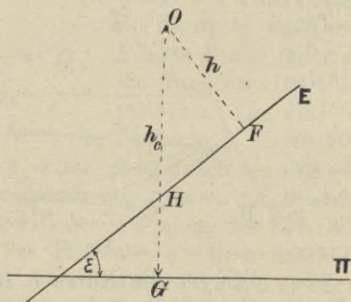


Fig. 68.

2) Bezeichnet man den Neigungswinkel der Ebene E der ursprünglichen Figur PQR gegen die Bildebene Π mit ε , so ist (Fig. 68) auch

$$\sphericalangle FOH = \varepsilon$$

und mithin

$$\frac{h_c}{h} = \frac{OG}{h} = \frac{OH}{h} + \frac{HG}{h} = \frac{1}{\cos \varepsilon} + \frac{HG}{h}.$$

*) Vgl. C. Heumann, Zur Theorie der Krümmung nach den Methoden der darstellenden Geometrie (Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, 6. Band, S. 283), wo die Formel in ähnlicher Weise abgeleitet ist.

Rückt nun O unendlich weit fort, so wächst h über alle Grenzen, während HG seine endliche Länge unverändert behält. Mithin nähert sich in diesem Falle $\frac{HG}{h}$ unbegrenzt der Null an und daher ist für Parallelprojektion

$$\frac{h_c}{h} = \frac{1}{\cos \varepsilon}$$

und folglich

$$(II) \quad \varrho_c = \frac{\varrho}{\cos \varepsilon} \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_c} \right)^3.$$

3) Im Falle senkrechter Projektion auf die Ebene Π ist außerdem stets

$$\gamma_c = 90^\circ.$$

Bezeichnet man in diesem Falle noch den Winkel der Tangente t in P gegen ihre Projektion t' in P' mit β , so ist $\gamma + \beta = 90^\circ$ und mithin

$$(III) \quad \varrho_c = \varrho \cdot \frac{\cos^3 \beta}{\cos \varepsilon}.$$

Ist im besonderen noch $t' \parallel t$, so ist $\beta = 0^\circ$ und

$$(III') \quad \varrho_c = \frac{\varrho}{\cos \varepsilon}.$$

Krümmungskreise in den Scheiteln einer Ellipse.

93. Da die Kegelschnitte Projektionen des Kreises sind und der Kreis mit dem Krümmungskreise, wie oben bemerkt, zusammenfällt, so folgt, daß auch die Kegelschnitte in jedem Punkte Krümmungskreise besitzen, für die im folgenden einfache Konstruktionen abgeleitet werden sollen.

Zunächst soll die in I, 25 ohne Beweis gegebene Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise einer Ellipse abgeleitet werden. Da die Ellipse stets als senkrechte Projektion des Kreises betrachtet werden kann, so finden die Formeln (III) hier Anwendung.

Faßt man die Ellipse mit den Halbachsen a und b ($a > b$) als senkrechte Projektion eines Kreises vom Radius a auf, so ist die Ebene des Kreises gegen die Projektionsebene unter dem spitzen Winkel ε geneigt, der durch die Beziehung $\cos \varepsilon = \frac{b}{a}$ bestimmt ist (I, 26). Denselben Winkel ε schließt die Tangente in jedem Scheitel der großen Ellipsenachse mit der Kreistangente, deren Projektion sie ist, ein; die Tangenten in den Scheiteln der kleinen Halbachse sind den entsprechenden Kreistangenten parallel.

Um also den Krümmungsradius ϱ_A in den Scheiteln der großen Achse zu berechnen, hat man in der Formel (III), da hier $\beta = \varepsilon$ ist, zu setzen:

$$\cos \beta = \cos \varepsilon = \frac{b}{a},$$

$$\varrho = a, \quad \varrho_c = \varrho_A$$

und erhält

$$(A) \quad \varrho_A = \frac{b^2}{a}.$$

Den Krümmungsradius ϱ_C in den Scheiteln der kleinen Achse liefert die Formel (III') unmittelbar:

$$(C) \quad \varrho_C = \frac{a^2}{b}.$$

Hieraus ergibt sich leicht die in I, 25 gegebene Konstruktion für die Scheitelkrümmungskreise der Ellipse:

Man verbinde (Fig. 69) die Endpunkte A und C der beiden Achsen und fälle von dem Schnittpunkte E der Tangenten in diesen Scheiteln das Lot auf AC ; dieses Lot schneidet die beiden Achsen in den Mittelpunkten M_A und M_C der Scheitelkrümmungskreise.

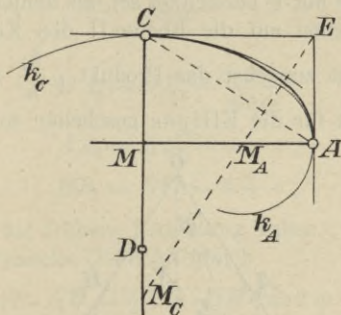


Fig. 69.

Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $M_A A E$, $E C M_C$, $C M A$ folgt:

$$M_A A : A E = E C : C M_C = C M : A M,$$

oder, da $M A = C E = a$, $M C = A E = b$ ist:

$$M_A A = \frac{b^2}{a}, \quad M_C C = \frac{a^2}{b},$$

also

$$M_A A = \rho_A, \quad M_C C = \rho_C, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Formel für die Krümmungsradien von Ellipse und Hyperbel.

94. Die übrigen Konstruktionen der Krümmungskreise von Kegelschnitten erhält man mittels der Formel (I),

indem man den Kegelschnitt als Zentralprojektion eines Kreises, für die das Zentrum senkrecht über dem Mittelpunkte des Kreises liegt, d. i. also als Schnitt eines geraden Kreiskegels betrachtet, wie es die Figuren 51, 53 und 54 zeigen.

Betrachtet man in diesen Figuren den Kreis k_1 , dessen Ebene mit E bezeichnet sei, als denjenigen, dessen Zentralprojektion auf die Ebene Π den Kegelschnitt k liefert, so ist zunächst das Produkt $\rho \frac{h_c}{h}$ zu ermitteln, was zunächst für die Ellipse geschehen soll.

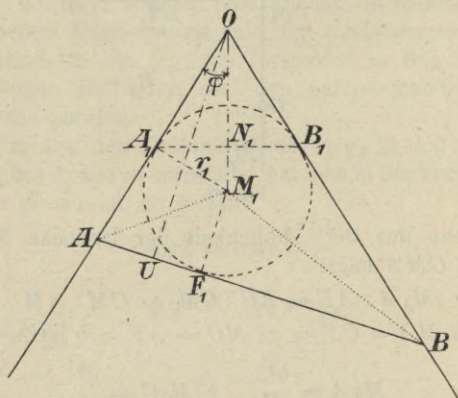


Fig. 70.

Zeichnet man den Durchschnitt durch die Figur 51 längs der mit der Zeichenebene zusammenfallenden Symmetrieebene Ψ , wie es die Figur 70 zeigt, so werden die Ebenen E und Π des Kreises k_1 und der Ellipse k durch die Linien A_1B_1 und AB dargestellt, und ihre senkrechten Abstände ON_1 und OU von O sind die

Strecken h und h_e . Bezeichnet man den Radius der Kugel, die den Kegel in dem Kreise k_1 und die Ebene Π in dem Brennpunkte F_1 der Ellipse berührt, mit r_1 , so ist der Radius N_1A_1 des Kreises k_1 in der Formel (I) an Stelle von ϱ zu setzen, und es ist, da $\sphericalangle N_1A_1M_1 = \sphericalangle A_1ON_1 = \varphi$ ist,

$$r_1 = \frac{\varrho}{\cos \varphi}.$$

Ferner ist:

$$OA_1 = OB_1 = \frac{\varrho}{\sin \varphi},$$

$$AA_1 = AF_1 = a - e,$$

$$BB_1 = BF_1 = a + e,$$

wo a und e die frühere Bedeutung haben. Der Flächeninhalt des Dreiecks OAB ist gleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AB \cdot OU &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 2\varphi \\ &= \frac{1}{2} (AB + OA + OB) r_1, \end{aligned}$$

also

$$a \cdot h_e = \left(a - e + \frac{\varrho}{\sin \varphi} \right) \left(a + e + \frac{\varrho}{\sin \varphi} \right) \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

und

$$a \cdot h_e = \left(2a + \frac{\varrho}{\sin \varphi} \right) \frac{\varrho}{\cos \varphi}.$$

Die erste Gleichung läßt sich mit Hilfe der zweiten Gleichung umformen in

$$a \cdot h_e = \left\{ a^2 - e^2 + \frac{\varrho}{\sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\varrho} a \cdot h_e \right\} \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

woraus folgt

$$a \cdot h_e = (a^2 - e^2) \cot \varphi.$$

Da aus $\triangle ON_1A_1$ sich noch $\cot\varphi = \frac{h}{\varrho}$ ergibt, so erhält man schließlich für das gesuchte Produkt:

$$\varrho \frac{h_c}{h} = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

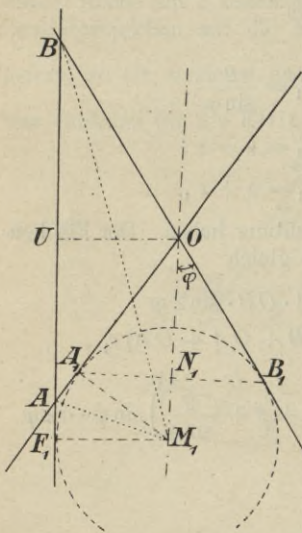


Fig. 71.

Für die Hyperbel erhält man denselben Wert für $\varrho \frac{h_c}{h}$. Fig. 71 stellt den Durchschnitt längs der Ebene Ψ durch die Figur 53 dar. Man hat bei der Ableitung nur zu beachten, daß jetzt

$$AF_1 = e - a,$$

$$OA = e - a + \frac{\varrho}{\sin\varphi},$$

$$OB = BB_1 - OB_1$$

$$= e + a - \frac{\varrho}{\sin\varphi}$$

und

$$\frac{1}{2} AB \cdot OU$$

$$= \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 2\varphi$$

$$= \frac{1}{2} (AB - OA + OB) r_1$$

ist.

95. Soll nun für eine Ellipse oder Hyperbel der Krümmungsradius ϱ_c in einem Punkte P , der Projektion des Punktes P_1 auf k_1 , bestimmt werden, so ist (Fig. 51 u. 53)

$$\sphericalangle OP_1T_1 = \gamma, \quad \sphericalangle OPT_1 = \gamma_c.$$

Die Tangente $P_1 T_1 = t_1$ steht auf der Ebene $ON_1 P_1$, folglich auch auf OP_1 senkrecht, und daher ist

$$\gamma = 90^\circ.$$

In § 75 ist gezeigt worden, daß $\sphericalangle OPT_1 = \sphericalangle T_1 P F_1$, d. h. gleich dem Winkel ist, den die Kegelschnittstangente in P mit dem Brennstrahle $F_1 P$ bildet. Für den Sinus dieses Winkels war aber in § 83 der Wert $\frac{d}{a}$ abgeleitet worden, wo d den senkrechten Abstand des Kurvenmittelpunktes von der Tangente t in P bezeichnet, und daher ist

$$\sin \gamma_c = \frac{d}{a}.$$

Die Formel (I) liefert mithin für den Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte P einer Ellipse oder Hyperbel den Wert:

$$\rho_P = \frac{a^2 b^2}{d^3},$$

wo ρ_P anstatt ρ_c gesetzt ist.

Sind a_1, b_1 die beiden konjugierten Halbmesser einer Ellipse oder Hyperbel, deren letzterer b_1 der Tangente in dem Punkte P parallel ist und die miteinander den Winkel ω einschließen, so ist (vgl. § 51 u. 55)

$$ab = a_1 b_1 \sin \omega$$

und $a_1 \sin \omega = d,$

also $ab = b_1 d,$

und mithin ist der Krümmungsradius im Punkte P gleich

$$(P) \quad \rho_P = \frac{b_1^2}{d}.$$

Ist der Punkt P einer der Endpunkte der Brennpunktsachse, so ist $b_1 = b$ und $d = a$, also wird der Krümmungsradius ϱ_A in diesen Punkten

$$(A) \quad \varrho_A = \frac{b^2}{a};$$

ist P einer der Endpunkte der kleinen Achse einer Ellipse, so ist in (P) $b_1 = a$ und $d = b$ zu setzen, und man erhält

$$(C) \quad \varrho_C = \frac{a^2}{b}.$$

Beide Werte sind für die Ellipse bereits in § 93 mit Hilfe der Formeln (III) und (III') abgeleitet; der erstere kann auch in einfacher Weise aus der Formel (I') unmittelbar hergeleitet werden.

Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes einer Ellipse oder Hyperbel.

96. Zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel sind ihrer Lage und Größe nach gegeben; es soll der Krümmungskreis in dem Endpunkte eines dieser Durchmesser konstruiert werden.

Für die Ellipse gilt folgende Konstruktion (Fig. 72), wenn $MP = a_1$ und $MQ = MR = b_1$ die gegebenen konjugierten Halbmesser sind. Um den Krümmungsmittelpunkt M_P für P zu finden, verbinde man $U = (QR \times \text{Normale in } P)$ mit dem Schnittpunkte X der Tangenten in P und R und fälle von dem Schnittpunkte Y der Tangenten in Q und P das Lot auf XU ; dieses letztere schneidet die Normale PU in dem gesuchten Punkte M_P .

Beweis.

$$\triangle UPX \sim \triangle YPM_P$$

(denn $\sphericalangle UXP = \sphericalangle YM_P P$), also

$$UP : PX = YP : PM_P,$$

$$PM_P = \frac{PX \cdot YP}{UP} = \frac{b_1^2}{d} = \rho_P$$

nach Formel (P).

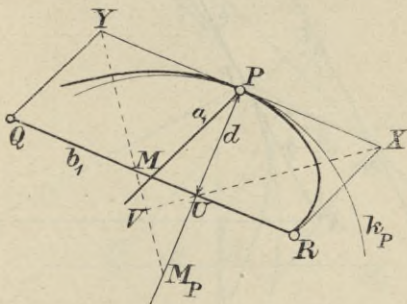


Fig. 72.

Man kann auch U mit Y verbinden und von X das Lot auf UY fällen, das dann PU in M_P schneidet.

Für die Scheitelpunkte der Ellipse versagt diese Konstruktion, da die Normale mit der betreffenden Achse zusammenfällt, und es ist dann die Konstruktion des § 93 zu verwenden.

97. Um die entsprechende Konstruktion für die Hyperbel durchzuführen, zeichne man zunächst ihre Asymptoten. Dann verbinde man (Fig. 73) den Schnittpunkt der Tangente in P und der einen Asymptote, z. B. X , mit dem Punkte U , in dem

die Hyperbelnormale den Nebendurchmesser schneidet, und errichte in X ein Lot auf XU , das die Normale in dem gesuchten Punkte M_P trifft.

Zum Beweise beachte man, daß $\triangle UPX \sim \triangle XPM_P$ und folglich $UP : PX = PX : M_P P$ ist. Da UP gleich

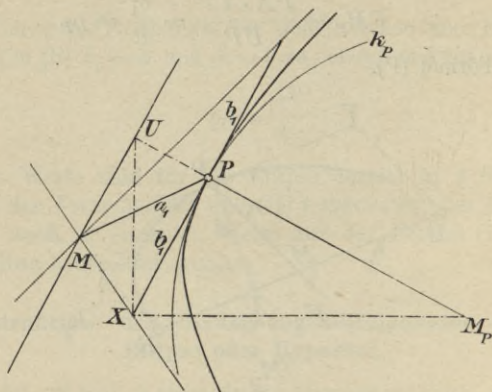


Fig. 73.

dem senkrechten Abstände d des Hyperbelmittelpunktes von der Tangente in P ist, so folgt hieraus

$$M_P P = \frac{b_1^2}{d} = \varrho_P.$$

Sind die beiden Achsen der Hyperbel gegeben und soll der Krümmungsmittelpunkt für einen der Scheitel konstruiert werden, so versagt diese Konstruktion aus dem gleichem Grunde, wie bei der Ellipse, und wird durch die folgende einfachere ersetzt.

In dem Schnittpunkte R (Fig. 74) der Scheitel-
tangente mit der einen Asymptote errichtet man
das Lot auf der Asymptote, welches die Haupt-
achse in dem gesuchten Punkte M_A schneidet.
Denn $\triangle MAR \sim \triangle RAM_A$ und folglich

$$MA : AR = AR : M_A A, \quad M_A A = \frac{b^2}{a} = \rho_A$$

[nach Formel (A)].

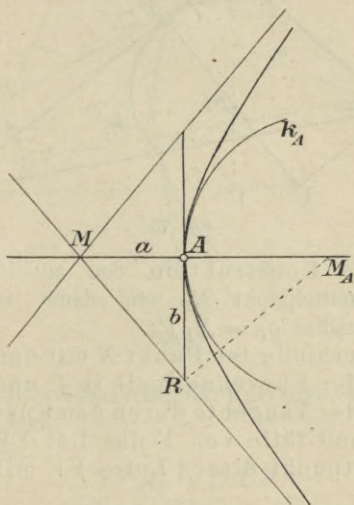


Fig. 74.

98. Die Formel (P) liefert unmittelbar eine ein-
fache Konstruktion des Krümmungsradius in einem
beliebigen Punkte P einer Ellipse oder Hyperbel,
wenn zwei konjugierte Durchmesser ihrer Lage

nach — ihre Länge braucht nicht gegeben zu sein —, eine Tangente t der Kurve und ihr Berührungspunkt P gegeben sind*).

(Fig. 75 u. 76.) Es mögen X und Y die Schnittpunkte der Tangente t mit den gegebenen konjugierten Durchmessern MX und MY bezeichnen. Dann ergibt

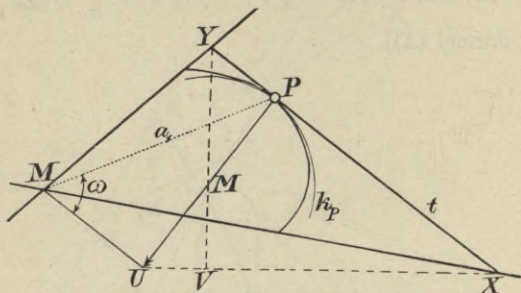


Fig. 75.

die folgende Konstruktion den zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt M_P und damit zugleich den Krümmungsradius $\rho_P = M_P P$:

Man verbinde den Punkt X mit dem Schnittpunkte U der Kurvennormale in P und der Parallelen zu der Tangente durch den Kurvenmittelpunkt M und falle von Y das Lot YV auf UX ; der Schnittpunkt dieses Lotes YV mit der Nor-

*) Daß durch die angegebenen Stücke eine Ellipse bzw. Hyperbel bestimmt ist, erkennt man leicht, wenn man beachtet, daß nach § 52 und 62 das Produkt $QX \cdot QY = b_1^2$, wo b_1 den zu $a_1 = MP$ konjugierten und der Tangente t parallelen Halbmesser bezeichnet. Man kann also b_1 konstruieren und kennt dann zwei konjugierte Halbmesser der Größe und Lage nach, wodurch die Kurve bestimmt ist (§ 46 u. 56).

male PU ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt. Man kann auch Y mit U verbinden und von X das Lot

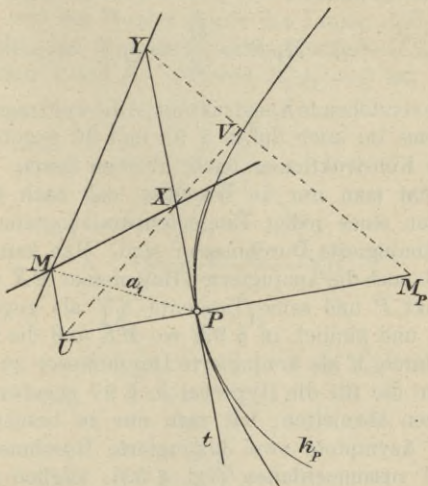


Fig. 76.

auf YU fallen, welches dann die Kurvennormale ebenfalls in M_P schneidet.

Beweis.

$$\triangle YPM_P \sim \triangle UPX$$

(denn $\sphericalangle YM_P P = \sphericalangle UXP$), folglich

$$M_P P : YP = XP : UP$$

oder

$$M_P P = \frac{XP \cdot YP}{UP}.$$

Nach dem Satze in § 52 und 62 ist auf der rechten Seite der Zähler gleich b_1^2 ; ferner ist UP gleich dem senkrechten Abstände d des Mittelpunktes M von t , also

$$M_P P = \frac{b_1^2}{d} = \rho_P, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die vorstehende Konstruktion ist die weittragendste, da sich aus ihr auch die in § 93 und 96 gegebenen besonderen Konstruktionen leicht ableiten lassen. Für die Ellipse hat man nur zu beachten, daß nach § 50 die Diagonalen eines jeden Tangentenparallelogramms einer Ellipse konjugierte Durchmesser sind. Man kann also in § 96 z. B. auch die konjugierten Halbmesser MX und MY , den Punkt P und seine Tangente XY als gegeben betrachten, und ähnlich in § 93, wo ME und die Parallele zu AC durch M als konjugierte Durchmesser zu nehmen sind. Um die für die Hyperbel in § 97 gegebenen Konstruktionen abzuleiten, hat man nur zu beachten, daß in jeder Asymptote zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel zusammenfallen (vgl. § 53); folglich sind die drei Punkte X, Y, V der Figur 76 in dem Punkte X der Figur 73 bzw. R der Figur 74 vereinigt liegend zu denken, während der Punkt U der Figur 76 in der Figur 73 dem Punkte U entspricht, in der Figur 74 aber mit M zusammenfällt.

Formel für den Krümmungsradius der Parabel.

99. Um die Formel für den Krümmungsradius der Parabel abzuleiten, hat man zunächst das Produkt $\rho \frac{h_0}{h}$ in ähnlicher Weise zu berechnen, wie es in § 94 für die Ellipse und Hyperbel geschehen ist. Zeichnet man zu

dem Zwecke den Durchschnitt der Figur 54 mit ihrer Symmetrieebene Ψ , wie es Figur 77 zeigt, so sind, wie in den Figuren 70 und 71, die Ebenen E und Π des Kreises und der Parabel durch die Linien A_1B_1 und AQ dargestellt, und ihre senkrechten Abstände ON_1 und OU von O sind h und h_c , während $N_1A_1 = \varrho$ ist.

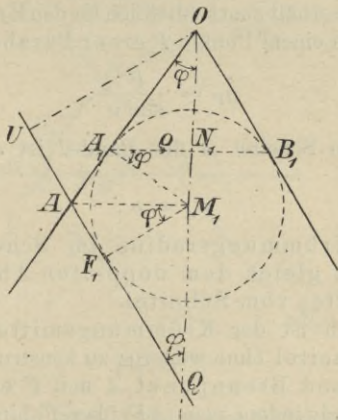


Fig. 77.

Da hier das Dreieck $O A Q$ gleichschenkelig ist, so ist $Q M_1 = M_1 O$ und folglich

$$h_c = O U = 2 \cdot M_1 F_1 = 2 \cdot A F_1 \cdot \cot \varphi ;$$

nach § 85 ist $2 \cdot A F_1$ gleich dem Parameter p der Parabel und $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho}{h}$ (aus $\triangle O N_1 A_1$), mithin

$$\varrho \frac{h_c}{h} = p .$$

Ferner läßt die Figur 54 erkennen, daß in der Formel (I) des § 91

$$\gamma = \sphericalangle OP_1T_1 = 90^\circ, \quad \gamma_c = \sphericalangle OPT_1 = \sphericalangle F_1PT_1 = \nu,$$

wo ν den Winkel zwischen der Tangente des Punktes P und der Durchmesserrihtung der Parabel bezeichnet (vgl. den zweiten Satz in § 75). Schreibt man für ϱ_c wieder ϱ_P , so erhält man schließlich für den Krümmungsradius ϱ_P in einem Punkte P einer Parabel den Wert:

$$(P) \quad \varrho_P = \frac{p}{\sin^3 \nu}.$$

Für den Scheitel A der Parabel ist $\nu = 90^\circ$ und folglich

$$\varrho_A = p,$$

d. h. der Krümmungsradius im Scheitel einer Parabel ist gleich dem doppelten Abstände des Brennpunktes vom Scheitel.

Hiernach ist der Krümmungsmittelpunkt M_A für den Scheitel ohne weiteres zu konstruieren, wenn Scheitel- und Brennpunkt A und F einer Parabel gegeben sind, indem man AF über F hinaus um sich selbst verlängert (Fig. 78). Auch für einen beliebigen Punkt P läßt sich der Krümmungsmittelpunkt in diesem Falle leicht konstruieren:

Man konstruiere (Fig. 78) die Tangente in dem Punkte P ($AC = AB$, $t = CP$), errichte in ihrem Schnittpunkte C mit der Achse auf ihr ein Lot, welches mit der Achse auf der Normale des Punktes eine Strecke NH , die gleich dem Krümmungsradius ϱ_P ist, begrenzt. Um also noch den Krümmungsmittelpunkt M_P zu finden, verlängert man PN über N hinaus um die Strecke $NM_P = PH$.

Fällt man zum Beweise der Richtigkeit dieser Konstruktion noch von dem Brennpunkte F das Lot FG auf

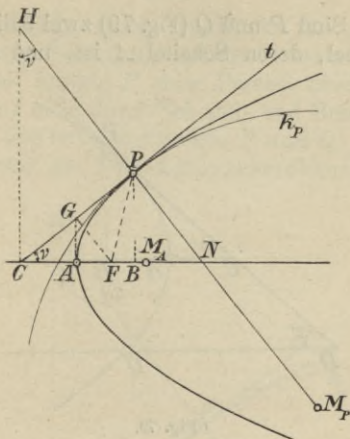


Fig. 78.

die Tangente t , so ist G zugleich der Schnittpunkt von t und der Scheiteltangente (§ 85) und also $\sphericalangle AGF = \nu$. Folglich ist

$$GF = \frac{AF}{\sin \nu} = \frac{p}{2 \sin \nu}$$

und

$$GP = GF \cdot \cot \nu = \frac{p \cdot \cos \nu}{2 \cdot \sin^2 \nu}.$$

Da noch $CP = 2GP$ ist, so folgt

$$CH = \frac{CP}{\sin \nu} = \frac{p \cdot \cos \nu}{\sin^3 \nu}$$

und schließlich

$$NH = \frac{p}{\sin^3 \nu} = QP.$$

100. Sind P und Q (Fig. 79) zwei beliebige Punkte einer Parabel, deren Scheitel A ist, und schneidet die

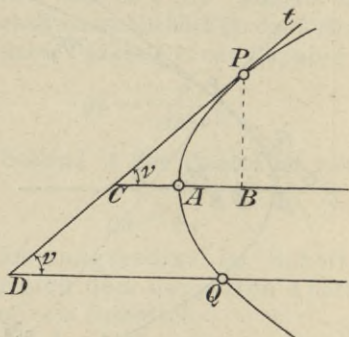


Fig. 79.

Tangente t in P die Achse in C und den Durchmesser des Punktes Q in D , so ist nach § 65, VII (S. 103):

$$\frac{PD^2}{DQ} = \frac{PC^2}{CA};$$

da ferner $PB = PC \cdot \sin \nu$ und nach Satz IV (S. 101) desselben Paragraphen $CA = AB$ ist, so folgt weiter

$$\frac{PD^2}{DQ} = \frac{PB^2}{AB} \cdot \frac{1}{\sin^2 \nu}.$$

Nach dem erstgenannten Satze ist aber ferner $PB^2 : AB = 2p$, folglich

$$\frac{PD^2}{DQ} = \frac{2p}{\sin^2 \nu}$$

und

$$\rho_P = \frac{p}{\sin^3 \nu} = \frac{PD^2}{2 \cdot DQ} \cdot \frac{1}{\sin \nu}.$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks für ρ_P läßt sich nun leicht eine Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes in einem Punkte P einer Parabel ableiten, wenn die Parabel nicht durch Scheitel- und Brennpunkt, sondern durch die beiden Punkte P und Q , die Tangente t in P und die Durchmesserrihtung gegeben ist.

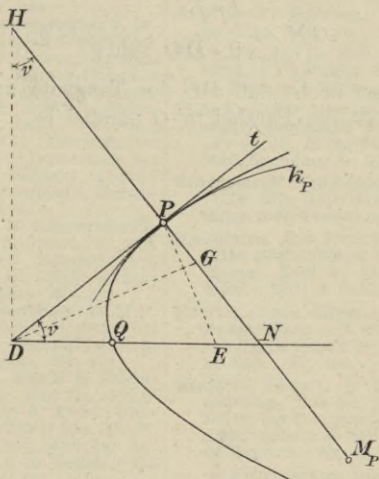


Fig. 80.

Konstruktion. (Fig. 80.) Auf dem durch Q gehenden Durchmesser errichte man im Schnittpunkte D mit der Tangente t das Lot, welches die Normale des Punktes P in H schneidet, und

trage die Strecke DQ von Q bis E ab. Das von D auf die Gerade PE gefällte Lot schneidet die Normale in G , so daß GH die Länge des gesuchten Krümmungsradius $M_P P = \rho_P$ liefert.

Zum Beweise beachte man, daß $\triangle DPE \sim \triangle HGD$ ist, da entsprechende Seiten beider Dreiecke aufeinander senkrecht stehen. Folglich verhält sich

$$DE : PD = HD : GH ,$$

oder, da $HD = PD : \sin \nu$ ist,

$$GH = \frac{PD^2}{2 \cdot DQ} \cdot \frac{1}{\sin \nu} = \rho_P , \quad \text{w. z. b. w.}$$

Bemerkt sei noch, daß PE der Tangente und also DG der Normale der Parabel in Q parallel ist.

Sammlung

Jeder Band
in Leinw. geb.

80 Pf.

Göschel

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

- Abwässer.** Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung von Professor Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landw. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.
- Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre** v. Dr. Paul Rippert i. Essen u. Ernst Langenbeck, Gr.-Vichtersfelde. Nr. 232.
- Agrarwesen und Agrarpolitik** von Prof. Dr. W. Wygodzinski in Bonn. 2 Bändchen. I: Boden u. Unternehmung. Nr. 592.
- II: Kapital u. Arbeit in der Landwirtschaft. Verwertung der landwirtschaftl. Produkte. Organisation des landwirtschaftl. Berufsstandes. Nr. 593.
- Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung** v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
- Agrikulturchemische Kontrollwesen,** Das, v. Dr. Paul Krüsch in Leopoldshall-Stahfurt. Nr. 304.
- **Untersuchungsmethoden** von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftl. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.
- Musik. Theoret. Physik I: Mechanik u. Musik.** Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.
- **Musikalische,** von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.
- Algebra. Arithmetik und Algebra** von Dr. S. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- **Beispielsammlung z. Arithmetik u. Algebra** v. Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.
- Algebraische Kurven** v. Eugen Beutel, Oberreallehrer in Baihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.
- II: Theorie u. Kurven dritter u. vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.
- Alpen, Die,** von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität Graz. Mit 19 Abb. u. 1 Karte. Nr. 129.
- Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterungen** v. Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.
- Alttestamentl. Religionsgeschichte** von D. Dr. Max Lühr, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 292.
- Amphibien. Das Tierreich III: Reptilien u. Amphibien** v. Dr. Franz Werner, Prof. an der Universität Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 383.
- Analyse, Techn.-Chem.,** von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.
- Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung.** Von Dr. Frdr. Junfer, Rektor des Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.
- **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junfer, Rektor d. Realgymnas. u. d. Oberrealsch. in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- II: **Integralrechnung.** Von Dr. Friedr. Junfer, Rektor des Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Fig. Nr. 88.

- Analysis, Höhere. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen. Mit 50 Figuren. Nr. 147.
- **Niedere**, von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.
- Arbeiterfrage, Die gewerbliche**, von Werner Combart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.
- Arbeiterversicherung** siehe: Sozialversicherung.
- Archäologie** von Dr. Friedrich Koepf, Prof. an der Universität Münster i. W. 3 Bändchen. N. 28 Abb. im Text u. 40 Tafeln. Nr. 538/40.
- Arithmetik u. Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrten-schule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- **Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrten-schule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.
- Armeepferd, Das, und die Versorgung der modernen Heere mit Pferden** v. Felix von Damitz, General der Kavallerie z. D. u. ehemal. Preuß. Remonteinpektor. Nr. 514.
- Armenwesen und Armenfürsorge.** Einführung in d. soziale Hilfsarbeit v. Dr. Adolf Weber, Prof. an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.
- Ästhetik, Allgemeine**, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer a. d. Kgl. Akademie d. bild. Künste in Stuttgart. Nr. 300.
- Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper** v. A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Universität Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.
- II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Astronomische Geographie** von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
- Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper** v. Prof. W. F. Wislicenus. Neu bearbeitet von Dr. S. Lubendorff in Potsdam. Mit 15 Abbild. Nr. 91.
- Ätherische Öle und Nichtstoffe** von Dr. F. Kochuffen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.
- Auffakentwürfe** v. Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnas. i. Stuttgart. Nr. 17.
- Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** von Wihl. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr. 302.
- Außereuropäische Erdteile, Länderkunde der**, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textfärtchen und Profilen. Nr. 63.
- Australien. Landeskunde u. Wirtschaftsgeographie des Festlandes** Australien von Dr. Kurt Hassert, Prof. d. Geographie an d. Handels-hochschule in Köln. Mit 8 Abb., 6 graph. Tab. u. 1 Karte. Nr. 319.
- Autogenes Schweiß- und Schneidverfahren** von Ingen. Hans Riese in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.
- Bade- u. Schwimmanstalten, Öffentliche**, v. Dr. Karl Wolff, Stadtoberbaur., Hannover. M. 50 Fig. Nr. 380.
- Baden. Badische Geschichte** von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnas. in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
- **Landeskunde von Baden** von Prof. Dr. O. Kienitz i. Karlsruhe. Mit Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 199.
- Bahnhöfe. Hochbauten der Bahnhöfe** v. Eisenbahnbauinspekt. C. Schwab, Vorstand d. Kgl. E.-Hochbau-sektion Stuttgart II. I: Empfangsgebäude. Nebengebäude. Güterschuppen. Lokomotivschuppen. Mit 91 Abbildungen. Nr. 515.
- Balkanstaaten. Geschichte d. christlichen Balkanstaaten** (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.
- Bankwesen. Technik des Bankwesens** von Dr. Walter Conrad, stellvert. Vorsteher der statist. Abteilung der Reichsbank in Berlin. Nr. 484.
- Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung** v. Archit. Emil Beutinger, Assistent an d. Techn. Hochschule in Darmstadt. M. 25 Fig. u. 11 Tabell. Nr. 399.

- Baukunst, Die, des Abendlandes v.** Dr. R. Schäfer, Assist. a. Gewerbemuseum, Bremen. Mit 22 Abb. Nr. 74.
- **des Schulhauses v.** Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein, Darmstadt. I: Das Schulhaus. M. 38 Abb. Nr. 443.
- **II:** Die Schulräume — Die Nebenanlagen. M. 31 Abb. Nr. 444.
- Bausleine. Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Baustoffkunde, Die, v.** Prof. S. Haberstroh, Oberl. a. d. Herzogl. Baugewerkschule Holzminden. Mit 36 Abbildungen. Nr. 506.
- Bayern. Bayerische Geschichte** von Dr. Hans Odel in Augsburg. Nr. 160.
- **Landeskunde des Königreichs Bayern v.** Dr. W. Götz, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule München. M. Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 176.
- Befestigungswesen. Die geschichtliche Entwicklung des Befestigungswesens vom Aufkommen der Pulvergeschütze bis zur Neuzeit** von Keuleaux, Major b. Stabe d. 1. Westpreuß. Pionierbataill. Nr. 17. Mit 30 Bildern. Nr. 569.
- Beschwerderecht. Das Disziplinar- u. Beschwerderecht für Heer u. Marine v.** Dr. Max E. Mayer, Prof. a. d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 517.
- Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von** Friedr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. 1. Teil: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verschied. Kraftmaschinen. M. 27 Abb. Nr. 224.
- **II:** Gas-, Wasser- u. Windkraftanlagen. M. 31 Abb. Nr. 225.
- **III:** Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graph. Darstell. Wahl d. Betriebskraft. M. 27 Abb. Nr. 474.
- Bewegungsspiele v.** Dr. C. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymn. zu Hannover. M. 15 Abb. Nr. 96.
- Wäscherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe v.** Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Blütenpflanzen, Das System der, mit Ausschluß der Gymnospermen** von Dr. R. Pilger, Kustos am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.
- Bodenkunde** von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.
- Brandenburgisch-Preussische Geschichte** von Prof. Dr. M. Thamm, Dir. des Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.
- Brasilien. Landeskunde der Republik Brasilien** von Bel Rodolpho von Jhering. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 373.
- Brauereiwesen I: Mälzerei** von Dr. Paul Dreverhoff, Dir. der Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.
- Britisch-Nordamerika. Landeskunde von Britisch-Nordamerika v.** Prof. Dr. A. Doppel in Bremen. Mit 13 Abb. und 1 Karte. Nr. 284.
- Buchführung in einfachen u. doppelten Posten v.** Prof. Rob. Stern, Oberl. d. Öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule zu Leipzig. M. vielen Formul. Nr. 115.
- Buddha** von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.
- Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat** Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.
- Bürgerliches Gesetzbuch** siehe: Recht des BGB.
- Byzantinisches Reich. Geschichte des byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Rempten. Nr. 190.
- Chemie, Allgemeine u. physikalische, von** Dr. Max Rudolph, Prof. an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
- **Analytische, von** Dr. Johannes Hoppe in München. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.
- **II:** Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.
- **Anorganische, von** Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.
- **Geschichte der, von** Dr. Hugo Bauer, Assist. am Chemischen Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis z. Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.
- **II:** Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

- Chemie der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium d. Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.
- — III: Karbocyclische Verbindungen. Nr. 193.
- — IV: Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194.
- **Organische**, von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.
- **Pharmazeutische**, von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.
- **Physiologische**, von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
- — II: Dissimilation. Nr. 1 Tafel. Nr. 241.
- **Toxikologische**, von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.
- Chemische Industrie, Anorganische**, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancjoda-industrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
- — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.
- — III: Anorganische chemische Präparate. Nr. 6 Taf. Nr. 207.
- Chemische Technologie, Allgemeine**, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Chemisch-Technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.
- Christlichen Literaturen des Orients, Die**, von Dr. Anton Baumstark. I: Einleitung. — Das christlich-aramäische u. d. koptische Schrifttum. Nr. 527.
- — II: Das christl.-arab. und das äthiop. Schrifttum. — Das christl. Schrifttum d. Armenier und Georgier. Nr. 528.
- Dampfkessel, Die**. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedr. Barth in Nürnberg. I: Kesselsysteme und Feuerungen. Mit 43 Fig. Nr. 9.
- — II: Bau und Betrieb der Dampfkessel. Nr. 57 Fig. Nr. 521.
- Dampfmaschinen, Die**. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2 Bdn. I: Wärmetheoretische und dampftechnische Grundlagen. Mit 64 Fig. Nr. 8.
- — II: Bau und Betrieb der Dampfmaschinen. Mit 109 Fig. Nr. 572.
- Dampfsturbinen, Die**, ihre Wirkungsweise u. Konstruktion von Ingen. Herm. Wilda, Prof. a. staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.
- Desinfektion** von Dr. M. Christian, Stabsarzt a. D. in Berlin. Mit 18 Abbildungen. Nr. 546.
- Determinanten** von B. B. Fischer, Oberltn. a. d. Oberrealsh. z. Großlichterfelde. Nr. 402.
- Deutsche Altertümer** von Dr. Franz Fuhs, Dir. d. städt. Museums in Braunschweig. Nr. 70 Abb. Nr. 124.
- Deutsche Fortbildungsschulwesen, Das**, nach seiner geschichtlichen Entwicklung u. in seiner gegenwärt. Gestalt von H. Sierds, Revisor gewerbli. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.
- Deutsches Fremdwörterbuch** von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.
- Deutsche Geschichte** von Dr. F. Kurze, Prof. a. Kgl. Luisengymnas. in Berlin. I: Mittelalter (bis 1519). Nr. 33.
- — II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege (1517 bis 1648). Nr. 34.
- — III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs (1648—1806). Nr. 35.
- — siehe auch: Quellenkunde.
- Deutsche Grammatik** und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Prof. Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
- Deutsche Handelskorrespondenz** von Prof. Th. de Beaug, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
- Deutsches Handelsrecht** von Dr. Karl Lehmann, Prof. an der Universität Göttingen. 2 Bde. Nr. 457 u. 458.
- Deutsche Heldensage, Die**, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an d. Universität Würzburg. Nr. 32.

Deutsches Kolonialrecht von Dr. G. Eder von Hoffmann, Prof. an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.

Deutsche Kolonien. I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. R. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 441.

— II: Das Südseegebiet und Kiautschou von Prof. Dr. R. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 520.

— III: Ostafrika von Prof. Dr. R. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.

Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- u. Kunstepen u. zum Minnefang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. I: Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.

— II: Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.

Deutsche Literatur des 13. Jahrhunderts. Die Epigonen d. höfischen Epos. Auswahl a. deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junf, Aktuarus der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Deutsche Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Janßen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

— 16. Jahrhunderts. I: Martin Luther u. Thom. Murner. Ausgewählt u. mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— II: Hans Sachs. Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. J. Sahr. Nr. 24.

— III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Gatten, Fischart, sowie Tierepos u. Fabel. Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

— des 17. und 18. Jahrhunderts bis Klopstock. I: Lyrik von Dr. Paul Legband in Berlin. Nr. 364.

— II: Prosa v. Dr. Hans Legband in Kassel. Nr. 365.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 31.

Deutsche Literaturgeschichte der Klassikerzeit v. Carl Weitbrecht, durchgesehen u. ergänzt v. Karl Berger. Nr. 161.

— des 19. Jahrhunderts von Carl Weitbrecht, neu bearbeitet von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.

Deutschen Mundarten, Die, von Prof. Dr. G. Reis in Mainz. Nr. 605.

Deutsche Mythologie. Germanische Mythologie von Dr. Eugen Mogk, Prof. a. d. Univerf. Leipzig. Nr. 15.

Deutschen Personennamen, Die, v. Dr. Rud. Kleinpaul i. Leipzig. Nr. 422.

Deutsche Poetik von Dr. A. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. i. Bamberg. Nr. 61.

Deutsche Schule, Die, im Auslande von Hans Amrhein, Seminaroberlehrer in Rheydt. Nr. 259.

Deutsches Seerecht v. Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I: Allgem. Lehren: Personen u. Sachen d. Seerechts. Nr. 386.

— II: Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts u. außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Deutsche Stammeskunde v. Dr. Rud. Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.

Deutsches Unterrichtswesen. Geschichte des deutschen Unterrichtswesens v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— II: Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Deutsche Urheberrecht, Das, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internat. Verträge v. Dr. Gust. Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Deutsche Volkslied, Das, ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25 u. 132.

Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Geheimer Kriegsrat u. vortragender Rat im Kriegsministerium in München. Nr. 401.

Deutsches Wörterbuch v. Dr. Richard Loewe. Nr. 64

- Deutsche Zeitungsweisen, Das, von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.
- Deutsches Zivilprozessrecht von Prof. Dr. Wilhelm Risch in Straßburg i. G. 3 Bände. Nr. 428—430.
- Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Ausw. mit Einlsg. u. Wörterb. herausgeg. v. Dr. Herm. Jansen, Direktor d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.
- Diatriken. Rudrum und Dietrich-even. Mit Einleitung u. Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. a. d. Universität Würzburg. Nr. 10.
- Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen Mit 68 Figuren. Nr. 87.
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.
- Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Pumpen, Druckwasser- u. Druckluft-Anlagen von Dipl.-Jngen. Rudolf Bogdt, Regierungsbaumstr. a. D. in Aachen. Mit 87 Fig. Nr. 290.
- Ebdalieder mit Grammatik, Übersetzg. u. Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.
- Eisenbahnbau. Die Entwicklung des modernen Eisenbahnbaues v. Dipl. Jng. Alfred Birk, o. ö. Prof. a. d. L. I. Deutschen Techn. Hochschule in Prag. Mit 27 Abbild. Nr. 553.
- Eisenbahnfahrzeuge von S. Hinnen-thal, Regierungsbaumeister u. Oberingen. in Hannover. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abbild. im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.
- II: Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit Anh.: Die Eisenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 56 Abb. im Text u. 3 Taf. Nr. 108.
- Eisenbahnpolitik. Geschichte d. deutschen Eisenbahnpolitik v. Betriebsinspektor Dr. Edwin Koch in Karlsruhe i. B. Nr. 533.
- Eisenbetonbau, Fer, v. Reg.-Baumstr. Karl Köhle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.
- Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Taf. Nr. 152.
- II: Das Schmelzeisen. M. 25 Fig. u. 5 Taf. Nr. 153.
- Eisenkonstruktionen im Hochbau von Jngen. Karl Schindler in Meissen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.
- Eiszeitalter, Das, v. Dr. Emil Berth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.
- Elastizitätslehre für Ingenieure I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene Platten, Torsion, Gekrümmte Träger. Von Dr.-Jng. Max Enßlin, Prof. a. d. Kgl. Baugewerkschule Stuttgart und Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 60 Abbild. Nr. 519.
- Elektrischen Meßinstrumente, Die, von J. Herrmann, Prof. an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Mit 195 Figuren. Nr. 477.
- Elektrische Telegraphie, Die, von Dr. Lud. Kellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.
- Elektrizität. Theoret. Physik III: Elektrizität u. Magnetismus von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.
- Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel in Genf. I: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 16 Fig. Nr. 252.
- II: Experiment. Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.
- Elektromagnet. Lichttheorie. Theoret. Physik IV: Elektromagnet. Lichttheorie u. Elektronik von Professor Dr. Gust. Jäger in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.
- Elektrometallurgie von Dr. Friedrich Regelsberger, Kaiserl. Reg.-Rat in Steglitz-Berlin. M. 16 Fig. Nr. 110.
- Elektrotechnik. Einführung in die Starkstromtechnik v. J. Herrmann, Prof. d. Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 95 Fig. u. 16 Taf. Nr. 196.
- II: Die Gleichstromtechnik. Mit 118 Fig. und 16 Taf. Nr. 197.
- III: Die Wechselstromtechnik. Mit 126 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

- Elektrotechnik.** Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ingenieur Prof. Hermann Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildgn. Nr. 476.
- Elfaß-Lothringen, Landeskunde von,** v. Prof. Dr. R. Langenbed in Straßburg i. E. Mit 11 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 215.
- Englisch-deutsches Gesprächsbuch** von Prof. Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.
- Englische Geschichte** v. Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.
- Englische Handelskorrespondenz** von E. C. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.
- Englische Literaturgeschichte** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.
- — **Grundzüge und Haupttypen d. englischen Literaturgeschichte** von Dr. Arnold M. M. Schröder, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.
- Entwicklungsgeschichte der Tiere** von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Jena. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Figuren. Nr. 378.
- — II: Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.
- Epigonen, Die, des höfischen Epos.** Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junf, Aktuar der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
- Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht** von Dr. A. Rippsoldt, Mitglied des Königl. Preussischen Meteorologischen Instituts in Potsdam. Mit 17 Abbild. u. 5 Taf. Nr. 175.
- Erdteile, Länderkunde der außereuropäischen,** von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textärtchen und Profilen. Nr. 63.
- Ernährung und Nahrungsmittel** von Oberstabsarzt Professor S. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.
- Ethik** von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.
- Europa, Länderkunde von,** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakademie in Wien. Mit 14 Textärtchen u. Diagrammen u. einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.
- Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen d. häufigeren i. Deutschland wildwachsenden Pflanzen** von Dr. W. Rigula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbildungen. Nr. 268 und 269.
- Explosivstoffe.** Einführung in d. Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. S. Brunswig in Steglitz. Mit 6 Abbild. und 12 Tab. Nr. 333.
- Familienrecht. Recht d. Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht** von Dr. Heinrich Tise, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.
- Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Dr. Wilhelm Massot, Prof. an der Preussischen höheren Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Feldgeschütz, Das moderne,** v. Oberstleutnant B. Heydenreich, Militärlehrer a. d. Militärtechn. Akademie in Berlin. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschl. der Erfindung des rauchl. Pulvers, etwa 1850 bis 1890. Mit 1 Abbild. Nr. 306.
- — II: Die Entwicklung d. heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abbild. Nr. 307.
- Fernsprechweisen, Das,** von Dr. Ludwig Kellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.
- Festigkeitslehre** v. B. Hauber, Dipl.-Ingenieur. Mit 56 Fig. Nr. 288.
- **Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen** von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Figuren. Nr. 491.
- Fette, Die, und Ole** sowie die Seifen u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Laxe, Firnisse m. ihren wicht. Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einf. in d. Chemie, Besprech. einiger Salze u. d. Fette u. Ole. Nr. 335.
- — II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

- Fette, Die, und Ole** sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Lade, Firnisse m. ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. III: Harze, Lade, Firnisse. Nr. 337.
- Feuerwaffen. Geschichte d. gesamten Feuerwaffen bis 1850.** Die Entwicklung der Feuerwaffen v. ihrem ersten Auftreten bis zur Einführung der gezogenen Hinterlader, unter besonderer Berücksichtigg. d. Heeresbewaffnung von Major a. D. W. Gohlke, Steglitz-Berlin. Mit 105 Abbildungen. Nr. 530.
- Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiereerei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Professor Max Gürtler, Geh. Regierungsr. im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
- Finanzsysteme der Großmächte, Die, (Internat. Staats- und Gemeindefinanzwesen) v. D. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat in Berlin. 2 Bändchen. Nr. 450 und 451.**
- Finanzwissenschaft** von Präsident Dr. R. van der Borcht in Berlin. I: Allgemeiner Teil. Nr. 148.
— II: Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.
- Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft** von Dr. Josef Szinnhei, Prof. an der Universität Budapest. Nr. 463.
- Finnland. Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Prof. Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.
- Firnisse. Harze, Lade, Firnisse** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Fette und Ole III.) Nr. 337.
- Fische. Das Tierreich IV: Fische** von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Mit 37 Abbild. Nr. 356.
- Fischerei und Fischzucht** von Dr. Karl Eckstein, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
- Flora. Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen** von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbild. Nr. 268, 269.
- Flußbau** von Regierungsbaumeister Otto Kappold in Stuttgart. Mit vielen Abbildungen. Nr. 597.
- Forensische Psychiatrie** von Professor Dr. W. Behgandt, Dir. d. Irrenanstalt Friedrichsberg i. Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.
- Forstwissenschaft v. Dr. Ad. Schwapach, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirig. bei d. Hauptstation d. forstl. Versuchswesens. Nr. 106.**
- Fortbildungsschulwesen, Das deutsche, nach seiner geschichtl. Entwicklung u. i. sein. gegenwärt. Gestalt v. S. Eierds, Revijor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.**
- Franken. Geschichte Frankens v. Dr. Christ. Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D., München. Nr. 434.**
- Frankreich. Französische Geschichte v. Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 85.**
- Frankreich. Landesk. v. Frankreich v. Dr. Rich. Neuje, Direkt. d. Oberrealschule in Spandau. 1. Bändch. Nr. 23 Abb. im Text u. 16 Landschaftsbild. auf 16 Taf. Nr. 466.
— 2. Bändchen. Mit 15 Abb. im Text, 18 Landschaftsbild. auf 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 467.**
- Französisch-deutsches Gesprächsbuch** von C. Francillon, Lektor am orientalistisch. Seminar u. an d. Handelshochschule in Berlin. Nr. 596.
- Französische Handelskorrespondenz v. Prof. Th. de Beauz, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.**
- Fremdwort, Das, im Deutschen v. Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 55.**
- Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 273.**
- Fuge. Erläuterung u. Anleitung zur Komposition derselben v. Prof. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.**
- Funktionentheorie, Einleitung in die, (Theorie der komplexen Zahlenreihen) v. Max Rose, Oberlehrer an der Goetheschule in Deutsch-Wilmersdorf. Mit 10 Fig. Nr. 581.**
- Fußartillerie, Die, ihre Organisation, Bewaffnung u. Ausbildg. v. Splett, Oberleutnant im Lehrbataillon der Fußartillerie-Schießschule u. Biermann, Oberleutnant in der Versuchsbatter. d. Artillerie-Prüfungskommission. Mit 35 Fig. Nr. 560.**

- Gardinenfabrikation. Textilindustrie**
II: Weberei, Wirkerei, Kosamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.
- Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen** von Prof. Dr. phil. und Dr.-Jugen. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.
- Gaskraftmaschinen, Die**, von Ing. Alfred Kirschke in Kiel. Mit 55 Figuren. Nr. 316.
- Gasthäuser und Hotels** von Architekt Max Böbler in Düsseldorf. **I: Die Bestandteile u. die Einrichtung des Gasthauses.** Mit 70 Fig. Nr. 525.
— II: Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Figuren. Nr. 526.
- Gebirgsartillerie. Die Entwicklung der Gebirgsartillerie** von Klusmann, Oberst u. Kommandeur der 1. Feld-Art.-Brigade in Königsberg i. Pr. Mit 78 Bildern und Übersichtstafeln. Nr. 531.
- Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland** v. Dr. Otto Lindede in Düsseldorf. Nr. 384.
- Geodäsie. Vermessungskunde** von Dipl.-Ing. F. Werkmeister, Oberlehrer an d. Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. **I: Feldmessen u. Nivellieren.** Mit 146 Abb. **II: Der Theodolit. Trigonometrische und barometr. Höhenmessung. Tachymetrie.** Mit 109 Abbildgn. Nr. 463, 469.
- Geologie in kurzem Auszug f. Schulen u. zur Selbstbelehrung** zusammengestellt v. Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. u. 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.
- Geometrie, Analytische, der Ebene** v. Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.
— — Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene von D. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.
— — des Raumes von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 39.
- Geometrie, Analytische. Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie des Raumes** von D. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.
— Darstellende, von Dr. Robert Haußner, Prof. an d. Univ. Jena. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.
— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.
— Ebene, von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarbigen Figuren. Nr. 41.
— Projektive, in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.
- Geometrische Optik, Einführung in die**, von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.
- Geometrisches Zeichnen** von H. Becker, Architekt u. Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Bonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.
- Germanische Mythologie** von Dr. E. Vogt, Prof. a. d. Univ. Leipzig. Nr. 15.
- Germanische Sprachwissenschaft** von Dr. Rich. Loewe. Nr. 238.
- Gesangskunst. Technik der deutschen Gesangskunst** von Ost. Noë u. Dr. Hans Joachim Moser. Nr. 576.
- Geschichtswissenschaft, Einleitung in die**, v. Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univ. Greifswald. Nr. 270.
- Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie** v. Nummenhoff, Major u. Lehrer an d. Fußartillerie-Schießschule in Jüterbog. **I: Vom Auftreten d. gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890.** Mit 50 Textbildern. Nr. 334.
— — II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.
- Geschwindigkeitsregler der Kraftmaschinen, Die**, von Dr.-Ing. S. Kröner in Friedberg. Mit vielen Figuren. Nr. 604.
- Gesetzbuch, Bürgerliches, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.**

- Gesundheitslehre.** Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten v. E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. u. 1 Tafel. Nr. 18.
- Gewerbehygiene** von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.
- Gewerbewesen** von Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203, 204.
- Gewerbliche Arbeiterfrage, Die,** von Werner Sombart, Prof. a. d. Handelshochschule Berlin. Nr. 209.
- Gewerbliche Bauten.** Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. I: Allgemeines über Anlage und Konstruktion der industriellen und gewerblichen Bauten. Nr. 511.
— II: Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.
- Gewichtswesen.** Maß-, Münz- u. Gewichtswesen v. Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Gießereimaschinen** von Dipl.-Ing. Emil Treiber in Heidenheim a. B. Mit 51 Figuren. Nr. 548.
- Glas- und keramische Industrie** (Industrie der Silikate, der Bausteine und des künstlichen Mörtels I) v. Dr. Gust. Kauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.
- Gleichstrommaschine, Die,** von Ing. Dr. C. Rinzbrunner in Manchester. Mit 81 Figuren. Nr. 257.
- Gleislerkunde** v. Dr. Friz Machacek in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
- Gotische Sprachdenkmäler** mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterung. v. Dr. Herm. Jansen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.
- Gottfried von Straßburg.** Hartmann von Aue. Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl a. d. höfisch. Epos m. Anmerk. u. Wörterbuch v. Dr. K. Morold, Prof. am Kgl. Friedrichs-Kollegium z. Königsberg/Pr. Nr. 22.
- Graphischen Künste, Die,** von Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen u. Beilagen. Nr. 75.
- Griechische Altertumskunde** v. Prof. Dr. Rich. Maisch, neu bearbeitet v. Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.
- Griechische Geschichte** von Dr. Heinrich Smoboda, Professor an d. deutschen Universität Prag. Nr. 49.
- Griechische Literaturgeschichte** mit Berücksichtigung d. Geschichte der Wissenschaften v. Dr. Alfred Gerde, Prof. an der Univ. Breslau. 2 Bändchen. Nr. 70 u. 557.
- Griechischen Sprache, Geschichte der,** I: Bis zum Ausgange d. klassischen Zeit v. Dr. Otto Hoffmann, Prof. a. d. Univ. Münster. Nr. 111.
- Griechische u. römische Mythologie** v. Prof. Dr. Herm. Steuding, Rekt. d. Gymnas. in Schneeberg. Nr. 27.
- Grundbuchrecht, Das formelle,** von Oberlandesgerichtsr. Dr. F. Krehschmar in Dresden. Nr. 549.
- Handelspolitik, Auswärtige,** von Dr. Heinr. Sieveling, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.
- Handelsrecht, Deutsches,** von Dr. Karl Lehmann, Prof. an d. Universität Göttingen. I: Einleitung. Der Kaufmann u. seine Hilfspersonen. Offene Handelsgesellschaft. Kommandit- u. stille Gesellsch. Nr. 457.
— II: Aktiengesellschaft. Gesellsch. m. b. H. Eing. Gen. Handelsgesch. Nr. 458.
- Handelschulwesen, Das deutsche,** von Direktor Theodor Blum in Dessau. Nr. 558.
- Handelsstand, Der,** von Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer in Leipzig (Kaufm. Rechtsl. Bd. 2). Nr. 545.
- Handelswesen, Das,** von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Veris, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.
— II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.
- Handfeuerwaffen, Die Entwicklung der, seit der Mitte des 19. Jahrhunderts u. ihr heutiger Stand** von G. Wzobek, Hauptmann u. Kompagniechef im Inf.-Reg. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Bofersches) Nr. 59 in Soldau. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.
- Harmonielehre** von A. Salm. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 120.

- Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg.** Auswahl aus d. höfischen Epos mit Anmerk. u. Wörterbuch von Dr. R. Marold, Prof. am Königl. Friedrichs-Kollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
- Haar, Lade, Firnisse** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Ole III). Nr. 337.
- Hauyliteraturen, Die, des Orients** v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Univ. Wien. I. II. Nr. 162, 163.
- Hebzeuge, Die, ihre Konstruktion u. Berechnung** von Jng. Prof. Herm. Wilda, Bremen. Mit 399 Abb. Nr. 414.
- Heeresorganisation, Die Entwicklung der, seit Einführung der stehenden Heere** von Otto Neuschler, Hauptmann u. Batteriechef in Ulm. I: Geschichtl. Entwicklung bis zum Ausgange d. 19. Jahrh. Nr. 552.
- Heizung u. Lüftung** v. Jng. Johannes Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen u. die Berechnung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.
- II: Die Ausführung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.
- Heffen. Landeskunde des Großherzogtums Heffen, der Provinz Heffen-Nassau und des Fürstentums Waldeck** v. Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.
- Hieroglyphen** von Geh. Regier.-Rat Dr. Ad. Erman, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 608.
- Hochspannungstechnik** von Dr.-Jng. R. Fischer in Hamburg-Bergedorf. Mit vielen Figuren. Nr. 609.
- Holz, Das. Aufbau, Eigenschaften u. Verwendung** v. Jng. Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 33 Abb. Nr. 459.
- Hotels. Gasthäuser und Hotels** von Archit. Max Wöhler in Düsseldorf. I: Die Bestandteile u. d. Einrichtg. d. Gasthauses. M. 70 Fig. Nr. 525.
- II: Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Figuren. Nr. 526.
- Hydraulik** v. W. Hauber, Dipl.-Jng. in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 397.
- Hygiene des Städtebaus, Die, von Prof. S. Chr. Ruxbaum in Hannover.** Mit. 30 Abb. Nr. 348.
- **des Wohnungswesens, Die, von Prof. S. Chr. Ruxbaum in Hannover.** Mit 5 Abbild. Nr. 363.
- Iberische Halbinsel. Landeskunde der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. M. 8 Kärtchen u. 8 Abb. im Text u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
- Jüdische Religionsgeschichte** von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.
- Indogerman. Sprachwissenschaft** von Dr. R. Weringer, Professor an der Univ. Graz. M. 1 Tafel. Nr. 59.
- Industrielle u. gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken)** von Architekt Heint. Salzmann in Düsseldorf. I: Allgemeines üb. Anlage u. Konstruktion d. industriellen u. gewerblichen Bauten. Nr. 511.
- II: Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.
- Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung** von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fieber tafel. Nr. 327.
- Insekten. Das Tierreich V: Insekten** von Dr. F. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.
- Instrumentenlehre v. Musikdir. Franz Mayerhoff in Chemnitz.** I: Text. Nr. 437.
- II: Notenbeispiele. Nr. 438.
- Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.
- **Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. M. 52 Fig. Nr. 147.
- Israel. Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit** von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
- Italienische Handelskorrespondenz** v. Prof. Alberto de Beau, Oberlehrer am Königl. Institut G. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
- Italienische Literaturgeschichte** von Dr. Karl Wöhler, Professor an der Universität München. Nr. 125.

- Kalkulation, Die, im Maschinenbau** von Ingen. H. Bethmann, Dozent am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.
- Kältemaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen** von W. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.
- Kamerun. Die deutschen Kolonien I: Logo und Kamerun** von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.
- Kanal- und Schleusenbau** von Regierungsbaumeister Otto Kappold in Stuttgart. Mit 78 Abb. Nr. 585.
- Kant, Immanuel.** (Geschichte der Philosophie Bd. 5) von Dr. Bruno Bauch, Prof. a. d. Univ. Jena Nr. 536.
- Kartell u. Trust** v. Dr. C. Tschierschy in Düsseldorf. Nr. 522.
- Kartenkunde** von Dr. W. Gross, Kartograph in Berlin. 2 Bändchen. **I: Die Projektionen.** Mit 53 Fig. Nr. 30.
— **II: Der Karteninhalt und das Messen auf Karten.** Mit 36 Fig. Nr. 599.
- Kaufmännische Rechtskunde. I: Das Wechselwesen** v. Rechtsanwalt Dr. Rub. Mothes in Leipzig. Nr. 103.
— **II: Der Handelsstand** v. Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer, Leipzig. Nr. 545.
- Kaufmännisches Rechnen** von Prof. Richard Just, Oberlehrer a. d. Öffentl. Handelslehranstalt d. Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III Nr. 139, 140, 187.
- Keramische Industrie. Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. Gust. Kauter. I: Glas- u. keram. Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.
- Kerzenfabrikation. Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abb. Nr. 336
- Kiautschou. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou** v. Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.
- Kinematik** von Dipl.-Ing. Hans Polster, Assst. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. W. 76 Abb. Nr. 584.
- Kirchenrecht** v. Dr. E. Sehling, ord. Prof. d. Rechte in Erlangen. Nr. 377.
- Klimafunde I: Allgemeine Klimalehre** von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Figuren. Nr. 114.
- Kolonialgeschichte** von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.
- Kolonialrecht, Deutsches**, von Dr. H. Edler von Hoffmann, Prof. an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.
- Kometen. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung** d. Himmelskörper v. A. F. Möbbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. **II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem.** Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Kommunale Wirtschaftspflege** von Dr. Alfons Kieß, Magistratsassessor in Berlin. Nr. 534.
- Kompositionelle Lehre. Musikalische Formenlehre** v. Steph. Krehl. I. II. W. viel. Notenbeispiel. Nr. 149, 150.
- Kontrapunkt.** Die Lehre von der selbständigen Stimmführung v. Steph. Krehl in Leipzig. Nr. 390.
- Kontrollwesen, Das agrilkulturchemische**, von Dr. Paul Kirche in Leopoldsdorf-Staßfurt. Nr. 304.
- Koordinatensysteme** v. Paul B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealschule zu Großlichterfelde. Mit 8 Fig. Nr. 507.
- Körper, Der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten** von E. Reumann, Oberlehrer in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.
- Kostenanschlag** siehe: Veranschlagen.
- Kriegsschiffbau. Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit.** Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebauplat und Schiffbau-Direktor. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe u. der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.
— II. Teil: Das Zeitalter der Dampfschiffe für die Kriegsführung zur See von 1840 bis zur Neuzeit. Mit 81 Abbildungen. Nr. 472.
- Kriegswesens, Geschichte des**, von Dr. Emil Daniels in Berlin. I: Das antike Kriegswesen. Nr. 488.

- Kriegswesens, Geschichte des**, v. Dr. Emil Daniels in Berlin. II: Das mittelalterl. Kriegswesen. Nr. 498.
- — **III**: Das Kriegswesen der Neuzeit. Erster Teil. Nr. 518.
- — **IV**: Das Kriegswesen der Neuzeit. Zweiter Teil. Nr. 537.
- — **V**: Das Kriegswesen der Neuzeit. Dritter Teil. Nr. 568.
- Kristallographie** v. Dr. W. Brühns, Prof. a. d. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
- Kudrun und Dietrichen**. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Würzburg. Nr. 10.
- Kultur, Die, der Renaissance**. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.
- Kulturgeschichte, Deutsche**, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
- Kurvendiskussion. Algebraische Kurven** von Eug. Beutel, Oberreallehrer in Baihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.
- Kurzschrift** siehe: Stenographie.
- Küstenartillerie. Die Entwicklung der Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart** v. Korvettenkapitän Hünig. Mit Abbildungen und Tabellen. Nr. 606.
- Lade. Harze, Lade, Firnisse** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Ole III.) Nr. 337.
- Lagerhäuser. Industrielle und gewerbliche Bauten**. (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann, Düsseldorf. II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
- Länder- und Völkernamen** von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.
- Landstraßenbau** von Pfl. Oberlehrer A. Liebmann, Betriebsdirekt. a. D. i. Magdeburg. Mit 44 Fig. Nr. 598.
- Landwirtschaftliche Betriebslehre** v. E. Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 227.
- Landwirtschaftlichen Maschinen, Die**, von Karl Waltherr, Diplom.-Ing. in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 407—409.
- Lateinische Grammatik. Grundriß der latein. Sprachlehre** v. Prof. Dr. R. Botsch in Magdeburg. Nr. 82.
- Lateinische Sprache. Geschichte der lateinischen Sprache** von Dr. Friedrich Stolz, Professor an der Universität Innsbruck. Nr. 492.
- Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme**. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Techn. Hochschule in Wien. M. 47 Abb. Nr. 77.
- Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt** von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Lehrerschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.
- **Fünfstellige**, von Professor August Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.
- Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie** von Professor Dr. Th. Essenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.
- Locomotiven. Eisenbahnfahrzeuge** von H. Hinenthal. I: Die Locomotiven. Mit 89 Abb. im Text u. 2 Tafeln. Nr. 107.
- Lothringen. Geschichte Lothringens** von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.
- **Landeskunde v. Elsaß-Lothringen** v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.
- Lötrohrprobierkunde. Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohrs** von Dr. Mart. Henglein in Freiberg i. Sa. Mit 10 Figuren. Nr. 483.
- Lübeck. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck** v. Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text und 1 lithographischen Karte. Nr. 487.
- Luft- und Meeresströmungen** von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.
- Lüftung. Heizung und Lüftung** von Ing. Johannes Röring in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.
- — **II**: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

- Luther, Martin, und Thom. Wurner.** Ausgewählt und mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen v. Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolai-Gymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
- Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus.** Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.
- Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei** von Dr. P. Dreverhoff, Direktor d. Öffentliche und 1. Sächsl. Versuchstation für Brauerei und Mälzerei, sowie der Brauer- und Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.
- Maschinenbau, Die Kalkulation im,** von Ingenieur S. Bethmann, Doz. am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.
- **Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.
- Maschinenelemente, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Fr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.
- Maschinenzeichnen, Praktisches,** von Ing. Richard Schiffner in Warmbrunn. I: Grundbegriffe, Einfache Maschinenteile bis zu den Kupplungen. Mit 60 Tafeln. Nr. 589.
- **II: Lager, Riemen- und Seilscheiben, Zahnräder, Kolbenpumpe.** Mit 51 Tafeln. Nr. 590.
- Maschanalyse** von Dr. Otto Böhm in Darmstadt. Mit 14 Fig. Nr. 221.
- Maß-, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. August Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Materialprüfungswesen. Einführung** in die moderne Technik d. Materialprüfung von R. Memmler, Dipl.-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am kgl. Material-Prüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.
- **II: Metallprüfung und Prüfung** von Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.
- Mathematik, Geschichte der,** von Dr. A. Sturm, Prof. am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Mathematische Formelsammlung und** Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von D. Th. Bürklen, Professor am kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.
- Maurer- und Steinhauerarbeiten** von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Ed. Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbild. Nr. 419—421.
- Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik.** Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
- Mechanische Technologie** von Geh. Hofrat Professor A. Lüdike in Braunschweig. 2 Bändchen. Nr. 340, 341.
- Mecklenburg. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck** von Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbild. im Text, 16 Taf. und 1 Karte in Lithographie. Nr. 487.
- Mecklenburgische Geschichte** von Oberlehrer Otto Witten in Neubrandenburg i. M. Nr. 610.
- Meereskunde, Physische,** von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungs- vorsteher bei d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.
- Meeresströmungen. Luft- u. Meeresströmungen** v. Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.
- Menschliche Körper, Der, sein Bau u. seine Tätigkeiten** von G. Rehmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. S. Seiler. Mit 47 Abbildgn. u. 1 Tafel. Nr. 18.

- Metallographie.** Kurze, gemeinschaftliche Darstellung der Lehre von den Metallen u. ihren Legierungen unter besond. Berücksichtigung der Metallmikroskopie v. Prof. E. Heyn u. Prof. O. Fauer a. Kgl. Materialprüfungsamt (Gr.-Lichterfelde) d. K. Techn. Hochschule zu Berlin. I: Allgem. Teil. Mit 45 Abb. im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432. — II: Spez. Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.
- Metallurgie** von Dr. August Geiß in Kristiansand (Norwegen). I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.
- Meteore. Astronomie.** Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternensystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Meteorologie** v. Dr. W. Traber, Prof. an der Universität Wien. Mit 49 Abbild. u. 7 Tafeln. Nr. 54.
- Militärstrafrecht** von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an d. Univ. Straßburg i. G. 2 Bde. Nr. 371, 372.
- Mineralogie** von Geheimr. Berggraf Dr. R. Brauns, Prof. an d. Univ. Bonn. Mit 132 Abbild. Nr. 29.
- Minnesang und Spruchdichtung.** Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterb. von O. Gintler, Prof. an d. Oberrealschule u. an d. Techn. Hochschule i. Stuttgart. Nr. 23.
- Mittelhochdeutsche Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit.** In Auswahl mit Einleitg. u. Wörterbuch herausgeg. von Dr. Hermann Janken, Dir. d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.
- Mittelhochdeutsche Grammatik.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurz. Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. a. d. Univ. Klost. Nr. 1.
- Morgenland. Geschichte des alten Morgenlandes** v. Dr. Fr. Hommel, Prof. an d. Universität München. Mit 9 Bildern u. 1 Karte. Nr. 43.
- Morphologie und Organographie der Pflanzen** v. Prof. Dr. M. Nordhausen i. Kiel. M. 123 Abb. Nr. 141.
- Mörtel.** Die Industrie d. künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Mundarten, Die deutschen,** von Prof. Dr. S. Reiz in Mainz. Nr. 605.
- Mundarten, Plattdeutsche,** von Dr. Hubert Grimme, Professor an der Univ. Münster i. W. Nr. 461.
- Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Murner, Thomas.** Martin Luther u. Thomas Murner. Ausgewählt u. m. Einleitungen u. Anmerk. versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolai-Gymnas. zu Leipzig. Nr. 7.
- Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen,** v. Dr. A. Möhler in Steinhäufen. 2 Bde. Mit zahlr. Abb. u. Musikbeil. Nr. 121 u. 347.
- Musikalische Musik** von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.
- Musikal. Formenlehre (Kompositionslehre)** von Stephan Krehl. I. II. Mit viel. Notenbeisp. Nr. 149, 150.
- Musikästhetik** von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.
- Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts** von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.
- Musikgeschichte seit Beginn des 19. Jahrhunderts** v. Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.
- Musiklehre, Allgemeine,** von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.
- Nadelhölzer, Die,** von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.
- Nahrungsmittel. Ernährung u. Nahrungsmittel** v. Oberstabsarzt Prof. S. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.
- Nautik.** Kurzer Abriss d. täglich an Bord von Handelsschiffen angew. Teils d. Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigations-schule zu Lübeck. Mit 56 Abbildgn. Nr. 84.
- Neugriechisch-deutsches Gesprächsbuch** mit besond. Berücksichtigung d. Umgangssprache v. Dr. Johannes Kalitsumakis, Doz. am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 585.

- Neunzehntes Jahrhundert. Geschichte** des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univ. Bonn. 1. Bdch.: 1800—1852. Nr. 216.
 — 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.
- Neutestamentliche Zeitgeschichte** von Lic. Dr. W. Staert, Prof. a. der Univ. in Jena. I: Der historische u. kulturgeschichtl. Hintergrund d. Christentums. M. 3 Karten. Nr. 325.
 — II: Die Religion d. Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit 1 Planskizze. Nr. 326.
- Nibelunge Nöt, Der**, in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterb. v. Dr. W. Goltzer, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.
- Nordische Literaturgeschichte I: Die** isländ. u. norweg. Literatur des Mittelalters v. Dr. Wolfg. Goltzer, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 254.
- Nutzpflanzen** von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großherzogl. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.
- Ole. Die Fette u. Ole** sowie d. Seifen- u. Kerzenfabrication u. d. Harze, Lade, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in d. Chemie, Besprechung einiger Salze u. der Fette und Ole. Nr. 335.
- Ole und Riechstoffe, Atherische**, von Dr. F. Rochussen in Miltih. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.
- Optik. Einführung in d. geometrische** Optik von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.
- Orientalische Literaturen. Die Literaturen** des Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. an d. Universität Wien. I: Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.
 — II: Die Literaturen d. Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.
 — Die christlichen Literaturen des Orients von Dr. Ant. Baumstark. I: Einleitg. — Das christl.-aramäische u. d. kopt. Schrifttum. Nr. 527.
 — II: Das christlich-arabische und das äthiopische Schrifttum. — Das christliche Schrifttum der Armenier und Georgier. Nr. 528.
- Ortsnamen im Deutschen, Die**, ihre Entwicklung u. ihre Herkunft von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig-Gohlis. Nr. 573.
- Ostafrika. (Die deutsch. Kolonien III)** von Prof. Dr. R. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.
- Österreich. Österreichische Geschichte** von Prof. Dr. Franz v. Kronek, neubearb. von Dr. Karl Uhlirz, Prof. a. d. Univ. Graz. I: Von d. Urzeit b. z. Tode König Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.
 — II: Vom Tode König Albrechts II. bis z. Westf. Frieden (1440—1648). Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.
 — **Landeskunde v. Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Prof. an d. Universität Prag. Mit 10 Textillustrationen u. 1 Karte. Nr. 244.
- Ovidius Naso, Die Metamorphosen** des. In Auswahl mit einer Einleit. u. Anmerk. herausgeg. v. Dr. Jul. Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.
- Pädagogik im Grundriß** von Professor Dr. W. Rein, Direktor d. Pädagog. Seminars a. d. Univ. Jena. Nr. 12.
 — **Geschichte der**, von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
- Paläogeographie. Geolog. Geschichte** der Meere und Festländer von Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.
- Paläoklimatologie** von Dr. Wilh. R. Edart d. i. Weilburg (Lahn). Nr. 482.
- Paläontologie** von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.
 — **und Abstammungslehre** von Dr. Karl Diener, Prof. an der Univ. Wien. Mit 9 Abbild. Nr. 460.
- Palästina. Landes- und Volkskunde** Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.
- Parallelperspektive. Rechtwinklige u. schiefwinklige** Axonometrie v. Prof. J. Wunderlin in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.
- Personnennamen, Die deutschen**, v. Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.
- Petrographie** v. Dr. W. Brubns, Prof. an der Bergakademie Clausthal. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.
- Pflanze, Die**, ihr Bau und ihr Leben von Prof. Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Pflanzenbaulehre, Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Essen u. Ernst Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 232.

Pflanzenbiologie v. Dr. W. Rigula, Professor an d. Forstakademie Eisenach. I: Allgemeine Biologie. Mit 43 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzenernährung, Agrilkulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Pflanzengeographie von Professor Dr. Ludvig Diels in Marburg (Hessen). Nr. 389.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedr. Brud, Privatdoz. i. Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildgn. Nr. 310.

Pflanzenmorphologie, Morphologie u. Organographie d. Pflanzen von Prof. Dr. M. Nordhausen in Kiel. Mit 123 Abbildungen. Nr. 141.

Pflanzenphysiologie von Dr. Adolf Hansen, Prof. an der Universität Gießen. Mit 43 Abbild. Nr. 591.

Pflanzenreichs, Die Stämme des, von Privatdoz. Dr. Rob. Pilger, Rostlos am Kgl. Botan. Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abb. Nr. 485.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Rigula, Prof. a. d. Forstak. Eisenach. Mit 50 Abb. Nr. 158.

Pflanzenzellenlehre, Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. S. Wiehe in Leipzig. Mit 79 Abbildungen. Nr. 556.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthener, Assist. a. Botan. Institut d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Pharmazeutische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.

Philologie, Geschichte d. Klassischen, v. Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. a. d. Univ. Münster in Westf. Nr. 367.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Bonn. Nr. 281.

Philosophie, Gesch. der, IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. V. Bauch, Professor an der Universität Jena. Nr. 394.

— V: Immanuel Kant von Dr. Bruno Bauch, Professor an d. Universität Jena. Nr. 536.

Philosophie, Geschichte der, VI: Die Philosophie im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts von Arthur Drews, Prof. der Philosophie an d. Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 571.

— **Hauptprobleme der**, v. Dr. Georg Simmel, Professor an der Universität Berlin. Nr. 500.

— **Psychologie und Logik zur Einf.** in d. Philosophie von Prof. Dr. Th. Eshenhaus. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie, Die. Von S. Kessler, Prof. an d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Taf. und 42 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Techn. Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 24 Abbildungen. Nr. 76.

— II. Teil: Licht u. Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— IV. Teil: Elektromagnet. Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.

— **Geschichte der**, v. Prof. A. Kistner in Berthelm a. M. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— II: Die Physik von Newton bis z. Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. D. Sadur, beide an der Univ. Breslau. Nr. 445.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. der Mathematik u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberlehrer an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Begahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

- Physische Meereskunde** von Prof. Dr. Gerh. Schott, Abteilungsvorst. b. d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.
- Pilze, Die.** Eine Einführung in die Kenntnis ihrer Formenreihen von Prof. Dr. G. Lindau in Berlin. Mit 10 Figurengruppen i. Text. Nr. 574.
- Planetensystem. Astronomie** (Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper) von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbild. Nr. 11.
- Plastik, Die, des Abendlandes** von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayer. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.
- **Die, seit Beginn des 19. Jahrhunderts** von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vorkbildern. Nr. 321.
- Plattdeutsche Mundarten** von Dr. Hub. Grimme, Professor an der Universität Münster i. W. Nr. 461.
- Poetis, Deutsche, v. Dr. K. Borinski,** Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.
- Polarlicht. Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht** von Dr. A. Rippoldt, Mitglied des kgl. Preuß. Meteorolog. Instituts zu Potsdam. Mit 15 Abb. und 7 Taf. Nr. 175.
- Polnische Geschichte** von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.
- Pommern. Landeskunde von Pommern** von Dr. W. Deede, Prof. an der Universität Freiburg i. B. Mit 10 Abb. und Karten im Text und 1 Karte in Lithographie. Nr. 575.
- Portugiesische Literaturgeschichte** von Dr. Karl von Reinhardtsoettner, Professor an der kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.
- Posamentiererei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** v. Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
- Postrecht** von Dr. Alfred Wolde, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.
- Preßluftwerkzeuge, Die,** von Dipl.-Ing. P. Itz, Oberlehrer an der kais. Techn. Schule in Straßburg. Mit 82 Figuren. Nr. 493.
- Preussische Geschichte. Brandenburgisch-Preussische Geschichte** v. Prof. Dr. M. Thamm, Direktor d. Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.
- Preussisches Staatsrecht** von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univ. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.
- Psychiatrie, Forensische,** von Professor Dr. W. Beyerhandt, Dir. der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 und 411.
- Psychologie und Logik zur Einführung** in d. Philosophie v. Prof. Dr. Th. Eshenhanz. Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Psychophysik, Grundriß der,** v. Prof. Dr. G. F. Lipps in Zürich. Mit 3 Figuren. Nr. 98.
- Pumpen, Druckwasser- und Druckluft-Anlagen.** Ein kurzer Überblick von Dipl.-Ing. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumeister a. D. in Aachen. Mit 87 Abbildungen. Nr. 290.
- Quellenkunde d. deutschen Geschichte** von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität Tübingen. 1. Band. Nr. 279.
- Radioaktivität** von Dipl.-Ing. Wilh. Frommel. Mit 21 Abbildungen. Nr. 317.
- Rechnen, Das, in der Technik** u. seine Hilfsmittel (Rechenstieber, Rechen tafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ing. Joh. Eug. Mayer in Freiburg i. Br. Mit 30 Abbild. Nr. 405.
- **Kaufmännisches,** von Prof. Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.
- Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs.** Erstes Buch: Allg. Teil I: Einleitung — Lehre v. d. Personen u. v. d. Sachen v. Dr. P. Dertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 447.
- II: Erwerb u. Verlust, Geldendmachung u. Schutz der Rechte von Dr. Paul Dertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.
- Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Dertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.
- II. Abt.: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Dertmann, Prof. an der Universität Erlangen. Nr. 324.

- Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs.** Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kreischnar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgem. Lehren. Besitz und Eigentum. Nr. 480.
— II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.
— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Tihse, Professor an der Universität Göttingen. Nr. 305.
- Rechtsgeschichte, Römische,** von Dr. Robert von Mayr, Prof. an der Deutschen Univerf. Prag. 1. Buch: Die Zeit d. Volksrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 577.
— 2. Hälfte: Das Privatrecht. Nr. 578.
- Rechtsschub, Der internationale gewerbliche,** von F. Neuberger, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied d. Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.
- Rechtswissenschaft, Einführung in die,** von Dr. Theodor Sternberg in Berlin. I: Methoden- und Quellenlehre. Nr. 169.
— II: Das System. Nr. 170.
- Redelehre, Deutsche,** v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.
- Redeschrift** siehe: Stenographie.
- Reichsfinanzen, Die Entwicklung der,** von Präsident Dr. R. van der Borcht in Berlin. Nr. 427.
- Religion, Die Entwicklung der christlichen,** innerhalb des Neuen Testaments von Professor Dr. Lic. Carl Clemen. Nr. 388.
— Die, des Judentums im Zeitalter des Hellenismus u. d. Römerherrschaft von Lic. Dr. W. Staert (Neutestamentl. Zeitgeschichte II.) Mit einer Planstizze. Nr. 326.
- Religionen der Naturvölker, Die,** von Dr. Th. Achelis, Professor in Bremen. Nr. 449.
- Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden,** von Professor Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.
- Renaissance. Die Kultur der Renaissance. Gessittung, Forschung, Dichtung** v. Dr. Robert F. Arnold, Prof. a. d. Univerf. Wien. Nr. 189.
- Reptilien. Das Tierreich III: Reptilien und Amphibien.** Von Dr. Franz Werner, Prof. a. d. Univerf. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.
- Rheinprovinz, Landeskunde der,** von Dr. B. Steinicke, Direktor d. Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Rärtchen und 1 Karte. Nr. 308.
- Riechstoffe. Atherische Ole und Riechstoffe** von Dr. F. Rochussen in Miltiz. Mit 9 Abb. Nr. 446.
- Roman. Geschichte des deutschen Romans** von Dr. Hellm. Mielfe. Nr. 229.
- Romanische Sprachwissenschaft** von Dr. Adolf Zauner, Prof. a. d. Univ. Graz. 2 Bände. Nr. 128, 250.
- Römische Altertumskunde** von Dr. Leo Bloch in Wien. N. 8 Bolls. Nr. 45.
- Römische Geschichte** von Realgymnasial-Direktor Dr. Zul. Koch in Grunewald. Nr. 19.
- Römische Literaturgeschichte** von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.
- Römische und griechische Mythologie** von Professor Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.
- Rußland. Russische Geschichte** von Dr. Wilh. Reeb, Oberlehrer am Obergymnasium in Mainz. Nr. 4.
— Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands von Professor Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.
- Russisch-Deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 68.
- Russische Grammatik** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 66.
- Russische Handelskorrespondenz** von Dr. Theodor von Kawrasky in Leipzig. Nr. 315.
- Russisches Lesebuch mit Glossar** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 67.
- Russische Literatur** von Dr. Erich Boehme, Lektor a. d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa u. Poesie mit ausführlichen Anmerkungen u. Akzentbezeichnung. Nr. 403.
— II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Рассказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnungen. Nr. 404.
- Russische Literaturgeschichte** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.
- Russisches Vokabelbuch, Kleines,** von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 475.

- Sachenrecht.** Recht d. Bürgerl. Gesetzbuches. Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kresschmar, Oberlandesgerichtsrat i. Dresden. I: Allgemeine Lehren. Besitz u. Eigentum. — II: Begrenzte Rechte. Nr. 480, 481.
- Sachs, Hans.** Ausgewählt u. erklärt. v. Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.
- Sachsen.** Sächsische Geschichte v. Prof. Otto Raemmel, Rektor d. Nikolai-Gymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
- **Landeskunde des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abb. u. 1 Karte. Nr. 258.
- Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere** von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
- Schattenkonstruktionen** von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 236.
- Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart, Die Entwicklung der, von Korvettenkapitän Hünig.** Mit Abbild. und Tabellen. Nr. 606.
- Schleswig-Holstein. Landeskunde von Schleswig-Holstein, Helgoland u. der freien und Hansestadt Hamburg** von Dr. Paul Hambruch, Abteilungsleiter am Museum für Völkerkunde in Hamburg. Mit Abb. Plänen, Profilen und 1 Karte in Lithographie. Nr. 563.
- Schleusenbau. Kanal- u. Schleusenbau** von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abbildungen. Nr. 585.
- Schmalspurbahnen (Klein-, Arbeits- u. Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. Aug. Boshart** in Nürnberg. Mit 99 Abbildungen. Nr. 524.
- Schmaroker und Schmarokerthum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarokerkunde** von Dr. Franz v. Wagner, a.o. Prof. a. d. Univ. Graz. Mit 67 Abb. Nr. 151.
- Schreiner-Arbeiten Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte** von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.
- Schuldrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren** von Dr. Paul Dertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 323.
- **II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse** von Dr. Paul Dertmann, Professor a. d. Universität Erlangen. Nr. 324.
- Schule, die deutsche, im Auslande** von Hans Amrhein, Seminar-Oberlehrer in Rheydt. Nr. 259.
- Schulhaus. Die Baukunst des Schulhauses** von Prof. Dr.-Ing. Ernst Bettelein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbild. II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 443 und 444.
- Schulpraxis. Methodik d. Volksschule** von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Bschopau. Nr. 50.
- Schwedisch-deutsches Gesprächsbuch** von Johannes Neuhaus, Dozent der neunordischen Sprachen an der Universität Berlin. Nr. 555.
- Schwedisches Lesebuch zur Einführung in die Kenntnis des heutig. Schwedens** mit Wörterverzeichnis von Johannes Neuhaus, Dozent der neunordischen Sprachen an der Universität Berlin. Nr. 554.
- Schweiß- und Schneidverfahren, Das autogene,** von Ingenieur Hans Niese in Kiel. Mit 30 Fig. Nr. 499.
- Schweiz. Schweizerische Geschichte** von Dr. R. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.
- **Landeskunde der Schweiz** von Prof. Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abb. und 1 Karte. Nr. 398.
- Schwimmanstalten. Öffentl. Bade- und Schwimmanstalten** von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.
- Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte** von Wirkl. Admiralsratsrat Dr. Ernst von Halle, Professor an der Universität Berlin. Nr. 370.
- Seerecht, Das deutsche,** von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I: Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.
- **II: Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung.** Nr. 387.

- Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und d. Kerzenfabrikation** v. Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Ole II.) Mit 25 Abbildgn. Nr. 336.
- Semitische Sprachwissenschaft** von Dr. C. Brockmann, Professor an der Univerf. Königsberg. Nr. 291.
- Silikate. Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. Gustav Kauter in Charlottenburg. I: Glas u. keramische Industrie. N. 12 Taf. Nr. 233.
— II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Simplicius Simplicissimus** von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgeg. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.
- Skandinavien, Landeskunde von**, (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinrich Kerp, Preischulinfpektor in Kreuzburg. Mit 11 Abb. und 1 Karte. Nr. 202.
- Slawische Literaturgeschichte** von Dr. Josef Karáfel in Wien. I: Ältere Literatur bis zur Wiebergeburt. Nr. 277.
— II: Das 19. Jahrh. Nr. 278.
- Soziale Frage. Die Entwicklung der sozialen Frage** von Professor Dr. Ferdin. Tönnies. Nr. 353.
- Sozialversicherung** von Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.
- Soziologie** von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.
- Spanien. Spanische Geschichte** von Dr. Gustav Dierds. Nr. 266.
— **Landeskunde der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univ. Würzburg. Mit 8 Rärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
- Spanische Handelskorrespondenz** von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.
- Spanische Literaturgeschichte** v. Dr. Rud. Beer, Wien. I. II. Nr. 167, 168.
- Speicher, Industrielle und gewerbliche Bauten** (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heintz. Salzmänn in Düsseldorf. II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
- Spinnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnererei** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.
- Spitzenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Bosamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikat. u. Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
- Spruchdichtung. Walthar von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung.** Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule u. an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
- Staatslehre, Allgemeine**, von Dr. Hermann Rehm, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Nr. 358.
- Staatsrecht, Allgemeines**, von Dr. Julius Hatschel, Prof. d. Rechte an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.
- Staatsrecht, Preussisches**, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. a. d. Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.
- Stammeskunde, Deutsche**, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. N. 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.
- Statik** von W. Hauber, Dipl.-Ing. I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Fig. Nr. 178.
— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.
- , **Graphische**, von Kgl. Oberlehrer Dipl.-Ing. Otto Henkel in Korbisburg. Mit vielen Figuren. Nr. 603.
- Steinhauerarbeiten. Maurer- und Steinhauerarbeiten** von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.
- Stenographie. Geschichte der Stenographie** von Dr. Arthur Menz in Königsberg i. Pr. Nr. 501.
- Stenographie u. d. System v. F. K. Gabelsberger** von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.
— **Die Redeschrift des Gabelsbergerischen Systems** von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

- Stenographie.** Lehrbuch d. Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lefestücken u. einem Anhang v. Dr. Amiel, Studienrat d. Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.
- **Redeschrift.** Lehrbuch der Redeschrift d. Systems Stolze-Schrey nebst Kürzungsbeisp., Lefestücken, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, amtl. bad. Landtagsstenograph in Karlsruhe (B.). Nr. 494.
- Stereochemie** von Dr. G. Wedekind, Prof. an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.
- Stereometrie** von Dr. R. Glafer in Stuttgart. Mit 66 Fig. Nr. 97.
- Sternsystem.** Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univers. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternarten. Nr. 529.
- Steuerysteme des Auslandes,** Die, v. Geh. Oberfinanzrat D. Schwarz in Berlin. Nr. 426.
- Stilkunde** v. Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbild. u. 195 Textillustrationen. Nr. 80.
- Stöchiometrische Aufgabensammlung** von Dr. Wilh. Bahrnt, Oberl. an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.
- Straßenbahnen** von Dipl.-Ing. Aug. Voshart in Nürnberg. Mit 72 Abbildungen. Nr. 559.
- Strategie** von Löffler, Major im Kgl. Sächs. Kriegsmin. i. Dresd. Nr. 505.
- Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen** v. Jos. Herzog, Dipl.-Elektroing. in Budapest u. Clarence Feldmann, Prof. d. Elektrotechnik in Dessf. Mit 68 Abb. Nr. 456.
- Südseegebiet. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou** v. Prof. Dr. R. Dove. M. 16 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 520.
- Talmud. Die Entstehung des Talmuds** von Dr. S. Funf in Boskowi. Nr. 479.
- Talmudproben** von Dr. S. Funf in Boskowi. Nr. 583.
- Technisch-Chemische Analyse** von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
- Technische Tabellen und Formeln** von Dr.-Ing. W. Müller, Dipl.-Ing. am Kgl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. Mit 106 Figuren. Nr. 579.
- Technisches Wörterbuch,** enthaltend die wichtigsten Ausdrücke d. Maschinenbaues, Schiffsbaues u. d. Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Dtsch.-Engl. Nr. 395. — — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396. — — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453. — — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.
- Technologie, Allgemeine Gemische,** v. Dr. Gust. Kauter in Charlottenburg Nr. 113.
- **Mechanische,** v. Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.
- Teerfarbstoffe, Die,** mit bes. Berücksichtigung der synthetisch. Methoden v. Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule, Dresd. Nr. 214.
- Telegraphenrecht** v. Postinspektor Dr. jur. Alfred Wolde in Bonn. I: Einleitung. Geschichtliche Entwicklung. Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, allgemeiner Teil. Nr. 509.
- — II: Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, besonderer Teil. Das Telegraphen-Strafrecht. Rechtsverhältnis d. Telegraphie z. Publikum. Nr. 510.
- Telegraphie, Die elektrische,** v. Dr. Lud. Kellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.
- Testament. Die Entstehung des Alten Testaments** v. Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 272.
- **Die Entstehung des Neuen Testaments** v. Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.
- Textilindustrie. I: Spinnerei und Zwirnerei** v. Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt, Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.
- II: **Weberei, Wirkerei, Kosamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** v. Prof. M. Gürtler, Geh. Regierungsrat i. Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. M. 29 Fig. Nr. 185.

Textilindustrie. III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höheren Fachschule f. Textilindustr. in Bresfeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) v. R. Walther u. M. Röttlinger, Dipl.-Ing. Nr. 54 Fig. Nr. 242.

— **Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen** v. M. Röttlinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Nr. 2.

Thüringische Geschichte v. Dr. Ernst Deorient in Leipzig. Nr. 352.

Tierbiologie. Abriss der Biologie der Tiere v. Dr. Heinrich Simroth, Prof. a. d. Univ. Leipzig. Nr. 131.

Tiere, Entwicklungsgeschichte der, von Dr. Johs. Meissenheimer, Prof. der Zoologie a. d. Universität Jena.

I: Furchung, Primittivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— **II: Organbild.** Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Tiergeographie v. Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie a. d. Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. a. d. Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere v. Oberstudient. Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorst. d. Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Nr. 15 Abb. Nr. 282.

— **III: Reptilien und Amphibien** von Dr. Franz Berner, Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.

— **IV: Fische** von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Nr. 356.

— **V: Insekten** von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.

— **VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludw. Böhmig, Prof. d. Zool. a. d. Univ. Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— **II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere.** Nr. 97 Fig. Nr. 440.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Eisen. Nr. 228.

Fischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Abort von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Figuren auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Togo. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Prof. Dr. Gerh. Hessenberg in Breslau. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Tropenhygiene v. Medizinalrat Prof. Dr. Rocht, Direktor des Instituts für Schiffs- und Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Trust. Kartell und Trust von Dr. E. Tschierschly in Düsseldorf. Nr. 522.

Turnkunst, Geschichte der, von Dr. Rudolf Gajch, Prof. a. König-Georg-Gymnasium Dresden. Mit 17 Abbildungen. Nr. 504.

Ungarn. Landeskunde von Osterreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Prof. an der Universität Prag. Mit 10 Textillustr. u. 1 Karte. Nr. 244.

Ungarische Literatur, Geschichte der, von Prof. Dr. Ludwig Katona und Dr. Franz Szinnhei, beide an der Universität Budapest. Nr. 550.

Ungarische Sprachlehre v. Dr. Josef Szinnhei, o. ö. Prof. an der Universität Budapest. Nr. 595.

Unterrichtswesen. Geschichte d. deutschen Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Ludau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende d. 18. Jahrh. Nr. 275.

— **II. Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart.** Nr. 276.

Untersuchungsmethoden, Agrikulturchemische, von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Professor an der Universität Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken d. bildenden Künste u. Photographie v. Staatsanw. Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

— **Das deutsche, an literarischen, künstlerischen u. gewerbl. Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg.** Nr. 263.

Urzeit. Kultur der Urzeit von Dr. Moriz Hoernes, o. ö. Prof. an der Univ. Wien. 3 Bändch. I: Steinzeit. Mit 40 Silbergrupp. Nr. 564.

— **II: Bronzezeit. Mit 36 Silbergruppen.** Nr. 565.

— **III: Eisenzeit. Mit 35 Silbergruppen.** Nr. 566.

Vektoranalyse v. Dr. Siegf. Valentiner, Prof. an der Bergakademie in Clausthal. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

Veranschlagen, Das, im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch üb. d. Wesen d. Kostenanschlags v. Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Fig. Nr. 385.

Vereinigte Staaten. Landeskunde der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Professor Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädt. Realgymnasium in Berlin. I. Teil: Mit 22 Karten und Figuren im Text und 14 Tafeln. Nr. 381.

— **II. Teil: Mit 3 Karten im Text, 17 Taf. u. 1 lith. Karte.** Nr. 382.

Vergil. Die Gedichte des P. Vergilius Maro. In Auswahl mit einer Einleitung u. Anmerkungen herausgeg. von Dr. Julius Ziehen. I: Einleitung und Aeneis. Nr. 497.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. I: Feldmessen und Nivellieren. Mit 146 Abb. Nr. 468.

— **II: Der Theodolit. Trigonometrische u. barometr. Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen.** Nr. 469.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Professor an der Universität Freiburg i. S. Nr. 180.

Versicherungswesen, Das, von Dr. iur. Paul Wolbenhauer, Professor der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. I: Allgemeine Versicherungslehre. Nr. 262.

Völkerkunde v. Dr. Michael Haberlandt, I. u. I. Rustos d. ethnogr. Sammlung d. naturhist. Hofmuseums u. Privatdozent a. d. Univ. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Völkernamen. Länder- u. Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Vollbibliotheken (Bücher- u. Lesehallen), ihre Einrichtung u. Verwaltung v. Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Volklied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik v. Präsident Dr. R. van der Vorcht, Berlin. Nr. 177.

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Haaf, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Fig. im Text. Nr. 508.

Waldeck. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck von Professor Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Waltherlied, Das, im Versmaße der Urchrift überjert u. erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer am Realgymnas. in Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide, mit Auswahl a. Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Gintter, Prof. a. d. Oberrealschule und an der Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

Walzwerke. Die, Einrichtung und Betrieb. Von Dipl.-Ing. A. Holverschaid, Oberlehrer a. d. Kgl. Maschinensbau- u. Hüttenkunde in Duisburg. Mit 151 Abbild. Nr. 580.

Warenkunde von Dr. Karl Hasslad, Prof. u. Leiter der k. k. Handelsakademie in Graz. I. Teil: Unorganische Waren. Nr. 40 Abb. Nr. 222.

— **II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen.** Nr. 223.

- Warenzeichenrecht, Das.** Nach dem Gesetz z. Schutz d. Warenbezeichnungen v. 12. Mai 1894. Von Reg.-Rat F. Neuberger, Mitglied des Reichspatentamts zu Berlin. Nr. 360.
- Wärme. Theoretische Physik II. T.: Licht u. Wärme.** Von Dr. Gustav Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. Mit 47 Abbildgn. Nr. 77.
- Wärmekraftmaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- u. Kältemaschinen** von M. Röttlinger, Diplom.-Ing. in Mannheim. Nr. 73 Fig. Nr. 2.
- Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) v. R. Walther u. M. Röttlinger, Dipl.-Ing.** Mit 54 Figuren. Nr. 242.
- Wäscherei. Textilindustrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Dr. Wilh. Raffot, Prof. an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.
- Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe** v. Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ing. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.
- Wasser und Abwasser. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung** v. Prof. Dr. Emil Haelehoff, Vorst. d. landwirtsch. Versuchsanstalt in Marburg in Hessen. Nr. 473.
- Wasserinstallationen. Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen** v. Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.
- Wasserturbinen, Die,** von Dipl.-Ing. B. Holl in Berlin. I: Allgemeines. Die Freistrahlturbinen. Mit 113 Abbildungen. Nr. 541.
- II: Die Überdruckturbinen. Die Wasserkraftanlagen. Mit 102 Abbildungen. Nr. 542.
- Wasserversorgung der Ortschaften** v. Dr.-Ing. Robert Weyrauch, Prof. an der Königl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Fig. Nr. 5.
- Weberei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.
- Wechselstromerzeuger** von Ing. Karl Bichelmayer, Prof. an der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 40 Figuren. Nr. 547.
- Wechselwesen, Das, v. Rechtsanw. Dr. Rudolf Mothes** in Leipzig. Nr. 103.
- Wehrverfassung, Deutsche,** von Geh. Kriegsrat Karl Endres, vortr. Rat i. Kriegsminist. i. München. Nr. 401.
- Werkzeugmaschinen für Holzbearbeitung, Die,** von Ing. Professor Hermann Wilda in Bremen. Mit 125 Abbildungen. Nr. 582.
- Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung, Die,** von Ing. Prof. Hermann Wilda in Bremen. I: Die Mechanismen der Werkzeugmaschinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaschinen. Mit 319 Abb. Nr. 561.
- II: Die Bohr- und Schleifmaschinen. Die Hobel-, Shaping- u. Stoßmaschinen. Die Sägen u. Scheren. Antrieb u. Kraftbedarf. Mit 199 Abbild. Nr. 562.
- Westpreußen. Landeskunde der Provinz Westpreußen** von Frh. Braun, Oberlehrer am Königl. Gymnasium in Graudenz. Mit 16 Tafeln, 7 Textarten u. 1 lith. Karte. Nr. 570.
- Wettbewerb, Der unlaute,** von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. I: Generalklausel, Reklameauswüchse, Ausverkaufswes., Angestelltenbestechung. Nr. 339.
- II: Kreditschädigung, Firmen- u. Namenmißbrauch, Verrat v. Geheimnissen, Ausländerchutz. Nr. 535.
- Wirbellose Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. d. Zoologie an der Univ. Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen u. Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.
- II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armsfüßer, Stachelhäuter u. Manteltiere. Mit 97 Fig. Nr. 440.
- Wirkerei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

- Wirtschaftlichen Verbände, Die, v. Dr. Leo Müffelmann in Rostock. Nr. 586.**
Wirtschaftspflege. Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsass. in Berlin. Nr. 534.
Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Prof. der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. I: Das Wohnungs- wesen i. d. mod. Stadt. Nr. 495.
 — II: Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.
Wolfram von Eschenbach, Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem hof. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. R. Karold, Prof. am Königl. Friedrichskollegium zu Königs- berg i. Pr. Nr. 22.
Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.
 — Deutsches, von Dr. Richard Voewe in Berlin. Nr. 61.
 — Technisches, enthaltend die wichtig- sten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
 — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.
 — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.
 — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.
Württemberg. Württembergische Ge- schichte v. Dr. Karl Weller, Prof. a. Karlsghymn. i. Stuttgart. Nr. 462.
 — Landeskunde des Königreichs Württemberg von Dr. K. Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.
Zeichenschule von Prof. R. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.
Zeichnen, Geometrisches, von S. Beder, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Bon- derlinn, Direktor der Königl. Bau- gewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. im Text. Nr. 58.
Zeitungs- wesen, Das deutsche, von Dr. R. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.
 — Das moderne, (Ehst. d. Zeitungs- lehre) von Dr. Robert Brun- huber in Köln a. Rh. Nr. 320.
Zeitungs- wesen, Allgemeine Geschichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.
Zellenlehre und Anatomie der Pflan- zen von Prof. Dr. S. Miesche in Leipzig. Mit 79 Abbild. Nr. 556.
Zentral- Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Di- rektor der Königl. Baugewerkschule in Münster i. Westf. Mit 132 Fig. Nr. 57.
Zimmerarbeiten von Carl Dyk, Ober- lehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. I: Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken und Deckenbildungen, hölz. Fußböden, Fachwerkwände, Hänge- und Sprengwerke. Mit 169 Ab- bildungen. Nr. 489.
 — II: Dächer, Wandbekleidungen, Simschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Jäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.
Zivilprozessrecht, Deutsches, von Prof. Dr. Wilhelm Risch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.
Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burdhardt. Nr. 357.
Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Städtischen Chem. Laboratoriums Stuttgart. Nr. 109.
Zwangsversteigerung, Die, und die Zwangsverwaltung von Dr. F. Kreshmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. Nr. 523.
Zwirnerei. Textilindustrie I: Spin- nerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

== Weitere Bände sind in Vorbereitung. ==

Soeben erschien:

Der deutsche Student

Von

Prof. Dr. Theobald Ziegler

Elfte und zwölfte Auflage

Gebunden M. 3.50

Diese „Studentenpredigten“, wie sie Paulsen genannt hat, haben sich unter der studierenden Jugend viele Freunde erworben. Und so war es nicht zu verwundern, daß das Buch seit seinem Erscheinen fast alljährlich eine neue Auflage erlebte. Herausgewachsen war es aus der fin-de-siècle-Stimmung vor der Jahrhundertwende, die besonders in studentischen Kreisen die Herzen höher schlagen und das Blut rascher kreisen ließ, eben deswegen aber auch nach besonnener Führung sich sehnte. Eine solche fanden sie hier. Den Auflagen im neuen Jahrhundert fügte der Verfasser eine Nachtragsvorlesung hinzu zur Überleitung in ruhigere Bahnen und zur Ergänzung durch manches inzwischen Neugewordene. Im Winter 1905/06 aber hat er in Straßburg die Vorlesung über den deutschen Studenten noch einmal gehalten und hier vor allem die Vorgänge jener bewegten Zeit, des sogenannten „Hochschulsireites“ und des Kampfes gegen die konfessionellen Korporationen freimütig und kritisch besprochen. Der neuen Auflage ist die Vorlesung in dieser späteren Fassung, wenigstens in der ersten größeren Hälfte, zugrunde gelegt worden. Die fin-de-siècle-Stimmung ist verschwunden, dafür sind die Probleme, die das Studentenleben im ersten Jahrzehnt des 20sten Jahrhunderts bewegt haben und bewegen, in den Vordergrund gerückt und so das Buch durchaus modernisiert und wieder ganz aktuell geworden. Dabei hat es eine nicht unbeträchtliche Erweiterung erfahren. Und doch ist der Geist des Buches der alte geblieben, es ist der Geist der Freiheit, die als akademische Studenten und Professoren gleichmäßig am Herzen liegt, und der Geist eines kräftigen sittlichen Idealismus, der sich nicht fürchtet, Jünglinge zu wagen, damit Männer aus ihnen werden. Und auch der alte gute Freund des deutschen Studenten ist der Verfasser geblieben, der ihn versteht, weil er ihn liebt. Das zeigt gleich von vornherein die Widmung des Buches an die Straßburger Studentenschaft. So ist es beim Abgang Zieglers von Straßburg zu einem Vermächtnis an seine jungen Freunde auf allen deutschen Hochschulen geworden, und soll nun auch in der neuen Gestalt wieder vielen eine Hilfe werden und ein Halt.

Soeben erschien:

Das Gefühl

Eine psychologische Untersuchung

Von

Prof. Dr. Theobald Ziegler

Fünfte, durchgesehene und verbesserte Auflage

Brotschirt M. 4.20, gebunden M. 5.20

Als dieses Buch vor 19 Jahren zum ersten Male erschien, da wirkte die Theorie des Verfassers von der Priorität des Gefühls und von dem Einfluß desselben auf alle Gebiete des geistigen Lebens, vor allem auch auf Bewußtsein und Apperzeption, trotz des Vorgangs von Horwicz wie ein ganz Neues, das als gegen den Strom der vorwiegend intellektualistischen oder auch schon voluntaristischen Auffassung der Psychologie schwimmend wenig Gläubige fand. Allein es hat sich trotz dieser anfänglichen Ablehnung durchgesetzt und gehört heute zu den meist gelesenen Schriften über Psychologie; die Anschauung, die es vertritt, steht längst nicht mehr vereinzelt da. Zu diesem Sich-Durchsetzen hat auch der Stil und die ganze Haltung des Buches beigetragen, die gleichweit entfernt sind von unwissenschaftlicher Popularität wie von trockener pedantischer Gelehrsamkeit. Auch die ästhetischen und religionsphilosophischen ethischen Abschnitte haben ihm viele Freunde erworben. Die neue, fünfte Auflage, die schon nach vier Jahren wieder notwendig geworden ist, hält an dem vom Verfasser als richtig Erkannten durchaus fest, sie zieht sogar die Linien da und dort noch schärfer und bestimmter; insbesondere sind die Kapitel über das körperliche Gefühl und über die Gefühlsäußerungen in diesem Sinne und unter Berücksichtigung der neueren Forschung und ihrer Ergebnisse umgearbeitet und erweitert worden. Überhaupt trägt die neue Auflage nach, was seit dem Erscheinen der vierten Auflage zur Lehre vom Gefühl wertvolles Neues zutage gefördert worden ist, und setzt sich dabei gelegentlich auch polemisch mit allerlei Angriffen und entgegenstehenden Anschauungen auseinander. So ist das Buch durchaus auf den neuesten Stand der psychologischen Forschung gebracht und ergänzt, und doch ist in seinen Grundanschauungen und in seiner Anlage nach wie vor das alte geblieben.

Soeben erschien:

Grundriß einer Philosophie des Schaffens als Kulturphilosophie

Einführung in die Philosophie als Weltanschauungslehre

Von

Dr. Otto Braun

Privatdozent der Philosophie in Münster i. W.

Broschiert M. 4.50, gebunden M. 5.—

Der Verfasser findet das Wesen der Philosophie darin, daß sie Gesamtwissenschaft, d. h. Weltanschauungslehre ist: sie erhebt sich auf dem Fundament aller übrigen Wissenschaften und sucht (induktiv) zu einem Weltbilde vorzubringen, dessen „Wahrheit“ durch seine personale Einseitigkeit bedingt ist. Nachdem der Verfasser sich eine erkenntnistheoretische Basis geschaffen — es wird ein Real-Idealismus vertreten —, sucht er an ein Grunderlebnis anzuknüpfen, das er durch den Begriff „Schaffen“ bezeichnet. Dieses Schaffen führt zur Entwicklung einer Kulturphilosophie — die Formen und Stoffe des Schaffens werden untersucht und dann die Hauptgebiete des Kulturlebens in den Grundzügen dargestellt: Wissenschaft, Kunst, Religion, soziales Leben, Staat, Recht, Sitte, Ethik finden ihre Würdigung. So wird der Versuch gemacht, aus dem Wesen des modernen Geistes heraus eine systematische Weltanschauung zu gewinnen, wobei der kulturimmanente Standpunkt ausschlaggebend ist, wenn auch eine lösmisch-metaphysische Vertiefung sich als notwendig zeigt, der Begriff des Schaffens wird durch einen geschichtsphilosophischen Überblick über das 19. Jahrhundert als notwendig und berechtigt erwiesen.

J. F. Herbart

Grundzüge seiner Lehre

Von

Friedrich Franke

Broschiert M. 1.50, gebunden M. 2.—

Diese Darstellung sucht in Herbarts System möglichst direkt einzuführen, ohne von den späteren Fortbildungen auszugehen, läßt immer nach Herbarts eigenen Weisungen die prinzipiellen Teile zuerst einzeln entstehen und danach in den Zusammenhang treten, den die Betrachtung unserer praktischen Anliegen verlangt. Dabei ist dann auch vielfach Gelegenheit, auf die empirische Detailforschung und ihre philosophische Bearbeitung, auf die Kunstbewegung, die sozialen und politischen Aufgaben und anderes, was die Gegenwart bewegt, Blicke zu werfen.

Friedrich Nietzsche

Eine intellektuale Biographie

Von

Dr. S. Friedlaender

Broschiert M. 2.80

Um einen Denker, wie Nietzsche, voll und ganz zu verstehen, ist vor allem die Erkenntnis des Werdegangs seiner Ideen notwendig. Bei dieser schwierigen Arbeit ist das Buch von Friedlaender ein zuverlässiger Führer und Begleiter. Denn der Untertitel „Intellektuale Biographie“ bedeutet eben nichts anderes als eine Darstellung der philosophischen Entwicklung Friedrich Nietzsches. Von dem richtigen Grundsatz ausgehend, daß der späteste Nietzsche nur aus dem frühesten verstanden werden kann, behandelt der Verfasser nach einer orientierenden Einleitung zuerst dessen geniales Erstlingswerk: „Die Geburt der Tragödie aus dem Geiste der Musik“, um dann darauf die späteren Schriften und deren Grundgehalt einzeln zu erläutern und den Fortschritt, der darin enthalten, festzustellen.

Die Reichsversicherungsordnung

Handausgabe mit gemeinverständlichen Erläuterungen
in vier Bänden

Dr. Manes

von

Dr. Menzel

Professor

Regierungsrat

Dozent der Handelshochschule Berlin

Mitglied des Reichsversicherungsamts

Dr. Schulz

Regierungsrat

Mitglied des Reichsversicherungsamts

Band 1: Die für alle Versicherungszweige geltenden Bestimmungen der Reichsversicherungsordnung nebst Einleitung und Einführungsgesetz.

Band 2: Die Krankenversicherung.

Band 3: Die Unfallversicherung.

Band 4: Die Invaliden- und Hinterbliebenenversicherung.

In vier Leinenbände gebunden M. 20.—

Jeder Band ist auch einzeln zu haben. Preis für Band 1 gebunden M. 7.—;

Band 2 geb. M. 4.80; Band 3 geb. M. 6.—; Band 4 geb. M. 4.20.

Kommentar zum Versicherungsgesetz für Angestellte

Handausgabe mit ausführlichen Erläuterungen
von

Dr. Alfred Manes und Dr. Paul Königsberger

Professor

Landrichter

In Leinwand gebunden M. 12.—

Praktikum des Zivilprozeßrechtes

von

Dr. Wilhelm Risch

Professor an der Universität Straßburg i. G.

In Leinwand gebunden M. 4.80

Einführung

in das

Deutsche Kolonialrecht

Von

Professor H. Edler von Hoffmann

Studiendirektor der Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf

In Leinwand gebunden M. 6.—

Mehr und mehr wendet sich die wissenschaftliche Arbeit dem Kolonialrechte zu, das sich auch als Gegenstand des wissenschaftlichen Unterrichtes eingebürgert hat. Es fehlte aber bisher an einem auf den Resultaten der neueren Forschung beruhenden Lehrbuche des Deutschen Kolonialrechts. Das vorliegende Werk versucht es, diese Lücke auszufüllen. Es will aber nicht nur der Ergänzung des akademischen Unterrichtes dienen, es will auch dem Kolonialpraktiker ein Wegweiser durch die Unzahl von kolonialen Rechtsnormen sein. Die ganze Anlage des Werkes ist dadurch bedingt, daß es sich um eine „Einführung“ handelt, d. h. nicht um eine Zusammenstellung all und jeder kolonialrechtlichen Normen, sondern um eine dogmatische Behandlung des wichtigsten Stoffes. Dem Lehrzweck entsprechend, ist zur besseren Beleuchtung und Hervorhebung der deutschen Rechtsnormen das fremde Kolonialrecht, insbesondere das englische, zum Vergleiche herangezogen worden.

Das Buch will ein rechtswissenschaftliches sein, kolonialpolitische Erörterungen treten deshalb völlig zurück, jedoch ist, wo dies notwendig ist, stets auf die kolonialpolitischen Gesichtspunkte verwiesen worden, durch die die Gesetzgebung bestimmt wird.

2-22

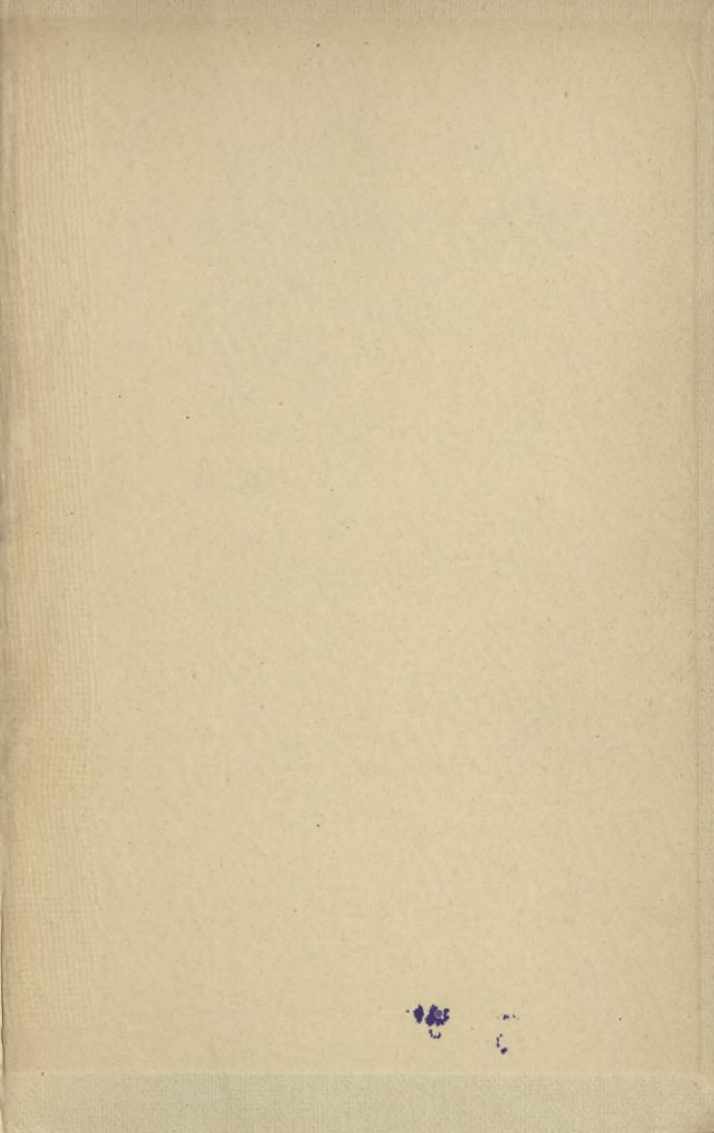
Einleitung

Deutsche Staatslehre

von Dr. phil. jur. h. c. h. Dr. phil. jur. h. c. h. Dr. phil. jur. h. c. h.

Verlag von Julius Springer

S - 96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301414



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000297958